ΕΥΓΕΝΙΟΣ ΓΡΥΠΑΡΗΣ

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH. ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 3 Ιουλίου 2017

Εισηγητής: Μιχαήλ Ανούσης

Επιτροπή

Ευάγγελος Φελουζής

Ανδρέας Παπασαλούρος

Για την εκπόνηση αυτής της πτυχιακής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τους καλούς μου φίλους Αλέξανδρο, Ανδρέα, Σπύρο, Κώστα για την στήριξη και την βοήθεια τους καθώς και τον κύριο Μιχαήλ Ανούση για την άψογη συνεργασία μας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach. Θα παρουσιάσουμε βασικές τους ιδιότητες. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς τελεστές σε χώρους Hilbert.

Κεφάλαιο 1

Βασικοί ορισμοί και Θεωρήματα

Ορισμός 1.1. *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο X πάνω στο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Μία απεικόνιση $x \mapsto \|x\| : X \to \mathbb{R}^+$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τα εξής :*

(i) $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε λ στο σώμα $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), ισχύει: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ένας διανυσματικός χώρος X στον οποίο έχουμε ορίσει μια νόρμα $\|\cdot\|$ θα λέγεται χώρος με νόρμα.

Ορισμός 1.2. *Ένας διανυσματικός χώρος X με νόρμα που είναι πλήρης λέγεται χώρος Banach*

Ορισμός 1.3. *Θα λέμε ότι η ακολουθία των στοιχείων (x_n) συγκλίνει στο στοιχείο x και θα συμβολίζουμε $lim x_n = x$ αν $lim\|x_n - x\| = 0, n \to \infty$.*

Ορισμός 1.4. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{C}$). Ορίζω το εσωτερικό γινόμενο να είναι η απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ και για $x, y, z \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) έχουμε:*

(i) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$

(ii) $(y, x) = \overline{(x, y)}$

(iii $(x, x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$.

Πρόταση 1.5. *Ονομάζουμε Ευκλείδια νόρμα την*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^2\right)^{1/2}$$

Ένας χώρος με Ευκλείδια νόρμα λέγεται Ευκλείδιος χώρος. Ένας πλήρης Ευκλείδιος χώρος είναι χώρος Hilbert.

Ορισμός 1.6. *Ένας χώρος με εσωτερικό γινομένο που είναι πλήρης, λέγεται χώρος Hilbert*

Ορισμός 1.7. *Αν X, Y χώροι Banach με $\mathfrak{B}(X, Y)$ θα συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων τελέστων από τον X στον Y με νόρμα*

$$\|T\| = inf\{N > 0 \ : \ \|Tx\| \leq N\|x\| \ \forall \, x \in X\} \ = \ sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \ \leq \ 1\}$$

Για τους φραγμένους τελεστες από τον X στον εαυτό του αντί $\mathfrak{B}(X,X)$ θα γράφουμε $\mathfrak{B}(X)$.

Ορισμός 1.8. *Αν X είναι ένας χώρος Banach στο σώμα F συμβολίζουμε με X^* τον χώρο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων από τον X στο F.*

Ορισμός 1.9. *Ένα υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Ορισμός 1.10. *Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο X. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται ολικά φραγμένο αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n$ στον X τέτοια ώστε $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.*

Ορισμός 1.11. *Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο (X,d) και ένα υποσύνολο A του X. Το σύνολο $\overline{A} = \cap\{B : A \subseteq B, B$ κλειστό υποσύνολο του $X\}$ λέγεται κλειστή θήκη του A.*

Θεώρημα 1.12. *Έστω ότι το K είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) Το K είναι συμπαγές

(ii) Το K είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.

(iii) Κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K (Bolzano-Weierstrass).

Ορισμός 1.13. *Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι μετρικοί χώροι. Θα λέμε ότι ο (Y, d_Y) είναι υπόχωρος του (X, d_X) αν*

(i) $Y \subseteq X$

(ii) $d_Y(x,y) = d_X(x,y)$ για κάθε $x, y \in Y$

Πρόταση 1.14. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) Το A είναι κλειστό

(ii) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον A που συγκλίνει σε ένα x του X τότε $x \in A$.

Ορισμός 1.15. *Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ανάμεσα σε δύο μετρικούς χώρους λέγεται ισομετρία αν για οποιαδήποτε $x,\ x' \in X$ ισχύει $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x,x')$.*

Ορισμός 1.16. *Μια οικογένεια F πραγματικών συναρτήσεων σε ένα μετρικό χώρο (X,d) λέγεται ισοσυνεχής σε ένα σημειο $x \in X$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε συνάρτηση $f \in F$ και κάθε $y \in X$ με $d(x,y) < \delta$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Η οικογένεια F λέγεται ισοσυνεχής στον X αν είναι ισοσυνεχης σε κάθε σημείο.*

Ορισμός 1.17. *Μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα πλήρη μετρικό χώρο X λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$.*

Θεώρημα 1.18. *(Arzela-Ascoli) Έστω ότι ο X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, ισοσυνεχής ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων στον X. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή συναρτηση f στον X.*

Ορισμός 1.19. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα.Η μοναδιαία σφαίρα του X είναι*

$$S(X) = \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}$$

Θεώρημα 1.20. *Έστω Y να είναι ένας γνήσιος υπόχωρος του χώρου με νόρμα X.*

(i) Αν Y είναι κλειστός τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σημείο $x \in S(X)$ (όπου $S(X) = \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}$) του οποίου η απόσταση από το Y είναι τουλάχιστον $1 - \epsilon$.

$$d(x, Y) = \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in Y\} \ \geq 1 - \epsilon$$

(ii) Αν y είναι πεπερασμένης διάστασης τότε υπάρχει ένα σημείο $x \in S(X)$ του οποίου η απόσταση από το Y είναι 1.

Ορισμός 1.21. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του F και $f \ : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ένα $\lambda \in F$ ονομάζεται ιδιοτιμή της f αν υπάρχει μη μηδενικό $v \in V$ τέτοιο ώστε $f(v) = \lambda v$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*

Ορισμός 1.22. *Έστω λ μια ιδιοτιμή του T. Ο υπόχωρος $Ker(T - \lambda I)$ του V ονομάζεται ο ιδιόχωρος του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.*

Θεώρημα 1.23. *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F και $T \ : V \to V$. Έστω $\lambda \in F$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*
(i) Το λ είναι μια ιδιοτιμή του T
(ii) $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Ορισμός 1.24. *Λέμε ότι το φάσμα ενός τελεστή $T \in \mathfrak{B}(X)$ είναι :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \text{δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\} \tag{1.1}$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον X. Για κάθε τελεστή $T \in \mathfrak{B}(X)$ το φάσμα του T είναι ένα μη κενο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχεται μέσα στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.

