

ΣΕΒΑΣΤΟΣ ΔΙΑΜΑΝΤΙΔΗΣ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ
ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ: ΕΙΣΩΣΕΙΣ
SCHRÖDINGER ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθ. Νικόλαος Καραχάλιος (Επιβλέπων)
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Καθ. Παναγιώτης Κεβρεκίδης (Μέλος)
Department of Mathematics and Statistics
University of Massachusetts, Amherst, USA

Αν. Καθ. Χρήστος Νικολόπουλος (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Καθ. Ευάγγελος Στεφανόπουλος (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Καθ. Ιωάννης Στρατής (Μέλος)
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Καθ. Δημήτριος Φραντζεσκάκης (Μέλος)
Τμήμα Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Καθ. Κωνσταντίνος Χουσιάδας (Μέλος)
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σ' αυτούς που έκαναν υπομονή
όλον αυτό τον καιρό

Ευχαριστίες

Η διατριβή αυτή βασίζεται στην μελέτη θεμάτων που μου προτάθηκαν από τον Επιβλέποντα Καθηγητή, κ. Νικόλαο Καραχάλιο, και συνδιαμορφώθηκαν σε συνεργασία με τον κ. Βάσο Αχιλλέως, Ερευνητή CNRS-Université du Maine, France, τους Καθηγητές κ.κ. Παναγιώτη Κεβρεκίδη και Δημήτριο Φραντζεσκάκη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Θεόδωρο Χωρίκη. Τους οφείλω τις πιο θερμές ευχαριστίες μου για την ολόπλευρη και ευγενική τους καθοδήγηση, την υποστήριξη, την γενναιοδωρία τους στο να μοιραστούν μαζί μου τις σκέψεις τους, τις ιδέες τους, και την διάθεση πολύ σημαντικού χρόνου δουλειάς τους, παράγοντες που καθόρισαν αποφασιστικά την παραγωγή των αποτελεσμάτων της διατριβής.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, Καθηγητή κ. Ευάγγελο Στεφανόπουλο, και Αν. Καθηγητή κ. Χρήστο Νικολόπουλο, για τις πολύτιμες συμβουλές και την συνεχή ενθάρρυνση που μου παρείχαν κατά την εκπόνηση αυτής της διατριβής, όπως και στους Καθηγητές κ.κ. Ιωάννη Στρατή και Κωνσταντίνο Χουσιάδα, για την σπουδαία τιμή της συμμετοχής τους στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή εξέτασης της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για το θετικό ακαδημαϊκό του κλίμα, άλλον ένα καθοριστικό παράγοντα για την πορεία των μεταπτυχιακών μου σπουδών και την ολοκλήρωσή τους.

Σεβαστός Διαμαντίδης

Ιούνιος 2017

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της διατριβής

Η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS)

$$iu_t + \rho u_{xx} + \delta |u|^2 u = 0,$$

αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη και καθολικά μοντέλα για την μη-γραμμική κυματική διάδοση. Εμφανίζεται ως μαθηματικό μοντέλο, του οποίου η εφαρμογή ξεκινά από την περιγραφή κυματικών φαινομένων σε υδάτινα κύματα ως την μη-γραμμική οπτική, την φυσική της συμπεκνωμένης ύλης, αλλά και την μαθηματική βιολογία, [1, 7, 28, 57]. Ανάλογης σημασίας είναι και οι σημαντικές παραλλαγές της εξίσωσης NLS, οι οποίες περιλαμβάνουν γραμμικούς όρους ανώτερης τάξης ως προς τις παραγώγους ή και μη-γραμμικότητες που εμπλέκουν παραγώγους. Αυτές οι παραλλαγές προκύπτουν συχνά ως αποτέλεσμα προσπαθειών ακριβέστερης περιγραφής των διαδικασιών που καθορίζουν τα παραπάνω κυματικά φαινόμενα. Η φυσική σημασία των παραλλαγών, αλλά και η καθολικότητά που μοιράζονται με την NLS, αποτέλεσε ένα σημαντικό κίνητρο για την μελέτη των ερωτημάτων που παρουσιάζονται σε αυτή την διατριβή.

Σημαντικό μέρος της διατριβής είναι αφιερωμένο στην μελέτη της γενικευμένης εξίσωσης Schrödinger ανώτερης τάξης (ENLS),

$$i\phi_t + \rho \phi_{xx} + \delta |\phi|^2 \phi = -i\sigma \phi_{xxx} - 3i\alpha |\phi|^2 \phi_x,$$

όπου οι συντελεστές α , ρ , σ , δ , είναι πραγματικοί.

Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε την παραγωγή της εξίσωσης, επιλέγοντας ένα από τα πολυποίκιλα πεδία φυσικών εφαρμογών στα οποία απαντάται, την δυναμική των νηματίων στροβιλισμού (vortex filaments). Τα νημάτια στροβιλισμού αποτελούν λεπτές δομές, οι οποίες παρατηρούνται στην κίνηση των ρευστών, και η μελέτη τους συγκεντρώνει σημαντικές πειραματικές και θεωρητικές ερευνητικές προσπάθειες, [24]. Η παραγωγή της εξίσωσης που παρουσιάζεται στο Κεφ. 1 οφείλεται στα αποτελέσματα των [63, 64].

Στο Κεφάλαιο 2, εστιάζουμε στην μελέτη ερωτημάτων που αφορούν την ολική ύπαρξη λύσεων για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών της ENLS, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Το βασικό αποτέλεσμα αφορά την ολική ως προς τον χρόνο ύπαρξη, H^2 - ασθενών λύσεων. Η απόδειξη στηρίζεται στην παραγωγή μιας διαφορικής εξίσωσης για κατάλληλα συναρτησιακά, που οδηγούν στον έλεγχο της H^2 - νόρμας. Βασίζεται επίσης και στην επεξεργασία των νόμων διατήρησης της ENLS, οι οποίοι ικανοποιούνται από τις ασθενείς λύσεις, όταν τα αρχικά δεδομένα είναι ικανοποιητικής ασθενούς ομαλότητας. Το κύριο εύρημα είναι ότι η συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των συντελεστών της ENLS,

$$\alpha\rho = \sigma\delta,$$

η οποία χαρακτηρίζει το λεγόμενο ολοκληρώσιμο όριο Hirota της ENLS, είναι ουσιώδης: επιτρέπει την απαλοιφή όρων με παραγώγους σημαντικά μεγαλύτερης τάξης, των οποίων ο χειρισμός δεν αιτιολογείται από την διαθέσιμη ομαλότητα των λύσεων. Η απαλοιφή των όρων αυτών, γίνεται μέσω μιας διαδικασίας χωροχρονικής ομαλοποίησης προσεγγίσεων της λύσης, και το πέρασμα στο ασθενές όριο αυτών των ομαλών προσεγγίσεων, την ασθενή λύση. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε αυστηρή θεμελίωση των σχετικών ενεργειακών ποσοτήτων, [88]. Σημαντική βοήθεια για την υλοποίηση της διαδικασίας παρέχουν οι συμπαγείς εμφυτεύσεις

των εμπλεκομένων χώρων Sobolev, όσον αφορά τον χειρισμό των μη-γραμμικών πολλαπλασιαστών, που οδηγούν στην παραγωγή των ενεργειακών ποσοτήτων. Ο περαιτέρω χειρισμός των διαφορικών εξισώσεων για συναρτησιακά, με χρήση των ανισοτήτων Gagliardo-Nirenberg, σε συνδυασμό με κατάλληλα εναλλακτικά Θεωρήματα [8], οδηγεί στην απόδειξη της ολικής ύπαρξης των ασθενών λύσεων. Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε, ότι εκτός από την συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των συντελεστών, είναι απαραίτητη και η παρουσία του όρου που αντιστοιχεί στην διασπορά δεύτερης τάξης, δηλαδή $\rho \neq 0$. Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία για την ολική ύπαρξη. Σημειώνουμε ότι η διερεύνηση του ερωτήματος της ολικής ύπαρξης, είναι σημαντική για τις μη-γραμμικές εξισώσεις διασποράς σε μια χωρική διάσταση: όπως έχει αναλυθεί στην μονογραφία [17], οι λύσεις των εξισώσεων αυτών επιδεικνύουν φαινόμενα έκρηξης των λύσεων τους σε πεπερασμένο χρόνο, παρά το γεγονός ότι μπορεί να περιέχουν το πολύ κυβικούς, μη γραμμικούς όρους. Παραπέμπουμε στις αναφορές [48] για εξισώσεις τύπου NLS, και [95], για εξισώσεις τύπου Dullin - Gottwald - Holm. Επιπλέον, οι γραμμές στις οποίες κινούμαστε έχουν αιτιολογημένο κίνητρο από τα αποτελέσματα της θεωρίας Kato [53] - [56]. Βάση αυτών των αποτελεσμάτων, φαινόμενα έκρηξης λύσεων εμφανίζονται σε νόρμες τάξης H^k , με $k \geq 2$. Σημειώνουμε ότι ερωτήματα ολικής ύπαρξης λύσεων για το πρόβλημα Cauchy, που αφορούν εξισώσεις τύπου ENLS στον $H^k(\mathbb{R})$, έχουν μελετηθεί στις εργασίες των [49, 79], για $1 \leq k < 2$. Σημειώνουμε επίσης ότι το ενδιαφέρον για την αυστηρή τεκμηρίωση των νόμων διατήρησης και των εξισώσεων ενέργειας, είναι υπογραμμισμένο στις εργασίες [9, 10, 11], αλλά και στην εργασία [73], η οποία πραγματεύεται τους νόμους διατήρησης για πρόβλημα Cauchy της NLS, σε χωρία $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Στο Κεφάλαιο 3, η οπτική μας αλλάζει: από την διερεύνηση βασικών ερωτημάτων της ποιοτικής θεωρίας του Κεφ. 2, μετατοπιζόμαστε προς την διερεύνηση συνθηκών, κάτω από τις οποίες, η ENLS μπορεί να υποστηρίξει λύσεις οδεύοντος κύματος. Η ανάλυση βασίζεται στην παραγωγή και μελέτη κατάλληλου δυναμικού συστήματος. Αυτή η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα για την παραγωγή διαφόρων τύπων οδεύοντων κυμάτων: Για περιοδικά κύματα βλ. [29, 45], ενώ για εντοπισμένα και μη-φραγμένα κύματα βλ. [45, 89]. Με την ανάλυση του πορτραίτου φάσεων για το δυναμικό σύστημα που προκύπτει, εξάγουμε συνθήκες για την ύπαρξη φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων. Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής. Πρώτον, οδεύοντα σολιτόνια υπάρχουν μόνο όταν ισχύει η συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των συντελεστών. Δεύτερον, προσδιορίζεται ο ρόλος του κυματαριθμού k_0 του φέροντος κύματος: αν $k_0 \neq 0$ και $k_0 \neq \rho/3\sigma$, οι λύσεις του οδεύοντος κύματος υπάρχουν μόνο με την παρουσία των όρων διασποράς δεύτερης ($\rho \neq 0$) και τρίτης τάξης ($\sigma \neq 0$) αντίστοιχα. Αν $k_0 = 0$, οδεύοντα κύματα μπορούν να υπάρξουν και στις δύο περιπτώσεις $\rho < 0$ και $\rho = 0$, οι οποίες αντιστοιχούν στο λεγόμενο «σημείο μηδενικής διασποράς» (ZDP). Για την σημασία του ZDP, στα πλαίσια της φυσικής των μη-γραμμικών οπτικών ινών, παραπέμπουμε στην μονογραφία [7]. Μια επίσης ενδιαφέρουσα παρατήρηση, είναι ότι στην περίπτωση του σημείου ZDP, βρίσκουμε ότι η φέρουσα συχνότητα επίσης μηδενίζεται. Τότε, η συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των συντελεστών συνεπάγεται ότι $\delta = 0$, και η ENLS αντιστοιχεί στην εξίσωση cmKdV (complex modified KdV). Τρίτο ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι δεν υποστηρίζονται λύσεις στάσιμων κυμάτων από την ENLS. Επίσης, παρουσιάζουμε αποτελέσματα από αριθμητικές προσομοιώσεις, που δείχνουν ότι όταν ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας τα σολιτόνια είναι ανθεκτικά σε τυχαίες διαταραχές μικρού πλάτους. Από την άλλη, όταν αυτή η συνθήκη παραβιάζεται, τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η

εξέλιξη του αρχικού μοναχικού παλμού συνοδεύεται πάντα από εκπομπή ακτινοβολίας, η οποία σε μεταγενέστερο χρόνο τείνει να διαχυθεί. Τα αποτελέσματα της ανθεκτικότητας των σολιτονίων, καθώς και της εκπομπής ακτινοβολίας όταν παραβιάζεται η (2.2), είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα των εργασιών [74, 92], που αναφέρονται στην συμπεριφορά των φωτεινών σολιτονίων. Επίσης, οι αριθμητικές προσομοιώσεις αποκαλύπτουν και σημαντικές διαφορές στη δυναμική των φωτεινών και των σκοτεινών παλμών. Για παράδειγμα, παρατηρώντας την εκπομπή ακτινοβολίας, βρίσκουμε ότι ένα σκοτεινό μοναχικό κύμα, τείνει σε ένα σκοτεινό παλμό, που στο τέλος διαχωρίζεται από την εκπεμπόμενη ακτινοβολία. Η τελευταία, ταξιδεύει ταχύτερα από το σολιτόνιο, και έχει τη μορφή ενός φαινομενικά σχεδαστικού χρουστικού κύματος [46]. Αντίθετα, στην περίπτωση του φωτεινού μοναχικού κύματος, η ακτινοβολία εμφανίζεται πίσω από τον κυρίως παλμό. Μια άλλη ενδιαφέρουσα διαφορά, σχετίζεται με την κατεύθυνση διάδοσης των παλμών. Η εξέλιξη των φωτεινών σολιτονίων συνδέεται με φαινόμενα αναστροφής της κίνησης του. Δηλαδή το σολιτόνιο κινείται αρχικά προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x , αλλά κάποια στιγμή, η κατεύθυνση κίνησης γίνεται αντίθετη. Τελικά, κινείται με σχεδόν σταθερή ταχύτητα προς την αρνητική κατεύθυνση του ίδιου άξονα. Αυτό το φαινόμενο δεν παρατηρείται στην εξέλιξη του σκοτεινού σολιτονίου. Μια τέτοια συμπεριφορά, που επιδεικνύουν τα φωτεινά μοναχικά κύματα, παραπέμπει σε παρατηρήσεις σχετικές με παλινδρομική κίνηση συγκεκριμένων μοναχικών κυμάτων, τα οποία καλούνται «boomerons», [26]. Για την αξιοπιστία των αριθμητικών αποτελεσμάτων, σημειώνουμε ότι όλα τα αριθμητικά πειράματα, έχουν εκτελεστεί με τη χρήση ψευδο-φασματικής μεθόδου, κατά την οποία οι αριθμητικές ποσότητες που σχετίζονται με τους νόμους διατήρησης της ENLS, κάτω από την ισχύ της συνθήκης ισορροπίας των συντελεστών, διατηρούνται με μεγάλη ακρίβεια.

Στο Κεφάλαιο 4, διερευνούμε την αστάθεια διαμόρφωσης (modulation instability) επιπέδων κυμάτων, που αποτελούν λύσεις της ENLS. Υπενθυμίζουμε ότι η αστάθεια διαμόρφωσης, είναι η διαδικασία μέσω της οποίας, ένα επίπεδο κύμα της μορφής $\phi(x, t) = \phi_0 e^{i(kx - \omega t)}$, $\phi_0 \in \mathbb{R}$ γίνεται ασταθές υποκειμένο σε διαταραχές, οι οποίες έχουν επίσης την μορφή γραμμικού κύματος. Η αστάθεια εκδηλώνεται όταν ικανοποιούνται συγκεκριμένες συνθήκες για το πλάτος της λύσης ϕ_0 και τους συντελεστές της εξίσωσης, και οι κυματαριθμοί των διαταραχών ανήκουν σε συγκεκριμένο διάστημα, το λεγόμενο διάστημα (ή «ζώνη») αστάθειας. Η διαμόρφωση αστάθειας, είναι ένας κρίσιμης σημασίας μηχανισμός, στον οποίο οφείλεται η ανάδυση μη γραμμικών, χωρικά εντοπισμένων κυματομορφών, ή και η εκδήλωση χωροχρονικής χαοτικής συμπεριφοράς, [93]. Ένα από τα βασικά ευρήματα της παρούσας μελέτης, είναι η επισήμανση δραστικών διαφορών μεταξύ των συνθηκών για την διαμόρφωση αστάθειας στην εξίσωση ENLS, το ολοκληρώσιμο όριο της Hirota, αλλά και την κυβική εξίσωση NLS. Η τελευταία, αποτελεί το όριο ENLS για $\alpha = \sigma = 0$. Με την παραγωγή συγκεκριμένων συνθηκών για την εξίσωση ENLS παρατηρούμε τα εξής: αν ο κυματαριθμός της λύσης του επιπέδου κύματος είναι $k = 0$, τότε οι συνθήκες διαμόρφωσης αστάθειας για την εστιάζουσα (focusing) εκδοχή της ENLS ταυτίζονται στην περίπτωση του ορίου $\alpha = \sigma = 0$, με αυτές της εστιάζουσας NLS. Επιπρόσθετα, τα επίπεδα κύματα είναι ευσταθή ως προς την διαμόρφωση στην περίπτωση της αφεστιάζουσας (defocusing) ENLS, όπως συμβάνει και με το αντίστοιχο όριο της, την αφεστιάζουσα NLS. Από την άλλη, όταν $k \neq 0$, βλέπουμε ότι οι συνθήκες διαμόρφωσης αστάθειας για την εστιάζουσα και την αφεστιάζουσα ENLS διαφέρουν από τις συνθήκες που διέπουν την αστάθεια για τις αντίστοιχες εκδοχές των ορίων της. Ειδικότερα, οι συνθήκες διαμόρφωσης αστάθειας στην εστιάζουσα περίπτωση της ENLS, δείχνουν ότι το

μήκος του διαστήματος αστάθειας μπορεί να μεγαλώνει ή να μικραίνει, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων. Επίσης, στην περίπτωση της αφεστιάζουσας ENLS ορίζεται διάστημα διαμόρφωσης αστάθειας. Το γεγονός αυτό είναι σε πλήρη αντίθεση με το όριο της αφεστιάζουσας NLS, καθώς για την τελευταία, τα επίπεδα κύματα είναι πάντα ευσταθή ως προς την διαμόρφωση. Εκτός από τις παραγόμενες συνθήκες, ένα επίσης σημαντικό εύρημα αφορά την χρήση της διατήρησης της ενέργειας ως διαγνωστικού μέσου για την εκδήλωση της αστάθειας διαμόρφωσης, στην περίπτωση του μη-ολοκληρώσιμου ορίου της ENLS. Οι αναλυτικές μελέτες του Κεφαλαίου ολοκληρώνονται με την αναλυτική αιτιολόγηση του γεγονότος ότι η εκδήλωση της αστάθειας διαμόρφωσης εκδηλώνεται με την διέγερση αχέραιων πολλαπλασίων του ασταθούς κυματαριθμού, που επιλέγεται εντός του διαστήματος αστάθειας. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα των αριθμητικών εξομοιώσεων βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τις αναλυτικές προβλέψεις των συνθηκών για την αστάθεια διαμόρφωσης.

Στο Κεφάλαιο 5, μελετάμε μια διαφορετικού τύπου εξίσωση ENLS. Η παραλλαγή αυτή είναι εμπλουτισμένη και με άλλους όρους ανώτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, αλλά και με όρους που περιγράφουν μηχανισμούς απώλειας ή παροχής ενέργειας. Συγκεκριμένα, μελετάμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση

$$u_t + \frac{\delta}{2} i u_{xx} - i |u|^2 u = \gamma u + \delta |u|^2 u + \beta u_{xxx} + \mu (|u|^2 u)_x + (\nu - i \sigma_R) u (|u|^2)_x,$$

με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα βασικό μοντέλο για την μη-γραμμική οπτική, όπου μια ακριβέστερη περιγραφή της δυναμικής βραχέων παλμών, οφείλει να συμπεριλάβει επιδράσεις επίκλισης (self-steepening effects). Οι επιδράσεις αυτές περιγράφονται από τους όρους με πραγματικούς συντελεστές μ , ν . Για διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις, συμπεριλαμβάνονται επιδράσεις της λεγόμενης σκέδασης Raman (SRS effect), οι οποίες περιγράφονται από τον όρο με τον πραγματικό συντελεστή σ_R . Οι όροι γραμμικών και μη-γραμμικών πηγών/απωλειών ενέργειας με πραγματικούς συντελεστές γ , δ , συνεισφέρουν πολλές φορές στην σταθεροποίηση των διαδιδόμενων σολιτονικών παλμών. Για την εξίσωση αυτή, διερευνούμε την έκρηξη των λύσεων της σε πεπερασμένο χρόνο. Η ανάλυσή μας έχει ως κίνητρο και λαμβάνει υπόψη τα πορίσματα και τα ερωτήματα που τέθηκαν στην εργασία [48], για την ευστάθεια των σολιτονίων και τον ρόλο του κυματικού υποβάθρου. Στρηριζόμενοι σε ενεργειακού τύπου επιχειρηματολογία, η οποία εφαρμόζεται για την μελέτη της συμπεριφοράς L^2 - ενεργειακών συναρτησιακών, αποδεικνύουμε ότι η συμπεριφορά των εν λόγω συναρτησιακών εξαρτάται πρωτίστως από τις παραμέτρους γ , δ . Καταστάσεις έκρηξης (φθοράς) των λύσεων, ορίζονται για $\gamma, \delta > 0$ ($\gamma, \delta < 0$). Ένα από τα βασικά αποτελέσματα, αποτελεί ο εντοπισμός μιας κρίσιμης τιμής $\gamma^* \leq 0$, για την παράμετρο γραμμικής απόσβεσης/πηγής, στην περιοχή $\gamma < 0$, $\delta > 0$, με ρόλο διαχωρίζουσας: η κρίσιμη τιμή διαχωρίζει την συμπεριφορά της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο από αυτή της φθοράς των λύσεων. Ενδιαφέροντα συμπεράσματα στις περιπτώσεις $\gamma, \delta > 0$ και $\gamma, \delta < 0$, προκύπτουν για την δυναμική των λύσεων που έχουν αρχικό προφίλ παρόμοιο με αυτό των φωτεινών και των σκοτεινών σολιτονίων. Τα συμπεράσματα αυτά σχετίζονται με την ευστάθεια, για μεγάλο χρονικό διάστημα, κυμάτων που υπό άλλες συνθήκες επιβιώνουν για σχετικά μικρά χρονικά διαστήματα. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων για μια ποικιλία αρχικών συνθηκών απέδειξαν μια ικανοποιητική συμφωνία ανάμεσα στα αναλυτικά άνω φράγματα για τον χρόνο έκρηξης και των αντίστοιχων αριθμητικών τιμών του, όπως επί-

σης και την ακρίβεια της κρίσιμης διαχωριστικής τιμής γ . Παρατηρήσαμε πλήρη τάνυση των αναλυτικών εκτιμήσεων με τον αριθμητικό χρόνο έκρηξης, για αρχικά δεδομένα επιπέδου κύματος, και πολύ καλή για αρχικές συνθήκες με βύθισμα πυκνότητας, οι οποίες προσομοιάζουν την πυκνότητα ενός σκοτεινού σολιτονίου. Μολονότι οι αναλυτικές εκτιμήσεις σαφώς ικανοποιούνται ως άνω φράγματα στην περίπτωση αρχικών δεδομένων που προσομοιάζουν φωτεινό εντοπισμένο παλμό, παρατηρούμε αποκλίσεις των αναλυτικών εκτιμήσεων από τον αριθμητικό χρόνο έκρηξης. Τα αίτια της απόκλισης ερμηνεύονται αναλυτικά, αναδεικνύοντας ότι σε αυτή την περίπτωση αρχικών δεδομένων, η δυναμική της έκρηξης καθοδηγείται από την αύξηση του πλάτους του παλμού και όχι από την αύξηση του πλάτους του κύματος υποβάθρου, όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Επιπλέον, οι αριθμητικές προσομοιώσεις εξέτασαν την επίδραση των παραγόντων υψηλότερης τάξης. Διαπιστώθηκε ότι επηρεάζουν δραστικά την προσωρινή δυναμική, που προηγείται της έκρηξης ή της φθοράς. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε μια συμπεριφορά τύπου «βηματικής συνάρτησης» για τον αριθμητικό χρόνο έκρηξης, με τα άλματα να συσχετίζονται με μεταβάσεις σε διαφορετικού τύπου προσωρινή δυναμική, πριν την έκρηξη, ή την φθορά των λύσεων.

Επιστημονικές δημοσιεύσεις από την διατριβή. Τα πρωτότυπα αποτελέσματα της διατριβής, αναπτύσσονται στα Κεφ. 2-5, και έχουν οδηγήσει στις ακόλουθες δημοσιεύσεις σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με σύστημα κριτών:

V. Achilleos, S. Diamantidis, D. J. Frantzeskakis, N. I. Karachalios and P. G. Kevrekidis. *Conservation laws, exact travelling waves and modulation instability for an extended nonlinear Schrödinger equation*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **48** (2015) no. 35, 355205 (33 pp).

V. Achilleos, S. Diamantidis, D. J. Frantzeskakis, T. P. Horikis, N. I. Karachalios and P. G. Kevrekidis. *Collapse for the higher-order nonlinear Schrödinger equation*. Physica D: Nonlinear Phenomena **316** (2016), 57-68 (12pp).

Περιεχόμενα

- 1 Παραγωγή εξισώσεων NLS ανώτερης τάξης:
Νηματία στροβιλισμού 11
 - 1.1 Μαγνητικό πεδίο παραγόμενο από ρευματοφόρο αγωγό 12
 - 1.2 Κινήσεις ρευστών 15
 - 1.3 Γενική κίνηση του νηματίου στροβιλισμού 20

- 2 Ενεργειακές εξισώσεις για ασθeneis λύσεις, και η ολική τους ύπαρξη 25
 - 2.1 Εξισώσεις ενέργειας και ολική ύπαρξη λύσεων 26

- 3 Ακριβείς λύσεις μοναχικών κυμάτων 43
 - 3.1 Αριθμητικές μελέτες 50

- 4 Αστάθεια διαμόρφωσης επιπέδων κυμάτων 55
 - 4.1 Αριθμητική μελέτη 61
 - 4.2 Συζήτηση και συμπεράσματα των Κεφαλαίων 2-4 64

- 5 Έκρηξη λύσεων για την εξίσωση ENLS ανώτερης τάξης, με μηχανισμούς ενεργειακής πηγής/απώλειας 67
 - 5.1 Εισαγωγή 67
 - 5.2 Έκρηξη των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο, για L^2 -συναρτησιακά 70
 - 5.3 Αριθμητική διερεύνηση της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες συνεχούς κύματος 74
 - 5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες τύπου sech 79
 - 5.5 Αριθμητικά αποτελέσματα για την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες τύπου \tanh^2 85
 - 5.6 Συμπεράσματα 89

Κεφάλαιο 1

Παραγωγή εξισώσεων NLS ανώτερης τάξης: Νημάτια στροβιλισμού

Διάφορες έρευνες σε ρευστά έχουν δείξει ότι για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds, αναδύονται μέσα στη μάζα του ρευστού λεπτές δομές, που ονομάζονται νημάτια στροβιλισμού (vortex filaments), [24].

Εργαστηριακές και αριθμητικές μελέτες έχουν δείξει ότι αυτές οι δομές έχουν σχετικά μεγάλη διάρκεια ζωής σε σχέση με τη διάρκεια των συνηθισμένων στροβίλων, κι έτσι μπορούν να θεωρηθούν επίμονες (persistent). Αν και αριθμητικές προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι αυτά τα νημάτια δεν συνεισφέρουν αποφασιστικά στη συνολική κίνηση του ρευστού, καθώς κατέχουν ένα μικρό μέρος της κινητικής ενέργειας και της στροφορμής του, έχουν πιθανώς στενή σχέση με στιγμιότυπα της συμπεριφοράς του ρευστού, σε καθεστώς τυρβώδους ροής [61, 24]. Επίσης, οι δομές αυτές διατηρούν την αυτοτέλειά τους για αρκετό χρόνο και συμπεριφέρονται ως αυτόνομες οντότητες, χωρίς εμφανή αλληλεπίδραση με το ρευστό που τις περιβάλλει. Όπως έχει προταθεί [24], συχνά χρησιμοποιείται η έννοια των λεπτών σωλήνων στροβιλισμού (thin vortex tubes), για την προσέγγιση του στροβιλισμού στον τρισδιάστατο χώρο. Μολονότι πολλές φορές οι σωλήνες στροβιλισμού προσεγγίζονται ως γραμμικά αντικείμενα, άμεσες παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι τα νημάτια στροβιλισμού είναι περισσότερο πολύπλοκα και διαθέτουν μη τετράμηνή δομή, ως προς την καμπυλότητα και την στρέψη τους. Πειραματικά, έχουν παρατηρηθεί περίπλοκες συστροφές ενός λεπτού σωλήνα στροβιλισμού σε περιστρεφόμενο δοχείο [47, 68].

Η προέλευση των μη γραμμικών εξισώσεων διασποράς για την περιγραφή των νηματίων στροβιλισμού καθορίζεται από την εξέλιξη του μετασχηματισμού Hasimoto:

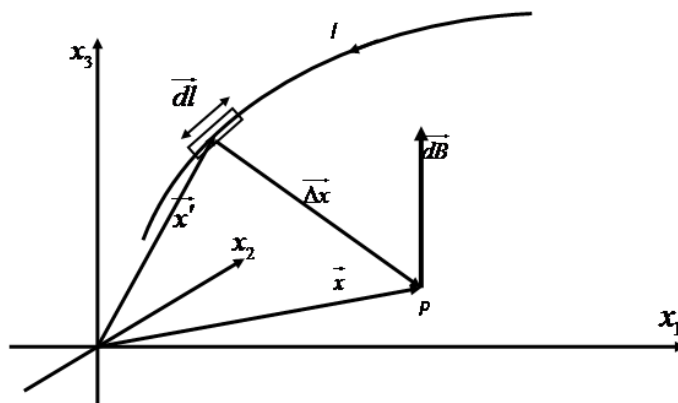
$$(1.1) \quad \varphi(x, t) = \kappa(x, t)e^{i \int \tau(\sigma, t) d\sigma}$$

όπου οι συναρτήσεις $\kappa(x, t)$, $\tau(\sigma, t)$ παριστάνουν αντίστοιχα την καμπυλότητα και τη στρέψη των εξελισσόμενων νηματίων, ενώ η μεταβλητή x παριστάνει την απόσταση που μετράμε κατά μήκος του νηματίου. Όταν οι συναρτήσεις αυτές είναι καλώς ορισμένες η μορφή των νηματίων είναι μοναδικά ορισμένη, ως μία καμπύλη

που εξελίσσεται στο χώρο. Πειραματικά αποτελέσματα [47, 68] έχουν δείξει ότι τα νημάτια αυτά υποστηρίζονται από κύματα, αποτελούμενα από ελικοειδείς στρεβλώσεις στην μορφή οδεύοντος κύματος, που μπορούν να περιγραφούν από τη θεωρία σολιτονίων, [63, 64, 35]. Από άλλα πειράματα, έχει φανεί ότι αυτές οι στρεβλώσεις παρουσιάζουν ευστάθεια κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης (άλλη μία ομοιότητα με τη συμπεριφορά των σολιτονίων) [34].

Η εξίσωση Hirota, με την κατασκευή της οποίας θα ασχοληθούμε εδώ, μπορεί να προέλθει είτε από τις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού, είτε από τις εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών για την περιγραφή της εξέλιξης του μετασχηματισμού (1.1). Είναι γνωστή άλλωστε η ομοιότητα ανάμεσα στον μαθηματικό φορμαλισμό των νόμων, αυτών των κατά τα άλλα, διαφορετικών περιοχών της Φυσικής. Η κατασκευή αυτή θα γίνει ανεξάρτητα για κάθε χώρο, τουλάχιστον μέχρι το σημείο του προσδιορισμού του διανυσματικού δυναμικού με τις σχέσεις (1.15) και (1.21), από τις οποίες παράγεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου και το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού αντίστοιχα. Η μετέπειτα ακολουθούμενη διαδικασία είναι πανομοιότυπη και στις δύο περιπτώσεις, και για το λόγο αυτό θα πραγματοποιηθεί μόνο για την περίπτωση των ρευστών.

1.1 Μαγνητικό πεδίο παραγόμενο από ρευματοφόρο αγωγό



Σχήμα 1.1: Ένταση $d\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου σε σημείο P, που οφείλεται σε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ ενός ρευματοφόρου αγωγού. Τα διανύσματα θέσης αναφέρονται σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) .

Έστω αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε σημείο P, με διάνυσμα θέσης \vec{x} . Η ένταση του μαγνητικού πεδίου, που οφείλεται σε ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού μήκους $d\vec{l}$ και διανύσματος θέσης \vec{x}' , δίνεται από το νόμο των Biot - Savart :

$$(1.2) \quad \vec{dB} = kI \frac{d\vec{l} \times \vec{\Delta x}}{|\vec{\Delta x}|^3} \Rightarrow \vec{dB} = kI \frac{d\vec{l} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Αν η διατομή του αγωγού είναι dS , και η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(\vec{x}')$, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση $I = \vec{J}(\vec{x}') dS$. Αν χρησιμοποιήσουμε μονάδες από το σύστημα CGS, για την ηλεκτρική σταθερά ισχύει $k = \frac{1}{c}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Έτσι η σχέση (1.2) γίνεται:

$$(1.3) \quad d\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'.$$

Για να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στην επίδραση ολόκληρου του αγωγού, πρέπει να ολοκληρώσουμε την (1.3) κατά μήκος του αγωγού. Έτσι θα έχουμε:

$$(1.4) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'.$$

Επειδή όμως $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$, η σχέση (1.4) γίνεται

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \vec{J}(\vec{x}') d^3x' \Rightarrow$$

$$(1.5) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x',$$

αφού $\vec{\nabla} \Phi \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A})$ για κάθε βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\vec{x})$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, και άρα, από την (1.5) προκύπτει η

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) = 0.$$

Επομένως, επιβεβαιώσαμε ότι

$$(1.6) \quad \vec{\nabla} \vec{B} = 0.$$

Στην συνέχεια, με χρήση της ταυτότητας $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του \vec{B} :

$$(1.7) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) - \frac{1}{c} \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

Όμως $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$, οπότε, για τον πρώτο όρο του δεξιού μέρους της (1.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' &= \int \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = - \int \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \\ &= \left[-\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \vec{J}(\vec{x}') d^3 x' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \vec{\nabla} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = 0.$$

Η εξίσωση (1.8), είναι συνεπής με το γεγονός ότι έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης, άρα και σταθερής πυκνότητας ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$). Επίσης, καθώς ισχύει ότι $\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, ο δεύτερος όρος της (1.7) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' &= \int \vec{J}(\vec{x}') \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \\ &= \int \vec{J}(\vec{x}') [-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')] d^3 x' = -4\pi \int \vec{J}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3 x' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = -4\pi \vec{J}(\vec{x}').$$

Αντικαθιστώντας τις (1.8) και (1.9) στην (1.7), βρίσκουμε τελικά ότι ο στροβιλισμός του B είναι :

$$(1.10) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}').$$

Έτσι λοιπόν, προκύπτουν οι δύο βασικοί νόμοι για τα μαγνητοστατικά πεδία:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}').$$

Η σχέση (1.6) μας υποδεικνύει την ύπαρξη διανυσματικού δυναμικού $\vec{V}(\vec{x})$ από το οποίο παράγεται το μαγνητικό πεδίο

$$(1.11) \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}),$$

έτσι ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$. Από τις σχέσεις (1.5) και (1.11) συμπεραίνουμε ότι το διανυσματικό δυναμικό $\vec{V}(\vec{x})$ θα είναι της μορφής:

$$(1.12) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}),$$

όπου $\Psi(\vec{x})$ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την (1.11) στην (1.10), παίρνουμε:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Αφού η (1.12) ισχύει και όταν θέσουμε $\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi$ στη θέση του \vec{V} , επιλέγουμε τέτοιο \vec{V} ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Με αυτή την επιλογή, η (1.13) γίνεται:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi) \right] - \Delta(\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \Delta(\vec{\nabla}\Psi) - \Delta \vec{V} - \Delta(\vec{\nabla}\Psi) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \Delta \vec{V} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Τέλος για $\Psi(\vec{x}) = 0$ η (1.14) παίρνει τη μορφή:

$$(1.15) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

1.2 Κινήσεις ρευστών

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό και υποθέτουμε ότι $\vec{u}(\vec{x})$ είναι το πεδίο ταχυτήτων του. Ο στροβιλισμός σε κάθε σημείο \vec{x} του ρευστού, δίνεται από τη σχέση:

$$(1.16) \quad \vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{u}.$$

Ως γραμμή στροβιλισμού θεωρούμε κάθε καμπύλη, που σε οποιοδήποτε σημείο της, το διάνυσμα στροβιλισμού $\vec{\xi}$ είναι εφαπτόμενο σε αυτήν. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, [24]: Αν μια τέτοια καμπύλη, προκύπτει από μια ροή που υπακούει στις εξισώσεις του Euler:

$$(1.17) \quad \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0,$$

$$(1.18) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0,$$

και η καμπύλη αυτή είναι γραμμή στροβιλισμού σε κάποια χρονική στιγμή, θα παραμένει γραμμή στροβιλισμού και στη συνέχεια, κινούμενη ως «υλική γραμμή» του ρευστού. Έστω C_t μια κλειστή καμπύλη τη χρονική στιγμή t . Η κυκλοφορία του ρευστού κατά μήκος της C_t , σύμφωνα με το θεώρημα κυκλοφορίας του Kelvin, παραμένει σταθερή στο πέρασμα του χρόνου. Η κυκλοφορία ενός σωλήνα στροβιλισμού είναι

$$\Gamma_{C_t} = \int_{C_t} \vec{u} \cdot d\vec{s},$$

και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Stokes, προκύπτει ότι:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Gamma_{C_t} &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \vec{N} dA = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{u} d\vec{A} \Rightarrow \\ \Gamma_{C_t} &= \int_S \vec{\xi} d\vec{A}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το $\text{supp } \vec{\xi}$ είναι ένας σωλήνας στροβιλισμού, κάθετος στην στοιχειώδη επιφάνεια dA . Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το πεδίο ταχυτήτων σε κάποιο σημείο \vec{x} , έξω από το σωλήνα στροβιλισμού. Η εξίσωση (1.18) μας υποδεικνύει την ύπαρξη διανυσματικού δυναμικού $\vec{V}(\vec{x})$ από το οποίο παράγεται το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού $\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$, έτσι ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$. Επιλέγουμε το δυναμικό αυτό έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\nabla} \vec{V} = 0$. Μετά από αυτή την επιλογή, το διάλυμα στροβιλισμού γίνεται :

$$(1.20) \quad \vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} = -\Delta \vec{V}.$$

Λύνουμε τη (1.20) κάνοντας χρήση της συνάρτησης Green και βρίσκουμε ότι

$$(1.21) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'.$$

Εύκολα, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η λύση (1.21) έχει την ιδιότητα $\vec{\nabla} \vec{V}(\vec{x}) = 0$. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{V}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \right) = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\xi}(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \vec{V}(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\xi}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'. \end{aligned}$$

Όμως, καθώς

$$\vec{\nabla}' \vec{\xi} = \vec{\nabla}' (\vec{\nabla}' \times \vec{u}) = 0,$$

θα ισχύει

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{V}(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int \left[\vec{\xi}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}' \vec{\xi}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] d^3 x' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x'. \end{aligned}$$

Δείξαμε επομένως, ότι:

$$\vec{\nabla} \vec{V}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^2 x' = 0.$$

Για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης, χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι τα επιφανειακά ολοκληρώματα δεν συνεισφέρουν στη ροή του ρευστού.

