ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Β. ΣΙΑΛΜΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2019

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Β. ΣΙΑΛΜΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2019

Επιβλέπων Καθηγητής
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Κ. ΤΣΙΧΛΙΑΣ

Η εργασία αυτή υποβλήθηκε από τον ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Β. ΣΙΑΛΜΑ ως μερική απαίτηση για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στον κλάδο ''Σπουδές στα Μαθηματικά''.

Στα αδέρφια μου
Χρυσούλα, Αλίκη και Αλέξανδρο.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η εργασία με τίτλο 'Διαφορικές Μορφές' έγινε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του Πανεπιστημίου Αιγαίου και αποτελεί τη μεταπτυχιακή μου διατριβή για την απόκτηση τίτλου Master στα Μαθηματικά.

Η Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των Καμπυλών και Επειφανειών του $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$ και ως κύριο εργαλείο χρησιμοποιεί τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Η εργασία που καθιέρωσε τη Διαφορική Γεωμετρία ως ανεξάρτητο κλάδο της Μαθηματικής Επιστήμης ήταν η "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (Γενική μελέτη των καμπυλών επιφανειών) του C. F. Gauss (1827) στην οποία αποδεικνυόταν το περίφημο Θεώρημα Egregium (Θαυμαστό Θεώρημα) σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων που δεν εξαρτώνται από τον περιβάλλοντα χώρο στον οποίο είναι εμβαπτισμένα. Το Θεώρημα αυτό οδήγησε αργότερα (1854) τον G. B. Riemann να θεωρήσει στην Υφηγεσία του, που παρουσιάσθηκε στο Πανεπιστήμιο του Gottingen αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία αργότερα ονομάστηκαν πολλαπλότητες τα οποία δεν ήταν αναγκαία εμβαπτισμένα σε κάποιο Ευκλείδιο χώρο.

Η θεωρία των Διαφορίσιμων Πολλαπλοτήτων, που στη συνέχεια αναπτύχθηκε, αποτελεί τη σύγχρινη μορφή της Διαφορικής Γεωμετρίας και είναι ένας από τους βασικούς άξονες έρευνας, τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Θεωρητική Φυσική.

Η εργασία αυτή ξεκινά με το εδάφιο που έχει τίτλο "Εισαγωγή" και στο οποίο παρουσιάζονται συνοπτικά γνώσεις από τοπολογία, απειροστικούς λογισμούς και άλγεβρα που απαιτούνται για την παρουσίαση του κύριου μέρους της διατριβής.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, ορίζονται οι έννοιες διαφορίσιμη πολλαπλότητα, διαφορίσιμη απεικονίση, εφαπτόμενο διάνυσμα,το διαφορικό μιας απεικόνισης, εμβάπτιση, εμφύτευση, υποπολλαπλότητα, διανυσματικό πεδίο, εφαπτόμενη δέσμη και αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελεσματα για τον διαμερισμό της μονάδας, επίσης για όλα τα παραπάνω δίνουμε διάφορα παραδείγματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγονται οι διαφορικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$ και σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και η εργασία ολοκληρώνεται με την απόδειξη του σημαντικού θεωρήματος που μετατρέπει διαφορικές k-μορφές σε διαφορικές $k+1$-μορφές.

Ευχαριστώ τον Επιβλέποντα Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Τσιχλιά καθώς και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής Κρίσης της μεταπτυχιακής διατριβής, Καθηγητές κ.κ. Ευστράτιο Πρασίδη και Χαράλαμπο Κορνάρο για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις και διορθώσεις στο κείμενο.

Επίσης, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για τη βοήθεια που μου παρείχαν καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου Βασίλειο και Μαρία, τα αδέρφια μου Χρυσούλα, Αλίκη και Αλέξανδρο καθώς και όλους μου τους φίλους για την απεριόριστη συμπαράστασή τους, χωρίς την οποία η εργασία αυτή θα ήταν αδύνατο να ολοκληρωθεί.

Εισαγωγή

Τοπολογία ή Τοπολογική δομή επι ενός συνόλου $X \neq \emptyset$ λέγεται μια οικογένεια υποσυνόλων T του X που ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:
(i) Το σύνολο X και το κενό σύνολο $\emptyset$ ανήκουν στην οικογένεια T
(ii) Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους συνόλων της T, ανήκει στην T. Δηλαδή αν $A_i \epsilon T$ τότε $\bigcup_{i\epsilon I} A_i \epsilon T$
(iii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της T ανήκει στην T. Δηλαδή αν $A_1, A_2, \cdots, A_k \epsilon T$ τότε $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \epsilon T$
Το ζεύγος (X, T) λέγεται τοπολογικός χώρος. Τα σύνολα της τοπολογίας T λέγονται ανοικτά σύνολα του X. Δηλαδή ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται ανοικτό αν και μόνο αν $A \epsilon T$. Ένα σύνολο $K \subseteq X$ λέγεται κλειστό αν και μόνο αν $K^c \epsilon T$.

Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται βάση για την τοπολογία T αν και μόνο αν:
• Κάθε ανοικτό σύνολο $A \epsilon T$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.
Ισοδύναμα λέμε πώς η $\mathcal{B} \subseteq T$ είναι μια βάση για την T αν και μόνο αν
• Για κάθε σημείο P που ανήκει σε κάποιο ανοικτό σύνολο $A \epsilon T$ υπάρχει $C \epsilon \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $P \epsilon C \subseteq A$.

Μια βάση $\mathcal{B}$ ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται αριθμήσιμη αν τα μέλη της $\mathcal{B}$ μπορούν να αριθμηθούν δηλαδή μπορούν να τεθούν σε αμφιμονότιμη απεικόνιση με τους φυσικούς αριθμούς.

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται T_2-χώρος ή χώρος Hausdorff αν για κάθε ζεύγος σημείων του $x, y \epsilon X$ με $x \neq y$ υπάρχουν περιοχές V_x και V_y των x και y αντίστοιχα με $V_x \cap V_y = \emptyset$.Για παράδειγμα οι Ευκλείδιοι τοπολογικοί χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ είναι χώροι Hausdorff.

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $K = \{X_i\}_{i\epsilon I}$ μια οικογένεια υποχώρων του X. Κάλυψη του χώρου X λέγεται η οικογένεια K αν $X \subseteq \bigcup_{i\epsilon I} X_i$ και ειδικότερα λέγεται:
• κλειστή κάλυψη αν κάθε μέλος της K είναι κλειστό σύνολο του X ή

• ανοικτή κάλυψη αν κάθε μέλος της K είναι ανοικτό σύνολο του X.

Αν μια πεπερασμένη υποκλάση της κλάσης $K = \{X_i\}_{i \epsilon I}$ είναι επίσης κάλυψη του X δηλαδή αν υπάρχουν $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik} \epsilon K$ τέτοια ώστε $X \subseteq X_{i1} \cup X_{i2} \cup \cdots \cup X_{ik}$ τότε λέμε ότι η κλάση K ανάγεται σε μια πεπερασμένη ανοικτή υποκάλυψη.

Ένας τοπολογικός χώρος (X, T) λέγαται συμπαγής όταν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Έστω A τυχαίο υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X ονομάζουμε εσωτερικό του A το σύνολο που είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X που περιέχονται στο A και το συμβολίζουμε με A^o.

Ονομάζουμε κάλυμμα ενός υποσυνόλου A του τοπολογικού χώρου X την τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του X τα οποία είναι υπερσύνολα του A και το συμβολίζουμε με $\bar{A}$.

Ονομάζουμε σύνορο του A το $\partial A = \bar{A} - A^o$. Ένα σύνορο A θα λέγεται πυκνό στο T όταν το $\bar{A} = X$.