Η φασματική ακτίνα του $T \in \mathfrak{B}(X)$ είναι

$$r(T) = sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(T)\}$$

Θεώρημα 1.25. *Για $T \in \mathfrak{B}(X)$ έχουμε*

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Ορισμός 1.26. *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι επί του F και $f \ : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση.*
(i) Η f καλείται μονομορφισμός αν είναι $1 - 1$.
(ii) Η f καλείται επιμορφισμός αν είναι επί.
(iii) Η f καλείται ισομορφισμός αν είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επιμορφισμός.

Αν έχουμε ισομορφισμό από ένα διανυσματικό χώρο στον εαυτό του τότε καλείται αυτομορφισμός.

Ορισμός 1.27. *Έστω $(R, +, \cdot\ )$ δακτύλιος και I ένα μη κενό υποσύνολο του. Το I θα ονομάζεται δίπλευρο ιδεώδες του R και θα συμβολίζεται ως $I \lhd R$ αν ισχύουν τα εξής.*
(i) $a - b \in I$ για κάθε $a, b \in I$.
(ii) $r \cdot a \in I$ και $a \cdot r \in I$ για κάθε $r \in R$ και $a \in I$.

Κεφάλαιο 2

Συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach

Υποθέτουμε οτι όλοι οι χώροι που εμφανίζονται σε αυτό το κεφάλαιο είναι μιγαδικοί χώροι Banach. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε μια κλάση τελεστών που μοιάζει πολύ με τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διαστασης.

Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ είναι συμπαγής αν η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας μέσω του T είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y. Έτσι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\overline{TB_X}$ είναι συμπαγές. Ισοδύναμα, ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subset X$ η ακολουθία (Tx_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών από τον X στον Y. Αναλογικά με το $\mathfrak{B}(X)$ θα γράφουμε $\mathfrak{B}_0(X)$ αντί για $\mathfrak{B}_0(X, X)$

Παράδειγμα 2.1. *(i) Κάθε πεπερασμένης τάξης τελεστής $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ είναι συμπαγής. Ισοδύναμα αν $\dim ImT = \dim TX < \infty$ τότε $T \in \mathfrak{B}_0(X, Y)$.*

Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{B}_{00}(X, Y)$,το σύνολο των φραγμένων πεπερασμένης τάξης τελεστών απο τον X στον Y.

(ii) Κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιοειδές $f \in X^*$ είναι ένας συμπαγής τελεστής από τον X στον $\mathbb{C}$

(iii) Έστω I να είναι το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ και έστω X να είναι ο χώρος Banach $C(I)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με νόρμα που ορίζεται μέσω του supremum.

$$\|f\| = sup\{|f(x)|\} \ : \ x \in I\}$$

Έστω $K(x, y) \in C(I \times I)$ ή αλλιώς, έστω K να είναι μαι συνεχής συνάρτηση σε κλειστό μοναδιαίο τετράγωνο $I \times I$. Για $f \in C(I)$ ορίζουμε μια συνάρτηση $Tf \in C(I)$ από την σχέση

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Τότε $T \in \mathfrak{B}(X)$ και είναι εύκολο να δειχθεί ότι $T \in \mathfrak{B}_0(X)$. Πράγματι, από το θεώρημα Arzela-Ascoli έχουμε μόνο να ελέγξουμε ότι TB_X είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής. Αν $|K(x, y)| \leq N$ για κάθε $(x, y) \in I \times I$ τότε

$$|(Tf)(x)| \leq N \int_0^1 |f(y)| dy \leq N\|f\|$$

και γι' αυτό το TB_X *είναι ομοιόμορφα φραγμένο από το N. Επίσης για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* δ *τέτοιο ώστε αν* $|x_1 - x_2| < \delta$ *τότε* $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon$. *Επιπλέον αν* $f \in B_X$ *και* $|x_1 - x_2| < \delta$ *τότε*

$$\begin{aligned} |(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| &\leq \int_0^1 |K(x_1, y) - K(x_2, y)|\, |f(y)| dy \\ &\leq \int_0^1 |K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy < \varepsilon \end{aligned}$$

Έτσι TB_X *είναι πράγματι ισοσυνεχής και γι' αυτό ο T είναι συμπαγής όπως ισχυριστήκαμε.*

Θεώρημα 2.2. *(a)* $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ *είναι ένας κλειστός υπόχωρος του* $\mathfrak{B}(X, Y)$.
(b) Αν $T \in \mathfrak{B}_0(X, Y), S \in \mathfrak{B}(Y, Z)$ *και* $R \in \mathfrak{B}(W, X)$ *τότε* $ST \in \mathfrak{B}_0(X, Z)$ *και* $TR \in \mathfrak{B}_0(W, Y)$.

Απόδειξη. (a) Ας δείξουμε αρχικά ότι $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ είναι υπόχωρος του $\mathfrak{B}(X, Y)$. Δηλαδή αν $S, T \in \mathfrak{B}_0(X, Y)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε $\lambda T + \mu S \in \mathfrak{B}_0(X, Y)$. Έστω (x_n) να είναι μια φραγμένη ακολουθία στον X. Επειδή S είναι συμπαγής, τότε (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) τέτοια ώστε (Sx_{n_k}) να είναι συγκλίνουσα. Ο τελεστής T είναι επίσης συμπαγής και έτσι η (x_{n_k}) έχει μια υπακολουθία $(x_{m_{k_m}})$ τέτοια ώστε $(Tx_{m_{k_m}})$ να είναι και αυτή συγκλίνουσα. Αλλά τότε $((\lambda S + \mu T)x_{m_{k_m}})$ είναι επίσης συγκλίνουσα ακολουθία. Τώρα ας δείξουμε ότι $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathfrak{B}(X, Y)$. Υποθέτουμε ότι $T_n \in \mathfrak{B}_0(X, Y)$ και $T_n \to T \in \mathfrak{B}(X, Y)$. Πρέπει να δείξουμε ότι TB_X είναι ολικά φραγμένο. Δωσμένου $\varepsilon > 0$ έστω n τέτοιο ώστε $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Επειδή T_n είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, ..., x_m \in B_X$ τέτοια ώστε $\{T_n x_i : 1 \leq i \leq m\}$ να είναι ένα $\varepsilon - net$ στο $T_n B_X$. Έτσι αν $x \in B_X$ τότε υπάρχει x_i τέτοιο ώστε $\|T_n x - T_n x_i\| < \varepsilon$.

