ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

ΛΙΝΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΑΜΟΣ 2016

Στους γονείς μου, Κωνσταντίνο και Γεωργία

και στον αδελφό μου Γιάννη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι στοχαστικές ανελίξεις είναι κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή και τη μελέτη στοχαστικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που η λειτουργία τους επηρεάζεται από τον παράγοντα «τύχη». Μια σημαντική κατηγορία τέτοιων συστημάτων αποτελούν τα συστήματα εξυπηρέτησης που εναλλακτικά καλούνται ουρές αναμονής. Η αναμονή σε μια ουρά (π.χ. στις τράπεζες, στα αεροδρόμια, στα πλοία, στα τηλεφωνικά κέντρα κτλ.) με σκοπό την εξυπηρέτησή μας, είναι ένα φαινόμενο που όλοι έχουμε βιώσει στην καθημερινή μας ζωή. Η αναμονή σε αυτές τις ουρές είναι μια δυσάρεστη κατάσταση τόσο για αυτούς που λαμβάνουν όσο και για αυτούς που παρέχουν την εξυπηρέτηση.

Σε αυτήν την εργασία θα μελετηθούν διάφορες πτυχές της θεωρίας των ουρών αναμονής, ξεκινώντας από τα εκθετικά μοντέλα και συνεχίζοντας σε πιο σύνθετα γενικά μοντέλα. Επειδή για την κατανόηση αυτής της θεωρίας απαιτείται μια καλή γνώση στις βασικές κατανομές πιθανοτήτων και στις στοχαστικές ανελίξεις, τα δυο πρώτα κεφάλαια αφιερώνονται σε μια σύντομη επισκόπηση των πιο βασικών και χρήσιμων εννοιών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών Εισαγωγικής Κατεύθυνσης Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Στο σημείο αυτό νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που συνετέλεσαν στην πραγματοποίησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον κύριο Θεοδόση Δημητράκο, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, που μου έδωσε την δυνατότητα να πραγματοποιήσω την πτυχιακή μου εργασία. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους καθώς και για το διαρκές ενδιαφέρον του και την υποστήριξή του.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα, όλους του καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστήμιου Αιγαίου για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής κρίσης της εργασίας, τον κύριο Νικόλαο Καραχάλιο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και τον κύριο Ανδρέα Παπασαλούρο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών που δέχτηκαν να αφιερώσουν κάποιο από τον πολύτιμο χρόνο τους για την αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά, τους γονείς μου και τον αδελφό μου, για την αγάπη, την στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου δείχνουν όλα αυτά τα χρόνια. Πέραν όμως από την πολύτιμη αυτή στήριξη, μου έδωσαν όλα τα εφόδια ώστε να γίνω ένας σωστός άνθρωπος και αυτό είναι κάτι που δεν μαθαίνετε, αλλά μεταδίδεται. Το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτή την εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές κατανομές πιθανοτήτων

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι σημαντικότερες διακριτές και συνεχείς κατανομές πιθανοτήτων, που θα μας χρησιμεύσουν στα επόμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα, για τις διακριτές κατανομές υπολογίζεται η συνάρτηση πιθανότητας ενώ για τις συνεχείς κατανομές υπολογίζεται η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση κατανομής. Επίσης υπολογίζεται η μέση τιμή και η διασπορά. Τέλος, για κάθε κατανομή παρουσιάζεται ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόησή τους.

1.2 Κατανομή Poisson

Έστω η τυχαία μεταβλητή Χ που αναπαριστά τον αριθμό των πελατών που φθάνουν σε ένα ταμείο εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος ή τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ή τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από μια ραδιενεργό πηγή εντός δοθέντος χρονικού διαστήματος. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα η τυχαία μεταβλητή Χ λαμβάνει τιμές $x = 0,1,\ldots$ και η πιθανότητα $P(\mathrm{X} = x)$ μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μια κατανομή πιθανότητας που καλείται **κατανομή Poisson** και η συνάρτηση πιθανότητας της Χ ορίζεται ως εξής:

$$f_{\mathrm{X}}(x) = P(\mathrm{X} = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ ,\ x = 0,1,\ldots\ ,\ \lambda > 0$$

όπου λ είναι η παράμετρος της κατανομής η οποία αναπαριστά τον ρυθμό πραγματοποίησης των γεγονότων στην εκάστοτε μονάδα του χρόνου. Αν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί κατανομή Poisson(λ), λ>0 τότε γράφουμε Χ~Poisson(λ) και η f_{X} είναι πράγματι μια συνάρτηση πιθανότητας, διότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_{\mathrm{X}}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Η κατανομή Poisson έχει μέση τιμή $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lambda$ και διασπορά $Var(\mathrm{X}) = \lambda$.

Παράδειγμα 1.1

Σε κατάστημα εισέρχονται κατά μέσο όρο 3 πελάτες ανά λεπτό. Αν η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των πελατών που εισέρχονται στο κατάστημα ανά λεπτό ακολουθεί κατανομή Poisson, να βρεθεί η πιθανότητα:

α) μεταξύ 12:00-12:01 να μπουν 4 πελάτες,

β) μεταξύ 10:00-10:02 να μπουν 5 πελάτες.

Λύση

α) Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά την είσοδο των πελατών ανά λεπτό. Τότε X~Poisson($\lambda = 3$). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{X} = 4) = e^{-3}\frac{3^4}{4!} = 0.169.$$

β) Έστω η τυχαία μεταβλητή Y που αναπαριστά την είσοδο των πελατών ανά δυο λεπτά. Τότε Y~Poisson($\lambda' = 2\lambda = 2 \cdot 3 = 6$). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{Y} = 5) = e^{-6}\frac{6^5}{5!} = 0.162.$$

1.3 Εκθετική κατανομή

Ορισμός 1: Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την **εκθετική κατανομή** με παράμετρο λ , λ >0 και γράφουμε X~Εκθ(λ), αν η συνάρτηση πυκνότητάς της f_{X} δίνεται από τον τύπο:

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Η f_{X} είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας, διότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{X}}(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} (e^{-\lambda x})'\,dx = 1.$$

Ισοδύναμα η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$F_{\mathrm{X}}(x) = P(\mathrm{X} \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \ , x > 0 \\ 0 \ , x \le 0 \end{cases}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση ροπών της εκθετικής συνάρτησης είναι

$$\mathrm{E}\left[e^{tx}\right] = \int_{0}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Από αυτή προκύπτουν εύκολα οι ροπές της τυχαίας μεταβλητής Χ

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda} \ \text{ και } \ Var(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Μια σημαντική ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η αμνήμων ιδιότητα, σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι:

$$P(\mathrm{X} > r + t \mid \mathrm{X} > r) = P(\mathrm{X} > t) \ , \ r, t > 0 .$$

Παράδειγμα 1.2

Η διάρκεια λειτουργίας Χ σε ώρες ενός τύπου μπαταριών ακολουθεί εκθετική κατανομή με $\lambda = 1/10$.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα μια μπαταρία να λειτουργήσει λιγότερο από 10 ώρες,

β) Να λειτουργήσει από 7 μέχρι 8 ώρες,

γ) Να λειτουργήσει περισσότερο από 8 ώρες παραπάνω, αν ήδη έχει λειτουργήσει περισσότερο από 5 ώρες.

Λύση

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{X} < 10) = F_{\mathrm{X}}(10) = 1 - e^{-\frac{1}{10}10} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.37 = 0.63 .$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(7 < \mathrm{X} < 8) = F_{\mathrm{X}}(8) - F_{\mathrm{X}}(7) = 1 - e^{-\frac{8}{10}} - 1 + e^{-\frac{7}{10}} = 0.5 - 0.45 = 0.05\,.$$

γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{X} > 8 + 5 \,|\, \mathrm{X} > 5) = P(\mathrm{X} > 8) = 1 - e^{-\frac{8}{10}} = 0.45\%\,,$$

λόγω της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής.

1.4 Κατανομή Γάμμα

Ορισμός 2: Η τυχαία μεταβλητή Χ λέμε ότι ακολουθεί την **κατανομή Γάμμα** με παραμέτρους α και λ, α, λ>0 και γράφουμε Χ~Γάμμα(α, λ), αν η συνάρτηση πυκνότητας της f_{X} δίνεται από τον τύπο

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha}\, e^{-\lambda x} \;, x > 0 \\ 0\,, x \le 0 \end{cases}$$

όπου $\Gamma(a)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα και ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy\,, \alpha > 0.$$

Η f_{X} είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας, διότι αν θέσουμε $y = \lambda x$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{X}}(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda^{a} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-y}\, dy = \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma(a) = 1.$$

Η κατανομή Γάμμα έχει μέση τιμή $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \alpha\lambda$ και διασπορά $Var\,(\mathrm{X}) = \alpha\lambda^2$.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της Χ έχουμε

$$F(t)=P(\mathrm{X}\le t)=P(\mathrm{N}(t)\ge n)=\sum_{i=n}^{\infty}P(\mathrm{N}(t)=i)=$$
$$=\sum_{i=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=1-\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!},\, t\ge 0$$

όπου $\mathrm{N}(t), t\ge 0$ είναι η τυχαία μεταβλητή η οποία μετρά τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ και αποδεικνύεται ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

Παράδειγμα 1.3

Ο χρόνος επισκευής (σε ώρες) μιας βλάβης ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\alpha=\lambda=2$. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί για την επισκευή της βλάβης:

α) το πολύ μια ώρα,

β) χρόνος από 60 έως 90 λεπτά.

Λύση

Η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου επισκευής Χ της βλάβης δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=\frac{2^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}e^{-2x}=4xe^{-2x},\, x\ge 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(t)=1-\sum_{i=0}^{1}e^{-2t}\frac{(2t)^i}{i!}=1-e^{-2t}(1+2t),\, t\ge 0.$$

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\mathrm{X}\le 1)=F(1)=1-3e^{-2}\cong 59.4\%.$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(1\le \mathrm{X}<1.5)=F(1.5)-F(1)=3e^{-2}-4e^{-3}\cong 20.7\%.$$

1.5 Κατανομή Erlang

Ορισμός 3: Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την **κατανομή Erlang** με παραμέτρους α και λ, $\alpha,\lambda>0$ και γράφουμε X~Erlang(α,λ), αν η συνάρτηση πυκνότητας της f_{X} δίνεται από τον τύπο

$$f_{\mathrm{X}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\ , x>0\\ 0\ , x\le 0\end{cases}$$

Η f_{X} είναι πράγματι μια συνάρτηση πυκνότητας, διότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{X}}(x)\,dx=\frac{\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!}\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{(\alpha-1)!}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy=\frac{1}{(\alpha-1)!}(\alpha-1)!=1.$$

Η κατανομή Erlang έχει μέση τιμή $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ και διασπορά $Var(\mathrm{X})=\dfrac{\alpha}{\lambda^{2}}$.

Παρατήρηση

Θα θεωρήσουμε μια ανέλιξη Poisson $\mathrm{X}_t, t\ge 0$ με μέση τιμή $\mathrm{E}(\mathrm{X}_t)=\lambda t$ και θα παραστήσουμε με T_ν το χρόνο αναμονής μέχρι τη πραγματοποίηση της ν-οστής επιτυχίας. Επειδή το ενδεχόμενο $\{\mathrm{T}_\nu>t\}$, όπως η ν-οστή επιτυχία θα πραγματοποιηθεί μετά τη χρονική στιγμή t είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{\mathrm{X}_t<\nu\}$, όπως ο αριθμός των επιτυχιών μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι μικρότερος του ν, χρησιμοποιώντας την σχέση

$$P(\mathrm{X}_t=x)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{x}}{x!}\ ,\ x=0,1,\dots\ ,\ \lambda,t>0$$

συνάγουμε την σχέση

$$P(\mathrm{T}_\nu>t)=P(\mathrm{X}_t<\nu)=\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}P(\mathrm{X}_t=\kappa)=\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!},t\ge 0\,.$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T_ν δίνεται από την σχέση

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} \text{ , } t \geq 0 \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

με $F(t) = 0, t < 0$. Παραγωγίζοντας αυτήν ως προς t παίρνουμε

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} - e^{-\lambda t} \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \frac{\lambda (\lambda t)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}$$

και επομένως η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T_ν είναι η

$$f(t) = \frac{\lambda^\nu}{(\nu-1)!} t^{\nu-1} e^{-\lambda t} \text{ ,} t \geq 0$$

δηλαδή T_ν ~Erlang(ν, λ).

