ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ TOEPLITZ

ΕΙΡΗΝΗ ΖΑΡΟΝΙΚΟΛΑ

ΣΑΜΟΣ 2017

Περιεχόμενα

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Μ. Ανούσης
Θ. Δημητράκος
Ε. Φελουζής

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Μιχαήλ Ανούση που με εμπιστεύτηκε, ανέλαβε τη διπλωματική εργασία μου και με βοήθησε να την ολοκληρώσω. Επιπλέον, θέλω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στην αδερφή μου Ανδρεάνα για τη στήριξή τους και το κουράγιο που μου έδιναν. Τέλος, ευχαριστώ ιδιαίτερα τις φίλες μου Ευπραξία και Παρασκευή για τη βοήθεια και παρότρυνσή τους.

Πρόλογος

Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζεται ένα μέρος της Θεωρίας Τελεστών και ειδικότερα ασχολούμαστε με φραγμένους γραμμικούς τελεστές σε χώρους Hilbert. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται κάποιες χρήσιμες, για τη συνέχεια, μαθηματικές έννοιες (Θεωρήματα, Ορισμοί, κ.τ.λ). Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στους τελεστές και τις ιδιότητές τους και τέλος, στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε σε ειδικές κατηγορίες τελεστών, τους τελεστές Laurent και τους τελεστές Toeplitz.

1 Χώροι Hilbert

1.1 Διανυσματικοί χώροι

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο K με το οποίο θα εννοούμε είτε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$, είτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbf{C}$.

Ορισμός 1.1.1 *Διανυσματικός χώρος καλείται ένα μη κενό σύνολο E εφοδιασμένο με δύο πράξεις:*

1. *την απεικόνιση $+ : (x, y) \to x + y : E \times E \to E$ που καλείται πρόσθεση και*
2. *την απεικόνιση $\cdot : (\lambda, x) \to \lambda x : K \times E \to E$ που καλείται βαθμωτός πολλαπλασιασμός*

ώστε για κάθε $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$ να ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $1x = x$

Τα στοιχεία του E καλούνται διανύσματα. Αν $K = \mathbf{R}$, τότε ο E καλείται πραγματικός διανυσματικός χώρος, ενώ αν $K = \mathbf{C}$ τότε καλείται μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, για κάθε $x \in E$ υπάρχει μοναδικό διάνυσμα που ανηκεί στον E και ισούται με μηδέν τέτοιο ώστε $x + 0 = x$ (μηδενικό διάνυσμα). Το διάνυσμα $0 - x$ δηλώνεται ως $-x$ (αντίθετο στοιχείο).

Ορισμός 1.1.2 *Έστω $x_1, \ldots, x_n$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου E. Το διάνυσμα $x \in E$ θα ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_n$ αν υπάρχουν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ τέτοια ώστε: $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$.*

Ορισμός 1.1.3 *Έστω E ένας γραμμικός χώρος. Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του E λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ώστε $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, έπεται ότι $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Αντίθετα, αν υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ που δεν είναι όλα ίσα με μηδέν, ώστε $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, το σύνολο λέγεται γραμμικά εξαρτημένο.*

Ορισμός 1.1.4 *Ένα υποσύνολο M ενός διανυσματικού χώρου E καλείται υπόχωρος του E αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

1. *Αν $x, y \in M$, τότε $x + y \in M$.*
2. *Αν $x \in M$ και $\alpha \in K$, τότε $\alpha x \in M$.*

Ορισμός 1.1.5 *Έστω διανυσματικός χώρος E και $S \subset E$. Ονομάζουμε γραμμική θήκη του S και συμβολίζουμε με spS, τον υπόχωρο του E που αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων του S, δηλαδή όλα τα διανύσματα της μορφής $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, όπου $\alpha_i \in K$ και $x_i \in S$.*

Ορισμός 1.1.6 *Ένα υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου E καλείται βάση για τον E αν $E = sp\{x_1, \ldots, x_n\}$ και τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο E έχει διάσταση n και συμβολίζουμε με $\dim E = n$. Επιπλέον, ο E είναι άπειρης διάστασης αν περιέχει ένα σύνολο από άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.*

Παραδείγματα

Διανυσματικοί χώροι είναι το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών, καθώς και το σύνολο $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Επιπλέον, διανυσματικοί χώροι είναι και τα σύνολα $\mathbf{R}^N = \{(x_1, \ldots, x_N) : x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{R}\}$ και $\mathbf{C}^N = \{(z_1, \ldots, z_N) : z_1, \ldots, z_N \in \mathbf{C}\}$, καθώς και οι χώροι l_p, οι οποίοι για $p \geq 1$, είναι οι χώροι όλων των άπειρων ακολουθιών $\{x_n\}$ των μιγαδικών αριθμών για τις οποίες ισχύει: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

1.2 Χώροι με νόρμα

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο K με το οποίο θα εννοούμε είτε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$, είτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbf{C}$.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω E γραμμικός χώρος επί του K. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : E \to K$ καλείται νόρμα αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(τριγωνική ανισότητα)*

για κάθε $x, y \in E$ και για κάθε $\lambda \in K$.

Ο διανυσματικός χώρος E εφοδιασμένος με μία νόρμα $\|\cdot\|$ καλείται χώρος με νόρμα.

Παράδειγμα

Για το χώρο l_p ορίζουμε τη νόρμα $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$, η οποία πληρεί τις ιδιότητες 1-4. Επομένως, ο χώρος l_p είναι χώρος με νόρμα.

1.3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 1.3.1 *Έστω E μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Μία συνάρτηση $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \boldsymbol{C}$ καλείται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

3. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

4. Γραμμικότητα ως προς το πρώτο όρισμα:

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle,$$

για κάθε $x_1, x_2, x, y \in E$ *και* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$.

Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Από τις ιδιότητες 3,4 προκύπτει:

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle + \beta\langle z,x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,y\rangle.$$

Ειδικότερα, $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ και $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$. Αν $\alpha = 0$ έχουμε ότι $\langle 0,y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$.

Παραδείγματα

1. Για το χώρο $\mathbf{C}$, ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\langle x,y\rangle = x\overline{y}$.
2. Για το χώρο $\mathbf{C}^N$, ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n\overline{y_n}$, $x = (x_1,\ldots,x_N)$,$y = (y_1,\ldots,y_N)$.
3. Για το χώρο l_2 των ακολουθιών $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ των μιγαδικών αριθμών για τις οποίες ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$ (τετραγωνικά αθροίσιμες ακολουθίες), το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$,$y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$.

Χρήσιμες ισότητες-ανισότητες

1. **Ανισότητα του Cauchy-Schwarz**

   Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία x,y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι
   $$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\| \qquad (1)$$
   Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

   Απόδειξη

   Αν $y = 0$ η ανισότητα (1) ισχύει τετριμένα. Υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbf{C}$, έχουμε:
   $$0 \le \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle. \qquad (2)$$
   Θέτουμε $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ και αντικαθιστούμε στη (2). Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας τη (2) με $\langle y,y\rangle$ προκύπτει: $0 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - |\langle x,y\rangle|^2 \Longrightarrow |\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \Longrightarrow |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ που είναι η ζητούμενη ανισότητα (1). Αν x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $x = \alpha y$ για κάποιο $\alpha \in \mathbf{C}$. Τότε, έχουμε: $|\langle x,y\rangle| = |\langle x, \alpha x\rangle| = |\overline{\alpha}|\,\langle x,x\rangle = |\alpha|\,\|x\|\|x\| = \|x\|\|\alpha x\| = \|x\|\|y\|$. Τώρα, έστω x και y τέτοια ώστε:
   $$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\| \text{ ή ισοδύναμα } \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \qquad (3)$$
   Για να αποδείξουμε ότι τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα, αρκεί να δείξουμε ότι $\langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y = 0$. Από τη σχέση (3) έχουμε:

   $\langle\langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y, \langle y,y\rangle x - \langle x,y\rangle y\rangle = \langle y,y\rangle^2\langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle\langle y,y\rangle\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle\langle y,y\rangle = 0.$

$\square$

2. **Τριγωνική ανισότητα**

   Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   Απόδειξη

   $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + 2\,|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

   $\square$

3. **Νόμος του παραλληλογράμμου**

   Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

   Απόδειξη

   $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

   $\square$

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος με νόρμα η οποία ορίζεται ως $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$. Πράγματι, η συνάρτηση $p(x) = \|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα καθώς

1. $p(x) \geq 0$ και $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ εξ' ορισμού.
2. $p(\lambda x) = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = (\lambda\overline{\lambda})^{1/2}\langle x,x\rangle^{1/2} = |\lambda|\,p(x)$
3. Έχουμε $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq p(x)p(y)$ και επομένως $p(x+y)^2 = \langle x+y, x+y\rangle = p(x)^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + p(y)^2 \leq (p(x)+p(y))^2 \Longrightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

1.4 Χώρος Hilbert

Ορισμός 1.4.1 *Μία ακολουθία $\{x_n\}$, σε ένα χώρο με νόρμα E, συγκλίνει στο $x \in E$, $x_n \to x$, αν $\|x_n - x\| \to 0$.*

Ορισμός 1.4.2 *Μία ακολουθία $\{x_n\}$, σε ένα χώρο με νόρμα, καλείται ακολουθία Cauchy αν $\|x_n - x_m\| \to 0$, καθώς $n, m \to \infty$.*

Ορισμός 1.4.3 *Αν σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα διάνυσμα του E, τότε ο E καλείται πλήρης.*

Ορισμός 1.4.4 *Έστω ότι ο H είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι ο H είναι χώρος Hilbert αν και μόνο αν είναι πλήρης.*

Για παράδειγμα, οι χώροι C^N και l_2 είναι χώροι Hilbert.

1.5 Ορθογωνιότητα

Ορισμός 1.5.1 *Δύο διανύσματα x και y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο E ονομάζονται ορθογώνια, συμβολικά $x \perp y$, αν $\langle x, y \rangle = 0$. Το διάνυσμα x λέγεται ορθογώνιο με ένα σύνολο $M \subset E$ αν $x \perp m$ για όλα τα $m \in M$, συμβολικά $x \perp M$.Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^{\perp}$ του M είναι το σύνολο $\{x \in E : x \perp M\}$.*

Θεώρημα 1.5.1 *(Πυθαγόρειο Θεώρημα) Αν $x \perp y$ τότε*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Απόδειξη

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Ορισμός 1.5.2 *Έστω E ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μία οικογένεια $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ μη μηδενικών διανυσμάτων καλείται ορθογώνιο σύστημα αν $s_i \perp s_j$, όπου $i \neq j$, δηλαδή αν $\langle s_i, s_j \rangle = 0$ για κάθε διάφορα ανά δύο στοιχεία του S. Επιπρόσθετα, αν $\|s_i\| = 1$, για όλα τα $s_i \in S$ τότε το σύστημα καλείται ορθοκανονικό.*

Ορισμός 1.5.3 *Μία ακολουθία διανυσμάτων τα οποία αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα καλείται ορθοκανονική ακολουθία.*

1.6 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 1.6.1 *Έστω H χώρος Hilbert. Μία σειρά διανυσμάτων $\sum_{i=1}^{\infty} x_\kappa$, όπου $x_\kappa \in H$, συγκλίνει στο $x \in H$ αν $s_n \to x$, όπου $s_n = \sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa$.*

Λήμμα 1.6.1 *Το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές στον $H \times H$, δηλαδή αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον H, τότε*

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

Απόδειξη

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε,

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0,$$

αφού $\|x_n\| \to \|x\|$, $y_n \to y$ και $x_n \to x$.

