ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρκοβιανά μοντέλα αποφάσεων στη βέλτιστη συντήρηση συστημάτων παραγωγής

Σαμαλτάνη Μαρία

Επιβλέπων: Δημητράκος Θεοδόσης

Καρλόβασι, Σάμος, 2018

Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε προβλήματα σχετικά με τη βέλτιστη συντήρηση ενός συστήματος παραγωγής με κατάλληλα Μαρκοβιανά μοντέλα αποφάσεων. Στόχος μας είναι η εύρεση της πολιτικής η οποία ελαχιστοποιεί το (μακροπρόθεσμο) μέσο κόστος.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα βασικά στοιχεία των Μαρκοβιανών μοντέλων καθώς και μία εισαγωγή του αλγορίθμου των βέλτιστων πολιτικών που θα χρησιμοποιήσουμε και στα επόμενα κεφάλαια για την εύρεση της βέλτιστης πολικής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε τον βέλτιστο έλεγχο ενός συστήματος παραγωγής που διαθέτει έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο για τη διευκόλυνση της παραγωγικής διαδικασίας. Γίνεται η περιγραφή του μοντέλου καθώς και η μελέτη για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής όταν περιέχονται περίοδοι αδράνειας μετά από κάποια επισκευή.

Στο τρίτο κεφάλαιο θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με L αποθηκευτικούς χώρους, όπου γίνεται μελέτη του προβλήματος όταν επιδεινώνεται στοχαστικά η εγκατάσταση ή η μονάδα παραγωγής, καθώς παρατίθενται και αντίστοιχα προβλήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται η βέλτιστη προληπτική συντήρηση ενός συστήματος με συνεχείς χρόνους επισκευής και περιόδους αδράνειας. Παρουσιάζονται δύο μοντέλα, όπου στο πρώτο μοντέλο θεωρείται ότι η εγκατάσταση, μετά την ολοκλήρωση της συντήρησής της, παραμένει σε αδράνεια έως ότου ο αποθηκευτικός χώρος εκκενωθεί, ενώ στο δεύτερο μοντέλο, θεωρείται ότι η μονάδα παραγωγής, μετά την ολοκλήρωση της συντήρησής της, παραμένει αδρανής μέχρι να γεμίσει ο αποθηκευτικός χώρος.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο βέλτιστων πολιτικών για την εύρεση της βέλτιστης συντήρησης ενός συστήματος παραγωγής – αποθήκευσης στο πρόγραμμα Matlab.

Λέξεις κλειδιά: Μαρκοβιανά μοντέλα αποφάσεων, αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών, προληπτική συντήρηση.

Abstract

In this postgraduate thesis we study problems about the optimal maintenance of a production system with appropriate Markovian decision models. Our goal is to find a policy that minimizes the (long-run) expected average cost.

In the first chapter we present the basic elements of Markovian models and an introduction of the policy improvement algorithm which we will use in the next chapters for finding the optimal policy.

In the second chapter we study the optimal control of a production system with an intermediate buffer to facilitate the production process. We describe and study the model to find the optimal policy when idle periods are included, after a repair.

In the third chapter we consider a production system with L intermediate buffers, where we study the problem when the installation or the production unit deteriorates stochastically, and we present corresponding problems.

The fourth chapter examines the optimal preventive maintenance of a production - inventory system with continuous repair times and idle periods. We present two models, where in the first one is assumed that the installation, after completing its maintenance, remains idle until the buffer is emptied, while in the second model it is considered that the production unit remains idle, after completing its maintenance, until the buffer is full.

Finally, in the fifth chapter we apply the policy improvement algorithm to find the optimal maintenance of a production - storage system in the Matlab program.

Keywords: Markovian decision models, policy improvement algorithm, preventive maintenance.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Σπουδές στα Μαθηματικά» με κατεύθυνση στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά ορισμένους ανθρώπους που συνέβαλαν σημαντικά στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Δημητράκο Θεοδόση, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, ο οποίος με τίμησε με την επίβλεψη της εργασίας. Το ειλικρινές ενδιαφέρον του και η καθοδήγησή του συντέλεσαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Φελουζή Ευάγγελο και τον κ. Παπαλεξίου Νικόλαο που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου Γιώργο και Αμαλία, καθώς και τον αδερφό μου Κωνσταντίνο, για την αγάπη και την υποστήριξη που μου δείχνουν σε κάθε στιγμή της ζωής μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας και της βιομηχανίας εντείνει όλο και περισσότερο τον ανταγωνισμό μεταξύ των επιχειρήσεων. Στα πλαίσια αυτού του έντονα ανταγωνιστικού περιβάλλοντος, η αξιοπιστία του εξοπλισμού αποτελεί ένα μεγάλο αντικείμενο μελέτης στο χώρο των επιχειρήσεων. Η μελέτη και η αξιολόγηση της αξιοπιστίας του εξοπλισμού αποτελεί έναν πολύ σημαντικό τομέα για την ανάπτυξη και τη βελτιστοποίηση της παραγωγής, καθώς και τη διασφάλιση της ομαλής λειτουργίας του εξοπλισμού. Με την πάροδο των χρόνων, το αντικείμενο αυτό έχει εξελιχθεί σε μεγάλο βαθμό αποτελώντας ένα αναγκαίο εργαλείο των επιχειρήσεων για την ενίσχυση της ποιότητας της παραγωγής και την πρόληψη αστοχίας.

Η βλάβη και η αστοχία του εξοπλισμού μπορεί να αποτελέσει ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της παραγωγικής διαδικασίας. Για το λόγο αυτό, οι επιχειρήσεις έχουν συμπεριλάβει στις δραστηριότητές τους την μελέτη και την αξιολόγηση της αξιοπιστίας του εξοπλισμού. Η συνεχής αναζήτηση των αιτιών που οδηγούν σε μια βλάβη είναι ίσως ο πιο κρίσιμος παράγοντας μείωσης του κόστους λειτουργίας καθώς και της αύξησης της παραγωγής. Ειδικότερα, οι επιχειρήσεις επιδιώκουν το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα με το ελάχιστο κόστος. Σε αυτό συμβάλλει μία πολύ σημαντική λειτουργία, που εκτελείται παράλληλα με την παραγωγική διαδικασία και αποτελεί αντικείμενο μελέτης αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής, η *συντήρηση*.

1.2 Συντήρηση

Η συντήρηση είναι ένας συνδυασμός τεχνικών και διαδικασιών που έχουν ως στόχο τη διατήρηση ή την επαναφορά ενός συστήματος σε μια κατάσταση στην οποία θα μπορεί να εκτελέσει την απαιτούμενη λειτουργία. Η εφαρμογή της συντήρησης επιδιώκει τη διατήρηση της καλής κατάστασης των συστημάτων παραγωγής και την αντιμετώπιση ενδεχόμενης βλάβης. Η εξασφάλιση της λειτουργίας των μηχανημάτων είναι συχνά ο πρωταρχικός στόχος των επιχειρήσεων. Η συστηματική φροντίδα καθυστερεί τη φυσιολογική φθορά των μηχανημάτων και αυξάνει τη διάρκεια ζωής τους. Για την προστασία των μηχανημάτων από βλάβη εφαρμόζονται τεχνικές προληπτικής συντήρησης (preventive maintenance, PM), ενώ στη περίπτωση που παρουσιαστεί βλάβη αντιμετωπίζεται με επιδιορθωτική συντήρηση (corrective maintenance, CM).

Το βασικό πλεονέκτημα που προκύπτει από την προληπτική συντήρηση είναι η άμεση αποκατάσταση και πολλές φορές ακόμα και η πρόβλεψη κάποιων μικρών βλαβών, οι οποίες εάν δεν αποκατασταθούν εγκαίρως, κατά κανόνα οδηγούν σε πολύ σοβαρές βλάβες. Η ασφάλεια παίζει πολύ σημαντικό ρόλο καθώς σε περίπτωση αποτυχίας οι συνέπειες μπορεί να είναι δραματικές. Ένα παράδειγμα είναι τα αεροπλάνα, όπου οι δοκιμές και οι επιθεωρήσεις αποτελούν σημαντικό μέρος της συντήρησης. Το κόστος συντήρησης πρέπει να ελαχιστοποιείται διατηρώντας παράλληλα την αξιοπιστία του εξοπλισμού. Συνεπώς, σε βάθος χρόνου η τακτική συντήρηση των μηχανημάτων αποτελεί την οικονομικότερη επιλογή για την εξασφάλιση της ορθής λειτουργίας τους.

Είναι γεγονός ότι η ιστορία της κάθε επιχείρησης χαρακτηρίζεται από τις αποφάσεις της. Συχνά, οι επιχειρήσεις αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της βέλτιστης συντήρησης και της αντικατάστασης μηχανημάτων. Συγκεκριμένα, η εύρεση της πολιτικής η οποία ελαχιστοποιεί μία προκαθορισμένη συνάρτηση κόστους. Η επίτευξη των στόχων τους εξαρτάται άμεσα από την ικανότητά τους να προσεγγίσουν το μέλλον. Οι διαστάσεις του χρόνου εμφανίζονται ενεργά στην διαδικασία της λήψης αποφάσεων, καθώς η λήψη των αποφάσεων επηρεάζεται και από το παρελθόν. Διάφορα στοχαστικά μοντέλα χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουν και να αξιολογήσουν τις αποφάσεις που θα ληφθούν, όπου η αβεβαιότητα είναι το κύριο χαρακτηριστικό. Η επίλυση πολλών προβλημάτων που σχετίζονται με τη βέλτιστη συντήρηση ή αντικατάσταση μιας μηχανής πραγματοποιείται με τη χρήση των *Μαρκοβιανών διαδικασιών*, οι οποίες οφείλουν το όνομά τους στο Ρώσο μαθηματικό Andrei Andreyevich Markov (1856 – 1922).

1.3 Μαρκοβιανές διαδικασίες

1.3.1 Μαρκοβιανές αλυσίδες

Τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται σε προσδιοριστικά (deterministic) και σε στοχαστικά (stochastic) με στόχο την καλύτερη δυνατή προσομοίωση του πραγματικού μοντέλου με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς του. Η προσέγγιση των στοχαστικών μοντέλων γίνεται μέσω των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μια στοχαστική διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές. Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμία περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν. Αυτό το συγκεκριμένο είδος «αμνησίας» καλείται **Μαρκοβιανή ιδιότητα**

(Markovian property). Ο όρος «Μαρκοβιανή αλυσίδα» αναφέρεται στην αλληλουχία των καταστάσεων μέσω των οποίων κινείται μια τέτοια διαδικασία.

Ορισμός: Μια **Μαρκοβιανή αλυσίδα** (Markov chain) είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n = 0,1, \dots\}$ με τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή με δεδομένη την παρούσα κατάσταση, οι παλαιότερες και οι μελλοντικές καταστάσεις είναι ανεξάρτητες.
Ορίζουμε:

$$P(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n).$$

Οι πιθανές τιμές των X_i σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο S που το ονομάζουμε χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Στις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο και στις Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο.

1.3.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

Ορισμός: Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, με χώρο καταστάσεων S, λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν αυτή έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα (Markovian property):

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} =$$

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i\} = P_{ij}$$

για κάθε $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$.

Η δεσμευμένη πιθανότητα $P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P_{ij}, \quad i, j \in S, \ \forall n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **πιθανότητα μετάβασης** από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο $(n + 1)$ – οστό βήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης P_{ij} καλούνται πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης και ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

i. $P_{ij} \geq 0 , \quad i, j \in S$ (1.1)

ii. $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1\,, \qquad i \in S$

Οι πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης γράφονται συνοπτικά με τη μορφή ενός πίνακα, ο οποίος καλείται πίνακας μετάβασης πρώτης τάξης της αλυσίδας (one – step transition probability matrix). Ο πίνακας ικανοποιεί τις σχέσεις (1.1), συμβολίζεται με P, ονομάζεται **στοχαστικός πίνακας** (stochastic matrix) και έχει την παρακάτω μορφή:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \cdots & P_{0N}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & & P_{1N}^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{N0}^{(n)} & P_{N1}^{(n)} & \cdots & P_{NN}^{(n)} \end{pmatrix}, \ \ n = 0,1,\dots$$

1.3.3 Μαρκοβιανές αλυσίδες σε συνεχή χρόνο

Η μετάβαση από μία κατάσταση της διαδικασίας σε μία άλλη μπορεί να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή, $t \geq 0$. Η ανάγκη τέτοιων αναλύσεων μας δίνει τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Μία στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο $\{X(t), t \geq 0\}$, με διακριτό χώρο καταστάσεων το πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο σύνολο S καλείται **Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο** (continuous – time Markov chains) αν:

$$P\{X(t_n) = i_n | X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$$

$$= P\{X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$$

Για οποιαδήποτε $0 \leq t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ και $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in S$.

1.3.4 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων

Ο Bellman (1957) εισήγαγε τις *Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων* (ΜΔΑ) που ήταν αποτέλεσμα του συνδυασμού της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών με τον δυναμικό προγραμματισμό.

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων είναι μοντέλα λήψης διαδοχικών αποφάσεων όταν το αποτέλεσμα των οποίων είναι αβέβαιο. Σε κάθε χρονική περίοδο αποφάσεων ή χρονική στιγμή, το σύστημα μας παρέχει την απαραίτητη πληροφορία ώστε από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε να διαλέγουμε την κατάλληλη ενέργεια μέσα από ένα σύνολο ενεργειών. Επιλέγοντας μία ενέργεια σε μία κατάσταση, καθορίζουμε την κατάσταση στην οποία θα μεταβούμε την επόμενη χρονική περίοδο μέσω μιας εξίσωσης μετάβασης. Οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται από την κατάσταση αλλά και από την επιλογή της ενέργειας. Για μελλοντικές καταστάσεις, η πολιτική που θα ακολουθήσουμε είναι αυτή που θα μας δώσει τις απαραίτητες πληροφορίες για την επιλογή των ενεργειών μας.

Ορισμός: **Πολιτική** (Policy) ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: S \to A$ από τον χώρο καταστάσεων στον χώρο αποφάσεων. Με άλλα λόγια, μια πολιτική είναι ένας κανόνας που υπαγορεύει μια απόφαση, έστω α, κάθε φορά που η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i. Έτσι έχουμε $f(i) = \alpha$. Λόγω της Μαρκοβιανής διαδικασίας απόφασης, υπάρχει *βέλτιστη πολιτική* η οποία εξασφαλίζει το χαμηλότερο συνολικό μέσο κόστος. Συνεπώς, είναι αρκετό να αναζητήσουμε την βέλτιστη πολιτική.

Συνεπώς, στόχος των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων είναι η εύρεση μιας πολιτικής που ελέγχει τη διαδικασία με το βέλτιστο τρόπο. Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μοντελοποίηση συστημάτων, των οποίων η συμπεριφορά μεταβάλλεται είτε διακριτά είτε συνεχώς σε σχέση με το χρόνο.

1.4 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε διακριτό χρόνο

Θα περιγράψουμε τη λειτουργία μιας *Μαρκοβιανής διαδικασίας αποφάσεων σε διακριτό χρόνο* (Markov decision process in discrete time).

Παράδειγμα 1.1:

Σε μια επιχείρηση υπάρχει ένα βασικό μηχάνημα που αποτελεί τον πυρήνα της παραγωγικής διαδικασίας. Το μηχάνημα επιδεινώνεται γρήγορα λόγω της μεγάλης χρήσης. Στο τέλος κάθε εβδομάδας, μετά από μία επιθεώρηση, ταξινομείται η κατάσταση της μηχανής σε μία από τις τέσσερις πιθανές καταστάσεις:

Κατάσταση	**Βαθμός επιδείνωσης**
0	Καλό σαν καινούριο
1	Μικρής σημασίας αλλοίωση

2	Μεγάλης σημασίας αλλοίωση
3	Παραγωγή απαράδεκτης ποιότητας

Πίνακας 1.1

Με τα αποτελέσματα των επιθεωρήσεων κάνουμε στατιστική ανάλυση για το πώς εξελίσσεται η κατάσταση της μηχανής από μήνα σε μήνα. Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τη σχετική συχνότητα (πιθανότητα) κάθε πιθανής μετάβασης της κατάστασης από ένα μήνα στην κατάσταση του επόμενου μήνα.

Κατάσταση	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	0	0	0	1

Πίνακας 1.2

Οι μεταβατικές πιθανότητες δεν επηρεάζονται από τις καταστάσεις των προηγούμενων μηνών. Αυτή η «έλλειψη μνήμης» είναι η Μαρκοβιανή ιδιότητα που αναφέραμε παραπάνω.

Επομένως, για μία τυχαία μεταβλητή X_t, που είναι η κατάσταση της μηχανής στο τέλος του μήνα t, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα μετάβασης τον πίνακα 1.2.

Ο παραπάνω πίνακας μας υποδεικνύει ότι με την τελευταία καταχώρηση, το μηχάνημα τίθεται εκτός λειτουργίας καθώς εισέρχεται στην κατάσταση 3. Η κατάσταση 3 θα πρέπει να αποφευχθεί, καθώς το μηχάνημα δεν μπορεί να επισκευαστεί σε αυτή την κατάσταση και θα πρέπει να αντικατασταθεί, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη διακοπή της διαδικασίας της παραγωγής. Το καινούριο μηχάνημα ξεκινάει από την κατάσταση 0.

Η διαδικασία αντικατάστασης χρειάζεται μία εβδομάδα για να ολοκληρωθεί, με αποτέλεσμα να χάνεται η παραγωγή γι’ αυτό το διάστημα. Το κόστος της χαμένης παραγωγής είναι 2.000€ και το κόστος αντικατάστασης του μηχανήματος είναι 4.000€.

Το συνολικό κόστος, που δημιουργείται κάθε φορά που το μηχάνημα είναι στην κατάσταση 3, είναι 6.000€.

Ακόμα και πριν το μηχάνημα φθάσει στην κατάσταση 3, ενδέχεται να προκύψουν κόστη από την παραγωγή ελαττωματικών αντικειμένων. Το αναμενόμενο κόστος ανά εβδομάδα έχει ως εξής:

Κατάσταση	**Αναμενόμενα κόστη ελαττωματικών αντικειμένων, €**
0	0
1	1.000
2	3.000
3	6.000

Πίνακας 1.3

Στον πίνακα 1.3 βλέπουμε όλα τα σχετικά κόστη που σχετίζονται με κάποια συγκεκριμένη πολιτική συντήρησης. Η εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος παραμένει μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, αλλά τώρα με τον παρακάτω μεταβατικό πίνακα:

Κατάσταση	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

Πίνακας 1.1

Για να αξιολογήσουμε αυτή τη πολιτική συντήρησης, πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τα άμεσα κόστη που θα πραγματοποιηθούν την επόμενη εβδομάδα και τα ακόλουθα κόστη που θα προκύψουν καθώς εξελίσσεται το σύστημα με τον τρόπο αυτό. Ένα τέτοιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο απόδοσης για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι το (μακροπρόθεσμο) *αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου*.

Για να υπολογίσουμε αυτό το μέτρο, αρχικά υπολογίζουμε τις πιθανότητες κάθε κατάστασης π_0, π_1, π_2 και π_3 για αυτή τη Μαρκοβιανή αλυσίδα λύνοντας τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\pi_0 = \pi_3 ,$$

$$\pi_1 = \frac{7}{8}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \,,$$

$$\pi_2 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \,,$$

$$\pi_3 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \,,$$

$$t = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι:

$$\pi_0 = \frac{2}{13}\,, \qquad \pi_1 = \frac{7}{13}\,, \qquad \pi_2 = \frac{2}{13}\,, \qquad \pi_3 = \frac{2}{13}.$$

Συνεπώς, το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά εβδομάδα γι’ αυτή την πολιτική συντήρησης είναι:

$$0\pi_0 + 1.000\pi_1 + 3.000\pi_2 + 6.000\pi_3 = 1.923{,}08€.$$

Υπάρχουν και άλλες πολιτικές συντήρησης που πρέπει να ληφθούν υπόψιν και να συγκριθούν με αυτή, όπως για παράδειγμα η αντικατάσταση του μηχανήματος πριν από την κατάσταση 3 ή μια επιδιόρθωση με το κόστος των 2.000€ που είναι εφικτή μόνο στην κατάσταση 2. Η επιδιόρθωση στις καταστάσεις 0 ή 1 δεν φέρει καμία βελτίωση στο μηχάνημα, ενώ στην κατάσταση 3 η επιδιόρθωση του μηχανήματος είναι αδύνατη. Η επιμελής εξέταση και επιδιόρθωση του μηχανήματος θα επιστρέψει το μηχάνημα στην κατάσταση 1. Μετά από κάθε επιθεώρηση του μηχανήματος, γίνεται μια διαδικασία μεταξύ τριών πιθανών αποφάσεων (μη εκτέλεση, γενική επισκευή ή αντικατάσταση). Στον πίνακα 1.5 συνοψίζονται οι πιθανές αποφάσεις μετά από κάθε επιθεώρηση:

Απόφαση	**Ενέργεια**	**Κατάσταση**
1	Δεν επεμβαίνουμε	0, 1, 2
2	Επιμελής εξέταση και επιδιόρθωση (επιστρέφει στην κατάσταση 1)	2
3	Αντικατάσταση (επιστρέφει στην κατάσταση 0)	1, 2, 3

Πίνακας 1.2

Έστω R μία σταθερή ντετερμινιστική πολιτική , $d_i(R) = k$ η αντίστοιχη απόφαση στην κατάσταση i, και C_{ik} το αναμενόμενο κόστος που εξαρτάται από την απόφαση και την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Το σύστημα μεταβαίνει την επόμενη χρονική στιγμή στην κατάσταση j με πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(k)$. Εάν η κατάσταση j επηρεάζει το κόστος, τότε το C_{ik} υπολογίζεται ως εξής:

$$C_{ik} = \sum_{j=0}^{M} q_{ij}(k) p_{ij}(k) \,,$$

όπου $q_{ij}(k) =$ το αναμενόμενο κόστος που προκύπτει όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i, λαμβάνεται η απόφαση k και το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση j την επόμενη χρονική περίοδο.

Το (μακροπρόθεσμο) αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου μετά από οποιαδήποτε πολιτική R εκφράζεται ως:

$$g(R) = \sum_{i=0}^{M} \Pi_i \, C_{ik}$$

Επίσης, $v_i^n(R)$ είναι το συνολικό αναμενόμενο κόστος εάν η Μαρκοβιανή αλυσίδα X ξεκινά από την κατάσταση i και εξελίσσεται για n χρονικές περιόδους (n −βήματα) με την πολιτική R. Συνεπώς:

$$v_i^n(R) = \mathbb{E}_R \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{M} C_{jk} \cdot 1_j \cdot (X_m) \,\middle|\, X_0 = i \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{M} C_{jk} \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m(k) \ , \ \text{για } i = 0, 1, \dots, M.$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το n:

$$\frac{v_i^n(R)}{n} = \sum_{j=0}^{M} C_{jk} \cdot \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m(k)$$

Παίρνουμε το όριο καθώς $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_i^n(R)}{n} = \sum_{j=0}^{M} C_{jk}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m(k)$$

$$= \sum_{j=0}^{M} C_{jk}\,\Pi_j \equiv g(R)$$

όπου $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m(k) = \Pi_j$

Άρα,

$$\frac{v_i^n(R)}{n} \cong g(R),\quad \text{για μεγάλο } n.$$

Το $v_i^n(R)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα δύο συνιστωσών:

$$v_i^n(R) \cong n\cdot g(R) + v_i(R),\quad \text{για } i = 0, 1, \dots, M$$

όπου η πρώτη συνιστώσα είναι ανεξάρτητη της αρχικής κατάστασης ενώ η δεύτερη εξαρτάται από την αρχική κατάσταση i. Έτσι, το $v_i(R)$ ερμηνεύεται ως η επίπτωση στο συνολικό αναμενόμενο κόστος λόγω της έναρξης της κατάστασης i. Συνεπώς:

$$v_i^n(R) - v_j^n(R) \cong v_i(R) - v_j(R).$$

Το $v_i^n(R)$ έχει δύο συνιστώσες:

- Το C_{ik}, το κόστος που πραγματοποιήθηκε κατά την πρώτη παρατηρούμενη χρονική περίοδο και
- Το συνολικό αναμενόμενο κόστος του συστήματος για τις υπόλοιπες $n-1$ χρονικές περιόδους, δηλαδή:

  $$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j^{n-1}(R)\,.$$

Συνεπώς, έχουμε την εξίσωση:

$$v_i^n(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j^{n-1}(R)\ ,\quad \text{για } i = 0, 1, 2, \dots, M\ , \tag{1.2}$$

όπου $v_i^1(R) = C_{ik}$ για όλα τα i.

Για μεγάλο n αντικαθιστούμε τις:

$$v_i^n(R) = n \cdot g(R) + v_i(R) \text{ και } v_j^{n-1}(R) = (n-1) \cdot g(R) + v_j(R)$$

στην εξίσωση (1.2), και καταλήγουμε στην:

$$g(R) + v_i(R) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R) \ , \quad \text{για } i = 0, 1, 2, \dots, M. \tag{1.3}$$

Παρατηρούμε ότι στο σύστημα (1.3) υπάρχουν οι τιμές $g(R), v_0(R), v_1(R), \dots, v_M(R)$ που το ικανοποιούν. Συνεπώς, το σύστημα (1.3) έχει $M+1$ εξισώσεις, με $M+2$ άγνωστες τιμές έτσι ώστε μία από αυτές να επιλεχθεί αυθαίρετα, και το $v_M(R)$ να επιλεχθεί ίσο με το μηδέν. Η εύρεση του (μακροπρόθεσμου) αναμενόμενου μέσου κόστους $g(R)$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων, όταν ακολουθείται η πολιτική R. Η εξαγωγή της βέλτιστης πολιτικής που ελαχιστοποιεί το $g(R)$ θα πραγματοποιηθεί με τον *αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών*.

1.4.1 Αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών

Ο *αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών* (policy improvement algorithm) είναι μία μέθοδος για την εξαγωγή της βέλτιστης πολιτικής ως προς την ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, $g(R)$. Βασικό αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου είναι η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής σε σχετικά μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Δύο βασικές ιδιότητες του αλγορίθμου είναι:

- $g(R_{n+i}) \leq g(R_n)$, για $n = 1, 2, \dots$
- Ο αλγόριθμος τερματίζει με μία βέλτιστη πολιτική σε ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων

Ο αλγόριθμος ξεκινά με την επιλογή μιας αυθαίρετης πολιτικής R_1. Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός της τιμής, όπου λύνεται το σύστημα εξισώσεων για να βρεθούν οι τιμές $g(R_1), v_0(R_1), v_1(R_1), \dots, v_{M-1}(R_1)$ όπου $v_M(R_1) = 0$. Στη συνέχεια ακολουθεί το βήμα βελτίωσης της πολιτικής, όπου έχουμε μια καλύτερη πολιτική, την R_2. Αυτά τα δύο βήματα αποτελούν μία επανάληψη του αλγορίθμου. Με τη νέα πολιτική R_2 εκτελούμε μία άλλη επανάληψη. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρις ότου δύο διαδοχικές επαναλήψεις μας οδηγήσουν σε ίδιες πολιτικές. Τότε θα έχει επιτευχθεί η βέλτιστη πολιτική.

Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή του αλγορίθμου σε βήματα.

Βήμα 0 (Έναρξη): Επιλέγουμε μία αυθαίρετη πολιτική R_1. Για $n = 1$.

Επανάληψη n:

Βήμα 1 (Προσδιορισμός της τιμής): Για την πολιτική R_n, λύνουμε το σύστημα των $M + 1$ εξισώσεων

$$g(R_n) = C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R_n) - v_i(R_n)\,, \quad \text{για } i = 0, 1, 2, \dots, M,$$

για όλες τις άγνωστες τιμές των $g(R_n), v_0(R_n), v_1(R_n), \dots, v_{M-1}(R_n)$ όπου $v_M(R_n) = 0$.