Σημειώνουμε ότι η σχέση **(1.5.1)** επειδή

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\lambda x} dx$$

συνεπάγεται τη χρήσιμη στις εφαρμογές σχέση

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\lambda t)^\kappa}{\kappa!} \text{ .}$$

Παράδειγμα 1.4

Έστω ότι ο αριθμός των τραυματιών σε αυτοκινητιστικά δυστυχήματα με σοβαρά κατάγματα που εισάγονται σε νοσοκομεία των Αθηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 8 άτομα ανά ημέρα. Να υπολογισθούν:

α) η πιθανότητα όπως ο χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία, μετρούμενος από την αρχή της ημέρας είναι τουλάχιστον 12 ώρες,

β) ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία.

Λύση

α) Ο αριθμός X_t των τραυματιών σε χρονικό διάστημα t ωρών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\mathrm{E}(\mathrm{X}_t) = \lambda t$ όπου $\lambda = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Ο χρόνος αναμονής T_3 ακολουθεί την κατανομή Erlang με συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{3}} \sum_{\kappa=0}^{2} \frac{\left(\frac{t}{3}\right)^{\kappa}}{\kappa!}$$

Επομένως,

$$P(\mathrm{T}_3 > 12) = 1 - F(12) = e^{-4} \sum_{\kappa=0}^{2} \frac{4^{\kappa}}{\kappa!}$$

και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson παίρνουμε

$$P(\mathrm{T}_3 > 12) = 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 = 0.2381.$$

β) Η μέση τιμή της T_3 είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_3) = \frac{3}{\lambda} = 9.$$

1.6 Κανονική κατανομή

Ορισμός 4: Η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την **κανονική κατανομή** (ή **κατανομή Gauss)** με παραμέτρους $\mu \in \Re$ και $\sigma^2 > 0$ και γράφουμε $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, αν η συνάρτηση πυκνότητάς δίνεται από τον τύπο

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ x \in \Re.$$

1.6.1 Τυποποιημένη κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή που έχει μέση τιμή 0 ($\mu = 0$) και τυπική απόκλιση 1 ($\sigma^2 = 1$) συμβολίζεται με Χ~ Ν(0,1) και ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή**. Για την τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(0,1)$, οι τιμές της συνάρτησης κατανομής της Φ_{X}, δηλαδή της συνάρτησης

$$\Phi_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi_{\mathrm{X}}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,,\ x \in \Re$$

όπου Φ_{X} είναι η συνάρτηση πυκνότητας της Χ, βρίσκονται σε κατάλληλους πίνακες τιμών.

Η κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Στατιστική. Είναι κατάλληλη για την περιγραφή πληθυσμιακών χαρακτηριστικών (π.χ. το ύψος, το βάρος κτλ.) αλλά και για την πιθανοθεωρητική περιγραφή των τυχαίων σφαλμάτων σε διάφορες πειραματικές μετρήσεις. Για το δεύτερο αυτό λόγο, μερικές φορές η κανονική κατανομή καλείται και κατανομή των σφαλμάτων. Ισχύουν οι ακόλουθες σημαντικές προτάσεις.

Πρόταση 1.1 Αν $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Πρόταση 1.2 Ισχύει ότι $\Phi_{\mathrm{X}}(x) + \Phi_{\mathrm{X}}(-x) = 1$.

Παράδειγμα 1.5

Αν οι εβδομαδιαίες δαπάνες Χ των νοικοκυριών σε ευρώ ακολουθούν την κανονική κατανομή Ν(200,49). Να βρεθούν:

α) η πιθανότητα $P(\mathrm{X} < 210)$,

β) η πιθανότητα $P(193 < \mathrm{X} < 212)$.

Λύση

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X<210)=P(\frac{X-200}{7}<\frac{210-200}{7})=P(Z<\frac{10}{7})=P(Z<1.43)=\Phi(1.43)=0.9236.$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(193<X<212)=P(\frac{193-200}{7}<\frac{X-200}{7}<\frac{212-200}{7})=P(-1<Z<\frac{12}{7})=$$
$$P(Z<1.71)-P(Z<-1)=\Phi(1.71)-\Phi(-1)=\Phi(1.71)-\left(1-\Phi(1)\right)=$$
$$\Phi(1.71)+\Phi(1)-1=0.9564+0.8413-1=0.7977.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικές ανελίξεις

2.1 Εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις

Ορισμός 1: Στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$ όπου T είναι το σύνολο των τιμών της παραμέτρου t και ονομάζεται δεικτοσύνολο ή παραμετρικός χώρος, ενώ το $X(t)$ δηλώνει την κατάσταση της ανέλιξης σε χρόνο t.

Η στοχαστική ανέλιξη περιγράφει ένα σύστημα στο οποίο υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα. Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου t, δηλαδή ο παραμετρικός χώρος και οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου t στον χώρο T. Οι τιμές αυτές καλούνται καταστάσεις του συστήματος και το σύνολο στο οποίο ανήκουν συμβολίζεται με I και ονομάζεται χώρος καταστάσεων του συστήματος.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα παράδειγμα στοχαστικής ανέλιξης.

Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε ένα μόριο το οποίο κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου με $m+1$ διακεκριμένα σημεία $0,1,2,\ldots,m-1,m$. Σε κάθε βήμα της κίνησης του, το μόριο έχει τη ίδια πιθανότητα να κινηθεί είτε με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε με την αντίθετη φορά. Ορίζουμε X_n =θέση του μορίου μετά το n-οστό βήμα. Η $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη. Η κίνηση του μορίου διέπεται από την παρακάτω σχέση

$$P\{X_{n+1} = j+1 \mid X_n = j\} = P\{X_{n+1} = j-1 \mid X_n = j\} = 1/2$$

όπου $j+1=0$, αν $j=m$ και $j-1=m$, αν $j=0$. Το σύνολο τιμών $I=\{0,1,\ldots,m\}$ της στοχαστικής ανέλιξης είναι πεπερασμένο.

Ανάλογα με την φύση του παραμετρικού χώρου, η ανέλιξη ταξινομείται σε δύο κατηγορίες οι οποίες είναι οι εξής:

- Αν το σύνολο Τ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο της μορφής $\mathrm{T}=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ ή $\mathrm{T}=\{0,1,2,\ldots\}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{X}(t),t\in\mathrm{T}\}$ ονομάζεται **στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ή στοχαστική ανέλιξη διακριτής παραμέτρου**.
- Αν το σύνολο Τ είναι μη αριθμήσιμο δηλαδή είναι ένα διάστημα της μορφής $\mathrm{T}=[0,\infty)$ ή Τ=$\Re$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{X}(t),t\in\mathrm{T}\}$ ονομάζεται **στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο ή στοχαστική ανέλιξη συνεχούς παραμέτρου**.

2.2 Μαρκοβιανή ανέλιξη

Ορισμός 2: Ανέλιξη Markov ή Μαρκοβιανή ανέλιξη είναι η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{X}(t),t\in\mathrm{T}\}$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ότι για κάθε ακέραιο $n>0$, αν $t_1<t_2<\ldots<t_n\in\mathrm{T}$ είναι τιμές της παραμέτρου t του παραμετρικού χώρου Τ, ισχύει ότι

$$P\{\mathrm{X}(t_n)\le x_n \mid \mathrm{X}(t_1)=x_1,\ldots,\mathrm{X}(t_{n-1})=x_{n-1}\}=P\{\mathrm{X}(t_n)\le x_n \mid \mathrm{X}(t_{n-1})=x_{n-1}\}. \quad \mathbf{(2.2.1)}$$

Από τη σχέση **(2.2.1)** προκύπτει ότι η Μαρκοβιανή ανέλιξη είναι ειδική περίπτωση στοχαστικής ανέλιξης η οποία έχει τη ιδιότητα ότι η πιθανότητα μεταβάσεως από μια δεδομένη κατάσταση σε μια μελλοντική κατάσταση εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα και όχι από τις παρελθούσες καταστάσεις στις οποίες έχει βρεθεί το σύστημα.

2.3 Μαρκοβιανή αλυσίδα

Από τη Μαρκοβιανή ανέλιξη προκύπτει ο ορισμός της Μαρκοβιανής αλυσίδας:

Ορισμός 3: Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται η Μαρκοβιανή ανέλιξη της οποίας ο χώρος των καταστάσεων είναι διακριτός. Με άλλα λόγια η διακριτή στοχαστική ανέλιξη με διακριτό χρόνο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη.

Η φύση του παραμετρικού χώρου διαχωρίζει τις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε δύο κατηγορίες. Αν ο παραμετρικός χώρος και ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτοί, τότε ορίζεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο. Στην περίπτωση που ο παραμετρικός χώρος είναι συνεχής, ενώ ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός, τότε ορίζεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο.

Συνεπώς μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω στον ακόλουθο πίνακα:

Παραμετρικός χώρος	Χώρος καταστάσεων	
	Διακριτός	Συνεχής
Διακριτός	Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο	Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο
Συνεχής	Μαρκοβιανές ανελίξεις σε διακριτό χρόνο	Μαρκοβιανές ανελίξεις σε συνεχή χρόνο

Πίνακας 1: Μαρκοβιανές αλυσίδες

2.4 Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

Ορισμός 4: Η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n = 0,1,\ldots\}$ με διακριτό χώρο καταστάσεων $I = \{0,1,2,\ldots\}$ λέγεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο**, αν για κάθε $n = 0,1,\ldots$ και για κάθε $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in I$ ισχύει

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P_{ij}.$$

Η πιθανότητα P_{ij} ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος ή πιθανότητα μετάβασης πρώτης τάξης. Επειδή $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P_{ij}$ για κάθε $n = 0,1,\ldots$ οι πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης P_{ij} ονομάζονται χρονικά ομογενείς πιθανότητες μετάβασης, καθώς η μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας από την κατάσταση i στην κατάσταση j, είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής n.

Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με χρονικά ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου.

Επειδή οι πιθανότητες P_{ij} είναι μη αρνητικές και επειδή η αλυσίδα θα πρέπει οποιαδήποτε χρονική στιγμή να βρίσκεται σε κάποια κατάσταση, θα έχουμε ότι:

$$P_{ij} \geq 0 \ , \ i, j \in I \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

και

$$\sum_j P_{ij} = 1 \ , \ i \in I \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος συγκεντρώνονται σε ένα πίνακα που ονομάζεται πίνακας μετάβασης πρώτης τάξης της αλυσίδας. Ο πίνακας αυτός συνήθως συμβολίζεται με P και επειδή ικανοποιεί τις σχέσεις **(2.4.1)** και **(2.4.2)** ονομάζεται στοχαστικός. Όταν $I = \{0,1,\ldots,\mathrm{N}\}$, δηλαδή το I είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, ο πίνακας P έχει τη μορφή

$$P = \left(P_{ij}\right)_{i,j\in I} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \ldots & P_{0\mathrm{N}} \\ P_{10} & P_{11} & \ldots & P_{1\mathrm{N}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{\mathrm{N}0} & P_{\mathrm{N}1} & \ldots & P_{\mathrm{N}\mathrm{N}} \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια θα δούμε ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας σε διακριτό χρόνο.

Παράδειγμα 2.2 (Ενα μοντέλο για έλεγχο αποθεμάτων)

Υποθέτουμε ότι ένα κατάστημα διαθέτει προς πώληση ένα εμπόρευμα. Οι εβδομαδιαίες απαιτήσεις του εμπορεύματος από το καταναλωτικό κοινό θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και πραγματοποιούνται σύμφωνα με τη διακριτή συνάρτηση κατανομής Φ_j όπου Φ_j είναι η πιθανότητα να ζητηθούν από το κοινό j-τεμάχια του εμπορεύματος κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας

$$\Phi_j = P\ \{\text{Εβδομαδιαία ζήτηση του προϊόντος} = j\ \} \ , \ j = 0,1,\ldots$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι οποιαδήποτε ζήτηση του εμπορεύματος η οποία υπερβαίνει το τρέχον απόθεμα του, χάνεται. Ο αριθμός των τεμαχίων του εμπορεύματος εξετάζεται μόνο στην αρχή κάθε εβδομάδας και σε κάθε εβδομαδιαία επιθεώρηση, υπάρχει η δυνατότητα να παραγγελθούν από τις αποθήκες του καταστήματος τεμάχια του εμπορεύματος. Τα τεμάχια του εμπορεύματος που παραγγέλνονται, παραδίδονται στο κατάστημα αμέσως.

Η πολιτική της παραγγελίας του εμπορεύματος ακολουθεί τον κανόνα (s,S), $0 \le s \le S$. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτόν, αν σε μια εβδομαδιαία επιθεώρηση ο αριθμός των τεμαχίων του εμπορεύματος είναι μικρότερος του s, τότε παραγγέλνονται τόσα τεμάχια ώστε ο συνολικός αριθμός τους να γίνει S. Αν ο αριθμός των τεμαχίων είναι ίσος ή μεγαλύτερος του s, τότε δεν παραγγέλνεται κανένα τεμάχιο του εμπορεύματος.