□

Θεώρημα 1.6.1 *Έστω $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ορθοκανονικό σύστημα ενός χώρου Hilbert H, τότε για κάθε $x \in H$*

1. *$\sum_k |\langle x, \phi_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (ανισότητα του Bessel)*
2. *η σειρά $\sum_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$ συγκλίνει*
3. *η σειρά $\sum_k \alpha_k \phi_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\{\alpha_k\} \in l_2$*

4. *Αν υπάρχει $y \in H$ τέτοιο ώστε $y = \sum_k \alpha_k \phi_k$, τότε $\alpha_k = \langle y, \phi_k \rangle$.*

Απόδειξη

1.

$$0 \le \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k \right\rangle = \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_k \rangle|^2.$$

Επομένως, για όλα τα n,

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 \le \|x\|^2$$

2. *Για $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$ έπεται από τη σχέση 1 ότι για $n > m$,*

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k, \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 \to 0,$$

καθώς $n, m \to \infty$.

Επομένως η $\{s_n\}$ συγκλίνει, αφού ο H είναι πλήρης. Δηλαδή $\sum_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$ συγκλίνει.

3. *Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$. Για $n > m$ έχουμε,*

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \phi_k, \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \phi_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 = S_n - S_m.$$

Άρα, η $\{s_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν η $\{S_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επομένως, η $\{s_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{S_n\}$ συγκλίνει, από το οποίο οδηγούμαστε στη σχέση 3.

4. *Υποθέτουμε ότι $y = \sum_k \alpha_k \phi_k$. Τότε, από το Λήμμα 1.6.1,*

$$\langle y, \phi_j \rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k, \phi_j \right\rangle = a_j.$$

$\square$

Ορισμός 1.6.2 *Ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ενός χώρου Hilbert H καλείται ορθοκανική βάση του H αν κάθε $v \in H$ έχει μία μοναδική αναπαράσταση $v = \sum_k \alpha_k \phi_k$, για κάποια $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ στον $\boldsymbol{C}$. Από το Θεώρημα 1.6.1, $\alpha_k = \langle y, \phi_k \rangle$. Κάθε $\langle y, \phi_k \rangle$ καλείται συντελεστής Fourier.*

Θεώρημα 1.6.2 *Έστω $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα ενός χώρου Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.*
2. *Αν $x \in H$ και $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ για $k = 1, 2, \ldots$, τότε $x = 0$.*

3. $sp\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ *πυκνό στον* H, *δηλαδή κάθε διάνυσμα στον* H *είναι όριο ακολουθίας διανυσμάτων στο* $sp\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$.

4. *Για κάθε* $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, \phi_k\rangle|^2$ *(ταυτότητα του Parseval).*

5. *Για όλα τα* $x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_k \langle x, \phi_k\rangle \overline{\langle y, \phi_k\rangle}$.

Απόδειξη

1. $\Longrightarrow$ 5.

Έστω $s_n = \sum_{k=1}^n \langle x, \phi_k\rangle \phi_k$, $t_n = \sum_{k=1}^n \langle y, \phi_k\rangle \phi_k$. *Τότε*

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle s_n, t_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, \phi_k\rangle \overline{\langle y, \phi_k\rangle}.$$

5. $\Longrightarrow$ 4.

Θέτουμε $x = y$ *στην 5.*

4. $\Longrightarrow$ 3.

Για $x \in H$,

$$\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, \phi_k\rangle \phi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, \phi_k\rangle|^2 \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$.

3. $\Longrightarrow$ 2.

Αν $\langle x, \phi_k\rangle = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *τότε προφανώς* $x \perp sp\{\phi_k\}$. *Επομένως, λόγω συνέχειας του εσωτερικού γινομένου, το* x *είναι ορθογώνιο με την κλειστή θήκη του* $sp\{\phi_k\}$ *που βρίσκεται στον* H. *Ειδικότερα,* $x \perp x$ *και* $x = 0$.

2. $\Longrightarrow$ 1.

Για οποιοδήποτε $z \in H$, *από το Θεώρημα 1.6.1, το* $w = \sum_k \langle z, \phi_k\rangle \phi_k$ *συγκλίνει. Επομένως, για κάθε* j

$$\langle z - w, \phi_j\rangle = \langle z, \phi_j\rangle - \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle z, \phi_k\rangle \phi_k, \phi_j \right\rangle = \langle z, \phi_j\rangle - \langle z, \phi_j\rangle = 0.$$

Η υπόθεση της σχέσης 2 μας διασφαλίζει ότι $z - w = 0$, *επομένως η γραφή του* z *ισούται με* $\sum_k \langle z, \phi_k\rangle \phi_k$.

$\square$

1.7 Απόσταση σημείου από πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο

Ορισμός 1.7.1 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η απόσταση $d(u, S)$ από ένα σημείο $u \in E$ σε ένα σύνολο $S \subset E$ ορίζεται ως*

$$d(u, S) = \inf\{\|u - s\| : s \in S\}.$$

Θεώρημα 1.7.1 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και M πεπερασμένης διάστασης υπόχωρός του. Επιπλέον, έστω $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ ορθοκανονική βάση για τον M. Για κάθε $u \in E$, το διάνυσμα $w = \sum_{i=1}^{n} \langle u, \phi_i \rangle \phi_i$ είναι το μοναδικό διάνυσμα στον M με την ιδιότητα ότι $\|u - w\| = d(u, M)$.*

Θεώρημα 1.7.2 *Έστω M ένας υπόχωρος ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο. Υποθέτουμε ότι $u \in E$ και $w \in M$. Τότε $u - w \perp M$ αν και μόνο αν $\|u - w\| = d(u, M)$.*

Απόδειξη

Αν $u - w \perp M$ τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (1.5.1) έπεται ότι $d(u, M) = \|u - w\|$. Υποθέτουμε ότι $\|u - w\| \leq \|u - z\|$,για όλα τα $z \in M$. Εφόσον ο M είναι υπόχωρος $w + \lambda z$ είναι στον M ,για όλα τα $z \in M$ και $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Επομένως, $\|u - w\|^2 \leq \|u - (w + \lambda z)\|^2 = \langle u - w - \lambda z, u - w - \lambda z \rangle = \|u - w\|^2 - 2\operatorname{Re}\lambda\langle z, u - w\rangle + |\lambda|^2\|z\|^2$. Άρα, $2\operatorname{Re}\lambda\langle z, u - w\rangle \leq |\lambda|^2\|z\|^2$. Θέτουμε $\lambda = \overline{r\langle z, u - w\rangle}$, όπου r είναι πραγματικός αριθμός και έχουμε: $2r|\langle z, u - w\rangle|^2 \leq r^2|\langle z, u - w\rangle|^2\|z\|^2$. Εφόσον το r έχει επιλεγεί αυθαίρετα έπεται ότι $\langle z, u - w\rangle = 0$.

□

1.8 Απόσταση σε κυρτό σύνολο και προβολές επάνω σε υπόχωρους

Ορισμός 1.8.1 *Ένα σύνολο $C \subset H$, όπου H χώρος Hilbert, είναι κυρτό αν για οποιαδήποτε δύο διανύσματα $x, y \in C$, το σύνολο $\{tx + (1 - t)y : 0 \leq t \leq 1\}$ εμπεριέχεται στο C.*

Ορισμός 1.8.2 *Έστω σύνολο $S \subset H$, όπου H χώρος Hilbert. Κλειστή θήκη του S, συμβολικά $\overline{S}$, είναι το σύνολο των διανυσμάτων στον H, τα οποία είναι όρια ακολουθιών διανυσμάτων στο S ή $x \in \overline{S}$ αν $x_n \to x$ για κάποια ακολουθία $\{x_n\} \subset S$. Αν $\overline{S} = S$, το S καλείται κλειστό σύνολο.*

Θεώρημα 1.8.1 *Έστω H χώρος Hilbert και M ένα κλειστό κυρτό υποσύνολό του. Για κάθε $y \in H$ υπάρχει μοναδικό $w \in M$ τέτοιο ώστε $d(y, M) = \|y - w\|$.*

Απόδειξη

Έστω $d = \inf\{\|y - z\| : z \in M\}$. Υπάρχει ακολουθία $\{z_n\} \subset M$ τέτοια ώστε $\|y - z_n\| \to d$. Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στο να δείξουμε ότι η ακολουθία z_n συγκλίνει και ότι το όριό της είναι το ζητούμενο w. Εφαρμόζοντας το νόμο του παραλληλογράμμου για $y - z_n$ και $y - z_m$ έχουμε

$$2(\|y - z_n\|^2 + \|y - z_m\|^2) = \|2y - (z_n + z_m)\|^2 + \|z_n - z_m\|^2. \tag{4}$$

Αφού το M είναι κυρτό, $\frac{1}{2}(z_n + z_m)$ είναι στο M και

$$\|2y - (z_n + z_m)\| = 2\|y - \frac{1}{2}(z_n + z_m)\| \geq 2d. \tag{5}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) *και* (5) *παίρνουμε:*

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2(\|y - z_n\|^2 + \|y - z_m\|^2) - 4d^2 \to 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

καθώς $n, m \to \infty$.

Εφόσον ο χώρος H είναι πλήρης και το σύνολο M κλειστό, υπάρχει $w \in M$ τέτοιο ώστε $z_n \to w$. Επομένως, $d = \lim_{n\to\infty} \|y - z_n\| = \|y - w\|$. Τέλος, υποθέτουμε ότι $z \in M$ και $d = \|y - z\|$. Υπολογίζοντας την απόσταση μεταξύ του y και του μέσου του τμήματος που συνδέει το z με το w, δηλαδή του $\frac{1}{2}(z + w) \in M$ παίρνουμε:

$$d^2 \leq \|y - \frac{1}{2}(z + w)\|^2 = \|\frac{1}{2}(y - z) + \frac{1}{2}(y - w)\|^2.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του παραλληλογράμμου για $\frac{1}{2}(y - z)$ και $\frac{1}{2}(y - w)$ έχουμε:

$$d^2 \leq \|\frac{1}{2}(y - z) + \frac{1}{2}(y - w)\|^2 = 2\left(\|\frac{1}{2}(y - z)\|^2 + \|\frac{1}{2}(y - w)\|^2\right) - \|\frac{1}{2}(z - w)\|^2 =$$

$$= d^2 - \frac{1}{4}\|z - w\|^2.$$

Επομένως, $z = w$ και έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε.