Άρα

$$\|Tx - Tx_i\| \leq \|(T - T_n)x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|(T_n - T)x_i\| < 3\varepsilon$$

που μας δείχνει ότι $\{Tx_i : 1 \leq i \leq m\}$ είναι ένα $3\varepsilon - net$ στον TB_X

(b) Διαπιστώνουμε ότι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής απεικονίζει μια φραγμενη ακολουθία μέσα σε μια φραγμένη ακολουθία και μια συγκλίνουσα ακολουθία σε μια συγκλινουσα ακολουθία. □

Ορισμός 2.3. *Έστω* X, Y *δύο χώροι Banach και* $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$. *Για* $g \in Y^*$ *ορίζουμε την συνάρτηση* $T^*g : X \to \mathbb{C}$ *όπου* $(T^*g)(x) = g(Tx)$.
Ο $T^* : Y^* \to X^*$ *είναι ο συζυγής τελεστής του* T.

Θεώρημα 2.4. *Ένας τελεστής* $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ *είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο* $T^* \in \mathfrak{B}(Y^*, X^*)$ *είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε αρχικά ότι ο $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ είναι συμπαγής, τότε το σύνολο $K = \overline{TB}_X$ είναι συμπαγές. Για ένα συναρτησοειδές $f \in Y^*$ έστω Rf να είναι ο περιορισμός του f στο K. Προφανώς $Rf \in C(K)$ και είναι γεγονός ότι η απεικόνιση $R : Y^* \to C(K)$ είναι μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση όπου ως συνήθως ο $C(K)$ παίρνεται με τη νόρμα του supremum. Έστω $\Phi = RB_{Y^*}$. Σημειώνουμε ότι για $f \in Y^*$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
\|T^* f\| &= \sup\{< x, T^* f >: x \in B_X\} \\
&= \sup\{< Tx, f >: x \in B_X\} \\
&= \sup\{< y, f >: y \in TB_X\} \\
&= \sup\{< y, f >: y \in K\} \\
&= \|Rf\|
\end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι $T^* B_{Y^*}$ είναι ισομετρία στο $\Phi \subset C(K)$ με την ισομετρία να δινεται από $T^* f \mapsto Rf$.

Ως συνέπεια $T^* B_{Y^*}$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν είναι και το Φ. Από το Θεωρημα Arzela -Ascoli , το Φ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα φραγμένο και ισοσυνεχής. Και οι δύο συνθήκες μπορούν εύκολα να ελεγχθούν. Αν $f \in B_{Y^*}$ τότε $\|T^* f\| \leq \|T^*\| = \|T\|$ και έτσι το Φ είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Επίσης αν $f \in B_{Y^*}$ και $y, y' \in K$ τότε

$$|(Rf)(y) - (Rf)(y')| = |f(y - y')| \leq \|y - y'\|$$

και έτσι η Φ είναι ισοσυνεχής.

(ii) Τώρα υποθέτουμε ότι ο $T^* \in \mathfrak{B}(Y^*, X^*)$ είναι συμπαγής. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης (i) η απεικόνιση $T^{**} \in \mathfrak{B}(X^{**}, Y^{**})$ είναι συμπαγής. Ισοδύναμα $T^{**}\mathfrak{B}_{X^{**}}$ είναι σχετικά συμπαγής. Αλλά υπό φυσική εμφύτευση $X \subset X^{**}$ και $Y \subset Y^{**}$ έχουμε $TB_X = T^{**}B_X \subset T^{**}B_{X^{**}}$ και έτσι TB_X είναι επίσης σχετικά συμπαγης.

□

Ο κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς τελεστές. Λέμε ότι το φάσμα ενός τελεστή $T \in \mathfrak{B}(X)$ είναι :

(2.1) $\quad \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\}$

όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον X. Για κάθε τελεστή $T \in \mathfrak{B}(X)$ το φάσμα του T είναι ένα μη κενο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχεται μέσα στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$. Όπως θα δούμε για ένα συμπαγή τελεστή T που ανήκει στο $\mathfrak{B}(X)$ το φάσμα του T 'μοιάζει' με το φάσμα ενός τελεστή σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο. Για να είμαστε ακριβείς αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος και $T \in \mathfrak{B}_0(X)$ τότε το $\sigma(T)$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο του οποίου το μόνο σημείο συσσώρευσης είναι το 0. Αν $\lambda \in \sigma(T)$ και $(\lambda \neq 0)$ τότε το λ είναι ιδιοτιμή του T με πεπερασμένο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων.

Θεώρημα 2.5. *Έστω $T \in B_0(X)$ και $a > 0$. Τότε ο T έχει πεπερασμένα το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με τις ιδιοτιμές να έχουν απόλυτη τιμή τουλάχιστον α.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2, \ldots\ldots$ είναι μια άπειρη ακολουθία γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, τέτοια ώστε $Tx_i = \lambda_i x_i \neq 0$ και $|\lambda_i| \geq a$ για κάθε i. Θέτουμε το σύνολο $X_n = lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Από το Θεώρημα (1.20) υπάρχει μια ακολουθία $(y_n)_1^\infty \subset X$ τέτοια ώστε $y_n \in X_n$ και $d(y_n, X_{n-1}) = \|y_n\| = 1$.

Θέτουμε $z_n = y_n/\lambda_n$ και σημειώνουμε ότι $\|z_n\| \leq 1/a$, $Tz_n \in X_n$ και $Tz_n - y_n \in X_{n-1}$ Πράγματι οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί είναι προφανείς και αν $y_n = \sum_{k=1}^n c_k x_k$ τότε

$$Tz_n - y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1 \right) c_k x_k \in X_{n-1}$$

Επομένως αν $n > m$ τότε

$$\|Tz_n - Tz_m\| \geq d(Tz_n, X_{n-1}) = d(y_n, X_{n-1}) = 1$$

Ως συνέπεια η φραγμένη ακολουθία $(z_n)_1^\infty$ δεν περιέχει υπακολουθία $(z_{n_k})_1^\infty$ τέτοια ώστε Tz_{n_k} να είναι συγκλίνουσα που έρχεται σε αντίθεση με το να είναι συμπαγής ο T.

□

Ο επόμενος σκοπός μας είναι να δείξουμε αν ο T είναι συμπαγής τελεστής και $\lambda \neq 0$ δεν είναι μια ιδιοτιμή του T τότε $\lambda \notin \sigma(T)$ ή $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος. Με τη δυνατή εξαίρεση του 0, κάθε σημείο του φάσματος είναι ιδιοτιμή. Στην απόδειξη αυτού θα υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$. Χρειαζόμαστε δύο λήμματα τα οποία είναι αποδεδειγμένα σε μια πιο γενική αλλά απαραίτητη μορφή.