Για $n = 0,1,\ldots$ (n: αριθμός εβδομάδας) ορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή X_n έτσι ώστε: X_n=αριθμός τεμαχίων του εμπορεύματος στην αρχή της n-εβδομάδας λίγο πριν την εβδομαδιαία επιθεώρηση.

Η στοχαστική ανέλιξη $\{\mathrm{X}_n, n = 0,1,\ldots\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε διακριτό χρόνο, γιατί ο αριθμός των τεμαχίων του εμπορεύματος δηλαδή η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n στην αρχή κάθε εβδομάδας, δηλαδή για κάθε n, εξαρτάται μόνο από τον κανόνα παραγγελίας που θα εφαρμοστεί στην αμέσως προηγούμενη εβδομάδα και τη ζήτηση του καταναλωτικού κοινού την αμέσως προηγούμενη εβδομάδα.

Πράγματι, αν D_n, $n = 0,1,\ldots$ είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει τη ζήτηση του εμπορεύματος κατά τη διάρκεια της n-εβδομάδας, τότε

$$\mathrm{X}_{n+1} = \begin{cases} \max(\mathrm{X}_n - D_n, 0), \; \alpha\nu \; \mathrm{X}_n \ge s \\ \max(s - D_n, 0), \; \alpha\nu \; \mathrm{X}_n < s \end{cases}$$

Οι πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξεως P_{ij}, υπολογίζονται παρακάτω.

1η περίπτωση: $i \ge s$

α) $1 \le j \le i$. $P_{ij} = P$ {η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι ίση με $i - j$ }$= \Phi_{i-j}$,

β) η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι ίση ή μεγαλύτερη του i. Άρα, σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος θα πρέπει $j = 0$.

Τότε: $$P_{ij} = \sum_{k=i}^{\infty} \Phi_k .$$

Άρα, $$P_{ij} = \begin{cases} \Phi_{i-j} \ , 1 \le j \le i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \Phi_k \ , \ j = 0 \end{cases}$$

2η περίπτωση: $i < S$

α) $1 \le j \le S$. $P_{ij} = P$ {η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα είναι ίση με $S - j$ }$= \Phi_{S-j}$,

β) η ζήτηση κατά την τρέχουσα εβδομάδα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του S. Άρα, σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος θα πρέπει $j = 0$.

Τότε: $$P_{ij} = \sum_{k=S}^{\infty} \Phi_k .$$

Άρα, $$P_{ij} = \begin{cases} \Phi_{S-j} \ , 1 \le j \le S \\ \sum_{k=S}^{\infty} \Phi_k \ , \ j = 0 \end{cases}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση $P_{ij} = 0$.

2.5 Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο

Ορισμός 5: Μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $\{\mathrm{X}(t), t \ge 0\}$ με διακριτό χώρο καταστάσεων $I = \{0,1,2,\ldots\}$ λέγεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο** αν

$$P\{\mathrm{X}(t_n) = i_n \mid \mathrm{X}(t_0) = i_0, \mathrm{X}(t_1) = i_1, \ldots, \mathrm{X}(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{\mathrm{X}(t_n) = i_n \mid \mathrm{X}(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$$

για κάθε $0 \le t_0 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ και $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n \in I$.

2.5.1 Ανέλιξη Poisson

Θεωρούμε μια ανέλιξη σε συνεχή χρόνο $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$, όπου η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X}(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αφίξεων (ή των γεγονότων) που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(0,t)$. Οι αφίξεις συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Ο χώρος καταστάσεων είναι $I = \{0,1,2,\ldots\}$. Υιοθετούμε τα παρακάτω αξιώματα:

i. Οι αριθμοί των αφίξεων που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια ξένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητα κατανεμημένοι. Έχουμε δηλαδή «ανεξάρτητες προσαυξήσεις».

ii. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\mathrm{X}(t+h)-\mathrm{X}(t)$, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων που συμβαίνουν κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+h)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t. Έχουμε δηλαδή «χρονική στασιμότητα».

iii. $P[\mathrm{X}(t+h)-\mathrm{X}(t)=1]=\lambda h+o(h)$, καθώς $h \to 0$ για κάποιο θετικό αριθμό λ. Με $o(h)$ συμβολίζουμε μια συνάρτηση του h τέτοιο ώστε $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

iv. $P[\mathrm{X}(t+h)-\mathrm{X}(t)\geq 2]=o(h)$, καθώς $h \to 0$.

Η ανέλιξη $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$ εφοδιασμένη με τα παραπάνω τέσσερα αξιώματα καλείται **ανέλιξη Poisson**. Αποδεικνύεται ότι είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο.

Επίσης από τα αξιώματα **(iii)** και **(iv)** έχουμε ότι

$$P[\mathrm{X}(t+h)-\mathrm{X}(t)=0]=1-\lambda h+o(h), \text{ καθώς } h \to 0.$$

Έστω $P_n(t)=P[\mathrm{X}(t)=n], n\geq 0$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $P_0(0)=1$, $P_n(0)=0$, $n\geq 1$.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$. Οι λεγόμενες προδρομικές εξισώσεις λαμβάνονται ως εξής:

Για $h \to 0$: $\quad P_0(t+h)=P_0(t)(1-\lambda h+o(h))$ ή

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t).$$

Αν $n \geq 1$: $P_n(t+h) = P_n(t)\left(1-\lambda h + o(h)\right) + P_{n-1}(t)\left(\lambda h + o(h)\right)$ ή

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) .$$

Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη. Έχουμε ότι

$$P(\mathrm{T}_1 > t) = P(\mathrm{X}(t) = 0) = e^{-\lambda t} .$$

Άρα η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής T_1 είναι $f_{\mathrm{T}_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Δηλαδή $\mathrm{T}_1 \sim$ Εκθετική(λ). Για $n \geq 2$, έστω T_n ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της $n-1$ και της n-οστής αφίξεως.

Έχουμε ότι

$$P\left(\mathrm{T}_{n+1} > t / \mathrm{T}_1 = t_1, \mathrm{T}_2 = t_2, \ldots, \mathrm{T}_n = t_n\right) \overset{\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha(i)}{=}$$

$$P\left[\mathrm{X}(s+t) - \mathrm{X}(s) = 0\right] \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad s = t_1 + t_2 + \ldots + t_n \overset{\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha(ii)}{=}$$

$$P\left[\mathrm{X}(t) - \mathrm{X}(0) = 0\right] = P\left[\mathrm{X}(t) = 0\right] = e^{-\lambda t} .$$

Άρα ο χρόνος T_{n+1} είναι ανεξάρτητος των $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n$ και ακολουθεί την Εκθετική(λ). Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία T_n , $n \geq 1$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν Εκθετική(λ).

Παράδειγμα 2.3

Έστω μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό λ>0. Έστω S_n ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του n-οστού γεγονότος. Υπολογίστε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή S_n.

Λύση

1^{ος} τρόπος: Έστω T_1 ο χρόνος μέχρι την πραγματοποίηση του 1^{ου} γεγονότος και T_i , $i \ge 2$, ο χρόνος που παρεμβάλλεται ανάμεσα στο $(i-1)$-οστό και i -οστό γεγονός. Προφανώς

$$S_n = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_n \ , n = 1,2,\ldots$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{T}_i \sim$ Εκθετική(λ), $i = 1,2,\ldots$ και είναι ανεξάρτητες. Επομένως $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i \sim$ Γάμμα(n,λ), δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n έχει τύπο: $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t \ge 0$.

2^{ος} τρόπος: Έστω $F_{S_n}(t)$ η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_n. Παρατηρούμε ότι το n -οστό γεγονός πραγματοποιείται πριν ή κατά τη χρονική στιγμή t αν και μόνο αν ο αριθμός των γεγονότων που έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι τουλάχιστον n. Δηλαδή, $\mathrm{N}(t) \ge n \leftrightarrow S_n \le t$.

Συνεπώς: $$F_{S_n}(t) = P\{S_n \le t\} = P\{\mathrm{N}(t) \ge n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} .$$

Παραγωγίζοντας την $F_{S_n}(t)$ ως προς t παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της S_n

$$f_{S_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} =$$

$$\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Περιγραφή των ουρών αναμονής

3.1 Εισαγωγή

Ως ουρά αναμονής ορίζεται κάθε σύστημα το οποίο παρέχει εξυπηρέτηση κάποιου είδους σε πελάτες που προσέρχονται σε αυτό. Το σύστημα αποτελείται από το χώρο εξυπηρέτησης όπου περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως. Η τυχαιότητα που υπάρχει στους χρόνους άφιξης των πελατών καθώς και στους αντίστοιχους χρόνους εξυπηρέτησής τους, έχει ως συνέπεια την αυξομείωση του αριθμού των πελατών ως συνάρτηση του χρόνου.

Ουρά δημιουργείται όταν η συρροή πελατών είναι μεγαλύτερη από την δυνατότητα εξυπηρέτησης ενός συστήματος. Το φαινόμενο αυτό είναι από τα πιο συνηθισμένα της καθημερινής μας ζωής. Για παράδειγμα, πελάτες που περιμένουν στο ταμείο ενός καταστήματος ή μιας τράπεζας, επιβάτες στην στάση ενός λεωφορείου, ασθενείς για εισαγωγή σε νοσοκομείο, αυτοκίνητα που περιμένουν να μπουν σε αυτοκινητόδρομο ταχείας κυκλοφορίας, τα αεροπλάνα που περιμένουν να προσγειωθούν ή να απογειωθούν, τα πλοία που περιμένουν να φορτώσουν ή να εκφορτώσουν.

Η θεωρία ουρών μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων και φαινομένων συνωστισμού τα οποία προέρχονται από διάφορους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Με την χρήση της θεωρίας ουρών μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με κάθε λεπτομέρεια ένα σύστημα ουράς αναμονής και να μελετήσουμε με ακρίβεια ή ακόμα και να επιλύσουμε όλα τα προβλήματα τα οποία εμποδίζουν τη σωστή λειτουργία του συστήματος αυτού.

3.2 Ιστορική αναδρομή

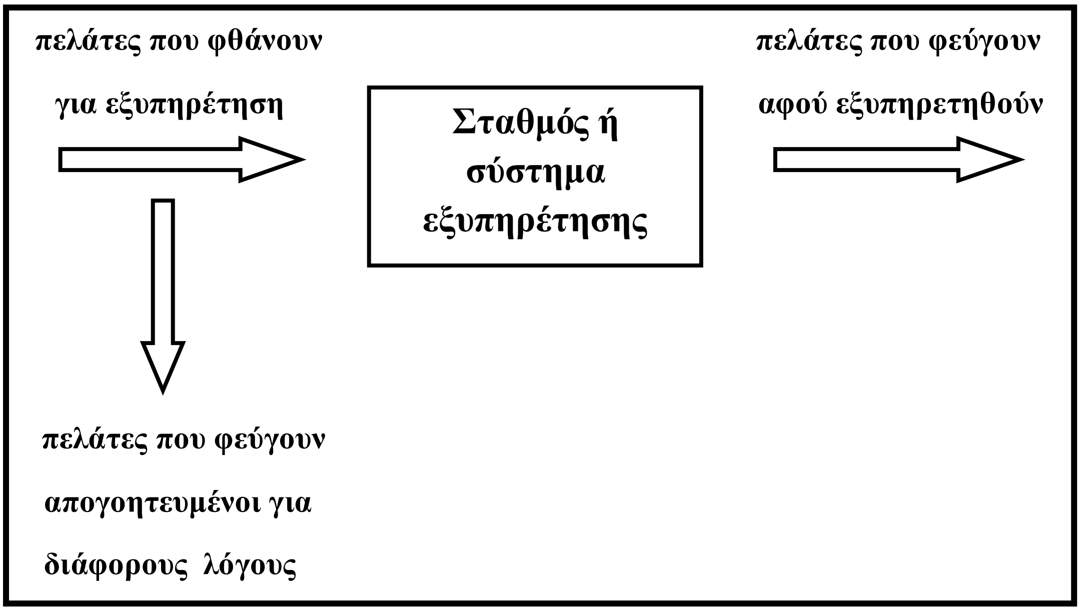
Η θεωρία ουρών αναμονής αναπτύχτηκε αρχικά από τον Δανό μαθηματικό και μηχανικό Agner Krarup Erlang, ο οποίος το 1909 δημοσίευσε την εργασία του με τίτλο «The Theory of Probabilities and Telephone Conversations» η οποία αναφερόταν στα φαινόμενα αναμονής που παρατηρούνται στις γραμμές ενός τηλεφωνικού κέντρου. Το αρχικό πρόβλημα που μελέτησε ήταν τα συστήματα τηλεφωνίας που απαιτούνται για την παροχή μιας τηλεφωνικής υπηρεσίας. Το 1917 δημοσίευσε την πολύ γνωστή εργασία του με τίτλο «Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of

Significance in Automatic Telephone Exchanges». Μέσα από τα έργα του, ο Erlang, παρατήρησε πως το τηλεφωνικό δίκτυο χαρακτηρίζεται από: 1) την κατανομή Poisson, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και πολλούς υπηρέτες ή 2) την κατανομή Poisson, σταθερούς χρόνους εξυπηρέτησης και έναν υπηρέτη. Τέλος εισήγαγε την έννοια της στασιμότητας του συστήματος και της βελτιστοποίησης του συστήματος αναμονής.

