ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
30—Ὁδὸς Περικλέους—30
1933

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διδάσκων τὰ τελευταῖα αὐτὰ ἔτη καὶ τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν εἰς τοὺς φοιτητὰς τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν παρετήρησα, ὅτι τὴν ἑδραίαν μάθησίν της ἐμποδίζει πολὺ ἡ τελεία ἔλλειψις μιᾶς ἐκτενοῦς ἑλληνικῆς Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας διὰ τοὺς φοιτητὰς τῶν Μαθηματικῶν. Ἡ ὑπάρχουσα ὀλιγοσέλιδος τοῦ ἀειμνήστου συναδέλφου Ρεμούνδου εἶναι μόνον κατάλληλος διὰ τοὺς φοιτητὰς τῶν Φυσικῶν, τῆς Χημείας κτλ., ποὺ διδάσκονται μόνον ***περίληψιν*** τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν· ἡ δὲ σύντομος «***Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν***» τοῦ πατρός μου ἔχει κυρίως ἄλλον σκοπόν. Δι' αὐτὸ ἐπιχειρῶ μὲ τὸ παρὸν βιβλίον τὴν πλήρωσιν τοῦ μεγάλου αὐτοῦ κενοῦ εἰς τὴν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Δὲν θὰ ἔχῃ βέβαια τὴν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπεν ἴσως νὰ ἔχῃ, διὰ νὰ περιλαμβάνῃ τὴν σημερινὴν τεραστίαν ἔκτασιν ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν θεωριῶν, θὰ περιέχῃ ὅμως, ***ἀρκετὰ ἐκτενῶς,*** ὅλας τὰς θεωρίας τοῦ συνήθους ***κλασικοῦ*** προγράμματος τῶν πανεπιστημιακῶν πτυχιακῶν ἐξετάσεων. Ἂν ἐξακολουθήσῃ ἡ εἰς ἐμὲ ἀνάθεσις τοῦ μαθήματος τούτου, ἴσως ἐπιχειρήσω ἀργότερα τὴν ἔκδοσιν καὶ δευτέρου τόμου περιέχοντος τὰς νεωτέρας θεωρίας.

Ἀθῆναι, 1 Φεβρουαρίου 1933.

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Κύριος σκοπὸς τῆς Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας εἶναι *ἡ σπουδὴ τῶν πολυωνύμων καὶ τῶν ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα καὶ τὰ δεύτερα τὸ 0.* Διὰ τὴν σπουδὴν ὅμως αὐτὴν μᾶς χρειάζονται διάφοροι θεωρίαι, τὰς ὁποίας εἶναι ἀνάγκη πρῶτα νὰ μάθωμεν.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ, ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ, ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

I. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

1. ***Ὁρισμὸς τῶν μεταθέσεων.***—Ὀνομάζονται *μεταθέσεις μ πραγμάτων* (τὰ ὁποῖα συνήθως παριστάνομεν μὲ γράμματα) οἱ διάφοροι τρόποι, μὲ τοὺς ὁποίους εἰμποροῦμεν νά τα τοποθετήσωμεν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου εἰς μίαν σειρὰν ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς. Ἂν ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι *ἀνοικτή*, δηλ. ἂν ἔχῃ *ἀρχὴν* καὶ *τέλος*, λέγονται αἱ μεταθέσεις *κοιναὶ* ἢ *ἀνοικταί*, ἂν δὲ εἶναι *κλειστὴ* (π. χ. κύκλος), λέγονται *κυκλικαὶ* ἢ *κλεισταί*.

Ἂν τὰ μ αὐτὰ πράγματα εἶναι ὅλα διαφορετικά, αἱ μεταθέσεις λέγονται *ἁπλαῖ*. Ἂν μερικὰ μεταξὺ αὐτῶν εἶναι *τὰ ἴδια*, αἱ μεταθέσεις λέγονται *συμπτωτικαί*. Καὶ ἂν τὰ μ πράγματα εἶναι μὲν ὅλα διαφορετικά, *ἔχωμεν ὅμως ἀπὸ ἓν ἢ περισσότερα ἀπὸ αὐτὰ μ τὰ ἴδια* (π. χ. μ α ἢ μ β κτλ.), αἱ μεταθέσεις λέγονται *ἐπαναληπτικαί*.

α΄) Τύπος τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων.

2. ***Ἀνοικταὶ μεταθέσεις.***—Εἶναι φανερόν, ὅτι ἓν πρᾶγμα α παρέχει μίαν μόνον μετάθεσιν. Δύο πράγματα α καὶ β μᾶς δίδουν δύο

μεταθέσεις αβ καὶ βα. Διὰ νὰ εὕρωμεν κατόπιν τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων τριῶν πραγμάτων α, β, γ, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸ τρίτον πρᾶγμα γ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις εἰς τὰς μεταθέσεις τῶν α καὶ β, δηλ. γαβ, αγβ, αβγ καὶ γβα, βγα, βαγ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ μεταθέσεις αὗται διαφέρουν μεταξύ των καὶ ὅτι καμία ἄλλη μετάθεσις τῶν α,β,γ δὲν ὑπάρχει.

Ἂν τώρα παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον M_μ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἀνοικτῶν μεταθέσεων μ πραγμάτων, ἔχομεν $M_1=1$, $M_2=2$, καὶ $M_3==6=1.2.3.$ Ἂν προχωρήσωμεν ἀκόμη, θὰ εὕρωμεν $M_4=1.2.3.4(=24)$, $M_5=1.2.3.4.5(=120)$ κτλ. Ὅτι δὲ γενικῶς εἶναι $M_\mu=1.2.3.4.....\mu$, ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸν φανερὸν *τύπον ἀναγωγῆς* : $M_\nu=\nu M_{\nu-1}$.

Τὸ γινόμενον $1.2.3.....\mu$, τὸ παριστάνομεν συντομώτερα μὲ τὸ σύμβολον μ ! *Ἔχομεν λοιπὸν τὸν γενικὸν τύπον τῶν ἀνοικτῶν μεταθέσεων :*

$$M_\mu=1.2.3.....\mu=\mu\ ! \quad (1)$$

3. ***Κλεισταὶ μεταθέσεις.***—Αἱ μεταθέσεις εἰς μίαν κλειστὴν γραμμὴν μ πραγμάτων εἶναι βέβαια ὀλιγώτεραι ἀπὸ τὰς ἀνοικτὰς τῶν ἰδίων πραγμάτων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν των, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : ἂν λάβωμεν μίαν ἀπὸ τὰς κυκλικὰς μεταθέσεις 6 π. χ. πραγμάτων, δὲν ἔχει αὐτὴ οὔτε ἀρχὴν οὔτε τέλος. Ἂν ὅμως ἀνοίξωμεν κατὰ διαφόρους τρόπους τὸν κύκλον εἰς μίαν ἀνοικτὴν γραμμήν, κόπτοντες αὐτὸν πρῶτα μεταξὺ τοῦ *α* καὶ ζ, ἔπειτα μεταξὺ α καὶ β, μεταξὺ β καὶ γ κτλ. καὶ τέλος μεταξὺ ε καὶ ζ, παράγονται ἀπὸ τὴν *μίαν μόνον* κλειστὴν μετάθεσιν ἓξ ἀνοικταί, *ὅλαι διαφορετικαὶ μεταξύ των :*

αβγδεζ, βγδεζα, γδεζαβ, δεζαβγ, εζαβγδ, ζαβγδε.

Μὲ τὸν ἴδιον συλλογισμὸν βλέπομεν, ὅτι γενικῶς, ἂν ἔχωμεν κυκλικὰς μεταθέσεις μ πραγμάτων, καθεμία δίδει μ ἀνοικτάς.

Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\overset{o}{M}_\mu$ τὸν ἀριθμὸν τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων μ πραγμάτων, θὰ εἶναι :

$\mu.\overset{o}{M}_\mu=M_\mu=\mu$! καὶ *ἑπομένως ὁ τύπος τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων εἶναι :* $\overset{o}{M}_\mu=(\mu-1)\ !\ (2)$

β′) Τύπος τῶν συμπτωτικῶν μεταθέσεων,

4. ***Περίπτωσις μιᾶς μόνον ὁμάδος ἰδίων πραγμάτων.***—Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν τὰ ἑξῆς μ πράγματα :

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots,\alpha_\kappa\ ,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots,\pi^{\cdot}$$

$\frac{\alpha!}{\mu!}$; 1 $\lambda! \cdot 1$ $\frac{\mu!}{\alpha!}$;

ἐνόσῳ *ὅλα* εἶναι διαφορετικά, ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεών των εἶναι $\mu\,!$

Τὰς $\mu\,!$ αὐτὰς μεταθέσεις εἰμποροῦμεν νά τας κατατάξωμεν εἰς *ὁμάδας*, ὅπου κάθε ὁμὰς ν᾽ ἀποτελῆται ἀπὸ τὰς μεταθέσεις, ποὺ περιέχουν τὰ πράγματα $\beta, \gamma, \delta \ldots, \pi$ εἰς τὴν ἰδίαν σειρὰν (μετάθεσιν) καὶ διαφέρουν ἑπομένως μόνον κατὰ τὰς θέσεις τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varkappa$. Κάθε ὁμὰς περιέχει βέβαια τότε $\varkappa\,!$ μεταθέσεις. Ἂν τώρα παραλείψωμεν ὅλους τοὺς δείκτας εἰς τὸ α καὶ τὰ ὑποθέσωμεν ἑπομένως *ὅλα τὰ ἴδια*, ὅλαι αἱ $\varkappa\,!$ μεταθέσεις κάθε ὁμάδος συμπίπτουν προφανῶς εἰς μίαν (δηλ. ὁ ἀριθμός των διαιρεῖται διὰ $\varkappa\,!$) Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων κάθε ὁμάδος διαιρεῖται τότε διὰ $\varkappa!$, καὶ ὅλων τῶν ὁμάδων ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων διαιρεῖται διὰ $\varkappa\,!$ καὶ ἑπομένως, *ἂν μὲ τὸ σύμβολον* $\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{M}}$ *παραστήσωμεν τὰς συμπτωτικὰς (ὡς πρὸς τὰ α) μεταθέσεις, θὰ ἔχωμεν :*

$$\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{M}} = \frac{M_\mu}{M_\varkappa} = \frac{\mu\,!}{\varkappa\,!} = (\varkappa+1)\,(\varkappa+2)\ldots.\mu. \qquad (3)$$

5. ***Περίπτωσις περισσοτέρων ὁμάδων.*** — Μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς εὑρίσκομεν, ὅτι, ἂν ἔχωμεν τὰ πράγματα :
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \gamma, \delta, \ldots, \omega$ καὶ συμπέσουν ὅλα τὰ α εἰς ἓν α καὶ ὅλα τὰ β εἰς ἓν β, *ὁ τύπος τῶν συμπτωτικῶν μεταθέσεων μὲ δύο ὁμάδας (α, β) συμπιπτόντων πραγμάτων εἶναι :* $\overset{\sigma}{\underset{\alpha,\beta}{M}} = \frac{\mu\,!}{\varkappa\,!\,\lambda!}$. (4)

Καὶ γενικῶς, ἂν ἀπὸ τὰ μ γράμματα τὰ $\varkappa$ εἶναι τὰ ἴδια μὲ τὸ α, τὰ λ μὲ τὸ β, τὰ ϱ μὲ τὸ $\gamma, \ldots$, ὁ τύπος εἶναι : $\overset{\sigma}{\underset{\alpha,\beta,\gamma\ldots}{M}} = \frac{\mu\,!}{\varkappa\,!\,\lambda\,!\,\varrho\,!\ldots}$ (5).

γ΄) Τύπος τῶν ἐπαναληπτικῶν μεταθέσεων.

6. Αἱ ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις μ γραμμάτων εἶναι *περισσότεραι* ἀπὸ τὰς κοινὰς (ἐνῷ αἱ συμπτωτικαὶ εἶναι *ὀλιγώτεραι*). Δύο γράμματα α, β ἐπιδέχονται προφανῶς τὰς ἑξῆς μεταθέσεις :

αα, αβ, βα, ββ·

εἶναι λοιπὸν αἱ μεταθέσεις των $4 = 2^2$. Τρία γράμματα α, β, γ παρουσιάζουν τὰς ἑξῆς μεταθέσεις :

ααα, βββ, γγγ· ααβ, αβα, βαα· ααγ, αγα, γαα· ββα, βαβ, αββ·
ββγ, βγβ, γββ· γγα, γαγ, αγγ· γγβ, γβγ, βγγ· αβγ, αγβ, γαβ· βγα, βαγ, γβα·

Εἶναι λοιπὸν 27 μεταθέσεις ἢ 3^3. Μὲ ὅμοιον ὑπολογισμὸν εὑρί-

Tut. I p. 338

σκομεν, ὅτι ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις 4 γραμμάτων ὑπάρχουν τὸ ὅλον : 4^4. Καὶ γενικῶς : $\overset{\varepsilon}{M}_\mu = \mu^\mu$ (6) (Πρβλ. καὶ τύπον ἐπαναληπτικῶν διατάξεων).

II. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

7. ***Διατάξεις μ γραμμάτων (πραγμάτων) ἀνὰ ν*** ὀνομάζομεν τοὺς διαφόρους τρόπους, κατὰ τοὺς ὁποίους εἰμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ μ γράμματα τὰ ν καὶ νὰ τὰ θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς *ἀνοικτῆς* (ὑπάρχουν καὶ *κλεισταὶ* διατάξεις, ἀλλὰ δέν τας ἐξετάζομεν ἐδῶ).

Αἱ διατάξεις διαιροῦνται (ὅπως καὶ αἱ μεταθέσεις) εἰς *ἁπλᾶς*, *συμπτωτικὰς* καὶ *ἐπαναληπτικάς*.

α΄) Ἁπλαῖ διατάξεις.

8. Αἱ διατάξεις λέγονται *ἁπλαῖ*, ὅταν ὅλα τὰ γράμματα εἶναι διαφορετικὰ καὶ δὲν ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψίς των. Ἁπλαῖ διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ 1 ὑπάρχουν προφανῶς μ :

α, β, γ, ... , ω δηλ. ἔχομεν τὸν τύπον : $\Delta^1_\mu = \mu$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων ἀνὰ 2, θέτομεν κατόπιν ἀπὸ κάθε γράμμα ἓν κατὰ σειρὰν ἀπὸ ὅλα τὰ μ—1 ἐπίλοιπα :

αβ, βα γα . . . . . ωα
αγ, βγ γβ . . . . . . ωβ
. . . .
αω, βω, γω . . . . ωψ.

Ἔχομεν οὕτως ὅλας τὰς διατάξεις τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ 2 καὶ ὁ ἀριθμός των εἶναι $\Delta^2_\mu = \mu(\mu-1)$ (διότι ἀπὸ κάθε γράμμα παράγονται μ—1 διατάξεις). Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν διατάξεων ἀνὰ 3, ἂν θέσωμεν κατόπιν κάθε διατάξεως ἀνὰ 2, ἓν κατὰ σειρὰν ἀπὸ τὰ ἐπίλοιπα μ—2.

Ἔχομεν λοιπὸν τὸν τύπον : $\Delta^3_\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)$

(διότι κάθε διάταξις ἀνὰ 2 ἀπὸ τὰς μ(μ—1) δίδει μ—2 διατάξεις ἀνὰ 3).

Καὶ γενικῶς ἔχομεν : $\Delta^\nu_\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-(\nu-1))$

ἢ $\Delta^\nu_\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$. (7)

Διὰ ν=μ, αἱ διατάξεις Δ_μ^μ καταντοῦν προφανῶς αἱ ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν μ γραμμάτων M_μ καὶ πραγματικῶς ὁ προηγούμενος τύπος καταντᾷ : $\Delta_\mu^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\mu+1) = \mu\,!$

β΄) Συμπτωτικαὶ διατάξεις.

9. ***Συμπτωτικαὶ*** λέγονται αἱ διατάξεις, ὅταν μέσα εἰς τὰ μ γράμματα ὑπάρχῃ μία ἢ πολλαὶ ὁμάδες μὲ τὰ ἴδια γράμματα καθεμία. Ὁ ἀριθμός των εἶναι προφανῶς *μικρότερος* ἀπὸ τῶν ἁπλῶν. Διὰ 3 π. χ. γράμματα ἀνὰ 2 εἶναι 3, (διότι αἱ 6 ἁπλαῖ διατάξεις :
αβ, αγ, βα, βγ, γα, γβ, ἂν ὑποθέσωμεν β=α, καταντοῦν μόνον 3 :
αα, αγ, γα. Ὥστε : $\underset{\sigma}{\Delta}{}_3^2 = 3$.

Τὸν γενικὸν τύπον, διὰ μ καὶ ν τυχόντα, τὸν παραλείπομεν.

γ΄) Ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις.

Tut I p. 338

10. ***Ἐπαναληπτικαὶ*** λέγονται αἱ διατάξεις, ὅταν ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψις καθενὸς ἀπὸ τὰ γράμματα πολλὰς φορὰς (ἕως ν φορὰς τὸ πολύ). Ὁ ἀριθμός των εἶναι προφανῶς μεγαλύτερος ἀπὸ τῶν ἁπλῶν. Ἂν εἰς τὰς μ διατάξεις ἀνὰ 1 :

α, β, γ, ... ,ω γράψωμεν κατόπιν ἀπὸ κάθε γράμμα ἓν κατὰ σειρὰν ἀπὸ ὅλα τὰ γράμματα :

Comb. C, E 239/4

αα, βα, γα, ...ωα,
αβ, ββ, γβ, ... ,ωβ,
αγ, βγ, γγ, ... ,ωγ,
. . . .
αω, βω, γω, ...ωω,

ἔχομεν προφανῶς, ὅλας τὰς ἐπαναληπτικὰς διατάξεις ἀνὰ 2 καὶ ὁ ἀριθμός των εἶναι μ.μ, δηλ μ^2.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι . $\underset{\varepsilon}{\Delta}{}_\mu^3 = \mu^3$

καὶ γενικῶς : $$\underset{\varepsilon}{\Delta}{}_\mu^\nu = \mu^\nu \,. \qquad (8)$$

Ἂν ν=μ, ἔχομεν : $\underset{\varepsilon}{\Delta}{}_\mu^\mu \equiv \overset{\varepsilon}{M}_\mu = \mu^\mu$ (πρβλ § 6).

III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

11. ***Συνδυασμοὶ μ γραμμάτων ἀνὰ ν*** λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι, κατὰ τοὺς ὁποίους εἰμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ μ γράμματα τὰ ν, *χωρὶς νά τα κατατάξωμεν εἰς μίαν σειράν*. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν Σ_μ^ν εἶναι προφανῶς *μικρότερος* τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων Δ_μ^ν. Διαιροῦνται καὶ αὐτοὶ εἰς *ἁπλοῦς, συμπτωτικοὺς καὶ ἐπαναληπτικούς*.

α΄) Ἁπλοῖ συνδυασμοί.

12. Οἱ συνδυασμοὶ λέγονται ἁπλοῖ, ὅταν ὅλα τὰ γράμματα διαφέρουν καὶ δὲν ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψίς των.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν Σ_μ^ν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν χωρίσωμεν τὰς ἁπλᾶς διατάξεις Δ_μ^ν εἰς ὁμάδας, εἰς τρόπον ὥστε κάθε ὁμὰς νὰ περιέχῃ τὰ ἴδια γράμματα, *ὅλαι* αἱ διατάξεις κάθε ὁμάδος συμπίπτουν εἰς *μίαν μόνην*, ὅταν ἀδιαφορήσωμεν ὡς πρὸς τὴν κατάταξιν τῶν γραμμάτων της, ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν διατάξεων κάθε ὁμάδος *διαιρεῖται διὰ τοῦ ν !* (διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι προφανῶς ὁ ἀριθμὸς ν ! τῶν μεταθέσεων ν γραμμάτων)· ἐπομένως καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν διατάξεων (τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν διατάξεων ὅλων τῶν ὁμάδων), διαιρεῖται τότε διὰ ν ! Ἔχομεν λοιπὸν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\Delta_\mu^\nu}{M_\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2\ldots\nu} = \frac{(\mu,\nu)!}{\nu!}. \qquad (9)$$

(ἂν μὲ τὸ σύμβολον (μ,ν) ! παραστήσωμεν τὸ γινόμενον
$\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)$).

β΄) Συμπτωτικοὶ συνδυασμοί.

13. ***Συμπτωτικοὶ*** λέγονται οἱ συνδυασμοί, ἂν μέσα εἰς τὰ μ γράμματα ὑπάρχῃ μία ἢ πολλαὶ ὁμάδες ἀπὸ τὰ ἴδια γράμματα καθεμία. Εἶναι προφανῶς *ὀλιγώτεροι* ἀπὸ τοὺς ἁπλοῦς. Οἱ συμπτωτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν 5 π. χ. γραμμάτων α, β, γ, δ, ε ἀνὰ 3 εἶναι μόνον 7· διότι οἱ 10 ἁπλοῖ συνδυασμοί των : αβγ, αβδ, αβε· αγδ, αγε· αδε· βγδ, βγε· γδε· δεβ καταντοῦν, ἂν α=β, μόνον 7 : ααγ, ααδ, αας· αγδ, αγε· αδε· γδε.

Ὥστε $_\sigma\Sigma_5^3=7$. Τὸν γενικὸν τύπον τὸν παραλείπομεν.

γ') Ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοί.

14. ***Ἐπαναληπτικοὶ*** λέγονται οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν, ὅταν ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψις κάθε γράμματος ἕως ν φορὰς τὸ πολὺ (ὅπου ὅμως τώρα τὸ ν δὲν εἶναι *κατ' ἀνάγκην* μικρότερον τοῦ μ, καθὼς εἰς τοὺς ἁπλοῦς συνδυασμούς). Εἶναι βέβαια περισσότεροι ἀπὸ τοὺς ἁπλοῦς. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν των ${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}$, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τοὺς ἔχομεν γραμμένους ὅλους εἰς ἕνα πίνακα. Ἐπειδὴ κάθε συνδυασμὸς περιέχει ν γράμματα, ὅλοι οἱ συνδυασμοὶ μαζὶ περιέχουν $\nu\,{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}$ γράμματα. Καὶ ἐπειδὴ τὰ διαφορετικὰ γράμματα εἶναι μόνον μ, τὸ καθὲν θὰ περιέχεται εἰς τὸν πίνακά μας $\frac{\nu}{\mu}\,{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}$ φορὰς (διότι ὅλα περιέχονται ἴσον ἀριθμὸν φορῶν τὸ καθέν). Ἄν τώρα ἀπὸ ὅλους τοὺς συνδυασμούς, ποὺ περιέχουν ἓν γράμμα, π.χ. τὸ α, ἀφαιρέσωμεν ἓν α, οἱ συνδυασμοὶ αὐτοὶ θὰ περιέχουν ν—1 μόνον γράμματα καὶ προφανῶς θὰ εἶναι ὅλοι οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν—1, δηλ. ὁ ἀριθμός των θὰ εἶναι ὁ ${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}$. ἑπομένως, κατὰ τὴν προηγουμένην σκέψιν, τὸ γράμμα α θὰ περιέχεται εἰς αὐτοὺς $\frac{\nu-1}{\mu}\,{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}$ φοράς. Ἄν τώρα εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τῶν α: $\frac{\nu-1}{\mu}\,{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}$ προσθέσωμεν πάλιν τὰ α, ποὺ ἀφῃρέσαμεν πρὶν καὶ ποὺ ὁ ἀριθμός των εἶναι προφανῶς ${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}$ (διότι κάθε συνδυασμὸς ἀπὸ τοὺς ${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}$ παρήχθη μὲ τὴν ἀφαίρεσιν ἑνὸς α), θὰ ἔχωμεν πάλιν τὸν ἀριθμὸν τῶν α εἰς ὅλον τὸν πίνακά μας, δηλ. τὸν $\frac{\nu}{\mu}\cdot{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}$. Ὥστε ἔχομεν τὸν *τύπον ἀναγωγῆς*:

$$\frac{\nu}{\mu}\cdot{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}=\frac{\nu-1}{\mu}\,{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}+{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1},$$

ἢ καὶ

$${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}=\frac{\mu+\nu-1}{\nu}\cdot{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}.$$

Ἄν τώρα εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν διαδοχικῶς ν=2, 3, 4,.. ....,ν, εὑρίσκομεν:

$${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{2}=\frac{\mu+1}{2}\cdot{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{1}\left(=\frac{\mu+1}{2}\mu.\right),$$

${}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{1}=1$

$$_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{3}=\frac{\mu+2}{3}\ {}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{2},$$

. . . .

$$_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}=\frac{\mu+\nu-1}{\nu}\cdot{}_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu-1}\cdot$$

καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, ἔχομεν τὸν τελικὸν τύπον :

$$_{\varepsilon}\Sigma_{\mu}^{\nu}=\cdot\frac{(\mu+\nu-1)\,(\mu+\nu-2)\ldots(\mu+1).\mu}{1.2\ldots\ldots\ldots\nu} \qquad (10)$$

$\left(\equiv\frac{[\mu,\nu]\,!}{\nu\,!}\right.$, ἂν μὲ τὸ σύμβολον αὐτὸ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν).

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν συμπεραίνομεν, ὅτι *ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν τῶν μ+ν—1 γραμμάτων ἀνὰ ν.*

Ἀσκήσεις.

Α΄) Ἐφαρμογαί.

1) Κατὰ πόσους τρόπους εἱμποροῦν 12 ἄνθρωποι νὰ παραταχθοῦν εἰς εὐθεῖαν γραμμήν ; καὶ κατὰ πόσους πέριξ κυκλικῆς τραπέζης ;

2) Πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί, ποὺ δὲν περιέχουν τὸ ψηφίον 4 ;

3) Πόσα *δίγλωσσα* λεξικὰ κατασκευάζονται ἀπὸ 25 γλώσσας ; καὶ πόσα τρίγλωσσα ;

4) Μὲ τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου πόσαι δισύλλαβοι λέξεις ἀπὸ 5 γράμματα ἡ κάθε μία εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ;

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου μὲ ν πλευράς.

6) Ἂν ἀπὸ ν σημεῖα τρία τυχόντα δὲν εὑρίσκωνται ἐπὶ εὐθείας, καὶ τὰ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο μὲ εὐθείας, πόσαι εἶναι αἱ εὐθεῖαι αὐταί ;

7) 14 ἄνθρωποι πρόκειται νὰ συμφάγουν πέριξ ἀπὸ δύο τραπέζας. Κατὰ πόσους τρόπους εἱμποροῦν νὰ καθίσουν, ἂν ἡ μία τράπεζα χωρῇ 8 καὶ ἡ ἄλλη 6 ἄτομα ; (Δύο τρόποι θεωροῦνται διαφορετικοί, καὶ ἂν *μόνον εἰς μίαν ἀπὸ* τὰς *τραπέζας* ἡ κατάταξις τῶν ἀνθρώπων διαφέρῃ).

8) Ἀπὸ κληρωτίδα, ποὺ περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,....,15 ἐξάγομεν τυχαίως 4 κλήρους. Κατὰ πόσους τρόπους εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ ἡ ἐξαγωγὴ αὐτή; Καὶ πόσας φορὰς ἐξάγεται ὁ κλῆρος μὲ τὸν ἀριθμὸν 5;

9) Εἰς δοχεῖον ὑπάρχουν 28 σφαῖραι, 18 λευκαὶ καὶ 10 ἐρυθραί. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ μία λευκὴ; Καὶ ποία μία ἐρυθρά;

10) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθοῦν *διαδοχικῶς*, ἀπὸ 32 παιγνιόχαρτα, αἱ τρεῖς εἰκονογραφίαι τοῦ καρρὼ (κατὰ τυχοῦσαν σειρὰν) εἶναι: $\frac{3}{32}\cdot\frac{2}{31}\cdot\frac{1}{30}=\frac{1}{4960}$.

Β΄) *Θεωρίαι.*

1) Τὸ γινόμενον ὁποιωνδήποτε ν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ν πρώτων κατὰ σειρὰν ἀκεραίων (1,2,.......,ν).

2) Τὸ γινόμενον τῶν μ πρώτων κατὰ σειρὰν ἀκεραίων 1,2,....,μ εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ν πρώτων κατὰ σειρὰν ἀκεραίων 1,2,....,ν, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν μ —ν πρώτων κατὰ σειρὰν ἀκεραίων, διὰ κάθε $\nu<\mu$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν ἀπὸ *τύπον ἀναγωγῆς*, τὸν ἑξῆς:

$$\Sigma_\mu^{\nu+1}=\frac{\mu-\nu}{\nu+1}\cdot\Sigma_\mu^\nu.$$

4) Νὰ δειχθῇ (α΄) μὲ συλλογισμὸν καὶ β΄) μὲ ὑπολογισμόν), ὅτι:

$$\Sigma_\mu^\nu=\Sigma_\mu^{\mu-\nu}.$$

5) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν, ἐντὸς τοῦ πλήθους τῶν συνδυασμῶν Σ_μ^ν, ποὺ περιέχουν ρ ὡρισμένα γράμματα, εἶναι: $\Sigma_{\mu-\rho}^{\nu-\rho}$.

6) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν, ἐντὸς ὅλων τῶν συνδυασμῶν Σ_μ^ν, ποὺ δὲν περιέχουν κανὲν γράμμα ἀπὸ ρ ὡρισμένα γράμματα, εἶναι: $\Sigma_{\mu-\rho}^\nu$· καὶ ἑπομένως:

Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν ἐντὸς ὅλων τῶν συνδυασμῶν Σ_μ^ν, ποὺ περιέχουν ἓν τοὐλάχιστον γράμμα ἀπὸ ρ ὡρισμένα γράμματα, εἶναι:

$$\Sigma_\mu^\nu-\Sigma_{\mu-\rho}^\nu.$$

7) Νὰ δειχθῇ (α΄) μὲ συλλογισμόν, β΄) μὲ ὑπολογισμόν), ὅτι:

$$\Sigma_\mu^\nu=\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}+\Sigma_{\mu-1}^\nu.$$

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι: $\Sigma_\mu^\nu=\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}+\Sigma_{\mu-2}^{\nu-1}+\dots+\Sigma_{\nu-1}^{\nu-1}$.

9) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον : $\dfrac{\Sigma_{\mu}^{\nu}}{\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}}$.

10) Νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$\Sigma_{\mu}^{1}+\Sigma_{\mu}^{2}+\Sigma_{\mu}^{3}+\cdots+\Sigma_{\mu}^{\mu}=2^{\mu}-1.$$

11) Νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$\Sigma_{\mu}^{1}+\Sigma_{\mu}^{3}+\Sigma_{\mu}^{5}+\cdots=1+\Sigma_{\mu}^{2}+\Sigma_{\mu}^{4}+\Sigma_{\mu}^{6}+\cdots$$

12) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων μὲ συλλογισμοὺς ἀναλόγους πρὸς τοὺς διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΕΝΟΣ ΔΙΩΝΥΜΟΥ ΚΑΙ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

I. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ NEWTON (ΝΙΟΥΤΟΝ)

15. Ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν τοῦ γυμνασίου μᾶς εἶναι γνωστὰ τ' «ἀναπτύγματα» :

$$(x+\alpha)^2=x^2+2x\alpha+\alpha^2, \qquad (x+\alpha)^3=x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3.$$

Τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις τοῦ $x+\alpha$: $(x+\alpha)^4$, $(x+\alpha)^5$,... εὑρίσκομεν διὰ *διαδοχικῶν* πολλαπλασιασμῶν :

$$(x+\alpha)^4=(x+\alpha)^3.\,(x+\alpha),\quad (x+\alpha)^5=(x+\alpha)^3.\,(x+\alpha)^2,\ldots.$$

Ὁ τρόπος ὅμως αὐτὸς καταντᾷ πάρα πολὺ μακρός, ὅταν πρόκειται διὰ μεγάλον ἐκθέτην τοῦ $(x+\alpha)$· π. χ. διὰ τὸ $(x+\alpha)^{100}$. Δι' αὐτὸ θὰ εὕρωμεν ἕνα τύπον, πού μας δίδει *ἀπευθείας*, μὲ ὡρισμένους κανόνας, τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^{\mu}$, ὅπου τὸ μ εἶναι ὁ τυχὼν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

16. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν τὸ γινόμενον :

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\ldots\ldots(x+\alpha_{\mu}).$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γινομένων, ποὺ εὑρίσκομεν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τῶν προσθετέων ἀνὰ μ καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. *Πρῶτος* λοιπὸν ὅρος τοῦ γινομένου (δηλ. ὅρος μὲ τὸν *μεγαλύτερον* ἐκθέτην τοῦ x) θὰ εἶναι ὁ x^{μ}. Ὅροι μὲ τὸν $x^{\mu-1}$ θὰ ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς : $\alpha_1x^{\mu-1}+\alpha_2x^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu}x^{\mu-1}$, δηλ., ἂν συμπτυχθοῦν εἰς ἕνα, ὁ ὅρος : $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu)x^{\mu-1}$. Ἐπίσης ὅροι μὲ τὸν $x^{\mu-2}$ θὰ εἶναι οἱ ἑξῆς : $\alpha_1\alpha_2x^{\mu-2}+\alpha_1\alpha_3x^{\mu-2}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu\, x^{\mu-2}$. Καὶ οὕτω καθεξῆς· δηλ. συντελεστὴς τῆς τυχούσης δυνάμεως $x^{\mu-k}$ θὰ εἶναι *τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, *λαμβανομένων ἀνὰ* k *καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς*. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὸν τύπον :

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_\mu)=x^\mu+S_1x^{\mu-1}+S_2x^{\mu-2}+S_3x^{\mu-3}+\ldots+S_kx^{\mu-k}+\ldots+S_{\mu-1}\,.\,x+S_\mu, \quad (1),$$

ὅπου $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu$, $S_2=\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu$, $S_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mu-2}\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu, \ldots$ $S_k=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k+\ldots$, $S_{\mu-1}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\mu-1}+\ldots$, $S_\mu=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\mu$.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ὅλα τὰ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\mu$ γίνωνται ἴσα πρὸς πρὸς τὸ α, ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$(2)\quad (x+\alpha)^\mu=x^\mu+\frac{\mu}{1}x^{\mu-1}\alpha+\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^{\mu-2}\alpha^2+\ldots+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)..(\mu-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}x^{\mu-k}\alpha^k+\ldots+\frac{\mu}{1}x\alpha^{\mu-1}+\alpha^\mu,$$ διότι τώρα προφανῶς

$S_1=\mu\alpha$, $\quad S_2=\dfrac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}\alpha^2$, καὶ γενικῶς $\quad S_k=\dfrac{\mu(\mu-1)..(\mu-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}\alpha^k$.

Ὁ τύπος λοιπὸν (2) γράφεται συντομώτερον καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(x+\alpha)^\mu=x^\mu+\Sigma^1_\mu.x^{\mu-1}.\alpha+\Sigma^2_\mu.x^{\mu-2}.\alpha^2+\Sigma^3_\mu.x^{\mu-3}.\alpha^3+\ldots+\Sigma^k_\mu.x^{\mu-k}.\alpha^k$$
$$\ldots\ldots+\Sigma^{\mu-2}_\mu x^2\alpha^{\mu-2}+\Sigma^{\mu-1}_\mu x\alpha^{\mu-1}+\alpha^\mu,$$

ὅπου Σ^k_μ σημαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν μ γραμμάτων ἀνὰ k.

Ὁ τύπος (2) λέγεται *τύπος τοῦ διωνύμου* ἢ *τύπος τοῦ Νιούτον*.

17. ***Παρατηρήσεις.*** 1) Ὁ τύπος τοῦ διωνύμου *περιέχει* $\mu+1$ *ὅρους*, μὲ πρῶτον τὸν x^μ καὶ τελευταῖον τὸν α^μ.

2) Οἱ ἐκθέται τοῦ x προχωροῦν ἐλαττούμενοι κατὰ μίαν μονάδα ἀπὸ ὅρον εἰς ὅρον, ἐνῷ τοὐναντίον οἱ τοῦ α προχωροῦν αὐξανόμενοι. *Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ἐκθετῶν τοῦ x καὶ τοῦ α εἶναι ἴσον μὲ μ, εἰς κάθε ὅρον.*

3) Ἂν μ ἄρτιον $=2\rho$, τὸ $\mu+1=2\rho+1$ εἶναι περιττὸν καὶ ἑπομένως ὑπάρχει εἷς *μεσαῖος* ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος *περιέχων τοὺς παράγοντας* $x^\rho.\alpha^\rho$. Ἂν ὅμως μ περιττόν : $2\rho-1$, τότε τὸ $\mu+1$ εἶναι ἄρτιον : 2ρ καὶ ἑπομένως *δὲν ὑπάρχει* μεσαῖος ὅρος εἰς τὸ ἀνάπτυγμα, ἀλλὰ δύο ὅροι *μὲ παράγοντας* $x^\rho.\alpha^{\rho-1}$ *καὶ* $x^{\rho-1}.\alpha^\rho$.

4) ***Οἱ συντελεσταὶ δύο ὅρων, ποὺ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοὺς ἄκρους, εἶναι ἴσοι.*** Αὐτὸ φαίνεται καὶ *ἀπευθείας*· διότι, ἀφοῦ τὸ α΄ μέλος τοῦ τύπου εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰ x καὶ α ($(x+\alpha)^\mu\equiv(\alpha+x)^\mu$), θὰ εἶναι καὶ τὸ β΄· ἀλλά, ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο αὐτὰ γράμματα, τὸ

β΄ μέλος ἀντιστρέφει, δηλ. γίνεται α΄ ὅρος ὁ τελευταῖος, β΄ ὁ προτελευταῖος κτλ. τελευταῖος ὁ α΄· ἀφοῦ ὅμως πρέπει νὰ μείνῃ τὸ β΄ μέλος τὸ ἴδιον, θὰ εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐναλλασσομένων ὅρων ἴσοι. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν : $\Sigma_{\mu}^{\nu} = \Sigma_{\mu}^{\mu-\nu}$ συνάγεται ἀμέσως ἡ πρότασις αὐτή. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δὲν ἔχομεν ἀνάγκην νὰ ὑπολογίζωμεν *ὅλους* τοὺς συντελεστάς, ἀλλὰ μόνον *τοὺς πρώτους ἡμίσεις (ρ), ἂν μ περιττὸν* (2ρ—1)· καὶ τοὺς πρώτους ρ+1, ἂν μ ἄρτιον (2ρ).

5) ***Κανὼν πρὸς εὕρεσιν κάθε ὅρου τοῦ τύπου ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του*** : *Πολλαπλασιάζομεν πρῶτα τὸν συντελεστὴν τοῦ δοθέντος ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x εἰς τὸν ὅρον αὐτὸν καὶ τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α εἰς τὸν ζητούμενον ὅρον· ἀφοῦ εὕρωμεν οὕτω τὸν συντελεστὴν τοῦ ζητουμένου ὅρου, ἐλαττώνομεν τὸν ἐκθέτην τοῦ x καὶ αὐξάνομεν τὸν τοῦ α κατὰ μίαν μονάδα τὸν καθένα.*

6) Ἂν μᾶς δοθῇ *τυχὸν* διώνυμον, τῆς μορφῆς π.χ. $\beta x^4 + \gamma \alpha^2$, ἀρκεῖ προφανῶς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς δυνάμεώς του π.χ. τῆς $(\beta x^4 + \gamma \alpha^2)^8$, νὰ θέσωμεν $\beta x^4 \equiv X$ καὶ $\gamma \alpha^2 \equiv A$.

7) Τὸ α εἰς τὸν τύπον τοῦ διωνύμου ὑπεθέσαμεν, ὅτι *προστίθεται* εἰς τὸ x· ἂν ἀφαιρεῖται, ὁ τύπος ἰσχύει πάλιν, ἀλλὰ *τροποποιημένος*, προφανῶς, ὡς ἑξῆς :

$$(x-\alpha)^{\mu} = x^{\mu} - \Sigma_{\mu}^{1} x^{\mu-1}.\alpha + \Sigma_{\mu}^{2} x^{\mu-2}\alpha^{2} - \ldots\ldots \pm \alpha^{\mu},$$

δηλ. οἱ ὅροι μὲ τὰς *περιττὰς* δυνάμεις τοῦ α εἶναι *ἀρνητικοί.*

II. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΤΟΥ ΠΑΣΚΑΛ

18. Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν τὸ διώνυμον $x+\alpha$ καὶ ἄς τὸ ὑψώσωμεν εἰς τὰς δυνάμεις 1,2,3.... καὶ ἄς γράψωμεν ἐπὶ ὁριζοντίων διαδοχικῶν γραμμῶν τοὺς συντελεστὰς κάθε ἀναπτύγματος:

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
.	......									
1	Σ^1_μ	Σ^2_μ	Σ^3_μ	Σ^4_μ	......					

Σχηματίζομεν οὕτως ἕνα *τριγωνικὸν* πίνακα τῶν συντελεστῶν (*«ἀριθμητικὸν τρίγωνον» τοῦ Πασκάλ*), τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γραμμαὶ παράγονται ἀπὸ τὴν α΄ σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν : $\Sigma^{\nu}_{\mu+1}=\Sigma^{\nu-1}_{\mu}+\Sigma^{\nu}_{\mu}$, δηλ. κάθε ἀριθμὸς τοῦ πίνακος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου του καὶ τοῦ ἀριστερὰ τοῦ ἀνωτέρου αὐτοῦ εὑρισκομένου. Ἂν τώρα θεωρήσωμεν μόνον τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς γραμμένους δεξιὰ ἀπὸ τὴν κατακόρυφον γραμμὴν (δηλ. παραλείψωμεν τὴν στήλην τῶν μονάδων), βλέπομεν, ὅτι γενικῶς ἡ νυστὴ *ὁριζοντία* γραμμὴ περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ 1, ἀνὰ 2,..,ἀνὰ ν· ἐνῷ ἡ *κατακόρυφος* γραμμὴ (στήλη) τῆς ρ τάξεως περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς τῶν συνδυασμῶν ἀνὰ ρ τῶν ρ, ρ+1, ρ+2,...πραγμάτων. Ὥστε *ὁ ἀριθμὸς* Σ^{ρ}_{ν} *εὑρίσκεται εἰς τὴν συνάντησιν τῆς* $\nu^{\eta\varsigma}$ *(ὁριζοντίας) γραμμῆς καὶ τῆς στήλης τῆς ρ τάξεως.* (Π. χ. ὁ Σ^2_4 εἶναι ἡ τομὴ τῆς δ΄ γραμμῆς καὶ τῆς β΄ στήλης, δηλ. ὁ 6).

19. Οἱ ἀριθμοὶ κάθε στήλης (πλὴν τῆς α΄ τῶν μονάδων) κατασκευάζονται εὔκολα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς προηγουμένης:
Κάθε ἀριθμὸς μιᾶς στήλης εἶναι τὸ ἄθροισμα ἐκείνων τῶν ἀριθμῶν τῆς προηγουμένης, ποὺ εὑρίσκονται ὑπεράνω τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς

Ἀσυ (8) p. 13

τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Αὐτὸ εἶναι ἄμεσον ἀκολούθημα τῆς ἰδιότητος $\Sigma^{\nu}_{\mu+1}=\Sigma^{\nu-1}_{\mu}+\Sigma^{\nu}_{\mu}$.

Ἀσκήσεις.

1) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\Sigma^1_\mu, \Sigma^2_\mu, \ldots, \Sigma^\mu_\mu$ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος; (Ἀπ. Διὰ μ ἄρτιον, ὁ $\Sigma_\mu^{\frac{\mu}{2}}$· διὰ μ περιττόν, οἱ δύο ἴσοι:

$$\Sigma_\mu^{\frac{\mu-1}{2}} \quad \text{καὶ } \Sigma_\mu^{\frac{\mu+1}{2}}\Big).$$

2) Νὰ δειχθῇ, ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ δυωνύμου $x+\alpha$, ὅτι:

$$2^\mu=1+\Sigma^1_\mu+\Sigma^2_\mu+\ldots\ldots+\Sigma^\mu_\mu.$$

3) Νὰ δειχθῇ, ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου $x-\alpha$, ὅτι: $0=1-\Sigma^1_\mu+\Sigma^2_\mu-\Sigma^3_\mu+\ldots\ldots\pm\Sigma^\mu_\mu$ (Ὥστε τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ 1,3,5,...(περιττὸν ἀριθμὸν) ὑπερβαίνει πάντοτε κατὰ μονάδα τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα ἀνὰ 2,4,6,....).

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^{\mu+1}$ ὁ συντελεστὴς ταῦ τυχ. ὅρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀντιστοίχου του ὅρου καὶ τοῦ προηγουμένου του εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$. (Ἀπὸ τὸν τύπον: $\Sigma^\nu_\mu=\Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}+\Sigma^\nu_{\mu-1}$).

5) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ νυοστὸς ἀριθμὸς τῆς ρ στήλης εἰς τὸ τρίγωνον τοῦ Πασκὰλ εἶναι ὁ:

$$\frac{(\rho+\nu-1)\,(\rho+\nu-2)\ldots\ldots\nu}{1.2\ldots.\rho}=\frac{(\rho+\nu-1)\,(\rho+\nu-2)\ldots.(\rho+1)}{1.2\ldots\ldots(\nu-1)},$$

δηλ. ὁ $\Sigma^\rho_{\rho+\nu-1}\equiv\Sigma^{\nu-1}_{\rho+\nu-1}$.

6) Ὁ πίναξ τοῦ Πασκὰλ μᾶς δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,.....μ.

Π. χ. εἶναι $1+2+3+\ldots\ldots+\mu=\frac{\mu(\mu+1)}{2}$· $1^2+2^2+\ldots\ldots+\mu^2=$ $=\frac{\mu(\mu+1)\,(2\mu+1)}{6}$ (θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ταὐτότης: $x^2=x+x(x-1)$ $=x+2.\frac{x(x-1)}{1.2}\Big)$· $1^3+2^3+\ldots+\mu^3=\left(\frac{\mu(\mu+1)}{2}\right)^2$ (θὰ ληφθῇ βοηθητικῶς ἡ ταὐτότης: $x^3=x+x(x^2-1)=x+6.\frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3.}\Big)$. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

7) Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \iota, \varkappa, \lambda$ εἶναι οἱ $\mu+1$ πρῶτοι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον ϱ, θὰ ἔχωμεν :

$\beta = \alpha + \varrho$, $\gamma = \beta + \varrho$ κτλ. Ἑπομένως (κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου) :

$$\beta^{\nu+1} = \alpha^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{1} \alpha^{\nu} \varrho + \frac{(\nu+1)\nu}{1.2} \alpha^{\nu-1}.\varrho^2 + \ldots + \frac{\nu+1}{1} \alpha\varrho^{\nu} + \varrho^{\nu+1},$$

$$\gamma^{\nu+1} = \beta^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{\nu} \beta^{\nu} \varrho + \frac{(\nu+1)^{\nu}}{1.2} \beta^{\nu-1}.\varrho^2 + \ldots + \frac{\nu+1}{1} \beta\varrho^{\nu} + \varrho^{\nu+1},$$

. . . .

$$\lambda^{\nu+1} = \varkappa^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{\nu} \varkappa^{\nu}.\varrho + \frac{(\nu+1)\nu}{1.2} \varkappa^{\nu-1}.\varrho^2 + \ldots + \frac{\nu+1}{1} \varkappa\varrho^{\nu} + \varrho^{\nu+1}.$$

Ὅθεν ἕπεται : $\lambda^{\nu+1} = \alpha^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{1} \varrho\, S_{\nu} + \frac{(\nu+1)\nu}{1.2} \varrho^2 S_{\nu-1} + \ldots +$

$+ \frac{\nu+1}{1} \varrho^{\nu} S_1 + \mu\varrho^{\nu+1}$, (α)

ὅπου $S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varkappa$, $S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots \varkappa^2, \ldots S_{\nu} = \alpha^{\nu} + \beta^{\nu} + \gamma^{\nu} + \ldots + \varkappa^{\nu}$.

Ἂν ἰδιαιτέρως λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $1, 2, 3, \ldots, \mu, (\mu+1)$, θὰ εἶναι $\alpha = 1$, $\lambda = \mu + 1$, $\varrho = 1$ καὶ ὁ τύπος (α) γίνεται :

$$(\mu+1)^{\nu+1} = 1 + \frac{\nu+1}{1} S_{\nu} + \frac{(\nu+1)\nu}{1.2} S_{\nu-1} + \ldots + \frac{\nu+1}{1} S_1 + \mu,$$

ὅπου τώρα : $S_1 = 1 + 2 + \ldots + \mu$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + \mu^2, \ldots$
$S_{\nu} = 1^{\nu} + 2^{\nu} + \ldots + \mu^{\nu}$ (καὶ $S_0 = 1^0 + 2^0 + \ldots + \mu^0 = \mu$).

Θέτοντες τώρα κατὰ σειρὰν $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ εἰς τὸν προηγούμενον τύπον, εὑρίσκομεν :

$$S_1 = \frac{\mu(\mu+1)}{2}, \quad S_2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}, \quad S_3 = \left(\frac{\mu(\mu+1)}{2}\right)^2,$$

$$S_4 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)(3\mu^2+3\mu-1)}{30} \text{ κτλ.}$$

8) Ὁ μεγαλύτερος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(\pi+\varrho)^{\mu}$ εἶναι ~~ὁ~~
ἀντιστοιχοῦν δὲ οἱ ἀντιστοιχοῦντες ἴσοι ὅροι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ ν
~~διδόμενος ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν :~~ $\cancel{\frac{\mu-\nu}{\nu} = \frac{\pi}{\varrho}}$. (Διότι ἔχομεν : (νυοστὸς ὅρος) $T_{\nu} = T_{\nu-1} . \frac{\mu-\nu+1}{\nu} . \frac{\pi}{\varrho}$ καὶ $T_{\nu+1} = T_{\nu} \frac{\mu-\nu}{\nu+1} . \frac{\pi}{\varrho}$).

$\frac{\mu\rho-\pi}{\rho+\pi} < \nu < \frac{\mu\rho+\rho}{\rho+\pi}$

III. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

20. Τὸ ἀνάπτυγμα αὐτὸ εἰμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους: α') ἐμμέσως, ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου καὶ β') ἀπευθείας ταχύτερα, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν συμπτωτικῶν μεταθέσεων καὶ τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν.

α') Πρώτη μέθοδος.

21. Ἂν ἔχωμεν πρῶτα τὸ *τριώνυμον* $\alpha+\beta+\gamma$, θὰ εἶναι κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^\mu = ((\alpha+\beta)+\gamma)^\mu = (\alpha+\beta)^\mu + \frac{\mu}{1}(\alpha+\beta)^{\mu-1}.\gamma +$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(\alpha+\beta)^{\mu-2}.\gamma^2 + \ldots + \frac{\mu}{1}(\alpha+\beta)\gamma^{\mu-1}+\gamma^\mu$$ καὶ μένει μόνον ν' ἀναπτυχθοῦν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν αἱ δυνάμεις τοῦ $\alpha+\beta$· ὅταν γίνῃ αὐτό, *τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν α,β,γ εἰς κάθε ὅρον θὰ εἶναι ἴσον μὲ μ* καὶ ἀντιστρόφως: *ἂν $a+b+c=\mu$, θὰ ὑπάρχῃ ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος μὲ τοὺς παράγοντας $\alpha^a \beta^b \gamma^c$*. Αἱ προτάσεις αὐταὶ εἶναι προφανεῖς. Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου μὲ τὸ $\alpha^a.\beta^b.\gamma^c$, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος αὐτός: $\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-c+1)}{1.2\ldots.c}(\alpha+\beta)^{\mu-c}.\gamma^c$ εἰμπορεῖ νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $\frac{\mu!}{c!(\mu-c)!}.(\alpha+\beta)^{\mu-c}.\gamma^c$ (σύμφωνα μὲ τὸν τύπον: (α) $\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!}$). Εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τώρα τοῦ $(\alpha+\beta)^{\mu-c}$ ὁ ὅρος μὲ τὸ $\alpha^a.\beta^b$, δηλ. μὲ τὸ $\alpha^a.\beta^{m-c-a}$ ἔχει συντελεστὴν (σύμφωνα πάλιν μὲ τὸν ἴδιον τύπον (α)) τόν: $\frac{(\mu-c)!}{a!(\mu-c-a)!}$

Ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου μὲ $\alpha^a \beta^b.\gamma^c$ εἶναι: $\frac{\mu!}{c!(\mu-c)!}.\frac{(\mu-c)!}{a!(\mu\text{-}c\text{-}a)!}$

δηλ: $\frac{\mu!}{c!a!(\mu-c-a)!} = \frac{\mu!}{a!\ b!\ c!}$.

Ὁ γενικὸς λοιπὸν ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:

$\frac{\mu!}{a!\ b!\ c!}\alpha^a.\beta^b.\gamma^c$ (ὅπου $a+b+c=\mu$) *καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὸν τύπον* *τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τριωνύμου :*

$$(3) \qquad (\alpha+\beta+\gamma)^{\mu} = \sum_{(a+b+c=\mu)} \frac{\mu!}{a!\,b!\,c!}\,\alpha^{a}.\beta^{b}.\gamma^{c},$$

ὅπου τὸ Σ σημαίνει τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων, ποὺ εὑρίσκομεν, ἂν δώσωμεν εἰς τὰ a, b, c ὅλας τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμάς, ποὺ δίδουν $a+b+c=\mu$. (Πρέπει ὅμως διὰ $a=0$ ἢ $b=0$ ἢ $c=0$ νὰ λάβωμεν ὡς $a!$ ἢ $b!$ ἢ $c!$ τὴν μονάδα).

22. Μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς εὑρίσκομεν καὶ τὸ *ἀνάπτυγμα δυνάμεως ἑνὸς τυχόντος πολυωνύμου :*

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^{\mu} = \sum_{(a+b+c+d+\ldots=\mu)} \frac{\mu!}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots}\,\alpha^{a}.\beta^{b}.\gamma^{c}.\delta^{d}\ldots$$

β΄) Δευτέρα μέθοδος.

23. Ἔχομεν προφανῶς : $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^{\mu} =$
$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)$.
Κάθε λοιπὸν ὅρος τῆς δυνάμεως θὰ περιέχῃ ἕνα ὅρον ἀπὸ κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου τοῦ β΄ μέλους· ἀλλὰ τὰ πολυώνυμα αὐτά, οἱ παράγοντες δηλ., εἶναι τὰ ἴδια, ὥστε τὸ γράμμα α εἰμπορεῖ νὰ παρουσιασθῇ a φορὰς ὡς παράγων, τὸ β b φορὰς κτλ. Ὁ γενικὸς λοιπὸν ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος θὰ εἶναι $\sigma.\alpha^{a}\,\beta^{b}\,\gamma^{c}\,\delta^{d}\ldots$, ὅπου σ εἶναι ὁ ἄγνωστος συντελεστής του· διὰ νά τον εὕρωμεν, παρατηροῦμεν, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ὁ *ἀριθμὸς τῶν συμπτωτικῶν μεταθέσεων μ γραμμάτων*, ὅταν a ἀπὸ αὐτὰ γίνουν ἴσα μὲ τὸ α, b ἴσα μὲ τὸ β, c ἴσα μὲ τὸ γ κτλ. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν πάλιν τὸν τύπον (3).

Ἀσκήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots)^{\mu}$, ἂν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι ν, εἶναι :

$$\left({}^{\varepsilon}\Sigma^{\mu}_{\nu} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\mu-1)}{1.2.3\ldots\mu} = \frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}{1.2.3\ldots(\nu-1)}\right.$$

Ἡ α΄ μορφὴ τοῦ ${}^{\varepsilon}\Sigma^{\mu}_{\nu}$ εἶναι κατάλληλος, ὅταν $\mu < \nu-1$· ἡ β΄, ὅταν $\mu > \nu-1$).

2) *Τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου :*

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^2=\sum_{(a+b=2)}\frac{M_2}{M_a\,M_b}\,\alpha^a.\beta^b\ldots=\Sigma\alpha^2+2\Sigma\alpha\beta.$$

3) *Κύβος ἑνὸς πολυωνύμου :*

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^3=\sum_{(a+b+c=3)}\frac{M_3}{M_a\,M_b\,M_c}\,\alpha^a.\beta^b.\gamma^c\ldots=$$

$$=\Sigma\alpha^3+3\Sigma\alpha^2\beta+6\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

4) Ὁ *τύπος τοῦ διωνύμου* παράγεται ἀπὸ τὸν *τύπον τοῦ πολυωνύμου*, ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν κατὰ τὸν γενικὸν τύπον τοῦ πολυωνύμου :

$$(x+\alpha)^\mu=\sum_{(a+b=\mu)}\frac{M_\mu}{M_a\,M_b}.\alpha^a\,x^b=\sum\frac{M_\mu}{M_a\,M_{\mu-a}}.\alpha^a\,x^{\mu-a}.$$

ἀλλά : $\frac{M_\mu}{M_a\,.\,M_{\mu-a}}=\frac{\mu!}{a!(\mu-a)!}$ εἶναι ἴσον μὲ Σ^a_μ, ἑπομένως ὁ προηγούμενος τύπος διὰ τὸ $(x+\alpha)^\mu$ συμπίπτει μὲ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου.

5) ***Ρίζαι ἑνὸς πολυωνύμου.*** Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον Π εἶναι ἡ μυοστὴ δύναμις ἑνὸς ἄλλου Ρ, ἀκεραίου ἐπίσης· τότε θὰ εἶναι : $P\equiv\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\varkappa+\lambda=\sqrt[\mu]{\Pi}$ (ὅπου α, β, γ, ... παριστοῦν συντόμως τοὺς ὅρους τοῦ Ρ).

Μᾶς δίδεται τὸ Π καὶ ζητεῖται ἡ μυοστή του ῥίζα Ρ. Ἔχομεν κατὰ πρῶτον :

$$(1)\;\Pi=P^\mu=[\alpha+(\beta+\gamma+\delta+\ldots+\varkappa+\lambda)\,]^\mu=$$

$$=\alpha^\mu+\mu\alpha^{\mu-1}(\beta+\gamma+\ldots+\lambda)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^{\mu-2}\,(\beta+\gamma+\ldots+\lambda)^2+\ldots$$

Ὥστε, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ δύο πολυώνυμα ἔχουν καταταχθῆ ὁμοίως, ἀπὸ τὴν προηγουμένην ταὐτότητα συνάγομεν, ὅτι α′ ὅρος τοῦ Π εἶναι ὁ α^μ καὶ ἑπομένως : *α′ ὅρος τοῦ ἀγνώστου πολυωνύμου Ρ εἶναι ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ α′ ὅρου τοῦ Π.* Ἂν λοιπὸν α′ ὅρος τοῦ Π εἶναι ὁ Ax^ν, α′ ὅρος τοῦ Ρ θὰ εἶναι ὁ $\alpha=\sqrt[\mu]{A}\,x^{\frac{\nu}{\mu}}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι *τὸ ν πολλαπλάσιον τοῦ μ καί, ἂν τὸ μ ἄρτιον, τὸ Α θετικόν* (ὅτε ἡ $\sqrt[\mu]{A}$ ἔχει δύο τιμὰς ἴσας καὶ ἀντιθέτους). Μὲ ὁμοίαν σκέψιν εὑρί-

σκομεν, ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ Ρ (ὑποτεθέντος, ὅτι ὑπάρχει ῥίζα) θὰ εἶναι : $\lambda=\sqrt[\mu]{\Lambda}$, ὅπου Λ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ Π. Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τοὺς ἄλλους ὅρους προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Ἡ (1) μᾶς δίδει
$\Pi-\alpha^{\mu} \equiv Y_1=\mu\alpha^{\mu-1}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)+\ldots$

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὁ α′ ὅρος τοῦ Y_1, *δηλ. ὁ β′ τοῦ Π*, εἶναι *χωρὶς ἀναγωγὴν* ὁ $\mu\alpha^{\mu-1}.\beta$ (ἀφοῦ τὰ 2 πολυώνυμα βαίνουν κατὰ τὰς κατερχομένας δυνάμεις τοῦ α)· ὥστε : *ἂν διαιρέσωμεν τὸν α′ ὅρον τοῦ Y_1 διὰ τοῦ $\mu\alpha^{\mu-1}$ θὰ εὕρωμεν τὸν β′ ὅρον β τοῦ Ρ.* —Συνεχίζοντες δέ, καθὼς ὑποδεικνύουν αἱ ἑπόμεναι πράξεις : $\Pi=P^{\mu}=[(\alpha+\beta)+$ $+(\gamma+\delta+\ldots+\lambda)]^{\mu}=(\alpha+\beta)^{\mu}+\mu(\alpha+\beta)^{\mu-1}(\gamma+\delta+\ldots+\lambda)+\ldots$
$\Pi-(\alpha+\beta)^{\mu}\equiv Y_2=\mu(\alpha+\beta)^{\mu-1}(\gamma+\delta+\ldots\lambda)+\ldots$, βλέπομεν, ὅτι ὁ α′ ὅρος τοῦ Y_2, ~~*ὁ τρίτος δηλ. τοῦ Π*~~, θὰ εἶναι ὁ $\mu(\alpha+\beta)^{\mu-1}.\gamma$ καὶ ἑπομένως ὁ γ′ ὅρος γ τοῦ Ρ θὰ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α′ ὅρου τοῦ Y_2 διὰ τοῦ $\mu\alpha^{\mu-1}$.

Λοιπόν : *Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ α′ ὅρου τῆς ῥίζης Ρ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ α′ ὅρου τοῦ Π, διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τοὺς ἄλλους ὅρους τῆς ῥίζης, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διαδοχικῶς διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου $\mu\alpha^{\mu-1}$ (ὅπου α ὁ εὑρεθεὶς α′ ὅρος τῆς ῥίζης) τὸν α′ ὅρον καθενὸς ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα πολυώνυμα : $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ὅπου $Y_1\equiv\Pi-\alpha^{\mu}$, $Y_2\equiv\Pi-(\alpha+\beta)^{\mu}$, $Y_3\equiv\Pi-(\alpha+\beta+\gamma)^{\mu}\ldots$*

Ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ὅρον λ τῆς ῥίζης, *πρέπει νὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον $Y_\tau=\Pi-P^{\mu}$ τὸ 0, ἂν ὑπάρχῃ ἀκριβὴς ῥίζα.* Καὶ ἀντιστρόφως, *ἂν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι 0, ἡ ῥίζα εἶναι ἀκριβής.*

Ἂν $Y_\tau \lessgtr 0$, τότε θὰ εἶναι $\Pi=T^{\mu}+Y$ καὶ ἡ πρᾶξις οὐδέποτε θὰ τελειώσῃ, διότι, ἂν ἐξακολουθήσωμεν, θὰ φθάσωμεν, ἅμα ὁ βαθμὸς τοῦ Y_τ γίνῃ μικρότερος τοῦ Τ, εἰς ἄπειρον σειρὰν ὅρων μὲ ἐκθέτην τοῦ γράμματος τῆς κατατάξεως ἀρνητικὸν καὶ αὐξάνοντα μέχρι τοῦ $-\infty$.

Διὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἰδιαιτέρως παρατηροῦμεν, ὅτι : α′) δὲν εἰμποροῦμεν ν᾿ ἀρχίσωμεν τὴν ἐξαγωγήν της, *παρὰ μόνον ὅταν ὁ βαθμὸς μ τοῦ Π εἶναι ἄρτιος.* Τότε δὲ εἶναι : $\Pi=T^2+Y$ ($\pm T$ εἶναι τότε ἡ *«κατὰ προσέγγισιν ῥίζα» τοῦ Π καὶ Υ «τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως»*)· β′) *Δύο διαφορετικαὶ ἀναλύσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχουν.* Διότι, ἂν ἔχωμεν : $\Pi=T^2+Y$ καὶ $\Pi=T'^2+Y'$, θὰ εἶναι $T^2-T'^2\equiv(T+T')(T-T')=Y'-Y$. Ἀλλὰ τὰ Τ καὶ Τ′ εἶναι τοῦ βαθμοῦ $\frac{\mu}{2}$, ἐνῷ τὰ Υ καὶ Υ′ εἶναι κατωτέρου· ἀδύνατος λοιπὸν ἡ προηγουμένη ἰσότης καὶ ἑπομένως Τ=Τ′ καὶ Υ=Υ′.

6) Νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ προηγουμένη μέθοδος τῆς ἐξαγωγῆς τῆς μυστῆς ρίζης τῶν πολυωνύμων εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ριζῶν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (θεωρουμένων ὡς ἀθροισμάτων τῶν α δεκάδων καὶ β μονάδων των : $10\alpha+\beta$).

7) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 1 τὸ γινόμενον 4 διαδοχικῶν ὅρων αὐξηθὲν κατὰ 1 εἶναι πάντοτε τέλειον τετράγωνον.

8) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἀρκεταὶ συνθῆκαι, διὰ νὰ εἶναι τὸ πολυώνυμον τοῦ 3ου βαθμοῦ : $A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$ τέλειον ~~τετράγωνον~~ κύβος. (*Ἀπ.* $A_1^2=3A_0A_2$, $A_1^3=27A_0^2A_3$).

9) Τὸ ἴδιον ζήτημα διὰ τὸ πολυώνυμον τοῦ 4ου βαθμοῦ :

$A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$. (*Ἀπ.* $A_1^3-4A_0A_1A_2+8A_0^2A_3=0$,
$A_1^4-8A_0A_1^2A_2+16A_0^2A_2^2-64A_0^2A_2^2=0$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ

24. **Ὁρίζουσαι** λέγονται παραστάσεις ὡρισμένης μορφῆς (τὴν ὁποίαν θὰ ἴδωμεν περαιτέρω), ποὺ εὐκολύνουν μεγάλως τὴν λύσιν τῶν συστημάτων τῶν ἐξισώσεων, τὴν ἀπαλοιφὴν ἀγνώστων μεταξὺ αὐτῶν καὶ ἐν γένει εἶναι χρησιμώταται εἰς ὅλην τὴν Ἄλγεβραν καὶ εἰς ὅλους τοὺς κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Ι. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

α′) Προεισαγωγικαὶ προτάσεις.

25. Αἱ ἁπλαῖ μεταθέσεις ν ἀριθμῶν εἱμποροῦν νὰ διαιρεθοῦν εἰς δύο εἴδη : τὰς *«θετικὰς»* καὶ τὰς *«ἀρνητικάς»*. *«Θετικὴ»* λέγεται μία μετάθεσις, ὅταν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαφορῶν, ποὺ εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν ὅλους τοὺς κατόπιν του γραμμένους, εἶναι *θετικόν*· *«ἀρνητικὴ»* δέ, ὅταν εἶναι *ἀρνητικόν*.

Π. χ. ἀπὸ τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 θετικαὶ μὲν εἶναι αἱ 213, 132, 321, ἀρνητικαὶ δὲ αἱ 123, 231, 312.

26. *Ἂν εἰς μίαν μετάθεσιν ἀνταλλάξωμεν δύο ἀριθμούς, τὸ σημεῖον τῆς μεταθέσεως ἀλλάσσει.* Ἀπόδειξις : ἂς εἶναι α καὶ β οἱ ἀριθμοί, ποὺ θ' ἀνταλλαχθοῦν· μεταξὺ αὐτῶν εἰμπορεῖ νὰ ὑπάρχουν ἄλλοι, οἱ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\rho$ · τότε ἡ μετάθεσις, ποὺ ἀπαρχῆς ἔχομεν : $\ldots\alpha\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\rho\,\beta\ldots$ θὰ γίνῃ : $\ldots\beta\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\rho\,\alpha\ldots$ Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ διαφοραί, ποὺ παράγονται ἀπὸ τοὺς πρὶν ἀπὸ τὸ α καὶ ἀπὸ τοὺς ἔπειτα ἀπὸ τὸ β ἀριθμοὺς (ἂν ὑπάρχουν τοιοῦτοι εἰς τὴν μετάθεσίν μας) μένουν αἱ ἴδιαι· ἀλλάσσουν ὅμως σημεῖον αἱ διαφοραί :

$$\begin{array}{lcl} \rho \quad \alpha-\gamma_1,\ \alpha-\gamma_2,\ldots,\alpha-\gamma_\rho, & & \gamma_1-\alpha,\ \gamma_2-\alpha,\ldots,\gamma_\rho-\alpha, \\ \rho \quad \gamma_1-\beta,\ \gamma_2-\beta,\ldots,\gamma_\rho-\beta, & \text{καὶ γίνονται} & \beta-\gamma_1,\ \beta-\gamma_2,\ldots,\beta-\gamma_\rho, \\ 1 \qquad \alpha-\beta, & & \beta-\alpha\cdot \end{array}$$

2ρ+1

ἀλλάσσουν λοιπὸν σημεῖον $2\rho+1$ (δηλ. *περιττὸς* ἀριθμὸς) διαφοραί· ὥστε καὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαφορῶν ἀλλάσσει σημεῖον.

27. Εἶναι φανερὸν 1) ὅτι κάθε μετάθεσις τῶν ν ἀριθμῶν εἰμπορεῖ νὰ παραχθῇ ἀπὸ τὴν *πρώτην* (τὴν $123\ldots\nu$), μὲ διαδοχικὰς ἀνταλλαγὰς τῶν ἀριθμῶν της ἀνὰ δύο· καὶ 2) ὅτι κάθε μετάθεσις εἰμπορεῖ νὰ παραχθῇ ἀπὸ κάθε ἄλλην, μὲ διαδοχικὰς ἀνταλλαγὰς τῶν ἀριθμῶν της ἀνὰ δύο.

28. *Δύο μεταθέσεις, ποὺ παράγονται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην μὲ ἄρτιον πλῆθος ἀνταλλαγῶν τῶν ἀριθμῶν των, εἶναι «ὁμόσημοι» (δηλ. καὶ αἱ δύο θετικαὶ ἢ καὶ αἱ δύο ἀρνητικαί)· ἂν ὅμως παράγωνται μὲ περιττὸν πλῆθος ἀνταλλαγῶν, εἶναι «ἑτερόσημοι».* Αὐτὸ εἶναι φανερόν, ἀφοῦ εἰς κάθε ἀνταλλαγὴν ἀλλάσσει σημεῖον ἡ μετάθεσις. Π. χ. αἱ μεταθέσεις 4231, 2341 εἶναι ὁμόσημοι· αἱ δὲ 2413 καὶ 2143 ἑτερόσημοι.

β') Ὁρισμὸς τῆς ὁριζούσης.

29. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ν^2 ἀριθμοὺς γραμμένους εἰς ν σειρὰς ὁριζοντίας («γραμμὰς») καὶ ν καθέτους («στήλας»), ὡς ἑξῆς :

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\ldots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\ldots & \alpha_{3\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{array}\right| , \qquad (1)$$

ὅπου ὁ πρῶτος δείκτης κάθε γράμματος δεικνύει τὴν γραμμήν, ποὺ περιέχει τὸν ἀριθμόν, ὁ δὲ δεύτερος τὴν στήλην. Ὀνομάζομεν τότε *ὁρίζουσαν τοῦ συστήματος τῶν ν^2 ἀριθμῶν* τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γινομένων, ποὺ εἰμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς λαμβανομένους ἀνὰ ν μὲ τοιοῦτον τρόπον ὅμως, ὥστε *οἱ ἀριθμοὶ κάθε γινομένου νὰ εἶναι ὁ καθεὶς ἀπὸ ἄλλην γραμμὴν καὶ ἀπὸ ἄλλην στήλην*· καὶ ὅπου κάθε γινόμενον λαμβάνεται *θετικῶς μέν, ἂν αἱ δύο μεταθέσεις τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων δεικτῶν* τῶν παραγόντων του εἶναι ὁμόσημοι ἀρνητικὸν δέ, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν γινομένων τούτων, δηλ. ἡ *ὁρίζουσα* τῶν ν^2 ἀριθμῶν, γράφεται *συμβολικῶς* κατὰ τὸν προηγούμενον *σύντομον* τρόπον (1). Οἱ ν^2 ἀριθμοὶ $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται *στοιχεῖα* τῆς ὁριζούσης, καὶ ὁ ἀριθμὸς ν *βαθμός* της (διότι κάθε ὅρος της ἔχει ν παράγοντας). Τὰ ἐπὶ τῶν δύο διαγωνίων εὑρισκόμενα στοιχεῖα ἀποτελοῦν ἀντιστοίχως τὴν *πρώτην* καὶ τὴν *δευτέραν διαγώνιον* τῆς ὁριζούσης, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἐπὶ τῆς α΄ διαγωνίου στοιχείων, τὸ $\alpha_{11}.\alpha_{22}\ldots.\alpha_{\nu\nu}$ (ποὺ εἶναι πάντοτε θετικὸν) λέγεται *πρῶτος ὅρος* τῆς ὁριζούσης.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον, ποὺ ἔχει κάθε γινόμενον, πρέπει βέβαια νὰ εἶναι *ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν παραγόντων του*· καὶ πραγματικῶς εἶναι, διότι ἡ ἀνταλλαγὴ δύο παραγόντων παράγει ἀπὸ μίαν ἀνταλλαγὴν καὶ εἰς τὴν α΄ καὶ εἰς τὴν β΄ μετάθεσιν τῶν δεικτῶν τῶν παραγόντων· αἱ δύο λοιπὸν αὐταὶ μεταθέσεις μένουν πάλιν ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι (καθὼς ἦσαν ἀπαρχῆς).

30. *Κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ἓν (καὶ μόνον ἓν) ἀπὸ τὰ στοιχεῖα κάθε στήλης (καθὼς καὶ κάθε γραμμῆς)*· διότι πρέπει νὰ περιέχῃ ν παράγοντας ἀπὸ διαφορετικὰς στήλας λαμβανομένους καὶ αἱ στῆλαι εἶναι μόνον ν. Κάθε ὅρος λοιπὸν τῆς ὁριζούσης εἶναι τῆς μορφῆς : $\alpha_{1a}.\alpha_{2b}.\alpha_{3c}\ldots\alpha_{\nu r}$ (ὅπου τὰ γράμματα a, b, c, . . ., r παριστάνουν τοὺς ν ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . . , ν γραμμένους ὅπως τύχῃ).

31. Ἡ ἁπλουστέρα ὁρίζουσα εἶναι ἡ *τοῦ β΄ βαθμοῦ* : $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$, δηλ. ἡ παράστασις ; $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$.

Ἡ ὁρίζουσα *τοῦ γ΄ βαθμοῦ*: $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν παράστασιν : $\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}$

32. ***Ἐλάσσονες ὁρίζουσαι.***—Ἂν εἰς μίαν ὁρίζουσαν παραλείψωμεν μερικὰς στήλας καὶ ἄλλας τόσας γραμμάς, παράγεται ὁρίζουσα *μικροτέρου βαθμοῦ* (ν—ρ, ἂν παραλείψωμεν ρ στήλας καὶ ρ γραμμάς),

ποὺ λέγεται *ἐλάσσων* (ὁρίζουσα) τῆς πρώτης. Ἂν παραλείψωμεν μόνον μίαν στήλην καὶ μίαν γραμμήν, παράγεται ἐλάσσων, ποὺ λέγεται *ἀντίστοιχος* τοῦ κοινοῦ στοιχείου τῶν δύο σειρῶν, ποὺ παρελείψαμεν.

γ΄) Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.

33. 1η) *Ἡ ὁρίζουσα δὲν ἀλλάσσει, ἂν αἱ στῆλαί της γίνουν γραμμαὶ καὶ αἱ γραμμαὶ στῆλαι,* δηλ. εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \dots & \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \dots & \alpha_{\nu 2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Πραγματικῶς, καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὰς ὁριζούσας αὐτὰς ἀποτελοῦνται (σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν) ἀπὸ τὰ ἴδια γινόμενα καὶ μὲ τὸ ἴδιον σημεῖον.

34. 2^{α}) *Ἡ ὁρίζουσα ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαί της ἀνταλλαχθοῦν.*

Ἀπόδειξις. Ἂν α, β, γ, . . . εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα τῆς λ γραμμῆς καὶ Α, Β, Γ, . . . τὰ τῆς $\mu^{\underline{\text{οστῆς}}}$, ἂς λάβωμεν ἕνα τυχόντα ὅρον τῆς ὁριζούσης, τὸν . . . βΓ . . ., ὅπου αἱ στιγμαὶ παριστάνουν στοιχεῖα τῶν ἄλλων γραμμῶν. Ὁ ὅρος αὐτὸς θὰ ὑπάρχῃ καὶ εἰς τὴν νέαν ὁρίζουσαν (ποὺ θά μας δώσῃ ἡ ἀνταλλαγὴ τῶν δύο γραμμῶν)· εἰς τὴν α΄ ὅμως ὁρίζουσαν τὸ σημεῖόν του τὸ ὁρίζουν οἱ δεῖκται : . . . λ2μ3 . . ., ἐνῷ εἰς τὴν β΄ οἱ : . . . μ2λ3 . . ., ἤλλαξε δηλ. ἡ *σχέσις σημείου* τῶν δύο μεταθέσεων (διότι ἡ πρώτη ἤλλαξε σημεῖον, ἐνῷ ἡ ἄλλη ἔμεινεν ἡ ἰδία)· ὥστε οἱ δύο ἀντίστοιχοι ὅροι ἤλλαξαν σημεῖον· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἴδιον συμβαίνει διὰ κάθε ὅρον, συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλη ἡ ὁρίζουσα ἤλλαξε σημεῖον. Ἐννοεῖται, ὅτι ὁμοία ἀπόδειξις γίνεται, καὶ ὅταν ἀνταλλαχθοῦν δύο στῆλαι.—Ἔχομεν π. χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1\beta_1 \\ \alpha_2\gamma_2\beta_2 \\ \alpha_3\gamma_3\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1\alpha_1\beta_1 \\ \gamma_2\alpha_2\beta_2 \\ \gamma_3\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_1\gamma_1 \\ \beta_2\alpha_2\gamma_2 \\ \beta_3\alpha_3\gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\alpha_1 \\ \beta_2\gamma_2\alpha_2 \\ \beta_3\gamma_3\alpha_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \gamma_1\beta_1\alpha_1 \\ \gamma_2\beta_2\alpha_2 \\ \gamma_3\beta_3\alpha_3 \end{vmatrix}.$$

35. 3^{η}) *(Πόρισμα τῆς $2^{\alpha\varsigma}$): Ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μὲ τὸ 0, ἂν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαί της εἶναι αἱ ἴδιαι.*

Διότι, ἂν ὀνομασθῇ συντόμως Δ, θὰ εἶναι : $\Delta = -\Delta$, $2\Delta = 0$ καὶ $\Delta = 0$.

Π. χ. εἶναι : $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 7 & 11 & 7 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

36. 4^{η}) *Ἂν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης πολλαπλασιασθοῦν ὅλα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ὁλόκληρος ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.*

Δηλ. εἶναι π. χ. $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \varrho\alpha_{12} & \alpha_{13}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \varrho\alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \varrho \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\ldots\alpha_{\nu\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\ldots{}_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$

Ἀπόδειξις. Κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης περιέχει ἓν στοιχεῖον τῆς πολλαπλασιαζομένης γραμμῆς καὶ μόνον ἕν· πολλαπλασιάζεται λοιπὸν κάθε ὅρος της, ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμά των, δηλ. ἡ ὁρίζουσα. Ἔχομεν π. χ.

$$\begin{vmatrix} 48 & 7 & 2 \\ 36 & 3 & 8 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ καὶ : } \begin{vmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 44 & 8 & 20 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 . 0 = 0.$$

37. 5^{η}) *Ἂν ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς α′ στήλης (ἢ τῆς α′ γραμμῆς) μιᾶς ὁριζούσης, πλὴν τοῦ α, εἶναι =0, ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐλάσσονά του.* Δηλαδή :

$$(\varkappa) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\ldots\alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22}\ldots\alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_{\nu 2}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23}\ldots\alpha_{2\nu} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\ldots\alpha_{3\nu} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Ἀπόδειξις. Κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης ἔχει ὡς παράγοντα ἓν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς α′ στήλης· ἀλλὰ οἱ ὅροι, ποὺ περιέχουν τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα, μηδενίζονται καὶ μένουν μόνον οἱ ὅροι, ποὺ ἔχουν τὸ α_{11}. Αὐτοὶ ὅμως ὅλοι ἀποτελοῦν τὸ β′ μέλος τῆς ἰσότητος (κ)· διότι α′) κάθε ὅρος ἀπὸ αὐτοὺς ὑπάρχει εἰς τὸ β′ μέλος τῆς (κ) μὲ τὸ ἴδιον σημεῖον· π. χ. ὁ ὅρος $\alpha_{11}\, \alpha_{2\sigma}\, \alpha_{3\tau} \ldots \alpha_{\nu\pi}$ ὑπάρχει καὶ εἰς τὸ β′ μέλος τῆς (κ), διότι ἡ ἐλάσσων ἔχει τὸν ὅρον $\alpha_{2\sigma}\, \alpha_{3\tau}\, \alpha_{\nu\pi} \ldots$ μὲ τὸ ἴδιον προφανῶς σημεῖον· καὶ β′) ἀντιστρόφως : κάθε ὅρος τῆς ἐλάσσονος εὑρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, πολλαπλασιασμένος μὲ τὸν κοινὸν παράγοντα α_{11}. — Ὁμοία προφανῶς εἶναι ἡ ἀπόδειξις *καὶ διὰ γραμμήν.*

Ἔχομεν π. χ. $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 12 \,.\, 1 = 12.$

38. 6^{η} *(Πόρισμα τῆς 5ης): Ἂν γενικώτερον εἶναι ἴσα μὲ τὸ 0 ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς τυχούσης γραμμῆς τῆς ὁριζούσης Δ, πλὴν ἑνός, π. χ. τοῦ $\alpha_{\lambda\mu}$, ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha_{\lambda\mu}$ ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχόν του ἐλάσσονα $\Delta_{\lambda\mu}$ καὶ ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$.*

Ἀπόδειξις. Μὲ $\lambda-1$ διαδοχικὰς ἀνταλλαγὰς τῆς λ γραμμῆς καὶ κάθε ἄλλης ὑπεράνω της εὑρισκομένης φέρομεν τὰ στοιχεῖά της : $\alpha_{\lambda 1}, \alpha_{\lambda 2}, \ldots \ldots, \alpha_{\lambda\mu}, \ldots, \alpha_{\lambda\nu}$ εἰς τὴν α΄ γραμμήν· ἔπειτα πάλιν μὲ $\mu-1$ διαδοχικὰς ἀνταλλαγὰς τῆς μυοστῆς στήλης καὶ τῶν προηγουμένων της ἔρχονται τὰ στοιχεῖά της : $\alpha_{\lambda\mu}, \alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu} \ldots \alpha_{\nu\varrho}$ εἰς τὴν α΄ στήλην *καὶ γίνεται πρῶτον τὸ στοιχεῖον* $\alpha_{\lambda\mu}$ (ἐνῷ ἡ σχετικὴ θέσις τῶν ἄλλων, *μὴ ὁμοστοίχων του*, στοιχείων δὲν ἀλλάσσει καθόλου). Ἔγιναν ὅμως τότε $\lambda+\mu-2$ ἀνταλλαγαί, ἑπομένως ἡ ὁρίζουσα ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu-2}$ ἢ καὶ ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$. Ἔχομεν λοιπὸν $\Delta=(-1)^{\lambda+\mu} . \alpha_{\lambda\mu} . \Delta_{\lambda\mu}$.

Π. χ. εἶναι : $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} . 5 . \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \,.\, 10 = 50.$

39. 7^{η}) *Ἂν εἰς μίαν ὁρίζουσαν πολλαπλασιάσωμεν κάθε στοιχεῖον μιᾶς γραμμῆς (ἢ στήλης) ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχόν του ἐλάσσονα καὶ λάβωμεν τὰ μὲν γινόμενα τῶν στοιχείων «ἀρτίας τάξεως» μὲ τὸ σημεῖον, ποὺ ἔχουν, τὰ δὲ «περιττῆς» μὲ τὸ ἀντίθετον, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ ὅλην τὴν ὁρίζουσαν.*

Ἀρτία λέγεται ἡ *τάξις* ἑνὸς στοιχείου τῆς ὁριζούσης, ὅταν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ α΄ στοιχείου α_{11} ὑπάρχει ἄρτιος ἀριθμὸς *«διαστημάτων»* (δηλ. *μεταβάσεων* ἀπὸ ἓν στοιχεῖον εἰς τὸ ὁριζοντίως ἢ καθέτως πλησιέστερόν του)· *περιττὴ* δέ, ἂν περιττὸς ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ κάθε ὅρος τῆς ὁριζούσης Δ ἔχει ὡς παράγοντα ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον ἀπὸ κάθε στήλην, ἂν λάβωμεν τὴν μυοστὴν ἐν γένει στήλην, θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha) \quad \Delta=\alpha_{1\mu}\Delta_{1\mu}+\alpha_{2\mu} . \Delta_{2\mu}+\ldots+\alpha_{\nu\mu}\Delta_{\nu\mu},$$

ὅπου τὰ $\Delta_{1\mu}, \Delta_{2\mu}, \ldots .$ δὲν περιέχουν κανὲν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα $\alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu}, \ldots$ Ἂν ὅμως ὑποθέσωμεν ὅλα τὰ $\alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu}, \ldots$, πλὴν ἑνός, τοῦ $\alpha_{\lambda\mu}$ π. χ., $=0$, θὰ εἶναι : $\Delta=\alpha_{\lambda\mu}\Delta_{\lambda\mu}$· ὥστε (κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα) τὸ $\Delta_{\lambda\mu}$ *πρέπει* νὰ εἶναι ἡ ἐλάσσων ἡ ἀντίστοιχος τοῦ στοιχείου $\alpha_{\lambda\mu}$, πολλαπλασιασμένη ἐπὶ $(-1)^{\lambda+\mu}$. Ὥστε ὅλοι οἱ παράγοντες $\Delta_{1\mu}$, $\Delta_{2\mu}$,… τῆς ἰσότητος (α) εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἐλάσσονες τῶν στοιχείων $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$,… *Ἀνελύθη λοιπὸν ἡ ὁρίζουσα* τοῦ ν βαθμοῦ Δ εἰς ν ὁριζούσης τοῦ ν—1 βαθμοῦ. Ἡ ἀνάλυσις αὐτὴ λέγεται *ἀνάπτυξις* τῆς ὁριζούσης *κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης*. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὸ ἴδιον ἀληθεύει καὶ διὰ τὰς γραμμάς.

Παριστάνοντες μὲ τὸ + τὰς θέσεις τῶν στοιχείων τῆς ἀρτίας τάξεως καὶ μὲ τὸ — τῆς περιττῆς, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς πίνακας διὰ τὸν κανονισμὸν τῶν σημείων τῶν ὅρων τῶν ἀναπτυγμάτων :

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} \text{ κτλ.}$$

Π. χ. $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\beta_1 . \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_2 . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_3 . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ · ἐπίσης :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \alpha_2 . \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \beta_2 . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} - \gamma_2 . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \delta_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} \text{κτλ.}$$

40. Διὰ τὸν εὔκολον ὑπολογισμὸν τῶν ὁριζουσῶν τοῦ γ΄ βαθμοῦ χρησιμεύει ὁ ἑξῆς κανὼν τοῦ Sarrus *(Σαρρύς)* :

Ἂν ἔχωμεν τὴν ὁρίζουσαν : $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, ἐπαναλαμβάνομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς δύο πρώτας στήλας (ἢ πρὸς τὰ κάτω τὰς δύο πρώτας γραμμάς) : $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}$ καὶ ἔπειτα χαράσσομεν τὰς διαγωνίους καὶ τὰς παραλλήλους των. Τὰ γινόμενα τότε τῶν ἐπὶ τῆς πρώτης διαγωνίου καὶ τῶν δύο παραλλήλων της στοιχείων μᾶς δίδουν τοὺς τρεῖς *θετικοὺς* ὅρους τῆς ὁριζούσης, τὰ δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου καὶ τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων της στοιχείων, τοὺς τρεῖς *ἀρνητικοὺς* ὅρους. (Ἀνάλογοι κανόνες διὰ τὰς ὁριζούσας γενικῶς τοῦ ν βαθμοῦ ἔχουν δοθῆ ἀπὸ τὸν Bonolis *(Μπονόλης)* καὶ τοῦ Teixeira *(Τεϊσέϊρα)*).

δ') Πράξεις ἐπὶ τῶν ὁριζουσῶν.

1) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

41. Τὸ (ἀλγεβρικὸν) *ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων ὁριζουσῶν *δὲν* εἰμπορεῖ *ἐν γένει* νὰ γραφῇ καὶ αὐτὸ ὡς ὁρίζουσα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν προσθετέων. Μίαν *μερικὴν ἐξαίρεσιν* μᾶς δίδει ἡ ἑξῆς πρότασις:

Ἂν κάθε στοιχεῖον μιᾶς γραμμῆς (ἢ στήλης) εἶναι ἄθροισμα δύο (ἢ καὶ περισσοτέρων) ἀριθμῶν, ἡ ὁρίζουσα εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο (ἢ περισσοτέρων) ὁριζουσῶν, ποὺ εὑρίσκομεν, ἂν παραλείψωμεν εἰς αὐτὴν πρῶτα τοὺς α' προσθετέους τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς αὐτῆς (ἢ στήλης) καὶ ἔπειτα κατὰ σειρὰν τοὺς β', τοὺς γ' κτλ. Δηλ. εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} \ldots \alpha'_{1\lambda} + \alpha''_{1\lambda} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} \ldots \alpha'_{2\lambda} + \alpha''_{2\lambda} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha'_{\nu\lambda} + \alpha''_{\nu\lambda} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} \ldots \alpha'_{1\lambda} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} \ldots \alpha'_{2\lambda} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha'_{\nu\lambda} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{12} \ldots \alpha''_{1\lambda} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} \ldots \alpha''_{2\lambda} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha''_{\nu\lambda} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν ὀνομάσωμεν τὰς ὁριζούσας τῆς προηγουμένης ἰσότητος κατὰ σειρὰν Δ, Δ', Δ'', θὰ εἶναι:

$\Delta = (\alpha'_{1\lambda} + \alpha''_{1\lambda})\Delta_{1\lambda} + (\alpha'_{2\lambda} + \alpha''_{2\lambda})\Delta_{2\lambda} + \ldots + (\alpha'_{\nu\lambda} + \alpha''_{\nu\lambda})\Delta_{\nu\lambda}$,

$\Delta' = \alpha'_{1\lambda}\Delta_{1\lambda} + \alpha'_{2\lambda}\Delta_{2\lambda} + \ldots + \alpha'_{\nu\lambda}\Delta_{\nu\lambda}$, $\Delta'' = \alpha''_{1\lambda}\Delta_{1\lambda} + \alpha''_{2\lambda}\Delta_{2\lambda} + \ldots + \alpha''_{\nu\lambda}\Delta_{\nu\lambda}$· ἑπομένως πραγματικῶς: $\Delta = \Delta' + \Delta''$.

Ἐννοεῖται, ὅτι τὸ ἴδιον ἀληθεύει, καὶ ἂν οἱ προσθετέοι κάθε στοιχείου μιᾶς στήλης εἶναι περισσότεροι ἀπὸ 2.

42. **Πόρισμα.** *Ἡ ὁρίζουσα μένει ἡ ἰδία, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς της (ἢ στήλης) προσθέσωμεν κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα ἄλλης γραμμῆς της (ἢ στήλης), πολλαπλασιασμένα ἐπὶ ἕνα τυχόντα ἀριθμὸν ϱ.*

Πραγματικῶς ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} .. \alpha_{1\lambda} + \varrho\alpha_{1\sigma} .. \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} .. \alpha_{2\lambda} + \varrho\alpha_{2\sigma} .. \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} .. \alpha_{\nu\lambda} + \varrho\alpha_{\nu\sigma} .. \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} .. \alpha_{1\lambda} .. \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} .. \alpha_{2\lambda} .. \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} .. \alpha_{\nu\lambda} .. \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} \alpha_{11} .. \alpha_{1\sigma} .. \alpha_{1\sigma} .. \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} .. \alpha_{2\sigma} .. \alpha_{2\sigma} .. \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} .. \alpha_{\nu\sigma} .. \alpha_{\nu\sigma} .. \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} .. \alpha_{1\lambda} .. \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} .. \alpha_{2\lambda} .. \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} .. \alpha_{\nu\lambda} .. \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

2) Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

43. *Τὸ γινόμενον δύο ὁριζουσῶν τοῦ ἰδίου βαθμοῦ εἰμπορεῖ πάντοτε νὰ γραφῇ ὡς ὁρίζουσα,* ποὺ παράγεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν πολλαπλα-

σιαζομένων ὁριζουσῶν, καθὼς δεικνύει ἡ ἑπομένη ἰσότης:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}\ldots\alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1\nu} \\ A_{21}\ldots A_{2\nu} \\ \ldots\ldots \\ A_{\nu1}\ldots A_{\nu\nu} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11}A_{11}+\ldots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu} & \alpha_{11}A_{21}+\ldots+\alpha_{1\nu}A_{2\nu}\ldots & \alpha_{11}A_{\nu1}+\ldots+\alpha_{1\nu}A_{\nu\nu} \\ \alpha_{21}A_{11}+\ldots+\alpha_{2\nu}A_{1\nu} & \alpha_{21}A_{21}+\ldots+\alpha_{2\nu}A_{2\nu}\ldots & \alpha_{21}A_{\nu1}+\ldots+\alpha_{2\nu}A_{\nu\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}A_{11}+\ldots+\alpha_{\nu\nu}A_{1\nu} & \alpha_{\nu1}A_{21}+\ldots+\alpha_{\nu\nu}A_{2\nu}\ldots & \alpha_{\nu1}A_{\nu1}+\ldots+\alpha_{\nu\nu}A_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

δηλαδή: *πρῶτον στοιχεῖον τῆς νέας ὁριζούσης εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ σειρὰν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς α΄ γραμμῆς τῆς α΄ ὁριζούσης ἐπὶ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ γραμμῆς τῆς β΄, δεύτερον στοιχεῖον, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ σειρὰν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς α΄ γραμμῆς τῆς α΄ ὁριζούσης ἐπὶ τὰ στοιχεῖα τῆς β΄ γραμμῆς τῆς β΄ κτλ. Τὴν β΄ γραμμὴν τῆς νέας ὁριζούσης κατασκευάζομεν μὲ τὸν ἴδιον κανόνα ἀπὸ τὴν β΄ γραμμὴν τῆς α΄ ὁριζούσης, τὴν γ΄ ἀπὸ τὴν γ΄ κτλ.* Ἐννοεῖται δέ, ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ λάβωμεν καὶ τὰς στήλας ἀντὶ τῶν γραμμῶν. Τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς θά την ἴδωμεν κατόπιν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων.

β΄) Ἂν αἱ ὁρίζουσαι εἶναι *διαφορετικῶν βαθμῶν*, τοῦ μ ἡ α΄ καὶ τοῦ ν ἡ β΄, καὶ εἶναι μ>ν, *εἰμποροῦμεν ν᾽ ἀναβιβάσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς β΄ ὁριζούσης ἀπὸ ν εἰς μ, χωρὶς καμίαν βλάβην της*, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & \alpha_{11} & \ldots\alpha_{1\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_{\nu1} & \ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\nu} \\ . & . & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_{\nu1}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \text{κτλ.}$$

Ὥστε *γενικῶς*:

Τὸ γινόμενον δύο (καὶ ἑπομένως καὶ περισσοτέρων) ὁριζουσῶν εἰμπορεῖ πάντοτε νὰ γραφῇ ὡς ὁρίζουσα.

44. *Τὸ πηλίκον δύο ὁριζουσῶν εἰμπορεῖ ἐπίσης πάντοτε νὰ γραφῇ ὡς ὁρίζουσα.* Διότι, ἂν θέσωμεν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1\nu} \\ \ldots\ldots \\ A_{\nu1}\ldots A_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11}\ldots x_{1\nu} \\ \ldots\ldots \\ x_{\nu1}\ldots x_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

(ὅπου x_{11}, x_{12}, ... τὰ *ἄγνωστα* στοιχεῖα τοῦ πηλίκου), θὰ ἔχωμεν (κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11}x_{11}+\dots+A_{1\nu}x_{1\nu} \dots A_{11}x_{\nu 1}+\dots+A_{1\nu}x_{\nu\nu} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{\nu 1}x_{11}+\dots+A_{\nu\nu}x_{\nu\nu} \dots A_{\nu 1}x_{\nu 1}+\dots+A_{\nu\nu}x_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

καὶ ἑπομένως: $A_{11}x_{11}+\dots+A_{1\nu}x_{1\nu}=\alpha_{11}$, $A_{11}x_{21}+\dots+A_{1\nu}x_{2\nu}=$ $=\alpha_{12}, \dots, A_{\nu 1}x_{\nu 1}+\dots+A_{\nu\nu}x_{\nu\nu}=\alpha_{\nu\nu}$. Ἂν λοιπὸν αἱ ν^2 αὗται ἐξισώσεις λυθοῦν πρὸς τοὺς ἀγνώστους $x_1, x_2, \dots$ (κατὰ τὸν γενικὸν τρόπον, ποὺ θὰ μάθωμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων), θά μας δώσουν τὰ ζητούμενα στοιχεῖα τοῦ πηλίκου.

Ἀσκήσεις.

Α΄) Ἐφαρμογαί.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ὁρίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$ διαιρεῖται διὰ $\alpha+\beta+\gamma$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ὁρίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3x^2+\beta_3x+\gamma_3 \end{vmatrix}$$ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὸ x.

3) $$\begin{vmatrix} \alpha_1-\beta_1 & \alpha_1-\beta_2 & \alpha_1-\beta_3 \\ \alpha_2-\beta_1 & \alpha_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_3 \\ \alpha_3-\beta_1 & \alpha_3-\beta_2 & \alpha_3-\beta_3 \end{vmatrix}=0.$$

4) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὁρίζουσαι:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1+\beta & 1 & 1+\gamma \\ 1 & 1+\delta & 1 \end{vmatrix}.$$

5) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁρίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \eta\mu(\alpha+\beta) & \eta\mu(\beta+\gamma) & \eta\mu(\gamma+\delta) & \eta\mu(\delta+\alpha) \\ \eta\mu(\alpha-\beta) & \eta\mu(\beta-\gamma) & \eta\mu(\gamma-\delta) & \eta\mu(\delta-\alpha) \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) & \sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma) & \sigma\upsilon\nu(\gamma+\delta) & \sigma\upsilon\nu(\delta+\alpha) \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) & \sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma) & \sigma\upsilon\nu(\gamma-\delta) & \sigma\upsilon\nu(\delta-\alpha) \end{vmatrix}.$$

6) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & 1 \\ 8 & x & 6 \\ 11 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

7) Ἡ ὁρίζουσα : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 1 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & x^3 \end{vmatrix}$ εἶναι τέλειος κύβος.

8) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὁρίζουσαι :

$$\begin{vmatrix} 1 & \eta\mu\alpha & \eta\mu\beta \\ \eta\mu\alpha & 1 & \eta\mu\gamma \\ \eta\mu\beta & \eta\mu\gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varepsilon\varphi\alpha & \sigma\varphi\alpha & 1 \\ \varepsilon\varphi\beta & \sigma\varphi\beta & 1 \\ \varepsilon\varphi\gamma & \sigma\varphi\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

9) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁρίζουσα : $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ -\beta & -\delta & 0 & \zeta \\ -\gamma & -\varepsilon & -\zeta & 0 \end{vmatrix}.$

10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu-1}. \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (\nu-1)\,(-1)^{\nu-1}.$

$\begin{vmatrix} -1 & +1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & -1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & +1 & -1 & \dots & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & +1 & +1 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu-1}.2^{\nu-1}.(\nu-2).$

(ὁρίζουσαι τοῦ Fouret (*Φουρὲ*)).

Β΄) Θεωρίαι.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς ὁριζούσης εἶναι πάντοτε *συμμετρικὴ* ὁρίζουσα (δηλ. τὰ στοιχεῖά της τὰ κείμενα ἀνὰ δύο συμμετρικῶς πρὸς τὴν α΄ διαγώνιόν της εἶναι ἴσα).

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῶν 9 συνημιτόνων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τρισορθογωνίου συστήματος ἀξόνων πρὸς ἄλλο ἐπίσης τρισορθογώνιον εἶναι ± 1.

3) Νὰ δειχθῇ μὲ τὰς ὁριζούσας ἡ *ταὐτότης τοῦ Lagrange* : (1)

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)^2=$$
$$(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2.$$

$$\text{Ἔχομεν}: \quad \Delta^2 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\alpha_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix} \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}+\beta_1\begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\alpha_2\end{vmatrix}+\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix} \\ \alpha_2\alpha_1+\beta_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1 & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 & \alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}+\beta_2\begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\beta_2\end{vmatrix}+\gamma_2\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix} \\ \alpha_1\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}+\ldots, & \alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}+\ldots\ldots & \begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\alpha_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix}^2 \end{vmatrix} \to \Delta$$

ἢ καί :

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 & 0 \\ \alpha_2\alpha_1+\beta_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1 & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix},$$

$$\text{δηλ.}\ \Delta^2 = [\,(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\,(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2\,]\Delta$$

καὶ ἑπομένως, ἂν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ Δ, εὑρίσκομεν τὴν ταὐτότητα τοῦ Lagrange (1).

4) Νὰ ὑπολογισθῇ μὲ ὅμοιον τρόπον ἡ ὁρίζουσα :

$$2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\delta_1\\ \beta_2\gamma_2\delta_2\\ \beta_3\gamma_3\delta_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\gamma_1\delta_1\alpha_1\\ \gamma_2\delta_2\alpha_2\\ \gamma_3\delta_3\alpha_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\delta_1\alpha_1\beta_1\\ \delta_2\alpha_2\beta_2\\ \delta_3\alpha_3\beta_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\gamma_1\\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\\ \alpha_3\beta_3\gamma_3\end{vmatrix} \end{vmatrix}^2.$$

5) ***Ἀντίστροφοι ὁρίζουσαι.*** Ἂν αἱ ἀντίστοιχοι *ἀλγεβρικαὶ* (δηλ. μὲ τὸ σημεῖον ποὺ ἔχουν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα) ἐλάσσονες τῶν ν^2 στοιχείων α_{12}, α_{13}, . . . μιᾶς ὁριζούσης δ παρασταθοῦν μὲ τὰ ν^2 γράμματα A_{12}, A_{13} . . . καὶ κατασκευασθῇ ἀπὸ αὐτὰ νέα ὁρίζουσα, λεγομένη *ἀντίστροφος* τῆς δ, ἡ ἑξῆς :

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \Delta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \Delta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_{11} \ldots . A_{1\nu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{\nu 1} \ldots . A_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

νὰ δειχθοῦν αἱ ἑξῆς προτάσεις:

α′) $\Delta = \delta^{\nu-1}$.

β′) *Ἂν ἡ δ =0, καὶ ἡ Δ θὰ εἶναι =0, καθὼς καὶ ὅλαι αἱ ἐλάσσονές της μέχρι τοῦ β′ βαθμοῦ.*

γ′) *Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἐλάσσονα* $M \equiv \begin{vmatrix} A_{11} \ldots . A_{1\mu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{\mu 1} \ldots . A_{\mu\mu} \end{vmatrix}$ τῆς Δ, *θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:* $M = N . \delta^{\mu-1}$,

$$\text{ὅπου } N \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{\mu+1,\,\mu+1} \ldots . \alpha_{\nu,\,\mu+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu+1,\,\nu} \ldots\ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ὅμοιαι δὲ σχέσεις ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἄλλας ἐλάσσονας.

Διὰ δὲ $\mu = \nu - 1$, *ἔχομεν:* $\begin{vmatrix} A_{11} \ldots \ldots A_{1,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{\nu-1,1} \ldots A_{\nu-1,\nu-1} \end{vmatrix} = \alpha_{\nu\nu} . \delta^{\nu-1}$.

δ′) *Ἂν κατασκευάσωμεν καὶ τὴν ἀντίστροφον D τῆς Δ, θὰ εἶναι* $D = \delta^{(\nu-1)^2} = \delta^{\nu^2-2\nu+1}$. Εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ δ ἀντίστροφος τῆς Δ.

ε′) *Ἡ ὁρίζουσα ϑ, ποὺ εἶναι τὸ γινόμενον δύο ὁριζουσῶν δ καὶ* δ_1 *τοῦ ἰδίου βαθμοῦ, ἔχει ἀντίστροφον τὴν ὁρίζουσαν Θ, ποὺ εἶναι γινόμενον τῶν δύο ἀντιστρόφων Δ καὶ* Δ_1 *τῶν δ καὶ* δ_1.

6) ***Κυβικαὶ ὁρίζουσαι***. [Τὴν ἰδέαν τῆς *κυβικῆς* ὁριζούσης εἶχε πρῶτος ὁ Van der Monde (*Βὰν ντὲρ Μόντε*), πρῶτος ὅμως, ποὺ ἐπεχείρησε νὰ μορφώσῃ τὴν θεωρίαν της, εἶναι ὁ De Gasparis (*Ντὲ Γκάσπαρις*), 1861, καὶ κατόπιν ὁ Dahlander (*Νταλάντερ*), καὶ ἄλλοι πολλοί].

Ἂς θεωρήσωμεν ν^3 στοιχεῖα α_{ijk}, ὅπου οἱ 3 δεῖκται i, j, k, εἰμποροῦν νὰ λάβουν τὰς τιμὰς 1,2,3,...,ν, καὶ ἂς λάβωμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον τῶν ν παραγόντων: $\alpha_{111} . \alpha_{222} . \alpha_{333} \ldots \alpha_{\nu\nu\nu}$. Ἂν εἰς τὸ γινόμενον αὐτὸ διατηρήσωμεν *σταθεροὺς* κατ᾿ ἀρχὰς τοὺς *πρώτους* δείκτας καὶ μεταβάλωμεν τοὺς δευτέρους καθ᾿ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, καὶ τοὺς τρίτους ἐπίσης, παράγονται ν!ν! ἢ $(ν!)^2$ τοιαῦτα γινόμενα. *Κυβικὴ ὁρίζουσα βαθμοῦ ν ὀνομάζεται τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν γινομένων, ὅπου τὸ σημεῖον τοῦ καθενὸς γινομένου εἶναι + ἢ —, καθόσον εἶναι ἄρτιον ἢ περιττὸν τὸ ἄθροισμα τῶν «ἀντιστροφῶν», ποὺ παρουσιάζει α΄) ἡ σειρὰ τῶν β΄ καὶ β΄) ἡ σειρὰ τῶν γ΄ δεικτῶν.* («*Ἀντιστροφὴν*» παρουσιάζουν δύο δεῖκται j καὶ k, ὅταν ἡ διαφορὰ j—k εἶναι *ἀρνητική*). Μία θεμελιώδης διαφορὰ μεταξὺ τῶν *κοινῶν* ἢ «*ἐπιπέδων*» ὁριζουσῶν καὶ τῶν *κυβικῶν* εἶναι τὸ ὅτι ἀπὸ τὰ $ν^2$ στοιχεῖα $α_{ij}$ παράγεται *μόνον μία* κοινὴ ὁρίζουσα, ἐνῷ ἀπὸ τὰ $α_{ijk}$ στοιχεῖα παράγονται 3 διαφορετικαὶ ὁρίζουσαι, καθόσον μένουν οἱ πρῶτοι ἢ δεύτεροι ἢ οἱ τρίτοι δεῖκται σταθεροί. Π. χ. διὰ ν=2, ὁ «*πρωτεύων*» ὅρος γίνεται τώρα : $α_{111}α_{222}$· ἂν ἀφίσωμεν σταθεροὺς τοὺς α΄ δείκτας, ἔχομεν τοὺς 4 ὅρους : $+α_{111}α_{222}-α_{121}α_{212}-α_{112}α_{221}+α_{122}α_{211}$, ἐνῷ, ἂν ἀφίσωμεν σταθεροὺς τοὺς β΄ καὶ ἔπειτα τοὺς γ΄ δείκτας, εὑρίσκομεν κατὰ σειράν :

$$+α_{111}α_{222}+α_{212}α_{121}-α_{112}α_{221}-α_{211}α_{122}$$
$$\text{καί : } +α_{111}α_{222}-α_{121}α_{212}+α_{221}α_{112}-α_{211}α_{122},$$

δηλ. ἐξαγόμενα, ποὺ οἱ ὅροι των διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον. Ὀνομάζομεν *πρώτην* ὁρίζουσαν τὴν παραγομένην μὲ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν β΄ καὶ τῶν γ΄ δεικτῶν, *δευτέραν* τὴν παραγομένην ἀπὸ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν γ΄ καὶ τῶν α΄ καὶ *τρίτην* τὴν παραγομένην ἀπὸ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν α΄ καὶ τῶν β΄.

Ἂν φαντασθῶμεν τὰ $ν^3$ στοιχεῖα τοποθετημένα μέσα εἰς ἕνα κύβον (καθὼς τὰ στοιχεῖα τῆς κοινῆς ὁριζούσης τοποθετοῦνται μέσα εἰς δύο παραλλήλους γραμμὰς ἢ καὶ εἰς ἓν ὀρθογώνιον, κάθε στοιχεῖον τῆς κυβικῆς ὁριζούσης ἀνήκει εἰς ἓν *ὁριζόντιον* ἐπίπεδον καὶ εἰς δύο *κατακόρυφα*, κάθετα τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο. Ἂν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ὀνομασθοῦν *στρώματα* καὶ ἂν ὁ α΄ δείκτης δεικνύῃ τὴν τάξιν τοῦ ὁριζοντίου στρώματος, οἱ δὲ δύο ἄλλοι τὴν τάξιν τῶν δύο κατακορύφων (κατὰ μίαν ὡρισμένην σειράν), εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις :

α΄) *Ἂν ἀνταλλαχθοῦν δύο ὁριζόντια στρώματα, ἡ πρώτη κυβικὴ ὁρίζουσα στρώματα, ἡ μένει ἀναλλοίωτος.*

β΄) *Ἂν ἀνταλλάξωμεν δύο ὁριζόντια παράλληλα κατακόρυφα ὁρίζουσα ἀλλάσσει σημεῖον.*

Δηλαδή : *Εἰς κάθε κυβικὴν ὁρίζουσαν ὑπάρχει πάντοτε μία σειρὰ* *παραλλήλων στρωμάτων, πού ἡ ἀνταλλαγή των δὲν βλάπτει διόλου τὴν ὁρίζουσαν.*

γ') Κάθε κυβικὴ ὁρίζουσα εἶναι τὸ ἄθροισμα ν! κοινῶν ὁριζουσῶν.

δ') Τὸ γινόμενον δύο κοινῶν ὁριζουσῶν εἰμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μίαν κυβικὴν ὁρίζουσαν.

ε') Ἡ τιμὴ τῆς κυβικῆς ὁριζούσης εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων ἑνὸς στρώματος ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἐλάσσονάς των.

ϛ') Τὸ γινόμενον μιᾶς κυβικῆς καὶ μιᾶς κοινῆς ὁριζούσης εἶναι πάλιν κυβικὴ ὁρίζουσα, πού ἔχει στρώματα ἀποτελούμενα ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν (κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κοινῶν ὁριζουσῶν) τῶν στρωμάτων τῆς κυβικῆς ὁριζούσης ἐπὶ τὴν κοινὴν ὁρίζουσαν.

7) ***Ὁρίζουσαι ἀπείρου τάξεως.*** (Hill (*Ἴλλ*), 1877, Poincaré (*Πoεγκαρέ*), Helge von Koch (*Ἕλγκε φὸν Κόχ*)). Ἂν ἔχωμεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ ν βαθμοῦ μὲ διαγώνια στοιχεῖα $=1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots\ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} \ldots\ldots \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots 1_{1\nu} \end{vmatrix}$$

καὶ συμβαίνῃ νὰ ὑπάρχῃ ὅριον τῶν τιμῶν της, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ∞, τὸ ὅριον αὐτὸ τὸ λέγομεν *ὁρίζουσαν ἀπείρου τάξεως*. ***Συνθήκη ἀρκετὴ ὑπάρξεως ὁρίου (Ποενκαρέ)*** : *Νὰ συγκλίνῃ ἡ διπλῆ σειρά*: $\Sigma \alpha_{ij}\,(i \gtrless j)$. Διὰ τὴν *γενικωτέραν* ὁρίζουσαν, ὅταν δηλ. τὰ διαγώνια στοιχεῖα δὲν εἶναι$=1$, ***συνθῆκαι τοῦ Ἕλγκε φὸν Κόχ*** : α') *Νὰ συγκλίνῃ ἀπολύτως ἡ σειρὰ τῶν μὴ διαγωνίων στοιχείων* καὶ β') *νὰ συγκλίνῃ ἀπολύτως τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων στοιχείων*. Ἐπὶ τῶν *συγκλινουσῶν* ὁριζουσῶν ἀπείρου τάξεως ἰσχύουν οἱ κανόνες τῶν ὁριζουσῶν πεπερασμένης τάξεως.

8) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων μιᾶς ὁριζούσης, τοῦ βαθμοῦ ν, πού περιέχουν μόνον k διαγώνια στοιχεῖα.

9) ***Ὁρίζουσαι ἀποτελούμεναι ἀπὸ τὰ ἴδια στοιχεῖα.*** Μὲ ν^2 στοιχεῖα εἰμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν $\nu^2!$ διαφόρους ὁριζούσας τοῦ βαθμοῦ ν. Μερικαὶ βέβαια ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴσαι ἀπολύτως (ὅσαι

παράγονται διὰ τῆς ἀνταλλαγῆς τῶν γραμμῶν ἢ τῶν στηλῶν), αἱ ἄλλαι ὅμως εἶναι διαφορετικαί.

Αἱ ἀπὸ τὰ ἴδια ν^2 στοιχεῖα παραγόμεναι ὁρίζουσαι ἔχουν τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας (τοῦ Bagnera (*Μπανιέρα*) καὶ τοῦ Pascal (*Πασκάλ*)):

1) *Ἂς σχηματίσωμεν τὰς $\nu!$ ὁριζούσας $\Delta_1,\ldots$ ποὺ παράγονται διὰ $\nu!$ μεταθέσεων τῶν στοιχείων τῆς τυχούσης γραμμῆς μιᾶς ὁριζούσης Δ καὶ ἂς λάβωμεν μίαν τυχοῦσαν Δ_κ ἀπὸ τὰς $\Delta_1,\ldots$. Ἂν τότε σχηματίσωμεν ὅλας τὰς Σ^2_ν διαφοράς μεταξὺ αὐτῆς καὶ ὅσων παράγονται ἀπὸ αὐτὴν διὰ τῆς ἀνταλλαγῆς δύο μόνον στοιχείων, τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαφορῶν αὐτῶν εἶναι σταθερὸν (ἀνεξάρτητον τοῦ k).*

2) *Ἂς λάβωμεν πάλιν τὰς $\nu!$ ὁριζούσας $\Delta_1, \Delta_2,\ldots$. Ἂν λάβωμεν $\nu+1$ ἀπὸ αὐτὰς καὶ εἰς καθεμίαν κάμωμεν ν ὁμοίας μεταθέσεις εἰς τὴν γραμμὴν ἐκείνην, ἡ ἀλλαγὴ τῶν στοιχείων τῆς ὁποίας μᾶς ἔδωσε τὰς $\Delta_1, \Delta_2,\ldots$, ἡ ὁρίζουσα Ω τῆς τάξεως $\nu+1$ ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ τὰς $(\nu+1)^2$ αὐτὰς ὁριζούσας εἶναι $=0$.*

II. ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

45. Ὅταν τὰ στοιχεῖα μιᾶς ὁριζούσης εἶναι *τυχόντα*, ἡ ὁρίζουσα λέγεται *γενική*. Ὅταν ὅμως δὲν εἶναι ὅλα τυχόντα ἢ ὑπάρχουν μία ἢ περισσότεραι σχέσεις μεταξύ των ἡ ὁρίζουσα λέγεται *εἰδικῆς μορφῆς*.

Εἰδικῆς μορφῆς ὁρίζουσαι ὑπάρχουν ἄπειροι, θὰ ἐξετάσωμεν ὅμως ἐδῶ μερικὰ ἀπὸ τὰ εὐκολώτερα καὶ τὰ συνηθέστερα εἴδη.

1) Ὁρίζουσαι τοῦ Van der Monde (Βὰν ντὲρ Μόντε) [ἢ τοῦ Cauchy (Κωσύ)].

46. Αὐταὶ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \ldots \alpha^{\nu-1} \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \ldots \beta^{\nu-1} \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \ldots \gamma^{\nu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \ldots \omega^{\nu-1} \end{vmatrix} \cdot$$

ἀποτελοῦνται δηλ. ἀπὸ *μόνον ν ἀνεξάρτητα στοιχεῖα*: $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots,\omega$ (καὶ τὴν μονάδα). Ἐπειδὴ προφανῶς ἡ Δ μηδενίζεται, ἂν γίνῃ $\beta=\alpha$ ἢ γ=α. . . ἢ ω=α, ἢ γ=β ἢ δ=β ἢ. . . ἢ ω=β κτλ. θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας $(\alpha-\beta),(\alpha-\gamma),\ldots,(\alpha-\omega),(\beta-\gamma),(\beta-\delta),\ldots(\beta-\omega)$ κτλ. δηλ. *τὸ γινόμενον ὅλων τῶν* $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$ *διαφορῶν τῶν στοιχείων* $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\omega$ *ἀνὰ δύο λαμβανομένων*, ὥστε θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}\Delta=(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\omega)&\times\\ \times(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\omega)&\times\\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots&\times\\ \times(\psi-\omega)&\times\Pi,\end{aligned}$$

sic

ὅπου τὸ Π δὲν περιέχει τὰ α,β,γ,. .καὶ εἶναι ἑπομένως εἷς σταθερὸς ἀριθμὸς (διότι, ἂν περιεῖχεν ἓν ἢ πολλὰ ἀπὸ τὰ α,β,γ,. . ., θὰ ἦτο τὸ β΄ μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος βαθμοῦ πρὸς τὸ α π. χ. ἀνωτέρου ἀπὸ τὸ ν—1, ἐνῷ ἡ Δ εἶναι πρὸς τὸ α βαθμοῦ ν—1).Ὁ σταθερὸς δὲ αὐτὸς συντελεστὴς Π εἶναι $=\pm1$, διότι τῆς μὲν Δ διαγώνιος ὅρος εἶναι ὁ $\beta\gamma^2\delta^3\ldots\omega^{\nu-1}$ τοῦ δὲ β΄ μέλους ὁ ἀντίστοιχος ὅρος εἶναι ὁ

$$(-1)^{(\nu-1)+(\nu-2)+\ldots+1}\,\beta\gamma^2\delta^3\ldots\omega^{\nu-1}=$$

$$=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.\beta\gamma^2\delta^3\ldots\omega^{\nu-1}.$$ *Εἶναι λοιπόν :*

$$(\alpha)\qquad \Delta=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.\Gamma,$$

ὅπου Γ παριστᾷ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων $(\alpha-\beta),(\alpha-\gamma)$ κτλ.

47. ***Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν τοῦ Van der Monde :*** *α΄) Μία ὁρίζουσα τοῦ Van der Monde μηδενίζεται μόνον, ὅταν δύο γραμμαί της γίνουν ἴσαι* (δηλ. α=β ἢ α=γ,. . .), καθὼς μᾶς δεικνύει ὁ τύπος (α) (ἐνῷ μία γενικὴ ὁρίζουσα εἰμπορεῖ κάλλιστα νὰ εἶναι = 0, χωρὶς διόλου νὰ εἶναι δύο παραλλήλων γραμμῶν ἢ στηλῶν της τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα ἴσα).

β΄) *Τὸ τετράγωνον μιᾶς ὁριζούσης τοῦ Van der Monde εἶναι :*

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2\ldots S_{\nu-1}\\ S_1 & S_2 & S_3\ldots S_\nu\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ S_{\nu-1} & S_\nu & S_{\nu+1}\ldots S_{2\nu-2}\end{vmatrix},$$ ὅπου γενικῶς: $S_\lambda=\alpha^\lambda+\beta^\lambda+\ldots+\omega^\lambda$.

Τὴν ὁρίζουσαν αὐτὴν τοῦ Hankel (*Ἄνκελ*) θὰ τὴν σπουδάσωμεν ἀργότερα.

γ') Ἂν τὴν ὁρίζουσαν Δ τὴν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \dots\dots\dots \alpha^{\nu-1} \\ 1 & \alpha+\beta-\alpha & (\alpha+\beta-\alpha)^2 \dots (\alpha+\beta-\alpha)^{\nu-1} \\ 1 & \alpha+\gamma-\alpha & (\alpha+\gamma-\alpha)^2 \dots (\alpha+\gamma-\alpha)^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha+\omega-\alpha & (\alpha+\omega-\alpha)^2 \dots (\alpha+\omega-\alpha)^{\nu-1} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \dots\dots\dots \alpha^{\nu-1} \\ 1 & \alpha+\varepsilon_1 & (\alpha+\varepsilon_1)^2 \dots\dots (\alpha+\varepsilon_1)^{\nu-1} \\ 1 & \alpha+\varepsilon_2 & (\alpha+\varepsilon_2)^2 \dots\dots (\alpha+\varepsilon_2)^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha+\varepsilon_{\nu-1} & (\alpha+\varepsilon_{\nu-1})^2 \dots (\alpha+\varepsilon_{\nu-1})^{\nu-1} \end{vmatrix},$$

βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι *εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὸ α,* ὡς ἴση (ἀπολύτως) μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν $(\beta-\alpha)$ κτλ. δηλ. μὲ τὸ γινόμενον

$$\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\nu-1} . (\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3) \dots (\varepsilon_{\nu-2}-\varepsilon_{\nu-1}).$$

Τὸ ἴδιον φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν τῆς τελευταίας ὁριζούσης εἰς ἄθροισμα ἄλλων ὁριζουσῶν (μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν δυνάμεων), ἀπὸ τὰς ὁποίας μόνον μία δὲν εἶναι $=0$, ἡ ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_1^{\nu-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \dots \varepsilon_2^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_{\nu-1} & \varepsilon^2_{\nu-1} \dots \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_1^{\nu-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \dots \varepsilon_2^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_{\nu-1} & \varepsilon_{\nu-1}^2 \dots \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} \end{vmatrix} . \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots\dots \varepsilon_{\nu-1}.$$

48. *Γενικωτέρα* ὁρίζουσα ἀπὸ τοῦ Van der Monde εἶναι ἡ ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\varrho_1} & \alpha_1^{\varrho_2} \dots\dots \alpha_1^{\varrho_\nu} \\ \alpha_2^{\varrho_1} & \alpha_2^{\varrho_2} \dots\dots \alpha_2^{\varrho_\nu} \\ \dots & \dots \\ \alpha_\nu^{\varrho_1} & \alpha_\nu^{\varrho_2} \dots\dots \alpha_\nu^{\varrho_\nu} \end{vmatrix}$$

, ὅπου $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Διὰ $\varrho_1=0, \varrho_2=1$, $\varrho_3=2, \dots, \varrho_\nu = \nu-1$ ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ V. d. M.).

Αὐταὶ ἐκφράζονται μὲ τὰς συναρτήσεις *«ἀλὲφ»* τοῦ Wronski (*Βρόνσκι*), δηλ. μὲ τὰς συναρτήσεις, ποὺ εὑρίσκομεν, ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν ϱ δύναμιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ καὶ κατόπιν θέσωμεν τὴν 1 ἀντὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος.

2) Ὁρίζουσαι κυκλοτερεῖς.

49. Λέγονται *κυκλοτερεῖς* (circulants) αἱ ὁρίζουσαι τῆς μορφῆς:

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu \\ \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_\nu & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \dots \alpha_1 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_\nu & \alpha_1 \dots \alpha_{\nu-2} & \alpha_{\nu-1} \end{vmatrix}$$

, ποὺ ἀποτελοῦνται *μόνον ἀπὸ ν διαφορετικὰ στοιχεῖα τρεπόμενα κυκλικῶς ἀπὸ γραμμὴν εἰς γραμμήν.*

Ἂν $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ εἶναι αἱ ν ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^\nu - 1 = 0$, πολλαπλασιάζομεν τὴν δ ἐπὶ τὴν

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \cdots r_1^{\nu-1} \\ 1 & r_2 & r_2^2 \cdots r_2^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_\nu & r_\nu^2 \cdots r_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}.$$

ἂν τότε θέσωμεν συντόμως: $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_\nu x^{\nu-1}$, ἐπειδὴ εἶναι: $r_j^\nu = 1$ $(j = 1, \dots, \nu)$ καὶ ἑπομένως:

$$\alpha_2 + \alpha_3 r_j + \alpha_4 r_j^2 + \dots + \alpha^\nu r_j^{\nu-2} + \alpha_1 r_j^{\nu-1} = r_j^{\nu-1} \varphi(r_j),$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 r_j + \alpha_5 r_j^2 + \dots + \alpha_1 r_j^{\nu-2} + \alpha_2 r_j^{\nu-1} = r_j^{\nu-2} \varphi(r_j),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

θὰ εὕρωμεν:

$$\delta . \Delta = \begin{vmatrix} \varphi(r_1) & \varphi(r_2) \dots\dots \varphi(r_\nu) \\ r_1^{\nu-1}\varphi(r_1) & r_2^{\nu-1}\varphi(r_2) \dots r_\nu^{\nu-1}\varphi(r_\nu) \\ \dots & \dots \\ r_1\varphi(r_1) & r_2\varphi(r_2) \dots\dots r_\nu \varphi(r_\nu) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(r_1)\,\varphi(r_2) \dots\dots \varphi(r_\nu).(-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}} . \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots\dots 1 \\ r_1 & r_2 \dots\dots r_\nu \\ \dots & \dots \\ r_1^{\nu-1} & r_2^{\nu-1} \dots r_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix},$$

Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὴν «*στρεβλὴν κυκλοτερῆ*» ὁρίζουσαν:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_\nu \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \dots \alpha_1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_5 \dots \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_\nu & -\alpha_1 & -\alpha_2 \dots \alpha_{\nu-1} \end{vmatrix}$$

, ὅπου ὅλα τὰ στοιχεῖα τὰ πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ὁριζούσης ἔχουν ἀλλαγμένον σημεῖον, ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς θεωρήματα:

α′) *Μία κυκλοτερὴς ὁρίζουσα βαθμοῦ ρμ ἐκφράζεται διὰ μιᾶς κυκλοτεροῦς βαθμοῦ μ, ποὺ κάθε στοιχεῖόν της εἶναι ἄθροισμα* $\mu^{\rho-1}$ *ἐλασσόνων βαθμοῦ ρ τῆς δοθείσης.* (Θεώρημα τοῦ Torelli (*Τορέλλι*)).

β′) *Τὴν ἰδίαν ἰδιότητα ἔχουν καὶ αἱ στρεβλαὶ κυκλοτερεῖς.*

γ′) *Μία κυκλοτερὴς ὁρίζουσα βαθμοῦ 2μ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς κυκλοτεροῦς βαθμοῦ μ καὶ μιᾶς στρεβλῆς κυκλοτεροῦς βαθμοῦ μ* (Θεώρημα τοῦ Scott (*Σκότт*)).

δ′) *Τὸ γινόμενον δύο κυκλοτερῶν ὁριζουσῶν τοῦ ἰδίου βαθμοῦ εἶναι πάλιν κυκλοτερὴς ὁρίζουσα* (Θεώρημα τοῦ Souillart (*Σουγιάρ*)).

3) Ὁρίζουσα ἰσοδύναμος πρὸς πολυώνυμον τοῦ x.

50. *Ἡ ὁρίζουσα :*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \ldots \alpha_\nu \\ -1 & x & 0 \ldots \ldots 0 \\ 0 & -1 & x \ldots \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 \; x \end{vmatrix}$$

εἶναι ἴση μὲ τὸ πολυώνυμον : $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$.

Πραγματικῶς, ἂν την ἀναπτύξωμεν κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α′ στήλης, θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta = \alpha_0 x^\nu + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \\ -1 & x \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots -1 \; x \end{vmatrix} = \alpha_0 x^\nu + \Delta_1,$$

ὅπου ἡ Δ_1 εἶναι τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὴν Δ, μόνον βαθμοῦ $\nu-1$. Ἔχομεν λοιπόν :

$$(\alpha) \quad \Delta = \alpha_0 x^\nu + \Delta_1, \; \Delta_1 = \alpha_1 x^{\nu-1} + \Delta_2, \; \Delta_2 = \alpha_2 x^{\nu-2} + \Delta_3, \ldots, \\ \ldots \Delta_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1} x + \Delta_\nu, \; \Delta_\nu = \alpha_\nu x^{\nu-\nu} = \alpha_\nu \cdot$$

ἑπομένως, ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (α) κατὰ μέλη,

$$\Delta = \alpha_0 x_\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_2 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu .$$

(Τὸ ἴδιον εὑρίσκομεν, καὶ ἂν ἀναπτύξωμεν κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α′ γραμμῆς).

51. Ἂν θέσωμεν εἰς τὴν Δ : $x = -1$, τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $(-1)^{\nu-1}$ καὶ θέσωμεν μερικὰ ἀπὸ τὰ πρῶτα α ἴσα μὲ τὴν μονάδα καὶ τὰ ἐπίλοιπα $=0$, εὑρίσκομεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ Mansion *(Μανσιόν)*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{\nu} + 1(-1)^{\nu-1} + \ldots = 0 \text{ ἢ } 1$$
(ἀναλόγως τοῦ ν).

52. Ἡ γενικωτέρα ὁρίζουσα τοῦ Escherich (*Ἔσεριχ*):

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \ldots \ldots \alpha_\nu \\ -y_1 & x_1 \ldots \ldots 0 \\ 0 & -y_2 \ldots \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots \ldots x_\nu \end{vmatrix}$$
εἶναι ἴση μέ: $\alpha_0 x_1 \ldots x_\nu + \alpha_1 y_1 x_2 \ldots x_\nu + \alpha_2 y_1 y_2 x_3 \ldots x_\nu + \ldots$

4) *Ὁρίζουσα μὲ τὸ x ὡς β΄ ὅρον τῶν διαγωνίων στοιχείων.*

53. Ἡ ὁρίζουσα:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}+x & \alpha_{12} \ldots \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+x \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \ldots \ldots \alpha_{\nu\nu}+x \end{vmatrix}$$

ἔχει ἀνάπτυγμα κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x μὲ συντελεστάς: σταθερὸν ὅρον: τὴν ὁρίζουσαν τῶν α (χωρὶς τὰ x), συντελεστὴν τοῦ x: τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων ἐλασσόνων τῆς Δ τοῦ βαθμοῦ $\nu-1$, συντελεστὴν τοῦ x^2 τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων ἐλασσόνων τῆς Δ τοῦ βαθμοῦ $\nu-2$ κτλ. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι πολὺ εὔκολος.

5) *Ὁρίζουσα τῶν ἴσων δυνάμεων τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως.*

54. Θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων, ὅτι, ἂν ὀνομάσωμεν $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ τὰ ἀθροίσματα τῶν α΄, τῶν β΄ κτλ. δυνάμεων τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως: $\alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} x + \alpha_\mu = 0$, ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν $s_1, s_2, \ldots$ καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως αἱ ἑξῆς σχέσεις τοῦ Νιούτον:

(α) $\alpha_0 s_1 - \alpha_1 = 0,\ \alpha_0 s_2 + \alpha_1 s_1 - 2\alpha_2 = 0,\ \alpha_0 s_3 + \alpha_1 s_2 + \alpha_2 s_1 - 3\alpha_3 = 0, \ldots$

Ἂν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ὁρίζουσαν:

$$\Delta_\varrho \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \ldots 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \ldots 0 & -2\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \ldots 0 & -3\alpha_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\varrho-2} & \alpha_{\varrho-3} & \alpha_{\varrho-4} \ldots \alpha_0 & -(\varrho-1)\alpha_{\varrho-1} \\ \alpha_{\varrho-1} & \alpha_{\varrho-2} & \alpha_{\varrho-3} \ldots \alpha_1 & -\varrho\alpha_\varrho \end{vmatrix} \quad (\varrho \leq \mu)$$

καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὴν α′ στήλην της ἐπὶ s_1, τὴν β′ ἐπὶ s_2 κτλ. τὴν τῆς τάξεως $\varrho-1$ ἐπὶ $s_{\varrho-1}$ καί τας προσθέσωμεν εἰς τὴν στήλην τῆς ϱ τάξεως, τὰ πρῶτα $\varrho-1$ στοιχεῖά της γίνονται $=0$ (συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις (α)) καὶ τὸ τελευταῖον γίνεται : $-\alpha_0 s_\varrho$. Ὥστε εἶναι

$$\Delta_\varrho \equiv -\alpha_0^\varrho s_\varrho \text{ καὶ ἑπομ. } s_\varrho = -\frac{\Delta_\varrho}{\alpha_0^\varrho}, \text{ δηλ. } s_1 = -\frac{\Delta_1}{\alpha_0^1},$$

$$s_2 = -\frac{\Delta_2}{\alpha_0^2}, \ldots, s^\mu = -\frac{\Delta\mu}{\alpha_0^\mu}.$$

6) Ὀρίζουσαι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ μερικὰ στοιχεῖά των.

55. Μία ὁρίζουσα τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἶναι ἡ τοῦ Dostor *(Ντόστορ)* :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \ldots\ldots \alpha \\ -\alpha & \alpha & \alpha_{23} \ldots\ldots \alpha_{2\nu} \\ -\alpha & -\alpha & \alpha \ldots\ldots \alpha_{3\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha \ldots\ldots \alpha \end{vmatrix}$$

, ποὺ εἶναι ἴση μὲ $2^{\nu-1}.\alpha^\nu$ (Ἡ ἀπόδειξις εὐκολωτάτη).

7) Ὀρίζουσαι ἔχουσαι στοιχεῖα τοὺς συντελεστὰς τοῦ διωνύμου.

56. Ἡ ὁρίζουσα :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \Sigma_\mu^1 & \Sigma_{\mu+1}^1 \ldots \Sigma_{\mu+\nu}^1 \\ \Sigma_{\mu+1}^2 & \Sigma_{\mu+2}^2 \ldots \Sigma_{\mu+\nu+1}^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_{\mu+\nu-1}^\nu & \Sigma_{\mu+\nu}^\nu \ldots \Sigma_{\mu+2\nu-1}^\nu \end{vmatrix}$$

εἶναι $=+1$. Πραγματικῶς, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ κάθε στήλην τὴν προηγουμένην της, εὑρίσκομεν

$$\Delta = \Delta_1,$$

ὅπου Δ_1 εἶναι ὁρίζουσα τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὴν Δ, ἀλλὰ κατὰ μονάδα κατωτέρου βαθμοῦ. Προχωροῦντες δὲ οὕτω θὰ εὕρωμεν τέλος :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Sigma_\mu^1 & \Sigma_{\mu+1}^1 \end{vmatrix} = \mu+1-\mu=1.$$

57. Ἐπίσης εἶναι $=\pm 1$ ἡ ὁρίζουσα :

$$\begin{vmatrix} \sum_{\mu+\nu}^{\mu} & \sum_{\mu+\nu+1}^{\mu} \cdots \sum_{2\mu+\nu}^{\mu} \\ \sum_{\mu+\nu+1}^{\mu} & \sum_{\mu+\nu+2}^{\mu} \cdots \sum_{2\mu+\nu+1}^{\mu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{2\mu+\nu}^{\mu} & \sum_{2\mu+\nu+1}^{\mu} \cdots \sum_{3\mu+\nu}^{\mu} \end{vmatrix}.$$

58. Τέλος ἡ ἑξῆς ὁρίζουσα τοῦ Zeipel *(Τσάϊπελ)* :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{\mu}^{\varrho} & \sum_{\mu}^{\varrho+1} \cdots \sum_{\mu}^{\varrho+\sigma} \\ \sum_{\mu+1}^{\varrho} & \sum_{\mu+1}^{\varrho+1} \cdots \sum_{\mu+1}^{\varrho+\sigma} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\mu+\sigma}^{\varrho} & \sum_{\mu+\sigma}^{\varrho+1} \cdots \sum_{\mu+\sigma}^{\varrho+\sigma} \end{vmatrix}$$

εἶναι $=$ μέ : $\dfrac{\sum_{\mu+\sigma}^{\sigma+1} \cdot \sum_{\mu+\sigma-1}^{\sigma+1} \cdots \sum_{\mu+\sigma-\varrho+1}^{\sigma+1}}{\sum_{\varrho+\sigma}^{\sigma+1} \cdot \sum_{\varrho+\sigma-1}^{\sigma+1} \cdots \sum_{\sigma+1}^{\sigma+1}}$,

καθὼς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

59. Νὰ δειχθῇ ὡς ἄσκησις καὶ ἡ ἑξῆς ἰσότης τοῦ Stern *(Στὲρν)* ·

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ \sum_{x_1}^{1} & \sum_{x_2}^{1} \cdots \sum_{x_\nu}^{1} \\ \sum_{x_1}^{2} & \sum_{x_2}^{2} \cdots \sum_{x_\nu}^{2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{x_1}^{\nu-1} & \sum_{x_2}^{\nu-1} \cdots \sum_{x_\nu}^{\nu-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \cdot \prod_{i,j}^{1,\nu} (x_i - x_j)}{2^{\nu-2} \cdot 3^{\nu-3} \cdot 4^{\nu-4} \cdots (\nu-1)^1},$$

8) *Ὁρίζουσαι μὲ στοιχεῖα συνδεόμενα μὲ τὰς μεταθέσεις.*

60. Ἡ ὁρίζουσα τοῦ D'Ovidio *(Ντ'Οβίντιο)* :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 \cdots & \cdots 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 \cdots & \cdots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \cdots & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\nu!} & \frac{1}{(\nu-1)!} & \frac{1}{(\nu-2)!} & \frac{1}{(\nu-3)!} \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{1}{\nu!}$.

61. Ἡ δὲ ὁρίζουσα τοῦ Janni *(Γιάννι)*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots u_0 \\ 1 & 1! & 0 & 0\ldots\ldots u_1 \\ 1 & 2 & 2! & 0\ldots\ldots u_2 \\ 1 & 3 & 3.2 & 3!\ldots\ldots u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & \nu & \nu(\nu-1) & \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots u_\nu \end{vmatrix}$$

εἶναι ἴση μὲ $\Delta^\nu u_0 . 1!2!3!\ldots\nu!$ (ὅπου $\Delta^\nu u_0$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς τάξεως ν τῶν $u_0, u_1, \ldots u_\nu$).

62. Ἐπίσης εἶναι (Glaisher *(Γλαίσερ)*):

$$E_{2\mu} = (2\mu)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 \ldots 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2\mu)!} & \frac{1}{(2\mu-2)!} & \frac{1}{(2\mu-4)!}\ldots\frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$$\text{καὶ } B_{2\mu} = (-1)^{\nu+1}(2\mu)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0\ldots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2\mu+1)!} & \frac{1}{(2\mu)!} & \frac{1}{(2\mu-1)!}\ldots\frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

ὅπου $E_{2\mu}$ καὶ $B_{2\mu}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ τοῦ Bernoulli *(Μπερνούλλι)* καὶ τοῦ Euler *(Ὄϋλερ)* εἰς τὰ ἀναπτύγματα:

$$\varepsilon\varphi x = \sum_1^\infty \beta_{2\mu} \frac{x^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}, \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \sum_0^\infty E_{2\mu} \frac{x^{2\mu}}{(2\mu)!},$$

$$B_{2\mu} = \frac{2\mu}{2^{2\mu}(2^{2\mu}-1)}\beta_{2\mu}.$$

9) Ὁρίζουσα τοῦ Σμίθ.

63. Ἡ ὁρίζουσα τοῦ Smith *(Σμίθ)*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2)\ldots(1,\nu) \\ (2,1) & (2,2)\ldots(2,\nu) \\ \ldots & \ldots \\ (\nu,1) & (\nu,2)\ldots(\nu,\nu) \end{vmatrix},$$

ὅπου (i,j) σημαίνει γενικῶς τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀκεραίων

i καὶ j, εἶναι $=\varphi(1).\varphi(2)\ldots\varphi(\nu)$, ὅταν μὲ τὸ $\varphi(\nu)$ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων ἀπὸ τὸ ν καὶ πρώτων πρὸς αὐτόν. *Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν εἶναι $\sum_{\mu}\varphi(\mu)=\nu$, ὅταν τὸ ἄθροισμα Σ ἐκτείνεται εἰς ὅλους τοὺς διαιρέτας μ τοῦ ν. Ἔχομεν λοιπὸν $(i,j)=\alpha_{i1}\alpha_{j1}\varphi(1)+\alpha_{i2}\alpha_{j2}\varphi(2)+\ldots+\alpha_{i\nu}\alpha_{j\nu}\varphi(\nu)$, ὅπου τὰ α_{ik}, α_{jk} εἶναι $=1$ ἢ $=0$, καθόσον τὸ k εἶναι ἢ δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ i ἢ τοῦ j. Ὥστε α_{ik}, α_{jk} εἶναι $=0$, ἂν $k>i$ ἢ $k>j$. Ἡ ὁρίζουσα λοιπὸν τῶν α_{ik} εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 1 & 1 & 0\ldots 0 \\ 1 & 0 & 1\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

δηλ. $=1$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὁρίζουσα τοῦ Σμὶθ εἰμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τῶν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 1 \text{ καὶ } \begin{vmatrix} \alpha_{11}\varphi(1) & \alpha_{12}\varphi(2)\ldots\alpha_{1\nu}\varphi(\nu) \\ \alpha_{21}\varphi(1) & \alpha_{22}\varphi(2)\ldots\alpha_{2\nu}\varphi(\nu) \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(\nu),$$

ἕπεται, ὅτι $\Delta=\varphi(1).\varphi(2)\ldots\varphi(\nu)$.

10) Ὁρίζουσαι τοῦ Raimondi (Ραϊμόντι).

64. Ἂν ἔχωμεν τὰ ποσά: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1}\ldots$, σχηματίζομεν τὰς *πρώτας διαφοράς των*:

$$\Delta_1^{(1)}=\alpha_2-\alpha_1,\ \Delta_2^{(1)}=\alpha_3-\alpha_2,\ldots,\ \Delta_\nu^{(1)}=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu,\ldots$$

ἔπειτα τὰς *δευτέρας*:

$$\Delta_1^{(2)}=\Delta_2^{(1)}-\Delta_1^{(1)}(=\alpha_3-\alpha_2-\alpha_2+\alpha_1=\alpha_3-2\alpha_2+\alpha_1),$$

$$\Delta_2^{(2)}=\Delta_3^{(1)}-\Delta_2^{(1)},\ \Delta_3^{(2)}=\Delta_4^{(1)}-\Delta_3^{(1)},\ldots,\ \Delta_{\nu-1}^{(2)}=\Delta_\nu^{(1)}-\Delta_{\nu-1}^{(1)},\ldots$$

ἔπειτα τὰς *τρίτας* κτλ. μέχρι τῆς τάξεως $\nu-1$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ διαφοραὶ αὐταὶ τῆς $\nu-1$ τάξεως εἶναι ὅλαι ἴσαι μὲ ἕνα σταθερὸν A.

