Γεώργιος Βαρδάκης

Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

Πτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 26 Ιανουαρίου 2018

Εισηγητής: Βαγγέλης Φελουζής

Επιτροπή

Αντρέας Παπασαλούρος

Αντώνης Τσολομύτης

Στο όνομα του Ιησού Χριστού

Προς Εφεσίους 3:20
Ο Θεός έχει τη δύναμη να κάνει απείρος περισσότερα απ΄ όσα ζητάμε ή σκεφτόμαστε, καθώς η δύναμή του ενεργεί σ΄ εμάς.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Θεωρία των Αριθμών ασχολείται με την μελέτη του απλούστερου μαθηματικού αντικειμένου, τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$ Ωστόσο παραμένει ένας από τους πιο δύσκολους και σκοτεινούς μαθηματικούς κλάδους δεδομένου ότι ακόμα και πολύ απλά ερωτήματα, φαινομενικά αθώα παραμένουν αναπάντητα.

Για παράδειγμα, το παλαιότερο άλυτο πρόβλημα των Μαθηματικών το βρίσκουμε ήδη να τίθεται στα αρχαία μαθηματικά, και συγκεκριμένα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Πρόκειται για το *πρόβλημα των τέλειων αριθμών.* Ένας θετικός ακέραιος n λέγεται τέλειος αν είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων[1] διαιρετών του. Ο μικρότερος τέλειος αριθμός είναι το 6. Πράγματι, οι γνήσιοι διαιρέτες του 6 είναι οι $1, 2, 3$ και

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Ο επόμενος τέλειος αριθμός είναι το 28 αφού οι γνήσιοι διαιρέτες του είναι οι $1, 2, 4, 7, 14$ και

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Οι τέλειοι αριθμοί φαίνεται να είναι σπάνιοι. Επίσης μέχρι τώρα δεν έχει βρεθεί περιττός τέλειος αριθμός. Δύο απλές ερωτήσεις τίθενται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

(i) Υπάρχουν άπειροι τέλειοι αριθμοί;

(ii) Είναι κάθε τέλειος αριθμός άρτιος;

Και τα δύο ερωτήματα παραμένουν μέχρι σήμερα αναπάντητα και μεγάλοι μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με την θεωρία των αριθμών, όπως ο Erdös τα

[1] Δηλαδή όλων των αριθμών που τον διαιρούν και είναι μικρότεροι από αυτόν.

κατατάσσουν στα «απρόσιτα» προβλήματα των μαθηματικών, δηλαδή σε μια κατηγορία προβλημάτων που η μαθηματική επιστήμη δεν είναι ακόμα ώριμη να αντιμετωπίσει. Σε αυτή την εργασία με τον όρο «αριθμός» θα εννοούμε κυρίως φυσικούς αριθμούς. Αν χρειαστεί να μιλήσουμε για άλλα είδη αριθμών θα τους προσδιορίζουμε, δηλαδή θα λέμε ένας ακέραιος αριθμός, ένας ρητός αριθμός, ένας πραγματικός αριθμός ή ένας μιγαδικός αριθμός.

Τα περισσότερα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών αφορούν τους πρώτους αριθμούς. Ένας αριθμός λέγεται *πρώτος* αν δεν διαιρείται με κανέναν άλλον αριθμό εκτός από τον εαυτό του και το 1. Ο μικρότερος πρώτος αριθμός είναι το 2 και μετά έχουμε τους

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$

Γνωρίζουμε, όπως πρώτος ο Ευκλείδης έδειξε, ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι. Όμως με ποιον τρόπο κατανέμονται οι πρώτοι ανάμεσα στους υπόλοιπους αριθμούς παραμένει μυστηριώδες. Εκτός από το 2 όλοι οι πρώτοι είναι προφανώς περιττοί. Υπάρχουν περιττοί πρώτοι p που επόμενος πρώτος μετά από αυτόν είναι ο επόμενος περιττός. Για παράδειγμα το 3, το 5 (όχι το 7), το 11 (όχι το 13), το 17 είναι τέτοια παραδείγματα. Αυτοί οι πρώτοι λέγονται «δίδυμοι».

Ορισμός 1.0.1. Ένας πρώτος αριθμός p λέγεται *δίδυμος* αν ο $p+2$ είναι επίσης πρώτος.

Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι; Το ερώτημα αυτό παραμένει αναπάντητο.

Ένα ποιο απλό ερώτημα είναι αν μπορούμε, έστω και προσεγγιστικά να υπολογίσουμε πόσοι πρώτοι υπάρχουν μέχρι ένα δοσμένο αριθμό.

Ορισμός 1.0.2. Έστω x ένας αριθμός. Θα συμβολίζουμε με $\pi(x)$ το πλήθος των πρώτων p που είναι μικρότεροι ή το πολύ ίσοι με τον x.

Ακριβής υπολογισμός του $\pi(x)$ δεν φαίνεται να είναι εφικτός. Ωστόσο μια καλή «προσέγγιση» του $\pi(x)$ δίνεται από έναν απλό τύπο: $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x}$. Αλλά τι σημαίνει μια καλή «προσέγγιση»; Αυστηρά, σημαίνει ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1$$

Επειδή σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με διάφορες αριθμητικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμό τους φυσικούς αριθμούς θα δώσουμε έναν ειδικό όνομα για αυτές τις τις συναρτήσεις

Ορισμός 1.0.3. Μια *αριθμητική συνάρτηση* είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμό τους φυσικούς αριθμούς.

και ακόμα έναν ορισμό για την προσέγγιση:

Ορισμός 1.0.4. Έστω $f(x)$, $g(x)$ δύο αριθμητικές συναρτήσεις θα γράφουμε $f(x) \approx g(x)$ αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1.1}$$

Ο κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποδείξουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.0.5 (Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών)**.**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \tag{1.2}$$

Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, δηλαδή η εξίσωση (1.2), διατυπώθηκε για πρώτη φορά σε γραπτό κείμενο σαν εικασία, από τον A. M. Legendre στο βιβλίο του *Théorie des nombres*, Courrier, Paris, 1808, p. 394. Ωστόσο η εικασία αυτή φαίνεται να ήταν γνωστή από παλιότερα, πιθανόν και στον Euler. Για παράδειγμα ο Gauss του 1790 (όταν ο Gauss ήταν ακόμα έφηβος) έχει σημειώσει σε μια λευκή σελίδα ενός βιβλίου λογαρίθμων που χρησιμοποιούσε, τον παραπάνω τύπο (1.2). Η πρώτη αυστηρή απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών δόθηκε ανεξάρτητα από τους J. Hadamard, Bull. Soc. Math. France, vol. 24 A896 σελ. 199–220 και Ch. J. de la Vallée Poussin, Ann. Soc. sci. Bruxelles, Ser. I, vol. 20 A896), σελ. 183–256 και 281–397. Και οι δύο αποδείξεις χρησιμοποιούσαν μεθόδους από την Μιγαδική Ανάλυση!

Κεφάλαιο 2

Βασικές Συναρτήσεις και Εννοιες

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα οριστούν κάποιες βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες τόσο για την αναλυτική απόδειξη αλλά και την κατανόηση του θεωρήματος των πρώτων αριθμών. Θα ορίσουμε τη συνάρτηση $\Lambda(n)$ καθώς και τη συνάρτηση του Chebyshev.

Θα αναφερθούμε στους αριθμούς Bernouli και θα ασχοληθούμε με το μετασχηματισμό Mellin. Επίσης θα ορίσουμε τη συνάρτηση Mobius και θα αναφέρουμε ένα βασικό θεώρημα που ισχύει για αυτήν.

Τέλος θα γίνει αναφορά σε κάποια αποτελέσματα της μηγαδικής ανάλυσης τα οποία θα μας διευκολύνουν στην απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν Βασικά εργαλεία για τη συνέχεια.

2.2 Η συνάρτηση $\Lambda(n)$

Ορισμός 2.2.1. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ορίζουμε*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{όταν } n = p^m \text{ για κάποιον πρώτο } p \text{ και κάποιον ακέραιο } m \geq 1 \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.2.2. *Τώρα θα κατασκευάσω έναν πίνακα τιμών της $\Lambda(n)$*

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n)$:	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

Παρατηρώ ότι καθώς αυξάνεται ο n οι τιμές της $\Lambda(n)$ διακυμαίνονται αισθητά. Οπότε είναι δύσκολο να προσδιορισθεί η συμπεριφορά της για μεγάλους

n. Στην προκειμένη περίπτωση είναι πιο αποδοτικό να χρησιμοποιηθεί ο μέσος αριθμητικός:

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\Lambda(n)$$

Ορισμός 2.2.3. *Ορίζουμε*

$$\sum_{1}^{n}\Lambda(n)=\psi(x)$$

Η συνάρτηση $\psi(x)$ καλείται συνάρτηση του Chebyshev.

Παρατήρηση 2.2.4. *Η συνάρτηση ψ είναι μία βηματική συνάρτηση και είναι πιο άνετη η μελέτη του ολοκληρώματός της που το συμβολίζουμε με ψ_1. Οπότε στην πορεία κατά την αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών θα χρησιμοποιηθεί αντί της ψ την*

$$\psi_1(x)=\int_1^x \psi(t)dt.$$

2.3 Αριθμοί Bernoulli

Οι αριθμοί Bernoulli ανακαλύφθηκαν από τον Jacob Bernoulli (1654-1705) σε μία προσπάθεια γενίκευσης των παρακάτω τύπων

(i) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $1^2+2^2+3^2\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $1^3+2^3+3^3\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

, στον υπολογισμό του αθροίσματος

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k\cdots+n^k$$

σαν πολυώνυμο του n. Η Ακολουθία $\{B_n\}_{n\geq 0}$ αυτών των αριθμών ορίζεται από την δυναμοσειρα Taylor

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη αυτής της δυναμοσειρας με

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

και εξισώσουμε τους συντελεστές του x στα δύο μέλη παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0, \quad B_0 = 1$$

η οποία επίσης ορίζει την ακολουθία $\{B_n\}$.

Θεώρημα 2.3.1. *Ισχύει η σχέση:*

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z : |z| < 2\pi$$

2.4 Η συνάρτηση του Mobius $\mu(n)$

Ορισμός 2.4.1. *Η συνάρτηση Mobius ορίζεται ως εξής :*

$$\mu(1) = 1$$

Αν $n > 1$, γράφουμε $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ τότε :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1^k), & \textit{αν } \ a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \\ 0, & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $\mu(n) = 0$ αν και μόνο αν το n έχει στην ανάλυσή του σε πρώτους έναν τετραγωνικό παράγοντα μεγαλύτερο του 1. Δηλαδή έναν αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι παράγοντας. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για κάθε παράγοντα που εμφανίζεται σε δύναμη μεγαλύτερη του δύο.

Η συνάρτηση Mobius εμφανίζεται σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις στη θεωρία αριθμών. Μια από τις βασικές της ιδιότητες είναι μια αξιοσημείωτα απλή σχέση για το άθροισμα διαιρετών $\sum_{d \backslash n} \mu(d)$ που αναπτύσσεται πάνω στους θετικούς διαιρέτες του n. Στη σχέση αυτή το $[x]$ δηλώνει το μέγιστο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Θεώρημα 2.4.2. *Αν $n > 1$, έχουμε :*

$$\sum_{d \backslash n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \textit{αν } \ n = 1 \\ 0, & \textit{αν } \ n > 1 \end{cases}$$

2.5 Ο Μετασχηματισμός Mellin

Ο Μετασχηματισμός Mellin μιας συνάρτησης $f(x)$, που συμβολίζεται με $f^*(s)$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα :

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f^*(s)$ καλούνται ζεύγος μετασχηματισμού Mellin. Η γνώση της μιας εκ των δυο μας επιτρέπει την εύρεση της άλλης μέσω του παραπάνω ολοκληρώματος.

Ο παραπάνω μετασχηματισμός υπάρχει, όταν το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{k-1}dx$$

είναι φραγμένο για κάποιο $k > 0$.

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Mellin πραγματοποιείται μέσω του αντίστροφου ολοκληρώματος :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds$$

όπου $c > k$. Αν συμβολίσουμε το μετασχηματισμό Mellin ως

$$f^*(s) = \mathcal{M}[f(x);s]$$

τότε μπορούμε να εκφράσουμε το αντίστροφο αποτέλεσμα ως :

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}[f^*(s);x]$$

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Mellin.

(i) Για $a,\ b$ τυχαίες σταθερές, έχουμε :

$$\mathcal{M}[af(x) + bg(x)] = af^*(s) + bg^*(s)$$

(ii) Αν $\lim_{x\to\infty} x^{s-r-1}f^{(n)}(x) = 0,\ \ r = 0, 1, \cdots, n-1$ τότε :

$$\mathcal{M}[f^{(n)}(x);s] = (-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}f^*(s)$$

και

$$\mathcal{M}[x^n f^{(n)}(x);s] = (-1)^n\frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}f^*(s-n)$$

όπου $\Gamma(s)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, που αναπτύσσεται στο επόμενο κεφάλαιο.