□

Θεώρημα 1.8.2 *Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Τότε για κάθε $y \in H$ υπάρχουν μοναδικά $w \in M$ και $u \in M^\perp$ τέτοια ώστε $y = w + u$.*

Απόδειξη

Από τα Θεωρήματα 1.8.1, 1.7.2 υπάρχει μοναδικό $w \in M$ τέτοιο ώστε $u = y - w \in M^\perp$. Υποθέτουμε ότι $y = w_1 + u_1$, όπου $w_1 \in M$ και $u_1 \in M^\perp$. Τότε $y - w_1 \in M^\perp$. Έτσι λόγω της μοναδικότητας του w, $w = w_1$ και επομένως $u = u_1$.

□

Πόρισμα 1.8.1 *Αν M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε $(M^\perp)^\perp = M$.*

Απόδειξη

Προφανώς $M \subset (M^\perp)^\perp$. Υποθέτουμε ότι $y \in (M^\perp)^\perp$. Το Θεώρημα 1.8.2 εγγυάται την ύπαρξη ενός $w \in M \subset (M^\perp)^\perp$ και ενός $u \in M^\perp$ τέτοια ώστε $y = w + u$. Επομένως, $u = y - w \in (M^\perp)^\perp \cap M^\perp = (0)$. Έτσι, $y = w \in M$.

□

1.9 Διαχωρίσιμοι χώροι

Ορισμός 1.9.1 *Ένας χώρος Hilbert H καλείται διαχωρίσιμος αν υπάρχουν διανύσματα* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *των οποίων η γραμμική θήκη είναι πυκνός υπόχωρός του.*

Θεώρημα 1.9.1 *Ένας χώρος Hilbert εμπεριέχει μία ορθοκανονική βάση αν και μόνο αν είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο H είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $sp\{w_1, w_2, \ldots\}$ *πυκνό στον H. Απορρίπτοντας τα* w_k *τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί των* $w_1, \ldots, w_{k-1}$ *έπεται ότι μπορούν να βρεθούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα* $\{v_1, v_2, \ldots\}$ *τέτοια ώστε* $sp\{v_1, v_2, \ldots\} = sp\{w_1, w_2, \ldots\}$. *Σύμφωνα με τη διαδικασία Gramm-Schmidt υπάρχει* $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ *ορθοκανονική βάση στον H. Αντίστροφα, από το Θεώρημα 1.6.2, αν* $\phi_1, \phi_2, \ldots$ *ορθοκανονική βάση στον H τότε το* $sp\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ *είναι πυκνό στον H.*

□

1.10 Ισομετρία χώρων Hilbert

Ορισμός 1.10.1 *Οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο E και F είναι γραμμικά ισομετρικοί αν υπάρχει συνάρτηση* $A : E \to F$ *τέτοια ώστε για όλα τα* $u, v \in E$ *και για όλα τα* $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$,

1. $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$
2. $\|Au\| = \|u\|$.

2 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές σε χώρους Hilbert

2.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Ορισμός 2.1.1 *Μία απεικόνιση* $A : H_1 \to H_2$ *καλείται γραμμική ή γραμμικός τελεστής αν για όλα τα* $x, y \in H_1$ *και* $\alpha \in \boldsymbol{C}$ *ισχύουν*

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$
2. $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

Εν συντομία συμβολίζουμε με Ax *αντί για* $A(x)$.

Ορισμός 2.1.2 *Ένας γραμμικός τελεστής* $A : H_1 \to H_2$ *καλείται φραγμένος αν*

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| < \infty.$$

Η νόρμα του A, συμβολικά $\|A\|$, *δίνεται από τον τύπο*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|.$$

Ένα παράδειγμα φραγμένου γραμμικού τελεστή είναι ο ταυτοτικός τελεστής $I : H_1 \to H_1$ ο οποίος ορίζεται ως $Ix = x$ και είναι νόρμας 1.

Ορισμός 2.1.3 *Ονομάζουμε* $L(H_1, H_2)$ *το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών* $A : H_1 \to H_2$. *Αν* $H_1 = H_2$ *γράφουμε* $L(H_1)$ *αντί για* $L(H_1, H_1)$.

2.2 Φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή

Ορισμός 2.2.1 *Μία συνάρτηση f η οποία απεικονίζει ένα χώρο Hilbert H στο χώρο των μιγαδικών αριθμών $\boldsymbol{C}$ καλείται συναρτησοειδές. Αν επιπλέον $f \in L(H, \boldsymbol{C})$, τότε η f καλείται φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H.*

Λήμμα 2.2.1 *Αν f είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές σε ένα χώρο Hilbert H και $f(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in H$, τότε κάθε $x \in H$ έχει τη μορφή*

$$x = \beta x_0 + z \ \ , \beta \in \boldsymbol{C}, z \in \ker f.$$

Απόδειξη

Παίρνουμε $\beta = \frac{f(x)}{f(x_0}$ και $z = x - \beta x_0$.

□

Θεώρημα 2.2.1 *(Αναπαράστασης του Riesz) Αν f φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές σε ένα χώρο Hilbert H, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in H$,*

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

Απόδειξη

Αν $f = 0$ ισχύει τετριμένα. Έστω $f \neq 0$.Τότε ο πυρήνας του συναρτησοειδούς, $\ker f = \{x : f(x) = 0\}$, αποτελεί κλειστό υπόχωρο του H. Έτσι υπάρχει $u \neq 0$ στον $(\ker f)^{\perp}$. Έστω $y = \alpha u$, όπου $\alpha = \frac{\overline{f(u)}}{\|u\|^2}$. Τότε

1. $y \perp \ker f$
2. $f(y) = \langle y, y \rangle$

Για $x \in H$, από το Λήμμα 2.2.1, υπάρχει $\beta \in \boldsymbol{C}$ και $z \in \ker f$ τέτοιο ώστε $x = \beta y + z$. Από τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε

$$f(x) = f(\beta y) = \beta f(y) = \beta \langle y, y \rangle = \langle \beta y + z, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Για να δείξουμε ότι το y είναι μοναδικό, υποθέτουμε ότι υπάρχει $w \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, w \rangle$, για όλα τα $x \in H$. Τότε

$$0 = f(x) - f(x) = \langle x, y - w \rangle \ \ , \text{για όλα τα } x \in H.$$

Συγκεκριμένα, $\langle y - w, y - w \rangle = 0$. Επομένως, $y = w$.

□

2.3 Συνέχεια γραμμικών τελεστών

Ορισμός 2.3.1 *Ένας τελεστής $A : H_1 \to H_2$ είναι συνεχής στο $x_0 \in H_1$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|x - x_0\| < \delta$ τότε $\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$.*

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω $A : H_1 \to H_2$ γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι συνεχής σε κάποιο σημείο.*

2. *Ο A είναι ομοιόμορφα συνεχής στον H_1.*

3. *Ο A είναι φραγμένος.*

Απόδειξη

1. $\Longrightarrow$ 2.

Υποθέτουμε ότι ο A είναι συνεχής στο x_0. Για δοσμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|x - x_0\| < \delta$, $\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$. Επομένως, αν $\|w - z\| < \delta$, $w, z \in H_1$, τότε $\|x_0 - (x_0 + z - w)\| < \delta$. Άρα, $\|Aw - Az\| = \|Ax_0 - A(x_0 + z - w)\| < \epsilon$.

2. $\Longrightarrow$ 3.

Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|Az\| \leq 1$, $\|z\| \leq \delta$ (1). Υποθέτουμε ότι $\|x\| = 1$, $x \in H_1$. Τότε $\|\delta x\| = \delta$ και από τη σχέση (1) έχουμε:

$$1 \geq \|A(\delta x)\| = \delta\|Ax\| \text{ ή } \|Ax\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Επομένως, $\|A\| \leq \frac{1}{\delta}$.

3. $\Longrightarrow$ 1.

Για δοσμένο $\epsilon > 0$ και $x_0 \in H_1$, αν $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{1+\|A\|}$ τότε $\|Ax - Ax_0\| \leq \|A\|\|x - x_0\| < \epsilon$.

□

2.4 Αναπαράσταση σε πίνακα φραγμένων γραμμικών τελεστών

Θα δείξουμε πώς μπορούμε να συσχετίσουμε έναν πίνακα με ένα δοσμένο φραγμένο γραμμικό τελεστή, σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Υποθέτουμε ότι $A \in L(H)$, όπου ο H είναι χώρος Hilbert με $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ορθοκανονική βάση του. Τότε για $x \in H$, $x = \sum_j \langle x, \phi_j\rangle \phi_j$. Λόγω γραμμικότητας και συνέχειας του τελεστή A έχουμε:

$$Ax = \sum_j \langle x, \phi_j\rangle A\phi_j \tag{6}$$

Επιπλέον,

$$A\phi_j = \sum_k \langle A\phi_j, \phi_k\rangle \phi_k \tag{7}$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$Ax = \sum_j \sum_k \langle x, \phi_j\rangle \langle A\phi_j, \phi_k\rangle \phi_k = \sum_k \sum_j \langle x, \phi_j\rangle \langle A\phi_j, \phi_k\rangle \phi_k \tag{8}$$

Αν $Ax = y$, από τη σχέση (8) έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \langle A\phi_1, \phi_1\rangle & \langle A\phi_2, \phi_1\rangle & \ldots \\ \langle A\phi_1, \phi_2\rangle & \langle A\phi_2, \phi_2\rangle & \ldots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \langle x, \phi_1\rangle \\ \langle x, \phi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, \phi_1\rangle \\ \langle y, \phi_2\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 2.4.1 *Έστω $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H και τελεστής $A \in L(H)$. Ο πίνακας (α_{ij}) που αντιστοιχεί στον τελεστή A και την ορθοκανονική βάση $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ ορίζεται ως $(\alpha_{ij}) = \langle A\phi_j, \phi_i\rangle$.*

2.5 Τελεστές πεπερασμένης τάξης

Ορισμός 2.5.1 *Εικόνα ενός τελεστή $A \in L(H_1, H_2)$, συμβολικά $\operatorname{Im} A$, είναι ο υπόχωρος $AH_1 = \{Ax : x \in H_1\}$. Αν $\operatorname{Im} A$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο A καλείται τελεστής πεπερασμένης τάξης και η τάξη του είναι $\dim \operatorname{Im} A$.*

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω $K \in L(H_1, H_2)$ τάξης n. Υπάρχουν $u_1, \ldots, u_n$ διανύσματα στον H_1 και $\phi_1, \ldots, \phi_n$ διανύσματα στον H_2 τέτοια ώστε για κάθε $x \in H_1$,*

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \phi_i.$$

Τα διανύσματα $\phi_1, \ldots, \phi_n$ μπορούν να επιλέγονται ως οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση για τον $\operatorname{Im} K$.