Ἡ ὁρίζουσα τοῦ ν βαθμοῦ, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_\nu$ αἱ πρῶται, αἱ δεύτεραι,..., αἱ ἴσαι πρὸς τὸ Α διαφοραὶ τῆς τάξεως ν—1, ἐκφράζεται ὡς ἡ νυοστὴ δύναμις τῆς σταθερᾶς Α.

11) Εἰδικὴ κυκλοτερὴς ὁρίζουσα.

65. Ἡ ὁρίζουσα τοῦ Cremona *(Κρεμόνα)* :

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \ldots & p+\nu q \\ p+2q & p+3q & \ldots & p+q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p+\nu q & p+q & \ldots & p+(\nu-1)q \end{vmatrix} \text{εἶναι} = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} . q^\nu \left(\nu \frac{p}{q} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right) \nu^{\nu-2}.$$

καὶ διὰ p=0, q=1, ἔχομεν :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & \nu \\ 2 & 3 & 4 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & 1 & 2 \ldots & (\nu-1) \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{\nu[\nu-1]}{2}} . \frac{\nu(\nu+1)}{2} \nu^{\nu-2}.$$

12) Ὁρίζουσαι τῶν ῥητῶν συναρτήσεων.

66. Ὀνομάζονται οὕτως αἱ ὁρίζουσαι τοῦ Dietrich *(Ντίτριχ)* :

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_\nu & \alpha_{\nu-1} & \alpha_{\nu-2} & \alpha_{\nu-3} \ldots \alpha_1 \end{vmatrix},$$

διότι μὲ αὐτὰς ἐκφράζονται οἱ συντελεσταὶ τῶν συναρτήσεων $\frac{1}{\varrho(x)}$, ὅπου $\varrho(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$

Πραγματικῶς, ἔχομεν :

$$(\alpha) \quad \Delta_\nu = \alpha_1 \Delta_{\nu-1} - \alpha_2 \Delta_{\nu-2} + \alpha_3 \Delta_{\nu-3} - \ldots \pm \alpha_\nu ,$$

ὅπου τὰ $\Delta_{\nu-1}, \Delta_{\nu-2}, \ldots$ εἶναι τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὸ Δ_ν καὶ ἑπομένως εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\frac{1}{\varrho(x)} = \Delta(x) = 1 - \Delta_1 x + \Delta_2 x^2 - \Delta_3 x^3 + \ldots\ldots$$

(διότι $\varrho(x) . \Delta(x) = 1$, ἐξαιτίας τῶν (α)).

13) Ὁρίζουσαι τῶν συνεχῶν κλασμάτων.
[Ramus, Sylvester (Ραμύς, Συλβέστερ)].

67. Αἱ ὁρίζουσαι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 \ldots\ldots 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots \alpha_\nu \end{vmatrix} = \sigma_\nu$$

λέγονται *ὁρίζουσαι τῶν συνεχῶν κλασμάτων*, διότι συνδέονται μὲ τὰ συνεχῆ κλάσματα ὡς ἑξῆς :

$$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ -1 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & 1 \\ -1 & \alpha_3 \end{vmatrix}} \text{ κτλ.}$$

Δι᾿ αὐτὰς ἀποδεικνύεται εὔκολα ὁ τύπος ἀναγωγῆς :

$$(\alpha) \quad \sigma_\nu = \alpha_\nu . \sigma_{\nu-1} + \sigma_{\nu-2}.$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων μιᾶς τοιαύτης ὁριζούσης εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς σ_ν εἶναι ἴσον, *διὰ μὲν ἄρτιον ν*, μὲ τὴν μονάδα ηὐξημένην κατὰ σειρὰν ὅρων, ποὺ καθεὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν γινόμενον μερικῶν α εἰς ἄρτιον πλῆθος· *ἂν δὲ ν περιττόν*, τότε τὸ σ_ν εἶναι ἴσον μὲ ἄθροισμα γινομένων, ποὺ ἔχουν περιττὸν πλῆθος ἀπὸ τὰ α· διότι εἶναι προφανῶς :
$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + 1$, $\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸν τύπον ἀναγωγῆς (α), ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι γενική. Ἂν λοιπὸν εἰς τὴν σ^ν ἀντὶ τῶν α θέσωμεν τὸ 1, παράγεται ὁ ἀριθμὸς φ_ν ὅλων τῶν ὅρων τῆς σ_ν · δηλ.

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ -1 & 1 & 1 \ldots 0 \\ 0 & -1 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix}$$

. Ὁ δὲ τύπος ἀναγωγῆς (α) διὰ τὴν φ_ν γίνεται : $\varphi_\nu = \varphi_{\nu-1} + \varphi_{\nu-2}$, δηλ. οἱ ἀριθμοὶ φ_ν ἀποτελοῦν *τὴν σειρὰν τοῦ Fibonacci (Φιμπονάτσι).*

68. Γενικώτερον τὸ συνεχὲς κλάσμα :

$$\alpha_1 + \cfrac{\beta_2}{\alpha_2 + \cfrac{\beta_3}{\alpha_3 + \cdots + \cfrac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}},$$

εἶναι πηλίκον τῆς ὁριζούσης (τοῦ βαθμοῦ ν):

$$\Delta_\nu \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 \ldots 0 \\ -1 & \alpha_2 & \beta_3 \ldots 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_\nu \end{vmatrix} \text{ διὰ τῆς } \Delta_{\nu-1} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_3 & 0 \ldots 0 \\ -1 & \alpha_3 & \beta_4 \ldots 0 \\ 0 & -1 & \alpha_4 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_\nu \end{vmatrix} \text{ (τοῦ βαθμοῦ } \nu-1).$$

(Δι᾽ αὐτὰς ἰσχύει ὁ γενικώτερος τύπος ἀναγωγῆς $\Delta_\nu = \alpha_\nu \Delta_{\nu-1} + \beta_\nu \Delta_{\nu-2}$). Εἰμπορεῖ λοιπὸν ἡ θεωρία τῶν συνεχῶν κλασμάτων νὰ γίνῃ μὲ τὰς ὁριζούσας αὐτάς.

14) Ὁρίζουσαι συμμετρικαί, στρεβλαί, ἡμισυμμετρικαί.

69. Ἂν εἰς μίαν ὁρίζουσαν εἶναι γενικῶς: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (δηλ. τὰ στοιχεῖα τὰ ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὴν α΄ διαγώνιον ἴσα), τὴν λέγομεν *συμμετρικήν*. (Παράδειγμα : τὸ τετράγωνον κάθε ὁριζούσης). Ἂν δὲ εἶναι : $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$, ἡ ὁρίζουσα λέγεται *στρεβλή*. Τέλος, ἂν εἶναι $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ καὶ συγχρόνως $\alpha_{ii} = 0$ (τὰ διαγώνια στοιχεῖα $=0$), ἡ ὁρίζουσα λέγεται *στρεβλοσυμμετρικὴ* ἢ *ἡμισυμμετρική*. (Τὰ στοιχεῖα α_{ik}, α_{ki} τὰ λέγομεν *συζυγῆ*).

70. **Ἰδιότητες.** 1) *Συμμετρικῆς ὁριζούσης ὅλαι αἱ διαγώνιοι ἐλάσσονες εἶναι ἐπίσης συμμετρικαί· καὶ στρεβλῆς, ἐπίσης στρεβλαί.*

2) *Συμμετρικῆς ὁριζούσης αἱ ἐλάσσονες αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς δύο συζυγῆ στοιχεῖα εἶναι ἴσαι.* (Ἡ ἀπόδειξις πολὺ εὔκολος). Ἑπομένως :

3) *Ἡ ἀντίστροφος συμμετρικῆς ὁριζούσης εἶναι ἐπίσης συμμετρική.*

4) *Κάθε ἡμισυμμετρικὴ ὁρίζουσα Δ περιττοῦ βαθμοῦ εἶναι $= 0$.*

Ἀπόδειξις. Ἂν αἱ γραμμαί της ἀνταλλαχθοῦν μὲ τὰς στήλας, τὸ στοιχεῖον α_{ik} ἀνταλλάσσεται μὲ τὸ α_{ki}, ἑπομένως ἀλλάσσουν σημεῖον ὅλα τὰ στοιχεῖα (ἀφοῦ εἶναι καὶ $\alpha_{ii} = 0$)· ὥστε ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $(-1)^\nu$· ἂν λοιπὸν τὸ ν εἶναι περιττόν, πρέπει ν᾽ ἀλλάξῃ σημεῖον· μένει ὅμως προφανῶς καὶ ἡ ἰδία, θὰ εἶναι ἑπομένως $\Delta = -\Delta$, $2\Delta = 0$ καὶ $\Delta = 0$.

5) *Ἡμισυμμετρικῆς ὁριζούσης αἱ ἐλάσσονες αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς δύο συζυγῆ στοιχεῖα εἶναι ἴσαι μέν, ἂν ν περιττόν, ἀντίθετοι δέ, ἂν ν ἄρτιον.*

6) *(Πόρισμα τῆς 5). Ἡ ἀντίστροφος μιᾶς ἡμισυμμετρικῆς ὁριζούσης εἶναι συμμετρικὴ ὁρίζουσα ἢ ἡμισυμμετρική, καθόσον ὁ βαθμός της εἶναι περιττὸς ἢ ἄρτιος.*

7) *Κάθε ἡμισυμμετρικὴ ὁρίζουσα ἀρτίου βαθμοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον μιᾶς ἀκεραίας συναρτήσεως τῶν στοιχείων της.* (Τὴν ἀπόδειξιν παραλείπομεν). Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν τὴν ὀνομάζουν *πφαφφιανὴν* (ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Pfaff). Ἀποδεικνύεται, ὅτι: *Κάθε ἐλάσσων τοῦ βαθμοῦ ν—1 μιᾶς ἡμισυμμετρικῆς ὁριζούσης εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς πφαφφιανῆς [1,2,...,ν] ἐπὶ τὴν πφαφφιανὴν [1,2,...,(ν—2)], ποὺ παράγεται, ἂν παραλειφθοῦν δύο δεῖκται.*

15) Ὀρθογώνιοι ὁρίζουσαι.

71. *Ὀρθογώνιοι* λέγονται αἱ ὁρίζουσαι, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα α_{ik} συνδέονται μὲ τὰς ἑξῆς σχέσεις:

(1) $\alpha_{1k}^2+\alpha_{2k}^2+\dots+\alpha_{\nu k}^2=1, \alpha_{1i}\alpha_{1k}+\alpha_{2i}\alpha_{2k}+\dots+\alpha_{\nu i}\alpha_{\nu k}=0$. (2)

ποὺ ἰσχύουν διὰ i, k=1,2,...,ν ($i \gtrless k$).

Παρουσιάζονται κυρίως διὰ ν =2 ἢ 3 εἰς *γεωμετρικὰ* ζητήματα: διὰ ν=2 εἰς τὴν ἀλλαγὴν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* καὶ διὰ ν=3 εἰς τὴν ἀλλαγὴν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων *εἰς τὸν χῶρον*. (Βλ. *Ἐπίπεδον Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν Ι. Ν. Χατζιδάκη*).

72. **Ἰδιότητες.** 1) *Τὸ τετράγωνον μιᾶς ὀρθογωνίου ὁριζούσης Θ εἶναι =1.* Ἄμεσον πόρισμα τῶν σχέσεων (1) καὶ (2). *Καὶ ἑπομένως*: $\Theta = \pm 1$.

2) *Τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα (ἢ ἐλάσσων) A_{ik} κάθε στοιχείου α_{ik} τῆς Θ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἰδίου στοιχείου ἐπὶ ὅλην τὴν ὁρίζουσαν*, δηλ. $A_{ik} = \alpha_{ik} \cdot \Theta$.

3) *Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) ἀκολουθοῦν (ἕνεκα τῆς προηγ. ἰδιότητος) καὶ αἱ ἑξῆς:*

(1′) $\alpha_{k1}^2+\alpha_{k2}^2+\dots+\alpha_{k\nu}^2=1, \quad \alpha_{i1}\alpha_{k1}+\alpha_{i2}\alpha_{k2}+\dots+\alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu}=0$ (2′)

(ποὺ περιέχουν στοιχεῖα τῶν *γραμμῶν*, ἀντὶ τῶν *στηλῶν*, ποὺ περιέχουν αἱ (1) καὶ (2)).

4) *Τὸ γινόμενον δύο Θ εἶναι πάλιν ὁρίζουσα Θ.*

'Ασκήσεις.

1) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι *ἡ ἐξίσωσις πρὸς x* :

$$f(-x) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12}\ldots\ldots\alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x\ldots\alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \quad \alpha_{\nu\nu}-x \end{vmatrix} = 0 \; (\alpha_{ik}=\alpha_{ki})$$

ἔχει μόνον πραγματικὰς ῥίζας (Sylvester (Συλβέστερ)). (Θὰ κατασκευασθῇ τὸ γινόμενον $f(-x).f(x)$ κτλ.).

2) *Κάθε στρεβλὴ ὁρίζουσα μὲ διαγώνια στοιχεῖα =1 εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων.*

3) *Ἡ ὁρίζουσα τοῦ Ἄνκελ* (προβλ. σελ. 40) :

$$H = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1\ldots\alpha_{\nu-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2\ldots\alpha_\nu \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu\ldots\alpha_{2\nu-2} \end{vmatrix}$$

ἐκφράζεται μὲ ἄλλην, ποὺ ἔχει στοιχεῖα τὰς διαφορὰς τῶν διαδοχικῶν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2\nu-2}$. (Ἂν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν *ἀριθμητικὴν πρόοδον* τάξεως ν—1 (δηλ. εἶναι ἴσαι αἱ διαφοραί των τῆς ν—1 τάξεως), εἶναι : $H = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\left[\Delta^{|\nu-1]}_{\nu-1}\right]^\nu$. Ἂν δὲ ἡ τάξις τῆς προόδου εἶναι $<\nu-1$, τότε : H=0. Ἐπίσης εἶναι H=0, ἂν τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν *γεωμετρικὴν* πρόοδον).

4) *Ὁρίζουσαι τῶν Puchta—Nœther (Πούχτα—Νέτερ)* :

Εἶναι βαθμοῦ 2ᵒ καὶ τῆς μορφῆς : διὰ ρ π. χ. = 6 :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \text{ ὅπου } A = \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}, \; B = \begin{matrix} c & d \\ d & c \end{matrix} \text{ καὶ}$$

$a = \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{matrix}$, $b = \begin{matrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_3 \end{matrix}$, $c = \begin{matrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_5 \end{matrix}$, $d = \begin{matrix} \alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_8 & \alpha_7 \end{matrix}$, εἶναι δηλ. τῆς μορφῆς :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8 \\ \alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3 & \alpha_6\alpha_5\alpha_8\alpha_7 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2 & \alpha_7\alpha_8\alpha_5\alpha_6 \\ \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 & \alpha_8\alpha_7\alpha_6\alpha_5 \\ & \\ \alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\ \alpha_6\alpha_5\alpha_8\alpha_7 & \alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3 \\ \alpha_7\alpha_8\alpha_5\alpha_6 & \alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_8\alpha_7\alpha_6\alpha_5 & \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \end{vmatrix}$$

καὶ ὁμοίως καὶ ἡ γενικὴ τοῦ βαθμοῦ 2ϱ. (Εἶναι λοιπὸν *εἰδικαὶ* συμμετρικαὶ ὁρίζουσαι (πρβλ. § 69)).

Αὐταὶ ἐκφράζονται ὡς γινόμενον 2ϱ παραγόντων α' βαθμοῦ πρὸς τὰ α. Αἱ δὲ συμπληρωματικαὶ ἐλάσσονές των (1) *τοῦ ἡμίσεως βαθμοῦ εἶναι πάντοτε κατ' ἀπόλυτον σημεῖον ἴσαι.*

5) Ἡ ὁρίζουσα : $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & -\alpha & -\delta & -\gamma \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \\ -\zeta & -\varepsilon & -\vartheta & -\eta \end{vmatrix}$ εἶναι πάντοτε ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

6) Τὰ ν^2 στοιχεῖα τῆς Θ συνδέονται μὲ τὰς $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ σχέσεις (1) καὶ (2) μένουν λοιπὸν αὐθαίρετα $\nu^2 - \frac{1}{2}\nu(\nu+1) = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$. *Κατὰ ποῖον τρόπον εἰμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν Θ μὲ τὰ* $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ *αὐθαιρέτως δοθέντα αὐτὰ στοιχεῖα ;* (Πρόβλημα τοῦ Cayley *(Καίιλεϊ)*)

Λύσις : $\alpha_{ik} = \frac{2B_{ik}}{B}$, $\alpha_{ii} = \frac{2B_{ii}}{B} - 1$, ὅπου B εἶναι ἡ ἑξῆς *στρεβλὴ* ὁρίζουσα μὲ ὅλα τὰ διαγώνια στοιχεῖά της $=1$· (ὁ ἀριθμὸς τῶν λοιπῶν εἶναι $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$):

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13}\ldots\beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23}\ldots\beta_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\nu1} & \beta_{\nu2} & \beta_{\nu3}\ldots 1 \end{vmatrix}$$

καὶ B_{ii}, B_{ik} ἀντιστοίχως αἱ ἐλάσσονες τῶν $1, \beta_{ik}$· (Ἡ οὕτω παραγομένη Θ εἶναι $=+1$).

7) *Θεώρημα α' τοῦ* **Siacci** *(Σιάτσι) : Ἂν* α_{ik} *εἶναι τὰ στοιχεῖα μιᾶς* $\Theta(\Theta_1)$ *καὶ* β_{ji} *μιᾶς ἄλλης* $\Theta(\Theta_2)$ *καὶ ἔχουν καὶ αἱ δύο τὸν ἴδιον βαθμὸν ν καὶ τὴν ἰδίαν τιμὴν* $\varepsilon(\varepsilon^2=1)$, *ἡ ὁρίζουσα :*

(1) Οὕτω λέγονται αἱ δύο ἐλάσσονες μιᾶς ὁριζούσης ν βαθμοῦ, ποὺ παράγονται ἂν παραλειφθοῦν διὰ τὴν α' k γραμμαὶ καὶ στῆλαι, διὰ τὴν β' αἱ ἄλλαι ν−k.

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_{11}+b_1\beta_{11}, \ldots a_\nu\,\alpha_{1\nu}+b_\nu\,\beta_{1\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\alpha_{\nu 1}+b_1\beta_{\nu 1}, \ldots a_\nu\,\alpha_{\nu\nu}+b_\nu\,\beta_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

(ὅπου τὰ $a_1,\ldots,a_n$ $b_1,\ldots b_n$ εἶναι τυχόντες ἀριθμοί), δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀνταλλαχθοῦν τὰ a καὶ b. (Ἀλλάσσει ὅμως σημεῖον, ἂν $\Theta_1 = \varepsilon$ καὶ $\Theta_2 = -\varepsilon$). Πορίσματα : α΄) Ἂν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα μιᾶς Θ περιττοῦ βαθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα ἄλλης Θ μὲ τὴν ἰδίαν τιμήν, ἡ παραγομένη ὁρίζουσα εἶναι $=0$.

β΄) *Ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς Θ τυχόντος βαθμοῦ καὶ τιμῆς $\varepsilon(=\pm 1)$ προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης Θ τοῦ ἰδίου βαθμοῦ καὶ τιμῆς $-\varepsilon$, ἡ παραγομένη ὁρίζουσα εἶναι $=0$.*

8) *Θεώρημα β΄ τοῦ Σιάτσι : Ἂν εἰς τὰ διαγώνια στοιχεῖα μιᾶς $\Theta(=\varepsilon)$ προσθέσωμεν α΄) τὰ ποσά : $a_1, a_2,\ldots,a_\nu$, ὅπου $a_1a_2\ldots a_\nu = \varepsilon$, καὶ β΄) τὰ ποσά : $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_\nu}$, αἱ δύο παραγόμεναι ὁρίζουσαι εἶναι ἴσαι.*

9) *Θεώρημα γ΄ τοῦ Σιάτσι : Ἂν εἰς τὰ διαγώνια στοιχεῖα μιᾶς $\Theta(=\varepsilon)$ προσθέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα καὶ τῆς παραγομένης ὁριζούσης P λάβωμεν τὴν ἐλάσσονα P_{kk} ἑνὸς διαγωνίου στοιχείου α_{kk}, θὰ εἶναι :* $P=(1+\varepsilon)P_{kk}$.

Πορίσματα : α΄) Ὅλαι αἱ ἐλάσσονες τῶν διαγωνίων στοιχείων εἶναι ἴσαι.— β΄) Ἂν $\varepsilon = -1$, εἶναι $P=0$, ἂν $\varepsilon = +1$, εἶναι $P_{kk} = \frac{1}{2}P$.

10) *Θεωρήματα τοῦ **Stieltjes** (Στίλτγες): α΄) Ἂν $\varepsilon=+1$, διὰ $P=0$* (P ἡ ὁρίζουσα τοῦ βαθμοῦ ν τῆς ἀσκήσ. 4ης) *ἓν εἶναι $=0$ καὶ ὅλαι αἱ ἐλάσσονες τῆς P τοῦ βαθμοῦ $\nu-1$.—* β΄) (γενικώτερον): *Ἂν α_{ik}, β_{ik} εἶναι ἀντιστοίχως τὰ στοιχεῖα δύο ὁριζουσῶν $\Theta(\Theta_1$ καὶ $\Theta_2)$ βαθμοῦ ν καὶ τιμῆς $+1$ καὶ εἶναι $=0$ ἡ ὁρίζουσα, ποὺ ἔχει γενικὸν στοιχεῖον τὸ $\alpha_{ik}+\beta_{ik}$, θὰ εἶναι $=0$ καὶ ὅλαι αἱ ἐλάσσονές της τοῦ βαθμοῦ $\nu-1$.*

Γενικὴ παρατήρησις διὰ τὰς ὁριζούσας.

73. Κατὰ γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ διανύσματος δ, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς τρεῖς «συνιστώσας» του α_1, α_2, α_3, θεωροῦμεν καὶ ἓν ἄνυσμα εἰς *«τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων»* μὲ κατὰ σειρὰν *συνιστώσας* α_1, α_2, $\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$, (δηλ. τὰ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου

Μ τοῦ χώρου τῶν ν διαστάσεων, ποὺ εἶναι τὸ ἄκρον τοῦ ἀνύσματος ΟΜ). Σύμφωνα πρὸς τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἀποδεικνύεται, ὅτι :

Ἂν θεωρήσωμεν εἰς τὸν ν — διάστατον χῶρον ν ἀνύσματα $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ *κατὰ ὡρισμένην σειρὰν καὶ ζητήσωμεν συναρτήσεις* $\Sigma(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu)$ *τῶν ἀνυσμάτων αὐτῶν, ποὺ νὰ ἔχουν τὰς ἑξῆς τρεῖς ἰδιότητας : 1) Νὰ μὴ ἀλλάσσῃ ἡ συνάρτησις, ἂν ἀντὶ τοῦ τυχόντος ἀπὸ τὰ ἀνύσματα, τοῦ* δ_k, *λάβωμεν τὸ* $\delta_k + \delta_\lambda$ $(k \gtrless \lambda)$. *2) Νὰ πολλαπλασιάζεται ἡ συνάρτησις ἐπὶ λ, ὅταν τὸ τυχὸν ἀπὸ τὰ ἀνύσματα, τὸ* δ_k, *πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ λ. Καὶ 3) Νὰ εἶναι :* $\Sigma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) = 1$, *ὅπου* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ *εἶναι τὰ «μοναδικὰ» ἀνύσματα τοῦ ν—διαστάτου χώρου κατὰ τὴν φυσικὴν των σειράν, δηλ. μὲ συνιστώσας τὰς 1,0,0,. . .,0 (τὸ* μ_1*), 0,1,0,...,0 (τὸ* μ_2*),...,0,0,0,...,1 (τὸ* μ_ν *), θὰ ἐπανεύρωμεν τὰς ὁριζούσας.* Δηλαδή : *αἱ τρεῖς προηγούμεναι ἰδιότητες* (ἰσοδύναμοι προφανῶς αἱ δύο πρῶται μὲ τὰς τῶν παραγράφων 42, 36 καὶ ἡ τρίτη μὲ τὴν ἰσότητα :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = 1)$$

εἶναι *αἱ θεμελιώδεις* διὰ τὰς ὁριζούσας καί τας *ὁρίζουν ἐντελῶς.*

(Πρβλ. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1918).

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ

74. Ἀπὸ τὴν Στοιχειώδη Ἀριθμητικὴν γνωρίζομεν, ὅτι μὲ μόνον τὸ σύστημα τῶν *ἀκεραίων* ἀριθμῶν δὲν εἶναι δυνατὴ πάντοτε ἡ διαίρεσις καὶ δι᾽ αὐτὸ εἰσάγομεν τοὺς *κλασματικοὺς* ἀριθμούς, ποὺ μᾶς καθιστοῦν *πάντοτε* δυνατὴν τὴν πρᾶξιν αὐτήν. Διὰ τὰ στοιχειώδη προβλήματα τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ σύστημα αὐτὸ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐντελῶς ἀρκετόν. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅμως τὸ σύστημα αὐτὸ ἀποδεικνύεται ἀνεπαρκές, διότι δὲν εἰμποροῦμεν πάντοτε μὲ αὐτὸ νὰ ἐκφράσωμεν *τὸν λόγον δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν ποσῶν·* ἀναγκαζόμεθα λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν καὶ νέον εἶδος ἀριθμῶν, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιοι οὔτε κλασματικοί, τοὺς *ἀσυμμέτρους*. Ἂν περαιτέρω θέλωμεν, καθὼς κάμνομεν εἰς τὴν Στοιχειώδη Ἄλγεβραν, νὰ καταστήσωμεν πάντοτε δυνατὴν καὶ τὴν *ἀφαίρεσιν*, εἶναι ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, καθὼς καὶ τὸ 0. Ἔχομεν λοιπὸν οὕτως ἓν σύστημα ἀριθμῶν, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς παλαιούς, τοὺς *«θετικοὺς»* ἀριθμοὺς (ἀκεραίους, κλασματικοὺς καὶ ἀσυμμέτρους) καὶ ἀπὸ τοὺς νέους, τοὺς *«ἀρνητικοὺς»* (ἐπίσης ἀκεραίους, κλασματικοὺς καὶ ἀσυμμέτρους). Μὲ τὸ σύστημα αὐτὸ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε δυναταὶ καὶ αἱ 4 πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς (πλὴν μόνον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 0).

Ἀλλά, ἤδη εἰς τὴν Στοιχειώδη Ἄλγεβραν, παρουσιάζονται προβλήματα, ποὺ δὲν λύονται οὔτε μὲ τὸ οὕτω πλουτισθὲν σύστημα τῶν ἀριθμῶν μας. Π. χ. κανεὶς ἀριθμὸς τοῦ συστήματός μας δὲν ὑπάρχει, ποὺ νὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς *ἀρνητικοῦ* ἀριθμοῦ. Ἡ λύσις λοιπὸν τῆς ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ποὺ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον : $\rho=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$,

δίδει τιμὰς τοῦ x, *μόνον, ἂν τὸ ὑπόρριζον εἶναι θετικὸν* ἢ 0. Διὰ νὰ παρακάμψωμεν καὶ τὴν δυσκολίαν αὐτήν, εἰσάγομεν καὶ ἓν νέον εἶδος ἀριθμῶν, τοὺς *φανταστικοὺς* ἢ *μιγαδικούς*, δηλ. παραδεχόμεθα, ὅτι *ὑπάρχουν ἀριθμοί, ποὺ εἶναι τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἀρνητικῶν ἀριθμῶν*. Φθάνομεν οὕτως εἰς ἓν σύστημα ἀριθμῶν ἀκόμη πλουσιώτερον, τὸ λεγόμενον σύστημα τῶν *«πραγματικῶν»* καὶ τῶν *«φανταστικῶν»* ἀριθμῶν ἤ, συντομώτερον, τῶν *μιγαδικῶν ἀριθμῶν*.

75. Κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτὴν νέων ἀριθμῶν, ποὺ κάμνομεν κάθε φοράν, προσέχομεν εἰς τὸ ἑξῆς : *οἱ νέοι ἀριθμοὶ νὰ ὑποτάσσωνται εἰς τοὺς νόμους τῶν πράξεων, ποὺ ἰσχύουν διὰ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἕως τότε εἴχομεν.*

Οἱ διάφοροι νόμοι τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, καθὼς ἐμάθομεν εἰς τὴν Στοιχειώδη Ἄλγεβραν, ἀνάγονται εἰς *τρεῖς μόνον θεμελιώδεις*, ἀνεξαρτήτους τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον, καὶ αὐτῶν *λογικαὶ συνέπειαι* εἶναι ὅλοι οἱ ἄλλοι.

Οἱ τρεῖς αὐτοὶ θεμελιώδεις νόμοι εἶναι οἱ ἑξῆς :

1) Ὁ *ἐναλλακτικὸς (ἢ τῆς ἀντιμεταθέσεως)*, ποὺ ἰσχύει εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \qquad \alpha\beta=\beta\alpha.$$

2) Ὁ *διαλυτικός*, ποὺ ἐπίσης ἰσχύει καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma, \qquad \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

3) Ὁ *ἐπιμεριστικός*, ποὺ συνδέει τὴν πρόσθεσιν μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν :

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

[Πλὴν αὐτῶν δὲ δεχόμεθα καὶ μερικὰ *ἀξιώματα* :

1) *Οἱ ἀριθμοὶ εἰμποροῦν νὰ καταταχθοῦν* κατὰ τάξιν μεγέθους, δηλ. *μεταξὺ δύο ἀριθμῶν* α *καὶ* β *ἰσχύει πάντοτε μία καὶ μόνον μία* ἀπὸ τὰς *3 σχέσεις* : $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$, $\beta>\alpha$.

2) *Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον δύο διαφορετικοὶ ἀριθμοί.*

3) Ἂν $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$, εἶναι καὶ $\alpha>\gamma$· καὶ ἂν $\alpha>\alpha'$, εἶναι καὶ $\alpha+\beta>\alpha'+\beta$].

Ἂν λοιπόν, κατὰ τὴν ἐπέκτασιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ κάμνομεν κάθε φοράν, ἰσχύουν οἱ 3 αὐτοὶ νόμοι *θὰ ἰσχύουν καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν πράξεων*.

Εἶναι βέβαια ἀληθές, ὅτι ἡ ἀπαίτησίς μας αὐτὴ *νὰ ἰσχύουν πάντοτε* *οἱ νόμοι αὐτοὶ εἰς κάθε γενίκευσιν τῶν ἀριθμῶν, ποὺ κάμνομεν*, δὲν εἶναι *λογικῶς ὑποχρεωτική*· εἶναι ὅμως *πολὺ σκόπιμος καὶ πρακτική*, διότι, *εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν*, θὰ ἔπρεπε διαρκῶς νὰ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, λαμβάνοντες *κάθε φορὰν* ὑπ᾽ ὄψιν μας, *ποῖοι νόμοι ἰσχύουν διὰ τὸν καθένα*, πρᾶγμα βέβαια, ποὺ θὰ παρεῖχε μεγάλην δυσκολίαν καὶ ἐπιβράδυνσιν.

II. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

76. Ἂν θέλωμεν νὰ εἶναι ἡ ἀφαίρεσις *πάντοτε δυνατή*, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ διαφορὰ $\alpha - \alpha$ καὶ θὰ εἶναι εἷς ἀριθμὸς λ, δηλ. θὰ εἶναι: $\alpha = \lambda + \alpha$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λ εἶναι *ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὸ α*· δηλ., ἂν $\alpha - \alpha = \lambda$, εἶναι καὶ $\beta - \beta = \lambda$. Διότι, ἂν ἦτο $\beta = \beta + \lambda'$ ($\lambda' \lessgtr \lambda$), θὰ ἦτο καὶ $\beta + \alpha = (\beta + \lambda') + \alpha = (\alpha + \lambda') + \beta$, ἑπομένως $\alpha = \alpha + \lambda'$, ἔχομεν ὅμως καὶ $\alpha = \alpha + \lambda$, ὥστε $\lambda = \lambda'$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λ γράφεται 0 (*«μηδέν»*).

77. Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ 0 καθιστᾷ δυνατὸν τὸν χωρισμὸν τῶν ἀριθμῶν εἰς *θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς*.

Θετικὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς α, ἂν $\alpha > 0$· καὶ ἀρνητικός, ἂν $\alpha < 0$. Κάθε λοιπὸν ἀριθμὸς τοῦ συστήματός μας θὰ εἶναι ἢ θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ ὁ 0.

Διὰ $\beta > 0$ ἕπεται: $\alpha + \beta > \alpha$, διὰ $\beta < 0$ $\alpha + \beta < \alpha$. Ἐπίσης, ἂν $\alpha > \beta$ καὶ τεθῇ $\alpha = \beta + \gamma$, θὰ εἶναι $\gamma > 0$.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ α' εἶναι *«ἀντίθετοι»*, ἂν $\alpha + \alpha' = 0$. Διὰ $\alpha = 0$ εἶναι καὶ $\alpha' = 0$, δηλ. *ὁ 0 εἶναι ἀντίθετος τοῦ ἑαυτοῦ του*. Διὰ $\alpha > 0$ εἶναι $\alpha' < 0$. Ἑπομένως κατὰ τὸ 2ον ἀξίωμα (§ 75) *ὑπάρχουν* καὶ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Ἅμα δειχθῇ, ὅτι ἡ πρόσθεσις τοῦ β' εἰς τὸν α ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ β ἀπὸ τὸν α, γράφομεν πλέον $-\beta$ ἀντὶ β'.

78. *Αἱ πράξεις διὰ τὸ 0 εἶναι τώρα ἐντελῶς ὡρισμέναι.* Ἔχομεν πρῶτα: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = \alpha'$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha = \alpha + 0$, εἶναι καὶ $\beta\alpha = \beta(\alpha + 0) = \beta\alpha + \beta . 0$, ἑπομένως καὶ $\beta . 0 = 0$.

Ἐπίσης εἶναι $\frac{0}{\alpha} = 0$ (διότι $\alpha . 0 = 0$). *Μόνον ἡ διαίρεσις* $\frac{\alpha}{0}$ *εἶναι ἀδύνατος*· ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δειχθῇ ἀδύνατος ἡ διαίρεσις $\frac{1}{0}$ (διότι

$\frac{\alpha}{0}=\alpha.\frac{1}{0}\Big)$· ἂς παραδεχθῶ, ὅτι $\frac{1}{0}=\lambda$, ὅπου λ εἷς *νέος ἀριθμός*· *ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν ὑπακούει εἰς τοὺς νόμους τῶν πράξεων*. Πραγματικῶς, θὰ ἦτο τότε: $0.\lambda=1$ καὶ $0(\lambda+\alpha)=0.\lambda+0.\alpha=0.\lambda=1$, δηλ. $\frac{1}{0}=\lambda$ καὶ $\frac{1}{0}=\lambda+\alpha$· ἑπομένως $\lambda=\lambda+\alpha$, *ποὺ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τῆς κατατάξεως*. Ἐπίσης θὰ ἦτο: $0.\alpha.\lambda=(0.\alpha).\lambda=0.\lambda=1$ ἀλλὰ καὶ $0.\alpha.\lambda=0.\lambda.\alpha=(0.\lambda).\alpha=1.\alpha=\alpha$, ὥστε θὰ ἦτο: $1=\alpha$, *ποὺ ἀντιβαίνει εἰς τὸ β′ ἀξίωμα*. Ἐπίσης θὰ εἴχομεν: $0.0.\lambda.\lambda=(0.\lambda)(0.\lambda)=1.1=1$, ἀλλὰ καὶ $0.0.\lambda.\lambda=0.\lambda.\lambda=(0.\lambda).\lambda=1.\lambda=\lambda$. Δηλ. $1=\lambda$, *ποὺ προφανῶς δὲν ἰσχύει*. Ὁμοίως θὰ ἦτο $\lambda(\alpha+0)=\lambda\alpha$. ἀλλὰ καὶ $\lambda(\alpha+0)=\lambda\alpha+\lambda.0=\lambda\alpha+1$, Ὥστε $\lambda\alpha=\lambda\alpha+1$ (παρὰ τὸ 1ον ἀξίωμα) κτλ. *Ἀριθμὸς λοιπὸν λ δὲν ὑπάρχει καὶ ἡ διαίρεσις* $\frac{\alpha}{0}$ *εἶναι ἀδύνατος*.

79. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha+\alpha'=0$ ἕπεται: $(\alpha+\alpha')\beta=0$, ἢ $\alpha'\beta=-(\alpha\beta)$. Ἐπίσης: $\alpha'\beta'=-(\alpha\beta')=-[-(\alpha\beta)]=\alpha\beta$, δηλ. οἱ γνωστοὶ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀρνητικῶν καὶ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

80. Ἡ εἰσαγωγὴ τῆς μονάδος 1 εἶναι τώρα εὔκολος. Ἀφοῦ θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε τὸ πηλίκον γ δύο ἀριθμῶν α καὶ β($\alpha=\beta\gamma$), θὰ ὑπάρχῃ καὶ εἷς ἀριθμὸς μ, *διὰ τὸν ὁποῖον θὰ εἶναι* $\alpha=\mu\alpha$ (ἂν $\alpha \gtrless 0$). *Εἷς μόνος δὲ τοιοῦτος ὑπάρχει*· διότι, ἂν εἴχομεν καὶ $\beta=\mu'\beta$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha\beta=\alpha\mu'\beta$, ἑπομένως $\alpha=\alpha\mu'$ καὶ $\alpha\mu=\alpha\mu'$, ὥστε καὶ $\mu=\mu'$. Τὸν ἀριθμὸν μ ὀνομάζομεν *μονάδα* καὶ τὸν γράφομεν 1. Ἐπειδὴ $\vartheta.1=\vartheta>0$ (ἂν θ θετικός), θὰ εἶναι $1>0$.

III. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (1)

α′) Ἀκολουθίαι ἀριθμῶν.

81. Οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, (ποὺ μαζὶ τοὺς ὀνομάζομεν *ρητοὺς* ἢ *συμμέτρους*) *δὲν ἀρκοῦν* διὰ τὴν εὕρεσιν ἀριθμοῦ

(1) Τὴν ἑπομένην σαφεστάτην ἔκθεσιν τῆς κατὰ τὸν Dedekind *(Ντέντεκιντ)* θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (διὰ τῶν *τομῶν)*, καθὼς καὶ τὰς σχετικὰς Ἀσκήσεις παρέλαβα σχεδὸν καθ' ὅλα ἀπὸ τὸ ἐξαίρετον σύγγραμμα τοῦ συναδέλφου κ. *Π. Ζερβοῦ* «*Ἀπειροστικὸς Λογισμός*».

β, πού νὰ εἶναι *τετραγωνικὴ ρίζα* ἑνὸς ἄλλου δοθέντος θετικοῦ α (ἐκτὸς ἂν ὁ α εἶναι τέλειον τετράγωνον)· καὶ γενικῶς *δὲν ἀρκοῦν* διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ β' βαθμοῦ. Ἐπίσης *δὲν ἀρκοῦν* ἐν γένει διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης *ὁποιουδήποτε βαθμοῦ*. Διὰ νὰ κάμωμεν λοιπὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ πρᾶξιν *πάντοτε* δυνατήν, εἶναι ἀνάγκη νὰ εἰσαγάγωμεν καὶ νέους ἀριθμούς.

82. Κάθε *ἀκέραιος* ἢ *κλασματικὸς* ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ *πεπερασμένον* πλῆθος μονάδων. Ἐντούτοις εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν εἴδομεν, ὅτι δὲν εἰμποροῦμεν *πάντοτε νὰ* ἐκφράσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ *πεπερασμένον πλῆθος* μονάδων *ὡρισμένου* εἴδους. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{7}$ σύγκειται ἀπὸ *πεπερασμένον* ἀριθμὸν μονάδων $\frac{1}{7}$: $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$, *δὲν εἰμπορεῖ* · *ὅμως ν' ἀποτελεσθῇ ἀπὸ πεπερασμένον ἀριθμὸν μονάδων* $\frac{1}{10}$. Τρέπεται τότε εἰς *περιοδικὸν* κλάσμα. Κάθε λοιπὸν περιοδικὸν κλάσμα εἶναι *ἐντελῶς ὡρισμένος* ἀριθμὸς (διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ *πεπερασμένον* ἀριθμὸν μονάδων, τὸ εἶδος τῶν ὁποίων ὁρίζει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται)· ἐντούτοις, γραφόμενος ὑπὸ *δεκαδικὴν* μορφήν, ἔχει *ἄπειρα* δεκαδικὰ ψηφία. Καὶ εἶναι μὲν ἀληθές, ὅτι δὲν εἰμποροῦμεν νά τα γράψωμεν ὅλα, ἀλλὰ γνωρίζομεν *τὸν νόμον τῆς κατασκευῆς των*, διότι ἐπαναλαμβάνονται *περιοδικῶς*. Θὰ εὕρωμεν τώρα καὶ ἄλλους ἀριθμούς, *ποὺ ἔχουν καὶ αὐτοὶ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία*, τὰ ὁποῖα ὅμως *δὲν* ἐπαναλαμβάνονται *περιοδικῶς*, ἀλλὰ διαδέχονται τὸ ἓν τὸ ἄλλο *κατ' ἄλλους κανόνας*.

83. Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{7}$ · αὐτό, ἂν τραπῇ εἰς δεκαδικόν, γίνεται 0,142857142857...., δηλ. ἁπλοῦν περιοδικὸν μὲ *περίοδον* 142857. Ἂν λάβωμεν τὰς δύο *ἀκολουθίας* ἀριθμῶν :

(α)	0,1,	0,14,	0,142,	01428,....
καὶ (β)	0,2,	0,15,	0,143,	01429,....

ἡ α' μᾶς δίδει τὰς *κατ' ἔλλειψιν* προσεγγιζούσας διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος $\frac{1}{7}$, ἡ β' τὰς *καθ' ὑπεροχήν*.

Αἱ δύο αὐταὶ ἀκολουθίαι ἀριθμῶν ἔχουν τὰς ἑξῆς σχέσεις :

1) *Κάθε ἀριθμὸς τῆς (α) εἶναι* $<$ *ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς (β).*

2) *Ὅσον μικρὸς καὶ ἂν εἶναι εἷς ἀριθμὸς ε, εἰμποροῦμεν πάντοτε*

νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν τῆς (β) καὶ ἕνα τῆς (α), ποὺ νὰ διαφέρουν μεταξύ των ὀλιγώτερον ἀπὸ ε. Π.χ. ἂν $\varepsilon = \frac{3}{862}$, ἐπειδὴ $\frac{3}{862} > \frac{1}{1000}$, ἀρκεῖ νὰ εὕρω δύο ἀριθμοὺς (ἕνα τῆς (α) καὶ ἕνα τῆς (β)), ποὺ νὰ διαφέρουν ὀλιγώτερον ἀπὸ $\frac{1}{1000}$. Τοιοῦτοι εἶναι ἀπὸ μὲν τὴν (α) ὁ 0,142 (ἢ καὶ κάθε ἑπόμενός του) καὶ ἀπὸ τὴν (β) ὁ 0,1429 (ἢ καὶ κάθε ἑπόμενός του), διότι προφανῶς $0{,}1429 - 0{,}142 < \frac{1}{1000}$, ὥστε $<$ καὶ τοῦ $\frac{4}{862}$.

84. Ἀντὶ νὰ θεωροῦμεν ἀκολουθίας ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς κατὰ προσέγγισιν τιμὰς ἑνὸς περιοδικοῦ *δεκαδικοῦ* κλάσματος, εἰμποροῦμεν νὰ θεωροῦμεν *γενικωτέρας* ἀκολουθίας, ποὺ ν' ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς τιμὰς ἑνὸς ἀριθμοῦ $\left(\text{π. χ. τοῦ } \frac{2}{5}\right)$ τὰς κατὰ προσέγγισιν τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων *ἄλλης* κλασματικῆς μονάδος, π. χ. $\frac{1}{14}, \frac{1}{14^2}, \frac{1}{14^3}, \ldots\ldots$, ἢ γενικῶς $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \ldots (\alpha > 1)$, ἢ ἀκόμη γενικώτερα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots\ldots$, ὅπου τὰ κλάσματα αὐτὰ νὰ εἶναι θετικά, νὰ εἶναι τὸ καθὲν $<$ ἀπὸ τὸ προηγούμενόν του καὶ νὰ γίνωνται $<$ ἀπὸ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μικρόν.

β') Ὁρισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

85. Ἂν λάβωμεν ἕνα τυχόντα ῥητὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $\frac{26}{17}$, εἰμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὅλους τοὺς ῥητοὺς ἀριθμοὺς χωρισμένους εἰς δύο *εἴδη* ἢ *τάξεις*, τὴν (Α) καὶ τὴν (Β), ὡς ἑξῆς: ἡ (Α) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν $\frac{26}{17}$ καὶ ἀπὸ ὅλους τοὺς ῥητούς, *ποὺ εἶναι μικρότεροι ἀπὸ τὸν* $\frac{26}{17}$, καὶ ἡ (Β) ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους, *ποὺ θὰ εἶναι ἑπομένως μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸν* $\frac{26}{17}$. *Σύνορον* τοῦ χωρισμοῦ εἶναι προφανῶς ὁ $\frac{26}{17}$ καὶ εἰμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν συμβολικῶς τὰς δύο αὐτὰς τάξεις ὡς ἑξῆς :

(A)	(B)
.... $\frac{26}{17}$	....
$\left(\text{οἱ} < \text{ἀπὸ τὸν } \frac{26}{17}\right)$	$\left(\text{οἱ} > \text{ἀπὸ τὸν } \frac{26}{17}\right)$

Εἰμποροῦμεν ὅμως νὰ κάμωμεν καὶ *ἄλλον* χωρισμόν, τὸν ἑξῆς :

(A′)	(B′)
....	$\frac{26}{17}$ ....
$\left(\text{οἱ} < \text{ἀπὸ τὸν } \frac{26}{17}\right)$	$\left(\text{οἱ μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸν } \frac{26}{17}\right)$

Πάλιν *σύνορον* εἶναι ὁ $\frac{26}{17}$, ἀλλά, ἐνῷ πρὶν ἦτο ὁ *τελευταῖος* (καὶ ὁ μεγαλύτερος) *ἀριθμὸς τῆς τάξεως (A)*, τώρα εἶναι *ὁ πρῶτος* (καὶ ὁ μικρότερος) *τῆς (B)*.

Καὶ κατὰ τὸν χωρισμὸν [(A) καὶ (B)] καὶ κατὰ τὸν [(A′) καὶ (B′)] 1) *κάθε ἀριθμὸς τῆς α′ τάξεως εἶναι* < *ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς β′* καὶ) ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι εἷς θετικὸς ἀριθμὸς ε, εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, ἕνα ἀπὸ τὴν β′ καὶ ἕνα ἀπὸ τὴν α′ τάξιν, ποὺ ἡ διαφορά των νὰ εἶναι < ἀπὸ τὸν ε.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ διαφορετικοὶ τρόποι χωρισμοῦ τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις (A) καὶ (B), ποὺ κάθε ἀριθμὸς τῆς (A) νὰ εἶναι < ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς (B), χωρὶς ὅμως νὰ ὑπάρχῃ *σύνορον ὡρισμένος ῥητός*, δηλ. χωρὶς νὰ εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν οὔτε εἰς τὴν τάξιν (A) ἕνα ἀριθμὸν > ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους, οὔτε εἰς τὴν (B) ἕνα < ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους. Ἂς λάβωμεν πρὸς τοῦτο τὴν ἐξίσωσιν π. χ. $\chi^2-8=0$· γνωρίζομεν, ὅτι κανεὶς *ῥητὸς* ἀριθμὸς δέν την ἐπαληθεύει. Τότε χωρίζομεν ὅλους τοὺς ῥητοὺς εἰς δύο τάξεις : τὴν (A), ποὺ τὴν ἀποτελοῦν ὅλοι οἱ *θετικοὶ* ῥητοί, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $\chi^2-8<0$, τὸ 0 καὶ ὅλοι οἱ ἀρνητικοί· καὶ τὴν (B), ποὺ τὴν ἀποτελοῦν μόνον ὅλοι οἱ θετικοὶ ῥητοί, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $x^2-8>0$. Σύνολον τοῦ χωρισμοῦ αὐτοῦ δὲν εἶναι προφανῶς *κανεὶς ῥητὸς* ἀριθμός. Ἐντούτοις λέγομεν καὶ ἐδῶ, ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς *«ἀσύμμετρος»*, ποὺ εἶναι > ἀπὸ ὅλους τοὺς ῥητοὺς τῆς (A) καὶ < ἀπὸ ὅλους τοὺς ῥητοὺς τῆς (B) καὶ αὐτὸς ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $x^2-8=0$. Τὸν σημειώνομεν δὲ μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{8}$. Κατ᾽ ἀντιδιαστολὴν πρὸς τοὺς *ἀσυμμέτρους* ἀριθμοὺς λέγομεν τοὺς *ῥητοὺς* καὶ *συμμέτρους* ἀριθμούς.

γ') Τομαὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι.

(Θεωρία τοῦ Dedekind (Ντέντεκιντ)).

86. Ἂν γενικῶς ἔχωμεν ἕνα *«κανονικὸν»* χωρισμὸν τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις (Α) καὶ (Β) (δηλ. τοιοῦτον, ὥστε κάθε ἀριθμὸς τῆς (Α) νὰ εἶναι $<$ ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς (Β)), παρουσιάζονται τρεῖς περιπτώσεις:

1) Ἡ (Α) νὰ ἔχῃ ἕνα *μέγιστον* ἀριθμὸν Μ (δηλ. $>$ ἀπὸ κάθε ἄλλον της).

2) Ἡ (Β) νὰ ἔχῃ ἕνα ἐλάχιστον ἀριθμὸν Ε (δηλ. $<$ ἀπὸ κάθε ἄλλον της).

3) Οὔτε ἡ (Α) νὰ ἔχῃ ἕνα Μ οὔτε ἡ (Β) ἕνα Ε.

(Εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, ἡ (Β) δὲν ἔχει Ε· εἰς τὴν 2αν ἡ (Α) δὲν ἔχει Μ.

Διότι, ἂν ὑπῆρχον συγχρόνως ὁ Μ διὰ τὴν (Α) καὶ ὁ Ε διὰ τὴν (Β), θὰ εἴχομεν: $\mathrm{M}<\frac{\mathrm{M+E}}{2}<\mathrm{E}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\mathrm{M+E}}{2}$, *ποὺ εἶναι ρητός*, θὰ ἦτο *ἔξω καὶ ἀπὸ τὴν τάξιν (Α) καὶ ἀπὸ τὴν (Β)*, πρᾶγμα ἀδύνατον, ἀφοῦ αἱ δύο τάξεις μαζὶ περιέχουν *ὅλους* τοὺς ρητούς.

Εἰς τὰς δύο περιπτώσεις (1) καὶ (2) ὁ *ρητὸς* ἀριθμὸς Μ ἢ Ε εἶναι τὸ *σύνορον* τῶν δύο τάξεων, δηλ. τὸ σύνορον *τῆς τομῆς* ὅλων τῶν ρητῶν εἰς τὰς δύο τάξεις (τομὴ *ρητή*). Εἰς τὴν τρίτην ὅμως περίπτωσιν δὲν ὑπάρχει ρητὸς ἀριθμὸς ὡς σύνορον τῆς τομῆς, ἀλλὰ ὁ ἀριθμός, ποὺ εἴπομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὁ *ἀσύμμετρος*· (τομὴ *ἀσύμμετρος*).

δ') Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν ἀσυμμέτρων.

87. Ἂν α[(Α),(Β)] καὶ β[(Α'),(Β')] εἶναι δύο ἀσύμμετροι ἀριθμοί, δηλ. ὁριζόμενοι ἀπὸ τοὺς χωρισμοὺς [(Α),(Β)] καὶ [(Α'),(Β')], ἔχομεν 3 περιπτώσεις:

α') Ἂν (Α)≡(Α') (δηλ. αἱ τάξεις (Α) καὶ (Α') εἶναι αἱ ἴδιαι)· τότε θὰ εἶναι προφανῶς καὶ (Β)≡(Β')· ἑπομένως καὶ αἱ τομαί, ποὺ ὁρίζουν τοὺς α καὶ α', αἱ ἴδιαι. Λέγομεν τότε, ὅτι *οἱ δύο ἀσύμμετροι α καὶ α' εἶναι ἴσοι*. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τῆς ἰσότητος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἑξῆς: *Δύο ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι εἶναι ἴσοι, ἂν κάθε ρητὸν μέρος τοῦ α' εἶναι καὶ τοῦ β'· καὶ ἀντιστρόφως.*

β') Ἂν ἡ (Α') περιέχῃ ἕνα ἀριθμόν, ποὺ δέν τον ἔχει ἡ (Α) καὶ ποὺ θ' ἀνήκῃ λοιπὸν *κατ' ἀνάγκην* εἰς τὴν (Β), δηλ. ὑπάρχει *ῥητὸς* ἀριθμὸς $\varrho <$ ἀπὸ τὸν α' καὶ $>$ ἀπὸ τὸν α : $\alpha < \varrho < \alpha'$· τότε λέγομεν, ὅτι *ὁ α' εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν α.*

γ') Ἄν, ἀντιστρόφως, ἡ (Α) ἔχῃ ἕνα ἀριθμόν, ποὺ δέν τον ἔχῃ ἡ (Α') καὶ πού τον ἔχει λοιπὸν *κατ' ἀνάγκην* ἡ (Β'), λέγομεν, ὅτι *ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ α'.*

Οἱ ὁρισμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὸν ἑξῆς. *Ὁ α' εἶναι > ἀπὸ τὸν α, ἂν ὑπάρχῃ εἷς ῥητὸς* **ἀριθμὸς** *< ἀπὸ τὸν α' καὶ > ἀπὸ τὸν α.*

Παρατήρησις. Ὅτι οἱ ὁρισμοὶ αὐτοὶ ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τοὺς *συμμέτρους* ἀριθμούς, εἶναι φανερόν.

ε') Χωρισμὸς ὅλων τῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις μὲ ὡρισμένην τομήν.

88. *Θεώρημα.* Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐχωρίσαμεν *ὅλους τοὺς (συμμέτρους καὶ ἀσυμμέτρους)* ἀριθμοὺς εἰς δύο ***κανονικὰς*** τάξεις (Α) καὶ (Β), ὑπάρχει *πάντοτε* εἷς ἀριθμὸς τ *(σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος)*, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ὅλοι οἱ μικρότεροι νὰ εἶναι μέσα εἰς τὴν (Α) καὶ ὅλοι οἱ *μεγαλύτεροι μέσα εἰς τὴν (Β), δηλ. ὑπάρχει πάντοτε μία τομὴ τοῦ χωρισμοῦ [(Α),(Β)], σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος, ποὺ τὴν ὁρίζει ὁ τ.*

Ἀπόδειξις. Οἱ σύμμετροι τῆς (Α) ἀποτελοῦν προφανῶς μίαν τάξιν (A_σ) καὶ οἱ τῆς (Β) μίαν τάξιν (B_σ). Τότε θὰ ἔχωμεν : $(A)=(A_\sigma)+(A_\alpha)$ καὶ $(B)=(B_\sigma)+(B_\alpha)$, ὅπου αἱ τάξεις (A_α) καὶ (B_α) ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀσυμμέτρους τῆς (Α) ἢ α' καὶ τῆς (Β) ἢ β'. Αἱ τάξεις (A_σ) καὶ (B_σ) ὁρίζουν μίαν τομήν, δηλ. ἕνα ἀριθμὸν τ (σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον· λέγω, ὅτι αὐτὸς χρησιμεύει καὶ ὡς τομὴ τῶν (Α) καὶ (Β). Πραγματικῶς, 1) κάθε ἀριθμὸς φ (σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος) $<$ ἀπὸ τὸν τ εὑρίσκεται εἰς τὴν (Α)· διότι, ἂν μὲν ὁ φ εἶναι σύμμετρος, ὑπάρχει μέσα εἰς τὴν (A_ϱ), ὥστε καὶ εἰς τὴν (Α)· ἂν δὲ εἶναι ἀσύμμετρος, τότε μεταξὺ φ καὶ τ ὑπάρχει εἷς σύμμετρος σ (καὶ ἑπομένως καὶ ἄπειροι)· ὁ σ $(\sigma > \varphi)$ θὰ εἶναι $< \tau$, ὥστε εἶναι μέσα εἰς τὴν (A_ϱ), δηλ. καὶ μέσα εἰς τὴν (Α)· εἶναι λοιπὸν $<$ ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς (Β) καὶ ἂν ὁ φ εὑρίσκετο εἰς τὴν (Β), θὰ ἦτο $\sigma < \varphi$, ἐνῷ εἶναι $\sigma > \varphi$. *Ὥστε ὁ φ εὑρίσκεται εἰς τὴν (Α).*—2) Μὲ ὁμοίας σκέψεις ἀποδεικνύομεν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς ψ $>$ ἀπὸ τὸν τ εὑρίσκεται εἰς τὴν (Β). Εἶναι λοιπὸν ὁ τ ἡ τομὴ τῶν (Α) καὶ (Β) καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

ϛ′) Πράξεις μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους.

89. 1) ***Πρόσθεσις.*** Ἂν πρόκειται νὰ προσθέσωμεν δύο (ἀσυμμέτρους) ἀριθμούς, τοὺς τ καὶ τ', ὀνομάζομεν (A_ϱ), (B_ϱ) τὰς τάξεις τῶν συμμέτρων, ποὺ ὁρίζουν τὸν τ, καὶ (A'_ϱ),(B'_ϱ) τὰς τάξεις, ποὺ ὁρίζουν τὸν τ'· καὶ ἔπειτα ἐκλέγομεν 4 συμμέτρους $\alpha,\beta,\alpha'\beta'$, ποὺ ν᾽ ἀνήκουν εἰς τὰς (A_ϱ), (B_ϱ), (A'_ϱ), (B'_ϱ) καὶ νὰ εἶναι: $\alpha<\tau<\beta$, $\alpha'<\tau'<\beta'$ ὥστε καὶ $\alpha+\alpha'<\beta+\beta'$. Θεωροῦμεν τότε ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς χωρισμένους εἰς 2 τάξεις (Γ) καὶ (Δ), ὡς ἑξῆς: ἡ (Γ) ἔχει ὅλους τοὺς ἀριθμούς, τοὺς $<$ ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τῆς μορφῆς $\beta+\beta'$, ἑπομένως ἔχει καὶ ὅλους τοὺς τῆς μορφῆς $\alpha+\alpha'$· ἡ δὲ (Δ) ἔχει ὅλους τοὺς ἄλλους, λοιπὸν καὶ τοὺς $\beta+\beta'$. Τότε τὸ σύνορον τ'' τῶν (Γ) καὶ (Δ) θὰ εἶναι $<$ ἀπὸ κάθε $\beta+\beta'$ (ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν $\beta+\beta'$ δὲν ὑπάρχει κανεὶς μικρότερος, δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶναι $\tau''=$ μὲ ἕνα $\beta+\beta'$)· ἐπίσης θὰ εἶναι $\tau''>$ ἀπὸ κάθε $\alpha+\alpha'$ (ἴσος μὲ ἕνα $\alpha+\alpha'$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει μεταξὺ τῶν $\alpha+\alpha'$ μεγαλύτερος). *Ὥστε ὁ τ'' εἶναι $>$ ἀπὸ κάθε $\alpha+\alpha'$ καὶ $<$ ἀπὸ κάθε $\beta+\beta'$.* Ἄλλος δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς τ''' (κάθε $\alpha+\alpha'<\tau'''<$ κάθε $\beta+\beta'$) δὲν ὑπάρχει· διότι τότε μεταξὺ τοῦ τ'' καὶ τοῦ τ''' θὰ ὑπῆρχον ἄπειροι σύμμετροι, καὶ ἂν ϱ καὶ $\sigma(>\varrho)$ εἶναι δύο τοιοῦτοι, θὰ ἦτο πάλιν: κάθε $\alpha+\alpha'<\varrho<\sigma<$ κάθε $\beta+\beta'$ ἑπομένως $\sigma-\varrho<$ κάθε $(\beta+\beta')-$ κάθε $(\alpha+\alpha')$· ἡ ἀνισότης ὅμως αὐτὴ εἶναι ἀδύνατος· διότι ὁ μὲν $\sigma-\varrho$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς Σ, ἐνῷ ἡ β′ διαφορὰ γίνεται ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἂν λάβωμεν ἀρκετὰ μικρὰς τὰς διαφορὰς $\beta'-\alpha'$ καὶ $\beta-\alpha$). Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εἶναι $\sigma=\varrho$· ἀλλὰ σ καὶ ϱ εἶναι τυχόντες σύμμετροι μεταξὺ τῶν τ'' καὶ τ'', μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ῥητοί, ἄνισοι. Κατ᾽ ἀνάγκην λοιπὸν οἱ τ'' καὶ τ''' δὲν διαφέρουν, δηλ. $\tau'''=\tau''$. Ὁ ἐντελῶς λοιπὸν ὡρισμένος αὐτὸς ἀριθμὸς τ'' λέγεται *ἄθροισμα* τῶν τ,τ': $\tau''=\tau+\tau'$.

90. ***2) Ἀφαίρεσις.*** Εἶναι εὔκολον ν᾽ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἂν δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ τ καὶ τ' *ὑπάρχει* εἷς καὶ *μόνον εἷς* ἄλλος τ'', ποὺ νὰ ἔχωμεν: $\tau=\tau'+\tau''$, ἢ καὶ $\tau-\tau'=\tau''$.

91. ***3) Πολλαπλασιασμός.*** Ἂν τ καὶ τ' εἶναι δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί, ὁριζόμενοι ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς τάξεις τῶν συμμέτρων (A_σ), (B_σ) καὶ (A'_σ), (B'_σ), καὶ θεωρήσωμεν πάλιν 4 συμμέτρους θετικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$, ποὺ ν᾽ ἀνήκουν εἰς τὰς 4 αὐτὰς τάξεις καὶ νὰ εἶναι $\alpha<\tau<\beta$ καὶ $\alpha'<\tau'<\beta'$, θὰ εἶναι $\alpha\alpha'<\beta\beta'$. Μὲ ὁμοίας δὲ σκέψεις, ὅπως

εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὑπάρχει εἷς θετικὸς ἀριθμὸς τ'' καὶ μόνον εἷς, ποὺ νὰ εἶναι $>$ ἀπὸ κάθε γινόμενον $\alpha\alpha'$ καὶ $<$ ἀπὸ κάθε $\beta\beta'$. Τὸν τ'' τὸν λέγομεν γινόμενον τῶν τ καὶ τ': $\tau''=\tau\tau'$.

Ἂν εἷς ἢ καὶ οἱ δύο ἀπὸ τοὺς τ, τ' εἶναι ἀρνητικοί, ἐφαρμόζομεν τοὺς κανόνας τῶν σημείων (§ 79).

92. ***4) Διαίρεσις.*** Μᾶς δίδεται εἷς ἀσύμμετρος θετικὸς τ καὶ ζητοῦμεν ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν τ', ποὺ νὰ εἶναι $\tau\tau'=1$ ἢ $\tau'=\dfrac{1}{\tau}$ (δηλαδὴ *«ἀντίστροφος»* τοῦ τ). Ἂν (B_σ) εἶναι ἡ τάξις τῶν συμμέτρων τῶν $>$ ἀπὸ τὸν τ καὶ (A_σ) ἡ τῶν θετικῶν συμμέτρων τῶν $<$ ἀπὸ τὸν τ, οἱ ἀντίστροφοι τῶν συμμέερων τῆς (A_ϱ) ἀποτελοῦν μίαν τάξιν (B'_σ) καὶ οἱ ἀντίστροφοι τῶν συμμέτρων τῆς (B), μαζὶ μὲ τὸ 0 καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς συμμέτρους, μίαν τάξιν (A'_σ). Ἂν τότε κάμωμεν τὸν χωρισμὸν ὅλων τῶν συμμέτρων εἰς τὰς δύο τάξεις (A'_σ) καὶ (B'_σ), θὰ ὁρισθῇ εἷς θετικὸς ἀσύμμετρος τ'. Αὐτὸς προφανῶς εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ τ. Μὲ ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀσυμμέτρου. Κάθε ἀριθμὸς ἔχει ἀντίστροφον, ἐκτὸς τοῦ 0 (§ 78). Ἂν τώρα μᾶς δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ τ καὶ ω $(\tau \gtrless 0)$ καὶ ζητήσωμεν ἕνα τρίτον x, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι : $\tau x = \omega$, βλέπομεν, ὅτι ὁ x δὲν εἶναι ἄλλος ἀπὸ τὸν $\dfrac{1}{\tau}.\omega$, διότι προφανῶς : $\tau\left(\dfrac{1}{\tau}.\omega\right)=\omega$· τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν $x\equiv\dfrac{\omega}{\tau}$ τὸν λέγομεν λοιπὸν *πηλίκον τοῦ ω διὰ τοῦ τ.*

93. ***Παρατήρησις.*** Δὲν εἶναι ἀνάγκη διὰ τὸν ὁρισμὸν ἑνὸς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου νὰ λαμβάνωμεν τάξεις (A_σ) καὶ (B_σ), ποὺ νὰ περιέχουν *ὅλους* τοὺς συμμέτρους· ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν δύο *κανονικὰς* μερικὰς τάξεις (Γ_σ) καὶ (Δ_σ), ἀλλὰ μὲ τοὺς περιορισμούς :

1) Νὰ μὴ ἔχῃ ἡ (Γ_σ) μέγιστον ἀριθμόν, οὔτε ἐλάχιστον ἡ (Δ_σ) καὶ 2) Ἂν μᾶς δοθῇ εἷς ἀριθμὸς θετικὸς ε ὁσονδήποτε μικρός, νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς τῆς (Γ_σ) καὶ ἄλλος τῆς (Δ_σ), ποὺ νὰ ἔχουν διαφορὰν $<$ ἀπὸ τὸ ε. Αὐτὸ τὸ εἴδομεν ἤδη (§ 83) κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ συμμέτρου: τὸν ὁρίζουν αἱ δύο ἀκολουθίαι, ποὺ δὲν περιέχουν βέβαια ὅλους τοὺς συμμέτρους. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὁ τ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν ὅλων τῶν συμμέτρων $[(A_\sigma),(B_\sigma)]$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὴν (A_σ) μίαν τάξιν συμμέτρων (Γ_σ) καὶ ἀπὸ τὴν (B_σ) μίαν ἄλλην (Δ_σ), ποὺ νὰ ἐπαληθεύουν τὰς δύο προηγουμένας συνθήκας. Ἓν παράδειγμα διὰ τὰς (Γ_σ) καὶ (B_σ) εἶναι τὸ ἑξῆς : Λαμβάνομεν, πρὸς ὁρισμὸν ἑνὸς ἀσυμ-

μέτρου τὰς δύο ἀκολουθίας : $\alpha, \alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma_1\gamma_2, \alpha\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \ldots$, ὡς τάξιν (Γ_σ) καὶ $\alpha+1, \alpha\delta_1, \alpha\gamma_1\delta_2, \alpha\gamma_1\gamma_2\delta_3 \ldots$, ὡς τάξιν (Δ_σ) $(\delta_\nu = \gamma_\nu + 1)$, ὅπου α εἶναι ἀκέραιος θετικός, ἀρνητικὸς ἢ καὶ 0 καὶ τὰ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ψηφία μεταξὺ 0 καὶ 9.

(Π. χ. διὰ τὸν π εἶναι :

$(\Gamma_\sigma) \equiv 3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}1415, \ldots$

$(\Delta_\sigma) \equiv 4,\ 3{,}2,\ 3{,}15,\ 3{,}1416, \ldots$)

Ἀσκήσεις.

1) Μεταξὺ δύο τυχόντων συμμέτρων ὑπάρχει πάντοτε καὶ ἄλλος σύμμετρος καὶ ἑπομένως καὶ ἄπειροι.

2) Μεταξὺ δύο συμμέτρων ἢ ἀσυμμέτρων ὑπάρχει πάντοτε εἷς σύμμετρος καὶ ἑπομένως καὶ ἄπειροι.

3) Μεταξὺ δύο τυχόντων συμμέτρων ὑπάρχει πάντοτε εἷς ἀσύμμετρος καὶ ἑπομένως καὶ ἄπειροι.

4) Οἱ 3 θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀσυμμέτρους.

5) Ἂν ὁ τ ἀσύμμετρος, ἀσύμμετρος εἶναι καὶ ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\tau}$.

6) Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἔκφρασις $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$ (ὅπου α, β σύμμετροι, $\alpha>0$ καὶ $\alpha^2>\beta$) σύμμετρος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha^2-\beta$ καὶ $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}$ τετράγωνα συμμέτρων.

7) Ἡ ἔκφρασις $(\alpha+\sqrt{\beta})^2$ εἶναι ἀσύμμετρος, ἂν α, β σύμμετροι καὶ ὁ β θετικὸς καὶ ὄχι τέλειον τετράγωνον.

IV. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

94. Ἀπὸ τὴν Στοιχειώδη Ἄλγεβραν γνωρίζομεν, ὅτι, διὰ νὰ εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, εἶναι ἀνάγκη νὰ παραδεχθῇ κανεὶς καὶ τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ποὺ τὸ τετράγωνόν του νὰ εἶναι ἴσον μὲ -1. Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ $\sqrt{-1}=i$ καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης *κάθε* ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, διότι εἶναι : $(\alpha>0)$ $\sqrt{-\alpha}=\sqrt{\alpha.(-1)} = \sqrt{\alpha}.\sqrt{-1}=\sqrt{\alpha}.i$. Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, τοὺς *«φανταστικούς»*, πρόκειται τώρα νὰ σπουδάσωμεν λεπτομερῶς. Οἱ ἕως τώρα ὑπάρχον-

τες ἀριθμοί, σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι, λέγονται μαζί, πρὸς διάκρισιν, *πραγματικοί*.

Κάθε ἀριθμὸς τοῦ «*μιγαδικοῦ*» αὐτοῦ συστήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα *πραγματικὸν* ἀριθμὸν α καὶ ἕνα πολλαπλάσιον τῆς μονάδος i, τῆς μορφῆς βi (β πραγματικός), δηλ. ἔχει τὴν μορφὴν $\alpha+\beta i$. Ἂν τὸ β εἶναι $=0$, ἔχομεν τὸν «*πραγματικὸν*» ἀριθμὸν α· ἂν δὲ τὸ α εἶναι 0, ἔχομεν τὸν «(*καθαρῶς*) *φανταστικὸν*» βi καὶ ἂν α καὶ β εἶναι $\gtrless 0$, ἔχομεν τὸν «(πλήρη) *μιγαδικὸν*» ἀριθμὸν $\alpha+\beta i$.

α΄) Διμοναδικὰ συστήματα ἀριθμῶν ἐν γένει.