(iii) Αν συμβολίσουμε το $n-$οστό επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα του $f(x)$ με $\mathcal{I}_n[f(x)]$, όπου :

$$\mathcal{I}_n[f(x)] = \int_0^x \mathcal{I}_{n-1}[f(u)]du,$$

τότε :

$$\mathcal{M}[\mathcal{I}_n[f(x)]; s] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} f^*(s+n)$$

και

$$\mathcal{M}[\mathcal{I}_n^\infty[f(x)]; s] = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} f^*(s+n)$$

όπου :

$$\mathcal{I}_n^\infty[f(x)] = \int_x^\infty \mathcal{I}_{n-1}^\infty[f(u)]du$$

(iv) Ισχύει :

$$\mathcal{M}[[f(x)g(x)]; s] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(u)g^*(s-u)du$$

2.6 Χρήσιμα αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης

Ορισμός 2.6.1. *Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι μονότιμη και παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, τότε η συνάρτηση λέγεται αναλυτική στην περιοχή αυτή.*

Ορισμός 2.6.2. *Τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f είναι αναλυτική ονομάζονται ομαλά σημεία της f, ενώ εκείνα στα οποία η f δεν είναι αναλυτική λέγονται ανώμαλα σημεία.*
Τα ανώμαλα σημεία μιας συνάρτησης $f(z)$ μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε σημεία:

(ι) απομονωμένης ανωμαλίας: ένα σημείο z_0 είναι σημείο απομονωμένης ανωμαλίας της f και λέμε ότι η f έχει απομονωμένη ανωμαλία στο z_0 όταν για όλα τα άλλα σημεία στην γειτονιά του z_0 η συνάρτηση είναι αναλυτική.

(ιι) μη απομονωμένης ανωμαλίας (αν δεν είναι απομονωμένη).

Ορισμός 2.6.3. *Ένα απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 λέγεται πόλος μιας συνάρτησης $f(z)$ αν η συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

, όπου $g(z)$ αναλυτική στο z_0και k θετικός ακέραιος. Ο k τότε ονομάζεται τάξη του πόλου.

Παρατήρηση 2.6.4. *Αφού προηγουμένως ορίσαμε τον πόλο μιας συνάρτησης, τότε έχει και ιδιαίτερη σημασία να ορίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπό της. Αυτό είναι το residuum και συμβολίζεται με $Res(f(z), z_0)$. Ας υποθέσουμε ότι μία συνάρτηση $f(z)$ ορίζεται και είναι αναλυτική σε κάθε σημείο ενός δίσκου $D(z_0, r)$ εκτός από το z_0. Με άλλα λόγια είναι αναλυτική στον δακτύλιο*

$$\Delta = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$$

. Τότε ορίζουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο με το παρακάτω τύπο

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

, όπου γ είναι απλή κλειστή καμπύλη θετικά προσανατολισμένη που περιέχεται στον Δ και περιέχει στο εσωτερικό της το z_0.

Λήμμα 2.6.5. *Αν η $f(s)$ έχει ένα πόλο τάξης k στο $s = a$, τότε το πηλίκο $\frac{f'(s)}{f(s)}$ έχει έναν πρώτης τάξης πόλο στο $s = a$ με υπόλοιπο $-k$.*

Ορισμός 2.6.6. *Μια ολόμορφη συνάρτηση είναι μια μιγαδική συνάρτηση μιας ή περισσότερων μιγαδικών μεταβλητών που είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο μιας περιοχής του πεδίου ορισμού της. Η ύπαρξη μιας μιγαδικής παραγώγου σε μια περιοχή τιμών είναι πολύ σημαντική, γιατί υποδηλώνει ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι στην πραγματικότητα απείρως διαφορίσιμη και ίση με τη δική της σειρά Taylor.*

Ορισμός 2.6.7. *Έστω οι ολόμορφες συναρτήσεις f, g ορισμένες στα ανοικτά και συνεκτικά σύνολα A , B αντίστοιχα. Αν συμπίπτουν στο σύνολο $A \cap B$, τότε η f ονομάζεται αναλυτική συνέχιση της g στο A και η g αναλυτική συνέχιση της f στο B.*

Ορισμός 2.6.8. *Στην μιγαδική ανάλυση, μια μερομορφική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο D του μιγαδικού επιπέδου είναι μια συνάρτηση η οποία είναι ολομορφική στο D εκτός από τα απομονωμένα σημεία τα οποία είναι πόλοι για τη συνάρτηση.*
Κάθε μερομορφική συνάρτηση στο D μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο ολομορφικών συναρτήσεων (ο παρονομαστής δε μπορεί να είναι η μηδενική συνάρτηση) και με τον κανόνα για κάθε πόλο στο D να υπάρχει μια ρίζα στο D.

Παρατήρηση 2.6.9 (Αρχή του ταυτοτισμού)**.** *Έστω οι ολόμορφες συναρτήσεις f , g σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$.*

(i) *Είναι $f = g$ αν και μόνο αν το σύνολο$\{z \in A : f(z) = g(z)\}$ έχει οριακό σημείο εντός του A.*

(ii) *Αν* $f = g$ *σε ένα ανοικτό σύνολο ή σε ένα ευθήγραμμο τμήμα του* A, *τότε* $f = g$ *στο* A.

Θεώρημα 2.6.10 (Θεώρημα του Cauchy)**.** *Έστω μια ολόμορφη συνάρτηση* f *ορισμένη στο ανοικτό και συνεκτικό* $A \subseteq \mathbb{C}$. *Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη Jordan* γ *εντός του* A *ισχύει :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

.

Κεφάλαιο 3

Η συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann

3.1 Ιστορική Αναδρομή

Η πραγματική συνεισφορά του Riemann το 1859, που είναι άμεσα συσχετισμένη με την ομώνυμη συνάρτηση ζ, δεν είναι τόσο στα αποτελέσματά του, όσο στις μεθόδους του. Το βασικό αποτέλεσμα της δημοσίευσής περί του πλήθους των πρώτων αριθμών που κείνται υπό ενός δοθέντος μεγέθους, που έχει αναδημοσιευθεί ήταν η έκφραση του $\pi(x)$ ως άθροισμα μιας απειροσειράς, η οποία έχει ως κύριο όρο το $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη του Riemann ήταν ανεπαρκής. Κατά βάση, δεν ήταν διόλου ξεκάθαρο από τις υποθέσεις του Riemann ότι η σειρά αυτή συγκλίνει, κι ακόμα λιγότερο ότι ο όρος $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ κυριαρχεί έναντι των άλλων για μεγάλες τιμές του x. Από την άλλη μεριά, οι μέθοδοι του Riemann, που περιελάμβαναν τη μελέτη της συνάρτησης ζ σα συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, τη μελέτη των σημείων μηδενισμού της ζ, αντιστροφή κατά Fourier και κατά Mobius και την αναπαράσταση συναρτήσεων όπως η $\pi(x)$ με αναλυτικούς τύπους έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην έξέλιξη της θεωρίας. Αυτή η ενοποίηση αριθμητικών και μιγαδικών μεθόδων απαιτούσε τη συμβολή του Riemann ως ενός εκ των ιδρυτών της Μιγαδικής Ανάλυσης ώστε να περαιωθεί.
Η συνάρτηση ζ εισήχθηκε πρώτη φορά από τον Euler. Επι της ουσίας, ο Euler κατέληξε στην παρακάτω σχέση

$$\sum \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})} \tag{3.1}$$

όπου το n διάτρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, $n \in \mathbb{N}$ ενώ το p όλους τους πρώτους αριθμούς. Η σχέση αύτή συνέδεσε την Ανάλυση (τη θεωρία απειροσειρών), μέσω της συνάρτησης ζ, με τους πρώτους αριθμούς. Ο Euler χρησιμοποίησε την παραπάνω σχέση για s ακέραιο. Ο Dirichlet , από την άλλη, που βάσισε επίσης τη δουλειά του στον τύπο του Euler, χρησιμοποίησε τη σχέση αυτή με s πραγματικό και κατάφερε ν' αποδείξει ότι ισχύει για $s > 1$. Χρησιμοποιώντας μια γενίκευση της συνάρτησης $\zeta(s)$, τις σειρές Dirichlet, κατάφερε να αποδείξει ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο υπό αρκετά γενικές προϋποθέσεις οι πρώτοι που περιέχονται είναι άπειροι. Κάθε σειρά Dirichlet είναι ο διακριτός μετασχηματισμός κατά Mellin ενός χαρακτήρα πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Μερικά χρόνια αργότερα, ο Riemann, εκκινώντας από την (3.1), ανακάλυψε μια στενή σχέση μεταξύ της συνάρτησης ζ και της ασυμπτωτικής κατανομής των πρώτων αριθμών. Ο Riemann, όντας ένας από τους ιδρυτές της θεωρίας της Μιγαδικής Ανάλυσης, δεν μπορούσε παρά να θεωρήσει το s ως μιγαδική μεταβλητή. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι και οι δυο πλευρές της σχέσης του Ευλερ συγκλίνουν για μιγαδική τιμή του s τέτοια ώστε $\Re(s) > 1$, ο Riemann δεν έμεινε, όμως, μόνο σε αυτό, αλλά απέδειξε ότι, παρ' όλο που και οι δυο πλευρές της (3.1) αποκλίνουν για διαφορετικές τιμές του s, η συνάρτηση την οποία ορίζουν συνεχίζεται αναλυτικά σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, με εξαίρεση το σημείο $s = 1$, όπου έχει έναν απλό πόλο. Για να αποδείξει τα παραπάνω ο Riemann βασίστηκε στο ολοκλήρωμα του Euler

$$n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \tag{3.2}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$.Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για μη ακέραιες τιμές του n , υπό την προϋπόθεση ότι $n > -1$. Πιο συγκεκριμένα, ο Riemann χρησιμοποίησε την αναπαράσταση που εισήγαγε ο Gauss για το παραπάνω ολοκλήρωμα :

$$\Pi(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \ , s > -1 \tag{3.3}$$

όπου η $\Pi(s)$ ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς με $\Re(s) > -1$ και $\Pi(s) = s!$ όταν το s είναι φυσικός αριθμός. Ο Riemann αντικατέστησε στη θέση του x το nx στην εξίσωση (3.3) για $\Pi(s-1)$ κι έτσι έφτασε στη σχέση :

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s} \ , s > 0 \ , n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Στη συνέχεια άθροισε τη σχέση (3.1) για όλα τα n και με χρήση της γεωμετρικής σειράς :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = (r-1)^{-1}$$

κατέληξε στη σχέση :

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Pi(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1 \tag{3.5}$$

Η συγκλιση του παραπάνω ολοκληρώματος κι η εναλλαγή της άθροισης με την ολοκλήρωση είναι εύκολο να αποδειχθούν. Στη συνέχεια θεώρησε το παρακάτω ολοκλήρωμα :

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx \tag{3.6}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης δείχνουν ένα μονοπάτι που ξεκινά από το $+\infty$, διατρέχει τον πραγματικό άξονα προς τα αριστερά, περιελίσσεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από την αρχή των αξόνων μια φορά κι επιστρέφει από τον πραγματικό άξονα προς το $+\infty$. Το $(-x)^s$ προσδιορίζεται από τη σχέση $(-x)^s = exp[s \ln(-x)]$, όπου το $\ln(-x)$ ορίζεται ως ο κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου που είναι πραγματικός για πραγματικά z με z που δε βρίσκονται στον αρνητικό πραγματικό άξονα. Επομένως το $(-x)^s$ δεν ορίζεται στο θετικό πραγματικό άξονα, άρα το μονοπάτι θα βρίσκεται λίγο πάνω από τον πραγματικό άξονα στη διαδρομή από το $+\infty$ στο 0 και λίγο κάτω από τον πραγματικό άξονα στην αντίθετη διαδρομή. Το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx \tag{3.7}$$

όπου ο μεσαίος όρος είναι $2\pi i$ φορές τη μέση τιμή της ποσότητας $(-x)^s(e^x - 1)^s$ πάνω στον κύκλο $|x| = \delta$. Επομένως, ο μεσαίος όρος προσεγγίζει το μηδέν καθώς $\delta \to 0$ υπό την προϊπόθεση ότι $s > 1$. Οι άλλοι δυο όροι μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s dx}{(e^x-1)x} = \lim_{s\to 0} \int_{+\infty}^{\delta} \frac{e^{s(\ln x - i\pi)}dx}{(e^x-1)x} + \lim_{s\to 0} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{s(\ln x + i\pi)}dx}{(e^x-1)x} = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1} \tag{3.8}$$

Η σχέση αυτή συνδυαζόμενη με την (3.3) δίνει

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx = 2i \sin(\pi s)\Pi(s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.9}$$

Στο σημείο αυτό ας αναφέρουμε την παρακάτω ταυτότητα για τη συνάρτηση $\Pi(s)$:

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin \pi s$$

Με τη χρήση της ταυτότητας αυτής, η εξίσωση (3.9) γίνεται

$$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1)x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.10}$$

Με άλλα λόγια, η $\zeta(s)$ ορίζεται απο τον τύπο

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x - 1)x} dx \tag{3.11}$$

Για πραγματικές τιμές του s μεγαλύτερες του ένα, η $\zeta(s)$ ισούται με την απειροσειρά

