ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΜΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

ΛΙΝΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΑΜΟΣ 2018

Στους γονείς μου, Κωνσταντίνο και Γεωργία

και στον αδελφό μου Γιάννη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται διάφορα στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων. Αρχικά κάνουμε μια αναφορά στο κλασσικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem-VRP) και αναλύουμε διάφορα είδη στοχαστικών προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων (Stochastic Vehicle Routing Problems-SVRP). Μελετάμε προβλήματα στα οποία οι απαιτήσεις των πελατών είναι στοχαστικές. Το χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι οι διαδρομές ενδέχεται να μην γίνουν όπως έχουν προγραμματιστεί. Γι' αυτό το λόγο υπάρχουν εναλλακτικά σημεία στη διαδρομή όπου το όχημα ενδέχεται να επιστρέψει στην αποθήκη για να ανεφοδιασμό.

Επίσης εστιάζουμε σε προβλήματα εύρεσης της βέλτιστης δρομολόγησης ενός οχήματος με ενιαίο φορτίο, όπου οι απαιτήσεις των πελατών είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και μελετάμε προβλήματα σε πεπερασμένο και σε άπειρο χρονικό ορίζοντα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Πρώτο από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής διατριβής, τον κύριο Θεοδόση Δημητράκο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για την πολύτιμη καθοδήγησή του και για την εμπιστοσύνη και την εκτίμηση που μου έδειξε. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για την άψογη συνεργασία που είχαμε καθ’ όλη τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους καθώς και για το διαρκές ενδιαφέρον του και την υποστήριξή του.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνω σε όλους του καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστήμιου Αιγαίου που είχα όλα αυτά τα χρόνια της ακαδημαϊκής μου ζωής για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα τα μέλη της επιτροπής κρίσης της εργασίας, τον κύριο Νικόλαο Καραχάλιο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και τον κύριο Νικόλαο Παπαλεξίου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών που δέχτηκαν να αφιερώσουν κάποιο από τον πολύτιμο χρόνο τους για την αξιολόγηση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αγαπημένους μου φίλους Βάγια, Μαρία και Γιάννη που ήταν και είναι πάντα δίπλα μου.

Τέλος, ένα μεγάλο και εγκάρδιο ευχαριστώ αξίζουν οι δυο ήρωες της καθημερινότητάς μου, οι γονείς μου, που με στηρίζουν ηθικά και τους είμαι ευγνώμων που στέκονται πάντα δίπλα μου, τόσο στις επιτυχίες όσο και στις αποτυχίες, δίνοντάς μου την ελπίδα και την δύναμη να συνεχίζω να προσπαθώ για το καλύτερο. Επίσης, ένα θερμό ευχαριστώ το οφείλω και στον αδερφό μου για την αγάπη του και τη συμπαράστασή του. Το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτή την διατριβή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στο στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

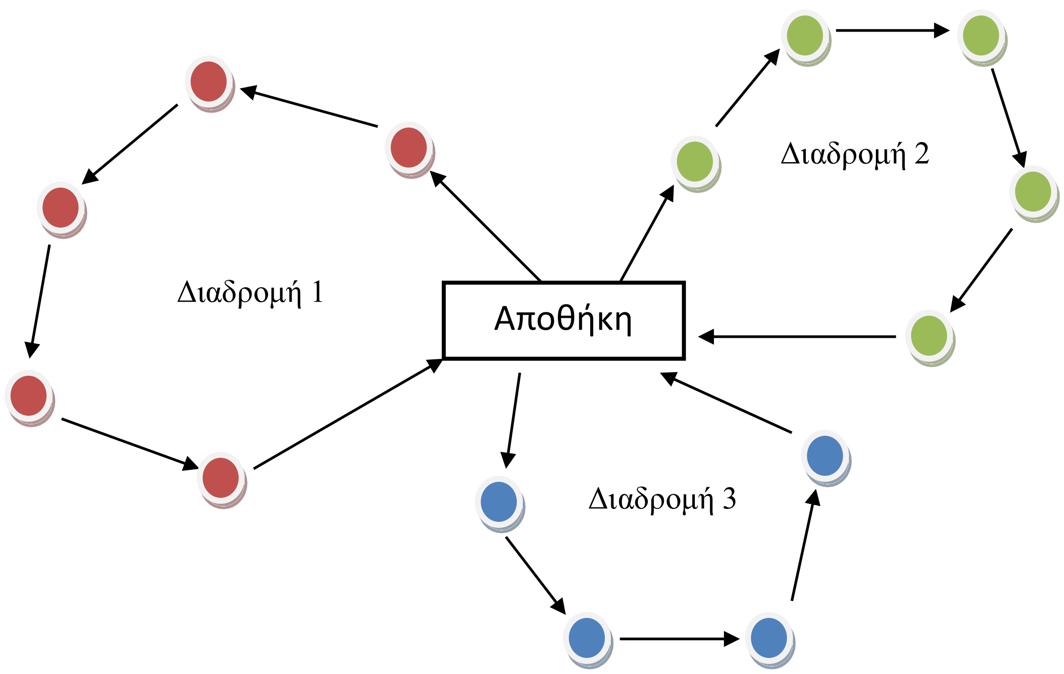
1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται διάφορες μορφές στοχαστικών προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων (Stochastic Vehicle Routing Problems, SVRP). Αρχικά, κάνουμε μια αναφορά στο κλασσικό πρόβλημα δρομολόγησης (Vehicle Routing Problem, VRP) και στη συνέχεια προχωράμε σε στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης (SVRP) περιγράφοντας τις βασικές λύσεις και μεθοδολογίες τους. Τέλος, μελετάμε συγκεκριμένους τύπους τέτοιων προβλημάτων αναλύοντας το κάθε ένα ξεχωριστά.

1.2 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της εφοδιαστικής αλυσίδας που έχουν να αντιμετωπίσουν οι σύγχρονες επιχειρήσεις παραγωγής υλικών αγαθών, ώστε να εξασφαλίσουν τη εύρυθμη λειτουργία τους, είναι η διανομή των προϊόντων τους στους πελάτες τους με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Τα προβλήματα τα οποία σχετίζονται με τη διανομή προϊόντων από τις αποθήκες στους πελάτες μιας επιχείρησης καλούνται προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problems, VRP).

Για την επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων πρέπει να υπολογισθούν οι βέλτιστες διαδρομές διανομής προϊόντων που πρέπει να εκτελεσθούν από ένα σύνολο οχημάτων έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση των πελατών. Η μεταφορά των προϊόντων μιας επιχείρησης από τις αποθήκες της προς τους πελάτες γίνεται με τη χρήση ενός ή περισσοτέρων οχημάτων που κινούνται μέσα στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου δικτύου διαδρομών. Συγκεκριμένα, σε ένα πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων κάθε όχημα ξεκινάει και επιστρέφει σε μια αποθήκη ικανοποιώντας τις απαιτήσεις των πελατών. Το δίκτυο μεταφοράς απεικονίζεται με ένα γράφημα του οποίου τα τόξα αναπαριστούν τη διαδρομή που ακολουθούν τα οχήματα δρομολόγησης για την εξυπηρέτηση των πελατών και μπορούν να είναι είτε μονής είτε διπλής κατεύθυνσης ανάλογα με την δυνατότητα της διαδρομής στην οποία βρίσκονται και οι κορυφές αντιστοιχούν στους πελάτες ή στις τοποθεσίες των πελατών.



Σχήμα 1: Γράφημα δρομολόγησης οχημάτων

Πιο συγκεκριμένα, το VRP ορίζεται σε ένα γράφημα $G=(V,A)$ όπου $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών και $A=\{(v_i,v_j):i\neq j,\ v_i,v_j\in V\}$ είναι το σύνολο των τόξων. Η κορυφή v_1 αντιπροσωπεύει την αποθήκη στην οποία μπορεί να βρίσκονται m όμοια οχήματα ενώ οι υπόλοιπες κορυφές αντιστοιχούν σε πόλεις ή πελάτες. Ο πίνακας $C=(c_{ij})$ ορίζεται στο A. Οι συντελεστές c_{ij} αντιπροσωπεύουν τις αποστάσεις, τα έξοδα ταξιδίου ή τα ταξίδια. Εδώ χρησιμοποιούμε αυτούς τους όρους εναλλακτικά. Ο αριθμός των οχημάτων μπορεί να είναι μια δεδομένη σταθερά ή μια μεταβλητή απόφασης. Κάθε όχημα έχει την ίδια χωρητικότητα Q.

Η επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος απαιτεί τον προσδιορισμό ενός συγκεκριμένου αριθμού δρομολογίων κάθε ένα από τα οποία θα εκτελείται από ένα όχημα το οποίο σαν έναρξη και σαν λήξη της διαδρομής του θα έχει την ίδια αποθήκη. Το κάθε όχημα θα πρέπει να επισκέπτεται έναν πελάτη μόνο μια φορά παραλαμβάνοντας ή και παραδίδοντας προϊόντα σε αυτόν, ικανοποιώντας κάποιους περιορισμούς:

1. Περιορισμός χωρητικότητας: Σύμφωνα με αυτόν τον περιορισμό, κάθε πελάτης v_i έχει μια ζήτηση d_i και η συνολική ζήτηση οποιασδήποτε διαδρομής δεν επιτρέπεται να υπερβαίνει την χωρητικότητα του οχήματος. Σε αυτά τα προβλήματα, τα οχήματα κάνουν συλλογές ή παραδόσεις σε όλους τους πελάτες

και αποκλείουμε την περίπτωση όπου αυτοί οι δύο τύποι ενεργειών συνδυάζονται. Τα προβλήματα με παράδοση και συλλογή είναι συμμετρικά μεταξύ τους και ισοδύναμα όσον αφορά τη μορφή του μοντέλου που μπορεί να τα περιγράψει.

2. Περιορισμός διάρκειας: Σύμφωνα με αυτόν τον περιορισμό, ο συνολικός αριθμός διαδρομών του οχήματος δεν μπορεί να υπερβαίνει μια προκαθορισμένη σταθερά L.
3. Περιορισμός χρονικού παραθύρου (time window constraint): Σύμφωνα με αυτόν τον περιορισμό, σε κάθε κορυφή v_i πρέπει να γίνεται επίσκεψη μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[a_i, b_i]$.

1.3 Το στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (SVRP)

Ως πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (VRP) αναφέρεται ο σχεδιασμός των βέλτιστων διαδρομών παράδοσης και συλλογής όπου τα οχήματα ξεκινούν τη διαδρομή τους από μια απλή αποθήκη και επισκέπτονται έναν γεωγραφικό αριθμό διασκορπισμένων πελατών. Κατά την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι κοινή πρακτική να υποθέσουμε ότι οι πελάτες είναι γνωστοί. Το πρόβλημα είναι αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό) και πολλοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για να το αντιμετωπίσουν. Τέτοιοι μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί πρακτικά. Ωστόσο σε πολλές πραγματικές εφαρμογές μία ή περισσότεροι παράμετροι του προβλήματος VRP τείνουν να είναι στοχαστικές. Για παράδειγμα, το σύνολο των πελατών που πρόκειται να επισκεφθεί το όχημα, η ζήτηση των πελατών ή ο χρόνος ταξιδιού μπορεί να είναι τυχαίοι. Αυτά τα προβλήματα αναφέρονται ως στοχαστικά προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων (Stochastic Vehicle Routing Problems, SVRP).

Μερικές φορές το σύνολο των πελατών που δέχονται επίσκεψη δεν είναι γνωστό με βεβαιότητα. Σε μια τέτοια περίπτωση, κάθε πελάτης έχει μια πιθανότητα p_i να είναι παρόν. Τα στοχαστικά VRP διαφέρουν από τα αντίστοιχα ντετερμινιστικά σε πολλά θεμελιώδη στοιχεία. Αρκετές θεμελιώδεις ιδιότητες των ντετερμινιστικών VRP δεν διαφοροποιούνται στη στοχαστική περίπτωση και οι μεθοδολογίες λύσεων είναι περίπλοκες. Δεδομένου ότι συνδυάζονται τα χαρακτηριστικά των στοχαστικών και των ακέραιων προγραμμάτων, τα SVRP συχνά θεωρούνται υπολογιστικά δύσκολα. Ωστόσο, η μελέτη των SVRP έχει κερδίσει δημοτικότητα τα τελευταία χρόνια και έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος προς την κατανόηση της δομής αυτών των προβλημάτων και της υπολογιστικής συμπεριφοράς των σχετικών αλγορίθμων για την επίλυσή τους.

1.4 Ανάλυση λύσεων και αλγόριθμοι

Τα στοχαστικά VRP μπορούν να μεταφερθούν μέσα στο πλαίσιο του στοχαστικού προγραμματισμού. Τα στοχαστικά προγράμματα διαμορφώνονται σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο καθορίζεται μια προγραμματισμένη ή εκ των προτέρων λύση. Οι πραγματοποιήσεις των τυχαίων μεταβλητών αποκαλύπτονται στο δεύτερο στάδιο και οι λύσεις ή τα διορθωτικά μέτρα εφαρμόζονται στο πρώτο στάδιο. Η λύση συνήθως δημιουργεί ένα κόστος ή ένα όφελος που πρέπει να εξεταστεί όταν σχεδιάζεται η λύση του πρώτου σταδίου.

Για παράδειγμα, θεωρούμε VRP με στοχαστικές απαιτήσεις, δηλαδή κάθε ζήτηση d_i αντικαθίσταται από τις τυχαίες μεταβλητές ξ_i. Το πρώτο στάδιο λύσης για αυτό το πρόβλημα θα αποτελείται από ένα σύνολο m οχημάτων στο οποίο κάθε πελάτης δέχεται επίσκεψη ακριβώς μια φορά. Μετά από τον προσδιορισμό του πρώτου σταδίου λύσης, οι πραγματικές απαιτήσεις αποκαλύπτονται. Τότε μπορεί να είναι αδύνατο να εφαρμοστεί το πρώτο στάδιο λύσης, όπως είχε προγραμματιστεί, δεδομένου ότι η συνολική ζήτηση μιας διαδρομής μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Μια πιθανή πολιτική δεύτερου σταδίου είναι το όχημα να ακολουθεί κάθε διαδρομή όπως έχει προγραμματιστεί μέχρι η χωρητικότητα του να επιτευχθεί, στη συνέχεια να επιστρέφει στην αποθήκη για να εκφορτώσει και έπειτα να συνεχίσει τις συλλογές του στους πελάτες που σημειώθηκε αποτυχία διαδρομής.

Ένα στοχαστικό πρόγραμμα συνήθως διαμορφώνεται είτε ως ένα τυχαίο περιορισμένο πρόγραμμα (CCP) είτε ως στοχαστικό πρόγραμμα με λύση (SPR). Στο CCP, το ένα αναζητά μια λύση πρώτου σταδίου για την οποία η πιθανότητα αποτυχίας περιορίζεται κάτω από ένα ορισμένο όριο. Μια λύση CCP δεν λαμβάνει υπόψη το κόστος των διορθωτικών ενεργειών σε κάθε περίπτωση αποτυχίας. Στο SPR, στόχος είναι να καθοριστεί ένα πρώτο στάδιο λύσης το οποίο θα ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος του δεύτερου σταδίου λύσης. Αυτό το κόστος αποτελείται από το κόστος της λύσης του πρώτου σταδίου συν το αναμενόμενο καθαρό κόστος. Τα SPR είναι τυπικά πιο δύσκολο να επιλυθούν από ότι τα CCP.

Για ένα δεδομένο πρόβλημα, οι διορθωτικές ενέργειες (ή οι πολιτικές λύσεων) μπορεί να λάβουν διάφορες μορφές. Εξετάζοντας το VPR με στοχαστικές απαιτήσεις, μπορούν να πραγματοποιηθούν επιστροφές στην αποθήκη όπου σχεδιάζονται «προληπτικά διαλείμματα» σε στρατηγικά σημεία κατά μήκος της προγραμματισμένης διαδρομής, όταν το όχημα βρίσκεται κοντά στην αποθήκη και η χωρητικότητα του είναι σχεδόν πλήρης. Οι λύσεις σε τέτοια προβλήματα είναι πιο περίπλοκες από τις απλές διαδρομές επιστροφής και το αναμενόμενο κόστος είναι δύσκολο να ληφθεί υπόψη στην λύση του πρώτου σταδίου. Η καλύτερη λύση για μία πολιτική είναι συνδεδεμένη με τη στιγμή κατά την οποία οι πληροφορίες είναι διαθέσιμες. Για παράδειγμα, η πληροφορία σχετικά με τη ζήτηση του πελάτη μπορεί να γίνει γνωστή κατά την άφιξη στην τοποθεσία του πελάτη ή πριν αφήσει τον προηγούμενο πελάτη στην προγραμματισμένη διαδρομή. Στην τελευταία περίπτωση το φάσμα των λύσεων είναι ευρύτερο, για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να αναβάλει την επίσκεψη του πελάτη του οποίου η ζήτηση είναι πολύ μεγάλη.

Τα προβλήματα SVRP συνήθως διαμορφώνονται ως μικτά ή καθαρά ακέραια στοχαστικά προγράμματα ή ως διαδικασίες Markov. Όλοι οι γνωστοί ακριβείς αλγόριθμοι ανήκουν στην πρώτη κατηγορία. Κάτω από μερικές ήπιες υποθέσεις, σε αρκετές κατηγορίες, τα SVRP μπορούν να μετατραπούν σε αντίστοιχα ντετερμινιστικά VRP (Stewart and Golden (1983), Laporte, Louveaux and Mercure (1989) and Bastian and Rinnoy Kan (1992)). Επίσης έχουν προταθεί ακριβείς αλγόριθμοι, για έναν αριθμό SVRP με λύση, από τους Laporte (1989), Louveaux (1992), Mercure (1994) and Gendreau, Laporte and Sgguin (1995). Τα τελευταία τρία άρθρα περιγράφουν έναν ακριβή αλγόριθμο που εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα ακέραιων στοχαστικών προγραμμάτων. Αυτή η μέθοδος υπολογίζει τη χρήση ενός πρώτου σταδίου λύσεων χρησιμοποιώντας ένα χαμηλό όριο για το αναμενόμενο κόστος. Σε οποιαδήποτε εφικτή λύση, το αναμενόμενο κόστος υπολογίζεται επακριβώς. Μια άλλη ερευνητική προσέγγιση στον τομέα των ακριβών μεθόδων είναι η εκμετάλλευση συγκεκριμένων δεδομένων σε ορισμένα SVRP. Για παράδειγμα, στα VRP ενός οχήματος με στοχαστικές απαιτήσεις, η κατανομή της ζήτησης μπορεί να είναι τέτοια που να είναι πιθανό να συμβεί μια αποτυχία. Σε μια τέτοια περίπτωση, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί μια ακριβή λύση που έχει μια μεγάλη πιθανότητα να είναι βέλτιστη με την επίλυση μιας ακολουθίας ντετερμινιστικών προβλημάτων (Dror, Laporte and Louveaux, 1993). Όμως ο δυναμικός προγραμματισμός δεν επεκτείνεται στο SVRP. Όπως φαίνεται από τους Jaillet (1985), Jaillet and Odoni (1988) and Dror, Laporte and Trudeau (1989), η αρχή της βέλτιστης λειτουργίας δεν μπορεί να επαληθευτεί σε προβλήματα SVRP. Ωστόσο, το 1989, οι Carraway, Morin and Moskovitz πρότειναν έναν γενικευμένο δυναμικό αλγόριθμο όπου θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε ορισμένα προβλήματα SVRP.

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι που προτείνονται για τα προβλήματα SVRP είναι ευρετικοί, τυπικά προσαρμοσμένοι στους αρχικά σχεδιασμένους μεθόδους για τη ντετερμινιστική περίπτωση. Τα προβλήματα SVRP έχουν μελετηθεί με διαφορετικούς τύπους οι οποίοι αναλύονται παρακάτω.

1.4.1 Το πρόβλημα του πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς πελάτες (TSPSC)

Στο πρόβλημα του πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς πελάτες κάθε κορυφή v_i παριστάνεται με πιθανότητα p_i. Στο πρώτο στάδιο, κατασκευάζεται η Χαμιλτονιανή περιήγηση σε όλες τις κορυφές και αποκαλύπτεται το σύνολο των παρόντων κορυφών. Στο δεύτερο στάδιο, η περιήγηση ακολουθείται παραλείποντας τους απόντες πελάτες. Αυτό το πρόβλημα εισήχθη από τον Jaillet, to 1985, ο οποίος περιέγραψε τα μαθηματικά μοντέλα μαζί με τις θεωρητικές ιδιότητές τους. Αυτή η μελέτη δείχνει ότι λαμβάνοντας μια εκ των προτέρων λύση για την επίλυση ενός ντετερμινιστικού προβλήματος για τον ταξιδιώτη (TSP) μπορεί να μην είναι χρήσιμο για το πρόβλημα αυτό. Χρησιμοποιήθηκε ένας αριθμός ευρετικών μεθόδων με το κριτήριο του πλησιέστερου γείτονα ή με το κριτήριο εξοικονόμησης (Clarke and Wright, 1964) και εφαρμόστηκε και δοκιμάστηκε από τον Jezequel (1985) και από τους Rossi and Gavioli (1987). Αργότερα, το 1988 ο Bertsimas και το 1993 μαζί με τον Howell εξέτασαν κάποιες από τις ιδιότητες των TSPSC και πρότειναν μια νέα ευρετική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος. Αυτή η μέθοδος περιλάμβανε καμπύλες πλήρωσης χώρου (Bartholdi and Platzman, 1982), μια πιθανολογική 2-opt ανταλλαγή άκρων και η κορυφή ήταν μέσα σε μια περιοδεία. Πιο πρόσφατα, το 1994, οι Laporte, Louveaux and Mercure εφάρμοσαν μια μέθοδο με ακέραιο L σχήμα στο TSPSC και επιλύθηκαν σε περιπτώσεις βελτιστοποίησης με συμμετοχή 50 κορυφών.

1.4.2 Το πρόβλημα του πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς χρόνους ταξιδίου (TSPST)

Στο πρόβλημα του πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς χρόνους ταξιδιού, οι συντελεστές c_{ij} αντιπροσωπεύουν τους χρόνους ταξιδίου και είναι τυχαίες μεταβλητές. Όλοι οι συγγραφείς που αντιμετώπισαν αυτό το πρόβλημα προσπάθησαν να προσδιορίσουν μια εκ των προτέρων λύση, έτσι ώστε η πιθανότητα ολοκλήρωσης του ταξιδίου εντός μιας συγκεκριμένης προθεσμίας να μεγιστοποιείται. Ο Kao, το 1978, πρότεινε 2 ευρετικές μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στον δυναμικό προγραμματισμό ενώ η δεύτερη κάνει χρήση της έμμεσης απαρίθμησης. Οι διανομές χρόνου πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η πιθανότητα αθροίσματος των τυχαίων μεταβλητών να υπολογίζονται εύκολα. Ο Sniedovich, το 1981, έδειξε ότι ο αλγόριθμος του δυναμικού προγραμματισμού θα μπορούσε να δώσει βέλτιστες λύσεις καθώς η ιδιότητα της μονοτονίας δεν επαληθεύεται στο TSPST. Το 1989, οι Carraway, Morin and Moskowitz πρότειναν ένα γενικευμένο αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για να αντιμετωπίσουν αυτή τη δυσκολία και το εφάρμοσαν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

1.4.3 Το πρόβλημα του m-πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς χρόνους ταξιδίου (m-TSPST)

Το πρόβλημα του m-πωλητή που ταξιδεύει με στοχαστικούς χρόνους ταξιδίου είναι η m έκδοση του TSPST, όπου όλες οι διαδρομές έχουν αρχή και τέλος την αποθήκη. Ο αριθμός των οχημάτων μεταβάλλεται και το κόστος είναι σταθερό. Η χρονική προθεσμία επιβάλλεται σε κάθε διαδρομή του οχήματος και εάν το όχημα ολοκληρώσει την διαδρομή του με κάποια καθυστέρηση, επιβάλλεται ποινή. Η ποινή αυτή είναι ανάλογη με το μήκος της καθυστέρησης. Αυτό το πρόβλημα μελετήθηκε, το 1993, από τους Lambert, Laporte and Louveaux οι οποίοι διαμόρφωσαν ένα τραπεζικό πλαίσιο. Στόχος ήταν να σχεδιαστούν διαδρομές συλλογής χρημάτων μέσω τραπεζικών υποκαταστημάτων με την παρουσία στοχαστικών χρόνων ταξιδιού. Οι συγγραφείς πρότειναν ένα μοντέλο μαθηματικού προγραμματισμού για τη διατύπωση και την προσαρμογή του αλγορίθμου εξοικονόμησης (Clarke and Wright (1964)). Το 1992, οι Laporte, Louveaux and Mercure σκέφτηκαν την στοχαστική υπηρεσία στις κορυφές. Επίσης προτείνονται τυποποιήσεις για τον περιορισμό και τη λύση του προβλήματος. Το τελευταίο πρόβλημα επιλύεται στη βέλτιστη λύση για n=10,15 και 20 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με ακέραιο L σχήμα.

1.4.4 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές απαιτήσεις (VRPSD)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές απαιτήσεις είναι το πιο μελετημένο πρόβλημα από όλα τα SVRP. Ο Tillman, το 1969, ήταν ο πρώτος που μελέτησε το πρόβλημα αυτό και πρότεινε έναν αλγόριθμο στην περίπτωση που υπάρχουν πολλές αποθήκες.

Πιο συγκεκριμένα, στο VRPSD ένας τύπος προϊόντος διανέμεται από την αποθήκη στους πελάτες χρησιμοποιώντας ένα μόνο όχημα το οποίο έχει σταθερή χωρητικότητα ίση με Q. Το όχημα επισκέπτεται περιοδικά όλους τους πελάτες για την προμήθεια του προϊόντος και την αναπλήρωση των αποθεμάτων τους. Οι απαιτήσεις ενός πελάτη κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου διαμορφώνεται ως ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Το όχημα ξεκινάει με σταθερή χωρητικότητα και δεν έχει γνώση των απαιτήσεων που θα συναντήσει σε μια δεδομένη διαδρομή. Ως εκ τούτου, υπάρχει πιθανότητα υπέρβασης της χωρητικότητας του οχήματος. Σε μια τέτοια περίπτωση επιβάλλονται κατάλληλες ποινές. Κάθε πελάτης μπορεί να έχει ένα μοναδικό κόστος ποινής. Η συνάρτηση κόστους για μια συγκεκριμένη διαδρομή που διανύθηκε από το όχημα κατά τη διάρκεια μιας περιόδου υπολογίζεται ως το άθροισμα στα κόστη όλων των τόξων που επισκέφθηκε το όχημα και των επιβαλλόμενων ποινών (αν υπάρχουν). Αν το όχημα ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις αυτής της διαδρομής, το κόστος αυτής θα είναι το άθροισμα στα κόστη όλων των τόξων που επισκέφθηκε το όχημα συμπεριλαμβανομένου του τόξου από την αποθήκη στον πρώτο πελάτη που επισκέφθηκε το όχημα και του τόξου από τον τελευταίο πελάτη στην αποθήκη.

Εναλλακτικά, αν το όχημα δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις ενός συγκεκριμένου πελάτη τότε το όχημα τερματίζει τη διαδρομή του στην αποθήκη. Η συνάρτηση κόστους είναι το άθροισμα από όλα τα τόξα που επισκέφθηκε το όχημα (συμπεριλαμβανομένου και του τόξου από τον πελάτη όπου λόγω αποτυχίας το όχημα επέστρεψε στην αποθήκη) και την ποινή για τον εν λόγω πελάτη. Έτσι, μια διαδρομή μπορεί να έχει μια σειρά από λειτουργικά κόστη που σχετίζονται με αυτήν. Ο στόχος είναι να βρεθεί η διαδρομή για την οποία το συνολικό αναμενόμενο κόστος να είναι ελάχιστο σε σύγκριση με όλες τις άλλες διαδρομές.

1.4.5 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικούς πελάτες (VRPSC)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικούς πελάτες είναι μια άμεση επέκταση του TSPSC όπου οι πελάτες είναι παρόντες με κάποια πιθανότητα αλλά έχουν προκαθορισμένες απαιτήσεις. Όπως και στο TSPSC, οι πελάτες απουσιάζουν στην λύση του δεύτερου σταδίου. Όλα τα άρθρα εκτός από ένα, αντιμετωπίζουν την περίπτωση των απαιτήσεων της μονάδας. Το 1988, ο Bertsimas περιέγραψε πολλές ιδιότητες, των ευρετικών μεθόδων. Το 1989, ο Waters σκέφτηκε τις μη δυαδικές απαιτήσεις και πρότεινε μια εμπειρική σύγκριση τριών λειτουργικών πολιτικών:

1. ακολουθούμε την προγραμματισμένη διαδρομή χωρίς να παραλείπουμε τους απόντες πελάτες,
2. παραλείπουμε τους απόντες πελάτες,
3. επαναφέρουμε τη υπόλοιπη διαδρομή όποτε απουσιάζει ένας πελάτης.

Οι ιδιότητες που ξεχωρίζουν και εφαρμόζονται τόσο στο VRPSD όσο και στο VRPSC είναι οι εξής:

1) ακόμη και αν τα έξοδα της διαδρομής είναι συμμετρικά (δηλαδή $c_{ij} = c_{ii}$ για όλα τα i, j) το συνολικό κόστος εξαρτάται από την κατεύθυνση της διαδρομής.

2) η μεγάλη χωρητικότητα του οχήματος μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο κόστος.

1.4.6 Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικούς πελάτες και απαιτήσεις (VRPSCD)

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικούς πελάτες και απαιτήσεις συνδυάζουν το VRPSC και VRPSD. Το πρόβλημα αναφέρεται σε πρώιμες μελέτες από τους Jezequel (1985), Jaillet (1987), Jaillet and Odoni (1988) and Trudeau and Dror (1992). Ο ορισμός που πρότεινε, το 1992, ο Bertsimas παρουσιάζει ενδιαφέρον. Στο πρώτο στάδιο, το όχημα καθορίζει ένα σύνολο διαδρομών που αρχίζει και τελειώνει στην αποθήκη και επισκέπτεται κάθε πελάτη ακριβώς μια φορά. Το σύνολο των πελατών με μηδενική ζήτηση (λόγω απουσίας των πελατών) αποκαλύπτεται και η ζήτηση όλων των πελατών γίνεται γνωστή μόνο όταν το όχημα φτάνει στον πελάτη. Στο δεύτερο στάδιο ακολουθούνται οι διαδρομές του πρώτου σταδίου με τις ακόλουθες δυο εξαιρέσεις:

1) κάθε απουσία του πελάτη παραλείπεται,

2) κάθε φορά που η χωρητικότητα του οχήματος έχει υπερβεί, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη για να εκφορτώσει και έπειτα συνεχίζει από τον τελευταίο πελάτη που επισκέφθηκε.

Αν για οποιονδήποτε πελάτη η χωρητικότητα του οχήματος επιτευχθεί ακριβώς, τότε το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη και συνεχίζει τις συλλογές του στον επόμενο πελάτη κατά μήκος της διαδρομής. Αυτό το πρόβλημα παρουσιάζεται σε επιχειρήσεις με λιγότερες μεταφορές και το όχημα κάνει συλλογές από ένα σύνολο τακτικών πελατών σε καθημερινή βάση. Η ποσότητα που θα συλλέξει ο πελάτης είναι τυχαία.

