ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος 2017

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η Διπλωματική Εργασία παρουσιάστηκε ενώπιον του Διδακτικού Προσωπικού του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την εκπλήρωση των απαιτήσεων για την ειδίκευση του Μεταπτυχιακού Προγράμματος "Εφαρμοσμένα Μαθηματικά"

ΟΝΟΜΑ: ΜΑΡΙΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΜΠΑΖΔΕΚΗ

Α.Μ.: 313/2015012

Επιβλέπων: Νικολόπουλος Χρήστος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αιγαίου

Μάιος 2017

Η τριμελής επιτροπή διδασκόντων επικυρώνει τη διπλωματική εργασία της Μπαζδέκη Μαρίας

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

κ.Νικολόπουλος Χρήστος

Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Α.

κ.Χατζηνικήτας Αγαπητός

Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Α.

κ.Φελουζής Ευάγγελος

Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Α.

~ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ~

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Τμήματος του Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Νικολόπουλου Χρήστου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νικολόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος για τη στήριξη σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης καθώς και την τριμελή επιτροπή για τη συνεργασία και την ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη διαχρονική συμπαράστασή τους και για την ηθική και υλική στήριξη των επιλογών μου.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ 3

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ 3

Η ΓΕΝΙΚΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ 7

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 9

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 10

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 12

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 19

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ 28

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ **31**

Ο ΤΕΛΕΣΤΗΣ LAPLACE 31

ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ-ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 35

Η ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΤΟΥ E.HOPF 38

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 44

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ 47

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 50

ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ **54**

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ 54

Ο ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ 58

Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ 66

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 68

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 70

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 71

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 77

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από τα πιο γνωστά και χρήσιμα εργαλεία στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων είναι η αρχή του μεγίστου. Αυτή η αρχή είναι γενίκευση του γεγονότος ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί την ανίσωση $f'' > 0$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ λαμβάνει το μέγιστό της σε ένα από τα άκρα του διαστήματος. Οι λύσεις της ανίσωσης $f'' > 0$ ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου. Πιο γενικά, συναρτήσεις που ικανοποιούν μία διαφορική ανίσωση σε ένα χωρίο D, λαμβάνουν μέγιστο στο σύνορο του D και ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου.

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων συχνά ξεκινάει με την ταξινόμηση των εξισώσεων σε ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές. Επειδή οι εξισώσεις που αναφέραμε παρουσιάζονται σε πολλά προβλήματα της φυσικής, οι μαθηματικοί που ασχολούνται με τη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων συγκεντρώνουν το ενδιαφέρον τους στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που έχουν μαθηματικό και φυσικό χαρακτήρα. Ο αναγνώστης που εντρυφεί στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων κατανοεί την ιστορική ανάπτυξη του αντικειμένου και αποκτά ξεκάθαρα κατανόηση για το λόγο που μελετώνται οι τρεις παραπάνω τύποι που αναφέραμε και γιατί άλλες μερικές διαφορικές εξισώσεις παραλείπονται από την έρευνά μας.

Σε πολλές περιπτώσεις η αρχή μεγίστου βασίζεται στη φυσική διαίσθηση για διάφορα μαθηματικά μοντέλα. Οι αποδείξεις που παραθέτουμε για να εδραιώσουμε την αρχή μεγίστου είναι αρκετά αναλυτικές και χρησιμοποιούν τεχνικές που απαιτούν στοιχειώδη γνώση από απειροστικό λογισμό, θεωρήματα συνέχειας και διαφορισιμότητας.

Η αρχή μεγίστου μας παρέχει πληροφορίες για τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων χωρίς ειδική γνώση των λύσεων καθ' αυτό. Πιο συγκεκριμένα, η αρχή μεγίστου παρέχει προσεγγιστικά μία λύση αναζητώντας άνω και κάτω φράγματα. Η αρχή μεγίστου για μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να ειδικευτεί σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Φυσικά η μονοδιάστατη αρχή μεγίστου σχετίζεται με δεύτερης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι πολλά κομμάτια της θεωρίας του Sturm είναι άμεση συνέπεια της αρχής μεγίστου. Επιπλέον μας παρέχει έναν απλό και ελκυστικό τρόπο και μία εισαγωγή στους διάφορους τύπους της αρχής του μεγίστου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θεμελιώνουμε την αρχή μεγίστου και τους ελλειπτικούς τελεστές, γενικεύσεις καθώς και κάποιες εφαρμογές. Παρ' όλο που η αρχή μεγίστου για εξισώσεις Laplace ήταν γνωστή για αρκετά χρόνια, ο Nirenberg θεμελίωσε ισχυρές αρχές μεγίστου για γενικούς δεύτερης τάξης παραβολικούς τελεστές. Η αρχή μεγίστου για τους παραβολικούς τελεστές διαφέρει ελάχιστα από την αρχή μεγίστου για ελλειπτικούς.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την αρχή μεγίστου για παραβολικούς τελεστές. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η αρχή μεγίστου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει συμπεράσματα για την προσέγγιση και τη μοναδικότητα των λύσεων.

Θα αναπτύξουμε την αρχή μεγίστου για ελλειπτικούς και παραβολικούς τελεστές δίνοντας θεωρήματα, αποδείξεις καθώς και παραδείγματα όπου οι απλοί υπολογισμοί αφήνονται στον αναγνώστη.

Συχνά χρησιμοποιούμε το γράμμα L ακολουθούμενο από αγκύλες για να δηλώσουμε ένα γραμμικό τελεστή που δρα σε συναρτήσεις. Συμβολίζουμε με D στον Ευκλείδειο χώρο ένα χωρίο. Το σύνορο του D συμβολίζεται με ∂D. Τα σύμβολα $\cup$, $\cap$ συμβολίζουν την ένωση και την τομή δύο συνόλων αντίστοιχα, τα έντονα γράμματα δηλώνουν διανύσματα και τα u_{x_i} και $\partial u/\partial x_i$ δηλώνουν μερικές παραγώγους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Μια συνάρτηση $u(x)$ που είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ παίρνει μέγιστο σε σημείο του διαστήματος. Αν η συνάρτηση $u(x)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και αν έχει μέγιστο σε κάποιο σημείο c μεταξύ των a και b γνωρίζουμε ότι

$$u'(c) = 0 \text{ και}$$
$$u''(c) \leq 0. \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,b) η συνάρτηση u ικανοποιεί μια διαφορική ανίσωση του τύπου

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' > 0, \tag{2}$$

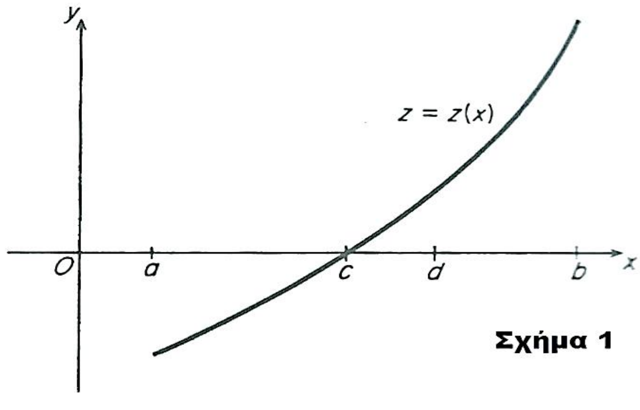
όπου $g(x)$ φραγμένη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι οι σχέσεις (1), (2) δεν μπορούν να ικανοποιούνται σε εσωτερικό σημείο του c. Συνεπώς όταν η σχέση (2) ισχύει, το μέγιστο της συνάρτησης u λαμβάνεται στα άκρα a ή b. Έτσι έχουμε την πιο απλή μορφή της αρχής του μεγίστου. Ένα πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αν θεωρήσουμε ότι η ανίσωση (2) δεν είναι ποτέ μηδέν. Στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και σε πολλές εφαρμογές, τέτοια απαίτηση είναι περιοριστική και είναι σημαντικό να μπορέσουμε να την απαλείψουμε αν είναι εφικτό. Σημειώνουμε ότι για τη μη αυστηρή διαφορική ανίσωση $u'' + g(x)u' \geq 0$ η λύση $u =$σταθερά είναι αποδεκτή. Για τέτοια λύση το μέγιστο της συνάρτησης u πραγματοποιείται σε οποιοδήποτε σημείο.

<u>Θεώρημα 1:</u> Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση

$$\boldsymbol{L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0}, \tag{3}$$

για $\boldsymbol{a < x < b}$ με τη συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)}$ φραγμένη. Αν $\boldsymbol{u(x) \leq M}$ και αν το μέγιστο της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ ικανοποιείται σε ένα εσωτερικό σημείο $\boldsymbol{c}$ του διαστήματος $\boldsymbol{(a,b)}$, τότε $\boldsymbol{u \equiv M}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $u(c) = M$ και $d \in (a,b)$ με $u(d) < M$. Ορίζουμε την $z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1$ όπου α θετική σταθερά. Έχουμε $z(x) < 0$ για $a < x < c$, $z(x) > 0$ για $c < x < b$ και $z(c) = 0$.



Σχήμα 1

Ορίζουμε τη συνάρτηση $z(x)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες $z(x) < 0$ για $a < x < c$, $z(x) > 0$ για $c < x < b$ και $z(c) = 0$.

Με απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι $z'(x) = \alpha e^{\alpha(x-c)}$, $z''(x) = \alpha^2 e^{\alpha(x-c)}$ και $L[z] \equiv z'' + gz' = \alpha[\alpha + g(x)]e^{\alpha(x-c)}$. Διαλέγουμε το α τόσο μεγάλο τέτοιο ώστε $L[z] > 0$ για $a < x < d$. Διαλέγουμε το α ώστε να ικανοποιεί την $\alpha > -g(x)$ (εφόσον η συνάρτηση $g(x)$ φραγμένη μπορούμε να το κάνουμε) και ορίζουμε τη συνάρτηση: $w(x) = u(x) +$

$\varepsilon z(x)$ $\varepsilon > 0$, όπου το ε ικανοποιεί τη σχέση $\varepsilon < \frac{M-u(d)}{z(d)}$ με $M - u(d) > 0,\ z(d) > 0$. Από τη στιγμή που $z < 0$ για $a < x < c$ έχουμε ότι $w(x) < M, a < x < c$.

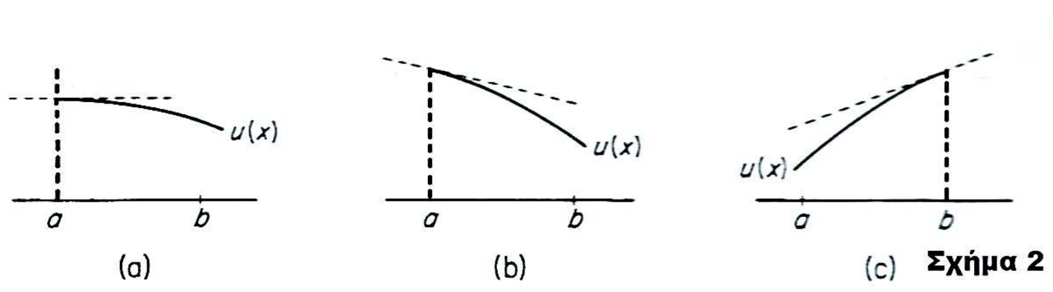
Από τον ορισμό του ε: $w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < u(d) + M - u(d)$ και άρα $w(d) < M$. Στο σημείο $c: w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M$. Επομένως η συνάρτηση w έχει μέγιστο μεγαλύτερο ή ίσο του M, που λαμβάνεται στο εσωτερικό του διαστήματος. Αλλά $L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$. Από τον προηγούμενο περιορισμό μας για τη σχέση (2) η συνάρτηση w δεν επιτυγχάνει το μέγιστο στο διάστημα (a, d). Φτάνουμε έτσι σε άτοπο.

Όμοια αν $d < c,\ z(x) = e^{-\alpha(x-c)} - 1,\ \alpha > g(x)$. Το κλειδί στην παραπάνω απόδειξη είναι η κατασκευή της συνάρτησης $z(x)$ με τις ιδιότητες: (i) $L[z] > 0$, (ii) $z(x) < 0$ για $x < c$, (iii) $z(x) > 0$ για $x > c$, (iv) $z(c) = 0$. Αν το d είναι μικρότερο από το c οι ανισότητες $(ii), (iii)$ αντιστρέφονται. Η συνάρτηση $z(x) = (x-a)^{\alpha} - (c-a)^{\alpha}$ με το α αρκούντως μεγάλο, έχει τις παραπάνω ιδιότητες.

Αν στο θεώρημα 1 βάλουμε όπου u τη συνάρτηση $(-u)$ έχουμε την αρχή ελαχίστου, η οποία επιβεβαιώνει ότι μία μη σταθερή συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση $L(u) \leq 0$ δεν επιτυγχάνει μέγιστο σε εσωτερικό της σημείο.

Η φραξιμότητα για τη συνάρτηση $g(x)$ στο παραπάνω θεώρημα μπορεί να είναι «χαλαρή». Αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι φραγμένη σε κάθε διάστημα $[a', b']$ εσωτερικό του διαστήματος (a, b) και πάλι ισχύει το παραπάνω θεώρημα. Απλά εφαρμόζουμε το επιχείρημα σε κάθε υποδιάστημα του διαστήματος $[a', b']$ που περιέχει τα c, d. Μπορεί η συνάρτηση $g(x)$ να είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του διαστήματος (a, b) και μη φραγμένη όσο το $x \to a,\ x \to b$.

Η μέθοδος που εργαζόμαστε για να δείξουμε το θεώρημα 1 μας δίνει τη δυνατότητα να λάβουμε πληροφορίες για τις συναρτήσεις που ικανοποιούν διαφορική ανίσωση σαν την (3). Μπορούμε να φανταστούμε ότι η λύση u της σχέσης (3) μπορεί να έχει τη μορφή όπως στο **Σχήμα 1**. Το μέγιστο της συνάρτησης u στο διάστημα $[a, b]$ επιτυγχάνεται στο a και $u'(a) = 0$. Αυτό όμως ποτέ δεν συμβαίνει. Αν το μέγιστο λαμβάνεται στο αριστερό άκρο η κλίση στο σημείο είναι αρνητική (2α). Αν λαμβάνεται στο δεξί άκρο η κλίση είναι θετική $(2c)$.



Σχήμα 2

Στο σχήμα 2 απεικονίζεται η κλίση της $u(x)$ αν $u'(x) = 0, u(x) < 0, u(x) > 0$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει το ακριβές αποτέλεσμα:

<u>Θεώρημα 2:</u> **Υποθέτουμε ότι η u είναι μη σταθερή συνάρτηση που ικανοποιεί την $u'' + g(x)u' \geq 0$ στο (a, b) και έχει πλευρικές παραγώγους στα a, b και έστω συνάρτηση $g(x)$ φραγμένη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του διαστήματος (a, b). Αν το μέγιστο της συνάρτησης u λαμβάνεται στο $x = a$ και η συνάρτηση $g(x)$ κάτω φραγμένη στο $x = a$,**

τότε $u'(a) < 0$. Αν το μέγιστο λαμβάνεται στο $x = b$ και η συνάρτηση $g(x)$ άνω φραγμένη στο $x = b$, τότε $u'(b) > 0$.

Απόδειξη: Έστω $u(a) = M$ και $u(x) \leq M, a \leq x \leq b$ και για $d \in (a,b), u(d) < M$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $z(x) = e^{\alpha(x-a)} - 1,\ \alpha > 0,\ \alpha > -g(x),\ a \leq x \leq d\ L[z] > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$, με $0 < \varepsilon < \frac{M-u(d)}{z(d)}$. Επειδή $L[w] > 0$ το μέγιστο λαμβάνεται στα άκρα. Έχουμε $w(a) = M > w(d)$. Επιπλέον η πλευρική παράγωγος της συνάρτησης w στο a δεν μπορεί να είναι θετική. Έχουμε:

$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) \leq 0, z'(a) = \alpha > 0$ και $u'(a) < 0$. Όμοια για $x = b$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> (i) Αν μία συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση (3) έχει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο c, υπάρχει διάστημα (a_1, b_1) που περιέχει το c στο εσωτερικό του με $u(x) \leq u(c)$. Το θεώρημα 1 δείχνει ότι $u(x) = u(c)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2 σε όλα τα διαστήματα που έχουν το c στο άκρο και βλέπουμε ότι η τιμή $u(c)$ στο μέγιστο είναι η ελάχιστη τιμή στο διάστημα (a,b).

(ii) Αν μια συνάρτηση u που ικανοποιεί τη σχέση (3) έχει ελάχιστα σε δύο σημεία c_1, c_2 του διαστήματος (a,b), πρέπει να έχει μέγιστο σε σημείο ανάμεσα στα c_1, c_2. Από την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι $u(c) = u(c_2)$ και $u(x)$ σταθερή στο διάστημα (c_1, c_2).

(iii) Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση (3), μπορεί να μην έχει κανένα οριζόντιο σημείο καμπής (η συνάρτηση u έχει οριζόντιο σημείο καμπής στο $x = c$, αν $u'(c) = 0$). Εάν υπήρχε τέτοιο σημείο θα μπορούσαμε να επιλέξουμε υποδιάστημα με αυτό το σημείο σαν άκρο στο οποίο η συνάρτηση u λαμβάνει μέγιστο στο c. Τότε το θεώρημα 2 δεν θα ίσχυε.

(iv) Ανάλογο αποτέλεσμα με το θεώρημα 2 ισχύει για λύσεις της $L[u] \leq 0$ παίρνοντας την αρχή του ελαχίστου. Μπορούμε να πάρουμε αυτήν την αρχή, αν όπου u βάλουμε τη συνάρτηση $(-u)$ στο θεώρημα 2.

(v) Μπορούμε να δείξουμε το θεώρημα 2 πριν το θεώρημα 1. Αν το μέγιστο της συνάρτησης u είναι σε εσωτερικό σημείο c, τότε $u'(c) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2 στα διαστήματα $(a,c), (c,b)$ καταλήγουμε ότι η συνάρτηση u είναι σταθερή.

(vi) Η απαίτηση της φραξιμότητας της συνάρτησης g είναι απαραίτητη. Η εξίσωση

$u'' + gu' = 0\ \mu\varepsilon\ g(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0 \end{cases}$ έχει λύση $u = 1 - x^4$. Το θεώρημα 1 δεν ισχύει στο $-1 \leq x \leq 1$ αφού η συνάρτηση u έχει μέγιστο στο $x = 0$. Το θεώρημα 2 παραβιάζεται στο διάστημα $[0,1]$ εφόσον $u''(0) = 0$.

Παίρνουμε την πιο γενική διαφορική ανίσωση

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0. \qquad (4)$$

Απλούστερα παραδείγματα δείχνουνε ότι μπορούμε να έχουμε έναν μοντελοποιημένο τύπο της αρχής μεγίστου. Για την εξίσωση: $u'' + u = 0$, η $u = \sin x$ είναι λύση και παίρνει το μέγιστό της στο $x = \frac{\pi}{2}$, η συνθήκη $h(x) \leq 0$ δεν αρκεί να αποδώσει την αρχή του μεγίστου. Παραδείγματος χάρη η διαφορική εξίσωση $u'' - u = 0$, η οποία έχει λύση την $u = -e^{x} - e^{-x}$, λαμβάνει το μέγιστό της στο $x = 0$ το -2. Πρέπει να δείξουμε ότι μία μη σταθερή λύση της σχέσης (4) με $h(x) \leq 0$ δε λαμβάνει μη αρνητικό μέγιστο σε εσωτερικό σημείο. Αν η αυστηρή διαφορική ανίσωση $(L+h)[u] > 0,\ h \leq 0$ ισχύει στο διάστημα (a,b), τότε η συνάρτηση u δεν παίρνει μη αρνητικό μέγιστο στο εσωτερικό του διαστήματος (a,b). Στην πραγματικότητα έχουμε $u' = 0,\ u'' \leq 0,\ hu \leq 0$ που έρχεται σε αντίφαση με την παραπάνω αυστηρή διαφορική ανίσωση. Μπορούμε να επεκτείνουμε το θεώρημα 1 και το θεώρημα 2 χωρίς να αλλάξει το επιχείρημα, επιλέγοντας α μεγάλο ώστε $(L+h)[z] > 0$. Η σταθερά α στην $e^{\alpha(x-c)} - 1$ (ή $e^{-\alpha(x-c)} - 1$, αν $d < c$) πρέπει να ικανοποιεί:

$$\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\left[1 - e^{-\alpha(x-c)}\right] > 0,$$

ή

$$\alpha^2 - \alpha g(x) + h(x)\left[1 - e^{\alpha(x-c)}\right] > 0,$$

εφόσον $h \leq 0$ αρκεί να επιλέξουμε α ώστε $\alpha^2 - \alpha|g(x)| + h(x) > 0.$ Αυτό μπορεί να γίνει αν οι συναρτήσεις $g(x),\ h(x)$ είναι φραγμένες.

Θεώρημα 3: **Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x)}$ ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση**

$$\boldsymbol{(L+h)[u] = u'' + gu' + hu \geq 0}, \qquad (4)$$

σε διάστημα $\boldsymbol{(a,b)}$ με $\boldsymbol{h(x) \leq 0}$ και αν οι συναρτήσεις $\boldsymbol{g,h}$ είναι φραγμένες σε κάθε κλειστό υποδιάστημα και αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ έχει μη αρνητική μέγιστη τιμή $\boldsymbol{M}$ σε εσωτερικό σημείο $\boldsymbol{c}$, τότε $\boldsymbol{u(x) = M}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{h(x)}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε η μόνη μη αρνητική σταθερά που ικανοποιεί την σχέση $\boldsymbol{(4)}$ είναι η $\boldsymbol{M = 0}$.

Θεώρημα 4: **Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι μη σταθερή λύση της διαφορικής ανίσωσης $\boldsymbol{(4)}$ που έχει πλευρικές παραγώγους στα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{h(x) \leq 0}$, $\boldsymbol{g,h}$ φραγμένες σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του διαστήματος $\boldsymbol{(a,b)}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ έχει μη αρνητικό μέγιστο στο $\boldsymbol{a}$ και αν η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) + (x-a)h(x)}$ κάτω φραγμένη στο $\boldsymbol{x = a}$, τότε $\boldsymbol{u'(a) < 0}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ έχει μη αρνητικό μέγιστο στο $\boldsymbol{b}$ και αν η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) + (b-x)h(x)}$ είναι άνω φραγμένη στο $\boldsymbol{x = b}$, τότε $\boldsymbol{u'(b) > 0}$.**

Ως επακόλουθο των παραπάνω θεωρημάτων έχουμε ότι αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ικανοποιεί την $\boldsymbol{(4)}$ στο διάστημα $\boldsymbol{(a,b)}$ με τη συνάρτηση $\boldsymbol{h(x) \leq 0}$, αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\boldsymbol{[a,b]}$ και αν $\boldsymbol{u(a) \leq 0, u(b) \leq 0}$, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x) < 0}$ στο διάστημα $\boldsymbol{(a,b)}$ εκτός αν $\boldsymbol{u \equiv 0}$.

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Ερευνούμε τη διαφορική ανίσωση

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0,\ a < x < b, \qquad (1)$$

χωρίς την απαίτηση η συνάρτηση $h(x)$ να είναι μη θετική. Έστω η συνάρτηση w που έχει δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$ και ικανοποιεί τις εξής απαιτήσεις:

(i) $w > 0$ στο διάστημα $[a, b]$, (2)

(ii) $(L+h)[w] \leq 0$ στο διάστημα (a, b). (3)

Ορίζουμε τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή $v = \frac{u}{w}$,

$(L+h)[u] = (L+h)[vw] = wv'' + (2w' + gw)v' + (L+h)[w]v \geq 0.$

Διαιρώντας με τη συνάρτηση $w > 0$ έχουμε

$$v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g\right)v' + \frac{1}{w}(L+h)[w]v \geq 0. \qquad (4)$$

Η ανίσωση (4) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (2), (3) δείχνει ότι η συνάρτηση $v = \frac{u}{w}$ ικανοποιεί τα θεωρήματα 3,4.

Το επιχείρημα αυτό βασίζεται στην ύπαρξη της συνάρτησης w που ικανοποιεί τις σχέσεις (2), (3). Πρέπει να δείξουμε ότι αν οι συναρτήσεις g, h είναι φραγμένες και αν το διάστημα $[a, b]$ είναι αρκούντως μικρό τότε η συνάρτηση w ικανοποιεί τις σχέσεις (2), (3).

Η συνάρτηση w δίνεται από τον τύπο

$$w = 1 - \beta(x-a)^2, \qquad (5)$$

όπου η σταθερά β προσδιορίζεται κατάλληλα. Για να δούμε αυτό, υπολογίζουμε:

$$(L+h)[w] = -2\beta\left[a + (x-a)g(x) + \frac{1}{2}(x-a)^2h(x)\right] + h(x). \qquad (6)$$

Από τη θεώρηση ότι οι συναρτήσεις g, h είναι κάτω φραγμένες υπάρχουν σταθερές G, H με $g \geq G, h \geq H$. Υποθέτουμε ότι a, b είναι τόσο κοντά ώστε: $1 + (x-a)G + \frac{1}{2}(x-a)^2H > 0$ για $a \leq x \leq b$.

Εφόσον η συνάρτηση $h(x)$ άνω φραγμένη επιλέγουμε β ώστε $\beta \geq \frac{1}{2}\left[\frac{h(x)}{1+(x-a)G+(x-a)^2}\right]$.

Εξαιτίας της σχέσης (6) $(L+h)[w] \leq 0$ στο διάστημα (a, b). Αν το μήκος $b - a$ είναι μικρό ώστε $\beta(b-a)^2 < 1, w > 0$, από τη σχέση (5) στο διάστημα $[a, b]$. Η συνάρτηση w με τις επιθυμητές απαιτήσεις μπορεί να κατασκευαστεί πάντα.

<u>Θεώρημα 5</u>: Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $(\boldsymbol{L+h})$ δίνεται από τη σχέση $(\mathbf{1})$ με $\boldsymbol{g(x)}$ κάτω φραγμένη συνάρτηση και $\boldsymbol{h(x)}$ φραγμένη συνάρτηση. Για οποιοδήποτε αρκούντως μικρό διάστημα $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ μια συνάρτηση $\boldsymbol{w}$ μπορεί να βρεθεί ικανοποιώντας τις σχέσεις $(\mathbf{2}), (\mathbf{3})$. Τότε αν $\boldsymbol{u}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $(\mathbf{1})$ στο διάστημα $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, η συνάρτηση $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{w}}$ ικανοποιεί τις αρχές μεγίστου όπως δόθηκαν στα θεωρήματα 3,4.

Το θεώρημα 5 δείχνει ότι μία συνάρτηση u που ικανοποιεί τη σχέση (1) δεν μπορεί να ταλαντωθεί τόσο γρήγορα. Αν ισχύει ότι η $u > 0$ μεταξύ των δύο μηδενικών $x = a$ και $x = b$ τότε η συνάρτηση $\frac{u}{w}$ έχει ένα θετικό μέγιστο ανάμεσά τους. Επομένως το θεώρημα 5 παραβιάζεται εκτός αν η $b - a$ μεταξύ των μηδενικών είναι τόσο μεγάλη ώστε το θεώρημα 5 να μην ισχύει.

Εμείς βρίσκουμε ότι η συνάρτηση u μπορεί να έχει το πολύ δύο μηδενικά (αν η συνάρτηση $u < 0$ ανάμεσα στα μηδενικά) σε οποιοδήποτε διάστημα (a, b) που ισχύει το θεώρημα 5. Αν η συνάρτηση u είναι λύση της $u'' + gu' + hu = 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο επιχείρημα και στις δύο συναρτήσεις u και $(-u)$ να βρούμε ότι η συνάρτηση u έχει το πολύ ένα μηδενικό στο εσωτερικό διάστημα (a, b) όπου το θεώρημα 5 ισχύει.

Έστω η συνάρτηση $r(x)$ λύση της διαφορικής εξίσωσης $r'' + gr' + hr = 0$. Υποθέτουμε ότι η $r \neq 0$ ταυτοτικά και ότι $r(a) = 0$. Από την παραπάνω παρατήρηση ξέρουμε ότι η συνάρτηση r δεν μπορεί να μηδενιστεί για κάποια απόσταση δεξιά του a. Αν η συνάρτηση r έχει μηδενικά στα δεξιά του a, σημειώνουμε το πρώτο με a^* και το καλούμε ως συζυγές σημείο του α.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι η συνάρτηση $r(x) > 0$ για $a < x < a^*$. Αν η συνάρτηση $w > 0$ στο διάστημα $[a, a^*]$ η συνάρτηση $\frac{r}{w}$ μηδενίζεται στο a και στο a^* και είναι θετική στο διάστημα (a, a^*). Επομένως έχει μέγιστο στο διάστημα (a, a^*). Από το θεώρημα 5, η συνάρτηση w δεν ικανοποιεί τη σχέση (3). Από την άλλη πλευρά, αν το b είναι οποιοδήποτε σημείο στο διάστημα (a, a^*), μπορεί να βρεθεί συνάρτηση w ώστε η συνάρτηση r/w να ικανοποιεί την αρχή μεγίστου του θεωρήματος 5. Για να το δούμε αυτό πρέπει η συνάρτηση $r(x)$ να είναι κάτω φραγμένη από έναν θετικό αριθμό σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[c, b]$ που περιέχεται στο διάστημα (a, a^*). Συμπερασματικά, για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$, η συνάρτηση $w(x) = r(x) + \varepsilon[2 - e^{\alpha(x-a)}]$ είναι θετική στο διάστημα $[a, b]$. Αν η σταθερά α επιλέγεται έτσι ώστε $(L + h)[2 - e^{\alpha(x-a)}] \leq 0$ στο διάστημα (a, b), τότε η w είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει το θεώρημα 5. Συνοψίζοντας έχουμε ότι αν a^* είναι συζυγές του a υπάρχει συνάρτηση $w > 0$ ώστε το θεώρημα 5 να ισχύει στο διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν $b < a^*$. Αν η συνάρτηση $r(x)$ δε μηδενίζεται δεξιά του a, ορίζουμε $a^* = \infty$ και το θεώρημα 5 ισχύει για κάθε διάστημα $[a, b]$.

Αν η συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι φραγμένη ή αν η συνάρτηση $g(x)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε δεν υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε το παραπάνω θεώρημα να ισχύει. Για παράδειγμα ας πάρουμε τη συνάρτηση $u = x sin\left(\frac{1}{x}\right)$ να ικανοποιεί την εξίσωση $u'' + x^{-4}u = 0$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση u μηδενίζεται στα σημεία $x = \frac{1}{n\pi}, n = 1,2, \dots$, και επομένως δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση $w > 0$ με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση u/w να ικανοποιεί την αρχή μεγίστου σε οποιοδήποτε από τα διαστήματα $[0, 1/n\pi]$, $n = 1,2, \dots$

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$u'' + gu' + hu = f, \qquad (1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(a) = \gamma_1, u'(a) = \gamma_2. \quad (2)$$

Οι συναρτήσεις f, g, h δίνονται στο διάστημα (a, b), όπου οι συναρτήσεις g, h είναι φραγμένες και γ_1, γ_2 σταθερές. Οποτεδήποτε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) στο διάστημα (a, b) είναι ορισμένη να ικανοποιεί τις συνθήκες (2) έχουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λυθεί.

Η ύπαρξη των λύσεων σε πρόβλημα αρχικών τιμών προέρχεται από τη γενική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η μοναδικότητα απορρέει από τη γενική αρχή μεγίστου.

Θεώρημα 6: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (1) στο διάστημα (a, b) και οι u_1, u_2 ικανοποιούν τις συνθήκες (2). Τότε $u_1 \equiv u_2$ στο διάστημα (a, b).

Απόδειξη: Ορίζουμε $u = u_1 - u_2$, $u'' + gu' + hu = 0$, $u(a) = u'(a) = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $u \neq 0$ στο διάστημα (a, b). Πρέπει να φτάσουμε σε αντίφαση. Από το θεώρημα 5 υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $w > 0$ συνάρτηση, ώστε το μέγιστο της συνάρτησης $\frac{u}{w}$ στο διάστημα $(a, a + \varepsilon)$ πρέπει να λαμβάνεται στα άκρα (όμοια η συνάρτηση $(-u)$ ικανοποιεί την εξίσωση). Επιπλέον σύμφωνα με το θεώρημα 5 το μέγιστο της συνάρτησης $(-\frac{u}{w})$ πρέπει να λαμβάνεται στα άκρα a ή $a + \varepsilon$. Επομένως είτε το μέγιστο είτε το ελάχιστο της συνάρτησης $\frac{u}{w}$ λαμβάνεται στο a.

Στο $x = a$: $\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'w - uw'}{w^2} = 0.$

Αφού η συνάρτηση $\frac{u}{w}$ ικανοποιεί το θεώρημα 4, η συνάρτηση $\frac{u}{w}$ είναι σταθερή. Αφού $u(a) = 0$, η σταθερά είναι μηδέν. Η συνάρτηση u επομένως είναι ταυτοτικά μηδενική στο διάστημα $[a, a + \varepsilon]$, $u(a + \varepsilon) = 0$, $u'(a + \varepsilon) = 0$. Πρέπει να επαναλάβουμε το επιχείρημα για να καταλήξουμε ότι η συνάρτηση $u \equiv 0$ στο διάστημα $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$, με ε το ίδιο αφού το μέγεθός του εξαρτάται μόνο από τα φράγματα των συναρτήσεων g, h στο διάστημα (a, b).

