Χρηστος Κουτσουλας

Η Χρηση Των Απειρα Μικρων Και Απειρα Μεγαλων Αριθμων Στον Euler

Πτυχιακη Εργασια

Πανεπιστημιο Αιγαιου
Τμημα Μαθηματικων

Σαμος
Τριτη 15 Σεπτεμβριου 2015

Εισηγητής: Βαγγέλης Φελουζής

Επιτροπή

Μιχάλης Ανούσης

Κωνσταντίνα Ζορμπαλά

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο της πτυχιακής εργασίας παραθέτουμε και αναλύουμε αποσπάσματα από το έργο του Euler με τίτλο: Introductio in analysin infinitorum στα οποία γίνεται χρήση απειροστών αριθμών. Δείχνονται οι δυο διαφορετικές έννοιες και χρήσεις του απείρου, δίνονται οι τύποι που περιγράφουν μέσω σειρών την λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση και αναφερόμαστε στον τρόπο με τον οποίο ο Euler χρησιμοποιεί την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα με την χρήση απειροστών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε τις βασικές αρχές της Μη-τυπικής Ανάλυσης, η οποία δείχνει και μελετά τους πραγματικούς αριθμούς και τις πραγματικές συναρτήσεις μέσω ενός διατεταγμένου σώματος ${}^*\mathbb{R}$ το οποίο επεκτείνει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και δεν είναι αρχιμήδειο, δηλαδή περιέχει απειροστές ποσότητες. Η περιγραφή αυτή απαιτεί μια στοιχειώδη γνώση μαθηματικής λογικής. Στο τέλος του κεφαλαίου καταλήγουμε στο θεώρημα της Αρχής της Μεταφοράς.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε σχέσεις μεταξύ υπερπραγματικών και πραγματικών αριθμών και δίνουμε τις απαραίτητες αρχές, όπως την Αρχή της επέκτασης, την Αρχή της Μεταφοράς, την Αρχή του Τυπικού Μέρους κ.α. Επίσης δίνουμε τον ορισμό της υπερακολουθίας και της υπερσειράς, τον ορισμό της καθορισιμότητας και το Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης το οποίο είναι ένα κριτήριο σχετικά με την αμελητέας σημασίας, ύπαρξη απειροστών σε άπειρη σειρά.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζουμε τις υποθέσεις του Euler σε ένα αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο. Εξετάζουμε δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο ο Euler περιγράφει την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση μέσω της Μη Τυπικής Ανάλυσης. Αποδεικνύουμε το Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης και μελετάμε τις σχέσεις μεταξύ τυπικών και μη τυπικών εννοιών.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι φοιτητές των μαθηματικών θα ωφελούντο πολύ περισσότερο από τη μελέτη του Introductio in Analysin Infinitorum *του Euler παρά από οποιοδήποτε σύγχρονο σύγγραμμα ...*

André Weil,
Ομιλία στο Πανεπιστήμιο του Rochester, 1970

Ένα από τα πιο σημαντικά μαθηματικά συγγράμματα του δέκατου ένατου αιώνα είναι το Introductio in Analysin Infinitorum ή στα ελληνικά "Εισαγωγή στην ανάλυση των απείρων " (στα λατινικά η κατάληξη -orum δηλώνει πληθυντικό αριθμό) του Leonard Euler. Το έργο, όπως αναφέρει ο συγγραφέας έχει σκοπό να αποσαφηνίσει την σύγχυση που δημιουργείται μεταξύ των σπουδαστών σχετικά με την χρήση της έννοιας του απείρου χρησιμοποιώντας μεθόδους της στοιχειώδους άλγεβρας. Το έργο αυτό δημοσιεύεται το 1748 και χωρίζεται σε δυο μέρη και μέσα σε αυτά ο Euler επιδιώκει να κάνει σαφή την αλληλεξάρτηση μεταξύ της συνηθισμένης άλγεβρας και της ανάλυσης. Κάθε ένα από τα μέρη αυτά χωρίζονται σε κεφάλαια και αυτά με την σειρά τους σε παραγράφους. Το πρώτο μέρος αποτελείται από 18 κεφάλαια και 382 παραγράφους ενώ το δεύτερο από 22 και 152 αντίστοιχα. Το πρώτο βιβλίο περιορίζεται σε θέματα που σχετίζονται καθαρά με την εφαρμογή των αλγεβρικών μεθόδων της ανάλυσης, ενώ το δεύτερο βιβλίο καταπιάνεται με θέματα σχετικά με την ¨ανώτερη γεωμετρία¨ και αφορά θέματα της ανάλυσης που σχετίζονται με την γεωμετρία (μελέτη καμπυλών, επιφανειών, κλπ).

Ο Euler αριθμεί τις παραγράφους, σε όλο το πρώτο και δεύτερο μέρος του έργου, σε αύξουσα σειρά ξεκινώντας από το 1, ανεξάρτητα από το που αρχίζει και τελειώνει το κάθε ένα από τα κεφάλαια. Κάνει δηλαδή μια συνεχή αρίθμηση, δείχνοντας με αυτόν τον τρόπο τον διαρκή συλλογισμό του πάνω στην ολότητα του έργου.

Στο τέλος πολλών παραγράφων παραθέτει πλήθος παραδειγμάτων με σκοπό την εμπέδωση ή την εφαρμογή των εννοιών που αναλύει σε κάθε μία από αυτές. Τα παραδείγματα αυτά είναι διατυπωμένα σε καθαρά μαθηματική και υπολογιστική μορφή.

Το Introductio δεν είναι γραμμένο στα πρότυπα της ζητούμενης αυστηρότητας των συγγραμμάτων της σύγχρονης εποχής. Δεν περιέχει βασικές έννοιες οι οποίες θα συνδεθούν με αξιώματα ούτε και θεωρήματα τα οποία θα αποδειχθούν. Αντίθετα ο Euler χρησιμοποιεί με ελαστικότητα πολλές από τις διάφορες έννοιες με τις οποίες καταπιάνεται. Επίσης αποφεύγει να δίνει τυποποιήσεις και προσπαθεί μέσω των παραδειγμάτων του να δίνει τύπους.

Το πρώτο κεφάλαιο του Introductio έχει σκοπό να διευκρινίσει την έννοια της *συνάρτησης*[1]. Ο Euler δίνει τον ακόλουθο ορισμό:

> Μια συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας[2] είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από την μεταβλητή ποσότητα, αριθμούς και σταθερές ποσότητες.

Από την εισαγωγή ακόμα, ο Euler μας πληροφορεί ότι μέσα στο έργο θα δώσει μια ολοκληρωμένη και πλήρη μελέτη για τις συναρτήσεις.

Ο Euler κατηγοριοποιεί τις συναρτήσεις αρχικά σε αλγεβρικές, οι οποίες περιέχουν αλγεβρικές πράξεις και σε υπερβατικές οι οποίες εμπλέκουν πράξεις υπερβατικές. Στις υπερβατικές συναρτήσεις οι πράξεις επηρεάζουν την μεταβλητή ποσότητα. Αν οι πράξεις αυτές αφορούν μόνο τις σταθερές τότε η συνάρτηση θεωρείται αλγεβρική. Οι αλγεβρικές συναρτήσεις χωρίζονται σε άρρητες, όπου η μεταβλητή ποσότητα επηρεάζεται από την ύπαρξη ριζικού και σε μη άρρητες στις οποίες η μεταβλητή ποσότητα δεν σχετίζεται με άρρητους αριθμούς. Οι άρρητες αλγεβρικές συναρτήσεις διακρίνονται σε πεπλεγμένες και σε μη πεπλεγμένες. Οι πεπλεγμένες προκύπτουν από τις λύσεις εξισώσεων και οι μη πεπλεγμένες είναι εκείνες που εκφράζονται με την ύπαρξη ριζικών μέσα σε αυτές. Οι μη άρρητες αλγεβρικές συναρτήσεις κατηγοριοποιούνται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις και σε ρητές συναρτήσεις. Σε μία πολυωνυμική συνάρτηση η μεταβλητή z δεν έχει κανέναν αρνητικό εκθέτη ούτε και περιέχει κλασματική έκφραση στην οποία η μεταβλητή z να βρίσκεται στον παρονομαστή. Αντίθετα στις ρητές συναρτήσεις ο αρνητικός εκθέτης του z υφίσταται και επίσης η μεταβλητή z μπορεί να βρίσκεται στον παρονομαστή.

[1] Ο όρος αυτός είχε εισαχθεί παλαιότερα από τον Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716),

[2] Μια *ποσότητα* είναι μια οποιαδήποτε έννοια στην οποία μπορούμε να αποδώσουμε αριθμητικές τιμές, όπως το *μήκος*, το *εμβαδόν*, ο *όγκος*, η *δύναμη*, η *ορμή*, η *ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος* κλπ. Οι ποσότητες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις *σταθερές* και τις *μεταβλητές*.

Κεφάλαιο 1

Η χρήση του απείρου στον Euler

Στο Introductio συναντάμε δύο βασικές χρήσεις του απείρου στην μελέτη προβλημάτων της ανάλυσης.

- Την χρήση μιας απόλυτης έννοιας απείρου ∞.
- Την χρήση άπειρα μεγάλων αριθμών και τη χρήση άπειρα μικρών αριθμών.

Πρώτη χρήση δίνει κάποια (σχετικά περιορισμένα) αποτελέσματα που σχετίζονται κύρια με τον προσδιορισμό των ριζών των πολυωνύμων.

Η δεύτερη χρήση, η οποία και μας ενδιαφέρει πολύ περισσότερο. δίνει και τα πιο πολλά αποτελέσματα, μέσα στα οποία περιλαμβάνονται και πολλές από τις ιδιαίτερα σημαντικές (όσο και εντυπωσιακές) «Ταυτότητες του Euler».

Οι άπειρα μεγάλοι και άπειρα μικροί αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους (καθώς και με τους «συνήθεις» αριθμούς) ώστε να αποτελούν ένα αλγεβρικό σύστημα (προστίθενται, πολλαπλασιάζονται, διαιρούνται, υψώνονται σε δυνάμεις, αναπτύσσονται με βάση το διωνυμικό τύπο κλπ). Επιπλέον ο Euler φαίνεται να τους χρησιμοποιεί ακριβώς όπως και τους συνήθεις αριθμούς, μιλώντας για παράδειγμα για άπειρα μεγάλους φυσικούς, το οποίο δείχνει ότι υπάρχει η πεποίθηση στον Euler ότι το άπειρο μπορεί να χρησιμοποιείται (τουλάχιστον αλγεβρικά) σαν το πεπερασμένο.

1.1 Η χρήση του απείρου στον προσδιορισμό ριζών πολυωνύμων: Το άπειρο ∞.

Όπως αναφέραμε και πριν ένας βασικός σκοπός του Introductio είναι να προσφέρει μεθόδους για τον μετασχηματισμό συναρτήσεων σε μια ισοδύναμη και πιο αποτελεσματική μορφή. Οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων είναι βασικότατο εργαλείο στην Ανάλυση, για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων περίπλοκων συναρτήσεων, τη λύση διαφορικών εξισώσεων, την μελέτη φαινομενικά περίπλοκων συναρτήσεων κλπ..

Παράδειγμα 1.1. Γράφει ο Euler: *Είναι σαφές από την άλγεβρα ότι η ίδια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους. Παραδείγματα μετασχηματισμών αυτού του τύπου είναι να γράψουμε*

$$(1-z)(2-z)$$

αντί

$$2-3z+z^2$$

ή

$$(a+z)^3$$

αντί

$$a^3+3a^2z+3az^2+z^3$$

ή

$$\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z}$$

αντί

$$\frac{2a^2}{a^2-z^2}$$

Τέτοιου είδους μετασχηματισμοί συνδέονται με το πρόβλημα της εύρεσης των ριζών ενός πολυωνύμου το οποίο μας δίνει και την διάσπαση του πολυωνύμου σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων (παράγραφοι **28** και **29**). Με τον όρο γραμμικός παράγοντας εννοείται μια παράσταση της μορφής $az+b$. Αν οι συντελεστές a, b είναι πραγματικοί αριθμοί ο γραμμικός παράγοντας λέγεται πραγματικός ενώ αν κάποιος συντελεστής είναι μιγαδικός ο γραμμικός παράγοντας λέγεται μιγαδικός.

Έτσι το $z-i$ είναι μιγαδικός γραμμικός παράγοντας για το z^2+1 αφού

$$z^2+1=(z-i)(z+i)$$

και το $z-1$ είναι πραγματικός γραμμικός παράγοντας για το z^2-1 αφού

$$z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

Στην παράγραφο **33** δίνεται σαν βασική αρχή αυτό που σήμερα ονομάζουμε το «Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής» για πολυώνυμα. Η απόδειξη που δίνεται βασίζεται στην γενική αρχή ότι μια συνάρτηση που εκφράζεται με έναν αναλυτικό τύπο όπως είναι ένα πολυώνυμο δεν είναι δυνατόν να πάρει δύο τιμές χωρίς να πάρει και όλες τις ενδιάμεσες. Παραθέτουμε ολόκληρη την παράγραφο.

INTRODUCTIO I, **33** *Αν η πολυωνυμική συνάρτηση Z παίρνει την τιμή A όταν $z = a$ και παίρνει την τιμή B όταν $z = b$ τότε για οποιαδήποτε τιμή C μεταξύ των A και B υπάρχει μια τιμή c μεταξύ των a, b ώστε η συνάρτηση Z να πάρει την τιμή $Z = C$ όταν $z = c$.*

Αφού το Z είναι μια μονότιμη συνάρτηση της μεταβλητής z, όποια πραγματική τιμή και να πάρει το z, το Z θα πάρει επίσης μια πραγματική τιμή. Συνεπώς, στην πρώτη περίπτωση, αν $z = a$ το Z θα πάρει την τιμή A, και στην δεύτερη περίπτωση αν $z = b$ το Z θα πάρει την τιμή B. Αλλά η συνάρτηση δεν μπορεί να περάσει από τα A και B χωρίς να πάρει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Τώρα, αν η εξίσωση $Z - A = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα και αν η εξίσωση $Z - B = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα τότε και η εξίσωση $Z - C = 0$ θα έχει μια πραγματική ρίζα, υπό την προϋπόθεση ότι το C είναι πραγματικός αριθμός που βρίσκεται μεταξύ των A, B. Συνεπώς, αν οι εκφράσεις

$$Z - A, \quad Z - B$$

έχουν πραγματικούς γραμμικούς παράγοντες τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για την έκφραση

$$Z - C$$

υπό την προϋπόθεση ότι το C είναι πραγματικός αριθμός που βρίσκεται μεταξύ των A, B.

Στην αμέσως επόμενη παράγραφο ο Euler κάνει την πρώτη ουσιαστική χρήση των άπειρων αριθμών σε μια απόδειξη. Και εδώ παραθέτουμε ολόκληρη την παράγραφο.

Introductio I, **34** *Αν σε ένα πολυώνυμο Z με μεταβλητή z ο μέγιστος εκθέτης του z είναι περιττός τότε η συνάρτηση Z έχει τουλάχιστον έναν πραγματικό γραμμικό παράγοντα*

Για παράδειγμα, αν

$$Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \dots$$

και θέσουμε το z να είναι ίσο με ∞, αφού όλοι οι υπόλοιποι όροι εξαφανίζονται πριν από τον πρώτο όρο z^n, θα έχουμε ότι το Z γίνεται ίσο με

$$Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$$

Από αυτό προκύπτει ότι το $Z - \infty$ έχει πραγματικό γραμμικό παράγοντα το $z - \infty$. Από την άλλη, αν θέσουμε $z = -\infty$ τότε

$$Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$$

και έτσι το $Z + \infty$ θα έχει πραγματικό γραμμικό παράγοντα το $z + \infty$. Αφού τα $Z - \infty$ και $Z + \infty$ έχουν πραγματικούς γραμμικούς παράγοντες τότε και το $Z - C$ θα έχει ένα πραγματικό γραμμικό παράγοντα, με την προϋπόθεση ότι το C θα βρίσκεται μεταξύ του $+\infty$ και του $-\infty$, δηλαδή αν το C είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, είτε θετικός, είτε αρνητικός είτε μηδέν. Για τον λόγο αυτό, όταν $C = 0$, η συνάρτηση Z θα έχει ένα γραμμικό παράγοντα $z - c$, με το c να βρίσκεται μεταξύ του $+\infty$ και του $-\infty$, δηλαδή το c μπορεί να είναι είτε θετικός είτε αρνητικός είτε μηδέν.

Παρόμοια χρήση του απείρου γίνεται λίγο παρακάτω, στην παράγραφο **37**, για να δείξει πως όταν το πολυώνυμο είναι άρτιου βαθμού και έχει αρνητικό σταθερό όρο τότε αυτό έχει τουλάχιστον δύο πραγματικούς παράγοντες. Παραθέτουμε ολόκληρη την παράγραφο.

Introductio I, **37** *Αν σε ένα πολυώνυμο Z με μεταβλητή z ο μέγιστος εκθέτης του z είναι άρτιος και ο σταθερός όρος έχει αρνητικό πρόσημο, τότε η συνάρτηση Z έχει τουλάχιστον δύο πραγματικούς γραμμικούς παράγοντες*

Τώρα η συνάρτηση Z μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την ακόλουθη μορφή

$$Z = z^{2n+1} \pm \alpha z^{2n} \pm \beta z^{2n-1} \pm \gamma z^{2n-2} \pm \dots \pm \eta z - A$$

Αν θέσουμε $z = \infty$, τότε όπως έχουμε δει και προηγουμένως, $Z = \infty$ ενώ αν θέσουμε $z = 0$ θα πάρουμε $Z = -A$. Συνεπώς το $Z - \infty$ έχει ένα πραγματικό γραμμικό παράγοντα $z - \infty$ και το $Z + A$ έχει παράγοντα το $z - 0$. Από αυτό προκύπτει ότι αφού το 0 βρίσκεται μεταξύ του $-\infty$ και A τότε το $Z - 0$ θα έχει ένα γραμμικό παράγοντα $z - e$ όπου το e θα βρίσκεται μεταξύ του 0 και του ∞.

Επίσης $Z = \infty$ όταν $z = -\infty$ Συνεπώς το $Z - \infty$ έχει ένα πραγματικό γραμμικό παράγοντα $z + \infty$ και το $Z + A$ έχει παράγοντα το $z + 0$ και άρα το $Z + 0$ θα έχει ένα γραμμικό παράγοντα $z + d$ με το το d να είναι μεταξύ του 0 και του ∞. Συνεπώς η πρόταση αποδείχτηκε.

Από αυτό τον συλλογισμό είναι φανερό πως η εξίσωση $Z = 0$ θα έχει δύο πραγματικές ρίζες, η μία εκ των οποίων θα είναι θετική, η δε άλλη αρνητική. Έτσι, η εξίσωση

$$z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - \delta^2 = 0$$

θα έχει δύο πραγματικές ρίζες, η μία εκ των οποίων θα είναι θετική, η δε άλλη αρνητική.

1.2 Σχόλια σχετικά με την χρήση του ∞

1.

Ο Euler προϋποθέτει γνωστό ότι αν ένα πολυώνυμο

$$Z = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots$$

έχει μια ρίζα ρ τότε θα γράφεται στην μορφή

$$Z = (z - \rho)Z' \tag{1.1}$$

όπου Z' είναι πολυώνυμο ως προς z κατά ένα βαθμό λιγότερο. Αυτό είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα την εποχή εκείνη από την στοιχειώδη άλγεβρα. Σημειώνουμε ότι πολλά αλγεβρικά αποτελέσματα όπως για παράδειγμα το διωνυμικό θεώρημα μελετώνται εξαντλητικά και με εξαιρετική διαύγεια στο βιβλίο του Euler, *Στοιχεία Άλγεβρας* [**;**].

2. Το ∞

Αυτό που είναι καινούργιο στο Infinitorum είναι ότι ο Euler θεωρεί εκτός των αριθμών ένα νέο σύμβολο το ∞ που το χρησιμοποιεί «σαν αριθμό» με την έννοια ότι αυτό μπορεί να εμφανίζεται σαν όρος πολυωνύμων αλλά και τιμή για το z. Το ∞ δεν αναφέρεται πουθενά σαν αριθμός, και πολύ πιθανόν δεν εθεωρείτο σαν τέτοιος δεδομένου ότι δεν επιτρεπόταν να κάνει όλες τις πράξεις αλλά μόνο κάποιες από αυτές (δες παρακάτω).

Στην παράγραφο **34** θεωρούμε ένα πολυώνυμο Z βαθμού περιττού, ας πούμε $2n+1$ με συντελεστή του z^{2n+1} να είναι η μονάδα, ας πούμε

$$Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \dots$$

Αντικαθιστά το z με ∞ και με αιτιολογία ότι « όλοι οι υπόλοιποι όροι εξαφανίζονται πριν από τον πρώτο όρο z^n» καταλήγει ότι στον υπολογισμό θα αγνοήσει όλους τους άλλους όρους και συνεπώς το τελικό αποτέλεσμα θα είναι

$$Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$$

Για την κάπως δυσνόητη παρατήρηση του Euler ότι:

«*όλοι οι υπόλοιποι όροι εξαφανίζονται πριν από τον πρώτο όρο* z^n»

θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια ερμηνεία στο επόμενο σχόλιο.

Έτσι αφού το Z είναι πολυώνυμο και το $Z-\infty$ είναι πολυώνυμο. Αφού το $Z-\infty$ μηδενίζεται όταν $z=\infty$ εφαρμόζει το προηγούμενο αποτέλεσμα της στοιχειώδους άλγεβρας που εκφράζεται στον τύπο (1.1) για Z το $Z-\infty$ και $\rho=\infty$ και συμπεραίνει ότι

$$Z - \infty = (z-\infty)Z' \tag{1.2}$$

Επαναλαμβάνοντας τον συλλογισμό και για το $\rho = -\infty$ για το πολυώνυμο $Z+\infty = Z-(-\infty)$ καταλήγει στο

$$Z + \infty = (z+\infty)Z'' \tag{1.3}$$

3. Λογισμός του ∞

Εδώ έχουμε δύο τύπους απείρου το θετικό ∞ και το αρνητικό $-\infty$. Από την συζήτηση προκύπτει ότι αυτοί πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και επίσης με αριθμούς a διαφορετικούς του 0 με τους παρακάτω κανόνες

(i) $\infty \cdot \infty = (-\infty)(-\infty) = \infty$.

(ii) $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.

(iii) $a \cdot \infty = \infty$ αν $a > 0$.

(iv) $a \cdot \infty = -\infty$ αν $a < 0$.

(v) $a \cdot (-\infty) = -\infty$ αν $a > 0$.

(vi) $a \cdot (-\infty) = \infty$ αν $a < 0$.

και συνεπώς για κάθε φυσικό αριθμό n

$$\infty^{2n} = (-\infty)^{2n} = \infty$$

$$\infty^{2n+1} = \infty$$

$$(-\infty)^{2n+1} = -\infty$$

Τι μπορούμε όμως να πούμε για την πρόσθεση όταν εμφανίζεται μέσα το ∞; *Σίγουρα θα πρέπει να προβλέπονται ή να υπονοούνται κανόνες αφού πρέπει να αντικαταστήσουμε το ∞ ή το $-\infty$ σε ένα πολυώνυμο Z όπως ακριβώς έκανε και Euler στις παραγράφους* ***34*** *και* ***37*** *που παραθέσαμε παραπάνω.*

Για να εξηγήσουμε και την παρατήρηση του Euler ότι:

> «*όλοι οι υπόλοιποι όροι εξαφανίζονται πριν από τον πρώτο όρο* z^n»

θα κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

Με a θα θεωρούμε έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό (συνήθη, πεπερασμένο)

(i) $a + \infty = \infty + a = \infty$

(ii) $a + (-\infty) = a - \infty = -\infty + a = -\infty$

(iii) $\infty + \infty = \infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

(iv) Αν $a \neq 0$ τότε $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$

(v) Αν $n > m$ τότε $\dfrac{\infty^n}{\infty^m} = \infty^{(n-m)} = \infty$

(vi) Αν $n > m$ τότε

$$\frac{(-\infty)^n}{\infty^m} = (-1)^n \infty^{(n-m)} = \begin{cases} \infty & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

(vii) Αν $n > m$ τότε

$$\frac{\infty^n}{(-\infty)^m} = (-1)^m \infty^{(n-m)} = \begin{cases} \infty & \text{αν } m \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } m \text{ περιττός} \end{cases}$$

(viii) Αν $n > m$ τότε

$$\frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = (-\infty)^{(n-m)} = \begin{cases} \infty & \text{αν } n-m \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } n-m \text{ περιττός} \end{cases}$$

Με αυτούς τους κανόνες αν

$$Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \cdots$$

και θέλουμε να βρούμε την τιμή του Z για $z = \infty$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ισοδύναμη μορφή

$$Z = z^{2n+1}\left(1 + \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{z^2} + \gamma\frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

και αντικαθιστώντας το z με ∞ θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z &= \infty^{2n+1}\left(1 + \alpha\frac{1}{\infty} + \beta\frac{1}{\infty^2} + \gamma\frac{1}{\infty^3} + \ldots\right) \\ &= \infty^{2n+1}\left(1 + \alpha\frac{1}{\infty} + \beta\frac{1}{\infty} + \gamma\frac{1}{\infty} + \cdots\right) \\ &= \infty^{2n+1}\left(1 + 0 + 0 + 0 + \cdots\right) \\ &= \infty^{2n+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ενώ αντικαθιστώντας το z με $-\infty$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z &= (-\infty)^{2n+1}\left(1 + \alpha\frac{1}{(-\infty)} + \beta\frac{1}{(-\infty)^2} + \gamma\frac{1}{(-\infty)^3} + \ldots\right) \\ &= (-\infty)^{2n+1}\left(1 + \alpha\frac{1}{-\infty} + \beta\frac{1}{\infty} + \gamma\frac{1}{-\infty} + \ldots\right) \\ &= (-\infty)^{2n+1}\left(1 + 0 + 0 + 0 + \cdots\right) \\ &= (-\infty)^{2n+1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

4. Ένα δεύτερο είδος απείρου

Παρακάτω θα συναντήσουμε ένα νέο εντελώς διαφορετικό τύπο απείρου, τους άπειρα μεγάλους θετικούς αριθμούς. Ένας άπειρα μεγάλος θετικός αριθμός είναι ένας θετικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από κάθε συνήθη (δηλαδή πεπερασμένο) θετικό αριθμό. Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιο αριθμό M. Τότε

$$M < M + 1 < M^2$$

Αυτό σημαίνει ότι ο M **δεν έχει καμία σχέση με το** ∞ αφού

$$\infty = \infty + 1 = \infty^2$$

Με άλλα λόγια ο M παράγει άπειρους άλλους άπειρα μεγάλους θετικούς και μάλιστα με αύξοντα τρόπο, κατασκευάζοντας έτσι μια ιδιαίτερα περίπλοκη ιεραρχία άπειρα μεγάλων αριθμών [1] για παράδειγμα

$$M < M + 1 < M + 2 < M + 3 < \cdots <$$

$$2M < 2M + 1 < 2M + 2 < 2M + 3 < \cdots < 3M$$

$$3M < 4M < 5M < 6M < \ldots$$

$$M^M < M^{2M} < M^{3M} < M^2 \ldots$$

$$M^{M^2} < M^{2M^2} < M^{3M} \ldots$$

Επίσης ο

$$\frac{1}{M}$$

θα είναι ένας αριθμός θετικός μικρότερος από κάθε συνήθη θετικό αριθμό αλλά όχι μηδέν. Αντίθετα ο

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

[1] Η διαδικασία αυτή θυμίζει την κατασκευή των υπερπερασμένων (transfinite) αριθμών από τον Cantor αλλά είναι σαφώς διαφορετική γιατί οι υπερπερασμένοι αριθμοί δεν αποτελούν σώμα σε αντίθεση με τους αριθμούς που θεωρεί ο Euler.

