ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ – ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΓΙΑ ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ»

ΑΔΙΚΗΜΕΝΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΡΟΔΟΣ, *ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΔΙΚΗΜΕΝΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

Α.Μ.413Μ/2014001

«ΓΙΑ ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ»

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΣΚΟΥΜΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛ ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ-ΚΟΤΤΑ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΡΟΔΟΣ, ***ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016***

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Για μια μελέτη και διερεύνηση της επιρροής και επίδρασης των συστημάτων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικών εργαλείων στην κατανόηση των κλασμάτων.

*****

On a study and investigation of influence of software and systems of dynamic geometry as representation tools on understanding of fractions.

ΑΔΙΚΗΜΕΝΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπων: Ευγένιος Αυγερινός, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 28/09/2016

1. Ευγένιος Αυγερινός, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου ....
2. Μιχαήλ Σκουμιός, Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου ....
3. Αθανασιάδου-Κόττα Ευαγγελία, Επίκουρη Καθηγήτρια Παν/μίου Αθηνών ______________

ΡΟΔΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της πρωτότυπης μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, ότι έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες και ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ.

Αδικημενάκη Μαρία

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τη συγγραφή της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας με τίτλο *Για μια μελέτη και διερεύνηση της επιρροής και επίδρασης των συστημάτων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων* που εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Επιστήμες της Αγωγής – Εκπαίδευση με Χρήση Νέων Τεχνολογιών» του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου στη Ρόδο έχουν κάνει δυνατή με τη συμβολή τους μία σειρά ανθρώπων, στους οποίους νιώθω την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες και την ειλικρινή ευγνωμοσύνη μου.

Καταρχάς, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου κύριο Αυγερινό Ευγένιο, επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας και ερευνητικό μου σύμβουλο, για την πολύτιμη καθοδήγηση και τις συνεχείς υποδείξεις του σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της. Το προσωπικό ενδιαφέρον και η ανεκτίμητη βοήθειά του συνέβαλαν τα μέγιστα στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα, επίσης, να απευθύνω και στα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου κύριο Μιχαήλ Σκουμιό και την Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών κυρία Αθανασιάδου-Κόττα Ευαγγελία για τη συνεργασία και τις χρήσιμες εισηγήσεις τους.

Ευχαριστίες εκφράζονται και προς όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα σπουδών, οι οποίοι συντέλεσαν στην περαιτέρω κατάρτισή μου και στη διεύρυνση του τρόπου σκέψης μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω, ακόμη, στους διευθυντές του 2^{ου} Δημοτικού Σχολείου Μοιρών και του Δημοτικού Σχολείου Πετροκεφαλίου Ηρακλείου Κρήτης, όπως επίσης και στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές της Δ’ τάξης των παραπάνω Δημοτικών Σχολείων για τη συγκατάθεσή τους και την άψογη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια της υλοποίησης της έρευνάς μου. Δίχως αυτούς αδιαμφισβήτητα δεν θα είχαν εκπληρωθεί οι σκοποί της παρούσας εργασίας.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ θα ήθελα να απευθύνω στην οικογένειά μου, χωρίς την υπομονή, την κατανόηση και την αμέριστη συμπαράσταση της οποίας η παρούσα εργασία δε θα είχε υλοποιηθεί.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα 5.2.14: Το δεύτερο σχήμα δείχνει το κλάσμα ½ (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 7).

Γράφημα 5.2.15: Το πρώτο σχήμα δείχνει το κλάσμα 4/8 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 8).

Γράφημα 5.2.16: Το τρίτο και το τέταρτο σχήμα δείχνουν το κλάσμα 1/3 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 9).

Γράφημα 5.2.17: Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο σχήμα δείχνει το ¼ (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 10).

Γράφημα 5.2.18: Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο σχήμα δείχνει το ¼ (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 11).

Γράφημα 5.2.19: Ο κύκλος που είναι χωρισμένος σε 8 ισοδύναμα κομμάτια μπορεί να δείξει το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 3 κομμάτια του (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 12.1).

Γράφημα 5.2.20: Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι χωρισμένο σε 8 ισοδύναμα κομμάτια μπορεί να δείξει το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 3 κομμάτια του. Διαφορετικά τα 16 ισοδύναμα κουτάκια μπορούν να δείξουν το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 6 κουτάκια από αυτά (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 12.2).

Γράφημα 5.2.21: Με τη βοήθεια των ευθύγραμμων τμημάτων αποδεικνύεται ότι τα κλάσματα 2/3 και 8/12 είναι ισοδύναμα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 13).

Γράφημα 5.2.22: Ο ξυλοκόπος χρειάστηκε 5/6 του κορμού για να κατασκευάσει ολόκληρο το τραπέζι, σύμφωνα με το ευθύγραμμο τμήμα που χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί η λύση (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 14).

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

βλ.: βλέπε

π.χ.: παραδείγματος χάριν

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παρά το γεγονός ότι στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση σημαντικό μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων των Μαθηματικών αφιερώνεται στη διδασκαλία των κλασμάτων και γενικά των ρητών αριθμών, εντούτοις, εντοπίζεται μεγάλη δυσκολία της σε βάθος κατανόησης αυτών και των ιδιοτήτων τους από τους μαθητές του Δημοτικού, ακόμη και με τη βοήθεια αναπαραστάσεων. Για το λόγο αυτό, τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικά με τα αίτια και τους παράγοντες που προκαλούν και εντείνουν αυτό το αποτέλεσμα. Έτσι, η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη μελέτη της επίδρασης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των κλασματικών αριθμών και, πιο συγκεκριμένα, στη διερεύνηση του κατά πόσο τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία συντελούν αποφασιστικά στη σε βάθος κατανόηση των κλασμάτων και των ιδιοτήτων τους. Για τις ανάγκες της εν λόγω έρευνας συγκροτήθηκε εκπαιδευτικό υλικό (ερωτηματολόγιο), το οποίο χορηγήθηκε στους μαθητές της Δ' τάξης δύο Δημοτικών σχολείων στο νομό Ηρακλείου Κρήτης. Τα δεδομένα της έρευνας ουσιαστικά αποτέλεσαν οι απαντήσεις των μαθητών, ενώ, όσον αφορά στον ερευνητικό σχεδιασμό, κύριος στόχος ήταν η διερεύνηση του βαθμού κατανόησης και εφαρμογής των κλασμάτων σε προβλήματα από τους μαθητές, όπως επίσης και η ικανότητα αποτελεσματικής διαχείρισης των προβλημάτων αυτών. Με τον τρόπο αυτό, εξετάστηκε, όχι μόνο η λύση που κάθε φορά επιλεγόταν για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, αλλά και το κατά πόσο τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας εφαρμόστηκαν ως αναπαραστατικά εργαλεία. Αναφορικά με τα αποτελέσματα από την επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας, αυτά παρατίθενται με δύο διαφορετικές μεθόδους ανάλυσης, τα προγράμματα Microsoft Excel και CHIC του Regis Gras. Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν εσωτερικά εμπόδια που καθιστούν ανέφικτη τη σε βάθος κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων, γεγονός που καθιστά επιτακτική την ανάγκη για περαιτέρω και ορθότερη χρήση των αναπαραστάσεων στη διδακτική διαδικασία και, ειδικότερα, των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικών εργαλείων. Αυτό είναι το κλειδί για την επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής και την προσπέλαση αυτών των εμποδίων από τους μαθητές του Δημοτικού.

ABSTRACT

Although the teaching of fractions, and rational numbers in general, occupy an important part of the curricula of Mathematics in primary education, however, a great difficulty is found concerning the deep understanding of them and their properties by elementary students, even using representations. For this reason, it has been observed an intense research focus on the causes and the factors that provoke and intensify this effect in the latest years. Thus, this paper aims to study the effect of representations in the teaching and learning of fractional numbers and, more specifically, to investigate whether the dynamic geometry systems, as representational tools, decisively contribute to the in-depth understanding of fractions and their properties. For the purposes of this investigation, educational material (questionnaire) was created, which was delivered to students of the fourth grade of two elementary schools in Heraklion of Crete Island. Student's responses constituted the data of the particular survey, while, as for the research planning, the main objective was to investigate the degree of understanding and application of fractions in problems, as well as, the effective management capacity of them by students. In this way, not only the solution that students were choosing each time to solve these problems was examined, but also whether the dynamic geometry systems were implemented as representational tools. Regarding the results of the processing of the survey data, they are cited in two different analyzing methods, both Microsoft Excel programs CHIC and of Regis Gras. The general conclusion is that elementary students often face internal obstacles that make it impossible for them to thoroughly understand fractions, a fact that makes the need for further and better use of the representations in the teaching process and, in particular, of the dynamic geometry systems, as representational tools, imperative. This is the key to achieve conceptual change and make elementary students surmount these obstacles.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Οριοθέτηση του θέματος

Ο λόγος για τον οποίο το θεματικό πεδίο των αναπαραστάσεων κατέχει δεσπόζουσα θέση στο χώρο της διδακτικής των Μαθηματικών είναι ότι οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σύμφυτες με τα Μαθηματικά (Kaput 1987; Goldin,1998). Την άποψη, άλλωστε, ότι η ανθρώπινη σκέψη διακρίνεται από την ικανότητα για έκφραση μίας ιδέας με διάφορους τρόπους συμμερίζονται πολλοί ερευνητές, καθώς η επαφή του ατόμου με σύμβολα και ποικίλα είδη αναπαράστασης ανιχνεύεται ήδη από την εμβρυική ηλικία (Ξενοφώντος, Γαγάτσης & Ασλανίδης, 2006). Εξαιτίας, λοιπόν, της μείζονος σημασίας των διαφόρων ειδών αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, εντοπίζεται ένας μεγάλος αριθμός ερευνών που πραγματεύονται το ζήτημα αυτό (Γαγάτσης, Δημητρίου, Αφαντίτη, Μιχαηλίδου, Παναούρα, Σιακαλλή & Χριστοφορίδης, 1999). Στο ευρύτερο πλαίσιο αυτών των ερευνών εντάσσεται και η παρούσα εργασία, της οποίας απώτερος στόχος είναι η μελέτη του κατά πόσο, αλλά και με ποιους τρόπους, τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων είναι δυνατό να συντελέσουν αποφασιστικά στην αποδοτικότερη διδασκαλία από την πλευρά των εκπαιδευτικών και την καλύτερη κατανόηση από την πλευρά των μαθητών, των μαθηματικών αντικειμένων γενικότερα, καθώς επίσης και της ιδιότυπης μαθηματικής έννοιας των κλασμάτων ειδικότερα.

1.2 Βασικός σκοπός και επιμέρους ερευνητικοί στόχοι

Πρωταρχικό σκοπό της εργασίας μας αποτελεί η διερεύνηση της επιρροής των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικών εργαλείων για την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές της Δ’ δημοτικού μέσω της δημιουργίας και της αξιολόγησης εκπαιδευτικού υλικού. Κρίνεται απαραίτητο, βέβαια, να σημειώσουμε ότι πριν από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων από το εκπαιδευτικό υλικό που παρασχέθηκε στους μαθητές της Δ’ τάξης, προηγήθηκε μελέτη των γνωσιακών τους δεξιοτήτων αναφορικά με τους κλασματικούς αριθμούς. Αναφορικά με τη μεθοδολογική προσέγγιση του βασικού θέματος, αυτή περιλαμβάνει τμήματα τόσο της ποιοτικής έρευνας, όσο και της βιβλιογραφικής, της εμπειρικής και της ποσοτικής.

Επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα της δεδομένης εργασίας συνιστούν τα εξής:

1. Να καθοριστούν οι έννοιες του αριθμού, των ρητών και του κλάσματος.
2. Να μελετηθεί η εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος ιστορικά και των διαστάσεών της.
3. Να πραγματοποιηθεί ανασκόπηση της έννοιας του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα Αναλυτικά Προγράμματα της Ελλάδας και της Κύπρου.
4. Να προσδιοριστούν οι δυσκολίες που οι μαθητές συνήθως αντιμετωπίζουν στην κατανόηση των κλασμάτων.
5. Να καθοριστούν οι όροι *εννοιολογική αλλαγή*, όπως επίσης και *εννοιολογική* και *διαδικαστική* γνώση στα Μαθηματικά.
6. Να αναλυθούν οι έννοιες της αναπαράστασης, των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των τρόπων επίδρασής τους στη βελτίωση της διδασκαλίας γενικότερα, αλλά και των κλασμάτων ειδικότερα.
7. Να αξιολογηθούν τα εκπαιδευτικά λογισμικά Geometer's Sketchpad, Geogebra, Cabri Geometry και Mprog ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων και των ιδιοτήτων τους.
8. Να παρουσιαστούν τα ερευνητικά ευρήματα σχετικά με τους στόχους χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, τη σημασία τους και την αναγκαιότητα χρήσης τους στη διδασκαλία των κλασμάτων.
9. Να αναδειχτεί η σημαντικότητα της διαδικασίας της μετάφρασης στη χρήση αναπαραστάσεων.
10. Να περιγραφούν οι περιορισμοί που προκύπτουν από τη χρήση αναπαραστάσεων.
11. Να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές του Δημοτικού, πριν από τη διεξαγωγή της έρευνας, είχαν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος, όπως επίσης και της λύσης που επιλέγουν, προκειμένου να επιλύσουν προβλήματα κλασμάτων .
12. Να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές του Δημοτικού χρησιμοποιούν τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία για την κατανόηση των κλασμάτων.

1.3 Σημασία της εργασίας

Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι τα Μαθηματικά από τη φύση τους συνδέονται με συνεχή τρόπο με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Kaput, 1987) και ότι σχεδόν καμία μαθηματική δραστηριότητα δε δύναται να πραγματοποιηθεί χωρίς ορισμένους τρόπους έκφρασής της σε υλικά μέσα (Κορδάκη, χ.χ.), γίνεται αντιληπτό το γιατί η συμβολή των αναπαραστάσεων στην καλύτερη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και, πιο συγκεκριμένα, των κλασμάτων αποτελεί το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας. Επιπλέον, η συγκεκριμενοποίηση της διερεύνησης του παραπάνω ζητήματος απέναντι στα κλάσματα δεν είναι τυχαία, καθώς το φάσμα των ρητών αριθμών καταλαμβάνει ένα αρκετά μεγάλο μέρος του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε πολλές χώρες παγκοσμίως και συνιστά θεμελιώδη μαθηματική έννοια (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά-Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, 2006). Ένας ακόμη λόγος στον οποίο έγκειται η σημαντικότητα της παρούσας εργασίας είναι οι αποδεδειγμένες, και κάποιες φορές απροσπέλαστες, δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μελετώντας τους κλασματικούς αριθμούς. Μέσα από την αξιοποίηση, επομένως, των ερευνητικών μας αποτελεσμάτων, ευελπιστούμε να προσθέσουμε έστω κι ένα μικρό λιθαράκι στην προσπάθεια διαμόρφωσης μίας συνεκτικής θεωρίας σε σχέση με τις αναπαραστάσεις και τα κλάσματα, η οποία θα περιλαμβάνει τη χρήση των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας και μακροπρόθεσμα θα καταστήσει τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών πιο προσοδοφόρα.

1.4 Δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο οριοθετείται το θεματικό περιεχόμενο της παρούσας εργασίας, ενώ παρουσιάζονται παράλληλα ο βασικός σκοπός και οι επιμέρους στόχοι της. Ακόμη, τεκμηριώνεται η σημασία της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνεται όλο το θεωρητικό υπόβαθρο που κρίνεται αναγκαίο να παρατεθεί, με σκοπό την αποσαφήνιση εννοιών και την καλύτερη κατανόηση του ερευνητικού τμήματος της εργασίας από τους αναγνώστες.

Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών που σχετίζονται, κυρίως, με τους στόχους χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, τον ρόλο τους και, ειδικότερα, σε ό,τι αφορά τα κλάσματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε κατά τη διεξαγωγή της έρευνας για τη μελέτη της επίδρασης των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρονται τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχόλησαν, ο ερευνητικός σχεδιασμός, οι απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με το δείγμα που συμμετείχε, τα μέσα συλλογής των δεδομένων, τα στάδια της ερευνητικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε, καθώς και η ανάλυση των δεδομένων.

Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας μετά από τη χορήγηση του εκπαιδευτικού υλικού στους μαθητές της Δ’ τάξης των δύο Δημοτικών σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα. Αυτά παρουσιάζονται με δύο διαφορετικές μεθόδους ανάλυσης, τα προγράμματα Microsoft Excel και CHIC του Regis Gras.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα που εξήχθησαν μετά από τη διεκπεραίωση της έρευνας, όπως επίσης και ο σχολιασμός τους.

Πρώτο Μέρος: Θεωρητική Ανασκόπηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται όλο το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι αναγκαίο για την κατανόηση της προβληματικής που αφορά στη συγκεκριμένη εργασία, αλλά και στο οποίο στηρίζεται η έρευνα που θα παρατεθεί στα παρακάτω κεφάλαια. Αρχικά, παρατίθενται βασικές διευκρινίσεις σχετικά με τις έννοιες του αριθμού (βλ. ενότητα 2.2), του συνόλου των ρητών (βλ. ενότητα 2.3) και της έννοιας του κλάσματος (βλ. ενότητα 2.4), προκειμένου να καθοριστεί η σημασία τους. Ακολούθως, παρουσιάζεται μία ιστορική ανασκόπηση σχετικά με την πορεία της εξέλιξης της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος (βλ. ενότητα 2.5), ενώ, στη συνέχεια, πραγματοποιείται διάκριση ανάμεσα στα διάφορα είδη και τις διαστάσεις των κλασμάτων (βλ. ενότητες 2.6, 2.7 και 2.8). Έπειτα, επιτελείται μία προσπάθεια καθορισμού των όρων *εννοιολογική* και *διαδικαστική* γνώση (βλ. ενότητα 2.9). Σειρά έχει η αναφορά ως προς την έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα Αναλυτικά Προγράμματα της Ελλάδας και της Κύπρου (βλ. ενότητα 2.10), με σκοπό να αναδειχθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων (βλ. ενότητα 2.11) και η προσέγγιση του όρου εννοιολογική αλλαγή σε σχέση με τα κλάσματα, αλλά και τις μαθηματικές έννοιες γενικότερα (βλ. ενότητα 2.12). Ακολουθεί η ανάλυση των εννοιών *αναπαράσταση* (βλ. ενότητα 2.13) και *πολλαπλές αναπαραστάσεις* (βλ. ενότητα 2.14), καθώς και οι τρόποι με τους οποίους μέσω της χρήσης τους αυτών η διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται αποτελεσματικότερη (βλ. ενότητα 2.15). Παρακάτω, γίνεται αναφορά στον όρο συστήματα δυναμικής γεωμετρίας και επιχειρείται μία κριτική θεώρηση των εκπαιδευτικών λογισμικών Geometer's Sketchpad, Geogebra, Cabri Geometry και Mprog (βλ. ενότητα 2.16). Τέλος, παρατίθεται σύντομη ανακεφαλαίωση των συγκεκριμένων ενοτήτων.

2.2 Η έννοια του αριθμού

Η έννοια του *αριθμού* είναι μία από τις πρωταρχικές και πιο βασικές έννοιες των Μαθηματικών. Ωστόσο, η απάντηση στο ερώτημα ''*τι είναι αριθμός;*'' δεν είναι ούτε απλή, ούτε μονοσήμαντη. Για το λόγο αυτό, ο ορισμός της έχει αποτελέσει και συνεχίζει να αποτελεί αντικείμενο διαφορετικών προσεγγίσεων τόσο με μαθηματικούς, όσο και με φιλοσοφικούς όρους (Καπέλου & Καφούση, 2003).

Σε μία πρώτη πολύ γενική προσέγγιση η έννοια του *αριθμού* (του φυσικού όπως τυπικά αποκαλείται στα Μαθηματικά) αναφέρεται προσδιοριστικά σε μία έκφραση του πλήθους μίας πολλαπλότητας διακριτών στοιχείων, ανεξάρτητα από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά και τις σχετικές τους θέσεις (πληθική έννοια του αριθμού) και, ταυτόχρονα, σε μία έκφραση της σχετικής θέσης ενός συγκεκριμένου στοιχείου σε μία σειρά στην οποία έχει διευθετηθεί μία πολλαπλότητα διακριτών στοιχείων, ανεξάρτητα από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους (διατακτική έννοια του αριθμού).

Το κάθε συγκεκριμένο πλήθος στοιχείων ή η κάθε σχετική θέση ενός συγκεκριμένου στοιχείου σε μία καθορισμένη σειρά αντιστοιχίζεται και εκφράζεται σε μονοσήμαντες γλωσσικές και συμβολικές διατυπώσεις. Οι διατυπώσεις αυτές ονομάζονται αριθμοί. Η πληθική και η διατακτική έννοια του αριθμού είναι έννοιες που εμπεριέχονται αλληλένδετα στη διατύπωση κάθε (φυσικού) αριθμού.

Κάθε (φυσικός) αριθμός είναι το αποτέλεσμα μίας βήμα προς βήμα νοητικής κατασκευής που έχει ως αφετηρία της τη διάκριση μίας χρονικής επαλληλίας νοητικών πράξεων σε δύο στοιχειώδεις ενότητες, όπου η μία διαδέχεται την άλλη εμπεριέχοντας, ως συστατικό στοιχείο, τη μνήμη της προηγούμενης. Η κατασκευή του αριθμού από το παιδί περιγράφεται εξελικτικά μέσα από τη δημιουργία ενός μοντέλου (Καφούση, 2000).

Στην ικανότητα του παιδιού για αρίθμηση στηρίζεται η ανάπτυξη των πρώτων αριθμητικών εννοιών υποστηρίζουν σύγχρονοι ερευνητές, ενώ, αρίθμηση ορίζεται η απαγγελία μιας σειράς αριθμολέξεων, έτσι ώστε κάθε αριθμολέξη να συνδέεται με μια αριθμήσιμη μονάδα. Η έννοια του αριθμού είναι η κατάληξη μιας σειράς δραστηριοτήτων οι οποίες συνδυάζουν τις διαφορετικές λειτουργίες που σχετίζονται με τους προφορικούς αριθμούς, όπως είναι η προφορική αρίθμηση, η καταμέτρηση, η μέτρηση, η αναγνώριση συμβόλων ή η αναγνώριση ποσοτήτων. Το πέρασμα της δράσης από τα πραγματικά αντικείμενα στους αριθμούς προϋποθέτει μια νοητική εξέλιξη που χωρίς αυτή το αριθμητικό σύμβολο μένει κενό περιεχομένου (Κασιμάτη, χ.χ.).

2.3 Έννοιες ρητών

Αναρίθμητες είναι οι καταστάσεις της καθημερινότητας που καθιστούν την εισαγωγή των μαθητών στους ρητούς αριθμούς, και κατά συνέπεια στα κλάσματα, αναγκαία από πολύ νωρίς. Ωστόσο, πολύ συχνά, εξαιτίας της στενής σχέσης μεταξύ των ρητών αριθμών και των κλασμάτων, οι όροι αυτοί συγχέονται (Smith, 1995). Για το λόγο αυτό, θεωρούμε χρήσιμο να παραθέσουμε την θεωρητική θεμελίωση τόσο των ρητών αριθμών, όσο και των κλασμάτων παρακάτω, προκειμένου να μην υπάρχει ταύτιση των δύο εννοιών.

Ως ρητός ορίζεται ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διαταγμένων ζευγών (α,β) ή α/β, ένα σύνολο δηλαδή κλασμάτων, όπου α και β είναι ακέραιοι αριθμοί με β#0 και δύο ζεύγη α/β και γ/δ θεωρούνται ισοδύναμα αν και μόνο αν α˙γ= β˙δ (Χασάπης, 2000).

Με άλλα λόγια, κάθε ρητός αριθμός είναι ένα σύνολο κλασμάτων που εκφράζουν το ίδιο μέτρο και κάθε κλάσμα αποτελεί μία από τις διαφορετικές, αν και ισοδύναμες μεταξύ τους, παραστάσεις ενός ρητού αριθμού. Ακόμη, κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί να παρασταθεί ως κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα, επομένως, κάθε ακέραιος αριθμός μπορεί δυνητικά να θεωρηθεί ρητός αριθμός.

Η έννοια του ρητού αριθμού σαφέστατα δεν ακολουθεί τις παραδοχές του φυσικού αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, οι ρητοί αριθμοί δεν βασίζονται στην αρίθμηση και έχουν πυκνή δομή, αντίθετα με τους φυσικούς που έχουν διακριτή. Υπάρχουν, δηλαδή, άπειροι ρητοί ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο ρητούς (Γαγάτσης και συν., 2006). Επιπρόσθετα, οι ρητοί αριθμοί δεν υποστηρίζονται από τις στρατηγικές διάταξης των φυσικών αριθμών, ενώ, ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία δεν είναι πάντα και ο μεγαλύτερος. Οι τέσσερις πράξεις μπορούν να μεγαλώνουν ή να μικραίνουν τους αριθμούς (Βοσνιάδου, Βαμβακούση, & Σκοπελίτη, 2008). Τέλος, οι ρητοί δεν έχουν μία μονοσήμαντη συμβολική αναπαράσταση, γεγονός που δυσχεραίνει την απόδοση του αναγκαίου νοήματος σε καθέναν από αυτούς και συχνά περιπλέκει τη νοητική δραστηριότητα χειρισμού τους.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η κατανόηση της φύσης και των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών από τους μαθητές συνιστούν περίπτωση εννοιολογικής αλλαγής, έννοιας στην οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια της παρούσας εργασίας.

2.4 Η έννοια του κλάσματος

Η θεωρητική θεμελίωση των κλασμάτων και των ρητών αριθμών επήλθε με την αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, τα στοιχεία των οποίων κρίνεται αναγκαίο να ικανοποιούν κάποιες βασικές ιδιότητες.

Στη μαθηματική επιστήμη το κλάσμα ορίζεται ως ένα στοιχείο μίας ολότητας, ως αντιπρόσωπος των κλάσεων ισοδυναμίας ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων. Δηλαδή ορίζεται ως μία σχέση και η σημασία του δεν αποδίδεται άμεσα αλλά μέσα από τις ιδιότητες του συστήματος. Επομένως, τα κλάσματα και, κατά συνέπεια, οι ρητοί αριθμοί είναι αποδεκτοί και θεμελιώνονται ως στοιχεία ενός καρτεσιανού γινομένου συνόλων (Λάκκη, 1980).

2.5 Ιστορική αναδρομή στα κλάσματα

Μία ιστορική αναδρομή στα στάδια της εξελικτικής πορείας της μαθηματικής έννοιας των κλασμάτων και, επομένως, στις εννοιολογικές αλλαγές που έχει υποστεί η συγκεκριμένη έννοια, θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμη προκειμένου να προσδιοριστούν τόσο προβλήματα τα οποία επιλύθηκαν με τη χρήση κλασμάτων, όσο και δυσκολίες που πιθανότατα αντιμετωπίστηκαν ωσότου καταλήξουμε στη σημερινή θεωρητική τους θεμελίωση. Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας περιλαμβάνει ποικίλα στάδια που διαφοροποιούνται από το πεδίο εφαρμογών της, αλλά και από την εννοιολογική υπόσταση της και τα οποία μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε σε τέσσερις ευρύτερες χρονικές περιόδους.

Προϊστορία

Παρόλο που, όπως έχει αποδειχθεί, οι προϊστορικοί λαοί είχαν ανακαλύψει την έννοια του αριθμού και τις προϋποθέσεις των υπολογισμών για την εφεύρεση συστημάτων αρίθμησης, ωστόσο δεν υπάρχουν στοιχεία για την ανάπτυξη της έννοιας του κλασματικού αριθμού (Keller, 1918). Πρωταρχικές χρήσεις της έννοιας του κλάσματος φαίνεται να εντοπίζονται σε αποκρυπτογραφημένα σύμβολα στις λεγόμενες πρωτο-ελαμιτικές πλάκες (Μεσοποταμία, 3000 π.Χ. περίπου). Ακόμη, στα πρώιμα σουμεριακά κείμενα που σχετίζονται με ανάγκες της καθημερινότητας και σχετίζονται με λογαριασμούς τροφίμων, υφασμάτων, αντικειμένων που παραλαμβάνονται, αποθηκεύονται ή διανέμονται εμφανίζονται σύμβολα που παραπέμπουν σε κλάσματα, ενώ, σε Πίνακες Συστημάτων μέτρησης παρατηρούνται υποδιαιρέσεις που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι αντιστοιχούν στις σημερινές κλασματικές μονάδες (Ritter, 1992) .

Πρώτη περίοδος: Αιγύπτιοι-Βαβυλώνιοι (2000 π.Χ.-500 π.Χ.)

Όπως έχει διαπιστωθεί με βάση ιστορικά στοιχεία που χρονολογούνται περί το 1800 – 1300 π.Χ., οι αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν για την έννοια του κλάσματος (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001). Αυτό πιστοποιείται και από το γεγονός ότι για την κατασκευή των πυραμίδων απαιτούνταν εκτεταμένες γνώσεις σχετικά με τις αναλογίες.

Μία πρώιμη μορφή κλασμάτων αποτελούν τα αιγυπτιακά εναδικά, ή αλλιώς μοναδιαία, κλάσματα, τα οποία συνήθως είχαν αριθμητή τη μονάδα και παρέπεμπαν στις σημερινές κλασματικές μονάδες. Ουσιαστικά συνιστούσαν φυσικά κλάσματα, τα οποία οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν για τις καθημερινές τους συναλλαγές, σε αυτά απέδιδαν ειδικά ονόματα και τα ερμήνευαν ως το μέρος που υπολείπεται για να συμπληρωθεί η εκάστοτε ακέραια μονάδα (Caveing, 1992). Δεν ανάπτυξαν ένα πιο αποδοτικό σύστημα καταγραφής κλασμάτων εξαιτίας του συστήματος των συμβόλων που χρησιμοποιούσαν.

Την ίδια χρονική περίοδο οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν ένα σύστημα αρίθμησης με αξία θέσης και βάση το εξήντα, όπου οι αριθμοί αναπαριστάνονταν ως αθροίσματα δυνάμεων του εξήντα και τα κοινά κλάσματα ως εξηκονταδικά. Για παράδειγμα το ¼ ισοδυναμούσε με το 15. Είχαν, δηλαδή, τη μορφή ακεραίου και προέκυπταν από τις υποδιαιρέσεις του χρόνου σε 360 ημέρες, της ώρας σε 60 λεπτά και του λεπτού σε 60 δευτερόλεπτα (Burton, 1988). Το συγκεκριμένο σύστημα αρίθμησης αποτέλεσε απομεινάρι από τους προγενέστερους Σουμέριους (2500 π.Χ.), των οποίων χαρακτηριστικό ήταν ότι έγραφαν τους αριθμούς από τα δεξιά προς τα αριστερά και απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία στο εξήντα λόγω του πλήθους των αριθμών με τους οποίους μπορεί να διαιρεθεί. Ακόμη, την εποχή αυτή χρησιμοποιήθηκε και από τους Κινέζους.

Δεύτερη περίοδος: Αρχαίοι Έλληνες (600 π.Χ.-300 μ.Χ.)

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν γράμματα αντί για αριθμούς, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κάνουν πολύπλοκους υπολογισμούς με απόλυτη ακρίβεια. Τα σημερινά ψηφία 1,2,3.... δεν είχαν επινοηθεί ακόμη, αφού πρώτοι τα εφάρμοσαν οι μεταγενέστεροι Άραβες. Χρησιμοποιούσαν δύο είδη αριθμητικών συστημάτων με βάση το 10: το Ηρωδιανό ή Αττικό και το Ιωνικό ή Αλεξανδρινό. Δεν χρησιμοποιούσαν τιμές θέσης, όπως γίνεται σήμερα, ούτε το 0 και τα κλάσματα. Για τους Πυθαγόρειους (540-450 π.Χ.) και τον Πλάτωνα ($4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) φαίνεται να υπάρχουν μόνο ακέραιοι αριθμοί (Γαγάτσης και συν., 2006). *Εντούτοις, παρά την τότε επικρατούσα αντίληψη για το αδιαίρετο της μονάδας, στην πρακτική λογιστική της αρχαίας Ελλάδας τα μέρη ή μόρια είχαν την ίδια ερμηνεία και τυπολογία με τα εναδικά αιγυπτιακά κλάσματα.* Η ιδέα του λόγου, όμως, ακόμη και όταν αναφέρεται σε αυτά τα μέρη, δε σχετίζεται με αριθμητική ποσότητα (Fowler, 1987).

Κατά τα ελληνιστικά χρόνια, ωστόσο, αρχίζουν πλέον να εμφανίζονται στα μαθηματικά έργα αριθμητικοί λόγοι, ενώ παρατηρείται μία έμμεση παραδοχή ότι τα κοινά κλάσματα συνιστούν αριθμούς.

Τρίτη περίοδος: Άραβες-Λατίνοι (700 μ.Χ.-1600 μ.Χ.)

Πρώτοι οι Άραβες κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα έδωσαν μεγάλη ώθηση στις διαδικασίες των πράξεων. Εισήγαγαν την έννοια και τον συμβολισμό του κλάσματος με τη σημερινή του μορφή, όπως επίσης και τη χρήση της αρίθμησης με δεκαδική θέση (Σταφυλίδου, 2001). Επιπρόσθετα, οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης, στην προσπάθειά τους να καλύψουν τις πρακτικές ανάγκες της καθημερινότητας και να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που δημιουργούσαν οι υπολογισμοί με κλάσματα, τα οποία περιλάμβαναν τεράστιους αριθμούς, επιχείρησαν να ανακαλύψουν νέους, πιο εύχρηστους αλγόριθμους για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Τη λύση στο πρόβλημα αυτό αποτέλεσαν οι δεκαδικοί αριθμοί (Γαγάτσης και συν., 2001).

Λίγο αργότερα, περί τον $16^{ο}$ αιώνα (περίοδος Αναγέννησης) βρίσκει πρόσφορο έδαφος και αναπτύσσεται η ανθρωπιστική παιδεία, με αποτέλεσμα τη θεσμοθέτηση πλέον της γραφής των κλασμάτων σε δεκαδική μορφή. Από ένα βυζαντινό έγγραφο, μάλιστα, αποδεικνύεται η γνώση των δεκαδικών κλασμάτων στο Βυζάντιο.

Τέταρτη περίοδος: (1600 μ.Χ.-1900 μ.Χ.)

Υπό το πρίσμα του Διαφωτισμού καθιερώνεται ευρύτατα η χρήση των δεκαδικών αριθμών ως μαθηματικό εργαλείο για την προσέγγιση τόσο των μεγεθών, όσο και των μαθηματικών οντοτήτων.

Την περίοδο αυτή ο Euler παρέχει πλήρη ορισμό του κλάσματος ως μαθηματικής αφηρημένης έννοιας, αναφέρει όλες τις περιπτώσεις διαφορετικών κλασμάτων, τις ιδιότητές τους, τη σχέση με την ακέραια μονάδα, τον τρόπο που διατάσσονται, καθώς επίσης και τις διαδικασίες των πράξεων με κλάσματα (Γαγάτσης και συν., 2006). Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι *αν το πηλίκο δύο αριθμών δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει ένα ιδιαίτερο είδος αριθμού που ονομάζεται κλάσμα και δηλώνει ένα τέτοιο πηλίκο.* Ορίζει, δηλαδή, το κλάσμα α/β ως πηλίκο διαίρεσης του α διά του β, τα οποία ονομάζει αριθμητή και παρονομαστή. Επίσης, ορίζει το κλάσμα α/β ως το γινόμενο του ακεραίου α επί την κλασματική μονάδα 1/β. Επιπρόσθετα διακρίνει τις εξής περιπτώσεις κλασμάτων: (α) το κλάσμα α/α, όπου ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή και το κλάσμα είναι ίσο με το 1, (β) το κλάσμα α/β, όπου α<β, το οποίο είναι μικρότερο του 1 και (γ) το κλάσμα α/β, όπου α>β, το οποίο είναι μεγαλύτερο του 1 και ονομάζεται καταχρηστικό (Σταφυλίδου, 2001).

Παρά ταύτα, ακόμη και μετά τη Γαλλική Επανάσταση, αξιόλογοι μαθηματικοί αναφέρονται στα προβλήματα της διδασκαλίας των κλασμάτων σε σχέση με τη διδασκαλία των ακεραίων. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό αν αναλογιστούμε τη μακρά πορεία που προηγήθηκε ωσότου φθάσουμε στην αξιωματική θεμελίωση των αριθμοσυνόλων, άρα και των κλασμάτων.

2.6 Οι διαστάσεις του κλάσματος

Ένας άλλος πολύ σημαντικός λόγος που καθιστά τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών μια πολύπλοκη διαδικασία έχει να κάνει με τις διάφορες διαστάσεις τους. Για το λόγο αυτό, όπως υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές, η διδασκαλία των κλασμάτων πρέπει να λαμβάνει χώρα μέσω ενός θεωρητικού μοντέλου, το οποίο θα σχετίζεται με τη διδασκαλία των διαφορετικών όψεων του κλάσματος (Γαγάτσης και συν., 2006).

2.6.1 Το κλάσμα ως μέρος όλου

Το κλάσμα ως μέρος του όλου αποτελεί συνήθως την πρώτη επαφή των παιδιών με τα κλάσματα και θεωρείται ευκολότερη προσέγγιση σε σχέση με τις υπόλοιπες (Γαγάτσης και συν., 2001). Σε αυτήν τη περίπτωση, το κλάσμα συνήθως αναπαρίσταται ως μέρος μιας επιφάνειας ενός γεωμετρικού σχήματος που είναι χωρισμένη σε ομοιόμορφα τμήματα ή ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Πρόκειται, δηλαδή, για μια κατάσταση στην οποία μια συνεχής ολόκληρη ποσότητα ή ένα ζεύγος ξεχωριστών αντικειμένων, χωρίζονται σε τμήματα ίσου μεγέθους (Marshall, 1993). Αναφορικά με τη συγκεκριμένη ερμηνεία, το όλο χωρίζεται σε β κομμάτια και κάθε κομμάτι συμβολίζεται ως 1/β ή στην περίπτωση α κομματιών, τότε α/β.

2.6.2 Το κλάσμα ως λόγος

Η υποέννοια της αναλογίας στα κλάσματα, εκφράζει την ιδέα της σύγκρισης, τη σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων και, για το λόγο αυτό, το κλάσμα θεωρείται περισσότερο ως αριθμητική σύγκριση παρά ως αριθμός (Marshall, 1993). Από μαθηματική άποψη αναφερόμαστε σε δύο χώρους μέτρησης που μπορούν να συνδεθούν είτε με μία ‘‘μεταξύ’’ των χώρων στρατηγική, οπότε και μιλάμε για λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής, είτε με μια ‘‘εντός’’ του ίδιου χώρου στρατηγική, οπότε και μιλάμε για «εσωτερικό» λόγο (Κολέζα, 2000). Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την έννοια των σχετικών ποσών (Marshall, 1993) για να κατανοήσουν πλήρως την έννοια των κλασμάτων ως αναλογίας. Πρέπει να κατανοήσουν, δηλαδή, ότι οι δύο ποσότητες που βρίσκονται σε σχέση αναλογίας, αλλάζουν μαζί - πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται - ώστε η σχέση τους να παραμένει σταθερή (Γαγάτσης και συν., 2006).

2.6.3 Το κλάσμα ως μέτρο

Στη συγκεκριμένη διάσταση, το κλάσμα σχετίζεται με δυο στενά συνδεδεμένες και αλληλοεξαρτώμενες ιδέες. Ειδικότερα, μπορεί να παρουσιαστεί και ως ένα σημείο πάνω στην αριθμητική γραμμή μεταξύ δύο ακεραίων, στην οποία έχουμε ορίσει αυθαίρετα ένα σημείο ως αρχή που αντιστοιχεί στο μηδέν και επαναλαμβάνουμε το μοναδιαίο κλάσμα ‘‘1/β’’ α φορές. Η αριθμητική γραμμή εκφράζει την έννοια του αριθμού ως μέτρο, δηλαδή ως απόσταση (Lamon, 1999). Αυτό είναι μια δεξιότητα πολύ χρήσιμη για την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων παρόλο που είναι αρκετά αφηρημένη για τους μαθητές. Όπως έχει επισημάνει η Ni (2002), πάνω στην αριθμητική γραμμή μπορούν να αναπαρασταθούν θεμελιώδεις έννοιες των κλασματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα, η πυκνότητα, η διαδοχικότητα, η μοναδικότητα και το άπειρο των κλασματικών αριθμών. Η μονάδα μέτρησης της αριθμητικής γραμμής, μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε μικρότερες μονάδες, παρουσιάζοντας διαφορετικά ονόματα κλασμάτων (Γαγάτσης και συν., 2006). Ένα βασικό βήμα εδώ είναι να προσδιοριστεί το αριθμητικό μοντέλο των κλασμάτων στον επαναπροσδιορισμό και την πρόοδο της θεωρίας των αριθμών στις αθροιστικές πράξεις των κλασμάτων (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

2.6.4 Το κλάσμα ως διαίρεση/πηλίκο

Μέσα από το πρίσμα της διάστασης του κλάσματος ως πηλίκου, αυτό γίνεται αντιληπτό ως αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Εδώ ο αριθμητής ταυτίζεται με το διαιρετέο και αναφέρεται στην ποσότητα που θα μοιραστεί, ενώ ο παρονομαστής ταυτίζεται με το διαιρέτη και αναφέρεται στο πλήθος των ίσων μερών στα οποία θα μοιραστεί η ποσότητα. Σε αντίθεση με τη διάσταση ‘‘μέρος-όλο’’, ο αριθμητής και ο παρονομαστής στη διάσταση του κλάσματος ως πηλίκου αναπαριστούν διαφορετικά είδη πραγμάτων, ενώ ακόμη, δεν υπάρχει ο περιορισμός στο μέγεθος του αριθμητή (Κολέζα, 2000), ο οποίος μπορεί πλέον να είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος με τον παρονομαστή. Έτσι, και το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο της μονάδας.

