ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

από τον

Τρύφωνα Καββαθά

(Α.Μ. 4282017006)

ΘΕΜΑ

«Ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών: η περίπτωση των κλασμάτων στο Δημοτικό Σχολείο»

ΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Γεώργιος Φεσάκης	Αναπληρωτής Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Επιβλέπων
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή	Καθηγήτρια	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος
Μιχαήλ Σκουμιός	Αναπληρωτής Καθηγητής	ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ	Μέλος

Ρόδος, 2019

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέως.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα αυτής της εργασίας, κ. Γεώργιο Φεσάκη, αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου καθώς και τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής την καθηγήτρια κ. Χρυσάνθη Σκουμπουρδή και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Μιχαήλ Σκουμιό.

Ευχαριστώ θερμά και ιδιαιτέρως την καθηγήτρια κ. Σουλτάνα Καφούση για την όλη βοήθεια και την αμέριστη συμπαράσταση που μου προσέφερε τόσο κατά την διάρκεια των μαθημάτων του Π.Μ.Σ., όσο κατά τον προσδιορισμό του θέματος, αλλά και στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υπεύθυνη της Βιβλιοθήκης του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών για την πολύ σημαντική συμβολή της στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας, με τον δανεισμό των περισσότερων από τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν για ανάλυση σε αυτήν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, που υπέφερε αρκετές μικρές στερήσεις, προκειμένου να περατωθούν αυτές οι μεταπτυχιακές μου σπουδές.

Περίληψη

Το κλάσμα ορίζεται ως μια πολύπλευρη έννοια με πέντε διαφορετικές ερμηνείες, η κατανόηση των οποίων αποτελεί θεμέλιο για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Διαχρονικά υφίστανται πολλές δυσκολίες στην διδασκαλία και στην κατανόησή της. Ένας σημαντικός αριθμός μαθητών/τριών αποτυγχάνουν να την κατανοήσουν επαρκώς. Τα εγχειρίδια μέσω των ενσωματωμένων δραστηριοτήτων, καθίστανται η «γέφυρα» επικοινωνίας των κλασμάτων με τους/τις μαθητές/τριες. Σκοπός αυτής της μελέτης είναι η ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του Δημοτικού, που αναφέρονται στα κλάσματα και πως συνδέεται το πλαίσιο με τις ερμηνείες του κλάσματος. Αναλύθηκαν οι δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 και του 2000. Κατηγοριοποιήθηκαν ανά ερμηνεία κλάσματος και ανά τύπο πλαισίου, αφού λήφθηκαν υπόψη τέσσερις τύποι πλαισίου. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν την παρουσία των πέντε ερμηνειών, την δυναμική παρουσία του «Μαθηματικού Πλαισίου» και την έλλειψη του «Ρεαλιστικού Πλαισίου», γεγονός που αντίκειται στις κατευθύνσεις των Α.Π.Σ..

Λέξεις κλειδιά: κλάσματα, σχολικά εγχειρίδια, ανάλυση εγχειριδίων, δραστηριότητες, πλαίσιο δραστηριοτήτων

Abstract

The fraction is defined as a multifaceted concept with five different interpretations, the understanding of which is the foundation for the development of mathematical thinking. Over time there are many difficulties in teaching and understanding. A significant number of students fail to understand it adequately. The textbooks through integrated tasks become the bridge of communication of the fractions with the students. The aim of this study is to analyze the context of the tasks of the Mathematics textbooks of elementary school, which refer to the fractions and how the context is related to the interpretation of the fraction. The tasks of the 1982 and 2000 textbooks were analyzed. They were categorized by fractional interpretation and by context type, after four types of context were taken into account. The results demonstrate the presence of the five interpretations, the dynamic presence of the «Mathematical context» and the lack of the «Realistic Context», which is contrary to the directions of the curricula.

Keywords: fractions, textbooks, textbooks analysis, tasks, context tasks

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Το Κλάσμα ως Θεμελιώδης Έννοια των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

1.1 Περίληψη

Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρείται μία ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, με στόχο να καταδειχθεί η θεμελιώδης και κομβική σημασία της έννοιας του κλάσματος στην διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Τονίζεται ιδιαίτερα, ότι το κλάσμα αποτελεί μία πολύπλευρη έννοια ή ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα που έχει πέντε ερμηνείες – υποκατασκευές (μέρος του όλου – πηλίκο – λόγος – μέτρηση – πολλαπλασιαστής). Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας, αλλά και στις πράξεις με κλάσματα, καθώς και οι δυσχέρειες στο διδακτικό έργο των εκπαιδευτικών. Υπογραμμίζεται ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην κατανόηση της έννοιας, καθώς αυτή σχετίζεται με τη γνώση (διαδικαστική η εννοιολογική) που αναπτύσσεται σε αυτά. Γίνεται αναφορά στον ρόλο και στις επιδράσεις των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών (Α.Π.Σ.). Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τις επικρατούσες τάσεις στην διδασκαλία και παρέχονται προτάσεις που μπορούν να βελτιώσουν τα αποτελέσματά της.

1.2 Η σημαντικότητα της έννοιας

Από την αρχή της έρευνας στην διδακτική των μαθηματικών η διαδικασία διδασκαλίας – μάθησης που αφορά τα κλάσματα, έχει σίγουρα ερευνηθεί και μελετηθεί περισσότερο από άλλα σχετικά ζητήματα που απασχολούν την έρευνα (Pinilla, 2007). Η έννοια του κλάσματος έχει απασχολήσει μεγάλο αριθμό ερευνητών, ψυχολόγων και εκπαιδευτικών των μαθηματικών και συνεχίζει να θέτει ερωτήματα που χρήζουν διερεύνησης (Βοτάνη, Κασάρη, Μακαντάσης, & Τσιρικίδου, 2017).

Η έννοια του κλάσματος εμφανίστηκε περίπου το 1700 π.Χ. και αφορούσε πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως την κατανομή των τροφίμων, το εμπόριο και την γεωργία. Η έννοια επεκτάθηκε και αναπτύχθηκε, ώστε να αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο όχι μόνο της καθημερινής ζωής αλλά και των μαθηματικών που συναντούν οι μαθητές/τριες στις πρώιμες βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι λανθασμένη η αντίληψη, ότι ένα κλάσμα είναι αποκλειστικά ένας αριθμός, από την άποψη της παιδαγωγικής, της ψυχολογίας και της ιστορίας. Υπάρχει ανάγκη μιας ευρύτερης θεώρησης των κλασμάτων στην εκπαίδευση, λόγω του ότι η μάθηση των κλασμάτων περιλαμβάνει την συνειδητοποίηση των ειδικών σχέσεων μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων, όπως και της σχέσης μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή. αλλά και της έκφρασης αυτών των σχέσεων με διάφορους τρόπους (George, 2017). Οι Barnette-Clarke et al. (2010) δίνουν μια ευρύτερη περιγραφή των κλασμάτων, ως μια μη αρνητική συμβολική έκφραση της μορφής α/β, που αναπαριστάνει το πηλίκο δύο ποσοτήτων. Στην ίδια έκφραση, α/β, ο θετικός αριθμός α αντιπροσωπεύει το μέρισμα, ή τον αριθμητή, ενώ το β αντιπροσωπεύει τον διαιρέτη, ή τον παρονομαστή. Δικαιολογούν τον περιορισμό των κλασμάτων σε μη αρνητικούς αριθμούς, υποστηρίζοντας ότι οι μαθητές/τριες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης διδάσκονται τα κλάσματα πολύ νωρίτερα από τους αρνητικούς αριθμούς. Ο Lamon (2012) αναφέρει ότι το κλάσμα είναι ένας συμβολικός τρόπος γραφής κάποιων αριθμών, όπως είναι οι ρητοί αριθμοί και υποστηρίζει ότι το κλάσμα δεν ορίζεται μονοσήμαντα ως ένα πηλίκο (στο George, 2017).

Το κλάσμα αποτελεί θεμελιώδη μαθηματική έννοια του αναλυτικού προγράμματος σπουδών του δημοτικού . Η διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος ξεκινά από την προσχολική ηλικία και συνεχίζεται σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, αλλά και στο γυμνάσιο. Γενικότερα, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά αντικείμενα των μαθηματικών επειδή υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης και των περιεχομένων της άλγεβρας και των πιθανοτήτων. Οι ρίζες κάποιων παρανοήσεων που συναντώνται σε φοιτητές/τριες σχετικά με τα κλάσματα, βρίσκονται στην σχολική εκπαίδευση (Clarke & Roche, 2009·Λεμονίδης & Ουζουνίδου, 2017). Η έννοια του κλάσματος είναι από τις πιο σημαντικές και ταυτόχρονα πιο πολύπλοκες έννοιες στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Πρέπει η διδασκαλία των κλασμάτων να ξεκινά σε πρώιμη ηλικία, διότι, νωρίς τα παιδιά μέσω των κλασμάτων εκφράζουν με φυσικό τρόπο ποσότητες, που μπορούν να εκφραστούν και με δεκαδική μορφή. Π.χ., αντιλαμβάνονται την ποσότητα που είναι ίση με το ½ μιας σοκολάτας, παρά το 0,5 μιας σοκολάτας. Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του κλάσματος περιλαμβάνει πολλά στάδια, τα οποία διαφοροποιούνται τόσο από το πεδίο εφαρμογών της, όσο και από την εννοιολογική της υπόσταση – θεωρητική ή επιστημολογική (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά & Χριστοδουλίδου, 2006). Αν και τα καινούργια αναλυτικά προγράμματα (Α.Π.) τονίζουν ιδιαίτερα την

σημασία της έννοιας και την εισάγουν προτείνοντας σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις, οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόησή της συνεχίζουν να υφίστανται και οφείλονται σε πολλούς λόγους, μεταξύ αυτών είναι η φύση της έννοιας, η σχετική ασυμβατότητα των Α.Π. με τα σχολικά εγχειρίδια και ο τρόπος που διδάσκεται από πολλούς εκπαιδευτικούς. Η έννοια του κλάσματος είναι κομβικής σημασίας, ιδιαίτερα για τα μαθηματικά του δημοτικού, όχι μόνο για τους μαθητές, αλλά και για τους εκπαιδευτικούς. Αποτελέσματα έρευνας αναφέρουν ότι τα κλάσματα είναι ένα από τα δυσκολότερα κομμάτια της διδασκαλίας των μαθηματικών (Πολύδωρος, 2017).
Η διδασκαλία των κλασμάτων, που μερικές φορές θεωρείται μία από τις πιο δύσκολες έννοιες για τους μαθητές (Hasemann, 1981), έχει περάσει από πολλές μεταρρυθμίσεις, αλλά οι μαθητές εξακολουθούν να αγωνίζονται να την κατανοήσουν (Morales, 2014). Για αρκετές δεκαετίες η διδασκαλία των μαθηματικών που σχετίζεται με τα κλάσματα και η διατύπωση και η εφαρμογή των κανόνων των πράξεων με αυτά, παραμένει σε μεγάλο βαθμό στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Hasemann, 1981). Η έλλειψη επιτυχούς ανάπτυξης και κατανόησης των κλασμάτων στα πρώτα στάδια της μάθησης των παιδιών θα οδηγήσει σε δυσκολία που θα τους ακολουθήσει στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά και πέρα από αυτή (Γαγάτσης, κ.ά., 2006).

Πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν την περίπτωση μιας έννοιας, η απόκτηση της οποίας απαιτεί εννοιολογική αλλαγή. Έχουν παρατηρήσει ότι κάποιες δυσκολίες που έχουν τα παιδιά στην κατανόηση των κλασμάτων, θα μπορούσαν να εξηγηθούν ως αποτέλεσμα μιας αντίφασης ανάμεσα στις νέες πληροφορίες και τις προηγούμενες γνώσεις τους. (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Ένας από τους λόγους για τους οποίους η μαθηματική έννοια του κλάσματος είναι συστηματικά δύσκολη, είναι επειδή δεν συμφωνεί με τις αρχές καταμέτρησης που ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς. Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος είναι διαφορετική από την έννοια του φυσικού αριθμού στη συμβολική αναπαράστασή του. Οι πρώιμες γνώσεις των παιδιών σχετικά με τους αριθμούς μπορούν να αποτελέσουν σοβαρό εμπόδιο στην εκμάθηση των κλασμάτων, δεδομένης της τάσης των παιδιών να αντιστέκονται στις αλλαγές των νοητικών δομών που έχουν διαμορφώσει και να διαστρεβλώνουν τις νέες πληροφορίες (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Είναι απαραίτητο να προωθηθούν όχι μόνο γεγονότα και διαδικασίες , αλλά επίσης συντονισμός πολλών διαφορετικών πτυχών της γνώσης που σχετίζονται με το κλάσμα, προκειμένου να αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών/τριών να αποκτήσουν «κλασματική επάρκεια» (fraction proficiency), ένας όρος που αναφέρεται στην εννοιολογική κατανόηση ενός ατόμου, στις διαδικαστικές δεξιότητες και στην ικανότητα προσέγγισης καθημερινών καταστάσεων που περιλαμβάνουν κλάσματα (Tsai & Li, 2017).

1.3 Το κλάσμα: μια πολυσχιδής έννοια με πολλές ιδιαιτερότητες

1.3.1 Ορισμός της Έννοιας

Η αρχική ιδέα του κλάσματος που προκύπτει στην πρώιμη σκέψη των παιδιών, είναι αποτέλεσμα εφαρμογής διαισθητικών μηχανισμών που σχετίζονται με το διαμερισμό μιας ποσότητας. Ομάδα ερευνητών εντόπισε στην φάση αυτή ενδείξεις αναλογίας στο σκεπτικό των παιδιών σχετικά με τα κλάσματα. Δηλαδή, γίνεται χρήση των κλασμάτων σε αναλογίες χωρίς να έχουν διδαχθεί την έννοια της αναλογίας, π.χ. γνωρίζουν ότι το 1/2 μιας ποσότητας και τα 2/4 της ίδιας ποσότητας ταυτίζονται (Pitkethly & Hunting, 1996). Ένα συνηθισμένο κλάσμα περιγράφεται συχνά ως ο λόγος ή το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών α και β, όπου η συμβολική του μορφή είναι α/β και το β δεν είναι μηδέν. Η έννοια του κλάσματος συνδέεται και με άλλα μαθηματικά θέματα, όπως την γεωμετρία, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση ακέραιων αριθμών (Wong & Evans, 2007).

Ο Kieren (1993) υποστηρίζει ότι το «κλάσμα» ως όρος δεν χρησιμοποιείται μόνο από μαθηματικούς και μας κατευθύνει σε ένα «προσωπικό γνωσιακό σύστημα ιδεών», το οποίο διαμορφώνεται με ιδιαίτερο τρόπο στο κάθε άτομο, εντός του οποίου συσχετίζονται σε προσωπικό επίπεδο η διαίσθηση για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και η προηγούμενη τυπική γνώση, η οποία ενδεχομένως υπάρχει στο ίδιο άτομο. Από την άλλη, ο όρος «ρητός» ανάγεται σε ένα φορμαλιστικό σύστημα που έχει κατασκευασθεί και χρησιμοποιείται από τους ειδήμονες της γνώσης, δηλαδή τους μαθηματικούς. Αυτοί οι δύο όροι, κλάσμα και ρητός, χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται από όσους τους μελετούν και τους ερευνούν με υποκειμενικό εν πολλοίς τρόπο. Ως επακόλουθο έρχεται η σύγχυση και αρκετές φορές η διάσταση απόψεων (Smith, 2002).

Πρέπει να συμφωνήσουμε στις έννοιες του κλάσματος και του ρητού αριθμού. Μπορούμε να δώσουμε σαφείς και ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς για τους ρητούς αριθμούς και τα κλάσματα: Οι ρητοί αριθμοί είναι στοιχεία ενός άπειρου πεδίου (infinite field) που αποτελείται από άπειρες κλάσεις ισοδυναμίας και τα στοιχεία των κλάσεων ισοδυναμίας είναι κλάσματα, π.χ. το κλάσμα 1/2 ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας που αποτελείται από τα κλάσματα: 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, …, (τα οποία είναι άπειρα στο πλήθος) και η κλάση αυτή είναι στοιχείο του πεδίου των ρητών αριθμών (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Όταν τα κλάσματα και οι ρητοί αριθμοί, που εφαρμόζονται σε πραγματικά προβλήματα, αντιμετωπίζονται από παιδαγωγική άποψη, είναι δυνατόν να ερμηνευτούν με πολλούς τρόπους και έτσι «υποδύονται διαφορετικούς ρόλους» σε κάθε περίπτωση, όπως το κλάσμα ως μέρος του όλου, ως πηλίκο, ως μέτρηση κ.τ.λ. (Behr, κ.ά., 1992).

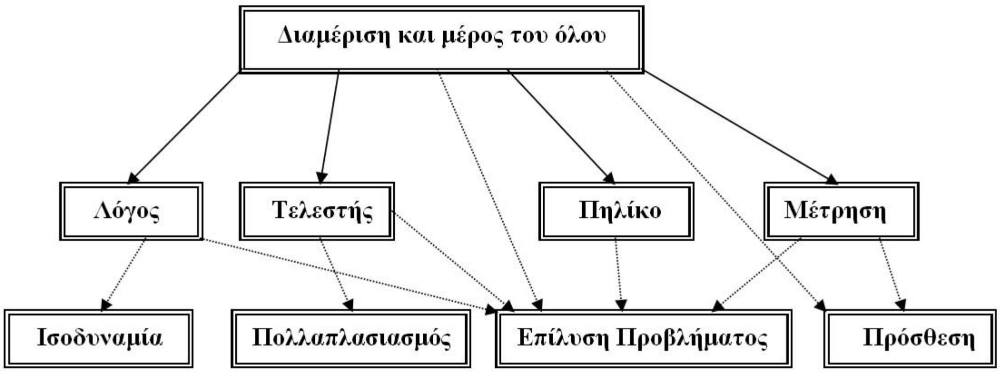
Ένας καθοριστικός παράγοντας που επιφέρει σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων από τους/τις μαθητές/τριες και συμβάλλει στην πολυπλοκότητα της διδασκαλίας τους, αναφέρεται στο κλάσμα ως ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα (multifaceted construct) ή μια πολύπλευρη έννοια με πέντε υποκατασκευές - νοητικά σχήματα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Βοτάνη, κ.ά., 2017· Wong & Evans, 2007). Πρώτος ο Kieren το 1976 εισήγαγε την ιδέα ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από διαφορετικά υποκατασκευάσματα και ότι η κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού, εξαρτάται από την κατανόηση της συμβολής αυτών των δομών (Behr, κ.ά., 1992). Η σύνθεση αυτού του κατασκευάσματος καθιστά την έννοια του κλάσματος αρκετά πολύπλοκη, καθώς αποτελείται από πολλαπλές υποσυνθέσεις - υποκατασκευές, οι οποίες δεν αναπτύσσονται επαρκώς στο παραδοσιακό σχολείο (Naik & Subramaniam, 2008). Σε αυτό το κατασκεύασμα εντοπίζονται πέντε υποκατασκευές που περιγράφουν πέντε διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος: α) το κλάσμα ως μέρος του όλου (part-whole) β) το κλάσμα ως πηλίκο (quotient) γ) το κλάσμα ως λόγος (ratio) δ) το κλάσμα ως μέτρηση (measure) και ε) το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής (operator) μιας ποσότητας (Pantziara & Philippou, 2012· Tsai & Li, 2017). Χρησιμοποιώντας αυτές τις πέντε ερμηνείες – νοητικά σχήματα μπορεί κάποιος να διερευνήσει τα διάφορα χαρακτηριστικά και τους χειρισμούς των κλασμάτων, όπως γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα, μικτοί αριθμοί, ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση, πρόσθεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση (Wong & Evans, 2007).

Στον πίνακα 1 δίνεται ένα παράδειγμα ερμηνείας του κλάσματος 3/4 με βάση τις πέντε υποκατασκευές.

Πίνακας 1. Διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος 3/4 (Wong & Evans, 2007)

Ερμηνείες	Παράδειγμα
Μέρος του όλου	Τα 3 από τα 4 ίσα μέρη ενός ολόκληρου αντικειμένου ή μιας συλλογής
Πηλίκο	Το 3 διαιρούμενο με το 4: 3/4 είναι το ποσό που λαμβάνει κάθε άτομο
Λόγος	3 μέρη τσιμέντου ανά 4 μέρη άμμο
Μέτρηση	3/4 σημαίνει απόσταση 3 από το 0 στην αριθμογραμμή (με μονάδα 1/4)
Πολλαπλασιαστής	3/4 από κάτι: επέκταση ή συρρίκνωση

Η πλήρης κατανόηση των κλασματικών αριθμών απαιτεί την κατανόηση, όχι μόνο κάθε επιμέρους νοητικού σχήματος, αλλά και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης (Βοτάνη, κ.ά., 2017).



Σχήμα 1. Εννοιολογικό σχήμα σύνδεσης των πέντε υποκατασκευών του κλάσματος με τις διαφορετικές λειτουργίες του (Behr et al., 1983).

Όταν κάποιος εξετάζει το ερώτημα τι εμπειρίες χρειάζεται να αποκτήσει ένα παιδί προκειμένου να έχει μια πλήρη κατανόηση των κλασματικών αριθμών, η αντίληψη ότι ένας κλασματικός αριθμός ερμηνεύεται μόνο ως ένα αποτέλεσμα ενός πηλίκου είναι υπερβολικά απλοϊκή. Όταν η έννοια του κλασματικού αριθμού χρησιμοποιείται σε καταστάσεις πραγματικού κόσμου παίρνει τις «προσωπικότητες» που δεν καταλαμβάνονται από αυτό το μαθηματικό χαρακτηριστικό (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993). Οι Pitkethly και Hunting (1996) θεωρούν ότι μια μεστή και πλήρης κατανόηση των ρητών αριθμών προϋποθέτει την διαφοροποίηση αλλά και την ολοκλήρωση των ξεχωριστών υποκατασκευών, το οποίο σημαίνει αφενός την ικανότητα κατανόησης του καθενός και αφετέρου, την ικανότητα μετακίνησης από την μια υποκατασκευή στην άλλη.

1.3.2 Το κλάσμα ως μέρος του όλου (part-whole)

Η ικανότητα ερμηνείας ενός κλάσματος ως «μέρος του όλου» εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ικανότητα μερισμού μια συνεχούς ποσότητας σε ίσα μέρη (Βοτάνη, κ.ά., 2017). Οι ερευνητές θεωρούν θεμελιώδη την έκφραση του κλάσματος «μέρος του όλου» για την διδασκαλία και μάθηση της έννοιας, αλλά και για την κατανόησή της (Behr et al., 1983· Pitkethly & Hunting, 1996· Ni & Zhou, 2005).

Στην προσπάθειά τους οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν τα κλάσματα κυριαρχούνται από την αντίληψη του κλάσματος ως μέρος του όλου, γεγονός που προκαλείται από εσφαλμένη την ιδέα ότι το κλάσμα είναι ένας μεμονωμένος αριθμός. Έτσι όταν θέλουν να ερμηνεύσουν το κλάσμα 3/4 ως μέρος μιας ποσότητας, το ερμηνεύουν σαν κάτι ισοδύναμο με τον αριθμό 3, αφού παίρνουν τελικά 3 μέρη της ποσότητας, χωρίς να δίνουν προσοχή στην σημασία του παρονομαστή. Η ιδέα αυτής της υποκατασκευής διαποτίζει όλο το σκεπτικό για τους ρητούς αριθμούς. Δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ως ξεχωριστό διακριτό κατασκεύασμα, αλλά να αναγνωρισθεί τόσο η ενοποιητική του σημασία, όσο και οι περιορισμοί που είναι δυνατόν να θέσει στην κατανόηση των υπολοίπων υποκατασκευών. Η υπερβολική έμφαση στην υποκατασκευή «μέρος-όλον» ενδέχεται να μεταφέρει την προσοχή των μαθητών μακριά από την αριθμητική φύση των κλασμάτων (Domoney, 2002). Πολλά από τα προβλήματα στην εκμάθηση των κλασμάτων αποδίδονται ακριβώς στην υπερβολική εστίαση στην ερμηνεία «μέρος του όλου», γεγονός που αποτελεί εμπόδιο στην αλγεβρική λογική (McGee, Kervin, & Chinnappan, 2006). Σύμφωνα με τον Lamon συχνά η έννοια του κλάσματος εισάγεται ως η υποκατασκευή μέρος του όλου (The part–whole subconstruct), όπου απαιτείται η ικανότητα διαίρεσης μιας συνεχούς ποσότητας, ή μιας ομάδας διακεκριμένων αντικειμένων σε τμήματα ή υποομάδες ίσου μεγέθους. Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να κατανοήσουν ότι η σχέση μεταξύ των τμημάτων και του όλου διατηρείται, ανεξάρτητα από το μέγεθος, το σχήμα και τη διάταξη των αντίστοιχων τμημάτων και ότι σε όσο περισσότερα τμήματα διαιρείται στο σύνολο, τόσο μικρότερα είναι τα παραγόμενα μέρη (Pantziara & Philippou, 2012). Η ελλιπής και εσφαλμένη κατανόηση της υποκατασκευής «μέρος του όλου» και του τρόπου που σχετίζεται με την μονάδα, συχνά, θα επιφέρει δυσκολίες αργότερα στην πρόσθεση των κλασμάτων, στην σύγκρισή τους, καθώς και στην δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων. Οι μαθητές/τριες δεν αναγνωρίζουν ότι το «όλον» χωρίζεται σε αριθμό ίσων μερών που υποδεικνύει ο παρονομαστής. Στην προσπάθειά τους να προσθέσουν κλάσματα, προσθέτουν τους αριθμητές και θεωρούν ότι το αποτέλεσμα είναι ο αριθμητής του αθροίσματος των κλασμάτων, ενώ το άθροισμα των παρονομαστών είναι ο παρονομαστής του αθροίσματος των κλασμάτων, π.χ. 3/5 + 4/7 = 7/12 (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984).

Προς το σκοπό αυτό η χρήση χειραπτικών μοντέλων και οπτικών αναπαραστάσεων είναι καθοριστική για την υποστήριξη της ουσιαστικής μάθησης. Κατά τον Piaget τα παιδιά στο συγκεκριμένο νοητικό στάδιο ανάπτυξης μαθαίνουν σε κοινωνικά πλαίσια, μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες και από αντικείμενα που μπορούν να δουν και να αγγίξουν. Οι απόψεις του Bruner σχετικά με τον ρόλο της αναπαράστασης έχουν επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών (Cramer & Wyberg, 2009). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι ιδιαίτερα σημαντικός, καθώς διευκολύνουν και βελτιώνουν την κατανόηση και χρήση των νοητικών σχημάτων - υποκατασκευών για τα κλάσματα, ενώ παράλληλα κατευθύνουν τη σκέψη των παιδιών να περάσει από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να πραγματοποιήσουν "μεταφράσεις - ερμηνείες", προκειμένου οι ιδέες τους να αποκτήσουν νόημα. Έναν καλό τρόπο αναπαράστασης ισοδύναμων κλασμάτων ή της υποκατασκευής «μέρος – όλον» αποτελεί η αναδίπλωση ενός χαρτιού (Βοτάνη, κ.ά., 2017) .

1.3.3 Το κλάσμα ως πηλίκο (quotient)

Η κατανόηση του κλάσματος ως πηλίκο, που διαμερίζει μια ποσότητα, είναι καθοριστική για την ανάπτυξη μιας βαθύτερης κατανόησης των ρητών αριθμών. Οι μαθητές του δημοτικού πρέπει να επιτύχουν την απαραίτητη κατανόηση μέσω του διαχωρισμού ποσοτήτων χρησιμοποιώντας συμβολικές αναπαραστάσεις και χειραπτικά μοντέλα (McGee, κ.ά., 2006). Στην υποκατασκευή πηλίκο οποιοδήποτε κλάσμα θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης, το οποίο προκύπτει διαιρώντας τον αριθμητή του με τον παρονομαστή του. Πιο συγκεκριμένα, η συμβολική αναπαράσταση κ/λ υποδεικνύει την αριθμητική τιμή που λαμβάνεται όταν ο ακέραιος κ διαιρείται με τον ακέραιο λ. Συναντάται και σε αυτήν την υποκατασκευή ο διαμερισμός μιας ποσότητας σε ίσα τμήματα. Ωστόσο σε αντίθεση με την υποκατασκευή «μέρος του όλου» , εδώ ο ακέραιοι αριθμοί κ και λ ανήκουν σε διαφορετικούς χώρους μέτρησης, π.χ. τρεις σοκολάτες μοιράζονται σε τέσσερα αδέλφια. Επιπλέον, δεδομένου ότι το αποτέλεσμα που παίρνουμε αναφέρεται σε αριθμητική τιμή και όχι στα τμήματα που λαμβάνονται από τον δίκαιο διαμερισμό, στην υποκατασκευή «πηλίκο» δεν υπάρχει περιορισμός στο μέγεθος του κλάσματος: Ο αριθμητής μπορεί να είναι μικρότερος, ή ίσος, ή μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, ενώ η ποσότητα που προκύπτει μετά την διαίρεση μπορεί να είναι μικρότερη, ή μεγαλύτερη, ή ίση με την μονάδα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Η ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο συνήθως εισάγεται στους μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού ως ο διαμερισμός μιας ποσότητας σε ίσα μερίδια. Μια ποσότητα μεγέθους μ διαμερίζεται σε ν ίσες ποσότητες. Στη διαδικασία αυτή γίνεται σύνδεση του παραδοσιακού συμβόλου της διαίρεσης με την ερμηνεία της μέτρησης, θεωρώντας ότι το κλάσμα – πηλίκο μ/ν εκφράζει μ κλασματικές μονάδες , όπου η κάθε μια είναι ίση με 1/ν (Naik & Subramaniam, 2008). Το κλάσμα ως μεριστικό πηλίκο (quotient partitioning construct) είναι μια περιοχή που συνεχώς λαμβάνει την προσοχή των μαθηματικών, λόγω της εξάρτησης και της αντανάκλασης μιας βαθύτερης γνώσης και εφαρμογής από την υποκατασκευή «μέρος του όλου» (McGee, κ.ά., 2006). Υπάρχουν δεσμοί μεταξύ του μεριστικού πηλίκου και των άλλων υποκατασκευών του κλάσματος (George, 2017). Το «πηλίκο» εμφανίζεται να έχει διαφορετικό νόημα σε διαφορετικά πλαίσια. Χτίζοντας φαινομενολογικά την ερμηνεία του πηλίκου στα πλαίσια της «δίκαιης μοιρασιάς», οι ρητοί αριθμοί γίνονται «πηλίκα» ακέραιων αριθμών. Έτσι ένας κλασματικός αριθμός μπορεί να οριστεί ως απόδοση μιας κατάστασης διαίρεσης. Λαμβάνοντας υπόψη αυτόν τον ορισμό, η σχέση μεταξύ της διαίρεσης ως πράξης και του κλάσματος ως πηλίκο γίνεται μια κρίσιμη θεώρηση για την διδασκαλία (Middleton, Toluk, De Silva, & Mitchell, 2001).

Ο Domoney (2002) θεωρεί, ότι ο ρητός αριθμός κ/λ ως πηλίκο είναι το αποτέλεσμα επίλυσης της εξίσωσης λx = κ. Η επέκταση του αριθμητικού συστήματος ώστε να συμπεριλάβει μη ακέραιους ρητούς αριθμούς, παράγει ένα νέο πεδίο: το πηλίκο, όπου όλοι οι αριθμοί εκφράζονται ως πηλίκα. Πρόκειται για ένα σύνολο αριθμών, που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς και κλάσματα, το οποίο διέπεται από τους συνήθεις κανόνες της αριθμητικής, συμπεριλαμβανομένων των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Ο Kieren αναφέρεται στον συμπληρωματικό χαρακτήρα των ρητών αριθμών ως πηλίκα και ως λόγοι. Υποστηρίζει ότι υπάρχει ισχυρή επικάλυψη του «πηλίκου» με την υποκατασκευή «λόγος», θεωρώντας, ότι ο λόγος εκφράζει τη σχέση μιας ποσότητας και μιας μονάδας. Για παράδειγμα, το κλάσμα 3/4 ως λόγος είναι η λύση της εξίσωσης χ/1=3/4 (άρα η σχέση της ποσότητας χ με το 1 είναι 3/4=0,75), ενώ ως πηλίκο είναι η λύση της εξίσωσης 4χ=3, οπότε χ=3/4, ή χ= 0,75.

Σύμφωνα με την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος του όλου», το σύμβολο α/β συνήθως αναφέρεται σε ένα κλασματικό τμήμα μίας μόνο ποσότητας. Στην ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος», το σύμβολο α/β αναφέρεται σε μια σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Το σύμβολο α/β μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για αναφορά στην διαίρεση δύο αριθμών. Δηλαδή, το α/β χρησιμοποιείται μερικές φορές, ως ένας τρόπος γραφής της διαίρεσης α ÷ β. Αυτός είναι ο συνήθης και ο υποδεικνυόμενος τρόπος ερμηνείας των ρητών αριθμών: ως διαίρεση και ως πηλίκο (Behr et al., 1983).

Η θεώρηση των ρητών αριθμών ως πηλίκα περιλαμβάνει τουλάχιστον δύο επίπεδα πολυπλοκότητας. Από τη μία πλευρά, τα κλάσματα 8/4 ή 2/3 που ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα μιας διαίρεσης, δημιουργούν την ισοδυναμία των 8/4 και 2 ή 2/3 και 0,666. Από την άλλοι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως στοιχεία ενός πεδίου πηλίκου και, ως τέτοιοι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό της ισοδυναμίας, της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και άλλων ιδιοτήτων μέσα από μια καθαρά επαγωγική προοπτική. Αρκετοί αλγόριθμοι προκύπτουν από εξισώσεις μέσω των ιδιοτήτων του πεδίου, όπως είναι η επίλυση κλασματικών εξισώσεων, θέματα που αφορούν κλασματικές συναρτήσεις, αναλογίες στην ομοιότητα τριγώνων, ορισμός μεγεθών και διατύπωση νόμων στη Φυσική (Kieren, 1976). Αυτό το επίπεδο πολυπλοκότητας απαιτεί εν γένει πνευματικές δομές που δεν είναι διαθέσιμες στα παιδιά της πρωτοβάθμια εκπαίδευσης, επειδή σχετίζονται με ρητούς αριθμούς σε αφηρημένα αλγεβρικά συστήματα (Behr et al., 1983) .

1.3.4 Το κλάσμα ως λόγος (ratio)

Ο λόγος ως έννοια και τα θέματα που σχετίζονται με αυτή, όπως τα κλάσματα και οι αναλογίες, είναι γνωστό, ότι είναι ένα πεδίο των μαθηματικών στο οποίο οι μαθητές/τριες συναντούν δυσκολίες και οι δάσκαλοι τα κατατάσσουν ως ένα από τα πιο προβληματικά θέματα του προγράμματος σπουδών. Απαιτείται πολυπλοκότητα γνώσεων για την αποτελεσματική διδασκαλία του (Chick, 2010).

Ο λόγος είναι μια σύγκριση δύο οποιωνδήποτε ποσοτήτων και αναπαριστά μια έννοια, που δεν μπορεί να γραφεί ως ένας μόνο αριθμός. Θεωρείται ορθότερα ως ένας συγκριτικός δείκτης, παρά ως ένας αριθμός (Behr et al., 1983· George, 2017). Όταν δύο λόγοι είναι ίσοι τότε θεωρούνται ανάλογοι με έναν άλλο. Μια αναλογία είναι μια ισότητα που εξισώνει δύο λόγους. Η χρήση των αναλογιών είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στην επίλυση προβλημάτων σε μια ποικιλία φυσικών καταστάσεων και προβλημάτων που απαιτούν συγκρίσεις μεγεθών (Behr et al., 1983). Το παράδειγμα στο οποίο τρεις πίτσες αντιστοιχούν σε τέσσερις ανθρώπους αναπαριστά το 3/4. Αυτό είναι διαφορετικό από την ερμηνεία του πηλίκου, όπου τα 3/4 πίτσας ανά άτομο ερμηνεύονται ως το ποσό της πίτσας που λαμβάνει καθένα από τα τέσσερα άτομα όταν μοιράζονται τρεις πίτσες. Ένας λόγος μπορεί επίσης να αναπαριστά μια σχέση μέρους - μέρους, η οποία συγκρίνει τις ίδιες μονάδες. Στην περίπτωση αυτή το 3/4 μπορεί να αναπαριστά τρία πράσινα αντικείμενα ενός συνόλου για κάθε τέσσερα αντικείμενα του ίδιου συνόλου, όταν ένα μέρος των αντικείμενων του συνόλου είναι πράσινα και ένα μέρος είναι κόκκινα (George, 2017).

1.3.5 Το κλάσμα ως μέτρηση (measure)

Το κλάσμα όταν εκφράζει το μέτρο μιας ποσότητας ή ενός μεγέθους απαντά στην ερώτηση «πόσο είναι;» με τον ίδιο τρόπο που ένας φυσικός αριθμός απαντά στην ερώτηση «πόσα είναι;». Το «ένα και τρία τέταρτα» είναι ένα μέτρο, το οποίο ορίζεται ως μια συγκεκριμένη μονάδα, η οποία είναι μεγαλύτερη από μία μονάδα αλλά μικρότερη από δύο. Όλες οι συνεχείς ποσότητες απαιτούν κλασματικό αριθμό για τη μέτρησή τους (Domoney, 2002). Η διδασκαλία που δίνει έμφαση στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρηση και στο νόημα του μερισμού, μπορεί να συμβάλλει θετικά στην κατανόηση των κλασμάτων και να συμπληρώσει την κατανόηση της ερμηνείας «μέρος του όλου», η οποία από μόνη της είναι ανεπαρκής (Naik & Subramaniam, 2008). Η αναπαράσταση στην γραμμή των αριθμών συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση του κλάσματος ως μέτρηση, όπως με τη χρήση ενός κλάσματος μονάδας για την μέτρηση μιας απόστασης από το σημείο αναφοράς που βρίσκεται στο μηδέν και, αντίστροφα, για τον εντοπισμό ενός σημείου στην γραμμή των αριθμών, όταν γνωρίζουμε την απόστασή του από το σημείο αναφοράς. Η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρηση είναι η πιο δύσκολη για τους μαθητές (Pekkan, 2015).

1.3.6 Το κλάσμα ως πολλαπλασιαστής (operator)

Η υποκατασκευή του ρητού αριθμού ως πολλαπλασιαστής (ή τελεστής) επιβάλλει μια αλγεβρική ερμηνεία για τον ρητό αριθμό p/q. Το p/q θεωρείται ως μια συνάρτηση που μετατρέπει γεωμετρικά σχήματα σε παρόμοια γεωμετρικά σχήματα p/q φορές μεγαλύτερα ή ως συνάρτηση που μετατρέπει ένα σύνολο σε ένα άλλο σύνολο με p/q φορές περισσότερα στοιχεία. Κατά την χρήση του πολλαπλασιαστή σε συνεχές αντικείμενο, π.χ. μήκος, το κλάσμα p/q ερμηνεύεται ως συνδυασμός «φορείου-συρρικνωτή». Σε οποιοδήποτε τμήμα γραμμής μήκους L που επενεργεί ο πολλαπλασιαστής p/q, τεντώνεται p φορές το μήκος του και στη συνέχεια συρρικνώνεται με συντελεστή q. Μια ερμηνεία πολλαπλασιαστή-διαιρέτη δίνεται στο p/q όταν λειτουργεί σε ένα διακριτό σύνολο. Ο ρητός αριθμός p/q μετασχηματίζει ένα σύνολο με n στοιχεία σε ένα σύνολο με στοιχεία np και στη συνέχεια ο αριθμός αυτός μειώνεται σε np/q (Behr et al., 1983).

Η έννοια του τελεστή για τον ρητό αριθμό υποδηλώνει ότι ο ρητός αριθμός κ/λ θεωρείται ως μια συνάρτηση που εφαρμόζεται σε έναν αριθμό, ή σε ένα αντικείμενο, ή σε ένα σύνολο. Η δομή «τελεστής» μπορεί να αναλυθεί με μια από τις ακόλουθες ερμηνείες:

α) Ως διπλασιαστής (duplicator)και διαμεριστής (partition-reducer): π.χ. αν περιέχονται α όμοια αντικείμενα σε ένα κουτί, γίνονται 2α με τελεστή το 8/4 ή α/4 με τελεστή το 1/4.

β) Ως μέσο επέκτασης (stretcher) και συρρικνωτής (shrinker): π.χ. όταν το μήκος ενός ελατηρίου πολλαπλασιάζεται με 4/3, το ελατήριο τεντώνεται και επεκτείνεται, ενώ όταν πολλαπλασιάζεται με 2/3 το ελατήριο συρρικνώνεται

γ) Ως πολλαπλασιαστής (multiplier) και διαιρέτης (divisor): π.χ. ένας πληθυσμός α πολλαπλασιάζεται με τελεστή 4/3, ενώ διαιρείται με τελεστή το 2/3.
δ) Ως μέσο επέκτασης (stretcher) και διαιρέτης (divisor): Μια πλατεία α τετραγωνικών μέτρων επεκτείνεται όταν εφαρμόσουμε στο α τελεστή 4/3, ενώ διαιρείται σε τρία ίσα μέρη όταν εφαρμόσουμε τελεστή 1/3.
ε) ως πολλαπλασιαστής (multiplier) και συρρικνωτής (shrinker): Ο όγκος V ενός μπαλονιού πολλαπλασιάζεται όταν ο τελεστής 4/3 εφαρμοστεί στο V, ενώ συρρικνώνεται με τελεστή στο V το 2/3.
(Behr, κ.ά., 1993).

1.4 Οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας

Οι ειδικοί της μαθηματικής εκπαίδευσης συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό, ότι η μάθηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα κλάσματα, παραμένει ένα σοβαρό εμπόδιο στην μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών (Behr, κ.ά., 1992). Υπάρχουν πολλές έρευνες, σε όλον τον κόσμο, που καταδεικνύουν τα προβλήματα των μαθητών στην εκμάθηση των κλασμάτων και όσον αφορά την έννοια, αλλά και τις πράξεις τους. Παρά την τεράστια ποσότητα βιβλιογραφίας που είναι διαθέσιμη για εκπαιδευτικούς και μαθητές, οι δυσκολίες εξακολουθούν να τους βαρύνουν (McGee, κ.ά., 2006).

Οι έννοιες των ρητών αριθμών συγκαταλέγονται στις πιο πολύπλοκες και περισσότερο σημαντικές, που τα παιδιά συναντούν πριν φτάσουν στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η αυξημένη προσοχή που δίνεται στην έρευνα για την κατανόηση αυτών των εννοιών από τους μαθητές, αντικατοπτρίζει την σημασία τους. Αποτελέσματα εθνικών αξιολογήσεων στις Η.Π.Α. καταδεικνύουν ότι οι μαθητές έχουν σημαντική δυσκολία στην κατανόηση και εφαρμογή των ερμηνειών που αφορούν τα κλάσματα. Αποτυγχάνουν να ενσωματώσουν μια λειτουργική έννοια του ρητού αριθμού. Δεν θεωρούν τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε σχέση μεταξύ τους, αλλά μάλλον τους χειρίζονται ως ξεχωριστές οντότητες που λειτουργούν ανεξάρτητα και φαίνεται να στερούνται μια ποσοτική αντίληψη του κλάσματος (Behr, κ.ά., 1984).

Έρευνες σε παγκόσμιο επίπεδο καταδεικνύουν ότι η κατανόηση και εφαρμογή στη διδασκαλία των ρητών αριθμών είναι δύσκολη για πολλούς εκπαιδευτικούς, αλλά και για τους μαθητές οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν είναι πολλαπλές και η μάθησή τους είναι περιορισμένη (Λεμονίδης & Ουζουνίδου, 2017). Πολλοί ερευνητές συμφωνούν ότι η δυσκολία των παιδιών με κλάσματα και ρητούς αριθμούς σχετίζεται με την γνώση τους για τους ακέραιους αριθμούς. Οι γνωστικές προκαταλήψεις που δημιουργούνται στην διδασκαλία των ακέραιων αριθμών, παρεμβάλλονται μεταξύ προηγούμενης και καινούργιας γνώσης, δυσχεραίνοντας την γνωστική κατασκευή της έννοιας τους κλάσματος από τους μαθητές (Ni & Zhou, 2005· McGee, κ.ά., 2006).

Οι δυσκολίες των παιδιών με τα κλάσματα και τους ρητούς γενικότερα μπορούν να αποδοθούν στο γεγονός ότι οι ρητοί αριθμοί εμφανίζονται να έχουν διαφορετική σημασία σε διαφορετικά πλαίσια. Μπορούν να ερμηνευθούν με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το πλαίσιο. Για παράδειγμα, το κλάσμα 2/4 μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ίσα μέρη μιας ποσότητας που έχει χωριστεί σε τέσσερα ίσα μέρη, αλλά και ως δύο ίσα μέρη, όπου καθένα ανήκει σε δύο διαφορετικές και ίσες ποσότητες και κάθε μια είναι χωρισμένη επίσης σε τέσσερα ίσα μέρη (Middleton, Toluk, De Silva, & Mitchell, 2001).

Ακόμη και μετά από αρκετά χρόνια επίσημης διδασκαλίας στα κλάσματα, τα παιδιά συνεχίζουν να έχουν δυσκολίες στην κατανόησή τους. Συνήθως κάνουν διαδικαστικά λάθη στις πράξεις, π.χ. να προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές όταν θέλουν να προσθέσουν κλάσματα. Μπορεί να εφαρμόζουν σωστά τις διαδικασίες, όμως συχνά αποτυγχάνουν να αντιληφθούν την λογική πίσω από αυτές. Μια σοβαρή αιτία αυτής της αποτυχίας είναι η σύγχυση που προκαλείται από τα συμβατικά σύμβολα, με τα οποία οι μαθητές προσπαθούν να επικοινωνήσουν τις έννοιες των κλασμάτων (Paik & Mix, 2003). Μερικοί ερευνητές εντοπίζουν την πηγή πολλών από τα προβλήματα κατανόησης που έχουν οι μαθητές/τριες στο γεγονός ότι η παραδοσιακή διδασκαλία εστιάζει, σχεδόν αποκλειστικά, στην υποκατασκευή «μέρος – όλον» (Naik & Subramaniam, 2008).

Τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν τον τρόπο γραφής και όλων των ακέραιων αριθμών. Ωστόσο, οι κανόνες των πράξεων στα κλάσματα διαφέρουν από αυτούς των πράξεων στους ακέραιους αριθμούς (Botonjić & Omerović, 2016). Ένα κλάσμα αποτελείται από δύο αριθμούς, όπου μεμονωμένα καθένας από αυτούς δεν παρέχει κανένα νόημα στην αξία του κλάσματος και δεν συνιστά δυσκολία για τους/τις μαθητές/τριες. Για να ερμηνεύσει ο/η μαθητής/τρια ένα κλάσμα πρέπει να συνδυάσει κατάλληλα τον αριθμητή και τον παρονομαστή. Οι λειτουργίες του κλάσματος είναι σύνθετες και μπορούν να οδηγήσουν σε μια ποικιλία συνεχών σφαλμάτων. Πολλοί μαθητές/τριες θεωρούν ένα κλάσμα σαν δύο ξεχωριστούς αριθμούς και δυσκολεύονται να αντιληφθούν τα λάθη τους όταν εργάζονται με τα κλάσματα. (Cramer & Wyberg, 2009). Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες στα κλάσματα αποδίδονται κατά κύριο λόγο στην εννοιολογική τους φύση. Πολλά εννοιολογικά λάθη οφείλονται στη μεταφορά ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών από τους φυσικούς αριθμούς στους μη φυσικούς με τρόπο μη αποτελεσματικό. Τέτοια λάθη παρατηρούνται στη σύγκριση κλασμάτων, συγχέοντας τη σύγκριση των όρων τους με τη σύγκριση των κλασμάτων. Μεγάλη εννοιολογική δυσκολία συναντούν οι μαθητές/τριες στην προσπάθεια κατανόησης του κλάσματος ως λόγου. Θεωρούν ότι οι όροι του κλάσματος εκφράζουν απόλυτα μεγέθη, χωρίς να αντιλαμβάνονται τον προσδιορισμό του κλάσματος από τη σχέση μεταξύ των όρων του. Πολλές εννοιολογικές δυσκολίες συνδέονται με την περιορισμένη δυνατότητα για σχετικές με τα κλάσματα αναπαραστάσεις (Μπεμπένη & Βαμβακούση, 2014). Ο Hasemann (1981) θεωρεί ότι οι σημαντικότερες αιτίες των δυσκολιών κατανόησης που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι οι εξής:

- Η τρόπος γραφής των κλασμάτων είναι συγκριτικά περίπλοκος με αυτόν των ακέραιων αριθμών.
- Δεν είναι εύκολο να τοποθετηθούν τα κλάσματα κατά σειρά μεγέθους στη γραμμή των αριθμών.
- Για τις πράξεις των κλασμάτων υπάρχουν πολλοί κανόνες, οι οποίοι είναι πιο περίπλοκοι από αυτούς για τους φυσικούς αριθμούς. Εάν αυτοί οι κανόνες εισαχθούν πολύ νωρίς, υπάρχει ο κίνδυνος να χρησιμοποιηθούν μηχανικά και χωρίς σκέψη.

Αρκετοί ερευνητές τονίζουν τον θετικό ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην διδασκαλία των κλασμάτων, καθώς και την χρήση και την εναλλαγή διαφορετικών αναπαραστάσεων που συμβάλλουν στην πληρέστερη και βαθύτερη κατανόηση τους (Πουρνάρα, Λεμονίδης & Παλαιγεωργίου, 2015). Τα φυσικά μοντέλα διαδραματίζουν θετικό ρόλο στην διευκόλυνση της κατανόησης και χρήσης των εννοιών που σχετίζονται με τα κλάσματα, καθώς η κατανόηση του/της μαθητή/τριας εξελίσσεται από την συγκεκριμένη στην αφηρημένη. Οι ψυχολογικές αναλύσεις δείχνουν ότι τα φυσικά μοντέλα αποτελούν απλώς μια συνιστώσα στην ανάπτυξη αναπαραστασιακών συστημάτων, καθώς στην κατανόηση και χρήση των κλασματικών εννοιών συμβάλλουν και άλλοι τρόποι αναπαράστασης, όπως: λεκτικοί, εικονογραφικοί και συμβολικοί (Behr, κ.ά., 1984).

Μεγάλο μέρος του προβλήματος κατανόησης των εννοιών που σχετίζονται με το κλάσμα, οφείλεται στο είδος της γνώσης (διαδικαστική ή εννοιολογική) που επικοινωνούν τα σχολικά εγχειρίδια, υπό την σκιά των Α.Π. σπουδών. Ως διαδικαστική γνώση ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να εκτελεί μία σειρά από πράξεις για να επιλύει προβλήματα χωρίς απαραίτητα να κατανοεί γιατί δουλεύει η διαδικασία. Η εννοιολογική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει διασυνδέσεις στη γνώση και να αντιλαμβάνεται τις πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Μπεμπένη & Βαμβακούση, 2014). Οι μαθητές/τριες που στηρίζονται μόνο στην διαδικαστική γνώση, έχουν χαμηλότερες επιδόσεις σε δραστηριότητες σχετικές μα τα κλάσματα, από ότι οι μαθητές/τριες που αποκτούν εννοιολογική γνώση (Pantziara & Philippou, 2012). Πολλοί μαθητές/τριες έχουν ελάχιστη εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων και εξαρτώνται από τις διαδικασίες που μαθαίνουν μηχανικά από συνήθεια (Naik & Subramaniam, 2008). Η εννοιολογική κατανόηση αναπτύσσεται όταν οι μαθητές/τριες βλέπουν τις σχέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών και μπορούν να δώσουν επιχειρήματα για να εξηγήσουν γιατί ορισμένα γεγονότα είναι συνέπειες άλλων. Τα γεγονότα δεν απομώνονται πλέον, αλλά οργανώνονται σε συνεκτικές δομές, που βασίζονται σε σχέσεις, γενικεύσεις και πρότυπα. Η εννοιολογική κατανόηση αναφέρεται από πολλούς ερευνητές ως «εννοιολογική γνώση» (Wong & Evans, 2007). Η χρήση και εναλλαγή οπτικών αναπαραστάσεων έχει σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης των μαθητών/τριών (Pantziara & Philippou, 2012). Η διαδικαστική γνώση ενσωματώνει την επίγνωση του τρόπου προσέγγισης μιας δραστηριότητας και των βημάτων ή αλγορίθμων που σχετίζονται με αυτή. Έχει διαπιστωθεί ότι η ανάπτυξη των διαδικαστικών γνώσεων των μαθητών έχει θετικές επιπτώσεις στην εννοιολογική τους κατανόηση, η οποία αποτελεί προϋπόθεση για την ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν και να επιλέγουν τις κατάλληλες διαδικασίες. Συνεπώς η εννοιολογική κατανόηση είναι αλληλένδετη με την διαδικαστική γνώση (Wong & Evans, 2007). Η εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων θέτει ως πρωταρχική απαίτηση στους μαθητές την ανάπτυξη ικανοτήτων πραγματοποίησης συνδέσεων και συγκρίσεων μεταξύ των διαφορετικών κλασματικών υποκατασκευών (Βοτάνη, κ.ά., 2017).

Ο Charles (2009) υποστήριξε ότι στην πραγματικότητα τα περισσότερα κρατικά πρότυπα επικοινωνούν μόνο μαθηματικές δεξιότητες ή διαδικαστική ευχέρεια αντί για εννοιολογική κατανόηση. Τα εγχειρίδια, που αποτελούν το κύριο υλικό του προγράμματος σπουδών στα μαθήματα μαθηματικών, τείνουν να επικεντρώνονται στην ικανότητα των δεξιοτήτων παρά στην κατανόηση της έννοιας (στο Morales, 2014).

1.5 Αναλυτικά προγράμματα σπουδών και διδασκαλία κλασμάτων

1.5.1 Οι επιδράσεις των Α.Π.Σ. στην κατανόηση των κλασμάτων

Τα μαθηματικά κατέχουν εξέχοντα ρόλο στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του δημοτικού σχολείου. Είναι κατά σειρά το δεύτερο μάθημα του Π.Σ. όσον αφορά στο χρόνο μελέτης που αφιερώνεται και στις προσπάθειες που γίνονται για την εκπόνηση και ανάπτυξη Π.Σ. Η οργάνωση του περιεχομένου του Π.Σ. προσδιορίζει σταδιακά τις γνώσεις, τις δεξιότητες και την κατανόηση που πρέπει να επιτευχθεί από έναν τυπικό μαθητή/τρια στο τέλος της καθορισμένης περιόδου του Π.Σ. Τα ενσωματωμένα τεκμήρια σε όλα τα στάδια και τα σκέλη του Π.Σ. είναι η έννοια της ανάπτυξης του αριθμητισμού. Ο αριθμητισμός μπορεί να περιγραφεί ως η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης των μαθηματικών που απαιτούνται για να καλυφθούν οι γενικές απαιτήσεις της ζωής στο σπίτι και στην εργασία και για την συμμετοχή στην κοινωνική ζωή. Η βαθύτερη κατανόηση των κλασμάτων αποτελεί θεμέλιο λίθο, προκειμένου να βελτιωθούν τα επίπεδα αριθμητισμού των μαθητών του δημοτικού (McGee, κ.ά., 2006).