1.3 Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

(i) Τα εκθετικά είναι εκφράσεις στις οποίες ο εκθέτης είναι μεταβλήτος

(ii) Υπάρχουν διάφορες μορφές εκθετικών, για παράδειγμα

$$a^{a^x}, a^{y^x}, y^{a^x}, x^{y^x}$$

διακρίνονται λοιπόν σε δύο κατηγορίες

(α') Ο εκθέτης να είναι μεταβλητός,
δηλαδή μια έκφραση της μορφής a^x

(β') Ο εκθέτης και η βάση να είναι μεταβλητές ποσότητες,
για παράδειγμα y^x

(iii) Για λόγους διερεύνησης θα θεωρούμε μόνο εκθετικά της μορφής a^x, όπου το a θα είναι σταθερός όρος και το x θα είναι μεταβλητή.

(iv) (α') Για καθορισμένο x το οποίο ανήκει στο σύνολο των θετικών ακεραίων έχουμε το καθορισμένο σύνολο τιμών

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$$

(β') αν το σύνολο τιμών είναι οι αρνητικοί ακέραιοι τότε το σύνολο τιμών ειναι το

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$$

(γ') για $x = 0$ τότε έχουμε

$$a^0 = 1$$

(v) Αν στο x αντικαταστήσουμε κλάσματα όπως

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$$

έχουμε τις τιμές

$$\sqrt{a}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, \ldots$$

εδώ ο Euler σημειώνει ότι θα θεωρούμε μόνο την θετική ρίζα παρότι μπορούμε να έχουμε περισσότερες απο μία τιμές στην εξαγωγή ριζικών.

(vi) (α') Αν $a = 1$ τότε $a^x = 1$

(β') Αν $a > 1$

i. Αν $x > 0$ τότε η τιμή του a^x γίνεται μεγαλύτερη του 1 και καθώς το x αυξάνει στο άπειρο, το a^x αυξάνει στο άπειρο.

ii. Αν $x = 0$ τότε $a^x = 1$

iii. Αν $x < 0$ τότε η τιμή του a^x γίνεται μικρότερη του 1 και καθώς το x πάει στο $-\infty$, το a^x πάει στο 0.

(γ') Αν $a < 1$ αλλά παραμένει θετικό τότε η τιμή του a^x φθίνει όταν το x αυξάνει πάνω από το 0. Το εκθετικό a^x αυξάνει καθώς το x αυξάνει στους αρνητικούς. Αφού $a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$ και θέτοντας $\frac{1}{a} = b$ τότε $a^x = b^{-x}$.

Σε αυτό το σημείο ο Euler ορίζει τον λογάριθμο.

¨*Δοθέντος ενός θετικού αριθμού y θα δώσουμε μία τιμή στο x, έτσι ώστε $a^x = y$. Η τιμή του x λέγεται λογάριθμος του y.*¨

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\log y$.

(i) Η τιμή του a είναι μεγαλύτερη του 0 και ονομάζεται βάση του λογαρίθμου.

(ii) Αν $a^x = y$ τότε $x = \log y$

(iii) $\log 1 = 0$ ανεξαρτήτου βάσης.

(iv) $\log a = 1, \log a^2 = 2, \log a^3 = 3, \log a^4 = 4, \ldots$

(v) Ο λογάριθμος ενός αριθμού μεγαλύτερου του 1 είναι θετικός ενώ ο λογάριθμος ενός αριθμού μικρότερου του 1 είναι αρνητικός. Οι λογάριθμοι αρνητικών αριθμών είναι μιγαδικοί αριθμοί.

(vi) Αν $\log y = z$ τότε $\log y^n = nz$ δηλαδή $\log y^n = n \log y$

(vii) Αν $\log y = z$ και $\log u = x$ τότε

(α') $\log y + \log u = z + x = log(yu)$

(β') $\log y - \log u = z - x = \log \frac{y}{u}$

(viii) Επειδή ο λογάριθμος ενός αριθμού, ο οποίος αριθμός δεν είναι δύναμη της βάσης, δεν είναι ούτε ρητός ούτε άρρητος λέμε ότι είναι υπερβατική ποσότητα.

(ix) *Ο λόγος των λογαρίθμων δύο διαφορετικών τιμών είναι σταθερός ανεξάρτητα του συστήματος των λογαρίθμων.*

Εδώ ο Euler σαν σύστημα λογαρίθμων εννοεί τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η βάση του λογάριθμου.

1.4 Το Κεφάλαιο VII

Στο Κεφάλαιο VII ο Euler ασχολείται με την περαιτέρω μελέτη της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης. Παραθέτουμε αυτούσιο το Κεφάλαιο VII, το οποίο ξεκινά από την παράγραφο **114** και τελειώνει στην παράγραφο **128**, και στο οποίο για πρώτη φορά εμφανίζονται οι άπειρα μικροί και οι άπειρα μεγάλοι αριθμοί, δίνοντας ιδιαίτερα σημαντικά και δύσκολα αποτελέσματα, όπως θα δούμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

Εκθετικές και Λογαριθμικές Εκφρασμένες μέσω απείρων Σειρών

114. Αφού $a^0 = 1$ όταν ο εκθέτης του a μεγαλώνει, η δύναμη μεγαλώνει με την προϋπόθεση ότι το a είναι μεγαλύτερο από 1. Απο αυτό προκύπτει πως αν ο εκθέτης είναι άπειρα μικρός και θετικός, τότε η δύναμη επίσης θα υπερβαίνει το 1 κατά έναν αριθμό ο οποίος θα είναι επίσης άπειρα μικρός και θετικός.

Έστω ω να είναι άπειρα μικρός και θετικός αριθμός, ή ένα κλάσμα όσο μικρό επιθυμούμε αλλά όχι ίσο με μηδέν, και τότε

$$a^\omega = 1 + \psi$$

όπου και ο ψ θα είναι άπειρα μικρός και θετικός. Θα έχουμε ότι

$$\psi < \omega \text{ είτε } \psi = \omega \text{ είτε } \psi > \omega$$

Το τι από αυτά τα τρία θα συμβαίνει εξαρτάται από την τιμή του a και δεν είναι ακόμα γνωστό. Ας θέσουμε λοιπόν

$$\psi = k\omega$$

Θα έχουμε

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

και θεωρώντας το a σαν βάση των λογαρίθμων, έχουμε

$$\omega = \log(1 + k\omega)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για να γίνει πιο καθαρό με πιο τρόπο ο αριθμός k εξαρτάται από το a ας υποθέσουμε ότι $a = 10$. Με χρήση των κοινών πινάκων των λογαρίθμων, βρίσκουμε το λογάριθμο ενός αριθμού που υπερβαίνει το 1 κατά μια όσο το δυνατόν μικρή θετική ποσότητα, για παράδειγμα

$$1 + \frac{1}{1000000},$$

οπότε

$$k\omega = \frac{1}{1000000}.$$

Τότε

$$\log\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = \log\frac{1000001}{1000000} = 0.00000043429 = \omega.$$

Αφού

$$k\omega = 0,00000100000$$

θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{1000000}$$

και συνεπώς

$$k = \frac{1000000}{43429} = 2.30258$$

παρατηρούμε ότι ο k είναι πεπερασμένος αριθμός ο οποίος εξαρτάται από την την βάση a. Αν είχαμε διαλέξει μια διαφορετικη βάση, τότε ο λογάριθμος του ίδιου αριθμού $1 + k\omega$ θα διέφερε από τον λογάριθμο που ήδη υπολογίσαμε. Συνεπώς θα προέκυπτε και μια διαφορετική τιμή για το k.

115. Αφού

$$a^{\omega} = 1 + k\omega$$

θα έχουμε ότι

$$a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j$$

όποια τιμή και αν δώσουμε στο j. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} a^{\omega j} &= \binom{j}{0}(k\omega)^0 + \binom{j}{1}(k\omega)^1 + \binom{j}{2}(k\omega)^2 + \binom{j}{3}(k\omega)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$j = \frac{z}{\omega}$$

όπου το z είναι πεπερασμένος συνήθης αριθμός. Αφού το ω είναι άπειρα μικρό θα έχουμε ότι το j θα είναι άπειρα μεγάλο. Τότε έχουμε ότι

$$\omega = \frac{z}{j}$$

όπου το ω αναπαριστάται από ένα κλάσμα με πεπερασμένο αριθμητή και άπειρα μεγάλο παρονομαστή και συνεπώς το ω είναι άπειρα μικρό, όπως και θα έπρεπε. Αντικαθιστώντας με $\frac{z}{j}$ το ω παίρνουμε

$$\begin{aligned} a^z &= \left(1 + \frac{kz}{j}\right)^j = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(j-1)}{1 \cdot 2j}k^2z^2 + \frac{1(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j}k^3z^3 \\ &+ \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1 \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}k^4z^4 \\ &+ \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)(j-4)}{1 \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j \cdot 5j}k^5z^5 + \dots \end{aligned}$$

Αυτή η εξίσωση είναι αληθής υπό την προϋπόθεση ότι ένας άπειρα μεγάλος αριθμός αντικαθίσταται στην θέση του j, αλλά τότε ο k θα είναι ένας συνήθης πεπερασμένος αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από το a, όπως ήδη έχουμε δει.

116. Αφού το j είναι άπειρα μεγάλο, $\frac{j-1}{j} = 1$ και όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που μπαίνει στη θέση του j τόσο πιο κοντά η τιμή $\frac{j-1}{j}$ πηγαίνει στο 1.

Συνεπώς αν ο j είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από κάθε (συνήθη) αριθμό με τον οποίο μπορούμε να αντικαταστήσουμε το j, τότε $\frac{j-1}{j}$ είναι ίσο με 1.

Για τον ίδιο λόγο

$$\frac{j-1}{j} = 1, \quad \frac{j-2}{j} = 1,$$

Συνεπώς

$$\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}, \quad \frac{j-2}{3j} = \frac{1}{3}, \quad \frac{j-3}{4j} = \frac{1}{4}$$

και ούτω καθεξής. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές παίρνουμε

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \cdots$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση εκφράζει μια σχέση μεταξύ των αριθμών a και k και αν θέσουμε

$$z = 1$$

θα έχουμε

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Αν $a = 10$ τότε το k θα είναι προσεγγιστικά ίσο με 2.30258 όπως ήδη έχουμε δει.

117. Ας υποθέσουμε ότι $b = a^n$ και έστω ότι το a είναι η βάση για τους λογαρίθμους, οπότε $\log b = n$. Αφού

$$b^z = a^{nz}$$

θα έχουμε την άπειρη σειρά

$$b^z = 1 + \frac{nkz}{1!} + \frac{n^2k^2z^2}{2!} + \frac{n^3k^3z^3}{3!} + \frac{n^4k^4z^4}{4!} + \cdots$$

Αντικαταστούμε το n με $\log b$ και έχουμε

$$b^z = 1 + \frac{(\log b)kz}{1!} + \frac{(\log b)^2bk^2z^2}{2!} + \frac{(\log b)^3k^3z^3}{3!} + \frac{(\log b)^4k^4z^4}{4!} + \cdots$$

Αν γνωρίζουμε την τιμή του k για την δοθείσα βάση a, η γενική εκθετική b^z μπορεί να εκφραστεί σαν άπειρη σειρά με όρους που είναι δυνάμεις του z.

Έχοντας αυτό υπόψιν πάμε τώρα να δείξουμε πως οι λογάριθμοι μπορούν αν εκφραστούν μέσω των απείρων σειρών.

118. Αφού

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

όπου το ω είναι ένα άπειρα μικρό κλάσμα και η σχέση των a και k δίνεται από τον τύπο

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

αν θεωρήσουμε το a σαν βάση των λογαρίθμων, τότε

$$\omega = \log(1 + k\omega)$$

και

$$j\omega = \log(1 + k\omega)^j$$

Είναι σαφές ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός που επιλέγεται στη θέση του j τόσο περισσότερο το $(1 + k\omega)^j$ θα ξεπερνά το 1. Αν θέσουμε το j να είναι ένας άπειρος αριθμός, η τιμή της δύναμης $\log(1+k\omega)^j$ θα γίνει μεγαλύτερη από κάθε αριθμό μεγαλύτερο του 1. Αν τώρα θέσουμε $\log(1 + k\omega)^j = 1 + x$ τότε $\log(1 + x) = j\omega$. Εφόσον το $j\omega$ είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, δηλαδή ο λογάριθμος του $1 + x$, είναι εμφανές ότι το j πρέπει να είναι ένας άπειρα μεγάλος αριθμός, διαφορετικά, το $j\omega$ δεν θα μπορεί να έχει πεπερασμένη τιμή.

119. Έχοντας θέσει ότι $\log(1+k\omega)^j = 1+x$, έχουμε ότι $1+k\omega = (1+x)^{\frac{1}{j}}$ και $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{j}} - 1$, ώστε $j\omega = \frac{j}{k}((1+x)^{\frac{1}{j}} - 1)$. Επειδή $j\omega = \log(1+x)$, έπεται ότι $\log(1+x) = \frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}} - \frac{j}{k}$, όπου j είναι ένας αριθμός άπειρα μεγάλος. Όμως έχουμε ότι

$$(1+x)^{\frac{1}{j}} =$$

$$1+\frac{1}{j}-\frac{1(j-1)}{j\cdot 2j}x^2+\frac{1(j-1)(2j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j}x^3-\frac{1(j-1)(2j-1)(3j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4+\cdots.$$

Αφού το j είναι ένας άπειρος αριθμός, $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}, \frac{2j-1}{3j} = \frac{2}{3}, \frac{3j-1}{4j} = \frac{3}{4}$, κ.ο.κ. Τώρα έπεται ότι $j(1 + x)^{\frac{1}{j}} = j + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$. Σαν αποτέλεσμα έχουμε ότι $\log(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots)$, όπου a είναι η βάση του λογαρίθμου και

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$$

.

120. Εφόσον έχουμε μια σειρά για τον λογάριθμο του $(1 + x)$, μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε τον αριθμό k όταν το a είναι η βάση. Αν θέσουμε $1 + x = a$, επειδή $\log a = 1$,έχουμε

$$1 = \frac{1}{k}(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots)$$

Έπεται ότι

$$k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots.$$

Αν θέσουμε $a=10$, η τιμή αυτής της άπειρης σειράς θα είναι περίου ίση με $2,30258$. Έχουμε ότι $2,30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\cdots$. αλλά αυτό είναι δύσκολο να το δούμε καθώς οι όροι της σειράς συνεχώς μεγαλώνουν και το άθροισμα μερικών όρων δεν φαίνεται να προσεγγίζει κάποιο όριο. Σύντομα θα έχουμε μία απάντηση σε αυτό το παράδοξο.

121. Εφόσον

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots),$$

όταν αντικαταστήσουμε με $-x$ το x, παίρνουμε

$$\log(1-x)=-\frac{1}{k}(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots).$$

Αν αφαιρέσουμε την δεύτερη σειρά από την πρώτη παίρνουμε

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log(\frac{1+x}{1-x})=$$

$$=\frac{2}{k}(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots).$$

Αν τώρα θέσουμε $\frac{1+x}{1-x}=a$, ώστε $x=\frac{a-1}{a+1}$, και επειδή $\log a=1$, έχουμε ότι

$$k=2(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots).$$

Από αυτήν την εξίσωση μπορούμε να βρούμε την τιμή του k όταν το a ειναι δοσμένο. Για παράδειγμα, αν $a=10$ τότε

$$k=2(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\cdots)$$

και οι όροι αυτής της σειράς φθίνουν κατά έναν φυσιολογικό τρόπο έτσι ώστε σύντομα να επιτευχθεί μια ικανοποιητική προσέγγιση.

122. Αφού μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα την βάση a στο σύστημα των λογαρίθμων, επιλέγουμε a έτσι ώστε $k = 1$. Υποθέτοντας τώρα ότι το $k = 1$, η σειρά στην παράγραφο **116**,

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

είναι ίση με a. Αν οι όροι αναπαρασταθούν σαν δεκαδικά κλάσματα και αθροιστούν, βρίσκουμε την τιμή για το $a = 2,71828182845904523536028 \cdots$. Όταν επιλεχθεί αυτή η βάση, ο λογάριθμος ονομάζεται φυσικός ή υπερβολικός. Το δεύτερο όνομα χρησιμοποιήται επειδή ο τετραγωνισμός μιας υπερβολής μπορεί να εκφραστεί μέσω τέτοιων λογαρίθμων.

Για λόγους συντομίας, για τον αριθμό $2,71828182845904523536028 \cdots$ θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο e, το οποίο θα υποδηλώνει την βάση τών φυσικών ή υπερβολικών λογαρίθμων, όπου αντιστοιχεί στην τιμή $k = 1$, και το e συβολίζει το άθροισμα της άπειρης σειράς

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots .$$

123. Οι φυσικοί λογάριθμοι έχουν την ιδιότητα ότι ο λογάροθμος του $1 + \omega$ είναι ίσος με ω, όπου ω είναι μία άπειρα μικρή ποσότητα. Από αυτό έπεται ότι $k = 1$ και έτσι οι φυσικοί λογάριθμοι όλων των αριθμών μπορούν να βρεθούν. Έστω ότι το e αντιπροσωπεύει τον αριθμό που βρήκαμε παραπάνω, τότε

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots ,$$

και οι φυσικοί λογάριθμοι μπορούν να βρεθούν από αυτές τις σειρές όπου

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots ,$$

και

$$\log(\frac{1 + x}{1 - x}) = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots .$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει ισχυρά αν αντικαταστήσουμε ένα εξαιρετικά μικρό κλάσμα στην θέση του x. Για παράδειγμα, αν $x = \frac{1}{5}$, τότε

$$\log \frac{6}{4} = \log \frac{3}{3} = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \cdots .$$

Αν $x = \frac{1}{7}$, τότε

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \cdots .$$

Αν $x = \frac{1}{9}$, τότε

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \cdots .$$

Από τους λογαρίθμους αυτών των κλασμάτων μπορούμε να βρούμε τους λογαρίθμους των ακεραίων αριθμών. Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε $\log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} = \log 2$ και $\log\frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$ και $2\log 2 = \log 4$. Περαιτέρω έχουμε $\log\frac{5}{4} + \log 4 = \log 5$, $\log 2 + \log 3 = \log 6$, $3\log 2 = \log 8$, $2\log 3 = \log 9$, $\log 2 + \log 5 = \log 10$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τώρα μπορούμε να αναφέρουμε τις τιμές των φυσικών λογαρίθμων των ακαιρέων από το 1 ως το 10.

$$\log 1 = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000$$
$$\log 2 = 0,69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 00000$$
$$\log 3 = 1,09861\ 22888\ 68109\ 69139\ 52452$$
$$\log 4 = 1,38629\ 43611\ 19890\ 61833\ 44642$$
$$\log 5 = 1,60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07460$$
$$\log 6 = 1,79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773$$
$$\log 7 = 1,94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639$$
$$\log 8 = 2,07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964$$
$$\log 9 = 2,19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905$$
$$\log 10 = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$$

Όλοι οι λογάριθμοι υπολογίστηκαν από τις παραπάνω τρεις σειρές, εκτός από το $\log 7$ όπου μπορεί να βρεθεί με τον εξής τρόπο. Αν θέσουμε στην τελευταία σειρά $x = \frac{1}{99}$ θα έχουμε $\log\frac{100}{98} = \log\frac{50}{49} = 0,0202027073175194484078230$. Όταν αυτό αφαιρεθεί από το $\log 50 = 2\log 5 + \log 2 = 3,9120230054281460586187508$ βρήσουμε το $\log 49$. Όμως $\log 7 = \frac{1}{2}\log 49$.

124. Έστω ο φυσικός λογάριθμος του $1+x$ να είναι ίσος με y, τότε

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Τώρα έστω ότι το a είναι η βάση του συστήματος των λογαρίθμων και έστω u να είναι ο λογάριθμος του $1+x$ σε αυτό το σύστημα. Τότε όπως έχουμε δει

$$u = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots) = \frac{y}{k}.$$

Έπεται ότι $k = \frac{y}{u}$, και αυτή είναι η πιο βολική μέθοδος να υπολογίζουμε την τιμή του k που αντιστοιχεί στην τιμή της βάσης a, δίνεται από το πηλίκο του φυσικού λογαρίθμου οποιουδήποτε αριθμού διαιρούμενο απο τον λογάριθμο του ίδιου αριθμού με βάση το a. Υποθέτοντας ότι ο αριθμός είναι το a, τότε $u = 1$ και το k είναι ίσο με τον φυσικό λογάριθμο του a. Στο σύστημα των κοινών λογαρίθμων, όπου η βάση είναι το $a = 10$, το k είναι ο φυσικός λογάριθμος του 10. Έπεται ότι $k = 2,3025850929940456840179914$, όπου είναι η τιμή που υπολογίστηκε παραπάνω. Αν κάθε φυσικός λογάριθμος διαιρεθεί με τον αριθμό k, ή πολλαπλασιαστεί με το δεκαδικό κλάσμα $0,4342944819032518276511289$, τότε τα αποτελέσματα είναι οι κοινοί λογάριθμοι με βάση το a.

125. Εφόσον

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots ,$$

αν θέσουμε $a^y = e^x$, τότε παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο, έχουμε $y \log a = z$, αφού $\log e = 1$. Αντικαθιστούμε τώρα την τιμή αυτή στην σειρά για να πάρουμε

$$a^y = 1 + \frac{y\log a}{1} + \frac{y^2(\log a)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(\log a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots .$$

Μ εαυτόν τον τρόπο κάθε εκθετικό, με την βοήθεια των φυσικών λογαρίθμων, μπορεί να εκφραστεί σαν άπειρη σειρά. Τώρα έστω j να είναι ένας άπειρα μεγάλος αριθμός, τότε και τα εκθετικά και οι λογάριθμοι μπορούν να εκφραστούν σαν δυνάμεις. Αυτό γιατί $e^z = (1+\frac{z}{j})^j$ και έτσι $a^y = (1+\frac{y\log a}{j})^j$. Για τους φυσικούς λογάριθμους έχουμε $\log(1+x) = j((1+x)^{\frac{1}{j}} - 1)$. Άλλες χρήσεις των φυσικών λογάριθμων εμφανίζονται στον ολοκληρωτικό λογισμό.

1.5 Σχόλια σχετικά με την παράγραφο 114.

Θα μπορούσαμε να δούμε την παράγραφο **114** σαν μια περιγραφή της συνέχειας και της παραγωσιμότητας της εκθετικής συνάρτησης μέσω των απειροστών. Έννοια ορίου δεν υπήρχε στην εποχή του Euler (εισήχθει αργότερα από τους Cauchy, Weierstrass) και συνεπώς ούτε κάποιος ορισμός συνεχούς συνάρτησης. Εξάλλου όλες οι συναρτήσεις (και αυτό προκύπτει και από την συζήτηση που κάνει ο Euler για την έννοια της συνάρτησης) ήταν εξ ορισμού καλές συνεχείς και σχεδόν πάντοτε παραγωγίσιμες. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι οι μαθηματικοί του δέκατου όγδοου αιώνα (και πολύ πριν, ήδη από τον Leibniz και το Newton) δεν είχαν σαφή εικόνα της συνέχειας.

Ο τρόπος με τον οποίο ο Euler βλέπει την συνέχεια απαιτεί την χρήση των απειροστών.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα ο Euler χρησιμοποιεί το σύμβολο ∞ για να εκφράσει το άπειρο. Αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν πραγματικός αριθμός και θα το εξαιρέσουμε. Οι πραγματικοί αριθμοί φαίνεται να χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες όπως:

(i) Τους συνήθεις.

(ii) Τους άπειρα μεγάλους.

(iii) Τους άπειρα μικρούς ή απειροστούς.

Οι κατηγορίες αυτές συνδέονται μεταξύ τους από τις συνηθισμένες ιδιότητες των αριθμών. Για παράδειγμα

- Αν ω είναι θετικός αριθμός άπειρα μικρός και όχι μηδέν τότε ο
$$M = \frac{1}{\omega}$$
θα είναι ένας άπειρα μεγάλος αριθμός. Αλλά και αντίστροφα,

- Αν M είναι (θετικός αναγκαστικά) αριθμός άπειρα μεγάλος και όχι μηδέν τότε ο
$$\omega = \frac{1}{M}$$
θα είναι ένας άπειρα μικρός αριθμός $\neq 0$.

- Αν M είναι άπειρα μεγάλος τότε και οι
$$M+1, \;\; M+2, \sqrt{M}, \;\; M+\sqrt{2}M\sqrt[4]{M}, \;\; M^2-6+M^M+\frac{1}{M}$$
θα είναι άπειρα μεγάλοι.

