Αριθμητική Ανάλυση Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά και στις Μοριακές Δυναμικές

Ιωάννης Σ. Σταματίου

Διδακτορική Διατριβή

Τμήμα Μαθηματικών: Εισαγωγική Κατεύθυνση
Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών
Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος

2 Μαρτίου, 2016

Επιβλεπων:	Αναπληρωτής Καθηγητής Ν. Χαλιδιάς
Επιτροπη:	Επίκουρος Καθηγητής Σ. Χατζησπύρος
	Επίκουρος Καθηγητής Χ. Κουντζάκης
	Επίκουρος Καθηγητής Σ. Ξανθόπουλος
	Prof. Dr A. Neuenkirch (Universität Mannheim)
	Prof. Dr. M.A. Peletier (Technische Universiteit Eindhoven)
	Prof. Dr. L. Szpruch (The University of Edinburgh)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη διατριβή αντικείμενο έρευνας είναι η αριθμητική επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), οι οποίες έχουν λύση σε ένα συγκεκριμένο χωρίο. Ο στόχος μας είναι η κατασκευή άμεσων αριθμητικών σχημάτων τα οποία διατηρούν αυτό το χωρίο, κυρίως σε περιπτώσεις όπου οι συντελεστές των ΣΔΕ είναι μη-γραμμικοί.

Είναι γνωστό ότι το *με βήμα προς τα εμπρός* σχήμα Euler αποκλίνει σε υπεργραμμικά προβλήματα και η *ελεγχόμενη* μέθοδος Euler δε διατηρεί απαραίτητα τη δομή του αρχικού προβλήματος.

Προτείνουμε ένα νέο αριθμητικό σχήμα, χρησιμοποιώντας την Ημι-Διακριτή μέθοδο, για διάφορες κλάσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Για κάποια υπερ-γραμμικά προβλήματα (όπως το Heston 3/2-μοντέλο) καθώς και για υπογραμμικά (όπως το CEV μοντέλο), τα οποία εμφανίζονται στο πεδίο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, κατασκευάζουμε ένα αριθμητικό σχήμα το οποίο διατηρεί τη θετικότητα. Παραπέρα, εφαρμόζουμε τη μέθοδο μας σε προβλήματα τα οποία εμφανίζονται στο πεδίο των μοριακών δυναμικών, όπου το προτεινόμενο σχήμα το οποίο διατηρεί τη δομή της αρχικής εξίσωσης προσεγγίζει αποτελεσματικά κάποιες ΣΔΕ οι οποίες προκύπτουν έπειτα από μια διαδικασία απλοποίησης (*coarse-graining*).

Θεωρούμε επίσης την περίπτωση Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με Υστέρηση με μη-αρνητικές λύσεις. Ξανά στόχος μας είναι άμεσα αριθμητικά σχήματα τα οποία διατηρούν τη θετικότητα. Επεκτείνουμε την Ημι-Διακριτή μέθοδο από το πλαίσιο των Συνήθων ΣΔΕ στην περίπτωση με σταθερή υστέρηση, όπου και αποδεικνύουμε ισχυρή σύγκλιση (μοντέλο DGBM). Αριθμητικά πειράματα υποστηρίζουν τα θεωρητικά μας αποτελέσματα.

Λέξεις Κλειδιά : Ημι-Διακριτή μέθοδος, Υπερ-γραμμική Τάση και Διάχυση, Hölder Συνεχής, 3/2-Μοντέλο, Τάξη Σύγκλισης, Άμεσο Αριθμητικό Σχήμα, Διαδικασία CEV με ιδιότητα Επαναφοράς στο Μέσο, Διατήρηση Θετικότητας, Ισχυρό Σφάλμα Εκτίμησης, Στοχαστικό Μοντέλο Μεταβλητότητας, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Υστέρηση, Προσομοίωση Monte Carlo, Αριθμητικές Μέθοδοι

AMS θεματική κατηγοριοποίηση 2010: 65C30, 65C20, 60H10, 60H35, 65J15

JEL θεματική κατηγοριοποίηση: C15, C63, G13

ΑΡΙΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΔΕ

Το αντικείμενο αυτής της διατριβής σχετίζεται με το ακόλουθο ερώτημα

Πως μπορούμε να προσεγγίσουμε *ποιοτικά* λύσεις μη-γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων;

Ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τον όρο *ποιοτικά* δεν είναι απαραίτητα με γνώμονα τον υπολογιστικό χρόνο, δηλαδή τη χρήση ενός αριθμητικού σχήματος το οποίο συγκλίνει γρήγορα στην ακριβή λύση της αρχικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ), αλλά με σκοπό τη διατήρηση κάποιων ιδιοτήτων της διαδικασίας λύσης της ΣΔΕ. Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρουν οι μη-γραμμικές ΣΔΕ (λύσεις γραμμικών ΣΔΕ ή ΣΔΕ οι οποίες ανάγονται σε γραμμικές είναι γνωστές, βλέπε [60, Ενότητα 4.4]), και γενικά ΣΔΕ οι οποίες αν και δεν έχουν αναλυτική λύση, η λύση τους βρίσκεται σε ορισμένο πεδίο. Επομένως στόχος μας είναι η κατασκευή αριθμητικών σχημάτων τα οποία διατηρούν την αρχική δομή των υπό μελέτη ΣΔΕ, δηλαδή βρίσκονται στο ίδιο πεδίο. Τα μοντέλα τα οποία μελετούμε, προέρχονται από το πεδίο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών και ο στόχος εκεί είναι η κατασκευή αριθμητικών σχημάτων τα οποία να διατηρούν τη θετικότητα (βλέπε [84, Κεφάλαια 2,3 και 4]). Παραπέρα, εφαρμόζουμε την προτεινόμενη μέθοδο σε μία κλάση ΣΔΕ οι οποίες έχουν λύση στο πεδίο $[-1,1]$ και εμφανίζονται στις μοριακές δυναμικές (βλέπε [84, Κεφάλαιο 5]).

Παρακάτω ορίζουμε την κατηγορία ΣΔΕ που μελετάμε· είναι αυτή για την οποία κατασκευάζουμε αριθμητικά σχήματα με ποιοτικό τρόπο.