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \vec{\xi}(\vec{x}') d^3x' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d\vec{A} dx' \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$(1.22) \quad \vec{u}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\xi}(\vec{x}') d\vec{A} \int_l \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Σημειώνουμε ότι $d\vec{x}'$ συμβολίζει ένα στοιχειώδες διάνυσμα μήκους, κατά μήκος της γραμμής στροβιλισμού l .

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.19), η (1.22) γίνεται :

$$(1.23) \quad \vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Θα θεωρήσουμε στην συνέχεια, έναν σωλήνα στροβιλισμού αμελητέου πάχους. Ένας τέτοιος σωλήνας θα αναφέρεται ως *νημάτιο στροβιλισμού*. Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη ενός νηματίου στροβιλισμού πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.23) για σημεία που βρίσκονται κοντά στο νηματίο. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε ένα καμπύλο τμήμα του νηματίου, το οποίο κατά προσέγγιση το θεωρούμε κυκλικό τόξο.

Παίρνουμε σύστημα αξόνων, οι δύο από τους οποίους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με το κυκλικό τόξο, και έχουν μοναδιαία διανύσματα το \vec{T} (εφαπτόμενο στο τόξο) και το \vec{N} (κάθετο). Ο τρίτος άξονας είναι κάθετος στο προηγούμενο επίπεδο, και έχει μοναδιαίο διάνυσμα το \vec{B} .

Αφού το \vec{x} βρίσκεται στο επίπεδο του κυκλικού τόξου, θα ισχύει

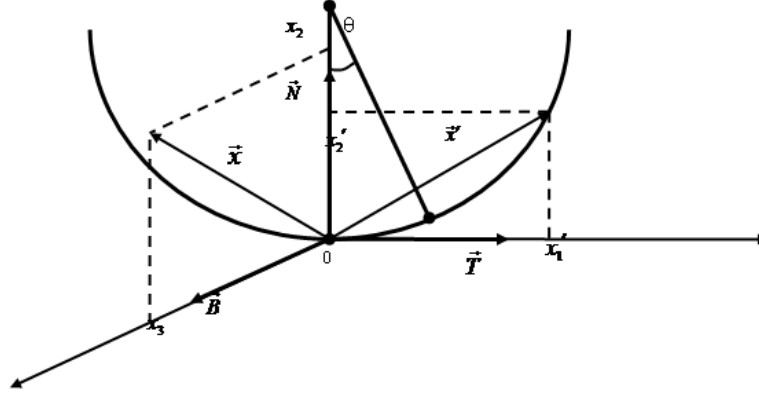
$$(1.24) \quad \vec{x}' = x'_1 \vec{T} + x'_2 \vec{N} = R\vec{T} \sin \theta + R(1 - \cos \theta) \vec{N},$$

όπου R η ακτίνα καμπυλότητας στο 0. Για σημεία \vec{x}' κοντά στο 0 θα έχουμε

$$\theta \simeq 0 \Rightarrow \sin \theta \simeq \theta \Rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq 2 \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \vec{x}' &\simeq R\theta \vec{T} + R \frac{\theta^2}{2} \vec{N} = l\vec{T} + \frac{1}{2R} l^2 \vec{N} \Rightarrow \\
 (1.25) \quad \vec{x}' &\simeq l\vec{T} + \frac{1}{2} k l^2 \vec{N},
 \end{aligned}$$



Σχήμα 1.2: Τομή τμήματος ενός νηματίου στροβιλισμού, το οποίο κατά προσέγγιση θεωρούμε ως κυκλικό τόξο. Το τμήμα αυτό περνά από την αρχή ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , με μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Το \vec{T} είναι εφαπτόμενο στο νημάτιο, το \vec{N} ανήκει στο επίπεδο του κυκλικού τόξου και είναι κάθετο στο \vec{T} , το δε \vec{B} είναι κάθετο στα \vec{T}, \vec{N} .

όπου το l συμβολίζει το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία θ , και το k την καμπυλότητα του νηματίου. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.25) ως προς l , παίρνουμε:

$$(1.26) \quad d\vec{x}' = (\vec{T} + kl\vec{N})dl.$$

Για ένα τυχαίο σημείο $\vec{x} = (0, x_2, x_3)$ έχουμε ότι:

$$\vec{x} = x_2\vec{N} + x_3\vec{B} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x}' = -l\vec{T} + (x_2 - \frac{1}{2}kl^2)\vec{N} + x_3\vec{B}.$$

Άρα

$$(1.27) \quad \begin{aligned} (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' &= \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{N} & \vec{B} \\ -l & x_2 - \frac{1}{2}kl^2 & x_3 \\ dl & kldl & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left[-klx_3\vec{T} + x_3\vec{N} + (-kl^2 - x_2 + \frac{1}{2}kl^2)\vec{B} \right] dl \Rightarrow \\ (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' &= \left[-klx_3\vec{T} + x_3\vec{N} - (x_2 + \frac{1}{2}kl^2)\vec{B} \right] dl. \end{aligned}$$

Για τα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά στο νημάτιο ισχύει

$$\vec{x} \simeq 0 \Rightarrow (x_2, x_3) \simeq (0, 0),$$

οπότε η (1.27) γίνεται

$$(1.28) \quad (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' = -\frac{1}{2}kl^2\vec{B}dl.$$

Επίσης ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'|^2 &= l^2 + (x_2 - \frac{1}{2}kl^2)^2 + x_3^2 = l^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{4}k^2l^4 - kl^2x_2 \Rightarrow \\ |\vec{x} - \vec{x}'|^2 &= l^2(1 - kx_2) + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{4}k^2l^4. \end{aligned}$$

Θεωρώντας όμως ότι $kx_2 \ll 1$ και $kl \ll 1$, παίρνουμε ότι

$$(1.29) \quad |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \simeq l^2 + x_2^2 + x_3^2 = l^2 + |x|^2 \Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \simeq l^2 + r^2,$$

όπου $r = |\vec{x}|$.

Τώρα πια είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που μας δίνει το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού. Με χρήση των (1.28) και (1.29), η (1.23) γίνεται

$$(1.30) \quad \vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{-\frac{1}{2}kl^2\vec{B}}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl,$$

όπου L το μισό μήκος του νηματίου.

Επειδή όμως η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια, το ολοκλήρωμα (1.30) γράφεται ως:

$$(1.31) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} k\vec{B} \int_0^L \frac{l^2}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης (1.31) θέτουμε

$$\omega = \sqrt{l^2 + r^2} \Rightarrow d\omega = \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} dl,$$

οπότε

$$\int_0^L \frac{l^2}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \int_r^{\sqrt{L^2+r^2}} \frac{\sqrt{\omega^2 - r^2}}{\omega^2} d\omega.$$

Για $\omega = r \cosh \phi$ το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_0^{\text{Arc cosh} \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}} \frac{\sinh^2 \phi}{\cosh^2 \phi} d\phi &= \int_0^{\text{Arc cosh} \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \phi}\right) d\phi \\ &= [\phi - \tanh \phi]_0^{\text{Arc cosh} \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}} = \left[\phi - \frac{\sqrt{\cosh^2 \phi - 1}}{\cosh \phi} \right]_0^{\text{Arc cosh} \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}} \\ &= \text{Arc cosh} \sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1} - \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}} = \log \left(\sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1} + \frac{L}{r} \right) - \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{L^2}{r^2} + 1}}. \end{aligned}$$

Για σημεία \vec{x} πολύ κοντά στο νηματίο στροβιλισμού ισχύει $|\vec{x}| = r \ll 1 \Rightarrow \frac{L}{r} \ll 1$, οπότε

$$\int_0^L \frac{l^2}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \log \frac{2L}{r} - 1.$$

Επομένως, το πεδίο ταχυτήτων προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$(1.32) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} k \vec{B} \left(\log \frac{2L}{r} - 1 \right).$$

Αν το x παριστάνει μήκος που μετράται κατά μήκος του νηματίου, και $\vec{X}(x, t)$ παριστάνει ένα διάνυσμα θέσης πάνω στο νηματίο, τότε $\vec{u} = \frac{\partial \vec{X}(x, t)}{\partial t}$. Εισάγοντας την αλλαγή μεταβλητής για τον χρόνο

$$t' = t \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\log \frac{2L}{r} - 1 \right),$$

έχουμε ότι $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t'} = k \vec{B}$. Έτσι, η εξίσωση που καθορίζει την κίνηση του νηματίου στροβιλισμού είναι:

$$(1.33) \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = k \vec{B}.$$

1.3 Γενική κίνηση του νηματίου στροβιλισμού

Η μετατόπιση κατά μήκος του νηματίου ορίζει ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στην καμπύλη: $\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} = \vec{T}$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ικανοποιούν τις σχέσεις Serret - Frenet:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \vec{T}_x &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}_x &= \tau \vec{B} - \kappa \vec{T} \\ \vec{B}_x &= -\tau \vec{N}, \end{aligned}$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα και τ η στρέψη της καμπύλης. Όταν τα κ, τ είναι καθορισμένα σε κάθε σημείο της καμπύλης, τότε εκτός από τη θέση της καμπύλης είναι ορισμένο με μοναδικό τρόπο και το σχήμα της.

Θα κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού *Hasimoto* [42], ο οποίος ορίζεται από την μιγαδική συνάρτηση

$$(1.35) \quad \psi(x, t) = \kappa(x, t) e^{i \int_0^x \tau(\sigma, t) d\sigma},$$

και το μιγαδικό διάνυσμα

$$(1.36) \quad \vec{\Psi}(x, t) = (\vec{N} + i \vec{B}) e^{i \int_0^x \tau(\sigma, t) d\sigma}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες από τις εξισώσεις Serret - Frenet, παίρνουμε την σχέση

$$(1.37) \quad (\vec{N} + i \vec{B})_x + i \tau (\vec{N} + i \vec{B}) = -\kappa \vec{T}.$$

Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους των $\vec{\Psi}, \vec{T}$ ως προς x, t , συναρτήσει των $\psi, \bar{\Psi}$.
Παράγωγοι ως προς x : Αρχικά, υπολογίζουμε την παράγωγο του $\vec{\Psi}$:

$$\vec{\Psi}_x = (\vec{N} + i\vec{B})_x e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} + (\vec{N} + i\vec{B}) i_T e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma},$$

που με τη βοήθεια των σχέσεων (1.35) και (1.37) παίρνει τη μορφή:

$$\vec{\Psi}_x = -k(x,t) \vec{T} e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} \Rightarrow$$

$$(1.38) \quad \vec{\Psi}_x = -\psi \vec{T}.$$

Για την παράγωγο του \vec{T} , έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{T}_x &= k\vec{N} = \frac{1}{2}(k\vec{N} + k\vec{N}) = \frac{1}{2}[k(\vec{N} + i\vec{B}) + k(\vec{N} - i\vec{B})] \Rightarrow \\ \vec{T}_x &= \frac{1}{2}[k e^{-i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} (\vec{N} + i\vec{B}) e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} \\ &+ k e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} (\vec{N} - i\vec{B}) e^{-i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma}] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.39) \quad \vec{T}_x = \frac{1}{2}(\bar{\psi} \vec{\Psi} + \psi \bar{\vec{\Psi}}).$$

Παράγωγοι ως προς t : Για την παράγωγο του \vec{T} έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{X}_x \Rightarrow \\ \vec{T}_t &= (\vec{X}_x)_t = (\vec{X}_t)_x = (k\vec{B})_x = k_x \vec{B} + k \vec{B}_x = k_x \vec{B} - k\tau \vec{N} = \frac{i}{2}(2ik\tau \vec{N} - 2ik_x \vec{B}) \\ &= \frac{i}{2}[(k_x + ik\tau)\vec{N} - (k_x - ik\tau)\vec{N} + (k_x + ik\tau)(-i\vec{B}) - (k_x - ik\tau)i\vec{B}] \Rightarrow \\ \vec{T}_t &= \frac{i}{2}[(k_x + ik\tau)(\vec{N} - i\vec{B}) - (k_x - ik\tau)(\vec{N} + i\vec{B})] \Rightarrow \\ \vec{T}_t &= \frac{i}{2}[(k_x + ik\tau) e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} (\vec{N} - i\vec{B}) e^{-i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} \\ &- (k_x - ik\tau) e^{-i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma} (\vec{N} + i\vec{B}) e^{i \int_0^x \tau(\sigma,t) d\sigma}] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.40) \quad \vec{T}_t = \frac{i}{2}(\psi_x \bar{\vec{\Psi}} - \bar{\psi}_x \vec{\Psi}).$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι $\vec{T}_t, \bar{\vec{\Psi}}_t$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\Psi}, \bar{\vec{\Psi}}, \vec{T}$.
 Έτσι, έχουμε τις σχέσεις

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \vec{T}_t &= \lambda \vec{\Psi} + \lambda \bar{\vec{\Psi}} + \mu \vec{T}, \\ \bar{\vec{\Psi}}_t &= a \vec{\Psi} + b \bar{\vec{\Psi}} + c \vec{T}. \end{aligned}$$

Επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ είναι ορθογώνια, εύκολα προκύπτει από την (1.36), ότι

$$(1.42) \quad \vec{\Psi} \vec{\Psi} = \vec{T} \vec{\Psi} = \vec{T} \bar{\vec{\Psi}} = 0, \bar{\vec{\Psi}} \bar{\vec{\Psi}} = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\vec{\Psi}$ την δεύτερη από τις σχέσεις (1.41), και παίρνουμε

$$\vec{\Psi}\vec{\Psi}_t = 2b \Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{\Psi}\vec{\Psi})_t = 2b \Rightarrow b = 0.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}\bar{\Psi} = 2 &\Rightarrow (\vec{\Psi}\bar{\Psi})_t = 0 \Rightarrow \vec{\Psi}_t\bar{\Psi} + \vec{\Psi}\bar{\Psi}_t = 0 \Rightarrow \vec{\Psi}_t\bar{\Psi} + \overline{\vec{\Psi}\bar{\Psi}_t} = 0 \\ &\Rightarrow 2(a + \bar{a}) = 0 \Rightarrow a = iR, R \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\vec{\Psi}\vec{T} = 0 \Rightarrow (\vec{\Psi}\vec{T})_t = 0 \Rightarrow \vec{\Psi}_t\vec{T} + \vec{\Psi}\vec{T}_t = 0 \Rightarrow \vec{\Psi}_t\vec{T} = -\vec{\Psi}\vec{T}_t,$$

καθώς και την σχέση

$$\vec{\Psi}_t\vec{T} = a\vec{\Psi}\vec{T} + b\bar{\vec{\Psi}}\vec{T} + c\vec{T}\vec{T} = c.$$

Επομένως, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές c και λ ικανοποιούν τη σχέση:

$$c = -\vec{\Psi}\vec{T}_t = -\vec{\Psi}(\bar{\lambda}\bar{\vec{\Psi}} + \lambda\vec{\Psi} + \mu\vec{T}) \Rightarrow c = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2}.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι:

$$\vec{T}\vec{T} = \frac{1}{2}(\vec{T}\vec{T})_t = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}\bar{\vec{\Psi}}\vec{T} + \lambda\bar{\vec{\Psi}}\vec{T} + \mu\vec{T}\vec{T} = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Δηλαδή για τους συντελεστές έχουμε βρει:

$$a = iR, R \in \mathbb{R}, b = 0, \lambda = -\frac{c}{2}, \mu = 0.$$

Άρα, οι σχέσεις (1.41) γράφονται ως

$$(1.43) \quad \begin{aligned} \vec{\Psi}_t &= iR\vec{\Psi} + c\vec{T}, \\ \vec{T}_t &= -\frac{\bar{c}}{2}\bar{\vec{\Psi}} - \frac{c}{2}\vec{\Psi}. \end{aligned}$$

Η παραγώγιση της πρώτης από τις (1.43) ως προς x , μας δίνει

$$\vec{\Psi}_{tx} = iR_x\vec{\Psi} + iR\vec{\Psi}_x + c_x\vec{T} + c\vec{T}_x,$$

και κάνοντας χρήση των (1.38) και (1.39):

$$(1.44) \quad \begin{aligned} \vec{\Psi}_{tx} &= iR_x\vec{\Psi} - iR\psi\vec{T} + c_x\vec{T} + \frac{c}{2}(\bar{\psi}\bar{\vec{\Psi}} + \psi\vec{\Psi}) \Rightarrow \\ \vec{\Psi}_{tx} &= (iR_x + \frac{c}{2}\bar{\psi})\vec{\Psi} + (c_x - iR\psi)\vec{T} + \frac{c}{2}\psi\bar{\vec{\Psi}}. \end{aligned}$$

Η παραγώγιση της (1.38) ως προς t , καταλήγει στη σχέση

$$(1.45) \quad \vec{\Psi}_{xt} = \frac{\bar{c}}{2}\psi\bar{\vec{\Psi}} - \psi_t\vec{T} + \frac{c}{2}\psi\bar{\vec{\Psi}}.$$

Τέλος, εξισώνοντας τους συντελεστές των $\bar{\Psi}, \bar{T}$ στις σχέσεις (1.44) και (1.45) παίρνουμε

$$(1.46) \quad \psi_t + c_x - iR\psi = 0,$$

$$(1.47) \quad R_x = \frac{i}{2}(c\bar{\psi} - \bar{c}\psi).$$

Η εξίσωση (1.46) είναι μια εξελικτική εξίσωση για την ψ . Για να είναι η εξίσωση πλήρως προσδιορισμένη, απαιτείται ο υπολογισμός του R , από την ολοκλήρωση της (1.47). Για να γίνει αυτό, πρέπει να προσδιοριστεί ο συντελεστής c . Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι ο συντελεστής αυτός μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός της ψ και των χωρικών παραγώγων της:

$$(1.48) \quad c = f\psi + i\nu\psi_x + \varepsilon\psi_{xx},$$

όπου $f = f(\psi, \bar{\psi})$ πραγματική συνάρτηση και ν, ε πραγματικές σταθερές. Αντικαθιστώντας την (1.48) στη δεύτερη από τις (1.46), έχουμε :

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{i}{2}[(f\psi + i\nu\psi_x + \varepsilon\psi_{xx})\bar{\psi} - (f\bar{\psi} - i\nu\bar{\psi}_x + \varepsilon\bar{\psi}_{xx})\psi] \Rightarrow \\ R_x &= \frac{i}{2}f|\psi|^2 - \frac{\nu}{2}\psi_x\bar{\psi} + \frac{i}{2}\varepsilon\psi_{xx}\bar{\psi} - \frac{i}{2}f|\psi|^2 - \frac{\nu}{2}\bar{\psi}_x\psi - \frac{i}{2}\varepsilon\bar{\psi}_{xx}\psi \Rightarrow \\ R_x &= -\frac{\nu}{2}(\psi_x\bar{\psi} + \bar{\psi}_x\psi) + \frac{i}{2}\varepsilon(\psi_{xx}\bar{\psi} - \bar{\psi}_{xx}\psi) \Rightarrow \\ (1.49) \quad R_x &= -\frac{\nu}{2}(|\psi|^2)_x + \frac{i}{2}\varepsilon(\psi_{xx}\bar{\psi} - \bar{\psi}_{xx}\psi). \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα την (1.49) ως προς x :

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\nu}{2}|\psi|^2 + \frac{i}{2}\varepsilon\left(\int \psi_{xx}\bar{\psi}dx - \int \bar{\psi}_{xx}\psi dx\right) + C(t) \Rightarrow \\ R &= -\frac{\nu}{2}|\psi|^2 + \frac{i}{2}\varepsilon(\psi_x\bar{\psi} - \int \psi_x\bar{\psi}_x dx - \bar{\psi}_x\psi + \int \psi_x\bar{\psi}_x dx) + C(t) \Rightarrow \\ (1.50) \quad R &= -\frac{\nu}{2}|\psi|^2 + \frac{i}{2}\varepsilon(\psi_x\bar{\psi} - \bar{\psi}_x\psi) + C(t). \end{aligned}$$

Εισάγοντας τις (1.48) και (1.50) στην (1.46), παίρνουμε:

$$(1.51) \quad \psi_t + (f\psi)_x + i\nu\psi_{xx} + \varepsilon\psi_{xxx} + i\frac{\nu}{2}|\psi|^2\psi + \frac{\varepsilon}{2}|\psi|^2\psi_x - \frac{\varepsilon}{2}\psi^2\psi_x - iC\psi = 0.$$

Για $\frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}} = \frac{1}{2}\varepsilon\psi$, έχουμε

$$\int \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}} d\bar{\psi} = \int \frac{1}{2}\varepsilon\psi d\bar{\psi} \Rightarrow f = \frac{1}{2}\varepsilon|\psi|^2 + \mu,$$

όπου μ πραγματική σταθερά, οπότε

$$(1.52) \quad (f\psi)_x = \left(\frac{1}{2}\varepsilon|\psi|^2\psi + \mu\psi\right)_x = \varepsilon|\psi|^2\psi_x + \frac{1}{2}\varepsilon\psi^2\bar{\psi}_x + \mu\psi_x.$$

Αντικαθιστώντας την (1.52) στην (1.51), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_t + \varepsilon|\psi|^2\psi_x + \frac{1}{2}\varepsilon\psi^2\bar{\psi}_x + \mu\psi_x + i\nu\psi_{xx} + \varepsilon\psi_{xxx} + i\frac{\nu}{2}|\psi|^2\psi_x - \frac{\varepsilon}{2}\psi^2\psi_x - iC\psi = 0 \Rightarrow \\ (1.53) \quad \psi_t + \frac{3}{2}\varepsilon|\psi|^2\psi_x + \mu\psi_x + i\nu\psi_{xx} + \varepsilon\psi_{xxx} + i\frac{\nu}{2}|\psi|^2\psi_x - iC\psi = 0. \end{aligned}$$

Στην (1.53), πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $\psi = 2\varphi e^{inx}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= 4|\varphi|^2, \\ \psi_t &= 2\varphi_t e^{inx}, \\ \psi_x &= 2(\varphi_x + in\varphi)e^{inx}, \\ \psi_{xx} &= 2(\varphi_{xx} + 2in\varphi_x - n^2\varphi)e^{inx}, \\ \psi_{xxx} &= 2(\varphi_{xxx} + 3in\varphi_{xx} - 3n^2\varphi_x - in^3\varphi)e^{inx} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην (1.53) παίρνουμε

$$(1.54) \quad \begin{aligned} \varphi_t + (\mu - 2\nu n - 3\varepsilon n^2)\varphi_x + i(3\varepsilon n + \nu)\varphi_{xx} + \varepsilon\varphi_{xxx} \\ + i(\mu n - \nu n^2 - \varepsilon n^3 - C)\varphi + 3\varepsilon|\varphi|^2\varphi_x + i(3\varepsilon n + \nu)|\varphi|^2\varphi = 0. \end{aligned}$$

Για να απαλειφθούν οι όροι φ και φ_x επιλέγουμε τις σταθερές που έχουν προκύψει από την ολοκλήρωση, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις $\mu = 2\nu n + 3\varepsilon n^2$ και $C = \mu n - \nu n^2 - \varepsilon n^3 = \nu n^2 + 2\varepsilon n^3$. Με την επιλογή αυτή των παραμέτρων, η (1.54) παίρνει τη μορφή :

$$(1.55) \quad \varphi_t + i(3\varepsilon n + \nu)\varphi_{xx} + \varepsilon\varphi_{xxx} + \varepsilon|\varphi|^2\varphi_x + i(3\varepsilon n + \nu)|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Τέλος, αν $\alpha = \sigma = \varepsilon$ και $\rho = \delta = 3\varepsilon n + \nu$, ικανοποιείται η λεγόμενη *σχέση ισορροπίας* μεταξύ των συντελεστών α , ρ , σ και δ :

$$(1.56) \quad \alpha\rho = \sigma\delta.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (1.55) γίνεται

$$(1.57) \quad \varphi_t + 3\alpha|\varphi|^2\varphi_x + i\rho\varphi_{xx} + \sigma\varphi_{xxx} + i\delta|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Η εξελικτική εξίσωση της μορφής (1.57), με συντελεστές που ικανοποιούν τη συνθήκη (1.56), είναι γνωστή ως η *εξίσωση Hirota*. Αποτελεί μια ιδιαίτερα σημαντική γενίκευση τη μη-γραμμικής εξίσωσης Schrödinger, η οποία περιλαμβάνει όρους ανώτερης τάξης. Στην μελέτη εξισώσεων αυτού του τύπου είναι αφιερωμένο, το κύριο μέρος αυτής της διατριβής.

Κεφάλαιο 2

Ενεργειακές εξισώσεις για ασθενείς λύσεις, και η ολική τους ύπαρξη

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, η εξίσωση που καθορίζει την εξέλιξη του μετασχηματισμού Hasimoto (1.1), είναι μια γενικευμένη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger [extended nonlinear Schrödinger equation (ENLS)], της μορφής :

$$(2.1) \quad \varphi_t + 3\alpha|\varphi|^2\varphi_x - i\rho\varphi_{xx} + \sigma\varphi_{xxx} - i\delta|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι όταν οι πραγματικοί συντελεστές $\alpha, \rho, \sigma, \delta$ επαληθεύουν τη συνθήκη ισορροπίας:

$$(2.2) \quad \alpha\rho = \sigma\delta,$$

τότε η εξίσωση (2.1) είναι γνωστή ως εξίσωση Hirota, η οποία συνδυάζει την ολοκληρώσιμη NLS με την μιγαδική εξίσωση της μορφής Korteweg - de Vries (KdV). Ειδικότερα, στο όριο $\alpha = \sigma = 0$ (απουσία των όρων ανώτερης τάξης), οδηγούμαστε στην ολοκληρώσιμη NLS, ενώ στο όριο $\rho = \delta = 0$, στην περίπτωση της μιγαδικής εξίσωσης KdV [complex modified KdV equation (cmKdV)]. Να σημειώσουμε ότι η εξίσωση Hirota είναι ένα πλήρως ολοκληρώσιμο μοντέλο, που ανήκει στην ιεραρχία Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) [1].

Εκτός από την παραγωγή της εξίσωσης, ως μοντέλου για την εξέλιξη της κίνησης νηματίων στροβιλισμού, που είδαμε στο Κεφάλαιο 1, ανάλογη παραγωγή για τα νημάτια στροβιλισμού παρέχεται και στο [35, Sec. 3]. Ωστόσο, στην [35], αποδεικνύεται ότι μόνο η ολοκληρώσιμη εκδοχή της (2.1) [δηλαδή όταν ισχύει η συνθήκη (2.2)], είναι δυνατόν να περιγράψει την εξέλιξη της κίνησης του νηματίου: εν συντομία, η κατασκευή ξεκινά με μια τεκμηριωμένη από φυσικής πλευράς, γενίκευση των τοπικών εξισώσεων (1.33), που καθορίζουν την κίνηση του νηματίου στροβιλισμού. Η γενίκευση αυτή λαμβάνει υπόψη παράγοντες αξονικής ροής δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι οι γενικευμένες τοπικές εξισώσεις είναι ολοκληρώσιμες. Συνεπώς, η ισοδύναμη εξελικτική εξίσωση, που στην περίπτωση μας είναι η ENLS, θα πρέπει να είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Με αυτή την παραδοχή, η εξίσωση Hirota εξάγεται επαναλαμβάνοντας την αρχική διαδικασία Hasimoto [42], η οποία έδειξε την ισοδυναμία ανάμεσα στις τοπικές εξισώσεις,

και την ολοκληρώσιμη NLS, $i\phi_t + \phi_{xx} + \frac{1}{2}|\phi|^2\phi = 0$, [63, 64]. Η απαίτηση λοιπόν για την ολοκληρωσιμότητα της εξελικτικής εξίσωσης, ως συνέπεια της ολοκληρωσιμότητας των τοπικών εξισώσεων, είναι ο λόγος για τον οποίο η συνθήκη (2.2) είναι ουσιώδης για την σύνδεση της εξίσωσης (2.1), με την δυναμική των νηματίων στροβιλισμού.

Από την άλλη, μη ολοκληρώσιμες εκδοχές της (2.1), δηλαδή όταν παραβιάζεται η συνθήκη ισοροπίας (2.2), μπορούν να παραχθούν ως γεωμετρικές εξελικτικές εξισώσεις, σε διαφορετικό πλαίσιο, από αυτό της κίνησης καμπυλών στον \mathbb{R}^3 . Ειδικότερα, έχειδειχθεί [70], ότι μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις διασποράς παράγονται κατά την μελέτη συμπαγών επιφανειών Riemann. Η παραγωγή αυτή, βασίζεται στην θεώρηση και μελέτη γενικευμένων μετασχηματισμών Hasimoto, που οδηγεί σε εξισώσεις τύπου ENLS [23, 71].

Μια άλλη περίπτωση, στην οποία η ENLS έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές, είναι η μη γραμμική οπτική. Τέτοια μοντέλα, έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν την διάδοση παλμών (τάξης μεγέθους femtosecond), σε μη γραμμικές οπτικές ίνες. Στην περίπτωση αυτή, οι ανεξάρτητες μεταβλητές x, t παριστάνουν αντίστοιχα τη μετατόπιση του παλμού κατά μήκος της οπτικής ίνας, και τον χρόνο υστέρησης (ως προς σύστημα συντεταγμένων κινούμενο με την ομαδική ταχύτητα), ενώ η $\varphi(x, t)$ προσδιορίζει την περιβάλλουσα της ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου. Η διάδοση ενός βραχέος παλμού (με πλάτος που μειώνεται συγκρινόμενο με το μήκος κύματος) σε μη γραμμικές οπτικές ίνες, παρουσιάζει γραμμική διασπορά (τουλάχιστον τρίτης τάξης), καθώς και μη γραμμική διασπορά (χαρακτηρίζεται ως όρος επίκλισης, λόγω της επίδρασής του στην περιβάλλουσα του παλμού). Αυτές οι επιδράσεις, δεν μπορούν να περιγραφούν από το καθιερωμένο μοντέλο της εξίσωσης NLS, αλλά βρίσκονται σε συμφωνία με την εξίσωση (2.1), όπου ο όρος φ_{xxx} περιγράφει την γραμμική διασπορά τρίτης τάξης, και ο όρος $|\varphi|^2\varphi_x$ τις μη γραμμικές επιδράσεις επίκλισης.

Στο πλαίσιο της φυσικής των οπτικών ινών, προκύπτουν εξισώσεις ENLS, οι οποίες είναι δυνατόν να συμπεριλαμβάνουν και άλλου τύπου φαινόμενα, όπως η διασπορά Raman: σε αυτές τις εξισώσεις, επίσης συνυπάρχουν όροι γραμμικής διασποράς τρίτης τάξης, με όρους μη γραμμικής διασποράς ανώτερης τάξης [40]. Να σημειώσουμε ότι ενώ η ENLS παράγεται συνήθως από τις εξισώσεις του Maxwell, σε ένα εναλλακτικό πλαίσιο προσέγγισης με τη μέθοδο των μικρών διαταραχών [40], τα προαναφερθέντα φαινόμενα, εμφανίζονται στην τρίτη τάξη της προσέγγισης, [13, 28, 32, 39, 44, 40, 45, 69, 75].

Επίσης, σημειώνουμε ότι εξισώσεις τύπου ENLS, παράγονται και στο πλαίσιο της φυσικής των μη γραμμικών μεταλλικών. Η διάδοση βραχέων παλμών στα μέσα αυτά, καθορίζεται επίσης από διάφορες εκδοχές της ENLS [77, 86, 90, 91].

Η παρουσία της ENLS στην μαθηματική περιγραφή πολλών φαινομένων, όπως αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, αποτέλεσε και το ισχυρό κίνητρο για τη μελέτη μας.

2.1 Εξισώσεις ενέργειας και ολική ύπαρξη λύσεων

Στην Κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την παραγωγή εξισώσεων ενέργειας και την εφαρμογή τους στην απόδειξη ολικής ύπαρξης των λύσεων του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών, που απαρτίζεται από την εξίσωση (2.1) και τις αρχικές - συνοριακές συνθήκες που την πλαισιώνουν. Συγκεκριμένα, θεωρούμε

περιοδικές συνοριακές συνθήκες στο διάστημα $(0, L)$:

$$(2.3) \quad \varphi(x + L, t) = \varphi(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

για δεδομένο $L > 0$, και

$$(2.4) \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\Omega = (0, L)$. Ο χώρος στον οποίο τοποθετούνται οι λύσεις του προβλήματος, είναι ο χώρος Sobolev $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, οι οποίοι προκύπτουν από την μιγαδική επέκταση (complexification) των αντίστοιχων χώρων συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Λόγω περιοδικότητας (στο θεμελιώδες διάστημα $\bar{\Omega} = [0, L]$), οι συναρτήσεις ανήκουν τοπικά στον χώρο $H^m(\mathbb{R})$, όπου m μη αρνητικός ακέραιος. Ο χώρος $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και την επαγόμενη από αυτό νόρμα, που δίνονται από τις σχέσεις :

$$(2.5) \quad (\varphi, \psi)_{H^m(\Omega)} = \sum_{j=0}^m \partial^j \varphi \partial^j \bar{\psi} dx, \quad \|\varphi\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(\varphi, \varphi)_{H^m(\Omega)}},$$

όπου $\partial^j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}$. Για την περίπτωση $m = 0$, έχουμε τον χώρο $L_2(\Omega)$.

Οι χώροι $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ μπορούν να μελετηθούν με τη χρήση σειρών Fourier, και μπορούν να αναπαρασταθούν με αυτό τον τρόπο ως εξής:

$$H_{\text{per}}^m(\Omega) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i \frac{k}{L} x} : \hat{\varphi}_k = \bar{\hat{\varphi}}_{-k} \forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^m |\varphi_k|^2 < \infty \right\},$$

όπου $\hat{\varphi}_k = \bar{\hat{\varphi}}_{-k}$ είναι πραγματικοί συντελεστές Fourier [31].

Αντίστοιχα, ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο και νόρμα, με όρους συντελεστών Fourier:

$$(2.6) \quad (\varphi, \psi)_{m,*} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^m \hat{\varphi}_k \hat{\psi}_k, \quad \|\varphi\| = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^m |\varphi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα στον $H_{\text{per}}^m(\Omega)$, που δίνονται από τις σχέσεις (2.5), είναι ισοδύναμα με αυτά που προκύπτουν από τους τελευταίους ορισμούς. Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$, τέτοιες ώστε:

$$(2.7) \quad c_1 \|\varphi\|_{H^m(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{m,*} \leq c_2 \|\varphi\|_{H^m(\Omega)}.$$

Ο μιγαδικός χώρος $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ μετατρέπεται σε πραγματικό χώρο Hilbert (που θα συνεχίσουμε να τον συμβολίζουμε με $H_{\text{per}}^m(\Omega)$), αν τον εφοδιάσουμε με το εσωτερικό γινόμενο και την νόρμα:

$$(2.8) \quad [\varphi, \psi]_{H^*(\Omega)} = \text{Re} \left[\sum_{j=0}^m \partial^j \varphi \partial^j \bar{\psi} dx \right] = (\varphi_1, \psi_1)_{H^m(\Omega)} + (\varphi_2, \psi_2)_{H^m(\Omega)},$$

$$(2.9) \quad \|\varphi\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{[\varphi, \psi]_{H^m(\Omega)}},$$

όπου $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ και $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Ισοδύναμη νόρμα, με τη βοήθεια των συντελεστών Fourier, ορίζεται και για τη σχέση (2.9), όπως έγινε και με τις σχέσεις (2.6) και (2.7).