- Αν M, N είναι άπειρα μεγάλοι τότε οι

$$M - N, \quad M^2 - N^3, \quad \frac{M}{N}, \quad \frac{M^3+2}{N+\sqrt{N}}$$

  είναι αριθμοί (δηλαδή ορίζονται) *όμως δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων* αν είναι συνήθεις, μη συνήθεις, άπειρα μικροί ή άπειρα μεγάλοι.

Σχετικά με τις παραδοχές που κάνει ο Euler στο Introductio θα ασχοληθούμε στο επόμενο σχόλιο.

Έστω $a > 1$ συνήθης πραγματικός αριθμός. Ο Euler θεωρεί δεδομένο ότι η συνάρτηση a^x είναι «συνεχής» στο 0 δηλαδή αν πάρουμε ω να είναι άπειρα μικρό (δηλαδή άπειρα κοντά στο 0) τότε το a^ω θα είναι άπειρα κοντά στο 0 με την έννοια ότι θα υπάρχει ψ άπειρα μικρό επίσης με

$$a^\omega = a^0 + \psi = 1 + \psi$$

Λόγω των ιδιοτήτων της εκθετικής αν $\omega > 0$ θα πρέπει και $\psi > 0$ αφού αν $a > 1$ η εκθετική συνάρτηση a^x είναι γνήσια αύξουσα και συνεπώς $a^\omega > 1$.

Στη συνέχεια ο Euler ασχολείται με τον λόγο

$$k = \frac{a^\omega - 1}{\omega}$$

Αυτό που θέλει ο Euler να μεταφέρει στον αναγνώστη είναι ότι ισχύουν πάντα τα εξής:

- **Το k είναι πάντα συνήθης αριθμός** και όχι άπειρα μικρός ή άπειρα μεγάλος ή άθροισμα συνήθη με άπειρα μικρό (που είναι πεπερασμένο μεν αλλά όχι συνήθης αριθμός)

- **Το k εξαρτάται από τον αριθμό a και μόνον και όχι από το ω.**

Επειδή δεν είναι δυνατόν να υπάρχει κάποιο αλγεβρικό επιχείρημα που να μπορεί να στηρίξει αυτή την άποψη καταφεύγει σε μια «εμπειρική απόδειξη», δηλαδή σε ένα ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ, όπου θεωρεί το

$$a = 10$$

και το

$$\omega = \frac{1}{1000000}$$

(προφανώς προσεγγιστικά) και κάνει όσο το δυνατόν ακριβείς υπολογισμούς με χρήση πινάκων λογαρίθμων βρίσκοντας ότι

$$k = 2.30258\ldots.$$

Ουσιαστικά, **το k είναι η τιμή παραγώγου της a^x στο** $x = 0$, με την γνωστή εκείνη την εποχή έννοια της παραγώγου όπως την θεώρησαν οι Leibniz, Newton και Fermat.

<u>Σχόλιο στο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.</u>

Προφανώς το να θέσει κάποιος $\omega = \dfrac{1}{1000000}$ φαίνεται να είναι ένα λογικό σφάλμα, αφού ο ω δεν είναι ίσος με $\dfrac{1}{1000000}$ (ούτε καν μπορεί να εκφραστεί σαν συγκεκριμένο κλάσμα) και επίσης δεν φαίνεται να δικαιολογείται γιατί το $\dfrac{1}{1000000}$ είναι «μικρό». Αυτό που θέλει να μεταδώσει στον αναγνώστη ο Euler είναι ότι αν θέτει τιμές στο ω που είναι θετικές και πλησιάζουν όλο και περισσότερο στο 0 θα λαμβάνει τιμές που θα πλησιάζουν ένα συγκεκριμένο αριθμό. Έτσι αν για $\omega = \dfrac{1}{1000000}$ παίρνουμε $k = 2.30258\ldots$ για μικρότερες τιμές στη θέση του ω π.χ $\omega = \dfrac{1}{10000000000000000000000}$ θα έχουμε και πάλι[2] $k = 2.30258\ldots.$

1.6 Παραδοχές

Για να μεταφέρουμε σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα την μέθοδο του Euler θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των Ορισμών και των «Αξιωμάτων», όπου με τον όρο «Αξίωμα» θα εννοούμε κάθε αρχή που θεωρούμε ότι δέχεται ο Euler σαν προφανή και ως τέτοια την διατυπώνει έμμεσα. Ωστόσο, η αξιωματική προσέγγιση του απειροστικού είναι έξω από το πνεύμα του Euler και για το λόγο αυτό προτιμούμε τον όρο «Παραδοχή» παρά αυτόν του αξιώματος.

Η προσέγγιση του Απειροστικού λογισμού, μέσω απειροστών όπως έγινε από τους Leibniz και Newton και την οποία χρησιμοποιεί ο Euler θεωρήθηκε σαν ατελής και μη-αυστηρή και εγκαταλείφθηκε (σχεδόν οριστικά) τον δέκατο ένατο αιώνα, μετά την εισαγωγή της έννοιας του ορίου.

Στα 1970 ο A. Robinson δείχνει ότι η θεώρηση άπειρα μικρών και άπειρα μεγάλων αριθμών αριθμών στην Ανάλυση, και η χρήση τους όπως γινόταν από τους παλαιότερους μαθηματικούς είναι απόλυτα ορθή, με την έννοια ότι δεν μπορεί να φθάσει σε λογικές αντιφάσεις.

[2] με περισσότερο καλή προσέγγιση αλλά τα πρώτα στοιχεία θα συμπίπτουν.

Ο τρόπος με τον οποίο ο ο Robinson δείχνει τη «συνέπεια των απειροστών» απαιτεί εργαλεία από την μαθηματική λογική, έναν μαθηματικό κλάδο άγνωστο πριν από τον εικοστό αιώνα. Ξεκινώντας από το γνωστό σύστημα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, όπως κατασκευάστηκε αυστηρά από του Cantor και Dedekind, το οποίο είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, το επεκτείνει σε ένα πολύ ευρύτερο διατεταγμένο σώμα $^*\mathbb{R}$ το οποίο ονομάζει σύνολο των υπερπραγματικών αριθμών αριθμών.

Η τεχνική αυτή που χρησιμοποιεί ο Robinson δεν επεκτείνει απλά τους πραγματικούς αριθμούς αλλά και κάθε συνάρτηση ή ακόμα και κάθε στοιχειώδη έννοια που ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς, και εφαρμοζόταν ήδη στην καλούμενη «Θεωρία Μοντέλων». Την Ανάλυση που γίνεται μέσα στα πλαίσια της θεωρίας των υπερπραγματικών αριθμών του Robinson, δηλαδή με χρήση άπειρα μικρών και άπειρα μεγάλων αριθμών, ονομάζουμε «Μη-Τυπική Ανάλυση» σε αντιδιαστολή με την «Τυπική Ανάλυση» η οποία αποφεύγει πλήρως την χρήση άπειρα μικρών και άπειρα μεγάλων αριθμών αντικαθιστώντας τα με $\epsilon - \delta$ ορισμούς, όπως αυτόν του ορίου.

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι ο Euler δεν ενδιαφέρεται για την «αυστηρότητα» και ούτε χάνει χρόνο για χάρη της. Ο βασικός σκοπός είναι να μεταδώσει μεθόδους και ένα τρόπο σκέψης με τον οποίο κάποιος παράγει γρήγορα και αποτελεσματικά ορθές μαθηματικές αλήθειες. Τα άπειρα και τα απειροστά είναι απλά δεδομένα τεχνικά εργαλεία (όπως ήδη και στον Αρχιμήδη), και η βασική επιδίωξη του Infinitorum είναι να μεταδώσει τη ορθή και κυρίως αποτελεσματική χρήση τους.

Ορισμός 1.2.

(i) Ένας αριθμός M θα λέγεται *άπειρα μεγάλος* αν για κάθε πεπερασμένο φυσικό αριθμό n ισχύει $M > n$.

(ii) Ένας πραγματικός αριθμός ω θα λέγεται *απειροστός* αν για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$-\frac{1}{n} < \omega < \frac{1}{n}, \text{ ή ισοδύναμα } |\omega| < \frac{1}{n}$$

Παραδοχή 1. *Υπάρχει τουλάχιστον ένας άπειρα μεγάλος φυσικός αριθμός.*

Παραδοχή 2. *Οι πραγματικοί αριθμοί συνήθεις, άπειρα μεγάλοι ή απειροστοί έχουν όλες τις στοιχειώδεις αλγεβρικές ιδιότητες που γνωρίζουμε για τους συνήθεις αριθμούς και συγκεκριμένα:*

(i) *Για δύο οποιουδήποτε αριθμούς, συνήθεις, άπειρα μεγάλους ή απειροστούς a, b ορίζεται το άθροισμά τους $a + b$ και το γινόμενό τους ab, ώστε* *να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες πράξεις στους συνήθεις αριθμούς και να ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που γνωρίζουμε για τους συνήθεις αριθμούς:*

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *και* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(iii) $a + b = b + a$ *και* $a \cdot b = b \cdot a$.

(iv) *Για κάθε πραγματικό αριθμό* a *ισχύει ότι* $a + 0 = a$ *και* $a \cdot 1 = a$.

(v) *Για κάθε πραγματικό αριθμό* a *υπάρχει μοναδικός πραγματικός* $-a$, *με* $a + (-a) = 0$.

(vi) *Για κάθε πραγματικό αριθμό* $a \neq 0$ *υπάρχει μοναδικός πραγματικός* a^{-1}, *με* $a \cdot a^{-1} = 1$.

(vii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(viii) *Η σχέση ολικής διάταξης* $\leq$ *των συνηθισμένων αριθμών επεκτείνεται και σε όλους τους αριθμούς ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(ix) *Αν* a, b *είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, είτε συνήθεις είτε άπειρα μεγάλοι είτε απειροστοί και* $0 \leq a$ *και* $0 \leq b$ *τότε* $0 \leq a + b$ *και* $0 \leq a \cdot b$

(x) *Αν* a, b *είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, είτε συνήθεις είτε άπειρα μεγάλοι είτε απειροστοί και τότε ισχύει* $a \leq b$ *αν και μόνο αν* $a + (-b) \leq 0$.

Από τον ορισμό που δίνει ο Euler και ειδικά την συζήτηση που κάνει σε διάφορα μέρη στο INTRODUCTIO είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται από «αναλυτικό τύπο», να περιέχουν μία ή περισσότερες μεταβλητές στις οποίες μπορούμε να αντικαταστήσουμε αριθμούς **κάθε είδους**, και με αυτό υπονοείται ότι μπορεί να είναι πραγματικοί μιγαδικοί συνήθεις ή άπειρα μικροί ή άπειρα μεγάλοι.

Παραδοχή 3. *Κάθε συνάρτηση* $f(x)$ *που ορίζεται στους συνήθεις πραγματικούς αριθμούς επεκτείνεται στο σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών με μοναδικό τρόπο, και διατηρεί όλες τις ιδιότητες της.*

Η παραδοχή 3 χρειάζεται μια περαιτέρω επεξήγηση, δεδομένου ότι η έννοια «ιδιότητα» δεν είναι απόλυτα σαφής. Μια αυστηρή διατύπωση της παραδοχής 3 απαιτεί την χρήση μαθηματικής λογικής στην οποία ορίζεται τι σημαίνει «ιδιότητα»

Η Παραδοχή 1, της ύπαρξης απειροστών διαφορετικών από το 0, οδηγεί σε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των αριθμών.

Ορισμός 1.3. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί θα λέμε ότι ο x είναι *απείρως κοντά στον* y και θα γράφουμε $x \simeq y$ αν ο $x - y$ είναι άπειρα μικρός αριθμός.

Ορισμός 1.4. Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει φυσικός αριθμός n με

$$-n < x < n$$

Παραδοχή 4. Για κάθε φραγμένο αριθμό x υπάρχει μοναδικός συνήθης αριθμός a με $x \simeq a$. Θα ονομάζουμε *τυπικό μέρος* του x, και θα συμβολίζουμε με $\mathrm{st}(x)$, την ισότητα

$$a = \mathrm{st}(x)$$

.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το τυπικό μέρος st των φραγμένων αριθμών έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 1.5.

(i) *Αν ω είναι απειροστός τότε* $\mathrm{st}(\omega) = 0$.

(ii) *Αν x, y είναι φραγμένοι αριθμοί τότε $x \simeq y$ αν και μόνο αν* $\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y)$.

(iii) *Αν x, y είναι φραγμένοι αριθμοί τότε ο $x + y$ είναι φραγμένος και* $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.

(iv) *Αν x, y είναι φραγμένοι αριθμοί τότε ο xy είναι φραγμένος και* $\mathrm{st}(xy) = \mathrm{st}(x)\mathrm{st}(y)$.

(v) *Αν x, y είναι φραγμένοι αριθμοί και ο y δεν είναι άπειρα μικρός τότε ο $\frac{x}{y}$ είναι φραγμένος και* $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το τελευταίο.

Αν x, y είναι φραγμένοι αριθμοί και ο y δεν είναι άπειρα μικρός τότε $x = a + \omega$, $y = b + \psi$, όπου $a = \mathrm{st}(x)$. $b = \mathrm{st}(y) \neq 0$ συνήθεις και ω, ψ άπειρα μικροί. Τότε

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\omega}{b+\psi} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+\omega) - a(b+\psi)}{b(b+\psi)} = \frac{b\omega - a\psi}{b(b+\psi)}$$

και συνεπώς

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{b\omega - a\psi}{b(b+\psi)}$$

Αφού ο $\dfrac{b\omega - a\psi}{b(b+\psi)}$ είναι άπειρα μικρός (αφού έχει άπειρα μικρό αριθμητή και φραγμένο παρονομαστή) καταλήγουμε στο ότι

$$\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$$

□

1.7 Συνέχεια, Ομοιόμορφη συνέχεια και Παραγωγισιμότητα

Προφανώς μας ενδιαφέρει η μελέτη συναρτήσεων $f(x)$ που απεικονίζουν συνήθεις αριθμούς σε συνήθεις αριθμούς, όπως όλες οι συναρτήσεις που δίνονται με «αναλυτικό τύπο» τις οποίες θεωρεί ο Euler.

Ορισμός 1.6. Μια συνάρτηση $f(x)$ θα λέγεται *συνήθης* αν για κάθε σύνηθες x το $f(x)$ είναι σύνηθες

Παράδειγμα 1.7. *Οι συναρτήσεις*

$$x. \quad x^n, \; a^x, \; \sin x. \; \log x \; \frac{x^2 + \sin x}{a^x + 1}$$

είναι συνήθεις ενώ οι

$$x^2 + x\omega. \; \frac{1}{x\omega^2 + 2}$$

δεν είναι.

Παρακάτω θα θεωρούμε μόνο συνήθεις συναρτήσεις και έτσι όταν χρησιμοποιείται ο όρος «συνάρτηση» θα εννοείται «συνήθης συνάρτηση». Η σύμβαση αυτή θεωρείται προφανής στο Introductio.

Στο Introductio δεν αναφέρεται έννοια ορίου παρά έμμεσα.

Ορισμός 1.8. Θα λέμε ότι ο αριθμός b είναι το *όριο της συνάρτησης* $f(x)$ *όταν το* x *πλησιάζει το* a αν για κάθε x με $x \neq a$ αλλά $x \simeq a$ ισχύει $f(x) \simeq b$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

Ορισμός 1.9. Μια συνάρτηση $f(x)$ μιας μεταβλητής x λέγεται *συνεχής σε ένα συνήθη πραγματικό αριθμό* a αν για κάθε τιμή x που είναι άπειρα κοντά στο a το $f(x)$ είναι άπειρα κοντά στο $f(a)$. Ισοδύναμα. η συνάρτηση $f(x)$ μιας μεταβλητής x λέγεται *συνεχής* αν για οποιονδήποτε απειροστό αριθμό ω υπάρχει απειροστός αριθμός ψ με

$$f(a+\omega) = f(a) + \psi$$

Παράδειγμα 1.10. Στο προηγούμενο παράδειγμα **πρέπει αναγκαστικά** να πάρουμε το a συνήθη αριθμό. Πράγματι αν παίρναμε

$$a = \frac{1}{\omega}$$

τότε

$$f(a+\omega) = \frac{1}{\omega^2} + 2\omega\left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) = f(a) + \psi$$

όπου ο

$$\psi = 2\omega\left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) = 2 + 2\omega^2$$

δεν είναι απειροστός.

Σημείωση 1.11. Ο ορισμός της συνέχειας που διδάσκεται σήμερα (που ανήκει στην τάξη των «$\epsilon - \delta$ ορισμών») είναι μεν απαλλαγμένος από τα απειροστά αλλά πολύ δυσκολότερος σε χειρισμό. Ορισμοί που είναι απαλλαγμένοι από απειροστά τους ονομάζουμε «τυπικούς ορισμούς». Έτσι ο Ορισμός 1.12 παρακάτω είναι ένας τυπικός ορισμός της «τυπικής συνέχειας».

Δεδομένου ότι τα σύγχρονα συγγράμματα δεν αναφέρονται πια σε απειροστά ή άπειρα μεγάλα μεγέθη[3] είναι ενδιαφέρον να διατυπώσουμε τον ορισμό αυτό με τρόπο ώστε να ισχύει και στα δύο συστήματα αριθμών, και στους συνήθεις και σε αυτούς που θεωρεί ο Euler. Για να δουλεύει ο ορισμός και στα δύο συστήματα χρησιμοποιούμε την έκφραση «συνήθης αριθμός» που στο σύστημα που δέχεται ο Euler έχει νόημα, στο σύγχρονο απλά σημαίνει «αριθμός».

Ορισμός 1.12. Μια συνάρτηση λέγεται *(τυπικά) συνεχής* στο σύνηθες a αν για κάθε σύνηθες $\epsilon > 0$, υπάρχει σύνηθες $\delta > 0$ ώστε αν το x είναι σύνηθες και $|x - a| < \delta$ τότε $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Το γεγονός ότι το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ σε ένα σύνηθες a είναι συνεχής στο a είναι άμεσο:

Πρόταση 1.13. *Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο a τότε η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο a.*

Απόδειξη. (Απόδειξη με χρήση απειροστών) Πράγματι, αφού οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο a, αν $x \simeq a$ τότε $f(x) \simeq f(a)$ και $g(x) \simeq g(a)$, δηλαδή

[3] παρά μόνο στον τίτλο: Απειροστικός Λογισμός

$f(x) = f(a) + \omega_1$ και $g(x) = g(a) + \omega_2$, όπου τα ω_1, ω_2 είναι άπειρα μικροί. Αλλά τότε

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + (\omega_1 g(a) + \omega_2 + \omega_1\omega_2)$$

Αφού τα $f(a)$, $g(a)$ είναι συνήθεις αριθμοί είναι πεπερασμένα άρα το $\omega_1 g(a) + \omega_2 + \omega_1\omega_2$ είναι άπειρα μικρό και συνεπώς $f(x)g(x) \simeq f(a)g(a)$. □

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ότι ότι το γινόμενο δύο τυπικά συνεχών συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ σε ένα a είναι συνεχής στο a, που αναγκαστικά απαιτεί τη χρήση «$\epsilon - \delta$» έχει σαφώς πιο δύσκολη και δυσνόητη για τους σπουδαστές απόδειξη:

Απόδειξη. (Τυπική $\epsilon - \delta$ απόδειξη χωρίς χρήση απειροστών) Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε x

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq |f(x)| \ (|g(x) - g(a)|) + |g(a)| \ (|f(x) - f(a)|) \end{aligned}$$

συνεπώς

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(x)| \ (|g(x) - g(a)|) + |g(a)| \ (|f(x) - f(a)|) \tag{1.4}$$

Αφού η f είναι συνεχής στο a υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $|x - a| < \delta_1$ τότε

$$|f(x) - f(a)| < 1$$

οπότε θα έχουμε ότι

$$|f(x)| = |f(a) + f(x) - f(a)| \leq |f(a) + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + 1 \tag{1.5}$$

Αφού οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι τυπικά συνεχείς στο a, αν δοθεί $\epsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_2, \delta_3 > 0$ ώστε αν $|x - a| < \delta_1$ τότε

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|g(a)| + 1)} \tag{1.6}$$

και αν $|x - a| < \delta_3$

$$|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{|f(a)| + 1)} \tag{1.7}$$

Θέτουμε
$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_2\}$$
Αν $|x-a| < \delta$ τότε θα ισχύουν οι (1.5), (1.6) και (1.7) οπότε αντικαθιστώντας στην (1.4) έχουμε ότι αν $|x-a| < \delta$,
$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \epsilon$$

□

Ακόμα πιο χαρακτηριστικό είναι ότι το πολύ περισσότερο δύσκολο να αποδειχτεί με τυπικό $\epsilon - \delta$ τρόπο αποτέλεσμα, ότι αν $f(x)$, $g(x)$ είναι συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα a και $g(a) \neq 0$ τότε η $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο a, δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία να αποδειχτεί, αν αντιμετωπιστεί από τη σκοπιά των απειροστών.

Πρόταση 1.14. *Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο a και $g(a) \neq 0$ τότε η $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο a.*

Απόδειξη. (Απόδειξη με χρήση απειροστών) Αν $x \simeq a$ τότε $f(x) \simeq f(a)$ και $g(x) \simeq g(a)$, δηλαδή $f(x) = f(a) + \omega_1$ και $g(x) = g(a) + \omega_2$, όπου τα ω_1, ω_2 είναι άπειρα μικροί. Αλλά τότε
$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(a)+\omega_1}{g(a)+\omega_2} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{g(a)\omega_1 - f(a)\omega_2}{g(a)(g(a)+\omega_2)} \simeq 0$$
συνεπώς $\dfrac{f(x)}{g(x)} \simeq \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

□

Παράδειγμα 1.15. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^2$ αυτή είναι συνεχής σε κάθε συνηθισμένη τιμή $x = a$ αφού αν ω είναι απειροστός τότε
$$f(a+\omega) = a^2 + 2\omega(a+\omega) = f(a) + \psi$$
όπου ο
$$\psi = 2\omega(a+\omega)$$
είναι απειροστός δεδομένου ότι ο a είναι συνήθης.

Σημείωση 1.16. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια ισχυρότερη έννοια συνέχειας απαιτώντας αν $x \simeq y$ τότε $f(x) \simeq y$. Οι συναρτήσεις $f(x)$ που έχουν την ιδιότητα για κάθε x (συνήθη ή άπειρα μικρό ή άπειρα μεγάλο) και κάθε άπειρα μικρό ω το $f(x+\omega)$ να είναι άπειρα κοντά στο $f(x)$ δηλαδή

$$f(x+\omega) = f(x) + \psi, \quad \psi \text{ άπειρα μικρό}$$

είναι μια ιδιαίτερη κλάση συνεχών συναρτήσεων, που τις αποκαλούμε ομοιόμορφα συνεχείς.

Ορισμός 1.17. Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* αν x και κάθε y με $x \simeq y$ ισχύει $f(x) \simeq f(y)$.

Παράδειγμα 1.18. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι αν πάρουμε αν $x = \omega + \dfrac{1}{\omega}$ και σαν $y = \omega$ τότε $x \simeq y$ αλλά

$$f(x) - f(y) = 2\omega\left(\frac{1}{\omega} + \omega\right) = 2 + 2\omega^2$$

δεν είναι άπειρα μικρός αριθμός.

Παράδειγμα 1.19. Έστω $a > 1$ συνήθης πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση a^x είναι συνεχής σε κάθε κάθε συνήθη τιμή του x. Θεωρούμε $x = 0$ τότε θεωρώντας ότι η a^x είναι συνεχής θα έχω ότι αν ω είναι άπειρα μικρό τότε υπάρχει ψ άπειρα μικρό επίσης με

$$a^\omega = a^0 + \psi = 1 + \psi$$

Λόγω των ιδιοτήτων της εκθετικής αν $\omega > 0$ θα πρέπει και $\psi > 0$ αφού αν $a > 1$ η εκθετική συνάρτηση a^x είναι γνήσια αύξουσα και συνεπώς $a^\omega > 1$.

Με αυτό τον συμβολισμό θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε τον ορισμό της παραγώγου για μια συνάρτηση $f(x)$.

Ορισμός 1.20. Μια συνάρτηση $f(x)$ μιας μεταβλητής x θα λέμε ότι είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα συνήθη αριθμό a αν υπάρχει μοναδικός συνήθης αριθμός $f'(a)$ με την ιδιότητα για κάθε απειροστό αριθμό $\omega \neq 0$ να ισχύει

$$f'(a) = \operatorname{st}\left(\frac{f(a+\omega) - f(a)}{\omega}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+\omega) - f(a)}{\omega}.$$

Παράδειγμα 1.21. *Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε συνήθη αριθμό a αφού για οποιοδήποτε άπειρα μικρό αριθμό ω ισχύει*

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+\omega) - f(a)}{\omega} &= \frac{(a+\omega)^3 - a^3}{\omega} \\
&= \frac{a^3 + 3a^2\omega + 3a\omega^2 + \omega^3 - a^3}{\omega} \\
&= \frac{3a^2\omega + 3a\omega^2 + \omega^3}{\omega} \\
&= \frac{\omega\left(3a^2 + 3a\omega + \omega^2\right)}{\omega} \\
&= 3a^2 + \left(3a\omega + \omega^2\right) \\
&\simeq 3a^2
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι

$$f'(a) = 3a^2.$$

Παράδειγμα 1.22. *Η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε συ-*

νήθη αριθμό a *αφού για οποιοδήποτε άπειρα μικρό αριθμό* ω *ισχύει*

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+\omega)-f(a)}{\omega} &= \frac{(a+\omega)^n - a^n}{\omega} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\omega^k - a^n}{\omega} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\omega^k}{\omega} \\
&= \frac{\omega\left(na^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\omega^{k-1}\right)}{\omega} \\
&= na^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\omega^{k-1} \\
&\simeq na^{n-1}
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Παράδειγμα 1.23. *Η συνάρτηση*

$$f(x) = a^x$$

όπου το $a > 1$ *είναι αύξουσα και συνεχής. Ο αριθμός* k *ο οποίος παίζει βασικό ρόλο στο Κεφάλαιο VII είναι η παράγωγος της* $f(x)$ *όταν* $x = 0$ *δηλαδή*

$$f'(0) = k.$$

'Οπως θα δείξει ο Euler παρακάτω υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $e > 1$ *που έχει την ιδιότητα*

$$k = \log_e a.$$

1.8 Σχόλια σχετικά με τις παραγράφους 115–116.