95. Πρὶν νὰ σπουδάσωμεν τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς, ἂς ἐξετάσωμεν γενικώτερον τὰ *διμοναδικὰ* συστήματα τῶν ἀριθμῶν, ἐκεῖνα δηλ. ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο *διαφορετικῆς φύσεως* μονάδας, (μεταξὺ τῶν ὁποίων δηλ. δὲν ὑπάρχει σχέσις *πρώτου* βαθμοῦ), συστήματα ὅμως, ποὺ ὑπακούουν εἰς τοὺς θεμελιώδεις νόμους τῶν πράξεων (§ 75).

96. Α΄) Ἓν πρῶτον τοιοῦτο σύστημα εἶναι τὸ τῆς μορφῆς $\delta=\alpha+\beta j$, ὅπου, πλὴν τῆς μονάδος 1, ὑπάρχει καὶ μία διαφορετικὴ μονὰς j *τυχοῦσα*. Ἀφοῦ ὁ ἐναλλακτικὸς νόμος θὰ ἰσχύῃ δι' αὐτὸ εἰς τὴν πρόσθεσιν, θὰ εἶναι : $\delta_1+\delta_2=(\alpha_1+\beta_1 j)+(\alpha_2+\beta_2 j)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)j=\alpha_3+\beta_3 j$· τὸ ἄθροισμα δηλ. εἶναι ἀριθμὸς τοῦ ἰδίου συστήματος. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μᾶς δίδει : $\delta_1\delta_2=(\alpha_1+\beta_1 j)(\alpha_2+\beta_2 j)=\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)j+\beta_1\beta_2 jj$.

Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τὸ γινόμενον $\delta_1\delta_2$ ἀριθμὸς τοῦ ἰδίου συστήματος, πρέπει νὰ εἶναι $jj=\varrho_1+\varrho_2 j$, ὅπου ϱ_1, ϱ_2 πραγματικοὶ ἀριθμοί. Τὸ γινόμενον λαμβάνει τότε τὴν μορφήν :

$$\delta_1\delta_2=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\varrho_1)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2\varrho_2)j$$

καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῶν ϱ_1, ϱ_2. Τὸ σύστημά μας ὅμως εἶναι ~~εἶναι~~ φανερόν, ὅτι δὲν ὑφίσταται καμίαν βλάβην εἰς τὴν γενικότητά του καὶ τὴν ἔκτασίν του, ἄν, ἀντὶ τῆς μονάδος j, εἰσαγάγωμεν τὴν

$$j_1=j-\frac{1}{2}\varrho_2$$

$$\left(\text{διότι : } \alpha+\beta j=\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\varrho_2\right)+\beta j_1 \text{ καὶ } \alpha+\beta j_1=\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\varrho_2\right)+\beta j\right).$$

Μὲ τὴν ἀλλαγὴν αὐτὴν ἁπλοποιεῖται ὁ πολλαπλασιασμός, διότι τότε : $j_1 j_1=j^2-\varrho_2 j+\frac{1}{4}\varrho_2^2=\frac{1}{4}\varrho_2^2+\varrho_1$. *Εἶναι λοιπὸν τότε τὸ τετράγωνον τῆς μονάδος j_1 πραγματικὸς ἀριθμός.*

Ἂν λοιπὸν τὸ j_1^2 εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς ἢ 0, τὸ j_1 καὶ ἑπομένως καὶ τὸ j θὰ ἦσαν ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ τὸ σύστημα $\alpha+\beta j$ δὲν θὰ ἦτο παρὰ τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Διὰ νὰ μὴ συμβαίνῃ αὐτό, πρέπει νὰ εἶναι $j_1 \cdot j_1$ ἀρνητικόν : $j_1 \cdot j_1 = -k^2$, ὅπου k πραγματικὸς ἀριθμός· καὶ ἂν (χωρὶς βλάβην τοῦ συστήματός μας) θέσωμεν : $\frac{j_1}{k} \equiv i$, τὸ τετράγωνον τῆς νέας μονάδος i ἁπλοποιεῖται : $i^2 = -1$. Ὥστε τὸ σύστημά μας καταντᾷ τὸ μιγαδικὸν $\alpha+\beta i$. Δηλαδὴ *δὲν ὑπάρχει ἄλλο διμοναδικὸν σύστημα τῆς μορφῆς $\alpha+\beta j$ (ὅπου αἱ μονάδες εἶναι 1 καὶ j) ἀπὸ τὸ μιγαδικόν.*

97. Β') Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ *γενικώτερον* διμοναδικὸν σύστημα : $\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2$, ὅπου ε_1, ε_2 εἶναι δύο τυχοῦσαι (*μὴ ὑποχρεωτικῶς πραγματικαὶ*) *διαφορετικαὶ* μονάδες (*μὴ συνδεόμεναι δηλ. μὲ σχέσιν τῆς μορφῆς : $\tau_1\varepsilon_1+\tau_2\varepsilon_2=0$ (τ_1, τ_2 πραγματικά)*). Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2)(\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2) = \alpha_1\beta_1\varepsilon_1^2 + (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_2\beta_2\varepsilon_2^2$ ἀριθμὸς τοῦ ἰδίου συστήματος, πρέπει νὰ εἶναι :

$\varepsilon_1^2 = \varrho_1\varepsilon_1 + \varrho_2\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2\varepsilon_1 = \varrho_1'\varepsilon_1+\varrho_2'\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2 = \varrho_1''\varepsilon_1+\varrho_2''\varepsilon_2$, ὅπου ϱ_1, ϱ_2 $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_1''$ ϱ_2'' πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\varepsilon_1(\varepsilon_1\varepsilon_2)=(\varepsilon_1\varepsilon_1)\varepsilon_2$, ἢ $\varepsilon_1(\varrho_1'\varepsilon_1+\varrho_2'\varepsilon_2)=(\varrho_1\varepsilon_1+\varrho_2\varepsilon_2)\varepsilon_2$ ἢ καὶ $\varrho_1'\varepsilon_1^2+(\varrho_2'-\varrho_1)\varepsilon_1\varepsilon_2-\varrho_2\varepsilon_2^2=0$ ἢ καὶ $\varepsilon_1(\varrho_2'\varrho_1'-\varrho_2\varrho_1'')+\varepsilon_2(\varrho_1'\varrho_2-\varrho_1\varrho_2'+\varrho_2'^2-\varrho_2\varrho_2'')=0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ συνδέῃ γραμμικῶς τὰ ε_1, ε_2 (ἄλλως θὰ ἦτο τὸ ε_2 πολλαπλάσιον τοῦ ε_1), θὰ ἔχωμεν :

$$\varrho_2'\varrho_1'=\varrho_2\varrho_1'' \quad \text{καὶ} \quad \varrho_1'\varrho_2+\varrho_2'^2=\varrho_1\varrho_2'+\varrho_2\varrho_2''.$$

Αἱ συνθῆκαι αὐταὶ ἐπαληθεύονται, ἂν θέσωμεν :

$\varrho_1=\lambda\nu+\mu\sigma$, $\varrho_2=\lambda\mu$· $\varrho_1'=\kappa\mu$, $\varrho_2'=\lambda\nu$, $\varrho_1''=\kappa\nu$, $\varrho_2''=\kappa\mu-\nu\sigma$.

Θὰ εἶναι λοιπόν : $\varepsilon_1^2=(\lambda\nu+\mu\sigma)\varepsilon_1+\lambda\mu\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2=\kappa\mu\varepsilon_1+\lambda\nu\varepsilon_2$,

$$\varepsilon_2^2=\kappa\nu\varepsilon_1+(\kappa\mu-\nu\sigma)\varepsilon_2\cdot$$

ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν : $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\varepsilon_1-(\lambda\nu+\mu\sigma)}{\varepsilon_2-\kappa\mu} = \frac{\varepsilon_1-\lambda\nu}{\varepsilon_2-(\kappa\mu-\nu\sigma)}$, δηλ. πάλιν γραμμικὴν σχέσιν μεταξὺ ε_1 καὶ ε_2. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εἶναι ἢ $\mu=0$ ἢ $\nu=0$ ἢ $\sigma=0$· ἀλλὰ $\mu=0$ ~~ἢ $\nu=0$~~ δίδει : $\varepsilon_1-\lambda\nu=0$, δηλ. ε_1 πραγματικόν· $\nu=0$ δίδει ε_2 πραγματικόν· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶναι $\sigma=0$· τότε ὅμως θὰ εἶναι :

$\kappa\mu\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 - \lambda\nu\varepsilon_2$
$\kappa\nu\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2 - (\kappa\mu-\nu\sigma)\varepsilon_2$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\varepsilon_1-\lambda\nu}{\varepsilon_2-(\kappa\mu-\nu\sigma)}$$

(α) $\varepsilon_1^2=\lambda(\nu\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_2=\kappa\mu\varepsilon_1+\lambda\nu\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2=\kappa(\nu\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)$, ὥστε : $\kappa\varepsilon_1^2=\lambda\varepsilon_2^2$· ἂν ὅμως τὰ κ, λ εἶναι ὁμόσημα, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὸ ε_2 πολλαπλάσιον τοῦ ε_1· ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι $\kappa.\lambda<0$.

Εἶναι τώρα εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ *γενικὸν αὐτὸ διμοναδικὸν σύστημα δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὸ μιγαδικόν*. Πραγματικῶς ἀπὸ τὰς σχέσεις (α) εὑρίσκομεν : $(\lambda\nu-\varepsilon_1)\varepsilon_1+\lambda\mu\varepsilon_2=0$, $(\kappa\mu-\varepsilon_2)\varepsilon_1+\lambda\nu\varepsilon_2=0$,

$$\kappa\mu\varepsilon_1+(\lambda\nu-\varepsilon_1)\varepsilon_2=0,\quad \kappa\nu\varepsilon_1+(\kappa\mu-\varepsilon_2)\varepsilon_2=0$$

καὶ ἑπομένως : $\varepsilon_1=\lambda\nu\pm\mu\sqrt{\kappa\lambda}\equiv\gamma_1+\delta_1 i$ $\varepsilon_2=\kappa\mu\pm\nu\sqrt{\kappa\lambda}\equiv\gamma_2+\delta_2 i$, *εἶναι δηλαδὴ αἱ μονάδες ε_1 καὶ ε_2 ἀριθμοὶ τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος*.

Ἡ μονὰς 1, ἂν παρασταθῇ εἰς τὸ σύστημά μας μὲ $\vartheta_1\varepsilon_1+\vartheta_2\varepsilon_2$, θὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2)(\vartheta_1\varepsilon_1+\vartheta_2\varepsilon_2)=\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2$ καὶ τὰ ϑ_1,ϑ_2 εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς ἰσότητας : $\varepsilon_1(\vartheta_1\varepsilon_1+\vartheta_2\varepsilon_2)=\varepsilon_1$, $\varepsilon_2(\vartheta_1\varepsilon_1+\vartheta_2\varepsilon_2)=\varepsilon_2$, ποὺ μᾶς δίδουν :

$$\vartheta_1=\frac{\nu}{\lambda\nu^2-\kappa\mu^2},\ \vartheta_2=\frac{-\mu}{\lambda\nu^2-\kappa\mu^2}\ \text{καὶ}\ 1=\frac{\nu\varepsilon_1-\mu\varepsilon_2}{\lambda\nu^2-\kappa\mu^2}\quad (\lambda\nu^2-\kappa\mu^2\gtrless 0,$$

ἀφοῦ $\kappa.\lambda<0$).

Συμπέρασμα : *Σύστημα διμοναδικὸν $\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2$, ποὺ νὰ ἔχῃ μονάδας μὴ συνδεομένας μ᾽ ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ ποὺ νὰ ὑπακούῃ εἰς ὅλους τοὺς θεμελιώδεις νόμους τῶν πράξεων, δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἀπὸ τὸ μιγαδικὸν $\alpha+\beta i$.*

Θὰ ἴδωμεν ἀργότερα, ὅτι *δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ οὔτε ἄλλο πολυμοναδικὸν σύστημα οἱονδήποτε (μὲ ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους μονάδας), εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῶν πράξεων*, πλὴν τοῦ $\alpha+\beta i$.

β΄) Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

98. Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι, καθὼς εἴδομεν, τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$. Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὰ α, β ἀντιστοίχως ὡς τετμημένην καὶ ὡς τεταγμένην ἑνὸς σημείου Μ, εἰς κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν θ᾽ ἀντιστοιχῇ ἓν ὡρισμένον σημεῖον Μ καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σημεῖον $M(\alpha,\beta)$ εἷς ὡρισμένος μιγαδικός, ὁ $\alpha+\beta i$. Τὴν ἀντιστοίχησιν αὐτὴν τὴν ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου *παριστάνει γεωμετρικῶς* ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμὸν καὶ ἀντιστρόφως, κάθε μιγαδικὸς *παριστάνεται* μὲ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν κατασκευάσωμεν τὰς *καρτεσιανὰς* συντεταγμένας (ΟΠ,ΠΜ) τοῦ Μ, βλέπομεν ἀμέσως, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ, ὅτι $\text{ΟΜ}=\sqrt{(\text{ΟΠ})^2+(\text{ΠΜ})^2}$

καὶ (ΟΠ)=(ΟΜ)συν(ΠΟΜ), (ΠΜ)=(ΟΜ)ημ(ΠΟΜ), δηλ. $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ $\alpha=\varrho$συνθ, $\beta=\alpha$ημθ, ὅπου ϱ, θ εἶναι αἱ *πολικαὶ* συντεταγμέναι τοῦ Μ. Κάθε λοιπὸν μιγαδικὸς ἐπιδέχεται *δύο μορφὰς* (ἰσοδυνάμους προφανῶς):

$$\alpha+\beta i \quad \text{καὶ} \quad \varrho(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$$

Τὴν α' θά την λέγωμεν *καρτεσιανήν*, τὴν β' *πολικὴν* (ἢ καὶ *τριγωνομετρικήν*).

Τὰς πολικὰς συντεταγμένας ϱ, φ (τὴν πολικὴν *ἀπόστασιν* καὶ τὴν πολικὴν *γωνίαν* φ) τοῦ Μ θά τας λέγωμεν *μέτρον* (τὸ ϱ καί το λαμβάνομεν *πάντοτε θετικὸν*) καὶ *ὅρισμα* (τὸ φ) τοῦ μιγαδικοῦ $\alpha+\beta i$. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ φ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 2π δὲν βλάπτει τὸν μιγαδικόν. Εἶναι φανερὸν ἐπίσης, ὅτι οἱ μὲν *πραγματικοὶ* ἀριθμοὶ παριστάνονται μὲ τὰ σημεῖα *τοῦ ἄξονος ΟΧ* (τοῦ θετικοῦ μέρους του ($\varphi=0$) οἱ *θετικοὶ* καὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ($\varphi=\pi$) οἱ *ἀρνητικοί*), οἱ δὲ *(καθαρῶς) φανταστικοὶ* μὲ τὰ σημεῖα *τοῦ ἄξονος ΟΥ* (τοῦ θετικοῦ μέρους του $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ οἱ *θετικοὶ* καὶ τοῦ ἀρνητικοῦ $\left(\varphi=\frac{3\pi}{2}\right)$ οἱ *ἀρνητικοί*), δηλ. ($\theta>0$): $\theta=\theta(\text{συν}0+i\,\text{ημ}0)$, $-\theta=\theta(\text{συν}\pi+i\,\text{ημ}\pi)$,

$$\theta i=\theta\left(\text{συν}\frac{\pi}{2}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right),\quad -\theta i=\theta\left(\text{συν}\frac{3\pi}{2}+i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{2}\right).$$

Δύο μιγαδικοί, ποὺ ἔχουν ϱ τὸ ἴδιον καὶ θ ἀντίθετα (δηλ. α τὸ ἴδιον καὶ β ἀντίθετα):

$$\alpha+\beta i,\quad \alpha-\beta i \quad \text{ἢ} \quad \varrho(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta),\quad \varrho(\text{συν}\theta-i\,\text{ημ}\theta)$$

λέγονται *συζυγεῖς* (ὥστε συζυγεῖς κάθε *πραγματικοῦ* εἶναι ὁ ἑαυτός του, κάθε *φανταστικοῦ* ὁ ἀντίθετός του).

γ') Πράξεις τῶν μιγαδικῶν.

1) *Μὲ τὴν καρτεσιανὴν μορφήν.*

α') *Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.*

99. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων μιγαδικῶν $\alpha_1+\beta_1 i$, $\alpha_2+\beta_2 i$, $\alpha_3+\beta_3 i$, ... εἶναι προφανῶς:

$$\alpha_1+\beta_1 i+\alpha_2+\beta_2 i+\alpha_3+\beta_3 i+\ldots=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots)+(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots)i,$$

δηλ. ἔχει πραγματικὸν μέρος τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν μερῶν τῶν προσθετέων καὶ φανταστικὸν τὸ ἄθροισμα τῶν φανταστικῶν. Τὸ ἴδιον βέβαια ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν: $\alpha+\beta i-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$.—Τὸ ἄθροισμα δύο *συζυγῶν* μιγαδικῶν $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ εἶναι λοιπὸν *πραγματικὸς* ἀριθμός, ὁ 2α, καὶ ἡ διαφορά των *φανταστικός*, ὁ $2\beta i$.

100. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν μιγαδικὸν ἀπὸ τὸν ἑαυτόν του: $(\alpha+\beta i)-(\alpha+\beta i)$ εὑρίσκομεν: $(\alpha-\alpha)+(\beta-\beta)i$ δηλ. 0. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι καὶ ἀντιστρόφως, *ἡ διαφορὰ δύο μιγαδικῶν* $\alpha_1+\beta_1 i$ *καὶ* $\alpha_2+\beta_2 i$ *μόνον τότε εἶναι* $=0$, *ὅταν οἱ δύο μιγαδικοὶ δὲν διαφέρουν καθόλου, δηλ. ὅταν καὶ* $\alpha_1=\alpha_2$ *καὶ* $\beta_1=\beta_2$. Διότι, ἂν εἶναι:

$$(\alpha_1+\beta_1 i)-(\alpha_2+\beta_2 i)=0 \text{ θὰ εἶναι καί: }$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)i=0 \text{ ἢ } \alpha_1-\alpha_2=(\beta_2-\beta_1)i.$$

Ἂν λοιπὸν δὲν ἦτο $\alpha_1=\alpha_2$ καὶ $\beta_1=\beta_2$, θὰ ἦτο ὁ *πραγματικὸς* ἀριθμὸς $\alpha_1-\alpha_2$ ἴσος μὲ τὸν φανταστικὸν $(\beta_2-\beta_1)i$, πρᾶγμα ἀδύνατον.

Δύο λοιπὸν μιγαδικοὶ πρέπει τότε μόνον νὰ θεωρηθοῦν ὡς *ἴσοι*, ὅταν εἶναι ἴσα *χωριστὰ* τὰ πραγματικά των καὶ χωριστὰ τὰ φανταστικά των μέρη.

Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἰμποροῦν, καθὼς εἰξεύρομεν, νὰ καταταχθοῦν *ὅλοι* κατὰ τάξιν μεγέθους (δηλ. ἢ $\alpha=\alpha_1$ ἢ $\alpha>\alpha_1$ ἢ $\alpha<\alpha_1$)· διὰ τοὺς μιγαδικοὺς ὅμως **τοιαύτη** κατάταξις δὲν εἶναι δυνατή· ἂν π.χ. μᾶς δοθοῦν οἱ μιγαδικοὶ $5+8i$ καὶ $12+i$ *δὲν ὑπάρχει* μεταξύ των σχέσις ἀνισότητος.

Ὅτι ὅλοι οἱ νόμοι τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς μιγαδικούς, εἶναι φανερόν.

β') Πολλαπλασιασμός.

101. Τὸ γινόμενον *δύο* μιγαδικῶν $\alpha+\beta i$, $\gamma+\delta i$ εἶναι:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

καὶ τὸ γινόμενον *ὁσωνδήποτε* μιγαδικῶν εὑρίσκεται διὰ διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν.

102. Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον *μόνον τότε* εἶναι $=0$, ὅταν εἷς ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι 0· διότι, ἂν εἶναι: $(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i=0$, θὰ εἶναι $\alpha\gamma-\beta\delta=0$, $\alpha\delta+\beta\gamma=0$ καὶ ἑπομένως:

$\beta(\gamma^2+\delta^2)=0$, $\alpha(\gamma^2+\delta^2)=0$· ἢ λοιπὸν $\alpha=0$, $\beta=0$ (δηλ. ὁ α΄ παράγων $\alpha+\beta i$ εἶναι 0) ἢ $\gamma^2+\delta^2=0$, δηλ. $\gamma=0$, $\delta=0$ (ὁ β΄ παράγων $=0$).

Καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι νόμοι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰσχύουν προφανῶς καὶ διὰ τοὺς μιγαδικούς.

103. Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ *κοινοῦ* μέτρου των :

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2.$$

104. Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τῆς μονάδος i εἶναι :

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ldots,$$
$$i^{4\nu}=1,\ i^{4\nu+1}=i,\ i^{4\nu+2}=-1,\ i^{4\nu+3}=-i,\ldots$$

δηλ. *πραγματικαὶ αἱ ἀρτίου* βαθμοῦ ($=+1$, ἂν ὁ ἐκθέτης εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, $=-1$, ἂν ὄχι) καὶ *φανταστικαί*, αἱ *περιττοῦ* ($=+i$, ἂν ὁ ἐκθέτης εἶναι $4\nu+1$, $=-i$, ἂν εἶναι $4\nu+3$). Ὥστε καὶ αἱ 4 μονάδες 1, -1, i, $-i$ εἶναι δυνάμεις *μόνον* μιᾶς, τῆς i.

γ΄) Διαίρεσις.

105. Τὸ πηλίκον $x+yi$ δύο μιγαδικῶν $\alpha+\beta i$, $\gamma+\delta i$:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=x+yi$$

εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν :

$$\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)(x+yi) \quad \text{ἢ} \quad \alpha+\beta i=(\gamma x-\delta y)+(\gamma y+\delta x)i$$

καὶ ἑπομένως (§ 100) :

$$\gamma x-\delta y=\alpha,$$
$$\delta x+\gamma y=\beta.$$

ἢ καὶ

$$(\gamma^2+\delta^2)x=\alpha\gamma+\beta\delta$$
$$(\gamma^2+\delta^2)y=\alpha\delta-\beta\gamma\cdot$$

ὥστε, *ἂν ὁ διαιρέτης* $\gamma+\delta i \gtrless 0$, *δηλ.* $\gamma^2+\delta^2 \gtrless 0$, θὰ εἶναι :

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\quad y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$ καὶ τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι :

$$\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

106. Εἰς τὸ ἴδιον ἐξαγόμενον φθάνομεν, καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ ἐπὶ τὸν συζυγῆ τοῦ παρο-

νομαστοῦ $\gamma-\delta i$· θὰ εἶναι τότε :

$$\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν τῶν μιγαδικῶν εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῆς διαιρέσεως.

Ἀσκήσεις.

1) Πότε τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν εἶναι πραγματικόν ; Καὶ πότε φανταστικόν ;

2) Πότε τὸ πηλίκον δύο μιγαδικῶν εἶναι πραγματικόν ; Καὶ πότε φανταστικόν ;

3) Ἂν γράψωμεν ἕνα μιγαδικὸν μ_1 ὑπὸ τὴν μορφήν :

$\alpha.1+\beta(-1)+\gamma i+\delta(-i)$ ἢ $\alpha.1+\beta.1'+\gamma i+\delta i'$, παράγονται ἀπὸ αὐτόν, μὲ τὴν *κυκλικὴν* τροπὴν τῶν μονάδων $1, i, 1', i'$ (κατὰ τὴν σειρὰν αὐτήν), τρεῖς ἄλλοι μιγαδικοὶ μ_2, μ_3, μ_4 καὶ ἔχομεν :

$$\begin{aligned}
\mu_1&=\alpha.1+\beta.1'+\gamma i+\delta i', && (=\mu_1.1),\\
\mu_2&=\alpha.i+\beta.i'+\gamma.1'+\delta.1, && (=\mu_1.i),\\
\mu_3&=\alpha.1'+\beta.1+\gamma.i'+\delta.i, && (=\mu_1.1'),\\
\mu_4&=\alpha.i'+\beta i+\gamma.1+\delta.1'. && (=\mu_1.i').
\end{aligned}$$

Οἱ 4 αὐτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται *ἀκόλουθοι* ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. (Ἀκόλουθοι τῆς μονάδος 1 εἶναι αἱ i, $1'$, i'). Ὁ μ_3 εἶναι προφανῶς ὁ ἀντίθετος τοῦ μ_1. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ α′ ἢ β′ ἢ γ′ ἀκόλουθος ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν α′ ἢ β′ ἢ γ′ ἀκολούθων. Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A.1+B.1'+\Gamma.i+\Delta.i'$ τὸ γινόμενον δύο παραγόντων $\alpha_1.1+\beta_1.1'+\gamma_1.i+\delta_1.i'$ καὶ $\alpha_2.1+\beta_2.1'+\gamma_2.i+\delta_2.i'$.

4) Τὸ πηλίκον τῶν δύο συζυγῶν : $\alpha(1+i)$ καὶ $\alpha(1-i)$ εἶναι ὁ i.

5) Τὸ γινόμενον τῶν δύο *«ἀντισυζυγῶν»* ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $-\alpha+\beta i$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ τετραγώνου τοῦ κοινοῦ των μέτρου.

6) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ $1+i$ καὶ τοῦ $1-i$.

7) Νὰ εὑρεθοῦν τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον τῶν δύο *«ἐναλλασσόντων»* μιγαδικῶν $\alpha+\beta i$, $\beta+\alpha i$.

8) Ἐπίσης καὶ τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$, $\beta-\alpha i$, καὶ $\alpha+\beta i$, $-\beta+\alpha i$.

9) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης :

$$(\alpha+\beta i)^{\mu}=\left(\alpha^{\mu}-\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^{\mu-2}.\beta^{2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}\alpha^{\mu-4}.\beta^{4}\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}.\beta-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\alpha^{\mu-3}.\beta^{3}+\ldots\right)i.$$

10) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι δύο συζυγῶν εἶναι καὶ αὗται συζυγεῖς.

11) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης : $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma\pm\beta\delta)^2+(\alpha\delta\mp\beta\gamma)^2$ ἀπὸ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)$.

12) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\dfrac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\alpha-\beta i)(\gamma+\delta i)}$.

2) *Μὲ τὴν πολικὴν μορφήν.*

1) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

107. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πολλῶν μιγαδικῶν $\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)$, $\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2),\ldots$

εἶναι: $(\varrho_1\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_1+\varrho_2\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_2+\ldots)+(+\varrho_1\eta\mu\vartheta_1+\varrho_2\eta\mu\vartheta_2+\ldots)i$
$$=P(\sigma\upsilon\nu\Theta+i\eta\mu\Theta),$$

ὅπου: $P=\sqrt{(\varrho_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+\varrho_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+\ldots)^2+(\varrho_1\eta\mu\vartheta_1+\varrho_2\eta\mu\vartheta_2+\ldots)^2}=$
$$\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2+\ldots+2\varrho_1\varrho_2\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2-\vartheta_1)+2\varrho_1\varrho_3\sigma\upsilon\nu(\vartheta_3-\vartheta_1)+\ldots}$$

$$\text{καὶ } \sigma\upsilon\nu\Theta=\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=\nu}\varrho_k\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_k}{P},\quad \eta\mu\Theta=\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=\nu}\varrho_k\ \eta\mu\vartheta_k}{P},$$

Διὰ *δύο* π. χ. μιγαδικοὺς εἶναι : $P^2=\varrho_1^2+\varrho_2^2+2\varrho_1\varrho_2\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2-\vartheta_1)$.

(Ἡ ἰσότης αὐτὴ συμπίπτει προφανῶς μὲ τὴν τῆς Εὐθυγράμμου Τριγωνομετρίας : $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$).

108. Διὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἔχομεν ὁμοίως : $\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2)-$
$-\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)=(\varrho_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_2-\varrho_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1)+(\varrho_2\eta\mu\vartheta_2-\varrho_1\eta\mu\vartheta_1)i=$
$$=P(\sigma\upsilon\nu\Theta+i\eta\mu\Theta),$$

ὅπου : $P=\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2-2\varrho_1\varrho_2\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2-\vartheta_1)}$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\Theta=\dfrac{\varrho_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_2-\varrho_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1}{P}$, $\eta\mu\Theta=\dfrac{\varrho_2\eta\mu\vartheta_2-\varrho_1\eta\mu\vartheta_1}{P}$.

2) *Πολλαπλασιασμός.*

109. *Τὸ γινόμενον δύο ἢ πολλῶν μιγαδικῶν ἔχει μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων, ὅρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων.*

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν $\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + i\eta\mu\vartheta_1)$ καὶ $\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 + i\eta\mu\vartheta_2)$ εἶναι :

$$(\alpha)\ \varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + i\eta\mu\vartheta_1)\,\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 + i\eta\mu\vartheta_2) =$$

$$= \varrho_1\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 - \eta\mu\vartheta_1\eta\mu\vartheta_2) + (\sigma\upsilon\nu\vartheta_1\eta\mu\vartheta_2 + \eta\mu\vartheta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_2)i,$$

δηλ. $= \varrho_1\varrho_2[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\eta\mu(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$.

Ἐπίσης εἶναι γενικῶς : $(\alpha)\ \prod_{k=1}^{k=n} \varrho_k(\sigma\upsilon\nu\vartheta_k + i\eta\mu\vartheta_k) =$

$\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_\nu\,[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_\nu) + i\eta\mu(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_\nu)]$, ὅπου Γ σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων, ποὺ παράγουν αἱ τιμαὶ $1, 2, \ldots, \nu$ τοῦ k.

110. Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸν τύπον (α) ὅλα τὰ ϱ_k γίνονται ἴσα, καθὼς καὶ ὅλα τὰ ϑ_k, εὑρίσκομεν τὸν *τύπον τοῦ Moivre* :

$$[\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)]^\nu = \varrho^\nu\,[\sigma\upsilon\nu(\nu\vartheta) + i\eta\mu(\nu\vartheta)]\cdot$$

δηλ. Ἡ νυοστὴ δύναμις ἀριθμοῦ ἔχει μέτρον μὲν τὴν νυοστὴν δύναμιν τοῦ μέτρου τοῦ ἀριθμοῦ· ὅρισμα δέ, ν—πλάσιον τοῦ ὁρίσματός του.

3) *Διαίρεσις.*

111. *Τὸ πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἔχει μέτρον μὲν τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου, ὅρισμα δὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρισμάτων.*

Ἀπόδειξις. Ἂν $\dfrac{\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + i\eta\mu\vartheta_1)}{\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 + i\eta\mu\vartheta_2)} = \varrho_3(\sigma\upsilon\nu\vartheta_3 + i\eta\mu\vartheta_3)$, θὰ εἶναι :

$$\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + i\eta\mu\vartheta_1) = \varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 + i\eta\mu\vartheta_2)\varrho_3(\sigma\upsilon\nu\vartheta_3 + i\eta\mu\vartheta_3) =$$

$$= \varrho_2 . \varrho_3[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2 + \vartheta_3) + i\eta\mu(\vartheta_2 + \vartheta_3)].$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ὅμως :

$$\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + i\eta\mu\vartheta_1) = \varrho_2\varrho_3[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2 + \vartheta_3) + i\eta\mu(\vartheta_2 + \vartheta_3)]$$

ἕπεται : $\varrho_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 = \varrho_2\varrho_3\sigma\upsilon\nu(\vartheta_2 + \vartheta_3)$, $\varrho_1\eta\mu\vartheta_1 = \varrho_2\varrho_3\eta\mu(\vartheta_2 + \vartheta_3)$ (α).

Καὶ ἂν τετραγωνίσωμεν τὰς δύο αὐτὰς ἰσότητας καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν : $\varrho_1^2 = \varrho_2^2\varrho_3^2$, ἢ $\varrho_1 = +\varrho_2\varrho_3$ ἢ $\varrho_3 = \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot$ τότε δὲ αἱ (α) μᾶς δίδουν καὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 = \sigma\upsilon\nu(\vartheta_2 + \vartheta_3)$, $\eta\mu\vartheta_1 = \eta\mu(\vartheta_2 + \vartheta_3)$, δηλ.

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \vartheta_3, \quad \text{ἢ}\quad \vartheta_3 = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

112. ***Πόρισμα.*** *Ἀντίστροφος* τοῦ $\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$ εἶναι ὁ

$$\frac{1}{\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)}=\frac{1(\sigma\upsilon\nu0+i\eta\mu0)}{\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)}=\frac{1}{\varrho}\left[\sigma\upsilon\nu(-\vartheta)+i\eta\mu(-\vartheta)\right]=$$

$$=\frac{1}{\varrho}(\sigma\upsilon\nu\vartheta-i\eta\mu\vartheta),$$ δηλ. *ὁ ἀντίστροφος ἀριθμοῦ ἔχει μέτρον τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὅρισμα τὸ ἀντίθετον τοῦ ὁρίσματός του.*

4) Ρίζαι.

113. *Ἡ ἐξίσωσις* $x^\mu=\alpha$, *ὅπου* α *τυχὼν ἀριθμὸς καὶ* μ *θετικὸς ἀκέραιος, ἔχει πάντοτε* μ *λύσεις,* δηλ. *κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει* μ *διαφορετικὰς μυοστὰς ῥίζας.*

Ἀπόδειξις. Πρέπει νὰ εἶναι: $\varrho^\mu(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)^\mu=\alpha$, ἂν $\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ εἶναι μία ῥίζα τοῦ α. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτὴ γράφεται, κατὰ τὸν τύπον τοῦ Moivre, καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha)\quad \varrho^\mu(\sigma\upsilon\nu(\mu\varphi)+i\eta\mu(\mu\varphi))=P(\sigma\upsilon\nu\Phi+i\eta\mu\Phi),$$

ἂν P καὶ Φ εἶναι τὸ μέτρον καὶ τὸ ὅρισμα τοῦ α.

Ἡ ἐξίσωσις ὅμως (α) σχίζεται εἰς τὰς δύο:

$$\varrho^\mu\,\sigma\upsilon\nu(\mu\varphi)=P\sigma\upsilon\nu\Phi,\quad \varrho^\mu\,\eta\mu(\mu\varphi)=P\eta\mu\Phi,$$

αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν: $\varrho^\mu=P$ καὶ $\mu\varphi=\Phi+2k\pi$

καὶ ἑπομένως: $\varrho=+\sqrt[\mu]{P},\quad \varphi=\dfrac{\Phi+2k\pi}{\mu}$

ὥστε μία ῥίζα τοῦ μιγαδικοῦ εἶναι ὁ ἐπίσης μιγαδικός:

$$(\beta)\quad r=+\sqrt[\mu]{P}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Phi+2k\pi}{\mu}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\Phi+2k\pi}{\mu}\right)\right].$$

Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ k ἔμεινεν ἀόριστον, ὁ προηγούμενος τύπος δίδει διαφόρους ῥίζας. *Μόνον ὅμως αἱ τιμαὶ τοῦ* k: $0,1,2,\ldots,(\mu-1)$ *μᾶς δίδουν* μ *(διαφορετικὰς) ῥίζας, ὅλαι αἱ μεγαλύτεραι ἀπὸ τὸ* $(\mu-1)$ *μᾶς δίδουν ἐκ νέου τὰς ἰδίας ῥίζας.*

Πραγματικῶς, ἂν λάβωμεν μίαν τυχοῦσαν μεγαλυτέραν τιμὴν τοῦ k, τὴν $\lambda\mu+\nu$ $(\nu<\mu)$, ἡ ῥίζα (β) θὰ γίνῃ:

$$(\gamma)\quad r=+\sqrt[\mu]{P}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Phi+2(\lambda\mu+\nu)\pi}{\mu}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\Phi+2(\lambda\mu+\nu)\pi}{\mu}\right)\right].$$

τὸ ὅρισμα ὅμως: $\dfrac{\Phi+2(\lambda\mu+\nu)\pi}{\mu}=\dfrac{\Phi+2\nu\pi}{\mu}+2\lambda\pi$ διαφέρει κατὰ

...σης $\alpha = \alpha(\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$

...εν. $\beta = -\beta(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$ ἑπομένως ὁ μιγὰς ...

1) $x = \sqrt[\mu]{\alpha}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\mu} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{\mu}\right)$ 2) $x = \sqrt[\mu]{-\alpha}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{(2k+1)\pi}{\mu} + i\eta\mu\frac{(2k+1)\pi}{\mu}\right)$

πολλαπλάσιον περιφερείας ἀπὸ τὸ $\frac{\Phi+2\nu\pi}{\mu}$, ἑπομένως ἡ ρίζα (γ) εἶναι ἡ ἰδία μὲ τήν :

$$r=\sqrt[\mu]{P}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Phi+2\nu\pi}{\mu}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\Phi+2\nu\pi}{\mu}\right)\right],\ \text{ὅπου } \nu<\mu.$$

Μόνον λοιπὸν αἱ πρῶται μ ρίζαι (διὰ $k=0,1,2,\ldots,(\mu-1)$) εἰμποροῦν νὰ διαφέρουν.

Καὶ πραγματικῶς εἶναι ὅλαι διαφορετικαί· διότι, ἂν λάβωμεν δύο ἀπὸ αὐτάς, τάς :

$$r_1=\sqrt[\mu]{P}\left[\sigma\upsilon\nu\ \frac{\Phi+2\nu_1\pi}{\mu}+i\eta\mu\left(\frac{\Phi+2\nu_1\pi}{\mu}\right)\right],\ (\nu_1<\mu)$$

$$r_2=\sqrt[\mu]{P}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Phi+2\nu_2\pi}{\mu}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\Phi+2\nu_2\pi}{\mu}\right)\right],\ (\nu_2<\mu)$$

εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν μόνον μέτρον *τὸ ἴδιον*, ἀλλὰ ὁρίσματα $\frac{\Phi+2\nu_1\pi}{\mu}$, $\frac{\Phi+2\nu_2\pi}{\mu}$, ποὺ διαφέρουν κατὰ $\frac{2(\nu_2-\nu_1)\pi}{\mu}$, δηλ. *ὀλιγώτερον μιᾶς περιφερείας* καὶ ἑπομένως εἶναι *διαφορετικά*. Ὥστε : *Κάθε ἀριθμὸς ἔχει μ διαφορετικὰς μυοστὰς ρίζας.*

114. *Μερικαὶ περιπτώσεις.*

1) *Ρίζαι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.* Δι' ἕνα τοιοῦτον θ εἶναι : $P=\vartheta$, $\Phi=0$ καὶ αἱ ρίζαι του λοιπὸν δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον :

$\sqrt[\mu]{\vartheta}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\mu}+i\eta\mu\frac{2k\pi}{\mu}\right)(k=0,1,\ldots,(\mu-1))$. Εἶναι ἑπομένως ἡ *πρώτη* → $k=0$ πάντοτε *πραγματική*· ἂν δὲ ὁ μ εἶναι *ἄρτιος*, εἶναι ἐπίσης *πραγματική*, *ἀρνητικὴ* ὅμως, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς $k=\frac{\mu}{2}$. $\frac{2k\pi}{\mu}=\pi$, $k=\frac{\mu}{2}$

2) *Ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.* Τότε εἶναι : $\Phi=\pi$, $P=-\alpha$ (α ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμός). Ὥστε αἱ ρίζαι του εἶναι :

$\sqrt[\mu]{-\alpha}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{(2k+1)\pi}{\mu}+i\eta\mu\frac{(2k+1)\pi}{\mu}\right)$ $(k=0,\ 1,\ldots\ldots,(\mu-1))$· *πραγματικὴ* μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἡ *μία μόνον*, ἂν μ *περιττὸν* (ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς $k=\frac{\mu-1}{2}$) ἢ *καμία*, ἂν μ *ἄρτιον*. $\alpha = -\alpha(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$

Αἱ ρίζαι τῆς θετικῆς μονάδος.

115. Αἱ ρίζαι τῆς μονάδος 1 εἶναι : $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{\mu}\right)+i\eta\mu\left(\frac{2k\pi}{\mu}\right)$ $(k=0,1,\ldots,(\mu-1))$.

Ἂν μίαν μεταξὺ αὐτῶν τὴν ὀνομάσωμεν λ, τότε 1) *ὅλαι αἱ δυνάμεις τῆς λ εἶναι μυοσταὶ ρίζαι τῆς 1*, διότι: $(\lambda^{\varrho})^{\mu}=\lambda^{\mu\varrho}=(\lambda^{\mu})^{\varrho}=1^{\varrho}=1$. —2). *δύο δυνάμεις τῆς λ μὲ διαφορὰν ἐκθετῶν=μ, εἶναι ἴσαι.*

Διότι: $\lambda^{\varrho+\mu}=\lambda^{\varrho}\,.\,\lambda^{\mu}=\lambda^{\varrho}\,.\,1=\lambda^{\varrho}$. Ἑπομένως *μόνον αἱ ἑξῆς δυνάμεις τῆς λ εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρουν μεταξύ των:* (α) $\lambda^0,\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^{\mu-1}$. *Εἶναι δὲ πραγματικῶς διαφορετικαὶ (καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ μ ρίζαι τῆς 1), ἂν ὁ λ δὲν εἶναι ρίζα τῆς 1 βαθμοῦ κατωτέρου ἀπὸ μ.* Διότι, ἂν ἔχωμεν $\lambda^{\varrho}=\lambda^{\sigma}$ (ὅπου ρ,σ τυχόντες ἀριθμοὶ ἀπὸ τὴν σειράν: $0,1,\ldots\ldots,(\mu-1)$) καὶ ὑποθέσωμεν $\varrho>\sigma$, εὑρίσκομεν: $\lambda^{\varrho-\sigma}=1$, ὅπου $\varrho-\sigma<\mu$. Θὰ ἦτο λοιπὸν τὸ λ ρίζα τῆς μονάδος βαθμοῦ $<\mu$. Καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν τὸ λ εἶναι ρίζα τῆς 1 βαθμοῦ $<\mu$, αἱ δυνάμεις (α) προφανῶς δὲν εἶναι *ὅλαι* διαφορετικαί, δηλ. *δὲν δίδει* ἡ λ *ὅλας* τὰς μυοστὰς ρίζας τῆς 1.

116. *Ρίζαι ἀρχικαὶ (ἢ κύριαι) καὶ καταχρηστικαὶ (ἢ δευτερεύουσαι).* *Ἀρχικὴ* λέγεται μία μυοστὴ ρίζα τῆς 1, ὅταν μὲ τὰς δυνάμεις της παράγει *ὅλας* τὰς μ μυοστὰς ρίζας τῆς 1. Ἄλλως λέγεται *καταχρηστική*.

Ἀρχικαὶ ρίζαι τῆς 1 εἶναι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὰς τοῦ k πρώτας πρὸς τὸν μ. Αἱ ἄλλαι ὅλαι εἶναι αἱ καταχρηστικαί.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὀνομάσωμεν τὴν πρὸς τὸ μ πρώτην τιμὴν τοῦ k, ϑ. Θὰ δείξω, ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ λ:

$\lambda^0,\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^{\mu-1}$, ὅπου $\lambda=\text{συν}\left(\frac{2\vartheta\pi}{\mu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{2\vartheta\pi}{\mu}\right)$, εἶναι *ὅλαι διαφορετικαί.* Διότι, ἂν $\lambda^{\varrho}=\lambda^{\sigma}$, δηλ. $\text{συν}\left(\frac{2\varrho\vartheta\pi}{\mu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{2\varrho\vartheta\pi}{\mu}\right)=$ $=\text{συν}\left(\frac{2\vartheta\sigma\pi}{\mu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{2\vartheta\sigma\pi}{\mu}\right)$, θὰ ἦτο: $\frac{2\vartheta\varrho\pi}{\mu}-\frac{2\vartheta\sigma\pi}{\mu}=2\tau\pi$ (τ ἀκέραιος) ἢ καὶ $\frac{\vartheta(\varrho-\sigma)}{\mu}=\tau$, ποὺ εἶναι ἀδύνατον, διότι $\varrho-\sigma<\mu$ καὶ ϑ καὶ μ πρῶτοι μεταξύ των.

Διὰ μ = πρῶτος ἀριθμὸς ὅλαι αἱ μυοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος 1 εἶναι ἀρχικαὶ (πλὴν τῆς 1).

Τῆς θετικῆς μονάδος 1 τέταρται ρίζαι εἶναι αἱ 4 μονάδες τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος 1,—1,i,—i. Κάθε θετικοῦ ἀριθμοῦ αἱ μ μυοσταὶ ρίζαι εἶναι γινόμενα τῶν μ ριζῶν τῆς 1 ἐπὶ τὴν πραγματικὴν καὶ θετικὴν μυοστὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ.

117. *Παρατήρησις.* Οἱ νόμοι τῶν συμμέτρων δυνάμεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν:

$$\alpha^{\mu}\,.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu},\ (\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu},\quad \alpha^{\mu}\,.\,\beta^{\mu}=(\alpha\beta)^{\mu}$$

ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς συμμέτρους δυνάμεις τῶν μιγαδικῶν.(Αὐτὸ φαίνεται εὐκολώτατα ἀπὸ τὰς εὑρεθείσας τιμάς των). Ἡ ἰσότης ὅμως : $\sqrt[\rho]{\alpha^\pi} = \left(\sqrt[\rho]{\alpha}\right)^\pi = \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ δὲν εἶναι *ἀπόλυτος*, ἐκτὸς ἂν οἱ π καὶ ρ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ $\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}$ δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ $\alpha^{\frac{\pi.\nu}{\rho.\nu}}$, διότι τὸ α′ ἔχει ρ τιμάς, ἐνῷ τὸ β′ ἔχει ρν, ἄν το γράψωμεν : $\sqrt[\rho\nu]{\alpha^{\pi\nu}}$.

δ) Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πράξεων τῶν μιγαδικῶν.

118. *1) Πρόσθεσις.* Εἴδομεν, ὅτι οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ παριστάνονται μὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (§ 98)· ἀλλά, ἅμα τὸ σημεῖον Μ ὁρισθῇ, ὁρίζεται καὶ τὸ ἄνυσμα ΟΜ· ὥστε εἰμποροῦμεν νὰ λέγωμεν, ὅτι καὶ τὸ ἄνυσμα ΟΜ παριστάνει γεωμετρικῶς τὸν μιγαδικόν. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν δύο μιγαδικῶν $\alpha+\beta i$ (ΟΑ) καὶ $\gamma+\delta i$ (ΟΒ), τὸ $(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$, παριστάνεται προφανῶς μὲ τὴν διαγώνιον ΟΣ τοῦ παραλληλογράμμου μὲ ἐφεξῆς πλευρὰς τὰς ΟΑ, ΟΒ. Καὶ γενικῶς, ἡ πρόσθεσις πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς μὲ τὴν γνωστὴν κατασκευὴν τοῦ *γεωμετρικοῦ* ἀθροίσματος πολλῶν ἀνυσμάτων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy μὲ κοινὴν ἀρχὴν τὸ 0 (Ὅπως γίνεται καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπὸ ἓν σημεῖον δυνάμεων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τὴν Μηχανικήν).

119. *2) Ἀφαίρεσις.* Ἡ εὕρεσις τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν: $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)$, δηλ. τῆς $(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$, ἰσοδυναμεῖ γεωμετρικῶς, καθὼς ἀμέσως φαίνεται, μὲ τὴν κατασκευὴν τῆς μιᾶς πλευρᾶς (ΟΒ) ἑνὸς παραλληλογράμμου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του (ΟΣ) καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν (ΟΑ).

Ἀπὸ τὸ σχῆμα δὲ φαίνεται ἀμέσως, ὅτι :

1) *Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων των·* καὶ

2) *Τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν δὲν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων.*

120. *3) Πολλαπλασιασμός.* α′) *Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ —1 σημαίνει τροπήν του εἰς τὸ ἀντίθετον ἄνυσμα* (δηλ. *στροφήν του περὶ τὸ 0 κατὰ 180°*) (διότι $(\alpha+\beta i)1' = \alpha.1' + \beta i.1' = (-\alpha-\beta i)$.

β′) *Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ i σημαίνει θετικὴν στροφήν του περὶ τὸ 0 κατὰ 90°* (διότι $(\alpha+\beta i)i = \alpha i - \beta$).

γ΄) *Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ* $-i$ *σημαίνει θετικὴν στροφήν του περὶ τὸ* 0 *κατὰ* 270° (διότι $(\alpha+\beta i)(-i)=\beta-\alpha i$).

δ΄) *Γενικῶς, πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* $\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi$ *σημαίνει θετικὴν στροφήν του περὶ τὸ* 0 *κατὰ τὴν γωνίαν* φ (διότι, ἂν $\alpha+\beta i\equiv\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$, θὰ εἶναι $(\alpha+\beta i)(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ $=\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)=\varrho[\sigma\upsilon\nu(\vartheta+\varphi)+i\eta\mu(\vartheta+\varphi)]$).

ε΄) *Ἀκόμη γενικώτερα, πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ τὸν μιγαδικὸν* $\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ *σημαίνει θετικὴν στροφήν του περὶ τὸ* 0 *κατὰ τὴν γωνίαν* φ *καὶ πολλαπλασιασμὸν τοῦ μήκους του ἐπὶ* ϱ·
(διότι ἂν $\alpha+\beta i=\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)$, θὰ εἶναι : $(\alpha+\beta i).\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)=$ $=\varrho\ \varrho_1[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\varphi)+i\eta\mu(\vartheta_1+\varphi)]$).

121. 4) *Διαίρεσις. Διαίρεσις ἑνὸς ἀνύσματος διὰ τοῦ μιγαδικοῦ* $\varrho\ (\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ *σημαίνει προφανῶς ἀρνητικὴν στροφήν του κατὰ τὴν γωνίαν* φ *καὶ διαίρεσιν τοῦ μήκους του διὰ* ϱ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ *γεωμετρικὴ ἑρμηνεία* τῆς ὑψώσεως ἑνὸς μιγαδικοῦ εἰς δύναμιν.

2) Ἐπίσης τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης. (Καὶ ἰδιαιτέρως τῆς 1 καὶ τοῦ i).

3) Νὰ δειχθῇ *ἀλγεβρικῶς*, ὅτι τὸ μέτρον ἀθροίσματος εἶναι $\leqq$ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων.

4) Νὰ δειχθῇ *ἀλγεβρικῶς*, ὅτι τὸ μέτρον διαφορᾶς εἶναι $\geqq$ ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου.

5) Τὸ γινόμενον: $(\sigma\upsilon\nu\varphi_1+i\eta\mu\varphi_1)(\sigma\upsilon\nu\varphi_2+i\eta\mu\varphi_2)...(\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu+i\eta\mu\varphi_\nu)$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2.....\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu\ (1+i\varepsilon\varphi\varphi_2)\ (1+i\varepsilon\varphi\varphi_2).....(1+i\varepsilon\varphi\varphi_\nu)$ εἶναι$=\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1...\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu\ [(1-\Pi_2+\Pi_4...)+i(\Pi_1-\Pi_3+\Pi_5..)]$, ὅπου Π_k εἶναι γενικῶς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἐφαπτομένων ἀνὰ $k(k=1,2,...,\nu)$. Ἔχομεν λοιπόν :

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_\nu)=\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2...\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu\ (1-\Pi_2+\Pi_4-...),$$
$$\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_\nu)=\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2...\sigma\upsilon\nu\varphi_\nu\ (\Pi_1-\Pi_3+\Pi_5-...)\cdot$$

ἑπομένως καί : $$\varepsilon\varphi(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_\nu)=\frac{\Pi_1-\Pi_3+\Pi_5-...}{1-\Pi_2+\Pi_4-...}.$$

6) Νὰ δειχθῇ, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου τοῦ Moivre (Μοάβρ):
$(συνφ+iημφ)^μ=συν(μφ)+iημ(μφ)$, ὅτι :

$$συν(μφ)=συν^μ φ-\frac{μ(μ-1)}{1.2.}συν^{μ-2}φημ^2φ+$$

$$+\frac{μ(μ-1)(μ-2)(μ-3)}{1.2.3.4}συν^{μ-4}φημ^4φ-\ldots,$$

$$ημ(μφ)=\frac{μ}{1}συν^{μ-1}φημφ-\frac{μ(μ-1)(μ-2)}{1.2.3.}συν^{μ-3}φημ^3φ+$$

$$+\frac{μ(μ-1)(μ-2)(μ-3)(μ-4)}{1.2.3.4.5}συν^{μ-5}φημ^5φ-\ldots$$

Ἑπομένως καί :

$$εφ(μφ)=\frac{\frac{μ}{1}εφφ-\frac{μ(μ-1)(μ-2)}{1.2.3}εφ^3φ+\ldots\ldots}{1-\frac{μ(μ-1)}{1.2}εφ^2φ+\frac{μ(μ-1)(μ-2)(μ-3)}{1.2.3.4}εφ^4φ+\ldots}.$$

7) Ἂν θέσωμεν : $συνφ+iημφ=u$, $συνφ-iημφ=v$, θὰ ἔχωμεν : $2συνφ=u+v$, $2iημφ=u-v$, ὥστε :

$$2^μ συν^μ φ=(u+v)^μ,\quad 2^μ i^μ ημ^μ φ=(u-v)^μ$$

καὶ ἐπομένως, ἂν ἀναπτύξωμεν :

$$(1)\quad 2^μ συν^μ φ=u^μ+\frac{μ}{1}u^{μ-1}.v+\ldots,\quad 2^μ i^μ ημ^μ φ=u^μ-\frac{μ}{1}u^{μ-1}.v+\ldots(2).$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) νὰ δειχθῇ, ὅτι, *ἂν μὲν μ ἄρτιον*, ἔχομεν :

$$2^{μ-1}συν^μφ=συν(μφ)+\frac{μ}{1}συν[(μ-2)φ]+\frac{μ(μ-1)}{1.2}συν[(μ-4)φ]+\ldots+$$

$$+\frac{μ(μ-1)\ldots\left(\frac{μ}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots μ}.$$

ἂν δὲ μ περιττόν, ἔχομεν :

$$2^{μ-1}συν^μ φ=συν(μφ)+\frac{μ}{1}συν[(μ-2)φ]+\ldots+\frac{μ(μ-1)\ldots\left(\frac{μ+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{μ-1}{2}\right)}συνφ.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο τύποι :

(διὰ μ ἄρτιον) : $2^{μ-1} i^μ.ημ^μ φ=συν(μφ)-\frac{μ}{1}συν[(μ-2)φ]+$

$$+\frac{μ(μ-1)}{1.2.}συν[(μ-4)φ]-\ldots\pm\frac{μ(μ-1)\ldots\left(\frac{μ}{2}+1\right)}{1.2\ldots μ},$$

(διὰ μ περιττόν), $2^{\mu-1} \cdot i^{\mu-1}\, \eta\mu^{\mu}\varphi = \eta\mu(\mu\varphi) - \frac{\mu}{1}\eta\mu[(\mu-2)\varphi] +$

$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\eta\mu[(\mu-4)\varphi] - \ldots \pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots\frac{(\mu+3)}{2}}{1.2.3.\ldots\frac{(\mu-1)}{2}}\,\eta\mu\varphi,$$

(ὅπου οἱ παράγοντες i^{μ} καὶ $i^{\mu-1}$ εἶναι *πραγματικοὶ* ἀριθμοί).

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν θέσωμεν

$$T \equiv 1+\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta) = r(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi), \text{ θὰ εἶναι :}$$

$$r = \sqrt{1+2\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta+\varrho^2} \text{ καὶ } \varphi = \tau o\xi\epsilon\varphi\left(\frac{\varrho\eta\mu\vartheta}{1+\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta}\right) \text{καὶ ἑπομένως :}$$

$$T = \sqrt{1+2\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta+\varrho^2}\left(\sigma\upsilon\nu\left[\tau o\xi\epsilon\varphi\left(\frac{\varrho\eta\mu\vartheta}{1+\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta}\right)\right] + i\eta\mu\left[\tau o\xi\epsilon\varphi\left(\frac{\varrho\eta\mu\vartheta}{1+\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta}\right)\right]\right).$$

καὶ ὅτι, *διὰ ἀρκετὰ μικρὸν ϱ*, εἰς τὸ γινόμενον $(x+yi)\,[1+\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)]$, τὸ πραγματικὸν μέρος εἶναι *ὁμόσημον* μὲ τὸ x καὶ τὸ φανταστικόν, μὲ τὸ y (ἐνόσῳ x καὶ y $\gtrless 0$).

122. ***Ἱστορικὴ σημείωσις.*** Τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἵδρυσαν ὁ D'Alembert *(Ντ' Ἀλαμπέρ)*, ὁ Euler *(Ὄϊλερ)* (ὁ εἰσαγαγὼν τὴν γραφὴν i ἀντὶ $\sqrt{-1}$), ὁ Cauchy (Κωσὺ) καὶ ὁ Gauss (Γκάους) (αὐτὸς τοὺς ὠνόμασε μιγαδικοὺς (komplex)). Τὴν γεωμετρικὴν των ὅμως ἑρμηνείαν ἔδειξε πρῶτος ὁ Wessel *(Βέσσελ)* (1799) καὶ κατόπιν ἐκτενέστερον ὁ Argand *(Ἀργκὰν)* (1806) καὶ ὁ Mourey *(Μουρέ)* (1820).

V. ΑΡΙΘΜΟΣΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΔΑΚΤΥΛΙΟΙ (1)

Καὶ εἰς πολλὰς θεωρίας τῆς Ἀλγέβρας, προπάντων ὅμως εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Ἀριθμῶν, χρησιμεύουν καὶ αἱ ἑπόμεναι κατατάξεις τῶν ἀριθμῶν.

1) Ἀριθμοσώματα.

123. *Ἓν πλῆθος ἀριθμῶν, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα : τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀπὸ αὐτοὺς (ἴσων ἢ διαφόρων) ν' ἀνήκῃ πάλιν εἰς τὸ πλῆθος αὐτό, ὀνομάζεται «σῶμα ἀριθμῶν» ἢ «ἀριθμόσωμα».*

---

(1) Πρβλ. Perron, Algebra, I, 1927.

Π. χ. τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *μιγαδικῶν* ἀριθμῶν ἀποτελεῖ *σῶμα*. Ἐπίσης τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *πραγματικῶν* μόνον. Καὶ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *ῥητῶν* μόνον, ἐπίσης. Ὄχι ὅμως τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *ἀκεραίων* (διότι τὸ πηλίκον των δὲν ἀνήκει πάντοτε εἰς τοὺς ἀκεραίους). Οὔτε τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *θετικῶν* ἀριθμῶν (διότι $1-2$ δὲν εἶναι θετικόν), οὔτε τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *ἀρνητικῶν* (διότι $(-2)(-3)=+6$).

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$ (ὅπου α,β *ῥητοὶ*) ἀποτελοῦν ἐπίσης *σῶμα*. Διότι:

$$(\alpha+\beta i)\pm(\gamma+\delta i)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)i,\quad (\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i,$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

124. Οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha+\beta\sqrt{\vartheta}$, ὅπου ϑ ἀκέραιος θετικός, μὴ τέλειον τετράγωνον ἄλλου, ἀποτελοῦν ἐπίσης *σῶμα*. Διότι:

$$(\alpha+\beta\sqrt{\vartheta})\pm(\gamma+\delta\sqrt{\vartheta}) = (\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)\sqrt{\vartheta},\quad (\alpha+\beta\sqrt{\vartheta})(\gamma+\delta\sqrt{\vartheta}) =$$
$$= (\alpha\gamma+\beta\delta.\vartheta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{\vartheta},$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{\vartheta}}{\gamma+\delta\sqrt{\vartheta}} = \frac{\alpha\gamma-\beta\delta.\vartheta}{\gamma^2-\delta^2.\vartheta} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2-\delta^2.\vartheta}\sqrt{\vartheta}.$$

($\gamma^2-\delta^2.\vartheta$ θὰ εἶναι $\gtrless 0$, ἄλλως θὰ ἦτο ὁ ϑ τέλειον τετράγωνον).

Τὸ σῶμα τοῦτο δὲν συμπίπτει μὲ τὸ σῶμα ὅλων τῶν πραγματικῶν. Διότι, ἂν ϱ εἶναι εἷς πρῶτος ἀριθμός, μὴ περιεχόμενος εἰς τὸν ϑ, ὁ $\sqrt{\varrho}$ *δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σῶμα*. Διότι, ἂν ἦτο:
$\sqrt{\varrho}=\alpha+\beta\sqrt{\vartheta}$, θὰ ἦτο καὶ $\varrho=\alpha^2+\beta^2.\vartheta+2\alpha\beta\sqrt{\vartheta}$, ἑπομένως $\alpha\beta=0$ (διὰ νὰ μὴ εἶναι ἡ $\sqrt{\vartheta}$ ῥητὸς ἀριθμός). Λοιπὸν ἢ $\alpha=0$ ἢ $\beta=0$· ἂν $\beta=0$, τότε $\varrho=\alpha^2$· ἀδύνατον, ἀφοῦ ϱ πρῶτος· ἂν $\alpha=0$, τότε $\varrho=\beta^2.\vartheta$, ἀδύνατον, ἀφοῦ $\frac{\varrho}{\vartheta}$ δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ τετράγωνον ῥητοῦ.

125. Ἂς θεωρήσωμεν *ἓν τυχὸν* σῶμα· ἀφοῦ περιέχει πολλοὺς ἀριθμούς, θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα $\alpha\gtrless 0$· ἀλλὰ τότε καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\alpha}=1$ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὸ σῶμα· ἑπομένως καὶ οἱ ἀριθμοὶ $1+1=2$, $2+1=3,\ldots,(\nu-1)+1=\nu,\ldots$

Περιέχει λοιπὸν ὅλους τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους. Ἀλλὰ περιέχει καὶ τοὺς κλασματικοὺς $\frac{\alpha}{\beta}$· καθὼς καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικοὺς (διότι $-\alpha=0-\alpha$). Ὥστε:

Κάθε ἀριθμόσωμα περιέχει κατ' ἀνάγκην ὅλους τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς.

126. Τὸ σῶμα, ποὺ ἀποτελοῦν οἱ ρητοὶ *μόνοι των*, εἶναι τρόπον τινὰ τὸ *«μικρότερον»* (τὸ *ὀλιγαριθμώτερον*) σῶμα, λέγεται τὸ *φυσικὸν ἀριθμόσωμα* καὶ σημειώνεται $\Sigma(1)$· (ὡς παραγόμενον ἀπὸ τὴν μονάδα 1).

127. Γενικῶς, $\Sigma(\lambda)$ σημαίνει τὸ *«μικρότερον»* σῶμα, ποὺ περιέχει τὸν λ. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς : $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_\nu\lambda^\nu}{\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2+\ldots+\beta_\mu\lambda^\mu}$ (ὅπου τὰ α,β ἀκέραιοι). (Π. χ. τὸ προηγούμενον σῶμα $\alpha+\beta\sqrt{\vartheta}$ εἶναι τὸ $\Sigma(\sqrt{\vartheta})$.

128. Γενικώτερα, ($\Sigma(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_\nu)$ σημαίνει τὸ «μικρότερον» σῶμα, ποὺ περιέχει ὅλους τοὺς $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι *ἑνιαῖος*. διότι π. χ. εἶναι : $\Sigma(8)$, $\Sigma\left(\frac{2}{3}, 7\right)$ κτλ. ὅλα ἴσα μὲ τὸ $\Sigma(1)$· ἐπίσης $\Sigma(\sqrt{2},\sqrt{5}) \equiv \Sigma(\sqrt{2},\sqrt{10}) \equiv \Sigma(5,\sqrt{2},\sqrt{125})$ κτλ. Ἀντιστρόφως ὅμως, *κάθε σῶμα δὲν εἶναι τῆς μορφῆς $\Sigma(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)$*· δὲν εἶναι π. χ. τοιαῦτα τὸ σῶμα ὅλων τῶν μιγαδικῶν, οὔτε τὸ σῶμα ὅλων τῶν πραγματικῶν.

129. Ἂν μας δοθῇ ἓν σῶμα Σ καὶ εἷς ἀριθμὸς λ μὴ ἀνήκων ἐν γένει εἰς τὸ Σ, ὑπάρχει ἓν *μικρότερον* σῶμα, ποὺ περιέχει ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Σ καὶ τὸν λ. Οἱ ἀριθμοί του εἶναι τῆς μορφῆς : $\dfrac{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_\nu\lambda^\nu}{\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2+\ldots+\beta_\mu\lambda^\mu}$, ὅπου οἱ α,β εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ Σ. Τὸ σῶμα αὐτὸ τὸ γράφομεν $\Sigma_1(\Sigma,\lambda)$. (Ἂν ὁ λ ἀνήκει εἰς τὸ Σ, τότε $\Sigma_1(\Sigma,\lambda)\equiv\Sigma$). Λέγομεν, ὅτι τὸ $\Sigma_1(\Sigma,\lambda)$ παράγεται ἀπὸ τὸ Σ διὰ τῆς *«συνδέσεώς»* του μὲ τὸν λ. (Π. χ. ἀπὸ τὸ $\Sigma(\sqrt{2})$ καὶ τὴν $\sqrt{3}$, παράγεται τὸ $\Sigma(\sqrt{2},\sqrt{3})$ κτλ.).

Γενικῶς, ἀπὸ τὸ Σ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$ παράγεται διὰ συνδέσεως τὸ $\Sigma_1(\Sigma,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)$. Καὶ γενικώτερον ἔχομεν σώματα τοῦ τύπου: $\Sigma(\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_\mu,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)$.

2) Ἀριθμοδακτύλιοι.

130. *Ἓν πλῆθος ἀριθμῶν, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα : τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀπὸ αὐτοὺς (ἴσων ἢ διαφόρων) ν' ἀνήκῃ πάλιν εἰς τὸ πλῆθος αὐτό, ὀνομάζεται «ἀριθμοδακτύλιος»*.

131. Κάθε σῶμα εἶναι προφανῶς καὶ δακτύλιος· ὄχι ὅμως καὶ ἀντιστρόφως (ἐν γένει)· π. χ. τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *ἀκεραίων* εἶναι *δακτύλιος*, ἀλλὰ ὄχι *σῶμα*· ἐπίσης τὸ πλῆθος ὅλων τῶν *ἀρτίων* ἀριθμῶν, τὸ

πλῆθος ὅλων τῶν *ῥητῶν μὲ παρονομαστὴν μίαν δύναμιν τοῦ 3* (μὲ ἐκθέτην μὴ ἀρνητικὸν) κτλ.

132. Ἂν εἷς δακτύλιος περιέχει τὸν ἀριθμὸν λ, περιέχει προφανῶς καὶ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς: $\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_\nu\lambda^\nu$, ὅπου οἱ α ἀκέραιοι. Ὁ δακτύλιος, ποὺ ἀποτελοῦν *μόνοι των* οἱ $\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\ldots+\alpha_\nu\lambda^\nu$, εἶναι ὁ «*μικρότερος*» ἀπὸ ὅσους περιέχουν τὸν λ καὶ τὸν γράφομεν $\Delta(\lambda)$. Π. χ. $\Delta(1)=$δακτύλιος ὅλων τῶν ἀκεραίων, $\Delta(2)$ ὅλων τῶν ἀρτίων κτλ.

Γενικῶς ἔχομεν τὸν «*μικρότερον*» δακτύλιον τῆς μορφῆς: $\Delta(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)$. Αὐτὸς εἶναι τῆς μορφῆς : $S\alpha\lambda_1^{\varrho_1}\lambda_2^{\varrho_2}\ldots\lambda_\nu^{\varrho_\nu}$, ὅπου α ἀκέραιος καὶ $\varrho_1,\varrho_2,\ldots$, ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοὶ (ὄχι *ὅλοι* $=0$). Καὶ ἡ γραφὴ αὐτὴ δὲν εἶναι ἑνιαία, διότι π. χ. εἶναι : $\Delta(\sqrt{3})\equiv\Delta(\sqrt{3},3)\equiv\Delta(\sqrt{3},-9)$ κτλ.

133. Ἐπίσης κατασκευάζομεν δακτυλίους διὰ τῆς *συνδέσεως* δακτυλίου ἢ δακτυλίων μὲ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμούς :

$$\Delta_1(\Delta,\lambda),\quad \Delta_1(\Delta,\lambda_1,\lambda_2,\ldots),\quad \Delta(\Delta_1,\Delta_2,\ldots)\quad \Delta(\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\lambda_1,\lambda_2,\ldots).$$

ϛ'. ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

134. *Ἀλγεβρικοὶ* λέγονται οἱ ἀριθμοί, ποὺ παρουσιάζονται κατὰ τὴν λύσιν τῶν *ἀλγεβρικῶν* ἐξισώσεων, δηλ. τῶν ἐξισώσεων, ποὺ ἔχουν β' μέλος τὸ 0 καὶ α' ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συντελεστὰς τοῦ x *συμμέτρους* (*ἀκεραίους* λοιπόν, διότι, ἂν εἶναι *κλασματικοί*, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμὸν γίνονται ἀκέραιοι). Αἱ λύσεις (ἢ αἱ «*ῥίζαι*») τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων εἶναι βέβαια ἀριθμοὶ τοῦ μιγαδικοῦ συστήματος. *Κάθε* ὅμως ἀριθμὸς τοῦ συστήματος αὐτοῦ δὲν εἶναι *ἀναγκαστικῶς* ῥίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Ὑπάρχουν καὶ ἀριθμοὶ (προφανῶς ἀσύμμετροι), ποὺ δὲν εἶναι λύσεις καμιᾶς *ἀλγεβρικῆς* ἐξισώσεως, οἱουδήποτε βαθμοῦ, καὶ δι' αὐτὸ λέγονται *ὑπερβατικοὶ* (*ὑπερβαίνουν* δηλ. τὴν Ἄλγεβραν). Δύο *σπουδαιότατοι* ὑπερβατικοὶ εἶναι ὁ $\pi=3{,}1415926\ldots$ (ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της) καὶ ὁ $e=2{,}718281828\ldots$, τὸν ὁποῖον θὰ σπουδάσωμεν περαιτέρω. Τὴν ὑπερβατικότητα τοῦ e ἀπέδειξεν ὁ Hermite *(Ἑρμίτ)* (1873), τοῦ δὲ π, ὁ Lindemann *(Λίντεμανν)* (1882). Ἡ ὑπερβατικότης τοῦ π ἔχει ὡς ἀκολούθημα καὶ *τὸ ἀδύνατον* τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου μὲ τὴν χρησιμοποίησιν οἱωνδήποτε *ἀλγεβρικῶν* καμπύλων).

ΜΕΡΟΣ Γ΄.

ΟΡΙΑ, ΣΕΙΡΑΙ, ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

α΄) Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες.

135. ***Μεταβλητὸν ποσόν.*** Ὅταν ἔχωμεν ἓν πλῆθος *ὁμοειδῶν* καὶ ἀνίσων ποσῶν, εἰμποροῦμεν νά τα θεωροῦμεν ὅλα ὡς *μερικὰς τιμὰς* (*ἢ καταστάσεις*) ἑνὸς *γενικοῦ* ποσοῦ, πού το φανταζόμεθα ὅτι εἶναι *μεταβλητὸν* καὶ ὅτι μεταβαλλόμενον διατρέχει διαδοχικῶς τὰς δοθείσας τιμάς. Π. χ. ἀπὸ διάφορα τμήματα εὐθείας σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας, ἀπὸ διάφορα ἐμβαδὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ διάφορα σχήματα στερεά, τὴν ἔννοιαν τοῦ χώρου· ἐπίσης ἀπὸ διάφορα χρονικὰ διαστήματα, τὴν ἔννοιαν τοῦ χρόνου κτλ.

