

ΒΑΣΙΛΑΚΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΗΝ
ΘΕΡΜΙΚΗ ΔΙΑΧΥΣΗ ΣΕ ΜΗ
ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 2016

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Νικολόπουλος Χρήστος

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Νικολόπουλος Χ.

Φελουζής Ε.

Χατζηνικήτας Α.

Στους γονείς μου!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή ix

1 Παραγωγή μοντέλου καύσης xi

2 Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για μεγάλες αρχικές συνθήκες u_0 xv

2.1 Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο: Μέθοδος 1ης ιδιοτιμής του Kaplan xvi

3 Ανάλυση της θερμικής διάχυσης για χωρικές μη-ομογενείς αντιδράσεις xix

3.1 Έκρηξη για $\delta > \delta^*$ αν δ στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος. xxii

3.2 Περίπτωση του δ^* στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος: ένα κάτω φράγμα για το t_b xxv

3.3 Ασυμπτωτική εκτίμηση για το t_b για μικρό $\delta - \delta^*$ αν δ^* είναι στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος. xxvii

3.4 Έκρηξη της u για γενικά δ xxviii

4 xxxi

4.1 Αριθμητική επίλυση του μονοδιάστατου μοντέλου xxxi

4.2 Γραφική αναπαράσταση λύσεων xxxii

Εισαγωγή

Το φαινόμενο της έκρηξης εμφανίζεται σε διάφορους τύπους μη γραμμικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, εμφανίζεται σε εξισώσεις Schroedinger, υπερβολικές εξισώσεις και παραβολικές εξισώσεις. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την συμπεριφορά παραβολικών εξισώσεων.

Έχουμε την εξίσωση της θερμότητας

$$u_t = \Delta u + f(x, t, u),$$

με αρχικές και συνοριακές συνθήκες, με την μεταβλητή u να είναι η θερμοκρασία σε μια χημική αντίδραση. Η f , η οποία είναι θετική, αναπαριστά την πηγή θερμότητας και η δεύτερης τάξης παράγωγος αναπαριστά την διάχυση. Σε περίπτωση όπου υψηλότερες ταχύτητες επιτευχθούν στην χημική αντίδραση θα παραχθεί θερμότητα. *Ερώτημα:* Τί συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση;

Εκτός εάν η ενέργεια που παράξει η θερμότητα διασκορπιστεί μέσω της διάχυσης, η θερμοκρασία πιθανά θα γίνει πολύ υψηλή. Οι μη γραμμικοί όροι τύπου e^u ή u^p είναι τα πιο συχνά παραδείγματα. Ακόμα και στις πιο απλές μορφές όπου η f εξαρτάται μόνο από την u και είναι μη αρνητική υπάρχει ανταγωνισμός μεταξύ της διάχυσης και της πηγής θερμότητας και δεν είναι ξεκάθαρο αν η θερμοκρασία θα γίνει άπειρη σε πεπερασμένο χρόνο. Έτσι διερωτόμαστε:

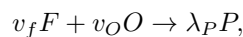
- Θα συμβεί η έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο;
- Αν η έκρηξη συμβεί σε πεπερασμένο χρόνο, ποιά είναι τα σημεία για τα οποία συμβαίνει αυτή;
- Ποιά η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης κοντά στον χρόνο έκρηξης;

Θα μελετήσουμε επίσης παραβολικά προβλήματα αρχικών συνθηκών με την Frank - Kamenetski προσέγγιση για χημικές αντιδράσεις όπου η ενέργεια ενεργοποίησης είναι υψηλή. Σε πολλά συστήματα συμβαίνει έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για την λύση όταν η παράμετρος Frank - Kamenetski δ είναι μεγαλύτερη από το άνω φράγμα δ^* στο φάσμα του αντίστοιχου στάσιμου προβλήματος. Όταν το άνω φράγμα βρίσκεται μέσα στο φάσμα ο χρόνος έκρηξης αυξάνεται με ρυθμό τάξης $O(\delta - \delta^*)^{-1/2}$ καθώς το δ προσεγγίζει το δ^* από πάνω.

Κεφάλαιο 1

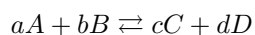
Παραγωγή μοντέλου καύσης

Η μόνη ενός βήματος μη αντιστρέψιμη αντίδραση που θεωρούμε είναι της μορφής



όπου F καύσιμο, O οξυγόνο, P προϊόν, και v_F , v_O και λ_P στοιχειομετρικές σταθερές. Αυτή η αντίδραση εξελίσσει τρία κλάσματα μάζας: y_F , y_O , και y_P . Εάν και το καύσιμο και το οξειδωτικό παρέχονται στις σωστές ποσότητες, τότε και τα δύο θα καταναλωθούν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Σε αυτή την περίπτωση οι αρχικές τιμές y_{F_0} και y_{O_0} είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, ώστε ο βαθμός της αντίδρασης να εξαρτάται σημαντικά και από τα δύο κλάσματα μάζας. Ωστόσο, αν $y_{F_0} \gg y_{O_0}$, τότε ο βαθμός αντίδρασης εξαρτάται ελάχιστα από το y_F αφού η y_F δεν αλλάζει αρκετά. Αφού y_F σχεδόν σταθερή, αγνοούμε την εξίσωση για το f και θεωρούμε μόνο την εξίσωση για το o .

Παράδειγμα: Για τη χημική αντίδραση



όπου A, B, C, D είναι οι χημικές ενώσεις ή στοιχεία που μετέχουν στην αντίδραση και a, b, c, d οι στοιχειομετρικές σταθερές τους αντίστοιχα έχουμε ότι ο ρυθμός της ευθείας αντίδρασης (\rightarrow) είναι $k_f [[A]]^a [[B]]^b$, ενώ ο ρυθμός της αντίστροφης αντίδρασης (\leftarrow) είναι $k_r [[C]]^c [[D]]^d$ όπου με $[[X]]$ συμβολίζουμε την συγκέντρωση του στοιχείου X . Ο συνολικός ρυθμός της αντίδρασης θα είναι

$$k_f [[A]]^a [[B]]^b - k_r [[C]]^c [[D]]^d,$$

όπου k_f και k_r είναι σταθερές αναλογίας. Σε συνθήκη χημικής ισορροπίας έχουμε ότι

$$k_f [[A]]^a [[B]]^b = k_r [[C]]^c [[D]]^d$$

και η σταθερά αναλογίας k_{eq} είναι

$$k_{eq} = \frac{k_f}{k_r} = \frac{[[A]]^a [[B]]^b}{[[C]]^c [[D]]^d}.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε αντίδραση του τύπου: $A + B \rightarrow C$, τότε η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της συγκέντρωσης του A είναι $\frac{d[[A]]}{dt} = -k[[A]][[B]]$.

Σημειώνουμε ότι η στοιχειομετρική μίξη καυσίμου και οξειδωτικού ικανοποιεί την $\frac{y_O}{y_F} = \frac{v_o}{v_F}$. Επιλέγουμε $m = v_F + v_O$, $\lambda_O = 0$, $h = h_O$, $y = y_0$, και $B = B_0 v_O m_O \left(\frac{v_F}{v_O}\right)^{v_F} m_O^{-n_O} m_F^{-v_F}$ και έχουμε το μοντέλο

(1.1)

$$\begin{aligned} \rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho(\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) &= -\vec{\nabla} p + \mu[\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \\ \rho C_v(T_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T) &= \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + 2\mu[D : \vec{\nabla} \otimes \vec{u} - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2] \\ &\quad + B h \rho^m y^m \exp^{-\epsilon/RT} \\ \rho(y_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} y) &= \vec{\nabla} \cdot (\rho D \vec{\nabla} y) - B \rho^m y^m \exp^{-\epsilon/RT} \\ p &= \rho R T \end{aligned}$$

Το παραπάνω μοντέλο καύσης μπορεί να αδιαστατοποιηθεί με λογικό τρόπο ώστε να εστιάσουμε στις σημαντικές παραμέτρους. Υποθέτουμε αρχικά ότι μια αντίδραση, ιξώδης, με αγωγή θερμότητας, συμπιεστού αερίου αντίδραση είναι σε ισορροπία κατάστασης ορισμένη από τις διαστατικές ποσότητες $p_0 = p(\vec{x}, 0)$, $\rho_0 = \rho(\vec{x}, 0)$, $T_0 = T(\vec{x}, 0)$, $y_0 = y(\vec{x}, 0)$ και $\vec{u}_0 = \vec{u}(\vec{x}, 0)$.

Στο $t = 0$, μια μικρή αρχική διαταραχή δημιουργείται σε κλίμακα μήκους L . Ορίζουμε $\vec{x} = \vec{x}/L$ ως τη νέα θέση διανύσματος. Έστω t_R να είναι ο χρόνος αναφοράς (θα καθοριστεί αργότερα). Ορίζουμε ως $\bar{t} = t/t_R$ ως τη νέα κλίμακα χρόνου. Αδιαστατοποιούμε τις μεταβλητές του συστήματος: $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{T} = T/T_0$, $\bar{y} = y/y_0$ και $\vec{u} = \vec{u}/(L/t_R)$. Επίσης αδιαστατοποιούμε τις ποσότητες: $\bar{\mu} = \mu/\mu_0$, $\bar{D} = D/D_0$, $\bar{C}_p = C_p/C_{p_0}$, $\bar{C}_v = C_v/C_{v_0}$, $\bar{k} = k/k_0$, $\bar{K} = K/K_0$, όπου $K = k/\rho C_p$ είναι η θερμική διαχυτικότητα.