Στην φράση « *Αφού το* j *είναι άπειρα μεγάλο,* $\frac{j-1}{j} = 1$ *και όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που μπαίνει στη θέση του* j *τόσο πιο κοντά η τιμή* $\frac{j-1}{j}$ *πηγαίνει* *στο* 1», η $\dfrac{j-1}{j} = 1$ δεν μπορεί να εκληφθεί σαν γνήσια ισότητα. Γιατί αν ήταν ίσα και για τις άπειρα μικρές ποσότητες θα έπρεπε να θέσουμε ότι είναι ίσες με μηδέν και έτσι δεν θα μπορούσαμε να διαιθρούμε με αυτές, όπως γίνεται συχνά στο Introductio. Για το λόγο αυτό ακολουθεί η εξήγηση: «*όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που μπαίνει στη θέση του* j *τόσο πιο κοντά η τιμή* $\dfrac{j-1}{j}$ *πηγαίνει στο* 1».

Με τον συμβολισμό που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο αυτό που υπονοείται είναι $\dfrac{j-1}{j} \simeq 1$ ή ισοδύναμα $\mathrm{st}\left(\dfrac{j-1}{j}\right) = 1$. Ο Euler αφού βρει ότι

$$
\begin{aligned}
a^z &= \left(1+\frac{kz}{j}\right)^j = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(j-1)}{1\cdot 2j}k^2z^2 + \frac{1(j-1)(j-2)}{1\cdot 2j\cdot 3j}k^3z^3 \\
&+ \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}k^4z^4 \\
&+ \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)(j-4)}{1\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j\cdot 5j}k^5z^5 + \ldots \\
&= \sum_{n=0} a_n \frac{1}{n!}k^n z^n
\end{aligned}
$$

όπου

$$
a_n = \frac{j\cdot(j-1)\cdot(j-2)\cdots(j-n+1)}{j^n} = \frac{j-1^{\text{‘}}}{j}\cdot\frac{j-2}{j}\cdots\frac{j-n}{j}.
$$

Παρατηρεί ότι για κάθε n

$$
a_n \simeq 1
$$

αντικαθιστά κάθε a_n με 1 για να πάρει την σχέση

$$
a^z = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \cdots
$$

Τι νομιμοποιεί όμως αυτή την αντικατάσταση; Υπάρχει κάποια κρυμμένη αρχή πίσω από αυτή;

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στη μη τυπική ανάλυση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τις βασικές αρχές της Μη-τυπικής Ανάλυσης η οποία δείχνει και μελετά τους πραγματικούς αριθμούς και τις πραγματικές συναρτήσεις μέσω ενός διατεταγμένου σώματος $^*\mathbb{R}$ το οποίο επεκτείνει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και δεν είναι αρχιμήδειο, δηλαδή περιέχει απειροστές ποσότητες. Η κατανόηση των βασικών αρχών της Μη-τυπικής Ανάλυσης απαιτεί μια στοιχειώδη γνώση μαθηματικής λογικής, της οποίας τα βασικά στοιχεία θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους.

2.1 Το σύμπαν με άτομα από ένα σύνολο A

Ξεκινάμε δίνοντας κάποιες βασικές έννοιες από τη θεωρία συνόλων. Θεωρούμε αρχικά ένα σύνολο X.

Ορισμός 2.1. Έστω X να είναι ένα μη κενό σύνολο.

(i) Αν x, y είναι δύο στοιχεία του X τότε το σύνολο

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

ονομάζεται *διατεταγμένο ζεύγος* με πρώτο στοιχείο το x και δεύτερο το y.

(ii) Αν A, B είναι δύο σύνολα, υποσύνολα ενός συνόλου X, το *καρτεσιανό γινόμενό* τους ορίζεται να είναι το σύνολο

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

(iii) Με

$$\wp(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$$

θα συμβολίζουμε σύνολο όλων των υποσυνόλων του X,

$$\wp^2(X) = \wp\wp(X) = \{Y : Y \subseteq \wp(X)\}$$

το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\wp(X)$.

(iv) Θέτουμε $\wp^0(X) = X$ και επαγωγικά αν $n > 0$

$$\wp^n(X) = \wp\left(\wp^{n-1}(X)\right).$$

Από τον ορισμό τα διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων του X είναι στοιχεία του $\wp^2(X)$. Συνεπώς το καρτεσιανό γινόμενο δύο υποσύνολων του X είναι στοιχείο του $\wp^3(X)$.

Ορισμός 2.2. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο ορίζουμε

$$\begin{aligned}
&X^1 = X\\
&X^2 = X \times X = \{(x, y) : x \in X, y \in X\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X^{n+1} = X^n \times X = \{(x, y) : x \in X^n, y \in X\}
\end{aligned}$$

Ορισμός 2.3.

(i) Έστω $n \geq 1$. Μια *n-μελής σχέση σε ένα σύνολο* X είναι ένα υποσύνολο R του X^n. Οι 1-μελείς σχέσεις στο X είναι τα υποσύνολα του X.

(ii) Ειδικά αν $n = 2$ η σχέση ονομάζεται *διμελής*.

(iii) Τα στοιχεία του X θεωρούνται σαν 0-*μελείς σχέσεις*.

Ορισμός 2.4. Αν η R είναι μια n-μελής με $n \geq 2$ το σύνολο

$$\{x \in X : \text{ υπάρχει } y \in X^{n-1} \text{ με } (x, y) \in R\}$$

λέγεται το *πεδίο ορισμού της* R και συμβολίζεται με $\mathrm{Dom}(R)$, ενώ το σύνολο

$$\{x \in X^{n-1} : \text{ υπάρχει } y \in X \text{ με } (x, y) \in R\}$$

λέγεται το *σύνολο τιμών της* της R και συμβολίζεται με $\mathrm{Ran}(R)$.

Ορισμός 2.5.

(i) Αν η R είναι μια $n+1$-μελής με $n \geq 1$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathrm{Dom}(R)$ υπάρχει μοναδικό $y \in X$ με $(x, y) \in R$ τότε η R λέγεται μια *μερική συνάρτηση n μεταβλητών* και συμβολίζεται με $R : \mathrm{Dom}(R) \to X$.

(ii) Στην περίπτωση που η R είναι μια μερική συνάρτηση n μεταβλητών και $x \in \mathrm{Dom}(R)$ θα γράφουμε και $y = R(x)$ αντί του $(x, y) \in R$.

(iii) Οι συναρτήσεις $R : X^2 \to X$ ονομάζονται και *διμελείς πράξεις* στο X. Αν $R : X^2 \to X$ είναι μια διμελής πράξη στο X θα γράφουμε και $z = xRy$ αντί του $((x, y), z) \in R$.

Παράδειγμα 2.6. (i) *Η πρόσθεση $+$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μια 3-μελής σχέση και διμελής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ αν ταυτιστεί με το σύνολο*

$$R = \{((x, y), z)) : z = x + y\}.$$

Όμοια ο πολλαπλασιασμός είναι τριμελής σχέση αν ταυτιστεί με το σύνολο

$$R = \{((x, y), z)) : z = xy\}.$$

(ii) *Η σχέση της διάταξης $<$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μια διμελής σχέση η οποία ταυτίζεται με το σύνολο*

$$\{(x, y) : x < y\}$$

που όμως δεν είναι συνάρτηση.

Ορισμός 2.7. *Έστω $\mathbf{A}$ να είναι ένα σύνολο, το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε και κενό. Ορίζουμε μια ιεραρχία συνόλων $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ ως εξής*

(i) $S_0 = \mathbf{A}$.

(ii) *Αν $n > 0$ τότε $S_n = S_{n-1} \cup \wp(S_{n-1})$.*

Το σύνολο $S_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ θα ονομάζεται η υπερδομή του $\mathbf{A}$ ή το σύμπαν με άτομα από το $\mathbf{A}$.

Σημείωση 2.8. (i) *Το σύμπαν S_ω είναι ιδιαίτερα πλούσιο. Η σημασία του έγκειται ότι αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο X του σύμπαντος τότε κάθε σχέση ή συνάρτηση που ορίζεται πάνω στο X ανήκει επίσης στο S_ω. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε σαν σύνολο ατόμων $\mathbf{A}$ να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τότε οι τυπικές κατασκευές του συνόλου των ακεραίων $\mathbb{Z}$, του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών, του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, δείχνουν ότι τα σύνολα αποτελούν στοιχεία του S_ω αλλά επίσης κάθε καρτεσιανό γινόμενο οποιουδήποτε πλήθους από αυτά, και κάθε υποσύνολο του καρτεσιανού αυτού γινομένου και συνεπώς κάθε πράξη(όπως η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός) ή σχέση (όπως η διάταξη) που μπορεί να οριστεί πάνω σε αυτά είναι στοιχείο του S_ω.*

(ii) *Οτιδήποτε θέλουμε να εκφράσουμε σχετικά με το σύνολο $\mathbb{R}$, δηλαδή οποιαδήποτε ιδιότητα έχει το $\mathbb{R}$ πχ ότι είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση οσοδήποτε πολλών μεταβλητών και οποιαδήποτε ιδιότητα αυτής μπορούν να εκφραστούν μέσω στοιχείων του S_ω. Ο τρόπος που γίνεται αυτό είναι με χρήση των λογικών στοιχείων της γλώσσας και με «ονόματα» στοιχείων του S_ω, και θα το διατυπώσουμε με αυστηρό τρόπο στην επόμενη παράγραφο.*

2.2 Η Γλώσσα του σύμπαντος S_ω.

Θα συμβολίζουμε με S_ω το σύμπαν με άτομα να είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε αφηρημένα με οποιοδήποτε σύμπαν με άτομα από ένα αφηρημένο σύνολο $\mathbf{A}$ αλλά για τον σκοπό μας αρκεί να θεωρήσουμε τα άτομα είναι είναι οι φυσικοί αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Ορισμός 2.9. Έστω ένα μη κενό σύνολο X. Η *γλώσσα* της δομής του συνόλου X είναι ένα σύνολο από σύμβολα $\mathcal{L}$ τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις βασικές κατηγορίες

(i) *Λογικά Σύμβολα.* Είναι τα σύμβολα

$$\neg, \quad \vee, \quad \wedge, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow, \quad \exists, \quad \forall$$

(ii) Τα

$$=, \quad \in$$

(iii) *Παρενθέσεις*

$$(\ , \ ) \qquad [\ , \ ] \qquad \{ \ , \ \}$$

(iv) *Μεταβλητές.* Αποτελούν ένα αριθμήσιμο σύνολο. Συνήθως συμβολίζονται με x, y, x_1, x_2, $\ldots$, y_1, y_2, $\ldots$

(v) *Ονόματα ή σταθερές* Θεωρούμε για κάθε σχέση $R \in S_\omega$ να αντιστοιχεί ένα σύμβολο $\bar{R}$ που θα ονομάζουμε το όνομα του R. Αν $R \neq S$ όπου $R, S \in S_\omega$ θα υποθέτουμε ότι $\bar{R} \neq \bar{S}$, με άλλα λόγια διαφορετικά στοιχεία του σύμπαντος θα έχουν διαφορετικά ονόματα. Τα στοιχεία $\bar{R}$ με $R \in S_\omega$ θα λέγονται οι *σταθερές* ή τα *ονόματα της γλώσσας*.

2.2α′ Συντακτικοί κανόνες στη γλώσσα

Μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας θα λέγεται μια έκφραση. Θα δώσουμε κάποιους κανόνες για ποιες εκφράσεις θα θεωρούμε συντακτικά ορθές, αν και δεν θα είναι δυνατόν να αποδοθεί νόημα σε αυτές. Αρχικά θα ορίσουμε τα βασικά στοιχεία που αποτελούν μέρη μιας πρότασης, τους όρους. Ο ορισμός τους θα είναι επαγωγικός.

Ορισμός 2.10. (i) *Κάθε σταθερά είναι ένας όρος.*

(ii) *Κάθε μεταβλητή είναι ένας όρος.*

2.3 Οι Πραγματικοί Αριθμοί είναι το μοναδικό Πλήρες Διατεταγμένο Σώμα

Τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί; Υπάρχουν πολλοί τρόποι να κατασκευάσουμε ένα «σύνολο των πραγματικών αριθμών». Ένας σύντομος τρόπος είναι να αξιωματικά. Θα θεωρήσουμε όπως πριν το σύμπαν $S_\omega(\mathbb{N})$ με άτομα τους φυσικούς αριθμούς, το οποίο θα γράφουμε για συντομία S_ω. , Ομοιόμορφη συνέχεια

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ένα στοιχείο $\mathbb{R}$ του $S_\omega \setminus S_0$, με άλλα λόγια ένα σύνολο, μαζί με δύο συναρτήσεις $a, m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διμελή σχέση $R \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και τελικά δύο στοιχεία 0, 1 του $\mathbb{R}$ με $0 \neq 1$. Προφανώς και τα $a, m, R \in S_\omega \setminus S_0$. Η συνάρτηση a είναι η πρόσθεση, η συνάρτηση a είναι ο πολλαπλασιασμός, και το R είναι η σχέση της (αυστηρής διάταξης). Συμφωνούμε να γράφουμε $x + y$ αντί $a(x, y)$, xy αντί του $m(x, y)$ και $x < y$ αντί του $(x, y) \in R$. Για να διατυπώσουμε τις ιδιότητες του $\mathbb{R}$ στη γλώσσα του S_ω θα δεχτούμε κάποιες απλοποιήσεις.

(i) Το όνομα $\overline{\mathbb{R}}$ του $\mathbb{R}$ θα το συμβολίζουμε και αυτό με $\mathbb{R}$, το όνομα $\bar{0}$ του 0 με 0 και το όνομα $\bar{1}$ του 1 με 1.

(ii) Αν $\bar{a}, \bar{m}.\bar{R}$ είναι τα ονόματα των στοιχείων $a, m.R$ και s, t είναι δύο όροι της γλώσσας

   (α′) Ο όρος $\bar{a}(s, t)$ θα γράφεται $s + t$.

   (β′) Ο όρος $\bar{m}(s, t)$ θα γράφεται $st.$, Ομοιόμορφη συνέχεια

   (γ′) Ο τύπος $\bar{R}(s, t)$ θα γράφεται $s < t$.

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα *διατεταγμένο σώμα* δηλαδή ικανοποιεί τα Αξιώματα **(A1)**-**(A15)** που δίνονται στον παρακάτω Ορισμό 2.11, δηλαδή οι προτάσεις **(A1)**-**(A15)** της γλώσσας του S_ω είναι αληθείς. Ωστόσο ικανοποιεί και ένα επιπλέον αξίωμα **(A16)**, το οποίο ονομάζεται *το αξίωμα της πληρότητας* που θα διατυπώσουμε στην φυσική γλώσσα σαν

Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

και ενώ στην γλώσσα S_ω με κάπως περίπλοκο τρόπο. Αν X είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ θα λέμε ότι το a είναι άνω φράγμα του X αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \leq a$ όπου $x \leq a$ σημαίνει ότι $x < a$ είτε $x = a$. Προφανώς και το $\leq$ είναι σχέση στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς στοιχείο του S_ω. Το a θα λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα του X αν είναι το μικρότερο άνω φράγμα του X δηλαδή αν ισχύει

$$\forall(b \in \mathbb{R})\ (\ (\forall x \in X)(x \leq b)\ ) \to a \leq b\ )$$

Επίσης έστω $\wp(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ το οποίο επίσης ανήκει στο S_ω και θα συμβολίζουμε το όνομα $\overline{\wp(\mathbb{R})}$ του $\wp(\mathbb{R})$ με $\wp(\mathbb{R})$ για λόγους απλότητας. Μπορούμε να δούμε ότι το αξίωμα **(A16)**, «*Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*» γράφεται στη γλώσσα της S_ω σαν

$$\begin{aligned}&\forall(X \in \wp(\mathbb{R})\ (\ \exists(y \in \mathbb{R})\forall(x \in X)(x \leq y)\ ) \to \\ &\exists(z \in \mathbb{R})\ [\ (\ \forall(x \in X)(x \leq z)\ ) \land \forall(w \in \mathbb{R})(\forall(x \in X)(x \leq w) \to z \leq w)\ ]\end{aligned}$$

όπου X, x, y, z, w είναι μεταβλητές της γλώσσας.

Ορισμός 2.11. Το *σύνολο των πραγματικών αριθμών* είναι ένα στοιχείο $\mathbb{R}$ του $S_\omega \backslash S_0$ μαζί με δύο συναρτήσεις $a, m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διμελή σχέση $R \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και τελικά δύο στοιχεία 0, 1 του $\mathbb{R}$ με $0 \neq 1$ για τα οποίες συμφωνούμε να ισχύουν (να είναι αληθείς) οι παρακάτω προτάσεις της γλώσσας του S_ω. Συμφωνούμε να γράφουμε $x + y$ αντί $a(x, y)$, xy αντί του $m(x, y)$ και $x < y$ αντί του $(x, y) \in R$. Επίσης για λόγους απλότητας θα γράφουμε με $\mathbb{R}$ και το όνομα του $\mathbb{R}$ με 0 το όνομα του 0 και 1 το όνομα του 1.

(A1) $\forall(x \in \mathbb{R}), \forall(y \in \mathbb{R}), \forall(z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$.

(A2) $\forall(x \in \mathbb{R}), \forall(y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$.

(A3) $\forall(x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$.

(A4) $\forall(x \in \mathbb{R})\ \exists y(\in \mathbb{R})x + y = 0$.

(A5) $\forall(x \in \mathbb{R}), \forall(y \in \mathbb{R}), \forall(z \in \mathbb{R})\ (xy)z = x(yz)$.

(A6) $\forall(x \in \mathbb{R}), \forall(y \in \mathbb{R})\ xy = yx$.

(A7) $\forall(x \in \mathbb{R})\ x1 = x$.

(A8) $\forall(x \in \mathbb{R})(x \neq 0) \to \exists y(\in \mathbb{R}) xy = 0.$

(A9) $\forall(x \in \mathbb{R}), \forall(y \in \mathbb{R}), \forall(z \in \mathbb{R}) x(y+z) = (xy) + (xz).$

(A10) $\forall(x \in \mathbb{R}) \neg(x < x).$

(A11) $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(\ (x < y) \wedge (y < z)\ ) \to (x < z).$

(A12) $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(x < y) \vee (y < x) \vee x = y.$

(A13) $0 < 1.$

(A14) $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})((x < y) \wedge (0 < z)) \to (x + z < y + z).$

(A15) $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})((x < y) \wedge (0 < z)) \to (xz < yz).$

(A16) *Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα*:

$$\forall(X \in \wp(\mathbb{R})\ (\ \exists(y \in \mathbb{R})\forall(x \in X)(x \leq y)\ ) \to$$
$$\exists(z \in \mathbb{R})\ [\ (\ \forall(x \in X)(x \leq z)\ ) \wedge \forall(w \in \mathbb{R})(\forall(x \in X)(x \leq w) \to z \leq w)\ ]\ .$$

Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ το στοιχείο y που έχει την ιδιότητα $xy = 1_{\mathbb{R}}$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με x^{-1} ή $\dfrac{1}{x}$.

Αν n φυσικός αριθμός και $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$nx = x + \cdots + x (n \text{ φορές})\ .$$

Αν n ακέραιος αριθμός και $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$nx = (-x) + \cdots + (-x)(n \text{ φορές})\ .$$

Οι φυσικοί αριθμοί, οι ακέραιοι και οι ρητοί περιέχονται (ισομορφικά) μέσα στο $\mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$n_{\mathbb{R}} = 1 + 1 + \cdots + 1 \ \ (n \text{ φορές }).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$n_{\mathbb{R}} = \begin{cases} n_{\mathbb{R}} & \text{αν } n \in \mathbb{N}. \\ m_{\mathbb{R}} & \text{αν } n = -m, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Τέλος, αν $n, m \in \mathbb{Z}, m > 0$

$$\frac{n_{\mathbb{R}}}{m_{\mathbb{R}}} = n_{\mathbb{R}} \left(m_{\mathbb{R}}\right)^{-1}.$$

Το σύνολο []

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{A}} = \left\{\frac{n_{\mathbb{R}}}{m_{\mathbb{R}}} : n, m \in \mathbb{Z}, m > 0\right\}$$

ονομάζεται το *σύνολο των κλασμάτων* του $\mathbb{R}$ και είναι ισομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

Πρόταση 2.12.

(i) *Αν* $xy = 0$ *τότε* $x = 0$ *ή* $y = 0$.

(ii) *Αν* $x < y$ *τότε* $-x > -y$.

(iii) *Αν* $x \neq 0$ *και* $nx = 0$ *τότε* $n = 0$.

(iv) *Αν* $x, y \neq 0$ *τότε* $\frac{1}{n_{\mathbb{R}}} x = y$ *αν και μόνο αν* $x = ny$.

Απόδειξη.

(i) Αν $xy = 0$ και $x \neq 0$ τότε $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$ οπότε $y = 0$.

(ii) Αφού $x > 0$ θα έχουμε ότι $x + (-x) > 0 + (-x)$ ή ισοδύναμα $-x < 0$.

(iii) Αφού $x \neq 0$ τότε $x > 0$ ή $x < 0$. Αν $x > 0$ τότε $x + x > x > 0$. Συνεπώς $2x > 0$. Επαγωγικά, $nx > 0$ για κάθε $n > 0$. Από την προηγούμενη περίπτωση (2) της Πρότασης $(-n)x < 0$ για κάθε $n > 0$. Άρα $nx \neq 0$ όταν $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iv) Αν $x, y \neq 0$ τότε $\frac{1}{n_{\mathbb{R}}} x = y$ αν και μόνο αν $x = n_A y = (1_{\mathbb{R}} + \ldots 1_{\mathbb{R}})y = y + \cdots + y = ny$.

□

Λήμμα 2.13. *Αν* n, m, n', m' *είναι ακέραιοι αριθμοί με* $m, m' \neq 0$ *τότε*

$$\frac{n_{\mathbb{R}}}{m_{\mathbb{R}}} = \frac{n'_{\mathbb{R}}}{m'_{\mathbb{R}}}$$

αν και μόνο αν $nm' = mn'$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση $\frac{n_{\mathbb{R}}}{m_{\mathbb{R}}} = \frac{n'_{\mathbb{R}}}{m'_{\mathbb{R}}}$ ισοδυναμεί με $n_{\mathbb{R}} m'_{\mathbb{R}} = m_{\mathbb{R}} n'_{\mathbb{R}}$ το οποίο ισοδυναμεί με $(nm' - m'_n)1_{\mathbb{R}} = 0$. Αφού $1_{\mathbb{R}} neq 0$ θα έχουμε ότι $nm' - m'_n = 0$ δηλαδή $nm' = mn'$. □

Το παρακάτω Θεώρημα μας λέει ότι το σύνολο των ρητών είναι το ελάχιστο διατεταγμένο σώμα με την έννοια ότι περιέχεται σε κάθε διατεταγμένο σώμα.

Θεώρημα 2.14. *Η απεικόνιση* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{n_{\mathcal{A}}}{m_{\mathcal{A}}}$$

είναι μονομορφισμός διατεταγμένων σωμάτων και $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 2.15. Ένα διατεταγμένο σώμα $\mathbb{F}$ θα λέμε ότι έχει την *αρχιμήδεια ιδιότητα* ή ότι είναι ένα *αρχιμήδειο σώμα* αν για κάθε $x, y \in \mathbb{F}$ με $0 < x < y$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $y < nx$.

Η αρχιμήδεια ιδιότητα εκφράζεται από την πρόταση

(A17) $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\ (\ (\ (0 < x) \wedge (x < y)\ ) \to \exists(n \in \mathbb{N})(y < nx)\ ).$

Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ έχουν την αρχιμήδεια ιδιότητα. Για το $\mathbb{R}$ αυτό προκύπτει από την ιδιότητα της πληρότητας, όπως αναφέρει η παρακάτω πρόταση, της οποίας η απόδειξη υπάρχει στα περισσότερα βιβλία Ανάλυσης (δες πχ. [;])

Πρόταση 2.16. *Η ιδιότητα **(A16)** της πληρότητας του $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι το $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την αρχιμήδειο ιδιότητα **(A17)**.*

Ορισμός 2.17. *Ένα στοιχείο ϵ ενός διατεταγμένου συνόλου θα λέγεται θετικό απειροστό αν $\epsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n\epsilon < 1$. Ένα στοιχείο ω ενός διατεταγμένου συνόλου θα λέγεται θετικό άπειρο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n1 < \omega$.*

Αν το ϵ είναι θετικό απειροστό τότε το $\omega = \epsilon^{-1}$ θα είναι άπειρο και αντίστροφα ένα διατεταγμένο σώμα είναι αρχιμήδειο αν και μόνο αν το ω είναι θετικό άπειρο τότε το $\epsilon = \omega^{-1}$ θα είναι θετικό απειροστό. Επίσης, ένα διατεταγμένο σώμα θα είναι αρχιμήδειο αν και μόνο αν δεν περιέχει θετικά απειροστά (ή ισοδύναμα, θετικά άπειρα) στοιχεία.

Ορισμός 2.18. Αν έχουμε δύο διατεταγμένα σώματα [1] $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$, $(\mathbb{B}, +, \cdot, <, 0, 1)$ μια απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα λέγεται

(i) *Μορφισμός* (διατεταγμένων σωμάτων) αν για οποιαδήποτε x, $y \in \mathbb{R}$ ισχύει

  (α') $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

  (β') $f(xy) = f(x)f(y)$.

  (γ') Αν $x < y$ τότε $f(x) < f(y)$.

(ii) *Μονομορφισμός* (διατεταγμένων σωμάτων) αν είναι μορφισμός που είναι 1-1 απεικόνιση.

(iii) *Ισομομορφισμός* (διατεταγμένων σωμάτων) αν είναι μορφισμός που είναι, 1-1 και επί απεικόνιση.