Έστω ένας τοπολογικός χώρος X με τοπολογία T και $Y \subseteq X$ στο Y ορίζουμε μια τοπολογία $T^{'}$ ως εξής $T^{'} = \{A \cap Y : A \epsilon T\}$. Η $T^{'}$ λέγεται σχετική τοπολογία ή επαγώμενη τοπολογία στο Y. Ο τοπολογικός χώρος Y λέγεται τοπολογικός υπόχωρος ή απλά υπόχωρος του τοπολογικού χώρου X.

Έστω A υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X. Το A θα λέγεται συμπαγές όταν το A είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία από το X.

Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff τότε και κάθε τοπολογικός υποχωρός του είναι Hausdorff.

Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται συνεκτικός όταν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δυο ξένων μη κενών ανοικτών συνόλων.

Έστω ένα μη κενό σύνολο X. Μια μετρική στο X είναι μια συνάρτηση

$$d : X \times X \longrightarrow R$$

η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:
(i) $d(x, y) \geq 0$, για κάθε $x, y \epsilon X$.
(ii) $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
(iii) (συμμετρική ιδιότητα) $d(x, y) = d(y, x)$, για κάθε $x, y \epsilon X$.
(iv) (τριγωνική ιδιότητα) Για κάθε $x, y, z \epsilon X$ ισχύει: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Το ζευγάρι (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος και τα στοιχεία ενός μετρικού χώρου ονομάζονται σημεία του μετρικού χώρου. Αν $x, y \epsilon X$ ο αριθμός $d(x, y)$ λέγεται και η απόσταση του x από το y.

Έστω X ένας μετρικός χώρος και θεωρούμε στο X την οικογένεια $\mathcal{B}$ η οποία περιέχει τις ανοικτές μπάλες $B(m, r) = \{x \epsilon X : d(x, m) \leq r\}$ δηλαδή με κέντρο $m \epsilon X$ και ακτίνα $r \geq 0$. Από την $\mathcal{B}$ προκύπτει μια τοπολογία η οποία έχει ως βάση τοπολογίας την $\mathcal{B}$. Αυτή την τοπολογία την ονομάζουμε μετρική τοπολογία.

Για τον $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \epsilon \mathbb{R}\}$ ορίζουμε $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

η d είναι μια απόσταση και ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με αυτή την απόσταση είναι μετρικός χώρος. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τη μετρική τοπολογία την οποία θα την ονομάζουμε συνήθη τοπολογία ή ευκλείδια τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ θα λέγεται ευκλείδιος χώρος.

Έστω X, Y δυο τοπολογικοί χώροι και θεωρούμε E, F ανοικτά σύνολα των X και Y αντίστοιχα. Έστω $\mathcal{B}$ η οικογένεια όλων των $E \times F$, από την $\mathcal{B}$ προκύπτει μια τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ η οποία έχει ως μια βάση της την $\mathcal{B}$. Την τοπολογία αυτή την ονομάζουμε τοπολογία γινόμενο στον $X \times Y$.

Αν $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ είναι δύο βασείς των τοπολογικών χώρων X, Y αντίστοιχα τότε η οικογένεια που περιέχει όλα τα σύνολα της μορφής $U \times V$ με $U \epsilon \mathcal{B}_1, V \epsilon \mathcal{B}_2$ είναι μια βάση της τοπολογίας γινόμενο στον $X \times Y$.

Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και A μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \epsilon A$ η απεικόνιση $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ λέγεται συνεχής συνάρτηση στο σημείο x όταν για κάθε περιοχή V του σημείου $f(x)$ υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$. Όταν η f είναι συνεχής για κάθε $x \epsilon A$ θα λέγεται συνεχής συνάρτηση. Ισχύει ότι η $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής συνάρτηση αν και μόνο αν η $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε ανοικτό V του Y.

Η $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ λέγεται ανοικτή όταν για κάθε ανοικτό σύνολο του X το $f(U)$ είναι ανοικτό του Y.

Μια $f : X \longrightarrow Y$ θα λέγεται ομοιομορφισμός όταν είναι 1-1, επί, συνεχής και ανοικτή. Το ανοικτή σε αυτή την περίπτωση είναι ισοδύναμο με το ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Έστω $X_1, X_2, \cdots, X_n$ τοπολογικοί χώροι και ο τοπολογικός χώρος $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ με την τοπολογία γινόμενο τότε ονομάζουμε προβολή π_i την απεικόνιση $\pi_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i$ με τύπο $\pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$ όπου $i = 1, 2, \cdots, n$. Οι προβολές είναι συνεχείς απεικονίσεις.

Έστω X, X_1, Y, Y_1 τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow X_1, g : Y \longrightarrow Y_1$ ομοιομορφισμοί τότε η απεικόνιση $f \times g : X \times Y \longrightarrow X_1 \times Y_1$ είναι ομοιομορφισμός με τύπο $(f \times g)(P, Q) = (f(P), g(Q))$.

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X τότε η συνάρτηση $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ θα λέγεται συνεχής όταν η $f : A \longrightarrow Y$ είναι συνεχής, σε αυτή την περίπτωση το A ορίζεται με τη σχετική τοπολογία του χώρου X.

Έστω η απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ η οποία είναι συνεχής και $A \subseteq X$ τότε $f|_A : A \longrightarrow Y$ είναι συνεχής απεικόνιση.

Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_i = \pi_i \circ f$ όπου $i = 1, 2, \cdots, n$ είναι συνεχείς.

Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Έστω ότι το A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο ενός τοπολογικου χώρου X και $f : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής απεικόνιση τότε η εικόνα $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Έστω ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\bar{a} \epsilon A$. Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar{a} \epsilon A$ αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ και αν η συνάρτηση $\varphi(\bar{h}) = f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i$ η οποία ορίζεται $\forall \bar{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$ με $(\bar{a} + \bar{h}) \epsilon A$ πληρεί την σχέση $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0$.

Έστω ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε αν $x_0 \epsilon A$ η f θα λέγεται διαφορίσιμη k-τάξεως στο x_0 ή ότι είναι C^k στο x_0 όταν υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι k-τάξεως και είναι συνεχείς με το $k = 1, 2, \cdots$.

Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη k-τάξεως σε κάθε σημείο του συνόλου A τότε θα λέγεται διαφορίσιμη k-τάξεως στο σύνολο A. Στην περίπτωση όπου το $k = \infty$ η συνάρτηση f θα λέγεται διαφορίσιμη ή λεία.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ θα λέγεται διαφορίσιμη ή λεία όταν οι συναρτήσεις $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες ή λείες όπου η $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$ και $i = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω A, B ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα λέγεται αμφιδιαφόριση αν είναι 1-1, επί, διαφορίσιμη ή λεία και η αντιστροφή της είναι επίσης διαφορίσιμη ή λεία. Σε αυτή την περίπτωση τα σύνολα A, B θα λέγονται αμφιδιαφορικά.

Η σύνθεση διαφορίσιμων ή λείων συναρτήσεων είναι διαφορίσιμη ή λεία συνάρτηση. Επίσης ο περιορισμός μιας διαφορίσιμης ή λείας συνάρτησης σε ένα ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους είναι διαφορίσιμη ή λεία συνάρτηση.

Αν P είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της διαφορίσιμης ή λείας συνάρτησης $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ τότε ορίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα της f στο σημείο P

να είναι ο πίνακας:

$$\mathcal{J}_P(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_P & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_P & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}|_P \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_P & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_P & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}|_P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m}|_P & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}|_P & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}|_P \end{pmatrix}$$

Μια διαφορίσιμη ή λεία απεικόνιση $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται τοπική αμφιδιαφόριση αν για κάθε $P \epsilon A$ υπάρχει περιοχή U του P τέτοια ώστε η $f|_U$ περιορισμένη στο U να είναι αμφιδιαφόριση επι του $f(U)$.