Για $m \geq 1$, οι ακόλουθες σχέσεις εμφύτευσης:

$$H_{\text{per}}^m(\Omega) \subseteq C^{m-1}(\Omega), H_{\text{per}}^m(\Omega) \subseteq H_{\text{per}}^{m-1}(\Omega),$$

είναι συμπαγείς. Επιπλέον, ο $H_{\text{per}}^m(\Omega)$ είναι μια γενικευμένη άλγεβρα Banach: αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια σταθερά c , που εξαρτάται μόνο από το Ω , τέτοια ώστε

$$z, n \in H_{\text{per}}^m(\Omega) \Rightarrow zn \in H_{\text{per}}^m(\Omega),$$

και

$$(2.10) \quad \|zn\|_{H^m(\Omega)} \leq c\|z\|_{H^m(\Omega)}\|n\|_{H^m(\Omega)}.$$

Επίσης, υπενθυμίζουμε την ανισότητα Gagliardo - Nirenberg για την μονοδιάστατη περίπτωση: έστω

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Τότε

$$(2.11) \quad \|\partial^j \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \left(\sum_{k=0}^m \|\partial^k \varphi\|_{L^r(\Omega)} \right),$$

$\forall \varphi \in L^q(\Omega) \cap W^{m,r}(\Omega)$, όπου

$$\frac{1}{p} = j + \theta \left(\frac{1}{r} - m \right) + \frac{1-\theta}{q}.$$

Αν $m - j - \frac{1}{r} = 0$ και $r > 1$, τότε η ανισότητα ισχύει για $\theta < 1$.

Μια από τις μεθόδους που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την ύπαρξη τοπικών λύσεων, είναι η μέθοδος των ημιφραγμένων εξελικτικών εξισώσεων (semibounded evolution equations), που έχει αναπτυχθεί στο [55]. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου απαιτεί επίπονους υπολογισμούς, τους οποίους θα αποφύγουμε να παρουσιάσουμε για λόγους συντομίας. Απλά, θα διατυπώσουμε το σχετικό Θεώρημα, χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 1. Έστω $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^3(\Omega)$ και $\alpha, \rho, \sigma, \delta \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $T > 0$, τέτοιο ώστε το πρόβλημα (2.1)-(2.3)-(2.4), να έχει μοναδική λύση

$$\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)), \varphi_t \in C([0, T], L^2(\Omega)).$$

Παρατήρηση 1. Α. Εκτός από την προαναφερθείσα μέθοδο των ημιφραγμένων εξελικτικών εξισώσεων [54, 55], για την γενικευμένη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger

$$(2.12) \quad \varphi_t + \beta(|\varphi|^2)\varphi_x - i\rho\varphi_{xx} + \sigma\varphi_{xxx} - i\gamma(|\varphi|^2)\varphi = 0,$$

στο $\mathbb{R} \times [0, T]$, μπορεί να εφαρμοστεί μια τροποποιημένη μέθοδος, ανάλογη με αυτήν που χρησιμοποιείται για την απόδειξη τοπικής ύπαρξης λύσεων σε μη γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις και συστήματα [84, θεώρημα 1.2, σελ. 362 & Πρόταση 1.3, σελ. 364]). Για παράδειγμα, αν $\varphi_0 \in H^k$ με $k > \frac{3}{2}$ τότε

$$\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^k(\Omega)).$$

Ας σημειώσουμε ότι οι λύσεις τόσο του προβλήματος (2.1)-(2.3)-(2.4), όσο και του προβλήματος της γενικότερης εξίσωσης (2.12), δεν υπόκεινται σε κάποια *a priori* διαδικασία ομαλοποίησης των λύσεων (*smoothing effect*), όπως για παράδειγμα οι μαγδικές εξισώσεις *Ginzburg-Landau*, ή οι εξισώσεις αντίδρασης διάχυσης.

Β. Τα αποτελέσματα που διατυπώνονται στο προηγούμενο θεώρημα, διαπραγματεύονται μόνο το θέμα της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων του προβλήματός μας. Μια πλήρης μελέτη της καλής τοποθέτησης του προβλήματος, απαιτεί και τον έλεγχο της συνεχούς εξάρτησης των λύσεων από τα αρχικά δεδομένα $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^m(\Omega)$, [54, 55, 84]. Μολονότι για το πρόβλημα (2.1)-(2.3)-(2.4), η συνεχής εξάρτηση μπορεί να επιβεβαιωθεί, για την γενικευμένη εξίσωση (2.12), η απόδειξη της συνεχούς εξάρτησης αποτελεί ένα πρόβλημα αξιοσημείωτης δυσκολίας.

Ομαλές λύσεις του προβλήματος (2.1)-(2.3)-(2.4), έχουν νόμους διατήρησης, παρόμοιους με τη διατήρηση της L^2 -νόρμας (ή ισχύος), και της ενέργειας της ολοκληρώσιμης NLS: Οι ποσότητες

$$(2.13) \quad N(\varphi) = \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

και

$$(2.14) \quad J(\varphi) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx - \frac{\delta}{4} \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx,$$

διατηρούνται σταθερές με την πάροδο του χρόνου, [58]. Αυτοί οι νόμοι διατήρησης, ισχύουν και για τις ασθeneίς λύσεις.

Λήμμα 1. Για $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^3(\Omega)$, έστω T_{max} ο μέγιστος χρόνος για τον οποίο $\forall T$, με $0 < T < T_{\text{max}}$, η λύση φ του προβλήματος (2.1)-(2.3)-(2.4), κείται στον χώρο

$$C([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)).$$

α) Τότε $\forall t \in [0, T]$, η λύση ικανοποιεί το νόμο διατήρησης

$$(2.15) \quad N(\varphi(t)) = N(\varphi_0), \quad \forall \alpha, \rho, \sigma, \delta \in \mathbb{R}.$$

β) Επιπλέον, αν ικανοποιείται η σχέση (2.2), η ενέργεια διατηρείται:

$$(2.16) \quad J(\varphi(t)) = J(\varphi_0).$$

Απόδειξη. α) Γράφουμε την εξίσωση (2.1) στην μορφή

$$\varphi_t = i\rho\varphi_{xx} - \sigma\varphi_{xxx} - 3\alpha|\varphi|^2\varphi_x + i\delta|\varphi|^2\varphi,$$

την πολλαπλασιάζουμε με $\bar{\varphi}$, και ολοκληρώνουμε ως προς x :

$$\int_{\Omega} \varphi_t \bar{\varphi} dx = i\rho \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx - \sigma \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx - 3\alpha \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx + i\delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi} dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_t \bar{\varphi} dx + i \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_t \bar{\varphi} dx &= i \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx - \rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx \\
&- \sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx - i \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx \\
&- 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx - 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx \\
&+ i \delta \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη της τελευταίας εξίσωσης, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{Re}(\varphi_t \varphi) dx &= -\rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx - \sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx - 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx \Rightarrow \\
(2.17) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx - \sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx \\
&- 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx.
\end{aligned}$$

Προχωρούμε σε παραγοντική ολοκλήρωση των ολοκληρωμάτων του δεξιού μέρους της (2.17), και κάνουμε χρήση της περιοδικότητας της φ . Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx &= \int_{\Omega} |\varphi|^2 \operatorname{Re}(\varphi_x \bar{\varphi}) dx = \int_{\Omega} |\varphi|^2 \frac{1}{2} (|\varphi|^2)_x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi|^2)_x dx = 0, \\
\operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi} dx &= -\operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\varphi}_x dx = -\operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 dx = 0, \\
\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx &= -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_x dx = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\varphi}_{xx} dx \\
&= -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi \bar{\varphi}_{xxx} dx = -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx \Rightarrow \\
\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx &= 0.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην εξίσωση (2.17), παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$(2.18) \quad \frac{d}{dt} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

άρα η $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ είναι σταθερή ως προς το χρόνο, οπότε $N(\varphi(t)) = N(\varphi_0)$.

β) Για την ποσότητα $J(\varphi(t))$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
J(\varphi(t)) &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx - \frac{\delta}{4} \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx \Rightarrow \\
J(\varphi(t)) &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\varphi}_x dx - \frac{\delta}{4} \int_{\Omega} \varphi^2 \bar{\varphi}^2 dx \Rightarrow \\
\frac{d}{dt} J(\varphi(t)) &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\varphi_{xt} \bar{\varphi}_x + \varphi_x \bar{\varphi}_{xt}) dx - \frac{\delta}{4} \int_{\Omega} (2\varphi \varphi_t \bar{\varphi}^2 + 2\varphi^2 \bar{\varphi} \bar{\varphi}_t) dx \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(2.19) \quad \frac{d}{dt} J(\varphi(t)) = \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_{xt} \varphi_x dx - \delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 \operatorname{Re}(\varphi \bar{\varphi}_t) dx.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2.1) με $\bar{\varphi}_t$, και ολοκληρώνουμε ως προς x :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_t \bar{\varphi}_t dx &= i\rho \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_t dx - \sigma \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx \\ &\quad - 3\alpha \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx + i\delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi}_t dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi_t|^2 dx &= i\rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_t dx - \rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_t dx \sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx \\ &\quad - i\sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx - 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx \\ &\quad - 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx + i\delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi}_t dx - \delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi}_t dx. \end{aligned}$$

Κρατώντας την ισότητα των φανταστικών μερών της τελευταίας εξίσωσης, παίρνουμε

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_t dx - \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx - 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx \\ + \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi}_t dx = 0. \end{aligned}$$

Προχωρώντας σε παραγοντική ολοκλήρωση του 1ου ολοκληρώματος, και κάνοντας χρήση της περιοδικότητας της φ , η (2.20) γίνεται:

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\varphi}_{xt} dx - \delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 \operatorname{Re}(\varphi \bar{\varphi}_t) dx + 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx \\ + \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία, με τη βοήθεια της (2.19), παίρνει τη μορφή:

$$(2.21) \quad \frac{d}{dt} J(\varphi(t)) + 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx + \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx = 0.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα της (2.21), αντικαθιστούμε την $\bar{\varphi}_t$ από την (2.1), οπότε

$$\begin{aligned} 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx &= 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x (-3\alpha |\varphi|^2 \bar{\varphi}_x - i\rho \bar{\varphi}_{xx} \\ &\quad - \sigma \varphi_{xxx} - i\delta |\varphi|^2 \bar{\varphi}) dx \Rightarrow \\ 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx &= -9\alpha^2 \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^4 |\varphi_x|^2 dx - 3\alpha \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_{xx} dx \\ &\quad - 3\alpha \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_{xxx} dx - 3\alpha \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^4 \varphi_x \bar{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Όμως, καθώς

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^4 \varphi_x \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} |\varphi|^4 \operatorname{Re}(\varphi_x \bar{\varphi}) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\varphi|^2)^2 (|\varphi|^2)_x dx = 0,$$

έχουμε ότι

$$(2.22) \quad \begin{aligned} 3\alpha \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_t dx &= -3\alpha \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_{xx} dx \\ &- 3\alpha \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}_{xxx} dx. \end{aligned}$$

Την ίδια αντικατάσταση για την $\bar{\varphi}_t$, πραγματοποιούμε και στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.21):

$$\begin{aligned} \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx &= \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} (-3\alpha |\varphi|^2 \bar{\varphi}_x - i\rho \bar{\varphi}_{xx} - \sigma \bar{\varphi}_{xxx} - i\delta |\varphi|^2 \bar{\varphi}) dx \Rightarrow \\ \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx &= -3\alpha \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_x dx - \sigma \rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xx} dx \\ &- \sigma^2 \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xxx} dx - \sigma \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xx} dx = -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \bar{\varphi}_{xxx} dx = -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xx} dx \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xx} dx = 0,$$

και

$$\operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_{xxx} dx = \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi_{xxx}|^2 dx = 0,$$

οπότε

$$(2.23) \quad \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_t dx = -\sigma \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx - 3\alpha \sigma \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi}_x dx.$$

Με τη βοήθεια των δύο τελευταίων σχέσεων, η (2.21) γίνεται

$$(2.24) \quad \frac{dJ(\varphi(t))}{dt} - \frac{3\alpha\rho}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_x|^2)_x dx - \sigma \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx = 0.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx &= -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx - 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi \varphi_{xx} \bar{\varphi} \bar{\varphi}_x dx \\ &= -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx - \int_{\Omega} |\varphi|^2 2 \operatorname{Re}(\varphi_{xx} \bar{\varphi}_x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.25) \quad -\operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_{xxx} \bar{\varphi} dx = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx + \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_x|^2)_x dx.$$

Με αντικατάσταση της (2.25) στην (2.24), και με χρήση της (2.2), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\varphi(t)) &- \frac{3\alpha\rho}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_x|^2)_x dx + \alpha\rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx \\ &+ \alpha\rho \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_x|^2)_x dx = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.26) \quad \frac{d}{dt} J(\varphi(t)) - \frac{\alpha\rho}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_x|^2)_x dx + \alpha\rho \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx = 0.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο τελευταίο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx &= -\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \varphi_x \bar{\varphi}^2 dx - 2\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_x \bar{\varphi} \bar{\varphi}_x dx \Rightarrow \\ 2\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx &= -2\operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \varphi_x \bar{\varphi} dx \Rightarrow \\ 2\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx &= - \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 2\operatorname{Re}(\varphi_x \bar{\varphi}) dx \Rightarrow \\ 2\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx &= - \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.27) \quad \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_x \varphi_{xx} \bar{\varphi}^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x dx.$$

Τέλος, με αντικατάσταση της (2.27) στην (2.26), και με χρήση της περιοδικότητας των λύσεων, καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\varphi(t))}{dt} - \frac{\alpha\rho}{2} \int_{\Omega} [(|\varphi_x|^2)_x |\varphi|^2 + |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x] dx &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dJ(\varphi(t))}{dt} - \frac{\alpha\rho}{2} \int_{\Omega} (|\varphi_x|^2 |\varphi|^2)_x dx &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dJ(\varphi(t))}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, και η $J(\varphi(t))$ είναι σταθερή ως προς το χρόνο, οπότε $J(\varphi(t)) = J(\varphi_0)$. \square

Οι νόμοι διατήρησης που προκύπτουν από το παραπάνω Λήμμα, θα μας χρησιμεύσουν στην απόδειξη της ολικής ύπαρξης των λύσεων του προβλήματός μας, στον χώρο $H_{\text{per}}^2(\Omega)$. Ωστόσο, καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη αυτή, θα έχει μια εξίσωση για την παράγωγο κατάλληλου συναρτησοειδούς, η οποία ικανοποιείται από τις ασθενείς λύσεις. Την εξίσωση αυτή την καλούμε καταχρηστικά, και προς χάρη της συντομίας, ως « H_{per}^2 -εξίσωση ενέργειας», η οποία όπως θα δούμε, ικανοποιείται από αρχικά δεδομένα ομαλότητας - $H_{\text{per}}^3(\Omega)$.

Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών που είναι απαραίτητοι για την παραγωγή της H_{per}^2 -εξίσωσης ενέργειας, παραθέτουμε τα παρακάτω Λήμματα που αναφέρονται στην παραγωγή - ως προς το χρόνο - συναρτήσεων με τιμές σε έναν χώρο Hilbert.

Λήμμα 2. Έστω $V_i \subset H \subset V_i'$ μια ακολουθία πραγματικών χώρων Hilbert, με συνεχείς εγκλεισμούς. Αν

$$\varphi_i \in L_2([0, T], V_i), \quad \partial_t \varphi_1 \in L_2([0, T], V_2'), \quad \partial_t \varphi_2 \in L_2([0, T], V_1')$$

τότε

$$\partial_t \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_2, \partial_t \varphi_1 \rangle_{V_2, V_2'} + \langle \varphi_1, \partial_t \varphi_2 \rangle_{V_1, V_1'}.$$

Λήμμα 3. Έστω $V \subset H \subset V'$ τρεις πραγματικοί χώροι Hilbert με συνεχείς εγκλεισμούς. Υποθέτουμε ότι ο V είναι μια γενικευμένη άλγεβρα Banach και

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi \rangle_{V, V'} &= (\varphi, \psi)_H, \quad \forall \varphi \in V, \quad \forall \psi \in H, \\ \langle \varphi, z\psi \rangle_{V, V'} &= \langle \varphi\psi, z \rangle_{V, V'}, \quad \forall \varphi, \psi \in V, \quad \forall z \in V'.\end{aligned}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι

$$\psi_i \in L_2([0, T], V), \quad \partial_t \psi_i \in L_2([0, T], V'), \quad i = 1, 2.$$

Τότε, υπάρχει η παράγωγος $\partial_t(\psi_1\psi_2)$ και

$$\langle \varphi, \partial_t(\psi_1\psi_2) \rangle_{V, V'} = \langle \varphi, \psi_2\partial_t\psi_1 + \psi_1\partial_t\psi_2 \rangle_{V, V'}, \quad \forall \varphi \in V.$$

Με την βοήθεια των παραπάνω Λημμάτων, η « H_{per}^2 -εξίσωση ενέργειας» διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 2. Για $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^3(\Omega)$, θεωρούμε την τοπική χρονικά λύση

$$\phi \in C([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)) \cap C^1([0, T], L_2(\Omega)).$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι συντελεστές ικανοποιούν την σχέση (2.2). Θεωρούμε τα συναρτησιακά:

$$(2.28) \quad J_1(\varphi) = \rho \int_{\Omega} |\varphi_{xx}|^2 dx - 4\delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 dx - \delta \text{Re} \int_{\Omega} \varphi^2 \bar{\varphi}_x^2 dx,$$

$$(2.29) \quad \begin{aligned}E_1(\varphi) &= 9\alpha\delta \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x - 6\alpha\delta \text{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}^2 \varphi_{xx} dx \\ &- 8\delta\rho \text{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi \bar{\varphi}_{xx} dx - 4\delta\rho \text{Im} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \bar{\varphi} \varphi_{xx} dx \\ &+ 6\delta^2 \text{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^4 \bar{\varphi} \varphi_{xx} dx - 6\delta^2 \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi^2 \bar{\varphi}_x dx\end{aligned}$$

Τότε η λύση $\varphi, \forall t \in [0, T]$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(2.30) \quad \frac{d}{dt} J_1(\varphi) = E_1(\varphi).$$

Απόδειξη. Πραγματοποιώντας άμεσα τις παραγωγίσεις της (2.30), εμφανίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξης, για τους οποίους δεν είναι δυνατός ο αυστηρός χειρισμός (π.χ. με απευθείας ολοκλήρωση κατά παράγοντες), καθώς απαιτείται η λύση να έχει ομαλότητα μεγαλύτερη από αυτήν που εξασφαλίζει το Θεώρημα 1 της τοπικής ύπαρξης λύσεων. Για τον λόγο αυτό, επιλέγουμε να πραγματοποιήσουμε τον απαραίτητο λογισμό παραγωγίσεων ή ολοκληρώσεων, χρησιμοποιώντας ένα προσεγγιστικό σχήμα ανάλογο της εργασίας [88] για τη λύση φ . Οι προσεγγίσεις που θα χρησιμοποιήσουμε (και θα περιγράψουμε με λεπτομέρεια στην συνέχεια), είναι C^∞ και ως προς τις δυο μεταβλητές.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι η μοναδική λύση $\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)) \cap C^1([0, T], L_2(\Omega))$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$(2.31) \quad \begin{aligned}\varphi_{xt} = \varphi_{tx} &\in L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)), \\ \varphi_{txx} = \varphi_{xtx} = \varphi_{xxt} &\in L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-2}(\Omega)), \\ \varphi_{xxxx} &\in L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)),\end{aligned}$$

όπου H^{-m} ο δυϊκός χώρος του H^m .

Συμβολίζουμε με

$$(2.32) \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{H^m, H^{-m}} = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi \psi dx$$

το δυϊκό γινόμενο (duality product), μεταξύ των στοιχείων του χώρου H^m και του δυϊκού του H^{-m} για $m \geq 1$, ώστε να τονιστεί ότι κάποιες ποσότητες, κατά τη διάρκεια των υπολογισμών, δρουν ως συναρτησιακά. Σημειώνουμε επίσης, ότι η ισότητα

$$(2.33) \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{H^m, H^{-m}} = (\varphi, \psi)_{L_2(\Omega)}, \forall \varphi \in H_{\text{per}}^m(\Omega), \forall \psi \in H_{\text{per}}^{-m}(\Omega),$$

ισχύει για την περίπτωση που η εμφύτευση

$$(2.34) \quad H_{\text{per}}^m(\Omega) \subseteq L_2(\Omega) \subseteq H_{\text{per}}^{-m}(\Omega)$$

είναι συμπαγής.

Για να προσεγγίσουμε την λύση φ ως προς τις συντεταγμένες του χώρου, θεωρούμε για αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$, το τμήμα της εκείνο που χαρακτηρίζεται από χαμηλές συχνότητες:

$$(2.35) \quad \varphi_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \hat{\varphi}_k(t) e^{2\pi i \frac{k}{L} x}.$$

Το μερικό άθροισμα (2.35), είναι ουσιαστικά η προβολή της φ , στους πρώτους n όρους της σειράς Fourier. Η φ_n είναι μια λεία αναλυτική συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές του χώρου. Μπορούμε να ομαλοποιήσουμε την φ_n και ως προς τον χρόνο, χρησιμοποιώντας τον καθιερωμένο ομαλοποιητή (standard mollifier):

$$J_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} J\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \epsilon > 0,$$

με τις ιδιότητες $J_{\epsilon}(t) = 0, \forall |t| \geq \epsilon$ και $\int_{\mathbb{R}} J_{\epsilon}(t) dt = 1$. Θυμίζουμε ότι $J \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), J(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} J(t) dt = 1$. Τότε η συνάρτηση

$$J_{\epsilon} * \varphi_n : \mathbb{R} \mapsto H_{\text{per}}^3(\Omega),$$

με

$$(J_{\epsilon} * \varphi_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_{\epsilon}(t-s) \varphi_n(s) ds,$$

είναι C^{∞} , και ως προς την μεταβλητή t . Επιπλέον, θέτοντας $\epsilon = \frac{1}{n}$, παρατηρούμε ότι η ομαλοποιημένη ακολουθία $v_n = J_{\frac{1}{n}} * \varphi_n$, ικανοποιεί τις σχέσεις σύγκλισης της $\varphi \in L_2([0, T] H_{\text{per}}^m(\Omega))$ για $-2 \leq m \leq 3$. Η v_n είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, και συγκλίνει ασθενώς στην φ στους αντίστοιχους χώρους:

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup \varphi && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)) \\ v_{nx} &\rightharpoonup \varphi_x && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^2(\Omega)) \\ v_{nt} &\rightharpoonup \varphi_t && \text{στον } L_2([0, T], L_2(\Omega)) \\ v_{ntx} &\rightharpoonup \varphi_{tx} && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)) \\ v_{ntxx} &\rightharpoonup \varphi_{txx} && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-2}(\Omega)) \\ v_{nxx} &\rightharpoonup \varphi_{xx} && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^1(\Omega)) \\ v_{nxxx} &\rightharpoonup \varphi_{xxx} && \text{στον } L_2([0, T], L_2(\Omega)) \\ v_{nxxxx} &\rightharpoonup \varphi_{xxxx} && \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 dx = \frac{d}{dt} (|\varphi_x|^2, |\varphi|^2)_{L^2(\Omega)},$$

και αυτό θα γίνει μέσω της αντίστοιχης παράγωγου, για την ομαλοποιητική ακολουθία: παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|v_{nx}|^2, |v_n|^2)_{L_2(\Omega)} &= \left\langle |v_n|^2, \frac{d}{dt} |v_{nx}|^2 \right\rangle_{H^2, H^{-2}} + \left\langle |v_{nx}|^2, \frac{d}{dt} |v_n|^2 \right\rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= \left\langle |v_n|^2, \frac{d}{dt} (v_{nx} \bar{v}_{nx}) \right\rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &+ \left\langle |v_{nx}|^2, \frac{d}{dt} (v_n \bar{v}_n) \right\rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= \langle |v_n|^2, \bar{v}_{nx} v_{nxt} + v_{nx} \bar{v}_{nxt} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &+ \langle |v_{nx}|^2, \bar{v}_n v_{nt} + v_n \bar{v}_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= 2 \langle |v_n|^2, \bar{v}_{nx} v_{nxt} \rangle_{H^2, H^{-2}} + 2 \langle |v_{nx}|^2, \bar{v}_n v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= 2 \langle |v_n|^2 \bar{v}_{nx}, v_{nxt} \rangle_{H^2, H^{-2}} + 2 \langle |v_{nx}|^2 \bar{v}_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= -2 \langle |v_n|^2 \bar{v}_{nxx}, v_{nt} \rangle_{H^1, H^{-1}} - 2 \langle \bar{v}_{nx}^2 v_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &- 2 \langle |v_{nx}|^2 \bar{v}_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} + 2 \langle |v_{nx}|^2 \bar{v}_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}}. \end{aligned}$$

Υπολογίσαμε δηλαδή ότι:

$$\frac{d}{dt} (|v_{nx}|^2, |v_n|^2)_{L_2(\Omega)} = -2 \langle |v_n|^2 \bar{v}_{nxx}, v_{nt} \rangle_{H^1, H^{-1}} - 2 \langle \bar{v}_{nx} v_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς τον χρόνο, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (|v_{nx}|^2, |v_n|^2)_{L_2(\Omega)} d\tau &= -2 \int_0^t \langle |v_n|^2 \bar{v}_{nxx}, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} d\tau \\ &- 2 \int_0^t \langle \bar{v}_{nx}^2 v_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} d\tau \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.36) \quad (|v_{nx}(t)|^2, |v_n(t)|^2)_{L_2(\Omega)} - (|v_{nx}(0)|^2, |v_n(0)|^2)_{L_2(\Omega)} =$$

$$-2 \int_0^t \langle |v_n|^2 \bar{v}_{nxx}, v_{nt} \rangle_{H^1, H^{-1}} d\tau - 2 \int_0^t \langle \bar{v}_{nx}^2 v_n, v_{nt} \rangle_{H^2, H^{-2}} d\tau.$$

Μια διαφορά από τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger [88], είναι ότι παίρνοντας το όριο της (2.36), έχουμε να αντιμετωπίσουμε την εμφάνιση μη γραμμικών όρων, στα γινόμενα του δεξιού μέρους. Αρχικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, λόγω του [80, Παρατήρηση 4, σελ. 85], και της συμπάγειας των εγκλεισμών των χώρων στους οποίους κινούμαστε, μπορούμε να συμπεράνουμε την ισχυρή σύγκλιση

$$(2.37) \quad \begin{aligned} v_n &\longrightarrow \varphi \quad \text{στον } L_2([0, T], H_{\text{per}}^2(\Omega)), \\ v_{nxx} &\longrightarrow \varphi_{xx} \quad \text{στον } L_2([0, T], L_2(\Omega)). \end{aligned}$$

Από την άλλη, μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} & \int_0^T \| |v_n|^2 v_{nxx} - |\varphi|^2 \varphi_{xx} \|_{L_2(\Omega)} ds \\ & \leq c \left[\int_0^T \| v_{nxx} - \varphi_{xx} \|_{L_2(\Omega)}^2 ds + \int_0^T \| v_n - \varphi \|_{L_2(\Omega)}^2 ds \right] \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της (2.36), μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο. Καθώς $n \rightarrow \infty$, η εξίσωση (2.36) συγκλίνει στην

$$(2.38) \quad \frac{d}{dt} (|\varphi_x|^2, |\varphi|^2)_{L_2(\Omega)} = -2 \langle |\varphi|^2 \varphi_{xx}, \varphi_t \rangle_{H^1, H^{-1}} - 2 \langle \varphi_x^2 \varphi, \varphi_t \rangle_{H^2, H^{-2}}.$$

Αντικαθιστούμε στο δεύτερο μέρος της (2.38), την έκφραση του φ_t από την (2.1). Ο πρώτος όρος της σχέσης, γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle |\varphi|^2 \varphi_{xx}, \varphi_t \rangle &= 3\alpha \langle |\varphi|^2 \bar{\varphi}_{xx}, |\varphi|^2 \varphi_x \rangle_{H^1, H^{-1}} - \rho \langle |\varphi|^2 \bar{\varphi}_{xx}, i\varphi_{xx} \rangle_{H^1, H^{-1}} \\ &+ \sigma \langle |\varphi|^2 \bar{\varphi}_{xx}, \varphi_{xxxx} \rangle_{H^1, H^{-1}} - \delta \langle |\varphi|^2 \bar{\varphi}_{xx}, i|\varphi|^2 \varphi \rangle_{H^1, H^{-1}} \\ &= 3\alpha \langle \bar{\varphi}_{xx} \varphi, |\varphi|^4 \rangle_{H^1, H^{-1}} - \rho \langle |\varphi|^2, i|\varphi_{xx}|^2 \rangle_{H^1, H^{-1}} \\ &+ \sigma \langle |\varphi|^2 \bar{\varphi}_{xx}, \varphi_{xxxx} \rangle_{H^1, H^{-1}} - \delta \langle \bar{\varphi}_{xx}, i|\varphi|^4 \varphi \rangle_{H^1, H^{-1}}. \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος, επίσης γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, \varphi_t \rangle_{H^2, H^{-2}} &= \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, -3\alpha |\varphi|^2 \varphi_x + i\rho \varphi_{xx} - \sigma \varphi_{xxx} + i\delta |\varphi|^2 \varphi \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &= -3\alpha \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, |\varphi|^2 \varphi_x \rangle_{H^2, H^{-2}} - \sigma \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, \varphi_{xxx} \rangle_{H^2, H^{-2}} \\ &+ \rho \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, \varphi_{xx} \rangle_{H^2, H^{-2}} + \delta \langle \bar{\varphi}_x^2 \varphi, |\varphi|^2 \varphi \rangle_{H^2, H^{-2}}. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των τελευταίων σχέσεων στην (2.38), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 |\varphi|^2 dx &= 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^4 (|\varphi_x|^2)_x dx + \sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_{xx}|^2)_x dx \\ &+ 2\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^4 \varphi \bar{\varphi}_{xx} dx + 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x dx \\ (2.39) \quad &+ 2\sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_x^2 \varphi \varphi_{xxx} dx + 2\rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_x^2 \varphi \varphi_{xx} dx \\ &+ 2\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_x^2 \varphi^2 |\varphi|^2 dx, \end{aligned}$$

που ισχύει για τη λύση $\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^3(\Omega)) \cap C^1([0, T], L_2(\Omega))$.

Για τις παραγώγους των υπολοίπων όρων της (2.28), εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο. Για τον πρώτο όρο, η παράγωγος είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\varphi_{xx}|^2 dx &= 12\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi_{xx}|_x) dx - 6\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_{xx}^2 \varphi_x \varphi dx \\ (2.40) \quad &- 8\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \varphi \bar{\varphi}_{xx} dx - 4\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\varphi}_{xx} \bar{\varphi} dx \\ &- 2\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi^2 \bar{\varphi}_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Για τον τρίτο όρο:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 \bar{\varphi}_x^2 dx &= 3\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x dx - 6\sigma \operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_{xx}^2 \varphi_x dx \\
&+ 6\alpha \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi_x \bar{\varphi}^2 \varphi_{xx} dx - 2\rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \varphi_{xx} \varphi \bar{\varphi}_x^2 dx \\
(2.41) \quad &- 2\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^2 \varphi^2 \bar{\varphi}_x^2 dx + 4\rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \bar{\varphi} \varphi_{xx} dx \\
&+ 2\rho \operatorname{Im} \int_{\Omega} \bar{\varphi}^2 \bar{\varphi}_{xx} dx + 2\delta \operatorname{Im} \int_{\Omega} |\varphi|^4 \bar{\varphi} \varphi_{xx} dx.
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2.39)-(2.41), και με τη βοήθεια των (2.28) και (2.2), παίρνουμε ως αποτέλεσμα την (2.30). \square

As διευκρινήσουμε τώρα, την ορολογία « H_{per}^2 -εξίσωση ενέργειας», για την εξίσωση (2.30): η σχέση (2.30), περιγράφει τις μεταβολές συναρτησοειδών που περιλαμβάνουν όρους παραγώγων μέχρι και 2ης το πολύ τάξης. Θα μας επιτρέψει, με την βοήθεια της ανισότητας Gagliardo-Nirenberg (2.11), να παράξουμε εκτιμήσεις ως και το επίπεδο της H^2 -νόρμας, από τις οποίες θα προκύψει αντίστοιχα, και η ολική ύπαρξη λύσεων στο επίπεδο της νόρμας αυτής.

Θεώρημα 3. Έστω $\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^3) \cap C^1([0, T], L_2(\Omega))$ η τοπική ως προς το χρόνο λύση του προβλήματός μας. Έστω επίσης ότι ισχύει η (2.2), και επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι $\rho \neq 0$. Τότε

$$\varphi \in L_{\infty}([0, \infty) H_{\text{per}}^2) \cap C([0, \infty) H_{\text{per}}^1),$$

δηλαδή η λύση φ δεν παρουσιάζει έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, ως προς την H_{per}^m - νόρμα για $m = 1, 2$.

Απόδειξη. Από τον νόμο διατήρησης (2.15), έχουμε ότι:

$$(2.42) \quad \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\varphi_0\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

Επίσης, από τους νόμους διατήρησης (2.42), (2.16) και την ανισότητα (2.11), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\varphi_x\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \|\varphi_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_{\delta\rho} \|\varphi_0\|_{L_4(\Omega)}^4 + c_{\delta\rho} \|\varphi\|_{L_4(\Omega)}^4 \Rightarrow \\
(2.43) \quad \|\varphi_x\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq M_1 + c_{\delta\rho} \|\varphi_x\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi_0\|_{L_2(\Omega)},
\end{aligned}$$

όπου $c_{\delta\rho} = \left| \frac{\delta}{\rho} \right|$, με την σταθερά M_1 να εξαρτάται μόνο από το $\|\varphi_0\|_{H^1(\Omega)}$ και τους συντελεστές. Τότε, από τη (2.43) και την ανισότητα του Young, παίρνουμε

$$(2.44) \quad \|\varphi_x\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_2,$$

όπου η σταθερά M_2 είναι ανεξάρτητη του χρόνου t .

Το επόμενο βήμα είναι να πετύχουμε μια εκτίμηση για την $\|\varphi_{xx}(t)\|_{L_2(\Omega)}$. Σημειώνουμε πρώτα, ότι κατά την παραγωγή της εξίσωσης ενέργειας (2.30), τα ολοκληρώματα $\operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_{xx}|^2 dx$ και $\operatorname{Re} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_{xx}^2 \varphi \varphi_x dx$ είχαν απαλειφθεί από τις

ποσότητες (2.39) - (2.41). Έτσι, η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο της (2.30), συνεπάγεται την ανισότητα

$$(2.45) \quad \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq |\rho|^{-1} \left\{ \int_0^t (|E_1(s)| + |E_2(s)|) ds + |J_1(0)| \right\},$$

$$E_2(t) = 4\delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 dx + \delta \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi^2 \bar{\varphi}_x^2 dx.$$

Οι διάφορες ποσότητες που φαίνονται στην (2.30), μπορούν να εκτιμηθούν με τη βοήθεια της (2.11) ή της (2.10). Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (2.11) για $u = \varphi_x$ με

$$j = 0, p = 4, q = r = 2, m = 1$$

και για $u = \varphi$ με

$$j = 1, p = 3, q = r = 2, m = 2$$

για να πετύχουμε αντίστοιχα, τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$(2.46) \quad \|\varphi_x\|_{L_4(\Omega)}^2 \leq c \|\varphi_x\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^3 \leq c \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{5}{4}} \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{7}{4}}.$$

Η σταθερά c στη (2.45), εξαρτάται από τις σταθερές M_1, M_2 , που συναντήσαμε παραπάνω. Τότε, από την ανισότητα του Young, και την εκτίμηση (2.44), φτάνουμε στις

$$(2.47) \quad \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 |\varphi| |\varphi_{xx}| dx \leq \|\varphi\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\varphi_x\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \leq M + c \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\left| \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\varphi_x|^2 (|\varphi|^2)_x dx \right| \leq c \int_{\Omega} |\varphi|^3 |\varphi_x|^3 dx \leq M + c \|\varphi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Οι υπόλοιποι από τους όρους, μπορούν να εκτιμηθούν με παρόμοιο τρόπο [λαμβάνοντας βεβαίως υπόψη μας, την ανεξάρτητη από το χρόνο εκτίμηση του $\|\varphi_0\|_{L_{\infty}(\Omega)}$ που έχουμε από την (2.44)]. Η σταθερά M εξαρτάται από τους συντελεστές και το $\|\varphi_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην εκτίμηση

$$(2.48) \quad \|\varphi_{xx}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M + c \int_0^t \|\varphi_{xx}(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

όπου η c παριστάνει μια σταθερά, που εξαρτάται επίσης μόνο από τους συντελεστές, και την $\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$.