[1] όπου για λόγους οικονομίας συμβολίσαμε τις πράξεις και το μηδέν ή το ένα με το ίδιο σύμβολο στα διαφορετικά σώματα X, Y

Ορισμός 2.19. Έστω $\mathbb{R}$, $\mathbb{B}$ δύο διατεταγμένα σώματα θα λέμε ότι το $\mathbb{B}$ είναι μια *επέκταση* του $\mathbb{R}$ αν υπάρχει μονομορφισμός διατεταγμένων σωμάτων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$.

Το παρακάτω Θεώρημα μας λέει ότι αν υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα αυτό είναι μοναδικό.

Θεώρημα 2.20. *Δύο οποιαδήποτε πλήρη διατεταγμένα σώματα είναι ισόμορφα.*

Εφόσον το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες θα κατασκευάσουμε μέσω αυτού ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα το οποίο θα λέγεται το *σώμα των πραγματικών αριθμών*.

2.4 Η κατασκευή των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των ρητών είναι ένα διατεταγμένο σώμα. Το «μειονέκτημα» $\mathbb{Q}$ είναι ότι δεν περιέχει χρήσιμους για την ανάλυση αριθμούς όπως τους $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, κλπ αυτούς που στην αρχαιότητα ονομάζονταν άρρητοι αριθμοί. Οι άρρητοι αριθμοί προσεγγίζονται όσο καλά θέλουμε από ρητούς αλλά δεν είναι ρητοί. Σε απλή γλώσσα αυτό σημαίνει ότι έχουν ένα δεκαδικό ανάπτυγμα που όμως έχει άπειρα μέλη και δεν είναι περιοδικό. Οι προσεγγίσεις των αρρήτων από ρητούς είναι όλες *βασικές ακολουθίες ακολουθίες ρητών*, δηλαδή ακολοθίες ρητών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που έχουν την ιδιότητα αν δοθεί ένα $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$ τότε όλου οι όροι της ακολουθίας από έναν όρο και μετά απέχουν μεταξύτουε λιγότερο απο ϵ.

Βέβαια δύο διαφορετικές ακολουθίες μπορούν να προσεγγίζουν τον ίδιο αριθμό. Αλλά τότε οι διαφορές των όρων τους θα πλησιάζουν το μηδέν. Η ιδέα του Cantor ήταν να ορίσει σαν πραγματικούς αριθμούς τις βασικές ακολουθίες ρητών όπου όμως πρώτα θα ταυτίσει τις βασικές ακολουθίες που η διαφορά τους τείνει στο μηδέν. Σε σύγχρονη γλώσσα το σύνολο των πραγματικών είναι ένας χώρος πηλίκο του συνόλου όλων των βασικών ακολουθιών ρητών αριθμών.

Έστω $\mathbb{Q}$ να είναι το σύνολο όλων των ρητών και έστω $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ να είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών ρητών. Αν $r \in \mathbb{Q}$ θα συμβολίζουμε με $(r)_{n\in\mathbb{N}}$ την σταθερή ακολουθία $(r, r, \ldots,)$.

Ορισμός 2.21. Μια ακολουθία $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ θα λέγεται *μηδενική* και θα γράφουμε $\bar{a} \sim 0$ αν για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N > 1$ υπάρχει φυσικός n ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < \frac{1}{N}$.

Οι ακολουθίες

$$(0)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{-n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι μηδενικές. Παρατηρείστε ότι το άθροισμα και το γινόμενο μηδενικών ακολουθιών είναι μηδενική ακολουθία.

Ορισμός 2.22. Μια ακολουθία $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ θα λέγεται *συγκλίνουσα στο* $\mathbb{Q}$ αν υπάρχει ένας ρητός αριθμός a ώστε $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}} \sim 0$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ορισμός 2.23. Μια ακολουθία $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα ονομάζεται μια *βασική ακολουθία* ή μια *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει ένα n_0 ώστε αν $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \frac{1}{N}$. Το σύνολο όλων των βασικών ακολουθιών θα συμβολίζεται με $\mathbb{B}$.

Παρατηρείστε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική. επίσης παρατηρείστε ότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο βασικών ακολουθιών είναι επίσης βασική ακολουθία.

Το πρόβλημα του $\mathbb{Q}$ ως προς την ιδιότητα (16) της πληρότητας είναι ότι υπάρχουν βασικές ακολουθίες που δεν συγκλίνουν. Αυτές ακριβώς είναι άρρητοι αριθμοί. Κάνουμε λοιπόν τις παρακάτω παραδοχές.

(i) Ένας *πραγματικός αριθμός* αντιστοιχεί σε μια βασική ακολουθία ρητών.

(ii) Δύο πραγματικοί αριθμοί λέγονται *ίσοι* αν οι αντίστοιχες βασικές ακολουθίες τους είναι ισοδύναμες.

(iii) Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται *ρητός* αν η αντίστοιχη βασική ακολουθία (r_n) που τον ορίζει συγκλίνει σε ένα ρητό r. Σε αυτή την περίπτωση ο x ταυτίζεται με τον r.

(iv) Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται *άρρητος* αν η αντίστοιχη βασική ακολουθία (r_n) που τον ορίζει δεν συγκλίνει.

(v) Το άθροισμα και το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών x, y αντιστοιχεί άθροισμα και το γινόμενο των αντίστοιχων βασικών ακολουθιών.

Συνοψίζουμε όλα τα παραπάνω σε ένα ορισμό.

Ορισμός 2.24.

(i) Έστω $\mathbb{B}$ να είναι το σύνολο όλων των βασικών ακολουθιών ρητών. Στο $\mathbb{B}$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ όπου δύο ακολουθίες $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}$ θα λέγονται *ισοδύναμες* και θα γράφουμε $\bar{a} \sim \bar{b}$ αν η διαφορά τους $\bar{a} - \bar{b}$ συγκλίνει στο 0. Για κάθε $\bar{a} \in \mathbb{B}$ ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας της $\bar{a}$ να είναι το σύνολο

$$[\bar{a}] = \{\bar{x} \in \mathbb{B} : \bar{x} \sim \bar{a}\}.$$

(ii) *Πραγματικός αριθμός* ονομάζεται μια κλάση ισοδυναμίας μιας βασικής ακολουθίας. Το σύνολο

$$\mathbb{R} = \mathbb{B}/_{\sim} = \{[\bar{x}] : \bar{x} \in \mathbb{B}\}$$

ονομάζεται σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λήμμα 2.25. *Έστω $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, βασικές ακολουθίες με $\bar{a} \sim \bar{a}'$ και $\bar{b} \sim \bar{b}'$. Τότε*

(i) $\bar{a} + \bar{b} \sim \bar{a}' + \bar{b}'$ *και συνεπώς* $[\bar{a} + \bar{b}] = [\bar{a}' + \bar{b}']$.

(ii) $\bar{a}\bar{b} \sim \bar{a}'\bar{b}'$ *και συνεπώς* $[\bar{a}\bar{b}] = [\bar{a}'\bar{b}']$.

(iii) *Αν* $[\bar{a}] > 0$ *τότε* $[\bar{a}' > 0$.

(iv) *Αν* $[\bar{a}] < [\bar{b}$ *τότε* $[\bar{a}'] < \bar{b}']$.

Ορισμός 2.26.

(i) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε δύο πράξεις $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$ ως εξής: Αν $x = [\bar{x}]$ και $y = \bar{y}$ τότε $x + y = [\bar{x} + \bar{y}]$ και $xy = [\bar{x}\bar{y}]$.

(ii) Ένας πραγματικός αριθμός $x = [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται *αυστηρά θετικός* και γράφουμε $x > 0$ αν όλοι σχεδόν οι όροι της βασικής ακολουθίας που ορίζουν τον x είναι μεγαλύτεροι από κάποιο αυστηρά θετικό ρητό δηλαδή υπάρχει ένα n_0 και $r > 0$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > r$.

(iii) Ορίζουμε μια διμελή σχέση $<$ στο $\mathbb{R}$ όπου $x < y$ αν $y - x > 0$.

(iv) Ορίζουμε μια απεικόνιση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ όπου

$$f(r) = [(r)_{n\in\mathbb{N}}] \,.$$

Το βασικό αποτέλεσμα της προηγούμενης κατασκευής είναι το επόμενο:

Θεώρημα 2.27. *Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα και η απεικόνιση f : $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ με $f(r) = [(r)_{n\in\mathbb{N}}]$ είναι μονομορφισμός διατεταγμένων σωμάτων.*

2.5 Υπερφίλτρα

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε μια αφηρημένη έννοια «μεγάλου» υποσυνόλου ενός συνόλου X. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε κάποια υποσύνολα ενός συνόλου X τα οποία ονομάζουμε «μεγάλα σύνολα» ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(i) Υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο.

(ii) Το $\emptyset$ δεν είναι μεγάλο σύνολο.

(iii) Αν το A είναι μεγάλο σύνολο και $B \supseteq A$ τότε και το B είναι μεγάλο σύνολο.

Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των μεγάλων υποσυνόλων του X. Τότε το $\mathcal{F}$ θα έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

Ορισμός 2.28. Ένα *φίλτρο* σε ένα σύνολο X είναι ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από υποσύνολα του X το οποίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και κάθε $B \subseteq X$ με $A \subseteq B$ έχει την ιδιότητα $B \in \mathcal{F}$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{B}$ τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 2.29. Ένα υποσύνολο ενός άπειρου συνόλου λέγεται *συμπεπερασμένο* αν το συμπλήρωμά του είναι πεπερασμένο σύνολο.

Πρόταση 2.30. *Το σύνολο όλων των συμπεπερασμένων υποσυνόλων ενός απείρου συνόλου X είναι φίλτρο.*

Απόδειξη. Το μόνο που αρκεί να δείξουμε είναι ότι η τομή δύο συμπεπερασμένων υποσυνόλων του X είναι συμπεπερασμένο. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων είναι επίσης πεπερασμένο. Συνεπώς αν $A = X \setminus F_1$, $B = X \setminus F_2$ όπου τα F_1, F_2 είναι πεπερασμένα σύνολα τότε η τομή τους $A \cap B$ είναι ίση με $X \setminus (F_1 \cup F_2)$ και συνεπώς συμπεπερασμένο σύνολο. □

Ας υποθέσουμε ότι απαιτούμε ότι αν η ένωση δύο συνόλων είναι μεγάλο σύνολο τότε ένα τουλάχιστον από τα δύο να είναι μεγάλο. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να απαιτούμε από κάθε σύνολο είτε να είναι μεγάλο είτε το συμπλήρωμά του να είναι μεγάλο. Σε αυτή την περίπτωση οδηγούμαστε στην έννοια του *υπερφίλτρου*.

Ορισμός 2.31. Ένα *υπερφίλτρο* σε ένα σύνολο X είναι ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{U}$ από υποσύνολα του X το οποίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Το $\mathcal{U}$ είναι φίλτρο.

(ii) Αν $A \in \mathcal{U}$ τότε και κάθε $B \subseteq X$ με $A \subseteq B$ έχει την ιδιότητα $B \in \mathcal{U}$.

(iii) Αν $A \cup B \in \mathcal{B}$ τότε $A \in \mathcal{U}$ είτε $B \in \mathcal{U}$.

Αν $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ είναι δύο φίλτρα με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ τότε λέμε ότι το $\mathcal{F}'$ είναι μια *επέκταση* του $\mathcal{F}$ ή ότι το *επεκτείνει* το $\mathcal{F}$. Αν επιπλέον $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ θα λέμε ότι το $\mathcal{F}'$ είναι μια *γνήσια επέκταση* του $\mathcal{F}$ ή ότι το *επεκτείνει γνήσια* το $\mathcal{F}$.

Πρόταση 2.32. *Αν X είναι ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ είναι ένα φίλτρο στο X τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο.*

(ii) *Δεν υπάρχει κάποιο φίλτρο $\mathcal{F}'$ στο X το οποίο να επεκτείνει γνήσια το $\mathcal{F}$.*

(iii) *Αν $A \subseteq X$ τότε είτε $A \in \mathcal{F}$ είτε $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. $(1) \to (2)$: Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Αν $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ τότε θα υπάρχει ένα $A \in \mathcal{F}'$ με $A \notin \mathcal{F}$. Αλλά $A \cup A^c = X \in \mathcal{F}$ και συνεπώς θα πρέπει $A^c \in \mathcal{F}$. Αλλά τότε $A^c \in \mathcal{F}'$ και τότε $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$, άτοπο.
$(2) \to (3)$: Έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο στο X τέτοιο ώστε να μην υπάρχει κάποιο φίλτρο το οποίο να το περιέχει γνήσια. Έστω $A \subseteq X$ με $A \notin \mathcal{F}$. Τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ θα έχουμε ότι $F \cap A^c \neq \emptyset$. Πράγματι, αν $F \in \mathcal{F}$ και $F \cap A^c = \emptyset$ τότε $F = (F \cap A) \cup (F \cap A^c) = F \cap A$. Αλλά $F \cap A \subseteq A$ και συνεπώς θα έπρεπε $A \in \mathcal{F}$, άτοπο.

Θεωρώ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X τα οποία περιέχουν κάποιο σύνολο της μορφής $F \cap A^c$

$$\mathcal{F}' = \{Y \subseteq X : \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ με } F \cap A^c \subseteq Y\}$$

Είναι εύκολο (από την προηγούμενη παρατήρηση) να δούμε ότι το $\mathcal{F}'$ είναι φίλτρο στο X το οποίο περιέχει το $\mathcal{F}$ και το σύνολο A^c. Από υπόθεση $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ άρα $A^c \in \mathcal{F}$.
$(3) \to (1)$: Έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο στο X τέτοιο ώστε για κάθε $A \subseteq X$ να ισχύει ότι είτε $A \in \mathcal{F}$ είτε $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Έστω $A \cup B \in \mathcal{F}$. Αν $A \notin \mathcal{F}$ τότε $A^c \in \mathcal{F}$ από υπόθεση. Αλλά τότε $B \cap A^c = (A \cup B) \cap A^c \in \mathcal{F}$ (αφού η τομή δύο στοιχείων του $\mathcal{F}$ είναι στο $\mathcal{F}$) και συνεπώς $B \in \mathcal{F}$ αφού το B είναι υπερσύνολο του $B \cap A^c$. $\square$

Ορισμός 2.33. Ένα υπερφίλτρο σε ένα άπειρο σύνολο X θα λέγεται *γνήσιο* αν δεν περιέχει κανένα πεπερασμένο υποσύνολο του X.

Φανερά, κάθε γνήσιο υπερφίλτρο σε ένα άπειρο σύνολο X θα περιέχει το φίλτρο των συμπεπερασμένων υποσυνόλου του X.

Θεώρημα 2.34. *Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ επεκτείνεται σε υπερφίλτρο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, \mathcal{G} \text{ φίλτρο } \}$$

διατεταγμένο με την σχέση του υποσυνόλου. Είναι άμεσο να δούμε ότι αν $\mathfrak{A}$ είναι μια αλυσίδα στοιχείων του $\mathfrak{F}$ τότε και η ένωση των στοιχείων του $\mathfrak{A}$ ανήκει στο $\mathfrak{F}$. Συνεπώς, από το Λήμμα του Zorn, το $\mathfrak{F}$ θα έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{U}$ το οποίο θα είναι υπερφίλτρο από την Πρόταση 2.32. □

2.5α΄ Μέτρα και Υπερφίλτρα

Ένας εναλλακτικός τρόπος να δούμε τα υπερφίλτρα του X είναι σαν δίτιμα πεπερασμένα προσθετικά μέτρα πιθανότητας πάνω στα υποσύνολα του X. Ένα *πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας πάνω πάνω στα υποσύνολα* του X είναι μια απεικόνιση μ η οποία σε κάθε υποσύνολο A του X αντιστοιχεί έναν αριθμό $\mu(A) \in [0, 1]$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(i) $\mu(X) = 1$.

(ii) Αν A, B είναι ξένα υποσύνολα του X τότε

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Ο αριθμός $\mu(A)$ λέγεται το *μέτρο του συνόλου* A. Είναι εύκολο να δούμε ότι

(α) $\mu(\emptyset) = 0$.
Πράγματι, $1 = \mu(X) = \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset) = 1 + \mu(\emptyset)$.

(β) Αν $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.
Πράγματι, αν $A \subseteq B$ τότε $B = A \cup (B \setminus A)$. Αφού τα A, $B \setminus A$ είναι ξένα μεταξύ τους θα έχουμε ότι $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(γ) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
Για να διευκολύνουμε τη παρουσίαση θα γράφουμε $A \uplus B$ αντί $A \cup B$ όταν τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους. Αν A, B είναι οποιαδήποτε σύνολα τότε $A = (A \setminus B) \uplus (A \cap B)$ και συνεπώς

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

Αλλά $A \cup B$ είναι η ένωση τριών ξένων μεταξύ τους συνόλων $A \cup B = (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) \uplus (A \cap B)$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) = \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

Τα σύνολα που έχουν μέτρο ίσο με 1 αποτελούν ένα φίλτρο. Πράγματι, έστω $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}$. Το $X \in \mathcal{F}$, από υπόθεση και $\emptyset \notin \mathcal{F}$ αφού $\mu(\emptyset) = 0$. Αν $A \in \mathcal{F}$ και $A \subseteq B$ τότε $1 = \mu(A) \leq \mu(B) \leq 1$ και συνεπώς $\mu(B) = 1$. Τέλος αν $\mu(A) = \mu(B) = 1$ φανερά $1 = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 2 - \mu(A \cap B)$ και συνεπώς $\mu(A \cap B) = 1$.

Αν το μέτρο μ παίρνει μόνο δύο τιμές τότε είναι άμεσο να δούμε ότι τα σύνολα μέτρου 1 αποτελούν υπερφίλτρο. Αντίστροφα, κάθε υπερφίλτρο ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στα υποσύνολα του X που παίρνει τιμές είτε 0 είτε 1, αν στα στοιχεία του υπερφίλτρου δώσουμε μέτρο ίσο με 1 και στα υπόλοιπα σύνολα μέτρο 0. Συνεπώς θα ταυτίζουμε τα υπερφίλτρα με τα δίτιμα μέτρα πιθανότητας που ορίζονται στο σύνολο $\wp(X)$ όλων των υποσυνόλων του X.

2.5β΄ Τα Υπερφίλτρα σαν ποσοδείκτες

Ένας τρίτος τρόπος να δούμε τα υπερφίλτρα σε ένα άπειρο σύνολο X είναι σαν ποσοδείκτες που αναφέρονται σε ιδιότητες που αναφέρονται στο X. Ας θεωρήσουμε μια «ιδιότητα» που αναφέρεται στο X δηλαδή μια πρόταση $P(x)$ η οποία έχει μόνο μια αδέσμευτη μεταβλητή και μπορούμε να αποφασίσουμε ότι είναι αληθής ή ψευδής αν αντικαταστήσουμε στη θέση του x ένα στοιχείο του X. Αν για παράδειγμα $X = \mathbb{N}$ η $P(x)$ μπορεί να είναι η πρόταση «*Υπάρχει y με $y = 2x$*» ή ισοδύναμα «*Το x είναι άρτιος*». Η $P(17)$ είναι ψευδής ενώ η $P(100)$ είναι αληθής.

Αν $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στο X τότε αυτό εισάγει ένα καθολικό ποσοδείκτη $\forall_{\mathcal{U}}$ ως εξής

Ορισμός 2.35. Αν $P(x)$ είναι μια ιδιότητα τότε η $\forall_{\mathcal{U}} P(x)$ λέγεται *αληθής* αν

$$\{x : P(x) \text{ είναι αληθής } \} \in \mathcal{U}$$

Θεώρημα 2.36. *Για οποιεσδήποτε ιδιότητες $P(x)$, $Q(x)$ ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $\forall_{\mathcal{U}} \, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall_{\mathcal{U}} x \; P(x)) \wedge (\forall_{\mathcal{U}} x \; Q(x))$

(ii) $\forall_{\mathcal{U}} \, (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall_{\mathcal{U}} x \; P(x)) \vee (\forall_{\mathcal{U}} x \; Q(x))$

(iii) $\forall_{\mathcal{U}} \, \neg P(x) \equiv \neg \forall_{\mathcal{U}} \; P(x)$

Απόδειξη. (i) Προφανές.

(ii)

$$\begin{aligned}
\forall_{\mathcal{U}} \, (P(x) \vee Q(x)) &\equiv \{x : P(x) \vee Q(x)\} \in \mathcal{U} \\
&\equiv (\{x : P(x)\} \cup \{x : Q(x)\}) \in \mathcal{U} \\
&\equiv \{x : P(x)\} \in \mathcal{U} \text{ ή } \{x : Q(x)\} \in \mathcal{U} \\
&\equiv (\forall_{\mathcal{U}} x \; P(x)) \vee (\forall_{\mathcal{U}} x \; Q(x))
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\forall_{\mathcal{U}}\ (\neg P(x)) &\equiv \{x : \neg P(x)\} \in \mathcal{U}\\ &\equiv \{x : \neg P(x)\}^c \in \mathcal{U}\\ &\equiv \{x : P(x)\} \notin \mathcal{U}\\ &\equiv \neg\forall_{\mathcal{U}}\ P(x)\end{aligned}$$

□

Σημείωση 2.37. *Σημειώστε ότι για τον καθολικό ποσοδείκτη ποσοδείκτη $\forall$ ενώ ισχύει η ιδιότητα (1) δεν ισχύουν οι ιδιότητες (2) και (3). Πράγματι αν, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η $P(x)$ σημαίνει ότι $x \geq 0$ και $Q(x)$ σημαίνει ότι $x < 0$ τότε η $\forall\ (P(x) \vee Q(x))$ είναι αληθής ενώ η $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$ είναι ψευδής. Επίσης αν η $P(x)$ σημαίνει ότι $x \geq 0$ η $\neg\forall x\ P(x)$ είναι αληθής ενώ η $\forall x\ \neg P(x)$ είναι ψευδής.*

2.6 Η κατασκευή των υπερπραγματικών αριθμών

Θεωρούμε ένα γνήσιο (μη τετριμμένο) υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $\mathbb{N}$. Ένας υπερπραγματικός αριθμός θα είναι απλά μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, όπου όμως θα θεωρούμε ότι δύο ακολουθίες $\bar{a} = (a_n))n \in \mathbb{N}$ και $\bar{b} = (b_n))n \in \mathbb{N}$ θα ταυτίζονται αν $(\{n : a_n = b_n\}) \in \mathcal{U}$.

Ορισμός 2.38. *Έστω $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ να είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Αν $\bar{a} = (a_n))n \in \mathbb{N}$ και $\bar{b} = (b_n))n \in \mathbb{N}$ θα λέμε ότι η $\bar{a}$ είναι ισοδύναμη (ως προς το $\mathcal{U}$) με την $\bar{b}$ και θα γράφουμε $\bar{a} \sim \bar{b}$ αν*

$$\forall_{\mathcal{U}} n\ (a_n = b_n)$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(i) Για κάθε ακολουθία $\bar{a}$ θα έχουμε $\bar{a} \sim \bar{a}$ αφού

$$\{n : a_n = a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}.$$

(ii) Αν $\bar{a} \sim \bar{b}$ προφανώς $\bar{b} \sim \bar{a}$.

(iii)
$$\begin{aligned}(\bar{a} \sim \bar{b}) \wedge (\bar{b} \sim \bar{c}) \quad &\equiv \quad \forall_{\mathcal{U}} n\ (a_n = b_n) \wedge \forall_{\mathcal{U}} n\ (b_n = c_n)\\ &\equiv \quad \forall_{\mathcal{U}} n(\ (a_n = b_n) \wedge\ (b_n = c_n)\ )\\ &\equiv \quad \forall_{\mathcal{U}} n(\ (a_n = c_n) \wedge\ (b_n = c_n)\ )\\ &\equiv \quad \bar{a} \sim \bar{c}\end{aligned}$$

Ορισμός 2.39. *Το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ ονομάζεται σύνολο των υπερπραγματικών αριθμών και συμβολίζεται με ${}^*\mathbb{R}$.*

Με άλλα λόγια οι υπερπραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν σαν ακολουθίες πραγματικών αριθμών, όπου όμως θα θεωρούμε ότι δύο ακολουθίες ορίζουν τον ίδιο υπερπραγματικό αριθμό αν συμπίπτουν σε ένα μεγάλο σύνολο. Η κατασκευή αυτή είναι ανάλογη με την κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς, όπου ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ακολουθία Cauchy ρητών, όπου θεωρούμε ότι δύο τέτοιες ακολουθίες ταυτίζονται αν η διαφορά τους συγκλίνει στο 0.

Ορισμός 2.40. Για κάθε n-μελή σχέση R στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε μια n-μελή σχέση ${}^*R$ στο ${}^*\mathbb{R}$ όπου αν $\bar{x}_i = [(x_i(m)_{m\in\mathbb{N}}]$, $i = 1, \ldots, n$ είναι n στοιχεία του ${}^*\mathbb{R}$ θα έχουμε ότι $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n(m)) \in {}^*R$ αν και μόνο αν

$$\forall_{\mathcal{U}} m \ (x_1(m), \ldots, x_n(m)) \in R$$

Η σχέση ${}^*R$ ονομάζεται η *$*$-μεταφορά της R*

Πρόταση 2.41. *Έστω R μια n-μελής σχέση στο $\mathbb{R}$. Αν η Rείναι συνάρτηση $n-1$ μεταβλητών στο $\mathbb{R}$ τότε η ${}^*R$ θα είναι επίσης συνάρτηση $n-1$ μεταβλητών στο ${}^*\mathbb{R}$.*

(i) Αφού κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}$ είναι μια 0-μελής σχέση η $*$-μεταφορά ενός στοιχείου $a \in \mathbb{R}$ είναι το στοιχείο $[(a, a, a, \ldots,)] \in {}^*\mathbb{R}$.

(ii) Αφού κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι μια 1-μελής σχέση η $*$-μεταφορά του A είναι ένα υποσύνολο

$$A^* = \{[(a_n))n \in \mathbb{N}] : \{n : a_n \in A\} \in \mathcal{U}\}$$

του ${}^*\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.42. *Αν A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε*

(α') *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* ${}^*A \subseteq {}^*B$

(β') ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$

(γ') ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$

(δ') ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$

Απόδειξη.