Το VRPSCD είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα. Ακόμη και ο υπολογισμός της αξίας του χρόνου είναι δύσκολος. Το 1992, ο Bertsimas παρείχε μια αναδρομική έκφραση, ασυμπτωτικά αποτελέσματα και αρκετές αναλυτικές πολιτικές επαναλήψεις. Το 1994, ο Seguin και το 1995 μαζί με τους Gendreau and Laporte πρότειναν τον πρώτο ακριβή αλγόριθμο για το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με ακέραιο L σχήμα. Οι λύσεις αναφέρονται για τις περιπτώσεις που περιλαμβάνουν μέχρι και 46 κορυφές. Από αυτές τις μελέτες φάνηκε ότι οι στοχαστικοί πελάτες είναι πολύ πιο περίπλοκο πρόβλημα από αυτό των στοχαστικών απαιτήσεων. Ένα άλλο ενδιαφέρον είναι ότι παρέχουν για πρώτη φορά βέλτιστες λύσεις οι οποίες μπορούν να υπολογισθούν. Το 1996, προτάθηκε μια ευρετική μέθοδος από τους Gendreau, Laporte και Seguin. Μια καινοτομία αυτού του αλγορίθμου είναι η χρήση μιας συνάρτησης που μειώνει τους υπολογισμούς για το αναμενόμενο κόστος σε κάθε επανάληψη της διαδρομής. Για παράδειγμα σε ένα σύνολο 825 περιπτώσεων που κυμαίνονται από 6 μέχρι 46 κορυφές, παράγει μια βέλτιστη λύση στο 89.45% όλων των περιπτώσεων. Η μέση απόκλιση από τη βέλτιστη λύση είναι μόνο 0.38% και στο 97.8% όλων των περιπτώσεων είναι μικρότερη από 5%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με ανεφοδιασμούς

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα στοχαστικής δρομολόγησης οχημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η ζήτηση του πελάτη θεωρείται αβέβαιη και η πραγματική ζήτηση αποκαλύπτεται όταν το όχημα φθάσει σε αυτόν. Στην περίπτωση που το όχημα ξεμείνει από προϊόντα, αντί να κάνει την προγραμματισμένη διαδρομή, υπάρχουν εναλλακτικά σημεία στην διαδρομή του στα οποία μπορεί να επιστρέψει πιο σύντομα πίσω στην αποθήκη ώστε να εφοδιαστεί. Η επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη, μπορεί να γίνει πριν ακόμη τελειώσουν τα προϊόντα. Δυο ευρετικοί αλγόριθμοι αναπτύσσονται για να κατασκευάσουν τόσο μονές όσο και πολλαπλές διαδρομές οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος διαδρομής. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ευρετικές διαδικασίες παράγουν ποιοτικές λύσεις και είναι αποτελεσματικές.

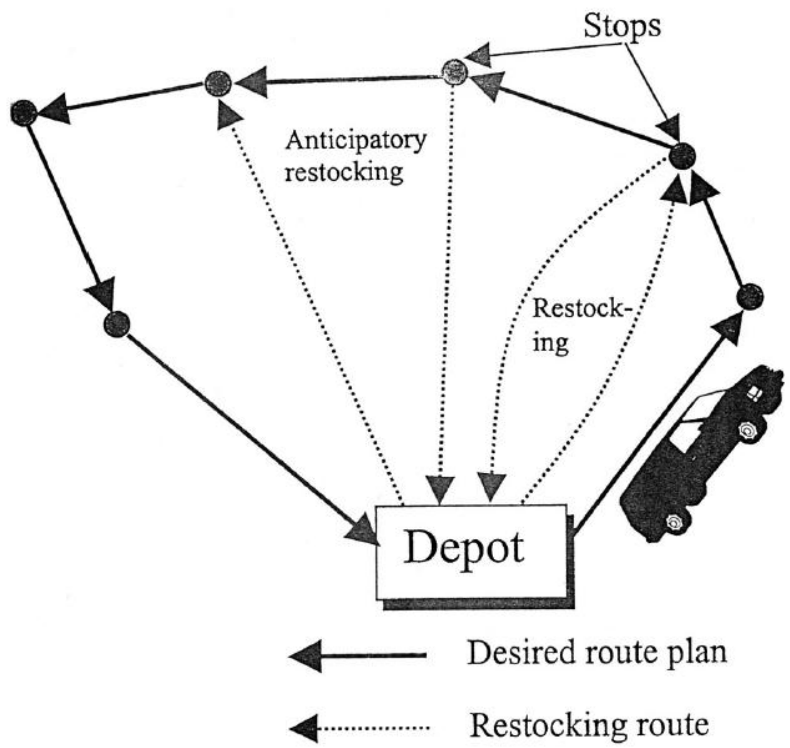
2.2 Εισαγωγή στο στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές απαιτήσεις και καθοριστικούς παραμέτρους

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε προβλήματα SVRP όπου οι απαιτήσεις των πελατών είναι στοχαστικές και όλοι οι παράμετροι είναι αιτιοκρατικοί. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται σε πολλές καταστάσεις και παρακάτω θα εξετάσουμε μερικές από αυτές.

- Οι πωλητές φορτώνουν τα οχήματά τους με προϊόντα τα οποία προσδοκούν να τα πουλήσουν κατά τη διαδρομή. Οι επισκέψεις πραγματοποιούνται σε προκαθορισμένους πελάτες με σκοπό την αντικατάσταση των προϊόντων που εξαντλούνται. Επειδή δεν είναι γνωστό το μέγεθος της εξάντλησης των αποθεμάτων, αυτό γίνεται γνωστό όταν ο πωλητής επισκεφθεί τον πελάτη. Για παράδειγμα,
    1. η διανομή της μπύρας στο λιανικό εμπόριο,
    2. η προμήθεια των προϊόντων στο κατάστημα με τρόφιμα,

3. η αναπλήρωση υγρού αερίου στα εργαστήρια έρευνας,
4. η αποθήκευση των μηχανών πώλησης.

- Η καθημερινή ζήτηση μετρητών στις αυτόματες τραπεζικές μηχανές είναι αβέβαιη. Το μέγιστο ποσό που μπορεί να μεταφέρει ένα όχημα υπαγορεύεται από την πολιτική της εταιρίας. Επειδή όλες οι μηχανές δεν είναι σε θέση να εφοδιαστούν, λαμβάνονται αποφάσεις για τον τρόπο εφοδιασμού, όπου η ζήτηση του προϊόντος μπορεί να υπερβαίνει την χωρητικότητα του οχήματος.
- Ο όγκος των απορριμμάτων σε κάθε στάση δεν είναι γνωστός. Επειδή πρέπει να συγκεντρωθούν τα απορρίμματα και η χωρητικότητα του οχήματος είναι περιορισμένη, μπορεί το όχημα πρώτα να απαιτήσει την εκκένωση του και έπειτα να συνεχίσει την διαδρομή του.



Σχήμα 2: Γράφημα δρομολόγησης οχημάτων με ανεφοδιασμούς

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του προβλήματος SVRP είναι ότι οι διαδρομές ενδέχεται να μην γίνουν όπως έχουν προγραμματιστεί. Λόγω αβεβαιότητα της ζήτησης, σε κάποιο σημείο της διαδρομής, η διανομή των προϊόντων μπορεί να εξαντληθεί πριν ακόμα το όχημα να ολοκληρώσει την διαδρομή του. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν διάφορες ενέργειες που μπορούν να ληφθούν.

Μια πρώτη ενέργεια είναι όταν το όχημα επισκέπτεται έναν πελάτη, λαμβάνεται υπόψη η ζήτηση αυτού, έχοντας όμως υπόψη και τη ζήτηση των υπολοίπων πελατών που θα επισκεφθεί το όχημα. Η δυσαρέσκεια των πελατών ή η απώλεια των εσόδων είναι πιθανή επειδή η ζήτηση ορισμένων πελατών ενδέχεται να μην ικανοποιηθεί.

Μια δεύτερη ενέργεια είναι το όχημα να μην σταματήσει σε κανέναν πελάτη εφόσον τα προϊόντα έχουν εξαντληθεί. Υπάρχει περίπτωση οι τελευταίοι πελάτες της διαδρομής να μην εξυπηρετηθούν και έτσι να υπάρχει δυσαρέσκεια των πελατών και απώλεια εσόδων.

Μια τρίτη ενέργεια είναι να επιστρέψει το όχημα στην αποθήκη για να ξαναφορτώσει, στην συνέχεια να επιστρέψει στον πελάτη που έγινε η εξάντληση του προϊόντος και έπειτα να συνεχίσει κανονικά την διαδρομή του. Η επιστροφή στην αποθήκη δημιουργεί πρόσθετα κόστη. Για να ελέγξουμε αυτά τα κόστη, μια λογική στρατηγική είναι το όχημα να επιστρέψει πίσω στην αποθήκη για ανεφοδιασμό, εφόσον έχει εξυπηρετήσει κάθε πελάτη στην προσδοκία της πιθανής εξάντλησης. Αυτή η ιδέα υιοθετήθηκε το 1989 από τους Dror, Laporte and Louveaux. Η απόφαση είναι να μειωθούν τα επιπλέον έξοδα με το να επιστρέψει το όχημα στην αποθήκη μετά από την εξάντληση του προϊόντος, με τα έξοδα να επιστρέψει για ανεφοδιασμό πριν μια εξάντληση προκύψει από κάποιο πελάτη. Έτσι το σημείο κατά το οποίο επιστρέφει στην αποθήκη μπορεί να είναι πριν την εξάντληση των αποθεμάτων.

2.3 Στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με βέλτιστο ανεφοδιασμό και σχετική βιβλιογραφία

Το στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με βέλτιστο ανεφοδιασμό (SVRPOR) ορίζεται από ένα γράφημα $G=(V,A,C)$ όπου $V=\{0,1,\ldots,n\}$ είναι ένα σύνολο κόμβων όπου ο κόμβος 0 αναπαριστά την αποθήκη και οι κόμβοι $1,2,\ldots,n$ αναπαριστούν τους πελάτες, $A=\{(i,j): i,j\in V, i\neq j\}$ είναι το σύνολο των τόξων που ενώνει τους κόμβους και $C=(c_{ij})$ δηλώνει το κόστος ταξιδίου μεταξύ των κόμβων i και j.

Υποθέτουμε ότι όλοι οι κόμβοι, συμπεριλαμβανομένου και της αποθήκης είναι πλήρως συνδεδεμένα. Ο πίνακας κόστους C είναι συμμετρικός και ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Επίσης όλοι οι πελάτες έχουν στοχαστικές απαιτήσεις $\xi_i, i=1,\ldots,n$ οι οποίες κατανέμονται ανεξάρτητα και είναι γνωστές μόνο κατά την επίσκεψη των οχημάτων σε κάθε πελάτη. Είναι γνωστό ότι οι στοχαστικές απαιτήσεις ξ_i δεν ξεπερνούν την χωρητικότητα Q του οχήματος και ακολουθούν μια διακριτή κατανομή με m δυνατές τιμές $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $P_{ik} = \Pr ob\left(\xi_i = \xi^k\right)$.

Δεδομένου ενός στόλου οχημάτων με βάση την αποθήκη, το κάθε ένα με χωρητικότητα Q, το πρόβλημα SVRPOR απαιτεί την εύρεση διαδρομών και μια πολιτική αποκατάστασης σε κάθε κόμβο για το αν θα επιστρέψει στην αποθήκη πριν ακόμη επισκεφθεί τον επόμενο πελάτη για να ελαχιστοποιήσει το συνολικό αναμενόμενο κόστος. Κάθε διαδρομή αρχίζει και τελειώνει στην αποθήκη και μόνο ένα όχημα επισκέπτεται τον κάθε πελάτη. Τα εξεταζόμενα έξοδα είναι:

- το κόστος ταξιδίου από έναν πελάτη στον άλλο,
- το κόστος επιστροφής στην αποθήκη για ανεφοδιασμό,
- το κόστος επιστροφής του οχήματος για ανεφοδιασμό δεν επαρκεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση κατά την άφιξη σε μια τοποθεσία του πελάτη. Το κόστος της αποτυχημένης διαδρομής είναι ένα σταθερό μη αρνητικό κόστος b συν το κόστος ταξιδιού πίσω στην αποθήκη και ξανά πίσω στην συνέχεια της διαδρομής.

Η έρευνα σχετικά με το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με στοχαστικές παραμέτρους περιλαμβάνει:

1) το πιθανό πρόβλημα του μετακινούμενου πωλητή (PTSP) και

2) το πρόβλημα δρομολόγησης του οχήματος με στοχαστικές απαιτήσεις (VRPSD)

Το PTSP αναπτύχθηκε το 1985 από την Jaillet. Συγκεκριμένα υπάρχει μόνο ένα όχημα και καμία απαίτηση. Το μόνο στοχαστικό στοιχείο είναι ότι ο πελάτης i απαιτεί μια επίσκεψη με πιθανότητα p_i. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια προκαθορισμένη διαδρομή που αρχίζει και τελειώνει στην αποθήκη. Το όχημα επισκέπτεται αυτούς τους πελάτες με μια προκαθορισμένη σειρά. Ο στόχος είναι να βρεθεί μια διαδρομή με ελάχιστο αναμενόμενο μήκος. Μια εφαρμογή του προβλήματος στο σχεδιασμό διαδρομών προτάθηκε από τους Bartholdi (1983), Jaillet (1985,1988), Jaillet and Odani (1988). Οι Laporte, Louveaux and Mercure, το 1994, περιέγραψαν το πρώτο ακριβές αλγόριθμο για το PTSP, διατυπώνοντας το ως ένα ακέραιο γραμμικό στοχαστικό πρόγραμμα.

Το SVRPOP ανήκει στην τάξη VRPSD. Το VRPSD αποτελείται από το σχεδιασμό ενός αριθμού διαδρομών, κάτω από τυχαίες απαιτήσεις πελατών, οι οποίες είναι γνωστές όταν το όχημα φθάσει στη θέση. Ένας από τους πρώτους αλγορίθμους για αυτό το πρόβλημα με πολλαπλές αποθήκες και πολλαπλά οχήματα προτάθηκε από τον Tillman, το 1969. Από τότε πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει αυτό το πρόβλημα σε δυο πλαίσια. Στο πρώτο πλαίσιο, το πρόβλημα συνίσταται στο σχεδιασμό ενός αριθμού διαδρομών οχημάτων με την επιφύλαξη ότι η πιθανότητα της αποτυχημένης διαδρομής, σε οποιαδήποτε διαδρομή, είναι εντός του επιτρεπομένου ορίου. Οι Stewart and Golden (1983) και Laporte, Louveaux and Mercure (1989) έδειξαν ότι με ορισμένες παραδοχές αυτό το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα VRP και στη συνέχεια να λυθεί χρησιμοποιώντας αλγορίθμους. Αντίθετα, το πρόβλημα VRPSD προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το συνολικό αναμενόμενο κόστος, το οποίο περιλαμβάνει το κόστος ταξιδιού και το κόστος της αποτυχημένης διαδρομής. Σε περίπτωση αποτυχημένης διαδρομής, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη, ξαναφορτώνει και συνεχίζει την διαδρομή από το σημείο όπου συνέβη η αποτυχία. Μοντέλα προγραμματισμού έχουν προταθεί και διερευνηθεί από τους Dror, Laporte and Trudeau (1989), Laporte and Louveaux (1990), Dror (1993), Dror, Laporte and Louveaux (1993), Bastian and Rinnooy Kan (1992) and Bentsimas (1992), Stewart and Golden (1983) and Dror and Trudeau (1986). Έχουν προτείνει ευρετικούς αλγορίθμους υιοθετώντας τη μέθοδο αποταμίευσης των Clarke and Wright (1964). Η τεχνολογία προσομοίωσης αναπτύχθηκε από τους Teodorovic and Pavkovic (1992) όταν υπάρχουν ομοιόμορφα αιτήματα και επιτρέπεται μόνο μια αποτυχημένη διαδρομή.

Πρόσφατα, οι Gendreau, Laporte and S’eguin (1995,1996) έχουν εξετάσει το SVRP στο οποίο τόσο οι πελάτες όσο και η ζήτηση τους είναι τυχαία. Οι συγγραφείς διατύπωσαν το πρόβλημα αυτό ως ένα μη γραμμικό στοχαστικό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού και πρότειναν έναν αλγόριθμο βασιζόμενο στην μέθοδο σχήματος L που αναπτύχθηκε από τους Laporte and Louveaux, το 1993. Σε μία άλλη εργασία τους, προτείνεται έναν αλγόριθμος αναζήτησης. Τα περισσότερα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα υιοθετούν απλή πολιτική όπου το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό μόνο όταν το φορτίο του οχήματος είναι εξαντλημένο. Η στρατηγική ανανέωσης του αποθέματος που υιοθετήθηκε επιτρέπει την ανανέωση του αποθέματος ακόμη και εάν είναι κερδοφόρο. Σε αυτήν την εργασία αναπτύσσεται το στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων με βέλτιστο ανεφοδιασμό (SVRPOR).

2.4 Πρόβλημα δρομολόγησης ενός οχήματος

Για να προσδιορίσουμε μια βέλτιστη διαδρομή για ένα μόνο όχημα είναι απαραίτητο να αναπτυχθεί μια αποτελεσματική διαδικασία για να αξιολογήσει μια συγκεκριμένη διαδρομή και να βρει το αναμενόμενο κόστος κάτω από μια βέλτιστη πολιτική. Μια συγκεκριμένη διαδρομή οχήματος είναι $0 \to 1 \to 2 \ldots j \to j+1 \ldots \to n$. Μετά την ολοκλήρωση της επίσκεψης στον πελάτη j, ας υποθέσουμε ότι το όχημα έχει ένα υπόλοιπο φορτίο q και $f_j(q)$ αναπαριστά το συνολικό αναμενόμενο κόστος από τον κόμβο j και μετά. Αν το S_j αναπαριστά το σύνολο όλων των πιθανών φορτίων ενός οχήματος που μπορεί να έχει μετά τη ολοκλήρωση της υπηρεσίας στον πελάτη j, τότε $f_j(q)$ για $q \in S_j$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού:

$$f_j(q) = \min \begin{cases} c_{j,j+1} + \sum_{k:\xi^k \le q} f_{j+1}\left(q - \xi^k\right) p_{j+1,k} + \sum_{k:\xi^k > q} \left[b + 2c_{j+1,0} + f_{j+1}\left(q + Q - \xi^k\right)\right] p_{j+1,k} \\ c_{j,0} + c_{0,j+1} + \sum_{k=1}^{m} f_{j+1}\left(Q - \xi^k\right) p_{j+1,k} \end{cases}$$

(2.1)

με οριακή συνθήκη:

$$f_n(q) = c_{n0}\ ,\ q \in S_n. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Στην Εξίσωση **(2.1)** το ανώτατο όριο στην ελαχιστοποίηση αντιπροσωπεύει το αναμενόμενο κόστος της μετάβασης στον επόμενο κόμβο ενώ το κατώτερο όριο αντιπροσωπεύει το αναμενόμενο κόστος του ανεφοδιασμού. Ο δυναμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για να καθορίσει την βέλτιστη πολιτική. Οι ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής είναι χρήσιμες στην αλγοριθμική και στην πρακτική εφαρμογή.

Πρόταση 2.1

$f_j(q) \le f_j(Q) + 2c_{0,j} \quad \forall q \in S_j$.

Απόδειξη.

Από την Εξίσωση **(2.1)** έχουμε

$$f_j(q) \le c_{j,0} + c_{0,j+1} + \sum_{k=1}^{m} f_{j+1}\left(Q - \xi^k\right) p_{j+1,k} \ . \qquad \textbf{(2.3)}$$

Επίσης, επειδή το κόστος C ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, η Εξίσωση **(2.1)** δίνει

$$f_j(Q) = c_{j,j+1} + \sum_{k=1}^{m} f_{j+1}\left(Q - \xi^k\right) p_{j+1,k} \ . \qquad \textbf{(2.4)}$$

Από τις Εξισώσεις **(2.3)** και **(2.4)** προκύπτει ότι:

$$f_j(q) \le c_{j,0} + c_{0,j+1} - c_{j,j+1} + f_j(Q) \le c_{j,0} + c_{0,j} + c_{j,j+1} - c_{j,j+1} + f_j(Q) = 2c_{0,j} + f_j(Q).$$

Η παραπάνω πρόταση αποτελεί κλειδί στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1

Για κάθε πελάτη j, υπάρχει μια ποσότητα h_j, έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση, μετά από την εξυπηρέτηση του κόμβου j είναι να συνεχίσει στον κόμβο $j+1$ αν $q \ge h_j$ ή να επιστρέψει στην αποθήκη αν $q < h_j$.

Απόδειξη.

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα, πρώτα θα κάνουμε επαγωγή για όλα τα $q \in S_j$ και $f_j(q)$ είναι μια μη-αύξουσα συνάρτηση. Δηλαδή για $q_1, q_2 \in S_j$ και $q_1 < q_2$ έχουμε,

$$f_j(q_1) \ge f_j(q_2).$$

Στο τερματικό στάδιο n, η συνάρτηση $f_n(q) = c_{n0}$ είναι ανεξάρτητη από το q. Ως εκ τούτου, $f_n(q)$ είναι μια μονοτονική μη-αύξουσα συνάρτηση σε σχέση με το $q \in S_n$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι $f_{j+1}(q)$ είναι μια μονοτονική μη-αύξουσα συνάρτηση σε σχέση με το $q \in S_{j+1}$, τότε $f_j(q)$ είναι και αυτή μια μονοτονική μη-αύξουσα συνάρτηση σε σχέση με το $q \in S_j$.

Έστω ότι $H_j(q)$ και $H'_j(q)$ υποδηλώνουν το ανώτερο και κατώτερο όριο στην ελαχιστοποίηση της Εξίσωσης **(2.1)**. Τότε για $q_1, q_2 \in S_j$ και $q_1 < q_2 \le Q$, $H_j(q_1) - H_j(q_2)$ μετά από απλούστευση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$H_j(q_1) - H_j(q_2) = \sum_{k:\xi^k \le q_1} \left[f_{j+1}(q_1 - \xi^k) - f_{j+1}(q_2 - \xi^k) \right] p_{j+1,k} +$$

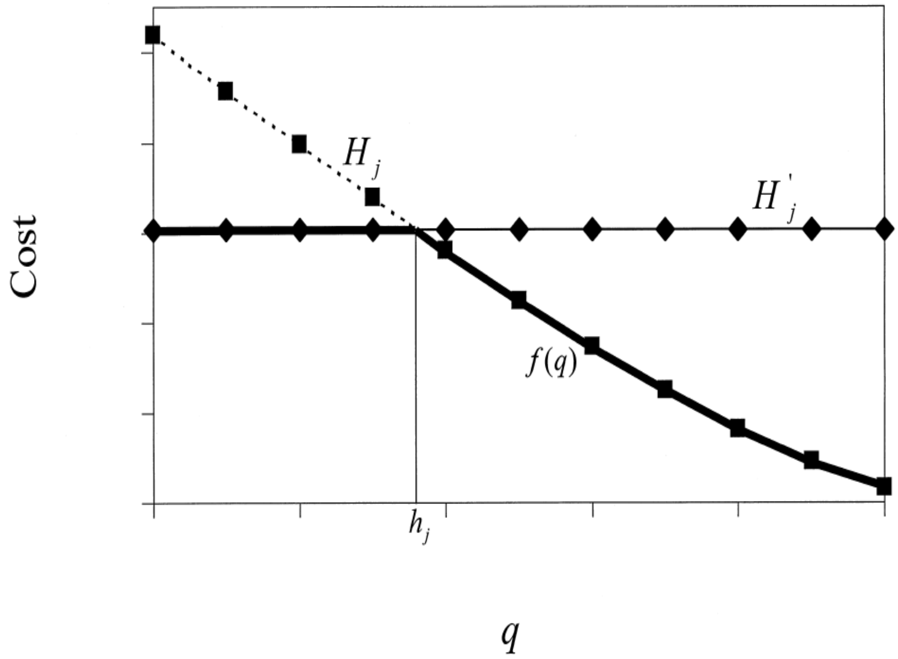
$$\sum_{k:q_1 < \xi^k \le q_2} \left[b + 2c_{j+1,0} + f_{j+1}(q_1 + Q - \xi^k) - f_{j+1}(q_2 - \xi^k) \right] p_{j+1,k} +$$

$$\sum_{k:\xi^k > q_2} \left[f_{j+1}(q_1 + Q - \xi^k) - f_{j+1}(q_2 + Q - \xi^k) \right] p_{j+1,k} \,.$$

Επειδή $f_{j+1}(q)$ είναι μια μονοτονική μη-αύξουσα συνάρτηση το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου στην παραπάνω εξίσωση είναι θετικό. Επομένως,

$$H_j(q_1) - H_j(q_2) \ge \sum_{k:q_1 < \xi^k \le q_2} \left[b + 2c_{j+1,0} + f_{j+1}(q_1 + Q - \xi^k) - f_{j+1}(q_2 - \xi^k) \right] p_{j+1,k} \,.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1 και τη μονοτονία του $f_{j+1}(q)$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $H_j(q_1) - H_j(q_2) \ge 0$. Όμως το $H_j(q)$ είναι μία μονοτονικά μη-αύξουσα συνάρτηση. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 3), $f_j(q)$ είναι το ελάχιστο μιας μη-αύξουσας συνάρτησης $H_j(q)$ και μιας σταθεράς συνάρτησης $H'_j(q)$, άρα είναι μονοτονικά μη-αύξουσα σε σχέση με το $q \in S_j$. Επιπλέον υπάρχει μια h_j, έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση, μετά την εξυπηρέτηση του κόμβου j, είναι να συνεχίσει στον κόμβο $j+1$ αν $q \ge h_j$ ή να επιστρέψει στην αποθήκη αν $q < h_j$. Αν $h_j = 0$ τότε $H_j(q) \le H'_j(q) \quad \forall q \in S_j$ και $h_j = Q$ αν $H'_j(q) \le H_j(q) \quad \forall q \in S_j$.



Σχήμα 3: Μονοτονική συνάρτηση $f(q)$

Πρώτον, η κύρια συνέπεια του Θεωρήματος 2.1 είναι ότι πρακτικά είναι εύκολο να εφαρμοστεί επειδή παρέχει μια απλή πολιτική για τον οδηγό του οχήματος. Δεύτερον, το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αλγοριθμική υλοποίηση της δυναμικής αναδρομής του προγραμματισμού. Συγκεκριμένα σε κάθε στάδιο του δυναμικού προγραμματισμού, υπολογίζουμε πρώτα το $H_j'(q)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $H_j(q)$ μέχρι να υπερβεί το $H_j'(q)$. Η τελευταία τιμή q για την οποία $H_j(q) \le H_j'(q)$ είναι h_j και το $f_j(q)$ είναι απλά το $H_j(q)$ (αν συνεχίσει στον πελάτη $j+1$) αν $q \ge h_j$ ή $H_j'(q)$ (αν επιστρέψει στην αποθήκη) αν $q < h_j$.

Έχοντας πάρει ένα κριτήριο για την αξιολόγηση μιας διαδρομής, το SVRP βρίσκει μια διαδρομή με το λιγότερο συνολικό αναμενόμενο κόστος. Το πρόβλημα αυτό είναι γενικά δύσκολο υπολογιστικά. Η εμπειρία δείχνει ότι τέτοιοι αλγόριθμοι δίνουν λύσεις σε προβλήματα μετρίου μεγέθους. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος χρειάστηκε 42 δευτερόλεπτα για να λύσει ένα πρόβλημα με 8 κόμβους σε έναν υπολογιστή με 66Hz. Ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου τείνει να αυξηθεί εκθετικά καθώς αυξάνεται το μέγεθος του προβλήματος. Επομένως για μεγαλύτερα πρακτικά προβλήματα, πρέπει να αναπτύξουμε ευρετικούς αλγορίθμους που μπορούν να παράγουν σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε εύλογο χρονικό διάστημα. Αναπτύχθηκαν αρκετές στοχαστικές παραλλαγές των αλγορίθμων που προτείνονται για τα ντετερμινιστικά προβλήματα. Ένα βασικό στοιχείο των ευρετικών διαδικασιών είναι η αξιολόγηση του κόστους εισαγωγής μιας αλυσίδας κόμβων σε μερική περιήγηση ή η εξοικονόμηση από την διαγραφή μιας συμβολοσειράς κόμβων από μια περιοδεία. Για παράδειγμα, τα έξοδα εισαγωγής υπολογίζονται εισάγοντας έναν κόμβο σε μια μερική περιήγηση. Ο υπολογισμός του κόστους και της εξοικονόμησης στην ντετερμινιστική περίπτωση είναι αρκετά απλός. Στην στοχαστική περίπτωση, ο υπολογισμός είναι απαγορευτικός επειδή απαιτείται η χρήση του δυναμικού προγραμματισμού στην Εξίσωση **(2.1)**.

Για να υπολογίσουμε το κόστος εισαγωγής μιας σειράς κόμβων μεταξύ των κόμβων i και j σε μια μερική περιοδεία, θέτουμε $f_i^1(q)$ να είναι το κόστος στον κόμβο i για την τρέχουσα μερική περιήγηση. Εφαρμόζοντας την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού ξεκινώντας με το κόστος διανύσματος $f_j^1(q)$ στον κόμβο j μέσω των κόμβων της εισαγόμενης σειράς και πίσω στον κόμβο i. Θέτουμε $f_i^2(q)$ να είναι το αποτέλεσμα του κόστους διανύσματος στον κόμβο i. Στη συνέχεια καθορίζουμε το κόστος εισαγωγής ως απλός μέσος όρος του $f_i^2(q) - f_i^1(q)$. Αυτό είναι κατά προσέγγιση το:

$$\text{κόστος εισαγωγής} = \left[\sum_{q \in S_i} \left(f_i^2(q) - f_i^1(q) \right) \right] \Big/ |S_i|$$

όπου $|S_i|$ υποδηλώνει το απόλυτο αριθμητικό της σειράς S_i.

Η εξοικονόμηση από τη διαγραφή της σειράς κόμβων από μια περιοδεία μπορεί να υπολογιστεί ανάλογα. Αυτή η βασική ιδέα εφαρμόζεται σε δυο γνωστές ευρετικές διαδικασίες για ντετερμινιστικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής μας μελέτης δείχνουν ότι η προσέγγιση που περιγράφεται παραπάνω βρίσκει την ίδια διαδρομή αν τα έξοδα εισαγωγής είναι ακριβής με λιγότερη υπολογιστική προσπάθεια (λιγότερο από 10%). Επίσης ο Or-opt αλγόριθμος (με λύση εισαγωγής ως αρχική διαδρομή) τείνει να παράγει σχεδόν βέλτιστες λύσεις. Στην υπολογιστική μας μελέτη, αυτός ο αλγόριθμος είναι σε σύγκριση με έναν 2-opt αλγόριθμο ανταλλαγής. Να σημειώσουμε ότι σε ένα 2-opt αλγόριθμο, για να υπολογίσουμε την εναλλαγή 2 τόξων απαιτείται η χρήση του δυναμικού προγραμματισμού για να υπολογίσουμε το κόστος της νέας διαδρομής στις δύο κατευθύνσεις διότι το αναμενόμενο κόστος του δυναμικού προβλήματος εξαρτάται από τον προσανατολισμό του. Για αυτό το λόγο, ο 2-opt αλγόριθμος απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο (περίπου 150% περισσότερο) από τον αλγόριθμο Or-opt με την ίδια διαδρομή εκκίνησης, αλλά δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Επειδή πολλά SVRP πρέπει να αξιολογούνται για την επίλυση ενός συνολικού στοχαστικού προβλήματος δρομολόγησης, η διαδικασία Or-opt θα χρησιμοποιηθεί. Για λόγους πληρότητας, αυτός ο αλγόριθμος περιγράφεται συνοπτικά ως εξής.