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ θα λέγεται τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \epsilon A$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $A = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : \|\bar{x} - \bar{\xi}\| < \delta\}$ τότε η $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ να είναι 1-1.

(Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$). Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη ή λεια απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και έστω $P \epsilon A$. Τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο P αν και μόνο αν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μη μηδενικη δηλαδή $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \neq 0$.

(Πρώτο θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων). Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη ή λεια απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^m$ με $m \leq n$, $0 \epsilon A$ και $f(0) = 0$. Αν ο Ιακωβιανος πίνακας της f έχει μέγιστη βαθμίδα στο σημείο 0 (δηλαδή m) τότε υπάρχει αμφιδιαφόριση g γύρω από το 0 έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(g \circ f)(x) = i(x)$ όπου $i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο $i(x_1, x_2, \cdots, x_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0)$ (δηλαδή υπάρχουν $n - m$ μηδενικά).

(Δεύτερο θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων). Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια διαφορίσιμη ή λεια απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^m$ με $m \leq n$, $0 \epsilon A$ και $f(0) = 0$. Αν ο Ιακωβιανος πίνακας της f έχει μέγιστη βαθμίδα στο σημείο 0 (δηλαδή n) τότε υπάρχει αμφιδιαφόριση g γύρω από το 0 έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(f \circ g)(x) = \pi(x)$ όπου $\pi(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

Σώμα είναι ένα σύνολο K εφοδιασμένο με δύο πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα σώματος:
1. Αξιώματα της πρόσθεσης:
(α1) Εάν $a, b \epsilon K$ τότε $(a + b) \epsilon K$.
(α2) Η πρόσθεση είναι μεταθετική: $a + b = b + a, \forall a, b \epsilon K$.
(α3) Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \epsilon K$.
(α4) Το K περιέχει ένα στοιχείο το 0, έτσι ώστε $0 + a = a, \forall a \epsilon K$.
(α5) Σε κάθε στοιχείο $a \epsilon K$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $(-a) \epsilon K$ έτσι ώστε $a + (-a) = 0$.

2. Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:
(β1) Εάν $a, b \epsilon K$ τότε $(a \cdot b) \epsilon K$.
(β2) Ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \epsilon K$.
(β3) Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \epsilon K$.
(β4) Το K περιέχει ένα στοιχείο το 1 με $1 \neq 0$ έτσι ώστε $1 \cdot a = a, \forall a \epsilon K$.
(β5) Σε κάθε $a \epsilon K$ με $a \neq 0$ αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο $\frac{1}{a} \epsilon K$ έτσι ώστε $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
3. Επιμεριστικός νόμος:
(γ1) Για οποιαδήποτε $a, b, c \epsilon K$ ισχύει ότι $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ένα μη κενό σύνολο V πάνω στο σώμα K θα ονομάζεται διανυσματικός ή γραμμικός χώρος και θα συμβολίζεται με $V(K)$, εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:
1. Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία $x, y \epsilon V$ μοναδικά καθορίζεται ένα τρίτο στοιχείο το $(x + y) \epsilon V$ που ονομάζεται άθροισμα των x, y. Για την διανυσματική πρόσθεση ισχύουν:
(α) $x + y = y + x, \forall x, y \epsilon V$ (μεταθετικότητα).
(β) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \epsilon V$ (προσεταιριστικότητα).
(γ) Υπάρχει στοιχείο $0 \epsilon V$ που ονομάγεται μηδενικό στοιχείο και έχει την ιδιότητα $x + 0 = x, \forall x \epsilon V$.
(δ) Για κάθε στοιχείο του V υπάρχει το στοιχείο $(-x)$, που ονομάζεται αρνητικό ή αντίθετο του x και έχει την ιδιότητα $x + (-x) = 0$.
2. Για οποιαδήποτε $a \epsilon K, x \epsilon V$ μοναδικά καθορίζεται το στοιχείο $(a \cdot x) \epsilon V$ το οποίο ονομάζεται γινόμενο των a και x. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμος ικανοποιεί τις σχέσεις:
(α) $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x, \forall a, b \epsilon K, x \epsilon V$.
(β) $1 \cdot x = x, x \epsilon V$.
3. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης ικανοποιούν τους νόμους:
(a) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \forall a, b \epsilon K, x \epsilon V$.
(β) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \forall a \epsilon K, x, y \epsilon V$.

Από τον παραπάνω ορισμό οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η διανυσματική πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι απεικονίσεις:

$$V \times V \longrightarrow V, K \times V \longrightarrow V.$$

Όταν το σώμα $K = \mathbb{R}$ ή $K = \mathbb{C}$ τότε μλάμε για πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο αντίστοιχα.

Ορίζουμε σαν υπόχωρο ενός δινυσματικού χώρου ένα μη κενό υποσύνολο U του V για το οποίο $(au_1 + bu_2) \epsilon U, \forall a, b \epsilon K, u_1, u_2 \epsilon U$. Ο U είναι διανυσματικός χώρος με αλγεβρικές πράξεις αυτές που επάγονται από τον V.

Έστω V διανυσματικός χώρος και $x_1, x_2, \cdots, x_k \epsilon V$. Ένα διάνυσμα $x \epsilon V$ θα λέγεται γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων $x_1, x_2, \cdots, x_k$ εάν υπάρχουν βαθμωτές ποσότητες $a_1, a_2, \cdots, a_k \epsilon K$ τέτοιες ώστε:

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k.$$

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδιασμών των διανυσμάτων ενός μη κενού υποσυνόλου $M \subseteq V$ ονομάζεται span του M και συμβολίζεται με span$M$. Συμβολικά γράφουμε:

$$spanM = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k : x_1, x_2, \cdots, x_k \epsilon M, a_1, a_2, \cdots, a_k \epsilon K, k \epsilon \mathbb{N}\}$$

Μια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ θα λέγεται γραμμικά ανεξάρτητη εάν η

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = 0$$

ισχύει για $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.
Η πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ θα λέγεται γραμμικά εξαρτημένη όταν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq V$ θα ονομάζεται βάση του V εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και span$\mathcal{B} = V$.

Εάν υπάρχει μια πεπερασμένη βάση στον V τότε ο V θα ονομάζεται διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Διαφορετικά θα λέμε ότι ο V είναι διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης. Εάν μια βάση έχει n διανύσματα τότε και οποιαδήποτε άλλη βάση θα έχει ακριβώς n διανύσματα και το n ονομάζεται διάσταση του V και θα γράφουμε $\dim V = n$.

Έστω V ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος. Τότε οποιοσδήποτε υπόχωρος U του V έχει διάσταση μικρότερη από n.

Ένας ισομορφισμός T ενός διανυσματικού χώρου V σε ένα διανυσματικό χώρο $\tilde{V}$ πάνω στο ίδιο σώμα K είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί τις δύο αλγεβρικές πράξεις του διανυσματικού χώρου δηλαδή

$$T(x + y) = Tx + Ty, T(ax) = aTx, \forall x, y \epsilon V, a \epsilon K.$$

Ο $\tilde{V}$ τότε ονομάζεται ισόμορφος του V και οι V και $\tilde{V}$ ονομάζονται ισόμορφοι διανυσματικοί χώροι.