Πρέπει να εκτελέσουμε τη διαδικασία μόνο σε πεπερασμένο πλήθος για να δείξουμε τελικά ότι η συνάρτηση $u \equiv 0$ στο διάστημα (a, b).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Το πιο απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών αφορά τη λύση της εξίσωσης

$$u'' + gu' + hu = f(x), \quad (1)$$

στο διάστημα (a, b) με συνοριακές συνθήκες

$$u(a) = \gamma_1 \text{ και } u(b) = \gamma_2. \quad (2)$$

Η μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης (1) που ικανοποιούν και τις συνοριακές συνθήκες (2) μπορεί να προκύψει από τη χρήση της αρχής του μεγίστου. Η κατάσταση όμως εδώ δεν είναι τόσο εύκολη όπως στην περίπτωση του προβλήματος αρχικών τιμών. Η απλή εξίσωση: $u'' + u = 0$ έχει λύσεις $u_1 = \sin x$, $u_2 = 0$ για $0 \le x \le \pi$. Και οι δύο λύσεις ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $u(0) = u(\pi) = 0$. Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει ένα από τα πιο απλά θεωρήματα μοναδικότητας για τα προβλήματα συνοριακών τιμών.

Θεώρημα 7: Έστω οι συναρτήσεις $\boldsymbol{u_1(x), u_2(x)}$ λύσεις της σχέσης $(\mathbf{1})$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $(\mathbf{2})$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{h(x) \le 0}$ στο διάστημα $(\boldsymbol{a, b})$, τότε $\boldsymbol{u_1 \equiv u_2}$.

Απόδειξη: Ας είναι η συνάρτηση $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Τότε η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση

$$u'' + gu' + hu = 0, \tag{3}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Από το θεώρημα 3 ξέρουμε ότι $u(x) \le 0$ στο διάστημα (a, b). Αφού η συνάρτηση $-u(x)$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες εφαρμόζοντας το θεώρημα 3 στην $-u(x)$ καταλήγουμε ότι $-u \le 0$ στο διάστημα (a, b). Άρα η συνάρτηση $u = 0$ στο διάστημα (a, b).

Θεωρούμε τώρα πιο γενικά προβλήματα συνοριακών τιμών, ένα από τα οποία περιέχει τις συνοριακές συνθήκες (2) σαν ειδική περίπτωση. Έστω ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες τις

$$\begin{cases} -u'(a)cos\theta + u(a)sin\theta = \gamma_1, \\ u'(b)cos\varphi + u(b)sin\varphi = \gamma_2. \end{cases} \tag{4}$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \theta, \varphi$ είναι σταθερές με $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Οι συνοριακές συνθήκες (4) ανάγονται στις συνοριακές συνθήκες (2) όταν $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Θεώρημα 8: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\boldsymbol{u_1(x)}$ και $\boldsymbol{u_2(x)}$ είναι δύο λύσεις της εξίσωσης $(\mathbf{1})$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $(\mathbf{4})$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{h(x) \le 0}$ στο διάστημα $(\boldsymbol{a, b})$, τότε $\boldsymbol{u_1 \equiv u_2}$ εκτός αν $\boldsymbol{h \equiv 0, \varphi = \theta = 0}$, που σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις $\boldsymbol{u_1, u_2}$ διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Απόδειξη: Όπως πριν ορίζουμε τη συνάρτηση $u = u_1 - u_2$. Τότε η u ικανοποιεί την σχέση(3) και τις συνθήκες:

$$\begin{cases} -u'(a)cos\theta + u(a)sin\theta = 0, \\ u'(b)cos\varphi + u(b)sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Η συνάρτηση $u \equiv M \ne 0$ σταθερά ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες αν και μόνο αν $h \equiv 0, \varphi = \theta = 0$. Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u είναι μη σταθερή λύση που είναι θετική σε κάποιο σημείο θα φτάσουμε σε άτοπο. Από το θεώρημα 3 η συνάρτηση u λαμβάνει το μέγιστό της στα a ή b. Έστω στο a εφαρμόζουμε το θεώρημα 4, το οποίο επιβεβαιώνει ότι $u'(a) < 0$. Αφού $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ και $u(a) > 0$ η πρώτη συνθήκη στη σχέση (5) παραβιάζεται. Όμοια αν το μέγιστο ήταν στο b η δεύτερη συνθήκη στο (5) θα παραβιαζόταν. Συμπεραίνουμε ότι οποιαδήποτε μη σταθερή λύση δεν είναι ποτέ θετική.

Αντίστοιχα το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζουμε στη συνάρτηση $(-u)$ και δείχνουμε ότι η συνάρτηση u δεν μπορεί να είναι αρνητική. Άρα $u \equiv 0$ στο διάστημα $[a, b]$. Μπορούμε να εδραιώσουμε τη μοναδικότητα του προβλήματος συνοριακών τιμών χωρίς τον περιορισμό ότι η συνάρτηση $h(x)$ να είναι μη θετική. Παραδείγματος χάρη η διαφορική εξίσωση $u'' + u = 0$ με συνοριακές συνθήκες $u(a) = u(b) = 0$ έχει τη λύση $u \equiv 0$ όσο $b - a < \pi$. Αν $b - a = \pi$ το αποτέλεσμά μας είναι λάθος. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα σε πολλές περιπτώσεις προκύπτει από εφαρμογή της γενικής αρχής μεγίστου όπως δίνεται στο θεώρημα 5.

Θεώρημα 9: **Έστω ότι οι συναρτήσεις $\boldsymbol{u_1}(\boldsymbol{x})$ και $\boldsymbol{u_2}(\boldsymbol{x})$ είναι δύο λύσεις της εξίσωσης $(\mathbf{1})$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $(\mathbf{2})$. Αν $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}^*$, όπου $\boldsymbol{a}^*$ είναι το συζυγές σημείο του $\boldsymbol{a}$, τότε $\boldsymbol{u_1} \equiv \boldsymbol{u_2}$.**

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι ουσιαστικά επανάληψη της απόδειξης του θεωρήματος 7, απλώς χρησιμοποιείται η αρχή του μεγίστου όπως δίνεται στο θεώρημα 5.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω ότι αναζητούμε λύση της

$$(L + h)[u] = u'' + gu' + hu = f(x), \ a < x < b, \qquad (1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(a) = \gamma_1, u(b) = \gamma_2. \qquad (2)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να βρούμε μία ακριβή λύση Συχνά είναι επιθυμητό να προσεγγίσουμε μία λύση που να έχει κάποιο σφάλμα, το οποίο θα είναι ασφαλώς φραγμένο. Τέτοια προσέγγιση είναι ισοδύναμη με τον ορισμό των άνω και κάτω φραγμάτων για τις τιμές της λύσης.

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις f, g, h είναι φραγμένες και ότι η συνάρτηση $h \leq 0$ στο διάστημα (a, b). Κάτω από αυτές τις συνθήκες είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε την αρχή μεγίστου στο θεώρημα 3, να βρούμε κάποιο φράγμα για μια λύση της συνάρτησης u χωρίς να γνωρίζουμε ξεκάθαρα τη μορφή της u. Έστω ότι βρίσκουμε συνάρτηση $z_1(x)$ με τις εξής ιδιότητες:

$$(L+h)[z_1] \leq f(x),\ a < x < b, \tag{3}$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1,\ z_1(b) \geq \gamma_2. \tag{4}$$

Τότε η συνάρτηση $v_1(x) \equiv u(x) - z_1(x)$ ικανοποιεί την $(L+h)[v_1] \geq 0$ και $v_1(a) \leq 0,\ v_1(b) \leq 0$. Από την αρχή μεγίστου και εφαρμόζοντας το θεώρημα 3 στη συνάρτηση v_1 έχουμε ότι $v_1 \leq 0$ στο διάστημα $[a, b]$, $u(x) \leq z_1(x)$ για $a \leq x \leq b$. Η συνάρτηση $z_1(x)$ είναι άνω φράγμα της συνάρτησης $u(x)$.

Όμοια βρίσκουμε ως κάτω φράγμα την συνάρτηση $z_2(x)$ με τις ιδιότητες $(L+h)[z_2] \geq f(x),\ z_2(a) \leq \gamma_1,\ z_2(b) \leq \gamma_2$. Εφαρμόζουμε την αρχή του μεγίστου στην συνάρτηση $z_2(x) - u(x)$ παίρνουμε ότι $u(x) \geq z_2(x)$ για $a \leq x \leq b$.

Τέτοιες συναρτήσεις z_1, z_2 εύκολα κατασκευάζονται. Χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές, ρητές ή εκθετικές συναρτήσεις όπως παραδείγματος χάρη την συνάρτηση $z_1(x) = A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\}$ με α, A τέτοια ώστε οι σχέσεις (3), (4) να ικανοποιούνται. Επιλέγουμε μεγάλο α ώστε $(L+h)\left[e^{-\alpha(x-a)}\right] = (\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)} > 0$ για $a \leq x \leq b$.

Ορίζουμε σταθερά k με την εξής σχέση: $k = min[(\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)}]$ και $A = max\left[\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{k} max\{-f(x)\}, 0\right]$, $a \leq x \leq b$. Το A είναι το μέγιστο των αριθμών αυτών. Η συνάρτηση $z_1(x) = A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\}$ τότε ικανοποιεί τις σχέσεις (3), (4).

Για να βρούμε κάτω φράγμα επιλέγουμε $z_2(x) = B\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\}$ όπου α έχει επιλεγεί όπως για τη συνάρτηση $z_1(x)$ και $B = min\left[\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{k} max\{-f(x)\}, 0\right]$. Τότε $B\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\} \leq u(x) \leq A\{2 - e^{-\alpha(x-a)}\}$ για $a \leq x \leq b$.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$|u(x)| \leq 2\, max\left[|\gamma_1|, |\gamma_2|, \frac{1}{k} max\,| f(x)\right], \tag{5}$$

για $a \leq x \leq b$.

Η μοναδικότητα του θεωρήματος για προβλήματα συνοριακών τιμών με συνάρτηση $h \leq 0$ προκύπτει από τη σχέση (5) αφού $f \equiv 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ συνεπάγεται ότι $u \equiv 0$ για $a \leq x \leq b$.

Αν η συνάρτηση u είναι λύση του προβλήματος (1), (2) και t η λύση του προβλήματος: $t'' + gt' + ht = c(x),\ t(\alpha) = \delta_1,\ t(b) = \delta_2$, τότε η συνάρτηση $u - t$ ικανοποιεί :

$$(u-t)'' + g(u-t) + h(u-t) = f - c,\ u(a) - t(a) = \gamma_1 - \delta_1,\ u(b) - t(b) = \gamma_2 - \delta_2.$$

Η ανίσωση (5) δείχνει ότι

$|u(x)-t(x)| \leq 2max[|\gamma_1-\delta_1|, |\gamma_2-\delta_2|, \frac{1}{k}max|f(x)-c(x)|]$. Επιπλέον αν οι ποσότητες $|\gamma_1-\delta_1|$, $|\gamma_2-\delta_2|$, $|f(x)-c(x)|$ είναι μικρές, τότε η $|u(x)-t(x)|$ είναι μικρή για όλα τα x στο διάστημα (α, b).

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, λέμε ότι η λύση u του προβλήματος (1), (2) εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τη συνάρτηση $f(x)$ και στις σταθερές γ_1, γ_2.

Παράδειγμα: $u''-ux=0, u(0)=u(1)=1$ για $0<x<1$. Εκτιμούμε την τιμή στο $x=\frac{1}{2}$ της λύσης της εξίσωσης.

Θα επιλέξουμε πολυώνυμα για τη σύγκριση συναρτήσεων z_1, z_2. Έχουμε $z_1=x$, $z_2=x-\beta x(1-x)$, $z_1(0)=0$, $z_1(1)=1, z_2(0)=0$, $z_2(1)=1$ και

$(L+h)[z_1] \leq 0, (L+h)[z_2]=-x^2+\beta[2+x^2(1-x)] \geq 0$ για $\beta \geq \frac{1}{2}$. Για $\beta=\frac{1}{2}$ μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε ότι $\frac{1}{2}(x+x^2) \leq u(x) \leq x$, στο $x=\frac{1}{2}$: $\frac{3}{8} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}$.

Ερχόμαστε τώρα στο πρόβλημα προσέγγισης των λύσεων για πιο γενικά προβλήματα συνοριακών τιμών με δύο φράγματα.

Έστω η συνάρτηση u να είναι λύση της εξίσωσης:

$$(L+h)[u] \equiv u''+gu'+hu=f(x), \ a<x<b, \tag{6}$$

που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες
$$\begin{cases} -u'(a)cos\theta+u(a)sin\theta=\gamma_1, \\ u'(b)cos\varphi+u(b)sin\varphi=\gamma_2. \end{cases} \tag{7}$$

Οι θ, φ είναι σταθερές που προσδιορίζονται. Έστω $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, h(x) \leq 0$.

Κατά αναλογία με τη μελέτη του απλούστερου προβλήματος συνοριακών τιμών αναζητούμε συνάρτηση $z_1(x)$ με τις ιδιότητες:

$$(L+h)[z_1] \leq f(x) \ \text{για} \ a<x<b\,, \tag{8}$$

$$\begin{cases} -z_1'(a)cos\theta+z_1(a)sin\theta \geq \gamma_1, \\ z_1'(b)cos\varphi+z_1(b)sin\varphi \geq \gamma_2. \end{cases} \tag{9}$$

Τότε η συνάρτηση $v_1 \equiv u-z_1$ ικανοποιεί:

$$(L+h)[v_1] \geq 0, \qquad \begin{cases} -v_1'(a)cos\theta+v_2 sin\theta \leq 0, \\ v_1'(b)cos\varphi+v_1(b)sin\varphi \leq 0. \end{cases}$$

Εάν η συνάρτηση v_1 είναι θετική από θεώρημα 3 το μη αρνητικό μέγιστο πραγματοποιείται στο a ή b. Αν λαμβάνεται στο a, έχουμε $v_1(a)>0, v_1{}'(a) \leq 0$. Αφού $-v_1'(a)cos\theta+v_1(a)sin\theta \leq 0$ αυτό θα γίνει μόνο αν $\theta=0$ και $v_1'(a)=0$. Από το θεώρημα 4 η συνάρτηση $v_1(x)$ είναι μία θετική σταθερά και έτσι συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $h \equiv 0$.

Όμοια η συνάρτηση v_1 δεν έχει θετικό μέγιστο στο b εκτός αν $\varphi=0$ και $h \equiv 0$, αφού $v_1'(b)cos\varphi+v_1(b)sin\varphi \leq 0$. Συνοψίζοντας έχουμε (εκτός αν τα θ και φ είναι μηδέν και $h \equiv 0, v_1(x) \leq 0$) ότι $u(x) \leq z_1(x)$.

Αντίστοιχα αν η συνάρτηση z_2 ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$(L+h)[z_2] \geq f(x), \tag{10}$$

$$\begin{cases} -z_2'(a)cos\theta + z_2(\alpha)sin\theta \le \gamma_1, \\ z_2'(b)cos\varphi + z_2(b)sin\varphi \le \gamma_2. \end{cases} \tag{11}$$

και αν είτε η συνάρτηση h δεν είναι τετριμμένα μηδέν είτε θ και φ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, τότε $u(x) \ge z_2(x)$.

<u>Θεώρημα 10:</u> Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x)}$ να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\boldsymbol{6})$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $(\boldsymbol{7})$ και $\boldsymbol{h \le 0}$ με $\boldsymbol{0 \le \varphi, \theta \le \frac{\pi}{2}}$. Έστω ότι δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα όλες οι ισότητες $\boldsymbol{h \equiv 0, \theta = \varphi = 0}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{z_1(x)}$ ικανοποιεί τις συνθήκες $(\boldsymbol{8}), (\boldsymbol{9})$ και αν η συνάρτηση $\boldsymbol{z_2(x)}$ ικανοποιεί τις συνθήκες $(\boldsymbol{10}), (\boldsymbol{11})$ τότε

$$\boldsymbol{z_2(x) \le u(x) \le z_1(x)}.$$

Ειδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του θεωρήματος μπορούν εύκολα να βρεθούν είτε ως πολυώνυμα, είτε εκθετικές κλπ. Ας δούμε την εφαρμογή του θεωρήματος 10 σε ένα παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα:</u> Βρείτε άνω και κάτω φράγματα στο $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ για τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$\boldsymbol{u'' - xu = 0,\ 0 < x < 1,\ -u'(0) + u(0) = 0,\ u(1) = 1}$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση $z_1 = \frac{1}{2}(1+x)$. Τότε $(L+h)[z_1] = -\frac{1}{2}x(1+x) \le 0$,

$$-z_1'(0) + z_1(0) = 0, \qquad z_1(1) = 1.$$

Παίρνουμε τη συνάρτηση $z_2 = e^{x-1}$. Τότε $(L+h)[z_2] = (1-x)e^{x-1} \ge 0$,

$$-z_2'(0) + z_2(0) = 0, \qquad z_2(1) = 1.$$

Επομένως $e^{x-1} \le u(x) \le \frac{1}{2}(1+x)$ και στο $x = \frac{1}{2}$ μετά από υπολογισμούς έχουμε $0.6065 \le u(\frac{1}{2}) \le 0.7500$.

Μπορούμε να βρούμε πιο ακριβή φράγματα με πιο κατάλληλες συναρτήσεις z_1, z_2. Φυσικά αυτό ήταν ένα απλό παράδειγμα με απλές σχετικά συναρτήσεις. Αυτό δηλώνει ότι τέτοιες συναρτήσεις z_1, z_2 δεν είναι μοναδικές αλλά μπορεί ο αναγνώστης να τις επιλέξει κατάλληλα ώστε να λάβει φράγματα για τη λύση $u(x)$.

Έστω ότι $h \le 0, 0 \le \varphi, \theta \le \frac{\pi}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας τις συνοριακές συνθήκες (7) με (-1) αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να κάνουμε τα $cos\theta \ge 0$, $sin\theta \ge 0$. Θεωρούμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας $-\frac{\pi}{2} \le \theta, \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Με χρήση της γενικευμένης αρχής μεγίστου, υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $w(x) > 0$ που ικανοποιεί τις ανισότητες

$$(L+h)[w] \le 0 \text{ στο διάστημα } (a,b), \tag{12}$$

$$\begin{cases} -w'(a)cos\theta + w(a)sin\theta \ge 0, \\ w'(b)cos\varphi + w(b)sin\theta \ge 0. \end{cases} \tag{13}$$

Θέτουμε $v = \frac{u}{w}$ και η συνάρτηση v πρέπει να ικανοποιεί:

$$v'' + \left(\frac{2w'}{w} + g\right)v' + \frac{1}{w}(L+h)[w]v = \frac{f}{w},$$

$$\begin{cases} -v'(a)w(a)cos\theta + v(a)[-w'(a)cos\theta + w(a)sin\theta] = \gamma_1, \\ v'(b)w(b)cos\varphi + v(b)[w'(b)cos\varphi + w(b)sin\theta] = \gamma_2. \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτές τις λύσεις με τη μορφή των σχέσεων (6), (7):

$$(L+H)[v] = v'' + Gv' + Hv = \frac{f}{w}, \tag{14}$$

$$\begin{cases} -v'(a)w(a)cos\bar{\theta} + v(a)sin\bar{\theta} = \overline{\gamma_1}. \\ v'(b)w(b)cos\bar{\varphi} + v(b)sin\bar{\varphi} = \overline{\gamma_2}. \end{cases} \tag{15}$$

Όπου $H = (L+h)[w]/w \ \leq 0, G = \frac{2w'}{w} + g,$

$$tan\bar{\theta} = \frac{1}{w(a)cos\theta}[-w'(a)cos\theta + w(a)sin\theta] \geq 0,$$

$$tan\bar{\varphi} = \frac{1}{w(b)cos\varphi}[w'(b)cos\varphi + w(b)sin\varphi] \geq 0,$$

$$\overline{\gamma_1} = \frac{\gamma_1 cos\bar{\theta}}{w(a)cos\theta}, \qquad \overline{\gamma_2} = \frac{\gamma_2 cos\bar{\varphi}}{w(b)cos\varphi}.$$

Από τη σχέση (13) μπορούμε να επιλέξουμε $\bar{\theta}, \bar{\varphi}$ από 0 έως $\frac{\pi}{2}$, $0 \leq \bar{\theta}, \bar{\varphi} \leq \frac{\pi}{2}$. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ θέτουμε $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2}$ και αν $\varphi = \frac{\pi}{2}$ θέτουμε $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$.

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $w(x) > 0$ στο διάστημα $[a, b]$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (12), (13). Αν οι συναρτήσεις z_1, z_2 ικανοποιούν τις σχέσεις (8), (9), (10), (11) αντίστοιχα, τότε οι συναρτήσεις $\frac{z_1}{w}, \frac{z_2}{w}$ ικανοποιούν τις ανάλογες συνθήκες αντίστοιχα στην εξίσωση (14) με τις συνοριακές συνθήκες (15). Επομένως από το θεώρημα 10 έχουμε τις ανισότητες:

$$\frac{z_2(x)}{w(x)} \leq \frac{u(x)}{w(x)} \leq \frac{z_1(x)}{w(x)}, \quad \text{εκτός αν } \theta = \varphi = 0 \text{ και } H \equiv 0.$$

Αυτή συνθήκη ισχύει όταν οι ανισώσεις (12), (13) είναι εξισώσεις. Εάν η συνάρτηση $w(x) \geq 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις (12), (13) αλλά δεν είναι όλες οι ανισώσεις εξισώσεις έχουμε φράγματα όπως πριν:

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x). \tag{16}$$

Αν η συνάρτηση w ικανοποιεί τις σχέσεις (12), (13) μπορούμε να προσθέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο της w στη λύση της συνάρτησης u στο πρόβλημα (6), (7) για να πάρουμε άλλη λύση. Η λύση δεν είναι μοναδική (δεν υπάρχει, βέβαια, λύση πάντα), αλλά αν υπάρχει τουλάχιστον μία, τότε υπάρχουν πολλές, οι οποίες ικανοποιούν όλες την ανισότητα (16).

Αν η ανισότητα (16) ισχύει σαν λύση για το πρόβλημα (6), (7), τότε η λύση w της εξίσωσης

$$(L+h)[w] = 0 \text{ στο διάστημα } (a, b), \tag{17}$$

που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες: $\begin{cases} -w'(a)cos\theta + w(a)sin\theta = 1, \\ w'(b)cos\varphi + w(b)sin\varphi = 1, \end{cases}$ (18)

πρέπει να είναι μη αρνητική. Αυτό είναι φανερό αν επιλέξουμε τη συνάρτηση $z_2 \equiv 0$. Αν η συνάρτηση $w = 0$ σε εσωτερικό σημείο, τότε $w' = 0$ εκεί. Η μοναδικότητα του θωρήματος για προβλήματα αρχικών τιμών εμπεριέχει ότι η συνάρτηση $w = 0$, που έρχεται σε αντίφαση με τις συνοριακές συνθήκες (18). Άρα η συνάρτηση w δεν μπορεί να μηδενιστεί σε εσωτερικό σημείο. Αν μηδενιστεί η w σε οποιοδήποτε άκρο, έστω στο a, τότε η συνθήκη (18) γίνεται $w'(a)cos\theta = -1$ και η μη αρνητικότητα της συνάρτησης w συνεπάγεται ότι $w'(a) \geq 0$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση. Επιπλέον $w(a) > 0$, $w(b) > 0$. Επομένως $w > 0$ στο διάστημα $[a, b]$.

Θεώρημα 11: Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ η λύση του προβλήματος $(6), (7)$ με $-\frac{\pi}{2} \leq \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\varphi} \leq \frac{\pi}{2}$. Έστω συναρτήσεις $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}$ που ικανοποιούν τις ανισότητες $(8), (9)$ και $(10), (11)$ αντίστοιχα. Τότε τα φράγματα

$$\boldsymbol{z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)}, \tag{19}$$

ισχύουν στο διάστημα $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, αν και μόνο αν υπάρχει θετική συνάρτηση $\boldsymbol{w}$ στο διάστημα $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ που ικανοποιεί τις ανισότητες $(12), (13)$ με τρόπο ώστε όχι όλες οι ανισότητες $(12), (13)$ να είναι ισότητες.

Αν η $h \leq 0$, $0 \leq \theta, \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, τότε $w = 1$ ικανοποιεί τιςσχέσεις (12), (13) και το θεώρημα 10 προκύπτει άμεσα. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση w δεν εμφανίζεται στις ανισότητες (19). Για αυτό θα δούμε το επόμενο θεώρημα που περιορίζει τη συνάρτηση w και παρέχει συνθήκες για τις συναρτήσεις z_1, z_2 που εγγυώνται ότι αποτελούν άνω και κάτω φράγματα.

Θεώρημα 12: Έστω συναρτήσεις $\boldsymbol{z_1(x)}, \boldsymbol{z_2(x)}$ να ικανοποιούν τις ανισότητες $(8), (9)$ και $(10), (11)$ αντίστοιχα με τρόπο ώστε η ισότητα δεν ισχύει σε όλες τις συνθήκες. Έστω $\boldsymbol{g(x)}$ κάτω φραγμένη σε κάθε διάστημα $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ και άνω φραγμένη σε κάθε διάστημα $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$ με $\boldsymbol{a < c < b}$. Έστω $\boldsymbol{u(x)}$ λύση του προβλήματος $(6), (7)$. Τότε τα φράγματα

$$\boldsymbol{z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)}, \tag{20}$$

ισχύουν αν και μόνο αν $\boldsymbol{z_2(x) \leq z_1(x)}$ για $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$.

Απόδειξη: Αν η σχέση (20) ισχύει, τότε προφανώς $z_2(x) \leq z_1(x)$. Έστω η διαφορά $z_1(x) - z_2(x)$ μη αρνητική και πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση (20) ισχύει. Αν η συνάρτηση $q(x) \equiv z_1(x) - z_2(x)$ είναι αυστηρά θετική στο διάστημα $[a, b]$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τη συνάρτηση q σαν τη συνάρτηση w στο θεώρημα 11. Όλες οι απαιτήσεις τηρούνται και η σχέση (20) ισχύει. Χρειάζεται μόνο να δούμε αν $q \equiv 0$ στο διάστημα $[a, b]$. Σύμφωνα με τις σχέσεις (8), (9), (10), (11) η συνάρτηση q ικανοποιεί τις ανισότητες

$$(L + h)[q] \leq 0, \tag{21}$$

$$\begin{cases} -q'(a)cos\theta + q(a)sin\theta \geq 0, \\ -q'(b)cos\varphi + q(b)sin\varphi \geq 0, \end{cases} \tag{22}$$

όπου η ισότητα δεν μπορεί να ισχύει σε όλες τις συνθήκες (21), (22). Υποθέτουμε ότι $q(c) = 0$ σε ένα εσωτερικό σημείο c. Τότε η συνάρτηση q έχει ελάχιστο στο c και $q'(c) = 0$.

Από το θεώρημα 6 η συνάρτηση $q \equiv 0$. Η ισότητα ισχύει σε όλες τις συνθήκες (21), (22).

Η μόνη πιθανότητα που έμεινε είναι $q > 0$ στο διάστημα (a, b), αλλά $q = 0$ στο άκρο του, για παράδειγμα στο $x = a$. Από το θεώρημα 5 $q'(a) > 0$. Η πρώτη ανισότητα στη σχέση (22) δεν ισχύει εκτός αν $\theta = \frac{\pi}{2}$. Όμοια αν η συνάρτηση q μηδενίζεται στο b, τότε

$\varphi = \frac{\pi}{2}$. Αν η συνάρτηση q μηδενίζεται σε ένα ή και στα δύο άκρα, τότε αυτό δεν ικανοποιεί τις συνθήκες που απαιτούνται για τη συνάρτηση w στο θεώρημα 11. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι είτε όλες οι εξισώσεις στις σχέσεις (21), (22) ισχύουν είτε μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $w(x)$ θετική στο διάστημα $[a,b]$ που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βοηθητική συνάρτηση στο θεώρημα 11. Θεωρούμε την περίπτωση $q(b) = 0$ και $q(a) > 0$. Πρέπει $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Κατασκευάζουμε την συνάρτηση $r(x)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$(L+h)[r] = 0, r(a) = cos\theta, r'(a) = sin\theta$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $v(x) = \frac{r(x)}{q(x)}$ για $a \leq x \leq b$

$$v(a) \geq 0 \text{ και } v'(a) = \frac{q(a)r'(a) - r(a)q'(a)}{[q(a)]^2} = \frac{q(a)sin\theta - q'(a)cos\theta}{[q(a)]^2} \geq 0.$$

Αφού $(L+h)[r] = 0$ και $(L+h)[q] \leq 0$ η συνάρτηση v ικανοποιεί μιας δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση με την προϋπόθεση η v να είναι μη θετική. Σύμφωνα με τα θεωρήματα 3,4 αν τα εφαρμόσουμε σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του τύπου $[a,c]$ είτε $v(c) > v(a)$ και $v'(c) > 0$ είτε $v(x) = v(a)$ σε ολόκληρο υποδιάστημα $[a,c]$. Σε κάθε περίπτωση $r(x) > 0$ για x στο διάστημα (a,b). Πρέπει επίσης να δείξουμε ότι $r(b) > 0$.

Αν $v(x) \equiv v(a)$ στο διάστημα $[a,b]$, η συνάρτηση q είναι ανάλογη με τη συνάρτηση r. Επομένως $(L+h)[q] = 0$ και

$$-q'(a)cos\theta + q'(a)sin\theta = 0.$$

Αφού η ισότητα δεν ισχύει σε όλες τις συνθήκες (21), (22) συνεπάγεται ότι $q(b) > 0$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση.

Για κάποιον αριθμό c στο διάστημα (α,b) πρέπει να έχουμε $v(c) > v(a) \geq 0$ και $u'(x) > 0$ για $x \geq c$. Τώρα $v'(x) = \frac{r'q - q'r}{q^2}$. Θέτουμε $\psi(x) \equiv r'q - q'r$ και βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση r και τη διαφορική ανίσωση για τη συνάρτηση q:

$$\psi'(x) + g\psi(x) = -r(L+h)[q] \geq 0.$$

Εάν $g \leq M$ στο διάστημα $[c,b]$, βλέπουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x} log\psi \geq -M$,

$$\psi(x) \geq \psi(c)e^{-M(x-c)},$$

πιο συγκεκριμένα στο $x = b$: $\psi(b) \geq \psi(c)e^{-M(b-c)} > 0.$

Αφού $\psi(x) \equiv r'q - q'r$ και $q(b) = 0, q'(b) < 0$ συνεπάγεται ότι $r(b) > 0$. Έχουμε δείξει ότι $r > 0$ σε όλο το διάστημα $(a,b]$. Επιπλέον $(L+h)[r] = 0$ και $r'(a)cos\theta + r(a)sin\theta = 0$.

Εφόσον $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $r'(b)cos\varphi + r(b)sin\varphi = r(b) > 0$.

Η συνάρτηση $w(x) = q(x) + r(x)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος 11. Αν $q(a) = 0$ και $q(b) > 0$ δείχνουμε αμέσως ότι η λύση της $(L+h)[s] = 0, s(b) = cos\varphi, s'(b) = -sin\varphi$ είναι θετική στο διάστημα $[a,b)$ ώστε η $w = q + s$ να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 11. Τελικά αν $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ και $q(a) = q(b) = 0$ βρίσκουμε ότι $r > 0$ εκτός από το $x = a$ και $s > 0$ εκτός από το $x = b$, άρα η συνάρτηση $w = r + s$ ικανοποιεί τις συνθήκες θεωρήματος 11.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Στην προηγούμενη παράγραφο συζητήσαμε τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών. Δείξαμε ότι υπάρχει το πολύ μία λύση της εξίσωσης

$$(L+h)[u] = u'' + gu' + hu = f(x) \text{ για } x > a, \tag{1}$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $u(a) = \gamma_1, u'(a) = \gamma_2.$ (2)

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι συνήθως μη εφικτό να λύσουμε επακριβώς το πρόβλημα αρχικών τιμών. Επιπλέον είναι σημαντικό να μπορούμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση και να φράξουμε το σφάλμα που θα προκύψει από την προσέγγιση αυτή. Εμείς πρέπει να το κάνουμε αυτό κάτω από τη θεώρηση ότι η συνάρτηση $h(x) \leq 0$ στο διάστημα $[\alpha, b]$ στο οποίο η λύση του προβλήματος $(1),(2)$ θα προσεγγιστεί.