Θεωρούμε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW_s, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

με συντελεστές $a : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ και $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $X_0 = (X_0^1, \ldots, X_0^d)^T$ ανεξάρτητη των $\{W_t\}_{0\le t\le T}$.

Ορισμός 1 *Λέμε ότι η ΣΔΕ (1) έχει μοναδική λύση αν υπάρχει μία προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε [66, Ορισμός 2.2.1],*

$$\{a(t, X_t)\} \in \mathcal{L}^1([0,T]; \mathbb{R}^d), \quad \{b(t, X_t)\} \in \mathcal{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$$

και

$$\mathbb{P}\left[X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s\right] = 1, \ \ \textit{για κάθε} \ \ t \in [0,T].$$

□

Η ΣΔΕ (1) έχει μη-αυτόνομους συντελεστές, δηλαδή οι $a(t,x), b(t,x)$ εξαρτώνται άμεσα από το t. Ο συντελεστής τάσης a είναι ο απειροελάχιστος μέσος της διαδικασίας X_t και ο συντελεστής διάχυσης $\sqrt{bb^T}$ είναι η απειροελάχιστη τυπική απόκλιση της διαδικασίας X_t.

Η έννοια των *ισχυρών* λύσεων είναι ότι δίδεται εκ των προτέρων η εκδοχή της W_t και η λύση η οποία κατασκευάζεται από αυτή είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη. Αν αντίθετα, δίδονται αρχικά οι συντελεστές a, b και αναζητούμε ζεύγος διαδικασιών $((\widetilde{X_t}, \widetilde{W_t}), \mathcal{F}_t)$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ τέτοιο ώστε η (1) να ισχύει, τότε η $\widetilde{X_t}$ είναι μία *ασθενής* λύση. Διαισθητικά, μία ισχυρή λύση είναι ένα συναρτησοειδές της αρχικής συνθήκης X_0 και της (W_t). Μία ισχυρή λύση είναι και ασθενής λύση, αλλά το αντίστροφο δεν είναι αληθές· ένα κλασικό παράδειγμα είναι η εξίσωση του Tanaka (βλέπε [77, Παράδειγμα 5.3.2]) η οποία σε διαφορική μορφή είναι η $dX_t = \sigma\gamma\nu(X_t)dW_t, X_0 = 0$. Θα επικεντρωθούμε σε ΣΔΕ οι οποίες επιδέχονται ισχυρές λύσεις, αφού ενδιαφερόμαστε για τις τροχιές τους και όχι απλώς για την κατανομή τους.

Ύπαρξη & μοναδικότητα λύσεων της (1).

Η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης της (1) προκύπτει από συνδυασμό των παρακάτω συνθηκών:

(*a*) $||a(t,X_1) - a(t,X_2)||_2^2 \bigvee ||b(t,X_1) - b(t,X_2)||_2^2 \le C||X_1 - X_2||_2^2$, για κάθε $t \in [0,T]$ και $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$, όπου $C > 0$, (*Ολικά Lipschitz*)

(a^*) $||a(t,X_1)-a(t,X_2)||_2^2 \bigvee ||b(t,X_1)-b(t,X_2)||_2^2 \leq C_R||X_1-X_2||_2^2$, για κάθε $t \in [0,T]$ όπου τα d-διανύσματα X_1, X_2 είναι τέτοια ώστε $||X_1||_2 \vee ||X_2||_2 \leq R$ για κάθε $R > 0$ όπου C_R εξαρτάται από το R, *(Τοπικά Lipschitz)*

(b) $||a(t,X)||_2^2 \bigvee ||b(t,X)||_2^2 \leq C(1+||X||_2^2)$, για κάθε $(t,X) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, όπου $C > 0$, *(Γραμμική αύξηση)*

(b^*) $X^T a(t,X) + \frac{p-1}{2}||b(t,X)||_2^2 \leq C(1+||X||_2^2)$, για κάθε $(t,X) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ και κάποιο $p \geq 2$, όπου $C > 0$, *(Συνθήκη Μονοτονίας)*

Συγκεκριμένα τα ζεύγη $(a)-(b), (a^*)-(b), (a^*)-(b^*)$, δίνουν ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης [66, Ενότητα 2.3]. Παρόμοιες συνθήκες ισχύουν και στην περίπτωση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Τα δύο παραδείγματα παρακάτω δείχνουν ότι η συνέχεια κατά Lipschitz cή η γραμμικά αυξητική συνθήκη είναι απαραίτητα για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.

Παράδειγμα 2 *[Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο] Η ΣΔΕ $dx_t = x_t^2 dt$, $x_0 = 1$ έχει λύση $x_t = \frac{1}{1-t}$, $t \in [0,1)$.* □

Παράδειγμα 3 *[Μη-μοναδική λύση] Η ΣΔΕ $dx_t = 3x_t^{2/3}dt$, $x_0 = 0$ έχει λύση $x_t = \mathbb{I}_{(a,\infty)}(t)(t-a)^3$, $t \in [0,\infty)$ για κάθε a.* □

Ιδιότητες λύσεων της (1).

Η συνθήκη (b^*) όταν $x_0 \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathbb{R}^d)$, $p \geq 2$, δίνει τα ακόλουθα φράγματα ροπών [66, Θεώρημα 2.4.1],

$$\mathbb{E}||X_t||_2^p \leq C_{T,p}(1+\mathbb{E}||X_0||_2^p),$$

για κάθε $t \in [0,T]$. Παραπέρα, αν ισχύει η γραμμικά αυξητική συνθήκη (b) έχουμε ομοιόμορφα φράγματα της μορφής $\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}||X_t||_2^p$ για κάθε $p \geq 2$ [66, Θεώρημα 2.4.4].

Κίνητρο.

ΣΔΕ της μορφής (1) έχουν σπάνια αναλυτικές λύσεις, επομένως οι αριθμητικές προσεγγίσεις είναι απαραίτητες στην περίπτωση που θέλουμε να προσομοιώσουμε τα μονοπάτια $X_t(\omega)$, ή να προσεγγίσουμε συναρτησοειδή της μορφής $\mathbb{E}F(X)$, όπου $F : \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ μπορεί να είναι για παράδειγμα στην περιοχή των χρηματοοικονομικών, η προεξοφλημένη πληρωμή ενός παραγώγου Ευρωπαϊκού τύπου.

