Μελέτη τελεστών σε χώρους *Banach*

Βελιμαχίτης Νικόλαος
311/2011013

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

05 Οκτωβρίου 2016

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Ν. Παπαλεξίου

ΕΠΙΤΡΟΠΗ
Α. Τσολομύτης
Ε. Φελουζής

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2015-2016 στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. **Ν. Παπαλεξίου** για την πολύτιμη βοήθειά του. Ακόμα, τον κ. **Α. Τσολομύτη** και τον κ. **Ε. Φελουζή** οι οποίοι είχαν την καλή θέληση να συμμετάσχουν στην εξεταστική επιτροπή.

Περιεχόμενα

1 Τα θεωρήματα $Hanh - Banach$ **1**

2 Τα θεωρήματα $Banach - Steinhaus$ **και του κλειστού γραφήματος** **13**

3 Συμπαγείς τελεστές **23**

Κεφάλαιο 1

Τα θεωρήματα $Hanh - Banach$

Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα θεωρήματα $Hahn - Banach$ και τις πολλαπλές μορφές τους. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου θα εξετάσουμε την αναλυτική μορφή του θεωρήματος $Hahn - Banach$ μέσω της επέκτασης των γραμμικών συναρτησιακών.
Ονομάζουμε ως γραμμικό συναρτησιακό μία γραμμική απεικόνιση ορισμένη σ' έναν γραμμικό χώρο E πάνω στο $\mathbb{R}$ ή σ' έναν γραμμικό υπόχωρο του E, με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.1 *(Θεώρημα επέκτασης του $Hahn - Banach$)*
Έστω E γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και έστω $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ μία απεικόνιση που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$1) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$$

$$2) \quad p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \lambda > 0$$

δηλαδή η p είναι υποπροσθετική και θετικά ομογενής.
Έστω G γραμμικός υπόχωρος του E ($G \subset E$) και $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ένα γραμμικό συναρτησιακό με την ιδιότητα

$$\forall x \in G, g(x) \leq p(x) \quad (1)$$

Τότε, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε
a)$f(x) = g(x), \forall x \in G$ (δηλαδή το f είναι επέκταση του g)
β)$f(x) \leq p(x), \forall x \in E$

Ξεκινώντας την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα δείξουμε πώς πραγματοποιείται η επέκταση του g από έναν υπόχωρο σ'εναν άλλο, με γραμμικό τρόπο χωρίς να αλλάξουμε την (1).
Για να το πετύχουμε αυτό,θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του $Zorn$, το οποίο μας

δίνει την δυνατότητα να εξασφαλίσουμε μια μεγιστική επέκταση f, η οποία πρέπει να έχει ως πεδίο ορισμού της ολόκληρο το E.
Παρακάτω,θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς οι οποίοι μας είναι απαραίτητοι για την κατανόηση του λήμματος.

Ορισμός 1.2 *Έστω P ένα μη κενό σύνολο.Μία σχέση $\leq$ στο P ονομάζεται, σχέση μερικής διάταξης αν ικανοποιεί τα εξής:*
(α) $a \leq a, \forall a \in P$ (ανακλαστική ιδιότητα)
(β) αν $a \leq b$ και $b \leq a$ τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)
(γ) αν $a \leq b$ και $b \leq c$ τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα)
Τότε το P ονομάζεται μερικά διατεταγμένο ως προς την σχέση $\leq$.

Παρατήρηση 1.3 *Από τον ορισμό αυτό μπορούμε να διακρίνουμε οτι μπορεί στο P να υπάρχουν a και b τέτοια ώστε να μην ισχύει καμια από τις $a \leq b$ και $b \leq a$.Τότε λέμε ότι τα a και b δεν συγκρίνονται.Δηλαδή τα a και b συγκρίνονται μόνο αν ισχύει μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.*

Ορισμός 1.4 *Ολικά διατεταγμένο, (ή αλυσίδα) ονομάζεται ένα μη κενό υποσύνολο Q του P αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.*

Ορισμός 1.5 *Έστω $Q \neq \emptyset$, $Q \subseteq P$ και $c \in P$, τότε ορίζουμε το c να είναι άνω φράγμα για το Q αν: $\forall a \in Q$ ισχύει $a \leq c$.*
Σημειώνουμε ότι ένα υποσύνολο Q του P μπορεί να έχει αλλά και να μην έχει άνω φράγμα.

Ορισμός 1.6 *Λέμε ότι το $m \in P$ ονομάζεται μεγιστικό στοιχείο του P αν $\forall x \in P$ με $m \leq x$, να ισχύει $x = m$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει ένα γνήσια μεγαλύτερο στοιχείο του P από το m.*

Ορισμός 1.7 *Επαγωγικό είναι το σύνολο P, αν κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του P έχει άνω φράγμα.*

Ορισμός 1.8 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα.*
Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \longrightarrow Y$ είναι φραγμένος, αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ για $x \in X$.

Λήμμα 1.9 *Λήμμα του Zorn*
Έστω $P \neq \emptyset$ (μη κενό).Έστω ότι το P είναι μερικά διατεταγμένο και επαγωγικό (δηλαδή είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο ως προς την $\leq$) και υποθέτουμε ότι $c \leq P$ έχει άνω φράγμα στο P. Τότε, το P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Μία απόδειξη του λήμματος γίνεται μέσω του αξιώματος της επιλογής.
Το λήμμα είναι απαραίτητο εργαλείο για την απόδειξη ορισμένων αποτελεσμάτων υπάρξεων και περιέχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στην Ανάλυση. Γι΄ αυτό, είναι απαραίτητο να κατανοηθεί πλήρως.

Τώρα αφού παραθέσαμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς και το λήμμα του $Zorn$, τα οποία χρησιμεύουν ως εργαλεία για να αποδείξουμε το θεώρημα, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :
Θα θεωρήσουμε ένα σύνολο της μορφής
$P = \{h | h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}$ με $D(h)$ γραμμικός υπόχωρος του E, h γραμμικό, $G \subset D(h)$, h επεκτείνει το g και $h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h)\}$.
Το P είναι εφοδιασμένο με την σχέση διατάξεως
$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)$ και το h_2 επεκτείνει το h_1.
$P \neq \emptyset$ αφού $g \in P$. Εξάλλου το P είναι επαγωγικό.
Πράγματι, έστω $Q \subset P$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο.
Θέτουμε $Q = (h_i)_{i \in I}$ και ορίζουμε

$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ και $h(x) = h_i(x)$ αν $x \in D(h_i)$.

Άρα ο ορισμός αυτός έχει νόημα, ότι $h \in P$ και ότι το P είναι άνω φράγμα του Q.
Επιπλέον, από το λήμμα του $Zorn$, προκύπτει ότι το P έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, το οποίο σημειώνεται με f.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι $D(f) = E$.
Αυτό θα δειχθεί με επαγωγή σε άτοπο.
Έστω f το μεγιστικό στοιχείο του P.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $D(f) = E$
Έστω $D(f) \neq E$ και έστω $x_0 \notin D(f)$
Θέτουμε $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$, $h : D(h) \to \mathbb{R}$ και για $x \in D(f)$, $h(x + tx_0) = f(x) + ta$, $t \in \mathbb{R}$, όπου a μία σταθερά που θα ορίσουμε αργότερα έτσι ώστε $h \in P$.
Για να ανήκει η h στο P θα πρέπει να ισχύει
$h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$.
ή αλλιώς αρκεί να δείξουμε ότι:
$f(x) + a \leq p(x + x_0), \forall t \in \mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι αν: αν $f(x) + a \leq p(x + x_0), \forall x \in D(f)$ και αν $f(x) - a \leq p(x - x_0), \forall x \in D(f)$, τότε $f(x) + ta \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$.

• Για $t > 0$,
$t(f(x) + a) \leq tp(x + x_0)$, συνεπώς από την ιδιότητα (2) της P
έχουμε: $f(tx) + ta \leq p(tx + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t > 0$, άρα
$f(x) + ta \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t > 0$.

• Για $t > 0$,
$t(f(x) - a) \leq tp(x - x_0)$, άρα $f(tx) - ta \leq p(tx - tx_0), \forall x \in D(f), \forall t > 0$,
συνεπώς $f(x) - ta \leq p(x - tx_0), \forall x \in D(f), \forall t > 0$
και κατά συνέπεια $f(x) + ta \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t < 0$.

• Για $t = 0, f(x) \leq p(x)$, ισχύει επειδή $f \in P$.

Άρα $\forall t \in \mathbb{R}, f(x) + ta \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f)$.

Τέλος πρέπει να ορίσουμε το a ώστε: $f(x) + a \leq p(x + x_0)$ και $f(x) - a \leq p(x - x_0), \forall x \in D(f)$.
Έχουμε ότι:$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$
Οπότε, $f(x) + f(y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$, άρα
$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x), \forall x, y \in D(f)$

$$\Rightarrow \sup_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}$$

$\Rightarrow \exists a$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq a \leq \inf_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}.$$

Άρα γι΄ αυτό το a θα ισχύει: $f(y) - a \leq p(y - x_0), \forall y \in D(f)$ και $f(x) + a \leq p(x + x_0), \forall x \in D(f)$.

Τέλος, συμπεραίνουμε ότι $f \leq h$ και ότι $f \neq h$ που έρχεται σε αντίθεση με την μεγιστικότητα του f.□

Τώρα καθώς αποδείξαμε το θεώρημα θα δούμε τρεις εφαρμογές -πορίσματα τα οποία προκύπτουν απ ΄ αυτό όταν ο E είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$.

Οι δύο επόμενοι συμβολισμοί θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση των εφαρμογών αυτών.

1ος ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ.
Συμβολίζουμε με E' τον τοπολογικό (δυικό) χώρο του E, δηλαδή τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών πάνω στο E.
Ο E είναι εφοδιασμένος με την δυική νόρμα:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E} |f(x)| = \sup_{x \in E} f(x).$$

2ος ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ.
Για $f \in E'$ και $x \in E$ αντί για $f(x)$ θα γράφουμε $\langle f, x \rangle$. Λέμε ότι το $\langle , \rangle$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυικότητα E', E.

Πόρισμα 1.10 *Έστω G ένας γραμμικός υπόχωρος του E και $g : G \to \mathbb{R}$ ένα* *συνεχές γραμμικό συναρτησιακό με νόρμα*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G}\{g(x) : \|x\| \leq 1\}$$

Τότε $\exists f \in E'$ *που επεκτείνει το* g *και τέτοιο ώστε* $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: η απόδειξη του πορίσματος αυτού θα γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος $Hahn - Banach$ για $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$.
Με βάση το θεώρημα, επειδή το g είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, θα πρέπει να ισχύει για $\lambda > 0$:
1) $p(\lambda x) = \|g\|_{G'}\|\lambda x\| = \lambda\|g\|_{G'}\|x\| = \lambda p(x)$
2) $p(x+y) = \|g\|_{G'}\|x+y\| \leq \|g\|_{G'}(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$

Άρα ισχύει ότι:
$\cdot p(\lambda x) = \lambda p(x)$ και
$\cdot p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι: $g(x) \leq p(x)$
$g(x) \leq p(x) \Leftrightarrow g(x) \leq \|g\|_{G'}\|x\| \forall x \in G$
$\Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{\|x\|} \leq \|g\|_{G'}$
$\Leftrightarrow g(\frac{x}{\|x\|}) \leq \|g\|_{G'}$
Το οποίο ισχύει διότι:

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in E}\{g(x) : \|x\| \leq 1\}$$

Άρα από το θεώρημα $Hanh - Banach$, $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησιακό τέτοιο ώστε να επεκτείνει την g και $f(x) \leq p(x)$ άρα

$$f(x) \leq \|g\|_{G'}\|x\|, \forall x \in E \quad (1).$$

Επίσης, επειδή η f επεκτείνει την g έχουμε ότι:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E} f(x) \geq \|g\|_{G'} = \sup_{x \in G'} g(x) \quad (2).$$

