

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Ελευθερία Καβάλου

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Χαλιδιάς

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα : Σπουδές στα Μαθηματικά

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΣΑΜΟΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πριν την παρουσίαση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή Νικόλαο Χαλιδιά για την πολύτιμη καθοδήγηση του, την υπομονή του, την εμπιστοσύνη και την εκτίμηση που μου έδειξε για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιτροπή που αποτελείται από τους καθηγητές Χρήστο Κουντζάκη και Σπύρο Χατζησπύρο για το χρόνο που διέθεσαν για την αξιολόγηση της μεταπτυχιακής εργασίας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδερφή μου και τους φίλους μου που με υπομονή και κουράγιο πρόσφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση και ιδιαίτερα θα ήθελα να αφιερώσω την εργασία αυτή στην μητέρα μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	4
2	Αναλύοντας τους αριθμούς	6
3	<i>Landau</i> Συμβολισμός	9
4	Η Γενική Περίπτωση	10
5	Αναλύοντας τη μέθοδο	14
6	Εφαρμογή σε Συστήματα.	19
7	Η μέθοδος της σειράς <i>Taylor</i>	24
8	Η δεύτερης τάξης μέθοδος: $TS(2)$	25
	8.1 Σχόλιο για την κατασκευή	29
9	Η p τάξης μέθοδος: $TS(p)$	30
10	Σύγκλιση	31
11	Εφαρμογή σε συστήματα	34
12	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	35

1 Εισαγωγή

Η μέθοδος του *Euler* είναι μια πρώτης τάξης αριθμητική διαδικασία για την επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.) με δεδομένη την αρχική τιμή.

Στόχος είναι να προσεγγίσουμε τη λύση της αρχικής τιμής του προβλήματος:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t > t_0 \\ x(t_0) = \eta \end{cases} \quad (1.1)$$

που έχει μια μοναδική λύση για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $t \in [t_0, t_f]$. Χρησιμοποιώντας τους δύο πρώτους όρους από την επέκταση της σειράς *Taylor* του x , η οποία προσεγγίζει τη γραμμική προσέγγιση γύρω από το σημείο $(t_0, x(t_0))$. Ένα βήμα της μεθόδου *Euler* από το t_n στο $t_{n+1} = t_n + h$ είναι $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$.

Η αξία της x_n είναι μια προσέγγιση της λύσης του Προβλήματος Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.) στο χρόνο $t_n : x_n \approx x(t_n)$. Κατά τη διάρκεια, χρησιμοποιώντας h αναφερόμαστε σε ένα "μικρό" θετικό αριθμό που λέγεται "step size" ή "grid size" "μέγεθος βήματος". Θα επιδιώξουμε προσεγγίσεις για τη λύση του Π.Α.Τ. σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $t = t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + nh, \dots$ δηλαδή προσεγγίσεις για την ακολουθία των αριθμών $x(t_0), x(t_0 + h), x(t_0 + 2h), \dots, x(t_0 + nh), \dots$ παρά μια προσέγγιση για την καμπύλη $\{x(t) : t_0 \leq t \leq t_f\}$. Για να απεικονίσουμε τη διαδικασία, ξεκινάμε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα πριν τη γενική περίπτωση.

Παράδειγμα 1.1

Χρησιμοποιούμε μέγεθος βήματος $h = 0.3$ για να αναπτύξουμε μια προσεγγιστική λύση για το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x'(t) = (1 - 2t)x(t), & t > 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

στο διάστημα $0 \leq t \leq 0.9$.

Έχουμε επίτηδες επιλέξει ένα πρόβλημα με γνωστή ακριβή λύση, έτσι ώστε να μπορούμε πιο εύκολα να σχηματίσουμε άποψη για το επίπεδο της ακρίβειας των προσεγγίσεων μας.

$$\text{Είναι } x'(t) = (1 - 2t)x(t) \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = 1 - 2t \Leftrightarrow (\ln x(t))' = (t - t^2)' \Leftrightarrow \ln x(t) = t - t^2 + c.$$

$$\text{Για } t = 0, \ln x(0) = c \Leftrightarrow \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0.$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
 \ln x(t) &= t - t^2 \\
 \Leftrightarrow \ln x(t) &= \ln e^{t-t^2} \\
 \Leftrightarrow x(t) &= e^{t-t^2} \\
 \Leftrightarrow x(t) &= e^{-\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}} \\
 \Leftrightarrow x(t) &= e^{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Για $t = 0$ έχουμε $x(0) = 1$ και από τη ΣΔΕ έχω $x'(0) = 1$. Αυτή η πληροφορία μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε την εφαπτόμενη γραμμή για $t = 0$. Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας : $x = 1 \cdot t + 1, x = t + 1$. Στη συγκεκριμένη τιμή $t = 0.3$ παίρνουμε την τιμή $x = 1.3$, όπου η προσέγγισή μας: $x(0.3) \simeq 1.3$. Αυτό απεικονίζεται στα αριστερά του Σχήματος 1.1 και η γραμμή που ενώνει τα σημεία $P_0(0, 1)$ και $P_1(0.3, 1.3)$ είναι η εφαπτομένη στην ακριβή λύση για $t = 0$.

Για να οργανώσουμε τα αποτελέσματα έστω $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$ υποδηλώνουν τις στιγμές κατά τις οποίες έχουμε λάβει προσεγγιστικές τιμές και συμβολίζουμε με x_n την υπολογισμένη προσέγγιση στην ακριβή λύση $x(t_n)$ για $t = t_n$. Είναι επίσης βολικό να καταγράψουμε την τιμή της δεξιάς πλευράς της ΣΔΕ στο σημείο (t_n, x_n) :

$$x'_n = (1 - 2t_n)x_n.$$

Οι αρχικές συνθήκες και το πρώτο βήμα συνοψίζονται με :

$$\begin{array}{ll}
 n = 0 : t_0 = 0 & n = 1 : t_1 = t_0 + h = 0.3 \\
 x_0 = 1 & x_1 = x_0 + hx'_0 = 1.3(x_{n+1} = x_n + hx'_n) \\
 x'_0 = 1 & x'_1 = (1 - 2t_1)x_1 = 0.52.
 \end{array}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται ως εξής: κατασκευάζουμε μια γραμμή μέσω $P_1(t_1, x_1)$ που εφάπτεται στη λύση της διαφορικής εξίσωσης που περνάει μέσω P_1 (φαίνεται ως μια διακεκομμένη καμπύλη στο Σχήμα 1.1 (στη μέση)). Αυτή είναι η εφαπτόμενη γραμμή στο (t_1, x_1) και έχει κλίση x'_1 :

$$x = x_1 + (t - t_1)x'_1.$$

Για $t = 2h$ βρίσκουμε:

$$x_2 = x_1 + hx'_1$$

και έτσι οι υπολογισμοί για τα επόμενα δύο βήματα είναι:

$$\begin{aligned} n = 2 : t_2 = t_1 + h = 0.6 & & n = 3 : t_3 = t_2 + h = 0.9 \\ x_2 = x_1 + hx'_1 = 1.456 & & x_3 = x_2 + hx'_2 = 1.3686 \\ x'_2 = (1 - 2t_2)x_2 = -0.2912 & & x'_3 = (1 - 2t_3)x_3 = -1.0949. \end{aligned}$$

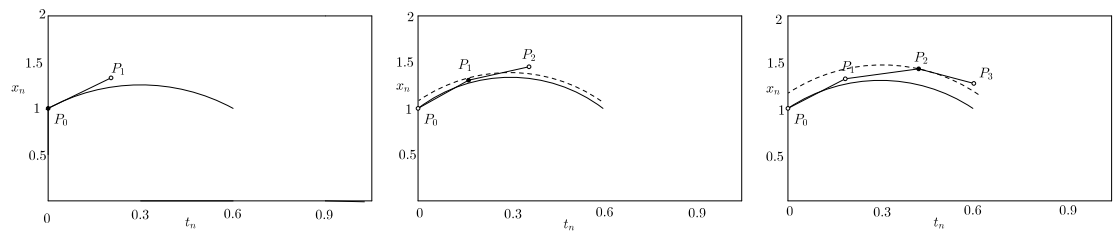
Τα σημεία $P_n(t_n, x_n)$ ($n = 0, 1, 2, 3$) φαίνονται στο Σχήμα 1.1. Για κάθε n η γραμμή $P_n P_{n+1}$ είναι εφαπτόμενη στη λύση για τη διαφορική εξίσωση $x'(t) = (1 - 2t)x(t)$ που διέρχεται από το σημείο $x(t) = x_n$ για $t = t_n$.