Η έρευνα για την διδασκαλία, την μάθηση, τα προγράμματα σπουδών και την αξιολόγηση των εννοιών των ρητών αριθμών, εξαρτάται από την εννοιολογική αντίληψη που έχει ο ερευνητής για την φύση του ρητού αριθμού. Υπάρχει κάποια ομοφωνία ότι ο ρητός αριθμός δεν είναι ένα απλό κατασκεύασμα, αλλά μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ένα σύνολο σχετιζόμενων μεν, διακριτών δε υποκατασκευασμάτων (Behr, κ.ά., 1993).

Ενώ οι ερευνητές εκφράζουν συνήθως την άποψη ότι η προηγούμενη γνώση του παιδιού είναι η βάση για τη νέα γνώση και ότι η μάθηση είναι μια ενεργή διαδικασία, τα πολιτισμικά δεδομένα μέσα στα οποία πραγματοποιούνται οι έρευνες επιδρούν σημαντικά στο περιεχόμενο και στη μορφή των προγραμμάτων σπουδών. Το εποικοδομητικό παράδειγμα προϋποθέτει ότι η έρευνα εντοπίζει την ανάπτυξη των εννοιών των κλασμάτων στα παιδιά και ότι αυτή η φυσική εξέλιξη αντικατοπτρίζεται στην κατασκευή του προγράμματος σπουδών (Pitkethly & Hunting, 1996).

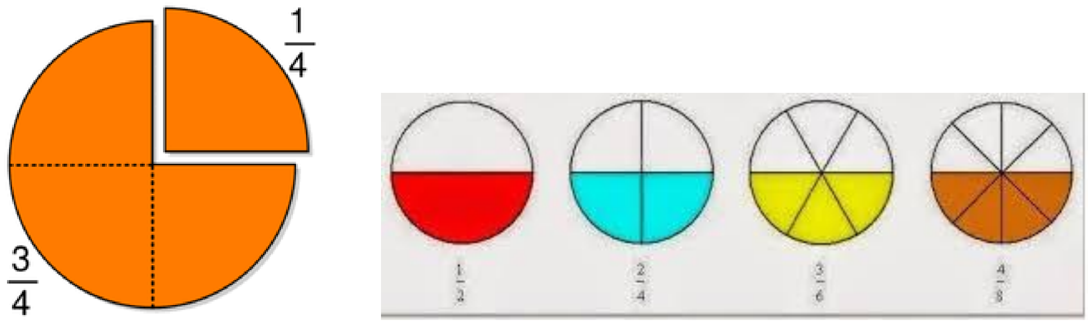
Η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα συμπληρώνει σχεδόν δύο δεκαετίες, από τότε που έγινε η στροφή στα νέα αναλυτικά προγράμματα. Τα μαθηματικά πλέον προσεγγίζονται ως μέσο επίλυσης ατομικών και κοινωνικών προβλημάτων, σχεδιασμένων κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να σχετίζονται με αληθινές και καθημερινές καταστάσεις. Η μαθηματική δραστηριότητα και η επίλυση προβλήματος συνιστούν κεντρικό στόχο του Α.Π. για τα μαθηματικά (Βρυώνης & Μπαραλής, 2015). Συνήθως, τα βασικά αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση κατασκευάζονται λαμβάνοντας υπόψη τις στερεότυπες λογικές και αγνοούν τις νοητικές διεργασίες και συνδέσεις μεταξύ των πτυχών του αντικειμένου, που πραγματοποιούνται στους/στις μαθητές/τριες. Δεν προσφέρουν στους/στις μαθητές/τριες τις ευκαιρίες να αποκτήσουν τέλεια γνώση των διαφόρων πτυχών του κλασματικού αριθμού και να ενσωματώσουν πλήρως τις ιδέες που έχουν (Domoney, 2002). Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από κρατικούς και εθνικούς φορείς στις Η.Π.Α., υποδηλώνουν ότι οι μαθητές/τριες αποτυγχάνουν να ενσωματώσουν μια λειτουργική έννοια του κλασματικού αριθμού, ώστε να μπορούν να την εφαρμόσουν στις πράξεις και σε προβλήματα με κλάσματα. Συχνά, δεν θεωρούν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής βρίσκονται σε μια σχέση μεταξύ τους, αλλά μάλλον τους χειρίζονται σαν ξεχωριστές οντότητες που λειτουργούν ανεξάρτητα (Behr et al., 1984).

Κατά το έτος 2000 το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) δηλώνει ότι, σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η μάθηση στα μαθηματικά, τα πρότυπα απαιτούν από τους μαθητές να οικοδομήσουν νέες γνώσεις μέσα από την επίλυση προβλημάτων, να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε νέες καταστάσεις και να παρακολουθήσουν και να προβληματιστούν για τις λύσεις τους. Στους μαθητές θα πρέπει να δοθούν ευκαιρίες για τη διερεύνηση προβλημάτων, την αξιολόγηση αποτελεσμάτων, την οργάνωση πληροφοριών και την ανακοίνωση των ευρημάτων τους. Θα πρέπει επίσης να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν, να εφαρμόζουν και να ερμηνεύουν τι πρέπει να κάνουν σε κάθε πρόβλημα, όπως και να δημιουργήσουν ένα σύστημα αποτελεσματικών μεθόδων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ειδικότερα για τα κλάσματα το (NCTM, 2000) υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν την κατανόηση των κλασμάτων ως τμήματα του όλου, ως τμήματα μιας συλλογής, ως θέσεις σε γραμμές αριθμών, ως διαιρέσεις ολόκληρων αριθμών, να χρησιμοποιούν μοντέλα, σημεία αναφοράς και ισοδύναμες μορφές για να κρίνουν το μέγεθος των κλασμάτων, να αναγνωρίζουν και να παράγουν ισοδύναμες μορφές κοινά χρησιμοποιούμενων κλασμάτων. Επίσης, να αναπτύξουν και να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές για την εκτίμηση υπολογισμών που περιλαμβάνουν κλάσματα σε καταστάσεις σχετικές με την εμπειρία του μαθητή, να κάνουν χρήση οπτικών μοντέλων, σημείων αναφοράς και ισοδύναμων μορφών για την πρόσθεση και αφαίρεση των κοινά χρησιμοποιούμενων κλασμάτων.

1.5.2 Η διδασκαλία των κλασμάτων

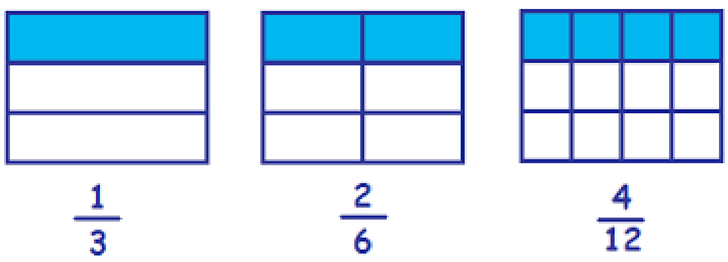
Η διδασκαλία των κλασμάτων εξακολουθεί να αποτελεί μείζονα πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι των μαθηματικών στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης. Η έρευνα για τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων έχει εντοπίσει αρκετές από τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές/τριες με τους αριθμούς αυτούς (Cramer & Wyberg, 2009). Είναι αδιαμφισβήτητη η σημασία των διδακτικών προσεγγίσεων, που αποσκοπούν στο να δώσουν στα παιδιά την βιωματική και εννοιολογική βάση για να κατανοήσουν τα κλάσματα και τους ρητούς αριθμούς, καταπολεμώντας τις προκαταλήψεις των ακέραιων αριθμών, οι οποίες ενίοτε παρέχουν κάποια γνωστική αποτελεσματικότητα αλλά και διδακτική ακαμψία. Ως «προκατάληψη» ορίζεται η συστηματική και συχνή απόκλιση από έναν κανόνα (Ni & Zhou, 2005). Είναι σημαντικό να δώσουμε στους μαθητές μια ποικιλία μεθόδων για να ανακαλύψουν τι είναι τα κλάσματα, πώς μπορούν να κάνουν υπολογισμούς με αυτά και πώς μπορούν να εφαρμοστούν σε άλλα μαθήματα εκτός από τα μαθηματικά. Θα έχουν έτσι τη δυνατότητα οι μαθητές να διορθώσουν τα σφάλματα τους και τις παρανοήσεις τους (Morales, 2014).

Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων κρίνεται σκόπιμο η εκκίνηση της διδασκαλίας να γίνεται από τις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών και πιο συγκεκριμένα από την αντίληψη ότι το κλάσμα είναι μέρος του όλου. Καθίσταται έτσι δυνατή μία ολοκληρωμένη οικοδόμηση της έννοιας μέσα από την τακτική εναλλαγής αναπαραστάσεων: εικονική, συμβολική, λεκτική. Η οπτική αναπαράσταση (κύκλος, γραμμή αριθμών, κ.τ.λ.) θα δώσει στο παιδί το ερέθισμα, το οποίο στην συνέχεια θα κωδικοποιηθεί συμβολικά (Τα 3 από τα 4 ίσα μέρη μιας ποσότητας θα τα συμβολίσει ως 3/4), ώστε τελικά να είναι σε θέση να γενικεύσει και να εκφράσει λεκτικά την έννοια του κλάσματος. Η εστίαση κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων μόνο σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο αναπαράστασης, θα οδηγήσει αναπόφευκτα σε ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Οι στερεότυπες μορφές αναπαράστασης (π.χ. Ο χωρισμός ενός τετραγώνου σε τέταρτα), ίσως να οδηγούν τους μαθητές στο σωστό αποτέλεσμα, ωστόσο δεν εξασφαλίζουν την ορθή εννοιολογική οικοδόμηση της έννοιας (Γαγάτσης, κ. ά., 2006).

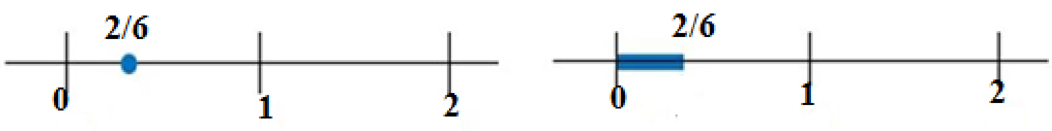


Εικόνα 1.Ο κύκλος: Βασικό σχήμα αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος

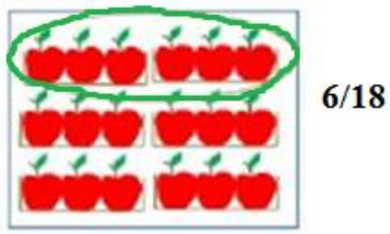
Στο δημοτικό σχολείο παρουσιάζονται στους μαθητές/τριες ποικίλες αναπαραστάσεις, ενώ διδάσκονται τα κλάσματα, όπως, οι κύκλοι κλασμάτων (εικόνα 2), τα ορθογώνια (εικόνα 3), τα κλάσματα ως τμήματα των αριθμογραμμών (εικόνα 4), το σχέδιο ενός κλάσματος ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων (εικόνα 5) ως λόγος (εικόνα 6) και ως τελεστής (Nicolaou & Pitta-Pantazi, 2016).



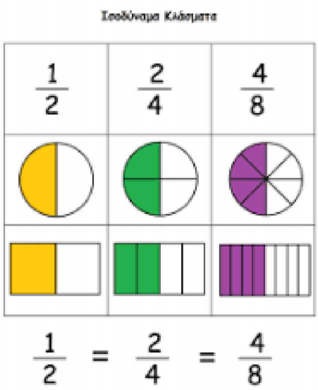
Εικόνα 2. Το κλάσμα ως τμήμα ενός ορθογωνίου



Εικόνα 3. Το κλάσμα ως τμήμα στην γραμμή των αριθμών



Εικόνα 4. Το κλάσμα ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων



Εικόνα 5. Το κλάσμα ως λόγος

Για να δημιουργηθούν μαθησιακές εμπειρίες που θα οδηγήσουν σταδιακά τους μαθητές/τριες από τις ευκολότερες εννοιολογικές αντιλήψεις σε αυτές που είναι σταδιακά πιο περίπλοκες και αφηρημένες, οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών πρέπει να είναι σε θέση, κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας τους, να προβλέψουν τις σχετικές δυσκολίες συγκεκριμένων ιδεών ή στρατηγικών που θα εφαρμόσουν. Πρέπει επίσης να μπορούν να προβλέψουν τη σχετική δυσκολία των διαφόρων συστημάτων αναπαραστάσεων (ή εκπαιδευτικών μοντέλων) που είναι διαθέσιμα για να εισαγάγουν και να απεικονίσουν αυτές τις ιδέες (Lesh, Behr & Post, 1987).

Συγκριτικές μελέτες δείχνουν ότι οι ψηφιακές παιγνιώδεις ιστορίες με βάση τον υπολογιστή, ως πλαίσιο στις δραστηριότητες με τα κλάσματα, υποστηρίζουν περισσότερο την κατανόηση, την εμπλοκή, τα κίνητρα και το ενδιαφέρον των παιδιών και μπορεί να οδηγήσουν τους/τις μαθητές/τριες σε ακόμη καλύτερες επιδόσεις (Gundas, 2015). Η αλληλεπίδραση των μαθητών/τριών με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που γίνεται με έναν ευχάριστο και παιγνιώδη τρόπο, είναι δυνατόν να βελτιώσει τις γνώσεις τους για τα κλάσματα και τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά γενικότερα (Πουρνάρα, Λεμονίδης & Παλαιγεωργίου, 2015).

Οι μαθητές/τριες, στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν την έννοια του κλάσματος, δεν θα υιοθετήσουν αμέσως την επιστημονική έννοια των κλασματικών αριθμών. Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών, ερμηνεύουν τα κλάσματα με τρόπους που αποκαλύπτουν τις ικανότητές τους να συνδυάσουν τις αρχικές ιδέες τους με τις νέες πληροφορίες που προέρχονται από την διδασκαλία. Σε αυτήν την διαδικασία όμως, οι μαθητές/τριες σχηματίζουν εμπειρικά μοντέλα κατανόησης των κλασμάτων, καταλήγοντας αρκετές φορές σε παρανοήσεις (Stafylidou & Vosniadou, 2004) .

Προκειμένου να συγκροτηθεί η σφαιρική κατανόηση της έννοιας του κλάσματος από τους/τις μαθητές/τριες του δημοτικού σχολείου, οι Nicolaou & Pitta-Pantazi (2016) καθορίζουν ιεραρχικά επτά επίπεδα κατανόησης στα οποία οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν αντίστοιχα επτά ικανότητες, οι οποίες είναι:

1. Αναγνώριση του κλάσματος (fraction recognition)
2. Ορισμοί και μαθηματικές επεξηγήσεις για τα κλάσματα
3. Επιχειρήματα και αιτιολογήσεις (argumentations and justifications) για τα κλάσματα
4. Σχετικό μέγεθος (relative magnitude) των κλασμάτων
5. Αναπαραστάσεις (representations) των κλασμάτων
6. Συνδέσεις (connections) των κλασμάτων με τους δεκαδικούς, τα ποσοστά και την διαίρεση
7. Λογισμός (reflection) κατά την λύση προβλημάτων με κλάσματα

Η σημασία αυτών ων ικανοτήτων έχει επαληθευθεί ερευνητικά στην ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων μεταξύ των μαθητών/τριών του δημοτικού.

Έχει διαπιστωθεί ερευνητικά ότι υπάρχει κενό μεταξύ των μαθησιακών στόχων που θέτουν τα προβλεπόμενα Αναλυτικά Προγράμματα (Α.Π.) και των δραστηριοτήτων που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια. Τα σχολικά εγχειρίδια, ως ένας σημαντικός πόρος για τη διδασκαλία και τη μάθηση σε πολλές χώρες, κατέχουν κεντρικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία. Επομένως είναι αναγκαίος ο βέλτιστος συνδυασμός Α.Π. και σχολικών εγχειριδίων για την επίτευξη των στόχων των διδακτικών προσεγγίσεων. Παρ’ όλα αυτά, έρευνες επιβεβαιώνουν την ύπαρξη σημαντικών κενών ανάμεσα στα εθνικά αναλυτικά προγράμματα σπουδών και τα αντίστοιχα σχολικά βιβλία που αναπτύσσονται (Fan & Zhu, 2007).

Προκειμένου οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να αναπτύξουν εμπειρίες μέσω των οποίων θα μπορούν να κατανοήσουν πλήρως την έννοια του ρητού αριθμού, οι ερευνητές πρέπει να διερευνήσουν την ικανότητα των παιδιών να αποκτήσουν γνώση των διαφορετικών «προσωπικοτήτων» με τις οποίες παρουσιάζεται ο ρητός αριθμός σε προβλήματα της καθημερινής ζωής και να καθορίσουν ποια είναι η άτυπη γνώση αυτών των προσωπικοτήτων. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί και οι υπεύθυνοι για την ανάπτυξη των προγραμμάτων σπουδών πρέπει να έχουν συνειδητοποιήσει και να κατέχουν αυτές τις «προσωπικότητες» του ρητού αριθμού. Πρέπει να αντιμετωπιστούν τα ζητήματα που προκύπτουν για το πώς θα δημιουργηθούν καταστάσεις μάθησης, ώστε οι δάσκαλοι και οι μαθητές/τριες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και της δευτεροβάθμιας, να αποκτήσουν γνώση των διαφορετικών «προσωπικοτήτων» του ρητού αριθμού (Behr, κ.ά., 1993).

1.5.3 Συζήτηση

Η έννοια του κλάσματος υπάρχει ως άτυπη μορφή γνώσης σε πολλές περιπτώσεις και προβλήματα της καθημερινής ζωής. Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του αριθμητισμού, εμπεριέχει ως πρωτογενές στοιχείο την κατανόηση των κλασμάτων αλλά και των πράξεων με αυτά. Το ενδιαφέρον για την έρευνα που αφορά τις έννοιες των ρητών αριθμών παραμένει αμείωτο, γεγονός που υποδηλώνει την σημασία τους αλλά και την πολυπλοκότητά τους. Οι δυσκολίες των μαθητών/τριών στην κατανόηση της έννοιας και στη χρήση των κλασμάτων, σε άλλα κεφάλαια των μαθηματικών και σε όλες σχεδόν τις βαθμίδες εκπαίδευσης, συνεχίζουν να υφίστανται. Η ανεπαρκής εννοιολογική γνώση που αναπτύσσουν οι μαθητές/τριες για τα κλάσματα, καθίσταται σοβαρό εμπόδιο στην ορθή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και, κατά συνέπεια, οδηγεί σε εσφαλμένη αντίληψη των άρρητων αριθμών και άλλων αλγεβρικών εννοιών. Υπάρχει ανάγκη σύνδεσης της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των κλασματικών αριθμών, μέσω σύγχρονων μορφών διδασκαλίας, ώστε οι μαθητές/τριες να μην αποκτούν αποσπασματικές γνώσεις για τους κλασματικούς αριθμούς. Έχοντας κύριο στόχο να κατανοήσουν πληρέστερα οι μαθητές/τριες την έννοια του κλάσματος, κρίνεται σκόπιμο, η διδασκαλία των κλασμάτων να εκκινεί από τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών/τριών, ιδιαίτερα από αυτές που σχετίζονται με τη δομή του σύνολο των ακέραιων και τις πράξεις τους, δίνοντας προτεραιότητα στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος του όλου, χωρίς να παραλείπει τις υπόλοιπες ερμηνείες. Θα διευκολυνθούν έτσι να οικοδομήσουν συσχετιστικά την έννοια του κλάσματος και να αποκτήσουν πολύτιμη εννοιολογική γνώση. Η χρήση κατάλληλων οπτικών αναπαραστάσεων στην διδασκαλία αλλά και στις δραστηριότητες που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές/τριες, συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην οικοδόμηση της έννοιας και τελικά στην ολοκληρωμένη κατανόησή της, ώστε να μπορέσουν να την εφαρμόσουν λειτουργικά στο μέλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Τα σχολικά εγχειρίδια

2.1 Περίληψη

Στα σχολικά εγχειρίδια, στις δραστηριότητες που περιέχονται σε αυτά και στην ανάλυσή τους εστιάζει αυτό το κεφάλαιο. Τονίζεται ο αναντικατάστατος ρόλος των εγχειριδίων στη μαθηματική εκπαίδευση και η χρήση τους ως κύριου εκπαιδευτικού υλικού στη διδασκαλία από τους εκπαιδευτικούς. Ακολουθεί μία σύντομη αναφορά στις τάσεις που επικρατούν για τα Σχολικά εγχειρίδια σε διάφορες χώρες (Γαλλία, Γερμανία, Αγγλία, Η.Π.Α., Κίνα), καθώς και στα ηλεκτρονικά εγχειρίδια, τα οποία αποτελούν μία σύγχρονη θεώρηση των εγχειριδίων, ωστόσο η χρήση τους ακόμα είναι σχετικά περιορισμένη. Στη συνέχεια παρουσιάζεται και αναλύεται ο πολλαπλός ρόλος των εγχειριδίων κατά την διδασκαλία. Το προτελευταίο τμήμα του κεφαλαίου αυτού αναφέρεται στις δραστηριότητες των εγχειριδίων. Ορίζεται το πλαίσιο μιας δραστηριότητας καθώς και οι επιδράσεις του στα αποτελέσματα της διδασκαλίας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τις αναλύσεις των σχολικών εγχειριδίων. Κάνοντας αναφορά σε ερευνητικές μελέτες, δίνονται τρόποι ανάλυσης και αξιολόγησης εγχειριδίων.

2.2 Εισαγωγή

Τα σχολικά εγχειρίδια, αποτελούν ένα πολύ σημαντικό πόρο και συνήθως το αποκλειστικό μέσο για την υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών σε πολλές χώρες (Fan & Zhu, 2007· Newton & Newton, 2007· Σκουμπουρδή, 2014·Μαστρογιάννης 2015) και τυγχάνουν αυξημένης προσοχής από τη διεθνή εκπαιδευτική κοινότητα τις δύο τελευταίες δεκαετίες, περίπου. Είναι μια έκφραση του προτεινόμενου αναλυτικού προγράμματος σπουδών, όπου αντικατοπτρίζονται οι στόχοι και το αντικείμενο της μαθηματικής γνώσης, που προορίζεται για διδασκαλία και μάθηση σε εθνικό ή σε περιφερειακό επίπεδο (Mesa, 2004).

Στην Ελληνική Εκπαίδευση, από ιδρύσεως του ελληνικού κράτους, το σχολικό βιβλίο έχει κεφαλαιώδη σημασία και καταλυτικό λειτουργικό ρόλο, αποτελώντας τον κύριο μοχλό και το έρεισμα της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας. Για την ευρύτερη εκπαιδευτική κοινότητα, Μαθηματικά είναι, απλά, ό,τι είναι γραμμένο στα εγχειρίδια.

Θεωρείται δεδομένο, ότι καθορίζει το περιεχόμενο και την ουσία του γνωστικού αντικειμένου από την πλευρά των μαθητών αλλά και των διδασκόντων, αφού κάθε μάθημα εκπροσωπείται, σχεδόν αποκλειστικά, από το σχολικό εγχειρίδιο. Η ανάγκη μελέτης των εγχειριδίων ως θεμελιωδών στοιχείων της καθημερινής διδακτικής πρακτικής, αλλά και της εμπειρίας των εκπαιδευτικών στο σχολείο κρίνεται επιτακτική (Μαστρογιάννης, 2015).

Πριν από την δεκαετία του 1980, η έρευνα σχετικά με την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων ήταν περιορισμένη. Ένας από τους λόγους για το γεγονός αυτό, ήταν ότι μάλλον υποτιμήθηκε η σχέση μεταξύ του περιεχομένου και της δομής τους αφ' ενός, και των μαθησιακών συμπεριφορών των μαθητών/τριων αφ' ετέρου, με το σκεπτικό ότι οι δάσκαλοι διαμεσολαβούν μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και της μάθησης από τους/τις μαθητές/τριες. Θεωρήθηκε έτσι, ότι η ανάλυση του περιεχομένου των εγχειριδίων δεν έχει να προσφέρει σημαντικές πληροφορίες που αφορούν την διαδικασία μάθησης. Συνέπεια αυτού ήταν, οι ερευνητές να στραφούν, κυρίως, στην διερεύνηση των μαθηματικών και παιδαγωγικών ικανοτήτων των δασκάλων, υπό την επικρατούσα άποψη, ότι ένας κατηρτισμένος δάσκαλος, τόσο παιδαγωγικά, όσο και μαθηματικά, είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει το εγχειρίδιο με κριτικό και ευέλικτο τρόπο (Κολέζα, 2017).

Σταδιακά εγκαταλείπεται η άποψη αυτή, αρκετοί ερευνητές στρέφουν το ενδιαφέρον τους προς τα σχολικά εγχειρίδια και τα πρώτα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ποιότητα των εγχειριδίων έχει άμεση σχέση με την ποιότητα της μάθησης (Κολέζα, 2017). Τα εγχειρίδια αποτελούν τον ενδιάμεσο κρίκο μεταξύ του Αναλυτικού Προγράμματος και της παιδαγωγικής πρακτικής που ακολουθείται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη (Καφούση, Σκουμπουρδή, & Τάτσης, 2009). Το αυξημένο ενδιαφέρον των ερευνητών για τον σημαντικότατο ρόλο των σχολικών εγχειριδίων στην εκπαίδευση των μαθηματικών, αντικατοπτρίζεται στο γεγονός, ότι η Τρίτη Διεθνής Μελέτη Μαθηματικών και Επιστημών (TIMSS), περιελάμβανε αναλύσεις σχολικών εγχειριδίων και προγραμμάτων σπουδών από 50 περίπου χώρες, όπου οι ερευνητές και οι εμπλεκόμενοι σε ζητήματα πολιτικής της εκπαίδευσης, με αφορμή τα αποτελέσματα των διεθνών αξιολογήσεων στα Μαθηματικά, προσπάθησαν να εξηγήσουν τα υψηλά επίπεδα αποτυχίας ορισμένων χωρών (Ιαπωνία, Σιγκαπούρη, κ.λπ.). Για το σκοπό αυτό αναλύθηκαν εγχειρίδια και προγράμματα σπουδών και στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας, αλλά και στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Fan & Zhu, 2007· Κολέζα, 2017) .

2.3 Η σημασία των εγχειριδίων στην μαθηματική εκπαίδευση

Τα εγχειρίδια των μαθηματικών με το περιεχόμενό τους (εικόνες, αναπαραστάσεις, διαγράμματα) κατέχουν εξέχουσα θέση στο εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται στην μαθηματική εκπαίδευση, η οποία εστιάζει στην διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Σκουμπουρδή, 2014). Στις αρχές της δεκαετίας του ’90 αρκετοί ερευνητές έδειξαν, ότι οι δάσκαλοι, πράγματι, στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια για να προγραμματίσουν και να σχεδιάσουν την διδασκαλία τους, χωρίς όμως, κατ’ ανάγκην, αυτό να τους εξασφαλίζει τα βέλτιστα μαθησιακά αποτελέσματα, είτε λόγω επιστημονικής ανεπάρκειας των δασκάλων, είτε λόγω προβλημάτων που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια. Σε αυτήν την περίπτωση τα εγχειρίδια δεν υποστηρίζουν αποτελεσματικά το διδακτικό έργο, όπως αναμενόταν, αλλά μάλλον περιορίζουν τους δασκάλους (Κολέζα, 2017). Επειδή η διδακτική πρακτική με την οποία οι μαθητές/τριες μαθαίνουν από τα εγχειρίδια διαμεσολαβείται από το σχολικό πλαίσιο (δάσκαλος, συμμαθητές, διδασκαλία, αναθέσεις εργασιών), τα εγχειρίδια είναι μια πηγή δυνητικής μάθησης (Mesa, 2004). Τα περισσότερα δεν προωθούν τις δεξιότητες σκέψης, έχουν ελλείψεις ως προς το περιεχόμενο και παρέχουν ανεπαρκείς οδηγίες στους μαθητές/τριες και στους δασκάλους, ιδιαίτερα στα σημεία που η έρευνα έχει δείξει, ότι είναι πιθανή η δημιουργία παρανοήσεων ή εσφαλμένων αντιλήψεων (Κολέζα, 2017).

Οι δάσκαλοι, κυρίως οι αρχάριοι, χρησιμοποιούν τα σχολικά εγχειρίδια ως την κύρια πηγή, ή ακόμα και την μοναδική πηγή, τόσο για την οργάνωση της διδασκαλίας τους, όσο και για την ανάθεση εργασιών στους/στις μαθητές/τριες τους. Τελικά το περιεχόμενο των εγχειριδίων και ο τρόπος χρήσης τους από τους δασκάλους καθορίζει αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές (Κολέζα, 2017). Σε ορισμένες χώρες υπάρχει δυσπιστία για την χρήση των σχολικών βιβλίων. Η άποψη που κυριαρχεί είναι, όπως επεσήμανε ο Brown, ότι κανένα εκπαιδευτικό υλικό δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί πλήρες χωρίς τον δάσκαλο. Ένα ελλιπές εγχειρίδιο μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο στα χέρια ενός καταρτισμένου και έμπειρου δασκάλου (Newton & Newton, 2007).

Γενικότερα η θέση του εκπαιδευτικού υλικού στην μαθηματική εκπαίδευση είναι περιορισμένη και οριοθετημένη. Ωστόσο φαίνεται να υπάρχουν αρκετοί προβληματισμοί και ερωτήματα για την σχέση της διδακτικής των μαθηματικών με την μαθηματική εκπαίδευση, όσον αφορά την χρήση των εγχειριδίων και του εκπαιδευτικού υλικού γενικότερα στην τάξη. Η διδακτική των μαθηματικών αποσκοπεί στον προσδιορισμό και την κατανόηση φαινομένων και διαδικασιών, με στόχο την βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών. Διερευνά την σημασία του υλικού, τόσο θεωρητικά όσο και στην πράξη (επικοινωνία, συνεργασία, στάσεις, κίνητρα, μαθηματική σκέψη, επίδοση των μαθητών/τριών) και προτείνει τρόπους ένταξης και χρήσης του στην μαθηματική εκπαίδευση. Συμπερασματικά, η διδακτική των μαθηματικών και η μαθηματική εκπαίδευση τοποθετούν το εκπαιδευτικό υλικό σε διαφορετική θέση και του αποδίδουν διαφορετικό ρόλο (Σκουμπουρδή, 2014).

Οι εκπαιδευόμενοι δάσκαλοι και οι νέοι δάσκαλοι που διδάσκουν μαθηματικά έχουν την τάση να ευνοούν την ανάπτυξη υπολογιστικών δεξιοτήτων, μέσω της εφαρμογής διαδικασιών, ρουτινών και αλγορίθμων. Τα εγχειρίδια είναι η βάση μιας σειράς μαθημάτων και πηγή δραστηριοτήτων στην τάξη για τους μαθητές/τριες, καθώς η προετοιμασία των υλικών για μια διδασκαλία είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Μάλλον τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην πλειονότητά τους, δεν είναι σε θέση να αποτελέσουν μοντέλα πρακτικής και υποστήριξης της διδασκαλίας και της επαγγελματικής εξέλιξης των εκπαιδευτικών. Θεωρείται απίθανο ότι μπορούν να τους καθοδηγήσουν σε καινούργια πρότυπα και διαδικασίες. Μπορεί τα εγχειρίδια να βοηθούν στην εισαγωγή και στην διάρθρωση ενός μαθήματος, ωστόσο, ίσως είναι αδύνατο στις περισσότερες των περιπτώσεων, να αναγκάσουν τον δάσκαλο να αντιμετωπίσει προβλήματα κατανόησης των μαθητών (Newton & Newton, 2007).

Ως κατανόηση θεωρείται η σύνδεση γεγονότων, η σύνδεση καινούργιων πληροφοριών με αυτά που ήδη είναι γνωστά και η ύφανση στοιχείων σε ένα ολοκληρωμένο σύνολο. Τα γνωστικά μοντέλα σκέψης και μάθησης διαμορφώνονται και διέπονται από την πεποίθηση ότι η μάθηση είναι μια ενεργή διαδικασία, στην οποία γίνεται προσπάθεια να αποκτήσει νόημα η πληροφορία (Newton & Newton, 2007). Ο Piaget (1978) θεώρησε ότι αξίζει να ονομάζεται κατανόηση, μόνο κάθε νοητική κατασκευή που απαντά στην ερώτηση «γιατί». Η λογική αυτή στηρίζει τα μαθηματικά και τις διαδικασίες τους (Newton & Newton, 2007).

Το σχολικό εγχειρίδιο περιλαμβάνει, εκτός από το γνωστικό περιεχόμενο και μια αξιολογική θέση, όσον αφορά την σχέση μεταξύ των διαφόρων σωμάτων της γνώσης, όπως της σχολικής και καθημερινής γνώσης, αλλά επίσης και σχετικά με την ιεράρχηση κατά την εκπαιδευτική διαδικασία της θέσης του εκπαιδευτικού και του/της μαθητή/τριας. Σύμφωνα με τον Bernstein (1991), μέσω των σχολικών εγχειριδίων η σχολική επιστημονική γνώση υπόκειται σε έναν επιλεκτικό μετασχηματισμό, τον οποίο τον περιγράφει η έννοια της αναπλαισίωσης. Οι αντιλήψεις για την φύση της γνώσης, οι παιδαγωγικές γνώσεις και οι αντίστοιχες κοινωνικές επιλογές επηρεάζουν αυτόν τον μετασχηματισμό. Συνεπώς τα σχολικά εγχειρίδια διαμορφώνουν με καθοριστικό τρόπο την φύση της εκπαιδευτικής διαδικασίας αλλά και αντανακλούν κυρίαρχες αντιλήψεις που σχετίζονται με αυτήν (Φιλίππου & Δημόπουλος, 2014).

2.4 Τα σχολικά εγχειρίδια ανά τον κόσμο

Οι πρακτικές σχετικά με την επιλογή και την χρήση των σχολικών εγχειριδίων ποικίλουν. Στις ΗΠΑ παρατηρείται μεγάλη ποικιλία σχολικών εγχειριδίων και οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν το βιβλίο που θα χρησιμοποιήσουν. Κάθε περιοχή μπορεί να αναπτύξει το δικό της πρόγραμμα σπουδών, στο πλαίσιο της καθοδήγησης που παρέχεται από την υπεύθυνη πολιτική ηγεσία (Fan & Zhu, 2007). Στην Μεγάλη Βρετανία και σε αρκετές χώρες ακόμα, τα σχολεία επιλέγουν και αγοράζουν τα βιβλία για χρήση σε κάθε τάξη. Σε κάποια βιβλία υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για τον εκπαιδευτικό, ενώ σε κάποια άλλα παρέχονται κάποιες γενικές οδηγίες στην εισαγωγή. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται το ίδιο θέμα σε πολλά βιβλία ποικίλει και διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό τα εκπαιδευτικά πλαίσια (Newton & Newton, 2007).

Στη Γαλλία ακόμα και σήμερα υποστηρίζεται η φορμαλιστική διάσταση των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά θεωρούνται ως ένα σώμα δομημένης γνώσης, η οποία έχει προανακαλυφθεί. Παρ' όλα αυτά τα γαλλικά σχολικά εγχειρίδια περιέχουν πολλές δραστηριότητες που δίνουν τη δυνατότητα στους/στις μαθητές/τριες να οδηγηθούν στην ανακάλυψη μαθηματικών ιδεών. Συνεπώς διαφαίνεται η πρόθεση για την ενίσχυση της μάθησης μέσω καθοδηγούμενης ανακάλυψης και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσω πρακτικής και επιτυχημένης χρήσης των εννοιών αυτών (Κολέζα, 2017).

Στα γερμανικά εγχειρίδια τα Μαθηματικά, όπως και στη Γαλλία, θεωρούνται ως ένα δομημένο σώμα γνώσης που προϋπάρχει, μια στατική επιστήμη με υψηλές γλωσσικές απαιτήσεις, που εκφράζεται με σύμβολα και κανόνες, που δεν επιδέχονται αμφισβήτηση και αναπτύσσεται σε αφηρημένο επίπεδο. Δίνεται έμφαση στη μαθηματική αφαίρεση και στο ρόλο της μαθηματικής δομής. Γενικά, το μήνυμα είναι ότι τα Μαθηματικά είναι σωστά, λογικά, ουδέτερα, δύσκολα, αλλά χρήσιμα στην επιστήμη, στην τεχνολογία και στο χώρο εργασίας. Η πρόθεση που εκδηλώνεται στα γερμανικά εγχειρίδια είναι οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες μέσω της παρουσίασης θεωρητικών μαθηματικών ιδεών και της εξάσκησης με ασκήσεις (Κολέζα, 2017).

Στην Αγγλία τα Μαθηματικά παρουσιάζονται ως ένα σύνολο ανεξάρτητων, αλλά χρηστικών κανόνων και γεγονότων. Είναι διάχυτη η τάση να συμπεριληφθούν δεξιότητες που δεν αφορούν αποκλειστικά το αντικείμενο των Μαθηματικών, αλλά σχετίζονται και με τη διαδικασία, όπου οι μαθητές/τριες εκτελούν στοιχειώδεις ερευνητικές διαδικασίες. Ωστόσο αυτή η τάση παραμένει στο περιθώριο και δεν θεωρείται απαραίτητο συστατικό για την μάθηση των Μαθηματικών. Αν και στο πρόγραμμα σπουδών υπάρχει απαίτηση για έμφαση στη γλώσσα των Μαθηματικών, στα σχολικά εγχειρίδια η γλώσσα είναι περιορισμένη και υπάρχουν σελίδες χωρίς μία λέξη. Η πρόθεση είναι να αποκτήσουν οι μαθητές ευκολία στη χρήση στερεοτύπων δεξιοτήτων μέσω της επαναλαμβανόμενης εξάσκησης (Κολέζα, 2017).

Όσον αφορά τις χώρες της Άπω Ανατολής , υπάρχουν στοιχεία ερευνών που σχετίζονται με τη χρήση και τον ρόλο των «πραγματικών προβλημάτων» στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών. Υπάρχουν μεγάλες διαφορές στην σημασία που αποδίδεται στα πραγματικά προβλήματα και στις διαδικασίες μοντελοποίησης μεταξύ της Γαλλίας και της Αγγλίας, ενώ δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ της Ιαπωνίας και της Γερμανίας, όπου τα πραγματικά προβλήματα δεν παίζουν πρωτεύοντα ρόλο και χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών, η για την εξάσκηση σε μαθηματικές μεθόδους. Δεν στοχεύουν στην απόκτηση ικανοτήτων για την ορθή αντιμετώπιση πραγματικών προβλημάτων. Στην Ιαπωνία τα Μαθηματικά παρουσιάζονται ως ένα μάθημα ενδιαφέρον από τη φύση του και συνεπώς θεωρείται δεδομένο το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών για αυτά, χωρίς να πρέπει να πειστούν για την σπουδαιότητά τους. Το επίσημο πρόγραμμα σπουδών δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην επίλυση προβλημάτων και στην σύνδεσή τους με την καθημερινή ζωή, ωστόσο αυτό δεν αποτυπώνεται στα σχολικά εγχειρίδια. Η επιλογή και ο τρόπος χρήσης των πραγματικών προβλημάτων εξαρτάται αποκλειστικά από τον δάσκαλο (Κολέζα, 2017).

Στην Κίνα το εκπαιδευτικό σύστημα γενικά είναι συγκεντρωτικό και οι περισσότερες περιφέρειες είναι υποχρεωμένες να ακολουθούν το εθνικό πρόγραμμα σπουδών και να χρησιμοποιούν τα εγκεκριμένα εγχειρίδια με βάση το πρόγραμμα αυτό. Τα προβλήματα στα εγχειρίδια της Κίνας παρουσιάζονται με σαφή τρόπο και υπάρχουν ισχυρά δείγματα αναπαράστασης διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων, όσον αφορά τη μοντελοποίηση των βημάτων επίλυσης, αλλά και στη χρήση ενός ευρέως φάσματος ευρετικών (heuristics) επίλυσης (Fan & Zhu, 2007).

2.5 Τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια

Στην βιβλιογραφία τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια ορίζονται και περιγράφονται με πολλούς τρόπους. Οι περισσότερες έρευνες τα ορίζουν ως ψηφιακά κείμενα τα οποία είναι προσβάσιμα αποκλειστικά μέσω της οθόνης του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Υπάρχουν δύο μορφές ηλεκτρονικών εγχειριδίων: Αυτά που είναι πιστά αντίγραφα της έντυπης έκδοσης του εγχειριδίου (σαρωμένες εικόνες και κείμενο, ένα στατικό αρχείο PDF χωρίς δυναμικά μέσα και χωρίς ενεργούς συνδέσμους ιστού) και τα ηλεκτρονικά βιβλία στα οποία υπάρχει δυνατότητα αναδιαμόρφωσης. Τα τελευταία χρησιμοποιούν ένα σύστημα ευέλικτης μορφοποίησης με δυναμικά μέσα, όπου ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τη διάταξη και τις διαδραστικές λειτουργίες (Rockinson- Szapkiw, Courduff, Carter, & Bennett, 2013).

Τις δύο τελευταίες δεκαετίες περίπου, οι περισσότεροι εκδότες εγχειριδίων προσφέρουν εναλλακτικές λύσεις ηλεκτρονικών βιβλίων (e-books) στην συντριπτική πλειονότητα των τίτλων τους. Μολονότι οι σύγχρονοι μαθητές/τριες είναι αρκετά εξοικειωμένοι με τις νέες τεχνολογίες, δεν φαίνεται να προτιμούν τα ηλεκτρονικά βιβλία, παρά την εύκολη πρόσβαση σε συμπληρωματικό περιεχόμενο μέσω υπερσυνδέσμων, την βελτιωμένη οπτική εμφάνιση, τα κινούμενα γραφικά και βίντεο καθώς και την δυνατότητα προσθήκης υποστηρικτικών υλικών (ήχος, συνδέσεις με δραστηριότητες, σχετικοί ιστότοποι). Συνεχίζεται η προτίμηση στα βιβλία έντυπης έκδοσης (textbooks). Οι μαθητές δεν μπορούν να διαβάσουν με τον ίδιο τρόπο και στα ηλεκτρονικά και στα έντυπα εγχειρίδια. Ένας ισχυρός λόγος για αυτό, είναι σύμφωνα με τα αποτελέσματα ερευνών, ότι η εμπειρία της ανάγνωσης ηλεκτρονικών εγχειριδίων δεν είναι ισοδύναμη με την ανάγνωση έντυπων εγχειριδίων (Woody, Daniel, & Baker, 2010).

Η έρευνα αποκαλύπτει ότι δεν υπάρχουν διαφορές στα μαθησιακά αποτελέσματα, οι οποίες να οφείλονται στην χρήση ηλεκτρονικών ή έντυπων εγχειριδίων, αν και απαιτούνται περισσότερες έρευνες για τον εντοπισμό και την αιτιολόγηση τέτοιων διαφορών. Η διαφορά που έχει παρατηρηθεί αναφέρεται στο χρόνο μελέτης από τους μαθητές, όπου αφιερώνουν λιγότερο χρόνο αυτοί που χρησιμοποιούν το ηλεκτρονικό κείμενο (Shepperd, Grace, & Koch, 2008·Wood, κ.ά., 2010). Δεν υπάρχει διαφορά στην γνωστική μάθηση και στην επίδοση. Το ηλεκτρονικό εγχειρίδιο είναι εξίσου αποτελεσματικό με το παραδοσιακό εγχειρίδιο, αν και η διαπίστωση αυτή προκύπτει από έρευνα σε υψηλότερη βαθμίδα εκπαίδευσης. Άξιο προσοχής είναι το γεγονός, ότι οι μαθητές που επιλέγουν για την μελέτη τους ηλεκτρονικά σχολικά εγχειρίδια χαρακτηρίζονται από σημαντικά υψηλότερη αντίληψη (Rockinson- Szapkiw, κ.ά., 2013). Καταγράφεται ακόμη μια αδυναμία των μαθητών να αξιολογήσουν τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και να εκτιμήσουν την αξία τους. Το ηλεκτρονικό εγχειρίδιο προσφέρει μερικά εντυπωσιακά χαρακτηριστικά, όπως λειτουργίες αναζήτησης διαδραστικές δυνατότητες και ελκυστικά γραφικά. Επιπλέον παρέχεται η δυνατότητα για συνεχή και άμεση ενημέρωση του περιεχομένου του, γεγονός που επιτρέπει την διόρθωση σφαλμάτων και την αναβάθμιση ενοχλητικών ή ελλιπών στοιχείων (Shepperd, κ.ά., 2008).

Μέχρι τώρα η πρόσβαση από τους μαθητές στα ηλεκτρονικά σχολικά εγχειρίδια γίνεται σε ένα στατικό περιβάλλον, μέσω της πρόσδεσης του μαθητή σε κάποιον ηλεκτρονικό υπολογιστή, κάτι που μπορεί πλέον να θεωρηθεί ξεπερασμένο. Οι τρέχουσες και αναδυόμενες τεχνολογίες προσφέρουν περισσότερες επιλογές (φορητές ηλεκτρονικές συσκευές, έξυπνα τηλέφωνα), που είναι δυνητικά βιώσιμες, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν την χρήση των ηλεκτρονικών εγχειριδίων. Οι νέες ψηφιακές συσκευές και το ηλεκτρονικό κείμενο έχουν τη δυνατότητα να αλλάξουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται και ασχολούνται με τα σχολικά βιβλία (Rockinson- Szapkiw, κ.ά., 2013).

Οι βιβλιοθήκες εμπλουτίζονται συνεχώς με ηλεκτρονικά εγχειρίδια και παρατηρείται γενικότερα μια αύξηση του ενδιαφέροντος προς τους ηλεκτρονικούς πόρους, γεγονός που δικαιολογείται από την κυριαρχία του διαδικτύου σε όλα τα επίπεδα της καθημερινής ζωής. Όμως δεν έχει ερευνηθεί επαρκώς ο τρόπος χρήσης τους από τους μαθητές σε σύγκριση με τα εγχειρίδια έντυπης μορφής και ελέγχεται ακόμα η χρηστικότητα και η λειτουργικότητά τους. Οι μαθητές/τριες εξακολουθούν να προτιμούν τα έντυπα εγχειρίδια για την μελέτη τους στο σχολείο, αν και οι ίδιοι τηρούν διαφορετική στάση όταν πρόκειται για ηλεκτρονικά περιοδικά ή εφημερίδες. Η δυνατότητα των ηλεκτρονικών εγχειριδίων να λειτουργήσουν ως πόροι της διδασκαλίας παραμένει ασαφής (Berg, Hoffmann, & Dawson, 2010).

2.6 Ο ρόλος των εγχειριδίων στην διδακτική διαδικασία

Τα εγχειρίδια πρέπει να προσφέρουν καινοτόμους πόρους και η εγγενής πρόθεση της χρήσης τους πρέπει να είναι η υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης. Κύριος στόχος ενός σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών είναι η διδασκαλία ιδεών, η καλλιέργεια δεξιοτήτων, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και η παροχή ευκαιριών για πρακτική άσκηση (O’Keeffe & O’Donoghue, 2011). Σύμφωνα με τον Οργανισμό Επιμόρφωσης των Εκπαιδευτικών (ΟΕΠΕΚ) το 2008, οι δάσκαλοι αφιερώνουν το 90 έως 95% της διδασκαλίας τους στην χρήση έτοιμου και επιλεγμένου διδακτικού υλικού, ενώ στο 80% του διδακτικού χρόνου διαπραγματεύονται θέματα που προέρχονται από τα σχολικά εγχειρίδια (Μαστρογιάννης, 2015). Η πρώτη αυτονόητη διδακτική αρχή στην διδασκαλία των μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης είναι ότι τα μαθηματικά είναι για όλους, είτε έχουν ή όχι ιδιαίτερη κλίση, είτε έχουν μαθησιακές δυσκολίες, είτε ανήκουν σε εθνικές μειονότητες ή ιδιαίτερες κοινωνικές ομάδες. Το εκπαιδευτικό σύστημα είναι υποχρεωμένο να διδάξει τα μαθηματικά, ώστε να μην δημιουργηθεί αρνητική στάση απέναντι σε αυτά. Η επιτυχία αυτού του σύνθετου έργου εξαρτάται από το κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό, αλλά σε μεγαλύτερο βαθμό από τον εκπαιδευτικό και την διδασκαλία που θα πραγματοποιήσει στην τάξη. Τα σχολικά εγχειρίδια, ως το κύριο μέρος του εκπαιδευτικού υλικού, πρέπει να παρέχουν την δυνατότητα σε όλους ανεξαιρέτως τους/τις μαθητές/τριες, να προβληματιστούν, να ασχοληθούν με ευχάριστες δραστηριότητες και να μάθουν σύμφωνα με την προσωπική τους υποδομή και ρυθμούς. (Λεμονίδης, 2007). Η ισχύς των σχολικών εγχειριδίων έγκειται στο ότι χρησιμεύουν ως πόροι που εισάγουν τους/τις μαθητές/τριες σε κόσμους που δεν είναι άμεσα προφανείς, ή δεν μπορούν άμεσα να βιώσουν. Τα εγχειρίδια έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν μια «οργανωμένη αλληλουχία ιδεών και πληροφοριών» για τη δομημένη διδασκαλία και μάθηση, καθοδηγώντας τους/τις μαθητές/τριες στην διδακτική διαδικασία, ενισχύοντας τη σκέψη τους και εμπλουτίζοντας τις γνώσεις τους (Fan, Zhu, & Miao, 2013).

Τα εγχειρίδια έχουν πολλούς σκοπούς. Εκθέτουν το σώμα της αποδεκτής θεωρίας και αποτελούν ισχυρά μέσα ενημέρωσης για την διδασκαλία και την μάθηση. Καθορίζουν τα σχολικά μαθηματικά με τρόπο παρόμοιο με αυτόν των προγραμμάτων σπουδών και των εξετάσεων (Mesa, 2004). Επεκτείνουν το μοντέλο του προγράμματος σπουδών, προσθέτοντας ένα επίπεδο στην εκπαιδευτική διαδικασία: Το «δυνητικά εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών» (potentially implemented curriculum) ως ένα ενδιάμεσο στάδιο, μεταξύ του σκοπούμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών. Αυτό αντικατοπτρίζει αφενός το προβλεπόμενο πρόγραμμα σπουδών και, αφετέρου, επηρεάζει το εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών, καθορίζοντας το περιεχόμενο της διδασκαλίας στα μαθήματα των μαθηματικών (Törnroos, 2005). Σε σύγκριση με την επίδραση των προγραμμάτων σπουδών, τα εγχειρίδια διαδραματίζουν έναν πιο άμεσο ρόλο: Καθορίζουν τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την επιλογή του περιεχομένου και των διδακτικών στρατηγικών και άρα συμβάλλουν στην διαμόρφωση της διδασκαλίας (Törnroos, 2005·Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman, 2015**).** Συνεπώς καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών/τριών. Ως ευκαιρία μάθησης (Opportunity To Learn-OTL) νοείται το αν οι μαθητές/τριες έχουν λάβει την κατάλληλη εκπαίδευση, που τους επιτρέπει να αποκτήσουν τις ικανότητες που διατυπώνονται στους συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους που έχουν τεθεί. Η έννοια εισήχθη προκειμένου να εξασφαλισθεί η εγκυρότητα των διεθνών συγκριτικών μελετών σχετικά με την επιτυχία των μαθητών/τριών. (Wijaya, κ.ά., 2015**).** Η ευκαιρία για μάθηση θεωρείται ένας σημαντικός παράγοντας που συμβάλλει στα μαθησιακά αποτελέσματα και είναι μια από τις βασικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση και σύγκριση προγραμμάτων σπουδών και εγχειριδίων σε διάφορες χώρες, παρέχοντας την δυνατότητα για αξιολόγηση των διεθνών επιδόσεων των μαθητών (Törnroos, 2005).

Ικανοποιώντας την δεύτερη διδακτική αρχή μιας σύγχρονης διδασκαλίας, τα εγχειρίδια πρέπει να δίνουν στον/στην μαθητή/τρια τις ευκαιρίες να δρα και να ανακαλύπτει μόνος/η του/της την νέα γνώση, βασιζόμενος/η σε αυτό που ήδη γνωρίζει. Η διδασκαλία είναι απαραίτητο να ξεκινάει με παιχνίδια και δραστηριότητες ή προβλήματα που πλαισιώνονται από το άμεσο περιβάλλον του παιδιού και είναι ευχάριστα σε αυτό. Με διάλογο, προβληματισμό και επενδύοντας στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών/τριών, μέσα από την ομαδική εργασία δημιουργούνται οι συνθήκες ώστε οι μαθητές/τριες να ανακαλύψουν τα μαθηματικά (Λεμονίδης, 2007).

Είναι κοινά παραδεκτό, ότι οι μαθητές/τριες περνούν μεγάλο μέρος του χρόνου τους στις αίθουσες μπροστά στα εγχειρίδιά τους. Τα σχολικά εγχειρίδια ως το κύριο μέσο της διδασκαλίας, συμβάλλουν στην οριοθέτηση του θεμελιώδους μαθησιακού πλαισίου, στην διαμόρφωση του παιδαγωγικού και διδακτικού στυλ, επηρεάζουν σαφώς και σε μεγάλο βαθμό το «τι» και το «πώς» της διδασκαλίας και τελικά διαδραματίζουν κυρίαρχο και καθοριστικό ρόλο στο μάθημα των Μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποιούν περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο μέσο (φύλλα εργασίας, εφαρμογές σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, χειραπτικά υλικά) στον προγραμματισμό της διδασκαλίας τους, αλλά και ως αυθεντικές πηγές δραστηριοτήτων (Μαστρογιάννης, 2015).

Τα σχολικά εγχειρίδια ενσωματώνουν τις εκπαιδευτικές και πολιτισμικές παραδόσεις μιας χώρας και μέσω αυτών γίνονται εμφανείς οι επίσημες προθέσεις του Αναλυτικού Προγράμματος, γεγονός που επηρεάζει τους διδακτικούς σκοπούς και τον σχεδιασμό της διδασκαλίας μέσα στην σχολική τάξη (Καφούση, κ.ά., 2009). Υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση του τρόπου με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μελετούν και χρησιμοποιούν τα σχολικά εγχειρίδια, και εξαρτάται άμεσα από τις απόψεις τους για την μάθηση και την διδασκαλία και τις παιδαγωγικές τους πεποιθήσεις. Από την άλλη πλευρά όμως, και οι διδακτικές προσεγγίσεις των σχολικών βιβλίων επηρεάζουν σημαντικά τις παιδαγωγικές στρατηγικές των εκπαιδευτικών (Καφούση, κ.ά., 2009 · Φιλίππου & Δημόπουλος, 2014).