Από την σχέση (1)$\Rightarrow \frac{f(x)}{\|x\|} \leq \|g\|_{G'}, \forall x \in E$
$\Rightarrow f(\frac{x}{\|x\|}) \leq \|g\|_{G'}, \forall x \in E$
$\Rightarrow f(y) \leq \|g\|_{G'}, \forall y \in E$ με $\|y\| \leq 1$
$\Rightarrow \sup_{y \in E} f(y) \leq \|g\|_{G'} \Rightarrow \|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$ (3).
Άρα απο (2) και (3) έπεται ότι: $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. $\square$

Πόρισμα 1.11 *Για κάθε* $x_0 \in E, \exists f_0 \in E'$ *τέτοιο ώστε*
$\|f_0\| = \|x_0\|$ *και* $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η απόδειξη του πορίσματος αυτού θα γίνει με εφαρμογή του πορίσματος 1.9 για $G = \mathbb{R}x_0$ και $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(tx_0) = t\|x_0\|^2, t \in \mathbb{R}$.
Ισχύει ότι:

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x\in G}\{g(x) : \|x\| \leq 1\} = \sup_{\|tx_0\|\leq 1}\{t\|x_0\|^2 t \in \mathbb{R}\} = \sup_{\|tx_0\|\leq 1}\{\|tx_0\|\|x_0\| : t \in \mathbb{R}\} = \|x_0\|.$$

Άρα από το πόρισμα 1.9, $\exists f_0 \in E'$ τέτοιο ώστε $\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$ και $\langle f_0, x_0\rangle = g(x_0) = \|x_0\|^2$.□

Πόρισμα 1.12 *Για κάθε $x \in E$ ισχύει*

$$\|x\| = \sup_{f\in E'}|\langle f, x\rangle| = \max_{f\in E'}|\langle f, x\rangle|$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: από την πρόταση 3.6(ii) από το βιβλίο του Νεγρεπόντη-Ζαχαριάδη ισχύει ότι:$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\|, \forall x \in E, \forall f \in E'$.
Συνεπώς $\forall f \in E'$, με $\|f\| \leq 1$, θα ισχύει $|\langle f, x\rangle| \leq \|x\|, \forall x \in E$.
Παίρνοντας λοιπόν, το sup ως προς τα $f \in E'$ με $\|f\| \leq 1$ αριστερό μέλος, θα έχουμε:

$$\sup_{f\in E'}|\langle f, x\rangle| \leq \|x\|, \forall x \in E.$$

Επίσης από το πόρισμα 1.10, για κάθε $x_0 \in E$, υπάρχει $f_0 \in E'$ τέτοιο ώστε $\|f_0\| = \|x_0\|$ και $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$
Επομένως αν $x_0 \neq 0$, θέτουμε $f_1 = \frac{f_0}{\|x_0\|}$.
Άρα, $\exists f_1 \in E'$ τέτοιο ώστε $\|f_1\| = 1$ και $\langle f_1, x_0\rangle = \|x_0\|$.
Οπότε θα έχουμε:

$$\sup_{f\in E'}|\langle f, x\rangle| = \max_{f\in E'}|\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

Στην δεύτερη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε κυρίως με τις γεωμετρικές μορφές του θεωρήματος $Hahn - Banach$, δηλαδή με τον διαχωρισμό κυρτών συνόλων.
Ας δούμε αρχικά έναν ορισμό που έχει σχέση με τα υπερεπίπεδα.
Το E είναι πάντα γραμμικός χώρος με νόρμα.

Ορισμός 1.13 *Ένα υπερεπίπεδο (ομοπαραλληλικό) είναι ένα σύνολο της μορφής*

$$H = \{x \in E : f(x) = a\}$$

όπου f είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό πάνω στο E, όχι ταυτοτικά μηδέν και $a \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι το H είναι ένα υπερεπίπεδο με εξίσωση $[f = a]$.

Πρόταση 1.14 *Το υπερεπίπεδο με εξίσωση* $H = \{x \in E : f(x) = a\}$ *είναι κλειστό αν και μόνον αν το* f *είναι συνεχές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
($\Leftarrow$). Δείχνουμε ότι αν το f είναι συνεχές, τότε το H είναι κλειστό.
$f^{-1}(\{a\}) = \{x \in E : f(x) = a\} = H$
Στο $\mathbb{R}$: το $\{a\} = [(-\infty, a) \bigcup (a, +\infty)]^c$ είναι κλειστό.
Άρα από το θεώρημα " αν f συνεχής η αντίστροφη εικόνα κλειστού είναι κλειστό" 8.21 (iii) από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη και αφού το υπερεπίπεδο H ισούται με την αντίστροφη εικόνα (μέσω της f) του κλειστού μονοσυνόλου $\{a\}$, θα είναι κλειστό.

($\Rightarrow$). Υποθέτουμε ότι το H είναι κλειστό. Το συμπλήρωμα H^c του H είναι ανοιχτό και μη κενό (αφού $f \neq 0$).
Έστω $x_0 \in H^c$, δηλαδή $f(x_0) \neq a$ και ας υποθέσουμε ότι έστω $f(x_0) < a$.
Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, r) \subseteq H^c$, δηλαδή
$B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\} \subseteq H^c = \{x \in E / f(x) \neq a\}$.
Τότε $\forall x \in B(x_0, r) \Rightarrow x \in H^c \Rightarrow f(x) \neq a$. Άρα $f(x) < a$. (1)
Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) > a$ για κάποιο $x_1 \in B(x_0, r)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το x_0 με το x_1: $\{x_t = (1-t)x_1 + tx_0, t \in [0,1]\}$ περιέχεται στο $B(x_0, r)$ και άρα $f(x_t) \neq a, \forall t \in [0,1]$.Εξάλλου, $f(x_t) = a$ για $t = \frac{f(x_1)-a}{f(x_1)-f(x_0)}$. Δηλαδή:
$(1-t)f(x_1) + tf(x_0) =$
$= (1 - \frac{f(x_1)-a}{f(x_1)-f(x_0)})f(x_1) + \frac{f(x_1)-a}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_0)$
$= \frac{f^2(x_1)-f(x_0)f(x_1)-f^2(x_1)+af(x_1)+f(x_1)f(x_0)-af(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$
$= \frac{a(f(x_1)-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$
$= a$.
Άρα, αυτό είναι άτοπο, οπότε ισχύει η (1).
Από την (1) προκύπτει ότι:
$z \in B(0,1) \Rightarrow rz \in B(0,r)$
$\Rightarrow x_0 + rz \in B(x_0, r)$
$\Rightarrow f(x_0 + rz) < a \Rightarrow f(x_0) + rf(z) < a$
$\Rightarrow f(z) < \frac{1}{r}(a - f(x_0)), \forall z \in B(0,1)$.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|<1} f(x) < \frac{1}{r}(a - f(x_0)).$$

Άρα f φραγμένη. Άρα f συνεχής. $\Box$

Ορισμός 1.15 *Έστω* $A \subset E$ *και* $B \subset E$. *Λέμε ότι το υπερεπίπεδο* H *με εξίσωση* $[f = a]$ *διαχωρίζει τα* A *και* B *με την ευρεία έννοια αν* $f(x) \leq a, \forall x \in A$ *και* $f(x) \geq a, \forall x \in B$. *Επίσης λέμε ότι το* H *διαχωρίζει τα* A *και* B *με την στενή έννοια αν υπάρχει* $\epsilon > 0$ *τέτοιο ώστε* $f(x) \leq a - \epsilon, \forall x \in A$ *και* $f(x) \geq a + \epsilon, \forall x \in B$.

Γεωμετρικά, ο διαχωρισμός εκφράζει ότι τα A και B βρίσκονται "έκατέρωθεν" του H.

Υπενθυμίζουμε τέλος ότι ένα σύνολο A είναι κυρτό αν $tx + (1-t)y \in A, \forall x, y \in A, \forall t \in [0,1]$.

Θεώρημα 1.16 *(Θεώρημα Hanh – Banach, πρώτη γεωμετρική μορφή)*
Έστω E χώρος με νόρμα.
Έστω $A \subset E$ και $B \subset E$ δύο σύνολα κυρτά, μη κενά και ξένα (δηλαδή A, B κυρτά, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \bigcap B = \emptyset$). Υποθέτουμε ότι το A είναι ανοιχτό.
Τότε υπάρχει ένα κλειστό υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τα A και B με την ευρεία έννοια.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούν τα δύο επόμενα λήμματα:

Λήμμα 1.17 *(Στάθμη ενός κυρτού) Έστω $C \subset E$ κυρτό και ανοιχτό, $0 \in C$.*
Για κάθε $x \in E$, θέτουμε $p(x) = \inf\{a > 0 : \frac{1}{a}x \in C\}$.
Τότε, λέμε ότι το p είναι η στάθμη του C.
Τότε:
$(i) p(\lambda x) = \lambda(px), \forall \lambda > 0, \forall x \in E$
$(ii) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$
$(iii) \exists M > 0$ *τέτοιο ώστε* $0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in E$
$(iv) C = \{x \in E : p(x) < 1\}$

Απόδειξη:
(iii). Το C είναι ανοιχτό και $0 \in C$. Άρα $\exists r > 0$ τέτοιο ώστε $B(0,r) \subset C$.
Άρα $\forall x \in E : \frac{rx}{2\|x\|} \in B(0,r) \in C$, άρα $\frac{r}{2\|x\|}x \in C$.
$(B(0,r) = \{y \in E / \|y\| < r\})$
(και επίσης $\frac{rx}{2\|x\|} \in B(0,r)$ διότι $\|\frac{rx}{2\|x\|}\| = \frac{r}{2\|x\|}\|x\| = \frac{r}{2}$)
Οπότε $\frac{2\|x\|}{r} \in \{a > 0 : \frac{1}{a}x \in C\}$.
Άρα $p(x) \leq \frac{2\|x\|}{r} = \frac{2}{r}\|x\|$.
θέτω M$=\frac{2}{r} > 0$
$\exists$ M$=\frac{2}{r} > 0$ τέτοιο ώστε $p(x) \leq$M$\|x\|$.