2 Αναλύοντας τους αριθμούς

Τα υπολογιζόμενα σημεία P_1, P_2, P_3 στο Σχήμα 1.1 είναι μια σημαντική απόσταση από τη στερεά καμπύλη που αντιπροσωπεύει την ακριβή λύση στο Π.Α.Τ. μας. Αυτό είναι μία συνέπεια του γεγονότος ότι το επιλεγμένο μας βήμα $h = 0.3$ είναι πολύ μεγάλο. Στο Σχήμα 1.2 δείχνουμε τα αποτελέσματα του υπολογισμού των αριθμητικών λύσεων (φαίνονται ως στερεές κουκκίδες) σε ένα διάστημα $0 \leq t \leq 3$ με $h = 0.3, 0.15$ και 0.075 .

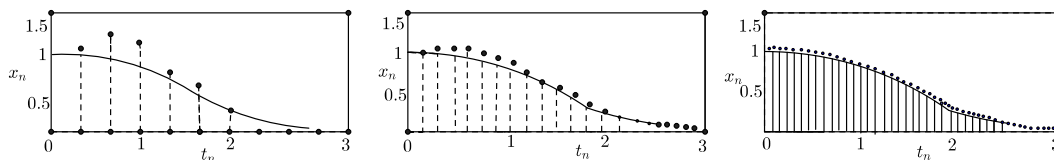
Κάθε φορά το h μειώνεται στο μισό:

1. Διπλά βήματα χρειάζονται για να βρούμε τη λύση για $t = 3$.



Σχήμα 1.1. Η ανάπτυξη της αριθμητικής λύσης για το Π.Α.Τ. στο Παράδειγμα 1.1 σε τρία βήματα. Η ακριβής λύση στο ΠΑΤ φαίνεται ως μία στερεά καμπύλη.

h	x_n	Global errors(GEs)	GE/h
0.3	$x_3 = 1.3686$	$x(0.9) - x_3 = -0.2745$	-0.91
0.15	$x_6 = 1.2267$	$x(0.9) - x_6 = -0.1325$	-0.89
0.075	$x_{12} = 1.1591$	$x(0.9) - x_{12} = -0.0649$	-0.86
<i>Exact</i>	$x(0.9) = 1.0942$		



Σχήμα 1.2. Αριθμητικές λύσεις για το Παράδειγμα 1.1 με $h = 0.3$ (αριστερά), $h = 0.15$ (στη μέση) και $h = 0.075$ (δεξιά).

Πίνακας 1.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για $t = 0.9$ με $h = 0.3$, 0.15 και 0.075 .

2. Τα υπολογισμένα σημεία βρίσκονται πλησιέστερα προς την ακριβή λύση της καμπύλης. Αυτό απεικονίζει την ιδέα ότι η αριθμητική λύση συγκλίνει στην ακριβή λύση καθώς $h \rightarrow 0$.

Για να αποκτήσουμε πιο συγκεκριμένα στοιχεία, οι αριθμητικές λύσεις για $t = 0.9$ φαίνονται στον πίνακα 1.1, δεδομένου ότι η ακριβής λύση σε αυτό

το χρόνο είναι γνωστή, τα σφάλματα στις προσεγγιστικές τιμές μπορούν να υπολογιστούν. Η διαφορά

$$e_n = x(t_n) - x_n$$

αναφέρεται ως το παγκόσμιο σφάλμα (global error) ($G.E.$) για $t = t_n$. Φαίνεται από τον πίνακα ότι ο υποδιπλασιασμός n αποτελεσμάτων αντιστοιχεί σε μισό περίπου σφάλμα. Αυτό υποδηλώνει ότι το ($G.E.$) είναι ανάλογο με το h :

$$e_n \propto h.$$

Είναι δυνατό να αποδειχθεί ότι αυτό είναι αλήθεια για μια ευρεία κατηγορία (μη γραμμικών) Π.Α.Τ., θα αναπτύξουμε κάποια θεωρία κατά μήκος αυτών των γραμμών σε επόμενη ενότητα για ένα μοντέλο γραμμικού προβλήματος. Η τελευταία στήλη του πίνακα 1.1 δείχνει ότι η σταθερά της αναλογικότητας σε αυτή την περίπτωση είναι περίπου -0.9 : $e_n \approx -0.9h$ όταν $nh = 0.9$ και για ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, το h θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε $|e_n| < 0.0005$, δηλαδή $h < 0.0005/0.9 \approx 0.00055$. Συνεπώς η ενσωμάτωση για $t = 0.9$ θα απαιτήσει περίπου $n = 0.9/h \approx 1620$ βήματα.

Μια εναλλακτική άποψη είναι ότι για κάθε επιπλέον ψηφίο της ακρίβειας, το $G.E.$ θα πρέπει να μειωθεί κατά ένα παράγοντα του, ώστε το h πρέπει επίσης να μειωθεί κατά ένα παράγοντα του 10, συνεπώς 10 φορές περισσότερα βήματα απαιτούνται για την ενσωμάτωση στον ίδιο τελικό χρόνο. Έτσι 10 φορές περισσότερη υπολογιστική προσπάθεια πρέπει να δαπανηθεί για την βελτίωση της προσέγγισης από ένα μόνο δεκαδικό ψηφίο-μια σημαντική αύξηση του κόστους.

3 Landau Συμβολισμός

Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση του στάνταρ συμβολισμού $O(h^p)$ με p ένας θετικός ακέραιος, που δείχνει πόσο μικρό γίνεται το h^p καθώς h είναι αρκετά μικρό. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε $z = O(h^p)$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές h_0 και C τέτοιες ώστε

$$|z| \leq Ch^p, \text{ για } 0 < h < h_0$$

και z συγκλίνει στο μηδέν καθώς $h \rightarrow 0$, τότε η σειρά (ή ποσοστό) της σύγκλισης είναι p . Ο συμβολισμός $O(h^p)$ έχει ως στόχο να δώσει την εντύπωση που μας ενδιαφέρει κυρίως σε p και όχι C και λέμε ότι « z είναι της τάξης h^p » ή « z είναι τάξης p ». Για παράδειγμα, η επέκταση του *Maclaurin* του e^h είναι:

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots + \frac{1}{n!}h^n + \dots,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε:

$$e^h = 1 + O(h) \quad (1.4a)$$

$$= 1 + h + O(h^2) \quad (1.4b)$$

$$= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + O(h^3) \quad (1.4c)$$

Χρησιμοποιούμε αυτή την ιδέα για να συγκρίνουμε τα μεγέθη των διαφορετικών όρων: για παράδειγμα, ο όρος $O(h^3)$ στην (1.4c) θα είναι πάντα μικρότερος από τον όρο $O(h^2)$ στην (1.4b) δεδομένου ότι h είναι αρκετά μικρό: όσο υψηλότερη τάξη, τόσο μικρότερος όρος. Η έννοια του «αρκετά μικρό» δεν είναι ακριβής: h^3 είναι μικρότερο από το h^2 για $h < 1$, ενώ $100h^3$ είναι μικρότερο από ότι h^2 για $h < \frac{1}{100}$. Έτσι, η μικρότητα του h εξαρτάται από τις συνθήκες.

Όλες οι μέθοδοι που συζητάμε θα πρέπει να στηρίζονται στην παραδοχή ότι η λύση $x(t)$ είναι ομαλή, με την έννοια ότι πολλά παράγωγα όπως απαιτούμε είναι συνεχείς στο διάστημα (t_0, t_f) . Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε όσους όρους επιθυμούμε για την επέκταση της σειράς *Taylor*.

4 Η Γενική Περίπτωση

Για να αναπτυχθεί η μέθοδος του *Euler* για την επίλυση των γενικών ΠΑΤ (1.1) η διαδικασία προσέγγισης αρχίζει με την εξέταση της σειράς *Taylor* του $x(t+h)$ με υπόλοιπο:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + R_1(t) \quad (1.5)$$

Ο όρος υπόλοιπο $R_1(t)$ λέγεται τοπικό σφάλμα αποκοπής (*LTE*) (local truncation error). Αν $x(t)$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο διάστημα (t_0, t_f) ο όρος υπόλοιπο μπορεί να γραφεί ως:

$$R_1(t) = \frac{1}{2!}h^2x''(\xi), \xi \in (t, t+h) \quad (1.6)$$

Έπειτα, αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός M έτσι ώστε $|x''(t)| \leq M, \forall t \in (t_0, t_f)$, προκύπτει ότι

$$R_1(t) \leq \frac{1}{2}Mh^2,$$

δηλαδή, $R_1(t) = O(h^2)$.