Για την κλιμάκωση του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής ποσότητες: $\gamma = C_{p_0}/C_{v_0}$, η παράμετρος αερίου, $\epsilon = RT_0/E$ το αντίστροφο της αδιάστατης ενέργειας ενεργοποίησης, $Pr = C_{p_0} \mu_0/k_0$ ο αριθμός Prandtl, $Le = D_0/K_0$ ο αριθμός Lewis, $C_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ η αρχική ταχύτητα ήχου, $t_A = L/C_0$ η κλίμακα χρόνου ακουστικής, $t_C = L^2/K_0$ κλίμακα χρόνου αγωγιμότητας, και $\bar{h} = h y_0/(C_{v_0} T_0)$ η αδιάστατη θερμότητα της αντίδρασης. Παρακάτω παρουσιάζουμε το νόμο δράσης μάζας:

Νόμος Δράσης της Μάζας: Ο ρυθμός μιας χημικής αντίδρασης είναι ανάλογος με τη συγκέντρωση των αντιδρώντων που λαμβάνουν μέρος υψωμένη σε δύναμη ίση με τη στοιχειομετρική σταθερά τους.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην 1.1 μας δίνεται το παρακάτω αδιάστατο μοντέλο :

$$\begin{aligned}
(1.2) \quad & \rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\
& \rho(\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{t_R}{t_A}\right)^2 \vec{\nabla} p + \text{Pr} \frac{t_R}{t_C} \mu [\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})] \\
& \rho C_v (T_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T) = \gamma \frac{t_R}{t_C} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - (\gamma - 1) p (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\
& \quad + 2\mu\gamma(\gamma - 1) \text{Pr} \frac{t_A^2}{t_R t_C} [\text{D} : \vec{\nabla} \otimes \vec{u} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2] \\
& \quad + t_R B h \rho^m y^m \exp(-1/\epsilon T) \\
& \rho(y_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} y) = \text{Le} \frac{t_R}{t_C} \vec{\nabla} \cdot (\rho \text{D} \vec{\nabla} y) - t_R B \rho^m y^m \exp(-1/\epsilon T) \\
& p = \rho T
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.0.1. Παρατηρούμε ότι στις τελευταίες δύο εξισώσεις της 1.2 εμφανίζεται ένας όρος της μορφής $\exp(-1/\epsilon T)$. Για να απλοποιήσουμε το σύστημα παίρνουμε $\epsilon \rightarrow 0^+$. Δουλεύουμε στην κλίμακα $\vec{x} \mapsto \vec{x}/L$, αλλά ο χρόνος αναφοράς t_R και η κλίμακα $t \mapsto t/t_R$ θα επιλεγούν ανάλογα με τις πτυχές του μοντέλου που μας ενδιαφέρουν.

Παρατήρηση 1.0.2. Θεωρούμε τον νόμο του Arrhenious, $k = A_e \exp(-E_{act}/RT)$, όπου η ενέργεια της αντίδρασης E_{act} είναι μεγάλη, A_e η σταθερά αναλογίας, R η παγκόσμια σταθερά αερίων και T η θερμοκρασία. Έστω T_c μια χαρακτηριστική τιμή για τη θερμοκρασία της χημικής αντίδρασης και ότι $E_{act}/RT_c \gg 1$ επειδή $E_{act} \gg 1$. Θέτουμε $E_{act}/RT_c = 1/\epsilon$ με $\epsilon \ll 1$.

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $T = T_c(1 + \epsilon u)$ όπου u η νέα αδιάστατη θερμοκρασία. Τότε

$$\begin{aligned}
-\frac{E_{act}}{RT} &= -\frac{E_{act}}{RT_c(1 + \epsilon u)} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{(1 + \epsilon u)} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{1 + \epsilon u - \epsilon u}{1 + \epsilon u} = -\frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon u}{1 + \epsilon u}\right) \\
&= -\frac{1}{\epsilon} + \frac{u}{1 + \epsilon u} \simeq -\frac{1}{\epsilon} + u.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά, $A_e \exp(-E_{act}/RT) \simeq A_e \exp(1/\epsilon) \exp(u)$.

Για στερεά μοντέλα καυσίμων σε φραγμένο δοχείο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, τότε $\vec{u} = 0$, $\rho = 1$, $\gamma = 1$, και $t_R/t_C = O(1)$. Έτσι, η 1.2 μετατρέπεται στο σύστημα αντίδρασης - διάχυσης που μπορεί να γραφεί ως :

$$\begin{aligned}
(1.3) \quad & T_t - \Delta T = \epsilon \delta y^m \exp((T - 1)/\epsilon T), \\
& y_t - \beta \Delta y = -\epsilon \delta \Gamma y^m \exp((T - 1)/\epsilon T), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)
\end{aligned}$$

με τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες :

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad & T(x, 0) = 1, \quad y(x, 0) = 1, \quad x \in \Omega \\
& T(x, t) = 1, \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial \eta(x)} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)
\end{aligned}$$

όπου $\beta \geq 0$, $\Gamma > 0$, και $\delta > 0$ είναι η παράμετρος Frank-Kamenetski.

Υποθέτουμε ότι η παράμετρος $\epsilon \ll 1$. Με την ασυμπτωτική μέθοδο ενέργειας ενεργοποίησης, και αφήνοντας $T = 1 + \epsilon\theta$ και $y = 1 - \epsilon c$ να είναι οι πρώτης τάξης προσεγγίσεις, το σύστημα 1.3 - 1.4 γίνεται :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \theta_t - \Delta\theta &= \delta(1 - \epsilon c)^m \exp(\theta/1 + \epsilon\theta) \\ c_t - \beta \Delta c &= \delta\Gamma(1 - \epsilon c)^m \exp(\theta/1 + \epsilon\theta), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \end{aligned}$$

με τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες :

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \theta(x, t) = 0, c(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \\ \theta(x, t) = 0, \frac{\partial c(x, t)}{\partial \eta(x)} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Για $\epsilon \ll 1$, η μέθοδος απλοποιεί το σύστημα 1.5 και έτσι αρκεί να θεωρήσουμε το μοντέλο ανάφλεξης στερεών καυσίμων:

$$(1.7) \quad \theta_t - \Delta\theta = \delta \exp(\theta), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

με τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \theta(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \\ \theta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \end{aligned}$$

και το συνδεδεόμενο μοντέλο σταθερής κατάστασης :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} -\Delta \psi &= \delta \exp(\psi), \quad x \in \Omega \\ \psi(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε το μικρής κατανάλωσης καυσίμων μοντέλο (γραμμικοποιημένο):

$$(1.10) \quad \begin{aligned} -\Delta \phi &= \delta \exp(\phi/(1 + \epsilon\phi)), \quad x \in \Omega \\ \phi(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για μεγάλες αρχικές συνθήκες u_0

Για την αποφυγή μακροσκελών υπολογισμών θα μελετήσουμε το απλουστευμένο μοντέλο:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(u), & \Omega_T &\equiv \Omega \times (0, T) \\ u &= 0, & \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση της ανάφλεξης στερεών καυσίμων. Η συνάρτηση $f(u)$ είναι τυπικά μια μη-γραμμική συνάρτηση όπως $\exp(u)$, u^p ($p > 1$), κ.ο.κ. Αν ο πηγαίος όρος βρίσκεται στο σύνορο, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & \Omega_T &\equiv \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, & \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega \end{aligned}$$

όπου η το κάθετο διάνυσμα.

Ορισμός 2.0.3. Λέμε ότι μια λύση u εκρήγνυται στο $t = T$, εάν υπάρχει (x_n, t_n) , $t_n \nearrow T$, τέτοιο ώστε $|u(x_n, t_n)| \rightarrow +\infty$. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η λύση εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο αν το T είναι πεπερασμένο: αν υπάρχει μια ακολουθία $\{y_n\}$ και $t_n \nearrow T$ έτσι ώστε $y_n \rightarrow x$ και $|u(y_n, t_n)| \rightarrow +\infty$, τότε λέμε ότι το x είναι σημείο έκρηξης. Η συλλογή όλων των σημείων έκρηξης ονομάζεται σύνολο έκρηξης.

2.1 Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο: Μέθοδος 1ης ι-διοτιμής του Kaplan

Αν διώξουμε τον όρο διάχυσης στην 2.1, η θετική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης $u_t = f(u)$ θα εκραγεί σε πεπερασμένο χρόνο για οποιεσδήποτε αρχικές τιμές, με την προϋπόθεση ότι η f ορίζεται για όλα τα $u \in \mathbb{R}$, και ικανοποιεί:

$$(2.3) \quad f(u) > 0 \quad \text{για } u > 0, \quad \int_M^{+\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty$$

για κάποιο $M > 0$.

Παρατήρηση 2.1.1. Η 2.3 είναι *απαραίτητη συνθήκη* για να συμβεί έκρηξη. Για την ακρίβεια, αν $\int_M^{+\infty} \frac{du}{f(u)} = \infty$, μπορεί κανείς να ανακτήσει την καθολική ύπαρξη του συστήματος 2.1 με το να συγκρίνει κάθε λύση με τη λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 2.1.2. Έστω Ω με φραγμένο πεδίο ορισμού και $\partial\Omega \in C^1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή, και ικανοποιούνται οι συνθήκες 2.3. Έστω $u \in C(\overline{\Omega_T}) \cap C^2(\Omega_T)$ να είναι λύση του 2.1. Αν $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ είναι επαρκώς μεγάλη, τότε η λύση u πρέπει να εκραγεί σε πεπερασμένο χρόνο.