2.6.5 Το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής/τελεστής

Σε αυτή την περίπτωση, το κλάσμα νοείται ως μία συνάρτηση που εφαρμόζεται σε αντικείμενα, αριθμούς ή σύνολα (Behr et al., 1993) και τα μετασχηματίζει ως προς κάποιο μέγεθος (π.χ. μέγεθος αριθμού, πλήθος, επιφάνεια). Για παράδειγμα, όταν ζητούνται τα 2/3 του 56, το κλάσμα λειτουργεί ως τελεστής. Το γινόμενο των κλασμάτων, αντίθετα με το γινόμενο ακεραίων, μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται. Η διάσταση του κλάσματος ως τελεστή βοηθά σημαντικά τους μαθητές στο να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων (Behr et al., 1993).

2.7 Κλάσματα, ποσοστά και δεκαδικοί αριθμοί

Στο σχολικό πλαίσιο, οι ρητοί αριθμοί κατά κύριο λόγο παρουσιάζονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους. Ένα κλάσμα μπορεί να παρασταθεί και ως δεκαδικός αριθμός ή ποσοστό. Η παρουσίασή τους και η ενασχόληση με αυτούς, όμως, είναι μία διαδικασία που συχνά δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μικρούς μαθητές.

Τα τελευταία χρόνια, μάλιστα, γίνονται συστάσεις προς τους εκπαιδευτικούς οι μαθητές να διδάσκονται πρώτα τους δεκαδικούς αριθμούς και στη συνέχεια τους κλασματικούς αριθμούς, καθώς οι μαθητές συναντούν συχνότερα στην καθημερινή τους ζωή τους δεκαδικούς παρά τους κλασματικούς. Ωστόσο, οι μαθητές κατανοούν συνήθως ευκολότερα τους δεύτερους. Μία καλή προσέγγιση θα ήταν να εισαχθούν πρώτα οι βασικές έννοιες των κλασμάτων, να ακολουθήσει η εισαγωγή των δεκαδικών και, στη συνέχεια, να αναπτύσσονται παράλληλα (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Μία βασική δεξιότητα που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές στο Δημοτικό σχολείο είναι η συσχέτιση δεκαδικών και κλασματικών αριθμών. Αν οι μαθητές εισαχθούν στην έννοια των δεκαδικών και κλασματικών αριθμών με τη χρήση εποπτικών μέσων, λογικά δε θα βρουν δυσκολίες στη μετατροπή των δεκαδικών αριθμών σε κλασματικούς ή των κλασματικών, με παρονομαστή δυνάμεις του δέκα, σε δεκαδικούς. Σε αυτό το σημείο, συνιστάται να γίνεται χρήση των ποσοστών και στην έκφραση ενός δεκαδικού σε κλάσμα ή ποσοστό. Το νομισματικό σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τέτοιες δραστηριότητες (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Συμπερασματικά, σε ό,τι αφορά την προσέγγιση των κλασματικών εννοιών, την οικοδόμηση των ρητών, όπως επίσης και τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών, η έννοια της αναπαράστασης, η οποία θα μελετηθεί διεξοδικά στην πορεία της εργασίας μας, χωρίς αμφιβολία είναι επίσης ζωτικής σημασίας, καθώς τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί συμβολίζονται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι ακέραιοι. Εύλογα, λοιπόν, απαιτούν διαφορετικές διαδικασίες μάθησης, διαδικασίες που θα αποδίδουν περισσότερη έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και λιγότερη στη μηχανική απομνημόνευση των κανόνων εκτέλεσης των πράξεων (Hiebert & Behr, 1988).

2.8 Τα καταχρηστικά κλάσματα

Συχνά στη διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται λόγος και για μία ακόμη διάκριση ανάμεσα στα κλάσματα, τα γνήσια και τα καταχρηστικά. Όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα αυτό ονομάζεται *γνήσιο* και είναι μικρότερο της μονάδας. Ένα κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα όταν ο αριθμητής του είναι ίσος με τον παρονομαστή του. Ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή λέγεται *καταχρηστικό* και είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Ένα καταχρηστικό κλάσμα μπορεί να γραφεί και σαν μικτός αριθμός (αριθμός που αποτελείται από ακέραιο και κλασματικό μέρος).

2.9 Εννοιολογική και Διαδικαστική Γνώση

Στη μαθηματική εκπαίδευση σημαντικό πεδίο έρευνας έχει αποτελέσει και η διάκριση των εννοιών ‘‘εννοιολογική’’ και ‘‘διαδικαστική’’ γνώση των μαθηματικών εννοιών, καθώς και η μεταξύ τους συσχέτιση τους στη μαθησιακή διαδικασία. Για τον λόγο αυτό κρίνεται αναγκαίο στο σημείο αυτό να αποσαφηνίσουμε τις δύο έννοιες, ενώ, στη συνέχεια της παρούσας εργασίας θα παρατεθούν και συμπεράσματα από σχετικές έρευνες, σε συνάρτηση πάντα με τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών.

Ως *διαδικαστική γνώση* ορίζεται η γνώση και η ικανότητα εκτέλεσης διαδικασιών αλγοριθμικού τύπου για την επίτευξη ενός στόχου (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Ο Byrnes (1992) χαρακτηρίζει τη διαδικαστική γνώση ως ‘‘γνώση σχετικά με το πώς’’ (*knowing how*). Αυτή έχει να κάνει, λοιπόν, με τη διεκπεραίωση των σταδίων επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, δεν απαιτεί ανώτερο επίπεδο κατανόησης και αφαιρετικής σκέψης εκ μέρους των μαθητών και συνδέεται άμεσα με μνημονικές διαδικασίες αυτοματοποίησης (Hiebert & Lefevre, 1986).

Με τον όρο *εννοιολογική γνώση* προσδιορίζεται η γνώση που σχετίζεται με τις έννοιες ενός πεδίου, αλλά και τις αρχές που το διέπουν. Αυτή αφορά στις (μαθηματικές) έννοιες, διαδικασίες και σχέσεις, που αποτελούν ακρογωνιαίους λίθους του σώματος της μαθηματικής γνώσης (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Η εννοιολογική γνώση των κλασμάτων είναι πολύ δυσκολότερο να οριοθετηθεί, όπως και να μετρηθεί, σε σύγκριση με τη διαδικαστική.

2.10 Η έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα Αναλυτικά Προγράμματα της Ελλάδας και της Κύπρου

Όπως αναφέρθηκε και πρωτύτερα, οι ρητοί αριθμοί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος των Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών, ενώ η διδασκαλία των κλασμάτων στο σχολείο βασίζεται, ως επί το πλείστον, στο εκάστοτε Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Ακόμη, βασικό εποπτικό υλικό συνιστούν τα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία ουσιαστικά κατευθύνουν τη διδασκαλία. Για τους παραπάνω λόγους, λοιπόν, θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε τόσο στα ισχύοντα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, όσο και στα σχολικά εγχειρίδια, προκειμένου να αναδειχθούν οι κατευθυντήριες γραμμές πάνω στις οποίες κινείται συνήθως η διδασκαλία των κλασμάτων στη δημοτική εκπαίδευση, αλλά και τα προβλήματα που συχνά προκύπτουν.

2.10.1 Η έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα ισχύοντα Αναλυτικά Προγράμματα της Ελλάδας

Αναφορικά με τα Αναλυτικά Προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας, αυτό που παρατηρείται είναι πως οι κλασματικοί αριθμοί ως έννοια εισάγονται ήδη από την Α’ τάξη και, φυσικά, επανεμφανίζονται και επεκτείνονται και σε όλες τις υπόλοιπες τάξεις του δημοτικού σχολείου (σπειροειδής ανάπτυξη). Ειδικότερα, στις μικρές τάξεις εισάγεται σταδιακά η έννοια των κλασματικών αριθμών ως μέρος μιας επιφάνειας και ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Τα μοντέλα αυτά επικρατούν και στις μεγαλύτερες τάξεις, ωστόσο, η συχνότητα εμφάνισης τους μειώνεται, καθώς τα παιδιά οδηγούνται σε πιο τυπικά Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα:

Στην Α’ τάξη οι μαθητές διδάσκονται την έννοια της συμμετρίας (μια επιφάνεια που μοιράζεται σε δύο ίσα μέρη ή ένα αντικείμενο που διπλώνεται στη μέση), άρα και την έννοια του μισού (δηλαδή το ½). Ακόμη, καλούνται να επιλύσουν δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη ‘‘μοιρασιά’’ ενός συνόλου αντικειμένων ή να απαντήσουν σε ερωτήματα που ενέχουν την έννοια της αναλογίας (για παράδειγμα, *Πόσες είναι οι φανέλες και πόσοι οι ποδοσφαιριστές;*).

Στη Β’ τάξη υπενθυμίζονται στους μαθητές οι έννοιες του μερισμού και της συμμετρίας. Ειδικότερα, υπάρχουν δραστηριότητες όπου τους ζητείται να βρουν το μισό και το ολόκληρο αντικειμένων, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται και η αριθμητική γραμμή.

Στη Γ’ Δημοτικού, οι μαθητές πλέον εισάγονται κανονικά στα κλάσματα, αφού διδάσκονται τις κλασματικές μονάδες και τους απλούς κλασματικούς αριθμούς, όπως επίσης και τα ισοδύναμα κλάσματα. Στην πορεία της σχολικής χρονιάς, μάλιστα, πραγματοποιείται συσχέτιση μεταξύ των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών. Ακόμη, εξοικειώνονται περισσότερο με τον αλγόριθμο της διαίρεσης φυσικών αριθμών, αλλά και με την έννοια της συμμετρίας, δεδομένου ότι εξασκούνται στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα (κλάσμα ως μέρος επιφάνειας).

Στη Δ’ τάξη οι μαθητές εξασκούνται στις πράξεις με δεκαδικά κλάσματα (και με δεκαδικούς αριθμούς). Σε κάποιες περιπτώσεις τα δεκαδικά κλάσματα αξιοποιούνται και στη διδασκαλία των υποδιαιρέσεων στη μέτρηση του μήκους, του χρόνου, της επιφάνειας, της μάζας ή των χρημάτων. Η έννοια της συμμετρίας επεκτείνεται περαιτέρω, αφού οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο τώρα χαρτί. Επιπρόσθετα, εξασκούνται στην επίλυση προβλημάτων των οποίων τα δεδομένα περιλαμβάνουν και κλάσματα, ενώ, έρχονται και σε επαφή με την έννοια της πιθανότητας.

Στην Ε’ Δημοτικού υπενθυμίζονται οι δεκαδικοί αριθμοί και τα δεκαδικά κλάσματα, καθώς και η διαδικασία μετατροπής των αριθμών από τη μία μορφή στην άλλη. Οι μαθητές διδάσκονται τη διαχείριση, τη διάταξη, την εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης τόσο για τους κλασματικούς αριθμούς, όσο και για τους δεκαδικούς. Όσον αφορά στα ετερώνυμα κλάσματα, διδάσκονται τη διαδικασία μετατροπής τους σε ομώνυμα με τη χρήση του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου. Τα ισοδύναμα κλάσματα υπενθυμίζονται, ενώ, παράλληλα οι μαθητές εξασκούνται στην επίλυση προβλήματος με τη μέθοδο της αναγωγής στη δεκαδική κλασματική μονάδα. Επιπλέον, εξοικειώνονται περισσότερο με την έννοια της πιθανότητας.

Στη Στ’ τάξη οι μαθητές σταθεροποιούν τις γνώσεις τους σχετικά με την απαγγελία, τη διαχείριση, τη διάταξη και την εκτέλεση όλων των πράξεων στους κλασματικούς αριθμούς (και τους δεκαδικούς). Εξασκούνται στην απλοποίηση και τη σύγκριση κλασμάτων, τη μετατροπή γνήσιου κλάσματος σε καταχρηστικό και το αντίστροφο. Επίσης, επιδιώκεται η κατανόηση και η εφαρμογή των εννοιών του λόγου, της αναλογίας και του ποσοστού. Οι έννοιες της πιθανότητας (στη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων) και της συμμετρίας (σχεδιασμός συμμετρικού ως προς άξονα διενεργώντας μεταφορές, μεγεθύνσεις, σμικρύνσεις) επεκτείνονται ακόμη περισσότερο.

2.10.2 Η έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα ισχύοντα Αναλυτικά Προγράμματα της Κύπρου

Σε γενικά πλαίσια, ανάλογη είναι η κλιμάκωση της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος και στα Αναλυτικά Προγράμματα της Κύπρου. Αναλυτικότερα:

Στην Α' τάξη οι μαθητές διδάσκονται την έννοια του μισού, κάτι που συνήθως αναπαρίσταται με τρεις τρόπους: (α) ως μια επιφάνεια που μοιράζεται σε δύο ίσα μέρη, (β) ως μια γραμμή (π.χ. ένα σχοινί) που διπλώνεται στη μέση και (γ) ως η ''μοιρασιά'' ενός συνόλου αντικειμένων.

Στη Β' τάξη οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα κλάσματα ½, ¼ και 1/3 για να καθορίσουν το τμήμα μιας επιφάνειας ή ένα μέρος από ένα πλήθος αντικειμένων. Αργότερα, τα χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν διάφορα μεγέθη. Έπειτα, σε παρόμοιες δραστηριότητες εμπλέκονται κι άλλα κλάσματα όπως τα 2/4, 3/4, 4/4, 2/3 και 3/3. Προς το τέλος της Β' τάξης, ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν ορισμένα από τα ομώνυμα κλάσματα που γνωρίζουν με την βοήθεια διαφόρων σχημάτων και πληθών αντικειμένων.

Στη Γ' Δημοτικού, οι μαθητές διδάσκονται την πρόσθεση και την αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων με τη βοήθεια ισοεμβαδικών κύκλων χωρισμένων σε κυκλικούς τομείς, οι οποίοι αναπαριστούν αρχικά τα δεύτερα και, ακολούθως, τα τρίτα και τα τέταρτα. Στη συνέχεια, οι κύκλοι αυτοί περιλαμβάνονται και σε διάφορα απλά προβλήματα με ομώνυμα κλάσματα. Αργότερα, οι ίδιες δραστηριότητες επανέρχονται, με τους κύκλους αυτή τη φορά να αναπαριστούν πέμπτα, έκτα και όγδοα.

Η ενασχόληση των μαθητών με το κλάσμα ως μέρος επιφάνειας και ως μέρος πλήθους αντικειμένων υφίσταται και στην Δ' τάξη Δημοτικού. Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες όπως το να φτιάξουν ένα τετράγωνο σε τετραγωνισμένο χαρτί ή το μισό του. Αργότερα, οι ίδιοι διδάσκονται την αναγνώριση ισοδύναμων κλασμάτων. Ακολουθεί η διάκριση των γνήσιων κλασμάτων από τα καταχρηστικά, τα κλάσματα που ισοδυναμούν με την ακέραια μονάδα και τους μεικτούς αριθμούς με τη χρήση διαφόρων επιφανειών. Τέλος, μαθαίνουν να προσθέτουν και να αφαιρούν ομώνυμα κλάσματα, το άθροισμα ή η διαφορά των οποίων δεν υπερβαίνει τη μονάδα.

Στην Ε’ Δημοτικού οι μαθητές εμπλέκονται, αρχικά, σε δραστηριότητες όπου το κλάσμα αποτελεί το μέρος ενός συνόλου μαθαίνοντας, με τον τρόπο αυτό, να ερμηνεύουν κυκλικές γραφικές παραστάσεις. Δραστηριότητες από μικρότερες τάξεις, επαναλαμβάνονται με πιο σύνθετα κλάσματα. Η διαδικαστική γνώση των παιδιών για τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη και το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο τα βοηθά στην απλοποίηση κλασμάτων και στην μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ, ότι οι μαθητές της Ε’ τάξης συναντούν για πρώτη φόρα το κλάσμα ως αναλογία, καθώς και το κλάσμα ως σημείο πάνω στην αριθμητική γραμμή, σε μια δραστηριότητα πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Στη Στ’ Δημοτικού οι μαθητές κι εδώ σταθεροποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν από τις προηγούμενες τάξεις. Στο μεγαλύτερο βαθμό τους, τα κλάσματα που συναντούν είναι μικρότερα της μονάδας και παρουσιάζονται κυρίως ως μέρος μιας επιφάνειας ή ενός πλήθους αντικειμένων. Σε πολύ μικρό βαθμό εμφανίζεται η αριθμητική γραμμή. Επιπλέον, στη συγκεκριμένη τάξη εμφανίζεται και το μοντέλο του κλάσματος ως διαίρεση μέσα από κάποια προβλήματα, χωρίς ωστόσο να δίνεται κάποια ιδιαίτερη έμφαση.

2.11 Δυσκολίες των μαθητών στην κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων

Όπως υποστηρίχθηκε και παραπάνω, από την υπάρχουσα βιβλιογραφία και την αξιολόγηση των μαθητικών επιδόσεων προκύπτει πως οι μαθητές δυσκολεύονται σημαντικά στην κατανόησή των ρητών αριθμών και στη λειτουργική αξιοποίησή τους (Γαγάτσης και συν., 2001). Η ανάπτυξη, όμως, της ικανότητας των παιδιών να χειρίζονται τους κλασματικούς αριθμούς αποτελεί ανάγκη της καθημερινής ζωής και, από την άλλη, οι κλασματικοί αριθμοί αποτελούν το θεμέλιο πάνω στο οποίο στηρίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004). Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση των κλασμάτων ποικίλλουν, με κυριότερες αιτίες την ίδια τη φύση των κλασμάτων και τον τρόπο διδασκαλίας τους (Γαγάτσης και συν., 2006).

Αναλυτικότερα, οι δυσκολίες που συνήθως αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων και σχετίζονται με το φαινόμενο της (ακατάλληλης) μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Ουσιαστικά, η διδασκαλία των ακέραιων αριθμών αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο στη διδασκαλία των ρητών αριθμών.

Παράλληλα, παρατηρείται μία δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού, δηλαδή ως αυτόνομης οντότητας, γεγονός που φαίνεται να οφείλεται στην κυριαρχία της αναπαράστασης του κλάσματος μόνο σε μία μορφή του, αυτής του μέρους ενός όλου (Lamon, 2001). Αυτό οφείλεται στο ότι, όταν το σχήμα παρουσιάζεται με στερεότυπη μορφή, δηλαδή χωρισμένο σε τόσα μέρη όσα και ο παρονομαστής του κλάσματος, οι μαθητές ακολουθούν πάντα την ίδια διαδικασία για να σκιάσουν την επιφάνεια που τους ζητείται (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Στην περίπτωση αυτή απλά καταμετρούν τόσα μέρη, όσα και ο αριθμητής του κλάσματος (Γαγάτσης και συν., 2004). Ο σχηματισμός ενός τέτοιου στερεοτύπου στο μυαλό των μαθητών οδηγεί σε εσφαλμένες αντιλήψεις. Η διαδικασία καταμέτρησης τους κάνει να επικεντρώνουν την προσοχή τους μόνο στον αριθμητή του κλάσματος, αγνοώντας τον παρονομαστή (Γαγάτσης και συν., 2006). Κατά συνέπεια, παρατηρούνται λάθη που συνδέονται με τον χειρισμό των συμβόλων του κλάσματος με ανεξάρτητο μεταξύ τους τρόπο, όπως για παράδειγμα, η πρόσθεση του ίδιου αριθμού στον αριθμητή και τον παρανομαστή και η θεώρηση του νέου κλάσματος ως ισοδύναμου του αρχικού ή ο πολλαπλασιασμός μόνο του αριθμητή και όχι του παρανομαστή στην παραγωγή ισοδύναμων κλασμάτων σε διαδικασίες αλγοριθμικής επίλυσης προβλημάτων (Hart, 1987). Συχνά, ακόμη, αναφέρονται λάθη που σχετίζονται και με την ίδια την διαισθητική απεικόνιση του κλάσματος ως μέρος συνεχούς επιφάνειας ή διακριτού συνόλου αντικειμένων. Οι μαθητές στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται χωρίς να δίνουν σημασία στο όλο. Όταν, μάλιστα, η διδασκαλία των κλασμάτων γίνεται με τη χρήση ‘‘μοντέλων συνόλων’’, οι παραπάνω δυσκολίες είναι ακόμη εντονότερες (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Επιπλέον, εννοιολογικές παρανοήσεις που σχετίζονται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού οδηγούν και σε δυσκολίες αναπαράστασης και τοποθέτησης του κλασματικού αριθμού στην κλασματική γραμμή (Post et al.,1993), αλλά και σε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων όπου οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρανομαστή του κλάσματος ή δεν είναι πολλαπλάσια του (Ηλία & Γαγάτσης, 2004).

Προβλήματα ενυπάρχουν και στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ως αναλογίας και, συνεπώς, της σχέσης αναλογίας των ποσοτήτων του αριθμητή και του παρανομαστή με τρόπο που παρουσιάζει σταθερότητα (Marshall, 1993).

Τέλος, οι Philippou & Christou (1994) επισημαίνουν την έλλειψη συνδέσεων ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των κλασματικών αριθμών, γεγονός που αποτελεί ένδειξη της αποσπασματικότητας των γνώσεων των μαθητών και της έμφασης που δίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία. Έτσι, στην πρόσθεση ή την αφαίρεση των κλασμάτων συχνά οι μαθητές προσθέτουν (ή αφαιρούν) αριθμητές με αριθμητές και παρανομαστές με παρανομαστές (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Επίσης υποστηρίζουν ότι μεγάλο ποσοστό παιδιών δεν συνδέει τη δημιουργία κλασμάτων με την πράξη της διαίρεσης παρόλο που λεκτικά τουλάχιστον αναφέρονται συχνά στην πράξη αυτή στην προσπάθεια τους να εξηγήσουν την έννοια των κλασμάτων.

Συμπερασματικά, πέρα από τις δυσκολίες που οφείλονται στην ιδιαίτερη εννοιολογική φύση των ρητών αριθμών, παράγοντες που εντείνουν την αναποτελεσματική διδασκαλία τους είναι η αλγοριθμική προσέγγιση και η έμφαση στην διαδικαστική γνώση. Τα παραπάνω, στο πλαίσιο μίας παραδοσιακής διδασκαλίας, δυσχεραίνουν την κατανόηση των κλασματικών αριθμών, αφού οι διαδικασίες και οι κανόνες εφαρμόζονται μηχανικά (Γαγάτσης και συν., 2004).

2.12 Προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στις μαθηματικές έννοιες και ειδικότερα στα κλάσματα

Μία έννοια η οποία έχει απασχολήσει πάσης φύσεως ερευνητές, με κυρίαρχους τους γνωστικούς και εκπαιδευτικούς ψυχολόγους, τις τελευταίες δεκαετίες είναι αυτή της εννοιολογικής αλλαγής, καθώς η εφαρμογή της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής στον τομέα των Μαθηματικών μπορεί, μεταξύ άλλων, να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός όσον αφορά τις έννοιες που θα προκαλέσουν δυσκολία στους μαθητές ενώ ταυτόχρονα μπορεί να προβλέψει και να εξηγήσει συστηματικά λάθη και παρανοήσεις των μαθητών (Vosniadou & Verchaffell, 2004). Απώτερος στόχος αναμφίβολα είναι η διαμόρφωση μιας συνεκτικής θεωρίας για τη γνώση και τη μάθηση, η οποία θα συντελέσει, μεταξύ άλλων, και στη διαμόρφωση-εφαρμογή αποτελεσματικότερων μεθόδων διδασκαλίας σε πεδία επιστημονικής γνώσης όπως τα Μαθηματικά και η Φυσική.

Ο όρος *εννοιολογική αλλαγή* σχετίζεται με τις κονστρουκτιβιστικές ιδέες της μάθησης και υποδηλώνει ότι ‘‘η διδασκαλία της επιστήμης εμπεριέχει συχνά μία εκ θεμελίων αναδόμηση της προϋπάρχουσας γνώσης’’ (Βοσνιάδου, 1994). Με άλλα λόγια, πρόκειται για τη διαδικασία αναδιοργάνωσης των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών και επανανοηματοδότησης του εννοιολογικού τους πλαισίου, ενώ, ο όρος παραπέμπει στην αποδιδόμενη έμφαση στο γεγονός ότι οι «καθημερινής λογικής» προϊδεάσεις των μαθητών βρίσκονται συνήθως σε πλήρη αντίθεση με την εκάστοτε επιστημονική θεωρία.

Σύμφωνα με τους Langford και Sarullo (1992), η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών μπορεί να γίνει σταδιακά, ακολουθώντας, τέσσερα στάδια: *Το πρώτο στάδιο αναφέρεται στην προσπάθεια των μαθητών να κατανοήσουν μία έννοια παρατηρώντας τα αντικείμενα ή τις καταστάσεις μέσα στις οποίες συναντάται η έννοια (Προλεκτικό στάδιο).Το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές μιλούν και ακούν για τη σχετική έννοια (Λεκτικό στάδιο), ενώ το τρίτο στάδιο περιλαμβάνει δραστηριότητες ανάγνωσης και γραφής λέξεων σχετικών με την έννοια (Προ-αφηρημένο). Τέλος, στο τέταρτο στάδιο οι μαθητές ασχολούνται με την ανάγνωση και γραφή των αφηρημένων συμβόλων που παριστούν μία μαθηματική έννοια (Αφηρημένο)* (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Το αποτέλεσμα μιας παραδοσιακής διδασκαλίας είναι ότι οι μαθητές συχνά αποκτούν κάποιες «ιδέες υβρίδια» στις οποίες ορισμένα στοιχεία από αρχικές αντιλήψεις τους διαπλέκονται με στοιχεία επιστημονικών ιδεών. Διδακτικές στρατηγικές όπως η γνωστική σύγκρουση ή η μη ρήξη συνιστούν οδούς με τις οποίες πολλές φορές επιτυγχάνεται η εννοιολογική αλλαγή, ενώ, σε ορισμένες περιπτώσεις καλό είναι να συμπεριλαμβάνεται από τον/την διδάσκοντα και ένα στάδιο ‘‘ανοχής’’, κατά το οποίο οι προϊδεάσεις των μαθητών θα συγκατοικούν με τις επιστημονικές ιδέες. Κατά τη Vosniadou (2008), οι έννοιες είναι ενσωματωμένες σε θεωρητικά πλαίσια-τα παραδείγματα-από τα οποία αποκτούν το νόημά τους. Συνεπώς, όταν πραγματοποιείται μία αλλαγή παραδείγματος, ουσιαστικά πραγματοποιείται και μία εννοιολογική αλλαγή. Βέβαια, η αλλαγή δεν συμβαίνει μονομιάς, αλλά αποτελεί μια βαθμωτή, αργή διαδικασία κατά την οποία πραγματοποιούνται μεταβολές στις έννοιες και τις σχέσεις τους. Οι υπάρχουσες πεποιθήσεις αναδομούνται σταδιακά (Vosniadou et al., 2008).

Με βάση τα παραπάνω, η εννοιολογική αλλαγή σε ό,τι αφορά τις μαθηματικές έννοιες καθίσταται δυνατή όταν η νέα πληροφορία έρχεται αντιμέτωπη με την προηγούμενη, εμπειρικά στηριζόμενη, γνώση. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η χρήση αθροιστικών μηχανισμών εμπλουτισμού της προηγούμενης γνώσης είναι πιθανό να δημιουργήσει προβλήματα στην κατανόηση. Είναι σημαντικό, επομένως, τόσο οι δάσκαλοι κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας τους, όσο και οι αρμόδιοι για τον σχεδιασμό των Αναλυτικών Προγραμμάτων να λαμβάνουν υπόψη τους τις αρχικές αντιλήψεις των παιδιών και την πορεία της εννοιολογικής αλλαγής, έτσι ώστε να προλαμβάνονται συστηματικά λάθη και παρανοήσεις εκ μέρους των μαθητών. Ένας ακόμη λόγος είναι το να εντοπίζονται και να εξηγούνται οι αντι-διαισθητικές έννοιες που έχουν νόημα για τους μαθητές. Τέλος, οι μαθητές θα πρέπει να προετοιμάζονται και να εξασκούνται στην ανάπτυξη της μετα-εννοιολογικής επίγνωσης και ανάπτυξης, στρατηγικών για συστηματική και εμπρόθετη εννοιολογική αναδιοργάνωση (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

2.13 Η έννοια της αναπαράστασης και η σημασία της στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών

Τα τελευταία χρόνια έχει ευρέως αναγνωριστεί η κεντρική θέση που κατέχουν τα διάφορα πεδία αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Όπως υποστηρίζεται, οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τα όσα μαθαίνει ο μαθητής, αλλά και το πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα Μαθηματικά (Cheng, 2000). Υπάρχουν περιπτώσεις, μάλιστα, όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μία έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλή, 2000). Κατά συνέπεια, λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών (Greeno & Hall, 1997).

Ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται σε ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο και περιλαμβάνει τις ακόλουθες 5 ολότητες: (α) την ολότητα που αναπαρίσταται, (β) την ολότητα που αναπαριστά, (γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται, (δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και τέλος (ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες (Kaput 1987a). Ουσιαστικά, γίνεται λόγος για ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, όπως είναι οι σταθερές και ολιστικές πεποιθήσεις για κάτι, οι διάφοροι τρόποι για να προκληθούν και να δηλωθούν αντικείμενα, καθώς και ο τρόπος κωδικοποίησης των πληροφοριών. Έτσι, αναπαράσταση θεωρείται η απεικόνιση, η μίμηση και η παρουσίαση εικόνων. Η αναπαράσταση είναι αυτόνομη και ανεξάρτητη από το αντικείμενο που αναπαριστά και το άτομο μπορεί να την τροποποιήσει και να την επεξεργαστεί χωρίς περιορισμούς (Gagatsis & Elia, 2003).

Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις εσωτερικές/νοητικές και τις εξωτερικές/σημειωτικές. Ο όρος εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα και δεν είναι προσβάσιμες από άλλους. Ο όρος εξωτερικές/σημειωτικές αναπαραστάσεις αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς φορείς (σύμβολο, σχήμα, διάγραμμα) οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (Dufour- Janvier et al. 1987, σ.109). Ανάμεσα στις εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις υπάρχει αμφίδρομη σχέση κι αυτό γιατί σε μία αναπαράσταση πέρα από αυτό που αναπαριστάται, εμπλέκεται και η ερμηνεία που αποδίδει το ίδιο το άτομο σε αυτή. Με βάση τις αρχές του οικοδομισμού, η ερμηνεία αυτή καθορίζεται ως επί το πλείστον από τις προϋπάρχουσες νοητικές αναπαραστάσεις του ατόμου.

Σχήμα 2.1: Αλληλεπίδραση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου κατά τον Goldin (1998, σ.293)

Τα συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών και τη λύση προβλήματος μπορούν να διακριθούν σε πέντε κατηγορίες (Lesh, Post & Behr, 1987):

1. Κείμενα – Η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα που σχετίζονται με την καθημερινότητα και τα οποία καθορίζουν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.

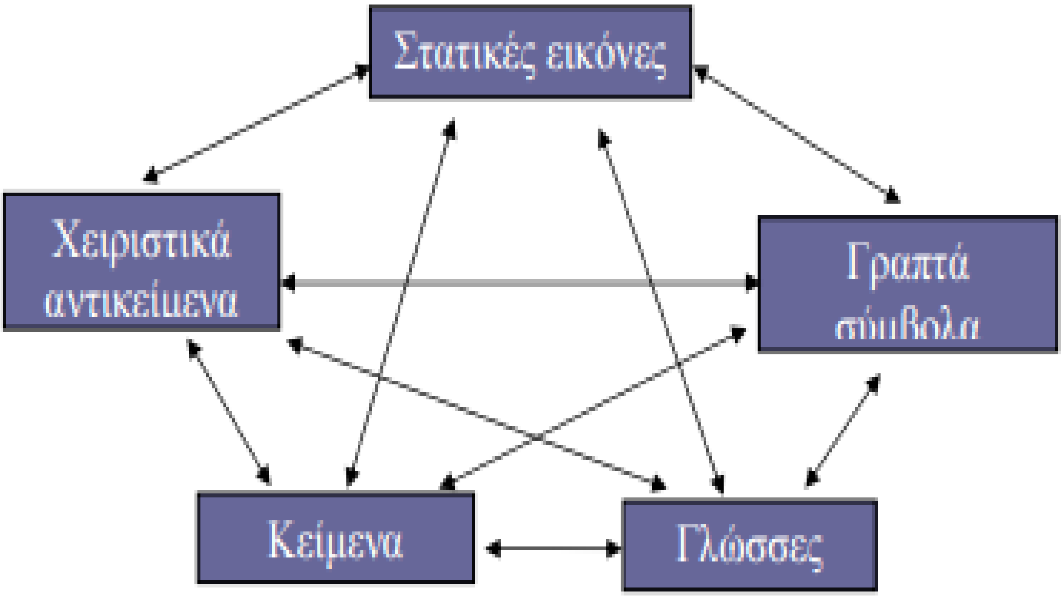
2. Χειριστικά αντικείμενα/Μοντέλα – Τέτοια είναι οι κύβοι αριθμητικής ή η αριθμητική γραμμή, όπου τα επιμέρους στοιχεία του μοντέλου δεν έχουν νόημα τόσο αυτά καθαυτά, όσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από τον χειρισμό και τον συνδυασμό τους, οι οποίες ανταποκρίνονται και σε πολλές καταστάσεις της καθημερινότητας.

3. Εικόνες/Διαγράμματα – Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται στατικά εικονικά μοντέλα, τα οποία, όπως και τα χειριστικά μοντέλα, είναι δυνατόν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.

4. Γλώσσες (συμπεριλαμβάνονται και οι εξειδικευμένες γλώσσες που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία π.χ. Μαθηματική Λογική)

5. Γραπτά σύμβολα, τα οποία, όπως και οι γλώσσες, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν συνηθισμένες, αλλά και εξειδικευμένες προτάσεις.

Σχήμα 2.2: Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987, in C. Janvier (Ed.), *Problems of Represantation in the Teaching and Learning of Mathematics*, σ. 34)



Μολονότι, όπως προαναφέρθηκε, ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι καθοριστικής σημασίας στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, προκειμένου να υπάρξει βαθιά εννοιολογική κατανόηση αυτών, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής δεξιότητες από την πλευρά των μαθητών: α) ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας μέσα από ποικιλία αναπαραστάσεων της, β) ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας ανάμεσα στις ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις της και γ) ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη (Γαγάτσης και συν., 2006).

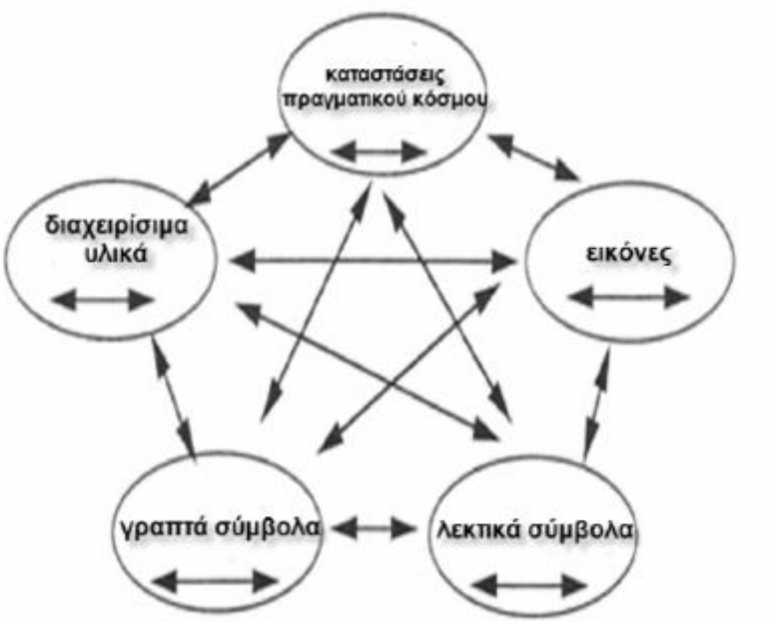
Ο όρος μετάφραση αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη, όπως για παράδειγμα, από μια εξίσωση σε μια γραφική παράσταση (Janvier, 1987). Ωστόσο, για να επιτευχθεί η αμφίδρομη μετάφραση ανάμεσα στη μαθηματική συμβολική αναπαράσταση και την αναπαράσταση ενσωμάτωσης αναγκαία κρίνεται η παροχή πληροφοριών στους μαθητές σχετικά με το πώς αναπαρίστανται τα κλάσματα με τη χρήση εικόνων και χειριστικών αντικειμένων (Γαγάτσης και συν., 2006).

2.14 Πολλαπλές αναπαραστάσεις

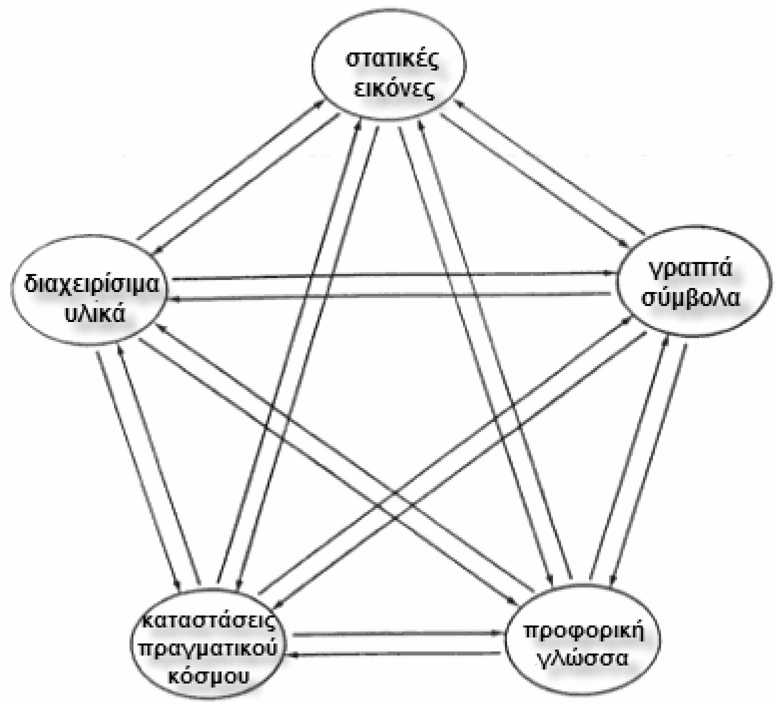
Η δυνατότητα προσφυγής σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης (Αναστασιάδου, 2007). Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, η οποία συνιστά μια από τις εκφράσεις της ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Η μαθηματική εκπαίδευση ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Παραπάνω είδαμε τη σημασία των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές. Ωστόσο, οφείλουμε να τονίσουμε ότι πέρα από τη σημασία των αναπαραστάσεων αυτών καθαυτών, βασικό ρόλο διαδραματίζει και το διδακτικό πλαίσιο εντός του οποίου οι εκάστοτε αναπαραστάσεις θα ενταχθούν. Η έννοια των πολλαπλών αναπαραστάσεων περιλαμβάνει μία σειρά αναπαραστατκών τύπων και ενδοσυνδέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων. Όπως έχει υποστηριχθεί τα τελευταία χρόνια σε σχετικές έρευνες, η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών αντικειμένων ενδυναμώνει την κατανόηση των εννοιών, βελτιώνει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και γενικότερα ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία (Even, 1998).