Βήμα 2 (Πολιτική βελτίωσης): Χρησιμοποιώντας τις τιμές $v_i(R_n)$ που υπολογίζονται από την πολιτική R_n, βρίσκουμε την πολιτική $R_{n+i} = (R_{n+i}(0), R_{n+i}(1), \dots, R_{n+i}(M))$ έτσι ώστε για κάθε κατάσταση i, η $d_i(R_{n+i}) = k$ είναι η απόφαση που ελαχιστοποιεί την

$$C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R_n) - v_i(R_n)$$

Δηλαδή για κάθε κατάσταση i θέλουμε:

$$\underset{k=1,2,\dots,k}{\text{min}imize} \left[C_{ik} + \sum_{j=0}^{M} p_{ij}(k) v_j(R_n) - v_i(R_n) \right].$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την $d_i(R_{n+i})$ με την τιμή ελαχιστοποίησης του k. Αυτή η διαδικασία ορίζει μία νέα πολιτική την R_{n+i}.

Βήμα 3 (Δοκιμή βελτιστοποίησης): Η τρέχουσα πολιτική R_{n+i} θα είναι η βέλτιστη εάν είναι ίδια με την πολιτική R_n. Εάν είναι ίδιες, τότε ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά, μεταβαίνουμε στην πολιτική R_{n+1} και εκτελούμε άλλη μία επανάληψη.

Επίλυση του παραδείγματος 1.1 με τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών

Στο παράδειγμα 1.1 οι αποφάσεις που μπορούν να παρθούν μετά από κάθε επιθεώρηση είναι τρείς (δεν επεμβαίνουμε, γενική επισκευή ή αντικατάσταση). Οι μόνες πιθανές τιμές του $d_i(R)$ είναι 1, 2 και 3 για κάθε κατάσταση i.

Βήμα 0:

Επιλέγουμε, λοιπόν, μία αυθαίρετη πολιτική R_1. Έστω ότι αυτή η πολιτική ορίζει την ενέργεια της επισκευής του μηχανήματος στην κατάσταση 3, και στις υπόλοιπες καταστάσεις δεν επεμβαίνουμε. Παρακάτω συνοψίζονται ο πίνακας της πολιτικής και ο πίνακας του κόστους:

Πολιτική R_1

Κατάσταση	**Απόφαση**
0	1
1	1
2	1
3	3

Κόστη

Κατάσταση	C_{ik}
0	0
1	1.000
2	3.000
3	6.000

Ο μεταβατικός πίνακας έχει αναφερθεί παραπάνω, Πίνακας 1.1 .

Βήμα 1:

Επανάληψη 1. Το βήμα προσδιορισμού της τιμής απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων

$g(R_1), v_0(R_1), v_1(R_1), v_2(R_1)$ με $v_3(R_1) = 0$.

$$g(R_1) = \frac{7}{8}v_1(R_1) + \frac{1}{16}v_2(R_1) - \ v_0(R_1)$$

$$g(R_1) = 1.000 + \frac{3}{4}v_1(R_1) + \frac{1}{8}v_2(R_1) - v_1(R_1)$$

$$g(R_1) = 3.000 + \frac{1}{2}v_2(R_1) - v_2(R_1)$$

$$g(R_1) = 6.000 + v_0(R_1)$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$g(R_1) = \frac{25.000}{13} = 1.923$$

$$v_0(R_1) = -\frac{53.000}{13} = -4.077$$

$$v_1(R_1) = -\frac{34.000}{13} = -2.615$$

$$v_2(R_1) = \frac{28.000}{13} = 2.154$$

Βήμα 2:

Εφαρμόζουμε το βήμα της βελτίωσης της πολιτικής. Αναζητούμε μία βελτιωμένη πολιτική R_2 ώστε η απόφαση k στην κατάσταση i να ελαχιστοποιεί την αντίστοιχη έκφραση:

$$C_{ik} + \sum_{j=0}^{2} p_{ij}(k)\, v_j(R_1) - v_i(R_1)$$

Στην κατάσταση 0, έχουμε μόνο την επιλογή της απόφασης 1 (δεν επεμβαίνουμε). Επομένως, οι υπολογισμοί είναι περιττοί εφόσον δεν υπάρχει η δυνατότητα της επιλογής. Στην κατάσταση 1, οι πιθανές αποφάσεις είναι η 1 (δεν επεμβαίνουμε) και η 3 (αντικατάσταση).

Στην κατάσταση 2, οι πιθανές αποφάσεις είναι 1 (δεν επεμβαίνουμε), η 2 (επισκευή) και η 3 (αντικατάσταση).

Στην κατάσταση 3, η μόνη απόφαση είναι η 3 (αντικατάσταση). Συνεπώς, δεν απαιτούνται υπολογισμοί.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα:

Κατάσταση	**Ενέργεια**	$\boldsymbol{C_{ik} + \sum_{j=0}^{2} p_{ij}(k)\, v_j(R_1) - v_i(R_1)}$
0	1	$C_{01} - p_{00}(1) \cdot 4.077 - p_{01}(1) \cdot 2.615 + p_{02}(1) \cdot 2.154 + 4.077$
1	1	$C_{11} - p_{10}(1) \cdot 4.077 - p_{11}(1) \cdot 2.615 + p_{12}(1) \cdot 2.154 + 2.615$ $= 1.000 - 0 - \frac{3}{4} \cdot 2.615 + \frac{1}{8} \cdot 2.154 + 2.615 = 1.923$

	3	$C_{13} - p_{10}(3) \cdot 4.077 - p_{11}(3) \cdot 2.615 + p_{12}(3) \cdot 2.154 + 2.615$ $= 6.000 - 4.077 + 2.615 = 4.538$
2	1	$C_{21} - p_{20}(1) \cdot 4.077 - p_{21}(1) \cdot 2.615 + p_{22}(1) \cdot 2.154 - 2.154$ $= 3.000 - 0 - 0 + \frac{1}{2} \cdot 2.154 - 2.154 = 1.923$
	2	$C_{22} - p_{20}(2) \cdot 4.077 - p_{21}(2) \cdot 2.615 + p_{22}(2) \cdot 2.154 - 2.154$ $= 4.000 - 0 - 2.615 - 2.154 = -769$
	3	$C_{23} - p_{20}(3) \cdot 4.077 - p_{21}(3) \cdot 2.615 + p_{22}(3) \cdot 2.154 - 2.154$ $= 6.000 - 4.077 - 2.154 = -231$
3	3	$C_{33} - p_{30}(3) \cdot 4.077 - p_{31}(3) \cdot 2.615 + p_{32}(3) \cdot 2.154$

Πίνακας 1.6

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι στην κατάσταση 1, η απόφαση που ελαχιστοποιεί την έκφραση είναι η απόφαση 1, ενώ στην κατάσταση 2, η απόφαση 2 μας δίνει την ελαχιστοποίηση που επιθυμούμε. Συνεπώς, η νέα πολιτική R_2, τα κόστη και ο μεταβατικός πίνακας έχουν ως εξής:

Πολιτική R_2

Κατάσταση	**Απόφαση**
0	1
1	1
2	2
3	3

Κόστη

Κατάσταση	C_{ik}
0	0
1	1.000
2	4.000
3	6.000

Πίνακας Μετάβασης

Κατάσταση	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

Πίνακας 1.7

Η νέα πολιτική R_2 δεν είναι ίδια με την προηγούμενη πολιτική R_1, οπότε επιστρέφουμε στο βήμα 1 και εκτελούμε δεύτερη επανάληψη.

Επανάληψη 2. (Βήμα προσδιορισμού). Λύνουμε τις εξισώσεις:

$$g(R_2) = \frac{7}{8}v_1(R_2) + \frac{1}{16}v_2(R_2) - \ v_0(R_2)$$

$$g(R_2) = 1.000 + \frac{3}{4}v_1(R_2) + \frac{1}{8}v_2(R_2) - v_1(R_2)$$

$$g(R_2) = 4.000 + v_2(R_2) - v_2(R_2)$$

$$g(R_2) = 6.000 + v_0(R_2)$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$g(R_2) = \frac{5.000}{3} = 1.667$$

$$v_0(R_2) = -\frac{13.000}{3} = -4.333$$

$$v_1(R_2) = -3.000$$

$$v_2(R_2) = -\frac{2.000}{3} = -667$$

Εφαρμόζουμε το βήμα 2 (βελτίωση της πολιτικής). Για τις δύο καταστάσεις με περισσότερες από μία πιθανές αποφάσεις, των οποίων οι εκφράσεις πρέπει να ελαχιστοποιηθούν:

Κατάσταση	Ενέργεια	$C_{ik} + \sum_{j=0}^{2} p_{ij}(k)\, v_j(R_1) - v_i(R_1)$
1	1	$C_{11} - p_{10}(1) \cdot 4.333 - p_{11}(1) \cdot 3.000 - p_{12}(1) \cdot 667 + 3.000$ $= 1.000 - 0 - \frac{3}{4} \cdot 3.000 - \frac{1}{8} \cdot 667 + 3.000 = 1.667$
	3	$C_{13} - p_{10}(3) \cdot 4.333 - p_{11}(3) \cdot 3.000 - p_{12}(3) \cdot 667 + 3.000$ $6.000 - 4.333 + 3.000 = 4.667$
2	1	$C_{21} - p_{20}(1) \cdot 4.333 - p_{21}(1) \cdot 3.000 - p_{22}(1) \cdot 667 + 667$ $= 3.000 - 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 667 + 667 = 3.333$
	2	$C_{22} - p_{20}(2) \cdot 4.333 - p_{21}(2) \cdot 3.000 + p_{22}(2) \cdot 667 + 667$ $= 4.000 - 0 - 3.000 + 667 = 1.667$
	3	$C_{23} - p_{20}(3) \cdot 4.333 - p_{21}(3) \cdot 3.000 + p_{22}(3) \cdot 667 + 667$ $= 6.000 - 4.333 + 667 = 2.334$

Πίνακας 1.8

Παρατηρούμε ότι στην κατάσταση 1 η απόφαση που ελαχιστοποιεί την έκφραση είναι η 1, και στην κατάσταση 2 η απόφαση που ελαχιστοποιεί την έκφραση είναι η 2. Η επόμενη πολιτική θα είναι η R_3, η οποία είναι:

Πολιτική R_3

Κατάσταση	Απόφαση
0	1
1	1
2	2
3	3

Η πολιτική R_3 είναι ίδια με την πολιτική R_2, οπότε ο αλγόριθμος σταματά καθώς έχει βρεθεί η βέλτιστη πολιτική η οποία είναι η $R_2 = (1, 1, 2, 3)$.

Κεφάλαιο 2

Βέλτιστη συντήρηση ενός συστήματος παραγωγής με έναν αποθηκευτικό χώρο

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον βέλτιστο έλεγχο ενός συστήματος παραγωγής που διαθέτει έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο για τη διευκόλυνση της παραγωγικής διαδικασίας. Η κατασκευή ενός αποθηκευτικού χώρου μας ωφελεί στην αποφυγή της συχνής διακοπής της παραγωγικής διαδικασίας κατά τη διάρκεια ενδεχόμενων βλαβών του μηχανήματος. Συνεπώς, η πολιτική της προληπτικής συντήρησης δε βασίζεται μόνο στην κατάσταση λειτουργίας του μηχανήματος, αλλά και στην κατάσταση του αποθηκευτικού χώρου.

Ο αποθηκευτικός χώρος δέχεται το ακατέργαστο υλικό με σταθερό ρυθμό, από όπου η μονάδα παραγωγής το «τραβά». Ο ρυθμός έλξης είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό εισαγωγής του ακατέργαστου υλικού, όταν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι άδειος. Οι δύο τιμές καθίστανται ίσες μόλις απομακρυνθεί ο αποθηκευτικός χώρος.

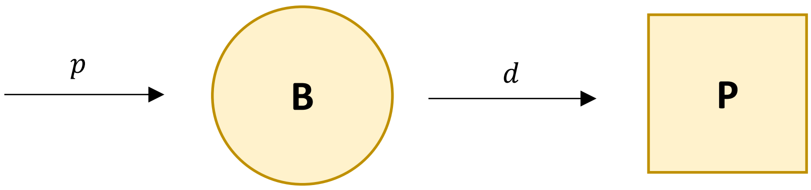
Θεωρούμε ότι η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται και επιθεωρείται σε διακριτές χρονικές στιγμές. Εάν διαπιστωθεί ότι η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση δυσλειτουργίας, τότε πρέπει να ξεκινήσει προληπτική συντήρηση, ενώ εάν διαπιστωθεί ότι βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, τότε η προληπτική συντήρηση είναι προαιρετική.
Η διάρθρωση του κόστους όταν εκτελείται συντήρηση περιλαμβάνει:

- το λειτουργικό κόστος της παραγωγικής μονάδας
- το κόστος συντήρησης της παραγωγικής μονάδας
- το κόστος αποθήκευσης του ακατέργαστου υλικού
- το κόστος ποινών
- το κόστος της χαμένης παραγωγής

Το κύριο πρόβλημα είναι να βρεθεί η πολιτική συντήρησης που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Σε μερικά προβλήματα αποδεικνύουμε ότι η βέλτιστη πολιτική είναι μονότονη, δηλαδή θέτει σε λειτουργία το μηχανισμό ελέγχου της διαδικασίας αν και μόνο αν η κατάσταση της διαδικασίας είναι ίση ή υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή.

2.2 Περιγραφή του Μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής στο οποίο, το ακατέργαστο υλικό μεταφέρεται σε έναν αποθηκευτικό χώρο (B) με σταθερό ρυθμό p μονάδων του υλικού ανά μονάδα χρόνου, και μία μονάδα παραγωγής (P) η οποία τραβάει το ακατέργαστο υλικό από τον αποθηκευτικό χώρο με σταθερό ρυθμό ίσο με d μονάδες του υλικού ανά μονάδα χρόνου. Το σύστημα παραγωγής που περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.1: *Το σύστημα παραγωγής*

Θεωρούμε ότι η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι σταθερή και ίση με K μονάδες του ακατέργαστου υλικού. Οι αριθμοί d, p και K είναι ακέραιοι.

Καθώς ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι άδειος και η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής τραβά το ακατέργαστο υλικό από τον αποθηκευτικό χώρο με σταθερό ρυθμό d μονάδων, όπου $d < p$, του υλικού ανά μονάδα χρόνου. Στην περίπτωση κατά την οποία ο αποθηκευτικός χώρος είναι άδειος και η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής ελαττώνει το ρυθμό έλξης από d σε p.

Η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτουμε ότι ο μηχανισμός επιθεωρείται σε ίσες διακριτές χρονικές περιόδους, $\tau = 0, 1, \ldots$ και ταξινομείται σε μία από τις $m + 2$ καταστάσεις $0, 1, \ldots, m + 1$, οι οποίες περιγράφουν το βαθμό επιδείνωσής του. Ο βαθμός επιδείνωσης 0 σημαίνει ότι η λειτουργία του μηχανισμού είναι άριστη (ή λειτουργεί σαν καινούρια), ενώ στο βαθμό επιδείνωσης $m + 1$ σημαίνει ότι ο μηχανισμός δεν λειτουργεί και γι' αυτό δε μπορεί να τραβήξει το ακατέργαστο υλικό από τον αποθηκευτικό χώρο. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $1, \ldots, m$ είναι λειτουργικές.

Αν τη χρονική στιγμή τ ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού είναι $i < m + 1$ και το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου είναι $x > 0$ μονάδες του ακατέργαστου υλικού, τότε την επόμενη χρονική στιγμή $\tau + 1$ ο αποθηκευτικός χώρος θα είναι ίσος με $\max(x + p - d, 0)$. Αυτή η μείωση του περιεχομένου του αποθηκευτικού χώρου θα συμβεί ακόμη και όταν ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ είναι ίσος με $m + 1$. Εάν σε μία χρονική στιγμή τ ο βαθμός επιδείνωσης είναι $i < m + 1$ και ο αποθηκευτικός χώρος είναι άδειος, τότε θα παραμείνει άδειος και τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ δεδομένου ότι η μονάδα παραγωγής τραβά το ακατέργαστο υλικό από τον αποθηκευτικό χώρο με ρυθμό p μονάδων ανά μονάδα χρόνου.

Υποθέτουμε ότι, αν σε μια χρονική στιγμή τ ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού είναι i και η περιεκτικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι x τότε, τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού θα είναι j με πιθανότητα p_{ij}, εάν $x > 0$, ή με πιθανότητα $\tilde{p}_{ij}$, εάν $x = 0$. Υποθέτουμε ότι $p_{ij} \leq \tilde{p}_{ij}, j < i$, και $\tilde{p}_{ij} \leq p_{ij}, j > i$, δεδομένου ότι όταν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι άδειος, η μονάδα παραγωγής λειτουργεί με μεγαλύτερη έλξη, προκαλώντας ενδεχομένως μεγαλύτερη φθορά. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να γίνει τελικά ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού ίσος με $m + 1$ από οποιοδήποτε αρχικό βαθμό επιδείνωσης i είναι μη μηδενική.

Αν σε κάποια χρονική στιγμή επιθεώρησης διαπιστωθεί ότι ο μηχανισμός βρίσκεται στην κατάσταση $m + 1$, τότε πρέπει να αρχίσει αμέσως διορθωτική συντήρηση. Ο χρόνος διορθωτικής συντήρησης είναι τυχαίος και υποθέτουμε ότι ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας b, δηλαδή η πιθανότητα μία διορθωτική συντήρηση να διαρκέσει $t \geq 1$ χρονικές μονάδες είναι ίση με $(1 - b)^{t-1}b$. Αν σε κάποια χρονική στιγμή επιθεώρησης διαπιστωθεί ότι ο μηχανισμός βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση $i, i \leq m$, μπορεί να ξεκινήσει μία προληπτική συντήρηση. Ο χρόνος της προληπτικής συντήρησης είναι επίσης τυχαίος και ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας a, δηλαδή η πιθανότητα μία προληπτική συντήρηση να διαρκέσει $t \geq 1$ χρονικές μονάδες είναι ίση με $(1 - a)^{t-1}a$. Τόσο η διορθωτική συντήρηση όσο και η προληπτική συντήρηση του μηχανισμού δεν είναι δυνατόν να διακοπούν και να επαναφέρουν το μηχανισμό στην αρχική κατάσταση 0.

Κατά τη διάρκεια της διορθωτικής συντήρησης ή της προληπτικής συντήρησης του μηχανισμού, ο αποθηκευτικός χώρος εφοδιάζεται με το ακατέργαστο υλικό με σταθερό ρυθμό p μέχρι να γεμίσει, ενώ η διαδικασία της παραγωγής διακόπτεται.

Υποθέτουμε ότι κατά τη διάρκεια μίας διορθωτικής ή προληπτικής συντήρησης της μονάδας παραγωγής υπάρχει ένα κόστος για κάθε μονάδα χρόνου που οφείλεται στην απώλεια παραγωγής και είναι ίσο με $C > 0$. Στην περίπτωση, που ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι κενός και η μονάδα παραγωγής δέχεται το ακατέργαστο υλικό του αποθηκευτικού χώρου με σταθερό ρυθμό ίσο με d μονάδες, δεν επιβαρύνουμε το κόστος λόγω χαμένης παραγωγής. Ωστόσο, όταν ο αποθηκευτικός χώρος αδειάσει, η μονάδα παραγωγής δέχεται το ακατέργαστο υλικό του αποθηκευτικού χώρου με σταθερό ρυθμό ίσο με p μονάδες ($p < d$). Στην περίπτωση αυτή η έλλειψη του ακατέργαστου υλικού θα επιφέρει ένα κόστος που οφείλεται στην απώλεια παραγωγής και είναι ίσο με $[(d-p)\cdot C]/d$. Στην περίπτωση που ο αποθηκευτικός χώρος κατά τη διάρκεια διορθωτικής ή προληπτικής συντήρησης είναι πλήρης, κάθε μονάδα του ακατέργαστου υλικού επιβάλλεται σε ποινή ίση με $P > 0$. Αυτό οφείλεται στην μεταφορά και στην αποθήκευση του ακατέργαστου υλικού σε κάποιον άλλο αποθηκευτικό χώρο, μέχρι να ολοκληρωθεί η διαδικασία της συντήρησης.

Αν σε κάποια χρονική στιγμή επιθεώρησης ο μηχανισμός βρίσκεται στην κατάσταση $i, 0 \leq i \leq m$, και δεν επεμβαίνουμε στη λειτουργία του, υπάρχει ένα λειτουργικό κόστος μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή επιθεώρησης το οποίο είναι ίσο με c_i, εάν ο αποθηκευτικός χώρος είναι πλήρης, ή $\tilde{c}_i$, εάν είναι κενός. Όταν εκτελείται προληπτική ή διορθωτική συντήρηση, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα κόστος ίσο με c_p ή με c_f, αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένα κόστος ίσο με $h > 0$ για κάθε μονάδα χρόνου κατά την οποία μία μονάδα του ακατέργαστου υλικού είναι αποθηκευμένη στον αποθηκευτικό χώρο.

Έστω PM η κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο μηχανισμός όταν θέτουμε σε λειτουργία μία προληπτική συντήρησή του. Τότε ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι το σύνολο:

$$S = \{0, \dots, m+1, PM\} \times \{0, \dots, K\},$$

όπου $(i, x) \in S$ αναπαριστά την κατάσταση στην οποία i είναι ο βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού και x το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου.

Μία πολιτική είναι ένας κανόνας με τον οποίο επιλέγονται οι ενέργειες κατά τις χρονικές στιγμές επιθεώρησης του μηχανισμού $\tau = 0, 1, \dots$.
Υπάρχουν τρείς ενέργειες:

- Ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε στη λειτουργία του μηχανισμού)
- Ενέργεια 1 (θέτουμε σε λειτουργία μία προληπτική συντήρηση)
- Ενέργεια 2 (θέτουμε σε λειτουργία μία διορθωτική συντήρηση του μηχανισμού)

Στις καταστάσεις $(m+1, x), 0 \leq x \leq K$, η ενέργεια 2 είναι υποχρεωτική. Στις καταστάσεις $(PM, x), 0 \leq x \leq K$, η μόνη δυνατή ενέργεια είναι η ενέργεια 1. Στις καταστάσεις $(i, x), 0 \leq i \leq m, 0 \leq x \leq K$, είναι δυνατές οι ενέργειες 0 και 1.

Ορισμός: Μία πολιτική καλείται **στάσιμη** (stationary) αν σε κάθε χρονική στιγμή απόφασης επιλέγει μία ενέργεια που εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος.

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων S και αναζητούμε τη στάσιμη πολιτική η οποία, για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση του συστήματος, ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες πιθανές συνθήκες για τη δομή του κόστους και τις πιθανότητες μετάβασης:

Συνθήκη 1: Οι ακολουθίες $\{c_i\}$ και $\{\tilde{c}_i\}, 0 \leq i \leq m$, δεν μειώνονται αναφορικά με το i. Δηλαδή, όσο αυξάνεται ο βαθμός επιδείνωσης της μονάδας παραγωγής, τόσο αυξάνεται και το κόστος λειτουργίας του.

Συνθήκη 2: $\tilde{c}_i \leq c_i, 0 \leq i \leq m.$ Δηλαδή, η μείωση της έλξης της μονάδας παραγωγής από d σε p, όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι άδειος, επιφέρει μείωση του λειτουργικού κόστους.

Συνθήκη 3: $0 < b < a \leq 1.$ Δηλαδή, ο αναμενόμενος χρόνος για μία προληπτική συντήρηση είναι μικρότερος από τον αναμενόμενο χρόνο για μία διορθωτική συντήρηση.

Συνθήκη 4: $c_p \leq c_f$. Δηλαδή, το ποσοστό κόστους μιας προληπτικής συντήρησης δεν υπερβαίνει το ποσοστό κόστους μιας διορθωτικής συντήρησης.

Συνθήκη 5: Για κάθε $k = 0, 1, \dots, m+1$, οι ποσότητες

$$\sum_{j=k}^{m+1} p_{ij} \quad \text{και} \quad \sum_{j=k}^{m+1} \tilde{p}_{ij}$$

είναι αύξουσες ως προς $i, 0 \leq i \leq m.$

Μία συνέπεια αυτής της κατάστασης είναι ότι $I_i \leq_{st} I_{i+1}, 0 \leq i \leq m$, όπου I_i είναι μία τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την επόμενη λειτουργία της μονάδας παραγωγής εάν η τρέχουσα λειτουργία της είναι η i και το σύμβολο «$\leq_{st}$» σημαίνει «στοχαστικά μικρότερο ή ίσο». Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την Συνθήκη 6.

Συνθήκη 6: Για κάθε αύξουσα συνάρτηση $h(j), 0 \leq j \leq m+1$, οι ποσότητες

$$\sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} h(j) \quad \text{και} \quad \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} h(j)$$

είναι αύξουσες ως προς $i, 0 \leq i \leq m$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η βέλτιστη πολιτική έχει μία συγκεκριμένη δομή.

2.3 Η μορφή της βέλτιστης πολιτικής

Έστω a $(0 < a < 1)$ ο αποπληθωριστικός παράγοντας. Το ελάχιστο αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος $V_n^a(i,x)$, όπου (i,x) είναι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας, μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_n^a(i,x) = min\left\{c_i + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} + a\sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+), V_n^a(PM,x)\right\},$$

$$0 \leq i \leq m, \qquad 0 < x \leq K, \tag{2.1}$$

$$V_n^a(i,0) = \min\left\{\tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d} + a\sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} V_{n-1}^a(j,0), V_n^a(PM,0)\right\}, 0 \leq i \leq m, \tag{2.2}$$

$$V_n^a(m+1,x) = c_f + hx + C + P(x+p-K)^+ + abV_{n-1}^a(0, \min(x+p,K)) + a(1-b)V_{n-1}^a(m+1, \min(x+p,K)), \qquad 0 \leq x \leq K,$$

$$V_n^a(PM,x) = c_p + hx + C + P(x+p-K)^+ + aaV_{n-1}^a(0, \min(x+p,K)) + a(1-a)V_{n-1}^a(PM, \min(x+p,K)), \qquad 0 \leq x \leq K,$$

με αρχική συνθήκη $V_0^a(s) = 0,\ s \in S$.