Αλγόριθμος εναλλαγής ανταλλαγής χρηστών (Or-opt)

1. Θέτουμε $k=3$ και T να είναι μια αρχική διαδρομή.
2. Υπολογίζουμε το αναμενόμενο κόστος της διαδρομής T χρησιμοποιώντας τη δυναμική αναδρομή του προγραμματισμού. Επίσης για κάθε S, ένα σύνολο k διαδοχικών κόμβων από τη διαδρομή T, υπολογίζουμε
   a. την κατά προσέγγιση εξοικονόμηση κόστους κατά την αφαίρεση των κόμβων του συνόλου S από το T χρησιμοποιώντας την προσέγγιση που συζητήθηκε προηγουμένως.
   b. το κόστος εισαγωγής του συνόλου S σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της μειωμένης διαδρομής με εξαίρεση το μέρος που είναι εκτός διαδρομής. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση για τον υπολογισμό αυτού του κόστους.
   c. η βελτίωση του κόστους-η διαφορά του κόστους εξοικονόμησης στο **(a)** και πρόσθετο κόστος στο **(b)**.
3. Εάν κανένα από τα σύνολα στο βήμα 2 δεν έχει θετικό κόστος βελτίωσης, μεταβαίνουμε στο βήμα 5. Διαφορετικά μεταβαίνουμε στο βήμα 4.
4. Επιλέγουμε το σύνολο S που έχει ως αποτέλεσμα το μέγιστο θετικό κόστος βελτίωσης στο βήμα 2. Το αφαιρούμε από την τρέχουσα θέση και το τοποθετούμε στο σημείο που οδηγεί σε αυτή τη μέγιστη εξοικονόμηση. Έπειτα μεταβαίνουμε στο βήμα 2.
5. Εάν $k=1$ σταματάμε. Διαφορετικά μειώνουμε το k κατά 1 και μεταβαίνουμε στο βήμα 2.

2.5 Πολλαπλή δρομολόγηση οχήματος

Σε ντετερμινιστικά προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων, μια ενιαία διαδρομή θα είναι πάντα βέλτιστη εάν το όχημα έχει αρκετή χωρητικότητα για να μεταφέρει όλη τη ζήτηση των πελατών. Ωστόσο πολλαπλά οχήματα (ή πολλαπλές διαδρομές) είναι απαραίτητα όταν η συνολική ζήτηση των πελατών υπερβαίνει την χωρητικότητα του οχήματος. Όμως δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε πολλαπλές διαδρομές στην στοχαστική περίπτωση ακόμη και όταν η ζήτηση του πελάτη υπερβαίνει την χωρητικότητα του οχήματος. Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύει ότι, αν δεν υπάρχουν πρόσθετοι περιορισμοί, η βέλτιστη διαδρομή είναι πάντα μια ενιαία διαδρομή.

Θεώρημα 2.2

Υπάρχει μια ενιαία διαδρομή που είναι οικονομική ως πολλαπλή διαδρομή.

Απόδειξη.

(Με αντίφαση) Θέτουμε $r_1, r_2, \ldots, r_m$ να είναι ο βέλτιστος διαχωρισμός n κόμβων. Κάθε r_i συνιστά ένα βέλτιστο υποπρόγραμμα μέσω ενός τμήματος n κόμβων. Δείχνει ότι το αναμενόμενο κόστος των διαδρομών $(r_1 + r_2), r_3, \ldots, r_m$ είναι μικρότερο ή ίσο με τις διαδρομές $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Θέτουμε,

r_1: μια βέλτιστη διαδρομή μέσω του πρώτου διαχωρισμού

r_2: μια βέλτιστη διαδρομή μέσω του δεύτερου διαχωρισμού

δ: μια βέλτιστη διαχωριστική διαδρομή $(r_1 + r_2)$

z_{r_1}: το αναμενόμενο κόστος του r_1

z_{r_2}: το αναμενόμενο κόστος του r_2

z_δ: το αναμενόμενο κόστος του δ

i: ο τελευταίος κόμβος στη βέλτιστη ακολουθία διαδρομών του r_1

j: ο πρώτος κόμβος στη βέλτιστη ακολουθία διαδρομών του r_2

$f_i^r(q_i)$: το αναμενόμενο κόστος από τον κόμβο i προς τα εμπρός μέσω της διαδρομής r, με υπόλοιπο φορτίο q_i

$\bar{f}_i^{\,r}(q_i)$: το αναμενόμενο κόστος μέχρι και μέσω του κόμβου i στη διαδρομή r, με υπόλοιπο φορτίο q_i κατά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης

$S_i^{r_1}$: το σύνολο όλων των πιθανών φορτίων που μπορεί να έχει ένα όχημα μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη i στη διαδρομή r_1

$h_i(q_i)$: η πιθανότητα ότι το υπόλοιπο φορτίο μετά την εξυπηρέτηση του πελάτη i στη διαδρομή r_1 είναι q_i όπου $q_i \in S_i^{r_1}$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $z_\delta \le z_{r_1} + z_{r_2}$.Θέτουμε $\bar{\delta}$ να είναι μια συγκεκριμένη διαδρομή μέσω του διαχωρισμού $(r_1 + r_2)$ έτσι ώστε να ακολουθήσει τη σειρά r_1 που ακολουθείται από το r_2. Οι πολιτικές ανεφοδιασμού r_1 και r_2 παρατηρούνται σε όλους τους κόμβους, εκτός του κόμβου i όπου η βέλτιστη πολιτική υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την επαναλαμβανόμενη δυναμική προγραμματισμού. Τότε,

$$z_{\bar{\delta}} = \sum_{q_i \in S_i^{r_1}} \left[\bar{f}_i^{\,\bar{\delta}}(q_i) + f_i^{\bar{\delta}}(q_i)\right] h_i(q_i). \qquad \textbf{(2.5)}$$

Εξ ορισμού (από την Εξίσωση **(2.1)**)

$$f_i^{\bar{\delta}}(q_i) = \min \begin{cases} c_{i,j} + \sum_{\xi^k \le q_i} f_j^{\bar{\delta}}(q_i - \xi^k) p_{j,k} + \sum_{\xi^k > q_i} \left[b + 2c_{j,0} + f_j^{\bar{\delta}}(q_i + Q - \xi^k) p_{j,k}\right] \\ c_{i,0} + c_{0,j} + \sum_{k=1}^{m} f_j^{\bar{\delta}}(Q - \xi^k) p_{j,k} \end{cases} \le$$

$$c_{i,0} + c_{0,j} + \sum_{k=1}^{m} f_j^{\bar{\delta}}(Q - \xi^k) p_{j,k}\ .$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την Εξίσωση **(2.5)** δίνει

$$z_{\bar{\delta}} \le \sum_{q_i \in S_i^{r_1}} \left[\bar{f}_i^{\,\bar{\delta}}(q_i) + c_{i,0} + c_{0,j} + \sum_{k=1}^{m} f_j^{\bar{\delta}}(Q - \xi^k) p_{j,k}\right] h_i(q_i).$$

Επειδή η r_2 συμπίπτει με την $\bar{\delta}$ από το j προς τα εμπρός, $f_j^{r_2}(q_j) = f_j^{\bar{\delta}}(q_j)$. Επομένως,

$$z_{\bar{\delta}} \le \sum_{q_i \in S_i^{r_1}} \left[\bar{f}_i^{\,\bar{\delta}}(q_i) + c_{i,0} + c_{0,j} + \sum_{k=1}^{m} f_j^{r_2}(Q - \xi^k) p_{j,k}\right] h_i(q_i) = \sum_{q_i \in S_i^{r_1}} \left[\bar{f}_i^{\,\bar{\delta}}(q_i) + c_{i,0}\right] h_i(q_i) + z_{r_2}$$

Επειδή η r_1 συμπίπτει με την $\bar{\delta}$ από το i προς τα πίσω στην αποθήκη, $\bar{f}_i^{r_1}(q_i) = \bar{f}_i^{\bar{\delta}}(q_i)$. Επομένως,

$$z_{\bar{\delta}} \leq \sum_{q_i \in S_i^{r1}} \left[\bar{f}_i^{r_1}(q_i) + c_{i,0}\right] h_i(q_i) + z_{r_2} = z_{r_1} + z_{r_2} .$$

Όμως $z_{\delta} \leq z_{\bar{\delta}}$. Συνεπώς, $z_{\delta} \leq z_{r_1} + z_{r_2}$.

Με τη διαδοχική εφαρμογή αυτής της διαδικασίας συνδυάζοντας δυο διαδρομές, μπορεί κανείς να αναπτύξει μια ενιαία διαδρομή του οποίου το αναμενόμενο κόστος είναι μικρότερο ή ίσο με το συνολικό αναμενόμενο κόστος των πολλαπλών διαδρομών.

Παρά το Θεώρημα 2.2, στις περισσότερες πραγματικές καταστάσεις, μια ενιαία διαδρομή μπορεί να μην είναι χρήσιμη λόγω περιορισμών όπως

- **i.** το όριο του αναμενόμενου κόστους (ή του αναμενόμενου χρόνου εάν $b = 0$) κάθε διαδρομής,
- **ii.** τη παρουσία παραθύρων χρόνου για τους πελάτες, για την παράδοση ή την παραλαβή,
- **iii.** το όριο πιθανότητας υπέρβασης του επιτρεπόμενου χρόνου T να είναι μέσα σε κάποιο καθορισμένο επίπεδο, ή
- **iv.** το όριο πιθανότητας για περισσότερες από k αποτυχημένες διαδρομές ή αναπλήρωση του ταξιδίου μέχρι ένα καθορισμένο επίπεδο, a.

Θεωρούμε ότι ο πρώτος περιορισμός, δηλαδή το αναμενόμενο κόστος (ή χρόνος) κάθε διαδρομής δεν πρέπει να υπερβαίνει το καθορισμένο όριο. Ακόμη και προβλήματα μετρίου μεγέθους (10 έως 50 πελάτες) σε μια ενιαία διαδρομή, θα πρέπει να βασίζονται σε ευρετικές μεθόδους. Επομένως επικεντρωνόμαστε κυρίως στην ανάπτυξη τέτοιων διαδικασιών, που είναι και η πιο σύνθετη περίπτωση πολλαπλών διαδρομών. Στην Ενότητα 2.6 αναπτύσσονται 2 ευρετικοί αλγόριθμοι.

2.6 Ευρετικοί αλγόριθμοι

Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσονται 2 ευρετικές διαδικασίες για το στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης πολλαπλών οχημάτων όπου επιβάλλεται πρόσθετος περιορισμός έτσι ώστε το αναμενόμενο κόστος κάθε διαδρομής δεν μπορεί να υπερβεί μια καθορισμένη τιμή, T. Η πολλαπλή διαδρομή αποτελείται από δυο συνδυαστικά προβλήματα διαχωρισμού των πελατών σε ομάδες, βρίσκοντας τις βέλτιστες διαδρομές για κάθε μια από αυτές. Ο πρώτος αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη διαδρομή-πρώτο σύμπλεγμα-επόμενη προσέγγιση, ενώ ο δεύτερος χρησιμοποιεί σύμπλεγμα-πρώτη-διαδρομή-επόμενη προσέγγιση.

2.6.1 Διαδρομή-πρώτο-σύμπλεγμα-επόμενος ευρετικός αλγόριθμος

Αυτή η ευρετική μέθοδος εκμεταλλεύεται το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.2. Πρώτα βρίσκει μια απλή διαδρομή μέσω όλων των πελατών χρησιμοποιώντας τη σύνθετη μέθοδο (εισαγωγή+Or-opt) που περιγράφεται στην Ενότητα 2.4. Στη συνέχεια χωρίζει τη μοναδική διαδρομή σε μικρά δευτερεύοντα δρομολόγια, έτσι ώστε κάθε διαδρομή να ικανοποιεί τους περιορισμούς της διαδρομής. Για ντετερμινιστικά προβλήματα έχουν προταθεί συστήματα διαχωρισμού (για παράδειγμα, το 1976, Foster and Ryan, το 1993, Ryan, Hjorring and Glover και το 1984, Golden et al.). Στη συνέχεια θα προτείνουμε μια εναλλακτική διαδικασία.

Δεδομένου μιας προκαθορισμένης ακολουθίας κόμβων $V=(i_1,i_2,\ldots,i_N)$ μια δυναμική διαδικασία προγραμματισμού χρησιμοποιείται για τη διαίρεση της διαδρομής σε δευτερεύουσες διαδρομές υποθέτοντας ότι η ακολουθία των κόμβων θα παραμείνει αμετάβλητη. Θέτουμε:

$\rho_k =$ το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος από τον κόμβο i_k προς τα εμπρός υποθέτοντας ότι ο καλύτερος διαχωρισμός χρησιμοποιείται κατά μήκος της ακολουθίας $(i_k,i_{k+1},\ldots,i_N)$

$\varphi_k =$ το πρώτο σημείο διαχωρισμού κατά μήκος της ακολουθίας $(i_k,i_{k+1},\ldots,i_N)$ που σχετίζεται με το κόστος ρ_k που είναι ο πρώτος διαχωρισμός $(i_k,i_{k+1},\ldots,i_{\varphi_k})$

$\tau_{k,\varphi_k} =$ το αναμενόμενο κόστος της διαδρομής μέσω του διαχωρισμού συνόλου κόμβων $(i_k,i_{k+1},\ldots,i_{\varphi_k})$ με $\tau_{k,k} = 2c_{i_k,0}$

$T =$ μια καθορισμένη τιμή για τον περιορισμό της διαδρομής.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε:

$$\rho_k = \min_{\phi_k : \tau_{k,\varphi_k} \le T} \left\{ \tau_{k,\varphi_k} + \rho_{\phi_{k+1}} \right\} \quad , 1 \le k \le N$$

με οριακές συνθήκες:

$$\rho_N = 2c_{iN,0} \text{ και } \varphi_N = N .$$

Για να υπολογίσουμε το τ_{k,φ_k}, αντί να κρατήσουμε την ίδια ακολουθία μέσα στο διαχωρισμό, η ευρετική εξέλιξη στην Ενότητα 2.4 χρησιμοποιείται για να βρεθεί μια καλύτερη ακολουθία. Χρησιμοποιώντας την προς τα πίσω αναδρομή, στόχος του αλγορίθμου είναι να βρούμε το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος ρ_1 και το αντίστοιχο σημείο διαίρεσης ϕ_1. Ξεκινώντας με (ρ_1, φ_1) ο διαχωρισμός μπορεί να εξαχθεί από μια διαδικασία προς τα εμπρός.

2.6.2 Σύμπλεγμα-πρώτη-διαδρομή-δεύτερος αλγόριθμος

Αυτός ο αλγόριθμος ισχύει για την περίπτωση που το πρόβλημα καθορίζεται σε ευκλείδειο χώρο. Όπως ο τίτλος υποδηλώνει τα βήματα σύμπλεγμα-πρώτη-διαδρομή-επόμενος αλγόριθμος περιλαμβάνουν πρώτα τη συγκέντρωση κόμβου πελατών και στη συνέχεια βρίσκουμε την ακολουθία διαδρομών μέσα από κάθε πελάτη. Το σύμπλεγμα-πρώτη-διαδρομή-επόμενη προσέγγιση υιοθετήθηκε από τον ντετερμινιστικό αλγόριθμο VRP (για παράδειγμα, το 1981, Fisher and Jaikumar) με ουσιαστική τροποποίηση για τη στοχαστική κατάσταση ζήτησης. Το σύμπλεγμα ξεκινάει με την επιλογή σημείων ακολουθούμενη από συμπλέγματα των πελατών γύρω από τα σημεία. Τα βήματα του αλγορίθμου περιγράφονται παρακάτω.

Ντετερμινιστικός προσδιορισμός σημείων

Η μέθοδος κυκλικής κάλυψης του Savelsbergh and Goetschalckx (1995) χρησιμοποιείται και περιγράφεται ως εξής:

1. Για κάθε πελάτη i, βρίσκουμε τον μεγαλύτερο κύκλο που προέρχεται από το i, έτσι ώστε η συνολική αναμενόμενη ζήτηση των πελατών που καλύπτεται από τον κύκλο προσεγγίζει την χωρητικότητα του οχήματος Q αλλά δεν το υπερβαίνει.
2. Η θέση των πελατών από την ακτίνα των συνδεδεμένων κύκλων σε αύξουσα σειρά.

3. Επιλέγουμε διαδοχικά έναν πελάτη που δεν καλύπτεται από τους κύκλους των προηγούμενων σημείων ως τα επόμενα σημεία. Η διαδικασία σταματά όταν όλοι οι πελάτες καλύπτονται.

Όταν η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί, οι επιλεγμένοι κόμβοι παρέχουν τα σημεία. Χρησιμοποιώντας αυτά τα σημεία, ο ακόλουθος αλγόριθμος σχηματίζει τα συμπλέγματα.

Δημιουργία συμπλεγμάτων πελατών

0. Επιλέγουμε το σημείο που έχει το μικρότερο κάλυμμα κύκλου και αρχικοποιούμε τον μετρητή συμπλέγματος $k=1$.
1. Κατασκευάζουμε μια διαδρομή που πηγαίνει από την αποθήκη στο σημείο και στη συνέχεια επιστρέφει στην αποθήκη.
2. Για κάθε μη συνδεδεμένο κόμβο, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο προσέγγισης της ενότητας 2.4 για τον υπολογισμό του κόστους εισαγωγής στην καλύτερη τοποθεσία της διαδρομής. Κατατάσσουμε τους κόμβους σε αύξουσα σειρά του κόστους εισαγωγής.
3. Εισάγουμε διαδοχικά τους μη συνδεδεμένους κόμβους με το μικρότερο κόστος εισαγωγής στη διαδρομή. Απορρίπτουμε τους κόμβους που καθιστούν τη διαδρομή ανέφικτη, δηλαδή το αναμενόμενο κόστος υπερβαίνει το επιτρεπόμενο όριο T. Όταν δεν υπάρχει πλέον εισαγωγή, τα σημεία και οι επιλεγμένοι κόμβοι αντιπροσωπεύουν το σύμπλεγμα k και η διαδρομή γίνεται εφικτή.
4. Εάν όλοι οι πελάτες αντιστοιχούν σε κάποιο σύμπλεγμα τότε σταματάμε. Διαφορετικά η αύξηση k κατά 1 μεταξύ των σημείων που δεν αντιστοιχούν σε σύμπλεγμα επιλέγουμε το ένα με τον μικρότερο κύκλο και προχωράμε στο βήμα 1.

Επειδή οι αρχικές διαδρομές κατασκευάζονται διαδοχικά κατά τη διάρκεια του συμπλέγματος, υπάρχει ένα δυναμικό για περαιτέρω βελτίωση. Μια διαδικασία που εξετάζει η επανατοποθέτηση των κόμβων μεταξύ των διαδρομών αναπτύσσεται για το σκοπό αυτό. Περιγράφεται ως εξής.

Δρομολόγηση μέσω συμπλεγμάτων

1. Ξεκινάμε με τα αρχικά συμπλέγματα και τις διαδρομές που κατασκευάστηκαν με τη διαδικασία συμπλέγματος.
2. Για κάθε κόμβο $i \in V$, υπολογίζουμε κατά προσέγγιση το κόστος βελτίωσης της επανατοποθέτησης από την τρέχουσα θέση σε μια διαδρομή προς οποιαδήποτε άλλη θέση, είτε στην ίδια διαδρομή είτε σε άλλες διαδρομές. Η βελτίωση του κόστους είναι η διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης εξοικονόμησης από την αφαίρεση ενός κόμβου από την τρέχουσα θέση και το αναμενόμενο κόστος εισαγωγής να επιστρέφει σε μια νέα θέση.
3. Κάνουμε την κίνηση για τον κόμβο που έχει την μεγαλύτερη βελτίωση.

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 όπου καμία περαιτέρω βελτίωση μπορεί να γίνει. Στο βήμα 3 της παραπάνω διαδικασίας, πριν μετακινήσουμε έναν κόμβο σε καινούρια θέση, η σκοπιμότητα της ένθετης διαδρομής ελέγχεται από τον περιορισμό της διαδρομής (δηλαδή τη συνολική αναμενόμενη απόσταση). Μετακινήσεις που δημιουργούν μη εφικτές διαδρομές εξαλείφονται και ο επόμενος κόμβος με την μεγαλύτερη εξοικονόμηση υπολογίζεται. Αυτός ο έλεγχος στο βήμα 3 είναι απαραίτητος γιατί το κόστος βελτίωσης είναι κατά προσέγγιση.

2.6.3 Βελτίωση της ευρετικής λύσης

Η λύση που προκύπτει από την ευρετική διαδικασία της Ενότητας 2.6.1 ή της Ενότητας 2.6.2 βελτιώνεται επανειλημμένα χρησιμοποιώντας ανταλλαγές μεταξύ διαδρομών και εντός διαδρομών μέχρις ότου καμία περαιτέρω βελτίωση δεν μπορεί να γίνει από τα δυο αυτά βήματα.

Ανταλλαγή μεταξύ διαδρομών

Για κάθε ζεύγος διαδρομών, η διαδικασία ανταλλαγής διαδρομών επιχειρεί να βελτιώσει τα δρομολόγια μετακινώντας ένα τμήμα κόμβων από μια διαδρομή σε άλλη. Για ένα δεδομένο ζεύγος διαδρομών, A και B, η διαδικασία είναι η εξής.

1. Αρχικοποιούμε το $k = 3$.
2. Για όλα τα πιθανά σύνολα k διαδοχικών κόμβων στο A ή B, αξιολογούμαι την (κατά προσέγγιση) βελτίωση εάν μια σειρά από κόμβους μετακινείται από την τρέχουσα διαδρομή σε καλύτερη θέση στην άλλη διαδρομή. Αν καμιά από τις

κινήσεις δεν οδηγεί σε βελτίωση προχωράμε στο βήμα 4. Διαφορετικά μεταβαίνουμε στο βήμα 3.

3. Εξετάζουμε τα σύνολα (κατά προσέγγιση) με θετική βελτίωση κατά φθίνουσα σειρά και υπολογίζουμε το ακριβές κόστος των νέων διαδρομών που χρησιμοποιούν την δυναμική αναδρομή του προγραμματισμού. Κάνουμε την πρώτη ανταλλαγή που κρατάει τις διαδρομές εφικτές (δηλαδή το αναμενόμενο κόστος δεν υπερβαίνει το T) και έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση. Πηγαίνουμε πίσω στο βήμα 2. Εάν καμία κίνηση δεν μπορεί να γίνει, πηγαίνουμε στην επόμενη κίνηση.

4. Μειώνουμε το k κατά 1. Αν το k είναι 0 σταματάμε. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Ανταλλαγή εντός διαδρομής

Η ανταλλαγή διαδρομών ακολουθείται από βελτίωση εντός διαδρομής. Η εντός διαδρομή χρησιμοποιεί την Or-opt διαδικασία για περαιτέρω βελτίωση κάθε διαδρομής στην περίπτωση που η ανταλλαγή διαδρομών έχει αλλάξει ορισμένες διαδρομές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στοχαστική δρομολόγηση οχημάτων με ενιαίο φορτίο

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης δρομολόγησης ενός οχήματος με ενιαίο φορτίο που παραδίδει K διαφορετικά προϊόντα σε N πελάτες οι οποίοι εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις των πελατών για κάθε προϊόν είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και η συνολική ζήτηση του κάθε πελάτη για όλα τα προϊόντα δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του κάθε πελάτη είναι γνωστή. Θεωρούμε ότι όλα τα προϊόντα αποθηκεύονται στο όχημα. Αναζητούμε την πολιτική που εξυπηρετεί όλους τους πελάτες με το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος. Θα εφαρμόσουμε την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, θα μελετήσουμε το πρόβλημα του άπειρου χρονικού ορίζοντα όπου η εξυπηρέτηση των πελατών δεν έχει ολοκληρωθεί όταν εξυπηρετείται ο τελευταίος πελάτης. Η βέλτιστη πολιτική για την ελαχιστοποίηση του αποπληθωρισμένου κόστους και η βέλτιστη πολιτική για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους έχουν την ίδια δομή με τη βέλτιστη πολιτική του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα.

3.2 Βέλτιστη δρομολόγηση οχήματος με ενιαίο φορτίο

Το VRP είναι ένα στοχαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο ακέραιου προγραμματισμού. Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα στους τομείς των μεταφορών, της διανομής προϊόντων και της εφοδιαστικής αλυσίδας. Μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του κλασσικού προβλήματος του περιοδεύοντος ταξιδιώτη (TSP) που περιλαμβάνει την εύρεση της βέλτιστης διαδρομής για την επίσκεψη σε n πελάτες και την επιστροφή στην αποθήκη. Οι Dantzig and Ramser (1959) εισήγαγαν μια πρώτη έκδοση του VRP και πρότειναν μια μορφοποίηση του προβλήματος και μια αλγοριθμική προσέγγιση για τη λύση του. Οι συγγραφείς αυτοί περιέγραψαν, ως πρακτική εφαρμογή, το πρόβλημα της παράδοσης βενζίνης σε πρατήριο καυσίμων. Οι Clarke and Wright (1964) βελτίωσαν την προσέγγιση των Dantzig and Ramser με την ανάπτυξη μιας αποτελεσματικής ευρετικής μεθόδου. Τα τελευταία 40 χρόνια, ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών μοντέλων εισήχθησαν για διάφορες εκδόσεις του VRP και πολλοί ακριβείς και ευρετικοί αλγόριθμοι εφαρμόστηκαν για την εύρεση της βέλτιστης λύσης του. Οι έρευνες που κάλυπταν τα σημαντικότερα αποτελέσματα των VRP παρουσιάστηκαν από τους Laporte (1992), (2009), Toth and Vigo (2002), Simchi-Levi, Chen and Bramel (2005), Cordeau et al. (2007) and Liong (2008).

Το VRP αναφέρεται σε ένα στόλο οχημάτων που προέρχονται από μια ή περισσότερες αποθήκες και παραδίδουν ή συλλέγουν προϊόντα από N γεωγραφικά διάσπαρτους πελάτες. Κάθε όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη, επισκέπτεται ένα σύνολο πελατών, παραδίδει νέα προϊόντα ή συλλέγει προϊόντα που έχουν λήξει από κάθε πελάτη και έπειτα επιστρέφει στην αποθήκη. Αν η ζήτηση ενός πελάτη για νέα προϊόντα υπερβαίνει το ποσό των νέων προϊόντων που μεταφέρει το όχημα ή η ποσότητα των προϊόντων που έχει λήξει υπερβαίνει τον κενό χώρο του οχήματος, τότε το όχημα πρέπει να διακόψει την διαδρομή του και να επιστρέψει στην αποθήκη για εφοδιασμό ή να εκφορτώσει τα προϊόντα που έχουν λήξει. Η δομή του κόστους περιλαμβάνει τα έξοδα ταξιδίου από τον έναν πελάτη στον άλλον και τα έξοδα ταξιδίου από έναν πελάτη πίσω στην αποθήκη για ανεφοδιασμό ή εκφόρτωση. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους ταξιδίου για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψη άλλα κριτήρια βελτιστοποίησης όπως η ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών και την ελαχιστοποίηση των κυρώσεων που συνδέονται με την μερική εξυπηρέτηση των πελατών. Επιπλέον σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να εξεταστούν οι στοχαστικές εκδοχές του VRP, δηλαδή προβλήματα για τα οποία υπάρχει μερική γνώση του αριθμού των πελατών ή των απαιτήσεων των πελατών ή το συνολικό κόστος που συνδέεται με μία ολοκληρωμένη διαδρομή του οχήματος. Δύο ενδιαφέρουσες παραλλαγές του VRP που έχουν μελετηθεί είναι

- **i.** VRP με χρονικά παράθυρα στα οποία παρέχονται οι θέσεις παράδοσης
- **ii.** VRP (με ή χωρίς χρονικά παράθυρα) στα οποία τα οχήματα έχουν περιορισμένη χωρητικότητα.

Τυπικές εφαρμογές του VRP είναι η παράδοση αγαθών σε σούπερ μάρκετ, η συλλογή στερεών αποβλήτων, η συλλογή μετρητών από υποκαταστήματα τραπεζών, ο καθορισμός δρόμων, η δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων, η μεταφορά ατόμων με ειδικές ανάγκες, η δρομολόγηση των πελατών και η δρομολόγηση των μονάδων συντήρησης. Τα VRP είναι NP προβλήματα και πολλές ευρετικές μέθοδοι έχουν προταθεί για την αναζήτηση βέλτιστων ή σχεδόν-βέλτιστων λύσεων.

Οι Tatarakis and Minis (2009) εισήγαγαν μια απλή και ενδιαφέρουσα εκδοχή για το VRP. Σε αυτό το πρόβλημα υποθέτουμε ότι ένα όχημα με ενιαίο φορτίο ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και παραδίδει K διαφορετικά προϊόντα σε N πελάτες, σύμφωνα με μια προκαθορισμένη ακολουθία πελατών $1 \to 2 \to \ldots \to N$. Το όχημα μπορεί να μεταφέρει ποσότητα προϊόντος $i \in \{1,\ldots,K\}$ με την προϋπόθεση ότι δεν θα υπερβαίνει τη συνολική χωρητικότητα του οχήματος. Όλες οι ποσότητες προϊόντων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την ίδια μονάδα μέτρησης, παραδείγματος χάρη m^3 ή kg. Οι απαιτήσεις των πελατών για κάθε προϊόν είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και η συνολική ζήτηση του κάθε πελάτη δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Το όχημα επιτρέπεται να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό των αποθεμάτων. Θεωρούμε ότι τα έξοδα ταξιδίου μεταξύ δυο διαδοχικών πελατών και μεταξύ του πελάτη με την αποθήκη είναι γνωστά. Ο στόχος είναι να βρεθεί η πολιτική που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Οι Tatarakis and Minis (2009) παρουσίασαν μια διαμόρφωση του προβλήματος με δυναμικό προγραμματισμό για αυτό το πρόβλημα για την περίπτωση στην οποία $K = 2$ και έλαβαν το ακόλουθο δομικό αποτέλεσμα: αν z_i, $i = 1,2$ είναι το φορτίο του προϊόντος i που μεταφέρθηκε από το όχημα μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης του πελάτη $j \in \{1,\ldots,N-1\}$, υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός $s_j(z_1) \geq 0$ έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση είναι να προχωρήσουμε στον επόμενο πελάτη $j+1$ αν $z_2 > s_j(z_1)$. Αν $z_2 \leq s_j(z_1)$, η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψουμε στην αποθήκη για την φόρτωση $\theta \in \{0,1,\ldots,Q\}$ μονάδων του προϊόντος 1 και $Q-\theta$ μονάδων του προϊόντος 2 και έπειτα μεταβαίνουμε στον πελάτη $j+1$. Εάν η δεύτερη απόφαση είναι επιλεγμένη, είναι πιθανό ότι μια δεύτερη επιστροφή στην αποθήκη είναι απαραίτητη, εάν η ζήτηση του πελάτη $j+1$ για το προϊόν 1 ή 2 είναι μεγαλύτερο από θ ή $Q-\theta$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε προβλήματα στα οποία το όχημα επισκέπτεται για πρώτη φορά τον κάθε πελάτη και έχει ικανοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερο τη ζήτησή του. Αυτό επιτρέπει:

- **i.** να αποδείξουμε με απλούστερο τρόπο ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,N-1\}$ ένα παρόμοιο δομικό αποτέλεσμα όπως αυτό που παρουσιάστηκε από τους Tatarakis and Minis (2009) για κάθε θετικό ακέραιο K
- **ii.** να αποδείξουμε για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,N-1\}$ ότι το βέλτιστο για το όχημα είναι να επιστρέψει δυο φόρες στην αποθήκη.