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.12}$$

Παρ' όλα αυτά, η σχέση (3.11) ισχύει για όλες τις τιμές του s. Ουσιαστικά, εφ' όσον το ολοκλήρωμα της (3.11) συγκλίνει για όλες τις τιμές του s, είτε πραγματικές είτε μιγαδικές, και καθώς η συνάρτηση που ορίζει είναι μιγαδική αναλυτική συνάρτηση η συνάρτηση $\zeta(s)$ της (3.11) ορίζεται και είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία, με μόνη πιθανή εξαίρεση στα σημεία $s \in \mathbb{N}$ δηλαδή στους πόλους της $\Pi(-s)$. Από την άλλη, η εξίσωση (3.12) δείχνει ότι η $\zeta(s)$ δεν έχει πόλους στα σημεία $s = 2, 3, 4, \ldots$ κι ότι $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \infty$, άρα η $\zeta(s)$ έχει έναν απλό πόλο στο $s = 1$. Επομένως, η σχέση (3.12) ορίζει μια συνάρτηση $\zeta(s)$ που είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, εκτός μόνο του σημείου $s = 1$ όπου έχει απλό πόλο. Αυτή η συνάρτηση ταυτίζεται με την $\sum n^{-s}$ για πραγματικές τιμές του $s > 1$ και, στην ουσία, μέσω της αναλυτικής συνέχισης, σε όλο το μιγαδικό ημιεπίπεδο $\Re(s) > 1$. Η παραπάνω συνάρτηση είναι γνωστή ως η συνάρτηση ζήτα του Riemann.
Τέλος, θα πρέπει να γίνει μια αναφορά στην υπόθεση του Riemann. Στην έρευνα που δημοσίευσε το 1859, αναφέρει ότι είναι πολύ πιθανό όλα τα μιγαδικά σημεία μηδενισμού της συνάρτησης ζ να έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$, κάτι το οποίο είναι γνωστό ως η υπόθεση Riemann. Ο ίδιος ο Riemann δεν κατάφερε να το αποδείξει. Το 1900 ο Hilbert εισήγαγε την υπόθεση στην περίφημη λίστα των άλυτων τότε προβλημάτων που, κατά τη γνώμη του, τα όριζαν στη συνέχεια τις εξελίξεις στη μαθηματική έρευνα. Πρόκειται για ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα στα μαθηματικά, που δεν έχουν λυθεί και που εξακολουθεί να κινεί το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας.

Ορισμός 3.1.1. *Η συνάρτηση ζήτα $\zeta(s)$ είναι συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής s και ορίζεται με τη βοήθεια της ακόλουθης άπειρης σειράς, όταν ο μιγαδικός αριθμός s έχει πραγματικό μέρος μεγαλύτερο της μονάδας:*

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Στην περιοχή όπου $\Re(s) > 1$ και $s \in \mathbb{C}$, αυτή η σειρά συγκλίνει και ορίζει μια συνάρτηση αναλυτική σε αυτή την περιοχή.

Η συνάρτηση ζήτα ορίζεται ως η αναλυτική επέκταση της πάνω συνάρτησης σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, καθώς ο Riemann έδειξε ότι αυτή η αναλυτική επέκταση για $\Re(s) \leq 1$ και $s \neq 1$ υπάρχει και είναι μοναδική, ενώ στο σημείο $s = 1$ του μιγαδικού επιπέδου προκύπτει η αρμονική σειρά η οποία αποκλίνει προς το $+\infty$.

3.2 Η συνάρτηση Γάμμα

Ορισμός 3.2.1. *Το ολοκλήρωμα*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

όπου το t είναι μια πραγματική μεταβλητή, $t^{z-1} = e^{z-1} \ln t$, μελετήθηκε από τον Euler για $z \in \mathbb{R}$. Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει απόλυτα για $\Re(z) > 0$ κι ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $\Gamma(z)$ σε αυτό το ημιεπίπεδο, που ονομάζεται συνάρτηση Γάμμα.

Πόρισμα 3.2.2. *Η συνάρτηση Γάμμα μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + Q(z), \quad \Re(z) > 0$$

Η σειρά στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει για κάθε $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ και καθώς το $Q(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση, η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε αναλυτικά την $\Gamma(z)$ σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, εξαιρώντας τα σημεία $0, -1, -2, \ldots$. Η σχέση αυτή καλείται Ανάλυση της Γ-συνάρτησης του Prym.

Θεώρημα 3.2.3. *Η συνάρτηση Γ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(i) $\Gamma(1) = 1$

(ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(iii) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

(iv) $\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z), \quad (n > 1 \in \mathbb{Z})$

(v) $\Gamma(n+1) = n!$

(vi) *Η* $\Gamma(x), \quad x > 0$ *είναι κυρτή*

(vii) $\lim_{z\to -n}\Gamma(z)=\infty,\quad (n\geq 0\in\mathbb{Z})$

(viii) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

(ix) $\int_0^\infty e^{-pt}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{p^z},\quad \Re(p)>0,\quad \Re(z)>0$

(x) $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$

(xi) $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},\quad (z\neq 0,-1,-2,\dots)$

(xii) $n!=(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}e^{\mu(n)},\quad \lim_{n\to\infty}\mu(n)=0$

3.3 Η συνάρτηση Βήτα του Euler

Ορισμός 3.3.1. *Το ολοκλήρωμα*

$$B(z,\zeta)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt$$

όπου το t είναι μια πραγματική μεταβλητή, $t^{z-1}=e^{z-1}\ln t$, $(1-t)^{\zeta-1}=e^{(\zeta-1)\ln(1-t)}$, μελετήθηκαν από τον Euler για z και ζ πραγματικά. Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για $\Re(z)>0$ και $\Re(\zeta)>0$ και ορίζει πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο των δυο αυτών ημιεπιπέδων μια συνάρτηση $B(z,\zeta)$ αναλυτική για καθεμιά από τις δυο μεταβλητές, και ονομάζεται συνάρτηση Βήτα.

Θεώρημα 3.3.2. *Η συνάρτηση Βήτα συνδέεται με τη συνάρτηση Γάμμα με την εξής σχέση:*

$$B(z,\zeta)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}$$

3.4 Αναλυτική συνέχιση της συνάρτησης ζ

Η αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ θα επιτευχθεί σταδιακά. Η διαδικασία έχει καταμερισθεί σε θεωρήματα που το καθένα αντιστοιχεί και σε μία υποπεριοχή αναλυτικής συνέχισης. Καταλυτική σημασία στα επιχειρήματά μας έχει η συναρτησιακή εξίσωση του Riemann που αποδεικνύεται παρακάτω κι είναι ανάλογη με τη συναρτησιακή εξίσωση της Γ . Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα μας βοηθήσει να συνεχίσουμε τη συνάρτηση ζ στην περιοχή $\Re(s)>0$.

Θεώρημα 3.4.1.

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt \tag{3.13}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Γ αντικαθιστώντας το x με nx. Έτσι, η σχέση γίνεται :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^{s-1}d(nx) = n^s \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Αν διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με n^s, παίρνουμε :

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Αν, τώρα, αθροίσουμε τα δυο μέλη ως προς n κι εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το άθροισμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης θα καταλήξουμε στη σχέση :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο μέλος εμφανίζεται η συνάρτηση ζήτα. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^\infty r^{-n} = (r-1)^{-1}$ φτάνουμε στη σχέση :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty (e^x-1)^{-1}x^{s-1}dx$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνεχίσουμε τη συνάρτηση ζήτα στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 0$. □

Θεώρημα 3.4.2. *Η $\zeta(s)$ μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 0$*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι :

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{t}dt = \int_0^1 t^{s-2}dt = \frac{1}{s-1}$$

Για $\Re(s) > 1$ η (3.13) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt \tag{3.14}$$

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα (2.3.1) πως ισχύει:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad \forall x : |z| < 2\pi$$

όπου B_n είναι οι αριθμοί Bernoulli. Πολλαπλασιάζοντας με z και αφαιρώντας από τη σχέση $\frac{1}{t}$ καταλήγουμε στην :

$$\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{2}+\frac{B_2}{2!}+\cdots\ ,\quad \forall t:|t|<2\pi$$

. Επομένως :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{2}$$

Άρα, θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}|<1,\quad \forall t:0<t\leq\delta$ και

$$\int_0^\delta\left|\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right|t^{\sigma-1}dt\leq\frac{\delta^\sigma}{\sigma}1=\frac{\delta^\sigma}{\sigma}$$

Επομένως, το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.14) συγκλίνει απόλυτα για $\sigma=\Re(s)>0$ και μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι το ολοκλήρωμα αυτό ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο $\Re(s)>0$. Ανάλογα επιχειρήματα εφαρμόζονται και στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (3.14), μιας και το $t^{s-1}(e^t-1)^{-1}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο καθώς το $t\to\infty$, για κάθε ακέραιο $s>1$. Επομένως, το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.14) είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\Re(s)>0$, εκτός μόνον από το σημείο $s=1$, όπου ο δεύτερος όρος της σχέσης έχει έναν απλό πόλο με υπόλοιπο μονάδα.
Συνεπώς, όταν διαιρεθεί με τη συνάρτηση $\Gamma(s)$, που, όπως πρωτύτερα δείξαμε, δεν έχει μηδενικά, μπορεί να θεωρηθεί σαν η αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στην ευρύτερη περιοχή $s:\Re(s)>-1$. □

Το επόμενο βήμα είναι η $\zeta(s)$ να συνεχισθεί μερομορφικά στη λωρίδα $-1<\Re(s)<1$.

Θεώρημα 3.4.3. *Η συνάρτηση $\zeta(s)$ συνεχίζεται μερομορφικά στη λωρίδα $-1<\Re(s)<1$.*

Απόδειξη. Καθώς στην περιοχή $0<\Re(s)<1$ ισχύει :

(3.15)
$$\int_1^\infty\frac{t^{s-1}}{t}dt=\int_1^\infty t^{s-2}dt=-\frac{1}{s-1}$$

αντικαθιστώντας την (3.15) στην (3.14),θα έχουμε :

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)t^{s-1}dt-\int_1^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)t^{s-1}dt$$

που ισχύει για $0<Real(s)<1$. Η τελευταία τώρα σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

(3.16)
$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)t^{s-1}dt+\int_1^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt-\frac{1}{2s}$$

Στη σχέση αυτή, τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος ορίζουν αναλυτικές συναρτήσεις στην περιοχή $-1 < \Re(s) < 1$, καθώς :

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = t\left(\frac{1}{2}B_2 + \frac{1}{24}B_4 t^2 + \cdots\right)$$

Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο κάτω όριο για $\Re(s) > -1$, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο άνω όριο για $\Re(s) < 1$. Συγκεκριμένα :

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} < \frac{1}{t}, \ \ \forall t : t > 0$$

Εξ' αυτού έπεται ότι μπορούμε να συνεχίσουμε αναλυτικά τη συνάρτηση ζήτα στην περιοχή $-1 < \Re(s) < 1$, αν διαιρέσουμε τη σχέση (3.16) με τη συνάρτηση Γάμμα. □

Θεώρημα 3.4.4 (Συναρτησιακή Εξίσωση του Riemann). *Ισχύει η εξίσωση :*

$$\xi(1-s) = \xi(s), \ \ \forall s \in \mathbb{C}$$

όπου:

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s), \ \ \forall s \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη. Το σημείο $s = 0$ δεν είναι πόλος της $\zeta(s)$, καθώς αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (3.16) με s, θα έχουμε:

$$s\Gamma(s)\zeta(s) = \Gamma(s+1)\zeta(s) = s\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt - \frac{1}{2} + s\int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt$$

θέτοντας $s = 0$, βρίσκουμε $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Στη συνέχεια, έχουμε :

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{s-1}dt = -\frac{1}{2s}, \ \ \forall s : -1 < \Re(s) < 0$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (3.16) και συνδυάζοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt + \frac{1}{2s} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt + \frac{1}{2}\int_1^\infty t^{s-1}dt + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt, \ \ \forall s : -1 < \Re(s) < 0 \tag{3.17}$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η ίδια που εμφανίζεται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση του Binet
(Η ολοκληρωτική αναπαράσταση του Binet είναι η σχέση :$\log\Gamma(z) = (z - \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty (\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1})\frac{e^{-tz}}{t}dt$ που πρότεινε για τη συνάρτηση Γ ο Binet.)
Έτσι, μπορούμε να βρούμε ότι :

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\coth\frac{t}{2} - \frac{1}{t} = 2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4\pi^2n^2}$$

Οπότε αντικαθιστώντας αυτή την σχέση στην 3.17 βρίσκουμε:
(3.18)

$$\Gamma(s)\zeta(s) = 2\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4\pi^2n^2}\right)t^s dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{t^s}{t^2+4\pi^2n^2}dt,\ \forall s: -1 < \Re(s) < 0$$

Ωστόσο, το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $-1 < \Re(s) < 1$. Αν αντικαταστήσουμε $t = 2\pi n\tau^{\frac{1}{2}}$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα, τότε :

$$\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\int_0^\infty\frac{\tau^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\tau+1}d\tau = \frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}B\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2},\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right) \tag{3.19}$$