Ας θυμηθούμε ένα ορισμό από την εργασία [82] ο οποίος αφορά το *χρόνο ζωής* της αριθμητικής λύσης ΣΔΕ.

Ορισμός 4 *[Χρόνος ζωής αριθμητικής λύσης] Θεωρούμε $D \subseteq \mathbb{R}^d$ και διαδικασία (X_t) καλά ορισμένη*[1] *στο πεδίο $\overline{D}$, με αρχική συνθήκη $X_0 \in \overline{D}$ και τέτοια ώστε*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(t,\omega) \notin \overline{D}\}) = 0,$$

για κάθε $t > 0$. Μία αριθμητική λύση $(Y_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο χρόνο ζωής, *αν υπάρχει χρόνος στάσης $\tau_n(\omega)$ τέτοιος ώστε*

$$Y_n := Y_{\tau_n} \notin \overline{D} \quad \sigma.\beta.$$

Διαφορετικά, λέμε ότι έχει ατέρμονο χρόνο ζωής. $\square$

Ισοδύναμα, λέμε ότι ότι αριθμητικό ολοκληρωτικό σχήμα έχει ατέρμονο χρόνο ζωής αν

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} \in \overline{D} \,\big|\, Y_n \in \overline{D}) = 1. \tag{1}$$

Διαμερίζουμε το διάστημα $[0,T]$ σε βήματα μεγέθους $\Delta_n := t_{n+1} - t_n$, με $n = 0,\ldots,N-1$, όπου $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Παραπέρα, έστω $\Delta W_n := W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$ οι προσαυξήσεις της κίνησης Brown.

Η μέθοδος Euler σε περιβάλλον ΣΔΕ, εμφανίστηκε ήδη από τη δεκατία του 50 μέσω του [72] και από τότε υπάρχει εκτενής μελέτη αριθμητικών προσεγγίσεων λύσεων ΣΔΕ (αναφέρουμε απλά την εργασία [59] για μία πρόσφατη ιστορική μελέτη σε αριθμητικές μεθόδους ΣΔΕ με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά καθώς και την βιβλιογραφία εκεί).

Το άμεσο σχήμα Euler-Maruyama (EM) για ΣΔΕ δίδεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$Y_{n+1}^{EM} = Y_n + a(t_n, Y_n)\Delta_n + b(t_n, Y_n)\Delta W_n,$$

για $n = 0,\ldots,N-1$, όπου $Y_0 = X_0$ και $Y_n := Y_{t_n}$. Το σχήμα (EM) έχει πάντα πεπερασμένο χρόνο ωής[2], βλέπε π.χ. [54, Πρόταση 4.2]. Το επόμενο

[1] Στον πλήρη χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ η στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{0\le t\le T}$ παίρνει τιμές στο $\overline{D}$, δηλαδή είναι μία συλλογή από τ.μ. στο Ω με τιμές στο $\overline{D}$

[2] Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $a(t,x)$ και $b(t,x)$ δε γίνονται ταυτόχρονα μηδέν για κάθε (t,x).

παράδειγμα αφορά μία γνωστή διαδικασία και την αδυναμία της μεθόδου (EM) να διατηρήσει το πεδίο λύσεων της.

Παράδειγμα 5 *[CIR]* Το ακόλουθο γραμμικό ως προς την τάση μοντέλο προτάθηκε αρχικά για τις δυναμικές του επιτοκίου από τους Cox, Ingersoll και Ross [22, (51)] και ονομάζεται CIR.Χρησιμοποιείται στην περιοχή των χρηματοοικονομικών ως περιγραφή της διαδικασίας στοχαστικής μεταβλητότητας στο μοντέλο Heston[43], αλλά επιπλέον ανήκει στην ουσιώδη οικογένεια ΣΔΕ οι οποίες προσεγγίζουν διαδικασίες αλμάτων Markov [28]. Το μοντέλο CIR περιγράφεται από την παρακάτω ΣΔΕ,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \kappa(\lambda - x_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{x_s}dW_s, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

όπου x_0 ανεξάρτητη των $\{W_t\}_{t\geq 0}, x_0 > 0$ σ.β. και οι παράμετροι κ, λ, σ είναι θετικοί. Το λ είναι το επίπεδο του επιτοκίου x_t όπου η τάση είναι μηδέν, με την έννοια ότι όταν η x_t είναι κάτω από το λ η τάση είναι θετική, ενώ σε αντίθετη περίπτωση αρνητική. Καθώς το λ αυξάνεται, το εύρος της θετικής τάσης διευρύνεται. Το κ ορίζει την κλίση της τάσης. Η συνθήκη $\kappa > 0$ είναι αναγκαία για τη στασιμότητα της διαδικασίας x_t. (Η στάσιμη κατανομή της (x_t) είναι Γάμμα με παράμετρο σχήματος $2\lambda\kappa/\sigma^2$ και παράμετρο βαθμίδας $\sigma^2/(2\kappa)$. Συγκεκριμένα ισχύει ότι $\mathbb{E}x_t = x_0 e^{-\kappa t} + \lambda(1 - e^{-\kappa t})$ και $Var x_t = x_0\sigma^2(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t})/\kappa + \lambda\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})^2/(2\kappa)$ ς.φ. [83, Παράδειγμα 4.4.11]). Όταν το κ είναι αρνητικό, ο κύριος όρος της κλίσης, $-\kappa$, είναι θετικός και δεδομένης της διάχυσης $\sigma\sqrt{x_t}$, η διαδικασία x_t εκρήγνυται. Η συνθήκη $\sigma^2 < 2\kappa\lambda$ η οποία προκύπτει από το τεστ του Feller [29, Περίπτωση (ιι),σ.173] είναι ικανή και αναγκαία ώστε η διαδικασία να μη γίνει μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο. Το πρόβλημα (2) είναι ορισμένο για μη-αρνητικές τιμές, αφού περιγράφει επιτόκια ή αξίες. Επομένως 'καλά' αριθμητικά σχήματα είναι εκείνα που διατηρούν τη θετικότητα ([7], [55]). Το άμεσο σχήμα Euler δεν έχει αυτήν την ιδιότητα, αφού οι προσαυξήσεις του είναι υπό συνθήκη κανονικές. Για παράδειγμα, η πιθανότητα μετάβασης του σχήματος Euler στην περίπτωση (2) είναι