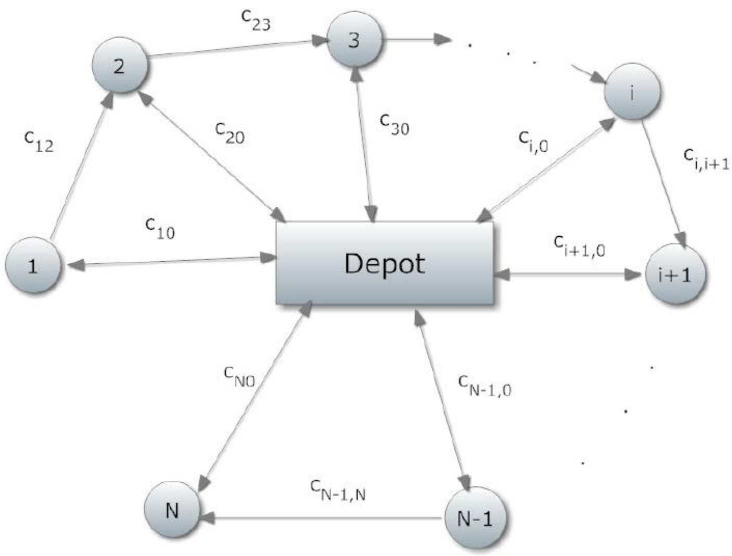
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα σε άπειρο χρονικό ορίζοντα στο οποίο η εξυπηρέτηση των πελατών δεν σταματάει, όταν η ζήτηση του τελευταίου πελάτη N ικανοποιηθεί, αλλά συνεχίζει περιοδικά με την ίδια σειρά πελατών. Θεωρούμε ότι, σε διαφορετικές περιόδους, οι απαιτήσεις των πελατών για κάθε προϊόν κατανέμονται ταυτοτικά. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων αποδεικνύουμε ότι η πολιτική που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος και η πολιτική που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου έχει την ίδια δομή με τη βέλτιστη πολιτική στο αρχικό πρόβλημα του πεπερασμένου ορίζοντα.

Όπως ανέφεραν οι Tatarakis and Minis (2009), μια πρακτική εφαρμογή των προβλημάτων θα μπορούσε να είναι οι λεγόμενες ex-van πωλήσεις όπου ο οδηγός του οχήματος ενεργεί ως πωλητής και επισκέπτεται τους πελάτες του (καταστήματα λιανικής πώλησης, σούπερ μάρκετ, περίπτερα κ.τ.λ.) σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Οι απαιτήσεις των πελατών για τα προϊόντα δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων αλλά αποκαλύπτονται κατά την άφιξη του οχήματος σε κάθε πελάτη. Εάν η ζήτηση ενός πελάτη για ένα προϊόν υπερβαίνει την ποσότητα που μεταφέρεται και φορτώνεται στο όχημα, ο οδηγός θα πρέπει να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό.

Το πρόβλημα που μελέτησαν οι Tatarakis and Minis (2009) είναι γενίκευση του προβλήματος που εισήγαγαν οι Yang, Mahtur and Ballou (2000), όπου το όχημα παραδίδει στους πελάτες μόνο ένα προϊόν, δηλαδή $K=1$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,N-1\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός s_j έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση μετά την εξυπηρέτηση του πελάτη j, είναι να συνεχίσει στον πελάτη $j+1$ αν η υπόλοιπη ποσότητα του οχήματος είναι μεγαλύτερη ή ίση με το s_j ή να επιστρέψει στην αποθήκη αν είναι μικρότερη από s_j. Οι Kyriakidis and Dimitrakos (2008) απέδειξαν ένα ανάλογο αποτέλεσμα εάν οι απαιτήσεις των πελατών είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό κρίσιμων αριθμών s_j, $j=1,\ldots,N-1$. Οι Tatarakis and Minis (2009) μελέτησαν επίσης την περίπτωση πολλαπλών προϊόντων παράδοσης όταν η ζήτηση του κάθε πελάτη για το προϊόν $i \in \{1,\ldots,K\}$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή και κάθε τύπος προϊόντος αποθηκεύεται σε ξεχωριστό τμήμα του οχήματος. Επιπλέον, έδειξαν ότι η βέλτιστη πολιτική έχει συγκεκριμένη δομή για $K=2$. Οι Pandelis, Kyriakidis and Dimitrakos (2012) απέδειξαν τη δομή της βέλτιστης πολιτικής για αυτό το πρόβλημα για κάθε θετικό K. Οι Tsirimpas et al. (2008) μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα όταν η ζήτηση του πελάτη για το προϊόν $i \in \{1,\ldots,K\}$ δεν είναι τυχαία μεταβλητή αλλά ένας σταθερός αριθμός. Επίσης υπολόγισαν ότι το όχημα επισκέπτεται κάθε πελάτη μόνο μια φορά και σχεδίασαν για τρεις εκδοχές του προβλήματος (χωρισμένο φορτίο, ενοποιημένο φορτίο, παραλαβή και παράδοση) κατάλληλους αλγορίθμους του δυναμικού προγραμματισμού για τον καθορισμό της βέλτιστης πολιτικής. Τέλος οι Secomandi and Margot (2009) ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα στο οποίο ένα μόνο όχημα παραδίδει ένα προϊόν σε N πελάτες, οι απαιτήσεις των οποίων είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και οι πελάτες δεν εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια συγκεκριμένη σειρά.

3.3 Το πρόβλημα πεπερασμένου ορίζοντα

Θεωρούμε ένα σύνολο κόμβων $V = \{0,1,\ldots,N\}$ όπου ο κόμβος 0 δηλώνει την αποθήκη και οι κόμβοι $1,\ldots,N$ αντιστοιχούν στους πελάτες. Υπάρχουν K διαφορετικά προϊόντα για να παραδοθούν στους πελάτες και όλα τα προϊόντα έχουν το ίδιο μέγεθος. Θεωρούμε ότι η αποθήκη έχει αρκετή ποσότητα σε προϊόντα για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις όλων των πελατών. Οι απαιτήσεις εξυπηρετούνται με σειρά $1,2,\ldots,N$ από ένα όχημα, το οποίο μπορεί να μεταφέρει οποιαδήποτε ποσότητα προϊόντος $i \in \{1,\ldots,K\}$ με την προϋπόθεση ότι δεν ξεπερνά τη συνολική χωρητικότητα Q. Το όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από την αποθήκη με συνολική ποσότητα προϊόντων ίση με Q και αφού εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες επιστρέφει στην αποθήκη.



Σχήμα 4: Το οδικό δίκτυο για το πρόβλημα πεπερασμένου ορίζοντα

Η ζήτηση του πελάτη j, $j=1,\ldots,N$ για το προϊόν i, $i=1,\ldots,K$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ξ_i^j. Υποθέτουμε ότι η κατανομή πιθανότητας του κάθε πελάτη είναι γνωστή. Θεωρούμε $c_{j,j+1}$, $j=1,\ldots,N-1$, το κόστος ταξιδίου μεταξύ των πελατών j και $j+1$ και c_{j0}, c_{0j}, $j=1,\ldots,N$ το κόστος ταξιδίου μεταξύ του πελάτη j και της αποθήκης και το κόστος μεταξύ της αποθήκης και του πελάτη j αντίστοιχα. Αυτό το κόστος μπορεί να είναι το κόστος της βενζίνης που πρέπει να καλύψει το όχημα για τις αποστάσεις μεταξύ των πελατών ή τις αποστάσεις μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Θεωρούμε ότι αυτά τα κόστη είναι συμμετρικά και ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή

$$c_{i0}=c_{0i}\ ,\ i=1,\ldots,N$$

και

$$c_{i,i+1}\le c_{i0}+c_{0,i+1}\ ,\ i=1,\ldots,N-1\,.$$

Οι απαιτήσεις του κάθε πελάτη γίνονται γνωστές κατά την άφιξη του οχήματος και υποθέτουμε ότι η συνολική ζήτηση του κάθε πελάτη δεν μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητα του οχήματος, δηλαδή

$$\max_{j=1,2,\ldots,N}\sum_{i=1}^{K}\xi_i^j\le Q\,.$$

Όταν το όχημα επισκέπτεται τον πελάτη j, για πρώτη φορά, ικανοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερη ζήτηση. Αν ένα μέρος της ζήτησης δεν είναι ικανοποιείται, το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, εφοδιάζεται και στη συνέχεια επιστρέφει για να ικανοποιήσει τη ζήτηση. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση όταν το όχημα επιστρέφει στον πελάτη, δηλαδή το ξ_i^j, $1\le i\le K$ παραμένει αμετάβλητο.

Έστω z_i, $i=1,2,\ldots,K$ το φορτίο του προϊόντος που μεταφέρει το όχημα στον πελάτη και η αρνητική τιμή για το z_i υποδηλώνει τη μη ικανοποιημένη ζήτηση για το προϊόν i. Αυτές οι ποσότητες ανήκουν στο σύνολο:

$$S=\left\{(z_1,\ldots,z_K):\left|\sum_{i\in J}z_i\right|\le Q\,,\ \forall J\subseteq\{1,\ldots,K\}\right\}.$$

Θέτουμε $\zeta=\sum_{i=1}^{K}z_i^-$ με $z_i^-=\min\{0,z_i\}$. Όταν $\zeta=0$ (η ζήτηση ικανοποιείται πλήρως), το όχημα προχωρά απευθείας στον επόμενο πελάτη ή πηγαίνει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό με φορτίο θ_i, $i=1,2,\ldots,K$ των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ και στη συνέχεια επισκέπτεται τον επόμενο πελάτη. Υποθέτουμε ότι $\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q$, το όχημα αφήνει κάποιο κενό χώρο όταν πηγαίνει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Όταν $\zeta < 0$, το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη και εφοδιάζεται με την οφειλόμενη ποσότητα $-\zeta$. Έπειτα έχει δύο επιλογές:

- **i.** γεμίζει τον υπόλοιπο χώρο με τις ποσότητες θ_i των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ όπου $\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q+\zeta$, επιστρέφει στον πελάτη, ικανοποιεί τη ζήτησή του και έπειτα προχωράει στον επόμενο πελάτη,
- **ii.** επιστρέφει στον πελάτη, ικανοποιεί τη ζήτησή του, επιστρέφει στην αποθήκη όπου εφοδιάζεται με φορτία θ_i των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ και έπειτα προχωράει στον επόμενο πελάτη.

Στόχος είναι να καθορίσουμε τη δρομολόγηση και τον ανεφοδιασμό του οχήματος που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια μίας ολοκληρωμένης διαδρομής του οχήματος. Συγκεκριμένα, αν μετά την πρώτη επίσκεψη στο χώρο του πελάτη $\zeta = 0$, πρέπει να βρούμε αν είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη ή να μεταβεί στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Αν $\zeta < 0$, πρέπει να βρούμε αν είναι βέλτιστο για το όχημα να πραγματοποιήσει μια ή δυο διαδρομές προς την αποθήκη. Και στις δυο περιπτώσεις πρέπει να καθορίσουμε τις βέλτιστες ποσότητες των προϊόντων που είναι φορτωμένα στο όχημα όταν πηγαίνει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Ορίζουμε τα διανύσματα $\bar{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_K]$, $\bar{\xi}^j = [\xi_1^j, \xi_2^j, \ldots, \xi_K^j]$, $\bar{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K]$ και αναπαριστούμε με $f_j(\bar{z})$ το ελάχιστο αναμενόμενο μελλοντικό κόστος όταν το φορτίο του προϊόντος i που μεταφέρεται από το όχημα στον πελάτη j είναι ίσο με z_i. Τότε μια βέλτιστη δρομολόγηση του οχήματος μπορεί να προσδιοριστεί από τις ακόλουθες εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού. Για $j = 1,\ldots,N-1$ έχουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Αν $z_1, z_2, \ldots z_K \geq 0$ τότε

$$f_j(\bar{z}) = \min\{H_j(\bar{z}), A_j\}. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Περίπτωση 2: Αν $\sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0$ τότε

$$f_j(\bar{z}) = 2c_{j0} + \min\left\{ \tilde{H}_j\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^- \right), A_j \right\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

όπου

$$H_j(\bar{z}) = c_{j,j+1} + Ef_{j+1}\left(\bar{z} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right) \quad , \quad z_1, z_2, \ldots, z_K \geq 0 \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$\tilde{H}_j(\zeta) = c_{j,j+1} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q+\zeta} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right) \quad , \quad \zeta < 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$A_j = c_{j0} + c_{j+1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right). \qquad \textbf{(3.5)}$$

Η οριακή συνθήκη είναι

$$f_n(\bar{z}) = c_{n0} + 2c_{n0}1\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0 \right). \qquad \textbf{(3.6)}$$

Τέλος, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος είναι

$$f_0 = c_{10} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Ef_1\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{1}\right). \qquad \textbf{(3.7)}$$

Στις Εξισώσεις **(3.3)**, **(3.4)**, **(3.5)** και **(3.7)** λαμβάνονται οι αναμενόμενες τιμές σε σχέση με τα τυχαία διανύσματα $\bar{\xi}^{\,j}$, $j = 1, \ldots, N$. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες στην Εξίσωση **(3.1)** αντιστοιχεί στην ενέργεια να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια να μεταβεί στην αποθήκη για ανεφοδιασμό πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες στην Εξίσωση **(3.2)** αντιστοιχεί στην ενέργεια επιστροφής στην αποθήκη μια φορά πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην ενέργεια να επιστρέψει στην αποθήκη δυο φορές πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει τη βέλτιστη δρομολόγηση οχημάτων μετά την επίσκεψη του πελάτη $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ για πρώτη φορά.

Θεώρημα 3.1

i. Για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_{K-1} \geq 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός $s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}) \in \{0,1,\ldots,Q+1-z_1-\ldots-z_{K-1}\}$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη αν και μόνο αν $z_K \geq s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1})$.

ii. $s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1})$ δεν αυξάνεται (φθίνει) ως προς όλα τα ορίσματά του.

iii. Υπάρχει $s_j \leq 0$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να κάνει δυο διαδρομές προς την αποθήκη αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{K} z_i^- < s_j$.

Απόδειξη.

Για το **(i)** και **(ii)** αρκεί να δείξουμε ότι το $H_j(\bar{z})$ είναι μη-αύξουσα συνάρτηση και για το **(iii)** αρκεί να δείξουμε ότι $\tilde{H}_j(\zeta)$ είναι μη-αύξουσα για $\zeta < 0$. Επίσης θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το $f_j(\bar{z})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο j και καθορίζεται από το $f_N(\bar{z})$ που είναι μη-αύξουσα συνάρτηση (Εξίσωση **(3.6)**). Τότε υποθέτουμε ότι το $f_{j+1}(\bar{z})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και θα δείξουμε ότι $H_j(\bar{z})$, $\tilde{H}_j(\zeta)$ και $f_j(\bar{z})$ είναι μη-αύξουσες. Η συνάρτηση $H_j(\bar{z})$ είναι φθίνουσα από την υπόθεση επαγωγής και από την Εξίσωση **(3.3).** Η συνάρτηση $\tilde{H}_j(\zeta)$ είναι μη-αύξουσα από την Εξίσωση **(3.4)** και το γεγονός ότι $\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right)$ είναι μη αυξανόμενο στο q. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε ότι τα $\bar{\theta}_{(K-1)}$ και $\bar{\xi}^{\,j}{}_{(K-1)}$ είναι διανύσματα που αποτελούνται από τα πρώτα στοιχεία $K-1$ των $\bar{\theta}$ και $\bar{\xi}^{\,j}$ και για $0 \leq q' < q$ έχουμε

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right)=$$

$$\min_{\bar{\theta}_{(K-1)}:\sum_{i=1}^{K-1}\theta_i\leq q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}_{(K-1)}-\bar{\xi}^{\,j+1}_{(K-1)}, q-\sum_{i=1}^{K-1}\theta_i-\xi_K^{j+1}\right)\leq$$

$$\min_{\bar{\theta}_{(K-1)}:\sum_{i=1}^{K-1}\theta_i\leq q'} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}_{(K-1)}-\bar{\xi}^{\,j+1}_{(K-1)}, q-\sum_{i=1}^{K-1}\theta_i-\xi_K^{j+1}\right)\leq$$

$$\min_{\bar{\theta}_{(K-1)}:\sum_{i=1}^{K-1}\theta_i \le q'} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}_{(K-1)} - \bar{\xi}_{(K-1)}^{j+1}, q' - \sum_{i=1}^{K-1}\theta_i - \xi_K^{j+1}\right) \le$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = q'} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}\right) \qquad \textbf{(3.8)}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση επαγωγής. Απομένει να δείξουμε ότι το $f_j(\bar{z})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε την μονοτονία, για το z_K. Για $\sum_{i=1}^{K-1} z_i^- < 0$ το αποτέλεσμα ακολουθεί άμεσα την μονοτονία του $\tilde{H}_j(\zeta)$ και την Εξίσωση **(3.2).** Ας σκεφτούμε τώρα το $z_1, z_2, \ldots, z_{K-1} \ge 0$. Για $0 \le z_K' < z_K$ και $z_K' < z_K < 0$ παίρνουμε $f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, z_K\right) \le f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, z_K'\right)$ από την μονοτονία των $H_j(\bar{z})$ και $\tilde{H}_j(\zeta)$ αντίστοιχα (Εξισώσεις **(3.1)** και **(3.2)**). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι:

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, 0\right) \le f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, -1\right).$$

Από την Εξίσωση **(3.1)** και την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, 0\right) \le A_j = c_{j0} + c_{j+1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}\right) \le$$

$$2c_{j0} + c_{j,j+1} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}\right) = B_j. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Από τις Εξισώσεις **(3.4)**, **(3.8)** και **(3.9)** παίρνουμε

$$B_j - 2c_{j0} - \tilde{H}_j(-1) = \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}\right) - \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q-1} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{j+1}\right) \le 0. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Από την Εξίσωση **(3.2)** έχουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, -1\right) = 2c_{j0} + \min\left\{\tilde{H}_j(-1), A_j\right\}. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Αν $A_j \le \tilde{H}_j(-1)$, από τις Εξισώσεις **(3.9)** και **(3.11)** παίρνουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},0\right) \le A_j < 2c_{j0} + A_j = f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},-1\right).$$

Αν $A_j > \widetilde{H}_j(-1)$ από τις Εξισώσεις **(3.9)**, **(3.10)** και **(3.11)** έχουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},0\right) \le B_j \le 2c_{j0} + \widetilde{H}_j(-1) = f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},-1\right).$$

που συμπληρώνει την απόδειξη.

Παρατήρηση 3.1

Αν $s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}) = Q + 1 - z_1 - \ldots - z_{K-1}$ είναι βέλτιστο για το όχημα να επιστρέψει στην αποθήκη για όλα τα $z_K \in \{0, \ldots, Q - z_1 - \ldots - z_{K-1}\}$.

Παρατήρηση 3.2

Οι Tatarakis and Minis (2009) επέλεξαν ως απόφαση για αυτό το πρόβλημα το όχημα να εξυπηρετήσει τον κάθε πελάτη και παρουσιάζεται στο **(i)** του παραπάνω θεωρήματος για $K = 2$. Η απόδειξη περιλαμβάνεται στον Tatarakis (2007) και περιέχει περίπλοκες αλγεβρικές εκφράσεις που δεν μπορούν να επεκταθούν για $K > 2$.

Παρατήρηση 3.3

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του δυναμικού προγραμματισμού βασισμένο στις Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)** είναι $O(NQ^K)$ για οποιαδήποτε τιμή $K \ge 1$.

Παρατήρηση 3.4

Θεωρούμε ένα γενικό πρόβλημα κατά το οποίο η συνολική ζήτηση του κάθε πελάτη για όλα τα προϊόντα μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος, δηλαδή είναι πιθανό ότι $\sum_{i=1}^{K} \xi_i^j$ είναι μεγαλύτερο από το Q για $j \in \{1, \ldots, N\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη ισχύει ότι $\zeta < -Q$. Εάν η ανισότητα αυτή παραμείνει, το όχημα πρέπει να μεταβεί στην αποθήκη για ανεφοδιασμό της οφειλόμενης ποσότητας περισσότερες από μια φορές. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση για προϊόντα στην 2η, 3η,… επίσκεψη στον πελάτη j, δηλαδή το ξ_i^j, $1 \le i \le K$ παραμένει αμετάβλητο. Θέτουμε $\zeta' < 0$ να είναι το οφειλόμενο ποσό πριν από την τελευταία διαδρομή προς την αποθήκη. Οι πιθανές αποφάσεις είναι ίδιες όπως στο αρχικό πρόβλημα. Οι Εξισώσεις **(3.1)**, **(3.3)**, **(3.4)** και **(3.5)** παραμένουν ίδιες. Η Εξίσωση **(3.2)** γίνεται

$$f_j(\bar{z}) = 2c_{j0}\left[-\zeta / Q\right] + \min\left\{\widetilde{H}_j(\zeta'), A_j\right\}$$

όπου $\left[-\zeta / Q\right]$ είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που δεν είναι μικρότερος από το $-\zeta / Q$. Η Εξίσωση **(3.6)** γίνεται

$$f_N(\bar{z}) = c_{N0} + 2c_{N0}\left[-\zeta / Q\right].$$

Το Θεώρημα 3.1 ισχύει στην περίπτωση αυτή. Η απόδειξη του είναι παρόμοια αλλά ελαφρώς πιο περίπλοκη από την απόδειξη που παρουσιάσαμε στο αρχικό πρόβλημα. Επισημαίνουμε ότι η προσέγγιση του δυναμικού προγραμματισμού μπορεί να εφαρμοστεί μόνο εάν δεν υπάρχει επιπλέον ζήτηση για προϊόντα στην $2^{η}, 3^{η}, \ldots$ επίσκεψη στον πελάτη $j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Ωστόσο φαίνεται ότι αυτή η υπόθεση είναι αρκετά περιοριστική σε πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Παρατήρηση 3.5

Εξετάζουμε μια άλλη τροποποίηση του προβλήματος στο οποίο η ζήτηση του πελάτη j όπου $j = 1, \ldots, N$ για το προϊόν i, $i = 1, \ldots, K$ είναι μια συνεχής μεταβλητή ξ_i^j και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $\left(\xi_1^j, \ldots, \xi_K^j\right)$, $j = 1, \ldots, N$ είναι γνωστή. Οι Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)** παραμένουν έγκυρες σε αυτήν την περίπτωση και το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1 μπορεί να αποδειχθεί με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση διακριτών απαιτήσεων. Ωστόσο, η υπόθεση ότι όλα τα προϊόντα αποθηκεύονται στο όχημα φαίνεται να είναι αμφισβητήσιμη όταν οι απαιτήσεις των προϊόντων είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Θα ήταν πιο λογικό να υποθέσουμε ότι το όχημα χωρίζεται σε K διαμερίσματα και κάθε προϊόν αποθηκεύεται σε ειδικό τμήμα. Το πρόβλημα με χωρισμένο φορτίο και με συνεχείς στοχαστικές απαιτήσεις έχουν μελετηθεί από τον Pandelis et al. (2012). Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα που ταιριάζει σε κάποιο βαθμό στο μοντέλο με ενιαίο φορτίο και με συνεχείς απαιτήσεις θα μπορούσε να είναι η δρομολόγηση ενός οχήματος που παραδίδει δομικά υλικά όπως ασβέστη, άμμο και βότσαλα που αποθηκεύονται μαζί στο μοναδικό διαμέρισμα του οχήματος αλλά δεν είναι ανάμεικτα.

Θέτουμε S^+ το σύνολο των $(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1})$ έτσι ώστε $z_1, z_2, \ldots, z_{K-1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{K-1} z_i \leq Q$ και M να υποδηλώνει το απόλυτο αριθμητικό. Με τα στοιχεία του S^+ που παραγγέλνονται κατά κάποιο αυθαίρετο τρόπο, θέτουμε z_m, $m = 1, \ldots, M$ που υποδηλώνει το m- οστό στοιχείο. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα 3.1, η βέλτιστη πολιτική, δηλαδή οι κρίσιμοι αριθμοί s_j και $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1})$, $z_1, \ldots, z_{K-1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{K-1} z_i \leq Q$ για κάθε πελάτη $j \in \{1, \ldots, N-1\}$, μπορεί να βρεθεί από τον ακόλουθο αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού.

Αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των κρίσιμων αριθμών s_j και $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1})$, $z_1, \ldots, z_{K-1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{K-1} z_i \leq Q$ για κάθε πελάτη $j = 1, \ldots, N-1$

Βήμα 0: Ορίζουμε $f_N(z_1, z_2, \ldots, z_K) = c_{N0} + 2c_{N0} 1\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0\right)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_K) \in S$ και $j = N-1$.

Βήμα 1: Ορίζουμε $\zeta = -1$.

Βήμα 2: **(**Προσδιορισμός κρίσιμου αριθμού s_j)

Αν $\widetilde{H}_j(\zeta) > A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_j = \zeta + 1$

2) Για $(z_1, z_2, \ldots, z_K)$ έτσι ώστε $s_j \leq \sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0$ ορίζουμε

$$f_j(\bar{z}) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^-\right).$$

3) Για $(z_1, z_2, \ldots, z_K)$ έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{K} z_i^- < s_j$, ορίζουμε $f_j(\bar{z}) = 2c_{j0} + A_j$.

4) Πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Διαφορετικά ορίζουμε $\zeta = \zeta - 1$.

Εάν $\zeta = -Q - 1$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_j = -Q$.

2) Για $(z_1, z_2, \ldots, z_K)$ έτσι ώστε $s_j \le \sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0$ ορίζουμε

$$f_j(\bar{z}) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^-\right).$$

3) Πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 3: Ορίζουμε $m = 1$.

Βήμα 4: Ορίζουμε $(z_1, z_2, \ldots, z_K) = Z_m$ και $z_K = Q - \sum_{i=1}^{K-1} z_i$.

Βήμα 5: (Προσδιορισμός των $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1})$)

Αν $H_j(z_1, z_2, \ldots, z_K) > A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1}) = z_K + 1$.

2) Ορίζουμε $f_j(\bar{z}) = A_j$ για $z_K \in \{0, \ldots, s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}) - 1\}$.

3) Ορίζουμε $f_j(\bar{z}) = H_j(\bar{z})$ για $z_K \in \left\{ s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}), \ldots, Q - \sum_{i=1}^{K-1} z_i \right\}$.

4) Ορίζουμε $m = m + 1$. Αν $m \le M$ πηγαίνουμε στο βήμα 4. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6.

Διαφορετικά, ορίζουμε $z_K = z_K - 1$.

Αν $z_K = -1$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1}) = 0$.

2) Ορίζουμε $f_j(\bar{z}) = H_j(\bar{z})$ για $z_K \in \left\{0, \ldots, Q - \sum_{i=1}^{K-1} z_i \right\}$.

3) Ορίζουμε $m = m + 1$. Αν $m \le M$ πηγαίνουμε στο βήμα 4. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6.

Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 5.

Βήμα 6: Ορίζουμε $j = j - 1$. Αν $j \ge 1$, πηγαίνουμε στο βήμα 1. Διαφορετικά σταματάμε.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι ταχύτερος από τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που βασίζεται στις Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)** δεδομένου ότι δεν υπολογίζει για το $j = 1, \ldots, N-1$ τις ποσότητες $\widetilde{H}_j(\zeta)$ για

$\zeta = z_1^- + z_2^- + \ldots + z_K^- < s_j - 1$ και τις ποσότητες $H_j(z_1, z_2, \ldots, z_K)$, $z_1, \ldots, z_{K-1} \geq 0$ έτσι ώστε $0 \leq \sum_{i=1}^{K-1} z_i \leq Q$ για $z_K \in \{0, \ldots, s_j(z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}) - 1\}$. Επισημαίνουμε αυτό το υπολογιστικό φορτίο του παραπάνω αλγορίθμου το οποίο αυξάνεται ταχέως καθώς το K αυξάνεται ή το Q αυξάνεται από τον κρίσιμο αριθμό $s_j(z_1, \ldots, z_{K-1})$ για όλα τα $(z_1, \ldots, z_{K-1})$ στο σύνολο S^+ του οποίου η αξία είναι ίση με το $\prod_{i=1}^{K-1} (Q+i)/(K-1)!$. Ως απεικόνιση παρουσιάζουμε τα δυο ακόλουθα παραδείγματα για το $K = 2$.

Παράδειγμα 3.1

Ας υποθέσουμε ότι $N = 10$, $Q = 6$, $K = 2$. Παρακάτω δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $C = (c_{ij})$, $0 \leq i, j \leq 10$ του οποίου τα μηδενικά στοιχεία είναι το κόστος μετακίνησης $c_{j,j+1}$ μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 9\}$ και του πελάτη $j+1$ και του κόστους ταξιδίου c_{j0} μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 10\}$ και της αποθήκης. Παρατηρούμε ότι αυτά τα έξοδα ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 7 & 5 & 4 & 8 & 6 & 5 & 8 \\ 6 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 10\}$ για τα προϊόντα 1 και 2 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την διωνυμική κατανομή $B(3, 0.4)$, δηλαδή

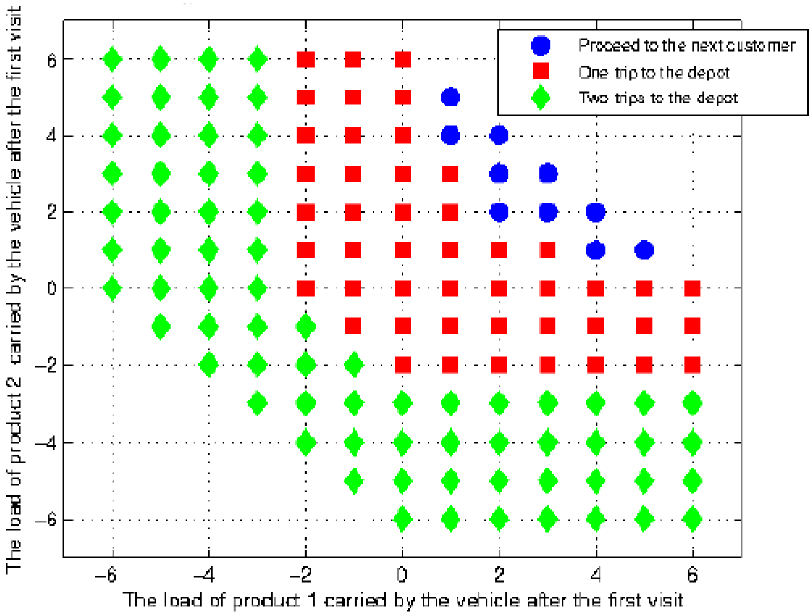
$$\Pr(\xi_1^j = x) = \Pr(\xi_2^j = x) = \binom{3}{x} 0.4^x 0.6^{3-x}, \; x = 0, \ldots, 3.$$

Αυτή η υπόθεση υποδηλώνει ότι $0 \le \xi_1^j + \xi_2^j \le 6$, $j \in \{1,\ldots,10\}$ όπως απαιτείται. Για κάθε πελάτη $j = 1,\ldots,9$ παρουσιάζουμε σε κάθε κελί του πίνακα 1 τους κρίσιμους αριθμούς $s_j(z_1)$, $z_1 = 0,\ldots,Q$ και το s_j της βέλτιστης πολιτικής που υπολογίσαμε εφαρμόζεται στον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού βασισμένο στις Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)** και στον ειδικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού. Ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι ο κρίσιμος αριθμός, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα C, ενώ ο δεύτερος αριθμός είναι ο κρίσιμος αριθμός αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα $C' = (c'_{ij})$, $0 \le i, j \le 10$ όπου $c'_{ij} = c_{ij}$ για $1 \le i, j \le 10$, $c'_{0j} = 2c_{0j}$ για $0 \le j \le 10$ και $c'_{i0} = 2c_{i0}$ για $0 \le i \le 10$.

