Μια Εισαγωγή στις quasi-ισομετρίες

Βάσω Παπαευθυμίου
Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Μεταφτσής
Μεταπτυχιακή Εργασία
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα : Σπουδές στα Μαθηματικά
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ιούνιος 2017

Ευχαριστίες

Πριν την παρουσίαση της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Βασίλη Μεταφτσή ο οποίος με την μεθοδική καθοδήγησή του, την διακριτική επιμονή του και τη μεγάλη του αγάπη για τη γνώση και τη μετάδοση αυτής, με βοήθησε να νιώσω την ομορφιά της αναζήτησης, ολοκληρώνοντας έτσι την εκπόνηση της μεταπτυχιακής εργασίας μου.
Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στους καθηγητές Ευστράτιο Πρασίδη και Γεώργιο Τσαπόγα που δέχτηκαν να είναι μέλη της επιτροπής αξιολόγησης και παρουσίασης της εργασίας μου.

Καρλόβασι Σάμου

Περιεχόμενα

1 Βασικές έννοιες

Ορισμός 1.1 *Ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $\cdot$ λέγεται ομάδα και συμβολίζεται $(G, \cdot)$ αν ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια:*

- *Είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$, δηλαδή για κάθε $\alpha, \beta \in G$ τότε και $\alpha \cdot \beta \in G$.*
- *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, για όλα τα $\alpha, \beta, \gamma \in G$.*
- *Υπάρχει μοναδικό στοιχείο $e \in G$, που συνήθως λέγεται μοναδιαίο, ώστε $x \cdot e = e \cdot x = x$ για όλα τα $x \in G$.*
- *Για όλα τα $x \in G$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο στην G, που λέγεται αντίστροφο του x και συμβολίζεται με x^{-1} ώστε $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.*

Παραδείγματα

- Επί του συνόλου των ακεραίων ορίζουμε την εξής σχέση: $xR_my \Leftrightarrow m|(x-y), \forall x, y \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$, η οποία είναι σχέση ισοδυναμίας και οι κλάσεις που δημιουργούνται είναι:

$$C_a = \{x \in \mathbb{Z} : x = km + a, k \in \mathbb{Z}\}$$

  Άρα η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου a είναι εκείνοι οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το m αφήνουν υπόλοιπο a και την συμβολίζουμε με $\bar{a}$. Το σύνολο $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{m-1}\}$ με πράξη την πρόσθεση αποτελεί ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $\bar{0}$ και αντίστροφο του $\bar{x}$ το $\overline{m-x}$.

- Το σύνολο $A = \{1, -1\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό αποτελεί ομάδα με ουδέτερο το 1 και αντίστροφο του -1 το -1.

Ορισμός 1.2 *Αν $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \forall \alpha, \beta \in G$ τότε η ομάδα λέγεται αβελιανή.*

Ορισμός 1.3 *Η τάξη μιας ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων της και συμβολίζεται με $|G|$. Αν έχει άπειρα στοιχεία τότε $G = \infty$ ενώ αν είναι πεπερασμένη $G = n < \infty$.*

Ορισμός 1.4 *Αν $H \subseteq G$ τότε λέμε ότι το H είναι υποομάδα της G και συμβολίζεται $H \leq G$ αν αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη της ομάδας.*

Το σύνολο $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$, ενώ το σύνολο $B = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη της $(\mathbb{Z}, +)$, άρα δεν είναι υποομάδα της.

Έστω $H \leq G$ και θεωρούμε την σχέση R με:

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta \in H, \forall \alpha, \beta \in G$$

που είναι σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις ισοδυναμίας:

$$C_\alpha = \{x \in G \mid x = \alpha \cdot h, h \in H\} = \{x \in G \mid x \in \alpha H\}$$

είναι τα αριστερά σύμπλοκα της H στην G, έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος στοιχείων με την H και καλύπτουν επακριβώς την G. Αν G είναι πεπερασμένη και $H \leq G$ τότε η τάξη της Η διαιρεί την τάξη της G. Το πλήθος των αριστερών (ή δεξιών) συμπλόκων της H στην G λέγεται δείκτης της H στην G και συμβολίζεται με $[G : H]$.

Λέγοντας πλήρες σύστημα αντιπροσώπων των αριστερών (αντ. δεξιών) συμπλόκων της υποομάδας Η στην ομάδα G εννοούμε ένα σύνολο $\{x_i\}$ στοιχείων της G που σχηματίζεται αν πάρουμε ένα και μόνο ένα στοιχείο από κάθε αριστερό (αντ. δεξιό) σύμπλοκο της Η στην G.

Ορισμός 1.5 *Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $H \leq G$ ώστε $\alpha H = H\alpha, \forall \alpha \in G$. Τότε η H ονομάζεται κανονική υποομάδα της G και συμβολίζουμε $H \triangleleft G$.*

Προφανώς κάθε υποομάδα μιας αβελιανής ομάδας είναι κανονική.

Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα, $H \triangleleft G$ και το σύνολο S που αποτελείται από τα σύμπλοκα της H στην G, δηλαδή

$$S = \{\alpha_1 H, \alpha_2 H, ...\}$$

Στο σύνολο S ορίζουμε την εξής πράξη:

$$(\alpha_i H) \cdot (\alpha_j H) = (\alpha_i \cdot \alpha_j) H$$

για όλα τα $\alpha_i, \alpha_j \in G$. Το σύνολο S εφοδιασμένο με την παραπάνω πράξη αποτελεί ομάδα, που ονομάζεται ομάδα πηλίκο της Η στην G και συμβολίζεται με G/H. Πράγματι:

- Αν $xH, yH \in G/H$ με $x, y \in G$, τότε: $(xH) \cdot (yH) = (xy)H \in G/H$
- Η πράξη είναι προσεταιριστική αφού:

  $(\alpha_i H)[(\alpha_j H) \cdot (\alpha_k H)] = (\alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_k) H, \forall \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k \in G.$

- Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας πηλίκο είναι το $eH = H$.
- Το αντίστροφο του $\alpha_i H$ είναι το $\alpha_i^{-1} H$.

Αν A είναι ένα σύνολο με n στοιχεία και S_n το σύνολο που αποτελείται από όλες τις μεταθέσεις του A, τότε το S_n με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα (συμμετρική ομάδα) και το πλήθος των μεταθέσεων είναι $n!$.

Το πλήθος των συμμετριών ενός κανονικού πολυγώνου με n κορυφές αποτελεί ομάδα που λέγεται διεδρική, συμβολίζεται με D_n και $|D_n| = 2n$.

Ορισμός 1.6 *Έστω $(G, \cdot)$, $(G', *)$ δύο ομάδες. Μια συνάρτηση $\varphi : G \to G'$ με $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta), \forall \alpha, \beta \in G$ λέγεται ομομορφισμός.*

Ένα παράδειγμα ομομορφισμού είναι η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ με $\varphi(x) = \bar{r}$, όπου r το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το m.

Αν φ ομομορφισμός από την $(G, \cdot)$ στην $(G', *)$ τότε ισχύουν:

- Αν e το ουδέτερο στοιχείο της G, τότε το ουδέτερο στοιχείο της G' είναι το $\varphi(e) = e'$, όπου e' είναι το ουδέτερο στοιχείο της G'.
- Για $\alpha \in G$ ισχύει $\varphi(\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha)^{-1}$
- Αν $H \leq G$ τότε $\varphi(H) \leq G'$
- Αν $K' \leq G'$ τότε $\varphi^{-1}(K') \leq G$.

Αν $\varphi : G \to G'$ ένας ομομορφισμός και H το σύνολο των στοιχείων της G που η εικόνα τους μέσω της φ είναι το $e_{G'}$. Το σύνολο H ονομάζεται πυρήνας του ομομορφισμού και συμβολίζεται με $Ker(\varphi)$ δηλαδή

$$Ker(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_{G'}\}$$

Ισχύει η ισοδυναμία: Αν $\varphi : G \to G'$ ομομορφισμός τότε φ είναι «1-1» ανν $Ker(\varphi) = \{e\}$.

Ορισμός 1.7 *Ο ομομορφισμός $\varphi : G \to G'$ μεταξύ των ομάδων G και G' που είναι επιπλέον «1-1» και επί λέγεται ισομορφισμός.*

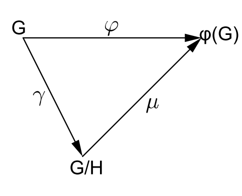
Παραδείγματα ισομορφισμών

- Κάθε κυκλική ομάδα άπειρης τάξης είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Πράγματι αν $G = \{...\alpha^{-m}, ..., \alpha^{-1}, e, \alpha, ..., \alpha^{m}, ...\}$ και $\mathbb{Z} = \{... - m, ..., -1, 0, 1, ..., m, ...\}$ τότε $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ με $\varphi(\alpha^n) = n$ είναι ισομορφισμός.

- Κάθε κυκλική ομάδα πεπερασμένης τάξης είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{Z}_m$. Πράγματι αν $G = \{e, \alpha, ..., \alpha^{m-1}\}$ και $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{m-1}\}$, η απεικόνιση $\varphi : G \to \mathbb{Z}_m$ με $\varphi(\alpha^n) = \bar{n}$ είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 1.1 (Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών) *Έστω $\varphi : G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα H. Τότε $\varphi(G)$ είναι ομάδα και η απεικόνιση $\mu : G/H \to \varphi(G)$ με $\mu(xH) = \varphi(x), x \in G$ είναι ισομορφισμός. Αν $\gamma : G \to G/H$ ομομορφισμός που ορίζεται από τη σχέση $\gamma(x) = xH$, τότε για κάθε $x \in G$ έχουμε $\varphi(x) = \mu\gamma(x)$.*

Σχηματική αναπαράσταση του πρώτου θεωρήματος ισομορφισμών



Για την απόδειξη του θεωρήματος: Άλγεβρα Ευάγγελου Ψωμόπουλου

2 Πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες

Έστω ομάδα G, $A \subseteq G$, $A \neq \{e\}$ και $\langle A \rangle$ η τομή όλων των υποομάδων της G που περιέχουν το A. Τότε ισχύουν :

1. $A \subseteq \langle A \rangle$
2. $\langle A \rangle \leq G$
3. Αν $B \leq G$ και $A \subseteq B$ τότε $\langle A \rangle \leq B$.

Θα αποδείξουμε ότι $\langle A \rangle = \{\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_n^{\varepsilon_n} \mid \alpha_i \in A, \varepsilon_i = \pm 1\}$. Πράγματι αν ονομάσουμε $H = \{\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_n^{\varepsilon_n} \mid \alpha_i \in A, \varepsilon_i = \pm 1\}$, τότε το H είναι μη κενό υποσύνολο της G και αν θέσουμε $\alpha = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_m^{\varepsilon_m}$, $\beta = \beta_1^{\varepsilon_1}\beta_2^{\varepsilon_2}\ldots\beta_\kappa^{\varepsilon_\kappa}$ έχουμε:
$\alpha\beta^{-1} = (\alpha_1^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_m^{\varepsilon_m})(\beta_1^{\varepsilon_1}\ldots\beta_n^{\varepsilon_n})^{-1} = \alpha_1^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_m^{\varepsilon_m}\beta_n^{-\varepsilon_n}\ldots\beta_1^{-\varepsilon_1} \in H$, δηλαδή $H \leq G$. Αν $\alpha \in A$ τότε $\alpha \in H$ οπότε $A \subseteq H$ και επομένως $\langle A \rangle \subseteq H$. Αν $\alpha \in H$, τότε $\alpha = \alpha_1^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_p^{\varepsilon_p}$ για κάποια $\alpha_i \in A$, οπότε $\alpha \in \langle A \rangle$ δηλαδή $H \subseteq \langle A \rangle$. Τελικά $H = \langle A \rangle$.