Αναμφισβήτητα, ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην καθημερινή διδακτική πρακτική της σχολικής τάξης, είναι πολλαπλός, καθοριστικός και αναντικατάστατος. Η Κολέζα (2017) περιγράφει εξαιρετικά αυτόν τον ρόλο σε δέκα πτυχές:

- Τα εγχειρίδια συνιστούν τον κύριο οδηγό για αυτά που πρέπει να διδαχθούν. Προσδιορίζουν το περιεχόμενο (de facto curriculum). Έννοιες ή θέματα που δεν υπάρχουν στα εγχειρίδια, συνήθως δεν αποτελούν αντικείμενο της διδακτέας ύλης.
- Υποδεικνύουν μια οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου. Η διαδοχή των ενοτήτων στην διδασκαλία ταυτίζεται, σε μεγάλο βαθμό, με αυτή του εγχειριδίου.
- Χρησιμεύουν ως πηγή ιδεών σχετικά με τον τρόπο που μπορεί κάποιος να διδάξει το συγκεκριμένο περιεχόμενο και υποκινούν τον εκπαιδευτικό να επιφέρει αλλαγές στην διδασκαλία του.
- «Περνούν» μια άποψη για το «τι είναι Μαθηματικά» και τι σημαίνει «ξέρω Μαθηματικά».
- Καθορίζουν τι θεωρείται «σημαντική γνώση», σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
- Επιλέγουν τι θα αξιολογηθεί άμεσα ή έμμεσα.
- Ορίζουν την εργασία για το σπίτι
- Διαβιβάζουν στους γονείς πληροφορίες για το τι συμβαίνει στην τάξη.
- Αποτελούν ιστορικές καταγραφές του περιεχομένου της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.
- Καθίστανται η «εικόνα» του κοινωνικού-πολιτισμικού επιπέδου της χώρας.

2.7 Οι δραστηριότητες στα σχολικά εγχειρίδια

2.7.1 Η δραστηριότητα ως «εργαλείο» έκφρασης της ρεαλιστικής προσέγγισης

Οι περισσότερες από τις έρευνες που έχουν αντικείμενό τους τα σχολικά εγχειρίδια, επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους στην κατανόηση της φύσης των μαθηματικών που μαθαίνουν οι μαθητές/τριες και στον τρόπο που χρησιμοποιούνται αυτά από τους εκπαιδευτικούς. Το μαθηματικό περιεχόμενο των εγχειριδίων τυγχάνει λιγότερης προσοχής (Mesa, 2004). Σημαντικό μέρος των σχολικών εγχειριδίων και ως προς την ποσότητα, αλλά και ως προς την ποιότητα αποτελούν οι δραστηριότητες που εμπεριέχονται σε αυτά.

Στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα αξιωμάτων, προτάσεων και θεωρημάτων, τα οποία ο/η μαθητής/τρια πρέπει πρώτα να «μάθει» και στη συνέχεια να εφαρμόσει πιστά, χωρίς να παρεμβληθεί κάποιου είδους κρίση από μέρους του. Με αυτήν την νοοτροπία εκφράζεται η φορμαλιστική άποψη στον χώρο της Μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 1997). Στην φορμαλιστική προσέγγιση, προκειμένου οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν το μαθηματικό αντικείμενο που διδάχθηκαν στην τάξη, εξασκούνται, κυρίως, σε «κλειστές» μαθηματικές ασκήσεις-εργασίες, οι οποίες επιδέχονται μόνο μια σωστή απάντηση και των οποίων ο κύριος σκοπός είναι να επαναλάβουν πρακτικές διαδικασίες που διδάσκονται νωρίτερα στην τάξη. Αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές/τριες εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τους τύπους των εργασιών που τους δίνονται. Διαφορετικά είδη εργασιών θέτουν διαφορετικές γνωστικές απαιτήσεις στους μαθητές/τριες (Yeo, 2017).

Στα τελευταία χρόνια, είναι κοινός τόπος στο χώρο της μαθηματικής παιδείας, η άποψη ότι τα μαθηματικά συνδέονται στενά με το πραγματικό κόσμο. Υιοθετώντας την άποψη αυτή θα πρέπει η πραγματικότητα να αποτελεί το σημείο εκκίνησης και τον τελικό στόχο της διδασκαλίας. Στην περίπτωση αυτή είμαστε σε θέση να μιλάμε για μία ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Η σχέση των μαθηματικών με την άμεση εμπειρία συνιστά την ειδοποιό διαφορά μεταξύ φορμαλιστών και ρεαλιστών. Βασικό εργαλείο και έκφραση αυτής της προσέγγισης αποτελεί η δραστηριότητα. Ξεκινώντας ο/η μαθητής/τρια από την παρατήρηση και την ανάλυση οικείων καταστάσεων, να μπορεί να αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες, να τις αναγνωρίζει και να τις χρησιμοποιεί σε μία ποικιλία άλλων καταστάσεων (Κολέζα, 1997).

Πλέον, στην προσέγγιση αυτή οι κλειστές εργασίες έχουν περιορισμένη χρήση και υπάρχει αυξανόμενη ανάγκη για άλλα είδη εργασιών, όπως μαθηματικά προβλήματα που διεγείρουν την σκέψη, τα οποία χαρακτηρίζονται ως «ανοικτά» προβλήματα και απαιτούν δημιουργική προσπάθεια και ανώτερες νοητικές διεργασίες. Ένα ανοικτό πρόβλημα εμπεριέχει την ερευνητική διάσταση και απομακρύνεται από την εκτεταμένη χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών. Η δραστηριότητα έρχεται να καλύψει αυτήν την ανάγκη και να βοηθήσει τον/την μαθητή/τρια στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και κατά την διάρκεια της διδασκαλίας, αλλά και μετά από αυτήν (Yeo, 2017).

2.7.2 Ορισμός της έννοιας «δραστηριότητα ή πρόβλημα πλαισίου»

Ως δραστηριότητα ή πρόβλημα πλαισίου (context problem), χαρακτηρίζεται ένα πλαισιωμένο πρόβλημα, που σκοπό έχει να παρωθήσει τους/τις μαθητές/τριες σε μια σειρά λύσεων, όπου καθεμία χρησιμοποιεί και διαφορετικές πτυχές της μαθηματικής δομής του διδακτικού στόχου, ώστε στο τέλος του μαθήματος το ενδιαφέρον και η προσοχή των μαθητών/τριών να στραφεί στα ουσιαστικά μαθηματικά, τα οποία αναδύονται ως συνιστώσα των διαφορετικών πτυχών. Μία δραστηριότητα μπορεί να είναι διατυπωμένη λεκτικά, να έχει τη μορφή παιχνιδιού, ιστορίας, παραμυθιού και να συνοδεύεται από εικόνες, σχήματα, ή γραφήματα, ή να είναι συνδυασμός όλων των παραπάνω. Οι δραστηριότητες μοιάζουν πολύ με τα προβλήματα που μπορεί να συναντήσει κάποιος στην καθημερινή ζωή. Η έννοια της δραστηριότητας είναι περιεκτικότερη από την έννοια του παραδοσιακού προβλήματος (Κολέζα, 2017).

2.7.3 Ο ρόλος της δραστηριότητας στην διδασκαλία των μαθηματικών

Η δραστηριότητα αποτελεί την βάση σχεδιασμού ενός μαθησιακού περιβάλλοντος και τον πυρήνα σχεδίασης μιας διδακτικής κατάστασης, σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για «σχεδιασμό μαθήματος με βάση την δραστηριότητα» (task – based lesson design). Κύριος στόχος της μαθηματικής δραστηριότητας είναι να παρακινηθεί η μαθηματική σκέψη. Τα προβλήματα πλαισίου έχουν διττό χαρακτήρα: αποτελούν τις φαινομενολογικές πηγές μιας έννοιας ή διαδικασίας, ενώ συγχρόνως λειτουργούν ως πεδίο εφαρμογής μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Όταν οι μαθητές/τριες εργάζονται με τα προβλήματα πλαισίου μπορούν να κάνουν επανα-ανακάλυψη των μαθηματικών εργαλείων και να αναπτύξουν την κατανόησή τους. Αυτού του τύπου τα προβλήματα δίνουν συχνά λίγες ή και περισσότερες από όσες χρειάζονται πληροφορίες και απαιτούν από τους μαθητές/τριες να διερευνήσουν την κατάσταση, να διατυπώσουν υποθέσεις ή να κάνουν εκτιμήσεις. Σχεδόν πάντα τίθεται ένα ερώτημα, αντί να ζητείται μία ποσοτική απάντηση. Έτσι παρακινούνται οι μαθητές/τριες να σκεφτούν τι είδους μαθηματικά πρέπει να χρησιμοποιήσουν, προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση. (Κολέζα, 2017) .

Η ανάπτυξη και η επιλογή μιας δραστηριότητας για να ενταχθεί σε ένα διδακτικό σενάριο, όπου οι μαθητές/τριες θα εργαστούν μεμονωμένα, ή σε μικρές ομάδες, ή διαφορετικά οργανωμένοι, προϋποθέτει ο/η υπεύθυνος/η της διδασκαλίας να γνωρίζει το πλήρες εύρος και με κάθε λεπτομέρεια την πλοκή των μαθηματικών γνωστικών δομών που θα ερευνηθούν μέσω της δραστηριότητας. Οι γνωστικές δομές που θα οικοδομήσουν οι μαθητές/τριες στα μαθηματικά, τελικά εξαρτώνται άμεσα από την δραστηριότητα που θα χρησιμοποιηθεί για την προσέγγισή τους (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1994). Τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας επηρεάζουν τον τρόπο διδασκαλίας και τελικά την μάθηση. Συνεπώς πρέπει να είναι σαφή και κατανοητά από τους μαθητές/τριες (Yeo, 2017).

Η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από τον ίδιο τον/την μαθητή/τρια μέσω της επεξεργασίας κατάλληλων και συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, που σχετίζονται ή δεν σχετίζονται με πραγματικές καταστάσεις, όπως προτείνει η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, στοχεύει στην παροχή όχι απλά ίσων ευκαιριών στην μαθηματική πληροφόρηση, αλλά στην παροχή ίσων ευκαιριών στην γνώση. Ως «γνώση» νοείται η γνώση με νόημα (meaningful) περιεχόμενο και έννοια (sense). Αυτού του είδους η γνώση δεν μεταφέρεται ούτε αντιγράφεται, αλλά δομείται και ανακαλύπτεται από τον ίδιο τον/την μαθητή/τρια. Γι αυτό απαιτούνται συγκεκριμένες προϋποθέσεις και κατάλληλη οργάνωση της διδασκαλίας, τόσο από την πλευρά του εκπαιδευτικού υλικού, όσο και από την πλευρά του διδακτικού σχεδιασμού (Κολέζα, 1997). Στην δραστηριότητα ο/η μαθητής/τρια συναντά μαθηματικές ιδέες και θέματα όπου αναπτύσσει και εφαρμόζει τεχνικές και χρησιμοποιεί τις μαθηματικές του/της δυνάμεις. Η φύση των μαθηματικών δραστηριοτήτων επηρεάζει και δομεί τον τρόπο σκέψης των μαθητών/τριών. Η δραστηριότητα παρέχει την βάση για την εκμάθηση (Yeo, 2017).

2.7.4 Ο διεπιστημονικός ρόλος της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα αποτελεί στην διδασκαλία των μαθηματικών μέσο σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών με καταστάσεις και φαινόμενα του πραγματικού κόσμου και της καθημερινής ζωής, αλλά και εκφραστή της ρεαλιστικής προσέγγισης. Ο ρόλος των μαθηματικών στο πεδίο της επιστημονικής σκέψης είναι διπλός: παραγωγικός και προσδιοριστικός. Ο παραγωγικός ρόλος (deductive) συμφωνεί με την φορμαλιστική αντίληψη, η οποία θεμελιώθηκε από τον Hilbert και συνίσταται στη χρησιμοποίηση μαθηματικών εργαλείων για την εξαγωγή συμπερασμάτων, από αξιώματα που ήδη υπάρχουν. Ο προσδιοριστικός ρόλος (constitutive) των μαθηματικών καθορίζει τη διαμόρφωση άλλων επιστημών και την κατανόηση καταστάσεων και φαινομένων του πραγματικού κόσμου. Κάθε φορά που είναι ανάγκη να αντιμετωπιστεί ένα πρόβλημα ανατρέχουμε στα δεδομένα της Μαθηματικής Επιστήμης προκειμένου να βρεθούν τα στοιχεία και οι συλλογισμοί που θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Οι μαθηματικοί καλούνται να επινοήσουν αυτά τα στοιχεία όταν δεν υπάρχουν. Συνεπώς ο διπλός ρόλος των μαθηματικών αποκτά ενιαία υπόσταση στα πλαίσια της αρχέγονης επιθυμίας του ανθρώπου να ερμηνεύσει τη φύση και τα φαινόμενα που σχετίζονται με αυτήν. Ο άνθρωπος συγκρότησε τη μαθηματική γνώση μελετώντας τον πραγματικό κόσμο (Κολέζα, 1997).

2.7.5 Το πλαίσιο μιας δραστηριότητας

Ένα πρόβλημα αποκτά πραγματικά νόημα και κινητήρια δύναμη, μόνο αν είναι τοποθετημένο μέσα σε ένα «πλαίσιο σφαιρικής δραστηριότητας», αν είναι βαλμένο μέσα σε ένα γενικό ερευνητικό θέμα. Διαφορετικά, υπάρχει ο κίνδυνος να αποτελέσει απλά ένα περισσότερο ή λιγότερο ευφυές αίνιγμα ή ένα απλό και παροδικό τέχνασμα πρόκλησης της προσοχής. Ο δάσκαλος, πριν προτείνει στους/στις μαθητές/τριες ένα πρόβλημα που θα χρειαστεί να εξετάσουν και να λύσουν, πρέπει να οργανώσει μία κατάσταση αφετηρίας μέσα στην οποία το πρόβλημα θα βρει το νοηματικό του πλαίσιο και έτσι θα τεθεί στους/στις μαθητές/τριες με τρόπο φυσικό και αναγκαίο. Έτσι μιλάμε για την «παιδαγωγική των καταστάσεων». Μια κατάσταση δημιουργείται και διευθετείται από τον ίδιο τον διδάσκοντα με σκοπό να αλλάξει τη συμπεριφορά του/της μαθητή/τριας και να τον/την βοηθήσει στην πρόοδό του/της. Αυτή η «παιδαγωγική των καταστάσεων» αναφέρεται στη βασική έννοια του πλαισίου και βλέπει τη διδασκαλία μέσα στη σχέση που πρέπει να έχει με τα ενδιαφέροντα, δηλαδή με το κίνητρο που θα προκαλέσει την δραστηριότητα του υποκειμένου. Η αληθινή χρησιμότητα ενός πλαισίου, είναι ότι προσφέρει στον/στην μαθητή/τρια μια ελκυστική κατάσταση πάνω στην οποία θα δουλέψει, κάτι που διέπει τη βούληση και την ενεργητικότητά του/της και διατηρεί τις ερευνητικές διαδικασίες κάτω από τον διαρκή έλεγχο της πραγματικότητας. Για παράδειγμα, η μελέτη μιας μαθηματικής έννοιας της γεωμετρίας μέσω ενός προβλήματος που μας θέτει η ζωή, έχει πολύ διαφορετικά αποτελέσματα, απ’ ότι αν τη μελετήσουμε στενά μέσα σε ένα εγχειρίδιο. Το πλαίσιο έχει έναν εγγενή δυναμισμό, που αποτελεί το μοχλό μιας διδακτικής δράσης. Αυτόν τον δυναμισμό χειρίζεται ο διδάσκων για να προκαλέσει μια αντίδραση σύμφωνη με τους παιδαγωγικούς στόχους του (Minder, 2007).

Τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών που αναπτύσσονται παγκοσμίως τις τελευταίες δύο δεκαετίες, καθώς και οι μεταρρυθμιστές τους, χαρακτηρίζονται σε επίπεδο στοιχειώδους και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από την διαδεδομένη χρήση του πλαισίου (Meyer, Dekker, & Querelle, 2001). Ως «πλαίσιο» (context) ενός προβλήματος ή μιας δραστηριότητας ορίζεται η κατάσταση στην οποία ενσωματώνεται το πρόβλημα. Ο κύριος ρόλος του πλαισίου φαίνεται να είναι η παροχή λύσεων για τα προβλήματα, μέσω των πληροφοριών που μπορεί να επιτρέψουν την λύση του προβλήματος (Borasi, 1986). Η μάθηση δεν γίνεται ποτέ «εν λευκώ» και δεν πραγματοποιείται σε ένα «κλειστό δοχείο». Οφείλει να είναι «αληθινή», δηλαδή να οργανώνει τα προβλήματα σε καταστάσεις ζωής, επιλεγμένες σε συνάρτηση με το βαθμό ανάπτυξης των μαθητών/τριών και τους διδακτικούς στόχους. Μια τέτοια μάθηση στηρίζεται πάντα σε ένα κατάλληλο πλαίσιο, θεωρώντας το πλαίσιο ως ένα χώρο έρευνας, που θα μας επιτρέψει να κατασκευάσουμε μια κατάλληλη αναπαράσταση του προβλήματος (Minder, 2007).

Πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει τα οφέλη από τον καθορισμό μαθηματικών δραστηριοτήτων σε πλούσια, ελκυστικά και ρεαλιστικά πλαίσια. Τα ρεαλιστικά πλαίσια θεωρούνται γενικά ότι αναφέρονται σε πτυχές του πραγματικού, κοινωνικού ή φυσικού κόσμου καθώς και σε φανταστικούς, ή παραμυθένιους κόσμους. Δεν υπάρχουν περιορισμοί για τα πλαίσια που μπορούν να χαρακτηριστούν ως ρεαλιστικά, αρκεί να είναι σημαντικά, οικεία, ελκυστικά και ηθικά κατάλληλα για τους/τις μαθητές/τριες. Η αξία ενός ρεαλιστικού πλαισίου δεν έγκειται στον βαθμό ρεαλισμού του, αλλά στον βαθμό που ο/η μαθητής/τρια επιτυγχάνει να εμπλακεί στο πρόβλημα και να ενθαρρυνθεί σε ουσιαστική σκέψη και αλληλεπίδραση. Ένα ρεαλιστικό πλαίσιο μπορεί δυνητικά να βοηθήσει τον/την μαθητή/τρια να αντιληφθεί σωστά το πρόβλημα και να διατυπώσει και να εφαρμόσει μία εφικτή στρατηγική λύσης, ενεργοποιώντας τη χρήση προηγούμενων συγκεκριμένων γνώσεων σχετικών με το πλαίσιο, που είναι χρήσιμες για την κατανόηση και την επίλυση του προβλήματος. (Shannon, 2007).

Το πλαίσιο παρέχεται συνήθως από το κείμενο του προβλήματος, αλλά μπορεί επίσης να περιέχεται σε εικόνες, διαγράμματα, ή πίνακες. Μια γρήγορη ανασκόπηση των αναλυτικών προγραμμάτων, δείχνει ότι υπάρχει αφθονία, αλλά και ποικιλία πλαισίου, γεγονός που έρχεται σε έντονη αντίθεση με τα παραδοσιακά εγχειρίδια, στα οποία το κείμενο εμφανίζεται σε σύντομες εισαγωγές, ή στο τέλος ενός προβλήματος. Στα εγχειρίδια αυτά τα περισσότερα προβλήματα είναι «γυμνά», δηλαδή προβλήματα χωρίς πλαίσιο (Meyer, κ.ά., 2001).

Οι δάσκαλοι των μαθηματικών ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν ρεαλιστικά πλαίσια προκειμένου τα μαθηματικά να γίνουν πιο ουσιαστικά και πιο προσβάσιμα στους/στις μαθητές/τριες τους. Τα πλαίσια (contexts) χρησιμοποιούνται πλέον συχνότερα στις αίθουσες διδασκαλίας, με στόχο να αναδείξουν την σημασία και τη λειτουργικότητα των μαθηματικών εννοιών καθώς και την χρησιμότητα συγκεκριμένων ιδεών και δεξιοτήτων που μελετώνται. Τα «καθημερινά μαθηματικά», τα «πρακτικά μαθηματικά» και τα «ρεαλιστικά μαθηματικά» είναι αναγνωρισμένα θέματα στον επαναπροδιορισμό και στην ανάπτυξη εκπαιδευτικών υλικών σε διάφορα μέρη του κόσμου (Sullivan, Zevenbergen, & Mousley, 2003).

Η διαχυτικότητα του πλαισίου στα καινοτόμα προγράμματα σπουδών απαιτεί μια κριτική εξέταση της χρήσης του. Ορισμένα σημαντικά ερωτήματα χρήζουν απάντησης: Τι ρόλους διαδραματίζει το πλαίσιο στην διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών; Ποια χαρακτηριστικά αναζητούν οι εκπαιδευτικοί στα μαθηματικά πλαίσια (Meyer, κ.ά., 2001) ;

Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή και πρέπει να λαμβάνεται ιδιαίτερη μέριμνα στην επιλογή και εισαγωγή των πλαισίων στα μαθηματικά προβλήματα, για να διασφαλιστεί ότι όλοι οι μαθητές/τριες θα συνδεθούν και θα επικοινωνήσουν κατάλληλα με τα πλαίσια καθώς και με τα μαθηματικό αντικείμενο που διδάσκονται. Πριν από την χρήση των πλαισίων οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διαπιστώνουν την μαθηματική τους καταλληλότητα, το ενδιαφέρον ή την συνάφεια με τους/τις μαθητές/τριες, τον πιθανό κοινωνικό αντίκτυπο και την δυνατότητα αρνητικών επιπτώσεων ή την τάση αποκλεισμού ορισμένων μαθητών/τριών. Ενδέχεται τα ίδια χαρακτηριστικά πλαισίων που καθίστανται αποτελεσματικά για ορισμένες δραστηριότητες, να δημιουργούν δυσκολίες σε κάποιους άλλους (Sullivan, Zevenbergen, & Mousley, 2002). Είναι πολύ χρήσιμος ο προσδιορισμός της γνώσης των κλασμάτων με περισσότερες λεπτομέρειες, που θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια των προβλημάτων (Pekkan, 2015).

2.8 Αναλύσεις των σχολικών εγχειριδίων

Λόγω της, αναμφίβολα, μεγάλης και πολύπλευρης σημασίας των εγχειριδίων στην διδασκαλία των Μαθηματικών, πολλοί ερευνητές σε θέματα της εκπαίδευσης των Μαθηματικών οδηγήθηκαν στην πραγματοποίηση ερευνών που αφορούν αναλύσεις σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών (Καφούση, κ.ά., 2009). Τα εγχειρίδια των μαθηματικών ως υλικά υποστήριξης για την διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών, έχουν υπάρξει από την αρχαιότητα. Είναι γνωστό, ότι τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» στην αρχαία Ελλάδα (περίπου 300 π.Χ.) θεωρήθηκαν ως το πιο επιτυχημένο εγχειρίδιο των μαθηματικών που γράφτηκε ποτέ. Στην αρχαία Κίνα (περίπου 200-100 π.Χ.), τα «Εννέα κεφάλαια για την τέχνη των Μαθηματικών» χρησίμευαν ως διδακτικό υλικό όχι μόνο στην Κίνα, αλλά και στις γειτονικές χώρες. Σε αντίθεση με την μακροχρόνια ύπαρξη των εγχειριδίων μαθηματικών, η μελέτη και ανάλυσή τους έχει πολύ μικρότερη ιστορία. Τις τελευταίες δεκαετίες έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος στην έρευνα εγχειριδίων των μαθηματικών και το ερευνητικό ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε αναλύσεις εγχειριδίων σε θέματα που αφορούν τη χρήση τους στην διδασκαλία και την συμβολή τους στη μάθηση των Μαθηματικών (Fan, κ.ά., 2013).

Η ανάγκη ανάλυσης και μελέτης των σχολικών εγχειριδίων ως θεμελιωδών στοιχείων της καθημερινής διδακτικής πρακτικής, αλλά και της εμπειρίας των εκπαιδευτικών στο σχολείο, κρίνεται επιτακτική. Οι εμπειρίες και οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα εγχειρίδια θεωρούνται πολύτιμες, για την εκτίμηση της υπάρχουσας κατάστασης στο χώρο των σχολικών βιβλίων, αλλά και για την αξιολόγηση των αναλυτικών προγραμμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις κάποια εγχειρίδια των Μαθηματικών θεωρούνται οι καλύτεροι μάρτυρες και καταγραφείς των Προγραμμάτων Σπουδών του παρελθόντος, αλλά και των τότε παιδαγωγικών προθέσεων και στόχων. Η επιλογή των εγχειριδίων είναι κρίσιμη, όχι μόνο για τον άμεσο αντίκτυπο που έχουν στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, αλλά και γιατί προωθούν την ποιότητα της μάθησής τους (Μαστρογιάννης, 2015).

Οι Fan κ.ά. (2013) σε μια εκτεταμένη και εξαντλητική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας με σκοπό τη συστηματική εξέταση, μελέτη και ανάλυση της έρευνας που έχει επίκεντρο τα εγχειρίδια των Μαθηματικών, ταξινομούν τις ερευνητικές μελέτες που βρήκαν σε τέσσερις κατηγορίες, αναφορικά με αυτό που μελετούν στα εγχειρίδια:

1. **Οι ερευνητικές μελέτες που εξετάζουν τον ρόλο των εγχειριδίων στην διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών**: Αυτή η κατηγορία είναι η περισσότερο ενδιαφέρουσα, αλλά και αναγκαία, γιατί περιλαμβάνει τις μελέτες που επικεντρώνονται στα σχολικά Μαθηματικά.
2. **Οι μελέτες που κάνουν ανάλυση και σύγκριση εγχειριδίων:** Εστιάζουν στην ανάλυση των σχετικών χαρακτηριστικών των υπό μελέτη μαθηματικών εγχειριδίων και, στην περίπτωση σύγκρισης σχολικών βιβλίων, συγκρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές δύο ή περισσοτέρων σειρών μαθηματικών εγχειριδίων.
3. **Οι μελέτες που εξετάζουν τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων:** Επικεντρώνονται στο πώς τα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς και τους/τις μαθητές/τριες, δηλαδή, πώς τα εγχειρίδια διαμορφώνουν τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών.
4. **Άλλες μελέτες:** Στην κατηγορία αυτή ανήκουν όλες οι υπόλοιπες μελέτες, όπως αυτές για τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και εκείνες που εξετάζουν τη σχέση μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και της απόδοσης των μαθητών/τριών.

Τα αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι οι περισσότερες μελέτες (63%), επικεντρώνονται στην ανάλυση και την σύγκριση των σχολικών εγχειριδίων (εξετάζοντας πως έχουν αντιμετωπισθεί και παρουσιασθεί διαφορετικά αντικείμενα των Μαθηματικών στα σχετικά εγχειρίδια) , ενώ το 25% των μελετών αφορούν τη χρήση.

Η ανάλυση εγχειριδίων είναι μια ευρεία έννοια, η οποία κυρίως αναφέρεται σε δύο βασικούς τομείς: (α) στην ανάλυση ενός εγχειριδίου, ή μιας σειράς εγχειριδίων, σε σχέση με το πώς παρουσιάζεται μια έννοια ή ένα θέμα, ή με το πώς μια συγκεκριμένη ιδέα ή μια πτυχή που μας ενδιαφέρει αντικατοπτρίζεται σε αυτό, και (β) στην ανάλυση διαφορετικών σειρών εγχειριδίων από την ίδια χώρα, ή αρκετά συχνά από διαφορετικές χώρες, με στόχο τον εντοπισμό των ομοιοτήτων και των διαφορών τους. Στην περίπτωση αυτή πρόκειται για σύγκριση εγχειριδίων, ή για συγκριτική ανάλυση εγχειριδίων (Fan, κ.ά., 2013). Η προσπάθεια ανάλυσης ενός σχολικού εγχειριδίου είναι ένα δύσκολο εγχείρημα και εγείρει κρίσιμα ερωτήματα: Πώς θα αναλύσουμε ένα σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών και τι θα αναλύσουμε σε αυτό; Για το σκοπό αυτό, έχουν χρησιμοποιηθεί ως τώρα διάφορες μέθοδοι ανάλυσης και ταξινόμησης, κάθε μία από τις οποίες έχει διαφορετικό στόχο, αναδεικνύοντας διαφορετικά κάθε φορά στοιχεία (Καφούση, κ.ά., 2009). Οι Pepin και Haggarty (2001) προτείνουν μια προοπτική ανάλυσης ενός σχολικού εγχειριδίου, η οποία αφορά τόσο το περιεχόμενο και τη δομή του, όσο και τη χρήση του στις σχολικές τάξεις από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς. Οι περιοχές με βάση τις οποίες μπορεί να αναλυθεί το περιεχόμενο και η δομή των εγχειριδίων είναι:

- ***Μαθηματικές προθέσεις:*** αναφέρονται στην επιλογή και τον τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης στα εγχειρίδια (ποια θέματα εισάγονται, που δίνεται έμφαση, σειρά παρουσίασης, υπονοούμενες αντιλήψεις για τα μαθηματικά).
- ***Παιδαγωγικές προθέσεις:*** αναφέρονται στους τρόπους με τους οποίους το εγχειρίδιο βοηθά ή όχι τον/την μαθητή/τρια να μάθει με βάση τα λεκτικά και μη λεκτικά χαρακτηριστικά του κειμένου (γλώσσα, εικόνες, σύμβολα).
- ***Κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά:*** αναφέρονται σε κοινωνιολογικά στοιχεία που επηρεάζουν τους συγγραφείς και τους αναγνώστες ή χρήστες του εγχειριδίου.
- ***Πολιτισμικές παραδόσεις:*** αναφέρονται στις πολιτισμικές παραδόσεις και τα στερεότυπα που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια μιας χώρας.

Η ανάλυση ενός εγχειριδίου είναι δυνατόν να θεωρηθεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Τα χαρακτηριστικά που αναλύουμε δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για παράδειγμα το είδος των δραστηριοτήτων σχετίζεται άμεσα με τη θεματολογία τους, αλλά και τις ενέργειες των μαθητών που προωθούν, οι οποίες εκφράζονται με τις γλωσσικές λειτουργίες του κειμένου. Έτσι όλα συντελούν στην διαμόρφωση του περιεχομένου και της δομής του μαθήματος (στο Καφούση, κ.ά., 2009).

Η Κολέζα (2017), σε συμφωνία με την προηγούμενη προοπτική, προτείνει δύο βασικούς άξονες, ως προς τους οποίους μπορούν να αναλυθούν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών: Τον άξονα του περιεχομένου και τον άξονα του τρόπου εφαρμογής τους στις τάξεις. Ο άξονας του περιεχομένου θεωρείται μέσα από τέσσερις διαστάσεις:

- ***μαθηματική διάσταση:*** η ορθότητα και πληρότητα των μαθηματικών που περιέχονται,

- ***γνωστική διάσταση:*** αναφέρεται στις μαθηματικές ικανότητες που προωθούνται από το μαθηματικό περιεχόμενο,
- ***διδακτική διάσταση:*** αναφέρεται στα εργαλεία της διδακτικής που προωθούν το περιεχόμενο,
- ***παιδαγωγική διάσταση:*** αναφέρεται στα πολιτισμικά, γλωσσικά και κοινωνιολογικά στοιχεία του κειμένου.

Η μαθηματική διάσταση ενός σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών μπορεί να αναλυθεί ως προς τρεις άξονες:

- Την επιλογή και οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου
- Τις πεποιθήσεις που υπονοούνται σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών
- Τον τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης: γλώσσα και αναγνωσιμότητα, λεξιλόγιο και αναπαραστασιακά συστήματα.

Σημαντικό τμήμα του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών αποτελούν οι δραστηριότητες που περιέχονται σε αυτά, οι οποίες συνιστούν βασικούς εκφραστές της ρεαλιστικής προσέγγισης στην διδασκαλία των μαθηματικών. Η ανάπτυξη και η επιλογή μιας δραστηριότητας συναρτάται άμεσα με το πλαίσιο που περιβάλει την δραστηριότητα, το οποίο έχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Πολλές έρευνες των τελευταίων ετών έχουν αναδείξει την αξία της πλαισιωμένης διδασκαλίας (situated teaching), η οποία ορίζεται ως η σύγχρονη πρόταση έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας (traditional teaching). Το πλαίσιο στην πλαισιωμένη διδασκαλία δίνει στον/στην μαθητή/τρια την δυνατότητα να εμπλακεί χωρίς δυσκολίες σε καθημερινά προβλήματα και επιτελεί βασικές λειτουργίες, οι οποίες είναι: α) η παροχή κινήτρου, β) οι εφαρμογές γ) η πηγή μαθηματικών εννοιών, δ) πηγή στρατηγικών επίλυσης και ε) στήριγμα στην κατανόηση του μαθητή. Η θεματολογία του πλαισίου προέρχεται είτε από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής, είτε από μη πραγματικές καταστάσεις που βρίσκονται στον φανταστικό κόσμο του παιδιού (Τάτσης, & Σκουμπουρδή, 2009)

Δεδομένου ότι το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών έχει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην τάξη και ο αντίκτυπός του στη μάθηση είναι αναμφισβήτητος, οι O’Keeffe και O’Donoghue (2011) πραγματοποίησαν μια μελέτη ανάλυσης των Ιρλανδικών εγχειριδίων Μαθηματικών, με την ρητή πρόθεση να επισημανθούν τα βασικά χαρακτηριστικά των εγχειριδίων, που επηρεάζουν θετικά τη μάθηση των μαθητών.

Για το σκοπό αυτό, ανέπτυξαν ένα πλαίσιο ανάλυσης εγχειριδίων, που ενσωματώνει την ανάλυση των γλωσσικών στοιχείων των εγχειριδίων, καθώς και άλλων στοιχείων. Το πλαίσιο αυτό περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στοιχεία: περιεχόμενο, δομή, προσδοκία και γλώσσα. Ο σκοπός της προσθήκης του γλωσσικού στοιχείου είναι να ενισχυθεί το πλαίσιο ανάλυσης των εγχειριδίων, που επιτρέπει την αποτελεσματική ανάλυση στο σύνολο του εγχειριδίου. Η ανάλυση των μαθηματικών εγχειριδίων πραγματοποιείται με τη χρήση ενός συνδυασμού θεωρητικών πλαισίων που προέκυψαν από έρευνες και βασίζεται κυρίως στην ανάλυση TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει ένα περίγραμμα των θεωρητικών πλαισίων που εξετάστηκαν και εφαρμόστηκαν σε αυτή την ερευνητική μελέτη.

Πίνακας 2: Θεωρητικά πλαίσια, η επιρροή και η σημασία τους

Θεωρητικό πλαίσιο	**Επιρροή**	**Σημασία**
TIMSS, 2002	Παρέχει οδηγίες και τη δομή για την ανάλυση εγχειριδίων.	* ανάλυση περιεχομένου * ανάλυση δομής * ανάλυση προσδοκιών
Rivers, 1990	Ενίσχυση του πλαισίου TIMSS	* ανάλυση περιεχομένου * *ανάλυση* προσδοκιών
Mikk, 2000	Ενίσχυση του πλαισίου TIMSS	* ανάλυση δομής
Morgan, 2004	Παρέχει το πλαίσιο για γλωσσική ανάλυση	* ανάλυση γλωσσικών στοιχείων

Τα ευρήματα της έρευνας αποκαλύπτουν σημαντικά στοιχεία. Τα προβλήματα αποτελούν ιδιαίτερα χαμηλό ποσοστό των ασκήσεων που δίνονται για λύση στους/στις μαθητές/τριες. Είναι σχεδόν ανύπαρκτη η παρουσία ιστορικών αναφορών, βιογραφιών και εικόνων, αν και οι εικονογραφήσεις βελτιώνουν την κατανόηση των μαθηματικών κειμένων. Υπάρχει μικρός αριθμός εικόνων που αναφέρονται σε θέματα πραγματικής ζωής. Η πλειοψηφία των γραφικών στα εγχειρίδια είναι απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, παράλληλες γραμμές, γωνίες κ.τ.λ.. Η έρευνα καταδεικνύει την αναγκαιότητα της μελέτης και ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων, είτε στο πλαίσιο της αλλαγής των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών, είτε στο πλαίσιο δημιουργίας αποτελεσματικών σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών. Οι έρευνες που αφορούν την ανάλυση εγχειριδίων, τονίζουν την σημασία και τον αντίκτυπο ενός βελτιωμένου εγχειριδίου, τόσο για την διδασκαλία, όσο και για την μάθηση των Μαθηματικών. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, όταν το εγχειρίδιο θα χρησιμοποιηθεί ως κύριο μέσο στην διδακτική διαδικασία από έναν αρκετά μεγάλο αριθμό εκπαιδευτικών χωρίς ειδικά προσόντα.

2.9 Συζήτηση

Η αδιαμφισβήτητη σημασία των εγχειριδίων στην διδασκαλία των Μαθηματικών, καθιστά επιτακτική την ανάγκη μελέτης τους και έχει στρέψει τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών προς αυτήν. Η χρήση των εγχειριδίων από τους/τις μαθητές/τριες στην διδακτική διαδικασία, αλλά και στη μελέτη τους είναι εκ των ων ουκ άνευ, χωρίς αυτό να εγγυάται κατ' ανάγκην τα μαθησιακά αποτελέσματα και την ανάπτυξη δεξιοτήτων από τους/τις μαθητές/τριες. Τα εγχειρίδια συνιστούν τον συνεκτικό ιστό της διδασκαλίας, συνδέοντας το Α.Π.Σ. με τις παιδαγωγικές προθέσεις και διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού από το ένα μέρος και την διδακτέα μαθηματική γνώση με την ουσία του γνωστικού αντικειμένου, που πρόκειται να διδαχθεί, και την μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών/τριών από το άλλο.

Τα εγχειρίδια αποτελούν προσβάσιμη πηγή γρήγορης άντλησης διδακτικού υλικού για τους εκπαιδευτικούς, ιδιαίτερα τους αρχάριους, όμως τα περισσότερα εγχειρίδια των Μαθηματικών δεν είναι κατάλληλα, για να οριστούν ως «μοντέλα» διδακτικής πρακτικής και υποστήριξης μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας. Είναι έκδηλη παγκοσμίως η τάση, στα μαθηματικά εγχειρίδια να περιέχονται δραστηριότητες, που προωθούν την αυτενέργεια των μαθητών/τριών και την ανακάλυψη της γνώσης, συνδέοντας τα Μαθηματικά με προβλήματα της πραγματικής ζωής. Ωστόσο η φορμαλιστική διάσταση των μαθηματικών (τυποποιημένοι αλγόριθμοι, κανόνες, αποδείξεις κ.τ.λ.) συνεχίζει να υπάρχει στα εγχειρίδια πολλών χωρών, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό).

Τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια είναι μια σύγχρονη εναλλακτική θεώρηση εγχειριδίων, μέσα από τις δυνατότητες των Τ.Π.Ε., προσφέροντας ελκυστικά χαρακτηριστικά και διαδραστικές δραστηριότητες. Μολονότι είναι εύκολα προσβάσιμα, σχεδόν από όλους σήμερα και δεν έχουν ερευνητικά παρατηρηθεί διαφορές στα αποτελέσματα της μάθησης, δεν φαίνεται να κερδίζουν τις προτιμήσεις των μαθητών.

Το εγχειρίδιο πρέπει να είναι η πηγή καινοτόμων πρακτικών για την διδασκαλία. Κύριος στόχος του πρέπει να είναι η υποστήριξη της μάθησης μέσω της καλλιέργειας δεξιοτήτων, της ανάπτυξης ικανότητας επίλυσης προβλημάτων και της παροχής ευκαιριών για πρακτική εξάσκηση. Τα Μαθηματικά είναι για όλους: το σχολικό εγχειρίδιο, ως το βασικό εκπαιδευτικό υλικό, πρέπει να παρέχει ευκαιρίες μάθησης σε όλους τους/τις μαθητές/τριες, καθοδηγώντας την διδακτική διαδικασία και καθορίζοντας τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού. Επιβεβαιώνεται με αυτόν τον τρόπο η άποψη, ότι το εγχειρίδιο διαδραματίζει ρόλο καθοριστικό και αναντικατάστατο.

Είναι διάχυτη σήμερα η άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι μια δραστηριότητα, ιδιαίτερα στα πρώτα στάδια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η μαθηματική γνώση αναδύθηκε και οργανώθηκε μέσα από τον πραγματικό κόσμο. Συνεπώς το νόημα και η ουσία των Μαθηματικών κοινωνείται μέσω των δραστηριοτήτων, οι οποίες ως «πλαισιωμένα προβλήματα» συνιστούν δυνητικά γόνιμες διδακτικές καταστάσεις με επίκεντρο ένα πραγματικό πρόβλημα. Διαφαίνεται εδώ ο διεπιστημονικός ρόλος της δραστηριότητας, όπου η κατανόηση καταστάσεων και φαινομένων του πραγματικού κόσμου διαμορφώνεται μέσω των μαθηματικών. Ο σχεδιασμός μιας σύγχρονης διδασκαλίας θα πρέπει να έχει ως πυρήνα την επεξεργασία και επίλυση δραστηριοτήτων, ώστε να αφυπνίσει και να κινητοποιήσει την μαθηματική σκέψη των μαθητών/τριών και τελικά να τους κατευθύνει στην «ανακάλυψη» και κατανόηση της νέας γνώσης. Οι δραστηριότητες που θα ενταχθούν σε μια διδασκαλία πρέπει να έχουν σαφή και κατανοητά χαρακτηριστικά από τους/τις μαθητές/τριες, ώστε να παρέχουν σε όλους/ες ίσες ευκαιρίες μάθησης.

Η δυναμική μιας δραστηριότητας στην διδασκαλία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πλαίσιο, μέσα στο οποίο τοποθετείται. Το πλαίσιο ενεργοποιεί ή αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών, προσφέροντας ελκυστικές καταστάσεις εργασίας. Ωστόσο θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή η επιλογή και η εισαγωγή του πλαισίου στις δραστηριότητες. Τα ρεαλιστικά πλαίσια προσφέρουν αναμφίβολα περισσότερες ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες, αφού αυξάνουν τον βαθμό εμπλοκής τους και ενθαρρύνουν την αλληλεπίδραση. Στα σύγχρονα Α.Π.Σ. υπάρχει διευρυμένη χρήση του πλαισίου, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά όπου είχαμε τα περισσότερα προβλήματα χωρίς πλαίσιο.

Είναι επιτακτική ανάγκη η μελέτη και ανάλυση εγχειριδίων που αφορά το περιεχόμενό τους, τη χρήση τους στην διδασκαλία και τη συμβολή τους στη μάθηση των Μαθηματικών. Τα ερευνητικά αποτελέσματα μαρτυρούν την αναμφισβήτητη σημασία που έχουν για τη μάθηση τα βελτιωμένα εγχειρίδια. Η επιλογή των προς χρήση εγχειριδίων έχει άμεσες συνέπειες στη διδασκαλία και καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την ποιότητα της μάθησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή

Η μελέτη αυτή είναι μια ανάλυση περιεχομένου σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών και ανήκει στον ευρύτερο χώρο, που αφορά την έρευνα για την εκπαίδευση και ειδικότερα στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών. Η παιδαγωγική και η διδακτική είναι οι δύο μεγάλοι πυλώνες της επιστήμης της εκπαίδευσης, που έρχονται αρωγοί στα καθημερινά προβλήματα και εμπόδια του εκπαιδευτικού στην πραγματικότητα της σχολικής τάξης. Οποιοδήποτε θέμα που άπτεται της διδακτικής, έχει ως αφετηρία τρία πρωτογενή ερωτήματα: « Τι θα διδάξω», «Γιατί θα το διδάξω» και «Πως θα το διδάξω». Τα δύο πρώτα ερωτήματα αντιμετωπίζονται κυρίως από τους κατασκευαστές των Α.Π.Σ. και τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων. Το τρίτο ερώτημα, δηλαδή το «Πως», είναι αυτό που βαρύνει και απασχολεί καθημερινά τον διδάσκοντα. Η διερεύνηση θεμάτων της διδακτικής έχει στόχο να δώσει απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα. (Κολέζα, Μακρής, & Σούρλας, 2000).Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει και την σημασία αυτής της μελέτης, όπου επιχειρεί να συνεισφέρει στο βασικό αντικείμενο της διδακτικής, που είναι οι διαδικασίες της διδασκαλίας, κατανόησης και απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, εν προκειμένω δε, της γνώσης που αφορά τα κλάσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται τα στοιχεία μεθοδολογίας που θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη, αρχίζοντας με την προβληματική που οδήγησε και ενθάρρυνε την πραγματοποίησή της. Δίνονται στην συνέχεια ο σκοπός της μελέτης και τα ερευνητικά ερωτήματα μέσω των οποίων θα καταστεί δυνατή η επίτευξη του σκοπού της έρευνας. Ακολουθεί το δείγμα της έρευνας, το οποίο αποτελούν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του δημοτικού των ετών 1982 και 2000. Έπεται η ανάλυση των δεδομένων, η οποία περιλαμβάνει την διαδικασία συλλογής των δεδομένων, τα κριτήρια ανάλυσής τους και την τεχνική με βάση την οποία γίνεται η ανάλυση.

3.2 Προβληματική της μελέτης

Το κλάσμα θεωρείται μια από τις σημαντικότερες έννοιες στη διαχρονική πορεία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μια έννοια η οποία, κατά γενική παραδοχή, θα επηρεάσει όλη την μετέπειτα πορεία του/της μαθητή/τριας προς την μαθηματική ανάπτυξη και την τελειοποίηση του αριθμητισμού. Η ανάπτυξη μιας βαθιάς κατανόησης των κλασμάτων είναι καθοριστική και κρίσιμη για την επιτυχία των μαθητών/τριών στα ανώτερα Μαθηματικά, αφού το κλάσμα είναι θεμελιώδης έννοια της άλγεβρας. Στο πρώτο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου αναλύθηκε εκτενώς και τονίστηκε η μεγάλη σημασία της έννοιας του κλάσματος όχι μόνο για τα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και για την διδασκαλία των Μαθηματικών στις ανώτερες βαθμίδες.

Πολύτιμος ερευνητικός χρόνος έχει δαπανηθεί από πολλούς ερευνητές ανά τον κόσμο, προκειμένου να δοθούν πληρέστερες αναλύσεις και περιεκτικότερες ερμηνείες της έννοιας, αλλά και να προσδιορισθούν οι αιτίες των δυσκολιών που συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες. Ίσως αυτός να είναι ο κυριότερος λόγος που το ενδιαφέρον των ερευνητών για τα κλάσματα διατηρείται αμείωτο. Παρά τις εκτεταμένες ερευνητικές προσπάθειες, η διδασκαλία και μάθηση των κλασμάτων συνεχίζει να αποτελεί πρόκληση για εκπαιδευτικούς και μαθητές/τριες, αλλά και να αποτελεί ταυτόχρονα πρόσφορη περιοχή για καινούργιες έρευνες. Βεβαίως το ίδιο το κλάσμα, λόγω της φύσης του ως πολύπλευρο μαθηματικό κατασκεύασμα, θέτει από νωρίς εμπόδια στην κατανόησή του από τους/τις μαθητές/τριες.

Το κλάσμα ενυπάρχει ως άτυπη γνώση σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινής ζωής. Όμως η συχνή χρήση του σε πολλά προβλήματα με εμπειρικό συνήθως τρόπο, που διαφέρει κατά πολύ από την τυποποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού , παγιώνει στους/στις μαθητές/τριες προκαταλήψεις, οι οποίες θα αποτελέσουν τροχοπέδη στην ορθή και ολοκληρωμένη οικοδόμηση της έννοιας, καθώς και στην εφαρμογή της σε άλλα γνωστικά αντικείμενα των Μαθηματικών. Οι εγγενείς δυσκολίες των μαθητών/τριών που οφείλονται στην πολυπλοκότητα της έννοιας, έρχονται αντιμέτωπες με αυτές τις προκαταλήψεις, με φυσικό επακόλουθο να δυσχεραίνεται το έργο του εκπαιδευτικού και να μην έχει η διδασκαλία τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Η απαγκίστρωση των μαθητών/τριών από τις αρνητικές αντιλήψεις που έχουν διαμορφώσει, θα πρέπει να είναι ένα κύριο ζητούμενο της διδακτικής στρατηγικής, που θα σχεδιάσει και θα ακολουθήσει ο εκπαιδευτικός. Ίσως αυτό να μην είναι πάντα δυνατόν καθολικά να συμβεί, δηλαδή, να αποκοπούν εντελώς όλοι/ες οι μαθητές/τριες από την διαμορφωμένη γνώση που κατέχουν σχετικά με τα κλάσματα. Καμιά διδασκαλία, άλλωστε, δεν ξεκινά πάνω σε λευκό χαρτί. Η προϋπάρχουσα γνώση, όποια κι αν είναι αυτή, θα επηρεάσει την καινούργια. Τότε, θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να αναλάβει άλλου είδους δράση και με κατάλληλες διδακτικές τεχνικές, να μετατρέψει τις αρνητικά διαμορφωμένες αντιλήψεις σε γόνιμα ερεθίσματα για την εκκίνηση της διδασκαλίας του.

Αν και πολλοί παράγοντες επηρεάζουν τα αποτελέσματα της διδασκαλίας και την επιτυχία των μαθητών/τριών, ο τρόπος που ενσωματώνονται στα εγχειρίδια οι ερμηνείες – υποκατασκευές του κλάσματος (μέρος του όλου, πηλίκο, λόγος, μέτρηση και τελεστής), συνιστούν δυνητικά έναν καταλυτικό παράγοντα για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας και την κατανόησή τους τελικά. Τα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να θεωρηθούν η γέφυρα, που συνδέει το επίσημο προτεινόμενο πρόγραμμα σπουδών με το πρόγραμμα που εφαρμόζεται στην καθημερινή διδακτική πρακτική μέσα στις σχολικές αίθουσες διδασκαλίας. Ό,τι διδάσκεται στις τάξεις καθορίζεται, σε μεγάλο βαθμό, και επηρεάζεται άμεσα από τα εγχειρίδια που έχουν στην διάθεσή τους οι μαθητές/τριες. Μια συνιστώσα του πολλαπλού ρόλου των εγχειριδίων είναι η λειτουργία τους ως διαύλου επικοινωνίας, του/της μαθητή/τριας με την επίσημη οργανωμένη μαθηματική γνώση. Η ποιότητα της επικοινωνίας αυτής θα καθορίσει εν πολλοίς τα αποτελέσματα της διδασκαλίας. Συνεπώς, ο τρόπος που εισάγεται και παρουσιάζεται η νέα μαθηματική γνώση στα εγχειρίδια θα διαμορφώσει σε μεγάλο βαθμό αυτή την επικοινωνία.

Η δραστηριότητα, όταν βέβαια έχει σχεδιασθεί κατάλληλα, αποτελεί άριστο διδακτικό μέσο για την εισαγωγή, ή την παρουσίαση, ή την εφαρμογή της νέας γνώσης, η οποία προσφέρεται στον/στην μαθητή/τρια σε κεκαλυμμένη μορφή. Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα έχει πάντα ως υπόβαθρο κάποιο ή κάποια κίνητρα. Η μαθηματική δραστηριότητα θα δώσει στον/στην μαθητή/τρια το κίνητρο και την δυνατότητα να αλληλεπιδράσει με τους/τις συμμαθητές/τριες του/της και να εμπλακεί ενεργά στην διαδικασία εύρεσης της λύσης και αναζήτησης διεξόδου από την προβληματική κατάσταση που αντιμετωπίζει. Οι μαθητές/τριες, όταν εργάζονται σε ένα περιβάλλον αλληλεπίδρασης και διερεύνησης, μαθαίνουν να μετατρέπουν τις έννοιες που προσέγγισαν διαισθητικά σε χρήσιμα εργαλεία, με τα οποία θα οικοδομήσουν την διδαχθείσα γνώση σε μια συνεκτική ολότητα, συνυφαίνοντας τα επιμέρους τμήματά της. Πολύ περισσότερο, στην διδασκαλία των κλασμάτων, η δραστηριότητα είναι ένα «πολυεργαλείο» της διδασκαλίας, που θα βοηθήσει τον/την μαθητή/τρια να συνδέσει την βιωματική του/της γνώση για τα κλάσματα με τις γνωστικές του/της εμπειρίες και τον διδάσκοντα να παρωθήσει τους/τις μαθητές/τριες να αλλάξουν τον μέχρι τώρα τρόπο σκέψης τους.

Προκειμένου να αξιολογηθεί ο τρόπος επίδρασης μια δραστηριότητας στην πορεία μιας διδασκαλίας και στα μαθησιακά αποτελέσματα, είναι ανάγκη να προσδιορισθούν και να αναλυθούν τα χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας. Όπως καταδείχτηκε στο δεύτερο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου, μια δραστηριότητα χαρακτηρίζεται πρωτίστως από το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται. Το πλαίσιο προκαλεί και υποκινεί τους/τις μαθητές/τριες να αναδομήσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους και τις όποιες προκαταλήψεις τους και στην συνέχεια, με την ελεγχόμενη καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, στην ανακάλυψη και κατανόηση της νέας γνώσης. Το πλαίσιο είναι η «πηγή ενέργειας» της δραστηριότητας και της προσδίδει την αναγκαία δυναμική που θα προκαλέσει και την συναισθηματική κινητοποίηση των μαθητών/τριών, ώστε με την παρότρυνση και έμμεση διευκόλυνση του διδάσκοντος (ο ρόλος του οποίου παύει να είναι δογματικός αλλά συνεργατικός και καθοδηγητικός), να καταστεί το μαθηματικό γνωστικό αντικείμενο ενδιαφέρον. Έτσι, λειτουργώντας αρχικά οι μαθητές/τριες διαισθητικά και υποκινούμενοι από τις προϋπάρχουσες εμπειρίες τους, να καταφέρουν με την ενεργητική συμμετοχή τους, να αποκτήσουν την νέα γνώση και να φτάσουν τελικά στην μαθηματική τυποποιημένη περιγραφή της, που θα τους επιτρέψει να σκέπτονται αφαιρετικά. Η δραστηριότητα δομεί την μαθηματική γνώση, αιτιολογεί την προσφορά του γνωστικού αντικειμένου και διευρύνει τις μαθηματικές επεξεργασίες σε γενικότερα προβλήματα, τα οποία σχετίζονται με τον υπόλοιπο κόσμο και επιδέχονται διεπιστημονικές προσεγγίσεις. Η δραστηριότητα επίσης, έχει πρωταγωνιστικό ρόλο τόσο στην δόμηση της διδασκαλίας, όσο και στον έλεγχο και στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της (Κολέζα, κ.ά., 2000).

3.3 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Με τα εναύσματα και τους ερευνητικούς προβληματισμούς που προκύπτουν από την προβληματική της προηγούμενης παραγράφου, το τρίπτυχο: ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων – κλάσματα – σχολικά εγχειρίδια αποτελεί την προμετωπίδα του σκοπού της παρούσας εργασίας. Είναι μέγιστη η συμβολή του πλαισίου στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών/τριών, ιδιαίτερα στις πρώιμες τάξεις, η οποία θα ενισχύσει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών/τριών στην μαθησιακή διαδικασία και θα αποτελέσει στερεό θεμέλιο για να οικοδομήσουν οι μαθητές/τριες την έννοια του κλάσματος με μαθηματικό τρόπο (Τουμάσης, 1999).

Σκοπός αυτής της μελέτης είναι, μέσω της ανάλυσης του πλαισίου των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού, που αναφέρονται στα κλάσματα, να διερευνηθεί ο τύπος του πλαισίου που χρησιμοποιείται σε αυτές τις δραστηριότητες και πως αυτός σχετίζεται με τις πέντε ερμηνείες – υποκατασκευές του κλάσματος (μέρος του όλου, πηλίκο, λόγος, μέτρηση και τελεστής). Το πλαίσιο είναι ο τρόπος που ο/η μαθητής/τρια με όχημα την δραστηριότητα θα προσεγγίσει για πρώτη φορά, αλλά και στην συνέχεια, το κλάσμα. Το μεγάλο έργο που καλούνται να επιτελέσουν οι συγγραφείς και δάσκαλοι των Μαθηματικών, είναι να εύρουν ερωτήσεις και να κατασκευάσουν δραστηριότητες που οδηγούν στον προσδοκώμενο στόχο και στις οποίες φυσικά, μπορεί να δοθεί απάντηση και λύση (Τουμάσης, 1999).