(i)Για $\lambda > 0, p(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}\lambda x \in C\}$
$= \inf\{\lambda\frac{a}{\lambda} > 0 : \frac{\lambda}{a}x \in C\}$
$= \lambda \inf\{\frac{a}{\lambda} > 0 : \frac{\lambda}{a}x \in C\}$
$= \lambda \inf\{a' > 0 : \frac{1}{a'}x \in C\}$
$= \lambda p(x)$

(iv)Έστω $x \in C$: κυρτό, ανοικτό και $0 \in C$.
Επειδή το C είναι ανοικτό $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(1+\epsilon)x \in C$
$(1+\epsilon)x \in C \Rightarrow \frac{1}{1+\epsilon} \in \{\alpha > 0 : \frac{1}{a}x \in C\}$
Άρα $p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$

Έστω $x \in E$ τέτοιο ώστε $p(x) < 1$
Όμως $p(x) = \inf\{a > 0 : \frac{1}{a}x \in C\}$
Άρα $\exists 0 < a < 1$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{a}x \in C$.
Επειδή το C είναι κυρτό και $0 \in C$,
$a(\frac{1}{a}x) + (1-a)0 \in C$. Άρα $x \in C$

(ii)Έστω $x, y \in E$ και $\epsilon > 0$.
$p(\frac{x}{p(x)+\epsilon}) = \frac{1}{p(x)+\epsilon}p(x) = \frac{p(x)}{p(x)+\epsilon} < 1$ (από (i))
$\Rightarrow \frac{x}{p(x)+\epsilon} \in C$. από (iv)
Επίσης $p(\frac{y}{p(y)+\epsilon}) = \frac{1}{p(y)+\epsilon}p(y) = \frac{p(y)}{p(y)+\epsilon} < 1$ από (i)
$\Rightarrow \frac{y}{p(y)+\epsilon} \in C$. από (iv)
Επειδή το C είναι κυρτό: $\frac{tx}{p(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon} \in C, \forall t \in [0,1]$.
Θέτουμε, $t = \frac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}$.
Άρα: $\frac{\frac{(p(x)+\epsilon)x}{p(x)+p(y)+2\epsilon}}{p(x)+\epsilon} + \frac{\frac{(p(y)+\epsilon)y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}}{p(y)+\epsilon} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in C$.
από $(iv) \Rightarrow p(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}) < 1$
από $(i) \Rightarrow \frac{1}{p(x)+p(y)+2\epsilon}p(x+y) < 1$
$\Rightarrow p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$
Άρα $p(x+y) \le p(x) + p(y)$. $\square$

Λήμμα 1.18 *Έστω E γραμμικός χώρος με νόρμα.*
Έστω $C \subset E$. C: κυρτο, ανοικτό και $C \neq \emptyset$.
Έστω $x_0 \in E$ τέτοιο ώστε $x_0 \notin C$. Τότε υπάρχει $f \in E'$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in C$. Ειδικά:

Απόδειξη: $C \neq \emptyset, \exists y \in C$, τότε το $C' = C - y$: κυρτό, ανοικτό που περιέχει το 0.
Από το Λήμμα 1.17 η στάθμη του C' είναι: $\forall x \in E$

$$p(x) = \inf\{a > 0 : a^{-1}x \in C\}$$

Έστω $G = \mathbb{R}x_0$ και το γραμμικό συναρτησιακό $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x_0) = t, \forall t \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε $x = tx_0$.
(i) για $t > 0$:
$g(x) = t$
(από το (i) του προηγούμενου λήμματος) $p(x) = p(tx_0) = tp(x_0) \geq t = g(t_{x0}) = g(x)$, διότι $p(x_0) \geq 1$ επειδή $x_0 \notin C'$
Άρα $p(x) \geq g(x), \forall x \in G$.
(ii) για $t \leq 0$:
Ομοίως $p(x) = p(tx_0) = tp(x_0) \geq t = g(t_{x0}) = g(x)$, διότι $p(x_0) \geq 1$ επειδή $x_0 \notin C'$.
Άρα $\exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ που επεκτείνει το g (δηλαδή $f(x) = g(x), \forall x \in G$) και
από το θεώρημα $Hanh - Banach$ $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$.

Ειδικά,$f(x_0) = g(x_0) = 1$ και επειδή $\exists$ M>0 τέτοιο ώστε $0 \leq p(x) \leq$M$\|x\|, \forall x \in E$
$\Rightarrow f(x) \leq p(x) \leq$M$\|x\|, \forall \in E$
Άρα $\exists$ M>0 τέτοιο ώστε $f(x) \leq$M$\|x\|, \forall x \in E$.
Άρα f συνεχές από πρόταση 3.7 (iii) από το βιβλίο του Νεγρεπόντη-Ζαχαριάδη.

Επίσης, επειδή $p(x) < 1, \forall x \in C \Rightarrow f(x) < 1 = f(x_0), \forall x \in C$.
Άρα το $H = \{x \in E / f(x) = f(x_0) = 1\}$ διαχωρίζει το $\{x_0\}$ και το C.
Πράγματι, $f(x) < f(x_0), \forall x \in C$.

Τώρα, αφού αποδείξαμε τα δύο λήμματα που χρειαζόμασταν, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 1.16.
Απόδειξη:
Θέτουμε $C = A - B$. Πρώτα δείχνουμε ότι
αν A, B κυρτά και ξένα τότε το $C = A - B$ είναι κυρτό. Πράγματι:
Για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε:

$tx + (1-t)y \in A, \forall x, y \in A$
$tx' + (1-t)y' \in B, \forall x, y \in B$

Θέτουμε:
$z_1 = x - x' \in A - B$
$z_2 = y - y' \in A - B$
$tz_1 + (1-t)z_2 = t(x-x') + (1-t)(y-y') = tx + (1-t)y - (tx' + (1-t)y') \in A - B$.

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι αν το A είναι ανοικτό, τότε το $C = A - B$ είναι ανοικτό:
Έστω A ανοικτό τότε για κάθε $y \in B$ το $A - y$ είναι ανοικτό. Κατά συνέπεια

$$C = A - B = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$

(ανοικτό ως ένωση ανοικτών) και $0 \notin C$ διότι $A \cap B = \emptyset$
Από το λήμμα 1.18 (για $x_0 = 0$):
$\exists f \in E'$ τέτοιο ώστε $f(z) \leq f(0) = 0, \forall z \in C$.
Δηλαδή $z \in A - B$, δηλαδή $z = x - y$ με $x \in A, y \in B$.
$f(z) = f(x) - f(y) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y), \forall x \in A, \forall y \in B$
$\exists a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq a \leq f(y), \forall x \in A, \forall y \in B$.
$\sup f(x) \leq a \leq \inf f(y)$.
Άρα το υπερεπίπεδο $H = \{x \in E / f(x) = a\}$ διαχωρίζει με την ευρεία έννοια τα A, B.
Δηλαδή $f(x) \leq a, \forall x \in A$ και $f(y) \geq a, \forall y \in B$. $\square$

Θεώρημα 1.19 *(Θεώρημα Hanh – Banach, δεύτερη γεωμετρική μορφή)*
Έστω $A \subset E$ και $B \subset E$ δύο σύνολα κυρτά, μη κενά και ξένα. Υποθετουμε ότι το

A είναι κλειστό και ότι το B είναι συμπαγές. Τότε υπάρχει ένα κλειστό υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τα A και B με τη στενή έννοια.

Απόδειξη: Για $\epsilon > 0$ $A_\epsilon = A + B(0,\epsilon)$ και $B_\epsilon = B + B(0,\epsilon)$.
Άρα τα A_ϵ, B_ϵ είναι κυρτά και μη κενά διότι τα A, B είναι κυρτά, μη κενά και το $B(0,\epsilon)$ είναι κυρτό.
Επίσης τα A_ϵ, B_ϵ είναι ανοικτά διότι το $B(0,\epsilon)$ είναι ανοικτό, διότι
$(A_\epsilon = \bigcup_{a\in A}(\{a\} + B(0,\epsilon))$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών, όμοια
$(B_\epsilon = \bigcup_{b\in B}(\{b\} + B(0,\epsilon))$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών.
Επιπλέον $\exists \epsilon > 0$ (αρκετά μικρό) τέτοιο ώστε $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$. Πράγματι,
έστω ότι δεν ισχύει. Άρα $\forall \epsilon > 0, A_\epsilon \cap B_\epsilon \neq \emptyset$.
Επομένως μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία στοιχείων που ανήκουν στο $A_\epsilon \cap B_\epsilon$.
Άρα υπάρχουν ακολουθίες $x_n \in A, y_n \in B, \epsilon_n, \epsilon'_n \in B(0,\epsilon)$ έτσι ώστε

$$x_n + \epsilon_n = y_n + \epsilon'_n \Rightarrow x_n - y_n = \epsilon'_n - \epsilon_n$$

.
Επειδή $\epsilon_n, \epsilon'_n \in B(0,\epsilon)$, θα έχουμε $\lim \epsilon_n = \lim \epsilon'_n = 0$
Άρα $\lim x_n = \lim y_n$. Επειδή το B είναι συμπαγές έπεται ότι η y_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή $\exists y_{n_k}$ υπακολουθία της y_n τέτοια ώστε $y_{n_k} \longrightarrow y \in B$.
Άρα $\lim x_n = y$ και επειδή το A είναι κλειστό, έπειται ότι $y \in A$.
Δηλαδή $y \in A \cap B$ (ΑΤΟΠΟ).
Εφαρμόζουμε την πρώτη γεωμετρική μορφή του θεωρήματος $Hanh - Banach$ στα σύνολα A_ϵ, B_ϵ : υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει τα A_ϵ, B_ϵ με την ευρεία έννοια.

$$(f(x) \leq a, \forall x \in A_\epsilon = A + B(0,\epsilon), f(y) \geq a, \forall y \in B_\epsilon = B + B(0,\epsilon))$$

Συνεπώς:
$f(x + \epsilon z) \leq a \leq f(y + \epsilon z'), \forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in B(0,1), \forall z' \in B(0,1)$.
Λόγω γραμμικότητας:
$f(x + \epsilon z) = f(x) + \epsilon f(z) \leq a \leq f(y) + \epsilon f(z')$.
Άρα, $f(x) + \epsilon f(z) \leq a \leq f(y) + \epsilon f(z'), \forall x, \forall y, \forall z, \forall z'$
για $z' = -z$:
$f(x) + \epsilon f(z) \leq a \leq f(y) - \epsilon f(z), \forall x, \forall y, \forall z$
Παίρνοντας το $supremum$ για όλα τα $z \in B(0,1)$
$f(x) + \epsilon\|f\| \leq a \leq f(y) - \epsilon\|f\|, \forall x \in A, \forall y \in B$. □

Παρατήρηση 1.20 *Έστω $A \subset E$ και $B \subset E$ δύο σύνολα κυρτά, μη κενά και ξένα. Χωρίς πρόσθετη υπόθεση δεν είναι πάντοτε δυνατόν να διαχωρίσουμε με την ευρεία έννοια τα A και B με ένα κλειστό υπερεπίπεδο. Μπορούμε μάλιστα να κατασκευάσουμε ένα παράδειγμα όπου τα A και B είναι δύο κυρτά, κλειστά, μη κενά και ξένα τέτοια ώστε να μην υπάρχει κανένα κλειστό υπερεπίπεδο που να διαχωρίζει τα A και B με την ευρεία έννοια. Αν όμως ο E είναι ένας χώρος* *πεπερασμένης διαστάσεως, μπορούμε πάντοτε να διαχωρίσουμε με την ευρεία έννοια δύο κυρτά σύνολα A και B, μη κενά και ξένα (χωρίς πρόσθετη υπόθεση!).*

Τώρα θα παραθέσουμε ένα πόρισμα πολύ χρήσιμο για το όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας γραμμικός χώρος είναι πυκνός.

Πόρισμα 1.21 *Έστω $F \subset E$ ένας γραμμικός υπόχωρος τέτοιος ώστε $\bar{F} \neq E$. Τότε υπάρχει $f \in E', f \neq 0$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle = 0, \forall x \in F$.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμικός χώρος είναι κυρτός. Πράγματι,
έστω V γραμμικός χώρος, τότε
$\forall x, y \in V \Rightarrow tx + (1-t)y \in V, \forall t \in [0,1]$. Άρα V κυρτός.
Επίσης επειδή ο E είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και F κυρτός υπόχωρος του E, έπεται ότι το $\bar{F}$ είναι επίσης κυρτό.

Έστω $x_0 \in E, x_0 \notin \bar{F}$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα (1.19) για $A = \bar{F}$ και $B = \{x_0\}$, άρα $\exists f \in E', f \neq 0$ τέτοια ώστε το υπερεπίπεδο $[f = a]$=$\{x \in E / \langle f, x\rangle = a\}$ διαχωρίζει τα A και B με την στενή έννοια.
Δηλαδή: $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\langle f, x\rangle \leq \alpha - \epsilon, \forall x \in \bar{F}$
$\Rightarrow \langle f, x\rangle < a, \forall x \in \bar{F}$
$\Rightarrow \langle f, x\rangle < a, \forall x \in F$ (γραμμικό χώρο)
$\Rightarrow \langle f, \lambda x\rangle < a, \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$
$\Rightarrow \lambda\langle f, x\rangle < a, \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$
$\Rightarrow \langle f, x\rangle < \frac{a}{\lambda}, \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$.
Άρα $\langle f, x\rangle = 0$.. $\square$

Κεφάλαιο 2

Τα θεωρήματα $Banach - Steinhaus$ και του κλειστού γραφήματος

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το λήμμα του $Baire$ το οποιό είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα και παίζει ουσιώδη ρόλο στις αποδείξεις του κεφαλαίου αυτού. Επίσης θα αποδείξουμε το θεώρημα $Banach - Steinhaus$ και θα παραθέσουμε μερικά πορίσματα του θεωρήματος αυτού. Τέλος θα ασχοληθούμε με τα θεωρήματα της ανοικτής απεικόνισης και του κλειστού γραφήματος.

