

ΣΠΥΡΟΣ ΓΚΟΡΜΠΑΤΣΗΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ  
ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ | ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΡΛΟΒΑΣΙ | 10 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2017



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

ΚΑΡΑΧΑΛΙΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ :

ΚΑΡΑΧΑΛΙΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΧΑΤΖΗΝΙΚΗΤΑΣ ΑΓΑΠΗΤΟΣ

ΧΟΥΣΙΑΔΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ



*Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω το συνεπιβλέπων κ.  
Κυριαζόπουλο για την καθοδήγηση και τη βοήθεια κατά τη  
διάρκεια της εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας.*

*Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους  
φίλους Τζένιο, Αντρέα και Κώστα για τη βοήθεια και τη στήριξη  
τους αυτά τα χρόνια.*



# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	ix
<b>1 Εξισώσεις στη μια διάσταση</b>	<b>1</b>
1.1 Αυτόνομες εξισώσεις	1
1.1.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα	1
1.1.2 Γεωμετρία ροών	5
1.1.3 Ευστάθεια-αστάθεια σημείων ισορροπίας	15
1.2 Στοιχειώδης διακλαδώσεις	17
1.2.1 Εξάρτιση από παραμέτρους	17
1.2.2 Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης	21
1.2.3 Τοπικές διαταραχές κοντά στα σημεία ισορροπίας	22
1.2.4 Παράδειγμα σε κύκλο	24
<b>2 Εξισώσεις στις δυο διαστάσεις</b>	<b>27</b>
2.1 Αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο	27
2.2 Γραμμικά συστήματα	29
2.2.1 Ιδιότητες λύσεων	29
2.2.2 Υποβιβασμός σε κανονική μορφή	31
2.3 Κοντά στα σημεία ισορροπίας	34
2.3.1 Ασυμπτωτική ευστάθεια και αστάθεια από τη γραμμικοποίηση	34
2.3.2 Ευσταθείς - Ασταθείς Πολλαπλότητες	37
2.3.3 Ισοδυναμία Ροών κοντά σε Υπερβολικά Σημεία Ισορροπίας	38
2.4 Παρουσία μιας μηδενικής ιδιοτιμής	39
2.4.1 Ευστάθεια - Αστάθεια	39
2.4.2 Διακλαδώσεις	40
2.4.3 Κεντρικές πολλαπλότητες	42
2.5 Παρουσία μόνο φανταστικών ιδιοτιμών	46

2.5.1	Ευστάθεια-Αστάθεια . . . . .	46
2.5.2	Διακλάδωση Poincare-Andronov-Hopf . . . . .	52
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>58</b>



# Εισαγωγή

Ένα δυναμικό σύστημα περιγράφει την μεταβολή των στοιχείων ενός χώρου στο πέρασμα του χρόνου. Τέτοια συστήματα έχουν εφαρμογή σε επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία και τα οικονομικά.

Αυτή η πτυχιακή εργασία αποτελεί μια εισαγωγή στη βασική θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε αυτόνομες εξισώσεις στη μια διάσταση. Ξεκινάμε με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας και ορίζουμε τη ροή. Έπειτα προσεγγίζουμε γεωμετρικά τη ροή και ορίζουμε την τροχιά, τα σημεία ισορροπίας και προσδιορίζουμε την ευστάθεια ή την αστάθεια σε αυτά. Έστερα μελετάμε τη συμπεριφορά των λύσεων στην παρουσία παραμέτρου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με συστήματα στο επίπεδο. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάζουμε γραμμικά συστήματα και ορίζουμε τη ροή, την τροχιά, και τα σημεία ισορροπίας. Έπειτα, για μη γραμμικά συστήματα με τη γραμμικοποίηση χαρακτηρίζουμε τα σημεία ισορροπίας (ευστάθεια - αστάθεια) και για σαγματικά σημεία ισορροπίας δίνουμε τους ορισμούς της ευσταθής και ασταθής πολλαπλότητας. Τέλος ασχολούμαστε με την ευστάθεια και τις διακλαδώσεις για μη-υπερβολικά συστήματα πρώτα στην παρουσία μιας μηδενικής ιδιοτιμής και ύστερα στην παρουσία μόνο φανταστικών ιδιοτιμών. Ειδικά στην παρουσία φανταστικών ιδιοτιμών ασχολούμαστε με το θεώρημα διακλαδώσεων Poincare-Andronov-Hopf.

Η πτυχιακή βασίστηκε κυρίως στο βιβλίο *Dynamics and Bifurcations* των J.K.Hale και H.Kocak, για τα σχήματα χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Mathematica και το κείμενο συντάχθηκε σε  $\text{\LaTeX}$ .

# Κεφάλαιο 1

## Εξισώσεις στη μια διάσταση

### 1.1 Αυτόνομες εξισώσεις

#### 1.1.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Έστω  $I$  ένα ανοιχτό διάστημα στο  $\mathbb{R}$  και έστω

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow x(t)$$

να είναι πραγματική παραγωγίσιμη συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής  $t$ . Θα συμβολίσουμε με  $\dot{x}$  το διαφορικό  $dx/dt$  και θα αναφερόμαστε στο  $t$  ως χρόνο ή σαν την ανεξάρτητη μεταβλητή. Επίσης

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x)$$

είναι μια πραγματική συνάρτηση. Θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

όπου  $x$  μια άγνωστη συνάρτηση του  $t$  και  $f$  η γνωστή συνάρτηση του  $x$ . Η διαφορική εξίσωση (1.1) ονομάζεται αυτόνομη καθώς η  $f$  είναι ανεξάρτητη του  $t$ .

Λέμε ότι η συνάρτηση  $x(t)$  είναι λύση της (1.1) στο διάστημα  $I$  αν ικανοποιεί την  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  για κάθε  $t \in I$ . Συχνά ενδιαφερόμαστε για συγκεκριμένες λύσεις της (1.1) όπου για ορισμένο αρχικό χρόνο  $t_0 \in I$  έχει τιμή  $x_0$ . Έτσι θα μελετήσουμε τα  $x$  εκείνα που ικανοποιούν τις

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

Η εξίσωση (1.2) αναφέρεται σε ένα πρόβλημα αρχικής τιμής (π.α.τ.).

Ένα χρήσιμο επακόλουθο του αυτονόμου χαρακτήρα της διαφορικής εξίσωσης (1.2) είναι ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε υποθέσουμε ότι το πρόβλημα αρχικής τιμής ορίζεται για  $t_0 = 0$ . Δηλαδή θέτουμε  $x(t)$  να είναι λύση της (1.2) και ορίζουμε  $y(t) \equiv x(t + t_0)$ . Παρατηρούμε ότι  $y(t)$  είναι λύση της (1.2) αφού

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(y(t)), y(0) = x_0$$

Η λύση της (1.2) δίνετε με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds = t - t_0 \quad (1.3)$$

όταν το ολοκλήρωμα ορίζεται. Θα χρησιμοποιούμε την (1.3) για να βρούμε λύσεις κάποιων διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο γενικά είναι αδύνατο να ολοκληρώσουμε και δεν υπάρχουν πάντα φόρμουλες για την εύρεση λύσεων. Στην πραγματικότητα στόχος μας είναι να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων χωρίς τη χρήση κάποιας γενικής φόρμουλας.

**Παράδειγμα 1.1.1.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = -x \quad (1.4)$$

Παρατηρούμε ότι η  $x(t) = e^{-t}x_0$  είναι λύση και ορίζεται για όλα το  $t \in \mathbb{R}$ . Είναι όμως η μόνη λύση που ικανοποιεί την (1.4) για την αρχική συνθήκη  $x(0) = x_0$ ;

**Παράδειγμα 1.1.2.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

εύκολα βλέπουμε με αντικατάσταση η με τη χρήση της φόρμουλας (1.3) ότι η συνάρτηση

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

είναι λύση.

Παρατηρούμε ότι η λύση  $x(t)$  ορίζεται στο διάστημα  $(-\infty, 1/x_0)$  για  $x_0 > 0$ , στο  $(-\infty, \infty)$  για  $x_0 = 0$  και στο  $(1/x_0, +\infty)$  για  $x_0 < 0$ . Από αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι οι λύσεις δεν ορίζονται πάντα σε όλο το  $\mathbb{R}$  και το πεδίο ορισμού των λύσεων ποικίλλει ανάλογα με την αρχική συνθήκη. Επιπλέον η λύση απειρίζεται καθώς το  $t$  πλησιάζει το σύνορο του πεδίου ορισμού  $1/x_0$ .

**Παράδειγμα 1.1.3.** Θεωρούμε το π.α.τ.

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = x_0, \quad x \geq 0$$

Μια λύση δίνεται από την εξίσωση  $x(t) = (t + 2\sqrt{x_0})^2/4$  για  $x > 0$ . Ενώ αν  $x_0 = 0$ , τότε υπάρχει η λύση η οποία είναι ταυτότητα μηδέν για κάθε  $t$ . Επομένως το πρόβλημα αρχικής τιμής δεν έχει μοναδική λύση.

Σε αυτό το παράδειγμα το πεδίο ορισμού της  $f(x) = \sqrt{x}$  περιορίζεται φυσικά σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Στις εφαρμογές αυτό συμβαίνει συχνά για παράδειγμα ένας πληθυσμός εντομών δε μπορεί να είναι αρνητικός.

Τα παραπάνω παραδείγματα φανερώνουν την αναγκαιότητα ορισμένων προϋποθέσεων για την  $f$  έτσι ώστε να εγγυηθούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσεων του προβλήματος αρχικών τιμών (1.2). Συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , και το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με πρώτη παράγωγο συνεχή με  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Αντίστοιχα θα χρησιμοποιούμε  $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  για να συμβολίσουμε το σύνολο των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους έως και τάξης  $n$ . Αν το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}$  θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $C^0(U, \mathbb{R})$ , κλπ. Αν δεν υπάρχει ασάφεια θα παραλείπουμε την εξάρτηση από το πεδίο ορισμού και θα αναφερόμαστε σε αυτά τα σύνολα ως  $C^0$ ,  $C^1$ ,  $C^n$ . Στην περίπτωση που μια συνεχής πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $C^1$  συνάρτηση αν όλες οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

Για να τονίσουμε την εξάρτηση μιας λύσης  $x(t)$  του προβλήματος αρχικής τιμής (1.2) από την αρχική συνθήκη θα συμβολίζουμε με  $\phi(t, x_0)$ . Δηλαδή  $\phi(t, x_0) = x(t)$  και  $\phi(0, x_0) = x_0$

**Θεώρημα 1.1.1.** (Υπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

(i) Αν η  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  τότε για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  υπάρχει ένα διάστημα (πιθανόν άπειρο)  $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$  που περιέχει το  $t_0 = 0$  και μια λύση  $\phi(t, x_0)$  του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

που ορίζεται για κάθε  $t \in I_{x_0}$  και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $\phi(0, x_0) = x_0$ . Επίσης αν  $\alpha_{x_0}$  είναι πεπερασμένο τότε

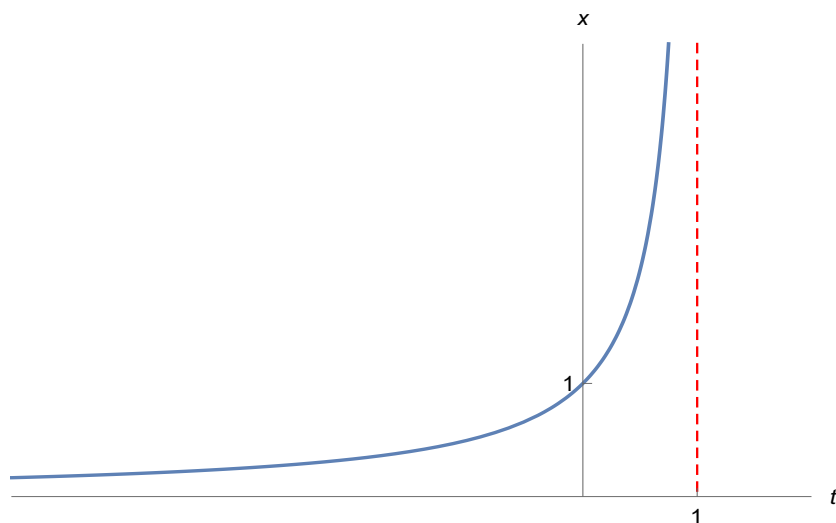
$$\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\phi(t, x_0)| = +\infty$$

ή αν  $\beta_{x_0}$  είναι πεπερασμένο τότε

$$\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\phi(t, x_0)| = +\infty$$

(ii) Αν, επιπλέον, η  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  τότε η  $\phi(t, x_0)$  είναι μοναδική λύση στο  $I_{x_0}$  επίσης η  $\phi(t, x_0)$  είναι συνεχής στο  $I_{x_0}$  καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοι της στο  $I_{x_0}$ . Άρα η  $\phi(t, x_0)$  είναι  $C^1$  συνάρτηση.

Το μεγαλύτερο πιθανό διάστημα  $I_{x_0}$  για το (α) κομμάτι του θεωρήματος ονομάζεται μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης  $\phi(t, x_0)$  όπως φαίνεται στο Σχήμα (1.1).



Σχήμα 1.1: Το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης για την  $\dot{x} = x^2$  με αρχική συνθήκη  $x(0) = 1$  είναι  $(-\infty, 1)$

Στις εφαρμογές η συνάρτηση  $f$  μπορεί να μην ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Μια συνηθισμένη περίπτωση είναι όταν  $f \in C^n(U, \mathbb{R})$  όπου  $U$  ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Σε αυτή την περίπτωση το συμπέρασμα του θεωρήματος (1.1.1) είναι ίδιο εκτός από τα οριακά σημεία της  $\phi(t, x_0)$  καθώς  $t \rightarrow \alpha_{x_0}^+$  ( $t \rightarrow \beta_{x_0}^-$  αντίστοιχα) που πρέπει να ανήκουν στο σύνορο του  $U$ .

Για μια  $C^1$  συνάρτηση  $f$ , το θεώρημα (1.1.1) υποδηλώνει ότι η οικογένεια όλων των λύσεων της  $\dot{x} = f(x)$  μπορούν να αναπαρασταθούν από μια συνάρτηση δυο μεταβλητών την  $\phi(t, x_0)$  όπου  $t \in I_{x_0}$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Τότε η  $\phi(t, x_0)$

ονομάζεται ροή της  $\dot{x} = f(x)$ . Το πεδίο ορισμού της μπορεί να μην είναι τόσο απλό καθώς το  $t$  μπορεί να εξαρτάτε από την αρχική συνθήκη  $x_0$  όπως στο παράδειγμα (1.1.2).

Αν  $f$  είναι  $C^1$  συνάρτηση τότε για κάθε  $t$  η ροή  $\phi(t, x_0)$  δημιουργεί μια απεικόνιση από το  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (πιθανών με περιορισμένο πεδίο ορισμού) ως εξής  $x_0 \rightarrow \phi(t, x_0)$ .

Κάποιες σημαντικές ιδιότητες αυτής της απεικόνισης:

- (i)  $\phi(0, x_0) = x_0$
- (ii)  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0))$  για κάθε  $t, s \geq 0$ .
- (iii)  $\phi(t, x_0)$  είναι  $C^1$  για κάθε  $t \geq 0$  και έχει μια  $C^1$  αντίστροφη την  $\phi(-t, x_0)$ .

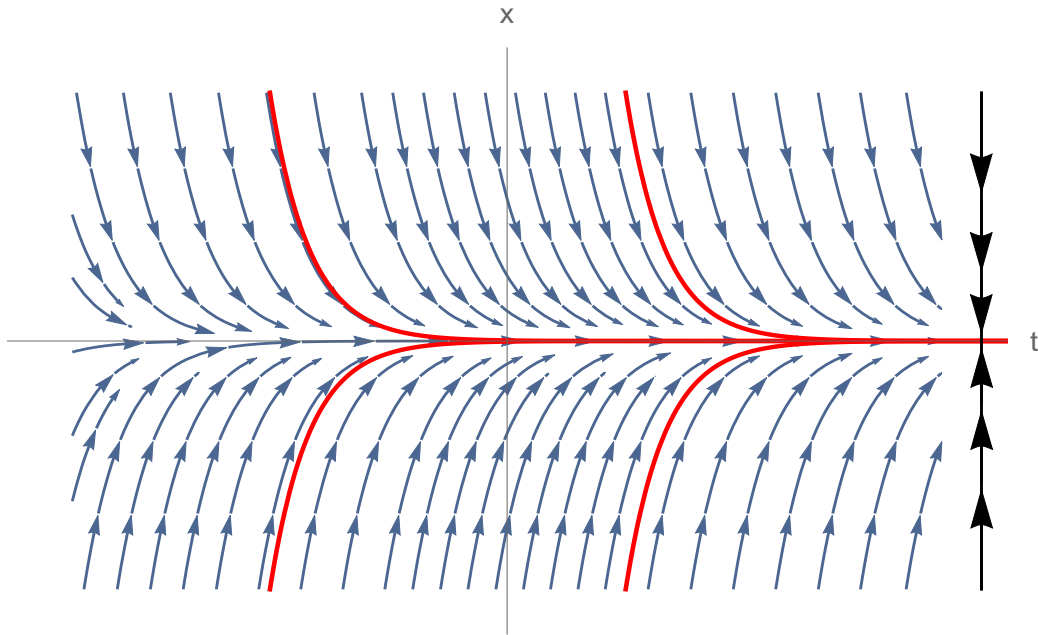
Μια απεικόνιση από το  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται *δυναμικό σύστημα* στο  $\mathbb{R}$ . Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η ροή μιας διαφορικής εξίσωσης δημιουργεί ένα δυναμικό σύστημα στο  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Γεωμετρία ροών

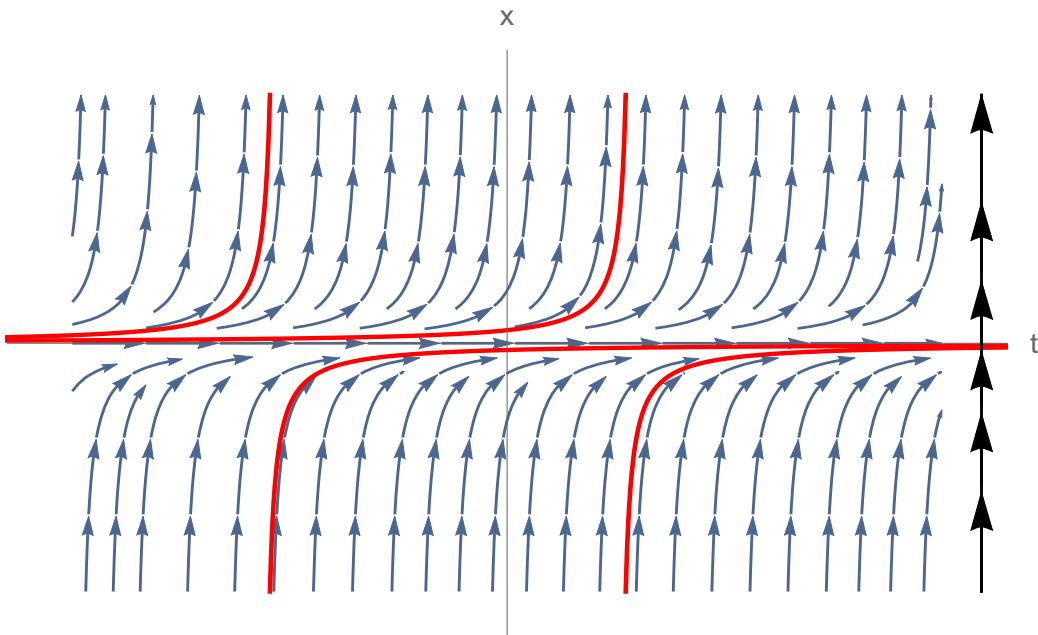
Θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση (1.1) και τη ροή  $\phi(t, x_0)$  από τη γεωμετρική τους πλευρά.