Στο σημείο αυτό, ας υπενθυμίσουμε το Λήμμα Grönwall: για δυο συνεχείς συναρτήσεις f, g στο διάστημα $I = [t_0, t_1]$ (είναι δυνατόν και $I = [t_0, \infty)$ ή $I = [t_0, t_1)$), με την συνάρτηση $g \geq 0$, για κάθε $t \in I$, που ικανοποιούν την σχέση

$$(2.49) \quad f(t) \leq K + \int_{t_0}^t f(s)g(s)ds,$$

για κάθε $t \in I$, ισχύει ότι

$$(2.50) \quad f(t) \leq K e^{\int_{t_0}^t g(s)ds},$$

για κάθε $t \in I$. Είναι φανερό ότι η ανισότητα (2.48), είναι στην μορφή της (2.50), με $f(t) = \|\varphi_{xx}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 g(t) = c > 0$, και $K = M$. Επομένως, ισχύει η εκτίμηση

$$(2.51) \quad \|\varphi_{xx}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M e^{ct}, \quad \forall t \in [0, T_{\max}).$$

Ουσιαστικά, η (2.51), επιτρέπει την επέκταση στο $T_{\max} = \infty$ (καθώς αποκλείει ιδιομορφία σε πεπερασμένο χρόνο), από την εφαρμογή του εναλλακτικού κριτηρίου (alternative criterion), [8] (βλ. επίσης [16]). Το κριτήριο αυτό, χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στην γενικευμένη εξίσωση KdV.

Συγκεκριμένα, έστω $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^3(\Omega)$ και T_{\max} , ο μέγιστος χρόνος για τον οποίο $\forall T$ με $0 < T < T_{\max}$, ισχύει $\varphi \in L_{\infty}([0, T] H_{\text{per}}^2(\Omega)) \cap C([0, T], H_{\text{per}}^1(\Omega))$. Για την λύση, είναι δυνατόν να ισχύει μόνο μια από τις παρακάτω δυνατότητες: είτε

$$(2.52) \quad T_{\max} = \infty$$

$$(2.53) \quad \text{είτε} \quad \sup_{0 \leq t < T_{\max}} \|\varphi(t)\|_{H_{\text{per}}^2(\Omega)} = \infty.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η (2.52). Ας υποθέσουμε αντίθετα, ότι $T_{\max} < \infty$ και ότι ισχύει η (2.53). Τότε, λόγω της (2.51), η $\|\varphi_{xx}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$ δεν μπορεί να παρουσιάζει ιδιομορφία σε πεπερασμένο χρόνο, και η ισχύς της (2.51) επεκτείνεται και για $t \in (0, \infty)$. Επομένως, η μόνη δυνατότητα για να μην παραβιαστεί η μεγιστικότητα του T_{\max} , είναι να παρουσιάζουν ιδιομορφία σε πεπερασμένο χρόνο, οι όροι κατώτερης τάξης της νόρμας $\|\varphi(t)\|_{H_{\text{per}}^2(\Omega)}$. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\sup_{0 \leq t < T_{\max}} \{\|\phi(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|\phi_x(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\} = \infty.$$

Όμως η τελευταία, έρχεται σε αντίφαση με τις ανεξάρτητες ως προς τον χρόνο εκτιμήσεις (2.42), (2.43). Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, και άρα ισχύει η (2.52). \square

Παρατήρηση 2. Νόμοι διατήρησης: Η παραγωγή των νόμων διατήρησης (2.13) και (2.14), εξαρτάται ισχυρά από την υπόθεση (2.2) για τους συντελεστές. Θα πρέπει να σημειώσουμε, ότι εδώ παρατηρούνται παρόμοιες δυσκολίες, όπως και στις εξισώσεις τύπου KdV. Δηλαδή δεν είναι εύκολο να εξάγουμε ακριβείς τύπους για τις διατηρήσιμες ποσότητες, ή παραγώγους συναρτησοειδών, καθώς στον σχετικό λογισμό, εμφανίζονται από τα πρώτα βήματα, ποσότητες που απαιτούν μεγαλύτερη ομαλότητα, από αυτήν που παρέχεται από τα σχετικά Θεωρήματα ύπαρξης, [85]. Όπως ήδη αναφέραμε κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 3, η συνθήκη (2.2), έχει ισχυρή επίδραση στην ολική επιλυσιμότητα του προβλήματός μας, αφού επιτρέπει την απαλοιφή των αντίστοιχων όρων ανώτερης τάξης. Επιπλέον, παραμένει ως ένα ενδιαφέρον ανοικτό ερώτημα, το αν η γενικευμένη ENLS της μορφής (2.12), έχει διατηρήσιμη ποσότητα, αντίστοιχη της (2.16). Υπενθυμίζουμε ότι αυτό συμβαίνει για τις εξισώσεις της NLS της μορφής $u_t - i\mu_{xx} + f(|u|^2)u = 0$, όπου διατηρείται ποσότητα παρόμοια της (2.16), για μια ευρεία γκάμα από μη-γραμμικότητες $f(|u|^2)u$ [21, 22]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της (2.12), για την οποία είναι δύσκολο να διερευνηθεί η διατήρηση συναρτησοειδούς της μορφής (2.16), είναι η περίπτωση της γενικευμένης εξίσωσης Hirota, με παράγοντες μη γραμμικότητας $\beta(s) = s^p = \gamma(s)$ ή $\beta(s) = s^p, \gamma(s) = s^q$, όπου p, q είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Λύσεις αυτής της εξίσωσης, ικανοποιούν τον νόμο διατήρησης (2.15). Ωστόσο δεν φαίνεται να έχουμε διατήρηση της ενέργειας τύπου (2.16) (όπως στις προαναφερθείσες εξισώσεις NLS), ή διατήρηση παοσοτήτων που να προσομοιάζουν

αυτές της γενικευμένης εξίσωσης και KdV , για παρόμοιο τύπο μη γραμμικοτήτων [16, σελ. 12].

Τέλος, σημειώνουμε ότι η παραγωγή νόμων διατήρησης, είναι δυνατόν να αποδειχθεί κάτω από ασθενέστερες προϋποθέσεις ομαλότητας για τις αρχικές συνθήκες, από αυτές που διατυπώνονται στο θεώρημα 1. Πράγματι, μια προσεγγιστική διαδικασία, παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στο θεώρημα 2, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε τους νόμους διατήρησης (2.15), (2.16), ακόμη κι όταν η αρχική συνθήκη $\varphi_0 \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$, και η αντίστοιχη λύση $\varphi \in C([0, T], H_{\text{per}}^1) \cap C^1([0, T], H_{\text{per}}^{-2})$.

Κεφάλαιο 3

Ακριβείς λύσεις μοναχικών κυμάτων

Στο Κεφάλαιο 2, ασχοληθήκαμε με το θέμα της ύπαρξης (ασθενών) λύσεων για το πρόβλημά μας, καθώς και τις απαραίτητες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, για να ορίζονται ολικά ως προς τον χρόνο, αυτές οι λύσεις.

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα επικεντρωθούμε στην διερεύνηση συνθηκών, για την ύπαρξη αναλυτικών λύσεων μοναχικών κυμάτων (solitary waves). Η μέθοδος που ακολουθείται, βασίζεται στην μέθοδο υποβιβασμού σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν αναζητώντας λύσεις της (2.1), με την μορφή οδεύοντος κύματος (traveling wave). Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αναλύονται με την μέθοδο του πορτραίτου φάσεων [45], [32].

Ειδικότερα, αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$(3.1) \quad \varphi(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(\xi), \quad \xi = x - vt.$$

Στην (3.1), η $F(\xi)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση, που περιγράφει την περιβάλλουσα του κύματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί πραγματική. Οι πραγματικές παράμετροι k_0, ω_0 , είναι αντίστοιχα, ο κυματαριθμός και η κυκλική συχνότητα. Η παράμετρος v , αντιστοιχεί στην ομαδική ταχύτητα του κύματος, σε διάγραμμα $x - t$, και συνδέεται με την έννοια της ομαδικής ταχύτητας v_g ενός παλμού, που διαδίδεται σε οπτική ίνα [44]. Οι παράμετροι k_0, ω_0 και v είναι άγνωστες παράμετροι, που πρέπει να προσδιοριστούν.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον, το ότι η συνθήκη ισορροπίας (2.2) εμφανίζεται ξανά, αυτή την φορά, ως απαραίτητη συνθήκη για την υποστήριξη λύσεων οδεύοντος κύματος της μορφής (3.1).

Θεώρημα 4. Έστω $\sigma \neq 0$. Η εξίσωση (2.1) υποστηρίζει λύσεις οδεύοντος κύματος της μορφής (3.1), για κάθε $k_0 \neq \frac{\rho}{3\sigma}$, αν ισχύει η συνθήκη (2.2), και τα ω_0, v ικανοποιούν τη σχέση

$$(3.2) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sigma} \left[(v + 3k_0^2 \sigma - 2k_0 \rho) (3k_0 \sigma - \rho) + \sigma (\rho k_0^2 - \sigma k_0^3) \right].$$

Απόδειξη. Αρχικά, υπολογίζουμε τις παραγώγους της φ παίρνοντας υπόψη μας ότι

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 :$$

$$\begin{aligned}\varphi_t &= (-vF' - i\omega_0 F)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \\ \varphi_x &= (F' + ik_0 F)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \\ \varphi_{xx} &= (F'' + 2ik_0 F' - k_0^2 F)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \\ \varphi_{xxx} &= (F''' + 3ik_0 F'' - 3k_0^2 F' - ik_0^3 F)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}\end{aligned}$$

Να σημειώσουμε, ότι ο τόνος παριστάνει την συνήθη παράγωγο της F ως προς ξ . Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (2.1), και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -vF' - i\omega_0 F - i\rho F'' + 2\rho k_0 F' + i\rho k_0^2 F + \sigma F''' + 3i\sigma k_0 F'' - 3\sigma k_0^2 F' \\ -i\sigma k_0^3 F + 3\alpha F^2 F' + 3i\alpha k_0 F^3 - i\delta F^3 = 0 \end{aligned}$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(3.4) \quad F''' - \frac{v + 3k_0^2 \sigma - 2\rho k_0}{\sigma} F' + \frac{3\alpha}{\sigma} F^2 F' = 0,$$

$$(3.5) \quad F'' - \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} F + \frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} F^3 = 0,$$

για τις οποίες απαιτούμε να ισχύουν οι προϋποθέσεις

$$(3.6) \quad \sigma \neq 0, \rho \neq 3\sigma k_0.$$

Για να είναι το παραπάνω σύστημα καλώς ορισμένο, θα πρέπει η (3.5) να είναι άλλη μια φορά παραγωγίσιμη. Κάνοντας την παραγωγή της, η (3.5) γίνεται

$$F''' - \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} F' + 3 \frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} F^2 F' = 0,$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων ίδιας τάξης, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$(3.7) \quad \frac{v + 3k_0^2 \sigma - 2\rho k_0}{\sigma} = \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} = \lambda,$$

$$(3.8) \quad \frac{3\alpha}{\sigma} = 3 \frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} = \mu,$$

όπου τα λ, μ είναι μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.

Η συνθήκη (3.8), συνεπάγεται άμεσα ότι $\alpha\rho = \sigma\delta, \forall k_0 \in \mathbb{R}$. Η συνθήκη (3.2) εξάγεται λύνοντας την (3.7), ως προς ω_0 . \square

Πόρισμα 1. Έστω $\sigma, \rho \neq 0$. Η εξίσωση (2.1) υποστηρίζει λύσεις οδεύοντος κύματος, της μορφής (3.1), με κυματαριθμό $k_0 = 0$, αν ισχύει η συνθήκη (2.2) για τους συντελεστές, και τα ω_0, v ικανοποιούν τη σχέση

$$(3.9) \quad \frac{v}{\sigma} = -\frac{\omega_0}{\rho}.$$

Με δεδομένες τις σχέσεις (3.7) και (3.8), που καθιστούν το σύστημα των (3.4) και (3.5) συνεπές, η συνήθης διαφορική εξίσωση 2ης τάξης που προκύπτει, είναι ουσιαστικά μια συντηρητική εξίσωση Duffing:

$$(3.10) \quad F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση, έχει Χαμιλτονιανή την

$$(3.11) \quad H(F, F') = \frac{F'^2}{2} + \lambda \frac{F^2}{2} + \mu \frac{F^4}{4}.$$

Οι ακριβείς λύσεις της (2.1), όπως και η δυναμική τους μπορούν να προσδιοριστούν από τις λύσεις και την δυναμική της (3.10).

Για να περιορίσουμε τον αριθμό των παραμέτρων που εμπλέκονται στην μελέτη μας, πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $t \rightarrow \rho t$, και ξαναγράφουμε την εξίσωση (2.1) στην μορφή

$$(3.12) \quad \varphi_t + 3\frac{\alpha}{\rho}|\varphi|^2\varphi_x - i\varphi_{xx} + \frac{\sigma}{\rho}\varphi_{xxx} - i\frac{\delta}{\rho}|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Στην συνέχεια, προχωρούμε στον μετασχηματισμό

$$(3.13) \quad \frac{\delta}{\rho}|\varphi|^2 \rightarrow s|\varphi|^2, \quad s = \text{sign}\left(\frac{\delta}{\rho}\right),$$

και η εξίσωση (3.12), παίρνει τη μορφή

$$(3.14) \quad \varphi_t + 3As|\varphi|^2\varphi_x - i\varphi_{xx} + B\varphi_{xxx} - is|\varphi|^2\varphi = 0,$$

όπου οι σταθερές A , B και s ορίζονται ως

$$(3.15) \quad A = \frac{\alpha}{\delta}, \quad B = \frac{\sigma}{\rho}, \quad s = \text{sign}\left(\frac{\delta}{\rho}\right).$$

Επανερχόμαστε στις συνθήκες συνέπειας (3.7), (3.8), για τις εξισώσεις (3.14), (3.15). Συγκρίνοντας τους συντελεστές της αρχικής εξίσωσης (2.1), με αυτούς της εξίσωσης (3.14), παρατηρούμε ότι

$$(3.16) \quad \alpha \rightarrow As, \rho \rightarrow 1, \sigma \rightarrow B, \delta \rightarrow s.$$

Τότε, οι συνθήκες (3.7), (3.8), γράφονται αντίστοιχα ως:

$$(3.17) \quad \lambda = \frac{v + 3k_0^2B - 2k_0}{B} = \frac{\omega_0 - k_0^2 + Bk_0^3}{3k_0B - 1},$$

$$(3.18) \quad \mu = \frac{As}{B} = \frac{3Ask_0 - s}{3Bk_0 - 1}.$$

Τώρα, με την βοήθεια των (3.15), (3.17), (3.18), μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 5. Θεωρούμε την εξίσωση (3.14).

I. Ύπαρξη οδευόντων κυμάτων

Εστω οι συντελεστές s, A, B που ορίζονται από την (3.13) και την (3.15). Τότε, η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδευόντων κυμάτων, της μορφής (3.1) για κάθε κυματαριθμό $k_0 \neq \frac{1}{3B}$, αν

$$(3.19) \quad A = B, \quad \text{και} \quad \omega_0 = k_0^2 - Bk_0^3 + \frac{(v + 3k_0^2B - 2k_0)(3k_0B - 1)}{B}.$$

II. Φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια

Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η (3.19). Τότε η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδευόντων κυμάτων (3.1), της μορφής των φωτεινών σολιτονίων με περιβάλλουσα

$$(3.20) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{2|\lambda|} \operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|}\xi),$$

αν οι συντελεστές λ και μ που προσδιορίζονται από τις (3.17) και (3.18) είναι τέτοιοι ώστε

$$(3.21) \quad \mu = 1, \quad \lambda > 0.$$

Η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδευόντων κυμάτων (3.1), της μορφής των σκοτεινών σολιτονίων με περιβάλλουσα

$$(3.22) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{|\lambda|} \tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\xi\right),$$

αν οι συντελεστές λ και μ είναι τέτοιοι ώστε

$$(3.23) \quad \mu = -1, \quad \lambda < 0.$$

Απόδειξη. I. Το σκέλος αυτό έχει ουσιαστικά αποδειχθεί από το θεώρημα 4. Οι συνθήκες (3.19), είναι οι συνθήκες (2.1) και (3.2), στις οποίες έχουν εισαχθεί οι νέοι συντελεστές A και B από την (3.15).

II. Εισάγουμε τον μετασχηματισμό

$$(3.24) \quad F(\xi) = \sqrt{\frac{|\lambda|}{|\mu|}} Q(\tau), \quad \tau = \sqrt{|\lambda|}\xi,$$

από τον οποίο παίρνουμε ότι

$$F'(\xi) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{|\mu|}} \dot{Q}, \quad F''(\xi) = \frac{|\lambda|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{|\mu|}} \ddot{Q},$$

όπου $\dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau} = P$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (3.10), παίρνουμε

$$|\lambda|^{\frac{3}{2}} \ddot{Q} + \lambda |\lambda|^{\frac{1}{2}} Q + \frac{\mu}{|\mu|} |\lambda|^{\frac{3}{2}} Q^3 = 0 \Rightarrow$$

$$(3.25) \quad \ddot{Q} + \text{sign}(\lambda)Q + \text{sign}(\mu)Q^3 = 0.$$

Η Χαμιλτονιανή της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$(3.26) \quad \tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + \text{sign}(\lambda)\frac{Q^2}{2} + \text{sign}(\mu)\frac{Q^4}{4} = \tilde{h}.$$

Φωτεινά σολιτόνια

Αν ο λ είναι αρνητικός, και ο μ θετικός πραγματικός αριθμός, έχουμε $\text{sign}(\lambda) = -1$ και $\text{sign}(\mu) = 1$. Η εξίσωση (3.25) γίνεται $\ddot{Q} - Q + Q^3 = 0$, η οποία ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P \\ \dot{P} &= Q - Q^3 \end{aligned}$$

Τα στάσιμα σημεία του συστήματος είναι: $(0, 0), (\pm 1, 0)$. Το σύστημα είναι συντηρητικό 2ης τάξης, με Χαμιλτονιανή :

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{4} = \tilde{h},$$

και δυναμική ενέργεια $U(Q) = -\frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{4}$, οπότε $U''(Q) = 3Q^2 - 1$.

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά των στάσιμων σημείων: $U''(0) = -1 < 0$, άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο $U''(\pm 1) = 2 > 0$, άρα τα σημεία $(\pm 1, 0)$ είναι ευσταθή κέντρα.

Για το σαγματικό σημείο $(Q, P) = (0, 0)$ έχουμε $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{h} = 0$, άρα οι ομοκλινικές τροχιές έχουν εξίσωση

$$\frac{P^2}{2} - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{4} = 0 \Rightarrow P^2 = -\frac{Q^4}{2} + Q^2 \Rightarrow P = \pm \frac{\sqrt{2Q^2 - Q^4}}{\sqrt{2}},$$

για $Q \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Έτσι,

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\sqrt{2Q^2 - Q^4}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \int \frac{dQ}{\sqrt{2Q^2 - Q^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\tau.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του αριστερού μέρους, θέτουμε $\omega = \frac{\sqrt{2}}{Q}$, οπότε

$$dQ = -\frac{\sqrt{2}}{\omega^2} d\omega, \quad \sqrt{2Q^2 - Q^4} = \frac{2}{\omega^2} \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arccosh} \omega = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arccosh} \frac{\sqrt{2}}{Q}.$$

Άρα, οι λύσεις των φωτεινών σολιτόνιων που αντιστοιχούν στις συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές είναι:

$$(3.27) \quad Q_{\pm}^{(bs)}(\tau) = \pm \sqrt{2} \text{sech}(\tau).$$

Αντικαθιστούμε την (3.27), στην (3.24), και παίρνουμε τις λύσεις για την περιβάλλουσα των φωτεινών σολιτονίων:

$$F_{\pm}^{(bs)}(\xi) = \pm \sqrt{2 \left| \frac{\lambda}{\mu} \right|} \operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|} \xi),$$

οι οποίες για $\mu = 1$ καταλήγουν στην (3.20).

Συνοψίζοντας, τα φωτεινά σολιτόνια, αντιστοιχούν σε δυναμική ενέργεια $U(Q) = \frac{Q^4}{4} - \frac{Q^2}{2}$, που περιγράφει ένα διπλό πηγάδι δυναμικού, με ευσταθή κέντρα $(Q, P) = (\pm 1, 0)$, ένα σε κάθε πηγάδι. Τα κέντρα περιστοιχίζονται από συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές, οι οποίες ορίζουν τις λύσεις των φωτεινών σολιτονίων.

Σκοτεινά σολιτόνια

Αν ο λ είναι θετικός και ο μ αρνητικός πραγματικός αριθμός, έχουμε $\operatorname{sign}(\lambda) = 1$ και $\operatorname{sign}(\mu) = -1$. Η εξίσωση (3.25) γίνεται $\dot{Q} + Q - Q^3 = 0$, η οποία ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P \\ \dot{P} &= -Q + Q^3 \end{aligned}$$

Τα στάσιμα σημεία του συστήματος είναι ξανά τα σημεία $(0, 0), (\pm 1, 0)$. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι:

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} - \frac{Q^4}{4} + \frac{Q^2}{2} = \tilde{h}$$

και δυναμική ενέργεια $U(Q) = -\frac{Q^4}{4} + \frac{Q^2}{2}$, οπότε $U''(Q) = -3Q^2 + 1$.

Για τα στάσιμα σημεία παρατηρούμε ότι:

$U''(0) = 1 > 0$, άρα το $(0, 0)$ είναι ευσταθές κέντρο.

$U''(\pm 1) = -2 < 0$, άρα τα $(-1, 0)$ και $(1, 0)$ είναι σαγματικά σημεία.

Τα σαγματικά σημεία αντιστοιχούν στην ενεργειακή στάθμη

$$\tilde{h} = \tilde{H}(\pm 1, 0) = \frac{1}{4},$$

και οι ετεροκλινικές τροχιές περιγράφονται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{2} - \frac{Q^4}{4} + \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{4} &\Rightarrow P^2 = \frac{(Q^2 - 1)^2}{2} \Rightarrow P = \pm \frac{Q^2 - 1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \int \frac{dQ}{Q^2 - 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\tau. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέρους ισούται με $\operatorname{Arctanh} Q$, άρα οι συμμετρικές ετεροκλινικές τροχιές που περιγράφουν τα σκοτεινά σολιτόνια έχουν εξίσωση:

$$(3.28) \quad Q_{\pm}^{(ds)}(\tau) = \pm \tanh\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right).$$

Συνοψίζοντας, η δυναμική ενέργεια $U(Q) = -\frac{Q^4}{4} + \frac{Q^2}{2}$ περιγράφει αντεστραμμένο διπλό πηγάδι δυναμικού, με ευσταθές κέντρο $(Q, P) = (0, 0)$, τοποθετημένο

ανάμεσα στα δύο σαγματικά σημεία, τα οποία αντιστοιχούν στα δυο συμμετρικά τοπικά μέγιστα του αντεστραμμένου δυναμικού. Οι ετεροκλιτικές τροχιές που συνδέουν τα σαγματικά σημεία, ορίζουν τις λύσεις των σκοτεινών σολιτονίων.

Αντικαθιστούμε την (3.28), στην (3.24), και παίρνουμε τις λύσεις για την περιβάλλουσα των σκοτεινών σολιτονίων

$$F_{\pm}^{(ds)}(\xi) = \pm \sqrt{2 \left| \frac{\lambda}{\mu} \right|} \tanh \left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} \xi \right),$$

η οποία καταλήγει στην (3.22), για $\mu = -1$. \square

Στην περίπτωση που ο κυματαριθμός είναι $k_0 = 0$ έχουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 2. I. *Υπαρξη οδυνόντων κυμάτων.*

Θεωρούμε τους συντελεστές s, A, B που ορίζονται από τις (3.13), και (3.15). Η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδυνόντων κυμάτων (3.1), για κυματαριθμό $k_0 = 0$, αν

$$(3.29) \quad A = B, \text{ και } \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

II. *Φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια.*

Έστω ότι επαληθεύεται η συνθήκη (3.19). Τότε η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδυνόντων κυμάτων (3.1) της μορφής φωτεινών σολιτονίων, με κυματαριθμό $k_0 = 0$, και περιβάλλουσα συνάρτηση

$$(3.30) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{2|\lambda|} \operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|}\xi),$$

αν οι παράμετροι μ, v, B, ω_0 είναι τέτοιες ώστε

$$(3.31) \quad \mu = 1, \omega_0 < 0, \frac{v}{B} > 0.$$

Η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδυνόντων κυμάτων (3.1) της μορφής σκοτεινών σολιτονίων, με κυματαριθμό $k_0 = 0$, και περιβάλλουσα συνάρτηση

$$(3.32) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{2|\lambda|} \tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\xi\right),$$

αν οι παράμετροι μ, v, B, ω_0 είναι τέτοιες ώστε

$$(3.33) \quad \mu = -1, \omega_0 > 0, \frac{v}{B} < 0.$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση του κυματαριθμού $k_0 = 0$, η εξίσωση (3.17) γίνεται

$$\lambda = \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5, για τα φωτεινά σολιτόνια απαιτούμε $\mu = 1$ και $\lambda > 0$, παίρνοντας έτσι την (3.31). Για τα σκοτεινά σολιτόνια, απαιτούμε $\mu = -1$ και $\lambda < 0$, παίρνοντας αντίστοιχα την (3.33). \square

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση, είναι ότι η ENLS (2.1) δεν επιδέχεται λύσεις στάσιμων κυμάτων:

Θεώρημα 6. Δεν υπάρχουν περιοδικές ως προς τον χρόνο λύσεις, της μορφής

$$\varphi(x, t) = F(x)e^{-i\omega_0 t},$$

για την εξίσωση ENLS (2.1).

Απόδειξη. Μια περιοδική ως προς το χρόνο λύση της μορφής $\varphi(x, t) = F(x)e^{-i\omega_0 t}$ προκύπτει ως μια ειδική περίπτωση της λύσης (3.1), αν θέσουμε $k_0 = v = 0$. Οπωσδήποτε, από το πόρισμα 1, προκύπτει ότι αν $v = 0$ τότε $\omega_0 = 0$. Έτσι στην περίπτωση αυτή η φ δεν μπορεί να είναι περιοδική ως προς τον χρόνο, αλλά είναι μια λύση σταθερής κατάστασης, ανεξάρτητη από τον χρόνο. \square

3.1 Αριθμητικές μελέτες

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε αποτελέσματα αριθμητικών εξομοιώσεων, οι οποίες διερευνούν αριθμητικά, τις συνθήκες του Θεωρήματος 5 για την ύπαρξη φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την περίπτωση $k_0 = 0$, και τις συνθήκες του πορίσματος 2. Τότε από τις σχέσεις (3.9) και (3.15) προκύπτει ότι, λύσεις οδευόντων κυμάτων της μορφής (3.1) υπάρχουν, αν ισχύει η συνθήκη

$$(3.34) \quad A = B, \quad \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

Για λύσεις φωτεινών σολιτονίων, οι παράμετροι μ, v, B και ω_0 , είναι τέτοιες ώστε

$$(3.35) \quad \mu = 1, \quad \omega_0 < 0, \quad \frac{v}{B} > 0.$$

Για σκοτεινά σολιτόνια, η αντίστοιχη συνθήκη είναι

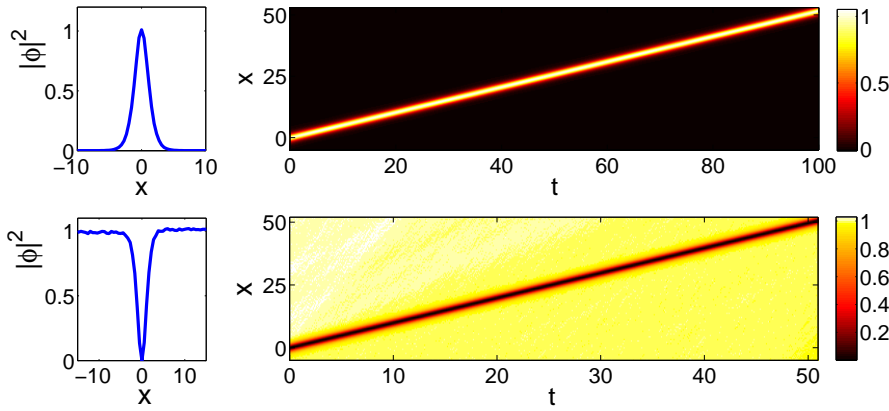
$$(3.36) \quad \mu = -1, \quad \omega_0 > 0, \quad \frac{v}{B} < 0.$$

Η πάνω αριστερά εικόνα του σχήματος 3.1, παρουσιάζει την μορφή της πυκνότητας $|\varphi|^2$, για την αρχική συνθήκη

$$(3.37) \quad \varphi_0(x) = \operatorname{sech}(0.5x) + \epsilon(\text{noise}), \quad \epsilon = 10^{-3},$$

που περιγράφει ένα φωτεινό σολιτόνιο, διαταραγμένο από θόρυβο μικρού πλάτους. Η πάνω δεξιά εικόνα του σχημ. 3.1 παρουσιάζει την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας της αρχικής συνθήκης (με άλλα λόγια, την προβολή της στο xt -επίπεδο). Το αρχικά αδιατάρακτο φωτεινό σολιτόνιο $u_{bs}(x) = \operatorname{sech}(0.5x)$, έχει τη μορφή της (3.32), για τις τιμές των παραμέτρων $A = B = 1$ και $\mu = 1$. Για τη συγκεκριμένη τιμή του μ , η σχέση (3.18) συνεπάγεται ότι $s = 1$. Έχουμε επίσης επιλέξει $\omega_0 = 0.5$, που σε συνδυασμό με το $k_0 = 0$, καταλήγουμε μέσω της (3.17), στην τιμή του $\lambda = 0.5$.

Τα αποτελέσματα του σχήματος 3.1, βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με τα αναλυτικά αποτελέσματα της ύπαρξης μοναχικών παλμών, όπως αυτά διατυπώθηκαν στο θεώρημα 5 και στο πόρισμα 2. Δηλαδή, ο παλμός ταξιδεύει με ταχύτητα $v = 0.5$, όπως αναμένεται από την (3.29). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο παλμός



Σχήμα 3.1: Πάνω εικόνες: Αριστερά, έχουμε την πυκνότητα $|\phi|(x, 0)^2$ της αρχικής κατάστασης ενός φωτεινού σολιτονίου [αρχική συνθήκη (3.37)], και δεξιά την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξής της, κάτω από τη δράση τυχαίας διαταραχής, μικρού πλάτους. Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $A = B = 1$, $\omega_0 = -0.5$, $v = 0.5$, $s = 1$. Κάτω εικόνες: παρουσίαση των μεγεθών που παρουσιάζονται και στις πάνω εικόνες, αλλά αυτή την φορά για ένα σκοτεινό σολιτόνιο [αρχική συνθήκη (3.38)], για τιμές των παραμέτρων: $A = B = -1$, $\omega_0 = 1$, $v = 1$, $s = -1$.

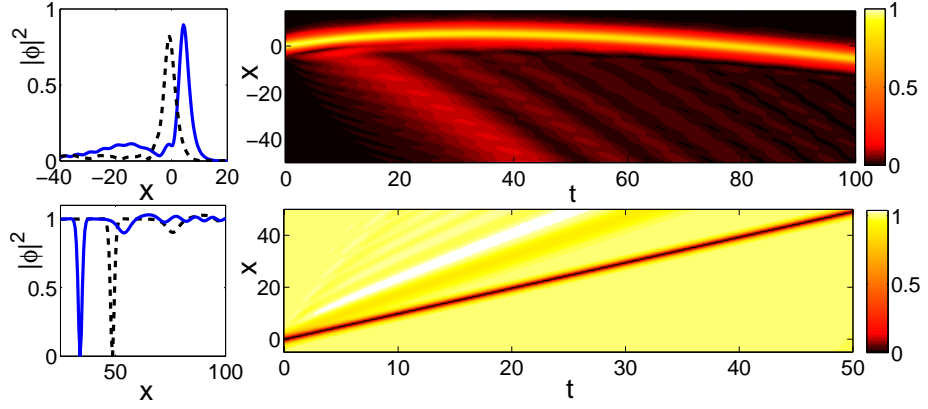
αυτός παραμένει ευσταθής, παρά την επίδραση αυτής της τυχαίας διαταραχής μικρού πλάτους. Παρατηρήσαμε ότι το μοναχικό κύμα παραμένει ευσταθές και για σχετικά μεγάλο πλάτος διαταραχής, μέχρι και $\epsilon = 0.1$.

Στις κάτω εικόνες του σχήματος, φαίνονται τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στα ίδια χαρακτηριστικά του σκοτεινού σολιτονίου, όπως προβλέπονται από το θεώρημα 5 και το πόρισμα 2. Αντίστοιχα με την μελέτη των πάνω εικόνων για το φωτεινό σολιτόνιο, έχουμε θεωρήσει ότι η αρχική κυματοσυνάρτηση είναι ένα σκοτεινό σολιτόνιο, διαταραγμένο από θόρυβο μικρού πλάτους:

$$(3.38) \quad \varphi_0(x) = \tanh(0.5x) + \epsilon(\text{noise}), \quad \epsilon = 10^{-3}.$$

Η πυκνότητα της αρχικής συνθήκης (3.38), φαίνεται στην κάτω αριστερά εικόνα του σχήματος 3.1. Το αρχικά αδιατάρακτο σκοτεινό σολιτόνιο $u_{ds}(x) = \tanh(0.5x)$, έχει τη μορφή της (3.32), για τις τιμές των παραμέτρων $A = B = -1$ και $\mu = -1$. Γι αυτή την επιλογή του μ , η (3.18) συνεπάγεται ότι $s = 1$. Επίσης, έχουμε επιλέξει $\omega_0 = 0$, και αφού $k_0 = 0$, από την (3.17) προκύπτει ότι $\lambda = 1$. Η εξέλιξη της πυκνότητας της αρχικής συνθήκης, που αντιστοιχεί στα αρχικά δεδομένα (3.38), παρουσιάζεται στην ισοσταθμική επιφάνεια εξέλιξης της, στην κάτω δεξιά εικόνα του σχήματος 3.1. Όπως και στην περίπτωση του φωτεινού σολιτονίου, επιβεβαιώνεται η ύπαρξη του σκοτεινού μοναχικού παλμού, που ταξιδεύει με ταχύτητα $v = 1$, όπως προβλέπεται από την (3.29). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι και τώρα, το μοναχικό κύμα παραμένει ευσταθές, κάτω από την επίδραση της τυχαίας διαταραχής.

Στην εικόνα 3.2, εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία παραβιάζεται η συνθήκη ύπαρξης των οδευόντων παλμών, δηλαδή την περίπτωση όπου $A \neq B$. Το πάνω μέρος της εικόνας, αντιστοιχεί στην περίπτωση του φωτεινού και το κάτω μέρος της εικόνας, στην περίπτωση του σκοτεινού σολιτονίου. Συγκεκριμένα, πάνω αριστερά



Σχήμα 3.2: Πάνω εικόνες: η δεξιά εικόνα παρουσιάζει την εξέλιξη ενός φωτεινού σολιτονίου, που η αρχική συνθήκη του δίνεται από την εξίσωση (3.37), με $\epsilon = 0$ και $\frac{A}{B} = 0.76$. Ο φωτεινός παλμός συνοδεύεται από ακτινοβολία μικρού πλάτους όπως φαίνεται στην αριστερή εικόνα, για τη χρονική στιγμή $t = 20$ (συνεχής μπλε γραμμή) και για $t = 60$ (διακεκομμένη μαύρη γραμμή). Κάτω εικόνες: η δεξιά εικόνα παρουσιάζει την εξέλιξη ενός σκοτεινού σολιτονίου με αρχική συνθήκη (3.38) και $\epsilon = 0$, για $A = -1, B = -0.8, s = -1$. Η αριστερή εικόνα δείχνει τη μορφή που έχει η πυκνότητα τη χρονική στιγμή $t = 35$ (διακεκομμένη μαύρη γραμμή) και τη στιγμή $t = 50$ (συνεχής μπλε γραμμή).

παρατηρούμε την εξέλιξη της πυκνότητας ενός φωτεινού σολιτονίου με αρχική μορφή $u_{bs}(x) = \text{sech}(0.5x)$, και τιμές παραμέτρων $A = 1, B = 1.3, s = 1$. Το αριστερό πλαίσιο δείχνει το προφίλ της αριθμητικής λύσης, για την χρονική στιγμή $t = 20$ (συνεχής μπλε γραμμή) και την χρονική στιγμή $t = 60$ (διακεκομμένη μαύρη γραμμή), ενώ δεξιά, παρουσιάζεται η ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας $|\phi|^2$, των αρχικών δεδομένων. Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του, το μοναχικό κύμα εκπέμπει μια ακτινοβολία μικρού πλάτους, η οποία έχει την μορφή οδευόντων κυμάτων. Παρατηρούμε επιπλέον, ότι καθώς το φωτεινό μοναχικό κύμα εκπέμπει ακτινοβολία, επιβραδύνεται και τείνει να αποκτήσει σχεδόν μηδενική ταχύτητα. Στην κατάσταση αυτή, η εκπομπή ακτινοβολίας είναι συνεχής, αλλά το πλάτος της βαίνει ελαττούμενο. Τέτοια συμπεριφορά, έχει παρατηρηθεί σε αριθμητικά αποτελέσματα των εργασιών [39], και έχει αναλυθεί στα [74, 92].