Ορισμός 2.1 *Η ομάδα G παράγεται από ένα σύνολο A αν $G = \langle A \rangle$.*

Το σύνολο A ονομάζεται σύνολο γεννητόρων της G.

Η ομάδα G λέγεται πεπερασμένα παραγόμενη αν έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Θα γράφουμε $G = \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle = \langle \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \rangle$. Αν το σύνολο γεννητόρων έχει ένα στοιχείο τότε η ομάδα που παράγεται από αυτό λέγεται κυκλική και γράφουμε $G = \langle \alpha \rangle$. Η άπειρη κυκλική ομάδα θα γράφεται ως $\{\alpha^n, n \in \mathbb{Z}\}$ και ονομάζεται ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού 1. Η $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ και παράγεται από δύο στοιχεία $\alpha = (1,0)$ και $\beta = (0,1)$. Λέγεται ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού 2 και θα γράφω $\{\alpha^m\beta^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Ισχύει επίσης $\alpha\beta = \beta\alpha$. Όμοια η ομάδα $\mathbb{Z}^n$ είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμού n. Αυτή παράγεται από τα στοιχεία $\varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$ με $\varepsilon_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ με το 1 στην i θέση.

Πρόταση 2.1 *Αν ισχύει: $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$ τότε $m = n$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{Z}^m = \langle e_1, e_2, ..., e_m \rangle$, $\mathbb{Z}^n = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle$ και $\mathbb{Z}^m$ είναι υποομάδα της ομάδας $\mathbb{R}^m$. Αν $m \leq n$, $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ ισομορφισμός και $x \in \mathbb{Z}^m$ με $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ ή $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_me_m$. Η εικόνα του μέσω του ισομορφισμού είναι $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + ... + x_m\varphi(e_m)$. Η εικόνα του

$x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ μέσω του ισομορφισμού φ βρίσκεται μέσα στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα $\varphi(x_1), ..., \varphi(x_m)$. Για να περιέχει το $\mathbb{Z}^n$, αυτός ο υπόχωρος είναι ο $\mathbb{R}^n$. Τελικά έχουμε $m = n$.

Αξίζει να τονίσουμε ότι τα σύνολα γεννητόρων δεν είναι μοναδικά. Για παράδειγμα $\mathbb{Z} = \langle \alpha^2, \alpha^3 \rangle$, αφού $\alpha = \alpha^3(\alpha^2)^{-1}$. Όμοια $\mathbb{Z}^2 = \langle \alpha\beta, \alpha^2\beta^3 \rangle$. (Είναι $\alpha = (\alpha\beta)^3(\alpha^2\beta^3)^{-1}$ και $\beta = \alpha^2\beta^3(\alpha\beta)^{-2}$).

Μερικά παραδείγματα πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων είναι:

1. $\mathbb{Z}^n$

2. Οι ομάδες πινάκων $GL(n, \mathbb{Z})$ (η ορίζουσα αυτών παίρνει τιμές ± 1), $SL(n, \mathbb{Z})$ (η ορίζουσα τους ισούται με 1)

3. Όλες οι πεπερασμένες ομάδες.

Υπάρχουν πολλές ομάδες που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενες, όπως το $\mathbb{Q}$ (ρητοί), $\mathbb{R}$ (πραγματικοί), $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των ρητών δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο

$$\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}\}$$

που παράγει κάθε ρητό αριθμό. Δηλαδή αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε

$$x = q_1\frac{a_1}{b_1} + q_2\frac{a_2}{b_2} + ... + q_n\frac{a_n}{b_n}$$

με $q_1, q_2, ...q_n \in \mathbb{Z}$ οπότε κάνοντας πράξεις έχουμε

$$x = \frac{q_1a_1b_2 \dots b_n + q_2a_2b_1b_3 \dots b_n + \dots + q_na_nb_1 \dots b_{n-1}}{b_1b_2 \dots b_n}$$

Αν θέσουμε $b = b_1 \dots b_n$ τότε $x \in \langle \frac{1}{b} \rangle$ και αφού $\frac{1}{x}$ είναι ρητός θα ισχύει $\frac{1}{x} = \frac{m}{b}$ με $(x, b) = 1$ ή ισοδύναμα $b = xm$ το οποίο είναι άτοπο.

2.1 Εφαρμογές

1. Αν $N \lhd G$ και G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε η ομάδα πηλίκο G/N είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

   Απόδειξη. Έστω $G = \langle a_1, ..., a_n \rangle$. Η ομάδα G/N περιέχει τα στοιχεία $w_1N, ..., w_nN$ όπου $w_i \in G, i = 1, ..., n$. Αφού $w_i \in G$ είναι $w_i = a_1^{s_1}...a_n^{s_n}$ το σύνολο $\{w_1N, ..., w_nN\}$ αποτελεί πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων για την ομάδα G/N.

2. Αν N πεπερασμένα παραγόμενη και G/N πεπερασμένα παραγόμενη, τότε η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

   Απόδειξη. Έστω N=$\langle a_1, .., a_n\rangle$, G/N=$\langle w_{i_1}^{x_1}N, ..., w_{i_r}^{x_r}N\rangle$. Κάθε στοιχείο της G ανήκει σε ένα σύμπλοκο, δηλαδή αν $a \in G$ τότε $a \in kN$ με $k \in G$, οπότε $a = w_{i_1}^{x_1}...w_{i_r}^{x_r}N$ δηλαδή $a = w_{i_1}^{x_1}...w_{i_r}^{x_r}a_1^{s_1}...a_n^{s_n}$, συνεπώς G πεπερασμένα παραγόμενη.

3. Αν $G \leq \Gamma$ και $[\Gamma : G] < \infty$ τότε Γ πεπερασμένα παραγόμενη αν και μόνο αν G πεπερασμένα παραγόμενη.

   Απόδειξη. Αν η ομάδα G είναι πεπερασμένα παραγόμενη και έστω $G = \langle\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k\rangle$ τότε τα $g_i\alpha_j$ είναι πεπερασμένο σύστημα γεννητόρων για την Γ, όπου g_i πλήρες σύστημα αντιπροσώπων της υποομάδας G στην ομάδα Γ.

   Αντίστροφα: Αν η ομάδα Γ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και S πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της Γ και το X είναι σύστημα αντιπροσώπων των δεξιών συμπλόκων της G στην Γ, τότε το σύνολο $\{x_i s_j x_k^{-1} : x_i, x_k \in X, s_j \in S\}$ παράγει την ομάδα G.

3 Ελεύθερες ομάδες

Έστω $S = \{a, b, c, ...\}$ σύνολο γεννητόρων μιας ομάδας G. Μια λέξη που ορίζει το ταυτοτικό στοιχείο στην G λέγεται σχετιστής. Η εξίσωση

$$R\{a, b, c, ..\} = S\{a, b, c, ...\}$$

λέγεται σχέση αν RS^{-1} είναι σχετιστής της G. Σε κάθε ομάδα οι λέξεις $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b, ...$ είναι σχετιστές και ονομάζονται τετριμμένοι σχετιστές. Στις ελεύθερες ομάδες F οι μοναδικοί σχετιστές προκύπτουν μόνο από τους τετριμμένους aa^{-1} και $a^{-1}a$ για κάθε $a \in A$, όπου $A \subseteq F$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η ομάδα F είναι ελεύθερα παραγόμενη από το σύνολο A και θα γράφουμε $F = \langle a_1, a_2, ..., a_n \mid \emptyset\rangle$, ή πιό απλά $F = \langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$. Για την ελεύθερα παραγόμενη ομάδα μπορούμε να δώσουμε εναλλακτικά τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.1 *Μια ομάδα F είναι ελεύθερα παραγόμενη από ένα υποσύνολο S της F, αν για κάθε ομάδα Γ και κάθε απεικόνιση $\varphi : S \to \Gamma$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi' : F \to \Gamma$ που επεκτείνει την φ ώστε $\varphi'(x) = \varphi(x)$, για όλα τα $x \in S$.*

Λήμμα 3.1 *Αν F είναι ελεύθερα παραγόμενη από ένα υποσύνολο S τότε $F = \langle S \rangle$.*

Απόδειξη. Έστω $\Gamma = \langle S \rangle$. Η απεικόνιση του S στο Γ επεκτείνεται σε έναν μοναδικό ομομορφισμό $\vartheta : F \to \Gamma$, ώστε η $\vartheta | S$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Αν συνθέσουμε αυτόν με την απεικόνιση του Γ στην F, έχουμε έναν ομομορφισμό από F στο F και αυτή η ταυτοτική απεικόνιση είναι η ομομορφική επέκταση του S στην F που είναι μοναδική. Άρα $\Gamma = F$.

Λήμμα 3.2 *Έστω η ομάδα F ελεύθερα παραγόμενη από το $S \subseteq F$ και F' ελεύθερα παραγόμενη από $S' \subseteq F'$ και $|S| = |S'|$. Τότε $F \cong F'$.*

Απόδειξη. Η ισότητα $|S| = |S'|$ σημαίνει ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση φ μεταξύ S και S', οπότε υπάρχει η αντίστροφη $\varphi^{-1} : S' \to S$. Από τον προηγούμενο ορισμό αυτές επεκτείνονται στους ομομορφισμούς $\varphi : F \to F'$ και $\vartheta : F' \to F$. Τότε η σύνθεση $\vartheta o \varphi : F \to F$, είναι η ταυτοτική απεικόνιση στην F άρα φ και ϑ είναι ισομορφισμοί.

Ορισμός 3.2 *Αν $|S| = n < \infty$ τότε η F συμβολίζεται με F_n*

Κατασκευή ομάδων με γεννήτορες και σχέσεις

Αν $x_1, x_2, x_3, ...$ σύνολο διακριτών συμβόλων, τότε μια λέξη w στα $x_1, x_2, x_3, ...$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $f_1, f_2, ...f_n$ όπου $f_i \in \{x_1, x_2, ..., x_1^{-1}, x_2^{-1}, ...\}$. Συνήθως γράφουμε $w = f_1 f_2 ... f_n$ και μήκος της λέξης είναι ο αριθμός των γραμμάτων της που συμβολίζεται $L(w)$. Για $n = 0$ έχουμε την κενή λέξη με μήκος μηδέν και το αντίστροφο μιας λέξης $w = f_1 f_2 ... f_n$ είναι $w^{-1} = f_n^{-1} ... f_1^{-1}$. Ορίζοντας την παράθεση δύο λέξεων V, U στα $x_1, x_2, x_3, ...$ προκύπτουν οι λέξεις VU, UV και ισχύουν: $(UV)^{-1} = V^{-1} U^{-1}$ και $L(UV) = L(U) + L(V)$. Είναι φανερό ότι το σύνολο των λέξεων με πράξη την παράθεση είναι ομάδα.