Απόδειξη. Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(2.4) \quad \begin{aligned} -\Delta\phi &= \lambda_1\phi \quad \text{στο } \Omega \\ \phi &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \phi(x) &= 1, \end{aligned}$$

όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή, που δίνεται

$$\lambda_1 = \inf\{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} : u \in K\}, \quad K = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}.$$

Το σύστημα 2.4 έχει λύση $\phi \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\phi(x) > 0$ στο Ω . Έστω

$$G(t) = \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x) dx.$$

Είναι προφανές ότι η $G(t)$ είναι καλά ορισμένη στο υπάρχων διάστημα της λύσης u . Χρησιμοποιώντας το 2.1, βρίσκουμε ότι

$$(2.5) \quad \begin{aligned} G'(t) &= \int_{\Omega} u_t(x, t)\phi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x, t)\delta\phi(x) dx + \int_{\Omega} f(u(x, t))\phi(x) dx \\ &= -\lambda_1 G(t) + \int_{\Omega} f(u(x, t))\phi(x) dx. \end{aligned}$$

από την ανισότητα του Jensen παίρνουμε,

$$\int_{\Omega} f(u(x, t))\phi(x) dx \geq f\left(\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x) dx\right) = f(G(t)).$$

Αντικαθιστώντας στην 2.5 έχουμε

$$(2.6) \quad G'(t) \geq -\lambda_1 G(t) + f(G(t)).$$

Αν η u παραμείνει πεπερασμένη για όλα τα t , τότε η $G(t)$ ορίζεται για όλα τα t . Ωστόσο, η $G(t)$ θα εκραγεί υπό τις δοσμένες υποθέσεις, με την προϋπόθεση ότι $G(0)$ είναι επαρκώς μεγάλη. \square

Η υπόθεση ότι η αρχική συνθήκη είναι επαρκώς 'μεγάλη' είναι σημαντική. Η λύση μπορεί να υπάρχει καθολικά αν διώξουμε αυτή την υπόθεση. Χρησιμοποιούμε $f(u) = u^p$ για να το επεξηγήσουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Παίρνουμε ϕ να είναι η λύση του 2.4 και παίρνουμε $\psi(x) = \eta\phi(x)$. Αν $0 < \eta \ll 1$, τότε $-\Delta\psi - \psi^p = \eta(\lambda_1\phi - \eta^{p-1}\phi^p) \geq 0$. Έτσι ακολουθεί ότι ψ είναι υπερλύση και $u(x, t) \leq \psi(x)$ για όλα τα t εάν αρχικά $0 \leq u_0(x) \leq \psi(x)$. Άρα δείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα 2.1.3 (Καθολική Ύπαρξη). Στην περίπτωση όπου $f(u) = u^p$, αν $0 \leq u_0(x) \leq \psi(x)$, τότε η λύση υπάρχει καθολικά στο χρόνο.

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση της θερμικής διάχυσης για χωρικές μη-ομογενείς αντιδράσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά παραβολικών προβλημάτων αρχικών τιμών της μορφής:

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \delta f(u), \quad x \in D, t > 0$$

με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u &= 0, & x \in \partial D, t > 0, \end{aligned}$$

όπου D είναι ένα φραγμένο πεδίο ορισμού στο \mathbb{R}^n με ομαλό σύνορο ∂D , $0 < \beta(x) \leq \infty$, και η συνάρτηση $f(u)$ είναι ομαλή με $f(u), f'(u), f''(u) > 0$ για όλα τα u .

Μια ιδιότητα που προκαλεί ενδιαφέρον είναι αυτή της θερμικής διάχυσης. Αν η λύση u του 3.1 - 3.2 απειρίζεται στο D για κάποιο πεπερασμένο χρόνο μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ανάφλεξη και μια τέτοια συμπεριφορά μπορεί να χαρακτηρίσει μια θερμική έκρηξη. Έτσι, πρέπει να βρούμε τις τιμές του δ και τα αρχικά δεδομένα για τη u_0 για τα οποία θα πραγματοποιηθεί έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο.

Για θετική, αύξουσα και κυρτή f , υπάρχει μια τιμή δ , έστω δ^* , τέτοια ώστε για $\delta < \delta^*$ να υπάρχει μια λύση σταθερής κατάστασης πρόβλημα

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \nabla^2 w + \delta f(w) &= 0, & x \in D, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \beta w &= 0, & x \in \partial D \end{aligned}$$

ενώ αν $\delta > \delta^*$ δεν υπάρχει λύση για το 3.3. Στη συνέχεια:

- (i) θα δείξουμε ότι αν $\delta > \delta^*$ η λύση του 3.1 - 3.2 απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο ανεξάρτητα από την $u_0(x)$,
- (ii) για $\delta \leq \delta^*$ να βρούμε προσεγγίσεις για την $u_0(x)$ οι οποίες αποτελούν άνω φράγμα και για τις οποίες η u τείνει στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο.

Το 1 απαντήθηκε μερικώς από τους Fujita, Bebernes και Kassoy, οι οποίοι έδειξαν ότι για $f(u) = \exp(u)$ και $\delta > \delta_B = \lambda_1/e\delta^*$, όπου λ_1 είναι η κύρια ιδιοτιμή της εξίσωσης του Helmholtz:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \phi + \lambda \phi &= 0, & x \in D \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \beta \phi &= 0, & x \in \partial D \end{aligned}$$

τότε η u τείνει στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο.

Θεώρημα 3.0.4. Έστω D ένα φραγμένο πεδίο ορισμού σε έναν n -διάστατο χώρο και έστω $E = D \times (0, T]$. Υποθέτουμε ότι η u είναι λύση της $L[u] = f(x, t)$ με L να ορίζεται ως $L[u] \equiv F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}$, και ότι u ικανοποιεί τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g_1(x) \quad \text{στο } D, \\ u(x, t) &= g_2(x, t) \quad \text{στο } \partial D \times (0, T). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι τα z και Z ικανοποιούν τις ανισότητες

$$L[Z] \leq f(x, t) \leq L[z] \quad \text{στο } E,$$

και ότι είναι παραβολική και ως προς τις συναρτήσεις $\theta u + (1 - \theta)z$ και $\theta u + (1 - \theta)Z$ για $0 \leq \theta \leq 1$. Αν

$$\begin{aligned} z(x, 0) &\leq g_1(x) \leq Z(x, 0) \quad \text{στο } D, \\ z &\leq g_2 \leq Z \quad \text{στο } \partial D \times (0, T). \end{aligned}$$

τότε

$$z(x, t) \leq f(x, t) \leq Z(x, t) \quad \text{στο } E.$$

Αν υπάρχει λύση για το 3.3 τότε υπάρχει και μία ελάχιστη λύση w_m . Παίρνοντας \underline{w} να είναι μια μικρότερη λύση για το 3.3 με $\underline{w} \leq w_m$, ο Sattinger έδειξε ότι $u \uparrow w_m$ καθώς $t \rightarrow \infty$ με την προϋπόθεση ότι $\underline{w} \leq u_0 \leq w_m$. Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε ότι δεν έχουμε θερμική διάχυση.

Χρειαζόμαστε όπως και σε προηγούμενο κεφάλαιο τη συνθήκη για την οποία η u εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο η οποία είναι

$$\int_b^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

για πεπερασμένο b . Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν πάρουμε

$$(3.5) \quad \frac{du_u}{dt} = \delta f(u_u), \quad t > 0, \quad u_u(0) = \sup_{x \in D} u_0(x) = u_{0M}$$

τότε u_u είναι μια άνω λύση για την 3.1. Πράγματι, η u_u ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_u}{\partial t} &\geq \nabla^2 u_u + \delta f(u_u), \quad x \in D, \\ \frac{\partial u_u}{\partial \eta} + \beta u_u &\geq 0, \quad x \in \partial D, \\ u_u &\geq u_0, \quad t = 0, \quad x \in D. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $u_u \geq u$ όσο υπάρχουν και οι δύο. Η λύση στο 3.5 ικανοποιεί

$$\delta t = \int_{u_{0M}}^{u_u} \frac{ds}{f(s)},$$

έτσι ώστε αν

$$\int_{u_{0M}}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} = \infty$$

τότε έχουμε μια άνω λύση η οποία τείνει στο άπειρο μόνο για άπειρο χρόνο, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το ότι η u απειρίζεται σε πεπερασμένο χρόνο.

Συναρτήσεις όπως $f(u) = \exp(u)$ και κάθε θετική f η οποία αυξάνεται τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο η u^{1+a} καθώς $u \rightarrow \infty$ για κάποιο θετικό a .

Παίρνοντας μια τέτοια f μπορούμε να βρούμε επαρκείς συνθήκες για να παύει να υπάρχει η u σε πεπερασμένο χρόνο στη μορφή $\delta > \delta_B$. Αυτό συνεπάγει την εξέταση του ολοκληρώματος

$$(3.6) \quad \alpha(t) = \int_D \phi(x) u(x, t) dx$$

όπου ϕ και λ_1 είναι όπως στην 3.4 με $\int_D \phi dx = 1$.

Από την 3.1 και 3.4 η α ικανοποιεί

$$(3.7) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \delta \int_D \phi f(u) dx - \lambda_1 \alpha, \quad t > 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \equiv \int_D \phi u_0 dx.$$

Αφού f κυρτή και ϕ θετική στο D

$$(3.8) \quad \int_D \phi f(u) dx \geq f(\alpha).$$

Έτσι έχουμε

$$(3.9) \quad \frac{d\alpha}{dt} \geq \delta f(\alpha) - \lambda_1 \alpha, \quad t > 0$$

Η λύση για το 3.9, με την αρχική συνθήκη α_0 , εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο με την προϋπόθεση ότι

$$(3.10) \quad \delta > \delta_B \equiv \lambda_1 \sup_{\alpha} \left\{ \frac{\alpha}{f(\alpha)} \right\}.$$

3.1 Έκρηξη για $\delta > \delta^*$ αν δ στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος.

Αρχικά θεωρούμε περιπτώσεις για τις οποίες $\delta = \delta^*$ οδηγεί σε λύση w^* του προβλήματος 3.3. Θα δείξουμε ότι υπάρχει χρόνος $t = t_u(\delta - \delta^*)^{-1/2}$ για τον οποίο η λύση του 3.1-3.2 θα πρέπει να έχει εκραγεί.