Για να προκύψει η μέθοδος του *Euler* αρχίζουμε με την αντικατάσταση $x'(t) = f(t, x)$ στην σειρά *Taylor* (1.5) παίρνοντας:

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)) + R_1(t) \quad (1.7)$$

Τώρα εισάγουμε ένα πλέγμα από σημεία $t = t_n$, όπου

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 1 : N \quad (1.8)$$

(από 1 έως n και το τελευταίο είναι t_n).

Για $N = n$, $t_n = t_f$ και N είναι ο αριθμός των βημάτων των αναγκαίων για την επίτευξη μήκους h , αλλά να μην υπερβαίνει $t = t_f$. Με $t = t_n$ (για $n < N$) στην (1.7) έχουμε:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) + R_1(t_n), \quad n = 0 : N - 1$$

και με την αρχική συνθήκη (Α.Σ.) $x(t_0) = \eta$, θα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ακριβή λύση του ΠΑΤ σε ένα πλέγμα $\{t_n\}_{n=0}^N$ χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση επανάληψης, όταν ο όρος $R_1(t)$ δεν υπάρχει. Δεδομένου ότι $R_1(t) = O(h^2)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό (παίρνοντας h να είναι αρκετά μικρό) και όταν παραμελείται παίρνουμε τη μέθοδο του *Euler*,

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την ακολουθία $\{x_n\}$ δεδομένου ότι $x_0 = \eta$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$f_n \equiv f(t_n, x_n) \quad (1.9)$$

για την τιμή της παραγώγου για $t = t_n$, έτσι ώστε η μέθοδος του *Euler* μπορεί να γραφεί ως:

$$x_{n+1} = x_n + hf_n. \quad (1.10)$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις (όπως με τα στοιχεία των συστημάτων των ΣΔΕ) είναι πιο βολικό να γραφεί x'_n για την προσέγγιση της παραγώγου του x για $t = t_n$. Τότε η μέθοδος του *Euler* θα μπορούσε να γραφεί ως:

$$x_{n+1} = x_n + h x'_n. \quad (1.11)$$

Παράδειγμα 1.2

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του *Euler* για να λύσουμε το ΠΑΤ :

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t)(1 - x(t)) , t > 10 \\x(10) &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

για $10 \leq t \leq 11$ με $h = 0.2$.

Με $f(t, x) = 2x(1 - x)$ και $h = \frac{1}{5}$, υπολογίζουμε, για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, τις τιμές t_n , x_n και x'_n . Οι υπολογισμοί για τα πέντε πρώτα βήματα φαίνονται στον πίνακα 1.2 και τα σημεία $\{(t_n, x_n)\}$, όταν ο υπολογισμός επεκτείνεται σε διάστημα $10 \leq t \leq 13$, φαίνεται στο σχήμα 1.3 με τελείες, όπου η στερεά καμπύλη δείχνει την ακριβή λύση του ΠΑΤ: $x(t) = 1/(1 + 4\exp(2(10 - t)))$.

Απόδειξη της παραπάνω σχέσης: $\frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} = 2$ (1)

$$\begin{aligned}& \int \frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} dt \\& \text{Θέτω } x(t) = u , x'(t)dt = du \\& = \int \frac{du}{u(1-u)} \\& \frac{1}{u(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} \\& 1 = A(1-u) + B \cdot u \\& 1 = A - Au + Bu \\& 1 = A + (-A + B) \cdot u \\& A = 1, -1 + B = 0 \Rightarrow B = 1 \\& = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du \\& = \int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{1-u} du \\& = \ln u - \ln(1-u) = \ln \frac{x(t)}{1-x(t)} \\& (1) \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t))} dt = \int 2 dt \\& \Leftrightarrow \ln \frac{x(t)}{1-x(t)} = 2t + c \\& \Leftrightarrow \ln \frac{x(t)}{1-x(t)} = \ln e^{2t+c} \\& \Leftrightarrow \frac{x(t)}{1-x(t)} = e^{2t+c} \quad (2) \\& \Leftrightarrow \frac{0.2}{0.8} = e^{20+c} \\& \Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{20+c} \\& \Leftrightarrow \ln \frac{1}{4} = 20 + c \\& \Leftrightarrow -\ln 4 = 20 + c \\& \Leftrightarrow c = -20 - \ln 4 \\& (2) \Rightarrow \frac{x(t)}{1-x(t)} = e^{2t-20-\ln 4} \\& \Leftrightarrow \frac{x(t)}{1-x(t)} = e^{2t-20} \cdot e^{-\ln 4}\end{aligned}$$

n	t_n	x_n	$x'_n = 2x_n(1 - x_n)$
0	10.0	0.2	0.32
1	10.2	0.2640	0.3886
2	10.4	0.3417	0.4499
3	10.6	0.4317	0.4907
4	10.8	0.5298	0.4982
5	11.0	0.6295	0.4665

$$\Leftrightarrow \frac{x(t)}{1-x(t)} = e^{2t-20} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x(t)}{1-x(t)} = e^{2t-20}$$

$$\Leftrightarrow 4x(t) = e^{2t-20}(1 - x(t))$$

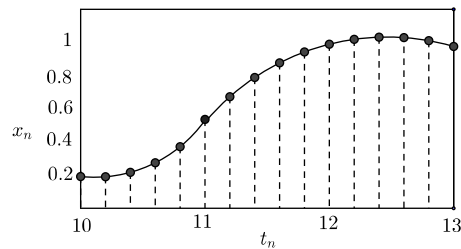
$$\Leftrightarrow 4x(t) + e^{2t-20} \cdot x(t) = e^{2t-20}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{e^{2(t-10)}}{4+e^{2(t-10)}}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{4+e^{2(t-10)}}{e^{2(t-10)}}}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{1+4 \cdot e^{2(10-t)}}$$

Πίνακας 1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το Παράδειγμα 1.2 όταν $10 \leq t \leq 11$ με $h = 0.2$



Σχήμα 1.3 Αριθμητική λύση στο Παράδειγμα 1.2 (κουκκίδες) και η ακριβής λύση για το ΠΑΤ (στερεά καμπύλη).

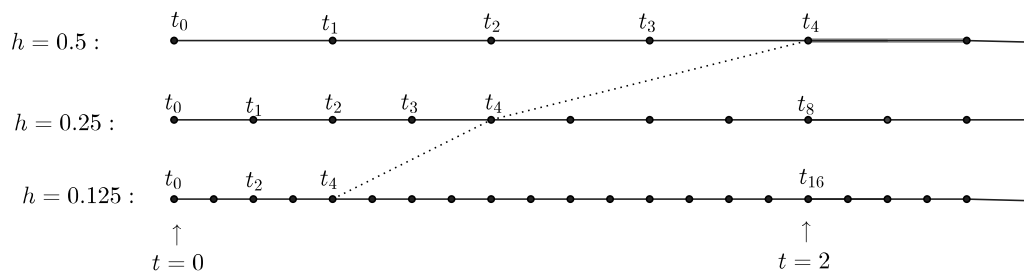
5 Αναλύοντας τη μέθοδο

Στην ενότητα αυτή η συμπεριφορά των αριθμητικών μεθόδων και η μέθοδος του *Euler* ειδικότερα, διερευνάται στο όριο $h \rightarrow 0$. Όταν h μειώνεται, η αριθμητική λύση θα πρέπει να προσεγγίσει την ακριβή λύση, δηλαδή το μέγεθος του GE

$$|e_n| \equiv |x(t_n) - x_n|$$

για $t_n = t_0 + nh$ θα πρέπει επίσης να μειωθεί. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό, καθώς βάζουμε περισσότερη υπολογιστική προσπάθεια, θα πρέπει να επιτύχουμε μία πιο ακριβή λύση. Η κατάσταση είναι, ωστόσο, λίγο πιο λεπτή απ' ό

είναι άμεσα εμφανής. Εάν πρέπει να συγκρίνουμε,ας πούμε, τους τέταρτους όρους στις ακολουθίες $\{x(t_n)\}$ και $\{x_n\}$ υπολογίζοντας με $h = 0.5$, 0.25 και 0.125 , τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το σφάλμα στο $t_4 = t_0 + 2.0$, $t_0 + 1.0$ και $t_0 + 0.5$, αντίστοιχα. Δηλαδή, μπορούμε να συγκρίνουμε τα σφάλματα σε διαφορετικούς χρόνους, για διαφορετικές τιμές του h . Καθώς $h \rightarrow 0$, $t_4 = t_0 + 4h \rightarrow t_0$, μπορούμε τελικά να συγκρίνουμε το x_4 με την αρχική συνθήκη $x(t_0) = \eta$. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να συγκρίνουμε την ακριβή λύση του ΠΑΤ και την αριθμητική λύση σε ένα καθορισμένο χρόνο $t = t^*$, εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης. Για αυτό το σκοπό, η σχετική τιμή του δείκτη n υπολογίζεται από $t_n = t_0 + nh = t^*$, ή $n = (t^* - t_0) / h$, έτσι ώστε $n \rightarrow \infty$ καθώς $h \rightarrow 0$. Τα παραπάνω δεδομένα απεικονίζονται στο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4. Τα πλέγματα που σχετίζονται με τα πλέγματα μεγέθους $h = 0.5$, 0.25 και 0.125 .