Σε κάθε σημείο του  $(t, x)$ -επιπέδου που ορίζεται η  $f(x)$ , (το δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = f(x)$ ), μας δίνει την τιμή του διαφορικού  $dx/dt$  το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που διέρχεται από το σημείο  $x$ . Η συλλογή όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων ονομάζεται *δυναμικό πεδίο* της διαφορικής εξίσωσης (1.1).

Η γραφική παράσταση της λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής (1.2) όπου είναι ένα υποσύνολο του  $(t, x)$ -επιπέδου που ορίζεται ως  $\{(t, \phi(t, x_0)) : t \in I_{x_0}\}$  ονομάζεται *διαδρομή*. Μια διαδρομή είναι εφαπτόμενη στα ευθύγραμμα τμήματα του δυναμικού πεδίου σε κάθε σημείο του επιπέδου.



(α') Το δυναμικό πεδίο, κάποιες διαδρομές και το διανυσματικό πεδίο για τη  $\dot{x} = -x$



(β') Το δυναμικό πεδίο, κάποιες διαδρομές και το διανυσματικό πεδίο για τη  $\dot{x} = x^2$

Αφού η  $f(x)$  είναι ανεξάρτητη του  $t$ , σε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα

$t$ , τα ευθύγραμμα τμήματα του δυναμικού πεδίου έχουν την ίδια κλίση. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε την προβολή στον άξονα  $x$  του δυναμικού πεδίου και τις διαδρομές της εξίσωσης (1.1). Σε κάθε σημείο  $x$  στον  $x$ -άξονα μπορούμε να συνδέσουμε το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα από το  $x$  στο  $x + f(x)$ . Μπορούμε να δούμε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα σαν διάνυσμα. Η συλλογή όλων των διανυσμάτων ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο* που δημιουργείται από την εξίσωση (1.1) ή *διανυσματικό πεδίο* της  $f$ .

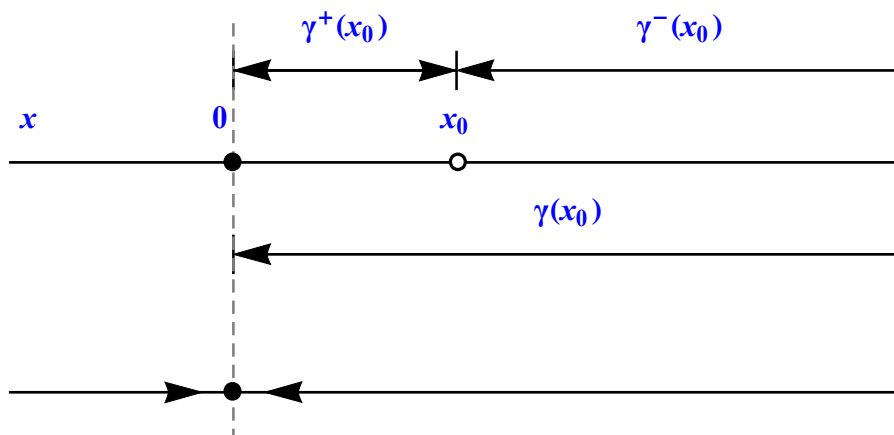
**Ορισμός 1.1.1.** Η *θετική τροχιά* (*positive orbit*)  $\gamma^+(x_0)$ , η *αρνητική τροχιά* (*negative orbit*)  $\gamma^-(x_0)$  και η *τροχιά* (*orbit*)  $\gamma(x_0)$  ορίζονται:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0)$$

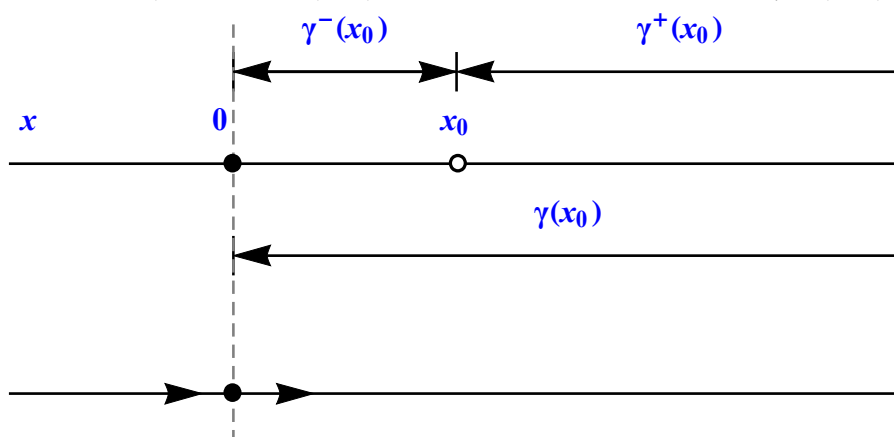
$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \phi(t, x_0)$$

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0)$$





(α) Θετική τροχιά, αρνητική τροχιά, τροχιά και το πορτρέτο φάσης της  $\dot{x} = -x$



(β') Θετική τροχιά, αρνητική τροχιά, τροχιά και το πορτρέτο φάσης της  $\dot{x} = x^2$

Η “ταχύτητα” μιας τροχιάς σε ένα σημείο  $x$  δίνεται από το διανυσματικό πεδίο στο συγκεκριμένο σημείο. Εισάγουμε βέλη για να υποδείξουμε την κατεύθυνση της  $\phi(t, x_0)$  που μεταβάλλεται καθώς το  $t$  αυξάνει. Για να απεικονίσουμε τη ροή μιας διαφορικής εξίσωσης σχεδιάζουμε τις τροχιές προσθέτοντας τα κατευθυνόμενα βέλη και το αποτέλεσμα ονομάζεται *πορτρέτο φάσεων* της διαφορικής εξίσωσης.

Είναι εμφανές από τον ορισμό ότι η τροχιά  $\gamma(x_0)$  είναι η προβολή στον άξονα  $x$  της διαδρομής που διέρχεται από το  $x_0$ .

Υπάρχουν τροχιές οι οποίες είναι ιδιαίτερα απλές αλλά παίζουν σημαντικό ρόλο στην ποιοτική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων καθώς και στις εφαρμο-

γές.

**Ορισμός 1.1.2.** Ένα σημείο  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  ονομάζεται *σημείο ισορροπίας* της  $\dot{x} = f(x)$  αν  $f(\bar{x}) = 0$ .

Όταν το  $\bar{x}$  είναι σημείο ισορροπίας η συνεχής συνάρτηση  $x(t) = \bar{x}$  για κάθε  $t$  είναι λύση και η τροχιά  $\gamma(\bar{x})$  είναι η ίδια η συνάρτηση.

Είναι απλό να σχεδιάσουμε τις τροχιές της εξίσωσης (1.1) από το γράφημα της  $f(x)$ . Στην πραγματικότητα το πρόσημο της  $f$  καθορίζει την κατεύθυνση της κίνησης κατά μήκος μιας τροχιάς. Αν  $f(x_0) < 0$  τότε η λύση μειώνεται ως προς  $t$  και η  $\phi(t, x_0)$  είτε προσεγγίζει ένα σημείο ισορροπίας είτε τείνει στο  $-\infty$  καθώς  $t \rightarrow \beta_{x_0}$ . Αν  $f(x_0) > 0$  τότε η λύση αυξάνει ως προς  $t$  και η  $\phi(t, x_0)$  είτε προσεγγίζει ένα σημείο ισορροπίας είτε τείνει στο  $+\infty$  καθώς  $t \rightarrow \beta_{x_0}$ . Γραφήματα (1.4α') και (1.5α') Επιπλέον αν οι λύσεις του προβλήματος αρχικής τιμής για την εξίσωση (1.1) είναι μοναδικές τότε οι λύσεις για δυο διαφορετικές αρχικές τιμές  $x_0 < y_0$  ικανοποιούν τη σχέση  $\phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$ . Έτσι έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 1.1.1.** Έστω ότι η λύση  $\phi(t, x_0)$  είναι μοναδική για κάθε  $x_0$  τότε:

- (i) η  $\phi(t, x_0)$  είναι μονότονη συνάρτηση του  $t$
- (ii)  $\phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$  για κάθε  $t$  αν  $x_0 < y_0$
- (iii) αν  $\gamma^+(x_0)$  (αντίστοιχα  $\gamma^-(x_0)$ ) είναι φραγμένη τότε  $\beta_{x_0} = +\infty$  (αντίστοιχα  $\alpha_{x_0} = -\infty$ ) και  $\phi(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  (αντίστοιχα  $t \rightarrow -\infty$ ), όπου  $\bar{x}$  είναι ένα σημείο ισορροπίας.

**Παράδειγμα 1.1.4.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = x - x^3 \quad (1.5)$$

Τα σημεία ισορροπίας αυτής της εξίσωσης είναι τα  $-1$ ,  $0$  και  $1$  και η συνάρτηση  $f(x) = x - x^3$  είναι θετική στο διάστημα  $(-\infty, -1)$ , αρνητική στο  $(-1, 0)$ , θετική στο  $(0, 1)$  και αρνητική στο  $(1, +\infty)$ . Οι τροχιές είναι τα ανοιχτά διαστήματα  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  και τα σημεία  $\{-1\}$ ,  $\{0\}$  και  $\{1\}$

**Ορισμός 1.1.3.** Αν η  $\gamma^-(x_0)$  είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\alpha(x_0) = \lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} \phi(t, x_0)$$

ονομάζεται  $a$ -οριακό σύνολο.

Αν η  $\gamma^+(x_0)$  είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\omega(x_0) = \lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} \phi(t, x_0)$$

ονομάζεται  $\omega$ -οριακό σύνολο.

Σύμφωνα με τον ορισμό το (iii) κομμάτι του λήμματος (1.1.1) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

Τα οριακά σύνολα  $\alpha(x_0)$  και  $\omega(x_0)$  είναι σημεία ισορροπίας εάν υπάρχουν.

Για να προσδιορίσουμε τη ροή κάποιων διαφορικών εξισώσεων γράφουμε την εξίσωση (1.1) στη μορφή:

$$\dot{x} = f(x) = -\frac{d}{dx}F(x) \quad (1.6)$$

όπου:

$$F(x) = -\int_0^x f(s) ds$$

Η εξίσωση (1.6) είναι μια περίπτωση βαθμωτού συστήματος. Αν  $x(t)$  λύση της εξίσωσης, τότε:

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{d}{dx}F(x(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t) = -[f(x(t))]^2 \leq 0$$

έτσι η  $F$  συνεχώς μειώνεται κατά μήκος της διαδρομής, έτσι μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση δυναμικού για την εξίσωση  $\dot{x} = f(x)$ . Είναι προφανές ότι τα σημεία ισορροπίας της  $\dot{x} = f(x)$  είναι κρίσιμα σημεία της  $F$ .

Θα εξετάσουμε τα παραδείγματα (1.1.1), (1.1.2) και (1.1.4) σύμφωνα με τα νέα δεδομένα.

**Παράδειγμα 1.1.5.** Η διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = -x$  γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = -x = -\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

με  $F(x) = -x^2/2$ . Οι τροχιές είναι τα διαστήματα:  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  και το σημείο ισορροπίας είναι το  $\{0\}$ . Γράφημα (1.4).

**Παράδειγμα 1.1.6.** Η διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = x^2$  γράφεται ως εξής:

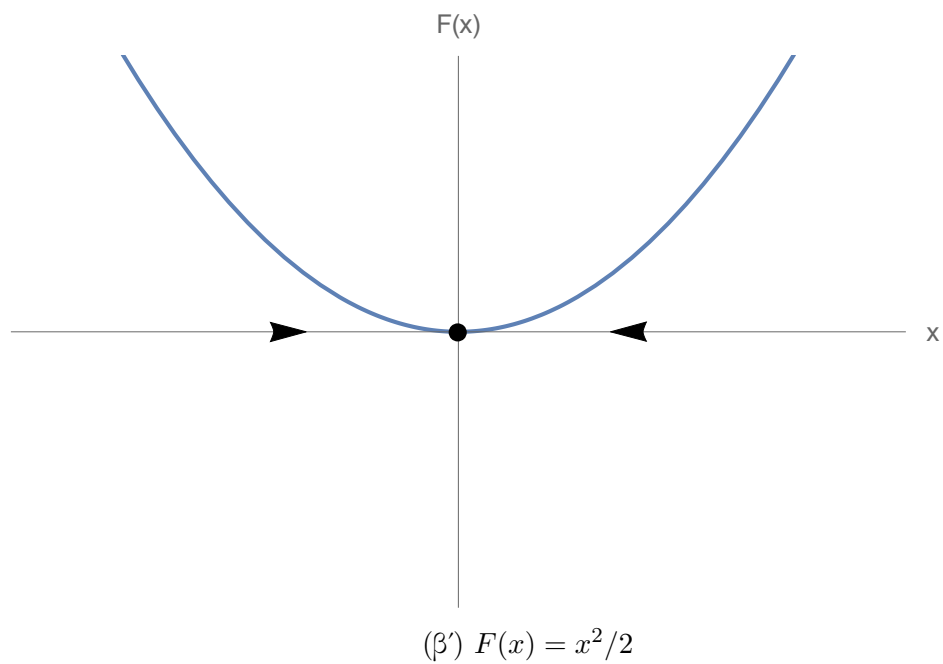
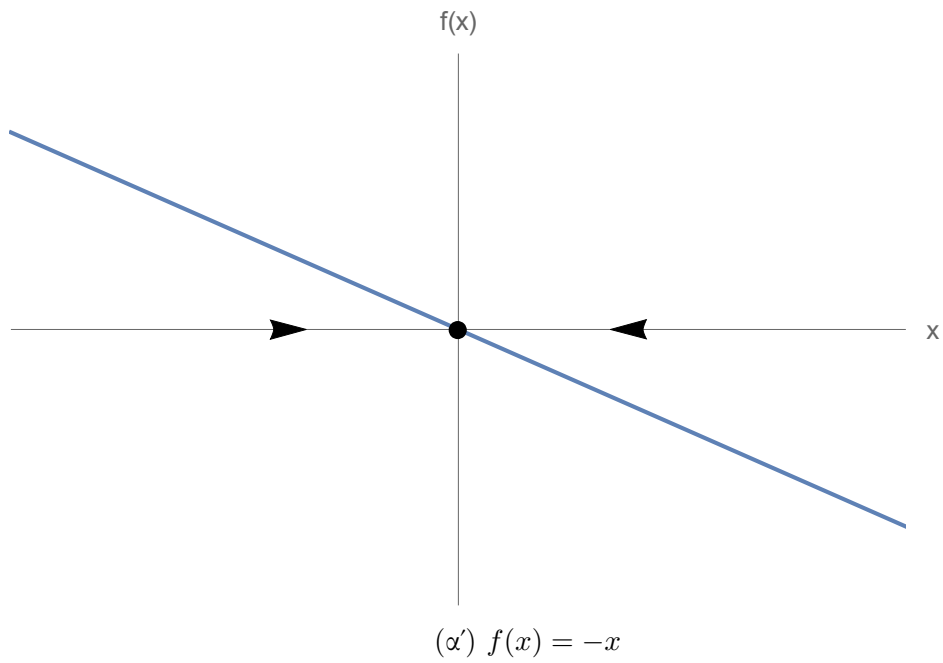
$$\dot{x} = x^2 = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{x^3}{3} \right)$$

με  $F(x) = -x^3/3$ . Οι τροχιές είναι όπως και πριν:  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  όμως είναι διαφορετικές και το σημείο ισοροπίας  $\{0\}$ . Γράφημα (1.5).

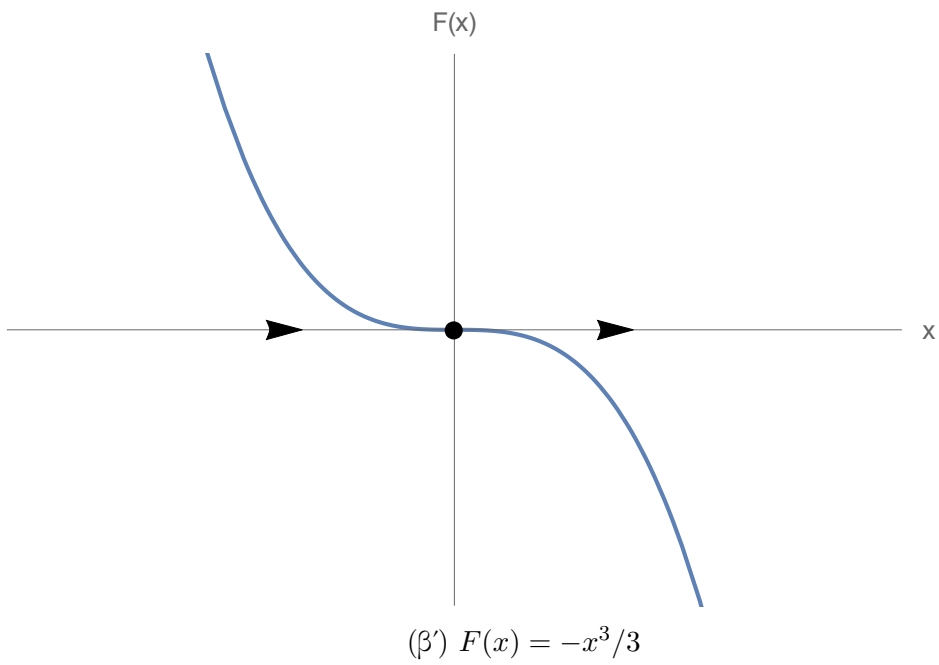
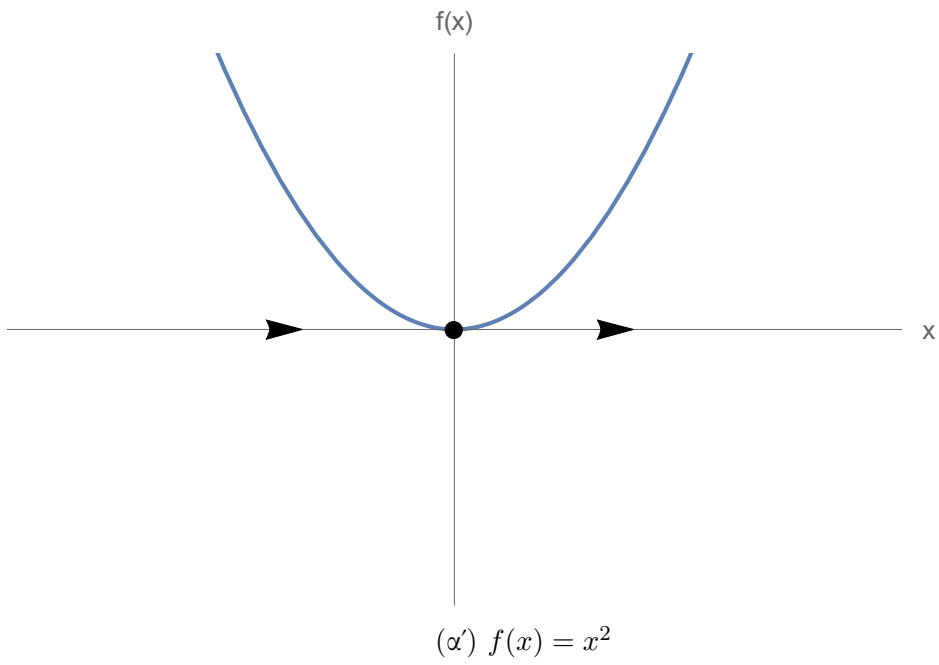
**Παράδειγμα 1.1.7.** Η διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = x - x^3$  γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = x - x^3 = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right)$$