Λήμμα 2.6. *Έστω $T \in \mathfrak{B}_0(X)$ και σύνολο $S = I - T$. Τότε SX είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. $N = KerS$, από το Θεώρημα (2.5) ξέρουμε ότι N είναι πεπερασμένης διάστασης με βάση $\{b_1, ..., b_n\}$. Τότε υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος $M \subset X$ τέτοιος ώστε ο X είναι το ευθύ άθροισμα του M με το N: $X = M \oplus N$. Πράγματι, αν επιλέξουμε $f_1, ..., f_n \in X^*$ τέτοια ώστε $f_i(b_j) = \delta_{ij}$ τότε αρκεί να πάρουμε $M = \bigcap_{i=1}^n Kerf_i$.

Έστω S_0 να είναι ο περιορισμός του S στο M : $S_0 = S|M$. Τότε $SX = SM = S_0M$ και $KerS_0 = KerS \cap M = \{0\}$ και έτσι ο S_0 είναι $1-1$. Συνεπώς για να αποδείξουμε ότι $SX = S_0M$ είναι κλειστός, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο S_0 είναι κάτω φραγμένος.

Υποθέτουμε ότι S_0 δεν είναι κάτω φραγμένος. Τότε $S_0x_n \to 0$ για κάποια $(x_n)_1^\infty \subset M(\|x_n\| = 1)$. Επειδή ο T είναι συμπαγής, η $(Tx_n)_1^\infty$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Και έτσι υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η $(Tx_n)_1^\infty$ είναι συγκλίνουσα και έστω $Tx_n \to y$. Τότε

$$x_n = (S_0 + T)x_n = S_0x_n + Tx_n \to y$$

και έτσι $\|y\| = 1$. Αλλά επίσης έχουμε $S_0x_n \to Sy$ και έτσι $S_0y = 0$ όπου έρχεται σε αντίθεση με το $KerS_0 = \{0\}$.

□

Λήμμα 2.7. *Έστω $S, T \in \mathfrak{B}(X)$ τέτοιοι ώστε $S + T = I$ και $SX \subset Y$ όπου Y είναι κλειστός γνήσιος υπόχωρος του X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in B_X$ τέτοιο ώστε $d(Tx_0, TY) > 1 - \varepsilon$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα (1.20) υπάρχει ένα $x_0 \in B_X$ τέτοιο ώστε $d(x_0, Y) > 1-\varepsilon$. Επειδή $Tx_0 = x_0 - Sx_0$, $Sx_0 \in Y$ και $TY = (I-S)Y \subset Y$ έχουμε

$$d(Tx_0, TY) \geq d(x_0 - Sx_0, Y) = d(x_0, Y) > 1-\varepsilon$$

□

Θεώρημα 2.8. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική, συνεχής και επί. Τότε η T είναι ανοικτή.*

Θεώρημα 2.9. *Έστω T ένας συμπαγής τελεστής και υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του T. Τότε $\lambda \notin \sigma(T)$.*

Απόδειξη. Από την αντικατάσταση του T με T/λ αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για $\lambda = 1$. Έστω τότε $T \in B_0(X)$, $S = I - T$ και $KerS = (0)$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο S είναι αντιστρέψιμος.

Ας αποδείξουμε ότι $SX = X$. Θέτουμε $Y_n = S^n X$ $(n = 0, 1, ...)$ τότε $Y_0 = X \supset Y_1 \supset ....$ Από το Λήμμα (2.6) οι υπόχωροι Y_n είναι κλειστοί. Ας δείξουμε πρώτα ότι $Y_n = Y_{n+1}$ για κάποιο n. Αν όχι από το Λήμμα (2.7) κανείς μπορεί να βρει στοιχεία $y_n \in B_{Y_n}$ τέτοια ώστε $d(Ty_n, TY_{n+1}) > 1/2$. Αλλά τότε $\|Ty_n - Ty_m\| > 1/2$ αν $n \neq m$ και έτσι (Ty_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, που έρχεται σε αντίθεση με το ότι ο T είναι συμπαγής.

Ισχυριζόμαστε ότι $Y_0 = Y_1$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε υπάρχει ένα m τέτοιο ώστε $Y_{m-1} \neq Y_m = Y_{m+1}$. Έστω $u \in Y_{m-1} \setminus Y_m$. Τότε επειδή $Su \in Y_m = Y_{m+1} = SY_m$ υπάρχει ένα σημείο $v \in Y_m$ τέτοιο ώστε $Su = Sv$. Αλλά τότε $S(u-v) = 0$ και έτσι $0 \neq u - v \in KerS$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας. Συνεπώς $Y_1 = Y_0$ ή $SX = X$ όπως ισχυριστήκαμε.

Η απόδειξη κατ' ουσίαν είναι πλήρης. Η φραγμένη απεικόνιση $S : X \to X$ είναι $1-1$ από ένα χώρο Banach X στον εαυτό του. Και έτσι από το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης ο S είναι αντιστρεψιμος.

□

Ας επαναπροσδιορίσουμε τις πληροφορίες που περιέχονται στα Θεωρήματα (2.5) και (2.9) σχετικά με το φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή σε ένα και μόνο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.10. *Έστω T να είναι ένας συμπαγής τελεστής σε ένα απειροδιάστατο χώρο Banach. Τότε $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ...\}$ όπου η ακολουθία $\lambda_1, \lambda_2, ...$ (των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών) είναι είτε πεπερασμένη είτε τείνει στο 0. Επιπλέον κάθε λ_i είναι μια ιδιοτιμή του T , με πεπερασμένης διάστασης ιδιόχωρο.* □

Με κάποια παραπάνω δουλειά, μπορούμε να λάβουμε περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την δομή των συμπαγών τελεστών. Αν T είναι συμπαγής και $S = I - T$ τότε ImS είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης.