Ορισμένα αποτελέσματα από τη μέθοδο του *Euler* δείχνουν ότι το GE ήταν ανάλογο με $h : e_n \propto h$ όταν $nh = 0.9$, γεγονός που υποδηλώνει ότι το GE για $t^* = 0.9$ θα μπορούσε να γίνει αυθαίρετα μικρό επιλέγοντας ένα αντίστοιχα μικρό μέγεθος βήματος h . Δηλαδή θα μπορούσαμε να ήμασταν έτοιμοι να λάβουμε έναν επαρκή αριθμό από μικρά βήματα, αποκτώντας μία προσέγγιση που θα ήταν τόσο ακριβής όσο εμείς θα ήμασταν ευχαριστημένοι. Αυτό υποδηλώνει ότι η μέθοδος του *Euler* συγκλίνει.

Ορισμός 5.1 Μία αριθμητική μέθοδος λέμε ότι συγκλίνει στη λύση $x(t)$ ενός δεδομένου ΠΑΤ στο $t = t^*$ εάν το GE $e_n = x(t_n) - x_n$ στο $t_n = t^*$ ικανοποιεί τη σχέση

$$|e_n| \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

καθώς $h \rightarrow 0$. Συγκλίνει σε βαθμού p τάξης αν $e_n = O(h^p)$ για κάποια $p > 0$.

Λαμβάνοντας την άποψη ότι οι αριθμητικές μέθοδοι δεν έχουν καμία αξία αν δεν συγκλίνουν, αφού οποιαδήποτε αριθμητική ακρίβεια μπορεί να διασφαλιστεί παίρνοντας h να είναι αρκετά μικρό.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέθοδος του *Euler* συγκλίνει για ΠΑΤ της μορφής (1.1), εφόσον αυτή έχει μια μοναδική λύση για $t_0 \leq t \leq t_f$. Ωστόσο η απόδειξη είναι τεχνική λόγω του γεγονότος ότι έχει να αντιμετωπίσει μια γενική μη γραμμική ΣΔΕ. Πρέπει επομένως να είμαστε λιγότερο φιλόδοξοι και να παρέχουμε την απόδειξη μόνο για μια γραμμική σταθερά-επαρκή περίπτωση και τα συμπεράσματα να είναι σχετικά με πιο γενικές καταστάσεις. Ειδικότερα, το αποτέλεσμα θα δείξει πως τα τοπικά σφάλματα που διαπράχθηκαν σε κάθε βήμα με την περικοπή μιας σειράς *Taylor* συσσωρεύονται για την παραγωγή του GE .

Θεώρημα 5.1 Η μέθοδος του *Euler* εφαρμόζεται στο ΠΑΤ

$$x'(t) = \lambda x(t) + g(t), 0 < t \leq t_f,$$

$$x(0) = 1$$

(όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και g είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση) συγκλίνει και το GE σε οποιαδήποτε $t \in [0, t_f]$ είναι $O(h)$.

Απόδειξη

Η μέθοδος του *Euler* για το ΠΑΤ δίνει:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad (\text{όπου } f = \lambda x + g), \text{ δηλαδή}$$

$$x_{n+1} = x_n + \lambda h x_n + hg(t_n)$$

$$x_{n+1} = (1 + \lambda h)x_n + hg(t_n) \quad (1.13)$$

ενώ από την επέκταση της σειράς *Taylor* $(x(t+h) = x(t) + hx'(t) + R_1(t))$ για την ακριβή λύση έχουμε:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + R_1(t_n)$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h(\lambda x(t_n) + g(t_n)) + R_1(t_n) \quad (1.14)$$

Αφαιρώντας (1.13) από (1.14) βρίσκουμε ότι το GE $e_n = x(t_n) - x_n$ ικανοποιεί την εξίσωση διαφοράς:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x(t_n) - x_n + h\lambda x(t_n) - \lambda h x_n + hg(t_n) - hg(t_n) + R_1(t_n) \\ &\Rightarrow e_{n+1} = e_n + \lambda h e_n + R_1(t_n) \\ &\Rightarrow e_{n+1} = (1 + \lambda h)e_n + T_{n+1} \end{aligned} \quad (1.15)$$

όπου έχουμε γράψει T_{n+1} αντί του $R_1(t_n)$ για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός. Επιπλέον, δεδομένου ότι $x_0 = x(t_0) = \eta$, έχουμε $e_0 = 0$. Η εξίσωση (1.15) υπαγορεύει πως το GE στο επόμενο βήμα (e_{n+1}) συνδυάζει το LTE που διαπράχθηκε στο τρέχον βήμα (T_{n+1}) με το GE που κληρονόμησε από τα προηγούμενα βήματα (e_n). Μια παρόμοια εξίσωση ισχύει και για γενικότερες $\Sigma\Delta E$.

Αντικαθιστώντας $n = 0, 1, 2$ στην (1.15) βρίσκουμε χρησιμοποιώντας $e_0 = 0$,

$$\begin{aligned} e_1 &= T_1, \\ e_2 &= (1 + h\lambda)e_1 + T_2 = (1 + h\lambda)T_1 + T_2, \\ e_3 &= (1 + h\lambda)e_2 + T_3 = (1 + h\lambda)^2 T_1 + (1 + h\lambda)T_2 + T_3, \end{aligned}$$

γεγονός που υποδηλώνει τον γενικό τύπο:

$$\begin{aligned} e_n &= (1 + h\lambda)^{n-1}T_1 + (1 + h\lambda)^{n-2}T_2 + \dots + T_n \Rightarrow \\ e_n &= \sum_{j=1}^n (1 + h\lambda)^{n-j}T_j \end{aligned} \quad (1.16)$$

Το μόνο που μένει είναι να βρούμε ένα άνω όριο για την δεξιά πλευρά. Πρώτον, χρησιμοποιώντας τη σχέση $e^x \geq x + 1$ (με $x = |\lambda|$) και με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda| &\leq 1 + h|\lambda| \leq e^{h|\lambda|}, \text{ δεδομένου } (n - j)h = t_{n-j} \leq t_f \text{ και } 0 < j \leq n \\ &\text{έχουμε:} \\ |1 + h\lambda|^{n-j} &\leq e^{(n-j)h|\lambda|} = e^{|\lambda|t_{n-j}} \leq e^{|\lambda|t_f} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Δεύτερον, (ανεξάρτητη από h ή j), κάθε όρος στο άθροισμα στα δεξιά της

(1.16) οριοθετείται, καθώς πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $|1 + h\lambda|^{n-j} \leq e^{|\lambda|t_f}$ και $|T_j| \leq Ch^2$ έχουμε:

$$|1 + h\lambda|^{n-j} \cdot |T_j| \leq Ch^2 \cdot e^{|\lambda|t_f}$$

$$\sum_{j=1}^n |1 + h\lambda|^{n-j} |T_j| \leq \sum_{j=1}^n Ch^2 \cdot e^{|\lambda|t_f}$$

$$|e_n| \leq n \cdot h^2 \cdot C \cdot e^{|\lambda|t_f} = ht_f C e^{|\lambda|t_f}$$

(χρησιμοποιώντας $nh = t_f$). Έτσι, εφόσον t_f είναι πεπερασμένο, $e_n = O(h)$, έχουμε αποδείξει ότι η μέθοδος του *Euler* συγκλίνει με ρυθμό πρώτης τάξης.

Η απόδειξη καθιστά σαφές ότι η συμβολή του *LTE* T_j σε χρόνο $t = t_j$ για την προσέγγιση του x_n σε χρόνο $t = t_n$ είναι $(1 + h\lambda)^{n-j} T_j$, με $1 + h\lambda > -1$. Το *LTE* ενισχύεται αν λ είναι πραγματικό και θετικό, και μειώνεται αν λ είναι πραγματικό και αρνητικό. Η πιο σημαντική παρατήρηση ωστόσο είναι ότι το *LTE* $T_n = O(h^{p+1})$ της τάξης $(p+1)$ οδηγεί σε ένα *GE* $e_n = O(h^p)$ της τάξης p , το συσσωρευτικό αποτέλεσμα της εισαγωγής ενός σφάλματος αποκοπής σε κάθε βήμα είναι να χάσει μια δύναμη του h .