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να προσεγγίσει και να εκπληρώσει το σκοπό της, με τις απαντήσεις που επίκειται να δώσει στα ερευνητικά ερωτήματα που ακολουθούν:

1. Ποιες ερμηνείες του κλάσματος περιέχονται στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης το έτος 1982;
2. Ποιες ερμηνείες του κλάσματος περιέχονται στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης το έτος 2000;
3. Ποια πλαίσια δραστηριοτήτων αντιστοιχούν ή συνδέονται σε κάθε ερμηνεία του κλάσματος το 1982;
4. Ποια πλαίσια δραστηριοτήτων αντιστοιχούν ή συνδέονται σε κάθε ερμηνεία του κλάσματος το 2000;

3.4 Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας απαρτίζουν τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης των ετών 1982 και 2000, που εκδόθηκαν από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων (ΟΕΔΒ). Το κριτήριο επιλογής των συγκεκριμένων ετών είναι, ότι σε αυτά τα έτη εφαρμόζονται δύο μεγάλες και ευρείες μεταρρυθμίσεις στο εκπαιδευτικό σύστημα, που αποτελούν σημαντικούς σταθμούς στην ιστορία του. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές δεν αφορούν αποκλειστικά την εξωτερική δομή και οργάνωση των σχολείων, αλλά επιδρούν σε μεγάλη κλίμακα και στην εσωτερική λειτουργία του, έχοντας σαν συνέπεια την κατασκευή και εφαρμογή νέων Α.Π.Σ. και την συγγραφή και κυκλοφορία καινούργιων σχολικών εγχειριδίων.

Η μεταρρύθμιση του 1981 εστιάζει περισσότερο σε εσωτερικές αλλαγές του εκπαιδευτικού συστήματος στοχεύοντας στον εκδημοκρατισμό του και λιγότερο σε δομικές αλλαγές. Ορισμένες χαρακτηριστικές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στην δεκαετία του 80, ήταν:

- Οι μαθητές/τριες της σε όλη την διάρκεια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προάγονται αυτόματα.
- Καταργούνται οι εισαγωγικές εξετάσεις από την κατώτερη προς την ανώτερη εκπαίδευση (γυμνάσιο – λύκειο).
- Ιδρύεται ένας νέος τύπος λυκείου, το πειραματικό Ενιαίο Πολυκλαδικό Λύκειο (ΕΠΛ) με στόχο να συνδέσει την γενική με την τεχνολογική εκπαίδευση.
- Αυξάνεται η συμμετοχή στη λήψη αποφάσεων στο σχολείο, με τη θέσπιση των μαθητικών συμβουλίων και των διδασκαλικών συμβουλίων.
- Τα καινούργια Α.Π.Σ. έχουν νέα δομικά χαρακτηριστικά τύπου «curriculum», που προσεγγίζουν τα διεθνή πρότυπα: σκοποί – στόχοι, περιεχόμενα, διδακτική μεθοδολογία.

Το 2000 γίνεται η μεγάλη στροφή προς το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ), όπου μέσω των νέων Α.Π.Σ. και της συγγραφής πρότυπων διδακτικών βιβλίων επιχειρείται η αναβάθμιση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Βασική αρχή των νέων Α.Π.Σ. είναι η διαθεματική οργάνωση του περιεχομένου των διδακτικών αντικειμένων και οι διερευνητικές διδακτικές προσεγγίσεις που έχουν ολιστικό χαρακτήρα. Καθιερώνεται η διαθεματική προσέγγιση, δηλαδή, σύμφωνα με το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.): «η διασύνδεση γνωστικών αντικειμένων , η σφαιρική ανάλυση βασικών θεμάτων και προβάλλεται η παράμετρος της διαθεματικότητας στη σχολικά πράξη, γεγονός που ενισχύει και τη γενική παιδεία». Σύμφωνα με το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.) το όλο έργο αποτελεί: «μέρος ενός μακρόπνοου σχεδιασμού που εστιάζεται πρωτίστως στην υποχρεωτική εκπαίδευση». Οι κυριότερες καινοτομίες που εισάγονται στη εκπαίδευση είναι:

- ✓ Καθιέρωση της διαθεματικής προσέγγισης, επιλογές σύμφωνες με τις σύγχρονες επιστημολογικές, ψυχολογικές και διδακτικές θεωρίες.
- ✓ Όχι απλή παράθεση της διδακτέας ύλης, αλλά αντιστοιχία στόχων – περιεχομένου – διδακτικών δραστηριοτήτων σε κάθε διδακτική ενότητα. Εφαρμογή εναλλακτικών προσεγγίσεων, πέραν του μονόλογου και της ερωταπόκρισης.
- ✓ Εκπόνηση σχεδίων εργασίας (projects) στα πλαίσια όλων των μαθημάτων.
- ✓ Καθιέρωση της ευέλικτης ζώνης.
- ✓ Η αξιολόγηση συνδέεται οργανικά με τις υπόλοιπες διαδικασίες της διδασκαλίας και προτείνονται ποικίλες μορφές αξιολόγησης.
- ✓ Τα νέα Α.Π.Σ. παραθέτουν τις παραμέτρους για τη συγγραφή καινούργιων διδακτικών βιβλίων, σύμφωνα με της απαιτήσεις της σύγχρονης βιβλιογραφίας.
- ✓ Βελτίωση του αναγνωστικού, μαθηματικού και φυσικοεπιστημονικού αλφαβητισμού (γραμματισμού).

Συγκεκριμένα, στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο του μαθητή όλων των τάξεων του δημοτικού των ετών 1982 και 2000. Στα βιβλία αυτά αρχικά αναζητήθηκαν τα κεφάλαια ή οι παράγραφοι που αναφέρονται στα κλάσματα και στην συνέχεια εντοπίσθηκαν και συγκεντρώθηκαν όλες οι δραστηριότητες που υπήρχαν σε αυτά. Ακολούθως πραγματοποιήθηκε ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων αυτών.

Στα βιβλία των Μαθηματικών κάθε τάξης του έτους 1982 παρουσιάζονται τα εξής δεδομένα:

- Το εγχειρίδιο της Α΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο μέρος και το δεύτερο μέρος, όπου δεν υπάρχει κάποια αναφορά (άμεση ή έμμεση) στην έννοια του κλάσματος, αν και ο σκοπός του μαθήματος όπως διατυπώνεται στο ΦΕΚ 107/τεύχος Α΄/583/31-08-1982 είναι: « Σκοπός των Μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη λογικομαθηματική σκέψη και να κατανοήσουν το περιβάλλον, κυρίως από την άποψη ποσοτικών μεγεθών και σχέσεων, ώστε να αντιμετωπίζουν με επιτυχία προβληματικές καταστάσεις».

- Το εγχειρίδιο της Β΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Αναφορά στα κλάσματα γίνεται στο πρώτο μέρος, στο κεφάλαιο: «οι αριθμοί από το 20 – 100» και στην παράγραφο «κλάσματα (Τα κλάσματα 1/2, 1/4,2/4, 3/4 και 4/4), σελίδες 141– 148. Σύμφωνα με το ΦΕΚ 107/τεύχος Α΄/583/31-08-1982, επιδίωξη της ενότητας αυτής είναι: «Να συλλάβουν οι μαθητές/τριες τις έννοιες του μισού του τετάρτου, των δύο και τριών τετάρτων». Οι στόχοι της διδασκαλίας είναι: «Να αξιολογήσουν τις έννοιες των κλασμάτων 1/2, 1/4 2/4, 3/4, 4/4. Να διατάσσουν τα κλάσματα».
- Το εγχειρίδιο της Γ΄ τάξης με τίτλο « αριθμητική –γεωμετρία», αναφέρεται στα κλάσματα στο ένατο κεφάλαιο: «Κλάσματα», σελίδες 198 – 215. Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τέσσερις παραγράφους: 1. Η έννοια του κλάσματος, 2. Προβλήματα και ασκήσεις, 3. Σύγκριση κλασμάτων και 4. Λογαριασμός από μνήμης. Ως ειδικός σκοπός του κεφαλαίου αυτού αναφέρεται: «Έννοια, γραφή και απαγγελία κλασμάτων με τις κλασματικές μονάδες: 1/2, 1/4, 1/8, 1/5, 1/3, 1/6. Εμπειρικές συγκρίσεις των κλασμάτων αυτών» (ΦΕΚ 347/τεύχος Α΄/Π.Δ. 1034/12-11-1977).
- Το εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης με τίτλο « αριθμητική – γεωμετρία», αναφέρεται στα κλάσματα στο όγδοο κεφάλαιο: «Κλάσματα», σελίδες 168 – 177. Σχετικές με τα κλάσματα είναι οι οκτώ πρώτες παράγραφοι του κεφαλαίου, οι οποίες είναι: 1. Γενικά, 2. Δεκαδικά κλάσματα, 3. Σύγκριση κλασμάτων με την ακέραια μονάδα, 4. Σύγκριση κλασμάτων, 5. Άνισα κλάσματα, 6. Ισοδύναμα κλάσματα, 7. Απλοποίηση κλάσματος και 8. Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα. Ως ειδικοί σκοποί του κεφαλαίου αυτού αναφέρονται: «Επανάληψη αυτών που διδάχθηκαν για τα κλάσματα στην Γ΄ τάξη. Ισοδύναμα κλάσματα. Σειρές ισοδύναμων κλασμάτων. Σύγκριση κλασμάτων με την ακέραια μονάδα. Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα» (ΦΕΚ 347/τεύχος Α΄/Π.Δ. 1034/12-11-1977).
- Στο εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης με τίτλο « αριθμητική – γεωμετρία», το μεγαλύτερο μέρος της διδακτέας ύλης είναι αφιερωμένο στα κλάσματα, σελίδες 32 – 174. Το κεφάλαιο κλάσματα χωρίζεται σε δύο μέρη. Το Α΄ μέρος έχει τίτλο «Γενικά» και αποτελείται από τις εξής παραγράφους: 1. Έννοια των

κλασμάτων, 2. Σύγκριση κλασμάτων με την ακεραία μονάδα, 3. Μεικτοί αριθμοί, 4. Ιδιότητες των κλασμάτων, 5. Απλοποίηση των κλασμάτων, 6. Πώς τρέπουμε έναν ακέραιο σε κλάσμα, 7. Σύγκριση κλασμάτων, 8. Τροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα και σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων και 9. Πώς τρέπουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα με τη βοήθεια του Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. Το Β΄ μέρος έχει τίτλο «Οι τέσσερις πράξεις με τα κλάσματα» και αποτελείται από τις εξής παραγράφους: 1. Η πρόσθεση, 2. Η αφαίρεση, 3. Ο πολλαπλασιασμός και 4. Η διαίρεση. Ως ειδικοί σκοποί του κεφαλαίου αυτού αναφέρονται: «Σχέσεις μεταξύ κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών. Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και το αντίστροφό. Ιδιότητες κλασμάτων, συγκρίσεις και μετατροπές τους. Οι τέσσερις πράξεις με τα κλάσματα» (ΦΕΚ 347/τεύχος Α΄/Π.Δ. 1034/12-11-1977).

- Στο εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης με τίτλο επίσης « αριθμητική –γεωμετρία», αναφορά στα κλάσματα γίνεται στο πρώτο κεφάλαιο, στις σελίδες 7 – 14 και στις παραγράφους: 1. Τα κλάσματα ή κλασματικοί αριθμοί, 2. Οι τέσσερις πράξεις με τα κλάσματα και 3. Σύνθετα κλάσματα. Η συνέχεια των κλασμάτων είναι στο πέμπτο κεφάλαιο με τίτλο: «Λόγοι και αναλογίες – συμμεταβλητά ποσά», σελίδες 51 – 54 και στις παραγράφους: 1. Τι είναι ο λόγος δύο αριθμών, 2. Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, 3. Αναλογίες και 4. Ιδιότητες των αναλογιών. Ως ειδικοί σκοποί του κεφαλαίου αυτού αναφέρονται: «Επανάληψη αυτών που διδάχθηκαν στην Ε΄ τάξη. Τα σύνθετα κλάσματα» (ΦΕΚ 347/τεύχος Α΄/Π.Δ. 1034/12-11-1977).

Σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών κάθε τάξης του έτους 2000, αντλήθηκαν τα εξής δεδομένα:

- Το εγχειρίδιο της Α΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Μια στοιχειώδης αναφορά για το κλάσμα γίνεται στο δεύτερο μέρος, στο κεφάλαιο 2 και στην παράγραφο 2.4 η έννοια του μισού, σελίδες 157 – 160. Γενικός στόχος εδώ, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) των Μαθηματικών, είναι να «–Να εξοικειωθούν οι μαθητές/τριες με καταστάσεις επανάληψης ίσων ποσοτήτων και διαμερισμού» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03-2003).

- Το εγχειρίδιο της Β΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Στο πέμπτο κεφάλαιο του πρώτου μέρους με τίτλο: «Οι αριθμοί 20 – 100» και στην παράγραφο 5.3 «Τα κλάσματα 1/2, 1/4, 2/4, 3/4, και 4/4», σελίδες 141 – 148, γίνεται αναφορά στα κλάσματα. Ο γενικός στόχος που τίθεται από το ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών είναι: «Οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν την έννοια του διαμερισμού (μερισμού)» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03- 2003).
- Το εγχειρίδιο της Γ΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Σχετικό με τα κλάσματα είναι ολόκληρο το τέταρτο κεφάλαιο του δεύτερου μέρους με τίτλο: «Τα κλάσματα», σελίδες 95 – 112. Αποτελείται από τις παραγράφους: 1. Οι κλασματικές μονάδες 1/2, 1/4, 1/8, 2. Οι κλασματικές μονάδες 1/3, 1/6, 3. Οι κλασματικοί αριθμοί και 4. Πράξεις με κλάσματα. Ως γενικός στόχος από το ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών, αναφέρεται: «Οι μαθητές/τριες να γνωρίσουν τα κλάσματα» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03- 2003).
- Το εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Το πέμπτο κεφάλαιο του δεύτερου μέρους με τίτλο: «Κλάσματα», σελίδες 66 – 109, είναι αφιερωμένο εξ’ ολοκλήρου στα κλάσματα. Οι παράγραφοι που περιλαμβάνει είναι: 5.1 Πώς δημιουργούμε κλασματικές μονάδες, 5.2 Τι εκφράζουν οι κλασματικές μονάδες, 5.3 Πώς δημιουργούμε κλασματικούς αριθμούς, 5.4 Τι εκφράζουν οι κλασματικοί αριθμοί, 5.5 Πώς δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα, 5.6 Προσθέτουμε και αφαιρούμε κλάσματα και 5.7 Προβλήματα με κλάσματα. Γενικός στόχος του ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών, είναι: «Οι μαθητές/τριες να εξασκηθούν στις πράξεις μα δεκαδικούς αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03- 2003).
- Το εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Στο πρώτο μέρος, το δεύτερο κεφάλαιο έχει τίτλο: «Κλασματικοί αριθμοί», σελίδες 45 – 64. Οι παράγραφοι από τις οποίες αποτελείται, είναι: 1. Οι κλασματικές μονάδες, 2. Οι κλασματικοί αριθμοί (κλάσματα), 3. Σύγκριση κλασμάτων με την ακέραιη μονάδα, 4. Τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί, 5. Σύγκριση διάταξη και στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών και 6. Ασκήσεις και προβλήματα για επανάληψη. Στο δεύτερο μέρος, το έκτο κεφάλαιο έχει τίτλο: «Πράξεις με κλασματικούς

αριθμούς», σελίδες 5 – 42. Οι παράγραφοι που το αποτελούν είναι: 1. Ισοδύναμα κλάσματα – Απλοποίηση κλασμάτων, 2. Σύγκριση κλασματικών αριθμών, 3. Μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα, 4. Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων, 5. Πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, 6. Ασκήσεις και προβλήματα για επανάληψη, 7. Πολλαπλασιασμός κλάσματος με ακέραιο, 8. Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα, 9. Διαίρεση ακέραιου με κλάσμα, 10. Διαίρεση κλάσματος με κλάσμα, 11. Σύνθετα κλάσματα και 12. Ασκήσεις και προβλήματα για περισσότερη άσκηση. Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών, οι μαθητές/τριες επιδιώκεται: «Να απαγγέλλουν, να διαβάζουν, να γράφουν και να διατάσσουν φυσικούς μέχρι το 1.000.000.000, καθώς επίσης κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης φυσικών, κλασματικών και δεκαδικών αριθμών» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03- 2003).

- Το εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης με τίτλο «τα μαθηματικά μου», αποτελείται από το πρώτο και το δεύτερο μέρος. Το πρώτο μέρος αποτελείται από 43 παραγράφους και σε αυτό δεν γίνεται ειδική αναφορά στα κλάσματα. Το δεύτερο μέρος αποτελείται από 28 παραγράφους. Στα κλάσματα αναφέρονται οι πρώτες τέσσερις: 1. Ίσα ή ισοδύναμα κλάσματα, 2. Σύγκριση μεγεθών με λόγους (1), 3. Σύγκριση μεγεθών με λόγους (2) και 4. Σχηματίζουμε αναλογίες. Ο γενικός στόχος που ορίζεται από ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών, είναι: «Να απαγγέλλουν, να διαβάζουν, να γράφουν και να διατάσσουν φυσικούς, κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς καθώς και να εκτελούν όλες τις πράξεις τους» (ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄/Αριθ. 21072α/Γ2/13-03- 2003).

3.5 Ανάλυση των δεδομένων

3.5.1 Κριτήρια ανάλυσης των δεδομένων

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μια ανάλυση περιεχομένου σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών και το ενδιαφέρον της εστιάζεται στις δραστηριότητες, που αναφέρονται στα κλάσματα και βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του δημοτικού σχολείου των ετών 1982 και 2000. Στο δεύτερο κεφάλαιο της μελέτης αποσαφηνίστηκε η σημασία της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων και οι σημαντικές επιδράσεις που έχει στα Α.Π.Σ. και στα σχολικά εγχειρίδια, είτε πρόκειται για την συγγραφή νέων εγχειριδίων, είτε πρόκειται για την βελτίωση αυτών που ήδη υπάρχουν.

Τα Π.Σ. και τα εγχειρίδια σχετίζονται άμεσα με την μάθηση, συνιστούν τον διαμεσολαβητή που μετατρέπει τις εκπαιδευτικές προθέσεις σε πραγματικότητα. Τα εγχειρίδια είναι το ορατό πρόγραμμα σπουδών στις περισσότερες αίθουσες διδασκαλίας και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό αυτό διδάσκεται και αυτό μαθαίνουν οι μαθητές. Η εξέταση των σχολικών εγχειριδίων ενημερώνει τους διαμορφωτές της εκπαιδευτικής πολιτικής για τον τρόπο, που τα κοινωνικά οράματα και οι εκπαιδευτικοί στόχοι που καταγράφονται στις εθνικές πολιτικές και τα επίσημα έγγραφα, όπως το προτεινόμενο Πρόγραμμα Σπουδών, ενσωματώνονται δυνητικά στις σχολικές τάξεις (Son & Senk, 2010). Η σχετική με τις αναλύσεις εγχειριδίων βιβλιογραφία, προτείνει μια σειρά κριτηρίων για την ανάλυση του περιεχομένου σχολικών εγχειριδίων, τα οποία εξαρτώνται από το ερευνητικό ενδιαφέρον και τον σκοπό του εκάστοτε ερευνητή. Τα κριτήρια που υιοθετεί η παρούσα μελέτη για την ανάλυση των δραστηριοτήτων, όπως προσδιορίσθηκαν παραπάνω είναι: α) Οι ερμηνείες του κλάσματος που περιέχονται σε κάθε δραστηριότητα (μέρος του όλου, πηλίκο, λόγος, μέτρηση και τελεστής) και β) Το πλαίσιο της δραστηριότητας.

Το πλαίσιο μιας δραστηριότητας έχει αναγνωριστεί ως σημαντικός μοχλός στην κατανόηση και στην μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Η χρήση των πλαισίων ανασκευάζει την αντίληψη, ότι τα Μαθηματικά είναι ένα απομακρυσμένο σώμα γνώσης. Μέσω των πλαισίων οι μαθητές/τριες μπορούν να αναπτύξουν μια καλύτερη εικόνα για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι τα πλαίσια υποδεικνύουν στους/στις μαθητές/τριες στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων. Κατά την διαδικασία επίλυσης μιας δραστηριότητας που βασίζεται στο πλαίσιο, οι μαθητές/τριες μπορούν να συνδέσουν την προβληματική κατάσταση με τις εμπειρίες τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές/τριες να χρησιμοποιούν όχι μόνο επίσημες μαθηματικές διαδικασίες, αλλά και άτυπες στρατηγικές. Στην διδακτική διαδικασία οι καθημερινές εμπειρίες των μαθητών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σημείο εκκίνησης για την εισαγωγή των μαθηματικών εννοιών. Ένα πλαίσιο θα πρέπει να παρέχει πληροφορίες που μπορούν να οργανωθούν μαθηματικά και να προσφέρουν ευκαιρίες στους/στις μαθητές/τριες να εργαστούν στο πλαίσιο χρησιμοποιώντας τις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες τους. Το σημαντικότερο όλων είναι ότι τα πλαίσια δημιουργούν καταστάσεις για τους/τις μαθητές/τριες που αντιμετωπίζονται ως πραγματικές και σχετίζονται με την κοινή λογική τους κατανόηση (Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, Doorman, & Robitzsch, 2014).

3.5.2 Διαδικασία συλλογής των δεδομένων

Η διαδικασία που ακολουθείται για τον εντοπισμό των σχετικών με τα κλάσματα δραστηριοτήτων, των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του δημοτικών των ετών 1982 και 2000, αρχίζει με την εκτενή μελέτη όλων των κεφαλαίων ή παραγράφων των προς εξέταση εγχειριδίων, σε κάθε τάξη και σε κάθε έτος, που αναφέρονται στα κλάσματα με οποιαδήποτε τρόπο (είτε πρόκειται για μερισμό σε ίσα μέρη, είτε γίνεται αναφορά μόνο σε κλασματικές μονάδες, είτε αναφέρονται σε ποσοστά, είτε σε αναλογίες, κ.τ.λ.). Αρχικά γίνεται μια ποιοτική καταγραφή των δεδομένων, δηλαδή των δραστηριοτήτων εκείνων που σχετίζονται με το σκοπό της έρευνας και πληρούν τα κριτήρια ανάλυσης που τέθηκαν. Από την καταγραφή αυτή προσδιορίσθηκε ο αριθμός των δραστηριοτήτων σε κάθε τάξη των ετών 1982 και 2000, που θα αναλυθούν στην συνέχεια βάσει των κριτηρίων της μελέτης. Στον πίνακα 3 φαίνεται το πλήθος των δραστηριοτήτων που αναλύθηκαν και αφορούν τα κλάσματα, ανά έτος και ανά τάξη.

Πίνακας 3: Πλήθος δραστηριοτήτων ανά έτος και ανά τάξη

Τάξη	**1982**	**2000**
Α΄	0	10
Β΄	31	31
Γ΄	68	64
Δ΄	33	86
Ε΄	266	196
ΣΤ΄	79	83
Σύνολα	**477**	**470**

3.5.3 Διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων

Όσον αφορά την ανάλυση των δραστηριοτήτων ως προς το πρώτο κριτήριο, δηλαδή τις ερμηνείες του κλάσματος, έχει καταστεί σαφές στο πρώτο κεφάλαιο, ότι σχεδόν το σύνολο της σχετικής βιβλιογραφίας με τα κλάσματα, καθορίζει πέντε ερμηνείες – υποκατασκευές του κλάσματος: α) μέρος του όλου, β) πηλίκο, γ) λόγος, δ) μέτρηση και ε) πολλαπλασιαστής ή τελεστής. Οι πέντε αυτές ερμηνείες ή υποκατασκευές του κλάσματος περιγράφονται από όλες τις υπάρχουσες μελέτες, που σχετίζονται με τα κλάσματα και χαρακτηρίζονται ως ιδιαίτερα σημαντικές. Αρχικά τα κλάσματα ορίσθηκαν διαισθητικά, ως μέρος κάποιας ποσότητας. Ιστορικά διαφαίνεται ότι οι ερμηνείες αυτές χρησίμευσαν ως «μαθηματικές προσεγγίσεις» για τον ορισμό των ρητών αριθμών από τους ακέραιους. Στην ιστορική εξέλιξη των κλασμάτων, οι συνδέσεις αυτών των διαφορετικών πέντε τρόπων καθορισμού και εννοιολογικοποίησης των κλασμάτων δεν είναι σαφώς καθορισμένες ούτε και τετριμμένες. Έχουν παρατηρηθεί διαχρονικά σημαντικές αποκλίσεις. Βεβαίως, στην σκέψη των μαθητών/τριών, αλλά και των εκπαιδευτικών, κυριαρχεί η πρώτη ερμηνεία «μέρος του όλου» (Park, Güçler, & McCrory, 2013). Στην μελέτη αυτή, επιχειρείται σε κάθε δραστηριότητα που προσδιορίστηκε για ανάλυση, να εντοπισθεί ποια ή ποιες από τις πέντε ερμηνείες του κλάσματος, που αναφέρθηκαν παραπάνω, εμπεριέχονται σε αυτήν. Στην περίπτωση που σε μια δραστηριότητα υπάρχουν περισσότερες από μια ερμηνείες, τότε αυτές προσμετρούνται ξεχωριστά. Έτσι, ο αριθμός των δραστηριοτήτων και των αντίστοιχων ερμηνειών δεν ταυτίζεται πάντα.

Αναφορικά με το δεύτερο κριτήριο (το πλαίσιο), για την ανάλυση του πλαισίου μιας δραστηριότητας η μελέτη αυτή στηρίζεται στην κατηγοριοποίηση του πλαισίου των δραστηριοτήτων που πραγματοποιούν οι Τάτσης & Σκουμπουρδή (2009), στην εργασία τους: «Μελέτη του πλαισίου των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Α΄ δημοτικού». Στην εργασία αυτή τα πλαίσια των δραστηριοτήτων κατηγοριοποιούνται με βάση δύο κριτήρια, τα οποία είναι:

α) το περιεχόμενο του σχεδίου, ή της εικόνας, ή της φωτογραφίας (αν αυτά υπάρχουν) που συνοδεύουν την δραστηριότητα και

β) το περιεχόμενο του κειμένου (αν υπάρχει) που περιγράφει την δραστηριότητα.

Σχετικά με τις εικόνες ή τις φωτογραφίες που συνοδεύουν τις δραστηριότητες, εντοπίζονται δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορά στις εικόνες που απεικονίζουν μια εξιδανικευμένη πραγματικότητα, όπου λείπουν τα ρεαλιστικά στοιχεία. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι εικόνες ή φωτογραφίες, που απεικονίζουν πιστά την πραγματικότητα.

Όσον αφορά το κείμενο, η ανάλυση γίνεται με βάση την κατάσταση που περιγράφει και τις ενέργειες που πρέπει να κάνει ο/η μαθητής/τρια. Προσδιορίζονται δύο είδη ενεργειών: α) οι μαθηματικές εκτός ρεαλιστικού πλαισίου (δηλαδή η πραγματοποίηση της ενέργειας δεν έχει εμφανή ρεαλιστικό στόχο) και β) οι μαθηματικές εντός ρεαλιστικού πλαισίου (ο/η μαθητής/τρια παρωθείται στην πραγματοποίηση της ενέργειας λόγω του ρεαλιστικού στόχου που τίθεται από το πλαίσιο).

Με βάση τα παραπάνω οι Τάτσης & Σκουμπουρδή (2009) οδηγούνται στον καθορισμό τεσσάρων τύπων πλαισίου και επομένως στην ακόλουθη κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων:

1. **Μαθηματικό πλαίσιο:** ανήκουν οι δραστηριότητες που περιέχουν μόνο στοιχεία, τα οποία εκφράζονται αυστηρά με μαθηματική γλώσσα, όπως αριθμούς, σχεδιαγράμματα, σύμβολα, κ.τ.λ. και ζητείται από τον/την μαθητή/τρια να εκτελέσει μια μαθηματική διαδικασία εκτός ρεαλιστικού πλαισίου.
2. **Μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο:** ανήκουν οι δραστηριότητες που αν και περιέχουν πραγματικά στοιχεία (π.χ. αντικείμενα, ανθρώπους), τα στοιχεία αυτά δεν έχουν ενεργό ρόλο στην δραστηριότητα, ώστε να συνδέεται με την καθημερινή ζωή. Στις δραστηριότητες αυτές υπάρχουν εικόνες εξιδανικευμένης πραγματικότητας, στις οποίες ο/η μαθητής/τρια καλείται να πραγματοποιήσει μια διαδικασία που είναι έξω από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Η κατηγορία αυτών των δραστηριοτήτων χαρακτηρίζεται και ως «πλαίσιο μηδενικής τάξης». Σε μια τέτοια δραστηριότητα υπάρχει μια κατασκευασμένη ιστορία που αποσκοπεί στην μετατροπή ενός μαθηματικού προβλήματος σε ένα «ρεαλιστικό πρόβλημα».
3. **Τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο:** ανήκουν οι δραστηριότητες που περιέχουν αληθοφανή στοιχεία της πραγματικότητας, τα οποία δεν μπορούν να χαρακτηριστούν στο σύνολό τους πραγματικά για διάφορους λόγους. Οι εικόνες που συνοδεύουν αυτές τις δραστηριότητες, παρουσιάζουν μια εξιδανικευμένη πραγματικότητα (πρώτη κατηγορία). Ο/η μαθητής/τρια καλείται να πραγματοποιήσει μια ενέργεια μέσα στο ρεαλιστικό πλαίσιο, με ιδιαίτερο νόημα για την συγκεκριμένη περίσταση.

4. **Ρεαλιστικό πλαίσιο:** ανήκουν οι δραστηριότητες οι οποίες περιέχουν στοιχεία από την καθημερινή ζωή των παιδιών. Οι μαθητές/τριες καλούνται να πραγματοποιήσουν μια ενέργεια με νόημα, η οποία σχετίζεται με καθημερινές συνήθειες και δράσεις. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι δραστηριότητες που περιέχουν εικόνες και των δύο κατηγοριών, δηλαδή εικόνες με στοιχεία εξιδανικευμένης πραγματικότητας και εικόνες με πραγματικά στοιχεία.

Με βάση την παραπάνω κατηγοριοποίηση οι δύο τελευταίες κατηγορίες περιλαμβάνουν δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως «ρεαλιστικές». Η διαφορά τους έγκειται στον βαθμό ρεαλιστικότητας, όπως αυτός προκύπτει από τις αναπαραστάσεις που συνοδεύουν τις δραστηριότητες. Στη συνέχεια γίνεται ανάλυση της θεματολογίας των τριών κατηγοριών που σχετίζονται με ρεαλιστικό πλαίσιο, δηλαδή της δεύτερης, της τρίτης και της τέταρτης. Τα θέματα ομαδοποιούνται σε τρείς κατηγορίες:

1. **Διεπιστημονικά θέματα:** όταν το θέμα της δραστηριότητας «απλώνεται» σε δύο ή περισσότερους επιστημονικούς κλάδους και γίνεται συνδυασμός δύο ή περισσότερων γνωστικών αντικειμένων από διαφορετικούς κλάδους. Η διεπιστημονικότητα (interdisciplinary) βρίσκεται τα τελευταία χρόνια στο επίκεντρο του παγκόσμιου ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος. Το πλαίσιο έχει ιδιαίτερη σημασία για την μελέτη της «ανάδυσης» και της «καθιέρωσης» της διεπιστημονικότητας (Jacobs & Frickel, 2009).
2. **Παιγνιώδη θέματα:** όταν το θέμα της δραστηριότητας σχετίζεται με οποιονδήποτε τύπο παιχνιδιού που περιέχεται στην πραγματικότητα των μαθητών/τριών.
3. **Θέματα καθημερινής ζωής:** όταν το θέμα της δραστηριότητας λαμβάνεται από εκδηλώσεις, ενέργειες, δραστηριότητες, συνήθειες και άλλες εκφάνσεις της καθημερινότητας των μαθητών/τριών.

Μια παρεμφερής κατηγοριοποίηση του πλαισίου, αλλά πιο συνεπτυγμένη, γίνεται από τους Wijava κ.ά. (2015) σε σχετική μελέτη τους στα ινδονησιακά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών, η οποία έχει σκοπό να αποκαλύψει τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους/στις μαθητές/τριες για την ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης δραστηριοτήτων που βασίζονται στο πλαίσιο. Η απόκτηση από τους/τις μαθητές/τριες της ικανότητας να διαπραγματεύονται δραστηριότητες σε διάφορα πλαίσια της καθημερινής ζωής θεωρείται βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο ρόλος των εγχειριδίων είναι καθοριστικός στην δημιουργία ευκαιριών μάθησης. Τα πλαίσια από την καθημερινή ζωή μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διδακτικό εργαλείο για την υποστήριξη της μάθησης, αποτελώντας μια ουσιαστική βάση για την οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών και την απόκτηση εμπειριών από τους/τις μαθητές/τριες.

Ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων με βάση το πλαίσιο είναι η φύση του πλαισίου. Στην μελέτη τους οι Wijava κ.ά. (2015) εστιάζουν στα πλαίσια του πραγματικού κόσμου τα οποία αποκαλούν «έξω – μαθηματικά πλαίσια». Είναι σημαντικό, το πλαίσιο μια δραστηριότητας να παρέχει πληροφορίες που μπορούν να οργανωθούν μαθηματικά και να προσφέρουν στους/στις μαθητές/τριες ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις και τις εμπειρίες τους. Προκειμένου να προσδιορισθεί ο τύπος του πλαισίου που χρησιμοποιείται, οι δραστηριότητες χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

1. **Δραστηριότητες χωρίς κανένα πλαίσιο:** Χαρακτηρίζονται από την ανυπαρξία οποιουδήποτε πλαισίου, αποκαλούνται δε και «γυμνά» προβλήματα. Οι πληροφορίες δίνονται στους/στις μαθητές/τριες μόνο με μαθηματικούς όρους, ή μαθηματικά σύμβολα, ή μαθηματικά σχεδιαγράμματα, ή μαθηματικές δομές. Η κατηγορία αυτή ταυτίζεται με την κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο» της προηγούμενης κατηγοριοποίησης.
2. **Δραστηριότητες με πλαίσιο «καμουφλάζ»:** Μπορεί το πλαίσιο στις δραστηριότητες αυτές να αναφέρεται σε μια πραγματική καθημερινή κατάσταση, ωστόσο μπορεί να παρακαμφθεί στην επίλυση του προβλήματος που περιγράφει η δραστηριότητα, διότι οι αναγκαίες πληροφορίες μπορούν να ληφθούν από τα λεκτικά και αριθμητικά δεδομένα εκτός του πλαισίου της δραστηριότητας. Οι εμπειρίες από την καθημερινότητα είναι μάλλον περιττές. Οι μαθηματικές διαδικασίες που απαιτούνται για την επίλυση είναι συνήθως προφανείς. Η λύση μπορεί να βρεθεί συνδυάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα που παρέχονται στο κείμενο της δραστηριότητας. Πρόκειται για το πλαίσιο «μηδενικής τάξης» που περιγράφηκε προηγουμένως στην κατηγορία «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο».

3. **Δραστηριότητες με σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο:** Το πλαίσιο διαδραματίζει ουσιαστικό και κυρίαρχο ρόλο στην επίλυση της δραστηριότητας. Οι μαθητές/τριες μέσω του πλαισίου πρέπει να αντλήσουν τις απαραίτητες πληροφορίες και να προσδιορίσουν ποιές μαθηματικές διαδικασίες θα ακολουθήσουν στην πορεία επίλυσης. Είναι αναγκαίο, οι μαθητές/τριες να χρησιμοποιήσουν την κοινή λογική που απορρέει από το πλαίσιο και να «μοντελοποιήσουν» μαθηματικά το πρόβλημα. Οι κατηγορίες « τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» και «ρεαλιστικό πλαίσιο» των Τάτση & Σκουμπουρδή (2009), μπορούν να ενταχθούν σε αυτήν την κατηγορία δραστηριοτήτων με σχετικό και ουσιαστικό πλαίσιο, όπου το πλαίσιο είτε προέρχεται από την καθημερινή ζωή και τον πραγματικό κόσμο, είτε προέρχεται από εξιδανικευμένες καταστάσεις, είναι αυτό που παρέχει αποκλειστικά στους/στις μαθητές/τριες τις απαραίτητες πληροφορίες και τους κατευθύνει στην μαθηματική διαδικασία επίλυσης της δραστηριότητας.

Οι μέθοδοι της περιγραφικής στατιστικής θα στηρίξουν τη συγκριτική μελέτη των σχολικών εγχειριδίων του 1982 και του 2000 σε σχέση με την ποσοτικοποίηση της έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης, στην οποία αναλύεται το πλαίσιο των δραστηριοτήτων που σχετίζονται με τα κλάσματα στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού των ετών 1982 και 2000, παρουσιάζονται κατόπιν ποιοτικής και ποσοτικής διερεύνησης. Ως προς την ποιοτική διερεύνηση καθορίστηκαν στο τρίτο κεφάλαιο με τίτλο «μεθοδολογία» τα κριτήρια και τα πλαίσια ανάλυσης αυτών των κριτηρίων, που τίθενται στη μελέτη. Σχετικά με το πρώτο κριτήριο (ερμηνείες – υποκατασκευές του κλάσματος) τα αποτελέσματα προκύπτουν από την ανάλυση που γίνεται με βάση τις πέντε ερμηνείες: μέρος του όλου – πηλίκο – λόγος – μέτρηση – τελεστής. Αν σε μια δραστηριότητα συναντώνται δύο ερμηνείες του κλάσματος, τότε για το σκοπό της μελέτης αυτή διασπάται σε δύο δραστηριότητες. Όσον αφορά το δεύτερο κριτήριο (το πλαίσιο των δραστηριοτήτων), τα αποτελέσματα εξάγονται από την αξιοποίηση των τεσσάρων τύπων πλαισίου που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3, στην παράγραφο «διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων»: Μαθηματικό Πλαίσιο (Μ.Π.), Μαθηματικό – Τεχνητά Ρεαλιστικό Πλαίσιο (Μ.Τ.Ρ.Π.), Τεχνητά Ρεαλιστικό Πλαίσιο (Τ.Ρ.Π.), Ρεαλιστικό Πλαίσιο (Ρ.Π.). Στην κατηγορία (Ρ.Π.) τοποθετούνται και οι δραστηριότητες των οποίων το πλαίσιο, εκτός από στοιχεία της πραγματικότητας, περιέχει και στοιχεία εξιδανικευμένης πραγματικότητας, ή και στοιχεία της μαθηματικής γλώσσας. Αν μια δραστηριότητα περιέχει στοιχεία Μαθηματικού Πλαισίου (Μ.Π.) και ρεαλιστικά στοιχεία, τότε τοποθετείται σε ένα από τα πλαίσια (Μ.Τ.Ρ.Π.), ή (Τ.Ρ.Π.), ή (Ρ.Π.). Επίσης, στην παράγραφο «διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων» γίνεται και ομαδοποίηση των θεμάτων των τριών τύπων πλαισίου (Μ.Τ.Ρ.Π. – Τ.Ρ.Π. – Ρ.Π.) σε τρείς κατηγορίες: Διεπιστημονικά θέματα (Δ.Θ.) – Παιγνιώδη Θέματα (Π.Θ.) – Θέματα Καθημερινής Ζωής (Θ.Κ.Ζ.).

Ως προς την ποσοτική διερεύνηση των δεδομένων, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με πίνακες διπλής εισόδου, οι οποίοι αποτελούν ένα κατάλληλο και εύχρηστο μέσο παρουσίασης δεδομένων που συσχετίζονται δύο μεταβλητές. Χρησιμοποιούνται δύο τύποι πινάκων: στον πρώτο τύπο συσχετίζονται οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος με τους αντίστοιχους τύπους πλαισίου (Μ.Π. – Μ.Τ.Ρ.Π. – Τ.Ρ.Π. – Ρ.Π.), ενώ στο δεύτερο συσχετίζονται ο τύπος του πλαισίου με τα αντίστοιχα θέματα (Δ.Θ. – Π.Θ. – Θ.Κ.Ζ.). Το πλήθος των δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος ή ανά κατηγορία πλαισίου συμβολίζεται με ν και η αντίστοιχη σχετική συχνότητα επί τοις % με f. Ακολούθως, στις περισσότερες περιπτώσεις, τα δεδομένα των πινάκων αναπαριστάνονται με γραφήματα (ραβδογράμματα, πίτες) με στόχο μια πιο παραστατική και περιεκτική απεικόνιση των αποτελεσμάτων.

4.2 Εγχειρίδια Μαθηματικών του έτους 1982

4.2.1 Εγχειρίδιο Β΄ τάξης του 1982

Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Β΄ τάξης του 1982 μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 31 δραστηριότητες. Στο μεγαλύτερο μέρος αυτών (πίνακας 4, σχήμα 2), εμφανίζεται η ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος» (ν= 15, f=48,38%). Ακολουθούν οι ερμηνείες «μέρος του όλου» (ν= 9, f=29,03%) και «πηλίκο» (ν= 7, f=22,59%), ενώ απουσιάζουν οι ερμηνείες «μέτρηση» και «τελεστής». Όσον αφορά το πλαίσιο (πίνακας 4, σχήμα 3), οι περισσότερες δραστηριότητες (ν= 18, f=58,07%), δεν σχετίζονται με ρεαλιστικό πλαίσιο, δηλαδή ανήκουν στην κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο». Το πλαίσιο των υπόλοιπων δραστηριοτήτων (ν= 13, f=41,93%) είναι το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό», οπότε δεν διαδραματίζει κανέναν ουσιαστικό ρόλο στην επίλυση της δραστηριότητας.

Πίνακας 4: Τάξη Β΄,1982,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

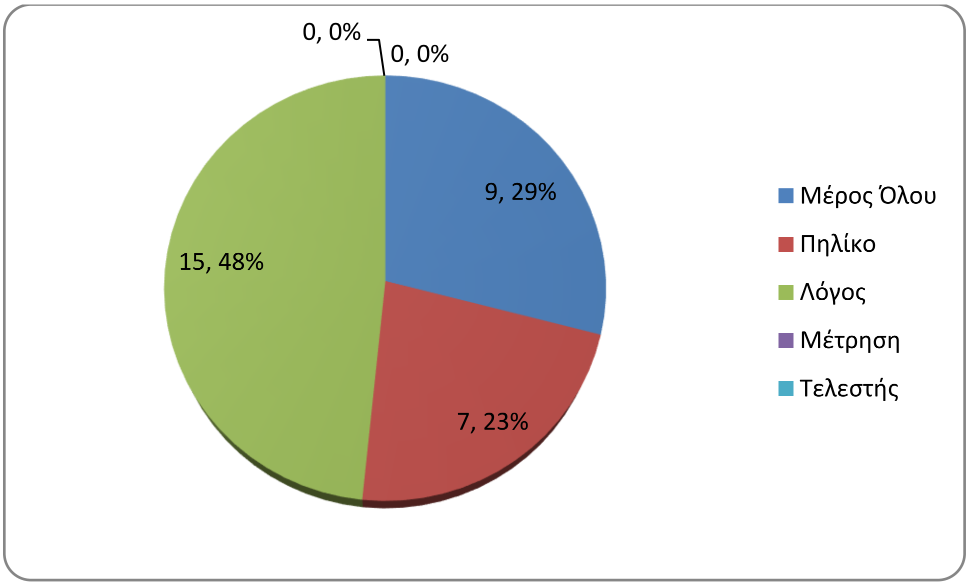
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	0	0	7	22,59	11	35,48	0	0	0	0	**18**	**58,07**
Μ.Τ.Ρ.Π.	9	29,03	0	0	4	12,90	0	0	0	0	**13**	**41,93**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Σύνολα	**9**	**29,03**	**7**	**22,59**	**15**	**48,38**	**0**		**0**	**0**	**31**	**100**

Η θεματολογία του πλαισίου των δραστηριοτήτων που έχουν ρεαλιστικά στοιχεία (πίνακας 5) εξαντλείται στα θέματα της καθημερινής ζωής (ν= 13, f=100%).

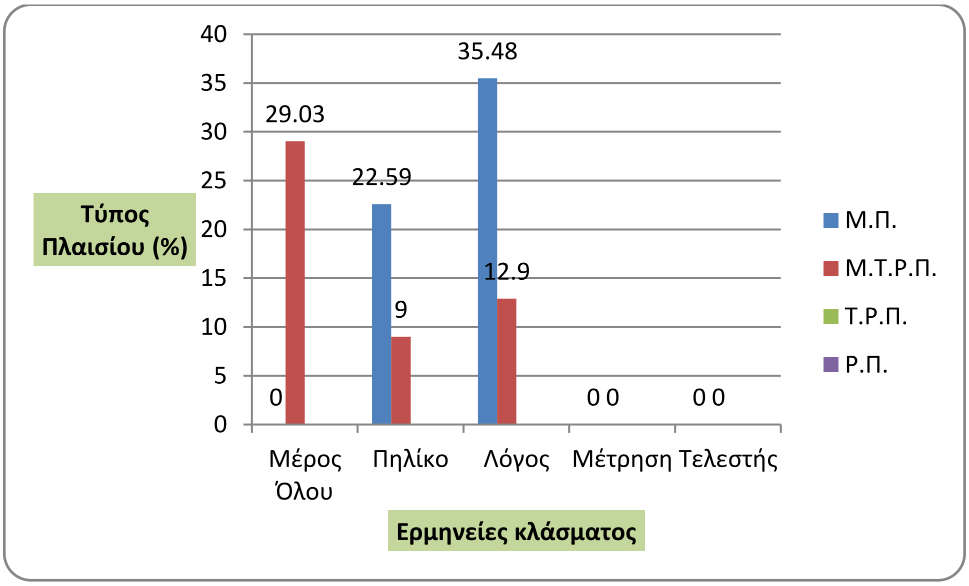
Πίνακας 5: Τάξη Β΄1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		Σύνολα	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Δ.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Π.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Θ.Κ.Ζ.	13	100	0	0	0	0	**13**	**100**
Σύνολα	**13**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**13**	**100**

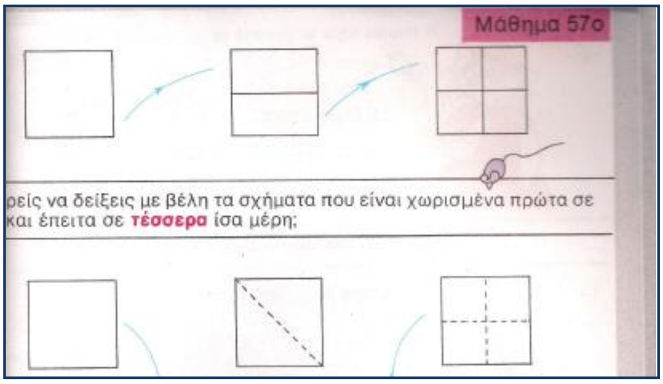
Σχήμα 2. Τάξη Β΄,1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



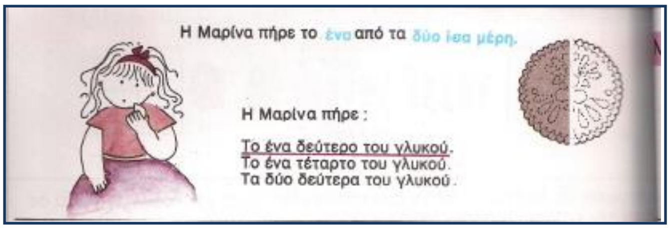
Σχήμα 3. Τάξη Β΄,1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



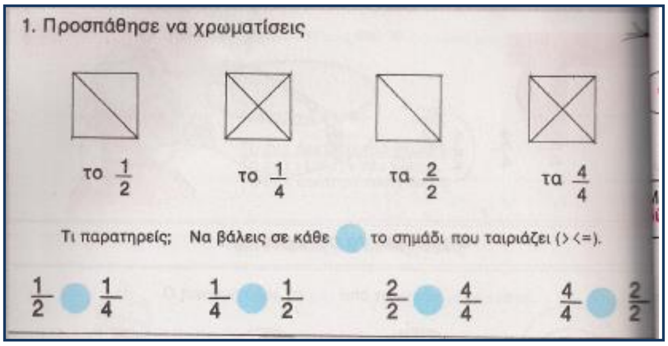
Στις εικόνες 6,7 και 8 προβάλλονται χαρακτηριστικά παραδείγματα δραστηριοτήτων από το εγχειρίδιο των μαθηματικών της Β΄ τάξης του 1982. Στην δραστηριότητα της εικόνας 6 το κλάσμα ερμηνεύεται ως πηλίκο (διαμερισμός σε ίσα μέρη) μέσα σε καθαρά μαθηματικό πλαίσιο, στην εικόνα 7 ερμηνεύεται ως μέρος του όλου (από μια ολόκληρη ποσότητα λαμβάνεται ένα μέρος) σε μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικά πλαίσιο με θέμα καθημερινής ζωής και στην εικόνα 8 ερμηνεύεται ως λόγος (σύγκριση δύο ποσοτήτων) σε μαθηματικό πλαίσιο.



Εικόνα 6. Β΄,1982, το κλάσμα ως πηλίκο, Μ.Π.



Εικόνα 7. Β΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Μ.Τ.Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.



Εικόνα 8. Β΄,1982, το κλάσμα ως λόγος, Μ.Π.

4.2.2 Εγχειρίδιο Γ΄ τάξης του 1982

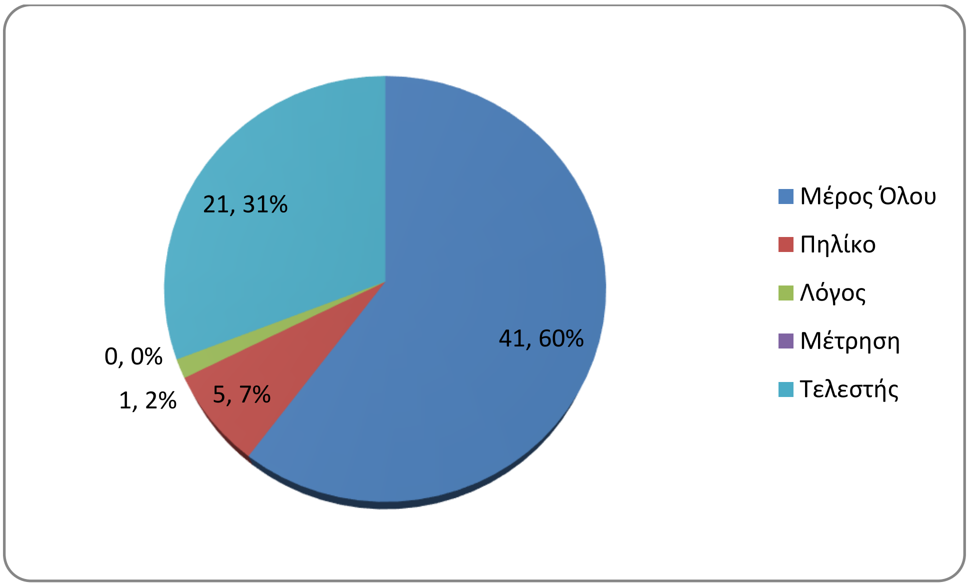
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης του 1982 μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 68 δραστηριότητες (πίνακας 6, σχήμα 4).

Πίνακας 6: Τάξη Γ΄,1982, πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	12	17,65	5	07,35	1	01,47	0	0	5	07,35	**23**	**33,82**
Μ.Τ.Ρ.Π.	16	23,53	0	0	0	0	0	0	16	23,53	**32**	**47,06**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	13	19,12	0	0	0	0	0	0	0	0	**13**	**19,12**
Σύνολα	**41**	**60,30**	**5**	**7,35**	**1**	**1,47**	**0**	**0**	**21**	**30,88**	**68**	**100**

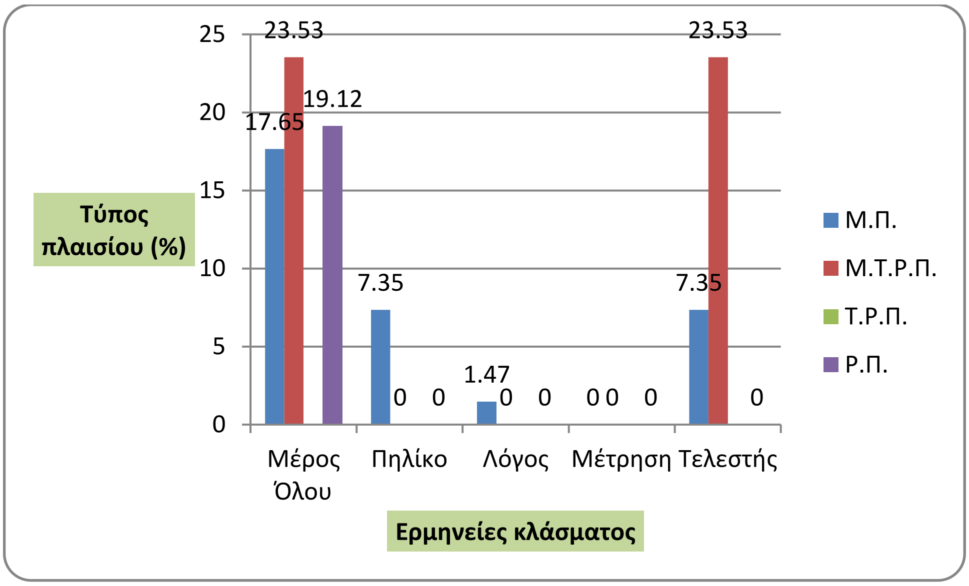
Η ερμηνεία του κλάσματος «μέρος του όλου» βρίσκεται στο μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων (ν= 41, f=60,30%) και ακολουθεί η ερμηνεία «τελεστής» (ν= 21, f=30,88%). Μικρό μέρος καταλαμβάνει το «πηλίκο» (ν= 5, f=7,35%) και ελάχιστο μέρος ο «λόγος» (ν=1, f=1,47%). Χαρακτηριστικό εδώ είναι, ότι σε 10 δραστηριότητες το κλάσμα εμφανίζεται με διπλή ερμηνεία, ως «μέρος του όλου» και ως «τελεστής», οπότε καθεμιά από αυτές διαχωρίζεται σε δύο διαφορετικές δραστηριότητες.

Σχήμα 4. Τάξη Γ΄,1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Σε μεγάλο μέρος δραστηριοτήτων το πλαίσιο περιέχει ρεαλιστικά στοιχεία (πίνακας 6, σχήμα 5). Σε 32 δραστηριότητες (47,06%) το πλαίσιο είναι «μαθηματικά – τεχνητά ρεαλιστικό», ενώ σε 13 δραστηριότητες (19,12%) απαντάται «ρεαλιστικό πλαίσιο», όπου σε όλες αυτές το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου». Το «μαθηματικό πλαίσιο» κατέχει σημαντικό μέρος, με 23 δραστηριότητες (33,82%). Χαρακτηριστικό είναι ότι στις 5 δραστηριότητες με την ερμηνεία «πηλίκο» δεν εμφανίζονται ρεαλιστικά στοιχεία και ανήκουν στην κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο».