Σημειώνουμε ότι $(x+p-d)^+ = max\,(x+p-d, 0)$ δηλώνει το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου μετά από μία περίοδο λειτουργίας της μονάδας παραγωγής, εάν το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου στην αρχή της περιόδου είναι ίσο με το x, και,

$(x+p-K)^+ = max\ (x+p-K, 0)$ είναι η ποσότητα του ακατέργαστου υλικού που δεν αποθηκεύεται στον αποθηκευτικό χώρο μετά από μία συντήρηση της μονάδας παραγωγής, εάν το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου στην αρχή της περιόδου είναι ίσο με το x. Ο πρώτος όρος ανάμεσα στα άγκιστρα των εξισώσεων (2.1) και (2.2) αντιστοιχεί στην ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε στη λειτουργία του μηχανισμού) και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια 1 (θέτουμε σε λειτουργία μία προληπτική συντήρηση).
Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.1: Για κάθε $n = 0,1,\ldots$ το ελάχιστο αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος όταν απομένουν n βήματα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $V_n^a(i,x) \leq V_n^a(i+1,x),\ 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq x \leq K$

ii. $V_n^a(PM,x) \leq V_n^a(m+1,x),\ 0 \leq x \leq K$

Απόδειξη:

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n. Το λήμμα ισχύει για $n = 0$, δεδομένου ότι το $V_0^a(i,x) = 0$ για όλα τα $(i,x) \in S$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1\ (\geq 0)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το n. Αρχικά θα αποδείξουμε το ii και στη συνέχεια το i.

ii. Έστω $D = V_{n-1}^a(m+1, \min(x+p,K)) - V_{n-1}^a(0, \min(x+p,K))$.
Χρησιμοποιώντας την ποσότητα αυτή για $V_n^a(PM,x)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
V_n^a(PM,x) &= c_p + hx + C + P(x+p-K)^+ + aaV_{n-1}^a(0, \min(x+p,K)) \\
&\qquad + a(1-a)V_{n-1}^a(PM, \min(x+p,K)) \\
&\leq c_f + hx + C + P(x+p-K)^+ + aaV_{n-1}^a(0, \min(x+p,K)) \\
&\qquad + a(1-a)V_{n-1}^a(m+1, \min(x+p,K)) \\
&= c_f + hx + C + P(x+p-K)^+ + aV_{n-1}^a(m+1, \min(x+p,K)) - aaD \\
&\leq c_f + hx + C + P(x+p-K)^+ + aV_{n-1}^a(m+1, \min(x+p,K)) - abD \\
&= V_n(m+1,x).
\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την Συνθήκη 4 και την επαγωγική υπόθεση της ii. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 3 και την ανισότητα $D \geq 0$ η οποία είναι συνέπεια της επαγωγικής υπόθεσης για το i και το ii.

i. Πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$V_n^a(i,x) \le V_n^a(i+1,x), \qquad 0 \le i \le m-1, \qquad 0 \le x \le K \qquad (2.3)$$

και

$$V_n^a(m,x) \le V_n^a(m+1,x), \qquad 0 \le x \le K \qquad (2.4)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η ανισότητα (2.4) ισχύει για $0 < x \le K$, χρησιμοποιώντας το ii παραπάνω:

$$V_n^a(m,x) = min\left\{c_m + hx + a\sum_{j=0}^{m+1} p_{mj}V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+), V_n^a(PM,x)\right\}$$
$$\le V_n^a(PM,x) \le V_n^a(m+1,x).$$

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει με παρόμοιο τρόπο για $x = 0$. Για $0 < x \le K$ και $0 \le i \le m-1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} V_n^a(i,x) = min&\left\{c_i + hx + \frac{[d-\min(d,x+p)]C}{d}\right. \\ &\left. + a\sum_{j=0}^{m+1} p_{ij}V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+), V_n^a(PM,x)\right\} \\ \le min&\left\{c_{i+1} + hx + \frac{[d-\min(d,x+p)]C}{d}\right. \\ &\left. + a\sum_{j=0}^{m+1} p_{i+1j}V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+), V_n^a(PM,x)\right\} \\ &= V_n^a(i+1,x). \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 1 και από την ανισότητα:

$$\sum_{j=0}^{m+1} p_{ij}V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+) \le \sum_{j=0}^{m+1} p_{i+1j}V_{n-1}^a(j,(x+p-d)^+),$$

η οποία είναι συνέπεια της επαγωγικής υπόθεσης του i και της Συνθήκης 6. Επομένως, η ανισότητα (2.3) έχει αποδειχθεί για $0 < x \le K$. Για $x = 0$, η ανισότητα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλέον πλήρης. ■

Εφόσον ο χώρος καταστάσεων S του συστήματος είναι πεπερασμένος και η κατάσταση $(0, K)$ είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση κάτω από οποιαδήποτε σταθερή πολιτική, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί $v(s),\ s \in S$ και ένα σταθερό g τέτοιο ώστε οι εξισώσεις του ακόλουθου βέλτιστου μέσου κόστους να διατηρούνται:

$$v(i,x) = min\left\{c_i + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} - g \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} v(j, (x+p-d)^+), v(PM, x)\right\},$$
$$0 \le i \le m, \qquad 0 < x \le K, \tag{2.5}$$

$$v(i,0) = min\left\{\tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d} - g + \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} v(j,0), v(PM,0)\right\}, 0 \le i \le m, \tag{2.6}$$

$$v(m+1, x) = c_f + hx + C + P(x+p-K)^+ - g + bv(0, \min(x+p, K))$$
$$+ (1-b)v(m+1, \min(x+p, K)), \qquad 0 \le x \le K,$$

$$v(PM, x) = c_p + hx + C + P(x+p-K)^+ - g + av(0, \min(x+p, K))$$
$$+ (1-a)v(PM, \min(x+p, K)), \qquad 0 \le x \le K,$$

Ο πρώτος όρος στα άγκιστρα στις παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχεί στην ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε στη λειτουργία του μηχανισμού) και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια 1 (θέτουμε σε λειτουργία μία προληπτική συντήρηση). Υπάρχει μια βέλτιστη στάσιμη πολιτική με την ακόλουθη ιδιότητα: Εάν για κάποια κατάσταση (i, x) του συστήματος ο πρώτος όρος είναι μικρότερος από τον δεύτερο όρο, τότε η ενέργεια που επιλέγεται από τη βέλτιστη πολιτική σε αυτή την κατάσταση είναι η ενέργεια 0. Εάν ο πρώτος όρος είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο όρο, τότε η ενέργεια που επιλέγεται από τη βέλτιστη πολιτική είναι η ενέργεια 1. Εάν οι όροι είναι ίσοι, τότε και οι δύο ενέργειες είναι βέλτιστες.

Η παρακάτω πρόταση παρέχει ένα χαρακτηρισμό της μορφής της βέλτιστης πολιτικής.

Πρόταση 2.1: Για κάθε σταθερό περιεχόμενο $x, 0 \leq x \leq K$, του αποθηκευτικού χώρου, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή $i^*(= i^*(x)) \in \{0, \ldots, m+1\}$ του βαθμού επιδείνωσης του μηχανισμού έτσι ώστε η βέλτιστη πολιτική να θέτει σε λειτουργία μία προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής εάν και μόνο εάν ο βαθμός επιδείνωσης i του μηχανισμού είναι μεγαλύτερος ή ίσος με την κρίσιμη τιμή i^*.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι η βέλτιστη πολιτική επιλέγει την ενέργεια 1 στην κατάσταση $(i, x), 0 < x \leq K$. Τότε ισχύει ότι:

$$v(PM, x) \leq c_i + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} - g + \sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} v(j, (x+p-d)^+) \qquad (2.7)$$

Για να δείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική επιλέγει την ενέργεια 1 στην κατάσταση $(i+1, x)$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$v(PM, x) \leq c_{i+1} + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} - g + \sum_{j=0}^{m+1} p_{i+1j} v(j, (x+p-d)^+) \qquad (2.8)$$

Από τις Συνθήκες 1, 6 και το Λήμμα 2.1 προκύπτει ότι το δεξιό μέλος της (2.8) είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το δεξιό μέλος της (2.7). Επομένως, η ανισότητα (2.7) συνεπάγεται την (2.8). Το ίδιο αποτέλεσμα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όταν $x = 0$. ■

Παρατήρηση: Στην παραπάνω πρόταση, αν για μία συγκεκριμένη περιεκτικότητα $x, 0 \leq x \leq K$, του αποθηκευτικού χώρου, η κρίσιμη τιμή $i^*(x)$ της μονάδας παραγωγής είναι ίση με $m+1$, τότε η βέλτιστη πολιτική δεν εκκινεί ποτέ προληπτική συντήρηση όταν ο αποθηκευτικός χώρος περιέχει x μονάδες του ακατέργαστου υλικού.

2.4 Ένας αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών ειδικού σκοπού

Έστω $p_{s\ell}(a)$ η πιθανότητα ότι η επόμενη κατάσταση του συστήματος θα είναι $\ell \in S$, δεδομένου ότι η παρούσα κατάσταση είναι $s \in S$ και επιλέγεται η ενέργεια $a \in \{0,1,2\}$. Έστω επίσης το $C(s, a)$ να είναι το αναμενόμενο κόστος μέχρι την επόμενη χρονική περίοδο εάν η παρούσα κατάσταση είναι $s \in S$ και η ενέργεια $a \in \{0,1,2\}$ είναι επιλεγμένη. Αυτές οι ποσότητες δίνονται παρακάτω:

$$p_{(i,x)(j,(x+p-d)^+)}(0) = p_{ij},\ \ 0 \le i < m+1,\ \ 0 \le j \le m+1,\ \ 0 \le x \le K,$$
$$p_{(i,x)(0,\min(x+p,K))}(1) = p_{(PM,x)(0,\min(x+p,K))}(1) = a,\ \ 0 \le i < m+1,\ \ 0 \le x \le K,$$
$$p_{(i,x)(PM,\min(x+p,K))}(1) = p_{(PM,x)(PM,\min(x+p,K))}(1) = 1-a,\ \ 0 \le i < m+1,\ \ 0 \le x \le K,$$
$$p_{(m+1,x)(0,\min(x+p,K))}(2) = b,\ \ 0 \le x \le K,$$
$$p_{(m+1,x)(m+1,\min(x+p,K))}(2) = 1-b,\ \ 0 \le x \le K,$$

$$C\big((i,x),0\big) = c_i + hx + \frac{[d-\min(d,x+p)]C}{d},\ \ 0 \le i < m+1,\ \ 0 < x \le K,$$
$$C\big((i,0),0\big) = \tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d},\ \ 0 \le i < m+1,$$
$$C\big((i,x),1\big) = C\big((PM,x),1\big) = c_p + hx + C + P(x+p-K)^+,\ \ 0 \le i < m+1,\ \ 0 \le x \le K,$$
$$C\big((m+1,x),2\big) = c_f + hx + C + P(x+p-K)^+,\ \ 0 \le x \le K.$$

Είναι δυνατό να αναπτυχθεί για το πρόβλημά μας ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών ειδικής χρήσης που δημιουργεί μία ακολουθία βελτιωμένων πολιτικών ορίων ελέγχου (δηλαδή, πολιτικές που για κάθε επίπεδο του αποθηκευτικού χώρου $x \in \{0,\ldots,K\}$, ξεκινούν την προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής εάν και μόνο εάν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι μεγαλύτερη ή ίση με κάποιο κρίσιμο επίπεδο $i(x)$). Ο σχεδιασμός του αλγορίθμου βασίζεται στην τεχνική ενσωμάτωσης η οποία μειώνει το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων για το μέσο αναμενόμενο κόστος και τις σχετικές τιμές μιας συγκεκριμένης μονότονης πολιτικής σε ένα πολύ μικρότερο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, σε ένα ενσωματωμένο σύνολο καταστάσεων. Η περιγραφή του αλγορίθμου έχει ως εξής:

Εξετάζουμε μία συγκεκριμένη μονότονη πολιτική R που χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $(i,x), 0 \le x \le K$. Ορίζουμε το σύνολο των καταστάσεων $E \subset S$ ως εξής:

$$E = \bigcup_{x=0}^{K} \{(i,x): 0 \le i \le \max(i(x)-1,0)\}.$$

Το σύνολο των καταστάσεων E μπορεί να επιτευχθεί από κάθε αρχική κατάσταση $s \in S$, εάν χρησιμοποιείται η πολιτική R. Η τεχνική ενσωμάτωσης μπορεί να εφαρμοστεί αν πάρουμε το σύνολο E ως το ενσωματωμένο σύνολο καταστάσεων. Έστω ότι το $g(R)$ είναι το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου στο πλαίσιο της πολιτικής R και έστω τα

T_S^E, C_S^E να είναι ο αναμενόμενος χρόνος και το κόστος, αντίστοιχα, μέχρι την πρώτη είσοδο στο σύνολο E, όταν η αρχική κατάσταση του συστήματος παραγωγής είναι s. Έστω επίσης $p_{s\ell}^E$ να είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη κατάσταση εισόδου στο σύνολο E ισούται με ℓ, δεδομένου ότι η πολιτική R χρησιμοποιείται και η αρχική κατάσταση του συστήματος παραγωγής είναι s. Υποθέτουμε ότι για την αρχική κατάσταση $s \in S$ η πρώτη κατάσταση εισόδου στο σύνολο E είναι η κατάσταση στην επόμενη επιστροφή στο σύνολο E. Οι σχετικές τιμές $w(s), s \in S$, που σχετίζονται με την πολιτική R ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$w(s) = C_S^E - g(R)T_S^E + \sum_{\ell \in E} p_{s\ell}^E w(\ell), \quad s \in S, \tag{2.9}$$

$$w(0, K) = 0. \tag{2.10}$$

Οι ποσότητες T_S^E, C_S^E και $p_{s\ell}^E$ μπορούν να υπολογιστούν λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβάσεις του συστήματος παραγωγής στο πλαίσιο της πολιτικής R.

$$T_{(i,x)}^E = 1 + \left(\sum_{j=\max(i(y),1)}^{m} p_{ij} \right) a^{-1} + b^{-1} p_{i,m+1}\,, \quad 0 \le i < i(x), \quad 0 < x \le K,$$

όπου $y = (x + p - d)^+$.

$$\begin{aligned} C_{(i,x)}^E = {} & \frac{c_p + C}{a} + (1-a)^\rho \left(\rho p + x - K + \frac{p}{a} \right) p + \frac{ha}{2} \sum_{t=1}^{\rho} (2x + pt)(t+1)(1-a)^{t-1} \\ & + \frac{h(1-a)^\rho [ap\rho(\rho+1) + 2xa(j+1) + 2K]}{2a}\,, \\ & i(x) \le i \le m, \quad 0 \le x \le K, \end{aligned}$$

όπου ρ είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{K-x}{p}$.

$$p_{(i,x)(0,K)}^E = p_{ij}, \quad 0 \le i < i(0), \quad 0 \le j < i(0),$$

Αν $\frac{K-x}{p}$ δεν είναι ακέραιος τότε:

$$p^E_{(i,x)(0,K)} = (1-b)^{\rho-1} p_{i,m+1} + (1-a)^{\rho-1} \sum_{j=\max(i(y),1)}^{m} p_{ij} \;, \;\; 0 \le i < i(x), \;\; 0 < x \le K,$$

όπου $y = (x + p - d)^+$.

Μόλις λυθεί αυτό το σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε σχετική τιμή $w(s)$, $s \in S - E$, από την (2.9) με έναν υπολογισμό ενός βήματος.
Αν για κάποιο περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x, 0 \le x \le K$, υπάρχει ένας ακέραιος $\tilde{i}(x) \in \{0, \dots, i\,(x) - 1\}$ τέτοιος ώστε

$$C\big((i,x),1\big) - g(R) + \sum_{\ell \in S} p_{(i,x),\ell}(1)\, w(\ell) < w(i,x), \;\; i(x) \le i < \tilde{\imath}(x), \qquad (2.11)$$

τότε το μέσο κόστος της μονότονης πολιτικής που χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $i(0), \dots, i(x-1), \tilde{i}(x)\,, i(x+1), \dots, i(K)$ είναι αυστηρά μικρότερο από το $g(R)$.
Όμοια, αν για κάποιο περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x, 0 \le x \le K$, υπάρχει ένας ακέραιος $\tilde{i}(x) \in \{\, i\,(x) + 1, \dots, m+1\}$ τέτοιος ώστε

$$C\big((i,x),0\big) - g(R) + \sum_{\ell \in S} p_{(i,x),\ell}(0)\, w(\ell) < w(i,x), \;\; i(x) \le i < \tilde{\imath}(x), \qquad (2.12)$$

τότε το μέσο κόστος της μονότονης πολιτικής που χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $i(0), \dots, i(x-1), \tilde{i}(x)\,, i(x+1), \dots, i(K)$ είναι αυστηρά μικρότερο από το $g(R)$.
Ο παρακάτω αλγόριθμος δημιουργεί μία ακολουθία αυστηρά βελτιωμένων μονότονων πολιτικών.

Ο αλγόριθμος

Βήμα 1 (Αρχικοποίηση): Επιλέξτε μια αρχική μονότονη πολιτική R που χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $i(x), 0 \le x \le K$.

Βήμα 2 (Εύρεση σχετικών τιμών και μέσου κόστους): Για την τρέχουσα μονότονη πολιτική της πολιτικής R υπολογίζουμε το μέσο κόστος $g(R)$ και τις σχετικές σχετικές τιμές $w(s), s \in E$, λύνοντας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (2.9), (2.10).

Βήμα 3 (Βελτίωσης της πολιτικής): Για κάθε περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου x,
$0 \le x \le K$, βρίσκουμε, αν υπάρχει

i. τον μικρότερο ακέραιο αριθμό $\tilde{i}(x) \in \{0, \ldots, i(x) - 1\}$ τέτοιο ώστε η (2.11) να ισχύει για όλα τα $i \in \{\tilde{i}(x) \ldots, i(x) - 1\}$. Διαφορετικά,

ii. τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό $\tilde{i}(x) \in \{i(x) + 1, \ldots, m + 1\}$ έτσι ώστε να ισχύει η (2.12) για όλα τα $i \in \{i(x) \ldots, \tilde{i}(x) - 1\}$.

Οι ποσότητες $w(s), s \in S - E$, στις (2.11) και (2.12) μπορούν να υπολογιστούν από την (2.9). Αντικαθιστούμε το $i(x)$ με το $\tilde{i}(x)$ για τα $x, 0 \leq x \leq K$, για τα οποία μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο αριθμό $\tilde{i}(x)$ και να μεταβούμε στο Βήμα 2.

Βήμα 4 (Έλεγχος σύγκλισης): Εάν δεν είναι δυνατό να βρεθεί στο βήμα 3 κανένα $\tilde{i}(x)$, $0 \leq x \leq K$, ο αλγόριθμος διακόπτεται. Η τελική πολιτική είναι η R με μέσο κόστος το $g(R)$.

Ο αλγόριθμος δημιουργεί μία ακολουθία αυστηρά βελτιωμένων μονότονων πολιτικών και σταματά μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, αφού το σύνολο των μονότονων πολιτικών είναι πεπερασμένο. Όταν η τρέχουσα μονότονη πολιτική χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $i(x), 0 \leq x \leq K$, ο αριθμός των αγνώστων στο βήμα προσδιορισμού της τιμής του αλγορίθμου είναι ίσος με $\sum_{x=0}^{K} i(x)$.

2.5 Αναγεννητικές διαδικασίες με κόστη

Ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση μοντέλων και την απόδειξη θεωρητικών αποτελεσμάτων στις εφαρμοσμένες πιθανότητες είναι οι *αναγεννητικές διαδικασίες με κόστη* (ή αμοιβές). Το αναγεννητικό μοντέλο με κόστη είναι ένα απλό διαισθητικό μοντέλο στο οποίο σε μία αναγεννητική διαδικασία αντιστοιχούν κόστη.

Συμβολίζουμε με $S_1, S_2, \ldots$ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η στοχαστική διαδικασία $\{X(T), t \in T\}$ αναγεννάται. Η ύπαρξη του S_1 συνεπάγεται και την ύπαρξη των επόμενων χρονικών στιγμών $S_2, S_3, \ldots$ που αναγεννάται η διαδικασία. Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η αναγεννητική διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε ανεξάρτητους και ισόνομους αναγεννητικούς κύκλους. Ένας *κύκλος* είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε διαδοχικές χρονικές στιγμές που αναγεννάται η διαδικασία. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $T_n = S_n - S_{n-1}, n = 1, 2, \ldots$ όπου από σύμβαση έχουμε ότι $S_0 = 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Γι' αυτό το λόγο το T_n μπορεί να οριστεί ως το μήκος του n −οστού αναγεννητικού κύκλου, $n = 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε και τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές C_n ως το συνολικό κόστος κατά τη διάρκεια του n −οστού αναγεννητικού

κύκλου, $n = 1, 2, \ldots$. Συνήθως το C_n εξαρτάται από το T_n. Τέλος, ορίζουμε το $C(t)$ ως το συνολικό κόστος μέχρι τη χρονική στιγμή t.
Η διαδικασία $\{C(t), t \geq 0\}$ καλείται *αναγεννητική διαδικασία κόστους*.

Θεώρημα 2.1. (Renewal-Reward Theorem)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(C_1)}{\mathbb{E}(T_1)} \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

Δηλαδή, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος είναι ίσο με πιθανότητα 1 με το αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου προς το αναμενόμενο μήκος ενός κύκλου.

2.6 Η βέλτιστη πολιτική όταν επιτρέπονται περίοδοι αδράνειας μετά από επισκευή

Τροποποιούμε το πρόβλημα που παρουσιάσαμε παραπάνω, υποθέτοντας ότι εάν η περιεκτικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι μικρότερη από K μονάδες όταν ολοκληρωθεί μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση, η μονάδα παραγωγής δεν ξαναρχίζει τη λειτουργία της αμέσως αλλά παραμένει αδρανής έως ότου ο αποθηκευτικός χώρος γεμίσει. Μόλις γεμίσει, η μονάδα παραγωγής ξαναρχίζει τη λειτουργία της κανονικά τραβώντας d μονάδες της πρώτης ύλης από τον αποθηκευτικό χώρο για κάθε μονάδα χρόνου. Ο χώρος καταστάσεων του συστήματος γίνεται τώρα:

$$\hat{S} = S \cup \{(ID, x) : p \leq x \leq K - 1\},$$

όπου (ID, x), $p \leq x \leq K - 1$, είναι η κατάσταση του συστήματος στην οποία ο αποθηκευτικός χώρος περιέχει x μονάδες της πρώτης ύλης όταν ολοκληρωθεί μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής. Η μόνη πιθανή ενέργεια στις καταστάσεις (ID, x), $p \leq x \leq K - 1$, είναι η ενέργεια 0 (δεν γίνεται τίποτα).

Για αυτό το τροποποιημένο μοντέλο, είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε περισσότερα αναλυτικά αποτελέσματα από αυτά που αποκτήσαμε στο αρχικό μοντέλο. Όπως θα δούμε, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους, για σταθερό περιεχόμενο $x \in \{0, \ldots, K\}$, του αποθηκευτικού χώρου είναι μονότονη. Επιπλέον, η διαδικασία υπό τον έλεγχο μίας μονότονης πολιτικής είναι αναγεννητική αφού οι διαδοχικές είσοδοι στην κατάσταση $(0, K)$ μπορούν να θεωρηθούν ως αναγεννητικές στιγμές μεταξύ διαδοχικών κύκλων. Ο αναμενόμενος χρόνος και το αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου βάσει μιας μονότονης πολιτικής μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς επειδή είναι ίσος με το αναμενόμενο κόστος του κύκλου διαιρούμενο με τον αναμενόμενο χρόνο ενός κύκλου. Η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους είναι η μονότονη πολιτική που επιτυγχάνει το ελάχιστο μέσο κόστος μεταξύ όλων των μονότονων πολιτικών. Όπως θα δούμε, μπορούμε να βρούμε παραδείγματα στα οποία η βέλτιστη πολιτική στο τροποποιημένο μοντέλο επιτυγχάνει μικρότερο μέσο κόστος από τη βέλτιστη πολιτική στην αρχική πολιτική. Αυτό συμβαίνει συνήθως εάν: (α) το κόστος λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι σχετικά υψηλό, (β) το κόστος που οφείλεται στην απώλεια παραγωγής κατά τη διάρκεια μιας προληπτικής συντήρησης είναι σχετικά χαμηλό, (γ) το κόστος εκμετάλλευσης είναι σχετικά χαμηλό και (δ) ο ρυθμός έλξης d είναι πολύ μεγαλύτερος από το ρυθμό αναπλήρωσης p, αφού σε αυτή την περίπτωση μόλις η διαδικασία φτάσει στην κατάσταση $(0, K)$, η μονάδα παραγωγής λειτουργεί με πολύ υψηλή ταχύτητα και το περιεχόμενο του χώρου αποθήκευσης μειώνεται ταχέως.

Το ελάχιστο αναμενόμενο μειωμένο κόστος στο n −οστό βήμα $V_n^a(s), s \in \hat{S}$, εάν s είναι η αρχική κατάσταση, μπορεί να βρεθεί για όλα τα $n = 1,2, \dots$, αναδρομικά, από τις εξισώσεις (2.1) και (2.2) και τα ακόλουθα:

$$V_n^a(m+1,x) = c_f + hx + C + abV_{n-1}^a(ID, x+p) + a(1-b)V_{n-1}^a(m+1, x+p),$$
$$0 \le x < K - p,$$

$$V_n^a(m+1,x) = c_f + hx + C + P(x+p-K) + abV_{n-1}^a(0,K) + a(1-b)V_{n-1}^a(m+1, K),$$
$$K - p \le x \le K,$$
$$V_n^a(PM,x) = c_p + hx + C + aaV_{n-1}^a(ID, x+p) + a(1-a)V_{n-1}^a(PM, x+p),$$
$$0 \le x < K - p,$$

$$V_n^a(PM,x) = c_p + hx + C + P(x+p-K) + aaV_{n-1}^a(0,K) + a(1-a)V_{n-1}^a(PM, K),$$
$$K - p \le x \le K,$$

$$V_n^a(ID,x) = hx + C + aV_{n-1}^a(ID, x+p), \qquad p \le x < K - p,$$

$$V_n^a(ID,x) = hx + C + P(x+p-K) + aV_{n-1}^a(0,K), \qquad K - p \le x \le K - 1,$$

με την αρχική συνθήκη $V_0^a(s) = 0, s \in \hat{S}$.

Λήμμα 2.2: Για κάθε $n = 0,1, \dots$

i. $V_n^a(i,x) \le V_n^a(i+1,x),\ 0 \le i \le m,\ 0 \le x \le K$

ii. $V_n^a(PM,x) \le V_n^a(m+1,x),\ 0 \le x \le K$

iii. $V_n^a(ID,x) \le V_n^a(m+1,x),\ p \le x \le K-1.$

Απόδειξη:

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n. Το λήμμα ισχύει για $n=0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1 \ge 0$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n. Αρχικά θα αποδείξουμε το iii και στη συνέχεια το ii και τέλος το i.

iii. Αν $p \le x < K-p$:

$$\begin{aligned} V_n^a(ID,x) &= hx + C + aV_{n-1}^a(ID,x+p) \\ &\le c_f + hx + C + aV_{n-1}^a(ID,x+p) + a(1-b)[V_{n-1}^a(m+1,x+p) - V_{n-1}^a(ID,x+p)] \\ &= V_n^a(m+1,x) \end{aligned}$$

όπου η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από το μέρος iii της υποθετικής επαγωγής.

Αν $K-p \le x < K-1$:

$$\begin{aligned} V_n^a(ID,x) &= hx + C + P(x+p-K) + aV_{n-1}^a(0,K) \\ &\le c_f + hx + C + P(x+p-K) + aV_{n-1}^a(0,K) + a(1-b)[V_{n-1}^a(m+1,K) \\ &\qquad - V_{n-1}^a(0,K)] \\ &= V_n^a(m+1,x) \end{aligned}$$

όπου η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα $V_{n-1}^a(m+1,K) - V_{n-1}^a(0,K) \ge 0$, η οποία είναι συνέπεια του τμήματος i της υποθετικής επαγωγής.

ii. Υποθέστε ότι $0 \le x < K-p$. Έστω $D_1 = V_{n-1}^a(m+1,x+p) - V_{n-1}^a(ID,x+p)$. Χρησιμοποιώντας την έκφραση για το $V_n^a(PM,x)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V_n^a(PM,x) &\le c_p + hx + C + aaV_{n-1}^a(ID,x+p) + a(1-a)V_{n-1}^a(PM,x+p) \\ &\le c_f + hx + C + aaV_{n-1}^a(ID,x+p) + a(1-a)V_{n-1}^a(m+1,x+p) \\ &= c_f + hx + C + aV_{n-1}^a(m+1,x+p) - aaD_1 \\ &\le c_f + hx + C + aV_{n-1}^a(m+1,x+p) - abD_1 \\ &= V_n^a(m+1,x) \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 4 και το μέρος ii της επαγωγικής υπόθεσης. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 3 και την ανισότητα $D_1 \geq 0$, η οποία ισχύει λόγω του μέρους iii της επαγωγικής υπόθεσης.

Υποθέτουμε ότι $K - p \leq x \leq K$.

Έστω $D_2 = V_{n-1}^a(m+1, K) - V_{n-1}^a(0, K)$. Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
V_n^a(PM, x) &= c_p + hx + C + P(x+p-K) + a\alpha V_{n-1}^a(0, K) + a(1-a)V_{n-1}^a(PM, K) \\
&\leq c_f + hx + C + P(x+p-K) + a\alpha V_{n-1}^a(0, K) + a(1-a)V_{n-1}^a(m+1, K) \\
&= c_f + hx + C + P(x+p-K) + a(1-a)V_{n-1}^a(m+1, K) - a\alpha D_2 \\
&\leq c_f + hx + C + P(x+p-K) + aV_{n-1}^a(m+1, K) - abD_2 \\
&= V_n^a(m+1, x)
\end{aligned}
$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 4 και το μέρος ii της επαγωγικής υπόθεσης. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 3 και την ανισότητα $D_2 \geq 0$, η οποία ισχύει λόγω του μέρους i της επαγωγικής υπόθεσης.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι το μέρος i ισχύει για n με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε το μέρος i του Λήμματος 2.1. ■

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2, μπορούμε να δείξουμε ότι για σταθερό περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x, 0 \leq x \leq K$, υπάρχει μία κρίσιμη κατάσταση λειτουργίας $i^* = i^*(x)$ έτσι ώστε η βέλτιστη πολιτική να προδιαγράφει προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής αν και μόνο αν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι μεγαλύτερη ή ίση με το i^*.

Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{s\ell}(a)$, οι αναμενόμενοι χρόνοι μετάβασης $T(s, a)$ και ένα κόστος μετάβασης $C(s, a)$ ενός βήματος, όπου $s, \ell \in \widehat{S}$ και $a \in \{0, 1,2\}$, συμπίπτουν με αυτές που αναφέρθηκαν στην υποενότητα 2.3 εκτός από τις ακόλουθες που περιλαμβάνουν τις καταστάσεις $(ID, x), p \leq x \leq K - 1$:

$p_{(m+1,x)(ID,x+p)}(2) = b, \;\; p \leq x < K - p,$

$p_{(i,x)(ID,x+p)}(1) = a, \;\; i(x) \leq i < m, \;\; p \leq x < K - p,$

$p_{(ID,x)(ID,x+p)}(0) = 1, \;\; p \leq x < K - p,$

$p_{(ID,x)(0,K)}(0) = 1, \;\; K - p \leq x \leq K - 1,$

$T\big((ID,x),0\big) = 1, \qquad p \le x \le K-p,$

$T\big((ID,x),0\big) = \dfrac{K-x}{p}, \qquad K-p < x \le K-1,$

$C\big((ID,x),0\big) = hx + C, \quad p \le x \le K-p,$

$C\big((ID,x),1\big) = hx + \dfrac{C(K-x)}{p}, \quad K-p < x < K-1.$

Όταν η παρούσα κατάσταση είναι η κατάσταση (ID,x) με $x+p>K$, ο χρόνος μετάβασης ενός βήματος δεν είναι ίσος με ένα. Επομένως, η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους μπορεί να υπολογιστεί από την ημιμαρκοβιανή έκδοση του αλγόριθμου διαδοχικών προσεγγίσεων ή από την ημιμαρκοβιανή έκδοση του αλγόριθμου βελτίωσης πολιτικών. Πολλά αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η βέλτιστη πολιτική είναι μονότονη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μονάδα παραγωγής δεν μπορεί να βελτιωθεί από μόνη της, δηλαδή $P_{ij}=0$ αν $i \in \{1,\dots,m\}$ και $j<i$. Σε αυτήν την περίπτωση θα δείξουμε ότι το μέσο κόστος μιας μονότονης πολιτικής, δηλαδή η πολιτική η οποία για δεδομένο περιεχόμενο $x \in \{0,\dots,K\}$ του αποθηκευτικού χώρου θέτει σε λειτουργία μία προληπτική συντήρηση αν και μόνο αν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι μεγαλύτερη ή ίση με κάποιο κρίσιμο σημείο $i(x)$, μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας το συνηθισμένο αναγεννητικό επιχείρημα που είδαμε στο Θεώρημα 2.1. Δίνουμε τις λεπτομέρειες αυτού του υπολογισμού παρακάτω.

Θεωρούμε μία μονότονη πολιτική R που χαρακτηρίζεται από τους κρίσιμους αριθμούς $i\,(x), 0 \le x \le K$. Η διαδικασία βάσει αυτής της πολιτικής είναι μία διαδικασία αναγέννησης όπου οι διαδοχικές είσοδοι στην κατάσταση $(0,K)$ μπορούν να θεωρηθούν ως αναγεννητικές στιγμές μεταξύ διαδοχικών κύκλων. Έστω ότι το $g(R)$ είναι το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου στο πλαίσιο της πολιτικής R. Έστω επίσης το $T_{(0,K)(0,K)}$ και το $C_{(0,K)(0,K)}$ να είναι ο αναμενόμενος χρόνος και κόστος, αντιστοίχως, μέχρι η διαδικασία βάσει της πολιτικής R να εισέλθει στην κατάσταση $(0,K)$, αν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $(0,K)$. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα των αναγεννητικών διαδικασιών με κόστη, έχουμε ότι:

$$g(R) = \frac{C_{(0,K)(0,K)}}{T_{(0,K)(0,K)}}\,. \tag{2.13}$$

Η ποσότητα $T_{(0,K)(0,K)}$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά ως εξής:

Έστω $T_{(i,x)(0,K)},\ 0 \leq i \leq m+1,\ 0 \leq x \leq K$, είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι το σύστημα να εισέλθει στην κατάσταση $(0, K)$ βάσει της πολιτικής R, αν η αρχική κατάσταση είναι η (i, x). Για $x = 0, \dots, K$, οι ποσότητες $T_{(i,x)(0,K)},\ i(x) \leq i \leq m$ υπολογίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$T_{(i,x)(0,K)} = \frac{1}{a} + \sum_{j=1}^{\frac{K-x}{p}-1} (1-a)^{j-1}\, a \left(\frac{K-x}{p} - j\right), \qquad \text{αν } \frac{K-x}{p} \text{ είναι ακέραιος}$$

$$T_{(i,x)(0,0)} = \frac{1}{a} + \sum_{j=1}^{\rho} (1-a)^{j-1}\, a \left(\frac{K-x}{p} - j\right), \qquad \text{αν } \frac{K-x}{p} \text{ δεν είναι ακέραιος}$$

όπου ρ είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{K-x}{p}$. Οι παραπάνω εξισώσεις λαμβάνονται με τον καθορισμό του αριθμού των χρονικών μονάδων που διαρκεί η προληπτική συντήρηση. Οι εξισώσεις για τους αναμενόμενους χρόνους $T_{(m+1,x)(0,K)}$ συμπίπτουν με τις παραπάνω εξισώσεις, εάν αντικαταστήσουμε το a με το b. Οι αναμενόμενοι χρόνοι $T_{(i,0)(0,K)},\ 0 \leq i \leq i(0)-1$ υπολογίζονται αναδρομικά για $i = i(0)-1, \dots, 0$ από τις ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν αν δεσμευθούμε ως προς την κατάσταση $(j, 0), i \leq j \leq m+1$, που το σύστημα επισκέπτεται μετά την πρώτη μετάβαση από την αρχική κατάσταση $(i, 0)$:

$$T_{(i,0)(0,K)} = (1-p_{ii})^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij}\, T_{(j,0)(0,K)} \right).$$

Για $x = 1, \dots, K$ οι ποσότητες $T_{(i,x)(0,K)},\ 0 \leq i < i(x)$ υπολογίζονται αναδρομικά από τις εξισώσεις:

$$T_{(i,x)(0,K)} = 1 + \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij}\, T_{(j,(x+p-d)^+)(0,K)}\,.$$

Το αναμενόμενο κόστος $C_{(0,K)(0,K)}$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά με παρόμοιο τρόπο ως εξής:

Έστω ότι το $C_{(i,x)(0,K)}$, $0 \leq i \leq m+1,\ 0 \leq x \leq K$ είναι το αναμενόμενο κόστος μέχρι το σύστημα να εισέλθει στην κατάσταση $(0, K)$, εάν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση

(i,x). Για $x=0,\dots,K$, το υπολογιζόμενο κόστος $C_{(i,x)(0,K)}$, $i(x)\le i\le m$ υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} C_{(i,x)(0,K)} = {} & \frac{c_p}{a} + CT_{(i,x)(0,K)} + (1-a)^\rho \left(\rho p + x - K + \frac{p}{a}\right) p \\ & + h\left(\rho x + \frac{p\rho(\rho-1)}{2} + (x+\rho p)\left(\frac{K-x}{p} - \rho\right)\right) \\ & + hK(1-a)^\rho \left(\frac{1}{a} + \rho - \frac{K-x}{p}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Η εξίσωση για τα αναμενόμενα κόστη $C_{(m+1,x)(0,K)}$, $0\le x\le K$, συμπίπτει με το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, αν αντικαταστήσουμε το a με το b και το c_p με το c_f. Τα αναμενόμενα κόστη $C_{(i,0)(0,K)}$, $0\le i\le i(0)-1$, υπολογίζονται αναδρομικά από τις ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν αν δεσμευθούμε ως προς την κατάσταση, $(j,0), i\le j\le m+1$, που το σύστημα επισκέπτεται μετά την πρώτη μετάβαση από την αρχική κατάσταση $(i,0)$:

$$C_{(i,0)(0,K)} = c_i + hi + \sum_{j=1}^{m+1} p_{ij}\, C_{(j,(x+p-d)^+)(0,K)}\,.$$

Είναι πλέον σαφές ότι το μέσο κόστος $g(R)$ της μονότονης πολιτικής R μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση της εξίσωσης (2.13). Η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους μεταξύ όλων των πολιτικών είναι η μονότονη πολιτική που επιτυγχάνει το μικρότερο μέσο κόστος μεταξύ όλων των διαφορετικών μονότονων πολιτικών $(\mathrm{m}+2)^{\mathrm{K}+1}$.

2.7 Η βέλτιστη πολιτική όταν είναι δυνατή η ενέργεια της αδράνειας

Τροποποιούμε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι κάθε φορά που το σύστημα είναι στην κατάσταση $(i,x), 0\le i\le m, 0\le x\le K$, εκτός από την ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε) και την ενέργεια 1 (έναρξη προληπτικής συντήρησης), είναι επίσης δυνατή η ενέργεια 3 (αδρανοποίηση). Εάν επιλεγεί η ενέργεια 3, η μονάδα παραγωγής παραμένει ανενεργή για μία χρονική περίοδο και δεν τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο.

Υποθέτουμε ότι εάν η ενέργεια 3 επιλέγεται όταν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι $i<m+1$, τότε η κατάσταση λειτουργίας την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι η κατάσταση j με πιθανότητα q_{ij}. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι, για κάθε $k=0,\dots,m+1$,

$$\sum_{j=k}^{m+1} q_{ij} \leq \sum_{j=k}^{m+1} p_{ij}\,, \qquad 0 \leq i \leq m$$

δεδομένου ότι, όταν λειτουργεί η μονάδα παραγωγής, αυξάνεται η πιθανότητα να επιδεινωθεί. Επιβάλλουμε επίσης την ακόλουθη Συνθήκη, η οποία είναι παρόμοια με τη Συνθήκη 5.

Συνθήκη 5' (Increasing Failure Rate Assumption): Για κάθε $k = 0, \dots, m+1$, η ποσότητα

$$\sum_{j=k}^{m+1} q_{ij}$$

είναι αύξουσα ως προς το $i, 0 \leq i \leq m$.

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{s\ell}(a)$, $s, \ell, \in S$ και το κόστος μετάβασης $C(s,a), a \in \{0, 1,2\}$, συμπίπτουν με εκείνα που προαναφέρθηκαν στην ενότητα 2.3 εκτός από τα ακόλουθα που περιλαμβάνουν την ενέργεια 3:

$$p_{(i,x)(j,\min(x+p,K))}(3) = q_{ij}, \;\; 0 \leq i < m+1, \;\; 0 \leq x \leq K,$$

$$C\big((i,x),3\big) = hx + C + P(x+p-K), \;\; 0 \leq i < m+1, \;\; 0 \leq x \leq K.$$

Οι εξισώσεις (2.1) και (2.2)(1.2) για το ελάχιστο αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος $V_n^a(i,x)$ παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} V_n^a(i,x) = min \Bigg\{ & c_i + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} \\ & + a \sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} V_{n-1}^a(j, (x+p-d)^+), hx + C + P(x+p-K)^+ \\ & + a \sum_{j=0}^{m+1} q_{ij} V_{n-1}^a(j, \min(x+p\,, K)), V_n^a(PM, x) \Bigg\}, \\ & \qquad 0 \leq i \leq m, \qquad 0 < x \leq K, \end{aligned}$$

$$V_n^a(i,0) = \min\left\{\tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d} + a\sum_{j=0}^{m+1} \tilde{p}_{ij} V_{n-1}^a(j,0), C + a\sum_{j=0}^{m+1} q_{ij} V_{n-1}^a(j,p), V_n^a(PM,0)\right\},$$

$$0 \le i \le m.$$

Οι εξισώσεις για το $V_n^a(m+1,x)$ και $V_n^a(PM,x)$, $0 \le x \le K$, συμπίπτουν με εκείνες του αρχικού προβλήματος. Μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι το Λήμμα 2.1 ισχύει όταν συμπεριλαμβάνεται η ενέργεια 3. Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης για το μέσο κόστος (2.5) και (2.6) γίνονται τώρα:

$$v(i,x) = min\left\{c_i + hx + \frac{[d - \min(d, x+p)]C}{d} + \sum_{j=0}^{m+1} p_{ij} v(j,(x+p-d)^+), hx + C - g\right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m+1} q_{ij} v(j, \min(x+p\,, K)), v(PM,0)\right\},$$

$$0 \le i \le m, \qquad 0 < x \le K,$$

$$v(i,0) = min\left\{\tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d} - g + \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{P}_{ij} v(j,0), C - g + \sum_{j=0}^{m+1} q_{ij} v(j,\mathrm{p}), v(PM,0)\right\},$$

$$0 \le i \le m.$$

Οι άλλες εξισώσεις βελτιστοποίησης μέσου κόστους συμπίπτουν με εκείνες του αρχικού προβλήματος. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες στις παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχεί στην ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε), ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια 3 (αδρανοποίηση) και ο τρίτος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια 1 (έναρξη προληπτικής συντήρησης). Η μονοτονία του $V_n^a(i,x), 0 \le x \le K$, ως προς το $i \in \{0,\dots,m+1\}$ υποδηλώνει ότι η ποσότητα $v(i,x), 0 \le x \le K$, είναι αύξουσα ως προς το i. Επομένως, μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο, όπως στην πρόταση 2.1, ότι για σταθερό περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x, 0 \le x \le K$, υπάρχει μία κρίσιμη κατάσταση λειτουργίας $i^*(= i^*(x)) \in \{0,\dots,m+1\}$ τέτοια ώστε η βέλτιστη πολιτική να ξεκινά μία προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής εάν η κατάσταση λειτουργίας της είναι μεγαλύτερη ή ίση με το i^*.

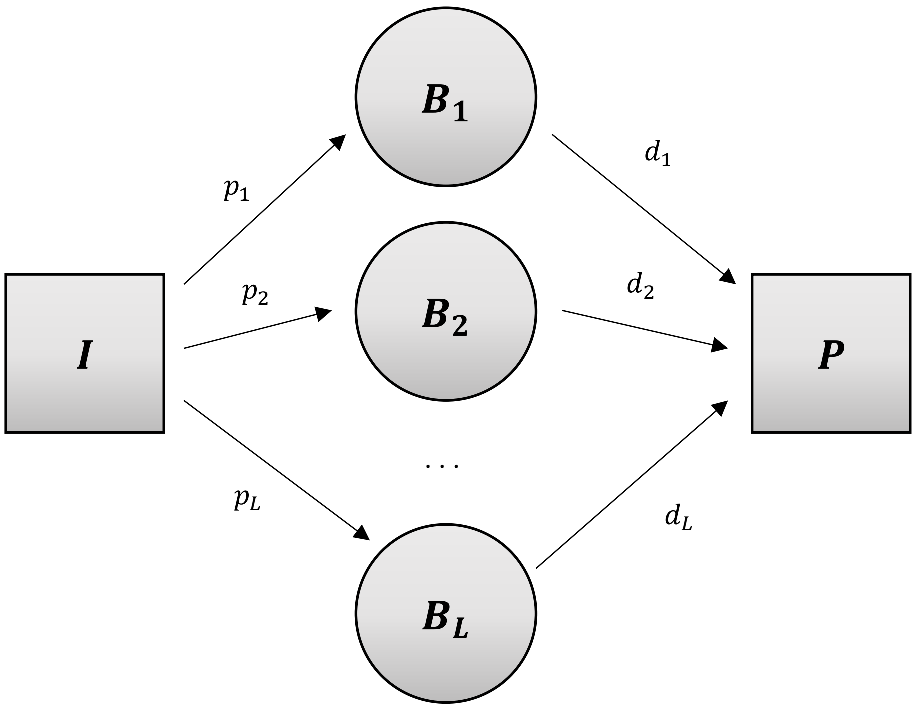
Ένας μεγάλος αριθμός αριθμητικών αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών παρέχουν ισχυρές ενδείξεις ότι για κάθε περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x, 0 \leq x \leq K$, υπάρχει μία άλλη κρίσιμη συνθήκη λειτουργίας $\tilde{i}(x)$ ($\leq i^*(x)$), τέτοια ώστε η βέλτιστη πολιτική να επιλέξει την ενέργεια 0 (δεν επεμβαίνουμε) αν $i < \tilde{i}(x)$, και την ενέργεια 3 (αδρανοποίηση) αν $\tilde{i}(x) \leq i < i^*(x)$. Αν $\tilde{i}(x) = i^*(x)$ για κάποιο περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου x, η βέλτιστη πολιτική δεν επιλέγει ποτέ την ενέργεια 3 για $(i, x), 0 \leq i \leq m$. Αυτή η δομή της βέλτιστης πολιτικής μπορεί να ερμηνευθεί διαισθητικά, καθώς φαίνεται εύλογο να «επιτραπεί» στη μονάδα παραγωγής να λειτουργήσει εάν η κατάσταση λειτουργίας της είναι σχετικά καλή, να ξεκινήσει μία προληπτική συντήρηση εάν η κατάσταση λειτουργίας της επιδεινωθεί, και να την αφήσει αδρανή εάν η κατάσταση λειτουργίας της είναι ενδιάμεση. Στην τρίτη περίπτωση αποφεύγονται τα λειτουργικά έξοδα.

Κεφάλαιο 3

Βέλτιστη συντήρηση δύο μηχανών με L ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε δύο προβλήματα, τα οποία σχετίζονται με την προληπτική συντήρηση ενός συστήματος παραγωγής – αποθήκευσης. Θεωρούμε ένα βιομηχανοποιημένο σύστημα (Σχήμα 3.1) στο οποίο μία εγκατάσταση παραγωγής εισόδου (I) μεταφέρει L πρώτες ύλες σε μία μονάδα παραγωγής (P). Υποθέτουμε ότι οι L αποθηκευτικοί χώροι $B_1, \ldots, B_L$ έχουν χτιστεί μεταξύ της εγκατάστασης και της μονάδας παραγωγής. Η εγκατάσταση μεταφέρει το ακατέργαστο υλικό $j \in \{1, \ldots, L\}$ στον B_j αποθηκευτικό χώρο και η μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη από τον B_j αποθηκευτικό χώρο. Οι αποθηκευτικοί χώροι έχουν περιορισμένη χωρητικότητα.



Σχήμα 3.1: *Το σύστημα παραγωγής – αποθήκευσης*

Στο πρώτο πρόβλημα θεωρείται ότι η εγκατάσταση επιδεινώνεται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου και η μονάδα παραγωγής είναι πάντα σε κατάσταση λειτουργίας. Η επιδείνωση της εγκατάστασης περιγράφεται από γνωστές πιθανότητες μετάβασης μεταξύ διαφορετικών βαθμών επιδείνωσης. Για το Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης διακριτού χρόνου λαμβάνεται υπόψη η βέλτιστη προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης. Οι χρόνοι συντήρησης υποτίθεται ότι είναι γεωμετρικά κατανεμημένοι και η δομή του κόστους περιλαμβάνει:

- τα λειτουργικά έξοδα της εγκατάστασης
- το κόστος αποθήκευσης των πρώτων υλών
- το κόστος συντήρησης
- το κόστος που οφείλεται στην καθυστέρηση παραγωγής όταν η εγκατάσταση δεν λειτουργεί ή λειτουργεί εν μέρει και το περιεχόμενο ορισμένων ή όλων των αποθηκευτικών χώρων είναι κάτω από συγκεκριμένα επίπεδα.

Αποδεικνύεται ότι για σταθερά περιεχόμενα των αποθηκευτικών χώρων η πολιτική που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι μονότονη, δηλαδή ξεκινά μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης εάν και μόνο εάν ο βαθμός επιδείνωσης υπερβεί κάποιο κρίσιμο επίπεδο.

Στο δεύτερο πρόβλημα θεωρείται ότι η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου και η εγκατάσταση είναι πάντα σε κατάσταση λειτουργίας. Η επιδείνωση της διαδικασίας της μονάδας παραγωγής περιγράφεται από γνωστές πιθανότητες μετάβασης μεταξύ διαφορετικών βαθμών επιδείνωσης. Διατυπώνεται ένα Μαρκοβιανό μοντέλο απόφασης για διακριτό χρόνο για τη βέλτιστη προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής. Οι χρόνοι συντήρησης είναι γεωμετρικά κατανεμημένοι και η διάρθρωση του κόστους περιλαμβάνει:

- τα λειτουργικά έξοδα της μονάδας παραγωγής
- τα κόστη συντήρησης της μονάδας παραγωγής
- τα αποθεματικά κόστη
- τα κόστη ποινής και
- το κόστος λόγω χαμένης παραγωγής.

Αποδεικνύεται ότι για τα σταθερά περιεχόμενα των αποθηκευτικών χώρων, η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους έχει επίσης μία μονότονη μορφή, δηλαδή ξεκινά μία προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής εάν και μόνον εάν ο βαθμός επιδείνωσης υπερβεί ορισμένα κρίσιμα επίπεδα.

3.2 Το πρόβλημα όταν η εγκατάσταση επιδεινώνεται στοχαστικά

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής αποθεμάτων (Σχήμα 3.1) το οποίο αποτελείται από μία εγκατάσταση (I) που εφοδιάζει τους αποθηκευτικούς χώρους B_j $j \in \{1,\dots,L\}$ με την πρώτη ύλη και μία μονάδα παραγωγής (P) που τραβά τις d_j $j \in \{1,\dots,L\}$ μονάδες της πρώτης ύλης από τους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Υποτίθεται ότι η μονάδα παραγωγής είναι πάντα σε κατάσταση λειτουργίας και ότι η εγκατάσταση ενδέχεται να επιδεινωθεί όσο εξελίσσεται ο χρόνος. Οι αποθηκευτικοί χώροι $B_j, j = 1,2,\dots,L$ έχουν πεπερασμένη χωρητικότητα που είναι ίση με K_j μονάδες της πρώτης ύλης $j = 1,2,\dots,L$. Εφόσον οι αποθηκευτικοί χώροι B_j, $j = 1,2,\dots,L$ δεν είναι πλήρεις και η εγκατάσταση είναι σε κατάσταση λειτουργίας, η εγκατάσταση μπορεί να μεταφέρει $p_j(> d_j)$ μονάδες των πρώτων υλών $j \in \{1,\dots,L\}$ στους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μίας μονάδας χρόνου και η διαφορά $p_j - d_j$ αποθηκεύεται στους αποθηκευτικούς χώρους B_j. Μόλις οι αποθηκευτικοί χώροι B_j, $j = 1,2,\dots,L$ γεμίσουν (γίνουν πλήρεις), η εγκατάσταση μειώνει την ταχύτητά της από p_j σε d_j. Οι αριθμοί p_j, d_j, K_j, $j = 1,2,\dots,L$ θεωρούνται ακεραίοι.

Υποθέτουμε ότι η εγκατάσταση επιθεωρείται σε διακριτές, ισαπέχουσες χρονικές στιγμές $\tau = 0,1,\dots$, και κατατάσσεται σε μία από τις $m + 2$ καταστάσεις λειτουργίας $0,1,\dots,m + 1$ που περιγράφουν αυξανόμενα επίπεδα φθοράς. Ο βαθμός επιδείνωσης 0 δηλώνει ότι η λειτουργία της εγκατάστασης είναι άριστη (ή λειτουργεί σαν καινούρια), ενώ η κατάσταση λειτουργίας $m + 1$ σημαίνει ότι η εγκατάσταση είναι σε κατάσταση αποτυχίας (εκτός λειτουργίας) και δεν μπορεί να μεταφέρει τις πρώτες ύλες στους αποθηκευτικούς χώρους. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $1,\dots,m$ είναι οι λειτουργικές καταστάσεις.

Η πιθανότητα μετάβασης της μετακίνησης από την κατάσταση λειτουργίας i τη χρονική στιγμή τ στην κατάσταση λειτουργίας r τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ ισούται με p_{ir}. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να φτάσουμε τελικά στη κατάσταση λειτουργίας $m + 1$ από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη λειτουργίας i είναι μη μηδενική. Αν σε μια χρονική στιγμή τ η εγκατάσταση βρίσκεται σε κατάσταση βλάβης $m + 1$, μία διορθωτική συντήρηση είναι υποχρεωτική. Αν σε μια χρονική στιγμή τ η εγκατάσταση βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση λειτουργίας $i \leq m$, μία προληπτική συντήρηση μπορεί να ξεκινήσει. Όταν εκτελείται προληπτική συντήρηση, η εγκατάσταση δεν λειτουργεί και δεν μεταφέρει πρώτη ύλη στους αποθηκευτικούς χώρους της. Θεωρείται ότι οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής (που εκφράζονται σε χρονικές μονάδες) κατανέμονται γεωμετρικά με πιθανότητα επιτυχίας a_I και b_I, δηλαδή την πιθανότητα να διαρκέσουν $t \geq 1$ μονάδες χρόνου που είναι ίσες με $(1-a_I)^{\tau-1}a_I$ και $(1-b_I)^{\tau-1}b_I$, αντίστοιχα. Όταν εκτελείται προληπτική ή διορθωτική συντήρηση και ο αποθηκευτικός χώρος $B_j, j \in \{1,\ldots,L\}$ περιέχει x_j μονάδες της πρώτης ύλης, η μονάδα παραγωγής τραβάει από τον αποθηκευτικό χώρο B_j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου $\min(x_j, d_j)$ μονάδες πρώτης ύλης. Και οι δύο συντηρήσεις θέτουν την εγκατάσταση στην τέλεια κατάσταση 0.

Παρουσιάζουμε την κατάσταση PM για να υποδείξουμε την κατάσταση στην οποία η προληπτική συντήρηση εφαρμόζεται στην εγκατάσταση. Τότε ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι το σύνολο:

$$S = \{0,\ldots,m+1,PM\} \times \{0,\ldots,K_1\} \times \cdots \times \{0,\ldots,K_L\},$$

σημειώνουμε ότι $(i, x_1 \ldots, x_L) \in S$ είναι η κατάσταση στην οποία το i είναι η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης και $x_j \in \{0,\ldots,K_j\}, j = 1,\ldots,L$, είναι το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου B_j.

Υπάρχουν 3 πιθανές ενέργειες, οι οποίες επιλέγονται κάθε χρονική στιγμή $\tau = 0,1,\ldots$. Οι πιθανές ενέργειες είναι:

- η ενέργεια 1 (ξεκινά μία προληπτική συντήρηση),
- η ενέργεια 2 (ξεκινά μία διορθωτική συντήρηση),
- η ενέργεια $J \subseteq \{1,\ldots,L\}$ (μεταφέρει τις πρώτες ύλες μόνο σε εκείνους τους αποθηκευτικούς χώρους που ανήκουν στο μη κενό υποσύνολο J του συνόλου $\{1,\ldots,L\}$).

Αν σε μία χρονική στιγμή τ η εγκατάσταση βρίσκεται στην κατάσταση PM ή στην κατάσταση $m+1$, η ενέργεια 1 ή η ενέργεια 2 είναι υποχρεωτική, αντίστοιχα. Αν σε μία χρονική στιγμή τ η εγκατάσταση βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας $i \in \{0,\ldots,m\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε την ενέργεια 1 είτε την ενέργεια $J \subseteq \{1,\ldots,L\}$.

Ως εκ τούτου, ο αριθμός των πιθανών ενεργειών στην περίπτωση αυτή είναι 2^L δεδομένου ότι ο αριθμός των μη κενών υποσυνόλων των $\{1,\ldots,L\}$ είναι

$$\sum_{i=1}^{L} \binom{L}{i} = 2^L - 1.$$

Εάν σε μία χρονική στιγμή τ επιλεχθεί η ενέργεια J και το j ανήκει στο J με το $x_j < K_j$, τότε το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου B_j την επόμενη χρονική στιγμή $\tau + 1$ θα είναι $\min(x_j + p_j - d_j, K_j)$. Αυτή η αύξηση του περιεχομένου του αποθηκευτικού χώρου θα συμβεί ακόμη αν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης στην επόμενη χρονική στιγμή $\tau + 1$ είναι η κατάσταση $m + 1$.

Η δομή κόστους του προβλήματος περιλαμβάνει:

- τα λειτουργικά έξοδα της εγκατάστασης
- το κόστος αποθήκευσης που οφείλεται στην απώλεια της παραγωγής και
- το κόστος συντήρησης.