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x\Delta}} \exp\Big\{ -\frac{(y - (x + \kappa(\lambda - x)\Delta))^2}{2\sigma^2 x\Delta}\Big\}, \qquad y \in \mathbb{R},\, x > 0,$$

επομένως, ακόμα και στο πρώτο βήμα υπάρχει θετική πιθανότητα αρνητικών τιμών. Αναφερόμαστε στην εργασία [59], μεταξύ άλλων, όπου θεωρούνται σχήματα Euler, τροποποιήσεις τους οι οποίες ξεπερνούν τα παραπάνω προβλήματα, καθώς και η σημασία της θετικότητας. Επομένως, για το ίδιο πρόβλημα έχουν προταθεί το αποκομμένο σχήμα Euler [24], καθώς και μία τροποποίηση του, [45], όπου επιτρέπεται σε κάποιο βήμα το αριθμητικό σχήμα να φύγει από το $(0, \infty)$ αλλά ωθείται να επιστρέψει στα επόμενα βήματα. Για το παραπάνω πρόβλημα υπάρχουν μέθοδοι προσομοίωσης ([18], [64]). Πάραυτα, αν πρέπει να προσομοιωθεί ένα πλήρες δειγματικό μονοπάτι της ΣΔΕ ή οι υπό μελέτη ΣΔΕ είναι μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος ΣΔΕ, τότε τα αριθμητικά σχήματα είναι εν γένει περισσότερο αποτελεσματικά. $\square$

Το επόμενο παράδειγμα είναι ένα ακόμη μη-γραμμικό ως προς τη διάχυση μοντέλο.

Παράδειγμα 6 *[CEV]* Το μοντέλο σταθερής ελαστικότητας ως προς τη διακύμανση [21] χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση ασσετς και δίδεται από τη ΣΔΕ

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu x_s ds + \int_0^t \sigma x_s^\gamma dW_s, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

όπου x_0 είναι ανεξάρτητη των $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $x_0 > 0$ σ.β., $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ και $0 < \gamma \leq 1$. Η (3) έχει μοναδική ισχυρή λύση αν και μόνο αν $\gamma \in [1/2, 1]$ και παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$. Η περίπτωση $\gamma = 1/2$ αντιστοιχεί στο μοντέλο CIR(2), ενώ για $\gamma = 1$ έχουμε μία κίνηση Brown,το διάσημο Black-Scholes μοντέλο [14]. $\square$

Επομένως, μελετάμε αριθμητικά σχήματα με *ατέρμονο χρόνο ζωής*. Στην εργασία [82], όπου το παραπάνω ζήτημα αρχικά συζητήθηκε και μετέπειτα επεκτάθηκε σε μεθόδους υψηλότερης τάξης [57], το κύριο ενδιαφέρον εστιάζεται στο χωρίο $D = \mathbb{R}^+$. Εμείς, μελετούμε αριθμητικά σχήματα που διατηρούν τη θετικότητα, αλλά επιπλέον ασχολούμαστε και με άλλες περιπτώσεις (βλέπε [84, Κεφάλαιο 5]).

Το δεύτερο σημείο ενδιαφέροντος είναι σε *ισχυρές* προσεγγίσεις (μεσοτετραγωνικές) της (1), στην περίπτωση υπερ- ή υπό-γραμμικών συντελεστών τάσης και διάχυσης. Αριθμητικά σχήματα αυτού του είδους, των οποίων οι τροχιές (δειγματικά μονοπάτια) παραμένουν κοντά σε αυτές της (1) έχουν εφαρμογή σε αρκετές περιοχές - ο ενδιαφερόμενος παραπέμπεται για παράδειγμα στην εργασία [50, Ενότητα 4] και σε αναφορές εκεί - έχουν θεωρητικό ενδιαφέρον (παρέχουν φυνδαμενταλ ινσιγητ για ασθενούς τύπου σχήματα) και εν γένει δεν περιλαμβάνουν προσομοιώσεις σε μεγάλες χρονικές περιόδους ή σημαντικού αριθμού τροχιών. Ένα κριτήριο για την εγγύτητα των δειγματικών μονοπατιών της (1) με την διαδικασία προσέγγισης στον τελικό χρόνο T είναι το ακόλουθο:

Ορισμός 7 *[Ισχυρή Σύγκλιση] Μία διακριτού χρόνου προσέγγιση Y με μέγιστο μέγεθος βήματος Δ συγκλίνει ισχυρά στη X στο χρόνο T αν*

$$\lim_{\Delta \to 0} \mathbb{E}|Y_T - X_T|^2 = 0. \tag{4}$$

□

Μερικές φορές, αν και δε θα μας απασχολήσει αυτή η περίπτωση, αρκεί να έχουμε μία 'καλή' προσέγγιση της μ κατανομής πιθανότητας της X_T παρά των δειγματικών μονοπατιών της. Αυτό ορίζεται παρακάτω:

Ορισμός 8 *[Ασθενής Σύγκλιση] Μία διακριτού χρόνου προσέγγιση Y με μέγιστο μέγεθος βήματος Δ συγκλίνει ασθενώς στη X στο χρόνο T ως προς μία κλάση $\mathcal{C}$ συναρτήσεων ελέγχου $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ αν*

$$\lim_{\Delta \to 0} |\mathbb{E}\phi(Y_T) - \mathbb{E}\phi(X_T)|^2 = 0,$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{C}$. □

Η παραπάνω προσέγγιση είναι πολύ πιο ασθενής από αυτή που μας δίνει το κριτήριο ισχυρής σύγκλισης.

Η σχέση (4) δε δείχνει την τάξη σύγκλισης.