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $z_1(x)$ με τις προϋποθέσεις:

$$(L+h)[z_1] \geq f(x) \text{ για } a \leq x \leq b, \tag{3}$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1, z_1'(a) \geq \gamma_2. \tag{4}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $v_1(x) \equiv z_1(x) - u(x).$

Έχουμε $(L+h)[v_1] \geq 0, v_1(a) \geq 0, {v_1}'(a) \geq 0.$

Αφού $v_1(a) \geq 0$ η συνάρτηση v_1 έχει μη αρνητικό μέγιστο σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, x_0]$ του διαστήματος $[a, b]$. Από την αρχή του μεγίστου όπως δίνεται στο θεώρημα 3, αυτό το μέγιστο λαμβάνεται είτε στο a είτε στο x_0. Αφού ${v_1}'(a) \geq 0$ καταλήγουμε επιπρόσθετα από το θεώρημα 4 ότι το μέγιστο δεν λαμβάνεται στο a εκτός αν η συνάρτηση v_1 είναι συνεχής στο διάστημα (a, x_0). Το θεώρημα 3 δείχνει ότι για κάθε $x_0 > a$ έχουμε :

$$v_1(x_0) \geq v_1(a), \tag{5}$$
$$v_1'(x_0) \geq 0. \tag{6}$$

Η ανισότητα (5) με το x στη θέση του x_0 δηλώνει ότι

$$u(x) \leq \gamma_1 + z_1(x) - z_1(a) \text{ για } x \geq a. \tag{7}$$

$$u'(x) \leq z_1'(x) \text{ για } x \geq a. \tag{8}$$

Αφού $z_1(a) - \gamma_1(a) \geq 0,$ η ανισότητα (7) εμπεριέχει ότι $u(x) \leq z_1(x).$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $z_1(x) - [z_1(a) - \gamma_1]$ ικανοποιεί τις συνθήκες $(3),(4)$ αλλά είναι ισοδύναμη της συνάρτησης u στο $x = a$. Η ανισότητα $u(x) \leq z_1(x)$ με τη συνάρτηση $z_1(x)$ να αντικαθίσταται από την $z_1(x) - [z_1(a) - \gamma_1]$ είναι ουσιαστικά η σχέση (7) ξανά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας αντικαθιστούμε την (7) από μία πιο απλή ανισότητα $u(x) \leq z_1(x).$

Κάτω φράγματα μπορούν να βρεθούν με παρόμοιο τρόπο. Έστω ότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $z_2(x)$ ώστε οι ανισότητες

$$(L+h)[z_2] \leq f(x) \text{ για } a \leq x \leq b, \tag{9}$$

$$z_2(a) \leq \gamma_1, z_2'(a) \leq \gamma_2, \tag{10}$$

ισχύουν. Τότε από τα θεωρήματα 3,4 βρίσκουμε ότι $u(x) \geq \gamma_1 + z_2(x) - z_2(a)$ και $u'(x) \geq {z_2}'(x).$ Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πρώτη ανισότητα από την $u(x) \geq z_2(x)$ και έτσι καταλήγουμε στο επόμενο αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα 13</u>: **Εάν η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x)}$ είναι λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{(1)}$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{(2)}$ και αν οι συναρτήσεις $\boldsymbol{z_1(x), z_2(x)}$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\boldsymbol{(3),(4)}$ και $\boldsymbol{(9),(10)}$ αντίστοιχα τότε**

$$\boldsymbol{z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x),} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{z_2'(x) \leq u'(x) \leq z_1'(x).} \tag{12}$$

Προσέχουμε ότι οι ανισότητες $(3),(9)$ είναι οι αντίστροφες από εκείνες που απαιτούνται για άνω και κάτω φράγματα στα προβλήματα συνοριακών τιμών. Αν οι συναρτήσεις $z_1(x), z_2(x)$ όπως περιγράφτηκαν επάνω μπορούν να βρεθούν, τότε οι ανισότητες (11), (12) δείχνουν ότι συναρτήσεις $u(x), u'(x)$ προσεγγίζονται από αυτές τις συναρτήσεις. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να φτιαχτεί χωρίς ειδική γνώση για τη λύση u. Η ακρίβεια της προσέγγισης βασίζεται στο πόσο καλά επιλέγουμε τις συναρτήσεις z_1, z_2.

<u>Παράδειγμα:</u> Βρίσκουμε φράγματα για την τιμή $\boldsymbol{u(1)}$ της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\boldsymbol{(L+h)[u] \equiv u'' + \frac{1}{x}u' - u = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0.}$$

Η λύση $u(x)$ καλείται συνάρτηση του Bessel μηδενικής τάξης και σημειώνεται με $I_0(x)$. Είναι καλό να επιλέγουμε πολυώνυμα για τις z_1, z_2. Ορίζουμε

$$z_1(x) = c_1 x^2 + 1, \text{τότε } z_1(0) = 1,\ z_1'(0) = 0.$$

Επιλέγουμε τη σταθερά c_1 ώστε $(L+h)[z_1] = c_1(4 - x^2) - 1$ είναι μη αρνητική για $0 \leq x \leq 1$. Η τιμή $c_1 = \frac{1}{3}$ είναι αρκετά καλή και μπορούμε να βρούμε ότι $u(x) \leq \frac{1}{3}x^2 + 1$. Συγκεκριμένα $u(1) \leq \frac{4}{3}$. Όμοια παίρνουμε $z_2(x) = c_2 x^2 + 1$ και επιλέγουμε $c_2 = \frac{1}{4}$, τότε $(L+h)[z_2] \leq 0$ και $z_2(0) = 1,\ z_2'(0) = 0$. Επιπλέον $u(x) \geq \frac{1}{4}x^2 + 1$ για $0 \leq x \leq 1$. Τα άνω και κάτω φράγματα για $u(1)$ είναι:

$$1{,}250 \leq u(1) \leq 1{,}333 \qquad (13)$$

Παραθέτουμε κάποιες μεθόδους για να βελτιώσουμε τα άνω και κάτω φράγματα στη σχέση (13). Για να βελτιώσουμε αυτά τα φράγματα κάνουμε χρήση της αναλογίας του θεωρήματος 13 δίνοντας φράγματα για την $u'(x)$ στα πλαίσια των $z_1{}'(x)$ και $z_2'(x)$.

Για να βελτιώσουμε το άνω φράγμα θεωρούμε πρώτα ένα υποδιάστημα $[0, t]$ όπου $t < 1$. Επιλέγοντας την ίδια συνάρτηση $z_1(x) = c_1 x^2 + 1$ για $0 \leq x \leq t$ ικανοποιούμε την ανίσωση $(L+h)[z_1] = c_1(4 - x^2) - 1 \geq 0$ για $0 \leq x \leq t$ παίρνοντας $c_1 = \frac{1}{4-t^2}$.

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε $u(x) \leq \frac{x^2}{4-t^2} + 1$ και $u'(x) = \frac{2x}{4-t^2}$ για $0 \leq x \leq t$. Συγκεκριμένα $u'(t) \leq \frac{2t}{4-t^2}$.

Πρέπει τώρα να εντάξουμε την τελευταία ανισότητα σε σχέση με το t ανάμεσα στα φράγματα 0 και 1. Βρίσκουμε $u(1) - u(0) \leq log\frac{4}{3} \leq 0{,}288$. Επιπλέον έχουμε το άνω φράγμα

$$u(1) \leq u(0) + 0{,}288 = 1{,}288 \qquad (14)$$

Αυτή η μέθοδος δεν είναι πάντα αποτελεσματική για κάποια βελτίωση στο κάτω φράγμα για $u(1)$ με τη συνάρτηση του τύπου $z_2 = c_2 x^2 + 1$. Παρόλα αυτά μια άλλη μέθοδος μπορεί να αξιοποιηθεί για να βελτιώσουμε το κάτω φράγμα. Διαιρούμε το διάστημα (0,1) σε δύο μέρη και ορίζουμε τη συνάρτηση $z_2(x)$ χωριστά σε κάθε κομμάτι. Για το διάστημα $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ επιλέγουμε z_2 όπως πριν $z_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τα φράγματα $u\left(\frac{1}{2}\right) \geq z_2\left(\frac{1}{2}\right), u'(\frac{1}{2}) \geq z_2'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Για το $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ορίζουμε: $z_2(x) = c_3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{17}{16} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Από αυτόν τον ορισμό οι z_2, z_2' να είναι συνεχείς στο διάστημα [0,1]. Πρέπει να επιλέξουμε c_3 τέτοιο ώστε

$$(L+h)[z_2] \equiv c_3\left[2+\frac{2x-1}{x}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{4x}-\frac{17}{16}-\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}) \leq 0,$$

για $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Η ανισότητα θα ισχύει αν $c_3 \leq \frac{4x^2+15x-4}{4(-4x^3+4x^2+15x-4)}$ για $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Το δεύτερο μέλος αυξάνεται. Επιλέγουμε $c_3 = \frac{9}{32}$ και με αυτό τον τρόπο έχουμε $u(1) \geq z_2(1) = \frac{161}{128} \geq 1{,}258$. Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την ανισότητα (14) έχουμε $1{,}258 \leq u(1) \leq 1{,}288$.

Για περαιτέρω βελτιώσεις σε κάτω φράγματα μπορούμε να έχουμε διαιρώντας το διάστημα (0,1) σε πολλά υποδιαστήματα και ορίζοντας συνάρτηση $z_2(x)$ χωριστά σε κάθε υποδιάστημα. Τα κάτω φράγματα z_2, z_2' για τις u, u' στο τέλος του κάθε διαστήματος λαμβάνονται ως αρχικές τιμές των z_2, z_2' στο επόμενο διάστημα. Αυτή η επιλογή των αρχικών τιμών έχει επίδραση στο να κάνει τη συνάρτηση $z_2(x)$ να έχει συνεχή πρώτη παράγωγο, αλλά όχι απαραίτητα συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα [0,1]. Το άνω φράγμα μπορεί να βελτιωθεί με τον ίδιο τρόπο.

Η μέθοδος της υποδιαίρεσης του παραπάνω παραδείγματος συνιστά το επόμενο γενικό σχέδιο για την παροχή άνω και κάτω φραγμάτων. Έστω ότι διαιρούμε το διάστημα $[a, b]$ σε N υποδιαστήματα

$$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_{N-1} < x_N = b.$$

Πρέπει να επιλέξουμε τη συνάρτηση $z_1(x)$ να είναι τετραγωνική πολυωνυμική σε κάθε υποδιάστημα και να επιλέξουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου έτσι ώστε $z_1(a) = \gamma_1, {z_1}'(a) = \gamma_2$ και $z_1, {z_1}'$ να είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$. Επιπλέον η συνάρτηση z_1 θα επιλεχτεί ώστε η ανισότητα (3) να ισχύει για κάθε υποδιάστημα (x_{i-1}, x_i). Ορίζουμε:

$$z_1(x) = c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i) + e_i \text{ για } x_i \leq x \leq x_{i+1}\ , i = 0,1, \ldots, N-1.$$

Οι σταθερές $c_i\ , d_i, e_i, i = 0,1, \ldots . N-1$ και ο αριθμός N των υποδιαστημάτων επιλέγεται ώστε να ικανοποιούνται όλες οι προαπαιτούμενες συνθήκες. Αναπτύσσουμε τη μέθοδο βήμα-βήμα ξεκινώντας με το διάστημα (x_0, x_1). Οι αρχικές συνθήκες $z_1(a) = \gamma_1,\ {z_1}'(a) = \gamma_2$ απαιτούν ότι $e_0 = \gamma_1, d_0 = \gamma_2$.

Επιπλέον έχουμε στο διάστημα (x_0, x_1)

$$z_1(x) = c_0(x-x_0)^2 + \gamma_2(x-x_0) + \gamma_1.$$

Σε αυτό το διάστημα, η ανισότητα

$$(L+h)[z_1] \geq f(x) \text{ γίνεται}$$

$$c_0[2 + 2g(x)(x-x_0) + h(x)(x-x_0)^2] + g(x)\gamma_2 + h(x)[\gamma_2(x-x_0) + \gamma_1] \geq f(x). \quad (15)$$

Αν $g(x),\ h(x)$ φραγμένες συναρτήσεις, τότε το x_1 μπορεί να επιλεχθεί πολύ κοντά στο x ώστε ο συντελεστής του c_0 στη σχέση (15) να είναι θετικός για $x_0 \leq x \leq x_1$.

Επιπλέον αν η συνάρτηση f φραγμένη, τότε το c_0 μπορεί να είναι τόσο μεγάλο ώστε η σχέση (15) να ισχύει για όλα τα x στο διάστημα (x_0, x_1).

Γυρνάμε τώρα στο διάστημα (x_1, x_2) ορίζοντας τη συνάρτηση $z_1(x)$ από τον τύπο

$$z_1(x) = c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1) + e_1 \text{ για } x_1 \leq x \leq x_2.$$

Για να επιβεβαιώσουμε την συνέχεια των $z_1,\ z_1'$ στο x_1 επιλέγουμε:

$$\begin{cases} e_1 = c_0(x_1 - x_0)^2 + \gamma_2(x_1 - x_0) + \gamma_1, \\ \qquad c_1 = 2c_0(x_1 - x_0) + \gamma_2. \end{cases} \tag{16}$$

Στο διάστημα (x_1, x_2) η ανισότητα αντίστοιχα με την ανισότητα (15) γίνεται

$$c_1[2 + 2g(x)(x - x_1) + h(x)(x - x_1)^2] + g(x)d_1 + h(x)[d_1(x - x_1) + e_1] \geq f(x), \tag{17}$$

όπου τα d_i, e_i είναι σταθερές που ορίζονται όπως στη σχέση (16) και επιλέγουμε x_2 κοντά στο x_1 ώστε ο συντελεστής c_i στη σχέση (17) να είναι θετικός. Τότε παίρνουμε c_1 τόσο μεγάλο ώστε η ανισότητα (17) να ισχύει σε όλο το διάστημα (x_1, x_2).

Προχωρώντας αυτή τη διαδικασία ορίζουμε κάθε d_i, e_i ώστε $z_1, z_1{}'$ να είναι συνεχείς παντού και πάντα παίρνουμε το διάστημα (x_i, x_{i+1}) τόσο μικρό και τη σταθερά c_i τόσο μεγάλη ώστε η σχέση $(L + h)[z_1] \geq f(x)$ να ισχύει παντού. Στην πραγματικότητα οι ποσότητες d_i, e_i ορίζονται από τις αναδρομικές σχέσεις

$$e_i = c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + e_{i-1}, \quad d_i = 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1}.$$

Για να υπολογίσουμε και να ορίσουμε το c_i είναι καλό να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση f από το μέγιστό της στο i-οστό υποδιάστημα και να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις g, h από είτε τα μέγιστα είτε τα ελάχιστά τους, οποιοδήποτε είναι κατάλληλο για να κάνει την ανισότητα $(L + h)[z_1] \geq f(x)$.

Με όμοιο τρόπο κατασκευάζουμε κάτω φράγματα. Οι σταθερές d_i, e_i επιλέγονται με τον ίδιο τρόπο και οι ποσότητες $-c_i$ λαμβάνονται τόσο μεγάλες ώστε να ισχύει $(L + h)[z_1] \leq f(x)$ παντού.

Αν οι συναρτήσεις f, g, h συνεχείς , τότε μπορεί να δειχθεί ότι όσο το μέγιστο μήκος των υποδιαστημάτων τείνει στο μηδέν, τα άνω και κάτω φράγματα τείνουν στη λύση u. Επιπλέον θεωρούμε ότι $h(x) \leq 0$. Παίρνουμε το πρόβλημα προσέγγισης της λύσης της εξίσωσης

$$(L + h)[u] = u'' + gu' + hu = f(x),$$

με αρχικές συνθήκες $u(a) = \gamma_1$, $u'(a) = \gamma_2$, όπου η συνάρτηση $h(x)$ μπορεί να είναι θετική.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις δουλεύουμε τη γενική αρχή του μεγίστου όπως δίνεται στο θεώρημα 5. Για να το κάνουμε ωστόσο, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση w είναι θετική στο διάστημα $[a, b]$ και έχει την ιδιότητα: $(L + h)[w] \leq 0$ για $a < x < b$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $w = 1 - \beta(x - a)^2$ με β αρκούντως μεγάλο (η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη) έχει τις επιθυμητές ιδιότητες αν το διάστημα $[a, b]$ είναι αρκετά μικρό.

Είδαμε προηγουμένως ότι η συνάρτηση $v \equiv \frac{u}{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση του τύπου

$$(L + h)[v] \equiv v'' + G(x)v' + H(x)v = \frac{f}{w},$$

με $G(x) \equiv \left(\frac{2w'}{w}\right) + g$ και $H(x) \equiv (L + h)[w]/w \leq 0$.

Οι συναρτήσεις σύγκρισης $z_1(x)$, $z_2(x)$ ορίζονται ώστε οι συναρτήσεις $\frac{z_1}{w}$, $\frac{z_2}{w}$ να παρέχουν φράγματα για τη συνάρτηση $\frac{u}{w}$. Κάνουμε τις συναρτήσεις $z_1(x)$, $z_2(x)$ να ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$(L+h)[z_1] \geq f(x),\ z_1(a) \geq \gamma_1, \qquad z_1'(a)w(a) - z_1(a)w'(a) \geq \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a)$$

και

$$(L+h)[z_2] \leq f(x),\ z_2(a) \leq \gamma_1, \qquad z_2'(a)w(a) - z_2(a)w'(a) \leq \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a)$$

Τότε στο $x = a$,

$$\frac{z_2}{w} \leq \frac{u}{w} \leq \frac{z_1}{w} \quad \text{και} \quad \left(\frac{z_2}{w}\right)' \leq \left(\frac{u}{w}\right)' \leq \left(\frac{z_1}{w}\right)'.$$

Επιπλέον βλέπουμε με υπολογισμό ότι

$$(L+H)\left[\frac{z_2}{w}\right] \leq (L+H)\left[\frac{u}{w}\right] \leq (L+H)\left[\frac{z_1}{w}\right].$$

Επιπλέον βρίσκουμε για $a \leq x \leq b$,

$$\frac{z_2(x)}{w(x)} \leq \frac{u(x)}{w(x)} \leq \frac{z_1(x)}{w(x)} \quad \text{και} \quad \left(\frac{z_2}{w}\right)' \leq \left(\frac{u}{w}\right)' \leq \left(\frac{z_1}{w}\right)'.$$

Η πρώτη από αυτό το σύνολο ανισοτήτων δίνει τα φράγματα:

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x). \tag{18}$$

Από το δεύτερο σύνολο ανισοτήτων έχουμε:

$$w(x)z_2'(x) - z_2(x)w'(x) \leq w(x)u'(x) - u(x)w'(x) \leq w(x)z_1'(x) - z_1(x)w'(x).$$

Εφόσον η συνάρτηση w είναι θετική στο διάστημα $[a, b]$ βρίσκουμε:

$$z_2'(x) + \frac{w'(x)}{w(x)}[u(x) - z_2(x)] \leq u'(x) \leq z_1'(x) - \frac{w'(x)}{w(x)}[z_1(x) - u(x)]. \tag{19}$$

Αν η $w'(x) \leq 0$ μπορούμε να εισάγουμε το άνω φράγμα για τη συνάρτηση u όπως δίνεται στη σχέση (18) από την αριστερή πλευρά της σχέσης (19) και μπορούμε να εισάγουμε το κάτω φράγμα στη δεξιά πλευρά. Αν η $w'(x) \geq 0$ χρησιμοποιούμε το κάτω φράγμα στα αριστερά και το άνω φράγμα στα δεξιά.

Επιπλέον βρίσκουμε ότι

$$\begin{cases} [z_2'(x) - \frac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x) - z_2(x)] \leq u'(x) \leq z_1'(x) + \frac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x) - z_2(x)], \\ \qquad\qquad \text{αν } w'(x) \leq 0, \\ z_2'(x) \leq u'(x) \leq z_1'(x), \text{ αν } w'(x) \geq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Οι ανισότητες (18), (20) δίνουν φράγματα για τις συναρτήσεις $u(x), u'(x)$ που είναι ακριβή όταν οι διαφορές $z_1(x) - z_2(x)$ και ${z_1}'(x) - {z_2}'(x)$ είναι μικρές.

Ενώ είναι πάντα πιθανό να βρούμε μία θετική συνάρτηση w που ικανοποιεί την ανίσωση $(L+h)[w] \leq 0$ σε αρκούντως μικρό διάστημα, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση αν το διάστημα είναι αρκετά μεγάλο. Ακόμη μία φορά αναγκαζόμαστε να χωρίσουμε το διάστημα και να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις που ορίζονται στα υποδιαστήματα. Ας είναι η συνάρτηση $w > 0$ και $(L+h)[w[\leq 0$ σε ένα διάστημα $[a, x^*]$ και ας υποθέσουμε ότι w^* είναι μία άλλη θετική συνάρτηση που ικανοποιεί την ανίσωση $(L+h)[w^*] \leq 0$ στο διάστημα $[x^*, b]$. Ψάχνουμε να βρούμε φράγματα για τη λύση u του αρχικού προβλήματος (1), (2) σε όλο το διάστημα $[a, b]$.

Έστω $z_1(x)$ και $z_2(x)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$(L+h)[z_2] \leq f(x) \leq (L+h)[z_1] \text{ στο διάστημα } [a, x^*] \text{ και } z_2(a) \leq \gamma_1 \leq z_1(a),$$

$$z_2'(a)w(a) - z_2(a)w'(a) \le \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a) \le z_1'(a)w(a) - z_1(a)w'(a).$$

Τότε $\quad z_2 \le u \le z_1 \quad$ και $\quad \left(\frac{z_2}{w}\right)' \le \left(\frac{u}{w}\right)' \le \left(\frac{z_1}{w}\right)'$ για $a \le x \le x^*$.

Επιπλέον δίνουμε φράγματα για τις συναρτήσεις $u(x^*)$ και $u'(x^*)$ και επιπρόσθετα μία συνάρτηση w^* που ικανοποιεί $(L+h)[w^*] \le 0$ στο διάστημα $[x^*, b]$. Μπορούμε να βρούμε φράγματα για τις συναρτήσεις $\frac{u}{w^*}$ και $\left(\frac{u}{w^*}\right)'$, όπως πριν. Έστω οι συναρτήσεις z_1^*, z_2^* να ορίζονται στο $[x^*, b]$ και υποθέτουμε ότι ικανοποιούν

$$(L+h)[z_2^*] \le (L+h)[u] \le (L+h)[z_1^*] \text{ στο διάστημα } (x^*, b)$$

$$z_2^*(x^*) \le u(x^*) \le z_1^*(x^*) \text{ στο } x = x^*\text{: } \left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)' \le \left(\frac{u}{w^*}\right)' \le \left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)'.$$

Τότε βρίσκουμε, όπως πριν, ότι:

$$z_2^*(x) \le u(x) \le z_1^*(x), \quad \left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)' \le \left(\frac{u}{w^*}\right)' \le \left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)' \text{για } x^* \le x \le b.$$

Ενώ δεν ξέρουμε τις συναρτήσεις $u(x^*)$ και $\left(\frac{u}{w^*}\right)'$στο x^*έχουμε φράγματα για αυτές. Επιπλέον δίνουμε ακριβείς συνθήκες για τις τιμές των συναρτήσεων $z_1^*, (z_1^*)', z_2^*, (z_2^*)'$ στο x^* πράγμα που επιβεβαιώνει ότι οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται. Αν $\frac{w^{*\prime}}{w^*} \ge \frac{w'}{w}$ αυτές οι συνθήκες είναι:

$$z_1^* \ge z_1,\; w^*\left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)' \ge w\left(\frac{z_1}{w}\right)' - \left(\frac{w^{*\prime}}{w^*} - \frac{w'}{w}\right)z_2 \quad \text{στο } x = x^*,$$

$$z_2^* \le z_2,\; w^*\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)' \le w\left(\frac{z_2}{w}\right)' - \left(\frac{w^{*\prime}}{w^*} - \frac{w\prime}{w}\right)z_1 \quad \text{στο } x = x^*.$$

Αν $\frac{w^{*}\prime}{w^*} \le \frac{w'}{w}$ αντικαθιστούμε τη συνάρτηση z_2 με τη συνάρτηση z_1 στο συντελεστή του $\left(\frac{w^{*\prime}}{w^*} - \frac{w\prime}{w}\right)$ στην πρώτη σειρά των ανισοτήτων και τη συνάρτηση z_1 με τη συνάρτηση z_2 στη δεύτερη. Αν αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται, έχουμε τα φράγματα

$$z_2^*(x) \le u(x) \le z_1^*(x),$$

$$\left(\frac{z_2^*}{w^*}\right)' \le \left(\frac{u}{w^*}\right)' \le \left(\frac{z_1^*}{w^*}\right)'.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση w^* σαν μια επέκταση της συνάρτησης w στο διάστημα $(x^*, b]$ και τη συνάρτηση z_1^* σαν επέκταση της συνάρτησης z_1 και τη z_2^* σαν επέκταση της z_2. Τότε αυτές οι επεκτάσεις των συναρτήσεων είναι γενικά μη συνεχείς στο x^*. Παρ' όλα αυτά οι παραπάνω ανισότητες συνδέοντας τις συναρτήσεις $w, w^*, z_1^*, z_1, z_2^*, z_2$ στο $x = x^*$ συσχετίζουν το δεξί και αριστερό όριο της ασυνέχειας. Μπορεί, φυσικά, αν είναι απαραίτητο ή επιθυμητό να διαιρέσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε περισσότερα από δύο υποδιαστήματα. Τότε οι παραπάνω θεωρήσεις οδηγούν στο παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 14:</u> Έστω οι συναρτήσεις $z_1(x), z_2(x)$ και $w(x)$ μία τμηματικά συνεχής συνάρτηση με τμηματικά συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους στο διάστημα $[a, b]$ με τις εξής απαιτήσεις:

1. $\boldsymbol{w > 0}$ **στο διάστημα** $[\boldsymbol{a, b}]$,
2. $\boldsymbol{z_2(a) \leq \gamma_1 \leq z_1(a)}$,
3. $\boldsymbol{z_2'(a)w(a) - z_2(a)w'(a) \leq \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a) \leq z_1'(a)w(a) - z_1(a)w'(a)}$,
4. $\boldsymbol{(L+h)[w] \leq 0, (L+h)[z_2] \leq f(x) \leq (L+h)[z_1]}$ **σε όλα τα σημεία όπου οι παράγωγοι που πραγματοποιούνται σε αυτούς τους τύπους είναι συνεχείς.**
5. **Σε κάθε σημείο της ασυνέχειας του** $\boldsymbol{x^*}$ **οι συναρτήσεις** $\boldsymbol{z_1 - z_2}$ **και** $\boldsymbol{w'/w}$ **έχουν μη αρνητικά άλματα, το άλμα στην** $\boldsymbol{w(z_1/w)'}$ **είναι τουλάχιστον** $\boldsymbol{-z_2(x^* - 0)}$ **φορές το άλμα στην** $\boldsymbol{w'/w}$ **και το άλμα στην** $\boldsymbol{w(z_2/w)'}$ **είναι το πολύ** $\boldsymbol{-z_1(x^* - 0)}$ **φορές το άλμα στην** $\boldsymbol{w'/w.}$ **Τότε**

$$\boldsymbol{z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)},$$

$$\left[\frac{z_2(x)}{w(x)}\right]' \leq \left[\frac{u(x)}{w(x)}\right]' \leq \left[\frac{z_1(x)}{w(x)}\right]' \text{ στο διάστημα } [\boldsymbol{a, b}].$$

Παρατηρούμε γενικά ότι ακόμη και αν υπάρχει σημείο ασυνέχειας σε ένα διάστημα $[a, b]$ τότε υπάρχουν θετικά άλματα δηλαδή πεπερασμένοι αριθμοί ώστε να βρεθεί η κατάλληλη συνάρτηση w την οποία περιγράψαμε παραπάνω με τις προϋποθέσεις που αναλύσαμε ώστε να μπορέσουμε να βρούμε κατάλληλα φράγματα για τη συνάρτησή μας σε όλο το κλειστό διάστημα.

<u>Παράδειγμα:</u> **Βρείτε άνω και κάτω φράγματα για τις τιμές στο** $\boldsymbol{x = 1}$ **της λύσης της** $\boldsymbol{(L+h)[u] \equiv u'' + (4+x)u = 0}$ **που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες** $\boldsymbol{u(0) = 0, u'(0) = 1}$.

Πρώτα βλέπουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = 4 + x$ είναι θετική στο διάστημα $[0,1]$. Αναζητούμε μία αυθαίρετη συνάρτηση $w(x)$. Αν πάρουμε την συνάρτηση $w = 1 - 2.1x^2$, αυτή είναι θετική και ικανοποιεί την ανίσωση $(L+h)[w] \leq 0$ για $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Σε αυτό το διάστημα οι συναρτήσεις $z_1(x) = x$, $z_2(x) = x - \frac{18}{19}x^2$ ικανοποιούν τις απαιτούμενες συνθήκες για άνω και κάτω συναρτήσεις σύγκρισης. Από τις σχέσεις (18), (20) παίρνουμε $\frac{5}{19} \leq u \leq \frac{1}{2}, -\frac{359}{361} \leq u' \leq \frac{739}{361}$.

Στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$ μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση $w = 1 - \frac{5}{2}(x - \frac{1}{2})^2$ και

$$z_1 = -\frac{9}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{739}{361}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},$$

$$z_2 = -\frac{45}{76}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{359}{361}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{19}.$$

Βρίσκουμε ότι $-0{,}38 \leq u(x) \leq 1{,}24$.

Όπως στην περίπτωση των εξισώσεων με h αρνητική συνάρτηση μπορούμε να πάρουμε πιο ακριβή άνω και κάτω φράγματα υποδιαιρώντας το δοσμένο διάστημα σε περισσότερα διαστήματα. Το θεώρημα 14 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι η λύση $u(x)$ του αρχικού προβλήματος (1), (2) εξαρτάται διαρκώς από τα δεδομένα γ_1, γ_2 και τη συνάρτηση $f(x)$.

Έστω η συνάρτηση $w = 1 - \beta^2[x - a - \left(\frac{k}{2\beta}\right)]^2$ στο διάστημα $[a + \left(\frac{k}{2\beta}\right), a + \frac{k+1}{2\beta}]$, $k = 0,1, \dots, k^*$, όπου $k^* \leq 2\beta(b - a) < k^* + 1$ με β τόσο μεγάλο ώστε

$$(L+h)[w] = -2\beta^2\left[1 + \left(x - a - \frac{k}{2\beta}\right)g + \frac{1}{2}\left(x - a - \frac{k}{2\beta}\right)^2 h\right] + h \leq 0,$$

σε αυτό το διάστημα.

Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας $\beta^2 = \frac{1}{4} max[g^2 + 3h]$, $a \leq x \leq b$ με την προϋπόθεση ότι το μέγιστο της συνάρτησης h είναι θετικό. Αν η συνάρτηση $h \leq 0$, μπορούμε να πάρουμε $\beta = 0$ ώστε $w \equiv 1$. Στο πρώτο διάστημα $[a, a + \left(\frac{1}{2\beta}\right)]$ επιλέγουμε τη συνάρτηση $z_1 = C_0 e^{\alpha(x-a)}$ όπου α επιλέγεται ώστε να ισχύει

$(L + h)\left[e^{\alpha(x-a)}\right] = (\alpha^2 + \alpha g + h)e^{\alpha(x-a)} \geq 1.$

Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $\alpha = max\, |g^2 - 2(h-1)|^{1/2}$.

Επιλέγουμε $C_0 = max[|\gamma_1|, \frac{|\gamma_2|}{\alpha}, max|f(x)|]$.

Τότε η συνάρτηση $z_1 = C_0 e^{\alpha(x-a)}$ ικανοποιεί τις συνθήκες για τη συνάρτηση z_1 όπως δηλώνονται στο θεώρημα 14 και η συνάρτηση $z_2 = -C_0 e^{\alpha(x-a)}$ ικανοποιεί τις συνθήκες για τη z_2 στο διάστημα $\left[a, a + \left(\frac{1}{2\beta}\right)\right]$. Βρίσκουμε ότι στο

$$x = a + \left(\frac{1}{2\beta}\right) \text{ η } |u| \leq C_0 e^{\alpha/2\beta},$$

$$\left|\left(\frac{u}{w}\right)'\right| \leq \frac{\frac{3}{4}\alpha + \beta}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} C_0 e^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

ώστε
$$|u'\left(a + \frac{1}{2\beta}\right)| \leq \left(\alpha + \frac{8\beta}{3}\right) C_0 e^{\alpha/2\beta}.$$

Επιτρέπουμε τώρα η συνάρτηση $z_1 = -z_2 = C_1 e^{[x-a-\frac{1}{2\beta}]}$ στο διάστημα $\left[a + \left(\frac{1}{2\beta}\right), a + \left(\frac{2}{2\beta}\right)\right]$ με $C_1 = \left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) C_0 e^{\alpha/2\beta}$ για να βρούμε ότι

$$|u\left(a + \frac{2}{2\beta}\right)| \leq \left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right) C_0 e^{2\alpha/2\beta},$$

$$|u'\left(a + \frac{2}{2\beta}\right)| \leq \alpha\left(1 + \frac{8\beta}{3\alpha}\right)^2 C_0 e^{2\alpha/2\beta}.$$

Συνεχίζοντας με την διαδικασία, βρίσκουμε ότι για όλα τα x στο διάστημα $[a, b]$

$$|u(x)| \leq C_0 e^{\rho(x-a)},$$

$$|u'(x)| \leq \alpha\left[1 + \left(\frac{8\beta}{3\alpha}\right)\right] C_0 e^{\rho(x-a)},$$

όπου $\rho = \alpha + 2\beta \log\left[1 + \left(\frac{8\beta}{3\alpha}\right)\right]$.

Έστω τώρα οι συναρτήσεις u_1, u_2 να είναι λύσεις του αρχικού προβλήματος για τον ίδιο διαφορικό τελεστή L και ας είναι η συνάρτηση $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Βλέπουμε ότι

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq C_0 e^{\rho(x-a)},$$

$$|u_1'(x) - u_2'(x)| \leq \alpha C_0\left[1 + \left(\frac{8\beta}{3\alpha}\right)\right] e^{\rho(x-a)},$$

όπου τα α, β, ρ βασίζονται μόνο στα φράγματα για τις συναρτήσεις g, h και όπου

$$C_0 = max\left\{|u_1(a) - u_2(a)|, \frac{|u_1'(a) - u_2'(a)|}{\alpha}, max\,|(L+h)[u_1] - (L+h)[u_2]|\right\}.$$

Επιπρόσθετα, αν οι αρχικές τιμές $u_1(a), u_1'(a)$ είναι κοντά στις $u_2(a), u_2'(a)$ και αν οι δοσμένες συναρτήσεις $(L+h)[u_1], (L+h)[u_2]$ είναι αρκετά κοντά τότε το C_0 είναι μικρό αρκετά. Επομένως η συνάρτηση $u_1(x)$ είναι κοντά στη συνάρτηση $u_2(x)$ και η $u_1'(x)$ είναι κοντά στην $u_2'(x)$ σε ολόκληρο το διάστημα $[a,b]$. Άρα καταλήγουμε στο γεγονός ότι η λύση u του αρχικού προβλήματος (1), (2) εξαρτάται διαρκώς από τα δεδομένα γ_1, γ_2 και από τη συνάρτηση $f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Η αρχή του μεγίστου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε σχέσεις μεταξύ των λύσεων από τις ίδιες ή σχετικές εξισώσεις. Έστω u, w να είναι μη τετριμμένες λύσεις της ίδιας εξίσωσης $(L+h)[u] = 0, (L+h)[w] = 0$.