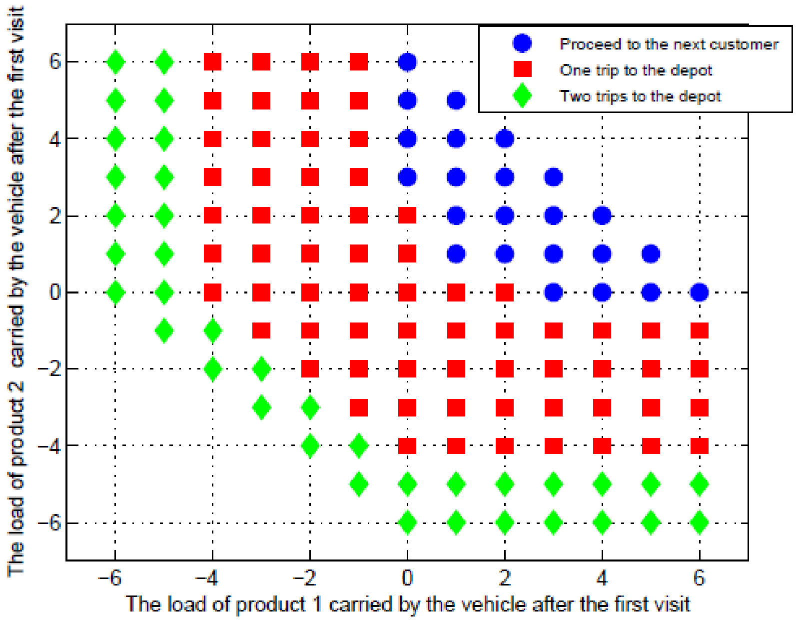
customer j	$s_j(0)$	$s_j(1)$	$s_j(2)$	$s_j(3)$	$s_j(4)$	$s_j(5)$	$s_j(6)$	s_j
1	7, 7	6, 2	3, 1	2, 1	2, 1	2, 1	1, 1	−2, −3
2	7, 2	1, 1	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	−4, −4
3	7, 3	4, 1	2, 1	2, 0	1, 0	1, 0	1, 0	−2, −4
4	7, 1	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	−4, −5
5	7, 2	6, 1	2, 0	2, 0	2, 0	2, 0	1, 0	−2, −4
6	7, 7	6, 4	3, 2	2, 1	2, 1	2, 1	1, 1	−1, −2
7	7, 1	2, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	−3, −5
8	7, 7	6, 6	2, 1	2, 1	1, 0	1, 0	1, 0	−2, −3
9	7, 7	6, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	−4, −5

Πίνακας 1: Οι κρίσιμοι αριθμοί της βέλτιστης πολιτικής

Να σημειώσουμε ότι το **(ii)** του Θεωρήματος 3.1 επιβεβαιώνεται αριθμητικά αφού το $s_j(z_1)$ δεν αυξάνεται στο $z_1 \in \{0,\ldots,6\}$ για $j \in \{1,\ldots,9\}$ αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C ή C'. Να σημειώσουμε επίσης ότι $s_j(0) = 7$, $j \in \{1,\ldots,9\}$, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C, πράγμα που σημαίνει ότι, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1, εάν μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη $j \in \{1,\ldots,9\}$ το όχημα δεν έχει στοιχεία του προϊόντος 1, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό ακόμα και αν περιέχει 6 στοιχεία του προϊόντος 2. Επίσης παρατηρούμε από τον πίνακα 1 ότι $s_9(z_1) = 0$, $1 \le z_1 \le 6$, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C'. Αυτό σημαίνει ότι εάν μετά την πρώτη επίσκεψη στον 9^o πελάτη το όχημα περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του προϊόντος 1, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να προχωρήσουμε απευθείας στον 10^o πελάτη εάν δεν υπάρχει ικανοποιητική ζήτηση για το προϊόν 2. Από τον πίνακα 1 βλέπουμε επίσης ότι ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον δεύτερο αριθμό. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό, καθώς είναι προτιμότερο για το όχημα να αποφύγει τη διαδρομή στην αποθήκη, αν τα έξοδα ταξιδίου μεταξύ των πελατών και της αποθήκης διπλασιάζονται. Στα παρακάτω σχήματα 5 και 6 παρουσιάζουμε τη βέλτιστη απόφαση για κάθε κατάσταση $(z_1, z_2) \in S$ μετά την πρώτη επίσκεψη στον 3^o πελάτη, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C και C' αντίστοιχα. Σε αυτά τα σχήματα, η ενέργεια της συνέχισης στον επόμενο πελάτη σημειώνεται με μπλε κουκίδα, η ενέργεια της επιστροφής στην αποθήκη μια φορά σημειώνεται με κόκκινο τετράγωνο και η ενέργεια που κάνει δυο ταξίδια στην αποθήκη σημειώνεται με πράσινο ρόμβο.



Σχήμα 5: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την $1^η$ επίσκεψη στον πελάτη 3 αν τα κόστη ταξιδίου δίνονται από τον πίνακα C



Σχήμα 6: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη 3 αν τα κόστη ταξιδίου δίνονται από τον πίνακα $C^{'}$

Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος

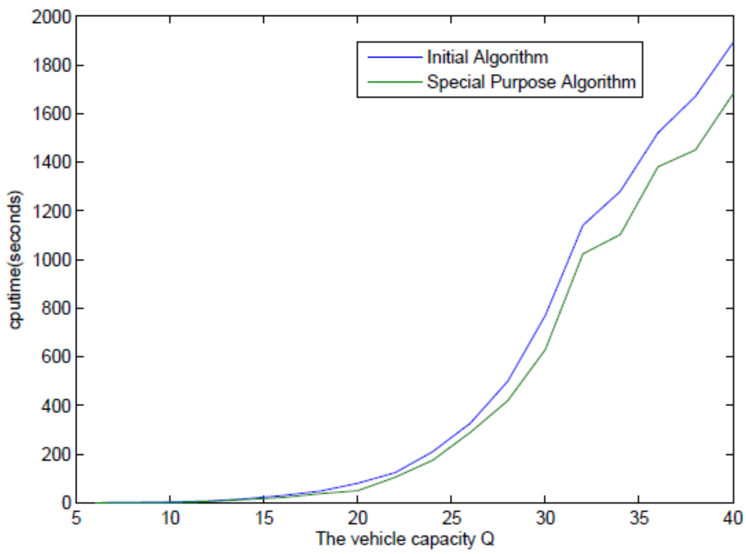
$$f_0 = c_{10} + \min_{0 \le \theta \le 6} \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} \Pr\left(\xi_1^1 = x\right) \Pr\left(\xi_2^1 = y\right) f_1\left(\theta - x, 6 - \theta - y\right)$$

είναι περίπου ίσο με 112.7 ή 131.1, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C ή $C^{'}$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις του δυναμικού προγραμματισμού μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τις βέλτιστες ποσότητες των προϊόντων 1 και 2 που έχουν φορτωθεί στο όχημα όταν επιστρέφει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Για παράδειγμα, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C και μετά την πρώτη επίσκεψη του οχήματος στον 3ο πελάτη η κατάσταση είναι $(-2,0)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να μεταβεί στην αποθήκη για εφοδιασμό 2 στοιχείων του προϊόντος 1 και 4 στοιχείων του προϊόντος 2, έπειτα επιστρέφει στον 3ο πελάτη για να παραδώσει 2 στοιχεία του προϊόντος 1 και στην συνέχεια να προχωρήσει στον 4ο πελάτη. Αν η κατάσταση είναι $(3,-3)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει το όχημα στην αποθήκη για να φορτώσει 3 στοιχεία του προϊόντος 2, έπειτα να επιστρέψει στον 3ο πελάτη για να ικανοποιήσει τη ζήτησή του, να μεταβεί στην αποθήκη για να φορτώσει 3 στοιχεία του προϊόντος 1 και 3 στοιχεία του προϊόντος 2 και στη συνέχεια να μεταβεί στον 4ο πελάτη.

Ας σκεφτούμε το ίδιο παράδειγμα με μεταβλητή Q και το κόστος ταξιδίου να δίνεται από τον πίνακα C όπου $Q \in \{6,8,10,\ldots,40\}$ και

$$\Pr\left(\xi_1^j = x\right) = \Pr\left(\xi_2^j = x\right) = \binom{Q/2}{x} 0.4^x \, 0.6^{Q/2-x} \ , \ j = 1,\ldots,10 \, .$$

Στο σχήμα 7 παρουσιάζονται γραφήματα που δείχνουν ότι το Q ποικίλλει και η διακύμανση στους χρόνους υπολογισμού (που εκφράζεται σε δευτερόλεπτα) απαιτείται από τον αρχικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού με βάση τις Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)**. Παρατηρούμε ότι όπως το Q αυξάνεται, οι χρόνοι υπολογισμού και για τους δυο αλγορίθμους αυξάνονται μη γραμμικά. Ο χρόνος υπολογισμού που απαιτείται από τον αλγόριθμο ειδικού σκοπού είναι μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού που απαιτείται από τον αρχικό μας αλγόριθμο, ειδικά για τις υψηλές τιμές του Q. Στο σχήμα 8 παρουσιάζουμε ένα γράφημα το οποίο δείχνει την μεταβολή του ελάχιστου συνολικού αναμενόμενου κόστους f_0 όταν το Q ποικίλλει. Βλέπουμε ότι, όπως το Q αυξάνεται, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος τείνει να μειωθεί. Αυτό είναι διαισθητικά λογικό δεδομένου ότι μια αύξηση της χωρητικότητας του οχήματος προκαλεί αύξηση της πιθανότητας και αυτό ικανοποιεί τις απαιτήσεις των πελατών όταν τις επισκέπτεται για πρώτη φορά. Σε αυτήν την περίπτωση δεν χρειάζεται να πάει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό.



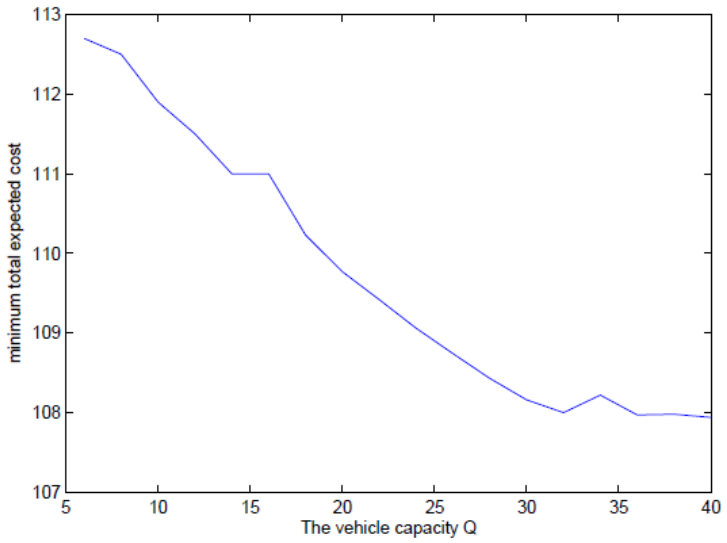
Σχήμα 7: Οι χρόνοι υπολογισμού των αλγορίθμων όπου το Q ποικίλλει

Παράδειγμα 3.2

Ας υποθέσουμε ότι $N = 10$, $Q = 10$, $K = 2$. Το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C όπως το προηγούμενο παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις του κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,10\}$ για τα προϊόντα 1 και 2 είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή $B(5, p)$ δηλαδή,

$$\Pr\left(\xi_1^j = x\right) = \Pr\left(\xi_2^j = x\right) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x} \text{ , } x = 0,\ldots,5$$

που σημαίνει ότι $0 \le \xi_1^j + \xi_2^j \le 10$, $j \in \{1,\ldots,10\}$.



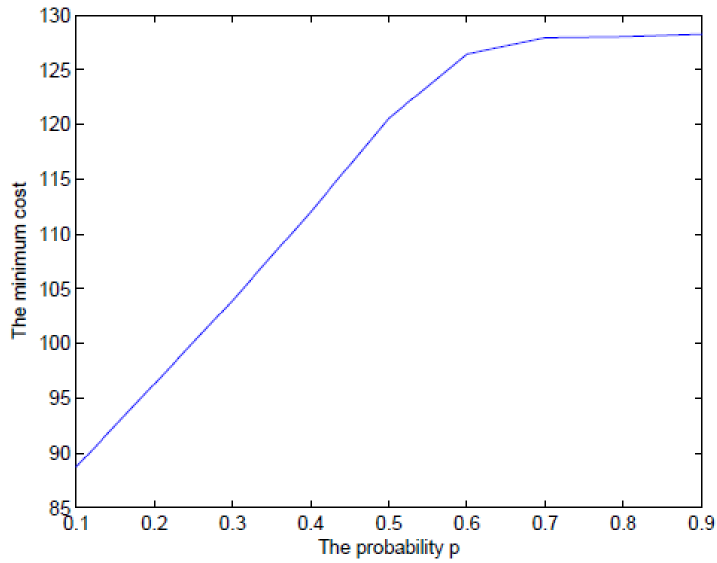
Σχήμα 8: Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος όπου το Q ποικίλλει

Στον πίνακα 2 παρουσιάζουμε για κάθε πελάτη $j = 1,\ldots,9$ και για κάθε τιμή του $p = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ τους κρίσιμους αριθμούς $s_j(z_1)$, $z_1 = 0,\ldots,Q$ και το s_j της βέλτιστης πολιτικής υπολογίζεται από τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού βασισμένο στις Εξισώσεις **(3.1)-(3.6)**. Σε κάθε κελί του πίνακα, ο πρώτος κρίσιμος αριθμός αντιστοιχεί στο $p = 0.2$, ο δεύτερος αντιστοιχεί στο $p = 0.4$, ο τρίτος αντιστοιχεί στο $p = 0.6$ και ο τέταρτος αντιστοιχεί στο $p = 0.8$.

j	$s_j(0)$	$s_j(1)$	$s_j(2)$	$s_j(3)$	$s_j(4)$	$s_j(5)$	$s_j(6)$	$s_j(7)$	$s_j(8)$	$s_j(9)$	$s_j(10)$	s_j
1	11,11 11,11	10,10 10,10	9,9 10,10	4,4 4,8	3,4 4,5	3,3 3,4	3,3 3,4	3,3 3,4	3,3 3,3	1,2 2,2	1,1 1,1	-3,-2 -2,-1
2	11,11 11,11	2,2 10,10	1,2 4,9	1,2 3,8	1,2 2,4	1,2 2,4	1,2 2,4	1,2 2,4	2,2 2,3	1,2 2,2	1,1 1,1	-7,-6 -4,-2
3	11,11 11,11	10,10 10,10	2,4 4,9	2,3 3,8	2,3 3,4	2,2 2,4	2,2 2,4	2,2 2,4	2,2 2,3	2,2 2,2	1,1 1,1	-6,-4 -4,-4
4	11,11 11,11	1,3 10,10	1,2 5,9	1,1 3,8	1,1 2,4	1,1 2,4	1,1 2,4	1,1 2,4	1,1 2,3	1,1 2,2	1,1 1,1	-8,-6 -4,-2
5	11,11 11,11	10,10 10,10	2,9, 9,9	2,3 8,8	2,3 4,7	2,3 4,5	2,3 4,4	2,3 4,4	2,3 3,3	2,2 2,2	1,1 1,1	-6,-4 -2,0
6	11,11 11,11	10,10 10,10	9,9 9,9	5,8 8,8	4,4 4,7	3,4 4,5	3,4 4,4	3,4 4,4	1,2 3,3	2,2 2,2	1,1 1,1	-2,-2 -2,0
7	11,11 11,11	3,10 10,10	2,3 9,9	1,2 4,8	1,2 4,8	1,2 3,4	1,2 3,4	1,2 3,4	1,2 3,3	1,2 2,2	1,1 1,1	-7,-5 -3,-1
8	11,11 11,11	10,10 10,10	9,9 9,9	2,8 8,8	1,3 3,5	1,3 3,4	1,2 3,4	1,2 3,3	1,2 3,3	1,2 2,2	1,1 1,1	-5,-3 -3,-1
9	11,11 11,11	10,10 10,10	0,9 10,10	0,9 9,9	0,0 7,7	0,0 0,0	0,0 0,0	0,0 0,0	0,0 0,0	0,0 0,0	0,0 0,0	-8,-7 -6,-5

Πίνακας 2: Οι κρίσιμοι αριθμοί στη βέλτιστη πολιτική για κάθε τιμή του
$p = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$

Να σημειώσουμε ότι το **(ii)** του Θεωρήματος 3.1 επιβεβαιώνεται αριθμητικά δεδομένου ότι για σταθερό p, το $s_j(z_1)$ είναι μη-αυξανόμενο στο $z_1 \in \{0,\ldots,10\}$ για $j \in \{1,\ldots,9\}$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,9\}$, το $s_j(z_1)$ και s_j είναι μη-φθίνοντα όταν το p αυξάνεται. Αυτό είναι λογικό, δεδομένου ότι, όταν το p αυξάνεται, οι αναμενόμενες τιμές των απαιτήσεων για τα προϊόντα 1 και 2 αυξάνονται και συνεπώς η ενέργεια επιστροφής στην αποθήκη για ανεφοδιασμό γίνεται όλο και περισσότερο ευνοϊκή. Στο σχήμα 9 παρουσιάζουμε ένα γράφημα που δείχνει τη διακύμανση του ελάχιστου συνολικού αναμενόμενου κόστους f_0 όταν το p ποικίλλει. Παρατηρούμε ότι όταν το p παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0.1,\ldots,0.6\}$, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται γραμμικά. Όταν το p παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0.7, 0.8, 0.9\}$ το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος αυξάνεται πολύ αργά.



Σχήμα 9: Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος όπου το p ποικίλλει

3.4 Το πρόβλημα άπειρου ορίζοντα

Τροποποιούμε το πρόβλημα που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, θεωρώντας ένα πρόβλημα άπειρου χρονικού ορίζοντα στο οποίο η εξυπηρέτηση των πελατών δεν σταματά όταν ο τελευταίος πελάτης N έχει εξυπηρετηθεί, αλλά συνεχίζει περιοδικά. Αυτό σημαίνει ότι μετά την εξυπηρέτηση του πελάτη N, το όχημα εξυπηρετεί ξανά του πελάτη 1, τον πελάτη 2 και ούτω κάθε εξής. Θέτουμε c_{N1} το κόστος ταξιδίου από τον πελάτη N στον πελάτη 1. Το οδικό δίκτυο απεικονίζεται στο σχήμα 10.

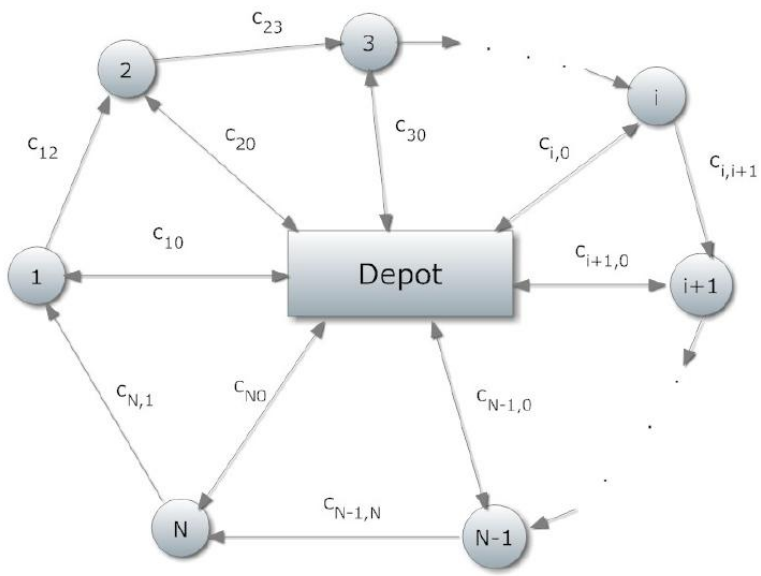
Υποθέτουμε ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\bar{\xi}^j = \left(\xi_1^j, \ldots, \xi_K^j\right)$ που αντιπροσωπεύει τις απαιτήσεις του πελάτη $j \in \{1, \ldots, N\}$ για τα προϊόντα $1, \ldots, K$ παραμένει ίδια σε κάθε κύκλο (περίοδο). Υποθέτουμε ότι σε κάθε κύκλο το όχημα επισκέπτεται κάθε πελάτη, ικανοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερη ζήτηση και επιλέγει μια απόφαση που συμπίπτει με τις πιθανές αποφάσεις στο πρόβλημα πεπερασμένου ορίζοντα. Αν όλη η ζήτηση του πελάτη είναι ικανοποιημένη, υπάρχουν δυο πιθανές αποφάσεις:

- **i.** να προχωρήσει απευθείας στον επόμενο πελάτη
- **ii.** να μεταβεί στην αποθήκη για εφοδιασμό και στη συνέχεια να πάει απευθείας στον επόμενο πελάτη.

Εάν ένα μέρος της ζήτησης του πελάτη δεν είναι ικανοποιημένο, οι πιθανές επιλογές είναι:

i. να μεταβεί στην αποθήκη για ανεφοδιασμό της οφειλόμενης ζήτησης και της φόρτωσης επιπλέον προϊόντων, να επιστρέψει στον πελάτη για να ικανοποιήσει την ζήτηση και έπειτα να πάει στον επόμενο πελάτη
ii. να μεταβεί στην αποθήκη για ανεφοδιασμό της οφειλόμενης ζήτησης, να επιστρέψει στον πελάτη για να παραδώσει την ζήτηση αυτή, επιστρέφει ξανά στην αποθήκη για ανεφοδιασμό και στη συνέχεια πάει στον επόμενο πελάτη.

Υποθέτουμε ότι η απόφαση $\tau = 0,1,\ldots$ έχει την ίδια απόσταση με τον χρόνο. Θεωρούμε επίσης ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αποφάσεων είναι μεγαλύτερο από το απαιτούμενο χρόνο ταξιδίου, εάν το όχημα ακολουθεί οποιαδήποτε από τις παραπάνω αποφάσεις. Στην Ενότητα 3.2, στην πρώτη εφαρμογή, υποθέσαμε ότι το όχημα προμηθεύει τους πελάτες με προϊόντα (π.χ. γάλα, φρούτα) που πρέπει να καταναλώνονται σε σύντομο χρονικό διάστημα. Ο εφοδιασμός των πελατών δεν σταματά όταν εξυπηρετηθεί ο τελευταίος πελάτης, αλλά συνεχίζει με τον ίδιο πελάτη για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην δεύτερη εφαρμογή (όχημα σε κατάσταση παραγωγής) μπορεί να θεωρηθεί ότι ο εφοδιασμός των εργασιακών κέντρων δεν σταματά όταν προμηθευτεί το τελευταίο κέντρο αλλά συνεχίζει με την ίδια προμήθεια για μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς διακοπή. Για αυτά τα δύο παραδείγματα υποθέτουμε ότι οι αποφάσεις επιλέγονται σε ίσες χρονικές εποχές (π.χ. κάθε ώρα).



Σχήμα 10: Το οδικό δίκτυο για το πρόβλημα άπειρου ορίζοντα

Η δρομολόγηση του οχήματος είναι άπειρου ορίζοντα, ελέγχεται από μια πολιτική π και είναι ένας κανόνας για την επιλογή των αποφάσεων σε εποχές $\tau = 0,1,\ldots$ Η απόφαση που επιλέγεται από μια πολιτική σε μια απόφαση εξαρτάται από το ιστορικό της διαδικασίας ή μπορεί να είναι τυχαία με την έννοια ότι επιλέγεται από συγκεκριμένες πιθανότητες. Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πολιτικών είναι η κατηγορία σταθερών πολιτικών. Μια σταθερή πολιτική επιλέγει μια απόφαση που εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος. Έτσι, μια σταθερή πολιτική μπορεί να καθορίζεται από το χώρο καταστάσεων του συστήματος σε ένα σύνολο πιθανών αποφάσεων.

Θεωρούμε δυο διαφορετικά κριτήρια βελτιστοποίησης για το πρόβλημα άπειρου χρονικού ορίζοντα. Το πρώτο κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου κόστους με προεξόφληση και το δεύτερο κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου. Το συνολικό αναμενόμενο προεξοφλητικό κόστος μιας πολιτικής π ορίζεται ως το συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός άπειρου χρονικού ορίζοντα εάν το κόστος προεξοφλείται με τιμή $a \in (0,1)$ ανά μονάδα χρόνου, δεδομένου ότι η πολιτική π χρησιμοποιείται. Η χρήση του συντελεστή προεξόφλησης a μπορεί να εξηγηθεί ως το κόστος που θα προκύψει στο μέλλον που προεξοφλείται στην παρούσα αξία. Το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου μιας πολιτικής π ορίζεται ως το όριο καθώς το $n \to \infty$ του αναμενόμενου κόστους που προκύπτει μέχρι τη n-οστή απόφαση διαιρεμένο με n, δεδομένου ότι η πολιτική π χρησιμοποιείται. Το κριτήριο του προεξοφλημένου κόστους είναι προτιμότερο από το κριτήριο του μέσου κόστους όταν τα χρονικά διαστήματα μεταξύ δυο διαδοχικών αποφάσεων είναι μεγάλα ώστε να λαμβάνεται υπόψη η χρονική αξία του χρήματος. Χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα από τη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων θα δούμε ότι η βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα άπειρου ορίζοντα έχει την ίδια δομή με τη βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα πεπερασμένου ορίζοντα.

Ο χώρος καταστάσεων I του συστήματος αποτελείται από την κατάσταση $(j, \bar{z})$ όπου $j = 1,\ldots,N$ είναι οι πελάτες και $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_K)$ είναι όλα τα πιθανά φορτία των προϊόντων που παραμένουν στο όχημα μετά την επίσκεψη του πελάτη j και έχει ικανοποιήσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ζήτηση. Θέτουμε $V_n^a(j, \bar{z})$ όπου $(j, \bar{z}) \in I$, $0 < a < 1$ να είναι το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος n-βήματος αν η αρχική κατάσταση είναι $(j,\bar{z})\in I$ και a είναι ο συντελεστής προεξόφλησης. Η ποσότητα αυτή ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για $n=1,2,\ldots$

Αν $z_1,\ldots,z_K \ge 0$ τότε

$$V_n^a(j,\bar{z})=\min\left\{c_{j,j+1}+aEV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right),\, c_{j0}+c_{0,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=Q} EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right)\right\}$$

και αν $\zeta=\sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0$ τότε

$$V_n^a(j,\bar{z})=2c_{j0}+\min\left\{c_{j,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=Q+\zeta} EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right),\right.$$

$$\left. c_{j0}+c_{0,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=Q} EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right)\right\}.$$

Επίσης έχουμε ότι $V_0^a(j,\bar{z})=0$, $(j,\bar{z})\in I$. Στις παραπάνω υποθέσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $N+1$ είναι ίσο με 1, δεδομένου ότι ο πελάτης δίπλα στο N είναι ο πελάτης 1. Αυτό μπορεί να δειχθεί με επαγωγή στο n όπου το $V_n^a(j,\bar{z})$ είναι μη αυξανόμενο στο z_i, $i=1,\ldots,K$ και με τον ίδιο τρόπο αποδείξαμε ότι και το $f_j(\bar{z})$ είναι μη αυξανόμενο, με τα επιχειρήματα του θεωρήματος 3.1. Έστω ότι το $V_n^a(j,\bar{z})$, $(j,\bar{z})\in I$ υποδηλώνει το a- προεξοφλητικό συνολικό αναμενόμενο κόστος αν η αρχική κατάσταση είναι $(j,\bar{z})\in I$. Η ποσότητα αυτή είναι πεπερασμένη αφού ο χώρος καταστάσεων I είναι πεπερασμένος και ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις βελτιστοποίησης:

Αν $z_1,\ldots,z_K \ge 0$ τότε

$$V^a(j,\bar{z})=\min\left\{c_{j,j+1}+aEV^a\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right),\, c_{j0}+c_{0,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i=Q} EV^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}\right)\right\}$$

και αν $\zeta = \sum_{i=1}^{K} z_i^- < 0$ τότε

$$V^a(j,\bar{z}) = 2c_{j0} + \min\left\{ c_{j,j+1} + a \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q+\zeta} EV^a\left(j+1, \bar{z} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right), \right.$$

$$\left. c_{j0} + c_{0,j+1} + a \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} EV^a\left(j+1, \bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right) \right\}.$$

Είναι γνωστό ότι όπως το $n \to \infty$, $V_n^a(j,\bar{z}) \to V^a(j,\bar{z})$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $V^a(j,\bar{z})$ είναι μη-αυξανόμενο στο z_i, $i = 1,\ldots,K$. Συνεπώς, οι πρώτοι όροι στις αγκύλες στις παραπάνω εξισώσεις βελτιστοποίησης είναι φθίνουσες στο z_i, $i = 1,\ldots,K$ και ζ αντίστοιχα. Αυτό συνεπάγεται ότι η βέλτιστη πολιτική του a- προεξοφλημένου κόστους έχει τη δομή που περιγράψαμε στο θεώρημα 3.1.

Εστιάζουμε τώρα στην ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου μέσου κόστους. Αρχικά να σημειώσουμε ότι η κατάσταση $(1,0) \in I$ είναι προσβάσιμη από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Από γνωστό πόρισμα του Ross προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί g και $h(j,\bar{z})$, $(j,\bar{z}) \in I$ έτσι ώστε να διατηρούνται οι ακόλουθες εξισώσεις:

Αν $z_1,\ldots,z_K \geq 0$ τότε

$$h(j,\bar{z}) = \min\left\{ c_{j,j+1} - g + Eh\left(j+1, \bar{z} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right), c_{j0} + c_{0,j+1} - g + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Eh\left(j+1, \bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right) \right\}$$

και αν $\zeta = \sum_{i=1}^{K} z_i < 0$ τότε

$$h(j,\bar{z}) = 2c_{j0} + \min\left\{ c_{j,j+1} - g + a \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q+\zeta} Eh\left(j+1, \bar{z} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right), \right.$$

$$\left. c_{j0} + c_{0,j+1} - g + a \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i = Q} Eh\left(j+1, \bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}\right) \right\}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις βελτιστοποίησης μέσου κόστους. Ο αριθμός g είναι το ελάχιστο μέσο κόστος και δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος. Υπάρχει επίσης μια ακολουθία $a_n \to 1$ τέτοια ώστε

$$h(j,\bar{z}) = \lim_{n\to\infty}\left[V^{a_n}(j,\bar{z}) - V^{a_n}(1,\bar{0})\right],\ (j,\bar{z}) \in I \,.$$

Η μονοτονικότητα του $V^{a_n}(j,\bar{z})$ σε σχέση με το z_i, $i=1,\ldots,K$ σημαίνει ότι οι πρώτοι όροι στις αγκύλες στις παραπάνω εξισώσεις βελτιστοποίησης μέσου κόστους είναι φθίνουσες σε σχέση με το z_i, $i=1,\ldots,K$ και ζ αντίστοιχα. Συνεπώς, η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους έχει τη ίδια δομή με τη βέλτιστη πολιτική πεπερασμένου ορίζοντα και τη βέλτιστη πολιτική μειωμένου κόστους.