Οι εφαρμογές της θεωρίας ουρών συνεχίστηκαν βέβαια και μετά τον Erlang. Το 1927 ο E.C. Molina δημοσίευσε το άρθρο με τίτλο: «Application of the Theory of Probability to Telephone Trunking Problems» και ένα χρόνο αργότερα ο Thornton Fry δημοσίευσε το άρθρο με τίτλο: «Probability and its Engineering Users» το οποίο επεκτάθηκε πάνω στη δουλειά του Erlang. Στις αρχές του 1930 ο F.Pollaczek και ο A.Y.Khintchine έκαναν πρωτοποριακή εργασία στη θεωρία ουρών. Την ίδια περίοδο αντίστοιχη δουλειά γινόταν στην Ρωσία από τον Kalmogorov, στην Γαλλία από τον Crommelin και στην Σουηδία από τον Palm. Μέχρι το 1950 η θεωρία ουρών παρουσίαζε αργή ανάπτυξη αλλά στη συνέχεια γνώρισε μεγάλη άνοδο.

3.3 Βασικά χαρακτηριστικά των ουρών αναμονής

Ένα σύστημα ουράς μπορεί να περιγραφεί ως εξής: οι πελάτες φθάνουν για εξυπηρέτηση και στην περίπτωση που δεν είναι άμεσα διαθέσιμη αυτή η εξυπηρέτηση περιμένουν στην ουρά αναμονής. Στη συνέχεια μετά την αναμονή τους στην ουρά φθάνουν σε έναν ή περισσότερους σταθμούς εξυπηρέτησης και μετά το πέρας της εξυπηρέτησης αυτής αποχωρούν από το σύστημα. Ακόμα, πολλοί πελάτες ενδέχεται να αποχωρήσουν από την ουρά δυσαρεστημένοι πριν εξυπηρετηθούν. Αυτό γίνεται στην περίπτωση της υπερβολικής αναμονής. Ένα βασικό τέτοιο σύστημα αναπαρίσταται σχηματικά στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1: Βασικό σύστημα εξυπηρέτησης

Τα παρακάτω χαρακτηριστικά περιγράφουν πλήρως ένα σύστημα ουράς:

1) Η διαδικασία άφιξης πελατών.

2) Η διαδικασία εξυπηρέτησης.

3) Ο αριθμός X των υπηρετών σε παράλληλη τοποθέτηση.

4) Η χωρητικότητα Y του συστήματος της ουράς.

5) Η σειρά εξυπηρέτησης Z.

3.3.1 Διαδικασία άφιξης πελατών

Η διαδικασία άφιξης των πελατών αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο φθάνουν οι πελάτες στο σύστημα και καθορίζεται συνήθως από το μέσο ρυθμό άφιξης των πελατών ή από το μέσο χρόνο αναμονής ανάμεσα σε δυο διαδοχικές αφίξεις.

Οι αφίξεις μπορούν να χαρακτηριστούν ως κανονικές ή ως τυχαίες. Στην πρώτη περίπτωση οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα ένας-ένας σε ίσα χρονικά διαστήματα. Στην δεύτερη περίπτωση μπορεί να έχουμε τα εξής:

- Οι αφίξεις δεν συμβαίνουν σε ίσα χρονικά διαστήματα αλλά ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη κατανομή.
- Οι πελάτες φθάνουν με καθυστέρηση.
- Οι πελάτες φθάνουν κατά ομάδα.

- Η διαδικασία άφιξης των πελατών μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου.
- Η ροή των πελατών είναι συνεχής.

Επίσης, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την αντίδραση του πελάτη όταν εισέρχεται στο σύστημα. Ένας πελάτης μπορεί να αποφασίσει να περιμένει άσχετα με το πόσο μεγάλη είναι η ουρά, ή αντιθέτως, μπορεί να αποφασίσει να μην εισέλθει στο σύστημα εάν η ουρά είναι πολύ μεγάλη. Ακόμα υπάρχει περίπτωση ένας πελάτης να εισέλθει στο σύστημα, αλλά με την πάροδο του χρόνου μπορεί να χάσει την υπομονή του και να αποφασίσει να φύγει.

3.3.2 Διαδικασία εξυπηρέτησης

Η διαδικασία εξυπηρέτησης εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών που περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Ένας υπηρέτης μπορεί να δουλεύει γρηγορότερα καθώς μεγαλώνει η ουρά, ή αντιθέτως, μπορεί να αγχωθεί και να γίνει λιγότερο αποδοτικός.

Η εξυπηρέτηση, όπως και η άφιξη, μπορεί να χαρακτηριστεί ως κανονική ή ως τυχαία. Στην πρώτη περίπτωση οι πελάτες φθάνουν και αναχωρούν σε χρονικά διαστήματα που κατανέμονται σύμφωνα με την κανονική κατανομή, ενώ στην δεύτερη περίπτωση η εξυπηρέτηση εξαρτάται από το χρόνο που χρειάζεται ο κάθε πελάτης για να εξυπηρετηθεί.

3.3.3 Αριθμός των υπηρετών σε παράλληλη τοποθέτηση

- Οι Χ υπηρέτες εξυπηρετούν ταυτόχρονα Χ πελάτες αν υπάρχουν.
- Μπορεί να υπάρχει μια κοινή ουρά ή επιμέρους ουρές σε καθένα από τους Χ υπηρέτες.

3.3.4 Χωρητικότητα συστήματος

Η χωρητικότητα του συστήματος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών που μπορεί να δεχθεί το σύστημα ουράς. Σε κάποιες διαδικασίες ουράς υπάρχουν περιορισμοί ως προς το χώρο αναμονής. Δηλαδή μόλις η ουρά φθάσει σε ένα συγκεκριμένο μήκος, δεν γίνονται δεκτοί άλλοι πελάτες, μέχρις ότου εξυπηρετηθούν όλοι όσοι βρίσκονται μέσα στο χώρο αναμονής. Μια ουρά με περιορισμένο χώρο αναμονής μπορεί να θεωρηθεί ως ουρά με επιβαλλόμενη άρνηση, όπου ο κάθε πελάτης αναγκάζεται να αποχωρήσει όταν το μέγεθος της ουράς φθάσει στο μέγιστο όριο.

3.3.5 Σειρά εξυπηρέτησης

Η πειθαρχία ουράς ή σειρά εξυπηρέτησης αναφέρεται στον τρόπο που επιλέγονται οι πελάτες για εξυπηρέτηση μόλις σχηματιστεί μια ουρά. Οι πιο συνηθισμένες πειθαρχίες είναι:

Α) Η FCFS (First Come First Served) ή αλλιώς FIFO (First In First Out) όπου κάθε πελάτης εξυπηρετείται με τη σειρά που φθάνει στο σύστημα.

Β) Η LCFS (Last Come First Served) ή αλλιώς LIFO (Last In First Out) όπου κάθε φορά που ένας υπηρέτης είναι ελεύθερος, επιλέγει να εξυπηρετήσει τον πελάτη που πήγε πιο πρόσφατα.

Γ) Η SIRO (Service In Random Order) όπου η επιλογή για εξυπηρέτηση γίνεται σε τυχαία σειρά ανεξαρτήτως χρόνου άφιξης στην ουρά.

Υπάρχει και μια σειρά εξυπηρέτησης που βάζει προτεραιότητες για συγκεκριμένους τύπους πελατών. Η πειθαρχία LCFS/P-R (Last Come First Served/Preemptive-Resume) αναφέρει ότι ένας πελάτης με μεγαλύτερη προτεραιότητα εξυπηρετείται ακόμα και αν βρίσκεται υπό-εξυπηρέτηση κάποιος άλλος πελάτης με μικρότερη όμως προτεραιότητα. Αυτό σημαίνει πως ο πελάτης που έχει μικρότερη προτεραιότητα παραμερίζεται, δηλαδή η εξυπηρέτησή του σταματά προσωρινά και συνεχίζεται μετά το πέρας της εξυπηρέτησης του πελάτη με την υψηλότερη προτεραιότητα.

3.4 Το αποτέλεσμα του Little

Μια από τις πιο ισχυρές σχέσεις στην θεωρία των ουρών αναπτύχτηκε από τον John D.C. Little στις αρχές του 1960. Σε ουρές που παρουσιάζουν μεγάλη κατά μέσο όρο χωρητικότητα, αναμένεται διαισθητικά ότι και ο χρόνος αναμονής κατά μέσο όρο θα είναι μεγάλος και αντίστροφα. Αυτό το γεγονός είναι γνωστό ως αποτέλεσμα ή θεώρημα του Little και μια απλή, αλλά όχι πλήρης, απόδειξή του είναι η επόμενη.

Έστω λ_Q ο μέσος ρυθμός αφίξεων των πελατών που εισέρχονται στο σύστημα εξυπηρέτησης κατά το χρονικό διάστημα (0,t], δηλαδή $\lambda_Q = \frac{\mathrm{N}(t)}{t}$ **(3.4.1)** όπου N(t) ισούται με τον αριθμό των πελατών που έχουν φθάσει στην ουρά μέχρι τη χρονική στιγμή t. Συμβολίζοντας με L τον μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα, L_Q τον μέσο αριθμό των πελατών που περιμένουν στην ουρά, W τον μέσο χρόνο κατά τον οποίο ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα και W_Q τον μέσο χρόνο κατά τον οποίο ένας πελάτης βρίσκεται στην ουρά, περιμένοντας να εξυπηρετηθεί, για το διάστημα (0,t], έχουμε

$$L_Q = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du = \frac{\Gamma(t)}{t} \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

$$W_Q = \frac{1}{\mathrm{N}(t)}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}(t)} W_n = \frac{1}{\mathrm{N}(t)}\left[\Gamma(t)+\varepsilon(t)\right] = \frac{\Gamma(t)}{\mathrm{N}(t)} + \frac{\varepsilon(t)}{\mathrm{N}(t)} \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

όπου ε(t) είναι το άθροισμα των υπολειπόμενων χρόνων παραμονής στο σύστημα τη χρονική στιγμή t, των παρόντων πελατών σε αυτή τη χρονική στιγμή. Από τις σχέσεις **(3.4.1), (3.4.2)** και **(3.4.3)** προκύπτει ότι:

$$L_Q = \lambda_Q\, W_Q - \frac{\varepsilon(t)}{t}\,.$$

Υποθέτοντας ότι τα ακόλουθα όρια υπάρχουν

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\lambda_Q = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{N}(t)}{t}\,,\ W = \lim_{t\to\infty} W_Q \ \text{ και } \ L = \lim_{t\to\infty} L_Q\,.$$

Τότε,

$$L = \lambda W \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

και

$$L_Q = \lambda W_Q \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

Για την εξαγωγή των σχέσεων **(3.4.4)** και **(3.4.5)** δεχθήκαμε ότι ισχύει η σχέση $\lim_{t\to\infty}\frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$ η οποία αν και σχεδόν προφανής, απαιτεί πολύπλοκη απόδειξη, η οποία παραλείπεται.

Η σχέση **(3.4.4)**, που αναφέρεται ως αποτέλεσμα του Little, εκφράζει το γεγονός ότι ασυμπτωτικά ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί τον μέσο χρόνο παραμονής σε αυτό το σύστημα.
Θα εφαρμόσουμε τους τύπους **(3.4.4)** και **(3.4.5)** αργότερα, σε συγκεκριμένα μοντέλα ουρών.

3.5 Ο συμβολισμός κατά Kendall

Ο Kendall, το 1953, πρότεινε για την εξειδίκευση των χαρακτηριστικών ενός συστήματος ουράς τον ακόλουθο συμβολισμό A/B/X/Y/Z όπου A είναι η κατανομή των αφίξεων, B είναι η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης, X είναι ο αριθμός των υπηρετών σε παράλληλη τοποθέτηση, Y είναι η χωρητικότητα του συστήματος και Z είναι η σειρά εξυπηρέτησης. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τα τρία πρώτα σύμβολα, ειδικά αν $Y = \infty$ και Z=FIFO τότε τα Y,Z παραλείπονται.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα συνήθη σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη θεωρία ουρών. Αυτό που μπορεί να μας φάνει περίεργο είναι ότι στην εκθετική κατανομή χρησιμοποιούμε το σύμβολο M και όχι το E. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε το σύμβολο E είναι για να μην μπερδευτούμε με το E_κ της κατανομής Erlang. Έτσι χρησιμοποιούμε το M που προέρχεται από τον όρο «Markovian».