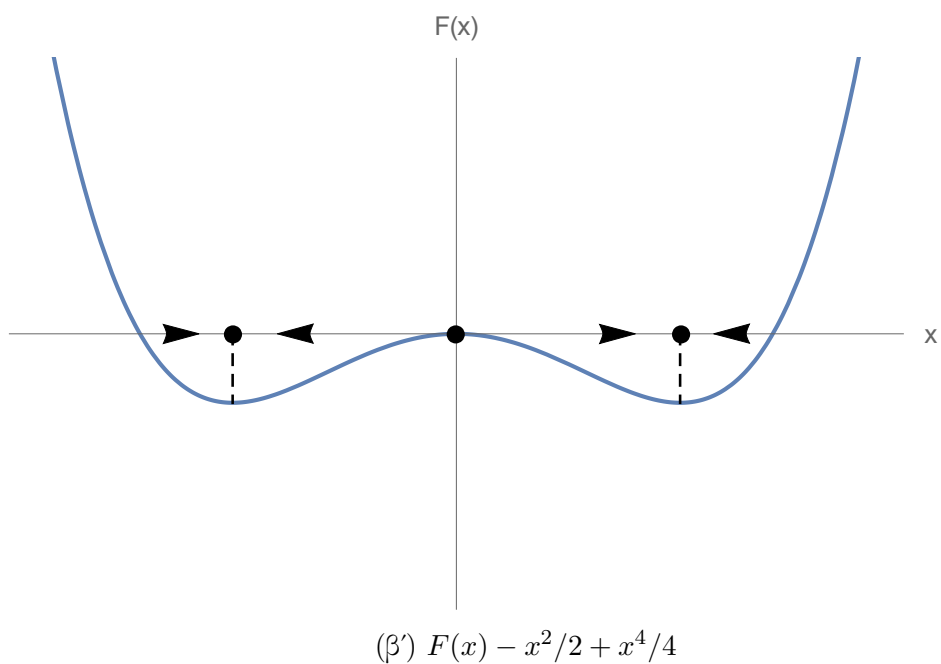
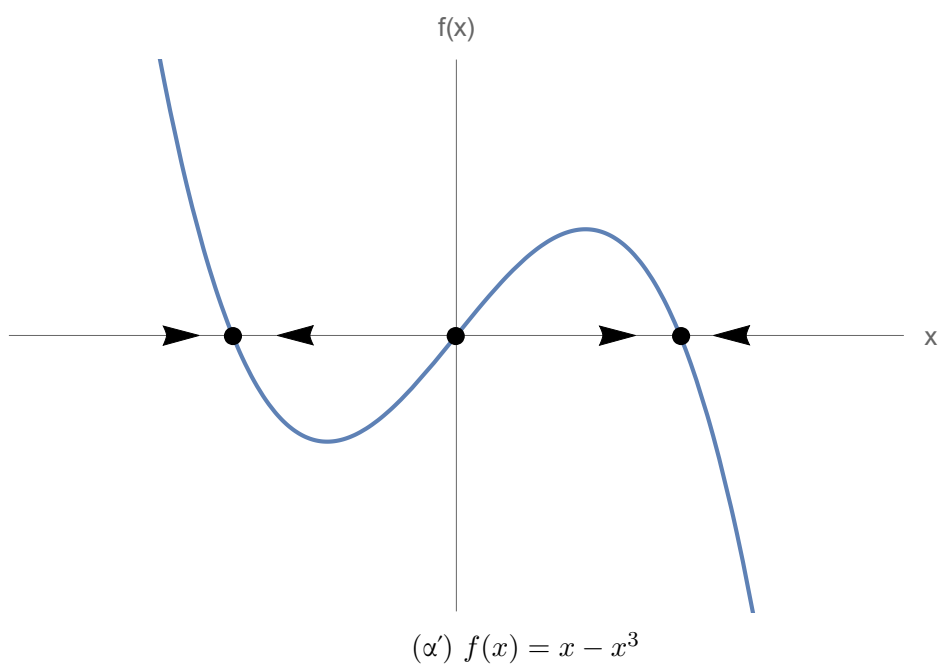
με  $F(x) = -x^2/2 + x^4/4$ . Οι τροχιές είναι:  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, +\infty)$  και τα σημεία ισοροπίας  $\{-1\}$ ,  $\{0\}$  και  $\{1\}$ . Γράφημα (1.6).



Σχήμα 1.4: Ο προσδιορισμός του πορτρέτου φάσης της  $\dot{x} = -x$  από τη συνάρτηση δυναμικού  $F(x) = x^2/2$ .



Σχήμα 1.5: Ο προσδιορισμός του πορτρέτου φάσης της  $\dot{x} = x^2$  από τη συνάρτηση δυναμικού  $F(x) = -x^3/3$ .



Σχήμα 1.6: Ο προσδιορισμός του πορτρέτου φάσης της  $\dot{x} = x - x^3$  από τη συνάρτηση δυναμικού  $F(x) = -x^2/2 + x^4/4$ .

### 1.1.3 Ευστάθεια-αστάθεια σημείων ισορροπίας

**Ορισμός 1.1.4.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  λέγεται *ευσταθές* αν, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta(\epsilon) > 0$  τέτοιο ώστε  $|\phi(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon$  για κάθε  $x_0$  όπου  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Το σημείο ισορροπίας λέγεται *ασταθές* αν δεν είναι ευσταθές.

**Ορισμός 1.1.5.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  λέγεται *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν είναι ευσταθές και υπάρχει  $r > 0$  τέτοιο ώστε  $|\phi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  για κάθε  $x_0$  που ικανοποιεί  $|x_0 - \bar{x}| < r$ .

**Λήμμα 1.1.2.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  είναι ευσταθές αν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$  για  $|x - \bar{x}| < \delta$ .

Όμοια ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν και μόνο αν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $(x - \bar{x})f(x) < 0$  για  $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ .

Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  είναι *ασταθές* αν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $(x - \bar{x})f(x) > 0$  είτε για  $0 < x - \bar{x} < \delta$  είτε για  $-\delta < x - \bar{x} < 0$ .

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (1.1.2) είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι στο παράδειγμα (1.1.1),  $\dot{x} = -x$ , το σημείο ισορροπίας στο 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ στο παράδειγμα (1.1.2),  $\dot{x} = x^2$ , το σημείο ισορροπίας στο 0 είναι ασταθές. Στο παράδειγμα (1.1.4),  $\dot{x} = x - x^3$  τα σημεία ισορροπίας στο  $-1$  και στο  $1$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, ενώ στο 0 είναι ασταθές.

**Παράδειγμα 1.1.8.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ -x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής, όπως και η πρώτη παράγωγος της. Τα σημεία ισορροπίας είναι το  $\bar{x} = 0$  και  $\bar{x} = 1/(k\pi)$  με  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Παρατηρούμε ότι τα σημεία ισορροπίας  $1/[(2k+1)\pi]$  και  $-1/[(2k+2)\pi]$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθή ενώ τα  $-1/[(2k+1)\pi]$  και  $1/[(2k+2)\pi]$  είναι ασταθή για  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Το σημείο ισορροπίας 0 είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά, δεν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $xf(x) < 0$  για  $0 < |x| < \delta$ .

Είναι εμφανές από τους ορισμούς (1.1.4) και (1.1.5) ότι η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  είναι τοπική ιδιότητα κοντά στο σημείο αυτό. Είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι οι ιδιότητες της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $\bar{x}$  μπορούν να προσδιοριστούν από τη γραμμική προσέγγιση



της  $f(x)$  κοντά στο  $\bar{x}$ . Το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = cx$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $c < 0$  και ασταθές αν  $c > 0$ .

**Θεώρημα 1.1.2.** Έστω  $f$  μια  $C^1$  συνάρτηση και  $\bar{x}$  ένα σημείο ισορροπίας της  $\dot{x} = f(x)$ , άρα,  $f(\bar{x}) = 0$ . Έστω επίσης ότι  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . Τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $f'(\bar{x}) < 0$  και ασταθές αν  $f'(\bar{x}) > 0$ .

*Απόδειξη.* :

Αρχικά μετατοπίζουμε τον  $x$ -άξονα εισάγοντας τη μεταβλητή  $y = x - \bar{x}$ , έτσι ώστε το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  να αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας  $y = 0$  της  $\dot{y} = f(\bar{x} + y)$ . Παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor στο  $y = 0$  της  $f(\bar{x} + y)$ :

$$\dot{y} = f'(\bar{x})y + g(y),$$

όπου μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διαταραχή της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{y} = f'(\bar{x})y$ . Στην πραγματικότητα η συνάρτηση  $g(y)$  ικανοποιεί τις συνθήκες  $g(0) = 0$  και  $g'(0) = 0$ . Αφού  $g'(0) = 0$  για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $|g'(x)| < \epsilon$  αν  $|y| < \delta$ . Με τη χρήση της φόρμουλας  $g(y) = \int_0^y g'(s) ds$  έχουμε ότι  $|g(y)| \leq \epsilon|y|$  αν  $|y| < \delta$ . Έστω ότι  $f'(\bar{x}) \neq 0$  και  $\epsilon < |f'(\bar{x})|$ . Τότε  $|y| < \delta$  δηλώνει ότι το πρόσημο της συνάρτησης  $f(\bar{x} + y) = f'(\bar{x})y + g(y)$  καθορίζεται από το πρόσημο της  $f'(\bar{x})y$ . Έτσι σύμφωνα με το Λήμμα (1.1.2) αν  $f'(\bar{x}) < 0$  το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και αν  $f'(\bar{x}) > 0$  είναι ασταθές.  $\square$

Η γραμμική διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = f'(\bar{x})x$  ονομάζεται *γραμμικοποίηση* του διανυσματικού πεδίου  $\dot{x} = f(x)$  στο σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$ . Το θεώρημα (1.1.2) μας λέει πως όταν το  $f'(\bar{x}) \neq 0$  ο τύπος της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  είναι ο ίδιος με τον τύπο της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας στο αρχικό διανυσματικό πεδίο.

**Ορισμός 1.1.6.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της  $\dot{x} = f(x)$  ονομάζεται *υπερβολικό* αν  $f'(\bar{x}) \neq 0$ .

Αν  $f'(\bar{x}) = 0$  τότε  $\bar{x}$  ονομάζεται *μη-υπερβολικό* ή *εκφυλισμένο* σημείο ισορροπίας. Οι ιδιότητες της ευστάθειας ενός μη-υπερβολικού σημείου ισορροπίας  $\bar{x}$  εξαρτάται από όρους υψηλότερης τάξης του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης  $f(\bar{x} + y)$ . Για παράδειγμα ενώ το  $\bar{x} = 0$  είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για την εξίσωση  $\dot{x} = x^2$ , είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για την  $\dot{x} = -x^3$ .

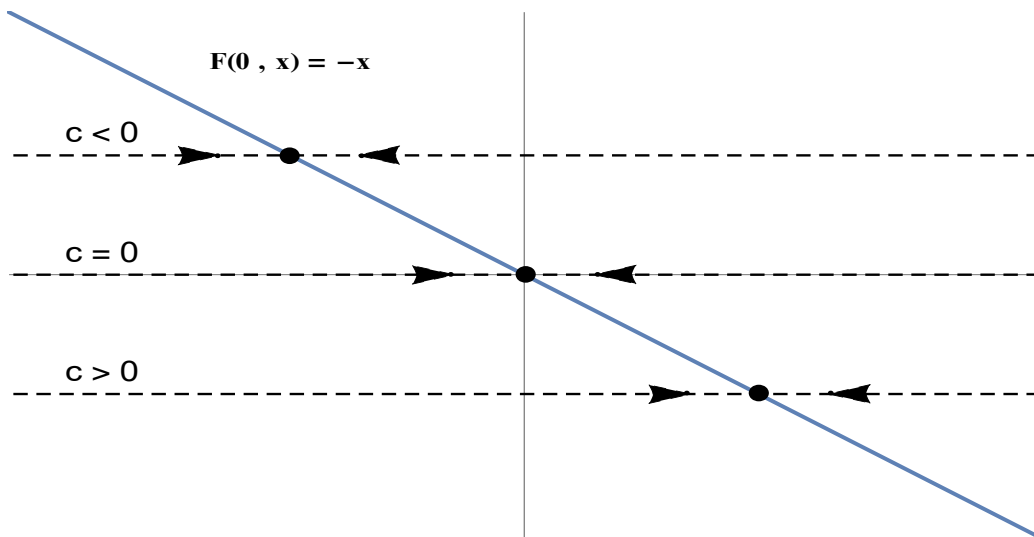
## 1.2 Στοιχειώδης διακλαδώσεις

### 1.2.1 Εξάρτιση από παραμέτρους

**Παράδειγμα 1.2.1.** Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = c - x = F(c, x) \quad (1.7)$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  παράμετρος. Για  $c = 0$  έχουμε  $F(0, x) = -x$  κι έτσι η εξίσωση (1.7) γίνεται (1.4). Επομένως η εξίσωση (1.7) είναι μια διαταραχή της  $\dot{x} = -x$ . Η επίδραση της εισαγωγής της παραμέτρου  $c$  είναι ότι η γραμμή  $F(0, x) = -x$  και μεταφράζεται κάθετα από την απόσταση  $c$ . Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ροές για όλες τις τιμές του  $c$  από το γράφημα  $F(c, x)$  μετατοπίζοντας τον άξονα  $x$  και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το πορτρέτο φάσεων.



Σχήμα 1.7: Πορτρέτο φάσεων της  $\dot{x} = c - x$  για διάφορες τιμές του  $c$ .

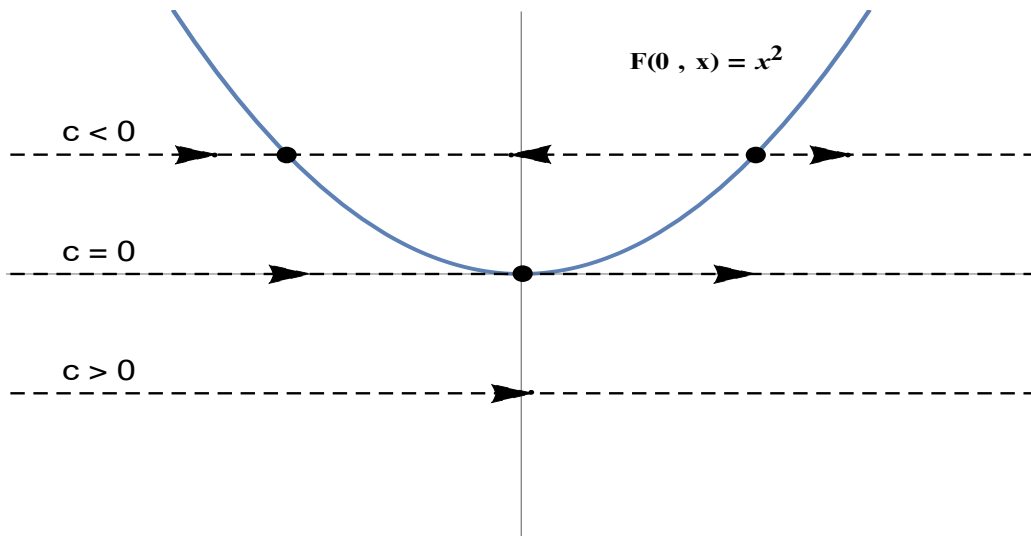
**Παράδειγμα 1.2.2.** (Saddle-node bifurcation)

Θεωρούμε την τετραγωνική διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = c + x^2 \quad (1.8)$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  παράμετρος. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1.8) αποτελεί μια διαταραχή της εξίσωσης  $\dot{x} = x^2$ .

Για  $c < 0$  οι τροχιές δίνονται από τα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt{-c}), (-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$  και  $(\sqrt{-c}, +\infty)$  και τα σημεία ισορροπίας  $\{-\sqrt{-c}\}, \{\sqrt{-c}\}$ .  
 Για  $c = 0$  οι τροχιές είναι  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  και το σημείο ισορροπίας  $\{0\}$ .  
 Για  $c > 0$  η μοναδική τροχιά είναι  $(-\infty, +\infty)$  και δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.  
 Για διάφορες τιμές της παραμέτρου, όσο  $c < 0$ , ο αριθμός και οι κατευθύνσεις των τροχιών παραμένουν ίδιες, η μόνη αλλαγή είναι η μετατόπιση των σημείων ισορροπίας  $\pm\sqrt{-c}$ . Παρόμοια για  $c > 0$  υπάρχει μόνο μια τροχιά με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ωστόσο αν  $c = 0$  ο αριθμός των τροχιών αλλάζει. Υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας για  $c < 0$  και κανένα για  $c > 0$ .



Σχήμα 1.8: Πορτρέτο φάσεων της  $\dot{x} = c + x^2$  για διάφορες τιμές του  $c$ .

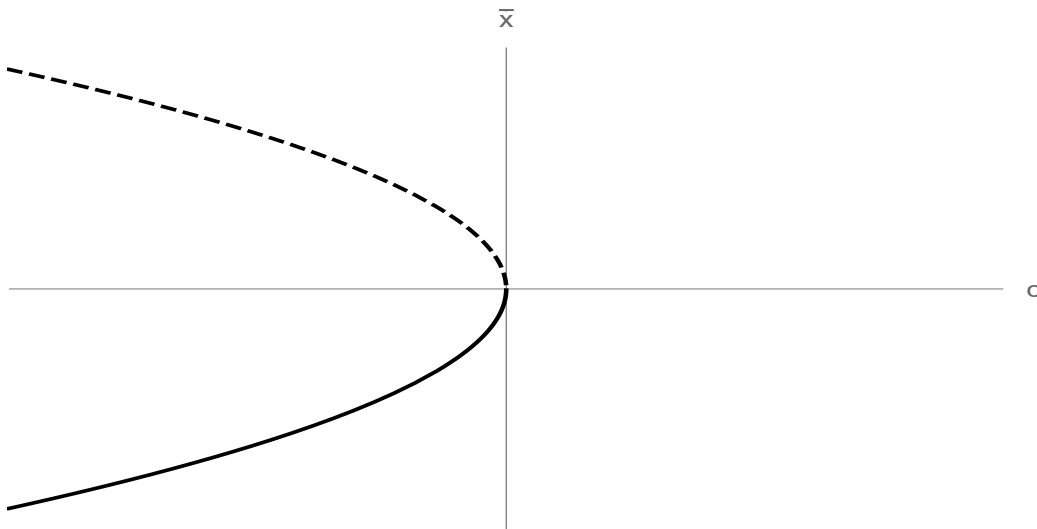
Για μια διαφορική εξίσωση της μορφής  $\dot{x} = f(x)$  τα σημεία ισορροπίας και το πρόσημο της  $f(x)$  μεταξύ των σημείων ισορροπίας καθορίζουν τον αριθμό των τροχιών και την κατεύθυνση της ροής στις τροχιές.