Παρατήρηση

Μια λέξη θα καθορίσει ένα στοιχείο μιας ομάδας, αλλά ένα στοιχείο μπορεί να εκπροσωπείται από δύο λέξεις, όπως στην αβελιανή ομάδα $x_1 x_2$ και $x_2 x_1$ είναι δύο λέξεις αλλά εκφράζουν το ίδιο στοιχείο.

Ορισμός 3.3 *Μια λέξη στα $x_1, x_2, x_3, ...$ λέγεται ανηγμένη αν τα $x_i x_i^{-1}$ δεν εμφανίζονται.*

Μια κυκλικά ανηγμένη λέξη είναι μια ανηγμένη λέξη που δεν ξεκινάει με x_i^{ε} και τελειώνει με $x_i^{-\varepsilon}$. Δύο λέξεις w, w' στα $x_1, x_2, x_3, ...$ λέγονται ελεύθερα ίσες και γράφουμε $w \sim w'$ αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $w = w_0, w_1, ..., w_n = w'$ όπου κάθε w_{i+1} να προκύπτει από την w_i αφαιρώντας ή προσθέτοντας υπολέξεις της μορφής $x_i x_i^{-1}$.

Έστω $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, $F(B) = W(A)/\sim$, $[w]$ η κλάση ισοδυναμίας της λέξης w και ορίζουμε $[w][w'] = [ww']$. Το σύνολο $F(B)$ είναι ομάδα αφού:

- αν $[w_1], [w_2] \in F(B)$ τότε $[w_1][w_2] = [w_1 w_2] \in F(B)$
- $[w_1]([w_2][w_3]) = ([w_1][w_2])[w_3]$
- $1[w_1] = [w_1]$
- $[w_1][w_1]^{-1} = [1]$

Πρόταση 3.1 *Για κάθε λέξη $w \in W(A)$ υπάρχει μια μοναδική ανηγμένη λέξη u ώστε $w \sim u$.*

Απόδειξη. Πράγματι για λέξεις μήκους 0 και 1 ισχύει. Έστω ότι ισχύει για λέξεις μήκους n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για λέξεις μήκους $n+1$, δηλαδή για την $w = a_1 ... a_{n+1}, a_i \in A \cup A^{-1}$. Από υπόθεση υπάρχει ανηγμένη λέξη $u = b_1 b_2 ... b_k$ με $b_j \in A \cup A^{-1}$ ώστε $a_2 ... a_{n+1} \sim u$ και $w = a_1 u$. Αν $a_1 \neq b_1^{-1}$ τότε $w = a_1 u$ είναι ανηγμένη. Αν $a_1 = b_1^{-1}$ τότε $a_1 u \sim b_2 ... b_k$ είναι επίσης ανηγμένη.

Για τη μοναδικότητα της ανηγμένης λέξης θεωρούμε απεικόνιση

$$I_a : W(A) \to W(A)$$

με $I_a(b_1 ... b_k) = \begin{cases} ab_1 ... b_k & \text{αν } a \neq b_1^{-1} \\ b_2 ... b_k & \text{αν } a = b_1^{-1} \end{cases}$

Για κάθε λέξη w ορίζουμε $I_w = I_{a_1} \circ I_{a_2} \circ ... \circ I_{a_n}$, οπότε για την κενή λέξη ισχύει $I_1 = id$, αφού $I_a \circ I_{a^{-1}} = id$ για κάθε $\alpha \in A \cup A^{-1}$. Ακόμη είναι φανερό ότι αν $u \sim w$ τότε $I_w = I_u$. Αν w είναι ανηγμένη θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $w = I_w(1)$. Για λέξεις μήκους 0 και 1 ισχύει και υποθέτουμε ότι ισχύει για μήκους n και θα αποδείξουμε την ισχύ της πρότασης για λέξεις μήκους $n+1$. Τότε $w = au$ όπου $a \in A \cup A^{-1}$ και u μια ανηγμένη λέξη που δεν ξεκινά με a^{-1}, άρα $I_a(u) = au$. Τότε $I_w(1) = I_a \circ I_u(1) = I_a(u) = au = w$. Τέλος προκειμένου να αποδείξουμε την μοναδικότητα αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $u \sim w$ και u, w ανηγμένες τότε $u = w$. Από $u \sim w$ έπεται $I_u = I_w$, άρα και $I_u(1) = I_w(1)$, δηλαδή $u = w$.

Πρόταση 3.2 *Αν* $F_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ *τότε ισχύει η ισοδυναμία:*

$$w^n = 1 \Leftrightarrow w = 1$$

Απόδειξη. Έστω $w = x_{s_1}^{\varepsilon_1} ... x_{s_k}^{\varepsilon_k}$ μια ανηγμένη λέξη με $w \neq 1$. Αν η λέξη w είναι και κυκλικά ανηγμένη δηλαδή $s_1 \neq s_k$ ή $s_1 = s_k$ και $\varepsilon_1 \neq -\varepsilon_k$, τότε $w^p = x_{s_1}^{\varepsilon_1} ... x_{s_k}^{\varepsilon_k} x_{s_1}^{\varepsilon_1} ... x_{s_k}^{\varepsilon_k} x_{s_1}^{\varepsilon_1} ... x_{s_k}^{\varepsilon_k}$. Όμως τότε η w^p είναι ανηγμένη άρα δεν μπορεί ποτέ (για κανένα $p > 0$) να ορίζει το ουδέτερο στοιχείο. Συνεπώς w έχει άπειρη τάξη. Αν w δεν είναι κυκλικά ανηγμένη, τότε w είναι συζυγές μιας κυκλικά ανηγμένης λέξης v, οπότε $w = uvu^{-1}$ με $v \neq 1$, αφού $w \neq 1$. Από το προηγούμενο η λέξη v έχει άπειρη τάξη, άρα και w έχει άπειρη τάξη αφού $w^p = (uvu^{-1})^p = uv^p u^{-1} \neq 1$.

Παρατηρήσεις

1. Τα σύνολα των ελεύθερων γεννητόρων μιας ομάδας δεν είναι μοναδικά. Αν $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$ τότε και $\{a\}$ και $\{a^{-1}\}$ είναι ελεύθερα γεννητόρων σύνολα.

2. Κάθε ελεύθερη ομάδα F_n έχει πολλά σύνολα ελεύθερων γεννητόρων που όμως όλα έχουν την ίδια πληθυκότητα n και οι αυτομορφισμοί της ομάδας F_n είναι άπειροι.

4 Παραστάσεις ομάδων

Ορισμός 4.1 *Κανονική θήκη για το* $A \subseteq G$ *είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της* G *που περιέχει το* A.

Συμβολίζεται με $\langle\langle A \rangle\rangle$ και έχει τις επόμενες τρεις ιδιότητες:

1. $A \subseteq \langle\langle A \rangle\rangle$

2. $\langle\langle A \rangle\rangle \lhd G$

3. Αν $N \lhd G, A \subseteq N$ τότε $\langle\langle A \rangle\rangle \subseteq N$

Εφαρμογή

Ισχύει $\langle\langle A \rangle\rangle = \langle \{gag^{-1} \mid a \in A, g \in G\} \rangle$.

Απόδειξη. Έστω $B = \langle \{gag^{-1} \mid a \in A, g \in G\} \rangle$. Είναι $B \subseteq \langle\langle A \rangle\rangle$ διότι $\forall g_1, ..., g_k \in G, a_1, ..., a_k \in A$, έχουμε $g_1 a_1 g_1^{-1} ... g_k a_k g_k^{-1} \in \langle\langle A \rangle\rangle$.

Αντίστροφα έχουμε:$A \subseteq B, B \lhd G$ άρα $\langle\langle A \rangle\rangle \subseteq B$.

Ορισμός 4.2 *Μια παράσταση για μια ομάδα G είναι ένας ισομορφισμός της G με μια ομάδα της μορφής $\langle S \mid R \rangle$. Αν και τα S, R είναι πεπερασμένα τότε η παράσταση είναι πεπερασμένη.*

Δηλαδή μια παράσταση ομάδας G είναι είναι ένα σύνολο γεννητόρων S μιας ελεύθερης ομάδας $F(S)$ και ένα σύνολο σχέσεων R (λέξεων της $F(S)$), έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο της $F(S)$ προς την κανονική θήκη του R να είναι ισόμορφη με την G, δηλαδή

$$F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle \cong \langle S \mid R \rangle$$

Στην συνδυαστική θεωρία ομάδων μελετάμε τις ομάδες υπό μορφή παραστάσεων.

Την παράσταση μιας ομάδας θα την απεικονίζουμε με

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \mid r_1, r_2, ..., r_n \rangle$$

και καθώς η παράσταση είναι πεπερασμένη, η ομάδα έχει πεπερασμένη παράσταση. Τα στοιχεία του R λέγονται σχετιστές και μπορούν να γραφούν σαν λέξεις στα x_i και στα αντίστροφά τους.

Παραδείγματα

1. Αν $R = \emptyset$ τότε $\langle\langle R \rangle\rangle = \{1\}$ δηλαδή $\langle S \mid \emptyset \rangle$ είναι ισομορφική με $F(S)$. Η παράσταση του συνόλου των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι $\langle a \mid \emptyset \rangle$ και για την ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες, δηλαδή της F_2, η παράσταση είναι$\langle a, b \mid \emptyset \rangle$.

2. Η παράσταση της $\mathbb{Z}_n$ είναι $\langle a \mid a^n \rangle$.

3. Η παράσταση για την ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Πράγματι το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ γράφεται ως $\{c^m d^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, που είναι ένας ομομορφισμός για την $F_2 = \langle a, b \mid \emptyset \rangle$, στέλνοντας το a στο c και το b στο d. Είναι $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong F_2/K$, K πυρήνας του ομομορφισμού. Από τον ορισμό της κανονικής θήκης ισχύει : $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong F_2/N$. Θα δείξουμε ότι $K = N$. Αφού N είναι η κανονική θήκη ισχύουν ότι $N \subseteq K$ και F_2/N είναι αβελιανή. Οπότε κάθε στοιχείο έχει τη μορφή $Na^m b^n$ που με την φυσική απεικόνιση παίρνει τη μορφή $c^m d^n$. Για $m = n = 0$ έχουμε το ταυτοτικό στοιχείο. Άρα $N = K$.