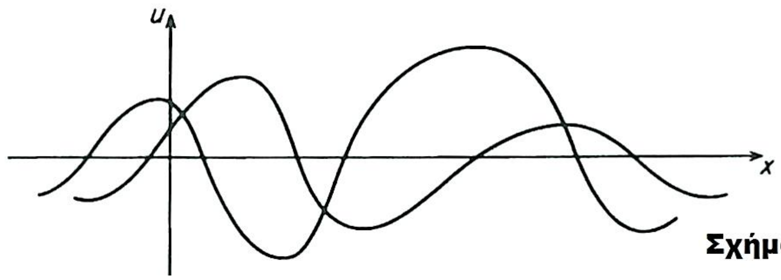
<u>Θεώρημα 15:</u> **Ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο διαδοχικά μηδενικά της συνάρτησης w, η συνάρτηση u μπορεί να έχει το πολύ ένα μηδενικό.**

Απόδειξη: Έστω a και b δύο διαδοχικά μηδενικά της συνάρτησης w τέτοια ώστε $w(a) = w(b) = 0$, $w \neq 0$ για $a < x < b$. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση w με την $(-w)$ αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $w(x) > 0$ στο διάστημα (a,b). Τότε η συνάρτηση $v(x) = \frac{u(x)}{w(x)}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$v'' + \left(\frac{2w'}{w} + g\right)v' = 0.$$

Από το θεώρημα 1 η συνάρτηση v δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο εκτός αν η v είναι σταθερή, σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση u είναι σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης w. Συνεπάγεται λοιπόν ότι η συνάρτηση v, άρα και η u, μπορούν να αλλάξουν πρόσημο το πολύ μία φορά στο ανοιχτό διάστημα (a,b).

Συνεπάγεται από τη μοναδικότητα του προβλήματος αρχικών τιμών όπως δίνεται στο θεώρημα 6 ότι κάθε μηδενικό της συνάρτησης u πρέπει να είναι μοναδικό. Το ίδιο θεώρημα δείχνει ότι αν $w(a) = 0$ ή $u(b) = 0$, η συνάρτηση u πρέπει να είναι σταθερό πολλαπλάσιο της w. Το παραπάνω αποτέλεσμα καλείται θεώρημα ταλάντωσης του Sturm. Το σχήμα δείχνει την τυπική συμπεριφορά των δύο λύσεων στην ίδια εξίσωση.



Σχήμα 3

Στο σχήμα 3 βλέπουμε τη συμπεριφορά δύο λύσεων $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ των εξισώσεων $(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{u}]=\mathbf{0},(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{w}]=\mathbf{0}$.

Θεωρούμε το θεώρημα σύγκρισης για τις λύσεις των δύο εξισώσεων. Έστω η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση $(L+h_1)[u]=0$ και η συνάρτηση w ικανοποιεί την εξίσωση $(L+h_2)[w]=0$ με $h_2(x) \geq h_1(x)$ για $a \leq x \leq b$. Η συνάρτηση v ορίζεται από τη σχέση $v=\frac{u}{w}$ και ικανοποιεί την εξίσωση

$$v''+\left(\frac{2w'}{w}+g\right)v'-(h_1-h_2)v=0.$$

Συμπερασματικά η συνάρτηση v ικανοποιεί την αρχή του μεγίστου. Αν η συνάρτηση u έχει δύο μηδενικά στο διάστημα (a,b), η συνάρτηση v θα είχε μηδενικά και αυτή επίσης. Από τη μοναδικότητα του θεωρήματος 7 έχουμε ότι η συνάρτηση $v \equiv 0$ ανάμεσα σε δύο μηδενικά. Τότε από το θεώρημα 6, η συνάρτηση $v \equiv 0$, επομένως η συνάρτηση $u \equiv 0$ στο διάστημα (a,b). Αν η συνάρτηση u είναι μη τετριμμένη, μπορεί να έχει μόνο ένα μηδενικό στο διάστημα (a,b). Έστω ότι $w(a)=u(a)=0$ από το θεώρημα 6_ έχουμε ότι $w'(a) \neq 0, u'(a) \neq 0$. Από τις διαφορικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις u και w, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{u''(a)}{u'(a)}=\frac{w''(a)}{w'(a)}=-g(a). \tag{1}$$

Από τον κανόνα $L\ 'Hospit\hat{a}l$ έχουμε $v(a)=\frac{u'(a)}{w'(a)} \neq 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v(a)>0$. Για να βρούμε το $v'(a)$ γράφουμε: $v'(x)=\frac{wu'-uw'}{w^2}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του $L\ 'Hospit\hat{a}l$, λαμβάνοντας υπόψην τη σχέση (1). Με απλό υπολογισμό δείχνουμε ότι $v'(a)=0$.

Έστω ότι υπήρχε σημείο x_0 στο διάστημα (a,b) με $v(x_0)<v(a)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4 στο διάστημα (a,x_0) και παίρνουμε ότι $v'(a)<0$, άτοπο. Επομένως έχουμε $0<v(a) \leq v(x)$ για $a \leq x \leq b$. Επομένως $u(x) \neq 0$ για $a<x<b$. Αν η $u(b)=w(b)=0$, βρίσκουμε με παρόμοιο τρόπο ότι $u(x) \neq 0$ στο διάστημα (a,b). Τελικά αν $w(a)=w(b)=u(a)=u(b)=0$ συνάγουμε από την παραπάνω αιτιολόγηση ότι $v(a) \leq v(x)$ και $v(b) \leq v(x)$ για $a \leq x \leq b$. Επομένως $v(a)=v(b)$ και η συνάρτηση v πρέπει να είναι σταθερή. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει στην περίπτωση που η διαφορά $h_1-h_2 \equiv 0$. Ακολουθεί το επόμενο θεώρημα σύγκρισης το οποίο μόλις αποδείξαμε.

Θεώρημα 16: Ας είναι $\boldsymbol{u}$ **και** $\boldsymbol{w}$ λύσεις της $(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h_1})[\boldsymbol{u}]=\mathbf{0}$ και της $(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h_2})[\boldsymbol{w}]=\mathbf{0}$ με **$\boldsymbol{h_2} \geq \boldsymbol{h_1}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{w(x)} \neq \mathbf{0}$ στο ανοιχτό διάστημα $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ έχει το πολύ ένα μηδενικό στο κλειστό διάστημα $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, εκτός αν $\boldsymbol{w(a)}=\boldsymbol{w(b)}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{h_1} \equiv \boldsymbol{h_2}$ και η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης $\boldsymbol{w}$.**

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι όσο μειώνεται η συνάρτηση h αυξάνεται η απόσταση στα μηδενικά. Στο θεώρημα μπορεί να δοθεί και άλλη μορφή λέγοντας ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε μηδενικών της συνάρτησης u, η συνάρτηση w πρέπει να έχει ένα μηδενικό εκτός αν $h_1 \equiv h_2$ και η συνάρτηση w είναι σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης u.

Μπορούμε να επεκτείνουμε το θεώρημα 16 σε ένα θεώρημα σύγκρισης για δύο διαφορικούς τελεστές. Έστω u λύση της $(L_1 + h_1)[u] \equiv u'' + g_1 u' + h_1 u = 0$ και w λύση της $(L_2 + h_2)[w] \equiv w'' + g_2 w' + h_2 w = 0$ και έστω g_1, g_2 συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις. Εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\overline{u(x)} = u(x) e^{(1/2)\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)]\, d\xi} \tag{2}$$

και βλέπουμε ότι η $\overline{u(x)}$ ικανοποιεί την εξίσωση $(L_2 + H)[\bar{u}] \equiv \bar{u}'' + g_2 \bar{u}' + H(x)\bar{u} = 0$,

με $$H(x) = \frac{1}{2}[g_2'(x) - g_1'(x)] + \frac{1}{4}\{[g_2'(x)]^2 - [g_1'(x)]^2\} + h_1(x).$$

Αν $h_2(x) \geq H(x)$ τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος 16 που συσχετίζει τα μηδενικά των συναρτήσεων $w, \bar{u}$ μπορεί να εφαρμοστεί. Εφόσον η σχέση (2) δείχνει ότι οι συναρτήσεις $\bar{u}, u$ έχουν ίδια μηδενικά, μπορούμε να πάρουμε ένα θεώρημα σύγκρισης των μηδενικών των λύσεων της $(L_1 + h_1)[u] = 0$ με λύσεις της $(L_2 + h_2)[w] = 0$. Ειδικότερα έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 17:</u> Έστω οι συναρτήσεις $\boldsymbol{u(x)}, \boldsymbol{w(x)}$ να είναι λύσεις των εξισώσεων

$$\boldsymbol{u'' + g_1(x)u' + h_1(x) = 0},$$

$$\boldsymbol{w'' + g_2(x)w' + h_2(x) = 0},$$

αντίστοιχα και έστω

$$\boldsymbol{h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 \geq h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2}.$$

Τότε αν η συνάρτηση $\boldsymbol{w(x) \neq 0}$ στο ανοιχτό διάστημα $\boldsymbol{(a,b)}$, η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x)}$ μπορεί να μηδενιστεί μόνο μία φορά στο κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[a,b]}$ εκτός αν $\boldsymbol{w(a) = w(b) = 0}$,

$$\boldsymbol{h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 \equiv h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2},$$

και η συνάρτηση $\boldsymbol{u(x)}$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης $\boldsymbol{w(x)e^{-(1/2)\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)]\, d\xi}}$.

Ας δούμε μία ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος.

Έστω $g_2(x) \equiv 0$ και $h_2(x) \equiv M$ όπου M είναι μία θετική σταθερά. Τότε αν πάρουμε τη συνάρτηση $w = sin\sqrt{M}(x - a)$, αυτή είναι λύση της εξίσωσης $w'' + Mw = 0$ όπως γνωρίζουμε από την επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η συνάρτηση w μηδενίζεται στα σημεία $a, a + \left(\frac{\pi}{\sqrt{M}}\right)$. Άρα καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

<u>Πόρισμα:</u> Αν η συνάρτηση u είναι λύση της $(L + h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$ με $h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}[g(x)]^2 \leq M$ τότε η απόσταση μεταξύ των μηδενικών της $u(x)$ είναι τουλάχιστον $\pi/\sqrt{M}$. Αν $h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}[g(x)]^2 \geq M' > 0$ τότε η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενικών της $u(x)$ είναι το πολύ $\pi/\sqrt{M'}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Ο ΤΕΛΕΣΤΗΣ LAPLACE

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την αρχή του μεγίστου στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Θα επεκτείνουμε, σε αυτό το κεφάλαιο, την ίδια αρχή για τις ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις σε δύο ή και περισσότερες διαστάσεις και θα διατυπώσουμε θεωρήματα μοναδικότητας για την ύπαρξη της λύσης που απορρέουν από την αρχή του μεγίστου.

Έστω $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο χωρίο D σε n-διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο. Ο τελεστής Laplace ορίζεται ως:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}.$$

Εάν η εξίσωση $\Delta u = 0$ ικανοποιείται σε κάθε σημείο του χωρίου D, λέμε ότι η συνάρτηση u είναι αρμονική στο D ή απλά ότι είναι αρμονική συνάρτηση.

Έστω η συνάρτηση u έχει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο του χωρίου D. Τότε γνωρίζουμε από απλούς υπολογισμούς ότι σε αυτό το σημείο πρέπει οι:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 u}{dx_1^2} \le 0,\ \frac{d^2 u}{dx_2^2} \le 0, \dots, \frac{d^2 u}{dx_n^2} \le 0.$$

Επιπλέον στο μέγιστο η ανισότητα $\Delta u \le 0$ ισχύει. Από τα παραπάνω οδηγούμαστε στο εξής αποτέλεσμα, ότι αν μια συνάρτηση ικανοποιεί την ανισότητα

$$\Delta u > 0, \tag{1}$$

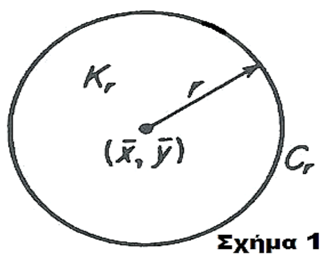
σε κάθε σημείο του χώρου, τότε η u δεν μπορεί να περιέχει το μέγιστό της σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του χωρίου D.

Έστω $b_1(x_1, x_2, \dots, x_n), b_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, b_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ να είναι οποιεσδήποτε φραγμένες συναρτήσεις ορισμένες στο χωρίο. Χωρίς να αλλάξουμε το παραπάνω επιχείρημα καταλήγουμε ότι αν η συνάρτηση u ικανοποιεί την αυστηρή ανίσωση :

$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0. \qquad (2)$$

στο χωρίο D, τότε η συνάρτηση u δεν περιέχει το μέγιστο σε εσωτερικό σημείο. Στο πρώτο κεφάλαιο, είδαμε ότι είναι βασικό να δείξουμε την αρχή του μεγίστου για διαφορικές ανισώσεις που δεν είναι αυστηρές. Πρέπει να δείξουμε ότι η παραπάνω αρχή του μεγίστου είναι έγκυρη ακόμη και αν επιτρέπεται η ισότητα στις σχέσεις $(1), (2)$. Συγκεκριμένα επιθυμούμε να δείξουμε ότι οι αρμονικές συναρτήσεις ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου. Ας δείξουμε την αρχή για συναρτήσεις δύο μεταβλητών που ικανοποιούν την ανίσωση:

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \geq 0. \qquad (3)$$



Σχήμα 1

Κύκλος κέντρου $(\bar{x}, \bar{y})$ και ακτίνας R με σύνορο C_r.

Είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε προϋποθέσεις για τον τελεστή Laplace. Έστω $(\bar{x}, \bar{y})$ σημείο του χωρίου D και έστω K_r να είναι δίσκος του D με κέντρο το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ και ακτίνα r. Ο κυκλικός δίσκος συμβολίζεται με C_r.

Θυμόμαστε ότι η βαθμίδα της συνάρτησης v είναι η διανυσματική συνάρτηση $gradv \equiv \frac{\partial v}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{\jmath}$, όπου $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ είναι τα συνήθη μοναδιαία διανύσματα. Η απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης $w = a(x, y)\vec{\imath} + b(x, y)\vec{\jmath}$ είναι η βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$divw = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Έχουμε:

$$\Delta u = div(gradu). \qquad (4)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης στην Λαπλασιανή της συνάρτησης u στο δίσκο K_r και έχουμε:

$$\iint_{K_r} \Delta u \, dxdy \equiv \iint_{K_r} div(gradu) \, dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial r} ds,$$

όπου s είναι τόξο κατά μήκος του δίσκου C_r και $\frac{\partial u}{\partial r}$ είναι η παράγωγος στο φράγμα του δίσκου C_r. Με χρήση των πολικών συντεταγμένων έχουμε $ds = rd\theta$ και επομένως:

$$\iint_{K_r} \Delta u dxdy = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \, d\theta.$$

Συνεπάγεται ότι αν $\Delta u \geq 0$ στο χωρίο D, τότε

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta \geq 0. \qquad (5)$$

Επιτρέπουμε το r να μεταβάλλεται μεταξύ του μηδενός και ενός σταθερού αριθμού R Κάθε K_r είναι δίσκος με κέντρο το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$. Ο αριθμός R λαμβάνεται αρκούντως μικρός ώστε ο δίσκος K_r να περιέχεται ολόκληρος στο χωρίο D. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (5) από το 0 ως το R και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε ότι:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta dr = \int_0^{2\pi} u(R,\theta) d\theta - 2\pi u(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad \text{ή}$$

$$u(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(R,\theta) R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u ds. \qquad (6)$$

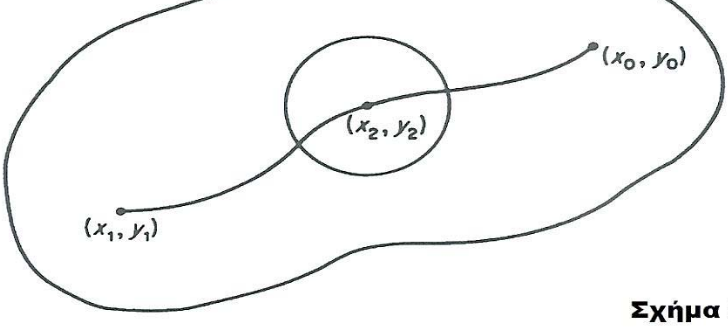
Η δεξιά πλευρά της σχέσης (6) είναι η μέση τιμή της συνάρτησης u που λαμβάνεται στον δίσκο C_R, ο κύκλος που έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$. Επιπλέον η σχέση (6) επιβεβαιώνει ότι η τιμή της συνάρτησης u σε κάθε σημείο του χωρίου D είναι φραγμένη από τη μέση τιμή πάνω σε κάθε κύκλο στο χωρίο D έχοντας αυτό το σημείο σαν κέντρο. Αν η $\Delta u = 0$, αυτή η ανισότητα είναι αληθής και για τη συνάρτηση u και για τη συνάρτηση $(-u)$ και επομένως παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 1:</u> ***(Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** **Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι αρμονική στο χωρίο $\boldsymbol{D}$, τότε η $\boldsymbol{u(\bar{x}, \bar{y})}$ ισούται με τη μέση τιμή που λαμβάνεται σε οποιονδήποτε κύκλο στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ με κέντρο $\boldsymbol{(\bar{x}, \bar{y})}$, δηλαδή:**

$$\boldsymbol{u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u ds.}$$

Για να έχουμε την αρχή μεγίστου υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί την ανισότητα (3) στο χωρίο D και ότι περιέχει το μέγιστο M σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) στο D. Αφού $u \leq M$ και $u(x_0, y_0) = M$ καταλήγουμε από την (6) ότι η συνάρτηση u πρέπει ταυτοτικά να είναι ίση με M σε κάθε κύκλο κέντρου (x_0, y_0) που βρίσκεται στον χώρο D. Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο (x_1, y_1) στο χωρίο D στο οποίο $u < M$ και ενώνουμε τα σημεία $(x_1, y_1), (x_0, y_0)$ με μια καμπύλη στο χωρίο D και ας είναι (x_2, y_2) το πρώτο σημείο σε αυτήν την καμπύλη με $u = M$. Τότε η συνάρτηση u δεν είναι ταυτοτικά ίση με M σε έναν αρκούντως μικρό κύκλο κέντρου (x_2, y_2). Επομένως, ερχόμαστε σε αντίφαση με την ανισότητα (6) και προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

<u>Θεώρημα 2:</u> ***(Αρχή Μεγίστου)*** **Έστω $\boldsymbol{\Delta u \geq 0}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ περιέχει το μέγιστο $\boldsymbol{M}$ σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου $\boldsymbol{D}$, τότε $\boldsymbol{u \equiv M}$ στο $\boldsymbol{D}$.**



Σχήμα 2

Μονοπάτι που συνδέει τα σημεία $(x_1, y_1), (x_0, y_0)$ με $u(x_0, y_0)$ το πρώτο σημείο ώστε να ισχύει $u = M$.

Δεν έχουμε θεωρήσει ότι το χωρίο D είναι φραγμένο. Σημειώνουμε το σύνορο του D, ∂D. Παρατηρούμε ότι αν η συνάρτηση u είναι συνεχής στο $D \cup \partial D$ και μη σταθερή, τότε οι τιμές της u στο χωρίο D είναι κάτω από το μέγιστο της u στο σύνορο ∂D αν το D είναι φραγμένο. Αν το χωρίο D είναι μη φραγμένο αυτές οι τιμές είναι είτε κάτω από το μέγιστο της συνάρτησης u στο ∂D ή κάτω από το limit superior[1] της συνάρτησης u καθώς η ποσότητα $(x^2 + y^2)$ τείνει στο άπειρο. Αφού μια αντίστοιχη μορφή της αρχής ελαχίστου ισχύει για συναρτήσεις που ικανοποιούν την ανίσωση $\Delta u \leq 0$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια μη σταθερή αρμονική συνάρτηση δεν μπορεί να περιέχει το μέγιστό της ή ελάχιστό της σε εσωτερικό σημείο του χωρίου D.

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ που ικανοποιεί $\boldsymbol{\Delta u \geq 0}$ σε χωρίο $\boldsymbol{D}$ λέγεται υποαρμονική στο $\boldsymbol{D}$ ή απλά υποαρμονική. Αν $\boldsymbol{\Delta u \leq 0}$ έτσι ώστε η συνάρτηση – $\boldsymbol{u}$ είναι υποαρμονική, λέμε ότι η $\boldsymbol{u}$ είναι υπεραρμονική.

Έστω η συνάρτηση u είναι υποαρμονική και η συνάρτηση v αρμονική σε χωρίο D με σύνορο ∂D. Η συνάρτηση $w \equiv u - v$ θα είναι τότε υποαρμονική στο χωρίο D. Αν οι συναρτήσεις u, v συμπίπτουν στο σύνορο ∂D, τότε η συνάρτηση w μηδενίζεται στο ∂D και από την αρχή του μεγίστου θα είναι μη θετική στο χωρίο D. Έχουμε την ανισότητα $u \leq v$ στο χωρίο D.

Ο όρος υποαρμονική προέρχεται από την ιδιότητα που μόλις περιγράψαμε. Οι τιμές της υποαρμονικής συνάρτησης u σε χωρίο D πάντα είναι κάτω από τις τιμές της αρμονικής συνάρτησης u, η οποία συμπίπτει με τη συνάρτηση u στο φραγμένο χωρίο D.

Τα θεωρήματα 1,2 έχουν κατάλληλες επεκτάσεις σε οποιαδήποτε διάσταση. Έστω η συνάρτηση u είναι η υποαρμονική συνάρτηση n μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι $\Delta u \geq 0$. Σημειώνουμε με K_R μια νέα n διαστάσεων σφαίρα ακτίνας R με κέντρο $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ και σημειώνουμε το σύνορό του με C_R. Η επιφάνεια της σφαίρας C_R, της οποίας η εξίσωση είναι $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x_k})^2 = R^2$ ορίζεται από την S_R. Είναι καλό να γράψουμε $S_R = \omega_n R^{n-1}$ όπου ω_n είναι η απόλυτη σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n. Παραδείγματος χάρη $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$. Η ανισότητα μέσης τιμής επιβεβαιώνει ότι για υποαρμονικές συναρτήσεις

$$u(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \leq \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u ds, \tag{7}$$

όπου ds είναι το $(n-1)$ διαστάσεων στοιχείο της επιφάνειας και το ολοκλήρωμα δεξιά είναι κλειστό ολοκλήρωμα. Το θεώρημα μέσης τιμής για τις αρμονικές συναρτήσεις και η αρχή του μεγίστου για n διαστάσεων υποαρμονικές συναρτήσεις είναι άμεσες συνέπειες της σχέσης (7).

[1] Το *<u>limit inferior</u>* που συμβολίζεται με $\lim_{R\to A} inf\, F(R_n)$ ορίζεται να είναι ο μικρότερος αριθμός a (πιθανώς και τα $\pm\infty$) τέτοιος ώστε να υπάρχει ακολουθία $R_n \to A$ για το οποίο $F(R_n) \to a$. Αντίστοιχα ορίζεται το *<u>limit superior</u>* που συμβολίζεται με $\lim_{R\to A} sup\, F(R_n)$ και ορίζεται $\lim_{R\to A} sup\, F(R_n) = -\lim_{R\to A} inf\, [-F(R_n)]$.

ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ-ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε τους δεύτερης τάξης διαφορικούς τελεστές της μορφής $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Αφού είναι $\partial^2/\partial x_i \partial x_j = \partial^2/\partial x_j \partial x_i$ ορίζουμε $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ και γράφουμε την παρακάτω διαφορική έκφραση:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1}$$

$a_{ij} = aji$, $i, j = 1,2, \dots, n$ χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι οι συντελεστές των τελεστών είναι συμμετρικοί, μια θεώρηση που πάντα πρέπει να κάνουμε.

<u>Ορισμός:</u> **Ο τελεστής $(\mathbf{1})$ καλείται ελλειπτικός σε σημείο $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ αν και μόνο αν υπάρχει μία θετική ποσότητα $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ τέτοια ώστε**

$$\sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi_i \xi_j} \geq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\xi_i^2}, \tag{2}$$

για όλες τις $\boldsymbol{n}$-άδες των πραγματικών αριθμών $(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, \dots, \boldsymbol{\xi_n})$. Ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ λέγεται ελλειπτικός στο χωρίο $\boldsymbol{D}$, αν είναι ελλειπτικός σε κάθε σημείο του $\boldsymbol{D}$. Είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός στο χωρίο $\boldsymbol{D}$, αν η σχέση $(\mathbf{2})$ ισχύει για κάθε σημείο του $\boldsymbol{D}$ και αν υπάρχει θετική σταθερά τέτοια ώστε $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\mu_0}$ για όλα τα $\boldsymbol{x}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$.

Σε γλώσσα πινάκων η ελλειπτική συνθήκη επιβεβαιώνει ότι ο συμμετρικός πίνακας $A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο $\boldsymbol{x}$. Ενδιαφερόμαστε να δούμε την επίδραση πολλών μετασχηματισμών των συντεταγμένων του $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Μία γραμμική αλλαγή συντεταγμένων

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \, , i = 1,2, \dots, n, \tag{3}$$

μπορεί να γραφεί με βοήθεια πινάκων $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$. Σε αυτήν την εξίσωση οι $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$ είναι πίνακες $nx1$ και ο C είναι nxn πίνακας (c_{ij}). Ο nxn πίνακας C λέγεται ορθογώνιος αν και μόνο αν τα στοιχεία του ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}c_{ik} = \begin{cases} 1\,,\text{αν}\ j = k, \\ 0\,,\text{αν}\ j \neq k, \end{cases} \quad j,k = 1,2,\dots,n. \tag{4}$$

Εύκολα από γραμμική άλγεβρα μπορεί να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1\,, \alpha\nu\ j = i, \\ 0\,, \alpha\nu\ j \neq i, \end{cases} \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{5}$$

είναι ισοδύναμη με τη σχέση (4).

Σημειώνουμε τον αντιμεταθετικό του C με C^T και τον αντίστροφο με C^{-1} και παρατηρούμε ότι τα κριτήρια ορθογωνιότητας (4), (5) είναι ισοδύναμα με τη σχέση $C^T = C^{-1}$.

<u>Ορισμός:</u> Ο μετασχηματισμός (3) καλείται ορθογώνιος αν και μόνο αν ο πίνακας $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})$ είναι ορθογώνιος.

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι η ελλειπτικότητα ενός μετασχηματισμού δεν επηρεάζεται από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς των συντεταγμένων.

<u>Θεώρημα 3:</u> Έστω ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ είναι ελλειπτικός. Τότε από τον ορθογώνιο μετασχηματισμό (3) ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ παίρνει τη μορφή :

$$\sum_{k,l=1}^{n} \boldsymbol{b_{kl}} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}, \tag{6}$$

όπου

$$\boldsymbol{b_{kl}} = \boldsymbol{a_{ij} c_{ki} c_{lj}}\,, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}. \tag{7}$$

Ο τελεστής (6) είναι ελλειπτικός.

Απόδειξη: Αφού $\partial y_i / \partial x_j = c_{ij}$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στον $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ και έχουμε: $\sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij} c_{ki} c_{lj}} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$. Ορίζουμε τον πίνακα $B = (b_{kl})$ και από τη σχέση (7) έχουμε τον $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ στον τύπο (6).

Για να εδραιώσουμε την ελλειπτικότητα της σχέσης (6) θεωρούμε οποιαδήποτε n-άδα $(\xi_1, \dots, \xi_2)$ και γράφουμε :

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}c_{ki}\xi_k c_{lj}\xi_l.$$

Ορίζοντας $n_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\xi_k$ έχουμε $\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}n_i n_j$.

Επομένως από τις συνθήκες (2), (5) :

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k\xi_l \geq \mu(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{n} n_i n_i = \mu(\boldsymbol{x}) \sum_{i,k,l=1}^{n} c_{ki}\xi_k c_{li}\xi_l = \mu(\boldsymbol{x}) \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$

<u>Παρατηρήσεις:</u> Σημειώνουμε ότι διατηρείται και η ελλειπτικότητα κάτω από ορθογώνιο μετασχηματισμό συντεταγμένων αλλά και η ποσότητα $\mu(\boldsymbol{x})$ παραμένει αναλλοίωτη. Αν ο τελεστής είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός, τότε μετά από μετασχηματισμό παραμένει ομοιόμορφα ελλειπτικός. Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας πρέπει τα στοιχεία του C να είναι σταθερές. Αν ένας τελεστής με σταθερούς συντελεστές είναι ελλειπτικός σε ένα σημείο, τότε είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός σε όλο το n-διάστατο χωρίο. Πιο συγκεκριμένα ο τελεστής Laplace είναι ελλειπτικός παντού. Όπως γνωρίζουμε

από τη γραμμική άλγεβρα για έναν συμμετρικό πίνακα $A = (a_{ij})$, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $C = (c_{ij})$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $B = (b_{ij})$, που δίνεται από $b_{ij} \sum_{k,l=1}^{n} c_{ik} a_{kl} c_{jl}$, $i, j = 1, \dots, n$ ή ισοδύναμα $B = CAC^{-1}$ να είναι διαγώνιος. Ο πίνακας B έχει την ιδιότητα $b_{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Τα στοιχεία κατά μήκος της διαγωνίου του B καλούνται ιδιοτιμές του πίνακα (a_{ij}). Αν κάνουμε διαγωνοποίηση σε ένα σημείο $\bar{\boldsymbol{x}}$, λαμβάνουμε $\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(\bar{\boldsymbol{x}}) n_k n_l = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}(\bar{x}) n_k^2 \geq \mu(\bar{\boldsymbol{x}}) \sum_{k=1}^{n} n_k^2$ για όλες τις n-άδες $(n_1, n_2, \dots, n_n)$ που συνεπάγεται ότι τα στοιχεία $b_{kk}(\bar{\boldsymbol{x}})$ είναι θετικά. Στην πραγματικότητα έχουμε $b_{kk}(\bar{\boldsymbol{x}}) \geq \mu(\bar{\boldsymbol{x}})$. Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ έχει τοποθετηθεί σε διαγώνια μορφή σε συγκεκριμένο σημείο $\bar{\boldsymbol{x}}$ και υποθέτουμε ότι μπορούμε να γράψουμε $\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} b_{ii}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial y_i^2}$.

Εισάγουμε τώρα έναν δεύτερο μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(\bar{x})}} y_k, \; k = 1,2, \dots, n \tag{8}$$

και ο τελεστής $\mathcal{L}$ παίρνει τη μορφή $\mathcal{L} \equiv \sum_{k=1}^{n} b_{ii} \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$. Ακουλουθεί το επόμενο θεώρημα:

<u>Θεώρημα 4:</u> Ένας δεύτερης τάξης τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ είναι ελλειπτικός σε ένα σημείο $\bar{\boldsymbol{x}}$ αν και μόνο αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\boldsymbol{z_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j}$, $\boldsymbol{k = 1, \dots, n}$ τέτοιος ώστε στο σημείο $\bar{\boldsymbol{x}}$, ο $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ να γίνεται ο Λαπλασιανός τελεστής στις $\boldsymbol{z_k}$ συντεταγμένες.

Πρέπει να δώσουμε έμφαση ότι έχουμε θεωρήσει ότι (d_{kj}) είναι σταθερός πίνακας ώστε ο υποβιβασμός ενός τελεστή ελλειπτικού δεύτερης τάξης γίνεται σε συγκεκριμένο σημείο $\bar{x}$ και όχι σε όλο το χώρο. Γενικά μπορεί να δειχθεί ότι δεν είναι εφικτό να υποβιβάσουμε έναν τελεστή δεύτερης τάξης σε τελεστής Laplace σε ολόκληρο το χώρο με μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Ο τελεστής $(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$ είναι ελλειπτικός στο $\bar{x}$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ είναι ελλειπτικός. Καλείται ομοιόμορφα ελλειπτικός, αν ο $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός στο χωρίο D. Ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ καλείται κύριο μέρος του $(L + h)$.