Η μελέτη των αλλαγών στην ποιοτική δομή των ροών ονομάζεται *θεωρία διακλαδώσεων*. Για δεδομένη παράμετρο μια διαφορική εξίσωση λέμε ότι έχει ευσταθή δομή τροχιάς αν η ποιοτική δομή της ροής δεν αλλάζει για αρκετά μικρές αλλαγές της παραμέτρου. Η παράμετρος για την οποία η ροή δεν έχει ευσταθή δομή τροχιάς ονομάζεται *τιμή της διακλάδωσης* και η εξίσωση θα λέμε ότι βρίσκεται σε *σημείο διακλάδωσης*.

Είναι εμφανές ότι η εξίσωση (1.7) έχει ευσταθή δομή τροχιάς για όλες τις τιμές του  $c$  και ότι η εξίσωση (1.8) έχει ευσταθή δομή τροχιάς για κάθε  $c \neq 0$ ,

και έχει σημείο διακλάδωσης στο  $c = 0$ .

Υπάρχει μια ακόμη χρήσιμη γραφική μέθοδος για την απεικόνιση κάποιων από τα σημαντικά δυναμικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης  $\dot{x} = F(c, x)$  σε σχέση με την παράμετρο  $c$ . Με τη μέθοδο αυτή κατασκευάζουμε καμπύλες στο επίπεδο  $(c, x)$ , που απεικονίζουν τα σημεία ισορροπίας για κάθε τιμή της παραμέτρου. Πιο συγκεκριμένα ένα σημείο  $(c_0, x_0)$  βρίσκεται σε μια από αυτές τις καμπύλες αν και μόνο αν  $F(c_0, x_0) = 0$ . Επίσης για να αναπαραστήσουμε τον τύπο της ευστάθειας για τα σημεία ισορροπίας συμβολίζουμε τα ευσταθή με απλή καμπύλη ενώ τα ασταθή με διακεκομμένη καμπύλη. Το αποτέλεσμα ονομάζεται *διάγραμμα διακλάδωσης*.



Σχήμα 1.9: Διάγραμμα διακλάδωσης για την  $\dot{x} = c + x^2$

### Παράδειγμα 1.2.3. (Transcritical bifurcation)

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

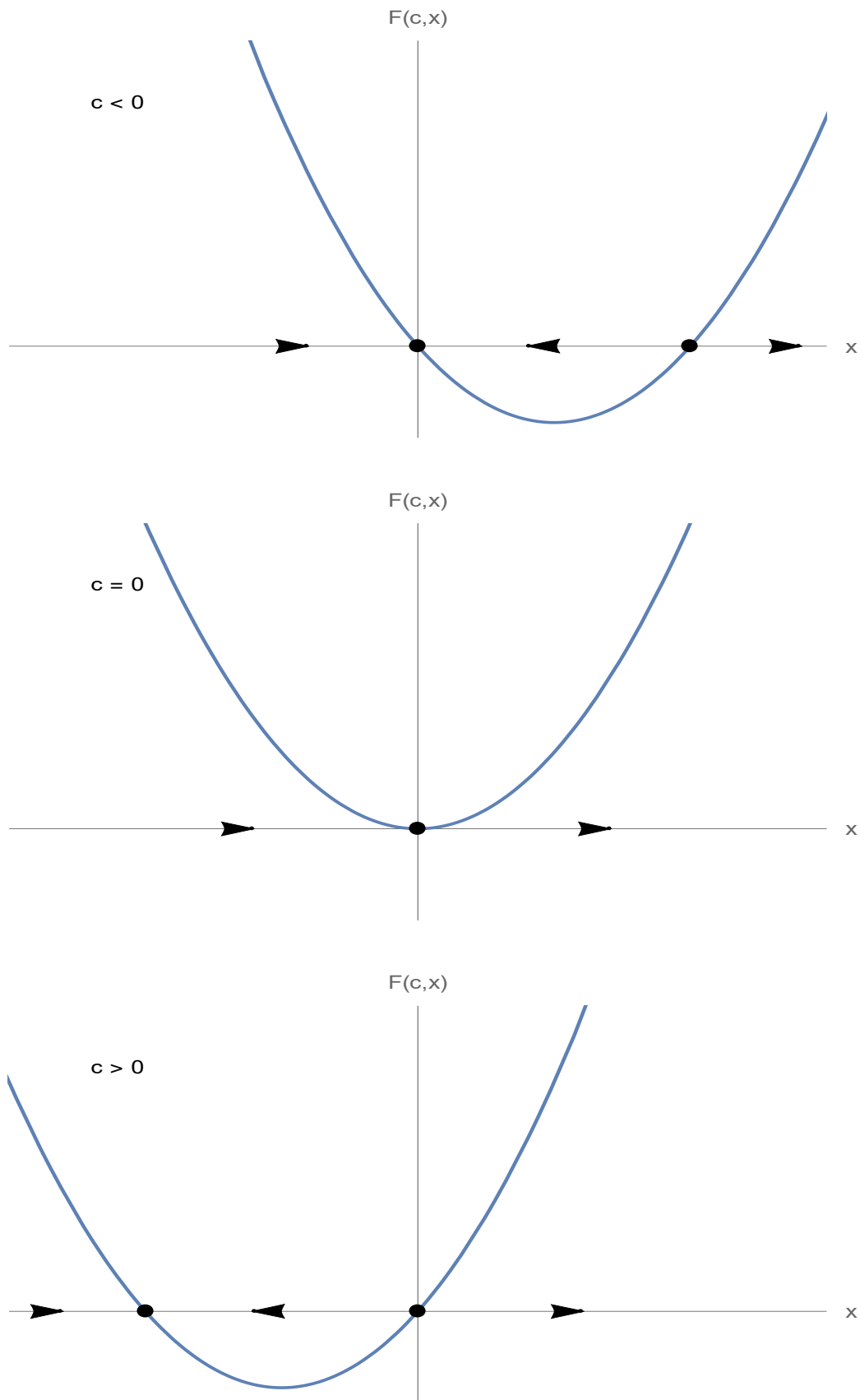
$$\dot{x} = cx + x^2 \quad (1.9)$$

με  $c \in \mathbb{R}$  παράμετρο. όπου είναι μια διαταραχή για την  $\dot{x} = x^2$ . Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε το πορτρέτο φάσεων της  $F(c, x) = cx + x^2$  για τις διάφορες τιμές του  $c$ .

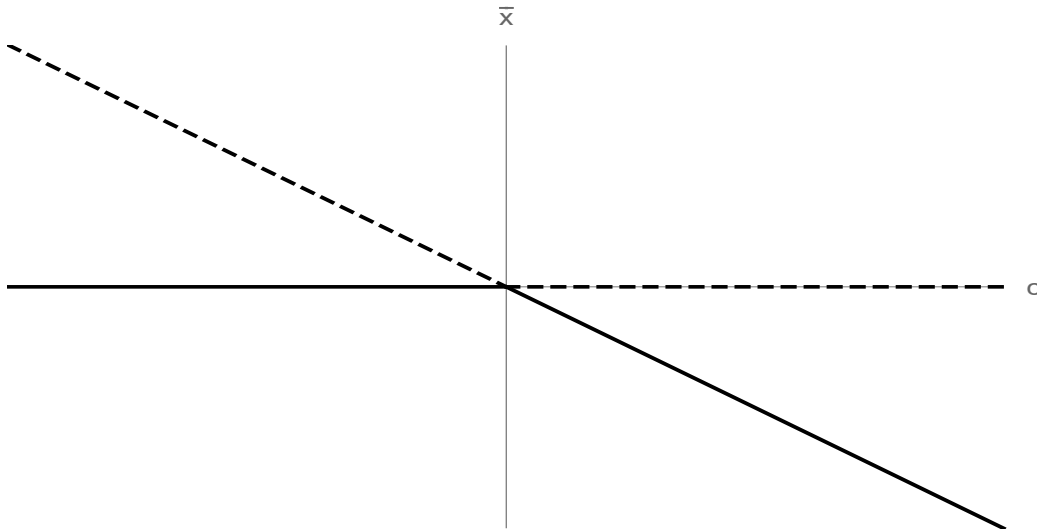
Για  $c < 0$  το  $\bar{x} = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και το  $\bar{x} = -c$  ασταθές.

Για  $c = 0$  το  $\bar{x} = 0$  είναι μοναδικό σημείο ισορροπίας και είναι ασταθές.

Για  $c > 0$  το  $\bar{x} = 0$  είναι ασταθές ενώ το  $\bar{x} = -c$  ευσταθές.



Σχήμα 1.10: Πορτρέτα φάσεων της  $\dot{x} = cx + x^2$  για διάφορες τιμές του  $c$ .



Σχήμα 1.11: Διάγραμμα διακλάδωσης για την  $\dot{x} = cx + x^2$

### 1.2.2 Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

Θα διατυπώσουμε ένα θεμελιώδες θεώρημα της μαθηματικής ανάλυσης γνωστό ως *Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης*, το οποίο είναι απαραίτητο στη θεωρία διακλαδώσεων. Η απλοποιημένη εκδοχή που παρουσιάζεται παρακάτω είναι προσαρμοσμένη για τη μελέτη διακλαδώσεων των σημείων ισορροπίας.

Έστω  $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^k$ . Θέτουμε τη νόρμα  $\|\lambda\|$  του  $\lambda$  να είναι:

$$\|\lambda\| = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2)^{1/2},$$

όπου μπορούμε να ερμηνεύσουμε σαν μήκος του  $\lambda$ .

**Θεώρημα 1.2.1.** (Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης)

Έστω ότι  $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x)$  είναι  $C^1$  συνάρτηση

$$F(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0}, 0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχουν σταθερές  $\delta > 0$  και  $\eta > 0$ , και μια  $C^1$  συνάρτηση

$$\psi : \{\lambda : \|\lambda\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$\psi(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{και} \quad F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0, \quad \text{για} \quad \|\lambda\| < \delta.$$

Επιπλέον, αν υπάρχει  $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\|\lambda_0\| < \delta$  και  $|x_0| < \eta$  και ικανοποιεί την εξίσωση  $F(\lambda_0, x_0) = 0$  τότε  $x_0 = \psi(\lambda_0)$ .

Απόδειξη. : (Βιβλίο [2], κεφάλαιο 9)  $\square$

Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη των σημείων ισορροπίας ως εξής. Έστω  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  μια διαφορική εξίσωση που εξαρτάται από  $k$  παραμέτρους  $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ . Αν  $\bar{x} = 0$  ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  για  $\lambda = 0$ , τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης. Αυτό εγγυάται ότι η εξίσωση  $F(\lambda, x) = 0$  μπορεί να λυθεί τοπικά από την  $x = \psi(\lambda)$  σαν συνάρτηση με παραμέτρους  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ . Επιπλέον,  $\partial F(\lambda, \psi(\lambda))/\partial x \neq 0$  για  $\lambda$  αρκετά μικρό. Έτσι η ποιοτική δομή της ροής δεν αλλάζει κοντά στο  $x = 0$ . Συνεπώς, δεν υπάρχουν διακλαδώσεις στη γειτονία του  $x = 0$  για αρκετά μικρές τιμές των παραμέτρων.

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης σε κάποια συγκεκριμένη περίπτωση, μπορεί να χρειαστεί να αλλάξουμε συντεταγμένες στο πεδίο ορισμού της δοθείσας συνάρτησης, ώστε η αρχή των αξόνων να γίνει το σημείο μηδενισμού της. Για παράδειγμα, αν  $G : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow G(\lambda, x)$ , έχει  $G(\lambda_0, x_0) = 0$ , τότε μπορούμε να ορίσουμε  $F(\lambda, x) = G(\lambda_0 + \lambda, x_0 + x)$  και  $F(0, 0) = 0$ .

### 1.2.3 Τοπικές διαταραχές κοντά στα σημεία ισορροπίας

Θεωρούμε ότι η  $\dot{x} = f(x)$  έχει σημείο ισορροπίας στο 0, αν όχι, θα μεταφέρουμε το σημείο ισορροπίας σε καινούριο σύστημα συντεταγμένων όπως στην απόδειξη του θεωρήματος (1.1.2).

#### Περίπτωση I: Υπερβολική ευστάθεια

Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι μια  $C^1$  συνάρτηση με  $f(0) = 0$  και  $f'(0) \neq 0$ . Είδαμε στο θεώρημα (1.1.2) ότι οι ιδιότητες της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας 0 της  $\dot{x} = f(x)$  καθορίζεται από τη γραμμική προσέγγιση του διανυσματικού πεδίου κοντά στο 0, δηλαδή, οι διαταραχές υψηλότερης τάξης του αναπτύγματος Taylor που δεν επηρεάζουν την ποιοτική δομή κοντά στο μηδέν.

Θεωρούμε τη διαταραγμένη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = F(\lambda, x) \tag{1.10}$$

όπου  $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x)$ , είναι  $C^1$  συνάρτηση και ικανοποιεί

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 0 \quad (1.11)$$

Ας εξετάσουμε πρώτα την ύπαρξη σημείων ισορροπίας για την διαταραγμένη εξίσωση (1.10). Αν  $F(\lambda, 0) \neq 0$ , τότε το 0 δεν θα είναι πλέον σημείο ισορροπίας. Ωστόσο, από την (1.11) και γνωρίζοντας πως  $f(0) = 0$ , έχουμε

$$F(0, 0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 0$$

Άρα από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχουν σταθερές  $\delta > 0$  και  $\eta > 0$ , και μια  $C^1$  συνάρτηση  $\psi(\lambda)$  ορισμένη για  $\|\lambda\| < \delta$  με  $\psi(0) = 0$  έτσι ώστε

$$F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0.$$

Ο τύπος της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $\psi(\lambda)$  μπορεί να προσδιοριστεί από το θεώρημα (1.1.2). Υπολογίζουμε το

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \psi(\lambda)). \quad (1.12)$$

Από την (1.11) και το ότι  $\psi(0) = 0$ , έχουμε  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \psi(0)) = f'(0) \neq 0$ . Έτσι, υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε, για  $\|\lambda\| < \delta$ , το πρόσημο της εξίσωσης (1.12) είναι ίδιο με αυτό της  $f'(0)$ .

Άρα ο τύπος της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $\psi(\lambda)$  της διαταραγμένης εξίσωσης (1.10) είναι ίδιος με τον τύπο της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας 0 της μη διαταραγμένης εξίσωσης  $\dot{x} = f(x)$ .

### Περίπτωση II: Σημεία ισορροπίας με τετραγωνικό εκφυλισμό.

Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι μια  $C^2$  συνάρτηση με  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 0$ , αλλά  $f''(0) \neq 0$ . Θεωρούμε τη διαταραγμένη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = F(\lambda, x) \quad (1.13)$$

όπου  $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x)$ , είναι  $C^2$  συνάρτηση και ικανοποιεί

$$F(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = f''(0) \neq 0 \quad (1.14)$$



Από τις συνθήκες και το  $f(0) = 0$  συνεπάγεται ότι το ανάπτυγμα Taylor της  $F$  έχει τη μορφή:

$$F(\lambda, x) = a(\lambda) + b(\lambda)x + c(\lambda)\frac{x^2}{2} + G(\lambda, x),$$

με  $a(0) = 0$ ,  $b(0) = 0$ ,  $c(0) = f''(0) \neq 0$  και για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  και  $\eta > 0$  τέτοιο ώστε η συνάρτηση  $G$  να ικανοποιεί  $|G(\lambda, x)| < \epsilon|x|^2$  για  $\|\lambda\| < \delta$  και  $|x| < \eta$ .

Τα κρίσιμα σημεία της  $F$  αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = 0. \quad (1.15)$$

Έστω  $H(\lambda, x) \equiv \partial F(\lambda, x)/\partial x$ . τότε οι σχέσεις (1.14) γίνονται

$$H(0, 0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = f''(0) \neq 0.$$

Έτσι απ το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχουν σταθερές  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$ , και μια  $C^1$  συνάρτηση  $\psi(\lambda)$  ορισμένη για  $\|\lambda\| < \delta$  έτσι ώστε  $\psi(0) = 0$  και  $H(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$  δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$$

και επιπλέον, κάθε λύση  $(\lambda, x)$  της εξίσωσης (1.15) με  $\|\lambda\| < \delta$  και  $|x| < \eta$  δίνεται από την  $x = \psi(\lambda)$ .

Για κάθε παράμετρο  $\lambda$ , η συνάρτηση  $F(\lambda, x)$  έχει ελάχιστο στο  $x = \psi(\lambda)$  αν  $f''(0) > 0$ , η μέγιστο αν  $f''(0) < 0$ . Το πλήθος των σημείων ισορροπίας της εξίσωσης (1.13) εξαρτάται από κρίσιμη τιμή  $a(\lambda) \equiv F(\lambda, \psi(\lambda))$  της συνάρτησης  $F$ .

Αν  $a(\lambda)f''(0) < 0$  υπάρχουν δυο υπερβολικά σημεία ισορροπίας.

Αν  $a(\lambda) = 0$  υπάρχει ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

Αν  $a(\lambda)f''(0) > 0$  δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας.

#### 1.2.4 Παράδειγμα σε κύκλο

**Παράδειγμα 1.2.4.** Θεωρούμε την παραμετρική διαταραχή του περιοδικού διανυσματικού πεδίου  $f(x) = \sin x$ :

$$\dot{x} = c + d \sin x, \quad (1.16)$$

όπου  $c$  και  $d$  παράμετροι. Το διανυσματικό πεδίο (1.16) είναι περιοδικό με περίοδο  $2\pi$  για κάθε τιμή των παραμέτρων. Για  $d = 0$ , το διανυσματικό πεδίο είναι περιοδικό με περίοδο με κάθε περίοδο. Για  $c = d = 0$ , τότε η ροή αποτελείται εξολοκλήρου από σημεία ισορροπίας. Οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι τόσο ενδιαφέρουσες. Στο γράφημα (1.12) έχουμε σχεδιάσει τις τροχιές της εξίσωσης (1.16) τόσο στο  $\mathbb{R}$  όσο και στον κύκλο  $S^1$  για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

**Ορισμός 1.2.1.** Μια λύση  $\phi(t, x_0)$ , με  $\phi(0, x_0) = x_0$ , μιας διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = f(x)$  ικανοποιώντας  $f(x + P) = f(x)$  ονομάζεται *περιοδική λύση με περίοδο  $T$* , αν υπάρχει  $T > 0$  τέτοιο ώστε

$$\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0) + P$$

για κάθε  $t \geq 0$ .

Αν, επιπλέον,  $\phi(t + \tau, x_0) \neq \phi(t, x_0) + P$  για κάθε  $0 \leq \tau \leq T$ , τότε  $T$  ονομάζεται *ελάχιστη περίοδος*.