6 Εφαρμογή σε Συστήματα.

Εμείς απεικονίζουμε με παράδειγμα πως η μέθοδος του *Euler* ισχύει για συστήματα των ΣΔΕ.

Παράδειγμα

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του *Euler* για να υπολογίσετε μια προσεγγιστική λύση σε $t = 0.2$ του ΠΑΤ $x''(t) + x(t) = t, t > 0$, με $x(0) = 1$ και $x'(0) = 2$. Χρησιμοποιήστε ένα μήκος βήματος $h = 0.1$.

Για να μετατρέψουμε την εξίσωση δεύτερης τάξης σε ένα σύστημα, θέτουμε $u = x$ και $v = x'$, έτσι $v' = u'' = x'' = -u + t$. Αυτό δίνει το σύστημα

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = t - u(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

στο διάστημα $t > 0$ με τις αρχικές συνθήκες $u(0) = 1, v(0) = 2$. Από σει-

ρά *Taylor* έχουμε:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + O(h^2),$$

$$v(t+h) = v(t) + hv'(t) + O(h^2).$$

Μη λαμβάνοντας υπόψην τους όρους υπόλοιπο η μέθοδος του *Euler* για το σύστημα (1.17) δίνει:

$$t_{n+1} = t_n + h,$$

$$u_{n+1} = u_n + hu'_n, \quad u'_{n+1} = v_{n+1},$$

$$v_{n+1} = v_n + hv'_n, \quad v'_{n+1} = t_{n+1} - u_{n+1}$$

Να σημειωθεί ότι και τα δύο u_{n+1} και v_{n+1} πρέπει γενικά να υπολογίζονται πριν από τον υπολογισμό της παραγώγου προσεγγίσεις u'_{n+1} και v'_{n+1} . Οι αρχικές συνθήκες είναι $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ για $t = t_0 = 0$ και οι δεδομένες διαφορικές εξισώσεις οδηγούν σε $u'_0 = v_0 = 2$ και $v'_0 = t_0 - u_0 = -1$. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω επαναληπτικές σχέσεις πρώτα με $n = 0$ και έπειτα με $n = 1$ έχουμε:

$$\begin{array}{lll} n = 0 : & t_1 = 0.1, & n = 1 : t_2 = 0.2, \\ & u_1 = u_0 + 0.1u'_0 = 1.2, & u_2 = 1.39, \\ & v_1 = v_0 + 0.1v'_0 = 1.9, & v_2 = 1.79, \\ & u'_1 = 1.9, & u'_2 = 1.79, \\ & v'_1 = t_1 - u_1 = -1.1, & v'_2 = t_2 - u_2 = -1.19. \end{array}$$

Οι υπολογισμοί προχωράνε με παρόμοιο τρόπο μέχρι να επιτευχθεί η απαιτούμενη λήξη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του *Euler* με $h = 0.2$ για να δείξετε ότι η λύση του Π.Α.Τ. $x'(t) = t^2 - x(t)^2$, $t > 0$, με $x(0) = 1$ είναι περίπου $x(0.4) \approx 0.68$. Δείξτε ότι αυτή η εκτίμηση αλλαγών στο $x(0.4) \approx 0.708$ εάν ο υπολογισμός επαναλαμβάνεται με $h = 0.1$.

ΛΥΣΗ

Καταγράφουμε τη Σ.Δ.Ε. στο σημείο (t_n, x_n) : $x'_n = t_n^2 - x_n^2$

Για $n = 0$: $t_0 = 0$

$$x_0 = 0$$

$$x'_0 = -1$$

Για $n = 1$: $t_1 = t_0 + nh = 0 + 1 \cdot 0.2 = 0.2$

$$x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 0 + 0.2 \cdot (-1) = -0.2$$

$$x'_1 = t_1^2 - x_1^2 = 0.2^2 - (-0.2)^2 = 0.04 - 0.04 = 0$$

Για $n = 2$: $t_2 = t_0 + nh = 0 + 2 \cdot 0.2 = 0.4$

$$x_2 = x_1 + h \cdot x'_1 = -0.2 + 0.2 \cdot 0 = -0.2$$

$$x'_2 = t_2^2 - x_2^2 = 0.4^2 - (-0.2)^2 = 0.16 - 0.04 = 0.12$$

Στην περίπτωση $h = 0.1$:

Για $n = 0$: $t_0 = 0$

$$x_0 = 1$$

$$x'_0 = -1$$

Για $n = 1$: $t_1 = t_0 + nh = 0 + 1 \cdot 0.1 = 0.1$

$$x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + 0.1 \cdot (-1) = 0.9$$

$$x'_1 = t_1^2 - x_1^2 = 0.1^2 - 0.9^2 = 0.01 - 0.81 = -0.8$$

Για $n = 2$: $t_2 = t_0 + nh = 0 + 2 \cdot 0.1 = 0.2$

$$x_2 = x_1 + h \cdot x'_1 = 0.9 + 0.1 \cdot (-0.8) = 0.82$$

$$x'_2 = t_2^2 - x_2^2 = 0.2^2 - 0.82^2 = 0.04 - 0.6724 = -0.6324$$

Για $n = 3$: $t_3 = t_0 + nh = 0 + 3 \cdot 0.1 = 0.3$

$$x_3 = x_2 + h \cdot x'_2 = 0.82 + 0.1 \cdot (-0.6324) = 0.75676$$

$$x'_3 = t_3^2 - x_3^2 = 0.3^2 - 0.75676^2 \simeq 0.09 - 0.57 \simeq -0.48$$

Για $n = 4$: $t_4 = t_0 + nh = 0 + 4 \cdot 0.1 = 0.4$

$$x_4 = x_3 + h \cdot x'_3 = 0.75676 + 0.1 \cdot (-0.48) = 0.70876 \simeq 0.708$$

2. Λαμβάνοντας τη σχέση που δίνει τη δυνατότητα επανάληψης το x_{n+1} υπολογίζεται από x_n όταν η μέθοδος του *Euler* εφαρμόζεται στο Π.Α.Τ. $x'(t) = \lambda x(t)$, $x(0) = 1$ με $\lambda = -10$. Σε καθεμία από τις περιπτώσεις

$$h = \frac{1}{6} \text{ και } h = \frac{1}{12} :$$

α) υπολογίστε x_1, x_2 και x_3 ,

β) υπολογίστε τα σημεία $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2),$ και (t_3, x_3) και την α-κριβή λύση $x(t) = e^{\lambda t}$.

Βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του h που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για $\lambda = -10$ ώστε να εξασφαλιστεί ότι $x_n > 0$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$

ΛΥΣΗ

α) Καταγράφουμε τη Σ.Δ.Ε. στο σημείο $(t_n, x_n) : x'_n(t) = -10x_n(t)$

Για $h = \frac{1}{6}$:

Για $n = 0 : t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$x'_0 = -10 \cdot x_0 = -10 \cdot 1 = -10$

Για $n = 1 : t_1 = t_0 + nh = 0 + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + \frac{1}{6} \cdot (-10) = 1 - \frac{10}{6} = -\frac{2}{3}$

$x'_1 = -10 \cdot x_1 = -10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3}$

Για $n = 2 : t_2 = t_0 + nh = 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = x_1 + h \cdot x'_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{4}{9}$

$x'_2 = -10 \cdot x_2 = -10 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{40}{9}$

Για $n = 3 : t_3 = t_0 + nh = 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$x_3 = x_2 + h \cdot x'_2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{40}{9}\right) = -\frac{8}{27}$

$x'_3 = -10 \cdot x_3 = -10 \cdot \left(-\frac{8}{27}\right) = \frac{80}{27}$

Για $h = \frac{1}{12}$:

Για $n = 0 : t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$x'_0 = -10 \cdot x_0 = -10 \cdot 1 = -10$

Για $n = 1 : t_1 = t_0 + nh = 0 + 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

$x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + \frac{1}{12} \cdot (-10) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{1}{6}$

$x'_1 = -10 \cdot x_1 = -10 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{3}$

$$\text{Για } n = 2 : t_2 = t_0 + nh = 0 + 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = x_1 + h \cdot x'_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{36}$$

$$x'_2 = -10 \cdot x_2 = -10 \cdot \frac{1}{36} = -\frac{5}{18}$$

$$\text{Για } n = 3 : t_3 = t_0 + nh = 0 + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$x_3 = x_2 + h \cdot x'_2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{1}{216}$$

$$x'_3 = -10 \cdot x_3 = -10 \cdot \frac{1}{216} = -\frac{5}{108}$$

β) Έχουμε τα σημεία:

$$(t_0, x_0) = (0, 1), (t_1, x_1) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right), (t_2, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right), \\ (t_3, x_3) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{8}{27}\right)$$

Η ακριβής λύση είναι: $x(t) = e^{-10t}$.