Απόδειξη

Έστω $\phi_1, \ldots, \phi_n$ μία ορθοκανονική βάση της $\operatorname{Im} K$. Τότε για κάθε $x \in H_1$,

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle Kx, \phi_i \rangle \phi_i. \tag{9}$$

Για κάθε i, $f_i(x) = \langle Kx, \phi_i \rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H_1. Επομένως, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (2.2.1) υπάρχει ένα $u_i \in H_1$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in H_1$,

$$\langle Kx, \phi_i \rangle = f_i(x) = \langle x, u_i \rangle, \ 1 \leq i \leq n.$$

Έτσι, από τη σχέση (9) παίρνουμε

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \phi_i.$$

□

2.6 Αντιστρέψιμοι τελεστές

Ορισμός 2.6.1 *Ένας τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ καλείται αντιστρέψιμος αν υπάρχει τελεστής $A^{-1} \in L(H_2, H_1)$ τέτοιος ώστε*

$$A^{-1}Ax = x, \ \text{για κάθε } x \in H_1$$

και

$$AA^{-1}y = y, \ \text{για κάθε } y \in H_2.$$

Ο τελεστής A^{-1} καλείται αντίστροφος του A.

Θεώρημα 2.6.1 *Έστω $A \in L(H)$ και $\|A\| < 1$. Τότε ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και για κάθε $y \in H$,*

$$(I - A)^{-1}y = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y (A^0 = I).$$

Επιπρόσθετα,

$$\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^{n}A^k\|\to 0 \text{ καθώς το } n\to\infty$$

δηλαδή,

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$$

και

$$\|(I-A)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|A\|}.$$

Απόδειξη

Για $y\in H$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}A^k y$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $s_n=\sum_{k=0}^{n}A^k y$. Τότε για $n>m$,

$$\|s_n-s_m\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\|A^k y\|\le\|y\|\sum_{k=m+1}^{n}\|A\|^k\to 0$$

,καθώς $m,n\to\infty$ αφού $\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k=\frac{1}{1-\|A\|}$. Η πληρότητα του H εξασφαλίζει τη σύγκλιση της $\{s_n\}$, δηλαδή $\sum_{k=0}^{\infty}A^k y$ συγκλίνει. Ορίζουμε $B:H\to H$ ως $By=\sum_{k=0}^{\infty}A^k y$. Ο B είναι γραμμικός και

$$\|By\|\le\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k\|y\|=\left(\frac{1}{1-\|A\|}\right)\|y\|.$$

Έτσι $\|B\|\le\frac{1}{1-\|A\|}$ και

$$(I-A)By=(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k y=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)A^k y=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(I-A)y=B(I-A)y=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}A^k y-\sum_{k=0}^{\infty}A^{k+1}y=y.$$

Επομένως, ο $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και $(I-A)^{-1}=B$. Άρα τελικώς,

$$\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^{n}A^k\|=\sup_{\|y\|=1}\|\sum_{k=n+1}^{\infty}A^k y\|\le\sum_{k=n}^{\infty}\|A\|^k\to 0,$$

καθώς $n\to\infty$.

□

Πόρισμα 2.6.1 *Έστω $A\in L(H)$, αντιστρέψιμος. Υποθέτουμε ότι $B\in L(H)$ και $\|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Τότε ο B είναι αντιστρέψιμος,*

$$B^{-1}y=\sum_{k=0}^{\infty}[A^{-1}(A-B)]^k A^{-1}y$$

και

$$\|A^{-1}-B^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|}.$$

Απόδειξη

Αφού $B = A-(A-B) = A[I-A^{-1}(A-B)]$ *και* $\|A^{-1}(A-B)\| \leq \|A^{-1}\|\|A-B\| < 1$, *από το Θεώρημα 2.6.1 έπεται ότι ο* B *είναι αντιστρέψιμος και*

$$B^{-1} = [I - A^{-1}(A-B)]^{-1} A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [A^{-1}(A-B)]^{k} A^{-1}.$$

Έτσι,

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{-1}\|^{k} \|A-B\|^{k} = \frac{\|A^{-1}\|^{2}\|A-B\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A-B\|}.$$

□

2.7 Συζυγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με το συζυγή και τον αυτοσυζυγή ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή.

Υποθέτουμε ότι $A \in L(H_1, H_2)$. Για κάθε $y \in H_2$, το $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Έτσι, το Θεώρημα 2.2.1 εγγυάται την ύπαρξη ενός μοναδικού $y^* \in H_1$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in H_1$,

$$\langle Ax, y\rangle = f_y(x) = \langle x, y^*\rangle.$$

Αυτό δημιουργεί έναν τελεστή $A^* : H_2 \to H_1$, που ορίζεται ως $A^*y = y^*$. Έτσι για όλα τα $x \in H_1$,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

Ο τελεστής A^* καλείται ο συζυγής τελεστής του A.

Θεώρημα 2.7.1 *Αν* $A, B \in L(H_1, H_2)$ *τότε*

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$
3. $A^{**} = A$
4. *Αν* $D \in L(H_2, H_3)$, *τότε* $(DA)^* = A^*D^*$.

Απόδειξη

1. *Έστω* $x \in H_1$ *και* $y \in H_2$,

   $$\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle.$$

   Επομένως, εξ' ορισμού, $(A+B)^*y = A^*y + B^*y$.

2. $\langle \alpha Ax, y\rangle = \alpha\langle x, A^*y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}A^*y\rangle$. *Έτσι,* $(\alpha A)^*y = \overline{\alpha}A^*y$.

3. $\langle A^*y, x\rangle = \overline{\langle x, A^*y\rangle} = \langle y, Ax\rangle$. *Επομένως, από τον ορισμό του συζυγή* A^*, $A^{**}x = Ax$.

4. *Για* $u \in H_3$,
$$\langle DAx, u\rangle = \langle Ax, D^*u\rangle = \langle x, A^*D^*u\rangle.$$
Έτσι, $(DA)^*u = A^*D^*u$.

□

Ορισμός 2.7.1 *Πυρήνας ενός τελεστή* $A \in L(H_1, H_2)$, *συμβολικά* $\ker A$, *είναι ο κλειστός υπόχωρος* $\{x \in H_1 : Ax = 0\}$.

Θεώρημα 2.7.2 *Για* $A \in L(H_1, H_2)$,

1. $\ker A = \operatorname{Im} A^{*\perp}$
2. $\ker A^* = \operatorname{Im} A^{\perp}$
3. $\overline{\operatorname{Im} A} = \ker A^{*\perp}$
4. $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \ker A^{\perp}$

Απόδειξη

1. *Δίνεται* $x \in \ker A$ *και* $y \in H_2$,
$$0 = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$
Επομένως, $\ker A \subset \operatorname{Im} A^{*\perp}$. *Αντίστροφα, αν* $u \in \operatorname{Im} A^{*\perp}$, *τότε για όλα τα* $y \in H_2$,
$$0 = \langle u, A^*y\rangle = \langle Au, y\rangle.$$
Συγκεκριμένα, $0 = \langle Au, Au\rangle$. *Έτσι,* $u \in \ker A$ *και επομένως* $\operatorname{Im} A^{*\perp} \subset \ker A$.

2. *Εφαρμόζοντας τη σχέση 1 στον* A^* *και επειδή* $A^{**} = A$ *έχουμε,*
$$\ker A^* = \operatorname{Im} A^{**\perp} = \operatorname{Im} A^{\perp}.$$

3. *Από το Πόρισμα 1.8.1, τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, καθώς και τη σχέση 2 έχουμε,*
$$\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{(\operatorname{Im} A)}^{\perp\perp} = (\operatorname{Im} A)^{\perp\perp} = \ker A^{*\perp}.$$

4. *Εφαρμόζουμε τη σχέση 3 στον* A^* *και επειδή* $A^{**} = A$ *αποδεικνύεται.*

□

Ορισμός 2.7.2 *Ένας τελεστής* $A \in L(H)$ *καλείται αυτοσυζυγής τελεστής αν* $A^* = A$.

Θεώρημα 2.7.3 *Ένας τελεστής* $A \in L(H)$ *είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν* $\langle Ax, x\rangle$ *είναι πραγματικός για όλα τα* $x \in H$.

Απόδειξη

Αν $A = A^*$, *τότε για* $x \in H$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Επομένως, $\langle Ax, x\rangle$ *πραγματικός. Υποθέτουμε ότι* $\langle Au, u\rangle$ *πραγματικός για όλα τα* $u \in H$. *Τότε για όλα τα* $x, y \in H$ *και* $\lambda \in \boldsymbol{C}$

$$\langle A(x+\lambda y), (x+\lambda y)\rangle = \langle x+\lambda y, A(x+\lambda y)\rangle$$

το οποίο μαζί με την υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι

$$\overline{\lambda}\langle Ax, y\rangle + \lambda\langle Ay, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, Ay\rangle + \lambda\langle y, Ax\rangle \Longrightarrow \lambda\langle Ay, x\rangle - \overline{\lambda\langle Ay, x\rangle} = \lambda\langle y, Ax\rangle - \overline{\lambda\langle y, Ax\rangle}.$$

Έτσι, $\operatorname{Im}\lambda\langle Ay, x\rangle = \operatorname{Im}\lambda\langle y, Ax\rangle$. *Παίρνοντας* $\lambda = 1$ *και* $\lambda = i$, *προκύπτει ότι* $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$. *Επομένως,* $A = A^*$.

□

2.8 Τελεστής ορθογώνια προβολή

Οι ορθογώνιες προβολές είναι μία ειδική περίπτωση αυτοσυζυγών τελεστών.

Ορισμός 2.8.1 *Δίνεται* M *κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert* H. *Ένας τελεστής* P, *ορισμένος στον* H, *καλείται ορθογώνια προβολή επί του* M *αν*

$$P(m+n) = m, \text{ για όλα τα } m \in M \text{ και } n \in M^\perp.$$

Θεώρημα 2.8.1 *Ένας τελεστής* $P \in L(H)$ *είναι μία ορθογώνια προβολή αν και μόνο αν* $P^2 = P$ *και ο* P *είναι αυτοσυζυγής.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι P *ορθογώνια προβολή επί ενός κλειστού υπόχωρου* M *του* H. *Για* $x = m+n$, $m \in M$ *και* $n \in M^\perp$,

$$P(Px) = Pm = m = Px.$$

Επομένως, $P^2 = P$. *Για* $y = m_1 + n_1$, $m_1 \in M$ *και* $n_1 \in M^\perp$, $\langle Px, y\rangle = \langle m, m_1 + n_1\rangle = \langle m, m_1\rangle = \langle m+n, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$. *Έτσι,* $P = P^*$. *Υποθέτουμε ότι* $P^2 = P$ *και* $P^* = P$. *Έστω* $M = \operatorname{Im} P$. *Εφόσον* $M = \ker(I-P)$, *ο* M *είναι κλειστός και από το Θεώρημα 2.7.2,*

$$M^\perp = \operatorname{Im} P^\perp = \ker P.$$

Επομένως, για $u \in M$ *και* $v \in M^\perp$

$$P(u+v) = Pu + Pv = Pu = u,$$

αφού $u \in M = \operatorname{Im} P$. *Έτσι, ο* P *είναι ορθογώνια προβολή επί του* M.