Ορισμός 9 *[Τάξη Ισχυρής Σύγκλισης] Μία διακριτού χρόνου προσέγγιση Y με μέγιστο μέγεθος βήματος Δ συγκλίνει ισχυρά με τάξη γ στη X στο χρόνο T αν υπάρχει $C > 0$ και $\Delta^* > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\sqrt{\mathbb{E}|Y_T - X_T|^2} \leq C \cdot \Delta^{\gamma}, \tag{5}$$

για κάθε $\Delta \in (0, \Delta^*)$, όπου η σταθερά C δεν εξαρτάται από το Δ. □

Η τάξη ενός αριθμητικού σχήματος είναι συνήθως μικρότερη από την αντίστοιχη τάξη του ντετερμινιστικού (όταν $b = 0$) διότι οι προσαυξήσεις της διαδικασίας Wiener έχουν μέση-τετραγωνική τάξη $1/2$, δηλαδή $\sqrt{\mathbb{E}(\Delta W_n)^2} = \Delta_n^{1/2}$.

Τέλος, υποθέτουμε το πλαίσιο (1) όπου δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση στους συντελεστές a και b, και η αντίσοιχη ΣΔΕ είναι βαθμωτή και υπεργραμμική, δηλαδή θεωρούμε την ακόλουθη ΣΔΕ:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s)ds + \int_0^t b(x_s)dW_s, \quad t \in [0, T],$$

όπου $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, x_0 είναι ανεξάρτητη των $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ και οι σταθερές $C \geq 1, \beta > \alpha > 1$ είναι τέτοιες ώστε

$$(|a(x)| \vee |b(x)|) \geq \frac{|x|^\beta}{C} \text{ ανδ } (|a(x)| \wedge |b(x)|) \leq C|x|^\alpha, \tag{6}$$

για κάθε $|x| \geq C$. Τότε οι ροπές του σχήματος (EM) ενδέχεται να εκραγούν όπως φαίνεται στο [51, Θεώρημα 1], το οποίο παραθέτουμε παρακάτω.

Θεώρημα 10 *[Έκρηξη ροπών του (EM) σχήματος] Έστω ότι ισχύουν όλα τα παραπάνω. Τότε υπάρχει μία σταθερά $c \in (1, \infty)$ και μία ακολουθία μη-κενών ενδεχομένων $\Omega_N \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}$ με $\mathbb{P}(\Omega_N) \geq c^{-N^c}$ και $|Y_N(\omega)| \geq 2^{\alpha^{N-1}}$ για κάθε $\omega \in \Omega_N$ και $N \in \mathbb{N}$. Παραπέρα, αν $\mathbb{E}|x_T|^p < \infty$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$, τότε*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}|x_T - Y_N^{EM}|^p = \infty \textit{ και } \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}|Y_N^{EM}|^p = \infty.$$

$\square$

Με άλλα λόγια, υπάρχει ακολουθία ενδεχομένων με τουλάχιστον εκθετικά μικρή πιθανότητα πραγματοποίησης για τα οποία οι προσεγγίσεις (EM) αυξάνουν με κατ΄ ελάχιστα διπλά-εκθετική ταχύτητα με αποτέλεσμα να παραμένουν μη φραγμένες στην $\mathcal{L}^1$-νόρμα. (Ο τρόπος με τον οποίο το σχήμα (EM) αποκλίνει έπεται από την ανισότητα $\mathbb{E}|Y_N^{EM}| \geq \mathbb{P}(\Omega_N)|Y_N|$, βλέπε απόδειξη σε [51, Θεώρημα 1])

Μία αριθμητική μέθοδος η οποία δεν εκρήγνυται σε υπερ-γραμμικά προβλήματα είναι η ελεγχόμενη Euler μέθοδος, η οποία προτάθηκε στην [50, (4)], και η οποία είναι άμεση και συγκλίνει ισχυρά. Πάραυτα, δεν έχει ατέρμονο χρόνο ζωής.

Επομένως, αναζητούμε αριθμητικά σχήματα τα οποία δεν εκρήγνυνται. Συνοπτικά, στόχος μας είναι η κατασκευή άμεσων αριθμητικών σχημάτων με ατέρμονο χρόνο ζωής, τα οποία συγκλίνουν ισχυρά στην ακριβή λύση και δεν εκρήγνυνται.

Περιεχόμενα διατριβής

Αυτή η ενότητα περιγράφει τα περιεχόμενα της διατριβής [84].

Ας ξαναγράψουμε τη ΣΔΕ (1) σε μία διάσταση

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(s, x_s)ds + \int_0^t b(s, x_s)dW_s, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

όπου x_0 είναι ανεξάρτητη των $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ και $a, b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοιες ώστε η (1) να έχει μοναδική ισχυρή λύση. Εισάγουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $f(s,r,x,y), g(s,r,x,y) : [0,T]^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(s,s,x,x) = a(s,x), g(s,s,x,x) = b(s,x)$, οι οποίες ικανοποιούν κάποιες τοπικά Lipschitz συνθήκες, βλέπε π.χ. [84, Υπόθεση 2.2.1]. Έστω επίσης η ομοιόμορφη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ με $\Delta = T/N$. Το αριθμητικό σχήμα το οποίο προτείνουμε, και καλούμε ημι-διακριτό (SD), έχει την ακόλουθη αναπαράσταση σε κάθε υποδιάστημα $[t_n, t_{n+1}]$,

$$y_t = y_{t_n} + \int_{t_n}^{t} f(t_n, s, y_{t_n}, y_s)ds + \int_{t_n}^{t} g(t_n, s, y_{t_n}, y_s)dW_s. \tag{2}$$