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ακτινοβολίας έχει επίσης παρατηρηθεί και στην περίπτωση του σκοτεινού μοναχικού κύματος, όπως φαίνεται στο κάτω μέρος της εικόνας 3.2. Εδώ, το αριστερό πλαίσιο δείχνει τη μεταβολή της πυκνότητας σε δύο διαφορετικά στιγμιότυπα ($t = 35, t = 50$), ενώ η αρχική μορφή του μοναχικού κύματος είναι $u_{ds}(x) = \tanh(0.5x)$, με τιμές $A = -1, B = -0.8, s = -1$. Το δεξιό πλαίσιο παρουσιάζει ξανά την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας. Μία διαφορά με το φωτεινό μοναχικό κύμα, είναι η απουσία «αναστροφής της κίνησης», που παρατηρήσαμε στη διάδοση του φωτεινού σολιτονίου και ο σκοτεινός παλμός κινείται συνεχώς προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x . Σημειώνουμε επίσης, ότι εμπρός από το σκοτεινό σολιτόνιο παρατηρούμε ίχνη ενός εμφανώς σκεδαστικού, κρουστικού κύματος [46], ενώ στην περίπτωση του φωτεινού σολιτονίου, τα σχετικά κυματοπακέτα ακτινοβολίας, μπορούν να παρατηρηθούν μόνο

πίσω από το μοναχικό κύμα. Παρατηρούμε επίσης, ότι σε αντίθεση με την περίπτωση του φωτεινού μοναχικού κύματος, η αρχική κατάσταση εξελίσσεται σε ένα απλό σκοτεινό μοναχικό κύμα, που κινείται με σχεδόν σταθερή ταχύτητα, και ένα ξεχωριστό τμήμα που ακτινοβολεί. Το τμήμα αυτό ταξιδεύει στην κορυφή του συνεχούς κυματικού υποβάθρου και κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή του σκοτεινού παλμού, οπότε σταδιακά διαχωρίζεται από αυτόν. Τα μικρού πλάτους κύματα ακτινοβολίας, στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι «κινούνται με την ταχύτητα του ήχου».

Είναι λοιπόν ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό, το ότι η ακτινοβολία εκπέμπεται πίσω (εμπρός) από το φωτεινό (σκοτεινό) μοναχικό κύμα, λόγω του διαφορετικού προσήμου της παραμέτρου B . Με άλλα λόγια, η εκπομπή της ακτινοβολίας κατά την διάδοση του σολιτονίου, έχει κατεύθυνση η οποία καθορίζεται από το πρόσημο της διασποράς τρίτης τάξης, με θετικό πρόσημο για το φωτεινό σολιτόνιο, και αρνητικό για το σκοτεινό σολιτόνιο.

Κεφάλαιο 4

Αστάθεια διαμόρφωσης επιπέδων κυμάτων

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα ερευνήσουμε συνθήκες που οδηγούν στην αστάθεια διαμόρφωσης (modulation instability), των λύσεων επιπέδων κυμάτων της εξίσωσης (3.14). Οι λύσεις αυτές έχουν την μορφή

$$(4.1) \quad \varphi^{(0)}(x, t) = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Στην περίπτωση μας, υποθέτουμε ότι το επίπεδο κύμα έχει σταθερό πλάτος $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, κυματαριθμό k , και κυκλική συχνότητα ω . Θα δείξουμε ότι για $k \neq 0$ υπάρχουν ουσιώδεις διαφορές στις συνθήκες της αστάθειας μεταξύ της μη γραμμικής εξίσωσης (3.14) και του ορίου της για $A = B = 0$, δηλαδή της εξίσωσης Schrödinger.

Ξεκινάμε, αντικαθιστώντας την (4.1) στην (3.14). Με αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε την σχέση διασποράς, που εκφράζει την κυκλική συχνότητα ω , ως συνάρτηση των k και φ^2 :

$$-i\omega\varphi + 3As|\varphi_0|^2 ik\varphi + ik^2\varphi - iBk^3\varphi - is|\varphi_0|^2\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$(4.2) \quad \omega = -s\varphi_0^2 + 3Ask\varphi_0^2 + k^2 - Bk^3.$$

Θεωρούμε μια διαταραχή της λύσης (4.1), που έχει την μορφή

$$(4.3) \quad \varphi(x, t) = \varphi^{(0)}(x, t) + \varphi^{(1)}(x, t), \varphi^{(1)}(x, t) \in \mathbb{C}, \forall x, t \in \mathbb{R},$$

όπου η $\varphi^{(1)}(x, t)$ θεωρείται πολύ μικρή, με την έννοια

$$(4.4) \quad |\varphi^{(1)}(x, t)| \ll |\varphi^{(0)}(x, t)|, \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, θεωρούμε ότι η $\varphi^{(1)}(x, t)$ είναι της μορφής:

$$(4.5) \quad \varphi^{(1)}(x, t) = \varphi_1(x, t) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Τότε η φ_1 μπορεί να διαχωριστεί στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος της:

$$(4.6) \quad \varphi_1(x, t) = U(x, t) + iW(x, t).$$

Οι U, W θεωρούνται επίσης αρμονικές, δηλαδή

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \end{pmatrix} e^{i(Kx - \Omega t)} + c.c., \quad U_0, W_0 \in \mathbb{R},$$

όπου τα K, Ω είναι αντίστοιχα ο κυματαριθμός και η συχνότητα της διαταραχής.

Θεώρημα 7. Θεωρούμε την εξίσωση (3.14), με $A, B \in \mathbb{R}$. Οι λύσεις (4.1) του επιπέδου κύματος παρουσιάζουν αστάθεια διαμόρφωσης (*modulationally unstable*), δηλαδή οι διαταραχές της μορφής $\varphi_1(x, t)$ που ορίζονται από τις (4.5), (4.6) και (4.7) εμφανίζουν εκθετική αύξηση, αν και μόνο αν

$$(4.8) \quad 1 \neq 3kB, K^2 < 2s\varphi_0^2 \left[1 - \frac{3K(A-B)}{1-3KB} \right].$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαταραγμένη λύση (4.3). Οι παράγωγοί της είναι

$$\begin{aligned} \varphi_t &= [\varphi_{1t} - i\omega(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_x &= [\varphi_{1x} + ik(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_{xx} &= [\varphi_{1xx} + 2ik\varphi_{1x} - k^2(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_{xxx} &= [\varphi_{1xxx} + 3ik\varphi_{1xx} - 3k^2\varphi_{1x} - ik^3(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Επίσης, λόγω της (4.4), έχουμε

$$|\varphi_0 + \varphi_1|^2 = \varphi_0^2 + \varphi_0(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) + |\varphi_1|^2 \simeq \varphi_0^2 + \varphi_0(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1),$$

καθώς και $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \simeq 0$. Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην (3.14), οπότε:

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} &+ 3As\varphi_0^2 \left[\varphi_{1x} + ik(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) \left(1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \right] - i(1 - 3kB)\varphi_{1xx} \\ &+ (2k - 3k^2)\varphi_{1x} + B\varphi_{1xxx} - is\varphi_0^2(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) \left(1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \\ &- i(\omega - 3Ask\varphi_0^2 - k^2 + k^3B + s\varphi_0^2)(\varphi_0 + \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Όμως, λόγω της (4.2), ο τελευταίος όρος μηδενίζεται. Καταλήγουμε έτσι, στην παρακάτω εξίσωση για την $\varphi_1(x, t)$:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \varphi_{1t} &+ 3As\varphi_0 [\varphi_{1x} + ik(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)] - i(1 - 3kB)\varphi_{1xx} \\ &+ (2k - 3k^2B)\varphi_{1x} + B\varphi_{1xxx} - is\varphi_0^2(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) = 0. \end{aligned}$$

Εισάγουμε την (4.6) στην (4.9), και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, βρίσκουμε τις εξισώσεις:

$$(4.10) \quad U_t + 3As\varphi_0^2 U_x + (1 - 3kB)W_{xx} + k(2 - 3kB)U_x + BU_{xxx} = 0,$$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} W_t + 3As\varphi_0^2(W_x + 2kU) &- (1 - 3kB)U_{xx} + k(2 - 3kB)W_x \\ &+ BW_{xxx} - 2s\varphi_0^2 U = 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις αυτές τις περιοδικές εκφράσεις των U, W από την (4.7). Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο παρακάτω αλγεβρικό σύστημα για τα U_0, W_0 :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \{-i\Omega + iK [3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] - iK^3B\} U_0 \\ -(1 - 3kB)K^2 W_0 = 0, \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad [2s\varphi_0^2(3Ak - 1) + K^2(1 - 3kB)] U_0 + \{-i\Omega + iK [3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] - iBK^3\} W_0 = 0.$$

Αν η ορίζουσα του ομογενούς συστήματος είναι διαφορετική από μηδέν, υπάρχει μόνο η μηδενική λύση. Επειδή αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις για τα U_0, W_0 , απαιτούμε η ορίζουσα να είναι μηδέν. Δηλαδή

$$(4.14) \quad \{\Omega - [3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] K + BK^3\}^2 = -K^2 [K^2(1 - 3kB)K^2 - 2s\varphi_0^2(1 - 3kA)(1 - 3kB)].$$

Το πρώτο μέρος αυτής της σχέσης είναι μη αρνητικό, άρα το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το δεύτερο. Κατά συνέπεια

$$(4.15) \quad K^2(1 - 3kB)^2 < 2s\varphi_0^2(1 - 3kA)(1 - 3kB).$$

Από την σχέση αυτή, με την προϋπόθεση $1 \neq 3kB$, προκύπτει άμεσα η συνθήκη αστάθειας (4.8). \square

Εξετάζουμε μερικές οριακές περιπτώσεις της σχέσης διασποράς (4.14).

Στην περίπτωση που έχουμε στάσιμο κύμα, δηλαδή $k = 0$, η (4.14) περιορίζεται στη μορφή :

$$(4.16) \quad (\Omega - 3AKs\varphi_0^2 + BK^3)^2 = K^2(K^2 - 2s\varphi_0^2).$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις:

$$(4.17) \quad \Omega = 3AKs\varphi_0^2 - BK^3 \pm K\sqrt{K^2 - 2s\varphi_0^2}.$$

Από την (4.17) προκύπτει ότι η κυκλική συχνότητα Ω γίνεται μιγαδική (δηλαδή $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$), αν και μόνο αν

$$(4.18) \quad s = 1, K^2 - 2\varphi_0^2 < 0.$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι παρόμοια με εκείνα που αφορούν τις συνθήκες αστάθειας για τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger ($A = B = 0$). Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση $s = -1$, η (4.17) συνεπάγεται ότι το κύμα έχει πάντα ευσταθή διαμόρφωση, όπως ισχύει και για την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Έτσι, στην περίπτωση του στάσιμου κύματος, η μόνη διαφορά με την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger είναι η ύπαρξη ενός μη μηδενιζόμενου πραγματικού ταλαντούμενου μέρους της κυκλικής συχνότητας της διαταραχής $\Omega_r = 3AKs\varphi_0^2 - BK^3$, όπως προκύπτει από την (4.17). Επιπλέον, είναι γνωστό [7, 40] ότι στο όριο της NLS ($A=B=0$) για $s = 1$, η συνθήκη αστάθειας διαμόρφωσης, δεν εξαρτάται από το k .

Από την άλλη, στην περίπτωση που ισχύει $A, B \neq 0$ και $k \neq 0$, η συνθήκη (4.8) παρουσιάζει κάποιες ενδιαφέρουσες διαφορές. Αρχικά, το κριτήριο αστάθειας είναι βελτιωμένο για την εστιάζουσα περίπτωση ($s = +1$), όπως φαίνεται από μια άμεση σύγκριση των σχέσεων (4.8) και (4.18). Επίσης - και περισσότερο ενδιαφέρον - είναι το αποτέλεσμα του ότι η συνθήκη (4.8), δείχνει ότι τα επίπεδα κύματα της μορφής (4.1), μπορούν να εμφανίζουν αστάθεια διαμόρφωσης και στην αφεστιάζουσα περίπτωση ($s = -1$). Η παραπάνω διαπίστωση, πιστοποιεί μια σημαντική διαφορά, σε σχέση με την αφεστιάζουσα περίπτωση της NLS, για

την οποία τέτοια αστάθεια απουσιάζει. Συνοψίζοντας την σύγκριση με το μοντέλο NLS, μπορούμε να πούμε ότι στάσιμα κύματα ($k = 0$), μπορούν να είναι ασταθή μόνο στην περίπτωση $s = 1$, ενώ οδεύοντα επίπεδα κύματα, της μορφής (4.1), με $k \neq 0$, μπορούν να είναι ασταθή για $s = 1$, αλλά και για $s = -1$, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων.

Αν ορίσουμε την περιοχή αστάθειας (instability band), ως το κλειστό διάστημα $B_I = [K_{min}, K_{max}]$ για σταθερό φ_0 , από το οποίο επιλέγονται κυματαριθμοί της διαταραχής (4.5) με την ιδιότητα να επαληθεύεται η (4.8) $\forall K \in B_I$, οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (4.14) ως προς Ω , είναι μιγαδικής μορφής. Τα φανταστικά μέρη αυτών των λύσεων ευθύνονται για την αύξηση των διαταραχών (4.5) και επιφέρουν την αστάθεια διαμόρφωσης του επιπέδου κύματος (4.1). Ειδικότερα, το $\text{Im}(\Omega) = \Omega_i$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση του $K \in B_I$. Το πιθανό μέγιστο της καμπύλης $\Omega_i(K)$, που σημειώνεται με Ω_{crit} , επιτυγχάνεται στο $K = K_{crit}$ και είναι συδεδεμένο με τη μέγιστη αύξηση των διαταραχών.

Ολοκληρώνουμε τη θεωρητική ανάλυση των επιπτώσεων της αστάθειας διαμόρφωσης για τις λύσεις (4.1) με $k \neq 0$, δείχνοντας ότι η επιλογή κατάλληλου κυματαριθμού $K \in B_I$ για διαταραχές (4.5), συνεπάγεται τη διέγερση των ακέραιων τους πολλαπλασίων.

Θεώρημα 8. Θεωρούμε τις διαταραχές (4.5), και έστω ο κυματαριθμός $K = K_0 \in B_I$, όπου K_I που είναι η ζώνη αστάθειας διαμόρφωσης που συνδέεται με σταθερό πλάτος φ_0 της λύσης του επιπέδου κύματος (4.1), με $k \neq 0$. Τότε, η αστάθεια διαμόρφωσης εκδηλώνεται με την διέγερση των ακέραιων πολλαπλασίων του K_0 , δηλαδή οι κυματαριθμοί των ασταθών λύσεων του επιπέδου κύματος είναι $k + nK_0$.

Απόδειξη. Το διαταραγμένο κύμα έχει τη μορφή $\varphi(x, t) = \varphi^{(0)}(x, t) + \varphi^{(1)}(x, t) \Rightarrow$

$$(4.19) \quad \varphi(x, t) = \left[\varphi_0 + U_0 e^{i(Kx - \Omega t)} + iW_0 e^{i(Kx - \Omega t)} \right] e^{i\theta},$$

όπου $\theta = kx - \omega t$.

Έστω $K_0 \in B_I$, ένας κυματαριθμός της διαταραχής που προκαλεί αστάθεια στις λύσεις (4.1), και έστω $\Omega_r(K_0), \Omega_i(K_0)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης κυκλικής συχνότητας. Ξέρουμε ότι στην εμφάνιση αστάθειας, ρόλο παίζει μόνο το φανταστικό μέρος της συχνότητας κι όχι το πραγματικό. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, η εξίσωση του διαταραγμένου κύματος παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \left[\varphi_0 + (U_0 + iW_0) e^{i(K_0 x - \Omega_r t)} e^{\Omega_i t} \right] e^{i\theta} \Rightarrow \\ \varphi(x, t) &= \left[\varphi_0 + 2(U_0 + iW_0) \cos(K_0 x) e^{\Omega_i t} \right] e^{i\theta} \Rightarrow \\ \varphi(x, t) &= \frac{\sqrt{\varphi_0^2 + 4\varphi_0 U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) + 4(U_0^2 + W_0^2) e^{2\Omega_i t} \cos^2(K_0 x)}}{\varphi_0 + 2(U_0 + iW_0) e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)} \cdot \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$(4.20) \quad R = \sqrt{\varphi_0^2 + 4\varphi_0 U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) + 4(U_0^2 + W_0^2) e^{2\Omega_i t} \cos^2(K_0 x)},$$

οπότε η εξίσωση του διαταραγμένου κύματος γίνεται

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) &= R \frac{\varphi_0 + 2(U_0 + iW_0)e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\sqrt{\varphi_0^2 + 4\varphi_0 U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) + 4(U_0^2 + W_0^2)e^{2\Omega_i t} \cos^2(K_0 x)}} \\
&= R \frac{\varphi_0 + 2(U_0 + iW_0)e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)} \\
&\quad \sqrt{\frac{\varphi_0^2 + 4\varphi_0 U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) + 4(U_0^2 + W_0^2)e^{2\Omega_i t} \cos^2(K_0 x)}{[\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)]^2}} \\
&= R \frac{1 + i \frac{2W_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t}}}{\sqrt{1 + \left[\frac{2W_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)} \right]^2}}.
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε, θέτοντας

$$\frac{2W_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)} = \tan \phi \iff$$

$$(4.21) \quad \phi = \text{Arctan} \frac{2W_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)}{\varphi_0 + 2U_0 e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x)},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) &= R \frac{1 + i \tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} e^{i\theta} \Rightarrow \\
\varphi(x, t) &= \text{Re}^{i\phi} e^{i\theta}.
\end{aligned}$$

Η $\varphi^{(1)}$ ως διαταραχή, έχει πολύ μικρό πλάτος, άρα $U_0, W_0 \ll 1$. Επομένως, οι (4.20) και (4.21), μπορούν να προσεγγιστούν ως εξής:

$$(4.22) \quad R \approx \varphi_0 \left[1 + \frac{2U_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) \right],$$

$$(4.23) \quad \phi \approx \frac{2W_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x).$$

Μετά από τους παραπάνω υπολογισμούς, η εξίσωση του διαταραγμένου κύματος παίρνει τη μορφή :

$$(4.24) \quad \varphi(x, t) \approx \varphi_0 \left[1 + \frac{2U_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) \right] e^{i\mathcal{R} \sin \chi} e^{i\theta},$$

όπου,

$$(4.25) \quad \mathcal{R} = \frac{2W_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t}, \quad \chi = \frac{\pi}{2} - K_0 x.$$

Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και ακέραιας τάξης n , παίρνουμε τη σχέση

$$e^{i\mathcal{R} \sin \chi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mathcal{R}) e^{in\chi}.$$

Με την παραπάνω σχέση, μπορούμε να πετύχουμε την παρακάτω προσέγγιση για την (4.24):

$$(4.26) \quad \varphi(x, t) = \varphi_0 \left[1 + \frac{2U_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \cos(K_0 x) \right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mathcal{R}) e^{i(\theta+n\chi)},$$

όπου

$$(4.27) \quad e^{i(\theta+n\chi)} = \exp \left\{ i \left[kx - \omega t + n \left(\frac{\pi}{2} - K_0 x \right) \right] \right\}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει άμεσα ότι κάνοντας την επιλογή $K_0 \in B_I$, οι κυματαριθμοί της ασταθούς λύσης του επιπέδου κύματος είναι $k + nK_0, n \in \mathbb{Z}$.

Τέλος, διαπιστώνουμε την συμφωνία της προσεγγιστικής έκφρασης (4.26), με την αρχική εξίσωση του διαταραγμένου κύματος, για $t = 0$. Στην περίπτωση αυτή ($t \rightarrow 0$), ισχύει

$$\frac{2W_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \approx \frac{2W_0}{\varphi_0} \ll 1, \quad J_n \left(\frac{2W_0}{\varphi_0} e^{\Omega_i t} \right) \approx 1,$$

οπότε, η (4.26) παίρνει τη μορφή:

$$(4.28) \quad \varphi(x, 0) \approx \varphi_0 \left[1 + \frac{2U_0}{\varphi_0} \cos(K_0 x) \right] e^{ikx}.$$

Από την άλλη, η (4.19) μας δίνει ότι

$$(4.29) \quad \varphi(x, 0) \approx [\varphi_0 + 2(U_0 + iW_0) \cos(K_0 x)] e^{ikx}.$$

Είναι προφανές ότι οι δύο τελευταίες συνθήκες είναι ισοδύναμες, αφού διαφέρουν μόνο κατά το φανταστικό μέρος της διαταραχής. \square

Διάγνωση της αστάθειας διαμόρφωσης, μέσω της μη-διατήρησης της ενέργειας. Παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον, η παρατήρηση ότι το συναρτησιακό (2.14) που αντιστοιχεί στην ενέργεια, και επαληθεύεται από τις λύσεις της (3.14) [εφόσον βέβαια ικανοποιείται η (2.2)], μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαπιστώσουμε την αστάθεια των λύσεων επιπέδου κύματος. Από την απόδειξη του Λήμματος 1, συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.26) και (2.27), παίρνουμε την εξίσωση:

$$(4.30) \quad \frac{d}{dt} J(\varphi(t)) + \frac{3}{2} \operatorname{Re} \int_{\Omega} |\varphi|^2 (|\varphi|^2)_x dx = 0, \quad \delta\sigma = \alpha\rho.$$

Αν τα επίπεδα κύματα της μορφής (4.1) είναι ευσταθή, τότε θα πρέπει να ισχύουν οι προσεγγίσεις

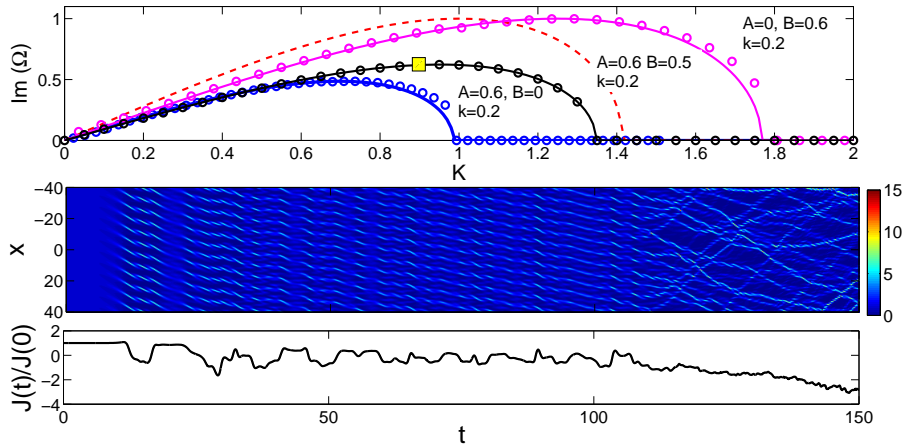
$$|\varphi|^2 \sim \varphi_0^2, \quad |\varphi|_x^2 \sim 0,$$

για κάθε χρονική στιγμή. Επομένως, η (4.30) συνεπάγεται πως όταν $A \neq B$, η ενέργεια θα διατηρείται, δηλαδή $\frac{d}{dt} J(\varphi(t)) = 0$ στην περίπτωση της ευστάθειας των επιπέδων κύματων.

Από την άλλη, στη διαμόρφωση ασταθούς κατάστασης, υπάρχει χρονική στιγμή T_{MI} , τέτοια ώστε η διαταραχή $\varphi_1(x, t)$ να γίνεται σημαντική $\forall t \geq T_{MI}$. Επομένως στην περίπτωση $A \neq B$, και στην κατάσταση αστάθειας, το J δεν διατηρείται για όλες τις χρονικές στιγμές και $\frac{d}{dt} J(\varphi(t)) \neq 0, \forall t \geq T_{MI}$. Αυτή η σημαντική αναλυτική παρατήρηση, μπορεί να υποβληθεί και σε αριθμητικό έλεγχο.

4.1 Αριθμητική μελέτη

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για την δυναμική των λύσεων της εξίσωσης (3.14), με αρχικές συνθήκες επιπέδου κύματος, το οποίο υπόκειται σε διαταραχές. Θα εξετάσουμε δηλαδή την δυναμική των λύσεων της εξίσωσης (3.14) με αρχικές συνθήκες της μορφής (4.28), θεωρώντας $k \neq 0$, και παραμέτρους $\phi_0 = 1$ και $2U_0 = \epsilon = 10^{-3}$. Θα μελετήσουμε αριθμητικά τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους του επιπέδου κύματος, και θα τον συγκρίνουμε με τα προηγούμενα αναλυτικά αποτελέσματα.



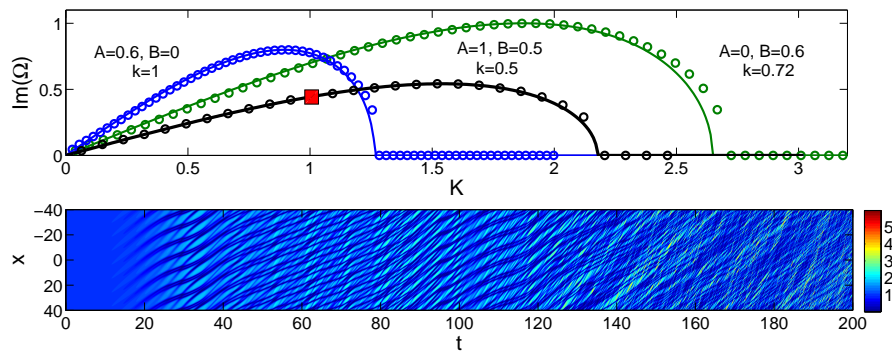
Σχήμα 4.1: Στην πάνω εικόνα βλέπουμε το ρυθμό αύξησης $\text{Im}(\Omega) = \Omega_i$ ως συνάρτηση του κυματαριθμού K της διαταραχής και το διάστημα αστάθειας $B_I = [0, K_{\max}]$, για την εξίσωση NLS (3.14), με $s = +1$. Οι συνεχείς καμπύλες, που αντιστοιχούν στις αναλυτικές εκτιμήσεις και οι κύκλοι, που αντιστοιχούν στα αριθμητικά αποτελέσματα συμπίπτουν, ενώ η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη, αντιστοιχεί στο όριο της εστιάζουσας NLS για $A = B = 0$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι $k = 0.2$, $\phi_0 = 1$. Η μεσαία εικόνα παρουσιάζει την εξέλιξη της πυκνότητας $|\phi|^2$ όπως υπολογίστηκε αριθμητικά, για $A = 0.6, B = 0.5$ και αρχική συνθήκη που δίνεται από την (4.28) με $k = 0.2$, $\epsilon = 2U_0 = 10^{-3}$ και $K = 0.9$. Η κάτω εικόνα παρουσιάζει την εξέλιξη του κανονικοποιημένου συναρτησιακού $J(t)/J(0)$.

Η εικόνα 4.1, παρουσιάζει τα αριθμητικά αποτελέσματα για την μη γραμμική εξίσωση (3.14) με $s = 1$, για διάφορες τιμές των παραμέτρων $A, B \in \mathbb{R}$, και σταθερό $k = 0.2$. Το πάνω πλαίσιο της εικόνας 4.1, δείχνει τις αναλυτικά υπολογισμένες καμπύλες $\text{Im}(\Omega(K)) = \Omega_i(K)$, και το σχετικό διάστημα αστάθειας $B_I = [0, K_{\max}]$. Οι αναλυτικές καμπύλες $\Omega_i(K)$ απεικονίζονται με συνεχείς γραμμές, ενώ τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα με μικρούς κύκλους. Η κόκκινη διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στο αριθμητικό αποτέλεσμα για την οριακή περίπτωση της NLS ($A = B = 0$). Οι συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν στην εξίσωση NLS για $A = 0, B = 0.6$, (πάνω κόκκινη γραμμή). Σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρούμε την άριστη συμφωνία της αναλυτικής πρόβλεψης για τον ρυθμό αύξησης του πλάτους του επιπέδου κύματος, με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα. Άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι η προοδευτική αύξηση του μήκους του διαστήμα-

τος αστάθειας, από το όριο $A \neq 0$ και $B = 0$, δηλαδή από την εξίσωση NLS με επίκληση, στο όριο $A = 0$ και $B \neq 0$, δηλαδή στην εξίσωση NLS με την επίδραση διασποράς τρίτης τάξης.

Το μεσαίο πλαίσιο της εικόνας 4.1 δείχνει την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας $|\varphi|^2$ για την περίπτωση $A, B \neq 0$. Συγκεκριμένα, έχουμε θεωρήσει τις τιμές $A = 0.6$ και $B = 0.5$, ενώ οι κυματαριθμοί του επιπέδου κύματος και της διαταραχής έχουν επιλεγεί ως $k = 0.2$ και $K = 0.9$, αντίστοιχα. Ο ρυθμός αύξησης $\Omega_i(0.9)$ για την περίπτωση αυτή είναι σημειωμένος με το κίτρινο τετράγωνο στο πάνω πλαίσιο της εικόνας 4.1, στην σχετική καμπύλη. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν την εκδήλωση αστάθειας διαμόρφωσης, και την δυναμική που την συνοδεύει. Ειδικότερα, στο αρχικό στάδιο της εξέλιξης, μπορούμε να διακρίνουμε την διαμόρφωση ενός σχεδόν περιοδικού προτύπου, χαρακτηριστικού της διέγερσης του ασταθούς κυματαριθμού $K = K_0 = 0.9$, και σε επόμενο χρονικό στάδιο ($t \gtrsim 120$), την διαμόρφωση δομών οδοντών κυμάτων, των οποίων η «γέννηση» οφείλεται στην διαμόρφωση της αστάθειας.

Το κάτω πλαίσιο της εικόνας 4.1, δείχνει την χρονική εξέλιξη του κανονικοποιημένου συναρτησιακού $\frac{J(t)}{J(0)}$, που αντιστοιχεί στην χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας του μεσαίου πλαισίου. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν αριθμητικά ότι η εκδήλωση της αστάθειας είναι συνδεδεμένη με τη μη διατήρηση του συναρτησιακού $J(t)$, όπως προβλέπεται από την (4.28). Ειδικότερα, η αρχική τιμή $J(0)$ διατηρείται αρχικά, και πριν την εκδήλωση της αστάθειας μέχρι την χρονική στιγμή $t \simeq 18$, λίγο πριν την εκδήλωση του περιοδικού προτύπου. Στην συνέχεια, η εμφάνιση του περιοδικού προτύπου συνοδεύεται με την έναρξη των διακυμάνσεων της J , λόγω αστάθειας.



Σχήμα 4.2: Οι εικόνες είναι αντίστοιχες με αυτές του σχήματος 4.1, αλλά για την μη εστιάζουσα περίπτωση, δηλαδή για $s = -1$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι $A = 1, B = 0.5, k = 0.5, \epsilon = 2U_0 = 10^{-3}$ και $K = 1$.

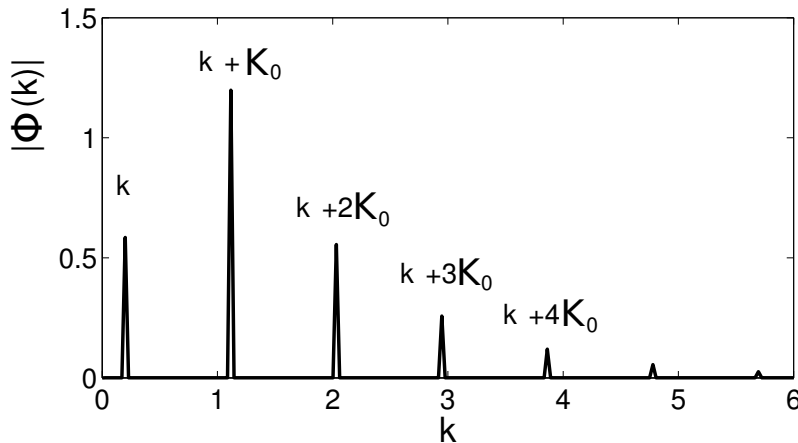
Στην εικόνα 4.2, παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για την μη γραμμική εξίσωση (3.14), με $s = -1$, δηλαδή μελετάμε την αφεστιάζουσα περίπτωση. Η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στα αναλυτικά αποτελέσματα, και οι κύκλοι στα αριθμητικά αποτελέσματα, για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- $A = 0, B = 0.6$, και $k = 0.72$, η οποία χαρακτηρίζεται από σημαντικό μήκος του διαστήματος αστάθειας B_I (πράσινη καμπύλη),

- $A = 1, B = 0.5$, και $k = 0.5$, με ενδιάμεσο μήκος του διαστήματος αστάθειας (μαύρη καμπύλη).
- $A = 0.6, B = 0$, και $k = 1$, με το μικρότερο μήκος του διαστήματος αστάθειας ζώνης (μπλε καμπύλη).

Για άλλη μια φορά, παρατηρούμε την άμεση συμφωνία ανάμεσα στα αναλυτικά και τα αριθμητικά αποτελέσματα, για τον ρυθμό αύξησης του πλάτους των διαταραχών. Να υπενθυμίσουμε ότι στην εικόνα αυτή, διάστημα αστάθειας για την οριακή περίπτωση $A = B = 0$ της αφεστιάζουσας εξίσωσης NLS δεν εμφανίζεται, αφού στο όριο αυτό τα επίπεδα κύματα είναι ευσταθή. Οι μεταβολές του μήκους του διαστήματος αστάθειας, για τα όρια των παραμέτρων A και B της εξίσωσης NLS, που παρατηρήσαμε στην εικόνα 4.1 για την εστιάζουσα περίπτωση, παρατηρούνται και στην αφεστιάζουσα περίπτωση της τρέχουσας αριθμητικής διερεύνησης.

Στο κάτω πλαίσιο της εικόνας 4.2, βλέπουμε την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας, και την εκδήλωση της αστάθειας, για την πιο γενική περίπτωση $A, B \neq 0$, δηλαδή για τιμές παραμέτρων $A = 1, B = 0.5$. Στο αριθμητικό πείραμα, έχουμε θεωρήσει τις τιμές των κυματαριθμών $k = 0.5$ και $K = K_0 = 1$, για την λύση και την διαταραχή της, αντίστοιχα. Το αρχικό στάδιο της δυναμικής είναι ποιοτικά παρόμοιο, με αυτό του μεσαίου πλαισίου της εικόνας 4.1. Σε μεταγενέστερο στάδιο όμως (δηλαδή για $t \gtrsim 120$), παρατηρούμε ότι η δυναμική δεν χαρακτηρίζεται από την εμφάνιση οδευουσών εντοπισμένων δομών. Για συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων, έχει ελεγχθεί (τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη), ότι τέτοιες δομές δεν φαίνεται να υποστηρίζονται από το σύστημα κατά την διάρκεια της μακρόχρονης εξέλιξης του, σε αντίθεση με την περίπτωση της εικόνας 4.1, όπου εμφανίζονται τέτοιες δομές.



Σχήμα 4.3: Φάσμα Fourier $\Phi(k, t = 50)$ της ασταθούς λύσης επιπέδου κύματος, για την εστιακή περίπτωση $s = +1$. Οι τιμές των παραμέτρων είναι $A = B = 0.6$. Η αρχική κατάσταση είναι το διαταραγμένο κύμα της μορφής (4.28) με $\phi_0 = 1$, $k = 0.2$, $\epsilon = 2U_0 = 10^{-3}$ και $K_0 = 0.9$. Εύκολα παρατηρείται η διέγερση για κυματαριθμούς $k + nK_0$.

Ολοκληρώνοντας τις αριθμητικές μελέτες αυτού του Κεφαλαίου, στην εικόνα 4.3 απεικονίζεται το φάσμα Fourier $|\Phi(k)|$, μιας ασταθούς λύσης, που αντιστοιχεί

στην εστιάζουσα περίπτωση $s = 1$, της εξίσωσης ENLS. Οι διάφορες παράμετροι έχουν επιλεγεί ως $A = B = 0.6$, $k = 0.2$ και $K_0 = 0.9$. Η εικόνα απεικονίζει ένα στιγμιότυπο του φάσματος Fourier, σε μια χρονική στιγμή που η αστάθεια έχει ενδυναμωθεί. Η εικόνα δείχνει καθαρά, ότι σε κάθεστώς αστάθειας διαμόρφωσης, διεγείρονται ακέραια πολλαπλάσια του αρχικού κυματαριθμού της λύσης $k + nK_0$, σε απόλυτη συμφωνία με τα αναλυτικά αποτελέσματα του Θεωρήματος 8.

4.2 Συζήτηση και συμπεράσματα των Κεφαλαίων 2-4

Στα Κεφάλαια 2-4, μελετήσαμε αναλυτικά, αλλά και διερευνήσαμε αριθμητικά, την γενικευμένη εξίσωση Schrödinger ανώτερης τάξης (ENLS) (2.1). Η εξίσωση αυτή, κάτω από την συνθήκη ισορροπίας των συντελεστών (2.2), αντιστοιχεί στην ολοκληρώσιμη εξίσωση Hirota. Η συγκεκριμένη εξίσωση ENLS είναι ένα ενδιαφέρον και σημαντικό μαθηματικό μοντέλο, το οποίο βρίσκει εφαρμογές στην περιγραφή της εξέλιξης των νηματίων στροβιλισμού, καθώς και βραχέων παλμών σε μη γραμμικές οπτικές ίνες.

Τα πρώτα αποτελέσματα αφορούν την ολική ύπαρξη H^2 - ασθενών λύσεων, για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Απαιτήση για το αποτέλεσμα αυτό, η H^3 - ομαλότητα των αρχικών δεδομένων. Το αποτέλεσμα προέκυψε από την απαίτηση ικανοποίησης των εξισώσεων ενέργειας ή εξισώσεων μεταβολής συναρτησιακών, από τις ασθενείς λύσεις. Τέτοια ερωτήματα της ποιοτικής θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζουν ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο μοντέλο: εμπίπτει στην κλάση των εξισώσεων διασποράς με μη γραμμικούς όρους χαμηλής τάξης παραγώγων, για τις οποίες το περιοδικό πρόβλημα μπορεί να παρουσιάσει ιδιομορφίες (έκρηξη), σε πεπερασμένο χρόνο. Δείξαμε ότι η συνθήκη ισορροπίας των συντελεστών (2.2), και η υπόθεση του μη εκφυλισμού της διασποράς δεύτερης τάξης, είναι επαρκείς για να εγγυηθούν την ολική ως προς το χρόνο επιλυσιμότητα, για την κλάση των παραπάνω αρχικών δεδομένων.