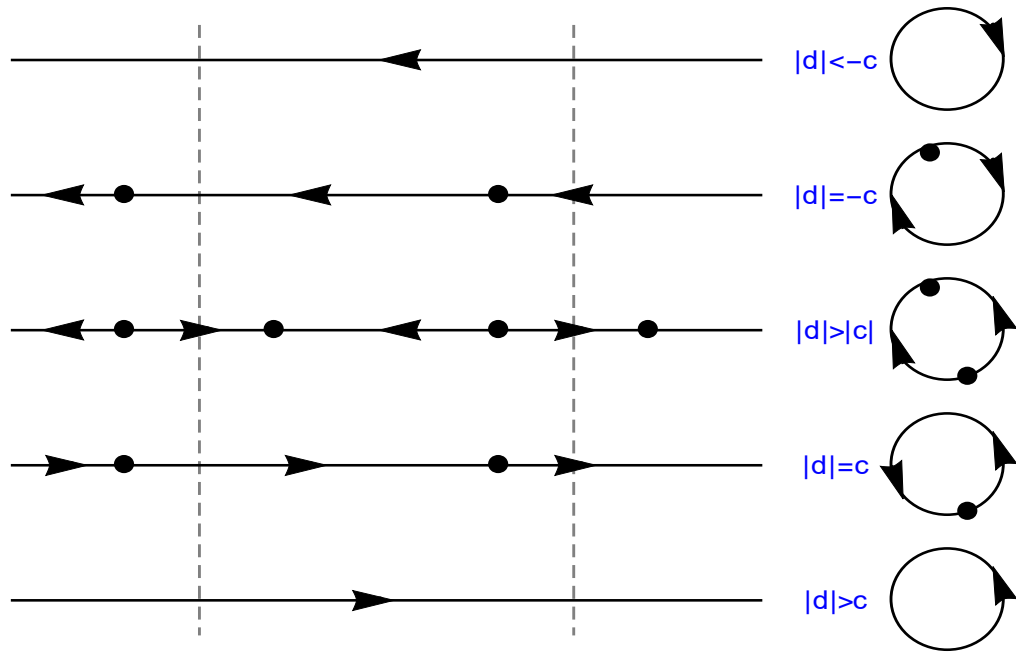
Επιστρέφοντας στο παράδειγμα (1.2.4), για τη διαφορική εξίσωση (1.16), έχουμε  $P = 2\pi$ . Θα δείξουμε ότι αν  $|d| < |c|$ , τότε κάθε λύση της εξίσωσης (1.16) είναι περιοδική στο  $S^1$ . Αφού  $\phi(t, x_0)$  ορίζεται από

$$t = \int_{x_0}^{\phi(t, x_0)} \frac{dx}{c + d \sin x}$$

και  $c + d \sin x \neq 0$  για κάθε  $x$ , υπάρχει μοναδικό  $T$  τέτοιο ώστε  $\phi(T, x_0) = x_0 + 2\pi$ , έτσι:

$$T = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \frac{dx}{c + d \sin x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{c + d \sin x}.$$

Αν  $\phi(t, x_0)$  λύση της εξίσωσης (1.16), τότε είναι λύση και η  $\phi(t, x_0) + 2\pi$  και  $\phi(t + T, x_0)$ . Στο  $t = 0$  αυτές οι δυο είναι ίσες, έτσι από τη μοναδικότητα τού θεωρήματος (1.1.2), είναι όμοια για κάθε  $t \geq 0$ . Αυτό αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό και, επιπλέον, δείχνει ότι η περίοδος  $T$  είναι ανεξάρτητη από την αρχική συνθήκη.



Σχήμα 1.12: Πορτρέτα φάσεων για την  $\dot{x} = c + d \sin x$  στο  $\mathbb{R}$  και στο  $S^1$ .

# Κεφάλαιο 2

## Εξισώσεις στις δυο διαστάσεις

### 2.1 Αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο

Έστω  $I$  ένα ανοιχτό διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  δυο  $C^1$  συναρτήσεις του  $t$ . Επίσης, έστω  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  δυο πραγματικές συναρτήσεις των  $x, y$ . Θα μελετήσουμε ζεύγη εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Το σύστημα (2.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2).\tag{2.2}$$

Η εξίσωση αυτή μοιάζει με την βαθμωτή εξίσωση  $\dot{x} = f(x)$  που εξετάσαμε προηγουμένως, αλλά θα πρέπει να έχουμε υπόψιν πως το  $\mathbf{x}$  είναι διάνυσμα και η  $\mathbf{f}$  είναι διανυσματική συνάρτηση. Έτσι ένα πρόβλημα αρχικής τιμής για την εξίσωση (2.2) θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Αφού η εξίσωση (2.2) είναι αυτόνομη, μπορούμε να πούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως το πρόβλημα αρχικής τιμής (2.3) προσδιορίζεται για  $t_0 = 0$ .

Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας (1.1.1) μπορεί να γενικευτεί και για το πρόβλημα αρχικής τιμής (2.3). Αν  $\mathbf{f}$  είναι μια  $C^1$  συνάρτηση τότε για κάθε

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  υπάρχει ένα διάστημα (πιθανώς άπειρο)  $I_{\mathbf{x}_0} \equiv (\alpha_{\mathbf{x}_0}, \beta_{\mathbf{x}_0})$  που περιέχει το  $t_0 = 0$  και μια μοναδική λύση  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  του προβλήματος αρχικής τιμής (2.3) ορισμένο για κάθε  $t \in I_{\mathbf{x}_0}$ , ικανοποιώντας την αρχική συνθήκη  $\phi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ . Εξάλλου,  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  είναι  $C^1$  συνάρτηση.

Για να ξεκινήσουμε την ποιοτική θεωρία, θα εξετάσουμε το σύστημα (2.2) και τη ροή  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  από τη γεωμετρική του πλευρά. Σε κάθε σημείο του χώρου  $(t, \mathbf{x})$  που ορίζεται η  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , το δεξί μέλος της εξίσωσης (2.2) δίνει τιμή στο διαφορικό  $d\mathbf{x}/dt$  όπου μπορεί να θεωρηθεί σαν η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος σε αυτό το σημείο. Η συλλογή όλων αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων ονομάζεται *δυναμικό πεδίο* της διαφορικής εξίσωσης (2.2).

Η γραφική παράσταση της λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής (2.2) όπου είναι ένα υποσύνολο του τρισδιάστατου χώρου  $(t, \mathbf{x})$  που ορίζεται ως  $\{(t, \phi(t, \mathbf{x}_0)) : t \in I_{\mathbf{x}_0}\}$  ονομάζεται *διαδρομή (trajectory)*. Μια διαδρομή είναι εφαπτόμενη στα ευθύγραμμα τμήματα του δυναμικού πεδίου σε κάθε σημείο του επιπέδου.

Αφού η  $\mathbf{f}$  είναι ανεξάρτητη του  $t$ , σε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα  $t$ , τα ευθύγραμμα τμήματα του δυναμικού πεδίου έχουν την ίδια κλίση. Επομένως, είναι φυσικό να θεωρήσουμε τις προβολές του δυναμικού πεδίου και τις διαδρομές της εξίσωσης (2.2) στο επίπεδο  $(x, y)$ . Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε σημείο  $\mathbf{x}$  του επιπέδου  $(x, y)$ , που ορίζεται η  $\mathbf{f}$ , μπορούμε να αντιστοιχήσουμε το διάνυσμα  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$ . Δηλαδή με άλλα λόγια μπορούμε να προσδιορίσουμε στο σημείο  $\mathbf{x}$  το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα από το  $\mathbf{x}$  στο  $\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Η συλλογή αυτών των διανυσμάτων ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο* της  $\mathbf{f}$ . Οι προβολές των διαδρομών στο επίπεδο  $(x, y)$  ονομάζονται *τροχιές (orbits)*.

**Ορισμός 2.1.1.** Η *θετική τροχιά*  $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$ , η *αρνητική τροχιά*  $\gamma^-(\mathbf{x}_0)$  και η *τροχιά*  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  του  $\mathbf{x}_0$  ορίζονται ως τα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  [στο επίπεδο  $(x, y)$ ]:

$$\gamma^+(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{\mathbf{x}_0})} \phi(t, \mathbf{x}_0)$$

$$\gamma^-(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, 0]} \phi(t, \mathbf{x}_0)$$

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, \beta_{\mathbf{x}_0})} \phi(t, \mathbf{x}_0).$$

Εισάγουμε βέλη στην τροχιά  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  για να δείξουμε την κατεύθυνση στην οποία η  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  μεταβάλλεται καθώς το  $t$  αυξάνει. Η ροή μιας διαφορικής

εξίσωσης απεικονίζεται ως η συλλογή όλων των τροχιών της μαζί με τα κατευθυνόμενα βέλη και το αποτέλεσμα ονομάζεται *πορτρέτο φάσεων* της διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμένες τροχιές παίζουν σημαντικό ρόλο στην ποιοτική θεωρία των συστημάτων. Η απλούστερη από αυτές είναι ένα σημείο ισορροπίας και ορίζεται όπως στην περίπτωση συστημάτων στη μια διάσταση.

**Ορισμός 2.1.2.** Ένα σημείο  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  ονομάζεται *σημείο ισορροπίας* της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , αν  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ , δηλαδή αν  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y})$ , τότε

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad f_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Στα συστήματα στο επίπεδο υπάρχει άλλη μια ενδιαφέρουσα τροχιά, που ονομάζεται *περιοδική τροχιά*, η οποία δεν έχει αντίστοιχη στις διαφορικές εξισώσεις στη μια διάσταση.

**Ορισμός 2.1.3.** Μια λύση  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  λέγεται *περιοδική λύση* με περίοδο  $p$ , για  $p > 0$ , αν  $\phi(t + p, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Η *ελάχιστη περίοδος*  $p$  είναι η περίοδος με την ιδιότητα  $\phi(t, \mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0$  για  $0 < t < p$ . Η τροχιά  $\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\phi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\}$  μιας περιοδικής λύσης  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  με περίοδο  $p$  λέγεται *περιοδική τροχιά* (επίσης *κλειστή τροχιά*) με περίοδο  $p$ .

Είναι προφανές από τον ορισμό πως μια περιοδική τροχιά είναι κλειστή καμπύλη στο επίπεδο  $(x, y)$ . Επίσης μια τροχιά της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  που είναι κλειστή καμπύλη πρέπει να αντιστοιχεί σε περιοδική λύση.

## 2.2 Γραμμικά συστήματα

### 2.2.1 Ιδιότητες λύσεων

Θα μελετήσουμε συστήματα της μορφής  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  με το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  να δίνεται από μια γραμμική απεικόνιση της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου  $a, b, c$  και  $d$  πραγματικοί αριθμοί. Αν θεωρήσουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Τότε το σύστημα (2.4) γράφεται:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Το σύστημα αυτό ονομάζεται *γραμμικό σύστημα*

**Λήμμα 2.2.1.** Οι λύσεις του γραμμικού συστήματος  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ορίζονται για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Αν  $\mathbf{x}_1(t)$  και  $\mathbf{x}_2(t)$  δυο λύσεις του (2.5) και  $c_1, c_2$  δυο πραγματικοί αριθμοί τότε ο γραμμικός συνδυασμός  $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$  είναι επίσης λύση του (2.5).

**Ορισμός 2.2.1.** Δυο λύσεις  $\mathbf{x}_1(t)$  και  $\mathbf{x}_2(t)$  λέγονται *γραμμικά ανεξάρτητες* αν για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  η σχέση  $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{0}$  ισχύει μόνο για  $c_1 = c_2 = 0$ .

Η γραμμική ανεξαρτησία των  $\mathbf{x}_1(t)$  και  $\mathbf{x}_2(t)$  ισοδυναμεί με το γεγονός ότι ο  $2 \times 2$  πίνακας όπου οι στήλες του είναι τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_2(t)$  έχει μη μηδενική ορίζουσα.

$$\det(\mathbf{x}_1(t) \mid \mathbf{x}_2(t)) \neq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

**Ορισμός 2.2.2.** Αν  $\mathbf{x}_1(t)$  και  $\mathbf{x}_2(t)$  δυο λύσεις της (2.5) τότε ο  $2 \times 2$  πίνακας  $\mathbf{X}(t) \equiv (\mathbf{x}_1(t) \mid \mathbf{x}_2(t))$  του οποίου οι στήλες είναι οι λύσεις ονομάζεται *πίνακας λύση της (2.5)*. Αν επιπλέον  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  τότε ο  $\mathbf{X}(t)$  ονομάζεται *θεμελιώδης πίνακας λύση της (2.5)*. Μια ειδική μορφή του θεμελιώδους πίνακα λύση που ικανοποιεί τη σχέση  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$ , με  $\mathbf{I}$  να είναι ο μοναδιαίος  $2 \times 2$  πίνακας, ονομάζεται *κύριος πίνακας λύση*.

**Λήμμα 2.2.2.** (Ιδιότητες θεμελιωδών λύσεων)

(i) Αν  $\mathbf{X}(t)$  πίνακας λύση του (2.5) με  $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$  τότε  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , δηλαδή ο  $\mathbf{X}(t)$  είναι θεμελιώδης λύση της (2.5).

(ii) Αν  $\mathbf{X}(t)$  θεμελιώδης πίνακας λύση, τότε η λύση της εξίσωσης (2.5) με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{X}(t)[\mathbf{X}(0)]^{-1}\mathbf{x}_0. \quad (2.7)$$

Απόδειξη. :(Βιβλίο [1], σελ. 219)

□

Όπως είδαμε στη μια διάσταση η ροή της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = ax$  δίνεται από την  $\phi(t, x_0) = e^{at}x_0$ . Για να κατασκευάσουμε έναν ανάλογο τύπο για τη ροή στο επίπεδο θα συμβολίζουμε

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{X}(t)[\mathbf{X}(0)]^{-1}, \quad (2.8)$$

με  $\mathbf{X}(t)$  να είναι θεμελιώδης πίνακας λύσης της (2.5). Έτσι η ροή (2.7) για την (2.5) μπορεί να γραφεί:

$$\phi(t, \mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad (2.9)$$

με

$$e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I},$$

κι έτσι ο  $e^{\mathbf{A}t}$  είναι κύριος πίνακας λύση της (2.5).

**Λήμμα 2.2.3.** *Ο κύριος πίνακας λύση  $e^{\mathbf{A}t}$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- (i)  $e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$ ,
- (ii)  $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$ ,
- (iii)  $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$ ,
- (iv)  $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \dots$

Απόδειξη. :Βιβλίο [1], σελ. 220

□

**Λήμμα 2.2.4.** *Αν δυο πίνακες  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  μετατίθενται, δηλαδή  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , τότε  $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ .*

## 2.2.2 Υποβιβασμός σε κανονική μορφή

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Για να βρούμε την κανονική μορφή του, θεωρούμε έναν αντιστρέψιμο  $2 \times 2$  πίνακα  $\mathbf{P}$  και έστω  $\mathbf{y}$  να δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ , ισοδύναμα  $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ . Έτσι στις καινούριες συντεταγμένες το σύστημα γίνεται:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.9) μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή στις νέες συντεταγμένες:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{y}_0 = \left(\mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{P}^{-1}\right)\mathbf{x}_0,$$

κι έτσι

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t}\mathbf{P}^{-1}, \quad (2.11)$$



ή

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P}, \quad (2.12)$$

Θέλουμε να βρούμε κατάλληλο πίνακα  $\mathbf{P}$  τέτοιον ώστε ο νέος πίνακας συντελεστής  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  να έχει μια από τις παρακάτω κανονικές μορφές:

$$(i) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (ii) \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (iii) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

με  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha$  και  $\beta \neq 0$  πραγματικούς αριθμούς.

**(i) Διαγώνιος πίνακας:**

Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

που είναι εύκολο ναδειχθεί αν παρατηρήσουμε πως  $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$ ,  $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n$  και με χρήση του λήμματος (2.2.3).

**(ii) Τριγωνικός πίνακας**

Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

για να δείξουμε τη σχέση θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

αφού οι επιμέρους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι χρησιμοποιώντας το λήμμα (2.2.3) για κάθε πίνακα και τέλος το λήμμα (2.2.4).

**(iii) “ Μιγαδικός πίνακας ”**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

για να δείξουμε τη σχέση θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

αφού οι επιμέρους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι χρησιμοποιώντας το λήμμα (2.2.3) για κάθε πίνακα και τέλος το λήμμα (2.2.4).

**Ορισμός 2.2.3.** Ένας αριθμός  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ή  $\mathbb{C}$ ) ονομάζεται *ιδιοτιμή* του πίνακα  $\mathbf{A}$  αν υπάρχει πραγματικό (ή μιγαδικό) διάνυσμα  $\mathbf{u}$  τέτοιο ώστε

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα  $\mathbf{A}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

Αρχικά στους υπολογισμούς καθορίζουμε τις ιδιοτιμές του  $\mathbf{A}$ . Θέλουμε το ομογενές σύστημα του παραπάνω ορισμού

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

να έχει μη μηδενικές λύσεις. Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} &= (a - \lambda)(d - \lambda) - cb \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb \\ &= \lambda^2 - (\text{tr } \mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

που ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο*.

**Θεώρημα 2.2.1.** Έστω  $\mathbf{A}$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας με στοιχεία στο  $\mathbb{R}$ . Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος  $2 \times 2$  πίνακας  $\mathbf{P}$  τέτοιος ώστε:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J},$$

όπου  $\mathbf{J}$  ένας από τους παρακάτω πίνακες σε κανονική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

με  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha$  και  $\beta \neq 0$  να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη. :(Βιβλίο [1], σελ. 232)

□

## 2.3 Κοντά στα σημεία ισορροπίας

### 2.3.1 Ασυμπτωτική ευστάθεια και αστάθεια από τη γραμμικοποίηση

**Ορισμός 2.3.1.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  του γραμμικού συστήματος  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  θα λέμε ότι είναι *ευσταθές* αν, για  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta(\epsilon) > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $\mathbf{x}_0$  όπου  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$  η λύση  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ικανοποιεί την ανισότητα  $\|\phi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$  για κάθε  $t \geq 0$ . Το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  θα λέμε ότι είναι *ασταθές* αν δεν είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχει  $\eta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει  $\mathbf{x}_0$  με  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$  και  $t_{\mathbf{x}_0} > 0$  τέτοιο ώστε  $\|\phi(t_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = \eta$ .

**Ορισμός 2.3.2.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  θα λέμε ότι είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*, αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει  $r > 0$  τέτοιο ώστε  $\|\phi(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  για κάθε  $\mathbf{x}_0$  ικανοποιώντας τη σχέση  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r$ .

**Θεώρημα 2.3.1.** Αν όλες οι ιδιοτιμές ενός πίνακα συντελεστή  $\mathbf{A}$  του γραμμικού συστήματος  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Επιπλέον υπάρχουν θετικές σταθερές  $K$  και  $\alpha$  τέτοιες ώστε:

$$\|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}_0\| \text{ για κάθε } t \geq 0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2. \quad (2.15)$$

Αν μία από τις ιδιοτιμές του πίνακα συντελεστή  $\mathbf{A}$  έχει θετικά πραγματικά μέρη τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  είναι ασταθές.