(α') Προφανές.

(β')

$$\begin{aligned} x \in {}^*(A \cup B) &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n \,(\, x_n \in (A \cup B)\,) \\ &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n \,(\, (x_n \in A) \vee (x_n \in A)\,) \\ &\equiv (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in A)\,) \vee (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in B)\,) \\ &\equiv (x \in {}^*A) \vee (x \in {}^*B) \\ &\equiv x \in {}^*A \cup {}^*B \end{aligned}$$

(γ')

$$\begin{aligned} x \in {}^*(A \cap B) &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n \,(\, x_n \in (A \cap B)\,) \\ &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n \,(\, (x_n \in A) \wedge (x_n \in A)\,) \\ &\equiv (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in A)\,) \wedge (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in B)\,) \\ &\equiv (x \in {}^*A) \wedge (x \in {}^*B) \\ &\equiv x \in {}^*A \cap {}^*B \end{aligned}$$

(δ')

$$\begin{aligned} x \in {}^*(A \setminus B) &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n \,(\, x_n \in (A \setminus B)\,) \\ &\equiv {}^*\forall_{\mathcal{U}} n \,(\, (x_n \in A) \wedge \neg(x_n \in B)\,) \\ &\equiv (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in A)\,) \wedge (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, \neg(x_n \in B)\,) \\ &\equiv (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \in A)\,) \wedge (\, \forall_{\mathcal{U}} n \, (x_n \notin B)\,) \\ &\equiv (x \in {}^*A) \wedge (x \notin {}^*B) \\ &\equiv x \in {}^*A \setminus {}^*B \end{aligned}$$

□

(iii) Η διάταξη $<$ των πραγματικών αριθμών, αφού είναι διμελής σχέση, κατά τα προηγούμενα μεταφέρεται σε μια διμελή σχέση ${}^* <$ στο ${}^*\mathbb{R}$ ως εξής: Αν $a = [(x_n)_{n=1}^{\infty}]$, $b = [(y_n)_{n=1}^{\infty}]$ είναι δύο υπερπραγματικοί αριθμοί που αντιπροσωπεύονται από τις ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ τότε ισχύει $a < b$ αν $\forall_{\mathcal{U}} n \;\, (x_n < y_n)$ δηλαδή αν

$$\{n : x_n < y_n\} \in \mathcal{U}$$

Πρόταση 2.43. *Η σχέση* $^*<$ *είναι ολική διάταξη* $^*\mathbb{R}$

Απόδειξη. Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι η $^*<$ είναι σχέση διάταξης.

(α') Αν $x = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*\mathbb{R}$ τότε $\{n : a_n < a_n\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ και συνεπώς δεν ισχύει $x < x$.

(β') Έστω $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $y = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $z = [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x<y)\wedge(y<z) &\equiv (\forall_{\mathcal{U}} n\ (x(n)<y(n)))\wedge(\forall_{\mathcal{U}} n\ (y(n)<z(n)))\\ &\equiv \forall_{\mathcal{U}} n\ ((x(n)<y(n))\wedge(y(n)<z(n)))\\ &\Rightarrow \forall_{\mathcal{U}} n\ ((x(n)<z(n))\\ &\equiv x<z\end{aligned}$$

(γ') Θα δείξουμε ότι δύο τυχαίοι υπερπραγματικοί αριθμοί συγκρίνονται. Έστω $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $y = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*\mathbb{R}$. Αν $\{n : x_n < y_n\} \in \mathcal{U}$ τότε $x < y$. Αν $\{n : x_n < y_n\} \notin \mathcal{U}$ τότε $\{n : x_n < y_n\}^c \in \mathcal{U}$ δηλαδή $\{n : x_n \geq y_n\}$ και συνεπώς $x \geq y$.

□

(iv) Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός του $\mathbb{R}$ τριμελείς σχέσεις μεταφέρονται σε αντίστοιχες τριμελείς σχέσεις οι οποίες είναι πράξεις στο $^*\mathbb{R}$, λόγω της Πρότασης 2.41. Θα τις ονομάζουμε επίσης πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο $^*\mathbb{R}$ και για λόγους ευκολίας θα τις συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα.

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι οι έννοιες του «άπειρα μικρού» και «άπειρα μεγάλου» αριθμού που θεωρεί ο Euler έχουν νόημα στο $^*\mathbb{R}$. Πράγματι αν θεωρήσουμε τον υπερπραγματικό αριθμό ω που είναι κλάση ισοδυναμίας της ακολουθίας $(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$ τότε είναι άμεσο ότι είναι αυστηρά θετικός και είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό.

Αφού για όλα n θα ισχύει ότι $1/n > 0$, θα έχω ότι $\omega > 0$. Επίσης, αν πάρω ένα τυχαίο $\epsilon > 0$ με $\epsilon \in \mathbb{R}$ τότε σχεδόν για όλα τα n θα ισχύει ότι $1/n < \epsilon$, άρα $\omega < \epsilon$.

Όμοια ο υπερπραγματικός αριθμός Ω που είναι κλάση ισοδυναμίας της ακολουθίας (n), $n = 1, 2, \dots$ είναι αυστηρά θετικός και είναι μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό.

Θεώρημα 2.44. *Το* $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ *είναι ένα μη-αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα.*

Απόδειξη. Όλες οι ιδιότητες του διατεταγμένου σώματος επαληθεύονται εύκολα από τους ορισμούς. Θα δείξουμε για παράδειγμα την

$$\forall x \forall y \forall z((x < y) \to (x + z < y + z))$$

Αν $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $y = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $z = [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, και $x < y$ τότε $\forall_{\mathcal{U}} n(x_n < y_n)$ και συνεπώς $\forall_{\mathcal{U}} n(x_n + z_n < y_n + z_n)$ το οποίο ισοδυναμεί με $x + z < y + z$.

Για να δείξουμε ότι το $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ είναι μη-αρχιμήδειο, θεωρούμε τον αριθμό

$$x = [x(n)_{n\in\mathbb{N}}] = \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$$

Αφού για κάθε n, $x(n) > 0$ έχουμε ότι $0 < x$.

Αν $N \in \mathbb{N}$ τότε

$$\left\{n : x(n) < \frac{1}{N+1}\right\} = \{N+2, N+3, \dots\} \in \mathcal{U}$$

συνεπώς για κάθε $N \in \mathbb{N}$

$$0 < x < \frac{1}{N+1}$$

δηλαδή ο x είναι απειροστό. □

2.7 Η αρχή της μεταφοράς

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε το σύνολο ${}^*\mathbb{R}$ και δείξαμε ότι είναι ένα διατεταγμένο σώμα. Για κάθε σχέση R βάρους n που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ ορίσαμε την μεταφορά της ${}^*R$ που είναι επίσης σχέση βάρους n στο ${}^*\mathbb{R}$. Επίσης αν f είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών στο $\mathbb{R}$ η μεταφορά της f^* είναι επίσης συνάρτηση n μεταβλητών στο ${}^*\mathbb{R}$. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$\sin, \quad \cos$$

μεταφέρονται στις συναρτήσεις

$$\sin^*, \quad \cos^*$$

στο ${}^*\mathbb{R}$. Ένα φυσικό ερώτημα είναι αν οι ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών μεταφέρονται και στην $*-$μεταφορά τους. Για παράδειγμα ισχύει

$$\sin^*\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^* x$$

για κάθε $x \in {}^*\mathbb{R}$; Ισχύει η ταυτότητα

$$\sin^*(x+y) = \sin^* x \cos^* y + \cos^* x \sin^* y$$

για κάθε $x \in {}^*\mathbb{R}$ και κάθε $y \in {}^*\mathbb{R}$;

Θα αποδείξουμε μια γενική αρχή, που ονομάζεται *η αρχή της μεταφοράς*, και δίνει θετική απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα.

Η απόδειξή της (δες [4]) απαιτεί τα εργαλεία από την μαθηματική λογική και παραλείπεται. Αποτελεί ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την μελέτη της Ανάλυσης στους υπερπραγματικούς αριθμούς και με αυτό αποφεύγουμε να καταφεύγουμε κάθε φορά στην κατασκευή του ${}^*\mathbb{R}$ για να αποδείξουμε ένα θεώρημα.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ την γλώσσα της δομής του $\mathbb{R}$ και με $\mathcal{L}_{{}^*\mathbb{R}}$ την γλώσσα της δομής του ${}^*\mathbb{R}$. Η βασική ιδέα είναι να μεταφέρουμε κάθε στοιχείο $\Phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ σε ένα στοιχείο $\Phi^* \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ με τέτοιο τρόπο ώστε *αν* $\Phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *είναι μια πρόταση τότε η* Φ *να αληθεύει στο* $\mathbb{R}$ *και μόνο αν η* Φ^* *αληθεύει στο* ${}^*\mathbb{R}$.

Για κάθε όρο t ή τύπο Φ της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ θα ορίσουμε ένα όρο t^* ή τύπο Φ^* που θα ονομάζεται η *$*$-μεταφορά του t* ή του Φ

Ορισμός 2.45.

(i) Αν x είναι μια μεταβλητή της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ τότε $x^* = x$ είναι μια μεταβλητή της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}*}$.

(ii) Αν $\underline{R}$ είναι το σύμβολο της σχέσης R στο $\mathbb{R}$ τότε $\underline{R}^*$ θα είναι το σύμβολο της $*$-μεταφοράς ${}^*R$ της R στο ${}^*\mathbb{R}$.

(iii) Αν $\underline{f}$ είναι το σύμβολο της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$ τότε $\underline{f}^*$ θα είναι το σύμβολο της $*$-μεταφοράς f^* της f στο ${}^*\mathbb{R}$.

(iv) Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ και $\underline{f}$ είναι το σύμβολο της συνάρτησης n-μεταβλητών f στο $\mathbb{R}$ τότε αν

$$t = \underline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

ορίζουμε

$$t^* = \underline{f}^*(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*)$$

(v) Αν t_1, t_2 είναι όροι της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ η *$*$-μεταφορά του* τύπου $t_1 = t_2$ είναι ο τύπος $t_1^* = t_2^*$.

(vi) Αν $\underline{R}$ είναι όνομα σχέσης βάρους $n \geq 1$ της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ τότε η *$*$-μεταφορά του* τύπου

$$\underline{R}(t_1, \ldots, t_n)$$

είναι ο τύπος

$$\underline{R}^*(t_1^*, \ldots, t_n^*)$$

(vii) Αν P, Q είναι τύποι τότε η $*$-*μεταφορά* των τύπων

$$\neg(P), \quad (P) \vee (Q), \quad (P) \wedge (Q), \quad (P) \to (Q), \quad (P) \leftrightarrow (Q)$$

είναι οι αντίστοιχοι τύποι

$$\neg(P^*), \quad (P^*)\vee(Q^*), \quad (P^*)\wedge(Q^*), \quad (P^*) \to (Q^*), \quad (P^*) \leftrightarrow (Q^*)$$

(viii) Αν P είναι τύπος και x όνομα μεταβλητής τότε η $*$-*μεταφορά* των τύπων

$$\forall x\ (P), \quad \exists x\ (P)$$

είναι οι αντίστοιχοι τύποι

$$\forall x\ (P^*), \quad \exists x\ (P^*)$$

Θεώρημα 2.46 (Η Αρχή της μεταφοράς)**.** *Μια πρόταση P της $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση P^* της $\mathcal{L}_{^*\mathbb{R}}$ είναι αληθής.*

Παράδειγμα 2.47. *Η μεταφορά της πρότασης*

$$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})(x + y) + z = x + (y + z)$$

είναι η

$$\forall(x \in {}^*\mathbb{R})\forall(y \in {}^*\mathbb{R})\forall(z \in {}^*\mathbb{R})(x + y) + z = x + (y + z)$$

και αφού η πρώτη είναι αληθής θα είναι και η δεύτερη.

Κεφάλαιο 3

Οι Υπερπραγματικοί αριθμοί και βασικές Αρχές

3.1 Κανόνες για πράξεις μεταξύ άπειρων, πεπερασμένων και απειροστών αριθμών

Για να κατανοήσουμε την έννοια των απειροστών ως προς τις ιδιότητες, τις μεταξύ τους σχέση αλλά και τις σχέσεις τους με το σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στο σύνολο των υπερπραγματικών αριθμών. Υποθέτοντας ότι

- τα ϵ, δ είναι απειροστά
- τα b,c είναι πεπερασμένοι υπερπραγματικοί αριθμοί αλλά όχι απειροστά
- τα H, K είναι άπειροι υπερπραγματικοί αριθμοί
- το n είναι ένας πεπερασμένος φυσικός αριθμός

τότε

(i) Ο μόνος απειροστός πραγματικός αριθμός είναι το 0. Όλοι οι υπόλοιποι πραγματικοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι.

(ii) (α') το $-\epsilon$ είναι απειροστός αριθμός

(β') το -β είναι πεπερασμένος αλλά όχι απειροστός

(γ') το -H είναι άπειρος αριθμός

(iii) (α') Αν $\epsilon \neq 0$ τότε το $\dfrac{1}{\epsilon}$ είναι άπειρος αριθμός (β′) το $\frac{1}{b}$ είναι πεπερασμένος αλλά όχι απειροστός

(γ′) το $\frac{1}{H}$ είναι απειροστός αριθμός

(δ′) το $\frac{1}{0}$ παραμένει απροσδιόριστο

(iv) (α′) $\epsilon + \delta$ είναι απειροστό

(β′) $b + \epsilon$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό

(γ′) $b + c$ είναι πεπερασμένο (πιθανά απειροστό)

(δ′) $H + \epsilon$ και $H + b$

(v) (α′) $\epsilon \cdot \delta$ και $\epsilon \cdot b$ είναι απειροστά

(β′) $b \cdot c$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό

(γ′) $H \cdot b$ και $H \cdot K$ είναι άπειρα

(vi) (α′) $\frac{\epsilon}{b}$, $\frac{\epsilon}{H}$ και $\frac{b}{H}$ είναι απειροστά

(β′) $\frac{b}{c}$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό

(γ′) $\frac{b}{\epsilon}$, $\frac{H}{\epsilon}$ και $\frac{H}{b}$ είναι άπειρα, δεδομένου ότι $\epsilon \neq 0$

(vii) (α′) ϵ^n είναι απειροστό

(β′) b^n είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό

(γ′) H^n είναι άπειρο

(viii) (α′) Αν $\epsilon > 0$ τότε $\epsilon > 0$ τότε $\sqrt[n]{\epsilon}$ είναι απειροστό

(β′) Αν $b > 0$ τότε $\sqrt[n]{b}$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό

(γ′) Αν $H > 0$ τότε $\sqrt[n]{H}$ είναι άπειρο

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες που να καθορίζουν αν οι συνδιασμοί $\frac{\epsilon}{\delta}$, $\frac{H}{K}$, $H \cdot \epsilon$ και $H + K$ είναι απειροστά, πεπερασμένοι ή άπειροι αριθμοί.

3.2 Οι τρεις βασικές αρχές

Πρώτη αρχή : Αρχή της επέκτασης

(i) Υπάρχει ένα σύνολο $^*\mathbb{N}$ με $\mathbb{N} \subsetneqq {^*\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε σε κάθε στοιχείο στοιχείο R του σύμπαντος $S_\omega(\mathbb{N})$ αντιστοιχεί ένα (μοναδικό) στοιχείο $^*R$ του σύμπαντος $S_\omega(^*\mathbb{N})$ το οποίο ονομάζεται η *μη-τυπική επέκταση του* R. Θα συμβολίζουμε με $^*S_\omega(\mathbb{N})$ ή απλά με $^*S_\omega$ το σύνολο

$$^*S_\omega = \{^*R : R \in S_\omega\}.$$

(ii) *Υπάρχει ένας υπερπραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του μηδενός αλλά μικρότερος από κάθε πραγματικό αριθμό.*

Δηλαδή

$\exists x \in {^*\mathbb{R}}$ όπου ισχύει $0 < x < y, \forall y \in \mathbb{R}$.

Δεύτερη αρχή : Αρχή της Μεταφοράς

Σε κάθε πρόταση Π της γλώσσας της $S_\omega(\mathbb{N})$ αντιστοιχεί μια και μοναδική πρόταση $^*\Pi$ της γλώσσας της $S_\omega(^*\mathbb{N})$ η οποία προκύπτει αντικαθιστώντας κάθε σταθερά $\bar{R}$, όνομα του στοιχείου $R \in S_\omega$, που εμφανίζεται στην Π με το όνομα του $\overline{^*R}$ του $^*R$ στην γλώσσα της $S_\omega(^*\mathbb{N})$.

Η πρόταση Π *της γλώσσας της* $S_\omega(\mathbb{N})$ *είναι αληθής ερμηνευόμενη στο* $S_\omega(\mathbb{N})$ *αν και μόνο αν η πρόταση* $^*\Pi$ *είναι αληθής ερμηνευόμενη στο* $S_\omega(^*\mathbb{N})$.

Τρίτη αρχή : Αρχή του Τυπικού Μέρους

(i) *Έστω* b *ένας πεπερασμένος υπερπραγματικός αριθμός. Το τυπικό μέρος του* b, *συμβολίζουμε με* $st(b)$, *είναι ο πραγματικός αριθμός που βρίσκεται απείρως κοντά στο* b. *Οι άπειροι υπερπραγματικοί αριθμοί δεν έχουν τυπικό μέρος.*

Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε έναν υπερπραγματικό αριθμό b με την μορφή $b = st(b) + \varepsilon$ όπου ε είναι απειροστό.

Η αρχή του τυπικού μέρους στην ουσία μας λεεί ότι κάθε πεπερασμένος υπερπραγματικός αριθμός είναι άπειρα κοντά με ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό.

3.3 Αρχή της Φυσικής Επαγωγής

Έστω $\phi(n)$ να είναι μία εξίσωση ή μία ανισότητα ακολουθιών πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα να είναι της μορφής

$$a_n = b_n, a_n \neq b_n, a_n < b_n, a_n \leq b_n,$$

όπου a και b είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν ισχύει η $\phi(0)$ και εάν για κάθε φυσικό αριθμό m ισχύει η $\phi(m+1)$ όταν ισχύει η $\phi(m)$, τότε ισχύει και η $\phi(n)$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

3.4 Αρχή του Ορισμού Μέσω Αναδρομής

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών μπορεί να οριστεί προσδιορίζοντας την τιμή της στο 0 και προσδιορίζοντας για κάθε φυσικό n την τιμή $n+1$ όπως αυτή καθορίζεται για την τιμή στο n.

Για παράδειγμα η δυναμοσυνάρτηση

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}_{n-\text{παράγοντες}}$$

ορίζεται για όλους τους φυσικούς από τις εξισώσεις

$$x^{\underline{0}} = 1, x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}} \cdot (x-n).$$

3.5 Υπερακολουθία, Υπερσειρά

Ορισμός 3.1. *(α') **Υπερακολουθία** είναι κάθε συνάρτηση που ορίζεται στους υπερφυσικους αριθμούς, συνθέτοντας τις υπερπραγματικές επεκτάσεις πραγματικών συναρτήσεων μιάς ή περισσοτέρων μεταβλητών, και επιτρέποντας υπερπραγματικά επιχειρήματα.*

*(β') **Υπερσειρά** είναι η υπερακολουθία μερικών αθροισμάτων μιας υπερακολουθίας.*

Μπορούμε λοιπον να επεκτείνουμε το διωνυμικό τύπο και τη γεωμετρική πρόοδο στους υπερπραγματικούς μέσω της **αρχής της μεταφοράς**.

Διωνυμικό θεώρημα στους Υπερπραγματικούς

Για κάθε υπερπραγματικό αριθμό a, b, και για κάθε υπερφυσικό αριθμό n ισχύει ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} a^{n-k} b^k = a^n + \frac{n^{\underline{1}}}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n^{\underline{2}}}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n^{\underline{3}}}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots + b^n$$

Γεωμετρική πρόοδος στους Υπερπραγματικούς

Για κάθε υπερπραγματικό αριθμό a εκτώς της μονάδας και για κάθε υπερφυσικό αριθμό n ισχύει ότι

$$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

3.6 Αρχή της Υπερφυσικής Επαγωγής

Έστω $\phi(n)$ να είναι μία εξίσωση ή μία ανισότητα υπερακολουθιών υπερπραγματικών αριθμών, για παράδειγμα να είναι της μορφής

$$a_n = b_n, a_n \neq b_n, a_n < b_n, a_n \leq b_n,$$

όπου a και b είναι υπερακολουθίες υπερπραγματικών αριθμών. Αν ισχύει η $\phi(0)$ και εάν για κάθε υπερφυσικό αριθμό m ισχύει η $\phi(m+1)$ όταν ισχύει η $\phi(m)$, τότε ισχύει και η $\phi(n)$ για κάθε υπερφυσικό αριθμό n.

3.7 Καθορισιμότητα

Ορισμός 3.2. ***(Καθορισιμότητα)*** *Μια υπερακολουθία $s_0, s_1, s_2, \ldots$ παρουσιάζει* ***καθορισιμότητα*** *αν και μόνο αν $s_M \simeq s_N$ για κάθε M και N άπειρους υπερπραγματικούς. Αν $a_0, a_1, a_2, \ldots$ είναι υπερακολουθία, τότε η σειρά $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ είναι* ***καθορισμένη*** *αν και μόνο αν η υπερακολουθία μερικών αθροισμάτων που ορίζεται σαν $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι καθορισμένη.*

Θεώρημα 3.3. ***(Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης)*** *Αν η σειρά $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ και η $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ είναι καθορισμένες, και αν για κάθε φυσικό n $a_n \simeq b_n$, τότε για κάθε υπερφυσικό n ισχύει*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \simeq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots .$$

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι το άπειρο άθροισμα απειροστών θεωρείται αμελητέο υπό την προϋπόθεση ότι οι σχετικές σειρές είναι καθορισμένες.

Θεώρημα 3.4. ***(Κριτήριο Σύγκρισης Καθορισιμότητας)***

(α΄) *Έστω $a_0, a_1, a_2, \ldots$ και $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ακολουθίες θετικών όρων. Αν η σειρά $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ είναι καθορισμένη και εάν υπάρχει ένα πεπερασμένο k ώστε $a_n \leq b_n$ για $n \geq k$ τότε και η $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ είναι καθορισμένη.*

(β΄) *Αν $|c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots$ είναι καθορισμένη σειρά, τότε και η $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$ είναι καθορισμένη σειρά.*

Κεφάλαιο 4

Το Introductio και η μη τυπική ανάλυση

Έχοντας περιγράψει ένα αξιωματικό σύστημα όπου καθορίζει τις ιδιότητες του απείρου καθώς και των απειροστών και έχοντας ένα κριτήριο σχετικά με την αμελητέας σημασίας ύπαρξη απειροστών σε άπειρη σειρά, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε τις υποθέσεις του Euler σε ένα αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο.

4.1 Οι εκθετικές σειρές

Η εκθετικοποιήση ορίζεται για το 0 και όλους τους φυσικούς n από τον τύπο

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n-\text{παράγοντες}}$$

ή πιο τυπικά χρησιμοποιώντας αναδρομή, επεκτείνοντας τον θετικό ρητός εκθέτη $\frac{m}{n}$ χρησιμοποιώντας αξίωμα της ρίζας:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, a > 0$$

έπειτα επεκτείνουμε στους αρνητικούς ρητούς παίρνοντας τους αντίστροφους,

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0$$

Με αυτούς τους ορισμούς και τα βασικά πεδία, καθώς και με τα αξιώματα διάταξης για τους πραγματικούς αριθμούς, μπορεί κανείς να δείξει ότι για κάθε θετικό a μεγαλύτερο του 1 και για κάθε ρητό p και q, ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες για ρητούς εκθέτες

(i) $a^p a^q = a^{p+q}$

(ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $a^p < a^q$ αν και μόνο αν $p < q$.

Το να επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x από τους ρητούς στους πραγματικούς καθώς και να επαληθεύσουμε τον αν ισχύουν οι παραπάνω κανόνες για την επέκταση αυτή είναι αρκετά περίπλοκο. Αντί αυτού θα θεωρήσουμε ότι η a^x είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη για όλους τους πραγματικούς x, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες που αναφέραμε πριν, θα θεωρήσουμε τα παρακάτω αξιώματα για την εκθετική συνάρτηση.

Αξίωματα Για κάθε θετικό πραγματικό a μεγαλύτερο του 1 και για κάθε πραγματικό x και y ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες

(i) $a^0 = 1$,

(ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,

(iii) $a^x a^y = a^{x+y}$

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$

(v) $a^x < a^y$ αν και μόνο αν $x < y$.

Λόγο της **αρχής της μεταφοράς** τα αξιώματα αυτά ισχύουν και στους υπερπραγματικούς. Επιπλέον θα χρειαστούμε και την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1. *Θεωρούμε a πεπερασμένο και μεγαλύτερο του 1. Αν $\epsilon > 0$ και $\epsilon \simeq 0$ τότε $a^\epsilon > 1$ και $a^\epsilon \simeq 1$. Αν x και y είναι πεπερασμένα, τότε $a^x \simeq a^y$ αν και μονο αν $x \simeq y$.*

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε σε τρία βήματα.

(i) Έστω N να είναι ένας άπειρος υπερπραγματικός αριθμός. Θέλουμε να καταλήξουμε στο ότι το $a^{\frac{1}{N}}$ υπερβαίνει το 1 κατά ένα απειροστό ποσό. Από τα αξιώματα για την εκθετικοποιήση έχουμε ότι $a^{\frac{1}{N}} > a^0$ οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι $a^{\frac{1}{N}} = 1 + u$ όπου u είναι θετικό. Από το διωνυμικό θεώρημα προκύπτει ότι

$$a = (a^{\frac{1}{N}})^N = (1+u)^N = 1 + Nu + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{(κάποιοι θετικοί όροι)}}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$0 < u < \frac{a-1}{N} \simeq 0$$

και έτσι $a^{\frac{1}{N}} > 1$ και $a^{\frac{1}{N}} \simeq 1$.