Θεώρημα 2.11. *Έστω X να είναι ένας χώρος Banach , $T \in \mathfrak{B}_0(X)$ και $S = I - T$. Θέτουμε $N_k = KerS^k$ και $M_k = ImS^k$, $(k = 0, 1, ...)$ όπου $S^0 = I$. Τότε $(N_k)_0^\infty$ είναι μια αύξουσα ακολουθία από υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης και $(M_k)_0^\infty$ μια φθίνουσα ακολουθία από υπόχωρους πεπερασμένης συνδιάστασης. Υπάρχει ένας μικρότερος $n \geq 0$ τέτοιος ώστε $N_n = N_m$ για όλα τα $m \geq n$. Επιπλέον $M_n = M_m$ για όλα τα $m \geq n$ ο X είναι το ευθύ άθροισμα των M_n και N_n και $S|M_n$ είναι ένας αυτομορφισμός του M_n.*

Απόδειξη. Αναπτύσσοντας το $S^k = (I-T)^k$, βλέπουμε ότι $S^k = I - T_k$ όπου T_k είναι συμπαγής. Συνεπώς από το Λήμμα (2.6) , M_k είναι κλειστός υπόχωρος του X . Επιπλέον $N_0 \subset N_1 \subset ...$ και $M_0 \supset M_1 \supset ...$ και ξέρουμε ότι κάθε N_k είναι πεπερασμένο διαστασιακά. Από την απόδειξη του Λήμματος (2.7) προκύπτει ότι υπάρχει ένα ελάχιστο n τέτοιο ώστε $N_n = N_{n+1}$ και υπάρχει επίσης ένα ελάχιστο m τέτοιο ώστε $M_m = M_{m+1}$. Τότε $N_n = N_{n'}$ για όλα $n' \geq n$ και $M_m = M_{m'}$ για όλα τα $m' \geq m$.

Ας επιστρέψουμε στους βασικούς ισχυρισμούς του Θεωρήματος. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι $N_n \cap M_n = \{0\}$. Έστω $y \in M_n \cap N_n$ επειδή $y \in M_n$ έχουμε $y = S^n x$ για κάποια $x \in X$. Αλλά επειδή $y \in N_n$, $S^n y = 0$ και έτσι $S^{2n}x = 0$. Συνεπώς $x \in N_{2n} = N_n$, που συνεπάγεται $S^n x = 0$. Έτσι $y = S^n x = 0$, δείχνοντας έτσι ότι $N_n \cap M_n = \{0\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι για $p = max\{n, m\}$ έχουμε $X = N_n \oplus M_p$. Πράγματι δωσμένου $x \in X$ έχουμε $S^p x \in M_p$. Αλλά $S^p M_p = M_p$ και έτσι υπάρχει ένα διάνυσμα $y \in M_p$ τέτοιο ώστε $S^p y = S^p x$. Συνεπώς $(x-y) \in N_p = N_n$ και έτσι $x = y + (x-y)$ δείχνοντας ότι $X = N_n + M_p$.

Είναι ξεκάθαρο ότι δεν θα μπορούσε το $p > n$ αφού τότε το M_n θα περιείχε αυστηρά το M_p και έτσι θα είχαμε $M_n \cap N_n \neq \{0\}$. Έτσι $p = n$ και ο X είναι το ευθύ άθροισμα του M_n και N_n , επειδή ο N_n είναι πεπερασμένης διάστασης.

Τέλος $SM_n = M_{n+1} = M_n$ και

$$Ker(S|M_n) = KerS \cap M_n = N_1 \cap M_n \subset N_n \cap M_n = \{0\}.$$

Συνεπώς από το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης, ο περιορισμός του S στο M_n είναι αντιστρέψιμος.

□

Θεώρημα 2.12. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach και έστω T να είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής στον X. Τότε $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ...\}$ όπου η ακολουθία $\lambda_1, \lambda_2, ...$ είναι πεπερασμένη ή τείνει στο 0. Για κάθε $\lambda = \lambda_i$ υπάρχει ένας πεπερασμένος ακέραιος $k_\lambda \geq 1$ και κλειστοί υπόχωροι $N_\lambda = N(\lambda; T)$ και $M_\lambda = M(\lambda; T)$ αναλλοίωτοι υπό τον T , τέτοιοι ώστε N_λ είναι πεπερασμένης διάστασης και $X = M_\lambda \oplus N_\lambda$.*

Ο περιορισμός του $\lambda I - T$ στο M_λ είναι ένας αυτομορφισμός του M_λ,

$$N_\lambda = Ker(\lambda I - T)^{k_\lambda} \neq Ker(\lambda I - T)^{k_\lambda - 1}$$

και για $\mu = \lambda_j \neq \lambda = \lambda_i$ έχουμε $N_\lambda \subset M_\mu$.

Κεφάλαιο 3

Φυσιολογικοί συμπαγείς τελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχολιθούμε με συμπαγείς τελεστές σε χώρους Hilbert.

Ορισμός 3.1. *Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{B}(H)$ λέγεται φυσιολογικός αν είναι $T^*T = TT^*$.*

Ορισμός 3.2. *Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{B}(H)$ λέγεται αυτοσυζυγής ή ερμιτιανός, αν $T = T^*$.*

Λήμμα 3.3. *Έστω $T \in \mathfrak{B}(H)$ ένας φυσιολογικός τελεστής. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

(a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$

(b) $KerT = KerT^*$

(c) $\|T^n\| = \|T\|^n$ για κάθε $n \geq 1$

(d) $r(T) = \|T\|$

(e) Αν $\lambda \neq \mu$ τότε, $Ker(\lambda I - T) \perp Ker(\mu I - T)$

(f) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ο $Ker(\lambda I - T)$ και ο $(Ker(\lambda I - T))^{\perp}$ είναι αμετάβλητοι υπό τον T και T^*.

(g) Αν H είναι το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα των κλειστών υπόχωρων H_0 και H_1 οι οποίοι είναι αμετάβλητοι υπό τον T τότε με $T_0 = T|H_0$ και $T_1 = T|H_1$ έχουμε :

$$\|T\| = max\{\|T_0\|, \|T_1\|\}$$

και T_i είναι ένας φυσιολογικός τελεστής στον H_i , με $T_i^* = T^*|H_i, \ (i = 0, 1)$.

Απόδειξη. (a) Επειδή $T^*T = TT^*$, έχουμε

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$$

(b) Από το (a) έχουμε ότι $Tx = 0$ αν και μόνο αν $T^*x = 0$.

(c) Αν $S \in \mathfrak{B}(H)$ είναι ερμιτιανός τελεστής, τότε

$$\|Sx\|^2 = (Sx, Sx) = (S^*Sx, x) = (S^2x, x) \leq \|S^2\|\|x\|^2$$

Από αυτό απορρέει ότι $\|S^2\| = \|S\|^2$ και από την επαγωγή στο m έχουμε $\|S^{2^m}\| = \|S\|^{2^m}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|S^n\| = \|S\|^n$ για κάθε $n \geq 1$. Επειδή TT^* είναι ερμιτιανός

$$\|T^n\|^2 = \|T^n(T^n)^*\| = \|(TT^*)^n\| = \|TT^*\|^n = \|T\|^{2n}$$

(d) Από το (c) και την φόρμουλα φασματικής ακτίνας (Θεώρημα 1.25) έχουμε

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T\| = \|T\|$$

Αν $S \in \mathfrak{B}(X)$ για ένα μιγαδικό χώρο Banach X τότε $r(S) = \|S\|$ αν και μόνο αν $\|S^n\| = \|S\|^n$ για κάθε $n \geq 1$.