Χαρακτηριστικά	Σύμβολο	Ερμηνεία
Κατανομή των αφίξεων (A)	M D E_κ GI	Εκθετική κατανομή (Markov) Βέβαιη κατανομή (Deterministic) Κατανομή Erlang τύπου κ, κ=1,2,… Γενική κατανομή
Κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης (B)	M D E_κ G	Εκθετική κατανομή (Markov) Βέβαιη κατανομή (Deterministic) Κατανομή Erlang τύπου κ, κ=1,2,… Γενική κατανομή
Αριθμός των υπηρετών σε παράλληλη τοποθέτηση(X)	1,2,…,∞	
Χωρητικότητα (Y)	1,2,…,∞	
Σειρά εξυπηρέτησης (Z)	FIFO LIFO SIRO PRI GD	First In First Out Last In First Out Service In Random Order Priority General Discipline

Πίνακας 2: Συμβολισμός κατά Kendall

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εκθετικά Μοντέλα Ουρών Αναμονής

4.1 Εισαγωγή

Υπάρχουν πολλά μοντέλα συστημάτων ουράς τα οποία χρησιμοποιούνται σε πολλές πτυχές της καθημερινότητάς μας. Είναι πολύ σημαντικό όμως να διαλέξουμε το κατάλληλο μοντέλο για κάθε περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε έτσι ώστε να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν ορισμένα από τα πιο βασικά και πιο εφαρμοσμένα μοντέλα συστημάτων ουρών αναμονής, με την βοήθεια μαθηματικών εκφράσεων και παραδειγμάτων που τα χαρακτηρίζουν. Τα μοντέλα αυτά έχουν εκθετική κατανομή στους χρόνους άφιξης και εξυπηρέτησης.

4.2 Το μοντέλο M/M/1

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Έχουμε έναν υπηρέτη.
- Έχουμε άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).
- Όλοι οι πελάτες μένουν στο σύστημα έως ότου εξυπηρετηθούν, ανεξάρτητα με το μέγεθος της ουράς.

Στο μοντέλο M/M/1 τα πάντα καθορίζονται από δυο παραμέτρους:

- λ= ρυθμός αφίξεων (ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)
- μ= ρυθμός εξυπηρέτησης (ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα)

Ο ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό άφιξης.

Έστω X(t) ο αριθμός των πελατών στο σύστημα κατά την χρονική στιγμή t. Αν θεωρήσουμε ως αρχική συνθήκη ότι X(0)=κ και ορίσουμε $P_n(t) = P[\mathrm{X}(t) = n]$, n=0,1,… έχουμε τις ακόλουθες προδρομικές εξισώσεις του Kolmogorov:

$$\frac{d\,P_n(t)}{d\,t} = -(\lambda+\mu)\,P_n(t) + \lambda\,P_{n-1}(t) + \mu\,P_{n+1}(t)\text{, n=1,2,…}$$

$$\frac{d\,P_0(t)}{d\,t} = -\lambda\,P_0(t) + \mu\,P_1(t)$$

Η εύρεση των πιθανοτήτων $P_n(t)$, n=0,1,… δεν είναι εύκολο πρόβλημα. Η λύση σχετίζεται με την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n. Η οριακή συμπεριφορά της $\{\mathrm{X}(t), t \geq 0\}$, η οποία έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, μπορεί να μελετηθεί μαθηματικά. Έστω $P_n = \lim_{t\to\infty} P\{\mathrm{X}(t) = n\}$, n=0,1,… οι οριακές πιθανότητες. Αποδεικνύεται ότι P_n είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο μακροπρόθεσμα ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι ίσος με n. Για παράδειγμα αν $P_0 = 0.3$, τότε το σύστημα θα είναι άδειο κατά 30% του χρόνου.

Ο υπολογισμός των οριακών πιθανοτήτων P_n, n=0,1,… είναι εφικτός. Θα εφαρμόσουμε την παρακάτω αρχή:
«Για κάθε $n \geq 0$, ο ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία εισέρχεται στην κατάσταση n ισούται με τον ρυθμό με τον οποίο εγκαταλείπει την κατάσταση n».

Οπότε:
$$\lambda\,P_0 = \mu\,P_1$$

$$(\lambda+\mu)\,P_n = \lambda\,P_{n-1} + \mu\,P_{n+1}\text{, n=1,2,…}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται εξισώσεις ισορροπίας (balance equations). Για να βρούμε τη λύση τους, τις γραφούμε ως εξής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}\,P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \right) , \; n \geq 1$$

Συνεπώς, $$P_0 = P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda}{\mu} P_3 + \left(P_3 - \frac{\lambda}{\mu} P_2 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^4 P_0$$

.

.

.

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} P_0$$

Για να προσδιορίσουμε την ποσότητα P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων P_n είναι 1. Έχουμε,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Οπότε: $$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \text{, n=1,2,…}$$

Στην παραπάνω σχέση για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ πρέπει $\lambda < \mu$. Αν $\lambda \geq \mu$ τότε δεν υπάρχει οριακή κατανομή της X(t) καθώς $t \to \infty$.

Οι ποσότητες L, L_Q, W, W_Q μπορούν να υπολογιστούν μέσω των οριακών πιθανοτήτων P_n, n=0,1,… Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ισούται με

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

όπου, η τελευταία ισότητα προκύπτει από την αλγεβρική ταυτότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Οι ποσότητες W, W_Q, L_Q μπορούν να βρεθούν με τη βοήθεια των τύπων **(3.4.4)** και **(3.4.5)**.

Έχουμε ότι:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_Q = W - E\,(\text{χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη}) = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Συνοψίζοντας από τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Παράδειγμα 4.1

Σε ένα μανάβικο με μια μόνο ταμειακή μηχανή εισέρχονται κατά μέσο όρο 15 πελάτες την ώρα, ενώ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών αυτών είναι 3 λεπτά.

α) Να υπολογιστούν όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη που αναφέρονται παραπάνω.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν ταυτόχρονα 3 πελάτες στο ταμείο;

Λύση

Εφόσον ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 3 λεπτά, εξυπηρετούνται κατά μέσο όρο 20 πελάτες την ώρα. Συνεπώς,

λ=15 πελάτες/ώρα (ρυθμός αφίξεων)

μ=20 πελάτες/ώρα (ρυθμός εξυπηρέτησης)

α) Έχουμε,

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στο ταμείο (ουρά και εξυπηρέτηση) είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{15}{20} = 0.25 = 25\% .$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες συνολικά στο ταμείο είναι

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(\frac{15}{20}\right)^n \left(1 - \frac{15}{20}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο ταμείο (ουρά και εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3 \text{ πελάτες.}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών που βρίσκεται στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15^2}{20(20 - 15)} = \frac{225}{100} = 2.25 \text{ πελάτες.}$$

5. Ο μέσος χρόνος παραμονής του πελάτη στο ταμείο (αναμονή και εξυπηρέτηση) είναι

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20 - 15} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ ώρες} = 12 \text{ λεπτά.}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15}{20(20 - 15)} = \frac{15}{100} = 0.15 \text{ ώρες} = 9 \text{ λεπτά.}$$

β) Η πιθανότητα να υπάρχουν ταυτόχρονα 3 πελάτες στο ταμείο είναι

$$P_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.10546875.$$

Η ανάλυση ενός συστήματος ουρών έχει ως στόχο την άμεση χρησιμοποίηση των στατιστικών στοιχείων που προκύπτουν από τους παραπάνω τύπους καθώς και την λήψη αποφάσεων με βάση τα αποτελέσματα των τύπων αυτών. Αυτό το επιχείρημα θα αναπτυχθεί με την βοήθεια και του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 4.2

Στο μανάβικο του προηγούμενου παραδείγματος, λόγω του ανταγωνισμού και της δυσαρέσκειας των πελατών, ο ιδιοκτήτης επιθυμεί να μειώσει το συνολικό χρόνο παραμονής στο ταμείο, δηλαδή το χρόνο αναμονής στην ουρά και τον χρόνο εξυπηρέτησης. Αποφάσισε λοιπόν πως ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα δεν πρέπει να ξεπερνά τα 5 λεπτά.

α) Ο ένας τρόπος για να το πετύχει είναι να βελτιώσει το ρυθμό εξυπηρέτησης. Ποιος πρέπει να είναι αυτός ο ρυθμός;

β) Ο δεύτερος τρόπος είναι η τοποθέτηση μιας βοηθού στο ταμείο. Ο ιδιοκτήτης πιστεύει πως με αυτόν τον τρόπο ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να μειωθεί στα 2 λεπτά. Ικανοποιείται με αυτόν τον τρόπο ο στόχος της μέγιστης παραμονής (κατά μέσο όρο) των 5 λεπτών στο ταμείο;

Λύση

α) Είδαμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής του πελάτη στο ταμείο είναι 12 λεπτά, ενώ ο ιδιοκτήτης θέλει να τον φτάσει το πολύ στα 5 λεπτά. Ο ρυθμός αφίξεων παραμένει λ=15 πελάτες/ώρα. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ υπολογίζεται ως εξής

$$W \leq \frac{5}{60} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu-\lambda} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu-15} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \mu-15 \geq 12 \Leftrightarrow \mu \geq 27 \text{ πελάτες/ώρα,}$$

δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης πρέπει να είναι τουλάχιστον 27 πελάτες την ώρα.

β) Αν ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης μειωθεί στα 2 λεπτά, αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι 30 πελάτες την ώρα. Άρα ικανοποιείται η επιθυμία του ιδιοκτήτη σύμφωνα με την απάντηση (α).

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή ο μέσος χρόνος παραμονής στο ταμείο θα γίνει

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{30-15} = \frac{1}{15} = 4 \text{ λεπτά.}$$

4.3 Το μοντέλο Μ/Μ/1/Ν

Σε ορισμένα συστήματα αναμονής δεν μπορούμε να έχουμε απεριόριστη χωρητικότητα. Για παράδειγμα σε ένα τηλεφωνικό κέντρο οι τηλεφωνικές κλήσεις οι οποίες μπορούν να περιμένουν στην ουρά είναι συγκεκριμένες, όσες είναι δηλαδή οι διαθέσιμες γραμμές αναμονής. Εάν λοιπόν υπάρχουν περιορισμένες θέσεις στην ουρά αναμονής είναι λογικό να επηρεάζονται παράγοντες όπως ο χρόνος εξυπηρέτησης και ο αριθμός πελατών στην ουρά.

Τροποποιούμε το μοντέλο Μ/Μ/1 που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και θεωρούμε ότι ο μέγιστος αριθμός πελατών που μπορεί να εισέλθει στο σύστημα είναι Ν. Οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του μοντέλου παραμένουν ίδιες με το βασικό μοντέλο Μ/Μ/1.

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \text{ , } 1 \le n \le \mathrm{N} - 1$$

$$\mu P_{\mathrm{N}} = \lambda P_{\mathrm{N}-1}$$

Για να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις τις γραφούμε ως εξής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \right) \text{, } 1 \le n \le \mathrm{N} - 1$$

$$P_{\mathrm{N}} = \frac{\lambda}{\mu} P_{\mathrm{N}-1}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε όλες τις πιθανότητες P_n, n=0,1,… συναρτήσει της P_0 ως εξής:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

.

.

.

$$P_{\mathrm{N}-1} = \frac{\lambda}{\mu} P_{\mathrm{N}-2} + \left(P_{\mathrm{N}-2} - \frac{\lambda}{\mu} P_{\mathrm{N}-3} \right) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mathrm{N}-1} P_0$$

$$P_{\mathrm{N}} = \frac{\lambda}{\mu} P_{\mathrm{N}-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mathrm{N}} P_0$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} P_n = 1$ έχουμε:

$$1 = P_0 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = P_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mathrm{N}+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mathrm{N}+1}}$$

Οπότε: $$P_n = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\mathrm{N}+1}}$$, n=0,1,…,N

Σε αυτό το μοντέλο ο περιορισμός $\lambda < \mu$ για την ύπαρξη της οριακής κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X(t) καθώς $t \to \infty$ δεν είναι απαραίτητος όπως στο προηγούμενο μοντέλο.