Θεωρούμε ότι $f(u) = \exp(u)$ και ότι w^* είναι λύση για το

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \nabla^2 w^* + \delta^* \exp(w^*) &= 0, & x \in D, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \beta w^* &= 0, & x \in \partial D. \end{aligned}$$

Υπάρχει μια λύση ϕ^* που ικανοποιεί

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \phi^* + \phi^* \delta^* \exp(w^*) &= 0, & x \in D, \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} + \beta \phi^* &= 0, & x \in \partial D, \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \mu \in \phi^* > 0 \text{ στο } D, \quad \int_D \phi^* dx = 1.$$

Θέτοντας

$$(3.14) \quad u = w^* + v,$$

έχουμε

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= (\delta - \delta^*) \exp(u) + \delta^* \exp(w^* + v) + \nabla^2 w^* + \nabla^2 v \\ &= (\delta - \delta^*) \exp(u) + \delta^* (\exp(v) - 1 - v) \exp(w^*) + \delta^* v \exp(w^*) + \nabla^2 v. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την 3.15 με ϕ^* επί του D έχουμε

$$(3.16) \quad \frac{d\alpha^*}{dt} = (\delta - \delta^*) \int_D \phi^* \exp(u) dx + \delta^* \int_D \phi^* (\exp(v) - 1 - v) \exp(w^*) dx,$$

όπου

$$(3.17) \quad \alpha^* = \int_D \phi^* v dx.$$

Αλλά

$$(3.18) \quad \int_D \phi^* \exp(u) dx \geq I, \quad I = \min \left\{ 1, \exp \left(\inf_{x \in D} u_0 \right) \right\}.$$

Επιπλέον για το δεύτερο ολοκλήρωμα στην 3.16 έχουμε

$$(3.19) \quad \begin{aligned} (\exp(v) - 1 - v) \exp(w^*) &\geq \begin{cases} \frac{1}{2} v^2 \exp(w^*), & v \geq 0 \\ \frac{1}{2} v^2 \exp(w^* + v) = \frac{1}{2} v^2 \exp(u), & v \leq 0 \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} \frac{1}{2} v^2, & \inf_{x \in D} u \geq 0, \\ \frac{1}{2} v^2 \exp(\inf_{x \in D} u), & \inf_{x \in D} u \leq 0 \end{cases} \\ &\geq K v^2. \end{aligned}$$

Για K έχουμε

$$(3.20) \quad K = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \inf_{x \in D} u_0 \geq 0, \\ \frac{1}{2} \exp(\inf_{x \in D} u_0), & \inf_{x \in D} u_0 < 0. \end{cases}$$

Οι εξισώσεις 3.18 και 3.19 προέρχονται από το 3.0.4. Εάν η u πετυχαίνει ένα αρνητικό ελάχιστο λιγότερο από $\inf_{x \in D} u_0$ κάπου στο $D \times [0, t_1]$ τότε αυτό πρέπει αν επιτευχθεί σε κάποιο σημείο $x_2 \in \partial D, t_2 \in (0, t_1]$. Αλλά από τις συνοριακές συνθήκες $\partial u / \partial \eta + \beta u = 0, \partial u / \partial \eta > 0$ υπάρχει $x \in D$ με $u(x, t_2) < u(x_2, t_2)$. Έτσι έχουμε $u \geq \min(0, \inf_{x \in D} u_0)$ για $x \in D, 0 \leq t \leq t_1$. Άρα

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \delta^* \int_D \phi^* (\exp(v) - 1 - v) \exp(w^*) dx &\geq K \delta^* \int_D \phi^* v^2 dx \\ &\geq K \delta^* \left(\int_D \phi^* v dx \right)^2 \quad (\text{ανισότητα Jensen}) \\ &= K_1 \alpha^{*2}, \end{aligned}$$

όπου $K_1 = K \delta^*$. Η εξίσωση 3.16 επάγει

$$(3.22) \quad \frac{d\alpha^*}{dt} \geq (\delta - \delta^*)I + K_1 \alpha^{*2} \quad \text{για } t > 0$$

και

$$\alpha^* \geq \left\{ (\delta - \delta^*) \frac{I}{K_1} \right\}^{1/2} \tan \left[t \{ (\delta - \delta^*) I K_1 \}^{1/2} - \frac{\pi}{2} \right].$$

Ακολουθεί ότι η u πρέπει να παύει να υπάρχει για κάποιο χρόνο t_b λιγότερο από $t_u (\delta - \delta^*)^{1/2}$, όπου

$$(3.23) \quad t_u = \frac{\pi}{(I K_1)^{1/2}}.$$

Γενικεύουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για $\exp(u)$ και για άλλες συναρτήσεις f . Οι w^* και ϕ^* είναι λύσεις για το

$$(3.24) \quad \nabla^2 w^* + \delta^* f(w^*) = 0, \quad \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \beta w^* = 0, \quad x \in \partial D,$$

$$(3.25) \quad \nabla^2 \phi^* + \delta^* f'(w^*) \phi^* = 0, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} + \beta \phi^* = 0, \quad x \in \partial D$$

με 3.13.

Θέτοντας $u = w^* + v$ και $\alpha^* = \int_D \phi^* v dx$ βρίσκουμε ότι

$$(3.26) \quad \frac{d\alpha^*}{dt} \geq (\delta - \delta^*)I + \delta^* \int_D \phi^* [f(w^* + v) - f(w^*) - v f'(w^*)] dx,$$

όπου

$$(3.27) \quad I = f(u_B)$$

και

$$(3.28) \quad u_B = \min(0, \inf_{x \in D} u_0)$$

Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $g(s)$ τέτοια ώστε $g(0) = 0$, $g(s) > 0$ για $s \neq 0$, g κυρτή, $g(s) \leq \inf_{x \in D} [f(w^* + s) - f(w^*) - sf'(w^*)]$ για $s > u_B - w_M^*$, και $\int_b^\infty ds/g(s)$ είναι πεπερασμένο για θετικό b . Εδώ

$$(3.29) \quad w_M^* = \sup_{x \in D} w^*.$$

Παίρνοντας S τέτοιο ώστε $f(s) \geq 2[f(w_M^* + sf'(w_M^*))]$ για $s \geq S$, βρίσκουμε ότι $f(w^* + s) - f(w^*) - sf'(w^*) \geq \frac{1}{2}f(s)$ για $s \geq S$, $x \in D$. Με $K = \frac{1}{2}$ το ελάχιστο στο $u_B \geq u \geq (w_M^* + S)$ της $f''(u)$, $f(w^* + s) - f(w^*) - sf'(w^*) \geq Ks^2$ για $u_B - w_M^* \leq s \leq S$, $x \in D$. Επιπλέον, παίρνοντας K_1 , $0 < K_1 \leq \frac{1}{2}$, αρκετά μικρό μας δίνει ότι $K_1[f(s) - f(0) - sf'(0)] \leq Ks^2$ για $s \leq S$.

Άρα μπορούμε να πάρουμε g της μορφής

$$(3.30) \quad g(s) = K_1[f(s) - f(0) - sf'(0)].$$

Έτσι η εξίσωση 3.26 μας δίνει

$$\frac{d\alpha^*}{dt} \geq (\delta - \delta^*)I + \delta^* \int_D \phi^* g(v) dx.$$

Από την κυρτότητα της g και το ότι ϕ^* θετική έχουμε

$$\delta^* \int_D \phi^* g(v) dx \geq \delta^* g\left(\int_D \phi^* v dx\right) = \delta^* g(\alpha^*),$$

έτσι

$$(3.31) \quad \frac{d\alpha^*}{dt} \geq (\delta - \delta^*)I + \delta^* g(\alpha^*).$$

Αν $\alpha_0^* = \int_D \phi^*(u_0 - w^*) dx$ και $\alpha_1^* < \min(0, \alpha_0^*)$ επιλέγουμε α_2 τέτοιο ώστε $0 < \alpha_2 < -\alpha_1^*$ και τώρα

$$(3.32) \quad \begin{aligned} t &\leq \int_{\alpha_1^*}^{\alpha^*} [(\delta - \delta^*)I + \delta^* g(s)]^{-1} ds \\ &< \int_{\alpha_1^*}^{-\alpha_2} [(\delta - \delta^*)I + \delta^* g(s)]^{-1} ds + \\ &+ \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} [(\delta - \delta^*)I + \delta^* g(s)]^{-1} ds + \int_{\alpha_2}^{\infty} [(\delta - \delta^*)I + \delta^* g(s)]^{-1} ds. \end{aligned}$$

Το άθροισμα του πρώτου και τρίτου ολοκληρώματος της 3.32 είναι

$$(3.33) \quad \leq \frac{1}{\delta^*} \left\{ \int_{\alpha_1^*}^{-\alpha_2} \frac{ds}{g(s)} + \int_{\alpha_2}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} \right\} = K_3.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της 3.32 είναι

$$(3.34) \quad \leq \int_{-\infty}^{\infty} [(\delta - \delta^*)I + K_4 s^2]^{-1} ds = [(\delta - \delta^*)IK_4]^{-1/2} \pi. \quad K_4 = \frac{1}{2} \delta^* \inf\{g''(s) : |s| < \alpha_2\}$$

Συνδυάζοντας τις 3.32, 3.33 και 3.34 συμπεραίνουμε ότι u θα πρέπει να εκραγεί για $t_b < t_u(\delta - \delta^*)^{-1/2}$, όπου

$$t_u = \frac{\pi}{(IK_4)^{1/2}} + K_3(\delta - \delta^*)^{1/2}.$$

3.2 Περίπτωση του δ^* στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος: ένα κάτω φράγμα για το t_b

Γι αυτό το κάτω φράγμα υποθέτουμε ότι $u_0(x) < w^*(x)$ στο D με

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} > \frac{\partial w^*}{\partial \eta} \quad \text{ή} \quad u_0 < w^* \quad \text{για} \quad x \in \partial D$$

Θεωρούμε ότι $f(u) = \exp(u)$. Άλλες συναρτήσεις μπορούν να μελετηθούν με παρόμοιο τρόπο. Ορίζουμε u^* να είναι η λύση του

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} &= \nabla^2 u^* + \delta^* \exp(u^*), & x \in D, t > 0, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \beta u^* &= 0, & x \in \partial D, t > 0, \\ u^*(x, 0) &= u_0(x), & x \in D. \end{aligned}$$

Θα βρούμε ένα όριο που σχετίζεται με το ρυθμό της προσέγγισης του u^* στη σταθερή κατάσταση, w^* .