Η απεικόνιση f ενός διανυσματικού χώρου $V(K)$ σε ένα διανυσματικό χώρο $\tilde{V}(K)$, $f : V \longrightarrow \tilde{V}$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός (ή γραμμική απεικόνιση) αν και μόνο αν

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \forall a, b\epsilon K, \forall x, y\epsilon V.$$

Στην περίπτωση που έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε την ονομάζουμε γραμμική μορφή. Έστω V^* να είναι το σύνολο όλων των γραμικών μορφών του διανυσματικού χώρου V τότε ορίζουμε
$+ : V^* \times V^* \longrightarrow V^*, (f + g) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x\epsilon V$
$\cdot : \mathbb{R} \times V^* \longrightarrow V^*, (\lambda f) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x\epsilon V$
Ο V^* εφοδιασμένος με τις πράξεις $+, \cdot$ είναι ένας διανυσματικός χώρος ίδιας διάστασης με τον V.
Αν $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ μια βάση του V τότε μια βάση του V^* είναι η $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ όπου

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad i = j \\ 0, & \alpha\nu \quad i \neq j \end{cases}$$

Ο χώρος V^* ονομάζεται δυϊκός χώρος του V και η βάση $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ ονομάζεται δυϊκή βάση της $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Η S_n θα λέγεται ομάδα μεταθέσεων n-στοιχείων αν η απεικόνιση $\sigma\epsilon S_n$ με $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$ είναι 1-1 και επί.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Για την τάξη της S_n έχουμε:
για την εικόνα του 1 υπάρχουν n-τιμές $\{1, 2, \cdots, n\}$
για την εικόνα του 2 υπάρχουν $n - 1$-τιμές $\{1, 2, \cdots, n\} - \{\sigma(1)\}$
για την εικόνα του 3 υπάρχουν $n - 2$-τιμές $\{1, 2, \cdots, n\} - \{\sigma(1), \sigma(2)\}$
$\ldots$
για την εικόνα του n υπάρχει 1-τιμή $\{1, 2, \cdots, n\} - \{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n - 1)\}$
Άρα το πλήθος των διαφορετικών $\sigma\epsilon S_n$ είναι $n(n - 1) \cdots 1 = n!$.

Σύνθεση (γινόμενο) μεταθέσεων: Αν έχουμε $\sigma, \tau\epsilon S$ με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

τότε η σύνθεση δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

Κάνοντας την παραπάνω πράξη με τη σύνθεση καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο:

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma\circ\tau(1) & \sigma\circ\tau(2) & \sigma\circ\tau(3) & \cdots & \sigma\circ\tau(n) \end{pmatrix}$$

Εν γένη γνωρίζουμε ότι $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

Η τάξη ενός στοιχείου $\sigma \epsilon S_n$ είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός $n \epsilon \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\sigma^n = e$ όπου $e \epsilon S_n$ και έχει την μορφή:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Αν έχουμε μια μετάθεση $\sigma \epsilon S_n$ τότε η $\sigma^{-1} \epsilon S_n$ είναι η αντιστροφή της. Επίσης, αν $\sigma(i) = i$ για κάποιο $i \epsilon \{1, 2, \cdots, n\}$ τότε την τιμή στο i συνήθως την παραλείπουμε.

Δηλαδή αν $\sigma \epsilon S_3$ με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ένας κύκλος μήκους k είναι μια μετάθεση $\sigma \epsilon S_n$ της μορφής $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(m) = m, \forall m \epsilon \{1, 2, \cdots, n\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ και γράφεται ως $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_k)$.

Ένας κύκλος μήκους 2 ονομάζεται αντιμετάθεση. Δηλαδή μια αντιμετάθεση στο S_n είναι της μορφής:

$$(ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Έστω δύο κύκλοι $\sigma, \tau \epsilon S_n$ θα λέγονται ξένοι μεταξύ τους αν και μόνο αν ισχύει $\{m : \sigma(m) = m\} \cap \{m : \tau(m) = m\} = \emptyset$. Δηλαδή αν έχουμε $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_k)$ και $\tau = (b_1 b_2 \cdots b_n)$ είναι ξένοι κύκλοι όταν $\{a_1 a_2 \cdots a_k\} \cap \{b_1 b_2 \cdots b_n\} = \emptyset$.

Έστω δύο κύκλοι $\sigma, \tau \epsilon S_n$ ξένοι μεταξύ τους τότε ισχύει ότι $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ δηλαδή μετατίθενται μεταξύ τους.

Κάθε κύκλος γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων και επίσης κάθε μετάθεση σαν γινόμενο ξένων κύκλων οπότε από τις δύο αυτές προτάσεις μπορούμε να συμπέρανουμαι την ακόλουθη πρόταση ότι κάθε μετάθεση γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Άρτια είναι μια μετάθεση που γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων.

Περιττή είναι μια μετάθεση που γράφεται ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από τα θέματα που αναφέρονται στην εισαγωγή παραπέμπτουμε τον αναγνώστη στις αναφορές ([5], [10], [11], [12], [13], [14]).

Κεφάλαιο 1

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Συγκεκριμένα στην παράγραφο 1.1 δίνεται ο ορισμός της διαφορίσιμης πολλαπλότητας καθώς και παραδείγματα που αποτελούν διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Στην παράγραφο 1.2 ορίζουμε την έννοια της διαφορισιμότητας μεταξύ πολλαπλοτήτων και δίνουμε τον ορισμό των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε μια πολλαπλότητα.

Στην παράγραφο 1.3 ορίζουμε το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Στην παράγραφο 1.4 δίνουμε τους ορισμούς εμβάπτισης, εμφύτευσης και υποπολλαπλότητας.

Στην παράγραφο 1.5 δίνουμε τον ορισμό της εφαπτόμενης δέσμης.

Στην παράγραφο 1.6 ορίζουμε τα διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες.

Στην παράγραφο 1.7 αναφερουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για τον διαμερισμό της μονάδας.

1.1 Ορισμός και παραδείγματα

Με $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε τον n-διάστατο διανυσματικό χώρο διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών με τη συνήθη τοπολογία. Κατά συνέπεια θα γράφουμε $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.1 *Μια n-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff M με αριθμήσιμη βάση τοπολογίας και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*
(1) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_a\}_{a\epsilon I}$ του M ώστε

$$\bigcup_{a\epsilon I} U_a = M,$$

και αντίστοιχα ομοιομορφισμός

$$\varphi_a : U_a \longrightarrow \varphi(U_a) \subset \mathbb{R}^n.$$

Το ζεύγος (U_a, φ_a) ονομάζεται χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων του M.
(2) Για κάθε δυάδα $a, b\epsilon I$ με $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, οι απεικονίσεις

$$\varphi_a \circ \varphi_b^{-1} \quad \textit{και} \quad \varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$$

είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.
(3) Η οικογένεια χαρτών $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a\epsilon I}$ είναι μέγιστη δηλαδή αν U είναι ανοικτό υποσύνολο του M και $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ομοιομορφισμός έτσι ώστε οι απεικονίσεις $\varphi_a \circ \varphi^{-1}$ και $\varphi \circ \varphi_a^{-1}$ να είναι C^∞-διαφορίσιμες για κάθε $a\epsilon I$, τότε ο χάρτης (U, φ) ανήκει στην οικογένεια $\{U_a\}_{a\epsilon I}$ του M.

Μια διαφορίσιμη πολαπλότητα M διάστασης n έχει λοιπόν τοπικά, και μόνο τοπικά τις περισσότερες φορές, την τοπολογική δομή του $\mathbb{R}^n$.

Κάθε οικογένεια $\{(U_a, \varphi_a)\}_{a\epsilon I}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) ονομάζεται άτλας του M. Προσαρτώντας σε έναν άτλαντα όλους τους χάρτες (U, φ) της μορφής που περιγράφεται στην συνθήκη (3), αποκτούμε μια μέγιστη οικογένεια χαρτών, η οποία ονομάζεται διαφορική δομή του M.