Αν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης είναι $i \in \{0, \ldots, m\}$ και ο αποθηκευτικός χώρος B_j, $j \in \{1, \ldots, L\}$ δεν είναι πλήρης (ή πλήρης) το κόστος της μεταφοράς των p_j μονάδων (ή d_j) της πρώτης ύλης του αποθηκευτικού χώρου B_j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου είναι ίσο με $c_j(i)$ (ή $\tilde{c}_j(i)$). Επομένως, αν σε μία χρονική στιγμή τ η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης βρεθεί ότι είναι $i \in \{0, \ldots, m\}$ και η ενέργεια $J \subseteq \{1, \ldots, L\}$, επιλεχθεί τότε το λειτουργικό κόστος μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή $\tau + 1$ είναι ίσο με

$$\sum_{j \in J_1} c_j(i) + \sum_{j \in J_2} \tilde{c}_j(i), \qquad \text{όπου } J_1 \cup J_2 = J,$$

το J_1 αντιστοιχεί στον αποθηκευτικό χώρο που δεν είναι πλήρης και το J_2 αντιστοιχεί στον αποθηκευτικό χώρο που είναι πλήρης. Υποθέτουμε ότι το κόστος μιας μονάδας πρώτης ύλης $j \in \{1, \ldots, L\}$ στον αποθηκευτικό χώρο B_j για μία μονάδα χρόνου είναι ίσο με το h_j. Οι τιμές κόστους κατά την προληπτική και τη διορθωτική συντήρηση της εγκατάστασης είναι ίσες με c_p και c_f, αντίστοιχα. Όταν εκτελείται προληπτική ή διορθωτική συντήρηση στην εγκατάσταση και όλοι οι αποθηκευτικοί χώροι $B_1, \ldots, B_L$ είναι άδειοι (δηλ., $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, L$), η μονάδα παραγωγής δεν τραβάει πρώτη ύλη από τους αποθηκευτικούς χώρους. Σε αυτή την περίπτωση το κόστος λόγω καθυστέρησης παραγωγής επιβαρύνεται και είναι ίσο με $C > 0$ ανά μονάδα χρόνου.

Όταν $x_j \geq d_j$, $j = 1, \ldots, L$, δεν έχουμε κανένα τέτοιο κόστος, αφού όλοι οι αποθηκευτικοί χώροι περιέχουν αρκετή ποσότητα πρώτης ύλης για να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις της μονάδας παραγωγής για μία μονάδα χρόνου. Όταν η ανισότητα $x_j \geq d_j$ ικανοποιείται για μερικά (αλλά όχι για όλα) τα $j = 1, \ldots, L$, οι απαιτήσεις για πρώτες ύλες της μονάδας παραγωγής για μία μονάδα χρόνου ικανοποιούνται μερικώς. Ως εκ τούτου, η παραγωγικότητα της μονάδας παραγωγής μειώνεται, με την έννοια ότι ο χρόνος για την παραγωγή των τελικών προϊόντων αυξάνεται για μία μονάδα χρόνου. Μερικές από τις πρώτες ύλες που απαιτούνται για την παραγωγή των τελικών προϊόντων δεν είναι διαθέσιμες. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι το κόστος λόγω καθυστέρησης της παραγωγής είναι ίσο με:

$$C\sum_{j=1}^{L}\left(d_j - x_j\right)^{+} \Big/ \sum_{j=1}^{L} d_j\,, \qquad \text{όπου} \quad \left(d_j - x_j\right)^{+} = \max(d_j - x_j, 0)$$

είναι η μη διαθέσιμη ποσότητα της πρώτης ύλης j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου. Ομοίως εάν σε μία χρονική στιγμή τ η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης βρεθεί ότι είναι ίση με $i \in \{1, \dots, m\}$ και η ενέργεια $J \subseteq \{1, \dots, L\}$ επιλεχθεί τότε το κόστος που οφείλεται στην καθυστέρηση παραγωγής μέχρι την χρονική στιγμή $\tau + 1$ είναι ίσο με:

$$C\sum_{j\notin J}^{L}\left(d_j - x_j\right)^{+} \Big/ \sum_{j=1}^{L} d_j\,.$$

Θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες σχετικά με τη δομή του κόστους και τις πιθανότητες μετάβασης.

Συνθήκη 1: Για $j \in \{1, \dots, L\}$ οι ακολουθίες $\{c_j(i)\}$ και $\{\tilde{c}_j(i)\}, 0 \le i \le m$, είναι αύξουσες ως προς i. Δηλαδή καθώς η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης επιδεινώνεται, το κόστος της μεταφοράς της πρώτης ύλης $j \in \{1, \dots, L\}$ στους αποθηκευτικούς χώρους B_j αυξάνεται.

Συνθήκη 2: Για $j \in \{1, \dots, L\}$, $\tilde{c}_j(i) \le c_j(i)$, $0 \le i \le m$. Δηλαδή το κόστος μεταφοράς p_j μονάδων της πρώτης ύλης $j \in \{1, \dots, L\}$ στους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου είναι μεγαλύτερη ή ίση με το κόστος μεταφοράς d_j μονάδων της πρώτης ύλης j στους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου.

Συνθήκη 3: $0 < b_I < a_I \le 1$. Δηλαδή, ο απαιτούμενος χρόνος για μία προληπτική συντήρηση είναι μικρότερος από τον αναμενόμενο χρόνο που απαιτείται για μία διορθωτική συντήρηση.

Συνθήκη 4: $c_p \le c_f$. Δηλαδή, το κόστος της προληπτικής συντήρησης δεν υπερβαίνει το κόστος της διορθωτικής συντήρησης.

Συνθήκη 5: (Αυξανόμενος ρυθμός αποτυχίας (IFR)).

Για κάθε $k = 0, \dots, m$, η ποσότητα

$$D_k(i) = \sum_{r=k}^{m+1} p_{ir}$$

είναι αύξουσα ως προς $i, 0 \le i \le m$. Μία συνέπεια αυτής της κατάστασης είναι ότι $I_i \le_{st} I_{i+1}, 0 \le i \le m$, όπου I_i είναι τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την επόμενη κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης εάν η παρούσα κατάσταση λειτουργίας της είναι ίση με i. Αυτή η προϋπόθεση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Συνθήκη 6: Για κάθε αύξουσα συνάρτηση $h(r), 0 \le r \le m+1$, η ποσότητα

$$\sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} h(r)\,, \quad 0 \le i \le m,$$

είναι αύξουσα ως προς i.

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης διακριτού χρόνου, στην οποία στοχεύουμε να βρούμε μία στάσιμη πολιτική που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

3.3 Η δομή της βέλτιστης πολιτικής

Έστω $a\ (0 < \alpha < 1)$ ο αποπληθωριστικός παράγοντας. Το ελάχιστο αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος $V_n^a(i, \bar{x})$, όπου $(i, \bar{x}) = (i, x_1, \dots, x_L)$ είναι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας, μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά για κάθε $n = 1,2, \dots$, από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$V_n^a(i, \bar{x}) = \left\{ \min_{J \subseteq \{1,\dots,L\}} \left[\sum_{j \in J} c_j(i) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j \notin J} (d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C \right.\right.$$
$$\left.\left. + \, a \sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} V_{n-1}^a(r, \bar{x}) \right], V_n^a(PM, \bar{x}) \right\}$$

$$0 \le i \le m, \qquad 0 < x_j \le K_j, \qquad j = 1, \dots, L, \tag{3.1}$$

$$V_n^a(PM, \bar{x}) = c_p + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}(d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + aaV_{n-1}^a\big(0, (\bar{x} - \bar{d})^+\big)$$
$$+ a(1 - a_I)V_{n-1}^a\big(PM, (\bar{x} - \bar{d})^+\big), \qquad 0 \le x_j \le K_j, \qquad j = 1, \dots, L, \tag{3.2}$$

$$V_n^a(m+1, \bar{x}) = c_f + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}(d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + abV_{n-1}^a\big(0, (\bar{x} - \bar{d})^+\big)$$
$$+ a(1 - b_I)V_{n-1}^a\big(m+1, (\bar{x} - \bar{d})^+\big), \qquad 0 \le x_j \le K_j, \quad j = 1, \dots, L, \tag{3.3}$$

όπου το $\bar{x}$ στην (3.1) είναι ένα διάνυσμα με L συνιστώσες, στα οποία η j – οστή συνιστώσα ισούται με το $\min(x_j + p_j - d_j, K_j)$, εάν $j \in J$, ενώ, εάν $j \notin J$, είναι ίσο με $\left(x_j - d_j\right)^+ = \max(x_j - d_j, 0)$, και το $\left(\bar{x} - \bar{d}\right)^+$ στην (3.2) και στην (3.3) είναι το διάνυσμα $((x_1 - d_1)^+, \dots, (x_L - d_L)^+)$.
Η αρχική συνθήκη είναι η $V_0^a(s) = 0, s \in S$.

Σημειώνουμε ότι, αν $x_j = K_j$ για κάποιες τιμές του $j \in \{1, \dots, L\}$, η (3.1) ισχύει αν το $c_j(i)$ αλλάξει σε $\tilde{c}_j(i)$ για αυτές τις τιμές του j. Ο πρώτος όρος ανάμεσα στα άγκιστρα της εξίσωσης (3.1)(2.1) αντιστοιχεί στην καλύτερη ενέργεια μεταξύ όλων των ενεργειών $J \subseteq \{1, \dots, L\}$, ενώ ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια 1 (έναρξη προληπτικής συντήρησης της εγκατάστασης). Το πρώτο μέρος του παρακάτω λήμματος χρειάζεται για να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους είναι μονότονη για σταθερά επίπεδα των αποθηκευτικών χώρων.

Λήμμα 3.1: Για κάθε $n = 0, 1, \dots$, έχουμε ότι:

iii. $V_n^a(i, \bar{x}) \le V_n^a(i+1, \bar{x}),\ 0 \le i \le m,\ 0 \le x_j \le K_j, j = 1, \dots, L,$

iv. $V_n^a(PM, \bar{x}) \le V_n^a(m+1, \bar{x}),\ 0 \le x_j \le K_j, j = 1, \dots, L.$

Απόδειξη:

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n. Το λήμμα ισχύει για $n = 0$, δεδομένου ότι $V_0^a(s) = 0, s \in S$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n - 1 (\ge 0)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το n. Πρώτα, αποδεικνύουμε το ii και στη συνέχεια το i.

ii. Έστω $D = V_{n-1}^{a}\left(m+1, \left(\bar{x}-\bar{d}\right)^{+} - V_{n-1}^{a}(0, \left(\bar{x}-\bar{d}\right)^{+})\right)$.

Για $0 \le x_j \le K_j,\ j = 1, \ldots, L$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
V_n^a(PM, \bar{x}) &= c_p + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}\left(d_j - x_j\right)^{+}}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + aaV_{n-1}^{a}\left(0, \left(\bar{x}-\bar{d}\right)^{+}\right) \\
&\quad + a(1-a_I)V_{n-1}^{a}\left(PM, \left(\bar{x}-\bar{d}\right)^{+}\right) \\
&\le c_f + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}(d_j - x_j)^{+}}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + aaV_{n-1}^{a}\left(0, (\bar{x}-\bar{d})^{+}\right) \\
&\qquad + a(1-a_I)V_{n-1}^{a}\left(m+1, (\bar{x}-\bar{d})^{+}\right) \\
&= c_f + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}(d_j - x_j)^{+}}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + aV_{n-1}^{a}\left(m+1, (\bar{x}-\bar{d})^{+}\right) - aa_I D \\
&\le c_f + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j=1}^{L}(d_j - x_j)^{+}}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + aV_{n-1}^{a}\left(m+1, (\bar{x}-\bar{d})^{+}\right) - ab_I D \\
&= V_n^a(m+1, \bar{x}).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 4 και από τη ii της υποθετικής επαγωγής. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τη Συνθήκη 3 και την ανισότητα $D \ge 0$ που είναι συνέπεια της i της υποθετικής επαγωγής.

i. Έχουμε να δείξουμε:

$$V_n^a(m, \bar{x}) \le V_n^a(m+1, \bar{x}),\ \ 0 \le x_j \le K_j, j = 1, \ldots, L, \tag{3.5}$$

$$V_n^a(i, \bar{x}) \le V_n^a(i+1, \bar{x}),\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le x_j \le K_j, j = 1, \ldots, L, \tag{3.6}$$

Η ανισότητα (3.5) επαληθεύεται εύκολα χρησιμοποιώντας την (3.1) με $i = m$ και το ii παραπάνω

$$V_n^a(m, \bar{x}) \le V_n^a(PM, \bar{x}) \le V_n^a(m+1, \bar{x}). \tag{3.7}$$

Για $0 \le i \le m-1$ και $0 \le x_j \le K_j, j = 1, \ldots, L$, έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
V_n^a(i,\bar{x}) = min\Bigg\{ &\min_{J\subseteq\{1,\dots,L\}} \Bigg[\sum_{j\in J} c_j(i) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j\notin J}(d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C \\
&+ a\sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} V_{n-1}^a(r,\bar{x'})\Bigg], V_n^a(PM,\bar{x})\Bigg\} \\
\le min\Bigg\{ &\min_{J\subseteq\{1,\dots,L\}} \Bigg[\sum_{j\in J} c_j(i+1) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j\notin J}(d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C \\
&+ a\sum_{r=0}^{m+1} p_{i+1,r} V_{n-1}^a(r,\bar{x'})\Bigg], V_n^a(PM,\bar{x})\Bigg\} \\
= V_n^a&(i+1,\bar{x}). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει από την Συνθήκη 1 και την ανισότητα

$$
\sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} V_{n-1}^a(r,\bar{x'}) \le \sum_{r=0}^{m+1} p_{i+1,r} V_{n-1}^a(r,\bar{x'}) \qquad (3.9)
$$

η οποία προκύπτει από το μέρος i της επαγωγικής υπόθεσης και της συνθήκης 6. Επομένως, η (3.6) έχει αποδειχθεί για $x_j \in \{0,\dots,K_j - 1\}, j = 1,\dots,L$. Παρόμοια, αποδεικνύουμε την (3.6) εάν $x_j = K_j$ για κάποιες τιμές του $j \in \{1,\dots,L\}$. ■

Δεδομένου ότι ο χώρος καταστάσεων S είναι πεπερασμένος, και η κατάσταση $(0,\bar{0})$ είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση κάτω από οποιαδήποτε σταθερή πολιτική, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί $v(s), s \in S$ και μία σταθερά g που ικανοποιούν τις βέλτιστες εξισώσεις μέσου κόστους. Για τις καταστάσεις $(i,\bar{x}), 0 \le i \le m,\ 0 \le x_j < K_j,\ j = 1,\dots,L,$ οι εξισώσεις βελτιστοποίησης λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$
\begin{aligned}
v(i,\bar{x}) = min\Bigg\{ &\min_{J\subseteq\{1,\dots,L\}} \Bigg[\sum_{j\in J} c_j(i) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j\notin J}(d_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C - g \\
&+ \sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} v(r,\bar{x'})\Bigg], v(PM,\bar{x})\Bigg\}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Αν $x_j = K_j$ για κάποιες τιμές του $j \in \{1, \dots, L\}$, πρέπει να αλλάξουμε στις παραπάνω εξισώσεις το $c_j(i)$ με το $\tilde{c}_j(i)$ για αυτές τις τιμές του j. Από το μέρος i του παραπάνω λήμματος έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Συνέπεια 3.1: $v(i, \bar{x}) \leq v(i+1, \bar{x}),\ \ 0 \leq i \leq\ m,\ \ 0 \leq x_j \leq K_j,\ \ j = 1, \dots, L.$

Η ακόλουθη πρόταση δίνει ένα χαρακτηριστικό της μορφής της βέλτιστης πολιτικής.

Πρόταση 3.1: Για σταθερά περιεχόμενα $x_1, \dots, x_L$ $(0 \leq x_j \leq K_j,\ j = 1, \dots, L)$ των αποθηκευτικών χώρων $B_1, \dots, B_L$, υπάρχει μία κρίσιμη κατάσταση λειτουργίας $i^*(x_1, \dots, x_L)$ έτσι ώστε η πολιτική που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου ενεργοποιεί μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης εάν και μόνο εάν η συνθήκη λειτουργίας $i \in \{0, \dots, m\}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με $i^*(x_1, \dots, x_L)$.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι για σταθερό $\bar{x} = (x_1, \dots, x_L)$, τέτοιο ώστε $0 \leq x_j \leq K_j, 1 \leq j \leq L$, η βέλτιστη πολιτική ξεκινά μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης στην κατάσταση $(i, \bar{x})$ όπου $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$V_n^a(PM, \bar{x}) \leq \min_{J \subseteq \{1,\dots,L\}} \left[\sum_{j \in J} c_j(i) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j \notin J} \left(d_j - x_j\right)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C - g + \sum_{r=0}^{m+1} p_{ir} v(r, \overline{x'}) \right]. \tag{3.11}$$

Για να δείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική προβλέπει μία προληπτική συντήρηση στην εγκατάσταση στην κατάσταση $(i+1, \bar{x})$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} V_n^a(PM, \bar{x}) \leq \min_{J \subseteq \{1,\dots,L\}} \Bigg[& \sum_{j \in J} c_j(i+1) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j \notin J} \left(d_j - x_j\right)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C - g \\ & + \sum_{r=0}^{m+1} p_{i+1,r} v(r, \overline{x'}) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Από τις Συνθήκες 1 και 6 και τη Συνέπεια 3.1, προκύπτει ότι η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (3.12) είναι μεγαλύτερη ή ίση προς τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (3.11). Συνεπώς, η (3.11) συνεπάγεται την (3.12). Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται παρομοίως αν $x_j = K_j$ για κάποιες τιμές του $j \in \{1, \dots, L\}$. ■

Παρατήρηση: Στην παραπάνω πρόταση, αν για σταθερά περιεχόμενα $x_1, \dots, x_L$ των αποθηκευτικών χώρων $i^*(x_1, \dots, x_L) = m + 1$, τότε η βέλτιστη πολιτική δεν εκκινεί ποτέ προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης κάθε φορά που ο αποθηκευτικός χώρος B_j, $j = 1, \dots, L$, περιέχει x_j μονάδες της πρώτης ύλης.

3.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1

Υποθέτουμε ότι: $L = 2, m = 5, a_I = 0.6, b_I = 0.4, c_p = 10, c_f = 15, K_1 = 5, K_2 = 20,$ $h_1 = 1, h_2 = 1, p_1 = 2, d_1 = 1, p_2 = 2, d_2 = 1, c_1(i) = 0.8(i + 1), \tilde{c}_1(i) = 0.5(i + 1),$ $c_2(i) = 0.7(i + 1), \tilde{c}_2(i) = 0.5(i + 1), 0 \le i \le m,$ και $p_{ir} = \frac{1}{m+2-i}, 0 \le i \le m,$ $i \le r \le m + 1.$

Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι αυτές οι πιθανότητες ικανοποιούν τη Συνθήκη 5. Έχουμε υπολογίσει τη βέλτιστη πολιτική εάν το C ισούται με 0.5 ή 15.5 εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών. Τα αριθμητικά μας αποτελέσματα επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.1.

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζουμε τους κρίσιμους αριθμούς $i^*(x_1, x_2), 0 \le x_1 \le 5,$ $0 \le x_2 \le 20$. Σε κάθε κελί του πίνακα, ο πρώτος αριθμός αντιστοιχεί στο $C = 0.5$ και ο δεύτερος αριθμός αντιστοιχεί στο $C = 15.5$. Το ελάχιστο μέσο κόστος βρέθηκε να είναι 7,49 αν το $C = 0.5$ το οποίο είναι, όπως αναμενόταν, σημαντικά μικρότερο από το ελάχιστο μέσο κόστος εάν το $C = 15.5$, το οποίο βρέθηκε να είναι 11,63.

$x_2 \backslash x_1$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	3, 6	3, 5	3, 5	4, 6	4, 6	4, 6
1	3, 5	2, 4	2, 4	1, 6	1, 4	1, 4
2	3, 5	2, 3	1, 2	0, 3	0, 3	2, 3
3	4, 6	1, 4	0, 3	0, 2	0, 2	3, 3

4	3, 6	1, 1	0, 0	0, 0	0, 0	3, 3
5	4, 6	1, 4	0, 0	0, 2	0, 1	3, 3
6	4, 6	1, 4	0, 2	0, 1	0, 1	2, 4
7	4, 6	0, 4	0, 2	0, 1	0, 1	2, 3
8	4, 6	0, 4	0, 2	0, 0	0, 0	1, 3
9	4, 6	0, 4	0, 2	0, 0	0, 0	2, 3
10	4, 6	0, 4	0, 2	0, 0	0, 0	1, 3
11	4, 6	0, 4	0, 2	0, 0	0, 0	1, 3
12	4, 6	0, 4	0, 2	0, 0	0, 0	1, 3
13	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 3
14	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 3
15	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 3
16	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 2
17	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 3
18	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 2
19	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 3
20	4, 6	0, 4	0, 1	0, 0	0, 0	1, 2

Πίνακας 3.1: *Οι κρίσιμοι αριθμοί $i^*(x_1, x_2)$ για $C = 0.5, 15.5$.*

Παρατηρούμε ότι για τα $x_1 \in \{0, \ldots, 5\}$ και $x_2 \in \{0, \ldots, 20\}$ ο κρίσιμος αριθμός που αντιστοιχεί στο $C = 0.5$ είναι μικρότερος ή ίσος με τον κρίσιμο αριθμό που αντιστοιχεί στο $C = 15.5$. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό, αν λάβουμε υπόψιν το κόστος που οφείλεται στην καθυστέρηση παραγωγής, καθώς παίρνει μεγάλες τιμές. Φαίνεται να είναι μειονεκτικό να είναι όλοι ή οι περισσότεροι αποθηκευτικοί χώροι κενοί όταν η συντήρηση πραγματοποιείται στην εγκατάσταση. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, είναι προτιμότερο να ξεκινήσει μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης μόνο εάν ο βαθμός φθοράς της είναι σχετικά υψηλός.

Παρατηρούμε επίσης ότι όταν το $C = 15.5$ και ο αποθηκευτικός χώρος B_1 ή ο B_2 είναι άδειος, η βέλτιστη πολιτική στις περισσότερες περιπτώσεις δεν ενεργοποιεί ποτέ προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης.

Για παράδειγμα $i^*(0,3) = 6 = m + 1$. Μπορεί επίσης να φανεί από τον Πίνακα 3.1 ότι το $i^*(x_1, x_2)$ δεν είναι μία μονότονη συνάρτηση σε σχέση με το $x_1 \in \{0, \dots, 5\}$ και σε σχέση με το $x_2 \in \{0, \dots, 20\}$ για σταθερό x_2 και x_1, αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι όταν $i < i^*(x_1, x_2), 0 < x_1 < 5, 0 < x_2 < 20$, η τιμή του αλγορίθμου βελτίωσης των πολιτικών δίνει τη βέλτιστη ενέργεια για τη λειτουργία της εγκατάστασης.

Για παράδειγμα, εάν $C = 0.5$, $x_1 = 0, x_2 = 18$, η βέλτιστη ενέργεια όταν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης είναι 3 είναι η μεταφορά της πρώτης ύλης 1 στον αποθηκευτικό χώρο 1, (δηλαδή, $J = \{1\}$). Αν $C = 15.5$, $x_1 = 1, x_2 = 1$, η βέλτιστη ενέργεια όταν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης είναι 2 είναι η μεταφορά της πρώτης ύλης 1 στον αποθηκευτικό χώρο 1 και η πρώτη ύλη 2 στον αποθηκευτικό χώρο 2 (δηλαδή το $J = \{1, 2\}$).

Παράδειγμα 3.2

Υποθέτουμε ότι $L = 2, m = 15, a_I = 0.3, b_I = 0.2, c_p = 10, c_f = 15, h_1 = 1, h_2 = 1,$ $C = 80, p_1 = 4, d_1 = 2, p_2 = 3, d_2 = 2, c_1(i) = 1.5(i + 1), \tilde{c}_1(i) = 0.75(i + 1),$ $c_2(i) = 2(i + 1), \tilde{c}_2(i) = (i + 1), 0 \leq i \leq m, p_{ir} = \frac{1}{m+2-i}, 0 \leq i \leq m, i \leq r \leq m + 1.$
Στον παρακάτω Πίνακα 3.2 παρουσιάζουμε το ελάχιστο μέσο κόστος g που λαμβάνεται από τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για το $K_1 \in \{1, \dots, 10\}$ και το $K_2 \in \{5, 10\}$.

K_1	$K_2 = 5$	$K_2 = 10$
1	51.20	21.17
2	48.55	48.49
3	47.55	47.50
4	45.94	45.88
5	45.60	45.56
6	44.87	44.83
7	44.78	44.75

8	44.49	44.45
9	44.46	44.43
10	44.39	44.37

Πίνακας 3.2: *Το ελάχιστο μέσο κόστος καθώς ποικίλει το K_1 ή το K_2*

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όσο το K_1 ή το K_2 αυξάνεται, το ελάχιστο μέσο κόστος μειώνεται. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό, διότι σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ευνοϊκό να έχουμε αποθηκευτικούς χώρους με μεγάλες χωρητικότητες, καθώς το κόστος C, λόγω καθυστέρησης της παραγωγής είναι σχετικά μεγάλο, ενώ οι πιθανότητες a_I, b_I των επιτυχημένων συντηρήσεων και των συντελεστών κόστους αποθήκευσης h_1, h_2 είναι σχετικά μικρές.

3.5 Το πρόβλημα όταν η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται στοχαστικά

Θεωρούμε το ίδιο σύστημα παραγωγής – αποθήκευσης (Σχήμα 3.1) όπως αυτό που εισήχθη στην ενότητα 3.1 με τις ακόλουθες τροποποιήσεις:

i. Η εγκατάσταση είναι πάντα σε κατάσταση λειτουργίας, ενώ η μονάδα παραγωγής μπορεί να παρουσιάσει επιδείνωση όσο εξελίσσεται ο χρόνος και

ii. όσο οι αποθηκευτικοί χώροι B_j, $j = 1,\ldots,L$, δεν είναι άδειοι και η μονάδα παραγωγής είναι σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής μπορεί να τραβήξει πρώτη ύλη j από τους αποθηκευτικούς χώρους B_j με σταθερό ρυθμό $d_j(> p_j)$ μονάδες πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου. Όταν οι αποθηκευτικοί χώροι B_j είναι άδειοι και η μονάδα παραγωγής είναι σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής μειώνει τον ρυθμό έλξης από d_j σε p_j.

Υποθέτουμε ότι η μονάδα παραγωγής παρακολουθείται σε ίσες, διακριτές χρονικές στιγμές $\tau = 0,1,\ldots$, και ταξινομείται σε μία από τις $n+2$ καταστάσεις $0,\ldots,n+1$ οι οποίες περιγράφουν το βαθμό επιδείνωσής του. Υποθέτουμε ότι η κατάσταση λειτουργίας i είναι καλύτερη από την κατάσταση λειτουργίας $i+1$. Ο βαθμός επιδείνωσης 0 σημαίνει ότι η μονάδα παραγωγής είναι άριστη (ή λειτουργεί τόσο καλά σαν καινούρια), ενώ ο βαθμός επιδείνωσης $n+1$ σημαίνει ότι η μονάδα παραγωγής δεν λειτουργεί και δεν μπορεί να τραβήξει την πρώτη ύλη από τους αποθηκευτικούς χώρους. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $1,\ldots,n$ είναι λειτουργικές.