Όπως προηγουμένως μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα L με τη βοήθεια των πιθανοτήτων P_n, n=0,1,… ως εξής:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda\left[1+\mathrm{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1} - (\mathrm{N}+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}}\right]}{(\mu-\lambda)\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}\right]}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά θα είναι

$$L_Q = L - (1-P_0) = L - \left[1 - \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}}\right] = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1-(\mathrm{N}-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}} - \mathrm{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}-1}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}\right]\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]}$$

Για τον υπολογισμό των W και W_Q αφού η χωρητικότητα του συστήματος είναι περιορισμένη, όλοι οι πελάτες, όταν το σύστημα είναι πλήρες, φεύγουν χωρίς να εισέλθουν στο σύστημα. Ο αποτελεσματικός ρυθμός αφίξεως, λ_e, (θεωρώντας μόνο εκείνους τους πελάτες που μπαίνουν στο σύστημα), ισούται με το ποσοστό των πελατών όταν το σύστημα δεν είναι πλήρες πολλαπλασιασμένο με τον ρυθμό αφίξεως

$$\lambda_e = \lambda(1-P_{\mathrm{N}})$$

όπου

$$P_{\mathrm{N}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}} P_0$$

Συνεπώς, ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα θα δίνεται από τη σχέση

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)}$$

και ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά θα δίνεται από τη σχέση

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_e} = \frac{L_Q}{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}}$$

3. Η πιθανότητα ενός πελάτη να μην μπορεί να εισέλθει στο σύστημα λόγω περιορισμένης χωρητικότητας είναι

$$P_{\mathrm{N}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}} P_0$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda\left[1 + \mathrm{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1} - (\mathrm{N}+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}}\right]}{(\mu - \lambda)\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}\right]}$$

5. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1-(\mathrm{N}-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}} - \mathrm{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}-1}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathrm{N}+1}\right]\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_{\mathrm{N}})}$$

7. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda(1-P_{\mathrm{N}})}$$

4.4 Το μοντέλο M/M/c

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Έχουμε c υπηρέτες.
- Έχουμε άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Στο μοντέλο M/M/c έχουμε τις εξής παραμέτρους:

- λ= ρυθμός αφίξεων (ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)
- μ= ρυθμός εξυπηρέτησης (ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα και ανά μονάδα εξυπηρέτησης)
- c= αριθμός υπηρετών

Αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, τότε

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n < c \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

όπου μ_n θεωρούμε το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης για το σύστημα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

$$(\lambda + n\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} \ , \ 0 < n < c \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

$$(\lambda + c\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + c\mu P_{n+1} \ , \ n \geq c \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

Από τις εξισώσεις **(4.4.2)** και **(4.4.3)** προκύπτει ότι:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ 0 \leq n < c \\ \dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ n > c \end{cases}$$

Οπότε η ποσότητα P_0 υπολογίζεται από την συνθήκη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

η οποία μας δίνει

$$P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!c^{n-c}} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{c!}\sum_{n=c}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c^{n-c}}} \quad \Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)}}, \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

Σε κατάσταση ισορροπίας χρειαζόμαστε να είναι $\frac{\lambda}{\mu c} < 1$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα μέτρα αποτελεσματικότητας της ουράς.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(n-c)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!c^{n-c}} P_0 = \frac{P_0}{c!}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c} + \frac{2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+2}}{c^2} + \frac{3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+3}}{c^3} + \ldots =$$

$$= \frac{P_0}{c!}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c}\left[1 + 2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{c} + 3\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{c} + \ldots\right]$$

Η σειρά $1 + 2\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{c} + 3\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{c} + \ldots$ με $\frac{\lambda}{\mu c} < 1$ συγκλίνει στην ποσότητα $\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)^2}$.

Συνεπώς η L_Q γίνεται

$$L_Q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c!c\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)^2} P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} P_0 \ , \ \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

Αφού γνωρίζουμε την L_Q, υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά ο οποίος είναι

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0$$

Με βάση τη παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο που δαπανήθηκε από τον πελάτη μέσα στο σύστημα

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, υπολογίζεται από τη σχέση

$$L = \lambda W = \lambda W_Q + \frac{\lambda}{\mu} = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \lambda\mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)}}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ 0 \le n < c \\ \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ n > c \end{cases}$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^{2}}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}}P_0$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^{2}}P_0 + \frac{1}{\mu}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^{2}}P_0$$

Παράδειγμα 4.3

Σε μια τράπεζα που έχει δυο ταμεία έρχονται 20 πελάτες κάθε ώρα. Κάθε ταμείο εξυπηρετεί 20 πελάτες την ώρα. Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα και ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα αν:

α) υπάρχουν δυο ανεξάρτητες ουρές στα δυο ταμεία

β) υπάρχει μια κοινή ουρά για τα δυο ταμεία

Λύση

Η διαφορά στα δυο ερωτήματα είναι ότι στην πρώτη περίπτωση έχουμε 2 μοντέλα M/M/1 ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχουμε 1 μοντέλο M/M/2.

α) Περίπτωση 2 ουρών M/M/1

- λ= 10 πελάτες/ώρα (εφόσον οι πελάτες μοιράζονται)
- μ=20 πελάτες/ώρα

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες σε κάθε ουρά είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα (ούτε στην μια ούτε στην άλλη ουρά) είναι

$$P_0 P_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20-10} = \frac{1}{10} \text{ ώρες =6 λεπτά.}$$

β) Περίπτωση μιας ουράς M/M/2

- λ= 20 πελάτες/ώρα (εφόσον υπάρχει ένα κοινό σύστημα)
- μ= 20 πελάτες/ώρα

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!\left(c - \frac{\lambda}{\mu}\right)}} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Για το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα χρειαζόμαστε πρώτα το

$$L=\frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c}}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^{2}}P_0+\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

Οπότε: $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{4}{3}\frac{1}{20}=\frac{1}{15}$ ώρες =4 λεπτά.

4.5 Το μοντέλο M/M/c/N

Τροποποιούμε το μοντέλο M/M/c που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και θεωρούμε ότι ο μέγιστος αριθμός πελατών που μπορεί να εισέλθει στο σύστημα είναι N. Οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του μοντέλου παραμένουν ίδιες με το βασικό μοντέλο M/M/c.

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lambda P_0=\mu P_1 \qquad \textbf{(4.5.1)}$$

$$(\lambda+n\mu)P_n=\lambda P_{n-1}+(n+1)\mu P_{n+1}\ ,\ 0<n<c \qquad \textbf{(4.5.2)}$$

$$(\lambda+c\mu)P_n=\lambda P_{n-1}+c\mu P_{n+1}\ ,\ c\le n<\mathrm{N} \qquad \textbf{(4.5.3)}$$

$$c\mu P_{\mathrm{N}}=\lambda P_{\mathrm{N}-1} \qquad \textbf{(4.5.4)}$$

Από τις εξισώσεις **(4.5.1)** και **(4.5.4)** προκύπτει ότι:

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n}P_0\ ,\ 0\le n\le c\\[2ex]\dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n}P_0\ ,\ c\le n\le \mathrm{N}\end{cases}$$

Οπότε η ποσότητα P_0 υπολογίζεται από την συνθήκη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

η οποία μας δίνει

$$P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!c^{n-c}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{c!} \sum_{n=c+1}^{\mathrm{N}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c^{n-c}}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα μετρά αποτελεσματικότητας της ουράς.

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \sum_{n=c+1}^{\mathrm{N}} (n-c) P_n = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-c} i\, P_{i+c} = \frac{P_0}{c!} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{c} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-c} i \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{i-1} =$$

$$= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{\mathrm{N}-c} - (\mathrm{N}-c)\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{\mathrm{N}-c}\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)\right]$$

Στην περίπτωση όπου οι πελάτες φθάνουν με ρυθμό λ αλλά ο χώρος αναμονής είναι περιορισμένος τότε υπολογίζουμε τον αποτελεσματικό ρυθμό αφίξεως που τον συμβολίζουμε με λ_e και

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_{\mathrm{N}})$$

Αφού γνωρίζουμε την L_Q, υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά ο οποίος είναι

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_e} = \frac{L_Q}{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)}$$

Με βάση τη παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο που δαπανήθηκε από τον πελάτη μέσα στο σύστημα

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_Q}{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)} + \frac{1}{\mu}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, υπολογίζεται από τη σχέση

$$L = \lambda_e W = L_Q + \frac{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)}{\mu}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{c!} \sum_{n=c+1}^{\mathrm{N}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c^{n-c}}}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ 0 \le n < c \\ \frac{1}{c! c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ n > c \end{cases}$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = L_Q + \frac{\lambda\left(1 - P_{\mathrm{N}}\right)}{\mu}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{(c-1)!\left(c-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{\mathrm{N}-c} - (\mathrm{N}-c)\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{\mathrm{N}-c}\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)\right]$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L_Q}{\lambda(1-P_{\mathrm{N}})} + \frac{1}{\mu}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda(1-P_{\mathrm{N}})}$$

4.6 Το μοντέλο M/M/∞

Στο σύστημα αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε είτε ότι υπάρχει μια σειρά εξυπηρέτησης η οποία επιταχύνει τον ρυθμό της όσο έρχονται περισσότεροι πελάτες, είτε ότι υπάρχει πάντα κάποιος υπηρέτης για κάθε πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα. Εδώ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ισοδυναμεί με τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται, εφόσον δεν υπάρχει αναμονή.

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Έχουμε άπειρους υπηρέτες.
- Υπάρχει άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n \ , \ n = 1,2,\ldots$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ n = 0,1,\ldots$$

Συνεπώς, η ποσότητα P_0 βρίσκεται από την συνθήκη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

η οποία μας δίνει

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \ , \ n \geq 0$$

Επομένως στην μόνιμη κατάσταση ο αριθμός στο σύστημα είναι Poisson και κατανέμεται με παράμετρο λ/μ.

Συνεπώς:

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα υπολογίζεται από τον τύπο

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Δεδομένου ότι έχουμε άπειρους πελάτες στο σύστημα, $L_Q = 0$ και $W_Q = 0$.

Συνοψίζοντας από τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \; n \geq 0$$

2. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = 0$$

4. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu}$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = 0$$

Παράδειγμα 4.4

Ο τηλεοπτικός σταθμός WDAC, σε μια μεγάλη περιοχή, επιθυμεί να γνωρίζει το μέσο αριθμό θεατών που μπορούν να περιμένουν σε ένα βραδινό πρόγραμμα Σαββάτου. Από προηγούμενες έρευνες, έχουν βρεθεί ότι οι άνθρωποι στρέφονται στις τηλεοράσεις τους, το βράδυ του Σαββάτου, κατά τη διάρκεια του χρόνου με υψηλή θεαματικότητα, η οποία μπορεί να περιγραφεί από μια κατανομή Poisson με μέση τιμή 100.000 ώρες. Στην περιοχή αυτή υπάρχουν 5 μεγάλοι τηλεοπτικοί σταθμοί και θεωρείται ότι ένα συγκεκριμένο άτομο επιλέγει να δει εντελώς τυχαία μεταξύ αυτών των σταθμών. Επίσης οι έρευνες έχουν δείξει ότι ένας συνηθισμένος άνθρωπος συντονίζεται σε 90 λεπτά και οι χρόνοι τηλεθέασης είναι εκθετικά κατανεμημένοι.

Λύση

Ο ρυθμός άφιξης είναι $\lambda = \frac{100.000}{5} = 20.000$ ώρες. Αφού ο μέσος χρόνος αναμονής είναι 90 λεπτά, άρα ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = \frac{60}{90} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ της ώρας. Επομένως, ο μέσος αριθμός των θεατών κατά την διάρκεια του χρόνου με υψηλή θεαματικότητα είναι:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20.000}{2/3} = 30.000 \text{ άνθρωποι.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γενικά Μοντέλα Ουρών Αναμονής

5.1 Εισαγωγή

Εκτός από τα εκθετικά μοντέλα που αναφέραμε παραπάνω, υπάρχουν και άλλα μοντέλα ουρών τα οποία δεν χρησιμοποιούνται τόσο πολύ στην καθημερινότητα μας. Οι αποδείξεις που εφαρμόζουμε στα μοντέλα αυτά περιέχουν επαγωγή, γεωμετρικές σειρές, υπολογισμό μέσης τιμής και άλλα μαθηματικά εργαλεία.

5.2 Το μοντέλο M/G/1

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί γενική κατανομή.
- Έχουμε έναν υπηρέτη.
- Έχουμε άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Έστω ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται με την σειρά άφιξης και ότι S είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη.

Έστω $$E(S) = \frac{1}{\mu} = \text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}$$

$$E(S^2) = \text{δεύτερη ροπή του χρόνου εξυπηρέτησης.}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει ο τύπος των Pollaczek-Khintchine

$$W_Q = \frac{\lambda E(S^2)}{2[1 - \lambda E(S)]}$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει όταν $\lambda E(S) < 1$.