Για να εξασφαλιστεί $x_n > 0$ πρέπει: $x_1 = x_0 + h \cdot x'_0 = 1 + h \cdot (-10) > 0$

$$1 - 10h > 0 \\ -10h > -1 \\ h < \frac{1}{10}$$

3. Αντλείστε τη μέθοδο του *Euler* για το πρώτης - τάξης σύστημα:

$$u'(t) = -2u(t) + v(t) \\ v'(t) = -u(t) - 2v(t)$$

με αρχικές συνθήκες $u(0) = 1, v(0) = 0$. Χρησιμοποιείστε $h = 0.1$ για να υπολογίσετε τις προσεγγιστικές τιμές για $u(0.2)$ και $v(0.2)$.

ΛΥΣΗ

Από τη σειρά *Taylor* έχουμε:

$$\begin{aligned}u(t+h) &= u(t) + h \cdot u'(t) + O(h^2) \\v(t+h) &= v(t) + h \cdot v'(t) + O(h^2)\end{aligned}$$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n + h \\u_{n+1} &= u_n + h \cdot u'_n, u'_{n+1} = v_{n+1} \\v_{n+1} &= v_n + h \cdot v'_n, v'_{n+1} = t_{n+1} - u_{n+1}\end{aligned}$$

Για τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$u_0 = 1, u'_0 = v_0 = 0, v_0 = 0, v'_0 = t_0 - u_0 = -1$$

$$\begin{aligned}\text{Για } n = 0: t_1 &= t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\u_1 &= u_0 + h \cdot u'_0 = 1 + 0.1 \cdot 0 = 1 \\v_1 &= v_0 + h \cdot v'_0 = 0 + 0.1 \cdot (-1) = -0.1 \\u'_1 &= v_1 = -0.1 \\v'_1 &= t_1 - u_1 = 0.1 - 1 = -0.9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Για } n = 1: t_2 &= t_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\u_2 &= u(0.2) = u_1 + h \cdot u'_1 = 1 + 0.1 \cdot (-0.1) = 0.99 \\v_2 &= v(0.2) = v_1 + h \cdot v'_1 = -0.1 + 0.1 \cdot (-0.9) = -0.19 \\u'_2 &= v_2 = -0.19 \\v'_2 &= t_2 - u_2 = 0.2 - 0.99 = -0.79\end{aligned}$$

7 Η μέθοδος της σειράς *Taylor*

Η μέθοδος του *Euler* την εξετάσαμε στην περιοχή των $O(h^2)$ όρων της σειράς *Taylor* $x(t_n + h)$ για το σημείο $t = t_n$. Η ακρίβεια των προσεγγίσεων που παράγεται από τη μέθοδο θα μπορούσε να ελέγχεται με ρύθμιση του μεγέθους βήματος h , μια στρατηγική που δεν είναι πάντα πρακτική, αφού μπορεί κανείς να χρειαστεί ένα υπέρμετρο αριθμό βημάτων για την υψηλή ακρίβεια. Για παράδειγμα περίπου ένα εκατομμύριο βήματα είναι απαραίτητα για την επίλυση του ΠΑΤ του παραδείγματος 1.1 με ακρίβεια περίπου 10^{-6} για $0 \leq t \leq 1$.

Μια εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιηθεί μια πιο εξελιγμένη σχέση επανάληψης σε κάθε βήμα προκειμένου να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια (για

την ίδια τιμή του h) ή ένα παρόμοιο επίπεδο ακρίβειας με μια μεγαλύτερη δύναμη του h (και ως εκ τούτου λιγότερα βήματα).

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για την επίτευξη αυτού του στόχου. Σε αυτό το κεφάλαιο διευρύνουμε τη δυνατότητα βελτίωσης της απόδοσης με την συμπερίληψη περαιτέρω όρων της σειράς *Taylor*.

Πρέπει ξανά να ασχοληθούμε με τη λύση ενός ΠΑΤ της μορφής:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), t > t_0 \\ x(t_0) = \eta \end{cases} \quad (2.1)$$

στο διάστημα $t \in [t_0, t_f]$. Περιγράφουμε μια μέθοδο δεύτερης τάξης πριν την αντιμετώπιση της περίπτωσης της γενικής τάξης p .

8 Η δεύτερης τάξης μέθοδος: *TS(2)*

Γνωρίζουμε ότι η επέκταση της δεύτερης τάξης σειράς *Taylor* είναι :

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x''(t) + R_2(t)$$

έχει υπόλοιπο όρο $R_2(t) = O(h^3)$. Βάζοντας $t = t_n$ παίρνουμε (από $t_{n+1} = t_n + h$) :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2!}h^2x''(t_n) + O(h^3).$$

Η παραμέληση του όρου υπόλοιπο με το σκεπτικό ότι είναι μικρό οδηγεί στον τύπο:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{1}{2}h^2x''_n, \quad (2.2)$$

όπου x_n, x'_n, x''_n δηλώνουν προσεγγίσεις του $x(t_n), x'(t_n)$ και $x''(t_n)$ αντίστοιχα. Θα αναφερθούμε σε αυτό ως *TS(2)* μέθοδο (μερικοί συγγραφείς αποκαλούν αυτό, τρίτο όρο *TS method* και στη μέθοδο του *Euler* γίνεται *TS(1)*). Όπως έχουμε αναφέρει η τιμή του x'_n μπορεί να υπολογιστεί από το ΠΑΤ (2.1):

$$x'(n) = f(t_n, x_n)$$

Για x''_n χρειαζόμαστε να διαφοροποιηθούν και οι δύο πλευρές της $\Sigma\Delta\epsilon$ όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο παράδειγμα (το οποίο είχε χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν στο παράδειγμα 1.1 για τη μέθοδο του *Euler*).

Παράδειγμα 2.1

Εφαρμόζοντας την $TS(2)$ μέθοδο για να λύσουμε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} x'(t) = (1 - 2t)x(t), t > 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

χρησιμοποιώντας $h = 0.3$ και $h = 0.15$ και συγκρίνοντας την ακρίβεια για $t = 1.2$ με εκείνη της μεθόδου του *Euler*, δεδομένου ότι η ακριβής λύση είναι

$$x(t) = \exp\left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο (2.2) πρέπει να εκφράσουμε το $x''(t)$ ως συνάρτηση των $x(t)$ και t (θα μπορούσε επίσης να περιλαμβάνει $x'(t)$, αλλά αυτό μπορεί να αντικατασταθεί από τη $\Sigma\Delta\epsilon$) και με τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt}[(1 - 2t)x(t)] \\ x''(t) &= -2x(t) + (1 - 2t)x'(t) \\ x''(t) &= -2x(t) + (1 - 2t)(1 - 2t)x(t) \\ x''(t) &= [(1 - 2t)^2 - 2]x(t), \end{aligned}$$

και έτσι η $TS(2)$ μέθοδος δίνεται από:

$$x_{n+1} = x_n + h(1 - 2t_n)x_n + \frac{1}{2}h^2[(1 - 2t_n)^2 - 2]x_n, n = 0, 1, \dots,$$

όπου $t_n = nh$ και $x_0 = 1$. Όταν οι υπολογισμοί γίνουν με το χέρι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η σχέση (2.2) και να τακτοποιήσουμε τα αποτελέσματα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{array}{ll} n = 0 : t_0 = 0 & n = 1 : t_1 = t_0 + h = 0.3 \\ x_0 = 1 & x_1 = x_0 + hx'_0 + \frac{1}{2}h^2x''_0 = 1.2550 \\ x'_0 = 1 & x'_1 = (1 - 2t_1)x_1 = 0.5020 \\ x''_0 = -1 & x''_1 = [(1 - 2t_1)^2 - 2]x_1 = -2.3092 \end{array}$$

με μια παρόμοια διάταξη για $n = 2, 3, \dots$

Στο σχήμα 2.1 οι υπολογισμοί επεκτείνονται στο διάστημα $0 \leq t \leq 4$ και οι αριθμητικές τιμές με τα σχετικά GEs για $t = 1.2$ παρατίθενται στον

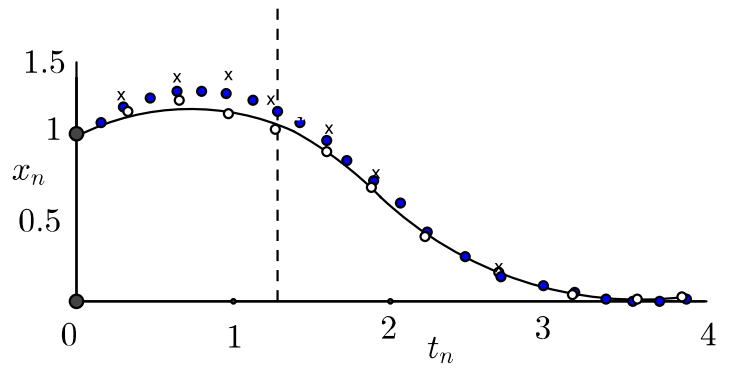
πίνακα 2.1. Παρατηρήσαμε στο παράδειγμα 1.1 ότι το GE στη μέθοδο του *Euler* γινόταν μισό όταν το h υποδιπλασιαζόταν, γεγονός που αντικατοπτρίζει τη σχέση $e_n \propto h$. Ωστόσο από τον πίνακα 2.1, βλέπουμε ότι το σφάλμα για την $TS(2)$ μέθοδο μειώνεται κατά ένα συντελεστή περίπου 4 καθώς h μειώνεται στο μισό ($0.0031 \approx 0.0118/4$), γεγονός που υποδηλώνει ότι το GE $e_n \propto h^2$.