Θέτουμε $u^* = w^* - \hat{u}$ και παίρνουμε:

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= -\delta^* \exp(w^* - \hat{u}) + \nabla^2 \hat{u} - \nabla w^*, & x \in D, t > 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + \beta \hat{u} &= 0, & x \in \partial D, t > 0, \\ \hat{u}(x, 0) &= w^*(x) - u_0(x), & x \in D. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= -\delta^* [\exp(-\hat{u}) - 1] \exp(w^*) + \nabla^2 \hat{u} \\ &\geq -\frac{1}{2} \delta^* \hat{u}^2 \exp(w^*) + \delta^* \hat{u} \exp(w^*) + \nabla^2 \hat{u} \\ &\geq -K_1 \hat{u}^2 + \delta^* \hat{u} \exp(w^*) + \nabla^2 \hat{u}, \quad \mu \in K_1 = \frac{1}{2} \delta^* \sup_{x \in D} \exp(w^*). \end{aligned}$$

Ορίζουμε ψ ως

$$(3.38) \quad \psi = \frac{K_2 \phi^*}{t + t_0}.$$

Έχουμε πάρει ϕ^* όπως στην 3.12 αλλά με

$$(3.39) \quad \phi^* > 0, \quad \int_D \phi^{*2} dx = 1.$$

K_2 και t_0 είναι θετικές σταθερές επιλεγμένες ώστε η ψ να είναι ελάχιστη λύση για την \hat{u} .

$$\begin{aligned} -K_1\psi^2 + \delta^*\psi \exp(w^*) + \nabla^2\psi &= -\frac{K_1K_2^2\phi^{*2}}{(t+t_0)^2} \geq -\frac{K_2\phi^*}{(t+t_0)^2} = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \\ K_2 &= 1/K_1 \sup_{x \in D} \phi^*. \end{aligned}$$

Αν διαλέξουμε t_0 τέτοιο ώστε $K_2\phi^*(x)/t_0 \leq \hat{u}(x, 0)$, η ψ γίνεται μια ελάχιστη λύση για την \hat{u} .

Γράφουμε $u = u^* + u_1$, όπου u_1 ικανοποιεί

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= (\delta - \delta^*) \exp(u^*) + \delta(\exp(u) - \exp(u^*)) + \nabla^2 u_1 \\ &\leq (\delta - \delta^*) \exp(w^*) + \delta u_1 \exp(w^*) + \nabla^2 u_1 \end{aligned}$$

με την προϋπόθεση ότι $u = u^* + u_1 \leq w^*$. (Βλέπουμε ότι το μηδέν είναι ελάχιστη λύση για την u_1 , άρα $u_1 \geq 0$.)

Παίρνουμε $\Phi^*(x)$ να ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi^* + \delta^*\Phi^* \exp(w^*) + \exp(w^*) - \phi^* I_1 &= 0, \quad x \in D, \\ \frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta} + \beta\Phi^* &= 0, \quad x \in \partial D, \end{aligned}$$

όπου

$$(3.41) \quad I_1 = \int \phi^* \exp(w^*) dx,$$

τέτοιο ώστε $\Phi^* \geq 0$, $x \in D$.

Βρίσκουμε ότι $\psi_1 = (\delta - \delta^*)(I_1\phi^*t + \Phi^*)$ είναι μέγιστη λύση για την u_1 . Όσο $\psi - \psi_1$ δεν είναι λιγότερο από μηδέν έχουμε

$$(3.42) \quad u \leq w^* - \psi + \psi_1 = w^* - \frac{K_2\phi^*}{t+t_0} + (\delta - \delta^*)(I_1\phi^*t + \Phi^*).$$

Για να έχουμε ότι το δεξί μέλος δεν είναι μεγαλύτερο από w^* θα πρέπει

$$(3.43) \quad \frac{K_2\phi^*}{t+t_0} \geq (\delta - \delta^*)(I_1\phi^*t + \Phi^*), \quad \forall x \in D.$$

Αυτό ισχύει αν

$$K_2 \geq (\delta - \delta^*)(t+t_0)(I_1t + A), \quad \text{όπου } A = \sup_{x \in D} (\Phi^*/\phi^*).$$

Χρειαζόμαστε

$$t^2(\delta - \delta^*)I_1 + t(I_1t_0 + A)(\delta - \delta^*) - K_2 + A(\delta - \delta^*)t_0 \leq 0,$$

όπου αυτό δίνει

$$(3.44) \quad t \leq \frac{\{[(\delta - \delta^*)^2(It_0 + A)^2 + 4I_1(\delta - \delta^*)(K_2 - (\delta - \delta^*)At_0)]^{1/2} - (\delta - \delta^*)(It_0 + A)\}}{2I_1(\delta - \delta^*)}.$$

Για δ επαρκώς κοντά στο δ^* η 3.44 ικανοποιείται αν $t \leq t_l(\delta - \delta^*)^{-1/2}$ με

$$(3.45) \quad t_l = \frac{1}{2} \left(\frac{K_2}{I_1} \right)^{1/2}.$$

Καθώς $u < w^*$ στο $t = t_l(\delta - \delta^*)^{-1/2}$ συμπεραίνουμε ότι

$$(3.46) \quad t_b > t_l(\delta - \delta^*)^{-1/2}.$$

3.3 Ασυμπτωτική εκτίμηση για το t_b για μικρό $\delta - \delta^*$ αν δ^* είναι στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος.

Υποθέτουμε πάλι ότι $u_0(x) < w^*(x)$ στο D με

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} > \frac{\partial w^*}{\partial \eta} \quad \text{ή} \quad u_0 < w^* \quad \text{για } x \in \partial D$$

Θεωρούμε το όριο $\delta \rightarrow \delta^*$ για να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τον χρόνο έκρηξης, t_b , ως ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για $\bar{\delta} = \delta - \delta^* \ll 1$. Θεωρούμε τρία συστήματα χρόνου. Στο I και III το t είναι $O(1)$ και επεκτείνουμε την u ως $u \sim u^* + \bar{\delta}u_2 + \dots$ για $\bar{\delta} \rightarrow 0$: στο I για $u^* < w^*$, αλλά στο III $u^* > w^*$. Σε κάθε περίπτωση ο πρωτεύων παράγοντας, u^* , ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} &= \delta^* \exp(u^*) + \nabla^2 u^*, \quad x \in D, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \beta u^* &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Στην περιοχή I $u^* = u_0$ για $t = 0$ και βλέπουμε ότι

$$(3.47) \quad u^* \sim w^* - \frac{2\phi^*}{\delta^* I_3 t} \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty.$$

$I_3 = \int_D \phi^{*3} \exp(w^*) dx$: ϕ^* όπως μας έχει δοθεί από την 3.39.

Στην περιοχή III $t = t^+ + \hat{t}$ για κάποιο μεγάλο t^+ ($t^+ \sim t_b$ για $\bar{\delta} \rightarrow 0$),

$$(3.48) \quad u^* \sim w^* - \frac{2\phi^*}{\delta^* I_3 \hat{t}} \quad \text{καθώς } \hat{t} \rightarrow \infty,$$

και u^* απειρίζεται για κάποιο πεπερασμένο χρόνο \hat{t}_b .

Στην ενδιάμεση περιοχή II , $t = \bar{\delta}^{-1/2} \bar{t}$, και $u \sim w^* + \bar{\delta}^{1/2} \bar{u}_1 + \bar{\delta} \bar{u}_2 + \dots$, για $\bar{\delta} \rightarrow 0$.

Εδώ

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \bar{\delta} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \dots &\sim (\delta^* + \bar{\delta}) \left(1 + \bar{\delta}^{1/2} \bar{u}_1 + \frac{1}{2} \bar{\delta} \bar{u}_1^2 + \bar{\delta} \bar{u}_2 + \dots \right) \exp(w^*) + \\ &+ \nabla^2 w^* + \bar{\delta}^{1/2} \nabla^2 \bar{u}_1 + \bar{\delta} \nabla^2 \bar{u}_2 + \dots \quad \text{καθώς } \bar{\delta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Από τους $(\bar{\delta}^{-1/2})$ όρους της 3.49

$$(3.50) \quad \bar{u}_1 = \bar{\alpha}_1(\bar{t})\phi^*.$$

Από τους $O(\bar{\delta})$ όρους, έχουμε

$$\frac{d\bar{\alpha}_1}{d\bar{t}}\phi^* = \left[1 + \delta^* \left(\frac{1}{2}\bar{\alpha}_1^2\phi^{*2} + \bar{u}_2 \right) \right] \exp(w^*) + \nabla^2\bar{u}_2,$$

έτσι ώστε

$$\frac{d\bar{\alpha}_1}{d\bar{t}} = \frac{1}{2}\delta^* I_3 \bar{\alpha}_1^2 + I_1.$$

Η λύση

$$\bar{\alpha}_1 = \left(\frac{2I_1}{\delta^* I_3} \right)^{1/2} \tan \left[\bar{t} \left(\frac{1}{2}\delta^* I_1 I_3 \right)^{1/2} - \frac{\pi}{2} \right]$$

ταιριάζει (κάνοντας συναρμογή) με τις περιοχές I και III και συμπεραίνουμε ότι

$$(3.51) \quad t_b \sim t^+ \sim \pi \left[\frac{1}{2}\delta^* I_1 I_3 (\delta - \delta^*) \right]^{-1/2} \quad \text{καθώς } \delta \rightarrow (\delta^*)^+$$

3.4 Έκρηξη της u για γενικά δ

Υποθέτουμε αρχικά ότι διάστημα του δ για το οποίο υπάρχει, επιπρόσθετα από την ελάχιστη λύση w_m , μια μη ελάχιστη λύση w του 3.3. Ακολουθεί ότι η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 μαζί με την ιδιοσυνάρτηση ϕ_1 , για το πρόβλημα

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \nabla^2\phi_1 + (\lambda_1 + \delta f'(w))\phi_1 &= 0, & x \in D, \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta} + \beta\phi_1 &= 0, & x \in \partial D \end{aligned}$$

είναι μη θετική.