4. Η ομάδα του $Klein$ δεν είναι άλλη από την αβελιανή ομάδα με τέσσερα στοιχεία, που εκτός του ταυτοτικού έχουν τάξη 2 και το γινόμενο των δύο δίνει το τρίτο. Δηλαδή $G = \{e, a, b, ab\}$. Η παράσταση που αντιστοιχεί στην G είναι $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5 Αβελιανοποίηση

Ορισμός 5.1 *Σε κάθε ομάδα G μεταθέτης είναι το στοιχείο $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ για $x, y \in G$*

Ισχύει $g[x,y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$, αφού ισοδύναμα έχουμε $gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1}$. Η ομάδα $[G,G]$ που παράγεται από το σύνολο όλων των μεταθετών είναι κανονική. Πράγματι, το σύνολο

$$[G,G] = \langle [a_1,b_1]...[a_n,b_n] \mid a_i, b_i \in G, 1 \leq i \leq n, n \in N \rangle$$

είναι υποομάδα της G, αφού είναι μη κενό και $[a,b]^{-1} = [b,a]$, δηλαδή περιέχει τα πεπερασμένα γινόμενα των μεταθετών και των αντιστρόφων τους. Επιπλέον αν $a \in [G,G]$ τότε $a = [a_1,b_1]...[a_n,b_n]$ και $gag^{-1} = g[a_1,b_1]...[a_n,b_n]g^{-1} = g[a_1,b_1]g^{-1}g...g[a_n,b_n]g^{-1} = [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}]...[ga_ng^{-1}, gb_ng^{-1}] \in [G,G]$, τότε $gag^{-1} \in [G,G]$ δηλαδή $[G,G] \trianglelefteq G$.

Η ομάδα πηλίκο $G/\left[G,G\right]$ είναι αβελιανή διότι $[aN, bN] = [a,b]\,N = N = [bN, aN]$ με $N = [G,G]$.

Εφαρμογή

Θα αποδείξουμε ότι: $F_n/[F_n,F_n] \cong \mathbb{Z}^n$. Είναι $\mathbb{Z}^n = \left\{a_1^{n_1}...a_n^{n_k} \mid a_ia_ja_i^{-1}a_j^{-1} = 1\right\}$ και $F_n = \langle b_1, ..., b_n \rangle$ με $b_1 \to a_1, ..., b_n \to a_n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

Η ομάδα $F_n/[F_n,F_n]$ είναι αβελιανή και παράγεται από τα $Na_1, ..., Na_n$ που μετατίθενται ($N = [F_n,F_n]$). Άρα $Na_1^k...a_n^p$ παράγει την ομάδα πηλίκο και γιά $k = ... = p = 0$, έχουμε $N = K =$πυρήνας, οπότε ισχύει:$F_n/[F_n,F_n] \cong \mathbb{Z}^n$.

6 *Cayley* γράφημα

Ένα γράφημα K αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών $V(K)$ και από ένα μη κενό σύνολο ακμών E(K) και τρεις απεικονίσεις: $a : V(K) \to E(K)$ (την αρχική κορυφή μιας ακμής), $w : V(K) \to E(K)$ (την τελική κορυφή μιας ακμής) και $\bar{e}$: $E(K) \to E(K)$ (την αντίστροφη μιας ακμής) ώστε $\bar{\bar{e}} = e, \bar{e} \neq e$ και $a(e) = w(\bar{e}), \forall e \in E(K)$.

Στο γράφημα μπορεί πολλές ακμές να συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών, καθώς και loops, δηλαδή ακμές που αρχίζουν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή. Μια ακολουθία ακμών $l = e_1e_2...e_n$ ενός γραφήματος K λέγεται μονοπάτι μήκους n στο K αν $w(e_i) = a(e_{i+1}), i = 1, ..., n-1$. Το μονοπάτι l έχει αρχική κορυφή το $a(e_1)$ και τελική το $w(e_n)$. Το τετριμμένο μονοπάτι αποτελείται από μια μόνο κορυφή. Για ένα μη τετριμμένο μονοπάτι $l = e_1e_2...e_m$ συμβολίζουμε με l^{-1} το $\bar{e_m}\bar{e_2}...\bar{e_1}$. Για το τετριμμένο μονοπάτι ισχύει: $l^{-1} = l$. Το μονοπάτι l που η αρχή και το τέλος συμπίπτουν λέγεται κλειστό. Ανηγμένο είναι το μονοπάτι που είτε είναι το τετριμμένο είτε $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ για $i = 1, ..., n-1$.

Ορισμός 6.1 *Συνεκτικό είναι το μονοπάτι που για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(K)$ υπάρχει μονοπάτι από το u στο v.*

Η πληθυκότητα (valence) για μια κορυφή είναι το άθροισμα των ακμών που έχουν αρχή και τέλος την κορυφή αυτή, και τα loops ισοδυναμούν με δύο ακμές. Το γράφημα που κάθε κορυφή έχει πληθυκότητα n λέγεται n κανονικό. Το γράφημα που κάθε κορυφή έχει πεπερασμένη πληθυκότητα λέγεται τοπικά πεπερασμένο.

Ορισμός 6.2 *Μια ομάδα G δρα σε ένα σύνολο M από αριστερά αν για κάθε $m \in M$ ορίζουμε ένα στοιχείο $gm \in M$ ώστε:*

- $g_1(g_2m) = (g_1g_2)m$
- $1m = m$

για κάθε $m \in M$ και για κάθε $g_1, g_2 \in G$.

Αν για κάθε $g \in G$ υπάρχει $m \in M$ ώστε $gm \neq m$, τότε η δράση είναι πιστή. Το σύνολο:

$$St(m) = \{g \in G \mid gm = m\}$$

λέγεται σταθεροποιούσα της δράσης και είναι υποομάδα της ομάδας G.

Ορισμός 6.3 *Μια ομάδα G δρα σε ένα γράφημα X (από αριστερά) αν οι (αριστερές) δράσεις της ομάδας G στα σύνολα $V(X), E(X)$ ορίζονται έτσι ώστε:*

- $ga(e) = a(ge)$
- $g\bar{e} = \overline{ge}$, *για κάθε $g \in V(X), e \in E(X)$*

Αν $ge \neq \bar{e}$ για κάθε $e \in E(K)$ και για κάθε $g \in G$, τότε η ομάδα G δρα στο X χωρίς αντιστροφές. Αν $gv \neq v$ για κάθε $v \in V(X)$ και για κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g \in G$, τότε η δράση είναι ελεύθερη.
Έστω ότι η ομάδα G δρα στο γράφημα X χωρίς αντιστροφές. Για κάθε $x \in V(X) \cup E(X)$ συμβολίζουμε με $O(x)$ την τροχιά του x ως προς τη δράση αυτή. Το γράφημα πηλίκο $G \backslash X$ έχει κορυφές $O(u), u \in V(X)$ και ακμές $O(e), e \in V(E)$ ώστε:

1. Το $O(u)$ είναι η αρχή του $O(e)$ αν υπάρχει $g \in G$ ώστε gu να είναι αρχή της e.
2. Η αντίστροφη της ακμής $O(e)$ είναι η ακμή $O(\bar{e})$.

6.1 Το γράφημα ως μετρικός χώρος

Στο γράφημα K κάθε ακμή αντιστοιχεί σε ένα αντίγραφο του μοναδιαίου διαστήματος με κορυφές τα άκρα του. Αυτό ορίζει ένα μήκος για κάθε διάστημα σε μία ακμή, έτσι αυτό το διάστημα να έχει μήκος 1. Ένα μονοπάτι P έχει ένα καθορισμένο μήκος $l(P) \in [0, +\infty)$. Για $x, y \in K$ ορίζουμε $d(x, y) \in [0, +\infty)$ το μήκος του μικρότερου μονοπατιού που συνδέει τα x, y. Αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι θέτουμε αυτό ίσο με ∞.

Ορισμός 6.4 *Ένα δέντρο είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κυκλώματα.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι ένα γράφημα είναι ένα δέντρο αν και μόνο αν κάθε ζεύγος από κορυφές συνδέεται με μοναδικό τόξο.

Ορισμός 6.5 *Το Cayley γράφημα μιας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας G με σύνολο γεννητόρων S είναι ένα επίπεδο γράφημα με:*

- *σύνολο κορυφών $V(G) = \{g \mid g \in G\}$*
- *σύνολο ακμών $E(G) = \{(g, s) \mid g \in G, s \in S\}$*

και δύο απεικονίσεις:

1. *$\alpha : E(G) \to V(G)$ με $\alpha(g, s) = g$ και*
2. *$w : E(G) \to V(G)$ με $w(g, s) = gs$*

Συνήθως το *Cayley* γράφημα μιας ομάδας G με σύνολο γεννητόρων S συμβολίζεται με $\Gamma(G, S)$.

Εφαρμογή: Αν $G = \langle S \rangle$ τότε $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό.
Απόδειξη. Πράγματι για κάθε $g_1, g_2 \in G$ το γινόμενο $g_2 g_1^{-1}$ ανήκει στην G, οπότε γράφεται ως γινόμενο στοιχείων του S και αυτό γίνεται κατά μοναδικό τρόπο, άρα $g_2 = s_1 s_2 ... s_k g_1$.

Ορισμός 6.6 *Η ομάδα G δρα από αριστερά στο $\Gamma(G, S)$ ως εξής: Ένα στοιχείο $g \in G$ στέλνει την κορυφή g' στην κορυφή gg' και την ακμή (g', s) στην ακμή (gg', s).*

Πρόταση 6.1 *Η ομάδα G δρα στο $\Gamma(G, S)$ ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές.*

Απόδειξη. Αφού η ισότητα $gg' = g'$, για κάθε $g' \in V(G)$, ισχύει μόνο για το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας, η δράση είναι ελεύθερη στις κορυφές. Έστω για τις ακμές $e = (g', s)$ και $ge = (gg', s)$ ισχύει $ge = \bar{e}$ και συνεπώς $\alpha(ge) = \alpha\bar{e}$ και $w(ge) = w(\bar{e})$. Από τις ισότητες $gg' = g's$, $gg's = g'$ προκύπτει ότι $s^2 = 1$ που είναι αδύνατο αφού $S \cap S^{-1} = \emptyset$, συνεπώς η δράση γίνεται χωρίς αντιστροφές.

Πρόταση 6.2 *Μια ελεύθερη ομάδα δρα ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές στις ακμές ενός δέντρου.*

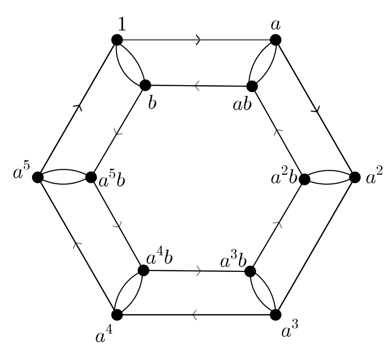
Απόδειξη. Αρκεί να σχεδιάσουμε το Cayley γράφημα.

Πρόταση 6.3 *Κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.*

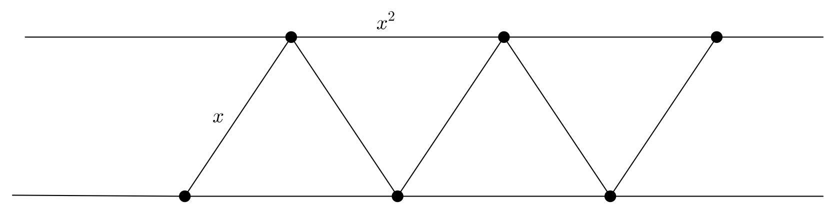
Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης.