Θεωρούμε την αυστηρή διαφορική ανίσωση

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \qquad (1)$$

σε ένα χωρίο D και θεωρούμε ότι ο L είναι ελλειπτικός στο D. Αν η συνάρτηση u έχει μέγιστο M σε ένα σημείο $\overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, γνωρίζουμε από τον λογισμό πολλών μεταβλητών ότι στο $\overline{\boldsymbol{x}}$

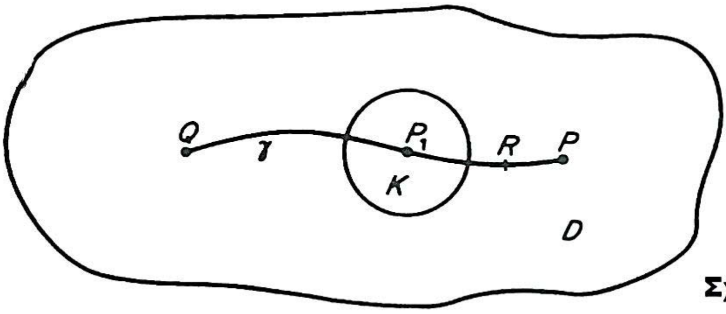
$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = 0 \text{ και } \frac{d^2 u}{dz_k^2}, \;\; k = 1,2, \dots, n,$$

για οποιεσδήποτε συντεταγμένες $z_1, z_2, \dots, z_n$ που μπορούμε να πάρουμε από τις συντεταγμένες $x, x_2, \dots, x_n$ με γραμμικό μετασχηματισμό. Πιο συγκεκριμένα, αν $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, το κύριο μέρος του L, είναι ο τελεστής Laplace σε z συντεταγμένες, τότε η σχέση (1) δεν μπορεί να ισχύει στο $\overline{\boldsymbol{x}}$. Όποτε ο L είναι ελλειπτικός μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων έτσι ώστε στο $\overline{\boldsymbol{x}}$ ο τελεστής $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ να γίνεται ο τελεστής Laplace. Καταλήγουμε στο ότι αν L είναι ελλειπτικός, μια συνάρτηση u που ικανοποιεί τη σχέση (1) σε ένα χωρίο D δεν μπορεί να έχει μέγιστο στο χωρίο D. Όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση μπορούμε να επεκτείνουμε την αρχή του μεγίστου έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε την πιθανότητα ότι η $L[u]$ ικανοποιεί μία ανισότητα που δεν είναι αυστηρή.

<u>Θεώρημα 5</u>: ‘Εστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

σε ένα χωρίο $\boldsymbol{D}$ όπου $\boldsymbol{L}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $\boldsymbol{a_{ij}}$ και $\boldsymbol{b_i}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ λαμβάνει ένα μέγιστο $\boldsymbol{M}$ σε ένα σημείο του χωρίου $\boldsymbol{D}$, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{M}$ στο $\boldsymbol{D}$.

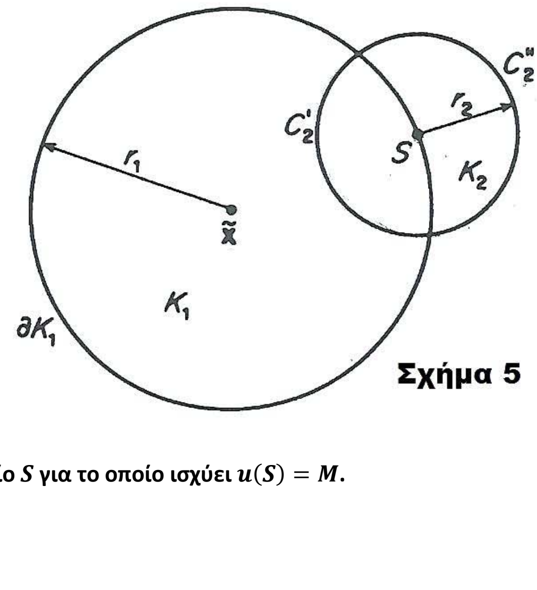


Σχήμα 3

Το σχήμα 3 δείχνει το χωρίο D και ένα μονοπάτι να συνδέει δύο σημεία ώστε $u(P_1) = M$, όπου P_1 είναι το κέντρο ενός κύκλου K.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $u = M$ σε κάποιο σημείο P του χωρίου D και ότι $u < M$ σε κάποιο άλλο σημείο Q του χωρίου D και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Κατασκευάζουμε ένα τόξο γ στο χωρίο D που επεκτείνεται από το Q στο P (Σχήμα 3). Σημειώνουμε με R το πρώτο σημείο στο γ όπου $u = M$. Είναι $u < M$ στο κομμάτι του γ μεταξύ Q και R. Ας είναι $d > 0$ το ανώτερο κάτω φράγμα των αποστάσεων μεταξύ οποιοδήποτε σημείου του γ και οποιοδήποτε σημείου στο σύνορο του χωρίου D. Θεωρούμε ένα σημείο P_1 του μέρους QR του γ σε απόσταση μικρότερη του $\frac{1}{2}d$ από το R και κατασκευάζουμε τη μέγιστη σφαίρα που έχει κέντρο το P_1 στο οποίο $u < M$. Αυτή η σφαίρα θα έχει ακτίνα μικρότερη του $\frac{1}{2}d$ και θα βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο D. Ας είναι ένα σημείο S στο σύνορο ∂K της σφαίρας K τέτοιο ώστε η συνάρτηση $u = M$ στο σημείο S. Από συνέχεια πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο σημείο. Μπορεί να υπάρχουν πολλά. Κατασκευάζουμε τη σφαίρα K_1 εφαπτομένη στο σύνορο ∂Kστο σημείο S και να βρίσκεται εξολοκλήρου στη σφαίρα K (Σχήμα 4). Σημειώνουμε το σύνορο της σφαίρας K_1 με ∂K_1 και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $u < M$ στη σφαίρα K_1 και στο σύνορο ∂K_1 εκτός από το μοναδικό σημείο S όπου $u = M$. Η ακτίνα της σφαίρας K_1 σημειώνεται με r_1. Κάνουμε και άλλη κατασκευή: μία σφαίρα K_2 με σύνορο ∂K_2 και με ακτίνα $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ σχεδιάζεται με κέντρο στο σημείο S (Σχήμα 5). Σημειώνουμε με C_2' το κομμάτι του ∂K_2 μέσα στη σφαίρα K_1 και στο σύνορο ∂K_1. Η επιφάνεια C_2' περιλαμβάνει το σύνορό της, το οποίο είναι η τομή του συνόρου ∂K_1 και του συνόρου ∂K_2. Το κομμάτι του ∂K_2 έξω από το ∂K_1 το καλούμε C_2''.

Σχήμα 4



Σχήμα 5

Οι κύκλοι K και ο K_1 σε μεγέθυνση που περιέχει το σημείο S για το οποίο ισχύει $u(S) = M$.

Εφόσον $u < M$ στο κλειστό σύνολο C_2' υπάρχει σταθερά $\zeta > 0$ τέτοια ώστε $u \leq M - \zeta$ στην C_2'. Αυτό συνεπάγεται από το γεγονός ότι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα φραγμένο, κλειστό σύνολο έχει μέγιστο. Από την άλλη πλευρά επειδή η συνάρτηση $u \leq M$ παντού γνωρίζουμε ότι $u \leq M$ στο C_2''. Ας είναι το κέντρο της σφαίρας K_1 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \dots, \widetilde{x_n})$. Ορίζουμε την αυθαίρετη συνάρτηση

$$z(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{x_i})^2} - e^{-\alpha r_1^2}, \qquad (2)$$

όπου α είναι μία θετική σταθερά που θα προσδιοριστεί.

Είναι φανερό ότι
$$\begin{cases} z > 0 \text{ στην } K_1, \\ z = 0 \text{ στο } \partial K_1, \\ z < 0 \text{ έξω από την } K_1. \end{cases}$$

Υπολογίζουμε

$$L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{x_i})^2}\left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x_i - \widetilde{x_i})(x_j - \widetilde{x_j}) - 2\alpha \sum_{i=1}^{n}[a_{ii} + b_i\,(x_i - \widetilde{x_i})]\right\}.$$

Εξαιτίας της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας του τελεστή $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - \widetilde{x_i})(x_j - \widetilde{x_j}) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{x_i})^2 .$$

Αφού $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{x_i})^2 > \frac{1}{4} r_1^2$ στη σφαίρα K_2 καταλήγουμε ότι για το σημείο $\boldsymbol{x}$ στη σφαίρα K_2

$$L[z] \geq \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2}\{\alpha \mu_0 {r_1}^2 - 2\sum_{i=1}^{n}[a_{ii} + b_i(x_i - \widetilde{x_i})]\}.$$

Επιλέγοντας α αρκούντως μεγάλο κάνουμε την ποσότητα στα άγκιστρα παραπάνω θετική και έτσι παίρνουμε $L[z] > 0$ στη σφαίρα K_2. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος ένα στο πρώτο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $w = u + \varepsilon z$ με ε τέτοιο ώστε $0 < \varepsilon < \frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}$.

Η συνάρτηση w έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $w < M$ στην C_2'. Για να το δούμε αυτό σημειώνουμε ότι $0 \leq z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$. Επιπλέον $\varepsilon z < \zeta$ και $u \leq M - \zeta$ στην C_2'. Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε $w < M$ στην C_2'' .

(ii) $w < M$στην C_2''. Αυτό συνεπάγεται επειδή $z < 0$ στην C_2'' και $u \leq M$ παντού

(iii) $w = M$ στο S, το κέντρο της σφαίρας K_2. Αυτή η πρόταση είναι σωστή εξαιτίας της υπόθεσης ότι η συνάρτηση $u = M$ στο σημείο S και από την κατασκευή της συνάρτησης $z = 0$ στο S.

Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες $(i), (ii), (iii)$, η συνάρτηση w λαμβάνει ένα μέγιστο κάπου στο εσωτερικό της σφαίρας K_2. Από την άλλη πλευρά $L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$ στη σφαίρα K_2. Επιπλέον κανένα μέγιστο δεν μπορεί ληφθεί στη σφαίρα K_2 αν ο τελεστής L είναι ελλειπτικός. Καταλήγουμε σε αντίφαση και το θεώρημα αποδεικνύεται.

Παρατηρήσεις: (i) Η ομοιόμορφη ελλειπτικότητα του τελεστή L και η φραξιμότητα των συντελεστών δεν είναι απολύτως αναγκαία. Πρέπει να θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{\mu(x)}$ και $\frac{\sum_{i=1}^{n}|b_i(x)|}{\mu(x)}$ είναι φραγμένες σε κάθε κλειστή σφαίρα που περιέχεται στο εσωτερικό του χωρίου D.

(ii) Το χωρίο D δε χρειάζεται να είναι φραγμένο.

(iii) Η αρχή ελαχίστου για συναρτήσεις που ικανοποιούν $L[u] \leq 0$ λαμβάνεται εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου στη συνάρτηση $-u$. Επιπλέον, μία μη σταθερή λύση της ελλειπτικής διαφορικής εξίσωσης $L[u] = 0$ μπορεί να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο σε ένα εσωτερικό σημείο του χωρίου D. Για τελεστές του τύπου $(L + h)$ έχουμε αποτέλεσμα ανάλογο με τη μονοδιάστατη περίπτωση που δίνεται στο κεφάλαιο 1.

<u>Θεώρημα 6:</u> Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ να ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση $(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{h})[\boldsymbol{u}] \geq \mathbf{0}$ με συνάρτηση $\boldsymbol{h} \leq \mathbf{0}$, με $\boldsymbol{L}$ ομοιόμορφα ελλειπτικό στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ και με τους συντελεστές των $\boldsymbol{L}$ και $\boldsymbol{h}$ φραγμένους. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ λαμβάνει ένα μη αρνητικό μέγιστο $\boldsymbol{M}$ σε ένα εσωτερικό σημείο του χωρίου $\boldsymbol{D}$, τότε $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{M}$.

Η απόδειξη του θεωρήματος 6 συνεπάγεται από την απόδειξη του θεωρήματος 5. Η αυθαίρετη συνάρτηση z και η θετική ποσότητα ε ορίζονται με τον ίδιο τρόπο. Όπως πριν η αντίφαση προέρχεται από την παρατήρηση ότι η συνάρτηση w που ικανοποιεί την ανισότητα $(L + h)[w] > 0$ σε ένα χώρο δεν μπορεί να έχει ένα μη αρνητικό μέγιστο εκεί αν $h \leq 0$.

<u>Παρατηρήσεις:</u> Αυτή η απόδειξη ισχύει ακόμα και κάτω από την πιο ασθενή υπόθεση ότι οι λόγοι $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x)}{\mu(x)}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i(x)|}{\mu(x)}$, $-\frac{h(x)}{\mu(x)}$ είναι φραγμένοι σε κάθε κλειστή σφαίρα στο χωρίο D. Ο περιορισμός ότι η συνάρτηση $h \leq 0$ είναι σημαντικός και πολυάριθμα αντιπαραδείγματα έχουμε αν $h > 0$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $u = e^{-r^2}$ έχει μέγιστο στο $r = 0$ και είναι μία λύση της εξίσωσης $\Delta u + (2n - 4r^2)u = 0$ σε n διαστάσεις.

Έστω η συνάρτηση u ικανοποιεί $L[u] \geq 0$ σε ένα χωρίο D με σύνορο ∂D. Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση u έχει μέγιστο τότε το μέγιστο πρέπει να λαμβάνεται στο σύνορο. Πρέπει τώρα να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u είναι συνεχής και φραγμένη στο $D \cup \partial D$ και ότι υπάρχει σημείο P στο σύνορο ∂D στο οποίο η συνάρτηση u παίρνει τη μέγιστη τιμή. Αν το χωρίο D είναι φραγμένο τέτοιο σημείο πάντα υπάρχει. Παρατηρούμε ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης u στο σημείο P που λαμβάνεται σε οποιαδήποτε κατεύθυνση στο σύνορο που σημειώνεται εξωτερικά από το χωρίο D δεν μπορεί να είναι αρνητική. Αν ήταν, η συνάρτηση u θα άρχιζε να αυξάνεται όσο μπαίνουμε στο χωρίο D στο σημείο P και τότε το μέγιστο δεν θα λαμβανόταν στο P.

Ας είναι $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα σε μία εξωτερική κατεύθυνση σε ένα σημείο P στο σύνορο του χωρίου D. Λέμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ σημειώνεται εξωτερικά του χωρίου D στο συνοριακό σημείο P αν $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} > 0$.

Ορίζουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο της u στο συνοριακό σημείο P στην κατεύθυνση $\boldsymbol{v}$ ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial v} \equiv \lim_{x \to P} [\boldsymbol{v} \cdot grad\, u(\boldsymbol{x})] = \lim_{x \to P} (v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

αν αυτή υπάρχει. Η κατευθυνόμενη παράγωγος καλείται εξωτερική αν το διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ βρίσκεται εξωτερικά του χωρίου D. Τότε αν η συνάρτηση u έχει μέγιστο στο σημείο P, έχουμε $\frac{\partial u}{\partial v} \geq 0$ στο σημείο P. Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι (εκτός αν η συνάρτηση u είναι σταθερή), η αυστηρή ανισότητα $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$ ισχύει στο σημείο P. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ξεκάθαρα επέκταση του θεωρήματος 2 του πρώτου κεφαλαίου.

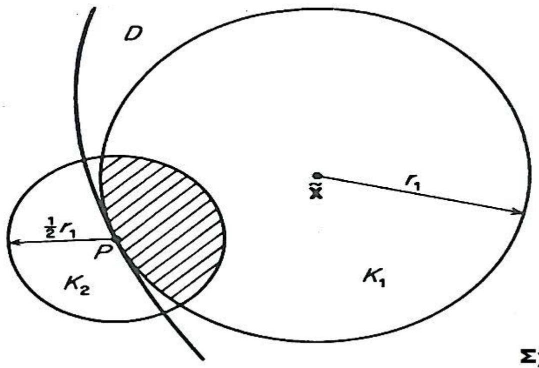
<u>Θεώρημα 7:</u> Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ να ικανοποιεί την ανίσωση:

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0,$$

σε ένα χωρίο D στον οποίο ο τελεστής L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός. Υποθέτουμε ότι $u \leq M$ στο χωρίο D και ότι $u = M$ σε ένα συνοριακό σημείο P. Θεωρούμε ότι το σημείο P βρίσκεται στο σύνορο της σφαίρας K_1 στο χωρίο D. Αν η συνάρτηση u είναι συνεχής στο $D \cup P$ και υπάρχει μία εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial v}$ στο σημείο P, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial v} > 0 \text{ στο } P\,,$$

εκτός εάν $u \equiv M$.



Σχήμα 6

Ο κύκλος K_1 που περιέχει το σημείο P για το οποίο ισχύει $u(P) = M$ και ο κύκλος K_2 που φέρεται με κέντρο το P.

Απόδειξη: Ακολουθούμε τη διαδικασία όπως στο θεώρημα 5. Συρρικνώνοντας ελαφρώς τη σφαίρα K_1 αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνορο ∂K_1 βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο $D \cup P$. Κατασκευάζουμε μία σφαίρα K_2 με κέντρο στο σημείο P και ακτίνα $\frac{1}{2} r_1$ όπου r_1 είναι ακτίνα της σφαίρας K_1 (**Σχήμα 6**). Ορίζουμε τη συνάρτηση z σύμφωνα με τη σχέση (2), επιλέγοντας α τόσο μεγάλο ώστε $L[z] > 0$ στην K_2. Επιλέγουμε την συνάρτηση $w = u + \varepsilon z$.

Σύμφωνα με θεώρημα 5, αν $u \neq M$ τότε $u < M$ στη σφαίρα K_1 και στο σύνορό της εκτός από το σημείο P. Θυμόμαστε ότι $z = 0$ στο σύνορο της K_1. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τόσο μικρό ώστε $w \leq M$ στο κομμάτι του συνόρου της σφαίρας K_2 που βρίσκεται στη σφαίρα K_1. Τότε $w \leq M$ σε ολόκληρο το σύνορο της γραμμοσκιασμένης περιοχής όπως δείχνει το σχήμα. Εξαιτίας του ότι $L[w] > 0$ σε αυτήν την περιοχή, το μέγιστο της συνάρτησης w λαμβάνεται στο σημείο P και $w(P) = M$. Επιπλέον στο σημείο P:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial v} \geq 0\,.$$

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι $\frac{\partial z}{\partial v} < 0$ στο σημείο P έτσι ώστε $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial v} > 0$ εκεί. Επιλέγοντας $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων και r να αναπαριστά την ευκλείδεια απόσταση από το $\tilde{\boldsymbol{x}}$ έχουμε: $z = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_2^2}$

$$\text{τότε } \frac{\partial z}{\partial x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha r^2}$$

$$\text{και } \; n_i = \frac{x_i}{r},$$

$$\text{επομένως } \frac{\partial z}{\partial v} = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} \sum_{i=1}^{n} v_i n_i < 0\,.$$

Επιπλέον $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} > 0$ και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα του θεωρήματος. Η απόδειξη του θεωρήματος 7 δουλεύει επίσης για τον τελεστή $L + h$ με συνάρτηση $h \leq 0$ με $M \geq 0$ και α επιλέγεται τόσο μεγάλο ώστε $(L + h)[z] > 0$.

<u>Θεώρημα 8:</u> **Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ να ικανοποιεί την ανίσωση**

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{h})[\boldsymbol{u}] \geq \boldsymbol{0},$$

όπου $\boldsymbol{L}$ είναι ο τελεστής του θεωρήματος 7 και η συνάρτηση $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{M}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$, ότι $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}$ σε ένα συνοριακό σημείο $\boldsymbol{P}$ και ότι $\boldsymbol{M} \geq \boldsymbol{0}$. Θεωρούμε ότι το σημείο $\boldsymbol{P}$ βρίσκεται στο σύνορο μιας σφαίρας στο χωρίο $\boldsymbol{D}$. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{P}$, οποιαδήποτε εξωτερικής κατεύθυνσης παράγωγος της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$ είναι θετική εκτός εάν $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{M}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$.

<u>*Παρατηρήσεις:*</u> Δύο σημαντικές εξωτερικής κατεύθυνσης παράγωγοι είναι η κανονική παράγωγος στην οποία $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}$ και η συγκανονική παράγωγος στην οποία $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} n_j$. Είναι δυνατό να δείξουμε το θεώρημα 7 πριν από το θεώρημα 5 αν η θεώρηση ότι η συνάρτηση $u < M$ στο εσωτερικό του χωρίου D προστίθεται στην υπόθεση του θεωρήματος 7. Τότε το θεώρημα 5 είναι συνέπεια του θεωρήματος 7. Για να το δούμε αυτό χρειάζεται μόνο να εφαρμόσουμε το θεώρημα 7 με την επιπρόσθετη υπόθεση για τη σφαίρα K_1 στο **Σχήμα 4** και το συνοριακό της σημείο S όπου η $u = M$. Η παρατήρηση ότι σε ένα εσωτερικό μέγιστο η παράγωγος σε κάθε κατεύθυνση πρέπει να μηδενιστεί έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα 5. Επιπλέον η συνάρτηση u δεν έχει εσωτερικό μέγιστο και ακολουθεί το θεώρημα 7.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Ξεκινάμε τη μελέτη ενός από τα πιο απλά προβλήματα συνοριακών τιμών για εξισώσεις με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Σε φραγμένο δισδιάστατο χωρίο D με σύνορο ∂D, θέτουμε το πρόβλημα ορίζοντας συνάρτηση $v(x, y)$ που είναι δύο φορές διαφορίσιμη και συνεχής στο χωρίο D και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ στο } D, \tag{1}$$

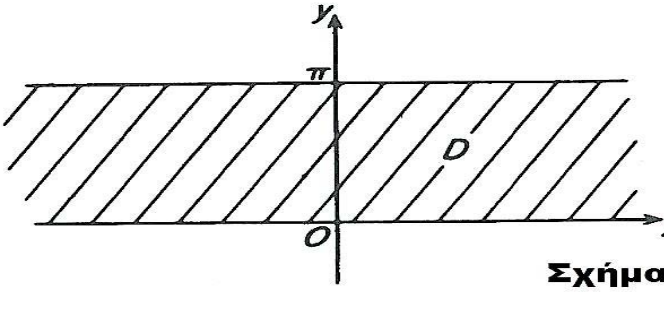
και τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο

$$v = g(s) \text{ στο } \partial D. \tag{2}$$

Η εξίσωση (1) είναι γνωστή ως **εξίσωση του Poisson**. Η συνάρτηση f καθορίζεται στον χώρο D και η συνάρτηση g που δίνεται στα πλαίσια τόξου μήκους s, καθορίζεται στο σύνορο ∂D. Το πρόβλημα να καθορίσουμε τέτοια λύση v είναι γνωστό σαν **πρόβλημα του Dirichlet**. Εναλλακτικά καλείται ως το πρώτο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Δεν θα ερευνήσουμε τις συνθήκες στο χωρίο D και εκείνες στις συναρτήσεις f, g που επαρκούν για να εγγυηθούμε την ύπαρξη λύσης του προβλήματος του Dirichlet. Παρόλο αυτά μέσω της αρχής του μεγίστου μόνο είναι δυνατό να δείξουμε ότι αν η λύση του πρώτου προβλήματος υπάρχει, τότε είναι μοναδική. Έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι μπορεί να υπάρξει το πολύ μία λύση του προβλήματος. Για να βγάλουμε αυτό το αποτέλεσμα υποθέτουμε ότι v_1 και v_2 είναι δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις (1), (2) με τις ίδιες συναρτήσεις f, g. Ορίζουμε συνάρτηση $u = v_1 - v_2$ και βλέπουμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί $\Delta u = 0$, στο χωρίο D, $u = 0$ στο σύνορο ∂D.

Σύμφωνα με την αρχή μεγίστου, η συνάρτηση u δεν μπορεί να έχει μέγιστο στο εσωτερικό του χωρίου D. Παρόλα αυτά το μέγιστο μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό και φραγμένο σύνολο πρέπει να λαμβάνεται. Αφού η συνάρτηση u είναι συνεχής στο $D \cup \partial D$ και αφού $u = 0$ στο σύνορο ∂D, καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $u \leq 0$ στο χωρίο D. Εφαρμόζοντας την ίδια αιτιολόγηση για τη συνάρτηση $-u$, παίρνουμε $u \geq 0$ στο χωρίο D. Επομένως η συνάρτηση $u = v_1 - v_2 \equiv 0$ στο χωρίο D. Είναι αισθητό να θεωρήσουμε ότι το χωρίο D είναι φραγμένο. Διαφορετικά όπως το επόμενο παράδειγμα δείχνει το αποτέλεσμα είναι λάθος. Έστω D να είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα που δίνεται από

$$D: \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ 0 \leq y \leq \pi, \end{cases}$$



Σχήμα 7

Το άπειρο χωρίο D: $\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$.

Η συνάρτηση $v = e^x siny$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο χωρίο D όπως και οι σχέσεις $v(x,0) = v(x,\pi) = 0$ δείχνουν ότι η συνάρτηση v μηδενίζεται στο σύνορο του D. Παρόλο που η συνάρτηση v ικανοποιεί την αρχή μεγίστου δεν παίρνει το μέγιστο στο σύνορο. Σημειώνουμε ότι $v\left(x,\frac{\pi}{2}\right) = e^x \to +\infty$ καθώς $x \to \infty$. Για να έχουμε τη μοναδικότητα του θεωρήματος για μη φραγμένους χώρους πρέπει να ικανοποιείται μια επιπλέον συνθήκη για τη συμπεριφορά της συνάρτησης v. Για παράδειγμα αν καθορίζεται το όριο της συνάρτησης v καθώς $x^2 + y^2 \to \infty$, τότε το όριο της συνάρτησης $u = v_1 - v_2$ καθώς $x^2 + y^2 \to \infty$ είναι μηδέν και συνεπάγεται η μοναδικότητα του αποτελέσματος. Η απόδειξη για τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε οσεσδήποτε μεταβλητές είναι όμοια με την απόδειξη για τις δύο διαστάσεις. Για ένα n-διάστατο χωρίο D με σύνορο ∂D θεωρούμε το πρόβλημα ορισμού μιας συνάρτησης $v(\boldsymbol{x}) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση

$$(L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x})v = f, \tag{3}$$

στο χωρίο D και εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = g_1 \text{ στο } \Gamma_1, \\ \quad v = g_2 \text{ στο } \Gamma_2, \end{cases} \tag{4}$$

όπου $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ μια δοσμένη εξωτερικής κατεύθυνσης παράγωγος σε κάθε σημείο του συνόλου Γ_1. Υποθέτουμε ότι ο τελεστής L είναι ελλειπτικός στο χωρίο D και τα Γ_1, Γ_2 είναι ξένα σύνολα, των οποίων η ένωση κάνει το σύνορο ∂D, σύνορο του χωρίου D. Τα σύνολα Γ_1, Γ_2 αποτελούνται από έναν αριθμό χωριστών τμημάτων και δεν αποκλείουμε την πιθανότητα ότι είτε το σύνολο Γ_1 είτε το σύνολο Γ_2 να είναι κενά.

<u>Θεώρημα 9:</u> **Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις v_1 και v_2 ικανοποιούν τις σχέσεις (3), (4) σε φραγμένο χωρίο D. Θεωρούμε ότι κάθε σημείο του συνόλου Γ_1 ανήκει στο σύνορο της σφαίρας στο D. Αν L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός, $h(x) \le 0$ φραγμένη συνάρτηση και $\alpha(x) \ge 0$ τότε $v_1 \equiv v_2$ εκτός αν $h \equiv \alpha \equiv 0$ και το σύνολο Γ_2 να είναι κενό, όπου σε αυτή την περίπτωση η διαφορά $v_1 - v_2$ πρέπει να είναι σταθερή.**

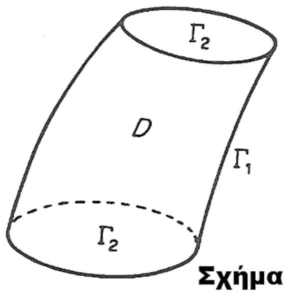
<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε τη συνάρτηση $u = v_1 - v_2$. Τότε η συνάρτηση u ικανοποιεί

$$(L+h)[u] = 0 \text{ στο } D, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ στο } \Gamma_1, \\ \quad u = 0 \quad \text{στο } \Gamma_2. \end{cases} \tag{6}$$

Αν η συνάρτηση u ήταν ποτέ θετική θα είχε θετικό μέγιστο. Από το θεώρημα 6 αυτό το μέγιστο πρέπει να ληφθεί σε σημείο P στο σύνολο Γ_1. Αν η συνάρτηση u δεν είναι σταθερή $\partial u/\partial \boldsymbol{\nu} > 0$ στο σημείο P από το θεώρημα 8 που έρχεται σε αντίφαση με την πρώτη συνθήκη στη σχέση (6). Επιπλέον είτε η συνάρτηση u είναι σταθερή είτε $u \leq 0$ στο χωρίο D. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για τη συνάρτηση $-u$, βλέπουμε ότι η u πρέπει να είναι σταθερή. Αλλά καμία άλλη σταθερά εκτός του μηδενός δεν ικανοποιεί τις σχέσεις (5), (6) εκτός αν $h \equiv \alpha \equiv 0$ και το σύνολο Γ_2 είναι κενό, σε αυτήν την περίπτωση οποιαδήποτε σταθερά τις ικανοποιεί. Όταν το σύνολο Γ_1 είναι κενό, το θεώρημα 9 επιβεβαιώνει ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για το πρόβλημα Dirichlet. Αν το σύνολο Γ_1 είναι κενό, $\alpha \equiv 0$ και $\partial/\partial \boldsymbol{\nu}$ είναι η συγκανονική παράγωγος, τότε καλούμε το πρόβλημα (3), (4) <u>πρόβλημα Newmann ή δεύτερο πρόβλημα συνοριακών τιμών</u>. Το θεώρημα 9 εδραιώνει τη μοναδικότητα της λύσης για αυτό το πρόβλημα. Αν το α δεν μηδενίζεται ταυτοτικά έχουμε <u>το τρίτο πρόβλημα οριακών τιμών.</u> Αν τα σύνολα Γ_1, Γ_2 δεν είναι κενά, λέμε ότι το πρόβλημα έχει <u>μεικτές συνοριακές συνθήκες</u>. Όπως στην περίπτωση της εξίσωσης Laplace, ένα θεώρημα μοναδικότητας για την εξίσωση (3) όπου ο χώρος είναι μη φραγμένος απαιτεί μια ακόμη συνθήκη στη συμπεριφορά των λύσεων όταν το $r = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ τείνει στο άπειρο.

Σαν εφαρμογή των θεωρημάτων 5,7,9 θεωρούμε την σταθερή κατάσταση κατανομής θερμοκρασίας ενός στερεού. Ας είναι $T(x,y,z)$ η θερμοκρασία στο σημείο $P(x,y,z)$ ενός ομογενούς ισοτροπικού μέσου που καταλαμβάνει ένα φραγμένο χωρίο D με επιφάνεια ∂D.



Σχήμα 8

Χωρίο D με επιφάνεια (σύνορο) Γ_1, Γ_2.

Έστω ότι μέρος της φραγμένης επιφάνειας, που σημειώνεται με Γ_1, είναι μεμονωμένο και δε ρέει καθόλου θερμότητα από αυτή. Η κατανομή θερμοκρασίας καθορίζεται από το υπόλοιπο του συνόρου Γ_2(τα Γ_1και Γ_2 αποτελούνται από διάφορα κομμάτια, (Σχήμα 8)). Αν η θερμοκρασία του μέσου είναι σε ισορροπία (αυτό συμβαίνει όταν η θερμοκρασία δε μεταβάλλεται με το χρόνο) τότε η συνάρτηση T ικανοποιεί την εξίσωση $\Delta T = 0$ στο χωρίο D και τις συνοριακές συνθήκες $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ στο σύνολο Γ_1, και με την T ορισμένη στο σύνολο Γ_2 ($\partial/\partial \boldsymbol{n}$ είναι η εξωτερική κανονική παράγωγος). Από τα θεωρήματα 5,7 ούτε η μέγιστη ούτε η ελάχιστη θερμοκρασία μπορούν να ληφθούν στο χωρίο D ή στο σύνολο Γ_1. Η αρχή του μεγίστου μας δίνει τη δυνατότητα να πάρουμε το εξής αποτέλεσμα: η τιμή της θερμοκρασίας σε κατάσταση ισορροπίας πάντα βρίσκεται μεταξύ των μέγιστων και ελάχιστων τιμών της καθορισμένης συνοριακής θερμοκρασίας. Σημειώνουμε πως το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και όταν η θερμοκρασία είναι καθορισμένη μόνο σε ένα μέρος του συνόρου με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει διαρροή θερμότητας κατά πλάτος του υπολοίπου. Αφού η θερμότητα που ρέει στο σώμα είναι ανάλογη με το $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}$, το θεώρημα 7 επιβεβαιώνει ότι μία μη ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας μπορεί να διατηρείται μόνο παρέχοντας θερμότητα στο θερμότερο σημείο του φράγματος και απομακρύνοντας τη θερμότητα από το πιο κρύο σημείο. Η μοναδικότητα της ισορροπίας της κατανομής θερμοκρασίας επιβεβαιώνεται από το θεώρημα 9.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

Τη συνθήκη $h(\boldsymbol{x}) \leq 0$ στο θεώρημα 8 δεν μπορούμε να την παραλείψουμε πλήρως. Για παράδειγμα η συνάρτηση $u = sinx \cdot siny$ είναι λύση της

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0,$$

στο τετράγωνο $S: 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ και η συνάρτηση u ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο σύνορο ∂S. Η συνάρτηση u παίρνει το μέγιστό της σε εσωτερικό σημείο. Όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε την αρχή μεγίστου με συνάρτηση $h \leq 0$ μπορούν να επεκταθούν για να εδραιώσουμε μια γενικευμένη αρχή μεγίστου. Τα θεωρήματα μοναδικότητας για προβλήματα συνοριακών τιμών είναι άμεση συνέπεια της αρχής αυτής. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u(\boldsymbol{x})$ ικανοποιεί

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x})u \geq 0, \tag{1}$$

σε χωρίο D όπου L ομοιόμορφα ελλειπτικός και δεν έχουμε την απαίτηση ότι η συνάρτηση h είναι μη θετική. Ας είναι $w(\boldsymbol{x})$ δοσμένη θετική συνάρτηση στο $D \cup \partial D$ και ορίζουμε $v(\boldsymbol{x}) = \frac{u(x)}{w(x)}$. Από απλούς υπολογισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{w}(L+h)[v] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2}{w} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} + b_i \right\} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L+h)[w]v \geq 0,$$

στο χωρίο D. Αν η συνάρτηση w ικανοποιεί την ανισότητα $(L+h)[w] \leq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του μεγίστου όπως δίνεται στα θεωρήματα 6,8 στη συνάρτηση $v(\boldsymbol{x})$ παίρνοντας το ακόλουθο θεώρημα.