Σχήμα 2.3: Μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh,1979)



Σχήμα 2.4: Αλληλεπιδραστικό μοντέλο πολλαπλών αναπαραστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987)



2.15 Αναπαραστάσεις και κλάσματα

Αναφορικά, τώρα, με τις αναπαραστάσεις και τη διδασκαλία των κλασματικών εννοιών, οι εικονικές και οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις, οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα οπτικής επεξεργασίας των δεδομένων, είναι αυτές που εφαρμόζονται συνηθέστερα (Γαγάτσης και συν., 2001). Εντούτοις, οφείλουμε να τονίσουμε ότι τα συμβολικά μέσα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται δε συμβάλλουν πάντα θετικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Dufour-Janvier et al., 1987).

Το κλάσμα μπορεί να αποδοθεί με πέντε διαφορετικούς τρόπους με τη χρήση διαφορετικών μοντέλων − αναπαραστάσεων, καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μία από τις πέντε διαστάσεις του κλάσματος. Τα μοντέλα αυτά μπορούν να διακριθούν σε διακριτά (αναπαριστούν το μέρος των αντικειμένων ενός συνόλου), συνεχή (αναπαριστούν το κλάσμα ως μέρος μιας μονάδας μέτρησης, για παράδειγμα μιας επιφάνειας) και στην αριθμητική γραμμή (Ilia & Gagatsis, 2004).

(α) Το κλάσμα μπορεί να εμφανιστεί ως μέρος μιας επιφάνειας χωρισμένης σε ομοιόμορφα μέρη. Πρόκειται για τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται συχνότερα στη διδασκαλία των κλασμάτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι πίτες, οι σοκολάτες και τα τετράγωνα που συνήθως μοιράζονται σε κομμάτια. Με βάση τα παραπάνω, οι μαθητές που έχουν εκτεθεί σε συστηματική διδασκαλία των κλασμάτων είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με το συγκεκριμένο είδος αναπαραστάσεων. Πολλοί, όμως, δυσκολεύονται στην αναγνώριση του κλάσματος ως μέρος επιφάνειας, γιατί στρέφουν κυρίως την προσοχή τους μόνο στο μέρος της επιφάνειας που χρωματίζεται ή αποκόπτεται χωρίς να δίνουν σημασία στο άλλο. (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

(β) Το κλάσμα μπορεί να παρουσιαστεί και ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Εδώ οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν ένα μέρος από ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία δεν είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο σχήμα ή μέγεθος.

(γ) Το κλάσμα ως σημείο πάνω στην αριθμητική γραμμή. Το κλάσμα, όπως προαναφέρθηκε, σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει συνήθως ως ένα σημείο ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς πάνω σε μία ευθεία. Η συγκεκριμένη αναπαράσταση θεωρείται αρκετά αφηρημένη για τους μαθητές, αλλά ταυτόχρονα ιδιαίτερα χρήσιμη στη διδασκαλία σειροθέτησης και των πράξεων των κλασμάτων.

(δ) Το κλάσμα ως αναλογία. Το κλάσμα εδώ δε σχετίζεται με ολότητες, ομάδες ή σημεία. Πραγματοποιείται σύγκριση των σχημάτων χωρίς, όμως, να λαμβάνεται υπόψη η ολότητα.

(ε) Το κλάσμα ως διαίρεση. Η περίπτωση αυτή πιστεύεται ότι είναι η πιο δύσκολη, αφού το κλάσμα προκύπτει συνήθως μέσα από προβλήματα της καθημερινής ζωής, όπως ''*Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα φάνε τέσσερα άτομα, αν έχουν μόνο τρεις σοκολάτες;*''.

2.16 Κριτική θεώρηση των Συστημάτων Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας Geometer's Sketchpad, Geogebra, Cabri Geometry και Mprog

Όπως γνωρίζουμε, τα τελευταία χρόνια ολοένα και περισσότερο διεισδύουν τα υπολογιστικά περιβάλλοντα στην καθημερινότητά μας, τόσο στον τομέα της ψυχαγωγίας, όσο και της εκπαίδευσης, με σκοπό να επεκτείνουν τις αισθητήριες και χειριστικές ικανότητες των ατόμων (Edwards, 1998). Περί τα τέλη της δεκαετίας του 1980, τα Συστήματα Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας έκαναν την εμφάνισή τους με σκοπό την ελκυστικότερη, ευκολότερη και αποδοτικότερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, εφόσον δεν απαιτούσαν εξειδικευμένες γνώσεις προγραμματισμού και περιλάμβαναν πλήθος εξωτερικών αναπαραστάσεων. Η σημασία των εκπαιδευτικών λογισμικών και του Διαδικτύου ως μέσων διάθεσης ποικιλίας εξωτερικών και διασυνδεδεμένων αναπαραστασιακών συστημάτων στην Μαθηματική Εκπαίδευση είναι μεγάλη, καθώς αυτά διευκολύνουν σημαντικά τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Κορδάκη, χ.χ.). Επιπλέον, προωθούν νέες δυνατότητες μάθησης (Ράπτης & Ράπτη, 2007). Για τον λόγο αυτό, η εκπαιδευτική χρήση των τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) στο Σύγχρονο Σχολείο και, πιο συγκεκριμένα, στη διδασκαλία των Μαθηματικών καθίσταται επιτακτική ανάγκη.

Ένα από τα τρέχοντα ερευνητικά ζητήματα, λοιπόν, που σχετίζεται με τη Μαθηματική Εκπαίδευση είναι το κατά πόσο τα συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, ως αναπαραστατικά εργαλεία, μπορούν να αξιοποιηθούν στη διαδικασία επεξεργασίας των μαθηματικών ιδεών και να καταστούν αποτελεσματικό μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης. Τα αλληλεπιδραστικά αυτά γνωστικά εργαλεία αποδίδονται συχνά και με τους όρους ‘‘μαθηματικοί μικρόκοσμοι’’ (Edwards,1998), ‘‘γνωστικές τεχνολογίες’’, ‘‘εργαλεία μυαλού’’ ή ‘‘εργαλεία σκέψης’’ (Sedig & Liang, 2008).

Σύμφωνα με την Κορδάκη (χ.χ.), τα εκπαιδευτικά λογισμικά παρέχουν τη δυνατότητα: *(α) προσομοίωσης πραγματικών καταστάσεων, (β) πειραματισμού, (γ) εικονικής ανατροφοδότησης των ενεργειών του μαθητή, (δ) υψηλής αλληλεπίδραση, (ε) δυναμικής αναπαράστασης μίας μαθηματικής έννοιας, (στ) αναπαράστασης μίας μαθηματικής έννοιας σε πολλαπλά αναπαραστασιακά συστήματα, (ζ) άμεσης διαχείρισης των σχημάτων στην οθόνη, (η) διάθεσης μίας ποικιλίας εργαλείων, (θ) σχεδίασης (ι) αυτόματης επίλυσης προβλήματος, (κ) επέκτασης, (λ) καταγραφής του ιστορικού των ενεργειών του χρήστη, (μ) παρουσίασης μίας πληροφορίας με ποικίλους τρόπους* και *(ν) επικοινωνίας και μάθησης στον χώρο και τον χρόνο του μαθητή*.

Με βάση τα παραπάνω, το εάν ένα εκπαιδευτικό λογισμικό είναι σωστά διαρθρωμένο χαρακτηρίζεται από την υψηλή λειτουργία ανατροφοδότησης και αλληλεπίδρασης, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο σχεδιασμός και η υλοποίησή του εξυπηρετεί διδακτικούς σκοπούς. Στοιχειώδες χαρακτηριστικό ενός τέτοιου λογισμικού συνιστά η δυναμική τροποποίηση, η μετακίνηση και ο μετασχηματισμός των σχημάτων, με παράλληλη, ωστόσο, διατήρηση των βασικών σχέσεων και ιδιοτήτων τους.

Αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι μέσω της χρήσης των Δυναμικών Περιβαλλόντων Γεωμετρίας, οι μαθητές βελτιώνουν σημαντικά την ικανότητά τους για επαγωγικό και παραγωγικό συμπερασμό (Χρίστου & Πίττα-Πανταζή, 2004), είναι σε θέση, δηλαδή, να παρέχουν τεκμηριωμένες μαθηματικές επεξηγήσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση για την περαιτέρω ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Διεισδύοντας, μάλιστα, στη μαθηματική έννοια των κλασμάτων, όπως έχει διαπιστωθεί, η χρήση συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας συμβάλλει στο να αντιλαμβάνονται οι μαθητές έννοιες και διαδικασίες σχετικές με τα κλάσματα με πιο ρεαλιστικό τρόπο και να επικοινωνούν τις ιδέες και τις γνώσεις τους μέσω των αναπαραστάσεων (Κυριακοπούλου & Πολίτης, 2011).

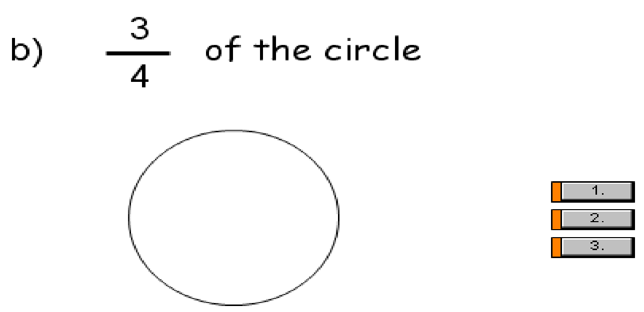
Δύο από τα συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, που έχουν τη δυνατότητα κατασκευής και χρήσης πολλαπλών δυναμικών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων λόγω των αλληλεπιδραστικών τεχνικών τους και περιλαμβάνουν κλασματικούς αριθμούς, είναι τα Geometer’s Sketchpad και Geogebra. Επιχειρώντας να πραγματοποιήσουμε μία κριτική θεώρηση των δύο αυτών εκπαιδευτικών λογισμικών ως προς τη συμβολή τους στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και, ειδικότερα, στην κατανόηση των κλασματικών αριθμών, θα λέγαμε ότι τα συγκεκριμένα προγράμματα δύνανται να συντελέσουν στην αποτελεσματική οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, ωστόσο, υπό τις παρακάτω προϋποθέσεις:

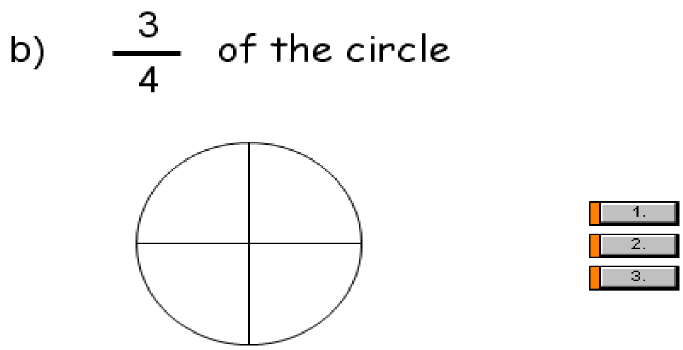
1. Θα πρέπει να υπάρχει κάτω από κάθε σχήμα ή κλασματικό αριθμό η αντίστοιχη επεξήγηση, προκειμένου να είναι σε θέση ο χρήστης να κατανοεί αυτό που βλέπει.
2. Στην περίπτωση εσφαλμένης απάντησης, να επεξηγείται και να αιτιολογείται ο λόγος για τον οποίο αυτή είναι εσφαλμένη.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν ορισμένες αντιπροσωπευτικές εικόνες των δύο προγραμμάτων, οι οποίες αναπαριστούν αυτό που βλέπει ο εκάστοτε χρήστης πριν και μετά την απόπειρα εκτέλεσης δραστηριοτήτων σχετικών με κλάσματα.

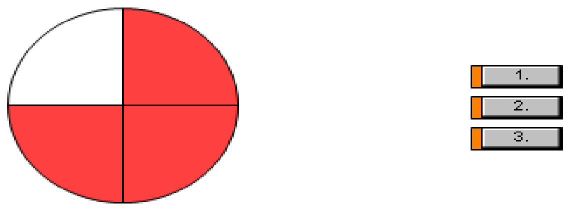
Ενδεικτικά για το Sketchpad:

<u>Δραστηριότητα-ανακάλυψη κλάσματος ως μέρος του όλου</u>

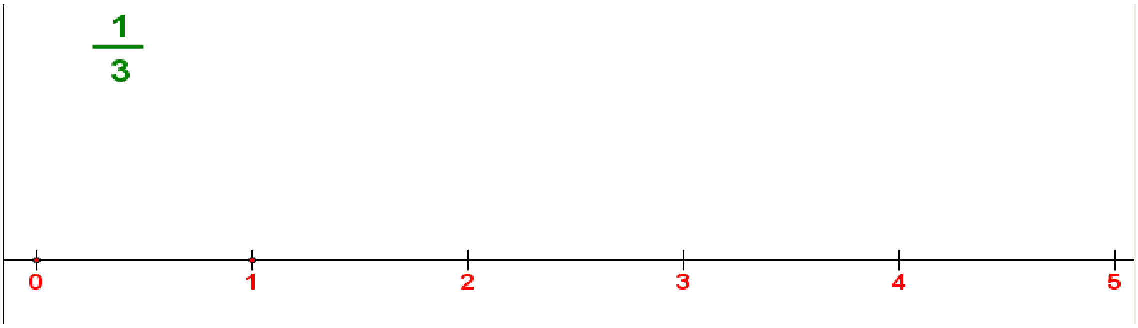


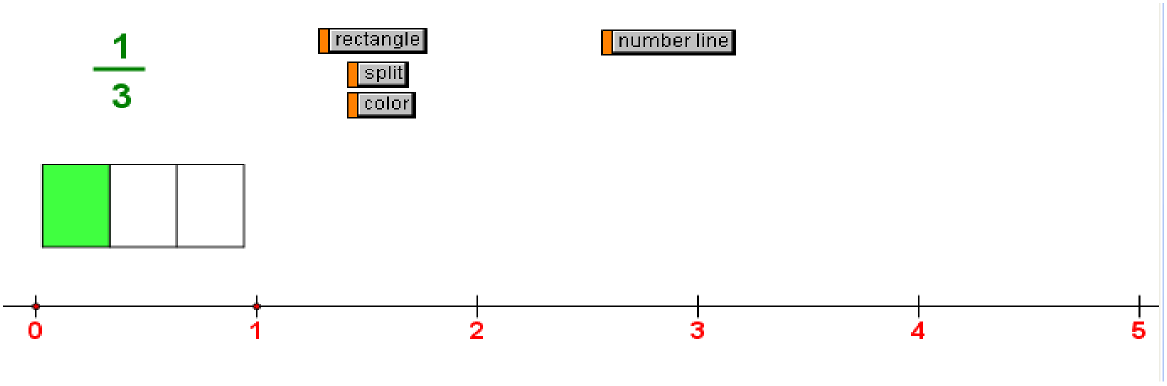


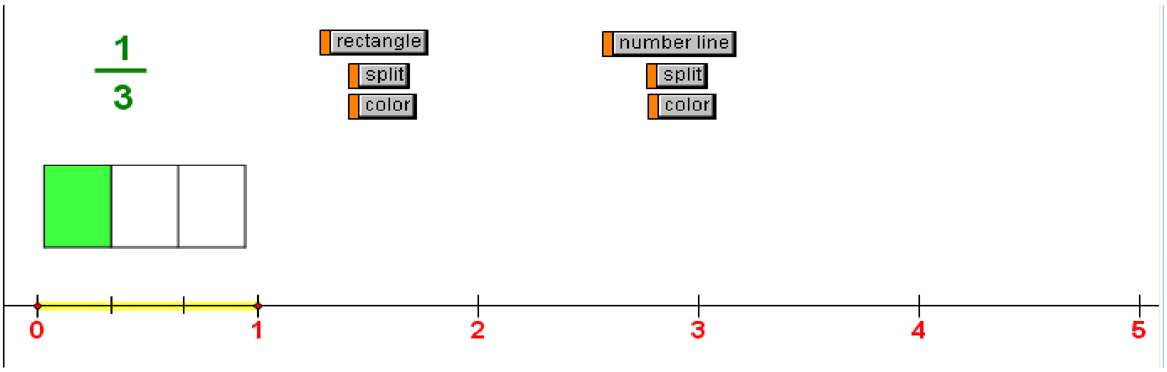
b) $\frac{3}{4}$ of the circle

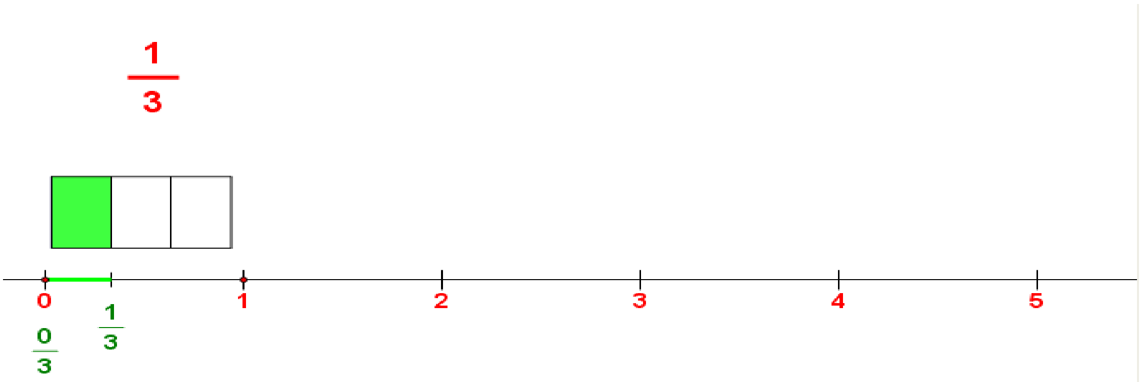


<u>Κλάσματα στην αριθμητική γραμμή</u>



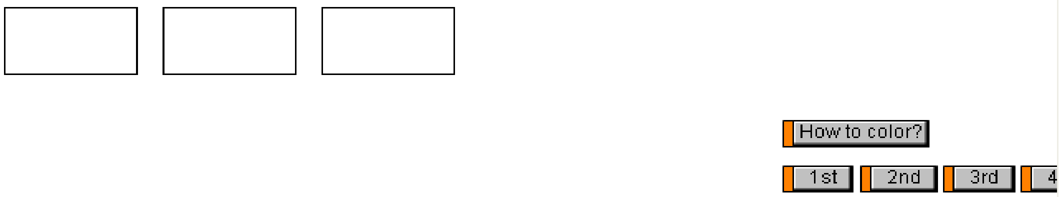






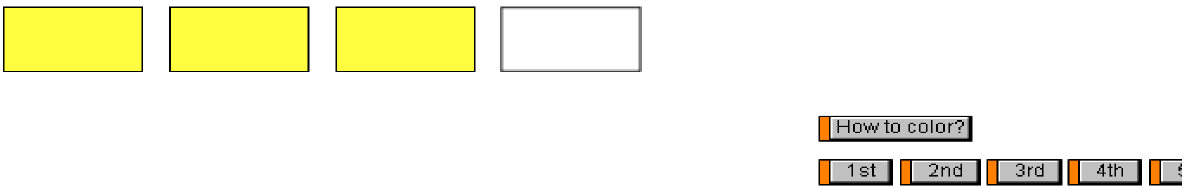
<u>Μετατροπή μικτού αριθμού σε κλάσμα</u>

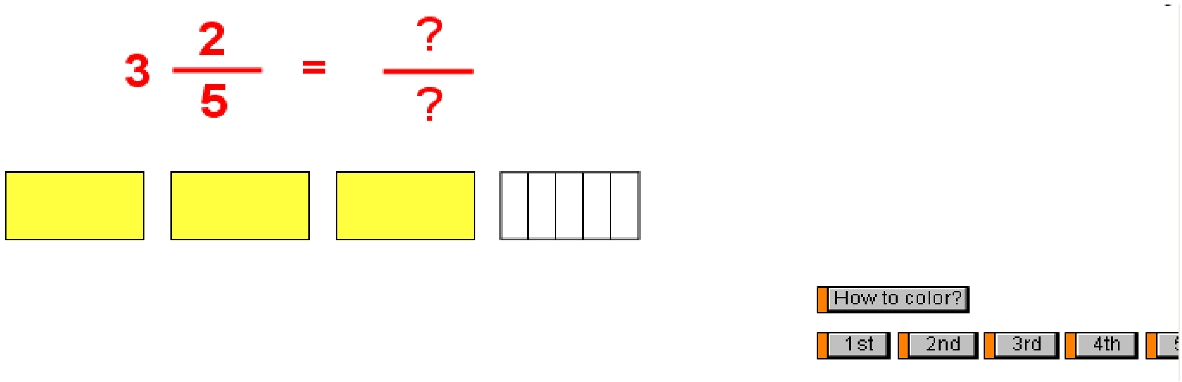
$$3\frac{2}{5} = \frac{?}{?}$$

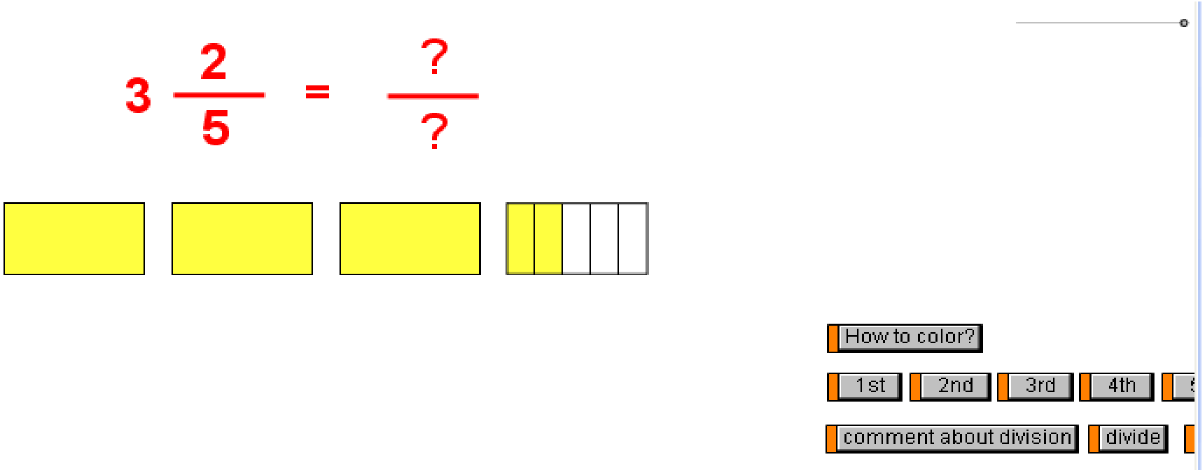


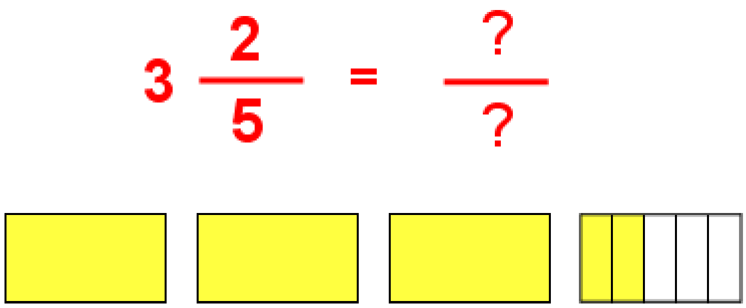
$$3\frac{2}{5} = \frac{?}{?}$$

$$3\frac{2}{5} = \frac{?}{?}$$





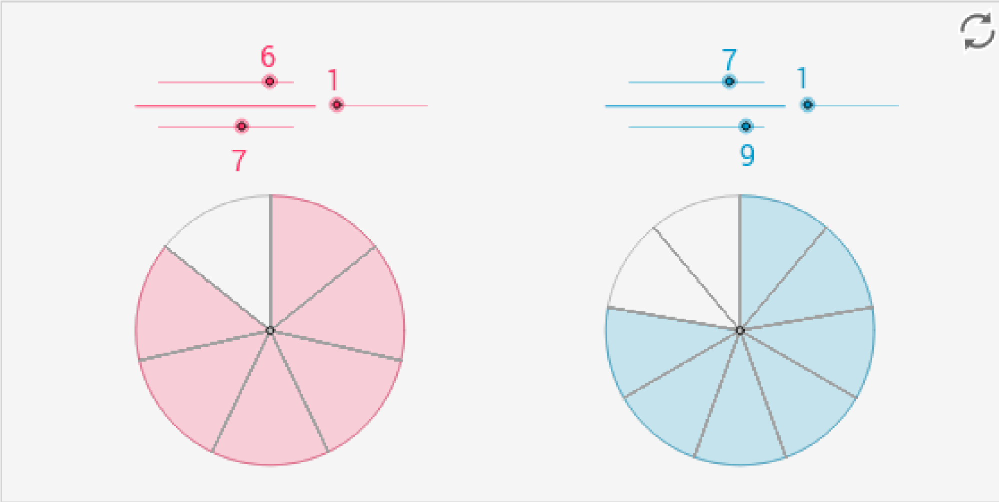


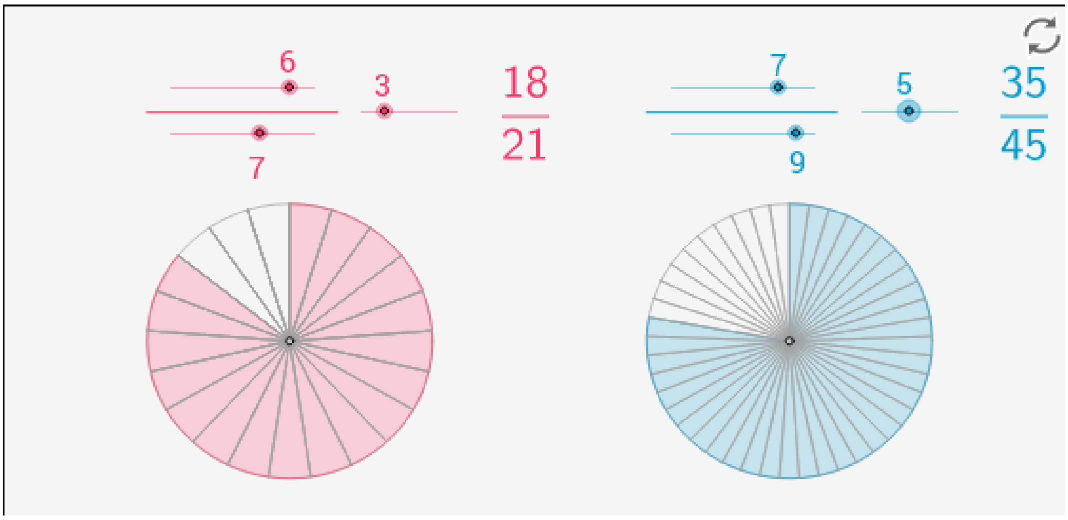


Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, στο εν λόγω εκπαιδευτικό λογισμικό δεν υπάρχει ανατροφοδότηση, ενώ ο χρήστης ανακαλύπτει παθητικά τη νέα γνώση προχωρώντας από το ένα βήμα στο επόμενο.

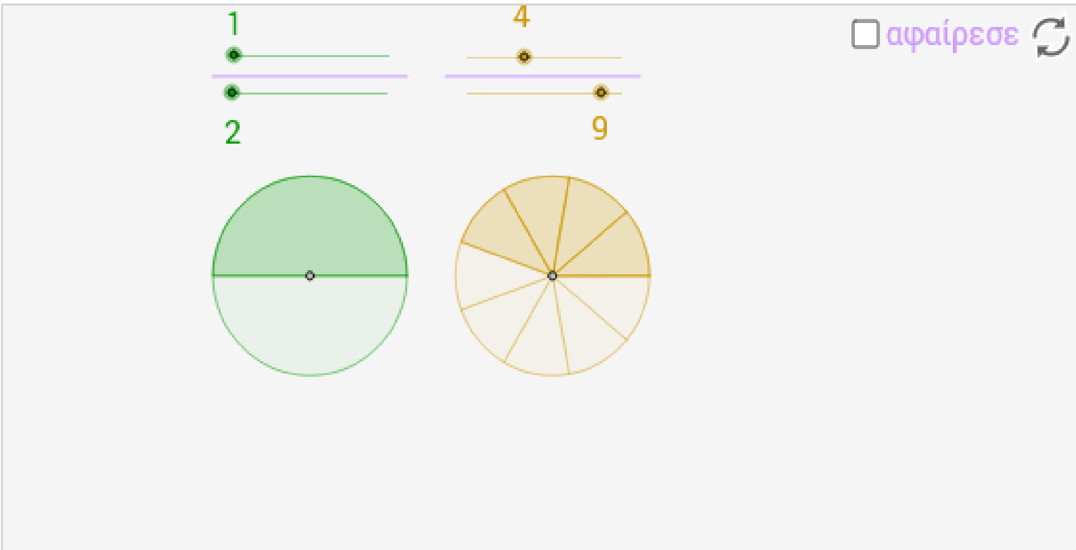
Για το Geogebra:

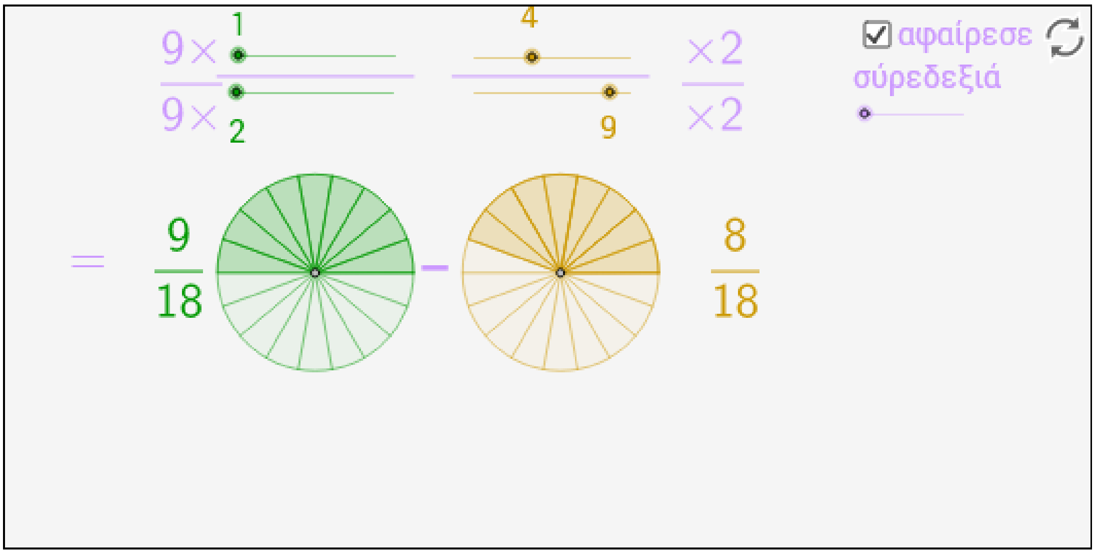
<u>Σύγκριση κλασμάτων</u>



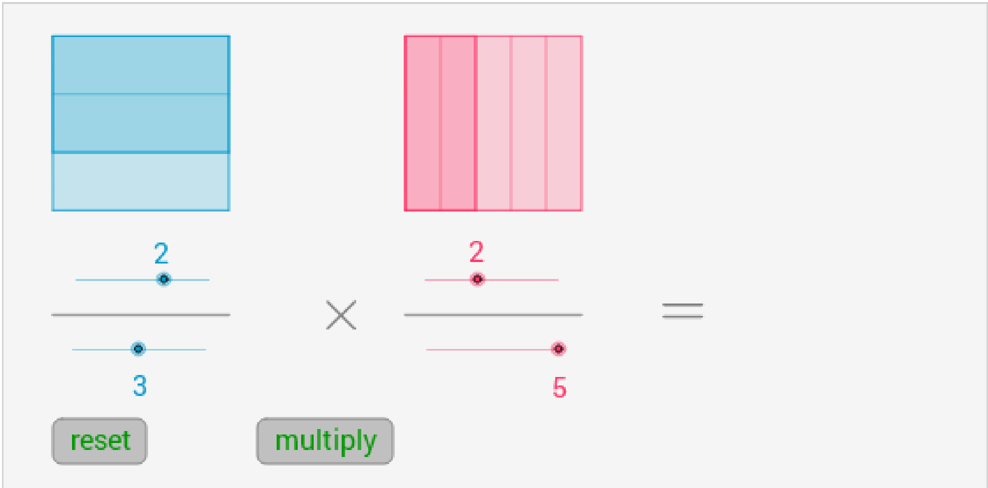


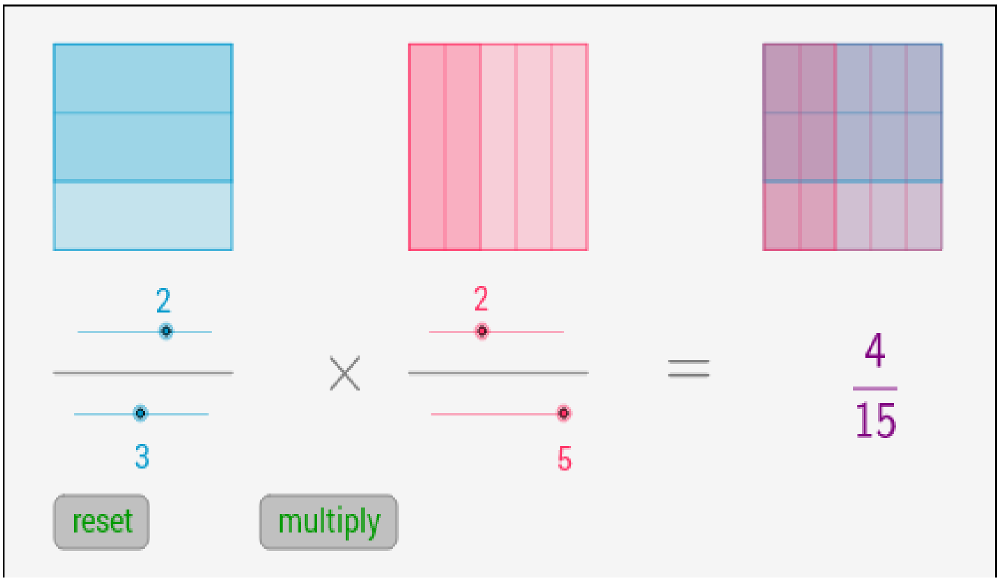
Αφαίρεση κλασμάτων



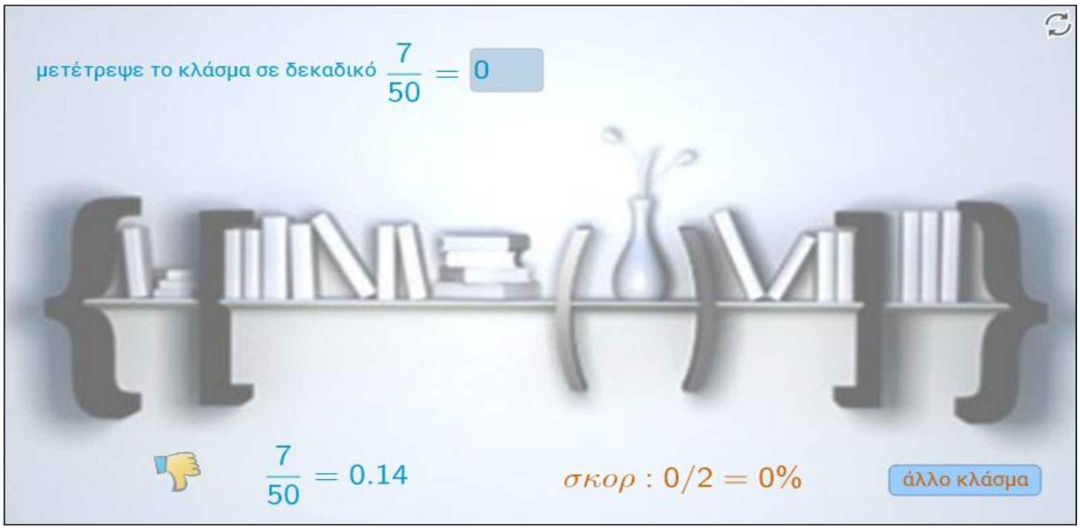


<u>Πολλαπλασιασμός κλασμάτων</u>





Κλάσματα και δεκαδικοί



Στο Geogebra γνωστοποιείται στον χρήστη μόνο η επίδοσή του στις δραστηριότητες και όχι η αιτιολόγηση σε περίπτωση σφάλματος. Καταληκτικά, τα συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμο εργαλείο στην επεξεργασία μαθηματικών αντικειμένων, εφόσον, όμως, εφαρμόζεται ορθή χρήση αυτών.

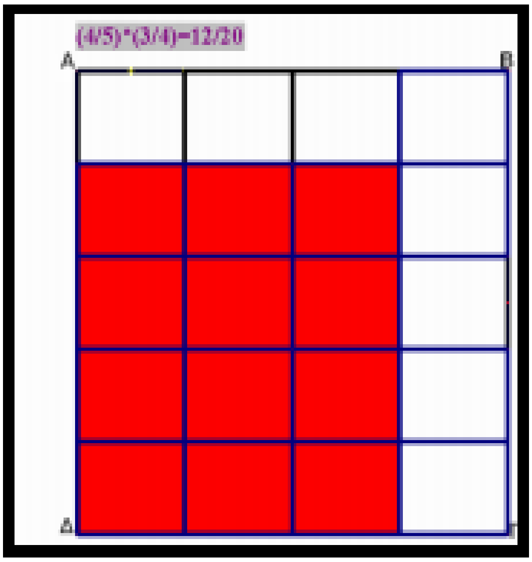
Δύο ακόμη συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας που αξιοποιούν την προσομοίωση φαινομένων και προσφέρονται για διερευνητική μάθηση, πειραματισμό, και πολλαπλή αναπαράσταση της γνώσης συνιστούν τα εκπαιδευτικά λογισμικά Cabri

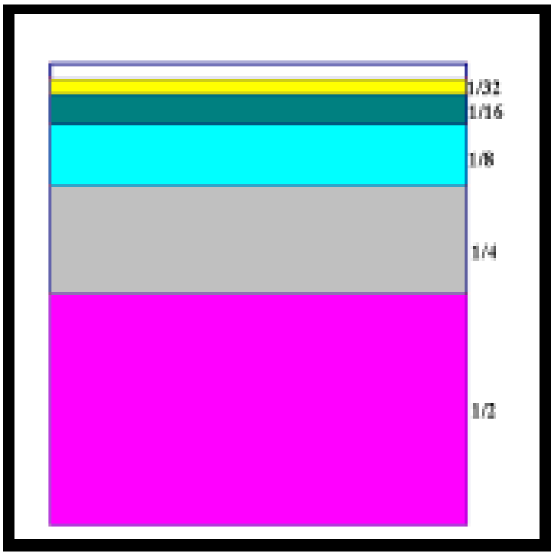
Geometry και Mprog. Τα συγκεκριμένα περιβάλλοντα συμβαδίζουν με την εποικοδομιστική προσέγγιση και είναι ιδιαίτερα διαλογικά, καθώς οι ενέργειες των μαθητών ως επί το πλείστον συνοδεύονται από οπτική και αριθμητική ανατροφοδότηση. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές οδηγούνται στο να ελέγξουν και την αλήθεια των υποθέσεών τους, ενώ, ο τύπος της παρεχόμενης ανατροφοδότησης (ποιοτικής ή ποσοτικής) τους βοηθά να ελέγξουν τις στρατηγικές λύσης που αναπτύσσονται. Ακόμη, μέσω των πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια έννοια που εφαρμόζονται, οι μαθητές δύνανται να εντοπίσουν τα κατάλληλα συστήματα αναπαράστασης, προκειμένου να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ των οικείων σε αυτούς διαισθητικών συστημάτων αναπαράστασης και των περιπλοκότερων συστημάτων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά.