Με λίγα λόγια, με την παραπάνω αντικατάσταση καταλήξαμε σε ένα ολοκλήρωμα B, που συγκλίνει για $\Re(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}) > 0$ και $\Re(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}) > 0$. Γράφοντας το δεξί μέλος της (3.19) με όρους της συνάρτησης Γάμμα και με χρήση της ιδιότητας 8 που αναφέρεται στο θεώρημα (3.2.3) σε συνδυασμό με το θεώρημα (3.3.2) που συνδέει τις συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα,έχουμε :

$$\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\frac{\pi}{\sin(1/2\pi(1+s))} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\frac{\pi}{\cos(1/2\pi s)} \tag{3.20}$$

Καθώς ισχύει $s = \sigma + iy$, όπου $\sigma = \Re(s)$ και $y = \Im(s)$, έχουμε

$$|\cos(1/2\pi s)| = \sqrt{\cos^2(1/2\pi\sigma) + \sinh(1/2\pi y)}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη εφ' όσον το s βρίσκεται εντός της λωρίδας $-1 < \Re(s) < 1$. Αν εισάγουμε το αποτέλεσμα της (3.20) στην (3.18), έχουμε :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{\pi(2\pi)^{s-1}}{\cos(1/2\pi s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \tag{3.21}$$

όπου η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\Re(1-s) > 1$ ή $\Re(s) < 0$. Αυτό δικαιολογεί την αντιστροφή της τάξης του αθροίσματος και της ολοκλήρωσης στην (3.18) και δείχνει ότι η περιοχή ισχύος της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να περιοριστεί στη λωρίδα $-1 < \Re(s) < 0$.
Τώρα, η εξίσωση (3.17) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{\pi(2\pi)^{s-1}}{cos(1/2\pi)s}\zeta(1-s)$$

που απλοποιείται στη μορφή

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin(1/2\pi s)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Η (3.13) ισχύει στην περιοχή $-1 < \Re(s) < 0$.
Η συνάρτηση στο δεξί μέλος της είναι αναλυτική στην περιοχή $\Re(1-s) > 1$ ή $\Re(s) < 0$, επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μπορέσουμε να αποδείξουμε την αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\Re(s) < 0$. Αν γίνει αυτό, η εξίσωση (3.13) θα ισχύει για κάθε τιμή του s, παρεκτός της τιμής $s = 1$.
Ακολουθώντας τον ορισμό της ξ στην εκφώνηση του θεωρήματος καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Καταληκτικά έχουμε αποδείξει το παρακάτω κομβικό θεώρημα :

Θεώρημα 3.4.5 (Αναλυτική Συνέχιση της $\zeta(s)$ στο $\mathbb{C}$)**.** *Η συνάρτηση $\zeta(s)$, που ορίζεται στο $\Re(s) > 1$ από την εξίσωση*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

μπορεί να συνεχισθεί στο επίπεδο s σαν μερομορφική συνάρτηση με έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με κύριο όρο $\frac{1}{s-1}$. Επιπλεόν, η $\zeta(s)$ ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση (3.13) σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

Πόρισμα 3.4.6. *Οι συναρτήσεις $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ και $(s-1)\zeta(s)$ είναι ακέραιες συναρτήσεις*

Πόρισμα 3.4.7. $\zeta(\sigma) > 1$ *για* $\sigma = \Re(s) > 1$

Απόδειξη.

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \cdots > 1$$

Αργότερα θα αποδείξουμε ότι $zeta(s) \neq 0$ στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 1$. □

Πόρισμα 3.4.8. $\zeta(-2m) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

Απόδειξη. Ο παράγοντας $sin(1/2\pi s)$ στη συναρτησιακή εξίσωση (3.13) έχει απλά μηδενικά στα σημεία $s = \pm 2m, \; m = 1, 2, 3, \ldots$. Το μηδενικό στο $s = 0$ απλοποιείται από τον πόλο της $\zeta(s-1)$ στο $s = 0$, καθώς τα μηδενικά στο $s = 2m$ απλοποιούνται από τους απλούς πόλους της $\Gamma(1-s)$ στα ίδια σημεία. Ωστόσο, αν $s = -2m$ τότε $\Gamma(1+2m) \neq 0$, επομένως τα σημεία $-2, -4, -6, \ldots$ θα είναι απλά μηδενικά της $\zeta(s)$. □

Τα μηδενικά της $\zeta(s)$ στους αρνητικούς άρτιους ακέραιους καλούνται τετριμμένα μηδενικά της $\zeta(s)$.

Πόρισμα 3.4.9. $\zeta(\sigma) < 0, \quad$ *για* $\quad 0 \leq \sigma < 1$

Απόδειξη. Θεωρούμε την εναλλάσσουσα σειρά :

$$\sum_{n=i}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά συγκλίνει για $s = \sigma > 0$. Αν $\Re(s) > 1$, έχουμε:

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) - 2\left(\frac{1}{2^s + \frac{1}{4^s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}$$

Εφοσον το δεξί μέλος της σχέσης συγκλίνει για s πραγματικό και θετικό, από την Αρχή του Ταυτοτισμού (2.6.9) η εξίσωση ισχύει επίσης στο δεξί ημιεπίπεδο $\Re(s) > 0$, εκτός από το σημείο $s = 1$. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\sigma} = (1 - 2^{1-\sigma}) \zeta(\sigma)$$

για $0 < \sigma < 1$. Ξανά, για $0 < s < 1$ έχουμε

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma} + \cdots - \frac{1}{(2n)^\sigma} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^\sigma}\right) + \left(\frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2n-1)^\sigma} - \frac{1}{(2n)^\sigma}\right] > 1 - \frac{1}{2^\sigma}$$

και αν

$$R_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\sigma} - \frac{1}{(2n+2)\sigma} + \cdots$$

έχουμε ότι

$$|R_{2n}| < \epsilon = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^\sigma})$$

για n αρκετά μεγάλο. Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\sigma} = S_{2n} + R_{2n} > 0$$

και η (3.13) συνεπάγεται ότι $\zeta(\sigma) < 0$, καθώς $1 - 2^{1-\sigma}$. Για $s = 0$ έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $\zeta(0) = \frac{1}{2}$ □

Πόρισμα 3.4.10. *Ισχύει ότι* $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(1/2\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$

Απόδειξη. Αν αντικαταστήσουμε το s με $1-s$ στην (3.13) έχουμε :

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\sin(1/2\pi(1-s))\Gamma(s)\zeta(s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(1/2\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$$

□

3.5 Περαιτέρω ιδιότητες της συνάρτησης ζ

Θεώρημα 3.5.1. *Αν το $\{p_n\}$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών και $\sigma = \Re(s) > 1$, τότε:*

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}} \tag{3.22}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι το απειρογινόμενο στα δεξιά της (3.22) συγκλίνει απόλυτα για $\Re(s) > 1$, καθώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^\sigma}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\sum \frac{1}{p_n^\sigma} < \sum \frac{1}{n^\sigma} < \infty$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει, δηλαδή δεν αποκλίνει στο 0 ή στο ∞. Τώρα, για κάθε n έχουμε : Αυτό συνεπάγεται ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει, δηλαδή δεν αποκλίνει στο 0 ή στο ∞. Τώρα, για κάθε n έχουμε :

$$\frac{1}{1-p_n^{-s}} = 1 + p_n^{-s} + p_n^{-2s} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} p_n^{-ms}$$

και αντικαθιστώντας την τελευταία στην $\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-s})^{-1}$ έχουμε

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-s} \tag{3.23}$$

όπου το άθροισμα στο δεξί μέλος της σχέσης εκτείνεται πάνω στους ακεραίους n_k των οποίων η ανάλυση σε πρώτους αριθμούς είναι της μορφής

$$n_k = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \cdots p_N^{\alpha_N} \tag{3.24}$$

όπου $\alpha_2 > 0, \cdots \alpha_N > 0$. Ο παράγοντας για κάθε n_k^{-s} είναι 1, όπως προκύπτει από το Θεώρημα της ανάλυσης ενός ακεραίου σε πρώτους παράγοντες. Μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-s}$$

όπου άθροισμα $\sum_{j=1}^{\infty}$ εκτείνεται πάνω σε όλους τους θετικούς ακέραιους n_j , που περιέχουν τουλάχιστον ένα πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του p_N. Όμως :

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-s}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-\sigma} < \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

Καθώς το $N \to \infty$, το τελευταίο άθροισμα προσεγγίζει το 0, που είναι το υπόλοιπο της συγκλίνουσας σειράς για $\sigma > 1$. Επομένως :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \zeta(s) - \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-s} = \zeta(s)$$

□

Πόρισμα 3.5.2. *Η ακολουθία $\{p_n\}$ των πρώτων αριθμών είναι άπειρη.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των πρώτων είναι πεπερασμένος στο $\mathbb{N}$. Τότε, το αριστερό μέλος της σχέσης (3.23) θα ήταν πεπερασμένο γινόμενο, που συνεπάγεται μια πεπερασμένη τιμή p για $s = 1$, ενώ το δεξί μέλος θα ήταν ισοδύναμο με $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, καθώς κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή (3.24). Καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς η $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ είναι μια αποκλίνουσα σειρά. □

Πόρισμα 3.5.3. $\zeta(s) \neq 0$ *για* $\Re(s) > 1$

Απόδειξη. Συνεπάγεται αμέσως από την (3.13), καθώς το απειρογινόμενο στο δεξί μέλος συγκλίνει (δηλαδή δεν αποκλίνει στο μηδέν). □

Πόρισμα 3.5.4. *Η σειρά των πρώτων αριθμών είναι αποκλίνουσα. Δηλαδή :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$$

Απόδειξη. Αν η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n)^{-1}$ ήταν συγκλίνουσα, τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-1})$ θα ήταν απόλυτα συγκλίνον. Όμως :

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-1})} > \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1-p_n^{-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}$$

ώστε η $\sum_{k=1}^{\infty}$ θα ήταν συγκλίνουσα για κάθε φυσικό αριθμό στο $\mathbb{N}$. Ωστόσο, αυτό συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, καθώς οποιοδήποτε άθροισμα της αρμονικής σειράς είναι μικρότερο από κάποιο μερικό άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1}$. Καταλήξαμε σε άτοπο ισχυρισμό, κι άρα στην απόδειξη του ζητούμενου. □

Πόρισμα 3.5.5. *Έστω* $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^m$ *αν* n *είναι το γινόμενο* m *διαφορετικών πρώτων και* $\mu(n) = 0$ *διαφορετικά, δηλαδή αν το* n *περιέχει κάθε πρώτο παράγοντα σε δύναμη μεγαλύτερη της πρώτης. Τότε :*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.5.3, η εξίσωση (3.22) μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s})$$

Έχουε :

$$\prod_{k=1}^{N}(1-p_k^{-s}) = (1-2^{-s})(1-3^{-s})\cdots(1-p_N^{-s}) = \sum_{N=1}^{p_1p_2\cdots p_N} \mu(n)n^{-s}$$

όπου το n είναι είτε 1 είτε γινόμενο κάποιων πρώτων $2, 3, \cdots, p_N$ στην πρώτη δύναμη. Τότε :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} - \prod_{k=1}^{N}(1-p_k^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} - \sum_{N=1}^{p_1p_2\cdots p_N} \mu(n)n^{-s} = \sum_{\nu} \mu(\nu)\nu^{-s}$$

όπου το ν περιέχει τουλάχιστον ενάν πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του p_N . Εφ' όσον :

$$\left|\sum_{\nu} \mu(\nu)\nu^{-s}\right| \leq \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^{\sigma}} < \sum_{k=p_N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma}} < \epsilon$$

για p_N αρκετά μεγάλο, βλέπουμε ότι η αρχική σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει. □

Θεώρημα 3.5.6. *Για κάθε ακέραιο $N \geq 0$ και $\sigma > 0$ έχουμε :*

$$\zeta(s) = \sum_{0}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{x-[x]}{(x)^{s+1}}dx$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον αθροιστικό τύπο του Eulerμε $f(t) = t^{-s}$ και ακεραίους x, y έχουμε :

$$\sum_{y<n\leq x} \frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{dt}{t^s} - s\int_y^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

Αν θέσουμε $y = N$ και $x \to \infty$;ε $\sigma > 1$, παίρνουμε :

$$\sum_{n=N+1} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^s} - s\int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

ή, διαφορετικά :

$$\zeta(s) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

□

Παραθέτουμε παρακάτω μια σημαντική σχέση μεταξύ της συνάρτησης ζήτα του Riemann και της συνάρτησης $\Lambda(n)$.