Παραδείγματα

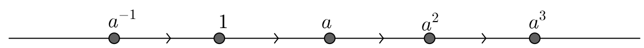
1. Το Cayley γράφημα της $D_6 = \langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$:



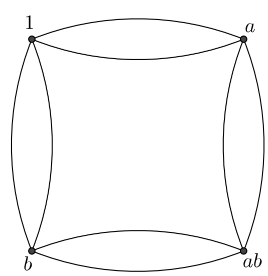
2. Το Cayley γράφημα της $\mathbb{Z} = \langle x, y \mid y = x^2 \rangle$:



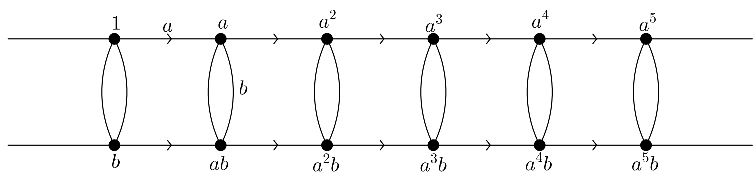
3. Το Cayley γράφημα της $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$:



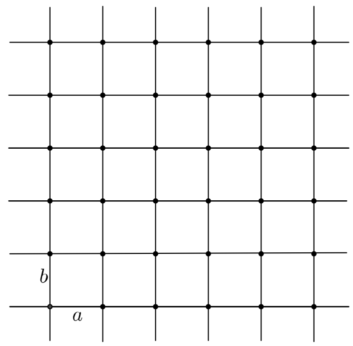
4. Το Cayley γράφημα της ομάδας του Klein



5. To Cayley γράφημα της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 = 1, [a, b] = 1 \rangle$



6. To Cayley γράφημα της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$



Αφού στις ελεύθερα παραγόμενες ομάδες δεν έχουμε σχετιστές, άρα στο *Cayley* γράφημα δεν έχουμε κυκλώματα. Δεν μας εκπλήσει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.1 *Αν η ομάδα F είναι ελεύθερα παραγόμενη από ένα σύνολο $S \subseteq F$ τότε το $\Delta = \Gamma(G, S)$ είναι ένα δέντρο.*

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει αρκεί $S \cap S^{-1} = \emptyset$. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη κάνουμε την παρατήρηση ότι αφού μια λέξη w αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι $\pi = \pi(w)$, τότε κάθε υπολέξη της μορφής $\alpha\alpha^{-1}$ θα σήμαινε ότι περνάμε από μια ακμή με ετικέτα α και αμέσως πάμε πίσω κατά μήκος της ακμής. Το ότι ακυρώνουμε αυτή τη λέξη σημαίνει ότι ακυρώνουμε αυτό το πισωγύρισμα. Η ανηγμένη λέξη αντιστοιχεί σε μονοπάτι που δεν έχει πισωγυρίσματα.

Απόδειξη. Από την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας μπορούμε να πούμε ότι η ομάδα F έχει τη μορφή $F(S)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\Gamma(G, S)$ δεν έχει κυκλώματα. Κάτω από την δράση της F θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε ένα τέτοιο κύκλωμα, σε ένα μονοπάτι που να αρχίζει και να τελειώνει στο 1. Ένα τέτοιο κύκλωμα σ αντιστοιχεί σε μια λέξη στο $S \cup S^{-1}$ που αντιπροσωπεύει το ταυτοτικό στοιχείο στην F. Υπάρχει μια ακολουθία από μειώσεις και αντίστροφες μειώσεις που τελικά μετασχηματίζει αυτή τη λέξη στην κενή λέξη. Αυτό στο $Cayley$ γράφημα ερμηνεύεται ως μια ακολουθία από κλειστά μονοπάτια $\sigma = \sigma_0, ..., \sigma_n$ με σ_n να είναι το σταθερό μονοπάτι τοποθετημένο στο 1 και κάθε σ_i προκύπτει από το σ_{i-1} ή απαλοίφοντας ή εισάγοντας $\alpha\alpha^{-1}$ κατά μήκος της ακμής. Τώρα κάθε μονοπάτι $\tau(\alpha\beta\gamma...\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})$ στο $\Gamma(G,S)$ έχει $O(\tau) \subseteq E(\Delta)$, όπου $E(\Delta)$ είναι το σύνολο ακμών που περιέχουν το τ και είναι άρτιου πλήθους. Είναι φανερό ότι η τροχιά $O(\tau)$ παραμένει ίδια από αυτό το πισωγύρισμα. Γενικά $O(\sigma_i)$ σταθερό. Αλλά $O(\sigma) = E(\sigma)$ και $O(\sigma_n) = \emptyset$ και συνεπώς $E(\sigma) = \emptyset$ και δεν έχουμε κλειστά μονοπάτια.

Παρατήρηση

Στο $Cayley$ γράφημα μιας ελεύθερης ομάδας F υπάρχει μόνο ένα μονοπάτι που συνδέει το 1 με το στοιχείο $g \in F$. Δηλαδή κάθε στοιχείο g στην F έχει μια μοναδική αναπαράσταση ως ανηγμένη λέξη.

7 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 7.1 *Μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (M,d), όπου M είναι ένα μη κενό σύνολο και $d : M \times M \to [0,\infty)$ μια απεικόνιση που λέγεται μετρική και ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

- $d(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in M$ *και* $d(x,y) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = y$.
- $d(x,y) = d(y,x)$ *για κάθε* $x, y \in M$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *για κάθε* $x, y, z \in M$.

Έστω (M,d) ένας μετρικός χώρος. Για $x \in M$ και $r \geq 0$, ονομάζουμε κλειστή r-γειτονιά του x στο M το σύνολο $N(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) \leq r\}$.

Αν $Q \subseteq M$, θα λέμε ότι Q είναι r -πυκνό αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει $q \in Q$ και $r \geq 0$ ώστε $d(x,q) \leq r$.

Λέμε ότι Q είναι συμφραγμένο (cobounded) αν είναι r-πυκνό για κάποιο r. Επίσης γράφουμε $\mathrm{diam}(Q) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in Q\}$ για την διάμετρο του Q. Αν $\mathrm{diam}(Q) < \infty$ τότε λέμε ότι το Q είναι φραγμένο (bounded).

Ορισμός 7.2 *Αν $I \subseteq R$ είναι ένα διάστημα τότε γεωδαισιακό είναι ένα μονοπάτι $\gamma : I \to M$ έτσι ώστε $d(\gamma(t), \gamma(u)) = |t-u|$ για κάθε $t, u \in I$.*

Ισοδύναμα ορίζουμε ως γεωδαισιακή την απεικόνιση $\gamma : [0,1] \to M$ με $d(\gamma(0), \gamma(1)) = 1$.

Ορισμός 7.3 *Το μήκος του μονοπατιού $\gamma : [a,b] \to M$ συνήθως συμβολίζεται με $l(\gamma(t))$ και ισούται με*

$$l(\gamma(t)) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Το μονοπάτι με πεπερασμένο μήκος το ονομάζουμε rectifiable. Ένα παράδειγμα μη rectifiable μονοπατιού είναι η απεικόνιση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

αφού το μονοπάτι που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και $(1, \sin 1)$ δεν έχει πεπερασμένο μήκος. Το μήκος του μονοπατιού ισούται με $d(\gamma(a), \gamma(b))$ αν και μόνο αν $d(\gamma(a), \gamma(b)) = d(\gamma(a), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(b))$ για κάθε $t \in [a,b]$. Θεωρώντας $s : [a,b] \to [0, d(a,b)]$ με $s(t) = d(\gamma(a), \gamma(t))$ δείχνουμε ότι το $\gamma' = \gamma o s^{-1} : [0, d(a,b)] \to M$ είναι γεωδαισιακό. Πράγματι αν $d_1 = d(\gamma(a), \gamma(t_1))$ και $d_2 = d(\gamma(a), \gamma(t_2))$ έχουμε:

$$d((\gamma o s^{-1})(d_1), (\gamma o s^{-1})(d_2)) = d(\gamma(s^{-1}(d_1)), \gamma(s^{-1}(d_2))$$

$$= d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |d(\gamma(a), \gamma(t_1)) - d(\gamma(a), \gamma(t_2))| = |d_1 - d_2|.$$

Ορισμός 7.4 *Ένας μετρικός χώρος (M,d) είναι γεωδαισιακός χώρος (length space) αν κάθε ζεύγος σημείων ενώνεται με ένα γεωδαισιακό μονοπάτι.*

Παραδείγματα γεωδαισιακών χώρων

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδεια μετρική $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ αφού $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x \cdot y + \sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \sqrt{|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2} = |x - y|$, ($x \cdot y$ είναι το εσωτερικό γινόμενό τους)

2. Κάθε γράφημα με μοναδιαίες ακμές.

Παραδείγματα μη γεωδαισιακών χώρων

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, αφού δεν υπάρχει γεωδαισιακό μονοπάτι που να συνδέει το $(x,0)$ με το $(-x,0)$.

2. Σε ένα γράφημα δύο κορυφές x και y που συνδέονται με άπειρες ακμές μήκους $1+\frac{1}{n}$. Για καμία τιμή του n δεν επιτυγχάνεται το μήκος $d(x,y) = 1$.

Ένας μετρικός χώρος λέγεται proper αν είναι ένωση από κλειστές μπάλες πεπερασμένης ακτίνας.

8 Ισομετρίες

Ορισμός 8.1 *Έστω (X,d) και (X',d') μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση f: $X \to X'$ λέγεται ισομετρική εμφύτευση αν $d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$ για όλα τα $x,y \in X$.*

Είναι φανερό ότι η f είναι απεικόνιση $1-1$ και αν επιπλέον είναι και επί λέγεται ισομετρία. Σε ένα μετρικό χώρο X το σύνολο των αυτο-ισομετριών δημιουργεί μια ομάδα και συμβολίζεται με $\mathrm{Isom}(X)$, με ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση. Οι ισομετρίες f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι οι απεικονίσεις $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ όπου A ορθογώνιος πίνακας.

Υποθέτουμε ότι μια ομάδα Γ δρα ισομετρικά σε ένα proper γεωδαισιακό χώρο και Γx=$\{gx \mid g \in \Gamma\}$ η τροχιά του x υπό τη δράση της Γ.

Ορισμός 8.2 *Μιά δράση μιας ομάδας Γ στο μετρικό χώρο X λέγεται properly discontinious αν για όλα τα $r \geq 0$ και όλα τα $x \in X$ το σύνολο των $g \in \Gamma$ για τα οποία $d(x,gx) \leq r$ είναι πεπερασμένο.*

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο των $g \in \Gamma$ για τα οποία $gK \cap K \neq \emptyset$ είναι πεπερασμένο, για όλα τα συμπαγή $K \subseteq X$. Στο χώρο πηλίκο $X \backslash \Gamma$ της παραπάνω δράσης ορίζουμε μια μετρική d' θέτοντας $d'(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(p,q) \mid p \in \Gamma x, q \in \Gamma y\} = \min\{d(x,gy) \mid g \in \Gamma\}$.