Παρατηρούμε ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο έχει βρεθεί για $0 < \delta < \delta^*$, ή $\delta_* \leq \delta < \delta^*$ αν υπάρχει κάποια τιμή $\delta_* < \delta^*$ για τη οποία το 3.3 έχει πολλαπλές λύσεις στο (δ_*, δ^*) αλλά μία μοναδική λύση στο $(0, \delta_*)$, επίσης ισχύει στο $\delta = \delta^*$ αν δ^* είναι στο φάσμα του 3.3 παίρνοντας w^* στη θέση της μη ελάχιστης w . Γράφουμε

$$u = w + v \quad \text{και} \quad \alpha_1 = \int_D \phi_1 v dx,$$

έτσι ώστε

$$(3.53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta[f(w+v) - f(w) - v f'(w)] - \lambda_1 v + \lambda_1 v + \delta f'(w)v + \nabla^2 v, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= -\lambda_1 \alpha_1 + \delta \int [f(w+v) - f(w) - v f'(v)] \phi_1 dx. \end{aligned}$$

Όπως και στην 2η ενότητα θα βρούμε μία κυρτή συνάρτηση g με $g(s) > 0$ για $s \neq 0$, που να ικανοποιεί τη σχέση

$$f(w + s) - f(w) - vf'(s) \geq g(s), \quad \forall x \in D$$

έτσι ώστε η 3.53 να μας δίνει

$$(3.54) \quad \frac{d\alpha_1}{dt} \geq -\lambda_1 \alpha_1 + K_2 g_1(\alpha_1).$$

Αφού $-\lambda_1 \geq 0$, $K_2 > 0$, $g_1(\alpha_1) > 0$ εκτός αν $\alpha_1 = 0$, $\int_b^\infty ds/g_1(d)$ υπάρχει για θετικά b , και για $\alpha_1 = 0$ η ανισότητα 3.54 είναι αυστηρή εκτός αν $u \equiv 0$, συμπεραίνουμε ότι: αν $\int_D u_0 \phi_1 dx \geq \int_D w \phi_1 dx$, τότε εκτός αν $u_0 \equiv w$ (u_0 συνεχής) η λύση του 3.1 εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Αν υπάρχει το πολύ μια λύση για το 3.3 για το δ που διαλέξαμε, στην περίπτωση που $0 < \delta < \delta_*$ πρέπει να βρούμε μια άλλη μεταβλητή αναφοράς για να αντικαταστήσουμε τη μη ελάχιστη w . Παίρνοντας έναν υπόχωρο Ω του D με $\bar{\Omega} \subset D$, ορίζουμε w_c ως εξής:

$$-\nabla^2 w_c = \begin{cases} \delta f(c), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in D - \Omega, \end{cases}$$

$$\frac{\partial w_c}{\partial \eta} + \beta \phi_1 = 0, \quad x \in \partial D,$$

όπου c έχει επιλεγθεί επαρκώς μεγάλο έτσι ώστε $w_c \geq c$ για $x \in \Omega$ και η κύρια ιδιοτιμή λ_1 ,

$$\nabla^2 \phi_1 + (\delta f(w_c) + \lambda_1) \phi_1 = 0, \quad x \in D,$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \beta \phi_1 = 0, \quad x \in \partial D$$

είναι αρνητική.

Τώρα έχουμε ότι $u = w_c + v$ και

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq -\lambda_1 v + \delta [f(w_c + v) - f(w_c) - vf'(w_c)] + [\lambda_1 + \delta f'(w_c)]v + \nabla^2 v.$$

Φτάνουμε σε παρόμοιο αποτέλεσμα για το παραπάνω: αν $\int_D u_0 \phi_1 dx \geq \int_D w_c \phi_1 dx$ τότε η λύση u εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Κεφάλαιο 4

4.1 Αριθμητική επίλυση του μονοδιάστατου μοντέλου

Αναζητούμε αριθμητικές λύσεις για την u με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Θεωρούμε μια διαμέριση στο διάστημα $[0, 1]$ από n σημεία ως εξής: $0 \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv 1$ για κάποιο βήμα dx και για κάποιο χρονικό βήμα dt , έχουμε ότι $u_j^i = u(i * dx, j * dt)$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta f(u)$$

Χρησιμοποιούμε τις προσεγγιστικές τιμές u_j^i στα σημεία $x_j = dx * (j - 1)$, $t_i = dt_i$ όπου $j = 1, 2, \dots, M$. Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor της ακριβούς λύσης κοντά στο (x_j, t_i) προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned} u(x_j + dx, t_i) &= u(x_j, t_i) + dx * u_x(x_j, t_i) + \frac{(dx)^2}{2!} u_{xx}(x_j, t_i) + \frac{(dx)^3}{3!} u_{xxx}(x_j, t_i) + \dots \\ u(x_j - dx, t_i) &= u(x_j, t_i) - dx * u_x(x_j, t_i) + \frac{(dx)^2}{2!} u_{xx}(x_j, t_i) - \frac{(dx)^3}{3!} u_{xxx}(x_j, t_i) + \dots \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$u(x_j + dx, t_i) - u(x_j - dx, t_i) = 2u(x_j, t_i) + (dx)^2 u_{xx}(x_j, t_i) + \dots$$

Λύνοντας ως προς $u_{xx}(x_j, t_i)$ την τελευταία εξίσωση και απαλείφοντας τους όρους υψηλότερης τάξης προκύπτει μια προσέγγιση για το $u_{xx}(x_j, t_i)$ με σφάλμα $O(dx^2)$ σε σχέση με την ακριβή λύση στα σημεία του πλέγματος:

$$u_{xx}(x_j, t_i) \simeq \frac{1}{(dx)^2} [u(x_{j+1}, t_i) - 2u(x_j, t_i) + u(x_{j-1}, t_i)],$$

όπου $u(x_j + dx, t_i) \equiv u(x_{j+1}, t_i)$.

Ομοίως, από το ανάπτυγμα Taylor της ακριβούς λύσης κοντά στο σημείο (x_j, t_i) του πλέγματος έχουμε ότι:

$$u(x_j, t_i + dt) = u(x_j, t_i) + dt * u_t(x_j, t_i) + \frac{(dt)^2}{2!} u_{tt}(x_j, t_i) + \dots,$$

όπου $u(x_j, t_i + dt) \equiv u(x_j, t_{i+1})$. Έτσι έχουμε μια προσέγγιση του όρου u_t με σφάλμα $O(dt)$.

Αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις αυτές στην εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{dt} [u(x_j, t_{i+1}) - u(x_j, t_i)] = \frac{1}{(dx)^2} [u(x_{j+1}, t_i) - 2u(x_j, t_i) + u(x_{j-1}, t_i)] + \delta f(u(x_j, t_i))$$

Θέτουμε $u(x_j, t_i) \equiv u_j^i$ και έτσι προκύπτει το ακόλουθο αριθμητικό σχήμα:

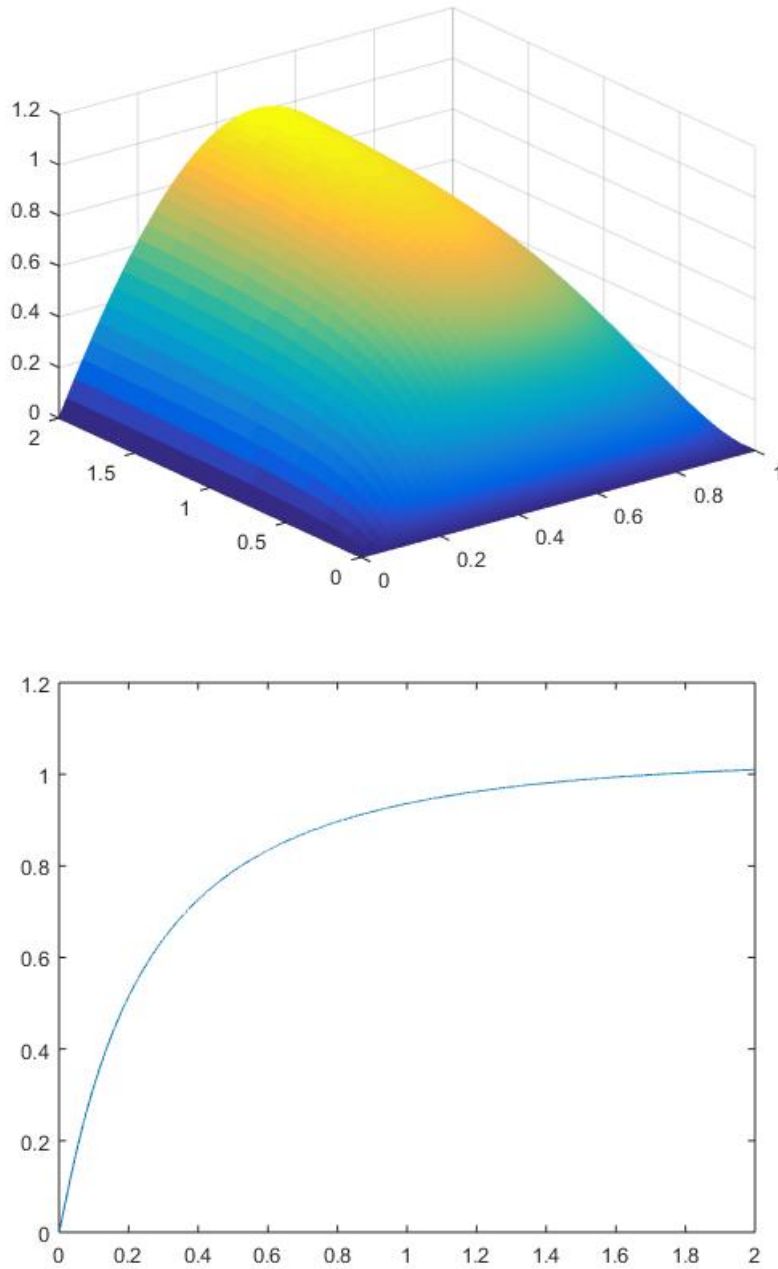
$$(4.1) \quad u_j^{i+1} = u_j^i + \frac{dt}{(dx)^2} [u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i] + \delta * dt * f(u_j^i)$$