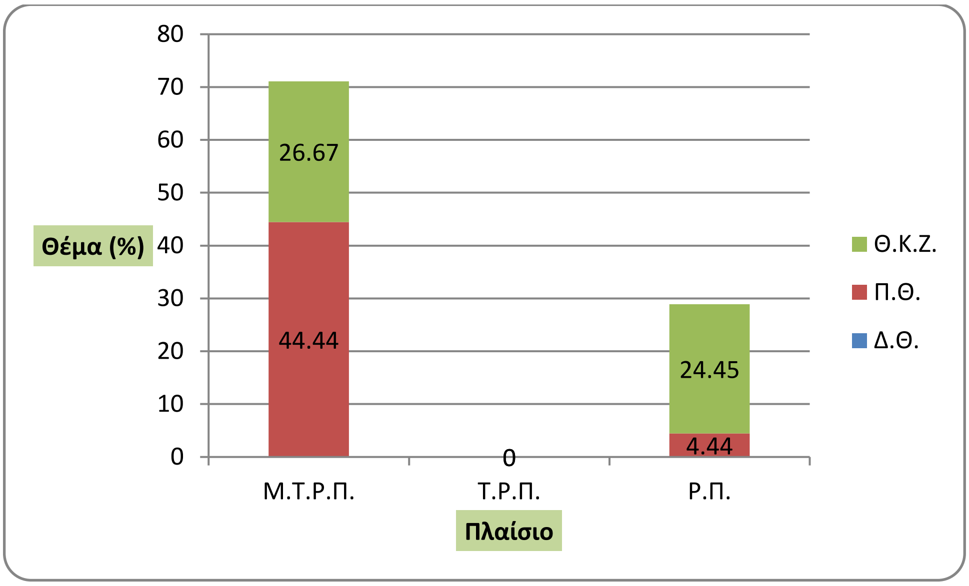
Σχήμα 5. Τάξη Γ΄,1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



Πίνακας 7: Τάξη Γ,΄1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

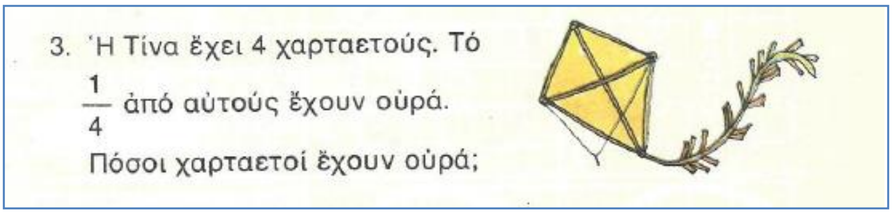
Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		Σύνολα	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Δ.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Π.Θ.	20	44,44	0	0	2	4,44	**22**	**48,88**
Θ.Κ.Ζ.	12	26,67	0	0	11	24,45	**33**	**51,12**
Σύνολα	**32**	**71,11**	**0**	**0**	**13**	**28,89**	**45**	**100**

Σχήμα 6. Τάξη Γ΄,1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



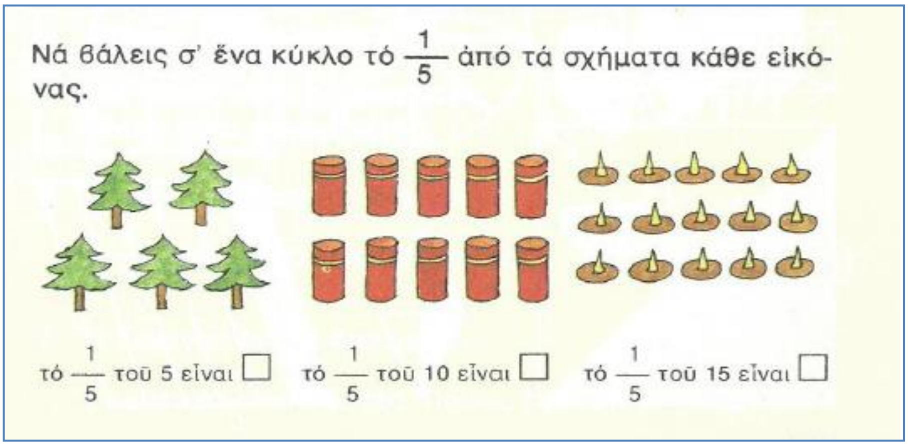
Οι κατηγορίες των θεμάτων στις πλαισιωμένες δραστηριότητες καταγράφονται στον πίνακα 7 και απεικονίζονται στο σχήμα 6. Στο Μ.Τ.Ρ.Π. δεσπόζουν τα παιγνιώδη θέματα (ν=20, f=44,4%) και ακολουθούν τα θέματα καθημερινής ζωής (ν=12, f=26,67%). Οι περισσότερες δραστηριότητες Ρ.Π. αντλούν τα θεματά τους από την καθημερινή ζωή (ν=11, f=24,45%), ενώ ελάχιστες έχουν παιγνιώδη θέματα (ν=2, f=4,44%).

Χαρακτηριστικά παραδείγματα δραστηριοτήτων από το εγχειρίδιο της Γ΄ τάξης του 1982, υπάρχουν στις εικόνες 9,10 και 11. Στην δραστηριότητα της εικόνας 9 το πλαίσιο είναι «ρεαλιστικό» με «παιγνιώδες» θέμα και το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου».



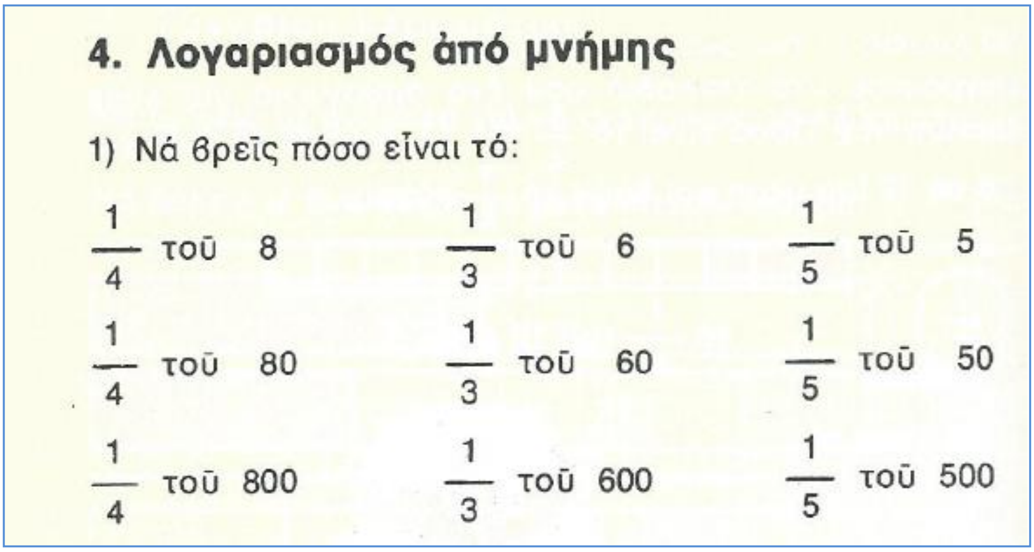
Εικόνα 9. Γ΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Ρ.Π., Π.Θ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 10 παρατηρείται διπλή ερμηνεία του κλάσματος, ως «μέρος του όλου» (από ένα σύνολο – όλον ζητείται το 1/5) και ως «τελεστής». Ο ρόλος του πλαισίου δεν είναι ουσιαστικός για την επίλυση της δραστηριότητας (Μ.Τ.Ρ.Π.) και το θέμα του πλαισίου είναι από την καθημερινή ζωή.



Εικόνα 10. Γ΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου και ως τελεστής, Μ.Τ Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Μια «γυμνή» δραστηριότητα παρουσιάζεται στην εικόνα 11 (Μ.Π.), όπου το κλάσμα ερμηνεύεται ως «τελεστής» (Το κλάσμα επιδρά σε έναν αριθμό και τον υποπολλαπλασιάζει).



4. Λογαριασμός ἀπό μνήμης

1) Νά βρεῖς πόσο εἶναι τό:

$\frac{1}{4}$ τοῦ 8	$\frac{1}{3}$ τοῦ 6	$\frac{1}{5}$ τοῦ 5
$\frac{1}{4}$ τοῦ 80	$\frac{1}{3}$ τοῦ 60	$\frac{1}{5}$ τοῦ 50
$\frac{1}{4}$ τοῦ 800	$\frac{1}{3}$ τοῦ 600	$\frac{1}{5}$ τοῦ 500

Εικόνα 11. Γ΄,1982, το κλάσμα ως τελεστής, Μ.Π.

4.2.3 Εγχειρίδιο Δ΄ τάξης του 1982

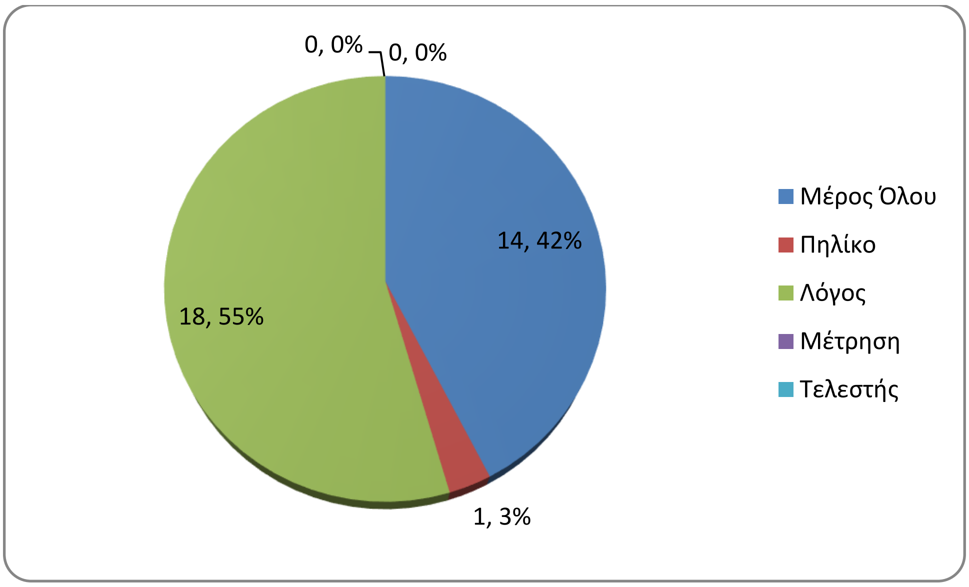
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης του 1982 μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 33 δραστηριότητες (πίνακας 8, σχήμα 7).

Πίνακας 8: Τάξη Δ΄,1982, πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

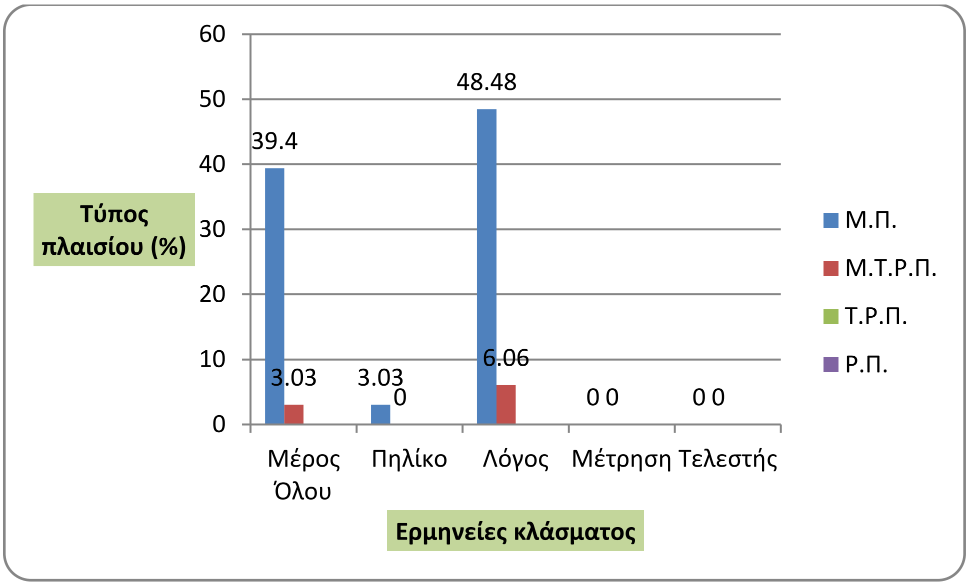
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	13	39,40	1	3,03	16	48,48	0	0	0	0	**30**	**90,91**
Μ.Τ.Ρ.Π.	1	3,03	0	0	2	6,06	0	0	0	0	**3**	**9,09**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Σύνολα	**14**	**42,43**	**1**	**3,03**	**18**	**54,54**	**0**	**0**	**0**	**0**	**33**	**100**

Το σύνολο των δραστηριοτήτων σχεδόν καλύπτεται από δύο ερμηνείες του κλάσματος: «λόγος» (ν= 18, f=54,54%) και «μέρος του όλου» (ν= 14, f=42,43%). Μόνο μια δραστηριότητα (3,03%) αναφέρεται στο κλάσμα ως «πηλίκο». Δεν συναντώνται σε καμιά δραστηριότητα οι ερμηνείες «μέτρηση» και «τελεστής». Σε αυτό το εγχειρίδιο το πλαίσιο στις δραστηριότητες που αφορούν τα κλάσματα (σχήμα 8) είναι σχεδόν ανύπαρκτο, 30 δραστηριότητες (90,91%) είναι χωρίς πραγματικό πλαίσιο, δηλαδή ανήκουν στην κατηγορία (Μ.Π.), ενώ υπάρχουν μόνο 3 δραστηριότητες (9,09%) με «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», των οποίων το θέμα είναι από την καθημερινή ζωή.

Σχήμα 7. Τάξη Δ΄,1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



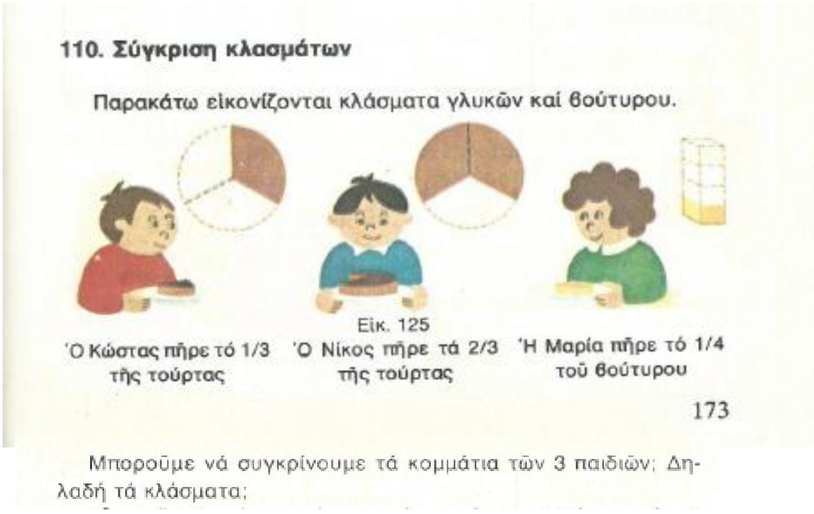
Σχήμα 8. Τάξη Δ΄,1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



Στην εικόνα 12 υπάρχει μια δραστηριότητα μαθηματικού πλαισίου, στο οποίο χρησιμοποιούνται απλά γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνια). Το γραμμοσκιασμένο μέρος σε κάθε σχήμα εκφράζεται με ένα κλάσμα ως ένα μέρος ολόκληρου του σχήματος, άρα το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου».

Εικόνα 12. Δ΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Μ.Π.

Στην εικόνα 13 παρακάτω βρίσκεται μια από τις ελάχιστες δραστηριότητες του εγχειριδίου της Δ΄ τάξης του 1982, της οποίας το πλαίσιο περιέχει ρεαλιστικά στοιχεία (κατηγορία Μ.Τ.Ρ.Π.) με θέμα από την καθημερινή ζωή, όπου η διαπραγμάτευση της δραστηριότητας από τους/τις μαθητές/τριες γίνεται εκτός ρεαλιστικού πλαισίου, γιατί τα στοιχεία του πλαισίου δεν προσφέρουν τις απαραίτητες πληροφορίες για την λύση της δραστηριότητας. Το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου» (κάθε παιδί παίρνει ένα μέρος από μια ολόκληρη ποσότητα), αλλά ερμηνεύεται και ως «λόγος», αφού πρέπει ο/η μαθητής/τρια να συγκρίνει τα μέρη που πήραν τα 3 παιδιά (1/3, 2/3 και 1/4).



Εικόνα 13. Δ΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου και πηλίκο, Μ.Τ.Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

4.2.4 Εγχειρίδιο Ε΄ τάξης του 1982

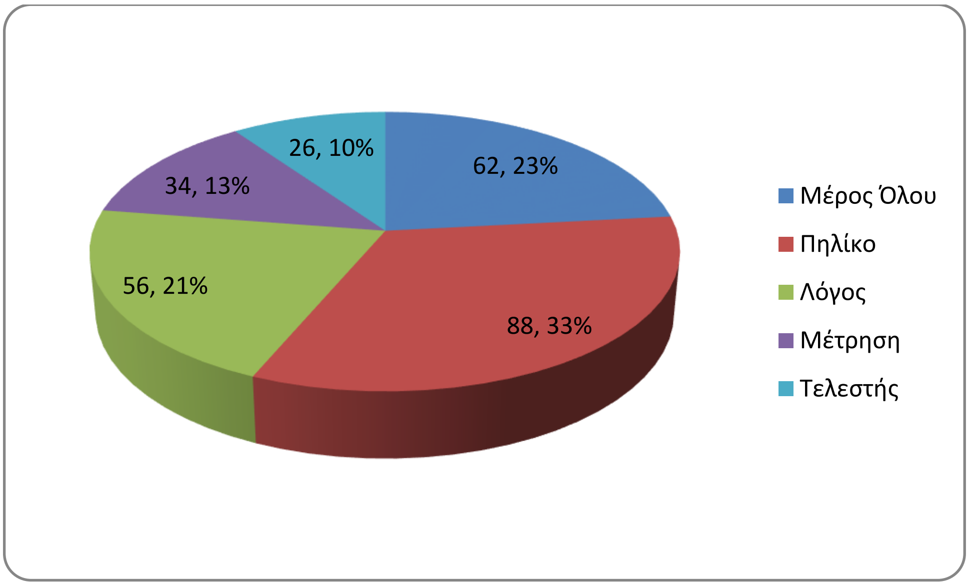
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε΄ τάξης του 1982, το μεγαλύτερο τμήμα της ύλης αναφέρεται στα κλάσματα. Το πλήθος των δραστηριοτήτων που αξιολογήθηκαν και αναλύθηκαν φτάνει στις 266. (πίνακας 9, σχήμα 9).

Πίνακας 9: Τάξη Ε΄,1982, πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	8	3,00	23	8,65	25	9,40	0	0	8	3,00	**64**	**24,05**
Μ.Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	54	20,30	65	24,44	31	11,65	34	12,79	18	6,77	**202**	**75,95**
Σύνολα	**62**	**23,30**	**88**	**33,09**	**56**	**21,05**	**34**	**12,79**	**26**	**9,77**	**266**	**100**

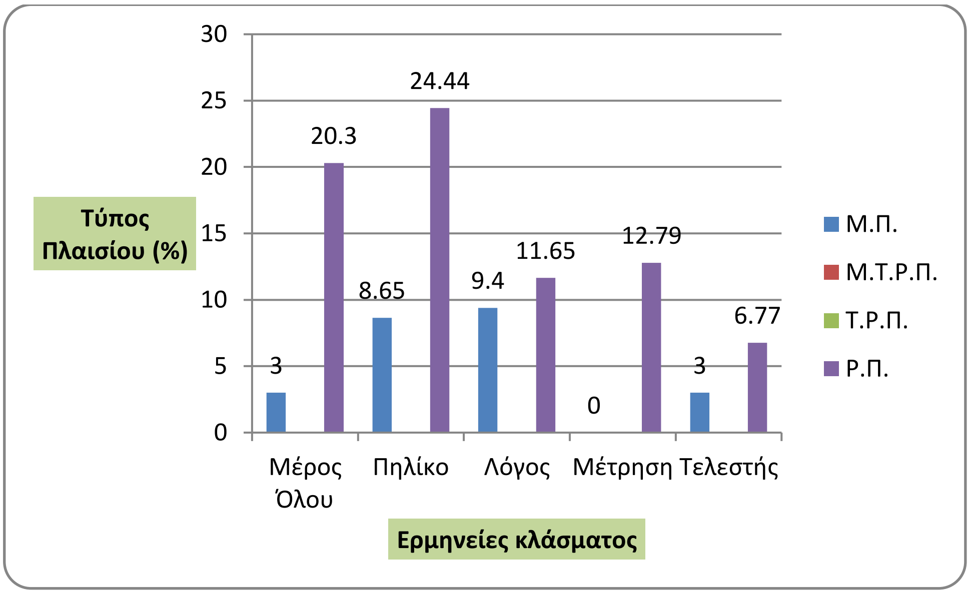
Σε αυτές τις δραστηριότητες απαντώνται και οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος: «μέρος του όλου» (ν= 62, f=23,30%), «πηλίκο» (ν= 88, f=33,09%), «λόγος» (ν= 56, f=21,05%), «μέτρηση» (ν= 34, f=12,79%) και «τελεστής» (ν= 26, f=9,77%). Ένα σημαντικό μέρος αυτών των δραστηριοτήτων είναι σχετικό με τις πράξεις των κλασμάτων, ενώ οι υπόλοιπες αναφέρονται στις ιδιότητες (ισοδύναμα κλάσματα, απλοποίηση, κ.τ.λ.) και στη σύγκριση των κλασμάτων. Συνέπεια αυτού είναι ότι δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην ερμηνείες του κλάσματος «πηλίκο» και «λόγος».

Σχήμα 9. Τάξη Ε΄,1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Το πλαίσιο των δραστηριοτήτων αυτού του εγχειριδίου που αναλύθηκαν, είναι στη συντριπτική τους πλειοψηφία ρεαλιστικό (σχήμα 10).

Σχήμα 10. Τάξη Ε΄,1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος

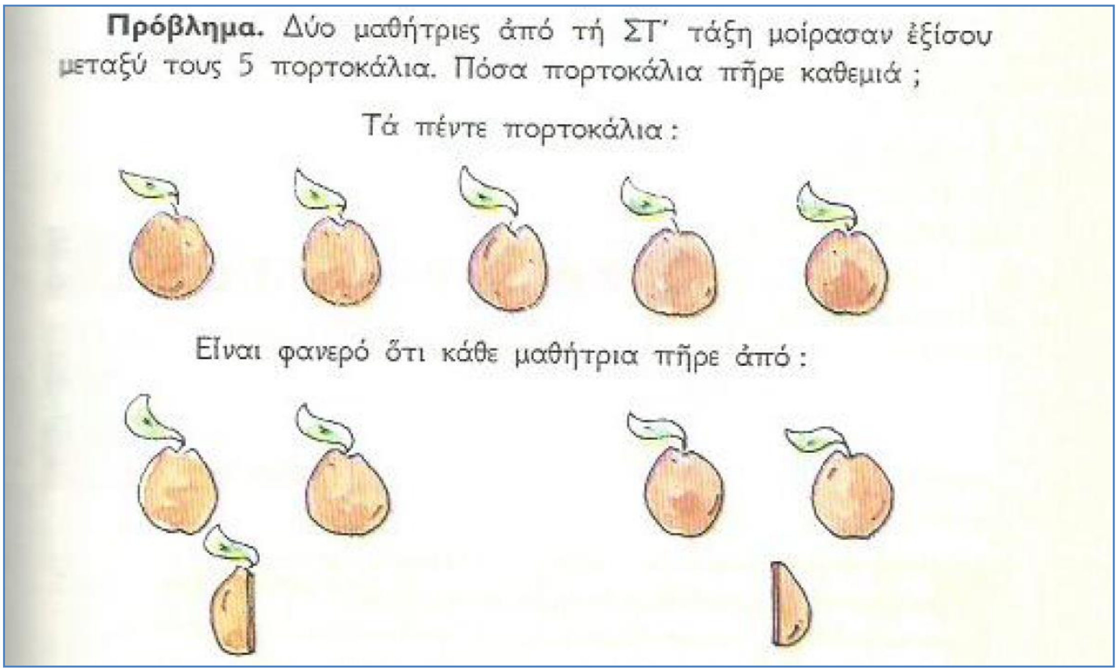


Το 75,95% των δραστηριοτήτων ανήκουν στην κατηγορία «ρεαλιστικό πλαίσιο» (Ρ.Π.), ενώ οι υπόλοιπες (24,05%) είναι χωρίς στοιχεία ρεαλιστικού πλαισίου, δηλαδή εντάσσονται στην κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο» (Μ.Π.). Όλες οι δραστηριότητες (ν=34, f=12,79%), που περιέχουν την ερμηνεία του κλάσματος «μέτρηση» έχουν ρεαλιστικό πλαίσιο με θέμα καθημερινής ζωής, γεγονός αναμενόμενο λόγω της φύσης της συγκεκριμένης ερμηνείας, αφού μια μέτρηση δύσκολα αποκτά νόημα εκτός ρεαλιστικού πλαισίου, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για εγχειρίδιο της Ε΄ δημοτικού. Στον πίνακα 10 γίνεται φανερό ότι τα θέματα του ρεαλιστικού πλαισίου αντλούνται αποκλειστικά από την καθημερινή ζωή.

Πίνακας 10: Τάξη Ε,΄1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	v	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**
Δ.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Π.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Θ.Κ.Ζ.	0	0	0	0	202	100%	**202**	**100%**
Σύνολα	**0**	**0**	**0**	**0**	**202**	**100%**	**202**	**100%**

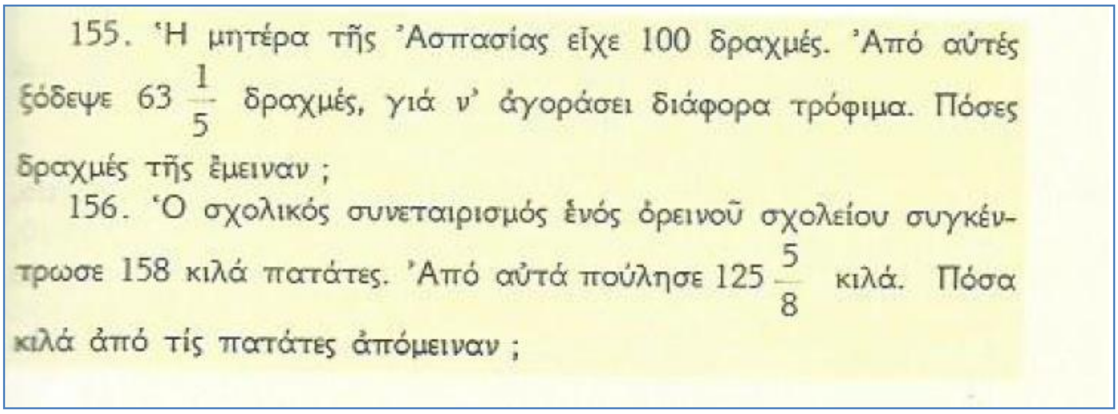
Δεν υπάρχει θέμα με κάποια διεπιστημονική χροιά, ούτε κάποιο που προέρχεται από τον κόσμο των παραμυθιών και του παιχνιδιού. Στις περισσότερες δραστηριότητες το πλαίσιο περιγράφεται λεκτικά και λείπουν οι εικόνες. Χαρακτηριστικό είναι ότι κύρια πηγή της θεματολογίας του ρεαλιστικού πλαισίου αποτελούν οι συναλλαγές της καθημερινής ζωής (αγορές, πωλήσεις). Στις εικόνες 14, 15 και 16 απεικονίζονται παραδείγματα δραστηριοτήτων του εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του 1982.



Εικόνα 14. Ε΄,1982, το κλάσμα ως πηλίκο, Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 14 το κλάσμα ερμηνεύεται ως «πηλίκο», διότι τα 5 πορτοκάλια πρέπει να μοιραστούν σε δύο ίσα μέρη. Το πλαίσιο είναι «ρεαλιστικό» διότι μέσα σε αυτό και χωρίς μαθηματικές διαδικασίες, ο/η μαθητής/τρια μπορεί να επιλύσει την δραστηριότητα και να φτάσει στο αποτέλεσμα.

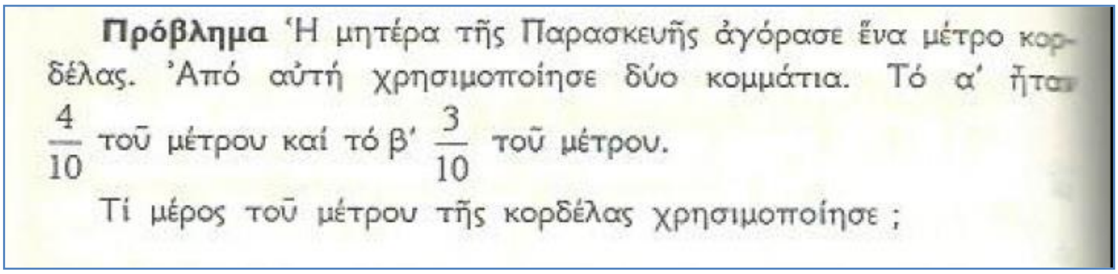
Στην εικόνα 15 υπάρχουν 2 όμοιες δραστηριότητες, όπου το κλάσμα έχει την ερμηνεία του «πηλίκου» (π.χ. 1/5 δραχμές=1:5=0,2 δραχμές) και το πλαίσιο είναι μαθηματικά τεχνητά ρεαλιστικό. Οι ενέργειες για την επίλυση είναι εκτός του πλαισίου, αφού ο/η μαθητής/τρια θα επιλύσει την δραστηριότητα με μαθηματική διαδικασία.


155. Ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας εἶχε 100 δραχμές. Ἀπό αὐτές ξόδεψε 63 $\frac{1}{5}$ δραχμές, γιά ν' ἀγοράσει διάφορα τρόφιμα. Πόσες δραχμές τῆς ἔμειναν ;

156. Ὁ σχολικός συνεταιρισμός ἑνός ὀρεινοῦ σχολείου συγκέντρωσε 158 κιλά πατάτες. Ἀπό αὐτά πούλησε 125 $\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσα κιλά ἀπό τίς πατάτες ἀπόμειναν ;

Εικόνα 15. Ε΄,1982, το κλάσμα ως πηλίκο. Μ.Τ.Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 16 παρακάτω, το κλάσμα έχει διπλή ερμηνεία, «μέρος του όλου» (από ένα μέτρο κορδέλας που είναι το όλον χρησιμοποιείται ένα μέρος, π.χ 4/10) και «μέτρηση» (το κλάσμα είναι και αποτέλεσμα μέτρησης μήκους με μονάδα το 1 μέτρο). Το πλαίσιο είναι «ρεαλιστικό», διότι ο/η μαθητής/τρια μπορεί να επιλύσει την δραστηριότητα χωρίς μαθηματικές διαδικασίες (είναι εύκολο παίρνοντας μια μεζούρα εύρει τη απάντηση). Το θέμα είναι ένα κοινό θέμα καθημερινής ζωής, το οποίο βέβαια δεν έχει και μεγάλη σχέση με τα ενδιαφέροντα και την ζωή μαθητών/τριών της Ε΄ δημοτικού.


Πρόβλημα Ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς ἀγόρασε ἕνα μέτρο κορδέλας. Ἀπό αὐτή χρησιμοποίησε δύο κομμάτια. Τό α' ἦταν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου καί τό β' $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.

Τί μέρος τοῦ μέτρου τῆς κορδέλας χρησιμοποίησε ;

Εικόνα 16. Ε΄,1982, το κλάσμα ως μέρος του όλου και μέτρηση, Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

4.2.5 Εγχειρίδιο ΣΤ΄ τάξης του 1982

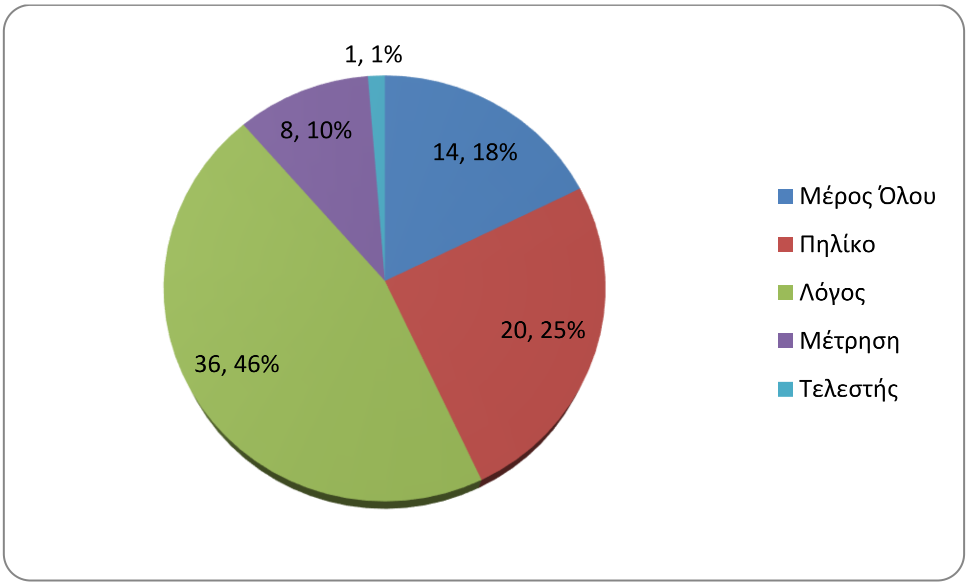
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης του 1982 μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 79 δραστηριότητες (πίνακας 11, σχήμα 11).

Πίνακας 11: Τάξη ΣΤ΄,1982, δραστηριότητες ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		Σύνολα	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	**ν**	**f**
Μ.Π.	4	5,06	15	18,99	12	15,19	1	1,26	1	1,26	**33**	**41,76**
Μ.Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	5	6,33	0	0	0	0	**5**	**6,33**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	10	12,66	5	6,33	19	24,05	7	8,87	0	0	**41**	**51,91**
Σύνολα	**14**	**17,72**	**20**	**25,32**	**36**	**45,57**	**8**	**10,13**	**1**	**1,26**	**79**	**100**

Στις μισές σχεδόν δραστηριότητες (ν=36, f=45,57%) το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος», κάτι που συμφωνεί απόλυτα με τη διάρθρωση της ύλης αυτού του εγχειριδίου, αφού ξεκινά με το κλάσμα ως «πηλίκο», συνεχίζει έτσι ώστε σε μεγάλο μέρος να γίνεται αναφορά στο κλάσμα ως «λόγος» και ακολουθεί λεπτομερής αναφορά στις αναλογίες. Το κλάσμα ως έννοια έχει οριστεί στις προηγούμενες τάξεις και γι’ αυτό το λόγο, δεν υπάρχει σε μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων η ερμηνεία «μέρος του όλου». Η επόμενη ερμηνεία είναι το «πηλίκο» (ν=20, f=25,32%) και ακολουθούν «μέρος του όλου» (ν=14, f=17,72%), «μέτρηση» (ν=8, f=10,13%) και «τελεστής» με ισχνή παρουσία (ν=1, f=1,26%).

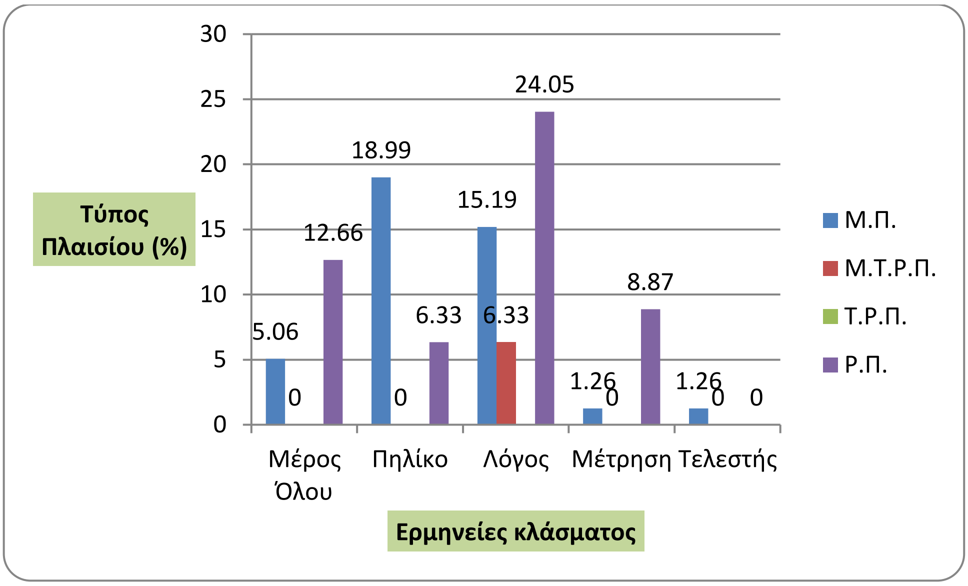
Σχήμα 11. Τάξη ΣΤ΄,1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Οι τύποι του πλαισίου ανά ερμηνεία κλάσματος αναπαριστάνονται στο σχήμα 12, όπου σαφώς φαίνεται ότι οι περισσότερες δραστηριότητες (ν=41, f=51,91%)

πλαισιώνονται με «ρεαλιστικό πλαίσιο» ενώ σημαντικός αριθμός δραστηριοτήτων (ν=33, f=41,76%) είναι στην κατηγορία του «μαθηματικού πλαισίου».

Σχήμα 12. Τάξη ΣΤ΄,1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



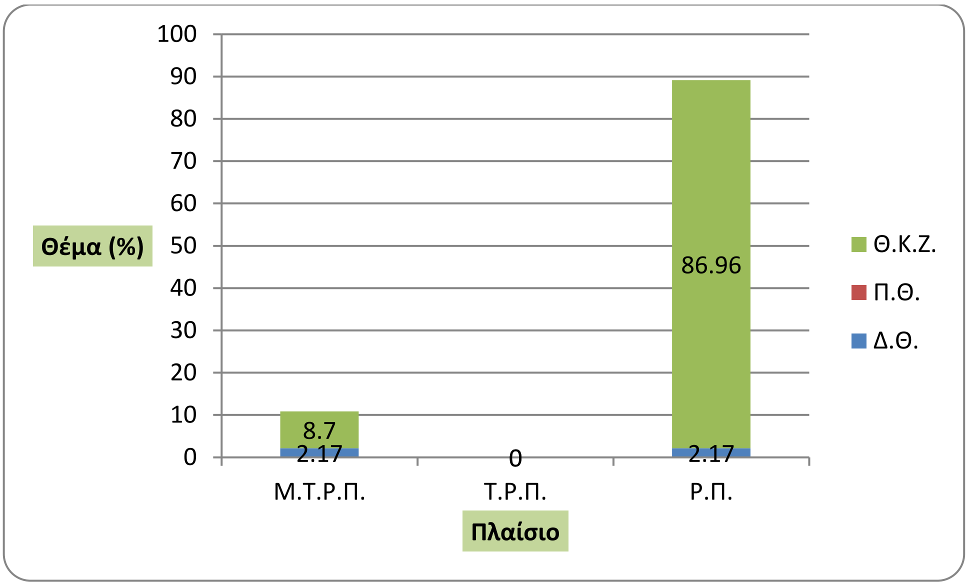
Ελάχιστος αριθμός δραστηριοτήτων (ν=5, f=6,33%) έχουν «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», ενώ απουσιάζει το «τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο».

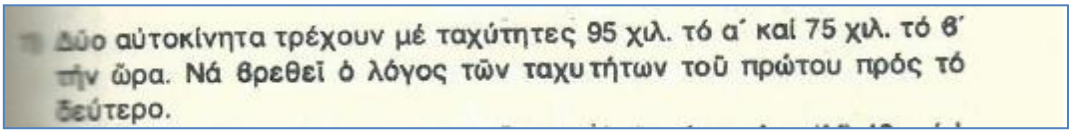
Πίνακας 12: Τάξη ΣΤ,΄1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	1	2,17	0	0	1	2,17	**2**	**4,34**
Π.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Θ.Κ.Ζ.	4	8,70	0	0	40	86,96	**44**	**95,66**
Σύνολα	**5**	**10,87**	**0**	**0**	**41**	**89,13**	**46**	**100**

Όσον αφορά τα θέματα του πλαισίου, είναι προφανές (πίνακας 12, σχήμα 13) ότι τα θέματα της καθημερινής ζωής κατέχουν με διαφορά την πρώτη θέση (ν=44, f=95,66%). Ωστόσο, τα περισσότερα από αυτά τα θέματα αφορούν ενέργειες και δράσεις των ενηλίκων και όχι των μαθητών/τριών της ηλικίας παιδιών του δημοτικού σχολείου. Στις περισσότερες δραστηριότητες το θέμα δεν είναι συναφές με την παιδική και μαθητική ζωή. Η θετική έκπληξη εδώ είναι ότι υπάρχουν δύο δραστηριότητες που είναι δυνατόν να προσεγγιστούν διεπιστημονικά, μέσω των Μαθηματικών και της Φυσικής (εικόνες 17 και 18).

Σχήμα 13. Τάξη ΣΤ΄,1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

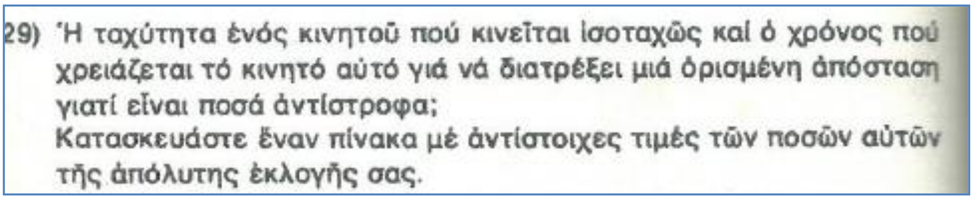




Δύο αὐτοκίνητα τρέχουν μέ ταχύτητες 95 χιλ. τό α΄ καί 75 χιλ. τό β΄ τήν ὥρα. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων τοῦ πρώτου πρός τό δεύτερο.

Εικόνα 17. ΣΤ΄,1982, το κλάσμα ως λόγος, Ρ.Π., Δ.Θ.

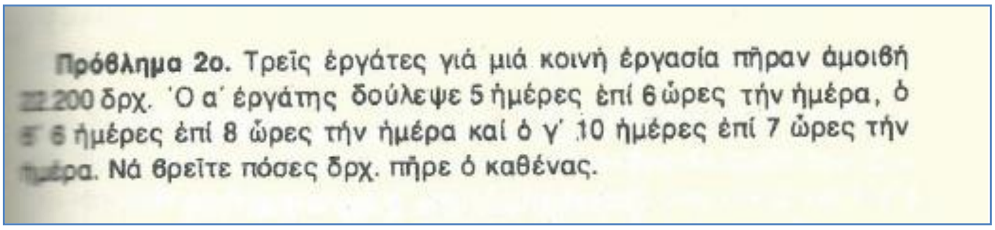
Παρόμοιο θέμα υπάρχει και στην δραστηριότητα της εικόνας 18, όμως εδώ ζητείται να κατασκευαστεί ένας πίνακας με μη πραγματικά δεδομένα, δηλαδή εκτός ρεαλιστικού πλαισίου, οπότε το πλαίσιο είναι μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό.



29) Ἡ ταχύτητα ἑνός κινητοῦ πού κινεῖται ἰσοταχῶς καί ὁ χρόνος πού χρειάζεται τό κινητό αὐτό γιά νά διατρέξει μιά ὁρισμένη ἀπόσταση γιατί εἶναι ποσά ἀντίστροφα;
Κατασκευάστε ἕναν πίνακα μέ ἀντίστοιχες τιμές τῶν ποσῶν αὐτῶν τῆς ἀπόλυτης ἐκλογῆς σας.

Εικόνα 18. ΣΤ΄,1982, το κλάσμα ως λόγος, Μ.Τ.Ρ.Π., Δ.Θ.

Μια δραστηριότητα ρεαλιστικού πλαισίου από την καθημερινή ζωή περιγράφεται στην εικόνα 19, όπου το κλάσμα ερμηνεύεται ως λόγος, αφού πρόκειται για ένα πρόβλημα μερισμού σε μέρη ανάλογα.


Πρόβλημα 2ο. Τρεῖς ἐργάτες γιά μιά κοινή ἐργασία πῆραν ἀμοιβή 22.200 δρχ. Ὁ α΄ ἐργάτης δούλεψε 5 ἡμέρες ἐπί 6 ὧρες τήν ἡμέρα, ὁ β΄ 6 ἡμέρες ἐπί 8 ὧρες τήν ἡμέρα καί ὁ γ΄ 10 ἡμέρες ἐπί 7 ὧρες τήν ἡμέρα. Νά βρεῖτε πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας.

Εικόνα 19. ΣΤ΄,1982, το κλάσμα ως λόγος, Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Κοινό χαρακτηριστικό των περισσότερων δραστηριοτήτων με ρεαλιστικά στοιχεία είναι έλλειψη εικόνων στην περιγραφή του πλαισίου, οπότε το πλαίσιο αποδίδεται λεκτικά και οι μαθητές/τριες καλούνται να το φανταστούν και να το διαμορφώσουν.

4.2.6 Συνολικά αποτελέσματα των εγχειριδίων του 1982

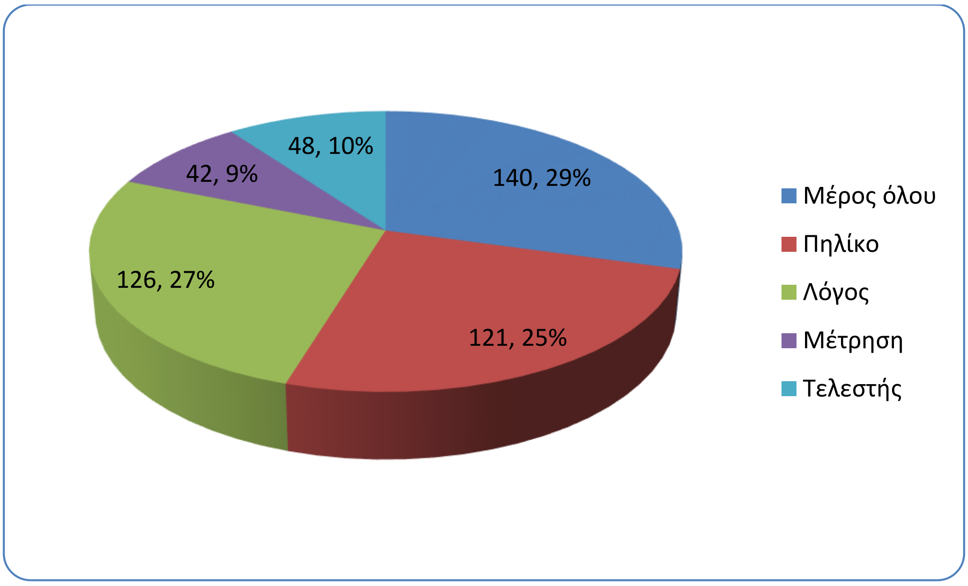
Στα εγχειρίδια των Μαθηματικών του 1982 συνολικά αναλύθηκαν 477 δραστηριότητες (πίνακας 13, σχήμα 14). Η ερμηνεία του κλάσματος ως «μέρος του όλου» σαφώς έχει το προβάδισμα (ν= 140, f= 29,35%) έναντι του «λόγου» (ν= 126, f= 26,41%) που ακολουθεί και του «πηλίκου» (ν= 121, f= 25,36%), που είναι η τρίτη κατά σειρά ερμηνεία.

Πίνακας 13: Εγχειρίδια 1982, δραστηριότητες ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	37	7,76	51	10,69	65	13,63	1	0,20	14	2,94	**168**	**35,2**
Μ.Τ.Ρ.Π.	26	5,45	0	0	11	2,30	0	0	16	3,35	**53**	**11,1**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	77	16,14	70	14,67	50	10,48	41	8,60	18	3,77	**256**	**53,7**
Σύνολα	**140**	**29,35**	**121**	**25,36**	**126**	**26,41**	**42**	**8,82**	**48**	**10,06**	**477**	**100**

Οι ερμηνείες «τελεστής» (ν= 48, f= 10,06%) και «μέτρηση» (ν= 42, f= 8,82%), με ισχνή σχετικά παρουσία, καλύπτουν τις υπόλοιπες δραστηριότητες.

Σχήμα 14. Εγχειρίδια 1982, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



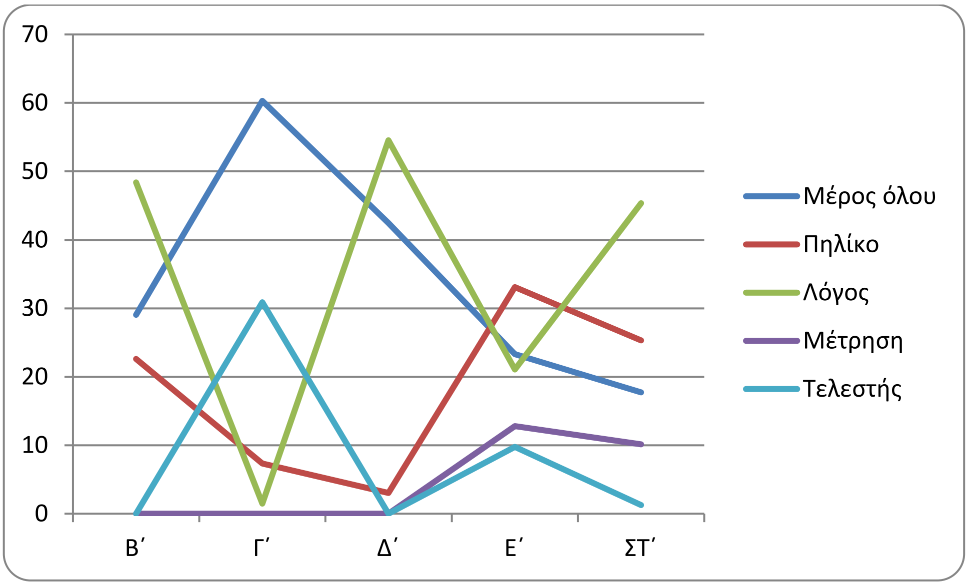
Την εξέλιξη των ερμηνειών του κλάσματος ανά τάξη περιγράφει ο πίνακας 14 και απεικονίζει το σχήμα 15. Η ερμηνεία «μέρος του όλου» καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων του εγχειριδίου της Γ΄ τάξης (60,30%) και μειώνεται σταδιακά στα εγχειρίδια των επόμενων τάξεων, ενώ υπάρχει στο ένα τρίτο περίπου των δραστηριοτήτων του εγχειριδίου της Β΄ τάξης Το γεγονός αυτό είναι σε συμφωνία με το ό,τι η ερμηνεία αυτή χρησιμοποιείται στην εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος, η οποία γίνεται στις πρώιμες τάξεις.

Πίνακας 14: Εγχειρίδια 1982, οι ερμηνείες του κλάσματος (%) ανά τάξη

Τάξη	Μέρος όλου	Πηλίκο	Λόγος	Μέτρηση	Τελεστής
	f	**f**	**f**	**f**	**f**
Β΄	29,03	22,59	48,38	0	0
Γ΄	60,30	7,35	1,47	0	30,88
Δ΄	42,43	3,03	54,54	0	0
Ε΄	23,30	33,09	21,05	12,79	9,77
ΣΤ΄	17,72	25,32	45,37	10,13	1,26

Το «πηλίκο» έχει σημαντική παρουσία στο εγχειρίδιο της Β΄ τάξης (22,5%) και της ΣΤ΄ τάξης (25,3%), αλλά η συμμετοχή του κορυφώνεται στο εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης (33%), ενώ ατονεί η παρουσία του στα εγχειρίδια των Γ΄ και Δ΄ τάξεων. Ο «λόγος» έχει ισχυρή παρουσία σε όλα τα εγχειρίδια (εντονότερη στην Δ΄ τάξη με ποσοστό 54,5%), εκτός αυτό της Γ΄ τάξης, πράγμα αναμενόμενο αφού υπάρχει μεγάλος αριθμός δραστηριοτήτων με σύγκριση ποσοτήτων. Η «μέτρηση» εμφανίζεται μόνο στα εγχειρίδια της Ε΄ και ΣΤ΄ με ποσοστό περίπου 10% σε κάθε μια τάξη. Η ερμηνεία «τελεστής» συναντάται στο 31% των δραστηριοτήτων του εγχειριδίου της Γ΄ τάξης, έχει μηδενική παρουσία στην Β΄ και Δ΄ τάξη και μικρή συμμετοχή στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

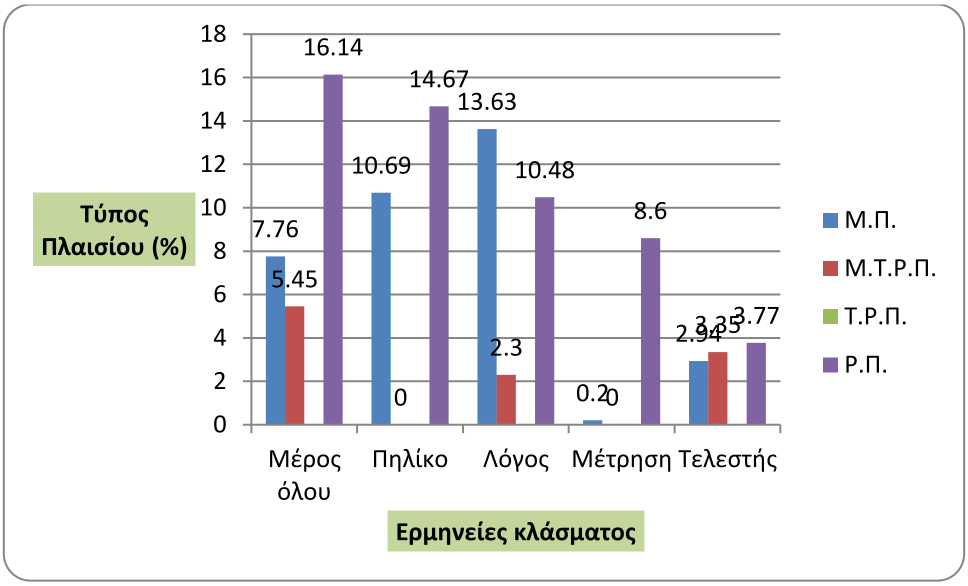
Σχήμα 15. Εγχειρίδια 1982, εξέλιξη των ερμηνειών του κλάσματος ανά τάξη



Όσον αφορά το πλαίσιο (πίνακας 13, σχήμα 16), σχεδόν το 90% των δραστηριοτήτων κατανέμονται σε δύο κατηγορίες: το 53,7% των δραστηριοτήτων ανήκουν στην κατηγορία «ρεαλιστικό πλαίσιο» και το 35,2% ανήκουν στην κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο», οπότε ουσιαστικά εδώ πρόκειται για μη πλαισιωμένες δραστηριότητες. Το υπόλοιπο 11,1% των δραστηριοτήτων πλαισιώνεται με «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», το οποίο δεν έχει καθοριστική σημασία στην επίλυση αυτών των δραστηριοτήτων. Σε κάθε μια από τις ερμηνείες του κλάσματος δεσπόζουν το «ρεαλιστικό πλαίσιο» και το «μαθηματικό πλαίσιο», ενώ προηγείται το «ρεαλιστικό πλαίσιο» (σχήμα 16), με μεγαλύτερο ποσοστό στην ερμηνεία «μέρος του όλου» (16,1%) και εμφανίζοντας μια προοδευτική μείωση κατά σειρά στις υπόλοιπες ερμηνείες: «πηλίκο» (14,6%), «λόγος» (14,4%), «μέτρηση» (8,6%) και «τελεστής» (3,7%). Στη δεύτερη θέση είναι το «μαθηματικό πλαίσιο», έχοντας το μεγαλύτερο ποσοστό στην ερμηνεία «λόγος» (13,6%) και την μικρότερη στην ερμηνεία «τελεστής» (2,9%). Παρουσιάζει αυξητική τάση από το «μέρος του όλου» προς τις ερμηνείες «πηλίκο» και «λόγος» και μειώνεται στην συνέχεια στις ερμηνείες «μέτρηση» και «τελεστής». Το «μαθηματικό

– τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» με την ίδια σχεδόν μικρή παρουσία, εμφανίζεται στις τρεις ερμηνείες: «μέρος του όλου», «λόγος» και «τελεστής».