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού για $p = g_1 x, q = g_2 y$ έχουμε $d(p,q) = d(g_1 x, g_2 y)$=$d(g_1^{-1} g_1 x, g_1^{-1} g_2 y)$=$d(x,gy)$. Η d' είναι μετρική στο $X \backslash \Gamma$ αφού ισχύουν:

- $d'(\Gamma x, \Gamma x) = 0 \Leftrightarrow min\{d(x,gx)\} = 0 \Leftrightarrow min\{0\}$=0, που ισχύει για κάθε $g \in G$.

- $d'(\Gamma x, \Gamma y) > 0 \Leftrightarrow min\{d(x, gy)\} > 0$ που ισχύει για κάθε ζεύγος (x, y) στοιχείων της G με $x \neq y$.

- $d'(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(p, q) \mid p \in \Gamma x, q \in \Gamma y\} = \min\{d(q, p) \mid q \in \Gamma y, p \in \Gamma x\} = d'(\Gamma y, \Gamma x)$.

- $d'(\Gamma x, \Gamma z) = \min\{d(p, w) \mid p \in \Gamma x, w \in \Gamma z\} \leq \min\{d(p, q) + d(q, w) \mid p \in \Gamma x, q \in \Gamma y, w \in \Gamma z\} \leq \min d(p, q) + \min d(q, w) = d'(\Gamma x, \Gamma y) + d'(\Gamma y, \Gamma z)$.

Μια properly discontinuous δράση λέγεται cocompact αν $X \backslash \Gamma$ είναι συμπαγής.

Εφαρμογή

Οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Η δράση είναι cocompact

2. Κάποια τροχιά είναι cobounded

Απόδειξη. (1)⇒(2). Επιλέγουμε κάποια τροχιά $Gx \in X \backslash G$. Επειδή η δράση είναι cocompact, ο χώρος πηλίκο είναι συμπαγής, άρα υπάρχει $r \geq 0$ ώστε $X \backslash G \subset N(Gx, r)$. Δηλαδή $\forall\ y \in X, \exists\ g \in G : d'(Gy, Gx) \leq r$ επομένως $d(y, gx) \leq r$ άρα Gx cobounded.

(2)⇒(1). Έστω Gx τροχιά που είναι r-πυκνή στο X. Οπότε για κάθε $y \in X$, ισχύει $d(y, gx) \leq r$ δηλαδή η σφαίρα $N(y, r)$ είναι συμπαγής. Αφού η δράση $g : X \to X \backslash G$ είναι συνεχής έχουμε ότι και η εικόνα της $g(N(x, r))$=$X \backslash G$ είναι συμπαγές σύνολο.

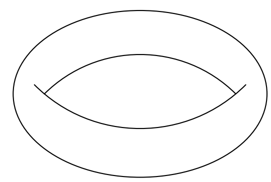
Εμείς θα γράφουμε σύντομα *p.d.* για properly discontinuous και *p.d.c.* για properly discontinuous και cocompact.

Παραδείγματα

- Η δράση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}$ με μετατόπιση ($nx = n+x$) είναι *p.d.c.* Το γράφημα πηλίκο $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ είναι ένας κύκλος.

- Η δράση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}^2$ με οριζόντια μετατόπιση ($n(x, y) = (n+x, y)$) είναι *p.d.* αλλά όχι cocompact. Το γράφημα πηλίκο είναι ένας διπλά άπειρος κύλινδρος (bi-infinite cylinder).

- Η δράση του $\mathbb{Z}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ με $((m, n).(x, y) = (m + x, n + y))$ είναι *p.d.c.* Το γράφημα πηλίκο είναι ένας τόρος.



Αφού στα παραδείγματα (1) και (3) οι χώροι πηλίκο είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και είναι κλειστά και φραγμένα σύνολα, οι χώροι αυτοί είναι συμπαγή σύνολα.

- Η δράση της G στο Cayley γράφημα $\Gamma(G,S)$, με πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S, είναι *p.d.c.* αφού το γράφημα πηλίκο αποτελείται από μία κορυφή την τροχιά των κορυφών, δηλαδή την G και s σε πλήθος κύκλους (loops).
  Είναι φανερό ότι ο χώρος πηλίκο $\Gamma(G,S)\backslash G$ είναι συμπαγές σύνολο αφού είναι πεπερασμένο.

9 Quasi-ισομετρίες

Ορισμός 9.1 *Έστω $(X,d),(X',d')$ μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση φ : $X \to X'$ είναι quasi ισομετρική εμφύτευση αν υπάρχουν σταθερές $\kappa \geq 1, c \geq 0$ ώστε γιά όλα τα $x,y \in X$ να ισχύει:*

$$\frac{1}{k}d(x,y) - c \leq d'(\varphi(x),\varphi(y)) \leq kd(x,y) + c.$$

Μια quasi ισομετρική εμφύτευση φ είναι quasi ισομετρία, αν επιπλέον υπάρχει μια σταθερά $\kappa' \geq 0$ ώστε να ισχύει:

$$\forall\ y \in X', \exists\ x \in X \text{ με } d'(y, \varphi(x)) \leq \kappa'$$

Μια quasi ισομετρία διατηρεί τις αποστάσεις μέσα σε γραμμικούς συνδυασμούς της αρχικής απόστασης και η εικόνα της είναι cobounded, δηλαδή $X' = N_{\kappa'}(\varphi(x))$.

Εφαρμογές:

1. Αν οι απεικονίσεις $\varphi : X \to Y$ και $\psi : Y \to Z$ είναι quasi ισομετρίες τότε και η σύνθεσή τους $\psi \circ \varphi : X \to Z$ είναι quasi ισομετρία.

2. Αν η απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ είναι quasi ισομετρία, τότε υπάρχει μια quasi ισομετρία $\psi : Y \to X$, ώστε οι συνθέσεις $\varphi \circ \psi$ και $\psi \circ \varphi$ με τις ταυτοτικές απεικονίσεις I_y και I_x να είναι σε φραγμένη απόσταση.

Απόδειξη.

1. Αφού $\varphi : X \to Y$ είναι *quasi* ισομετρία ισχύουν:

   - $\dfrac{1}{k_1} d_X(x_1, x_2) - c_1 \leq d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq k_1 d_X(x_1, x_2) + c_1$
   - $\forall\ y \in Y, \exists\ x \in X : d_Y(y, \varphi(x)) \leq c', c' \geq 0.$

   Αλλά και $\psi : Y \to Z$ είναι quasi ισομετρία, οπότε αντίστοιχα ισχύουν:

   - $\dfrac{1}{k_2} d_Y(y_1, y_2) - c_2 \leq d_Z(\psi(y_1), \psi(y_2)) \leq k_2 d_Y(y_1, y_2) + c_2$
   - $\forall\ z \in Z, \exists\ y \in Y : d_Z(z, \psi(y)) \leq c'', c'' \geq 0.$

   Επιλέγουμε $y_1 = \varphi(x_1)$ και $y_2 = \varphi(x_2)$ έχουμε:

   - $\dfrac{1}{k_2} d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) - c_2 \leq d_Z(\psi(\varphi(x_1)), \psi(\varphi(x_2))) \leq k_2 d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) + c_2.$
   - $\forall z \in Z, \exists x \in X : d_Z(\psi(y), z) \leq c''.$

   Τελικά έχουμε:

   - $\dfrac{1}{k_1 k_2} d_X(x_1, x_2) - \dfrac{c_1}{k_2} - c_2 \leq d_Z((\psi \circ \varphi)(x_1), (\psi \circ \varphi)(x_2)) \leq k_1 k_2 d_X(x_1, x_2) + c_1 k_2 + c_2$

- $\forall z \in Z, \exists x \in X : d_Z((\psi \circ \varphi)(x), z) \leq c''$

  Δηλαδή η απεικόνιση $\psi \circ \varphi : X \to Z$ είναι quasi ισομετρία.

2. Για την $\varphi : X \to Y$ ισχύει η ανισοτική σχέση της quasi ισομετρικής εμφύτευσης και θέτοντας σε αυτή $x_1 = \psi(y_1), x_2 = \psi(y_2)$ βρίσκουμε ότι και η $\psi : Y \to X$ είναι quasi ισομετρία (θα το δούμε αναλυτικά στην επόμενη απόδειξη). Επίσης ισχύουν: $d_Y(y, \varphi(\psi(y))) \leq c, \forall\ y \in Y$ και $d_X(x, \psi(\varphi(x))) \leq c', \forall\ x \in X$ που σημαίνει ότι οι συνθέσεις $\varphi \circ \psi$ και $\psi \circ \varphi$ με τις ταυτοτικές απεικονίσεις I_y και I_x να είναι σε φραγμένη απόσταση.

Ορισμός 9.2 *Δύο μετρικοί χώροι X, Y λέγονται quasi ισομετρικοί αν υπάρχει μια quasi ισομετρία μεταξύ τους και συμβολίζονται με $X \sim Y$.*

Πρόταση 9.1 *Η quasi ισομετρία $X \sim Y$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη.

- Ισχύει $X \sim X$ (ισομετρία)

- Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ που είναι quasi ισομετρία. Τότε ισχύουν:

  $$\frac{1}{\kappa} d(x_1, x_2) - c \leq d'(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \kappa d(x_1, x_2) + c$$

  και

  $$\forall y \in Y, \exists x \in X$$

  με $d'(y, \varphi(x)) \leq R$. Επιλέγω $x_1, x_2 \in X$ και $y_1, y_2 \in Y$ ώστε $x_1 = \psi(y_1), x_2 = \psi(y_2)$. Τότε η προηγούμενη πρώτη συνθήκη γίνεται:

  $$\frac{1}{\kappa} d(\psi(y_1), \psi(y_2)) - c \leq d'(\varphi(\psi(y_1), \varphi(\psi(y_2)) + c$$

  ή

  $$d(\psi(y_1), \psi(y_2)) \leq \kappa d'(\varphi(\psi(y_1), y_1) + \kappa d'(y_1, y_2) + \kappa d'(y_2, \varphi(\psi(y_2)) + 2\kappa c$$

  ή

  $$d(\psi(y_1), \psi(y_2)) \leq \kappa d'(y_1, y_2) + 2\kappa R + 2\kappa c.$$

Όμοια βρίσκουμε :

$$\frac{1}{\kappa}d'(y_1, y_2) - 2\kappa R - 2\kappa c \leq d(\psi(y_1), \psi(y_2)).$$

Επιπλέον $\forall y \in Y, \exists x \in X : d'(y, \varphi(x) \leq R$ και αφού η $\psi : Y \to X$ είναι quasi ισομετρική εμφύτευση έχουμε ότι $\forall x \in X, \exists y \in Y$ ώστε $d(x, \psi(y) \leq r$, δηλαδή $\psi : Y \to X$ είναι quasi ισομετρία.