Η απεικόνιση

$$\varphi_a \circ \varphi_b^{-1} : \varphi_b(U_a \cap U_b) \longrightarrow \varphi_a(U_a \cap U_b)$$

καθώς και η

$$\varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : \varphi_a(U_a \cap U_b) \longrightarrow \varphi_b(U_a \cap U_b)$$

ως συνθέσεις ομοιομορφισμών είναι ομοιομορφισμοί μεταξύ των ανοικτών υποσυνόλων $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ και $\varphi_b(U_a \cap U_b)$ του $\mathbb{R}^n$. Αυτές οι απεικονίσεις περιγράφονται αναλυτικά με εξισώσεις της μορφής

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n = f_n(x_1, \cdots, x_n)$$

όπου $f_1, \cdots, f_n$ είναι λείες συναρτήσεις δηλαδή C^∞-διαφορίσιμες.

Από εδώ και στο εξής όταν λέμε διαφορίσιμη αυτό θα σημαίνει C^∞-δαιφορίσιμη και επίσης θα γράφουμε M^n αντί M όταν χρειάζεται να υποδείξουμε ότι η διάσταση του M είναι n. Ακόμη πολλές φορές θα λέμε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα απλώς πολλαπλότητα.

Έστω $p \epsilon U_a$ και $\varphi_a(p) = (x_1, \cdots, x_n)$ η διατεταγμένη n-άδα $x = (x_1, \cdots, x_n)$ θα ονομάζονται οι συντεταγμένες του σημείου p στον χάρτη (U_a, φ_a). Στην περίπτωση όπου το πεδίο ορισμού U_a του χάρτη (U_a, φ_a) δεν έχει σημασία θα μιλάμε πέρι συστήματος τοπικών συντεταγμένων $(x_1, \cdots, x_n)$ του M^n.

Παράδειγμα 1.1.1

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \epsilon \mathbb{R}\}$ με τη συνήθη τοπολογία, καλύπτεται με έναν μόνο χάρτη $U = \mathbb{R}^n, \varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$ όπου $Id_{\mathbb{R}^n}$ = ταυτοτική απεικόνιση, άρα είναι μία πολλαπλότητα διάστασης n.

Παράδειγμα 1.1.2

Έστω M^n μια πολλαπλότητα με άτλαντα $\{(U_a, \varphi_a) : a \epsilon I\}$ και έστω V ένα ανοικτό υποσύνολο της M^n. Τότε και ο V είναι πολλαπλότητα διάστασης n, αφού μπορούμε να ορίσουμε στο V έναν άτλαντα με περιορισμό των χαρτών (U_a, φ_a) στο V, δηλαδή $\left\{(U_a \cap V, \varphi_a|_{U_a \cap V})\right\}$.

Παράδειγμα 1.1.3

Το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ όλων των $m \times n$ πραγματικών πινάκων (a_{ij}) είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης mn. Ταυτίζουμε το $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ με τον $\mathbb{R}^{mn}$ μέσω της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης

$$(a_{ij}) \longrightarrow (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}).$$

Με αυτό τον τρόπο το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ γίνεται διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης mn.

Παράδειγμα 1.1.4

Το σύνολο $GL_n\mathbb{R} = \{A\epsilon M_{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\} = det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, (a_{ij}) \longrightarrow det(a_{ij}),$$

είναι συνεχής και το $GL_n\mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού υποσυνόλου $\mathbb{R} - \{0\}$. Επομένος σύμφωνα με το παράδειγμα 1.1.2 είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα διαστάσεως n^2.

Παράδειγμα 1.1.5

Έστω M^m διαφορίσιμη πολλαπλότητα με (U, φ) ένας χάρτης της και N^n διαφορίσιμη πολλαπλότητα με (V, ψ) ένας χάρτης της τότε το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ με χάρτη $(U \times V, \varphi \times \psi)$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα διαστάσεως $m+n$. Ως αποτέλεσμα, ο δακτύλιος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$ και ο κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 1.1.6

Έστω $M = \mathbb{R}$ και U=R τότε η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(t) = t \tag{1.1}$$

είναι προφανώς ομοιομορμισμός. Συνεπώς το ζεύγος (U, φ) ορίζει ένα χάρτη του $\mathbb{R}$. Ο χάρτης (U, φ) και όλοι οι χάρτες που είναι συμβιβαστοί με αυτόν ορίζουν ένα μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}$ στον $\mathbb{R}$, δηλαδή μια διαφορίσιμη δομή στον $\mathbb{R}$. Άρα ο $M = \mathbb{R}$ εφοδιασμένος με τον $\mathcal{A}$ είναι μια 1-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα.
Έστω $M = \mathbb{R}$ και V=R τότε η απεικόνιση $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\psi(t) = t^3 \tag{1.2}$$

είναι ομοιομορφισμός (η αντίστροφη $\psi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\psi^{-1}(t) = t^{1/3}$). Συνεπώς το ζεύγος (V, ψ) ορίζει ένα χάρτη του $\mathbb{R}$. Ο χάρτης (V, ψ) και όλοι οι χάρτες που είναι συμβιβαστοί με αυτόν ορίζουν ένα μέγιστο άτλαντα $\mathcal{B}$ στον $\mathbb{R}$, δηλαδή μια διαφορίσιμη δομή στον $\mathbb{R}$. Άρα ο $M = \mathbb{R}$ εφοδιασμένος με τον $\mathcal{B}$ είναι μια 1-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα.
Η απεικόνιση $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(\varphi \circ \psi^{-1})(t) = \varphi(\psi^{-1}(t)) = \varphi(t^{1/3}) = t^{1/3}$$

δεν είναι διαφορίσιμη.
Η απεικόνιση $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(t) = \psi(\varphi^{-1}(t)) = \psi(t) = t^3$$

είναι διαφορίσιμη.
Άρα οι χάρτες (U, φ) και (V, ψ) δεν είναι συμβιβαστοί.
Κατασκευάσαμε με αυτό τον τρόπο δύο διαφορετικές διαφορίσιμες πολλαπλότητες διάστασης 1 ξεκινώντας από τον ίδιο τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}$. Από το παράδειγμα αυτό συμπεραίνουμε ότι σε ένα τοπολογικό χώρο μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 1.1.7

Θεωρούμε την 2-διάστατη μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{1.3}$$

με την επαγώμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^3$. Κατασκευάζουμε έναν άτλαντα της $\mathbb{S}^2$ αποτελούμενο από δύο χάρτες ως εξής. Έστω ότι φ, ψ είναι οι στερεογραφικές προβολές από το Βόρειο πόλο $B = (0, 0, 1)$ και το Νότιο πόλο $N = (0, 0, -1)$ αντίστοιχα της $\mathbb{S}^2$ στο επίπεδο $z = 0$. Τότε οι απεικονίσεις αυτές είναι οι εξής:

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \mu\varepsilon \quad U = \mathbb{S}^2 - B \tag{1.4}$$

$$\psi : V \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \mu\varepsilon \quad V = \mathbb{S}^2 - N \tag{1.5}$$