Στην συνέχεια, προχωρήσαμε στην διερεύνηση της ύπαρξης αναλυτικών λύσεων μορφής οδεύοντος κύματος, εστιάζοντας στην ύπαρξη λύσεων φωτεινού και σκοτεινού σολιτονίου. Διαπιστώσαμε και εδώ, με εφαρμογή της μεθόδου υποβιβασμού σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ότι η συνθήκη ισορροπίας (2.2) είναι ουσιώδης για την ύπαρξη αυτών των λύσεων. Πράγματι, διαπιστώσαμε ότι μόνο κάτω από αυτή την υπόθεση, είναι δυνατή η συνεπής κατασκευή μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης, για την περιβάλλουσα του οδεύοντος κύματος. Η μελέτη του σχετικού δυναμικού συστήματος, οδήγησε στην εύρεση του συνδυασμού των τιμών των παραμέτρων, καθώς της συχνότητας και του κυματαριθμού του οδεύοντος κύματος, που επιτρέπουν την ύπαρξη φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων.

Τα αποτελέσματα των αριθμητικών διερευνήσεων, με αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν σε μικρές διαταραχές των παραπάνω φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων, έδειξαν ότι οι λύσεις αυτές είναι ανθεκτικές σε διαταραχές. Από την άλλη, στην περίπτωση που η συνθήκη ισορροπίας (2.2) δεν ικανοποιείται, τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η εξέλιξη των παραπάνω αρχικών δεδομένων, χαρακτηρίζεται από εκπομπή ακτινοβολίας. Ένα ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι στην περίπτωση του σκοτεινού σολιτονίου, η αρχική κατάσταση τείνει σταδιακά προς έναν απλό σκοτεινό παλμό, ο οποίος διαχωρίζεται σταδιακά από την εκπεμπόμενη ακτινοβολία. Το αντίστοιχο φαινόμενο δεν παρατηρείται στην περίπτωση της εξέλιξης του φωτεινού

σολιτονίου.

Να σημειώσουμε ότι τα αναλυτικά αποτελέσματα ύπαρξης φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων, για το ολοκληρώσιμο όριο της εξίσωσης ENLS, καθώς επίσης και η ευστάθειά τους, που υποδεικνύεται από τις αριθμητικές προσομοιώσεις, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εξέλιξη των νηματίων στροβιλισμού. Αυτό το ενδιαφέρον αναδεικνύεται από τον μετασχηματισμό Hasimoto (1.1): οι ακριβείς λύσεις φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων, δίνονται αντίστοιχα, από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \pm\sqrt{2\lambda}\operatorname{sech}\left[\sqrt{\lambda}(x-vt)\right]e^{i(k_0x-\omega_0t)}, \lambda > 0, \\ \varphi(x, t) &= \pm\sqrt{|\lambda|}\operatorname{tanh}\left[\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}(x-vt)\right]e^{i(k_0x-\omega_0t)}, \lambda < 0,\end{aligned}$$

όπου οι ορισμοί, και οι συνθήκες για τις παραμέτρους $\lambda, \omega_0, k_0, v$, περιγράφησαν στο θεώρημα 5.

Οι λύσεις αυτές συνεπάγονται άμεσα, σαφείς σχέσεις για την καμπυλότητα και την στρέψη του νηματίου στροβιλισμού, οι οποίες είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\kappa(x, t) &= A_1\operatorname{sech}(A_2x - A_3t), \\ \kappa(x, t) &= A_1\operatorname{tanh}(A_2x - A_3t), \\ \tau(x, t) &= A_4.\end{aligned}$$

Οι σταθερές A_i , εμφανίζονται κατά την εφαρμογή των βαθμωτών μετασχηματισμών, και την αλλαγή μεταβλητών κατά την παραγωγή της εξίσωσης ENLS, ως εξίσωσης των νηματίων στροβιλισμού. Να σημειώσουμε ότι οι βαθμωτοί μετασχηματισμοί είναι σημαντικοί και προκύπτουν από τη γεωμετρική σημασία της μεταβλητής ψ του μετασχηματισμού Hasimoto. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι οι λύσεις οδεύοντος κύματος υποστηρίζουν τις εξελισσόμενες καμπύλες σταθερής στρέψης

$$\tau(x, t) = A_4,$$

για κάθε χρονική στιγμή.

Τέλος, πραγματοποιήσαμε μια όσο το δυνατόν λεπτομερή μελέτη του φαινομένου της αστάθειας διαμόρφωσης των λύσεων επιπέδου κύματος

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Τα σχετικά αποτελέσματα εντοπίζουν καίριες διαφορές μεταξύ του ολοκληρώσιμου και μη-ολοκληρώσιμου ορίου της ENLS (2.1), αλλά και μεταξύ της (ENLS) και του ορίου της $A = B = 0$, της ολοκληρώσιμης NLS. Για επίπεδα κύματα, με κυματαριθμό $k \neq 0$, δείξαμε ότι η αστάθεια διαμόρφωσης μπορεί να εμφανιστεί και για την περίπτωση της εστιάζουσας $s = +1$, αλλά και της αφεστιάζουσας $s = -1$ εξίσωσης ENLS. Το τελευταίο αποτέλεσμα βρίσκεται σε αντίθεση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το όριο της αφεστιάζουσας NLS. Για την τελευταία, τέτοια επίπεδα κύματα, είναι πάντα ευσταθή ως προς την διαμόρφωση. Στην περίπτωση του επιπέδου κύματος με κυματαριθμό $k = 0$, η εστιάζουσα εξίσωση ENLS έχει παρόμοια συμπεριφορά με το NLS όριο της, και στο όριο αυτό οι συνθήκες αστάθειας διαμόρφωσης ταυτίζονται.

Επίσης, αποκαλύφθηκαν και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες, σχετικές με την διακύμανση του μήκους των διαστημάτων αστάθειας, για τους κυματαριθμούς των διαταραχών του επιπέδου κύματος, σε διάφορα όρια της εξίσωσης. Αυτά τα όρια παρουσιάζουν ενδιαφέρον από την πλευρά των φυσικών εφαρμογών. Μια τέτοια περίπτωση ορίου αποτελεί η εξίσωση με επιδράσεις επίκλησης [που αντιστοιχεί στο όριο $A = 0, B \neq 0$ της εξίσωσης (3.14)], καθώς και η εξίσωση με διασπορά τρίτης τάξης [που αντιστοιχεί στο όριο $A \neq 0, B = 0$ της εξίσωσης (3.14)]. Συγκεκριμένα, διαπιστώσαμε ότι η εξίσωση για $A, B \neq 0$ έχει διαστήματα ασταθούς διαμόρφωσης, με μήκος που κυμαίνεται, μεταξύ εκείνου που αντιστοιχεί στο όριο επίκλησης (διάστημα μικρότερου μήκους) και εκείνου που αντιστοιχεί στο όριο διασπορά τρίτης τάξης (διάστημα μεγαλύτερου μήκους).

Η ανάλυση της αστάθειας διαμόρφωσης του επιπέδου κύματος παρουσιάζει ενδιαφέρον και για την μελέτη της κίνησης των νηματίων στροβιλισμού. Προκύπτει άμεσα από το μετασχηματισμό Hasimoto ότι οι λύσεις επιπέδου κύματος, αντιστοιχούν σε διαμόρφωση καμπύλης με σταθερή καμπυλότητα $\kappa(x, t) = A_1 \neq 0$ και σταθερή στρέψη $\tau(x, t) = A_2$, για κάθε χρονική στιγμή. Η περίπτωση των επιπέδων κυμάτων με κυματαριθμό $k \neq 0$ αντιστοιχεί σε ελικοειδείς καμπύλες, σταθερής καμπυλότητας $\kappa(x, t) = A_1 \neq 0$ και σταθερής στρέψης $\tau(x, t) = A_2 \neq 0$, ενώ τα επίπεδα κύματα με κυματαριθμό $k = 0$ αντιστοιχούν σε επίπεδες καμπύλες σταθερής καμπυλότητας $\kappa(x, t) = A_1 \neq 0$, αλλά με στρέψη $\tau(x, t) = A_2 = 0$. Έτσι, τα αποτελέσματα αστάθειας για το ολοκληρώσιμο όριο της εξίσωσης συνεπάγονται με τη σειρά τους ευστάθεια ή αστάθεια, στην εξέλιξη ελικοειδών ή επίπεδων καμπυλών, που μπορούν να περιγράψουν διαμορφώσεις των νηματίων στροβιλισμού.

Κεφάλαιο 5

Έκρηξη λύσεων για την εξίσωση ENLS ανώτερης τάξης, με μηχανισμούς ενεργειακής πηγής/απώλειας

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα Κεφάλαια, μελετήσαμε την εξίσωση ENLS

$$(5.1) \quad \varphi_t + 3\alpha|\varphi|^2\varphi_x - i\rho\varphi_{xx} + \sigma\varphi_{xxx} - i\delta|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Διερευνήσαμε την καλή τοποθέτηση του προβλήματος αρχικών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες για ασθeneis λύσεις, καθώς και την νομιμότητα διατηρήσιμων ενεργειακών ποσοτήτων για τις λύσεις αυτές, αλλά και την παραγωγή εξελικτικών εξισώσεων για κατάλληλα συναρτησοειδή, από την επεξεργασία των οποίων είναι δυνατόν να αποδειχθεί η ύπαρξη ολικών λύσεων ως προς τον χρόνο. Μελετήσαμε επίσης τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν μεταξύ των συντελεστών της, ώστε να έχει αναλυτικές λύσεις σολιτονίων, αλλά και τις συνθήκες εκείνες που μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια διαμόρφωσης επιπέδων κυμάτων. Πολλά από τα παραπάνω αναλυτικά αποτελέσματα, διερευνήθηκαν με κατάλληλες αριθμητικές προσομοιώσεις.

Σε αυτό το τελευταίο Κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με μια διαφορετική παραλλαγή της παραπάνω εξίσωσης, που είναι εμπλουτισμένη και με άλλους όρους ανώτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, αλλά και με όρους που περιγράφουν μηχανισμούς απώλειας ή πηγής ενέργειας. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την εξίσωση

$$(5.2) \quad u_t + \frac{\delta}{2}iu_{xx} - i|u|^2u = \gamma u + \delta|u|^2u + \beta u_{xxx} + \mu(|u|^2u)_x + (\nu - i\sigma_R)u(|u|^2)_x,$$

εφοδιασμένη ξανά με περιοδικές συνοριακές συνθήκες:

$$(5.3) \quad u(-L, t) = u(L, t), \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty),$$

όπου $L > 0$ είναι δεδομένο. Η αρχική συνθήκη

$$(5.4) \quad u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

επίσης ικανοποιεί την περιοδικότητα των συνοριακών συνθηκών (5.3). Στην εξίσωση αυτή, οι συντελεστές γ, δ, σ_R και μ, ν είναι πραγματικές σταθερές, ενώ η σταθερά $s = +1$ (ή $s = -1$) αντιστοιχεί σε ομαλή (ή ανώμαλη) διασπορά της ομαδικής ταχύτητας.

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, οι εξισώσεις τύπου ENLS είναι δυνατόν να προκύψουν ως μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή φαινομένων της υδροδυναμικής, της συμπεριφοράς μεταλλικών, καθώς και της μη γραμμικής οπτικής. Ειδικότερα, για τα μη γραμμικά οπτικά υλικά και για σχετικά μεγάλες αποστάσεις διάδοσης, ακριβέστερες περιγραφές οφείλουν να συμπεριλάβουν φαινόμενα γραμμικής απόσβεσης ενέργειας ($\gamma < 0$) ή παροχής της ($\gamma > 0$), καθώς και την ενεργοποίηση της λεγόμενης σκέδασης Raman (ισχύος $\sigma_R > 0$) [40, 7, 59]. Επίσης, αυτές οι περιγραφές συμπεριλαμβάνουν μη-γραμμικούς μηχανισμούς παροχής ενέργειας ($\delta > 0$) ή απώλειας ($\delta < 0$) για την αντιστάθμιση των φαινομένων που οφείλονται στον αντίστοιχο γραμμικό όρο με συντελεστή γ , [51]. Ο ρόλος αυτών των όρων είναι να συνεισφέρουν, κατά το δυνατόν, στην ευστάθεια των σολιτονικών παλμών. Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν στην ENLS (5.2) με $\gamma = \delta = 0$, η οποία υποστηρίζει σολιτόνια δύο διαφορετικών τύπων: φωτεινά (για $s = -1$) που μηδενίζονται στο άπειρο και σκοτεινά (για $s = +1$), που έχουν τη μορφή βυθίσματος σε ένα συνεχές κύμα υποβάθρου. Την ύπαρξη αυτών των εντοπισμένων λύσεων μελετήσαμε για την εξίσωση (5.1), στο Κεφάλαιο 3.

Παρακάτω, εστιάζουμε την προσοχή μας, στην περίπτωση της κανονικής διασποράς (για $s = +1$). Στην περίπτωση αυτή, γραμμικές ή μη-γραμμικές επιδράσεις απόσβεσης συχνά οδηγούν σε φθορά του πλάτους του κύματος υποβάθρου.

Τα σκοτεινά σολιτόνια παρατηρήθηκαν πρώτη φορά στις αρχές της δεκαετίας του 70' [87, 41] και από τότε μελετήθηκαν διεξοδικά, πειραματικά και θεωρητικά, κυρίως στη μη γραμμική οπτική [60] και στη συμπύκνωση Bose - Einstein [57, 20, 33]. Για την εξίσωση ENLS (5.2), στην εργασία [48] αποδείχθηκε με μεθόδους διαταραχών σολιτονίων (βλ. και [2]) ότι σκοτεινά και γκριζα σολιτόνια μπορούν να υπάρξουν και να παρουσιάσουν ευσταθή εξέλιξη σε κατάλληλα χρονικά διαστήματα, και για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων. Ωστόσο, παραμένουν σημαντικά ερωτήματα σχετικά με μακρόχρονη δυναμική τους. Τα αποτελέσματα της εργασίας [48] εισηγούνται ότι αυτή η δυναμική και τα διάφορα σενάρια που αντιστοιχούν σε διάφορες επιλογές για τις τιμές των παραμέτρων παρουσιάζουν μεγάλο πλούτο.

Η δομή του Κεφαλαίου και τα κύρια ευρήματά του είναι τα παρακάτω. Αρχικά ερευνούμε την έκρηξη των λύσεων των εξισώσεων (5.2) - (5.2) σε πεπερασμένο χρόνο. Η ανάλυσή μας έχει ως κίνητρο και λαμβάνει υπόψη τα πορίσματα, και τα ερωτήματα που τέθηκαν στην εργασία [48] για την ευστάθεια των σολιτονίων και τον ρόλο του κυματικού υποβάθρου. Ένα από τα τελικά συμπεράσματα της εργασίας [48] είναι ότι μπορεί να υπάρξει πεπερασμένος χρόνος, στον οποίο το κύμα υποβάθρου παρουσιάζει έκρηξη. Εδώ, στηριζόμενοι σε ενεργειακού τύπου επιχειρηματολογία, η οποία εφαρμόζεται για την μελέτη της συμπεριφοράς L^2 - ενεργειακών συναρτησιακών, αποδεικνύουμε ότι η συμπεριφορά των εν λόγω συναρτησιακών εξαρτάται πρωτίστως από τις παραμέτρους γ, δ . Καταστάσεις έκρηξης (φθοράς) των λύσεων ορίζονται για $\gamma, \delta > 0$ ($\gamma, \delta < 0$). Ένα ενδιαφέρον εύρημα είναι το ότι για $\gamma < 0, \delta > 0$, εντοπίζεται μια κρίσιμη τιμή $\gamma^* \leq 0$, για την

παράμετρο γραμμικής απόσβεσης/πηγής. Αυτή η κρίσιμη τιμή διαχωρίζει την συμπεριφορά της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο από αυτή της φθοράς των λύσεων. Ενδιαφέροντα συμπεράσματα στις περιπτώσεις $\gamma, \delta > 0$ και $\gamma, \delta < 0$, προκύπτουν για την δυναμική των λύσεων, που έχουν αρχικό προφίλ παρόμοιο με αυτό των φωτεινών και των σκοτεινών σολιτονίων. Τα συμπεράσματα αυτά σχετίζονται με την ευστάθεια, για μεγάλο χρονικό διάστημα, κυμάτων, που υπό άλλες συνθήκες επιβιώνουν για σχετικά μικρά χρονικά διαστήματα.

Η παραπάνω εικόνα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της (5.2) ελέγχεται και βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με αριθμητικές προσομοιώσεις. Διερευνούμε την εξέλιξη που παρουσιάζουν τρεις διαφορετικοί τύποι αρχικών συνθηκών. Στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη είναι ένα συνεχές (επίπεδο) κύμα, η αναλυτική έκφραση για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης όχι μόνο ικανοποιείται αλλά ταυτίζεται με τις αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης. Επιπλέον, η τιμή του χρόνου έκρηξης δεν εξαρτάται από την επίδραση των υπολοίπων όρων υψηλής τάξης. Η παρατηρούμενη ταύτιση επαληθεύεται αναλυτικά, καθώς ο χρόνος για την έκρηξη του υποβάθρου και η αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος συμπίπτουν, στην περίπτωση των αρχικών συνθηκών που αντιστοιχούν σε συνεχές κύμα. Αποδεικνύεται επίσης, ότι η εξέλιξη του L^2 -συναρτησιακού εξαρτάται από το υποβάθρο του συνεχούς κύματος. Σχετικά με την κρίσιμη τιμή γ^* , τα αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι η αναλυτική εκτίμηση της είναι αρκετά ακριβής. Συγκεκριμένα, για $\gamma < \gamma^*$ η λύση φθείρεται και για $\gamma \geq \gamma^*$ η λύση εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες παρουσιάζουν εκθετικό εντοπισμό (της μορφής sech , η οποία προσομοιάζει στο φωτεινό σολιτόνιο της εστιάζουσας NLS), παρατηρείται μια πολύ ενδιαφέρουσα προσωρινή δυναμική πριν από την έκρηξη (ή τη φθορά), όταν $\gamma \geq \gamma^*$ ($\gamma < \gamma^*$). Αυτή η δυναμική χαρακτηρίζεται από μια ανατροφοδοτούμενη εξέλιξη, για μικρές μεταβολές των παραμέτρων. Όπως και προηγουμένως, η αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος για τον χρόνο έκρηξης ικανοποιείται από τις αριθμητικές τιμές. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ταύτιση τους, και το γεγονός αυτό ερμηνεύεται αναλυτικά: η εξέλιξη του L^2 -συναρτησιακού κυριαρχείται από την εξέλιξη του πλάτους της τοπικής λύσης. Έχουμε επίσης ελέγξει αριθμητικά την συμπεριφορά του χρόνου έκρηξης, ως συνάρτηση της επίδρασης των γραμμικών και μη γραμμικών συντελεστών β και σ_R . Το αποτέλεσμα αυτού του ελέγχου είναι ότι η αριθμητική τιμή του χρόνου έκρηξης παρουσιάζει άλμα προς κάποια μικρότερη αριθμητική τιμή, αλλά παραμένει σταθερή στη συνέχεια, για μεταβολές των παραμέτρων αυτών, εντός συγκεκριμένων διαστημάτων. Το άλμα αυτό συνδέεται με δραστική μετάβαση σε διαφορετικού τύπου προσωρινή δυναμική, πριν το σύστημα καταλήξει στην φθορά ή στην έκρηξη.

Οι αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης βρέθηκε ότι παρουσιάζουν εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες αναλυτικές εκτιμήσεις, στην περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι της μορφής \tanh^2 (που έχει κοινά γνωρίσματα με την πυκνότητα ενός σκοτεινού σολιτονίου, για την αφεστιάζουσα ENLS). Η συμφωνία αυτή οφείλεται στο ότι κυρίαρχο ρόλο στην δυναμική έχει ξανά η εξέλιξη του κύματος υποβάθρου. Σημειώνεται ότι η συμφωνία αυτή παρατηρείται για μικρές τιμές των παραμέτρων. Για μεγαλύτερες μεταβολές τους, παρατηρούμε και πάλι άλμα, όμοιο μιας «βηματικής συνάρτησης», που συνδέεται ξανά με δραστική μεταβολή της προσωρινής δυναμικής, πριν την φθορά ή την έκρηξη.

Ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι η παραμετρική περιοχή $\gamma < 0$, $\delta > 0$ δεν είναι επαρκής για να ορίσει μη-τετριμμένη δυναμική ευστάθειας ή περιοχή αποφυγής της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο. Σε μεταγενέστερη εργασία [5],

δείχνουμε ότι καταστάσεις ευστάθειας συνδεδεμένες με εξαιρετικά πλούσια δυναμική, διαφορετική της έκρηξης ή τη φθοράς, μπορούν να εμφανιστούν μόνο στην περιοχή των παραμέτρων $\gamma > 0$, $\delta < 0$.

5.2 Έκρηξη των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο, για L^2 -συναρτησιακά

Το ερώτημα της έκρηξης διερευνάται για επαρκώς ομαλές λύσεις της εξίσωσης (5.2), οι οποίες ορίζονται τοπικά ως προς τον χρόνο. Η ύπαρξη τέτοιων λύσεων διασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα τοπικής ύπαρξης, που είναι συνδεδεμένο με το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών (5.2) - (5.4). Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για να καταλήξουμε σε ένα τέτοιο αποτέλεσμα τοπικής ύπαρξης, για περιοδικές H_{per}^k -λύσεις [21, 83], βασίζονται στην προσεγγιστική γραμμή των [53]-[56]. Η εφαρμογή αυτών των μεθόδων στο πρόβλημά μας περιέχει μακροσκελείς υπολογισμούς. Στην περίπτωση μας, διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 9. Έστω $u_0 \in H_{\text{per}}^k(\Omega)$ για κάποιο ακέραιο $k \geq 2$, και $\beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \sigma_R \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $T > 0$, τέτοιο ώστε το πρόβλημα (5.2) - (5.4) να έχει μοναδική λύση

$$u \in C([0, T], H_{\text{per}}^k(\Omega)), u_t \in C([0, T], H_{\text{per}}^{k-3}(\Omega)).$$

Επιπλέον, η λύση $u \in H_{\text{per}}^k$ εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα αρχικά δεδομένα $u_0 \in H_{\text{per}}^k$, δηλαδή ο τελεστής

$$S(t) : H_{\text{per}}^k \longrightarrow H_{\text{per}}^k(\Omega), t \in [0, T], u_0 \longmapsto S(t)u_0,$$

είναι συνεχής.

Εδώ, με H_{per}^k εννοούμε χώρους Sobolev, περιοδικών συναρτήσεων στο $\Omega = [-L, L]$. Στην συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μια διαφορική ανισότητα για το συναρτησιακό

$$M(t) = \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L |u(x, t)|^2 dx,$$

και να δείξουμε ότι η λύση της, κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις, αποκλίνει σε πεπερασμένο χρόνο, [21, 12, 83, 72, 84]. Για διακριτές εξισώσεις Ginzburg - Landau, μια αντίστοιχη διαπραγμάτευση γίνεται στο [52], ενώ για αλυσίδες Klein - Gordon, στο [4].

Να σημειώσουμε ότι η επιλογή του συγκεκριμένου συναρτησιακού δεν είναι αυθαίρετη, αλλά προκύπτει από την επεξεργασία των νόμων ισορροπίας για το μοντέλο NLSE (5.2). Η σχέση αυτή θα συζητηθεί στην συνέχεια. Το αποτέλεσμα για την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, έχει ως εξής:

Θεώρημα 10. Για $u_0 \in H_{\text{per}}^k$, $k \geq 3$, έστω $S(t)u_0 = u \in C([0, T_{\text{max}}], H_{\text{per}}^k(\Omega))$ η τοπική ως προς το χρόνο λύση του προβλήματος (5.2) - (5.4), όπου $[0, T_{\text{max}}]$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης. Υποθέτουμε ότι $\delta > 0$ και ότι η αρχική συνθήκη u_0 είναι τέτοια ώστε $M(0) \neq 0$. Τότε, ο χρόνος T_{max} είναι πεπερασμένος και ισχύουν οι ακόλουθες περιπτώσεις :

$$(5.5) \quad T_{\text{max}} \leq \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right], \text{ για } \gamma \neq 0, \frac{\gamma}{\delta M(0)} > -1,$$

$$(5.6) \quad \text{και} \quad T_{\max} \leq \frac{1}{2\delta M(0)}, \text{ για } \gamma = 0.$$

Απόδειξη. Για ένα τυχαίο $T < T_{\max}$, αφού $k \geq 3$ και η εμφύτευση

$$C([0, T], H_{\text{per}}^k(\Omega)) \subset C([0, T] L_2(\Omega))$$

είναι συνεχής, για την λύση u θα ισχύει $S(t)u_0 = u \in C([0, T] L_2(\Omega))$. Επίσης, από το θεώρημα 2, έχουμε ότι $u_t \in C([0, T] L_2(\Omega))$. Επομένως, έχουμε την απαραίτητη ομαλότητα ώστε παραγωγίζοντας το συναρτησιακό $M(t)$ ως προς το χρόνο, να πάρουμε την σχέση

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= -2\gamma t \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L |u|^2 dx + \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L (u_t \bar{u} + u \bar{u}_t) dx \Rightarrow \\ \frac{dM(t)}{dt} &= -\gamma \frac{e^{-2\gamma t}}{L} \int_{-L}^L |u|^2 dx + \frac{e^{-2\gamma t}}{L} \text{Re} \int_{-L}^L u_t \bar{u} dx. \end{aligned}$$

Αφού λύσουμε την εξίσωση (5.2) ως προς u_t , αντικαθιστούμε στην σχέση (5.7) και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν, εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας την περιοδικότητα της λύσης. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} -\text{Re} \int_{-L}^L \frac{s}{2} i u_{xx} \bar{u} dx &= \frac{s}{2} \text{Re} \int_{-L}^L i u_x \bar{u}_x dx = \frac{s}{2} \text{Re} \int_{-L}^L i |u_x|^2 dx = 0, \\ \text{Re} \int_{-L}^L i |u|^2 u \bar{u} dx &= \text{Re} \int_{-L}^L i |u|^4 dx = 0, \\ \text{Re} \int_{-L}^L \gamma u \bar{u} dx &= \gamma \int_{-L}^L |u|^2 dx, \\ \text{Re} \int_{-L}^L \delta |u|^2 u \bar{u} dx &= \delta \int_{-L}^L |u|^4 dx, \\ \text{Re} \int_{-L}^L \beta u_{xxx} \bar{u} dx &= -\beta \text{Re} \int_{-L}^L u_{xx} \bar{u}_x dx = \beta \text{Re} \int_{-L}^L u_x \bar{u}_{xx} dx \Rightarrow \\ \text{Re} \int_{-L}^L u_{xx} \bar{u}_x dx &= \beta \text{Re} \int_{-L}^L u_{xx} \bar{u}_x dx \Rightarrow \\ \beta \text{Re} \int_{-L}^L u_{xx} \bar{u}_x dx &= 0, \\ \text{Re} \int_{-L}^L \mu (|u|^2 u)_x \bar{u} dx &= \mu \text{Re} \int_{-L}^L (|u|^2)_x u \bar{u} dx + \mu \text{Re} \int_{-L}^L |u|^2 u_x \bar{u} dx \\ &= \mu \text{Re} \int_{-L}^L (|u|^2)_x |u|^2 dx + \mu \int_{-L}^L |u|^2 \text{Re}(u_x \bar{u}) dx \\ &= \mu \int_{-L}^L |u|^2 (|u|^2)_x dx + \mu \int_{-L}^L |u|^2 \frac{1}{2} (|u|^2)_x dx \\ &= \frac{3\mu}{2} \int_{-L}^L |u|^2 (|u|^2)_x dx = \left[\frac{|u|^4}{2} \right]_{-L}^L = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \int_{-L}^L (\nu - i\sigma_R) u (|u|^2)_x \bar{u} dx = \operatorname{Re} \int_{-L}^L (\nu - i\sigma_R) |u|^2 (|u|^2)_x dx = 0.$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην (5.7) και παίρνουμε:

$$(5.8) \quad \frac{dM(t)}{dt} = \delta \frac{e^{-2\gamma t}}{L} \int_{-L}^L |u|^4 dx.$$

Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την ανισότητα Cauchy - Schwartz, έχουμε:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \int_{-L}^L |u|^2 dx &= \int_{-L}^L 1 |u|^2 dx \leq \sqrt{\int_{-L}^L 1^2 dx} \sqrt{\int_{-L}^L |u|^4 dx} \Rightarrow \\ \int_{-L}^L |u|^2 dx &\leq \sqrt{2L} \sqrt{\int_{-L}^L |u|^4 dx}. \end{aligned}$$

Άρα, για το συναρτησιακό $M(t)$ θα ισχύει:

$$(5.10) \quad M(t) \leq \frac{e^{-2\gamma t}}{\sqrt{2L}} \sqrt{\int_{-L}^L |u|^4 dx},$$

και αφού η ανισότητα έχει θετικά μέρη:

$$(5.11) \quad [M(t)]^2 \leq \frac{e^{-4\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L |u|^4 dx,$$

$\forall \in [0, T_{\max})$.

Από την άλλη, από την (5.8) προκύπτει ότι:

$$\int_{-L}^L |u|^4 dx = e^{2\gamma t} \frac{L}{\delta} \frac{dM(t)}{dt},$$

οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την (5.7) ως

$$(5.12) \quad \begin{aligned} [M(t)]^2 &\leq \frac{e^{-2\gamma t}}{2\delta} \frac{dM(t)}{dt} \Rightarrow \\ \frac{dM(t)}{[M(t)]^2} &\geq 2\delta e^{2\gamma t}. \end{aligned}$$

Επειδή όμως

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{M(t)} \right] = - \frac{\frac{dM(t)}{dt}}{[M(t)]^2},$$

με την βοήθεια της (5.12), οδηγούμαστε στην ανισότητα

$$(5.13) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{M(t)} \right] \leq -2\delta e^{2\gamma t}.$$

Η ολοκλήρωση της (5.13) ως προς το χρόνο, συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{M(t)} \leq \frac{1}{M(0)} - 2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds,$$

και αφού $M(t) > 0$, θα ικανοποιείται η ανισότητα

$$(5.14) \quad 2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds \leq \frac{1}{M(0)}.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της (5.14), είναι απαραίτητο να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την παράμετρο γ :

(i) Υποθέτουμε ότι $\gamma \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή

$$2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds = \frac{2\delta}{2\gamma} [e^{2\gamma s}]_0^t = \frac{\delta}{\gamma} (e^{2\gamma t} - 1),$$

οπότε η (5.14) συνεπάγεται ότι

$$e^{2\gamma t} \leq 1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)}.$$

Έτσι για $\frac{\gamma}{\delta M(0)} > -1$, συμπεραίνουμε ότι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της λύσης είναι πεπερασμένος, αφού

$$t < \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right].$$

Η τελευταία ανισότητα αποδεικνύει την εκτίμηση της (5.5), με την αντίστοιχη προϋπόθεση για τις παραμέτρους γ, δ .

(ii) Υποθέτουμε ότι $\gamma = 0$. Τότε η εξίσωση (5.14) συνεπάγεται ότι

$$2\delta t \leq \frac{1}{M(0)} \Rightarrow t \leq \frac{1}{2\delta M(0)}.$$

Η τελευταία ανισότητα αποδεικνύει την εκτίμηση της (5.6), δηλαδή την δεύτερη περίπτωση του Θεωρήματος. \square

Από την συνθήκη (5.5), που ορίζει το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης της λύσης

$$(5.15) \quad T_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right],$$

μπορούμε να ορίσουμε μια κρίσιμη τιμή για την παράμετρο γ , ως εξής:

$$(5.16) \quad \gamma^* = -\delta M(0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(5.17) \quad \lim_{\gamma \rightarrow \gamma^*} T_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = +\infty,$$

ενώ το $T_{\max}[\gamma, \delta, M(0)]$ είναι πεπερασμένο, αν $\gamma > \gamma^*$. Τότε, η σχέση (5.17) δείχνει ότι όταν $\delta > 0$, η κρίσιμη τιμή γ^* μπορεί να θεωρηθεί ως σημείο διακλάδωσης, που διαχωρίζει τις δύο διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές:

- Έκρηξη λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο για $\gamma > \gamma^*$.
- Ολική ως προς το χρόνο ύπαρξη λύσεων, για $\gamma < \gamma^*$.

Αυτό το σενάριο διακλάδωσης θα διερευνηθεί στη συνέχεια και αριθμητικά.

Επίσης, σημειώνουμε ότι το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης λύσεων (5.6), στην περίπτωση $\gamma = 0$,

$$(5.18) \quad T_{\max}[\delta, M(0)] = \frac{1}{2\delta M(0)},$$

είναι πράγματι το όριο του άνω φράγματος (5.15) για $\gamma = 0$, καθώς όταν $\gamma \rightarrow 0$,

$$(5.19) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = T_{\max}[\delta, M(0)].$$

5.3 Αριθμητική διερεύνηση της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες συνεχούς κύματος

Το πρώτο παράδειγμα της αριθμητικής μας μελέτης σχετίζεται με αρχικά δεδομένα συνεχούς (επιπέδου) κύματος της μορφής:

$$(5.20) \quad u_0(x) = \varepsilon e^{-i \frac{k\pi x}{L}},$$

πλάτους ε και κυματαριθμού $k > 0$. Αφού

$$M(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varepsilon^2 \left| e^{-i \frac{k\pi x}{L}} \right|^2 dx = \varepsilon^2,$$

το Θεώρημα 10 και η σχέση (5.15) επιβάλλουν την αναλυτική έκφραση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης:

$$(5.21) \quad T_{\max}[\gamma, \delta, \varepsilon] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta \varepsilon^2} \right].$$

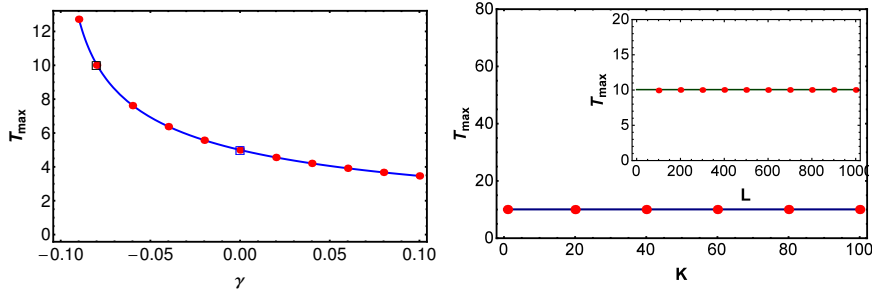
Σύμφωνα με την (5.16), η κρίσιμη τιμή γ^* στην περίπτωση αυτή είναι

$$(5.22) \quad \gamma^* = -\delta \varepsilon^2.$$

Επίσης, η (5.18) επιβάλλει την αναλυτική έκφραση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης, στην περίπτωση $\gamma = 0$:

$$(5.23) \quad T_{\max}[\delta, \varepsilon] = \frac{1}{2\delta \varepsilon^2}.$$

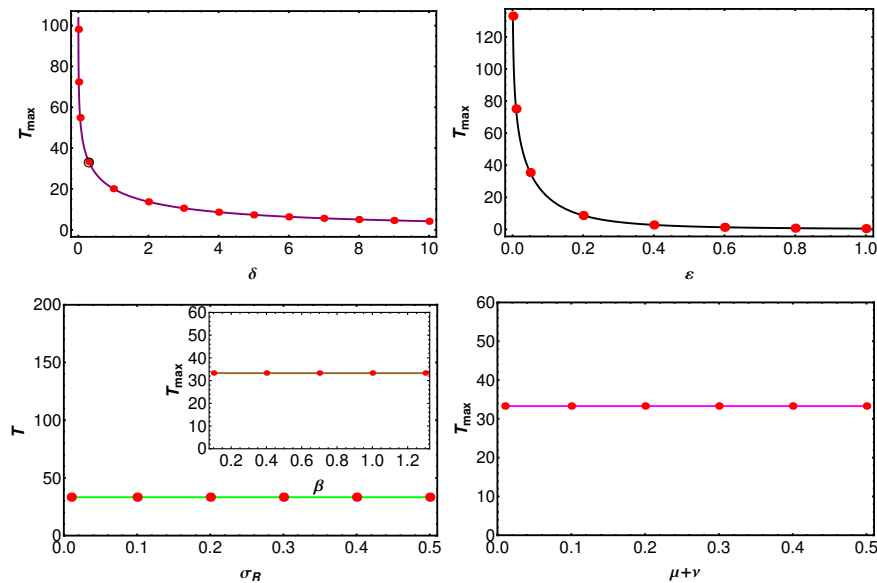
Το αριστερό πλαίσιο του σχήματος 5.1 παρουσιάζει την σύγκριση ανάμεσα στην αναλυτική έκφραση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης των λύσεων και τις αριθμητικές του τιμές, ως συνάρτηση της παραμέτρου γ . Θεωρούμε την περίπτωση τιμών των παραμέτρων $\delta = 0.1$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 1$. Επίσης $L = 100$, και για το επίπεδο κύμα ο κυματαριθμός είναι $k = 10$ και το πλάτος $\varepsilon = 1$. Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων έχουμε ολοκληρώσει το σύστημα για $\gamma \in [-0.09, 0.1]$, δηλαδή για κατάσταση στην οποία επαληθεύεται η συνθήκη $\gamma > \gamma^* = -0.1$, για τον πεπερασμένο χρόνο (5.21). Η αναλυτική έκφραση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης (5.21) αντιστοιχεί στη συνεχή μπλε καμπύλη, ενώ



Σχήμα 5.1: Η αριστερή εικόνα παρουσιάζει την αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης των λύσεων επιπέδου κύματος, με αρχικές συνθήκες (5.20), σε αντιπαραβολή με την αντίστοιχη αναλυτική εκτίμηση (5.21) του άνω φράγματος. Η συνεχής μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στην αναλυτική και οι κόκκινες τελείες στην αριθμητική εκτίμηση. Εδώ, έχουμε $L = 100$, ενώ $K = 10, \epsilon = 1$ για το επίπεδο κύμα. Στην δεξιά εικόνα έχουμε αντιπαραβολή των τιμών του χρόνου έκρηξης των λύσεων επιπέδου κύματος, για διάφορες τιμές του κυματαριθμού K , με αυτές που προκύπτουν μεταβάλλοντας το μήκος L (ένθετο πλαίσιο). Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι ίδιες με αυτές της αριστερής εικόνας. Για το εξωτερικό πλαίσιο έχουμε $L = 100, K \in [10, 100]$, ενώ για το εσωτερικό $K = 10, L \in [100, 1000]$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης των λύσεων είναι $T_{\max} = 10.05$ (συνεχής μαύρη ευθεία) ενώ η αντίστοιχη αριθμητική εκτίμηση $T_{num} = 10.01$ (κόκκινες τελείες).

τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν σημειωθεί με κόκκινες τελείες. Είναι αξιοσημείωτο ότι η συγκεκριμένη αναλυτική εκτίμηση προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια από τα αριθμητικά αποτελέσματα. Ενδεικτικό της ακρίβειας της αναλυτικής εκτίμησης του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισής του, για την περίπτωση $\gamma = 0$, με τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων. Η αναλυτική τιμή της (5.23) είναι $T_{\max}[0.1, 1] = 5$ (μπλε τετράγωνο στην εικόνα) και το αριθμητικό αποτέλεσμα $T_{\max} = 4.99$ (κόκκινη κουκίδα εντός του τετραγώνου).

Η αναλυτική έκφραση για το άνω φράγμα, που δίνεται από την (5.21), δεν εξαρτάται από τον κυματαριθμό k και το μήκος του διαστήματος $[-L, L]$. Αυτή η ανεξαρτησία παρουσιάζεται επίσης στα αριθμητικά αποτελέσματα, όπως φαίνεται και στο δεξιό πλαίσιο της εικόνας 5.1. Για $\gamma = -0.8$ και με τις υπόλοιπες παραμέτρους να διατηρούν τις τιμές τους, έχουμε ολοκληρώσει το σύστημα, μεταβάλλοντας τον κυματαριθμό $k \in [10, 100]$. Σημειώνουμε ότι $\gamma = -0.08 > \gamma^* = -0.1$, και ότι η αναλυτική έκφραση για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης (5.21) είναι $T_{\max}[-0.08, 0.1, 1] = 10.05$ (συνεχής μαύρη γραμμή στο μεγάλο πλαίσιο). Η αντίστοιχη αριθμητική τιμή (κόκκινες τελείες) παραμένει σχεδόν σταθερή (με αμελητέα διακύμανση), $T_{num} \simeq 10.01$. Η ανεξαρτησία της αριθμητικής τιμής από το L φαίνεται στο ένθετο πλαίσιο. Για το ίδιο σύνολο τιμών των παραμέτρων με το προηγούμενο, σταθεροποιώντας τον κυματαριθμό $k = 10$, ολοκληρώνουμε το σύστημα, μεταβάλλοντας το $L \in [100, 1000]$. Έτσι βρίσκουμε την ίδια περίπου αριθμητική τιμή για το χρόνο έκρηξης των λύσεων, πολύ κοντά στην αντίστοιχη αναλυτική εκτίμηση. Το σχήμα 5.2 παρουσιάζει την σύγκριση ανάμεσα στην αναλυτική εκτίμηση (5.21) και στην αριθμητική τιμή του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης,



Σχήμα 5.2: Πάνω εικόνες: Αριστερά, παρουσιάζεται η σύγκριση ανάμεσα στην αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης για αρχική συνθήκη επιπέδου κύματος (5.20) και την αντίστοιχη αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος (5.21), ως συνάρτηση του $\delta \in [0.001, 10]$, για $\gamma = 0.04$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 1$. Η συνεχής μωβ καμπύλη παριστάνει την αναλυτική εκτίμηση και οι κόκκινες τελείες τον αριθμητικό χρόνο. Εδώ $L = 100$, ενώ $K = 10$, $\epsilon = 0.1$. Δεξιά, έχουμε την παρουσίαση των ίδιων μεγεθών, ως συναρτήσεις του $\epsilon \in [0.001, 1]$, για $\gamma = 0.04$, $\delta = 1$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 1$, $L = 100$, $K = 10$. Οι αριθμητικές εκτιμήσεις παρουσιάζονται με κόκκινες τελείες και η αναλυτική με συνεχή μωβ καμπύλη. Κάτω εικόνες: Παρουσιάζεται η ανεξαρτησία του χρόνου έκρηξης από τις παραμέτρους σ_R , β (ένθετο) και το άθροισμα $\mu + \nu \in [0.01, 0.5]$. Εδώ έχουμε $\gamma = 0.04$, $\delta = 0.3$, $\epsilon = 0.1$, $K = 10$, $L = 100$. Η αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης είναι $T_{\max} = 33.28$ και η αριθμητική εκτίμηση $T_{\text{num}} \approx 33.21$. Οι τιμές στο αριστερό πλαίσιο είναι $\beta = 1$, $\sigma_R \in [0.01, 0.5]$ και στο ένθετο $\sigma_R = 0.3$, $\beta \in [0.1, 1.3]$. Δεξιά ισχύει $\mu + \nu \in [0.01, 0.5]$, για $\beta = 1$, $\sigma_R = 0.3$, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τις ίδιες τιμές όπως και στην πάνω δεξιά εικόνα.

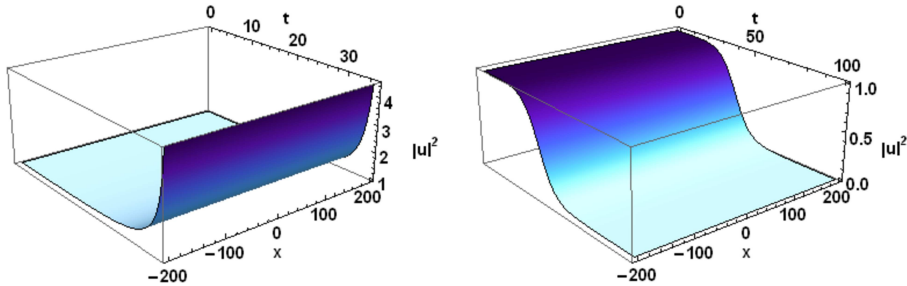
ως συνάρτηση της παραμέτρου δ , του πλάτους ε του κύματος και των παραμέτρων σ_R, β, μ και ν . Στο πάνω αριστερά πλαίσιο, μεταβάλλουμε το $\delta \in [0.001, 10]$, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους στις τιμές $\gamma = 0.04, \varepsilon = 0.01$. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη $\gamma > \gamma^*$ ικανοποιείται πάντα, όταν $\gamma > 0$. Παρατηρούμε και πάλι την εξαιρετική ακρίβεια του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης (5.21) (συνεχής μαβ καμπύλη), ως συνάρτηση της μη γραμμικής παραμέτρου δ , με την αντίστοιχη αριθμητική τιμή (τελείες). Η ίδια συμφωνία παρατηρείται, αν θεωρήσουμε ως μεταβλητή το πλάτος του επιπέδου κύματος $\varepsilon \in [0.001, 1]$ και κρατήσουμε σταθερές τις παραμέτρους $\gamma = 0.04$ και $\delta = 1$. Η αναλυτική εκτίμηση (μαύρη συνεχής καμπύλη) βρέθηκε σχεδόν να ταυτίζεται με τις αριθμητικές τιμές (τελείες), όπως φαίνεται στο πλαίσιο πάνω δεξιά.

Τα κάτω πλαίσια της εικόνας 5.2 δείχνουν την ανεξαρτησία του χρόνου έκρηξης των λύσεων από τις παραμέτρους σ_R, β, μ και ν . Για σταθερές τιμές $\gamma = 0.04, \delta = 0.3, \varepsilon = 0.1$, η αναλυτική έκφραση της (5.21) μας δίνει $T_{\max}[0.04, 0.3, 0.1] = 33.28$, που σημειώνεται με ευθείες γραμμές. Για $\beta = 1$ και σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους, έχουμε ολοκληρώσει το σύστημα, μεταβάλλοντας το $\sigma_R \in [0.01, 0.5]$. Το ένθετο πλαίσιο παρουσιάζει τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης για $\sigma_R = 0.1$, και $\beta \in [0.1, 1.3]$. Σε όλες τις μελέτες προκύπτει μια σχεδόν σταθερή τιμή $T_{num} \simeq 33.21$, που παραμένει πολύ κοντά στην αριθμητική τιμή. Η ίδια ακρίβεια επαληθεύεται και στο δεξιό πλαίσιο, που παρουσιάζει τα αποτελέσματα του αριθμητικού ελέγχου για την ανεξαρτησία από τις παραμέτρους μ και ν .

Σημειώνουμε ότι οι δύο τελευταίοι μη γραμμικοί όροι της (5.2) μπορούν να γραφούν ως

$$F[u] = [(\mu + \nu) - i\sigma_R] |u|^2 u_x + [(\mu + \nu) - i\sigma_R] u^2 \bar{u}_x.$$

Έτσι έχουμε ολοκληρώσει το σύστημα, μεταβάλλοντας το άθροισμα $(\mu + \nu) \in [0.01, 0.5]$, για $\beta = 1$, και $\sigma_R = 0.3$. Η αντίστοιχη αριθμητική τιμή παραμένει σχεδόν σταθερή $T_{num} \simeq 33.21$, όπως φαίνεται στο πάνω δεξιό πλαίσιο.



Σχήμα 5.3: Στην αριστερή εικόνα, παρατηρούμε την έκρηξη της πυκνότητας $|u|^2$, για αρχική συνθήκη επιπέδου κύματος (5.20), με παραμέτρους $\delta = 0.1, \varepsilon = 1$ και κρίσιμη τιμή $\gamma = \gamma^* - 0.1$. Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι $K = 10, L = 200, \mu = 0.01, \nu = 0.01, \sigma = 0.02, \beta = 1$. Στην δεξιά εικόνα, βλέπουμε την φθορά της πυκνότητας $|u|^2$ του επιπέδου κύματος, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, για $\delta = 0.1, \varepsilon = 1$, και $\gamma = -0.101 < \gamma^* - 0.1$. Οι υπόλοιπες παράμετροι διατηρούν τις τιμές τους.

Στην εικόνα 5.3, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του αριθμητικού ελέγχου της συμπεριφοράς της κρίσιμης τιμής (5.22), για την παράμετρο γ , ως σημείου

διακλάδωσης, που διαχωρίζει την ολική ύπαρξη από την έκρηξη των λύσεων. Το αριστερό πλαίσιο παρουσιάζει την εξέλιξη της πυκνότητας για την αρχική συνθήκη επιπέδου κύματος, που καθορίζεται από την (5.20), για τιμές των παραμέτρων, όπως στο πάνω πλαίσιο της εικόνας 1, και επιλέγοντας για την παράμετρο γ , την κρίσιμη τιμή $\gamma = \gamma^* = -0.1$. Ο αριθμητικός υπολογισμός της πυκνότητας για το χρόνο έκρηξης δίνει την τιμή $T_{num} = 27.56$. Η εξέλιξη κατά την έκρηξη είναι όμοια με αυτή που μπορεί να παρατηρηθεί σε μια κυβική, ασταθή συνήθη διαφορική εξίσωση τύπου Bernoulli. Η λύση της υποδεικνύει μια γρήγορη, ομοιόμορφη χωρικά και μονότονη αύξηση της πυκνότητας, κατά την προσέγγιση του χρόνου έκρηξης. Από την άλλη, διαταράσσοντας ελαφρά την παράμετρο $\gamma < \gamma^*$, παρατηρούμε την πλήρη αλλαγή της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς που οδηγεί σε φθορά των λύσεων. Αυτό φαίνεται στο δεξιό πλαίσιο, το οποίο παρουσιάζει την εξέλιξη της πυκνότητας για τη ίδια αρχική συνθήκη, με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, αλλά για $\gamma = -0.101 < \gamma^* = -0.1$, ελαφρά μικρότερη από την κρίσιμη τιμή γ^* . Η φθορά είναι πάλι ομοιόμορφη χωρικά, και παρουσιάζει ομοιότητα με την συμπεριφορά που αντιστοιχεί στην αντίστοιχη ευσταθή κυβική εξίσωση Bernoulli.

Και στις δύο περιπτώσεις, η προαναφερθείσα συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύει τη δυναμική του κύματος υποβάθρου. Για επίπεδα κύματα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u(x \rightarrow \pm L, t) \simeq w(t)$. Τότε από την εξίσωση (5.2) μπορούμε να εξάγουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το w :

$$i\dot{w} - |w|^2w = i\gamma w + i\delta|w|^2w,$$

όπου $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την πολική έκφραση $w = h(t)e^{i\theta t}$ παίρνουμε:

$$(5.24) \quad \dot{h} = \gamma h + \delta h^3.$$

Υποθέτοντας ότι το αρχικό ύψος του υποβάθρου του κύματος είναι $h(0) = h_0$, η συνήθης διαφορική εξίσωση (5.24) γίνεται

$$\frac{dh}{dt} = \gamma h + \delta h^3 \Rightarrow \int_{h_0}^h \frac{dx}{x(\delta x^2 + \gamma)} = \int_0^t ds.$$

Στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέρους θέτουμε $x = \frac{1}{\omega}$, οπότε

$$\int_{\frac{1}{h_0}}^{\frac{1}{h}} \frac{-\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\delta}{\omega^2} + \gamma \right)} d\omega = - \int_{\frac{1}{h_0}}^{\frac{1}{h}} \frac{\omega}{\gamma\omega^2 + \delta} d\omega = - \left[\log(\gamma\omega^2 + \delta) \right]_{\frac{1}{h_0}}^{\frac{1}{h}}.$$

Έτσι για την λύση της (5.24) έχουμε

$$(5.25) \quad \log \frac{\frac{\gamma}{h^2} + \delta}{\frac{\gamma}{h_0^2} + \delta} = -2\gamma t \Rightarrow h^2(t) = \frac{\gamma h_0^2 e^{2\gamma t}}{\gamma + \delta h_0^2 - \delta h_0^2 e^{2\gamma t}}.$$

Η λύση (5.25) εκρήγνυται στον πεπερασμένο χρόνο

$$(5.26) \quad T_{\max}^* = \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta h_0^2} \right]$$

κάτω ακριβώς από τις ίδιες προϋποθέσεις του Θεωρήματος 10, για τα γ και δ .

Παρατηρούμε ότι οι χρονικές εκτιμήσεις για την έκρηξη των λύσεων των (5.15) και (5.21), για την περίπτωση του επιπέδου κύματος, συμπίπτουν με τις χρονικές εκτιμήσεις για την έκρηξη του υποβάθρου h^2 (5.26). Επιπλέον, από την λύση (5.25), προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h^2(t) = 0,$$

αν $\gamma < -\delta h_0^2$, για $\delta > 0$, δηλαδή η συνθήκη για την φθορά του υποβάθρου $h(t)$ συμπίπτει με την συνθήκη $\gamma < \gamma^*$ για την φθορά των λύσεων, στην κατάσταση $\gamma < 0, \delta > 0$. Αυτή η σύμπτωση εξηγεί την ταύτιση της αναλυτικής έκφρασης του άνω φράγματος (5.21) με τις αριθμητικές εκτιμήσεις του χρόνου έκρηξης και την αξιοπρόσεκτη ευστάθεια της δυναμικής που αποδείχθηκε αναλυτικά, στην περίπτωση αρχικών συνθηκών επιπέδου κύματος (5.20).

Οι παρατηρήσεις των εικόνων 5.1 και 5.2, που αναφέρονται στην αναλυτική έκφραση του άνω φράγματος, μπορούν να εξηγηθούν και από την επανεξέταση της εξέλιξης του συναρτησιακού $M(t)$. Η εξέλιξη αυτή είναι ισοδύναμη με την εξέλιξη του ύψους του κύματος υποβάθρου $h^2(x, t) \simeq h^2(t)$. Έτσι το $M(t)$ εξελίσσεται ως

$$(5.27) \quad M(t) = \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L |u(x, t)|^2 dx \simeq \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} h^2(t) 2L = e^{-2\gamma t} h^2(t).$$

Στην περίπτωση του συνεχούς κύματος, η εξέλιξη της μέσης τιμής της νορμας

$$N(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |u(x, t)|^2 dx,$$

είναι σχεδόν ισοδύναμη με την εξέλιξη του κύματος υποβάθρου. Συνεπώς, ο χρόνος έκρηξης για το συναρτησιακό $M(t)$ είναι σχεδόν ίσος με το χρόνο έκρηξης του ύψους h^2 .

5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες τύπου sech

Το δεύτερο παράδειγμα της αριθμητικής μας μελέτης σχετίζεται με αρχικά δεδομένα τύπου sech

$$(5.28) \quad u_0(x) = \varepsilon \operatorname{sech} x,$$

πλάτους $\varepsilon > 0$. Τέτοια αρχικά δεδομένα προσομοιάζουν στην περίπτωση ενός φωτεινού σολιτονίου, ως αρχικής κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή

$$M(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varepsilon^2 \operatorname{sech}^2 x dx = \frac{\varepsilon^2 \tanh x}{L},$$

οπότε από το θεώρημα 10 και την σχέση (5.15) προκύπτει ότι η αναλυτική έκφραση για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης $T_{\max}[\gamma, \delta, M(0)]$ είναι:

$$(5.29) \quad T_{\max}[\gamma, \delta, \varepsilon, L] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma L}{\delta \varepsilon^2 \tanh L} \right].$$

Επίσης, η (5.18) για την περίπτωση $\gamma = 0$ επιβάλλει στην αναλυτική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης να πάρει την τιμή:

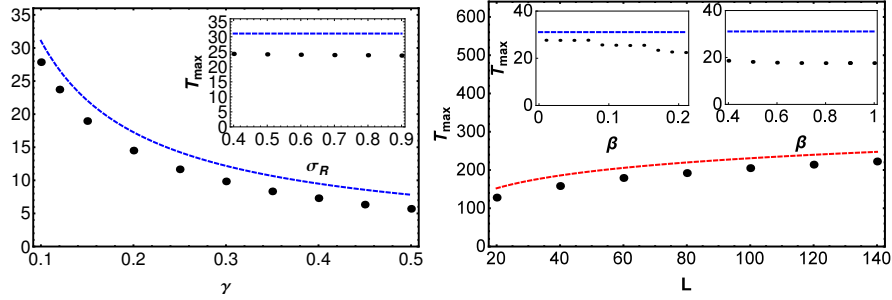
$$(5.30) \quad T_{\max}[\delta, \varepsilon, L] = \frac{L}{2\delta\varepsilon^2 \tanh L}.$$

Σύμφωνα με την (5.16), η κρίσιμη τιμή στην περίπτωση αυτή είναι:

$$(5.31) \quad \gamma^* = -\frac{\delta\varepsilon^2 \tanh L}{L}.$$

Επιπλέον, από την (5.31) προκύπτει ότι για επαρκώς μεγάλο L ,

$$(5.32) \quad \gamma^* \simeq 0.$$



Σχήμα 5.4: Παρουσιάζεται η αντιπαραβολή των αριθμητικών τιμών του χρόνου έκρηξης, για αρχικές συνθήκες τύπου sech (5.28), με την αντίστοιχη αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος (5.29). Στην αριστερή εικόνα, η αντιπαραβολή παρουσιάζεται για διάφορες τιμές του $\gamma \in [0.1, 0.5]$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι $\delta = 0.01$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 0.02$. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στην αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος και οι μαύρες τελείες στις αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης, για $L = 50$. Στο ένθετο πλαίσιο πραγματοποιείται η ίδια σύγκριση, με μεταβλητή $\sigma_R \in [0.4, 1]$. Εδώ οι τιμές των παραμέτρων είναι $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.01$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 0.02$, $L = 50$. Στην δεξιά εικόνα, η αντιπαραβολή παρουσιάζεται για την μεταβολή του $L \in [20, 140]$ και οι παράμετροι έχουν τιμές $\gamma = 0.01$, $\delta = 0.01$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 0.02$. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στην αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος και οι μαύρες τελείες στις αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης. Στα ένθετα πλαίσια, ως μεταβλητή θεωρούμε το β . Στο αριστερό, $\beta \in [0.01, 0.2]$ και στο δεξιό, $\beta \in [0.4, 1]$, ενώ οι τιμές των παραμέτρων είναι $\gamma = 0.1$, $\delta = 0.01$, $\mu = \nu = 0.01$, $\sigma_R = 0.02$, $\beta = 0.02$, $L = 50$.

Στο αριστερό πλαίσιο της εικόνας 5.4, παρουσιάζουμε την σύγκριση ανάμεσα στην αναλυτική έκφραση για το άνω φράγμα (5.29) και την αριθμητική τιμή του χρόνου έκρηξης των λύσεων, ως συνάρτηση του $\gamma \in [0.1, 0.5]$. Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων είναι

$$\delta = 0.01, \mu = \nu = 0.01, \sigma_R = 0.02, \beta = 0.02, L = 50.$$

Παρατηρούμε ότι και πάλι επαληθεύεται η αναλυτική εκτίμηση για το άνω φράγμα. Ωστόσο, δεν παρατηρούμε την ταύτιση, όπως στην περίπτωση του συνεχούς κύματος. Πράγματι, η περίπτωση των αρχικών δεδομένων τύπου sech είναι αρκετά διαφορετική, αφού τα αρχικά δεδομένα είναι εντοπισμένα στο χώρο. Λόγω συνέχειας, η λύση θα είναι επίσης εντοπισμένη στο χώρο για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, που προηγείται της έκρηξης. Στην περίπτωση αυτή, για το ύψος του κύματος υποβάθρου έχουμε:

$$h(t) = 0 = \min_{x \in [-L, L]} |u(x, t)|^2,$$

που αποτελεί την ελάχιστη τιμή για την πυκνότητα της λύσης. Επίσης, αντί για την σχεδόν ακριβή ισότητα (5.27), έχουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma t} h^2(t) &< M(t) = \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \int_{-L}^L |u(x, t)|^2 dx \\ &< \frac{e^{-2\gamma t}}{2L} \max_{x \in [-L, L]} |u(x, t)|^2 2L \\ (5.33) \quad &= e^{-2\gamma t} \max_{x \in [-L, L]} |u(x, t)|^2, \end{aligned}$$

που ικανοποιείται από το πλάτος $\max_{x \in [-L, L]} |u(x, t)|^2$ της εντοπισμένης λύσης, $\forall t \in [0, \tau]$. Έτσι, στην περίπτωση χωρικά εντοπισμένων κυμάτων, περιμένουμε ότι η έκρηξη θα εκδηλώνεται ως αύξηση του πλάτους ή θα είναι μεγαλύτερη από την αύξηση της μέσης τιμής της νορμας του $M(t)$, γεγονός που οφείλεται στην (5.33). Συνεπώς, είναι αναμενόμενο το πλάτος να εκραγεί νωρίτερα από το $M(t)$. Αυτό το γεγονός επιβεβαιώνεται και αριθμητικά, αν αναλογιστούμε τη διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης και την αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος του χρόνου.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να επισημάνουμε την αργή λογαριθμική αύξηση της αριθμητικής εκτίμησης του χρόνου έκρηξης, ως προς την παράμετρο $L \in [20, 140]$. Αυτή η συμπεριφορά προβλέπεται από την αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος του χρόνου (5.29), όπως φαίνεται και στο δεξιό πλαίσιο της εικόνας 5.4. Οι τιμές των παραμέτρων για την περίπτωση αυτή είναι

$$\gamma = 0.01, \delta = 0.01, \mu = \nu = 0.01, \sigma_R = 0.02, \beta = 0.02.$$

Τα ένθετα και στα δύο πλαίσια της εικόνας 5.4 εξετάζουν αριθμητικά την ανεξαρτησία των υπολοίπων, μη γραμμικών παραμέτρων. Και στα δύο παραδείγματα, έχουμε θεωρήσει την αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος $T_{\max} = 31$, για

$$\gamma = 0.1, \delta = 0.01, \mu = \nu = 0.01, \sigma_R = 0.02, \beta = 0.02, L = 50.$$

Το ένθετο στο αριστερό πλαίσιο δείχνει την διακύμανση που παρουσιάζει η αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης, ως προς το $\sigma_R \in [0.4, 1]$, γύρω από μία σταθερή μέση τιμή $T_{num, \sigma_R} \simeq 24$. Τα ένθετα του δεξιού πλαισίου δείχνουν την διακύμανση της αριθμητικής εκτίμησης του χρόνου έκρηξης, για μεταβλητό $\beta \in [0.01, 0.2]$ και $\beta \in [0.4, 1]$. Στο τελευταίο, ο αριθμητικός χρόνος έκρηξης φαίνεται να παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις γύρω από την τιμή $T_{num, \beta} \simeq 17.8$. Αυτές οι παρατηρήσεις για τους χρόνους T_{num, σ_R} και $T_{num, \beta}$ μας υποδεικνύουν ότι ο πραγματικός χρόνος έκρηξης των λύσεων κάνει άλματα ανάμεσα σε διαφορετικές αριθμητικές τιμές, καθώς οι μη γραμμικές παράμετροι β, σ_R μεταβάλλονται

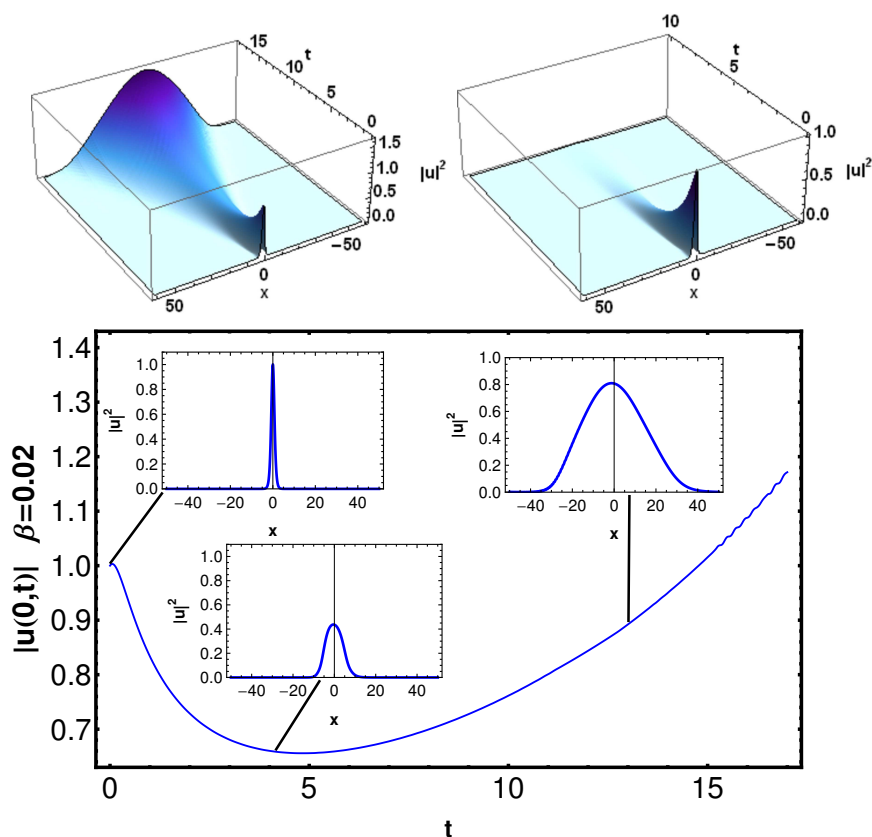
(παρόμοια είναι η συμπεριφορά και για τα μ, ν), αν και ο χρόνος αυτός παραμένει σταθερός για συγκεκριμένα διαστήματα μεταβολής. Δεν θα αποτελούσε έκπληξη να συσχετίσουμε αυτή την συμπεριφορά τύπου «βηματικής συνάρτησης» του αριθμητικού χρόνου έκρηξης με μεταβάσεις σε διαφορετικού τύπου προσωρινή δυναμική, που προηγείται της έκρηξης.

Στην εικόνα 5.5, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα αριθμητικής μελέτης, που επαληθεύει ότι η (5.32) είναι ένα σημείο διακλάδωσης που διαχωρίζει την ολική ύπαρξη από την έκρηξη. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν εδώ είναι

$$\beta = 0.02, \delta = 0.01, \varepsilon = 1, \mu = \nu = 0.01, \sigma_R = 0.2, L = 50.$$

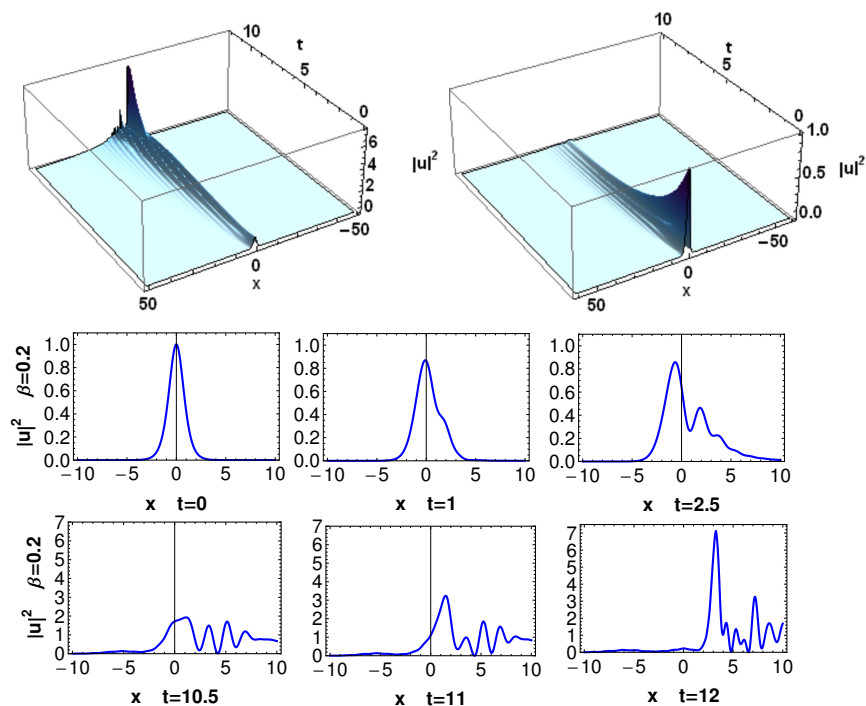
Το πάνω αριστερά πλαίσιο, παρουσιάζει την εξέλιξη της αρχικής πυκνότητας (5.28) προς το στάδιο της έκρηξης σε χρόνο $T_{num} = 27.85 < T_{max} = 31$ - την αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος - για $t \in [0, 15]$, με $\gamma = 0.1 > \gamma^* \simeq 0$. Εδώ παρατηρούμε έναν μη τετριμμένο μηχανισμό έκρηξης, του οποίου η εξέλιξη χαρακτηρίζεται από ανατροφοδότηση και αυτο-ομοιότητα (self-similarity). Πράγματι, ο παλμός σχεδόν διατηρεί το σχήμα του και μεταβάλλει σχεδόν αυτο-όμοια, και το πλάτος και το εύρος του. Αρχικά, το πλάτος του παλμού μειώνεται και το πλάτος του αυξάνει. Στην συνέχεια, πλάτος και εύρος αυξάνονται σταδιακά, μέχρι την κατάσταση έκρηξης. Για να αναδείξουμε περισσότερο αυτήν την συμπεριφορά, παρουσιάζουμε στο κάτω πλαίσιο την εξέλιξη της $\|u(0, t)\|_\infty$ για $t \in [0, 20]$. Το πλάτος αρχικά μειώνεται, αλλά φτάνοντας σε μια ελάχιστη τιμή, στη συνέχεια αυξάνει. Τα ένθετα απεικονίζουν στιγμιότυπα της πυκνότητας $|u|^2$, που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες τιμές του χρόνου και της νορμας (σημεία της συνεχούς μπλέ καμπύλης). Το πρώτο δείχνει την αρχική συνθήκη ($t = 0$), ενώ το δεύτερο την μορφή της πυκνότητας για $t = 4$, όπου το πλάτος έχει μειωθεί αλλά το εύρος έχει αυξηθεί. Το τελευταίο πλαίσιο δείχνει την μορφή της πυκνότητας την χρονική στιγμή $t = 13$, κατά την οποία και το πλάτος και το εύρος του παλμού έχουν αυξηθεί και ο παλμός οδηγείται σε έκρηξη. Από την άλλη, όπως φαίνεται στο πάνω δεξιό πλαίσιο της εικόνας 5.5, όταν $\gamma = -0.1 < \gamma^*$ η αρχική πυκνότητα φθίρεται με εκθετικό ρυθμό. Αυτή η φθορά πραγματοποιείται μέσω μιας σταδιακής διαδικασίας, κατά την οποία το πλάτος του παλμού φθίρεται γρηγορότερα από την αύξηση του εύρους του. Όμοια δυναμική, που οδηγεί σε έκρηξη, παρατηρήσαμε για μικρές μεταβολές του β , καθώς επίσης και των υπολοίπων μη γραμμικών παραμέτρων.

Μεγαλύτερες μεταβολές αυτών των παραμέτρων μπορούν να μας οδηγήσουν σε διαφορετικού τύπου προσωρινή δυναμική. Στην εικόνα 5.6, παρουσιάζουμε την μελέτη για $\beta = 0.2$, διατηρώντας τις προηγούμενες τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους, όπως και στην εικόνα 5.5. Το πάνω αριστερά πλαίσιο δείχνει την εξέλιξη της αρχικής πυκνότητας (5.28) προς την κατάσταση της έκρηξης, για $t \in [0, 12]$. Η αριθμητική τιμή του χρόνου έκρηξης μειώνεται ακόμα περισσότερο σε $T_{num} = 20.89$ και η δυναμική εμφανίζεται αρκετά διαφορετική από την αυτο-όμοια εξέλιξη της προηγούμενης περίπτωσης, λόγω της σημαντικής επίδρασης της διασποράς. Αυτή η διαφορά αναδεικνύεται περισσότερο στο κάτω πλαίσιο, το οποίο παρουσιάζει στιγμιότυπα της μορφής της πυκνότητας, σε διάφορες χρονικές στιγμές πριν από την έκρηξη. Ο αρχικός παλμός έχει διασπαστεί σε ένα κεντρικό παλμό μειωμένου πλάτους και σε ένα μη γραμμικό οδεύον κύμα (wavetrain). Και τα δύο κινούνται προς τα δεξιά με μικρή ταχύτητα (επάνω σειρά). Σταδιακά (κάτω σειρά), καθώς η επίδραση της ενεργειακής πηγής εκδηλώνεται περισσότερο, το πλάτος του κεντρικού παλμού και των κυματομορφών που συνθέτουν το οδεύον κύμα κυμάτων συνεχώς αυξάνει (η αλλαγή κλίμακας επισημαίνεται στον κατακόρυφο άξονα), ό-



Σχήμα 5.5: Στις εικόνες αυτές, παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας $|u|^2$ επιπέδου κύματος τύπου sech, για τιμές των παραμέτρων $\beta = 0.02$, $\delta = 0.01$, $\epsilon = 1$, $\mu = 0.01$, $\nu = 0.01$, $\sigma = 0.02$ και $L = 50$. Στο πάνω αριστερό πλαίσιο, παρουσιάζεται η έκρηξη της πυκνότητας $|u|^2$, όταν $\gamma = 0.1 > \gamma^* \approx 0$, ενώ πάνω δεξιά βλέπουμε τη φθορά της, όταν $\gamma = -0.1 < \gamma^* \approx 0$. Στο μεγάλο πλαίσιο κάτω, η συνεχής μπλε γραμμή παρουσιάζει τη χρονική εξέλιξη προς την έκρηξη της πυκνότητας, για το κέντρο του παλμού ($x = 0$), όταν $\gamma = 0.1 > \gamma^* \approx 0$. Στα ένθετα πλαίσια, παρουσιάζονται τρία στιγμιότυπα της πυκνότητας, τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία της καμπύλης. Η σύνδεση απεικονίζεται με τα ευθύγραμμα τμήματα.

πως φαίνεται στο στιγμιότυπο για $t = 10.5$. Στην συνέχεια, ο κεντρικός παλμός αυξάνει το πλάτος του σε βάρος των υπολοίπων κυμάτων, όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο για $t = 11$. Η αιφνίδια αύξηση του πλάτους του κεντρικού παλμού, που οδηγεί στην έκρηξη, παρουσιάζεται την χρονική στιγμή $t = 12$. Για μεγαλύτερες



Σχήμα 5.6: Σε αυτές τις εικόνες, παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας $|u|^2$, για αρχική συνθήκη τύπου sech, για την τιμή της παραμέτρου $\beta = 0.2$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι ίδιες με αυτές του σχήματος 5.5. Οι πάνω εικόνες παρουσιάζουν την εξέλιξη της πυκνότητας $|u|^2$ προς την έκρηξη (αριστερά), όταν $\gamma = 0.1 > \gamma^* \approx 0$ και προς την φθορά (δεξιά), όταν $\gamma = -0.1 < \gamma^* \approx 0$. Στις κάτω εικόνες, παρουσιάζονται στιγμιότυπα της πυκνότητας $|u|^2$ κατά την εξέλιξή της προς την έκρηξη, όταν $\gamma = 0.1 > \gamma^* \approx 0$.