Λήμμα 2.1 *(Λήμμα Baire)*
Έστω X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και $(X_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του. Υποθέτουμε ότι: $intX_n = \emptyset$ για κάθε $n \geq 1$.
Τότε:

$$int(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$$

Απόδειξη: Πρώτα δείχνουμε ότι $(intX_n)^C = \bar{X_n^C}$. Πράγματι, έστω $x \notin IntX_n$. Ισοδύναμα, $\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \nsubseteq X_n$, το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι, $\forall \epsilon > 0, \exists y \in B(x,\epsilon)$ τέτοιο ώστε $y \in X_n^C$. Δηλαδή ισοδύναμα $x \in \bar{X_n^C}$.
Θέτουμε $O_n = X_n^c = X \setminus X_n, O_n$ ανοικτό.
$intX_n = \emptyset \Rightarrow (intX_n)^c = X$. Επειδή $(intX_n)^C = \bar{X_n^C}$ έπεται ότι
$\bar{X_n^c} = X$ και κατά συνέπεια
$\bar{O_n} = X$.
Δηλαδή το O_n είναι πυκνό στο $X, \forall n \geq 1$.
Έστω $G = \cap_{n=1}^{\infty} O_n$. θα δείξω ότι G πυκνό στο G.

(Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο A είναι πυκνό στο X, αρκεί να δείξω ότι $\forall B$ ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του $X \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.)
απόδειξη: Έστω $x \in X, \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon)$ ανοικτό υποσύνολο του X
$\Rightarrow B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow X = \bar{A} \Rightarrow A$ πυκνό στο X.

Δηλαδή, αρκεί να δείξω ότι $\forall \omega$ ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X,
έχουμε $\omega \cap A \neq \emptyset$.
Έστω $x_0 \in \omega$.Επειδή ω ανοικτό $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \epsilon) \subseteq \omega$.
Έστω $r_0 = \frac{\epsilon}{2}, \overline{B(x_0, r_0)} \subseteq B(x_0, \epsilon) \subseteq \omega$.
O_1 : ανοικτό, πυκνό στο X
$\Rightarrow O_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$.
Έστω $x_1 \in O_1 \cap B(x_0, r_0) \subseteq \omega$.
Επειδή το $O_1 \cap B(x_0, r_0)$ είναι ανοικτό, έπεται ότι
$\exists r_1'$ τέτοιο ώστε $B(x_1, r_1') \subseteq O_1 \cap B(x_0, r_0) \ \ (r_1' < r_0)$
Θέτω $r_1 = \frac{r_1'}{2} \Rightarrow \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_1, r_1') \subseteq O_1 \cap B(x_0, r_0)$ με $0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το O_2.
Θα βρούμε ότι $x_2 \in O_2 \cap B(x_1, r_1) \subseteq \omega$ και $r_2 > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B(x_2, r_2)} \subseteq O_2 \cap B(x_1, r_1)$.
Κατασκευάζουμε έτσι επαγωγικά δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \subseteq \omega, \forall n \geq 1(1)$$

και

$$0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}(2)$$

(Έτσι προκύπτει ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $Cauchy$: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq n_0)$.
Πράγματι από την (1) έχουμε ότι :$d(x_{n+1}x_n) < r_n, \forall n \geq 0$.
Άρα $\forall n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε:
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) < r_n + r_{n+1} + ... + r_{m-1}$
από (2)
$< r_n + \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{4} + ... + \frac{r_n}{m-n-1} = r_n(1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2}^{m-2n-1}) < 2r_n$.
Όμως η ακολουθία (r_n) είναι μηδενική.Άρα $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $r_n < \frac{\epsilon}{2}$.
Άρα $d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq n_0$.
Άρα η (x_n) είναι $Cauchy$.
Επειδή ο X είναι πλήρης έπεται ότι η (x_n) είναι συγκλίνουσα.
Έστω $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$,
Επίσης $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$, για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε $p \geq 0$.
Άρα η $(x_{n+p})_{p\in\mathbb{N}}$ (υπακολουθία της (x_n)) ανήκει στο $B(x_n, r_n)$.Παίρνοντας το $\lim\limits_{p\to+\infty} x_{n+p} \in \overline{B(x_n, r_n)}$. Άρα $l \in \overline{B(x_n, r_n)}, \forall n \geq 0$.
Άρα από την (1) έπεται ότι :
$l \in B(X_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \subseteq \omega, \forall n \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow l \in (\cap_{n=1}^{\infty} O_n) \cap \omega \Rightarrow l \in G \cap \omega$.
Άρα $G \cap \omega \neq \emptyset$.
Άρα G πυκνό στο X. $\square$

Θεώρημα 2.2 *(Banach − Steinhaus)*
E, F χώροι Banach

$\{T_i\}_{i\in I}$ *με* $T_i \in L(E,F), \forall i \in I$
Υποθέτουμε ότι:

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, \forall x \in E \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty \quad (2)$$

($\Leftrightarrow \exists c$ *σταθερά τέτοια ώστε* ($\|T_i x\| \le c\|x\|, \forall x \in E, \forall i \in I$)

Απόδειξη: για κάθε ακέραιο $n \ge 1$, θέτουμε
$X_n := \{x \in E : \forall i \in I, \|T_i x\| \le n\}$ είναι κλειστό διότι:
$T_i : E \to F$ και $\|\cdot\|_F : F \to \mathbb{R}_+$ είναι συνεχείς.
Όμως το $[0,n]$ είναι κλειστό, άρα το $\{x \in E : \forall i \in I, \|T_i x\| \le n\} = \|T_i(\cdot)\|^{-1}([0,n])$ είναι κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης.
Όμως $X_n = \cap_{i\in I}\{x \in E : \|T_i x\| \le n\}$. Από υπόθεση έχουμε ότι για κάθε
$x \in E \Rightarrow \sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty$
$\Rightarrow \|T_i x\| < +\infty, \forall i \in I$
$\Rightarrow \exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T_i x\| \le M, \forall i \in I$.
Έστω $n_0 = [M]$, άρα
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|T_i x\| \le n, \forall i \in I$
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in X_{n_0}$
$\Rightarrow x \in \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.
Άρα $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = E$. (δηλαδή $int(\cup_{n=1}^{\infty} X_n) \neq \emptyset$)
Άρα από το λήμμα $Baire : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $int(X_{n_0}) \neq \emptyset$ ('Αρα $\exists x_0 \in intX_{n_0}$).
Άρα $\exists x_0 \in X_{n_0}$ τέτοιο ώστε $\exists r > 0$ με $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$.
Έχουμε:$\forall z \in B(0,1), x_0 + rz \in B(x_0, r)$
(διότι :$\|x_0 - (x_0 + rz)\| = \| - rz\| = r\|z\| \le r \Rightarrow x_0 + rz \in B(x_0, r)$).
Όμως $B(x_0, r) \subset X_{n_0} \Rightarrow x_0 + rz \in X_{n_0}$
$\Rightarrow \forall i \in I, \|T_i(x_0 + rz)\| \le n_0, \forall z \in B(0,1)$. Επίσης από τον ορισμό της νόρμας των φραγμένων τελεστών έχουμε $\forall i \in I, \|T_i\| \le \|T_i(z)\|, \forall z \in B(0,1)$.
Συνεπώς $\forall r > 0, \forall i \in I, r\|T_i\|_{L(E,F)} \le \|T_i(rz)\|, \forall z \in B(0,1)$,
απ'οπου συμπεραίνουμε ότι $\forall i \in I, r\|T_i\|_{L(E,F)} \le \|T_i(rz+x_0) - T(x_0)\| \le \|T_i(rz+x_0)\| + \|Tx_0\| \le n_0 + \|T_i x_0\| < +\infty$, διότι $\forall i \in I, \|T_i x_0\| < +\infty$.
Άρα $r\|T_i\| < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \|T_i\| < +\infty$. $\square$

Τώρα θα δώσουμε μερικά άμεσα πορίσματα του θεωρήματος $Banach - Steinhaus$.

Πόρισμα 2.3 *E, F χώροι Banach.*
$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνεχών γραμμικών τελεστών από το E στο F τέτοια ώστε $\forall x \in E, \lim_{n\to+\infty} T_n x = T_x$
$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0, \|T_n x - Tx\| < \epsilon$

$\Rightarrow \|Tx\| - \epsilon \leq \|T_n x\| < \|Tx\| + \epsilon$.
Άρα:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < +\infty, \forall x \in E \quad (a)$$

$$T \in L(E,F) \quad (b)$$

$$\|Tx\|_{L(E,F)} \leq \lim_{n\to+\infty} inf \|T_n x\|_{L(E,F)} \quad (c).$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.2($Banach - Steinhaus$)
$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{L(E,F)} < +\infty (a)$
και
$(b) \exists$ σταθερά c τέτοια ώστε $\|T_n x\| < c\|x\|, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\| \leq c\|x\|, \forall x \in E$
$\Rightarrow \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in E$
Άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής.
Επίσης ο T είναι γραμμικός:
$T(\lambda x + y) := \lim_{n\to+\infty}(T_n(\lambda x + y)) = \lim_{n\to+\infty}(T_n(x) + T_n(y)) = \lambda \lim_{n\to+\infty}(T_n(x)) + \lim_{n\to+\infty}(T_n(y)) = \lambda T(x) + T(y)$
Άρα $T \in L(E,F)$.
Επίσης ισχύει: $\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{L(E,F)} \|x\|, \forall x \in E$
$\Rightarrow \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \|T_n\|_{L(E,F)}$
$\lim_{n\to+\infty}(\frac{\|T_n x\|}{\|x\|}) \leq \lim_{n\to+\infty} inf(\|T_n\|_{L(E,F)}), \forall x \in E$
$\Rightarrow (\frac{\|Tx\|}{\|x\|}) \leq \lim_{n\to+\infty} inf(\|T_n\|_{L(E,F)}), \forall x \in E$
$\Rightarrow \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \lim_{n\to+\infty} inf(\|T_n\|_{L(E,F)})$
$\Rightarrow \|T\|_{L(E,F)} \leq \lim_{n\to+\infty} inf(\|T_n\|_{L(E,F)})$.
Τέλος έχουμε: $\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{L(E,F)} \|x\|, \forall x \in E$,
από όπου προκύπτει η (c). $\square$

Πόρισμα 2.4 *Εστω G ένας χώρος Banach και B ένα υποσύνολο του G. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $f \in G'$ το σύνολο $f(B) = \bigcup_{x\in B}\langle f, x\rangle$ είναι φραγμένο (στο $\mathbb{R}$).*
Τότε το B είναι φραγμένο.

Απόδειξη: Επειδή G είναι ένας χώρος $Banach$, έπεται ότι το $G' = L(G,\mathbb{R})$ είναι επίσης χώρος $Banach$ (βλέπε πρόταση (3.12) από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη).
Οπότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2 για $E = G', F = \mathbb{R}$ και $I = B$.