136. ***Μεταβλητὸς ἀριθμός.*** Ἂν ἀντὶ ποσῶν ὁμοειδῶν θεωρήσωμεν ἀριθμούς, ποὺ νὰ ἔχουν κάτιτι *κοινὸν* (π. χ. νὰ παριστάνουν τὰς διαφόρους τιμὰς ἑνὸς μεταβλητοῦ ποσοῦ), εἰμποροῦμεν πάλιν νά τους θεωρήσωμεν ὡς μερικὰς τιμὰς ἑνὸς *μεταβλητοῦ* ἀριθμοῦ, ποὺ γίνεται, μεταβαλλόμενος διαρκῶς, ἴσος, κάθε φοράν, μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

137. ***Ἀπειροστόν.*** Ἂν τὸ μέτρον ἑνὸς μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ α, ποὺ λαμβάνει ἀπείρους τιμάς, εἰμπορῇ νὰ γίνῃ μικρότερον ἀπὸ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\mu}$, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν εἶναι αὐτή, καὶ νὰ μένῃ καὶ δι' ὅλας τὰς ἑπομένας τιμὰς μικρότερόν της, τότε λέγομεν, ὅτι τοῦ μεταβλητοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ *ὅριον εἶναι τὸ 0* καὶ τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς: ορ $\alpha = 0$ (ἢ $\alpha \to 0$).

Κάθε ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὅριον εἶναι τὸ 0, λέγεται *ἀπειροστὸς* ἢ *ἀπειροστόν*.

138. Τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ α λέγεται *ὅριον ὁ A*, ὅταν ἡ διαφορὰ α—A, καὶ ἑπομένως καὶ ἡ A—α, εἶναι *ἀπειροστή*, δηλ. ὅταν ορ(α—A)=0. Π.χ. ὅταν ὁ ἀκέραιος ν διατρέχῃ τὰς τιμὰς 1,2,3, . . ., ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς $\frac{\nu}{\nu+1}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1, ἀφοῦ $1 - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}$ εἶναι ἀπειροστόν, (τείνει δηλ. πρὸς τὸ 0, καθόσον τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ∞).

139. *Θεώρημα α΄. Ἂν εἷς μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμὸς α λαμβάνῃ ἀπείρους τιμὰς καὶ αὐξάνῃ διαρκῶς, ἀλλὰ συγχρόνως μένῃ πάντοτε μικρότερος ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον A, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει ὅριον.*

Ὁ δοθεὶς μεταβλητός, δὲν ὑπερβαίνει, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὅλους τοὺς ἀκεραίους· ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ὑπερβαίνει τὸν σ, ἀλλ' ὄχι καὶ τὸν σ+1· τότε μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν σ, $\sigma+\frac{1}{10}$, $\sigma+\frac{2}{10}$, ..., $\sigma+\frac{10}{10}$ ὑπάρχουν δύο ἐφεξῆς, ἀπὸ τοὺς ὁποίους τὸν α΄ τὸν ὑπερβαίνει ὁ μεταβλητός, τὸν β΄ ὅμως ὄχι· ἂς εἶναι τοιοῦτος ὁ $\sigma+\frac{\sigma_1}{10}$. Ἂν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον προχωρήσωμεν, βλέπομεν, ὅτι παράγεται εἷς ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος, ὁ $\sigma+\frac{\sigma_1}{10}+\frac{\sigma_2}{100}+\ldots=\Sigma$ *καὶ αὐτὸς εἶναι τὸ ὅριον τοῦ α*· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διαφορὰ α—Σ ἔχει ὅριον τὸ 0.

140. *Θεώρημα β΄. Ἂν εἷς μεταβλητὸς θετικὸς ἀριθμὸς γίνεται διαρκῶς* **μικρότερος**, *ἀλλὰ μένῃ πάντοτε μεγαλύτερος ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν μονάδα, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει ὅριον*. (Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τοῦ α΄ θεωρήματος).

β΄) Ὅρια μεταβλητῶν συνδεομένων μὲ τὰς 4 πράξεις.

141. 1) ***Ἄθροισμα.*** — *Τὸ ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν α καὶ β, ποὺ ἔχουν ὅρια τοὺς A καὶ B, ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων των*· δηλ. ορ(α+β)=A+B=ορ α+ορ β.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν : (α+β) — (A+B)= μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν (α—A) καὶ (β—B), ποὺ εἶναι προφανῶς *ἀπειροσταί*· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γίνῃ ἡ καθεμία των $<\frac{1}{2\mu}$, διὰ νὰ γίνῃ καὶ τὸ ἄθροισμά των $< \frac{1}{\mu}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ ἴδιον, καὶ ὅταν πρόκειται δι' ἄθροισμα μὲ 3,4,...ὅρους, εἰς *πεπερασμένον* ὅμως πλῆθος.

142. 2) ***Γινόμενον.*** — *Τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ποὺ ἔχουν ὅρια τοὺς Α καὶ Β, ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων.* Δηλ. $ορ(αβ)=ΑΒ=ορ\,α \cdot ορ\,β$.

Ἀπόδειξις. Ἂν $α-Α=ε$, $β-Β=η$ (ὅπου ε, η ἀπειροστά), θὰ εἶναι καὶ $α=Α+ε$, $β=Β+η$, ἑπομένως: $αβ=(Α+ε)(Β+η)=$ $=ΑΒ+Αη+Βε+εη$· δηλ. $ορ(αβ)=ΑΒ$, διότι ἡ διαφορὰ $αβ-ΑΒ=$ $=Αη+Βε+εη=$ μὲ ἀπειροστόν. Πραγματικῶς, ἂν θέλωμεν νὰ γίνῃ ἡ διαφορὰ $< \frac{1}{\mu}$, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ: $Αη < \frac{1}{3\mu}$, $Βε < \frac{1}{3\mu}$, $εη < \frac{1}{3\mu}$ καὶ αὐτὸ γίνεται, ἂν τὸ ε καὶ τὸ η γίνουν τὸ καθὲν $< \frac{1}{3K\mu}$, ὅπου Κ εἷς ἀκέραιος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν Α καὶ τὸν Β.—Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων, εἰς *πεπερασμένον* ὅμως πλῆθος.

143. 3) ***Πηλίκον.***—*Τὸ πηλίκον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἔχουν καὶ οἱ δύο ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων, ἂν ὅμως ὅριον τοῦ διαιρέτου δὲν εἶναι τὸ 0.*

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν: $ορα=Α$, $ορβ=Β$, ἢ $α=Α+ε$, $β=Β+η$· ἑπομένως $\frac{α}{β}-\frac{Α}{Β}=\frac{Α+ε}{Β+η}-\frac{Α}{Β}=\frac{Βε-Αη}{Β(Β+η)}$.

Τὸ γινόμενον ὅμως $Β(Β+η)$ ἔχει ὅριον τὸ $Β^2$ ($Β^2$ καθ' ὑπόθεσιν >0)· ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν μονάδα τοῦ $Β^2$, τὴν $\frac{1}{σ}$, τὸ $Β^2+Βη$ θὰ γίνῃ $>$ τοῦ $\frac{1}{2σ}$, ὅταν γίνῃ τὸ $Βη < \frac{1}{2σ}$· τότε τὸ κλάσμα $\frac{Βε-Αη}{Β^2+Βη}$ θὰ γίνῃ $< 2σ(Βε-Αη)$· ἀρκεῖ λοιπὸν τὸ $2σ(Βε-Αη)$ νὰ γίνῃ $< \frac{1}{\mu}$· καὶ τοῦτο πάλιν γίνεται, ἂν καθεὶς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $σΒε$, $σΑη$ γίνῃ $< \frac{1}{4\mu}$· δηλαδή, ἂν καθὲν ἀπὸ τὰ ε καὶ η γίνῃ $< \frac{1}{4σ\mu K}$ (Κ ἀκέραιος $>$ τῶν Α,Β). Ὥστε εἶναι πράγματι: $ορ\left(\frac{α}{β}\right)=\frac{Α}{Β}=\frac{ορ\,α}{ορ\,β}$.

144. 4) *Γενικῶς, ἂν ἔχωμεν μίαν τυχοῦσαν ῥητὴν παράστασιν $Π(α,β,γ,...)$ περιέχουσαν τοὺς μεταβλητοὺς ἀριθμοὺς α,β,γ,..., ποὺ νὰ ἔχουν ὅρια κατὰ σειρὰν τοὺς Α,Β,Γ,..., θὰ εἶναι:*

$$ορ[Π(α,β,γ,...)]=Π(Α,Β,Γ,...)=Π(ορ\,α,\ ορ\,β,\ ορ\,γ,...),$$

ἀρκεῖ ὅλων τῶν παρονομαστῶν (ἂν ὑπάρχουν τοιοῦτοι) τὰ ὅρια νὰ εἶναι $\gtrless 0$.

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ παράστασις Π εἶναι *ρητή*, δηλ. παράγεται *μόνον* διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν 4 πράξεων ἐπὶ τῶν α,β,γ,. . ., εἰμπορεῖ τὸ Π νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ἑνὸς κλάσματος μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀκέραια πολυώνυμα τῶν α,β,γ,. . ., δηλ.

$\Pi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=\dfrac{\Sigma k\alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\rho}\ldots}{\Sigma k'\alpha^{\mu'}.\beta^{\nu'}.\gamma^{\rho'}\ldots}$, ὅπου Σ σημαίνει ἄθροισμα, k, k'

εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοὶ *(σταθεροὶ)* καὶ μ,ν,ρ,. . .,μ',ν',ρ',. . .ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$\text{ορ}[\Pi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)]=\text{ορ}\frac{\Sigma k\alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\rho}\ldots}{\Sigma k'.\alpha^{\mu'}.\beta^{\nu'}.\gamma^{\rho'}\ldots}=\frac{\text{ορ}\Sigma k\alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\rho}\ldots}{\text{ορ}\Sigma k'.\alpha^{\mu'}.\beta^{\nu'}.\gamma^{\rho'}\ldots}=$$

$$=\frac{\Sigma\text{ορ}(k\alpha^{\mu}\beta^{\nu}\gamma^{\rho}\ldots)}{\Sigma\text{ορ}(k'\alpha^{\mu'}\beta^{\nu'}\gamma^{\rho'}\ldots)}=\frac{\Sigma kA^{\mu}B^{\nu}\Gamma^{\rho}\ldots}{\Sigma k'A^{\mu'}B^{\nu'}\Gamma^{\rho'}\ldots}=\frac{\Sigma k(\text{ορ}\alpha)^{\mu}(\text{ορ}\beta)^{\nu}(\text{ορ}\gamma)^{\rho}\ldots}{\Sigma k'(\text{ορ}\alpha)^{\mu'}(\text{ορ}\beta)^{\nu'}.(\text{ορ}\gamma)^{\rho'}\ldots}.$$

145. ***Παρατήρησις.*** Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου εἶναι θεμελιώδης εἰς τὰ μαθηματικά, ἰδιαιτέρως δὲ εἰς τὴν *Γεωμετρίαν*, ὅπου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν δύο πολυπλόκων μεγεθῶν, τὰ θεωροῦμεν ὡς ὅρια ἄλλων ἁπλουστέρων, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὰς σχέσεις· τότε ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν πρώτων μεγεθῶν παράγεται, ἂν εἰς τὴν σχέσιν τῶν ἁπλουστέρων θέσωμεν τὰ ὅρια τῶν ποσῶν, ποὺ περιέχει (ὅταν τὰ δεύτερα μεγέθη τείνουν πρὸς τὰ πρῶτα). Π. χ. αὐτὸ τὸ κάμνομεν, ὅταν ζητοῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (θεωροῦμεν ἀντὶ τοῦ κύκλου κανονικὸν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον)· τὸ ἴδιον κάμνομεν καὶ διὰ τοὺς ὄγκους καὶ τὰς κυρτὰς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (ὁρίου πρίσματος) τοῦ κώνου (ὁρίου πυραμίδος), τῆς σφαίρας (ὁρίου πολυέδρου ἐγγεγραμμένου) καὶ γενικῶς διὰ τὸ μῆκος κάθε καμπύλης γραμμῆς, τὸ ἐμβαδὸν κάθε *χωρίου*, ποὺ περικλείεται ἀπὸ καμπύλην γραμμήν, τὸ ἐμβαδὸν κάθε καμπύλης ἐπιφανείας, τὸν ὄγκον κάθε στερεοῦ, ποὺ περικλείεται ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

α') Ὁρισμοὶ καὶ εἴδη τῶν σειρῶν.

146. ***Φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος.*** — Ἀπὸ τὴν *Στοιχειώδη Ἄλγεβραν* γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου: $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}$ εἶναι : $\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}=\frac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1}=\alpha\cdot\frac{1-\omega^\nu}{1-\omega}$ καὶ ὅτι, ἂν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ∞, τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τείνει πρὸς ὡρισμένον ἀριθμόν, τὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$. Ἔχομεν λοιπὸν ἓν παράδειγμα μιᾶς σειρᾶς ἀπὸ ἀπείρους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, ὅσους καὶ ἂν λάβωμεν, ποτὲ δὲν ὑπερβαίνει ἕνα δοθέντα ἀριθμόν.

147. ***Ὁρισμὸς τῆς σειρᾶς.*** *Σειρὰν λέγομεν ἓν ἄπειρον πλῆθος ἀριθμῶν, ποὺ κατασκευάζονται ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον κατὰ ὡρισμένον νόμον καὶ τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν πάντοτε, ὅτι τοὺς προσθέτομεν.*

Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι σειρά, μὲ νόμον κατασκευῆς τὴν πρόσθεσιν ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ ω («*λόγου*») εἰς κάθε ὅρον της πρὸς παραγωγὴν τοῦ ἑπομένου. Ἐπίσης *κάθε* γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι σειρὰ μὲ νόμον κατασκευῆς τὸν πολλαπλασιασμὸν κάθε ὅρου ἐπὶ ω. Ἐπίσης ἀποτελοῦν π. χ. σειρὰν καὶ οἱ ἑξῆς ἀριθμοί :

$\alpha+(\alpha+1)+(\alpha+3)+(\alpha+6)+(\alpha+10)+\ldots\ldots$, διότι ὡρισμένος πάλιν τρόπος κατασκευῆς μᾶς δίδει ὅσους ὅρους της θέλομεν.

148. ***Τάξις τῶν σειρῶν.*** Μία σειρὰ λέγεται *ἁπλῆ* ἢ *α' τάξεως*, ἂν οἱ ὅροι της ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,3, . . ., *εἷς πρὸς ἕνα καὶ ἀντιστρόφως· διπλῆ* δέ, ἂν ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀνὰ 2 διατάξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, *εἷς ὅρος πρὸς μίαν διάταξιν καὶ ἀντιστρόφως·* γενικῶς, λέγεται *τῆς* $\nu^{\text{οστῆς}}$ *τάξεως, ἂν κάθε ὅρος της ἀντιστοιχῇ πρὸς μίαν διάταξιν ἀνὰ ν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· καὶ ἀντιστρόφως.* Οἱ ὅροι τῆς ἁπλῆς σειρᾶς εἰμποροῦν νὰ γραφοῦν *ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς* κατὰ σειράν :

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots\ldots+\alpha_\nu+\ldots$$

τῆς διπλῆς, *ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου* :

$$
\begin{array}{l}
\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{1\nu}+\ldots \\
+\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\ldots+\alpha_{2\nu}+\ldots \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\alpha_{\nu 1}+\alpha_{\nu 2}+\alpha_{\nu 3}+\ldots+\alpha_{\nu\nu}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

τῆς τριπλῆς, ἐντὸς τοῦ χώρου· κτλ.

149. Ἂν καὶ οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς δὲν εἰμποροῦν νὰ γραφοῦν *ὅλοι* (ἀφοῦ εἶναι *ἄπειροι)*, ἐντούτοις, ἅμα μᾶς δοθῇ ὁ *νόμος τῆς κατασκευῆς των*, εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν *ὅσους θέλομεν*· ἑπομένως *ἡ σειρὰ εἶναι γνωστή, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν νόμον τῆς κατασκευῆς τῶν ὅρων της.*

150. ***Εἴδη σειρῶν.*** Ὑπάρχουν 3 εἴδη σειρῶν : 1) Σειραὶ μὲ *μόνον θετικοὺς (ἢ μόνον ἀρνητικοὺς)* ὅρους, 2) σειραὶ μὲ ὅρους *θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς* καὶ 3) σειραὶ μὲ *τυχόντας* ὅρους.

β') Σειραὶ μὲ μόνον θετικοὺς ὅρους.

151. Μία σειρά, ποὺ ἔχει ὡς ὅρους ἀριθμοὺς ἑνὸς μόνον εἴδους, ἀνάγεται ἀμέσως εἰς σειρὰν μὲ θετικοὺς πραγματικοὺς ὅρους. Διότι, ἂν μὲν ἔχῃ ἀρνητικοὺς πραγματικούς, γράφομεν ἀπ᾽ ἔξω ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς τὸ —1· ἂν ἔχῃ θετικοὺς φανταστικούς, τὸ **i**· καὶ ἂν ἀρνητικοὺς φανταστικούς, τὸ —**i**. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν τὰς σειράς, ποὺ ἔχουν μόνον ὅρους θετικοὺς καὶ πραγματικούς.

152. ***Συγκλίνουσαι καὶ ἀποκλίνουσαι σειραί.*** Μία τοιαύτη σειρὰ λέγεται *συγκλίνουσα, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων της μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀπὸ ἕνα δοθέντα ἀκέραιον*. Ἂν, τοὐναντίον, *τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της, ὅσον προχωροῦμεν, τείνῃ πρὸς τὸ* ∞, τὴν λέγομεν *ἀποκλίνουσαν.*

Μία συγκλίνουσα σειρὰ παριστάνει ἕνα *ἐντελῶς ὡρισμένον* ἀριθμόν, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 139.

Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχει καὶ ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν *κοινῶν* ἀθροισμάτων (δηλ. μὲ πεπερασμένον πλῆθος προσθετέων).

153. ***Ἰδιότης τῶν συγκλινουσῶν σειρῶν.***— *Ἂν μᾶς δοθῇ εἷς ἀριθμὸς* ε, *ὁσονδήποτε μικρός, εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ χωρίσωμεν τὴν συγκλίνουσαν σειρὰν εἰς δύο μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μὲν α΄ νὰ ἔχῃ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων, ἀπὸ δὲ τὸ β΄, ποὺ ἔχει ἀπείρους ὅρους, ὁσουςδήποτε ὅρους καὶ ἂν λάβωμεν, νὰ ἔχουν ἄθροισμα* $<\varepsilon$. Τότε προφανῶς τὸ α΄ μέρος, ποὺ ἔχει πεπερασμένον πλῆθος ὅρων, μᾶς δίδει

τὴν *τιμὴν* τῆς σειρᾶς κατὰ προσέγγισιν ὅσον θέλομεν μεγάλην (τόσον μεγαλυτέραν, ὅσον μικρότερον ε λαμβάνομεν κάθε φοράν).

154. ***Γνωρίσματα συγκλίσεως ἢ ἀποκλίσεως.*** *Γενικὸν γνώρισμα,* διὰ νὰ διακρίνωμεν, ἂν μία σειρὰ συγκλίνει ἢ ἀποκλίνει, *δὲν ὑπάρχει.* Ὑπάρχουν ὅμως μερικοὶ κανόνες, ποὺ στηρίζονται ὅλοι εἰς τὰς ἑξῆς δύο φανερὰς προτάσεις :

1) *Ἂν μία σειρὰ συγκλίνῃ, καὶ κάθε ἄλλη, ποὺ παράγεται ἀπ' αὐτήν, ἂν μικρύνωμεν τοὺς ὅρους της (ὅλους ἢ μερικοὺς), συγκλίνει ἐπίσης.*

1) *Ἂν μία σειρὰ ἀποκλίνῃ, καὶ κάθε ἄλλη, ποὺ παράγεται ἀπ' αὐτήν, ἂν αὐξήσωμεν τοὺς ὅρους της (ὅλους ἢ μερικούς), ἐπίσης ἀποκλίνει.*

155. Ἡ σειρὰ $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^\nu+\ldots$ εἶναι ἡ *γεωμετρικὴ πρόοδος·* συγκλίνει, ἂν $\omega<1$. Διότι, ἂν λάβωμεν ὁσουσδήποτε ὅρους τῆς σειρᾶς, ἀπὸ τοὺς ὁποίους μεγαλύτερον ἐκθέτην νὰ ἔχῃ ὁ ω^ν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\leq 1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^\nu$, δηλ. μὲ $\frac{1-\omega^{\nu+1}}{1-\omega}=\frac{1}{1-\omega}-\frac{\omega^{\nu+1}}{1-\omega}$. Ἑπομένως, ὅσους ὅρους καὶ ἂν λάβωμεν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι πάντοτε $<\frac{1}{1-\omega}$. Ὥστε *ἡ σειρὰ αὐτὴ συγκλίνει.*
Ἂν τώρα ὀνομάσωμεν Α τὸν ἀριθμόν, ποὺ δίδουν *ὅλοι* οἱ ὅροι της, θὰ εἶναι : $A=1+\omega+\omega^2+\ldots$ ἢ $A=1+\omega(1+\omega+\omega^2+\ldots)$, δηλ. $A=1+\omega A$· ὥστε : $A=\frac{1}{1-\omega}$. Γενικώτερον καὶ ἡ σειρὰ $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots(\omega<1)$ συγκλίνει καὶ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

156. ***1ον γνώρισμα συγκλίσεως.*** Μᾶς ἐδόθη τώρα μία τυχοῦσα σειρά : $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$ (1)

Ἂν ὑπάρχῃ μία φθίνουσα γεωμετρικὴ σειρὰ $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots$ μὲ ὅρους μεγαλυτέρους ἀπὸ τοὺς τῆς (1), θὰ συγκλίνῃ καὶ ἡ (1). Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ αὐτό, ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $\alpha>\alpha_0$ (πάντοτε δυνατὸν) καὶ $\omega>$ ἀπὸ τὸν λόγον δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς ὅρων τῆς (1)· διότι, ἂν $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}<\omega$ (διὰ κάθε ν), θὰ ἔχωμεν : $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}<\omega,\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}<\omega,\ldots,\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}<\omega,\ldots,$ δηλ. $\alpha_1<\alpha_0\omega,\ \alpha_2<\alpha_1\omega<\alpha_0\omega^2,\ldots,\alpha_\nu<\alpha_{\nu-1}\omega<\alpha_0\omega^\nu,\ldots$

Ὥστε *(α' γνώρισμα συγκλίσεως) : Ἂν ὁ «λόγος» μιᾶς σειρᾶς (δηλ. ὁ λόγος κάθε ὅρου πρὸς τὸν προηγούμενόν του) μένῃ πάντοτε < ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ω<1, ἡ σειρὰ συγκλίνει.*

157. *(2ον (γενικώτερον) γνώρισμα συγκλίσεως) : Ἂν ὁ λόγος μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερος ἀπὸ τὸν λόγον ἄλλης σειρᾶς, ποὺ συγκλίνει, καὶ ἡ δοθεῖσα σειρὰ συγκλίνει.*

Διότι, ἂν ἔχωμεν : $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} < \frac{\beta_1}{\beta_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{\beta_2}{\beta_1}, \ldots \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} < \frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}}, \ldots$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0} < \frac{\beta_\nu}{\beta_0}$ ἢ $\alpha_\nu < \beta_\nu \cdot \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ · ἂν λοιπὸν ἡ σειρὰ τῶν β συγκλίνη καὶ ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν Β, καὶ ἡ τῶν α θὰ συγκλίνη καὶ θ' ἀποτελῇ ἀριθμὸν $< B . \frac{\alpha_0}{\beta_0}$.

158. *Τρίτον γνώρισμα συγκλίσεως.* Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $\alpha_\nu < \alpha_0 \omega^\nu$, ποὺ εὕρομεν εἰς τὴν § 156, ἀκολουθεῖ : $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}} < \omega$, δηλ. *ἡ σειρὰ $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu + , \ldots$ συγκλίνει, ὅταν ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ πηλίκου τοῦ ὅρου α_ν (ποὺ ἔχει ν προηγουμένους) διὰ τοῦ πρώτου α_0 μένη πάντοτε < ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν $\omega < 1$.*

159. Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν ὁ λόγος μιᾶς σειρᾶς μένη πάντοτε >1, ἡ σειρὰ ἀποκλίνει (διότι οἱ ὅροι ὁλονὲν αὐξάνουν). Ὅταν ὅμως ὁ λόγος τῆς σειρᾶς μένη μὲν < 1, ἀλλὰ τείνη πρὸς τὴν μονάδα (καὶ ὄχι πρὸς ἕνα *μικρότερόν* της ἀριθμόν), δὲν εἰμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν, οὔτε ὅτι ἡ σειρὰ συγκλίνει οὔτε ὅτι ἀποκλίνει. Εἰμπορεῖ ἡ σειρὰ νὰ κάμνη τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο. Π. χ. 1) ἡ σειρά : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$ ἔχει λόγον $\frac{1}{\nu} : \frac{1}{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu} = 1 - \frac{1}{\nu}$ · καὶ εἶναι ἀ.· *κλίνουσα,* διότι γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha) \quad 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

ὅπου κάθε παρένθεσις ἔχει διπλασίους ὅρους ἀπὸ τὴν προηγουμένην της. Κάθε δὲ παρένθεσις δίδει ἄθροισμα $> \frac{1}{2}$

$\left(\text{διότι } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \text{ κτλ.}\right)$. Ὥστε ἡ σειρὰ ἀποκλίνει.

Ὁμοίως καὶ ἡ σειρὰ $\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{3}+\ldots=\alpha\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$ προφανῶς ἀποκλείνει.

2) Ἡ σειρά : $1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\ldots+\frac{1}{\nu^\rho}+\ldots(\rho>1)$ ἔχει λόγον $\frac{1}{\nu^\rho}:\frac{1}{(\nu-1)^\rho}=\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\rho=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\rho$ καὶ ἐπομένως τὸ ὅριον τοῦ λόγου της εἶναι πάλιν ἡ 1. Ἐντούτοις αὐτὴ *συγκλίνει*· πραγματικῶς γράφεται :

$$(\beta)\qquad 1+\left(\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}\right)+\left(\frac{1}{4^\rho}+\ldots+\frac{1}{7^\rho}\right)+\left(\frac{1}{8^\rho}+\ldots+\frac{1}{15^\rho}\right)+\ldots$$

κάθε παρένθεσις ἔχει διπλασίους ὅρους ἀπὸ τὴν προηγουμένην της· ἐπειδὴ δὲ ἡ γεωμετρικὴ σειρά :

$$1+\left(\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{2^\rho}\right)+\left(\frac{1}{4^\rho}+\ldots+\frac{1}{4^\rho}\right)+\left(\frac{1}{8^\rho}+\ldots+\frac{1}{8^\rho}\right)+\ldots,$$

ποὺ ἔχει ὅρους μεγαλυτέρους ἀπὸ τὴν (β), συγκλίνει καὶ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\frac{2^\tau}{2^\tau-1}$, ὅπου $\tau=\rho-1$, καὶ ἡ (β) συγκλίνει καὶ ἀποτελεῖ ἀριθμὸν $<\frac{2^\tau}{2^\tau-1}$. Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν σειράν : $\alpha+\frac{\alpha}{2^\rho}+\frac{\alpha}{3^\rho}+\ldots$

160. ***Γνώρισμα ἀποκλίσεως.*** Ἀπὸ τὴν ἀπόκλισιν τῆς σειρᾶς (α) εὑρίσκομεν ἓν *γνώρισμα ἀποκλίσεως* τῶν σειρῶν, ὡς ἑξῆς.

Ἂν ἔχωμεν μίαν σειράν : $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$, αὐτὴ θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα, ἂν οἱ ὅροι της εἶναι ἀντιστοίχως > ἀπὸ τοὺς τῆς σειρᾶς (α), δηλ. ἂν $\alpha_\nu>\frac{\alpha}{\nu}$ ἢ $\nu.\alpha_\nu>\alpha$, δηλ.

Ἂν τὸ γινόμενον τοῦ ὅρου α_ν τῆς σειρᾶς ἐπὶ τὸν ν μένῃ πάντοτε > ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν $\alpha(\gtrless 0)$, ἡ σειρὰ ἀποκλίνει.

161. *4ον γνώρισμα συγκλίσεως.* Ἀπὸ τὴν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς (β) εὑρίσκομεν ἓν τέταρτον γνώρισμα συγκλίσεως, ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ συγκλίνῃ μία σειρά : $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$, ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ὅρους μικροτέρους ἀπὸ τοὺς τῆς (β), δηλ. νὰ εἶναι : $\alpha_\nu<\frac{\alpha}{\nu^\rho}$(διὰ κάθε ν) ἢ $\nu^\rho.\alpha_\nu<\alpha$, δηλ. *Μία σειρὰ συγκλίνει, ἂν τὸ γινόμενον τοῦ ὅρου α_ν ἐπὶ μίαν δύναμιν τοῦ ν, μ' ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν 1, μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν α $\left(\gtrless 0\right)$.*

162. ***Παρατηρήσεις.*** 1) Ἀπὸ κάθε σειρὰν συγκλίνουσαν εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν γνώρισμα συγκλίσεως, καθὼς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα· καὶ ἀπὸ κάθε ἀποκλίνουσαν, ἓν γνώρισμα ἀποκλίσεως. 2) Τὰ γνωρίσματα τῆς συγκλίσεως εἰμποροῦν προφανῶς καὶ νὰ μὴ ἀληθεύουν δι᾽ *ὅλους* τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς· ἐκεῖνοι ὅμως, διὰ τοὺς ὁποίους δὲν θ᾽ ἀληθεύουν, πρέπει νὰ εἶναι εἰς *πεπερασμένον* πλῆθος, διότι τότε, ἂν προσθέσωμεν αὐτοὺς εἰς τοὺς ἄλλους (ποὺ ἀποτελοῦν ἀριθμόν), ἀποτελοῦν πάλιν ἀριθμόν. 3) Κάθε σειρὰ παρουσιάζεται συνήθως εἰς μίαν θεωρίαν καὶ αὐτὴ μᾶς εὐκολύνει τὴν διάκρισιν τῆς συγκλίσεως ἢ τῆς ἀποκλίσεώς της.

γ') Σειραὶ μὲ ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς.

163. Μία σειρὰ μὲ ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς λέγεται *συγκλίνουσα, μόνον ὅταν οἱ θετικοὶ ὅροι της χωριστὰ ἀποτελοῦν μίαν σειρὰν συγκλίνουσαν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ χωριστὰ μίαν ἄλλην ἐπίσης συγκλίνουσαν.*

164. Ἂν οἱ μὲν ὅροι μὲ τὸ ἓν σημεῖον ἀποτελοῦν σειρὰν συγκλίνουσαν, οἱ ἄλλοι ὅμως ἀποκλίνουσαν, ἡ σειρὰ ὁλόκληρος εἶναι τότε προφανῶς ἀποκλίνουσα. Ἂν δὲ οὔτε οἱ μὲν οὔτε οἱ δὲ ἀποτελοῦν συγκλίνουσαν σειράν, ἡ σειρὰ ὁλόκληρος δὲν παριστάνει ἕνα *ὡρισμένον* ἀριθμόν· διότι εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τοὺς ὅρους της κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε (ἂν φθίνουν καὶ τείνουν πρὸς τὸ 0), τὸ ἄθροισμά των νὰ τείνῃ πρὸς ὁποιονδήποτε ἀριθμόν, μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

Ἀπόδειξις. Ἂν $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ εἶναι οἱ θετικοὶ ὅροι, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ οἱ ἀρνητικοὶ καὶ Κ ὁ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός, προσθέτω θετικούς, ἀπὸ τὸν 1ον κατὰ σειράν, ἕως ὅτου νὰ παραχθῇ ἀριθμὸς $>$Κ, π. χ. τοὺς $\vartheta_1+\vartheta_2+,..+\vartheta_\varrho$. ἔπειτα προσθέτω εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἀρνητικούς, ἀπὸ τὸν 1ον κατὰ σειράν, ἕως ὅτου νὰ γίνῃ τὸ ἄθροισμα $\vartheta_1+\vartheta_2+..,+\vartheta_\varrho+\alpha_1+\alpha_2+..,+\alpha_\sigma<$Κ· τότε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διαφέρει ἀπὸ τὸ Κ ὀλιγώτερον ἀπὸ α_σ· λαμβάνω τώρα θετικοὺς ὅρους, ἕως ὅτου τὸ ἄθροισμα :

$$(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_\varrho)+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\sigma)+(\vartheta_{\varrho+1}+\ldots+\vartheta_\nu)$$

γίνῃ πάλιν $>$ ἀπὸ τὸν Κ καὶ ἔχῃ διαφορὰν ἀπὸ τὸν Κ μικροτέραν ἀπὸ τὸν ϑ_ν· καὶ οὕτω προχωροῦμεν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι πλησιάζομεν τότε πρὸς τὸν Κ μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν (ἀφοῦ $\vartheta_\varrho > |\alpha_\sigma| > \vartheta_\nu > \ldots$).

Τὰς σειρὰς αὐτὰς τὰς λέγομεν *ἡμισυγκλινούσας*· δίδουν *ὡρισμένον* *ἀριθμόν, μόνον ὅταν οἱ ὅροι ἔχουν δοθεῖσαν τάξιν· ὅταν ὅμως ἀλλάξῃ* ἡ θέσις, *ἀλλάσει καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτός. Παράδειγμα :*

ἡ σειρά : $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)'+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)'+\ldots+\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu}\right)'+\ldots$, *ὅπως εἶναι γραμμένη*, ἔχει ἄθροισμα ὅρων, ποὺ τείνει εἰς τὸ 0. Ἂν ὅμως γραφῇ οὕτω :

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)'+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)'+\ldots$, δὲν τείνει πρὸς τὸ 0· διότι :

$$\left(\frac{1}{\ }+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)'+\ldots+\left(\frac{1}{\nu}\right)'=\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}>$$

$$\frac{1}{2\nu-1}+\frac{1}{2\nu-1}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1} \text{ δηλ. τοῦ } \frac{\nu-1}{2\nu-1}.$$

Τὸ δὲ ὅριον τοῦ $\frac{\nu-1}{2\nu-1}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$.

165. *Θεώρημα. Ἂν οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς συγκλινούσης εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ καὶ προχωροῦν φθίνοντες, ὁ ἀριθμός, ποὺ δίδει ἡ σειρά, περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων της καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν+1 πρώτων ὅρων της.*

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ σειρὰ εἶναι ἡ $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$ καὶ Α ὁ ἀριθμός, ποὺ δίδει, θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha)\quad A=\Sigma_\nu+(\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1})+(\alpha_{\nu+2}+\alpha_{\nu+3})+\ldots$$
$$\text{καὶ } A=\Sigma_\nu+\alpha_\nu+(\alpha_{\nu+1}+\alpha_{\nu+2})+(\alpha_{\nu+3}+\alpha_{\nu+4})+\ldots(\Sigma_\nu=\alpha_0+\ldots+\alpha_{\nu-1}).$$

Ἀλλ' ἀφοῦ οἱ ὅροι εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ καὶ προχωροῦν φθίνοντες, εἰς ἑκάστην παρένθεσιν ὑπερισχύει τὸ εἶδος τοῦ α′ ὅρου, δηλ. αἱ παρενθέσεις τῆς ἰσότητος (α) ἔχουν τὸ σημεῖον τοῦ α_ν, αἱ δὲ τῆς (β) τὸ τοῦ $\alpha_{\nu+1}$, *ἀντίθετον* τοῦ σημείου τοῦ α_ν. Ὥστε, ἂν αἱ πρῶται εἶναι θετικαί, αἱ δεύτεραι εἶναι ἀρνητικαί· θὰ εἶναι δηλ. τότε : $A>\Sigma_\nu$, ἀλλὰ $A<\Sigma_\nu+\alpha_\nu$· ἂν πάλιν αἱ πρῶται εἶναι ἀρνητικαί, αἱ δεύτεραι θὰ εἶναι θετικαί, ὥστε τότε θὰ εἶναι : $A<\Sigma_\nu$ ἀλλὰ $A>\Sigma_\nu+\alpha_\nu$· Ἑπομένως εἶναι πάντοτε : $A=\Sigma_\nu+\mu\alpha_\nu$, ὅπου $0<\mu<1$, δηλ., ἂν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ Α, ποὺ δίδει ἡ σειρά, λάβωμεν μόνον τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων, κάμνομεν λάθος $<\alpha_\nu$.

166. ***Παρατήρησις.*** Ἂν μία σειρὰ συγκλίνῃ, εἰμποροῦμεν βέβαια νὰ συμπτύξωμεν μερικοὺς ὅρους εἰς ἕνα, τὸ ἄθροισμά των· ἢ ἀντιστρόφως, ν' ἀναλύσωμεν ἕνα ὅρον εἰς ἄθροισμα ἄλλων *ὁμοειδῶν*. Ὄχι ὅμως καὶ νά τον ἀναλύσωμεν εἰς ἄθροισμα ἑτεροειδῶν, διότι τότε ἡ

παραγομένη σειρὰ εἰμπορεῖ καὶ νὰ μὴ συγκλίνῃ. Π. χ. ἡ σειρὰ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots+\frac{1}{(2\nu-1)2\nu}+\ldots$ συγκλίνει· ἐνῷ ἡ παραγομένη μὲ τὴν ἀνάλυσιν κάθε ὅρου εἰς διαφορὰν δύο ἄλλων: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}+\ldots$ ἀποκλίνει (διότι οὔτε οἱ θετικοὶ οὔτε οἱ ἀρνητικοὶ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμόν (§ 160).

δ') Σειραὶ μὲ ὁποιουςδήποτε ὅρους.

167. Μία σειρὰ μὲ ὅρους *τυχόντας* ἀριθμοὺς λέγεται *συγκλίνουσα τότε μόνον, ὅταν οἱ ὅροι κάθε εἴδους ἀποτελοῦν σειρὰν συγκλίνουσαν.* Ὥστε ἀρκεῖ νὰ ἐξετάζωμεν, ἂν αἱ 4 αὐταὶ μερικαὶ σειραὶ συγκλίνουν, δηλ. τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν σύγκλισιν τῶν σειρῶν μὲ θετικοὺς ὅρους. Ἡ ἀναγωγὴ αὐτὴ τῆς σειρᾶς εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

168. ***Θεώρημα α'***. *Ὅταν μία σειρὰ συγκλίνῃ, καὶ ἡ σειρὰ τῶν μέτρων τῶν ὅρων της συγκλίνει.*

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ σειρὰ συγκλίνει, οἱ θετικοὶ πραγματικοί της ὅροι θ' ἀποτελοῦν ἕνα ἀριθμὸν Α, οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοί της ἕνα —Β, οἱ θετικοὶ φανταστικοὶ τὸν Γi καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φανταστικοί τὸν —Δi. Ὅλη ἡ σειρὰ λοιπὸν ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν (Α—Β)+(Γ—Δ)i. Ἂν τότε λάβωμεν ὁσουςδήποτε καὶ ὁποιουςδήποτε ὅρους τῆς σειρᾶς, ὅσοι μὲν εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀπὸ αὐτοὺς θὰ δώσουν ἄθροισμα τῶν μέτρων <Α· οἱ ἀρνητικοὶ <Β· οἱ θετικοὶ φανταστικοὶ <Γ· καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ <Δ. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων ὅλων τῶν ὅρων, ποὺ ἐλάβομεν, εἶναι <Α+Β+Γ+Δ.

169. ***Θεώρημα β'***. *Ὅταν τὰ μέτρα τῶν ὅρων μιᾶς σειρᾶς ἀποτελοῦν σειρὰν συγκλίνουσαν, καὶ ἡ σειρὰ συγκλίνει.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς σειρᾶς μένῃ πάντοτε < ἀπὸ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν Θ, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε θετικῶν πραγματικῶν ὅρων τῆς σειρᾶς δὲν εἰμπορεῖ νὰ φθάσῃ τὸν Θ, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀρνητικῶν, τὸν —Θ, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε θετικῶν φανταστικῶν, τὸν Θi καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀρνητικῶν φανταστικῶν, τὸν —Θi. Ἀποτελοῦν λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ κάθε εἴδους ἀριθμὸν καὶ ὁλόκληρος ἡ σειρὰ συγκλίνει.

170. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ὑποθέτει, ὅτι κάθε μιγαδικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς ἔχει ἀναλυθῆ εἰς τὸ πραγματικὸν καὶ τὸ φανταστικὸν μέρος του καὶ λαμβάνομεν τὸ μέτρον κάθε μέρους χωριστά. Καὶ ἂν ὅμως ὑποθέσωμεν τὸν $\alpha+\beta i$ ὡς *ἕνα μόνον* ὅρον τῆς σειρᾶς, πάλιν τὸ θεώρημα ἰσχύει· πραγματικῶς, ὁ $\alpha+\beta i$ ἔδιδε πρὶν 2 μέτρα: $|\alpha|+|\beta|$· τώρα θὰ δώσῃ μέτρον τὴν $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$· ἔχομεν ὅμως γενικῶς διὰ δύο θετικοὺς ἀριθμοὺς Α, Β:

$$\frac{1}{2}(A+B)<\sqrt{A^2+B^2}<A+B, \text{ἐπομένως: } \frac{1}{2}\left[\,|\alpha|+|\beta|\,\right]<\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<|\alpha|+|\beta|\cdot$$

ἂν λοιπὸν λάβωμεν τὰ μέτρα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῆς σειρᾶς γίνεται μικρότερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα, ὅταν λαμβάνωμεν τὰ $|\alpha|+|\beta|$· ὥστε ἂν τὸ β′ συγκλίνῃ, συγκλίνει καὶ τὸ α′· ἂν πάλιν τὸ α′ συγκλίνῃ, συγκλίνει καὶ τὸ μὲ τὰ $\frac{1}{2}\left[\,|\alpha|+|\beta|\,\right]$· ἐπομένως καὶ τὸ β′.

171. *Σύντομος γραφὴ τῶν σειρῶν.* Κάθε ὅρος τῆς σειρᾶς παράγεται συνήθως ἀπὸ ἕνα *γενικὸν ὅρον* της, δηλ. ἀπὸ μίαν παράστασιν μὲ γράμματα (μὴ ὡρισμένα), ὅταν αὐτὰ λάβουν ἀριθμητικὰς τιμὰς 0,1,2,...· εἰμποροῦμεν τότε νὰ γράψωμεν τὴν σειρὰν συντομώτερα, ἂν πρὶν ἀπὸ τὸν γενικὸν ὅρον γράψωμεν ἓν σύμβολον τῆς προσθέσεως Σ καὶ κάτω ἀπὸ αὐτό, ἢ ἐπάνω καὶ κάτω, τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, ποὺ θά μας δώσουν τοὺς διαφόρους ὅρους. Π. χ. ἀντὶ

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ γράφομεν $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{1}{\nu}$, ἐπίσης τὸ $\sum\limits_{\nu=1,2..,\infty}^{\mu=1,2..,\infty}\frac{1}{\nu^2+\mu^2}$ παριστάνει μίαν διπλῆν σειράν· κτλ.

Τὰς σειρὰς τάξεως >1 δὲν τὰς ἐξετάζομεν ἐδῶ.

Ἀσκήσεις.

1) Αἱ δύο ἐκφράσεις $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ (ὁ λόγος μιᾶς σειρᾶς) καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$ ἔχουν τὸ ἴδιον ὅριον.

2) Ἡ ταὐτότης: (α) $\alpha_0=(\alpha_0-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu)+$ $+\ldots$ (ορ $\alpha_\nu=0$ διὰ $\nu=\infty$) περιέχει πλῆθος σειρῶν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της εἶναι προφανῶς ὁ α_0· εἶναι λοιπὸν *συγκλίνουσα* σειρά.

Ἐφαρμογαί. α′) Ἂν $\alpha_0=1$, $\alpha_1=x$, $\alpha_2=x^2,\ldots,\alpha_\nu=x^\nu$ $(x<1)$, ἡ ταὐτότης (α) γίνεται:

$1=(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots+(x^{\nu-1}-x^\nu)+\ldots$ ἢ καὶ

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^\nu+\ldots$$

(ἐξαγόμενον γνωστὸν ἤδη).

β΄) $\alpha_0=1,\ \alpha_1=\frac{1}{2},\ \alpha_2=\frac{1}{3},\ldots,\alpha_{\nu-1}=\frac{1}{\nu},\ldots$· τότε ἡ (α) καταντᾷ: $1=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$ $+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)+\ldots$ ἢ καί: $1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\ldots$

γ΄) $\alpha_0=1,\ \alpha_1=\frac{1}{3},\ \alpha_2=\frac{1}{5},\ \alpha_{\nu-1}=\frac{1}{2\nu-1}$. Τότε:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}+\ldots$$

δ΄) $\alpha_0=$ τοξεφ$\frac{\gamma}{\alpha}$, $\alpha_1=$ τοξεφ$\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, $\alpha_2=$ τοξεφ$\frac{\gamma}{\alpha+2\beta},\ldots,$ $\ldots,\alpha_{\nu-1}=$ τοξεφ$\frac{\gamma}{\alpha+(\nu-1)\beta},\ldots,$ $\left(\text{ορ}\frac{\gamma}{\alpha+\nu\beta}=0\right.$ διὰ $\left.\nu=\infty\right)$· ἡ ταὐτότης (α) γίνεται τότε: τοξεφ $\frac{\gamma}{\alpha}=\left(\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha}-\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)+$ $+\left(\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha+\beta}-\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha+2\beta}\right)+\ldots$ καὶ ἐπειδὴ γενικῶς:

$$\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha+(\nu-1)\beta}-\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha+\nu\beta}=\text{τοξεφ}\frac{\beta\gamma}{[\alpha+(\nu-1)\beta].[\alpha+\nu\beta]+\gamma^2},$$

ἔπεται: $\text{τοξεφ}\frac{\gamma}{\alpha}=\text{τοξεφ}\frac{\beta\gamma}{\alpha(\alpha+\beta)+\gamma^2}+\text{τοξεφ}\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)+\gamma^2}+\ldots$ $\ldots+\text{τοξεφ}\frac{\beta\gamma}{[\alpha+(\nu-1)\beta][\alpha+\nu\beta]+\gamma^2}+\ldots$

Καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὰ α, β, γ διαφόρους τιμάς, ἔχομεν *μερικοὺς* τύπους· π. χ. διὰ $\alpha=\beta=\gamma=1$, ἔχομεν:

$$\text{τοξεφ}\ 1=\frac{\pi}{4}=\text{τοξεφ}\frac{1}{3}+\text{τοξεφ}\frac{1}{7}+\text{τοξεφ}\frac{1}{13}+\ldots+\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{\nu^2+\nu+1}\right).$$

3) Νὰ δειχθῇ ἀπὸ τὴν ταὐτότητα (α), ὅτι:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+\nu-1)(x+\nu)}+\ldots$$

$\alpha_0=\frac{1}{x}$ $\alpha_1=\frac{1}{x+1}$ $\alpha_2=\frac{1}{x+2}$

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{(1-x)^2}$ τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς: $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\nu x^{\nu-1}+\ldots$, μὲ τὴν ἀνάλυσίν της εἰς ἄθροισμα ἄλλων σειρῶν.

5) Ἡ ἀποκλίνουσα σειρά : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}+\ldots\ldots$ (§ 159) λέγεται *ἁρμονική*, διότι εἶναι *ἡ ἁπλουστέρα* τῶν *ἁρμονικῶν προόδων*· δηλ. τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὅρους κατὰ σειρὰν μεγέθους : α, β, γ, δ, ε, ζ,.., *ποὺ ἀποτελοῦν ἀνὰ 3 τυχ. ἐφεξῆς μίαν «ἁρμονικὴν» ἀναλογίαν* $\left(\text{δηλ. } \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. (Τ' ἀντίστροφα ποσὰ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \ldots$ ἀποτελοῦν τότε ἀριθμητικὴν πρόοδον, δηλ. $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}$· καὶ ἀντιστρόφως).

6) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ σειρὰ μὲ θετικοὺς ὅρους : $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$ συγκλίνει μέν, ἂν ὁ λόγος $\Lambda \equiv \dfrac{\lambda o\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha_\nu}\right)}{\lambda o\gamma \nu}$ μένῃ $>k>1$· ἀποκλίνει δέ, ἂν μένῃ $<k<1$. (Ἂν δὲ ορ$\Lambda=1$, τότε ἀποκλίνει, ἂν ὁ λόγος αὐτὸς γίνεται καὶ μένῃ <1. ἂν Λ γίνεται καὶ μένῃ >1, ἡ σειρὰ εἰμπορεῖ νὰ νὰ συγκλίνῃ ἢ ν' ἀποκλίνῃ). *(Λογαριθμικὸν γνώρισμα συγκλίσεως τοῦ Cauchy).*

7) Ἡ σειρὰ $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2\nu+1)}{2.4.6\ldots(2\nu+2)}+\ldots\ldots$ ἀποκλίνει.

8) Μία σειρὰ μὲ θετικοὺς ὅρους συγκλίνει ἢ ἀποκλίνει, καθόσον ἡ ἔκφρασις $\nu.\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}-1\right)$ τείνει, διὰ $\nu=\infty$, πρὸς ὅριον $>$ ἢ <1. *(Γνώρισμα συγκλίσεως τοῦ Raabe (Ράμπε)).*

9) Μία σειρὰ μὲ ὅρους θετικοὺς συγκλίνει ἢ ἀποκλίνει, καθόσον ἡ ἔκφρασις : $\left[\nu\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}-1\right)-1\right]\lambda o\gamma\,\nu$ (1) τείνει πρὸς ὅριον $>$ ἢ <1.

10) Μία σειρὰ μὲ ὅρους θετικοὺς συγκλίνει, ἂν ἡ ἔκφρασις : $\left(1-\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}\right)\frac{\nu}{\lambda o\gamma \nu}$ γίνεται καὶ μένει, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ, $>k>1$· ἀποκλίνει δέ, ἂν γίνεται καὶ μένῃ ≤ 1. (Γνώρισμα συγκλίσεως τοῦ Jamet *(Ζαμέ)*).

11) Ἂν σ_ϱ σημαίνῃ τὴν σειρὰν τῶν ἀντιστρόφων τῶν δυνάμεων τοῦ ϱ βαθμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4. . ., εἶναι :

$$\sigma_2=\frac{\pi^2}{6},\ \sigma_4=\frac{\pi^4}{90},\ \sigma_6=\frac{\pi^6}{945},\ \sigma_8=\frac{\pi^8}{9450} \text{ καὶ } \sigma_3=\frac{\pi^3}{25,7946\ldots} =$$

(1) Ὁ λογ ν εἰς τὰς ἀσκ. 9ην κ. 10ην λαμβάνεται μὲ βάσιν τὸ e (βλέπε περαιτέρω).

$= 1,20205690\ldots, \quad \sigma_5 = \frac{\pi}{295,1215\ldots}, \ \sigma_7 = \frac{\pi^7}{2295,286\ldots}$

12) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}, \ 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = 0,915965594\ldots,$

$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots = \frac{\pi^3}{32}, \ 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \ldots = \frac{\pi^5}{1536}.$

13) $1 - l\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{1}{2} - l\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} - \ldots \equiv c$ («σταθερὰ τοῦ *Ὄϊλερ*»)$=0,577215664\ldots$ [1].

14) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots = \frac{1}{4} l2 = 0,17328679\ldots,$

$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots = l2 - \frac{1}{2}, \ \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \ldots = \frac{1}{2} - l2.$

15) $\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \ldots = \frac{3}{4} - l2, \ \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \ldots = \frac{\pi - 3}{4}.$

16) $1 + \frac{1}{3.2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5.2^5} + \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{1}{7.2^7} + \ldots = \frac{\pi}{3}.$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

17) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \ldots = \sqrt{2}.$

$$1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \ldots = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sqrt{2}}.$$

18) $1 + \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} - \ldots = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$

19) $\text{τοξεφ}\frac{1}{2} + \text{τοξεφ}\frac{1}{2.2^2} + \text{τοξεφ}\frac{1}{2.3^2} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$

20) $\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12} - l2 = 0,129319\ldots$

21) ***Ἀτέρμονα γινόμενα.*** — α′) Τὸ ἀπὸ ἀπείρους παράγοντας ἀποτελούμενον γινόμενον $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_\nu\ldots$ ἢ συντομώτερα : $\prod_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k$, λέγεται *ἄτερμον*. Θὰ εἶναι *συγκλῖνον*, ἂν τὸ γινόμενον $\prod_{k=1}^{k=\nu}\alpha_k$ ἔχῃ διὰ $\nu=\infty$ ὅριον πεπερασμένον· ἄλλως, εἶναι *ἀποκλῖνον*.—β′) *Διὰ νὰ εἶναι συγκλῖνον καὶ* $\gtrless 0$, *πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ σειρά :* $\text{λογ}\alpha_1 + \text{λογ}\alpha_2 + \ldots + \text{λογ}\alpha_\nu + \ldots$ *νὰ συγκλίνῃ*. (Ἂν ἡ σειρὰ τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$, τὸ γινόμενον τείνει πρὸς τὸ 0). — γ′). *Διὰ νὰ συγ-*

(1) Τὸ σύμβολον $l\,\alpha$ σημαίνει τὸν λογάριθμον μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν e (βλέπε περαιτέρω).

κλίνη (χωρὶς νὰ εἶναι $=0$) ἓν γινόμενον ἄτερμον μὲ παράγοντας θετικοὺς καὶ ὅλους $<$ ἢ >1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συγκλίνῃ ἡ σειρά: $(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_\nu-1)+\ldots$ δ') Διὰ νὰ συγκλίνῃ ἓν ἄτερμον γινόμενον μὲ τυχ. ὅρους καὶ νὰ εἶναι $\gtrless 0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ δύο σειραί:

$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots$ καὶ $(\alpha_1-1)^2+(\alpha_2-1)^2+\ldots$ νὰ συγκλίνουν.

(Ἂν μόνον ἡ α' συγκλίνῃ καὶ ἡ β' ἀποκλίνῃ, τὸ γινόμενον συγκλίνει, ἀλλὰ $=0$. Ἀμφιβολία ὑπάρχει, ἂν καὶ αἱ 2 ἀποκλίνουν).

22) $$\eta\mu x = x.\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right),\quad \sigma\upsilon\nu x=\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[1-\frac{x^2}{\left(\nu\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}\right].$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}.\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mu}{\nu-\mu}.\frac{2\nu-\mu}{\nu+\mu}.\frac{2\nu+\mu}{3\nu-\mu}.\frac{4\nu-\mu}{3\nu+\mu}\ldots=$$

$$=\frac{\pi}{2}.\frac{\nu}{\nu-\mu}.\frac{1}{2}.\frac{2\nu-\mu}{\nu+\mu}.\frac{3}{2}.\frac{2\nu+\mu}{3\nu-\mu}\ldots$$ *(Ὄϊλερ).*

23) $$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}\ldots$$ (τύπος τοῦ Wallis *(Οὐώλλις)*).

24) $$(\sqrt{\nu})^\nu < \nu! < \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^\nu$$ (Cauchy).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΒΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α') Ἀσύμμετροι βάσεις.

172. ***Θεώρημα.*** Ὅταν ἡ βάσις μιᾶς δυνάμεως α^μ (α πραγματικός, μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς) αὐξάνῃ, αὐξάνει καὶ ἡ δύναμις. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι, *ἂν μᾶς δοθῇ μία μονὰς $\frac{1}{\varrho}$ ὁσονδήποτε μικρά, εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ εὕρωμεν αὔξησιν τῆς βάσεως (ἢ ἐλάττωσιν) τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις (ἢ ἐλάττωσις) τῆς δυνάμεως νὰ εἶναι* $<\frac{1}{\varrho}$.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ α αὐξήσῃ κατὰ ε καὶ γίνῃ β, ἡ δύναμις γίνεται β^μ καὶ μεταβάλλεται κατὰ

$$\beta^\mu-\alpha^\mu=(\beta-\alpha)\,[\beta^{\mu-1}+\beta^{\mu-2}.\alpha+\ldots+\beta\alpha^{\mu-2}+\alpha^{\mu-1}].$$

Ἂν τώρα ἀντὶ κάθε ὅρου τῆς ἀγκύλης θέσωμεν τὸν μεγαλύτερόν

του $A^{\mu-1}$, ὅπου A ἀκέραιος, $>$ τῶν α καὶ β, εὑρίσκομεν :
$\beta^\mu - \alpha^\mu < (\beta-\alpha)\mu A^{\mu-1}\cdot$ διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν τὸ $\beta^\mu - \alpha^\mu < \frac{1}{\varrho}$, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ : $(\beta-\alpha)\mu A^{\mu-1} < \frac{1}{\varrho}$ ἢ $\beta-\alpha=\varepsilon < \frac{1}{\varrho\cdot\mu A^{\mu-1}}$.

173. ***Ὕπαρξις τῆς μυοστῆς ῥίζης. Θεώρημα.*** *Ἂν δοθῇ ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς α, ὑπάρχει πάντοτε μία μυοστὴ ῥίζα αὐτοῦ, δηλ. εἷς ἀριθμὸς β, ποὺ ἡ μυοστὴ δύναμίς του εἶνε ὁ α (μ ἀκέραιος θετικός), $\beta^\mu=\alpha$.*

Ἂν ὁ Α εἶναι εἷς ἀκέραιος $>\alpha$, ὁ α ἢ θὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα τῶν ἀριθμῶν $0^\mu, 1^\mu, 2^\mu, \ldots, A^\mu$ (α) καὶ τότε ἡ ῥίζα εὑρέθη· ἢ ἔχομεν $\varrho^\mu < \alpha < (\varrho+1)^\mu$ ὅπου ϱ, ϱ+1 δύο ἐφεξῆς ἀπὸ τοὺς (α). Τότε μεταξὺ τῶν $\varrho^\mu, \left(\varrho+\frac{1}{10}\right)^\mu, \ldots, \left(\varrho+\frac{10}{10}\right)^\mu$ ἢ ὑπάρχει εἷς ἴσος μὲ τὸν α, ἢ ἔχομεν πάλιν : $\left(\varrho+\frac{\varrho_1}{10}\right)^\mu < \alpha < \left(\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{1}{10}\right)^\mu\cdot$ προχωροῦντες λοιπὸν κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, εὑρίσκομεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν : $\beta=\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{\varrho_2}{100}+\frac{\varrho_3}{1000}+\ldots$ καὶ αὐτὸς εἶναι ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ α. Διότι, ἂν μὲν ἦτο $\beta^\mu<\alpha$, θὰ εἰμποροῦμεν νὰ λάβωμεν αὔξησιν τῆς βάσεως β (π.χ. τὴν $\frac{1}{10^\sigma}$) τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τοῦ β^μ νὰ εἶναι $<\frac{1}{\varrho}<\alpha-\beta^\mu$, θὰ ἦτο λοιπὸν πάλιν: $\left(\beta+\frac{1}{10^\sigma}\right)^\mu<\alpha\cdot$ αὐτὸ ὅμως δὲν γίνεται, διότι, καθὼς ὡρίσαμεν τὸν β, εἶναι :

$$\left(\beta_\sigma+\frac{1}{10^\sigma}\right)^\mu>\alpha \text{ καὶ ἑπομένως καὶ} \left(\beta+\frac{1}{10^\sigma}\right)^\mu>\alpha$$

$$\left(\beta_\sigma(<\beta)=\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\ldots+\frac{\varrho_\sigma}{10^\sigma}\right).$$

Ἂν πάλιν ἦτο : $\beta^\mu>\alpha$, θὰ εὑρίσκομεν ἐλάττωσιν τοῦ β $\left(\frac{1}{10_\sigma}\right)$ τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος ἐλάττωσις τοῦ β^μ νὰ εἶναι $<\frac{1}{\varrho}<\beta^\mu-\alpha$. Θὰ εἴχομεν τότε : $\left(\beta-\frac{1}{10^\sigma}\right)^\mu>\alpha$, πρᾶγμα καὶ αὐτὸ ἀδύνατον, διότι ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ β ἔχομεν $\alpha > \beta_\sigma^\mu$, $\beta < \beta_\sigma + \frac{1}{10^\sigma}$ ἢ $\beta - \frac{1}{10^\sigma} < \beta_\sigma$

καὶ ἑπομένως : $\left(\beta - \frac{1}{10^\sigma}\right)^\mu < \beta_\sigma^\mu < \alpha.$

174. Ἂν μ ἄρτιον, ὑπάρχουν δύο ῥίζαι : β καὶ —β· *κάθε λοιπὸν θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν μόνον ῥίζαν θετικὴν περιττῆς τάξεως καὶ δύο ῥίζας πραγματικὰς ἀρτίας τάξεως, μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν. Κάθε δὲ ἀρνητικός, καμίαν ἀρτίας καὶ μίαν περιττῆς (ἀρνητικήν).*

β') Νόμοι τῶν δυνάμεων.

175. Ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι *σύμμετρος*, γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Στοιχειώδη Ἄλγεβραν, ὅτι, *διὰ νὰ ἰσχύουν γενικῶς οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων :*

$$\alpha^\mu \,.\, \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu},\ (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu},\ (\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu \beta^\mu,$$

πρέπει νὰ δώσωμεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς :

$$\alpha^0 = 1,\ \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu},\ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}.$$

γ') Ὁ ἀριθμὸς *e*.

176. Ὁ τύπος τοῦ διωνύμου εἰμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{\mu!} = \frac{\alpha^\mu}{\mu!} + \frac{\alpha^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\cdot\frac{\beta^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \frac{\beta^\mu}{\mu!}.$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν κατὰ σειρὰν μ=0,1,2,3,... εὑρίσκομεν :

$$1=1,\ \frac{(\alpha+\beta)}{1} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{1},\ \frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2} = \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\beta^2}{1.2},$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3} = \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^3}{1.2.3},$$

καὶ γενικῶς : $\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{\mu!} = \frac{\alpha^\mu}{\mu!} + \frac{\alpha^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\cdot\frac{\beta}{1} + \ldots + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \frac{\beta^\mu}{\mu!}.$

Καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$1 + \frac{(\alpha+\beta)}{1} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(\alpha+\beta)^\mu}{1.2\ldots\mu} =$$

$$1 + \left(\frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{1}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\beta^2}{1.2}\right) + \ldots + \left(\frac{\alpha^\mu}{\mu!} + \ldots + \frac{\beta^\mu}{\mu!}\right).$$

Τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου : $\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^\nu}{1.2\ldots\nu}\right)\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots\frac{\beta^\nu}{1.2\ldots\nu}\right)$,

ὅπου ν εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, ποὺ περιέχει ὁ $\frac{\mu}{2}$, περιέχεται ὅμως ὁλόκληρον μέσα εἰς τὸ γινόμενον :

$$\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^\mu}{1.2\ldots\mu}\right).\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\ldots+\frac{\beta^\mu}{1.2\ldots\mu}\right).$$

Ὥστε καὶ τὸ α΄ μέλος τῆς ἰσότητος περιέχεται ὁμοίως.

Ἡ διαφορὰ ὅμως τῶν δύο τούτων ἀπὸ ἀπείρους ὅρους γινομένων τείνει εἰς τὸ 0, ὅταν ὁ μ, καὶ ἑπομένως καὶ ὁ ν, τείνῃ πρὸς τὸ ∞. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀθροισμάτων :

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^\nu}{\nu!}+\ldots \quad \text{καὶ} \quad 1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{2!}+\ldots+\frac{\beta^\nu}{\nu!}+\ldots$$

177. Καὶ πρῶτα, ἀποτελεῖ ἓν πλῆθος τοιαύτης μορφῆς ἀριθμόν ; Ἂς λάβωμεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν Μ, μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $|\alpha|$. Διαιροῦμεν τότε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἰς δύο μέρη :

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^M}{1.2\ldots M} \qquad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\alpha^{M+1}}{1.2\ldots(M+1)}+\frac{\alpha^{M+2}}{1.2\ldots(M+2)}+\ldots(2).$$

Τὸ α΄ ἀποτελεῖ ἕνα ἀριθμὸν Α· τοῦ β΄ δὲ οἱ ὅροι εἶναι μικρότεροι κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ἑξῆς ἀθροίσματος :

$$(3) \quad \frac{\alpha}{M}\cdot\frac{\alpha^M}{M!}+\left(\frac{\alpha}{M}\right)^2\cdot\frac{\alpha^M}{M!}+\left(\frac{\alpha}{M}\right)^3\cdot\frac{\alpha^M}{M!}+\ldots.$$

(διότι ἐγράψαμεν εἰς τοὺς παρονομαστὰς παντοῦ Μ ἀντὶ τῶν Μ+1 Μ+2,...)·
ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα (3) εἶναι πρόοδος γεωμετρικὴ φθίνουσα καὶ δίδει τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha^M}{M!}\cdot\frac{\alpha}{M-\alpha}$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα (2) δίδει ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως καὶ ὁλόκληρον τὸ ἄθροισμα :

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{3!}+\ldots \text{ ἀποτελεῖ ἀριθμόν.}$$

178. Ἂς σχηματίσωμεν τώρα τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν τῆς μορφῆς αὐτῆς :

$$\left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^\nu}{\nu!}+\ldots\right).\left(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{2!}+\ldots+\frac{\beta^\nu}{\nu!}+\ldots\right)$$

αὐτὸ θὰ εἶναι ἴσον μέ :

$$1+\left(\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta}{1}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{2!}\right)+$$

$$+\left(\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{\beta}{1}+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^3}{3!}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\alpha^\mu}{\mu!}+\frac{\alpha^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\cdot\frac{\beta}{1}+\ldots+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta^{\mu-1}}{(\mu-1)!}+\frac{\beta^\mu}{\mu!}\right)+\ldots.$$

ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι τοῦ μυοστοῦ βαθμοῦ ἀποτελοῦν τὴν μυοστὴν δύναμιν τοῦ $(\alpha+\beta)$, ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ $\mu!$, τὸ γινόμενον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^\nu}{\nu!}+\ldots\right)\left(1+\frac{\beta}{1!}+\frac{\beta^2}{2!}+\ldots+\frac{\beta^\nu}{\nu!}+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{\alpha+\beta}{1!}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\alpha+\beta)^\nu}{\nu!}+\ldots.$$

ἤ, συντομώτερα :

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha).\varphi(\beta),$$

ὅπου γενικῶς :

$$\varphi(\varrho)=1+\frac{\varrho}{1!}+\frac{\varrho^2}{2!}+\ldots+\frac{\varrho^\nu}{\nu!}+\ldots.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ $\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\varphi(\alpha).\varphi(\beta).\varphi(\gamma)$, διότι

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\varphi([\alpha+\beta]+\gamma)=\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\gamma)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma).$$

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\ldots\varphi(\varkappa).\quad(\vartheta).$$

179. Ἂν τώρα εἰς τὸν τύπον αὐτὸν (θ) θέσωμεν $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\varkappa=1$, θὰ ἔχωμεν (ἂν τὸ πλῆθος τῶν $\alpha,\beta,\ldots,\varkappa$ εἶναι ν) : $\varphi(\nu)=[\varphi(1)]^\nu$.

180. Ἂν ἔπειτα θέσωμεν :

$\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\varkappa=\dfrac{\mu}{\nu}$, εὑρίσκομεν :

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^\nu=\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}.\nu\right)=\varphi(\mu)=[\varphi(1)]^\mu$$

καὶ ἑπομένως : $\varphi\left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)=[\varphi(1)]^{\frac{\mu}{\nu}}$.

181. Καὶ ἂν θέσωμεν : $\beta=-\alpha$ $(\alpha>0)$ εἰς τὴν ἰσότητα $\varphi(\alpha+\beta)=$ $=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, εὑρί κομεν :

$\varphi(\alpha).\varphi(-\alpha)=\varphi(0)=1$, ἐπομένως: $\varphi(-\alpha)=\frac{1}{\varphi(\alpha)}=\frac{1}{[\varphi(1)]^\alpha}=[\varphi(1)]^{-\alpha}$.

Ὥστε διὰ κάθε σύμμετρον ἀριθμὸν α ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$\varphi(\alpha)=\varphi(1)^\alpha .$$

182. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα: $\varphi(\alpha)=[\varphi(1)]^\alpha$ βλέπομεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς $\varphi(1)$, διὰ νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ κάθε σύμμετρον τιμὴν τοῦ x. Ἔχομεν λοιπόν:

$$\varphi(1)=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots\nu}+\ldots$$

ὁ ἀριθμὸς αὐτός, τὸν ὁποῖον παριστάνομεν μὲ τὸ γράμμα e, ἔχει τὴν σπουδαιοτάτην ἰδιότητα, ὅτι κάθε σύμμετρος δύναμίς του, καὶ ἐπομένως καὶ κάθε ρίζα του, εὑρίσκεται ἀμέσως· πραγματικῶς, ἔχομεν:

$$e^{\frac{\lambda}{\mu}}=1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\nu}{\nu!}+\ldots$$

Π. χ., διὰ τὴν $1000^{\eta\nu}$ ρίζαν του, θὰ ἔχωμεν:

$$e^{\frac{1}{1000}}=1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{2!1000^2}+\frac{1}{3!1000^3}+\ldots+\frac{1}{\nu!1000^\nu}+\ldots$$

183. *Ὁ e εἶναι ἀσύμμετρος.*

Ἀπόδειξις: *Ἀκέραιος* δὲν εἶναι διότι εἶναι προφανῶς:

$$e<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots=3, \text{ ἀλλὰ } e>2.$$

Οὔτε ὅμως *κλασματικός*· διότι, ἂν ὑποθέσωμεν:

$$e=\frac{\lambda}{\mu}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{\nu!}+\ldots,$$

θὰ εἶναι καί:

$$(\mu-1)!\lambda=\mu!\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{\mu!}\right)+\frac{1}{(\mu+1)}+\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots(\alpha).$$

Τὸ α΄ μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἐπίσης δὲ καὶ ὁ $\mu!\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{\mu!}\right)$, ἐπομένως καὶ ἡ διαφορά των: $\frac{1}{(\mu+1)}+\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots$ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός· αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι εἶναι:

$$\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots<\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{(\mu+1)^2}+\frac{1}{(\mu+2)^3}+\ldots, \text{δηλ. τοῦ } \frac{1}{\mu}.$$

καὶ ἐπειδὴ $\mu>1$ (διότι ὁ e δὲν εἶναι *ἀκέραιος*), εἶναι $\frac{1}{\mu}<1$, ὥστε τὸ ἄθροισμα : $\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{(\mu+2)(\mu+2)}+\ldots$, ὡς $<$ τοῦ $\frac{1}{\mu}$, δὲν εἶναι ἀκέραιος· ἡ ἰσότης λοιπὸν *(α)* εἶναι ἀδύνατος καὶ ἑπομένως *ὁ e εἶναι ἀσύμμετρος*. Εὑρίσκεται δὲ ὅτι εἶναι :

$$e=2{,}718281828459045235360287471353\ldots$$

Καθὼς δὲ ἤδη ἀνεφέραμεν (§ 134), ὁ e δὲν εἶναι ἁπλῶς *ἀσύμμετρος, ἀλλὰ καὶ ὑπερβατικὸς* ἀριθμός.

184. ***Ἄλλη ἰδιότης τοῦ** e.*—*Ὁ e εἶναι τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως* $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, *ὅταν* $\text{ορ}\,\nu=\infty$ (ν ἀκέραιος, θετικὸς ἢ ἀρνητικός).