Η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους μπορεί να βρεθεί αριθμητικά από τον αλγόριθμο των διαδοχικών προσεγγίσεων, τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και τη διαμόρφωση γραμμικού προγραμματισμού. Για να εφαρμοστούν αυτοί οι αλγόριθμοι πρέπει να καθορίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης και το αναμενόμενο κόστος. Υποθέτουμε ότι $K=2$. Έστω $a \in \{0, 1_\theta\}$, $0 \le \theta \le Q$ να είναι η ενέργεια που επιλέγεται όταν το σύστημα είναι στη κατάσταση $(j, z_1, z_2) \in I$ με $z_1, z_2 \ge 0$. Υποθέτουμε ότι η ενέργεια $a=0$ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει απευθείας στον επόμενο πελάτη, ενώ η ενέργεια 1_θ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να φορτώσει θ στοιχεία του προϊόντος 1 και $Q-\theta$ στοιχεία του προϊόντος 2 και στη συνέχεια να πάει στον επόμενο πελάτη $j+1$. Έστω $a \in \{2_\theta, 3_{\theta'}\}$, $0 \le \theta \le Q+\zeta$, $0 \le \theta' \le Q$ να είναι η ενέργεια που επιλέγεται όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $(j, z_1, z_2) \in I$ με $\zeta = z_1^-, z_2^- < 0$. Υποθέτουμε ότι η ενέργεια 2_θ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να φορτώσει την οφειλόμενη ποσότητα $-\zeta$, θ στοιχεία του προϊόντος 1 και $Q-\theta$ στοιχεία του προϊόντος 2, επιστρέφει στον πελάτη j για να ικανοποιήσει τη ζήτηση $-\zeta$ και στη συνέχεια προχωρά στον επόμενο πελάτη $j+1$. Η ενέργεια $3_{\theta'}$ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη για να φορτώσει την οφειλόμενη ποσότητα $-\zeta$, επιστρέφει στον πελάτη j για να ικανοποιήσει τη ζήτηση $-\zeta$, επιστρέφει ξανά στην αποθήκη όπου φορτώνει θ' στοιχεία του προϊόντος 1 και $Q-\theta'$ στοιχεία του προϊόντος 2 και έπειτα προχωρά στον επόμενο πελάτη $j+1$. Έστω $p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(a)$ να είναι η πιθανότητα ότι η κατάσταση είναι (j, z_1, z_2) και η ενέργεια $a \in \{0,1,2_\theta,3_{\theta'}\}$ είναι επιλεγμένη και έστω $C((j,z_1,z_2),a)$ να είναι το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος. Δίνουμε τις παρακάτω ποσότητες:

Αν $z_1, z_2 \geq 0$, $(z_1,z_2) \in S$ τότε

$$p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(0) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = z_1 - z_1', \xi_2^{j+1} = z_2 - z_2'\right)$$

όπου $z_1' = z_1, z_1 - 1, \ldots, z_1 - Q$, $z_2' = z_2, z_2 - 1, \ldots, z_2 - Q$ και $(z_1 + z_2) - (z_1' + z_2') \leq Q$.

Αν $z_1, z_2 \geq 0$, $(z_1,z_2) \in S$, $0 \leq \theta \leq Q$ τότε

$$p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(1_\theta) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta - z_1', \xi_2^{j+1} = Q - \theta - z_2'\right)$$

όπου $z_1' = \theta, \theta - 1, \ldots, \theta - Q$, $z_2' = Q - \theta, Q - \theta - 1, \ldots, -\theta$ και $z_1' + z_2' \geq 0$.

Αν $\zeta = z_1^-, z_2^- < 0$, $(z_1,z_2) \in S$, $0 \leq \theta \leq Q + \zeta$ τότε

$$p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(2_\theta) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta - z_1', \xi_2^{j+1} = Q + \zeta - \theta - z_2'\right)$$

όπου $z_1' = \theta, \theta - 1, \ldots, \theta - Q$, $z_2' = Q + \zeta - \theta, Q + \zeta - \theta - 1, \ldots, \zeta - \theta$ και $z_1' + z_2' \geq \zeta$.

Αν $\zeta = z_1^-, z_2^- < 0$, $(z_1,z_2) \in S$, $0 \leq \theta' \leq Q$ τότε

$$p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(3_{\theta'}) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta' - z_1', \xi_2^{j+1} = Q - \theta' - z_2'\right)$$

όπου $z_1' = \theta', \theta' - 1, \ldots, \theta' - Q$, $z_2' = Q - \theta', Q - \theta' - 1, \ldots, -\theta'$ και $z_1' + z_2' \geq 0$.

Αν $z_1, z_2 \geq 0$, $(z_1,z_2) \in S$ τότε

$$C((j,z_1,z_2),0) = c_{j,j+1}$$

$$C((j,z_1,z_2),1_\theta) = c_{j0} + c_{0,j+1}\ ,\ 0 \leq \theta \leq Q\,.$$

Αν $\zeta = z_1^-, z_2^- < 0$, $(z_1,z_2) \in S$, τότε

$$C((j,z_1,z_2),2_\theta) = 2c_{j0} + c_{j,j+1}\ ,\ 0 \leq \theta \leq Q + \zeta$$

$$C((j,z_1,z_2),3_{\theta'}) = 3c_{j0} + c_{0,j+1}\ ,\ 0 \leq \theta' \leq Q\,.$$

Ως παράδειγμα παρουσιάζουμε το ακόλουθο.

Παράδειγμα 3.3

Ας υποθέσουμε ότι $N = 7$, $Q = 10$, $K = 2$. Δίνεται παρακάτω ο συμμετρικός πίνακας $C = (c_{ij})$, $0 \le i, j \le 7$ του οποίου τα μη μηδενικά στοιχεία είναι το κόστος ταξιδίου $c_{j,j+1}$ μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ και του πελάτη $j+1$ και το κόστος ταξιδίου c_{j0} μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ και της αποθήκης. Παρατηρούμε ότι αυτά τα κόστη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 21 & 15 & 20 & 19 & 20 \\ 20 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 \\ 15 & 15 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 17 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 15 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 17 & 0 \\ 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 21 \\ 20 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα $\Pr(\xi_1^j = x, \xi_2^j = y)$, $x, y = 0, \ldots, 10$ για κάθε πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ είναι τα στοιχεία του ακόλουθου πίνακα P.

$$P = \begin{bmatrix} 0.0171 & 0.0255 & 0.0193 & 0.0287 & 0.0024 & 0.0178 & 0.0097 & 0.0216 & 0.0048 & 0.0033 & 0.0026 \\ 0.0043 & 0.0076 & 0.0148 & 0.0089 & 0.0017 & 0.0147 & 0.0165 & 0.0234 & 0.0258 & 0.0301 & 0 \\ 0.0125 & 0.0047 & 0.0291 & 0.0110 & 0.0237 & 0.0166 & 0.0004 & 0.0052 & 0.0141 & 0 & 0 \\ 0.0168 & 0.0001 & 0.0081 & 0.0081 & 0.0109 & 0.0260 & 0.0236 & 0.0244 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0105 & 0.0188 & 0.0026 & 0.0311 & 0.0242 & 0.0250 & 0.0263 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0061 & 0.0183 & 0.0119 & 0.0292 & 0.0051 & 0.0082 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0072 & 0.0024 & 0.0256 & 0.0135 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0079 & 0.0172 & 0.0178 & 0.0041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0248 & 0.0205 & 0.0286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0138 & 0.0272 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0282 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα P είναι ίσο με 1. Να σημειώσουμε ότι $\Pr(\xi_1^j = x, \xi_2^j = y)$. Ο αλγόριθμος των διαδοχικών προσεγγίσεων δεν συγκλίνει. Αυτό οφείλεται στην περιοδικότητα (με περίοδο N) όλων των καταστάσεων του συστήματος κάτω από οποιαδήποτε σταθερή πολιτική. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να παρακαμφθεί από τη διαταραχή της πιθανότητας μετάβασης έτσι ώστε να επιτρέπεται η μετάβαση από μια κατάσταση στον εαυτό της με μηδέν πιθανότητα. Συγκεκριμένα λαμβάνουμε τις ακόλουθες νέες πιθανότητες

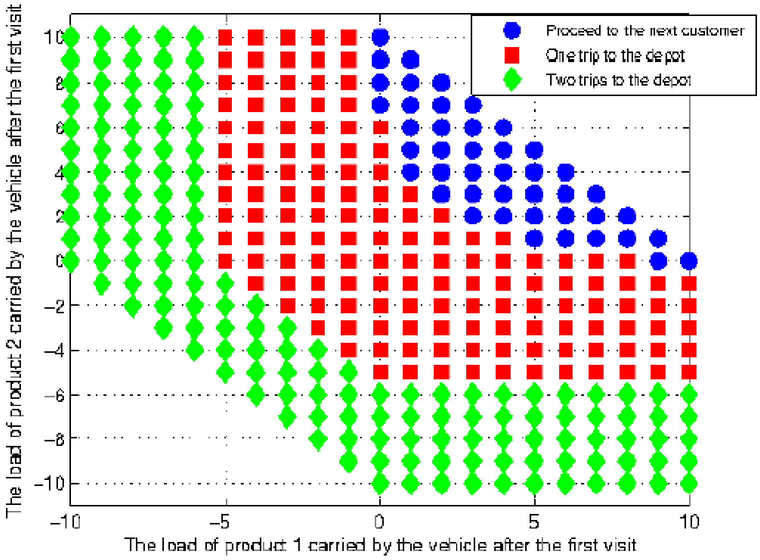
$$\widetilde{p}_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(a)=\tau\, p_{(j,z_1,z_2)(j+1,z_1',z_2')}(a)$$
$$\widetilde{p}_{(j,z_1,z_2)(j,z_1,z_2)}(a)=1-\tau$$

όπου τ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $0<\tau<1$. Μια λογική επιλογή για την αξία του τ είναι 0.5. Το διαταραγμένο μοντέλο έχει το ίδιο μέσο κόστος βέλτιστης πολιτικής με το αρχικό μοντέλο. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των διαδοχικών προσεγγίσεων στο διαταραγμένο μοντέλο, το οποίο συγκλίνει στη βέλτιστη πολιτική μετά από 56 επαναλήψεις. Το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής είναι 47.35. Επίσης εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των διαδοχικών προσεγγίσεων στο διαταραγμένο μοντέλο εάν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα $C'=(c'_{ij})$, $0\le i,j\le 7$ όπου $c'_{ij}=c_{ij}$ για $i,j\in\{1,\ldots,7\}$, $c'_{0j}=0.5c_{0j}$ για $j\in\{1,\ldots,7\}$ και $c'_{i0}=0.5c_{i0}$ για $i\in\{0,\ldots,7\}$. Να σημειώσουμε ότι το κόστος c'_{ij}, $i,j\in\{1,\ldots,7\}$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Σε αυτήν τη περίπτωση ο αλγόριθμος συγκλίνει στη βέλτιστη πολιτική μετά από 58 επαναλήψεις και το ελάχιστο μέσο κόστος είναι 40.85. Σε κάθε κελί του πίνακα 3 παρουσιάζουμε για κάθε πελάτη $j=1,\ldots,7$ τους κρίσιμους αριθμούς $s_j(z_1)$, $z_1=0,\ldots,Q$ και s_j της βέλτιστης πολιτικής. Ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι κρίσιμος αριθμός αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα C, ενώ ο δεύτερος αριθμός είναι κρίσιμος αριθμός αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον συμμετρικό πίνακα C'.

j	$s_j(0)$	$s_j(1)$	$s_j(2)$	$s_j(3)$	$s_j(4)$	$s_j(5)$	$s_j(6)$	$s_j(7)$	$s_j(8)$	$s_j(9)$	$s_j(10)$	s_j
1	1, 11	0, 10	0, 8	0, 6	0, 5	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 2	0, 1	−9, −1
2	6, 11	3, 10	2, 9	2, 8	1, 6	1, 6	1, 5	0, 4	0, 3	0, 2	0, 1	−6, 0
3	0, 11	0, 10	0, 7	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 3	0, 2	0, 2	0, 1	−2, −2
4	7, 11	4, 10	3, 9	2, 8	2, 7	1, 6	1, 5	1, 4	1, 3	0, 2	0, 1	−5, 0
5	2, 11	1, 10	0, 9	0, 7	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 3	0, 2	0, 1	−8, −1
6	4, 11	3, 10	2, 9	1, 8	1, 7	1, 6	1, 5	0, 4	0, 3	0, 2	0, 1	−6, 0
7	11, 11	10, 10	7, 9	5, 8	4, 7	3, 6	3, 5	2, 4	2, 3	2, 2	1, 1	−3, 0

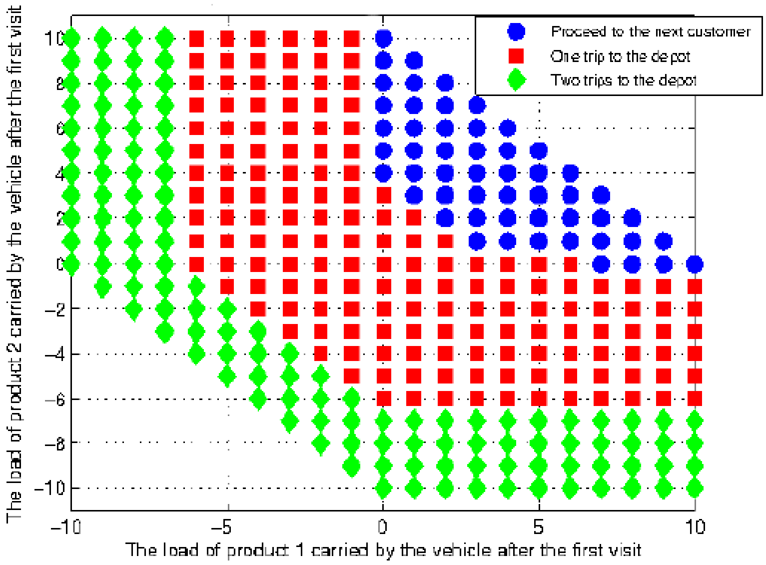
Πίνακας 3: Οι κρίσιμοι αριθμοί του μέσου κόστους βέλτιστης πολιτικής

Να σημειώσουμε ότι το **(ii)** του θεωρήματος 3.1 επιβεβαιώνεται αριθμητικά αφού το $s_j(z_1)$ είναι μη-αυξανόμενο στο $z_1\in\{0,\ldots,10\}$ για $j\in\{1,\ldots,7\}$ αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τα στοιχεία του C ή του C'. Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι μικρότερος ή ίσος με τον δεύτερο αριθμό. Αυτό είναι διαισθητικά αληθοφανής επειδή φαίνεται προτιμότερο για το όχημα να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό αν το κόστος ταξιδίου μεταξύ των πελατών και της αποθήκης μειώνεται κατά το ήμισυ. Στα σχήματα 11 και 12 παρουσιάζουμε τη βέλτιστη απόφαση για κάθε κατάσταση $(z_1, z_2) \in S$ μετά τη πρώτη επίσκεψη στον 4^o πελάτη και στον 6^o πελάτη αν το κόστος ταξιδίου είναι τα στοιχεία του πίνακα C.



Σχήμα 11: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την $1^η$ επίσκεψη στον 4^o πελάτη, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C

Ο αλγόριθμος των διαδοχικών προσεγγίσεων μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε τις βέλτιστες αποφάσεις των προϊόντων 1 και 2 που φορτώνονται στο όχημα όταν επιστρέφει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό.



Σχήμα 12: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την $1^η$ επίσκεψη στον 6^o πελάτη, αν το κόστος ταξιδίου δίνεται από τον πίνακα C

Για παράδειγμα, αν το κόστος ταξιδίου είναι τα στοιχεία του πίνακα C, στην κατάσταση (2,0,5), η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει στην αποθήκη για να φορτώσει 5 στοιχεία του προϊόντος 1 και 5 στοιχεία του προϊόντος 2. Στην κατάσταση (2,-6,0), η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει στην αποθήκη για να φορτώσει 8 στοιχεία του προϊόντος 1 και 2 στοιχεία του προϊόντος 2, να επιστρέψει στον $2^{ο}$ πελάτη για να παραδώσει τα οφειλόμενα 6 στοιχεία του προϊόντος 1 και στη συνέχεια να προχωρήσει στον $3^{ο}$ πελάτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Προβλήματα δρομολόγησης ενός οχήματος με προκαθορισμένη σειρά πελατών, παραλαβή και παράδοση σε πεπερασμένο και άπειρο χρονικό ορίζοντα

4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης δρομολόγησης ενός μόνο οχήματος που ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και συλλέγει και παραδίδει K διαφορετικά προϊόντα στους N πελάτες που εξυπηρετούνται σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά πελατών. Το όχημα επιτρέπεται κατά τη διαδρομή του να επιστρέψει στην αποθήκη για να εκφορτώσει και να εφοδιαστεί με νέα προϊόντα. Όλα τα προϊόντα έχουν το ίδιο μέγεθος. Για κάθε πελάτη η ζήτηση των προϊόντων που παραδίδεται από το όχημα και η ποσότητα των προϊόντων που επιστρέφεται είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή πιθανότητας. Η βέλτιστη πολιτική που εξυπηρετεί όλους τους πελάτες έχει μία συγκεκριμένη μορφή. Επίσης, θα μελετήσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, όπου η εξυπηρέτηση των πελατών δεν ολοκληρώνεται όταν ο τελευταίος πελάτης έχει εξυπηρετηθεί, αλλά συνεχίζει επ' αόριστον με την ίδια σειρά πελατών. Για κάθε πελάτη η κατανομή των ποσοτήτων που παραδίδονται και η ποσότητα των προϊόντων που συλλέγεται είναι ίδια σε κάθε ολοκληρωμένη διαδρομή του οχήματος. Η βέλτιστη πολιτική έχει την ίδια δομή με την βέλτιστη πολιτική του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα. Τέλος, παρέχονται αριθμητικά αποτελέσματα που επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

4.2 Εισαγωγή στα προβλήματα δρομολόγησης πεπερασμένου και άπειρου ορίζοντα ενός οχήματος με προκαθορισμένη σειρά πελατών

Σε ένα κλασσικό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (VRP), στόχος είναι να βρούμε τη βέλτιστη δρομολόγηση οχημάτων που ξεκινάει από την αποθήκη και παραδίδει τα εμπορεύματα σε ένα σύνολο γεωγραφικά διασκορπισμένων πελατών. Το πρόβλημα χωρητικότητας ενός οχήματος (Capacity Vehicle Routing Problem, CVRP) είναι ένα VRP πρόβλημα όπου η χωρητικότητα είναι πεπερασμένη. Η ζητούμενη ποσότητα προϊόντος του κάθε πελάτη μπορεί να είναι ένας σταθερός αριθμός ή μία τυχαία μεταβλητή. Τα προβλήματα CVRP παρουσιάζουν σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία 50 χρόνια. Πρόκειται για προβλήματα NP στα οποία αναπτύχθηκε ένας μεγάλος αριθμός ακριβών και ευρετικών αλγορίθμων. Οι ακριβείς αλγόριθμοι βρίσκουν το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος ενώ οι ευρετικοί παράγουν καλές λύσεις αλλά δεν εγγυώνται βέλτιστη αξιοπιστία. Το πρόβλημα ενός οχήματος με παραλαβή και παράδοση (Capacity Vehicle Routing Problem with Pickups and Deliveries, CVRPPD) είναι μια επέκταση του CVRP όπου τα οχήματα παραλαμβάνουν και παραδίδουν τα αγαθά στους πελάτες. Στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή για τα οχήματα που επισκέπτονται τους πελάτες.

Αρχικά, θα εισάγουμε ένα απλό πρόβλημα CVRPPD. Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ότι ένα μόνο όχημα ξεκινά τη διαδρομή του από μια αποθήκη και συλλέγει και παραδίδει K διαφορετικά προϊόντα σε N πελάτες σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά πελατών $1 \to 2 \to \ldots \to N$. Δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των πελατών που παραδίδουν και των πελατών που παραλαμβάνουν προϊόντα, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες ενδέχεται να λάβουν και να επιστρέψουν προϊόντα. Το όχημα έχει ένα μόνο χώρο αποθήκευσης όπου μπορεί να μεταφέρει κάθε ποσότητα προϊόντος $i \in \{1, \ldots, K\}$ με την προϋπόθεση ότι δεν θα υπερβεί τη συνολική του χωρητικότητα. Υποθέτουμε ότι τα προϊόντα έχουν το ίδιο μέγεθος. Για παράδειγμα, αν $K = 2$ και τα δυο προϊόντα είναι το κρασί και η μπύρα, υποθέτουμε ότι ένα μπουκάλι κρασί έχει το ίδιο μέγεθος με το μπουκάλι της μπύρας. Η συνολική ποσότητα των προϊόντων που συλλέγει το όχημα για κάθε πελάτη και οι απαιτήσεις του για νέα προϊόντα είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή πιθανότητας. Το όχημα επιτρέπεται κατά τη διαδρομή του να επιστρέψει στην αποθήκη για να εκφορτώσει. Η συνολική ζήτηση του κάθε πελάτη για όλα τα προϊόντα είναι μικρότερη ή ίση με τη χωρητικότητα του οχήματος. Επίσης η συνολική ποσότητα των προϊόντων που επιστρέφει ο κάθε πελάτης δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Υποθέτουμε ότι τα κόστη μετακίνησης του οχήματος είναι γνωστά. Στόχος είναι να βρεθεί η πολιτική που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών.

Οι Minis and Tatarakis (2011) παρουσίασαν το παραπάνω πρόβλημα για $K = 1$. Απέδειξαν ότι μετά την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησης ενός πελάτη, είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη, εάν η χωρητικότητα του οχήματος υπερβεί ένα συγκεκριμένο όριο. Όμως η απόδειξη είναι περίπλοκη και είναι αδύνατο να επεκταθεί για $K > 1$. Θεωρούμε ότι το όχημα επισκέπτεται για πρώτη φορά κάθε πελάτη, ικανοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερο τις απαιτήσεις του για νέα προϊόντα και έχει πάρει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα επιστρεφόμενα προϊόντα. Επιπλέον είναι δυνατόν οι απαιτήσεις για νέα προϊόντα και η παραλαβή παλιών προϊόντων να μην ικανοποιούνται λόγω περιορισμένης χωρητικότητας του οχήματος. Για οποιαδήποτε τιμή του $K \geq 1$ παρουσιάζονται οι εξισώσεις του δυναμικού προγραμματισμού που μας επιτρέπουν να βρούμε αριθμητικά την βέλτιστη πολιτική. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο όλων των πιθανών καταστάσεων μετά από την πρώτη επίσκεψη σε κάθε πελάτη αποτελείται από τέσσερα υποσύνολα καταστάσεων. Αν η κατάσταση ανήκει στο πρώτο υποσύνολο, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να προχωρήσει το όχημα προς τον επόμενο πελάτη. Αν η κατάσταση ανήκει στο δεύτερο υποσύνολο, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι το όχημα να επιστρέψει στην αποθήκη για να εκφορτώσει και μετά να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Αν η κατάσταση ανήκει στο τρίτο υποσύνολο, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι το όχημα να μεταβεί στην αποθήκη για να ξεφορτώσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να ανανεώσει τις οφειλόμενες ποσότητες των προϊόντων, να φορτώσει επιπλέον προϊόντα και έπειτα να επιστρέψει στον πελάτη για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις του και στη συνέχεια να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Αν η κατάσταση ανήκει στο τέταρτο υποσύνολο, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι το όχημα να πραγματοποιήσει δυο ταξίδια στην αποθήκη πριν μεταβεί στον επόμενο πελάτη.

Το πρόβλημα που περιγράψαμε παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του προβλήματος που εισήγαγε ο Yang et al. (2000) όπου το όχημα παραδίδει μόνο ένα προϊόν στους πελάτες, δηλαδή $K = 1$ και δεν παραλαμβάνει παλιά προϊόντα. Ο Yang et al. ανέπτυξαν μια προσέγγιση δυναμικού προγραμματισμού και απέδειξε ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός s_j έτσι ώστε η βέλτιστη απόφαση, μετά την εξυπηρέτηση του πελάτη j, είναι να συνεχίσουμε στον πελάτη $j+1$ αν η υπόλοιπη ποσότητα στο όχημα είναι μεγαλύτερη ή ίση από το s_j ή να επιστρέψει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό αν είναι μικρότερο από το s_j. Ο Tsirimpas et al. (2008) μελέτησαν το πρόβλημα για την παραλαβή και την παράδοση, για $K = 1$, όταν για κάθε πελάτη η ποσότητα που συλλέγεται και οι απαιτήσεις του για νέα προϊόντα δεν είναι τυχαίες μεταβλητές αλλά σταθεροί αριθμοί. Επίσης, υπολόγισαν ότι το όχημα επισκέπτεται τον κάθε πελάτη μόνο μια φορά και ανέπτυξαν έναν κατάλληλο αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για την βέλτιστη πολιτική. Ο Yang et al. (2000) και ο Tsirimpas et al. (2008) μελέτησαν προβλήματα όπου η εξυπηρέτηση του κάθε πελάτη είχε ολοκληρωθεί. Το πρόβλημα παράδοσης K διαφορετικών προϊόντων, εάν οι απαιτήσεις αυτών των προϊόντων είναι τυχαίες μεταβλητές, μελετήθηκαν

i. από τους Tatarakis and Minis (2009) και Pandelis et al. (2012) όταν κάθε προϊόν αποθηκεύεται στο χώρο του οχήματος,

ii. από τους Tatarakis and Minis (2009) και Pandelis et al. (2013) όταν όλα τα προϊόντα αποθηκεύονται μαζί στο χώρο του οχήματος.

Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε προβλήματα άπειρου χρονικού ορίζοντα, αν η εξυπηρέτηση των πελατών συνεχιστεί, μέχρις ότου ο τελευταίος πελάτης παραδώσει τα παλιά προϊόντα και παραλάβει νέα. Υποθέτουμε ότι, μετά την ολοκλήρωση του ταξιδιού, οι απαιτήσεις του κάθε πελάτη για νέα προϊόντα και η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων ακολουθούν την ίδια κατανομή. Χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα της διαδικασίας αποφάσεων Markov, αποδεικνύουμε ότι η βέλτιστη πολιτική για την ελαχιστοποίηση του αποπληθωρισμένου κόστους και η βέλτιστη πολιτική για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους έχουν τον ίδιο τύπο με τη βέλτιστη πολιτική στο πρόβλημα πεπερασμένου ορίζοντα.

Όπως ανέφεραν οι Minis and Tatarakis (2011) μια πρακτική εφαρμογή του προβλήματος θα μπορούσε να είναι οι ex-van πωλήσεις, όπου ο οδηγός του οχήματος ενεργεί ως πωλητής και επισκέπτεται τους πελάτες του σύμφωνα με μια προκαθορισμένη σειρά. Οι απαιτήσεις του κάθε πελάτη για τα νέα προϊόντα και η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων αλλά αποκαλύπτονται κατά την άφιξη του οχήματος στον κάθε πελάτη. Εάν η ζήτηση ενός πελάτη για ένα νέο προϊόν υπερβεί την ποσότητα του οχήματος ή εάν η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων υπερβεί την χωρητικότητα του οχήματος, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα και να ανεφοδιαστεί με νέα.

Τέλος, θα μελετήσουμε προβλήματα πεπερασμένου ορίζοντα παρουσιάζοντας εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής.