Θεώρημα 3.5.7. *Ισχύει :*

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \tag{3.25}$$

όπου

$$G(s) = \ln\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s} \tag{3.26}$$

Απόδειξη. Η παραπάνω σχέση μπορεί να προκύψει άμεσα με τη χρήση της σχέσης (3.22)

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$$

Αν κρατήσουμε το s πραγματικό, με $s > 1$, ούτως ώστε η $\zeta(s)$ να είναι θετική. Αν λογαριθμίσουμε και χρησιμοποιήσουμε τη δυναμοσειρά $-\ln(1-x) = \sum \frac{x^m}{m}$,
βρίσκουμε :

$$\ln \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_1(n) n^{-s}$$

όπου :

$$\Lambda_1(n) = \begin{cases} \log p & \text{όταν } n = p^m \text{ για κάποιον πρώτο } p \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Όμως, αν $n = p^m$, τότε $\ln n = m \ln p = m\Lambda(n)$ οπότε $\frac{1}{m} = \Lambda(n) \ln n^{-1}$.Επομένως :

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s}$$

που συνεπάγεται την (3.25). Όμως, κάθε μέλος της (3.25) είναι αναλυτικό στο ημιεπίπεδο $\sigma > 1$, επομένως, με αναλυτική συνέχιση, η (3.25) ισχύει επίσης για $\sigma > 1$. □

Πόρισμα 3.5.8. *Ισχύει :*

(3.27) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$$

Απόδειξη. Παρατηρού;ε ότι

(3.28) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (\ln \zeta(s))'$$

Επομένως, παραγωγίζοντας τη σχέση (3.26) παίρνουμε :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (\ln \zeta(s)) = \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) n^{-s}}{\ln n} \right)' =$$

$$= \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) e^{-s \ln n}}{\ln n} \right)' = \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n \Lambda(n) e^{-s \ln n}}{\ln n} \right)' =$$

$$= -\sum_{n\geq 2} \Lambda(n)n^{-s}$$

□

Θεώρημα 3.5.9. *Ισχύει :*

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(n)!}B_{2n}$$

Θεώρημα 3.5.10. *Ισχύει :*

$$\zeta(1-2n) = (-1)^n \frac{|B_{2n}|}{2n}$$

Απόδειξη. Μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης (3.13) και του προηγούμενου θεωρήματος καταληγούμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.5.11. *Τα μη τετριμμένα μηδενικά της $\zeta(s)$ κείνται συμμετρικά ως προς την ευθεία $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

Απόδειξη. Βάσει του πορίσματος (3.5.3) γνωρίζουμε ότι όλα τα μηδενικά στο θετικό ημιεπίπεδο θα πρέπει να βρίσκονται στη λωρίδα $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Λόγω, όμως, του θεωρήματος για τη συναρτησιακή εξίσωση (3.4.4):

$$\xi\left(\frac{1}{2}+s\right) = \xi\left(1-\frac{1}{2}-s\right) = \xi\left(\frac{1}{2}-s\right), \quad \forall s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Επειδή η $\xi(s)$ μηδενίζεται όπου και η $\zeta(s)$, συμπεραίνουμε τη ζητούμενη συμμετρία. □

Λόγω του παραπάνω Θεωρήματος η λωρίδα $0 \leq \Re(s) \leq 1$ αναφέρεται ως κρίσιμη. Η υπόθεση του Riemann αναφέρει ότι όλα τα μηδενικά βρίσκονται ακριβώς πάνω στην κεντρική ευθεία $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Η μέγιστη λωρίδα που μπορούμε να διανύσουμε από τη μονάδα προς το $1/2$, χωρίς να συναντήσουμε κάποιο σημείο μηδενισμού της ζ, ονομάζεται ζώνη μη μηδενισμού της ζ. Ισχύει η ασυμπτωτική σχέση που γενικεύει το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O(x^{\Theta}\ln x)$$

όπου Θ το πάχος αυτής της λωρίδας. Στην περίπτωση που ισχύει η υπόθεση του Riemann το Θ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

3.6 Ρητή έκφραση μεταξύ των μηδενικών της $\zeta(s)$ και των πρώτων αριθμών

Στην παρούσα ενότητα θα αναφέρουμε ορισμένα στοιχεία της αρχικής απόδειξης του Hadamard για το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, ώστε να δικαιολογήσουμε την απόδειξη που αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Από το Θεώρημα (3.4.1) γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $(s-1)\zeta(s)$ είναι ακέραια. Στη Θεωρία Ακέραιων Συναρτήσεων αποδεικνύεται ένα ανάλογο παραγοντικό ανάπτυγμα της συνάρτησης πάνω στα μηδενικά της με εκείνο των πολυωνύμων. Συγκεκριμένα για την $(s-1)\zeta(s)$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 3.6.1 (Παραγοντικό ανάπτυγμα της $(s-1)\zeta(s)$). *Ισχύει το παραγοντικό ανάπτυγμα :*

$$(s-1)\zeta(s) = e^{a+bs}\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}, \quad \forall s\in\mathbb{C}$$

όπου το πρώτο γινόμενο εκτείνεται πάνω στα μηδενικά της $\zeta(s)$ στον αρνητικό ημιάξονα και το δεύτερο στα μηδενικά της $\zeta(s)$ εντός της κρίσιμης λωρίδας $0<\Re(s)<1$.

Αν διαιρέσουμε με $s-1$ και παραγωγίσουμε λογαριθμικά καταλήγουμε στον τύπο :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b-\frac{1}{s-1}-\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{s}{2n(s+2n)}+\sum_{\rho}\frac{s}{\rho(s-\rho)}, \quad \Re(s)>1$$

Παρατηρούμε ότι $\ln'(\zeta(s)) = b+1$. Οπότε :

$$b-\frac{1}{s-1} = b+1-\frac{s}{s-1} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{s}{s-1}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα (3.5.10) λαμβάνουμε τον τύπο :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s} = \frac{s}{s-1}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{s}{2n(s+2n)}+\sum_{\rho}\frac{s}{\rho}(s-\rho), \quad \Re(s)>1$$

Αν αντιστρέψουμε κατά Mellin την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στον τύπο :

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s};x\right] = x-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}).$$

Στο λήμμα 4.5.1 του επόμενου κεφαλαίου θα δούμε πως ο αντίστροφος κατά Mellin του αριστερού μέλους είναι η συνάρτηση $\psi(x)$, όπου $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$. Συνολικά έχουμε καταλήξει στο θεώρημα :

Θεώρημα 3.6.2 (Ρητός τύπος για την $\psi(x)$). *Ισχύει το ανάπτυγμα :*

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου το άπειρο άθροισμα εκτείνεται στα μηδενικά της $\zeta(s)$ *εντός της κρίσιμης λωρίδας* $0 < \Re(s) < 1$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι ο όρος που επικρατεί ασυμπτωτικά στον παραπάνω τύπο είναι ο γραμμικός, πράγμα που είναι ισοδύναμο, όπως επίσης θα δείξουμε, με το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών.

Κεφάλαιο 4

Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

4.1 Οι αποδείξεις του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

Τα τελευταία 20 χρόνια του 19ου αιώνα σημειώθηκαν σημαντικές εξελίξεις στη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων με αποτέλεσμα να ξαναεκδηλωθεί ενδιαφέρον για την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων και την εργασία του Riemann. Το 1896, ξέχωρα ο ένας από τον άλλο, ο Hadamard κι ο de la Vallee Poussin απέδειξαν το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών.

Και οι δυο τους ξεκίνησαν από το μη μηδενισμό της $\zeta(s)$ *πάνω στην ευθεία* $\Re(s) = 1$. *Ο Hadamard, όπως ο ίδιος αναφέρει, χρησιμοποίησε θεμελιωδώς το παραγοντικό ανάπτυγμα της* $\zeta(s)$ *πάνω στα μηδενικά της βασιζόμενος στην εργασία του Weierstrass. Ο de la Vallee Poussin βασίστηκε σημαντικά στη σχέση :*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^1 \frac{x}{(x+n)^{s+1}}dx$$

επιτυγχάνοντας έτσι την αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$. *Εν τέλει απέδειξε την ασυμπτωτική σχέση :*

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} lnp = (1+o(1))x$$

γνωρίζοντας την ισοδυναμία της με αυτή για την $\pi(x)$ *από την εργασία του Chebyshev.*

Το 1898 ο Mertens με έναν ευφυή τρόπο που αναπαράγουμε και στην παρούσα διπλωματική, απλοποίησε την απόδειξη για το μη μηδενισμό της $\zeta(s)$

πάνω στην ευθεία $\Re(s) = 1$. Αργότερα ο Hardy κι ο Littlewood απλοποίησαν από κοινού περαιτέρω την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών.

Το 1948 ο Selberg κι ο Erdos απέδειξαν ξέχωρα το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών με τη βοήθεια μόνο στοιχειωδών ανισοτικών εργαλείων. Αυτή η απόδειξη θεωρήθηκε στην εποχή της μια σημαντική εξέλιξη, καθώς υποδείκνυε ότι το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών δεν ήταν τόσο στενά συνδεδεμένο με τη συνάρτηση $\zeta(s)$ και πολύ περισσότερο με την υπόθεση του Riemann, όπως μέχρι τότε ήταν κοινή θέση.

Το 1980 ο Newman απλοποίησε ακόμα περισσότερο την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών βασιζόμενος κυρίως στο Θεώρημα του Cauchy. Μια παραλλαγή της συγκεκριμένης απόδειξης αναπτύσσουμε στην παρούσα διπλωματική.

4.2 Το πλάνο της απόδειξης

Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών είναι ισοδύναμο με τη σχέση :

$$\psi(x) \sim x, \quad x \to \infty \tag{4.1}$$

όπου το $\psi(x)$ είναι η συνάρτηση του Chebyshev

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n),$$

και $\Lambda(n)$ η συνάρτηση του Mangoldt, όπως την έχουμε ορίσει στον ορισμό (2.2.1). Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε την αναλυτική απόδειξη της (4.1) που βασίζεται στις ιδιότητες της συνάρτησης ζ του Riemann. Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τα βασικά στοιχεία της απόδειξης αυτής.

Η συνάρτηση ψ είναι βηματική συνάρτηση. Συνεπώς είναι πιο βολικό να χειριστούμε το ολοκλήρωμα της ψ, που εκφράζουμε σαν ψ_1.

Επομένως, θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(x)dt$$

Το ολοκλήρωμα της ψ_1 είναι μια κατά τμήματα γραμμική και συνεχής συνάρτηση. Δείχνουμε πρώτα ότι η ασυμπτωτική σχέση :

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x \to \infty \tag{4.2}$$

συνεπάγεται την (4.1) κι αποδεικνύουμε την (4.2). Για το σκοπό αυτό, εκφράζουμε την $\psi_1(x)/x^2$ με όρους της συνάρτησης ζ του Riemann, μέσω ενός *επικαμπύλιου ολοκληρώματος :*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds, \quad c>1$$

Ο παράγοντας $\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ *έχει έναν πρώτης τάξης πόλο στο* $s=1$ *με υπόλοιπο* 1. *Αν αφαιρέσουμε αυτόν τον πόλο παίρνουμε τη σχέση :*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{-1}{s-1}\right) ds, \quad c>1$$

Θέτουμε :

$$h(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{-1}{s-1}\right) ds$$

και ξαναγράφουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή :

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds \tag{4.3}$$

Αν κάνουμε την αντικατάσταση $s = c+it$, *παίρνουμε τη σχέση :*

$$\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt \tag{4.4}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ακόμη ότι :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt = 0 \tag{4.5}$$

Το λήμμα Riemann-Lebesgue στη θεωρία των σειρών Fourier δηλώνει ότι :

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt = 0 \tag{4.6}$$

αν το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ *συγκλίνει. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (4.5) είναι της μορφής αυτής, αν αντικαταστήσουμε το* x *με το* $\log x$ *κι εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα* $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(c+it)|dt$ *συγκλίνει αν* $c>1$, *επομένως το ολοκλήρωμα της σχέσης (4.5) τείνει στο* 0 *καθώς* $x\to\infty$. *Ωστόσο, ο παράγοντας* x^{c-1} *εκτός του ολοκληρώματος τείνει στο άπειρο για* $c>1$, *επομένως, ερχόμαστε αντιμέτωποι με την απορσδιόριστη μορφή* $\infty 0$. *Η εξίσωση (4.4) ισχύει για κάθε* $c>1$. *Αν μπορούσαμε να θέσουμε* $c=1$ *στην (4.4), ο παράγοντας* x^{c-1} *που δημιουργεί απροσδιοριστία θα μπορούσε να εξαλειφθεί.*

Όμως τότε, η $h(c+it)$ γίνεται $h(1+it)$ και η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιλαμβάνει το $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ στη γραμμή $\sigma = 1$.

Στην περίπτωση αυτή είναι πολύ δύσκολο να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ συγκλίνει, κάτι που πρέπει να αποδειχθεί ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Riemann-Lebesgue Το τελευταίο και δυσκολότερο κομμάτι της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε το c με 1 στη σχέση (4.4) κι ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ συγκλίνει. Αυτό το σημείο απαιτεί μια πιο εμπεριστατωμένη μελέτη της συνάρτησης ζήτα του Riemann στη γειτονιά της γραμμής $\sigma = 1$.

Για την παρουσίαση όλων των παραπάνω θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε την ισοδυναμία των ασυμπτωτικών σχέσεων $\psi(x) \sim x$ και $\pi(x) \sim x/\ln x$. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια μιας άλλης συνάρτησης του Chebyshev, της $\theta(x)$, η οποία ορίζεται ως

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \ln p \tag{4.7}$$

Δια τούτο, θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας τον παραπάνω ισχυρισμό, και θα συνεχίσουμε με τη διατύπωση ορισμένων λημάτων.