της παραμέτρου β , η αριθμητική τιμή του χρόνου έκρηξης σταθεροποιείται, (όπως παρουσιάστηκε και στο ένθετο του δεξιού πλαισίου της εικόνας 4) και αναπτύσσεται μια παρόμοια δυναμική. Το πλαίσιο πάνω δεξιά στην 5.6 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης για $\gamma = -0.1 < \gamma^*$. Ο αρχικός παλμός έχει και πάλι αποσυντεθεί σε οδεύον κύμα, αλλά τώρα η δυναμική έχει αναστραφεί σε βαθμιαία φθορά, αντί της έκρηξης.

5.5 Αριθμητικά αποτελέσματα για την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, με αρχικές συνθήκες τύπου \tanh^2

Το τρίτο παράδειγμα αρχικών συνθηκών, που θα μας απασχολήσει, είναι η περίπτωση αρχικών δεδομένων της μορφής

$$(5.34) \quad u_0(x) = \varepsilon \tanh^2 x,$$

πλάτους $\varepsilon > 0$. Τέτοια αρχικά δεδομένα προσομοιάζουν την πυκνότητα ενός σκοτεινού σολιτονίου. Στην περίπτωση αυτή

$$M(0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varepsilon^2 \tanh^4 x dx = \varepsilon^2 \left[\frac{3L - (3 + \tanh^2 L) \tanh L}{3L} \right].$$

Έτσι, στην παρούσα περίπτωση, το θεώρημα 10 και η σχέση (5.15) μας οδηγούν στην παρακάτω αναλυτική τιμή για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης:

$$(5.35) \quad T_{\max}[\gamma, \delta, \varepsilon, L] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{3\gamma L}{\delta \varepsilon^2 [3L - (3 + \tanh^2 L) \tanh L]} \right].$$

Τότε, η (5.18), για την περίπτωση $\gamma = 0$, μας δίνει αναλυτική τιμή για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης:

$$(5.36) \quad T_{\max}[\delta, \varepsilon, L] = \frac{3L}{2\delta \varepsilon^2 [3L - (3 + \tanh^2 L) \tanh L]}.$$

Επιπλέον, η εξίσωση (5.16) συνεπάγεται ότι η κρίσιμη τιμή γ^* στην παρούσα περίπτωση είναι:

$$(5.37) \quad \gamma^* = -\delta \varepsilon^2 \left[\frac{3L - (3 + \tanh^2 L) \tanh L}{3L} \right].$$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον η παρατήρηση, ότι για επαρκώς μεγάλες τιμές του L , η αρχική τιμή του συναρτησιακού $M(t)$ για $t = 0$ (5.34), οι αναλυτικές εκφράσεις για το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης (5.35) και (5.36) και η κρίσιμη τιμή γ^* που δίνεται από την (5.37), προσεγγίζουν την περίπτωση των αρχικών τιμών του συνεχούς κύματος, που εξετάστηκε στην ενότητα 6.3. Δηλαδή για μεγάλες τιμές του L ,

$$(5.38) \quad M(0) \simeq \varepsilon^2, T_{\max}[\gamma, \delta, \varepsilon, L] \simeq \frac{1}{2\gamma} \log \left[1 + \frac{\gamma}{\delta \varepsilon^2} \right], \gamma \neq 0,$$

$$(5.39) \quad T_{\max}[\gamma, \delta, \varepsilon, L] \simeq \frac{1}{2\delta \varepsilon^2}, \gamma \neq 0, \gamma^* \simeq -\delta \varepsilon^2.$$

Οι προσεγγίσεις (5.38) και (5.39) δείχνουν ότι οι αριθμητικές τιμές για το χρόνο έκρηξης, όχι μόνο ικανοποιούν τα αναλυτικά άνω φράγματα, αλλά τα προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά, όπως και στην περίπτωση των αρχικών δεδομένων του επιπέδου κύματος. Άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι η έκρηξη κυριαρχείται από την έκρηξη του υποβάθρου του κύματος, για μικρές τιμές της παραμέτρου διασποράς β και των άλλων παραμέτρων. Αυτό το γεγονός μπορεί επίσης να υποστηριχθεί από

την πρόβλεψη ότι η παρουσία ενός παλμού σκοτεινού σολιτονίου έχει μικρή επίδραση στη μέση τιμή της νορμας του $M(t)$ και ότι η βασική συνεισφορά προέρχεται από το υποβάθρο του κύματος. Ακριβέστερα, η εξίσωση (5.27), που προσεγγίζει την εξέλιξη του $M(t)$, ισχύει και στην περίπτωση των αρχικών δεδομένων (5.34).

Στο πάνω πλαίσιο της εικόνας 5.7, παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για την εξέλιξη της πυκνότητας, με αρχικά δεδομένα (5.34) και για τιμές των παραμέτρων

$$\varepsilon = 1, \gamma = 0.025, \delta = 0.02, \mu = \nu = 0.01, \sigma_R = 0.02, \beta = 0.02.$$

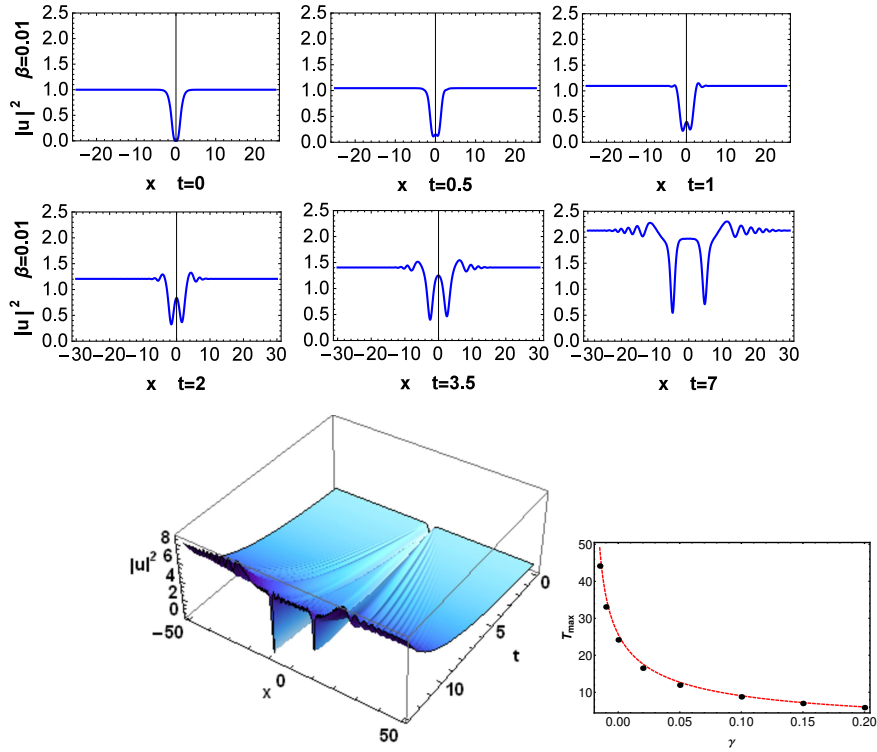
Ολοκληρώνουμε το σύστημα για $L = 50$ και η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου γ βρίσκεται να είναι $\gamma^* \simeq -0.02 < 0$. Καθώς $\gamma > \gamma^*$, θα πρέπει να βρισκόμαστε στην κατάσταση έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο.

Οι δυο ανώτερες σειρές πλαισίων της εικόνας απεικονίζουν στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας σε διάφορες χρονικές στιγμές, ενώ το κάτω αριστερό πλαίσιο δείχνει μια (απο πάνω) οπτική της χωροχρονικής επιφάνειας εξέλιξης της πυκνότητας. Η αριθμητική τιμή του χρόνου έκρηξης είναι $T_{num} = 15.9$, ενώ η αναλυτική τιμή του άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης είναι $T_{max} = 16.5$. Στα στιγμιότυπα παρατηρούμε τον αρχικό σκοτεινό παλμό να διαχωρίζεται σε δύο οδεύοντες, αργά κινούμενους σκοτεινούς παλμούς αυξανόμενου βάρους, που εκπέμπουν ακτινοβολία με την μορφή γραμμικών κυμάτων αυξανόμενου πλάτους. Τα κύματα αυτά θυμίζουν χροστικά κύματα διασποράς (dispersive shock waves), [46]. Ο διαχωρισμός του αρχικού παλμού σε δύο σκοτεινά σολιτόνια μπορεί να γίνει κατανοητός από το γεγονός ότι οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιούμε έχουν τετριμμένη φάση (δηλαδή η φάση δεν παρουσιάζει το άλμα φάσης που είναι απαραίτητο για την εξέλιξη του αρχικού παλμού ως ένα σκοτεινό σολιτόνιο). Έτσι, το αρχικό βύθισμα χωρίζεται σε δύο σκοτεινά σολιτόνια, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, έτσι ώστε η φάση του ενός σολιτονίου να είναι αντίστροφη από αυτή του άλλου. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ολική φάση να διατηρεί την αρχική ασυμπτωτική της δομή, [15].

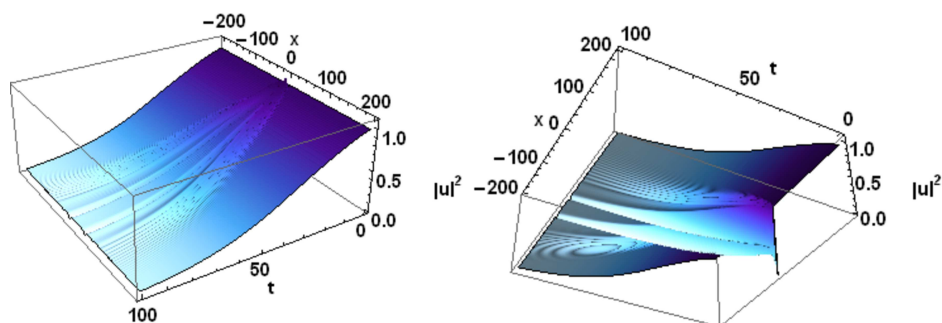
Το κάτω δεξιά πλαίσιο της εικόνας 5.7 δείχνει την σύγκριση της αναλυτικής τιμής του άνω φράγματος (5.35) (κόκκινη καμπύλη), με τις αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης (τελείες), ως συνάρτηση του γ , ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές του χρόνου έκρηξης, όχι μόνο υπακούουν στην αναλυτική εκτίμηση του άνω φράγματος, αλλά και ότι βρίσκονται πολύ κοντά στην αναλυτική τιμή του άνω φράγματος. Αυτή η σύμπτωση διαφέρει από την συμπεριφορά των αριθμητικών τιμών του χρόνου έκρηξης για αρχικά δεδομένα τύπου sech , που παρουσιάστηκε στην εικόνα 5.4.

Στην εικόνα 5.8, διατηρώντας τις τιμές των υπολοίπων παραμέτρων, όπως και στην προηγούμενη μελέτη, ολοκληρώνουμε το σύστημα για $L = 200$, αλλά για μικρή μεταβολή της παραμέτρου γ , από την κρίσιμη τιμή της $\gamma^* = -0.02$ στην τιμή $\gamma = -0.025$. Θεωρητικά, βάση των αναλυτικών μας αποτελεσμάτων, η τιμή αυτή θα πρέπει να αντιστοιχεί σε συμπεριφορά φθοράς. Το αριστερό πλαίσιο δείχνει μια από πάνω οπτική της εξέλιξης της πυκνότητας, που χαρακτηρίζεται από την φθορά του ύψους του κύματος υποβάθρου. Το δεξιό πλαίσιο απεικονίζει την ίδια εξέλιξη, αλλά με οπτική από κάτω. Και πάλι διαπιστώνουμε τον διαχωρισμό του αρχικού παλμού σε δυο οδεύοντες, μικρής ταχύτητας σκοτεινούς παλμούς, με εύρος που μειώνεται σταδιακά. Οι δύο παλμοί και πάλι εκπέμπουν ακτινοβολία, η οποία επίσης φθίρεται, ακολουθώντας την φθορά του κύματος υποβάθρου.

Για μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων, η προσωρινή δυναμική, πριν την κατάρρευση ή την φθορά, διαφέρει σημαντικά: παρατηρούνται μεταβολές στις τιμές του

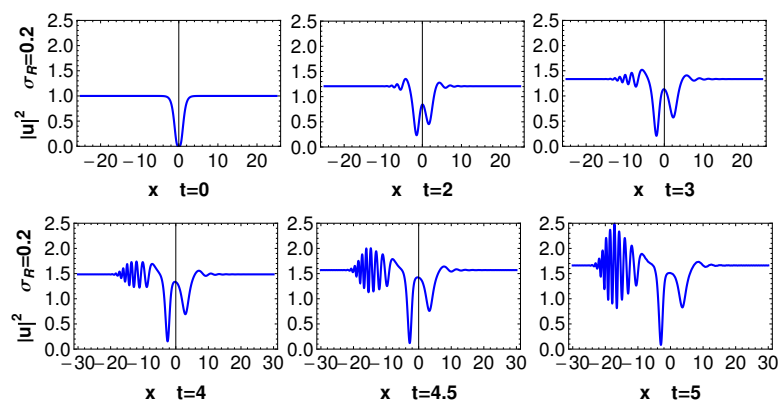


Σχήμα 5.7: Οι δυο ανώτερες σειρές, παρουσιάζουν στιγμιότυπα της εξέλιξης προς την έκρηξη, της πυκνότητας $|u|^2$, για αρχική συνθήκη τύπου \tanh^2 , όταν $\delta = 0.02$, $\epsilon = 1$, και $\gamma = 0.025 > \gamma^* = -0.02$. Οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τις τιμές $L = 50$, $\mu = 0.01$, $\nu = 0.01$, $\sigma = 0.02$, $\beta = 0.01$. Στην κάτω αριστερά εικόνα, παρουσιάζεται η επιφάνεια της χωροχρονικής εξέλιξης της πυκνότητας $|u|^2$, με οπτική από πάνω. Στην κάτω δεξιά εικόνα, παρουσιάζεται η σύγκριση της αναλυτικής εκτίμησης του άνω φράγματος για το χρόνο έκρηξης (5.35) (συνεχής κόκκινη καμπύλη), με τις αριθμητικές εκτιμήσεις του χρόνου έκρηξης (μαύρες τελείες), ως συνάρτηση του γ . Οι υπόλοιπες παράμετροι, διατηρούνται στις ίδιες τιμές, όπως και πριν.



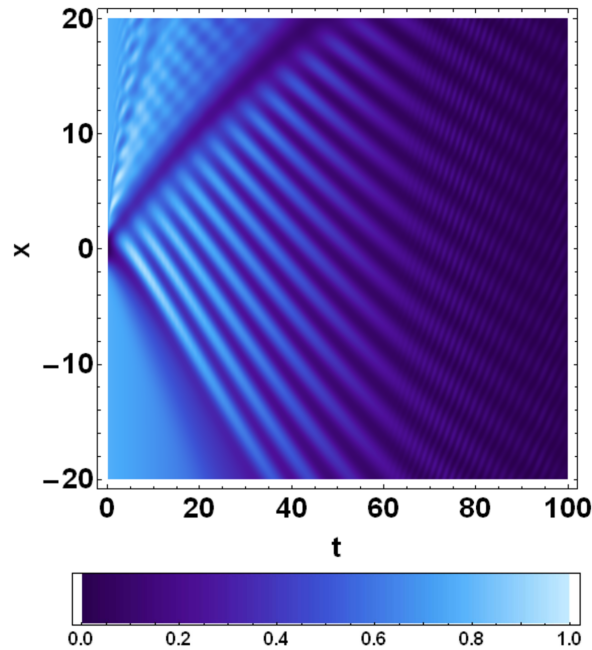
Σχήμα 5.8: Στην αριστερή εικόνα, έχουμε μία από τα πάνω οπτική, της εξέλιξης της πυκνότητας $|u|^2$, με αρχική συνθήκη τύπου \tanh^2 για $\delta = 0.02$, $\epsilon = 1$ και $\gamma = -0.025 < \gamma^* = -0.02$. Οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τιμές $L = 200$, $\mu = 0.01$, $\nu = 0.01$, $\sigma = 0.02$, $\beta = 1$. Στη δεξιά εικόνα, έχουμε μία από τα κάτω οπτική της ίδιας εξέλιξης προς την φθορά της πυκνότητας $|u|^2$. Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων παραμένουν ίδιες.

αριθμητικού χρόνου έκρηξης, τύπου «βηματικής συνάρτησης», οι οποίες (όπως και στην περίπτωση των αρχικών δεδομένων τύπου sech) συνδέονται με την σταδιακή μετάβαση σε διαφορετικό τύπο δυναμικής.



Σχήμα 5.9: Στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας $|u|^2$ προς την έκρηξη, όταν $\gamma = 0.025 > \gamma^* = -0.02$ αλλά για $\sigma_R = 0.2$. Οι τιμές των υπολοίπων παραμέτρων παραμένουν ίδιες με αυτές της εικόνας 5.7.

Στην εικόνα 5.9, παρουσιάζουμε την εξέλιξη της πυκνότητας για $\sigma_R = 0.2$ και τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθεροποιημένες, όπως στην περίπτωση της εικόνας 5.7. Και σε αυτή την περίπτωση, ο αρχικός σκοτεινός παλμός διαχωρίζεται σε δύο βυθίσματα, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως. Διαπιστώνουμε όμως μια σημαντική διαφορά στην προσωρινή δυναμική πριν την έκρηξη: την εμφάνιση μονόπλευρης εκπομπής ακτινοβολίας προς τα αριστερά, που οφείλεται στη διασπορά τρίτης τάξης. Το πλάτος της αυξάνει λόγω του σχετικά ισχυρού φαινομένου Raman, που περιγράφεται από την παράμετρο σ_R . Από την άλλη, τα δύο βυθίσματα και το δεξί



Σχήμα 5.10: Περιγράμμα της εξέλιξης της πυκνότητας $|u|^2$ για $\gamma = -0.025 < \gamma^*$ και $\beta = 0.2$, με σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους.

μέρος του υποβάθρου δείχνουν σχετικά σταθεροποιημένα. Εδώ, στο φαινόμενο της έκρηξης, οδηγούμαστε από την απότομη αύξηση του πλάτους των κυματομορφών της ακτινοβολίας που προέρχεται από το αριστερό βύθισμα.

Ενδεικτική της πλούσιας προσωρινής δυναμικής είναι και η εικόνα 5.10. Απεικονίζεται η ισοσταθμική επιφάνεια της χωροχρονικής εξέλιξης της πυκνότητας $|u|^2$, στην περίπτωση φθοράς $\gamma = -0.025 < \gamma^* = -0.02$ (με σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους), αλλά για αυξημένο παράγοντα διασποράς $\beta = 0.2$. Παρατηρούμε το αρχικό βύθισμα να διασπάται, δημιουργώντας ένα σχεδόν περιοδικό μοτίβο κυματομορφών, το οποίο οδεύει προς τα αριστερά. Οι περιοδικές δομές έχουν διαφορετικούς χρόνους επιβίωσης μέχρι την τελική τους φθορά. Μια περισσότερο λεπτομερής μελέτη και παρουσίαση αυτής της δυναμικής, μολονότι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διατριβής.

5.6 Συμπεράσματα

Στο Κεφάλαιο αυτό αναλυτικές μελέτες σε συνδυασμό με αριθμητικές προσομοιώσεις εξέτασαν το φαινόμενο της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο για τις λύσεις μιας αφεστιάζουσας, γενικευμένης, μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger ανώτερης τάξης. Θεωρήσαμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Το μοντέλο αυτό έχει ενδιαφέρουσες και σημαντικές εφαρμογές στην περιγραφή της εξέλιξης βραχέων παλμών σε μη γραμμικά οπτικά μέσα (οπτικές ίνες), αλλά και την εξέλιξη χωρικά εντοπισμένων κυματομορφών σε μεταϊλικά, υδάτινα κύματα, κλπ. Είδαμε με χρήση απλών αναλυτικών επιχειρημάτων,

τα οποία βασίστηκαν σε ενεργειακές μεθόδους, και διαπιστώσαμε αριθμητικά ότι η δυναμική έκρηξης καθοδηγείται κυρίως από τους όρους γραμμικής πηγής/απώλειας γ και μη-γραμμικής πηγής/απώλειας δ . Διαπιστώσαμε την ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής γ^* , στην περιοχή $\gamma < 0, \delta > 0$, η οποία διαχωρίζει το φαινόμενο της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο από αυτό της φθοράς. Μελετώντας αυτά τα φαινόμενα, προκύπτουν ενδιαφέροντα πορίσματα σχετικά με την εξέλιξη χωρικά εντοπισμένων λύσεων, όπως κυμάτων με χαρακτηριστικά εντοπισμένου παλμού ή βυθίσματος: σχετικά με την μακρόχρονη δυναμική τους, παρατηρήσαμε ότι τέτοιες καταστάσεις επιβιώνουν για σχετικά μικρούς χρόνους.

Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων, για μια ποικιλία αρχικών συνθηκών, δείχνουν γενικά μια ικανοποιητική συμφωνία ανάμεσα στα αναλυτικά άνω φράγματα για τον χρόνο έκρηξης και τις αντίστοιχες αριθμητικές τιμές του, όπως επίσης και την σχετική ακρίβεια της κρίσιμης διαχωριστικής τιμής γ . Αυτή η συμφωνία υπήρξε εξαιρετική για αρχικά δεδομένα επιπέδου κύματος και πολύ καλή για κυματομορφές που προσομοιάζουν σε βύθισμα πυκνότητας. Αποδείχθηκε όμως λιγότερο επιτυχής στην περίπτωση αρχικών δεδομένων που προσομοιάζουν σε φωτεινό εντοπισμένο παλμό και ο λόγος της απόκλισης εξηγήθηκε με αναλυτικά επιχειρήματα. Επιπλέον, οι αριθμητικές προσομοιώσεις εξέτασαν την επίδραση των παραγόντων υψηλότερης τάξης. Διαπιστώθηκε ότι επηρεάζουν δραστικά την προσωρινή δυναμική που προηγείται της έκρηξης ή της φθοράς. Διαπιστώσαμε επίσης ότι η μετάβαση σε διαφορετικού τύπου προσωρινή δυναμική επηρεάζει σημαντικά τον χρόνο επιβίωσης των λύσεων.

Εκτιμούμε ότι τα αποτελέσματα αυτά συνεισφέρουν στην καλύτερη κατανόηση της δυναμικής της γενικευμένης, μη-γραμμικής εξίσωσης Schrödinger, ενώ παράλληλα δημιουργούνται άλλα ενδιαφέροντα ερωτήματα προς διερεύνηση και μελέτη: Ένα πρώτο ερώτημα αφορά τη διερεύνηση της δυναμικής έκρηξης/φθοράς για την εστιάζουσα περίπτωση $s = -1$. Ένα δεύτερο ερώτημα αφορά τη δυναμική για την περιοχή γραμμικής πηγής/μη-γραμμικής απώλειας $\gamma > 0, \delta < 0$ και τα διάφορα σενάρια που είναι δυνατόν να παρουσιαστούν λόγω της παρουσίας των όρων ανώτερης τάξης, σε συνδυασμό με την θεώρηση διαφόρων τύπων αρχικών δεδομένων. Ένα επίσης σημαντικό ερώτημα αφορά τη διερεύνηση της έκρηξης για συναρτησιακά υψηλότερης τάξης. Μια τέτοια διερεύνηση ίσως μας διαφωτίσει περισσότερο για την επίδραση των μη γραμμικών όρων υψηλότερης τάξης. Σημαντικά ερωτήματα προς διερεύνηση σχετίζονται επίσης με την μελέτη γενικευμένων εξισώσεων σε χωρία ανώτερης διάστασης και το πώς η διάσταση του χωρίου μπορεί να συνδιαμορφώσει τις διάφορες παραμετρικές περιοχές δυναμικής.

Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. *The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems*. Stud. Appl. Math. **53** (1973), 249-315.
- [2] M. J. Ablowitz, S. D. Nixon, T. P. Horikis, and D. J. Frantzeskakis. *Perturbations of dark solitons*. Proc. R. Soc. A (2011) **467**, 2597–2621.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. U. S. National Bureau of Standards, Mathematical Series 55, 1972.
- [4] V. Achilleos, A. Álvarez, J. Cuevas, D. J. Frantzeskakis, N. I. Karachalios, P. G. Kevrekidis, and B. Sánchez-Rey. *Escape dynamics for the discrete repulsive ϕ^4 -model*. Physica D **244** (2013), 1–24.
- [5] V. Achilleos, A. R. Bishop, S. Diamantidis, D. J. Frantzeskakis, T. P. Horikis, N. I. Karachalios, and P. G. Kevrekidis. *Dynamical playground of a higher-order cubic Ginzburg-Landau equation: From orbital connections and limit cycles, to invariant tori and the onset of chaos*. Phys. Rev. E **94** (2016), 012210.
- [6] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [7] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics, 2nd ed.* Academic Press, 1995.
- [8] J. P. Albert, J. L. Bona and M. Felland. *A criterion for the formation of singularities for the generalised Korteweg-de Vries equation*. Mat. Apl. Comput. **7** (1988), 3–11.
- [9] J. M. Ball. *On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations*. J. Differential Equations **27** (1978), 224–265.
- [10] J. M. Ball. *Continuity properties and global attractors of generalized semi-flows and the Navier-Stokes equations*. J. Nonlinear Sci. **7** (1997), 475–502.
- [11] J. M. Ball. *Global attractors for damped semilinear wave equations*. Discrete Cont. Dyn. Syst. -Series A. **10** (2004), 31–52.
- [12] J. M. Ball. *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*. Quart. J. Math. Oxford **28** (1977), 473–486.

- [13] S. G. Bindu, A. Mahalingam and K. Porsezian. *Dark Soliton Solutions of the coupled Hirota equation in nonlinear fiber*. Phys. Lett. A **286** (2001), 321–331.
- [14] A. Biswas. *Stochastic perturbation of optical solitons in Schrödinger-Hirota equation*. Opt. Commun. **239** (2004), 461–466.
- [15] K. J. Blow and N. J. Doran. *Multiple dark soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation*. Phys. Lett. A, **107** (1985) 55–58.
- [16] J. L. Bona and J. C. Saut. *Dispersive Blowup of Solutions of Generalised Korteweg-de Vries Equation*. J. Differential Equations **103** (1993), 3–57.
- [17] J. Bourgain. *Global Solutions of nonlinear Schrödinger equations*. Colloquium Publications 46, American Mathematical Society, Providence 1999.
- [18] A. Calini and T. Ivey. *Connecting geometry topology and spectra for finite-gap NLS potentials*. Phys. D **152/153** (2001), 9–19.
- [19] A. Calini, S. F. Keith and S. Laforge. *Squared eigenfunctions and linear stability properties of closed vortex filaments*. Nonlinearity **24** (2011), 3555–3583.
- [20] R. Carretero- González, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis. *Nonlinear waves in Bose-Einstein condensates: physical relevance and mathematical techniques*. Nonlinearity **21** (2008), R139C.
- [21] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*. Courant Lecture Notes 10, American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [22] T. Cazenave and A. Haraux. *Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 13, 1998.
- [23] H. Chihara and E. Onodera. *A third order dispersive flow for closed curves into almost Hermitian manifolds*. J. Funct. Anal. **257** (2009), 388–404.
- [24] A. J. Chorin. *Vorticity and Turbulence*. Applied Mathematical Sciences 103, Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [25] A. J. Chorin and J. Akao. *Vortex equilibria in turbulence theory and quantum analogues*. Physica D **51** (1991), 403–414.
- [26] A. Degasperis, M. Conforti, F. Baronio and S. Wabnitz. *Effects of nonlinear wave coupling: accelerated solitons*. Eur. Phys. J. Special Topics **147** (2007) 233–252.
- [27] Q. Ding and J. Inoguchi. *Schrödinger flows, binormal motion for curves and the second AKNS-hierarchies*. Chaos, Solitons and Fractals **21** (2004), 669–677.
- [28] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon and H. C. Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic Press, 1982.
- [29] Z. Feng. *Duffing's equation and its applications to the Hirota equation*. Physics Lett. A **317** (2003) 115–119.

-
- [30] R.A. Fisher. *The genetical theory of natural selection*. Oxford University Press, 1930.
- [31] C. Foias, O. Manley, R. Rosa and R. Temam *Navier Stokes equations and turbulence*. Cambridge University Press, 2001.
- [32] D. J. Frantzeskakis *Small-amplitude solitary structures for an extended Schrödinger equation*. J. Phys. A **29** (1996), 3631–3639.
- [33] D. J. Frantzeskakis. *Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates: from theory to experiments*. J. Phys. A **43** (2010), 213001.
- [34] Y. Fukumoto and T. Miyazaki. *N-solitons on a curved vortex filament, with axial flow*. J. Phys. Soc. Japan **55** (1988), 3365–3370.
- [35] Y. Fukumoto and T. Miyazaki. *Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity*. J. Fluid Mech. **222** (1991), 369–416.
- [36] M. Gedalin, T. C. Scott, and Y. B. Band. *Optical Solitary Waves in the Higher Order Nonlinear Schrödinger Equation*. Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 448-451.
- [37] R. E. Goldstein and D. M. Petrich. *Solitons, Euler's Equation and Vortex Patch Dynamics*. Phys. Rev. Lett. **89** (1992), 555–558.
- [38] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1996.
- [39] E. M. Gromov and V. I. Talanov. *Short Optical solitons in fibers*. Chaos **10**, No. 3 (2000), 551–558.
- [40] A. Hasegawa and Y. Kodama. *Solitons in optical communications*. Oxford Univeristy Press, 1996.
- [41] A. Hasegawa and F. Tappert. *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*. Appl. Phys. Lett. **23** (1973), 142–144.
- [42] H. Hasimoto. *A Soliton on vortex filament*. J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.
- [43] R. Hirota. *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation*. J. Math. Phys. **14** (1973), 805–809.
- [44] K. Hizanidis K, D. J. Frantzeskakis, and C. Polymilis. *Exact travelling wave solutions for a generalized nonlinear Schrödinger equation*. J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 7687–7703.
- [45] K. Hizanidis, D. J. Frantzeskakis and C. Polymilis. *Exact travelling wave solutions for a generalized nonlinear Schrödinger equation*. J. Phys. A **29** (1996), 7687–7703.
- [46] M. Hofer, M.J. Ablowitz, *Dispersive Shock Waves*, Scholarpedia **4**, 5562 (2009).

- [47] E. J. Hopfinger, F. K. Browand, Y. Gagne. *Turbulence and waves in a rotating tank*. J. Fluid. Mech. **125** (1982), 505–534.
- [48] T. P. Horikis and D. J. Frantzeskakis. *Dark solitons in the presence of higher-order effects*. Opt. Lett. **38** (2013), 5098–5101.
- [49] Z. Huo and B. Guo. *Well-posedness of the Cauchy problem for the Hirota equation in Sobolev spaces H^s* . Nonlinear Anal. **60** (2005), 1093–1110.
- [50] R. S. Johnson. *On the Modulation of Water Waves in the Neighbourhood of $kh \approx 1.363$* . Proc. R. Soc. Lond. A **357** (1977), 131–141.
- [51] H. Ikeda, M. Matsumoto, and A. Hasegawa, Opt. Lett. **20** (1995), 1113.
- [52] N. I. Karachalios, H. Nistazakis and A. Yannacopoulos. *Asymptotic Behavior of Solutions of Complex Discrete Evolution Equations: The Discrete Ginzburg-Landau Equation*. Discrete Cont. Dyn. Syst. A **19** (2007), 711–736.
- [53] T. Kato. *Quasilinear equations of evolution with applications to partial differential equations*. Lecture Notes in Mathematics **448**, pp. 25–70. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [54] T. Kato. *Abstract Differential Equations and Nonlinear Mixed Problems*. Lezione Fermiane Pisa, 1985.
- [55] T. Kato and C. Y. Lai. *Nonlinear evolution equations and the Euler flow*. J. Funct. Anal. **56** (1984), 15–28.
- [56] T. Kato. *Nonlinear Schrödinger equations*. Schrödinger operators (Sønderborg, 1988), 218–263, Lecture Notes in Phys. **345**, Springer, Berlin, 1989.
- [57] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates. Theory and Experiment*, Springer-Verlag, 2008.
- [58] J. Kim, Q. H. Park and H. J. Shin. *Conservation laws in higher-order nonlinear Schrödinger equations*. Phys. Rev. E **58** (1998), 6746–6751.
- [59] Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, 2003.
- [60] Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies. *Dark optical solitons: physics and applications*. Phys. Rep. **298** (1998), 81–197.
- [61] A. N. Kolmogorov. *Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds number*. C. R. (Doklady) Akad. Sci. URSS **30** (1941), 301–305.
- [62] S. Lafortune. *Stability of solitons on vortex filaments*. Phys. Lett. A **377** (2013), 766–769.
- [63] G. L. Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory*. Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1980.

-
- [64] G. L. Lamb, Jr. *Solitons on moving space curves*. J. Math. Phys. **18** (1977), 1654–1661.
- [65] C. Laurey. *The Cauchy problem for a third order nonlinear Schrödinger equation*. Nonlinear Anal. **29** (1997), 121–158.
- [66] H. Leblond and D. Mihalache. *Models of few optical cycle solitons beyond the slowly varying envelope approximation*. Phys. Rep. **523** (2013), 61–126.
- [67] D. Levi, A. Sym and S. Wojciechowski. *N-solitons on a vortex filament*. Phys. Lett. **94A** (1983), 408–411.
- [68] T. Maxworthy, E. J. Hopfinger and L. G. Redekopp. *Wave motions on vortex cores*. J. Fluid Mech. **151** (1985), 141–165.
- [69] K. Nakkeram and K. Porsezian. *Coexistence of a self-induced transparency soliton and a higher order nonlinear Schrödinger soliton in an erbium doped fiber*. Optics Comm. **123** (1996), 169–174.
- [70] E. Onodera. *Generalized Hasimoto transform of one-dimensional dispersive flows into compact Riemann surfaces*. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **4**, Paper 044 (2008), 10 pp.
- [71] E. Onodera. *A remark on the global existence of a third order dispersive flow into locally Hermitian symmetric spaces*. Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), 1130–1144.
- [72] T. Ozawa and Y. Yamazaki. *Life-span of smooth solutions to the complex Ginzburg Landau type equation on a torus*. Nonlinearity **16** (2003), 2029–2034.
- [73] T. Ozawa. *Remarks on proofs of conservation laws for nonlinear Schrödinger equations*. Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), 403–408.
- [74] D. Pelinovsky and J. Yang. *Stability analysis of embedded solitons in the generalized third-order nonlinear Schrödinger equation*. Chaos **15** (2005), 037115.
- [75] M. J. Potasek. *Modulational instability in an extended nonlinear Schrödinger equation*. Opt. Lett. **12**, No. 11 (1998), 921–923.
- [76] J. C. Robinson. *Infinite Dimensional Dynamical Systems and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, 2001.
- [77] M. Scalora, M. S. Syrchin, N. Akozbek, E. Y. Poliakov, G. D’Aguanno, N. Mattiucci, M. J. Bloemer, and A. M. Zheltikov. *Generalized nonlinear Schrödinger equation for dispersive susceptibility and permeability: application to negative index materials*. Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 013902.
- [78] Yu. V. Sedletsky. *The fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the envelope of Stokes waves on the surface of a finite-depth fluid*. J. Exp. Theor. Phys. **97** (2003), 180–193.
- [79] J. Segata. *On asymptotic behavior of solutions to Korteweg-de Vries type equations related to vortex filament with axial flow*. J. Differential Equations **245** (2008), 281–306.

- [80] J. Simon. *Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 65–96.
- [81] A. V. Slunyaev. *A high-order nonlinear envelope equation for gravity waves in finite-depth water*. J. Exp. Theor. Phys. **101** (2005), 926–941.
- [82] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [83] C. Sulem and P. L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Springer-Verlag, 1999.
- [84] M. Taylor. *Partial Differential Equations III*. Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [85] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd edition*. Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [86] N. L. Tsitsas, N. Rompotis, I. Kourakis, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis. *Higher-order effects and ultrashort solitons in left-handed metamaterials*. Phys. Rev. E **79** (2009), 037601.
- [87] T. Tsuzuki. *Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation*. J. Low Temp. Phys. **4** (1971), 441–457.
- [88] X. Wang. *An Energy Equation for the Weakly Damped Driven Nonlinear Schrödinger equation and its application to their Attractors*. Physica D **88** (1995), 167–175.
- [89] Q. Wang, Y. Chen, B. Li and H. Q. Zhang. *New Exact Travelling Wave Solutions to Hirota Equation and $(1 + 1)$ -Dimensional Dispersive Long Wave Equation*. Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) **41** (2004), 821–838.
- [90] S. C. Wen, Y. Wang, W. Su, Y. Xiang, X. Fu, and D. Fan. *Modulation instability in nonlinear negative-index material*. Phys. Rev. E **73** (2006), 036617.
- [91] S. C. Wen, Y. Xiang, X. Dai, Z. Tang, W. Su, and D. Fan. *Theoretical models for ultrashort electromagnetic pulse propagation in nonlinear metamaterials*. Phys. Rev. A **75** (2007), 033815.
- [92] J. Yang. *Stable Embedded Solitons*. Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 143903.
- [93] V. E. Zakharov and L. A. Ostrovsky. *Modulation instability: The beginning*. Physica D **238** (2009), 540–548.
- [94] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag, 1986.
- [95] S. Zhang and Z. Yin. *On the blow-up phenomena of the periodic Dullin-Gottwald-Holm equation*. J. Math. Phys. **49** (2008), 113504.