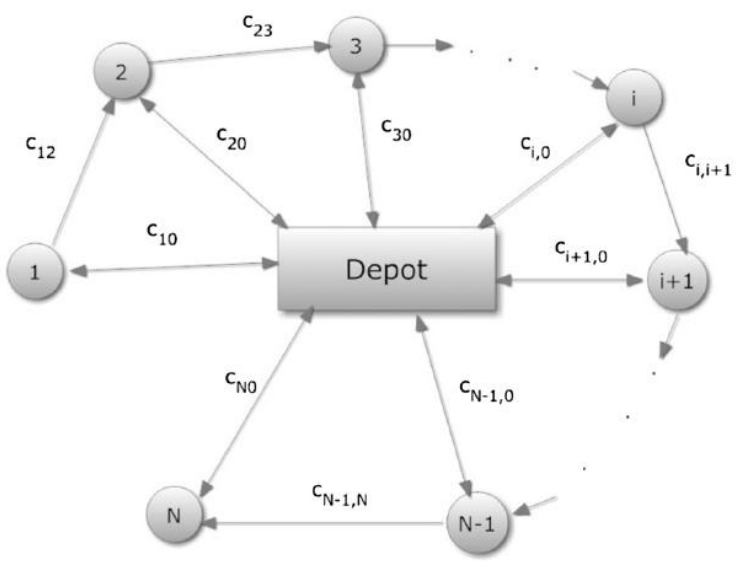
4.3 Το πρόβλημα σε πεπερασμένο ορίζοντα

Θεωρούμε ένα σύνολο κόμβων $V = \{0,1,\ldots,N\}$ όπου ο κόμβος 0 υποδηλώνει την αποθήκη και οι κόμβοι $1,\ldots,N$ αντιστοιχούν στους πελάτες. Οι πελάτες εξυπηρετούνται με τη σειρά $1,\ldots,N$ από το όχημα με χωρητικότητα Q. Το όχημα μεταφέρει K διαφορετικά προϊόντα για να ικανοποιήσει τις ανάγκες των πελατών και χρησιμοποιείται επίσης για την αποθήκευση των προϊόντων που επιστρέφονται από τους πελάτες. Υποθέτουμε ότι όλα τα προϊόντα έχουν το ίδιο μέγεθος. Το όχημα ξεκινάει τη διαδρομή του με ένα φορτίο προϊόντων που είναι μικρότερο ή ίσο με το Q και μετά την εξυπηρέτηση όλων των πελατών επιστρέφει στην αποθήκη. Η ζήτηση του πελάτη j, $j = 1,2,\ldots,N$ για το προϊόν i, $i = 1,2,\ldots,K$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ξ_i^j και η συνολική ποσότητα των προϊόντων που επιστρέφεται από τον πελάτη j είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ψ^j. Η κατανομή πιθανότητας του ξ_i^j, $i = 1,\ldots,K$ και το ψ^j θεωρούνται γνωστά. Οι απαιτήσεις των πελατών για νέα προϊόντα και η ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων μπορεί να γίνουν γνωστά κατά την άφιξη του οχήματος στον πελάτη. Υποθέτουμε ότι η συνολική ζήτηση για νέα προϊόντα και η ποσότητα των επιστραφέντων προϊόντων δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος, δηλαδή

$$\max_{j=1,2,\ldots,N} \sum_{i=1}^{K} \xi_i^j \le Q \quad \text{και} \quad \max_{j=1,2,\ldots,N} \psi^j \le Q .$$

Αν ένα μέρος των απαιτήσεων δεν ικανοποιείται ή αν δεν υπάρχει αρκετός χώρος για όλα τα επιστρεφόμενα προϊόντα, τότε το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστρέφοντα προϊόντα, ανεφοδιάζεται με νέα και έπειτα επιστρέφει στον πελάτη j. Μετά την εξυπηρέτηση και του τελευταίου πελάτη, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη. Ορίζουμε με $c_{j,j+1}$, $j = 1,2,\ldots,N$ το κόστος ταξιδιού μεταξύ των πελατών j και $j+1$ και με c_{j0}, $j = 1,2,\ldots,N$ το κόστος ταξιδιού μεταξύ του πελάτη j και της αποθήκης. Αυτά τα κόστη μπορούν να θεωρηθούν ως το κόστος της βενζίνης που χρειάζεται το όχημα για την κάλυψη των αποστάσεων μεταξύ των πελατών ή για την κάλυψη των αποστάσεων μεταξύ των πελατών και της αποθήκης. Υποθέτουμε ότι αυτές οι αποστάσεις ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή

$$c_{j,j+1} \le c_{j0} + c_{0,j+1}, \ j = 1,\ldots,N-1.$$



Σχήμα 13: Το οδικό δίκτυο για το πρόβλημα του πεπερασμένου ορίζοντα

Θέτουμε z_i, $i = 1,2,\ldots,K$ να είναι το φορτίο του προϊόντος i που μεταφέρει το όχημα μετά την πρώτη επίσκεψη του πελάτη και r να είναι ο κενός χώρος. Οι αρνητικές τιμές του z_i και το r υποδηλώνουν τη μη ικανοποιημένη ζήτηση για το προϊόν i. Θέτουμε $z = \sum_{i=1}^{K} z_i^-$ με $z_i^- = \min\{0, z_i\}$. Όταν $z = 0$ και $r \geq 0$, τότε το όχημα προχωρά στον επόμενο πελάτη ή πηγαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, ανεφοδιάζεται με φορτία θ_i, $i = 1,2,\ldots,K$ των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ όπου $\sum_{i=1}^{K} \theta_i \leq Q$ και έπειτα επισκέπτεται τον επόμενο πελάτη. Όταν $z < 0$ και/ή $r < 0$, το όχημα επιστρέφει στην αποθήκη, ξεφορτώνει τα επιστρεφόμενα προϊόντα και ανεφοδιάζεται με οφειλόμενη ποσότητα $-z^- = -\min(0, z)$. Έπειτα έχει τις ακόλουθες επιλογές

i. φορτώνει ποσότητα θ_i των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ έτσι ώστε ο $-r^-$ κενός χώρος να παραμείνει και μετά την παράδοση της οφειλόμενης ποσότητας $-z^-$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{K} \theta_i \leq Q + \min(z^-, r^-)$ επιστρέφει στον πελάτη για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις του και έπειτα προχωράει στον επόμενο πελάτη

ii. επιστρέφει στον πελάτη για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις του ή παίρνει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, μεταβαίνει στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστραφέντα προϊόντα, ανεφοδιάζεται με φορτίο θ_i των προϊόντων $1,2,\ldots,K$ όπου $\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q$ και έπειτα προχωράει στον επόμενο πελάτη.

Στόχος είναι να καθορίσουμε μία στρατηγική δρομολόγησης του οχήματος που ελαχιστοποιεί το συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια του ταξιδιού.

4.3.1 Η βέλτιστη στρατηγική δρομολόγησης

Ορίζουμε τα διανύσματα $\bar{z}=[z_1,z_2,\ldots,z_K]$, $\bar{\xi}^j=[\xi_1^j,\xi_2^j,\ldots,\xi_K^j]$, $\bar{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_K]$ και ορίζουμε $f_j(\bar{z},r)$ να είναι το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος όταν το φορτίο του προϊόντος που μεταφέρει το όχημα μετά την επίσκεψη του πελάτη j να είναι ίσο με z_i και ο κενός χώρος να είναι ίσος με r. Τότε μια βέλτιστη στρατηγική δρομολόγησης του οχήματος καθορίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού. Για $j=1,2,\ldots,N-1$ έχουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Αν $z_1,z_2,\ldots,z_K,r\ge 0$ τότε

$$f_j(\bar{z},r)=\min\{H_j(\bar{z},r),A_j\}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Περίπτωση 2: Αν $\sum_{i=1}^{K}z_i^- + r^- < 0$ τότε

$$f_j(\bar{z},r)=2c_{j0}+\min\left\{\widetilde{H}_j\left(\sum_{i=1}^{K}z_i^-,r^-\right),A_j\right\}. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Για $z_1,z_2,\ldots,z_K,r\ge 0$ έχουμε

$$H_j(\bar{z},r)=c_{j,j+1}+Ef_{j+1}\left(\bar{z}-\bar{\xi}^{j+1},r+\sum_{i=1}^{K}\min\left(z_i,\xi_i^{j+1}\right)-\psi^{j+1}\right). \qquad \textbf{(4.3)}$$

Για $z^- + r^- < 0$ έχουμε

$$\widetilde{H}_j(z,r)=c_{j,j+1}+\min_{\theta:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\le Q+\min(z^-,r^-)} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{j+1},Q+r^- -\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)$$

(4.4)

$$A_j = c_{j0} + c_{j+1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}, Q - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i, \xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right). \quad \textbf{(4.5)}$$

Για τις οριακές συνθήκες έχουμε

$$f_N(\bar{z}, r) = c_{N0} + 2c_{N0}1\left(\sum_{i=1}^{K} z_i^- + r^- < 0\right). \quad \textbf{(4.6)}$$

Τέλος, το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος είναι

$$f_0 = c_{10} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q} Ef_1\left(\bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,1}, Q - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i, \xi_i^1\right)\right) - \psi^1\right). \quad \textbf{(4.7)}$$

Στις Εξισώσεις **(4.3)**, **(4.4)**, **(4.5)**, **(4.7)** λαμβάνονται οι αναμενόμενες τιμές σε σχέση με τα τυχαία διανύσματα $\bar{\xi}^{\,j}$, $j = 1,2,\ldots,N$ και τις τυχαίες μεταβλητές ψ^j, $j = 1,2,\ldots,N$. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες στην Εξίσωση **(4.1)** αντιστοιχεί στην μετάβαση του οχήματος στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη για ανεφοδιασμό πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Ο πρώτος όρος στις αγκύλες στην Εξίσωση **(4.2)** αντιστοιχεί στην επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη μια φορά για ανεφοδιασμό πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην επιστροφή του οχήματος στην αποθήκη δυο φορές για ανεφοδιασμό πριν προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε τις ιδιότητες της μονοτονίας που απαιτούνται για την βέλτιστη στρατηγική δρομολόγησης του οχήματος.

Πρόταση 4.1

Το $H_j(\bar{z}, r)$ και $\widetilde{H}_j(z, r)$ είναι φθίνουσες συναρτήσεις.

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f_j(\bar{z}, r)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο j. Αρχικά η βάση επαγωγής καθορίζεται από τη συνάρτηση $f_N(\bar{z}, r)$ η οποία είναι φθίνουσα (Εξίσωση **(4.6)**). Έπειτα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f_{j+1}(\bar{z}, r)$

είναι φθίνουσα και θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $H_j(\bar{z},r)$, $\tilde{H}_j(z,r)$ και $f_j(\bar{z},r)$ είναι μη αύξουσες.

Η συνάρτηση $H_j(\bar{z},r)$ είναι φθίνουσα από την υπόθεση επαγωγής και από την Εξίσωση **(4.3)**. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\tilde{H}_j(z,r)$ είναι μη αύξουσα, θεωρούμε $z' \le z$ και $r' \le r$. Τότε από την Εξίσωση **(4.4)** έχουμε

$$\tilde{H}_j(z,r) - \tilde{H}_j(z',r') =$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q+\min(z^-,\,r^-)} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}_{j+1}, Q+r^- - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right) -$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q+\min(z'^-,\,r'^-)} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}_{j+1}, Q+r'^- - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right) \le$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q+\min(z'^-,\,r'^-)} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}_{j+1}, Q+r' - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right) -$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q+\min(z'^-,\,r'^-)} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}_{j+1}, Q+r'^- - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right) \le 0 \quad \textbf{(4.8)}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση της επαγωγής.

Επιπλέον θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f_j(\bar{z},r)$ είναι φθίνουσα. Αρχικά θα δείξουμε την ιδιότητα της μονοτονίας σε σχέση με το z_i, $i=1,2,\ldots,K$. Λόγω της συμμετρίας, αρκεί να δείξουμε ότι το αποτέλεσμα σε σχέση με μία από τις συνιστώσες έστω την z_K. Για $\sum_{i=1}^{K} z_i^- + r^- < 0$ το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τη μονοτονία της συνάρτησης $\tilde{H}_j(z)$ και την Εξίσωσης **(4.2)**. Θεωρούμε ότι $z_1, z_2, \ldots, z_{K-1}, r \ge 0$ και ορίζουμε $\bar{z}_{(K-1)}$ να είναι το διάνυσμα που αποτελείται από τα πρώτα $K-1$ στοιχεία του $\bar{z}$. Για $0 \le z'_K < z_K$ και $z'_K < z_K < 0$ παίρνουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, z_K, r\right) \le f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, z_{K'}, r\right)$$

με τη μονοτονία του $H_j(\bar{z})$ και $\tilde{H}_j(z)$ αντίστοιχα (Εξίσωση **(4.1)** και **(4.2)**). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, 0, r\right) \le f_j\left(\bar{z}_{(K-1)}, -1, r\right).$$

Από την Εξίσωση **(4.1)** και από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},0,r\right)\leq A_j = c_{j0} + c_{j+1,0} + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\leq$$

$$2c_{j0}+c_{j,j+1}+\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)=B_j\,. \quad \textbf{(4.9)}$$

Από τις εξισώσεις **(4.4)** και **(4.9)** παίρνουμε

$$B_j-2c_{j0}-\widetilde{H}_j(-1,r)=\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)-$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q-1} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\leq 0\,. \quad \textbf{(4.10)}$$

Από την εξίσωση **(4.2)** έχουμε

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},-1,r\right)=2c_{j0}+\min\left\{\widetilde{H}_j(-1,r),A_j\right\}$$

που συνδυάζονται με τις Εξισώσεις **(4.9)** και **(4.10)** και

$$f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},0,r\right)\leq f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},-1,r\right).$$

Η ιδιότητα της μονοτονίας σε σχέση με το r έχει αποδειχθεί παρόμοια. Υποθέτουμε ότι η επαγωγή χρησιμοποιείται άμεσα σε όλο το χώρο καταστάσεων εκτός από την απόδειξη του $f_j(\bar{z},0)\leq f_j(\bar{z},-1)$ όπου το $\bar{z}$ είναι τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{K} z_i^- = 0$. Η απόδειξη αυτή γίνεται με τη χρήση εξισώσεων ανάλογη με την Εξίσωση **(4.9)** (με $f_j(\bar{z},0)$ αντί $f_j\left(\bar{z}_{(K-1)},0,r\right)$) και την Εξίσωση **(4.10)** που παίρνει τη μορφή

$$B_j-2c_{j0}-\widetilde{H}_j(0,-1)=\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)-$$

$$\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q-1} Ef_{j+1}\left(\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1}, Q-1-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\leq 0$$

και αποδεικνύεται παρόμοια με την Εξίσωση **(4.8)**.

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει τη βέλτιστη δρομολόγηση του οχήματος μετά την επίσκεψη του πελάτη $j \in \{1,2,\ldots,N-1\}$ για πρώτη φορά.

Θεώρημα 4.1

i. Για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_K \geq 0$ υπάρχει ένας ακέραιος $s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K) \geq 0$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον πελάτη $j+1$ αν και μόνο αν $r \geq s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K)$. Εξάλλου το $s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τις συνιστώσες $z_1, \ldots, z_K$.

ii. Υπάρχει $r_j \leq 0$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να κάνει δυο ταξίδια στην αποθήκη όταν $z_1, z_2, \ldots, z_K \geq 0$ και $r < r_j$.

iii. Υπάρχει $q_j \leq 0$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να κάνει δυο ταξίδια στην αποθήκη όταν $r \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{K} z_i^- < q_j$.

iv. Για κάθε $r < 0$ υπάρχει ένας ακέραιος $s_{2j}(r) < 0$ έτσι ώστε να είναι βέλτιστο για το όχημα να κάνει δυο ταξίδια στην αποθήκη αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{K} z_i^- \leq s_{2j}(r)$.

Επιπλέον το $s_{2j}(r)$ είναι φθίνουσα ως προς r.

Απόδειξη.

Η ύπαρξη του ορίου $s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K)$ είναι συνέπεια του $H_j(\bar{z}, r)$ το οποίο δεν αυξάνεται. Για να δείξουμε ότι το όριο της συνάρτησης δεν αυξάνεται υποθέτουμε ότι $z'_K < z_K$ και $s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z'_K) < s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K)$. Το όριο της συνάρτησης για $z_1, z_2, \ldots, z'_K$ και $r = s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z'_K)$ είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Επειδή η συνάρτηση $H_j(\bar{z}, r)$ είναι φθίνουσα για $z_1, z_2, \ldots, z_K$ και $r = s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z'_K)$ θα πρέπει να εξακολουθεί να είναι βέλτιστο για το όχημα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Ωστόσο, αυτό είναι μια αντίφαση επειδή η συγκεκριμένη αξία του r είναι κάτω από το όριο $s_{1j}(z_1, z_2, \ldots, z_K)$. Τα **(ii)**, **(iii)** και **(iv)** προκύπτουν από τη συνάρτηση $\widetilde{H}_j(z, r)$ χωρίς να αυξάνονται.

4.3.2 Ένας αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού

Βάσει του παραπάνω θεωρήματος, η βέλτιστη πολιτική για $K=1$, δηλαδή οι κρίσιμοι αριθμοί $s_{1j}(z_1)\geq 0$, $0\leq z_1\leq Q$, $s_{2j}(r)\leq 0$, $-1\leq r\leq -Q$, $r_j\leq 0$ και $q_j\leq 0$ για κάθε πελάτη $j\in\{1,2,\ldots,N-1\}$ μπορεί να βρεθούν από τον ακόλουθο αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ειδικού σκοπού.

Αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των κρίσιμων αριθμών r_j, q_i $s_{1j}(z_1)$, $0\leq z_1\leq Q$, $s_{2j}(r)$, $-1\leq r\leq -Q$ για κάθε πελάτη $j=1,\ldots,N-1$

Βήμα 0: Ορίζουμε $f_N(z_1,r)=c_{N0}+2c_{N0}1(z_1^-+r^-<0)$, $|z_1|\leq Q$, $|r|\leq Q$, $z_1+r\leq Q$ και $j=N-1$.

Βήμα 1: Ορίζουμε $r=-1$.

Βήμα 2: **(**Προσδιορισμός κρίσιμου αριθμού r_j)

Αν $\widetilde{H}_j(0,r)>A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $r_j=r+1$.
2) Για (z_1,r) έτσι ώστε $0\leq z_1\leq Q$, $r_j\leq r<0$ ορίζουμε $f_j(z,r)=2c_{j0}+\widetilde{H}_j(0,r)$.
3) Για (z_1,r) έτσι ώστε $0\leq z_1\leq Q$, $-Q\leq r<r_j$ ορίζουμε $f_j(z,r)=2c_{j0}+A_j$.
4) Πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Διαφορετικά ορίζουμε $r=r-1$.

Εάν $r=-Q-1$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $r_j=-Q$.
2) Για (z_1,r) έτσι ώστε $0\leq z_1\leq Q$, $-Q\leq r<0$ ορίζουμε $f_j(z,r)=2c_{j0}+\widetilde{H}_j(0,r)$.
3) Πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 3: Ορίζουμε $z_1=-1$.

Βήμα 4: (Προσδιορισμός του κρίσιμου αριθμού q_j)

Αν $\widetilde{H}_j(z_1,0)>A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $q_j = z_1 + 1$.

2) Για (z_1, r) έτσι ώστε $-Q \leq z_1 < 0$, $0 \leq r \leq Q$, ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j(z_1, 0)$.

3) Για (z_1, r) έτσι ώστε $-Q \leq z_1 < q_j$, $0 \leq r \leq Q$, ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + A_j$.

4) Πηγαίνουμε στο βήμα 5**.**

Αν $z_1 = -Q - 1$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $q_j = -Q$.

2) Για (z_1, r) έτσι ώστε $-Q \leq z_1 < 0$, $0 \leq r \leq Q$, ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j(z_1, 0)$.

3) Πηγαίνουμε στο βήμα 5**.**

Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 4.

Βήμα 5: Ορίζουμε $z_1 = 0$.

Βήμα 6: Ορίζουμε $r = Q - z_1$.

Βήμα 7: (Προσδιορισμός του κρίσιμου αριθμού $s_{1j}(z_1)$)

Αν $H_j(z_1, r) > A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_{1j}(z_1) = r + 1$.

2) Για $0 \leq r \leq s_{1j}(z_1) - 1$ ορίζουμε $f_j(z_1, r) = A_j$.

3) Για $s_{1j}(z_1) \leq r \leq Q - z_1$ ορίζουμε $f_j(z_1, r) = H_j(z_1, r)$.

4) Ορίζουμε $z_1 = z_1 + 1$. Αν $z_1 \leq Q$ πηγαίνουμε στο βήμα 6. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8**.**

Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 7.

Βήμα 8: Ορίζουμε $r = -1$.

Βήμα 9: Ορίζουμε $z_1 = -1$.

Βήμα 10: (Προσδιορισμός του κρίσιμου αριθμού $s_{2j}(r)$)

Αν $\widetilde{H}_j(z_1, r) > A_j$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_{2j}(r) = z_1$.

2) Για $-Q \leq z_1 \leq s_{2j}(r)$ ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + A_j$.

3) Για $s_{2j}(r) + 1 \leq z_1 \leq -1$ ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j(z_1, r)$.

4) Ορίζουμε $r = r - 1$. Αν $r \geq -Q$ πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 11.

Διαφορετικά, ορίζουμε $z_1 = z_1 - 1$.

Αν $z_1 = -Q - 1$ κάνουμε τα εξής:

1) Ορίζουμε $s_{2j}(r) = -Q - 1$.

2) Για $-Q \leq z_1 \leq -1$ ορίζουμε $f_j(z_1, r) = 2c_{j0} + \widetilde{H}_j(z_1, r)$.

3) Ορίζουμε $r = r - 1$. Αν $r \geq -Q$ πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 11.

Διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 10.

Βήμα 11: Ορίζουμε $j = j - 1$. Αν $j \geq 1$ πηγαίνουμε στο βήμα 1. Διαφορετικά σταματάμε.

4.3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Ως παράδειγμα παρουσιάζουμε το ακόλουθο.

Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι $N = 7$, $Q = 10$, $K = 1$. Παρακάτω δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $C = (c_{ij})$, $0 \leq i, j \leq 7$ του οποίου τα μηδενικά στοιχεία είναι το κόστος μετακίνησης $c_{j,j+1}$ μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 6\}$ και του πελάτη $j+1$ και του κόστους ταξιδιού c_{j0} μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ και της αποθήκης. Παρατηρούμε ότι αυτά τα έξοδα ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,7\}$ η ζήτηση ξ_1^j για τα νέα αντικείμενα του προϊόντος 1 και η ποσότητα ψ^j των επιστρεφόμενων προϊόντων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την διωνυμική κατανομή $B(10, 0.4)$, δηλαδή

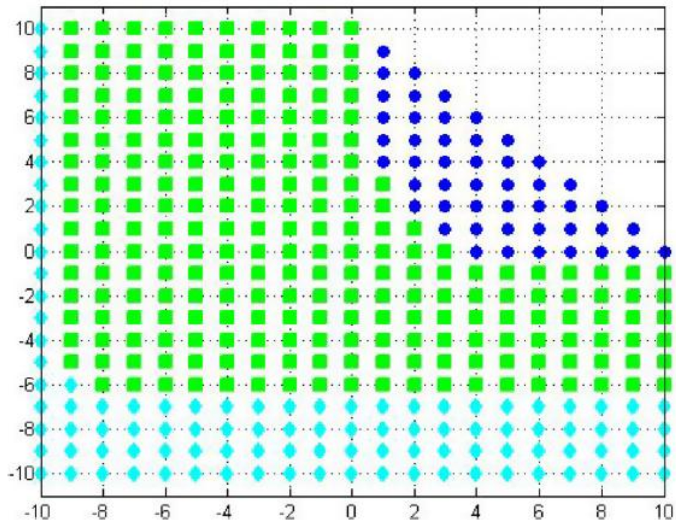
$$\Pr\left(\xi_1^j = x\right) = \Pr\left(\psi^j = x\right) = \binom{10}{x} 0.4^x \, 0.6^{10-x} \, , \; x = 0,\ldots,10 \, .$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε για κάθε πελάτη $j = 1,\ldots,6$ τους κρίσιμους αριθμούς $s_{1j}(z_1)$, $0 \le z_1 \le Q$, $s_{2j}(r)$, $-Q \le r \le -1$, r_j, q_j.

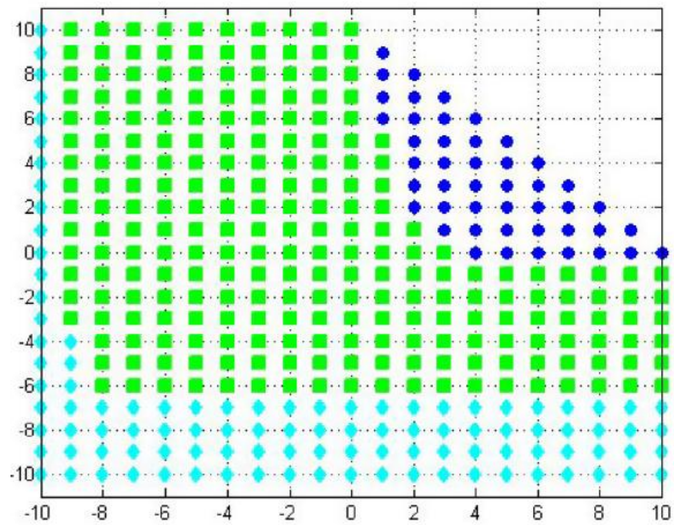
Customer j	$s_{1j}(z_1)$, $0 \leqslant z_1 \leqslant 10$, $s_{2j}(r)$, $-10 \leqslant r \leqslant -1$, r_j, q_j
1	$s_{11}(0) = 11, s_{11}(1) = 4, s_{11}(2) = 2, s_{11}(3) = 1, s_{11}(4) = \cdots = s_{11}(10) = 0,$ $s_{21}(-1) = \cdots = s_{21}(-5) = -10, s_{21}(-6) = -9, s_{21}(-7) = \cdots = s_{21}(-10) = -1, r_1 = -6, q_1 = -9$
2	$s_{12}(0) = 3, s_{12}(1) = s_{12}(2) = s_{12}(3) = 1, s_{12}(4) = \cdots = s_{12}(10) = 0,$ $s_{22}(-1) = \cdots = s_{22}(-7) = -11, s_{22}(-8) = -10, s_{22}(-9) = s_{22}(-10) = -1, r_2 = -8, q_2 = -10$
3	$s_{13}(0) = 11, s_{13}(1) = 6, s_{13}(2) = 2, s_{13}(3) = 1, s_{13}(4) = \cdots = s_{13}(10) = 0,$ $s_{23}(-1) = s_{23}(-2) = s_{23}(-3) = -10, s_{23}(-4) = s_{23}(-5) = s_{23}(-6) = -9,$ $s_{23}(-7) = \cdots = s_{23}(-10) = -1, r_3 = -6, q_3 = -9$
4	$s_{14}(0) = 2, s_{14}(1) = \cdots = s_{14}(10) = 0,$ $s_{24}(-1) = \cdots = s_{24}(-8) = -11, s_{24}(-9) = -10, s_{14}(-10) = -1, r_4 = -9, q_4 = -10$
5	$s_{15}(0) = 11, s_{15}(1) = 10, s_{15}(2) = 9, s_{15}(3) = 8, s_{15}(4) = 3, s_{15}(5) = 2, s_{15}(6) = 1,$ $s_{15}(7) = \cdots = s_{15}(10) = 0,$ $s_{25}(-1) = s_{25}(-2) = s_{25}(-3) = -7, s_{25}(-4) = \cdots = s_{25}(-10) = -1, r_5 = -3, q_5 = -6$
6	$s_{16}(0) = 11, s_{16}(1) = 3, s_{16}(2) = \cdots = s_{16}(10) = 0,$ $s_{26}(-1) = \cdots = s_{26}(-6) = -10, s_{26}(-7) = s_{26}(-8) = -9, s_{26}(-9) = s_{26}(-10) = -1,$ $r_6 = -8, q_6 = -9$

Πίνακας 4: Οι κρίσιμοι αριθμοί της βέλτιστης πολιτικής

Να σημειώσουμε ότι τα **(i)** και **(iv)** του Θεωρήματος 4.1 επιβεβαιώνεται αριθμητικά δεδομένου ότι για τον πελάτη $j \in \{1,\ldots,6\}$, $s_{1j}(z_1)$, $0 \le z_1 \le 10$ και $s_{2j}(r)$, $-1 \le r \le -10$ δεν αυξάνονται στα z_1 και r αντίστοιχα. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουμε τη βέλτιστη απόφαση για κάθε κατάσταση (z_1, r), $|z_1| \le 10$, $|r| \le 10$, $z_1 + r \le 10$ μετά την πρώτη επίσκεψη στον πρώτο και τρίτο πελάτη. Συγκεκριμένα, η μετάβαση στον επόμενο πελάτη υποδηλώνεται από μια σκούρα μπλε κουκκίδα, η επιστροφή μια φορά στην αποθήκη υποδηλώνεται από ένα πράσινο τετράγωνο και η επιστροφή δυο φορές στην αποθήκη υποδηλώνεται με θαλασσί ρόμβο.



Σχήμα 14: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη 1



Σχήμα 15: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη 3

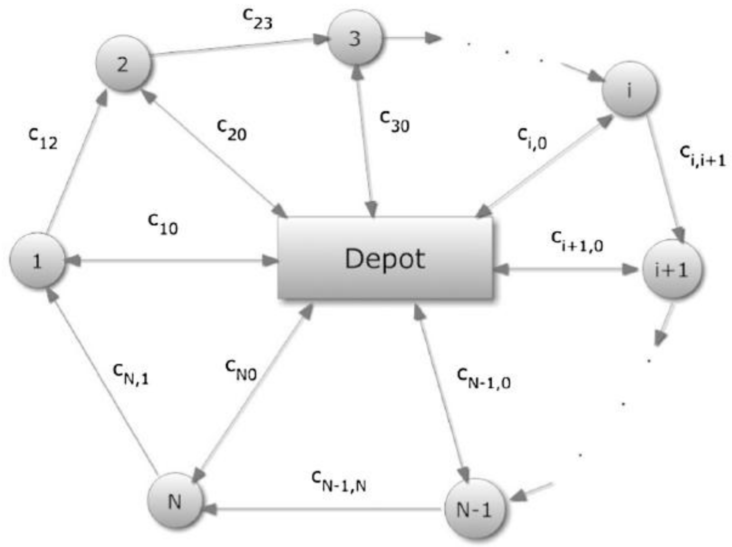
Ο χρόνος υπολογισμού του ειδικού αλγορίθμου (38,81 δευτερόλεπτα) είναι μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού του αρχικού αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού (58,39 δευτερόλεπτα) που βασίζεται στις Εξισώσεις **(4.1)-(4.6).** Το ελάχιστο συνολικό αναμενόμενο κόστος

$$f_0 = c_{10} + \min_{0 \le \theta \le Q} E f_1\left(\theta - \xi_1^1, Q - \theta + \min\left(\theta, \xi_1^1\right) - \psi^1\right)$$

είναι ίσο με 65,29. Και οι δυο αλγόριθμοι μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη βέλτιστη απόφαση του προϊόντος 1 που φορτώνεται στο όχημα όταν επιστρέφει στην αποθήκη για ανεφοδιασμό. Για παράδειγμα, αν μετά την πρώτη επίσκεψη του οχήματος στον πελάτη 1 η κατάσταση είναι $(z_1, r) = (-5,4)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να φορτώσει 5 νέα προϊόντα, να επιστρέψει στον πελάτη 1 για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα και στη συνέχεια να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη. Αν μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη 1 η κατάσταση είναι $(z_1, r) = (-5,-7)$, τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να επιστρέψει στην αποθήκη, να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να φορτώσει 5 νέα προϊόντα, μετά να επιστρέψει στον πελάτη 1 για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα και να παραλάβει 7 προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη για να αδειάσει αυτά τα προϊόντα, φορτώνει 3 νέα και έπειτα μεταβαίνει στον πελάτη 2.

4.4 Το πρόβλημα σε άπειρο ορίζοντα

Θεωρούμε το πρόβλημα που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα με την ακόλουθη τροποποίηση. Η εξυπηρέτηση των πελατών δεν σταματά μετά την εξυπηρέτηση του τελευταίου πελάτη N αλλά συνεχίζει με την ίδια σειρά πελατών. Αυτό σημαίνει ότι αφού ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση του πελάτη N, το όχημα εξυπηρετεί ξανά τον πελάτη 1, τον πελάτη 2 και ούτω καθεξής. Θέτουμε c_{N1} να είναι το κόστος ταξιδιού από τον πελάτη N στον πελάτη 1. Το οδικό δίκτυο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 16: Το οδικό δίκτυο για το πρόβλημα του άπειρου ορίζοντα

Οι απαιτήσεις των πελατών για τα προϊόντα και οι ποσότητες των επιστραφέντων προϊόντων ανανεώνονται από το όχημα. Υποθέτουμε ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1, \dots, N\}$

η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\left(\xi_1^j,\ldots,\xi_K^j,\psi^j\right)$ που αποτελείται από τις απαιτήσεις για τα προϊόντα $1,\ldots,K$ και η ποσότητα που δίνεται στο όχημα παραμένει ίδια σε κάθε κύκλο. Υποθέτουμε ότι σε κάθε κύκλο, το όχημα επισκέπτεται κάθε πελάτη, ικανοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερη ζήτηση και παίρνει τη μεγαλύτερη ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων. Εάν οι απαιτήσεις των πελατών ικανοποιούνται για όλα τα προϊόντα και αν η συνολική ποσότητα των επιστραφέντων προϊόντων παραλαμβάνεται από το όχημα, τότε υπάρχουν δυο πιθανές αποφάσεις:

i. να προχωρήσει απευθείας στον επόμενο πελάτη

ii. να μεταβεί στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να προσθέσει νέα και έπειτα να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη.