Ενδεικτικά ορισμένες εικόνες από το Cabri Geometry:

<u>Διαθεματική προσέγγιση της έννοιας του κλάσματος ως αναλογίας με αξιοποίηση των σημαιών διαφόρων κρατών</u>

Ερμηνείες και αποδείξεις μέσω κλασμάτων στο περιβάλλον του Cabri





2.17 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο που προηγήθηκε παρατέθηκαν βασικές θεωρητικές κατευθύνσεις σχετικά με τις έννοιες που μας απασχολούν στην παρούσα εργασία. Πιο αναλυτικά, αφού αποσαφηνίστηκαν ορισμένες έννοιες, όπως αυτή του αριθμού, του συνόλου των ρητών και του κλάσματος, παρουσιάστηκε μία ιστορική ανασκόπηση σχετικά με την πορεία της εξέλιξης της μαθηματικής έννοιας του κλάσματος. Ακολούθησε η διάκριση ανάμεσα στα διάφορα είδη και τις διαστάσεις των κλασμάτων, ενώ, στη συνέχεια καταβλήθηκε προσπάθεια να καθοριστούν οι όροι *εννοιολογική* και *διαδικαστική* γνώση. Έπειτα, πραγματοποιήθηκε σχολιασμός αναφορικά με την έννοια του κλάσματος στα σχολικά εγχειρίδια και τα Αναλυτικά Προγράμματα της Ελλάδας και της Κύπρου, προκειμένου να αναδειχθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων, ενώ παράλληλα, προσεγγίσαμε τον όρο *εννοιολογική αλλαγή* σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες και τα κλάσματα. Ακολούθως, αναλύθηκαν οι έννοιες *αναπαράσταση* και *πολλαπλές αναπαραστάσεις*, όπως επίσης και η συνεισφορά τους στη διδασκαλία των κλασμάτων. Τέλος, πραγματοποιήθηκε αναφορά στον όρο *συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας* και παρουσιάστηκε μία κριτική θεώρηση των εκπαιδευτικών λογισμικών Geometer's Sketchpad, Geogebra, Cabri Geometry και Mprog, ως αναπαραστατικών εργαλείων στη διδασκαλία των κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που σχετίζονται με τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά μοντέλα στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και, ειδικότερα, της έννοιας των κλασμάτων. Πιο αναλυτικά, αρχικά παρουσιάζονται οι έρευνες που αφορούν στους στόχους χρήσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών (βλ. ενότητα 3.2). Στη συνέχεια, αναφέρονται ευρήματα ερευνών που επικεντρώνονται στο ρόλο των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών και, πιο συγκεκριμένα, στη συμβολή της εικόνας, της αριθμητικής γραμμής, των διαγραμμάτων, καθώς επίσης και των γραφημάτων, ως αναπαραστατικών εργαλείων στην κατανόηση των κλασμάτων (βλ. ενότητα 3.3). Ακολούθως, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα ερευνών που αφορούν στην επίδραση των μαθηματικών μοντέλων στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων (βλ. ενότητα 3.4), ενώ αναδεικνύεται η σημασία της μετάφρασης στη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων, όπως προκύπτει από την βιβλιογραφική μας ανασκόπηση (βλ. ενότητα 3.5). Έπειτα, παρατίθενται οι περιορισμοί που προκύπτουν από τη χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά (βλ. ενότητα 3.6). Τέλος, ακολουθεί η ανακεφαλαίωση όπου αναφέρονται ποικίλα ερευνητικά ερωτήματα σε σχέση με τα παραπάνω ζητήματα, τα οποία χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης και επεξεργασίας, προκειμένου τα επόμενα χρόνια να αναδειχθούν ερευνητικά ευρήματα που θα συντελέσουν ακόμη πιο αποφασιστικά στη βελτίωση της διδασκαλίας των κλασματικών αριθμών και, κατά συνέπεια, στην καλύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές (βλ. ενότητα 3.7).

3.2 Στόχοι χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα τελευταία χρόνια έχει αναγνωριστεί ευρέως η κεντρική θέση που κατέχουν οι διάφορες μορφές αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Gagatsis & Elia, 2005), ενώ η χρήση τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχει αναδειχθεί σε ένα από τα πλέον αποδοτικά εργαλεία που συμβάλλουν στη σε βάθος κατανόηση και την ευέλικτη χρήση των μαθηματικών εννοιών (Hiebert & Carpenter, 1992; Kaput, 1989). Οι στόχοι, οι οποίοι αναμένεται να επιτευχθούν μετά την εφαρμογή τους ποικίλλουν, με βασικότερο τη δημιουργία πλούσιων εσωτερικών δομών για τις μαθηματικές έννοιες, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εσωτερικές και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (Goldin & Kaput, 1996; Owens & Clements, 1998).

Άλλοι στόχοι των οποίων η επίτευξη επιδιώκεται με τη χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η επαφή των μαθητών με διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες (κυρίως μέσω της χρήσης των πολλαπλών αναπαραστάσεων), η αναίρεση των περιορισμών και η αποσαφήνιση εννοιών, καθώς επίσης και η προώθηση της βαθύτερης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών (de Jong, Ainsworth, Dobson, van der Hulst, Levonen, Reimann, Sime, van Someren, Spada, Swaak, 1998). Ακόμη, συχνά ενεργοποιούνται αντιληπτικές διαδικασίες που σχετίζονται με την αναγνώριση, τη διερεύνηση και την ομαδοποίηση συναφών πληροφοριών (περισσότερο μέσω των διαγραμμάτων) (Μαστρογιάννης & Τρύπα, 2010), ενώ οι πίνακες τείνουν να στρέφουν την προσοχή στην ύπαρξη μοτίβων και κανονικοτήτων (Αυγερινός, Βλάχου & Καντάς, 2011). Ένας επιπρόσθετος σκοπός που επιδιώκεται, κυρίως μέσα από τη συνδυαστική χρήση αναπαραστάσεων με διαφορετικές ιδιότητες, είναι η σφαιρική αντιμετώπιση των μαθηματικών εννοιών, αφού η διαφορετικότητά τους συντελεί στην αλληλοσυμπλήρωση (Κορδάκη, 2004), καθώς και η οικονομία στην επεξεργασία ορισμένων συστημάτων που συνήθως επιτυγχάνεται (Δεληγιάννη και συν., 2008). Επιπλέον, επιδιώκεται η πραγματοποίηση επεκτάσεων, αφαιρέσεων και συσχετίσεων από τους μαθητές (Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009). Τέλος, στους σκοπούς χρήσης των εξωτερικών αναπαραστάσεων αναμφίβολα συγκαταλέγεται και η ελκυστικότερη και αποδοτικότερη προσέγγιση των μαθηματικών προβλημάτων (Κορδάκη, χ.χ.).

3.3 Έρευνες σχετικές με τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Όπως ο Davis (1997) έχει τονίσει στο παρελθόν, προκειμένου να αναδείξει τη σημασία των αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση: *αν δεν μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα αντιλαμβάνονται και επεξεργάζονται τις πληροφορίες που δέχονται, τότε δεν θα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε τις πράξεις και τις σκέψεις τους με ουσιαστικό τρόπο*. Ακόμη, σύμφωνα με τον ίδιο, το κλειδί για τη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας δεν έγκειται στην αξιολόγηση του κατά πόσο οι ιδέες των μαθητών συμβαδίζουν με τις επιστημονικά ορθές, αλλά στην κατανόηση του πώς οι ιδέες των μαθητών δημιουργούνται και εξελίσσονται.

Ένα μόλις χρόνο αργότερα, ο Vergnaud (1998) υπογράμμισε πως οι γλωσσικές και συμβολικές εκφράσεις διαδραματίζουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην μαθηματική εκπαίδευση, τόσο που ορισμένοι ερευνητές θεωρούν τα Μαθηματικά ως μία ξεχωριστή γλώσσα. Παρόμοια, οι Αυγερινός, Βλάχου & Καντάς (2011) έχουν υποστηρίξει ότι η χρήση μαθηματικών μοντέλων, όπως επίσης και η μαθηματική μοντελοποίηση κατά την εκπαιδευτική διαδικασία θεωρούνται ιδιαίτερα αποδοτικά μέσα για την αποσαφήνιση κρίσιμων σημείων στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Ειδικότερα, η δεύτερη συντελεί στην καλλιέργεια κριτικής σκέψης και κριτικού αλφαβητισμού προς τους μαθητές, αλλά και στην καλύτερη κατανόηση της συλλογιστικής πορείας των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Αυγερινός, Βλάχου & Καντάς, 2011). Την ίδια άποψη συμμερίζεται η McKendree (2002), η οποία υποστηρίζει ότι και μόνο το γεγονός ότι η αναπαράσταση συνιστά μία δομή που αναπαριστά κάτι άλλο, αρκεί για να συντελέσει στην καλλιέργεια της κριτικής σκέψης των μαθητών.

Με βάση τους Δεληγιάννη, Γαγάτση, Αμπράζη, Παναούρα, Ηλία, Κορανίκκη & Χρυσοστόμου (2008), οι έρευνες που αφορούν στο ρόλο των αναπαραστάσεων θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε πέντε βασικές κατηγορίες αντίστοιχα με το περιεχόμενό τους:

α) Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που επικεντρώνονται στην έννοια της αναπαράστασης.

β) Στη δεύτερη εντάσσονται έρευνες που υποστηρίζουν μια θεωρία αναπαράστασης.

γ) Η τρίτη κατηγορία ενσωματώνει έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος.

δ) Η τέταρτη κατηγορία περιλαμβάνει έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις σε σχέση με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

ε) Στη πέμπτη κατηγορία εντάσσονται έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και τη μετάβαση από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο.

Αντίστοιχα με την παραπάνω ταξινόμηση, οι Γαγάτσης & Θεοδούλου (2003) προτείνουν τις εξής κατηγορίες σχετικά με τη λειτουργία των εικόνων που συνοδεύουν ένα μαθηματικό πρόβλημα: *(α) διακοσμητικές, (β) βοηθητικές-αναπαραστατικές, (γ) βοηθητικές-οργανωτικές* και *(δ) πληροφοριακές*. Αναλυτικότερα:

Η πρώτη κατηγορία αναφέρεται σε εικόνες που αποτελούν αποκλειστικά διακοσμητικό στοιχείο του προβλήματος και δεν παρέχουν πληροφορίες στον αναγνώστη. Αναφορικά με τη δεύτερη, αυτή αντιπροσωπεύουν εικόνες, οι οποίες δεν είναι απαραίτητες για την ορθή επίλυση του προβλήματος, ωστόσο, αναπαριστούν ένα μέρος ή και ολόκληρο το πρόβλημα. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει εικόνες που επίσης δεν είναι αναγκαίες για την επίλυση του προβλήματος, καθοδηγούν, όμως, τους μαθητές στο να σχεδιάσουν ή γράψουν κάτι. Στην τέταρτη κατηγορία εντάσσονται εικόνες, οι οποίες παρέχουν πληροφορίες ζωτικής σημασίας για την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Μία από τις πρόσφατες έρευνες στην οποία επιχειρείται η διερεύνηση του κατά πόσο η ύπαρξη διακοσμητικών εικονικών αναπαραστάσεων σε ασυνήθιστα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα συντελούν ουσιαστικά σε οποιαδήποτε αλλαγή της συμπεριφοράς των μαθητών ήταν αυτή των Γαγάτση & Μάρκου (2002). Τα αποτελέσματα δεν φανέρωσαν την παραμικρή μεταβολή της συμπεριφοράς των μαθητών, ενώ την προσοχή τους απέσπασαν περισσότερο τα αριθμητικά δεδομένα των προβλημάτων.

Μία δεύτερη έρευνα σχετικά με την επίδραση της ένταξης διαφόρων μορφών αναπαράστασης (εικονικών, λεκτικών, συμβολικών-αριθμητικών) σε προβλήματα πρόσθεσης διεξήχθη από τους Γαγάτση, Δημητρίου, Αφαντίτη, Μιχαηλίδου, Παναούρα, Σιακαλλή & Χριστοφορίδη (1999). Η συγκεκριμένη έρευνα αφορούσε σε μαθητές της Α’, Β’ και Γ’ τάξης του Δημοτικού σχολείου. Ουσιαστικά, διερευνήθηκε το κατά πόσο υπάρχει ένας κώδικας αναπαράστασης ή ένας συνδυασμός κωδίκων που ενισχύει την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης, καθώς και το πώς αυτός διαφοροποιείται ανάλογα με την ηλικία. Τα αποτελέσματα της εν λόγω έρευνας έδειξαν ότι όσο περισσότεροι κώδικες αναπαράστασης εμπλέκονταν στην παρουσίαση του προβλήματος, τόσο περισσότερες ήταν και οι δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη και, ιδιαίτερα, οι μαθητές της Α' τάξης. Όπως, άλλωστε, έχει υποστηρίξει ο Kaput (1998), η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι πάντοτε απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία. Αυτό προέκυψε διότι οι μαθητές έπρεπε να συνθέσουν αριθμητικά, λεκτικά και εικονικά δεδομένα για να έχουν μία ορθή αναπαράσταση του προβλήματος. Κατέστη, λοιπόν, φανερό ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων δεν μεταφέρεται αυτόματα από το ένα πλαίσιο κωδίκων στο άλλο, αφού σε κάποιες περιπτώσεις η μετάφραση επιτυγχανόταν αβίαστα, ενώ σε κάποιες άλλες εντοπίζονταν εμπόδια. Εντούτοις, αυτό δε σημαίνει ότι η συνδυαστική χρήση αναπαραστάσεων δεν ενδείκνυται στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου, καθώς αποτελεί απαραίτητο στοιχείο για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, ενώ, οι ίδιοι μέσα από τη μακρόχρονη τριβή τους με τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων και μεταφράσεων θα είναι σε θέση μελλοντικά να υπερπηδούν ευκολότερα τα γνωστικά εμπόδια με τα οποία είναι πιθανό να έρθουν αντιμέτωποι κατά την επαφή τους με τις διάφορες μαθηματικές έννοιες.

Μία ακόμη σχετική έρευνα συνιστά και αυτή των Γαγάτση & Θεοδούλου, (2003), όπου διερευνήθηκε το κατά πόσο τα διάφορα είδη εικονικών αναπαραστάσεων (διακοσμητικές/ βοηθητικές - αναπαραστατικές/βοηθητικές, οργανωτικές/ πληροφοριακές), που περιγράφηκαν παραπάνω, συμβάλλουν στην επίλυση συνηθισμένων λεκτικών προβλημάτων από μαθητές της Β' Δημοτικού, αλλά και ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα διάφορα είδη εικόνας. Αφού επιβεβαιώθηκε ότι οι διακοσμητικές εικονικές αναπαραστάσεις δεν συντελούν σε αλλαγή συμπεριφοράς των μαθητών ως προς την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, τα ευρήματα αναφορικά με την επίδραση του βοηθητικού-αναπαραστατικού είδους εικόνων φάνηκε να είναι αμφίσημα. Πιο αναλυτικά, στην περίπτωση αυτή οι μαθητές άλλοτε στηρίζονταν στην εικόνα για να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος και άλλοτε όχι. Όπως, μάλιστα, υποστηρίζουν οι Carney και Levin (2002), όσο δυσκολότερο είναι το κείμενο σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, τόσο πιο βοηθητικές καθίστανται οι εικονικές αναπαραστάσεις. Σχετικά, τώρα, με τις βοηθητικές-οργανωτικές εικονικές αναπαραστάσεις, αυτές αποδείχθηκε ότι ασκούσαν αναμφίβολα θετική επίδραση στην καθοδήγηση των μαθητών προς την ορθή λύση του προβλήματος. Παραδόξως, οι πληροφοριακές εικόνες δεν επηρέασαν θετικά τη συμπεριφορά των μαθητών όταν οι πληροφορίες της εικόνας περιέχονταν στο πρόβλημα, γεγονός που ενισχύει την άποψη ότι οι εικόνες από μόνες τους δεν επιδρούν πάντα θετικά στη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Ανάλογη έρευνα είναι και αυτή της Αναστασιάδου (2007), της οποίας στόχος ήταν να διερευνηθεί η επίδραση των αναπαραστάσεων και της ορθής μετάφρασής τους στην επίλυση στατιστικού προβλήματος. Η συγκεκριμένη έρευνα απευθυνόταν σε μαθητές Δ’, Ε’ και Στ’ Δημοτικού. Όπως υπέδειξαν τα αποτελέσματα, οι μαθητές της Δ’ τάξης ήταν σε θέση να χειρίζονται με διαφορετικό βαθμό επιτυχίας διάφορες μορφές αναπαράστασης ενός στατιστικού προβλήματος, ενώ, οι μαθητές της Ε’ τάξης αντιμετώπιζαν τα έργα ανάλογα με την αρχική πηγή αναπαράστασης (λεκτική/γραφική/πίνακα). Τέλος, οι μαθητές της Στ’ τάξης φάνηκε να διαθέτουν τις ικανότητες και τις απαραίτητες γνωστικές δεξιότητες για να αναγνωρίσουν μια στατιστική έννοια σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, όπως επίσης και να μεταφράσουν την έννοια από το ένα σύστημα στο άλλο.

3.3.1 Η εικόνα ως εξωτερική αναπαράσταση

Πραγματοποιώντας μία επισκόπηση στο διδακτικό υλικό που χρησιμοποιείται τα τελευταία χρόνια στα σχολικά εγχειρίδια όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης, διαπιστώνουμε ότι οι αναπαραστάσεις και, ειδικότερα, οι εικόνες, τα διαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις περιλαμβάνονται σε αυτά όσο ποτέ άλλοτε (Carney & Levin, 2002). Τη χρήση, μάλιστα, οπτικών αναπαραστάσεων αναφορικά με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος έχουν υποστηρίξει τόσο αξιόλογοι μαθηματικοί παιδαγωγοί, όσο και η μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα και αρκετοί γνωστικοί ψυχολόγοι (Κορδάκη, 2004). Ομοίως, οι Carney & Levin (2002) αναφέρουν ότι το κύριο εύρημα αναρίθμητων ερευνών, που σχετίζονται με τη μνημονική λειτουργία των εικόνων στα κείμενα, είναι ότι ένας αναγνώστης θυμάται πολύ καλύτερα το περιεχόμενο ενός κειμένου όταν αυτό συνοδεύεται από εικόνες.

Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι στα σχολικά εγχειρίδια περιέχονται ποικίλα είδη αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες, οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις, οι συμβολικές εκφράσεις και η αριθμητική γραμμή (Janvier, 1987), από τα οποία το καθένα απαιτεί διαφορετικούς τρόπους μετάφρασης και επεξεργασίας από τους μαθητές, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στα συνηθέστερα είδη αναπαραστάσεων που συναντούμε στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου.

Η χρήση της εικόνας ως εξωτερικής αναπαράστασης στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών χωρίς αμφιβολία προωθεί τη σκέψη, την επικοινωνία και τη μετάδοση μαθηματικών ιδεών (Carney & Levin, 2002). Οι εικόνες και τα μαθηματικά κείμενα συνιστούν τα συνηθέστερα είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων που εφαρμόζονται στη μαθηματική εκπαίδευση, ωστόσο, οι προηγούμενες έρευνες σχετικά με αυτά επικεντρώνονται περισσότερο στη μνημονική λειτουργία των εικόνων στα κείμενα (Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003). Όπως αναφέρουν οι Owens & Clements (1998), η χρήση συγκεκριμένων οπτικών αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι ζωτικής σημασίας αναφορικά με την *υποκριτικότητα* των μαθητών, την ανάπτυξη αποδοτικών στρατηγικών για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, αλλά και την επιλεκτική εναπόθεση της προσοχής τους. Ωστόσο, κατά τη Mesquita (1998), η κινητοποίηση των ‘‘πολλαπλών σχέσεων’’ που παρέχουν οι εικόνες δεν επιδρά πάντα θετικά στη μάθηση, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις προσφέρεται οπτική υποστήριξη στους μαθητές κινητοποιώντας, έτσι, τις αισθητήριες δυνάμεις τους, ενώ σε άλλες η υποστήριξη αυτή είναι τόσο μεγάλη, που εμποδίζει τους μαθητές από το να εξάγουν οι ίδιοι λογικά συμπεράσματα (κυρίως σε ό,τι αφορά τη γεωμετρία).

3.3.2 Η αριθμητική γραμμή ως εξωτερική αναπαράσταση

Εκτός από τις εικόνες, ένας ακόμη τύπος αναπαράστασης που διαδραματίζει ζωτικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και χρησιμοποιείται ευρέως στα σχολικά εγχειρίδια είναι η αριθμητική γραμμή. Όπως αναφέρουν οι Gagatsis & Shiakalli (2004), μια προσανατολισμένη ευθεία (στην Ευκλείδεια Γεωμετρία) μπορεί να αποτελέσει ένα γεωμετρικό μοντέλο για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των ρητών αριθμών, καθώς επίσης και για την κατασκευή ορισμένων άρρητων αριθμών. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια οριζόντια συνήθως ευθεία, στην οποία ορίζουμε ένα σημείο το οποίο καλούμε αρχή της ευθείας (με τον αριθμό 0) και από αυτό η ευθεία εκτείνεται στο άπειρο και από τις δύο κατευθύνσεις. Σε αυτήν υπάρχει μια, ένα προς ένα, αντιστοιχία ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς και στα σημεία της γραμμής αυτής. Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο σημείο που ορίζει τη μονάδα μήκους της ευθείας. Πραγματοποιώντας μία επισκόπηση στα σχολικά εγχειρίδια των τάξεων του Δημοτικού σχολείου, διαπιστώνουμε ότι η αριθμητική γραμμή χρησιμοποιείται ως μοντέλο για τη διδασκαλία της διάταξης των αριθμών, ως μοντέλο για τις τέσσερις πράξεις των αριθμών, καθώς επίσης και τη διδασκαλία νέων τύπων αριθμών (Ernest, 1985). Ωστόσο, οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες στην τοποθέτηση κλασμάτων πάνω στην αριθμητική γραμμή (Κολέζα, 2000). Παρά ταύτα, η χρήση γεωμετρικών μοντέλων, όπως η αριθμητική γραμμή, παρέχει ένα καινούριο πλαίσιο αντίληψης του προβλήματος στους μαθητές, που τους βγάζει από ένα καθαρά εμπειρικό πλαίσιο αντίληψης (Gagatsis & Ilia, 2004).

3.3.3 Το διάγραμμα ως εξωτερική αναπαράσταση

Μια επίσης διαδεδομένη μορφή εξωτερικής αναπαράστασης που προσδιορίζει τις καταστάσεις ενός προβλήματος και, περισσότερο τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις καταστάσεις αυτές, συνιστά και το διάγραμμα. Το διάγραμμα φαίνεται να βοηθά ιδιαίτερα τους μαθητές στη νοερή απεικόνιση των δεδομένων ενός μαθηματικού προβλήματος, αφού τους καθιστά ικανούς να κατανοήσουν και να συνειδητοποιήσουν διαδικασίες που, υπό άλλες συνθήκες, θα υπερέβαιναν τις αντιληπτικές τους δυνατότητες (Μαστρογιάννης & Τρύπα, 2010). Κατά γενική ομολογία, λοιπόν, τους διευκολύνει στην επεξεργασία των δεδομένων, στη λύση προβλημάτων, και ειδικότερα με κλάσματα, αλλά και στον έλεγχο των απαντήσεων τους ως προς την ορθότητά τους, παρά το γεγονός ότι, βάσει κάποιων ερευνών, όταν τα διαγράμματα είναι περισσότερα του ενός, οι μαθητές αντιμετωπίζουν ορισμένες δυσκολίες (για παράδειγμα, στον προσδιορισμό της μονάδας) και δεν εγγυώνται πάντα τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Μαστρογιάννης & Τρύπα, 2010).

3.3.4 Το γράφημα ως εξωτερική αναπαράσταση

Μία ακόμη ενδιαφέρουσα μορφή συμβολικής απεικόνισης, εξίσου διαδεδομένη, είναι το γράφημα. Όπως υποστηρίζει ο Pinker (1990), *το γράφημα είναι μια αναπαράσταση που* *επιχειρεί να επικοινωνήσει στους αναγνώστες ένα σύνολο πολλαπλών τιμών σε μαθηματικές κλίμακες, χρησιμοποιώντας αντικείμενα των οποίων οι οπτικές διαστάσεις (όπως το μήκος, η θέση, η φωτεινότητα και το σχήμα) αντιστοιχούν στις ανάλογες κλίμακες της αναπαράστασης (κατηγορίας, αριθμητική, διαστήματος, αναλογίας) και των οποίων οι τιμές σε κάθε διάσταση σχετίζονται με τις τιμές στις αντίστοιχες κλίμακες.* Με πιο απλά λόγια, αποτελεί την οπτική απεικόνιση που εξηγεί και εικονογραφεί μια ή περισσότερες σχέσεις μεταξύ αριθμών, εμπερικλείοντας μεγάλο όγκο δεδομένων, τα οποία, υπό άλλες συνθήκες, θα ήταν απαιτητικό να περιγραφούν. Ο τύπος γραφήματος που χρησιμοποιείται περισσότερο στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου είναι το ραβδόγραμμα, διότι, με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές είναι εύκολο να οδηγηθούν από τα συγκεκριμένα δεδομένα σε μία πιο αφηρημένη σκέψη.

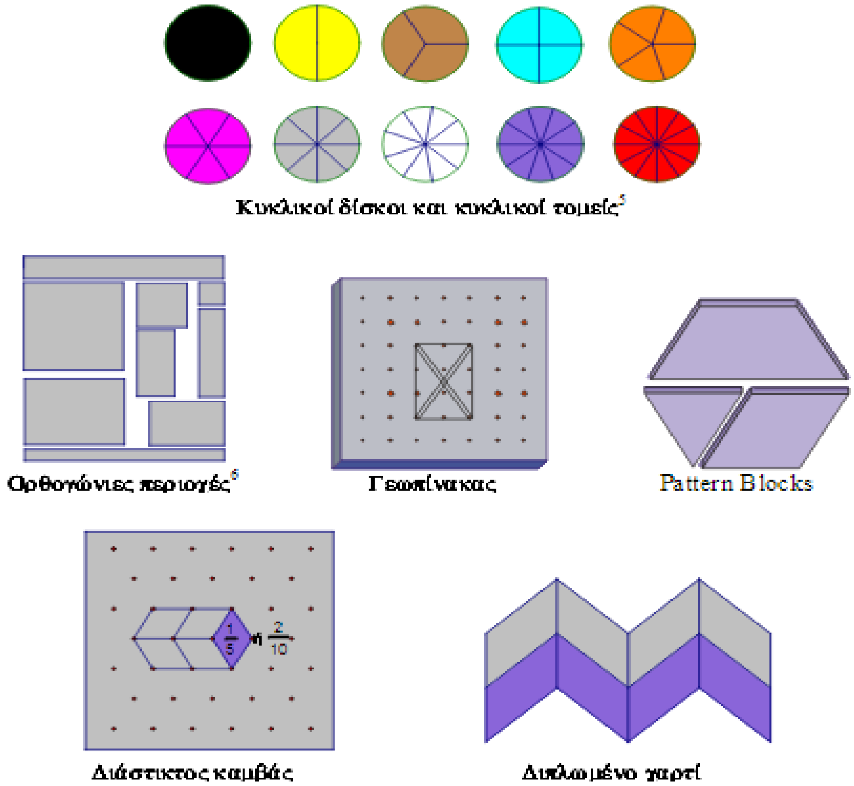
3.4 Ο ρόλος των μαθηματικών μοντέλων στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων

Όπως έγινε αντιληπτό από τα παραπάνω, ως αναπαράσταση θα μπορούσε να θεωρηθεί η απεικόνιση ή ‘‘οπτική’’ προσέγγιση μίας σχέσης, ενώ, όταν αναφερόμαστε στον όρο *μοντέλο*, μιλάμε για έναν τρόπο αναπαράστασης (Στεργίου & Πατρώνης,χ.χ.). Κατά συνέπεια, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά είναι μία ευρύτερη έννοια από τα γεωμετρικά μοντέλα. Ως γεωμετρικό μοντέλο ορίζεται μια γεωμετρική αναπαράσταση ενός προβλήματος, κατάλληλη για τη λύση του και για παραπέρα μελέτη (Gagatsis & Patronis, 1990).

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005) τα γεωμετρικά μοντέλα για την αναπαράσταση κλασμάτων χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

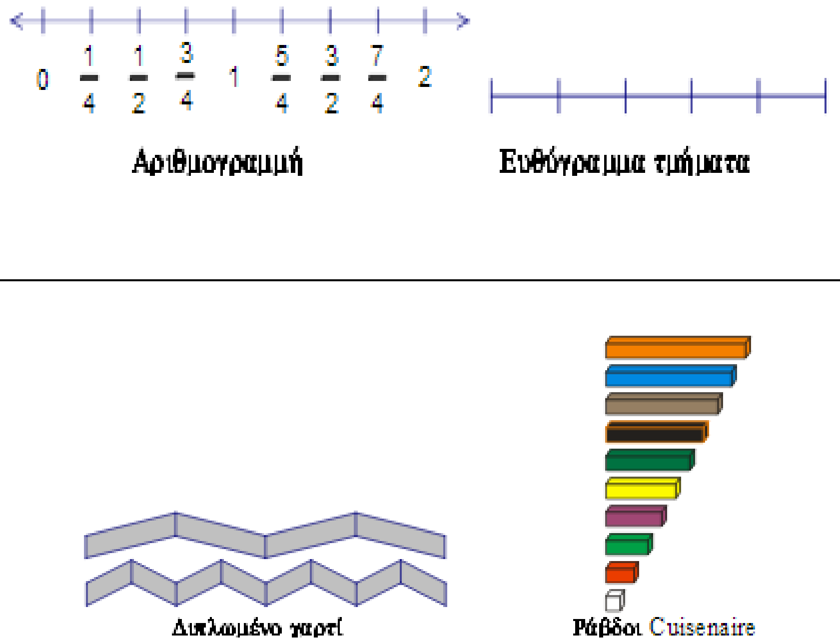
1. τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού, στα οποία συγκαταλέγονται ορθογώνιες επιφάνειες, κυκλικοί δίσκοι, γεωπίνακες, διάστικτοι καμβάδες, ορθογώνιοι, pattern blocks ή διπλωμένο χαρτί. Όπως γίνεται φανερό και από το παρακάτω σχήμα, στα μοντέλα αυτά τη μονάδα αναφοράς αποτελεί μια επιφάνεια, η οποία διαιρείται σε ίσα μέρη.

Σχήμα 3.1: Μοντέλα περιοχής ή εμβαδού για την αναπαράσταση κλασμάτων (Van de Walle, 2005)



2. τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης, τα οποία δεν διαφέρουν κατά πολύ τα μοντέλα περιοχής ή εμβαδού. Η βασική διαφορά των δύο κατηγοριών συνίσταται στο ότι στα μοντέλα μήκους συγκρίνουμε μήκη, ενώ, στα μοντέλα εμβαδού συγκρίνουμε εμβαδά. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι λωρίδες κλασμάτων και οι ράβδοι Cuisenaire, ευθύγραμμα τμήματα, διπλωμένες λωρίδες χαρτιού, και η αριθμογραμμή Van de Walle (2005).

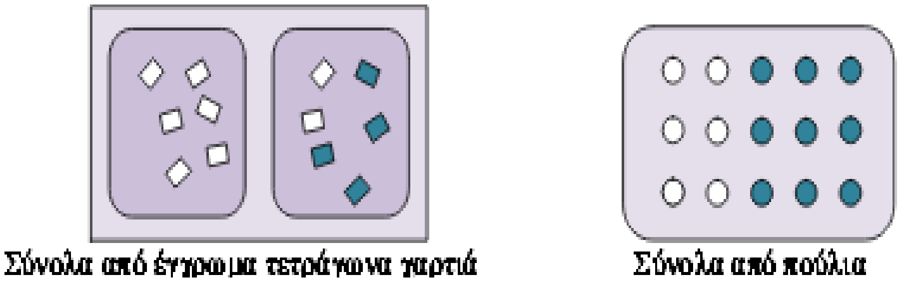
Σχήμα 3.2: Μοντέλα μήκους ή μέτρησης για την αναπαράσταση κλασμάτων (Van de Walle, 2005)



3. τα μοντέλα συνόλων

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας μας, στα μοντέλα συνόλων το σύνολο θεωρείται ως μία μονάδα, ενώ, παράλληλα καθένα από τα ισοπληθή υποσύνολα ως μέρος του όλου (Κολέζα, 2000).

Σχήμα 3.3: Μοντέλα συνόλων για την αναπαράσταση κλασμάτων (Van de Walle, 2005)



Κατά τον Streefland (1997), οι μαθητές, μέσα από τη χρήση μοντέλων στη διδακτική διαδικασία, μαθαίνουν τα κλάσματα υπό ένα συγκεκριμένο πρίσμα. Ωστόσο, η έννοια του κλάσματος θα πρέπει να αποδεσμευτεί από αυτό, προκειμένου οι μαθητές να κατασκευάσουν νοητικά το τυπικό μαθηματικό περιεχόμενο του κλάσματος. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επανειλημμένης χρήσης των κλασμάτων σε διαφορετικά πλαίσια, ώστε οι ίδιοι τελικά να διαπιστώσουν ότι αυτό που κάθε φορά μένει σταθερό είναι η έννοια του κλάσματος. Παρόμοιες αντιλήψεις εκφράζουν και οι Behr, Lesh, Post & Silver (1983).

Από την έρευνα που πραγματοποίησαν οι Αυγερινός και συν. (2011), κατέστη φανερό ότι οι μαθητές επηρεάζονται από την πολυπλοκότητα και το σχήμα των μοντέλων. Όσο πιο οικεία και απλά είναι στο σχήμα τους τα μοντέλα που αναπαριστούν κλασματικούς αριθμούς, τόσο πιο εύκολα φαίνεται οι μαθητές να τα χειρίζονται. Πιο συγκεκριμένα:

1. Το μοντέλο σχεδιαγράμματος, στο οποίο το πλήθος των αντικειμένων που αναπαριστώνται είναι ίσο με τον παρονομαστή και ζητείται από τους μαθητές να σκιάσουν τόσα μέρη, όσα αναφέρονται στον αριθμητή, φαίνεται να τους διευκολύνει αρκετά στην κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων.
2. Αναφορικά με το σχήμα του μοντέλου, οι μαθητές έδειξαν να χειρίζονται με μεγαλύτερη ευκολία μοντέλα που αναπαριστούσαν ορθογώνια, παρά ορθογώνια

και κύκλους. Το γεγονός αυτό πιθανότατα οφείλεται στην καλύτερη εξοικείωση που διαθέτουν οι μαθητές με το σχήμα του ορθογωνίου.

3. Ακόμη, κατέστη εμφανές ότι όσο απλούστερα ήταν τα μοντέλα που δίνονταν στους μαθητές, τόσο καλύτερα ήταν οι ίδιοι σε θέση να τα χειριστούν.
4. Αξιοσημείωτο εύρημα αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές, ακόμη και όταν έρχονταν αντιμέτωποι με μοντέλα, στα οποία η μονάδα δεν ήταν χωρισμένη σε ίσα μέρη, τα αντιμετώπιζαν σαν να ήταν ισομερώς χωρισμένα.
5. Τέλος, όπως αποδείχθηκε, οι μαθητές δυσκολεύονταν ιδιαίτερα όταν έπρεπε να τοποθετήσουν κλάσματα, και ειδικά ετερώνυμα, πάνω στην αριθμητική γραμμή.

Ακόμη μία έρευνα που διενεργήθηκε από τους Κυριακοπούλου & Πολίτη (2011), με σκοπό να διερευνηθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα από τη διδασκαλία των κλασματικών μονάδων με τη χρήση αναπαραστάσεων και, ειδικότερα, του εγκεκριμένου από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο εκπαιδευτικού λογισμικού ''Τα παιδιά κάνουν Μαθηματικά'', φανέρωσε την προώθηση της διερευνητικής μάθησης και της κριτικής σκέψης, όπως επίσης και της ενεργούς συμμετοχής από την πλευρά των μαθητών. Αναλυτικότερα, παρατηρήθηκε μία γενικότερη απροθυμία των μαθητών να καταφύγουν στη λύση της ''βοήθειας'', παρά την προτροπή της ερευνήτριας, ενώ, αναφορικά με τις μαθησιακές τους επιδόσεις, αυτές φάνηκε να βελτιώνονται αισθητά όσο οι σχηματικές αναπαραστάσεις γίνονταν εντονότερες, πράγμα που ισχύει και για τις επεξηγήσεις τους. Παρά το γεγονός ότι αλιεύθηκαν οι συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις κλασματικές μονάδες, εντούτοις, πραγματοποιήθηκε εννοιολογική αλλαγή και οι μαθησιακοί στόχοι επιτεύχθηκαν σημαντικά. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές έδειξαν να προτιμούν την οδό της αριθμητικής λύσης, όσον αφορά στα προβλήματα που περιείχαν σχεδίαση, και όχι αυτή της γεωμετρικής.

Στο ίδιο μήκος κύματος κυμαίνεται περίπου και η διδακτική πρόταση των Μαστρογιάννη & Τρύπα (2010), οι οποίοι θέλησαν να παρέχουν την ευκαιρία μελέτης των κλασματικών αριθμών διαθεματικά μέσω της αξιοποίησης των σημαιών διαφόρων κρατών και του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri Geometry II. Τα μοντέλα κλασμάτων που συμπεριλήφθηκαν σε αυτή την περίπτωση ήταν αυτά της μέτρησης μήκους ή μέτρησης και περιοχής ή εμβαδού.

3.5 Σημασία της Μετάφρασης

Στη μέχρι τώρα πορεία της εργασίας μας έγινε φανερό ότι η διαδικασία της μετάφρασης μίας αναπαράστασης σε μία άλλη αποτελεί έναν από τους βασικούς παράγοντες για την επιτυχή έκβαση της μάθησης των μαθηματικών εννοιών. Η μετάφραση προϋποθέτει τη δημιουργία μιας σχέσης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, η οποία, σύμφωνα με τους Lesh, Post και Behr (1987), επιτυγχάνεται με τη διατήρηση των δομικών χαρακτηριστικών και του νοήματος. Το αν η διαδικασία της μετάφρασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη έχει επιτευχθεί ορθώς καθορίζεται από το εάν οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίζουν την έννοια που λανθάνει πίσω από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών αναπαραστάσεων, να χειρίζονται ευέλικτα την υπό διδασκαλία μαθηματική έννοια με τη βοήθεια οποιασδήποτε αναπαράστασης, αλλά και να μεταφράζουν με ακρίβεια την έννοια από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (Lesh, Post & Behr, 1987). Στο σημείο αυτό κομβικής σημασίας είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών, οι οποίοι επιτελούν διαμεσολαβητικό ρόλο και είναι σε θέση να διευρύνουν το φάσμα των αναπαραστάσεων που διαθέτουν οι μαθητές φέρνοντάς τους αντιμέτωπους με ‘‘καρποφόρες’’ καταστάσεις, ή ακόμη και να συνδράμουν στο έργο αυτό μέσω των εκφράσεων του προσώπου και των χειρονομιών τους (Vergnaud, 1998). Εντούτοις, όπως υπογραμμίσαμε και παραπάνω, δεν είναι λίγες οι φορές που και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί, όταν έρχονται αντιμέτωποι με ασυνήθιστες διαδικασίες μάθησης, συναντούν εμπόδια κατά τη διαδικασία μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

3.6 Περιορισμοί στη χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών αντικειμένων

Παρά τα οφέλη που αναμφισβήτητα προσφέρει η χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των κλασματικών εννοιών, ωστόσο αυτή υπόκειται και σε ορισμένους περιορισμούς, κυρίως ανάλογα με τον βαθμό δυσκολίας στη χρήση τους. Γενικά, η χρήση πολύπλοκων εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία ίσως επιφέρει τα αντίθετα από τα επιθυμητά αποτελέσματα, ιδίως σε ό,τι αφορά τους αδύναμους μαθητές, ενώ, κάποιες φορές η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων επίσης προκαλεί σύγχυση στους μαθητές, λόγω του φόρτου νοητικής επεξεργασίας που προκαλείται

(Boulton-Lewis, 1998). Όπως επισημαίνει ο Hitt (1998), πειραματικές έρευνες έχουν δείξει ότι δυσκολίες στη μετάφραση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, όταν έχουμε να κάνουμε με πολλαπλά συστήματα αναπαραστάσεων και ασυνήθιστες διαδικασίες μάθησης, αντιμετωπίζουν και οι εκπαιδευτικοί.

Ένας, ακόμη, σημαντικός περιορισμός που αφορά στη χρήση μοντέλων στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών είναι ότι τα μοντέλα δε διαθέτουν εγγενή μαθηματικά χαρακτηριστικά που να παραπέμπουν άμεσα στις μαθηματικές έννοιες (Ball, 1992).Έτσι, παρόλο που οι εκπαιδευτικοί συχνά χρησιμοποιούν μοντέλα με στόχο να μεταπηδήσουν σε μια μαθηματική έννοια, οι μαθητές κάποιες φορές νοητικά δημιουργούν διαφορετικό νόημα από αυτό στο οποίο επιδιώκεται να τους παραπέμψει η χρήση του μοντέλου. Για παράδειγμα, τα μοντέλα επιφάνειας ή εμβαδού θεωρούνται πιο εύκολα στη χρήση σε σχέση με τα διακριτά μοντέλα και, για το λόγο αυτό, οι μαθητές θα ήταν καλύτερο να εισάγονται νωρίτερα στα πρώτα (Κολέζα, 2000).