(e) Αν $Tx = \lambda x$ και $Ty = \mu y$ τότε $T^*y = \bar{\mu}y$ επειδή από το (b) έχουμε $y \in Ker(\mu I - T) = Ker(\bar{\mu}I - T^*)$. Οπότε έχουμε

$$\lambda(x,y) = (Tx,y) = (x,T^*y) = (x,\bar{\mu}y) = \mu(x,y)$$

και έτσι αν $\lambda \neq \mu$ τότε $(x,y) = 0$.

(f) Επειδή ο $\lambda I - T$ μετατίθεται με τον T και T^*, ο $Ker(\lambda I - T)$ είναι αμετάβλητος υπό τον T και T^* . Επίσης, έστω $(x,y) = 0$ για όλα τα $y \in Ker(\lambda I - T)$. Τότε, αφού $Ker(\lambda I - T)$ είναι αμετάβλητος υπό τον T^*, για $y \in Ker(\lambda I - T)$ έχουμε

$$(Tx,y) = (x,T^*y) = 0$$

Συνεπώς $Tx \in (Ker(\lambda I - T))^{\perp}$. Όμοια

$$(T^*x,y) = (x,Ty) = 0$$

για κάθε $y \in Ker(\lambda I - T)$ και έτσι $T^*x \in (Ker(\lambda I - T))^{\perp}$.

(g) Έστω $x = h_0 + h_1$ με $h_i \in H_i$ $(i = 0,1)$. Τότε,

$$\|x\|^2 = \|h_0\|^2 + \|h_1\|^2, \qquad Tx = Th_0 + Th_1 = T_0h_0 + Th_1$$

και

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \|T_0h_0\|^2 + \|T_1h_1\|^2 \\
&\leq \|T_0\|^2\|h_0\|^2 + \|T_1\|^2\|h_1\|^2 \\
&\leq max\{\|T_0\|^2, \|T_1\|^2\}(\|h_0\|^2 + \|h_1\|^2) \\
&= max\{\|T_0\|^2, \|T_1\|^2\}\|x\|^2
\end{aligned}$$

Έτσι $\|T\| \leq max\{\|T_0\|, \|T_1\|\}$. Η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής.

Τέλος, επειδή H_0 και H_1 είναι αμετάβλητοι υπό τον T ισχύει ότι $H_1 = H_0^{\perp}$ και $H_0 = H_1^{\perp}$ είναι αμετάβλητοι υπό τον T^*. □

Ας δούμε την πρώτη μορφή του φασματικού θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $T \in \mathfrak{B}(H)$ να είναι ένας συμπαγής φυσιολογικός τελεστής. Για μια ιδιοτιμή λ του T, έστω $H_\lambda = Ker(T - \lambda I)$ να είναι ο ιδιόχωρος T που αντιστοιχεί στην λ και συμβολίζουμε με P_λ την ορθογώνια προβολή στον H_λ. Ο τελεστής T έχει αριθμίσιμο πλήθος μη-μηδενικών ιδιοτιμών λ_1, λ_2.......*

Επιπλέον $dimH_{\lambda_k} < \infty$ για κάθε k, οι προβολές P_{λ_i} είναι ορθογώνιες. Ισοδύναμα $P_{\lambda_k}P_{\lambda_l} = 0$ αν $k \neq l$ και

$$T = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} \tag{3.1}$$

όπου η σειρά αυτή συγκλίνει στην νόρμα του $\mathfrak{B}(H)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα (2.10) και το Λήμμα (3.3) (e), έχουμε να αποδείξουμε μόνο το (3.1) . Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \geq 1$ τέτοιο ώστε $|\lambda_k| < \epsilon$ για $k > n$. Θέτουμε,

$$H_0 = \sum_{k=1}^{n} H_{\lambda_k}, \quad H_1 = H_0^{\perp}, \quad S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k}$$

Τότε H_0 και H_1 είναι αναλλοίωτοι υπό τον S και T, με $T_i = T|H_i$ και $S_i = S|H_i$ $(i = 0, 1)$. Έχουμε $T_0 = S_0$ και $S_1 = 0$. Επομένως, από το Λήμμα (3.3)(g) έχουμε,

$$\|T - S\| = max\{\|T_0 - S_0\|,\ \|T_1 - S_1\|\} = \|T_1\|$$

Αλλά T_1 είναι συμπαγής φυσιολογικός τελεστής και έτσι από το Θεώρημα (2.10), $\|T_1\|$ είναι ακριβώς η μέγιστη κατά απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του T_1. Επειδή κάθε ιδιοτιμή του T_1 είναι μια ιδιοτιμή του T, από την επιλογή του *n* έχουμε $\|T_1\| < \epsilon$.

□

Ας αναφέρουμε δύο άλλες εκδοχές του φασματικού θεωρήματος.

Θεώρημα 3.5. *Έστω T να είναι ένας συμπαγής ερμιτιανός τελεστής σε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό υπόχωρο H_0 του H, μια (το πολύ αριθμήσιμη) ορθοκανονική βάση (x_n) του H_0 και μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\nu_n \to 0$ τέτοια ώστε αν $x = \sum_n c_n x_n + x'$, όπου $x' \in H_0^{\perp}$. Τότε*

$$Tx = \sum_n \nu_n c_n x_n$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ...$ και $H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, ...$ είναι όπως το Θεώρημα (3.4). Παίρνουμε μια (απαραίτητα πεπερασμένη) ορθοκανονική βάση σε κάθε H_{λ_k} και έστω (x_n) να είναι η ένωση αυτών των βάσεων. Έστω H_0 να είναι ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από την ακολουθία (x_n) και $\nu_n = \lambda_k$ αν $x_n \in H_{\lambda_k}$. Τότε

$$Tx \ = \ \sum_n \nu_n c_n x_n$$

□

Πόρισμα 3.6. *Έστω T να είναι ένας συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σε ένα χώρο Hilber H. Τότε ο H έχει μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από ιδιοτιμές του T.*

Πράγματι οι συμπαγείς φυσιολογικοί τελεστές χαρακτηρίζονται από το Θεώρημα (3.4) (ή Θεώρημα (3.5)). Έστω $\{x_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H και έστω $T \in \mathfrak{B}(H)$ τέτοιος ώστε $Tx_\gamma = \nu_\gamma x_\gamma$. Τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν

$$|\{\gamma : |\nu_\gamma| \geq\ \epsilon,\ \gamma \in \Gamma\}| < \infty \tag{3.2}$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

Η απόδειξη του θεωρήματος (3.4) βασίζεται σε δύο ουσιώδη αποτελέσματα : Το Θεώρημα (2.10) σχετικά με τους συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach και την φόρμουλα φασματικής ακτίνας. Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να αποδείξουμε το

Θώρημα (3.4) χωρίς να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα. Είναι λίγο πιο βολικό να αποδείξουμε το Θεώρημα (3.4) για συμπαγής ερμιτιανούς τελεστές. Σε αυτή την περίπτωση είναι απλο να το επεκτείνουμε στους φυσιολογικούς τελεστές.