□

2.9 Προβολές και αριστερά/δεξιά αντιστρέψιμοι τελεστές

Ορισμός 2.9.1 *Ένας τελεστής P σε ένα χώρο Hilbert H καλείται προβολή αν ο P είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον H και $P^2 = P$. Αν ο P είναι μία προβολή στον H, τότε και ο $I - P$ είναι επίσης προβολή στον H αφού $(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$.*

Θεώρημα 2.9.1 *Έστω P μία προβολή σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε*

1. $\operatorname{Im} P = \ker(I - P)$
2. $\operatorname{Im} P$ *κλειστό σύνολο*
3. *Κάθε διάνυσμα $u \in H$ γράφεται μοναδικά ως $u = x + y$, όπου $Px = 0$ και $Py = y$.*

Απόδειξη

1. *Αφού $(I-P)Px = Px - Px = 0$ έχουμε ότι $\operatorname{Im} P \subseteq \ker(I-P)$. Αν $y \in \ker(I-P)$, τότε $y - Py = 0$. Επομένως, $y = Py \in \operatorname{Im} P$. Άρα $\operatorname{Im} P = \ker(I-P)$.*
2. *Η σχέση 2 είναι άμεση συνέπεια της σχέσης 1.*
3. *Παίρνουμε $x = (I-P)u$ και $y = Pv$. Τότε τα x και y ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της αναπαράστασης, υποθέτουμε ότι $u = x_1 + y_1$, όπου $Px_1 = 0$ και $Py_1 = y_1$. Τότε $x - x_1 = y_1 - y$ και $0 = P(x - x_1) = P(y_1 - y) = y_1 - y$.*

Έτσι, $y = y_1$ και $x = x_1$.

□

Ορισμός 2.9.2 *Ένας χώρος Hilbert H καλείται ευθύ άθροισμα υποχώρων M και N, συμβολικά $H = M \oplus N$, αν κάθε διάνυσμα $u \in H$ έχει μία μοναδική αναπαράσταση της μορφής $u = x + y$, όπου $x \in M$ και $y \in N$. Ο υπόχωρος M καλείται συμπληρωματικός στον H αν υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος N του H τέτοιος ώστε $H = M \oplus N$. Παρατηρούμε επιπλέον ότι η αναπαράσταση $u = x + y$, $x \in M$,$y \in N$ είναι μοναδική αν και μόνο αν $M \cap N = \{0\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9.1, αν P μία ορθογώνια προβολή στον H έχουμε*

$$H = \ker P \oplus \operatorname{Im} P.$$

Ορισμός 2.9.3 *Έστω H_1 και H_2 χώροι Hilbert. Ένας τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ καλείται αριστερά αντιστρέψιμος αν υπάρχει τελεστής $L \in L(H_2, H_1)$ τέτοιος ώστε $LA = I$. Ο τελεστής L καλείται αριστερά αντίστροφος του A.*

Θεώρημα 2.9.2 *Έστω τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ και ένας αριστερά αντίστροφός του L. Τότε το σύνολο $\operatorname{Im} A$ είναι κλειστό και συμπληρωματικό στον H από το $\ker L$. Ο τελεστής AL είναι μία προβολή πάνω στο $\operatorname{Im} A$ και $\ker AL = \ker L$.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο A έχει έναν αριστερά αντίστροφο L. Προφανώς $\ker A \subseteq \ker LA = \ker I = \{0\}$. *Ο φραγμένος τελεστής AL είναι μία προβολή αφού* $(AL)^2 = A(LA)L = AL$. *Από τις σχέσεις* $\operatorname{Im} AL \subseteq \operatorname{Im} A$ *και* $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(AL)A \subseteq \operatorname{Im} AL$ *έχουμε* $\operatorname{Im} AL = \operatorname{Im} A$. *Επιπλέον,* $\ker AL \subseteq \ker LAL = \ker L$ *και* $\ker L \subseteq \ker AL$. *Επομένως,* $\ker AL = \ker L$ *και*

$$H = \operatorname{Im} A \oplus \ker L. \tag{10}$$

□

Ορισμός 2.9.4 *Έστω M και N υπόχωροι (όχι απαραίτητα κλειστοί) και έστω $H = M \oplus N$. Η συνδιάσταση του M, συμβολικά* $\operatorname{codim} M$, *ορίζεται ως η* $\dim N$ *(πεπερασμένη ή μη-πεπερασμένη).*

Θεώρημα 2.9.3 *Έστω τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ ο οποίος έχει έναν αριστερά αντίστροφο $L \in L(H_2, H_1)$. Αν ο B είναι ένας τελεστής στον $L(H_1, H_2)$ και $\|A - B\| < \|L\|^{-1}$, τότε ο B έχει έναν αριστερά αντίστροφο L_1 ο οποίος δίνεται από τον τύπο*

$$L_1 = L(I - (A - B)L)^{-1} = L\left(\sum_{k=0}^{\infty} [(A - B)L]^k\right).$$

Επιπρόσθετα,

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A \tag{11}$$

Απόδειξη

Αφού $\|A - B\| < \|L\|^{-1}$, ο τελεστής $I - (A - B)L$ είναι αντιστρέψιμος και από το Θεώρημα 2.6.1 $(I - (A - B)L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [(A - B)L]^k$. Έτσι

$$L_1 B = L(I - (A - B)L)^{-1} B = L(I - (A - B)L)^{-1}[I - (A - B)L]A = LA = I.$$

Από την ταυτότητα $B = [I - (A - B)L]A$ και την αντιστρεψιμότητα του $I - (A - B)L$, η σχέση (11) είναι έγκυρη. Πράγματι για $C = (I - (A - B)L)$, λόγω της αντιστρεψιμότητας του C και της σχέσης (10) έπεται ότι

$$H_2 = CH_2 = \operatorname{Im} CA \oplus C \ker L = \operatorname{Im} B \oplus C \ker L.$$

Έτσι,

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} B = \dim C \ker L = \dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} A.$$

□

Ορισμός 2.9.5 *Ένας τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ καλείται δεξιά αντιστρέψιμος αν υπάρχει τελεστής $R \in L(H_2, H_1)$ τέτοιος ώστε $AR = I$. Ο τελεστής R καλείται δεξιά αντίστροφος του A.*

Θεώρημα 2.9.4 *Έστω τελεστής $A \in L(H_1, H_2)$ ο οποίος έχει έναν δεξιά αντίστροφο R. Τότε* $\operatorname{Im} A = H_2$ *και ο τελεστής $I - RA$ είναι μία προβολή από τον H_1 πάνω στον* $\ker A$ *με πυρήνα* $\operatorname{Im} R$. *Επομένως,* $\operatorname{Im} R$ *κλειστό και*

$$H_1 = \operatorname{Im} R \oplus \ker A.$$

Απόδειξη

Προφανώς $H_2 = \operatorname{Im} AR \subseteq \operatorname{Im} A \subseteq H_2$. *Ο φραγμένος τελεστής* RA *είναι μία προβολή, αφού* $(RA)^2 = R(AR)A = RA$. *Από τις σχέσεις* $\operatorname{Im} RA \subseteq \operatorname{Im} R$ *και* $\operatorname{Im} R = \operatorname{Im} RAR \subseteq \operatorname{Im} RA$ *έχουμε ότι* $\operatorname{Im} RA = \operatorname{Im} R$. *Επιπλέον,* $\ker A \subseteq \ker RA$ *και* $\ker RA \subseteq \ker ARA = \ker A$. *Επομένως,* $\operatorname{Im}(I - RA) = \ker RA = \ker A$ *και* $\ker(I - RA) = \operatorname{Im} RA = \operatorname{Im} R$.

□

Θεώρημα 2.9.5 *Έστω τελεστής* $A \in L(H_1, H_2)$ *ο οποίος έχει έναν δεξιά αντίστροφο* $R \in L(H_2, H_1)$. *Αν ο* B *είναι ένας τελεστής στον* $L(H_1, H_2)$ *και* $\|A - B\| < \|R\|^{-1}$, *τότε ο* B *έχει έναν δεξιά αντίστροφο* $R_1 \in L(H_2, H_1)$ *ο οποίος δίνεται από τον τύπο*

$$R_1 = (I - R(A - B))^{-1} R = \sum_{k=0}^{\infty} [R(A - B)]^k R.$$

Επιπρόσθετα,

$$\dim \ker A = \dim \ker B.$$

Απόδειξη

Αφού $\|R(A - B)\| < 1$, *ο τελεστής* $I - R(A - B)$ *είναι αντιστρέψιμος και από το Θεώρημα 2.6.1* $(I - R(A - B))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [R(A - B)]^k$. *Έτσι*

$$BR_1 = B(I - R(A - B))^{-1} R = A[I - R(A - B)][(I - R(A - B))^{-1} R] = AR = I.$$

Έστω $C = (I - R(A - B))$. *Από την ταυτότητα* $B = A[I - R(A - B)] = AC$ *και την αντιστρεψιμότητα του* C *έχουμε*

$$\dim \ker B = \dim \ker AC = \dim C^{-1} \ker A = \dim \ker A.$$

□

2.10 Συμπαγείς τελεστές

Ορισμός 2.10.1 *Ένας τελεστής* $K \in L(H_1, H_2)$ *καλείται συμπαγής τελεστής αν για κάθε ακολουθία* $\{x_n\}$ *στον* H_1, $\|x_n\| = 1$, *η ακολουθία* $\{Kx_n\}$ *έχει μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει στον* H_2.

Θεώρημα 2.10.1 *Έστω* K *και* L *συμπαγείς τελεστές στον* $L(H_1, H_2)$. *Τότε*

1. *Ο* $K + L$ *είναι συμπαγής τελεστής*
2. *Αν* $A \in L(H_3, H_1)$ *και* $B \in L(H_2, H_3)$ *τότε οι* KA *και* BK *είναι συμπαγείς τελεστές.*

Απόδειξη

1. *Δίνεται* $\{x_n\} \subset H_1$, $\|x_n\| = 1$,*τότε η ακολουθία* $\{Kx_n\}$ *έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία* $\{Kx_{n'}\}$. *Εφόσον, ο τελεστής* L *είναι συμπαγής, η ακολουθία* $\{Lx_{n'}\}$ *έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία* $\{Lx_{n''}\}$. *Επομένως,* $\{(K + L)x_{n''}\}$ *συγκλίνει.*

2. *Δίνεται* $\{z_n\} \subset H_3$, $\|z_n\| = 1$, *η ακολουθία* $\{Az_n\}$ *είναι φραγμένη. Επιπλέον, εφόσον ο τελεστής* K *είναι συμπαγής έπεται ότι η ακολουθία* $\{KAz_n\}$ *έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Έτσι,* KA *συμπαγής. Αν* $\{x_n\} \subset H_1$, $\|x_n\| = 1$, *υπάρχει μία υπακολουθία* $\{Kx_{n'}\}$ *της* $\{Kx_n\}$ *η οποία συγκλίνει. Επιπλέον, λόγω της συνέχειας του* B, *η* $\{BKx_{n'}\}$ *συγκλίνει. Επομένως,* BK *συμπαγής.*

□

2.11 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ορισμός 2.11.1 *Έστω* $A \in L(H)$. *Ένας υπόχωρος* M *ενός χώρου Hilbert* H *καλείται* A*-αναλλοίωτος αν* $AM \subset M$. *Επειδή ο τελεστής* A *είναι συνεχής έπεται ότι αν ο* M *είναι* A*-αναλλοίωτος, τότε και ο* $\overline{M}$ *είναι* A*-αναλλοίωτος.*

Θεώρημα 2.11.1 *Αν ένας υπόχωρος* M *είναι* A*-αναλλοίωτος, τότε ο* $M^\perp$ *είναι* A^**-αναλλοίωτος. Αν ο* A *είναι αυτοσυζυγής, τότε ο* $M^\perp$ *είναι* A*-αναλλοίωτος.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $v \in M^\perp$. *Για οποιοδήποτε* $u \in M$, Au *είναι επίσης στον* M. *Έτσι*

$$0 = \langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle.$$

Επομένως, $A^*v \in M^\perp$.