Επιπρόσθετα, η υλοποίηση του κάθε εκπαιδευτικού στόχου θα πρέπει να ανταποκρίνεται στη φύση της εκάστοτε μαθηματικής έννοιας που πρόκειται να διδαχθεί (διδακτικό πλαίσιο), όπως επίσης και στις δυνατότητες των εκάστοτε μαθητών. Σύμφωνα, με τον Hall (1998), παρά το γεγονός ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και των καθηγητών των εκπαιδευτικών θεωρεί τη χρήση συγκεκριμένων υλικών στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών κάτι περισσότερο ή λιγότερο από αυταπόδεικτη, οι περισσότερες έρευνες αποδίδουν ελάχιστη βαρύτητα στη διδακτική προσέγγιση αυτών των υλικών. Για τους παραπάνω λόγους, παράγοντες οι οποίοι σε κάθε περίπτωση κρίνεται αναγκαίο να λαμβάνονται υπόψη είναι η ποσότητα των πληροφοριών που αντιπροσωπεύει κάθε αναπαράσταση, η ομοιότητα των αναπαραστάσεων, ο αριθμός των αναπαραστάσεων που εφαρμόζονται, η μετάφραση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, καθώς και η ακολουθία μεταξύ των αναπαραστάσεων (Ainsworth, Wood & Bibby, 1997).

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Owens και Clements (1998), τα ίδια χειριστικά μοντέλα είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και με διαφορετικό περιεχόμενο, αποσκοπώντας κάθε φορά στην ανάπτυξη διαφορετικών εννοιών.

3.7 Ανακεφαλαίωση

Συνοψίζοντας, στο παραπάνω κεφάλαιο, αφότου αναφέρθηκαν ορισμένοι από τους κυριότερους στόχους των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, παρατέθηκαν τα ευρήματα σχετικών ερευνών αναφορικά με τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών, ενώ πραγματοποιήθηκε και μία σύντομη αναφορά σε μερικά από τα συνηθέστερα είδη αναπαραστάσεων που συναντούμε τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού. Επιπλέον, παρατέθηκαν τα αποτελέσματα από πειραματικές έρευνες που διεξήχθησαν και σκοπό είχαν τη μελέτη της επίδρασης των μαθηματικών μοντέλων στη διδασκαλία των κλασμάτων. Παράλληλα, αναφέρονται ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με τη σημασία της διαδικασίας της μετάφρασης, όταν γίνεται χρήση αναπαραστάσεων, καθώς επίσης, και οι περιορισμοί στους οποίους εμπίπτει η χρήση αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση.

Καταληκτικά, η διαμόρφωση ενός αποδοτικού θεωρητικού πλαισίου σχετικά με την αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών αντικειμένων απαιτεί την περαιτέρω ερευνητική εστίαση σε ορισμένα βασικά ζητήματα. Σύμφωνα με τους Γαγάτση και συν. (2004), σε αυτά συγκαταλέγονται η διάκριση των εξωτερικών αναπαραστάσεων ως προς τον αυτόνομο ή βοηθητικό χαρακτήρα τους στην αποτύπωση ενός μαθηματικού αντικειμένου, η σύνδεση μίας ταξινόμησης εξωτερικών αναπαραστάσεων με μία αντίστοιχη εσωτερικών, όπως επίσης και η διάκριση των όρων *επεξεργασία* και *μετάφραση*. Επιπρόσθετα, αναγκαία κρίνεται η διερεύνηση μίας ισομορφικής (με το πεδίο των εξωτερικών αναπαραστάσεων) λειτουργίας αναφορικά με τη μετάφραση των εσωτερικών αναπαραστάσεων.

Δεύτερο Μέρος: Ερευνητική Μεθοδολογία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρατίθενται έξι ενότητες μέσα στις οποίες περιγράφεται η μεθοδολογία της παρούσας έρευνας που πραγματοποιήθηκε για τη διερεύνηση της επιρροής και επίδρασης των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων. Στην πρώτη ενότητα περιγράφεται ο προβληματισμός, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα της ερευνητικής διαδικασίας (βλ. ενότητα 4.2). Στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται ο ερευνητικός σχεδιασμός που ακολουθήθηκε για την συλλογή των δεδομένων και κατά επέκταση και των αποτελεσμάτων καθώς και το είδος της έρευνας (βλ. ενότητα 4.3). Στην τρίτη ενότητα γίνεται παρουσίαση του δείγματος της έρευνας, δηλαδή οι συμμετέχοντες στην ερευνητική διαδικασία και τα δημογραφικά χαρακτηριστικά τους (βλ. ενότητα 4.4). Στην τέταρτη ενότητα περιγράφονται τα μέσα με τα οποία συλλέγονται τα δεδομένα, δηλαδή το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων, το οποίο αναλύεται διεξοδικά για την καλύτερη κατανόησή του (βλ. ενότητα 4.5). Στην πέμπτη ενότητα γίνεται παρουσίαση των σταδίων της ερευνητικής διαδικασίας όπως ακολουθήθηκαν κατά σειρά προκειμένου να οδηγήσουν στην ομαλή συλλογή των αποτελεσμάτων (βλ. ενότητα 4.6). Στην έκτη και τελευταία ενότητα του εν λόγω κεφαλαίου παρουσιάζεται η ανάλυση των δεδομένων, ουσιαστικά το στατιστικό εργαλείο, πρόγραμμα CHIC του Regis Gras, που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των συνεπαγωγικών αποτελεσμάτων (βλ. ενότητα 4.7).

4.2 Προβληματισμός, στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα ερευνητική εργασία έχει ως κυρίαρχο σκοπό τη διερεύνηση της επίδρασης των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων στους μαθητές της Δ’ τάξης του Δημοτικού σχολείου.

Η κεντρική ιδέα της διερεύνησης αυτής δημιούργησε επιμέρους στόχους οι οποίοι σε περίπτωση που επιτευχθούν ωθούν αυτόματα στην ολοκλήρωση και εκπόνηση του αρχικού σκοπού που λειτούργησε και ως κινητήριος μοχλός για το ξεκίνημα του εν λόγω ερευνητικού πονήματος. Οι επιμέρους στόχοι που εμπεριέχονται στην προκειμένη έρευνα είναι να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές γνωρίζουν την μαθηματική πράξη που περιγράφει τα κλάσματα, να εντοπιστεί εάν οι μαθητές γνωρίζουν ποιο είναι το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο, να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές γνωρίζουν τα ισοδύναμα κλάσματα, να γίνει κατανοητό εάν οι μαθητές συσχετίζουν ένα κλάσμα με ένα γεωμετρικό σχήμα που το αναπαριστά, αντίστροφα να φανερωθεί εάν οι μαθητές γνωρίζουν πώς αναπαρίσταται ένα κλάσμα πάνω σε ένα γεωμετρικό σχήμα ή σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και να αποδείξουν στη δεύτερη περίπτωση την ισοδυναμία μεταξύ δύο ισάξιων κλασμάτων. Ο τελευταίος επιμέρους στόχος αφορά στο να γίνει αντιληπτό εάν οι μαθητές γνωρίζουν πώς επιλύεται ένα πρόβλημα που περιέχει κλάσματα και απαιτεί αναπαράσταση κλασμάτων σε ευθύγραμμο τμήμα για την επίλυσή του.

Στο σημείο αυτό επισημαίνεται ότι είναι απαραίτητη πρωτύτερα η διερεύνηση των γνωσιακών δεξιοτήτων των μαθητών για τα κλάσματα και έπειτα το αν τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία συμβάλλουν στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές, διότι εάν δεν έχουν αντιληφθεί την έννοια του κλάσματος, δεν θα είναι σε θέση να την μεταφέρουν και στα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας που θα λειτουργήσουν ως αναπαραστατικά εργαλεία. Ακόμη παραπάνω γίνεται αναφορά για τις δυσκολίες των μαθητών στην κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων (βλ. ενότητα 2.9) εντοπίζεται από υπάρχουσα βιβλιογραφία ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων λόγω είτε της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς με τους οποίους τους παραλληλίζουν και πιο συγκεκριμένα συγχέουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012), είτε της ελλιπής αντίληψης των κλασμάτων ως αριθμού (Lamon, 2001). Η γνώση λοιπόν αυτή και η ελλιπής αντίληψη λειτουργούν ως εμπόδιο για τους μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία της κατανόησης των κλασμάτων. Το γεγονός αυτό κρίνει αναγκαία την εφαρμογή της εννοιολογικής αλλαγής (βλ. ενότητα 2.12) όπου σύμφωνα με τη θεωρία της οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στην ουσιαστική κατανόηση των κλασμάτων, πράγμα όμως που δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν οι ίδιοι και να κάνουν πράξη από μόνοι τους αλλά μονάχα μέσω του επαναπροσδιορισμού κάθε φορά της προϋπάρχουσας γνώσης.

Στηριζόμενοι στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν έρθει σε μία πρώτη επαφή με την έννοια του κλάσματος στην Γ’ τάξη του Δημοτικού σχολείου και σε μία δεύτερη φάση έχουν δώσει μεγαλύτερη βαρύτητα στην Δ’ τάξη του Δημοτικού σχολείου στη δεδομένη μαθηματική έννοια, όπως μας γνωστοποιήθηκε και από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων στα οποία πραγματοποιήθηκε η έρευνα κατά το τέλος του διδακτικού έτους της Δ’ τάξης του Δημοτικού σχολείου, προχωρήσαμε απευθείας στη διερεύνηση του γενικού σκοπού της εργασίας μέσω του ερευνητικού εργαλείου, ερωτηματολόγιο. Μέσα από την συγκεκριμένη ερευνητική διαδικασία τίθενται ερωτήσεις οι οποίες έχουν και τα ανάλογα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα αντίστοιχα.

Ερωτήσεις

Οι τέσσερις πρώτες ερωτήσεις αναφέρονται στις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά και οι απαντήσεις τους μπορούν να εκφραστούν μέσω δύο αποκλειστικών προεπιλογών, «Ναι» ή «Όχι».

Ερώτηση $1^{η}$-Πεποίθηση

Στην πρώτη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να δηλώσουν εάν τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα σύμφωνα με τις προσωπικές τους προτιμήσεις.

Εικόνα 1: Ερώτηση $1^{η}$

1. Τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα για εμένα.	**Ναι**	**Όχι**

Ερώτηση $2^{η}$-Πεποίθηση

Στη δεύτερη ερώτηση οι μαθητές ρωτώνται εάν τα Μαθηματικά είναι ένα μάθημα όπως όλα τα άλλα σύμφωνα με τις προσωπικές τους εκτιμήσεις.

Εικόνα 2: Ερώτηση $2^{η}$

2. Τα Μαθηματικά είναι ένα μάθημα όπως όλα τα άλλα.	**Ναι**	**Όχι**

Ερώτηση 3η-Πεποίθηση

Στην τρίτη ερώτηση τίθεται ο ισχυρισμός ότι τα Μαθηματικά δεν είναι και πολύ χρήσιμα στη ζωή μας και οι μαθητές με τη σειρά τους πρέπει να το υπερψηφίσουν ή σε αντίθετη περίπτωση να το καταψηφίσουν.

Εικόνα 3: Ερώτηση 3η

3. Τα Μαθηματικά δεν είναι και πολύ χρήσιμα στη ζωή μας.	**Ναι**	**Όχι**

Ερώτηση 4η-Πεποίθηση

Στην τέταρτη και τελευταία ερώτηση που αναφέρεται στις πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά διατυπώνεται η άποψη ότι αν αγνοείς τα Μαθηματικά δεν γίνεται να προχωρήσεις καλά στη ζωή σου.

Εικόνα 4: Ερώτηση 4η

4. Δεν γίνεται να προχωρήσεις καλά στη ζωή σου αν αγνοείς τα Μαθηματικά.	**Ναι**	**Όχι**

Ερώτηση 5η-Έργο

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν ποια πράξη περιγράφει τα κλάσματα και πιο συγκεκριμένα εάν τα περιγράφει η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση. Εξετάζεται μέσω αυτής της ερώτησης εάν έχουν κατανοήσει βαθύτερα την έννοια του κλάσματος και πώς αυτό αναλύεται. Έπειτα είναι αναγκαία η αιτιολόγηση της απάντησης που δίνεται από τους μαθητές.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης 5ης-Έργο

Να γνωρίζουν ότι η διαίρεση είναι η πράξη που περιγράφει τα κλάσματα και να εξηγήσουν ότι η πράξη αυτή περιγράφει τα κλάσματα επειδή το κλάσμα μάς δείχνει σε πόσα ίσα κομμάτια μοιράζεται-χωρίζεται ένα γεωμετρικό σχήμα-αντικείμενο και πόσα από αυτά παίρνουμε.

Εικόνα 5: Ερώτηση $5^{η}$

5. Ποιες από τις παρακάτω μαθηματικές πράξεις περιγράφει περισσότερο τα κλάσματα;

Α) Πρόσθεση Β) Αφαίρεση Γ) Πολλαπλασιασμός Δ) Διαίρεση

Γιατί; ……………………………………………………………………………………….

Ερώτηση $6^{η}$-Έργο

Στην έκτη ερώτηση εμπεριέχονται οκτώ υποερωτήματα στα οποία οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν το μεγαλύτερο από τα δύο κλάσματα που υπάρχουν σε κάθε υποερώτημα ή να επιλέξουν και τα δύο σε περίπτωση που τα κλάσματα είναι ισοδύναμα. Υπάρχουν σε ορισμένα υποερωτήματα και περιπτώσεις μικτών κλασμάτων τα οποία πρέπει πρώτα να μετατρέψουν σε απλά κλάσματα και έπειτα να κάνουν τη σύγκριση για να καταλήξουν στο μεγαλύτερο από τα δύο ή στην ισοδυναμία των δύο.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $6^{ης}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο αριθμητή όταν οι παρονομαστές είναι ίσοι και μικρότερο αντίστοιχα το κλάσμα που ο αριθμητής είναι μικρότερος στην ίδια περίπτωση. Ενώ όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή. Ακόμη να γνωρίζουν πώς μετατρέπεται ένα μικτό κλάσμα σε απλό. Τέλος να γνωρίζουν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Εικόνα 6: Ερώτηση $6^{η}$

6. Να κυκλώσεις το μεγαλύτερο κλάσμα. Σε περίπτωση ισοδυναμίας να κυκλώσεις και τα δύο κλάσματα.

1) $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$	2) $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{4}$	3) $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$	4) $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$
5) 1 $1\frac{1}{5}$	6) $\frac{6}{2}$ $1\frac{1}{5}$	7) $\frac{5}{2}$ $\frac{10}{4}$	8) $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{5}$

Ερώτηση $7^{η}$-Έργο

Στην έβδομη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να κυκλώσουν το γεωμετρικό σχήμα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος του δείχνει το ½. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το κατάλληλο σχήμα.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $7^{ης}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στην παρούσα περίπτωση το πλήθος των αντικειμένων στο δεύτερο γεωμετρικό σχήμα είναι 2 όσα ακριβώς ο παρονομαστής του κλάσματος και το σκιασμένο μέρος στο εν λόγω σχήμα είναι 1 όσο και ο αριθμητής του.

Εικόνα 7: Ερώτηση $7^{η}$

7. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{2}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*

Ερώτηση 8^{η}-Έργο

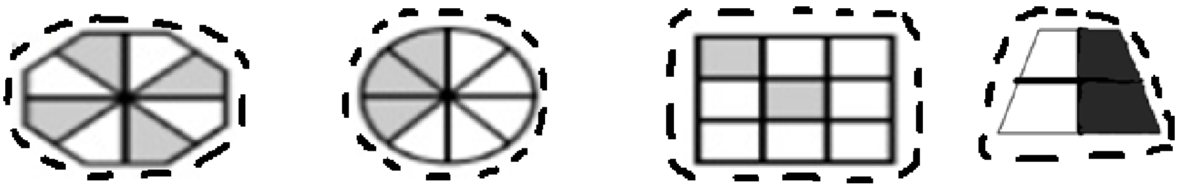
Στην όγδοη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να κυκλώσουν το γεωμετρικό σχήμα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος του δείχνει το 4/8. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το κατάλληλο σχήμα.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $8^{\eta\varsigma}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στην παρούσα περίπτωση το πλήθος των αντικειμένων στο πρώτο γεωμετρικό σχήμα είναι 8 όσα ακριβώς ο παρονομαστής του κλάσματος και το σκιασμένο μέρος στο εν λόγω σχήμα είναι 4 όσο και ο αριθμητής του.

Εικόνα 8: Ερώτηση 8^{η}

8. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{4}{8}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*



Ερώτηση 9^{η}-Έργο

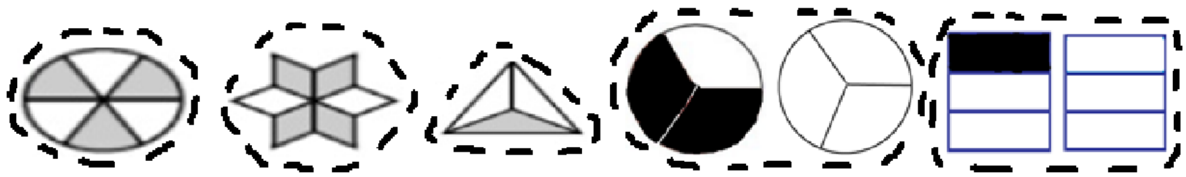
Στην ένατη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να κυκλώσουν τα γεωμετρικά σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος τους δείχνει το 1/3. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το κατάλληλο σχήμα και ακόμη να αναγνωρίζουν ότι ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να δείχνει ένα ισοδύναμο κλάσμα από αυτό που δίνεται στην εκφώνηση της ερώτησης αρχικά.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $9^{ης}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στην παρούσα περίπτωση το πλήθος των αντικειμένων στο τρίτο γεωμετρικό σχήμα είναι 3 όσα ακριβώς ο παρονομαστής του κλάσματος και το σκιασμένο μέρος στο εν λόγω σχήμα είναι 1 όσο και ο αριθμητής του. Επίσης να γνωρίζουν ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με το διπλάσιο του παρονομαστή και είναι ομοίως σκιασμένα τα διπλάσια από όσα αναφέρονται στον αριθμητή, δηλαδή είναι ανάλογα το κλάσμα με το σχεδιάγραμμα και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στη δεδομένη ερώτηση το πλήθος των αντικειμένων στο τέταρτο γεωμετρικό σχήμα είναι 6, δηλαδή ακριβώς διπλάσια από τον παρονομαστή του κλάσματος, και τα σκιασμένα μέρη στο εν λόγω σχήμα είναι 2, δηλαδή ακριβώς διπλάσια από τον αριθμητή του.

Εικόνα 9: Ερώτηση $9^{η}$

9. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{3}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*



Ερώτηση $10^{η}$-Έργο

Στη δέκατη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν εάν το ερώτημα που τους τίθεται είναι αληθές και το γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος δείχνει το ¼. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το κατάλληλο σχήμα και ακόμη να αναγνωρίσουν ότι τα μέρη του σχήματος που δίνεται στην ερώτηση δεν είναι ισοδύναμα χωρισμένα. Έπειτα καλούνται να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $10^{ης}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Σε περίπτωση που τα αντικείμενα στα οποία είναι διαχωρισμένο το σχήμα δεν είναι ισοδύναμα, τότε δεν είναι εφικτό και ορθό να υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στο κλάσμα και το γεωμετρικό σχήμα.

Εικόνα 10: Ερώτηση $10^{η}$

10. Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{4}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*

	Ναι	**Όχι**
		

Για ποιο λόγο έδωσες αυτήν την απάντηση:
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

Ερώτηση $11^{η}$-Έργο

Στη ενδέκατη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν εάν το ερώτημα που τους τίθεται είναι αληθές και το γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος δείχνει το 1/2. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το κατάλληλο σχήμα και ακόμη να αναγνωρίσουν ότι τα μέρη του σχήματος που δίνεται στην ερώτηση δεν είναι ισοδύναμα χωρισμένα. Έπειτα καλούνται να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης $11^{ης}$-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Σε περίπτωση που τα αντικείμενα στα οποία είναι διαχωρισμένο το σχήμα δεν είναι ισοδύναμα, τότε δεν είναι εφικτό και ορθό να υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στο κλάσμα και το γεωμετρικό σχήμα. Παρόλα αυτά όμως να αναγνωρίσουν ότι το κλάσμα ½ αντιπροσωπεύει την έννοια του μισού και όπως φανερώνεται και από το σχήμα της ερώτησης είναι γραμμμοσκιασμένα 2 αντικείμενα τα οποία εάν ενώσουμε φαίνεται ξεκάθαρα ότι είναι γραμμοσκιασμένο ουσιαστικό ακριβώς το μισό από το σχήμα.

Εικόνα 11: Ερώτηση 11^{η}

11. Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{2}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*

	**Ναι**	**Όχι**

Για ποιο λόγο έδωσες αυτήν την απάντηση:
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

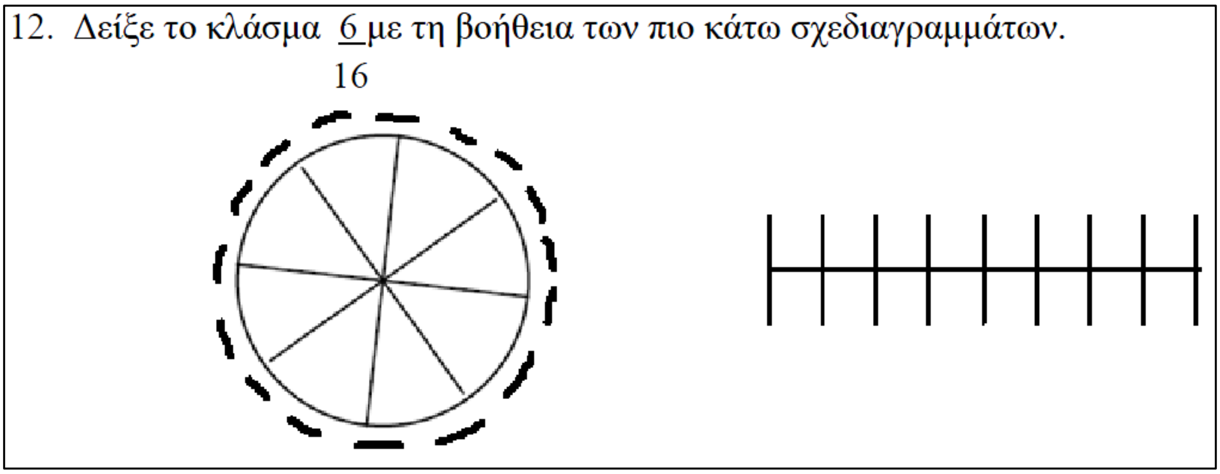
Ερώτηση 12^{η}-Έργο

Στη δωδέκατη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν το κλάσμα 6/16 στα πιο κάτω σχεδιαγράμματα. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κλάσμα με το γεωμετρικό σχήμα και το ευθύγραμμο τμήμα που τους δίδεται στην ερώτηση αντίστοιχα.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης 12^{ης}-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι για να αντιστοιχίσουν ένα κλάσμα με ένα γεωμετρικό σχήμα ή ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να είναι μοιρασμένο-διαχωρισμένο αντίστοιχα σε ισοδύναμα μέρη και όσος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος τόσο να είναι και το πλήθος των αντικειμένων του σχήματος ή του ευθύγραμμου τμήματος αντίστοιχα και όσος είναι ο αριθμητής τόσα μέρη του πρέπει να ζωγραφιστούν. Επίσης μπορεί το σχήμα ή το ευθύγραμμο τμήμα να έχει χωριστεί σε πλήθος αντικειμένων πολλαπλάσιο του παρονομαστή του κλάσματος ή αντίστροφα ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι πολλαπλάσιος του πλήθους των αντικειμένων του σχήματος ή του ευθύγραμμου τμήματος, τότε πρέπει με ανάλογο τρόπο να προσαρμοστεί και ο αριθμητής του κλάσματος ώστε να ζωγραφιστεί ο σωστός αριθμός μερών του σχήματος ή του ευθύγραμμου τμήματος. Στην παρούσα περίπτωση το πρώτο σχήμα είναι χωρισμένο σε 8 ισοδύναμα αντικείμενα και πρέπει να ζωγραφιστούν τα 3, διότι το 16, δηλαδή ο παρονομαστής, είναι πολλαπλάσιο του 8 και το 6, δηλαδή ο αριθμητής, είναι κατά ανάλογο τρόπο με παραπάνω πολλαπλάσιο του 3. Έπειτα όσον αφορά το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να γίνει αντιληπτό και ως ισοδύναμα χωρισμένα κουτάκια τα οποία είναι 16 ισοδύναμα μέρη, δηλαδή όσα και ο παρονομαστής, και κατά συνέπεια πρέπει να ζωγραφιστούν τα 6 ισοδύναμα κουτάκια από αυτά, όπως ακριβώς προστάζει ο αριθμητής. Διαφορετικά υπάρχει και η περίπτωση κατά την οποία το ευθύγραμμο τμήμα φαίνεται να χωρίζεται σε 8 ισοδύναμα μέρη και έτσι πρέπει να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία με το σχήμα της ίδιας ερώτησης που αναλύθηκε παραπάνω.

Εικόνα 12: Ερώτηση $12^{η}$



Ερώτηση $13^{η}$-Έργο

Στη δέκατη τρίτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν με τη βοήθεια των ευθύγραμμων τμημάτων ότι τα κλάσματα 2/3 και 8/12 είναι ισοδύναμα. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν το κάθε κλάσμα με ένα ευθύγραμμο τμήμα και να το ζωγραφίσουν ανάλογα και αντίστοιχα και το άλλο ώστε να φανεί η ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

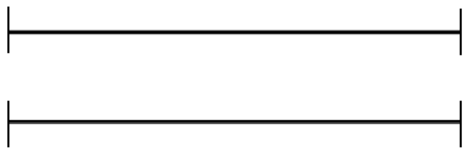
Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης 13ης-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι προκειμένου να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να το χωρίσουν σε ισοδύναμα μέρη και ίσα στο πλήθος με τον παρονομαστή του κλάσματος και να ζωγραφίσουν όσα ακριβώς αναφέρονται στον αριθμητή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα να χωριστεί σε 3 ισοδύναμα μέρη, όσα αναφέρονται και στον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος, και να ζωγραφιστούν τα 2 από αυτά, όσα αναφέρονται στον αριθμητή του αντίστοιχα. Έπειτα πρέπει το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα να χωριστεί σε 12 ισοδύναμα μέρη, όσα αναφέρονται και στον παρονομαστή του δεύτερου κλάσματος, και να ζωγραφιστούν τα 8 από αυτά, όσα αναφέρονται στον αριθμητή του αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο φανερώνεται ότι το σκιαγραμμισμένο μέρος του πρώτου ευθύγραμμου τμήματος είναι ίσο με το σκιαγραμμισμένο μέρος του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος και κατά συνέπεια τα δύο παραπάνω κλάσματα είναι ισοδύναμα.

Εικόνα 13: Ερώτηση 13η

13. Απόδειξε με τη βοήθεια των ευθύγραμμων τμημάτων ότι τα δύο παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$



Ερώτηση 14η-Έργο

Στη δέκατη τέταρτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν το πρόβλημα που τους δίδεται, το οποίο περιέχει κλάσματα, με τη βοήθεια του παρακάτω ευθύγραμμου τμήματος. Συνεπώς πρέπει να είναι σε θέση να συσχετίσουν τα κλάσματα που υπάρχουν στο πρόβλημα με το ευθύγραμμο τμήμα που εμπεριέχεται στην ερώτηση. Τέλος καλούνται να δώσουν μία ολοκληρωμένη απάντηση στο πρόβλημα.

Προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα ερώτησης 14ης-Έργο

Να γνωρίζουν οι μαθητές ότι προκειμένου να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να το χωρίσουν σε ισοδύναμα μέρη και ίσα στο πλήθος με τον παρονομαστή του κλάσματος και να ζωγραφίσουν όσα ακριβώς αναφέρονται στον αριθμητή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να κατανοήσουν ότι για να επιλυθεί το πρόβλημα πρέπει να γίνει πρόσθεση μεταξύ των κλασμάτων, δηλαδή να τοποθετηθεί το ένα κλάσμα μετά το άλλο στο ευθύγραμμο τμήμα έτσι ώστε το τελευταίο να είναι χωρισμένο σε ισοδύναμα μέρη. Να γνωρίζουν ότι πρέπει να χωρίσουν το ευθύγραμμο τμήμα σε 6 ισοδύναμα μέρη όσα και οι παρονομαστές των δύο κλασμάτων που εμφανίζονται στο πρόβλημα και στη συνέχεια να ζωγραφίσουν τα 3 πρώτα, όσα αναφέρονται στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος, και έπειτα τα άλλα 2 επόμενα, όσα αναφέρονται στον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος. Η ενέργεια αυτή κρίνεται επιτρεπτή από τη στιγμή που τα δύο κλάσματα του προβλήματος είναι ομώνυμα, δηλαδή έχουν ίδιους παρονομαστές. Με αυτόν τον τρόπο φαίνεται ότι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα είναι ζωγραφισμένα 5 ισοδύναμα τμήματα, όσα είναι και τα μέρη του κορμού που χρειάστηκε για να κατασκευαστεί ολόκληρο το τραπέζι, σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος της ερώτησης. Άρα ο ξυλοκόπος χρειάστηκε τα 5/6 του κορμού του δέντρου για να κατασκευάσει ολόκληρο το τραπέζι.

Εικόνα 14: Ερώτηση 14η

14. Ένας ξυλοκόπος χρειάστηκε τα 3/6 ενός κορμού δέντρου για να κατασκευάσει το πάνω μέρος ενός τραπεζιού και τα 2/6 για τα πόδια του. Πόσο μέρος του κορμού χρειάστηκε τελικά για να κατασκευάσει ολόκληρο το τραπέζι; *(Λύσε το πρόβλημα με τη βοήθεια του ευθύγραμμου τμήματος. Δείξε τον τρόπο που εργάστηκες, για να βρεις την απάντηση.)*

Απάντηση: ……………………………………………………………………………………

Είναι γεγονός λοιπόν ότι οι παραπάνω επιμέρους στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα συντελούν στην οργάνωση και τη δόμηση της εν λόγω ερευνητικής εργασίας, με μοναδικό σκοπό τη συλλογή χρήσιμων αποτελεσμάτων για την επίδραση των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές της Δ’ τάξης του Δημοτικού σχολείου.

4.3 Ερευνητικός σχεδιασμός

Η δεδομένη ερευνητική εργασία προσεγγίζει το θέμα, η επίδραση των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου, συνδυάζοντας-επέχοντας μέρη από την ποιοτική έρευνα, τη βιβλιογραφική έρευνα, αλλά και από την ποσοτική.

Αρχικά η δεδομένη έρευνα χαρακτηρίζεται ως ποιοτική, καθώς όπως φαίνεται και από το ερωτηματολόγιο (βλ. Παράρτημα 1) που συντάχθηκε για τη συλλογή ευρημάτων, περιέχει ερωτήσεις οι οποίες θέτουν ως ζητούμενο στους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντηση που έδωσαν. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να διερευνηθεί σε βάθος η επίδραση των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές, επειδή εντάσσονται στη διαδικασία να εμβαθύνουν στο συλλογισμό τους και να επεξηγήσουν την απάντησή τους. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από μία τέτοιου είδους έρευνα συμβάλλουν στην κατανόηση σε βάθος του ερευνητικού ερωτήματος.

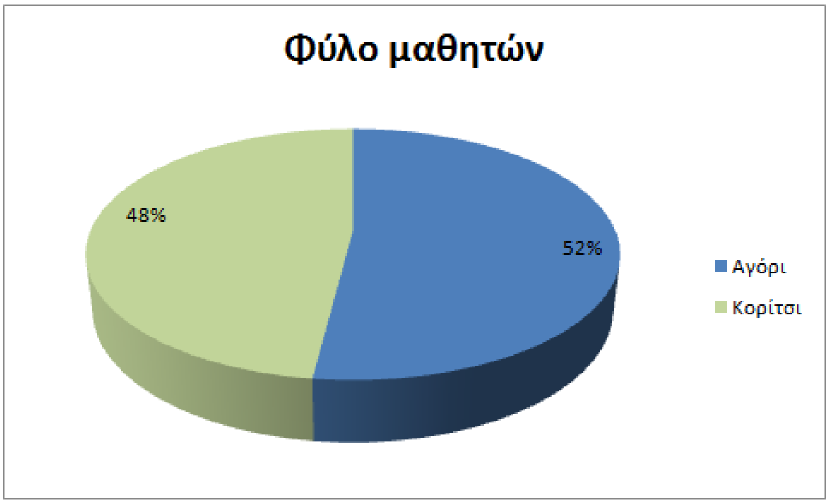
Είναι δυνατό να κριθεί ως βιβλιογραφική έρευνα από τη στιγμή που γίνεται μελέτη των σχολικών εγχειριδίων Ελλάδας και Κύπρου για το μάθημα των Μαθηματικών προκειμένου να εντοπιστούν τα σημεία στα οποία διαφαίνεται η διδασκαλία των κλασμάτων και κατά επέκταση παρουσιάζεται στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας περιγραφική αναφορά σε αυτά (βλ. ενότητα 2.10). Κρίνεται ως βιβλιογραφική καθώς εμπεριέχει πληροφορίες από μελέτες-έρευνες που έχουν διεξαχθεί για το συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα παραθέτοντάς τις (βλ. κεφάλαιο 3). Συλλέγονται πληροφορίες που συνοψίζονται, ταξινομούνται, συγκρίνονται και συνθέτονται ώστε να προκύψει μία ολοκληρωμένη βιβλιογραφική διερεύνηση του θέματος.

Ποσοτική έρευνα χαρακτηρίζεται διότι αναφέρεται στη συστηματική διερεύνηση του θέματος με στατιστικές μεθόδους, μαθηματικά μοντέλα και αριθμητικά δεδομένα που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια του ερευνητικού πονήματος (βλ. κεφάλαιο 5). Η συλλογή δεδομένων γίνεται με δομημένα πρωτόκολλα, όπως είναι το ερωτηματολόγιο. Το δείγμα της έρευνας αγγίζει σε αριθμό τους 50 συμμετέχοντες. Συγκεντρώνονται σε μεγάλο βαθμό απαντήσεις που αφορούν στην επίδραση των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές.

4.4 Δείγμα

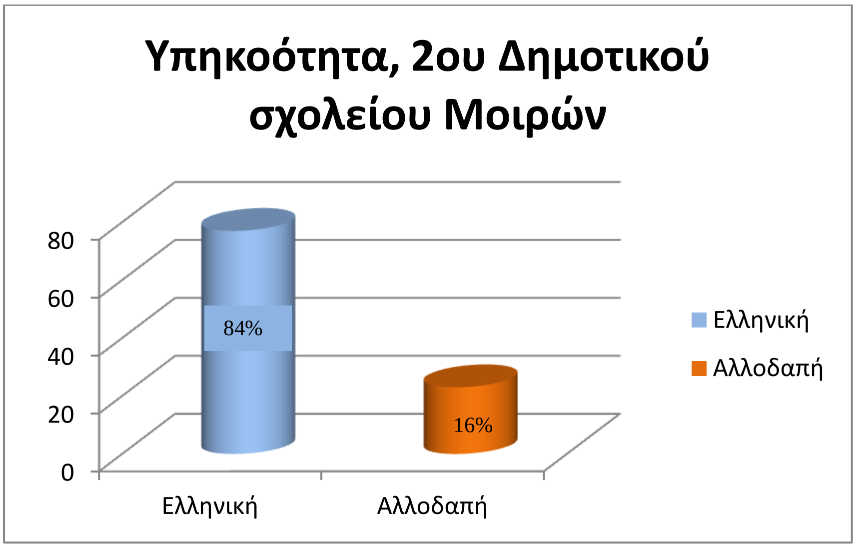
Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα ήταν 50 συνολικά και ανήκουν στην ηλικία των εννέα χρόνων. Από αυτούς οι 26 ήταν αγόρια, ενώ οι υπόλοιποι 24 ήταν κορίτσια. Οι 37 από το συνολικό αριθμό των συμμετεχόντων, με τους 19 να είναι κορίτσια και τους άλλους 18 να είναι αγόρια, φοιτούσαν στην Δ' τάξη του 12/θέσιου 2ου Δημοτικού σχολείου Μοιρών, αντίθετα οι υπόλοιποι 13 από τους συνολικούς συμμετέχοντες, με τους 8 να είναι αγόρια και τους 5 να είναι κορίτσια, φοιτούσαν στην Δ' τάξη του 6/θέσιου Δημοτικού σχολείου Πετροκεφαλίου, τα οποία βρίσκονται και τα δύο στο Νομό Ηρακλείου Κρήτης. Οι μαθητές του 2ου Δημοτικού σχολείου Μοιρών ανήκαν σε δύο διαφορετικά τμήματα, ενώ οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου Πετροκεφαλίου ανήκαν σε ένα τμήμα.

Γράφημα 4.2.1: Φύλο συμμετεχόντων μαθητών στην έρευνα.

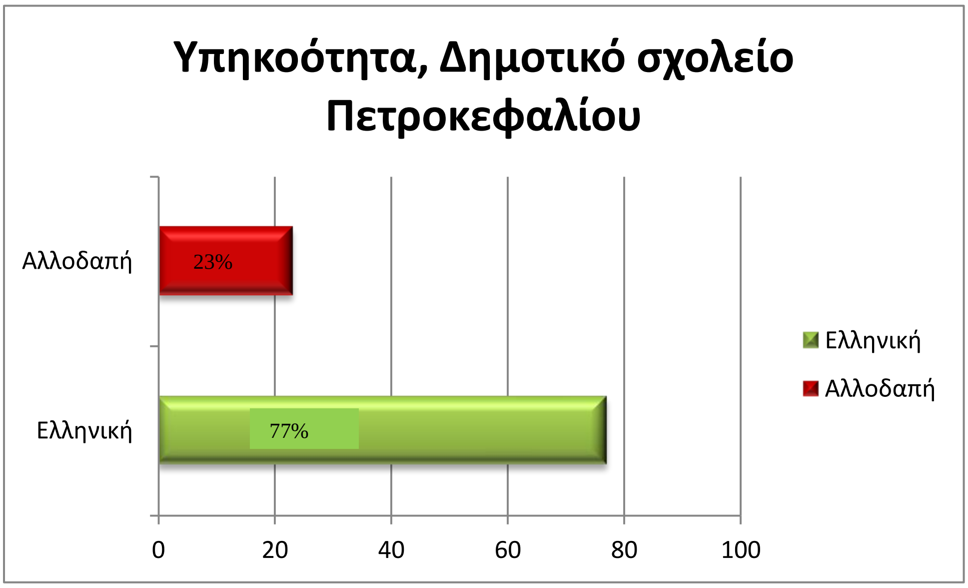


Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην ερευνητική διαδικασία δεν ανήκαν πλήρως στο ίδιο εθνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Αρχικά από τους 37 μαθητές της Δ' τάξης του 2ου Δημοτικού σχολείου Μοιρών μόνο οι 31 μαθητές είχαν ελληνική υπηκοότητα, δηλαδή το 77% και οι υπόλοιποι 6, δηλαδή το 23%, είχαν αλλοδαπή υπηκοότητα. Έπειτα από τους 13 μαθητές της Δ' τάξης του Δημοτικού σχολείου Πετροκεφαλίου μόνο οι 10 μαθητές είχαν ελληνική υπηκοότητα, δηλαδή το 84%, ενώ οι υπόλοιποι 3 μαθητές, δηλαδή το 16%, είχαν αλλοδαπή υπηκοότητα.

Γράφημα 4.2.2: Υπηκοότητα μαθητών Δ' τάξης 2ου Δημοτικού σχολείου Μοιρών.



Γράφημα 4.2.3: Υπηκοότητα μαθητών Δ' τάξης Δημοτικού σχολείου Πετροκεφαλίου.



Το δείγμα των συμμετεχόντων μαθητών στην έρευνα επιλέχθηκε τυχαία όσον αφορά και στους ίδιους ως ερευνώμενους, αλλά και στην περιοχή στην οποία βρίσκονται τα δύο Δημοτικά σχολεία για την ομαλή ροή της έρευνας και παράλληλα προκειμένου να ολοκληρωθεί αποτελεσματικά η διαδικασία της συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων τηρήθηκαν οι κανόνες της ερευνητικής δεοντολογίας. Αντιθέτως, η τάξη, η Δ', στην οποία πραγματοποιήθηκε η ερευνητική διαδικασία επιλέχθηκε σκόπιμα προκειμένου οι μαθητές να έχουν διδαχθεί τη μαθηματική ενότητα των κλασμάτων και στην Γ' τάξη του Δημοτικού σχολείου σε μία πρώτη επαφή και στη Δ' τάξη του Δημοτικού σχολείου, καθώς τα ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν από τους μαθητές κατά την τελευταία περίοδο της σχολικής χρονιάς. Το κίνητρο που δόθηκε στους μαθητές που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία ήταν ευχαριστίες.