Ἀπόδειξις : α΄) *ν θετικόν* : Ἔχομεν :

$$e^{\frac{1}{\nu}}=1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2!\nu^2}+\frac{1}{3!\nu^3}+\ldots, \text{ ὥστε : } 1+\frac{1}{\nu}<e^{\frac{1}{\nu}}.$$

ἀλλὰ πάλιν : $e^{\frac{1}{\nu+1}}=1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{2!(\nu+1)^2}+\ldots<1+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)^2}+$

$$+\frac{1}{(\nu+1)^3}+\ldots=1+\frac{1}{\nu}.$$

εἶναι λοιπόν : $e^{\frac{1}{\nu+1}}<1+\frac{1}{\nu}<e^{\frac{1}{\nu}}$ καὶ ἑπομένως :

$$e^{\frac{\nu}{\nu+1}}<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e.$$

ὥστε εἶναι καί : $e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e-e^{\frac{\nu}{\nu+1}}=e^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(e^{\frac{1}{\nu+1}}-1\right)$

ἑπομένως καί : $e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<e\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-1\right]=e.\frac{1}{\nu}<\frac{3}{\nu}$.

καὶ διὰ ορ $\nu=\infty$ $\text{ορ}\left[e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]=\text{ορ}\left(\frac{3}{\nu}\right)=0$, δηλαδή :

$$e=\text{ορ}\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right].$$

β΄) *ν ἀρνητικόν*. Ἔχομεν τώρα, ἂν $\nu=-\rho$:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{-\varrho}=\left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\right)^{\varrho}=\left(1+\frac{1}{\varrho-1}\right)^{\varrho-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\varrho-1}\right)$$

καὶ ἑπομένως : $\quad \text{ορ}\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]=\text{ορ}\left[\left(1+\frac{1}{\varrho-1}\right)^{\varrho-1}\right]=e.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

α΄) Ἀσύμμετροι δυνάμεις.

185. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἀπὸ τὴν ἰσότητα :

$e^{x}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\ldots$ ὁρίζεται ὁ ἀριθμὸς e^x διὰ κάθε *σύμμετρον* x.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν τὸ x *ἀσύμμετρον*, ἡ σειρά :

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\ldots$ πάλιν συγκλίνει (§ 177) καὶ ἔχομεν πάλιν (§ 178) :

$$(\alpha)\quad \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\ldots,$$

Δι᾽ αὐτὸ εἰμποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν καὶ τὰς *ἀσυμμέτρους* δυνάμεις τοῦ e ἀπὸ τὴν ἰδίαν ἰσότητα : $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ τότε α΄) ἡ ἰσότης (α), $e^x.e^y=e^{x+y}$, δηλ. ἡ *θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων, ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὰς δυνάμεις τοῦ e.*—β΄) *Ἡ e^x αὐξάνει, ἂν αὐξάνῃ ὁ x καὶ ἐλαττώνεται, ἂν ἐλαττώνεται.* Διότι ἔχομεν :

$e^{x+\varepsilon}=e^x.e^\varepsilon=e^x\left(1+\frac{\varepsilon}{1}+\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\ldots\right)$, δηλ. διὰ $\varepsilon>o$, $e^{x+\varepsilon}>e^x$.

186 *Ἂν μᾶς δοθῇ εἷς ἀριθμὸς* ε *ὁσονδήποτε μικρός, εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ εὕρωμεν μεταβολὴν τοῦ x δίδουσαν μεταβολὴν τοῦ e^x μικροτέραν ἀπὸ τὸν* ε.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔχομεν :

$$e^{x+\delta}-e^x=e^x(e^\delta-1)=e^x\left(\frac{\delta}{1}+\frac{\delta^2}{2!}+\dots\right),$$ λοιπόν :

$e^{x+\delta}-e^x<e^x(\delta+\delta^2+\delta^3+\dots)=e^x\cdot\frac{\delta}{1-\delta}$· ὥστε, διὰ νὰ γίνῃ ἡ αὔξησις τοῦ $e^x<$ ἀπὸ τὸ ε, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ : $e^x\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$, ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν : $\delta<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+e^x}$.

β') Ἔχομεν : $e^x-e^{x-\delta}=$ ἐλάττωσις τοῦ e^x (ὅταν τὸ x ἐλαττωθῇ κατὰ δ)· εἶναι ὅμως :

$e^x-e^{x-\delta}=e^{x-\delta}(e^\delta-1)=e^{x-\delta}\left(\frac{\delta}{1}+\frac{\delta^2}{2!}+\dots\right)<e^x\frac{\delta}{1-\delta}$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γίνῃ $e^x\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$, ἀρκεῖ δηλαδὴ νὰ λάβωμεν : $\delta<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+e^x}$.

187. *Ἡ ἐξίσωσις $e^x=\alpha$ ἔχει διὰ κάθε θετικὴν τιμὴν τοῦ α, πάντοτε μίαν καὶ μίαν μόνον λύσιν, θετικὴν μέν, ὅταν $\alpha>1$· ἀρνητικὴν δέ, ὅταν $\alpha<1$ (καὶ $=0$, ὅταν $\alpha=1$).*

α') Ἂς εἶναι ὁ $\alpha>1$ καὶ Α ἀκέραιος $>\alpha$. Μεταξὺ τότε τῶν ἀριθμῶν $e^0, e^1, e^2\dots, e^A$, (ὅπου $e^0<\alpha<e^A$) ἢ εὑρέθη εἷς ἴσος μὲ τὸν α καὶ τότε ὁ ἐκθέτης του εἶναι ἡ λύσις, ἢ ὁ α περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς. Ἂς περιέχεται μεταξὺ τῶν e^λ καὶ $e^{\lambda+1}$. Μεταξὺ τότε τῶν ἀριθμῶν : e^λ, $e^{\lambda+\frac{1}{10}}$, $e^{\lambda+\frac{2}{10}}$, $e^{\lambda+\frac{3}{10}}$, … $e^{\lambda+\frac{10}{10}}$ ἢ εὑρίσκεται εἷς ἴσος μὲ τὸν α καὶ τότε ὁ ἐκθέτης του εἶναι ἡ λύσις, ἢ δὲν εὑρίσκεται· τότε δὲ προχωροῦμεν ὁμοίως· ὥστε ἢ θὰ εὕρωμεν τέλος ἕνα ἐκθέτην μὲ πεπερασμένον πλῆθος μονάδων, ὡς λύσιν, ἢ θὰ παραχθῇ εἷς ἀριθμὸς x τῆς μορφῆς : $x=\lambda+\frac{\lambda_1}{10}+\frac{\lambda_2}{10^2}+\frac{\lambda_3}{10^3}+\dots$· ὁ ἐξ ἀπείρων τοιούτων προσθετέων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι τώρα ἡ ζητουμένη λύσις. Πραγματικῶς, ἂν δὲν εἶναι $e^x=\alpha$, θὰ εἶναι ἢ $e^x>\alpha$ ἢ $e^x<\alpha$· ἂν ὑποθέσωμεν πρῶτα, ὅτι $e^x>\alpha$, λαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν $\varepsilon<$ ἀπὸ τὸν $e^x-\alpha$ καὶ τότε εἰμποροῦμεν κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 186) νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην x κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἐλάττωσις τῆς δυνάμεως νὰ εἶναι $<\varepsilon$, δηλ. νὰ ἔχωμεν καί : $e^{x-\frac{1}{10^\varrho}}>\alpha$· αὐτὸ ὅμως δὲν γίνεται, διότι ὁ ὁρισμὸς τοῦ x μᾶς δίδει : $e^{x_\varrho}<\alpha$, ὅπου $x_\varrho=\lambda+\frac{\lambda_1}{10}+\dots+\frac{\lambda_\varrho}{10^\varrho}$.

$e^x-\alpha\geq\varepsilon$

$e^x-e^{x-\frac{1}{10^\varrho}}<\varepsilon<e^x-\alpha$

$e^{x-\frac{1}{10^\varrho}}>\alpha$

Θὰ ἔπρεπε λοιπὸν νὰ εἶναι : $x-\frac{1}{10^\varrho}>x_\varrho$ ἢ $x>x_\varrho+\frac{1}{10^\varrho}$, ἐνῷ ἀντιθέτως ἔχομεν : $x<x_\varrho+\frac{1}{10^\varrho}$.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν $e^x<\alpha$, λαμβάνομεν ἕν $\varepsilon<\alpha-e^x$ καὶ τότε εἰμποροῦμεν ν' αὐξήσωμεν τὸν ἐκθέτην κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα $\frac{1}{10^\varrho}$ τόσον μικράν, ὥστε ἡ αὔξησις τῆς δυνάμεως νὰ εἶναι $<\varepsilon$, ὥστε νὰ ἔχωμεν πάλιν : $e^{x+\frac{1}{10^\varrho}}<\alpha$, πρᾶγμα πάλιν ἀδύνατον, διότι ἔχομεν : $e^{x_\varrho+\frac{1}{10^\varrho}}>\alpha$ καὶ $x_\varrho<x$. *Ἑπομένως εἶναι* $e^x=\alpha$.

β') *Ἂς εἶναι τώρα* $\alpha<1$. Τότε $\frac{1}{\alpha}>1$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει εἷς (θετικὸς) ἀριθμὸς y, ποὺ νὰ δίδῃ $e^y=\frac{1}{\alpha}$. θὰ ἔχωμεν λοιπόν : $e^{-y}=\alpha$ καὶ ἑπομένως ὑπάρχει τότε εἷς ἀρνητικὸς ἐκθέτης, ποὺ λύει τὴν ἐξίσωσίν μας $e^x=\alpha$.

Ὅτι δὲ μίαν μόνον λύσιν ἔχει ἡ ἐξίσωσις $e^x=\alpha$ $(\alpha>0)$ εἶναι φανερόν, διότι ὅσον αὐξάνει ὁ ἐκθέτης, αὐξάνει καὶ ἡ δύναμις.

188. Ὁ ἐκθέτης x, ποὺ λύει τὴν ἐξίσωσιν : $e^x=\alpha$, λέγεται *«λογάριθμος τοῦ α πρὸς τὴν βάσιν e»* καὶ γράφεται $l\alpha$.

189. Εἰμποροῦμεν τώρα νὰ ὁρίσωμεν *τὰς δυνάμεις μὲ ἀσυμμέτρους ἐκθέτας ὁποιουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ* ϑ. Πραγματικῶς ἔχομεν προφανῶς : $e^{l\vartheta}=\vartheta$ καὶ ἑπομένως, διὰ κάθε x *σύμμετρον* : $e^{xl\vartheta}=\vartheta^x$, ὅπου τὸ β' μέλος λαμβάνεται πάντοτε θετικόν, διότι καὶ τὸ α' μόνον θετικὸν εἶναι.

Ὁρίζομεν τώρα ὡς *δύναμιν τοῦ* ϑ *μὲ ἐκθέτην x τυχόντα, σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον, τὸν ἀριθμὸν* ϑ^x, *ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα :*

$$\vartheta^x=e^{xl\vartheta}=1+\frac{xl\vartheta}{1!}+\frac{(xl\vartheta)^2}{2!}+\ldots+\frac{(xl\vartheta)^\nu}{\nu!}+\ldots$$

190. *Καὶ ἡ ἐξίσωσις* $\vartheta^x=\alpha$, *ὅπου* $\alpha>0$, *ἔχει πάντοτε μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν*. Διότι :

$$\vartheta^x=e^{xl\vartheta}=\alpha,\ \text{ὥστε καὶ}\ xl\vartheta=l\alpha\ \text{καὶ}\ x=\frac{l\alpha}{l\vartheta}.$$

Ὁ εἷς καὶ ὡρισμένος λοιπὸν ἐκθέτης x, ποὺ λύει τὴν ἐξίσωσιν : $\vartheta^x=\alpha$, λέγεται πάλιν *«λογάριθμος τοῦ α πρὸς τὴν βάσιν* ϑ*»* καὶ γράφεται (πρὸς διάκρισιν) : $\log_\vartheta \alpha$· ἔχομεν λοιπὸν $\log_\vartheta \alpha=\frac{l\alpha}{l\vartheta}$.

β') Πρωτεύουσαι ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

191. 1η) (θεμελιώδης). *Ὁ λογάριθμος (πρὸς μίαν τυχοῦσαν βάσιν ϑ) τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων (πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν) τῶν παραγόντων του.*

Διότι, ἂν ἔχωμεν : $\vartheta^x = X$ καὶ $\vartheta^y = Y$, θὰ εἶναι :

$XY = \vartheta^x \cdot \vartheta^y = \vartheta^{x+y}$, δηλ. $\log_\vartheta(XY) = x + y = \log_\vartheta X + \log_\vartheta Y$.

192. 2α) *Ἀπὸ τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς μίαν βάσιν ϑ παράγεται ὁ λογάριθμός του πρὸς μίαν ἄλλην βάσιν ϑ_1, ἂν τὸν πρῶτον λογάριθμον τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς πρώτης βάσεως ϑ πρὸς τὴν δευτέραν ϑ_1.*

Ἂν ἔχωμεν: $\vartheta_1^{A_1} = \alpha$ καὶ $\vartheta^A = \alpha$, θὰ εἶναι $A_1 = \log_{\vartheta_1}\alpha$ καὶ $A = \log_\vartheta \alpha$· ἀπὸ τὴν ἰσότητα ὅμως : $\vartheta^A = \alpha$ ἕπεται, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο μελῶν της πρὸς τὸν ϑ_1 : $\log_{\vartheta_1}(\vartheta^A) = \log_{\vartheta_1}\alpha$ ἢ

$$A\log_{\vartheta_1}\vartheta = \log_{\vartheta_1}\alpha, \text{ δηλ. } \log_{\vartheta_1}\alpha = \log_\vartheta \alpha \cdot \log_{\vartheta_1}\vartheta. \quad (1)$$

Ὁ $\log_{\vartheta_1}\vartheta$ λέγεται *διαστολεὺς* τοῦ συστήματος μὲ βάσιν ϑ πρὸς τὸ μὲ βάσιν ϑ_1.

193. 3η) *Ὁ λογάριθμος τοῦ ϑ πρὸς βάσιν τὸν ϑ_1 καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ ϑ_1 πρὸς βάσιν τὸν ϑ εἶναι ἀντίστροφοι,* δηλ. $\log_{\vartheta_1}\vartheta \cdot \log_\vartheta \vartheta_1 = 1$.

Πραγματικῶς, ἂν θέσωμεν : $\log_{\vartheta_1}\vartheta = \Theta$, θὰ εἶναι $\vartheta_1^\Theta = \vartheta$ καὶ ἑπομένως:

$$\Theta\log_\vartheta \vartheta_1 = \log_\vartheta \vartheta = 1, \text{ ἢ καὶ } \log_{\vartheta_1}\vartheta \cdot \log_\vartheta \vartheta_1 = 1. \quad (2)$$

Πόρισμα : Ἡ ἰσότης (1) γράφεται, ἕνεκα τῆς (2), καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\log_{\vartheta_1}\alpha = \frac{\log_\vartheta \alpha}{\log_\vartheta \vartheta_1}. \quad (1')$$

194. **Ἐφαρμογή.** Οἱ *δεκαδικοὶ* λογάριθμοι (ἢ τοῦ Briggs) ὑπολογίζονται ἀπὸ τοὺς *«φυσικοὺς»* ἢ *«νεπερείους»* ἢ *«ὑπερβολικοὺς»* (1), δηλ. τοὺς μὲ βάσιν τὸν e, ἂν κάθε νεπέρειος πολλαπλασιασθῇ κατὰ τὸν τύπον (1) ἐπὶ τὸν $\log_{10} e$ ἢ καὶ διαιρεθῇ διὰ τοῦ $\log_e 10$, κατὰ τὸν τύπον (1'). Εἶναι δὲ οἱ δύο αὐτοὶ *διαστολεῖς* :

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} = 0{,}43429448190325182765112\,89 \text{ καὶ}$$

$$\log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}30258509299404568401799\,15.$$

(1) Λέγονται καὶ *ὑπερβολικοί*, ἐπειδὴ δίδουν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς χωρίου τῆς *ὑπερβολῆς*.

195. ***Ἱστορικὴ σημείωσις.*** Τοὺς λογαρίθμους ἐπενόησε πρῶτος ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς Ἰωάννης Napier *(Νέπερ)* (1614), ἀλλ' ὄχι τοὺς μὲ βάσιν τὸ 10· ὅταν ἀνεγνώρισε τὰ πρακτικὰ πλεονεκτήματα τῆς βάσεως αὐτῆς, δὲν ἐπρόφθασεν, ἕνεκα τοῦ θανάτου του, νὰ ὑπολογίσῃ τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους· ἀλλ' ὁ φίλος του Ἑρρῖκος Briggs ἐξηκολούθησε κατ' ἐντολήν του τὴν ἐργασίαν καὶ ἐδημοσίευσε πρῶτος τὸ 1624 πίνακας τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων (μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία) τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1—20000 καὶ ἀπὸ 90000 — 100000 («Arithmetica Logarithmica»). Τὸ κενὸν ἀπὸ 20001 ἕως 89999 τὸ συνεπλήρωσε μὲ 10 δεκαδικὰ ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Ἀδρ. Vlacq *(Βλὰκ)* (1628). Κατόπιν ἐδημοσιεύθησαν οἱ πίνακες μὲ 5 δεκαδικὰ τοῦ Lalande *(Λαλάντ)*, 1802, τῶν ὁποίων ἐπιτομὴ εἶναι οἱ συνήθεις τοῦ Dupuis *(Ντυπυΐ)*. Πλὴν αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι πολλοί, οἱ τοῦ Callet *(Καλλὲ)* μὲ 7 δεκαδικά, οἱ τοῦ Vega *(Βέγκα)*, οἱ τοῦ Schroen *(Σρὲν)* κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΣΕΙΡΑΙ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ· ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ· ΜΙΓΑΔΙΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ· ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ·

α') **Σειραὶ μὲ ὅρους μεταβλητούς.**

196. Ὅταν μιᾶς σειρᾶς οἱ ὅροι περιέχουν ἕνα μεταβλητὸν (μιγαδικὸν ἐν γένει) ἀριθμὸν z, ἡ τιμὴ τῆς σειρᾶς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ z, δηλ. εἶναι ἡ σειρὰ *συνάρτησις* τοῦ z. Ἁπλούστεραι τοιαῦται εἶναι αἱ *ἀκέραιαι*, δηλ. αἱ ἀποτελούμεναι ἀπὸ δυνάμεις τοῦ z μ' ἐκθέτην θετικὸν καὶ ἀκέραιον καὶ συντελεστὴν τυχόντα ἀριθμόν· ὥστε ἡ σειρὰ γράφεται τότε συντόμως: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\alpha_\nu z^\nu$. Ἡ σύγκλισίς της κανονίζεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς *θεώρημα* :

197. *Ἂν ἡ σειρὰ συγκλίνῃ διὰ z = μὲ θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν ϱ, συγκλίνει καὶ διὰ κάθε μιγαδικὴν τιμὴν τοῦ z, ποὺ ἔχει μέτρον* $\leq \varrho$. Πραγματικῶς, ἂν μιᾶς τιμῆς z_1 τὸ μέτρον ϱ_1 εἶναι $\leq\varrho$, τὰ μέτρα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, ὅταν λάβωμεν τὸ ϱ_1, εἶναι μικρότερα ἢ ἴσα πρὸς τὰ μέτρα, ὅταν λάβωμεν τὸ ϱ (διότι : $|\alpha^\nu z_1^\nu| = A_\nu \varrho_1^\nu \leq A_\nu \varrho^\nu$).

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ σειρὰ $\Sigma A_\nu \varrho^\nu$ συγκλίνει, συγκλίνει καὶ ἡ $\Sigma A_\nu \varrho_1^\nu$, ἑπομένως καὶ ἡ $\Sigma \alpha_\nu z_1^\nu$ (§ 169).

198. ***Πόρισμα.*** *Αἱ ἀκέραιαι σειραὶ ἤ 1) συγκλίνουν διὰ κάθε μιγαδικὸν z, δηλ. ἐπὶ ὅλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν μιγαδικῶν* (ὅταν συγκλίνουν διὰ *κάθε* πραγματικὸν θετικὸν ἀριθμὸν (*σειρὰ «ἀπεριόριστος»*)· ἢ 2) *συγκλίνουν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ z, τῶν ὁποίων τὸ μέτρον εἶναι < ἑνὸς θετικοῦ πραγματικοῦ ϱ καὶ ἀποκλίνουν διὰ τὰς ἐχούσας μέτρον >ϱ* (ὁ ϱ εἶναι τότε ἢ ὁ *μεγαλύτερος* ἀπὸ τοὺς θετικούς, ποὺ *συγκλίνει* ἡ σειρά, ἢ ὁ *μικρότερος*, ποὺ *ἀποκλίνει (σειραὶ «περιωρισμέναι»)*, δηλ. συγκλίνουν μέσα εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ϱ, ἀποκλίνουν δὲ ἔξω ἀπὸ αὐτήν· ἢ τέλος 3) *δὲν συγκλίνουν διόλου, πλὴν μόνον, ὅταν z=0.*

199. Ὅταν ἡ ἀκεραία συνάρτησις *συγκλίνῃ*, ὁρίζει μίαν *«μιγαδικὴν» συνάρτησιν τοῦ z.* Ὥστε αἱ ἀπεριόριστοι ὁρίζουν συνάρτησιν *ἐπὶ ὅλου τοῦ ἐπιπέδου*, αἱ δὲ *περιωρισμέναι* μόνον μέσα εἰς τὸν *κύκλον τῆς συγκλίσεώς των.*

β΄) Ἐκθετικὴ συνάρτησις.

200. Ἀπὸ τὰς ἀπεριορίστους σειρὰς σπουδαιοτέρα εἶναι ἡ ἑξῆς: $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^\nu}{\nu!}+\ldots$ (1). Εἶναι δὲ ἀπεριόριστος, διότι ἡ σειρά: $1+\frac{\varrho}{1!}+\frac{\varrho^2}{2!}+\ldots+\frac{\varrho^\nu}{\nu!}+\ldots\equiv e^\varrho$ συγκλίνει *ἀπεριορίστως* (διὰ κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν ϱ)· ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ σειρὰ (1) ἔχει τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν δυνάμεων, ποὺ ἔχει ἡ e^ϱ (τὴν $e^{\varrho_1}.e^{\varrho_2}=e^{\varrho_1+\varrho_2}$), γράφομεν καὶ τὴν (1) μὲ τὸ ἴδιον σύμβολον: e^z. Γενικῶς ἡ συνάρτησις α^z (α θετ. πραγμ.)$\equiv e^{zl\alpha}=1+\frac{zl\alpha}{1!}+\frac{(zl\alpha)^2}{2!}+\ldots$ λέγεται *ἐκθετική*.

γ΄) Μιγαδικαὶ κυκλικαὶ συναρτήσεις.

201. Ὅταν z φανταστικὸν $\equiv xi$, ἡ συνάρτησις $e^{xi}=1+\frac{xi}{1!}+\frac{(xi)^2}{2!}+\ldots+\frac{(xi)^\nu}{\nu!}+\ldots$ σχίζεται εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων:

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}+\ldots\right)+$$
$$+i\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\ldots\right)\equiv\sigma(x)+i\varphi(x).$$

Ἔχομεν λοιπόν: (1) $e^{xi}=\sigma(x)+i\varphi(x)$· ἑπομένως καί: (2) $e^{-xi}=\sigma(x)-i\varphi(x)$ (διότι ἡ τροπὴ τοῦ x εἰς $-x$, τὴν μὲν *ἀρτίαν* συνάρτησιν $\sigma(x)$ τὴν ἀφίνει τὴν ἰδίαν, τὴν *περιττὴν* $\varphi(x)$ ὅμως τὴν τρέπει εἰς τὴν $-\varphi(x)$). Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν: $[\sigma(x)]^2+[(\varphi(x)]^2=1$. Εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ θέσωμεν: $\sigma(x)=$ συνω, $\varphi(x)=$ ημω, ὅπου ω ἓν τόξον· τὸ ω εἶναι προφανῶς συνάρτησις τοῦ x· *θὰ δείξω, ὅτι εἶναι τὸ ἴδιον τὸ x.*

$\sigma(\omega)=1$
συν $=1$
$\omega=0$

Ἀπόδειξις. Ἂν ὡς ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς $x=0$ λάβω τὴν $\omega=0$ (διότι ἀντιστοιχοῦν ἄπειροι: $0+2k\pi$), ἡ ω εἶναι *ὡρισμένη ἐντελῶς* ἀπὸ τὸ x (ἕνεκα τῆς *συνεχείας* τῶν *κυκλικῶν* συναρτήσεων). Λέγω, ὅτι εἶναι ω *ἀνάλογον* τοῦ x· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἰσότητα συνω$+i$ημω$=e^{xi}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της διαδοχικῶς, εὑρίσκομεν:

$$\text{συν}(2\omega)+i\,\text{ημ}(2\omega)=e^{2xi},\quad \text{συν}(3\omega)+i\,\text{ημ}(3\omega)=e^{3xi}\ \text{κτλ.}$$

Εἶναι λοιπὸν $\omega=\lambda x$· δηλ.

$$\text{ημ}(\lambda x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots \text{ ἢ καὶ } \frac{\text{ημ}(\lambda x)}{\lambda x}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots\right)$$

καὶ ἑπομένως: $\underset{(\text{διὰ } x \to 0)}{\text{ορ}}\dfrac{\text{ημ}(\lambda x)}{\lambda x}=\dfrac{1}{\lambda}.\,\text{ορ}\left(1-\dfrac{x^2}{3!}+\ldots\right)$, δηλ. $1=\dfrac{1}{\lambda}$, ὥστε καὶ $\lambda=1$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὰ ἑξῆς δύο σπουδαῖα *«ἀναπτύγματα»* τῶν *συναρτήσεων ημx* καὶ *συνx* (x πραγματικὸς) *κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x εἰς σειράς:*

$$(\alpha)\quad \text{συν}x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}+\ldots,$$

$$\text{ημ}\,x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots(-1)\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}+\ldots\ldots\quad(\beta)$$

$$\text{καὶ συν}x+i\,\text{ημ}x=e^{xi}.$$

202. Τὸ x εἰς τοὺς τύπους (α) καὶ (β) εἶναι *πραγματικόν*· ἂν ὅμως ἔχωμεν *μιγαδικὸν* z, ὁρίζομεν τὰ *(ἀνύπαρκτα τώρα γεωμετρικῶς)* ημ z καὶ συν z ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους σειρὰς (α) κα (β), δηλ. θέτομεν:

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\equiv\text{συν}z,\qquad \frac{z}{1}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\equiv\text{ημ}\,z.$$

203. Ἀπὸ τὰς σχέσεις: $e^{zi}=$ συνz$+i$ημz, $e^{-zi}=$ συνz$-i$ημz εὑρίσκομεν, ἂν λύσωμεν:

$$\text{συν}z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2},\qquad \text{ημ}z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$$

καί : $\varepsilon\varphi\, z = -i.\dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}$, $\sigma\varphi z = i.\dfrac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}}$.

ἐκφράζονται λοιπὸν καὶ αἱ 4 κυκλικαὶ συναρτήσεις ῥητῶς μὲ τὴν e^{zi}.

204. ***Πόρισμα.*** Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχει καὶ μίαν *τρίτην* μορφήν, τὴν *ἐκθετικήν* :

$$\alpha+\beta i=\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)=\varrho e^{\varphi i}.$$

205. Εἰμποροῦμεν τώρα νὰ δείξωμεν μίαν ἰδιότητα τῆς συναρτήσεως e^z, τὴν ἑξῆς : $e^{z+2\pi i}=e^z$ (διὰ *κάθε* z)· ὁ ἀριθμὸς $2\pi i$ λέγεται *περίοδος* τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ συνάρτησις *περιοδική*. (Γενικῶς, *περιοδικὴ* λέγεται μία συνάρτησις, ὅταν ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμὸς ω, τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι (διὰ *κάθε* z) : $\sigma(z+\omega)=\sigma(z)$).

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $e^{z+2\pi i}=e^z.e^{2\pi i}=e^z.(\sigma\upsilon\nu(2\pi)+i\eta\mu(2\pi))=e^z$.

206. ***Πόρισμα.*** Ἡ συνάρτησις α^z ἔχει περίοδον τὴν $\dfrac{2\pi i}{l\alpha}$, αἱ ημz καὶ συνz τὸν 2π καὶ αἱ εφz, σφz τὸν π.

207. ***Παρατήρησις.*** Αἱ συναρτήσεις : e^z, α^z, ημz, συνz, εφz, σφz (καθὼς καὶ αἱ ἀντίστροφοί των) δὲν εἶναι *ἀλγεβρικαί*, καὶ δι᾽ αὐτὸ λέγονται *ὑπερβατικαί*. (*Ἀλγεβρικὴ* λέγεται μία συνάρτησις Z, ὅταν ἡ ἐξίσωσις, ποὺ τὴν συνδέει μὲ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν z, εἶναι *ἀλγεβρικὴ* πρὸς τὰ z καὶ Z).

δ΄) Μιγαδικοὶ λογάριθμοι.

208. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $e^z=Z$ εὑρίσκομεν: $z=lZ$, ὥστε ὁ νεπέρειος λογάριθμος εἶναι ἡ *ἀντίστροφος* συνάρτησις τῆς e^z. Διὰ τὰς *πραγματικὰς* τιμὰς τοῦ z, εὕρομεν ἤδη (§ 187-8), ὅτι *κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα πραγματικὸν λογάριθμον (θετικόν, ἂν $Z>1$ καὶ ἀρνητικόν, ἂν $Z<1$).* Οἱ δὲ ἀρνητικοὶ *δὲν ἔχουν* λογαρίθμους (πραγματικούς). Διὰ τὰς *μιγαδικὰς* ὅμως τιμὰς τοῦ z *ἔχει κάθε ἀριθμὸς Z λογάριθμον· καὶ μάλιστα ὄχι μόνον ἕνα, ἀλλ᾽ ἀπείρους.*

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ εἶναι ὁ $x+yi$ νεπέρειος λογάριθμος τοῦ $\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$, πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$e^{x+yi}=\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi) \text{ ἢ } e^x(\sigma\upsilon\nu y+i\eta\mu y)=\varrho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi),$$

δηλ. θὰ ἔχωμεν :

$e^x=\varrho$, συνy=συνφ, ημy=ημφ· ἢ καὶ (ἐπειδὴ x πραγματικόν): $x=l\varrho$ καὶ $y=\varphi+2k\pi$ (k ἀκέραιος)· ὥστε εἶναι :

$$l[\varrho(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)]=l\varrho+(\varphi+2k\pi)i\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ k εἶναι ὁ τυχὼν ἀκέραιος, ὑπάρχουν ἄπειροι λογάριθμοι τοῦ μιγάδος $\varrho(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$, ποὺ διαφέρουν κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ $2\pi i$.

209. ***Μερικαὶ περιπτώσεις.*** 1) *Πραγματικοῦ καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ* ϱ $(\varphi=0)$ οἱ λογάριθμοι εἶναι : $l\varrho+2k\pi i$. *(Εἷς μόνον πραγματικός).* (Τῆς μονάδος 1 εἶναι οἱ $2k\pi i$).

2) *Πραγματικοῦ καὶ ἀρνητικοῦ* ἀριθμοῦ $-\varrho(\varphi=\pi)$ οἱ λογάριθμοι εἶναι: $l\varrho+(2k+1)\pi i$. (Ὅλοι *μιγαδικοί*).

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ δειχθοῦν αἱ ἰσότητες (διὰ μιγαδικὰ z):

$$\text{ημ}^2z+\text{συν}^2z=1,\quad \text{ημ}(z_1+z_2)=\text{ημ}z_1\text{συν}z_2+\text{συν}z_1\text{ημ}z_2,$$
$$\text{συν}(z_1+z_2)=\text{συν}z_1\,\text{συν}z_2-\text{ημ}z_1\text{ημ}z_2.$$

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι : $Z=\text{τοξσυν}z=\pm\frac{1}{i}l(z+\sqrt{z^2-1})$,

$$Z=\text{τοξημ}z=\frac{1}{i}l(zi\pm\sqrt{1-z^2}),\quad Z=\text{τοξεφ}z=\frac{1}{2i}\,l\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right).$$

3) ***Ὑπερβολικὸν ἡμίτονον καὶ συνημίτονον.*** Ἔχομεν εὕρει τοὺς τύπους :

$$(1)\quad e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^\nu}{\nu!}+\ldots,\quad e^{-z}=1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}-\ldots(2)$$

$$(3)\quad \text{ημ}z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots,\quad \text{συν}z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots(4)$$

Ἀπὸ τοὺς δύο τελευταίους ὁρίζονται *ἀναλυτικῶς* αἱ συναρτήσεις ημz, συνz, ὅταν z *μιγαδικὸν* (διὰ z *πραγματικὸν* ἔχομεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς Τριγωνομετρίας).— Ἂν τώρα εἰς τοὺς τύπους (3) καὶ (4) θέσωμεν ἀντὶ z τὸ zi (ὅπου τὸ z εἶναι τυχὼν (*μιγαδικὸς* ἐν γένει) ἀριθμός, εὑρίσκομεν :

$$\text{ημ}(zi)=i\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)\ \text{καὶ}\ \text{συν}(zi)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$$

Αἱ δύο ἐκφράσεις : $\frac{\text{ημ}zi}{i}$ καὶ συν(zi) λέγονται ἡ α΄ *ὑπερβολικὸν* ἡμίτονον, ἡ β΄ *ὑπερβολικὸν* συνημίτονον τοῦ z. Καὶ γράφονται : ημh(z), συνh(z). (1) Εὑρίσκονται καὶ ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν :

(1) h, ἀρχικὸν τῆς λέξεως hyperbolicus.

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots, \quad \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Ἔχομεν λοιπὸν καὶ $\varepsilon\varphi h(z) = \frac{\eta\mu(zi)}{i\sigma\upsilon\nu(zi)} = \frac{\varepsilon\varphi(zi)}{i}$, $\sigma\varphi h(z) = \frac{i}{\varepsilon\varphi(zi)} = i\,\sigma\varphi(zi)$.

Ἐπίσης εὑρίσκομεν, τρέποντες πάλιν τὸ z εἰς zi εἰς τοὺς τύπους : $\frac{\eta\mu(zi)}{i} = \eta\mu h(z)$, $\sigma\upsilon\nu(zi) = \sigma\upsilon\nu h(z)$ κτλ. (α), ὅτι : (β) $\eta\mu z = \frac{\eta\mu h(zi)}{i}$, $\sigma\upsilon\nu z = \sigma\upsilon\nu h(zi)$, $\varepsilon\varphi z = \frac{\varepsilon\varphi h(zi)}{i}$, $\sigma\varphi z = i\sigma\varphi h(zi)$.

Οἱ τύποι (α) μᾶς δίδουν τὰς τιμὰς τῶν *ὑπερβολικῶν* γραμμῶν ημh(z) συνh(z) κτλ. διὰ τῶν *κυκλικῶν* : ημ(zi), συν(zi) κτλ., οἱ δὲ (β), ἀντιστρόφως. Ἀπὸ τοὺς θεμελιώδεις τύπους τώρα : $\eta\mu^2 z + \sigma\upsilon\nu^2 z = 1$, $\eta\mu(z_1+z_2) = \eta\mu z_1 \sigma\upsilon\nu z_2 + \eta\mu z_2 \sigma\upsilon\nu z_1$, $\sigma\upsilon\nu(z_1+z_2) = \sigma\upsilon\nu z_1 \sigma\upsilon\nu z_2 - \eta\mu z_1 \eta\mu z_2$ εὑρίσκομεν τοὺς ἀντιστοίχους διὰ τὰς ὑπερβολικὰς γραμμάς :

$$\sigma\upsilon\nu h^2 z - \eta\mu h^2 z = 1, \quad \eta\mu h(z_1+z_2) = \eta\mu h(z_1).\sigma\upsilon\nu h(z_2) + \sigma\upsilon\nu h(z_1).\eta\mu h(z_2),$$
$$\sigma\upsilon\nu h(z_1+z_2) = \sigma\upsilon\nu h(z_1).\sigma\upsilon\nu h(z_2) + \eta\mu h(z_1).\eta\mu h(z_2).$$

καὶ ἀπὸ αὐτούς : $\varepsilon\varphi h(z_1+z_2) = \frac{\varepsilon\varphi h(z_1) + \varepsilon\varphi h(z_2)}{1 + \varepsilon\varphi h(z_1)\varepsilon\varphi h(z_2)}$ κτλ. Οὕτως εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν τύπων, ἀντιστοιχούντων πρὸς τοὺς τῶν *κυκλικῶν* συναρτήσεων.

4) Ἂν θέσωμεν $z = \eta\mu h(u)$, ἕπεται : $u = \tau o\xi\eta\mu h(z)$, ἐπίσης : $u = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(hz)$, ἂν θέσωμεν : $z = \sigma\upsilon\nu h(u)$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\eta\mu h(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = z$ εὑρίσκομεν : $e^{2u} - 2ze^u - 1 = 0$ ἢ καὶ $u \equiv \tau o\xi\eta\mu h(z) = l(z \pm \sqrt{z^2+1})$. Ἐπίσης εὑρίσκομεν : $u = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu h(z) = l(z \pm \sqrt{z^2-1})$, $u = \tau o\xi\varepsilon\varphi h(z) = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$κτλ. (τύποι ἀντίστοιχοι τῶν τῆς ἀσκ. 2).

5) ***Πραγματικαὶ ὑπερβολικαὶ γραμμαί.*** Ἂν z=x, πραγματικόν, οἱ τύποι γίνονται :

$$\eta\mu h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \varepsilon\varphi h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Τῶν τιμῶν τῶν 2 ὑπερβολικῶν αὐτῶν συναρτήσεων τοῦ x ἔχουν κατασκευασθῆ *πίνακες* (Hoüel (Ὀυέλ), 1885).

6) ***Γεωμετρικὴ παράστασις*** τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων .

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν : $x^2-y^2=1$, ποὺ ἔχει ἄξονα πλάγιον$=1$ καὶ ποὺ ἑπομένως ὁ δεξιός της κλάδος ἐφάπτεται εἰς τὸ Α τῆς περιφερείας (ΟΑ), ποὺ ἔχει ἐξίσωσιν : $x^2+y^2=1$. Νὰ δειχθῇ, ὅτι : ἂν θέσωμεν τὸ y τῆς ὑπερβολῆς$=\eta\mu h(t)$, θὰ εἶναι : $x=\cosh(t)$· καὶ ὅτι, ἂν ἀπὸ τὸν πόδα Π τῆς τεταγμένης ΜΠ τῆς ὑπερβολῆς φέρωμεν ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν, ὁ ποὺς ρ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ τῆς ὑπερβολῆς.

7) Ὁ λογάριθμος ἐν γένει εἶναι ἡ συνάρτησις, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι : $f(z_1z_2)=f(z_1)+f(z_2)$, ποὺ ἔχει δηλ. τὴν ἰδιότητα : *τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν της διὰ 2 τιμὰς τοῦ z : z_1, z_2 νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως διὰ $z=$ μὲ τὸ γινόμενον τῶν z_1, z_2* (Riemann *(Ρίμαν)*).

8) Οἱ πραγματικοὶ λογάριθμοι τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται, καθὼς γνωρίζομεν καὶ ἀπὸ τὰ στοιχειώδη μαθηματικά, καὶ μὲ τὰ *θέματα* (βλέπε Στοιχειώδη Ἄλγεβραν Ἰ. Ν. Χατζιδάκη)· ἐπίσης καὶ μὲ δύο προόδους, μίαν γεωμετρικὴν καὶ ἄλλην ἀριθμητικήν :

$$(\alpha)\quad 1\ \omega\ \omega^2\ \omega^3 \dots \qquad \text{καὶ } 0\ r\ 2r\ 3r \dots$$

λογάριθμος τοῦ ὅρου ω^μ *εἶναι ὁ* μr. Ἂν θέσωμεν $\mu r=\gamma$, θὰ ἔχωμεν $\log(\omega^\mu)=\gamma$· ἔχομεν ὅμως καὶ $\mu=\frac{\gamma}{r}$, ὥστε $\omega^\mu=\omega^{\frac{\gamma}{r}}$· ὁ γ λοιπόν δηλ. ὁ *λογάριθμος ὁ κατὰ τὸν μὲ τὰς προόδους ὁρισμὸν τοῦ* ω^μ, *εἶναι συγχρόνως καὶ ὁ λογάριθμος μὲ τὸν ὁρισμὸν μὲ τοὺς ἐκθέτας*, ἀφοῦ εἶναι ὁ ἐκθέτης γ, εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς $\omega^{\frac{1}{r}}$ διὰ νὰ παραχθῇ ὁ ω^μ. Καὶ ἀντιστρόφως, *ὁ λογάριθμος κατὰ τὸν ὁρισμὸν μὲ τοὺς ἐκθέτας εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν κατὰ τὸν ὁρισμὸν μὲ τὰς προόδους*· διότι, ἂν ἔχωμεν τὴν γεωμετρικὴν σειράν : $\alpha\ \alpha\omega\ \alpha\omega^2 \dots (1)$ καὶ λάβωμεν τὴν σειρὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ὅρων τῆς (1) :

$$\log\alpha \quad (\log\alpha+\log\omega) \quad (\log\alpha+2\log\omega)\dots,$$

ἡ σειρὰ αὐτὴ εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\log\omega$. Ἂν τώρα θέσωμεν $\log\omega=r$, $\alpha=1$, ἔχομεν τὰς δύο προόδους (α).— Ὁ *Νέπερ* ἐθεώρησε γενικῶς τὰς ἑξῆς δύο προόδους :

$$\left.\begin{matrix} 1 & (1+\alpha) & (1+\alpha)^2 & (1+\alpha)^3 \dots (1+\alpha)^\mu \dots \\ 0 & \beta & 2\beta & 3\beta \ \dots \ \mu\beta \dots\dots \end{matrix}\right\}(1)$$

καὶ ὑπέθεσε τὸ α *ἀπειροστόν*, ὅτε οἱ ἀριθμοὶ τῆς β′ σειρᾶς γίνονται καὶ αὐτοὶ *ἀπειροστοί*.

Ἔπειτα διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων, ἐθεώρησε $\beta=\alpha$, ὅτε οἱ τύποι (1) γίνονται: $1 \ (1+\alpha) \ (1+\alpha)^2 \ldots$ καὶ $0 \ \alpha \ 2\alpha \ldots$ καὶ τὸ *μέτρον* τοῦ συστήματος αὐτοῦ τῶν λογαρίθμων $\frac{\beta}{\alpha}=\mu$ καταντᾷ 1. Ἂν τώρα ζητήσωμεν τὴν *βάσιν* τοῦ *νεπερείου* αὐτοῦ συστήματος, δηλ. *τὸν ἀριθμόν, ποὺ ἔχει λογάριθμον τὴν 1*, εὑρίσκομεν, ἂν πρῶτα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μονὰς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου: $\mu\alpha=1$, $\mu=\frac{1}{\alpha}$, ὥστε ἡ βάσις εἶναι: $(1+\alpha)^\mu$, δηλ. $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. ἐπειδὴ δὲ τὸ α ἔχει ὑποτεθῆ ἀπειροστόν, ἡ βάσις αὐτὴ τείνει ἀπεριορίστως πρὸς τὸ ὅριον τοῦ $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, *δηλ. πρὸς τὸν ἀριθμὸν e*. Ἂν δὲ ἡ 1 δὲν ἀνήκῃ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ ἔχωμεν $\mu\alpha<1<(\mu+1)\alpha$ καὶ ἂν x ὀνομασθῇ ἡ βάσις τῶν νεπερείων λογαρίθμων, θὰ εἶναι:
$(1+\alpha)^\mu<x<(1+\alpha)^{\mu+1}$. καὶ ἐπειδή: $\frac{1}{\mu}>\alpha>\frac{1}{\mu+1}$, θὰ ἔχωμεν:
$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu<x<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1}$ (α) καὶ ἐπειδὴ διὰ ορ $\alpha=0$ εἶναι ορ $\mu=\infty$, τὰ ὅρια τῶν δύο ἄκρων ποσῶν τῶν ἀνισοτήτων (α) ἔχουν κοινὴν τιμὴν τὸν e καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τὸ x· *δηλ. εἶναι $x=e$*.

9) Διὰ ορ$x=\infty$ ὁ λόγος $\frac{\lambda o\gamma_\alpha x}{x}$ τείνει πρὸς τὸ 0, ἐλαττούμενος ἢ ἢ αὐξάνων, καθόσον $\alpha>1$ ἢ <1.

10) Διὰ ορ $x=\infty$ ἡ ἔκφρασις $x^{\frac{1}{x}}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1.

11) Διὰ ορ $x=0$ ἡ ἔκφρασις x^x ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1.

12) Διὰ ορ $x=\infty$ ὁ λόγος $\frac{\alpha^x}{x}$ τείνει πρὸς τὸ ∞, ἂν $\alpha>1$ καὶ πρὸς τὸ 0, ἂν $\alpha<1$.

13) Εἰς *κάθε* σύστημα λογαριθμικὸν εἶναι διὰ τοὺς *πραγματικοὺς* λογαρίθμους:

λογ τῆς βάσεως=1, λογ 1=0, λογ $0=\mp\infty$, λογ $\infty=\pm\infty(\alpha\gtrless1)$.

14) Ἀπὸ τὰ δύο ἀναπτύγματα εἰς σειράς:

$$(1+x)^\mu=e^{\mu l(1+x)}=1+\mu l(1+x)+\mu^2\frac{[l(1+x)]^2}{1.2}+\ldots(|x|<1)$$

καί : $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots$, ($l$ λογάριθμος πρὸς βάσιν τὸ e), ποὺ ἰσχύουν διὰ *τυχὸν* μ (ἡ β' ταὐτότης ἀποτελεῖ *γενίκευσιν* τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου (§ 16)· ἀποδεικνύεται δὲ εἰς τὸν *Διαφορικὸν λογισμὸν*) νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$(\alpha)\quad l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^{\nu+1}\cdot\frac{x^{\nu}}{\nu}+\ldots$$

(ἡ σειρὰ συγκλ. διὰ $-1<x\leq+1$).

ἢ καί : $lx=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\ldots$ (συγκλ. διὰ $0<x\leq2$).

Ἀπὸ τὴν σειρὰν (α) εὑρίσκομεν δύο ἄλλας, χρησιμωτέρας διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν λογαρίθμων, ὡς ἑξῆς : θέτομεν *πρῶτα* εἰς τὴν (α) $-x$ ἀντὶ x καὶ ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὰς δύο ἰσότητας :

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),$$

ἤ, ἂν θέσωμεν : $\frac{1+x}{1-x}=\alpha$, $l\alpha=2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^3+\ldots\right)$

(συγκλ. διὰ κάθε *θετικὴν* τιμὴν τοῦ α)·

ἂν *δεύτερον* θέσωμεν : $\frac{1+x}{1-x}=\frac{\omega+1}{\omega}$; εὑρίσκομεν τὴν *ταχύτερα* συγκλίνουσαν σειράν :

$$l(\omega+1)=l\omega+2\left(\frac{1}{2\omega+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\omega+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\omega+1}\right)^5+\ldots\right).$$

Οὕτως ὑπολογίζονται οἱ *νεπέρειοι* λογάριθμοι τῶν ἀκεραίων, διότι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν $l\omega$, ἡ σειρὰ αὐτὴ μᾶς δίδει τὸν $l(\omega+1)$· (τόσον χρησιμωτέρα εἶναι ἡ σειρά, ὅσον μεγαλύτερον τὸ ω).

(Τοὺς δεκαδικοὺς εὑρίσκομεν ἔπειτα ἀπὸ τοὺς νεπερείους πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν *διαστολέα* $\frac{1}{l10}$ (§ 194).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Γ΄ ΜΕΡΟΥΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

α΄) Κοινὰ συνεχῆ κλάσματα.

210. Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς σειρὰς καὶ τὰ ἀτέρμονα γινόμενα ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι παραστάσεις μὲ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων καὶ μὲ τιμὴν πεπερασμένην· ἓν σπουδαῖον εἶδος τοιούτων εἶναι τὰ *συνεχῆ κλάσματα.*[1]

211. Κάθε *σύμμετρος* ἀριθμὸς εἰμπορεῖ νὰ γραφῇ : $\frac{A}{A_1}$ (A, A_1 ἀκέραιοι). Ἂν τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ A διὰ τοῦ A_1 γραφῇ α_1 καὶ τὸ ὑπόλοιπον A_2, θὰ εἶναι : $\frac{A}{A_1}=\alpha_1+\frac{A_2}{A_1}=\alpha_1+\cfrac{1}{\frac{A_1}{A_2}}$· ἂν ἔχωμεν πάλιν $A_1=\alpha_2A_2+A_3$, θὰ εἶναι: $\frac{A}{A_1}=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\frac{A_2}{A_3}}}$· προχωροῦντες οὕτω θὰ φθάσωμεν τέλος εἰς κλάσμα τῆς μορφῆς :

$$\frac{A}{A_1}=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\cdot\;\cdot+\cfrac{1}{\alpha_\nu}}}}$$

ὅπου τὸ ν εἶναι *πεπερασμένος* ἀριθμὸς (διότι ἡ ἀλλεπάλληλος αὐτὴ

[1] Πρῶτος ἐθεώρησε τὰ *συνεχῆ* κλάσματα ὁ Ἄγγλος Brouncker *(Μπράουγκερ)*· ἀλλ' ἡ ἀνακάλυψις τῶν κυριωτέρων ἰδιοτήτων των ὀφείλεται εἰς τὸν μεγάλον Ὀλλανδὸν μαθηματικὸν Huygens *(Οΐχενς)* (1682).

διαίρεσις εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ μ. κ. διαιρέτου τῶν A, A_1). Ἓν κλάσμα τῆς μορφῆς αὐτῆς λέγεται *συνεχὲς καὶ περιωρισμένον* (δηλ. μὲ *πεπερασμένον* πλῆθος ὅρων). Ἓν τοιοῦτο κλάσμα ἐκφράζεται καὶ μὲ ὁρίζουσαν ὡρισμένης μορφῆς (βλ. σελ. 50).

212. Ἂν τώρα λάβωμεν ἕνα *ἀσύμμετρον* x καὶ α_1 εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος του, θὰ εἶναι $x=\alpha_1+\frac{1}{x_1}$, ὅπου x_1 ἀσύμμετρος >1. Ἂν πάλιν α_2 εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x_1, εἶναι : $x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{x_2}}$ (x_2 ἀσύμμετρος >1). Ἐξακολουθοῦντες οὕτω θὰ εὕρωμεν ἓν κλάσμα τῆς μορφῆς :

$$x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{\ddots}{\ddots\cfrac{1}{\alpha_\nu+\ddots}}}}$$

ποὺ λέγεται *συνεχὲς καὶ ἀπεριόριστον* (δηλ. ἔχει *ἄπειρον* πλῆθος ὅρων).

213. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ λέγονται *τ' ἀτελῆ πηλίκα* (εἶναι ὅλοι ≥ 1, πλὴν τοῦ α_1, ποὺ εἰμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ $=0$)· οἱ δὲ κλασματικοὶ $\alpha_1+\frac{1}{x_1}, \ldots$ λέγονται *τὰ πλήρη πηλίκα*. *Ἀνηγμένην* (τιμὴν) τοῦ συνεχοῦς κλάσματος λέγομεν τὴν τιμήν, ποὺ εὑρίσκομεν, ὅταν παραλείψωμεν τοὺς ὅρους ἀπὸ ἓν ν καὶ ἐφεξῆς : α′ ἀνηγμένη εἶναι ἡ

$$\frac{\alpha_1}{1},\ \beta'\ \text{ἡ}\ \alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1\alpha_2+1}{\alpha_2},\ \gamma'\ \text{ἡ}\ \alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3}}=\frac{(\alpha_1\alpha_2+1)\alpha_3+\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3+1}\ \text{κτλ.}$$

Θὰ δείξω, ὅτι ἰσχύει ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών : *Τῆς τυχούσης ἀνηγμένης ὁ μὲν ἀριθμητὴς παράγεται, ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀμέσως προηγουμένης ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον α_ν, ὅπου ἐσταματήσαμεν, καὶ προστεθῇ εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμητὴς τῆς προπροηγουμένης, ὁ δὲ*

$= \frac{\rho_{\nu-1}\alpha_\nu+\rho_{\nu-2}+\frac{\rho_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}}{\sigma_{\nu-1}\alpha_\nu+\sigma_{\nu-2}+\frac{\sigma_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}} = \frac{\rho_\nu+\frac{\rho_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}}{\sigma_\nu+\frac{\sigma_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}} =$

παρονομαστὴς κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς τῶν δύο προηγουμένων. Πραγματικῶς, ἂν ἔχωμεν διὰ τὴν τυχοῦσαν ἀνηγμένην $\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}$:

$\rho_\nu = \rho_{\nu-1}\alpha_\nu + \rho_{\nu-2}$, $\sigma_\nu = \sigma_{\nu-1}\alpha_\nu + \sigma_{\nu-2}$, θέτοντες εἰς τὴν ἔκφρασιν :

$\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu} = \frac{\rho_{\nu-1}\,\alpha_\nu + \rho_{\nu-2}}{\sigma_{\nu-1}\,\alpha_\nu + \sigma_{\nu-2}}$ τὸ $\alpha_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$ ἀντὶ τοῦ α_ν εὑρίσκομεν πάλιν :

$\frac{\rho_{\nu+1}}{c_{\nu+1}} = \frac{\rho_\nu\,\alpha_{\nu+1} + \rho_{\nu-1}}{\sigma_\nu\,\alpha_{\nu+1} + \sigma_{\nu-1}}$. Ἰσχύει λοιπὸν ὁ κανὼν καὶ διὰ τὸ $\nu+1$, ἑπομένως εἶναι γενικός. Μὲ τὸν κανόνα αὐτὸν εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἀνηγμένας :

$\frac{\alpha_1}{1}$	α_2	α_3	α_4	. .
	$\frac{\alpha_1\alpha_2+1}{\alpha_2}$	$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3+\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3+1}$	$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_4+\alpha_1\alpha_2+1}{\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_4+\alpha_2}$	. . . .

214. *Κάθε ἀπεριόριστον συνεχὲς κλάσμα παράγεται κατὰ τὰ προηγούμενα ἀπὸ ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν.* Καὶ ἀντιστρόφως ὅμως, *κάθε ἀσύμμετρος παράγεται ἀπὸ ἓν συνεχὲς ἀπεριόριστον κλάσμα·* διότι κάθε περιωρισμένον συνεχὲς παράγει προφανῶς σύμμετρον ἀριθμόν.

215. Ἀπὸ τὰς σχέσεις: $\rho_\nu = \rho_{\nu-1}\alpha_\nu + \rho_{\nu-2}$, $\sigma_\nu = \sigma_{\nu-1}\alpha_\nu + \sigma_{\nu-2}$ εὑρίσκομεν : $\rho_\nu\,\sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu\,\rho_{\nu-1} = -(\rho_{\nu-1}\sigma_{\nu-2} - \sigma_{\nu-1}\rho_{\nu-2})$, δηλ. ἡ διαφορά: $\rho_\nu\,\sigma_{\nu-1} - \rho_{\nu-1}\sigma_\nu$ μένει κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἡ ἰδία διὰ τὸ τυχὸν ν· ἀλλάσσει ὅμως σημεῖον, κάθε φοράν, ποὺ τὸ ν γίνεται $\nu+1$. Ὥστε *μένει ἡ ἰδία καὶ κατὰ τὸ σημεῖον διὰ κάθε ν ἡ ποσότης: $(-1)^\nu(\rho_\nu\,\sigma_{\nu-1} - \rho_{\nu-1}\sigma_\nu)$.*

Καὶ ἐπειδὴ διὰ $\nu=2$ ἡ ποσότης αὐτὴ $=1$, εἶναι γενικῶς:

$$\rho_\nu\,\sigma_{\nu-1} - \rho_{\nu-1}\sigma_\nu = (-1)^\nu .$$

Συνέπεια τούτου εἶναι, ὅτι : *ρ_ν , σ_ν εἶναι πρῶτοι ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον,* δηλ. ὅτι : *Αἱ διαδοχικαὶ ἀνηγμέναι εἶναι ἀνάγωγα κλάσματα.*

216. Ἔχομεν ἐπίσης : $\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu} - \frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}} = \frac{(-1)^\nu}{\sigma_\nu\,\sigma_{\nu-1}}$· ὥστε : *Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ἀνηγμένων προχωρεῖ διαρκῶς ἐλαττουμένη ἀπολύτως καὶ εἶναι ἐναλλὰξ θετικὴ καὶ ἀρνητική. Αἱ ἀνηγμέναι λοιπὸν περιττῆς τάξεως διαρκῶς αὐξάνουν, εἶναι ὅμως καθεμία < ἀπὸ τὴν προηγουμένην της ἀρτίας τάξεως· αἱ δὲ ἀρτίας, ἀντιστρόφως. Καὶ ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ δύο*

$\nu = \nu + i$

$-(\rho_{\nu+i-1}\sigma_{\nu+i-2} - \sigma_{\nu+i-1}\rho_{\nu+i-2}) =$

$= \rho_{\nu+i}\sigma_\nu - \sigma_{\nu+i}\rho_\nu$

διαδοχικῶν ἀνηγμένων, κοινὸν ὅριον τῶν ἀνηγμένων καὶ τῆς ἀρτίας καὶ τῆς περιττῆς τάξεως εἶναι τὸ συνεχὲς κλάσμα. Κάθε ἀνηγμένη λοιπὸν $\frac{\varrho_\nu}{o_\nu}$ *μᾶς δίδει τὴν τιμὴν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος μὲ προσέγγισιν τόσον μεγαλυτέραν, ὅσον τὸ ν μεγαλύτερον· καὶ ἡ προσέγγισις εἶναι κατ' ἔλλειψιν, ἂν ν περιττόν, καθ' ὑπεροχήν, ἂν ν ἄρτιον.*

β') Περιοδικὰ συνεχῆ κλάσματα.

217. Ὅταν εἰς ἓν ἀπεριόριστον συνεχὲς κλάσμα, πεπερασμένος ἀριθμὸς πηλίκων ἐπαναλαμβάνεται ἀπεριορίστως κατὰ ὡρισμένην τάξιν, τὸ κλάσμα λέγεται *περιοδικόν*. Τὸ σύνολον τῶν ἐπαναλαμβανομένων πηλίκων λέγεται *περίοδος* τοῦ κλάσματος. Διακρίνομεν καὶ ἐδῶ, ὅπως καὶ εἰς τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα, *ἁπλᾶ* καὶ *μεικτὰ* περιοδικὰ συνεχῆ κλάσματα.

218. **Θεώρημα 1ον.** *Κάθε περιοδικὸν συνεχὲς κλάσμα εἶμπορεῖ νὰ νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ἀπὸ τὰς ἀσυμμέτρους ῥίζας μιᾶς ἐξισώσεως β' βαθμοῦ μὲ συμμέτρους συντελεστάς.*

Καὶ ἂν μὲν τὸ περιοδικὸν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν, αἱ ῥίζαι τῆς ἀντιστοίχου β'—βαθμίου ἐξισώσεως εἶναι ἑτερόσημοι, ἂν δὲ μεικτόν, εἶναι ὁμόσημοι.

Ἀπόδειξις. 1) Τὸ ἁπλοῦν περιοδικόν :

$$x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4}}}}}}}$$
$$\vdots$$

εἶμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha)\qquad x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{x}}}}$$

Καὶ ἂν ὀνομασθοῦν $\frac{\Pi}{\Pi_1}$, $\frac{P}{P_1}$ αἱ δύο ἀνηγμέναι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ δύο ἀτελῆ πηλίκα α_3, α_4 εἰς τὴν σχέσιν (α), θὰ εἶναι :

$x=\frac{Px+\Pi}{P_1x+\Pi_1}$ δηλ. $P_1x^2-(P-\Pi_1)x-\Pi=0$, ἐξίσωσις, ποὺ ἔχει ἀρνητικὸν τὸν σταθερὸν ὅρον, ἐπομένως τὰς ῥίζας ἑτεροσήμους.

2) Ἂν τὸ περιοδικὸν x εἶναι μεικτόν, μὲ μὴ περιοδικὸν μέρος ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ ἀτελῆ πηλίκα: α_1, α_2, α_3, α_4 καὶ μὲ περίοδον ἀποτελουμένην ἀπὸ τὰ ἀτελῆ πηλίκα: α_5, α_6, α_7, α_8, θὰ εἶναι ἀπεριορίστως:

$$x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{\alpha_5+\cfrac{1}{\alpha_6+\cfrac{1}{\alpha_7+\cfrac{1}{\alpha_8+\cfrac{1}{\alpha_5}+\cdots}}}}}}}$$

Εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ γράψωμεν τὸ x ὑπὸ τὰς ἑξῆς δύο μορφάς:

$$(1)\quad x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{y}}}} \quad \text{καὶ} \quad x=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{\alpha_5+\cfrac{1}{\alpha_6+\cfrac{1}{\alpha_7+\cfrac{1}{\alpha_8+\cfrac{1}{y}}}}}}}} \quad (2)$$

Καὶ ἂν $\frac{\pi}{\pi_1}$, $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ εἶναι αἱ ἀνηγμέναι, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τ' ἀτελῆ πηλίκα α_3, α_4 τῆς μορφῆς (1) καὶ $\frac{\Pi}{\Pi_1}$, $\frac{P}{P_1}$ αἱ ἀνηγμέναι, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τ' ἀτελῆ πηλίκα α_7, α_8 τῆς μορφῆς (2), θὰ εἶναι:

$$x=\frac{\varrho y+\pi}{\varrho_1 y+\pi_1}=\frac{Py+\Pi}{P_1y+\Pi_1}, \text{ ἢ καί: } \quad y=\frac{\pi-\pi_1x}{\varrho_1x-\varrho}=\frac{\Pi-\Pi_1x}{P_1x-P}.$$

ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ συμμέτρους συντελεστάς: $(\pi_1P_1-\varrho_1\Pi_1)x^2+(\varrho\Pi_1-\pi P_1+\Pi\varrho_1-P\pi_1)x+(\pi P-\varrho\Pi)=0$. Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν της εἶναι : $\frac{\pi P-\varrho\Pi}{\pi_1 P_1-\varrho_1\Pi_1}$ (α)· εἶναι δὲ *θετικὸν* (ἑπομένως αἱ ῥίζαι *ὁμόσημοι*)· πραγματικῶς ἂν $\frac{\omega}{\omega_1}$ εἶναι ἡ ἀνηγμένη, ποὺ προηγεῖται τῆς $\frac{\pi}{\pi_1}$ καὶ $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ ἡ ἀνηγμένη, ποὺ προηγεῖται τῆς $\frac{\Pi}{\Pi_1}$, θὰ εἶναι : $\varrho=\pi\delta+\omega$, $\varrho_1=\pi_1\delta+\omega_1$, $P=\Pi\varepsilon+\Omega$, $P_1=\Pi_1\varepsilon+\Omega_1$· ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν (α) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\frac{\pi(\Pi\varepsilon+\Omega)-\Pi(\pi\delta+\omega)}{\pi_1(\Pi_1\varepsilon+\Omega_1)-\Pi_1(\pi_1\delta+\omega_1)}=\frac{\Pi\pi}{\Pi_1\pi_1}\cdot\frac{(\varepsilon-\delta)+\left(\frac{\Omega}{\Pi}-\frac{\omega}{\pi}\right)}{(\varepsilon-\delta)+\left(\frac{\Omega_1}{\Pi_1}-\frac{\omega_1}{\pi_1}\right)} \qquad (\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ $\varepsilon \lesseqgtr \delta$ (ἄλλως ἡ περίοδος θὰ ἤρχιζε μίαν τάξιν πρὶν) καὶ $|\varepsilon-\delta|\geq 1$, οἱ δὲ λόγοι $\frac{\omega}{\pi}$, $\frac{\omega_1}{\pi_1}$, $\frac{\Omega}{\Pi}$, $\frac{\Omega_1}{\Pi_1}$ εἶναι *γνήσια* κλάσματα (δηλ. <1), τὸ β′ κλάσμα τοῦ β′ μέλους τῆς (β) ἔχει τοὺς δύο ὅρους του ὁμοσήμους καὶ ἑπομένως τὸ β′ μέλος τῆς (β), δηλ. καὶ τὸ ἴσον του γινόμενον τῶν ῥιζῶν, εἶναι θετικὸν *καὶ αἱ ῥίζαι λοιπὸν ὁμόσημοι.*

Παρατήρησις. Ὑπεθέσαμεν, ὅτι πρὶν ἀπὸ τὴν α′ περίοδον ὑπάρχουν πηλίκα *περισσότερα ἀπὸ ἕν*· ἂν ὑπάρχῃ *μόνον ἕν*, θὰ εἶναι : $\frac{\varrho}{\varrho_1}=\frac{\alpha_1}{1}$, ἡ ἀνηγμένη $\frac{\pi}{\pi_1}$ γίνεται $\frac{1}{0}$ καὶ τὸ γινόμενον (α) τῶν ῥιζῶν καταντᾷ : $\frac{P-\alpha_1\Pi}{-\Pi_1}$, δηλ. ἢ θετικὸν ἢ ἀρνητικόν· *εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λοιπὸν αἱ ῥίζαι δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ὁμόσημοι.*

219. ***Θεώρημα*** *2ον (τοῦ* ***Lagrange*** *(Λαγκράνζ), ἀντίστροφον τοῦ 1ου) : Κάθε ἀσύμμετρος ῥίζα μιᾶς ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ μὲ συμμέτρους συντελεστὰς ἀναπτύσσεται εἰς περιοδικὸν συνεχὲς κλάσμα· ἁπλοῦν μὲν ἢ μεικτὸν μὲ ἓν μόνον πηλίκον πρὶν ἀπὸ τὴν περίοδον, ὅταν αἱ ῥίζαι της εἶναι ἑτερόσημοι· μεικτὸν δὲ (πλὴν τῆς προηγουμένης περιπτώσεως), ὅταν ὁμόσημοι.*

Τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου τὴν παραλείπομεν, ὡς πολὺ μακράν.

220. ***Παρατήρησις.*** Τὰ συνεχῆ κλάσματα χρησιμεύουν εἰς τὴν *ἀπροσδιόριστον ἀνάλυσιν* τῶν ἐξισώσεων, τὴν ὁποίαν θὰ πραγματευθῶμεν ἀργότερα.

᾿Ασκήσεις.

1) Κάθε ἀπεριόριστον συνεχὲς κλάσμα *γράφεται καὶ ὡς σειρὰ (συγκλίνουσα)*:

$$\text{δηλ.}\quad x = \frac{A}{A_1} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots} = \alpha_1 + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_3\sigma_4} - \dots$$

(ὅπου σ εἶναι οἱ παρονομασταὶ τῶν ἐφεξῆς ἀνηγμένων).

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν ἁπλοῦ περιοδικοῦ συνεχοῦς, ἡ *ἀρνητικὴ* ρίζα $x_2(|x_2|<1)$ τῆς ἀντιστοίχου β΄—βαθμίου ἐξισώσεως (ἡ *θετικὴ* $x_1(>1)$ δίδεται ἀπὸ τὸ ἁπλοῦν αὐτὸ) *δίδεται ἐπίσης ἀπὸ τὸ ἀντίθετον καὶ ἀντίστροφον τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ, ποὺ ἔχει τὰ ψηφία τῆς περιόδου κατ᾿ ἀντίστροφον τάξιν* (Galois *(Γκαλοά)*)· δηλ.:

$$x_1 = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3} + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{\alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_1 +}\ddots}}}\quad (x_1>1),\qquad x_2 = -\cfrac{1}{\alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k-1} + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_k} + \ddots}}}}\quad (|x_2|<1).$$

Π. χ. τῆς ἐξισώσεως: $3x^2-8x-7=0$, ἡ θετικὴ ρίζα εἶναι:

$$x_1 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1} + \ddots}}}}\quad (x_1>1),\ \text{ἡ δὲ ἀρνητική:}\quad x_2 = -\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3} + \ddots}}}}}\quad (|x_2|<1).$$

3) ***Συμμετρικαὶ περίοδοι.*** *Συμμετρικὴ* λέγεται ἡ περίοδος, ὅταν οἱ ὅροι της, ποὺ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸν α΄ καὶ τὸν τελευταῖον ὅρον της, εἶναι ἴσοι. Τότε, ἂν ἡ μία ρίζα τῆς ἀντιστοίχου β΄—βαθμίου ἐξισώ-

σεως εἶναι ἡ α, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι ἡ $-\frac{1}{\alpha}$· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν : $\alpha x^2+\beta x-\alpha=0$ (ὅπου α,β τυχόντες ἀκέραιοι).

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως : $7x^2-11x+3=0$: $x_1=\frac{11+\sqrt{37}}{14}$, $x_2=\frac{11-\sqrt{37}}{14}$ ἀναπτύσσονται εἰς τὰ *μεικτὰ* περιοδικά :

$$x_1=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1}}}}}\;\cdots,\qquad x_2=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}+}}}}}\;\cdots$$

5) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν α εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, ποὺ περιέχει μία τετρ. ρίζα $\sqrt{A}$, καὶ γίνῃ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α) $x^2-A=0$ ἡ ἀντικατάστασις : $x=\alpha+\frac{1}{x_1}$, αἱ ρίζαι τῆς παραγομένης ἀπὸ τὴν (α) ἐξισώσεως : $x_1^2-\frac{2\alpha}{A-\alpha^2}x_1-\frac{1}{A-\alpha^2}=0$ ἀναπτύσσονται εἰς περιοδικὰ κλάσματα καὶ ἑπομένως καὶ ἡ $\sqrt{A}$.

Π. χ. εἶναι : $\sqrt{35}=5+\sqrt{35}-5=5+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{35}+5}{10}}$,

$\frac{\sqrt{35}+5}{10}=1+\frac{\sqrt{35}-5}{10}=1+\frac{1}{\sqrt{35}+5}$, $\sqrt{35}+5=10+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{35}+5}{10}}$,

ἑπομένως :

$$\sqrt{35}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10}}}}\;\cdots$$

6) Νὰ τραποῦν εἰς συνεχῆ κλάσματα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$23x^2-49x+23=0.$$

(*Λύσις* : $x_1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}+}}}}$ $\quad x_2=\frac{1}{x_1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}+}}}}}$

.

.

.

.

7) Νὰ δειχθῇ, ὅτι :

$$\sqrt{1+\alpha^2}=\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+}}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{2\alpha+\alpha^2}=\alpha+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\alpha}+}}}$$

.

.

.

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα :

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}+}}}}}}}$$

σταματήσωμεν εἰς τὴν ἀνηγμένην ἀρτίας τάξεως $\frac{127}{48}$, τὸ καθ' ὑπεροχὴν λάθος εἶναι $<\frac{1}{48.223}=\frac{1}{10704}$.

.

.

9) *Συνεχῆ τῆς μορφῆς :* $\alpha + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_2}{\beta_2 + \alpha_3}}$

.

.

.

Νόμος σχηματισμοῦ τῶν διαδοχικῶν ἀνηγμένων :

1^η: $\frac{\alpha}{1}$, 2^α : $\frac{\alpha\beta_1+\alpha_1}{\beta_1}$, 3^η : $\frac{\alpha\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha\alpha_2}{\beta_1\beta_2+\alpha_2}$ κτλ.