(Όλες οι σχετικές εργασίες με την ημι-διακριτή μέθοδο είναι οι παρακάτω [33, 34, 38, 37, 36, 35, 41, 40, 39]). Το διακριτοποιημένο μέρος της αρχικής ΣΔΕ εκφράζεται από την πρώτη και τρίτη μεταβλητή των f, g. Παρατηρούμε ότι με πλήρη διακριτοποίηση της ΣΔΕ, δηλαδή επιλέγοντας $f(s,r,x,y) = a(s,x)$ και $g(s,r,x,y) = b(s,x)$, μπορούμε να αναπαράγουμε το άμεσο σχήμα Euler.Παραπέρα, μία κύρια διαφορά της μεθόδου (SD) και όλων των άλλων αριθμητικών μεθόδων είναι ότι σε κάθε υποδιάστημα έχουμε να επιλύσουμε μία νέα ΣΔΕ, και όχι μία αλγεβρική εξίσωση. Το επόμενο φυσικό ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής:

Πώς επιλέγουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις f και g;

Η κύρια ιδέα της μεθόδου (SD)έγκειται στη μερική διακριτοποίηση της αρχικής ΣΔΕ με τέτοιον τρόπο ώστε η προκύπτουσα ΣΔΕ να έχει αναλυτική λύση. Με αυτή την προσέγγιση δεν παράγουμε ένα μοναδικό αριθμητικό σχήμα. Πάραυτα είμαστε σε θέση να δείξουμε την ύπαρξη ένος αριθμητικού σχήματος το οποίο ξεπερνάει τα παραπάνω προβλήματα, και το οποίο παίρνει συγκεκριμένη μορφή σε κάποιες περιπτώσεις. Επομένως, η μέθοδος μας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(I1) Συγκλίνει ισχυρά (κατά μέσο-τετραγωνικό τρόπο) στην ακριβή λύση·

(I2) Έχει ατέρμονο χρόνο ζωής·

(I3) Δεν εκρήγνυται σε κάποια μη-γραμμικά προβλήματα·

(I4) Είναι άμεση.

Στο [84, Κεφάλαιο 2] εφαρμόζουμε την (SD)μέθοδο σε υπερ-γραμμικά προβλήματα της μορφής (6). Υποθέτοντας φραγμένες ροπές της αρχικής ΣΔΕ καθώς και της προσέγγισης (SD)αποδεικνύουμε την ισχυρή σύγκλιση του σχήματος (2) στην πραγματική λύση της (1). Αυτό παρουσιάζεται στο[84, Θεώρημα 2.2.2] όπου δείχνουμε ότι

$$\lim_{\Delta \to 0} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |y_t - x_t|^2 = 0. \tag{3}$$

Ο τρόπος διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται στα υπερ-γραμμικά προβλήματα [84, Ενότητα 2.4] είναι πολλαπλασιαστικός. Η νέα ΣΔΕ (2) είναι γραμμική με εκθετική λύση σε κάθε υποδιάστημα. Το πεδίο μελέτης είναι το $\mathbb{R}^+$ και στην ενότητα αριθμητικών πειραμάτων [84, Ενότητα 2.5] ασχολούμαστε με το Heston 3/2-μοντέλο με συντελεστές της μορφής $a(s,x) = k_1 x - k_2 x^2$ και $b(s,x) = k_3 x^{3/2}$.

Η σχέση (3) δεν αποκαλύπτει την τάξη σύγκλισης. Πάραυτα, αφού το σχήμα μας είναι πρώτης τάξης - χρησιμοποιούμε ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα στη (2)- ξέρουμε εκ των προτέρων ότι η μέγιστη δυνατή τάξη που μπορούμε να επιτύχουμε είναι 1, δηλαδή της μορφής (5) με $\gamma = 1$

$$(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |y_t - x_t|^2)^{1/2} \leq C \cdot \Delta.$$

Παρατηρούμε ότι ακόμα και στην περίπτωση όπου οι συντελεστές a και b είναι 'καλοί', δεν ισχύει ανάλογο συμπέρασμα για τις βοηθητικές συναρτήσεις f και g αντίστοιχα, επομένως χρησιμοποιώντας συνήθη επιχειρήματα, αδυνατούμε να εκτιμήσουμε την τάξη σύγκλισης.

Στο [84, Κεφάλαιο 3] μελετάμε υπο-γραμμικά μοντέλα με συντελεστές της μορφής $a(s,x) = k_1 - k_2 x$ και $b(s,x) = k_3 x^q$ με $1/2 < q < 1$. Γνωρίζουμε ξανά ότι $x_t > 0$ σ.β. και στόχος μας είναι η κατασκευή αριθμητικού σχήματος το οποίο να διατηρεί τη θετικότητα. Τώρα χρησιμοποιούμε μία προσθετική διακριτοποίηση και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τάξη ισχυρής σύγκλισης η οποία υπό κάποιες υποθέσεις για τους συντελεστές k_i αποδεικνύεται να είναι $(q - 1/2)/2$, δηλαδή (βλέπε [84, Θεώρημα 3.2.4])

$$(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |y_t - x_t|^2)^{1/2} \leq C \cdot \Delta^{(q-1/2)/2}.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η αρχική συνθήκη x_0 στη (1) αντικαθίσταται από συνάρτηση $\xi(t)$ με $t \in [-\tau, 0]$, δηλαδή έχουμε παραπάνω πληροφορία σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, όπου $\tau > 0$ αναπαριστά το ποσό της διαθέσιμης πληροφορίας. Αυτή είναι η απλούστερη κατηγορία εξισώσεων την οποία καλούμε *διαφορικές εξισώσεις με σταθερή υστέρηση*. Στο [84, Κεφάλαιο 4] μελετάμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο της παραπάνω κατηγορίας, τη λεγόμενη *Γεωμετρική Κίνηση Brown με υστέρηση*. Αυτό το μοντέλο εμφανίζεται στην περιοχή των χρηματοοικονομικών μαθηματικών κατά την τιμολόγηση δικαιωμάτων. Για άλλη μία φορά αποδεικνύουμε τη μέση-τετραγωνική σύγκλιση του προτεινόμενου αριθμητικού σχήματος στην ακριβή λύση του μοντέλου, βλέπε [84, Θεώρημα 4.2.2].