4.5 Μέσα συλλογής δεδομένων

Το ερευνητικό εργαλείο λοιπόν που επιλέγθηκε για να χρησιμοποιηθεί στη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων στην παρούσα ερευνητική διαδικασία είναι το ερωτηματολόγιο. Προκειμένου λοιπόν να διεξαχθούν ορθά αποτελέσματα τα οποία θα παρουσιάσουν μια σαφή εικόνα της μαθησιακής ικανότητας των μαθητών ως προς τα κλάσματα συντάχθηκε εκ νέου ένα πλήρης ερωτηματολόγιο από μαθησιακής απόψεως με δεκατέσσερις ερωτήσεις-ασκήσεις εκ των οποίων οι τέσσερις πρώτες είχαν ως στόχο να διερευνήσουν τις πεποιθήσεις των μαθητών σε σχέση με τα Μαθηματικά και οι υπόλοιπες δέκα στόχευαν στην εντρύφηση των μαθητών στο γνωστικό τμήμα των κλασμάτων και στον προβληματισμό τους ως προς αυτά. Το ερωτηματολόγιο ελέγθηκε επανειλημμένες φορές και έπειτα από πιλοτική συμπλήρωσή του από δύο τυχαίους μαθητές της Δ' τάξης Δημοτικού σχολείου και μία σειρά διορθώσεων βάση των αντικειμενικών γνωσιακών δεξιοτήτων των μαθητών της Δ' τάξης σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών (βλ. ενότητα 2.10) κατέληξε να φτάσει στην τελική του μορφή (βλ. Παράρτημα 1). Επιπρόσθετα προτού είναι έτοιμο προς απάντηση από τους συμμετέχοντες μαθητές στην επίσημη ερευνητική διαδικασία απαντήθηκε ώστε να εξαλειφτούν τυχών λάθη και αδυναμίες του. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν κρίνεται αδιαμφισβήτητη η εγκυρότητα και η αξιοπιστία του.

4.6 Ερευνητική διαδικασία

Το παρόν ερευνητικό πόνημα προκειμένου να ολοκληρωθεί και τελειοποιηθεί πλήρως πέρασε από μία σειρά σταδίων. Το εναρκτήριο λάκτισμα δόθηκε με τη διαδικασία εύρεσης του θέματος και ειδικότερα του ερευνητικού ερωτήματος που έπρεπε να διακρίνεται από πρωτοτυπία και καινοτομία. Ύστερα από πολύωρη και επιμελής διερεύνηση των θεμάτων των μαθηματικών εννοιών, η θεματική ενότητα που επιλέχθηκε είναι αυτή των κλασμάτων. Μέσα από βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιήθηκε σε σχετικά επιστημονικά άρθρα και βιβλία, τα οποία πολλά από αυτά χρησίμευσαν εν τέλει και στη συλλογή πληροφοριών για το εν λόγω θέμα της παρούσας εργασίας και χρησιμοποιήθηκαν ως βιβλιογραφικές αναφορές, αποφασίστηκε η εξειδίκευση του θέματος στη μελέτη και διερεύνηση της επιρροής και επίδρασης των συστημάτων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη δεδομένη έρευνα προσφέρονται για την ανάδειξη χρήσιμων πληροφοριών για την εκπαιδευτική διαδικασία, ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές και με ένα βελτιωμένο τρόπο διδασκαλίας και να οδηγηθούν στην ομαλή κατανόηση των κλασμάτων ξεπερνώντας τα μαθησιακά εμπόδια που δεν τους το επιτρέπουν.

Σε μία δεύτερη φάση άρχισαν να αναδύονται οι επιμέρους προβληματισμοί της εργασίας οι οποίοι αποτελούσαν ουσιαστικά τους στόχους που έπρεπε να μελετηθούν και να διερευνηθούν για την διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων προκειμένου να ιεραρχηθεί και να δομηθεί η συγκεκριμένη εργασία. Το ερευνητικό εργαλείο λοιπόν που δημιουργήθηκε και χρησιμοποιήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων, που στην παρούσα κατάσταση ήταν οι μαθησιακές δεξιότητες των μαθητών της Δ’ τάξης του Δημοτικού για τα κλάσματα με βαθύτερο στόχο τη μελέτη της επίδρασης των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων. Προτού λάβει χώρα το επίσημο μοίρασμα των ερωτηματολογίων, πραγματοποιήθηκε η συμπλήρωση δύο πιλοτικών ερωτηματολογίων από τυχαίο δείγμα μαθητών της Δ’ τάξης Δημοτικού σχολείου και μία σειρά διορθώσεων βάση των αντικειμενικών γνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών της Δ’ τάξης σύμφωνα με τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών (βλ. ενότητα 2.10). Επιπλέον πριν κριθεί ότι είναι έτοιμο προς απάντηση από τους συμμετέχοντες μαθητές στην επίσημη ερευνητική διαδικασία απαντήθηκε ώστε να εξαλειφτούν τυχών λάθη και αδυναμίες του, με σκοπό τη βελτίωση και τελειοποίησή του.

Στην τελική του μορφή πλέον το ερωτηματολόγιο (βλ. Παράρτημα 1) έφτασε αρχικά στο Δημοτικό σχολείο του Πετροκεφαλίου κατά τα τέλη της σχολικής περιόδου 2015-2016 και ειδικότερα το μήνα Μάιο. Οι μαθητές, της Δ’ τάξης που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, εισήρθαν στην τάξη τους με το χτύπημα του πρώτου κουδουνιού, δηλαδή έπειτα από το πρώτο διάλειμμα και ειδικότερα με σκοπό τη διάνυση του δεύτερου δίωρου των μαθημάτων. Εκεί διαμοιράστηκε σε αυτούς από εμένα προσωπικά, αφότου είχε ζητηθεί πρωτύτερα άδεια από το διευθυντή του σχολείου και την εκπαιδευτικό της τάξης, έπειτα από συνεννόηση-συμφωνία που είχε επέλθει τις προηγούμενες ημέρες. Στους συμμετέχοντες μαθητές δεν δόθηκαν περαιτέρω διευκρινίσεις και οδηγίες σχετικά με το ερωτηματολόγιο, καθώς είναι απόλυτα αναλυτικό και καθοδηγητικό από άποψη επεξηγήσεων και οδηγιών που εμπεριέχονται ήδη μέσα σε αυτό και πιο εξειδικευμένα στις εκφωνήσεις των ερωτήσεων που περιέχει. Παράλληλα δεν δόθηκαν διευκρινιστικές οδηγίες προκειμένου να αποτυπωθεί μέσω των απαντήσεων των μαθητών μία καθαρή εικόνα των γνωστικών δεξιοτήτων τους για τα κλάσματα. Το χρονικό περιθώριο που είχαν ουτωσώστε να το συμπληρώσουν ήταν μία διδακτική ώρα, δηλαδή 45 πρώτα λεπτά. Καθόλη τη διάρκεια της συμπλήρωσής του οι συμμετέχοντες μαθητές επιβλέπονταν από εμένα προσωπικά, αλλά και από την ίδια την εκπαιδευτικό της τάξης. Με τη λήξη της διαθέσιμης ώρας που είχαν για να ολοκληρώσουν την απάντησή τους, συλλέχτηκαν τα ερωτηματολόγια ιδιοχείρως από εμένα προσωπικά ώστε να κατευθυνθούν προς ανάλυση και στη συνέχεια να προκύψει η διεξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων μέσω της επεξεργασίας τους. Στους μαθητές που δέχτηκαν εγκάρδια να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο ειπώθηκαν θερμές ευχαριστίες.

Ακολούθως το 2^{ο} Δημοτικό σχολείο Μοιρών έχει σειρά στο οποίο και έφτασε το ερωτηματολόγιο στην τελική του πλέον μορφή (βλ. Παράρτημα 1) κατά τα τέλη της σχολικής περιόδου 2015-2016 και ειδικότερα το μήνα Μάιο, αφότου είχε ζητηθεί πρωτύτερα άδεια από το διευθυντή του σχολείου και τις εκπαιδευτικούς της Δ’ τάξης των δύο τμημάτων αντίστοιχα, έπειτα από συνεννόηση-συμφωνία που είχε επέλθει τις προηγούμενες ημέρες. Οι μαθητές των δύο τμημάτων, της Δ’ τάξης που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, εισήρθαν στην τάξη τους με το χτύπημα του πρώτου κουδουνιού, δηλαδή έπειτα από το πρώτο διάλειμμα και ειδικότερα με σκοπό τη διάνυση του δεύτερου δίωρου των μαθημάτων. Πρωτίστως, κατά την πρώτη διδακτική ώρα του δεύτερου δίωρου διδασκαλίας, το ερωτηματολόγιο διαμοιράστηκε στους συμμετέχοντες μαθητές του Δ’1, συγκεκριμένα, από εμένα προσωπικά. Στους συμμετέχοντες μαθητές δεν δόθηκαν περαιτέρω διευκρινίσεις και οδηγίες σχετικά με το ερωτηματολόγιο, καθώς είναι απόλυτα αναλυτικό και καθοδηγητικό από άποψη επεξηγήσεων και οδηγιών που εμπεριέχονται ήδη μέσα σε αυτό και πιο εξειδικευμένα στις εκφωνήσεις των ερωτήσεων που περιέχει. Παράλληλα δεν δόθηκαν διευκρινιστικές οδηγίες προκειμένου να αποτυπωθεί μέσω των απαντήσεων των μαθητών μία καθαρή εικόνα των γνωστικών δεξιοτήτων τους για τα κλάσματα. Το χρονικό περιθώριο που είχαν ουτωσώστε να το συμπληρώσουν ήταν μία διδακτική ώρα, δηλαδή 45 πρώτα λεπτά. Καθόλη τη διάρκεια της συμπλήρωσής του οι συμμετέχοντες μαθητές επιβλέπονταν από εμένα προσωπικά, αλλά και από την ίδια την εκπαιδευτικό της τάξης. Με τη λήξη της διαθέσιμης ώρας που είχαν για να ολοκληρώσουν την απάντησή του, συλλέχτηκαν ιδιοχείρως από εμένα προσωπικά. Στους μαθητές που δέχτηκαν με ευχαρίστηση να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο ειπώθηκαν θερμές ευχαριστίες. Στην πορεία ακολούθησε κατά τη δεύτερη διδακτική ώρα του δεύτερου δίωρου διδασκαλίας, από εμένα προσωπικά το μοίρασμα του ερωτηματολογίου στους συμμετέχοντες μαθητές του Δ'2, συγκεκριμένα. Στους συμμετέχοντες μαθητές δεν δόθηκαν περαιτέρω διευκρινίσεις και οδηγίες σχετικά με το ερωτηματολόγιο, καθώς είναι απόλυτα αναλυτικό και καθοδηγητικό από άποψη επεξηγήσεων και οδηγιών που εμπεριέχονται ήδη μέσα σε αυτό και πιο εξειδικευμένα στις εκφωνήσεις των ερωτήσεων που περιέχει. Παράλληλα δεν δόθηκαν διευκρινιστικές οδηγίες προκειμένου να αποτυπωθεί μέσω των απαντήσεων των μαθητών μία καθαρή εικόνα των γνωστικών δεξιοτήτων τους για τα κλάσματα. Το χρονικό περιθώριο που είχαν ουτωσώστε να το συμπληρώσουν ήταν μία διδακτική ώρα, δηλαδή 45 πρώτα λεπτά. Καθόλη τη διάρκεια της συμπλήρωσής του οι συμμετέχοντες μαθητές επιβλέπονταν από εμένα προσωπικά, αλλά και από την ίδια την εκπαιδευτικό της τάξης. Μόλις τελείωσε η ώρα που είχαν στη διάθεσή τους, μαζεύτηκαν τα ερωτηματολόγια από εμένα. Οι μαθητές που συμπλήρωσαν με ευχαρίστηση το ερωτηματολόγιο δέχτηκαν θερμές ευχαριστίες. Τέλος συγκεντρώθηκαν τα ερωτηματολόγια και από τα δύο τμήματα προκειμένου να αναλυθούν και να οδηγηθούν για τη διεξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

Το τελικό στάδιο της ερευνητικής αυτής διαδικασίας ήταν η καταγραφή των πληροφοριών που συγκεντρώθηκαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση-μελέτη που πραγματοποιήθηκε για το συγκεκριμένο θέμα, αλλά και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων-ευρημάτων που προκύπτουν από τα ήδη συμπληρωμένα ερωτηματολόγια και κατά συνέπεια των συμπερασμάτων που εξάγονται από την επεξεργασία τους. Οργανώθηκε λοιπόν με αυτόν τον τρόπο το παρόν ερευνητικό πόνημα με απώτερο σκοπό την προβολή και παράθεση των όσων καταγράφηκαν και παρατηρήθηκαν.

4.7 Ανάλυση δεδομένων

Στην παρούσα ερευνητική εργασία εφαρμόστηκαν δύο τρόποι επεξεργασίας των αποτελεσμάτων-ευρημάτων που προκύπτουν από τη συλλογή των δεδομένων. Κάθε ένας από τους τρόπους επεξεργασίας λειτουργεί διαφορετικά με αποτέλεσμα να εξάγει από ανόμοια σκοπιά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα αρχικά πραγματοποιήθηκε περιγραφική στατιστική με τη χρήση του προγράμματος Microsoft Excel. Τα ευρήματα αναλύθηκαν μέσω της κωδικοποίησής τους στο συγκεκριμένο πρόγραμμα και στη συνέχεια διεξήχθηκαν ποσοστά με σκοπό την παρουσίαση μίας ολοκληρωμένης και εύληπτης εικόνας για την κατανόηση των αποτελεσμάτων. Για μία ακόμη καλύτερη παρουσίασή τους παρατίθενται και μία σειρά σημειώσεων κάτω από κάθε ένα διάγραμμα ξεχωριστά (βλ. ενότητα 5.2).

Ο δεύτερος τρόπος επεξεργασίας των ευρημάτων που ακολούθησε αναφέρεται στην συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με το προγράμματος CHIC του Regis Gras (Marcou & Gagatsis, 2002). Αποτελεί ένα πρωτοποριακό εργαλείο εκπαιδευτικής έρευνας, καθώς αλληλοσυνδέει τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στην ερευνητική διαδικασία με αποτέλεσμα να παρουσιάζει πώς συνεπάγεται η πρώτη επιτυχία ή αποτυχία σε μία άσκηση με τη δεύτερη επιτυχία ή αποτυχία στην άσκηση αντιστοίχως. Με αυτόν τον τρόπο σε κάθε περίπτωση και όχι μονάχα στην εκάστοτε οι εκπαιδευτικοί για παράδειγμα κάνοντας χρήση του έχουν στα χέρια τους πολύ χρήσιμες και εξειδικευμένες πληροφορίες που συμβάλλουν στην καλύτερη οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και της αξιολόγησης σε βάθος των μαθητών τους. Έτσι κι ο ερευνητής γνωρίζει ιεραρχίες επιτυχίας ή αποτυχίας σε διάφορα έργα συμμετεχόντων σε έρευνες και ειδικότερα στην παρούσα των ίδιων των μαθητών που έλαβαν μέρος. Για αυτόν ακριβώς το λόγο κατασκευάστηκε με τη βοήθεια της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών το πρόγραμμα CHIC, το οποίο παρουσιάζει τις παρακάτω αναλύσεις, όπως είναι το συνεπαγωγικό διάγραμμα, το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας και τέλος το δενδροδιάγραμμα ιεράρχησης.

4.8 Ανακεφαλαίωση

Στο τέταρτο κεφάλαιο που ολοκληρώνεται στο σημείο αυτό πραγματοποιήθηκε η αναλυτική παρουσίαση της μεθοδολογίας της έρευνας που εκπονήθηκε. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται μία αναλυτική περιγραφή του προβληματισμού, των επιμέρους στόχων, των ερευνητικών ερωτημάτων, του ερευνητικού σχεδιασμού, του δείγματος, καθώς και των μέσων συλλογής δεδομένων, της ερευνητικής διαδικασίας και τέλος της ανάλυσης των δεδομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

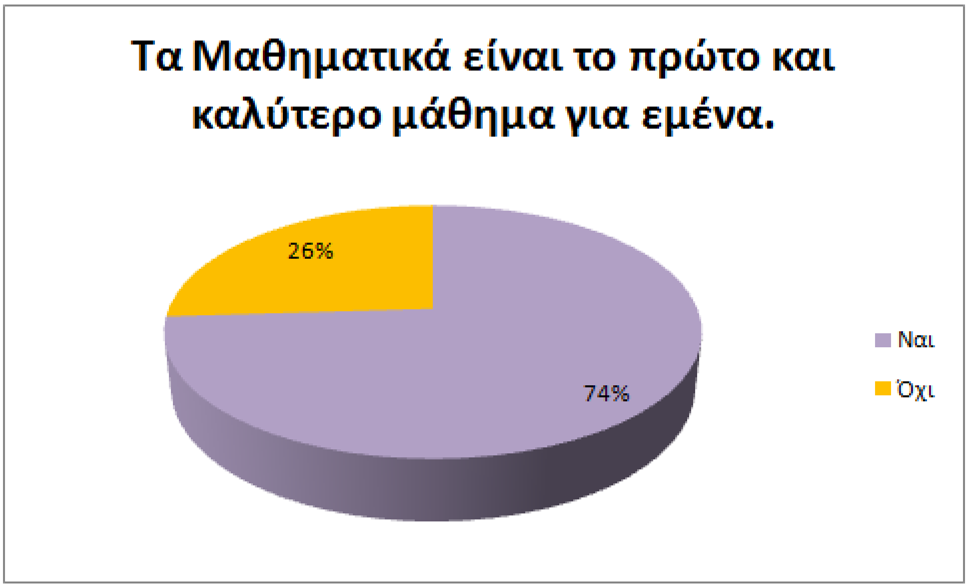
5.1 Εισαγωγή

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε όπως αναφέρεται και παραπάνω με δύο διαφορετικούς τρόπους επεξεργασίας. Τα αποτελέσματα-ευρήματα που παρατίθενται στη συνέχεια προκύπτουν από τις δύο διαφορετικές αναλύσεις των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από το ερωτηματολόγιο που μοιράστηκε στους μαθητές της Δ’ τάξης δύο Δημοτικών σχολείων. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σε δύο υποενότητες λόγω της αποτύπωσης των διαφορετικών παραγώγων των δύο μεθόδων επεξεργασίας, του Microsoft Excel (βλ. ενότητα 5.2) και του CHIC του Regis Gras (ενότητα 5.3).

5.2 Αποτελέσματα μέσω Microsoft Excel

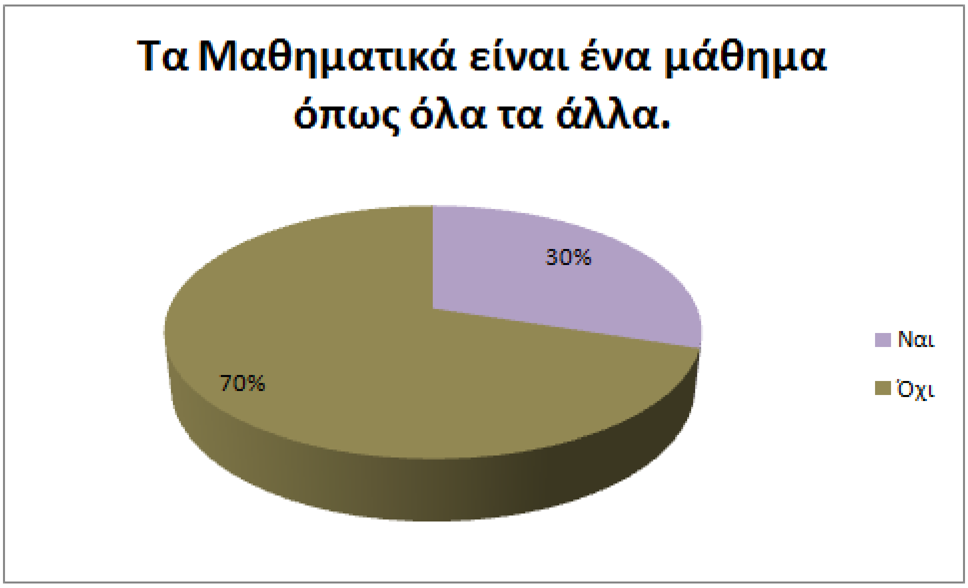
Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεξεργασία των δεδομένων μέσω του προγράμματος Microsoft Excel που συγκεντρώθηκαν από τα ερωτηματολόγια των μαθητών. Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω γραφημάτων, που παρουσιάζονται, υπάρχει μία σημείωση κάτω από κάθε γράφημα και παράλληλα ένας μικρός σχολιασμός για την αποκωδικοποίηση ουσιαστικά των ποσοστών ώστε να γίνει περισσότερο αντιληπτό το κάθε εύρημα ξεχωριστά. Τα τέσσερα πρώτα γραφήματα αναφέρονται στις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα δεκαοκτώ αφορούν στα έργα τους.

Γράφημα 5.2.1: Τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα για εμένα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 1).



Στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στις πεποιθήσεις, οι μαθητές κλήθηκαν να δηλώσουν εάν τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα για αυτούς προσωπικά. Όπως είναι εμφανές και από το γράφημα το 74% των μαθητών απάντησαν θετικά, ενώ το 26% αρνητικά. Τα ποσοστά αυτά μεταφράζονται ουσιαστικά ως θετική αντίληψη και διάθεση των μαθητών σε μεγάλο αριθμό για τα Μαθηματικά.

Γράφημα 5.2.2: Τα Μαθηματικά είναι ένα μάθημα όπως όλα τα άλλα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 2).



Στη δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στις πεποιθήσεις, οι μαθητές κλήθηκαν να δηλώσουν εάν τα Μαθηματικά είναι ένα μάθημα όπως όλα τα άλλα για αυτούς προσωπικά. Όπως είναι εμφανές και από το γράφημα το 30% των μαθητών απάντησαν θετικά, ενώ το 70% αρνητικά. Τα ποσοστά αυτά μαρτυρούν ότι οι μαθητές για τον άλφα ή βήτα λόγο ξεχωρίζουν τα Μαθηματικά από όλα τα υπόλοιπα.

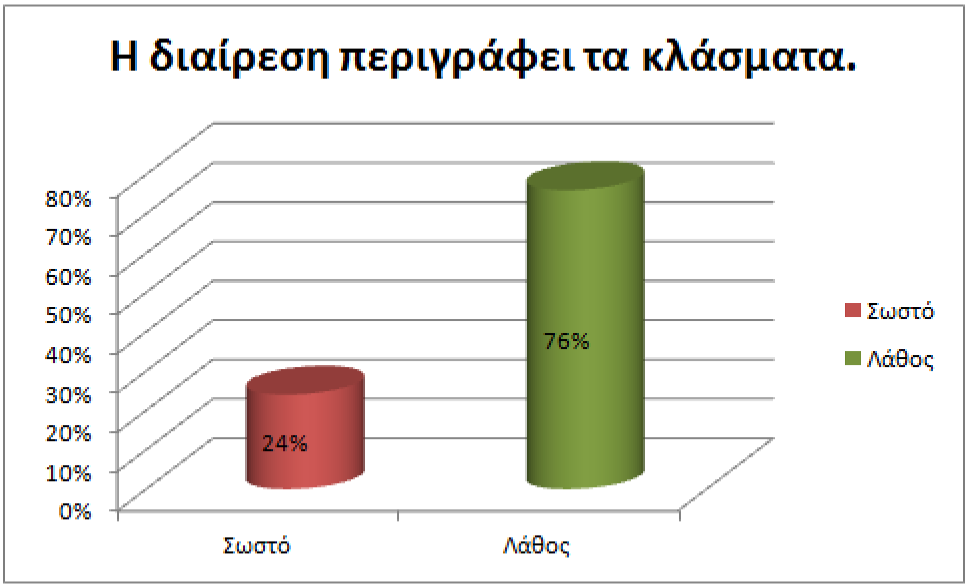
Γράφημα 5.2.3: Τα Μαθηματικά δεν είναι και πολύ χρήσιμα στη ζωή μας (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 3).

Στην τρίτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στις πεποιθήσεις, οι μαθητές κλήθηκαν να δηλώσουν εάν τα Μαθηματικά δεν είναι και πολύ χρήσιμα στη ζωή τους. Από το γράφημα διαφαίνεται ότι το 34% των μαθητών απάντησαν θετικά, ενώ το 66% αρνητικά. Με τη βοήθεια των ποσοστών λοιπόν μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι οι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι συσχετίζουν τα Μαθηματικά με την καθημερινότητά τους.

Γράφημα 5.2.4: Δεν γίνεται να προχωρήσεις καλά στη ζωή σου αν αγνοείς τα Μαθηματικά (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 4).

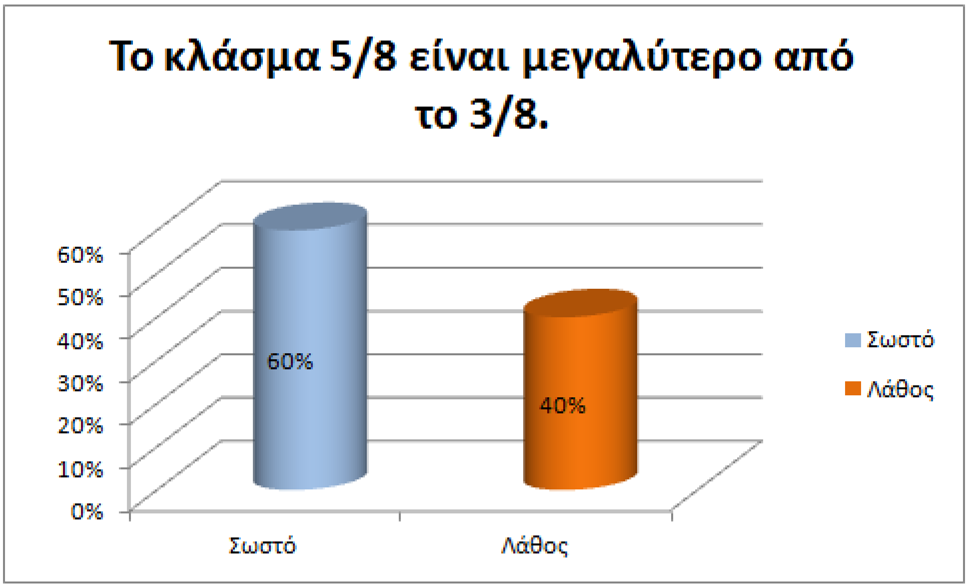
Στην τέταρτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στις πεποιθήσεις, οι μαθητές ερωτήθηκαν εάν δεν γίνεται να προχωρήσει κανείς στη ζωή του αγνοώντας τα Μαθηματικά. Το γράφημα παρουσιάζει ότι το 66% των μαθητών είχε θετική άποψη ως προς την ερώτηση αυτή, ενώ το 34% είχε αρνητική. Φανερώνεται μέσα από τη γλώσσα των ποσοστών ότι οι μαθητές κατά πλειοψηφία θεωρούν ότι χρειάζονται τα Μαθηματικά για να προοδεύσουν στη ζωή τους.

Γράφημα 5.2.5: Η διαίρεση περιγράφει τα κλάσματα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 5).



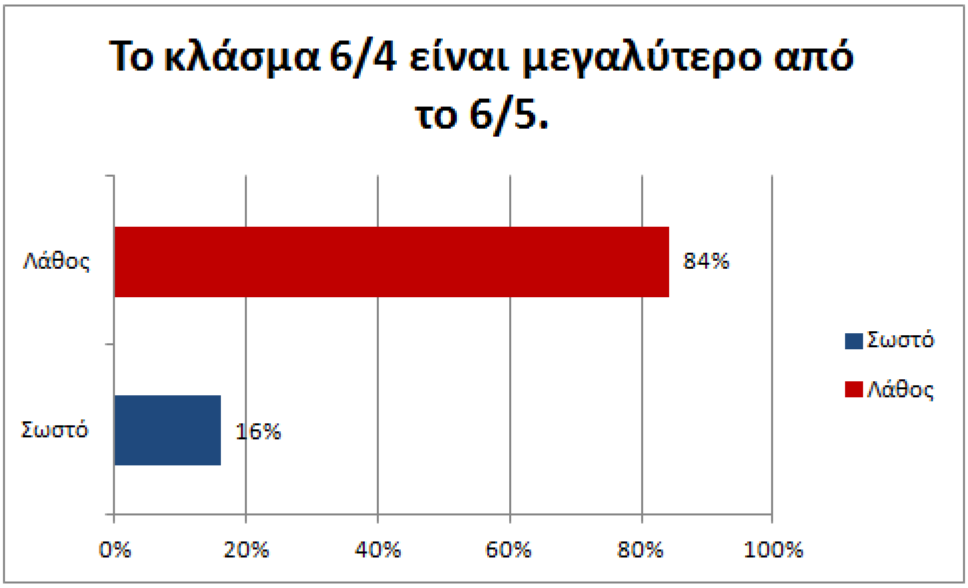
Στην πέμπτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν αν η πρόσθεση ή η αφαίρεση ή ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση περιγράφει τα κλάσματα. Μονάχα το 24% των μαθητών γνώριζαν ότι τα κλάσματα τα περιγράφει η διαίρεση, ενώ το υπόλοιπο 76% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Παράλληλα στη δεδομένη ερώτηση τέθηκε και ως ζητούμενο από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους ώστε να φανερωθεί εάν όντως είναι συνειδητοποιημένη η άποψή τους ή όχι. Σε αυτό το 24% λοιπόν των μαθητών είναι μονάχα οι μαθητές που επέλεξαν τη διαίρεση και που είχαν αιτιολογήσει ορθά την άποψή τους. Γίνεται κατανοητό ότι ένα μεγάλο μέρος των μαθητών δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος πράγμα που αποτελεί βασικό εμπόδιο για την περαιτέρω εκμάθηση τους.

Γράφημα 5.2.6: Το κλάσμα 5/8 είναι μεγαλύτερο από το 3/8 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.1).



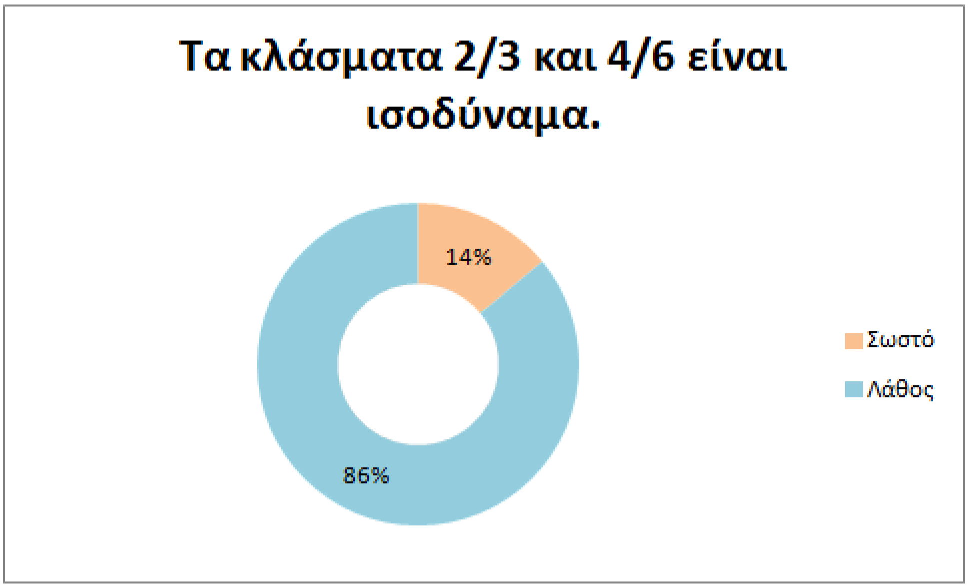
Στο πρώτο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 5/8 και το 3/8 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Το 60% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, ενώ το υπόλοιπο 40% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Η διαφορά μεταξύ των ποσοστών δεν είναι αισθητά μεγάλη, αλλά παρόλα αυτά οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν ότι το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο αριθμητή όταν οι παρονομαστές είναι ίσοι και μικρότερο αντίστοιχα το κλάσμα που ο αριθμητής είναι μικρότερος στην ίδια περίπτωση. Ενώ όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή. Τέλος γνώριζαν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Γράφημα 5.2.7: Το κλάσμα 6/4 είναι μεγαλύτερο από το 6/5 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.2).



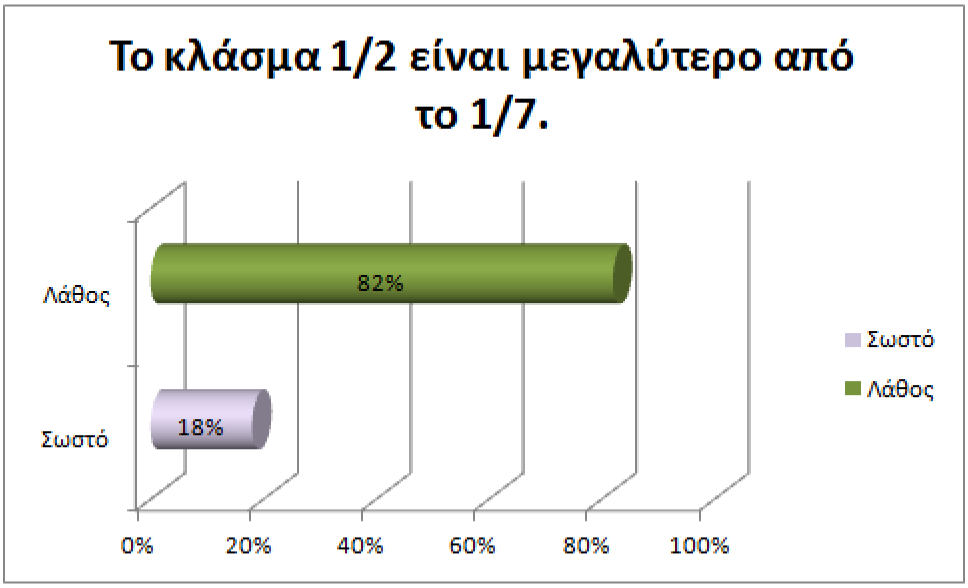
Στο δεύτερο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 6/5 και το 6/4 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Το 16% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, ενώ το υπόλοιπο 84% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Η διαφορά μεταξύ των ποσοστών είναι αισθητά μεγάλη, καθώς οι περισσότεροι από τους μαθητές δεν γνώριζαν ότι όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή.

Γράφημα 5.2.8: Τα κλάσματα 2/3 και 4/6 είναι ισοδύναμα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.3).



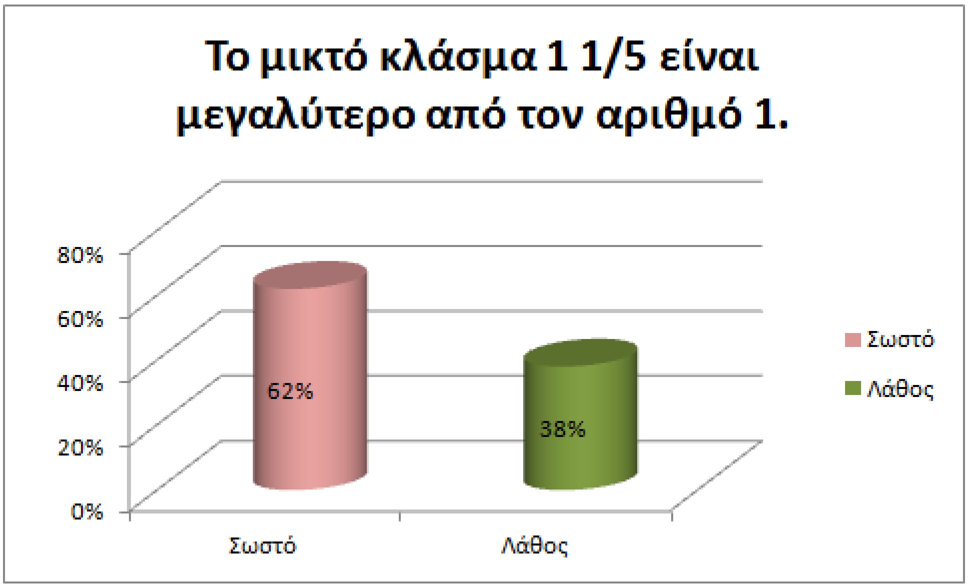
Στο τρίτο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 2/3 και το 4/6 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Το 14% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, ενώ το υπόλοιπο 86% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Η διαφορά μεταξύ των ποσοστών είναι αισθητά μεγάλη, καθώς οι περισσότεροι από τους μαθητές δεν γνώριζαν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Γράφημα 5.2.9: Το κλάσμα 1/2 είναι μεγαλύτερο από το 1/7 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.4).



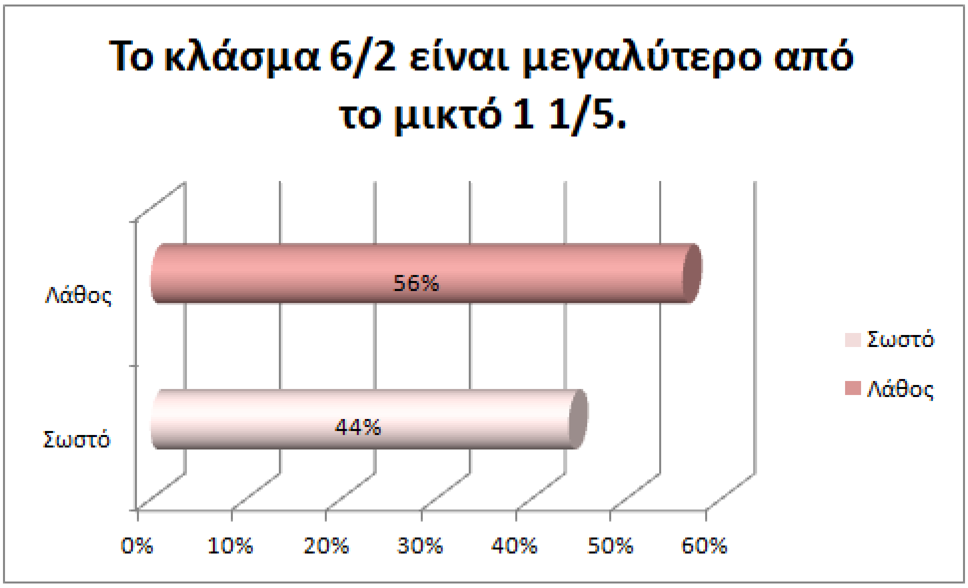
Στο τέταρτο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 1/2 και το 1/7 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Το 18% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, ενώ το υπόλοιπο 82% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Η διαφορά μεταξύ των ποσοστών είναι αισθητά μεγάλη, καθώς οι περισσότεροι από τους μαθητές δεν γνώριζαν ότι όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή.

Γράφημα 5.2.10: Το μικτό κλάσμα 1 1/5 είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό 1 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.5).



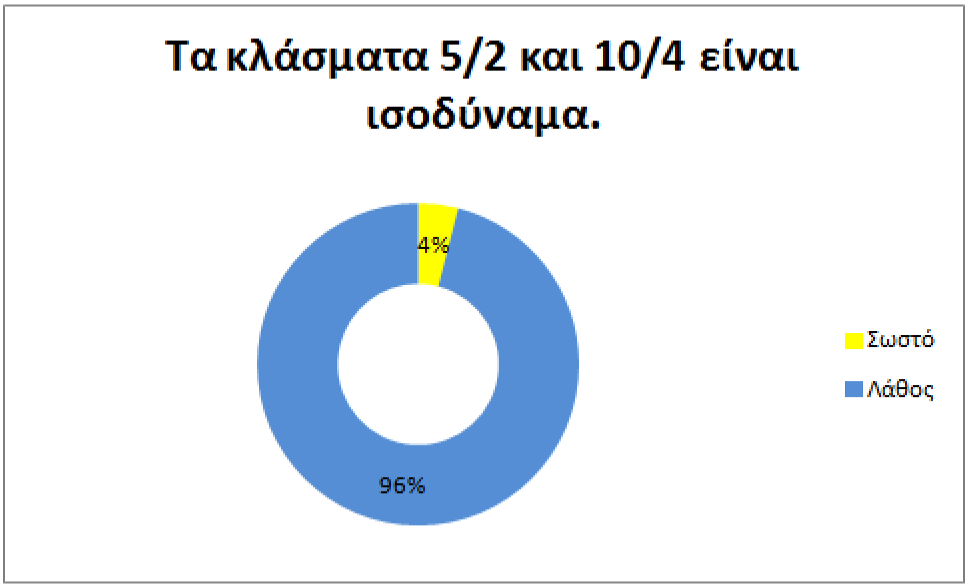
Στο πέμπτο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο μικτό κλάσμα 1 1/5 και τον αριθμό 1 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Σωστή απάντηση έδωσε το 62% των μαθητών, ενώ οι υπόλοιποι 38% έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Όπως φαίνεται και από το γράφημα οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν πώς να μετατρέψουν ένα μικτό κλάσμα σε απλό και έπειτα να κάνουν τη σύγκριση και παράλληλα ότι το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο αριθμητή όταν οι παρονομαστές είναι ίσοι και μικρότερο αντίστοιχα το κλάσμα που ο αριθμητής είναι μικρότερος στην ίδια περίπτωση. Ενώ όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή. Τέλος γνώριζαν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Γράφημα 5.2.11: Το κλάσμα 6/2 είναι μεγαλύτερο από το μικτό 1 1/5 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.6).