Απόδειξη. :(Βιβλίο [3], σελ. 533)

□

Είναι προφανές στους παραπάνω ορισμούς ότι ο τύπος ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας είναι μια τοπική ιδιότητα. Ο τύπος ευστάθειας του  $\bar{\mathbf{x}}$  μπορεί να προσδιοριστεί από την προσέγγιση του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f}$  και της παραγώγου του, που είναι γραμμικό διανυσματικό πεδίο. Έτσι ας υποθέσουμε ότι η  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  είναι  $C^1$  συνάρτηση και έστω ο πίνακας

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

να είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της  $\mathbf{f}$  στο  $\mathbf{x}$ .

**Ορισμός 2.3.3.** Αν  $\bar{\mathbf{x}}$  είναι σημείο ισορροπίας της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  τότε η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$$

ονομάζεται *γραμμικοποίηση* του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f}$  στο σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**Θεώρημα 2.3.2.** Έστω  $\mathbf{f}$  μια  $C^1$  συνάρτηση. Αν όλες οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

*Απόδειξη.* Για να μελετήσουμε της ιδιότητες της ευστάθειας του  $\bar{\mathbf{x}}$  θα θέσουμε

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}},$$

έτσι ώστε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  να αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

όπου η συνάρτηση  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ και } D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Επομένως, αφού  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ , η διαφορική εξίσωση  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}})$  μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}). \quad (2.17)$$

Θα αποδείξουμε το θεώρημα δείχνοντας πως η λύση  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$  της εξίσωσης (2.17) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Σημειώνουμε πως οι σχέσεις (2.16) της  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  υποδηλώνουν πως κοντά στην αρχή των αξόνων η  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  είναι 'μικρή' σε σχέση το  $\mathbf{y}$ . Πιο συγκεκριμένα είναι ακόλουθο από το Θεώρημα Μέσης Τιμής ότι για κάθε  $m > 0$ , υπάρχει  $\epsilon > 0$  τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq m\|\mathbf{y}\| \text{ αν } \|\mathbf{y}\| < \epsilon \quad (2.18)$$

Έστω  $\mathbf{y}(t)$  να είναι η λύση της (2.17) ικανοποιώντας την αρχική συνθήκη  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ , Αν δούμε την  $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$  σαν συνάρτηση του  $t$  τότε:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{g}(\mathbf{y}(s)) ds. \quad (2.19)$$

[Βιβλίο [1] ενότητα (8.5)].

Έστω οι σταθερές  $K$  και  $\alpha$  που δίνονται στο θεώρημα (2.3.1),  $m > 0$  έτσι ώστε  $mK < \alpha$  και  $\epsilon > 0$  κατάλληλα επιλεγμένο έτσι ώστε η εξίσωση (2.18) να ικανοποιείται. Τότε από την εξίσωση (2.15) στο θεώρημα (2.3.1) έχουμε:

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq K e^{-\alpha t} \|\mathbf{y}_0\| + \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} m \|\mathbf{y}(s)\| ds,$$

όσο  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon$  και  $0 \leq s \leq t$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της ανισότητας με  $e^{\alpha t}$  έχουμε:

$$e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}_0\| + \int_0^t K m e^{\alpha s} \|\mathbf{y}(s)\| ds.$$

Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Gronwall<sup>1</sup> στη συνάρτηση  $e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\|$ , καταλήγουμε:

$$e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}_0\| e^{Kmt}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω ανισότητας με  $e^{-\alpha t}$  βλέπουμε:

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}_0\| e^{-(\alpha - Km)t} \quad \text{για } \|\mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon. \quad (2.20)$$

Τέλος επιλέγουμε  $\delta > 0$  έτσι ώστε  $K\delta < \epsilon$ . Αν  $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ , τότε η ανισότητα (2.20) εγγυάται ότι  $\|\mathbf{y}(t)\| < \epsilon$  αφού  $\alpha - Km > 0$ . Επομένως η λύση  $\mathbf{y}(t)$  υπάρχει για κάθε  $t \geq 0$  και η λύση ισορροπίας  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  της εξίσωσης (2.17) είναι ευσταθής. Επίσης από την εξίσωση (2.20) έχουμε  $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  αν  $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ . Συνεπώς, η λύση  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η προσέγγιση στο σημείο ισορροπίας είναι εκθετική.  $\square$

**Θεώρημα 2.3.3.** Έστω  $\mathbf{f}$  μια  $C^1$  συνάρτηση. Αν τουλάχιστον μια από τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  της διαφορικής εξίσωσης  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  είναι ασταθές.

<sup>1</sup>Έστω  $K > 0$  και  $f, g$  συνεχείς μη μηδενικές συναρτήσεις για  $\alpha \leq t \leq b$  που ικανοποιούν  $f(t) \leq K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$ , τότε  $f(t) \leq K e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}$ ,  $\alpha \leq t \leq b$

Απόδειξη. :(Βιβλίο [1], σελ. 272)

□

### 2.3.2 Ευσταθείς - Ασταθείς Πολλαπλότητες

Από τη γραμμικοποίηση έχουμε δει πως ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας είναι πάντα ασταθές, όμως διαφέρει από άλλα ασταθή σημεία ισορροπίας. Όπως βλέπουμε στο πορτρέτο φάσεων (;;) υπάρχουν τέσσερις ειδικές τροχιές που πλησιάζουν το σημείο ισορροπίας για θετικό και αρνητικό χρόνο. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 2.3.4.** Έστω  $U$  μια περιοχή του σημείου ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$ . Τότε η (τοπικά) ευσταθή πολλαπλότητα  $W^s(\bar{\mathbf{x}}, U)$  και η (τοπικά) ασταθή πολλαπλότητα  $W^u(\bar{\mathbf{x}}, U)$  του  $\bar{\mathbf{x}}$  ορίζονται να είναι τα ακόλουθα υποσύνολα του  $U$ :

$$W^s(\bar{\mathbf{x}}, U) \equiv \{\mathbf{x}_0 \in U : \phi(t, \mathbf{x}_0) \in U \text{ για } t \geq 0 \text{ και, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}}\},$$

$$W^u(\bar{\mathbf{x}}, U) \equiv \{\mathbf{x}_0 \in U : \phi(t, \mathbf{x}_0) \in U \text{ για } t \leq 0 \text{ και, } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}}\}.$$

Με κατάλληλη γραμμική αλλαγή των συντεταγμένων, μια διαφορική εξίσωση  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  που η γραμμικοποίησή της στο  $(0, 0)$  είναι σαγματικό σημείο μπορεί να μετασχηματιστεί σε “ κανονική μορφή ”

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x + g_1(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda_2 y + g_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  και η συνάρτηση  $\mathbf{g} \equiv (g_1, g_2)$  ικανοποιεί τις  $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Σημειώνουμε πως η τοπική ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα της γραμμικοποίησης στην αρχή των αξόνων είναι οι άξονες  $x$  και  $y$ . Ας υποθέσουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι στη μορφή (2.21). Έτσι έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 2.3.4.** Για το σύστημα (2.21), υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε, στην περιοχή  $U \equiv \{(x, y) : |x| < \delta, |y| < \delta\}$  η τοπικά ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα του σημείου ισορροπίας  $(0, 0)$  δίνεται από:

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{0}, U) &= \{(x, y) : y = h_s(x), |x| < \delta\}, \\ W^u(\mathbf{0}, U) &= \{(x, y) : x = h_u(y), |y| < \delta\}, \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις  $h_s$  και  $h_u$  είναι όσο ομαλές όσο η  $\mathbf{g}$  στην εξίσωση (2.21). Επιπλέον, ικανοποιούν τις συνθήκες

$$h_s(0) = 0, \quad h_u(0) = 0, \quad \frac{dh_s}{dx}(0) = 0, \quad \frac{dh_u}{dy}(0) = 0. \quad (2.22)$$

Απόδειξη. : (Βιβλίο [3], σελ. 566)

□

Γενικεύοντας την έννοια της τοπικής και ασταθής πολλαπλότητας για ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$ . Αν δεν περιοριστούμε τοπικά στην περιοχή  $U$  του  $\bar{\mathbf{x}}$ , τότε καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 2.3.5.** Η γενικά ευσταθή πολλαπλότητα  $W^s(\bar{\mathbf{x}})$  και γενικά ασταθή πολλαπλότητα  $W^u(\bar{\mathbf{x}})$  ενός σημείου ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  ορίζονται να είναι τα ακόλουθα σύνολα:

$$W^s(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 : \text{για } t \geq 0 \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}\},$$

$$W^u(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 : \text{για } t \leq 0 \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, \mathbf{x}_0) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}\}.$$

### 2.3.3 Ισοδυναμία Ροών κοντά σε Υπερβολικά Σημεία Ισορροπίας

**Ορισμός 2.3.6.** Δυο συστήματα διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  και  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  που ορίζονται σε ανοικτά υποσύνολα  $U$  και  $V$  του  $\mathbb{R}^2$ , αντίστοιχα, θα λέμε ότι είναι *τοπολογικά ισοδύναμα* αν υπάρχει ομοιομορφισμός  $\mathbf{h} : U \rightarrow V$  τέτοιος ώστε ο  $\mathbf{h}$  να απεικονίζει τις τροχιές του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{f}$  σε τροχιές του  $\mathbf{g}$  και διατηρεί την κατεύθυνση του χρόνου.

**Ορισμός 2.3.7.** Ένα σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$  του  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  θα λέμε ότι είναι *υπερβολικό* αν όλες οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  έχουν μη-μηδενικά πραγματικά μέρη.

**Θεώρημα 2.3.5.** (*Grobman-Hartman*)

Αν  $\bar{\mathbf{x}}$  ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας του  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , τότε υπάρχει περιοχή του  $\bar{\mathbf{x}}$  στην οποία η  $\mathbf{f}$  είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τη γραμμικοποίηση  $\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$ .

Λόγω της υπερβολικότητας του σημείου ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}}$ , ο παραπάνω ομοιομορφισμός  $\mathbf{h}$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να διατηρεί τη χρονική παραμετροποίηση των τροχιών του διανυσματικού πεδίου. Για να παραφράσουμε το θεώρημα των Grobman-Hartman, θεωρούμε  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  να είναι η ροή της  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  και  $\psi(t, \mathbf{x}_0)$  να είναι η ροή της  $\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$ . Τότε ο ομοιομορφισμός  $\mathbf{h} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  μπορεί να επιλεγεί ως εξής:

$$\mathbf{h}(\phi(t, \mathbf{x}_0)) = \psi(t, \mathbf{h}(\mathbf{x}_0))$$

για κάθε  $t$  καθώς η  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  παραμένει στο  $U$ .

## 2.4 Παρουσία μιας μηδενικής ιδιοτιμής

### 2.4.1 Ευστάθεια - Αστάθεια

Έστω  $\mathbf{f}$  μια  $C^k$  συνάρτηση με  $k \geq 1$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

ικανοποιώντας τις συνθήκες:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Επίσης θεωρούμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= -y + f_2(x, y). \end{aligned} \quad (2.24)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη διανυσματική μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Παρατηρούμε πως το γραμμικό μέρος του διανυσματικού πεδίου για το σημείο ισορροπίας στο  $(0, 0)$  βρίσκεται σε κανονική μορφή με ιδιοτιμές  $0$  και  $-1$ . Στις εφαρμογές, η γραμμικοποίηση του διανυσματικού πεδίου με μια μηδενική και μια αρνητική ιδιοτιμή δεν θα μπορεί πάντα να έρθει σε κανονική μορφή (2.24). Ωστόσο ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο μπορεί να έρθει σε κανονική μορφή με γραμμική αλλαγή των συντεταγμένων και επαναπροσδιορισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ .

Αν  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  είναι λύση της εξίσωσης (2.24) με αρχική συνθήκη κοντά στο μηδέν, τότε η μεταβολή του  $x(t)$  θα είναι πιο αργή σε σχέση με τη μεταβολή του  $y(t)$ . Έτσι, είναι λογικό να θεωρήσουμε το  $x$  σαν σταθερά για τη δεύτερη εξίσωση και θεωρούμε το  $y$  στην πρώτη εξίσωση σαν το σημείο μηδενισμού  $\psi(x)$  της  $-y + f_2(x, y)$ . Έτσι ο τύπος της ευστάθειας για την εξίσωση (2.24) σε μια περιοχή του  $(0, 0)$  καθορίζεται από τη διαφορική εξίσωση  $\dot{x} = f_1(x, \psi(x))$ .

Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε την εξίσωση:

$$\mathcal{F}(x, y) \equiv -y + f_2(x, y) = 0.$$



Αφού  $\mathcal{F}(0, 0) = 0$  και  $\partial\mathcal{F}(0, 0)/\partial y = -1$  από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει  $\delta > 0$  και μοναδική  $C^1$  συνάρτηση  $\psi : \{x : |x| < \delta\} \rightarrow \{y : |y| < \delta\}$  τέτοια ώστε:

$$-\psi(x) + f_2(x, \psi(x)) = 0, \quad (2.25)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \quad (2.26)$$

Στη δεύτερη σχέση στην (2.26) καταλήγουμε παραγωγίζοντας την (2.25) ως προς  $x$  και θέτοντας  $x = 0$ .

**Θεώρημα 2.4.1.** Έστω ότι  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  είναι μια  $C^{k+1}$  συνάρτηση με:

$$f_1(x, \psi(x)) = \alpha x^k + O(|x^{k+1}|) \text{ καθώς } x \rightarrow 0, \quad (2.27)$$

όπου  $\alpha \neq 0$  πραγματικός αριθμός,  $k$  θετικός ακέραιος και  $\psi(x)$  δεδομένο από την εξίσωση (2.25). Τότε το σημείο ισορροπίας στο  $(0, 0)$  του συστήματος (2.24) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\alpha < 0$  και  $k$  περιττός, αλλιώς είναι ασταθές.

Απόδειξη. :(Βιβλίο, [1], σελ. 310)

□

Γενικεύοντας το θεώρημα (2.4.1) έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 2.4.2.** Έστω  $\psi(x)$  να ορίζεται όπως στην περίπτωση (2.25). Τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  της (2.24) είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν το σημείο ισορροπίας  $\bar{x} = 0$  της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = f_1(x, \psi(x)) \quad (2.28)$$

είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές).

## 2.4.2 Διακλαδώσεις

Έστω  $\mathbf{F}$  να είναι μια  $C^k$  συνάρτηση, με  $k \geq 1$ , που εξαρτάται από παραμέτρους  $\lambda$ ,

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\lambda, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x}),$$

ικανοποιώντας

$$\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ και } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_1(\lambda, x, y) \\ \dot{y} &= -y + F_2(\lambda, x, y), \end{aligned} \quad (2.30)$$

όπου  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  και καθορίζουμε τη φύση της διακλάδωσης ενός σημείου ισορροπίας κοντά στο  $(0, 0)$  για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**Λήμμα 2.4.1.** *Αν  $\mathbf{F}$  είναι μια  $C^k$  συνάρτηση,  $k \geq 1$ , τότε υπάρχουν σταθερές  $\lambda_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  και μια  $C^k$  συνάρτηση:*

$$\psi : \{\lambda : \|\lambda\| < \lambda_0\} \times \{x : |x| < \delta\} \rightarrow \{y : |y| < \delta\}$$

ικανοποιώντας τις σχέσεις:

$$\psi(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(\mathbf{0}, 0) = 0 \quad (2.31)$$

έτσι ώστε, για κάθε  $\bar{\lambda}$ , με  $\|\bar{\lambda}\| < \lambda_0$ , ένα σημείο  $(\bar{x}, \bar{y})$ , με  $|\bar{x}| < \delta$  και  $|\bar{y}| < \delta$ , είναι ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.31) αν και μόνο αν  $\bar{y} = \psi(\bar{\lambda}, \bar{x})$  και  $F_1(\bar{\lambda}, \bar{x}, \psi(\bar{\lambda}, \bar{x})) = 0$ .

**Ορισμός 2.4.1.** Έστω  $\psi$  ορισμένο όπως στο λήμμα (2.4.1). Τότε η  $C^k$  συνάρτηση  $G(\lambda, x)$  που ορίζεται:

$$G(\lambda, x) \equiv F(\lambda, x, \psi(\lambda, x)) \quad (2.32)$$

ονομάζεται συνάρτηση διακλάδωσης και η εξίσωση:

$$G(\lambda, x) = 0 \quad (2.33)$$

ονομάζεται εξίσωση διακλάδωσης του συστήματος (2.30).

Είναι εμφανές πως τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = G(\lambda, x) \quad (2.34)$$

είναι σε ένα - προς - ένα αντιστοιχία με τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.30). Αποδεικνύεται ότι οι τύποι ευστάθειας των αντίστοιχων σημείων ισορροπίας των εξισώσεων (2.30) και (2.34) επίσης συμφωνούν.

Στην περίπτωση που τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης (2.34) είναι υπερβολικά, δεν είναι δύσκολο να καθορίσουμε τον τύπο της ευστάθειας για τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.30).

**Θεώρημα 2.4.3.** Έστω  $\psi(\lambda, x)$  ορισμένη όπως στο λήμμα (2.4.1) και  $\bar{x} = (\bar{x}, \psi(\bar{\lambda}, \bar{x}))$  ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.30) με  $\|\bar{\lambda}\| < \lambda_0$ ,  $|\bar{x}| < \delta$  και  $|\psi(\bar{\lambda}, \bar{x})| < \delta$ . Τότε  $\lambda_0$  και  $\delta$  μπορούν να επιλεγούν αρκετά μικρά ώστε:

(i) το  $\bar{x}$  να είναι υπερβολικά ευσταθής κόμβος αν  $\partial G(\bar{\lambda}, \bar{x})/\partial x < 0$ ,  
(ii) το  $\bar{x}$  να είναι σαγματικό σημείο αν  $\partial G(\bar{\lambda}, \bar{x})/\partial x > 0$ .

Απόδειξη. :(Βιβλίο, [1], σελ. 315)

□

**Θεώρημα 2.4.4.** Θεωρούμε το σύστημα (2.30) με  $\lambda$  παράμετρο. Αν

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(0, 0, 0) \neq 0,$$

τότε υπάρχει διακλάδωση σάγματος - κόμβου για  $\lambda = 0$ , όταν  $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} < 0$  υπάρχουν, δυο υπερβολικά σημεία ισορροπίας, το ένα σαγματικό και το άλλο ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος και κανένα σημείο ισορροπίας όταν  $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} > 0$ .

**Θεώρημα 2.4.5.** Έστω  $\psi(\bar{\lambda}, \bar{x})$  ορισμένη όπως στο λήμμα (2.4.1) για δεδομένο μικρό  $\bar{\lambda}$ , έστω  $\bar{x} = (\bar{x}, \psi(\bar{\lambda}, \bar{x}))$  να είναι ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.30). Τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}$  της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = G(\bar{\lambda}, x)$$

είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές).