Συμπεραίνουμε από τον πίνακα 2.1 ότι για $t = 1.2$ ¹,

$$\begin{aligned} GE \text{ για τη μέθοδο του } Euler &\approx -0.77h \\ GE \text{ για τη μέθοδο του } TS(2) &\approx 0.14h^2. \end{aligned}$$

¹ Αυτές οι σχέσεις συνάγονται από τους ισχυρισμούς $e_n = C_1h$ για *Euler* και $e_n = C_2h^2$ για $TS(2)$ και επιλέγοντας τις σταθερές C_1, C_2 έτσι ώστε να ταιριάζουν με τα στοιχεία του πίνακα 2.1 για $h = 0.15$.

Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για να επιτευχθεί ακρίβεια 0.01 το μέγεθος βήματος στη μέθοδο *Euler* θα πρέπει να πληρεί τη σχέση $0.77h = 0.01$, από την οποία $h \approx 0.013$ και θα χρειαστούμε περίπου $1.2/0.013 \approx 92$ βήματα για να ενταχθούν σε $t = 1.2$. Ποιές είναι οι αντίστοιχες τιμές για τη μέθοδο $TS(2)$; (Απάντηση: $0.14 \cdot h^2 = 0.01 \Rightarrow h^2 \approx 0.0714 \Rightarrow h \approx 0.27$ και θα χρειαστούμε περίπου $1.2/0.27 \approx 5$ βήματα). Αυτό δείχνει τις τεράστιες δυνατότητες χρησιμοποιώντας υψηλότερης τάξης μέθοδο.



Σχήμα 2.1 Αριθμητικές λύσεις για το Παράδειγμα 2.1

h	Λύσεις για $t = 1.2$		GEs για $t = 1.2$		
	<i>Euler</i> : $TS(1)$	$TS(2)$	<i>Euler</i> : $TS(1)$	$TS(2)$	GE για $TS(2)/h^2$
0.30	1.0402	0.7748	-0.2535	0.0118	0.131
0.15	0.9014	0.7836	-0.1148	0.0031	0.138

× : Η μέθοδος του *Euler*, $h = 0.3$

● : Η μέθοδος του *Euler*, $h = 0.15$

○ : Η μέθοδος του $TS(2)$, $h = 0.15$

Πίνακας 2.1 Αριθμητικές λύσεις και παγκόσμια σφάλματα για $t = 1.2$ για το Παράδειγμα 2.1. Η ακριβής λύση είναι $x(1.2) = e^{-0.24} = 0.7866$.

8.1 Σχόλιο για την κατασκευή

Φαίνεται στο σχήμα 1.1 ότι η μέθοδος του *Euler* θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η κατασκευή μιας πολυγωνικής καμπύλης, οι κορυφές του πολυγώνου αντιπροσωπεύουν τις αριθμητικές τιμές στα σημεία (t_n, x_n) και τις κλίσεις των γραμμικών τμημάτων που υπαγορεύεται από την δεξιά πλευρά της $\Sigma\Delta E$ που υπολογίζονται από τα αριστερά άκρα τους.

Για την $TS(2)$ μπορούμε να πάρουμε μια παρόμοια, δείτε τις πλευρές του πολυγώνου είναι τετραγωνικές καμπύλες που δίνονται από:

(όπου $h = t_{n+1} - t_n$)

$$x = x_n + (t - t_n)x'_n + \frac{1}{2}(t - t_n)^2 x''_n, \text{ για } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

(Η κλίση του *Euler* είναι: $x'(t)$. Η κλίση του τμήματος P_1P_2 είναι η $x'(t_1)$ και του τμήματος P_2P_3 είναι η $x'(t_2)$).

Αυτές οι καμπύλες φαίνονται ως συνδεδεμένα σημεία P_n και P_{n+1} στο σχήμα 2.2 για $n = 0, 1, 2$ όταν $h = 0.3$ για το ΠΑΤ στο παράδειγμα 2.1. Αυτά είναι άμεσα συγκρίσιμα με την πολυγωνική περίπτωση στο σχήμα 1.1 καθώς και η βελτίωση που παρέχεται από το $TS(2)$ φαίνεται να είναι υπερβολική.

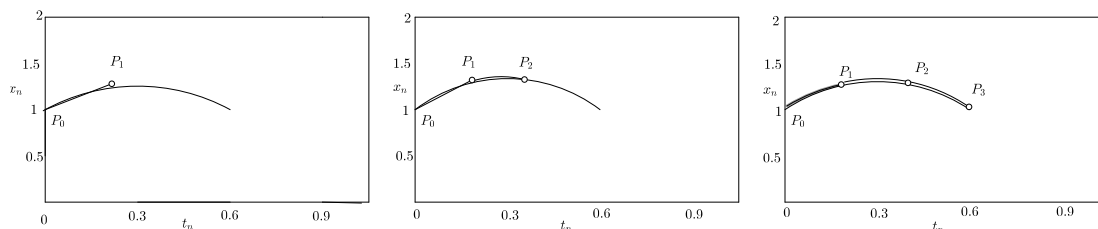
9 Η p τάξης μέθοδος: $TS(p)$

Είναι ξεκάθαρο να επεκτείνουμε την μέθοδο $TS(2)$ που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα για μεγαλύτερη τάξη και έτσι περιγράφουμε τις κύριες ιδέες. Η p τάξη της σειράς *Taylor* του $x(t+h)$ με υπόλοιπο είναι:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x''(t) + \dots + \frac{1}{p!}h^px^{(p)}(t) + R_p(t). \quad (2.4)$$

Όταν $x(t)$ είναι $(p+1)$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο διάστημα (t_0, t_f) , ο όρος υπόλοιπο μπορεί να γραφτεί ως :

$$R_p(t) = \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}x^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in (t, t+h)$$



Σχήμα 2.2 Η ανάπτυξη της $TS(2)$ για το ΠΑΤ στο Παράδειγμα 2.1 για τα τρία πρώτα βήματα. Η ακριβής λύση για το ΠΑΤ φαίνεται ως μία στερεά καμπύλη.

Εάν $|x^{(p+1)}(t)| \leq M$ για κάθε $t \in (t_0, t_f)$, τότε

$$|R_p(t)| \leq \frac{M}{(p+1)!}h^{p+1},$$

διότι $R_p(t) = O(h^{p+1})$.

Η $TS(p)$ μέθοδος προκύπτει εφαρμόζοντας την επέκταση για $t = t_n$ και αγνοώντας τον όρο υπόλοιπο που δίνει:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{1}{2}h^2x''_n + \dots + \frac{1}{p!}h^p x_n^{(p)}, \quad (2.5)$$

στην οποία $x_n, x'_n, \dots, x_n^{(p)}$ δηλώνουν προσεγγίσεις των $x(t_n), x'(t_n), \dots, x^{(p)}(t_n)$, αντίστοιχα. Είναι αναγκαίο να διαφοροποιηθεί η δεξιά πλευρά της ΣΔΕ $(p-1)$ φορές, για να ολοκληρωθεί η προδιαγραφή της μεθόδου.

Σημειώνουμε ότι, εάν η αριθμητική και η ακριβής λύση ήταν να συμπίσουν κατά την έναρξη ενός βήματος, $x_n = x(t_n)$ (αυτό ονομάζεται παραδοχή του εντοπισμού), τότε το σφάλμα στο τέλος του βήματος θα μπορούσε να είναι $x(t_{n+1}) - x_{n+1} = R_p(t_n)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον όρο υπόλοιπο $R_p(t_n)$, συνηθέστερα ονομάζεται LTE (*local truncation error* = τοπικό σφάλμα αποκοπής), ως ένα μέτρο του σφάλματος που έγινε σε κάθε βήμα.