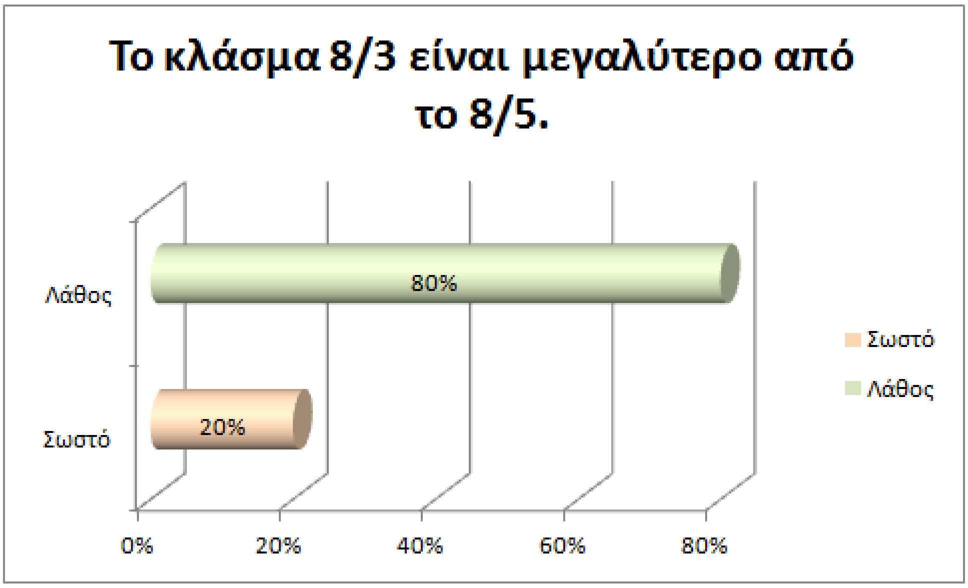
Στο έκτο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο μικτό κλάσμα 1 1/5 και το απλό κλάσμα 6/2 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Σωστή απάντηση έδωσε το 44% των μαθητών, ενώ οι υπόλοιποι 56% έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Όπως φαίνεται και από το γράφημα η μειοψηφία των μαθητών γνώριζαν πώς να μετατρέψουν ένα μικτό κλάσμα σε απλό και έπειτα να κάνουν τη σύγκριση και παράλληλα ότι το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο αριθμητή όταν οι παρονομαστές είναι ίσοι και μικρότερο αντίστοιχα το κλάσμα που ο αριθμητής είναι μικρότερος στην ίδια περίπτωση. Ενώ όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή. Τέλος γνώριζαν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Γράφημα 5.2.12: Τα κλάσματα 5/2 και 10/4 είναι ισοδύναμα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.7).



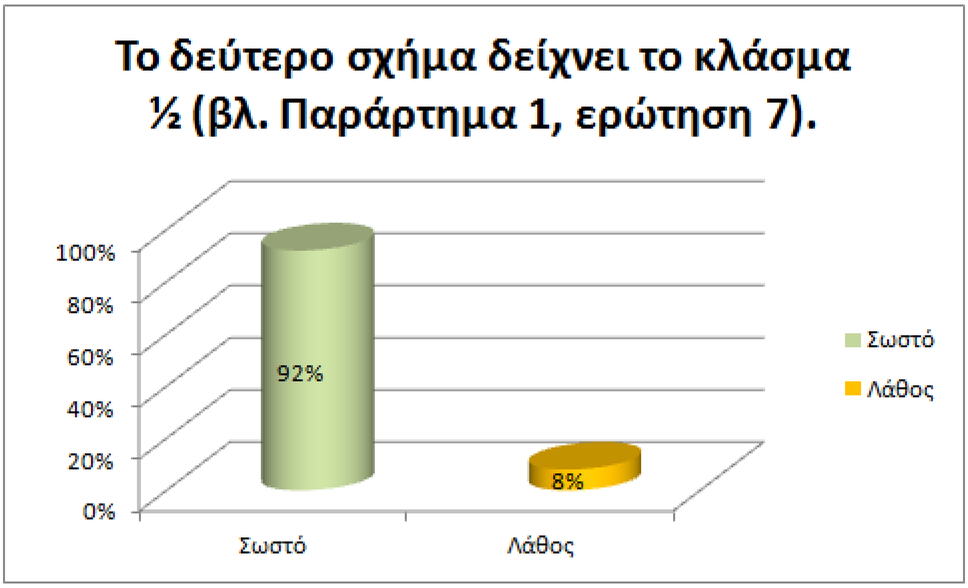
Στο έβδομο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 5/2 και το 10/4 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Σωστή απάντηση έδωσε το 4% των μαθητών, ενώ οι υπόλοιποι 96% έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Όπως φαίνεται και από το γράφημα η πλειοψηφία των μαθητών δεν γνώριζαν ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι ανάλογα πολλαπλάσιοι του δεύτερου αντίστοιχα ή και αντίστροφα. Διαφορετικά όταν το γινόμενο του αριθμητή από το πρώτο κλάσμα με τον παρονομαστή από το δεύτερο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμητή του δεύτερου κλάσματος με τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος τότε και πάλι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των δύο κλασμάτων.

Γράφημα 5.2.13: Το κλάσμα 8/3 είναι μεγαλύτερο από το 8/5 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 6.8).



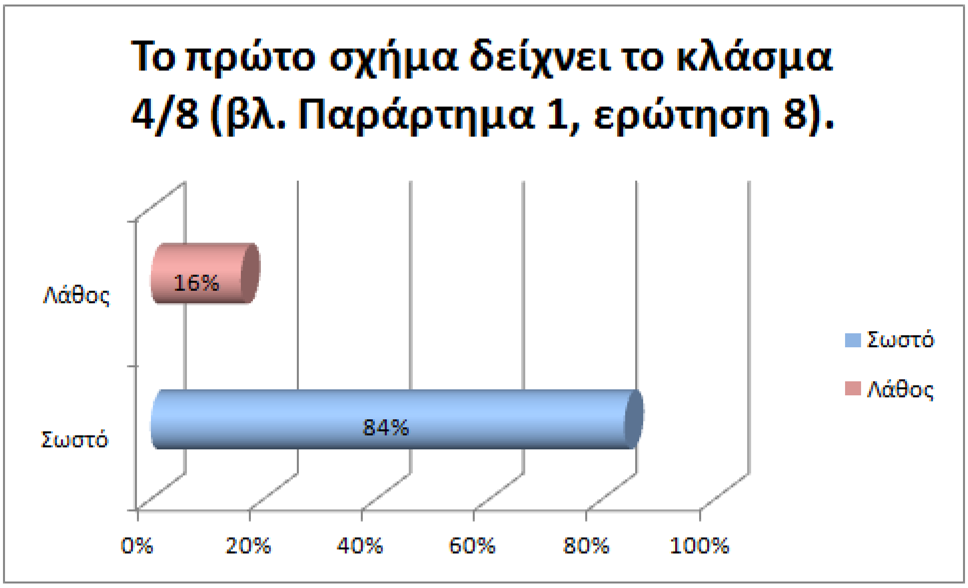
Στο όγδοο υποερώτημα της έκτης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, οι μαθητές κλήθηκαν να διαλέξουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα στο 8/3 και το 8/5 ή να διαλέξουν και τα δύο σε περίπτωση ισοδυναμίας. Οι μαθητές που απάντησαν ορθά ανήκουν μονάχα στο 20%, ενώ το υπόλοιπο 80% έδωσε λανθασμένες απαντήσεις. Όπως φαίνεται και από το γράφημα η μειοψηφία των μαθητών γνώριζαν ότι όταν οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρονομαστές διαφορετικοί, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο εκείνο με το μεγαλύτερο παρονομαστή.

Γράφημα 5.2.14: Το δεύτερο σχήμα δείχνει το κλάσμα ½ (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 7).



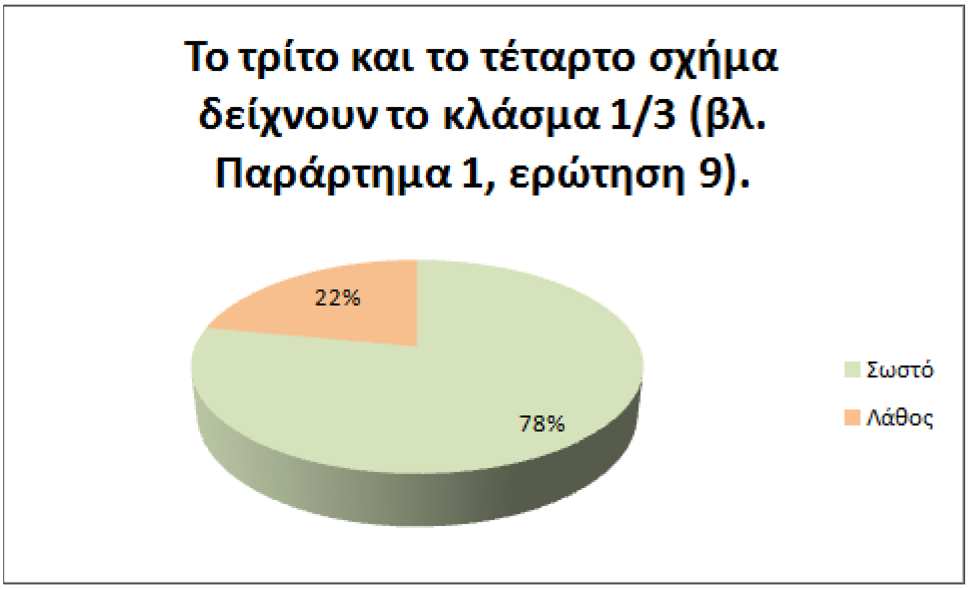
Στην έβδομη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, τέθηκε στους μαθητές να διαλέξουν ανάμεσα σε τρία σχήματα ποιο δείχνει το κλάσμα ½. Από όσο φαίνεται από το γράφημα η πλειοψηφία των μαθητών με ποσοστό 92% γνώριζε τη σωστή απάντηση, ενώ με ποσοστό 8% των μαθητών απαντήθηκε λανθασμένα η ερώτηση. Γνώριζαν δηλαδή ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα.

Γράφημα 5.2.15: Το πρώτο σχήμα δείχνει το κλάσμα 4/8 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 8).



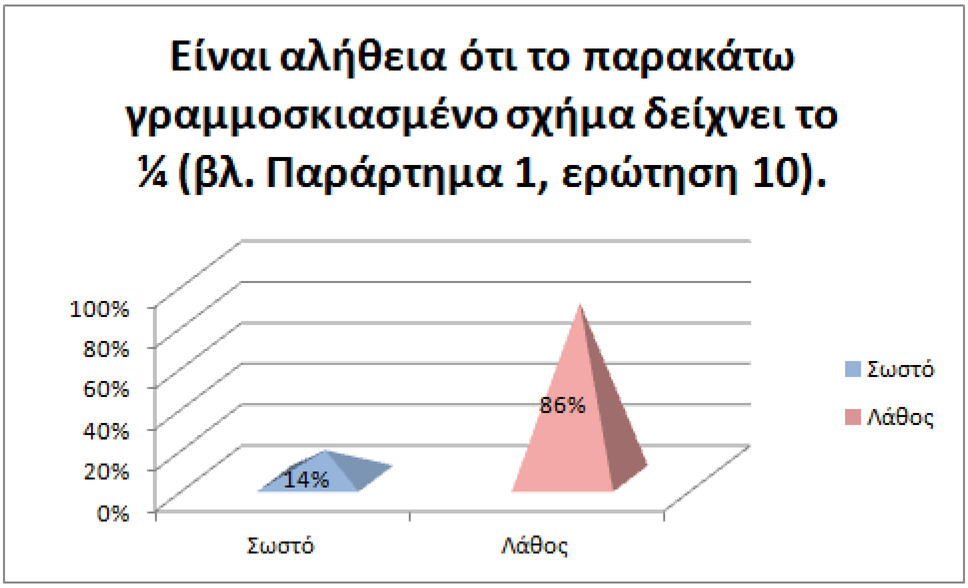
Στην όγδοη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, τέθηκε στους μαθητές να διαλέξουν ανάμεσα σε τέσσερα σχήματα ποιο δείχνει το κλάσμα 4/8. Από όσο φαίνεται από το γράφημα η πλειοψηφία των μαθητών με ποσοστό 84% γνώριζε τη σωστή απάντηση, ενώ με ποσοστό 16% των μαθητών απαντήθηκε λανθασμένα η ερώτηση. Γνώριζαν δηλαδή σε μεγάλο βαθμό ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα.

Γράφημα 5.2.16: Το τρίτο και το τέταρτο σχήμα δείχνουν το κλάσμα 1/3 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 9).



Στην ένατη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, τέθηκε στους μαθητές να διαλέξουν ανάμεσα σε πέντε σχήματα ποιο δείχνει το κλάσμα 1/3. Από όσο φαίνεται από το γράφημα η πλειοψηφία των μαθητών με ποσοστό 78% γνώριζε τη σωστή απάντηση, ενώ με ποσοστό 8% των μαθητών απαντήθηκε λανθασμένα η ερώτηση. Γνώριζαν δηλαδή ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στην παρούσα περίπτωση το πλήθος των αντικειμένων στο τρίτο γεωμετρικό σχήμα είναι 3 όσα ακριβώς ο παρονομαστής του κλάσματος και το σκιασμένο μέρος στο εν λόγω σχήμα είναι 1 όσο και ο αριθμητής του. Επίσης αναγνώρισαν ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με το διπλάσιο του παρονομαστή και είναι ομοίως σκιασμένα τα διπλάσια από όσα αναφέρονται στον αριθμητή, δηλαδή είναι ανάλογα το κλάσμα με το σχεδιάγραμμα και τα αντικείμενα είναι ισοδύναμα, τότε το κλάσμα αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα.

Γράφημα 5.2.17: Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο σχήμα δείχνει το ¼ (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 10).

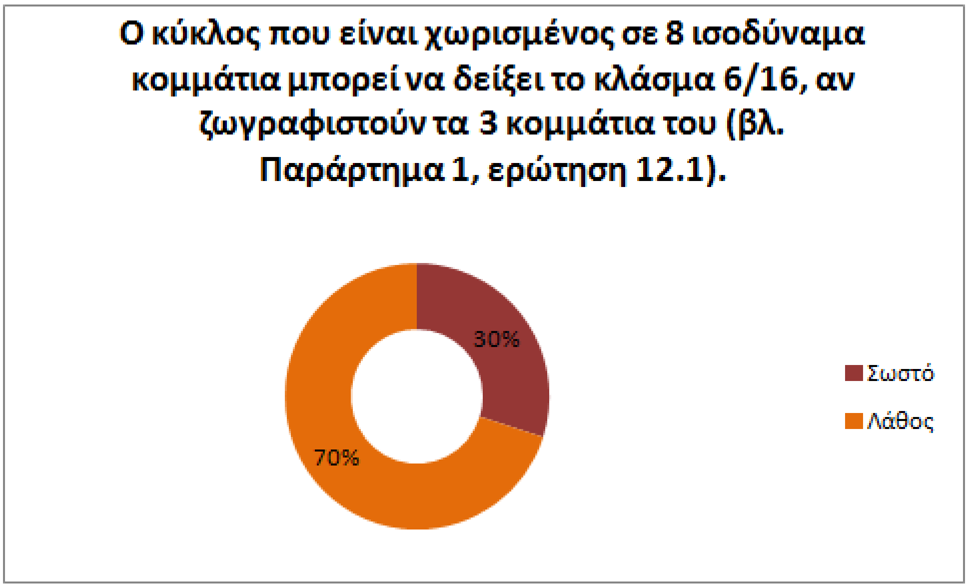


Στη δέκατη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, κλήθηκαν οι μαθητές να επιλέξουν θετικά ή αρνητικά για το αν το σχήμα που εικονίζεται στη δέκατη ερώτηση δείχνει το κλάσμα 1/4. Έπειτα υποχρεούνταν να δώσουν και μία αιτιολόγηση της απάντησής τους για να γίνει σαφέστερη και βάσιμη η αντίληψή τους. Η πλειοψηφία των μαθητών είτε δεν έδωσαν ορθή απάντηση, είτε δεν τεκμηρίωσαν με ορθό τρόπο την επιλογή τους, γεγονός που δηλώνεται από το γράφημα με ποσοστό 86%, ενώ το ποσοστό 14% των μαθητών και επέλεξε ορθά και αιτιολόγησε με σαφήνεια την άποψή του. Τα εν λόγω ποσοστά στην παρούσα ερώτηση δηλώνουν ότι ελάχιστοι μαθητές έχουν εμβαθύνει και κατανοήσει ουσιαστικά τα κλάσματα ως έννοια αλλά και πώς αναπαρίστανται με τη βοήθεια των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας.

Γράφημα 5.2.18: Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο σχήμα δείχνει το 1/2 (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 11).

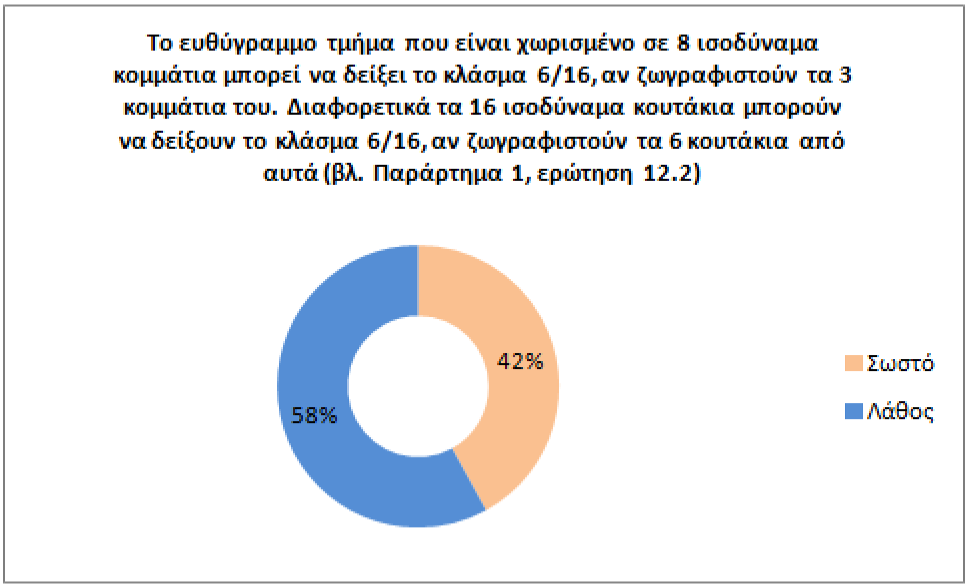
Στην ενδέκατη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, κλήθηκαν οι μαθητές να επιλέξουν θετικά ή αρνητικά για το αν το σχήμα που εικονίζεται στην ενδέκατη ερώτηση δείχνει το κλάσμα 1/2. Έπειτα υποχρεούνταν να δώσουν και μία αιτιολόγηση της απάντησής τους για να γίνει σαφέστερη και βάσιμη η αντίληψή τους. Η πλειοψηφία των μαθητών είτε δεν έδωσαν ορθή απάντηση, είτε δεν τεκμηρίωσαν με ορθό τρόπο την επιλογή τους, γεγονός που δηλώνεται από το γράφημα με ποσοστό 88%, ενώ το ποσοστό 12% των μαθητών και επέλεξε ορθά και αιτιολόγησε με σαφήνεια την άποψή του. Τα εν λόγω ποσοστά στην παρούσα ερώτηση δηλώνουν ότι ελάχιστοι μαθητές έχουν εμβαθύνει και κατανοήσει ουσιαστικά τα κλάσματα ως έννοια αλλά και πώς αναπαρίστανται με τη βοήθεια των συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας.

Γράφημα 5.2.19: Ο κύκλος που είναι χωρισμένος σε 8 ισοδύναμα κομμάτια μπορεί να δείξει το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 3 κομμάτια του (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 12.1).



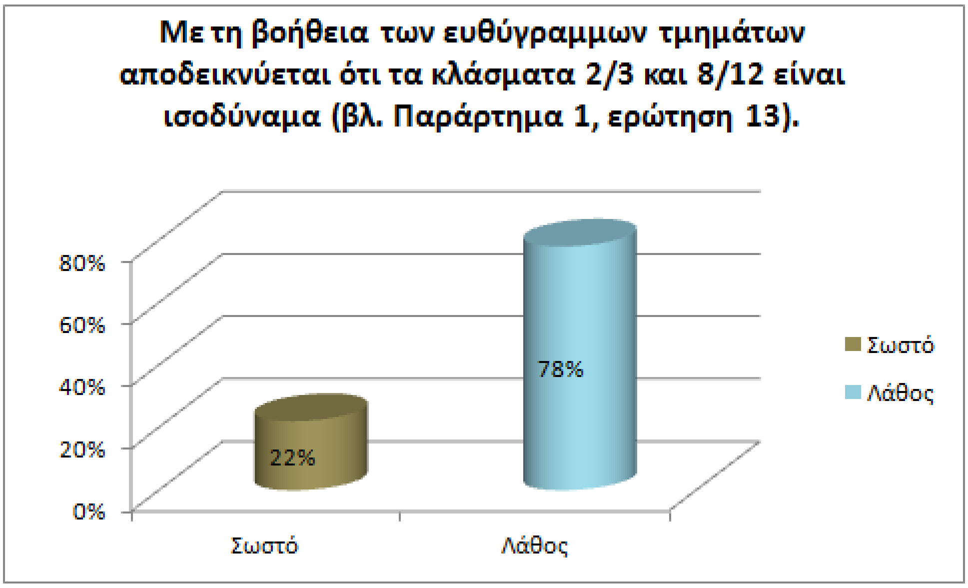
Στο πρώτο υποερώτημα της δωδέκατης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, κλήθηκαν οι μαθητές να δείξουν το κλάσμα 6/16 με τη βοήθεια ενός κύκλου που είναι χωρισμένος σε 8 ισοδύναμα κομμάτια. Όπως παρατηρείται και από το γράφημα οι μαθητές με ποσοστό 70% δεν κατάφεραν να αναπαραστήσουν ορθά το κλάσμα στον κύκλο, ενώ μονάχα το ποσοστό 30% των μαθητών κατόρθωσαν να φέρουν εις πέρας την παρούσα άσκηση. Ο μεγαλύτερος αριθμός λοιπόν των μαθητών δεν γνώριζαν ότι για να αντιστοιχίσουν ένα κλάσμα με ένα γεωμετρικό σχήμα πρέπει να είναι μοιρασμένο-διαχωρισμένο αντίστοιχα σε ισοδύναμα μέρη και όσος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος τόσο να είναι και το πλήθος των αντικειμένων του σχήματος αντίστοιχα και όσος είναι ο αριθμητής τόσα μέρη του πρέπει να ζωγραφιστούν. Επίσης δεν είχαν γνώση του ότι μπορεί το σχήμα να έχει χωριστεί σε πλήθος αντικειμένων πολλαπλάσιο του παρονομαστή του κλάσματος ή αντίστροφα ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι πολλαπλάσιος του πλήθους των αντικειμένων του σχήματος, τότε πρέπει με ανάλογο τρόπο να προσαρμοστεί και ο αριθμητής του κλάσματος ώστε να ζωγραφιστεί ο σωστός αριθμός μερών του σχήματος.

Γράφημα 5.2.20: Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι χωρισμένο σε 8 ισοδύναμα κομμάτια μπορεί να δείξει το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 3 κομμάτια του. Διαφορετικά τα 16 ισοδύναμα κουτάκια μπορούν να δείξουν το κλάσμα 6/16, αν ζωγραφιστούν τα 6 κουτάκια από αυτά (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 12.2).



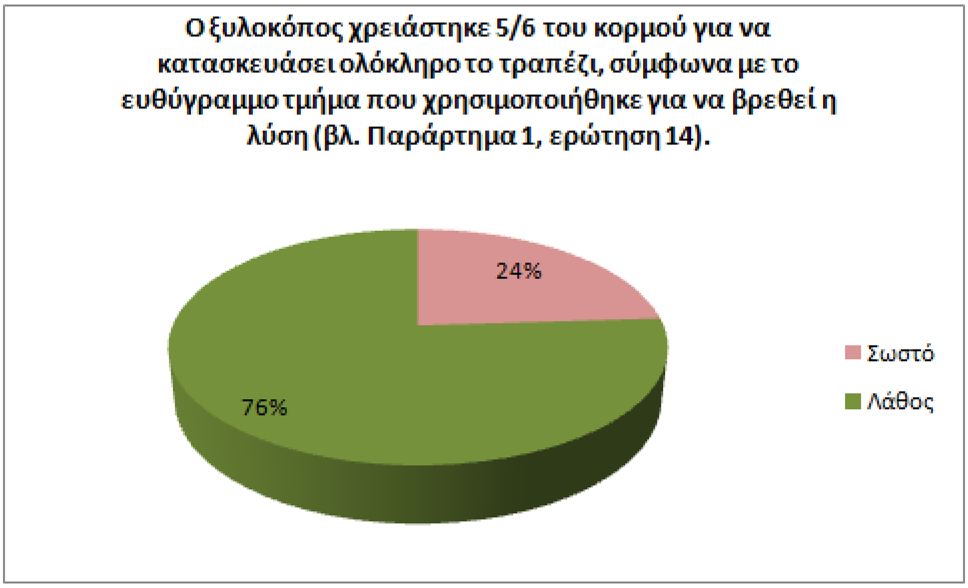
Στο δεύτερο υποερώτημα της δωδέκατης ερώτησης του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, κλήθηκαν οι μαθητές να δείξουν το κλάσμα 6/16 με τη βοήθεια ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι χωρισμένο σε 8 ισοδύναμα κομμάτια ή διαφορετικά ενός συνόλου από 16 ισοδύναμα κουτιά. Όπως παρατηρείται και από το γράφημα οι μαθητές με ποσοστό 58% δεν κατάφεραν να αναπαραστήσουν ορθά το κλάσμα, ενώ το ποσοστό 42% των μαθητών κατόρθωσαν να φέρουν εις πέρας την παρούσα άσκηση. Ο μεγαλύτερος αριθμός λοιπόν των μαθητών δεν γνώριζαν ότι για να αντιστοιχίσουν ένα κλάσμα με ένα ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να είναι μοιρασμένο-διαχωρισμένο αντίστοιχα σε ισοδύναμα μέρη και όσος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος τόσο να είναι και το πλήθος των αντικειμένων του ευθύγραμμου τμήματος αντίστοιχα και όσος είναι ο αριθμητής τόσα μέρη του πρέπει να ζωγραφιστούν. Επίσης δεν είχαν γνώση του ότι μπορεί το ευθύγραμμο τμήμα να έχει χωριστεί σε πλήθος αντικειμένων πολλαπλάσιο του παρονομαστή του κλάσματος ή αντίστροφα ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι πολλαπλάσιος του πλήθους των αντικειμένων του ευθύγραμμου τμήματος, τότε πρέπει με ανάλογο τρόπο να προσαρμοστεί και ο αριθμητής του κλάσματος ώστε να ζωγραφιστεί ο σωστός αριθμός μερών του ευθύγραμμου τμήματος.

Γράφημα 5.2.21: Με τη βοήθεια των ευθύγραμμων τμημάτων αποδεικνύεται ότι τα κλάσματα 2/3 και 8/12 είναι ισοδύναμα (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 13).



Στη δέκατη τρίτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, κλήθηκαν οι μαθητές να αποδείξουν με τη βοήθεια δύο ευθύγραμμων τμημάτων ότι τα κλάσματα 2/3 και 8/12 είναι ισοδύναμα. Ελάχιστο μέρος από τους μαθητές με ποσοστό 22% κατάφερε να αποδείξει την ισοδυναμία μεταξύ των κλασμάτων, καθώς το υπόλοιπο 78% δεν τα κατάφερε. Από το αποτέλεσμα αυτό διαφαίνεται ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δεν ήταν θέση να αναπαραστήσουν ορθά ένα κλάσμα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και έπειτα το επόμενο, ώστε να μπορέσουν να τα σκυγκρίνουν.

Γράφημα 5.2.22: Ο ξυλοκόπος χρειάστηκε 5/6 του κορμού για να κατασκευάσει ολόκληρο το τραπέζι, σύμφωνα με το ευθύγραμμο τμήμα που χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί η λύση (βλ. Παράρτημα 1, ερώτηση 14).



Στη δέκατη τέταρτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά στα έργα, ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν ένα πρόβλημα το οποίο εμπεριείχε κλάσματα και προκειμένου να φτάσει κανείς στη λύση ήταν απαραίτητη η χρήση του ευθύγραμμου τμήματος που δίδονταν, διαφορετικά οποιοσδήποτε ανόμοιος τρόπος λύσης κρίνονταν ως λανθασμένος, διότι η ερώτηση αυτή του ερωτηματολογίου είχε ως στόχο να διερευνήσει το κατά πόσο είναι οι μαθητές εξοικειωμένοι με την αναπαράσταση των κλασμάτων σε γεωμετρικά σχήματα ή ευθύγραμμα τμήματα. Όπως καταγράφεται και στο γράφημα με ποσοστό 24%, ελάχιστοι μαθητές κατάφεραν να λύσουν το πρόβλημα κάνοντας χρήση του ευθύγραμμου τμήματος. Αντίθετα φαίνεται ότι το 76% των μαθητών δεν τα κατάφεραν να ολοκληρώσουν το πρόβλημα και να οδηγηθούν στην λύση του, αλλά πιθανόν να μην επιχείρησαν καν να το επιλύσουν.

5.3 Αποτελέσματα μέσω CHIC

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεξεργασία των δεδομένων μέσω του προγράμματος CHIC του Regis Gras που συγκεντρώθηκαν από τα ερωτηματολόγια των μαθητών. Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω ευρημάτων, που παρουσιάζονται, υπάρχουν υποσημειώσεις και παράλληλα ένας μικρός σχολιασμός για την αποκωδικοποίηση ουσιαστικά των αριθμών που αντιπροσωπεύουν τα ευρήματα ώστε να γίνει περισσότερο αντιληπτό το κάθε αποτέλεσμα ξεχωριστά.

Οι τέσσερις πρώτες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου αναφέρονται στις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα Μαθηματικά, ενώ οι υπόλοιπες δεκαοκτώ αφορούν στα έργα τους. Για τη βαθμολόγηση των πεποιθήσεων και των έργων των μαθητών χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα 0-1. Αρχικά όσες πεποιθήσεις είχαν ως απάντηση το ‘‘Ναι’’ βαθμολογούνταν με ‘‘0’’, ενώ όσες είχαν απαντηθεί με ‘‘Όχι’’ αντιπροσωπεύονταν με το ‘‘1’’. Όσον αφορά στη βαθμολόγηση των έργων, με ‘‘0’’ σε περίπτωση που ήταν λανθασμένα ή δεν είχαν συμπληρωθεί-απαντηθεί πλήρως ή ακόμα και καθόλου και με ‘‘1’’ αν ήταν σωστά.

Οι μεταβλητές που δημιουργήθηκαν για την κωδικοποίηση του ερωτηματολογίου της έρευνας ορίστηκαν ως συνδυασμός γραμμάτων και αριθμών (βλ. Παράρτημα 2). Τα γράμματα φανέρωναν τα αρχικά της έννοιας μου μελετάται και οι αριθμοί το εκάστοτε ερώτημα του ερωτηματολογίου. Μία περίπτωση μεταβλητής για παράδειγμα μπορεί να είναι BFr6a η οποία αποτελείται από τα αρχικά της πρότασης recognition **B**iggest **Fr**action γιατί εξετάζεται η αναγνώριση του μεγαλύτερου κλάσματος ανάμεσα σε δύο και ο αριθμός 6a που υποδηλώνει το ερώτημα-υποερώτημα του ερωτηματολογίου, πιο συγκεκριμένα πρόκειται για το υποερώτημα a της ερώτησης 6.

Όπως παρουσιάστηκε και παραπάνω (βλ. ενότητα 4.7) η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας μέσω του προγράμματος CHIC του Regis Gras αναφέρεται σε μία συνεπαγωγική ανάλυση που στην παρούσα εργασία παρουσιάζει τα αποτελέσματα με διάγραμμα ομοιότητας και συνεπαγωγικό διάγραμμα. Πρώτα από όλα όσον αφορά στο διάγραμμα ομοιότητας οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που εμφανίζουν. Όσες από τις μεταβλητές έχουν αποτελέσματα που συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο εντάσσονται σε μία ομάδα. Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα διαφαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Σε περίπτωση που παρουσιάζεται η σχέση συνεπαγωγής Ερώτηση Έργου 1 $\rightarrow$ Ερώτηση Έργου 2 σημαίνει ότι η επιτυχία ή αποτυχία στην Ερώτηση Έργου 1 συνεπάγεται με επιτυχία ή αποτυχία στην Ερώτηση Έργου 2 αντίστοιχα.

Ποσοστά επιτυχίας στο ερωτηματολόγιο

Πίνακας 1: Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών

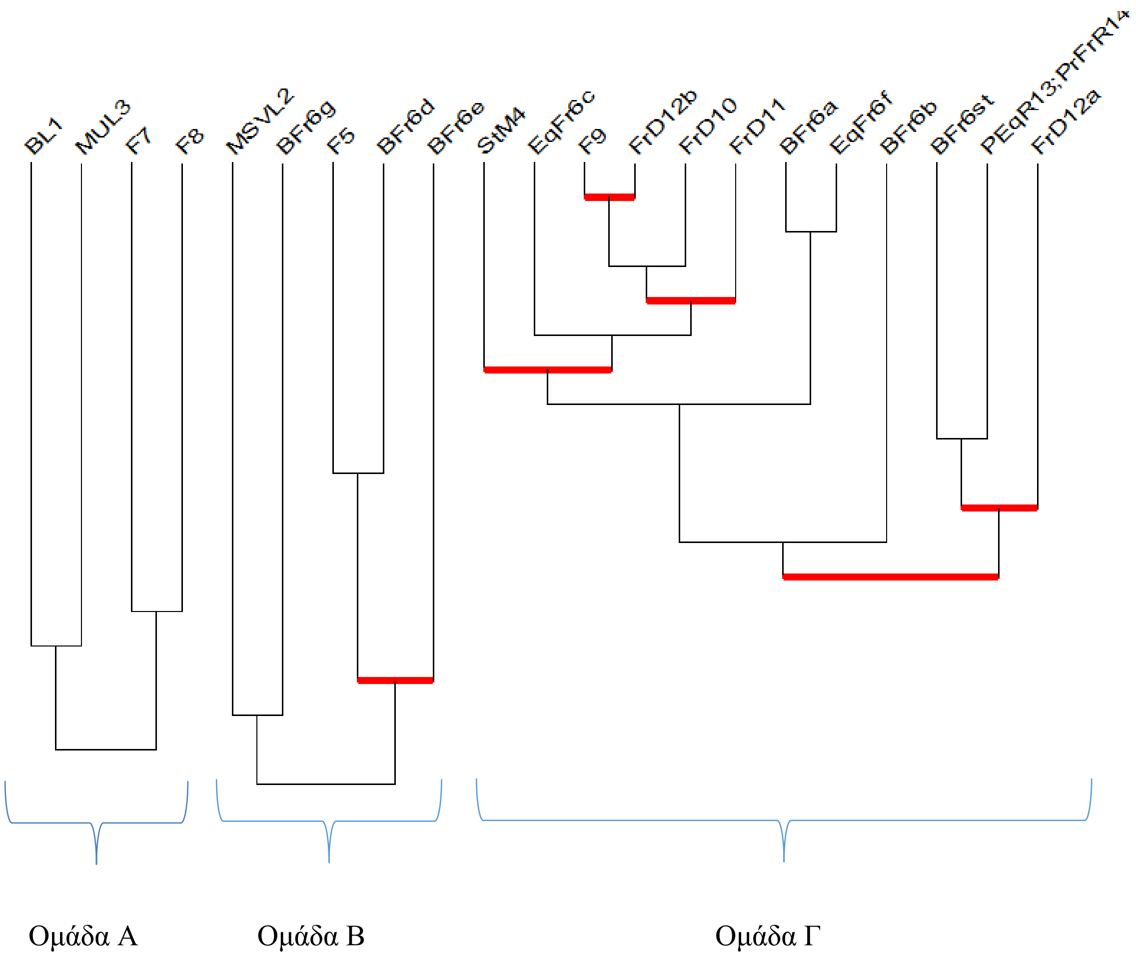
Μεταβλητές	Περιπτώσεις απαντήσεων των μαθητών	Μέσος Όρος	Τυπική απόκλιση	Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών
BL1	34.00	0.68	0.47	68%
MSVL2	33.00	0.66	0.47	66%
MUL3	17.00	0.34	0.47	34%
StM4	12.00	0.25	0.43	25%
F5	30.00	0.60	0.49	60%
BFr6a	8.00	0.16	0.37	16%
BFr6b	7.00	0.14	0.35	14%
EqFr6c	9.00	0.18	0.38	18%
BFr6d	31.00	0.62	0.49	62%
BFr6e	22.00	0.44	0.50	44%
BFr6st	2.00	0.04	0.20	4%
EqFr6f	10.00	0.20	0.40	20%
BFr6g	46.00	0.92	0.27	92%
F7	42.00	0.84	0.37	84%
F8	39.00	0.78	0.41	78%
F9	7.00	0.14	0.35	14%
FrD10	6.00	0.12	0.32	12%
FrD11	15.00	0.30	0.46	30%
FrD12a	21.00	0.42	0.49	42%
FrD12b	11.00	0.22	0.41	22%
PEqR13;PrFrR14	12.00	0.24	0.43	24%

Παρατηρήσεις από τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών

Από τα παραπάνω ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στις διάφορες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου γίνεται εμφανές ότι αν και οι 7 στους 10 μαθητές θεωρούν ότι τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα για αυτούς μόλις το 24% θεωρούν ότι είναι απαραίτητα για να προχωρήσουν καλά στη ζωή. Η ευκολότερη ερώτηση ήταν η 6, περίπτωση 8, με το 92% των μαθητών να την απαντάει σωστά και δυσκολότερη ήταν η ερώτηση 6, περίπτωση 6, η οποία περιέχει καταχρηστικό και μικτό κλάσμα με μόλις το 4% των μαθητών να την λύνει σωστά. Η άσκηση 5 δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν το κλάσμα με μια από τις βασικές πράξεις καθώς μόνο το 60% το συνέδεσε με την πράξη της διαίρεσης. Η άσκηση 6 σε γενικές γραμμές δυσκόλεψε τους μαθητές ειδικά στις περιπτώσεις καταχρηστικών κλασμάτων, μικτών αριθμών και κλασμάτων με διαφορετικό παρονομαστή. Οι ερωτήσεις 7 και 8 μπορούν να θεωρηθούν από τις εύκολες του δοκιμίου που δόθηκε με 8 στους 10 μαθητές να επιλέγουν σωστά την γραφική αναπαράσταση του ½ και του 4/8. Η ερώτηση 9 ήταν από τις δύσκολες με μόλις το 14% των μαθητών να μην έχει πρόβλημα με γραφικές αναπαραστάσεις κλασμάτων με περισσότερα από ένα όλον. Το ίδιο ισχύει και για την ερώτηση 10 με μόλις το 12% να αναγνωρίζει ότι επειδή το όλο δεν είναι χωρισμένο σε 4 ίσα κομμάτια η γραφική αναπαράσταση της άσκησης δεν αντιστοιχεί με το ¼. Στην άσκηση 11 οι μαθητές τα πήγαν λίγο καλύτερα με το 30% των μαθητών να αναγνωρίζει επιτυχώς και να χρησιμοποιεί τον άξονα συμμετρίας του σχήματος για να κατανοήσει ότι το σχήμα όντως αντιστοιχεί στο 1/2. Στην άσκηση 12 το 40% των μαθητών αναπαράστησε σωστά το 6/16 στο κυκλικό σχήμα που ήταν χωρισμένο σε 8 ίσα μέρη ενώ μόνο το 22% αναπαράστησε σωστά το ίδιο κλάσμα σε σχήμα με τετραγωνάκια και ας ήταν χωρισμένο σε 16 ίσα μέρη. Το πρόγραμμα συσχέτισε τις ασκήσεις 13 και 14 σαν ίδια άσκηση με μόλις το 12% των μαθητών να μην έχουν πρόβλημα να τοποθετήσουν σε μια αριθμογραμμή σωστά τα κλάσματα που τους δίνονται (αν και είχαν να χωρίσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ίσα μέρη και να αναπαραστήσουν τα κλάσματα, εντούτοις μπορεί να θεωρηθεί αριθμογραμμή από το 0 μέχρι το 1 αφού δεν μιλάμε για καταχρηστικά κλάσματα).