Ἐπίσης εἶναι διὰ 3 ἐφεξῆς ἀνηγμένας

$\frac{\Pi_{\nu+1}}{P_{\nu+1}}$, $\frac{\Pi_\nu}{P_\nu}$, $\frac{\Pi_{\nu-1}}{P_{\nu-1}}$: $\Pi_{\nu+1} = \Pi_\nu\,\beta_{\nu+1} + \Pi_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}$,

$P_{\nu+1} = P_\nu\,\beta_{\nu+1} + P_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}$. Ὁμοίως ἔχομεν : $\Pi_{\nu+1}P_\nu - P_{\nu+1}\Pi_\nu =$ $= (-1)^\nu \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu$ καί : συνεχὲς = μὲ τὴν σειράν :

$\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha_1}{P_0P_1} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{P_1P_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{P_2P_3} - \ldots$ Ἂν τὰ α γίνουν ὅλα = 1, ἐπανευρίσκομεν τὰ προηγούμενα ἁπλούστερα συνεχῆ. Καθὼς τὰ συνεχῆ τρέπονται εἰς σειράς, καὶ αἱ σειραὶ τρέπονται εἰς συνεχῆ. Ἀποδεικνύεται π. χ. ὅτι :

(α) $$\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4} + \ldots = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_1^2}{(\alpha_2-\alpha_1) + \cfrac{\alpha_2^2}{(\alpha_3-\alpha_2) + \cfrac{\alpha_3^2}{(\alpha_4-\alpha_3)+}}}}$$

.

.

.

καὶ ἑπομένως :

(β) $$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \ldots = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\beta_1} + \cfrac{\cfrac{1}{\beta_1^2}}{\left(\cfrac{1}{\beta_2} - \cfrac{1}{\beta_1}\right) + \cfrac{\cfrac{1}{\beta_2^2}}{\left(\cfrac{1}{\beta_3} - \cfrac{1}{\beta_2}\right) + \cfrac{\cfrac{1}{\beta_3^2}}{\left(\cfrac{1}{\beta_4} - \cfrac{1}{\beta_3}\right)+}}}}$$

.

.

.

Ἐπίσης δὲ καί: (γ)

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}+\ldots=\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{\alpha}{(\beta-1)+\cfrac{\beta}{(\gamma-1)+\cfrac{\gamma}{(\delta-1)+\ldots}}}}$$

Παραδείγματα. Α΄) Εἰς τὸν τύπον (α):

1) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\ldots}}}}}$$

2) $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}}$$ (τύπος τοῦ *Μπράουγκερ*).

Β΄) Εἰς τὸν τύπον (β):

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{(1+x)-\cfrac{x}{(1+x)-\cfrac{x}{(1+x)-\ldots}}}}$$

Γ΄) Εἰς τὸν τύπον (γ):

1) $$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ldots}}}}}$$

καὶ ἑπομένως : $e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}$

10) Ἓν κλάσμα τῆς μορφῆς : $\cfrac{\alpha_1+\cfrac{\alpha_2+\cfrac{\alpha_3+\cdots}{\beta_3}}{\beta_2}}{\beta_1}$ λέγεται συνεχὲς *ἀνωφερὲς* ἢ *ἀνιόν*. (Τ' ἄλλα λέγονται *κατωφερῆ* ἢ *κατιόντα*). Τὴν παραγωγήν των ἐξηγεῖ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

$\frac{47}{48}=\cfrac{7+\cfrac{5}{6}}{8}=\cfrac{7+\cfrac{2+\cfrac{1}{2}}{3}}{8}$. Εἰμποροῦμεν δὲ νὰ θεωρήσωμεν καὶ ἀνιόντα συνεχῆ *ἀπεριόριστα*, τὴν θεωρίαν των ὅμως τὴν παραλείπομεν.

11) Αἱ ἀνηγμέναι τοῦ συνεχοῦς : $\cfrac{\alpha_1}{\beta_1-\cfrac{\alpha_2}{\beta_2-\cfrac{\alpha_3}{\beta_3-\cdots}}}$, ὅπου α, β θετικὰ καὶ $\alpha_\varrho \geq \beta_\varrho+1$, εἶναι ὅλαι θετικαί, <1 καὶ αὔξουσαι.

12) Ἂν $\beta_\varrho=\alpha_\varrho+1$, θὰ εἶναι : $\frac{A_\nu}{B_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}{1+\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$.

13) *Μία ἀνηγμένη ἑνὸς συνεχοῦς, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, πλησιάζει πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ συνεχοῦς περισσότερον ἀπὸ κάθε ἄλλο κλάσμα μὲ ὅρους ἁπλουστέρους* (Euler (Ὄϊλερ)).

14) *Ἂν τὰ α εἶναι ὅλα θετικά, τὰ δὲ β ὅλα ὁμόσημα, τὸ συνεχὲς κλάσμα συγκλίνει μόνον, ὅταν μία τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰς δύο σειράς :*

$$\beta_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\beta_4\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_4}+\beta_6\frac{\alpha_1\alpha_3\alpha_5}{\alpha_2\alpha_4\alpha_6}+\ldots$$

$$\beta_3 . \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \beta_5 . \frac{\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3\alpha_5} + \beta_7 . \frac{\alpha_2\alpha_4\alpha_6}{\alpha_3\alpha_5\alpha_7} + \dots$$

εἶναι ἀποκλίνουσα· εἶναι δὲ ἀόριστον, ἂν καὶ αἱ δύο αὐταὶ σειραὶ συγκλίνουν (Seidel *(Ζάϊντελ)*).

15) Τὸ συνεχὲς κλάσμα μὲ στοιχεῖα θετικὰ συγκλίνει, ὅταν: $\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\left(\frac{\beta_{\nu+1}.\beta_\nu}{\alpha_{\nu+1}}\right)>0$· ἢ ὅταν ἡ σειρά: $\frac{A_{\nu+1}}{1+A_{\nu+1}} + \frac{A_{\nu+2}}{1+A_{\nu+2}} + \dots$ ἀποκλίνῃ $\left(A_{\nu+1} \equiv \frac{\beta_{\nu+1}\beta_\nu}{\alpha_{\nu+1}}\right)$ (Novi *(Νόβι)*).

16) Τὸ συνεχὲς $\cfrac{1}{\alpha_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 - \dots}}}$ ὅπου τὰ α θετικά, συγκλίνει, ἂν, ἀπὸ μίαν τιμὴν τοῦ ν καὶ πέραν, ἔχομεν διαρκῶς: $\alpha_\nu \geq 2$.

Ἂν τὸ συνεχές, ποὺ ἔχει ἀτελῆ πηλίκα: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots$ τὸ γράψωμεν χάριν συντομίας: $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots\right)$, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους:

17) $\sqrt{\alpha^2+\beta} = \alpha + \left(\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha}, \dots\right)$. 18) $\left(\frac{1}{1}, \frac{1^2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{3^2}{1}, \dots\right) = l2$.

19) $\left(\frac{1}{1}, \frac{-x}{1}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{5}, \frac{x}{2}, \dots\right) = e^x$.

20) $\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1.1}{1.2}.x}{1}, \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.x}{1}, \frac{\frac{2.2}{3.4}x}{1}, \dots\right) = l(1+x)$.

21) $\left(\frac{x}{1}, \frac{-x^2}{3}, \frac{-x^2}{5}, -\dots\right) = \text{εφ}x$, $\left(\frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \dots\right) = \text{εφh}x$.

22) $\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7}, \dots\right) = 1$.

23) Τῆς ἐξισώσεως: $x^2+\alpha x=\beta$ αἱ δύο ῥίζαι εἶναι:

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \dots\right), \quad x_2 = -\alpha + \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \dots\right).$$

ΜΕΡΟΣ Δ'.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

α') Ὁρισμοί.

221. ***Πολυώνυμον ἑνὸς μεταβλητοῦ.*** *Ἀκέραιον* πολυώνυμον ἑνὸς μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ x λέγεται κάθε παράστασις τῆς μορφῆς :

$A_\mu x^\mu + A_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + A_1 x + A_0$, ὅπου τὰ A εἶναι ἀριθμοὶ ὡρισμένοι (ἀνεξάρτητοι τοῦ x) καὶ λέγονται *συντελεσταὶ* τῶν ὅρων, ὁ δὲ μ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός. Τὸ πολυώνυμον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1} x + A_\mu$ (δηλαδὴ τώρα ὁ δείκτης τοῦ A καὶ ὁ ἐκθέτης τοῦ x εἰς τὸν ἴδιον ὅρον δὲν εἶναι πλέον *ἴσοι, ἀλλ'* ἔχουν *ἄθροισμα τὸν μ*). Χάριν συντομίας σημειώνομεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ μὲ τὸ σύμβολον: $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\mu} A_\nu x^\nu$ ἢ καὶ Π(x).— Ὁ ὅρος $A_\mu x^\mu$, ποὺ ἔχει τὸν *μεγαλύτερον* ἐκθέτην, λέγεται *πρῶτος* ὅρος τοῦ πολυωνύμου, ὁ δὲ ἔχων τὸν *μικρότερον* λέγεται *τελευταῖος*· (ἂν εἶναι $A_0 = A_1 = \ldots = A_k = 0$, τελευταῖος ὅρος εἶναι ὁ $A_{k+1} . x^{k+1}$). — *Βαθμὸς* τοῦ πολυωνύμου λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου ὅρου του. — Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x τὸ πολυώνυμον ἔχει ὡρισμένην τιμὴν καὶ ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ x ἀλλάξῃ, ἀλλάσσει καὶ ἡ τοῦ πολυωνύμου. Εἶναι λοιπὸν τὸ πολυώνυμον *συνάρτησις* τοῦ x, ἰδιαιτέρως δὲ λέγεται συνάρτησις *ἀλγεβρικὴ ἀκεραία* τοῦ x.— Τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, ὅταν τὸ β' δὲν διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ α', λέγεται συνάρτησις (ἀλγεβρικὴ) *ρητὴ* τοῦ x :

$$P(x) \equiv \frac{A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu}{B_0 x^\nu + B_1 x^{\nu-1} + \ldots + B_\nu}.$$

Κάθε τιμὴ τοῦ x, ποὺ μηδενίζει τὸ πολυώνυμον, λέγεται *ρίζα* τοῦ πολυωνύμου. (Π. χ. τοῦ πολυωνύμου : x^3+4x^2+x-6 ρίζαι εἶναι αἱ : $1, -2, -3$, τοῦ x^4-1 αἱ $1, -1, i, -i$· κτλ.)

222. *Ἀλγεβρικὴ* ἐξίσωσις λέγεται ἐκείνη, ποὺ σχηματίζεται, ἂν ἐξισώσωμεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ τὸ 0, δηλ.:

$$A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_\mu=0.$$

Ἐξίσωσις δέ, τῆς ὁποίας τὸ β′ μέλος$=0$, τὸ δὲ α′ δὲν εἶναι, *οὔτε εἰμπορεῖ* νὰ γίνῃ ἀκέραιον πολυώνυμον, λέγεται *ὑπερβατική*.

223. ***Πολυώνυμον δύο ἢ πολλῶν μεταβλητῶν.*** — *Ἀκέραιον* πολυώνυμον δύο μεταβλητῶν x καὶ y λέγεται κάθε πολυώνυμον τῆς μορφῆς : $\Pi(x,y)=\sum Ax^\mu y^\nu$, ὅπου A ἀριθμοὶ ὡρισμένοι (ἀνεξάρτητοι τῶν x,y) καὶ μ,ν ἀκέραιοι θετικοὶ ἢ καὶ $=0$. *Βαθμὸς* τοῦ πολυωνύμου λέγεται *τὸ μεγαλύτερον* ἄθροισμα $\mu+\nu$ εἰς τοὺς ὅρους του, *πρῶτος* ὅρος του ὁ ἔχων τὸ *μεγαλύτερον* αὐτὸ ἄθροισμα $\mu+\nu$, *τελευταῖος* δὲ ὁ ἔχων τὸ *μικρότερον* $\mu+\nu$. *Ρητὸν* εἶναι τὸ πολυώνυμον, ὅταν εἶναι πηλίκον δύο ἀκεραίων : $P(x,y)\equiv\dfrac{\sum Ax^\mu y^\nu}{\sum Bx^\pi y^\varrho}$. Ὁμοίως ὁρίζονται γενικῶς καὶ τ᾽ ἀκέραια καὶ τὰ ρητὰ πολυώνυμα *πολλῶν* μεταβλητῶν.

β′) Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν πολυωνύμων μὲ συντελεστὰς καὶ ἄγνωστον τυχόντας (μιγαδικοὺς ἐν γένει) ἀριθμούς.

224. ***Παράγωγοι.*** Ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον :

$$\Pi(x)\equiv A_\mu x^\mu+A_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+A_1x+A_0$$

θεωρήσωμεν, ὅτι ἔχομεν δώσει εἰς τὸ x μίαν ὡρισμένην τιμὴν καὶ κατόπιν αὐξήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν κατὰ ε (θετικὸν ἢ ἀρνητικόν), ἡ *νέα* τιμὴ τοῦ πολυωνύμου : $\Pi(x+\varepsilon)$, ἂν ἐλαττωθῇ κατὰ τὴν παλαιὰν $\Pi(x)$, θά μας δώσῃ τὴν αὔξησιν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τοῦ πολυωνύμου (τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν αὔξησιν ε τοῦ x)· θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}A_\nu(x+\varepsilon)^\nu-\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}A_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}A_\nu\left[(x+\varepsilon)^\nu-x^\nu\right], \text{ ἢ}$$

$$\text{καί : }\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}A_\nu\left[\nu x^{\nu-1}.\varepsilon+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}x^{\nu-2}.\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^\nu\right]$$

$$\text{ἢ ἀκόμη : }\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\varepsilon.\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}\nu.A_\nu x^{\nu-1}+\frac{\varepsilon^2}{2!}.\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}\nu(\nu-1)A_\nu x^{\nu-2}+$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{3!}\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}\nu(\nu-1)(\nu-2)A_\nu x^{\nu-3}+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\mu!A_\mu.$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ ε εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι καὶ αὐτοὶ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x καὶ ὀνομάζονται *παράγωγα* (πολυώνυμα) ἢ *παράγωγοι* (συναρτήσεις) τοῦ πρώτου· καὶ ὁ μὲν συντελεστὴς τοῦ ε λέγεται *πρώτη* παράγωγος καὶ σημειώνεται συμβολικῶς : $\Pi'(x)$, ὁ τοῦ $\frac{\varepsilon^2}{1.2}$, *δευτέρα* παράγωγος : $\Pi''(x)$ κτλ. ὁ συντελεστὴς τέλος τοῦ $\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}$, *μυοστὴ* παράγωγος : $\Pi^{(\mu)}(x)$. Ἀπὸ τὴν κατασκευὴν δὲ τῶν διαφόρων παραγώγων τοῦ πολυωνύμου, ποὺ μᾶς την δίδουν αἱ ἰσότητες :

$$\Pi'(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}\nu\,.\,A_\nu\,x^{\nu-1}\equiv\mu A_\mu\,x^{\mu-1}+(\mu-1)A_{\mu-1}x^{\mu-2}+\ldots+A_1,$$

$$\Pi''(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu}\nu(\nu-1)A_\nu\,x^{\nu-2}\equiv\mu(\mu-1)A_\mu\,x^{\mu-2}+(\mu-1)(\mu-2)A_{\mu-1}x^{\mu-3}+$$
$$+\ldots+2A_2,$$

. . . . ,

βλέπομεν, ὅτι *κάθε παράγωγον πολυώνυμον παράγεται ἀπὸ τὸ προηγούμενόν του, ἂν πολλαπλασιασθῇ κάθε ὅρος του μὲ τὸν ἐκθέτην τοῦ x εἰς τὸν ὅρον αὐτὸν καὶ ἔπειτα ἀφαιρεθῇ μία μονὰς ἀπὸ τὸν ἐκθέτην.*

Ἑπομένως *ὁ βαθμὸς τῶν διαδοχικῶν παραγώγων ἐλαττώνεται διαρκῶς κατὰ μίαν μονάδα*· ὥστε, ἂν τοῦ $\Pi(x)$ ὁ βαθμὸς εἶναι μ, τοῦ $\Pi'(x)$ εἶναι μ—1, τοῦ $\Pi''(x)$, μ—2 κτλ. καὶ τέλος τοῦ $\Pi^{(\mu)}(x)$ εἶναι 0· δηλ. εἶναι τὸ $\Pi^{(\mu)}(x)$ *σταθερὸς ἀριθμός, ἀνεξάρτητος τοῦ x* (ὁ $\mu!\,A_\mu$)· καὶ ἂν θελήσωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς αὐτὸν τὸν προηγούμενον κανόνα καὶ τὸν γράψωμεν : $\mu!A_\mu\,x^0$, εὑρίσκομεν $\Pi^{(\mu+1)}(x)=0.\mu!A_\mu x^{0-1}$, δηλ. 0 (καθὼς καὶ ἀπ᾽ εὐθείας εἶναι φανερόν, ἀφοῦ τὸ $\mu!A_\mu$ δὲν αὐξάνει διόλου). Ὥστε :

Κάθε πολυώνυμον Π(x) βαθμοῦ μ ἔχει μ διαδοχικὰς παραγώγους : $\Pi'(x)$, $\Pi''(x)$, . . . , $\Pi^{(\mu)}(x)$, βαθμῶν ἀντιστοίχως : μ—1, μ—2,.....,0· ὥστε ἡ τελευταία παράγωγος εἶναι σταθερὰ ποσότης καὶ ὅλαι αἱ ἑπόμεναι $\Pi^{(\mu+1)}(x)$,.... εἶναι = 0.

Ἡ αὔξησις λοιπὸν τοῦ $\Pi(x)$ γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\varepsilon\Pi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\Pi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\Pi^{(\mu)}(x). \qquad (\alpha)$$

225. ***Παράγουσαι.*** Εἰς τὴν σειρὰν τῶν πολυωνύμων : $\Pi(x)$, $\Pi'(x)$, $\Pi''(x)$, . . . , $\Pi^{(\mu)}(x)$ ὠνομάσαμεν καθὲν *παράγωγον* τοῦ *προηγουμένου*

του (καὶ τὸ Π(x) εἶναι προφανῶς παράγωγον ἄλλου, τοῦ ἑξῆς :

$$\Pi_1(x) \equiv A_\mu \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + A_{\mu-1}\frac{x^\mu}{\mu} + \ldots + A_0 x + B.$$

Ἀντιστρόφως, καθὲν ἀπὸ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ λέγεται *παράγουσα* (συνάρτησις) τοῦ *ἑπομένου* του : τὸ Π(x) εἶναι παράγουσα τοῦ $\Pi'(x)$, τὸ $\Pi'(x)$, τοῦ $\Pi''(x)$ κτλ. καὶ τὸ $\Pi^{(\mu)}(x)$ τοῦ $\Pi^{(\mu+1)}(x)$, δηλ. τοῦ 0. Ὡς πρὸς δὲ τὸ τυχὸν ἀπὸ αὐτά, τὸ $\Pi^{(\varrho)}(x)$ π. χ. ($\varrho \leq \mu$), τὸ Π(x) λέγεται *παράγουσα τῆς τάξεως ρ*.

226. Καθὼς αἱ διαδοχικαὶ παράγωγοι τοῦ x^μ εἶναι $\mu x_{\mu-1}$, $\mu(\mu-1)x^{\mu-2},\ldots$, *καὶ αἱ διαδοχικαὶ παράγωγοι τοῦ* $(x-\alpha)^\mu$ *εἶναι* $\mu(x-\alpha)^{\mu-1}$, $\mu(\mu-1)(x-\alpha)^{\mu-2},\ldots$ Διότι ἔχομεν :

$$(x-\alpha+\varepsilon)^\mu - (x-\alpha)^\mu = \varepsilon\mu(x-\alpha)^{\mu-1} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\mu(\mu-1)(x-\alpha)^{\mu-2} +$$

$$+ \ldots + \frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\mu!$$

227. *Ἄλλη ἰδιότης τῆς παραγώγου.* Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (α) ἔπεται :

$$\frac{\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)}{\varepsilon} = \Pi'(x) + \frac{\varepsilon}{2!}\Pi''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{\mu-1}}{\mu!}\Pi^{(\mu)}(x)\cdot$$

ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ αὔξησις ε γίνεται *ἀπειροστή*, δηλ. ὅτι τείνει πρὸς τὸ 0, θὰ ἔχωμεν :

$$\text{ορ}\left[\frac{\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)}{\varepsilon}\right] = \text{ορ}\left[\Pi'(x) + \frac{\varepsilon}{2!}\Pi''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^{\mu-1}}{\mu!}\Pi^{(\mu)}(x)\right],$$

$$\text{δηλ.}\quad \text{ορ}\left[\frac{\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)}{\varepsilon}\right] = \Pi'(x)\cdot \text{ ὥστε :}$$

Ἡ παράγωγος εἶναι ἴση μὲ τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου τῆς αὐξήσεως τοῦ πολυωνύμου διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ x, ὅταν ἡ αὔξησις τοῦ x τείνῃ πρὸς τὸ 0.

228. *Παράγωγος ἀθροίσματος.* Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πολλῶν πολυωνύμων εἶναι καὶ αὐτὸ πολυώνυμον :

$$\Pi_1(x) + \Pi_2(x) + \ldots + \Pi_\nu(x) \equiv \Pi(x)\cdot$$

θὰ δείξω, ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος πολυωνύμων εἶναι ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν προσθετέων πολυωνύμων, δηλ. :

$$\Pi'(x) = \Pi'_1(x) + \Pi'_2(x) + \ldots + \Pi'_\nu(x).$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν : $\Pi(x+\varepsilon) - \Pi(x) =$

$= [\Pi_1(x+\varepsilon) + \ldots + \Pi_\nu(x+\varepsilon)] - [\Pi_1(x) + \ldots + \Pi_\nu(x)]$, ἢ καί :

$$\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=[\Pi_1(x+\varepsilon)-\Pi_1(x)]+[\Pi_2(x+\varepsilon)-\Pi_2(x)]+\ldots+$$
$$+[\Pi_\nu(x+\varepsilon)-\Pi_\nu(x)]\cdot$$

καὶ ἑπομένως : $\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=$

$$=\left[\varepsilon\Pi'_1(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\vartheta}{\vartheta!}\Pi_1^{(\vartheta)}(x)\right]+\left[\varepsilon\Pi'_2(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\varrho}{\varrho!}\Pi_2^{(\varrho)}(x)\right]+$$
$$+\ldots+\left[\varepsilon\Pi'_\nu(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\sigma}{\sigma!}\Pi_\nu^{(\sigma)}(x)\right]$$

(ὅπου $\vartheta, \varrho, \ldots, \sigma$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ τῶν
$\Pi_1(x), \Pi_2(x), \ldots, \Pi_\nu(x)$).

Ὥστε συντελεστὴς τοῦ ε εἰς τὴν αὔξησιν $\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)$, δηλ. *παράγωγος* τοῦ *ἀθροίσματος* $\Pi(x)$, εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$\Pi'_1(x)+\Pi'_2(x)+\ldots+\Pi'_\nu(x)$, δηλ. *τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων* τῶν $\Pi_1(x), \Pi_2(x), \ldots$

Καὶ γενικῶς ἔχομεν προφανῶς (διὰ τὰς παραγώγους τῆς λ τάξεως):

$$\Pi^{(\lambda)}(x)=\Pi_1^{(\lambda)}(x)+\Pi_2^{(\lambda)}(x)+\ldots+\Pi_\nu^{(\lambda)}(x).$$

229. ***Παράγωγος γινομένου.*** Ἂς θεωρήσωμεν *πρῶτα* τὸ γινόμενον $\Pi(x)$ *δύο* πολυωνύμων $\Pi_1(x)$ καὶ $\Pi_2(x)$:

$$\Pi(x)=\Pi_1(x).\Pi_2(x).$$

Θὰ δείξω, ὅτι : $\Pi'(x)=\Pi_1(x).\Pi'_2(x)+\Pi'_1(x).\Pi_2(x)$,

δηλ. *ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο γινομένων, ποὺ εὑρίσκω, ἂν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων θέσω διαδοχικῶς ἀντὶ ἑκάστου πολυωνύμου τὴν παράγωγόν του.*

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν :

$$\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\Pi_1(x+\varepsilon).\Pi_2(x+\varepsilon)-\Pi_1(x)\Pi_2(x)\cdot$$

εἶναι ὅμως : $\Pi_1(x+\varepsilon)=\Pi_1(x)+\varepsilon\Pi'_1(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\Pi_1^{(\mu)}(x)$,

$$\Pi_2(x+\varepsilon)=\Pi_2(x)+\varepsilon\Pi'_2(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}\Pi_2^{(\nu)}(x)\cdot$$

ἑπομένως : $\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=$

$$(\Pi_1(x)+\varepsilon\Pi'_1(x)+\ldots).(\Pi_2(x)+\varepsilon\Pi'_2(x)+\ldots)-\Pi_1(x)\Pi_2(x),$$

ἢ καί : $\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=\varepsilon[\Pi_1(x)\Pi'_2(x)+\Pi'_1(x)\Pi_2(x)]+\frac{\varepsilon^2}{2!}()\ldots+\ldots\cdot$

ὥστε εἶναι : $\Pi'(x)=[\Pi_1(x)\ \Pi_2(x)]'=\Pi_1(x)\Pi'_2(x)+\Pi'_1(x)\Pi_2(x)$.

Ἂν τώρα θεωρήσωμεν γενικῶς τὸ γινόμενον *πολλῶν* πολυωνύμων,

$$\Pi(x)=\Pi_1(x).\Pi_2(x)\ldots\Pi_\nu(x),$$

θὰ δείξω, ὅτι:

$$\Pi'(x)=\Pi'_1(x).\Pi_2(x)\ldots\Pi_\nu(x)+\Pi_1(x).\Pi'_2(x).\Pi_3(x)\ldots\Pi_\nu(x)+\ldots+$$
$$+\Pi_1(x).\Pi_2(x)\ldots\Pi'_\nu(x),$$

δηλ. ἰσχύει πάλιν ὁ ἴδιος κανών: *ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου εἶναι ἄθροισμα τῶν ν γινομένων, ποὺ εὑρίσκω, ἂν εἰς τὸ γινόμενον θέσω διαδοχικῶς ἀντὶ ἑκάστου παράγοντος τὴν παράγωγόν του.*

Πραγματικῶς, διὰ $\nu=3$ π. χ. ἔχω:

$$\Pi(x)=\Pi_1(x).\Pi_2(x).\Pi_3(x)=[\Pi_1(x).\Pi_2(x)].\Pi_3(x), \text{ ἑπομένως :}$$
$$\Pi'(x)=[\Pi_1(x)\Pi_2(x)]\Pi'_3(x)+[\Pi_1(x)\Pi_2(x)]'.\Pi_3(x)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $[\Pi_1(x)\Pi_2(x)]'=\Pi_1(x)\Pi'_2(x)+\Pi'_1(x)\Pi_2(x)$, ἕπεται:

$$\Pi'(x)=\Pi'_1(x)\Pi_2(x)\Pi_3(x)+\Pi_1(x).\Pi'_2(x).\Pi_3(x)+\Pi_1(x).\Pi_2(x)\Pi'_3(x).$$

Ὁμοίως δὲ γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ κάθε ν.

230. ***Παράγωγος πηλίκου.*** Ἂν διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου, τὸ πηλίκον των *δὲν εἶναι πλέον* (ἐν γένει) *ἀκέραιον* πολυώνυμον, ἀλλὰ *ῥητὴ* (ἀλγεβρικὴ) συνάρτησις. Θὰ δείξω τώρα, ὅτι, ἂν ἔχω:

$$P(x)=\frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)}, \text{ θὰ εἶναι : } P'(x)=\frac{\Pi_2(x)\Pi'_1(x)-\Pi_1(x)\Pi'_2(x)}{[\Pi_2(x)]^2}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν: $P(x).\Pi_2(x)=\Pi_1(x)$, ἑπομένως:

$$P'(x).\Pi_2(x)+P(x)\Pi'_2(x)=\Pi'_1(x),$$

$$\text{ἢ καὶ } P'(x)=\frac{\Pi'_1(x)-P(x)\Pi'_2(x)}{\Pi_2(x)}=\frac{\Pi'_1(x)-\frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)}\Pi'_2(x)}{\Pi_2(x)}=$$

$$=\frac{\Pi_2(x).\Pi'_1(x)-\Pi_1(x).\Pi'_2(x)}{[\Pi_2(x)]^2}.$$

231. ***Ἰδιότης τῆς συνεχείας.***—*Τὸ πολυώνυμον εἶναι «συνεχὴς» συνάρτησις τοῦ* x· *δηλαδή: Ἂν μᾶς δοθῇ εἷς ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρὸς δ, εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ εὕρωμεν μεταβολὴν τοῦ* x *τόσον μικράν, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου νὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον ἀπὸ τὸ δ.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ x αὐξήσῃ κατὰ ε, θὰ ἔχωμεν:

$$\Pi(x+\varepsilon)=A_\mu(x+\varepsilon)^\mu+A_{\mu-1}(x+\varepsilon)^{\mu-1}+\ldots+A_1(x+\varepsilon)+A_0,$$
$$\text{ἑπομένως : } \Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)=$$
$$A_\mu[(x+\varepsilon)^\mu-x^\mu]+A_{\mu-1}[(x+\varepsilon)^{\mu-1}-x^{\mu-1}]+\ldots+A_1[x+\varepsilon)-x]\cdot$$

ἡ ἰσότης αὐτὴ μᾶς λέγει, ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ πολυωνύμου (ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεταβολὴν ε τοῦ x) εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν τῶν μ ὅρων του (ὁ τελευταῖος A_μ μένει ὁ ἴδιος)· ἐπειδὴ δὲ τὸ μέτρον ἑνὸς ἀθροίσματος δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων του, συμπεραίνομεν, ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ τὸ τὸ μέτρον τῆς μεταβολῆς $\Pi(x+\varepsilon)-\Pi(x)$ μικρότερον ἀπὸ τὸ δ, ἀρκεῖ τὸ μέτρον τῆς μεταβολῆς κάθε ὅρου νὰ γίνῃ μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{\delta}{\mu}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μεταβολὴ τοῦ τυχόντος ὅρου $A_\nu x^\nu$, δηλ. ἡ διαφορά : $A_\nu [(x+\varepsilon)^\nu - x^\nu]$ ἔχει μέτρον τό : $|A_\nu| . |[x+\varepsilon)^\nu - x^\nu|$, διὰ νὰ γίνῃ αὐτὸ μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{\delta}{\mu}$, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ :

$|(x+\varepsilon)^\nu - x^\nu| < \frac{\delta}{\mu . N}$, ὅπου N εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ μέτρα $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_\mu|$· αὐτὸ δὲ κατορθώνεται (§ 172), ἂν λάβωμεν $\varepsilon < \frac{\delta}{\mu^2 N . A^{\mu-1}}$, ὅπου A ἀκέραιος > ἀπὸ τὸ μέτρον τοῦ x.

γ') Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων μὲ συντελεστὰς καὶ ἄγνωστον πραγματικούς.

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου, καθὼς καὶ ὁ ἄγνωστος x, εἰμποροῦν νὰ εἶναι τυχόντες *μιγαδικοὶ* ἀριθμοί. Ἂν ἰδιαιτέρως τοὺς θεωρήσωμεν ὅλους *πραγματικούς*, εὑρίσκομεν τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

232. ***Θεώρημα 1ον.*** *Ὅταν διὰ μίαν τιμὴν α τοῦ x, ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τοῦ πολυωνύμου $\Pi'(\alpha)$ εἶναι θετική, τὸ πολυώνυμον αὐξάνει ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν* $\Pi(\alpha)$, *καθόσον τὸ x αὐξάνει μέχρι τινὸς ἀπὸ τὴν τιμὴν α· ἐλαττώνεται* δέ, *ἂν ἐλαττώνεται τὸ x μέχρι τινός·* δηλ. ἔχει *ἀλγεβρικὴν* αὔξησιν ὁμόσημο *μὲ τὸ x. Τὸ ἀντίστροφον δὲ συμβαίνει, δηλ. τὸ Π(x) αὐξάνει* ἑτεροσήμως *πρὸς τὸ x,* ἂν $\Pi'(\alpha) < 0$.

Ἀπόδειξις. Ἂν πρῶτα εἶναι $\Pi'(\alpha) > 0$ καὶ $\frac{1}{\mu} < \Pi'(\alpha)$, ἡ διαφορὰ δ τοῦ $\frac{\Pi(\alpha+\varepsilon)-\Pi(\alpha)}{\varepsilon}$ ἀπὸ τὸ ὅριον του. $\Pi'(\alpha)$ (§ 227) εἰμπορεῖ διὰ *καταλλήλως μικρὸν ε,* νὰ γίνῃ καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{\mu}$·

τότε ὅμως ἡ ἰσότης : $\frac{\Pi(\alpha+\varepsilon)-\Pi(\alpha)}{\varepsilon} = \Pi'(\alpha)+\delta$ ἢ

$\Pi(\alpha+\varepsilon)-\Pi(\alpha)=\varepsilon\Pi'(\alpha)+\varepsilon\delta$ μᾶς λέγει, ὅτι ἡ διαφορὰ $\Pi(\alpha+\varepsilon)-\Pi(\alpha)$ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸ ε.

Ἂν πάλιν $\Pi'(\alpha)<0$, ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον.

233. ***Θεώρημα 2ον.*** *Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ ἔχουν μέτρον μεγαλύτερον ἀπὸ ἕνα κατάλληλον θετικὸν ἀριθμόν, ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου εἶναι ὁμόσημος μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πρώτου ὅρου του.*

Ἀπόδειξις. Γράφομεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον ὡς ἑξῆς :

$$\Pi(x)=A_\mu x^\mu \cdot \left[1+\frac{A_{\mu-1}}{A_\mu}\frac{1}{x}+\frac{A_{\mu-2}}{A_\mu}\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{A_0}{A_\mu}\frac{1}{x^\mu}\right]\cdot \quad (\alpha)$$

ἂν δὲ ἐκλέξωμεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν M, μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ μέτρα ὅλων τῶν συντελεστῶν τῆς ἀγκύλης, δηλ. τὰ $\left|\frac{A_{\mu-1}}{A_\mu}\right|, \left|\frac{A_{\mu-2}}{A_\mu}\right|,\ldots$ καὶ ὀνομάσωμεν ϱ τὸ μέτρον τοῦ x, οἱ ὅροι τῆς προηγουμένης ἀγκύλης, πλὴν τοῦ 1, ἔχουν ἄθροισμα, καὶ ἂν ἀκόμη τοὺς λάβωμεν ὅλους *θετικούς*, μικρότερον ἀπὸ τὸ ἑξῆς: $M\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}+\ \ldots+\frac{1}{\varrho^\mu}\right)$, δηλ. ἀπὸ τὸ $M\left(\dfrac{1-\frac{1}{\varrho^\mu}}{\varrho-1}\right)$, ὥστε (διὰ $\varrho>1$) $<$ καὶ ἀπὸ τὸ $M.\frac{1}{\varrho-1}\cdot$ ἂν λοιπὸν λάβωμεν $\varrho>1+M$, τὸ $M.\frac{1}{\varrho-1}$ θὰ γίνῃ <1 καὶ ἡ ἀγκύλη θὰ γίνῃ πάντως *θετικὸς* ἀριθμός· ἐπομένως τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ θὰ ἔχῃ διὰ $|x|$ ἴσον *μὲ τὸ ϱ αὐτὸ* τιμὴν ὁμόσημον μὲ τὸν ἄλλον παράγοντά του (εἰς τὴν ἰσότητα (α) τὸν $A_\mu x^\mu$. Προφανῶς δὲ θὰ ἰσχύῃ τὸ ἴδιον καὶ διὰ κάθε ἄλλην τιμὴν τοῦ x, ποὺ ἔχει μέτρον $>$ ἀπὸ τὸ ϱ.

234. ***Θεώρημα 3ον.*** *Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ ἔχουν μέτρον μικρότερον ἀπὸ ἕνα κατάλληλον θετικὸν ἀριθμόν, ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου εἶναι ὁμόσημος μὲ τὴν τιμὴν τοῦ τελευταίου ὅρου του.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τελευταῖος ὅρος τοῦ πολυωνύμου εἶναι *γενικῶς* ὁ $A_\nu x^\nu$ ($\nu=0,1,\ldots<\mu$), τὸ γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$\Pi(x)=A_\nu x^\nu \cdot \left[1+\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}.x+\frac{A_{\nu+2}}{A_\nu}x^2+\ldots+\frac{A_\mu}{A_\nu}.x^{\mu-\nu}\right] \ (\beta)\cdot$$

ἂν τώρα πάλιν λάβωμεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν M, μεγαλείτερον ἀπὸ τὰ μέτρα ὅλων τῶν συντελεστῶν τῆς ἀγκύλης, δηλ. τὰ $\left|\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\right|, \left|\frac{A_{\nu+2}}{A_\nu}\right|,\ldots,$ καὶ ϱ σημαίνῃ τὸ μέτρον τοῦ x, οἱ ὅροι τῆς ἀγκύλης, πλὴν τοῦ πρώτου 1, ἔχουν ἄθροισμα, καὶ ἂν ἀκόμη τοὺς λάβωμεν ὅλους *θετικούς*, μικρότερον ἀπὸ τὸ ἑξῆς : $M(\varrho+\varrho^2+\ldots+\varrho^{\mu-\nu})$, δηλ. ἀπὸ τὸ $M\frac{\varrho-\varrho^{\mu-\nu+1}}{1-\varrho}$, ὥστε (διὰ $\varrho<1$) $<$ καὶ ἀπὸ τὸ $M.\frac{\varrho}{1-\varrho}$.

ἂν λοιπὸν λάβωμεν : $\varrho<\frac{1}{1+M}$, τὸ $M.\frac{\varrho}{1-\varrho}$ θὰ γίνῃ <1 καὶ ἑπομένως ἡ ἀγκύλη *θετικὸς* ἀριθμός· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου διὰ $|x|$ ἴσον *μὲ τὸ ϱ αὐτὸ* ὁμόσημος μὲ τὸν ἄλλον παράγοντά του εἰς τὴν ἰσότητα (β), τὸν $A_\nu x^\nu$.

235. ***Θεώρημα 4ον.*** *Ἂν δύο (πραγματικοὶ) ἀριθμοὶ α, β δίδουν εἰς τὸ πολυώνυμον τιμὰς Π(α), Π(β) ἑτεροσήμους, ὑπάρχει μεταξὺ τῶν α καὶ β τοὐλάχιστον μία ῥίζα γ τοῦ πολυωνύμου.*

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑποθέσωμεν $\alpha<\beta$ καὶ ὀνομάσωμεν : A, $A+1$, $A+2,\ldots,B$ τοὺς *ἀκεραίους* (θετικοὺς ἢ καὶ ἀρνητικούς), ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν α καὶ β, μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ πολυωνύμου : $\Pi(\alpha)$, $\Pi(A)$, $\Pi(A+1),\ldots,\Pi(B)$, $\Pi(\beta)$ ἢ θὰ εἶναι μία $=0$ καὶ τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x εἶναι ῥίζα (καὶ τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀπεδείχθη) ἢ θὰ ὑπάρχουν δύο ἐφεξῆς ἑτερόσημοι· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς αὐτὰς εἶναι αἱ ϱ καὶ $\varrho+1$· τότε πάλιν ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς : ϱ, $\varrho+\frac{1}{10}$, $\varrho+\frac{2}{10},\ldots$ $\ldots,\varrho+\frac{9}{10}$, $\varrho+1$ ἢ εἷς θὰ εἶναι ῥίζα τοῦ πολυωνύμου (καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη) ἢ θὰ ὑπάρχουν δύο, π. χ. οἱ $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}$ καὶ $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{1}{10}$ $(\varrho_1<10)$, ποὺ θὰ δίδουν εἰς τὸ πολυώνυμον τιμὰς ἑτεροσήμους· καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν προχωροῦντες οὕτω, λαμβάνοντες πρῶτα τοὺς ἀριθμοὺς $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{1}{10^2}$, $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{2}{10^2},\ldots,\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{9}{10^2}$, $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{1}{10}$, ἔπειτα τοὺς $\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{\varrho_2}{10^2}+\frac{1}{10^3},\ldots$ κτλ., ἢ θὰ καταλήξωμεν εἰς ἕνα ἀριθμόν, ποὺ ν' ἀποτελεῖται ἀπὸ *πεπερασμένον* πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων, δηλ. *σύμμετρον*, ἢ εὑρίσκομεν ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον ἀριθμὸν γ:

$\gamma=\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\frac{\varrho_2}{10^2}+\frac{\varrho_3}{10^3}+\ldots+\frac{\varrho_\nu}{10^\nu}+\ldots$, ποὺ ἔχει ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων· θὰ δείξω, ὅτι αὐτὸς εἶναι τότε ῥίζα τοῦ $\Pi(x)$, δηλ. ὅτι $\Pi(\gamma)=0$. Πραγματικῶς, ἂν 1) ὑποθέσω : $\Pi(\gamma)\equiv\Lambda>0$, ἐκλέγω μίαν μονάδα $\frac{1}{\mu}<\Lambda$· γνωρίζομεν (§ 231), ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν μίαν αὔξησιν ε τοῦ γ (θετικήν ἢ ἀρνητικὴν) τοιαύτην, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τοῦ πολυωνύμου νὰ ἔχῃ μέτρον $< \frac{1}{\mu}$· ἂν τότε λάβω μίαν δεκαδικὴν μονάδα $\frac{1}{10^\nu} < \varepsilon$, βλέπω, ὅτι αἱ τρεῖς τιμαὶ τοῦ πολυωνύμου :

$$\Pi\left(\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\ldots+\frac{\varrho_\nu}{10^\nu}\right),\ \Pi(\gamma),\ \Pi\left(\varrho+\frac{\varrho_1}{10}+\ldots+\frac{\varrho_\nu}{10^\nu}+\frac{1}{10^\nu}\right)$$

πρέπει νὰ εἶναι *ὁμόσημοι*· διότι αἱ εἰς τὰς δύο ἄκρας ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ x διαφέρουν μεταξύ των ὀλιγώτερον ἀπὸ ε, ἑπομένως καὶ αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ πολυωνύμου διαφέρουν ὀλιγώτερον ἀπὸ $\frac{1}{\mu}$· αὐτὸ ὅμως εἶναι *ἀδύνατον*, διότι ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ὡρίσαμεν τὸν γ, μᾶς δίδει κατ᾽ ἀνάγκην ἑτεροσήμους τὰς δύο ἄκρας αὐτὰς τιμάς· ὥστε Π(γ) δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶναι >0. 2) Μὲ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι $\Pi(\gamma)<0$. Ἑπομένως εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην $\Pi(\gamma)=0$, δηλ. *ὁ γ εἶναι ῥίζα τοῦ πολυωνύμου.*

236. ***Πόρισμα.*** *Ἂν διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ τὸ πολυώνυμον λαμβάνῃ δύο τιμὰς $\Pi(\alpha)=A$ καὶ $\Pi(\beta)=B$, ὑπάρχει πάντοτε μία κατάλληλος τιμὴ γ τοῦ x μεταξὺ τῶν α καὶ β, ποὺ δίδει εἰς τὸ πολυώνυμον μίαν τυχοῦσαν τιμὴν Γ μεταξὺ τῶν A καὶ B.* (Δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον λαμβάνει (διὰ *καταλλήλους* τιμὰς τοῦ x μεταξὺ α καὶ β), *ὅλας* τὰς μεταξὺ A καὶ B τιμάς).

Ἀπόδειξις. Τὸ πολυώνυμον Π(x)—Γ λαμβάνει διὰ τὰς τιμὰς α καὶ β τοῦ x τὰς τιμὰς $\Pi(\alpha)-\Gamma\equiv A-\Gamma$ καὶ $\Pi(\beta)-\Gamma\equiv B-\Gamma$· ἀφοῦ ὅμως $A<\Gamma<B$, αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ εἶναι ἑτερόσημοι. Τότε ὅμως (σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα) θὰ ὑπάρχῃ μία τιμὴ γ τοῦ x μεταξὺ τῶν α καὶ β, ποὺ θὰ μηδενίζῃ τὸ πολυώνυμον Π(x)—Γ· δηλ. θὰ ἔχωμεν : $\Pi(\gamma)-\Gamma=0$, ὥστε : $\Pi(\gamma)=\Gamma$.

237. ***Θεώρημα 5ον***. *Κάθε πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ ἔχει τοὐλάχιστον μίαν πραγματικὴν ῥίζαν*· >0 ἢ <0, καθόσον ὁ α΄ καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι ἑτερόσημοι ἢ ὁμόσημοι.

Ἀπόδειξις. Αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου προφανῶς δὲν βλάπτονται, ἂν τὸ διαιρέσωμεν μὲ τὸν τυχόντα ἀριθμόν· τὸ διαιροῦμεν λοιπὸν μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου του καὶ τότε ὁ πρῶτός του ὅρος γίνεται x^μ. Ἂν τώρα θέσωμεν $x=-N$, ὅπου τὸ N εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καταλλήλως μεγάλος, τὸ πολυώνυμον (σύμφωνα μὲ τὸ 2ον θεώρημα) θὰ εἶναι *ὁμόσημον* μὲ τὴν τιμὴν $(-N)^{\mu}$ τοῦ πρώτου ὅρου του, δηλ. (ἀφοῦ $\mu=2\varrho+1$) *ἀρνητικόν*· ἂν ὅμως θέσωμεν $x=+N$, τὸ πολυώνυμον θὰ εἶναι *θετικόν*· ὥστε μεταξὺ $-N$ καὶ $+N$ ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον *πραγματικὴ* ρίζα τοῦ πολυωνύμου (σύμφωνα μὲ τὸ $4^{ον}$ θεώρημα). Ἡ ρίζα αὐτὴ θὰ εἶναι *θετική*, ἂν ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι *ἀρνητικὸς* (διότι ἡ ἀλλαγὴ σημείου γίνεται μεταξὺ $+N$ καὶ 0)· *ἀρνητικὴ* δέ, ἂν *θετικὸς* (ἀλλαγὴ σημείου μεταξὺ $-N$ καὶ 0).

238. ***Θεώρημα 6ον.*** *Κάθε πολυώνυμον, ποὺ ἔχει τοὺς ἄκρους ὅρους του ἑτεροσήμους, ἔχει τοὐλάχιστον μίαν θετικὴν ρίζαν.*

Ἀπόδειξις. Διὰ $x=+N$ (ὅπου N καταλλήλως μεγάλον) τὸ πολυώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου του N^{μ}, δηλ. *θετικόν*· διὰ $x=0$, τὸ σημεῖον τοῦ τελευταίου του, δηλ. *ἀρνητικόν*· ἑπομένως μεταξὺ 0 καὶ $+N$ ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον *θετικὴ* ρίζα τοῦ πολυωνύμου.

239. ***Πόρισμα.*** *Πολυώνυμον, ποὺ δὲν ἔχει καμίαν θετικὴν ρίζαν, ἔχει κατ' ἀνάγκην ὁμοσήμους τοὺς ἄκρους του ὅρους.*

Διότι, ἂν ἦσαν ἑτερόσημοι, θὰ εἶχε θετικὴν ρίζαν.

Τὸ *ἀντίστροφον* προφανῶς δὲν ἀληθεύει· *δὲν εἰμποροῦμεν δηλ. νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι, ἂν ἓν πολυώνυμον ἔχῃ τοὺς ἄκρους του ὅρους ὁμοσήμους, δὲν ἔχει ἀναγκαίως καμίαν θετικὴν ρίζαν.* (Π.χ. τὸ $x^2-11x+30$ ἔχει δύο θετικὰς ρίζας : 5,6).

240. ***Θεώρημα 7ον.*** *Κάθε πολυώνυμον ἀρτίου βαθμοῦ μὲ τοὺς ἄκρους ὅρους του ἑτεροσήμους ἔχει δύο τοὐλάχιστον πραγματικὰς ρίζας, μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν.* (Ἂν εἶναι ὁμόσημοι, εἰμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἢ νὰ μὴ ἔχῃ).

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ 6ον θεώρημα ἔχει πάντως μίαν τοὐλάχιστον ρίζαν *θετικήν*· ἐπειδὴ ὅμως διὰ $x=-N$ ἔχει *ἐπίσης θετικὸν* σημεῖον, τὸ τοῦ $(-N)^{\mu}$ (ἀφοῦ τώρα $\mu=2\varrho$), διὰ δὲ $x=0$ ἔχει *ἀρνητικόν*, θὰ ἔχῃ κατ' ἀνάγκην καὶ μίαν τοὐλάχιστον *ἀρνητικὴν* ρίζαν μεταξὺ $-N$ καὶ 0.

Παραδείγματα εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα :

1) x^3-5x^2+4x-7, μία τοὐλάχ. θετικὴ ρίζα (Θεώρ. 6ον).

2) x^3-5x^2-4x+7, » » ἀρνητικὴ » (Θεώρ. 5ον).

3) $x^4-5x^3-7x^2+3x-2$, δύο πραγμ. ρίζαι, μία θετικὴ καὶ μία ἀρνητικὴ [(Θεώρ. 7ον).

4) $x^4-5x^3-7x^2+3x+2$, τίποτε δὲν συμπεραίνεται (Θεώρ. 7ον).

δ') Ἰδιότητες τῶν ριζῶν ἑνὸς τυχόντος πολυωνύμου.

241. ***Θεώρημα 1ον.*** *Ἂν εἷς (μιγαδικὸς ἐν γένει) ἀριθμὸς α εἶναι ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου, μὲ τυχόντας (μιγαδικοὺς ἐν γένει) συντελεστάς, ἡ διαφορὰ x—α διαιρεῖ τὸ πολυώνυμον ἀκριβῶς.* Καὶ ἀντιστρόφως : *Ἂν μία διαφορὰ x—α διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ πολυώνυμον, ὁ α εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου.*

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ὁ α εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου :

$$\Pi(x)\equiv x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu},\text{ θὰ εἶναι : }$$

$$\Pi(\alpha)\equiv\alpha^{\mu}+A_1\alpha^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu}=0.$$

Ἑπομένως καὶ $\Pi(x)=\Pi(x)-\Pi(\alpha)\equiv$

$$\equiv(x^{\mu}-\alpha^{\mu})+A_1(x^{\mu-1}-\alpha^{\mu-1})+\ldots+A_{\mu-1}(x-\alpha)\quad(1)\cdot$$

ἐπειδὴ ὅμως γενικῶς εἶναι :

$\dfrac{x^{\lambda}-\alpha^{\lambda}}{x-\alpha}=x^{\lambda-1}+\alpha x^{\lambda-2}+\ldots+\alpha^{\lambda-2}.x+\alpha^{\lambda-1}$, διαιρεῖται *κάθε* διαφορὰ εἰς τὸ β' μέλος τῆς (1) ἀκριβῶς διὰ τοῦ x—α· ἑπομένως καὶ *ὁλόκληρον* τὸ πολυώνυμον. Ἂν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, *ποὺ εἶναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ—1*, τὸ ὀνομάσωμεν $\Pi_1(x)$, θὰ εἶναι : $\Pi(x)=(x-\alpha)\Pi_1(x)$.—Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν γίνεται φανερὰ καὶ ἡ ἀντιστροφὴ τοῦ θεωρήματος· διότι, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν x=α, εὑρίσκομεν Π(α)=0, δηλ. *εἶναι ὁ α ρίζα.*

242. ***Θεώρημα 2ον.*** *Τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν ἑνὸς πολυωνύμου δὲν εἰμπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν βαθμόν του.*

Ἀπόδειξις. Ἂν μία ρίζα του εἶναι ἡ α, θὰ ἔχωμεν : $\Pi(x)=(x-\alpha)\Pi_1(x)$. Τὸ πολυώνυμον τώρα τοῦ μ—1 βαθμοῦ $\Pi_1(x)$ ἢ δὲν ἔχει καμίαν ρίζαν ἢ ἔχει. Ἂν δὲν ἔχῃ καμίαν, τότε τὸ Π(x) ἔχει μίαν μόνον ρίζαν, ἐνῷ ὁ βαθμός του εἶναι ≥ 1. *Ἀληθεύει λοιπὸν τὸ θεώρημα.* Ἂν πάλιν τὸ $\Pi_1(x)$ ἔχῃ μίαν ρίζαν β, θὰ ἔχωμεν : $\Pi_1(x)=(x-\beta)\Pi_2(x)$ ($\Pi_2(x)$=πολυώνυμον μ—2 βαθμοῦ)· ἑπομένως $\Pi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\Pi_2(x)$. Ἂν ἐξακολουθήσωμεν λοιπὸν μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, θ' ἀναλυθῇ τὸ πολυώνυμον εἰς ἓν γινόμενον ρ πρωτοβαθμίων παραγόντων x—α, x—β,... καὶ ἑνὸς τελευταίου παράγοντος $\Pi_{\rho}(x)$, ποὺ δὲν ἔχει καμίαν ρίζαν· τὸ $\Pi_{\rho}(x)$ εἶναι βαθμοῦ μ—ρ· ὥστε, ἂν μὲν *δὲν* εἶναι : μ—ρ=0 (δηλ. τὸ $\Pi_{\rho}(x)$ σταθερὰ ποσότης), τὸ Π(x) ἔχει ρίζας $\rho<\mu$. Ἂν δὲ εἶναι : $\Pi_{\rho}(x)$ = σταθερὰ ποσότης, τὸ Π(x) ἔχει ρίζας ρ = μ. Ὥστε πάντοτε εἶναι $\rho\leq\mu$, καθὼς ἰσχυρίζεται τὸ θεώρημα.

243. ***Πόρισμα.*** *Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι κάθε πολυώνυμον ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ρίζαν* (καὶ ἀργότερα θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι *πραγματικῶς συμβαίνει αὐτό*), *θὰ ἔχῃ κατ' ἀνάγκην μ ρίζας, ὅπου μ ὁ βαθμός του· καὶ ἑπομένως ἀναλύεται εἰς γινόμενον μ πρωτοβαθμίων παραγόντων.* Διότι τότε τὸ $\Pi_\varrho(x)$ θὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως τὸ $\Pi(x)$ θὰ εἶναι γινόμενον τῶν μ πρωτοβαθμίων παραγόντων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$ κτλ.

244. ***Ἁπλαῖ καὶ πολλαπλαῖ ρίζαι.*** Εἶναι δυνατὸν ὁ παράγων $x-\alpha$ ἢ καὶ οἱ ἄλλοι νὰ περιέχωνται *πολλὰς φορὰς* εἰς τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$· τότε θὰ περιέχῃ τὸ $\Pi(x)$ τοὺς παράγοντας $(x-\alpha)^\lambda$, $(x-\beta)^\varrho$,... Ὥστε *γενικῶς* ἔχομεν : $\Pi(x)=(x-\alpha)^\lambda.(x-\beta)^\varrho.(x-\gamma)^\sigma\ldots$ (ὅπου τὰ $\lambda, \varrho, \sigma,\ldots$ εἶναι τὸ καθὲν ≥ 1 καὶ $\lambda+\varrho+\sigma+\ldots=\mu$). Μία λοιπὸν ρίζα, π. χ. ἡ α, λέγεται *ἁπλῆ*, ὅταν $\lambda=1$· *διπλῆ*, ὅταν $\lambda=2$· *τριπλῆ*, ὅταν $\lambda=3$· καὶ *γενικῶς πολλαπλῆ τάξεως λ*, ὅταν $\lambda>1$.

245. ***Θεώρημα 3ον.*** Ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς πολυωνύμου εἰς παράγοντας τοῦ α' βαθμοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἀνάλυσιν ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς του· καὶ εἶναι, καθὼς καὶ ἐκείνη, ἑνιαία· δηλ. *Δὲν εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν δι' ἓν ὡρισμένον πολυώνυμον καὶ ἄλλο γινόμενον ἄλλων παραγόντων τοῦ α' βαθμοῦ, ποὺ νὰ εἶναι πάλιν ἴσον μὲ τὸ πολυώνυμον.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι :

(1) $\Pi(x)=(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\varrho(x-\gamma)^\sigma\ldots=(x-\alpha')^{\lambda'}.(x-\beta')^{\varrho'}(x-\gamma')^{\sigma'}\ldots$· λέγω, ὅτι θὰ εἶναι : $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$ κτλ. καὶ $\lambda=\lambda'$, $\varrho=\varrho'$, $\sigma=\sigma'\ldots$

Ἀφοῦ τὸ α' ἀπὸ τὰ γινόμενα τῆς *ταὐτότητος* (1) μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$, θὰ μηδενίζεται καὶ τὸ β'· θὰ περιέχῃ λοιπὸν καὶ τὸ β' τὸν παράγοντα $x-\alpha$, δηλ. κάποιος ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ β' γινομένου θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν $x-\alpha$, π. χ. ἂς εἶναι ὁ $x-\alpha'$· θὰ εἶναι τότε $\alpha=\alpha'$. Καὶ ὁ ἐκθέτης δὲ τοῦ παράγοντος αὐτοῦ εἰς τὰ δύο γινόμενα θὰ εἶναι ὁ ἴδιος, δηλ. θὰ εἶναι : $\lambda=\lambda'$· διότι, ἂν ὑποθέσωμεν π. χ. $\lambda>\lambda'$ καὶ διαιρέσωμεν τὰ δύο γινόμενα μὲ τὸν παράγοντα $(x-\alpha)^{\lambda'}$, ἀπὸ τὰ δύο γινόμενα, ποὺ θὰ μείνουν, τὸ μὲν α' θὰ περιέχῃ ἀκόμη τὸν παράγοντα $(x-\alpha)$ $\lambda-\lambda'$ φοράς, τὸ β' ὅμως ὄχι. *Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον* (διότι τότε διὰ $x=\alpha$ τὸ β' δὲν θὰ ἐμηδενίζετο)· εἶναι λοιπὸν $\lambda=\lambda'$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τοὺς ἄλλους παράγοντας $(x-\beta)^\varrho$, $(x-\gamma)^\sigma\ldots$ ὅτι $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma',\ldots\varrho=\varrho'$, $\sigma=\sigma',\ldots$ *Εἶναι λοιπὸν τὰ δύο γινόμενα ἐντελῶς τὰ ἴδια.*

246. ***Θεώρημα 4ον.*** *Κάθε πολλαπλῆ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι*

ρίζα καὶ τῆς παραγώγου του μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος κατὰ ***μίαν*** *μονάδα μικρότερον.* Καὶ ἀντιστρόφως, *κάθε κοινὴ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου καὶ τῆς παραγώγου του εἶναι πολλαπλῆ (τοὐλάχιστον διπλῆ) ρίζα τοῦ πολυωνύμου.*

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ρίζα α ἔχῃ πολλαπλότητα λ τάξεως, θὰ ἔχωμεν : $\Pi(x)=(x-\alpha)^{\lambda}.\Pi_1(x)$ (ὅπου $\Pi_1(\alpha)\neq 0$)· ἐπομένως καί :

$$\Pi'(x)=(x-\alpha)^{\lambda}\,\Pi'_1(x)+\lambda(x-\alpha)^{\lambda-1}.\,\Pi_1(x)\quad (\S\ 229),$$

ἢ καί : $$\Pi'(x)=(x-\alpha)^{\lambda-1}[(x-\alpha)\Pi'_1(x)+\lambda\Pi_1(x)]\cdot\qquad(\alpha)$$

ἡ ταὐτότης αὐτὴ μᾶς δεικνύει, ὅτι ὁ α εἶναι ρίζα *καὶ* τῆς παραγώγου, πολλαπλότητος *τοὐλάχιστον* λ—1· ὅτι δὲ δὲν εἶναι ἀνωτέρας, φαίνεται ἀπὸ τὸ ὅτι ὁ εἰς τὴν ἀγκύλην παράγων τοῦ β′ μέλους τῆς ἰσότητος (α) δὲν μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$, διότι γίνεται $\lambda\Pi_1(\alpha)$, ἐπομένως $\neq 0$.

Αἱ ἁπλαῖ λοιπὸν ρίζαι ἑνὸς πολυωνύμου *δὲν* εἶναι ρίζαι τῆς παραγώγου καὶ ἐπομένως *κάθε κοινὴ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου καὶ τῆς παραγώγου του εἶναι πολλαπλῆ ρίζα τοῦ πολυωνύμου.*

247. ***Πόρισμα.*** *Κάθε ρίζα πολλαπλότητος λ ἑνὸς πολυωνύμου $\Pi(x)$ εἶναι ρίζα καὶ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων του $\Pi'(x)$, $\Pi''(x)$ κτλ. μέχρι τῆς τάξεως λ—1, μὲ βαθμοὺς πολλαπλότητος ἀντιστοίχως : λ—1, λ—2,...,1.*

Εἰμποροῦμεν λοιπὸν μὲ τὴν πρότασιν αὐτὴν νὰ ἐξακριβώνωμεν τὸν βαθμὸν τῆς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης.

248. ***Θεώρημα 5ον.*** *Ἂν δύο πολυώνυμα βαθμῶν ὄχι μεγαλυτέρων ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν μ εἶναι ἴσα διὰ μ+1 τοὐλάχιστον τιμὰς τοῦ x, θὰ εἶναι καὶ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἴσα, δηλ. τὰ ἴδια ἐντελῶς* (τοῦ *ἰδίου* βαθμοῦ, μὲ τοὺς *ἰδίους* ἀντιστοίχως συντελεστάς).

Ἀπόδειξις. Ἂν τὰ πολυώνυμα εἶναι $\Pi_1(x)$ καὶ $\Pi_2(x)$, ἡ διαφορά των $\Pi_1(x)-\Pi_2(x)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ ὄχι μεγαλυτέρου ἀπὸ μ· καὶ ὅμως μηδενίζεται, κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας, διὰ μ+1 τοὐλάχιστον τιμὰς τοῦ x, πρᾶγμα *ἀδύνατον,* ἂν δὲν εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτὴ *ἀπὸ ταὐτότητα* ἴση μὲ τὸ 0, δηλ. $\Pi_1(x)=\Pi_2(x)$.

249. ***Θεώρημα 6ον.*** *Αἱ μιγαδικαὶ ρίζαι ἑνὸς πολυωνύμου μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς εἶναι ἀνὰ δύο συζυγεῖς καὶ μὲ τὸν ἴδιον βαθμὸν πολλαπλότητος.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ ἔχῃ τὴν ρίζαν $\alpha+\beta i$, θὰ εἶναι $\Pi(\alpha+\beta i)=0$· ἂν δὲ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις ἐπὶ τοῦ

$\Pi(\alpha+\beta i)\equiv A_0(\alpha+\beta i)^\mu + A_1(\alpha+\beta i)^{\mu-1}+\ldots+A_\mu$, θὰ ἔχωμεν: $\Pi(\alpha+\beta i)=A+Bi$ καὶ ἀφοῦ $A+Bi=0$, θὰ εἶναι καὶ $A=0$, $B=0$· ἑπομένως καὶ $A-Bi=0$· ἀλλὰ $A-Bi$ εἶναι προφανῶς ἡ τιμὴ τοῦ $\Pi(x)$, ὅταν θέσωμεν: $x=\alpha-\beta i$, ὥστε εἶναι καὶ $\Pi(\alpha-\beta i)=0$, δηλ. εἶναι καὶ ὁ $\alpha-\beta i$ ρίζα. Ὥστε ἡ ρίζα $\alpha+\beta i$ συνεπάγεται καὶ τὴν $\alpha-\beta i$. Ἡ πρότασις ὅμως αὐτὴ δὲν ἰσχύει, ἂν ὑπάρχουν συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως *μιγαδικοί*· διότι δὲν τρέπονται οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ εἰς τοὺς συζυγεῖς των μὲ τὴν τροπὴν τοῦ $\alpha+\beta i$ εἰς $\alpha-\beta i$.

Λέγω τώρα, ὅτι, ἂν ἡ ρίζα $\alpha+\beta i$ εἶναι πολλαπλότητος λ, τῆς ἰδίας θὰ εἶναι καὶ ἡ $\alpha-\beta i$. Διότι, ἂν ἔχωμεν:
$\Pi(x)=(x-\alpha-\beta i)^\lambda \cdot (x-\alpha+\beta i)^{\lambda'} \cdot \Pi_1(x)$ καὶ εἶναι $\lambda>\lambda'$, θὰ ἔχωμεν:

$$\Pi(x)=(x-\alpha-\beta i)^{\lambda'}(x-\alpha+\beta i)^{\lambda'} \cdot (x-\alpha-\beta i)^{\lambda-\lambda'} \cdot \Pi_1(x),$$

ἢ καὶ $$\Pi(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda'} \cdot (x-\alpha-\beta i)^{\lambda-\lambda'} \cdot \Pi_1(x),$$

δηλ. $$\frac{\Pi(x)}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^{\lambda'}} = (x-\alpha-\beta i)^{\lambda-\lambda'} \cdot \Pi_1(x).$$

Τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ α΄ μέλους (ἀκέραιον πολυώνυμον) ὡς ἴσον πρὸς τὸ β΄, περιέχει ἀκόμη τὸν παράγοντα $(x-\alpha-\beta i)$, *χωρὶς νὰ περιέχῃ καὶ τὸν συζυγῆ του*: $(x-\alpha+\beta i)$, πρᾶγμα ἀδύνατον, ἂν δὲν εἶναι: $\lambda-\lambda'=0$, δηλ. $\lambda=\lambda'$.

250. ***Πόρισμα.*** *Κάθε πολυώνυμον μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἀναλύεται εἰς γινόμενον τόσων πραγματικῶν α΄-βαθμίων παραγόντων, ὅσαι εἶναι αἱ πραγματικαί του ρίζαι, καὶ τόσων πραγματικῶν β΄-βαθμίων, ὅσα εἶναι τὰ ζεύγη τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ριζῶν του*· δηλ. εἶναι:

$$\Pi(x)=(x-\alpha_1)^{\varrho_1}\ldots(x-\alpha_\lambda)^{\varrho_\lambda} \cdot [(x-\alpha_{\lambda+1})^2+\beta_{\lambda+1}^2]^{\varrho_{\lambda+1}}\ldots[(x-\alpha_\sigma)^2+\beta_\sigma]^{\varrho_\sigma}$$

$$\left(\sigma=\frac{\mu-\lambda}{2}\right).$$

ε΄) Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν ἑνὸς πολυωνύμου.

251. Ἂν αἱ μ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου ὀνομασθοῦν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, θὰ ἔχωμεν τὴν ταὐτότητα:

$$A_0x^\mu + A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_\mu = A_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu)$$

καὶ ἂν ὀνομάσωμεν Σ_1 τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν: $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu}\alpha_\varkappa$, Σ_2 τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων, Σ_3 τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ τρεῖς κτλ. καὶ τέλος Σ_μ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ριζῶν: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu$, θὰ ἔχωμεν, ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β΄ μέλος:

$$A_0x^\mu + A_1x^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1}x + A_\mu =$$
$$= A_0[x^\mu - \Sigma_1x^{\mu-1} + \Sigma_2x^{\mu-2} - \Sigma_3x^{\mu-3} + \ldots + (-1)^\mu\Sigma_\mu].$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἰσότης αὐτὴ εἶναι ταυτότης, θὰ ἔχωμεν:

$A_1 = -A_0\Sigma_1,\ A_2 = A_0\Sigma_2,\ A_3 = -A_0\Sigma_3, \ldots, A_\mu = (-1)^\mu A_0\Sigma_\mu$ · ἑπομένως:

$$\Sigma_1 = -\frac{A_1}{A_0},\ \Sigma_2 = \frac{A_2}{A_0},\ \Sigma_3 = -\frac{A_3}{A_0}, \ldots, \Sigma_\mu = (-1)^\mu \cdot \frac{A_\mu}{A_0}.$$

Δηλ. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀντίθετον πηλίκον τοῦ β' συντελεστοῦ διὰ τοῦ α'· τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ῥιζῶν ἀνὰ δύο, ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ γ' συντελεστοῦ διὰ τοῦ α' κτλ. καὶ τέλος τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ῥιζῶν, ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ τελευταίου ὅρου διὰ τοῦ α' μὲ σημεῖον + ἢ —, καθόσον τὸ μ ἄρτιον ἢ περιττόν.*

Ἂν ὑποθέσωμεν $A_0 = 1$, οἱ προηγούμενοι τύποι ἁπλοποιοῦνται:

$$\Sigma_1 = -A_1,\quad \Sigma_2 = A_2,\quad \Sigma_\mu = (-1)^\mu A_\mu.$$

252. *Ἐφαρμογή.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ γ' βαθμοῦ:

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

ὅταν μία ἀπὸ τὰς ῥίζας της εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων·

Ἔχομεν τώρα γενικῶς: $\alpha + \beta + \gamma = -A_1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = A_2$, $\alpha\beta\gamma = -A_3$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha = \beta + \gamma$, αἱ ἰσότητες αὐταὶ γίνονται:

$2\alpha = -A_1$, δηλ. $\alpha = -\frac{A_1}{2}$, $\alpha(\beta+\gamma) + \beta\gamma = A_2$, ἢ $\alpha^2 + \beta\gamma = A_2$ καὶ ἑπομένως: $\beta\gamma = A_2 - \alpha^2 = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$· αἱ δύο ἄλλαι ῥίζαι λοιπὸν β καὶ γ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις: $\beta + \gamma = -\frac{A_1}{2}$, $\beta\gamma = A_2 - \left(\frac{A_1^2}{4}\right)$· ὥστε *θὰ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς β'-βαθμίου ἐξισώσεως:*

$$y^2 + \frac{A_1}{2}y + \left(A_2 - \frac{A_1^2}{4}\right) = 0.$$

Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha\beta\gamma = -A_3$ ἕπεται $\beta\gamma = -\frac{A_3}{\alpha} = \frac{2A_3}{A_1}$, θὰ εἶναι: $\frac{2A_3}{A_1} = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$· *αὐτὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ γ'-βάθμιος ἐξίσωσις $\alpha = \beta + \gamma$.*

ϛ') Διαιρέται ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου.

253. ***Πλῆθος τῶν διαιρετῶν.*** Ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου Π(x) εἰς τοὺς α'-βαθμίους παράγοντάς του εἰμποροῦμεν πολὺ εὔκολα νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς *διαιρέτας* του, δηλ. τὰ ἀκέραια πολυώνυμα, ποὺ διαιροῦν ἀκριβῶς τὸ Π(x). Εἶναι φανερὸν δηλ., ὅτι, ἂν

εἶναι : $\Pi(x)=A(x-\alpha)^\lambda.(x-\beta)^\nu\ldots(x-\varrho)^\sigma$, κάθε διαιρέτης τοῦ $\Pi(x)$ θὰ περιέχῃ α'-βαθμίους παράγοντας μόνον ἀπὸ τοὺς τοῦ $\Pi(x)$ καὶ μὲ ἐκθέτας $\lambda_1, \nu_1, \ldots, \sigma_1$, *τὸ πολὺ* ἴσους ἀντιστοίχως μὲ τοὺς $\lambda, \nu, \ldots, \sigma$. Ἑπομένως τὸ πλῆθος ὅλων τῶν διαιρετῶν τοῦ $\Pi(x)$ θὰ εὑρεθῇ, ἂν δώσωμεν εἰς τὸ λ_1 τὰς τιμὰς $0,1,2,\ldots,\lambda$· εἰς τὸ ν_1 τάς : $0,1,2,\ldots,\nu$· κτλ. Ὥστε τὸ πλῆθος *ὅλων* τῶν διαιρετῶν τοῦ $\Pi(x)$ εἶναι : $(\lambda+1)(\nu+1)\ldots(\sigma+1)-1$. (Ἐννοεῖται, ὅτι ὁ συντελεστὴς ἑκάστου διαιρέτου μένει *ἀόριστος*).