4.3 Ισοδυναμία των ασυμπτωτικών σχέσεων $\psi(x) \sim x$ και $\pi(x) \sim x/\ln x$

Θα ξεκινήσουμε με μερικά χρήσιμα λήμματα και θεωρήματα, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν το θεμέλιο λίθο για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των δυο ασυμπτωτικών σχέσεων.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω $n \ge 1$ και $1 \le k \le n$. Τότε :*

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{2},$$

$$\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k} \Leftrightarrow k > \frac{n+1}{2},$$

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow k = \frac{n+1}{2} \quad \text{και } n \text{ περιττός.}$$

Απόδειξη.

$$r(k) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k-1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k} \tag{4.8}$$

Επομένως, $r(k) > 1$ αν και μόνο αν $k < \frac{n+1}{2}$, $r(k) < 1$ αν και μόνο αν $k > \frac{n+1}{2}$ και $r(k) = 1$ αν και μόνο αν $k = \frac{n+1}{2}$. □

Λήμμα 4.3.2. *Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει :*

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

Απόδειξη. Από το διωνυμικό Θεώρημα έχουμε :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} > \binom{2n}{n}$$

Από το προηγούμενο λήμμα ο μέσος διωνυμικός παράγοντας είναι ο μέγιστος διωνυμικός παράγοντας στο ανάπτυγμα του $(1+1)^{2n}$. Επομένως :

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} + 1 \leq$$

$$\leq 2 + (2n-1)\binom{2n}{n} \leq$$

$$\leq 2n\binom{2n}{n}. \tag{4.9}$$

□

Θεώρημα 4.3.3. *Για κάθε θετικό ακέραιο n:*

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n \tag{4.10}$$

Ισοδύναμα, για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 1$ ισχύει :

$$\theta(x) < x \log 4 \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Έστω $m \geq 1$. Θεωρούμε τους διωνυμικούς συντελεστές :

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} =$$

$$= \frac{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+2)}{m!}$$

Η παραπάνω παράσταση είναι ακέραιος αριθμός, καθώς το M είναι διωνυμικός συντελεστής. Επιπλέον :

$$2M = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}$$

$$< \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

κι έτσι

$$M < 4^m$$

Αν p είναι πρώτος αριθμός τέτοιος ώστε $m+2 \leq p \leq 2m+1$, τότε το p διαιρεί το γινόμενο

$$(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m-2)$$

αλλά όχι το $m!$. Συνεπάγεται ότι $p \setminus M$, κι έτσι το γινόμενο :

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p$$

διαιρεί το M. Επομένως,

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq M < 4^m \tag{4.12}$$

για κάθε θετικό m. Θα αποδείξουμε την ανισότητα (4.10) με επαγωγή στο n. Η ανισότητα αυτή ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$, καθώς $1 < 4^1$ και $2 < 4^2$ αντίστοιχα. Έστω $n \geq 3$ και θεωρούμε ότι η (4.10) ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους $m < n$. Αν το n είναι άρτιο, τότε :

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n.$$

Αν το n είναι περιττό, τότε $n = 2m+1$, για κάποιο $m > 1$ και

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p.$$

Εξ επαγωγής, έχουμε :

$$\prod_{p \leq m+1} p < 4^{m+1} \tag{4.13}$$

Από τις (4.12), (4.13) ισχύει ότι :

$$\prod_{p \le n} p = \prod_{p \le m+1} p \prod_{m+2 \le 2m+1} p < 4^{m+1} 4^m = 4^{2m+1} = 4^n$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει την (4.10). Η ανισότητα (4.11) έπεται της (4.10) ως εξής : Αν $x \ge 1$, τότε $n = [x] \ge 1$ και

$$\theta(x) = \theta(n) = \ln \prod_{p \le n} p < n \ln 4 \le x \ln 4.$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η (4.11) έπεται της (4.10). □

Θεώρημα 4.3.4. *Υπάρχουν θετικές σταθερές A, B τέτοιες, ώστε :*

$$Ax \le \theta(x) \le \psi(x) \le \pi(x) \ln x \le B$$

για κάθε $x \le 2$. Επιπλεόν :

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \ge \ln 2$$

και

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \le \ln 4$$

Απόδειξη. Το θεώρημα 4.3.3 δίνει άνω φράγμα $\theta(x) < x \ln 4$, κι έτσι :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \le \ln 4$$

Θα υπολογίσουμε το κάτω φράγμα για το $\psi(x)$. Έστω n είναι ένας θετικός α-κέραιος, και θεωρούμε το μέσο διωνυμικό παράγοντα $N = \binom{2n}{n}$. Γράφουμε το N σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής :

$$N = \binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \prod_{p \le 2n} p^{u_p((2n)!) - 2u_p(n!)}$$

όπου :

$$u_p((2n)!) - 2u_p(n!) = \sum_{k=1}^{[\ln 2n/\ln p]} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{2k} \right] \right)$$

Για κάθε πραγματικό αριθμό t ισχύει $[2t] - 2[t] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Επομένως :

$$0 \le u_p((2n)!) - 2u_p(n!) \le \left[\frac{\ln 2n}{\ln p} \right]$$

Λόγω του λήμματος 4.3.2, ισχύει :

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq N - \prod_{p \leq 2n} p^{u_p((2n)!)-2u_p(n!)} \leq \prod_{p \leq 2n} p^{[\ln 2n/\ln p]}$$

κι έτσι :

$$2n \ln 2 - \ln 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right] \ln p = \psi(2n)$$

Έστω $x \geq 2$ και $n = [x/2]$. Τότε :

$$2n \leq x < 2n + 2$$

και

$$\psi(x) \geq \psi(2n) \geq 2n \ln 2 - \ln 2n > (x-2)\ln 2 - \ln x = x \ln 2 - \ln x - 2\ln 2$$

Επομένως :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \ln 2.$$

Τώρα, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την $\theta(x)$ ως προς την $\pi(x)\ln x$.
Αν $0 < \delta < 1$:

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} \ln p \geq$$

$$\geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} (1-\delta) \ln x =$$

$$= (1-\delta)(\pi(x) - \pi(x^{1-\delta})) \ln x \geq$$

$$\geq (1-\delta)\pi(x)\ln(x) - x^{1-\delta} \ln x. \tag{4.14}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψομε :

$$\frac{\theta(x)}{x} \geq \frac{(1-\delta)\pi(x)\ln x}{x} \frac{\ln x}{x^{\delta}}$$

Συνεπάγεται ότι :

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = (1-\delta) \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\delta > 0$, κι άρα :

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}. \tag{4.15}$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε το κάτω φράγμα της $\theta(x)$:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}. \tag{4.16}$$

Η ανισότητα

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x)\ln(x)$$

συνεπάγεται ότι :

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \tag{4.17}$$

και

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

Αν συνδυάσουμε τις ανισότητες (4.15) και (4.17), παίρνουμε τη σχέση :

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \geq \ln 2$$

Όμοια, συνδυάζοντας τις (4.16) και (4.2),έχουμε :

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \geq \ln 4$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το θεώρημα 4.3.4 αποδεικνύει ότι

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

καθώς $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ *αν και μόνο αν*

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) = a$$

Επιπλέον, με το παραπάνω θεώρημα, καταφέραμε να αποδείξουμε ότι οι επόμενες ασυμπτωτικές σχέσεις είναι ισοδύναμες :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$
$$\theta(x) \sim x,$$
$$\psi(x) \sim x.$$

Συνεπώς, για να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών, θα χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική σχέση $\psi(x) \sim x$. *Πρωτού, όμως, περάσουμε στην κυρίως απόδειξη, θα αναφέρουμε στην επόμενη ενότητα σε ορισμένα χρήσιμα λήμματα.*

4.4 Λήμματα

Λήμμα 4.4.1. *Για κάθε αριθμητική συνάρτηση $a(n)$ έστω :*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$$

όπου $A(x) = 0$ αν $x < 1$. Τότε :

$$\sum_{n \leq x} (x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt \tag{4.18}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Abel που δηλώνει ότι :

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt \tag{4.19}$$

αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[1, x]$. Θέτοντας $f(t) = t$ έχουμε :

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) = \sum_{n \leq x} na(n) \tag{4.20}$$

και

$$A(x)f(x) = x \sum_{n \leq x} a(n) \tag{4.21}$$

οπότε, η (4.19) καταλήγει στην (4.18). □

Το επόμενο λήμμα είναι μια μορφή του κανόνα L'AHospital για αύξουσες, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις :

Λήμμα 4.4.2. *Έστω $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ κι έστω $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$. Θεωρούμε ακόμη ότι $a(n) \geq 0$ για κάθε n. Αν ισχύει η ασυμπτωτική σχέση :*

$$A_1(x) \sim Lx^c, \quad x \to \infty \tag{4.22}$$

για κάποιο $c > 0$ και $L > 0$, τότε :

$$A(x) \sim cLx^{c-1}, \quad x \to \infty \tag{4.23}$$

Με άλλα λόγια, αν παραγωγίσουμε τα δυο μέλη της (4.22), παίρνουμε τις παραγώγους των δυο μελών, όπως φαίνεται στην (4.23).

Απόδειξη. Η συνάρτηση $A(x)$ είναι αύξουσα, καθώς η $a(n)$ είναι μη αρνητική. Επιλέγουμε κάποιο $b > 1$ και θεωρούμε τη διαφορά $A_1(bx) - A_1(x)$. Έχουμε :

$$A_1(bx) - A_1(x) = \int_x^{bx} A(u)du \geq \int_x^{bx} A(x)du = A(x)(bx - x) = x(b-1)A(x).$$

Αυτό μας δίνει :

$$xA(x) \leq \frac{1}{b-1}\{A_1(bx) - A_1(x)\}$$

Ας κρατήσουμε το b σταθερό κι ας θέσουμε $x \to \infty$ στην ανισότητα. Βρίσκουμε :

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{b-1}(Lb^c - L) = L\frac{b^c - 1}{b-1}$$

Τώρα, έστω $b \to 1$. Το πηλίκο στα δεξιά είναι το πηλίκο διαφοράς για την παράγωγο του x^c στο $x = 1$ κι έχει όριο c. Επομένως :

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \tag{4.24}$$

Τώρα, θεωρούμε κάθε a με $0 < a < 1$ κι έστω η διαφορά $A_1(x) - A_1(ax)$. Μια παρόμοια υπόθεση αποτελεί και το παρακάτω :

$$\lim_{x\to\infty} \inf \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L\frac{1-a^c}{1-a}$$

Καθώς το $a \to 1$, το δεξί μέλος τείνει στο cL. Αυτό, μαζί με τη σχέση (4.24) δείχνουν ότι το $A(x)/x^{c-1}$ τείνει στο όριο cL καθώς το $x \to \infty$. □

Όταν $a(n) = \Lambda(n)$, έχουμε $A(x) = \psi(x)$, $A_1(x) = \psi_1(x)$ και $a(n) \geq 0$ Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα λήμματα 4.4.1,4.4.2 κι αμέσως να καταλήξουμε στο :

Θεώρημα 4.4.3. *Ισχύει :*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\geq x}(x-n)\Lambda(n) \tag{4.25}$$

Επιπλέον, η ασυμπτωτική σχέση $\psi(x) \sim \frac{x^2}{2}$ συνεπάγεται ότι $\psi(x) \sim x$ καθώς $x \to \infty$.

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε το $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με τη βοήθεια της συνάρτησης ζήτα του Riemann. Βασικό μας εργαλείο θα είναι ο μετασχηματισμός Mellin.