Διάγραμμα ομοιότητας

Διάγραμμα 1: Διάγραμμα ομοιότητας



Παρατηρήσεις από το διάγραμμα ομοιότητας

Από το παραπάνω δέντρο ομοιότητας (similarity tree) γίνεται εμφανές ότι

Classification at level : 1 : (F9 FrD12b) similarity : 0.999837

Classification at level : 2 : (BFr6a EqFr6f) similarity : 0.999748

Classification at level : 3 : ((F9 FrD12b) FrD10) similarity : 0.999435

Classification at level : 4 : (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11) similarity : 0.998918

Classification at level : 5 : (EqFr6c (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11)) similarity : 0.998276

Classification at level : 6 : (StM4 (EqFr6c (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11))) similarity : 0.997575

Classification at level : 7 : ((StM4 (EqFr6c (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11))) (BFr6a EqFr6f)) similarity : 0.989579
Classification at level : 8 : (BFr6st PEqR13;PrFrR14) similarity : 0.98588
Classification at level : 9 : (F5 BFr6d) similarity : 0.931091
Classification at level : 10 : ((BFr6st PEqR13;PrFrR14) FrD12a) similarity : 0.923766
Classification at level : 11 : (((StM4 (EqFr6c (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11))) (BFr6a EqFr6f)) BFr6b) similarity : 0.893367
Classification at level : 12 : ((((StM4 (EqFr6c (((F9 FrD12b) FrD10) FrD11))) (BFr6a EqFr6f)) BFr6b) ((BFr6st PEqR13;PrFrR14) FrD12a)) similarity : 0.776149

Level 1. Οι μαθητές που μπόρεσαν να επιλέξουν σωστά την γραφική αναπαράσταση που δείχνει το 1/3 μπόρεσαν να αναπαραστήσουν οπτικά σωστά το 6/16 στο σχήμα το οποίο το όλο ήταν χωρισμένο σε τόσα ίσα κομμάτια όσα έδειχνε ο παρονομαστής του κλάσματος.

Level 2. Οι μαθητές που μπόρεσαν να αναγνωρίσουν το μεγαλύτερο κλάσμα ανάμεσα σε δύο με τον ίδιο παρονομαστή κατάφεραν να αναγνωρίσουν και ίσα κλάσματα (τα οποία όμως είναι καταχρηστικά).

Level 3. Οι μαθητές της κλάσης level 1 απάντησαν σωστά την 10 άσκηση και αναγνώρισαν ότι παρότι το σχήμα είναι χωρισμένο σε 4 μέρη και είναι σκιασμένο το ένα, αυτό δεν αποτελεί γραφική αναπαράσταση του κλάσματος ¼ καθώς το σχήμα δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη.

Level 4. Οι μαθητές της κλάσης level 3, οι οποίοι σχετίζονται με τους μαθητές της κλάσης level 1 επίσης απάντησαν σωστά την άσκηση 11 και αναγνώρισαν ότι παρότι το σχήμα δεν είναι χωρισμένο σε 4 ίσα τμήματα και παρότι είναι σκιασμένα τα 2 από αυτά τα τμήματα το σχήμα αποτελεί στην ουσία γραφική αναπαράσταση του κλάσματος ½ λόγο του άξονα συμμετρίας του σχήματος.

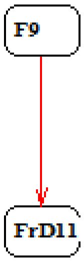
Level 5. Οι μαθητές αυτής της κλάσης (ομάδας) σχετίζονται με τους μαθητές της κλάσης level 4 κτλ και μπόρεσαν αν αναγνωρίσουν τα ίσα κλάσματα της άσκησης 6 περίπτωση 3).

Level 6. Οι μαθητές αυτής της κλάσης (ομάδας) σχετίζονται με τους μαθητές των κλάσεων level 5, 4, 3, 1 και επιπρόσθετα πιστεύουν ότι δεν γίνεται να προχωρήσει κανείς καλά στην ζωή του αν αγνοεί και δεν γνωρίζει καλά Μαθηματικά.

Level 7. Οι μαθητές αυτής της κλάσης σχετίζονται με του μαθητές των κλάσεων Level 6,5,4,3,1 και level 2.

Συνεπαγωγικό Διάγραμμα

Διάγραμμα 2: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα



Παρατηρήσεις από το συνεπαγωγικό διάγραμμα

Από το παραπάνω συνεπαγωγικό γράφο γίνεται εμφανές ότι οι μαθητές που έλυσαν σωστά την άσκηση 9 και μπόρεσαν να επιλέξουν σωστά την γραφική αναπαράσταση που δείχνει το 1/3 μπόρεσαν επίσης να λύσουν σωστά την άσκηση 11 και αναγνώρισαν ότι παρότι το σχήμα δεν είναι χωρισμένο σε 4 ίσα τμήματα και παρότι είναι σκιασμένα τα 2 από αυτά τα τμήματα το σχήμα αποτελεί στην ουσία γραφική αναπαράσταση του κλάσματος ½ λόγω του άξονα συμμετρίας του σχήματος.

5.4 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιήθηκε η παράθεση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την έρευνα που έγινε με τους μαθητές της Δ’ τάξης δύο Δημοτικών σχολείων στην περιοχή του νομού Ηρακλείου της Κρήτης. Συγκεκριμένα σε δύο υποενότητες παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από τις δύο διαφορετικές μεθόδους ανάλυσης με τα προγράμματα Microsoft Excel και CHIC.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

6.1 Εισαγωγή

Στο έκτο κεφάλαιο της εν λόγω εργασίας παρατίθενται δύο υποενότητες. Η πρώτη αφορά στα συμπεράσματα που εξάγονται για τα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσω του Microsoft Excel (βλ. ενότητα 6.2) και η δεύτερη στα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων μέσω του προγράμματος CHIC (βλ. ενότητα 6.3). Παρουσιάζεται αναλυτική περιγραφή και σχολιασμός και στις δύο υποενότητες των αποτελεσμάτων που φανερώθηκαν έπειτα από την επεξεργασία των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν μέσα από τα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν οι συμμετέχοντες μαθητές.

6.2 Συμπεράσματα για αποτελέσματα μέσω Microsoft Excel

Σε γενικό βαθμό, σύμφωνα με τα ποσοστά που προέκυψαν ως αποτελέσματα από τη συλλογή των δεδομένων μέσω του ερωτηματολογίου που συμπληρώθηκε από τους μαθητές, η πλειοψηφία τους παρόλο που δηλώνει στις ερωτήσεις των πεποιθήσεων ότι έχει θετική αντίληψη για τα Μαθηματικά και ότι τα θεωρεί χρήσιμα στην καθημερινότητα, δεν παρουσιάζει μεγάλες επιδόσεις στις ερωτήσεις που αφορούν στα έργα. Το γενικό αυτό συμπέρασμα δηλώνει ότι οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με εσωτερικά εμπόδια τα οποία δεν τους επιτρέπουν να κατανοήσουν βαθύτερα την έννοια του κλάσματος και έπειτα να προφτάσουν να προχωρήσουν και την κατάκτηση της δεξιότητας να συσχετίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα ή ευθύγραμμο τμήμα με ένα κλάσμα. Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαία η παρέμβαση της εννοιολογικής αλλαγής που έκανε την εμφάνισή της στο θεωρητικό πλαίσιο (βλ. ενότητα 2.12) της παρούσας εργασίας προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές. Παράλληλα μέσα από τη συλλογή των δεδομένων που υπήρχαν στα ερωτηματολόγια παρατηρήθηκε ότι πολλοί από τους μαθητές απέφευγαν να απαντήσουν ορισμένες ερωτήσεις, πράγμα που μαρτυρά ότι λόγω πιθανόν έλλειψης εξοικείωσης και ελλιπής κατανόησης των κλασμάτων οι μαθητές διστάζουν να ρισκάρουν να επιλέξουν μία απάντηση, μην τυχόν και την κάνουν λάθος.

6.3 Συμπεράσματα για αποτελέσματα μέσω CHIC

Η ανάλυση των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών, του διαγράμματος ομοιότητας (βλ. Διάγραμμα 1) και του συνεπαγωγικού διαγράμματος (βλ. Διάγραμμα 2) με τα αποτελέσματα από τη συλλογή και έπειτα επεξεργασία των δεδομένων καταλήγει στην εξαγωγή συμπερασμάτων που αφορούν στις γνωστικές ικανότητες των μαθητών ως προς τη μαθηματική ενότητα των κλασμάτων και το βαθμό στον οποίο επιδρούν τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόησή τους.

Σύμφωνα με την ανάλυση οι μαθητές φαίνεται να διευκολύνονται στην κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων με το μοντέλο που αναπαριστάται στο γεωμετρικό σχήμα ή ευθύγραμμο τμήμα όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και τα σκιασμένα μέρη είναι τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή. Σε αντίθετη περίπτωση όμως δυσκολεύονται όταν πλήθος των αντικειμένων δε συμπίπτει με τον παρονομαστή.

Το σχήμα του μοντέλου επηρεάζει τους μαθητές στο συσχετισμό κλάσματος με γεωμετρικό σχήμα ή ευθύγραμμο τμήμα, καθώς όπως φανερώνεται και από τα ερωτηματολόγια χειρίζονται πιο άνετα μοντέλα που αναπαριστούν τετράγωνο ή ορθογώνιο παρά τρίγωνο, κύκλο, πολύγωνο. Το γεγονός αυτό πιθανώς μαρτυρεί μία δυσκολία στις γεωμετρικές έννοιες.

Παράλληλα οι μαθητές δυσκολεύονται στο χειρισμό μοντέλων τα οποία δεν είναι χωρισμένα σε ισοδύναμα μέρη γεγονός που πιθανότατα πηγάζει από την έλλειψη κατανόησης του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Όσον αφορά ειδικότερα στα ευθύγραμμα τμήματα, εντοπίζεται μία δυσκολία στη διαμοίρασή τους σε ισοδύναμα μέρη, τοποθετώντας-αναπαριστώντας ουσιαστικά το κλάσμα στο ευθύγραμμο τμήμα.

Τέλος παρατηρείται ότι παρόλη την καλή διάθεση των μαθητών για την κατανόηση των κλασμάτων και του συσχετισμού τους με τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας, όπως είναι εμφανές και από τις καταγεγραμμένες πεποιθήσεις των μαθητών, υπάρχει δυσκολία στη διαχείριση πολύπλοκων μοντέλων αναπαραστάσεων και κλασμάτων.

6.4 Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα έρευνα έχει ως περιορισμό το πλήθος τους δείγματός της, που ανέρχεται στους 50 συμμετέχοντες μαθητές της Δ’ τάξης δύο Δημοτικών σχολείων στην περιοχή του νομού Ηρακλείου της Κρήτης και πιο συγκεκριμένα στα Δημοτικά σχολεία των Μοιρών, με δύο τμήματα να συμμετέχουν, και του Πετροκεφαλίου. Παρόλο που δεν είναι απολύτως μικρός ο αριθμός των συμμετεχόντων, δεν είναι όμως και μεγάλος προκειμένου να παρέχεται η δυνατότητα γενίκευσης των συμπερασμάτων του ερευνητικού πονήματος στο γενικότερο πληθυσμό της Ελλάδας ή ακόμα και της περιοχής της Κρήτης. Το δείγμα περιορίζεται μονάχα σε 50 μαθητές λόγω του περιορισμένου χρόνου που ήταν διαθέσιμος. Επιπλέον οφείλεται στην αδυναμία εύρεσης παραπάνω διαθέσιμων τάξεων μέσα σε αυτό το σύντομο χρονικό διάστημα στο οποίο έπρεπε να διεξαχθεί η έρευνα. Οι συμμετέχοντες, επιπρόσθετα, επιλέχθηκαν ναι μεν τυχαία από την περιοχή των Μοιρών και του Πετροκεφαλίου, αλλά παρόλα αυτά ανήκαν στην ίδια γεωγραφική περιοχή, γεγονός που για ακόμη μία φορά δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων.

Ένας ακόμη περιορισμός που ενυπάρχει στην παρούσα έρευνα αφορά στη χρήση μονάχα του ερωτηματολογίου ως μέσο συλλογής δεδομένων και πηγή διεξαγωγής αποτελεσμάτων. Εντούτοις όμως είναι ευδιάκριτο ότι περιέχει στοχευμένες ερωτήσεις που μπορούν να οδηγήσουν σε χρήσιμες πληροφορίες, εισχωρώντας εν μέρη εις βάθος στη μελέτη και διερεύνηση του ερευνητικού ερωτήματος, δηλαδή εάν επιδρούν τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές (βλ. ενότητα 4.2). Το εν λόγω ερωτηματολόγιο μπορεί να έχει πληθώρα πλεονεκτημάτων, όμως δεν παύει να μην οδηγεί τον ερευνητή στην συλλογή δεδομένων που παράγουν αποτελέσματα βαθύτερα για την απάντηση του ερευνητικού ερωτήματος, όπως είναι ο εντοπισμός και η πηγή των εμποδίων που έχουν οι μαθητές και δυσκολεύονται στην κατανόηση των κλασμάτων.

6.5 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η δεδομένη μελέτη και διερεύνηση της επιρροής και επίδρασης των συστημάτων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές λειτουργεί ως εναρκτήριο λάκτισμα για την έμπνευση διεξοδικότερων ερευνών και περισσότερο στοχευμένων σε ένα από τα επιμέρους εμπόδια που δυσκολεύουν τους μαθητές στην κατανόηση των κλασμάτων. Παράλληλα η προτεινόμενη έρευνα που περιγράφεται ευθύς μπορεί να έχει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης μεγαλύτερου δείγματος, ώστε να κρίνεται ορθή η απόπειρα γενίκευσης των αποτελεσμάτων. Ως μέσα συλλογής δεδομένων και πηγής αποτελεσμάτων-ευρημάτων οφείλει να εμπεριέχει περισσότερα από ένα, όπως για παράδειγμα είναι η παρατήρηση, το εκπαιδευτικό υλικό με παρεμβάσεις στη διδασκαλία σε συνδυασμό και με ερωτηματολόγιο, ουτωσώστε να εξεταστεί βαθύτερα και λεπτομερέστερα. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να γίνει, μέσω εκπαιδευτικής παρέμβασης, εφαρμογή λογισμικών που έχει γίνει αναφορά τους παραπάνω στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας (βλ. ενότητα 2.16) και έπειτα μέσω παρατήρησης ή ερωτηματολογίου να εξεταστεί ο βαθμός στον οποίο τα συστήματα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας επιδρούν στην κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές.

6.6 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιήθηκε η παράθεση των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας που έγινε με τους μαθητές της Δ’ τάξης δύο Δημοτικών σχολείων στην περιοχή του νομού Ηρακλείου της Κρήτης. Συγκεκριμένα σε δύο υποενότητες παρουσιάστηκαν τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από τις δύο διαφορετικές μεθόδους ανάλυσης με τα προγράμματα Microsoft Excel και CHIC. Τελικό και στην ουσία γενικότερο συμπέρασμα αφορά στη δυσκολία των μαθητών στη διαχείριση πολύπλοκων γεωμετρικών σχημάτων ή ευθύγραμμων τμημάτων που λειτουργούν ως εργαλεία στην αναπαράσταση κλασμάτων, αλλά ακόμα και στη διαχείριση καταχρηστικών κλασμάτων και μικτών αριθμών, παρόλο το θετικισμό που εκδηλώνουν οι μαθητές προς τα Μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993), *Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct*, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of Research, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, p. 13-47.

Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). *Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study*. Frontline Learning Research 3(1), p. 17-34.

Boulton-Lewis, G. (1998). Children's Strategy Use and Interpretations of Mathematical Representations, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), p. 219-237.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. p. 109-122. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Duval, R. (2002).

Gagatsis, A. & Elia, I. (2003). *The representation and geometrical models in teaching mathematics*. Nicosia : Intercollege Press.

Gagatsis, A. & Shiakalli, (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), p. 645-657.

Hall, N. (1998). Concrete Representaions and the Procedural Analogy, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), p. 33-51.

Hiebert, J. & Behr, M. J. (1988). *Number concepts and operation in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. p. 27-32. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1987a). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (eds.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J.J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & S.Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: considerations for identification, diagnosis and remediation. In Lesh, R., Mierkiewicz, D. &Kantowski, M. G. (eds.), *Applied Mathematical Problem Solving.* Ohio: ERIC/SMEAC.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbawm Associates.

Marcou A., Gagatsis A. (2002). Representations and Learning of Fractions. In: Alan Rogerson (ed.) (2002). *The Humanistic Renaissance in Mathematics Education*. p. 250-253. Palermo, Italy.

Ni, Y. (2002). Number lines as assessment procedure for diagnostic utility and achievement estimation. *Journal of Educational Psychology.*

Philippou, G.N. & Christou, K. (1994).Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions .In J.P. Ponte & J.P. Matos (Eds.), *Proceedings of the PME 18*. (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. IV, p. 33-40.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). ''Students' understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach''. In: L. Verschaffel & S. Vosniadou (Guest Editors), "Conceptual Change in Mathematics Learn-ing and Teaching". *Learning and Instruction.* 14(5). p. 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, p. 344-355.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). *Understanding the structure of rational numbers: A conceptual change approach*. In L. Verschaffel and. Vosniadou (Eds.), Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of Learning and Instruction, 14, p.453-467.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), p. 167-181.

Vosniadou, S. (Ed.). (1994). *Capturing and Modeling the Process of Conceptual Change*. In S. Vosniadou (Guest Editor), Special Issue on Conceptual Change, Learning and Instruction, 4, p. 45-69.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (ed.), *Handbook of research on conceptual change* . p. 3-34. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αλαχιώτης, Ν.Σ. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Υπουργείο Παιδείας, Διά Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Ελλάδας.

Αυγερινός, Ε., Βλάχου, Ρ. & Καντάς, Κ. (2011). Ο ρόλος των Μαθηματικών Μοντέλων στην κατανόηση της Έννοιας των κλασμάτων, σελ. 66-70, *Πρακτικά 28ου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 2011.

Βαμβακούση, Ξ. & Καργιωτάκης, Γ. & Μπομποτίνου, Α. Δ. & Σαΐτης, Α. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού,* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ.(2000). *Ο ρόλος της μετάφρασης μεταξύ των διάφορων πεδίων αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης στη μάθηση*. Στο Στ.Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου(εκδ.), Σύγχρονη έρευνα στις επιστήμες της αγωγής. σελ. 361-368. Λευκωσία : Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP.

Γαγάτσης, Α. & Μάρκου, Α. (2002). Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών: Δύο όψεις του ίδιου φαινομένου; Στο Α. Γαγάτσης, Λ. Κυριακίδης, Ν. Τσαγγαρίδου, Ε. Φτιάκα, & Μ. Κουτσούλης (εκδ.). *Πρακτικά 7ου Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου: Η Εκπαιδευτική Έρευνα στην Εποχή της Παγκοσμιοποίησης*, (2). σελ. 263-287. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Σπύρου, Π. & Ευαγγελίδου, Α. (2004). Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Στο Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Φτιάκα, Ε., Κυριακίδης, Λ., Τσαγγαρίδου, Ν. & Κουτσούλης, Μ., Σύγχρονες Τάσεις στην Εκπαιδευτική Έρευνα και Πρακτική, *8ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*, σελ. 427-434. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΚΟΕΕ.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Α. & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα;, *9ο Παγκύπριο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*, συνδιοργάνωση: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύππρου, ΚΟΕΕ, Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου, σελ. 99-110. Λευκωσία: 2-3/06/2006.

Δεληγιάννη Ε., Γαγάτσης Α., κ.ά. (2008). Ο ρόλος των πολλαπλών αναπαραστάσεων στην κατανόηση της πρόσθεσης κλασμάτων: Σύγκριση της επίδοσης Κυπρίων και Ελλαδιτών μαθητών. *10ο Παγκύπριο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου - Ποιότητα στην Εκπαίδευση: Έρευνα και Διδασκαλία*, επιμ. στων Ε. Φτιάκα, Σ. Σιμεωνίδου. & Μ. Σωκράτους. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου. 2008.

Δεληγιάννη, Ε. & Καραμάνου, Μ. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2011). Οδηγός Εκπαιδευτικού, Βιβλίο Μαθητή τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, *Μαθηματικά Α' Δημοτικού*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη, Ε. & Καραμάνου, Μ. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2011). Οδηγός Εκπαιδευτικού, Βιβλίο Μαθητή τ.

1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, *Μαθηματικά Β' Δημοτικού*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη, Ε. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. & Χειμωνή, Μ. (2011). Οδηγός Εκπαιδευτικού, Βιβλίο Μαθητή τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη, Ε. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. & Χειμωνή, Μ. (2013). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού*, Βιβλίο Μαθητή τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη, Ε. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. & Χειμωνή, Μ. (2013). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού*, Βιβλίο Μαθητή τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη, Ε. & Παναούρα-Μάκη, Γ. & Παντζιαρά, Μ. & Παπαριστοδήμου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. & Χειμωνή, Μ. (2013). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού*, Βιβλίο Μαθητή τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, τ. 5, τ. 6, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Ηλία, Ι. & Γαγάτσης, Α. (2004). *Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο;* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.

Θεοδούλου, Ρ. & Γαγάτσης, Α. (2003). Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις... Ποιο είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος;, *2ο Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*, Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Κακαδιάρης, Χρ. & Μπελίτσου, Ν. & Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου, Γ. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά Ε' δημοτικού,* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Καργιωτάκης, Γ. & Μαραγκού, Α. & Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Μ. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά Β' Δημοτικού,* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κασσώτη, Ο. & Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού,* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ. & Θεοδώρου, Α. & Καψάλης, Α. &Πνευματικός, Δ. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά Α' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ. & Θεοδώρου, Α. & Νικολαντωνάκης, Κ. &Παναγάκος, Ι. & Σπανάκα, Α. (2006). Βιβλίο Δασκάλου, Βιβλίο Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών τ. 1, τ. 2, τ. 3, τ. 4, *Μαθηματικά Β' Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Παντσίδης, Χ. (2006). *Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων*. Διπλωματική εργασία, Αθήνα.

Πατσιομίτου, Σ. & Εμβαλιώτης, Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία, *Θέματα επιστημών και τεχνολογίας στην εκπαίδευση*, 2 (3). σελ. 247-272. εκδ. Κλειδάριθμος.

Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2007). *Μάθηση και & διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας*. τ. 2-3. Αθήνα: Αυτοέκδοση

Τσιάκαλος, Γ., Μπουζάκης, Ι., Κουτσελίνη, Μ., Ζεμπύλας, Μ., Ερωτοκρίτου, Ε., Μιχαηλίδου, Α., Κουσαθάνα, Μ., Γεωργίου, Γ., Ζήσιμος, Γ., Σεμελίδου, Ε., Κωνσταντίνου, Κ. & Αντηλιός, Ν. (2010). *Αναλυτικά Προγράμματα Κύπρου*. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Χρίστου, Κ. & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2004). *Έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας*. Στο Α. Γαγάτσης (Εκδ.), Σύγχρονες Τάσεις της & Διδακτικής των Μαθηματικών (σελ. 179-188), Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού- Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Χριστοφορίδης, Μ., Σάββας, Α. & Αφαντίτη, Θ. (2008). Μαθηματικά Δημοτική Εκπαίδευση, *Επιμορφωτικό Υποστηρικτικό Υλικό για την ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη μαθησιακή διαδικασία*, επιμ. Χριστοφορίδης, Μ., Κύπρος: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου-Τομέας Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας.

Ενδεικτική Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Ainsworth, S.E., Woody, D.J., & Bibby, P.A. (1997). *Evaluating principles for multi-representational learning environments*. 7th EARLI Conference. Athens.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator,* 16(2).

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. & Silver, E.A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh. & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. Cognitive Development, 7, p. 235-257.

Carney, R. N. & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review,* 14(1), p. 5-26.

Caveing, M. (1992). Le statut arithmetique du quantieme egyptien. In: Histoire de fractions, fractions d'histoire. Basel, p.39-52; 403-409.

Cheng, P.C.H. (2000). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education,* 33.

Davis, R. (1997). In Memoriam, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), p. 7-16.

De Jong, T., Ainsworth, S.E., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., Sime, J.A., van Someren, M., Spada, H., Swaak, V. (1998). Acquiring knowledge in science and mathematics: The use of multiple representations in technology-based learning environments. In M.W. van Someren, H.J.P.Boshuizen, T. de Jong & P. Reimann (Eds.), *Learning with multiple representations*. Oxford: Pergamon.

Edwards, L. (1998). Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), p. 53-78.

Ernest P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics.* 16. p. 411-424. Reidel Publishing Company.

Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), p. 105-121.

Fowler, D.H. (1987). *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*. Oxford D.H.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2005). Il concetto di funzione e le sue rappresentazioni nell'educazione secondaria. *Bollettino dei Docenti di Matematica,* 50, p. 41-54.

Gagatsis, A. & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 21 (3), p. 29-54.

Goldin, G. (1998). The PME Working Group on Representations, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), p. 283-301.

Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (eds.), *Theories of Mathematical Learning*. p. 397-430. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Greeno, J., Hall. R. (1997). *Practicing representation: Learning with and about representation forms*. Phi Delta Kappan, 78, p. 361-367.

Hart, K. (1987). Strategies and errors in secondary mathematics. *Mathematics in School*, 16 (2), p. 14-17.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis*. p. 1-27. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), p. 123-134.

Kaput, J.J. (1987). "Representation Systems and Mathematics". In: C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In the National Council of Teachers of Mathematics & the Mathematical Sciences Education Board (eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and rations for understanding: *Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2001). J. Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco (ed.), *The roles of representation in school mathematics*. p. 146-165. Reston, VA: NCTM.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach, in T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research, Lawrence Erlbaum Associates*, p. 261-288.

McKendree, J., et al. (2002). The Role of Representation in Teaching and Learning Critical Thinking, *Educational Review*, 54 (1). p. 57-67.

Mesquita, A. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), p. 183-195.

NCTM (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Owens, K. & Clements, K. (1998). Representations in Spatial Problem Solving in the Classroom, *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (2), p. 197-218.

Pinker, S. (1990). A theory of graph comprehension. In R. Friendle (Ed.), *Artificial Intelligence and the Future of testing*. p. 73-126. Norwood, NJ: Ablex.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. p. 327-361. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ritter, J. (1992). Metrology and the prehistory of fractions. In: P. Benoit Karine Chemla and J. Ritter (eds.). *Histoire de fractions, fractions d'histoire*.Basel.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. In C. Donlan (Ed.), *The Development of Mathematical Skills*. p. 75-110. London: Psychology Press.

Sedig, K. & Liang, H. (2008).Learner-information interaction.A macro-level framework characterizing visual cognitive tools.*Journal of Interactive Learning Research*,19(1), p. 147-173.

Smith, J. P. (1995). Competent Reasoning with Rational Numbers. Cognition and Instruction, 13(1), p. 3-50.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. The Netherlands: Kluwer Academic.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed? In T. Nunes & P. Bryant (eds). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. East Sussex: Psychology Press.

Van de Walle, A. J. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία.* (Τ. Α. Τριανταφυλλίδης Επιμ., Α. Αλεξανδροπούλου, Β. Κομπορόζος Μεταφρ.). Αθήνα: Τυποθήτω – Γιώργος Δαρδανός. (Το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 2001).

Ενδεικτική Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αναστασιάδου, Σ. (2007). Δυσκολίες χειρισμού των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης στατιστικών εννοιών στο Δημοτικό σχολείο, *20ο Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής*, επιμ. Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο, σελ. 87-94. Κύπρος.

Γαγάτσης, Α., Δημητρίου, Α., Αφαντίτη, Θ., Μιχαηλίδου, Ε., Παναούρα, Ρ., Σιακαλλή, Μ. & Χριστοφορίδης, Μ. (1999). Η Επίδραση των σημειωτικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης. *Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση*. σελ. 514-521. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Καπέλου, Κ. & Καφούση, Σ. (2003). «Προσεγγίζοντας την έννοια του φυσικού αριθμού ως τελεστή στο Νηπιαγωγείο». *Πρακτικά του 20ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* με θέμα «Η διαδρομή του παιδιού στα Μαθηματικά από την προσχολική ηλικία μέχρι την ενηλικίωση», σελ. 211-221. επιμ. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Κασιμάτη, Α. (χ.χ.). *Η έννοια του αριθμού.* Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Αθηνών.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κορδάκη, Μ. (2004). Η γνώση από μια κοινωνική εποικοδομιστική προσέγγιση, στο κεφ. Θεωρίες για τη γνώση και τη μάθηση, *Σημειώσεις για το μάθημα «Διδακτικής της Πληροφορικής-Η Πληροφορική ως αντικείμενο και ως εργαλείο μάθησης, μια κοινωνικο-γνωστική προσέγγιση*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών-Πολυτεχνική Σχολή. 2004.

Κορδάκη, Μ. (χ.χ.). *Υποστηρίζοντας το Ρόλο της Τεχνολογίας στη Διδασκαλία και τη Μάθηση των Μαθηματικών: Η Περίπτωση της Ίδρυσης Κέντρων Μαθηματικών και Τεχνολογίας (ΚΕ.ΜΑ.Τ).*

Κυριακοπούλου, Ζ. & Πολίτης, Π. (2011). Μελέτη περίπτωσης διδασκαλίας κλασματικών μονάδων με χρήση του εγκεκριμένου από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο εκπαιδευτικού λογισμικού-Τα παιδιά κάνουν Μαθηματικά, *2ο Πανελλήνιο Συνέδριο*, Πάτρα: 28-30/04/2011.

Λάκκη, Κ. (1980). *Θεωρεία Αριθμών.*

Μαστρογιάννης, Α. & Τρύπα, Α. (2010). Δυναμικές και… σημα(σ)ιολογικές αναπαραστάσεις κλαμσάτων, *2ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Ημαθίας*, σελ. 620-633. Βέροια-Νάουσα: 23-24-25/04/2010.

Ξενοφώντος, Κ. κ.ά. (2006). Αναπαραστάσεις και κατανόηση των εννοιών της στατιστικής, *9ο Παγκύπριο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*, σελ. 99-110. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου, ΚΟΕΕ, Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου. 2-3/06/2006.

Σταφυλίδου, Σ. (2001). Διατριβή με θέμα *Μαθηματικές Έννοιες και Διαδικασίες Μάθησης: η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος.* Αθήνα.

Στεργίου, Β. & Πατρώνης, Τ. (χ.χ.). *Γεωμετρικές αναπαραστάσεις και γεωμετρικά μοντέλα: Αντανάκλαση της Επικοινωνίας στην Τάξη μέσα από μία διαφορετική οπτική.*

ΛΙΣΤΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΚΛΑΣΜΑΤΑ - ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Όνομα: ……………………………………….. **Τάξη:** …….. **Ημερομηνία :** …../…../…….

1. Τα Μαθηματικά είναι το πρώτο και καλύτερο μάθημα για εμένα. **Ναι Όχι**
2. Τα Μαθηματικά είναι ένα μάθημα όπως όλα τα άλλα. **Ναι Όχι**
3. Τα Μαθηματικά δεν είναι και πολύ χρήσιμα στη ζωή μας. **Ναι Όχι**
4. Δεν γίνεται να προχωρήσεις καλά στη ζωή σου αν αγνοείς τα Μαθηματικά. **Ναι Όχι**

5. Ποιες από τις παρακάτω μαθηματικές πράξεις περιγράφει περισσότερο τα κλάσματα;

Α) Πρόσθεση Β) Αφαίρεση Γ) Πολλαπλασιασμός Δ) Διαίρεση

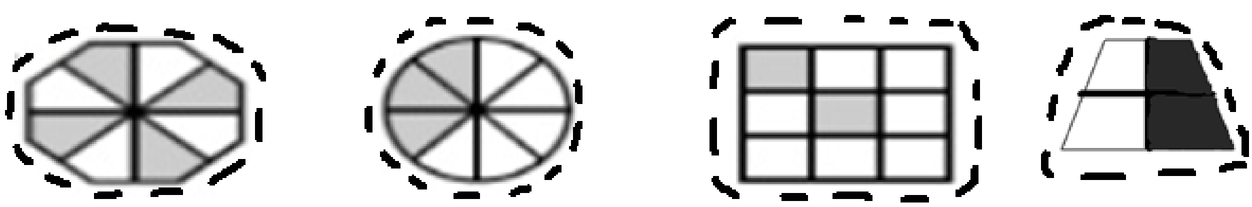
Γιατί; ……………………………………………………………………………………………

6. Να κυκλώσεις το μεγαλύτερο κλάσμα. Σε περίπτωση ισοδυναμίας να κυκλώσεις και τα δύο κλάσματα.

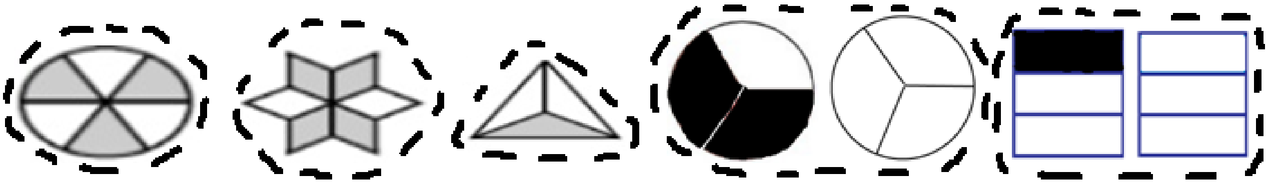
1) $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$	2) $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{4}$	3) $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$	4) $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$
5) 1 $1\frac{1}{5}$	6) $\frac{6}{2}$ $1\frac{1}{5}$	7) $\frac{5}{2}$ $\frac{10}{4}$	8) $\frac{8}{3}$ $\frac{8}{5}$

7. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{1}{2}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*

8. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το $\frac{4}{8}$ *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).*



9. Βάλε σε κύκλο εκείνα τα σχήματα όπου το γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το <u>1</u> *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).* 3

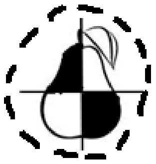


10. Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το <u>1</u> *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).* 4

	**Ναι**	**Όχι**

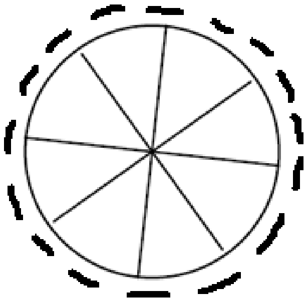
Για ποιο λόγο έδωσες αυτήν την απάντηση:
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………

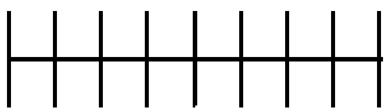
11. Είναι αλήθεια ότι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο μέρος δείχνει το <u>1</u> *(όπου κάθε φορά το όλο είναι το σχήμα που περικλείεται στη γραμμή με τις κουκίδες).* 2

	**Ναι**	**Όχι**

Για ποιο λόγο έδωσες αυτήν την απάντηση:
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………

12. Δείξε το κλάσμα <u>6</u> με τη βοήθεια των πιο κάτω σχεδιαγραμμάτων.
16





13. Απόδειξε με τη βοήθεια των ευθύγραμμων τμημάτων ότι τα δύο παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

14. Ένας ξυλοκόπος χρειάστηκε τα 3/6 ενός κορμού δέντρου για να κατασκευάσει το πάνω μέρος ενός τραπεζιού και τα 2/6 για τα πόδια του. Πόσο μέρος του κορμού χρειάστηκε τελικά για να κατασκευάσει ολόκληρο το τραπέζι; *(Λύσε το πρόβλημα με τη βοήθεια του <u>ευθύγραμμου τμήματος</u>. Δείξε τον τρόπο που εργάστηκες, για να βρεις την απάντηση.)*

Απάντηση:……………………………………………………………………..

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΓΙΑ ΤΟ ΧΡΟΝΟ ΣΑΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πεποιθήσεις

BL1 (Best Lesson): **Μαθηματικά καλύτερο μάθημα** – Μαθηματικά ως καλύτερο μάθημα (περίπτωση 1).

MSVL2 (Mathematics Same Value with other Lessons): **Μαθηματικά ισάξιο μάθημα με άλλα** – Μαθηματικά ως μάθημα όπως όλα τα άλλα (περίπτωση 2).

MUL3 (Mathematics Useless Lesson): **Μαθηματικά δεν είναι χρήσιμα** – Τα Μαθηματικά δεν είναι χρήσιμα στη ζωή (περίπτωση 3).

StM4 (Stagnation without Mathematics): **Στασιμότητα χωρίς Μαθηματικά** – Στασιμότητα στη ζωή αν αγνοήσεις τα Μαθηματικά (περίπτωση 4).

Έργα

F5 (Fraction): **Κλάσματα –** Η μαθηματική πράξη που περιγράφει τα κλάσματα. (περίπτωση 5).

BFr6a (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος** – Οι παρονομαστές των δύο κλασμάτων είναι ίσοι και ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος είναι μεγαλύτερος από του δεύτερου (περίπτωση 6.1).

BFr6b (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος** – Οι αριθμητές των δύο κλασμάτων είναι ίσοι και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι μεγαλύτερος από του δεύτερου (περίπτωση 6.2).

EqFr6c (Recognition Equivalent Fraction): **Αναγνώριση ισοδυναμίας κλασμάτων** (περίπτωση 6.3).

BFr6d (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος** – Οι αριθμητές των δύο κλασμάτων είναι ίσοι και ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι μεγαλύτερος από του δεύτερου (περίπτωση 6.4).

BFr6e (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος** – Ο μεικτός αριθμός είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα (περίπτωση 6.5).

BFr6st (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος** – Το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το μεικτό αριθμό (περίπτωση 6.6).

EqFr6f (Recognition Equivalent Fraction): **Αναγνώριση ισοδυναμίας κλασμάτων** (περίπτωση 6.7).

BFr6g (Recognition Biggest Fraction): **Αναγνώριση μεγαλύτερου κλάσματος -** Οι αριθμητές των δύο κλασμάτων είναι ίσοι και ο παρονομαστής του δεύτερου κλάσματος είναι μεγαλύτερος από του πρώτου (περίπτωση 6.8).

F7 (Fraction): **Αναγνώριση κλάσματος από μοντέλο σχεδιαγράμματος** – Το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή (περίπτωση 7).

F8 (Fraction): **Αναγνώριση κλάσματος από μοντέλο σχεδιαγράμματος** – Το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή (περίπτωση 8).

F9 (Fraction): **Αναγνώριση κλάσματος από μοντέλο σχεδιαγράμματος** – Το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή (περίπτωση 9).

FrD10 (Fraction-Diagram): **Αναγνώριση κλάσματος από μοντέλο σχεδιαγράμματος** – Το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή, αλλά το σχήμα μας δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη (περίπτωση 10).

FrD11 (Fraction-Diagram): **Αναγνώριση κλάσματος από μοντέλο σχεδιαγράμματος** – Το πλήθος των αντικειμένων δεν συμπίπτει με τον παρονομαστή, ούτε είναι σκιασμένα τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή και το σχήμα μας δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη, παρόλα αυτά αν ενώσεις τα σκιασμένα μέρη φαίνεται το μισό του σχήματος, δηλαδή το κλάσμα 1/2 (περίπτωση 11).

FrD12a (Fraction-Representation Diagram 1): **Αναπαράσταση κλάσματος σε μοντέλο σχεδιαγράμματος 1** – Ο παρονομαστής δεν συμπίπτει με το πλήθος των αντικειμένων και δεν πρέπει να σκιαστούν τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή (περίπτωση 12.1)

FrD12b (Fraction-Representation Diagram 2): **Αναπαράσταση κλάσματος σε μοντέλο σχεδιαγράμματος 2** – Ο παρονομαστής συμπίπτει με το πλήθος των αντικειμένων και πρέπει να σκιαστούν τόσα όσα αναφέρονται στον αριθμητή (περίπτωση 12.2)

PEqR13 (Proof-Equivalent- Representation): **Απόδειξη μέσω μοντέλου αναπαράστασης ισοδυναμίας κλασμάτων** – Ο αριθμητής του δεύτερου κλάσματος είναι τετραπλάσιος από του πρώτου όπως και ο παρονομαστής του δεύτερου είναι τετραπλάσιος από του πρώτου (περίπτωση 13).

PrFrR14 (Problem-Fraction-Representation): **Επίλυση προβλήματος μέσω μοντέλου αναπαράστασης κλασμάτων** – Γνωρίζουμε τα μέρη και ψάχνουμε το σύνολο μέσω μοντέλου αναπαράστασης (περίπτωση 14).