Τέλος, το [84, Κεφάλαιο 5] είναι αφιερωμένο σε μία κλάση ΣΔΕ με λύσεις σε πεδίο το οποίο δεν είναι το $\mathbb{R}^+$. Συγκεκριμένα, η κλάση των ΣΔΕ την οποία μελετάμε επιδέχεται λύσεις οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα $(-1, 1)$ και σκοπός μας είναι η κατασκευή αριθμητικού σχήματος το οποίο διατηρεί αυτή τη δομή και ταυτόχρονο ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I4). Αυτού του είδους οι ΣΔΕ εμφανίζονται στο πεδίο των μοριακών δυναμικών και συγκεκριμένα το λεγόμενο μοντέλο 3-ατόμων [63, Ενότητα 4.2].

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

N. Halidias and I.S. Stamatiou. (2016). On the Numerical Solution of Some Non-Linear Stochastic Differential Equations using the Semi-Discrete Method. *Computational Methods in Applied Mathematics, 16(1), 105-132*

N. Halidias and I.S. Stamatiou (2015). Approximating Explicitly the Mean-Reverting CEV Process. 2015 *Journal of Probability and Statistics, 20 pages, DOI: 10.1155/2015/513137*

Βιβλιογραφία

[1] D.-H. Ahn and B. Gao. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*, 12(4):721–762, 1999.

[2] Y. Ait-Sahalia. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The Review of Financial Studies*, 9(2):385–426, 1996.

[3] J. Alcock and B. K. A note on the Balanced Method. *BIT*, 46(4):689–710, 2006.

[4] J. Alcock and B. K. Stable strong order 1.0 schemes for solving stochastic ordinary differential equations. *BIT Numer. Math.*, 52(3):539–557, 2012.

[5] A. Alfonsi. Strong order one convergence of a drift implicit Euler scheme: Application to the CIR process. *Statistics & Probability Letters*, 83(2):602–607, 2013.

[6] L. Andersen and V. Piterbarg. Moment explosions in stochastic volatility models. *Finance and Stochastics*, 11(1):29–50, 2007.

[7] J. Appleby, M. Guzowska, C. Kelly, and A. Rodkina. Preserving positivity in solutions of discretised stochastic differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217(2):763–774, 2010.

[8] M. Arriojas, Y. Hu, S.-E. Mohammed, and G. Pap. A delayed Black and Scholes formula. *Stochastic Analysis and Applications*, 25(2):471–492, 2007.

[9] C. Baker and E. Buckwar. Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic delay differential equations. *LMS J. Comput. Math.*, 3:315–335, 2000.

[10] D. Bates. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. *Review of financial studies*, 9(1):69–107, 1996.

[11] H. Berestycki, J. Busca, and I. Florent. Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quantitative finance*, 2(1):61–69, 2002.

[12] A. Berkaoui. Euler scheme for solutions of stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. *Portugaliae Mathematica*, 61(4):461–478, 2004.

[13] P. Billingsley. *Probability and measure*. John Willey, 2nd edition, 1986.

[14] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

[15] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley, 1968.

[16] M. Brennan and E. Schwartz. Analyzing convertible bonds. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 15(4):907–929, 1980.

[17] M. Broadie and Ö. Kaya. Exact simulation of option greeks under stochastic volatility and jump diffusion models. In *Simulation Conference, 2004. Proceedings of the 2004 Winter*, volume 2, pages 1607–1615. IEEE, 2004.

[18] M. Broadie and Ö.. Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, 54(2):217–231, 2006.

[19] K. Chan, G. A. Karolyi, F. Longstaff, and A. Sanders. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The Journal of Finance*, 47(3):1209–1227, 1992.

[20] T. Coleman, Y. Li, and A. Verma. Reconstructing the unknown local volatility function. *Journal of Computational Finance*, 2(3):77–102, 1999.

[21] J. Cox. Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. *Unpublished note, Stanford University, Graduate School of Business*, 1975.

[22] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.

[23] S. Cox, M. Hutzenthaler, and A. Jentzen. Local Lipschitz continuity in the initial value and strong completeness for nonlinear stochastic differential equations. *arXiv preprint arXiv:1309.5595*, 2013.

[24] G. Deelstra and F. Delbaen. Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 14(1):77–84, 1998.

[25] S. Dereich, A. Neuenkirch, and L. Szpruch. An Euler-type method for the strong approximation of the cox–ingersoll–ross process. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, page rspa20110505. The Royal Society, 2011.

[26] B. Dumas, J. Fleming, and R. Whaley. Implied volatility functions: Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53(6):2059–2106, 1998.

[27] A. Es-Sarhir and W. Stannat. Improved moment estimates for invariant measures of semilinear diffusions in Hilbert spaces and applications. *Journal of Functional Analysis*, 259(5):1248–1272, 2010.

[28] S. Ethier and T. Kurtz. Markov Processes: Characterization and Convergence, 1986.

[29] W. Feller. Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, 54:173–182, 1951.

[30] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications*, volume 1. Academic Press, 1975.

[31] T. Gronwall. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics*, 20:292–296, 1919.

[32] I. Gyöngy. Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Itô differential. *Probability theory and related fields*, 71(4):501–516, 1986.

[33] N. Halidias. Semi-discrete approximations for stochastic differential equations and applications. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(6):780–794, 2012.

[34] N. Halidias. A novel approach to construct numerical methods for stochastic differential equations. *Numerical Algorithms*, 66(1):79–87, 2014.

[35] N. Halidias. Constructing positivity preserving numerical schemes for the two-factor CIR model. *Monte Carlo Methods and Applications*, 21(4):313–323, 2015.

[36] N. Halidias. Construction of positivity preserving numerical schemes for some multidimensional stochastic differential equations. *Discrete and Continuous Dynamical System Series B*, 20(1):153–160, 2015.

[37] N. Halidias. An explicit and positivity preserving numerical scheme for the mean reverting CEV model. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 32(2):545–552, 2015.

[38] N. Halidias. A new numerical scheme for the CIR process. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2015.

[39] N. Halidias. On construction of boundary preserving numerical schemes. *arXiv preprint arXiv:1601.07864*, 2016.

[40] N. Halidias and I. Stamatiou. Approximating Explicitly the Mean-Reverting CEV Process. *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 513137, 20 pages, 2015.

[41] N. Halidias and I. Stamatiou. On the Numerical Solution of Some Non-Linear Stochastic Differential Equations Using the Semi-Discrete Method. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 16(1):105–132, 2016.