Σχήμα 16. Εγχειρίδια 1982, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



Οι μεταβολές κάθε τύπου πλαισίου από τάξη σε τάξη, εικονίζονται στον πίνακα 15 και αναπαριστάνονται στο σχήμα 17.

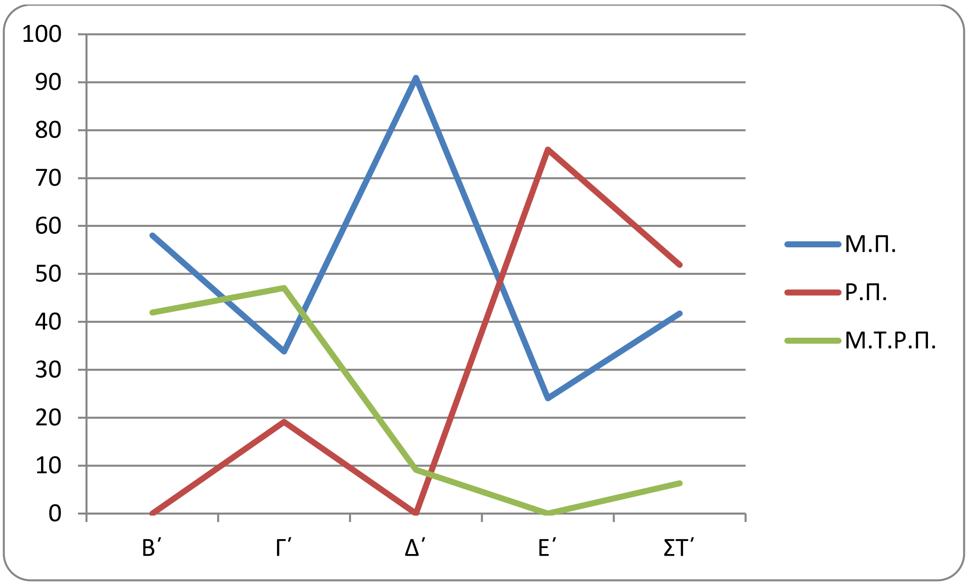
Πίνακας 15: Εγχειρίδια 1982, οι τύποι του πλαισίου (%) ανά τάξη

Τάξη	Μ.Π.	Μ.Τ.Ρ.Π.	Τ.Ρ.Π.	Ρ.Π.
	f	**f**	**f**	**f**
Β΄	58,07	41,93	0	0
Γ΄	33,82	47,06	0	19,12
Δ΄	90,91	9,09	0	0
Ε΄	24,05	0	0	75,95
ΣΤ΄	41,76	6,33	0	51,91

Οι δύο τύποι πλαισίου που κυριαρχούν, «μαθηματικό πλαίσιο» και «ρεαλιστικό πλαίσιο», εμφανίζουν πολύ αισθητές μεταβολές μεταξύ των τάξεων. Όπως φαίνεται καθαρά στο διάγραμμα του σχήματος 17, η αύξηση του ενός συνοδεύεται με μείωση του άλλου και αντίστροφα. Τείνουν σε ισορροπία στο εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης. Το «μαθηματικό πλαίσιο» έχει εμφανή παρουσία σε όλες τις τάξεις, με το μεγαλύτερο ποσοστό στην Δ΄ τάξη (90,9%). Το «ρεαλιστικό πλαίσιο» κορυφώνεται στην Ε΄ τάξη (76%) και μηδενίζεται στις Β΄ και Δ΄ τάξεις. Το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» έχει μια σημαντική παρουσία στις τάξεις Β΄ και Γ΄ (41,9% και 47%

αντίστοιχα), αλλά στη συνέχεια φθίνει και εξασθενεί η παρουσία του στις υπόλοιπες τάξεις.

Σχήμα 17. Εγχειρίδια 1982, μεταβολή των τύπων του πλαισίου ανά τάξη



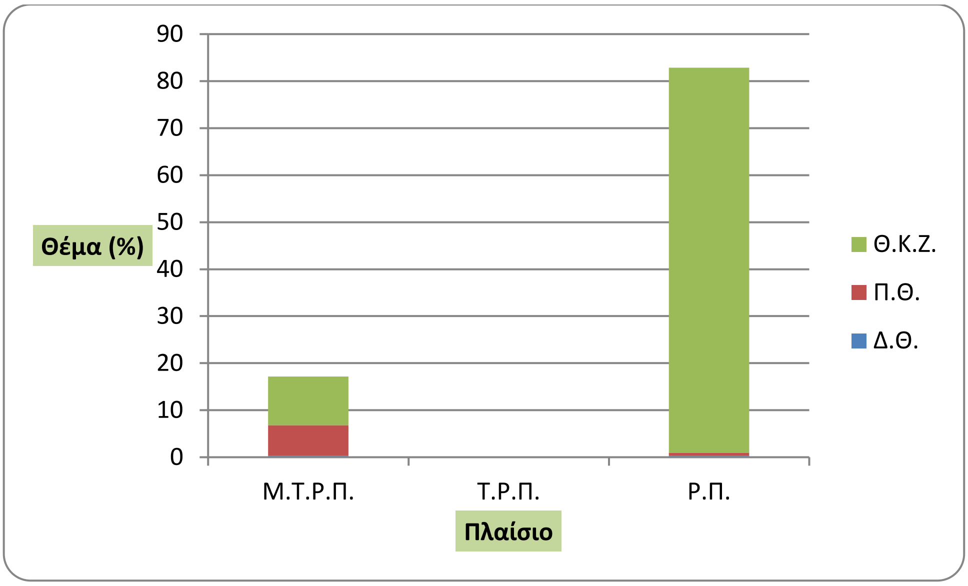
Το ρεαλιστικό πλαίσιο (πίνακας 16, σχήμα 18) έχει ως μοναδική πηγή άντλησης των θεμάτων του την καθημερινή ζωή, ωστόσο η ποικιλία αυτών είναι περιορισμένη. Στις περισσότερες των περιπτώσεων τα θέματα σχετίζονται με ενέργειες ή συναλλαγές που πραγματοποιούν οι ενήλικες και δεν αφορούν την παιδική ζωή.

Πίνακας 16: Εγχειρίδια 1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	1	0,32	0	0	1	0,32	**2**	**0,64**
Π.Θ.	20	6,48	0	0	2	0,64	**20**	**7,12**
Θ.Κ.Ζ.	32	10,36	0	0	253	81,88	**285**	**92,24**
Σύνολα	**53**	**17,16**	**0**	**0**	**256**	**82,84**	**309**	**100**

Απουσιάζουν τα θέματα που προκύπτουν από τα ενδιαφέροντα των παιδιών (παιχνίδι, αθλητισμός, παραμύθια). Ένας μικρός αριθμός δραστηριοτήτων (ν=20, f=6,48%) έχει πλαίσιο με παιγνιώδες θέμα, όμως αυτές ανήκουν στην κατηγορία «Μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο». Υπάρχουν και κάποια ψήγματα διεπιστημονικών θεμάτων σε δύο μόνο δραστηριότητες, τα οποία μάλλον μπορούν να χαρακτηριστούν αμελητέα, χωρίς να μπορούν να προσδώσουν κάποιο χαρακτηριστικό διεπιστημονικότητας.

Σχήμα 18. Εγχειρίδια 1982, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



Συμπερασματικά, στα εγχειρίδια των Μαθηματικών του 1982 το κλάσμα τοποθετείται ως έννοια και με τις πέντε ερμηνείες του. Προκρίνονται οι ερμηνείες «μέρος του όλου», «πηλίκο» και «λόγος». Κυριαρχεί το «ρεαλιστικό πλαίσιο» με θέματα «καθημερινής ζωής», όμως είναι σχετικά φτωχό αφού κυρίως περιγράφεται λεκτικά και απουσιάζουν στις περισσότερες δραστηριότητες εικόνες, σχεδιαγράμματα, σκίτσα και γενικά οτιδήποτε θα μπορούσε να το καταστήσει πιο προσιτό και πιο άμεσο στους/στις μαθητές/τριες. Μεγάλη συμμετοχή έχει η κατηγορία «μαθηματικό πλαίσιο» και απουσιάζει το «τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», γεγονός αναμενόμενο, αφού δεν υπάρχουν αληθοφανή στοιχεία της πραγματικότητας, ούτε στοιχεία εικονικής πραγματικότητας.

4.3 Εγχειρίδια Μαθηματικών του έτους 2000

4.3.1 Εγχειρίδιο Α΄ τάξης του 2000

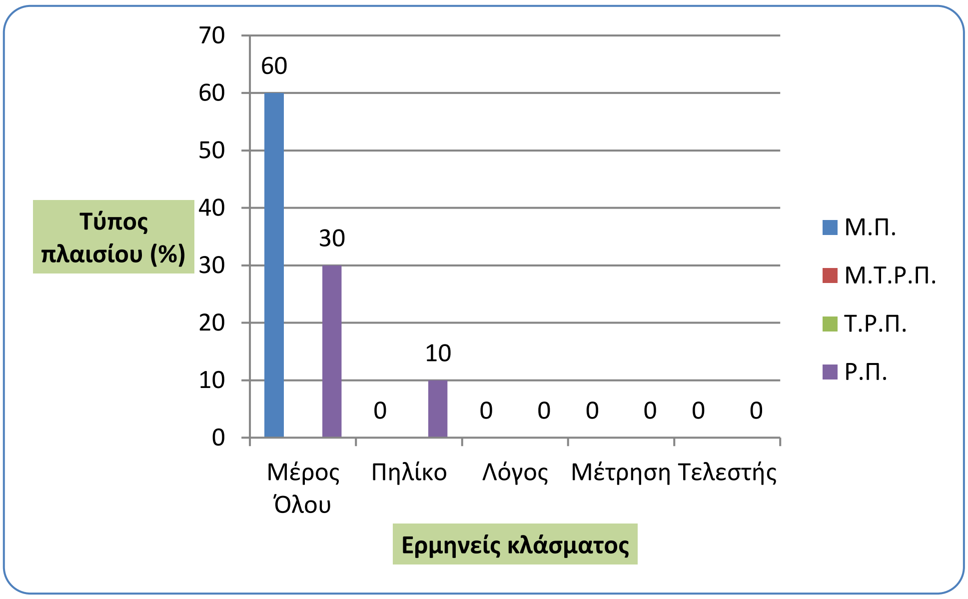
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ τάξης του 2000 η παρουσία του κλάσματος είναι φτωχή. Υπάρχει μια προτύπωση της έννοιας του κλάσματος, όπου χωρίς επίσημο μαθηματικό συμβολισμό εισάγεται η κλασματική μονάδα 1/2 υπό την έννοια του μισού. Μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 10 δραστηριότητες (πίνακας 17, σχήμα 19).

Πίνακας 17: Τάξη Α΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

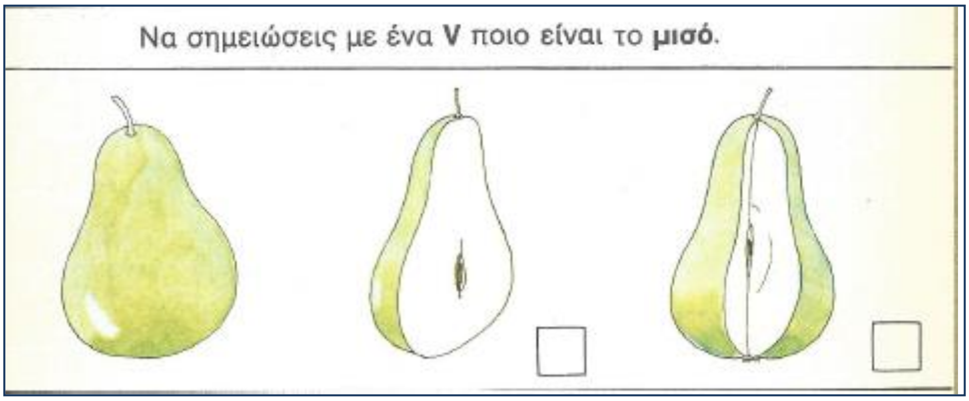
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Μ.Π.	6	60	0	0	0	0	0	0	0	0	**6**	**60**
Μ.Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	3	30	1	10	0	0	0	0	0	0	**4**	**40**
Σύνολα	**9**	**90**	**1**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**100**

Τα αποτελέσματα είναι πενιχρά, υπάρχουν 6 δραστηριότητες σε ποσοστό 60% με την ερμηνεία «μέρος του όλου» μέσα σε «μαθηματικό πλαίσιο», 3 δραστηριότητες (30%) όπου το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου» σε «ρεαλιστικό πλαίσιο» με θέμα από την καθημερινή ζωή και 1 δραστηριότητα (10%) με την ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος», σε «ρεαλιστικό πλαίσιο» με θέμα επίσης από την καθημερινή ζωή.

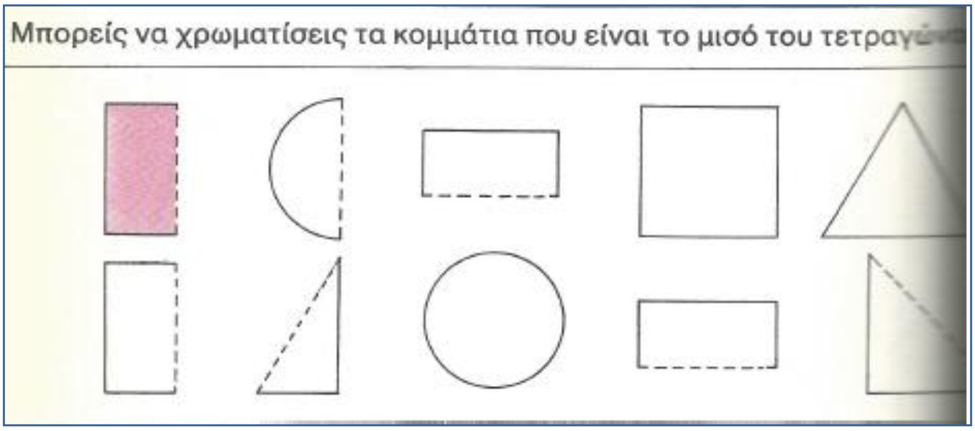
Σχήμα 19. Τάξη Α΄, 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



Δύο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα δραστηριοτήτων σχετικών με τα κλάσματα, από των εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Α΄ τάξης του 2000, βρίσκονται στις εικόνες 20 και 21.



Εικόνα 20. Α΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.



Εικόνα 21. Α΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Μ.Π.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 20, η οποία απευθύνεται σε μαθητές/τριες της Α΄ τάξης, το κλάσμα ερμηνεύεται ως μέρος του όλου (το μισό αχλάδι από ένα ολόκληρο, δηλαδή το 1/2) μέσα σε «ρεαλιστικό» πλαίσιο με θέμα οικείο στους/στις μαθητές/τριες. Η ίδια ερμηνεία του κλάσματος υπάρχει και στην δραστηριότητα της εικόνας 21, όμως το πλαίσιο εδώ είναι «μαθηματικό», το οποίο ίσως να μην είναι κατάλληλο να κινητοποιήσει σε ικανοποιητικό βαθμό το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών της Α΄ τάξης.

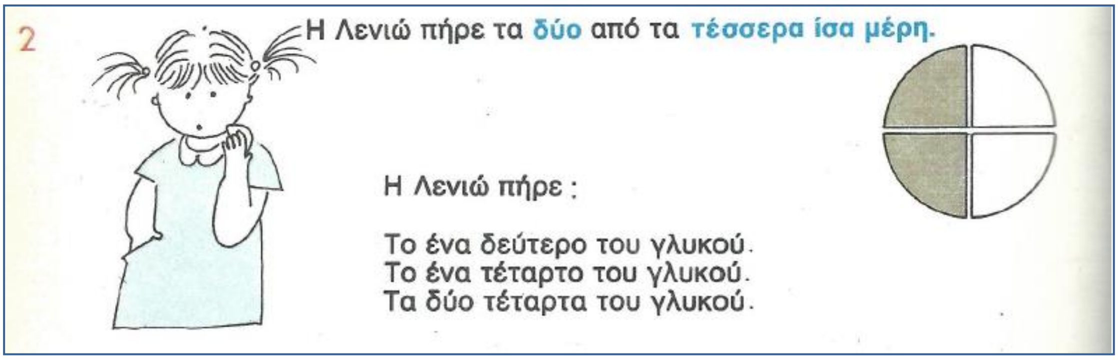
4.3.2 Εγχειρίδιο Β΄ τάξης του 2000

Στο εγχειρίδιο της Β΄ τάξης του 2000 υπάρχει μια παράγραφος σχετική με τα κλάσματα, στην οποία εισάγονται τα κλάσματα 1/2, 1/4, 2/4, 3/4 και 4/4. Οι δραστηριότητες συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με αυτές του αντίστοιχου εγχειριδίου του 1982. Αναλύθηκαν 31 δραστηριότητες (πίνακας 18) και δεν προέκυψε κάποια διαφοροποίηση στα αποτελέσματα, είτε σε αυτά που αφορούν τις ερμηνείες του κλάσματος, είτε σε αυτά που αφορούν το πλαίσιο.

Πίνακας 18: Τάξη Β΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

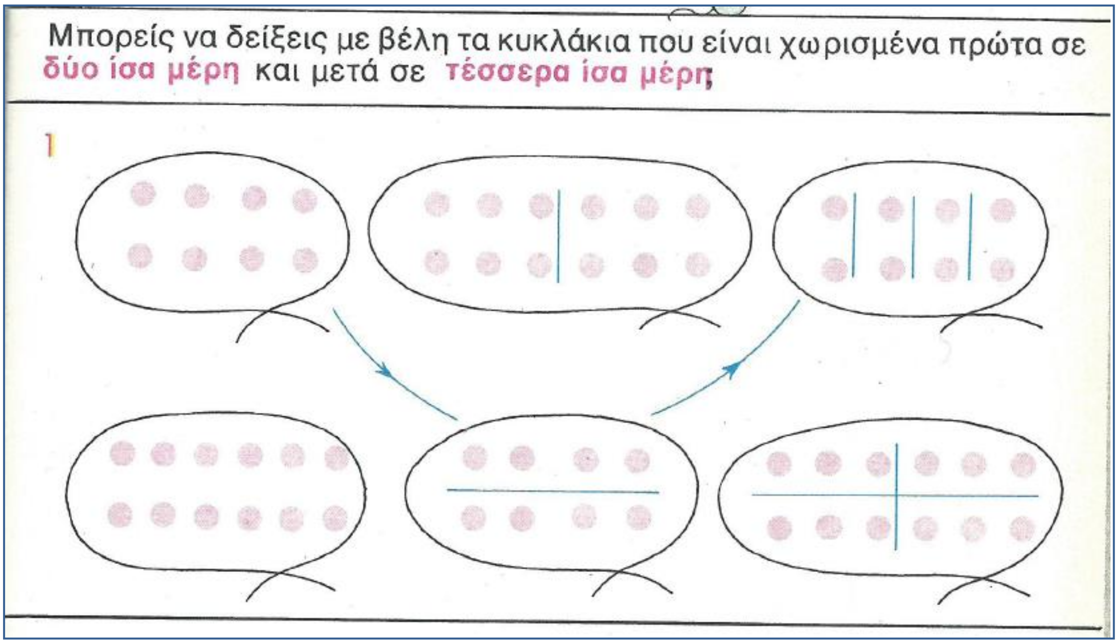
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Μ.Π.	0	0	7	22,59	11	35,48	0	0	0	0	**18**	**58,07**
Μ.Τ.Ρ.Π.	9	29,03	0	0	4	12,90	0	0	0	0	**13**	**41,93**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Σύνολα	**9**	**29,03**	**7**	**22,59**	**15**	**48,38**	**0**	**0**	**0**	**0**	**31**	**100**

Στις εικόνες 22 και 23 δίνονται δύο δραστηριότητες του εγχειριδίου της Β΄ τάξης του 2000.



Εικόνα 22. Β΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Μ.Τ.Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Στην πρώτη δραστηριότητα (εικόνα 22) το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου» (Η Λενιώ παίρνει τα 2 από τα 4 ίσα μέρη ενός ολόκληρου γλυκού). Το πλαίσιο είναι «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», διότι η απάντηση στο ερώτημα της δραστηριότητας μπορεί να δοθεί μόνο από την πληροφορία που δίνεται λεκτικά (πήρε δύο από τα τέσσερα ίσα μέρη). Στην δεύτερη δραστηριότητα (εικόνα 23) το κλάσμα ερμηνεύεται ως «πηλίκο» (το κυκλάκι χωρίζεται σε 2 ίσα μέρη και μετά σε 4 ίσα μέρη, οπότε μια ποσότητα μερίζεται σε ίσα μέρη). Το πλαίσιο είναι «μαθηματικό» (δεν υπάρχει οτιδήποτε σχετικό με την πραγματικότητα, παρά μόνο διαγράμματα).



Εικόνα 23. Β΄,2000, το κλάσμα ως πηλίκο, Μ.Π.

4.3.3 Εγχειρίδιο Γ΄ τάξης του 2000

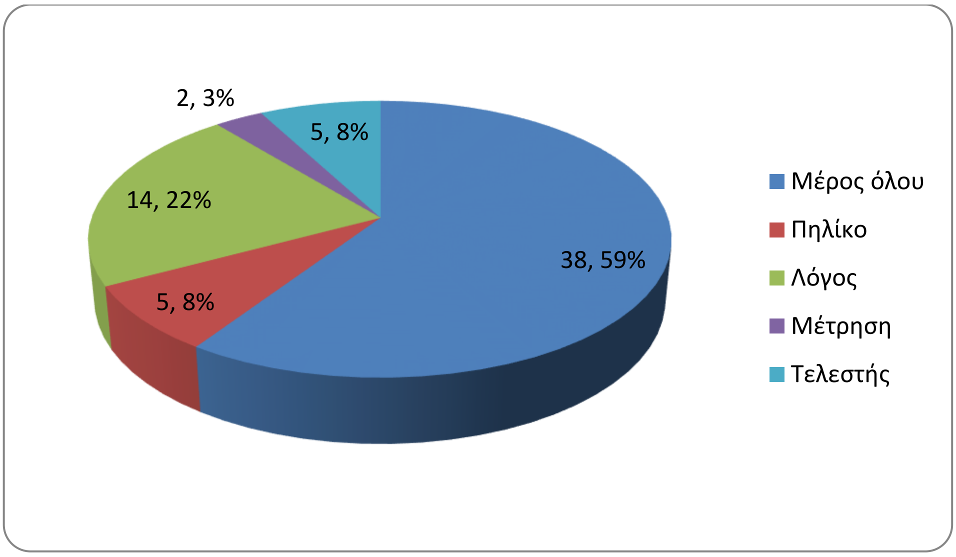
Στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης του 2000, το κεφάλαιο που αφορά τα κλάσματα παρουσιάζεται μόνο με δραστηριότητες, γεγονός που συνάδει με την επικεφαλίδα του κεφαλαίου: «6ο Κριτήριο αξιολόγησης». Συνεπώς ο ρόλος της δραστηριότητας στην διδασκαλία των κλασμάτων, σε αυτήν την τάξη, είναι καθοριστικός και αναντικατάστατος. Μετρήθηκαν 64 δραστηριότητες και αναλύθηκαν ισάριθμες (πίνακας 19, σχήμα 20).

Πίνακας 19: Τάξη Γ΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	25	39,05	3	4,69	7	10,94	0	0	3	4,69	**38**	**59,37**
Μ.Τ.Ρ.Π.	0	0	2	3,13	1	1,56	0	0	2	3,13	**5**	**07,82**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Ρ.Π.	13	20,31	0	0	6	9,37	2	3,13	0	0	**21**	**32,81**
Σύνολα	**38**	**59,36**	**5**	**7,82**	**14**	**21,87**	**2**	**3,13**	**5**	**7,82**	**64**	**100**

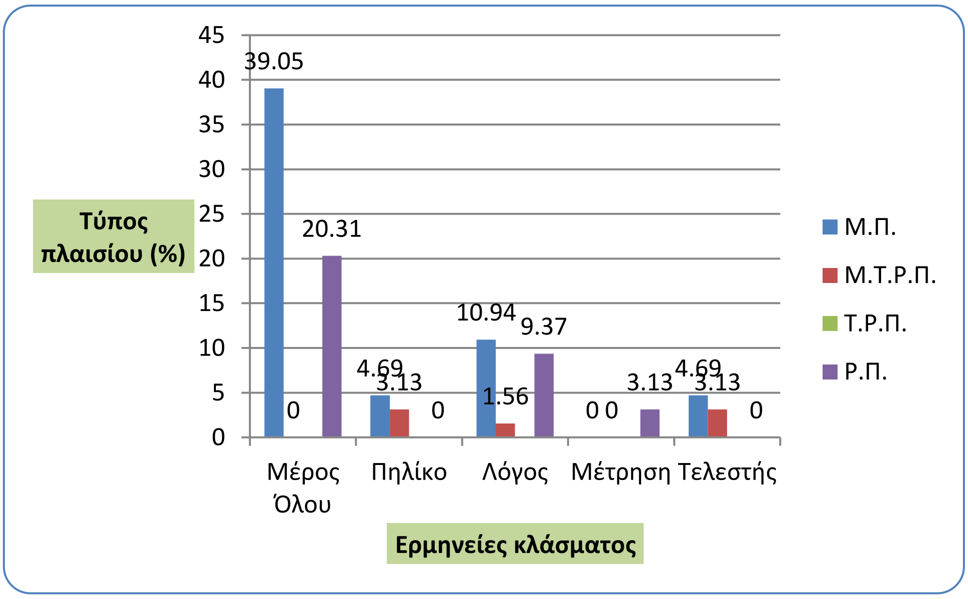
Κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι όλες οι ερμηνείες του κλάσματος είναι παρούσες. Η ερμηνεία «μέρος του όλου» συναντάται σε 38 δραστηριότητες (59,36%) και η ερμηνεία «λόγος» σε 14 δραστηριότητες (21,87%). Οι υπόλοιπες ερμηνείες έχουν μικρή συμμετοχή: το «πηλίκο» βρίσκεται σε 5 δραστηριότητες (7,82%), ο «τελεστής» επίσης σε 5 δραστηριότητες (7,82%) και η «μέτρηση» σε 2 δραστηριότητες (3,13 %).

Σχήμα 20. Τάξη Γ΄,2000, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Σχετικά με τον τύπο πλαισίου στο εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ΄ τάξης του 2000, υπερτερεί αισθητά το «μαθηματικό πλαίσιο» (ν=38, f=89,37%), το οποίο δείχνει και εδώ ιδιαίτερη προτίμηση στα συνήθη γεωμετρικά σχήματα, κύκλο, ορθογώνιο και τετράγωνο. Έπεται το «ρεαλιστικό πλαίσιο» (ν=21, f=32,81%) και το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» (ν=5, f=7,82%). Η διαφορά Μ.Π. και Μ.Τ.Ρ.Π. είναι αρκετά μεγάλη, κάτι που δεν είναι αναμενόμενο και δεν βρίσκεται σε συμφωνία με τις επαγγελίες των Α.Π.Σ. που προηγήθηκαν του συγκεκριμένου εγχειριδίου.

Σχήμα 21. Τάξη Γ΄, 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος

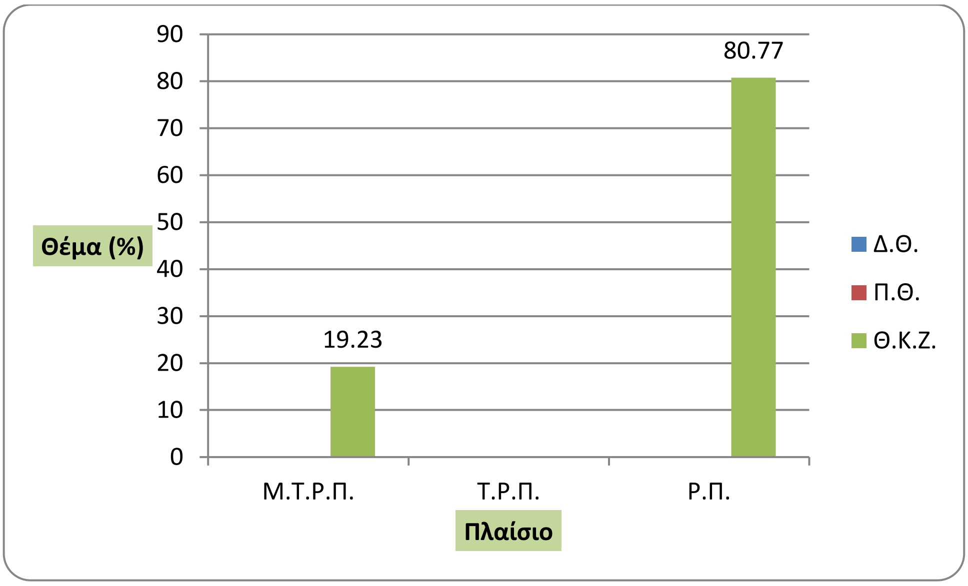


Τα θέματα από την καθημερινή ζωή μονοπωλούν την θεματολογία του ρεαλιστικού πλαισίου (πίνακας 20, σχήμα 22) και στις 26 δραστηριότητες των οποίων το πλαίσιο έχει ρεαλιστικά στοιχεία. Ωστόσο, τα θέματα αφορούν την καθημερινή ζωή των παιδιών και είναι αρκετά οικεία σε αυτά, όπως ο μερισμός μιας σοκολάτας, οι ημέρες του μήνα, οι ώρες της ημέρας, κ.τ.λ.). Δεν υπάρχει θέμα με διεπιστημονική χροιά, ούτε κάτι σχετικό με τον κόσμο του παιχνιδιού.

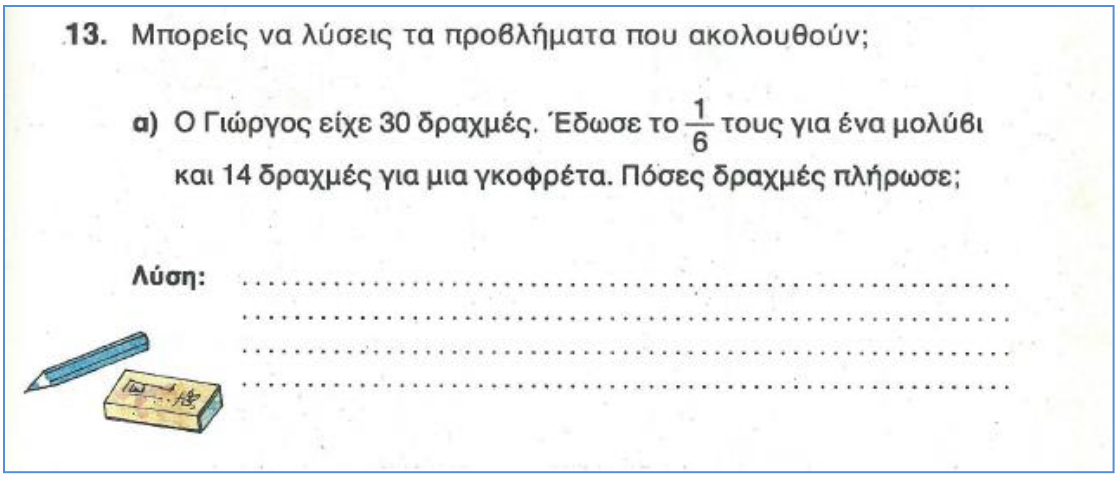
Πίνακας 20: Τάξη Γ,΄2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Π.Θ.	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Θ.Κ.Ζ.	5	19,23	0	0	21	80,77	**26**	**100**
Σύνολα	**5**	**19,23**	**0**	**0**	**21**	**80,77**	**26**	**100**

Σχήμα 22. Τάξη Γ΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



Στις εικόνες 24 και 25 υπάρχουν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα δραστηριοτήτων που σχετίζονται με τα κλάσματα, στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης του 2000. Στην δραστηριότητα της εικόνας 24 το κλάσμα δέχεται ως ερμηνεία το «μέρος του όλου» γιατί ο Γιώργος από τις 30 δραχμές του, δηλαδή το «όλον», ξοδεύει το 1/6, δηλαδή ένα μέρος αυτού. Το πλαίσιο μπορεί να θεωρηθεί «ρεαλιστικό», διότι ο/η μαθητής/τρια μπορεί να εργαστεί χωρίς μαθηματικά εργαλεία, αφού είναι εφικτό να πάρει 30 δραχμές και από αυτές στη συνέχεια να βρει πόσες είναι το 1/6, άρα να πραγματοποιήσει μια ενέργεια με νόημα εντός του ρεαλιστικού πλαισίου. Είναι Προφανές ότι το θέμα του πλαισίου είναι από την καθημερινή ζωή. Στην εικόνα 25 υπάρχει μια δραστηριότητα στην οποία το κλάσμα έχει διπλή ερμηνεία: «μέρος του όλου» (Κάθε παιδί παίρνει ένα μέρος του όλου, δηλαδή της σακούλας με τα κεράσια) και «μέτρηση» διότι υπάρχει μια γραμμή αριθμών και πάνω σε αυτήν είναι τοποθετημένα τα κλάσματα που σχετίζονται με το ερώτημα της δραστηριότητας. Το πλαίσιο είναι ρεαλιστικό με θέμα καθημερινής ζωής γιατί ο/η μαθητής/τρια πραγματοποιεί μια ενέργεια με νόημα εντός του πλαισίου.

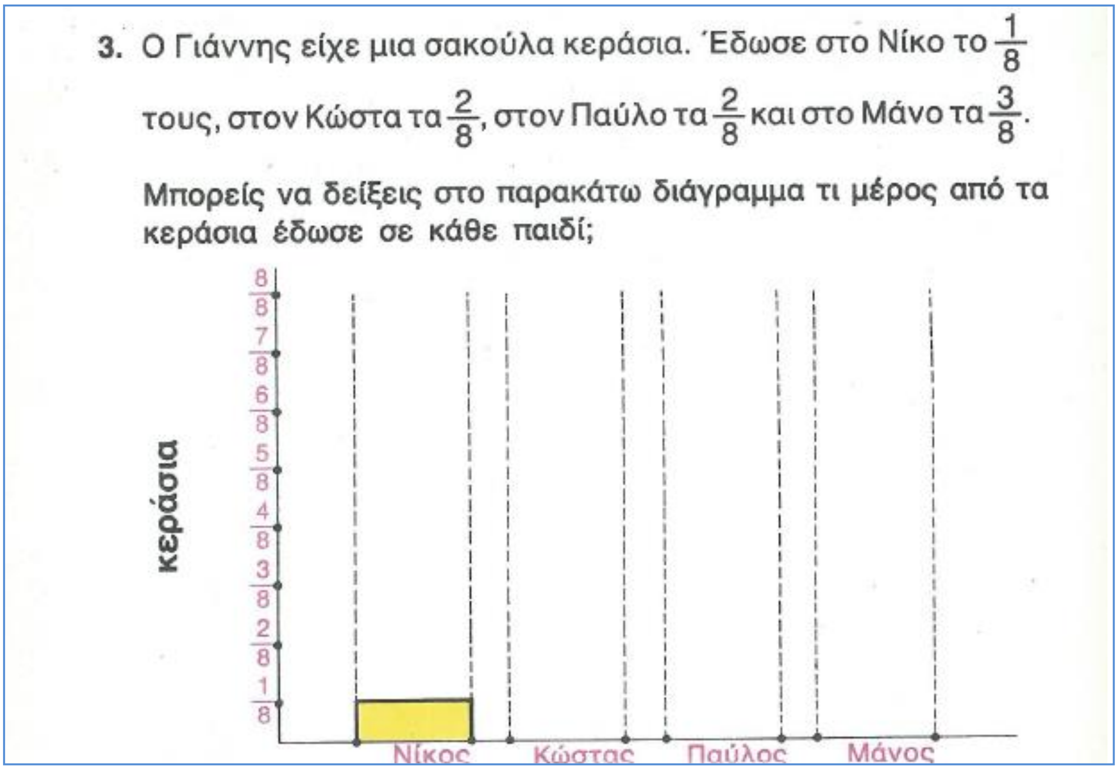


13. Μπορείς να λύσεις τα προβλήματα που ακολουθούν;

α) Ο Γιώργος είχε 30 δραχμές. Έδωσε το $\frac{1}{6}$ τους για ένα μολύβι και 14 δραχμές για μια γκοφρέτα. Πόσες δραχμές πλήρωσε;

Λύση: ....

Εικόνα 24. Γ΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Ρ.Π.,Θ.Κ.Ζ.



3. Ο Γιάννης είχε μια σακούλα κεράσια. Έδωσε στο Νίκο το $\frac{1}{8}$ τους, στον Κώστα τα $\frac{2}{8}$, στον Παύλο τα $\frac{2}{8}$ και στο Μάνο τα $\frac{3}{8}$.

Μπορείς να δείξεις στο παρακάτω διάγραμμα τι μέρος από τα κεράσια έδωσε σε κάθε παιδί;

Εικόνα 25. Γ΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου και μέτρηση, Ρ.Π., Κ.Ζ.

4.3.4 Εγχειρίδιο Δ΄ τάξης του 2000

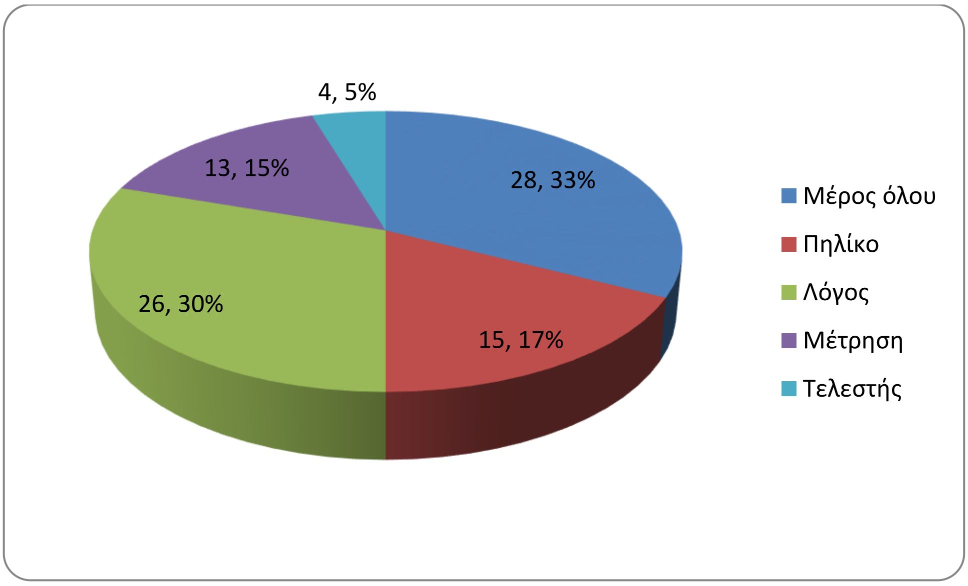
Στο εγχειρίδιο των μαθηματικών της Δ΄ τάξης του 2000 η σχετική ύλη με τα κλάσματα εκτείνεται σε ένα ολόκληρο κεφάλαιο και μελετώνται οι κλασματικές μονάδες, οι κλασματικοί αριθμοί, τα ισοδύναμα κλάσματα, η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων. Το πλήθος των δραστηριοτήτων που αξιολογήθηκαν για ανάλυση είναι 86 (πίνακας 21, σχήμα 23).

Πίνακας 21: Τάξη Δ΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f
Μ.Π.	6	06,97	7	08,14	12	13,95	5	5,81	2	2,33	**32**	**37,20**
Μ.Τ.Ρ.Π.	9	10,47	5	05,81	5	05,81	3	3,49	2	2,33	**24**	**27,91**
Τ.Ρ.Π.	9	10,47	3	03,49	9	10,47	4	4,65	0	0	**25**	**29,08**
Ρ.Π.	4	04,65	0	0	0	0	1	1,16	0	0	**5**	**05,81**
Σύνολα	**28**	**32,56**	**15**	**17,44**	**26**	**30,23**	**13**	**15,11**	**4**	**4,66**	**86**	**100**

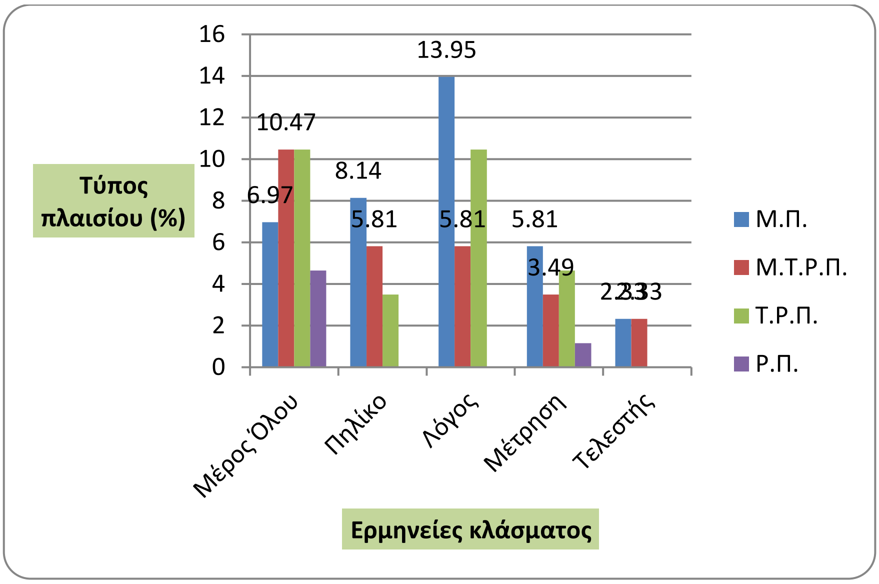
Υπάρχει παρουσία όλων των ερμηνειών του κλάσματος: Η ερμηνεία «μέρος του όλου» έχει και εδώ τον πρώτο λόγο (ν=28, f=32,56%), ακολουθούν οι ερμηνείες «λόγος» (ν=26, f=30,23%), «πηλίκο» (ν=15, f=17,44%), «μέτρηση» (ν=13, f=15,11%) και «τελεστής» (ν=4, f=4,66%).

Σχήμα 23. Τάξη Δ΄,2000, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Σε αυτό το εγχειρίδιο παρατηρείται μια διεύρυνση του πλαισίου (σχήμα 24), αφού υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες και στους τέσσερις τύπους πλαισίου. Βεβαίως, το «μαθηματικό πλαίσιο» έχει την πρώτη θέση (ν=32, f=37,20%) και πλαισιώνει τις περισσότερες δραστηριότητες όπου το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος».

Σχήμα 24. Τάξη Δ΄, 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



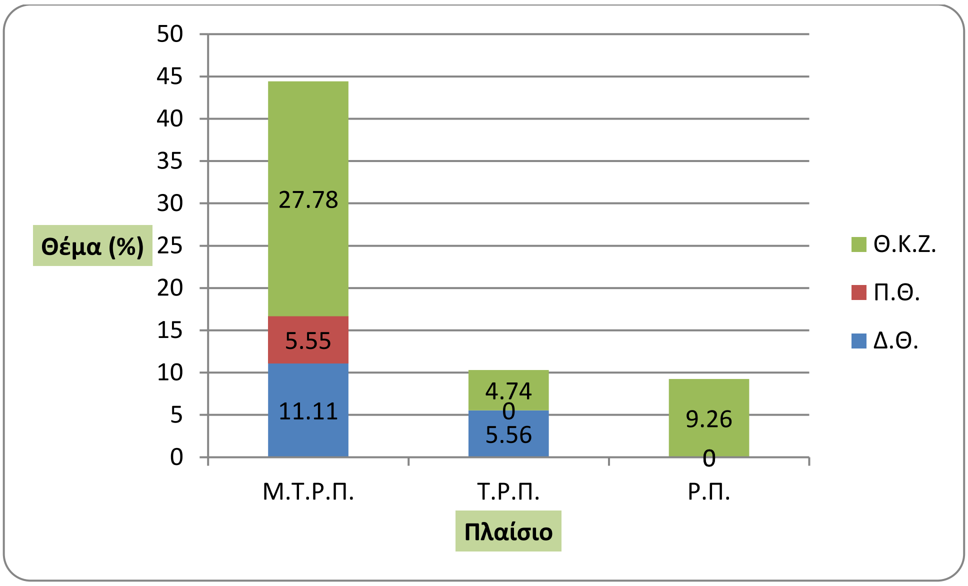
Χαρακτηριστική είναι η ισχυρή παρουσία του «τεχνητά ρεαλιστικού πλαισίου» (ν=25, f=29,08%), το οποίο πλαισιώνει αρκετές δραστηριότητες με τις ερμηνείες «μέρος του όλου» και «λόγος», ενώ και το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» καλύπτει μεγάλο μέρος δραστηριοτήτων (ν=24, f=27,91%). Αξιοσημείωτη είναι η μικρή παρουσία του «ρεαλιστικού πλαισίου» (ν=5, f=5,81%), η οποία μπορεί να δικαιολογηθεί από την άνοδο του «τεχνητά – ρεαλιστικού πλαισίου». Το 1/3 περίπου των δραστηριοτήτων (ν=30, f=34,90%) έχουν πλαίσιο με ρεαλιστικά στοιχεία (Τ.Ρ.Π. ή Ρ.Π.) τα οποία διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο στην επίλυση της δραστηριότητας από τους/τις μαθητές/τριες.

Πίνακας 22: Τάξη Δ΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	6	11,11	3	05,56	0	0	**9**	**16,67**
Π.Θ.	3	05,55	0	0	0	0	**3**	**05,55**
Θ.Κ.Ζ.	15	27,78	22	40,74	5	9,26	**42**	**77,78**
Σύνολα	**24**	**44,44**	**25**	**46,30**	**5**	**9,26**	**54**	**100**

Τα «θέματα καθημερινής ζωής» (πίνακας 22, σχήμα 25) κυριαρχούν στα πλαίσια με ρεαλιστικά στοιχεία (ν=42, f=77,78%). Υπάρχουν όμως 9 δραστηριότητες (16,67%) που έχουν πλαίσιο με «διεπιστημονικό θέμα» και 3 δραστηριότητες (5,55%) με «παιγνιώδες θέμα» γεγονός που δείχνει, αμυδρά μεν, τις τάσεις των νέων Α.Π.Σ. της εποχής αυτής και την μεγάλη στροφή που γίνεται το 2000 προς το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ).

Σχήμα 25. Τάξη Δ΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

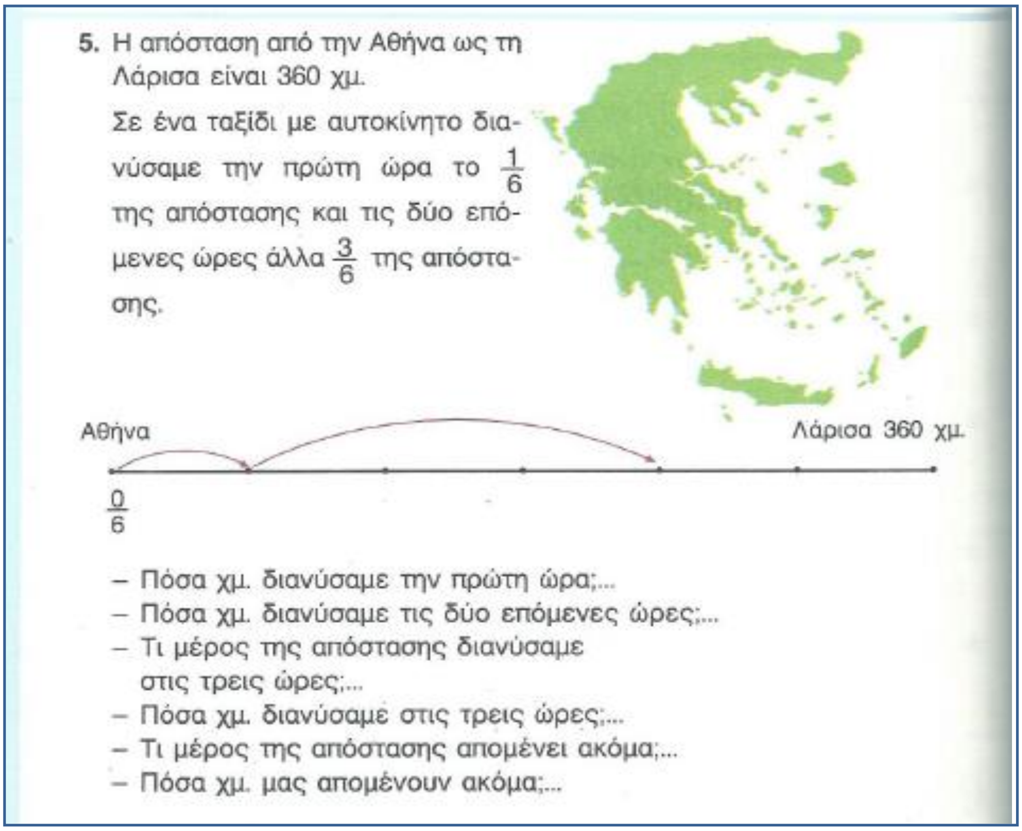


Στις εικόνες 26, 27 και 28 απεικονίζονται επιλεγμένα παραδείγματα δραστηριοτήτων που έχουν Τ.Ρ.Π., ενώ στην δραστηριότητα της εικόνας 28 μπορεί να υπάρξει διεπιστημονική προσέγγιση. Στην εικόνα 26 ένα γλυκό μοιράζεταισε 8 ίσα κομμάτια, άρα το κλάσμα ερμηνεύεται ως «πηλίκο». Η Ζωή έφαγε τα 2 και ο Παντελής τα 4 και ζητείται το μέρος του γλυκού που έφαγε κάθε παιδί, δηλαδή το μέρος του όλου. Το πλαίσιο είναι «τεχνητά ρεαλιστικό» διότι οι εικόνα που δείχνει δεν είναι αληθινή αλλά αληθοφανής. Είναι προφανές ότι το πλαίσιο έχει θέμα καθημερινής ζωής.

Εικόνα 26. Δ΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου και πηλίκο, Τ.Ρ.Π., Κ.Ζ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 27 το κλάσμα ερμηνεύεται ως μέρος του όλου (Τα παιδιά τρώνε δύο φορές ένα μέρος από την ολόκληρη τούρτα που είναι χωρισμένη σε 8 ίσα κομμάτια και ζητείται το μέρος της τούρτας που έφαγαν. Το πλαίσιο, ομοίως όπως στην εικόνα 26, είναι «τεχνητά ρεαλιστικό».

Εικόνα 27. Δ΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου, Τ.Ρ.Π., Κ.Ζ.



Εικόνα 28. Δ΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου λόγος και μέτρηση Τ.Ρ.Π., Δ.Θ.

Η εικόνα 28 απεικονίζει μια από τις ελάχιστες δραστηριότητες που μπορεί το θέμα της να θεωρηθεί «διεπιστημονικό», αφού το πλαίσιο περιλαμβάνει έναν απλό χάρτη της Ελλάδας (στοιχείο Γεωγραφίας) και υπάρχουν έννοιες της Φυσικής (ταχύτητα, μονάδες χρόνου και απόστασης, απόσταση, κίνηση). Το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος» και ως «μέτρηση». Το πλαίσιο είναι «τεχνητά ρεαλιστικό», αφού περιέχει αληθοφανή στοιχεία και ο/η μαθητής/τρια μπορεί να πραγματοποιήσει μια ενέργεια με νόημα μέσα στο πλαίσιο.

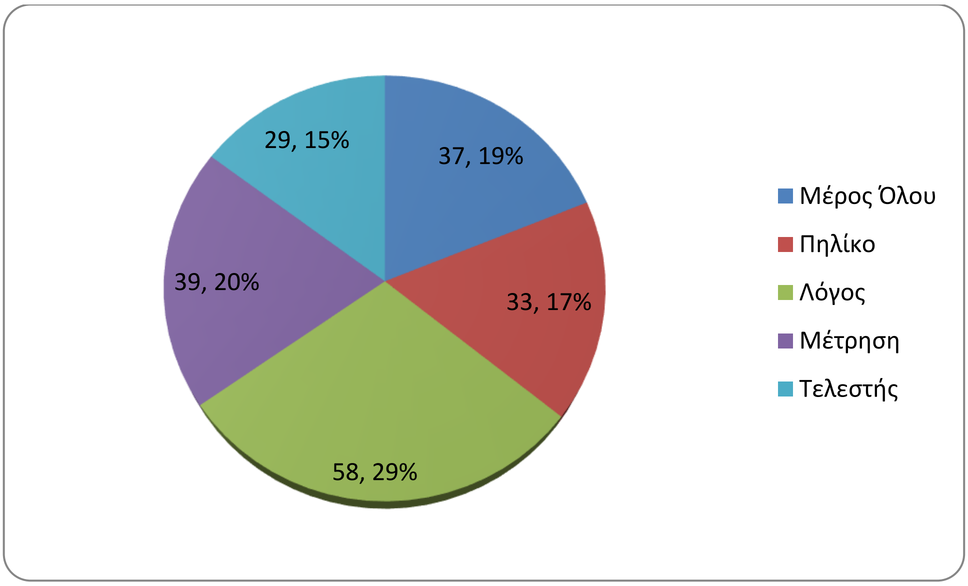
4.3.5 Εγχειρίδιο Ε΄ τάξης του 2000

Τα κλάσματα στο εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε΄ τάξης του 2000, καλύπτουν δύο ολόκληρα κεφάλαια, ένα στο πρώτο μέρος με τίτλο: «Κλασματικοί αριθμοί», και ένα στο δεύτερο μέρος με τίτλο: «Πράξεις με κλασματικούς αριθμούς». Λεπτομέρειες για το περιεχόμενο των αυτών των κεφαλαίων αναφέρονται στην παράγραφο 3.4 «Δείγμα της έρευνας» στην σελ. 64. Αναλύθηκαν συνολικά και στα δύο κεφάλαια 196 δραστηριότητες (πίνακας 23, σχήμα 26).