4.2 Γραφική αναπαράσταση λύσεων

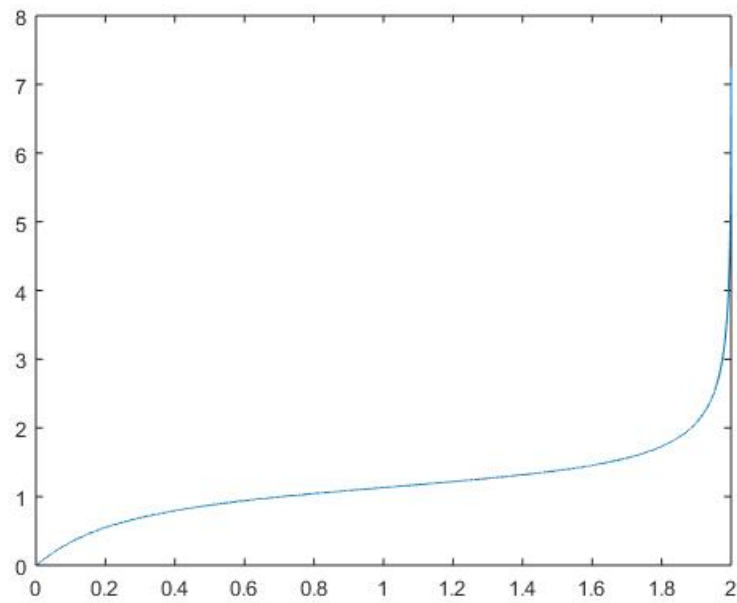
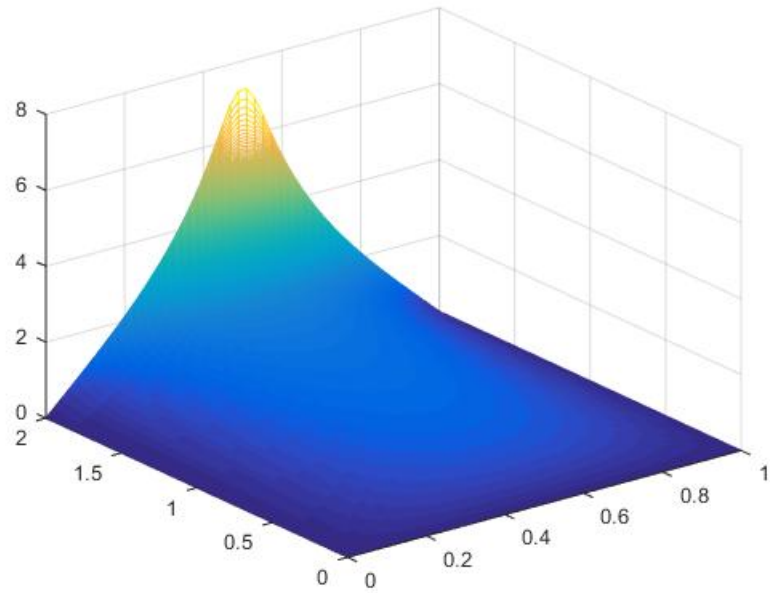
Χρησιμοποιώντας την 4.1 λύνουμε αριθμητικά το πρόβλημα και παίρνουμε τις παρακάτω τρισδιάστατες και δισδιάστατες γραφικές παραστάσεις της θερμοκρασίας u σε σχέση με το χρόνο t και το μήκος x . Έχουμε ότι $x \in [0, 1]$ και $t \in [0, T]$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι η $\exp(u)$ παίρνουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις για διαφορετικές ειδικές περιπτώσεις.

Για $T = 2$, $M = 50$, $dx = \frac{1}{M-1}$, $r = 0, 2$, $u(1, t) = 0$, $dt = r dx^2$, και $\delta = 3, 48$ το γράφημα τείνει σε στάσιμη λύση. Σημειώνουμε ότι εδώ $\delta^* = 3, 6395$.

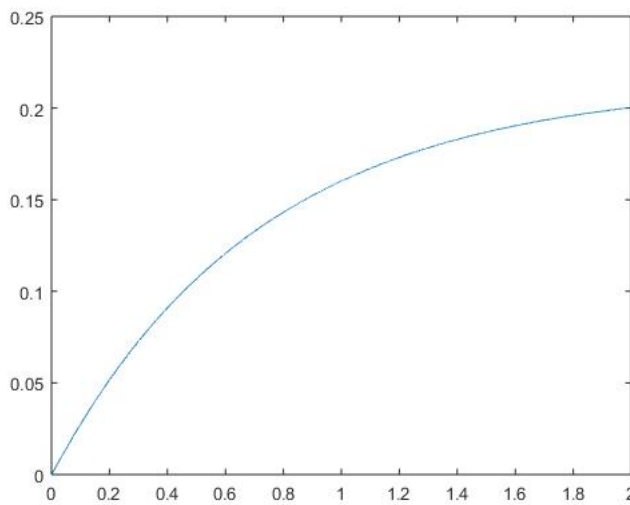
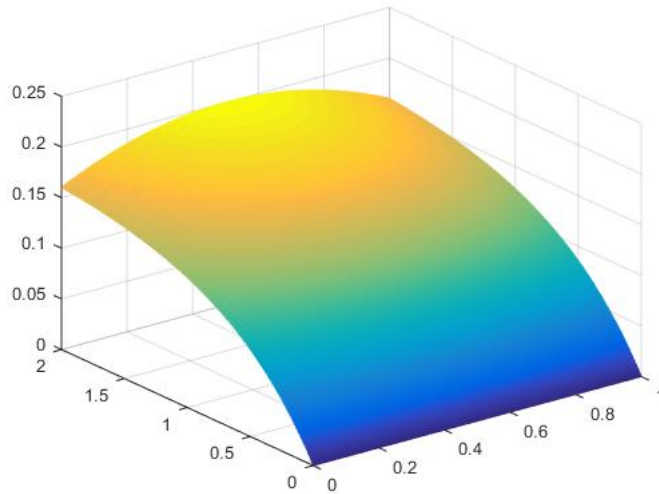


Σχήμα 4.1: Γραφήματα της θερμοκρασίας u σε συνάρτηση με το χρόνο t . Η συνάρτηση f είναι η e^u και χρησιμοποιούμε Dirichlet συνοριακές συνθήκες για $\delta = 3, 48$.

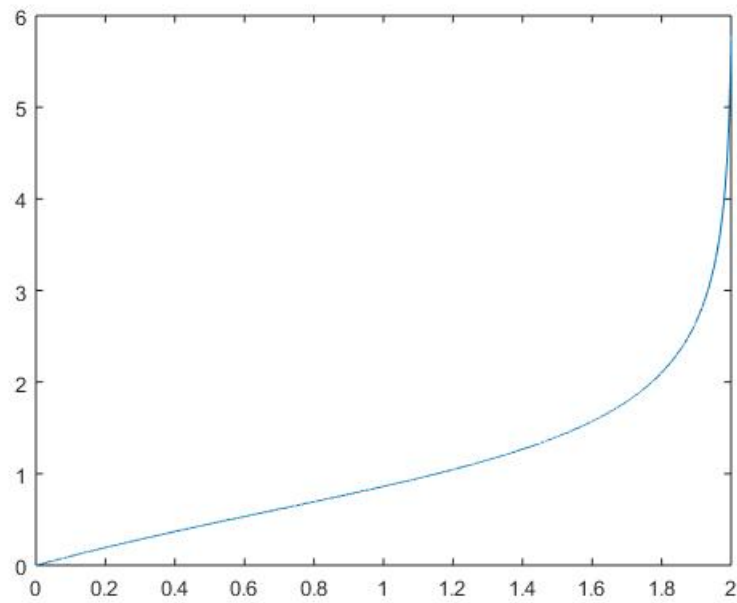
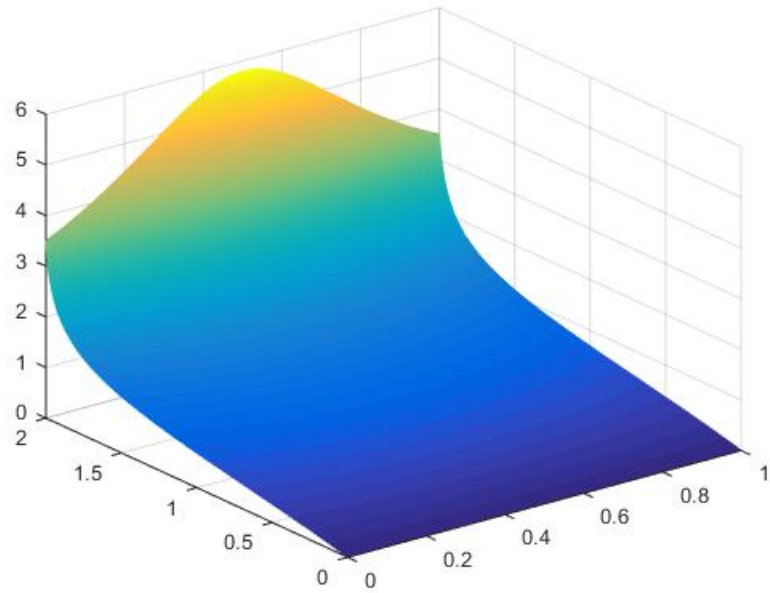


Σχήμα 4.2: Στην ίδια περίπτωση για $\delta = \delta^* = 3,6395$ έχουμε blow up.