Οι ποσότητες L, L_Q και W υπολογίζονται εύκολα από τον τύπο του Little ως έξης:

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2[1-\lambda E(S)]}$$

$$W = W_Q + E(S) = \frac{\lambda E(S^2)}{2[1-\lambda E(S)]} + E(S)$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2[1-\lambda E(S)]} + \lambda E(S)$$

Όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν γενική κατανομή έχουμε

$$E(S^2) = \frac{1}{\mu^2} + \sigma^2$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{1}{\mu}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Παράδειγμα 5.1

Θεωρούμε ότι έχουμε έναν ελεύθερο υπηρέτη με ουρά εισόδου Poisson και με ρυθμό άφιξης 10/ώρα. Προς το παρόν, ο υπηρέτης δουλεύει σύμφωνα με μια εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 5 λεπτά. Η διοίκηση έχει ένα πρόγραμμα κατάρτισης που θα οδηγήσει σε βελτίωση της διακύμανσης του χρόνου εξυπηρέτησης αλλά σε μια μικρή αύξηση του μέσου. Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος, εκτιμάται ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης θα αυξηθεί σε 5.5 λεπτά αλλά η τυπική απόκλιση θα μειωθεί από 5 λεπτά σε 4 λεπτά. Η διοίκηση θα ήθελε να μάθει εάν οι υπηρέτες χρειάζεται να υποβληθούν σε περαιτέρω εκπαίδευση.

Λύση

Εδώ έχουμε 2 μοντέλα. Το πρώτο μοντέλο είναι το M/M/1 και το δεύτερο μοντέλο είναι το M/G/1. Για να απαντήσουμε στην ερώτηση, θα πρέπει να συγκρίνουμε τα L και W για κάθε περίπτωση.

Για το μοντέλο M/M/1 έχουμε ότι

- $\lambda = 10$ πελάτες/ώρα
- $\frac{1}{\mu} = 5$ λεπτά $= \frac{5}{60}$ ώρες $= \frac{1}{12}$ ώρες, άρα $\mu = 12$ ώρες

Επομένως,

ο μέσος αριθμός υπηρετών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10}{12-10} = \frac{10}{2} = 5 \text{ υπηρέτες}$$

και ο μέσος χρόνος υπηρεσίας στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12-10} = \frac{1}{2} \text{ ώρες} = 30 \text{ λεπτά}$$

Για το μοντέλο M/G/1 έχουμε ότι

- $\lambda = 10$ πελάτες/ώρα
- $\frac{1}{\mu} = 5.5$ λεπτά $= \frac{5.5}{60}$ ώρες $= \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{60}$ ώρες
- $\sigma = 4$ λεπτά $= \frac{4}{60}$ ώρες $= \frac{1}{15}$ ώρες

Έχουμε ότι $\frac{\lambda}{\mu} = 10 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{60} = \frac{11}{12}$

Επομένως,

ο μέσος αριθμός υπηρετών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2 + 10^2\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1-\frac{11}{12}\right)} + \frac{11}{12} = \frac{0.8402 + 100\frac{1}{225}}{2\frac{1}{12}} + 0.9166 =$$

$$= \frac{0.8402 + 0.4444}{\frac{1}{6}} + 0.9166 = 6 \cdot 1.2846 + 0.9166 = 7.708 + 0.917 = 8.625 \text{ υπηρέτες}$$

και ο μέσος χρόνος υπηρεσίας στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{8.625}{10} = 0.8625 \text{ ώρες} = 51.750 \text{ λεπτά}$$

Συνεπώς, δεν είναι κερδοφόρο να έχουν τον υπηρέτη «καλύτερα» εκπαιδευμένο.

5.3 Το μοντέλο M/D/1

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί βέβαιη κατανομή.
- Έχουμε έναν υπηρέτη.
- Έχουμε άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Με βάση την προηγούμενη απόδειξη, όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ίδιοι για όλους τους πελάτες έχουμε,

$$E(S^2) = \frac{1}{\mu^2} \text{ και } W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Όμοια, απλοποιούμε και τις ποσότητες L, L_Q και W.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

3. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda(2\mu - \lambda)}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

5. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Παράδειγμα 5.2

Το μηχανικό αλογάκι στο περίπτερο της πλατείας είναι πολύ δημοφιλές στα παιδάκια και παρέχει 2 λεπτά ιπασσίας για 60 ευρώ. Τα παιδιά που θέλουν να ανέβουν στο αλογάκι προσέρχονται (συνοδευόμενα βεβαίως από τους γονείς τους) σύμφωνα με μια κατανομή Poisson με ρυθμό 15 ανά ώρα.

α) Ποιο είναι το ποσοστό του χρόνου που το αλογάκι δεν χρησιμοποιείται;

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός παιδιών που περιμένει να ανέβει στο αλογάκι;

γ) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι να ανέβει ένα παιδί στο αλογάκι;

Λύση

Το κατάλληλο μοντέλο, φυσικά, είναι το M/D/1.

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lambda = 15$ παιδιά/ώρα
- $\frac{1}{\mu} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$, άρα $\mu = 30$ παιδιά/ώρα

α) Το ποσοστό του χρόνου που το αλογάκι δεν χρησιμοποιείται είναι

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{15}{30} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%.$$

β) Ο μέσος αριθμός παιδιών που περιμένουν να ανέβουν στο αλογάκι είναι

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15^2}{2 \cdot 30 \cdot (30 - 15)} = 0.25 \text{ παιδιά.}$$

γ) Ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι να ανέβει ένα παιδί στο αλογάκι είναι

$$W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{15}{2 \cdot 30 \cdot (30 - 15)} = 0.017 \text{ ώρες } = 1 \text{ λεπτό.}$$

5.4 Το μοντέλο M/G/∞

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί γενική κατανομή.
- Έχουμε άπειρους υπηρέτες.
- Υπάρχει άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Για να αποδείξουμε τους τύπους που ισχύουν σε αυτό το μοντέλο, θα στηριχτούμε πάνω στην απόδειξη που εφαρμόσαμε στο μοντέλο M/M/∞.
Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n \ , \ n = 1,2,\ldots$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \ , \ n = 0,1,\ldots$$

Οπότε η ποσότητα P_0 υπολογίζεται από την συνθήκη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

η οποία μας δίνει

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \ , \ n \geq 0$$

Συνεπώς:

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα υπολογίζεται από τον τύπο

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Δεδομένου ότι έχουμε άπειρους πελάτες στο σύστημα, $L_Q = 0$ και $W_Q = 0$.

Συνοψίζοντας από τα παραπάνω έχουμε:

1. Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα είναι

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \ n \geq 0$$

2. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu}$$

4. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά και ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$L_Q = W_Q = 0$$

5.5 Το μοντέλο M/ E_κ /1

Σε αυτό το μοντέλο ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Οι αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί κατανομή Erlang τύπου κ.
- Έχουμε έναν υπηρέτη.
- Έχουμε άπειρη χωρητικότητα.
- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι FIFO (First In First Out).

Εξετάζουμε τώρα ένα μοντέλο στο οποίο ο χρόνος εξυπηρέτησης έχει κατανομή Erlang τύπου κ. Ακόμα και αν η εξυπηρέτηση δεν μπορεί να αποτελείται από κ στάδια, είναι κατάλληλο στην ανάλυση αυτού του μοντέλου να θεωρήσουμε ότι η Erlang αποτελείται από κ εκθετικά στάδια κάθε ένα με μέση τιμή ίση με $1/\kappa\mu$. Έστω $P_{(n,i)}(t)$ η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και ο πελάτης που εξυπηρετείται να είναι στο στάδιο i με $i = 1,...,\kappa$, όπου τώρα αριθμούμε τα στάδια προς τα πίσω, δηλαδή το κ είναι το πρώτο στάδιο εξυπηρέτησης και 1 είναι το τελευταίο (ένας πελάτης που αφήνει το στάδιο 1 πραγματικά αφήνει το σύστημα).

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$(\lambda+\kappa\mu)P_{n,i} = \kappa\mu P_{n,i+1} + \lambda P_{n-1,i} \ , \ n \geq 2 \ , \ 1 \leq i \leq \kappa - 1$$

$$(\lambda+\kappa\mu)P_{n,\kappa} = \kappa\mu P_{n+1,1} + \lambda P_{n-1,\kappa} \ , \ n \geq 2$$

$$(\lambda+\kappa\mu)P_{1,i} = \kappa\mu P_{1,i+1} \ , \ 1 \leq i \leq \kappa - 1$$

$$(\lambda+\kappa\mu)P_{1,\kappa} = \lambda P_0 + \kappa\mu P_{2,1}$$

$$\lambda P_0 = \kappa\mu P_{1,1}$$

Δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να χειριστούμε αυτές τις εξισώσεις. Εντούτοις, δεν είναι παρά πολύ δύσκολο να ληφθούν τα αναμενόμενα μέτρα αποτελεσματικότητας (L, L_Q, W, W_Q) από τις εξισώσεις ισορροπίας και προχωράμε στην επίτευξη αυτού.

Εξετάζουμε την ακόλουθη παραγωγική συνάρτηση

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\kappa} z^{\kappa(n-1)+i} P_{n,i} + P_0 \qquad \textbf{(5.5.1)}$$

Από τη σχέση **(5.5.1)** μπορούμε να βρούμε το W_Q που είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά. Θεωρούμε ότι το T_Q αντιπροσωπεύει το χρόνο που ξοδεύεται στην ουρά αναμονής (μια τυχαία μεταβλητή με $\mathrm{E}[\mathrm{T}_Q] = W_Q$), οπότε έχουμε:

$$W_Q = \mathrm{E}[\mathrm{T}_Q] = \mathrm{E}[\mathrm{N}_Q]\frac{1}{\mu} + \mathrm{E}[\,\mathrm{I}\,]\frac{1}{\kappa\mu}$$

όπου N_Q είναι ο αριθμός στη ουρά αναμονής και I είναι η φάση εξυπηρέτησης των πελατών (N_Q και I τυχαίες μεταβλητές). Συνεπώς,

$$W_Q = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\kappa}\left[\frac{\kappa(n-1)+i}{\kappa\mu}\right]P_{n,i} + 0P_0 = \frac{1}{\kappa\mu}G'(z) \mid_{z=1} \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την συνάρτηση $G(z)$. Για να το επιτύχουμε αυτό θα πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση ισορροπίας με $z^{\kappa(n-1)+i}$, τη δεύτερη με $z^{\kappa n}$,τη τρίτη με z^i, τη τέταρτη με z^κ και τη πέμπτη με z^0, αθροίζοντας όλους τους όρους και προκύπτει ότι:

$$0 = \frac{1}{z}\left[G(z) - P_0\right] - \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}\right)G(z) + P_0 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}z^\kappa G(z)$$

Συνεπώς έχουμε:

$$G(z) = \frac{P_0(1-z)}{1 - z\left(1 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}\right) + \frac{\lambda}{\kappa\mu}z^{\kappa+1}}$$

Τώρα για να βρούμε το W_Q θα χρειαστούμε τον τύπο

$$G'(z) \mid_{z=1} =$$

$$= \frac{-\left[1 - z\left(1 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}\right) + \frac{\lambda}{\kappa\mu}z^{\kappa+1}\right] - (1-z)\left[-\left(1 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}\right) + (\kappa+1)\frac{\lambda}{\kappa\mu}z^\kappa\right]}{\left[1 - z\left(1 + \frac{\lambda}{\kappa\mu}\right) + \frac{\lambda}{\kappa\mu}z^{\kappa+1}\right]^2} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \mid_{z=1}$$

Για να βρούμε το $G'(z) \mid_{z=1}$ θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του De' Hospital και προκύπτει ότι:

$$G'(1)=\frac{(\kappa+1)\frac{\lambda}{\mu}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Επομένως από την **(5.5.2)** προκύπτει ότι:

$$W_Q=\frac{1}{\kappa\mu}G'(1)=\frac{(\kappa+1)\frac{\lambda}{\mu}}{2\kappa\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$W_Q=\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad \textbf{(5.5.3)}$$

Από την **(5.5.3)** βρίσκουμε το W ,δηλαδή

$$W=W_Q+\frac{1}{\mu}=\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}+\frac{1}{\mu}$$

Οι ποσότητες L και L_Q υπολογίζονται από τον τύπο του Little ως έξης:

$$L_Q=\lambda W_Q=\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L=\lambda W=\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}+\frac{\lambda}{\mu}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

1. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L=\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}+\frac{\lambda}{\mu}$$

2. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

3. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}$$

4. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Παράδειγμα 5.3

Εξετάζουμε μια επιχείρηση χορήγησης δανείων και αποταμίευσης χρημάτων που έχει ένα drive-up παράθυρο (ο πελάτης κάνει τις συναλλαγές χωρίς να χρειάζεται να κατέβει από το αυτοκίνητο του). Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια κατανομή Poisson με ρυθμό 4 ώρες. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης υπολογίζεται ότι είναι 10 λεπτά, με μια σταθερή απόκλιση 25 λεπτά ^{2}. Θεωρείται ότι η Erlang αποτελεί μια λογική υπόθεση για την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης. Επίσης, δεδομένου ότι το κτήριο (που βρίσκεται το drive-up παράθυρο) βρίσκεται σε ένα μεγάλο εμπορικό κέντρο, δεν υπάρχει ουσιαστικά κανένα όριο στον αριθμό οχημάτων που μπορεί να περιμένει. Τα στελέχη της επιχείρησης επιθυμούν να ξέρουν, κατά μέσο όρο, πόση ώρα πρέπει να περιμένει ένας πελάτης μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης στο παράθυρο και πόσα οχήματα περιμένουν για εξυπηρέτηση;

Λύση

Το κατάλληλο μοντέλο, φυσικά, είναι το M/E_κ/1. Για να καθορίσουμε το κ, σημειώνουμε αρχικά ότι $\mu = \frac{1}{10}$ λεπτά $= 6$ ώρες και ότι $\sigma^2 = \frac{1}{\kappa\mu^2} = 25$ λεπτά ^{2} το οποίο δίνει ότι $\kappa = \frac{1}{25\mu^2} = \frac{100}{25} = 4$. Κατά συνέπεια έχουμε ένα M/E_4/1 μοντέλο.