Πίνακας 23: Τάξη Ε΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

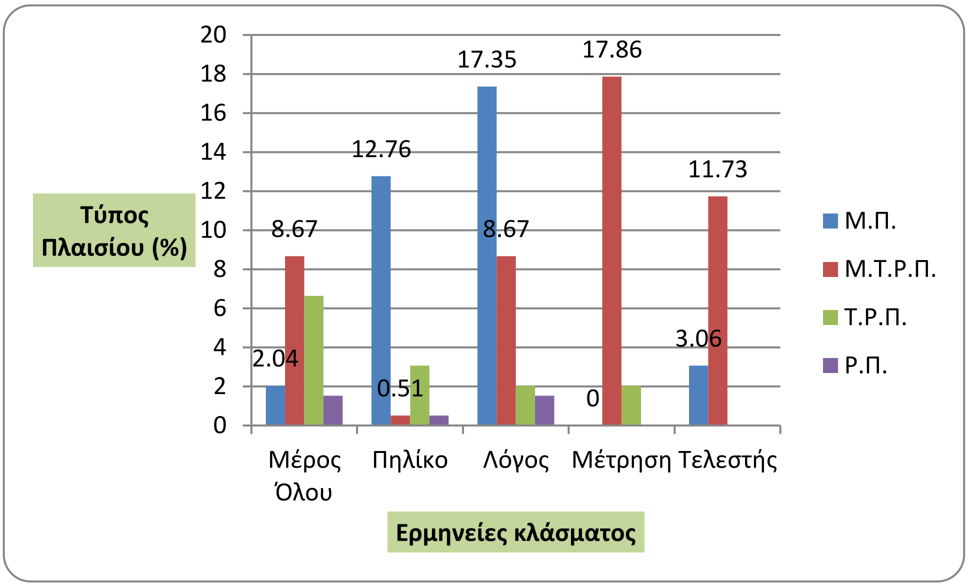
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	**v**	**f**
Μ.Π.	4	2,04	25	12,76	34	17,35	0	0	6	03,06	**69**	**35,21**
Μ.Τ.Ρ.Π.	17	8,67	1	0,51	17	8,67	35	17,86	23	11,73	**93**	**47,44**
Τ.Ρ.Π.	13	6,64	6	3,06	4	2,04	4	02,04	0	0	**27**	**13,78**
Ρ.Π.	3	1,53	1	0,51	3	1,53	0	0	0	0	**7**	**03,57**
Σύνολα	**37**	**18,88**	**33**	**16,84**	**58**	**29,59**	**39**	**19,90**	**29**	**14,79**	**196**	**100**

Σχήμα 26. Τάξη Ε΄,2000, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Είναι παρούσες και οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος, με την ερμηνεία «λόγος» να προηγείται (ν=58, f=29,59%) και ακολουθούν στη σειρά: «μέτρηση (ν=39, f=19,90%), «μέρος όλου» (ν=37, f=18,88%), «πηλίκο» (ν=33, f=16,84%) και «τελεστής» (ν=29, f=14,79%). Στο εγχειρίδιο αυτό υπάρχει μια αρκετά ισορροπημένη κατανομή των πέντε ερμηνειών. Όσον αφορά τον τύπο του πλαισίου (πίνακας 23, σχήμα 27), υπάρχει εμφανές προβάδισμα του Μ.Τ.Ρ.Π. (ν=93, f=47,44%) και

Σχήμα 27. Τάξη Ε΄, 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



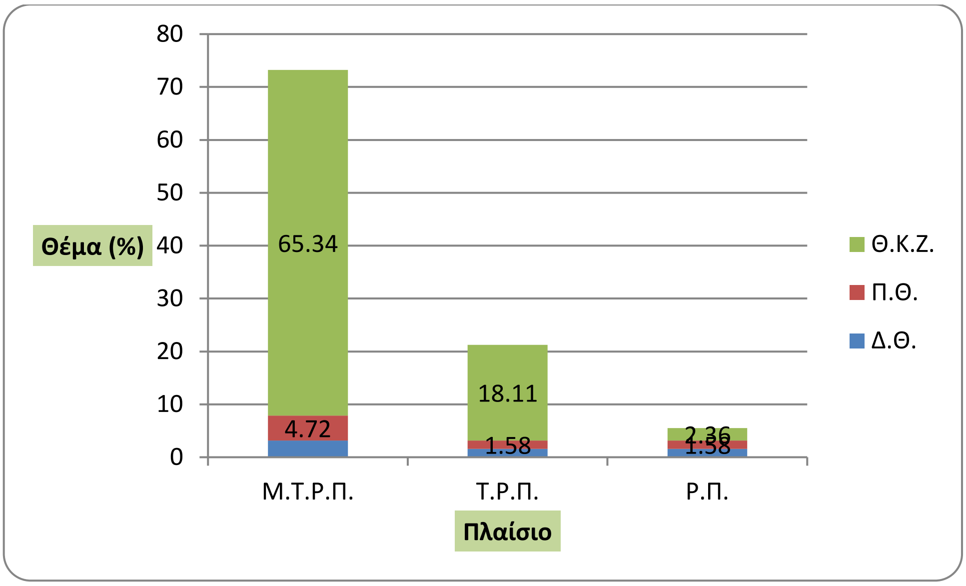
ακολουθεί το Μ.Π. (ν=61, f=35,21%). Στις δραστηριότητες που απομένουν, υπάρχουν 27 δραστηριότητες με Τ.Ρ.Π. (13,78%) και 7 δραστηριότητες με Ρ.Π. (3,57%). Συνεπώς στο μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων οι μαθητές/τριες πρέπει να εκτελέσουν μια ενέργεια με νόημα έξω από κάποιο ρεαλιστικό πλαίσιο. Καταγράφεται μια εμφανής έλλειψη ρεαλιστικού πλαισίου, με την ουσιαστική βοήθεια του οποίου, θα μπορούσαν οι μαθητές/τριες να διαπραγματευτούν περισσότερες δραστηριότητες.

Πίνακας 24: Τάξη Ε΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

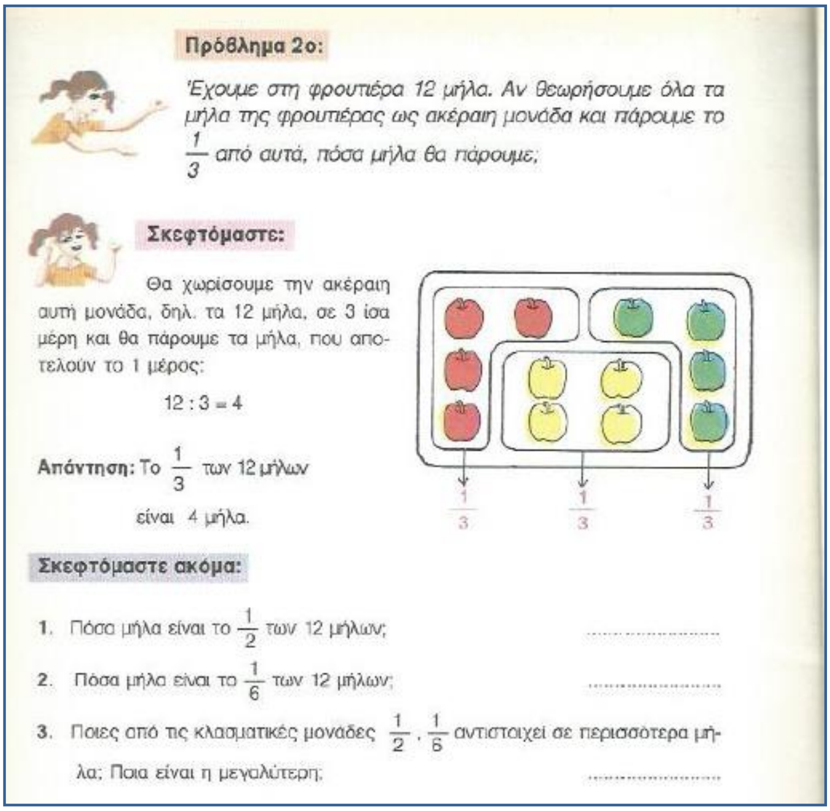
Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	4	03,15	2	01,58	2	1,58	**8**	**06,31**
Π.Θ.	6	04,72	2	01,58	2	1,58	**10**	**07,88**
Θ.Κ.Ζ.	83	65,34	23	18,11	3	2,36	**109**	**85,81**
Σύνολα	**93**	**73,21**	**27**	**21,27**	**7**	**5,52**	**127**	**100**

Στην θεματολογία του πλαισίου (πίνακας 24, σχήμα 27 δεσπόζουν τα «θέματα καθημερινής ζωής» (ν=109, f=85,81%), ενώ μικρό μερίδιο απομένει στα «παιγνιώδη θέματα» (ν=10, f=7,88%) και στα «διεπιστημονικά θέματα» (ν=8, f=6,31%).

Σχήμα 28. Τάξη Ε΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



Στις εικόνες 29, 30, 31 και 32 βρίσκονται 4 χαρακτηριστικά παραδείγματα δραστηριοτήτων από το εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε΄ τάξης του 2000.

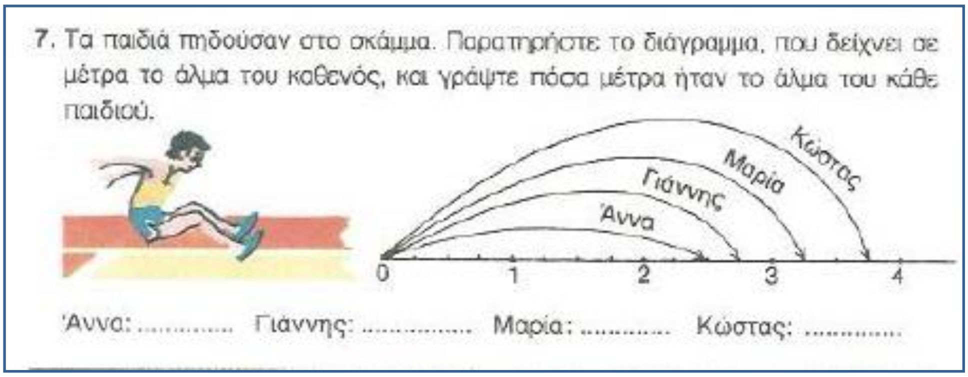


Εικόνα 29. Ε΄,2000, το κλάσμα ως μέρος του όλου λόγος και πηλίκο Τ.Ρ.Π., Θ.Κ.Ζ.

Στην εικόνα 29 απεικονίζεται μια δραστηριότητα με Τ.Ρ.Π. (Το πλαίσιο έχει στοιχεία που μοιάζουν αληθινά). Το κλάσμα ερμηνεύεται ως «πηλίκο» (χωρίζονται τα 12 μήλα σε 3 ίσα μέρη) και από το «όλον» (δηλαδή τα 12 μήλα) λαμβάνεται το 1/3 (δηλαδή «μέρος του όλου»)

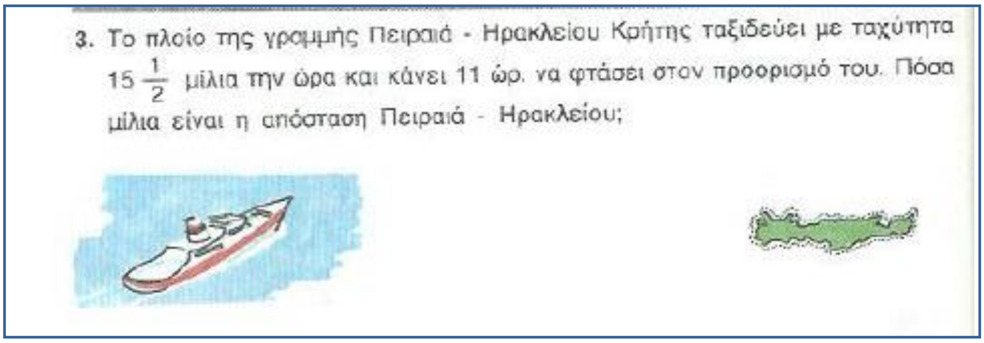
Εικόνα 30. Ε΄,2000, το κλάσμα λόγος, Μ.Τ.Ρ.Π., Π.Θ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 30 πρέπει να συγκριθούν τα 4 κλάσματα που εκφράζουν το την απόσταση που έχει διανύσει κάθε αθλητής, άρα το κλάσμα έχει την ερμηνεία του «λόγου». Το πλαίσιο είναι «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό» διότι η επίλυση της δραστηριότητας θα γίνει με μαθηματική διαδικασία εκτός του πλαισίου. Το θέμα μπορεί να χαρακτηριστεί παιγνιώδες, αφού έχει σχέση με αθλητισμό. Στην δραστηριότητα της εικόνας 31 το κλάσμα έχει ερμηνεία «μέτρησης», αφού θα δώσει την απάντηση στην ερώτηση: «πόσα μέτρα ήταν το άλμα κάθε αθλητή». Το πλαίσιο έχει αληθοφανή στοιχεία, άρα είναι στην κατηγορία Τ.Ρ.Π. και το θέμα είναι «παιγνιώδες», αφού και αυτό σχετίζεται με τον αθλητισμό.



Εικόνα 31. Ε΄,2000, το κλάσμα ως μέτρηση, Τ.Ρ.Π., Π.Θ.

Στην εικόνα 32 απεικονίζεται μια από τις ελάχιστες δραστηριότητες του εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του 2000, της οποίας το θέμα του πλαισίου μπορεί να θεωρηθεί διεπιστημονικό. Το πλαίσιο όμως είναι «μαθηματικό - τεχνητά ρεαλιστικό», οπότε το θέμα δεν έχει ενεργό ρόλο στην επίλυση της δραστηριότητας, αφού η επίλυσή της θα γίνει με μαθηματική διαδικασία εκτός του πλαισίου. Το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέτρηση» (απάντηση στην ερώτηση: «πόσα μίλια είναι η απόσταση Πειραιά – Ηρακλείου») και ως «τελεστής», διότι για να βρεθεί η απόσταση πρέπει να πολλαπλασιαστεί το κλάσμα της ταχύτητας με τον χρόνο.



3. Το πλοίο της γραμμής Πειραιά - Ηρακλείου Κρήτης ταξιδεύει με ταχύτητα $15\frac{1}{2}$ μίλια την ώρα και κάνει 11 ώρ. να φτάσει στον προορισμό του. Πόσα μίλια είναι η απόσταση Πειραιά - Ηρακλείου;

Εικόνα 32. Ε΄,2000, το κλάσμα ως μέτρηση και τελεστής, Μ.Τ.Ρ.Π., Δ.Θ.

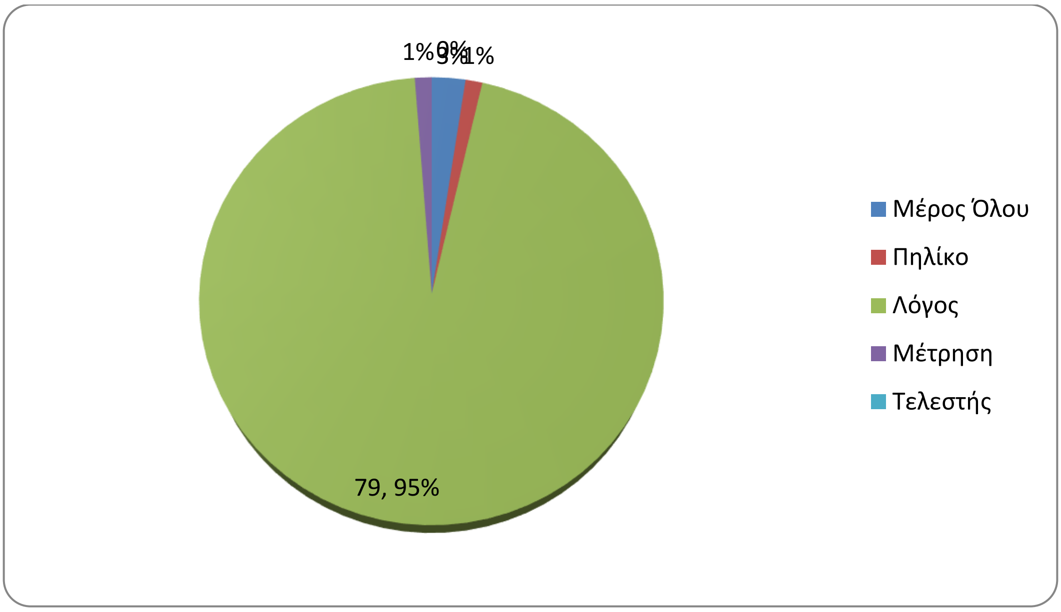
4.3.6 Εγχειρίδιο ΣΤ΄ τάξης του 2000

Στο εγχειρίδιο των μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης του 2000 τα κλάσματα συναντώνται σε ένα μεγάλο μέρος της ύλης και οι σχετικές ενότητες είναι: ίσα ή ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση μεγεθών με λόγους, αναλογίες, ποσά ανάλογα, ποσά αντιστρόφως ανάλογα, ποσοστό στα εκατό και προβλήματα. Μετρήθηκαν και αξιολογήθηκαν για ανάλυση 83 δραστηριότητες (πίνακας 25, σχήμα 29)

Πίνακας 25: Τάξη ΣΤ΄,2000,πλήθος δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

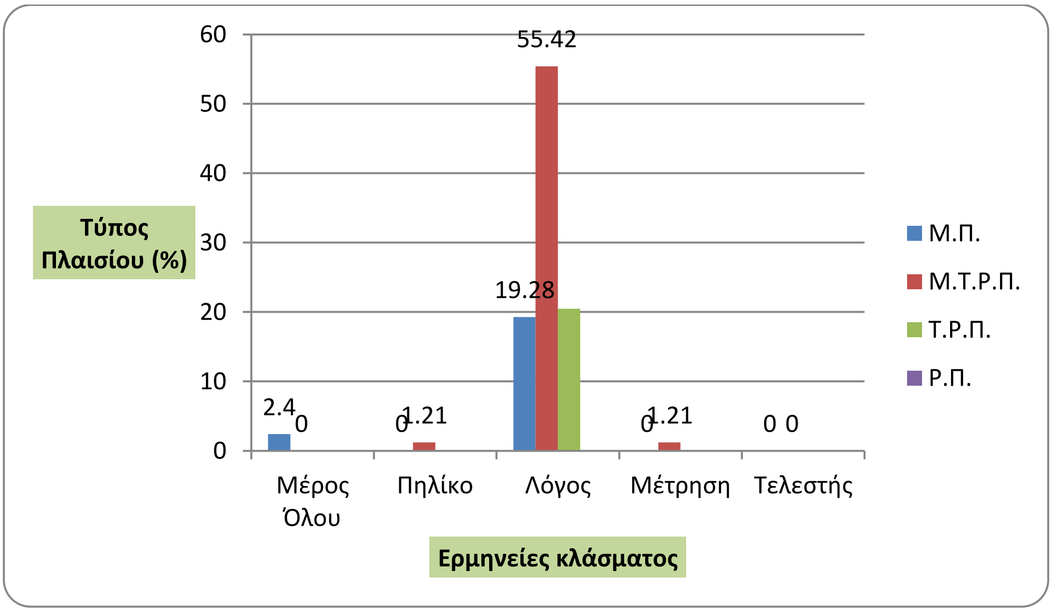
Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Μ.Π.	2	2,40	0	0	16	19,28	0	0	0	0	**18**	**21,68**
Μ.Τ.Ρ.Π.	0	0	1	1,21	46	55,42	1	1,21	0	0	**48**	**57,84**
Τ.Ρ.Π.	0	0	0	0	17	20,48	0	0	0	0	**17**	**20,48**
Ρ.Π.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
Σύνολα	**2**	**2,40**	**1**	**1,21**	**79**	**95,18**	**1**	**1,21**	**0**	**0**	**83**	**100**

Σχήμα 29. Τάξη ΣΤ΄,2000, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος



Τα αποτελέσματα σε αυτό το εγχειρίδιο δεν τα χαρακτηρίζει η ποικιλία. Στο σύνολο σχεδόν των δραστηριοτήτων (ν=79, f=95,18%) το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος», γεγονός αναμενόμενο, λόγω των αντικειμένων που μελετώνται στα Μαθηματικά της ΣΤ΄ τάξης του 2000 (σύγκριση μεγεθών, λόγοι, αναλογίες). Σε 2 δραστηριότητες (2,40%) το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου», σε 1 ως «πηλίκο» (1,21%) και σε 1 δραστηριότητα ως μέτρηση (1,21%).

Σχήμα 30. Τάξη ΣΤ΄, 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος



Ο τύπος του πλαισίου (πίνακας 25, σχήμα 30) που κυριαρχεί είναι το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό», όπου πλαισιώνει 48 από τις 83 δραστηριότητες (57,84%). Ακολουθούν το «μαθηματικό πλαίσιο» (ν=18, f=21,68%) και το «τεχνητά ρεαλιστικό» (ν=17, f=20,48%).

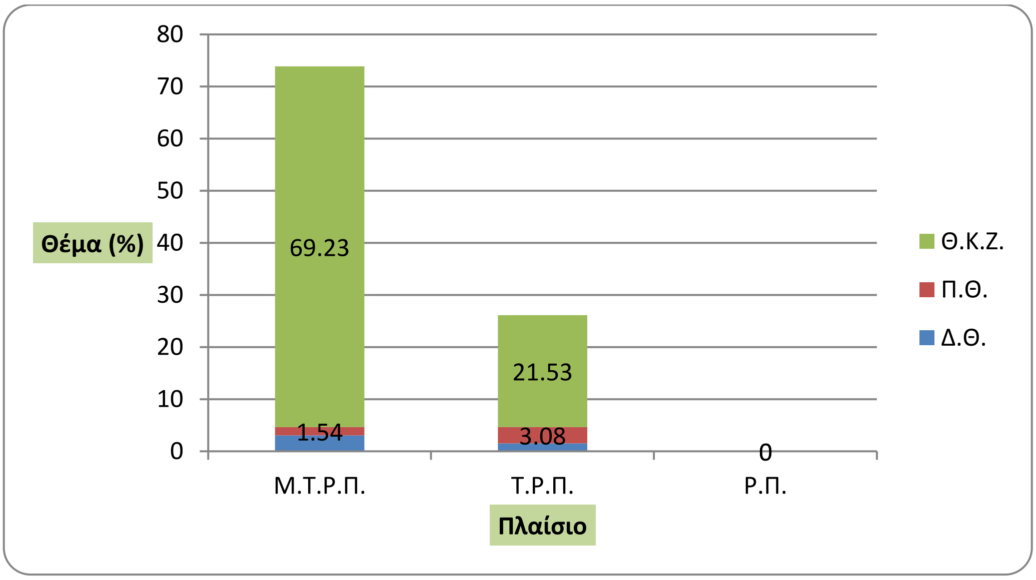
Πίνακας 26: Τάξη ΣΤ΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		Σύνολα	
	ν	f	ν	f	ν	f	ν	f
Δ.Θ.	2	3,08	1	1,54	0	0	**3**	**04,62**
Π.Θ.	1	1,54	2	3,08	0	0	**3**	**04,62**
Θ.Κ.Ζ.	45	69,23	14	21,53	0	0	**59**	**90,76**
Σύνολα	**48**	**73,85**	**17**	**26,15**	**0**	**0**	**65**	**100**

Σχετικά με την θεματολογία του πλαισίου (πίνακας 26, σχήμα 31), σε 59 από τις 65 δραστηριότητες με ρεαλιστικά στοιχεία (90,76%) το θέμα είναι από την καθημερινή ζωή. Στις περισσότερες από αυτές δραστηριότητες το θέμα σχετίζεται περισσότερο με την ζωή των ενηλίκων και ελάχιστα με την μαθητική ζωή και τα καθημερινά ενδιαφέροντα των παιδιών. Υπάρχουν ακόμη 3 δραστηριότητες (4,62%) με «διεπιστημονικό θέμα» και επίσης 3 δραστηριότητες (4,32%) με «παιγνιώδες θέμα».

Στις εικόνες 33, 34, 35, 36 και 37 παρακάτω απεικονίζονται χαρακτηριστικά παραδείγματα δραστηριοτήτων από το εγχειρίδιο των μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης του 2000.

Σχήμα 31. Τάξη ΣΤ΄,2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



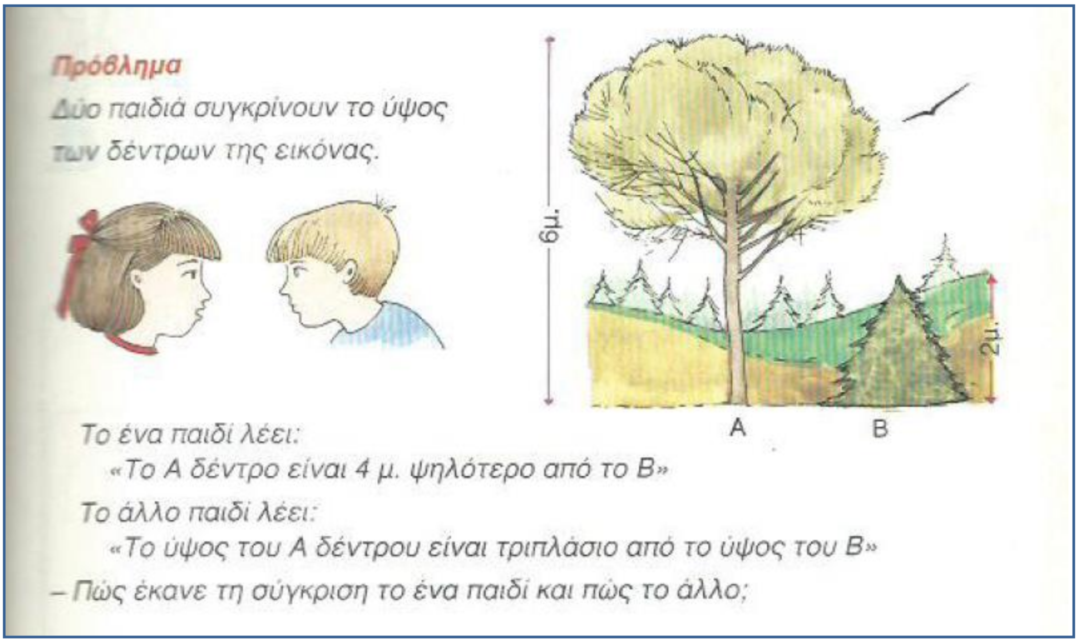
Στην δραστηριότητα της εικόνας 33 το πλαίσιο είναι «μαθηματικό» και ερμηνεία του κλάσματος είναι ο «λόγος» αφού πρόκειται για απλοποίηση κλασμάτων, άρα για ισοδύναμα κλάσματα.

Εικόνα 33. ΣΤ΄,2000, το κλάσμα ως λόγος, Μ.Π.

Στην εικόνα 34, προφανώς το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος» αφού δηλώνεται αυτό στην εκφώνηση. Το πλαίσιο είναι «τεχνητά – ρεαλιστικό», διότι περιέχει αληθοφανή στοιχεία της πραγματικότητας και εντός του πλαισίου μπορεί ο/η μαθητής/τρια να πραγματοποιήσει μια ενέργεια με νόημα (φαίνονται 4 αυτοκίνητα και 16 άνθρωποι, άρα λόγος των ανθρώπων προς τα αυτοκίνητα είναι 4/16=1/4).

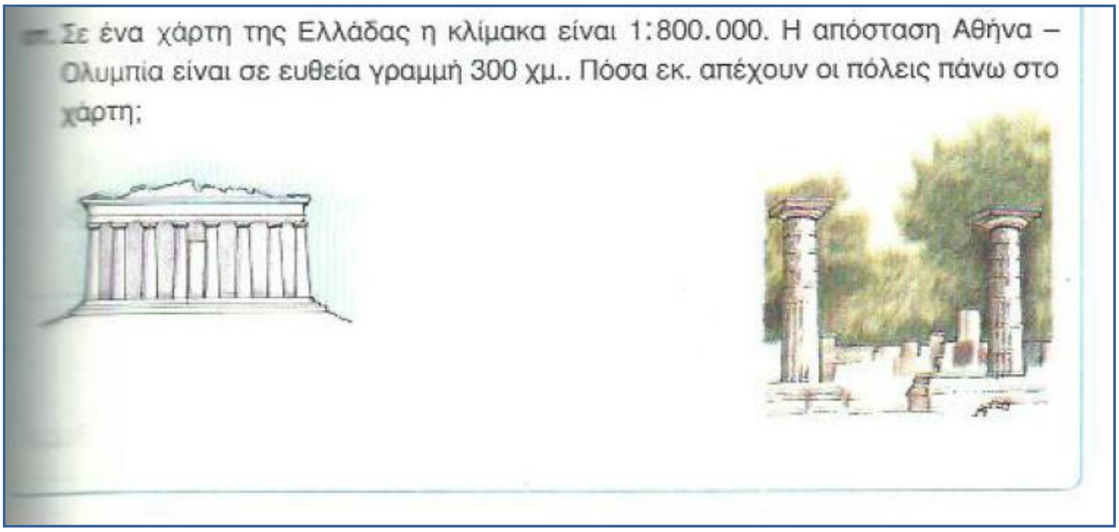
Εικόνα 34. ΣΤ΄,2000, το κλάσμα ως λόγος, Τ.Ρ.Π.,Θ.Κ.Ζ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 35 υπάρχει πάλι Τ.Ρ.Π. και η ερμηνεία του κλάσματος είναι ο «λόγος» αφού ζητείται σύγκριση δύο μεγεθών.



Εικόνα 35. ΣΤ΄,2000, το κλάσμα ως λόγος, Τ.Ρ.Π.,Θ.Κ.Ζ.

Στην εικόνα 36 προβάλλεται μια από τις ελάχιστες δραστηριότητες με «διεπιστημονικό θέμα». Το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος» αφού πρέπει οι μαθητές/τριες να βρουν την απόσταση Αθήνας – Ολυμπίας πάνω στο χάρτη, άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την κλίμακα του χάρτη. Το πλαίσιο είναι Μ.Τ.Ρ.Π., διότι εντός του πλαισίου της δραστηριότητας δεν μπορεί ο/η μαθητής/τρια να πραγματοποιήσει κάποια ενέργεια με νόημα. Ο ρόλος του πλαισίου εδώ είναι να μετατρέψει εικονικά το μαθηματικό πρόβλημα σε ρεαλιστικό. Η διεπιστημονικότητα του θέματος του πλαισίου προκύπτει από τα στοιχεία του πλαισίου: τις εικόνες (Παρθενώνας, Αρχαία Ολυμπία), χάρτης της Ελλάδας, απόσταση, μονάδες απόστασης.



Εικόνα 36. ΣΤ΄,2000, το κλάσμα ως λόγος, Μ.Τ.Ρ.Π.,Δ.Θ.


Πρόβλημα 2ο

Η Μαρία για να φτιάξει ένα κολιέ σαν αυτό της εικόνας, χρειάζεται μαύρες και άσπρες χάντρες με λόγο 3 προς 2 ή $\frac{3}{2}$

Έχει στη διάθεσή της πολλές μαύρες χάντρες, αλλά μόνο 16 άσπρες. Πόσες μαύρες χάντρες θα χρησιμοποιήσει;

Εικόνα 37. ΣΤ΄,2000, το κλάσμα ως λόγος, Τ.Ρ.Π., Π.Θ.

Στην δραστηριότητα της εικόνας 37 το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος», αφού υπάρχει αναλογία των άσπρων και των μαύρων χαντρών. Το πλαίσιο περιέχει αληθοφανή στοιχεία και ο/η μαθητής/τρια μπορεί να ενεργήσει με νόημα μέσα σε αυτό, επομένως είναι «τεχνητά ρεαλιστικό». Βλέπει ότι για κάθε 3 μαύρες χάντρες χρειάζεται 2 άσπρες, οπότε επαναλαμβάνοντας 8 φορές την διαδικασία θα βρει ότι χρειάζονται 24 μαύρες χάντρες. Το θέμα του πλαισίου έχει προφανώς σχέση με το παιχνίδι και μπορεί να χαρακτηριστεί παιγνιώδες.

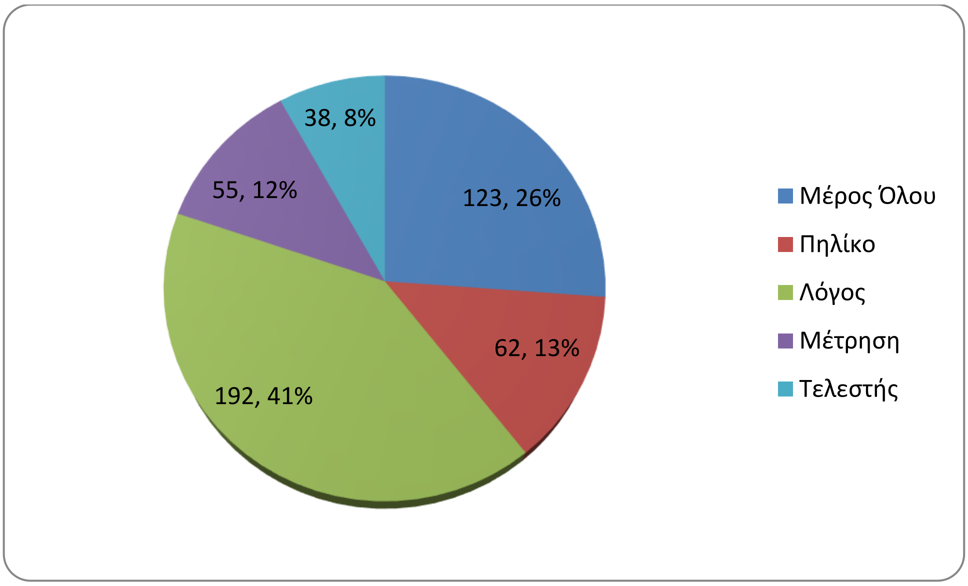
4.3.7 Συνολικά αποτελέσματα των εγχειριδίων του 2000

Στα εγχειρίδια των Μαθηματικών του 2000 συνολικά αναλύθηκαν 470 δραστηριότητες (πίνακας 27, σχήμα 32). Η ερμηνεία του κλάσματος ως «λόγος» σαφώς έχει με σημαντική διαφορά την πρώτη θέση (ν= 192, f=40,84%) έναντι της ερμηνείας «μέρος του όλου» (ν= 123, f= 26,18%) που ακολουθεί στην δεύτερη θέση. Στην τρίτη θέση βρίσκεται το «πηλίκο» (ν= 62, f= 13,20%), στην τέταρτη θέση η ερμηνεία «μέτρηση» (ν= 55, f= 11,70%) και τελευταία η ερμηνεία «τελεστής» (ν= 38, f= 8,08%).

Πίνακας 27: Εγχειρίδια 2000, δραστηριότητες ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Μ.Π.	43	9,15	42	8,94	80	17,02	05	1,06	11	2,34	**181**	**38,51**
Μ.Τ.Ρ.Π.	35	7,45	9	1,91	73	15,53	39	8,30	27	5,74	**183**	**38,93**
Τ.Ρ.Π.	22	4,69	9	1,91	30	06,38	08	1,70	0	0	**069**	**14,68**
Ρ.Π.	23	4,89	2	0,44	09	01,91	03	0,64	0	0	**037**	**07,88**
Σύνολα	**123**	**26,18**	**62**	**13,20**	**192**	**40,84**	**55**	**11,70**	**38**	**8,08**	**470**	**100**

Σχήμα 32. Εγχειρίδια,2000, πλήθος και ποσοστό δραστηριοτήτων ανά ερμηνεία του κλάσματος

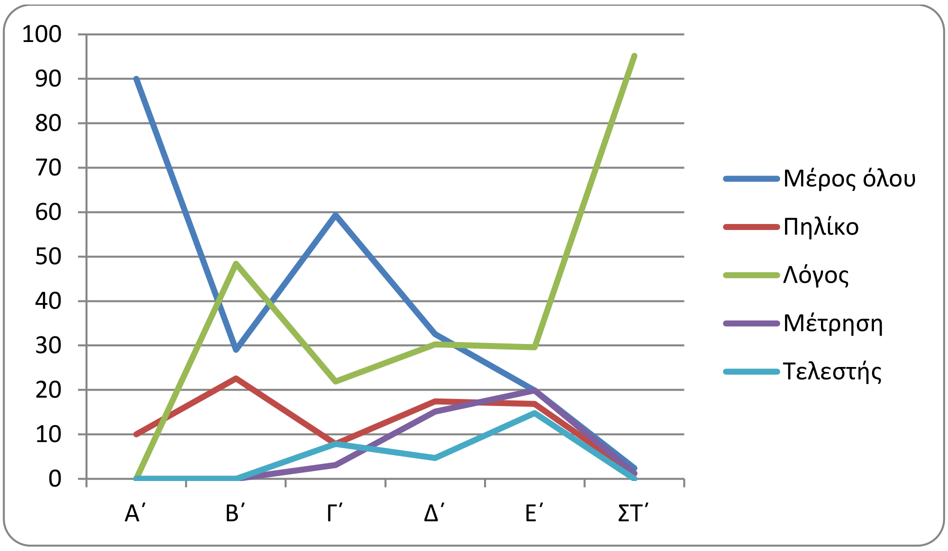


Ο πίνακας 28 και το σχήμα 33 παρακάτω αποδίδουν την εξέλιξη των πέντε ερμηνειών του κλάσματος από την Α΄ τάξη έως την ΣΤ΄ τάξη στα εγχειρίδια του 2002. Η ερμηνεία «μέρος του όλου» καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων του εγχειριδίου της Α΄ τάξης (90%), μειώνεται σημαντικά στο εγχειρίδιο της Β΄ τάξης (29,03%), επανέρχεται με ισχυρή παρουσία στην Γ΄ τάξη (59,36%) και μειώνεται σταδιακά στις επόμενες τάξεις: 32,56% στην Δ΄ τάξη, 18,88% στην Ε΄ τάξη και 2,40% στην ΣΤ΄ τάξη. Η ερμηνεία «πηλίκο» έχει μια σταθερή σχετικά παρουσία στις πέντε πρώτες τάξεις: στην Α΄ τάξη 10%, στην Β΄ τάξη 22,59%, στην Γ΄ τάξη 7,82%, στην Δ΄ τάξη 17,44% και στην Ε΄ τάξη 16,84%, ενώ στην ΣΤ΄ τάξη έχει σχεδόν αμελητέα παρουσία 1,21%. Η ερμηνεία «λόγος» εμφανίζεται στην Β΄ τάξη στις μισές περίπου δραστηριότητες (48,38%), μειώνεται κατά πολύ στην Γ΄ τάξη (21,87%), αυξάνεται στην Δ΄ τάξη (30,23%), παραμένει σχεδόν στο ίδιο επίπεδο στην Ε΄ τάξη (29,59%) και εκτοξεύεται κατακόρυφα στην ΣΤ΄ τάξη (95,18%). Η ερμηνεία «μέτρηση» εμφανίζεται στην Γ΄ τάξη με μικρή παρουσία (3,13%), φτάνει στην Δ΄ τάξη στο 15,11%, αυξάνεται κι άλλο στην Ε΄ τάξη (19,90%) και στην ΣΤ΄ τάξη εξανεμίζεται στο 1,21%. Η ερμηνεία «τελεστής» υπάρχει μόνο σε τρεις τάξεις: στην Γ΄ τάξη (7,82%), στην Δ΄ τάξη (4,66%) και στην Ε΄ τάξη (14,79%). Είναι προφανές, ότι στην ΣΤ΄ τάξη όλες οι ερμηνείες σχεδόν μηδενίζονται εκτός από την ερμηνεία «λόγος» που ανεβαίνει στο 95,18%.

Πίνακας 28: Εγχειρίδια 2000, οι ερμηνείες του κλάσματος (%) ανά τάξη

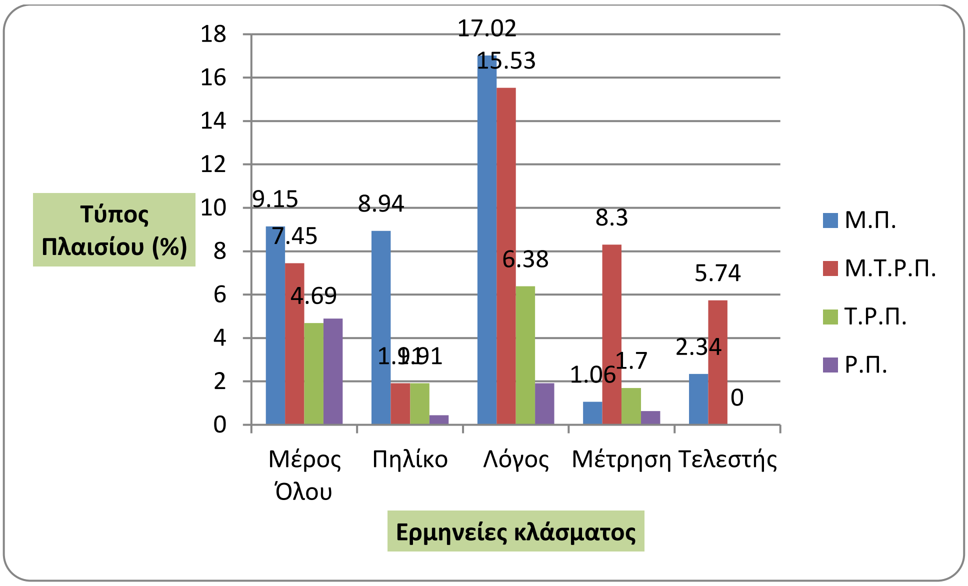
Τάξη	Μέρος όλου	Πηλίκο	Λόγος	Μέτρηση	Τελεστής
	f	**f**	**f**	**f**	**f**
Α΄	90,00	10,00	0	0	0
Β΄	29,03	22,59	48,38	0	0
Γ΄	59,36	07,82	21,87	03,13	07,82
Δ΄	32,56	17,44	30,23	15,11	04,66
Ε΄	18,88	16,84	29,59	19,90	14,79
ΣΤ΄	02,40	01,21	95,18	01,21	0

Σχήμα 33. Εγχειρίδια 2000, εξέλιξη των ερμηνειών του κλάσματος ανά τάξη



Αναφορικά με το πλαίσιο (πίνακας 27, σχήμα 34) το 61,5% των δραστηριοτήτων έχουν πλαίσιο με ρεαλιστικά στοιχεία: 38,93 % ανήκουν στο «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», 14,68% στο «τεχνητά – ρεαλιστικό πλαίσιο» και 7,88% στο «ρεαλιστικό πλαίσιο». Βεβαίως μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων (περίπου 39%) έχει πλαίσιο Μ.Τ.Ρ., δηλαδή πλαίσιο «μηδενικής τάξης», μέσα στο οποίο ο/η μαθητής/τρια δεν πραγματοποιεί κάποια ενέργεια με νόημα. Η παρουσία του «μαθηματικού πλαισίου» εξακολουθεί να είναι ισχυρή (38,5%), που σημαίνει ότι περίπου 4 στις 10 δραστηριότητας διατυπώνονται αμιγώς με μαθηματικά στοιχεία.

Σχήμα 34. Εγχειρίδια 2000, τύποι πλαισίου ανά ερμηνεία του κλάσματος

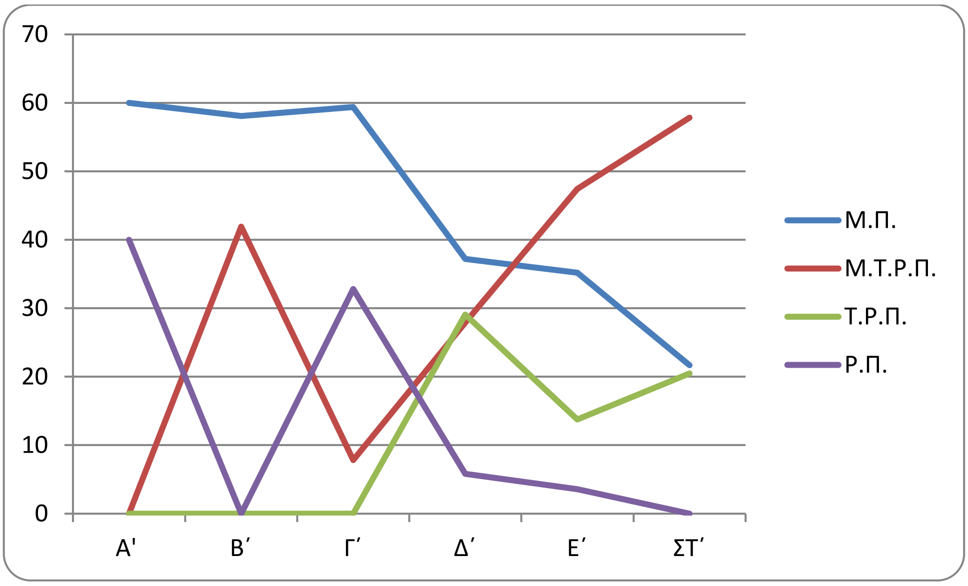


Σε κάθε ερμηνεία του κλάσματος ξεχωριστά (σχήμα 34), κυριαρχούν το Μ.Π. (38,51%) και το Μ.Τ.Ρ.Π. (38,93%). Το Μ.Π. προηγείται στο «μέρος του όλου» (9,15%), στο «πηλίκο» (8,94%) και στο «λόγο» 17,02%, ενώ το Μ.Τ.Ρ.Π. προηγείται στην «μέτρηση» (8,3%) και στον «τελεστή» (5,74%). Το Τ.Ρ.Π. έχει μεγαλύτερη παρουσία στο «λόγο» (6,38%) και στο «μέρος του όλου» (4,69%), ενώ στην «μέτρηση» και στο «πηλίκο» έχει μικρή παρουσία (1,70%) και (1,91%) αντίστοιχα. Το Ρ.Π. εμφανίζεται σε όλες τις ερμηνείες με αδύναμη σχετικά παρουσία: 4,89% στην ερμηνεία «μέρος του όλου», 0,44% στο «πηλίκο», 1,91% στον «λόγο» και 0,64% στην «μέτρηση». Οι μεταβολές κάθε τύπου πλαισίου από τάξη σε τάξη, εικονίζονται στον πίνακα 29 και αναπαριστάνονται στο σχήμα 35 παρακάτω. Το Μ.Π. είναι σταθερό στις πρώτες τάξεις με τιμή κοντά στο 60% και μειώνεται σταδιακά στις επόμενες τάξεις: 37,20% στην Δ΄, 35,21% στην Ε΄ και 21,68% στην ΣΤ΄ τάξη. Το Μ.Τ.Ρ.Π. είναι ανύπαρκτο στην Α΄ τάξη και ακλουθούν σημαντικές αυξομειώσεις: ανεβαίνει στο 42,93% στην Β΄ τάξη, πέφτει στο 7,82% στην Γ΄, ανεβαίνει στο 27,91% στην Δ΄ τάξη, στο 47, 44% στην Ε΄ τάξη και καταλήγει στο 57,84% στην ΣΤ΄ τάξη. Το Τ.Ρ.Π. είναι ανύπαρκτο στην Α΄, στην Β΄ και στην Γ΄ τάξη, στην Δ΄ τάξη εμφανίζει το μεγαλύτερο ποσοστό του (29,08%), μειώνεται στην Ε΄ τάξη (13,78%) και αυξάνεται στην ΣΤ΄ τάξη φτάνοντας στο 20,48%. Το Ρ.Π. ακολουθεί αντίστροφη πορεία από το Μ.Τ.Ρ.Π., όπως σαφώς φαίνεται στο σχήμα 35. Έχει ισχυρή παρουσία στην Α΄ τάξη (40%), μηδενική παρουσία στην Β΄, ανεβαίνει στο 32,81% στην Γ΄ τάξη, στην Δ΄ τάξη βυθίζεται στο 5,81%, στην Ε΄ στο 3,57% και μηδενίζεται στην ΣΤ΄ τάξη.

Πίνακας 29: Εγχειρίδια 2000, οι τύποι του πλαισίου (%) ανά τάξη

Τάξη	Μ.Π.	Μ.Τ.Ρ.Π.	Τ.Ρ.Π.	Ρ.Π.
	f	**f**	**f**	**f**
Α΄	60	0	0	40
Β΄	58,07	41,93	0	0
Γ΄	59,37	07,82	0	32,81
Δ΄	37,20	27,91	29,08	05,81
Ε΄	35,21	47,44	13,78	03,57
ΣΤ΄	21,68	57,84	20,48	0

Σχήμα 35. Εγχειρίδια 2000, μεταβολή των τύπων του πλαισίου ανά τάξη

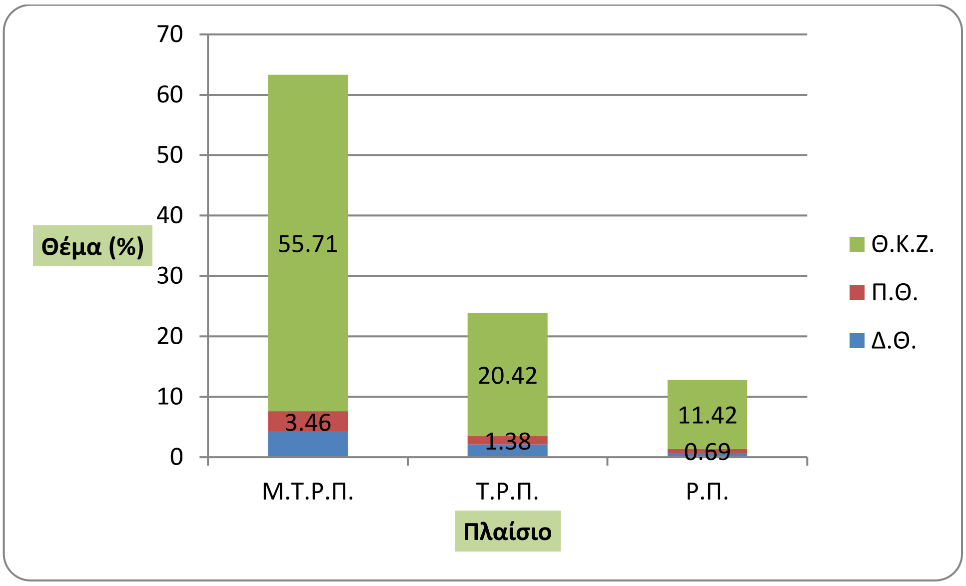


Η θεματολογία των τριών τύπων πλαισίου με ρεαλιστικά στοιχεία (πίνακας 30, σχήμα 36) καλύπτεται σε πολύ μεγάλο τμήμα της (87,55%) από τα «θέματα καθημερινής ζωής» ενώ το μικρό τμήμα που απομένει, το μοιράζονται τα «διεπιστημονικά θέματα» (6,92%) και τα «παιγνιώδη θέματα» (5,53%).

Πίνακας 30: Εγχειρίδια 2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	ν	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**	**ν**	**f**
Δ.Θ.	12	04,15	6	02,08	2	0,69	**20**	**06,92**
Π.Θ.	10	03,46	4	01,38	2	0,69	**16**	**05,53**
Θ.Κ.Ζ.	161	55,71	59	20,42	33	11,42	**253**	**87,55**
Σύνολα	**183**	**63,32**	**69**	**23,88**	**37**	**12,80**	**289**	**100**

Σχήμα 36. Εγχειρίδια 2000, κατηγορίες θεμάτων ανά τύπο πλαισίου



Συμπερασματικά, στα εγχειρίδια των Μαθηματικών του 2000 το κλάσμα συναντάται ως έννοια και με τις πέντε ερμηνείες του. Προηγείται οι ερμηνεία «λόγος» και έπονται οι ερμηνείες «μέρος του όλου» και «πηλίκο». Το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» και το «μαθηματικό πλαίσιο» ισοκατανέμονται στο 80% περίπου των δραστηριοτήτων. Το υπόλοιπο 20% των δραστηριοτήτων πλαισιώνεται με «τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» και «ρεαλιστικό πλαίσιο», με μικρότερη την παρουσία του Ρ.Π. (σχεδόν 8%). Τα «θέματα καθημερινής ζωής», κυριαρχούν στην θεματολογία του πλαισίου με ρεαλιστικά στοιχεία, όμως σε πολλές δραστηριότητες σχετίζονται περισσότερο με την ενήλικη ζωή και είναι απομακρυσμένα από τα ενδιαφέροντα της παιδικής ηλικίας. Τα «διεπιστημονικά θέματα» και τα «παιγνιώδη θέματα» εμφανίζονται σε μικρό αριθμό δραστηριοτήτων (περίπου 7% και 5,5% αντίστοιχα).

4.4 Συγκριτικά αποτελέσματα των ετών 1982 και 2000

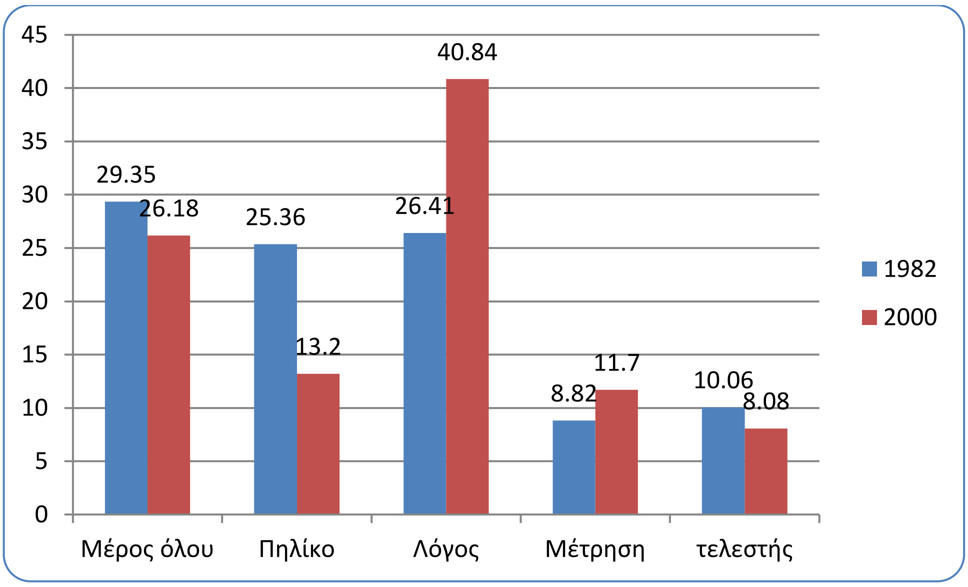
4.4.1 Οι ερμηνείες του κλάσματος στο 1982 και στο 2000

Οι τρεις από τις πέντε ερμηνείες (πίνακας 31, σχήμα 37), «μέρος του όλου», «μέτρηση» και «τελεστής», εμφανίζουν (με μικρές αποκλίσεις) σχεδόν τα ίδια ποσοστά και στα εγχειρίδια του 1982 και στα εγχειρίδια του 2000. Αρκετά μεγάλες διαφορές παρατηρούνται στην ερμηνεία «λόγος» (26,41% το 1982 και 40,84% το 2000) και στο «πηλίκο» (25,36% το 1982 και 13,20% το 2000). Οι ερμηνείες «μέτρηση» και «τελεστής» έχουν και στα δύο έτη την ίδια σχεδόν μικρή παρουσία που κυμαίνεται κοντά στο 10%.