254. ***Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*** *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ πολλῶν (ἀκεραίων) πολυωνύμων λέγεται τὸ (ἀκέραιον) πολυώνυμον τοῦ μεγαλυτέρου βαθμοῦ, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ δοθέντα. Ἂν τὰ πολυώνυμα μᾶς ἔχουν δοθῆ ὡς γινόμενα τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων των, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ μ.κ.δ. των θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς *κοινοὺς μόνον* παράγοντάς των, καθένα μὲ τὸν *μικρότερον* ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας του εἰς τὰ πολυώνυμα. Ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν θὰ εἶναι *ἀόριστος*, δηλ. ὁ *τυχὼν* ἀριθμός. (Ἂν *κανεὶς* πρωτοβάθμιος παράγων δὲν εἶναι κοινός, τὰ πολυώνυμα εἶναι *πρῶτα μεταξύ των*). Π. χ. τῶν πολυνύμων : $28(x-3)^2.(x-7)^3(x-9)$, $17(x-4)^3(x-7)^5(x-9)^2(x-11)$ μ.κ.δ. εἶναι τό : $A(x-7)^3(x-9)$.

255. Καθὼς ὅμως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν διὰ διαδοχικῶν διαιρέσεων τὸν μ.κ. διαιρέτην δύο ἀριθμῶν *καὶ χωρὶς νὰ ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των*, εἰμποροῦμεν μὲ ἀνάλογον τρόπον νὰ εὕρωμεν καὶ τὸν μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων, *καὶ χωρὶς νὰ ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας*. Αὐτὸ δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἂν τὰ δοθέντα πολυώνυμα εἶναι τὰ Π καὶ Π_1 καὶ ἔχουν καταταχθῆ κατὰ τὰς *κατερχομένας* δυνάμεις τοῦ x, ὑποθέσωμεν δὲ τὸ Π βαθμοῦ ἴσου ἢ ἀνωτέρου τοῦ Π_1, θὰ ἔχωμεν : (α) $\Pi=\Pi_1P+\Pi_2$ (ὅπου P εἶναι τὸ πηλίκον καὶ Π_2 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π διὰ τοῦ Π_1). Θὰ δείξω, ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν Π καὶ Π_1 εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν μ.κ.δ. τῶν Π_1 καὶ Π_2· διότι, ἂν $(x-\alpha)^\sigma$ εἶναι εἷς κοινὸς διαιρέτης τῶν Π καὶ Π_1 καὶ θέσωμεν : $\Pi=(x-\alpha)^\sigma.\Pi_\sigma$, $\Pi_1=(x-\alpha)^\sigma.\Pi_{1\sigma}$, θὰ εἶναι : $\Pi_2=\Pi-\Pi_1P=(x-\alpha)^\sigma(\Pi_\sigma-\Pi_{1\sigma}P)$· ἔχει λοιπὸν καὶ τὸ Π_2 τὸν παράγοντα $(x-\alpha)^\sigma$, ἑπομένως κάθε κοινὸς παράγων τῶν Π, Π_1 εἶναι καὶ τῶν Π_1, Π_2. Καὶ τὸ ἀντίστροφον δὲ συμβαίνει, καθὼς δεικνύει ἡ ἰσότης (α). *Εἶναι λοιπὸν καὶ οἱ μ. κ. δ. τῶν Π, Π_1 καὶ Π_1, Π_2 οἱ ἴδιοι.* Προχωροῦμεν τώρα μὲ τὸν ἴδιον τρόπον : $\Pi_1=\Pi_2P_1+\Pi_3$. Οἱ μ.κ.δ. τῶν Π_1, Π_2 καὶ Π_2, Π_3 εἶναι πάλιν οἱ ἴδιοι κτλ. Ἂν τέλος φθάσωμεν

$(x-\alpha)(x-\beta)$

$(x-\alpha), (x-\beta), (x-\alpha)(x-\beta), (x-\alpha)(x-\beta)$

$(2+1)\cdot 2-1=5$

εἰς μίαν διαίρεσιν, ποὺ νὰ μὴ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως, ὁ Π_ν , θὰ εἶναι προφανῶς ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. τῶν Π καὶ Π_1. Ἐπειδὴ δὲ οἱ βαθμοὶ τῶν Π, Π_1, Π_2,...προχωροῦν ἐλαττούμενοι, εἶναι φανερόν, ὅτι μὲ τὰς διαδοχικὰς αὐτὰς διαιρέσεις *θὰ φθάσωμεν τέλος ἢ εἰς ἓν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ εἰς ἓν ὑπόλοιπον σταθερὸν ἀριθμὸν* (*χωρὶς x*). Ὅταν τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ εἶναι $=0$, τὰ Π, Π_1 ἔχουν μ.κ.δ. τὸν διαιρέτην τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως, τὸν Π_ν · ἂν ὅμως εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς $\gtrless 0$, τὰ Π, Π_1 εἶναι πρῶτα τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο.

256. ***Παρατηρήσεις***. 1) Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς ἀπὸ τὰ πολυώνυμα Π, Π_1, Π_2,... εἶναι κλασματικοί, εἰμποροῦμεν, *χωρὶς καμίαν βλάβην τοῦ ζητουμένου μ. κ. δ.*, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον αὐτὸ ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμὸν ($\gtrless 0$), διὰ νὰ γίνουν οἱ συντελεσταί του ἀκέραιοι.— 2) Ἐπίσης εἰμποροῦμεν νὰ ἐξαλείψωμεν ἕνα κοινὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα εἰς τοὺς συντελεστὰς ἑνὸς τυχόντος ἀπὸ τὰ Π, Π_1, Π_2,.... (ἂν ὑπάρχῃ). Διότι αἱ πράξεις αὐταὶ μεταβάλλουν *μόνον τὸν συντελεστὴν* τοῦ μ. κ. δ., ποὺ εἶναι ὁ *τυχὼν* ἀριθμός.

257. ***Ἐφαρμογή***. *Κοιναὶ ρίζαι δύο ἐξισώσεων*. Ὅταν τὰ δύο πολυώνυμα Π καὶ Π_1 ἔχουν ν πρωτοβαθμίους παράγοντας *κοινοὺς* καὶ ἑπομένως μ. κ. δ. τοῦ βαθμοῦ ν, αἱ δύο ἐξισώσεις : $\Pi=0$, $\Pi_1=0$ ἔχουν προφανῶς ν *κοινὰς* λύσεις. Ὥστε : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις δύο ἐξισώσεων : $\Pi=0$, $\Pi_1=0$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $M=0$, ὅπου M εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν Π, Π_1. (Ἂν M=σταθερὸς ἀριθμός, τὰ Π, Π_1 εἶναι πρῶτα μεταξύ των).*

Ἀσκήσεις. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κοιναὶ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων :*

1) $x^2-18x^2+107x-210=0$, $x^3-19x^2+118x-240=0$.

2) $x^2-3x+2=0$, $x^4-7x^2+12x+5=0$.

3) $x^5-2x^4+2x^2+x-10=0$, $x^4-2x^3+5x^2-9x-2=0$.

ζ') *Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.*

258. *Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ πολλῶν ἀκεραίων πολυωνύμων λέγεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ μικροτέρου βαθμοῦ, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν πολυωνύμων αὐτῶν.* (Ὁ ἀριθμητικὸς συντελεστής του μένει προφανῶς *ἀόριστος*). Ἂν τὰ πολυώνυμα μᾶς δο-

θοῦν ἀναλελυμένα εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους παράγοντάς των, εἶναι φανερόν, ὅτι *τὸ ε. κ. πολλαπλάσιόν των ϑ' ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κοινοὺς καὶ τοὺς μὴ κοινοὺς παράγοντάς των, τὸν καθένα μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην, ἀπὸ ὅσους ἔχει εἰς τὰ πολυώνυμα.*

Π. χ. τῶν πολυωνύμων :

$$8(x-3)^2(x-5)^7(x-1)^5,$$
$$18(x-5)^3(x-3)^3(x-1)^4, \quad 25(x-8)^2(x-3)^{11}(x-6)^3$$

ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$A(x-3)^{11}(x-5)^7(x-1)^5(x-8)^2(x-6)^3$ (ὅπου A *τυχὼν* ἀριθμός).

259. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ πολλῶν πολυωνύμων λέγεται *κάθε* πολυώνυμον, ποὺ διαιρεῖται *ἀκριβῶς* δι' αὐτῶν.

Καθὼς δὲ εἰς τὴν Θεωρητικὴν Ἀριθμητικήν, εἶναι καὶ ἐδῶ εὐκολώτατον νὰ ἴδωμεν, ὅτι *κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων πολυωνύμων εἶναι μόνον τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου των.*

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν πολυωνύμων : $2x^2+5x-6$, $4x^3-116$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν πολυωνύμων : $9x^4+x^2+7$, $5x^2-3x+2$, $6x^3+x$.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε.κ.π. τῶν πολυωνύμων: $7x^3+x-8$, $16x^2-x+5$, x^3-27.

4) Νὰ δειχθῇ τὸ (ἀντίστοιχον πρὸς τὸ γνωστὸν τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς) θεώρημα :

Τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸ ε. κ. π. δύο πολυωνύμων εἶναι (πλὴν τοῦ ἀορίστου σταθεροῦ συντελεστοῦ) ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων. Ὥστε : *Τὸ ε. κ. π. δύο πολυωνύμων εὑρίσκεται* (ἂν δὲν ἔχουν ἀναλυθῇ εἰς α'-βαθμίους παράγοντας) ἀπὸ τὸν *μ. κ. δ.* (εὑρισκόμενον διὰ διαιρέσεων (§ 255)) *μὲ τὴν ἰσότητα :* ε.κ.π.$=\dfrac{\Pi_1(x)\Pi_2(x)}{\text{μ. κ. δ.}}$.

5) *Ἂν ἓν πολυώνυμον $\Pi_1(x)$ διαιρῇ* ἀκριβῶς *τὸ γινόμενον δύο ἄλλων : $\Pi_2(x)\Pi_3(x)$ καὶ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ $\Pi_2(x)$, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ $\Pi_3(x)$* (θεώρημα ἀντίστοιχον τοῦ θεμελιώδους τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς).

6) Ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι *τότε μόνον τετράγωνον ἄλλου*, ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων του *εἶναι ὅλοι ἄρτιοι*·

καὶ γενικῶς, *τότε μόνον μυοστὴ δύναμις ἄλλου*, ὅταν οἱ ἐκθέται αὐτοὶ *εἶναι ὅλοι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μ*.

7) Ἂν $\Pi_1(x)$ καὶ $\Pi_2(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ των, καὶ τὰ $\Pi_1(x)+\Pi_2(x)$ καὶ $\Pi_1(x)-\Pi_2(x)$ εἶναι ἐπίσης πρῶτα μεταξύ των.

8) Νὰ εὑρεθοῦν *ὅλοι* οἱ κοινοὶ διαιρέται *(πολυώνυμα)* δύο πολυωνύμων, ποὺ ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους των παράγοντας.

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ μέθοδος τῆς εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. *δύο* πολυωνύμων (§ 255) ἐπεκτείνεται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. *πολλῶν* πολυωνύμων.

10) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ εἶναι δύο πολυώνυμα πρῶτα μεταξύ των καὶ χωρὶς κανένα κοινὸν ἀριθμητικὸν συντελεστήν, ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἄλλα πολυώνυμα $P_1(x)$, $P_2(x)$ τοιαῦτα, ὥστε:

$$\Pi_1(x)P_1(x)+\Pi_2(x)P_2(x)=1.$$

11) *Εὕρεσις τῶν παραγόντων βαθμοῦ ν (ν<μ) ἑνὸς πολυωνύμου βαθμοῦ μ* (μὲ α′ ὅρον x^μ).

Α′ μέθοδος. Ὀνομάζομεν $\Pi_1(x)\equiv x^\nu+\beta_1 x^{\nu-1}+\ldots+\beta_\nu$ ἕνα διαιρέτην τοῦ βαθμοῦ ν· περιέχει ν *προσδιοριστέους* συντελεστὰς (τοὺς $\beta_1,\ldots,\beta_\nu$). Διαιροῦμεν τὸ $\Pi(x)$ διὰ τοῦ $\Pi_1(x)$· τὸ ὑπόλοιπον $Y(x)$, βαθμοῦ $\nu-1$, θὰ εἶναι $=0$ (ἀφοῦ τὸ $\Pi_1(x)$ εἶναι *διαιρέτης*)· ἐξισώνομεν λοιπὸν τοὺς ν συντελεστάς του μὲ τὸ 0 καὶ ἔχομεν ν ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν μ *γνωστῶν* συντελεστῶν $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)$ τοῦ $\Pi(x)$ καὶ τῶν ν *ἀγνώστων* $(\beta_1,\ldots,\beta_\nu)$ τοῦ $\Pi_1(x)$.

Β′ μέθοδος. Διαιροῦμεν τὸ $\Pi(x)$ διὰ τοῦ $\Pi_1(x)$· τὸ πηλίκον: $\frac{\Pi(x)}{\Pi_1(x)}=P(x)$ θὰ εἶναι $\mu-\nu$ βαθμοῦ μὲ συντελεστὴν τοῦ α′ ὅρου τὴν 1. Ἂν οἱ ν συντελεσταὶ τοῦ $\Pi_1(x)$ καὶ οἱ $(\mu-\nu)$ τοῦ $P(x)$ μείνουν ἀόριστοι, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\Pi_1(x)P(x)$ ἀποτελεῖ τὸ $\Pi(x)$, θὰ ἔχωμεν μ ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν γνωστῶν συντελεστῶν τοῦ $\Pi(x)$ καὶ τῶν $\nu+(\mu-\nu)\equiv\mu$ ἀορίστων.

Ἡ εὕρεσις τῶν παραγόντων βαθμοῦ ν εἶναι γενικῶς δυσκολωτέρα ἀπὸ τὴν εὕρεσιν τῶν ῥιζῶν, διότι οἱ διαιρέται τοῦ βαθμοῦ ν εἶναι *ἐν γένει* Σ_μ^ν καὶ ἡ ἐξίσωσις, ποὺ θά μας ὁρίσῃ ἕνα τυχόντα συντελεστὴν ἑνὸς ἀπὸ τοὺς Σ_μ^ν αὐτοὺς διαιρέτας, θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ *ἐν γένει* τοῦ βαθμοῦ Σ_μ^ν· ἔχομεν δέ: $\Sigma_\mu^1=\Sigma_\mu^{\mu-1}=\mu$, ἀλλὰ οἱ $\Sigma_\mu^2=\Sigma_\mu^{\mu-2}$, $\Sigma_\mu^3=\Sigma_\mu^{\mu-3},\ldots$ προχωροῦν ὁλονὲν αὐξάνοντες, ἕως τὸ $\Sigma_\mu^{\frac{\mu}{2}}$, ἂν μ ἀρτιον καὶ ἕως τὸ $\Sigma_\mu^{\frac{\mu-1}{2}}$, ἂν μ περιττόν. Ἤδη δὲ διὰ τὸ Σ_μ^2 ἔχομεν: $\Sigma_\mu^2=\frac{\mu(\mu-1)}{2}>\mu$ ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ $\mu>3$ καὶ πέραν. Ὥστε μόνον εἰς τὴν γ′-βάθμιον ἐξίσωσιν ἡ δυσκολία εἶναι ἡ ἰδία· διὰ τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἡ δυσκολία διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν β′-βαθμίων παραγόντων εἶναι μεγαλυτέρα· καὶ ἀκόμη μεγαλυτέρα διὰ τὴν τῶν παραγόντων ἀνωτέρου βαθμοῦ.

Νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ α′ μέθοδος εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ 3ου βαθμοῦ: $x^3+px+q=0$. (*Λύσις*: $P^3+pP+q=0$, $Q=-\frac{q}{P}$)· καὶ ἡ β′μέθοδος διὰ τοὺς β′-βαθμίους παράγοντας εἰς τὴν τοῦ 4ου: $x^4+px^2+qx+r=0$. (Εἰς αὐτὴν συμβαίνει ἡ ἐξίσωσις τοῦ 6ου βαθμοῦ, ποὺ ὁρίζει τοὺς β′-βαθμίους παράγοντας, νὰ εἶναι 3ου βαθμοῦ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου: $(P^2)^3+2p(P^2)^2+(p^2-4r)P^2-q^2=0$, $Q=\frac{P^3+pP-q}{2P}$).

η′) *Πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν καὶ ἰδιότητες τῶν ὁμογενῶν πολυωνύμων.*

260. Ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον πολλῶν μεταβλητῶν : $\Pi(x,y,z,...)$ ἔχει προφανῶς *τόσας πρώτας παραγώγους, ὅσα εἶναι τὰ γράμματα, ποὺ περιέχει.* Διότι εἰμποροῦμεν π. χ. νὰ θεωρήσωμεν εἰς αὐτὸ τὰ γράμματα y,z,... *ὅλα σταθερὰ* καὶ νὰ μεταβάλλωμεν *μόνον τὸ x*· τότε τὸ $\Pi(x,y,z,...)$ καταντᾷ πολυώνυμον μόνον τοῦ x· ἔχει λοιπὸν μίαν πρώτην παράγωγον *πρὸς τὸ x*· ἐπίσης, ἂν θεωρήσωμεν *σταθερὰ* τὰ x,z,... καὶ μεταβάλλωμεν *μόνον τὸ y*, εὑρίσκομεν μίαν πρώτην παράγωγον *πρὸς τὸ y*· καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰς διαφόρους αὐτὰς παραγώγους τὰς λέγομεν *μερικὰς (πρὸς x, πρὸς y,...)* καὶ πρὸς διάκρισιν τὰς γράφομεν μ᾽ ἕνα δείκτην : $\Pi'_x(x,y,z,...)$, $\Pi'_y(x,y,z,...)$, $\Pi'_z(x,y,z,...)$,...

261. Ὁμοίως ἔχομεν καὶ πρώτας μερικὰς παραγώγους τοῦ $\Pi_x'(x,y,z,...)$ (πρὸς x,y,...), τοῦ $\Pi_y'(x,y,z,...)$, κτλ. Αὗται λέγονται *δεύτεραι μερικαὶ* παράγωγοι τοῦ $\Pi(x,y,z...)$ καὶ γράφονται : $\Pi''_{xx}(x,y,z,...)$ ἢ $\Pi''_{x^2}(x,y,z,...)$, $\Pi''_{xy}(x,y,z,...)$, $\Pi''_{yx}(x,y,z,...)$, $\Pi''_{yy}(x,y,z,...)$ ἢ $\Pi''_{y^2}(x,y,z,...)$ κτλ. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι εἶναι (ἀπὸ ταὐτότητα) : $\Pi''_{xy}=\Pi''_{yx}$, $\Pi''_{xz}=\Pi''_{zx}$ κτλ. δηλ. Εἴτε πρῶτα παραγωγίσωμεν τὸ $\Pi(x,y,z,...)$ πρὸς τὸ x καὶ ἔπειτα τὴν $\Pi'_x(x,y,z,...)$ πρὸς y, εἴτε πρῶτα τὸ $\Pi(x,y,z,....)$ πρὸς y καὶ ἔπειτα τὴν $\Pi'_y(x,y,z,...)$ πρὸς x, εὑρίσκομεν πάντοτε τὸ ἴδιον ἐξαγόμενον.

262. Γενικῶς, ἔχομεν *μερικὰς* παραγώγους *διαφόρων τάξεων* τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x,y,z,\ldots)$. Καὶ εἶναι γενικῶς :

$$\Pi^{(\varkappa+\lambda+\varrho+\ldots)}_{x^\varkappa.y^\lambda.z^\varrho\ldots}(x,y,z,..)=\Pi^{(\varkappa+\lambda+\varrho+\ldots)}_{y^\lambda x^\varkappa z^\varrho\ldots}(x,y,z..)=\Pi^{(\varkappa+\lambda+\varrho+\ldots)}_{y^\lambda z^\varrho x^\varkappa\ldots}(x,y,z,..)=\ldots$$

δηλ. *Ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν* **διαδοχικῶν** *παραγωγίσεων πρὸς x,y,z... δὲν ἐπιφέρει καμίαν μεταβολὴν τῆς τελικῆς παραγώγου.*

Παράδειγμα. $\Pi(x,y)$ (ἢ ἁπλῶς Π)$=4x^3+2x^2y+3y^3$.

$\Pi'_x=12x^2+4xy$, $\Pi'_y=2x^2+9y^2$. $\Pi''_{x^2}=24x+4y$, $\Pi''_{xy}=4x$, $\Pi''_{yx}=4x$, $\Pi''_{y^2}=18y$ (ὥστε πραγματικῶς : $\Pi''_{xy}=\Pi''_{yx}$). $\Pi'''_{x^3}=24$, $\Pi'''_{x^2y}=4$, $\Pi'''_{yx^2}=4$, $\Pi'''_{xy^2}=0$, $\Pi'''_{x^2y}=0$, $\Pi_{y^3}=18$ (ὥστε πραγματικῶς : $\Pi'''_{x^2y}=\Pi'''_{yx^2}$ καὶ $\Pi'''_{xy^2}=\Pi'''_{y^2x}$).

263. Ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον **δύο** ἢ *πολλῶν* μεταβλητῶν : $\Pi(x,y\ldots)$ λέγεται *ὁμογενὲς* πρὸς τὰ γράμματα $x,y,\ldots$, *ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ ἰδίου βαθμοῦ πρὸς αὐτά. Βαθμὸς* δὲ τῆς ὁμογενείας του λέγεται ὁ *κοινὸς* αὐτὸς βαθμός. Κάθε λοιπὸν τοιοῦτο πολυώνυμον βαθμοῦ ὁμογενείας μ εἶναι τῆς μορφῆς : $\Sigma A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho\ldots$, ὅπου $\varkappa+\lambda+\varrho\ldots=\mu$. Π.χ. τοιοῦτον εἶναι τό : $9x^5y^3+3x^4y^4-14xy^7$ (βαθμὸς ὁμογενείας ὁ 8).

264. **Θεώρημα τοῦ Ὄϋλερ.** *Κάθε ὁμογενὲς πολυώνυμον, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν βαθμὸν τῆς ὁμογενείας του, γίνεται ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων του, ὅταν ἡ καθεμία πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ γράμμα τοῦ δείκτου της.*

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν π.χ. (διὰ τρία γράμματα) : $\Pi(x,y,z)=\Sigma A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho$· ὥστε : $\Pi'_x=\Sigma\varkappa A x^{\varkappa-1}y^\lambda z^\varrho$, $\Pi'_y=\Sigma\lambda A x^\varkappa y^{\lambda-1}z^\varrho$, $\Pi'_z=\Sigma\varrho A x^\varkappa y^\lambda z^{\varrho-1}$· καὶ ἑπομένως : $x\Pi'_x=\Sigma\varkappa A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho$, $y\Pi'_y=\Sigma\lambda A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho$,

$z\Pi'_z=\Sigma\varrho A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho$· ὥστε :

$$x\Pi'_x+y\Pi'_y+z\Pi'_z=\Sigma(\varkappa+\lambda+\varrho)A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho=\mu\Sigma A x^\varkappa y^\lambda z^\varrho=\mu\Pi.$$

Εἶναι λοιπὸν πραγματικῶς :

$$x\Pi_x(x,y,z)+y\Pi_y(x,y,z)+z\Pi_z(x,y,z)=\mu\Pi(x,y,z).$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ δι' ὁσαδήποτε γράμματα.

265. ***Παρατήρησις.*** Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις (διὰ 2 γράμματα) :

$$x^2\Pi''_{x^2}+2xy\Pi''_{xy}+\Pi''_{y^2}=\mu(\mu-1)\Pi.$$

καὶ ἀνάλογοι πρὸς αὐτὴν διὰ τὰς μερικὰς παραγώγους τῶν ἑπομένων τάξεων καὶ διὰ περισσότερα γράμματα.

θ') Ἰδιότητες τῶν πολλαπλῶν ριζῶν καὶ συνθῆκαι τῆς ὑπάρξεώς των.

266. Πλὴν τῆς ἰδιότητος, ποὺ ἀναφέρει ἡ § 246, αἱ *πολλαπλαῖ ρίζαι* ἑνὸς πολυωνύμου Π(x) ἔχουν και τὴν ἑξῆς :

Θεώρημα. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἑνὸς πολυωνύμου καὶ τῆς παραγώγου του εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων του μὲ τοὺς ἐκθέτας ὅλους ἐλαττωμένους κατὰ μίαν μονάδα.*

Ἀπόδειξις. Ἂν εἶναι $\Pi(x)=A(x-\alpha)^{\kappa}(x-\beta)^{\lambda}\ldots$, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 229, τὸ $\Pi'(x)$ θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας $(x-\alpha)^{\kappa-1}$, $(x-\beta)^{\lambda-1},\ldots$ Ἑπομένως ὁ μ.κ.δ. τῶν Π(x), Π΄(x) θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον *ὅλων* αὐτῶν τῶν παραγόντων. (Οἱ παράγοντες τοῦ Π(x), ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς *ἁπλᾶς* ρίζας, ἐξαφανίζονται εἰς τὸν μ.κ.δ. διότι, ἂν π. χ. $\kappa=1$, θὰ εἶναι $\kappa-1=0$ καὶ ὁ παράγων λοιπὸν $(x-\alpha)^0$ τοῦ μ.κ δ. καταντᾷ $=1$).

267. ***Πόρισμα.*** Ἂν τὸ Π(x) εἶναι βαθμοῦ μ καὶ κ τὸ πλῆθος *τῶν διαφορετικῶν* ριζῶν του, ὁ μ.κ.δ. τῶν Π(x) καὶ Π΄(x) εἶναι βαθμοῦ μ—κ.

268. ***Συνθήκη τῆς ὑπάρξεως πολλαπλῶν ριζῶν.*** Μᾶς χρησιμεύει εἰς πολλὰ ζητήματα νὰ εὕρωμεν, *ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\Pi(x)=0$, διὰ νὰ ἔχῃ δύο ἴσας ρίζας.* Αὐτὸ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

269. ***Α΄ Μέθοδος.*** Τὸ Π(x) καὶ τὸ Π΄(x) θὰ ἔχουν τότε (§ 246) μίαν *κοινὴν* ρίζαν· ἀρκεῖ λοιπὸν *νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν Π(x), Π΄(x) καὶ ὅταν φθάσωμεν εἰς ἕνα διαιρέτην Δ(x) πρωτοβάθμιον, νὰ ἐξισώσωμεν μὲ τὸ 0 τὸ ὑπόλοιπον Υ· ἡ σχέσις αὐτὴ Υ=0 εἶναι ἡ ζητουμένη μεταξὺ τῶν συντελεστῶν, καὶ διπλῆ ρίζα τοῦ Π(x) εἶναι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως : Δ(x)=0.*

270. ***Β΄ Μέθοδος.*** Εὐκολώτερα εὑρίσκεται ἡ συνθήκη αὐτὴ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁμογενῶν πολυωνύμων.

Ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον : $\Pi(x)\equiv A_0x^{\mu}+\ldots+A_{\mu}$ θέσωμεν, ὅπου x, $\frac{x}{y}$ καὶ κατόπιν τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ y^{μ}, εὑρίσκομεν τὸ ὁμογενὲς πολυώνυμον :

$$\Pi(x,y)=A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}.y+A_2x^{\mu-2}.y^2+\ldots+A_{\mu-1}xy^{\mu-1}+A_{\mu}y^{\mu}\cdot$$

ἔχομεν δὲ (§ 264) : $x.\Pi'_x(x,y)+y.\Pi'_y(x,y)=\mu\Pi(x,y)$ (α). Ἂν τώρα θέσωμεν εἰς τὰ Π(x,y), $\Pi'_x(x,y)$, ἀντὶ y τὴν μονάδα 1, ἐπανευρίσκομεν προφανῶς τὰ $\Pi(x)$, $\Pi'(x)$· θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἰσότητα (α), $x=\alpha$ καὶ $y=1$, ὅπου α ἡ διπλῆ ρίζα τοῦ $\Pi(x)$, εὑρίσκομεν :

$$\alpha\Pi'_x(\alpha,1)+\Pi'_y(\alpha,1)=\mu\Pi(\alpha,1)\cdot$$

ἀλλ' ἀφοῦ τὸ x εἶναι *διπλῆ* ρίζα, ἔχομεν : $\Pi(\alpha,1)=0$, $\Pi'_x(\alpha,1)=0$ (§ 246)· ἑπομένως εἶναι καὶ $\Pi'_y(\alpha,1)=0$· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν διὰ $x=\alpha$, $y=1$, τὰ $\Pi'_x(x,y)$ καὶ $\Pi'_y(x,y)$ μηδενίζωνται, μηδενίζεται καὶ τὸ $\Pi(x,y)$ καὶ ἑπομένως τὸ α εἶναι διπλῆ ρίζα του. Ὥστε: *Ἀρκετὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ὁ x διπλῆ ρίζα τοῦ Π(x), εἶναι διὰ $x=\alpha$, $y=1$, νὰ ἔχωμεν συγχρόνως :* $\Pi'_x(x,y)=0$, $\Pi'_y(x,y)=0$, δηλ. *νὰ ἔχουν αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις, διὰ $y=1$, μίαν κοινὴν ρίζαν.*

Παράδειγμα : $\Pi(x)\equiv x^3+px+q$. Τότε : $\Pi(x,y)=x^3+pxy^2+qy^3$, $\Pi'_x(x,y)=3x^2+py^2$, $\Pi'_y(x,y)=2pxy+3qy^2$. Ἔχομεν λοιπὸν (διὰ $y=1$) τὰς δύο ἐξισώσεις : $3x^2+p=0$, $2px+3q=0$· ἀπὸ τὴν β′ ἔχομεν : $x=-\dfrac{3q}{2p}$· καὶ ἂν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x τὴν θέσωμεν εἰς τὴν α′ (ἀφοῦ θέλομεν νὰ ὑπάρχη κοινὴ ρίζα), εὑρίσκομεν τὴν συνθήκην : $\dfrac{p^3}{27}+\dfrac{q^2}{4}=0$ (1). Ἡ *διπλῆ* ρίζα εἶναι λοιπὸν ἡ $x=-\dfrac{3q}{2p}$.

Ἡ *ἁπλῆ* τότε ρίζα θὰ εἶναι *πραγματικὴ* (§ 237) καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῆς ἁπλῆς καὶ τῶν δύο ἴσων εἶναι $=0$ (§ 251), συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἁπλῆ θὰ εἶναι : $\dfrac{3q}{p}$.— Ἡ ἐξίσωσις π. χ. $x^3-3\alpha^2x\pm2\alpha^3$, ποὺ οἱ συντελεσταί της ἐπαληθεύουν τὴν συνθήκην (1), ἔχει τὴν διπλῆν ρίζαν : $x=\pm\alpha$ καὶ τὴν ἁπλῆν : $x=\mp2\alpha$. Ἡ δέ : $x^3-4x^2+5x-2=0$ τὴν διπλῆν : $x=1$.

271. ***Γενίκευσις τῶν προηγουμένων μεθόδων.*** Ἐπειδὴ κάθε ρίζα πολλαπλότητος λ εἶναι ρίζα τῶν $\Pi(x)$, $\Pi'(x)$, . . ., $\Pi^{(\lambda-1)}(x)$ καὶ ἀντιστρόφως (§ 247), *πρέπει καὶ ἀρκεῖ, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις: $\Pi(x)=0$ μίαν ρίζαν πολλαπλότητος λ, νὰ ἔχουν αἱ ἐξισώσεις: $\Pi(x)=0, \Pi'(x)=0$, ..., $\Pi^{(\lambda-1)}(x)=0$ μίαν κοινὴν ρίζαν.*

Μὲ τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα τὸ ζήτημα πάλιν ἁπλοποιεῖται. Κατασκευάζομεν πάλιν, καθὼς πρίν, ἀπὸ τὸ $\Pi(x)$ τὸ ὁμογενὲς πολυώνυμον $\Pi(x,y)$· ἐπειδὴ καὶ αἱ παράγωγοί του $\Pi'_x(x,y)$, $\Pi'_y(x,y)$ εἶναι προφανῶς ὁμογενῆ πολυώνυμα, *βαθμοῦ ὅμως ὁμογενείας μ—1*, θὰ ἔχωμεν τὰς ταὐτότητας :

$x\Pi'_x+y\Pi'_y=\mu\Pi$, $x\Pi_{x^2}+y\Pi_{xy}=(\mu-1)\Pi_x$, $x\Pi_{yx}+y\Pi_{y^2}=$ $=(\mu-1)\Pi_y$· ἂν λοιπὸν ὀνομάσωμεν α μίαν *τριπλῆν* π.χ. ρίζαν τοῦ

π(. x) = π( ) + y(.)

προθ. [illegible] [illegible] [illegible]

§ 265

$\Pi(x)$ καὶ θέσωμεν εἰς τὰς ἰσότητας αὐτὰς $x=\alpha$, $y=1$, εὑρίσκομεν: $\alpha\Pi'_x(\alpha,1)+\Pi_y(\alpha,1)=\mu\Pi(\alpha,1)$, $\alpha\Pi_{x^2}(\alpha,1)+\Pi_{xy}(\alpha,1)=(\mu-1)\Pi_x(\alpha,1)$, $\alpha\Pi_{yx}(\alpha,1)+\Pi_{y^2}(\alpha,1)=(\mu-1)\Pi_y(\alpha,1)$. Εἶναι ὅμως $\Pi(\alpha,1)=0$, $\Pi_x(\alpha,1)=0$, $\Pi_{x^2}(\alpha,1)=0$, ἑπομένως αἱ προηγούμεναι ἰσότητες μᾶς δίδουν: $\Pi_y(\alpha,1)=0$ καὶ $\Pi_{xy}(\alpha,1)\equiv\Pi_{yx}(\alpha,1)=0$, $\Pi_{y^2}(\alpha,1)=0$· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν διὰ $x=0$, $y=1$, εἶναι: $\Pi_{x^2}(\alpha,1)=0$, $\Pi_{xy}(\alpha,1)=0$, $\Pi_{y^2}(\alpha,1)=0$, θὰ εἶναι καί: $\Pi_x(\alpha,1)=0$, $\Pi_y(\alpha,1)=0$, $\Pi(\alpha,1)=0$· ὥστε: *Κάθε τιμὴ $x=\alpha$, ποὺ ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις (1): $\Pi(x)=0$, $\Pi'(x)=0$, $\Pi''(x)=0$, ἐπαληθεύει καὶ τὰς (2): $\Pi_{x^2}(x,1)=0$, $\Pi_{xy}(x,1)=0$, $\Pi_{y^2}(x,1)=0$· καὶ ἀντιστρόφως. Καὶ ἑπομένως αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἀρκεταὶ συνθῆκαι, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ $\Pi(x)=0$ μίαν τριπλῆν ῥίζαν, εἶναι νὰ ἔχουν αἱ ἐξισώσεις (2) μίαν κοινὴν ῥίζαν.*

Αἱ δὲ συνθῆκαι αὗται εἶναι προφανῶς *δύο*.

Παράδειγμα. $\Pi(x)\equiv x^4+px^2+qx+r=0$. Ἔχομεν τώρα:

$$\Pi(x,y)=0,$$

$$\Pi'_x=4x^3+2pxy^2+qy^3,\quad \Pi_y=2px^2y+3qxy^2+4ry^3,$$

$$\Pi'_{x^2}=12x^2+2py^2,\ \Pi'_{xy}=4pxy+3qy^2,\ \Pi''_{y^2}=2px^2+6qxy+12ry^2\cdot$$

θέτοντες τώρα: $y=1$ εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς ἔχομεν τὰς 3 ἐξισώσεις:

$$12x^2+2p=0,\quad 4px+3q=0,\quad 2px^2+6qx+12r=0\cdot$$

ἡ β′ μᾶς δίδει: $x=-\dfrac{3q}{4p}$ καὶ ἡ τιμὴ αὐτὴ παρέχει, ἂν εἰσαχθῇ εἰς τὴν α′ καὶ τὴν γ′, τὰς δύο συνθήκας τῆς τριπλῆς ῥίζης: $\dfrac{27}{8}q^2=12pr=-p^3$.— Π. χ. ἡ ἐξίσωσις: $16x^4-24x^2+16x-3=0$, ἢ $x^4-\dfrac{3}{2}x^2+x-\dfrac{3}{16}=0$, ποὺ ἐπαληθεύει τὰς προηγουμένας δύο συνθήκας, ἔχει τὴν τριπλῆν ῥίζαν: $x=\dfrac{1}{2}$.

Ἐννοεῖται, ὅτι μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκονται καὶ αἱ συνθῆκαι μιᾶς τετραπλῆς, . . ., πολλαπλῆς ἐν γένει ῥίζης.

ι′) Ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου εἰς ἄλλα περιέχοντα τοὺς α′-βαθμίους παράγοντας τῆς ἰδίας πολλαπλότητος.

272. Ἂν $\Pi(x)$ εἶναι τὸ πολυώνυμον καὶ ὀνομάσωμεν $\Pi_1(x)$ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν *ἁπλῶν* πρωτοβαθμίων παραγόντων του (δηλ. τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἁπλᾶς ῥίζας), $\Pi_2(x)$ ὅλων τῶν διπλῶν, λαμβανομένων ὅμως μὲ ἐκθέτην 1, $\Pi_3(x)$ τῶν τριπλῶν μὲ ἐκθέτην πάλιν 1,

...,Π_ν (x) τῶν ν-πλῶν μὲ ἐκθέτην 1, θὰ ἔχωμεν : $\Pi=\Pi_1.\Pi_2^2.\Pi_3^3......\Pi_\nu^\nu$.
Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸν μ. κ. δ. τῶν Π(x) καὶ Π′(x)· ἂν εἶναι πρῶτα μεταξύ των, τὸ Π ἔχει μόνον ἁπλᾶς ρίζας καὶ θὰ εἶναι $\Pi=\Pi_1$· ἂν ὄχι, ὁ μ. κ. δ. των M_1 θὰ εἶναι $=\Pi_2\Pi_3^2\Pi_4^3....\Pi_\nu^{\nu-1}$.

Ἄς ζητήσωμεν ἔπειτα τὸν μ.κ.δ. τῶν M_1 καὶ M'_1 (τῆς παραγώγου τοῦ M_1)· ἂν εἶναι πρῶτα μεταξύ των, τὸ M_1 ἔχει μόνον ἁπλᾶς ρίζας, τὸ Π μόνον ἁπλᾶς καὶ διπλᾶς καὶ θὰ εἶναι $M_1=\Pi_2$· ἂν ὄχι, θὰ ἔχωμεν πάλιν ἕνα μ.κ.δ. M_2 καὶ θὰ εἶναι $M_2=\Pi_3\Pi_4^2\Pi_5^3....\Pi_\nu^{\nu-2}$. Θὰ ἐξακολουθήσωμεν μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς ἓν πολυώνυμον M_ϱ *πρῶτον πρὸς τὴν παράγωγόν του* M'_ϱ. Τότε τὸ Π δὲν ἔχει ρίζας πολλαπλότητος *ἀνωτέρας τοῦ* $\varrho+1$ καὶ θὰ ἔχωμεν :
$\Pi=\Pi_1.\Pi_2^2...\Pi_{\varrho+1}^{\varrho+1}$, $M_1=\Pi_2\Pi_3^2...{}^{\varrho}_{\varrho+1}$, $M_2=\Pi_3\Pi_4^2...\Pi_{\varrho+1}^{\varrho-1}..,M_\varrho=\Pi_{\varrho+1}$.

Ἄν τώρα διαιρέσωμεν τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ πολυώνυμα : Π, M_1, M_2, ...,M_ϱ διὰ τοῦ ἑπομένου του, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς σειρὰν ἀκεραίων πολυωνύμων : $N_1=\frac{\Pi}{M_1}=\Pi_1\Pi_2...\Pi_{\varrho+1}$, $N_2=\frac{M_1}{M_2}=\Pi_2\Pi_2\Pi_{\varrho+1}$,
$N_3=\frac{M_2}{M_3}=\Pi_3\Pi_4..\Pi_{\varrho+1},..N_\varrho=\Pi_\varrho\,\Pi_{\varrho+1}$, ἔχομεν δὲ καὶ $M_\varrho=\Pi_{\varrho+1}$.
Τέλος μὲ νέας διαιρέσεις τῶν $N_1,N_2,...,N_\varrho,M_\varrho$, τοῦ καθενὸς μὲ τὸ ἑπόμενόν του, εὑρίσκομεν :

$$\frac{N_1}{N_2}=\Pi_1,\quad \frac{N_2}{N_3}=\Pi_2,\ldots,\frac{N_\varrho}{M_\varrho}=\Pi_\varrho,\ \text{ἔχομεν δὲ καί}: M_\varrho=\Pi_{\varrho+1}.$$

Ἀφοῦ λοιπὸν πρῶτα εὕρωμεν μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὰ $\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_{\varrho+1}$, *ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως* $\Pi(x)=0$ *ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑξῆς :* $\Pi_1(x)=0$, $\Pi_2(x)=0,...,\Pi_{\varrho+1}(x)=0$. *ποὺ δὲν ἔχουν, παρὰ μόνον ἁπλᾶς ρίζας. Τῆς α′ αἱ ρίζαι εἶναι αἱ ἁπλαῖ τοῦ* $\Pi(x)$, *τῆς β′ αἱ διπλαῖ τοῦ* $\Pi(x)$,..., *τῆς τελευταίας αἱ πολλαπλαῖ τῆς τάξεως* $\varrho+1$ *τοῦ* $\Pi(x)$.

273. ***Κανών*** *: Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως, ποὺ ἔχει πολλαπλᾶς ρίζας, εἰς τὴν λύσιν ἄλλων* (*κατωτέρων βαθμῶν*), *ποὺ ἔχουν μόνον ἁπλᾶς, εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. τοῦ α′ μέλους της καὶ τῆς παραγώγου του, τὸν μ.κ.δ. τοῦ προηγουμένου μ.κ.δ. καὶ τῆς παραγώγου του κτλ., ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς ἓν πολυώνυμον πρῶτον πρὸς τὴν παράγωγόν του· διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ ἀρχικὸν πολυώνυμον διὰ τοῦ α′ μ.κ.δ., τὸν α′ μ.κ.δ. διὰ τοῦ β′ μ.κ.δ. κτλ. Τέλος διαιροῦμεν πάλιν τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων αὐτῶν διὰ τοῦ ἑπομένου του καὶ ἐξισώνομεν μὲ τὸ 0 τὰ νέα πηλίκα καὶ τὸν τελευταῖον μ.κ.δ. Αἱ ἐξισώ-*

σεις, ποὺ παράγονται τότε, μᾶς δίδουν ἡ α' τὰς ἁπλᾶς ῥίζας τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως, ἡ β' τὰς διπλᾶς, ἡ γ' τὰς τριπλᾶς κτλ. καὶ ἡ τελευταία τὰς τῆς ἀνωτέρας πολλαπλότητος.

Παράδειγμα. $\Pi \equiv x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0$. Εὑρίσκομεν διαδοχικῶς: $M_1 = x^3 - x^2 - x + 1$, $M_2 = x - 1$· ὥστε: $\Pi = \Pi_1 \Pi_2^2 \Pi_3^3$·
$N_1 = \frac{\Pi}{M_1} = x^4 + x^3 - x - 1$, $N_2 = \frac{M_1}{M_2} = x^2 - 1$, $\Pi_2 = x - 1$·
$\frac{N_1}{N_2} = \Pi_1 = x^2 + \ + 1$, $\frac{N_2}{M_2} = \Pi_2 = x + 1$, $M_2 = x - 1$.

Ὥστε ἡ λύσις τῆς $\Pi(x) = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν:
$x^2 + x + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$· καὶ ἡ $\Pi(x) = 0$ ἔχει λοιπὸν δύο ἁπλᾶς φανταστικὰς συζυγεῖς ῥίζας: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, μίαν *διπλῆν*: τὴν -1 καὶ μίαν *τριπλῆν*: τὴν $+1$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις: $x^\mu - 1 = 0$ καὶ γενικώτερα ἡ: $\alpha x^\mu + \beta = 0$ $(\beta \neq 0)$ δὲν ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας. $(\beta \neq 0)$

2) Συνθήκη διὰ τὴν ὕπαρξιν διπλῆς ῥίζης τῆς πλήρους ἐξισώσεως τοῦ γ' βαθμοῦ: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

((Απ. συνθήκη: $4q^3 + 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 27r^2 = 0$· ῥίζα διπλῆ: $x_2 = \frac{pq - 9r}{6q - 2p^2}$, ῥίζα ἁπλῆ: $x_1 = -p - 2x_2$).

Νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ προηγουμένη θεωρία εἰς τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις:

3) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$.

4) $x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$.

5) $x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^5 + 612x^2 - 108x - 432 = 0$.

6) $x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0$.

ια') Ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας.

274. Ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ μυοστοῦ βαθμοῦ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων προϋποθέτει τὴν ὕπαρξιν μ ῥιζῶν. Ἀπεδείξαμεν ἤδη (§ 242), ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ῥιζῶν ἑνὸς πολυωνύμου δὲν εἰμπορεῖ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν βαθμόν του. Ἂν λοιπὸν βεβαιωθῶμεν, ὅτι *κάθε* πολυώνυμον ἔχει *πάντως μίαν τοὐλάχιστον* ῥίζαν,

τότε, κατὰ τὴν § 243, *κάθε πολυώνυμον θὰ ἔχῃ ἀκριβῶς τόσας ρίζας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ βαθμός του.*

275. ***Θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ D'Alembert.*** *Κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συντελεστὰς τυχόντας ἀριθμοὺς ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ρίζαν.*

(Τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ρίζης διὰ τὴν μερικὴν περίπτωσιν ἑνὸς πολυωνύμου μὲ *πραγματικοὺς* συντελεστὰς καὶ *περιττοῦ* βαθμοῦ (*μιᾶς ὅμως μόνον, ὄχι περισσοτέρων*) μᾶς τὴν ἐξασφαλίζει τὸ θεώρημα τῆς § 237).

276. *Ἱστορικὴ σημείωσις.* Πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ἐδημοσίευσεν ὁ D'Alembert· κατόπιν ἄλλας ὁ Euler καὶ ὁ Lagrange. Ὁ δὲ Gauss ἐξέθεσε (1799) τὴν πρώτην τελείως ἀκριβῆ ἀπόδειξιν μὲ κριτικὴν συγχρόνως τῶν προηγουμένων ἀποδείξεων. Ὁ ἴδιος εὗρε καὶ β' καὶ γ' ἀπόδειξιν (1815, 1816), ἐπανῆλθεν ὅμως πάλιν εἰς τὴν α' (1849). Ἄλλην ἀπόδειξιν ἔδωσε καὶ ὁ Cauchy (1821), τὴν ὁποίαν ἐπεξειργάσθη λεπτομερέστερον ὁ Sturm (*Στύρμ*). Ἀργότερα εὑρέθησαν καὶ ἄλλαι(¹). Ἐδῶ θὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Cauchy.

277. ***Βοηθητικὸν θεώρημα.*** Ἂν x_0 εἶναι μία τυχοῦσα τιμὴ τοῦ x, ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x_0)$ εἶναι $\neq 0$ (ἄλλως *θὰ ὑπῆρχε* ρίζα, ἡ x_0). Ἔχομεν (§ 224):

$$\Pi(x_0+\varepsilon)=\Pi(x_0)+\varepsilon\Pi'(x_0)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\Pi''(x_0)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\Pi^{(\mu)}(x_0).$$

Δυνατὸν εἶναι *μερικαὶ* ἀπὸ τὰς παραγώγους εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν νὰ εἶναι $=0$, ὄχι ὅμως *ὅλαι* (διότι τότε θὰ ἦτο καὶ $\Pi(x_0+\varepsilon)-\Pi(x)=0$ διὰ *κάθε* ε καὶ ἡ παράστασις λοιπὸν $\Pi(x_0+\varepsilon)-\Pi(x_0)$, *ποὺ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μ βαθμοῦ πρὸς τὸ ε*, θὰ εἶχεν ἀπείρους ρίζας, πρᾶγμα ἀδύνατον, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 242). Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν γενικῶς, ὅτι: $\Pi'(x_0)=0$, $\Pi''(x_0)=0,\ldots,\Pi^{(\lambda-1)}(x_0)=0$· τότε θὰ ἔχωμεν: $\Pi(x_0+\varepsilon)-\Pi(x_0)=\frac{\varepsilon^\lambda}{\lambda!}\Pi^{(\lambda)}(x_0)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\Pi^{(\mu)}(x_0)$,

ἢ καί: $\frac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}=1+\varepsilon^\lambda\cdot\frac{\Pi^{(\lambda)}(x_0)}{\lambda!\Pi(x_0)}+\varepsilon^{\lambda+1}\cdot\frac{\Pi^{(\lambda+1)}(x_0)}{(\lambda+1)!\Pi(x_0)}+\ldots+\varepsilon^\mu\frac{\Pi^{(\mu)}(x_0)}{\mu!\Pi(x_0)}$,

ἑπομένως καί:

---

(1) Ἀκόμη καὶ ὁ *Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμὸς* μᾶς δίδει μίαν (ἔμμεσον) ἀπόδειξιν (διὰ πολυώνυμον μὲ *πραγματικοὺς συντελεστὰς*) διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ὁλοκληρώσεων εἰς ἓν διπλοῦν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ἰδιαιτέρας μορφῆς (Gauss) (Βλέπε: *Ὁλοκλ. Λογισμὸν Ἰ. Χατζιδάκη*, σελ. 288–290).

$$\left|\frac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}\right| \leq \left|1+\varepsilon^{\lambda}\frac{\Pi^{(\lambda)}(x_0)}{\lambda!\,\Pi(x_0)}\right| + \left|\varepsilon^{\lambda+1}\frac{\Pi^{(\lambda+1)}(x_0)}{(\lambda+1)!\,\Pi(x_0)}\right| + \ldots + \left|\varepsilon^{\mu}\frac{\Pi^{(\mu)}(x_0)}{\mu!\,\Pi(x_0)}\right|.$$

Ἂν τώρα θέσωμεν : $\varepsilon = \varrho(\text{συν}\,\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$ καὶ γενικῶς :

$$\frac{\Pi^{(k)}(x_0)}{k!\,\Pi(x_0)} = r_k\,(\text{συν}\vartheta_k + i\,\text{ημ}\vartheta_k) \quad (k=\lambda,\ \lambda+1, \ldots, \mu),$$

εὑρίσκομεν : $\left|\dfrac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}\right| \leq \left|1+\varrho^{\lambda}\, r_{\lambda}\,[(\text{συν}(\lambda\varphi+\vartheta_{\lambda}) + i\,\text{ημ}(\lambda\varphi+\vartheta_{\lambda})]\right| +$

$$+ r_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + r_{\lambda+2}\varrho^{\lambda+2} + \ldots + r_{\mu}\,.\,\varrho^{\mu} \qquad (\alpha)$$

(*παρελείψαμεν* δηλ. εἰς τοὺς ὅρους, ἀπὸ τὸν δείκτην $\lambda+1$ καὶ πέραν, τοὺς παράγοντας : $|\text{συν}(k\varphi+\vartheta_k) + i\,\text{ημ}(k\varphi+\vartheta_k)|$ $(k=\lambda+1, \ldots, \mu)$, ποὺ εἶναι $=1$).

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι : $\lambda\varphi+\vartheta_{\lambda} = \pi$, ποὺ μᾶς δίδει : $\varphi = \dfrac{\pi-\vartheta_{\lambda}}{\lambda}$ καὶ ὅτι : $|\varrho^{\lambda} r_{\lambda}| < 1$, πού μας δίδει : $\varrho < \dfrac{1}{|\varrho_{\lambda}|^{\frac{1}{\lambda}}}$.

Ἡ σχέσις (α) γίνεται τότε :

$$\left|\frac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}\right| \leq 1 - r_{\lambda}\varrho^{\lambda} + r_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + r_{\lambda+2}\,.\,\varrho^{\lambda+2} + \ldots + r_{\mu}\,.\,\varrho^{\mu},$$

ἢ καί :

$$\left|\frac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}\right| \leq 1 - r_{\lambda}\,.\,\varrho^{\lambda}\left[1 - \frac{r_{\lambda+1}}{r_{\lambda}}\,.\,\varrho - \frac{r_{\lambda+2}}{r_{\lambda}}\,.\,\varrho^2 - \ldots - \frac{r_{\mu}}{r_{\lambda}}\varrho^{\mu-\lambda}\right]. \quad (r_{\lambda} \gtrless 0).$$

Ὑποθέτομεν τώρα περιπλέον, ὅτι ϱ εἶναι *ἀρκούντως μικρὸν* ($<$ ἀπὸ ἕνα κατάλληλον θετικὸν ἀριθμὸν ϱ_0), ὥστε οἱ ὅροι τῆς ἀγκύλης, ποὺ ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὴν μονάδα 1, νὰ ἔχουν ἄθροισμα <1 (§ 234)· τότε θὰ εἶναι : $\left|\dfrac{\Pi(x_0+\varepsilon)}{\Pi(x_0)}\right| < 1$ ἢ $|\Pi(x_0+\varepsilon)| < |\Pi(x_0)|$

$$\left(\text{ὅπου : } \varepsilon = \varrho\left[\text{συν}\left(\frac{\pi-\vartheta_{\lambda}}{\lambda}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi-\vartheta_{\lambda}}{\lambda}\right)\right],\ \varrho<\varrho_0\right).$$

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Διὰ κάθε τιμὴν x_0, ποὺ δίδει $|\Pi(x_0)| > 0$, ὑπάρχει ἓν ὡρισμένον ὅρισμα $\left(\text{τὸ } \dfrac{\pi-\vartheta_{\lambda}}{\lambda}\right)$, διὰ τὸ ὁποῖον κάθε αὔξησις ε τοῦ x ἔχουσα τὸ ὅρισμα αὐτὸ καὶ καταλλήλως μικρὸν μέτρον δίδει μέτρον τῆς τιμῆς τοῦ πολυωνύμου : $|\Pi(x_0+\varepsilon)|$ μικρότερον ἀπὸ τὸ $|\Pi(x_0)|$.

278. **Ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος.** Στηριζόμενοι τώρα εἰς τὴν πρότασιν αὐτὴν ἀποδεικνύομεν τὸ θεώρημά μας ὡς ἑξῆς. Ὁρίζομεν διὰ τὸ $|x|$ ἓν κατώτατον ὅριον P_0 τοιοῦτον, ὥστε διὰ κάθε $|x| > P_0$ νὰ ἔχωμεν : $|\Pi(x)| = \alpha_0 x^{\mu}[1+\sigma]$, ὅπου

$|\sigma|<\frac{1}{2}$. (Αὐτὸ *εἰμπορεῖ* νὰ γίνῃ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 233). Ἂν τότε $|x_1|$ καὶ $|x_2|>|x_1|$ εἶναι τὰ μέτρα δύο τιμῶν τοῦ x, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν προηγουμένην συνθήκην ($|x|>P_0$), θὰ ἔχωμεν:
$\left|\frac{\Pi(x_2)}{\Pi(x_1)}\right|=\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{\mu}\cdot\frac{1+\sigma_2}{1+\sigma_1}>\frac{1}{3}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{\mu}\cdot$ ἑπομένως, διὰ καταλλήλως μεγάλην τιμὴν του κλάσματος $\frac{|x_2|}{|x_1|}$ ἡ *μικροτέρα* ἀπὸ τὰς τιμὰς τοῦ $\Pi(x_2)$, ὅταν $|x_2|$ σταθερόν, θὰ γίνῃ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν *μεγαλυτέραν* τῶν τιμῶν τοῦ $\Pi(x_1)$, ὅταν $|x_1|$ σταθερόν. Κατ' ἀκολουθίαν, κάπου, ἐντὸς τῆς περὶ τὴν ἀρχὴν 0 περιφερείας μὲ ἀκτῖνα $|x_2|$ πρέπει νὰ λαμβάνῃ τὸ $|\Pi(x)|$ τὴν μικροτέραν του τιμήν· ἂν τοιαύτη τιμὴ εἶναι ἡ x_0, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην: $|\Pi(x_0)|=0$, διότι ἄλλως θὰ εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν αὔξησιν τοῦ x_0 μὲ ὡρισμένον ὅρισμα, ποὺ θὰ ἔδιδε τιμὴν < ἀπὸ τὸ $|\Pi(x_0)|$, πρᾶγμα ἀδύνατον. *Ὥστε εἶναι* $|\Pi(x_0)|=0$ *καὶ ἑπομένως καὶ* $\Pi(x_0)=0$. Τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀπεδείχθη.(1)

278. ***Παρατηρήσεις.*** 1) Ἂν εἴχομεν ἐκλέξει τὸ ὅρισμα φ ἴσον μὲ $-\frac{\vartheta_\lambda}{\lambda}$, θὰ εἴχομεν, διὰ ε, ποὺ νὰ ἔχῃ τὸ ὅρισμα αὐτό, *αὔξησιν* τοῦ $|\Pi(x_0)|$ πλησίον τοῦ x_0. Μεγίστη ὅμως τιμὴ τοῦ $\Pi(x_0)|$ *δὲν* εἰμπορεῖ νὰ παρουσιασθῇ διὰ $|x_0|$ πεπερασμένον.

2) Γενικῶς εἶναι ἡ $\Pi'(x_0)\gtrless 0$ ($\lambda=1$) καὶ ὑπάρχει περὶ τὸ z_0 μία *περιοχή*, ποὺ ἐντός της αὐξάνει τὸ $|\Pi(x_0)|$, καὶ μία ἄλλη, ποὺ ἐντός της τὸ $|\Pi(x_0)|$ ἐλαττώνεται.

3) Ἂν $\lambda>1$, ἐναλλάσσονται περισσότεραι τοιαῦται περιοχαὶ πέριξ τοῦ x_0, ὡς εἶδος *τομέων*:

διὰ $\varphi=\frac{-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \frac{2\pi-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \frac{4\pi-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \ldots$ θὰ ἔχωμεν *αὔξησιν* τοῦ $\Pi x_0)|$,

διὰ $\varphi=\frac{\pi-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \frac{3\pi-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \frac{5\pi-\vartheta_\lambda}{\lambda}, \ldots,$ *ἐλάττωσιν*.

279. ***Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν προηγουμένων.*** Ἂν παραστήσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ *μιγαδικοῦ* x ἢ z μὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου xy (§ 98) καὶ τὰ μέτρα τῶν τιμῶν τοῦ πολυωνύμου $Z=\Pi(z)$ μὲ τὰς κατηγμένας μιᾶς ἐπιφανείας (τῆς $|Z|=|\Pi(x+yi)|=|\Pi_1(x,y)+i\Pi_2(x,y)|$),

(1) Ἄλλην ἀπόδειξιν τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ D'Alembert βλ. εἰς τὴν *Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν Ι. Ν. Χατζιδάκη* (σελ. 126—8).

βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ δὲν ἔχει κανὲν σημεῖον κάτω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον xy· αἱ δὲ ἐλάχισται κατηγμέναι $|Z|=0$ δίδουν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου xy καὶ κατὰ τὴν § 287 ὑπάρχουν πραγματικῶς τοιαῦτα σημεῖα.

Παράδειγμα. Ἂν $\Pi(z)\equiv z^\mu-1=\varrho^\mu.[\sigma\upsilon\nu(\mu\omega)+i\eta\mu(\mu\omega)]-1$, θὰ εἶναι :

$$|\Pi(z)|^2=\varrho^{2\mu}-2\varrho^\mu\ \sigma\upsilon\nu(\mu\omega)+1,\ |\varrho^\mu-1|\leq z^\mu-1\leq\varrho^\mu+1\cdot$$

καὶ διὰ σταθερὸν ϱ, παρουσιάζεται τὸ *ἐλάχιστον* τοῦ μέτρου $|z^\mu-1|$, δηλ. τὸ $\varrho^\mu-1$, διὰ τὰ ὁρίσματα :

$$\omega=0, \frac{2\pi}{\mu}, \frac{4\pi}{\mu}, \ldots, \frac{(2\mu-2)\pi}{\mu}.$$

τὸ δὲ μέγιστον $\varrho^\mu+1$ διὰ τά :

$$\omega=\frac{\pi}{\mu}, \frac{3\pi}{\mu}, \frac{5\pi}{\mu}, \ldots, \frac{(2\mu-1)\pi}{\mu}.$$

0 εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ τὸ $|z^\mu-1|$ μόνον διὰ $\varrho=1$ (διὰ κάθε ἄλλην τιμὴν εἶναι $\gtrless 0$). Διὰ κάθε $\varrho>1$, ἡ τιμὴ τῶν *μεγίστων, ἐπὶ περιφερείας περὶ τὴν ἀρχήν*, εἶναι πάντοτε > κατὰ 2 ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν *ἐλαχίστων*· διὰ $\varrho<1$ τοὐναντίον ἡ διαφορὰ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων εἶναι : $(1+\varrho^\mu)-(1-\varrho^\mu)=2\varrho^\mu$. Τὸ μέτρον τέλος τῆς παραγώγου, τὸ $|\Pi'(z)|$, εἶναι $=0$ *μόνον εἰς τὴν ἀρχήν*.

281. ***Πόρισμα.*** *Κάθε πολυώνυμον $\Pi(z)$ τοῦ βαθμοῦ μ λαμβάνει κάθε δοθεῖσαν τιμὴν λ διὰ μ καταλλήλους τιμὰς τοῦ z.*

Διότι τὸ πολυώνυμον $\Pi(z)-\lambda$ ἔχει μ ῥίζας z_k $(k=1,\ldots,\mu)$ καὶ ἑπομένως εἶναι : $\Pi(z_k)=\lambda$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἂν $A, B, \Gamma, \ldots, \Lambda, M, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἡ ἐξίσωσις : $\frac{A^2}{x-\alpha}+\frac{B^2}{x-\beta}+\frac{\Gamma^2}{x-\gamma}+\ldots+\frac{\Lambda^2}{x-\lambda}=0$ ἔχει *ὅλας τὰς ῥίζας της πραγματικάς.*

2) Νὰ εὑρεθῇ μία ῥίζα ἐξισώσεως περιττοῦ βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν ἢ ἁρμονικὴν πρόοδον.

3) Συνθῆκαι διὰ ν' ἀποτελοῦν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως :
$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν πρόοδον.

$$\left[\text{Ἀπ. } 2\alpha^3-9\alpha\beta+27\gamma=0,\ \gamma=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\right].$$

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως :

$$x^3-2\alpha x^2+\beta x-\gamma=0.\ \left[\text{Ἀπ. } (\alpha^2\beta-\alpha^4-\alpha\gamma)^{\frac{1}{2}}\right].$$

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$x^4-2\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+\delta. \qquad \left[\text{Ἀπ. } (\delta-\alpha\gamma+\alpha^2\beta-\alpha^4)^{\frac{1}{2}}\right].$$

6) Ἂν ϱ εἶναι μία διπλῆ ρίζα τῆς $\alpha_0 x^\mu+\alpha_1 x^{\mu-1}+\ldots+\alpha_\mu=0$, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_1\varrho^{\mu-1}+2\alpha_2\varrho^{\mu-2}+3\alpha_3\varrho^{\mu-3}+\ldots+\mu\alpha_\mu=0.$$

7) Συνθήκη διὰ νὰ ἔχῃ τὸ $x^\nu+px+q$ πολλαπλῆν ρίζαν :

$$\left[\text{Ἀπ. } \left(\frac{p}{\nu}\right)^\nu+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{q}{\nu-1}\right)^{\nu-1}=0\right].$$

8) Συνθήκη διὰ νὰ συνδέωνται αἱ ρίζαι τῆς :

$$\alpha_0 x^4+4\alpha_1 x^3+6\alpha_2 x^2+4\alpha_3 x+\alpha_4=0$$

μὲ τὴν σχέσιν :

$$(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_3+\varrho_4)=2(\varrho_1\varrho_2+\varrho_3\varrho_4).$$

$$\left[\text{Ἀπ. } \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}=0\right].$$

9) Ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις :

$$(x^2-y)z^3+(y^2-z)x^3+(z^2-x)y^3-xyz(xyz-1).$$

10) Πότε τὸ $x^\nu\pm\alpha^\nu$ διαιρεῖ τὸ $x^\mu\pm\alpha^\mu$;

11) Τὸ $2x^3-3x^2+x$ διαιρεῖ τὸ $(x-1)^{2\nu}-x^{2\nu}+2x-1$.

12) Ἂν $\nu=6\mu\pm1$, τὸ x^2+xy+y^2 διαιρεῖ τὸ $(x+y)^\nu-x^\nu-y^\nu$.

13) Ἂν $\nu=6\mu+3$, τὸ x^2+xy+y^2 διαιρεῖ τὸ

$$(x+y)^\nu-x^\nu-y^\nu-3(x+y)(xy)^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

14) Τὸ $(x^2+xy+y^2)^2$ διαιρεῖ τὸ $(x+y)^{6\mu+1}-x^{6\mu+1}-y^{6\mu+1}$.

ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ.	Στίχ.	Ἀντί:	Νὰ γραφῇ:
8	16	π	ω
9	8	«εἶναι 3, διότι...»	«εἶνε 3, ἂν δύο συμπίπτουν, διότι»...
11	9	$\nu\Sigma_{\mu}^{\nu}$	$\nu\ \varepsilon\Sigma_{\mu}^{\nu}$
19	5 (ἀπὸ τὸ τέλος)	S^2	S_2
19	2 (»)	«ὁ διδόμενος ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν: $\frac{\mu-\nu}{\nu}=\frac{\pi}{\varrho}$«	«ὁ ἀντιστοιχῶν ἢ οἱ ἀντιστοιχοῦντες ἴσοι ὅροι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ ν: $\frac{\mu\varrho-\pi}{\varrho+\pi}\leq\nu\leq\frac{\mu\varrho+\varrho}{\varrho+\pi}$»
19	1 (»)	$\frac{\pi}{\varrho}$	$\frac{\varrho}{\pi}$
21	1—2 (»)	$\varepsilon\Sigma_{\mu}^{\nu}$	$\varepsilon\Sigma_{\nu}^{\mu}$
22	9 (»)	$]_{\mu}$	$]^{\mu}$
23	12	«Υ_2, ὁ τρίτος δηλ. τοῦ Π, θὰ εἶναι ὁ $\mu(\alpha+\beta)^{\mu}.\gamma$»	«Υ_2, θὰ εἶναι ὁ $\mu.\alpha^{\mu-1}.\gamma$»
24	5	«θεωρουμένων ὡς ἀθροισμάτων»	«θεωρουμένων τῶν ριζῶν ὡς ἀθροισμάτων»
24	11	«τέλειον τετράγωνον»	«τέλειος κύβος»
24	13	«Τὸ ἴδιον ζήτημα διὰ τὸ...»	«Ἀνάλογον ζήτημα (τέλειον τετράγωνον) διὰ τὸ...»
24	15	$A_1^4-8A_0A_1^2A_2+\ldots=0$	$A_1^4-8A_0A_1^2A_2+16A_0^2A_2^2-$ $-64A_0^3A_4=0$
26	4 (ἀπὸ τὸ τέλος)	$-\alpha_{31}\ \alpha_{23}\ \alpha_{33}$	$-\alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{33}$
26	5 (»)	$\alpha_{11}\ \alpha_{23}\ \alpha_{33}$	$\alpha_{11}\ \alpha_{22}\ \alpha_{24}$
29	6	λ_1	$\lambda-1$
30	10	Εἰς τὴν τρίτην ὁρίζουσαν λείπει ἓν —.	

Σελ.	Στίχ.	Ἀντί :	Νὰ γραφῆ :
30	11	$\gamma_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$	$\beta_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$
35	4	$-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma^2)_2]\Delta$	$-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2]\Delta$
36		Ἡ β' πρότασις νὰ γραφῆ γ' καὶ ἡ γ', β'.	
36	12	«Εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ δ...»	«Εἶναι λοιπὸν ἡ D δύναμις τῆς δ»
37	4(ἀπὸ τὸ τέλος)	«στρώματα ἡ μένει»	«μένει»
37	3 (»)	«δύο ὁριζόντια παράλληλα κατακόρυφα ὁρίζουσα»	«δύο παράλληλα κατακόρυφα, ἡ πρώτη κυβικὴ ὁρίζουσα»
40	16	$-(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$	$=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$
41	10	Εἰς τὴν β' ὁρίζουσαν οἱ ἐκθέται ν—1 νὰ γραφοῦν ν—2.	
44	1—3 (»)	Εἰς τὴν ὁρίζουσαν καὶ τὰς σχέσεις τοῦ Νιούτον τὰ — νὰ γίνουν +.	
45	5	Νὰ διαγραφῆ ἡ τιμὴ τοῦ S_1.	
48	7	«διαιρέτης τοῦ i ἢ τοῦ j»	«κοινὸς διαιρέτης τῶν i,j»
49	3	«τῆς σταθερᾶς A»	«τῆς σταθερᾶς A πολ]θεῖσα ἐπὶ $(-1)^{\nu-1}$»
49	6	$\left(\frac{p}{\nu q}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)\nu^{\nu-2}$	$\left(\frac{p}{q}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)\nu^{\nu-2}$
53	8 (»)	$H=(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\left[\Delta^{\nu(\nu-1)}_{\nu-1}\right]^{\nu}$	$H=(-1)^{\nu-1}\left[\Delta^{\nu(\nu-1)}_{\nu-1}\right]^{\nu}$
53	4 (»)	«ρ π.χ.=6»	«ρ π.χ.=3»
54	5	Τῆς $1^{\eta\varsigma}$ καὶ $3^{\eta\varsigma}$ στήλης ὅλα τὰ σημεῖα νὰ γίνουν +.	
64	9 (»)	β[(A'), (B')]	α'[(A'), (B')]

Σελ.	Στίχ.	Ἀντί :	Νὰ γραφῇ :
70	3 (ἀπὸ τὸ τέλος)	«$\mu=o$ ἢ $\nu=o$ δίδει»	«$\mu=o$ δίδει»
71	8 (»)	«ἑνὸς σημείου Μ»,	«ἑνὸς σημείου Μ ὡς πρὸς ὀρθογ. ἄξονας»
72	2	$\beta=\alpha\eta\mu\vartheta$	$\beta=\varrho\eta\mu\vartheta$
74	5 (»)	$\gamma+\delta i \gtrless 0$	$\gamma+\delta i \neq 0$
75	2	$\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma\ \ \delta i)}$	$\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}$
77	10	$\Gamma_{k=1}^{k=\eta}$	$\Gamma_{k=1}^{k=\nu}$
82	14	«γωνίαν ρ»	«γωνίαν φ»
83	6 (»)	$\frac{\mu(\mu-1)\ldots}{1.2.3\ldots\mu}$	$\frac{\mu(\mu-1)\ldots}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!}$
83	1 (»)	$\frac{\mu(\mu-1)\ldots}{1.2.3\ldots\mu}$	$\frac{\mu(\mu-1)\ldots}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!}$
95	8 (»)	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{\ }+\ldots$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$
96	1,8 (»)	$\alpha(\gtrless 0)$	$\alpha(>0)$
111	7	$e=$	$e^{x}=$
164	2 (»)	$++\varepsilon^{\mu}\ldots\frac{\Pi(\mu)(x_{\bullet})}{\mu!\,\Pi(x_0)}$	$+\ldots+\varepsilon^{\mu}\frac{\Pi(\mu)(x_0)}{\mu!\,\Pi(x_0)}$
167	7 (»)	$\frac{\Lambda^2}{x-\lambda}=0$	$\frac{\Lambda^2}{x-\lambda}=M$