(ii) Έστω τώρα ϵ θετικό, παίρνουμε $N = \lfloor 1/\epsilon \rfloor$ να είναι ο μεγαλύτερος υπερπραγματικός αριθμός που θα είναι μικρότερος ή ίσος του $1/\epsilon$, ώστε $\dfrac{1}{N+1} < \epsilon \leq \dfrac{1}{N}$. Από τα αξιώματα για την εκθετικοποιήση, $a^{\frac{1}{N+1}} < a^{\epsilon} \leq a^{\frac{1}{N}}$ από το οποίο έπεται ότι $\epsilon \simeq 0$ αν και μόνο αν το N είναι άπειρο αν και μόνο αν $a^{\epsilon} \simeq 1$ Επιπλέον το $a^{-\epsilon}$, δηλαδή το $\dfrac{1}{a^{\epsilon}}$, είναι απείρως κοντα στο 1 αν και μόνο αν και το a^{ϵ} είναι απείρως κοντά στο 1.

(iii) Υποθέτοντας ότι x και y είναι πεπερασμένοι αριθμοί, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} & a^x \simeq a^y \\ \text{αν και μόνο αν } & \frac{a^x}{a^y} \simeq 1 \\ \text{αν και μόνο αν } & a^{x-y} \simeq 1 \\ \text{αν και μόνο αν } & x - y \simeq 0 \\ \text{αν και μόνο αν } & x \simeq y. \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό στην πρώτη σχέση τα a^x και a^y να μην είναι ούτε άπειροι αριθμοί αλλά ούτε και απειροστά.

□

Στόχος μας σε είναι να δείξουμε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο λ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο x και για κάθε άπειρο N να ισχύει

$$a^x \simeq a + (\lambda x) + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda x)^3 + \cdots + + \frac{1}{N!}(\lambda x)^N .$$

Έστω ότι το x είναι πεπερασμένο και προς στιγμήν θετικό. Επιλέγουμε έναν άπειρο υπερπραγματικό K, τον οποίο κρατάμε σταθερό για το υπόλοιπο της παραγράφου, και επιλέγουμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{J}{K}$ το οποίο είναι απείρως κοντά στο x. Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας το $J = \lfloor Kx \rfloor$, ώστε $0 < \frac{x-J}{K} < \frac{1}{K}$, οπότε $x \simeq \frac{J}{K}$.

Από την πρόταση ξέρουμε ότι $a^x \simeq a^{\frac{J}{K}}$, οπότε τώρα θα εργαστούμε με το $a^{\frac{J}{K}}$. Έχουμε την ισότητα $a^{\frac{J}{K}} = \left(a^{\frac{1}{K}}\right)^J$. Από την πρόταση, το $a^{\frac{1}{K}}$ υπερβαίνει το 1 κατά μία απειροστή ποσότητα. Δεν γνωρίζουμε αν η ποσότητα αυτή είναι μεγαλύτερη η μικρότερη από το $\frac{1}{K}$, οπότε, όπως και ο Euler, εισάγουμε έναν θετικό συντελεστή αλλαγής κλίμακας λ, όπου εξαρτάται από το K:

$$a^{\frac{1}{K}} = 1 + \lambda \frac{1}{K}.$$

Είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι το λ πρέπει να είναι πεπερασμένο. Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι

$$a = \left(a^{\frac{1}{K}}\right)^K = \left(1 + \frac{\lambda}{K}\right)^K = 1 + \lambda + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{(κάποιοι θετικοί όροι)}}$$

οπότε $0 < \lambda < a$. Θα επεκτείνουμε τώρα το $a^{\frac{J}{K}}$ ως εξής:

$$a^x \simeq a^{\frac{J}{K}} = \left(a^{\frac{1}{K}}\right)^J = \left(1 + \frac{\lambda}{K}\right)^J$$

$$= 1 + J\left(\lambda\frac{1}{K}\right) + \frac{J^{\underline{2}}}{2!}\left(\lambda\frac{1}{K}\right)^2 + \cdots + \frac{J^{\underline{J}}}{J!}\left(\lambda\frac{1}{K}\right)^J \tag{4.1}$$

$$= 1 + \left(\lambda\frac{J}{K}\right) + \frac{1}{2!}\frac{J^{\underline{2}}}{J^2}\left(\lambda\frac{J}{K}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{J!}\frac{J^{\underline{J}}}{J^J}\left(\lambda\frac{1}{K}\right)^J$$

$$\simeq 1 + (\lambda x) + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \cdots + \frac{1}{J!}(\lambda x)^J \tag{4.2}$$

$$\simeq 1 + (\lambda x) + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(\lambda x)^N . \tag{4.3}$$

Η σχέση 4.1 έπεται του διωνυμικού θεωρήματος και η σχέσεις 4.2 και 4.3 θα ικανοποιηθούν από το θεώρημα αθροιστικής σύγκρισης όταν δείξουμε ότι οι εν λόγω σειρές είναι καθορισμένες και ότι οι σχετικοί όροι τους είναι απείρως κοντά.

Λήμμα 4.2. *Η σειρά $1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$ είναι καθορισμένη για όλα τα y που είναι πεπερασμένα.*

Απόδειξη. Θέτουμε $y > 0$ και έστω $n_0 = \lfloor y \rfloor$ Τότε για $n > n_0$ θα έχουμε

$$\frac{y^n}{n!} = \frac{y^{n_0}}{n_0!}\frac{y^{n-n_0}}{(n_0+1)(n_0+2)\cdots n} \leq \frac{y^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{y}{n_0+1}\right)^{n-n_0} = bc^{n-n_0}$$

όπου $b = \frac{y^{n_0}}{n_0!}$ και $c = \frac{y}{n_0+1}$, έτσι ώστε $|c| < 1$, $c \simeq 1$, και το b να είναι πεπερασμένος. Όπως είδαμε και προηγουμένως η σειρά $1 + c^2 + c^3 + \cdots$ είναι καθορισμένη για $0 < c < 1$, οπότε το ζητούμενο έπεται του κριτηρίου σύγκρισης καθορισιμότητας.

$\square$

Θέτοντας το y με λx στο παραπάνω λήμμα βλέπουμε ότι η σειρά 4.2 είναι καθορισμένη, και επειδή για θετικό x έχουμε

$$\frac{1}{k!}\frac{J^{\underline{k}}}{J^k}\left(\lambda\frac{J}{K}\right)^k \leq \frac{1}{k!}(\lambda x)^k$$

το **Κριτήριο Σύγκρισης Καθορισιμότητας** συνεπάγεται ότι η σειρά 4.3 είναι καθορισμένη. Στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι το J είναι άπειρο, έχουμε $\frac{J^{\underline{k}}}{J^k} \simeq 1$ και $\left(\frac{J}{K}\right)^k \simeq x^k$ για κάθε πεπερασμένο k, οπότε

$$\frac{J^{\underline{k}}}{J^k}\left(\frac{J}{K}\right)^k\frac{\lambda^k}{k!} \simeq \frac{\lambda^k}{k!}x^k$$

για κάθε πεπερασμένο k. Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης** και παρόμοιο συλλογισμό για αρνητικούς εκθέτες, καταλήγουμε στο επιθυμητό θεώρημα.

Θεώρημα 4.3. *Αν το a είναι πεπερασμένο και μεγαλύτερο του 1, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο λ ώστε*

$$a^x \simeq 1 + (\lambda x) + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda x)^3 + \cdots + \frac{1}{N!}(\lambda x)^N$$

για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο N.

4.2 Οι σειρές φυσικού εκθέτη

Υποθέτοντας ότι κανείς θέλει να υπολογίσει το 10^x χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, προκύπτει ο εξής προβληματισμός: ποιά τιμή θα χρησιμοποιήσει στην θέση του λ· Σε επόμενη παράγραφο θα υπολογίσουμε το λ με την βοήθεια σειράς, αλλα εδώ είναι λογικό να σκεφτεί κανείς ότι θα πρέπει να δώσει στο λ μία τιμή σχετική με το a και βολική για τον υπολογισμό που θέλει να κάνει. Σύμφωνα με τον Euler πρέπει να επιλέξουμε το a έτσι ώστε $\lambda = 1$. Επιλέγουμε λοιπόν $a = \left(1 + \frac{1}{K}\right)^K$ οπότε η αντίστοιχη σειρά για το a^x θα είναι η

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

Ο Euler σημειώνει ότι

> αν επιλέξουμε το a έτσι ώστε $\lambda = 1$ τότε η σειρά
>
> $$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

είναι ίση με το a. Αν οι όροι αναπαρασταθούν ως δεκαδικά κλάσματα και αθροιστούν τότε παίρνουμε την τιμη $a = 2,71828182845904523536028\ldots$. Χάριν συντομίας, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο e για αυτόν τον αριθμό.

Η συνάρτηση e^x ονομάζεται *φυσική εκθετική συνάρτηση.*

Ας επιβεβαιώσουμε για αρχή ότι η παράσταση $\left(1+\frac{1}{K}\right)^K$ είναι καθορισμένη με την έννοια ότι για διαφορετικές και άπειρες το πλήθος τιμές του K, οι αντίστοιχες τιμές είναι όλες απείρως κοντά.

Πρόταση 4.4. *Για κάθε άπειρο M, N, P έχουμε*

$$\left(1+\frac{1}{M}\right)^M \simeq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{P!} \simeq \left(1+\frac{1}{N}\right)^N.$$

Απόδειξη. Επεκτείνοντας την δύναμη του διωνύμου και εφαρμόζοντας επανειλημμένα το **Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης**, βλέπουμε οτι για κάθε άπειρο M και P, έχουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{M}\right)^M &= 1+M\left(\frac{1}{M}\right)+\frac{M^{\underline{2}}}{2!}\left(\frac{1}{M}\right)^2+\cdots+\frac{M^{\underline{M}}}{M!}\left(\frac{1}{M}\right)^M \\ &= 1+1+\frac{M^{\underline{2}}}{M^2}\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{M^{\underline{M}}}{M^M}\frac{1}{M!} \\ &\simeq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{M!} \simeq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{P!}.\end{aligned}$$

Αφού ο υπολογισμός ισχύει για άπειρο N όπως επίσης και για M, έπεται το συμπέρασμα της πρότασης. □

Σε αυτό το σημείο μπορεί κάποιος να προσπαθήσει να ορίσει το e με το να πεί ότι είναι μία από τις τιμές $\left(1+\frac{1}{K}\right)^K$, όπου K άπειρος αριθμός, και από τους γνωστούς μέχρι τώρα υπολογισμούς να φτάσει στην σχέση

$$e^x \simeq 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{N!}x^N \tag{4.4}$$

για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο N. Αυτό όμως δεν είναι επαρκές για να παγιωθεί η τιμή του e, μπορεί για κάποιον το e να αντιπροσωπεύει κάποιον συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό παρά να τον χρησιμοποιεί σαν μια αυθαίρετη επιλογή από μία κατηγορία υπερπραγματικών αριθμών, αν και όλοι είναι απείρως κοντά. Η λύση σε αυτό είναι να χρησιμοποιήσει την *Αρχή του Τυπικού Μέρους*, η οποία λέει ότι κάθε πεπερασμένος υπερπραγματικός αριθμός έχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό απείρως κοντά του.

Ορισμός 4.5. *Το e είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που είναι απείρως κοντά στο $\left(1+\frac{1}{K}\right)^K$, όπου K είναι ένας άπειρος αριθμός.*

Τελικός πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η τιμή του e, η οποία διαφέρει απο το $\left(1+\frac{1}{K}\right)^K$ για κάθε K κατά μια απειροστή ποσότητα, ικανοποιεί την (4).

Πρόταση 4.6. *Αν a και b είναι πεπερασμένοι αριθμοί και μεγαλύτεροι του 1, και $a \simeq b$ τότε $a^x \simeq b^x$ για κάθε x πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω $a \simeq b$ και $a, b > 1$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $b = a(1+\epsilon)$ όπου $\epsilon \simeq 0$. Τότε $b^x = (a(1+\epsilon))^x = a^x(1+\epsilon)^x$. Αρκεί να επαληθεύσουμε ότι $(1+\epsilon)^x \simeq 1$. Θέτουμε $n = \lfloor x \rfloor$. Τότε $n \leq x \leq n+1$, και απο το αξίωμα διάταξης για εκθετικοποίηση, έχουμε $(1+\epsilon)^n \leq (1+\epsilon)^x < (1+\epsilon)^{n+1}$. Εφόσον $\epsilon \simeq 0$ και το n είναι πεπερασμένο, από το Διωνυμικό Θεώρημα έχουμε ότι

$$1 \leq (1+\epsilon)^n = 1 + \epsilon + \underbrace{\cdots}_{\text{(άθροισμα n πεπερασμένων όρων)}} \simeq 1$$

και $(1+\epsilon)^{n+1} = (1+\epsilon)^n(1+\epsilon) \simeq 1$, έτσι $(1+\epsilon)^x$, και τελικά $a^x \simeq b^x$. □

Αφού $e \simeq \left(1+\frac{1}{K}\right)^K$, από την προηγούμενη πρόταση καταλήγουμε στο

Θεώρημα 4.7. *Για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο N,*

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{N!}x^N. \tag{4.5}$$

Το θεώρημα μας βοηθάει να εξηγήσουμε την σχέση μεταξύ του λ και του a. Αν το λ ικανοποιεί την εξίσωση $e^\lambda = a$ τότε

$$a^x = \left(e^\lambda\right)^x = e^{\lambda x} \simeq 1 + (\lambda x) + \frac{1}{2!}(\lambda x)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda x)^3 + \cdots + \frac{1}{N!}(\lambda x)^N$$

για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο N. Αυτό μας δείχνει ότι το λ που επιλέξαμε νωρίτερα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εκθέτης του e για να πάρουμε την τιμή a. Με άλλα λόγια το λ είναι ο φυσικός λογάριθμος του a.

4.3 Οι Διωνυμικές Σειρές

Πολλές φορές έχουμε χρησιμοποιήσει τον τύπο

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m^{\underline{2}}}{2!}x^2 + \frac{m^{\underline{3}}}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m^{\underline{m}}}{m!}x^m$$

όπου m φυσικός, ο οποίος είναι γνωστός αιώνες πριν τον Euler (όχι όμως σε αυτή την μορφή), και ο οποίος επαληθεύεται μέσω επαγωγής. Το 1665 ο Newton ανακάλυψε μια γενίκευση των συντελεστών της διωνυμικής επέκτασης χρησιμοποιώντας μία περίπλοκη παρεμβολή μεταξύ των σειρών και των στηλών στην πινακοειδή μορφή του τριγώνου του Pascal, και εικάζοντας ότι αυτοί οι γενικευμένοι συντελεστές μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη μια διωνυμικής σειράς αρνητικών και κλασματικών εκθετών. Ο Newton δοκίμασε την εικασία σε πολλά παραδείγματα, συμπεριλαμβανομένου του τετραγωνισμού της σειράς $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + \cdots\right)$$

για να προκύψει

$$1 + x^2 + 0x^4 + 0x^6 + 0x^8 + 0x^{10} + \cdots,$$

αλλά ποτέ δεν δημοσίευσε μία επαγωγική απόδειξη του γενικού τύπου.

Θεώρημα 4.8 (Διωνυμικό Θεώρημα Παραγοντικών Δυνάμεων). *Για κάθε πραγματικό a, b και κάθε φυσικό n ισχύει*

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} a^{\underline{n-k}} b^{\underline{k}}.$$

Θεώρημα 4.9 (Διωνυμικό Θεώρημα (Κλασματικών Εκθετών)). *Αν $|x| < 1$, και m, n είναι πεπερασμένοι και θετικοί, και H είναι άπειρος, τότε*

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \simeq 1 + \frac{m}{n}x + \left(\frac{m}{n}\right)^{\underline{2}}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \left(\frac{m}{n}\right)^{\underline{H}}\frac{x^H}{H!}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε έναν άπειρο υπερφυσικό H και έναν υπερπραγματικό x έτσι ώστε $|x| < 1$ και $x \not\approx 1$. Θα εισάγουμε τον συμβολισμό $(1+x)^{\boxed{a}}$ για το άθροισμα,

$$(1+x)^{\boxed{a}} := 1 + ax + a^{\underline{2}}\frac{x^2}{2!} + \cdots + a^{\underline{H}}\frac{x^H}{H!}.$$

Γενικεύοντας τον υπολογισμό του Newton για το $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, θα δείξουμε ότι

$$\left((1+x)^{\boxed{\frac{m}{n}}}\right)^n \simeq (1+x)^m$$

και έτσι

$$(1+x)^{\boxed{\frac{m}{n}}} \simeq (1+x)^{\frac{m}{n}}, \tag{4.6}$$

το οποίο είναι η αρχική σχέση του θεωρήματος διατυπωμένο με την καινούρια μας σημειογραφία.

Ο βοηθητικός τύπος στην απόδειξη της 4.6 είναι ότι για πεπερασμένα θετικά a και b,

$$(1+x)^{\boxed{a+b}} \simeq (1+x)^{\boxed{a}}(1+x)^{\boxed{b}}. \tag{4.7}$$

Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί για m, n ακέραιους:

$$(1+x)^{\boxed{m+n}} = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{\boxed{m}}(1+x)^{\boxed{n}}.$$

Για την γενικότερη περίπτωση θα κάνουμε χρήση του *Διωνυμικού Θεωρήματος Παραγοντικών Δυνάμεων*, και μετά τον πολλαπλασιασμό θα γράψουμε τους όρους σε μορφή αθροίσματος εκμηδενίζοντας την ουρά. Χρησιμοποιώντας το λήμμα που θα ακολουθήσει του θεωρήματος γράφουμε:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{\boxed{a}}(1+x)^{\boxed{b}} \\
&= \left(1+ax+a^{\underline{2}}\frac{x^2}{2!}+\dots+a^{\underline{H}}\frac{x^H}{H!}\right)\left(1+bx+b^{\underline{2}}\frac{x^2}{2!}+\dots+b^{\underline{H}}\frac{b^H}{H!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2H} c_k x^k, \text{όπου } c_k = \sum_{i+j=k}\frac{a^{\underline{i}}}{i!}\frac{b^{\underline{j}}}{j!}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε k πεπερασμένο,

$$c_k = \sum_{i+j=k}\frac{a^{\underline{i}}}{i!}\frac{b^{\underline{j}}}{j!} = \sum_{j=0}^{k}\frac{a^{\underline{k-j}}}{(k-j)!}\frac{b^{\underline{j}}}{j!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k^{\underline{j}}}{j!}a^{\underline{k-j}}b^{\underline{j}} = \frac{1}{k!}(a+b)^{\underline{k}}.$$

Στην πρώτη ισότητα το k είναι πεπερασμένο και τα τελευταία βήματα προκύπτουν από το *Διωνυμικό Θεώρημα Παραγοντικών Δυνάμεων*. Στο λήμμα που ακολουθεί θα επιβεβαιώσουμε ότι το $\sum_{k=0}^{2H} c_k x^k$ και το $\sum_{k=0}^{H}\frac{(a+b)^{\underline{k}}x^k}{k!}$ είναι και τα δύο καθορισμένα, παρότι μεχρι τώρα αυτό το χρησιμοποιούμε σαν δεδομένο, έπειτα από το *Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης* θα συμπεράνουμε ότι

$$(1+x)^{\boxed{a}}(1+x)^{\boxed{b}} = \sum_{k=0}^{2H} c_k x^k \simeq \sum_{k=0}^{H} \frac{(a+b)^{\underline{k}} x^k}{k!} = (1+x)^{\boxed{a+b}},$$

το όποίο αποδεικνύει την σχέση 4.7. Αν m και n είναι πεπερασμένοι, τότε εφαρμόζοντας την σχέση 4.7 n φορές, έχουμε

$$(1+x)^m = (1+x)^{\boxed{m}} = (1+x)^{\underbrace{\boxed{\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}}_{n \text{ όροι}}} \simeq \left((1+x)^{\boxed{\frac{m}{n}}}\right)^n,$$

ως εκ τούτου $(1+x)^{\frac{m}{n}} \simeq (1+x)^{\boxed{\frac{m}{n}}}$, που είναι και το ζητούμενο.

□

Το διωνυμικό θεώρημα μπορεί να επεκταθεί στους αρνητικούς ρητούς εκθέτες με ένα παρόμοιο επιχείρημα, και το *Ακολουθιακό Θεώρημα* , το οποίο θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, στην περίπτωση που τα m και n είναι άπειροι, εφόσον το $\frac{m}{n}$ είναι πεπερασμένο. Απο εκεί και πέρα χρειάζεται ένα μικρό μόνο βήμα για να επεκταθεί και στους πραγματικούς εκθέτες.

Το προηγούμενο θεώρημα χρειάστηκε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.10. (i) *Η σειρά*

$$1 + |a| + \left|\frac{a^{\underline{2}}\ x^2}{2!}\right| + \left|\frac{a^{\underline{3}}\ x^3}{3!}\right| + \cdots$$

είναι καθορισμένη για πεπερασμένο θετικό a, $|x| < 1$, $x \not\simeq 1$.

(ii) *Αν $a_0, a_1, a_2, \ldots$ και $b_0, b_1, b_2, \ldots$ είναι υπερακολουθίες τότε για κάθε υπερφυσικό H ισχύει*

$$\left(\sum_{i=0}^{H} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{H} b_i\right) = \sum_{k=0}^{2H} c_k \quad \textit{όπου} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Επιπλέον, αν $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots$ και $|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots$ είναι καθορισμένες σειρές και έχουν πεπερασμένα μερικά αθροίσματα, τότε και η $|c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots$ είναι καθορισμένη σειρά και έχει πεπερασμένα μερικά αθροίσματα.

Απόδειξη. (i) Για τον ακέραιο k όπου $k > a > 0$, έχουμε $|\frac{a^k}{}| < k!$, και έτσι $|\frac{a^k x^k}{k!}| \leq |x^k|$. Αυτό μας δείχνει ότι για $k > a > 0$ η απόλυτη τιμή των όρων του αθροίσματος $(1+x)^{\boxed{a}}$ φράσεται από μια καθορισμένη γεωμετρική σειρά.

(ii) Το γινόμενο $\left(\sum\limits_{i=0}^{H} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{H} b_i\right)$ όταν πολλαπλασιαστεί, είναι το άθροισμα των όρων $a_i b_j$ για i και j μεταξύ του 0 και του H. Αυτοί οι όροι μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν πίνακα.

	0	1	2	$\cdots$	H
0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	$\cdots$	a_0b_H
1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	$\cdots$	a_1b_H
2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	$\cdots$	a_2b_H
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
H	a_Hb_0	a_Hb_1	a_Hb_2	$\cdots$	a_Hb_H

$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$

Για κάθε k, $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$ είναι το άθροισμα όλων των όρων πάνω από την διαγώνιο, κάνοντας το $\sum\limits_{k=0}^{2H} c_k$ να είναι το άθροισμα της διαγωνίου και έτσι να είναι το άθροισμα όλων των όρων του πίνακα. Για να δούμε ότι το $|c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots$ είναι καθορισμένο, παρατηρούμε ότι για N άπειρο,

$$\sum_{k=N}^{N+M} |c_k| \leq \sum_{k=N}^{N+M} \sum_{i+j=k} |a_i b_j| \leq \sum_{i=\frac{N}{2}}^{H} \sum_{j=0} |a_i b_j| + \sum_{j=0} |a_i b_j|$$

$$= \left(\sum_{i=\frac{N}{2}}^{H} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{H} |b_j|\right) + \left(\sum_{i=\frac{N}{2}}^{H} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{H} |b_j|\right) \simeq 0$$

Η δεύτερη επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι $i + j \geq N$, τότε είτε $i \geq \frac{N}{2}$ είτε $j \geq \frac{N}{2}$. Η τελική σχέση $(\simeq 0)$ έπεται του ότι η σειρά είναι καθορισμένη και έχει πεπερασμένα μερικά αθροίσματα.

$\square$

4.4 Απόδειξη Θεωρήματος Αθροιστικής Σύγκρισης

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα θεωρήματα που αφορούν«συμπαγείς» συναρτήσεις και εξισώσεις, το Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης είναι ένα αποτέλεσμα σχετικό με συναρτήσεις και εξισώσεις μιας γενικότερης κλάσης. Η απόδειξή του λοιπόν είναι πιο αφηρημένη και στηρίζεται σε πιο βασικούς ορισμούς και αξιώματα από τα υπόλοιπα θεωρήματα. Θα δείξουμε πως το Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης έπεται του Αξιώματος του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος, ισοδύναμου αξιώματος του Αξιώματος Υπερφυσικής Επαγωγής, με την βοήθεια του Ακολουθιακού Θεωρήματος. Το Ακολουθιακό Θεώρημα είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα σύμφωνα με τον Robinson.

Αξίωμα του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος
Έστω $\phi(n)$ να είναι μία εξίσωση ή μία ανισότητα υπερακολουθιών υπερπραγματικών αριθμών, για παράδειγμα να είναι της μορφής

$$a_n = b_n, a_n \neq b_n, a_n < b_n, a_n \leq b_n,$$

όπου a και b είναι υπερακολουθίες υπερπραγματικών αριθμών. Τότε είτε η $\phi(n)$ ισχύει για όλους τους υπερφυσικούς n, είτε διαφορετικά υπάρχει ένα m τέτοιο ώστε η $\phi(m)$ δεν ισχύει αλλά ισχύει η $\phi(n)$ για κάθε υπερφυσικό n μικρότερο του m.

Για παράδειγμα θεωρούμε την ανισότητα $\phi(n)$ δοσμένη από την σχέση $1 - \frac{n}{H} > 0$, για έναν σταθερό υπερφυσικό H. Η ανισότητα είναι ψευδής για n ίσο με το H, αλλά αληθής για όλα τα n μικρότερα από το H. Έτσι η ισότητα $n = H$ είναι το **ελάχιστο αντιπαράδειγμα** για την $\phi(n)$. Από την άλλη μεριά, η εξίσωση $a_n = 0$, όπου a_n ορίζεται να είναι 0 για n πεπερασμένο και 1 για n άπειρο, δεν έχει **ελάχιστο αντιπαράδειγμα**, παρότι έχει αντιπαραδείγματα. Δεν αψηφά όμως το Αξίωμα του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος, γιατί η συνάρτηση a, όπως ορίστηκε, δεν είναι υπερακολουθία (με άλλα λόγια, η a δεν μπορεί να προκύψει από την σύνθεση φυσικών επεκτάσεων πραγματικών συναρτήσεων με υπεπραγματικες παραμέτρους).