[42] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge university press, 1952.

[43] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.

[44] S. Heston. A simple new formula for options with stochastic volatility. *preprint, http://ssrn.com/abstract=86074*, 1997.

[45] D. Higham and X. Mao. Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3):35–61, 2005.

[46] D. Higham, X. Mao, and L. Szpruch. Convergence, non-negativity and stability of a new Milstein scheme with applications to finance. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B.*, 18(8):1–18, 2013.

[47] J. Hull and A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300, 1987.

[48] T. Hurd and A. Kuznetsov. Explicit formulas for Laplace transforms of stochastic integrals. *Markov Processes and Related Fields*, 14(2):277–290, 2008.

[49] M. Hutzenthaler and A. Jentzen. On a perturbation theory and on strong convergence rates for stochastic ordinary and partial differential equations with non-globally monotone coefficients. *arXiv preprint arXiv:1401.0295*, 2014.

[50] M. Hutzenthaler and A. Jentzen. Numerical approximations of stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. *to appear in Memoirs of the American Mathematical Society*, 236(1112), 2015.

[51] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, and P. Kloeden. Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 467, pages 1563–1576. The Royal Society, 2011.

[52] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, and P. Kloeden. Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with nonglobally Lipschitz continuous coefficients. *The Annals of Applied Probability*, 22(4):1611–1641, 2012.

[53] J. Jacod and P. E. Protter. *Probability essentials*. Springer Science & Business Media, 2003.

[54] C. Kahl. Positive numerical integration of stochastic differential equations. *University of Wuppertal, Research Group Numerical Analysis*, 2004.

[55] C. Kahl, M. Günther, and T. Rossberg. Structure preserving stochastic integration schemes in interest rate derivative modeling. *Applied Numerical Mathematics*, 58(3):284–295, 2008.

[56] C. Kahl and P. Jäckel. Fast strong approximation Monte Carlo schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 6(6):513–536, 2006.

[57] C. Kahl and H. Schurz. Balanced Milstein methods for ordinary SDEs. *Monte Carlo Methods and Applications*, 12(2):143–170, 2006.

[58] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[59] P. Kloeden and A. Neuenkirch. Convergence of numerical methods for stochastic differential equations in mathematical finance. *Recent Developments in Computational Finance: Foundations, Algorithms and Applications*, pages 49–80, 2013.

[60] P. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, volume 23. Springer-Verlag, Berlin, corrected 2nd printing, 1995.

[61] P. Kloeden, E. Platen, and H. Schurz. Numerical solution of SDE through computer experiments, 2003.

[62] U. Küchler and E. Platen. Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay. *Mathematics and Computers in Simulation*, 54(1):189–205, 2000.

[63] F. Legoll and T. Lelièvre. Effective dynamics using conditional expectations. *Nonlinearity*, 23(9):2131–2163, Sept. 2010.

[64] R. Makarov and D. Glew. Exact simulation of Bessel diffusions. *Monte Carlo Methods and Applications*, 16(3-4):283–306, 2010.

[65] R. Mansuy. The Origins of the Word "Martingale". *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 5(1):1–10, 2009.

[66] X. Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Horwood Publishing, Chichester, 1997.

[67] X. Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Horwood Publishing, Chichester, 2nd edition, 2007.

[68] X. Mao and S. Sabanis. Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 151(1):215–227, 2003.

[69] X. Mao and S. Sabanis. Delay geometric Brownian motion in financial option valuation. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 85(2):295–320, 2013.

[70] X. Mao and L. Szpruch. Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 238:14–28, 2013.

[71] X. Mao and L. Szpruch. Strong convergence rates for backward Euler–Maruyama method for non-linear dissipative-type stochastic differential equations with super-linear diffusion coefficients. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 85(1):144–171, 2013.

[72] G. Maruyama. Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1):48–90, 1955.

[73] G. Milstein. A theorem on the order of convergence of mean-square approximations of solutions of systems of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications*, 32(4):738–741, 1988.

[74] G. Milstein, E. Platen, and H. Schurz. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(3):1010–1019, 1998.

[75] P. Mota and M. L. EsquÍvel. On a continuous time stock price model with regime switching, delay, and threshold. *Quantitative Finance*, 14(8):1479–1488, 2014.

[76] A. Neuenkirch and L. Szpruch. First order strong approximations of scalar SDEs defined in a domain. *Numerische Mathematik*, 128(1):103–136, 2014.

[77] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2003.

[78] F. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. AKP classics, A K Peters, Wellesley., 1997.

[79] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Itô calculus*, volume 2. Wiley & Sons, 1987.

[80] S. Sabanis. Euler approximations with varying coefficients: the case of superlinearly growing diffusion coefficients. *arXiv preprint arXiv:1308.1796v3*, 2015.

[81] Y. Saito and T. Mitsui. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(6):2254–2267, 1996.

[82] H. Schurz. Numerical regularization for SDEs: Construction of non-negative solutions. *Dynamic Systems and Applications*, 5(3):323–351, 1996.

[83] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. Springer, 2004.

[84] I. Stamatiou. *Numerical Analysis of Stochastic Differential Equations with applications in Financial Mahematics and Molecular Dynamics*. Stamatiou, 2016.

[85] L. Szpruch. V-stable tamed Euler schemes. *arXiv preprint arXiv:1310.0785v1*, 2013.

[86] M. Tretyakov and Z. Zhang. A fundamental mean-square convergence theorem for SDEs with locally Lipschitz coefficients and its applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(6):3135–3162, 2013.

[87] J. Wilkie and Y. Wong. Positivity preserving chemical Langevin equations. *Chemical Physics*, 353(1):132–138, 2008.

[88] T. Yamada and S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 11(1):155–167, 1971.

[89] Z. Yin and S. Gan. An error corrected Euler-Maruyama method for stiff stochastic differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 256:630–641, 2015.

[90] Z. Zhang. New explicit balanced schemes for SDEs with locally Lipschitz coefficients. *arXiv preprint arXiv:1402.3708*, 2014.

[91] L. Zhu. A source of inequalities for circular functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(10):1998–2004, 2009.