4.5 Αναπαράσταση του $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ξεκινούμε με τα παρακάτω λήμματα, πάνω στα οποία θα βασιστούμε για να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε το $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ *με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :*

Λήμμα 4.5.1. *Αν* $\psi(x) = \sum_{x \leq n} \Lambda(n)$, *τότε :*

$$(\ln \zeta(s))' = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_0^{+\infty} x^{-s-1} \psi(x) dx \tag{4.26}$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αναφέρει μια εκ των ιδιοτήτων της ζ στο κεφάλαιο 3, την οποία για ευκολία ξαναγράφουμε παρακάτω :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) n^{-s} \tag{4.27}$$

Αν επεκτείνουμε την $\Lambda(n)$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^+$ θέτοντας $\Lambda(x) = \Lambda(n)$ για κάθε $x \in [n, n+1]$, τότε :

$$\psi(x) = \sum_{x \leq n} \Lambda(n) \Leftrightarrow \Lambda(x) = \psi(n) - \psi(n-1)$$

Επομένως, η σχέση (4.27) γίνεται :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \Lambda(n) n^{-s} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} (\psi(n) - \psi(n-1) n^{-s} =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) n^{-s} - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n-1) n^{-s} \tag{4.28}$$

Αλλάζουμε δείκτη στην άθροιση του δεύτερου ορίου κι έχουμε :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) n^{-s} - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \psi(n)(n+1)^{-s}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(\psi(N) N^{-s} + \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n) n^{-s} - \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n)(n+1)^{-s} - \psi(2) 2^{-s} \right) =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + \lim_{N \to +\infty} N^{-s} \psi(N) - \psi(1) 2^{-s}$$

Όμως $\psi(1) = \Lambda(1) = 0$ και

(4.29)
$$\psi(N) = \sum_{n \le N} \Lambda(n) \le \sum_{n \le N} \Lambda(N) \le \sum_{n \le N} \ln(N) = \ln(N) \sum_{n \le N} 1 = N \ln(N)$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\frac{\psi(N)}{N^s} \le \frac{N \ln N}{N^s} = N^{1-s} \ln N \to 0, \text{ καθώς } N \to \infty$$

δεδομένου ότι το $s > 1$. Συνολικά, καταλήγουμε στη σχέση :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) =$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) \int n^{n+1} \frac{d}{dx} x^{-s} ds = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{d}{dx} x^{-s} ds =$$

(4.30)
$$= -\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty \psi(x)(-s)x^{-s-1} dx = \int_0^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx.$$

□

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Mellin. Βάσει, λοιπόν, των προηγουμένων έχουμε :

$$(\ln \zeta(s))' = -s\mathcal{M}[\psi; -s]$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο επόμενο λήμμα :

Λήμμα 4.5.2. *Ισχύει :*

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} x^s ds, \quad \forall \sigma \in (1, \infty)$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 4.5.1 ισχύει

$$(\ln \zeta(s))' = -s\mathcal{M}[\psi; -s] \Rightarrow \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{(\ln \zeta(s))'}{s}; x\right] = -\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[\psi; -s]; x] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(\ln \zeta(s))'}{s} x^{-s} ds = -\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[\psi(s); -s]; x]$$

Με την αλλαγή μεταβλητής από s σε $-s$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(\ln\zeta(s))'}{s}x^s d(-s) \Rightarrow$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}x^s ds \tag{4.31}$$

□

Θεώρημα 4.5.3. *Έστω :*

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt$$

τότε :

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\frac{x^{s-1}}{s+1} - \frac{x^{-2}}{s+1}\right), \quad \forall\sigma(1,+\infty)$$

Απόδειξη. Απότο λήμμα 4.5.2 έχουμε :

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}x^s ds.$$

Επιπλέον, από τη σχέση (4.4):

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\int_0^x t^s dt\right)dt.$$

Με εναλλαγή των δυο ολοκληρωμάτων παίρνουμε :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\int_0^x t^s dt\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\frac{x^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}\right)ds. \tag{4.32}$$

Διαιρώντας με x^2 λαμβάνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.5.4. *Ισχύει :*

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\frac{ds}{s+1} = 0$$

Απόδειξη. Θέτοντας $s = \sigma + it$ παίρνουμε :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} \frac{ds}{s+1} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{(\sigma+it)\zeta(\sigma+it)} \frac{idt}{(\sigma+it+1)}.$$

Θέτουμε :

$$I(t) = \int_{-T}^{T} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{(\sigma+it)\zeta(\sigma+it)} \frac{idt}{(\sigma+it+1)} =$$

$$i\left(\int_{-T}^{T} \frac{1}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} (\ln(\zeta(\sigma+it)))'dt\right) =$$

$$= i\left(\frac{\ln\zeta(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)}\Big|_{-T}^{T} +\right.$$

$$\left.\int_{-T}^{T} \frac{(2\sigma+1)i-2t}{((\sigma+it)(\sigma+1+it))^2} \ln(\zeta(\sigma+it))dt\right) = i(I_1(T)+I_2(T)) \tag{4.33}$$

Θα δουλέψουμε με καθένα από τα ολοκληρώματα ξεχωριστά. Για το πρώτο ολοκλήμωμα ισχύει :

$$I_1(T) = \frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+iT+1)} - \frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma-iT+1)}$$

Επιπλέον, για το πρώτο ολοκλήρωμα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την ισχύ των παρακάτω ανισοτήτων :

$$|\sigma+iT| \geq ||\sigma|+T||, \quad |\sigma-iT| \geq ||\sigma|+T||$$

και

$$|\sigma+iT+1| \geq ||\sigma|+T|+1|, \quad |\sigma-iT+1| \geq ||\sigma|+T|-1|,$$

για την απόδειξη των οποίων χρησιμοποιήσαμε την αντίστροφη τριγωνομετρική ταυτότητα $|x+y| \geq ||x|-|y||$. Άρα :

$$\frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+iT+1|} \leq \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)^2} \tag{4.34}$$

και

$$\frac{1}{|\sigma-iT||\sigma-iT+1|} \leq \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)^2}.$$

$$\ln(1+x)\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}x^n, \quad \forall x\ |x|<1.$$

Από τη σχέση του Euler μπορούμε να υπολογίσουμε ότι :

$$\ln\zeta(s) = -\sum_p \ln(1+p^{-s})$$

Αν $s=\sigma+it$, τότε :

$$\log(1+p^{-\sigma-it}) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}p^{-n\sigma-it}$$

$$\ln\zeta(\sigma+it) = -\sum_p\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}p^{-n\sigma-it}$$

Αν πάρουμε το μέτρο της παραπάνω σχέσης, έχουμε :

$$|\ln\zeta(\sigma+it)| = \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n(\sigma+it)\log p)| =$$

$$= \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n\sigma\ln p)\exp(-nit\ln p)| =$$

$$= \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n\sigma\ln p)||\exp(-nit\ln p)| =$$

$$\sum_p\sum_{n\geq 1}p^{-n\sigma} \leq \sum_{m\geq 1}m^{-\sigma} = C(\sigma) < +\infty \tag{4.35}$$

όπου το $\sigma>1$ και $C(\sigma)$ μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το σ και το $|\exp(-nit\ln p)|$ να ισούται πάντα με μονάδα. Επομένως :

$$|I_1(T)| = \left|\frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+iT+1)} - \frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma-iT+1)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+iT+1)}\right| - \left|\frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma-iT+1)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2C(\sigma)^2}{(|\sigma|-|T|-1)^2} \tag{4.36}$$

Συνεπώς $I_1(T)\to 0$. Με παρόμοιο τρόπο θα δουλέψουμε τώρα και στο δεύτερο ολοκλήρωμα.
Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (4.34), καθώς :

$$\frac{1}{(|\sigma+iT||\sigma+iT+1|)^2} = \frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+iT+1|}\frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+iT+1|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(||\sigma| - |T| - 1|)} \frac{1}{(||\sigma| - |T| - 1|)} =$$

$$= \frac{1}{(||\sigma| - |T| - 1|)^4} \tag{4.37}$$

Όμοια, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη (4.35). Για $-T \leq t \leq T$ και καθώς η συνάρτηση του λογαρίθμου είναι αύξουσα και καθώς στη σχέση (4.35) που αποδείξαμε η σταθερά εξαρτάται μονάχα από το σ, ισχύει :

$$|\ln \zeta(\sigma + it)| \leq |\ln(\sigma + iT)| \leq C(\sigma) \tag{4.38}$$

Επιπλέον :

$$|2\sigma i + i - 2t| \leq ||2\sigma + i| + |2t|| = |2\sigma + 1 + |2t|| \leq |2\sigma + 1 + 2T| \tag{4.39}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.35), (4.38) και (4.39) στο ολοκλήρωμα $I_2(T)$ παίρνουμε :

$$\left| \int_{-T}^{T} \frac{(2\sigma + 1)i - 2t}{((\sigma + it)(\sigma + 1 + it))^2} \ln \zeta(\sigma + it) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-T}^{T} \left| \frac{(2\sigma + 1)i - 2t}{((\sigma + it)(\sigma + 1 + it))^2} \ln \zeta(\sigma + it) dt \right| =$$

$$= C(\sigma) \frac{|2\sigma + 2T + 1|}{|\sigma + T - 1|^4} (T - (-T)) \tag{4.40}$$

για $\sigma, T > 0$. Δηλαδή :

$$C(\sigma) \frac{|4T\sigma + 2T + 4T^2|}{|\sigma + T - 1|^4} \tag{4.41}$$

Η ποσότητα στον αριθμητή εμπεριέχει δύναμη του T μικρότερη από αυτή του παρονομαστή. Δια τούτο, στέλνοντας το T στο άπειρο, το κλάσμα $I_2(T)$ θα τείνει στο μηδέν. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.5.5. *Ισχύει η σχέση :*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} ds \tag{4.42}$$

Απόδειξη. Συνδυάζουμε το θεώρημα (4.5.3) και το λήμμα (4.5.4) και καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.5.6. *Αν* $c > 1$ *και* $x \geq 1$, *έχουμε :*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1}h(s)ds \tag{4.43}$$

όπου

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) \tag{4.44}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι ισχύει η σχέση :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{u^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-u)^2 & \text{αν } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{αν } u > 1 \end{cases} \tag{4.45}$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα στη σχέση (4.45) είναι ίση με $u^{-s}\Gamma(s)/\Gamma(s+3)$. Αυτό έπεται της ιδιότητας 4 στο θεώρημα 3.2.3:

$$\Gamma(s+3) = (s+2)(s+1)s\Gamma(s).$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Cauchy ολοκληρωτικών υπολοίπων στ; ολοκλήρω;α :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}$$

όπου $C(R)$ είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Η ακτίνα R του κύκλου επιλέγεται μεγαλύτερη από $4 + c$, επομένως, όλοι οι πόλοι στα σημεία $s = 0, -1, -2$ βρίσκονται εντός του κύκλου.

Τώρα θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος καθενός εκ των κυκλικών τόξων τείνει στο 0 καθώς $R \to \infty$. Αν $s = x + iy$ και $|s| = R$ η ολοκληρωτέα ποσότητα φράσσεται εκ των άνω από την :

$$\left|\frac{u^{-s}}{s(s+1)(s+2)}\right| = \frac{u^{-x}}{|s||s+1||s+2|} \leq \frac{u^{-c}}{R|s+1||s+2|}$$

Η ανισότητα $u^{-x} \leq u^{-c}$ συνεπάγεται από το γεγονός ότι η u^{-x} είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x αν $0 < u \leq 1$ και φθίνουσα αν $u > 1$. Τώρα, αν $1 \leq n \leq 2$ έχουμε :

$$|s+n| \geq |s| - n = R - n \geq R - 2 \geq \frac{R}{2}$$

καθώς $R > 4$. Επομένως, το ολοκλήρωμα κατά μήκος κάθε κυκλικού τόξου φράσσεται από :

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R(\frac{1}{2}R)^2} = O(R^2)$$

Η σχέση αυτή τείνει στο μηδέν καθώς το R τείνει στο άπειρο. Αν $u > 1$, η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική εντός του $C(R)$ καθώς $\int_{C(R)} = 0$, βάσει του Θεωρήματος Cauchy. Αν $R \to \infty$ τότε ισχύει η σχέση (4.45) Στην περίπτωση, τώρα, που $0 < u \leq 1$ εφαρμόζουμε το ολοκλήρωμα γύρω από το $C(R)$ με τη βοήθεια του Θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων . Η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει πόλους στους ακέραιους $n = 0, -1, -2$. Έτσι :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}ds = \sum_{n=0}^{2} Res\left(\frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}, n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{2} \frac{u^n}{\Gamma(3-n)} Res(\Gamma(s), -n) = \sum_{n=0}^{2} \frac{u^n(-1)^n}{(2-n)!n!} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2}\binom{2}{n}(-u)^n = \frac{(1-u)^2}{2} \tag{4.46}$$

Στέλνοντας το $R \to \infty$, καταλήγουμε στην ισχύ της (4.45). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.45) παίρνουμε :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds$$

όπου $c > 0$. Με αντικατάσταση του s ;ε $s-1$ στο ολοκλήρωμα, κρατώντας το $c > 1$ και αφαιρώντας τη σχέση από τη σχέση (4.42) καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Αν παραμετροποιήσουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης γράφοντας $s = c + it$ βρίσκουμε :

$$x^{s-1} = x^{c-1}x^{it} = x^{c-1}e^{it\ln x}$$

κι η εξίσωση (4.43) γίνεται :

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} h(c+it)e^{it\ln x}dt \tag{4.47}$$

Προχωρούμε δείχνοντας ότι το δεξί μέλος της (4.47) τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$. 'Οπως αναφέρθηκε νωρίτερα, πρώτα δείχνουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $c = 1$ στη (4.47). Γι' αυτό το σκοπό, πρέπει να μελετήσουμε τη $\zeta(s)$ στη γειτονιά της ευθείας $\sigma = 1$.

4.6 Άνω όρια για τη $|\zeta'(s)|$ και $|\zeta(s)|$ κοντά στην ευθεία $\sigma = 1$

Για να μελετήσουμε τη $\zeta(s)$ κοντά στη γραμμή $\sigma = 1$, θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση που προέκυψε από το θεώρημα 3.5.6 και ισχύει για $\sigma > 0$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx \tag{4.48}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τη σχέση για $\zeta'(s)$ παραγωγίζοντας κάθε μέλος της (4.48):

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{x-[x]\ln x}{x^{s+1}}dx-$$

$$-s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx - \frac{N^{1-s}\ln N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} \tag{4.49}$$

Το επόμενο θεώρημα χρησιμοποιεί τις σχέσεις αυτές για τον υπολογισμό των άνω ορίων για τις $|\zeta'(s)|$ και $|\zeta(s)|$.