□

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία σύνδεση μεταξύ αναλλοίωτων υπόχωρων και ορθογώνιων προβολών.

Θεώρημα 2.11.2 *Ένας κλειστός υπόχωρος* $M \subset H$, *όπου* H *χώρος Hilbert, είναι* A*-αναλλοίωτος αν και μόνο αν* $AP = PAP$, *όπου* P *είναι η ορθογώνια προβολή επί του* M.

Απόδειξη

Αν $AM \subset M$, *τότε για κάθε* $u \in H$, $APu \in AM \subset M$. *Επομένως,* $PAPu = APu$. *Αντίστροφα, αν* $PAP = AP$, *τότε για* $v \in M$

$$Av = APv = PAPv \in M.$$

□

2.12 Το φάσμα ενός τελεστή

Ορισμός 2.12.1 *Έστω* $A \in L(H)$, *όπου* H *χώρος Hilbert. Ένα σημείο* $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *καλείται ομαλό σημείο του* A *αν ο* $\lambda I - A$ *είναι αντιστρέψιμος. Το σύνολο* $\rho(A)$ *των ομαλών σημείων καλείται το επιλύον σύνολο του* A. *Το φάσμα,* $\sigma(A)$, *του* A *είναι το συμπλήρωμα του* $\rho(A)$.

Θεώρημα 2.12.1 *Το επιλύον σύνολο του* $A \in L(H)$ *είναι ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει τα* $\{\lambda \mid |\lambda| > \|A\|\}$. *Έτσι, το* $\sigma(A)$ *είναι ένα κλειστό φραγμένο σύνολο που περιέχεται στο* $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$. *Επιπλέον, για* $\lambda \in \partial\sigma(A)$, *το σύνορο του* $\sigma(A)$, *ο τελεστής* $\lambda I - A$ *δεν είναι ούτε αριστερά, ούτε δεξιά αντιστρέψιμος.*

3 Laurent και Toeplitz τελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με τελεστές στο χώρο $l_2(\mathbf{Z})$ και l_2 με την ιδιότητα ότι ο πίνακάς τους ως προς την κανονική βάση σε αυτούς τους χώρους έχει μία ειδική δομή. Πιο αναλυτικά, τα στοιχεία κάθε μίας εκ των παραλλήλων διαγωνίων της κύριας διαγωνίου είναι ίδια, δηλαδή οι καταχωρήσεις του πίνακα, α_{jk}, εξαρτώνται από τη διαφορά $j-k$ μόνο. Στον $l_2(\mathbf{Z})$ αυτοί οι τελεστές λέγονται Laurent, ενώ στον l_2 λέγονται τελεστές Toeplitz.

3.1 Τελεστές Laurent

Ένας τελεστής Laurent A είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $l_2(\mathbf{Z})$ με την ιδιότητα ότι ο πίνακας του A ως προς την κανονική ορθοκανονική βάση $\{e_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ του $l_2(\mathbf{Z})$ είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \\ & \alpha_1 & \boxed{\alpha_0} & \alpha_{-1} & \\ & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{12}$$

Εδώ το $\boxed{\alpha_0}$ υποδηλώνει την είσοδο στοιχείου α_0 που είναι τοποθετημένο στη θέση μηδέν-γραμμή, μηδέν-στήλη. Με άλλα λόγια, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής A στον $l_2(\mathbf{Z})$ είναι τελεστής Laurent αν και μόνο αν $\langle Ae_k, e_j\rangle$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $j-k$.

Πρόταση 3.1.1 *Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής A στον $l_2(\boldsymbol{Z})$ είναι τελεστής Laurent αν και μόνο αν ο A αντιμετατίθεται με το bilateral shift στον $l_2(\boldsymbol{Z})$.*

Απόδειξη

Έστω $\{e_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ η κανονική ορθοκανονική βάση του $l_2(\boldsymbol{Z})$. Θέτουμε $\alpha_{jk} = \langle Ae_k, e_j\rangle$. Υπενθυμίζουμε ότι το bilateral shift V στον $l_2(\boldsymbol{Z})$ δίνεται από τον τύπο

$$V(\ldots,\xi_{-1},\boxed{\xi_0},\xi_1,\ldots) = (\ldots,\xi_{-2},\boxed{\xi_{-1}},\xi_0,\ldots).$$

Επομένως, $Ve_j = e_{j+1}$ για κάθε $j \in \boldsymbol{Z}$. Παρατηρούμε ότι $V^* = V^{-1}$. Άρα έχουμε

$$\langle VAe_k, e_j\rangle = \langle Ae_k, V^{-1}e_j\rangle = \langle Ae_k, e_{j-1}\rangle = \alpha_{j-1,k}.$$

Επιπλέον, $\langle AVe_k, e_j\rangle = \langle Ae_{k+1}, e_j\rangle = \alpha_{j,k+1}$. Κατόπιν παρατηρούμε ότι $VA = AV$ αν και μόνο αν

$$\langle VAe_k, e_j\rangle = \langle AVe_k, e_j\rangle, \quad j,k \in \boldsymbol{Z}.$$

Επομένως, οι A και V αντιμετατίθενται αν και μόνο αν $\alpha_{j-1,k} = \alpha_{j,k+1}$ για κάθε $j,k \in \boldsymbol{Z}$, δηλαδή αν και μόνο αν ο A είναι τελεστής Laurent.

$\square$

Παρατήρηση 3.1.1 *Τελεστής πολλαπλασιασμού είναι ένας τελεστής T που ορίζεται σε κάποιο γραμμικό χώρο συναρτήσεων και η τιμή του σε κάποια συνάρτηση $\phi(t)$ δίνεται με πολλαπλασιασμό από μία δοσμένη συνάρτηση $f(t)$. Έτσι, έχουμε $T(\phi)(t) = f(t)\phi(t)$.*

Θεωρούμε $H = L_2([a, b])$ και $\alpha(t)$ μία μιγαδική συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Ορίζουμε $A : H \to H$ ως

$$(Af)(t) = \alpha(t)f(t).$$

Ο A είναι γραμμικός και για $M = \max_{a\leq t\leq b} |\alpha(t)|$,

$$\|Af\|^2 = \int_a^b |\alpha(t)f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq M^2\|f\|^2.$$

Επομένως, $\|A\| \leq M$. Για να δείξουμε ότι $\|A\| = M$, υποθέτουμε ότι $M = |\alpha(t_0)|$. Ορίζουμε μία ακολουθία $\{\phi_n\}$ στον H ως

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}}, & t \in [t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Έχουμε

$$\|\phi_n(t)\|^2 = \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} \frac{n}{2} \mathrm{d}t = 1$$

και λόγω συνέχειας της $\alpha(t)$ στο t_0, έπεται ότι

$$\|A\|^2 \geq \|A\phi_n\|^2 = \frac{n}{2}\int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |\alpha(t)|^2 \mathrm{d}t \geq \frac{n}{2}\int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |\alpha(t_0) - \epsilon|^2 \mathrm{d}t \geq |\alpha(t_0) - \epsilon|^2.$$

Επομένως, $|\alpha(t_0) - \epsilon|^2 \to |\alpha(t_0)|^2$. Έτσι, $\|A\| \geq |\alpha(t_0)| = M$. Άρα, ο A είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με νόρμα $\|A\| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$. Τώρα αν $\alpha(t) \neq 0$, για όλα τα $t \in [a, b]$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος,

$$(A^{-1}g)(t) = \frac{1}{\alpha(t)}g(t)$$

και

$$\|A^{-1}\| = \max_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\alpha(t)|}.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και θα δείξουμε ότι $\alpha(t) \neq 0$, για όλα τα $t \in [a, b]$. Για $f \in H$,

$$\|Af\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|f\|. \tag{13}$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in [c, d]$. Τότε για $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\alpha(t)| < \epsilon$ αν $|t - t_0| < \delta$. Ορίζουμε

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t - t_0| \leq \delta \\ 0, & |t - t_0| > \delta \end{cases}.$$

Τότε

$$\|Af\|^2 = \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |\alpha(t)|^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \epsilon^2 \|f\|^2,$$

το οποίο αντιτίθεται με τη σχέση (13) αν $\epsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Παρατήρηση 3.1.2 *Έστω* α *μία φραγμένη μιγαδική Lebesgue measurable συνάρτηση στον* $[-\pi, \pi]$ *και* M *ο αντίστοιχος τελεστής πολλαπλασιασμού από την* α *στον* $L_2([-\pi, \pi])$, *δηλαδή*

$$(Mf)(t) = \alpha(t)f(t), \qquad f \in L_2([-\pi, \pi]).$$

Στην Παρατήρηση 3.1.1 δείξαμε ότι ο M *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον* $L_2([-\pi, \pi])$. *Επιπλέον, ο τελεστής* M *είναι τελεστής Laurent και ο πίνακάς του, ως προς την ορθοκανονική βάση* $\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, *είναι της μορφής (12), όπου*

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t) e^{-int} \mathrm{d}t, \qquad n \in \boldsymbol{Z}. \tag{14}$$

Έπεται ότι ο τελεστής $A = \mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}$, *όπου* $\mathcal{F}$ *είναι ο μετασχηματισμός Fourier στον* $L_2([-\pi, \pi])$, *είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον* $l_2(\boldsymbol{Z})$ *και ο πίνακάς του, ως προς την κανονική βάση του* $l_2(\boldsymbol{Z})$, *δίνεται επίσης από την (12). Επομένως, ο* A *είναι τελεστής Laurent. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο* A *είναι τελεστής Laurent που ορίζεται από τη συνάρτηση* α *και προτιμούμε να αναφερόμαστε στην* α *ως την ορίζουσα συνάρτηση του* A. *Συχνά η ορίζουσα συνάρτηση* α *είναι της μορφής* $\alpha(t) = \omega(e^{it})$, *όπου το* ω *ορίζεται στον μοναδιαίο κύκλο. Σε αυτήν την περίπτωση αποκαλούμε το* ω *το σύμβολο του* A. *Η διαδικασία που περιγράψαμε αντιστοιχεί σε όλους τους τελεστές Laurent στον* $l_2(\boldsymbol{Z})$. *Με άλλα λόγια, για δοσμένο τελεστή Laurent στον* $l_2(\boldsymbol{Z})$ *μπορούμε να βρούμε μία φραγμένη μιγαδική Lebesgue measurable συνάρτηση στον* $[-\pi, \pi]$ *τέτοια ώστε ο* A *να είναι ο τελεστής Laurent που ορίζεται από την* α. *Πιο συγκεκριμένα, αν ο* A *είναι ο τελεστής Laurent που δίνεται από τον πίνακα (12), τότε μπορεί κανείς να βρει μία φραγμένη μιγαδική Lebesgue measurable συνάρτηση* α *στον* $[-\pi, \pi]$ *τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (14)[G,G,K, Section XXIII.2].*