<u>**Θεώρημα 10:**</u> **Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ να ικανοποιεί τη διαφορική ανίσωση $(\mathbf{1})$ σε χωρίο $\boldsymbol{D}$ όπου $\boldsymbol{L}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός. Αν υπάρχει μία συνάρτηση $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ τέτοια ώστε**

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \text{ στο } \boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{\partial D}, \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{w}] \leq \mathbf{0} \text{ στο } \boldsymbol{D}. \tag{3}$$

Τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ δεν μπορεί να παίρνει ένα μη αρνητικό μέγιστο στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ εκτός αν είναι σταθερή. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ περιέχει το μη αρνητικό μέγιστό της σε ένα σημείο $\boldsymbol{P}$ στο σύνορο $\boldsymbol{\partial D}$ που βρίσκεται στο σύνορο της σφαίρας στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ και

αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u/w}$ δεν είναι σταθερά, τότε $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{w}\right) > 0$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$, όπου $\boldsymbol{\partial/\partial v}$ είναι οποιαδήποτε εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος.

Αν υπάρχει μια συνάρτηση w με τις καθορισμένες ιδιότητες και αν $u = 0$ στο σύνορο ∂D τότε το θεώρημα 10 μας παρέχει τη μοναδικότητα του πρώτου προβλήματος συνοριακών τιμών. Δηλαδή:

<u>Θεώρημα 11:</u> Αν υπάρχει μία συνάρτηση $\boldsymbol{w(x) > 0}$ στο $\boldsymbol{D \cup \partial D}$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{(L+h)[w] \leq 0}$ και αν το χωρίο $\boldsymbol{D}$ είναι φραγμένο, το πρόβλημα

$\boldsymbol{(L+h)[u] = f(x)}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{u = g(x)}$ στο σύνορο $\boldsymbol{\partial D}$, έχει το πολύ μία λύση.

Βέβαια, δεν είναι πάντα εφικτό να βρούμε τέτοια συνάρτηση w να ικανοποιεί τις συνθήκες στα θεωρήματα 10,11. Για παράδειγμα η συνάρτηση $u = csinx \cdot siny$ με c σταθερά, είναι λύση της $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2u = 0$ στο τετράγωνο $0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $u = 0$ στο σύνορο. Επομένως δεν υπάρχει μοναδική λύση και η συνάρτηση w δεν μπορεί να υπάρχει εδώ.

Αναλύουμε τώρα μια ειδική μέθοδο για να καθορίσουμε τη συνάρτηση w έχοντας τις ιδιότητες (2), (3) δοσμένου ενός χωρίου D που περιέχεται σε αρκούντως περιορισμένο και φραγμένο τμήμα από δύο παράλληλα υπερεπίπεδα. Υποθέτοντας ότι το D περιέχεται σε ένα κομμάτι $a < x_1 < b$, όπου x_1 είναι η πρώτη συντεταγμένη του $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$w(\boldsymbol{x}) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1 - a)}, \tag{4}$$

Οι αριθμοί α, β επιλέγονται ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (2), (3). Υπολογίζουμε:

$$(L+h)[w] = -\beta[\alpha^2 a_{11}(\boldsymbol{x}) + \alpha b_1(\boldsymbol{x}) + h(\boldsymbol{x})]e^{\alpha(x_1 - a)} + h(\boldsymbol{x}).$$

Από την υπόθεση της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας $a_{11}(\boldsymbol{x}) \geq \mu_0$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h(\boldsymbol{x})$ φραγμένη και ότι η συνάρτηση $b_1(\boldsymbol{x})$ κάτω φραγμένη.

Είναι $-m \leq h(\boldsymbol{x}) \leq M$, $-m \leq b_1(\boldsymbol{x})$ όπου m, M είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Επιλέγουμε α τόσο μεγάλο ώστε $\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)m > 0$.

Διαλέγουμε $\beta = \frac{M}{\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)m}$. (5)

Κάτω από αυτές τις συνθήκες: $(L+h)[w] \leq 0$ στο $D \cup \partial D$.

Παρόλα αυτά για να εξασφαλίσουμε ότι $w > 0$ στο $D \cup \partial D$ πρέπει να έχουμε $\beta e^{\alpha(b-a)} < 1$. Η ανισότητα

$$M < [\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)m]e^{\alpha(b-a)}, \tag{6}$$

πρέπει να ικανοποιείται. Μπορούμε να αυξήσουμε το μέγεθος του α αν θέλουμε. Μπορούμε να επιλέξουμε α ώστε το δεξιό μέλος της σχέσης (6) να είναι μέγιστο. Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος γίνεται μεγαλύτερο όσο το διάστημα $b - a$ γίνεται μικρότερο. Επιπλέον, η συνθήκη (6) γίνεται λιγότερο περιοριστική όσο το M, το μέγιστο της συνάρτησης $h(\boldsymbol{x})$, γίνεται μικρότερο. Η αρχή μεγίστου του θεωρήματος 10 ισχύει για τη συνάρτηση $h(\boldsymbol{x})$, που δίνεται από τη σχέση (4) οποτεδήποτε τα α, β ικανοποιούν τις σχέσεις (5), (6). Επιπλέον, δοσμένου του τελεστή $(L+h)$, υπάρχει πάντα ένας αριθμός $b - a$ τέτοιος ώστε αν το χωρίο $D \cup \partial D$ βρίσκεται σε λωρίδα πλάτους $b - a$, το πρώτο πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει μοναδική λύση. Εναλλακτικά η συνθήκη (6) επιβεβαιώνει ότι για οποιοδήποτε χωρίο $D\cup\partial D$, αν το θετικό μέγιστο της συνάρτησης $h(\boldsymbol{x})$ είναι αρκούντως μικρό, τότε η λύση του πρώτο προβλήματος συνοριακών τιμών είναι μοναδική. Η μοναδικότητα των λύσεων των άλλων προβλημάτων συνοριακών τιμών μπορεί επίσης να δειχθεί μέσω της γενικευμένης αρχής μεγίστου. Ας είναι η συνάρτηση u λύση της $(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(\boldsymbol{x})u = 0$ στο χωρίο D.

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})u = 0 \ \text{ στο } \Gamma_1, \\ \quad u = 0 \ \text{ στο } \Gamma_2, \end{cases}$$

όπου το σύνορο ∂D αποτελείται από τα σύνολα Γ_1, Γ_2 και η $\partial u/\partial \boldsymbol{v}$ είναι οποιαδήποτε εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος. Υποθέτουμε ότι κάθε σημείο του συνόλου Γ_1 βρίσκεται στο σύνορο μιας σφαίρας στον χώρο D. Έστω $w(\boldsymbol{x})$ θετική συνάρτηση στο $D\cup\partial D$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $v(\boldsymbol{x}) = \frac{u(x)}{w(x)}$. Τότε η συνάρτηση v ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2}{w}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j} + b_i\right\}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L+h)[w]v = 0 \text{ στο } D.$$

Επίσης η συνάρτηση v ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})\right\}v = 0 \ \text{ στο } \Gamma_1,$$

$$v = 0 \ \text{ στο } \Gamma_2.$$

Από το θεώρημα 9 βλέπουμε ότι αν $(L+h)[w] \leq 0$ στο χωρίο D και αν $(\partial w/\partial \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{x}) \geq 0$ στο σύνολο Γ_1, τότε $v \equiv 0$ εκτός αν $(L+h)[w] \equiv 0$, $(\partial w/\partial \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{x}) = 0$ στο σύνολο Γ_1 και το σύνολο Γ_2 είναι κενό, σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση v είναι οποιαδήποτε σταθερά. Η παραπάνω αιτιολόγηση οδηγεί στο επόμενο θεώρημα:

<u>Θεώρημα 12:</u> **Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\boldsymbol{w}(x) > \boldsymbol{0}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}\cup\boldsymbol{\partial D}$ τέτοια ώστε**

$$\boldsymbol{(L+h)[w] \leq 0 \text{ στο } D},$$

και
$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial v} + \alpha(x)w \geq 0 \ \text{ στο } \Gamma_1}$$

όπου το σύνορο $\boldsymbol{\partial D}$ αποτελείται από δύο τμήματα $\boldsymbol{\Gamma_1, \Gamma_2}$ και έστω ότι κάθε σημείο του $\boldsymbol{\Gamma_1}$ βρίσκεται στο σύνορο μιας σφαίρας στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ και ότι το χωρίο $\boldsymbol{D}$ είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει το πολύ μία λύση $\boldsymbol{u}(x)$ του προβλήματος

$$\boldsymbol{(L+h)[u] = f(x) \text{ στο } D},$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial v} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ στο } \Gamma_1},$$

$$\boldsymbol{u = g_2(x) \text{ στο } \Gamma_2},$$

εκτός αν $(\boldsymbol{i})$ $\boldsymbol{(L+h)[w] \equiv 0}$, $(\boldsymbol{ii})$ $\boldsymbol{\partial w/\partial v + \alpha(x)w \equiv 0 \text{ στο } \Gamma_1}$ και $(\boldsymbol{iii})$ $\boldsymbol{\Gamma_2}$ είναι κενό, τότε σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ορίζεται να είναι σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης $\boldsymbol{w}$.

Το παραπάνω θεώρημα συνεπάγεται από το γεγονός ότι αν οι συναρτήσεις z_1, z_2 είναι δύο λύσεις, τότε η συνάρτηση $\frac{z_1-z_2}{w}$ ικανοποιεί την αρχή μεγίστου. Σημειώνουμε ότι το θεώρημα 12 περιέχει το θεώρημα 11 σαν ειδική περίπτωση (όπου το Γ_1 είναι κενό). Η ύπαρξη της συνάρτησης $w(\boldsymbol{x})$ που ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες σημαίνει ότι δε χρειάζονται ειδικές υποθέσεις στις συναρτήσεις $h(\boldsymbol{x})$ και $\alpha(\boldsymbol{x})$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Ας είναι η συνάρτηση $u(\boldsymbol{x})$ η λύση της

$$(L+h)[u] = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

στο χωρίο D που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})u = g_1(x) \text{στο } \Gamma_1, \\ u = g_2(x) \text{ στο } \Gamma_2, \end{cases} \tag{2}$$

όπως συνήθως υποθέτουμε ότι ο τελεστής L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός, ότι $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ αποτελεί το σύνορο ∂D και ότι $\partial u/\partial \boldsymbol{v}$ είναι μια εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος σε κάθε σημείο του Γ_1. Επιπλέον κάθε σημείο του Γ_1 ανήκει στο σύνορο της σφαίρας που βρίσκεται στο χωρίο D και D φραγμένο. Η αρχή του μεγίστου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει φράγματα για λύσεις του προβλήματος $(1), (2)$. Η μέθοδος που θα δείξουμε είναι φυσική επέκταση από αυτήν που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο για λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Υποθέτουμε ότι L, h, D είναι τέτοια ώστε να υπάρχει συνάρτηση $w(\boldsymbol{x})$ θετική στο $D \cup \partial D$ με τις ιδιότητες

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ στο } D,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})w \geq 0 \text{ στο } \Gamma_1.$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $z_1(x)$ μπορεί να βρεθεί και η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες

$$(L+h)[z_1] \leq f(\boldsymbol{x}) \text{ στο } D, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial v} + \alpha(\boldsymbol{x})z_1 \geq g_1(\boldsymbol{x}) \text{ στο } \Gamma_1, \\ z_1 \geq g_2(\boldsymbol{x}) \text{ στο } \Gamma_2. \end{cases} \tag{4}$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες η συνάρτηση $v = \frac{u-z_1}{w}$ ικανοποιεί τις τρεις ανισότητες

$$\begin{cases} \dfrac{1}{w}(L+h)[vw] = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\boldsymbol{i}} \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2}{w} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} + b_i \right\} \frac{\partial v}{\partial x_i} + (L+h)[w]v \geq 0 \text{ στο } D, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}} + \dfrac{1}{w} \left\{ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x}) \right\} v \leq 0 \text{ στο } \Gamma_1, \\ v \leq 0 \text{ στο } \Gamma_2. \end{cases}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 6, αν η συνάρτηση v δεν είναι ταυτοτικά σταθερή, μπορεί να έχει μόνο μη αρνητικό μέγιστο σε ένα σημείο στο σύνορο. Από το θεώρημα 8 η συνάρτηση v δεν μπορεί να έχει μη αρνητικό μέγιστο στο Γ_1 εκτός και αν είναι σταθερή. Αν το Γ_2 είναι κενό, αν $(\partial w/\partial \boldsymbol{v}) + \alpha w \equiv 0$, αν $(L+h)[w] \equiv 0$ στο χωρίο D τότε η συνάρτηση v ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες συνθήκες. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις καταλήγουμε ότι η συνάρτηση $v \leq 0$ ώστε να ισχύει $u(\boldsymbol{x}) \leq z_1(\boldsymbol{x})$ στο χωρίο D.

Με άλλα λόγια η συνάρτηση $z_1(\boldsymbol{x})$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (3), (4) παρέχει ένα άνω φράγμα για τη συνάρτηση u. Για να πάρουμε ένα κάτω φράγμα υποθέτουμε ότι μία συνάρτηση $z_2(\boldsymbol{x})$ μπορεί να βρεθεί ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες

$$(L+h)[z_2] \geq f(\boldsymbol{x}) \text{ στο } D, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_2}{\partial v} + \alpha(\boldsymbol{x}) z_2 \leq g_1(\boldsymbol{x}) \text{ στο } \Gamma_1, \\ \quad z_2 \leq g_2(\boldsymbol{x}) \text{ στο } \Gamma_2. \end{cases} \tag{6}$$

Ορίζοντας τη συνάρτηση $v = (z_2 - u)/w$ και με την αιτιολόγηση που κάναμε για την z_1, βρίσκουμε $z_2(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{x})$ στο χωρίο D.

<u>Θεώρημα 13:</u> Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$ στο $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{\partial D}$ τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{(L+h)[w] \leq 0 \text{ στο } D},$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial v} + \alpha(x) w \geq 0 \text{ στο } \Gamma_1},$$

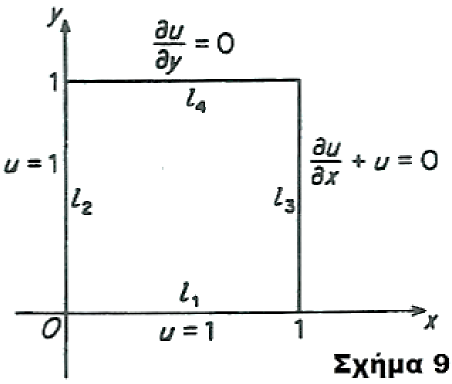
όπου ο $\boldsymbol{L}$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός και $\boldsymbol{\partial u/\partial v}$ είναι μία εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος. Θεωρούμε ότι οι τρεις συνθήκες $(\boldsymbol{i})(\boldsymbol{\partial w/\partial v}) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$ στο $\boldsymbol{\Gamma_1}$, $(\boldsymbol{ii})$ $(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{w}] \equiv \boldsymbol{0}$ στο χωρίο $\boldsymbol{D}$ και $(\boldsymbol{iii})$ $\boldsymbol{\Gamma_2}$ κενό, δεν ισχύουν όλες ταυτόχρονα. Αν οι συναρτήσεις $\boldsymbol{z_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z_2}(\boldsymbol{x})$ ικανοποιούν τις σχέσεις (3), (4) και (5), (6) αντίστοιχα τότε η λύση $\boldsymbol{u}$ του προβλήματος (1), (2) ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\boldsymbol{z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x) \text{ στο } D}.$$

<u>Παρατήρηση:</u> Το θεώρημα 12 είναι μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος 13. Αν $u, \bar{u}$ είναι και οι δύο λύσεις του προβλήματος (1), (2) μπορούμε να βάλουμε $z_1 \equiv z_2 \equiv \bar{u}$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα 13 μπορούμε να βρούμε ότι $\bar{u} \leq u \leq \bar{u}$, άρα $u \equiv \bar{u}$.

Ας δείξουμε πως το θεώρημα 13 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε ένα αριθμητικό φράγμα σε μια συγκεκριμένη περίπτωση.

<u>Παράδειγμα:</u> Βρίσκουμε φράγματα για τη λύση της $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ στο τετράγωνο $\boldsymbol{S}$: $\begin{cases} \boldsymbol{0 < x < 1} \\ \boldsymbol{0 < y < 1} \end{cases}$



Ορθογώνιο χωρίο S με σύνορα l_1, l_2, l_3, l_4.

η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (Σχήμα 9):

$$u = 1 \text{ στον τομέα } l_1: 0 < x < 1, y = 0,$$

$$u = 1 \text{ στον τομέα } l_2: 0 < y < 1, x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \text{ στον τομέα } l_3: 0 < y < 1, x = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ στον τομέα } l_4: 0 < x < 1, y = 1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $z_1 \equiv 1$ ικανοποιεί τις σχέσεις $(3), (4)$ και η συνάρτηση $z_2 \equiv e^{-x}$ ικανοποιεί τις σχέσεις $(5), (6)$. Επιπλέον, η συνάρτηση $w \equiv 1$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 13. Επιπρόσθετα η συνάρτηση $e^{-x} \leq u(x, y) \leq 1$ στο σημείο S.

Όπως στην περίπτωση της μίας διάστασης μπορούμε να απαλείψουμε την περιττή συνάρτηση w του θεωρήματος 13. Αν έχουμε συνάρτηση z_1 που ικανοποιεί τις σχέσεις $(3), (4)$ και συνάρτηση z_2 που ικανοποιεί τις σχέσεις $(5), (6)$ τέτοιες ώστε όχι όλες οι ανισότητες που δίνονται από τις σχέσεις $(3), (4), (5), (6)$ να είναι ταυτότητες και αν $z_1 \geq z_2$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε συνάρτηση w τέτοια ώστε το θεώρημα 13 να ισχύει. Αν $z_1 > z_2$, μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση $w = z_1 - z_2$.

Αν $q \equiv z_1 - z_2$, τότε η συνάρτηση q δεν μπορεί να μηδενιστεί σε εσωτερικά σημεία ή στο Γ_1. Αν η συνάρτηση $q = 0$ σε ένα σημείο του Γ_2, μπορούμε να επιλέξουμε τη συνάρτηση $w = q + \varepsilon r$ (με $\varepsilon > 0$) όπου r είναι η λύση του προβλήματος

$$(L + h)[r] = 0 \text{ στο } D,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha r = 0 \text{ στο } \Gamma_1,$$

$$r = 1 \text{ στο } \Gamma_2,$$

και ε επιλέγεται τόσο μικρό ώστε $w > 0$ στο $D \cup \partial D$.

Η ύπαρξη της συνάρτησης r συνεπάγεται αν εμείς θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα $(1), (2)$ μπορεί να λυθεί για αυθαίρετες συνεχείς συνοριακές τιμές $g_2(\boldsymbol{x})$.

<u>Θεώρημα 14:</u> Έστω οι συναρτήσεις $\boldsymbol{z_1}$ και $\boldsymbol{z_2}$ να ικανοποιούν τις συνθήκες $(\mathbf{3}), (\mathbf{4})$ και $(\mathbf{5}), (\mathbf{6})$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε η ισότητα να μην ισχύει για όλες. Αν το πρόβλημα $(\mathbf{1}), (\mathbf{2})$ έχει λύσεις για αυθαίρετες συνεχείς συνοριακές τιμές $\boldsymbol{g_2(x)}$ και αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι λύση του συγκεκριμένου προβλήματος $(\mathbf{1}), (\mathbf{2})$ τότε τα φράγματα

$\boldsymbol{z_2 \leq u \leq z_1}$ **ισχύουν αν και μόνο αν** $\boldsymbol{z_2 \leq z_1}$**.**

Έστω ότι υπάρχει θετική συνάρτηση w η οποία ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\begin{cases} (L+h)[w] \leq -1 \text{ στο } D, \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})w \geq 1 \text{ στο } \Gamma_1, \\ \quad w \geq 1 \text{ στο } \Gamma_2. \end{cases} \tag{7}$$

που είναι ελαφρώς πιο ισχυρές από αυτές του θεωρήματος 13.

Αν η συνάρτηση u είναι λύση του προβλήματος $(1), (2)$ και αν ορίσουμε $A = max\{\sup|f(\boldsymbol{x})|, \sup|g_1(\boldsymbol{x})|, \sup|g_2(\boldsymbol{x})|\,|\}$, τότε το θεώρημα 13 δείχνει ότι $|u(\boldsymbol{x})| \leq Aw(\boldsymbol{x})$. Αν η $\bar{u}$ λύση του προβλήματος

$$(L+h)[\bar{u}] = \bar{f}(\boldsymbol{x}) \text{ στο } D,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})w = \overline{g_1}(\boldsymbol{x}) \text{στο } \Gamma_1,$$

$$\bar{u} = \overline{g_2}(\boldsymbol{x}) \text{ στο } \Gamma_2,$$

ο παραπάνω ισχυρισμός δείχνει ότι:

$$|\bar{u}(x) - u(x)| \leq w(x) max\left\{\sup\left|\bar{f} - f\right|, \sup|\overline{g_1} - g_1|, sup|\overline{g_2} - g_2|\right\}, \tag{8}$$

στο D. Πιο συγκεκριμένα, αν οι διαφορές $\bar{f} - f, \overline{g_1} - g_1, \overline{g_2} - g_2$ είναι ομοιόμορφα μικρές, τότε η διαφορά $\bar{u} - u$ είναι ομοιόμορφα μικρή. Με άλλα λόγια, η λύση του προβλήματος $(1), (2)$ εξαρτάται διαρκώς από τα δεδομένα μας.

Αν το θεώρημα 13 ισχύει και αν το πρόβλημα $(1), (2)$ μπορεί να λυθεί για αυθαίρετα συνεχή δεδομένα, η λύση του προβλήματος

$$(L+h)[w] = -1 \text{ στο } D,$$
$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} + \alpha(\boldsymbol{x})w = 1 \text{ στο } \Gamma_{1,}$$
$$w = 1 \text{ στο } \Gamma_{2,}$$

ικανοποιεί τις ανισότητες (7).

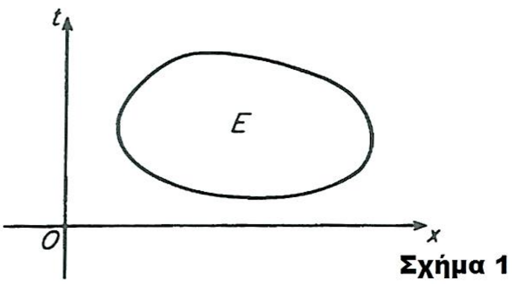
Για να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (8) και για να φράξουμε το σφάλμα που δημιουργήθηκε από την προσέγγιση της συνάρτησης u από τη συνάρτηση $\bar{u}$, είναι απαραίτητο να βρούμε μία συνάρτηση w που ικανοποιεί τις ανισότητες (7).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Έστω μία μακριά λεπτή ράβδος μήκους l που βρίσκεται στο διάστημα $(0, l)$ κατά μήκος του x-άξονα. Πρέπει να υποθέσουμε ότι το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ότι η θερμότητα μπορεί να εισέρχεται και να εξέρχεται από τη ράβδο και υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία u σε οποιοδήποτε σημείο στη ράβδο είναι συνάρτηση μόνο του x και του χρόνου t. Γράφουμε $u = u(x, t)$. Κάτω από ειδικές υποθέσεις στις φυσικές ιδιότητες της ράβδου, η διαφορική εξίσωση ελέγχει τη ροή της θερμότητας που δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t).$$

Η συνάρτηση f είναι ο ρυθμός της απομάκρυνσης θερμότητας στη ράβδο. Η συνάρτηση θερμοκρασίας $u(x, t)$ ικανοποιεί μία αρχή μεγίστου κάπως διαφορετική από αυτήν που ικανοποιούν οι ελλειπτικές εξισώσεις και ανισότητες.



Περιοχή E στο x,t –επίπεδο.

Έστω η συνάρτηση $u(x, t)$ να ικανοποιεί την αυστηρή ανισότητα $L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$ σε περιοχή E του x,t -επιπέδου (**Σχήμα 1**). Είναι σαφές ότι η συνάρτηση u δεν μπορεί να έχει μέγιστο σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο. Για τέτοιο σημείο ισχύει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

με αυτόν τον τρόπο παραβιάζεται η συνθήκη $L[u] > 0$. Πρέπει να βρούμε μια μέθοδο όχι μόνο για να επεκτείνουμε αυτή τη σχέση για λύσεις u της ανίσωσης $L[u] \geq 0$, αλλά και για να δείξουμε ότι για τελεστές τέτοιου τύπου η αρχή μεγίστου θα έχει ισχυρότερη μορφή.

Για να διατυπώσουμε ένα τυπικό παράδειγμα θα υποθέσουμε ότι η ράβδος μας που έχει τις παραπάνω ιδιότητες που περιγράψαμε, έχει θερμοκρασία που καθορίζεται αρχικά (στο χρόνο $t = 0$) και ότι οι θερμοκρασίες στο τέλος της ράβδου είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου. Από αρχή αιτιότητας έχουμε ότι η κατανομή θερμοκρασίας σε οποιοδήποτε σταθεροποιημένο χρόνο T είναι ανεπηρέαστη σε οποιεσδήποτε αλλαγές στη ράβδο που συμβαίνουν σε ένα χρόνο $t > T$. Επιπλέον είναι φυσικό να θεωρήσουμε την ορθογώνια περιοχή:

$$E: \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \tag{1}$$

στο x, t-επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία $u(x,t)$ είναι γνωστή στις πλευρές της περιοχής E:

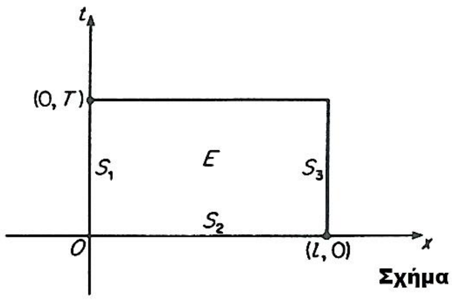
$$S_1: \{x = 0, 0 \leq t \leq T\},$$

$$S_2: \{ 0 \leq x \leq l, t = 0\},$$

$$S_3: \{x = l, 0 \leq t \leq T\}.$$

Περιμένουμε ότι αυτή η πληροφορία και το γεγονός ότι η θερμοκρασία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$



Σχήμα 2

Περιοχή E με σύνορα S_1, S_2, S_3, S_4.

στην περιοχή E αρκεί για να καθορίσει τη θερμοκρασία σε όλη την περιοχή E (Σχήμα 2). Η μοναδικότητα της λύσης λαμβάνεται ως φυσικό επακόλουθο της αρχής μεγίστου που ακολουθεί.

Θεώρημα 1: Έστω $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ να ικανοποιεί την ανισότητα

$$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{u}] \equiv \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

στην ορθογώνια περιοχή $\boldsymbol{E}$ που δίνεται στη σχέση $(\mathbf{1})$. Τότε το μέγιστο της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ στο $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{\partial E}$ πρέπει να λαμβάνεται σε μία από τις τρεις πλευρές $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \boldsymbol{S_3}$ (Σχήμα 2).

Απόδειξη: Έστω ότι το M είναι το μέγιστο των τιμών της συνάρτησης u που λαμβάνονται στις πλευρές S_1, S_2, S_3. Πρέπει να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $P(x_0, t_0)$ της περιοχής E όπου η συνάρτηση u έχει μία τιμή $M_1 > M$ και φτάνουμε σε αντίφαση. Ορίζουμε την αυθαίρετη συνάρτηση $w(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2$.

Αφού η συνάρτηση $u \leq M$ στις πλευρές S_1, S_2, S_3 έχουμε

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + w(x) \leq M + \frac{M_1 - M}{2} < M, \quad (3)$$

για όλα τα σημεία των S_1, S_2, S_3. Επιπλέον:

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M_1 \quad (4)$$

και
$$L[v] \equiv L[u] + L[w] = L[u] + \frac{M_1 - M}{l^2}, \quad (5)$$

στην περιοχή E. Οι συνθήκες $(3), (4)$ δείχνουν ότι η συνάρτηση v πρέπει να λάβει το μέγιστό της είτε σε ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής E ή κατά μήκος του ανοιχτού διαστήματος S_4: $\{0 < x < l, t = T\}$.

Η ανισότητα (5) δείχνει ότι η συνάρτηση v δεν μπορεί να έχει εσωτερικά το μέγιστο, ενώ για το μέγιστο στο διάστημα S_4 ισχύει $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ με την απαίτηση ότι η $\frac{\partial v}{\partial t}$ είναι αυστηρά αρνητική. Επιπρόσθετα η συνάρτηση v πρέπει να είναι μεγαλύτερη σε νωρίτερο χρόνο ώστε το μέγιστο να μην είναι στο διάστημα S_4. Βλέπουμε ότι η θεώρηση $u(x_0, t_0) > M$ οδηγεί σε αντίφαση.

Παρατηρήσεις: (i) Το θεώρημα λέει ότι το μέγιστο όχι μόνο δεν μπορεί να ληφθεί σε εσωτερικό σημείο της περιοχής E, αλλά δεν μπορεί και να ληφθεί στον τελικό χρόνο, εκτός ίσως από τα άκρα της ράβδου, και εκτός αν η συνάρτηση u είναι σταθερή.

(ii) Η αρχή μεγίστου του πρώτου θεωρήματος δεν αποτελεί την ισχυρή μορφή του εφόσον επιτρέπει το μέγιστο της συνάρτησης u να λαμβάνεται σε συνοριακά και σε εσωτερικά σημεία.

(iii) Για λύσεις της $L[u] = 0$ παίρνουμε μία σχετική αρχή ελαχίστου αντικαθιστώντας τη συνάρτηση u με τη συνάρτηση $(-u)$ και έτσι η μοναδικότητα του θεωρήματος που αναφέρθηκε προηγουμένως συνεπάγεται εύκολα.

(iv) Για ελλειπτικές διαφορικές ανισώσεις το μέγιστο μίας λύσης μπορεί να πραγματοποιηθεί παντού στο σύνορο. Στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, το μέγιστο μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ειδικό κομμάτι του συνόρου εκτός αν η συνάρτηση u =σταθερή. Το γεγονός αυτό είναι αληθές και για πιο γενικές εξισώσεις με πρότυπο την εξίσωση της θερμότητας και για πιο γενικά χωρία.

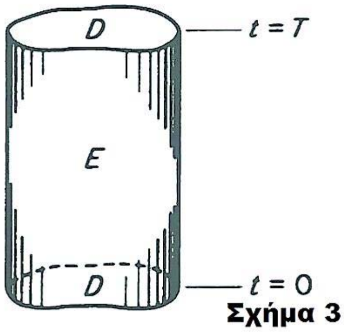
Η εξίσωσης της θερμότητας στις τρεις διαστάσεις, σε χωρίο D είναι

$$L[u[\equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,z,t),$$

όπου $u = u(x,y,x,t)$ είναι η θερμοκρασία σε σημείο $P(x,y,z)$ του χωρίου D σε χρόνο t και f είναι ο ρυθμός αποβολής της θερμότητας. Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, η συνάρτηση u (τη θεωρούμε συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών) δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο όπου $L[u] \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$. Αυτό το γεγονός συνεπάγεται αφού γνωρίζουμε ότι σε ένα μέγιστο ισχύει $\Delta u \leq 0$ και $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Θέλουμε να επεκτείνουμε την αρχή μεγίστου σε συναρτήσεις u που ικανοποιούν τη μη αυστηρή ανισότητα $L[u] \geq 0$.

Το πιο απλό πρόβλημα τριών διαστάσεων είναι αυτό του φραγμένου ομογενούς στερεού που γεμίζει το χωρίο D. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα αρχίζει τη στιγμή $t = 0$ και ότι αρχικά η θερμοκρασία $u(x, y, z, 0)$ είναι η καθορισμένη συνάρτηση των (x, y, z). Επιπλέον η θερμοκρασία του συνόρου ∂D του χωρίου D είναι καθορισμένη για όλες τις τιμές $t \geq 0$. Το πρόβλημα της ροής θερμότητας αφορά τον ορισμό της συνάρτησης θερμοκρασίας $u(x, y, z, t)$ για όλα τα σημεία $P(x, y, z)$ στο χωρίο D και για όλους τους χρόνους $t > 0$.

Το ενδιαφέρον μας για το χώρο-χρόνο των τεσσάρων διαστάσεων που αποτελείται από τον άπειρο κύλινδρο $D \times (0, \infty)$ είναι αρκετά μεγάλο. Παρόλα αυτά από την αρχή αιτιότητας όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση μας επιτρέπει να περιορίσουμε το χώρο. Η κατανομή θερμοκρασίας στο χωρίο D σε κάποιο σταθεροποιημένο χρόνο T καθορίζεται από το τι συμβαίνει στο διάστημα $0 \leq t \leq T$. Η περιοχή τεσσάρων διαστάσεων είναι ο άπειρος κύλινδρος $D \times (0, T]$. Η θερμοκρασία u σε αυτόν τον κύλινδρο ορίζεται από την $L[u]$, από τις τιμές της συνάρτησης u σε αυτόν τον κύλινδρο και από τις τιμές της συνάρτησης u στον κυλινδρικό τοίχο $\partial D \times (0, T]$.



Κύλινδρος τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = T$.