10 Σύγκλιση

Έχουμε αποφύγει μία απόδειξη της σύγκλισης για γενικά προβλήματα και αντί αυτού γενικεύουμε το Θεώρημα 5.1 που δίνεται στο Κεφάλαιο 5 για τη μέθοδο του *Euler*.

Θεώρημα 10.1 Η μέθοδος της σειράς *Taylor* (TS)(p) εφαρμόζεται στο ΠΑΤ

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + g(t), \quad 0 < t \leq t_f, \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

(όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και g είναι μια p φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση) συγκλίνει και το GE σε οποιαδήποτε $t \in [0, t_f]$ είναι $O(h^p)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διαφορά $e_n = x(t_n) - x_n$ και στη συνέχεια παίρνουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς αυτής. Ακολουθώντας, αξιοποιούμε το φράγμα της *Lipschitz* και θα αποδείξουμε ότι η διαφορά αυτή τείνει στο μηδέν, καθώς το h τείνει στο

μηδέν.

Από την επέκταση της σειράς *Taylor* για την ακριβή λύση έχουμε:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2}h^2x''(t_n) + \dots + \frac{1}{p!}h^p x^{(p)}(t_n) + \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}x^{(p+1)}(\xi),$$

εφόσον $x(t)$ είναι $(p+1)$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο διάστημα $[t_0, t_f]$, ο όρος υπόλοιπο μπορεί να γραφτεί ως:

$$R_p(t) = \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}x^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in (t_n, t_{n+1}).$$

Η αντίστοιχη προσεγγιστική λύση είναι:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{1}{2}h^2x''_n + \dots + \frac{1}{p!}h^p x_n^{(p)}$$

Αφαιρώντας την προσεγγιστική από την ακριβή λύση έχουμε:

$$x(t_{n+1}) - x_{n+1} = x(t_n) - x_n + h[x'(t_n) - x'_n] + \frac{1}{2!}h^2[x''(t_n) - x''_n] + \dots + \frac{1}{p!}h^p[x^{(p)}(t_n) - x_n^{(p)}] + \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}x^{(p+1)}(\xi)$$

Αφού η $f(t, x(t))$ ικανοποιεί την κατάλληλη συνθήκη *Lipschitz* έχουμε:

$$|x'(t_n) - x'_n| = |f(t_n, x(t_n)) - f(t_n, x_n)| \leq L|x(t_n) - x_n|$$

Επιπλέον, επειδή η $x(t)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι $(p+1)$ τάξης έχουμε:

$$|x^{(p)}(t_n) - x_n^{(p)}| = |f^{(p-1)}(t_n, x(t_n)) - f^{(p-1)}(t_n, x_n)| \leq L|x(t_n) - x_n|$$

Έχουμε: $e_n = x(t_n) - x_n$, παίρνουμε:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| \left(1 + hL + \frac{1}{2!}h^2L + \dots + \frac{1}{p!}h^pL \right) + \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}|x^{(p+1)}(\xi)|$$

Επειδή υποθέσαμε $|x^{(p+1)}(t)| \leq M$ για κάθε $t \in (t_0, t_f)$ τότε $|R_p(t)| \leq \frac{M}{(p+1)!}h^{p+1}$, έχουμε:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| \left(1 + hL + \frac{1}{2!}h^2L + \dots + \frac{1}{p!}h^pL \right) + \frac{1}{(p+1)!}h^{p+1}M$$

η οποία συντομότερα γράφεται ως εξής:

$$|e_{n+1}| \leq (1 + \alpha)|e_n| + \beta$$

$$\text{όπου } \alpha = L \left(h + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^p}{p!} \right) \text{ και } \beta = \frac{1}{(p+1)!} h^{p+1} M$$

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$|e_n| \leq \beta \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha}$$

Για $n = 0$ έχουμε: $e_0 = 0$

Έστω ότι ισχύει για n , θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Έχουμε:

$$|e_{n+1}| \leq (1 + \alpha) \cdot |e_n| + \beta \leq (1 + \alpha) \cdot \beta \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha} + \beta$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta, |e_{n+1}| \leq (1 + \alpha) \cdot \beta \cdot \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha} + \beta$$

$$= \beta \left[\frac{(1+\alpha)e^{n\alpha} - (1+\alpha)}{\alpha} + 1 \right]$$

$$= \beta \frac{(1+\alpha)e^{n\alpha} - 1 - \alpha + \alpha}{\alpha}$$

$$= \beta \frac{(1+\alpha)e^{n\alpha} - 1}{\alpha}$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta, |e_{n+1}| \leq \beta \frac{(1+\alpha)e^{n\alpha} - 1}{\alpha} \leq \beta \frac{e^\alpha \cdot e^{n\alpha} - 1}{\alpha}, \text{ αφού } e^\alpha \geq \alpha + 1$$

$$\Rightarrow |e_{n+1}| \leq \beta \frac{e^{(1+n)\alpha} - 1}{\alpha}$$

Μπορούμε να γράψουμε το α ως εξής:

$$\alpha = Lh + \left(\frac{Lh}{2} + \dots + \frac{Lh^{p-1}}{p!} \right) h =$$

$$= Lh + \delta h = (L + \delta)h = Bh,$$

όπου δ θετικός αριθμός που τείνει στο 0 καθώς $h \rightarrow 0$.

Αντικαθιστώντας το α με Bh , έχουμε:

$$|e_n| \leq \frac{h^p M}{(p+1)!} \cdot \frac{e^{nBh} - 1}{B}$$

και επειδή $t_n = t_0 + nh$, παίρνουμε:

$$|e_n| \leq \frac{h^p M}{(p+1)!} \cdot \frac{e^{B(t_n - t_0)} - 1}{B}$$

11 Εφαρμογή σε συστήματα

Απεικονίζουμε την εφαρμογή του $TS(2)$ σε συστήματα ΣΔΕ λύνοντας το ίδιο ΠΑΤ στην παράγραφο 6.

Παράδειγμα

Χρησιμοποιήστε την $TS(2)$ μέθοδο με μήκος βήματος $h = 0.1$ για να υπολογίσετε μία προσεγγιστική λύση για $t = 0.2$ του ΠΑΤ :

$$u'(t) = v(t),$$

$$v'(t) = t - u(t)$$

στο διάστημα $t > 0$ με τις αρχικές συνθήκες $u(0) = 1, v(0) = 2$.

Ο τύπος για την ενημέρωση των u και v είναι

$$u_{n+1} = u_n + hu'_n + \frac{1}{2}h^2u''_n,$$

$$v_{n+1} = v_n + hv'_n + \frac{1}{2}h^2v''_n.$$

Από $u'(t) = v(t)$ έχουμε:

$$u''(t) = v'(t) = t - u(t).$$

Διαφορίζοντας τη σχέση $v'(t) = t - u(t)$ οδηγεί στην:

$$v''(t) = 1 - u'(t) = 1 - v(t),$$

η οποία μας δίνει τους απαιτούμενους τύπους :

$$u'_n = v_n, u''_n = v'_n = t_n - u_n, v''_n = 1 - v_n.$$

n	t_n	u_n	$u'_n = v_n$	$u''_n = v'_n$	v''_n
0	0	1.0000	2.0000	-1.0000	-1.0000
1	0.1	1.1950	1.8950	-1.0950	-0.8950
2	0.2	1.3790	1.7810	-1.1790	-0.7810

Σημειώνοντας ότι $u'_n = v_n$ και $u''_n = v'_n$ θα είναι πάντα η περίπτωση όταν η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε ένα πρώτης-τάξης σύστημα. Τα αποτελέσματα του υπολογισμού είναι καθορισμένα στον παρακάτω πίνακα.

Τα συστατικά μέρη των σχέσεων επανάληψης μπορούν να συνδιαστούν για να δώσουν:

$$u_{n+1} = u_n + hv_n + \frac{1}{2}h^2(t_n - u_n),$$

$$v_{n+1} = v_n + h(t_n - u_n) + \frac{1}{2}h^2(1 - v_n),$$

αλλά αυτό ίσως είναι λιγότερο βολικό για υπολογισμό με το χέρι.

12 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Initial Value Problems, David F.Griffiths, Desmond J.Higham, Springer Undergraduate Mathematics Series.
2. Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Μιχαήλ Ν. Βραχάτης, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, Ελληνικά γράμματα.