Για την απεικόνιση (1.4) έχουμε:
Έστω το σημείο $P(x, y, z)$ που ανήκει πάνω στη σφαίρα και το επίπεδο Oxy. Το $\overrightarrow{BP}$ κόβει την σφαίρα και συναντάει το επίπεδο $z = 0$ στο σημείο $\varphi(P) = Q(X, Y, 0)$. Επειδή το $\overrightarrow{BP}$ και το $\overrightarrow{BQ}$ είναι παράλληλα τότε υπάρχει λ τέτοιο ώστε
$\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BQ}$ οπότε

$$\begin{aligned}
&(x - 0, y - 0, z - 1) = \lambda(X - 0, Y - 0, 0 - 1) \Rightarrow \\
&(x, y, z - 1) = \lambda(X, Y, -1) \Rightarrow \\
&\lambda = 1 - z
\end{aligned}$$

άρα

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right) \tag{1.6}$$

Θεωρούμε το σημείο $N = \varphi^{-1}(u, v) = (x, y, z)\epsilon\mathbb{S}^2$ και $T(u, v, 0)$ το σημείο στο οποίο η προέκταση της $\overrightarrow{BN}$ τέμνει στο επίπεδο $z = 0$. Επειδή το $\overrightarrow{BN}$ και το $\overrightarrow{BT}$ είναι παράλληλα τότε υπάρχει λ τέτοιο ώστε
$\overrightarrow{BN} = \lambda\overrightarrow{BT}$ οπότε

$$\begin{aligned}&(x-0, y-0, z-1) = \lambda(u-0, v-0, 0-1) \Rightarrow\\&(x, y, z-1) = \lambda(u, v, -1)\end{aligned}$$

από την (1.3) έχουμε ότι $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2u^2 + \lambda^2v^2 + (1-\lambda)^2 = 1$, οπότε λύνοντας ως πρός λ παίρνουμε $\lambda = \frac{2}{u^2+v^2+1}$ για $\lambda \neq 0$, διότι αν $\lambda = 0$ τότε προκύπτει το σημείο $B = (0, 0, -1)$ που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της φ
άρα

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) \tag{1.7}$$

Για την απεικόνιση (1.5) έχουμε:
Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}\right) \tag{1.8}$$

και

$$\psi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}\right) \tag{1.9}$$

Επομένως η απεικόνιση φ είναι ομοιομορμισμός και το ζεύγος (U, φ) είναι ένας χάρτης της $\mathbb{S}^2$, το ίδιο ισχύει και για την απεικόνιση ψ είναι ομοιομορφισμός και το ζεύγος (V, ψ) είναι ένας χάρτης της $\mathbb{S}^2$. Εξετάζουμε τώρα αν οι απεικονίσεις $\varphi \circ \psi^{-1}$ και $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.
Για την $\varphi \circ \psi^{-1}$ έχουμε απο τις σχέσεις (1.6) και (1.9)

$$(\varphi \circ \psi^{-1})(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \tag{1.10}$$

όπου $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ είναι C^∞ διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
Για την $\psi \circ \varphi^{-1}$ έχουμε απο τις σχέσεις (1.7) και (1.8)

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right) \tag{1.11}$$

όπου $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ είναι C^∞ διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
Άρα λοιπόν οι χάρτες (U,φ) και (V,ψ) είναι συμβατοί και κατά συνέπεια ανήκουν στον ίδιο μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}^*$. Επομένως η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εφοδιασμένη με το μέγιστο αυτό άτλαντα $\mathcal{A}^*$ γίνεται μια 2-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Παράδειγμα 1.1.8

Στο προηγούμενο παράδειγμα (1.1.7) καταστήσαμε τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2 και όπως έχει αναφερθεί, χρειαστήκαμε δύο ζεύγη (U,φ) και (V,ψ) χαρτών για να καλυφθεί. Σε αυτό το παράδειγμα τώρα η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ θα καλυφθεί με έξι ζεύγη χαρτών.
Θεωρούμε την 2-διάστατη μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{1.12}$$

με την επαγώμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^3$.
Κατάλληλα ημισφαίρα:
Ορίζουμε τα σύνολα:

$$\begin{aligned} U_z^+ &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : z > 0\} \\ U_z^- &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : z < 0\} \\ \mathbb{D}_z &= \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$\begin{aligned} &\varphi_z^+ : U_z^+ \longrightarrow \mathbb{D}_z \qquad \mu\varepsilon \qquad \varphi_z^+(x,y,z) = (x,y) \\ &\varphi_z^- : U_z^- \longrightarrow \mathbb{D}_z \qquad \mu\varepsilon \qquad \varphi_z^-(x,y,z) = (x,y) \end{aligned}$$

Τότε τα (U_z^+,φ_z^+) και (U_z^-,φ_z^-) είναι χάρτες. Ακόμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (\varphi_z^+)^{-1}(x,y) &= (x,y,\ \sqrt{1-x^2-y^2}) \\ (\varphi_z^-)^{-1}(x,y) &= (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{aligned}$$

για κάθε $(x,y)\epsilon\mathbb{D}_z$. Άρα $\varphi_z^+(U_z^+) = \varphi_z^-(U_z^-) = \mathbb{D}_z$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε και τα παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
U_x^+ &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : x > 0\}\\
U_x^- &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : x < 0\}\\
\mathbb{D}_x &= \{(y,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < 1\}
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$
\begin{aligned}
\varphi_x^+ : U_x^+ \longrightarrow \mathbb{D}_x \qquad &\mu\varepsilon \qquad \varphi_x^+(x,y,z) = (y,z)\\
\varphi_x^- : U_x^- \longrightarrow \mathbb{D}_x \qquad &\mu\varepsilon \qquad \varphi_x^-(x,y,z) = (y,z)
\end{aligned}
$$

Τότε τα (U_x^+, φ_x^+) και (U_x^-, φ_x^-) είναι χάρτες. Ακόμα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(\varphi_x^+)^{-1}(y,z) &= (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)\\
(\varphi_x^-)^{-1}(y,z) &= (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)
\end{aligned}
$$

για κάθε $(y,z)\epsilon\mathbb{D}_x$. Άρα $\varphi_x^+(U_x^+) = \varphi_x^-(U_x^-) = \mathbb{D}_x$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
U_y^+ &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : y > 0\}\\
U_y^- &= \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : y < 0\}\\
\mathbb{D}_y &= \{(x,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 < 1\}
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$
\begin{aligned}
\varphi_y^+ : U_y^+ \longrightarrow \mathbb{D}_y \qquad &\mu\varepsilon \qquad \varphi_y^+(x,y,z) = (x,z)\\
\varphi_y^- : U_y^- \longrightarrow \mathbb{D}_y \qquad &\mu\varepsilon \qquad \varphi_y^-(x,y,z) = (x,z)
\end{aligned}
$$

Τότε τα (U_y^+, φ_y^+) και (U_y^-, φ_y^-) είναι χάρτες. Ακόμα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(\varphi_y^+)^{-1}(x,z) &= (\sqrt{1-x^2-z^2}, y, z)\\
(\varphi_y^-)^{-1}(x,z) &= (-\sqrt{1-x^2-z^2}, y, z)
\end{aligned}
$$

για κάθε $(x,z)\epsilon\mathbb{D}_y$. Άρα $\varphi_y^+(U_y^+) = \varphi_y^-(U_y^-) = \mathbb{D}_y$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
Άρα ορίσαμε έξι χάρτες (U_i^a, φ_i^a) με $i = x, y, z$ και $a = +, -$ και τρείς δίσκους $\mathbb{D}_i$ με $i = x, y, z$. Τότε το

$$\mathcal{B} = \{(U_i^a, \varphi_i^a) : i = x, y, z \quad \kappa\alpha\iota \quad a = +, -\}$$