Επομένως ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_Q = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{8}\frac{4}{6(6-4)} = 0.208 \text{ ώρες } = 12.5 \text{ λεπτά}$$

και ο μέσος αριθμός οχημάτων στην ουρά είναι

$$L_Q = \frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{8}\frac{4^2}{6(6-4)} = 0.832 \text{ οχήματα.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

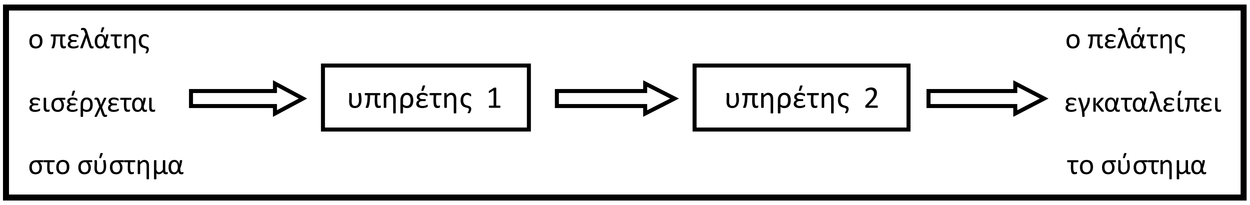
Δίκτυα Ουρών Αναμονής

6.1 Εισαγωγή

Σε αρκετές περιπτώσεις οι πελάτες αναχωρούν από μια ουρά, πηγαίνουν σε μια δεύτερη, για να συνεχίσουν την εξυπηρέτησης τους ή για κάποιου άλλου είδους εξυπηρέτηση. Γενίκευση αυτού αποτελεί ένα δίκτυο Ν ουρών, στην οποία οι πελάτες επισκέπτονται ένα σύστημα με τυχαίο ή προκαθορισμένο τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε Μαρκοβιανά δίκτυα ουρών, δηλαδή δίκτυα τα οποία μπορούν να περιγραφούν με την βοήθεια Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου.

6.2 Ανοικτά συστήματα

Θεωρούμε ένα σύστημα με δυο υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη 1 σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Αφού εξυπηρετηθούν από τον υπηρέτη 1 πηγαίνουν στη ουρά μπροστά από τον υπηρέτη 2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει άπειρος χώρος αναμονής και στους δυο υπηρέτες. Ο κάθε υπηρέτης εξυπηρετεί έναν πελάτη κάθε φορά. Ο χρόνος εξυπηρέτησης που χρειάζεται ο υπηρέτης $i, i = 1,2,...$ είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/\mu_i$.



Σχήμα 2: Σύστημα εξυπηρέτησης με 2 υπηρέτες

Έστω (n,m) η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν n πελάτες στον υπηρέτη 1 και m πελάτες στον υπηρέτη 2.

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής:

$$\lambda P_{(0,0)} = \mu_2 P_{(0,1)}$$

$$(\lambda+\mu_1)P_{(n,0)} = \mu_2 P_{(n,1)} + \lambda P_{(n-1,0)}$$

$$(\lambda+\mu_2)P_{(0,m)} = \mu_2 P_{(0,m+1)} + \mu_1 P_{(1,m-1)}$$

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{(n,m)} = \mu_2 P_{(n,m+1)} + \mu_1 P_{(n+1,m-1)} + \lambda P_{(n-1,m)}$$

Οι ποσότητες $P_{(n,m)} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)$, $n,m \geq 0$ επαληθεύουν τις παραπάνω εξισώσεις μαζί με την συνθήκη κανονικοποίησης: $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} P_{(n,m)} = 1$.

Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \sum_{n,m} (n+m) P_{(n,m)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \frac{\lambda}{\mu_1-\lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2-\lambda}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu_1-\lambda} + \frac{1}{\mu_2-\lambda}$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν ως εξής:
Θεωρούμε ένα σύστημα με κ υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη $i, i=1,...,\kappa$ σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό $r_i, i=1,...,\kappa$. Θεωρούμε ότι αυτές οι κ ανελίξεις Poisson είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μόλις ένας πελάτης εξυπηρετηθεί από τον υπηρέτη i πηγαίνει στην ουρά που έχει σχηματιστεί μπροστά από τον υπηρέτη $j, j=1,...,\kappa$ με πιθανότητα P_{ij}.

Επομένως η ποσότητα $1-\sum_{j=1}^{\kappa} P_{ij} \geq 0$ παριστάνει την πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα ένας πελάτης που μόλις εξυπηρετήθηκε από τον υπηρέτη i.

Έστω λ_j ο συνολικός ρυθμός άφιξης των πελατών στον υπηρέτη j. Οι ποσότητες $\lambda_j,\ j=1,\ldots,\kappa$ μπορούν να υπολογιστούν από το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i P_{ij} \ \ ,\ \ j=1,\ldots,\kappa$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξηγηθούν ως εξής: r_j είναι ο ρυθμός άφιξης προς τον υπηρέτη j των πελατών που βρίσκονται εκτός συστήματος και $\lambda_i P_{ij}$ είναι ο ρυθμός άφιξης προς τον υπηρέτη j των πελατών που μόλις εξυπηρετήθηκαν από τον υπηρέτη i.

Έστω ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη από τον υπηρέτη ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ_j^{-1}.

Έστω $(n_1,\ldots,n_\kappa)$ η κατάσταση κατά τη οποία υπάρχουν $n_i,\ i=1,\ldots,\kappa$ πελάτες στην i ουρά. Αν $\frac{\lambda_j}{\mu_j}<1$ για κάθε $j=1,\ldots,\kappa$ τότε υπάρχει οριακή κατανομή του συστήματος. Οι οριακές πιθανότητες δίνονται από τον τύπο

$$P_{(n_1,\ldots n_k)} = \prod_{j=1}^{\kappa} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{n_j} \left(1-\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right).$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από τον τύπο

$$L = \sum_{j=1}^{\kappa} \text{(μέσος αριθμός πελατών στον υπηρέτη } j\text{)} = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}.$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα υπολογίζεται από τον τύπο του Little

$$L = \lambda W \text{ με } \lambda = \sum_{j=1}^{\kappa} r_j .$$

Οπότε:
$$W = \frac{\sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\lambda_j}{\mu_j - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^{\kappa} r_j}$$

Παράδειγμα 6.1

Θεωρούμε ένα δίκτυο ουρών με δυο υπηρέτες. Οι πελάτες φθάνουν στον υπηρέτη 1 σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 4 και στον υπηρέτη 2 σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson με ρυθμό 5. Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης των υπηρετών 1 και 2 είναι ίσοι με 8 και 10 αντίστοιχα. Ένας πελάτης μετά την συμπλήρωση της εξυπηρέτησης του από τον υπηρέτη 1 εγκαταλείπει το σύστημα ή πηγαίνει στον υπηρέτη 2 με ίσες πιθανότητες (δηλαδή $P_{11} = 0$, $P_{12} = \frac{1}{2}$). Ένας πελάτης μετά την εξυπηρέτηση του από τον υπηρέτη 2 πηγαίνει στον υπηρέτη 1 με πιθανότητα $1/4$ ή εγκαταλείπει το σύστημα (δηλαδή $P_{21} = \frac{1}{4}$, $P_{22} = 0$). Βρείτε τις οριακές πιθανότητες και τις ποσότητες L και W.

Λύση

Εδώ οι συνολικοί ρυθμοί άφιξης λ_1 και λ_2 προς τους υπηρέτες 1 και 2 υπολογίζονται από το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 = r_1 + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i P_{i1} = 4 + \frac{1}{4}\lambda_2 \\ \lambda_2 = r_2 + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i P_{i2} = 5 + \frac{1}{2}\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 6 \, , \lambda_2 = 8$$

Άρα οι οριακές πιθανότητες είναι

$$P_{(n,m)} = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^m \frac{1}{5} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^m$$

Επίσης, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{6}{8-6} + \frac{8}{10-8} = 7$$

και ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{7}{9}.$$

6.3 Κλειστά συστήματα

Έστω τώρα ότι έχουμε m πελάτες που κινούνται σε ένα σύστημα με m υπηρέτες. Μόλις ένας πελάτης εξυπηρετηθεί από τον i υπηρέτη πηγαίνει στον j υπηρέτη ($j = 1,...,\kappa$) με πιθανότητα P_{ij}. Υποθέτουμε ότι $\sum_{j=1}^{\kappa} P_{ij} = 1$ για όλα τα $i = 1,...,\kappa$.

Έστω $(n_1,...,n_\kappa)$ η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν n_j, $j = 1,...,\kappa$ πελάτες στον j υπηρέτη.

Αποδεικνύεται, επαληθεύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας, ότι οι οριακές πιθανότητες $P_m(n_1,...,n_\kappa)$ δίνονται από τον τύπο

$$P_m(n_1,...,n_\kappa) = \begin{cases} C_m \prod_{j=1}^{\kappa} \left(\frac{\pi_j}{\mu_j}\right)^{n_j} \quad , \; \alpha\nu \; \sum_{j=1}^{\kappa} n_j = m \\ 0 \;\; , \; \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa \acute{\alpha} \end{cases}$$

όπου, $$C_m = \left[\sum_{n_1,\ldots,n_\kappa} \prod_{j=1}^{\kappa} \left(\frac{\pi_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \right]^{-1}$$

και $\pi_1,\ldots,\pi_\kappa$ είναι η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\kappa} \pi_i \, P_{i\,j} \quad \text{όπου} \quad \sum_{j=1}^{\kappa} \pi_j = 1.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

[1]. ASMUSSEN S. (1987) Applied Probability and Queues, John Wiley, New York.

[2]. FELLER W. (1968) An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.1, 3rd edition, John Wiley, New York.

[3]. FELLER W. (1971) An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.2, 2nd edition, John Wiley, New York.

[4]. GROSS D. and HARRIS C.M. (1985) Fundamentals of Queuing Theory, 2nd edition, John Wiley, New York.

[5]. KLEINROCK L. (1976) Queuing Systems, Vol. 2, John Wiley, New York.

[6]. OSAKI S. (1992) Applied Stochastic System Modeling, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.

[7]. ROSS S. (1992) Applied Probability Models with Optimization Applications, San Francisco.

[8]. ROSS S. (1996) Stochastic Processes, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.

[9]. ROSS S. (2007) Introduction to Probability Models, 9th edition, Academic Press.

[10]. TAKACS L. (1972) Introduction to Theory of Queues, Oxford University Press, New York.

[11]. TAYLOR H.M. and KARLIN S. (1998) An Introduction to Stochastic Modeling, 3rd edition, Academic Press, New Jersey.

[12]. TIJMS H.C (2003) A First Course in Stochastic Models, John Wiley and Sons.

[13]. WOLFF R.W. (1989) Stochastic Modeling and the Theory of Queues, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Ελληνική Βιβλιογραφία

[1]. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΣ Θ. (2004) Στοχαστικές Διαδικασίες Ι, Διδακτικές σημειώσεις, Σάμος.

[2]. ΚΟΥΤΡΑΣ Μ.Β. (2004) Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος Ι, 2η έκδοση, Αθήνα.

[3]. ΚΥΡΙΑΚΙΔΗΣ Ε. (2005) Εφαρμοσμένα Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Διδακτικές σημειώσεις, Σάμος.

[4]. ΚΥΡΙΑΚΙΔΗΣ Ε. (2005) Στοιχεία από τη Θεωρία Ουρών, Διδακτικές σημειώσεις.

[5]. ΛΑΜΠΡΑΚΗ Δ.Π. και ΠΑΝΑ Ε.Ε. (1987) Στοχαστικές Ανελίξεις, Αθήνα.

[6]. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ Θ.Χ. (1989) Ουρές Αναμονής, Διδακτικές σημειώσεις.

[7]. ΦΑΚΙΝΟΥ Δ. (2003) Ουρές Αναμονής, Θεωρία και Ασκήσεις, Αθήνα.

[8]. ΦΑΚΙΝΟΥ Δ. (2007) Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία και Ασκήσεις, 2η έκδοση, Αθήνα.

[9]. ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΥ Ο. (2008) Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις, Θεσσαλονίκη.