Θυμίζουμε ότι η αριθμητική εικόνα $V(T)$ ενός τελεστή ενός Hilbert χώρου $T \in \mathfrak{B}(H)$ είναι

$$\{(Tx, x) : \ x \in S(H)\}$$

και η αριθμητική ακτίνα $v(T)$ είναι

$$v(T) = sup\{|\lambda| : \ \lambda \in V(T)\}$$

Αν $T \in \mathfrak{B}(H)$ είναι ερμιτιανός δηλαδή $T^* = T$ τότε η αριθητική εικόνα είναι υποσύνολο των πραγματικών, αφού

$$(Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$$

για κάθε $x \in H$ και έτσι (Tx, x) είναι πραγματικός.

Λήμμα 3.7. *Έστω T να είναι ένας ερμιτιανός τελεστής. Τότε* $\|T\| = v(T)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $v = v(T)$. Τότε $|(Tx, x)| \leq v\|x\|^2$ για κάθε $x \in H$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\|T\| \leq v$.

Αν $x \in S(H)$ έστω $y \in S(H)$ τέτοιο ώστε το $Tx = \|Tx\|y$. Τότε $(Tx, y) = (x, Ty) = \|Tx\|$ και έτσι

$$\begin{aligned}
\|Tx\| = (Tx, y) &= \frac{1}{4}\{(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))\} \\
&\leq \frac{1}{4}v\{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\} \\
&= \frac{1}{2}v\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} = v
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\|Tx\| \leq v$ για κάθε $x \in S(H)$ και έτσι $\|T\| \leq v$ όπως ισχυριστίκαμε. □

Θεώρημα 3.8. *Έστω U να είναι ένας ερμιτιανός τελεστής στον H. Τότε ο U έχει μια ιδιοτιμή με απόλυτη τιμή $\|U\|$.*

Απόδειξη. Έστω τα σύνολα

$$a = \inf_{\|x\|=1}(Ux, x) \quad \kappa\alpha\iota \quad b = \sup_{\|x\|=1}(Ux, x)$$

έτσι ώστε $\overline{V(U)} = [a, b]$. Από το Λήμμα (3.7) $\|U\| = max\{-a, b\}$. Αντικαθιστώντας τον U με $-U$ αν είναι απαραίτητο, υποθέτουμε ότι $\|U\| = b > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι το b είναι μια ιδιοτιμή του U.

Από τον ορισμό του b, υπάρχει μια ακολουθία $(x_n) \subset S(H)$ τέτοια ώστε $(Ux_n, x_n) \to b$. Εφόσον ο U είναι συμπαγής τελεστής μπορούμε να υποθέσουμε αντικαθιστώντας την (x_n) με μια υπακολουθία, ότι η (Ux_n) συγκλίνει, $Ux_n \to y_0$. Τότε $\|y_0\| \geq b$, επειδή $(Ux_n, x_n) \to b$ και $\|x_n\| = 1$. Καθώς

$$\begin{aligned} \|Ux_n - bx_n\|^2 &= \|Ux_n\|^2 - 2b(Ux_n, x_n) + b^2\|x_n\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 - 2b(Ux_n, x_n) + b^2 \\ &= 2b^2 - 2b(Ux_n, x_n) \end{aligned}$$

και

$$(Ux_n, x_n) \to b$$

έχουμε

$$(U - b)x_n \to 0.$$

Οπότε

$$x_n = \frac{1}{b}\{(U - (U - b))x_n\} \to \frac{y_0}{b}.$$

Θέτουμε $x_0 = y_0/b$. Τότε έχουμε, $Ux_n \to y_0 = bx_0$ και $Ux_n \to Ux_0$. Συνεπώς έχουμε $Ux_0 = bx_0$. Επειδή $\|x_0\| \geq 1$ (πράγματι, $\|x_0\| = 1$), το b είναι όντως μια ιδιοτιμή του U.

□

Ας δούμε πως το Θεώρημα (3.8) να χρησιμοποιηθεί για να αναχθεί στο Θεώρημα (3.4) για συμπαγείς τελεστές. Διαμορφώνουμε λοιπόν το Θεώρημα (3.4) στην ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.9. *Έστω H να είναι ένας χώρος Hilbert και έστω $U \in \mathfrak{B}(H)$ να είναι ένας συμπαγής ερμιτιανός τελεστής. Τότε υπάρχει μια (πιθανόν πεπερασμένη) ακολουθία (λ_k) πραγματικών αριθμών και μία ακολουθία (H_k) από γραμμικούς υπόχωρους του H έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.*
(a) $\lambda_k \to 0$
(b) $dim H_k < \infty$
(c) $H_k \perp H_l$ *για* $k \neq l$
(d) Αν $x = \sum_k x_k + \tilde{x}$ *όπου* $x_k \in H_k$ *και* $\tilde{x} \in H_k^{\perp}$ *για κάθε k, τότε*

$$Ux = \sum_k \lambda_k x_k$$

Απόδειξη. Έστω λ_γ, $(\gamma \in \Gamma)$ να είναι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του U και έστω H_γ να είναι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχούν στην $\lambda_\gamma : H_\gamma = Ker(U - \lambda_\gamma I)$. Ξέρουμε ότι $H_\gamma \perp H_\delta$ αν $\gamma \neq \delta$.

Ας δούμε πρώτα ότι $dim H_\gamma < \infty$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα πολλά λ_γ με $|\lambda_\gamma| \geq \epsilon$. Ας υποθέσουμε οτι δεν ισχύει αυτό. Τότε αν πάρουμε μια ορθοκανονική βάση σε κάθε H_γ με $|\lambda_\gamma| \geq \epsilon$, βρίσκουμε ότι υπάρχει μια άπειρη ορθοκανονική ακολουθία $(x_n)_1^\infty$ τέτοια ώστε $Ux_n = \mu_n x_n$, όπου $|\mu_n| \geq \epsilon$. Αλλά τότε η $(Ux_n)_1^\infty$ δεν περιέχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία, όπου έρχεται σε αντίθεση με το ότι ο U είναι συμπαγής.