Αν κάποιες από τις απαιτήσεις των πελατών δεν ικανοποιούνται και/ή αν δεν υπάρχει κενός χώρος στο όχημα για να μεταφέρει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, τότε οι πιθανές επιλογές είναι:

i. να μεταβεί το όχημα στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να ανεφοδιαστεί με νέα, να επιστρέψει στον πελάτη για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα και/ή να παραλάβει τα επιστρεφόμενα προϊόντα και στη συνέχεια να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη

ii. να μεταβεί το όχημα στην αποθήκη για να αδειάσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να ανεφοδιαστεί με νέα, να επιστρέψει στον πελάτη για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα και/ή να παραλάβει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, να κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη για να αδειάσει τα αυτά τα προϊόντα, να εφοδιαστεί με νέα και στη συνέχεια να προχωρήσει στον επόμενο πελάτη.

Θεωρούμε ότι ο οδηγός του οχήματος επιλέγει τις αποφάσεις του σε ίση απόσταση $\tau = 0,1,\ldots$ (π.χ. κάθε 12 ώρες). Αυτό σημαίνει ότι εάν για παράδειγμα το όχημα επισκέπτεται τον τρίτο πελάτη και αν η απόφαση επιλέγεται στις 8 πμ τότε η επόμενη απόφαση επιλέγεται στις 8 μμ, μετά την επίσκεψη στον τέταρτο πελάτη. Θεωρούμε επίσης ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αποφάσεων είναι μεγαλύτερο από τον απαιτούμενο χρόνο που κάνει το όχημα για δυο ταξίδια. Στην πρώτη εφαρμογή (ex-van πωλήσεις), υποθέτουμε ότι ο εφοδιασμός των πελατών με νέα προϊόντα και η συλλογή των προϊόντων που έχουν λήξει δεν σταματά όταν ο τελευταίος πελάτης έχει ολοκληρωθεί αλλά συνεχίζεται με την ίδια σειρά πελατών για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην δεύτερη εφαρμογή (αυτοκινούμενο όχημα σε ένα κατάστημα παραγωγής), υποθέτουμε ότι η παροχή των εργασιακών κέντρων με νέα διακριτά μέρη και η συλλογή άχρηστων διακριτών εξαρτημάτων από τα εργασιακά κέντρα δεν σταματά όταν ολοκληρωθεί η υπηρεσία του τελευταίου εργασιακού κέντρου αλλά συνεχίζεται επ' αόριστον με την ίδια σειρά.

Η δρομολόγηση ενός οχήματος με άπειρο ορίζοντα, ελέγχεται από μια πολιτική π, όπου είναι ένας κανόνας για την επιλογή των αποφάσεων $\tau = 0,1,\ldots$. Η απόφαση που επιλέγεται από μια πολιτική σε μια απόφαση εξαρτάται από το ιστορικό της διαδικασίας. Μια σταθερή πολιτική επιλέγει μια απόφαση που εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος. Τα κριτήρια βελτιστοποίησης στο πρόβλημα του άπειρου ορίζοντα είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους και της ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου. Το συνολικό αναμενόμενο προεξοφλητικό κόστος μιας πολιτικής π ορίζεται ως το συνολικό αναμενόμενο κόστος κατά τη διάρκεια ενός ορίζοντα άπειρου χρόνου εάν το κόστος είναι με έκπτωση σε τιμή $a \in (0,1)$ ανά μονάδα χρόνου, δεδομένου ότι η πολιτική π χρησιμοποιείται. Το αναμενόμενο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου μιας πολιτικής π ορίζεται ως το όριο $n \to \infty$ του αναμενόμενου κόστους που πραγματοποιήθηκε μέχρι τη n-οστή χρονική στιγμή λήψης απόφασης διαιρουμένη με n δεδομένου ότι αυτή η πολιτική π χρησιμοποιείται. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της απόφασης Markov, θα δούμε ότι οποιοδήποτε από αυτά τα κριτήρια, η βέλτιστη πολιτική είναι στάσιμη και έχει την ίδια δομή με τη βέλτιστη πολιτική του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα. Η κατάσταση I του συστήματος αποτελείται από όλες τις καταστάσεις $(j, \bar{z}, r)$ όπου $j = 1,\ldots,N$ είναι ο πελάτης και $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_K)$ και r είναι τα πιθανά φορτία των προϊόντων $1,\ldots,K$ που παραμένουν στο όχημα και στο κενό χώρο του οχήματος αντίστοιχα, μετά επισκέπτεται τον πελάτη j, ικανοποιεί τη ζήτησή του και παραλαμβάνει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα των επιστρεφόμενων προϊόντων.

4.4.1 Η δομή της βέλτιστης πολιτικής

Θέτουμε $V_n^a(j,\bar{z},r)$, $(j,\bar{z},r)\in I$, $0<a<1$ να είναι το ελάχιστο n-βήμα του αναμενόμενου προεξοφλητικού κόστους εάν η αρχική κατάσταση είναι $(j,\bar{z},r)\in I$ και a είναι ο παράγοντας έκπτωσης. Αυτή η ποσότητα ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού για $n=1,2,\ldots$

Εάν $z_1,\ldots,z_K,r\geq 0$ τότε

$$V_n^a(j,\bar{z},r)=\min\left\{c_{j,j+1}+aEV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1},r+\sum_{i=1}^{K}\min\left(z_i,\xi_i^{j+1}\right)-\psi^{\,j+1}\right),\right.$$

$$\left.c_{j0}+c_{j+1,0}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q}EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)\right)-\psi^{\,j+1}\right)\right\}$$

και αν $z^-+r^-<0$ τότε

$$V_n^a(j,\bar{z},r)=2c_{j0}+\min\left\{c_{j,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q+\min\left(z^-,r^-\right)}EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},Q+r^--\right.\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{\,j+1}\right),c_{j0}+c_{0,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q}EV_{n-1}^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},\right.$$

$$\left.\left.Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{\,j+1}\right)\right\}.$$

Έχουμε επίσης ότι $V_0^a(j,\bar{z},r)=0$, $(j,\bar{z})\in I$. Στις παραπάνω εξισώσεις υποθέτουμε ότι το $N+1$ ισούται με 1. Με επαγωγή στο n μπορεί να αποδειχθεί ότι το $V_n^a(j,\bar{z},r)$ δεν αυξάνεται στο $z_1,\ldots,z_K,r$, με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε στα επιχειρήματα της πρότασης 4.1 ότι και το $f_j(\bar{z},r)$ δεν αυξάνεται. Ορίζουμε $V^a(j,\bar{z},r)$, $(j,\bar{z},r)\in I$ να υποδηλώνει το a-προεξοφλημένο συνολικό αναμενόμενο κόστος εάν η αρχική κατάσταση είναι $(j,\bar{z})\in I$. Αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη αφού η κατάσταση I είναι πεπερασμένη. Έπειτα ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις βελτιστοποίησης:

Εάν $z_1,\ldots,z_K,r \geq 0$ τότε

$$V^a\left(j,\bar{z},r\right)=\min\left\{c_{j,j+1}+aEV^a\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1},r+\sum_{i=1}^{K}\min\left(z_i,\xi_i^{j+1}\right)-\psi^{j+1}\right),\right.$$

$$\left.c_{j0}+c_{j+1,0}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q}EV^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\right\}$$

και αν $z^-+r^-<0$ τότε

$$V^a\left(j,\bar{z},r\right)=2c_{j0}+\min\left\{c_{j,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q+\min\left(z^-,r^-\right)}EV^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},Q+r^--\right.\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right),\ c_{j0}+c_{0,j+1}+a\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q}EV^a\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},\right.$$

$$\left.\left.Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\right\}.$$

Είναι γνωστό ότι όπως το $n\to\infty$, $V_n^a\left(j,\bar{z},r\right)\to V^a\left(j,\bar{z},r\right)$. Συνεπώς οι πρώτοι όροι στις σγουρές αγκύλες στις παραπάνω εξισώσεις βελτιστοποίησης είναι φθίνουσες στο $z_1,\ldots,z_K,r$ και z,r αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι η a-προεξοφλητική βέλτιστη πολιτική κόστους έχει τη δομή τύπου που περιγράφεται στο Θεώρημα 4.1.

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου μέσου κόστους. Αρχικά να σημειώσουμε ότι η κατάσταση $\left(1,\bar{0},0\right)\in I$ είναι προσβάσιμη από οποιαδήποτε σταθερή πολιτική. Από την Συνέπεια του Ross (1992) προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί g και $h\left(j,\bar{z},r\right)$, $\left(j,\bar{z},r\right)\in I$ έτσι ώστε:

Εάν $z_1,\ldots,z_K,r \geq 0$ τότε

$$h\left(j,\bar{z},r\right)=\min\left\{c_{j,j+1}-g+Eh\left(j+1,\bar{z}-\bar{\xi}^{\,j+1},r+\sum_{i=1}^{K}\min\left(z_i,\xi_i^{j+1}\right)-\psi^{j+1}\right),\right.$$

$$\left.c_{j0}+c_{j+1,0}-g+\min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i\leq Q}Eh\left(j+1,\bar{\theta}-\bar{\xi}^{\,j+1},Q-\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i-\min\left(\theta_i-\min\left(\theta_i,\xi_i^{j+1}\right)\right)\right)-\psi^{j+1}\right)\right\}$$

και αν $z^- + r^- < 0$ τότε

$$h(j,\bar{z},r) = 2c_{j0} + \min\left\{ c_{j,j+1} - g + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q+\min(z^-,r^-)} Eh\left(j+1, \bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1}, Q + r^- - \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i, \xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right), c_{j0} + c_{0,j+1} - g + \min_{\bar{\theta}:\sum_{i=1}^{K}\theta_i \le Q} Eh\left(j+1, \bar{\theta} - \bar{\xi}^{\,j+1},\right.\right.$$

$$\left.\left. Q - \sum_{i=1}^{K}\left(\theta_i - \min\left(\theta_i, \xi_i^{j+1}\right)\right) - \psi^{j+1}\right)\right\}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις βελτιστοποίησης μέσου κόστους. Ο αριθμός g είναι το ελάχιστο μέσο κόστος και δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος. Υπάρχει επίσης μια ακολουθία $a_n \to 1$ έτσι ώστε

$$h(j,\bar{z},r) = \lim_{n\to\infty}\left[V^{a_n}(j,\bar{z},r) - V^{a_n}(1,\bar{0},0)\right],\ (j,\bar{z},r) \in I.$$

Η μονοτονία του $V^{a_n}(j,\bar{z},r)$ σε σχέση με το z_i, $i = 1,\ldots,K$ και το r σημαίνει ότι το $h(j,\bar{z},r)$ είναι φθίνουσα σε σχέση με το z_i, $i = 1,\ldots,K$ και το r. Ως εκ τούτου, οι πρώτοι όροι στις αγκύλες στις παραπάνω εξισώσεις βελτιστοποίησης μέσου κόστους είναι φθίνουσες στο $z_1,\ldots,z_K,r$ και z,r αντίστοιχα. Επομένως η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους έχει την ίδια δομή τύπου με την βέλτιστη πολιτική πεπερασμένου ορίζοντα και τη βέλτιστη πολιτική μείωση του κόστους.

4.4.2 Υπολογισμός της βέλτιστης πολιτικής για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους

Η βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους μπορεί να βρεθεί αριθμητικά από τον αλγόριθμο των διαδοχικών προσεγγίσεων, από τον αλγόριθμο βελτίωσης των πολιτικών και από την γραμμική διαμόρφωση του προγραμματισμού. Για να εφαρμόσουμε αυτούς τους αλγορίθμους πρέπει να καθορίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης και το αναμενόμενο κόστος. Υποθέτουμε ότι $K = 1$, δηλαδή υπάρχει μόνο το προϊόν 1. Θέτουμε $a \in \{0, 1_\theta\}$, $0 \le \theta \le Q$, είναι η ενέργεια που επιλέγεται όταν το σύστημα είναι σε κατάσταση $(j, z_1, r) \in I$ με $z_1, r \ge 0$. Υποθέτουμε ότι η ενέργεια $a = 0$ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει κατευθείαν στον επόμενο πελάτη ενώ η ενέργεια $a = 1_\theta$ σημαίνει ότι πηγαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστραφέντα προϊόντα, ανεφοδιάζεται με h στοιχεία του προϊόντος 1 και έπειτα επισκέπτεται τον πελάτη $j+1$. Ορίζουμε $a \in \{2_\theta, 3_{\theta'}\}$, $0 \le \theta \le Q + \min(z_1^-, r^-)$, $0 \le \theta' \le Q$ είναι η ενέργεια που επιλέξαμε όταν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση $(j, z_1, r) \in I$ με $z_1^- + r^- < 0$. Υποθέτουμε ότι η ενέργεια 2_θ σημαίνει ότι το όχημα πηγαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, ανεφοδιάζει την οφειλόμενη ποσότητα $-z_1^-$, φορτώνει επιπλέον ποσότητα προϊόντος $\theta \in \{0, \ldots, Q + \min(z_1^-, r^-)\}$, επιστρέφει στον πελάτη j, ικανοποιεί τη ζήτηση του και/ή παραλαμβάνει τα υπόλοιπα επιστρεφόμενα προϊόντα και έπειτα προχωράει στον επόμενο πελάτη $j+1$. Η ενέργεια $3_{\theta'}$ σημαίνει ότι το όχημα μεταβαίνει στην αποθήκη, αδειάζει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, φορτώνει την οφειλόμενη ποσότητα προϊόντος $-z_1^-$, επιστρέφει στον πελάτη j, ικανοποιεί τη ζήτηση του και/ή παραλαμβάνει τα υπόλοιπα επιστρεφόμενα προϊόντα, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη όπου αδειάζει τα επιστραφέντα προϊόντα και ανεφοδιάζεται με $\theta' \in \{0, \ldots, Q\}$ στοιχεία του προϊόντος 1 και έπειτα προχωράει στον πελάτη $j+1$. Θέτουμε $p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(a)$ να είναι η πιθανότητα ότι η κατάσταση θα είναι $(j+1, z_1', r')$ εάν η παρούσα κατάσταση είναι (j, z_1, r) και η ενέργεια $a \in \{0, 1_\theta, 2_\theta, 3_{\theta'}\}$ επιλέγεται και θέτουμε $c((j, z_1, r), a)$ να είναι το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος. Δίνουμε αυτές τις ποσότητες παρακάτω.

Εάν $z_1, r \ge 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$, $z_1 + r \le Q$ τότε

$$p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(0) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = z_1 - z_1', \psi^{j+1} = r + \min(z_1, z_1 - z_1') - r'\right)$$

όπου $z_1' = z_1, z_1 - 1, \ldots, z_1 - Q$, $r' = r + z_1, \ldots, r - Q$.

Εάν $z_1, r \ge 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$, $z_1 + r \le Q$, $0 \le \theta \le Q$ τότε

$$p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(1_\theta) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta - z_1', \psi^{j+1} = Q - \theta + \min(\theta, \theta - z_1') - r'\right)$$

όπου $z_1' = \theta, \theta - 1, \ldots, \theta - Q$, $r' = Q, \ldots, -\theta$.

Εάν $z_1^- + r^- < 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$, $0 \le \theta \le Q + \min(z_1^-, r^-)$ τότε

$$p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(2_\theta) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta - z_1', \psi^{j+1} = Q - \theta + r^- + \min(\theta, \theta - z_1') - r'\right)$$

όπου $z_1' = \theta, \theta - 1, \ldots, \theta - Q$, $r' = Q + r^-, \ldots, -\theta + r^-$.

Εάν $z_1^- + r^- < 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$, $0 \le \theta' \le Q$ τότε

$$p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(3_{\theta'}) = \Pr\left(\xi_1^{j+1} = \theta' - z_1', \psi^{j+1} = Q - \theta + \min(\theta', \theta' - z_1') - r'\right)$$

όπου $z_1' = \theta', \theta' - 1, \ldots, \theta' - Q$, $r' = Q, \ldots, -\theta'$.

Εάν $z_1, r \ge 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$, $z_1 + r \le Q$ τότε

$$C((j, z_1, r), 0) = c_{j,j+1}$$

$$C((j, z_1, r), 1_\theta) = c_{j0} + c_{0,j+1} \ , \ 0 \le \theta \le Q.$$

Εάν $z_1^- + r^- < 0$, $|z_1| \le Q$, $|r| \le Q$ τότε

$$C((j, z_1, r), 2_\theta) = 2c_{j0} + c_{j,j+1} \ , \ 0 \le \theta \le Q + \min(z_1^-, r^-)$$

$$C((j, z_1, r), 3_{\theta'}) = 3c_{j0} + c_{0,j+1} \ , \ 0 \le \theta' \le Q.$$

Ως παράδειγμα παρουσιάζουμε το ακόλουθο.

Παράδειγμα 4.2

Ας υποθέσουμε ότι $N = 7$, $Q = 8$, $K = 1$. Παρακάτω δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $C = (c_{ij})$, $0 \le i, j \le 7$ του οποίου τα μηδενικά στοιχεία είναι το κόστος μετακίνησης $c_{j,j+1}$ μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ και του πελάτη $j+1$ και του κόστους ταξιδίου c_{j0} μεταξύ του πελάτη $j \in \{1, \ldots, 7\}$ και της αποθήκης. Παρατηρούμε ότι αυτά τα έξοδα ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 21 & 15 & 20 & 19 & 20 \\ 20 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 \\ 15 & 15 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 17 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 15 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 17 & 0 \\ 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 21 \\ 20 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε πελάτη $j \in \{1,\ldots,7\}$ η ζήτηση ξ_1^j για τα νέα αντικείμενα και η ποσότητα ψ^j των στοιχείων που επιστρέφονται είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0,1,\ldots,8\}$, δηλαδή $\Pr(\xi_1^j = x) = \Pr(\psi^j = x) = 1/9$, $x = 0,\ldots,8$. Ο αλγόριθμος των διαδοχικών προσεγγίσεων δεν συγκλίνει σε αυτό το παράδειγμα. Αυτό είναι λόγω περιοδικότητας (με περίοδο N) όλων των καταστάσεων του συστήματος κάτω από κάθε σταθερή πολιτική. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να παρακαμφτεί από τις πιθανότητες μετάβασης έτσι ώστε να υπάρξει μετάβαση από μια κατάσταση στον εαυτό της με μη μηδενική πιθανότητα. Συγκεκριμένα λαμβάνουμε τις ακόλουθες νέες πιθανότητες

$$\widetilde{p}_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(a) = \tau p_{(j,z_1,r)(j+1,z_1',r')}(a)$$

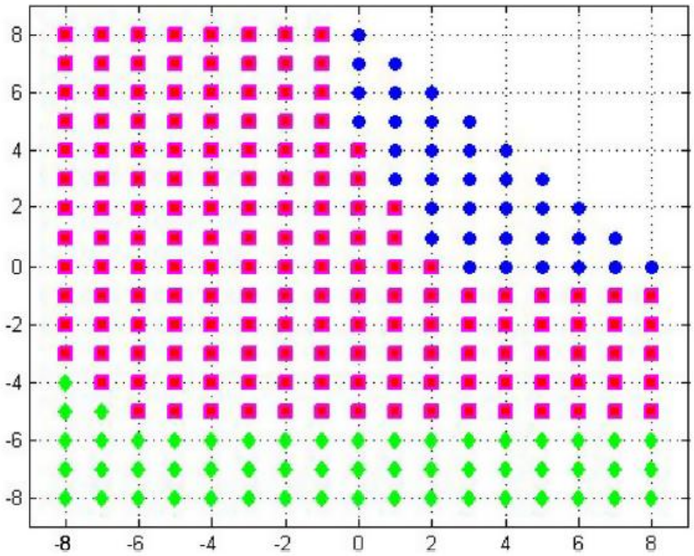
$$\widetilde{p}_{(j,z_1,r)(j,z_1,r)}(a) = 1 - \tau$$

όπου τ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \tau < 1$. Μια λογική επιλογή για την τιμή του τ είναι 0.5. Το διαταραγμένο μοντέλο έχει την ίδια βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους με το αρχικό μοντέλο. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των διαδοχικών προσεγγίσεων στο διαταραγμένο μοντέλο και επιλέγουμε $\varepsilon = 10^{-3}$. Ο αλγόριθμος συγκλίνει στη βέλτιστη πολιτική μετά από 56 επαναλήψεις. Ο απαιτούμενος χρόνος υπολογισμού ήταν 12.18 δευτερόλεπτα. Το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής είναι 44.67. Στον πίνακα 5 παρουσιάζουμε για κάθε πελάτη $j = 1,\ldots,7$ τους κρίσιμους αριθμούς $s_{1j}(z_1)$, $0 \le z_1 \le 8$, $s_{2j}(r)$, $-8 \le r \le -1$, r_j, q_j που αντιστοιχούν με τη βέλτιστη πολιτική μέσου κόστους.

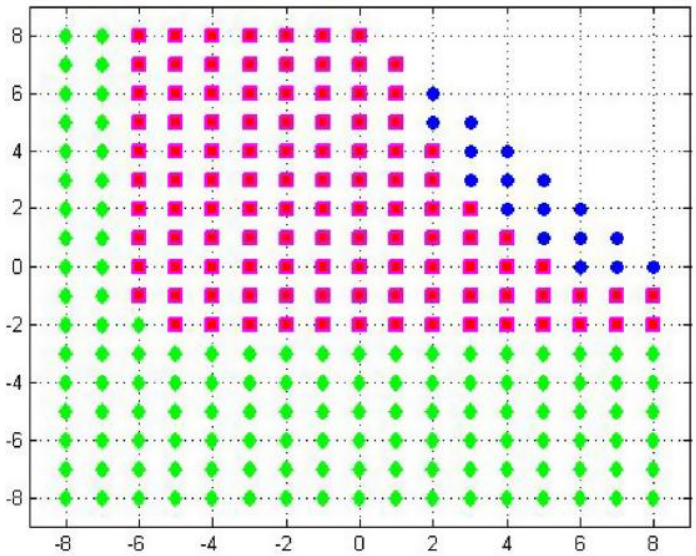
Customer j	$s_{1j}(z_1)$, $0 \leqslant z_1 \leqslant 8$, $s_{2j}(r)$, $-8 \leqslant r \leqslant -1$, r_j, q_j
1	$s_{11}(0) = 1, s_{11}(1) = \cdots = s_{11}(8) = 0,$ $s_{21}(-1) = \cdots = s_{21}(-7) = -9, s_{21}(-8) = -1, r_1 = -7, q_1 = -8$
2	$s_{12}(0) = 4, s_{12}(1) = 2, s_{12}(2) = 1, s_{12}(3) = \cdots = s_{12}(8) = 0,$ $s_{22}(-1) = \cdots = s_{22}(-4) = -9, s_{22}(-5) = -8, s_{22}(-6) = s_{22}(-7) = s_{22}(-8) = -1,$ $r_2 = -5, q_2 = -8$
3	$s_{13}(0) = \cdots = s_{13}(8) = 0$, $s_{23}(-1) = \cdots = s_{23}(-8) = -9$, $r_3 = -8$, $q_3 = -8$
4	$s_{14}(0) = 5, s_{14}(1) = 3, s_{14}(2) = 2, s_{14}(3) = 1, s_{14}(4) = \cdots = s_{14}(8) = 0,$ $s_{24}(-1) = s_{24}(-2) = s_{24}(-3) = -9, s_{24}(-4) = -8, s_{24}(-5) = \cdots = s_{24}(-8) = -1,$ $r_4 = -4, q_4 = -4$
5	$s_{15}(0) = 2, s_{15}(1) = \cdots = s_{15}(8) = 0,$ $s_{25}(-1) = s_{25}(-2) = -9, s_{25}(-3) = -8, s_{25}(-4) = \cdots = s_{25}(-7) = -6, s_{25}(-8) = -1,$ $r_5 = -7, q_5 = -8$
6	$s_{16}(0) = 5, s_{16}(1) = 3, s_{16}(2) = 1, s_{16}(3) = \cdots = s_{16}(8) = 0,$ $s_{26}(-1) = s_{26}(-2) = s_{26}(-3) = -9, s_{26}(-4) = -8, s_{26}(-5) = -7,$ $s_{26}(-6) = s_{26}(-7) = s_{26}(-8) = -1, r_6 = -5, q_6 = -8$
7	$s_{17}(0) = 9, s_{17}(1) = 8, s_{17}(2) = 5, s_{17}(3) = 3, s_{17}(4) = 2, s_{17}(5) = 1,$ $s_{17}(6) = s_{17}(7) = s_{17}(8) = 0,$ $s_{27}(-1) = 7, s_{27}(-2) = -6, s_{27}(-3) = \cdots = s_{27}(-8) = -1, r_7 = -2, q_7 = -6$

Πίνακας 5: Οι κρίσιμοι αριθμοί της βέλτιστης πολιτικής μέσου κόστους

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι τα **(i)** και **(iv)** του Θεωρήματος 4.1 επιβεβαιώνονται αριθμητικά δεδομένου ότι για $j \in \{1,\ldots,7\}$, $s_{1j}(z_1)$, $0 \le z_1 \le 8$, $s_{2j}(r)$, $-8 \le r \le -1$ είναι φθίνουσες στο z_1 και r αντίστοιχα. Στα σχήματα 17 και 18 παρουσιάζουμε τη βέλτιστη απόφαση για κάθε κατάσταση (z_1, r), $|z_1| \le 8$, $|r| \le 8$, $z_1 + r \le 8$ μετά την πρώτη επίσκεψη στον πελάτη 6 και στον πελάτη 7, αντίστοιχα.



Σχήμα 17: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη 6



Σχήμα 18: Οι βέλτιστες αποφάσεις μετά την 1η επίσκεψη στον πελάτη 7

Ο αλγόριθμος των διαδοχικών προσεγγίσεων μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα του προϊόντος 1 που φορτώνεται στο όχημα όταν επιστρέψει στην αποθήκη. Για παράδειγμα, στην κατάσταση $(j, z_1, r) = (6,3,-8)$ η βέλτιστη απόφαση είναι να μεταβεί το όχημα στην αποθήκη για να εκφορτώσει, να επιστρέψει στον πελάτη 6 για να παραλάβει τα υπόλοιπα 8 τεμάχια ληγμένου προϊόντος, κάνει ένα δεύτερο ταξίδι στην αποθήκη, ξεφορτώνει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, εφοδιάζετε με 7 νέα τεμάχια και έπειτα πηγαίνει στον πελάτη 7. Εάν η κατάσταση είναι $(j, z_1, r) = (7,-3,0)$ τότε η βέλτιστη απόφαση είναι να μεταβεί το όχημα στην αποθήκη για να εκφορτώσει τα επιστρεφόμενα προϊόντα, επιστρέφει στον πελάτη 7 για να παραδώσει την οφειλόμενη ποσότητα (3 τεμάχια προϊόντος) και στην συνέχεια προχωράει στον πελάτη 1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. BATHER J. (2000) Decision Theory: An Introduction to Dynamic Programming and Sequential Decisions, Wiley, Chichester.

[2]. BERTSIMAS D.J. (1992) A Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand, Operations Research 40, pp 574-585.

[3]. BERSTIMAS D.J. and HOWELL L.H. (1993) Further Results on the Probabilistic Traveling Salesman Problem, European Journal of Operational Research 65, pp 68-95.

[4]. BIANCHESSI N. and RIGHINI G. (2007) Heuristic Algorithms for the Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-up and Delivery, Computers and Operations Research 34, pp 578-594.

[5]. CHRISTOFIDES N. (1985) Vehicle Routing in the Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization, Wiley, Chichester, U.K, pp 431–448.

[6]. CLARKE G. and WRIGHT J.V. (1964) Scheduling of Vehicles from a Control Depot to a Number of Delivery Points, Operations Research 12, pp 568-581.

[7]. DROR M. and TRUDEAU P. (1986) Stochastic Vehicle Routing with Modified Savings Algorithm, European Journal of Operational Research 23, pp 228-235.

[8]. DROR M. (1992) Vehicle Routing with Uncertain Demands: Stochastic Programming and its Corresponding TSP Solution, European Journal of Operational Research 64, pp 432-441.

[9]. DROR M., LAPORTE G. and LOUVEAUX F.V. (1993) Vehicle Routing with Stochastic Demands and Restricted Failures, Operations Research 37, pp 273-283.

[10]. FISHER M. L. and JAIKUMAR R. (1981) A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing, Networks 11, pp 109-124.

[11]. FLOOD M.M. (1956) The Traveling Salesman Problem, Operations Research 4, pp 61-75.

[12]. FOSTER B. A. and RYAN D. (1976) An Integer Programming Approach to the Vehicle Scheduling Problem Operations Research 27, pp 367-384.

[13]. GENDREAU M., LAPORTE G. and SEGUIN R. (1995) An Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Customers and Demands, Transportation Science 29, pp 143-155.

[14]. GENDREAU M., LAPORTE G. and SEGUIN R. (1996) Stochastic Vehicle Routing, European Journal of Operational Research 88, pp 3-12.

[15]. JAILLET P. (1985) Probabilistic Traveling Salesman Problem, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

[16]. KYRIAKIDIS E.G. and DIMITRAKOS T.D. (2008) Single Vehicle Routing Problem with a Predefined Customer Sequence and Stochastic Continuous Demands, Mathematical Scientist 33, pp 148-152.

[17]. LAPORTE G., LOUVEAUX F.V. and MERCURE H. (1992) The Vehicle Routing Problem with Stochastic Travel Times, Transportation Science 26, pp 161-170.

[18]. LAPORTE G. (1992) The Vehicle Routing Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms, European Journal of Operational Research 59, pp 345-358.

[19]. MINIS I. and TATARAKIS A. (2011) Stochastic Single Vehicle Routing Problem with Delivery and Pickup and a Predefined Customer Sequence, European Journal of Operational Research 213, pp 37-51.

[20]. PANDELIS D.G., KYRIAKIDIS E.G. and DIMITRAKOS T.D. (2012) Single Vehicle Routing Problems with a Predefined Customer Sequence, Compartmentalized Load and Stochastic Demands, European Journal of Operational Research 217, pp 324-332.

[21]. PANDELIS D.G., KARAMATSOUKIS C.C. and KYRIAKIDIS E.G. (2013) Single Vehicle Routing Problems with a Predefined Customer Order, Unified Load and Stochastic Discrete Demands, Probability in the Engineering and Informational Sciences 27, pp 1-23.

[22]. ROSS S.M. (1992) Applied Probability Models with Optimization Applications, New York, Dover.

[23]. SECOMANDI N. and MARGOT F. (2009) Reoptimization Approaches for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands, Operations Research 57, pp 214-230.

[24]. TATARAKIS A. (2007) A Class of Single Vehicle Routing Problems with Predefined Customer Sequence and Depot Returns, Department of Financial and Management Engineering, University of the Aegean, Chios, Greece.

[25]. TATARAKIS A. and MINIS I. (2009) Stochastic Single Vehicle Routing with a Predefined Customer Sequence and Multiple Depot Returns, European Journal of Operational Research 197, pp 557-571.

[26]. TIJMS H.C. (1994) Stochastic Models: An Algorithmic Approach, Wiley, New York.

[27]. TILLMAN F. (1969) The Multiple Terminal Delivery Problem with Probabilistic Demands, Transportation Science 3, pp 192-204.

[28]. TSIRIMPAS P., TATARAKIS A., MINIS I. and KYRIAKIDIS E.G. (2008) Single Vehicle Routing with a Predefined Customer Sequence and Multiple Depot Returns, European Journal of Operational Research 187, pp 483-495.

[29]. YANG W.H. MAHTUR K., and BALLOU R.H. (2000) Stochastic Vehicle Routing Problem with Restocking, Transportation Science 34, pp 99-112.

[30]. ZACHARIADIS E.E., TARANTILIS C.D. and KIRANOUDIS C.T. (2010) An Adaptive Memory Methodology for the Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries, European Journal of Operational Research 202, pp 401-411.