Για $T = 2$, $M = 50$, $dx = \frac{1}{M-1}$, $r = 0,2$, $u(1,t) = 0$, $dt = rdx^2$, $\beta = 1$, και $\delta = 0,28$ το γράφημα τείνει σε στάσιμη λύση. Σημειώνουμε ότι εδώ $\delta^* = 0,974$.

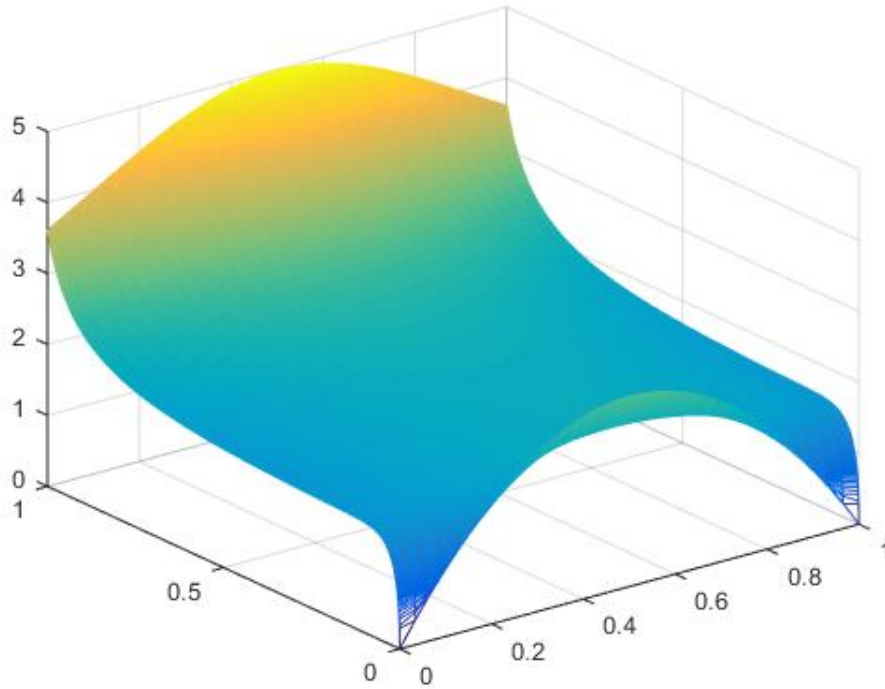


Σχήμα 4.3: Γραφήματα της θερμοκρασίας u σε συνάρτηση με το χρόνο t . Η συνάρτηση f είναι η e^u και χρησιμοποιούμε Robin συνοριακές συνθήκες για $\delta = 0,28$.



Σχήμα 4.4: Στην ίδια περίπτωση για $\delta = \delta^* = 0,974$ έχουμε blow up.

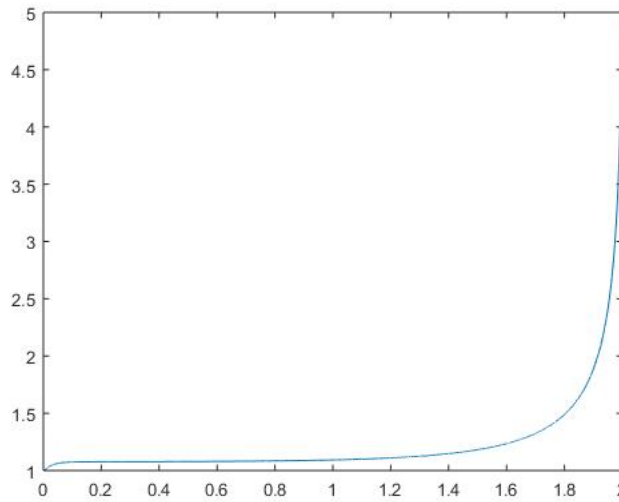
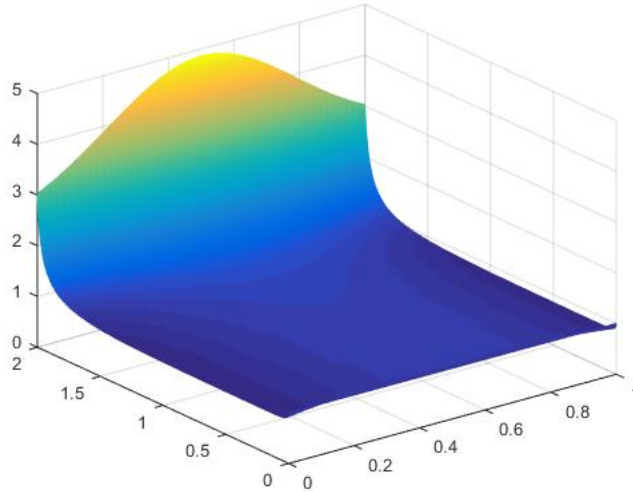
Αλλάζοντας την αρχική συνθήκη από $u(1,t) = 0$ σε $u(1,t) = ax(1-x)$ με $a = 10$ και $\delta = 0,5$ έχουμε blow up.



Σχήμα 4.5: Γράφημα της θερμοκρασίας u σε συνάρτηση με το χρόνο t . Η συνάρτηση f είναι η e^u και χρησιμοποιούμε Robin συνοριακές συνθήκες για αρχική συνθήκη $u(1,t) = ax(1-x)$.

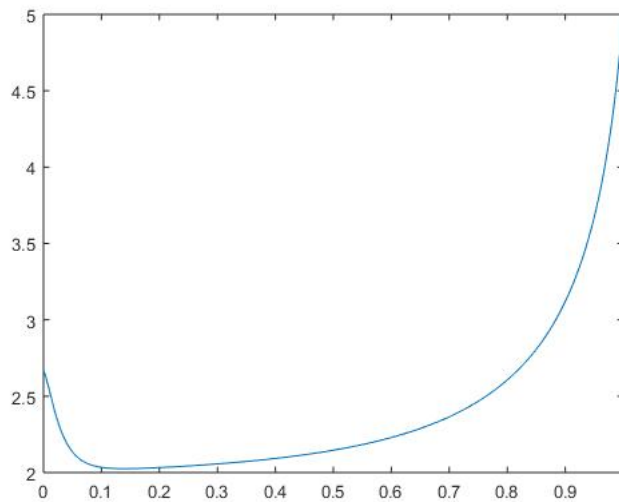
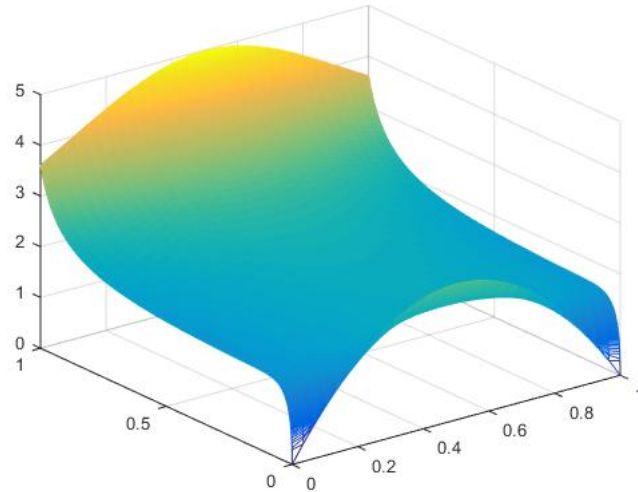
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι η u^p με p ακέραιος. Παίρνουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις:

Για $T = 2$, $M = 50$, $dx = \frac{1}{M-1}$, $r = 0,2$, $u(1,t) = 1$, $dt = rdx^2$, $\beta = 1$, και $\delta = \delta^* = 1,6874$, $p = 3$ έχουμε:



Σχήμα 4.6: Γράφημα της θερμοκρασίας u σε συνάρτηση με το χρόνο t . Η συνάρτηση f είναι η u^p με $p = 3$ και χρησιμοποιούμε Robin συνοριακές συνθήκες με $\delta = \delta^* = 1,6874$.

Αλλάζοντας $T = 1$, $M = 30$, $r = 0,4$, $u(1,t) = ax(1-x)$, $\delta = 0,5$, $a = 10,71$ έχουμε blow up όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 4.7: Γράφημα της θερμοκρασίας u σε συνάρτηση με το χρόνο t . Η συνάρτηση f είναι η u^p με $p = 3$ και χρησιμοποιούμε Robin συνοριακές συνθήκες για αρχική συνθήκη $u(1,t) = ax(1-x)$ με $a = 10,71$.

Βιβλιογραφία

- [1] A.A. Lacey | *Mathematical Analysis of Thermal Runaway for Spatially Inhomogeneous Reactions* | *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol.43, No.6(Dec., 1983), 1350–1366.
- [2] Jerrold Bebernes - David Eberly, | *Mathematical Problems from Combustion Theory* | *Applied Mathematical Sciences* 83
- [3] Bei Hu, | *Blow – up Theories for Semilinear Parabolic Equations* | *Lecture Notes in Mathematics*
- [4] Murray H. Potter, Hans F. Weinberger | *Maximum Principles in Differential Equations* | *Springer – Verlag*(1984)
- [5] Νικολόπουλος Χ. Σημειώσεις για τη Μοντελοποίηση στις Φυσικές Επιστήμες