Σημειώνοντας τον κύλινδρο $D \times (0, T]$ με E, περιμένουμε από την αρχή μεγίστου ότι η συνάρτηση u παίρνει το μέγιστό της στο κομμάτι του συνόρου E το οποίο είναι είτε στο κάτω μέρος του E είτε κατά μήκος των πλευρών $\partial D \times (0, T]$ (**Σχήμα 3**). Αν

$$L[u] \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0,$$

τότε έχουμε ήδη δει ότι το μέγιστο δεν μπορεί να ληφθεί σε ένα εσωτερικό σημείο του E. Αν το μέγιστο της συνάρτησης u λαμβάνεται στο χρόνο $t = T$ σε ένα εσωτερικό σημείο του χώρου D, φτάνουμε σε αντίφαση. Για να το δούμε αυτό, βλέπουμε ότι $\Delta u \leq 0$ στο μέγιστο. Η ανισότητα $L[u] > 0$ μας δίνει ότι $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ στο ίδιο σημείο. Τότε η συνάρτηση u είναι μεγαλύτερη σε νωρίτερο χρόνο και ότι το μέγιστο πρέπει να λαμβάνεται είτε κατά μήκος των πλευρών είτε στο κάτω μέρος του E. Θα επεκτείνουμε την αρχή μεγίστου όχι μόνο για την $L[u] \geq 0$ αλλά και για πιο γενικές εξισώσεις και χωρία.

Ο ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ

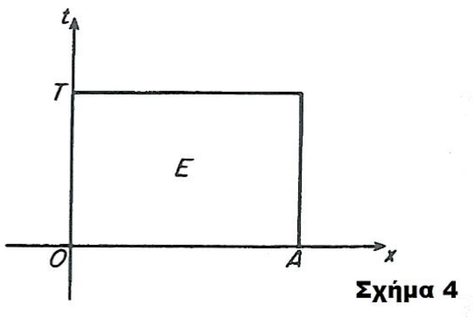
Ο διαφορικός τελεστής

$$L[u] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \tag{1}$$

καλείται παραβολικός σε ένα σημείο (x,t) αν $a(x,t) > 0$.

Ο τελεστής L είναι ομοιόμορφα παραβολικός σε ένα χωρίο D του x,t-επιπέδου αν υπάρχει θετική σταθερά μ ώστε $a(x,t) \geq \mu$ για όλα τα σημεία x στο χωρίο D.

Ο μονοδιάστατος τελεστής θερμότητας είναι ομοιόμορφα παραβολικός σε ολόκληρο το x,t-επίπεδο, εφόσον λαμβάνεται από την (1) για $a(x,t) \equiv 1, b(x,t) \equiv 0$.



Περιοχή Ε.

Ας είναι E: $\{0 < x < A, 0 < t \leq T\}$ η ορθογώνια περιοχή (**Σχήμα 4**). Είναι φανερό ότι η συνάρτηση u ικανοποιεί την αυστηρή ανισότητα

$$L[u] > 0 \text{ στην περιοχή } E. \tag{2}$$

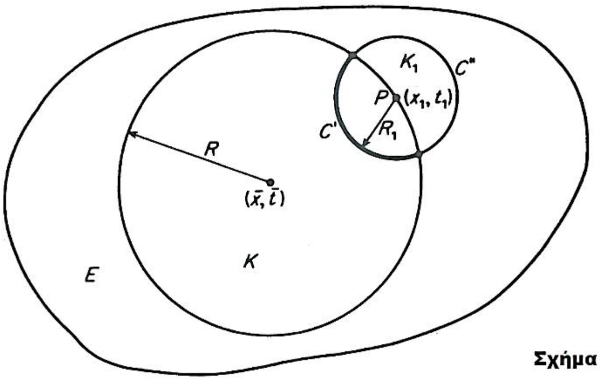
Τότε η συνάρτηση u δεν μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο. Για ένα εσωτερικό σημείο μεγίστου $\partial^2 u/\partial x^2$ και $\partial u/\partial x = \partial u/\partial t = 0$ παραβιάζεται η σχέση (2). Επιπλέον το μέγιστο της συνάρτησης u δεν μπορεί να ληφθεί κατά μήκος του ανοιχτού τομέα που σχηματίζει το άνω φράγμα της περιοχής E κατά μήκος $0 < x < A$, $t = T$. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι σε τέτοιο σημείο μεγίστου $\partial u/\partial x = 0, \partial u/\partial t \geq 0, \partial^2 u/\partial x^2 \leq 0$.

Η αρχή μεγίστου για τον τελεστή L θα επεκταθεί για λύσεις των διαφορικών ανισώσεων $L[u] \geq 0$. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στον Louis Nirenberg και χρησιμοποιεί μια κατάλληλη παραλλαγή της μεθόδου του Hopf για τους παραβολικούς τελεστές. Το βασικό μας αποτέλεσμα βασίζεται σε τρία λήμματα που θα αναφέρουμε για να δείξουμε την αρχή μεγίστου.

<u>Λήμμα 1:</u> Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ να ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα

$$\boldsymbol{L[u] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0}, \tag{3}$$

σε χωρίο $\boldsymbol{E}$ του $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}$-επιπέδου όπου $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις και ο τελεστής $\boldsymbol{L}$ είναι ομοιόμορφα παραβολικός. Έστω $\boldsymbol{K}$ ένας δίσκος τέτοιος ώστε αυτός και το σύνορό του $\boldsymbol{\partial K}$ να περιέχονται στο $\boldsymbol{E}$. Υποθέτουμε ότι το μέγιστο της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ στο χωρίο $\boldsymbol{E}$ είναι το $\boldsymbol{M}$ ώστε $\boldsymbol{u < M}$ στο εσωτερικό του δίσκου $\boldsymbol{K}$ και ότι $\boldsymbol{u = M}$ σε κάποιο σημείο $\boldsymbol{P}$ στο σύνορο του $\boldsymbol{K}$. Τότε η εφαπτομένη στο δίσκο $\boldsymbol{K}$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$ είναι παράλληλη στον άξονα $\boldsymbol{x}$. Το σημείο $\boldsymbol{P}$ είναι είτε στην κορυφή είτε στο κάτω μέρος του δίσκου $\boldsymbol{K}$.



Σχήμα 5

Το χωρίο E και εσωτερικά ο δίσκος K που περιέχει το σημείο P όχι στην κορυφή ούτε στο κάτω μέρος του δίσκου, αλλά σε τυχαία θέση, υπόθεση που θα καταλήξει σε άτοπο.

Απόδειξη: Έστω ο δίσκος K να έχει το κέντρο του στο σημείο $(\bar{x}, \bar{t})$ και έστω R η ακτίνα του. Θεωρούμε ότι το σημείο P στο σύνορο ∂K δε βρίσκεται πάνω ή κάτω (στην κορυφή είτε στο κάτω μέρος του δίσκου K) και θα φτάσουμε σε αντίφαση. Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το σημείο P είναι το μόνο συνοριακό σημείο για το οποίο ισχύει ότι $u = M$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον δίσκο K με ένα αρκούντως μικρότερο δίσκο K' όπου το σύνορό του είναι εσωτερικό του δίσκου K εκτός από ένα σημείο P όπου τα σύνορα $\partial K, \partial K'$ είναι εφαπτόμενα. Τότε ο δίσκος K' έχει ακριβώς ένα σημείο P στο σύνορό του όπου $u = M$ και το επιχείρημα μπορεί να συνεχιστεί με τον δίσκο K' αν είναι απαραίτητο. Υποθέτουμε ότι το σημείο P έχει συντεταγμένες (x_1, t_1) με $x_1 \neq \bar{x}$. Κατασκευάζουμε έναν δίσκο K_1 με κέντρο στο σημείο P και ακτίνα R_1 τόσο μικρό ώστε $R_1 < |x_1 - \bar{x}|$ και επίσης τέτοιο ώστε ο δίσκος K_1 να βρίσκεται εξολοκλήρου στον χώρο E. Το σύνορο ∂K_1 αποτελείται από δύο τόξα: C'(περιέχει και τα άκρα) είναι η τομή του ∂K_1 με τον κλειστό δίσκο $K \cup \partial K$ και C'' να είναι το συμπλήρωμα του C' σε αντιστοιχία με το ∂K_1. Εφόσον η συνάρτηση u είναι μικρότερη του M στο κλειστό τόξο C', μια θετική σταθερά η μπορεί να βρεθεί ώστε $u \leq M - \eta$ στο τόξο C'. Επιπρόσθετα, αφού $u \leq M$ στην περιοχή E έχουμε $u \leq M$ στο τόξο C''.

Ορίζουμε την αυθαίρετη συνάρτηση $v(x,t) = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2 + (t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}$. Για θετικές τιμές του α, η συνάρτηση v είναι θετική στον δίσκο K, μηδέν στο ∂K και αρνητική σε εξωτερικό σημείο του δίσκου K. Υπολογίζουμε το

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2]}[2\alpha a(x-\bar{x})^2 - a - b(x-\bar{x}) + (t-\bar{t})].$$

Στο δίσκο K_1 και στο σύνορό του έχουμε $|x-\bar{x}| \geq |x_1-\bar{x}| - R_1 > 0$ και είναι δυνατό να επιλέξουμε α μεγάλο ώστε να ισχύει $L[v] > 0$ για (x,t) στο $K_1 \cup \partial K_1$. Τώρα εισάγουμε τη συνάρτηση $w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$ όπου ε θετική σταθερά. Παρατηρούμε ότι

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0 \text{ στο δίσκο } K_1. \qquad (4)$$

Εφόσον $u \leq M - \eta$ στο τόξο C', μπορούμε να επιλέξουμε ε τόσο μικρό ώστε $w = u + \varepsilon v < M$ στο τόξο C'.

Επιπλέον, αφού η συνάρτηση $v < 0$ στο C''και $u \leq M$ έχουμε $w = u + \varepsilon v < M$ στο C''.

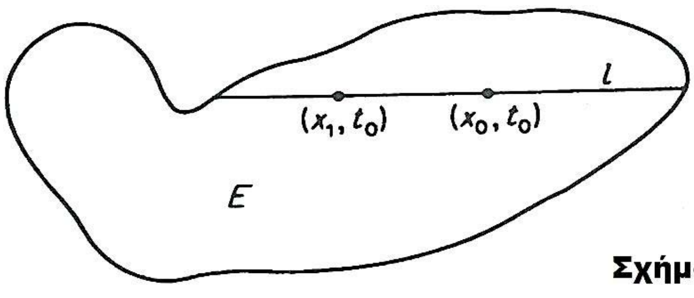
Έχουμε ακόμα ότι $w < M$ σε ολόκληρο το σύνορο $\partial K_1 = C' \cup C''$. Από την άλλη πλευρά, αφού η συνάρτηση v μηδενίζεται στο ∂K, βρίσκουμε ότι

$$w(x_1,t_1) = u(x_1,t_1) + \varepsilon v(x_1,t_1) = u(x_1,t_1) = M.$$

Συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο της συνάρτησης w στο δίσκο K_1 πρέπει να συμβαίνει σε ένα εσωτερικό σημείο. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (4) και το λήμμα αποδεικνύεται. Το επιχείρημα αποτυγχάνει αν το σημείο P είναι στην κορυφή και στο κάτω μέρος του δίσκου K. Αν $x_1 = \bar{x}$, τότε δεν μπορούμε να επιλέξουμε $R_1 < |x_1 - \bar{x}|$.

Παρατήρηση: Η ανισότητα $u \leq M$ ισχύει σε περιοχή E που περιέχει το $K \cup \partial K$, έτσι ώστε να είναι έγκυρη στο δίσκο $K_1 \cup \partial K_1$ που είναι μερικώς έξω από το σύνορο ∂K. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $u = x^2 + (t-2)^2$ ικανοποιεί την ανισότητα $u_{xx} - u_t \geq 0$ για $t \leq 4$ και $u < 1$ στο δίσκο $x^2 + (t-2)^2 < 1$, αλλά παίρνει τη μέγιστη τιμή της οπουδήποτε στο σύνορο $x^2 + (t-2)^2 = 1$. Το λήμμα 1 δεν εφαρμόζεται επειδή η συνάρτηση $u > 1$ έξω από αυτόν τον κύκλο. Το θεώρημα 3 θα δείξει ότι η ανισότητα (3) ισχύει μόνο στο δίσκο K.

Λήμμα 2: Υποθέτουμε ότι σε χωρίο $\boldsymbol{E}$ του $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}$-επιπέδου, η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ικανοποιεί την ανισότητα $\boldsymbol{L[u] \geq 0}$ με τον τελεστή $\boldsymbol{L}$ να έχει τις ιδιότητες του λήμματος 1. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\boldsymbol{u < M}$ σε κάποιο εσωτερικό σημείο $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{t_0})$ του χωρίου $\boldsymbol{E}$ και ότι $\boldsymbol{u \leq M}$ στο $\boldsymbol{E}$. Αν $\boldsymbol{l}$ είναι οποιοδήποτε οριζόντιο κομμάτι ευθείας στο εσωτερικό του $\boldsymbol{E}$ που περιέχει το $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{t_0})$ τότε $\boldsymbol{u < M}$ στο $\boldsymbol{l}$ (Σχήμα 6).



Σχήμα 6

Το χωρίο E και ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία (x_1, t_0), (x_0, t_0).

Απόδειξη: Έστω ότι $u = M$ σε κάποιο εσωτερικό σημείο (x_1, t_0) στο l και έστω ότι ισχύει $u < M$ στο σημείο (x_0, t_0). Θα δουλέψουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_0$ και μπορούμε να μετακινήσουμε το x_1 δεξιά, αν είναι απαραίτητο, ώστε $u < M$ για $x_1 < x \leq x_0$. Ας είναι d_0 η διαφορά $x_0 - x_1$ή το ελάχιστο των αποστάσεων από οποιοδήποτε σημείο της ευθείας $x_1 \leq x \leq x_0,\ t = t_0$ ως το σύνορο ∂E, οποιοδήποτε είναι μικρότερο.

Για $x_1 < x < x_1 + d_0$ ορίζουμε $d(x)$ να είναι η απόσταση από το σημείο (x, t_0) στο πιο κοντινό σημείο στον χώρο E όπου ισχύει $u = M$. Αφού $u(x_1, t_0) = M,\ d(x) \leq x - x_1$. Από το λήμμα 1, το πιο κοντινό σημείο είναι ευθεία πάνω ή κάτω από το σημείο (x, t_0). Είναι λοιπόν, είτε $u\big(x, t_0 + d(x)\big) = M$ είτε $u\big(x, t_0 - d(x)\big) = M$. Εφόσον η απόσταση από ένα σημείο $(x_0 + \delta, t_0)$ στο σημείο $u\big(x, t_0 \mp d(x)\big)$ είναι $\sqrt{d^2(x) + \delta^2}$ βλέπουμε ότι

$$d(x+\delta) \leq \sqrt{d^2(x) + \delta^2} < d(x) + \tfrac{\delta^2}{2d(x)}. \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας το x με $x + \delta$ και δ με $-\delta$, βλέπουμε ακόμη ότι

$$d(x+\delta) > \sqrt{d^2(x) - \delta^2}. \tag{6}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $d(x) > 0$ και επιλέγουμε $0 < \delta < d(x)$. Υποδιαιρούμε το διάστημα $(x, x+\delta)$ σε n ίσα τμήματα και εφαρμόζουμε τις ανισότητες (5), (6) για να βρούμε

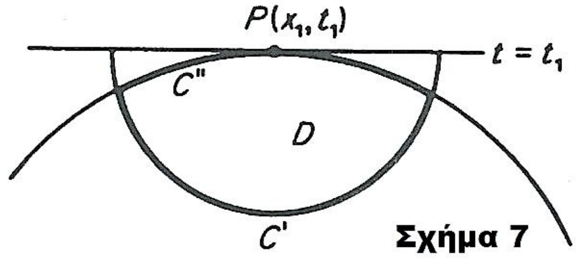
$$d\left(x + \frac{j+1}{n}\delta\right) - d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right) \leq \frac{\delta^2}{2n^2 d\left(x + \left(\frac{j}{n}\right)\delta\right)} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d^2(x) - \delta^2}}.$$

Αθροίζοντας από $j = 0$ ως το $n - 1$ λαμβάνουμε $d(x+\delta) - d(x) \leq \frac{\delta^2}{2n\sqrt{d^2(x) - \delta^2}}$ για οποιονδήποτε ακέραιο n. Επιτρέπουμε στο $n \to \infty$ και βλέπουμε ότι $d(x+\delta) \leq d(x)$ για $\delta > 0$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $d(x)$ είναι μια μη αυξανόμενη συνάρτηση του x. Αφού $d(x) \leq x - x_1$, είναι αυθαίρετα μικρό για x αρκούντως κοντά στο x_1, βλέπουμε ότι $d(x) \equiv 0$ για $x_1 < x < x_1 + d_0$. Με άλλα λόγια, $u(x, t_0) \equiv M$ σε αυτό το διάστημα, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας ότι $u < M$ για $x_1 < x \leq x_0$. Άρα φτάσαμε σε άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $u(x_0, t_0) = M$.

Τονίζουμε ότι το λήμμα 2 δηλώνει ότι αν υπάρχει ένα μοναδικό εσωτερικό σημείο όπου $u = M$, τότε $u \equiv M$ κατά μήκος του μεγαλύτερου οριζόντιου τμήματος που περιέχει αυτό το σημείο του οποίου το εσωτερικό βρίσκεται στο χωρίο E.

Από εδώ και πέρα πρέπει να θεωρήσουμε τη διαφορική ανίσωση $L[u] \geq 0$ σε περιοχή $E_T = \{(x,t) \in E : t \leq T\}$ όπου E είναι χωρίο. Πρέπει να θεωρήσουμε ότι u είναι συνεχώς διαφορίσιμη στα x, t και δύο φορές διαφορίσιμη στο x σε όλη την περιοχή E_T, με $\partial u(x,t)/\partial T$ να είναι πλευρική παράγωγος.

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω ότι στο κάτω μισό $\boldsymbol{K_{t_1} = \left\{(x,t) : (x - x_1)^2 + (t - t_1)^2 < R^2, t \leq t_1\right\}}$ ενός δίσκου $\boldsymbol{K}$ κέντρου $\boldsymbol{P(x_1, t_1)}$ η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα $\boldsymbol{L[u] \geq 0}$, με τον τελεστή $\boldsymbol{L}$ να έχει τις ιδιότητες του λήμματος 1. Έστω ότι $\boldsymbol{u < M}$ στο κομμάτι του δίσκου $\boldsymbol{K}$ όπου $\boldsymbol{t < t_1}$. Τότε $\boldsymbol{u(P) < M}$.



Η παραβολή $(x - x_1)^2 + \alpha(t - t_1) = 0$, καθώς και η εφαπτομένη στο σημείο P στην παραβολή για χρόνο από $t < t_1$.

Απόδειξη: Ορίζουμε τη συνάρτηση $v(x,t) = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]} - 1$. Από έναν απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$L[v] = e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}[4a(x-x_1)^2 - 2a - 2b(x-x_1) + \alpha].$$

Επιλέγουμε α θετικό και μεγάλο ώστε να ισχύει $L[v] > 0$ στο δίσκο K για $t \leq t_1$.

Η παραβολή
$$(x - x_1)^2 + \alpha(t - t_1) = 0, \tag{7}$$

είναι εφαπτόμενη στην ευθεία $t = t_1$ στο σημείο P. Σημειώνουμε με C' το τμήμα του συνόρου ∂K μαζί με τα άκρα του, το οποίο βρίσκεται κάτω από την παραβολή (7) και σημειώνουμε με C'' το τμήμα της παραβολής που βρίσκεται μέσα στο δίσκο K (Σχήμα 7). Έστω D το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ των C', C'' και από την υπόθεση έχουμε ότι $u < M$ στο κλειστό τόξο C' και άρα υπάρχει $\eta > 0$ ώστε να ισχύει $u \leq M - \eta$ στο τόξο C'.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$ με $\varepsilon > 0$ θετική σταθερά. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $v = 0$ στο C''. Επιπροσθέτως, μπορούμε να επιλέξουμε το ε τόσο μικρό ώστε να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$ στο D,

(ii) $w = u + \varepsilon v < M$ στο C',

(iii) $w = u + \varepsilon v \leq M$ στο C''.

Η συνθήκη (i) δείχνει ότι η συνάρτηση w δεν μπορεί να παίρνει το μέγιστό της στο χωρίο D και το μέγιστο αυτό είναι το M το οποίο παίρνει σε ένα σημείο P. Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geq 0 \text{ στο } P. \tag{8}$$

Από απλό υπολογισμό παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha < 0. \tag{9}$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (8), (9) έχουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} > 0 \text{ στο σημείο } P. \tag{10}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού το μέγιστο της συνάρτησης u στο $t = t_1$ λαμβάνεται στο σημείο P,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \text{ στο σημείο } P.$$

Όμως αυτές οι ανισότητες έρχονται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας ότι $L[u] \geq 0$ και έτσι αποδείξαμε το παραπάνω λήμμα. Με βάση τα παραπάνω λήμματα μπορούμε να πάρουμε το σημαντικό αποτέλεσμα που ακολουθεί.

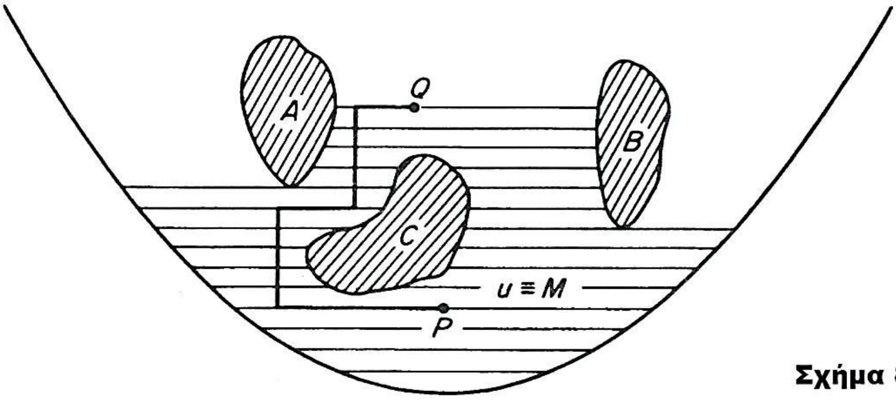
<u>Θεώρημα 2:</u> Έστω $\boldsymbol{E}$ χωρίο και έστω ότι στην περιοχή $\boldsymbol{E_{t_1}}$=$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{E}: \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{t_1}\}$ η ανισότητα $\boldsymbol{L[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0}$ ισχύει, ότι $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ είναι φραγμένα και ότι $\boldsymbol{L}$ είναι ομοιόμορφα παραβολικός στην περιοχή $\boldsymbol{E_{t_1}}$. Αν $\boldsymbol{u \leq M}$ στην περιοχή $\boldsymbol{E_{t_1}}$ και $\boldsymbol{u(x_1, t_1) = M}$, τότε $\boldsymbol{u = M}$ σε κάθε σημείο $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ στην περιοχή $\boldsymbol{E_{t_1}}$, όπου μπορεί να συνδεθεί με το σημείο $(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{t_1})$ με ένα οριζόντιο και ένα κάθετο κομμάτι ευθείας και τα δύο να βρίσκονται στην περιοχή $\boldsymbol{E_{t_1}}$.

Απόδειξη: Έστω ότι $u(x_1, t_0) < M$ και ότι το κομμάτι $l = \{(x,t): x = t_1, t_0 \leq t \leq t_1\}$ βρίσκεται στο χωρίο E. Ας είναι τ να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των τιμών της u στο l τέτοιο ώστε $u(x_1, t) < M$. Από συνέχεια έχουμε ότι $u(x_1, \tau) = M$ ενώ το λήμμα 2 δείχνει ότι υπάρχει ένα $R > 0$ τέτοιο ώστε $u < M$ για $|x - x_1| < R, t_0 \leq t < \tau$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση του λήμματος 3.

<u>Παρατηρήσεις:</u> Είναι πιθανό για κάποια λύση της σχέσης (3) να λαμβάνει το μέγιστό της σε περιοχή χωρίς να είναι ταυτοτικά σταθερή. Αυτό μπορεί να συμβαίνει σε πρόβλημα ροής της θερμότητας κατά μήκος μίας ράβδου, αν η ράβδος είναι αρχικά σε ομοιόμορφη θερμοκρασία M και αν η συγκεκριμένη θερμοκρασία διατηρείται στα άκρα σε χρόνο $t = t_1$. Τότε η θερμοκρασία στα άκρα μειώνεται, η λύση από εκεί και πέρα δεν είναι σταθερή. Βέβαια δεν παραβιάζεται το συμπέρασμα του θεωρήματος 2. Το θεώρημα 2 μπορεί να συνδυαστεί με το λήμμα 2 για να πάρουμε την περιοχή στην οποία μία λύση ,που μπορεί να παίρνει το εσωτερικό μέγιστό της, πρέπει να είναι σταθερή. Έχουμε ένα σημείο Q στο οποίο $u = M$, το μέγιστο, γνωρίζουμε ότι $u \equiv M$ στο ανώτερο οριζόντιο τμήμα στην E που περιέχει το σημείο Q. Το θεώρημα 2 δείχνει ότι όλα τα σημεία της περιοχής E που βρίσκονται κάτω από αυτό το τμήμα πρέπει $u \equiv M$. Το λήμμα 2 δείχνει ότι $u \equiv M$ σε κάθε οριζόντιο τμήμα που περιέχει τέτοιο σημείο. Αν το P είναι σημείο του χωρίου E που μπορεί να συνδεθεί με το Q με ένα μονοπάτι στο E, αποτελούμενο μόνο από οριζόντια τμήματα και προς τα πάνω κάθετα σημειωμένα τμήματα, τότε $u(P) = M$ (Σχήμα 8). Το κομμάτι του χωρίου E στο σχήμα όπου η συνάρτηση u πρέπει να έχει την τιμή M, αν $u = M$ στο σημείο Q σημειώνεται με την οριζόντια σκίαση. Τα τμήματα A, B, C στο σχήμα είναι εξωτερικά του E.

Εφόσον όλα τα λήμματα αφορούν μόνο περιοχές εσωτερικών σημείων, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι a, b είναι φραγμένα και L είναι ομοιόμορφα παραβολικός σε κάθε κλειστό σύνολο του E.

Έχουμε ήδη δει σε προηγούμενα κεφάλαια ότι μία μη σταθερή λύση u μίας παραβολικής ανίσωσης $L[u] \geq 0$ μπορεί να παίρνει το μέγιστό της μόνο σε συγκεκριμένα τμήματα του συνόρου. Στις ελλειπτικές ανισώσεις είδαμε ότι η κανονική παράγωγος στο σύνορο δεν μπορεί να μηδενιστεί σε ένα σημείο που παίρνουμε το μέγιστο (θεώρημα 7). Αυτό είναι σημαντικό γιατί χρησιμοποιήθηκε αρκετά στις αποδείξεις των θεωρημάτων μοναδικότητας για τις λύσεις των ελλειπτικών εξισώσεων.



Σχήμα 8

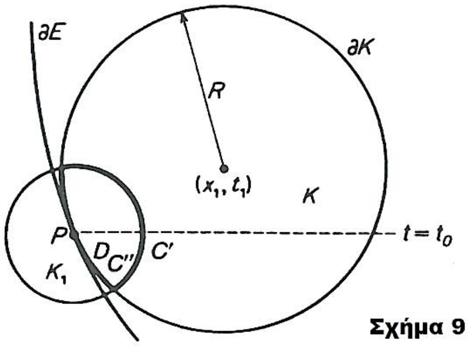
Χωρίο E με τμήματα A, B, C που δεν ανήκουν στο χωρίο και στο γραμμοσκιασμένο μέρος ισχύει ότι $u = P$.

<u>Θεώρημα 3:</u> Έστω $\boldsymbol{E}$ περιοχή και $\boldsymbol{E_{t_0}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{E}: \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{t_0}\}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ικανοποιεί στην περιοχή $\boldsymbol{E}$ την παραβολική ανίσωση

$$\boldsymbol{a}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{b}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} \geq \boldsymbol{0},$$

όπου $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ είναι φραγμένα. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο συνοριακό σημείο $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{t_0})$, ότι $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{M}$, ότι $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) < \boldsymbol{M}$ για $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{E_{t_0}}$, ότι το $\boldsymbol{P}$ βρίσκεται στο σύνορο ενός δίσκου $\boldsymbol{K}$ εφαπτομένου στο $\boldsymbol{\partial E}$, κέντρου $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{t_1})$ με $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_0}$ και ότι το τμήμα του $\boldsymbol{K}$ κάτω από το $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$, σημειώνεται $\boldsymbol{K_{t_0}}$, βρίσκεται στην $\boldsymbol{E_{t_0}}$. Αν $\boldsymbol{\partial/\partial v}$ είναι οποιαδήποτε εξωτερική κατευθυνόμενη παράγωγος από την $\boldsymbol{E_{t_0}}$ στο $\boldsymbol{P}$, τότε

$$\frac{\partial u}{\partial v} > 0 \text{ στο } \boldsymbol{P}.$$



Σχήμα 9

Στο σχήμα απεικονίζεται ο κύκλος κέντρου (x_1, t_1) που περιέχει το σημείο P στο σύνορο και είναι εφαπτόμενος στο σύνορο ∂E, καθώς και ο κύκλος με κέντρο το σημείο P.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε ένα δίσκο K_1 με κέντρο P και ακτίνα μικρότερη του $|x - x_0|$ (Σχήμα 9). Καλούμε C' το κομμάτι του ∂K_1 που περιέχεται στον K_{t_0} μαζί με τα άκρα του. Σημειώνουμε με C'' το τόξο του ∂K που είναι στην $K_1 \cap E_{t_0}$, παρατηρούμε ότι τα τόξα C', C'' και το ευθύγραμμο τμήμα $t = t_0$ από το σύνορο μίας περιοχής D όπως δείχνει το Σχήμα 9. Επιλέγοντας ένα μικρότερο δίσκο, μπορούμε να κάνουμε $u < M$ στο C'' εκτός από το P. Αφού $u < M$ στο C' μπορούμε να δηλώσουμε τα παρακάτω: (i) $u < M$ στο C',

(ii) $u = M$ στο P,

(iii) υπάρχει ένα αρκούντως μικρό $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $u \leq M - \eta$ στο C''.

Εισάγουμε τώρα την αυθαίρετη συνάρτηση

$$v(x,t) = e^{-\alpha\left[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2\right]} - e^{-\alpha R^2}$$

και σημειώνουμε ότι

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha\left[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2\right]}[2\alpha a(x-x_1)^2 - a - b(x-x_1) + (t-t_1)].$$

Για αρκούντως μεγάλο α έχουμε $L[v] > 0$ για (x,t) στο $D \cup \partial D$. Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση $w = u + \varepsilon v$ και παρατηρούμε για κάθε θετικό ε, $L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$ στο χωρίο D. Εξαιτίας του γεγονότος (iii) από παραπάνω, μπορούμε να επιλέξουμε ε τόσο μικρό ώστε $w < M$ στο C'.

Αφού $v = 0$ στο ∂K, έχουμε (λόγω της (i) παραπάνω) $w < M$ στο C'' εκτός από το P και $w(P) = M$.

Δίνοντας την προσοχή μας στο χωρίο D, εφαρμόζουμε την αρχή μεγίστου και καταλήγουμε ότι το μέγιστο της w στο $D \cup \partial D$ πραγματοποιείται σε μοναδικό σημείο P. Επιπλέον στο P

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}} \geq 0.$$

Από απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \frac{\partial v}{\partial r} = -2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \alpha R e^{-\alpha R^2} < 0\,.$$

Καταλήγουμε στο ότι $\partial u / \partial \boldsymbol{v} > 0$ στο P.

<u>Θεώρημα 4</u>: **Έστω οι υποθέσεις του θεωρήματος 2 ισχύουν σε περιοχή $\boldsymbol{E}$ και ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{h \leq 0}$ στην $\boldsymbol{E}$. Αν το μέγιστο $\boldsymbol{M}$ της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ λαμβάνεται σε ένα εσωτερικό σημείο $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{t_1})$ και αν $\boldsymbol{M \geq 0}$, τότε $\boldsymbol{u \equiv M}$ σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{t \equiv}$ σταθερά που βρίσκονται κάτω από το οριζόντιο τμήμα της $\boldsymbol{E}$ που περιέχει το σημείο $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{t_1})$. Αν έχουμε ένα μη αρνητικό μέγιστο $\boldsymbol{M}$ σε ένα συνοριακό σημείο $\boldsymbol{P}$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος 3 ισχύει στο $\boldsymbol{P}$.**

Απόδειξη: Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη των θεωρημάτων 2,3. Στα λήμματα επιλέγουμε την παράμετρο α στην αυθαίρετη συνάρτηση v μεγάλη ώστε $(L+h)[v] > 0$. Εξαιτίας του ότι η συνάρτηση $h \leq 0$, βλέπουμε ότι $(L+h)[w] \leq 0$ σε ένα μη αρνητικό μέγιστο της συνάρτησης w. Το υπόλοιπο του επιχειρήματος είναι το ίδιο όπως το θεώρημα 3.

Για λύσεις της $(L+h)[u] \leq 0$ υπάρχει μία αρχή ελαχίστου αν το ελάχιστο m είναι μη θετικό. Το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται από την εφαρμογή του θεωρήματος 4 στην $(-u)$.

Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ

Ο τελεστής $L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$,

καλείται παραβολικός στο σημείο $(\boldsymbol{x}, t) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ αν για t σταθεροποιημένο ο τελεστής που αποτελείται από το πρώτο άθροισμα είναι ελλειπτικός στο σημείο $(\boldsymbol{x}, t)$. Ο L είναι παραβολικός αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός μ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{1}$$

για όλες τις n-άδες πραγματικών αριθμών $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Ο τελεστής L είναι ομοιόμορφα παραβολικός σε μία περιοχή E_T αν ισχύει η παραπάνω σχέση για το ίδιο $\mu > 0$ για όλα τα σημεία $(\boldsymbol{x}, t)$ στην E_T.