Από αυτό συνεπάγεται ότι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές μπορούν να είναι τοποθετημένες σε μια ακολουθία (λ_k) έτσι ώστε με $H_k = ker(U - \lambda kI)$, οι συνθήκες (a)- (c) ικανοποιούντε.

Τότε, επειδή κάθε H_k είναι αναλοίωτος υπό τον U, η κληστή γραμμική θήκη είναι αναλοίωτη από το U καθώς επίσης και ο $M^{\perp}$. Συμβολίζουμε με $\tilde{U}$

τον περιορισμό του U στο $M^{\perp}$. Τότε $\tilde{U} \in \mathfrak{B}(M^{\perp})$ είναι επίσης συμπαγής ερμιτιανός τελεστής. Μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του $\tilde{U}$ είναι επίσης μια μη-μηδενική του U, έτσι προκύπτει από τον ορισμό του M και από το Θεώρημα (3.8) , ότι $\tilde{U} = 0$.

Αν η ακολουθία (λ_k) των μη-μηδενικών ιδιοτιμών είναι πεπερασμένη τότε τελειώσαμε. Έστω

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \tilde{x}$$

όπου $x_k \in H_k$ και $\tilde{x} \in M^{\perp}$. Θέτω

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k + \tilde{x} \quad \kappa\alpha\iota \quad y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Τότε $Ux^{(n)} = y^{(n)}$ και $x^{(n)} \to x$. Επειδή

$$y^{(n)} \to y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \in H$$

λόγω της συνέχειας του U συνεπάγεται ότι $Ux = y$, αποδεικνύοντας το (d)

□

Ένας τελεστής $T \in \mathfrak{B}(H)$ λέμε ότι είναι θετικός αν είναι ερμιτιανός και $V(T) \subset [0, \infty)$ ή $(Tx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Σημειώνουμε ότι αν T είναι οποιοσδήποτε (φραγμένος γραμμικός) τελεστής σε ένα χώρο Hilbert τότε T^*T και TT^* είναι θετικοί (ερμιτιανοί) τελεστές:

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2$$

Θεώρημα 3.10. *Ένας συμπαγής θετικός τελεστής U σε ένα χώρο Hilbert έχει μια μοναδική τετραγωνική ρίζα V. Κάθε ερμιτιανή τετραγωνική ρίζα του U είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ...$ να είναι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του U, έστω H_k να είναι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην λ_k και έστω M να είναι η κληστή γραμμική θήκη του H_k. Τότε $M^{\perp} = KerU$ και $\lambda_k > 0$ για κάθε k. Ορίζουμε $V \in \mathfrak{B}(H)$ από το $Vx = \sqrt{\lambda_k}x$ αν $x \in H_k$ και $Vx = 0$ αν $x \in M^{\perp}$. Τότε V είναι μια θετική τετραγωνική ρίζα του U.

Τώρα έστω W να είναι μία ερμιτιανή τετραγωνική ρίζα του U. Σημειώνουμε ότι W αντιμετατίθεται με τον U και έτσι αντιμετατίθεται με το $U - \lambda_k I$: $UW = W^2W = WW^2 = WU$. Γι' αυτό ο $H_k = Ker(U - \lambda_k I)$ είναι αμετάβλητος υπό την W και έτσι είναι ο $M^{\perp} = KerU$. Τότε $W^2|M^{\perp} = 0$ και έτσι $W|M^{\perp} = 0$.

Επίσης, έστω $(x_1, ..., x_n)$ να είναι μια ορθοκανονική βάση του H_k που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της $W : Wx_i = \mu_i x_i$. Επειδή $W^2 = U$ έχουμε $\mu_i^2 = \lambda_k$ και έτσι $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_k} \to 0$. Αφού $\sqrt{\lambda_k} \to 0$, από την σχέση (3.2) ο τελεστής W είναι συμπαγής. Ακόμα αν W είναι θετικός τότε $\mu_i = \sqrt{\lambda_k}$ και έτσι W είναι ακριβώς V.

□

Για $T \in \mathfrak{B}_\circ(H)$ η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα $(T^*T)^{1/2}$ του συμπαγούς θετικού τελεστή T^*T, όπου προκύπτει από το Θεώρημα (3.10) , λέγεται *η απόλυτη τιμή* του T , και συμβολίζεται $|T|$. Σημειώνουμε ότι $\||T|x\| = \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$, επειδή

$$\begin{aligned} \||T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle &= \langle (T^*T)^{1/2}x, (T^*T)^{1/2}x\rangle \\ &= \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \end{aligned}$$

Πράγματι, $|T|$ είναι ο μοναδικός θετικός τελεστής με αυτή την ιδιότητα.

Ας δούμε πως το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές μπορεί να παραχθεί από τα Θεωρήματα (3.9) και (3.10). Για να είμαστε ακριβείς θα παράξουμε την περίπτωση που δίνεται στο Πόρισμα (3.6) από αυτά τα Θεωρήματα.

Δίνεται ένας συμπαγής φυσιολογικός τελεστής, πως μπορούμε να πάρουμε την ορθοκανονική βάση που αποτελείται απο ιδιοδιανύσματα του T ;

Έστω $H_1, H_2, ...$ να είναι οι ιδιόχωροι που ανήκουν στις μη-μηδενικές ιδιοτιμές του συμπαγή θετικού τελεστή $U = TT^* = T^*T$, και έστω

$$H_0 = KerU = \bigcap_{k\geq 1} H_k^{\perp}$$

Εφόσον $TU = UT$, κάθε H_k είναι αναλλοίωτος υπό τον T . Για $x \in H_0$ έχουμε

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Ux, x\rangle = 0$$

και έτσι $T|H_0 = 0$. Ακόμα για $k \geq 1$ ο περιορισμός του T στο H_k είναι φυσιολογικός. Επειδή ο H_k είναι πεπερασμένης διάστασης, γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο H_k έχει μία ορθοκανονική βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Η ένωση αυτών των βάσεων μαζί με μία ορθοκανονική βάση του H_0 μας δίνει την ζητούμενη βάση.

Βιβλιογραφία

[1] Bela Bollobas, *Linear Analysis an introduction course*, Cambridge University press , (1999).

[2] Μ. Ανούσης , Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής *Πραγματική Ανάλυση* , Σάμος, (2014).