Πίνακας 31 : Εγχειρίδια 1982 & 2000, δραστηριότητες (%) ανά ερμηνεία κλάσματος και τύπο πλαισίου

Τύπος πλαισίου	Μέρος όλου		Πηλίκο		Λόγος		Μέτρηση		Τελεστής		Σύνολα	
	1982	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**
Μ.Π.	7,76	9,15	10,69	8,94	13,63	17,02	0,20	1,06	2,94	2,34	**35,20**	**38,51**
Μ.Τ.Ρ.Π.	5,45	7,45	0	1,91	2,30	15,53	0	8,30	3,35	5,74	**11,10**	**38,93**
Τ.Ρ.Π.	0	4,69	0	1,91	0	06,38	0	1,70	0	0	**0**	**14,68**
Ρ.Π.	16,14	4,89	14,67	0,44	10,48	01,91	8,60	0,64	3,77	0	**53,70**	**07,88**
Σύνολα	**29,35**	**26,18**	**25,36**	**13,20**	**26,41**	**40,84**	**8,82**	**11,70**	**10,06**	**8,08**	**100**	**100**

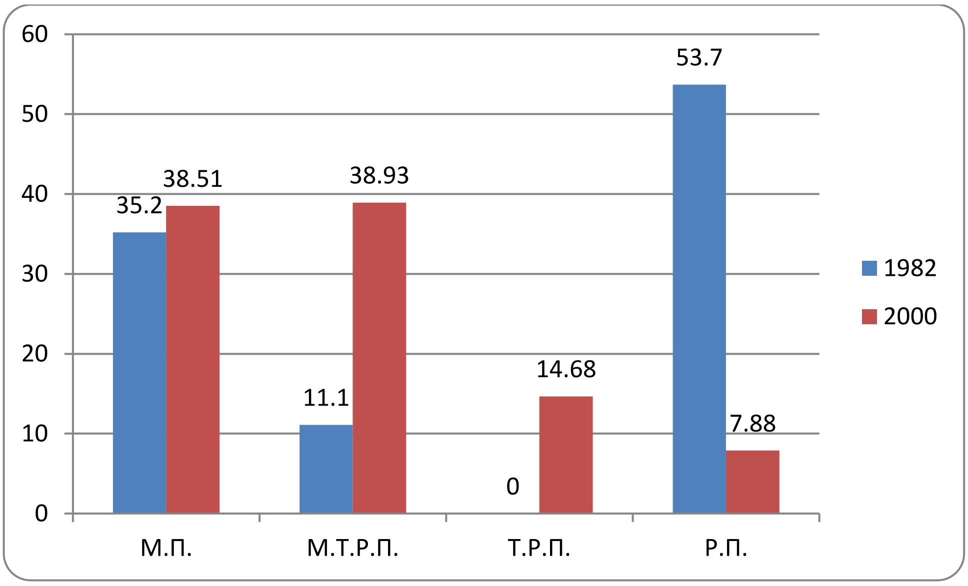
Σχήμα 37. Οι ερμηνείες του κλάσματος στο 1982 και στο2000



4.4.2 Οι τύποι του πλαισίου στο 1982 και στο 2000

Στο σχήμα 38 απεικονίζονται οι 4 τύποι του πλαισίου στο 1982 και στο 2000. Το «μαθηματικό πλαίσιο» εμφανίζει μικρή διαφορά στα δύο έτη (σχεδόν 3% παραπάνω στο 2000). Το «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» από το 11,1% το 1982 αυξάνεται κατακόρυφα στο 38,93% στο 2000 (διαφορά 28%). Το «τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» είναι ανύπαρκτο στις δραστηριότητες του 1982 και πλησιάζει στο 15% στο 2000. Τέλος, το «ρεαλιστικό πλαίσιο» ενώ στο 1982 πλαισιώνει περισσότερες από τις μισές δραστηριότητες που περιέχουν ρεαλιστικά στοιχεία (53,7%), στο 2000 καταποντίζεται στο 7,88%. Η μείωση αυτή εξισορροπείται εν μέρει από την αύξηση του Μ.Τ.Ρ.Π. και του Τ.Ρ.Π.

Σχήμα 38. Οι τύποι πλαισίου στο 1982 και στο2000



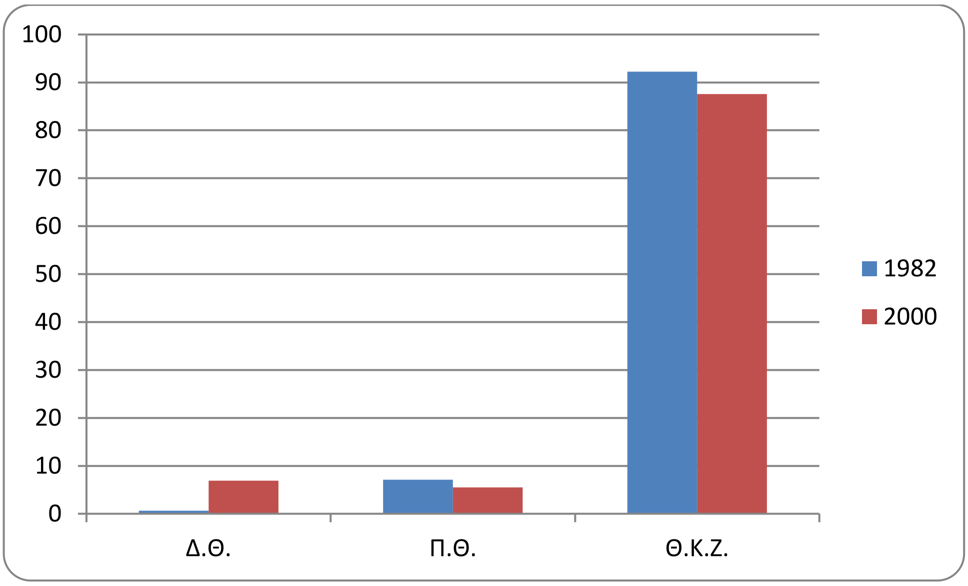
4.4.3 Τα θέματα του πλαισίου στο 1982 και στο 2000

Τα ποσοστά των θεμάτων του πλαισίου στις δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 και του 2000, καταγράφονται στον πίνακα 32 και αναπαριστάνονται στο σχήμα 39 παρακάτω. Τα «θέματα καθημερινής ζωής» βρίσκονται και στα δύο έτη πολύ ψηλά με μια απόκλιση 5% (92,24% στο 1982 και 87,55% στο 2000). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρατηρείται μείωση των Θ.Κ.Ζ. στο 2000 και μια αύξηση κοντά στο 6% στα «διεπιστημονικά θέματα». Τα «παιγνιώδη θέματα» βρίσκονται σε σχετικά χαμηλά επίπεδα αν και σχετίζονται περισσότερο με την παιδική ζωή και θα μπορούσαν να προσελκύσουν πιο εύκολα το ενδιαφέρον των παιδιών του δημοτικού σχολείου. Τα Θ.Κ.Ζ. στο 1982 συναντώνται στο 82% των δραστηριοτήτων με «ρεαλιστικό πλαίσιο» και στο 10,3% των δραστηριοτήτων με «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» , ενώ στο 2000 συναντώνται στο 55,7% των δραστηριοτήτων με «μαθηματικό – τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο», στο 20,4% των δραστηριοτήτων με «τεχνητά ρεαλιστικό πλαίσιο» και στο 11,4% των δραστηριοτήτων με «ρεαλιστικό πλαίσιο». Τα θέματα καθημερινής ζωής στο μεγαλύτερο μέρος τους δεν αφορούν δράσεις και ενέργειες των μαθητών/τριών του δημοτικού σχολείου.

Πίνακας 32. Τα θέματα του πλαισίου (%) στο 1982 και στο2000

Τύπος θέματος	Μ.Τ.Ρ.Π.		Τ.Ρ.Π.		Ρ.Π.		**Σύνολα**	
	1982	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**	**1982**	**2000**
Δ.Θ.	0,32	04,15	0	02,08	0,32	0,69	**0,64**	**06,92**
Π.Θ.	6,48	03,46	0	01,38	0,64	0,69	**7,12**	**05,53**
Θ.Κ.Ζ.	10,36	55,71	0	20,42	81,88	11,42	**92,24**	**87,55**
Σύνολα	**17,16**	**63,32**	**0**	**23,88**	**82,84**	**12,80**	**100**	**100**

Σχήμα 39. Τα θέματα του πλαισίου στο 1982 και στο2000



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Συζήτηση –Συμπεράσματα

5.1 Γενικά Συμπεράσματα

Αναδεικνύεται και σε αυτήν την μελέτη η μέγιστη διαχρονική σημασία του κλάσματος για την διδασκαλία των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, η οποία στοχεύει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για τον χειρισμό καθημερινών προβλημάτων, αλλά και στην δημιουργία θεμελίων για την προσέγγιση αλγεβρικών εννοιών. Σημαντικό τμήμα της ύλης των μαθηματικών εγχειριδίων όλων των τάξεων των ετών 1982 και 2000 αφιερώνεται στα κλάσματα. Η άποψη αυτή ενισχύεται από την ύπαρξη μεγάλου αριθμού δραστηριοτήτων σχετικών με τα κλάσματα, που αναλύθηκαν σε αυτή την μελέτη (477 δραστηριότητες στο 1982 και 470 στο 2000), προκειμένου οι μαθητές/τριες να προσεγγίσουν την έννοια του κλάσματος και να διαπραγματευθούν τις ιδιότητες και τις πράξεις των κλασμάτων. Καλλιεργείται η πεποίθηση ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης διέρχεται μέσα από την διδασκαλία και την κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα φανερό στις μεγαλύτερες τάξεις, κυρίως στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη, όπου εισάγονται αντικείμενα (αναλογίες, εξισώσεις, ποσοστά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, φυσικά μεγέθη, κ.τ.λ.), η διδασκαλία και η κατανόηση των οποίων προϋποθέτει το κλάσμα ως βασικό και αναντικατάστατο εργαλείο. Είναι αναγκαία η διδασκαλία και η κατανόηση των πέντε διαφορετικών ερμηνειών του κλάσματος, αφού το κλάσμα δεν μπορεί να οριστεί και να κατανοηθεί ως ένα απλό και μονοδιάστατο κατασκεύασμα. Θα πρέπει ωστόσο, οι ερμηνείες αυτές να διδάσκονται μετά από σωστό προγραμματισμό, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, ώστε να μην επέρχεται η σύγχυση στους/στις μαθητές/τριες και τελικά η αδυναμία κατανόησης, ή η ελλιπής κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Τονίζεται επίσης στην μελέτη αυτή, ο σημαντικός ρόλος των κλασμάτων σε πολλά προβλήματα της καθημερινής ζωής και για το λόγο αυτό υπάρχει μεγάλος αριθμός δραστηριοτήτων, των οποίων το πλαίσιο αντλεί το θέμα του από την καθημερινή ζωή. Δεν έχει πλέον θέση η απαρχαιωμένη άποψη ότι τα Μαθηματικά συνιστούν ένα σχολικό μάθημα και τίποτα άλλο. Η μαθηματική γνώση είναι πολύτιμος αρωγός στην ερμηνεία του κόσμου και τελικά στην κατανόησή του. Όσες περισσότερες «λέξεις» γνωρίζει κάποιος από αυτή τη «γλώσσα», δηλαδή τα Μαθηματικά, τόσο καλύτερα αξιοποιεί τις δυνατότητες του μυαλού του. Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα εργαλείο για τη βελτίωση των ατομικών επιδόσεων, αλλά ένας βασικός μοχλός που βοηθάει την κοινωνική ανάπτυξη. (Βανδουλάκης, Καλιγγάς, Μαρκάκης, & Φερεντίνος, 2013).

Τα σχολικά εγχειρίδια, ως ένα εν δυνάμει μέσο δημιουργίας ευκαιριών μάθησης για τους μαθητές και το κύριο διδακτικό υλικό για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010), επιφορτίζονται με τον δύσκολο ρόλο να «επικοινωνήσουν» στους/στις μαθητές/τριες την μαθηματική γνώση και στην προκειμένη περίπτωση την συγκεκριμένη γνώση που αφορά τα κλάσματα. Συνεπώς, μπορούν να θεωρηθούν η γέφυρα που καθιστά δυνατή και διευκολύνει αυτήν την επικοινωνία, του γνωστικού αγαθού με τον/την κάθε μαθητή/τρια. Αδιαμφισβήτητα πρωταρχικός παράγοντας και μοχλός ώστε να καταστεί η επικοινωνία αυτή λειτουργική και αποτελεσματική, θα πρέπει να είναι ο εκπαιδευτικός. Το αποτέλεσμα εξαρτάται άμεσα από τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές/τριες αλληλεπιδρούν με τα σχολικά εγχειρίδια στην διδακτική διαδικασία. Οι προσδοκίες που καλλιεργούν τα εγχειρίδια για την επιτυχία της διδασκαλίας και την απόδοση των μαθητών είναι διαφορετικές για κάθε μαθητή/τρια, για κάθε τάξη και ποικίλουν από τόπο σε τόπο. Έτσι, οι αναλύσεις σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών έχουν ιδιαίτερη σημασία για την μαθηματική εκπαίδευση, γιατί τεκμηριώνουν συγκεκριμένους τρόπους με τους οποίους τα εγχειρίδια μπορούν να δομήσουν ευκαιρίες μάθησης για τους/τις μαθητές/τριες (Charalambous, κ.ά., 2010).

Η μαθηματική γνώση γενικά, αλλά και ιδιαίτερα αυτή που είναι σχετική με τα κλάσματα, κυκλοφορείται και επικοινωνείται στο τρίγωνο μαθητής/τρια – σχολικά εγχειρίδια – εκπαιδευτικός με όχημα την δραστηριότητα. Η δραστηριότητα είναι το εργαλείο που παρέχει στον/στην μαθητή/τρια την δυνατότητα να αναπτύξει την ικανότητα εφαρμογής των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, γεγονός που θεωρείται ο βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Με την δραστηριότητα δίνεται έμφαση στον χρηστικό σκοπό των Μαθηματικών στα προβλήματα που αναδύονται από καθημερινές καταστάσεις. Η διαπραγμάτευση και επίλυση μιας δραστηριότητας απαιτεί την αλληλεπίδραση μεταξύ του πραγματικού κόσμου και των Μαθηματικών, η οποία συχνά περιγράφεται ως διαδικασία «μοντελοποίησης και «μαθηματικοποίησης». Στο πρόγραμμα PISA (Programme for International Student

Assessment) ως «μαθηματικοποίηση» περιγράφεται η διαδικασία που απαιτείται για την επίλυση ενός «πλαισιωμένου» προβλήματος (Wijaya, κ.ά., 2014).

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες προηγούνται της θεωρίας και έχουν στόχο να δημιουργηθεί ο προβληματισμός και η αναζήτηση που θα οδηγήσει στην ανάγκη να αναπτυχθεί η κατάλληλη θεωρία. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η θεωρία είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Το σημαντικότερο για τους/τις μαθητές/τριες δεν είναι η συνεχής συσσώρευση τυποποιημένων γνώσεων, που συχνά μένουν στείρες, αλλά ο τρόπος που αποκτάται σε κάθε περίπτωση η απαραίτητη γνώση. Αν στον τρόπο αυτό προστεθεί και η μέθοδος εμπέδωσης και αξιοποίησής της, τότε αυτή η γνώση παίρνει διαστάσεις του πολύτιμου αγαθού και της κοινωνικής αξίας, που παραμένει ο τελικός στόχος κάθε εκπαιδευτικής διαδικασίας. Σε αυτή την πορεία αναντικατάστατος οδηγός είναι ο παιδαγωγικά καταρτισμένος εκπαιδευτικός. (Βανδουλάκης, κ.ά., 2013).

Η ποιότητα και το αποτέλεσμα της επικοινωνίας του/της μαθητή/τριας μέσω της δραστηριότητας με την μαθηματική γνώση εν γένει, αλλά και ειδικότερα με την έννοιες και τις πράξεις των κλασματικών αριθμών, εξαρτάται άμεσα από το πλαίσιο της δραστηριότητας. Αν το πλαίσιο είναι ενδιαφέρον και οικείο για τον/την μαθητή/τρια τότε η επικοινωνία θα είναι «φιλική», έξω από τα αυστηρά φορμαλιστικά μαθηματικά πλαίσια, που λειτουργούν αποτρεπτικά για τους/τις περισσότερους/ες μαθητές/τριες και, ενδεχομένως να είναι λίαν αποτελεσματική. Το πλαίσιο είναι αυτό που θα προσδώσει στην δραστηριότητα την ικμάδα και την ενέργεια, που θα προσελκύσει τον/την μαθητή/τρια, ώστε να δημιουργηθεί η απαραίτητη ευχάριστη παιδαγωγική ατμόσφαιρα, μέσα στην οποία ο/η μαθητής/τρια θα επικοινωνήσει με την νέα γνώση και θα αναπτύξει γόνιμους συλλογισμούς. Στην περίπτωση της έννοιας του κλάσματος, η οποία κατά τεκμήριο δυσκολεύει και προβληματίζει διαχρονικά τους/τις μαθητές/τριες σε μεγάλο βαθμό, το πλαίσιο είναι ίσως ο πιο σημαντικός παράγοντας που δυνητικά ρυθμίζει την επιτυχημένη διδασκαλία της και τελικά την κατανόησή της.

Τα πλαίσια που έχουν θέματα από την καθημερινή ζωή μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διδακτικό εργαλείο για την υποστήριξη της μάθησης των μαθητών/τριών. Όταν οι εμπειρίες των μαθητών/τριών ενσωματώνονται σε αυτά τα πλαίσια, τότε δημιουργείται μια ουσιαστική βάση για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που θα διδαχθούν, πολύ δε περισσότερο στην διδασκαλία των κλασμάτων. Το πλαίσιο μπορεί να υποδείξει στον/στην μαθητή/τρια στρατηγικές επίλυσης μιας δραστηριότητες. Ωστόσο δεν πρέπει να θεωρείται δεδομένο ότι οι μαθητές/τριες μπορούν να λύσουν πάντα μια πλαισιωμένη δραστηριότητα. Η κύρια δυσκολία που αντιμετωπίζουν είναι η κατανόηση των πληροφοριών που παίρνουν από το πλαίσιο και η διάκριση μεταξύ σχετικών και άσχετων πληροφοριών. Αυτό θα έχει σαν συνέπεια να μην αναγνωρίσουν ή να μην επιλέξουν την σωστή μαθηματική διαδικασία για την επίλυση της δραστηριότητας (Wijaya, κ.ά., 2015).

Επομένως κάθε δραστηριότητα που θα τεθεί στους/στις μαθητές/τριες θα πρέπει να έχει δομηθεί σωστά, ώστε το πλαίσιο της αφενός να είναι γνώριμο στους/στις μαθητές/τριες και αφετέρου να παρέχει σε αυτούς/τές την δυνατότητα, να προσλάβουν τις σωστές και κατάλληλες πληροφορίες για την επίλυση της δραστηριότητας. Έργο του εκπαιδευτικού είναι η προσεκτική επιλογή από τα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών, αυτών των δραστηριοτήτων, οι οποίες θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών του και θα τους/τις καταστήσουν ενεργούς/ές στην μαθησιακή διαδικασία. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι τα εγχειρίδια θα πρέπει να δίνουν αυτήν την δυνατότητα. Είναι συνεπώς σκόπιμο, οι συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών να λαμβάνουν υπόψη τους όλα το κοινωνικά δεδομένα, για την αποφυγή του φαινομένου ένα σχολικό εγχειρίδιο να απευθύνεται επιλεκτικά σε μια μερίδα του μαθητικού πληθυσμού.

5.2 Οι ερμηνείες του κλάσματος στα εγχειρίδια του 1982 και του 2000

Οι πέντε ερμηνείες του κλάσματος (μέρος του όλου – πηλίκο – λόγος – μέτρηση – τελεστής) είναι παρούσες στα εγχειρίδια των Μαθηματικών και του 1982 και του 2000. Την μεγαλύτερη παρουσία έχουν οι ερμηνείες «μέρος του όλου», «πηλίκο» και «λόγος» (με διακυμάνσεις από τάξη σε τάξη), ενώ αρκετά πιο μικρή παρουσία έχουν οι ερμηνείες «μέτρηση» και «τελεστής» με ένα ποσοστό περίπου 19% στο 1982 και το ίδιο σχεδόν και στο 2000. Η εμφάνιση και των πέντε ερμηνειών του κλάσματος, με όχι αμελητέα παρουσία, στις δραστηριότητες που αναλύθηκαν, κρίνεται ιδιαίτερα θετικό αποτέλεσμα, αφού επιβεβαιώνει και ενισχύει την άποψη σχεδόν όλων των ερευνητών: Το κλάσμα είναι ένα πολύπλευρο κατασκεύασμα που εμφανίζεται με πέντε διαφορετικές ερμηνείες (υποκατασκευές). Καμιά από αυτές δεν μπορεί να παραβλεφθεί και να θεωρηθεί μη απαραίτητη για την διδασκαλία και την κατανόησή του. Έτσι, ο/η μαθητής/τρια του δημοτικού σχολείου, στο 1982 και στο 2000, κατά την φοίτησή του θα γνωρίσει και τις πέντε ερμηνείες.

Η ερμηνεία «μέρος του όλου» μπορεί να θεωρηθεί θεμελιώδης και αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση των άλλων ερμηνειών και του κλάσματος γενικά. Η ερμηνεία αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί και ως φυσική ερμηνεία του κλάσματος, κάτι που αιτιολογείται από την ετυμολογία της λέξης «κλάσμα», η οποία προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη «κλάω» ή «κλω» που σημαίνει κόβω ή τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα επομένως δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι από κάποιο ολόκληρο πράγμα ή ποσότητα, δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα Μαθηματικά αυτό που μοιράζεται, θεωρείται ότι μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το «κλάσμα» πρέπει να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη διαμερίστηκε το ολόκληρο ή «όλον» και πόσα από αυτά τα μέρη πήρε κάποιος (Βανδουλάκης, κ.ά., 2013). Σε όλα τα εγχειρίδια του 1982 η ερμηνεία «μέρος του όλου» εμφανίζεται στο μεγαλύτερο ποσοστό των δραστηριοτήτων που αναλύθηκαν σε κάθε εγχειρίδιο. Χρησιμοποιείται για την εισαγωγή της έννοιας στις μικρότερες τάξεις, αφού πρώτα το κλάσμα διδάσκεται ως κλασματική μονάδα. Η παρουσία της μειώνεται στις μεγαλύτερες τάξεις, στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη, πράγμα αναμενόμενο αφού διδάσκονται πιο απαιτητικά αντικείμενα σχετικά με τα κλάσματα και άρα δεν επαρκεί από μόνη της η ερμηνεία «μέρος του όλου». Παρόμοια είναι και η εξέλιξη της ερμηνείας αυτής και στα εγχειρίδια του 2000. Το μεγαλύτερο ποσοστό της παρατηρείται στην Γ΄ τάξη και στο 1982 και στο 2000. Αυτό που τη διαφοροποιεί είναι ότι η παρουσία της στα εγχειρίδια του 2000 μειώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό στις μεγαλύτερες τάξεις.

Η επόμενη ερμηνεία του κλάσματος που σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί περιττή και να παρακαμφθεί στην διδασκαλία, είναι το «πηλίκο». Το «πηλίκο» διαμερίζει ένα ολόκληρο πράγμα ή μια ποσότητα σε ίσα μερίδια. Όταν ένα κλάσμα ερμηνεύεται ως «πηλίκο» θεωρείται ως το αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή του δια του παρονομαστή του, το οποίο απαντά στο ερώτημα πόσο θα πάρει κάποιος αν διαμοιραστεί μια ποσότητα χ σε ψ ίσα μερίδια. Το «πηλίκο» επεκτείνει την ερμηνεία «μέρος του όλου» και δεν υπάρχει περιορισμός στους όρους του κλάσματος. Ο αριθμητής μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερος, είτε ίσος, είτε μικρότερος από τον παρονομαστή. Η ερμηνεία «πηλίκο» χρησιμοποιείται παράλληλα με το «μέρος του όλου» για την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος. Στα εγχειρίδια του

1982 εμφανίζεται σε μεγάλο ποσοστό δραστηριοτήτων στην Β΄ τάξη, μειώνεται στην Γ΄ και στην Δ΄ τάξη και αυξάνεται σημαντικά στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη. Στα εγχειρίδια του 2000 έχει σταθερή παρουσία στις πέντε πρώτες τάξεις, ξεκινώντας από την Α΄ τάξη, ενώ μειώνεται σημαντικά στην ΣΤ΄ τάξη. Είναι αξιοσημείωτη η διαφορά που υπάρχει στα εγχειρίδια του 2000 έναντι αυτών του 1982. Το πηλίκο συναντάται στο 25% των δραστηριοτήτων στα εγχειρίδια του 1982 και στο 13% των δραστηριοτήτων στα εγχειρίδια του 2000.

Τρίτη στις ερμηνείες του κλάσματος κατά σειρά σημασίας είναι η ερμηνεία «λόγος», η οποία χαρακτηρίζεται από πολλούς ερευνητές ως απαιτητική, που δημιουργεί αρκετές δυσκολίες στους/στις μαθητές/τριες. Όταν το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος» χρησιμοποιείται για τη σύγκριση δύο ποσοτήτων, όχι κατ' ανάγκην όμοιων. Στην περίπτωση αυτή το κλάσμα είναι ένας δείκτης που περιγράφει το αποτέλεσμα της σύγκρισης (π.χ. το κλάσμα 4/3 ενδέχεται να σημαίνει ότι αντιστοιχούν 4 αντικείμενα ανά 3 άτομα). Στα εγχειρίδια του 1982 η ερμηνεία «λόγος» έχει ισχυρή παρουσία στο εγχειρίδιο της Β΄ τάξης, σχεδόν μηδενίζεται στην Γ΄ τάξη, επανεμφανίζεται με μεγάλο ποσοστό (55%) στην Δ΄ τάξη, μειώνεται στο 21% στην Ε΄ τάξη και αυξάνεται στο 45% στην ΣΤ΄ τάξη. Παρεμφερής είναι η παρουσία αυτής της ερμηνείας και στα εγχειρίδια του 2000, με παρουσία 48% στην Β΄ τάξη, 22% στην Γ΄ τάξη, 30% στην Δ΄ τάξη, 30% στην Ε΄ τάξη και 95% στην ΣΤ΄ τάξη. Η σημαντική διαφοροποίηση στα εγχειρίδια του 2000 από τα εγχειρίδια του 1982, είναι το πολύ μεγάλο ποσοστό που παρουσιάζει η ερμηνεία «λόγος» στην ΣΤ΄ τάξη. Συνολικά στα εγχειρίδια του 1982 η ερμηνεία «λόγος» έχει ποσοστό 26% ενώ στα εγχειρίδια του 2000 έχει ποσοστό κοντά στο 41%. Ωστόσο αυτό είναι αναμενόμενο και δικαιολογείται από το γεγονός, ότι το μεγαλύτερο μέρος της ύλης των κλασμάτων της ΣΤ΄ τάξης του 2000 αναφέρεται στην σύγκριση και στις αναλογίες, αντικείμενα στα οποία το κλάσμα δεν είναι δυνατόν να ερμηνευτεί διαφορετικά.

Η ερμηνεία «μέτρηση» μπορεί να θεωρηθεί ως δευτερεύουσα ερμηνεία του κλάσματος, είναι όμως απαραίτητη στις περιπτώσεις που το κλάσμα εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας ποσότητας ή ενός μεγέθους. Όταν μια ποσότητα δεν παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, είναι δηλαδή συνεχής, τότε είναι αναγκαίο για την μέτρησή της να χρησιμοποιηθούν κλασματικοί αριθμοί. Οι αναπαραστάσεις των κλασμάτων στη γραμμή των αριθμών προϋποθέτουν την ερμηνεία του κλάσματος ως «μέτρηση». Στα εγχειρίδια του 1982 η ερμηνεία αυτή καταγράφεται στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη με ποσοστά 13% και 10% αντίστοιχα. Στα εγχειρίδια του 2000 συναντάται σε τέσσερις τάξεις, στην Γ΄, στην Δ΄, στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη με πολύ μικρά ποσοστά όμως στην Γ΄ και στην ΣΤ΄ τάξη (3% και 1% αντίστοιχα).

Η ερμηνεία «τελεστής» έχει τη μικρότερη συμμετοχή και στα εγχειρίδια του 1982 και στα εγχειρίδια του 2000 (περίπου 1,2% στο 1982 και 8% στο 2000). Είναι μια αρκετά πολύπλοκη ερμηνεία η οποία συνδέεται περισσότερο με αλγεβρικές έννοιες. Όταν το κλάσμα ερμηνεύεται ως «τελεστής», τότε επιδρά πάνω σε κάποιον αριθμό ή σε κάποια ποσότητα, ή σε κάποιο μέγεθος και τη μετασχηματίζει κατά έναν καθορισμένο τρόπο (πολλαπλασιάζει ή υποπολλαπλασιάζει, επεκτείνει ή συρρικνώνει). Η χρήση της έννοιας «τελεστής» στα Μαθηματικά παραπέμπει περισσότερο στην χρήση συναρτήσεων. Συνεπώς, είναι μάλλον αδύνατον να χρησιμοποιηθεί η έννοια αυτή στα Μαθηματικά του δημοτικού με το πλήρες νόημά της. Στον πολλαπλασιασμό ενός κλάσματος με έναν οποιοδήποτε αριθμό το κλάσμα ενέχει την ερμηνεία του «τελεστή», χωρίς βεβαίως οι μαθητές/τριες του δημοτικού να το γνωρίζουν αυτό ρητά στην τυπική του έκφραση. Έτσι, η ερμηνεία αυτή έχει περιορισμένη χρήση στα κλάσματα που διδάσκονται στο δημοτικό, όπως αποτυπώνεται αυτό στα εγχειρίδια του 1982 και του 2000 και η χρήση αυτή γίνεται άτυπα, έξω από τα φορμαλιστικά πλαίσια των Μαθηματικών.

5.3 Οι τύποι του πλαισίου στα εγχειρίδια του 1982 και του 2000

Η δυναμική του πλαισίου είναι παρούσα στις δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 και του 2000, με αρκετές διαφοροποιήσεις βεβαίως. Το γεγονός αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τις κατευθύνσεις των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών για ρεαλιστικές προσεγγίσεις στην διδασκαλία, δηλαδή η μάθηση να προκύπτει μέσα από πραγματικές καταστάσεις της ζωής των παιδιών, οι οποίες επιλέγονται με βάση το βαθμό ανάπτυξης των μαθητών/τριών και σε συνάρτηση με τους διδακτικούς στόχους. Η προστιθέμενη αξία της μάθησης που συντελείται στην διδασκαλία μέσω ρεαλιστικών καταστάσεων, είναι αδιαμφισβήτητη και γι' αυτό θα πρέπει να αποτελεί πλέον τον κεντρικό σκοπό των προγραμμάτων σπουδών. Η συγγραφή σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών θα πρέπει να διακατέχεται από αυτήν την τάση, δηλαδή τα εγχειρίδια να παρέχουν στους εκπαιδευτικούς την δυνατότητα οργάνωσης διδακτικών καταστάσεων, με κύριο εργαλείο την ρεαλιστική προσέγγιση. Έτσι η μάθηση ως προϊόν μιας τέτοιας διδασκαλίας θα είναι ουσιαστική και αποτελεσματική. Αυτή η μάθηση θα βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να διαμορφώσουν θετικές στάσεις και να επιτύχουν υψηλού επιπέδου δεξιότητες διαχρονικής αξίας.

Στις δραστηριότητες των εγχειριδίων των Μαθηματικών του 2000 που σχετίζονται με τα κλάσματα, το πλαίσιο εμφανίζεται εμπλουτισμένο (περισσότερες εικόνες και πιο παραστατικές, περισσότερα διαγράμματα και αναπαραστάσεις) σε σχέση με το πλαίσιο των δραστηριοτήτων που αναφέρονται στα κλάσματα στα εγχειρίδια του 1982. Όπου το πλαίσιο περιγράφεται λεκτικά, η διατύπωση είναι πιο φιλική στον/στην μαθητή/τρια και περισσότερο αναλυτική, ώστε ο/η μαθητής/τρια να μπορεί να προσπελάσει πιο εύκολα την δραστηριότητα.

Στην διδασκαλία που οργανώνεται στην βάση μιας ρεαλιστικής προσέγγισης, όπου οι δραστηριότητες ρεαλιστικού πλαισίου έχουν πρωτεύοντα και καθοριστικό ρόλο, αντενδείκνυται το «Μαθηματικό Πλαίσιο» (Μ.Π.). Οι δραστηριότητες που ανήκουν στην κατηγορία του Μ.Π. διατυπώνονται αποκλειστικά με μαθηματικά στοιχεία (μαθηματικά σύμβολα, αριθμούς, γεωμετρικά σχήματα) και διέπονται από μαθηματικό φορμαλισμό. Παρ' όλα αυτά το Μ.Π. έχει ισχυρή παρουσία και στα εγχειρίδια του 1982 (35%) και στα εγχειρίδια του 2000 (38,5%). Κάτι περισσότερο από το 1/3 των δραστηριοτήτων στα εγχειρίδια του 1982 και του 2000 είναι στην κατηγορία του «μαθηματικού πλαισίου». Αξίζει να αναφερθεί η μικρή αύξηση του Μ.Π. (3,5%) που παρατηρείται στα εγχειρίδια του 2000. Αυτό είναι μη αναμενόμενο, αφού στο 2000 εισάγεται το «Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών» (ΔΕΠΠΣ), εφαρμόζονται νέα Α.Π.Σ. και συγγράφονται πρότυπα σχολικά εγχειρίδια. Τα νέα Α.Π.Σ. επαγγέλονται την διαθεματική οργάνωση του των περιεχομένων των γνωστικών αντικειμένων και διερευνητικές – διεπιστημονικές προσεγγίσεις.

Εμφανή παρουσία στις δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 και του 2000 έχει το «Μαθηματικό – Τεχνητά Ρεαλιστικό Πλαίσιο» (Μ.Τ.Ρ.Π.). Στα εγχειρίδια του 1981 το 11% των δραστηριοτήτων και στα εγχειρίδια του 2000 το 39% των δραστηριοτήτων, πλαισιώνονται με Μ.Τ.Ρ.Π.. Σε μια δραστηριότητα αυτής της κατηγορίας ο/η μαθητής/τρια ενεργεί εκτός ρεαλιστικού πλαισίου. Ο ρόλος του πλαισίου δεν είναι ουσιαστικός, χρησιμοποιείται για να «ρεαλιστικοποιήσει» ένα μαθηματικό πρόβλημα. Επομένως αυτή η δραστηριότητα μπορεί να διαπραγματευτεί ως ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, στο μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων της κατηγορίας Μ.Τ.Ρ.Π. το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος» και ως «τελεστής». Αυτό μπορεί να οφείλεται στην φύση των ερμηνειών αυτών, που δεν ευνοεί την ανάπτυξη δραστηριοτήτων με ρεαλιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορεί να ενεργήσει με νόημα ο/η μαθητής/τρια.

Στον αντίποδα του Μ.Τ.Ρ.Π. βρίσκεται το «Τεχνητά Ρεαλιστικό Πλαίσιο» (Τ.Ρ.Π.). Οι δραστηριότητες της κατηγορίας αυτής περιέχουν στοιχεία οιονεί αληθινά, δηλαδή στοιχεία που μοιάζουν με πραγματικά. Συνοδεύονται από εικόνες ή σκίτσα που απεικονίζουν μια πραγματικότητα με εξιδανικευμένα χαρακτηριστικά. Σε μια τέτοια δραστηριότητα το πλαίσιο δίνει στον/στην μαθητή/τρια την δυνατότητα να ενεργήσει με νόημα μέσα σε ρεαλιστικό πλαίσιο, ώστε η διαδικασία επίλυσης που θα ακολουθήσει να συνδέεται άμεσα με τα στοιχεία του πλαισίου. Στις δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 το Τ.Ρ.Π. είναι ανύπαρκτο. Αυτό ίσως να οφείλεται στην έλλειψη πόρων και μέσων στην συγγραφή και εκτύπωση των βιβλίων αυτής της εποχής, δεδομένου ότι η τεχνολογία της εποχής δεν προσέφερε τις προχωρημένες δυνατότητες του 2000. Στα εγχειρίδια του 2000 το Τ.Ρ.Π. πλαισιώνει περίπου το 15% των δραστηριοτήτων και στις περισσότερες από αυτές τις δραστηριότητες το κλάσμα ερμηνεύεται ως «λόγος». Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δραστηριότητες που έχουν Τ.Ρ.Π. βρίσκονται στα εγχειρίδια της Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης. Αυτό σημαίνει ότι τα εγχειρίδια των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων του 2000, δεν παρέχουν την δυνατότητα στους «μικρούς» μαθητές του δημοτικού, όταν διδάσκονται τα κλάσματα, να αντιμετωπίζουν δραστηριότητες των οποίων το πλαίσιο είναι οικείο και ελκυστικό σε αυτούς.

Το πλαίσιο που θα εναρμονίζονταν απόλυτα σε μια διδασκαλία ρεαλιστικής προσέγγισης είναι το Ρεαλιστικό Πλαίσιο (Ρ.Π.). Στις δραστηριότητες της κατηγορίας «Ρεαλιστικού Πλαισίου» η προβληματική κατάσταση αναδύεται μέσα από τις καταστάσεις και τα φαινόμενα της καθημερινής ζωής και το πλαίσιο δίνει στον/στην μαθητή/τρια την δυνατότητα να ενεργεί με νόημα σε πραγματικές συνθήκες. Στις δραστηριότητες των εγχειριδίων του 1982 παρατηρείται μεγάλη παρουσία του Ρ.Π. (54%), όπου κατανέμεται αναλογικά σε όλες τις ερμηνείες του κλάσματος. Επίσης, η μεγαλύτερη παρουσία Ρ.Π. παρατηρείται στην Ε΄ και στην ΣΤ΄ τάξη, η μικρότερη παρουσία στην Γ΄ τάξη ενώ είναι ανύπαρκτο στην Β΄ και στην Δ΄ τάξη. Στα εγχειρίδια του 2000 το Ρ.Π. καταγράφει ένα ποσοστό επί του συνόλου των δραστηριοτήτων κοντά στο 13%. Η αρνητική μεταβολή που παρατηρείται σε σχέση με τα εγχειρίδια του 2000, εξισορροπείται από την παρουσία του Τ.Ρ.Π. (περίπου 24%), αλλά και του Μ.Τ.Ρ.Π. (περίπου 63%). Στις περισσότερες δραστηριότητες με «ρεαλιστικό πλαίσιο» το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέρος του όλου», ενώ σε 3 μόνο δραστηριότητες με Ρ.Π. το κλάσμα ερμηνεύεται ως «μέτρηση» και σε καμιά δραστηριότητα με Ρ.Π. το κλάσμα δεν ερμηνεύεται ως «τελεστής». Η ισχυρή παρουσία του Ρ.Π. στο 2000 βρίσκεται στα εγχειρίδια της Α΄ και της Γ΄ τάξης, ενώ μικρή παρουσία έχει στην Δ΄ και στην Ε΄ τάξη. Στο εγχειρίδιο της ΣΤ΄ τάξης δεν υπάρχει δραστηριότητα ρεαλιστικού πλαισίου. Μια σημαντική διαπίστωση που μπορεί να γίνει εδώ, είναι ότι καθώς τα μαθηματικά αντικείμενα που διδάσκονται αυστηροποιούνται και τυποποιούνται μαθηματικά, το Ρ.Π. παραγκωνίζεται ή εγκαταλείπεται. Η εξήγηση σε αυτό το φαινόμενο άπτεται πολλών παραμέτρων και δεν είναι καθόλου απλή.

Συμπερασματικά αυτό που προκύπτει, είναι ότι τα εγχειρίδια του 1982 και του 2000, δίνουν την ευκαιρία στους/στις μαθητές/τριες των μεσαίων τάξεων (Γ΄, Δ΄ και Ε΄ τάξη) να διαπραγματευτούν δραστηριότητες ρεαλιστικού πλαισίου που αφορούν τα κλάσματα. Αυτό ίσως αποτελεί πρόβλημα κυρίως για τους/τις μαθητές/τριες της Α΄ και Β΄ τάξης που βρίσκονται σε ένα πρώιμο στάδιο ανάπτυξης, όπου στην ζωή τους κυριαρχεί ο κόσμος του παιχνιδιού και δεν έχουν αναπτύξει σε επαρκές επίπεδο την μαθηματική σκέψη για να αντιμετωπίζουν μη ρεαλιστικά προβλήματα. Έτσι, όταν η εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος δεν γίνεται σε ρεαλιστικά πλαίσια, είναι φυσικό, αυτό να αποτελέσει αρνητική προϋπόθεση για τη συνέχεια, έχοντας ως αποτέλεσμα την ελλιπή κατανόηση και την δημιουργία νέων δυσκολιών στις επόμενες τάξεις.

Η θεματολογία του πλαισίου των δραστηριοτήτων στα εγχειρίδια του 1982 και του 2000, επισκιάζεται από τα θέματα της καθημερινής ζωής. (92% στο 1982 και 87,5% στο 2000). Η αρνητική επωδός εδώ είναι ότι στην πλειονότητά τους τα θέματα αυτά αντλούνται από την καθημερινή ζωή και τις δράσεις των μεγάλων (χρηματικές συναλλαγές, προβλήματα τόκου, προβλήματα που αφορούν τις εργασίες ενηλίκων, κ.τ.λ.) Τα διεπιστημονικά και παιγνιώδη θέματα έχουν πολύ μικρή παρουσία. Στα εγχειρίδια του 1982 υπάρχουν 2 δραστηριότητες με διεπιστημονικό θέμα και 20 δραστηριότητες με παιγνιώδες θέμα. Στα εγχειρίδια του 2000 υπάρχουν 20 δραστηριότητες με διεπιστημονικό θέμα και 16 δραστηριότητες με παιγνιώδες θέμα. Είναι ενθαρρυντικό το γεγονός, ότι στα εγχειρίδια του 2000 παρατηρείται σημαντική αύξηση των διεπιστημονικών θεμάτων. Ωστόσο, αναλογικά ο αριθμός των δραστηριοτήτων με διεπιστημονικό θέμα είναι πολύ μικρός (ποσοστό 7%). Σχεδόν αμετάβλητος παραμένει ο αριθμός των δραστηριοτήτων με παιγνιώδες θέμα (ποσοστό κοντά στο 5%). Είναι πολύ αισθητή η απουσία του κόσμου του παιχνιδιού από το θέμα των δραστηριοτήτων και στο 1982 και στο 2000. Θα έπρεπε τα «παιγνιώδη θέματα» να έχουν μεγαλύτερη παρουσία, αφού το παιχνίδι είναι αυτό που καταλαμβάνει μεγάλο μέρος στον καθημερινό χρόνο και στα ενδιαφέροντα των παιδιών του δημοτικού σχολείου, ιδιαίτερα των πρώτων τάξεων. Ο/η μαθητής/τρια μαθαίνει αποτελεσματικότερα εκεί που δέχεται επιβράβευση και ανατροφοδοτείται θετικά. Οι δραστηριότητες που έλκουν το θέμα τους σε παιγνιώδεις καταστάσεις, έχουν υψηλή διδακτική αξία και καθίστανται άριστο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό στην διαδικασία της διδασκαλίας, ιδιαίτερα στην διδασκαλία των κλασμάτων όπου οι δυσκολίες κατανόησης υφίστανται πάντα.

5.4 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Σε αυτήν την μελέτη αναλύθηκε το πλαίσιο των δραστηριοτήτων που αφορούν τα κλάσματα στα εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού στο 1982 και στο 2000. Τα συμπεράσματα καταδεικνύουν αφενός τον μέγιστο ρόλο του πλαισίου μιας δραστηριότητας στην διδασκαλία των κλασμάτων στους/στις μαθητές/τριες του Δημοτικού και αφετέρου την μέγιστη συμβολή του στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Η ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, το πλαίσιο μιας δραστηριότητας και τα κλάσματα είναι τρεις έννοιες με τεράστια σημασία για την διδακτική των Μαθηματικών, οι οποίες συμπεριλαμβάνονται σε αυτήν την μελέτη και έχουν δημιουργήσει ένα ευρύτατο πεδίο έρευνας. Η μελέτη αυτή μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για μελλοντικές έρευνες, οι οποίες θα συμπληρώσουν ή θα επεκτείνουν τα συμπεράσματά της. Παρατίθενται οι παρακάτω προτάσεις, που μπορεί να αποτελέσουν εφαλτήριο για νέες έρευνες στο μέλλον:

- Να επεκταθεί η ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων που αφορούν τα κλάσματα, σε σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών (είτε του δημοτικού είτε του γυμνασίου μετά το 2000 έως σήμερα, ώστε να καταγραφεί η εξέλιξη του πλαισίου.

- Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει την μεγάλη σημασία του «ρεαλιστικού πλαισίου» μιας δραστηριότητας. Προτείνεται να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας μόνο το «ρεαλιστικό πλαίσιο» σε ένα ή περισσότερα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών.
- Με βάση την κατηγοριοποίηση του πλαισίου που ακολούθησε αυτή η μελέτη, να γίνει ανάλυση του πλαισίου των δραστηριοτήτων σε κάποιο άλλο αντικείμενο των μαθηματικών του Δημοτικού.
- Η συνάφεια των στόχων, που θέτουν τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για την διδασκαλία των κλασμάτων, με τις δραστηριότητες που παραθέτουν τα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να αποτελέσει θέμα μελλοντικής διερεύνησης. Πιο συγκεκριμένα, αν τα στοιχεία μιας δραστηριότητας (πλαίσιο, κείμενο) που αναφέρεται στα κλάσματα, δυνητικά συμβάλλουν στην επίτευξη ενός διδακτικού στόχου του Α.Π.Σ..

Η έννοια του κλάσματος είναι πάντα στην επικαιρότητα και πιθανώς θα συνεχίζει να κρατά αμείωτο και να προσελκύει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Όλοι οι ερευνητές συντείνουν στην άποψη ότι πρόκειται για μια πολυδιάστατη έννοια με πέντε διαφορετικές ερμηνείες. Η δεδομένη πολυπλοκότητα της έννοιας συνεχίζει να δημιουργεί και να επιφέρει δυσκολίες στην διδασκαλία και στην κατανόηση της. Τα σχολικά εγχειρίδια μέσω των δραστηριοτήτων που ενσωματώνονται σε αυτά επιφορτίζονται την δύσκολη αποστολή να ανοίξουν στους μαθητές την αυλαία, πίσω από την οποία «κρύβονται» τα κλάσματα. Καθίσταται αναγκαία η προσπάθεια για καινούργια ερευνητικά δεδομένα, που αφορούν τα σχολικά εγχειρίδια και τα χαρακτηριστικά τους, τα οποία θα συνεισφέρουν στην δημιουργία πιο αποτελεσματικών δραστηριοτήτων, στη συγγραφή βελτιωμένων εγχειριδίων και τελικά στην διεξαγωγή επιτυχημένων διδασκαλιών που θα οδηγήσουν σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βανδουλάκης, Ι., Καλιγγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2013). *Μαθηματικά Α΄Γυμνασίου.* Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βοτάνη, Π., Κασάρη, Γ., Μακαντάσης, Ι., & Τσιρικίδου, Γ. (2017). Η διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων στους μαθητές Ε΄ δημοτικού. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.), Πρακτικά του *7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 733-742). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Βρυώνης, Ν., Μπαραλής Γ. (2015). Τα Αυθεντικά - Ρεαλιστικά Προβλήματα της Καθημερινής Ζωής ως Πηγή Δημιουργικότητας στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις. (σσ. 96-105) Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ .

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts, in R. Lesh and M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Academic Press, New York, pp. 91–126.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, 323-341.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.296-333). New York: Macmillan

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13–47). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. In G. Harel & J. Confrey

(Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, pp. 123-176. Albany: State University of New York Press.

Berg, S. A., Hoffmann, K., & Dawson, D. (2010). Not on the same page: Undergraduates' information retrieval in electronic and print books. *The Journal of Academic Librarianship, 36*(6), 518-525.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, *17*(2), 125-141.

Botonjić, I., & Omerović, M. (2016). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Human: Journal for Interdisciplinary Studies, 6*(2).

Γαγάτσης Α., Ιωάννου Κ., Σιημητρά Α., & Χριστοδουλίδου Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα. Στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., & Μοδέστου, Μ. (Επ.), *Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου «Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο» 2-3 Ιουνίου, 2006* (σελ. 99-110). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151.

Chick, H. (2010). Aspects of Teachers' Knowledge for Helping Students Learn about Ratio. *Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 226–257.

Domoney, B. (2002). Student Teachers' Understanding of Rational Number: Part-Whole and Numerical Constructs. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 53–67.

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 61–75.

Fan, L., Zhu, Y., Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 45 (5) (2013), pp. 633–646

George, L. (2017). *Children's learning of the partitive quotient fraction sub-construct and the elaboration of the don't need boundary feature of the Pirie-Kieren theory* (PhD Thesis). University of Southampton.

Gunbas, N. (2015). Students' mathematics word problem-solving achievement in a computer-based story. *Journal of Computer Assisted Learning*, *31*(1), 78–95.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 71–87.

Jacobs, J. A., & Frickel, S. (2009). Interdisciplinarity: A Critical Assessment. *Annual Review of Sociology*, *35*(1), 43–65.

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ. & Τάτσης, Κ. (2009). Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού. *Ευκλείδης Γ΄, 71*, 42-62.

Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Πρακτικά του *14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας: Τα Μαθηματικά στο σχολείο του 2000*, (5), 71-81. Μυτιλήνη: ΕΜΕ.

Κολέζα, Ε., Μακρής, Κ., & Σούρλας, Κ. (2000*). Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: GUTENBERG.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A.Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Λεμονίδης Χ. (2007). Ο εκσυγχρονισμός των μαθηματικών περιεχομένων στα νέα βιβλία της Α΄ και Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. *Γέφυρες, (31)*, 24-31.

Λεμονίδης. Χ., & Ουζουνίδου, Κ. (2017). Γνώση περιεχομένου και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των μελλοντικών δασκάλων στους ρητούς αριθμούς. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.), Πρακτικά του *7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 847-856). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics,* 41-58.

Μαστρογιάννης, Α. (2015). Η οργάνωση, η κατανόηση και η αναγνωσιμότητα του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Έκτης Δημοτικού ως καθοριστικές πτυχές αξιολόγησής του. *Θεωρία και Έρευνα στις Επιστήμες της αγωγής* (1), σσ. 149-172.

Μπεμπένη, Μ., Βαμβακούση Ξ. (2014). Εννοιολογική και Διαδικαστική Γνώση για τα Κλάσματα στην Α΄και Γ΄ Γυμνασίου: Τι (δεν) αλλάζει;. Στο Ξ. Βαμβακούση & Κ. Χατζηκυριάκου (Επιμ.), Πρακτικά του *5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕνΕΔιΜ): Τα Μαθηματικά στο σχολείο και στην καθημερινή ζωή*, Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ http://enedim2014.web.uowm.gr/

McGee, L., Kervin, L., & Chinnappan, M. (2006). Emerging issues in the investigation of the construct of partitive quotient. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces.* Proceedings of the *29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 360-367). Adelaide: MERGA

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational studies in mathematics, 56*(2-3), 255-286.

Meyer, M. R., Dekker, T., & Querelle, N. (2001). Context in mathematics curricula. *Mathematics teaching in the middle school*, *6*(9), 522.

Middleton, J. A., Silva, T. D., Toluk, Z. & Mitchell, W. (2001). The Emergence of Quotient Understandings in a Fifth-Grade Classroom: A Classroom Teaching Experiment, *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held at Snowbird, Utah 18-21 October 2001* (pp. 263-271)

Minder, M. (2007). *Λειτουργική Παιδαγωγική.* (Φ. Αρβανίτης, Μεταφρ.) Αθήνα: Πατάκη.

Morales, Z. (2014). Analysis of Students' Misconceptions and Error Patterns in Mathematics: The Case of Fractions. *South Florida Education Research Conference.*

Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpetation of fractions. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), Proceedings of the *Joint Meeting of the International Group for the Psyyhology of Mathematics Education* (Vol. *32*, pp. 17-24). Morelia, México: PME

Newton, D. P., & Newton, L. D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? Educational Studies in Mathematics, 64(1), 69–84.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Nicolaou, A. A., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Hierarchical Levels of Abilities that Constitute Fraction Understanding at Elementary School. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 757–776

O’Keeffe, L., & O’Donoghue, J. (2011). Mathematics textbook analysis: The significance of textbook features to student learning. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów, Poland: University of Rzeszów

Πολύδωρος, Γ. (2017). Η μεταγνωστική δεξιότητα «Σχεδιασμός» των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες μέσω των τεχνολογιών της πληροφορικής και της επικοινωνίας. *Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία, 13*(2), 97–106.

Πουρνάρα, Α., Λεμονίδης, Χ., Παλαιγεωργίου, Γ. (2015). «Το Κάστρο Των Κλασμάτων»: Ένα Ηλεκτρονικό Παιχνίδι Για Τις Πολλαπλές Αναπαραστάσεις Του Κλάσματος. Proccedings of the *7th Conference on Informatics in Education, 9-11 Οκτωβρίου 2015*, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Paik, J. H., & Mix, K. S. (2003). US and Korean Children's Comprehension of Fraction Names: A Reexamination of Cross–National Differences. *Child Development*, *74*(1), 144-154.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students’ “conception” of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 61–83.

Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 455–479.

Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children’s fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419–441.

Pinilla, M. I. F. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 7*, 23-45.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 5–38.

Rockinson- Szapkiw, A. J., Courduff, J., Carter, K., & Bennett, D. (2013). Electronic versus traditional print textbooks: A comparison study on the influence of university students' learning. *Computers & Education*, *63*, 259–266.

Σκουμπουρδή, Χ. (2014). Το εκπαιδευτικό υλικό στη σχέση διδακτικής μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης. Παρέμβαση στην ομάδα ανταλλαγών Α. Μούτσιος-Ρέντζος & Φ. Καλαβάσης: ''Μια Συστημική Αναζήτηση της σχέσης Διδακτικής των Μαθηματικών με τη Μαθηματική Εκπαίδευση''. Πρακτικά του *5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕνΕΔιΜ): Τα Μαθηματικά στο σχολείο και στην καθημερινή ζωή*, Φλώρινα: ΕΝΕΔΙΜ http://enedim2014.web.uowm.gr/

Shannon, A. (2007). Task context and assessment. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency* (pp. 177-192). Cambridge: Cambridge University Press.

Shepperd, J. A., Grace, J. L., & Koch, E. J. (2008). Evaluating the electronic textbook: Is it time to dispense with the paper text?. *Teaching of Psychology*, *35*(1), 2-5.

Smith, J. P. I. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In: B. Litwiller & G. W. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 3–17). Reston, Virginia, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J.-W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 117–142.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518.

Sullivan, P., Zevenbergen, R., & Mousley, J. (2002). Contexts in mathematics teaching: Snakes or ladders. In *Mathematics Education in the South Pacific. Proc. 25th Conf. of the Mathematics Educational Research Group of Australasia* (pp. 649-656).

Sullivan, P., Zevenbergen, R., & Mousley, J. (2003). The Contexts of mathematics tasks and the context of the classroom: Are we including all students? *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 107–121.

Τάτσης, Κ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Μελέτη του πλαισίου των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών της Α΄ δημοτικού. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *3ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕνΕΔιΜ): Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές* (σελ. 383-392). Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Τουμάσης, Μ. (1999). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315-327.

Tsai, T.-L., & Li, H.-C. (2017). Towards a framework for developing students' fraction proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 244–255.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 175–191.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(3), 555–584.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 41-65.

Wong, E., & Evans, D. (2007). Students' Conceptual Understanding of Equivalent Fractions. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), Proceedings of the *30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 824-833. Freemantle, Western Australia: MERGA.

Woody, W. D., Daniel, D. B., & Baker, C. A. (2010). E-books or textbooks: Students prefer textbooks. *Computers & Education, 55*(3), 945-948.

Φιλίππου, Δ., & Δημόπουλος, Κ. (2014). Η χρήση των σχολικών βιβλίων από τους Κύπριους εκπαιδευτικούς Φυσικής. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (επιμ.), Πρακτικά του *1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»* (σελ. 640-650). Ρόδος