Τα θεωρήματα που είδαμε στον προηγούμενο τομέα για τους παραβολικούς τελεστές επεκτείνονται σε αυτά που θα ακολουθήσουν.

<u>Θεώρημα 5:</u> **Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ να ικανοποιεί την ομοιόμορφη παραβολική ανισότητα**

$$\boldsymbol{L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0}, \tag{2}$$

σε μία περιοχή $\boldsymbol{E_T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E : t \leq \bar{t}\}}$ όπου $\boldsymbol{E}$ είναι χωρίο και έστω οι συντελεστές του $\boldsymbol{L}$ είναι φραγμένοι. Έστω ότι το μέγιστο της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ στην $\boldsymbol{E_{\bar{t}}}$ είναι $\boldsymbol{M}$ και ότι λαμβάνεται σε ένα σημείο $\boldsymbol{P(x, t)}$ της $\boldsymbol{E_{\bar{t}}}$. Αν $\boldsymbol{Q}$ σημείο του $\boldsymbol{E}$ που μπορεί να

συνδεθεί με το σημείο $\boldsymbol{P}$ με ένα μονοπάτι στο $\boldsymbol{E}$ που αποτελείται μόνο από οριζόντια τμήματα και τμήματα κάθετα προς τα πάνω, τότε $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{M}$.

Απόδειξη: Το αποτέλεσμα προέρχεται όπως στο θεώρημα 2, εφόσον ο πρώτος όρος στον τελεστή L είναι ελλειπτικός στις n-διάστατο χώρο, ένας μετασχηματισμός των συντεταγμένων απλοποιεί το κομμάτι του τελεστή σε τελεστή Laplace σε ένα μοναδικό σημείο (θεώρημα 4 πρώτο κεφάλαιο). Μία λύση της $L[u] > 0$ δεν μπορεί να έχει μέγιστο στην $E_{\bar{t}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τα λήμματα 1,2,3 που είδαμε. Παίρνοντας μία αυθαίρετη συνάρτηση

$$v(x,t) = e^{-\alpha\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)^2+(i-\bar{\imath})^2\}} - e^{-\alpha R^2}.$$

Η συνέχεια της απόδειξης είναι όμοια με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.

Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει αν το σημείο $P(\bar{x},\bar{t})$ είναι σε οριζόντια συνιστώσα $E(\bar{t})$ του συνόρου ∂E του E, εφόσον βέβαια η συνάρτηση u και οι παράγωγοι $\partial u/\partial x_i, \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j, \partial u/\partial t$ είναι συνεχείς στο $E \cup E(\bar{t})$.

Το επόμενο θεώρημα είναι άμεση επέκταση σε $(n+1)$ διαστάσεις του θεωρήματος 3.

Όπως στο θεώρημα 4 μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων 5,6 σε μία λύση της διαφορικής ανίσωσης $(L+h)[u] \geq 0$ με τη συνάρτηση $h \leq 0$ όπου $M \geq 0$. Έτσι μπορούμε να πάρουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6: **Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ ικανοποιεί την ομοιόμορφη παραβολική ανισότητα $(\mathbf{2})$ με φραγμένους συντελεστές σε χωρίο $\boldsymbol{E}$ και ορίζουμε $\boldsymbol{E_{\bar{t}}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{E}: \boldsymbol{t} \leq \bar{\boldsymbol{t}}\}$. Έστω το μέγιστο $\boldsymbol{M}$ της συνάρτησης $\boldsymbol{u}$ λαμβάνεται σε ένα σημείο $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{t}})$ στο σύνορο $\boldsymbol{\partial E}$. Υποθέτουμε ότι μία σφαίρα στο σημείο $\boldsymbol{P}$ μπορεί να κατασκευαστεί να είναι εφαπτόμενη στο $\boldsymbol{\partial E}$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$ και τέτοια ώστε το τμήμα του εσωτερικού όπου $\boldsymbol{t} \leq \bar{\boldsymbol{t}}$ βρίσκεται στην περιοχή $\boldsymbol{E_{\bar{t}}}$ και ότι $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{M}$ στην $\boldsymbol{E_{\bar{t}}}$. Υποθέτουμε ότι η ακτινική κατεύθυνση από το κέντρο της σφαίρας στο σημείο $\boldsymbol{P}$ δεν είναι παράλληλη στον $\boldsymbol{t}$-άξονα. Τότε αν $\partial/\partial \boldsymbol{v}$ είναι οποιαδήποτε κατευθυνόμενη παράγωγος σε εξωτερική κατεύθυνση από την περιοχή $\boldsymbol{E_{\bar{t}}}$, έχουμε ότι**

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} > 0 \ \text{ στο } P.$$

Θεώρημα 7: **Τα αποτελέσματα των θεωρημάτων 5,6 είναι έγκυρα αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ είναι λύση της $(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{u}] \geq \mathbf{0}$ με συνάρτηση $\boldsymbol{h} \leq \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{M} \geq \mathbf{0}$.**

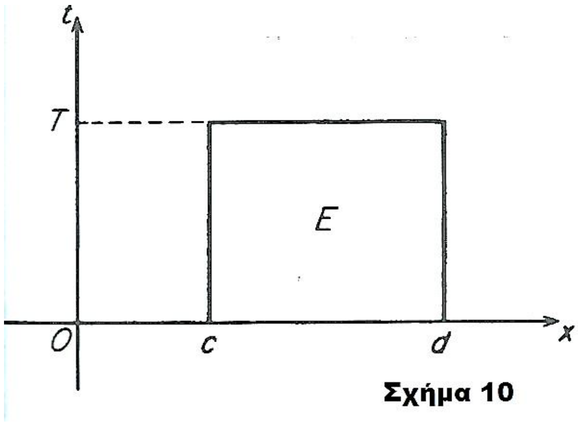
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω το ορθογώνιο χωρίο E στο x, t-επίπεδο που ορίζεται από τις ανισότητες $x < c < d, 0 < t < T$ (**Σχήμα 10**) και ψάχνουμε να βρούμε μία συνάρτηση $v(x,t)$ που ικανοποιεί την ομοιόμορφη παραβολική εξίσωση

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = f(x,t) \text{ στο } E, \qquad (1)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} v(x,0) = g_1(x) \text{για } c \leq x \leq d, \\ v(c,t) = g_2(x) \text{ για } 0 \leq t \leq T, \\ v(d,t) = g_3(x) \text{ για } 0 \leq t \leq T. \end{cases} \qquad (2)$$



Χωρίο Ε στο x, t-επίπεδο.

Η συνάρτηση f είναι καθορισμένη στο χωρίο E από τις συναρτήσεις $g_i, i = 1,2,3$, οι οποίες είναι δοσμένες στο αντίστοιχο πεδίο ορισμού τους. Όπως στις ελλειπτικές εξισώσεις δε θα αναζητήσουμε συνθήκες για τους συντελεστές της εξίσωσης και των συνοριακών συνθηκών, οι οποίες εγγυώνται την ύπαρξη λύσης $v(x,t)$ αλλά θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε τη μοναδικότητα μίας λύσης από την αρχή του μεγίστου μόνο. Θα δείξουμε δηλαδή ότι υπάρχει το πολύ μία λύση της παραβολικής εξίσωσης (1) που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (2).

Για να το δείξουμε αυτό υποθέτουμε ότι v_1, v_2 είναι δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις (1), (2) με τις ίδιες $f, g_i, i = 1,2,3$. Ορίζουμε την συνάρτηση $u = v_1 - v_2$ και βλέπουμε ότι αν την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση έχουμε:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ στο } E,$$

καθώς και $u(x,0) = 0$ για $c \leq x \leq d$, $u(c,t) = u(d,t) = 0$ για $0 \leq t \leq T$.

Σύμφωνα με την αρχή μεγίστου του θεωρήματος 2 η συνάρτηση u δεν μπορεί να έχει θετικό μέγιστο στο χωρίο E, άρα η συνάρτηση $u \leq 0$ παντού. Εφαρμόζουμε το επιχείρημα για την συνάρτηση $(-u)$ και έχουμε τη συνάρτηση $u \geq 0$. Άρα $u = v_1 - v_2 \equiv 0$ στο χωρίο E. Αυτό το αποτέλεσμα αφορά τη μονοδιάστατη περίπτωση και θα επεκταθεί για λύσεις των γενικών παραβολικών εξισώσεων με λιγότερο αυστηρές συνοριακές συνθήκες.

Θεωρούμε φραγμένο χωρίο D σε n διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο και ένα διάστημα $[0,T]$ του t-άξονα. Έστω E_T να είναι η $(n+1)$-διαστάσεων περιοχή $D \times (0,T]$. Το τμήμα του χώρου E που αποτελείται από το $\partial D \times (0,T)$ το σημειώνουμε με Γ.

<u>Θεώρημα 8:</u> Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{u}$ λύση της ομοιόμορφα παραβολικής εξίσωσης

$$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{u}] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b_i}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \quad (3)$$

στο χωρίο $\boldsymbol{E}$ και έστω οι συντελεστές του $\boldsymbol{L}$ να είναι φραγμένοι. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \equiv \boldsymbol{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x}) \text{ στο χωρίο } \boldsymbol{D} \quad (4)$$

και

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x},t), \quad (5)$$

για όλα τα σημεία $(\boldsymbol{x}, t)$ στο $\boldsymbol{\Gamma}$ όπου $\boldsymbol{\partial/\partial v}$ οποιαδήποτε παράγωγος σε εξωτερική ή εσωτερική κατεύθυνση στο $\boldsymbol{\Gamma}$. Θεωρούμε ότι $\boldsymbol{\alpha \geq 0, \beta \geq 0}$ στο $\boldsymbol{\Gamma}$, ότι $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0}$ σε κάθε σημείο και ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t)$ είναι κάτω φραγμένη. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{v}$ είναι άλλη λύση της σχέσης $(\mathbf{3})$ που ικανοποιεί τις ίδιες συνοριακές συνθήκες $(\mathbf{4}), (\mathbf{5})$, τότε $\boldsymbol{v \equiv u}$ στο χωρίο $\boldsymbol{E}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την αρχή μεγίστου. Ορίζουμε τη συνάρτηση $w = u - v$. Τότε η συνάρτηση w ικανοποιεί την $(L + h)[w] = 0$ και οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες

$$w(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \text{ στο χωρίο } D \text{ και } \alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \text{ στο } \Gamma. \tag{6}$$

Από την παρατήρηση (ii) στον προηγούμενο τομέα θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η συνάρτηση $h(\boldsymbol{x}, t) \leq 0$. Από το θεώρημα 7 το μέγιστο της συνάρτησης u πρέπει να ληφθεί στο $t = 0$ είτε στο Γ. Αν το μέγιστο της συνάρτησης w είναι θετικό, τότε πρέπει να ληφθεί στο Γ. Παρόλα αυτά το θεώρημα 7 δηλώνει ότι σε τέτοιο μέγιστο σημείο ισχύει $\partial w/\partial \boldsymbol{v} > 0$. Εφόσον τα α, β δεν μπορούν να μηδενιστούν ταυτοχρόνως, η συνθήκη $\alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$ παραβιάζεται σε ένα θετικό μέγιστο. Επιπλέον $w \leq 0$ στο χωρίο E. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την συνάρτηση $(-w)$, βρίσκουμε ότι $w \geq 0$. Άρα $w = u - v \equiv 0$ στο χωρίο E.

Παρατηρήσεις: Αν $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$, τότε το πρόβλημα (3), (4), (5) είναι άμεση γενίκευση του μονοδιάστατου συνοριακού προβλήματος τιμών σε ένα ορθογώνιο. Το θεώρημα 8 ισχύει για γενικά χωρία E. Παραδείγματος χάρη το χωρίο D μπορεί να κινείται με το χρόνο με την προϋπόθεση ότι τα συνοριακά σημεία κινούνται με άπειρη ταχύτητα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) είναι εξισώσεις που μεταβολές ποσοτήτων σε σχέση με συνεχείς μεταβλητές. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες μελετάμε, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν μια ευρεία ποικιλία φαινομένων, όπως ήχο, θερμότητα, ηλεκτροστατική , ροή του υγρού, ή ελαστικότητα. Αυτά τα φαινομενικά διαφορετικά φυσικά φαινόμενα μπορεί να προτυποποιούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο από τις ΜΔΕ, που δείχνει ότι διέπονται από τις ίδιες βασικές δυναμικές. Απλά όπως οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα, έτσι και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν πολυδιάστατα συστήματα.

Η αρχή του μεγίστου στις μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον κλάδο των μαθηματικών γιατί μας παρέχει συχνά πληροφορίες και φράγματα για τη λύση χωρίς να μπορεί αυτή πάντα να βρεθεί ακριβώς. Προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τις λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων βρίσκοντας δύο συναρτήσεις z_1, z_2 οι οποίες ικανοποιούν κάποιες προϋποθέσεις, “εγκλωβίζοντας’’ τη λύση μας. Επίσης συχνά προσπαθούμε να βρούμε προσεγγιστικές λύσεις για τη συνάρτηση πηλίκο $\frac{u}{w}$ με w θετική συνάρτηση που ικανοποιεί τις απαιτήσεις που περιγράψαμε ώστε ακόμα και με αυτό το πηλίκο να συνάγουμε ένα αρκετά ακριβές συμπέρασμα για τη μορφή της λύσης μας. Εξηγήσαμε κάποιες απλές μορφές της αρχής του μεγίστου σε μία διάσταση ή πιο περίπλοκες μορφές σε περισσότερες διαστάσεις, μελετήσαμε την περίπτωση του προβλήματος αρχικών τιμών καθώς και πολλά προβλήματα συνοριακών τιμών, είδαμε πώς εφαρμόζεται η αρχή του μεγίστου στις ελλειπτικές και παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, αναφέραμε βασικούς τελεστές, τον ελλειπτικό και τον παραβολικό καθώς και τη βασική αρχή μεγίστου του Hopf.

Επιπρόσθετα διερευνήσαμε την εφαρμογή της αρχής για το πρόβλημα της θερμότητας καθώς επίσης και πολλά παραδείγματα διαφορικών ανισώσεων. Η αρχή του μεγίστου μας παρέχει εκτός από φράγματα για τη λύση και θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης που αναζητάμε. Ακόμη, αναφερθήκαμε στον πολύ βασικό τελεστή Laplace και προσπαθήσαμε να ανάγουμε περίπλοκους τελεστές στον τελεστή Laplace απαλείφοντας όσο μπορούμε με κάποιους μετασχηματισμούς τους μεικτούς όρους (π.χ. u_{xy}, u_{yx} για δύο διαστάσεις).

Εν κατακλείδι, η αρχή του μεγίστου που ερευνήσαμε αποτελεί μεγάλο και περίπλοκο κεφάλαιο στην ιστορία των μαθηματικών, δίνοντας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες της μορφής της λύσης μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης, αν αναλογιστούμε ότι το μόνο που χρειάζεται είναι να αναζητήσουμε τα κατάλληλα φράγματα χωρίς να βρούμε τη λύση καθώς η ύπαρξη και η μοναδικότητα προκύπτει άμεσα από αυτή την αρχή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

LOUIS NIRENBERG

Ο Louis Nirenberg (γεννήθηκε στις 28 του Φλεβάρη 1925) είναι ένας Καναδός μαθηματικός, που θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους αναλίστες του 20ου αιώνα. Έχει λάβει πολλές τιμητικές διακρίσεις και βραβεία, συμπεριλαμβανομένου του βραβείου Bôcher (1959), το Βραβείο Jeffery-Williams (1987), το βραβείο Steele (1994 και 2014), το Εθνικό Μετάλλιο Επιστημών (1995), και ήταν ο πρώτος παραλήπτης τόσο για το βραβείο Crafoord (1982, από κοινού με τον Vladimir Arnold) όσο και για το Chern μετάλλιο (2010). Το 2015 τιμήθηκε με το Βραβείο Abel, μαζί με τον John Nash. Είναι υπότροφος της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Έχει κάνει θεμελιώδεις συνεισφορές σε γραμμικές και μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) και στην εφαρμογή τους στη μιγαδική ανάλυση και τη γεωμετρία. Οι συνεισφορές του περιλαμβάνουν την ανισότητα παρεμβολής Gagliardo-Nirenberg , η οποία είναι σημαντική για την επίλυση των ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και ο ορισμός της φραγμένης μέσης ταλάντωσης που είναι γνωστή ως John-Nirenberg χώρος, η οποία χρησιμοποιείται για τη μελέτη της συμπεριφοράς δύο ελαστικών υλικών και των τυχερών παιγνίων.

Οι εργασίες του Nirenberg για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφτηκαν από τη Μαθηματική Κοινότητα το 2002 ως οι καλύτερες που έχουν γίνει για το Navier-Stokes πρόβλημα ύπαρξης και ομαλότητας της ρευστομηχανικής που είναι από τα μεγαλύτερα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών.

Ενδιαφέροντα προβλήματα στις μερικές διαφορικές εξισώσεις σπάνια μπορεί να λυθούν με έναν ακριβή τύπο. Το ουσιαστικό σημείο είναι συνήθως να δείξουμε ότι η προτεινόμενη διαδικασία προσέγγισης συγκλίνει πράγματι σε μια λύση. Ένας περίτεχνος μηχανισμός από την τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση είναι διαθέσιμος για να αποδείξει αυτή τη σύγκλιση, υπό την προϋπόθεση ότι ορισμένες εκτιμήσεις είναι διαθέσιμες για τον έλεγχο της προσέγγισης. Για τα κλασικές εξισώσεις ισορροπίας στη μηχανική, οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις Laplace και Poisson, υπάρχει μία "αρχή μεγίστου" που παρέχει την απαραίτητη εκτίμηση. Ωστόσο, υπάρχουν και πολλά άλλα είδη των εκτιμήσεων που μπορεί κανείς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσει. Τα πιο κοινά είναι εκτιμήσεις των ολοκληρωμάτων των ζητούμενων συναρτήσεων, μαζί με έναν ορισμένο αριθμό παραγώγων τους ("Sobolev ανάλυση"). Αυτές οι συναρτήσεις και τα ολοκληρώματα μπορούν να τετραγωνιστούν ή να λαμβάνονται σε άλλες δυνάμεις πριν από την ολοκλήρωση και μπορούν να ολοκληρωθούν. Μαζί με το μαθηματικό Fritz John, εισήγαγε την έννοια της Οριακής Μέσης Ταλάντωσης. Αυτή η έννοια αναφέρει ότι μια συνάρτηση έχει μία μέση τιμή ή μέσο όρο και ότι το άθροισμα όλων των μεταβολών της μέσης τιμής είναι πεπερασμένο. Ο χώρος συναρτήσεων Οριακής Μέσης Ταλάντωσης είναι θεμελιώδους σημασίας για την ανάλυση του χώρου των συνεχών φραγμένων συναρτήσεων.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ BESSEL

Η συνάρτηση Bessel που αρχικά ορίστηκε από τον μαθηματικό Daniel Bernulli και γενικεύθηκε αργότερα από τον Friedrich Bessel, δίνει τις κανονικές λύσεις $y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης του Bessel,

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - a^2) y = 0$$

για έναν αυθαίρετο μιγαδικό αριθμό a (η σειρά της συνάρτησης του Bessel).

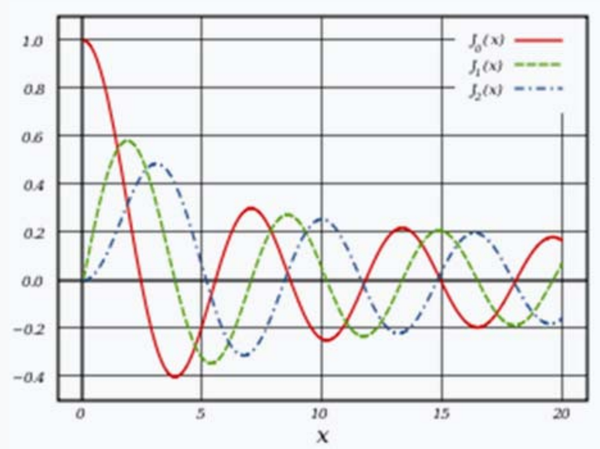
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΟΥ BESSEL

Η συνάρτηση του Bessel προκύπτει όταν βρίσκουμε ξεχωριστές λύσεις στην εξίσωση Laplace και στην εξίσωση Helmholtz σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Οι συναρτήσεις Bessel είναι ως εκ τούτου ιδιαίτερα σημαντικές για πολλά προβλήματα της διάδοσης των κυμάτων. Παραδείγματα των συναρτήσεων Bessel είναι τα εξής:

- τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μέσω ενός κυλινδρικού κυματοδηγού
- το πλάτος πίεσης σε περιστρεφόμενα ρευστά χωρίς ιξώδες
- η θερμική αγωγιμότητα σε ένα κυλινδρικό αντικείμενο
- τρόποι δόνησης λεπτής κυκλικής ακουστικής μεμβράνης (όπως ένα τύμπανο ή άλλα μεμβρανόφωνα)
- το πρόβλημα διάχυσης πάνω σε ένα πλέγμα
- λύσεις στην ακτινική εξίσωση Schrödinger (σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες) για ένα ελεύθερο σωματίδιο
- λύσεις για μοτίβα της ακουστικής ακτινοβολίας
- εξαρτώμενη από τη συχνότητα τριβή σε κυκλικούς αγωγούς
- δυναμική αιωρούμενων σωμάτων
- γωνιακή ανάλυση
- οι συναρτήσεις Bessel εμφανίζονται επίσης και σε άλλα προβλήματα, όπως στην επεξεργασία σημάτων (για παράδειγμα σύνθεση με διαμόρφωση συχνότητας, παράθυρο Kaiser ή φίλτρο Bessel).

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ: $\boldsymbol{J_a}$

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου τύπου, που συμβολίζονται $J_a(x)$, είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Bessel που είναι πεπερασμένες στην αρχή των αξόνων ($x = 0$), για a ακέραιο ή θετικό, και αποκλίνουν καθώς το x τείνει στο μηδέν για a αρνητικό μη ακέραιο. Είναι δυνατό να ορίσουμε τη συνάρτηση από την επέκταση της σειράς της γύρω από το $x = 0$, η οποία μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο Frbenius στην ισότητα Bessel όπου $\Gamma(z)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, μια μετατοπισμένη γενίκευση της παραγοντικής συνάρτησης σε μη ακέραιες τιμές. Η συνάρτηση Bessel πρώτου τύπου είναι ακέραια συνάρτηση αν a είναι ακέραιος, ενώ σε άλλη περίπτωση είναι πολλαπλή συνάρτηση με ανώμαλο σημείο το μηδέν. Οι γραφικές απεικονίσεις των συναρτήσεων του Bessel μοιάζουν περίπου με συναρτήσεις ημιτόνου ή συνημιτόνου που αποσβένουν αναλογικά στο $1/\sqrt{x}$, μολονότι οι ρίζες τους δεν είναι γενικά περιοδικές, παρά μόνο ασυμπτωτικά περιοδικές για μεγάλα x.



Γραφική παράσταση της συνάρτησης Bessel πρώτου τύπου, $J_a(x)$, για ακέραιες τάξεις $a = 0, 1, 2$

Για a μη ακέραιο, οι συναρτήσεις $J_a(x)$, και $J_{-a}(x)$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και υπάρχουν επομένως δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Από την άλλη, για a ακέραιο, σημαίνει ότι οι δύο λύσεις δεν είναι πλέον γραμμικά ανεξάρτητες.

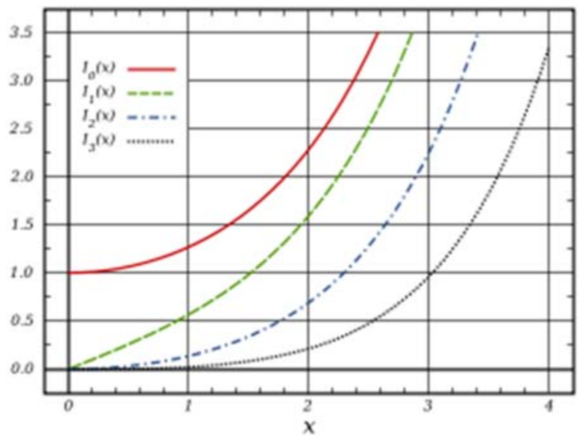
Σε αυτήν την περίπτωση, η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι η συνάρτηση Bessel δεύτερου τύπου.

Οι συναρτήσεις Bessel ισχύουν ακόμα και για **μιγαδικά** ορίσματα x, και μια σημαντική ιδιαίτερη περίπτωση είναι αυτή του καθαρά φανταστικού ορίσματος. Σε αυτήν την περίπτωση, οι λύσεις στην εξίσωση Bessel καλούνται **τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel** (ή περιστασιακά **υπερβολικές συναρτήσεις Bessel**) **πρώτου και δεύτερου τύπου**, και προσδιορίζονται από τις σχέσεις

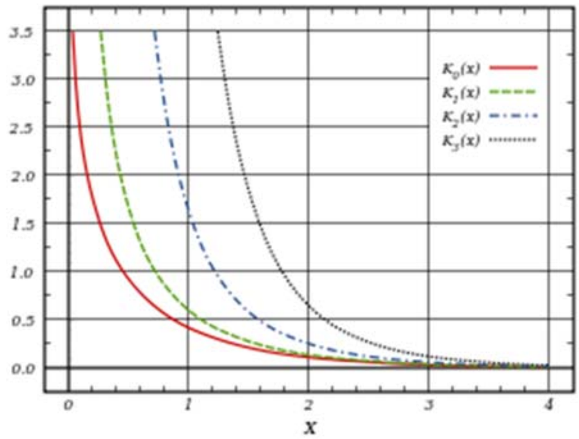
$$I_a(x) = i^{-a} J_a(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a}$$

$$K_a(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-a}(x) - I_a(x)}{\sin(a\pi)}$$

όταν a δεν είναι ακέραιος. Όταν a είναι ακέραιος, τότε χρησιμοποιείται το όριο. Αυτές έχουν έπιλεχθεί να είναι συναρτήσεις με πραγματικές τιμές, για πραγματικά και θετικά ορίσματα x. Συνεπώς, η επέκταση της σειράς για $I_a(x)$ είναι σχεδόν όμοια με αυτήν για $J_a(x)$, αλλά χωρίς τον εναλλασσόμενο παράγοντα $(-1)^m$. Σε αντίθεση με τις κοινές συναρτήσεις Bessel, οι οποίες ταλαντώνονται ως συναρτήσεις πραγματικού ορίσματος οι I_a και K_a είναι **εκθετικά αυξανόμενες** και **φθίνουσες** συναρτήσεις, αντίστοιχα. Όμοια με την κοινή συνάρτηση Bessel J_a, η συνάρτηση I_a τείνει στο μηδέν στο $x = 0$ για $a > 0$ και είναι πεπερασμένη στο $x = 0$ για $a = 0$. Ανάλογα, η K_a αποκλίνει στο $x = 0$, με την ιδιαιτερότητα να είναι λογαριθμικού τύπου.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Το πρώτο σχήμα μας δείχνει την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου τύπου $I_a(x)$ για $a = 0{,}1{,}2{,}3$ και το δεύτερο μας δείχνει την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου τύπου $K_a(x)$ για $a = 0{,}1{,}2{,}3$.

ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Στα μαθηματικά, τη μαθηματική φυσική και στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, μια αρμονική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση, δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη $f: U \to R$ (όπου U ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n), η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} = 0$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ παντού στο U.

Ο όρος "αρμονική" στην ονομασία αρμονική συνάρτηση προέρχεται από την αρμονική κίνηση στην οποία υποβάλλεται ένα σημείο σε μια τεντωμένη χορδή. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης για αυτόν τον τύπο κίνησης μπορεί να εκφραστεί με όρους ημιτόνων και συνημιτόνων, συναρτήσεις δηλαδή που αναφέρονται ως αρμονικές. Η ανάλυση Fourier περιλαμβάνει επεκταμένες περιοδικές συναρτήσεις στο μοναδιαίο κύκλο με όρους μιας σειράς αυτών των αρμονικών συναρτήσεων. Σκεπτόμαστε ότι για υψηλότερης τάξης αναλογίες των αρμονικών συναρτήσεων στη μοναδιαία n – διαστάσεων σφαίρα, έχουμε τις σφαιρικές αρμονικές. Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace, για αυτό και με την πάροδο του χρόνου, ο όρος "αρμονική" κατέληξε να αναφέρεται σε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace.

Οι αρμονικές συναρτήσεις ικανοποιούν την παρακάτω αρχή μεγίστου: εάν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του U, τότε η συνάρτηση f, περιορισμένη στο K, παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του K. Εάν το U είναι συνεκτικό, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα, εκτός από την εξαιρετική περίπτωση όπου η f είναι σταθερή.

Το σύνολο των αρμονικών συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα δοσμένο ανοιχτό σύνολο U μπορεί να θεωρηθεί ως ο πυρήνας ενός τελεστή Laplace Δ και για το λόγο αυτό αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στο R. Επίσης το άθροισμα, η διαφορά και το βαθμωτό γινόμενο αρμονικών συναρτήσεων είναι επίσης αρμονικά. Εάν f είναι μια αρμονική συνάρτηση στο σύνολο U, τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της f θα είναι αρμονικές συναρτήσεις στο U. Κατά κάποιο τρόπο, οι αρμονικές συναρτήσεις είναι οι πραγματικές συναρτήσεις ανάλογες των ολόμορφων συναρτήσεων.

Όλες οι αρμονικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές, μπορούν δηλαδή να εκφραστούν τοπικά σαν δυναμοσειρές. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας για τους ελλειπτικούς τελεστές, μεγαλύτερο παράδειγμα των οποίων αποτελεί ο τελεστής Laplace.

Το ομοιόμορφο όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας αρμονικών συναρτήσεων είναι κι αυτό αρμονικό. Αυτό ισχύει καθώς κάθε συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την ιδιότητα της μέσης τιμής είναι αρμονική.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες: ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές. Στη περίπτωση γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές όπως η εξίσωση, οι συντελεστές των παραγώγων δεύτερης τάξης ορίζουν ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, του τύπου $G(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = [x\ y] * P * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ όπου x, y οι μεταβλητές και $P = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{bmatrix}$. Η κατηγοριοποίηση βασίζεται στους συντελεστές των μερικών παραγώγων της υψηλότερης τάξης A , B και C και ειδικότερα στην ορίζουσα του πίνακα P.

Συνθήκη	Είδος	Παράδειγμα

$B^2 - 4AC < 0$	Ελλειπτική	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Εξίσωση Laplace
$B^2 - 4AC = 0$	Παραβολική	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Εξίσωση θερμικής Αγωγιμότητας
$B^2 - 4AC > 0$	Υπερβολική	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Κυματική εξίσωση

Αν σε μια μερική διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από τρεις ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές τότε μπορεί να μην ανήκει μόνο σε μια κατηγορία αλλά σε ένα συνδυασμό κατηγοριών. Ο τύπος της μερικής διαφορικής εξίσωσης προσδιορίζει τη φύση του προβλήματος που περιγράφεται. Οι παραβολικές εξισώσεις, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας, εμπεριέχουν χρονική εξάρτηση και περιγράφουν φαινόμενα διάχυσης. Οι λύσεις τους συνήθως μειώνονται εκθετικά στο χρόνο προσεγγίζοντας μια θέση ισορροπίας. Το σήμα και τα σημεία ασυνέχειας διαδίδονται με άπειρη ταχύτητα. Οι υπερβολικές εξισώσεις με χαρακτηριστικό πρότυπο την κυματική εξίσωση, εξαρτώνται από το χρόνο και περιγράφουν φαινόμενα διάδοσης. Το σήμα διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα ή σε περιορισμένη περιοχή του χώρου, με αποτέλεσμα τα σημεία ασυνέχειας να παραμένουν σταθερά. Αντίθετα με τις προηγούμενες κατηγορίες οι ελλειπτικές εξισώσεις περιγράφουν τη στατική συμπεριφορά ενός μεγέθους σε ορισμένη περιοχή, χωρίς να υπάρχει χρονική εξάρτηση. Χαρακτηριστική ελλειπτική εξίσωση είναι η εξίσωση Laplace. Οι παραβολικές και υπερβολικές εξισώσεις ορίζονται συνήθως ως προβλήματα αρχικών τιμών ενώ οι ελλειπτικές εξισώσεις ως προβλήματα συνοριακών τιμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Murray H. Protter, Hans F.Weinberger (1984), **Maximum Principles in Differential Equations,** R. R. Donnelley & Sons, Harrisonburg, Virginia, United States

[2] Pucci Patrizia, Serrin James (2004), **The Strong Maximum Principle Revisited**, Journal of Differential Equations, 196 (1): 1–66, Minnesota, United States of America

[3] D. Gilbarg, N. Trudinger (1983), **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, second edition, Springer–Verlag, New York

[4] Γ. Δ. Αλικάκος, Ν. Δ. Ακρίβης (2012), **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,** Σύγχρονη Εκδοτική ΕΠΕ, Αθήνα

[4] J. David Logan (2013[1997]), **Applied Mathematics, 2nd edition**, trans. Βασίλης Δουγαλής, Δημήτρης Μητσούδης, Ιωάννης Στρατής, Jonh Willey & Sons, Inc, Midwestern United States of America

[6] Ν. Δ. Αλικάκος, Γ. Η. Καλογερόπουλος (2003), **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις**, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα

[7] Δημήτρης Τσουμπελής (2009), **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Α΄ Τόμος**, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πάτρας, Πάτρα