$\forall b \in B, T_b(f) = \langle f, b\rangle, \forall f \in G'$
$T_b : G' \to \mathbb{R}$, $\{T_b\}_{b\in B} \in L(G', \mathbb{R})$
$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B}\langle f, b\rangle = \sup_{b\in B} f(b) < +\infty$, διότι $f(B)$ φραγμένο.
Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα:
Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε:
$|T_b(f)| \leq c\|f\|, \forall f \in G', \forall b \in B$
$\Rightarrow |\langle f, b\rangle| \leq c\|f\|, \forall f \in G', \forall b \in B$
$\Rightarrow \frac{|\langle f,b\rangle|}{\|f\|} \leq c, \forall f \in G', \forall b \in B$
$\Rightarrow \sup_{f\in G'} \frac{|\langle f,b\rangle|}{\|f\|} \leq c, \forall b \in B.$
Όμως από την πρόταση $3.31(ii)$ από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη:
$\|b\| = \sup\{\frac{|f(b)|}{\|f\|} \leq 1, b \in G\}$.
Άρα από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε: $\|b\| \leq c, \forall b \in B$, δηλαδή το B είναι φραγμένο. □

Πόρισμα 2.5 *Έστω G ένας χώρος Banach και $B' \subseteq G'$.*
Υποθέτουμε ότι, $\forall x \in G$ το $\langle B', x\rangle = \bigcup_{f\in B'}\langle f, x\rangle$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$.
Τότε το B' είναι φραγμένο.

Απόδειξη:Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.2 για $E = G, F = \mathbb{R}$ και $I = B'$.
$\forall b \in B', T_b(x) = \langle b, x\rangle, \forall x \in G.$
Επειδή το $\bigcup_{f\in B'}\langle f, x\rangle$ είναι φραγμένο, $\forall x \in G$, έπεται ότι
$\sup_{b\in B'} |T_b(x)| = \sup_{b\in B'}\langle b, x\rangle < +\infty.$
Άρα από το θεώρημα 2.2, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε:
$|T_b(x)| \leq c\|x\|, \forall x \in G, \forall b \in B'$
$\Rightarrow |\langle b, x\rangle| \leq c\|x\|, \forall b \in B', \forall x \in G$
$\Rightarrow \frac{|\langle b,x\rangle|}{\|x\|} \leq c, \forall b \in B', \forall x \in G$
$\Rightarrow \sup_{x\in G} \frac{|\langle b,x\rangle|}{\|x\|} \leq c, \forall b \in B'$
$\Rightarrow \|b\| \leq c, \forall b \in B'$
$\Rightarrow B'$ φραγμένο. □

Θεώρημα ανοικτής απεικονίσεως και θεώρημα κλειστού γραφήματος.

Ορισμός 2.6 *Έστω $f : E \longrightarrow F$ καλείται ανοικτή απεικόνιση αν για κάθε A ανοικτό υποσύνολο του E, το $f(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του F.*

Λήμμα 2.7 *Έστω E, F χώροι Banach και $T : E \longrightarrow F$ συνεχής γραμμικός τελεστής, επί του F.*
Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c)$.Τότε η T είναι ανοικτή απεικόνιση.

Απόδειξη:Έστω U ανοικτό στο E.
Θα δείξω ότι το $T(U)$ είναι ανοικτό στο F.

Έστω $y_0 \in T(U)$. Άρα $\exists x_0 \in U$ τέτοιο ώστε $y_0 = T(x_0)$.
Επειδή το U είναι ανοικτό $\Rightarrow \exists r > 0$
$B(x_0, r) = x_0 + B(0, r) \subseteq U \Rightarrow T(x_0 + B_E(0, r)) \subseteq T(U)$
$\Rightarrow T(x_0) + T(B_E(0, r)) \subseteq T(U)$
$\Rightarrow y_0 + T(B_E(0, r)) \subseteq T(U)$
$\Rightarrow y_0 + B_F(0, rc) \subseteq y_0 + T(B_E(0, r)) \subseteq T(U)$ (απο υπόθεση)
$\Rightarrow B_F(y_0, rc) \subseteq T(U)$, άρα υπάρχει ανοικτή σφαίρα με κέντρο το y_0 και ακτίνα ίση με rc που περιέχεται στο $T(U)$. Άρα $T(U)$ ανοικτό. $\Box$

Τώρα θα δώσουμε τρία χρήσιμα λήμματα τα οποία θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης.

Λήμμα 1: Έστω A κυρτό. Τότε το $A + A = 2A$
Απόδειξη: $\forall x, y \in A, tx + (1-t)y \in A, \forall t \in [0, 1]$
για $t = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in A \Rightarrow x + y \in 2A$. (1)

Έστω $z \in 2A \Rightarrow z = 2x, x \in A$
$\Rightarrow z = x + x \in A + A$ (2)
Άρα από (1)+(2)$\Rightarrow A + A = 2A$.

Λήμμα 2: $T : E \longrightarrow F$ γραμμική και $A \subseteq E$ κυρτό, τότε $T(A) \subseteq F$ κυρτό.
Απόδειξη: Έστω $z, w \in T(A) \Rightarrow z = T(x), x \in A$ και $w = T(y), y \in A$
$\forall t \in [0, 1] : tz + (1-t)w = tT(x) + (1-t)T(y) = T(tx + (1-t)y) = T(A)$
Επειδή το A είναι κυρτό:
$tx + (1-t)y \in A, tz + (1-t)w \in T(A)$. Άρα $T(A)$ κυρτό.

Λήμμα 3: Αν A κυρτό, τότε $\bar{A}$ είναι επίσης κυρτό.
Απόδειξη: Πρόταση 11.6 (x) από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη.

Θεώρημα 2.8 *(Θεώρημα ανοικτής απεικονίσεως)*
Έστω E, F δύο χώροι Banach και T ένας συνεχής γραμμικός τελεστής από τον E επί του F. Τότε υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε:
$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c)$. Δηλαδή σύμφωνα με το λήμμα 2.7, η T είναι ανοικτή απεικόνιση.

Απόδειξη: η απόδειξη γίνεται σε δύο βήματα.
Πρώτο βήμα: Έστω $T : E \longrightarrow F$ γραμμικός και επί.
Τότε $\exists c > 0$ τέτοια ώστε
$\overline{T(B(0, 1))} \supset B(0, 2c)$.
Απόδειξη: θέτουμε $X_n = n\overline{T(B(0, 1))}$ κλειστό, για $n \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} X_n = \cup_{n=1}^{\infty}(n\overline{T(B(0,1))}$
$\supseteq \cup_{n=1}^{\infty}(nT(B(0,1))) =$
$= \cup_{n=1}^{\infty} T(nB(0,1)) = \cup_{n=1}^{\infty} T(B(0,n))$
$\supseteq T(\cup_{n=1}^{\infty} B(0,n)) = T(E) = F$ (επειδή ο T είναι επί)
$\Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} X_n = F$.
Από το λήμμα του $Baire$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $intX_{n_0} \neq \emptyset$
$\Rightarrow int(n_0\overline{T(B(0,1))}) \neq \emptyset$
Έστω $y \in int(n_0\overline{T(B(0,1))}) \Rightarrow \frac{y}{n_0} \in int(\overline{T(B(0,1))})$
$\Rightarrow int(\overline{T(B(0,1))}) \neq \emptyset$.
Έστω $y_0 \in int(\overline{T(B(0,1))})$, άρα $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε
$B(y_0, 4c) \subseteq \overline{T(B(0,1))}$ (9)
Ειδικότερα, έχουμε: $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, B(y_0, \epsilon) \cap T(B(0,1)) \neq \emptyset$.
Αν $z \in B(y_0, \epsilon) \cap T(B(0,1)) \Rightarrow -z \in B(-y_0, \epsilon) \cap T(B(0,1))$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, B(-y_0, \epsilon) \cap T(B(0,1)) \neq \emptyset$
$\Rightarrow -y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$. (10)
(9)+(10)$\Rightarrow -y_0 + B(y_0, 4c) \subseteq \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))}$.
Από λήμμα (1)$\Rightarrow B(0,4c) \subseteq 2\overline{T(B(0,1))}$.
Άρα $B(0,4c) \subseteq 2\overline{T(B(0,1))}$
άρα $B(0,2c) \subseteq \overline{T(B(0,1))}$.

Δεύτερο βήμα: $T : E \longrightarrow F$ συνεχής γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c)$ (1)
Θα δείξω ότι: $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $T(B(0,1)) \supset B(0,c)$.
Απόδειξη: Έστω $y \in B(0,c) \Rightarrow \|y\| < c$
$\Rightarrow y \in \overline{T(B(0,\frac{1}{2}))}$
$\forall \epsilon > 0, B(y,\epsilon) \cap T(B(0,\frac{1}{2})) \neq 0$
$\exists z \in B(0,\frac{1}{2})$ τέτοιο ώστε $T(z) \in B(y,\epsilon)$
$\Leftrightarrow \|z\| < \frac{1}{2}$ και $\|Tz - y\| < \epsilon$.
Για $\epsilon = \frac{c}{2}$:
$\exists z_1 \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ και $\|y - T(z_1)\| < \frac{c}{2}$ (2)
Θέτω $y_1 = y - T(z_1) \in B(0,\frac{c}{2}) \subset \overline{T(B(0,\frac{1}{4}))}$ (από την (1)),
με $\|y_1\| < \frac{c}{2}$ και $y_1 \in \overline{T(B(0,\frac{1}{4}))}$
$\forall \epsilon > 0, B(y_1,\epsilon) \cap T(B(0,\frac{1}{4})) \neq \emptyset$.
$\exists z_2 \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ και $\|y_1 - T(z_2)\| < \epsilon$.
Για $\epsilon = \frac{c}{4}$:
$\exists z_2 \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ και $\|y_1 - T(z_2)\| < \frac{c}{4}$.
Θέτω $y_2 = y_1 - T(z_2) = y - T(z_1) - T(z_2) = y - T(z_1 + z_2)$.
Με την ίδια διαδικασία θα βρω ότι:
$\exists z_3 \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_3\| < \frac{1}{8}$ και $\|y_2 - T(z_3)\| < \frac{c}{8}$.
Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε ότι:

$\exists z_n \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ και $\|y_{n-1} - T(z_n)\| < \frac{c}{2^n}$
$\Leftrightarrow \|y - T(z_1 + z_2 + ... + z_n)\| < \frac{c}{2^n}$ (3)
Θεωρούμε την ακολουθία:
$x_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + ... + z_n$
Δείχνουμε ότι η x_n είναι ακολουθία $Cauchy$.
$\|x_n - x_m\| = \|z_{m+1} + ... + z_n\| \leq$
$\|z_{m+1}\| + \|z_{m+2}\| + ... + \|z_n\| <$
$\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-m}}) < \frac{1}{2^m} < \epsilon,$
διότι $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (θέτω $n_0 = [\log_2(\frac{1}{\epsilon})] + 1$) τέτοιο ώστε
$\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow m \geq n_0 > \log_2(\frac{1}{\epsilon}) \Rightarrow 2^m > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^m} < \epsilon.$
Επειδή ο E είναι χώρος $Banach$, έπεται ότι η x_n συγκλίνει,
έστω $x_n \to x$. Επειδή η T είναι συνεχής, $Tx_n \to Tx$.

Έχουμε $\|x\| = \|\lim_n x_n\| = \lim_n \|x_n\|$
$= \lim_n \|z_1 + z_2 + ...z_n\| \leq \lim_n(\|z_1\| + \|z_2\| + ... + \|z_n\|)$
$< \lim_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$
Επίσης από την (3) έχουμε: $T(x_n) \to y$. Άρα $T(x) = y$.
Άρα δείξαμε ότι:
$\forall y \in B(0, c), \exists x \in B(0, 1)$ τέτοιο ώστε $y = T(x)$.
Άρα $B(0, c) \subseteq T(B(0, 1))$. □

Πόρισμα 2.9 *E, F χώροι Banach και $T : E \longrightarrow F$ γραμμικός τελεστής, συνεχής, '1-1' και 'επί'. Τότε ο $T^{-1} : F \longrightarrow E$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης έπεται ότι αν U είναι ένα ανοικτό στο E, τότε το $T(U)$ είναι ανοικτό στο F.
Άρα, αν U είναι ένα ανοικτό στο E, τότε το $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ είναι ανοικτό στο F. Άρα η T^{-1} είναι συνεχής από το θεώρημα 8.21 από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη. □

Παρατήρηση 2.10 *E γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$.*
Υποθέτουμε ότι οι $(E, \|\cdot\|_1)$ και $(E, \|\cdot\|_2)$ είναι χώροι Banach.
Επιπλέον αν $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in E$, (1)
τότε οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.
(ισοδύναμες νόρμες: $\exists c_1$ τέτοιο ώστε $\|x\|_2 \leq c_1\|x\|, \forall x \in E$ και $\exists c_2$ τέτοιο ώστε $\|x\|_1 \leq c_2\|x\|, \forall x \in E$).