Θεώρημα 4.11 (Ακολουθιακό Θεώρημα). *Έστω $a_0, a_1, a_2, \cdots$ και $b_0, b_1, b_2, \cdots$ να είναι υπερακολουθίες. Αν $a_n \simeq b_n$ για κάθε φυσικό n, τότε υπάρχει ένα άπειρο N τέτοιο ώστε $a_n \simeq b_n$ για κάθε υπερφυσικό n μικρότερο του N.*

Απόδειξη. Επειδή η σχέση $a_n \simeq b_n$ δεν είναι εξίσωση ή ανισότητα, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Αξίωμα του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος κατευθείαν. Αντ' αυτού ισχυριζόμαστε ότι αν $a_n \simeq b_n$ για κάθε πεπερασμένο n τότε ισχύει επίσης ότι

$$-\frac{1}{n} < a_n - b_n \text{ και } a_n - b_n < \frac{1}{n}$$

για κάθε πεπερασμένο $n > 1$. Εφαρμόζοντας το Αξίωμα του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος σε αυτές τις ανισότητες, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο N τέτοιο ώστε $-\frac{1}{n} < a_n - b_n$ και $a_n - b_n < \frac{1}{n}$ για κάθε n μεταξύ του 1 και του N. Από την αρχική μας υπόθεση ότι $a_n \simeq b_n$ πεπερασμένο n, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\frac{1}{n}$ είναι απειροστό για άπειρες τιμές του n, καταλήγουμε στο ότι $a_n \simeq b_n$ για κάθε $n < N$. □

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης)**.** *Αν οι σειρές $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ και $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ είναι καθορισμένες, και αν για κάθε n φυσικό, $a_n \simeq b_n$, τότε για κάθε n υπερφυσικό ισχύει*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \simeq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Απόδειξη. Αν $a_n \simeq b_n$ για κάθε πεπερασμένο n, τότε

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \simeq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

για κάθε πεπερασμένο n. Από το Ακολουθιακό Θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο J τέτοιο ώστε για κάθε n μικρότερο του J,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \simeq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Έστω τώρα N μεγαλύτερο του J. Αν τα αθροίσματα είναι καθορισμένα, τότε από τον ορισμό, $a_j + \cdots + a_n$ και $b_j + \cdots + b_n$ είναι και τα δύο απειροστά και έτσι για κάθε n έχουμε

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \simeq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

□

4.5 Οι λογάριθμοι (και επεκτάσεις)

Αμεσως μόλις ορίσει την εκθετική συνάρτηση a^x και εκθέσει τους βασικούς κανόνες της εκθετικοποίησης, ο Euler ορίζει τον λογάριθμο με βάση το a, με a μεγαλύτερο του 1.

> Δοθέντος ενός αριθμού a, για κάθε τιμή του x, μπορούμε να βρούμε μια τιμή του $y[= a^x]$, αντίστροφα, δοθέντος μιας θετικής τιμής για το y, θέλουμε να δώσουμε μια τιμή στο x έτσι ώστε $a^x = y$. Αυτή η τιμή του x, στο βαθμό που την θεωρούμε σαν συνάρτηση του y, ονομάζεται *λογάριθμος του y*. ...Είναι σύνηθες να συμβολίζουμε τον λογάριθμος του y με $\log y$.

Συνήθος γράφουμε $\log_a y$ κάνοντας σαφή στον συμβολισμό, την εξάρτηση της βάσης a. Από τον ορισμό πως για κάθε $y > 0$, το $\log_a y$ είναι το x ώστε $a^x = y$, και από τους κανόνες των εκθετικών, έχουμε τους εξής κανόνες για τους λογαρίθμους

για κάθε $a > 1$ και $x, y > 0$ έπεται το εξής:

(i) $\log_a 1 = 0$

(ii) $\log_a x^{-1} = -\log_a x^1$

(iii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(iv) $\log_a x^y = y \log_a x$

(v) $\log_a x < \log_a y$ αν και μόνο αν $x < y$.

Στο Intoductio, ο Euler εξηγεί όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο τπν τρόπο με τον οποίο αυτές οι ιδιότητες μετατρέπουν τα εκθετικά σε πολλαπλασιασμούς και τους πολλαπλασιασμούς σε προσθέσεις, δημιουργώντας τους πίνακες των λογαρίθμων, ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να εκτελουμε υπολογισμούς. Ένα από τα παραδείγματα του, που συνδέεται με έναν πίνακα λογαρίθμων που έχει σαν βάση το 10 είναι το εξής.

> Αν ο πληθυσμός σε μια περιοχή αυξάνεται ετήσια κατά ένα τριακοστό, και κάποια στιγμή έχει $100,000$ κατοίκους, θέλουμε να μάθουμε τον πληθυσμό μετά από 100 χρόνια. Χάριν συντομίας θα θέσουμε τον αρχικό μας πληθυσμό n, ώστε $n = 100,000$. Μετά από ένα χρόνο ο νέος πληθυσμός θα είναι
> $$\left(1 + \frac{1}{30}\right) n = \frac{31}{30} n.$$
> Μετά από δύο χρόνια ο νέος πληθυσμός θα είναι $(\frac{31}{30})^2 n$. Μετά από τρία χρόνια ο νέος πληθυσμός θα είναι $(\frac{31}{30})^3 n$. Τελικά μετά από εκατό χρόνια ο νέος πληθυσμός θα είναι
> $$\left(\frac{31}{30}\right)^{100} n = \left(\frac{31}{30}\right)^{100} 100000$$
> Ο λογάριθμος του πληθυσμού είναι $100 \log \frac{31}{30} + \log 100000$. Όμως,
> $$\log \frac{31}{30} = \log 31 - \log 30 = 0.014240439$$
> έτσι $100 \log \frac{31}{30} = 1.4240439$, το οποίο όταν αυξηθεί κατά $\log 100000 = 5$ μας δίνει 6.424039, ο λογάριθμος του επιθυμητού πληθυσμού. Ο αντίστοιχος πληθυσμός θα είναι $2,654,874$. Οπότε μετά από εκατό χρόνια ο πληθυσμός θα είναι περισσότερος από είκοσι έξι και μισό φορές αυξημένος.

Το ερώτημα παραμένει: πως μπορεί κανείς να συνθέσει πίνακες λογαρίθμων; Ο Euler έδωσε το παράδειγμα για να δείξει τον τρόπο με τον οποίο ο Briggs υπολόγιζε τους λογαρίθμους στο βιβλίο του Arithmetica Logarithmica το 1624 όπου χρησιμοποιεί έναν εντατικό υπολογιστικό αλγόριθμο που απαιτεί εύρεση πολλών διαδοχικών τετραγωνικών ριζών, σημείωσε όμώς ότι « *υπάρχουν συντομότεροι μέθοδοι στις οποίες οι λογάριθμοι υπολογίζονται πολύ πιο γρήγορα.*» Παρακάτω θα δούμε πως ο Euler εξήγησε πως υπολογίζουμε λογαρίθμους μέσω σειρών.

Θα βρούμε μια σειρά για τον λογάριθμο με βάση το e. Ο λογάριθμος αυτός γράφεται $\log_e$ ή πιο συχνά $\ln$. Για αρχή θα ξεκινήσουμε ψάχνοντας για δοσμένο πεπερασμένο y, κατάλληλο x τέτοιο ώστε

$$e^x \simeq y. \tag{4.8}$$

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι για πεπερασμένο x και άπειρο N ισχύει ότι $e^x \simeq \left(1+\frac{x}{N}\right)^N$, οπότε θα λύσουμε την εξίσωση $u = \left(1+\frac{x}{N}\right)^N$. Μια λύση (παίρνοντας την N-οστη ρίζα του y) δίνεται από την σχέση

$$x = N\left(y^{\frac{1}{N}} - 1\right).$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση ικανοποιεί την σχέση 4.8,

$$e^x = e^{N\left(y^{\frac{1}{N}}-1\right)} \simeq \left(1 + \frac{N(y^{\frac{1}{N}}-1)}{N}\right)^N = (1+y^{\frac{1}{N}}-1)^N = (y^{\frac{1}{N}})^N = y$$

έτσι πράγματι $e^x \simeq y$ Επίσης θα χρειαστεί να γνωρίζουμε ότι

$$N\left(y^{\frac{1}{N}}-1\right) \simeq \ln y.$$

Θεώρημα 4.13. *Αν y είναι πεπερασμένο και θετικό, τότε $\ln y \simeq N(y^{\frac{1}{N}}-1)$ για κάθε N άπειρο.*

Απόδειξη. Έστω y πεπερασμένο και θετικό. Τότε $e^{N(y^{\frac{1}{N}}-1)} \simeq y = e^{\ln y}$. Τότε η σχέση $N(y^{\frac{1}{N}}-1) \simeq \ln y$ έπεται της πρότασης που λέει ότι $x \simeq y$ αν και μόνο αν $e^x \simeq e^y$ για x, y πεπερασμένα. □

Στην παράγραφο 119 ο Euler χρησιμοποιεί τον τύπο $\ln y = N(y^{\frac{1}{N}}-1)$ για N άπειρο, για να βρεί την σειρά του φυσικού λογαρίθμου. Αναπτύσει την συνάρτηση $\log(1+y)$ χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα Κλασματικών

Εκθετών,

$$\begin{aligned}\log 1+y &= N[(1+y)^{\frac{1}{N}}-1]\\ &= N[[1+\tfrac{1}{N}y+\tfrac{1}{N}(\tfrac{1}{N}-1)\tfrac{1}{2!}y^2+\tfrac{1}{N}(\tfrac{1}{N}-1)(\tfrac{1}{N}-2)\tfrac{1}{3!}y^3+\cdots]-1]y\\ &= y+(\tfrac{1}{N}-1)\tfrac{1}{2!}y^2+(\tfrac{1}{N}-1)(\tfrac{1}{N}-2)\tfrac{1}{3!}y^3+\cdots.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι το N είναι άπειρο, ο Euler αντικαθιστά παντού το $\frac{1}{N}$ με 0. Έτσι φτάνει στην εξίσωση,

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \cdots.$$

Οι αντικαταστάσεις αυτές είναι δυσκολότερο να δικαιολογηθούν για αυτήν την σειρά απ' ότι σε προηγούμενα παραδείγματα, παρ' όλα αυτά οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιήσουμε μας είναι ήδη γνωστές.

Θεώρημα 4.14. *Για κάθε y με $|y|<1$ αλλά $|y| \not\simeq -1$ και για κάθε H άπειρο,*

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \cdots + (-1)^{H+1}\frac{1}{H}y^H.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $|y|<1, |y| \not\simeq -1$ και έστω H άπειρο. Από το Διωνυμικό Θεώρημα Κλασματικών Εκθετών, συμπεραίνουμε ότι για κάθε πεπερασμένο n,

$$(1+y)^{\frac{1}{n}} \simeq 1 + \frac{1}{n}y + \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^H\frac{1}{H!}y^H. \tag{4.9}$$

Για n άπειρο, και τα δύο μέλη είναι απείρως κοντά, οπότε η σχέση (9) είναι αληθής για κάθε n υπερφυσικό, άπειρο ή πεπερασμένο. Είναι λοιπόν θεμιτό να ακολουθήσουμε την συλλογιστική του Euler και να αντικαταστήσουμε το n με N άπειρο στην σχέση 4.9, να αφαιρέσουμε το 1 και από τα δύο μέλη και έπειτα να πολλαπλασιάσουμε με N. Στην περίπτωση μας όμως, η σχέση 4.9 δεν παρουσιάζει ισότητα (=) αλλά σχετική ισότητα ($\simeq$), και επειδή το N είναι άπειρο δεν έπεται ότι επειδή $a \simeq b$ τότε και $Na \simeq Nb$ (ένα αντιπαράδειγμα είναι να πάρουμε $a \simeq 0$ και $b \simeq \frac{1}{N}$). Μπορούμε όμως να κάνουμε το εξής: η σχέση 4.9 συνεπάγεται ότι για κάθε n πεπερασμένο,

$$n\left[(1+y)^{\frac{1}{n}}-1\right]$$
$$\simeq n\left[\left(1+\frac{1}{n}y+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{y^2}{2!}+\left(\frac{1}{n}\right)^3\frac{y^3}{3!}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^H\frac{y^H}{H!}\right)-1\right]$$

$$= y - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1}\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1}\cdot\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2}\cdot\frac{y^3}{3}$$
$$-\cdots+(-1)^{H-1}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1}\cdot\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2}\cdots\frac{\left(H-1-\frac{1}{n}\right)}{H-1}\cdot\frac{y^H}{H},$$

όπου η εναλλαγή στα πρόσημα έπεται του ότι για $k>0$ και $n>1$ έχουμε

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left((k-1)-\frac{1}{n}\right).$$

Έτσι από το **Ακολουθιακό Θεώρημα** συμπεραίνουμε (όχι για όλα αλλά για αρκετά μικρό άπειρο N) ότι

$$N[(1+y)^{\frac{1}{N}}-1]$$
$$\simeq y - \frac{(1-\frac{1}{N})}{1}\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{(1-\frac{1}{N})}{1}\cdot\frac{(2-\frac{1}{N})}{2}\cdot\frac{y^3}{3}$$
$$-\cdots+(-1)^{H-1}\frac{(1-\frac{1}{N})}{1}\cdot\frac{(2-\frac{1}{N})}{2}\cdots\frac{(H-1-\frac{1}{N})}{H-1}\cdot\frac{y^H}{H}.$$

Όταν το τελευταίο άθροισμα συγκριθεί με το άθροισμα

$$y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots+(-1)^{H+1}\frac{1}{H}y^H,$$

είναι ξεκάθαρο ότι οι όροι τους είναι απείρως κοντά, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα δύο αθροίσματα είναι καθορισμένα. Για $|y|<1$, $|y|\not\simeq -1$, η καθορισιμότητα έπεται του **Κριτηρίου Σύγκρισης Καθορισιμότητας** μέσω σύγκρισης με μία γεωμετρική σειρά. Από το **Θεώρημα Αθροιστικής Σύγκρισης** τελικά καταλήγουμε στο ότι

$$H[(1+y)^{\frac{1}{H}}-1]\simeq y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots+(-1)^{H+1}\frac{1}{H}y^H$$

για κάθε άπειρο H. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. □

Ο Euler παρατηρεί ότι η σειρά του λογαρίθμου δεν συγκλίνει άμεσα, και έτσι δεν είναι τόσο αποτελεσματική για τον υπολογισμό λογαρίθμων, οπότε δίνει άλλες σειρές που είναι πιο αποτελεσματικές. Για παράδειγμα,

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\cdots.$$

Σημειώνει ότι,

Η τελευταία σειρά συγκλίνει ισχυρά αν αντικαταστήσουμε ένα εξαιρετικά μικρό κλάσμα στην θέση του x. Για παράδειγμα, αν $x = \frac{1}{5}$ τότε

$$\log\frac{6}{4} = \log\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \cdots .$$

Αν $x = \frac{1}{7}$ τότε

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \cdots$$

και αν $x = \frac{1}{9}$ τότε

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \cdots .$$

Από τους λογάριθμους αυτών τον κλασμάτων μπορούμε να βρούμε λογάριθμους των ακεραίων. Απο τον ορισμό των λογαρίθμων έχουμε ότι

$$\log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} = \log 2$$

$$\log\frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$$

και $2\log 2 = \log 4$. Επίσης

$$\log\frac{5}{4} + \log 4 = \log 5, \quad \log 2 + \log 3 = \log 6$$

$$3\log 2 = \log 8, \quad 2\log 3 = \log 9, \quad \log 2 + \log 5 = \log 10$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την σειρά και τις παραπάνω σχέσεις, ο Euler μπορούσε να δείξει πώς θα κατασκευάσει έναν πίνακα λογαρίθμων.

Στο Intoductio, ο Euler παρουσίασε σειρές και από άλλες υπερβατικές συναρτήσεις, όπως του ημιτόνου, του συνημιτόνου, της εφαπτομένης, της συνεφαπτομένης και του τόξου εφαπτομένης, και ξεκίνησε να δείξει πως να χρησιμοποιούμε άπειρα γινόμενα για να υπολογίζουμε τις τιμές άπειρων αθροισμάτων. Χρησιμοποιώντας μεθόδους με απειροστά παρόμοιες με αυτές που παρουσιάσαμε, ο Euler παραγοντοποίησε την συνάρτηση του ημιτόνου σε άπειρο γινόμενο και χρησιμοποίησε αυτήν την παραγοντοποίηση για να εξάγει τον περίφημο τύπο

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Και τα δυο αυτά θεωρήματα μπορούν να αποδειχθούν αλγεβρικά.

Θεώρημα 4.15. *Για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο H,*

$$\sin x \simeq x \prod_{k=1}^{H} (1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}).$$

Θεώρημα 4.16. *Για κάθε άπειρο H,*

$$\sum_{k=1}^{H} \frac{1}{k^2} \simeq \frac{\pi^2}{6}.$$

4.6 Οι σχέσεις μεταξύ τυπικών και μη-τυπικών εννοιών

Το θεώρημα μας λέει ότι $e^x \simeq \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, για κάθε πεπερασμένο x και άπειρο N, και είναι εννοιολογικά παρόμοιο με το τυπικό θεώρημα που λέει ότι,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

για κάθε x πραγματικό, αλλά τα δύο θεωρήματα δεν είναι ίδια. Το πρώτο αναφέρεται σε μια άθροιση υπερφυσικών μέσω κατάλληλης επέκτασης από τους πραγματικούς ενώ το άλλο αναφέρεται σε στο όριο μιας πραγματικής ακολουθίας μερικών αθροισμάτων. Η έννοια του ορίου είναι συνήθως η διαχωριστική γραμμή μεταξύ άλγεβρας και ανάλυσης. Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε χωρίς πολλές λεπτομέρειες μια μετάβαση ανάμεσα στους δύο αυτούς κλάδους. Πρώτα όμως θα θυμηθούμε τον τυπικό ορισμό της σύγκλισης άπειρων σειρών.

Ορισμός 4.17 (Τυπικός Ορισμός Σύγκλισης Σειρών)**.** *Έστω s να είναι μία πραγματική σειρά και r ένας πραγματικός αριθμός. Θα λέμε ότι η s συγκλίνει στο r αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό ϵ υπάρχει ένας φυσικός n τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό m μεγαλύτερο του n να ισχύει ότι, $|s_m - r| < e$. Θα γράφουμε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = r$ εννοώντας ότι η a είναι πραγματική σειρά, τέτοια ώστε η ακολουθία της με τα μερικά αθροίσματα $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$ να συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό r.*

Εκτός του ορισμού του πραγματικού αριθμού e, μέχρι τώρα δεν έχουμε κάνει κάποιον διαχωρισμό ανάμεσα στις στενά σχετιζόμενες έννοιες του *πραγματικού αριθμού* και του *πεπερασμένου υπερπραγματικού αριθμού.* Χρειαζόμαστε αυτόν τον διαχωρισμό όμως αν θέλουμε να μετατρέψουμε τα συμπεράσματα μας για τους υπερπραγματκούς αριθμούς σε συμπεράσματα αποκλειστικά για πραγματικούς αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί διαχωρίζονται από άλλα διατεταγμένα πεδία αριθμών από το **Αξίωμα Πληρότητας**. Η Αρχή του Τυπικού Μέρους είναι μία συνέπεια του Αξιώματος Πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς.

Ορισμός 4.18 (Αρχή του Τυπικού Μέρους). *Για κάθε πεπερασμένο υπερπραγματικό b υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός r τέτοιος ώστε $r \simeq b$. Αυτός ο πραγματικός r ονομάζεται τυπικό μέρος του b, και συμβολίζεται με $^\circ b$.*

Σε προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιήσαμε την Αρχή του Τυπικού Μέρους για να ορίσουμε τον πραγματικό αριθμό e να είναι $^\circ(1 = \frac{1}{N})^N$, όπου N είναι άπειρος. Ο ορισμός αυτός μαζί με την σχέση (5) και την υπόθεση ότι η e^x είναι πραγματική συνάρτηση συνεπάγονται το ότι

$$e^x =^\circ \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{N!} \tag{4.10}$$

για N να είναι άπειρος.

Πάρα την παραδοχή μας ότι το e^x ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για ορισμό της συνάρτησης e^x την σχέση 4.10 και να αντλήσει τις συνήθεις ιδιότητες της εκθετικοποίησης από αυτόν τον ορισμό. Ωστόσο για εκθετικοποίηση στους μιγαδικούς αριθμούς προσέγγιση που κάναμε είναι ότι χρειαζόμαστε για να ορίσουμε το e^{ix} από την ταυτότητα

$$e^{ix} =^\circ (1 + \frac{ix}{N})^N,$$

για πραγματικό (και υπερπραγματικό) x, όπου $^\circ(a + bi) = (^\circ a) + (^\circ b)i$. Από αυτόν τον ορισμό μπορεί κανείς να εξάγει τις ταυτότητες του Euler στην γνωστή τους μορφή.

Πόρισμα 4.19. *Για κάθε πραγματικό x,*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \textit{και} \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Η σχέση μεταξύ του άπειρου αθροίσματος μιας καθορισμένης υπερακολουθίας και της σύγκλισης μιας πραγματικής ακολουθίας μερικών αθροισμάτων δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο είναι μια συνέπεια της **Αρχής της Μεταφοράς** και του **Αξιώματος του Ελαχίστου Αντιπαραδείγματος**. Η απόδειξη είναι κάτω από το πρίσμα του βιβλίου *Στοιχειώδης Λογισμός* του Keisler([3]).

Θεώρημα 4.20. *Έστω β να είναι μια υπερακολουθία τέτοια ώστε $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots$ να είναι καθορισμένο, b να είναι μια πραγματική ακολουθία, και υποθέτουμε ότι $b_n \simeq \beta_n$ για κάθε φυσικό n. Τότε η πραγματική ακολουθία μερικών αθροισμάτων της b συγκλίνει κατά την τυπική έννοια, και για κάθε πεπερασμένο υπερφυσικό N ισχύει ότι*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n =^\circ \sum_{n=o}^{N} \beta_n.$$

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της b είναι μια συνέπεια και όχι υπόθεση. Το θεώρημα αυτό συνεπάγεται όλες τις τυπικές σχέσεις με αθροίσματα που έχουμε δει μέχρι τώρα.

Πόρισμα 4.21. *Για κάθε πραγματικό x ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\textit{Αν } |x| < 1 \textit{ τότε } \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\sin x = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\textit{Αν } |x| < 1 \textit{ τότε } (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{m}{n})^{\underline{k}} \frac{x^k}{k!}$$

Απόδειξη. Για την πρώτη εξίσωση, έστω N να είναι άπειρος. Τότε

$$e^x =^{\circ} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Τα υπόλοιπα είναι παρόμοια. □

4.7 Συμπεράσματα από τον Euler

Το Intoductio προοριζόταν ρητά να είναι ένα εισαγωγικό εγχειρίδιο λογισμού, δηλαδή ένα εισαγωγικό βιβλίο για την μελέτη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Ο σκοπός του ήταν να εκπαιδεύσει τους αρχάριους και όχι να δώσει σύντομες και επιδέξιες πηγές γνώσης από ένα εκτεταμένο πεδίο των μαθηματικών. Όπως είπε και ο ίδιος

> Παρόλο που στις μέρες μας όλα αυτά έχουν επιτευχθεί μέσω του διαφορικού λογισμού , εδώ τα έχω παρουσιάσει χρησιμοποιώντας μόνο συνήθη άλγεβρα, με σκοπό η μετάβαση από την πεπερασμένη ανάλυση στην ανάλυση του απείρου να καταστεί ευκολότερη... Την ίδια στιγμή παραδέχομαι πρόθυμα ότι τέτοια ζητήματα μπορούν να δουλευτούν ευκολότερα μέσω του διαφορικού λογισμού.

Μπορούμε να πάρουμε ένα μάθημα από το χρήσιμο αυτό εγχειρίδιο του Euler για την δικιά μας πορεία. Μέσω της τυπικής διαδικασίας, τα διακριτά μαθηματικά διαχωρίζονταν από τον λογισμό και ενδιαφέρουσες και χρήσιμες σειρές μελετούνταν μόνο μετά από την απόδειξη του **Θεωρήματος του Taylor**, συνήθως μετά από την σύγκλιση ακολουθιών και σειρών, και αφού η παράγωγος είχε μελετηθεί σε βάθος. Μέσω της διαδικασίας του Euler, οι αρχάριοι είχαν στα χέρια τους συμπαγή παραδείγματα από ακολουθίες και σειρές πριν καν οριστεί η παράγωγος. Όπως φάνηκε εδώ, αυτή η προσέγγιση μπορεί επίσης να δώσει στους μαθητές πρακτική εμπειρία με σημαντικά θέματα των διακριτών μαθηματικών, όπως η επαγωγή, η αναδρομή, η πεπερασμένη άθροιση και η χρήση αξιωμάτων, με σκοπό την απόδειξη στοιχειωδών θεωρημάτων ανάλογων των θεωρημάτων της πραγματικής ανάλυσης. Ανεξάρτητα με το αν η αποκατάσταση των μεθόδων του Euler βρουν τον δρόμο τους στην βασική εκπαιδευτική διδασκαλία, ελπίζουμε ότι εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στην πνευματική ομορφιά των βαθύτερων μαθηματικών, καταφέραμε να πείσουμε τον αναγνώστη ότι οι ιδέες και τα επιχειρήματα του Euler απέχουν από το να χαρακτηριστούν ριψοκίνδυνα και ανόητα, και έχουν άμεση σχέση με την κατανόηση, την εκτίμηση και την εφαρμογή των στοιχειωδών μαθηματικών ακόμα και στις μέρες μας.

Βιβλιογραφία

[1] Leonhard Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum* (Introduction to Analysis of the Infinite) Book I. Translated by John D. Blanton, Springer 1988

[2] Mark McKinzie and Curtis Tuckey, *Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers, and Euler Analysis of Infinities*, Mathematics Magazine Vol. **74**, No. **5** (Dec., 2001), pp. 339-368

[3] Jerome Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, https://www.math.wisc.edu/ keisler/calc.html

[4] Abraham Robinson, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, 1960.