είναι ένας άτλαντας του $\mathbb{S}^2$. Τα πεδία ορισμού των χαρτών καλύπτουν το $\mathbb{S}^2$, αφού $\forall(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2$ έχουμε $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \neq 0$, άρα μια τουλάχιστον συντεταγμένη, έστω η x είναι μη μηδενική, οπότε ισχύει $(x,y,z)\epsilon U_x^+$ ή $(x,y,z)\epsilon U_x^-$. Θα δείξουμε τη συμβιβαστότητα δύο τυχαίων χαρτών έστω (U_x^+, φ_x^+) και (U_y^-, φ_y^-). Έχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^- = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{S}^2 : x > 0, y < 0\}.$$

Άρα

$$U_x^+ \cap U_y^- \ni (x,y,z) \mapsto \varphi_x^+(x,y,z) = (y,z)\epsilon\mathbb{D}_x$$

με $y < 0$, δηλαδή $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = \mathbb{D}_x \cap \{(y,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Επομένως $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$ είναι το εσωτερικό του μισού δίσκου του $\mathbb{D}_x$ και είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Όμοια $\varphi_y^+(U_x^+ \cap U_y^-) = \mathbb{D}_y \cap \{(x,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : x > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε την διαφορισιμότητα των παρακάτω επεικονίσεων:

$$\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}(y,z) = \varphi_y^-(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, z)$$

όπου

$$(y,z)\epsilon D_x \cap \{(y,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : y < 0\}$$

Άρα $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ είναι C^∞ στο πεδίο ορισμού της.

$$\varphi_x^+ \circ (\varphi_y^-)^{-1}(x,z) = \varphi_x^+(x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z) = (-\sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

όπου

$$(x,z)\epsilon D_y \cap \{(x,z)\epsilon\mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Άρα $\varphi_x^+ \circ (\varphi_y^-)^{-1}$ είναι C^∞ στο πεδίο ορισμού της.
Όμοια αποδεικνύεται η συμβιβαστότητα δύο οποιονδήποτε χαρτών. Επομένως το $\mathcal{B}$ είναι άτλας του $\mathbb{S}^2$ και $(\mathbb{S}^2, \mathcal{B}^*)$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2, όπου $\mathcal{B}^*$ είναι ο μέγιστος άτλας.

Παράδειγμα 1.1.9

Στο παράδειγμα 1.1.7 καταστήσαμε τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2 εφοδιασμένη με το μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}^*$ και στο παράδειγμα 1.1.8 καταστήσαμε τη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2 εφοδιασμένη με το μέγιστο άτλαντα $\mathcal{B}^*$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$. Έστω ότι $\Phi \epsilon \mathcal{A}^*$ τότε θα πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις

$$\varphi_i^a \circ \Phi^{-1} \quad \text{και} \quad \Phi \circ (\varphi_i^a)^{-1}$$

είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Οπότε έχουμε

$$\varphi_i^a \circ \Phi^{-1} = \varphi_i^a \circ Id \circ \Phi^{-1} = \varphi_i^a \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$$

Δείχνουμε ότι η $\varphi_i^a \circ \varphi^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Γνωρίζουμε ότι οι απεικονίσεις $\varphi, \psi, \varphi_i^a$ όπου $i = x, y, z$ και $a = +, -$ είναι ομοιομορφισμοί. Θα δείξουμε ότι οι χάρτες (U, φ) και (U_x^+, φ_x^+) είναι C^∞-συμβιβαστοί. Όπου $\varphi : \mathbb{S}^2 - B \longrightarrow \mathbb{R}^2$ και $\varphi_x^+ : U_x^+ \longrightarrow \mathbb{D}_x$, $\mathbb{D}_x = \{(y, z) \epsilon \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < 1\}$ με τύπους:

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right) \tag{1.13}$$

$$\varphi_x^+ = (y, z) \tag{1.14}$$

Θα δείξουμε ότι $\varphi(U \cap U_x^+)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι $U \cap U_x^+ = U_x^+$. Άρα $\varphi(U \cap U_x^+) = \varphi(U_x^+) = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Επίσης θα δείξουμε ότι

$$\varphi_x^+ \circ (\varphi)^{-1} : \varphi(U \cap U_x^+) \longrightarrow \varphi_x^+(U \cap U_x^+) \tag{1.15}$$

είναι C^∞ απεικόνιση. Έχουμε ότι η σχέση (1.15) γράφεται

$$\varphi_x^+ \circ (\varphi)^{-1}(u, v) = \varphi_x^+((\varphi)^{-1}(u, v)) =$$

$$\varphi_x^+ \left(\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \right) =$$

$$\left(\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

η οποία είναι προφανώς C^∞ απεικόνιση. Επιπλέον και η

$$\varphi \circ (\varphi_x^+)^{-1} : \varphi_x^+(U \cap U_x^+) \longrightarrow \varphi(U \cap U_x^+) \tag{1.16}$$

είναι C^∞ απεικόνιση. Έχουμε ότι η σχέση (1.16) γράφεται

$$\varphi \circ (\varphi_x^+)^{-1}(y,z) = \varphi((\varphi_x^+)^{-1}(y,z)) =$$

$$\varphi\left(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

η οποία είναι προφανώς C^∞ απεικόνιση. Άρα οι χάρτες (U,φ) και (U_x^+,φ_x^+) είναι C^∞-συμβιβαστοί. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι χάρτες (U,φ), (U_z^+,φ_z^+) είναι C^∞-συμβιβαστοί. Το $\varphi(U\cap U_z^+)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι $U\cap U_z^+ = U_z^+$. Άρα $\varphi(U\cap U_z^+) = \varphi(U_z^+) = (0,\infty)\times\mathbb{R}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Επίσης θα δείξουμε ότι

$$\varphi_z^+ \circ (\varphi)^{-1} : \varphi(U \cap U_z^+) \longrightarrow \varphi_z^+(U \cap U_z^+) \tag{1.17}$$

είναι C^∞ απεικόνιση. Έχουμε ότι η σχέση (1.17) γράφεται

$$\varphi_z^+ \circ (\varphi)^{-1}(u,v) = \varphi_z^+((\varphi)^{-1}(u,v)) =$$

$$\varphi_z^+\left(\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)\right) =$$

$$\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

η οποία είναι προφανώς C^∞ απεικόνιση. Επιπλέον και η

$$\varphi \circ (\varphi_z^+)^{-1} : \varphi_z^+(U \cap U_z^+) \longrightarrow \varphi(U \cap U_z^+) \tag{1.18}$$

είναι C^∞ απεικόνιση. Έχουμε ότι η σχέση (1.18) γράφεται

$$\varphi \circ (\varphi_z^+)^{-1}(x,y) = \varphi((\varphi_z^+)^{-1}(x,y)) =$$

$$\varphi(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) =$$

$$\left(\frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$$

η οποία είναι προφανώς C^∞ απεικόνιση. Άρα οι χάρτες (U, φ) και (U_z^+, φ_z^+) είναι C^∞-συμβιβαστοί. Όμοια μπορούμε να δείξουμε και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Άρα γνωρίζουμε ότι η $\varphi_i^a \circ \varphi^{-1}$ και η $\varphi \circ \Phi^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Άρα και η $\varphi_i^a \circ \Phi^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Όμοια και για την

$$\Phi \circ (\varphi_i^a)^{-1} = \Phi \circ Id \circ (\varphi_i^a)^{-1} = \Phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ (\varphi_i^a)^{-1}$$

από την οποία γνωρίζουμε ότι η $\Phi \circ \varphi^{-1}$ και η $\varphi \circ (\varphi_i^a)^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Άρα και η $\Phi \circ (\varphi_i^a)^{-1}$ είναι C^∞-διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι απεικονίσεις είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους αν πάρουμε $\Psi \epsilon \mathcal{B}^*$. Άρα $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$.