Θεωρώ την ταυτοτική απεικόνιση:

$$id : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$$

Άρα από την (1): $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $\|id(x)\|_2 \leq c\|x\|_1$,
δηλαδή η id είναι φραγμένη. Από το πόρισμα 2.9 έπεται ότι και η

$id^{-1} : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ θα είναι φραγμένη, άρα $\exists c' > 0$ τέτοιο ώστε $\|id^{-1}(x)\|_1 \leq c'\|x\|_2$, δηλαδή $\|x\|_1 \leq c'\|x\|_2$.
Άρα από την (1) έπεται ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 2.11 *Έστω E, F χώροι Banach και $T : E \to F$ γραμμικός τελεστής. Το γράφημα της T ορίζεται ως εξής:*

$$Gr(T) = \{(x, T(x))/x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Θεώρημα 2.12 *(κλειστού γραφήματος)*
Έστω οι E, F είναι χώροι Banach και $T : E \to F$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι το γράφημα είναι κλειστό στον $E \times F$. Τότε ο T είναι συνεχής.

Απόδειξη: Επειδή οι E, F είναι χώροι *Banach*, έπεται ότι ο $E \times F$ είναι χώρος *Banach* (παράδειγμα $3.15(ii)$ (Νεγρεπόντης/Ζαχαριάδης)). Επίσης $Gr(T)$ είναι χώρος *Banach* ως κλειστό υποσύνολο χώρου *Banach* (πρόταση 2.13 (Νεγρεπόντης/Ζαχαριάδης».
Θεωρούμε τις απεικονίσεις:
$\Pi_1 : Gr(T) \to E$ με $\pi_1(x, T(x)) = x, \forall x \in E$
και
$\Pi_2 : Gr(T) \to F$ με $\pi_2(x, T(x)) = Tx, \forall x \in E$
Οι Π_1, Π_2 είναι γραμμικές και φραγμένες.
Η Π_1 είναι ΄ 1-1 ΄ και ΄ επί ΄. Άρα από το πόρισμα 2.9 έπεται ότι η Π_1^{-1} είναι φραγμένη.
Άρα και η σύνθεση $\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1} : E \to F$ με $(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})(x) = \Pi_2(x, T(x)) = T(x)$, δηλαδή η T, είναι συνεχής. $\square$

Κεφάλαιο 3

Συμπαγείς τελεστές

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τους συμπαγείς τελεστές και κάποιες ιδιότητές τους σε χώρους *Banach*.
Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή εξετάζουμε τη σχέση των συμπαγών τελεστών με τους πεπερασμένης τάξης και στη συνέχεια μελετάμε το 'φάσμα' τους με την βοήθεια του θεωρήματος *Riesz*.

Ορισμός 3.1 *Έστω E και F δύο χώροι Banach. Θα λέμε ότι ένας τελεστής $T \in L(E, F)$ είναι συμπαγής αν το $T(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλαδή το $\overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές) για την νόρμα τοπολογία. Συμβολίζουμε με $K(E, F)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών και θέτουμε $K(E) = K(E, E)$.*

Ορισμός 3.2 *Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X$. Το A είναι ολικά φραγμένο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, ώστε $A \subseteq \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon)$*

Λήμμα 3.3 *Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα. Αν το $A \subseteq X$ είναι ολικά φραγμένο, τότε το $\bar{A}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Απόδειξη: Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο έπεται ότι για $\epsilon > 0, \exists x_1, x_2, ..., x_n \in A$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \quad (1)$$

Έστω $z \in \bar{A}$. Τότε $\exists x \in A$ τέτοιο ώστε $z \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$. (2)
Επίσης επειδή $x \in A$, από την (1), $\exists i_0 \in \{1, ..., n\}$ τέτοιο ώστε $x \in B(x_{i_0}, \frac{\epsilon}{2})$, δηλαδή $\|x - x_{i_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$. (3)
Συνεπώς από (2) και (3) έχουμε:
$\|z - x_{i_0}\| = \|z - x\| + \|x - x_{i_0}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Άρα $z \in B(x_{i_0}, \epsilon)$.
Άρα $z \in \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon)$. □

Θεώρημα 3.4 *Το σύνολο $K(E,F)$ είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L(E,F)$ (για την νόρμα $\|\cdot\|_{L(E,F)}$).*

Απόδειξη: α) Γραμμικός υπόχωρος.
Έστω $T_1, T_2 \in K(E,F)$
$\overline{T_1(B_E)}$ είναι συμπαγές
και $\overline{T_2(B_E)}$ είναι συμπαγές.
Όμως το άθροισμα δύο συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο. Άρα το $\overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)}$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό, συνεπώς
$T_1(B_E)+T_2(B_E) \subseteq \overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)}$
$\Rightarrow \overline{T_1(B_E)+T_2(B_E)} \subseteq \overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)}$.
Επίσης ισχύει $\overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)} \subseteq \overline{T_1(B_E)+T_2(B_E)}$ (βιβλίο Νεγρεπόντης/Ζαχαριάδης, πρόταση 11.6(iii)).
Συνεπώς $\overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)} = \overline{T_1(B_E)+T_2(B_E)}$
Δηλαδή το $\overline{(T_1+T_2)(B_E)} = \overline{T_1(B_E)}+\overline{T_2(B_E)}$ είναι συμπαγές,
άρα $(T_1+T_2) \in K(E,F)$. Όμοια δείχνουμε και ότι αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $T \in K(E,F)$, τότε $\lambda T \in K(E,F)$.
(Την κλειστότητα την δείχνουμε με ακολουθία).
Υποθέτουμε ότι $(T_n) \in K(E,F)$ είναι μία ακολουθία συμπαγών τελεστών και $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Θα δείξω ότι $T \in K(E,F)$, δηλαδή ότι το $\overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές στο F. Όμως από το θεώρημα 5.18 (από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη) επειδή ο F είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε ότι το $\overline{T(B_E)}$ είναι ολικά φραγμένο. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $T(B_E)$ μπορεί να καλυφθεί με έναν πεπερασμένο αριθμό από σφαίρες $B(f_i, \epsilon)$ του F. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$, έχουμε ότι: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$,
$\|T_n - T\| < \frac{\epsilon}{2}$ (1).
Θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη του $\overline{T_n(B_E)} : \{B(f, \frac{\epsilon}{2})/f \in \overline{T_n(B_E)}\}$.
Επειδή το $\overline{T_n(B_E)}$ είναι συμπαγές, η παραπάνω κάλυψη θα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή υπάρχουν πεπερασμένα $f_1, f_2, ..., f_n \in \overline{T_n(B_E)}$ τέτοια ώστε $\overline{T_n(B_E)} = \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$.
Επίσης για $x \in B_E$ έχουμε:
$\|T(x) - f_i\| = \|T(x) - T_n(x) + T_n(x) - f_i\|$
$\leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - f_i\|$
$\leq \|T - T_n\|\|x\| + \|T_n(x) - f_i\|$
$\leq \|T - T_n\| + \|T_n(x) - f_i\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Άρα $T(x) \in \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \epsilon)$, δηλαδή δείξαμε ότι $T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \epsilon)$, άρα το $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.
Τέλος από το λήμμα 3.3 έπεται ότι το $\overline{T(B_E)}$ είναι ολικά φραγμένο. □

Ορισμός 3.5 *Συμβολίζουμε με $R(T)$ την εικόνα (Range) του T : $R(T) = \{Tx/x \in E\}$. Λέμε ότι ένας τελεστής $T \in L(E,F)$ είναι πεπερασμένου βαθμού, αν $dim R(T) < \infty$.*

Είναι φανερό ότι ένας συνεχής τελεστής πεπερασμένου βαθμού είναι συμπαγής. Πράγματι επειδή ο T είναι συνεχής, έχουμε:
$T(B_E) = \{Tx/x \in B_E\}$ και
$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|, \forall x \in B_E$.
Συνεπώς το $T(B_E)$ είναι φραγμένο, κατά συνέπεια το $\overline{T(B_E)}$ είναι και αυτό φραγμένο και κλειστό. Όμως $\overline{T(B_E)} \subseteq T(E)$ και το $T(E)$ είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, άρα επειδή το $\overline{T(B_E)}$ είναι κλειστό και φραγμένο, έπεται ότι είναιι και συμπαγές.(Θεώρημα:Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, βλ. *Rudin*). Άρα $T(B_E)$ σχετικά συμπαγές, άρα T συμπαγής.

Πόρισμα 3.6 *Έστω (T_n) μια ακολουθία συνεχών τελεστών πεπερασμένου βαθμού από τον E στον F και $T \in L(E,F)$ τέτοια ώστε $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$. Τότε $T \in K(E,F)$.*

Απόδειξη: Από την παραπάνω συζήτηση συμπαιρένουμε ότι η (T_n) είναι μια ακολουθία συμπαγών τελεστών τέτοια ώστε $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$. Άρα από το θεώρημα 3.4, έχουμε T συμπαγής, δηλαδή $T \in K(E,F)$. $\square$

Τώρα θα κάνουμε μία νύξη και θα αναφερθούμε στους χώρους *Hilbert*.

Οι χώροι *Hilbert* είναι χώροι *Banach* που η νόρμα τους καθορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 3.7 *(i) Έστω H γραμμικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στο H είναι μια συνάρτηση*

$$\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες
$(i)\langle x,x\rangle \geq 0$,
(ii) *αν* $\langle x,x\rangle = 0$ *τότε* $x = 0$,
$(iii)\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, *και*
$(iv)\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$
για κάθε $x,y,z \in H$ *και* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 3.8 *Από τις ιδιότητες (iii) και (iv) του ορισμού 3.7 προκύπτει ότι $\langle x, \lambda y+\mu z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$ για κάθε $x,y,z \in H$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Επίσης είναι προφανές ότι $\langle x,x\rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.*

Πρόταση 3.9 *(ανισότητα $Cauchy - Schwarz$). Αν H είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x,y \in H$ τότε $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.*

Απόδειξη: Αν $y = 0$ τότε η ανισότητα $Cauchy-Schwarz$ είναι προφανής. Αν $y \neq 0$ τότε η ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ είναι ισοδύναμη με την $\langle x, \frac{y}{\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}}\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle$, και άρα αρκεί νάποδείξουμε την ανισότητα για $y \in H$ με $\langle y,y\rangle = 1$. Αυτή προκύπτει

από το ότι
$0 \leq \langle x - \langle x,y\rangle y, x - \langle x,y\rangle y\rangle =$
$= \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle^2 + \langle x,y\rangle^2\langle y,y\rangle =$
$= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle^2. \quad \square$

Πρόταση 3.10 *Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ σ'ένα γραμμικό χώρο H καθορίζει μια νόρμα, την $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in H$.*

Απόδειξη: Οι ιδιότητες $(i), (ii), (iii)$ του ορισμού της νόρμας (3.1 από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη) έπονται εύκολα από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (3.6). Η τριγωνική ιδιότητα της νόρμας προκύπτει από την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ (από την παραπάνω πρόταση 3.9).