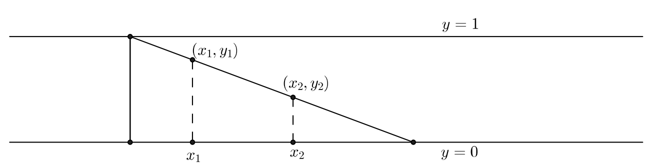
- Από τα προηγούμενες εφαρμογές απορρέει ότι αν $X \sim Y$ και $Y \sim Z$ έχουμε $X \sim Z$.

Παραδείγματα:

1. Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x, y) = x$ είναι quasi ισομετρική εμφύτευση με $\kappa = 1, c = 1$. Αυτό είναι φανερό από την εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας ή πιό αναλυτικά:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - 1 \leq \mid x_1 - x_2 \mid \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

αφού $\mid y_1 - y_2 \mid \leq 1$. Αφού η απεικόνιση φ είναι επί έχουμε: $\mathbb{R} \times [0,1] \sim \mathbb{R}$.



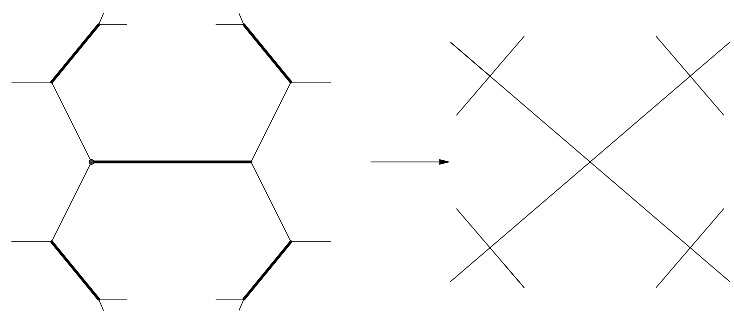
2. Έχουμε quasi ισομετρία του Cayley γράφηματος της $\mathbb{Z}$ αναφορικά με τους γεννήτορες $\{a, a^2\}$ με το $\mathbb{R}$. Για να το δείξουμε ας θεωρήσουμε τη απεικόνιση $\varphi : \Gamma(\mathbb{Z}, \{a, a^2\}) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(a) = 1, \varphi(a^2) = 2, ...$ Τότε ισχύει:
$$d(x,y) - 1 \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2d(x,y)$$
αφού κάθε $x, y \in V(\Gamma(\mathbb{Z}, \{a, a^2\}))$ είναι της μορφής
$$x = a^m, y = a^n, m, n \in \mathbb{N}$$
και $d(x,y) = \dfrac{|m-n|}{2}$, για $m, n \equiv 0 \mod 2$ ή για $m, n \equiv 1 \mod 2$ και $d(x,y) = \dfrac{|m-n|}{2} + 1$ για κάθε άλλη περίπτωση. Τέλος δεδομένου ότι $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |m-n|$ έχουμε quasi ισομετρική εμφύτευση και αφού το $\mathbb{Z}$ είναι r πυκνό ($r \geq \dfrac{1}{2}$) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η απεικόνιση φ είναι quasi ισομετρία.

3. Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ με $\varphi(x) = [x]$ (όπου $[x] =$ είναι το ακέραιο μέρος του x) είναι quasi ισομετρική εμφύτευση με $\kappa = 1, c = 1$ αφού: $x - 1 < [x] \leq x$, $y - 1 < [y] \leq y$ ή $x - y - 1 < [x] - [y] < x - y + 1$ και όμοια $-x + y - 1 < [y] - [x] < -x + y + 1$, οπότε τελικά $|x - y| - 1 < |[x] - [y]| < |x - y| + 1$. Τελικά αφού η απεικόνιση φ είναι επί ισχύει $\mathbb{R} \sim \mathbb{Z}$.

4. Κάθε μη κενός φραγμένος χώρος είναι quasi ισομετρικός σε κάθε σημείο του. Πράγματι αν R η διάμετρος του χώρου τότε αν επιλέξουμε $\kappa = 1$ και $c = 2R + 1$, έχουμε μια quasi ισομετρία, αφού η απόσταση των εικόνων είναι ίση με μηδέν.

5. Όλα τα κανονικά δέντρα $T_k, k \geq 4$ είναι *quasi* ισομετρικά με το κανονικό δέντρο T_3.

Παράδειγμα: $T_3 \sim T_4$



Έστω απεικόνιση $q : T_3 \to T_k$ που στέλνει όλες τις ακμές του T_3, που δεν είναι έντονες, ισομετρικά σε ακμές του T_k και όλα τα μονοπάτια μήκους $k-3$ του πρώτου σε μία κορυφή του δευτέρου. Η απεικόνιση q είναι επί και ισχύει:

$$\frac{1}{k-2}d(x,y) - 1 \leq d(q(x), q(y)) \leq d(x,y).$$

ή

$$\frac{1}{k-2}d(x,y) - 1 \leq \frac{d(x,y)}{k-2} \leq d(x,y).$$

Άρα γενικά $T_k \sim T_m, \forall k, m \geq 3$.

Ένα παράδειγμα quasi ισομετρικής εμφύτευσης αλλά όχι quasi ισομετρίας, είναι η απεικόνιση $\varphi : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ με $\varphi(t) = (t, \ln t)$ που είναι $(\sqrt{2}, 0)$ quasi ισομετρική εμφύτευση αφού : Για κάθε $t_1, t_2 \in [1, \infty)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}|t_1 - t_2| \leq \sqrt{(t_1-t_2)^2 + (\ln t_1 - \ln t_2)^2} \leq \sqrt{2}|t_1 - t_2|$. Το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι φανερό και για το άλλο έχουμε διαδοχικά:

$$\ln^2\left(\frac{t_1}{t_2}\right) \leq (t_1 - t_2)^2$$

ή

$$\left(\frac{\ln t_1 - \ln t_2}{t_1 - t_2}\right)^2 \leq 1$$

που με το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$ έχουμε $f'(t_0)^2 \leq 1$ ή ισοδύναμα $t_0 \geq 1$. Αφού το $[1, \infty)$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^2$ η φ δεν είναι quasi ισομετρία.

Παραδείγματα μη quasi ισομετριών.

1. $\mathbb{R} \not\sim [0, \infty)$

   Απόδειξη. Έστω υπάρχει $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι quasi ισομετρία. Καθώς $t \to \infty$, έχουμε $\varphi(t) \to \infty$ και $\varphi(-t) \to \infty$, αφού διαφορετικά από την ανισότητα $\frac{1}{k}|t| + c \leq |\varphi(t)|$ θα οδηγούμαστε σε άτοπο. Επίσης $|\varphi(n) - \varphi(n+1)| \leq k|(n+1) - n| + c, k \geq 1, c \geq 0$, δηλαδή είναι $k + c$ φραγμένη. Έστω μερικά a πολύ μεγαλύτερα από το $\varphi(0)$ και μια ακολουθία $(\varphi(n)_{n \in \mathbb{N}})$, που είναι σε φραγμένη απόσταση από το a. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $p \in \mathbb{N}$ ώστε $|a - \varphi(p)|$ να είναι φραγμένη.(Έστω $p = max\{n \in \mathbb{N} / \varphi(n) < a\}$). Όμοια υπάρχουν κάποια $q < 0$ με $|a - \varphi(q)|$ φραγμένη. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\varphi(p) - \varphi(q)|$ φραγμένη, οπότε και $|p-q|$ φραγμένη. Οπότε και $p \leq p-q$ είναι φραγμένο. Αλλά $|\varphi(0) - \varphi(p)|$ συμφωνεί με $|a - \varphi(0)|$ ως προς μια προσθετική σταθερά. Αν επιλέξουμε το a πολύ μεγάλο, χωρίς να επηρεάζονται αυτές οι σταθερές, ερχόμαστε σε αντίφαση.

   Θα γράψουμε το παραπάνω επιχείρημα με αναφορά στις $quasi$ ισομετρικές σταθερές k_1, k_2, k_3, k_4. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι συνεχής απεικόνιση, η φ quasi ισομετρία και ισχύει:$|\varphi(x) - f(x)| \leq k, \forall x \in \mathbb{R}$. Αφού η φ είναι quasi ισομετρία υπάρχουν k_3, k_4 ώστε να ισχύει: $|\varphi(t) - \varphi(u)| \leq k_3|t - u| + k_4, \forall t, u \in \mathbb{R}$. Αν $\varphi|\mathbb{Z} = f|\mathbb{Z}$ και δεδομένου $n \in \mathbb{Z}, t \in [0, 1]$ ορίζουμε με γραμμική παρεμβολή $f(n+t) = t\varphi(n) + (1-t)\varphi(n+1)$. Σημειώνουμε ότι $|f(n+t) - f(n)| \leq |\varphi(n+1) - \varphi(n)| \leq k_3 + k_4$ και $|\varphi(n+t) - \varphi(n)| \leq k_3 t + k_4 \leq k_3 + k_4$. Άρα για $k = 2(k_3 + k_4)$ ισχύει $|f(n) - \varphi(n)| \leq k$. Για $t \to \infty, \varphi(t) \to \infty, \varphi(-t) \to \infty$ και ισχύει το ίδιο για την f. Επιλέγοντας $\alpha \geq f(0)$ από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχουν $p \geq 0$ και $q \leq 0$ ώστε $f(p) = f(q) = \alpha$. Αφού $|\varphi(p) - \varphi(q)|$ είναι φραγμένη, έπεται ότι και $|p - q|$ είναι φραγμένη, $p \leq |p - q|$ είναι φραγμένη, οπότε $|\varphi(p) - \varphi(0)| = \alpha$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο αφού α γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε. $\square$

2. $\mathbb{R}^2 \not\sim \mathbb{R}$

Θα μπορούσαμε να το δείξουμε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα, ότι κάθε συνεχής απεικόνιση από κύκλο σε ευθεία πρέπει να ταυτίσει κάποια αντιδιαμετρικά ζεύγη σημείων. (Αυτό το θεώρημα είναι συνέπεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών). Παίρνοντας ένα πολύ μεγάλο κύκλο θα καταλήξουμε σε μια αντίφαση. Καθώς οι quasi ισομετρίες δεν είναι συνεχείς απεικονίσεις θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τρόπο για να το αποδείξουμε.