Αν ο βαθμός επιδείνωσης τη χρονική στιγμή τ είναι i τότε η συνθήκη λειτουργίας τη χρονική στιγμή $\tau+1$ θα είναι r με πιθανότητα q_{ir}. Η πιθανότητα ότι η διαδικασία φθοράς της μονάδας παραγωγής φτάνει τελικά στην κατάσταση αποτυχίας $n+1$ από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη λειτουργίας i φαίνεται να είναι μη μηδενική. Εάν σε μία χρονική στιγμή τ η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση βλάβης $n+1$, μία διορθωτική συντήρηση είναι υποχρεωτική. Εάν διαπιστωθεί ότι βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση λειτουργίας $i \leq n$, η προληπτική συντήρηση είναι προαιρετική. Η μονάδα παραγωγής δεν λειτουργεί όταν είναι υπό προληπτική συντήρηση και δεν τραβάει πρώτη ύλη από τους αποθηκευτικούς χώρους. Όταν μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση διενεργείται και οι αποθηκευτικοί χώροι B_j, $j = 1, \dots, L$, περιέχουν x_j μονάδες της πρώτης ύλης j, η εγκατάσταση μεταφέρει $\min(p_j, K_j - x_j)$ μονάδες πρώτης ύλης j στους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου. Οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι συντήρησης (που εκφράζονται σε μονάδες χρόνου) κατανέμονται γεωμετρικά με πιθανότητα επιτυχίας a_p και b_p, αντίστοιχα. Και οι δύο συντηρήσεις θέτουν την μονάδα παραγωγής στην άριστη κατάσταση 0. Ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι το σύνολο:

$$\tilde{S} = \{0, \dots, n+1, PM\} \times \{0, \dots, K_1\} \times \cdots \times \{0, \dots, K_L\},$$

όπου PM αντιπροσωπεύει την κατάσταση κατά την οποία η μονάδα παραγωγής βρίσκεται υπό προληπτική συντήρηση. Οι πιθανές ενέργειες είναι οι ίδιες με εκείνες που εξετάζονται στο πρόβλημα που μελετήθηκε στην ενότητα 3.1 με την ενέργεια $J \subseteq \{1, \dots, L\}$ να είναι η ενέργεια της έλξης των πρώτων υλών από τους αποθηκευτικούς χώρους B_j, $j \in J$. Εάν σε μία χρονική στιγμή τ η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας $i \in \{0, \dots, n\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε την ενέργεια της έναρξης μιας προληπτικής συντήρησης είτε την ενέργεια $J \subseteq \{1, \dots, L\}$.

Η δομή του κόστους περιλαμβάνει:

- τα λειτουργικά κόστη της μονάδας παραγωγής
- το κόστος αποθήκευσης
- τα κόστη συντήρησης
- τα κόστη που οφείλονται στην καθυστέρηση παραγωγής και
- τα κόστη ποινής.

Τα κόστη αποθήκευσης h_j, $j \in \{1, \dots, L\}$, και τα κόστη συντήρησης c_p, c_f ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο πρόβλημα που μελετήθηκε παραπάνω. Εάν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι $i \in \{0, \dots, n\}$ και οι αποθηκευτικοί χώροι B_j, $j \in \{1, \dots, L\}$, δεν είναι άδειοι (ή άδειοι), το κόστος της έλξης d_j (ή p_j) μονάδων πρώτης ύλης j

από τους αποθηκευτικούς χώρους B_j κατά τη διάρκεια μίας μονάδας χρόνου είναι ίσο με $c_j(i)$ (ή $\tilde{c}_j(i)$). Υποθέτουμε ότι το κόστος που οφείλεται στην καθυστέρηση της παραγωγής, όσο διαρκεί η συντήρηση της παραγωγικής μονάδας, είναι ίσο με $C > 0$. Επομένως, αν σε μία χρονική στιγμή τ η ενέργεια $J \subseteq \{1,\ldots,L\}$ επιλέγεται και το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου B_j, $j = 1,\ldots,L$, είναι $x_j \in \{0,\ldots,K_j\}$, τότε το κόστος που οφείλεται στην καθυστέρηση της παραγωγής έως τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ ισούται με

$$C\left(\sum_{j\notin J} d_j + \sum_{j\in J}(d_j - p_j - x_j)^+\right)\bigg/\sum_{j=1}^{L} d_j\,, \quad \text{όπου } (d_j - p_j - x_j)^+ = \max\bigl(d_j - p_j - x_j, 0\bigr).$$

Είναι η μη διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης $j \in J$ κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου.

Το κόστος ποινής ανά μονάδα χρόνου ισούται με $P_j > 0, j = 1,\ldots,L$, επιβάλλεται για κάθε μονάδα της πρώτης ύλης j που δεν αποθηκεύεται σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο B_j κατά τη διάρκεια μιας διορθωτικής ή προληπτικής συντήρησης της μονάδας παραγωγής όταν οι αποθηκευτικοί χώροι B_j είναι πλήρεις. Αυτό το κόστος προκύπτει λόγω της αναγκαίας μεταφοράς και αποθήκευσης της πρώτης ύλης σε άλλο μέρος μέχρι την ολοκλήρωση της συντήρησης. Υποθέτουμε ότι οι Συνθήκες 1 – 5 για τη δομή του κόστους, που αναφέρθηκαν για το πρόβλημα που μελετήσαμε παραπάνω, είναι έγκυρες εάν αντικαταστήσουμε το b_I με b_p, το a_I με a_p, και το m με n.

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή διαδικασία λήψης αποφάσεων διακριτού χρόνου στην οποία επιδιώκουμε να βρούμε μία στάσιμη πολιτική η οποία να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

Δεδομένου ότι ο χώρος καταστάσεων $\tilde{S}$ είναι πεπερασμένος και η κατάσταση $(0, K_1,\ldots,K_L)$ είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη κατάσταση υπό οποιαδήποτε σταθερή πολιτική, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί $w(s), s \in S$ και μια σταθερά g που ικανοποιεί τις βέλτιστες εξισώσεις μέσου κόστους. Για τις καταστάσεις $(i,\bar{x}), 0 \le i \le n, 0 < x_j \le K_j, j = 1,\ldots,L$, οι εξισώσεις βελτιστοποίησης έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$w(i,\bar{x}) = min\left\{\min_{J\subseteq\{1,\ldots,L\}} A(J), w(PM,\bar{x})\right\}, \tag{3.13}$$

όπου

$$A(J) = \sum_{j\in J} c_j(i) + \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + \frac{\sum_{j\notin J} d_j + \sum_{j\in J}(d_j - p_j - x_j)^+}{\sum_{j=1}^{L} d_j} C + \sum_{j\notin J} P_j\,(p_j + x_j - K_j)^+ - g$$
$$+ \sum_{r=0}^{m+1} q_{ir}\, w(r, \bar{x}'), \qquad (3.14)$$

$$w(PM, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{L} h_j x_j + C + \sum_{j=1}^{L} P_j \left(p_j + x_j - K_j\right)^+ - g$$
$$+ apw(0, \min(x_1 + p_1, K_1), \dots, \min(x_L + p_L, K_L))$$
$$+(1 - ap) w(PM, \min(x_1 + p_1, K_1), \dots, \min(x_L + p_L, K_L)) \qquad (3.15)$$

Αν $x_j = 0$ για ορισμένες τιμές του $j \in \{1, \dots, L\}$, πρέπει να αλλάξουμε στην (3.14) το $c_j(i)$ με το $\tilde{c}_j(i)$ για αυτές τις τιμές. Σημειώστε ότι το $\bar{x}'$στην (3.14) είναι ένα διάνυσμα με L συνιστώσες στις οποίες η $j - o\sigma\tau$ή συνιστώσα είναι ίση με $\left(x_j + p_j - d_j\right)^+$ αν $j \in J$, ενώ, αν $j \notin J$, είναι ίσο με $\left(x_j - d_j\right)^+$.

3.6 Αριθμητικά Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.3

Υποθέτουμε ότι $L = 2, K_1 = 7, K_2 = 10, n = 10, a_p = 0.6, b_p = 0.4, c_p = 0.4, c_f = 0.8$, $h_1 = 1, h_2 = 2, C = 0.5, P_1 = 1, P_2 = 1, p_1 = 1, d_1 = 2, p_2 = 1, d_2 = 2, c_1(i) = 2(i + 1)$, $\tilde{c}_1(i) = 1.5(i + 1), c_2(i) = 3(i + 1), \tilde{c}_2(i) = 2.5(i + 1), 0 \le i \le n$, και $p_{ir} = \frac{1}{n+2-i}$, $0 \le i \le n, i \le r \le n + 1$.

Υπολογίσαμε τη βέλτιστη πολιτική υλοποιώντας τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών. Το ελάχιστο μέσο κόστος διαπιστώθηκε ότι ήταν 15,67. Στον Πίνακα 3.3, παρουσιάζουμε τους κρίσιμους αριθμούς $i^*(x_1, x_2), 0 \le x_1 \le 7, 0 \le x_2 \le 10$.

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	2	6	7	7	7	6	4	2
1	8	9	9	9	9	9	8	8
2	9	10	10	10	10	10	9	9
3	10	10	10	10	10	10	10	1

4	10	10	10	10	10	10	10	10
5	10	10	10	10	10	10	10	10
6	10	10	10	10	10	10	10	10
7	10	10	10	10	10	10	10	10
8	10	10	10	10	10	10	10	10
9	8	8	9	9	9	9	9	9
10	3	4	4	5	5	5	4	3

Πίνακας 3.3: *Οι κρίσιμοι αριθμοί* $i^*(x_1, x_2), 0 \leq x_1 \leq 7, 0 \leq x_2 \leq 10$

Μπορούμε να δούμε από τον Πίνακα 3.3 ότι το $i^*(x_1, x_2)$ δεν είναι μονότονη συνάρτηση ως προς το $x_1 \in \{0, \dots, 7\}$ ή ως προς το $x_2 \in \{0, \dots, 10\}$, αντίστοιχα. Όταν $i < i^*(x_1, x_2)$, $0 \leq x_1 \leq 7, 0 \leq x_2 \leq 10$, ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών μας δίνει τη βέλτιστη ενέργεια για τη λειτουργία της μονάδας παραγωγής.

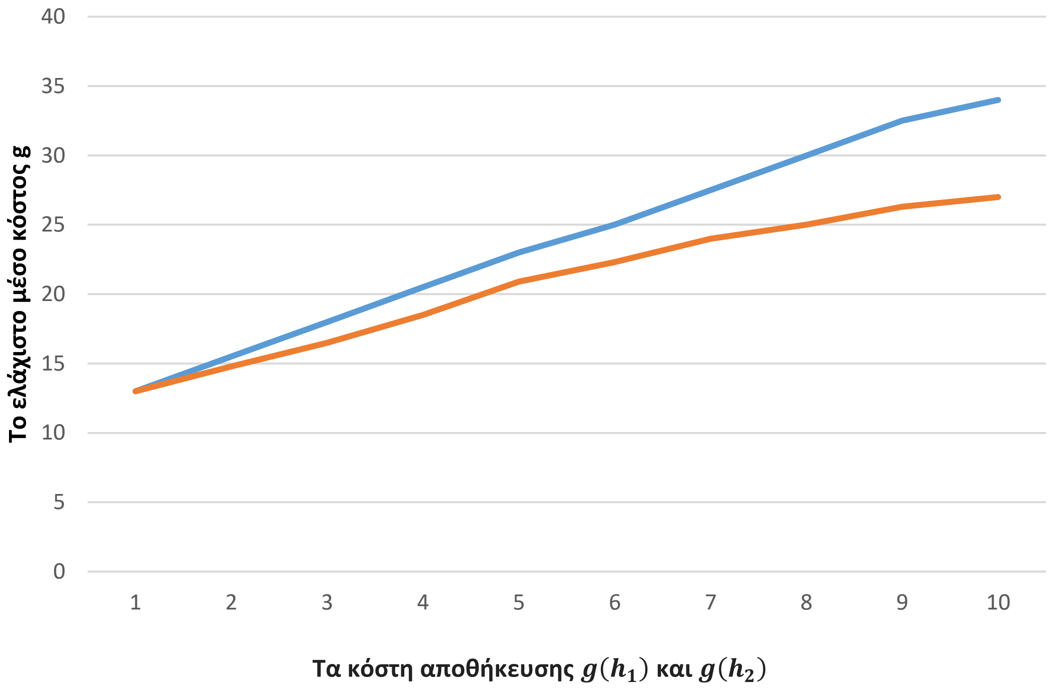
Για παράδειγμα, εάν $x_1 = 0, x_2 = 9$, όταν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης είναι $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, η βέλτιστη ενέργεια είναι να τραβήξουμε την πρώτη ύλη 1 από τον αποθηκευτικό χώρο B_1 και την πρώτη ύλη 2 από τον αποθηκευτικό χώρο B_2 (δηλαδή $J = \{1,2\}$), ενώ, όταν η συνθήκη λειτουργίας είναι $i \in \{5, 6, 7\}$, η βέλτιστη ενέργεια είναι να τραβήξουμε μόνο την πρώτη ύλη 2 από τον αποθηκευτικό χώρο B_2 (δηλαδή $J = \{2\}$).

Παράδειγμα 3.4

Υποθέτουμε ότι $L = 2, K_1 = 5, K_2 = 15, n = 10, a = 0.6, b = 0.4, c_p = 0.5, c_f = 0.8$, $C = 0.5, P_1 = 1, P_2 = 1, p_1 = 1, d_1 = 2, p_2 = 1, d_2 = 2, c_1(i) = 2(i + 1)$, $\tilde{c}_1(i) = 1.5(i + 1), c_2(i) = 3(i + 1), \tilde{c}_2(i) = 2.5(i + 1), 0 \leq i \leq n$, και $p_{ir} = \frac{1}{n+2-i}$, $0 \leq i \leq n, i \leq r \leq n + 1$.

Στο Σχήμα 3.2, παρουσιάζουμε το γράφημα του ελάχιστου μέσου κόστους $g(h_1)$ ως συνάρτηση του $h_1 \in \{1, \dots, 10\}$, αν $h_2 = 1$, και το γράφημα του ελάχιστου μέσου κόστους $g(h_2)$ ως συνάρτηση του $h_2 \in \{1, \dots, 10\}$, αν $h_1 = 1$.

Σχήμα 3.2: Τα ελάχιστα μέσα κόστη $g(h_1)$ και $g(h_2)$



Η κόκκινη γραμμή αντιπροσωπεύει το $g(h_1)$ και η μπλε γραμμή αντιπροσωπεύει το $g(h_2)$. Παρατηρούμε ότι το $g(h_i), i = 1,2$, αυξάνεται όσο αυξάνεται το h_i. Η αύξηση του ελάχιστου μέσου κόστους είναι πιο έντονη όταν αυξάνεται το h_2. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου B_2 είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την χωρητικότητα του B_1 αποθηκευτικού χώρου.

3.7 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε δύο Μαρκοβιανά μοντέλα αποφάσεων διακριτού χρόνου για τη βέλτιστη κατάσταση μιας προληπτικής συντήρησης ενός συστήματος παραγωγής που αποτελείται από δύο μηχανές και L ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους.

Η πρώτη μηχανή μεταφέρει L διαφορετικές πρώτες ύλες στους αποθηκευτικούς χώρους, και το δεύτερο μηχάνημα αντλεί τις πρώτες ύλες από τους αποθηκευτικούς χώρους. Η δεύτερη μηχανή θεωρείται η μονάδα παραγωγής που συναρμολογεί τις πρώτες ύλες για να παράγει το τελικό προϊόν. Στο πρώτο μοντέλο, θεωρείται ότι μόνο το πρώτο μηχάνημα επιδεινώνεται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου, ενώ η μονάδα παραγωγής είναι πάντα σε κατάσταση λειτουργίας.

Είναι δυνατή η παρακολούθηση του πρώτου μηχανήματος σε ίσες, διακριτές χρονικές περιόδους και η ταξινόμησή του σε μία κατάσταση λειτουργίας που περιγράφει το επίπεδο φθοράς του. Αν το πρώτο μηχάνημα βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας, πρέπει να ξεκινήσει η διορθωτική συντήρηση, διαφορετικά μία προληπτική συντήρηση μπορεί να πραγματοποιηθεί ή η ενέργεια μεταφοράς πρώτων υλών σε οποιοδήποτε υποσύνολο των L αποθηκευτικών χώρων μπορεί να επιλεγεί. Οι συντηρήσεις φέρνουν το πρώτο μηχάνημα στην τέλεια κατάστασή του.

Στο δεύτερο μοντέλο θεωρείται ότι, μόνο η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται με την πάροδο του χρόνου, και το πρώτο μηχάνημα είναι πάντα σε λειτουργική κατάσταση. Είναι δυνατό να καθοριστεί το επίπεδο της επιδείνωσης της μονάδας παραγωγής μετά την επιθεώρησή της σε ίσες, διακριτές χρονικές περιόδους. Αν η μονάδα παραγωγής βρίσκεται σε κατάσταση αποτυχίας, πρέπει να ξεκινήσει μία διορθωτική συντήρηση, σε διαφορετική περίπτωση μπορεί να ξεκινήσει μία προληπτική συντήρηση ή η ενέργεια ώστε να τραβήξει τις πρώτες ύλες από οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου των L αποθηκευτικών χώρων μπορεί να επιλεγεί. Και οι δύο συντηρήσεις φέρνουν την παραγωγική μονάδα στην τέλεια κατάστασή της.

Και στα δύο μοντέλα θεωρήσαμε το πρόβλημα του καθορισμού της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Αν οι χρόνοι συντήρησης είναι γεωμετρικά κατανεμημένοι, αποδείξαμε ότι, και στα δύο μοντέλα, η βέλτιστη πολιτική είναι μονότονη, δηλαδή, για σταθερά περιεχόμενα των αποθηκευτικών χώρων ορίζεται μία προληπτική συντήρηση του πρώτου μηχανήματος ή της μονάδας παραγωγής εάν και μόνο εάν ο βαθμός επιδείνωσης υπερβεί κάποιο κρίσιμο επίπεδο.

Κεφάλαιο 4

Βέλτιστη προληπτική συντήρηση ενός συστήματος με συνεχείς χρόνους επισκευής και περιόδους αδράνειας

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετασθούν δύο παρόμοια μοντέλα για τη συντήρηση ενός συστήματος παραγωγής – αποθήκευσης. Και στα δύο μοντέλα, μία εγκατάσταση που παράγει εισόδους παρέχει έναν αποθηκευτικό χώρο με ένα ακατέργαστο υλικό και μία μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο. Η εγκατάσταση στο πρώτο μοντέλο και η μονάδα παραγωγής στο δεύτερο μοντέλο, επιδεινώνονται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου και εξετάζεται το πρόβλημα της βέλτιστης προληπτικής συντήρησής τους.

Στο Μοντέλο 1, μία επιδεινούμενη εγκατάσταση παρέχει έναν αποθηκευτικό χώρο με την πρώτη ύλη και μία μονάδα παραγωγής που τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο με σταθερό ρυθμό. Στο Μοντέλο 2, η πρώτη ύλη μεταφέρεται με σταθερό ρυθμό στον αποθηκευτικό χώρο και η επιδεινούμενη μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο. Αν η εγκατάσταση στο Μοντέλο 1 και η μονάδα παραγωγής στο Μοντέλο 2 διαπιστωθούν ότι βρίσκονται σε κακή κατάσταση, πρέπει να αρχίσει η διορθωτική συντήρηση, ενώ, αν βρεθεί ότι είναι σε λειτουργική κατάσταση, μπορεί να ξεκινήσει μία προληπτική συντήρηση.

Η δομή κόστους για την εγκατάσταση στο Μοντέλο 1, και για τη μονάδα παραγωγής στο Μοντέλο 2, περιλαμβάνει:

- το λειτουργικό κόστος
- τα κόστος συντήρησης
- το κόστος αποθήκευσης
- το κόστος έλλειψης
- τα κόστη ποινής και
- το κόστος λόγω της χαμένης παραγωγής.

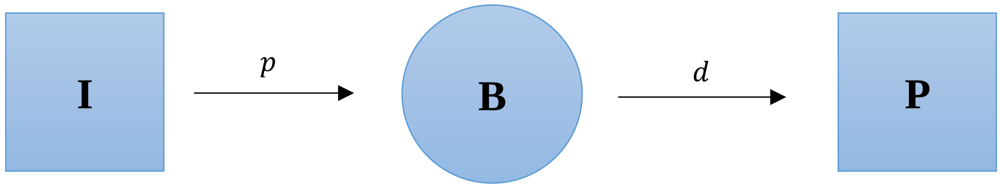
Στο πρώτο μοντέλο, θεωρείται ότι η εγκατάσταση, μετά την ολοκλήρωση της συντήρησής της, παραμένει σε αδράνεια έως ότου ο αποθηκευτικός χώρος εκκενωθεί, ενώ στο δεύτερο μοντέλο, θεωρείται ότι η μονάδα παραγωγής, μετά την ολοκλήρωση της συντήρησής της, παραμένει αδρανής μέχρι να γεμίσει ο αποθηκευτικός χώρος.

Οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της εγκατάστασης στο πρώτο μοντέλο και οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της μονάδας παραγωγής στο δεύτερο μοντέλο είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Η βέλτιστη πολιτική είναι πάλι μονότονη και στα δύο μοντέλα. Ωστόσο, οι αυστηρές αποδείξεις φαίνεται να είναι δύσκολες και στα δύο μοντέλα. Οι κατάλληλες ημιμαρκοβιανές διαδικασίες λήψης αποφάσεων είναι κατασκευασμένες και τα αριθμητικά αποτελέσματα παρέχουν ισχυρή απόδειξη ότι οι βέλτιστες πολιτικές μέσου κόστους είναι και πάλι μονότονες και στα δύο μοντέλα. Το μέσο κόστος μιας μονότονης πολιτικής υπολογίζεται με ακρίβεια και στα δύο μοντέλα εφαρμόζοντας το συνηθισμένο αναγεννητικό επιχείρημα.

Σε μια κατάλληλη δομή κόστους, εξετάζονται οι ημιμαρκοβιανές διαδικασίες λήψης αποφάσεων και για τα δύο μοντέλα, προκειμένου να βρεθεί μία πολιτική που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

4.2 Περιγραφή του Μοντέλου 1

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής – αποθήκευσης το οποίο αποτελείται από μία εγκατάσταση (I) η οποία παρέχει έναν αποθηκευτικό χώρο (B) με πρώτη ύλη και μία μονάδα παραγωγής (P) η οποία τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο με σταθερό ρυθμό ίσο με d μονάδες του υλικού ανά μονάδα χρόνου. Ο αποθηκευτικός χώρος έχει πεπερασμένη χωρητικότητα που είναι ίση με K μονάδες των πρώτων υλών και έχει κατασκευαστεί μεταξύ της μονάδας παραγωγής και της εισόδου εγκατάστασης παραγωγής για την αντιμετώπιση απροσδόκητων βλαβών της εγκατάστασης. Όσο η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου δεν είναι πλήρης, η εγκατάσταση λειτουργεί με σταθερό ρυθμό p μονάδων της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου $(p > d)$ και η πλεονάζουσα παραγωγή αποθηκεύεται στον αποθηκευτικό χώρο. Όσο συμπληρώνεται ο αποθηκευτικός χώρος, η εγκατάσταση μειώνει την ταχύτητα από p σε d. Τα τρία στοιχεία του συστήματος απεικονίζονται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: *Το σύστημα παραγωγής*

Υποθέτουμε ότι η εγκατάσταση επιδεινώνεται όσο ο χρόνος εξελίσσεται και παρακολουθείται σε ίσα, διακριτά χρονικά διαστήματα $\tau = 0,1, \dots$ και πρέπει να ληφθεί απόφαση σε κάθε χρονική στιγμή. Υπάρχουν τρείς πιθανές ενέργειες $a \in \{0,1,2\}$ που επιλέγονται σε κάθε χρονική στιγμή. Οι πιθανές ενέργειες είναι:

(i) η ενέργεια που επιτρέπει τη λειτουργία στην εγκατάσταση $(a = 0)$

(ii) η ενέργεια της έναρξης μιας προληπτικής συντήρησης της εγκατάστασης $(a = 1)$

(iii) η ενέργεια της έναρξης μιας διορθωτικής συντήρησης της εγκατάστασης $(a = 2)$.

Η κατάσταση της εγκατάστασης σε κάθε χρονική στιγμή απόφασης βρίσκεται σε μία από τις $m + 2$ καταστάσεις $0, 1, \dots, m + 1$, οι οποίες περιγράφουν το βαθμό επιδείνωσής της. Ο βαθμός επιδείνωσης 0 αντιπροσωπεύει μία νέα εγκατάσταση πριν από οποιαδήποτε φθορά ενώ η κατάσταση $m + 1$ αντιπροσωπεύει την κατάσταση αποτυχίας της εγκατάστασης. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $1, \dots, m$ είναι λειτουργικές. Αν κάποια χρονική στιγμή τ η κατάσταση της εγκατάστασης είναι λειτουργική και το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου είναι $x < K$, τότε το περιεχόμενό του την επόμενη χρονική στιγμή $\tau + 1$ θα είναι $min(x + p - d, K)$. Αυτή η αύξηση του περιεχομένου του αποθηκευτικού χώρου, θα συμβεί ακόμη και αν η κατάσταση της εγκατάστασης την χρονική στιγμή $\tau + 1$, είναι η κατάσταση αποτυχίας $m + 1$.

Η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση λειτουργίας i τη χρονική στιγμή τ σε μία κατάσταση λειτουργίας j τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ ισούται με p_{ij}. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να φτάσει στην κατάσταση $m + 1$ από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση i είναι μη μηδενική. Αν σε μία χρονική στιγμή η εγκατάσταση βρίσκεται στην κατάσταση λειτουργίας $m + 1$, τότε η ενέργεια $a = 2$ είναι υποχρεωτική. Αν σε μία χρονική περίοδο η εγκατάσταση βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1, \dots, m\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε την ενέργεια $a = 0$ είτε την ενέργεια $a = 1$.

Και η προληπτική και η διορθωτική συντήρηση δεν μπορούν να διακοπούν, και επαναφέρουν την εγκατάσταση στην τέλεια κατάσταση λειτουργίας 0. Υποτίθεται ότι οι προληπτικοί και οι διορθωτικοί χρόνοι επισκευής είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1(x)$ και $f_2(x)$, αντίστοιχα.

Οι συντελεστές κόστους κατά τη διάρκεια μιας προληπτικής και μιας διορθωτικής συντήρησης είναι ίσοι με c_p και c_f, αντίστοιχα. Εάν σε μία χρονική στιγμή η εγκατάσταση βρίσκεται στην κατάσταση $i \in \{1, \dots, m\}$ και επιλεχθεί η ενέργεια $a = 0$, το λειτουργικό κόστος πραγματοποιείται μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή, και είναι ίσο με c_i, εάν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι πλήρης, ή $\tilde{c}_i$ εάν ο αποθηκευτικός χώρος είναι πλήρης.

Υποθέτουμε ότι, κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε συντήρησης της εγκατάστασης (προληπτικής ή διορθωτικής), ο αποθηκευτικός χώρος δεν παρέχεται με πρώτη ύλη. Εάν κατά τη διάρκεια μιας προληπτικής ή διορθωτικής συντήρησης ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός, τότε σταματά η λειτουργία της μονάδας παραγωγής.

Ένα κόστος έλλειψης πραγματοποιείται όταν μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση εκτελείται και ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός. Η μονάδα κόστους έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η τιμή του κόστους έλλειψης να είναι ίση με τη ζήτηση d για κάθε μονάδα χρόνου κατά την οποία μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση πραγματοποιείται. Υποθέτουμε επίσης ότι, το κόστος της κράτησης μιας μονάδας της πρώτης ύλης στον αποθηκευτικό χώρο για μία μονάδα χρόνου είναι ίσο με $h > 0$.

Υποθέτουμε ότι, αν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι κενός όταν ολοκληρωθεί μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση, η εγκατάσταση παραμένει αδρανής μέχρι να εκκενωθεί ο αποθηκευτικός χώρος. Μόλις εκκενωθεί, η εγκατάσταση ξεκινά ξανά με την παροχή του αποθηκευτικού χώρου με πρώτη ύλη με ρυθμό ίσο με p μονάδες της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου. Έστω m_{PM} και m_{CM} οι αναμενόμενοι χρόνοι που απαιτούνται για μία προληπτική και διορθωτική συντήρηση, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες πιθανές συνθήκες για τη δομή του κόστους και τις πιθανότητες μετάβασης:

Συνθήκη 1: $c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_m$, $\tilde{c}_0 \leq \tilde{c}_1 \leq \cdots \leq \tilde{c}_m$. Δηλαδή, όσο η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης επιδεινώνεται, τα λειτουργικά κόστη αυξάνονται.

Συνθήκη 2: $\tilde{c}_i \leq c_i$, $0 \leq i \leq m$. Δηλαδή, η μείωση της ταχύτητας από p μονάδες της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου σε d μονάδες της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου της εγκατάστασης, μόλις γεμίσει ο αποθηκευτικός χώρος, προκαλεί μείωση του λειτουργικού κόστους.

Συνθήκη 3: $m_{PM} \le m_{CM}$. Δηλαδή, ο αναμενόμενος χρόνος που απαιτείται για μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης είναι μικρότερος από τον αναμενόμενο χρόνο για μία διορθωτική συντήρηση.