### 2.4.3 Κεντρικές πολλαπλότητες

**Ορισμός 2.4.2.** Μια  $C^k$  καμπύλη  $W^c(\mathbf{0}, U)$  σε μια περιοχή  $U$  του  $(0, 0)$  λέγεται τοπικά κεντρική πολλαπλότητα για την εξίσωση (2.24) αν:

- $W^c(\mathbf{0}, U)$  είναι αναλλοίωτη για τη ροή της εξίσωσης (2.24), δηλαδή, αν  $\mathbf{x}(t)$  είναι μια λύση για την (2.24) με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) \in W^c(\mathbf{0}, U)$ , τότε  $\mathbf{x}(t) \in W^c(\mathbf{0}, U)$  καθώς  $\mathbf{x}(t) \in U$ ,
- $W^c(\mathbf{0}, U)$  είναι μια γραφική παράσταση μιας  $C^k$  συνάρτησης  $h(x) = y$  και εφάπτεται στον άξονα  $x$  στο  $(0, 0)$ , δηλαδή,

$$W^c(\mathbf{0}, U) = \{(x, y) : y = h(x), (x, y) \in U\},$$

όπου η  $h$  ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$h(0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0 \quad (2.35)$$

**Θεώρημα 2.4.6.** Έστω ότι το διανυσματικό πεδίο του συστήματος (2.24) είναι  $C^k$  και θεωρούμε μια αρκετά μικρή περιοχή  $U \in \mathbb{R}^2$  στο  $(0,0)$ . Τότε υπάρχει μια τοπικά κεντρική πολλαπλότητα  $W^c$  στο  $U$  που αποτελείται από τη γραφική παράσταση μιας  $C^k$  συνάρτησης  $h(x) = y$ . Υπάρχουν θετικές σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$  τέτοιες ώστε, για κάθε λύση  $\mathbf{x}(t)$  με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) \in U$ , η ανισότητα

$$|y(t) - h(x(t))| \leq \alpha e^{-\beta t} |y(0) - h(x(0))| \quad (2.36)$$

ισχύει όσο  $\mathbf{x}(t) \in U$ .

**Ορισμός 2.4.3.** Έστω  $f(\epsilon)$  και  $g(\epsilon)$  συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του  $\epsilon = 0$  (η οποία μπορεί να μην περιέχει το 0). Θα γράφουμε

$$f(\epsilon) = o(g(\epsilon)) \quad \text{για } \epsilon \rightarrow 0$$

αν

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0,$$

και θα γράφουμε

$$f(\epsilon) = O(g(\epsilon)) \quad \text{για } \epsilon \rightarrow 0$$

αν υπάρχει μια θετική σταθερά  $M$  τέτοια ώστε

$$|f(\epsilon)| \geq M|g(\epsilon)|,$$

για κάθε  $\epsilon$  σε μια περιοχή του μηδενός (η οποία δεν περιέχει κατ' ανάγκη το μηδέν).

**Θεώρημα 2.4.7.** Ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.24) στο  $U$  είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = f_1(x, h(x)) \quad (2.37)$$

στην κεντρική πολλαπλότητα που ορίζεται από την  $h$  είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές).

Θέλουμε να υπολογίσουμε τους πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης  $h(x)$  που ορίζει μια κεντρική πολλαπλότητα. Αν παραγωγίσουμε ως προς  $t$  την εξίσωση  $y(t) = h(x(t))$ , τότε έχουμε:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(x)\dot{x}.$$

Από την εξίσωση (2.24),

$$-h(x) + f_2(x, h(x)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f_1(x, h(x)) \quad (2.38)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$h(0) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0$$

παράγεται μια κεντρική πολλαπλότητα που ορίζεται από την  $h(x)$ . Η μερική διαφορική εξίσωση (2.38) στις περισσότερες περιπτώσεις δε μπορεί πάντα να λυθεί ως προς  $h$ . Γι αυτό γράφουμε την  $h(x)$  σαν δυναμοσειρά με μεταβλητή  $x$ ,

$$h(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + O(|x|^4), \quad (2.39)$$

όπου οι συντελεστές  $c_i$  προσδιορίζονται αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.38).

Αφού γράψουμε την  $h(x)$  σε μορφή δυναμοσειράς βλέπουμε ότι όλες οι κεντρικές πολλαπλότητες έχουν το ίδιο ανάπτυγμα Taylor κοντά στο  $(0, 0)$ . Για κάθε συνάρτηση

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow g(x)$$

ικανοποιώντας

$$g(0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0$$

όπου είναι  $C^k$ , με  $k \geq 1$ , σε μια περιοχή του  $(0, 0)$ , θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$M(g)(x) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}(x) f_1(x, g(x)) + g(x) - f_2(x, g(x)).$$

**Θεώρημα 2.4.8.** Έστω  $h$  να είναι μια κεντρική πολλαπλότητα της εξίσωσης (2.24). Υποθέτουμε πως  $M(g)(x) = O(|x|^k)$  καθώς  $x \rightarrow 0$ , με  $k > 1$ . Τότε καθώς  $x \rightarrow 0$ ,

$$|h(x) - g(x)| = O(|x|^k).$$

Θα γενικεύσουμε τη θεωρία για τις κεντρικές πολλαπλότητες σε συστήματα της μορφής (2.30) που εξαρτώνται από παραμέτρους, και θα εξετάσουμε για πιθανές διακλαδώσεις κοντά στο  $(0, 0)$  για μικρές τιμές του  $\lambda$ .

**Ορισμός 2.4.4.** Μια οικογένεια από  $C^k$  καμπύλες  $W_\lambda^c(\mathbf{0}, U)$  σε μια περιοχή  $U$  του  $(0, 0)$  θα είναι τοπικά κεντρική πολλαπλότητα για την εξίσωση (2.30) αν:

- $W_\lambda^c(\mathbf{0}, U)$  είναι αναλλοίωτη για τη ροή της εξίσωσης (2.30), δηλαδή, αν  $\mathbf{x}(t)$

είναι λύση για την (2.30) με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) \in W_\lambda^c(\mathbf{0}, U)$ , τότε  $\mathbf{x}(t) \in W_\lambda^c(\mathbf{0}, U)$  καθώς  $\mathbf{x}(t) \in U$ ,

•  $W_\lambda^c(\mathbf{0}, U)$  είναι μια γραφική παράσταση από μια  $C^k$ -συνάρτηση  $h(\lambda, x) = y$  και για  $\lambda = 0$ , εφάπτεται στον άξονα  $x$  στο  $(0, 0)$ , δηλαδή,

$$W_\lambda^c(\mathbf{0}, U) = \{(x, y) : y = h(\lambda, x), (x, y) \in U\},$$

όπου η συνάρτηση  $h$  ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$h(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad (2.40)$$

**Θεώρημα 2.4.9.** Έστω ότι το διανυσματικό πεδίο της (2.30) να είναι  $C^k$  και θεωρούμε μια επαρκώς μικρή περιοχή  $U \in \mathbb{R}^2$  στο  $(0, 0)$ . Τότε, για  $\|\lambda\|$  μικρό υπάρχει τοπικά κεντρική πολλαπλότητα  $W_\lambda^c$  στο  $U$  που αποτελείται από τη γραφική παράσταση μιας  $C^k$  συνάρτησης  $h(\lambda, x) = y$ . Επιπλέον, για κάθε λύση  $\mathbf{x}(t)$  με αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0) \in U$  υπάρχουν θετικές σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$  τέτοιες ώστε,

$$|y(t) - h(\lambda, x(t))| \leq \alpha e^{-\beta t} |x(0) - h(\lambda, x(0))| \quad (2.41)$$

για  $\mathbf{x}(t) \in U$ .

Ένα σημείο ισορροπίας της (2.30) στο  $U$ , πρέπει να βρίσκεται πάντα σε κάθε κεντρική πολλαπλότητα.

**Θεώρημα 2.4.10.** Ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.30) στο  $U$  είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές) αν και μόνο αν το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = F_1(\lambda, x, h(\lambda, x)) \quad (2.42)$$

στην κεντρική πολλαπλότητα που ορίζεται από την  $h$  είναι ευσταθές (αντίστοιχα, ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές).

Αν παραγωγίσουμε ως προς  $t$  την εξίσωση  $y(t) = h(\lambda, x(t))$ , τότε έχουμε:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(\lambda, x)\dot{x}.$$

Αντικαθιστώντας τα  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  από την εξίσωση (2.30):

$$-h(\lambda, x) + F_2(\lambda, x, h(\lambda, x)) = \frac{\partial h}{\partial x}(\lambda, x)F_1(\lambda, x, h(\lambda, x)) \quad (2.43)$$

με αρχικές συνθήκες,

$$h(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = 0$$

παράγει μια κεντρική πολλαπλότητα που ορίζεται από την  $h(\lambda, x)$ . Αναπτύσσουμε την  $h(\lambda, x)$  σαν δυναμοσειρά με μεταβλητές τα  $x$  και  $\lambda$ :

$$h(\lambda, x) = c_{10}\lambda + c_{20}\lambda^2 + c_{11}\lambda x + c_{02}x^2 + O((|\lambda| + |x|)^3), \quad (2.44)$$

με συντελεστές  $c_{ij}$  που προσδιορίζονται από την εξίσωση (2.43).

Έστω

$$g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda, x) \rightarrow g(\lambda, x)$$

ικανοποιώντας τις συνθήκες,

$$g(0, 0), \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

είναι μια  $C^k$  συνάρτηση, με  $k \geq 1$  σε μια περιοχή του  $(0, 0)$  και θεωρούμε μια συνάρτηση:

$$M(g)(\lambda, x) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}(\lambda, x)F_1(\lambda, x, g(\lambda, x)) + g(\lambda, x) - F_2(\lambda, x, g(\lambda, x)).$$

**Θεώρημα 2.4.11.** Έστω  $h(\lambda, x)$  να είναι μια κεντρική πολλαπλότητα της εξίσωσης (2.30). Υποθέτουμε πως  $M(g)(\lambda, x) = O((|\lambda| + |x|)^k)$  καθώς  $(\lambda, x) \rightarrow \mathbf{0}$ , με  $k > 1$ . Τότε καθώς  $(\lambda, x) \rightarrow \mathbf{0}$ ,

$$|h(\lambda, x) - g(\lambda, x)| = O((|\lambda| + |x|)^k).$$

## 2.5 Παρουσία μόνο φανταστικών ιδιοτιμών

### 2.5.1 Ευστάθεια-Αστάθεια

Όταν οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου διανυσματικού πεδίου σε ένα σημείο ισορροπίας είναι καθαρά φανταστικές η δυναμική τοπικά στο σημείο ισορροπίας δε μπορεί να καθορισθεί από τη γραμμικοποίηση

**Παράδειγμα 2.5.1.** Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \alpha y(x^2 + y^2),\end{aligned}\tag{2.45}$$

με  $\alpha \in \mathbb{R}$  γνωστό. Ανεξάρτητα από την τιμή του  $\alpha$  το  $(0, 0)$  είναι σημείο ισορροπίας και οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης σε αυτό είναι  $\pm i$ . Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ :

$$x = r \cos \theta, \quad y = -r \sin \theta,\tag{2.46}$$

η εξίσωση (2.45) γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r^3 \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Αφού  $\dot{\theta} > 0$ , οι τροχιές είναι μονότονες σπείρες γύρω από το  $(0, 0)$ . Επομένως ο τύπος της ευστάθειας του  $(0, 0)$  της εξίσωσης (2.45) είναι ίδιος με τον τύπο ευστάθειας του σημείου ισορροπίας  $r = 0$  της εξίσωσης  $\dot{r} = \alpha r^3$ . Το  $r = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\alpha < 0$ , ευσταθές στο  $\alpha = 0$  και ασταθές για  $\alpha > 0$ .

Σε αντίθεση με το παραπάνω παράδειγμα, στα συστήματα με αυστηρά φανταστικές ιδιοτιμές η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες δεν καταλήγει πάντα σε απλή μορφή. Ωστόσο μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα περιοδικό πρόβλημα με περίοδο  $2\pi$ .

Έστω  $\mathbf{f}$  να είναι μια  $C^k$  συνάρτηση, με  $k \geq 2$ ,

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

ικανοποιώντας τις σχέσεις:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\| < 1,\tag{2.48}$$

όπου η νόρμα του Ιακωβιανού πίνακα  $\|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\|$  είναι ένας μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός έτσι ώστε  $\|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}\| \leq \|D\mathbf{f}(\mathbf{0})\| \|\mathbf{x}\|$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + f_1(x, y) \\ \dot{y} &= -x + f_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.49}$$



και σε διανυσματική μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Παρατηρούμε ότι το γραμμικό κομμάτι του διανυσματικού πεδίου για το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  είναι σε κανονική μορφή με ιδιοτιμές  $\pm i$ .

Μετατρέποντας το σύστημα (2.49) σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mathfrak{R}(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1 + \Theta(r, \theta), \end{aligned} \tag{2.50}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(r, \theta) &= f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta - f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta \\ \Theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} [f_1(r \cos \theta, -r \sin \theta) \sin \theta + f_2(r \cos \theta, -r \sin \theta) \cos \theta] \end{aligned} \tag{2.51}$$

με  $r \neq 0$  και αν  $r = 0$  ορίζουμε:

$$\Theta(0, \theta) = (\sin \theta, \cos \theta) D\mathbf{f}(\mathbf{0}) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}.$$

Αφού η  $\mathbf{f}$  ικανοποιεί τις συνθήκες (2.48), η συνάρτηση  $\mathfrak{R}$  είναι  $C^k$  και η  $\Theta$  είναι  $C^{k-1}$  και ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\mathfrak{R}(0, 0) = 0, \quad |\Theta(0, \theta)| < 1. \tag{2.52}$$

Επίσης παρατηρούμε πως τόσο η  $\mathfrak{R}(r, \theta)$  όσο και η  $\Theta(r, \theta)$  είναι περιοδικές με περίοδο  $2\pi$  για τη μεταβλητή  $\theta$ .

Αφού  $|\Theta(0, \theta)| < 1$  για κάθε  $\theta$  και  $\Theta(r, \theta)$  είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε  $\delta > 0$  έτσι ώστε  $1 + \Theta(r, \theta) > 0$  για κάθε  $\theta$  και  $|r| < \delta$ . Συνεπώς σε μια περιοχή του  $(0, 0)$  έχουμε  $\dot{\theta} > 0$ . Συμπεραίνουμε ότι οι τροχιές της (2.50) είναι μονότονα σπειροειδής γύρω από το  $(0, 0)$ . Έτσι μπορούμε να απαλείψουμε το  $t$  στην εξίσωση (2.50) και να καταλήξουμε σε μια συνάρτηση  $r$  του  $\theta$  μέσω της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dr}{d\theta} = \mathcal{R}(r, \theta), \tag{2.53}$$

όπου

$$\mathcal{R}(r, \theta) = \frac{\mathfrak{R}(r, \theta)}{1 + \Theta(r, \theta)}$$

η οποία είναι μια  $C^{k-1}$  συνάρτηση με περίοδο  $2\pi$  και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathcal{R}(0, \theta) = 0. \quad (2.54)$$

Οι λύσεις της (2.53) δίνουν τις τροχιές της (2.49). Επίσης μπορούμε να βρούμε λύσεις της (2.49) σαν συναρτήσεις του χρόνου από τις λύσεις της (2.53) ως εξής:

- Σταθεροποιούμε το  $r_0$  και βρίσκουμε τη λύση  $r(\theta, r_0)$  της (2.53) με αρχική τιμή  $r(0, r_0) = r_0$ . Η τροχιά της (2.49) που περνά από το  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  δίνεται:

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \{(x, y) : x = r(\theta, r_0) \cos \theta, y = -r(\theta, r_0) \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < +\infty\}. \quad (2.55)$$

- Βρίσκουμε τη λύση του προβλήματος

$$\dot{\theta} = 1 + \Theta(r(\theta, r_0), \theta), \quad \text{με αρχική τιμή } \theta(0) = 0. \quad (2.56)$$

- Τέλος η λύση  $\mathbf{x}(t)$  της (2.49) που περνά από το  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(\theta(t), r_0) \cos \theta(t) \\ y(t) &= -r(\theta(t), r_0) \sin \theta(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

### Παράδειγμα 2.5.2. (Αποσβεσμένος ταλαντωτής)

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\ddot{z} = z^2 \dot{z} + z = 0,$$

ή ισοδύναμα το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^2 y. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση (2.53) για το σύστημα (2.58) δίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -[\cos^2 \theta \sin^2 \theta] r^3 + O(r^4) \\ &= -\frac{1}{8}[1 - \cos 4\theta] r^3 + O(r^4). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Θεωρούμε μια μεταβλητή  $\rho$  πού ορίζεται

$$r = \rho + \alpha(\theta)\rho^3, \quad (2.60)$$

με  $\alpha(\theta)$  να είναι μια  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί. Με τη νέα μεταβλητή  $\eta$  (2.59) γίνεται:

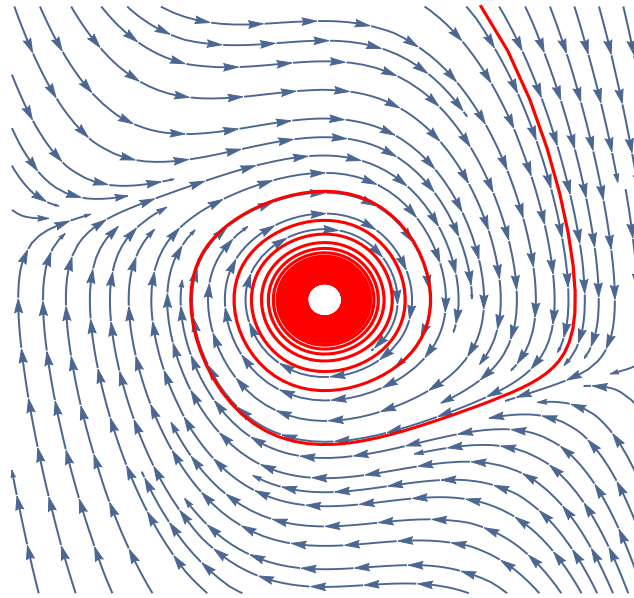
$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{8}[1 - \cos 4\theta + 8\alpha'(\theta)]\rho^3 + O(\rho^4).$$

Για να κάνουμε το συντελεστή του  $\rho^3$  ανεξάρτητο του  $\theta$ , επιλέγουμε  $\alpha'(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta)$ . Έτσι έχουμε:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{8}\rho^3 + O(\rho^4). \quad (2.61)$$

Βλέπουμε ότι το  $\rho = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, άρα από το μετασχηματισμό (2.60), το  $r = 0$  είναι επίσης ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρά την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, παρατηρούμε πως η προσέγγισή του είναι “αργή” λόγω της μη-υπερβολικότητας. Γράφημα (2.1).



Σχήμα 2.1: Το  $(0, 0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας με φανταστικές ιδιοτιμές για το σύστημα (2.58).

**Λήμμα 2.5.1.** Έστω ότι  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  είναι μια  $C^{2k+2}$  συνάρτηση για του (2.49) με την αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha\rho^{2k+1} + o(|\rho^{2k+1}|) \quad \text{καθώς } \rho \rightarrow 0,$$

όπου  $\alpha \neq 0$  πραγματικός αριθμός και  $k$  θετικός ακέραιος. Τότε το σημείο ισορροπίας στο  $(0, 0)$  του συστήματος (2.49) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\alpha < 0$  αλλιώς είναι ασταθές.