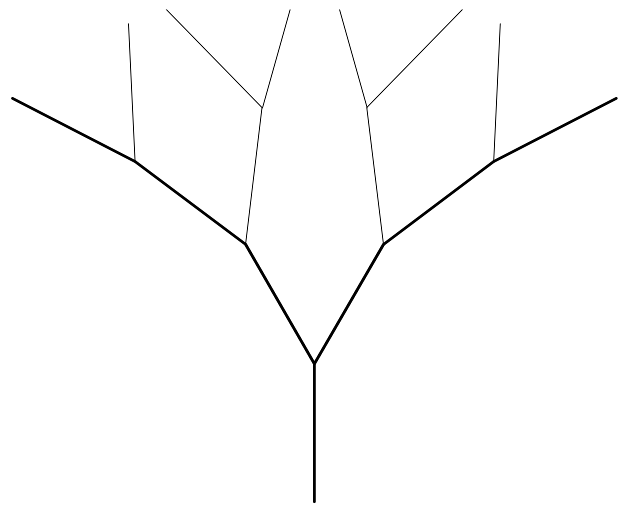
Έστω η ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια quasi ισομετρία. Επιλέγουμε $n \in N$ αρκετά μεγάλο και έστω $x_0, x_1, ..., x_{2n} = x_0$ είναι $2n$ σημεία σε ίση απόσταση μεταξύ τους στον κύκλο S που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα n. Η επιλογή των $2n$ σημείων γίνεται για να εξασφαλίσουμε το τόξο που ενώνει τα x_i, x_{i+1} να έχει φραγμένο μήκος. Τότε έχουμε $x_{i+n} = -x_i$, αφού είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου, καθώς και την ανισότητα $||x_i - x_{i+1}|| \leq$ π, αφού το μήκος της χορδής είναι μικρότερο ή τετριμμένα ίσο από το μήκος του τόξου που είναι ίσο με $\frac{2\pi}{2n} \cdot n$. Επειδή φ είναι quasi ισομετρία, η απόσταση $|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})|$ είναι φραγμένη. Μπορούμε να ορίσουμε μια συνεχή απεικόνιση $f : S \to \mathbb{R}$ θέτοντας $f(x_i) = \varphi(x_i), \forall i = 1, 2, ..., 2n$ και στέλνοντας το τόξο του S μεταξύ x_i και x_{i+1} πάνω στο μεσοδιάστημα μεταξύ του $\varphi(x_i)$ και $\varphi(x_{i+1})$ στο $\mathbb{R}$. Το διάστημα αυτό έχει φραγμένο μήκος και με το παραπάνω θεώρημα υπάρχει κάποιο $x \in S$ ώστε $f(x) = f(-x)$.

Διαλέγουμε μερικά x_i κοντά στο $x \in S$. Τότε $||x - x_i|| = || - x - (-x_i)|| <$ π, (το ίσον δεν ισχύει αφού $x \neq x_i$) οπότε αφού $f(x_i) = \varphi(x_i)$ και το $f(x)$ βρίσκεται σε ένα διάστημα στην ευθεία, έχουμε ότι: $|f(x_i) - f(x)|$ και $|f(-x_i) - f(-x)|$ είναι φραγμένες και επομένως $|\varphi(x_i) - \varphi(-x_i)| = |f(x_i) - f(-x_i|$ είναι φραγμένη (τριγωνική ανισότητα). Τελικά $||x_i - (-x_i)|| = 2||x_i|| = 2n$ είναι φραγμένη. Διαλέγοντας το a αρκετά μεγάλο καταλήγουμε σε άτοπο.

Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η συνεχής απεικόνιση της σφαίρας S^n στο $\mathbb{R}^n$ πρέπει να αναγνωρίσει μερικά αντιδιαμετρικά σημεία. Οπότε για να υπάρχει *quasi* ισομετρική εμφύτευση από το $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^n$ πρέπει $m \leq n$. Τελικά $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ για $n = m$.

3. Τα 3-κανονικά δέντρα δεν είναι quasi ισομετρικά με το $\mathbb{R}$.

Γεωμετρική απόδειξη: $T_3 \not\sim \mathbb{R}$



Τα δύο έντονα μονοπάτια που ξεκινούν από το κάτω άκρο του δέντρου είναι quasi ισομετρικά με το $\mathbb{R}$. Αλλά και το έντονο μονοπάτι που έχει άκρα τα άνω άκρα των προηγούμενων μονοπατιών είναι quasi ισομετρικό με το $\mathbb{R}$. Από τα αρχικά μονοπάτια όμως προκύπτει ότι το τελευταίο είναι quasi ισομετρικό με το $[0,\infty)$. Δηλαδή $\mathbb{R} \sim [0,\infty)$ που δεν ισχύει.

10 Το Cayley γράφημα ξανά

Έστω $\Delta = \Delta(G,S)$, $\Delta' = \Delta(G,S')$ τα Cayley γραφήματα μιας ομάδας G με πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων S, S' αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με d, d' τις αντίστοιχες μετρικές των δύο γραφημάτων. Επεκτείνουμε την ταυτοτική απεικόνιση των κορυφών $V(\Delta) \to V(\Delta')$ σε μια απεικόνιση $\varphi : \Delta \to \Delta'$ που στέλνει κάθε ακμή του Δ γραμμικά σε ένα γεωδαισιακό στο Δ' με τα ίδια άκρα. Επιλέγοντας κατάλληλα αυτά τα γεωδαισιακά, μπορούμε να πούμε ότι η απεικόνιση φ είναι equivariant, δηλαδή για όλα τα $x \in \Delta, g \in G$ ισχύει: $g\varphi(x) = \varphi(gx)$. Για $x \in V(\Delta)$ η προηγούμενη ισότητα είναι φανερή αφού η φ είναι ταυτοτική στις κορυφές. Αν $x = (x_1, y_1)$ μιά ακμή του Δ τότε $g\varphi(x)=g(\gamma(x_1,y_1)) = \gamma(gx_1, gy_1) = \varphi(gx)$, όπου $\gamma(x_1,y_1)$ είναι το γεωδαισιακό μονοπάτι στο οποίο απεικονίζεται η ακμή (x_1,y_1) μέσω της απεικόνισης φ.

Θέτουμε $r = \max\{d'(1,a) \mid a \in S\}$. Τότε κάθε ακμή στο Δ απεικονίζεται σε ένα μονοπάτι μήκους το πολύ r στο Δ', οπότε $d'(\varphi(x), \varphi(y)) \leq rd(x,y)$. Αν κάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, όμοια προκύπτει ότι:

$$d(x,y) \leq r'd'(\varphi(x), \varphi(y))$$

δηλαδή η φ είναι quasi ισομετρική εμφύτευση. Επίσης

$\forall\, y \in \Delta', \exists\, x = y \in \Delta$ με $d'(y, \varphi(x)) = d(x,x) = 0 \leq k,$ αφού $\varphi(x) = x, x \in V(\Delta)$

Άρα έχουμε αποδείξει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 10.1 *Έστω S, S' είναι πεπερασμένα γεννητόρων σύνολα για μια ομάδα G. Τότε υπάρχει μια equivariant quasi ισομετρία για τα Cayley γραφήματα $\Delta = \Delta(G,S)$, $\Delta' = \Delta(G,S')$.*

Ορισμός 10.1 *Αν G, G' είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες, θα λέμε ότι είναι quasi ισομετρικές αν $\Delta(G) \sim \Delta(G')$ και θα γράφουμε $G \sim G'$.*

Παραδείγματα

1. Αν $p, q \geq 2$ τότε οι ελεύθερα παραγόμενες ομάδες F_p, F_q είναι quasi ισομετρικές αφού για τα Cayley γραφήματά τους, τα κανονικά δέντρα T_{2p}, T_{2q}, ισχύει: $T_{2p} \sim T_{2q}$.
2. Αν $p \geq 2$ τότε $F_p \not\sim \mathbb{Z}$ (αφού $T_3 \not\sim \mathbb{R}$).
3. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

   Η ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ παράγεται από τα $(1,\bar{0})$ και $(0,\bar{1})$ και αν θεωρήσουμε $\varphi : \Delta(\mathbb{Z}, S) \to \Delta(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, S')$ με $\varphi(x) = (x, \bar{0})$ ισχύει: $d(x,y) = d(\varphi(x), \varphi(y)),\ \forall\, x, y \in \Delta(\mathbb{Z}, S)$ και $\forall\, y \in \Delta(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, S'), \exists\, x \in \Delta(\mathbb{Z}, S)$ με $d(\varphi(x), y) \leq 1$ είναι $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Ορισμός 10.2 *Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G είναι quasi ισομετρική με ένα γεωδαισιακό χώρο X, αν $\Delta(\Gamma) \sim X$. Τότε γράφουμε $\Gamma \sim X$.*

Παραδείγματα

1. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{R}$.

   Απόδειξη. Το Caley γράφημα $\Gamma(\mathbb{Z}, \{a\})$ μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης είναι quasi ισομετρικό με την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

2. $\mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{R}^2$.

   Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε την ταυτοτική απεικόνιση $\varphi : \Delta(\mathbb{Z}^2, S) \to \mathbb{R}^2$ με S οι συνήθεις γεννήτορες, τότε ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d(x,y) \leq d'(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(x,y)$$

   όπου $x = (x_1, y_1)$ και $y = (x_2, y_2)$, αφού ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

   Αφού επιπλέον

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^2, \exists\, x \in \Delta(\mathbb{Z}^2, S) \text{ με } d'(y, \varphi(x)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   έχουμε ότι: $\mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{R}^2$.

3. $\mathbb{Z}^3 \sim \mathbb{R}^3$

   Απόδειξη. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη βρίσκουμε ότι:
   $\frac{1}{\sqrt{3}}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \leq (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$

   Επιπλέον ισχύει:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^3, \exists\, x \in \Delta(\mathbb{Z}^3, S) \text{ με } d'(y, \varphi(x)) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   δηλαδή $\mathbb{Z}^3 \sim \mathbb{R}^3$.

4. Ισχύει $F_m \sim \mathbb{Z}^n$ αν και μόνο αν $m = n = 1$.

11 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας την εργασία καταλήγω στο ότι εξετάσαμε πεπερασμένα παραγόμενα ομάδες αναγνωρίζοντας τες ως γεωμετρικά αντικείμενα. Αυτό έγινε κυρίως με τη μελέτη των γραφημάτων *Cayley* η οποία εκτός από το γράφημα δομή είναι προικισμένη με τη δομή μετρικού χώρου. Μελετήσαμε τις ομάδες που είναι *quasi* ισομετρικές σε κάποια συγκεκριμμένη ομάδα ή σε κάποιο μετρικό χώρο. Αποδείξαμε την μη *quasi* ισομετρία βασικών μετρικών χώρων και με γεωμετρική αναπαράσταση.

Κλείνοντας παραθέτω τα λόγια του Pierre de La Harpe όπως αναφέρονται στην εισαγωγή του βιβλίου του Θέματα Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων: «Μια από τις προσωπικές μου πεποιθήσεις είναι ότι η γοητεία με συμμετρίες και ομάδες είναι ένας τρόπος αντιμετώπισης των απογοητεύσεων των περιορισμών της ζωής. Θα θέλαμε να αναγνωρίσουμε συμμετρίες που μας επιτρέπουν να αναγνωρίσουμε περισσότερα από αυτά που μπορούμε να δούμε και με αυτή την έννοια η μελέτη της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων είναι μέρος του πολιτισμού».

Αναφορές

[1] ..Β.Μεταφτσής,Σημειώσεις Μεταπτυχιακής Θεωρίας Ομάδων http:www.samos.aegean.gr/math/vmet/SimeioseisMathimatos.pdf Δεκέμβρης 2016

[2] ..Brian H. Bowditch. A course on geometric group theory [October 2005]

[3] ..Alessandro Sisto Lecture notes on Geometric Group Theory July 3, 2014

[4] .. J.S.Milne Group Theory www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT310.pdf September 24, 2010

[5] ..Correlia Drutu and Michael

$https : //www.math.ucdavis.edu/\ kapovich/EPR/kapovich_drutu.pdf$