Συνθήκη 4: $c_p \le c_f$. Δηλαδή, το κόστος της προληπτικής συντήρησης δεν υπερβαίνει το κόστος της διορθωτικής συντήρησης.

Συνθήκη 5: Για κάθε $k = 0, \dots, m+1$, η συνάρτηση:

$$D_k(i) = \sum_{j=k}^{m+1} p_{ij}$$

είναι αύξουσα ως προς $i, 0 \le i \le m$.

Για το παρόν πρόβλημα, ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι το σύνολο:

$$S = \{0,1,\dots,m+1\} \times \{0,\dots,K\},$$

όπου $(i,x) \in S$ είναι η κατάσταση στην οποία i είναι η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης και x είναι το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου. Θεωρούμε μια ημιμαρκοβιανή διαδικασία απόφασης στην οποία επιδιώκουμε να βρούμε μία πολιτική που να ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

Οι στιγμές απόφασης στο πρόβλημά μας είναι οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σύστημα εισέρχεται σε μια κατάσταση S. Έστω $p_{sl}(a), a \in \{0,1,2\}$, να είναι η πιθανότητα όπου η κατάσταση του συστήματος την επόμενη στιγμή απόφασης θα είναι η κατάσταση $l \in S$, αν η παρούσα κατάσταση είναι η $s \in S$ και επιλεχθεί η ενέργεια $a \in \{0,1,2\}$, και έστω $T(s,a)$ και $C(s,a)$ να είναι ο αναμενόμενος χρόνος και το κόστος μετάβασης, αντίστοιχα. Αυτές οι ποσότητες δίνονται παρακάτω:

$$p_{(i,x)(j,\min(x+p-d,K))}(0) = p_{ij}, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le j \le m+1, \;\; 0 \le x \le K,$$

$$T\big((i,x),0\big) = 1, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le x \le K,$$

$$C\big((i,x),0\big) = c_i + hx, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le x < K,$$

$$C\big((i,K),0\big) = \tilde{c}_i + hK, \;\; 0 \le i \le m,$$

$$p_{(i,x)(0,0)}(1) = 1, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le x \le K,$$

$$T\big((i,x),1\big) = m_{PM} + \int_0^{\frac{x}{d}} \left(\frac{x}{d} - t\right) f_1(t)dt, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le x \le K,$$

$$C\big((i,x),1\big) = c_p m_{PM} + \frac{hx^2}{2d} + \int_{\frac{x}{d}}^{\infty} (td - x)\, f_1(t)dt, \;\; 0 \le i \le m, \;\; 0 \le x \le K, \tag{4.1}$$

$$p_{(m+1,x)(0,0)}(2) = 1, \qquad 0 \le x \le K,$$

$$T\big((m+1,x),2\big) = m_{CM} + \int_{0}^{\frac{x}{d}} \Big(\frac{x}{d} - t\Big) f_2(t)dt, \;\; 0 \le x \le K,$$

$$C\big((m+1,x),2\big) = c_f m_{CM} + \frac{hx^2}{2d} + \int_{\frac{x}{d}}^{\infty} (td - x)\, f_2(t)dt, \;\; 0 \le x \le K.$$

Θα εξηγήσουμε λεπτομερώς πώς προκύπτει η (4.1). Υποθέτουμε ότι η κατάσταση του συστήματος σε μία στιγμή απόφασης είναι η κατάσταση $(i,x), 0 \le i \le m, 0 \le x \le K$. Εάν η ενέργεια $a = 1$ της προληπτικής συντήρησης αρχίζει, τότε η κατάσταση του συστήματος στην επόμενη στιγμή απόφασης θα είναι η κατάσταση (0,0). Το αναμενόμενο κόστος $C((i,x),1)$ αποτελείται από το αναμενόμενο κόστος συντήρησης, το αναμενόμενο κόστος συμμετοχής και την αναμενόμενη έλλειψη κόστους. Το αναμενόμενο κόστος συντήρησης ισούται με: $c_p m_{PM}$, το αναμενόμενο κόστος συμμετοχής ισούται με: $h\int_0^{x/d}(x - td)dt$ και η αναμενόμενη έλλειψη κόστους ισούται με: $\int_{x/\delta}^{\infty}(td - x)f_1(t)dt$. Αθροίζοντας τις παραπάνω τρεις εκφράσεις, λαμβάνουμε την (4.1).

4.3 Περιγραφή του Μοντέλου 2

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής στο οποίο η πρώτη ύλη μεταφέρεται σε έναν αποθηκευτικό χώρο (B) με σταθερό ρυθμό p μονάδων του υλικού ανά μονάδα χρόνου και μία μονάδα παραγωγής (P) τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο. Η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι σταθερή και θεωρείται ότι είναι ίση με K μονάδες της πρώτης ύλης. Η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται. Όσο ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι άδειος και η μονάδα παραγωγής είναι σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη με σταθερό ρυθμό d μονάδων του υλικού ανά μονάδα χρόνου. Υποθέτουμε ότι $d > p$. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός και η μονάδα παραγωγής είναι σε κατάσταση λειτουργίας, η μονάδα παραγωγής μειώνει τον ρυθμό έλξης από d σε p.

Η μονάδα παραγωγής επιδεινώνεται στοχαστικά με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτουμε ότι παρακολουθείται σε διακριτές, ίσες χρονικές περιόδους $\tau = 0,1, \dots$, και ταξινομείται σε μία από τις $m+2$ καταστάσεις $0,1,\dots,m+1$, οι οποίες περιγράφουν αυξανόμενα επίπεδα επιδείνωσης. Ο βαθμός επιδείνωσης 0 σημαίνει ότι η μονάδα παραγωγής είναι καινούργια ή λειτουργεί τόσο καλά σαν καινούρια, ενώ η κατάσταση $m+1$ σημαίνει ότι η μονάδα παραγωγής είναι σε κατάσταση αποτυχίας (εκτός λειτουργίας) και δεν μπορεί να τραβήξει την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $1,\dots,m$ είναι λειτουργικές.

Αν σε μια χρονική στιγμή τ η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι $i<m+1$ και ο αποθηκευτικός χώρος περιέχει $x>0$ μονάδες της πρώτης ύλης, τότε το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου τη χρονική στιγμή $\tau+1$ θα είναι $max\,(x+p-d,0)$. Αυτή η μείωση του περιεχομένου του αποθηκευτικού χώρου θα συμβεί ακόμα και αν η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής τη χρονική στιγμή $\tau+1$ βρίσκεται στην κατάσταση $m+1$. Αν σε μία χρονική στιγμή τ η κατάσταση της μονάδας παραγωγής είναι $i<m+1$ και ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός, τότε ο αποθηκευτικός χώρος θα παραμείνει άδειος την χρονική στιγμή $\tau+1$, δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή η μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο με ρυθμό p μονάδων της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου.

Υποθέτουμε ότι μία χρονική στιγμή τ η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής είναι i και το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου είναι x, τότε τη χρονική στιγμή $\tau+1$ η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής θα είναι j με πιθανότητα p_{ij}. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα φτάνοντας στην κατάσταση λειτουργίας $m+1$ από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση i είναι μη μηδενική.

Εάν η μονάδα παραγωγής σε μία χρονική περίοδο διαπιστωθεί ότι είναι σε οποιαδήποτε κατάσταση λειτουργίας $i, i\leq m$, μία προληπτική συντήρηση μπορεί να ξεκινήσει. Εάν εντοπιστεί η μονάδα παραγωγής σε μία χρονική περίοδο να είναι στην κατάσταση λειτουργίας $m+1$, τότε μία διορθωτική συντήρηση πρέπει να αρχίσει αμέσως. Και η προληπτική και η διορθωτική συντήρηση δεν μπορούν να διακοπούν, και επαναφέρουν τη μονάδα παραγωγής στην κατάσταση 0.

Οι προληπτικοί και οι διορθωτικοί χρόνοι επισκευής είναι τυχαίοι και υποθέτουμε ότι είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με γνωστή πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x)$ και $f_2(x)$, αντίστοιχα. Όταν μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής πραγματοποιείται, ο αποθηκευτικός χώρος παρέχεται με την πρώτη ύλη με σταθερό ρυθμό p μονάδων της πρώτης ύλης ανά μονάδα χρόνου έως ότου γεμίσει.

Όσο η προληπτική ή η διορθωτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής διαρκεί, η διαδικασία παραγωγής διακόπτεται. Υποθέτουμε ότι το οφειλόμενο κόστος στην χαμένη παραγωγή κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου κατά την οποία μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής εκτελείται είναι ίσο με $C > 0$. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι κενός και η μονάδα παραγωγής τραβά την πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο με ρυθμό d, δεν επιβαρύνουμε το κόστος λόγω της χαμένης παραγωγής. Ωστόσο, όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός, η μονάδα παραγωγής τραβά τη πρώτη ύλη από τον αποθηκευτικό χώρο με ρυθμό p που είναι μικρότερο από d. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι στην προκειμένη περίπτωση το κόστος λόγω της χαμένης παραγωγής κατά τη διάρκεια μιας μονάδας χρόνου είναι ίσο με $[(d-p)\ C]\ /\ d$. Το κόστος ποινής που ισούται με το $P > 0$ επίσης επιβάλλεται για κάθε μονάδα πρώτης ύλης που δεν έχει αποθηκευτεί στον αποθηκευτικό χώρο κατά τη διάρκεια μιας προληπτικής ή διορθωτικής συντήρησης της μονάδας παραγωγής όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι πλήρης. Αυτό το κόστος οφείλεται στην απαραίτητη εργασία για τη μεταφορά και την αποθήκευση της πρώτης ύλης σε έναν άλλο αποθηκευτικό χώρο μέχρι την ολοκλήρωση της συντήρησης.

Αν σε μία χρονική στιγμή η μονάδα παραγωγής βρίσκεται στην κατάσταση λειτουργίας $i, 0 \leq i \leq m$ και δεν γίνει προληπτική συντήρηση, ένα λειτουργικό κόστος πραγματοποιείται μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή το οποίο είναι ίσο με c_i εάν ο αποθηκευτικός χώρος δεν είναι άδειος, ή με $\tilde{c}_i$, εάν ο αποθηκευτικός χώρος είναι κενός. Όταν μία προληπτική ή διορθωτική επισκευή πραγματοποιείται, επιφέρει ένα κόστος επισκευής, το οποίο ισούται με c_p ή c_f, αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι το κόστος της κατοχής μιας μονάδας της πρώτης ύλης στον αποθηκευτικό χώρο για μία μονάδα χρόνου είναι ίση με $h > 0$.

Θεωρούμε ότι, αν το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου είναι μικρότερο από τις K μονάδες, όταν μία προληπτική ή διορθωτική συντήρηση ολοκληρωθεί, η μονάδα παραγωγής δεν επαναλαμβάνει τη λειτουργία της αμέσως, αλλά παραμένει αδρανής έως ότου ο αποθηκευτικός χώρος γεμίσει. Μόλις γεμίσει ο αποθηκευτικός χώρος, η μονάδα παραγωγής επαναλαμβάνει τη λειτουργία της κανονικά τραβώντας d μονάδες του ακατέργαστου υλικού ανά μονάδα χρόνου από τον αποθηκευτικό χώρο.

Υπάρχουν τρεις πιθανές ενέργειες $a \in \{0,1,2\}$.

- Η ενέργεια $a = 0$ (επιτρέπει τη μονάδα παραγωγής να λειτουργήσει),
- η ενέργεια $a = 1$ (ξεκινάει μία προληπτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής)
- η ενέργεια $a = 2$ (ξεκινάει μία διορθωτική συντήρηση της μονάδας παραγωγής).

Έστω m_{PM} και m_{CM} οι αναμενόμενοι χρόνοι που απαιτούνται για μία προληπτική και μία διορθωτική συντήρηση, αντίστοιχα. Για την επιδείνωση της παραγωγικής μονάδας, επιβάλλουμε τις ίδιες συνθήκες σχετικά με τη διάρθρωση του κόστους και τις πιθανότητες μετάβασης, όπως αυτές που αναφέρθηκαν για την επιδείνωση της εγκατάστασης στην προηγούμενη ενότητα για το Μοντέλο 1. Για αυτό το πρόβλημα, ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι το σύνολο: $S = \{0,1,\ldots,m+1\} \times \{0,\ldots,K\}$, όπου, $(i,x) \in S$ είναι η κατάσταση στην οποία, i είναι η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής και x είναι το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου. Και πάλι θεωρούμε μια ημιμαρκοβιανή διαδικασία λήψης αποφάσεων, στην οποία στοχεύουμε να βρούμε μία πολιτική που να ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου. Οι περίοδοι απόφασης σε αυτό το πρόβλημα είναι οι χρονικές περίοδοι που το σύστημα εισέρχεται σε μία κατάσταση στο S. Έστω $p_{sl}(a), a \in \{0,1,2\}$, να είναι η πιθανότητα ότι η κατάσταση του συστήματος την επόμενη περίοδο απόφασης θα είναι η κατάσταση $l \in S$, εάν η παρούσα κατάσταση είναι η $s \in S$ και επιλέγεται η ενέργεια $a \in \{0,1,2\}$, και έστω $T(s,a)$ και $C(s,a)$ ο αναμενόμενος χρόνος και το κόστος μετάβασης, αντίστοιχα. Αυτές οι ποσότητες δίνονται παρακάτω:

$$p_{(i,x)(j,\min(x+p-d,0))}(0) = p_{ij},\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le j \le m+1,\ \ 0 \le x \le K,$$

$$T\big((i,x),0\big) = 1,\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le x \le K,$$

$$C\big((i,x),0\big) = c_i + hx + \frac{[d-\min(d,x+p)]C}{d},\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 < x \le K,$$

$$C\big((i,0),0\big) = \tilde{c}_i + \frac{(d-p)C}{d},\ \ 0 \le i \le m,$$

$$p_{(i,x)(0,K)}(1) = 1,\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le x \le K,$$

$$T\big((i,x),1\big) = m_{PM} + \int_0^{\frac{(K-x)}{p}} \left(\frac{K-x}{p} - t\right) f_1(t)dt,\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le x \le K,$$

$$\begin{aligned} C\big((i,x),1\big) = c_p m_{PM} + CT\big((i,x),1\big) + P \int_{\frac{(K-x)}{p}}^{\infty} (x+tp-K)\, f_1(t)dt + \frac{h(K^2-x^2)}{2p} \\ + hK \int_{\frac{(K-x)}{p}}^{\infty} \left(t - \frac{K-x}{p}\right) f_1(t)dt,\ \ 0 \le i \le m,\ \ 0 \le x \le K, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$p_{(m+1,x)(0,K)}(2) = 1, \qquad 0 \le x \le K,$$

$$T\big((m+1,x),2\big) = m_{CM} + \int_0^{\frac{K-x}{p}} \left(\frac{K-x}{p} - t\right) f_2(t)dt, \ \ 0 \le x \le K,$$

$$C\big((m+1,x),2\big) = c_f m_{CM} + CT\big((m+1,x),2\big) + P \int_{\frac{(K-x)}{p}}^{\infty} (x+tp-K)\, f_2(t)dt +$$

$$\frac{h(K^2-x^2)}{2p} + hK \int_{\frac{(K-x)}{p}}^{\infty} \left(t - \frac{K-x}{p}\right) f_2(t)dt, \ \ 0 \le x \le K.$$

Θα εξηγήσουμε λεπτομερώς πώς προέρχεται η (4.2). Υποθέτουμε ότι η κατάσταση του συστήματος σε μία στιγμή απόφασης είναι η κατάσταση $(i,x), 0 \le i \le m, 0 \le x \le K$. Εάν η ενέργεια $a=1$ της προληπτικής συντήρησης αρχίζει, τότε η κατάσταση του συστήματος την επόμενη στιγμή απόφασης θα είναι η κατάσταση $(0,K)$. Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος ενός βήματος $C((i,x),1)$ αποτελείται από το αναμενόμενο κόστος συντήρησης, το αναμενόμενο χαμένο κόστος παραγωγής, το αναμενόμενο κόστος ποινής και το αναμενόμενο κόστος συμμετοχής. Το αναμενόμενο κόστος λόγω της προληπτικής συντήρησης και λόγω της χαμένης παραγωγής, μέχρι το σύστημα να φτάσει στην κατάσταση $(0,K)$, είναι ίσο με $c_p m_{PM}$ και με $CT((i,x),1)$, αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αναμενόμενο κόστος ποινής και το αναμενόμενο κόστος συμμετοχής, έως ότου η διαδικασία φτάσει στη κατάσταση $(0,K)$, είναι ίσο με

$$P \int_{(K-x)/p}^{\infty} (x+tp-K)\, f_1(t)dt \quad \text{και} \quad h \int_0^{(K-x)/p} (x+tp)dt + hK \int_{(K-x)/p}^{\infty} \left(t - \frac{K-x}{p}\right) f_1(t)dt$$

αντίστοιχα. Αθροίζοντας τις παραπάνω τέσσερις εκφράσεις, λαμβάνουμε την (4.2).

4.4 Υπολογισμός του μέσου κόστους στο πλαίσιο της μονότονης πολιτικής

Ας υποθέσουμε ότι η εγκατάσταση στο μοντέλο 1 και η μονάδα παραγωγής στο μοντέλο 2 δεν μπορούν να βελτιωθούν μόνες τους, δηλαδή $p_{ij}=0$ αν $i \in \{1,\dots,m\}$ και $j<i$. Στην περίπτωση αυτή, το μέσο κόστος μιας μονότονης πολιτικής (δηλαδή μιας πολιτικής, που για κάθε σταθερό περιεχόμενο $x \in \{0,\dots,K\}$ του αποθηκευτικού χώρου, ξεκινά μία προληπτική συντήρηση της εγκατάστασης στο μοντέλο 1 ή μία προληπτική συντήρηση της μονάδας

παραγωγής στο μοντέλο 2, αν και μόνο αν η κατάσταση λειτουργίας της εγκατάστασης στο μοντέλο 1 ή η κατάσταση λειτουργίας της μονάδας παραγωγής στο μοντέλο 2 είναι μεγαλύτερη ή ίση από ένα κρίσιμο επίπεδο $i(x)$), μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας το συνηθισμένο αναγεννητικό επιχείρημα (αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2).

Οι ακριβείς υπολογισμοί του μέσου κόστους επιτυγχάνονται, καθώς, και για τα δύο μοντέλα, οι διαδικασίες κάτω από μία μονότονη πολιτική, είναι διαδικασίες αναγέννησης, όπου οι επιτυχείς είσοδοι στην κατάσταση $(0,0)$ στο μοντέλο 1 και στην κατάσταση $(0, K)$ στο Μοντέλο 2, μπορούν να ληφθούν ως αναγεννητικές περίοδοι μεταξύ διαδοχικών κύκλων. Και για τα δύο μοντέλα, το μέσο κόστος μιας μονότονης πολιτικής μπορεί να υπολογιστεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση όπου οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής κατανέμονται γεωμετρικά με τις ακόλουθες διαφορές:

(i) Οι αναμενόμενοι χρόνοι έως ότου το σύστημα, κάτω από μία μονότονη πολιτική, να καταγραφεί στην κατάσταση $(0,0)$ στο Μοντέλο 1 ή στην κατάσταση $(0, K)$ στο μοντέλο 2, εάν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $(i, x), i(x) \leq i < m+1, 0 \leq x \leq K$, είναι τώρα ίσοι με το $T\ ((i, x), 1)$.

(ii) Οι αναμενόμενοι χρόνοι μέχρι το σύστημα, κάτω από μία μονότονη πολιτική, να καταγραφεί στην κατάσταση $(0,0)$ στο μοντέλο 1 ή στην κατάσταση $(0, K)$ στο Μοντέλο 2, εάν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $(m\ +1, x), 0 \leq x \leq K$, είναι ίσοι με $T\ ((m+1, x), 2)$.

(iii) Το αναμενόμενο κόστος έως ότου το σύστημα, κάτω από μία μονότονη πολιτική, εισέρχεται στην κατάσταση $(0,0)$ στο Μοντέλο 1 ή στην κατάσταση $(0, K)$ στο Μοντέλο 2, αν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $(i, x), i\ (x) \leq i < m+1, 0 \leq x \leq K$ είναι ίσο με $C\ ((i, x), 1)$.

(iv) Το αναμενόμενο κόστος μέχρι το σύστημα, κάτω από μία μονότονη πολιτική, εισέρχεται στην κατάσταση $(0,0)$ στο Μοντέλο 1 ή στην κατάσταση $(0, K)$ στο Μοντέλο 2, εάν η αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση $(m\ +1, x), 0 \leq x \leq K$, είναι ίσο με $C((m+1, x), 2)$.

4.5 Παραδείγματα

Στα παρακάτω αριθμητικά παραδείγματα, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για τον ακριβή υπολογισμό του ελάχιστου μέσου κόστους, με την εκτέλεση των αντίστοιχων προγραμμάτων Matlab.

Α. Για το μοντέλο 1

Για το Μοντέλο 1, παραθέτουμε δύο παραδείγματα και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι επισκευής της εγκατάστασης ακολουθούν την εκθετική και τη Weibull κατανομή, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.1

Υποθέτουμε ότι $m = 20, K = 10, p = 5, d = 3, h = 0.3,\ c_f = 1.5, c_p = 1, c_i = 0.1(i + 1)$, $\tilde{c}_i = 0.05(i + 1), 0 \leq i \leq m$. Υποθέτουμε ότι οι μη μηδενικές πιθανότητες μεταβάσεων $p_{ij} = (m + 2 - i)^{-1}, 0 \leq i, j \leq m + 1$ δίνονται από το $p_{ij} = (m + 2 - i)^{-1}, i \leq j \leq m + 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν η παρούσα κατάσταση της εγκατάστασης είναι i, τότε η επόμενη κατάσταση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο σύνολο $\{i, i + 1, \dots, m + 1\}$. Αυτές οι πιθανότητες ικανοποιούν τη Συνθήκη 5 αφού, για κάθε $k = 0, \dots, m + 1$, η ποσότητα

$$\sum_{j=k}^{m+1} p_{ij} = \frac{m + 2 - k}{m + 2 - i}$$

αυξάνεται για $0 \leq i \leq m$. Υποθέτουμε ότι οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της εγκατάστασης κατανέμονται εκθετικά με τις παραμέτρους $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_1(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) \ \text{ και } \ f_2(t) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)\,, \ t \geq 0,$$

αντίστοιχα. Επιλέγουμε $\lambda_1 = 0{,}5$ και $\lambda_2 = 0{,}125$. Σημειώνουμε ότι η Συνθήκη 3 ικανοποιείται από τη τιμή της Εκθετικής κατανομής με την παράμετρο $\lambda > 0$ ισούται με λ^{-1}. Η βέλτιστη πολιτική που λαμβάνεται από τον τυπικό αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών είναι μονότονη. Οι κρίσιμοι αριθμοί $i^*(x), x \in \{0, \dots, 10\}$, που χαρακτηρίζουν τη βέλτιστη πολιτική δίνονται στον πίνακα 4.1 παρακάτω.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{i^*(x)}$	16	14	12	10	7	3	0	0	0	0	0

Πίνακας 4.1: *Οι κρίσιμοι αριθμοί της βέλτιστης πολιτικής*

Το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής βρέθηκε να είναι 2,1456. Επιλέγουμε ως τον προκαθορισμένο αριθμό ακρίβειας ε για το κριτήριο διακοπής του αλγόριθμου βελτίωσης των πολιτικών με τιμή $\varepsilon = 10^{-4}$. Ο αλγόριθμος διακόπτεται μετά από 65 επαναλήψεις. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για τον τερματισμό του αλγόριθμου ήταν 1,7472 δευτερόλεπτα. Ο αναμενόμενος χρόνος και το αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου στο πλαίσιο αυτής της πολιτικής είναι 4,3637 και 9,3628, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.2

Υποθέτουμε ότι $m = 15, K = 8, p = 11, d = 10, h = 0.4,\ c_f = 2.5$. Υποθέτουμε επίσης ότι τα λειτουργικά έξοδα $c_i,\ \tilde{c}_i,\ 0 \leq i \leq m$ και οι μη μηδενικές πιθανότητες μεταβάσεων $p_{ij}, 0 \leq i, j \leq m+1$, είναι οι ίδιες με αυτές του Παραδείγματος 4.1. Υποθέτουμε ότι οι προληπτικοί και οι διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της εγκατάστασης ακολουθούν την κατανομή Weibull με παραμέτρους $\alpha_1, \lambda_1 > 0$ και $\alpha_2, \lambda_2 > 0$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_1(t) = \alpha_1 \lambda_1 (\lambda_1 t)^{\alpha_1 - 1} \exp[(-\lambda_1 t)^{\alpha_1}] \text{ και}$$

$$f_2(t) = \alpha_2 \lambda_2 (\lambda_2 t)^{\alpha_2 - 1} \exp[(-\lambda_2 t)^{\alpha_2}], \qquad t \geq 0,$$

αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\alpha_1 = 1, \lambda_1 = 3$ και $\alpha_2 = 0{,}5, \lambda_2 = 5$. Η Συνθήκη 3 ικανοποιείται από τη στιγμή που η τιμή της κατανομής Weibull με τις παραμέτρους $\alpha >\ 0$ και $\lambda > 0$ είναι $\lambda^{-1}\Gamma(1 + \alpha^{-1})$, όπου,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t)\, dt\,, x > 0,$$

είναι η συνάρτηση Γάμμα. Στον παρακάτω πίνακα 4.2, παρουσιάζουμε τους κρίσιμους αριθμούς της βέλτιστης μονότονης πολιτικής που λαμβάνονται από τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για τις τιμές του c_p στο σύνολο $\{1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.3, 2.5\}$.

$c_p = 1.2$

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\boldsymbol{i^*(x)}$	16	14	10	6	1	0	0	0	0

$c_p = 1.5$

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\boldsymbol{i^*(x)}$	16	14	11	6	1	0	0	0	0

$c_p = 1.8$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i^*(x)$	16	14	11	6	2	0	0	0	0

$c_p = 2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i^*(x)$	16	15	11	7	2	0	0	0	0

$c_p = 2.3$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i^*(x)$	16	15	11	7	2	0	0	0	0

$c_p = 2.5$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i^*(x)$	16	15	12	7	2	0	0	0	0

Πίνακας 4.2: *Η μορφή της βέλτιστης πολιτικής καθώς ποικίλει το* c_p

Από τον πίνακα 4.2, μπορεί να φανεί ότι για κάθε σταθερό επίπεδο x του αποθηκευτικού χώρου, ο κρίσιμος αριθμός $i^*(x)$ παραμένει αμετάβλητος ή αυξάνεται όσο το c_p αυξάνεται.

Στον πίνακα 4.3, για τις παραπάνω τιμές του c_p, παρουσιάζουμε το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής που αποκτήθηκε από τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών. Παρουσιάζουμε επίσης τον αναμενόμενο χρόνο και το αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου βάσει της βέλτιστης πολιτικής για τον ακριβή υπολογισμό του μέσου κόστους.

c_p	**Μέσο κόστος**	**Αναμενόμενος χρόνος**	**Αναμενόμενο κόστος**
1.2	1.6293	2.4869	4.0519
1.5	1.6623	2.5493	4.2376

1.8	1.6942	2.5493	4.3190
2	1.7146	2.6219	4.4955
2.3	1.7449	2.6219	4.5749
2.5	1.7642	2.6949	4.7545

Πίνακας 4.3: *Τα αποτελέσματα της μεταβολής του* c_p

Από τον πίνακα 4.3, μπορεί να φανεί, όπως αναμενόταν, ότι το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής, ο αναμενόμενος χρόνος και το αναμενόμενο κόστος ενός κύκλου βάσει της βέλτιστης πολιτικής αυξάνονται ή παραμένουν αμετάβλητα, καθώς αυξάνεται το c_p.