**Θεώρημα 2.5.1.** Υποθέτουμε ότι η  $\mathbf{f}$  είναι αναλυτική. Τότε για το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  της εξίσωσης (2.49), ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- είναι ασταθές,
- είναι ασυμπτωτικά ευσταθές,
- είναι κέντρο, δηλαδή, κάθε λύση σε μια περιοχή του είναι περιοδική.

**Παράδειγμα 2.5.3.** Έστω το παρακάτω σύστημα σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \begin{cases} 0, & \text{αν } r = 0 \\ -e^{-1/r^2} \sin(1/r) & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Το ανάπτυγμα Taylor της  $dr/d\theta$  στο  $(0, 0)$  είναι ταυτοτικά μηδέν. Βλέπουμε ότι το  $(0, 0)$  είναι ευσταθές, όμως δεν είναι κέντρο. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι υπάρχουν άπειρες ομόκεντρες τροχιές που περικλείουν το  $(0, 0)$  με πλάτος  $(k\pi)^{-1}$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος. Οι τροχιές με πλάτος  $[(2k+1)\pi]^{-1}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς ενώ οι τροχιές με πλάτος  $[(2k+2)\pi]^{-1}$  είναι ασταθείς. Συνεπώς το  $(0, 0)$  είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Λήμμα 2.5.2.** Υπάρχει μια φραγμένη περιοχή  $U$  του  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε κάθε περιοδική τροχιά  $\Gamma$  του (2.49) που βρίσκεται στο  $U$  περικλείει το  $(0, 0)$ , επίσης αν  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0) \in \Gamma$  με  $r_0 > 0$  τότε η λύση  $r(\theta, r_0)$  της (2.53) που ικανοποιεί την αρχική τιμή  $r(0, r_0) = r_0$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Συνεπώς αν  $r(\theta, r_0)$  είναι μια  $2\pi$ -περιοδική λύση της (2.53), τότε η τροχιά  $\Gamma(\mathbf{x}_0)$  με  $\mathbf{x}_0 = (r_0, 0)$  του συστήματος (2.49) είναι περιοδική τροχιά. Η ελάχιστη περίοδος  $T$  μιας  $\Gamma$  είναι η πρώτη τιμή του  $t$  όπου η λύση  $\theta(t)$  της (2.56) ικανοποιεί τη σχέση,

$$\theta(T) = 2\pi. \quad (2.63)$$

Θεωρούμε μια περιοδική τροχιά  $\Gamma$  του (2.49) και παραλείπουμε τη χρονική παραμετροποίηση. Ορίζουμε την απόσταση από ένα σημείο  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  σε μια περιοδική τροχιά  $\Gamma$ , συμβολίζοντας με  $\text{dist}(\hat{\mathbf{x}}, \Gamma)$ :

$$\text{dist}(\hat{\mathbf{x}}, \Gamma) \equiv \min \{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

**Ορισμός 2.5.1.** Μια περιοδική τροχιά  $\Gamma$  ενός συστήματος (2.49) θα την ονομάζουμε *ευσταθή τροχιά* αν, για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \Gamma) < \delta$  συνεπάγεται ότι  $\text{dist}(\phi(t, \mathbf{x}_0), \Gamma) < \epsilon$  για κάθε  $t \geq 0$ . Μια περιοδική τροχιά  $\Gamma$  θα την ονομάζουμε *ασταθή τροχιά* αν δεν είναι ευσταθής τροχιά.

**Ορισμός 2.5.2.** Μια περιοδική τροχιά  $\Gamma$  της (2.49) θα την ονομάζουμε *ασυμπτωτικά ευσταθή τροχιά* αν είναι ευσταθής τροχιά και επιπλέον υπάρχει  $b > 0$  έτσι ώστε  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \Gamma) < b$  συνεπάγεται ότι  $\text{dist}(\phi(t, \mathbf{x}_0), \Gamma) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

## 2.5.2 Διακλάδωση Poincare-Andronov-Hopf

**Θεώρημα 2.5.2** (Poincare-Andronov-Hopf).

Έστω  $\dot{\mathbf{x}} = A(\lambda)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x})$  να είναι ένα  $C^k$ , με  $k \geq 3$ , διανυσματικό πεδίο που εξαρτάται από την παράμετρο  $\lambda$  έτσι ώστε  $\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  και  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  για κάθε  $|\lambda|$  επαρκώς μικρό.

Υποθέτουμε ότι το γραμμικό μέρος  $A(\lambda)$  στο  $(0, 0)$  έχει τις ιδιοτιμές  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  με  $\alpha(0) = 0$  και  $\beta(0) \neq 0$ .

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές τέμνουν τον φανταστικό άξονα με μη-μηδενική ταχύτητα, δηλαδή

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0. \quad (2.64)$$

Τότε, σε κάθε περιοχή  $U$  του  $(0, 0)$  και για κάθε  $\lambda$  επαρκώς μικρό υπάρχει μη-τετριμμένη περιοδική τροχιά.

**Παράδειγμα 2.5.4.** Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mathcal{F}(\lambda, r^2)x \\ \dot{y} &= -x + \mathcal{F}(\lambda, r^2)y \end{aligned} \quad (2.65)$$

με  $\lambda$  παράμετρο,  $r^2 = x^2 + y^2$ , και  $\mathcal{F}$  ικανοποιεί τη σχέση  $\mathcal{F}(0, 0) = 0$  έτσι ώστε το  $(0, 0)$  να είναι ένα απομονωμένο σημείο ισορροπίας. Σε πολικές

συντεταγμένες αυτό το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mathcal{F}(\lambda, r^2)r \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Η ύπαρξη και οι ιδιότητες ευστάθειας των περιοδικών λύσεων της (2.65) ταυτίζονται με τον τύπο ευστάθειας στα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας της  $\dot{r} = \mathcal{F}(\lambda, r^2)r$ . Πράγματι, αν  $r = 0$  ή  $\mathcal{F}(\lambda, \alpha^2) = 0$ , τότε  $(\alpha \cos t, -\alpha \sin t)$  είναι μια  $2\pi$ -περιοδική λύση της (2.65) με “πλάτος”  $\alpha$ .

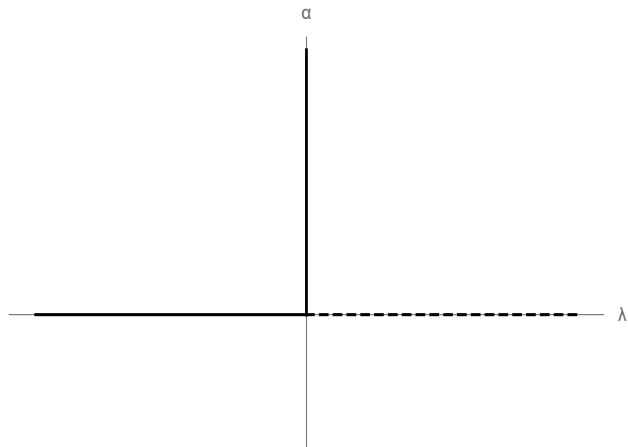
Το διάγραμμα διακλάδωσης των περιοδικών λύσεων της εξίσωσης (2.65) είναι μια γραφική παράσταση των λύσεων της  $\mathcal{F}(\lambda, \alpha^2) = 0$  και του άξονα  $\lambda$  στο επίπεδο  $(\lambda, \alpha)$ .

- Για  $\mathcal{F}(\lambda, r) = \lambda$ : έχουμε μια γραμμική διαταραχή του γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή. Δεν υπάρχει μη-τετριμμένη περιοδική τροχιά παρά μόνο για  $\lambda = 0$ , όπου υπάρχει μια περιοδική τροχιά για κάθε πλάτος  $\alpha$ . Όλες οι περιοδικές τροχιές είναι ευσταθείς τροχιές. (2.2α’).

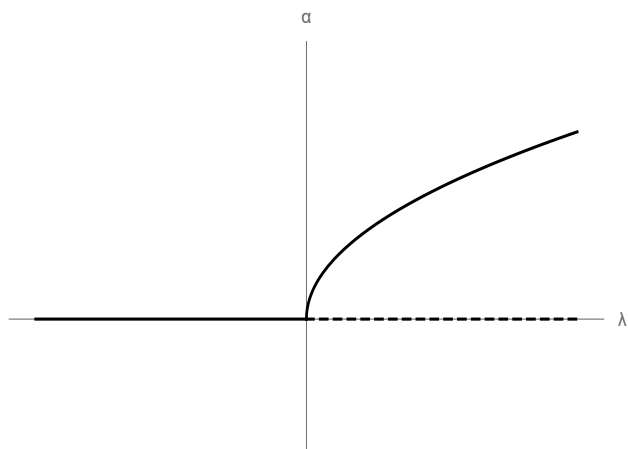
- Για  $\mathcal{F}(\lambda, r) = \lambda - r^2$ : υπάρχει μοναδική μη τετριμμένη περιοδική τροχιά αν  $\lambda > 0$  για  $\alpha = \sqrt{\lambda}$ . Η περιοδική τροχιά είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. (2.2β’). Επειδή η καμπύλη της διακλάδωσης ξεκινά από το  $(0, 0)$  και κινείται προς τα δεξιά, η διακλάδωση ονομάζεται υπερκρίσιμη (*supercritical*).

- Για  $\mathcal{F}(\lambda, r) = -(r^2 - c)^2 + c^2 + \lambda$  με  $c > 0$  σταθερά: υπάρχουν δυο μη τετριμμένες περιοδικές τροχιές, μια ασταθής και μια ασυμπτωτικά ευσταθής, για  $-c^2 < \lambda < 0$  με πλάτη  $\sqrt{c \pm \sqrt{\lambda + c^2}}$ . Οι δυο περιοδικές τροχιές καταρρέουν και εξαφανίζονται καθώς το  $\lambda$  μειώνεται κάτω από το  $-c^2$ . Υπάρχει μόνο μια περιοδική τροχιά για  $\lambda > 0$  και είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. (2.2γ’). Επειδή η καμπύλη της διακλάδωσης ξεκινά από το  $(0, 0)$  και κινείται προς τα αριστερά, η διακλάδωση ονομάζεται υποκρίσιμη (*subcritical*).

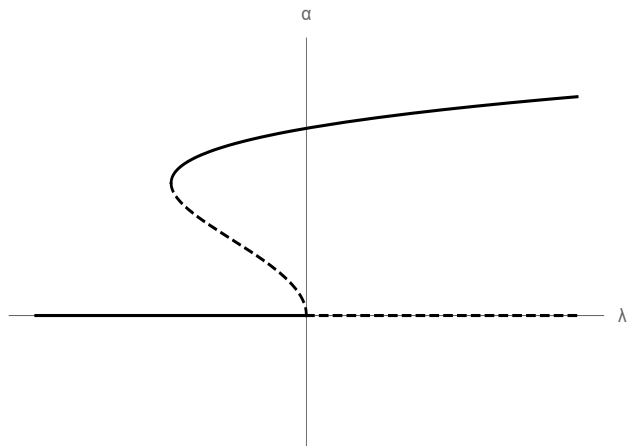
Σε κάθε παράδειγμα η υπόθεση του του θεωρήματος Poincare-Andronov-Hopf (2.5.2) ικανοποιείται. Ο ισχυρισμός του θεωρήματος για την ύπαρξη περιοδικής τροχιάς με μικρό πλάτος για μικρό  $\lambda$  είναι προφανής ωστόσο ο τύπος της ευστάθειας της τροχιάς εξαρτάται από το μη-γραμμικό όρο του διανυσματικού πεδίου. Επιπλέον, όπως είδαμε στην πρώτη και τελευταία περίπτωση, μπορεί επίσης να υπάρχουν και άλλες περιοδικές τροχιές, πιθανώς με μεγάλα πλάτη, για μικρή τιμή του  $|\lambda|$ . (2.2).



(α') για  $\mathcal{F}(\lambda, r^2) = \lambda$  η διακλάδωση είναι εκφυλισμένη.



(β') για  $\mathcal{F}(\lambda, r^2) = \lambda - r^2$  η διακλάδωση είναι υπερκρίσιμη



(γ') για  $\mathcal{F}(\lambda, r^2) = -(r^2 - c^2)^2 + c^2 + \lambda$  η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη

Σχήμα 2.2: Διαγράμματα διακλαδώσεων για την (2.65) για διάφορες  $\mathcal{F}$ .

**Παράδειγμα 2.5.5** (*Ταλαντωτής Van Der Pol*).

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ :

$$\ddot{z} - (2\lambda - z^2)\dot{z} + z = 0,$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + 2\lambda y - x^2 y. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης για το σύστημα (2.67) στο σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  είναι  $\lambda \pm i\sqrt{1 - \lambda^2}$ .

Για  $\lambda < 0$ , το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (επειδή τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών είναι αρνητικά).

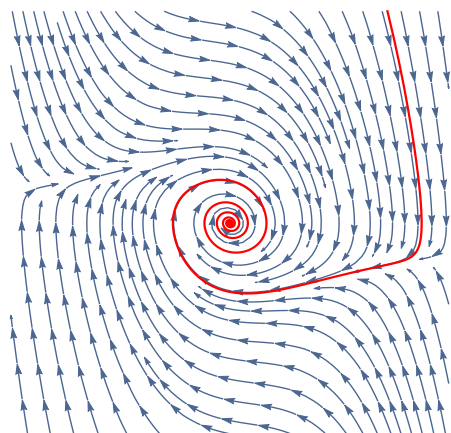
Για  $\lambda = 0$ , το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όπως είδαμε στο παράδειγμα (2.5.2).

Για  $\lambda > 0$ , τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών είναι θετικά κι έτσι το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  γίνεται ασταθές.

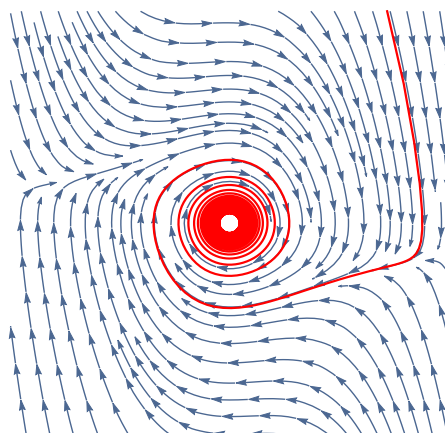
Το σύστημα (2.67) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Poincare-Andronov-Hopf (2.5.2) κι έτσι υπάρχει περιοδική τροχιά κοντά στο  $(0, 0)$  για μικρές τιμές του  $\lambda > 0$ , όπως βλέπουμε και στα γραφήματα (2.3).

Το διάγραμμα διακλάδωσης (2.4), όπου φαίνεται το σημείο ισορροπίας  $(0, 0)$  και η περιοδική τροχιά. Για  $\lambda < 0$  υπάρχει το ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας και δεν υπάρχει περιοδική τροχιά αλλά καθώς το  $\lambda$  αυξάνει από το  $\lambda = 0$  δημιουργείται μια περιοδική τροχιά και το σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές και η ευστάθεια περνά στην περιοδική τροχιά. Με διακεκομμένη καμπύλη σχεδιάζουμε την ασταθή τροχιά και με συμπαγή καμπύλη την ευσταθή.

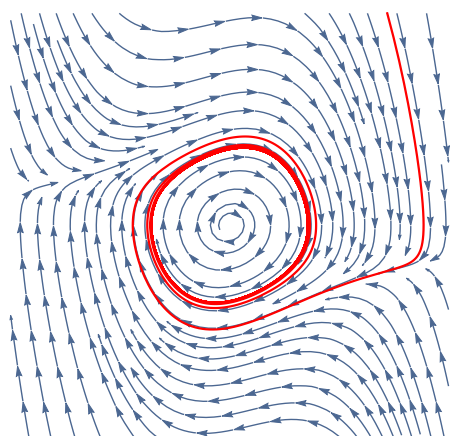




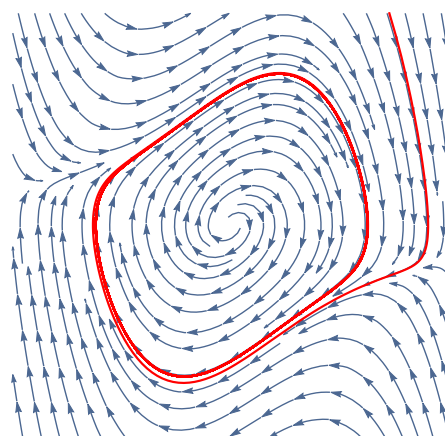
(α')  $\lambda = -0.1$



(β')  $\lambda = 0.0$

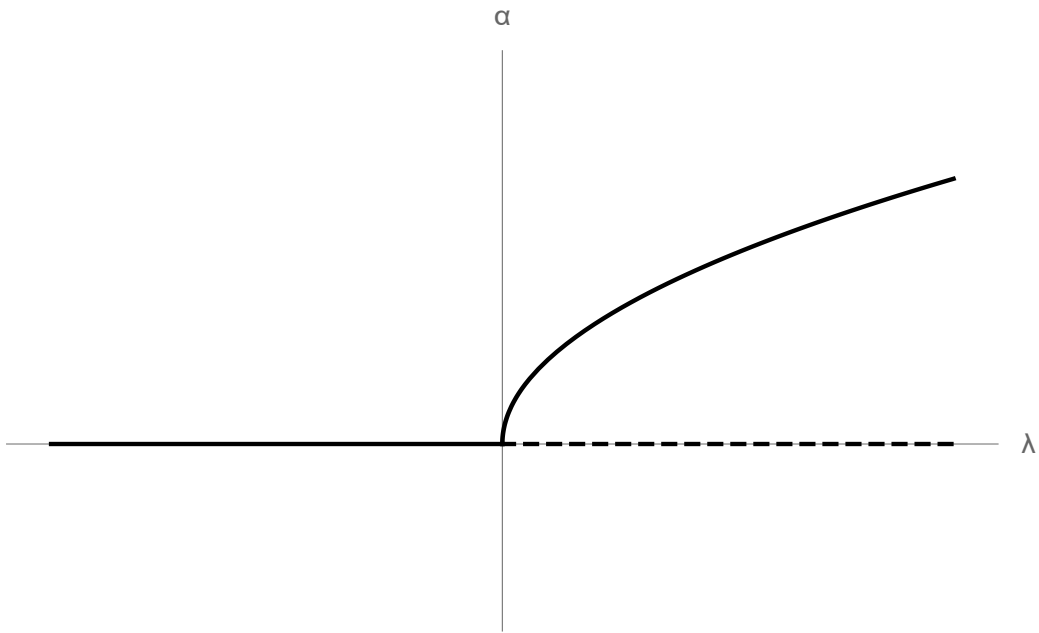


(γ')  $\lambda = 0.1$



(δ')  $\lambda = 0.3$

Σχήμα 2.3: Πορτρέτα φάσεων για τον ταλαντωτή του Van Der Pol για διάφορες τιμές του  $\lambda$  της εξίσωσης  $\ddot{z} - (2\lambda - z^2)\dot{z} + z = 0$



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα διακλάδωσης για τον ταλαντωτή του Van Der Pol

# Βιβλιογραφία

- [1] J.K.Hale, H.Kocak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] Walter Rudin, *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Leader Books, Αθήνα, 2000.
- [3] Ν. Δ. Αλικάκος, Γ. Η. Καλογερόπουλος, *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2003.
- [4] J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.