Θεώρημα 4.6.1. *Για κάθε $A > 0$ υπάρχει μια σταθερά M, που εξαρτάται από το A, τέτοια ώστε :*

$$|\zeta(s)| \leq M\ln t \ \ \text{και} \ \ |\zeta'(s)| \leq M\ln^2 t \tag{4.50}$$

για κάθε $s = \sigma + it$ με $\sigma \geq 1/2$ που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\ln t} \ \ \text{και} \ \ t \geq e \tag{4.51}$$

Απόδειξη. Αν $\sigma \geq 2$, έχουμε $|\zeta(s)| \leq z(2)$ και $|\zeta'(s)| \leq \zeta'(2)$. Έτσι, οι ανισότητες στη σχέση (4.50) ικανοποιούνται. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε $\sigma < 2$ και $t \geq e$. Τότε, έχουμε :

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t \ \ \text{και} \ \ |s-1| \geq t$$

έτσι ώστε $\dfrac{1}{|s-1|} \leq 1/t$. Με χρήση της (4.48) εκτιμούμε την $|\zeta(s)|$ και βρίσκουμε :

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + 2t\int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}dx + \frac{N^{1-\sigma}}{t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{2t}{\sigma N^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t} \tag{4.52}$$

Τώρα, αν το N εξαρτάται από το t, θεωρώντας $N = [t]$, θα ισχύει $N \leq t < N+1$ και $\ln n \leq \ln t$ αν $n \leq N$. Η ανισότητα (4.51) συνεπάγεται ότι

$$1 - \sigma < \frac{A}{\ln t}$$

κι έτσι :

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma)\ln n} < \frac{1}{n} e^{A \ln n / \ln t} \leq \frac{1}{n} e^A = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Επομένως :

$$\frac{2t}{\sigma N^\sigma} \leq \frac{N+1}{N} = O(1) \text{ και } \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \frac{N}{t}\frac{1}{N^\sigma} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Άρα:

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + O(1) = O(\ln N) + O(1) = O(\ln t)$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει την ανισότητα για την $|\zeta(s)|$ στη σχέση (4.50). Για την ανισότητα της $|\zeta'(s)|$ χρησιμοποιούμε με παρόμοιο τρόπο την (4.48). Η μόνη ουσιώδης διαφορά είναι ότι έμφανίζεται ένας επιπλέον παράγοντας $\ln N$ στο δεξί μέλος. Όμως, $\ln N = O(\ln t)$, επομένως παίρνουμε :

$$|\zeta'(s)| = O(\ln^2 t)$$

στην περιοχή που μας ενδιαφέρει κι ορίσαμε παραπάνω. □

4.7 Ο μη μηδενισμός της $\zeta(s)$ πάνω στη γραμμή $\sigma = 1$.

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε ότι $\zeta(1+it) \neq 0$ για κάθε πραγματικό t. Η απόδειξη βασίζεται σε μια ανισότητα και θα χρειαστεί επίσης στην επόμενη ενότητα :

Θεώρημα 4.7.1. *Αν $\sigma > 1$, έχουμε :*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \tag{4.53}$$

Απόδειξη. Ανακαλούμε την ταυτότητα της $\zeta(s) = e^{G(s)}$, που αποδείχθηκε στην ενότητα 3.5, όπου

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \sum_{p} \frac{1}{mp^{ms}}, \quad \sigma > 1$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\zeta(s) = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right\} = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{imt\ln p}}{mp^{m\sigma}}\right\}$$

απ' όπου βρίσκουμε :

$$|\zeta(s)| = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt\ln p)}{mp^{m\sigma}}\right\}$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή επαναληπτικά με $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ και $s = \sigma + 2it$ και λαμβάνουμε :

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos(mt\ln p) + \cos(2mt\ln p)}{mp^{m\sigma}}\right\}$$

Όμως, ισχύει η εξής τριγωνομετρική ανισότητα :

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$$

που προκύπτει από την ταυτότητα :

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1 + \cos\theta)^2$$

Επομένως, κάθε όρος στην τελευταία απειροσειρά είναι μη αρνητικός, επομένως καταλήγουμε στην (4.53) □

Θεώρημα 4.7.2. *Ισχύει $\zeta(1 + it) \neq 0$ για κάθε πραγματικό t.*

Απόδειξη. Χρειάζεται μόνο να θεωρήσουμε ότι $t \neq 0$. Ξαναγράφουμε την (4.53) στη μορφή :

$$\{(\sigma - 1)\zeta(\sigma)\}^3 \left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1}\right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1} \tag{4.54}$$

Αυτό ισχύει αν $\sigma > 1$. Τώρα θεωρούμε ότι $\sigma \to 1$ στην (4.54). Ο πρώτος παράγοντας πλησιάζει το 1 καθώς η $\zeta(s)$ έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο μονάδα στον πόλο $s = 1$. Ο τρίτος παράγοντας τείνει στο $|\zeta(1 + 2it)|$. Αν το $\zeta(1 + it)$ ήταν ίσο με μηδέν, ο μεσαίος όρος θα μπορούσε να γραφεί ως εξής :

$$\left|\frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1}\right|^4 \to |\zeta'(1 + it)|^4 \text{ καθώς } \sigma \to 1$$

Επομένως, αν για κάποιο $t \neq 0$ είχαμε $\zeta(1 + it) = 0$, το αριστερό μέλος της (4.54) θα πλησίαζε το όριο $|\zeta'(1 + it)|^4|\zeta(1 + 2it)|$ καθώς $\sigma \to 1$. Όμως, το δεξί μέλος τείνει στο ∞ καθώς $\sigma \to 1$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς η αρχική μας υπόθεση ήταν εσφαλμένη. □

4.8 Ανισότητες για τα $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ και $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$.

Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.7.1 ακόμη μια φορά για να εξάγουμε τις παρακάτω ανισότητες για τα $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ *και* $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$.

Θεώρημα 4.8.1. *Υπάρχει ;ια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε :*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M\ln^7 t \ \ \textit{και} \ \ \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M\ln^9 t \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2} < \infty$$

όπου $\sigma \geq 1$ και $t \geq e$.

Απόδειξη. Για $\sigma \geq 2$ έχουμε :

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \zeta(2) \ \ \text{και} \ \ \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} \tag{4.55}$$

άρα οι ανισότητες ισχύουν για $\sigma \geq 2$. Θεωρούμε τώρα ότι $1 \leq \sigma \leq 2$ και $t \geq e$. Ξαναγράφουμε την ανισότητα (4.53) ως ακολούθως :

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4}|\zeta(\sigma+2it)|^{1/4}$$

Η $(\sigma-1)\zeta(\sigma)$ είναι φραγμένο στο διάστημα $1 \leq \sigma \leq 2$, καθώς είναι ολόμορφη συνάρτηση κι έστω

$$(\sigma-1)\zeta(\sigma) \leq M, \tag{4.56}$$

όπου M μια απόλυτη σταθερά. Τότε :

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma-1}, \ \ \text{αν} \ \ 1 \leq \sigma \leq 2$$

Επιπλέον, $\zeta(\sigma+2it) = O(\log t)$ αν $1 \leq \sigma \leq 2$ (λόγω του θεωρήματος 4.6.1), άρα, για $1 \leq \sigma \leq 2$ έχουμε :

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \frac{M^{3/4}(\log t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}} = \frac{A(\ln t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}}$$

όπου A είναι μια απόλυτη σταθερά. Επομένως, για μια σταθερά $B > 0$ έχουμε :

$$|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}}, \ \ \text{αν} \ \ 1 < \sigma \leq 2 \ \ \text{και} \ \ t \geq e \tag{4.57}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει με τετριμμένο τρόπο για $\sigma = 1$. Έστω a οποιοσδήποτε αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα $1 < a < 2$. Τότε, αν $1 \leq \sigma \leq a$, $t \geq e$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα (4.6.1) για να γράψουμε :

$$|\zeta(\sigma+it)-\zeta(a+it)| \leq \int_{\sigma}^{a} |\zeta'(u+it)|du \leq (a-\sigma)M\ln^2 t \leq (a-1)M\log^2 t$$

Βάσει της τριγωνικής ανισότητας :

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(a+it)| - |\zeta(\sigma+it)-\zeta(a+it)| \geq$$

$$|\zeta(a+it)| - (a-1)M\ln^2 t \geq \frac{B(a-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (a-1)M\ln^2 t$$

Το παραπάνω ισχύει αν $1 \leq \sigma \leq a$ κι από τη σχέση (4.57) ισχύει επίσης αν $a \leq \sigma \leq 2$ καθώς $(\sigma-1)^{3/4} \geq (a-1)^{3/4}$. Με άλλα λόγια, αν $1 \leq \sigma \leq 2$ και $t \geq e$ έχουμε την ανισότητα

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{B(a-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (a-1)M\ln^2 t$$

για κάθε a που ικανοποιεί την $1 < a < 2$. Ας θεωρήσουμε, τώρα, ότι το a εξαρτάται από το t κι ας διαλέξουμε ένα a τέτοιο ώστε ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος να είναι διπλάσιος του δεύτερου. Αυτό συμβαίνει, όταν :

$$a = 1 + \left(\frac{B}{2M}\right)\frac{1}{(\ln t)^9}$$

Προφανώς $a > 1$ κι επίσης $a < 2$ αν $t \geq t_0$ για κάποιο t_0. Άρα, αν $t \geq t_0$ και $1 \leq \sigma \leq 2$, έχουμε :

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq (a-1)M\ln^2 t = \frac{C}{(\ln t)^7}$$

Η ανισότητα ισχύει ακόμη και για διαφορετικό C αν $e \leq t \leq t_0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $|\zeta(s)| \geq C\log^{-7} t$, για κάθε $\sigma \geq 1,\ \ t \geq e$ που μας δίνει ένα άνω όριο για το $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$. Για να πάρουμε την ανισότητα για το $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$, εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.6.1. Η μόνη διαφορά που θα συναντήσουμε είναι η ύπαρξη ενός επιπλέον όρου $\log^2 t$. □

4.9 Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών.

Στο σημείο αυτό είμαστε σχεδόν έτοιμοι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών.

Σχήμα 4.1

Θεώρημα 4.9.1. *Η συνάρτηση*

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

είναι αναλυτική στο $s - 1$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.6.5 η $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ έχει έναν πόλο πρώτης τάξης στο 1 με υπόλοιπο 1, όπως και η $\frac{1}{s-1}$. Επομένως η διαφορά τους είναι αναλυτική στο $s = 1$. □

Θεώρημα 4.9.2. *Για* $x \geq 1$ *έχουμε :*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{it\ln x}dt$$

όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ *συγκλίνει. Ισχύει :*

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \tag{4.58}$$

Συνεπώς :

$$\psi(x) \sim x, \quad \text{καθώς } x \to$$

Απόδειξη. Στο θεώρημα 4.5.6 αποδείξαμε ότι αν $c > 1$ και $x \geq 1$, ισχύει :

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{s-1}h(s)ds$$

όπου

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$$

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να αποδείξουμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης στη γραμμή $\sigma = 1$. Για να το κάνουμε αυτό εφαρμόζουμε το Θεώρημα Cauchy 2.6.10 στο ορθογώνιο R που φαίνεται στο σχήμα 4.1. Το ολοκλήρωμα του $x^{s-1}h(s)$ γύρω από το R είναι 0, καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική στο εσωτερικό του R. Τώρα, δείχνουμε ότι τα ολοκληρώματα κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων τείνουν στο 0 καθώς $T \to \infty$. Καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει την ίδια απόλυτη τιμή στα συζυγή σημεία, αρκεί να μελετήσουμε μόνο το άνω τμήμα $t \in [0, T]$. Σ' αυτό το τμήμα ισχύουν οι προσεγγίσεις :

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{και} \quad \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}$$

Επίσης, υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq M \ln^2 t$ αν $\sigma \geq 1$ και $t \geq e$. Άρα, αν $T \geq e$, έχουμε :

$$|h(s)| \leq \frac{M \ln^2 T}{T^2}$$

έτσι ώστε :

$$\left|\int_1^e x^{s-1} h(s) ds\right| \leq \int_1^e x^{c-1} \frac{M \ln^9 t}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{M \ln^9 t}{T^2}(c-1)$$

Επομένως, τα ολοκληρώματα κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων τείνουν στο 0 καθώς το T τείνει στο άπειρο. Έτσι, εχόυμε :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1} h(s) ds = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1} h(s) ds$$

Στη γραμμή $\sigma = 1$ γράφουμε $s = 1 + it$ για να λάβουμε τη σχέση :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} h(s) x^{s-1} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)| dt = \int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt + \int_{-e}^{+e} |h(1+it)| dt + \int_{+e}^{+\infty} |h(1+it)| dt$$

Στο τρίτο ολοκλήρωμα έχουμε :

$$|h(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2}$$

άρα, το $\int_e^\infty |h(1+it)| dt$ συγκλίνει. Με παρόμοιο τρόπο συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Riemann-Lebesgue για να λάβουμε :

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

Από το Θεώρημα 4.4.3 αυτό συνεπάγεται $\psi(x) \sim x$, καθώς $x \to \infty$. Με αυτό έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Tom M. Apostol. *Εισαγωγή στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών*. GUTENBERG, 2005

[2] Joseph Bak – Donald J.Newman. *Μιγαδική Ανάλυση*, Leader Books, 2004.

[3] H.M. Edwards. Riemann'As Zeta Function. Academic Press, Pure and Applied Mathematics, 1974.

[4] Bateman P. Diamond H. *Analytic Number Theory An Introductory Course*, World Scientific, 2004 .