Ορισμός 3.11 *Ένας χώρος Banach$(H, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert αν η νόρμα του καθορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H. Δηλαδή, αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ στον H, ώστε $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in H$.*
Επίσης εαν H είναι ένας χώρος Hilbert και K ένας κλειστός υπόχωρος του H, τότε κάθε $x \in H$ μπορεί να γραφεί ως $x = y + z, \quad y \in K$ και
$z \in K^{-1} = \{z \in H / \langle z,x\rangle = 0, \forall x \in H\}$. (ορθογώνια ανάλυση ενός χώρου Hilbert).
Ονομάζουμε προβολή επί του K τη γραμμική απεικόνιση $P_K : H \to K$ τέτοια ώστε $P_K(x) = y$. Η P_K είναι φραγμένη, δηλαδή $P_K \in L(H,K), P_K^2 = P_K$ και $\|P_K x\| \leq \|x\|, \forall x \in H$.

Παρατήρηση 3.12 *Το περίφημο "πρόβλημα της προσεγγίσεως " αφορά το αντίστροφο του πορίσματος 3.6. Για δεδομένο συμπαγή τελεστή, υπάρχει ακολουθία τελεστών (T_n) πεπερασμένου βαθμού τέτοια ώστε $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$;*
Γενικά η απάντηση είναι αρνητική, ακόμα και για ορισμένους κλειστούς υποχώρους του $l^p (1 < p < \infty, p \neq 2)$. Η απάντηση όμως είναι καταφατική σε πολλές περιπτώσεις, για παράδειγμα, αν ο F είναι ένας χώρος Hilbert.

Πρόταση 3.13 *Έστω E χώρος Banach και F χώρος Hilbert.*
Έστω $T \in K(E,F)$. Τότε υπάρχει ακολουθία (T_n) συνεχών τελεστών πεπερασμένου βαθμού από το E στο F τέτοια ώστε $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$.

Απόδειξη: Θέτουμε $K = \overline{T(B_E)}$ (συμπαγές στο F). Για δεδομένο $\epsilon > 0$ καλύπτουμε το $K = \bigcup_{f_i \in K} B(f_i, \epsilon)$. Επειδή το K είναι συμπαγές, $\exists f_1, f_2, ..., f_n \in K$ τέτοιο ώστε $K = \bigcup_{i=1} B(f_i, \epsilon)$. Θέτουμε $G = \langle f_1, ..., f_n\rangle$ τον γραμμικό χώρο που παράγεται από τα $f_1, f_2, ..., f_n$. Έστω $P_G : F \to G$ την προβολή του F στον G. (δηλαδή P_G φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $P_G(x) = x, \forall x \in G$).
Θέτουμε $T_\epsilon = P_G \circ T$.
Επειδή ο G είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος, έπεται ότι ο T_ϵ είναι πεπερασμένου βαθμού. Θα δείξουμε ότι $\|T_\epsilon - T\|_{L(E,F)} < 2\epsilon$.
$\forall x \in B_E$, έχουμε ότι $Tx \in T(B_E) \subseteq \overline{T(B_E)} = \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \epsilon)$, άρα $Tx \in \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \epsilon)$.

Συνεπώς, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $Tx \in B(f_{i_0}, \epsilon)$ δηλαδή
$\|Tx - f_{i_0}\| < \epsilon$ (1).
Εφαρμόζοντας την προβολή P_G, παίρνουμε:
$\|P_G(Tx - f_{i_0})\| < \epsilon$
δηλαδή $\|(P_G \circ T)x - P_G(f_{i_0})\| < \epsilon$, άρα
$\|T_\epsilon x - f_{i_0}\| < \epsilon$ (2).
Όμως από (1) και (2), $\forall x \in B_E, \|T_\epsilon - T\| \leq \|T_\epsilon x - Tx\|$
$= \|T_\epsilon x - f_{i_0} - (Tx - f_{i_0})$
$\leq \|T_\epsilon x - f_{i_0}\| + \|Tx - f_{i_0}\|$
$< 2\epsilon$.
Άρα παίρνοντας τιμές για $\epsilon = \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$ κατασκευάζουμε μία ακολουθία (T_n) φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης τέτοια ώστε $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$. $\square$

Ορισμός 3.14 *Έστω $T \in L(E)$.*
Φάσμα:σ(T)=$\{\lambda \in \mathbb{R}/T - \lambda I$ δεν είναι ΄1-1΄ και επί$\}$.

Ορισμός 3.15 *ιδ(T)= $\{$το σύνολο των ιδιοτιμών του $T\}$ ⊆σ(T)=*
=$\{\lambda \in \mathbb{R}/T - \lambda I$ δεν είναι ΄1-1΄ και επί$\}$.

Παρατήρηση 3.16 *Λέμε ότι το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνο αν*
$\exists x \in E, x \neq 0$
τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda x$.
$\Leftrightarrow Tx - \lambda x = 0$
$\Leftrightarrow (T - \lambda I)x = 0$
$(\Leftrightarrow x \neq 0 \in ker(T - \lambda I))$
$\Leftrightarrow Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}. \Leftrightarrow T - \lambda I$ *δεν είναι ΄1-1΄*
άρα προφανώς ισχύει:
ιδ(T)⊆σ(T), διότι αν ένας γραμμικός τελεστής δεν έιναι ΄1-1΄ τότε δεν είναι ΄1-1΄ και ΄ επί ΄.

Ορισμός 3.17 *Έστω $\lambda \in$ ιδ(T). Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή*
$\lambda \in$ ιδ(T) είναι: $V(\lambda) = \{x \in E/Tx = \lambda x\}$.

Παρατήρηση 3.18 *(i) Όταν $dimE < \infty$ έχουμε ιδ(T)=σ(T).*
(ii) Όταν $dimE = \infty$ ο εγκλεισμός είναι εν γένει αυστηρός: ιδ(T)⊊σ(T).

Παράδειγμα 3.1 στο l^2. Θέτουμε $T : l^2 \to l^2$
Έστω $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \in l^2$
και $T(a) = (0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) \in l^2$.
Τότε 0 ∈σ(T)⇔ $T - 0I$ δεν είναι ΄1-1΄ και επί.
Προφανώς η T είναι ΄1-1΄ αλλά δεν είναι επί. Συνεπώς 0 ≠ιδ(T) αλλά 0 ∈σ(T).

Λήμμα 3.19 *Αν $T \in L(E)$ και $\|T\| < 1$, τότε ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι η σειρά:$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $S_m = \sum_{n=0}^{m} T^m = I + T + T^2 + ... + T^m$.
$(I-T)S_m = S_m(I-T) = I - T^{m+1}$.
Επίσης έχουμε $\|T^m\| \leq \|T\|^m, \forall m$.
Άρα $\lim\limits_{m\to+\infty} \|T^m\| \leq \lim\limits_{m\to+\infty} \|T\|^m = 0$ (1) επειδή $\|T\| < 1$.
Κατά συνέπεια, $\lim\limits_{m\to+\infty} \|(I-T)S_m - I\| = \lim\limits_{m\to+\infty} \|S_m(I-T) - I\| =$
$= \lim\limits_{m\to+\infty} \|I - T^{m+1} - I\| = \lim\limits_{m\to+\infty} \|T^{m+1}\| = 0$ λόγω της (1).
Άρα, αν $m > n$,
$\|S_m - S_n\| = \|T^{n+1} + T^{n+2} + ... + T^m\| =$
$= \| \sum_{k=n+1}^{m} T^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{n+1} - \|T\|^{m+1}}{1-\|T\|} \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|} \longrightarrow 0$.

Άρα η S_m είναι ακολουθία $Cauchy$ και συνεπώς συγκλίνει,
δηλαδή υπάρχει $S \in L(E)$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = S$.
Άρα $S = \lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \lim\limits_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$,
και $(I-T)S = (I-T)(I + T + T^2 + ... + T^m + ...) = I$
και $S(I-T) = (I + T + T^2 + ... + T^m + ...)(I-T) = I$.
Άρα $(I-T)^{-1} = S$. □

Πρόταση 3.20 *Έστω $T \in L(E)$, τότε το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και επιπλέον $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.*

Απόδειξη: Έστω $\lambda \notin [-\|T\|, \|T\|]$, δηλαδή $|\lambda| > \|T\|$. Πρώτα έστω $|\lambda| > \|T\|$. Θα δείξουμε ότι $\lambda \notin \sigma(T)$.
Άρα έχουμε $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$. Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι ο $I - \frac{T}{\lambda}$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή '1-1' και επί. Άρα και ο $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος (ως μη μηδενικό πολλαπλάσιο αντιστρέψιμου), δηλαδή ο $T - \lambda I$ είναι '1-1' και επί, άρα $\lambda \notin \sigma(T)$.
Στην προηγούμενη παράγραφο δείξαμε ότι $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.
Για να δείξουμε ότι το σ(T) είναι συμπαγές αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό.
Δηλαδή θα δείξουμε ότι το $\sigma(T)^c = \{\lambda \in \mathbb{R}/T - \lambda I$ είναι '1-1' και επί$\}$ είναι ανοικτό.
Έστω $\lambda_0 \in \sigma(T)^c$ δηλαδή $T - \lambda_0 I$ είναι '1-1' και επί και κατά συνέπεια ο $(T - \lambda_0 I)$ είναι αντιστρέψιμος.
Θέτω $m = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|$.
Θέτω $\epsilon = \frac{1}{m} > 0$.
Θα δείξουμε ότι $B(\lambda_0, \epsilon) \subseteq \sigma(T)^c$. Έστω $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$, τότε
$|\lambda - \lambda_0| < \epsilon = \frac{1}{m}$. (1)
$\|T - \lambda I - (T - \lambda_0 I)\| = \|(\lambda_0 - \lambda)I\| = |\lambda - \lambda_0|\|I\| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{m}$ από την (1).
Στην συνέχεια παίρνουμε:
$\|T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I) - I\| =$
$= \|T - \lambda_0 I)^{-1}[(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)]\| = m$
$\leq \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|\|(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)\| < m\frac{1}{m} = 1$.
Συνεπώς από το λήμμα 3.19 έπεται ότι ο $(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$ είναι αντιστρέψιμος, και επειδή $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος

$\Rightarrow (T-\lambda I)$ αντιστρέψιμος, ('1-1' και επί)
$\Rightarrow \lambda \in \sigma(T)^c$. $\square$

Λήμμα 3.21 *(Λήμμα Reisz)*
Έστω E διανυσματικός χώρος με νόρμα και M κλειστός υπόχωρος του E τέτοιος ώστε $M \neq E$.
Τότε $\forall \epsilon > 0, \exists u \in E$ τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ και $dist(u, M) \geq 1-\epsilon$.
$(dist(u, M) = inf\{\|u-m\|/m \in M\})$.