B. Για το μοντέλο 2

Για το Μοντέλο 2, παραθέτουμε επίσης δύο παραδείγματα και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι επισκευής της μονάδας παραγωγής ακολουθούν τη Γάμμα και τη Λογαριθμοκανονική κατανομή, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4.3

Υποθέτουμε ότι $m = 15, p = 5, d = 8, C = 10,\ c_f = 30, c_p = 20, c_i = 6(i + 1)$, $\tilde{c}_i = 3(i + 1), 0 \leq i \leq m$. Οι μη μηδενικές πιθανότητες μεταβάσεων $p_{ij}, 0 \leq i, j \leq m + 1$ είναι οι ίδιες με τα Παραδείγματα 4.1 και 4.2. Υποθέτουμε ότι οι προληπτικοί και οι διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της μονάδας παραγωγής ακολουθούν τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους, $\alpha_1, \lambda_1 > 0$ και $\alpha_2, \lambda_2 > 0$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_1(t) = [\Gamma(\alpha_1)]^{-1} {\lambda_1}^{\alpha_1} \mathrm{t}^{\alpha_1 - 1} \exp(-\lambda_1 t) \text{ και}$$

$$f_2(t) = [\Gamma(\alpha_2)]^{-1} {\lambda_2}^{\alpha_2} \mathrm{t}^{\alpha_2 - 1} \exp(-\lambda_2 t), \qquad t \geq 0,$$

όπου, $\Gamma(\alpha)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Υποθέτουμε ότι $\alpha_1 = 4, \lambda_1 = 2$ και $\alpha_2 = 14, \lambda_2 = 2$. Η Συνθήκη 3 ικανοποιείται μέχρι η μέση τιμή της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $\alpha > 0$ και $\lambda > 0$ να είναι $\alpha\lambda^{-1}$. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε την επίδραση της διακύμανσης του K στο μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Αν η τιμή του K είναι μικρή, είναι πιθανό ο αποθηκευτικός χώρος να γεμίσει γρήγορα κατά τη διάρκεια της συντήρησης προκαλώντας υψηλό κόστος ποινής. Εάν η τιμή του K είναι μεγάλη, θα προκαλέσει υψηλό κόστος αποθήκευσης. Στον Πίνακα 4.4 παρακάτω, παρουσιάζουμε το μέσο κόστος $g(K)$ της βέλτιστης πολιτικής, για διαφορετικές τιμές του K, για τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

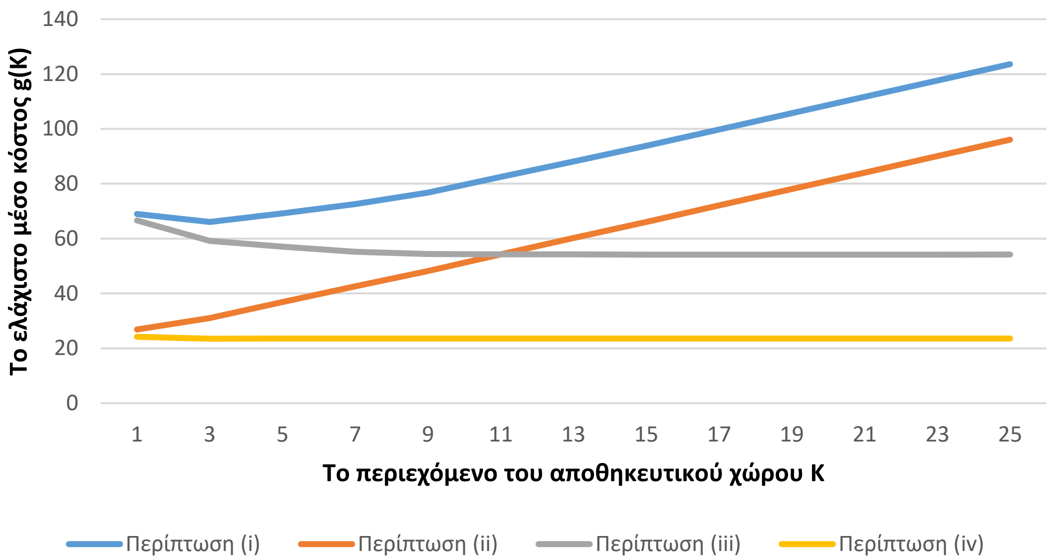
(i) $h = 3, P = 15$,
(ii) $h = 3, P = 0$,
(iii) $h = 0, P = 15$ και
(iv) $h = 0, P = 0$.

$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{h = 3, P = 15}$	$\boldsymbol{h = 3, P = 0}$	$\boldsymbol{h = 0, P = 15}$	$\boldsymbol{h = 0, P = 0}$
1	68.9558	26.8800	66.6215	24.1981
3	66.0687	30.9942	59.1483	23.4994
5	69.1509	36.9032	57.1031	23.6317
7	72.5769	42.5994	55.2288	23.5936
9	76.7519	48.2473	54.3736	23.5765
11	82.5085	54.2463	54.3242	23.5777
13	88.1169	60.1858	54.2316	23.5762
15	93.8200	66.1003	54.2069	23.5769
17	99.7849	72.1025	54.2063	23.5769
19	105.7056	78.0866	54.2036	23.5769
21	111.6292	84.0622	54.2029	23.5769
23	117.6178	90.0627	54.2026	23.5769
25	123.5942	96.0572	54.2023	23.5769

Πίνακας 4.4: *Το ελάχιστο μέσο κόστος* καθώς ποικίλει το K

Από τον πίνακα 4.4, μπορεί να φανεί ότι, στην πρώτη περίπτωση, το ελάχιστο μέσο κόστος μειώνεται για $1 \leq K \leq 3$ και αυξάνεται για $K \geq 3$. Το ελάχιστο μέσο κόστος επιτυγχάνεται στο $K = 3$ και είναι ίσο με $66{,}0687$. Στην δεύτερη περίπτωση το $g(K)$ αυξάνεται σε σχέση με το K, στην τρίτη περίπτωση το $g(K)$ μειώνεται με σε σχέση με το K και στην τέταρτη περίπτωση το $g(K)$ είναι σταθερό για το $K \geq 15$. Τα γραφήματα του $g(K)$ ως συνάρτηση του K για τις τέσσερις περιπτώσεις δίνονται στο Σχήμα 4.2.

Σχήμα 4.2: Το γράφημα του $g(K)$



Παράδειγμα 4.4

Υποθέτουμε ότι $m = 25, K = 10, d = 8, C = 10, c_f = 16, c_p = 9, h = 4, P = 12$. Υποθέτουμε επίσης ότι τα λειτουργικά έξοδα c_i, $\tilde{c}_i$, $0 \le i \le m$ και οι μη μηδενικές πιθανότητες μεταβάσεων $p_{ij}, 0 \le i, j \le m+1$, είναι οι ίδιες με αυτές του παραδείγματος 4.3. Θεωρούμε ότι οι προληπτικοί και οι διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της μονάδας παραγωγής ακολουθούν την Λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2 > 0$ και $\mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_2^2 > 0$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_1(t) = \left[t\sigma_1\sqrt{2\pi}\right]^{-1} exp\left\{-\frac{(\ln(t)-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} \text{ και}$$

$$f_2(t) = \left[t\sigma_2\sqrt{2\pi}\right]^{-1} exp\left\{-\frac{(\ln(t)-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right\}, t > 0,$$

αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\mu_1 = 9, \sigma_1 = 5$ και $\mu_2 = 12, \sigma_2 = 6$. Σημειώνουμε ότι η Συνθήκη 3 ικανοποιείται μέχρι η μέση τιμή της Λογαριθμοκανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 > 0$ να ισούται με: $exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$.

Φαίνεται ενδιαφέρον να εξετάσουμε την επίδραση της διακύμανσης του ποσοστού αναπλήρωσης p στη μορφή της βέλτιστης πολιτικής και στο ελάχιστο μέσο κόστος $g(p)$. Στον Πίνακα 4.5, παρουσιάζουμε, για διάφορες τιμές του p, τους κρίσιμους αριθμούς $i^*(x)$, $0 \le$

$x \leq 10$, που χαρακτηρίζουν τη βέλτιστη πολιτική και το αντίστοιχο ελάχιστο αναμενόμενο μέσο κόστος $g(p)$.

$\boldsymbol{p}$	**Μέσο κόστος $\boldsymbol{g(p)}$**	$\boldsymbol{i^*(x), 0 \leq x \leq 10}$
1	74.4762	10 11 16 21 23 25 26 26 25 24 22
2	84.5467	15 12 16 19 21 23 24 23 22 20 19
3	95.3609	18 14 16 18 21 22 21 20 19 18 17
4	109.3707	21 16 18 20 21 20 19 19 18 17 16
5	122.2072	23 19 20 21 20 19 19 18 17 16 15
6	136.2852	24 21 22 20 20 19 18 17 16 16 15
7	148.5111	25 23 21 20 19 18 17 17 16 16 15

Πίνακας 4.5: *Η βέλτιστη πολιτική και το μέσο κόστος καθώς ποικίλει το* p

Αν $i^*(x) = m + 1$, για κάποιο περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου $x \in \{0, \dots, K\}$, τότε μία προληπτική συντήρηση δεν ξεκινάει ποτέ όταν το περιεχόμενο του αποθηκευτικού χώρου είναι ίσο με το x. Από τον Πίνακα 4.5, παρατηρούμε ότι το ελάχιστο μέσο κόστος αυξάνεται, καθώς αυξάνεται το p. Επίσης παρατηρούμε ότι, για σταθερό περιεχόμενο x του αποθηκευτικού χώρου, ο κρίσιμος αριθμός $i^*(x)$ δεν είναι μονότονη συνάρτηση σε σχέση με το p.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή σε πρόγραμμα Matlab

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών για την εύρεση της βέλτιστης συντήρησης ενός συστήματος παραγωγής – αποθήκευσης, με την εκτέλεση του αντίστοιχου προγραμμάτος Matlab.

Ο αλγόριθμος ξεκινά με την αρχικοποίηση των παραμέτρων όπως φαίνονται στην Εικόνα 5.1, όπου:

m: ο μέγιστος βαθμός επιδείνωσης του μηχανισμού

K: η μέγιστη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου

p: το ποσοστό παραγωγής

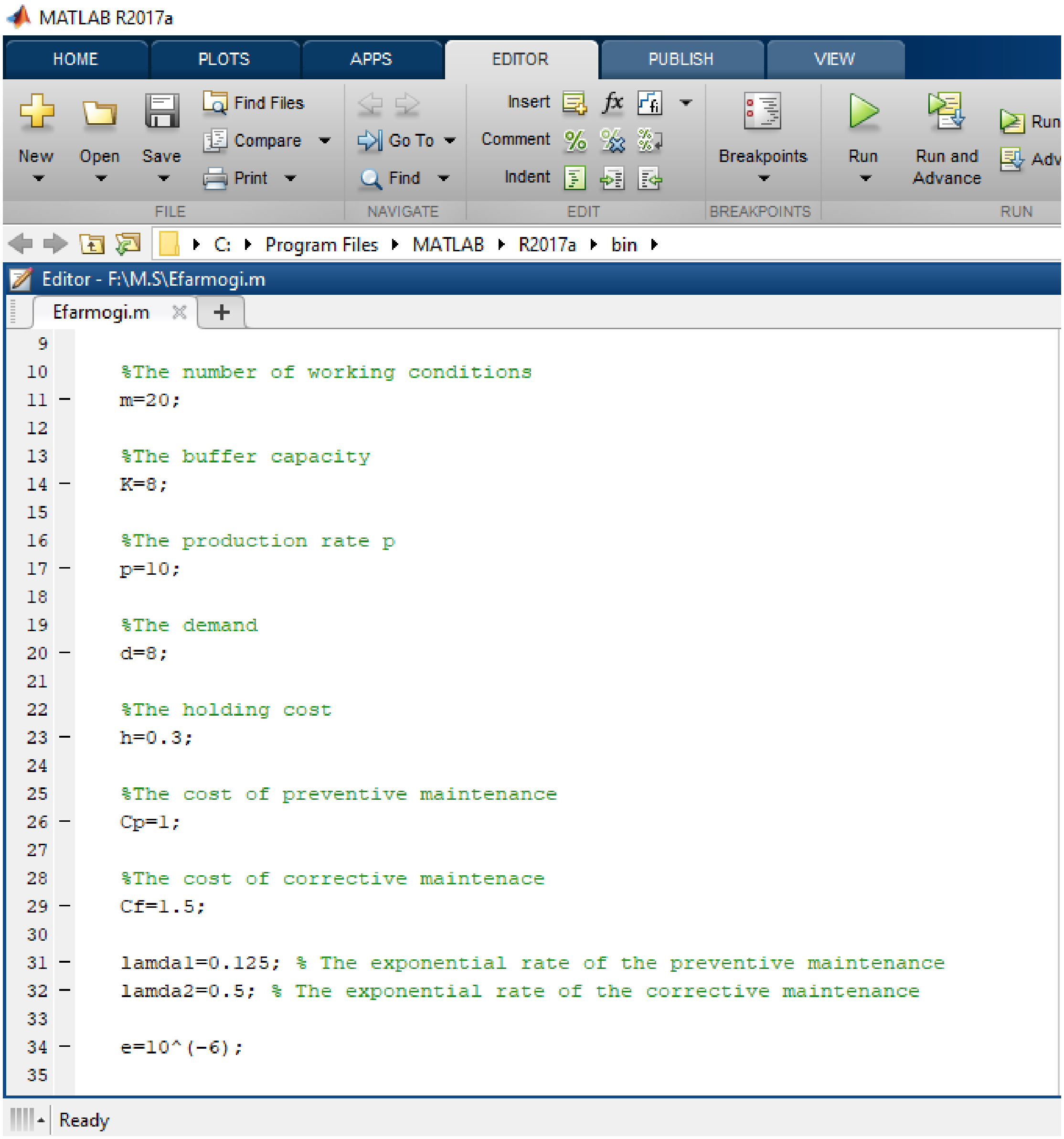
d: ο ρυθμός ζήτησης του ακατέργαστου υλικού

h: το κόστος αποθήκευσης του ακατέργαστου υλικού

c_p: ο ρυθμός κόστους της προληπτικής συντήρησης και

c_f: ο ρυθμός κόστους της επιδιορθωτικής συντήρησης.

Οι προληπτικοί και διορθωτικοί χρόνοι επισκευής της εγκατάστασης κατανέμονται εκθετικά με τις παραμέτρους $\lambda_1 = 0{,}125$ και $\lambda_2 = 0{,}5$, αντίστοιχα. Επιλέγουμε τον προκαθορισμένο αριθμό ακρίβειας ε για το κριτήριο διακοπής του αλγόριθμου βελτίωσης των πολιτικών με τιμή $\varepsilon = 10^{-6}$.



Εικόνα 5.1

Στη συνέχεια, καθορίζεται ο πίνακας μετάβασης των πιθανοτήτων p_{ij} καθώς επιλέγεται η ενέργεια «δεν επεμβαίνουμε στη λειτουργία του μηχανήματος» (Εικόνα 5.2),

```
for i=0:m+1
    for j=0:m+1
        if (i<=j)
            p(i+1,j+1)=1/(m+2-i);
          else
            p(i+1,j+1)=0;
        end
    end
end
```

Εικόνα 5.2

καταγράφονται τα κόστη λειτουργιών όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος, καθώς και όταν δεν είναι γεμάτος.

```
% {SPECIFICATION OF THE OPERATION COSTS}

  % the operating costs when the buffer isn't full

   for i=0:m
      c1(i+1)=0.5*(i+1);
   end

  % The operating costs when the buffer is full

   for i=0:m
      c2(i+1)=0.08*(i+1);
   end
```

Εικόνα 5.3

Στην Εικόνα 5.4, υπολογίζουμε τα κόστη ανάλογα με την ενέργεια που επιλέγεται.

```
% A. COSTS

% Action 0

for i=0:m
    for x=0:K-1
        C0(i+1,x+1)=c1(i+1)+h*x;
    end
end

for i=0:m
    C0(i+1,K+1)=c2(i+1)+h*K;
end

% Action 1

for i=0:m
    for x=0:K
      C1(i+1,x+1)=Cp*(1/lamda1)+(h*x^2/(2*d))+(d/lamda1)*exp(-lamda1*(x/d));
    end
end

% Action 2

for x=0:K
    C2(m+2,x+1)=Cf*(1/lamda2)+(h*x^2/(2*d))+(d/lamda2)*exp(-lamda2*(x/d));
end
```

Εικόνα 5.4

Έπειτα, υπολογίζουμε τους χρόνους ανάλογα με την ενέργεια που επιλέγεται:

```
% B. TIMES

% Action 0

for i=0:m
    for x=0:K
        T0(i+1,x+1)=1;
    end
end

% Action 1

for i=0:m
    for x=0:K
        T1(i+1,x+1)=(x/d)+(1/lamda1)*exp(-lamda1*(x/d));
    end
end

% Action 2

for x=0:K
    T2(m+2,x+1)=(x/d)+(1/lamda2)*exp(-lamda2*(x/d));
end
```

Εικόνα 5.5

Προσδιορίζουμε την παράμετρο t,

```
% {DETERMINATION OF THE PARAMETER t}

for i=0:m
    for x=0:K
        if (T0(i+1,x+1)<=T1(i+1,x+1))
            ta(i+1,x+1)=T0(i+1,x+1);
        else
            ta(i+1,x+1)=T1(i+1,x+1);
        end
    end
end


for x=0:K
    ta(m+2,x+1)=T2(m+2,x+1);
end

ta_min=min(min(ta));
```

Εικόνα 5.6

και ξεκινάει η διαδικασία υπολογισμού:

```
% {THE CALCULATION PROCESS}

for i=0:m+1
   for x=0:K
      Vold(i+1,x+1)=0;
   end
end
```

Εικόνα 5.7

Ξεκινά η διαδικασία επανάληψης:

```
% {THE ITERATION PROCEDURE}

flag=1;

time0=cputime;

iteration=0;

while (flag==1)

  flag=0;

  for i=0:m
      for x=0:K
          sum1=0;
          for j=0:m+1
            if (x<K)
              sum1=sum1+p(i+1,j+1)*Vold(j+1,x+2);
            elseif (x==K)
                sum1=sum1+p(i+1,j+1)*Vold(j+1,K+1);
            end
          end
          VNEW0(i+1,x+1)=(C0(i+1,x+1)/T0(i+1,x+1))+(ta_min/T0(i+1,x+1))*
          sum1+(1-(ta_min/T0(i+1,x+1)))*Vold(i+1,x+1);
          VNEW1(i+1,x+1)=(C1(i+1,x+1)/T1(i+1,x+1))+(ta_min/T1(i+1,x+1))*
          Vold(1,1)+(1-(ta_min/T1(i+1,x+1)))*Vold(i+1,x+1);
          if (VNEW0(i+1,x+1)<=VNEW1(i+1,x+1))
              Vnew(i+1,x+1)=VNEW0(i+1,x+1);
              action(i+1,x+1)=0;
          else
              Vnew(i+1,x+1)=VNEW1(i+1,x+1);
              action(i+1,x+1)=1;
          end

     end
  for x=0:K
      Vnew(m+2,x+1)=(C2(m+2,x+1)/T2(m+2,x+1))+(ta_min/T2(m+2,x+1))*
      Vold(1,1)+(1-(ta_min/T2(m+2,x+1)))*Vold(m+2,x+1);
      action(m+2,x+1)=2;
  end

  R=Vnew-Vold;
  Min=min(min(R));
  Max=max(max(R));

  if (abs(Max-Min)>e*Min)
      flag=1;
  end

  Vold=Vnew;
  iteration=iteration+1;

```

Εικόνα 5.8

Στην Εικόνα 5.9 ζητάμε να μας εμφανίσει τα ελάχιστα και τα μέγιστα που παρουσιάζονται σε κάθε επανάληψη καθώς και τη γραφική τους παράσταση, και τελειώνει η διαδικασία επανάληψης.

```
    A=[Min,Max];
    disp(A);

    for x=iteration:iteration
        title('Table of max and min')
        xlabel('iterations')
        plot(x,Min,'ro')
        hold on
        plot(x,Max,'b*')
    end

end
```

Εικόνα 5.9

Μας δίνει, λοιπόν, τα ελάχιστα στην πρώτη στήλη και τα μέγιστα στην δεύτερη,

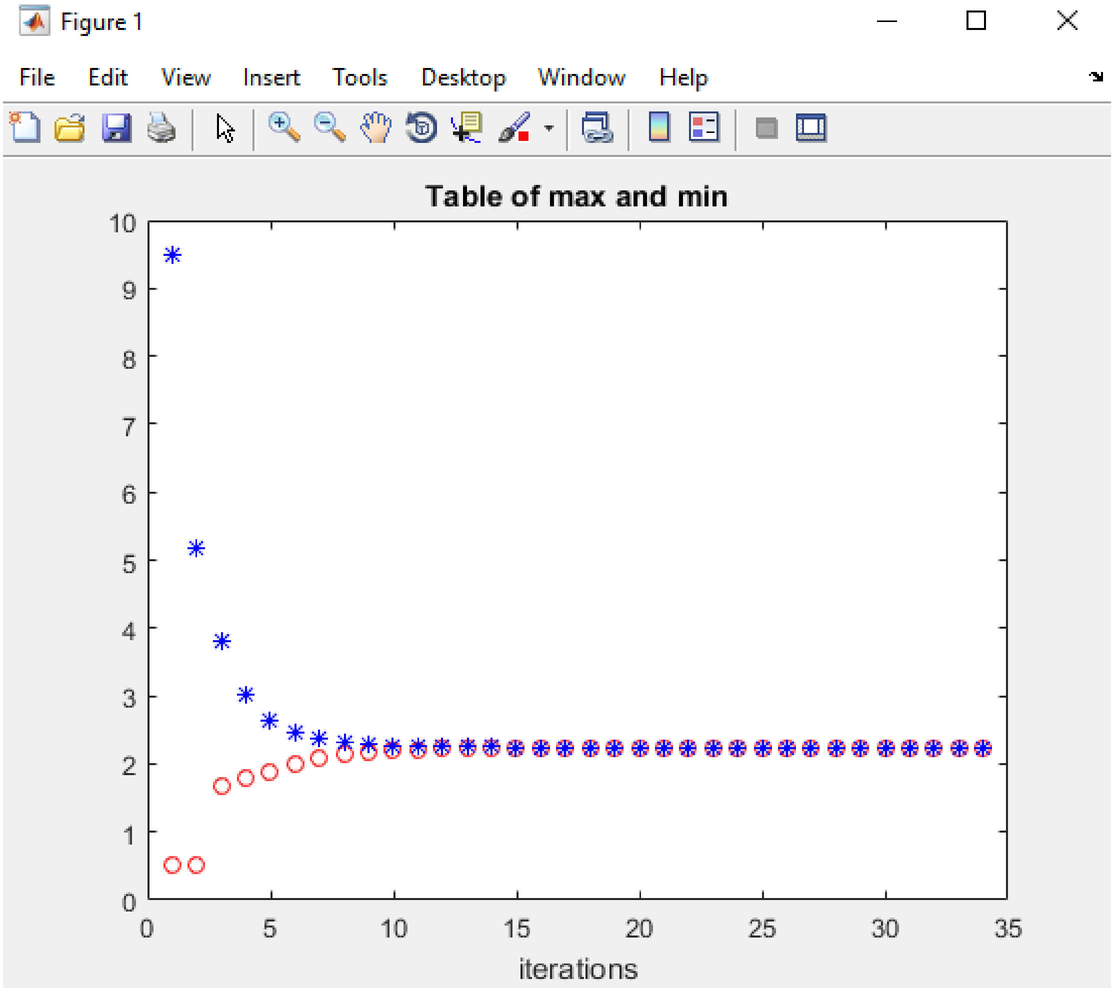
Command Window

```
>> Efarmogi
    0.5000    9.5000

    0.5000    5.1800

    1.6892    3.8010

    1.7851    3.0167

    1.8889    2.6426

    1.9930    2.4601

    2.0735    2.3737

    2.1316    2.3130

    2.1706    2.2856

    2.1957    2.2687

    2.2125    2.2584

    2.2235    2.2520

    2.2305    2.2481
```

```
    2.2349    2.2456

    2.2376    2.2442

    2.2393    2.2433

    2.2403    2.2428

    2.2409    2.2425

    2.2413    2.2423

    2.2415    2.2421

    2.2416    2.2420

    2.2417    2.2419
    2.2417    2.2419

    2.2418    2.2419

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418

    2.2418    2.2418
```

Εικόνα 5.10

καθώς και τη γραφική παράσταση, όπου τα κόκκινα κυκλάκια μας δίνουν το ελάχιστο και τα μπλέ αστεράκια το μέγιστο κάθε επανάληψης αντίστοιχα, όπως φαίνονται στην Εικόνα 5.11.



Εικόνα 5.11

Υπολογίζουμε το ελάχιστο (μακροπρόθεσμο) μέσο κόστος g:

```
g=(Max+Min)/2;
```

Εικόνα 5.12

Βρίσκουμε το χρόνο τερματισμού του αλγορίθμου:

```
time1=cputime;
```

Εικόνα 5.13

Τέλος, ζητάμε να μας εμφανίσει:

- τον πίνακα με τη βέλτιστη πολιτική $action$,

```
disp('The form of the optimal policy is given by the matrix below:');
disp(action);
```

Εικόνα 5.14

- τον χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου $time1 - time0$,

```
disp('The CPU time for the computation of the minimum average cost is:');
disp(time1-time0);
```

Εικόνα 5.15

- τον αριθμό επαναλήψεων $iteration$ και

```
disp('The number of iterations of the algorithm is:');
disp(iteration);
```

Εικόνα 5.16

- το ελάχιστο (μακροπρόθεσμο) μέσο κόστος g:

```
disp('The value of the minimum long-run expected average cost is:');
disp(g);
```

Εικόνα 5.17

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε αντίστοιχα είναι:

- η βέλτιστη πολιτική $action$

```
The form of the optimal policy is given by the matrix below:
     0     0     0     0     0     0     1     1     1
     0     0     0     0     0     1     1     1     1
     0     0     0     0     1     1     1     1     1
     0     0     0     1     1     1     1     1     1
     0     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
```

Εικόνα 5.18

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι οι κρίσιμες τιμές $i^*(x)$ θα είναι:

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$	**21**
$i^*(x)$	6	5	4	3	1	0	$\cdots$	0

Πίνακας 5.1

- ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου

```
The CPU time for the computation of the minimum average cost is:
    6.7031
```

Εικόνα 5.19

- ο αριθμός επαναλήψεων

```
The number of iterations of the algorithm is:
    34
```

Εικόνα 5.20

- το ελάχιστο (μακροπρόθεσμο) μέσο κόστος

```
The value of the minimum long-run expected average cost is:
    2.2418
```

Εικόνα 5.21

Βιβλιογραφία

BENYAMINI Z. and YECHIALI U. (1999) Optimality of control limit maintenance policies under nonstationary deterioration, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **13**, 55-70.

DERMAN C. (1970*)* Finite State Markovian Decision Processes, Mathematics in Science and Engineering, *Academic Press*, New York, USA.

DIMITRAKOS T. D. and KYRIAKIDIS E. G. (2006) Optimal preventive maintenance of a production system with an intermediate buffer, *European Journal of Operational Research*, **168**, 86–99.

DOUER N. and YECHIALI U. (1994) Optimal repair and replacement in Markovian systems, *Stochastic Models* **10**, 253-270.

FU M. C., MARCUS S. I., XIE X. and YAO X. (2005) Optimal joint preventive maintenance and production policies, *Naval Research Logistics*, vol. **52**, 668–681.

HOWARD R. A. (1960) *Dynamic Programming and Markov Processes*, Wiley, New York.

KARAMATSOUKIS C. C. and KYRIAKIDIS E. G. (2009) Optimal maintenance of a production-inventory system with idle periods, *European Journal of Operational Research*, **196**, 744–751.

KHAROUFEH J.P. and KURT M. (2010) *Monotone optimal replacement policies for a Markovian deteriorating system in a controllable environment*, **38**, 273-279.

KYRIAKIDIS E. G. and PAVITSOS A. (2009) Markov decision models for the optimal maintenance of a production unit with an upstream buffer, *Computers and Operations Research*, **36**, 1993–2006.

PAPADIMITRIOU C. and TSITSIKLIS J.N. (1987) The complexity of Markov decision processes, Mathematics of Operations Research, **12**, 441-450

ROSS S. M. (1983) *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York.

ROSS S. M. (1992) *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Dover, New York.

TIJMS H. C. (1994) *Stochastic Models: An Algorithmic Approach and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics*, Wiley, New York.

TIJMS H. C. and VAN DER DUYN SCHOUTEN F. A. (1985) A Markov decision algorithm for optimal inspections and revisions in a maintenance system with partial information, *European Journal of Operational Research*, **21**, 245–53.