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω* A *τελεστής Laurent που ορίζεται από τη συνεχή συνάρτηση* α. *Τότε ο* A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $\alpha(t) \neq 0$ *για κάθε* $-\pi \leq t \leq \pi$. *Σε αυτήν την περίπτωση ο* A^{-1} *είναι τελεστής Laurent που ορίζεται από τη συνάρτηση* $1/\alpha$, *τέτοιος ώστε*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \\ & b_1 & b_0 & b_{-1} & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

όπου

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\alpha(t)} e^{-int} \, dt, \qquad n \in \boldsymbol{Z}$$

Απόδειξη

Έστω M τελεστής πολλαπλασιασμού με την α στο $L_2([-\pi,\pi])$. Από την Παρατήρηση 3.1.1 γνωρίζουμε ότι ο M είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha(t) \neq 0$ για $[-\pi \leq t \leq \pi]$ και όταν ισχύει αυτό ο M^{-1} είναι τελεστής πολλαπλασιασμού με την $b = 1/\alpha$. Αφού $A = \mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}$, ο τελεστής A θα είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο M είναι αντιστρέψιμος, το οποίο δείξαμε παραπάνω. Επομένως, $A^{-1} = \mathcal{F}M^{-1}\mathcal{F}^{-1}$.

□

Πόρισμα 3.1.1 *Αν ένας τελεστής Laurent A ορίζεται από μία συνεχή συνάρτηση α τότε το φάσμα του αποτελείται από το σύνολο τιμών της α, δηλαδή*

$$\sigma(A) = \{\alpha(t) \,|\, -\pi \leq t \leq \pi\}. \tag{15}$$

Απόδειξη

Παίρνουμε $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Παρατηρούμε ότι ο $\lambda I - A$ είναι τελεστής Laurent. Συγκεκριμένα, ο $\lambda I - A$ είναι τελεστής Laurent που ορίζεται από τη συνεχή συνάρτηση $t \mapsto \lambda - \alpha(t)$. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.1.1 για να δείξουμε ότι ο $\lambda I - A$ δεν είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\lambda - \alpha(t) = 0$ για κάποιο $t \in [-\pi,\pi]$. Έπεται ότι $\lambda \in \sigma(A)$ αν και μόνο αν $\lambda = \alpha(t)$ για κάποιο $t \in [-\pi,\pi]$, το οποίο αποδεικνύει τη σχέση (15).

□

Παραδείγματα

1. Έστω A τελεστής Laurent στον $l_2(\mathbf{Z})$, ο οποίος δίνεται από τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & \\ & -2/5 & 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & -2/5 & \boxed{7/5} & -3/5 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & -3/5 & \\ & 0 & 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση

$$\alpha(t) = -\frac{2}{5}e^{it} + \frac{7}{5} - \frac{3}{5}e^{-it}$$

είναι η ορίζουσα συνάρτηση του A. Έπεται ότι $\alpha(t) = \omega(e^{it})$, όπου

$$\omega(\lambda) = -\frac{2}{5}\lambda + \frac{7}{5} - \frac{3}{5}\lambda^{-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\lambda} - 2\right)(\lambda - 3).$$

Εφόσον $\alpha(t) \neq 0$ για κάθε t, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, ο A είναι αντιστρέψιμος. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον A^{-1}. Έχουμε ότι

$$\frac{1}{\omega(\lambda)} = \frac{\frac{1}{2}\lambda^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\lambda^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\lambda}, \qquad |\lambda| = 1,$$

και έτσι

$$b(t) = \frac{1}{\alpha(t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-ijt} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} e^{ijt}.$$

Επομένως, ο αντίστροφος τελεστής A^{-1} έχει τη μορφή

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 1 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & \\ & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \\ \dots & 1/3^2 & 1/3 & \boxed{1} & 1/2 & 1/2^2 & \dots \\ & 1/3^3 & 1/3^2 & 1/3 & 1 & 1/2 & \\ & 1/3^4 & 1/3^3 & 1/3^2 & 1/3 & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Αφού $e^{it} = \cos t + i \sin t$, η ορίζουσα συνάρτηση α δίνεται επίσης από τον τύπο

$$\alpha(t) = \left(\frac{7}{5} - \cos t\right) + \frac{1}{5} i \sin t.$$

Επομένως, $\cos t = \frac{7}{5} - \operatorname{Re} \alpha(t)$ και $\sin t = 5 \operatorname{Im} \alpha(t)$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.1.1 οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το φάσμα του A δίνεται ακριβώς από την έλλειψη

$$\left(\operatorname{Re} \lambda - \frac{7}{5}\right)^2 + 25(\operatorname{Im} \lambda)^2 = 1.$$

2. Έστω A τελεστής Laurent στον $l_2(\mathbf{Z})$, ο οποίος δίνεται από τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & 1 & 1/2 & 1/2^2 & \\ & 1/2 & \boxed{1} & 1/2 & \\ & 1/2^2 & 1/2 & 1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-ijt} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{ijt}.$$

Επομένως, $\alpha(t) = \omega(e^{it})$ όπου το ω δίνεται από τον τύπο

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^{-1}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)^{-1} = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda^{-1} - \frac{2}{3}\lambda\right)^{-1}.$$

Αφού $\omega(\lambda) \neq 0$ για $|\lambda| = 1$, έχουμε ότι $\alpha(t) \neq 0$ για κάθε t. Έτσι, από το Θεώρημα 3.1.1 ο τελεστής A είναι αντιστρέψιμος και η ορίζουσα συνάρτηση b του A^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$b(t) = \frac{1}{\alpha(t)} = -\frac{2}{3}e^{-it} + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^{it}.$$

Άρα ο A^{-1} έχει τη μορφή

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 5/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & \\ & -2/3 & 5/3 & -2/3 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & -2/3 & \boxed{5/3} & -2/3 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & -2/3 & 5/3 & -2/3 & \\ & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 5/3 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\operatorname{Re} b(t) = -\frac{4}{3}\cos t + \frac{5}{3}$ και $\operatorname{Im} b(t) = 0$. Επομένως, από το Πόρισμα 3.1.1, έχουμε

$$\sigma(A^{-1}) = \{r \in \mathrm{Re} \,|\, 1/3 \leq r \leq 3\}.$$

Αφού $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \,|\, \lambda \in \sigma(A)\}$, παίρνουμε ότι $\sigma(A) = \{r \in \mathbf{R} | 1/3 \leq r \leq 3\}$. Το γεγονός ότι το $\sigma(A)$ είναι πραγματικό προκύπτει επίσης από το ότι ο A είναι αυτοσυζυγής.

3.2 Τελεστές Toeplitz

Έστω T ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον l_2. Ο παρακάτω τύπος

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \tag{16}$$

υποδηλώνει ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης (16) είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή T και την κανονική ορθοκανονική βάση $e_1, e_2, \dots$ στον l_2. Λέμε ότι ο T είναι ένας τελεστής Toeplitz αν

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \tag{17}$$

Σε αυτήν την περίπτωση αποδίδουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης (17) ως την κανονική αναπαράσταση σε πίνακα του τελεστή T.

Υπενθυμίζουμε ότι $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, όπου η μονάδα εμφανίζεται στην j καταχώρηση. Επομένως, ο T είναι τελεστής Toeplitz αν και μόνο αν $\langle Te_k, e_j\rangle$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $j - k$. Αυτή η παρατήρηση αποφέρει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1 *Ένας τελεστής T στον l_2 είναι τελεστής Toeplitz αν και μόνο αν $T = S^*TS$, όπου S είναι το forward shift στον l_2.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο T δίνεται από τον τύπο (16). Εξ' ορισμού, $Se_n = e_{n+1}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Έτσι,

$$\langle S^*TSe_k, e_j\rangle = \langle TSe_k, Se_j\rangle = \langle Te_{k+1}, e_{j+1}\rangle = a_{k+1,j+1}.$$

Άρα, $T = S^*TS$ αν και μόνο αν $a_{kj} = a_{k+1,j+1}$, για όλα τα $j, k = 1, 2, \ldots$. Επομένως, $T = S^*TS$ αν και μόνο αν ο T είναι τελεστής Toeplitz.

□

Παραδείγματα

1.

$$T = \begin{bmatrix} 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & \\ -2/5 & 7/5 & -3/5 & 0 & 0 & \\ 0 & -2/5 & 7/5 & -3/5 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & -3/5 & \\ 0 & 0 & 0 & -2/5 & 7/5 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

2.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2^2 & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \\ 1/2^2 & 1/2 & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

3.3 Band Toeplitz τελεστές

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε την αντιστρεψιμότητα των τελεστών Toeplitz που έχουν μία πρόσθετη ιδιότητα: στην κανονική αναπαράστασή τους σε πίνακα όλες οι διαγώνιοι είναι μηδενικές με την εξαίρεση ενός πεπερασμένου αριθμού που βρίσκονται σε ένα band, εκ του οποίου προέκυψε και η ονομασία τους. Ένας band Toeplitz τελεστής έχει ένα συνεχές σύμβολο της μορφής,

$$\omega(\lambda) = \sum_{\kappa=-p}^{q} \lambda^\kappa \alpha_\kappa. \tag{18}$$

Επομένως, το σύμβολο ενός band Toeplitz τελεστή είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Η συνάρτηση ω της σχέσης (18) μπορεί να αναπαραστεί ως

$$\omega(\lambda) = c\lambda^{-r}(\lambda - \alpha_1)\ldots(\lambda - \alpha_l)(\lambda - \beta_1)\ldots(\lambda - \beta_m), \tag{19}$$

όπου η c είναι μία μη-μηδενική σταθερά, ο r είναι ένας μη-μηδενικός ακέραιος, οι $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ είναι μιγαδικοί αριθμοί μέσα στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και οι $\beta_1, \ldots, \beta_m$ είναι μιγαδικοί αριθμοί στο μοναδιαίο κύκλο ή έξω από τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο.

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω T ο band Toeplitz τελεστής με σύμβολο ω της μορφής (19). Τότε ο T είναι δύο-πλευρών αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$ και $\kappa = l - r = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση*

$$T^{-1} = \frac{1}{c}\prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I)^{-1}\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*)^{-1}, \tag{20}$$

όπου S είναι το forward shift στον l_2.