Απόδειξη: Έστω $v \in E, v \neq M$. Επειδή το M είναι κλειστό, έχουμε ότι $d = dist(v, M) > 0$.
$\forall \epsilon > 0$ έχουμε ότι, $\overline{B(v, \frac{d}{1-\epsilon})} \cap M \neq \emptyset$. Έστω $m_0 \in \overline{B(v, \frac{d}{1-\epsilon})} \cap M$, δηλαδή $m_0 \in M$ και $\|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\epsilon}$.
Άρα έχουμε $d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\epsilon}$. (1)
Θέτουμε $u = \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$. Προφανώς $\|u\| = 1$.
Έχουμε, για κάθε $m \in M$:
$\|u - m\| = \|\frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m\| = \|\frac{v-m_0-m\|v-m_0\|}{\|v-m_0\|}\| = \frac{v-(m_0+m\|v-m_0\|)}{\|v-m_0\|}$, όπου ο παρονομαστής είναι $\leq \frac{d}{1-\epsilon}$ και άρα
$\geq \frac{\|v-(m_0+m\|v-m_0\|)\|}{\frac{d}{1-\epsilon}}$, όπου σάυτήν την περίπτωση το $(m_0 + m\|v - m_0\|) \in M$ και επίσης ο αριθμητής είναι $\geq d$ και άρα
$\geq \frac{d}{\frac{d}{1-\epsilon}} = 1-\epsilon$. $\square$

Θεώρημα 3.22 *(Θεώρημα Reisz)*
Έστω E διανυσματικός χώρος με νόρμα τέτοια ώστε η σφαίρα $B_E = \{x \in E/\|x\| = 1\}$ να είναι συμπαγής. Τότε ο E είναι πεπερασμένης διάστασης.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο E είναι άπειρης διάστασης. Έστω $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, ...\}$ βάση του E. Θέτουμε $E_1 = \langle e_1 \rangle, E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ κ.ο.κ. $E_n = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$.
Προφανώς $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq ... \subsetneq E_n \subsetneq E_{n+1} \subsetneq ...$
Οι υπόχωροι $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ είναι πεπερασμένης διάστασης και είναι κλειστοί υπόχωροι (διότι: οι $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι, θεώρημα 2.8 από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη και κλειστοί, πρόταση 2.13 από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη).
Από το προηγούμενο λήμμα 3.21 (Λήμμα *Reisz*), $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $u_n \in E_n$ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$ και $dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Άρα κατασκευάζουμε μια ακολουθία $\{u_n\} \in E_n$ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$.
Συνεπώς $\|u_n - u_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$ και κατά συνέπεια $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}, \forall m < n$.
Άρα αν $\{u_{n_k}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{u_n\}$ προφανώς θα ισχύει $\|u_{n_{k_1}} - u_{n_{k_2}}\| \geq \frac{1}{2}$ για $k_1 < k_2$, άρα η $\{u_{n_k}\}$ δεν συγκλίνει, δηλαδή η $\{u_n\}$ δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα το B_E δεν είναι συμπαγές (θεώρημα 5.18 από το βιβλίο του Νεγρεπόντη/Ζαχαριάδη). $\square$

Πρόταση 3.23 *Έστω $T \in K(E)$.*
Αν ο $I - T$ είναι '1-1', τότε είναι και επί.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο $I - T$ δεν είναι επί,
δηλαδή $E_1 = R(I - T) = \{(I - T)(v)/v \in E\} \neq E$.
Ο E_1 είναι χώρος $Banach$ ως κλειστός υπόχωρος χώρου $Banach$.
Έστω $v_1 = (I - T)(v) \in E_1, v \in E$ ένα τυχαίο στοιχείο του E_1.
Τότε, $T(v_1) = T((I - T)(v)) = (I - T)(T(v)) \in E_1$. Άρα ο E_1 είναι αναλλοίωτος από τον T (δηλαδή $T(E_1) \subseteq E_1$). Άρα $T \mid E_1 \in L(E_1)$.
Επιπλέον το $\overline{T(B_{E_1})} \subseteq \overline{T(B_E)}$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς.
Συνεπώς $T \mid E_1 \in K(E_1)$.
Επίσης ο $E_2 = (I - T)(E_1)$ είναι κλειστός υπόχωρος του E_1. Επιπλέον $E_2 \neq E_1$ διότι αν $E_2 = E_1$ τότε
$(I - T)^2(E) = (I - T)(E)$. Συνεπώς $\forall v \in E, \exists w \in E$
τέτοιο ώστε $(I - T)(v) = (I - T)^2(w)$.
Άρα $(I - T)^2(w) - (I - T)(v) = 0 \Rightarrow$
$(I - T)((I - T)(w) - v) = 0$.
Άρα $(I - T)(w) - v \in Ker(I - T) = \{0\}$ διότι $I - T$ είναι '1-1' από υπόθεση. Άρα $\forall v \in E, \exists w \in E$ τέτοιο ώστε $(I - T)(w) = v$, δηλαδή $I - T$ είναι ' επί ' (Άτοπο), άρα $E_2 \neq E_1$.
Θέτοντας $E_n = (I - T)^n(E), \forall n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία κλειστών υπόχωρων. Εφαρμόζοντας το λήμμα του $Reisz$ στους υπόχωρους $\{E_n\}$, βρίσκουμε μία ακολουθία $\{u_n\} \in E$
τέτοια ώστε $u_n \in E_n, \forall n \in \mathbb{N}$, με $\|u_n\| = 1$ και $dist(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. (1)
Επομένως $Tu_n - Tu_m = Tu_n - u_n - (Tu_m - u_m) + (u_n - u_m)$.
Άρα για $n > m$, τότε $E_{n+1} \subset E_n \subset ... \subset E_{m+1} \subset E_m$.
Συνεπώς, $Tu_n - Tu_m + u_m = -(I - T)(u_n) + (I - T)(u_m) + u_n$ το οποίο ανήκει στο E_{m+1}, διότι το $-(I - T)(u_n) \in E_{n+1}$, το $(I - T)(u_m) \in E_{m+1}$ και το $u_n \in E_n$.
Άρα υπάρχει $x \in E_{m+1}$ τέτοιο ώστε $Tu_n - Tu_m = -u_m + x$.
Παίρνοντας τις νόρμες και στα δύο μέλη έχουμε:
$\|Tu_n - Tu_m\| = \|x - u_m\| = \|u_m - x\| \geq dist(u_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$, λόγω της (1).

Άρα συμπεραίνοντας όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος $Reisz$ καταλήγουμε ότι το $\overline{T(B_E)}$ δεν είναι συμπαγές. Άτοπο διότι ο T είναι συμπαγής. Άρα $(I - T)$ είναι επί. □

Θεώρημα 3.24 *Έστω $T \in K(E)$ με $dimE = \infty$.*
Τότε ισχύει:
(α) $0 \in \sigma(T)$
(β) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \iota\delta(T) \setminus \{0\}$. ($\iota\delta(T) \subseteq \sigma(T)$)
(γ) Ισχύει ένα από τα ακόλουθα:
-$\sigma(T) = \{0\}$,
-ή $\sigma(T) \setminus \{0\}$ είναι πεπερασμένο,

-*ή σ(T)∖{0} είναι μηδενική ακολουθία.*

Απόδειξη: (α). Έστω 0 $\notin$σ(T), άρα ο T είναι ΄1-1΄ και επί . Άρα υπάρχει $T^{-1}: E \to E$ ο οποίος είναι συνεχής. Άρα και ο $I = T \circ T^{-1}$ είναι συμπαγής ως σύνθεση συμπαγούς και συνεχή.
Άρα $I(B_E) = B_E$ είναι συμπαγής και συνεπώς από το θεώρημα $Reisz$ έπεται ότι ο E είναι πεπερασμένης διάστασης (άτοπο). Άρα 0 $\in$σ(T).

(β). Έστω λ $\in$σ(T), $\lambda \notin 0$. Θα δείξουμε ότι λ $\in$ιδ(T).
Έστω λ $\neq$ιδ(T). Άρα ο $T - \lambda I$ είναι ΄1-1΄. Άρα από το θεώρημα 3.23 έπεται ότι ο $T - \lambda I$ είναι επί.
Άρα $T - \lambda I$ είναι ΄1-1΄ και επί $\Rightarrow$ λ $\notin$σ(T), (άτοπο). Άρα λ $\in$ιδ(T). □

Για την συνέχεια της αποδείξεως θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.25 *Έστω $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών διαφορετικών μεταξύ τους τέτοια ώστε*

$$\lambda_n \to \lambda$$

και

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}, \forall n.$$

Τότε $\lambda = 0$.
Με άλλα λόγια, όλα τα σημεία του σ(T)∖{0} είναι μεμονομένα.

Απόδειξη: από το (β) γνωρίζουμε ότι λ_n $\in$Ιδ(T).
Έστω $e_n \neq 0$ με $(T - \lambda_n I)e_n = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το e_n είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_n.
Έστω E_n ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τα $e_1, e_2, ..., e_n$.
Θα δείξουμε ότι $E_n \subsetneq E_{n+1}$ για κάθε n. Αρκεί να επαληθεύσουμε ότι, για κάθε n, τα διανύσματα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Θα το δείξουμε με επαγωγή ως προς n.
Το e_1 εφόσον είναι μη μηδενικό, είναι ανεξάρτητο.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (υπόθεση της επαγωγής).
Θα δείξουμε ότι τα $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.
Έστω ότι δεν είναι. Επειδή τα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα έπεται ότι το e_{n+1} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $e_1, e_2, ..., e_n$.
Ας υποθέσουμε ότι: $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. (1)
Τότε: $T(e_{n+1}) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)$= (λόγω γραμμικότητας)
$=\sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i e_i$ (2), επειδή $T(e_i) = \lambda_i e_i$.

Τώρα $T(e_{n+1}) = \lambda_{n+1} e_{n+1}$= από την (1)
$=\lambda_{n+1}(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_{n+1}e_i$. (3)
Άρα από την (2) και (3)$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_{n+1}e_i$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_{n+1}e_i = 0$.
Επομένως $\sum_{i=1}^{n}(a_i\lambda_i - a_i\lambda_{n+1})e_i = 0 \Rightarrow$ επειδή τα $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έπεται ότι $a_i\lambda_i - a_i\lambda_{n+1} = 0, \forall i$
$\Rightarrow a_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0, \forall i$
και επειδή $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ (επειδή οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους)
$\Rightarrow a_i = 0, \forall i$.
Άρα από την (1)$\Rightarrow e_{n+1} = 0$, άτοπο.
Οπότε e_{n+1} γραμμικώς ανεξάρτητα, συνεπώς $E_n \subsetneq E_{n+1}$ για κάθε n.
Επειδή το $(T - \lambda_n I)e_n = 0$ έπεται ότι $(T - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1}$.
Εφαρμόζουμε το λήμμα του $Reisz$ και κατασκεάζουμε μια ακολουθία $(u_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε $u_n \in E_n, \|u_n\| = 1$ και $dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ για $n \geq 2$. Έστω $2 \leq m < n$, οπότε

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

Έχουμε

$$\|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\| = \|\frac{(Tu_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \frac{(Tu_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m\|$$

$\geq dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$, διότι $\frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} \in E_{n-1}, \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} \in E_{m-1} \subset E_{n-1}$ και $u_m \in E_m \subset E_{n-1}$. Άρα η ακολουθία $(\frac{Tu_n}{\lambda_n})$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Οπότε αν $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, σημαίνει ότι η (Tu_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, διότι T συμπαγής και κάθε ακολουθία στο $\overline{T(B_E)}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Τώρα συνεχίζουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.24 (γ).

Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Προφανώς έχουμε:

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε άπειρο υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου περιέχει ένα σημείο συσσώρευσής του. Συνεπώς αν το A_n είναι άπειρο, επειδή το $\sigma(T)$ είναι συμπαγές έπεται ότι το A_n θα περιέχει ένα σημείο συσσώρευσης του $\sigma(T)$. Από το προηγούμενο λήμμα όμως έχουμε ότι κάθε σημείο του $\sigma(T) \setminus \{0\}$ είναι μεμονομένο, άρα το A_n δεν περιέχει σημείο συσσώρευσης του $\sigma(T)$. Άρα, για κάθε n, το A_n είναι πεπερασμένο ή κενό, κατά συνέπεια το σύνολο $\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κενό ή

πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Άρα το $\sigma(T) = \{0\}$ ή $\sigma(T) \smallsetminus \{0\}$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.
Επειδή η ακολουθία $\frac{1}{n}$ συγκλίνει στο 0, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0, \frac{1}{n} < \epsilon$ (1). Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα σύνολα A_n είναι πεπερασμένα, έπεται ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$ είναι πεπερασμένο. Αν το $\sigma(T) \smallsetminus \{0\}$ είναι αριθμήσιμο τότε μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του, έτσι ώστε $\sigma(T) \smallsetminus \{0\} = \{a_1, a_2, ..., a_k, ...\}$ και τα στοιχεία $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ να βρίσκονται στο $\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$. Άρα $a_n \notin \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$ για κάθε $n > k$. Συνεπώς, για κάθε $n > k, |a_n| < \frac{1}{n_0}$.
Θέτουμε $m = max\{n_0, k\}$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq n$, έχουμε (από την (1)) $|a_n| < \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Άρα τα στοιχεία του $\sigma(T) \smallsetminus \{0\}$ είναι όροι μηδενικής ακολουθίας. $\square$