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω T ο band Toeplitz τελεστής με σύμβολο ω της μορφής (18) και $\kappa = l - r$. Τότε ο T είναι αριστερά ή δεξιά αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$. Επιπρόσθετα, αν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται τότε έχουμε*

1. *ο T είναι αριστερά αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\kappa \geq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T = \kappa$ και ένας αριστερά αντίστροφος του T δίνεται από τον τύπο*
$$T^{-1} = \frac{1}{c} \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I)^{-1} (S^*)^{\kappa} \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*)^{-1} \tag{21}$$

2. *ο T είναι δεξιά αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\kappa \leq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση $\dim \ker T = -\kappa$ και ένας δεξιά αντίστροφος του T δίνεται από τον τύπο*
$$T^{-1} = \frac{1}{c} \prod_{j=1}^{m} (S - \beta_j I)^{-1} S^{-\kappa} \prod_{i=1}^{l} (I - \alpha_i S^*)^{-1} \tag{22}$$

Εδώ το S είναι το forward shift στον l_2.

Για την απόδειξη των παραπάνω Θεωρημάτων θα χρειαστεί αρχικά να παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες, καθώς και ένα Λήμμα. Αρχικά, γνωρίζουμε ότι οι τελεστές Toeplitz δε μετατίθενται. Επιπλέον, το γινόμενο δύο τελεστών Toeplitz δεν είναι κατ' ανάγκην τελεστής Toeplitz. Μπορούμε να δούμε αυτές τις δύο ιδιότητες χρησιμοποιώντας το forward shift S και το backward sift S^*. Τα S και S^* είναι τελεστές Toeplitz, το S^*S είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον l_2 και

$$SS^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Επομένως, $SS^* \neq S^*S$, δηλαδή οι τελεστές Toeplitz S και S^* δε μετατίθενται και ακόμη το γινόμενο SS^* δεν είναι τελεστής Toeplitz, αλλά μία προβολή. Επιπλέον, για $n \geq 0$ και $m \geq 0$ έχουμε

$$(S^*)^m S^n = \begin{cases} (S^*)^{m-n}, & m \geq n \\ S^{n-m}, & n \geq m \end{cases}.$$

Λήμμα 3.3.1 *Για $|\alpha| < 1$ και $|\beta| > 1$ οι τελεστές $I - \alpha S^*$ και $S - \beta I$ είναι αντιστρέψιμοι και οι αντίστροφοι δίνονται ως*

$$(I - \alpha S^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$(S-\beta I)^{-1} = -\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta^{-1} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \beta^{-2} & \beta^{-1} & 1 & 0 & \\ \beta^{-3} & \beta^{-2} & \beta^{-1} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Για $|\alpha| = |\beta| = 1$ οι τελεστές $I - \alpha S^*$ και $S - \beta I$ δεν είναι ούτε αριστερά ούτε δεξιά αντιστρέψιμοι.

Απόδειξη

Για $|\alpha| < 1$ έχουμε $\|\alpha S^*\| < 1$ και έτσι από το Θεώρημα 2.6.1 ο τελεστής $I - \alpha S^*$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του δίνεται από το πρώτο μέρος της σχέσης (23). Αφού $S - \beta I = -\beta(I - \beta^{-1}S)$, ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι ο $S - \beta I$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του δίνεται από το δεύτερο μέρος της σχέσης (23). Το φάσμα του S είναι ίσο με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Επιπλέον, το ίδιο ισχύει και για το φάσμα του S^* [G,G,K, Section II.20]. Επομένως, από τα Θεωρήματα 2.9.3 και 2.9.5 συνεπάγεται ότι οι τελεστές $I - \alpha S^*$ και $S - \beta I$ δεν είναι ούτε αριστερά, ούτε δεξιά αντιστρέψιμοι όταν $|\alpha| = |\beta| = 1$.

□

Τώρα, έστω R ένας band Toeplitz τελεστής και έστω το σύμβολό του να δίνεται από τη σχέση (18). Αφού επιτρέψουμε a_{-p} και a_q να είναι μηδέν, υποθέτουμε ότι p και q είναι θετικοί ακέραιοι. Σε αυτήν την περίπτωση για τη σχέση (18) έχουμε

$$R = a_{-p}S^{*p} + \ldots + a_{-1}S^* + a_0 I + a_1 S + \ldots + a_q S^q,$$

όπου S είναι το forward shift στον l_2. Το γεγονός ότι $S^*S = I$ υποδηλώνει ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών a και b ο $R(a + bS)$ είναι band Toeplitz τελεστής. Στην πραγματικότητα το σύμβολο του $R(a + bS)$ δίνεται ως $\omega(\lambda)(a + \lambda b)$. Ομοίως, για κάθε ζεύγος μιγαδικών c και d ο $(c+dS^*)R$ είναι τελεστής Toeplitz και το σύμβολό του είναι η συνάρτηση $(c + d\lambda^{-1})\omega(\lambda)$. Γενικά, οι $(a + bS)R$ και $R(c + dS^*)$ δεν είναι τελεστές Toeplitz. Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις θα περάσουμε στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.3.1 και 3.3.2.

Απόδειξη 3.3.2 Η αποδείξη χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος υποθέτουμε ότι $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$ και αποδεικνύουμε τα 1 και 2.Στο δεύτερο μέρος αποδεικνύουμε ότι το να ισχύει η σχέση $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$ είναι απαραίτητο για την αριστερή ή δεξιά αντιστρεψιμότητα.
Μέρος 1. Υποθέτουμε ότι $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$. Έτσι το ω δίνεται από τη σχέση (19). Έπεται ότι στη σχέση (19) οι αριθμοί $\beta_1, \ldots, \beta_m$ είναι έξω από τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή $|\beta_j| > 1$ για $j = 1, \ldots, m$. Υποθέτουμε ότι $\kappa = l - r \geq 0$. Έτσι και σύμφωνα με τα προηγούμενα αποτελέσματά μας έχουμε

$$T = c\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*)S^{\kappa}\prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I). \tag{24}$$

Πράγματι, ο S^{l-r} είναι ο band Toeplitz τελεστής με σύμβολο λ^{l-r} και επομένως εφαρμόζοντας επανειλημμένως τους κανόνες πολλαπλασιασμού στους οποίους αναφερθήκαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι ο τελεστής της σχέσης (24) είναι band Toeplitz τελεστής με σύμβολο

$$\tilde{\omega}(\lambda) = c\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i \lambda^{-1})\lambda^{l-r}\prod_{i=1}^{m}(\lambda - \beta_i).$$

Αφού $\tilde{\omega} = \omega$ έπεται ότι η (24) ισχύει. Το γεγονός ότι $|\alpha_i| < 1$ και $|\beta_j| > 1$ για κάθε i και j συνεπάγεται ότι οι $I - \alpha_i S^*$ και $S - \beta_j I$ που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της (24) είναι αντιστρέψιμοι τελεστές και έτσι οι τελεστές

$$\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*),\ \prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I) \tag{25}$$

είναι αντιστρέψιμοι τελεστές. Επίσης, ο τελεστής $T^{(-1)}$ στην (21) είναι καλά ορισμένος και χρησιμοποιώντας τη σχέση $(S^*)^{\kappa} S^{\kappa} = I$, βλέπουμε ότι $T^{(-1)}T = I$. Επομένως, ο T είναι αριστερά αντιστρέψιμος και ο $T^{(-1)}$ είναι ο αριστερά αντίστροφος του T. Από τη σχέση (24) και την αντιστρεψιμότητα των τελεστών στην (25) παίρνουμε ότι

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} T = \operatorname{codim} \operatorname{Im} S^{\kappa} = \kappa,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του 1.
Έπειτα υποθέτουμε ότι $\kappa \leq 0$ και έτσι $l \leq r$. Τότε εφαρμόζοντας επανειλημμένως τους κανόνες γινομένου που παρουσιάσαμε παραπάνω, έχουμε

$$T = c\prod_{i=1}^{l}(I - \alpha_i S^*)(S^*)^{-\kappa}\prod_{j=1}^{m}(S - \beta_j I). \tag{26}$$

Αφού οι τελεστές $I - \alpha_i S^*$ και $S - \beta_j I$ είναι αντιστρέψιμοι για κάθε i και j, ο τελεστής $T^{(-1)}$ στην (22) είναι καλά ορισμένος. Από τη σχέση $(S^*)^{-\kappa} S^{-\kappa} = I$ καταλήγουμε στο ότι $TT^{(-1)} = I$ και έτσι ο $T^{(-1)}$ είναι ένας δεξιά αντίστροφος του T. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την αντιστρεψιμότητα των τελεστών της σχέσης (25) βλέπουμε ότι

$$\operatorname{codim} \ker T = \dim \ker (S^*)^{-\kappa} = -\kappa,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του 2.
Μέρος 2. Σε αυτό το μέρος της απόδειξης θεωρούμε ότι ο T είναι αριστερά ή δεξιά αντιστρέψιμος και θέλουμε να δείξουμε ότι $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$. Η απόδειξη γίνεται με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η ω έχει ένα μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο $|\lambda| = 1$, δηλαδή στη σχέση (19) έχουμε $|\beta_\kappa| = 1$ για τουλάχιστον ένα κ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο β_κ και θέτουμε

$$\omega_1(\lambda) = \frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \beta_\kappa},\ \omega_2(\lambda) = \lambda\frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \beta_\kappa}.$$

Τότε οι ω_1 και ω_2 είναι συναρτήσεις του ίδιου τύπου της ω. Έστω T_1 και T_2 να είναι οι band Toeplitz τελεστές με σύμβολα ω_1 και ω_2 αντίστοιχα. Αφού

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)(\lambda - \beta_\kappa),\ \omega(\lambda) = (1 - \beta_\kappa \lambda^{-1})\omega_2(\lambda),$$

οι κανόνες γινομένου στους οποίους αναφερθήκαμε παραπάνω οδηγούν στην επόμενη σχέση

$$T = T_1(S - \beta_\kappa I), \; T = (I - \beta_\kappa S^*)T_2. \tag{27}$$

Από το Λήμμα 3.3.1 ο τελεστής $S - \beta_\kappa I$ δεν είναι αριστερά αντιστρέψιμος, διότι $|\beta_\kappa| = 1$. Έτσι η πρώτη ισότητα στη σχέση (27) δείχνει ότι ο T δεν μπορεί να είναι αριστερά αντιστρέψιμος. Έπεται ότι ο T θα πρέπει να είναι δεξιά αντιστρέψιμος, όμως τότε από τη δεύτερη ισότητα της σχέσης (27) συνεπάγεται ότι ο $I - \beta_\kappa S^*$ είναι δεξιά αντιστρέψιμος. Επομένως, ο $I - \overline{\beta}_\kappa S$ είναι αριστερά αντιστρέψιμος. Όμως αυτό είναι αδύνατο σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.1 και το γεγονός ότι $|\beta_\kappa| = 1$.

□

Απόδειξη 3.3.1 Από το Θεώρημα 3.3.2 και τις 1,2 σχέσεις του έχουμε ότι ο τελεστής T είναι και αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\omega(e^{it}) \neq 0$ για $-\pi \leq t \leq \pi$ και $\kappa = l - r = 0$. Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση για $\kappa = 0$ η σχέση (21) οδηγεί στη σχέση (20).

□

Βιβλιογραφία

Gohberg Israel, Goldberg Seymour, Kaashoek A. Marinus. (2003). Basic classes of linear operators. *Birkhäuser*.