Δουλεύοντας ανάλογα με την προηγούμενη δομή μπορούμε να ορίσουμε κατά φυσικό τρόπο στην $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$, μια διαφορική δομή, η οποία ονομάζεται κανονική διαφορική δομή. Η ανακάλυψη το 1956 απο τον John Milnor κάποιων λείων πολλαπλοτήτων οι οποίες είναι ομοιομορφικές, αλλά δεν είναι αμφιδιαφορικές με την σφαίρα $\mathbb{S}^7$, εφοδιασμένη με την κανονική διαφορική δομή ήταν ένα από τα ποιό αναπάντεχα αποτελέσματα της τοπολογίας. Οι σφαίρες αυτές ονομάζονται εξωτικές σφαίρες. Οι Michel Karvaire και John Milnor το 1963 απέδειξαν ότι υπάρχουν για την $\mathbb{S}^7$ σφαίρα ακριβώς 28 διαφορετικές δομές, οι οποίες δεν είναι αμφιδιαφορικές μεταξύ τους. Ακόμη ο Michel Karvaire απέδειξε ότι υπάρχουν τοπολογικές πολλαπλότητες που δεν επιδέχονται καμμία διαφορική δομή.

Παράδειγμα 1.1.10

Θα εισάγουμε τον 2-διάστατο πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Στο σύνολο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists \lambda \epsilon \mathbb{R} - \{0\} : y_i = \lambda x_i, i = 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) και συμβολίζουμε με $[x] = [(x_1, x_2, x_3)]$ την κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου. Το σύνολο των προηγούμενων κλάσεων, δηλαδή το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}/\sim$ καλούμε πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ είναι τοπολογικός χώρος διότι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση:

$$\pi : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \pi(x) = [x] \tag{1.20}$$

είναι η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει τον αντιπρόσωπο του x. Στο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ορίζεται μια τοπολογία ως εξής το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ με τη σχετική τοπολογία από το $\mathbb{R}^3$. Με αυτή την τοπολογία ο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ γίνεται τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του επίσης η απεικόνιση π είναι συνεχής. Στη συνέχεια, θα ορισθεί στο $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ μια διαφορίσιμη δομή. Θέτουμε $U_i = \{[(x_1, x_2, x_3)] \epsilon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$, $i = 1, 2, 3$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$$
$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right)$$
$$\varphi_3 : U_3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

Θα δείξουμε ότι (U_1, φ_1) είναι χάρτης του $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Η φ_1 είναι 1-1 διότι αν

$$\varphi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \varphi_1([(y_1, y_2, y_3)]) \Rightarrow$$
$$\frac{x_i}{x_1} = \frac{y_i}{y_1}, i = 2, 3 \Rightarrow$$
$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_1}{x_1} = \lambda \neq 0$$

Άρα $[(x_1, x_2, x_3)] = [(y_1, y_2, y_3)]$. Θα δείξουμε ότι $\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι για κάθε $(a, b) \epsilon \mathbb{R}^2$, $\varphi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$. Συνεπώς η φ_1 είναι επί. Άρα $\varphi_1(U_1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και (U_1, φ_1) είναι χάρτης. Όμοια και (U_2, φ_2), (U_3, φ_3) είναι χάρτες. Θεωρούμε τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, 2, 3\}$. Τα U_i καλύπτουν το $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ διότι $\forall [(x_1, x_2, x_3)] \epsilon \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ μια τουλάχιστον συντεταγμένη, έστω η x_1 είναι μη μηδενική. Άρα $[(x_1, x_2, x_3)] \epsilon U_1$.
Δείχνουμε την συμβιβαστότητα των (U_1, φ_1) και (U_2, φ_2). Έχουμε

$$U_1 \cap U_2 = \left\{[(x_1, x_2, x_3)] \epsilon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\right\}$$

Αν $[(x_1, x_2, x_3)]\epsilon U_1 \cap U_2$ τότε

$$\varphi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)\epsilon(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$$

ακόμα αν $(a, b)\epsilon(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ τότε $[(1, a, b)]\epsilon U_1 \cap U_2$ με $\varphi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$ δηλαδή $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ που είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1} = \varphi_1 \circ (\varphi_2)^{-1} : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right)$$

Άρα είναι C^∞ διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Όμοια αποδεικνύεται η συμβιβαστότητα δύο οποιονδήποτε χαρτών. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathcal{A}^*)$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2, όπου $\mathcal{A}^*$ είναι ο αντίστοιχος μέγιστος άτλας.

Παράδειγμα 1.1.11

Θα εισάγουμε τον n-διάστατο πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \sim (y_1, \cdots, y_{n+1}) \iff \exists\lambda\epsilon\mathbb{R} - \{0\} : y_i = \lambda x_i, i = 1, \cdots, n + 1 \quad (1.21)$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική) και συμβολίζουμε με $[x] = [(x_1, \cdots, x_{n+1})]$ την κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου. Το σύνολο των προηγούμενων κλάσεων, δηλαδή το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}/\sim$ καλούμε πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ είναι τοπολογικός χώρος διότι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση:

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \pi(x) = [x] \quad (1.22)$$

είναι η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει τον αντιπρόσωπο του x. Στο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ορίζεται μια τοπολογία ως εξής το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}$ με τη σχετική τοπολογία από το $\mathbb{R}^{n+1}$. Με αυτή την τοπολογία ο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ γίνεται τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του επίσης η απεικόνιση π είναι συνεχής. Στη συνέχεια, θα ορισθεί στο $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ μια διαφορίσιμη δομή. Θέτουμε $U_i = \{[(x_1, \cdots, x_{n+1})]\epsilon\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}, i = 1, \cdots, n + 1$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : [(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_1}\right)\\
&\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : [(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_2}\right)\\
&\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : [(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right), i = 3, 4, \cdots, n\\
&\varphi_{n+1} : U_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : [(x_1, \cdots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι (U_i, φ_i) είναι χάρτης του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Η φ_i είναι 1-1 διότι αν

$$\begin{aligned}
&\varphi_i([(x_1, \cdots, x_{n+1})]) = \varphi_i([(y_1, \cdots, y_{n+1})]) \Rightarrow\\
&\frac{x_j}{x_i} = \frac{y_j}{y_i}, j, i = 1, \cdots, n+1 \quad \mu\varepsilon \quad i \neq j \Rightarrow\\
&\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_j}{x_j} = \lambda \neq 0
\end{aligned}$$

Άρα $[(x_1, \cdots, x_{n+1})] = [(y_1, \cdots, y_{n+1})]$. Θα δείξουμε ότι $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι για κάθε $(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)\epsilon\mathbb{R}^n$, $\varphi_i([(a_1, \cdots, 1, \cdots, a_n)]) = (a_1, \cdots, a_n)$. Συνεπώς η φ_i είναι επί. Άρα $\varphi_i(U_i)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και (U_i, φ_i) είναι χάρτης. Θεωρούμε τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, \cdots, n+1\}$. Τα U_i καλύπτουν το $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ διότι $\forall[(x_1, \cdots, x_{n+1})]\epsilon\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ μια τουλάχιστον συντεταγμένη, έστω η x_1 είναι μη μηδενική. Άρα $[(x_1, \cdots, x_{n+1})]\epsilon U_1$.
Δείχνουμε την συμβιβαστότητα των (U_i, φ_i) και (U_j, φ_j) με $i, j = 1, \cdots, n+1$ όπου $i \neq j$. Έχουμε

$$U_i \cap U_j = \left\{[(x_1, \cdots, x_{n+1})]\epsilon\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0, x_j \neq 0\right\}$$

Αν $[(x_1, \cdots, x_{n+1})]\epsilon U_i \cap U_j$ τότε

$$\varphi_i([(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n+1})]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)\epsilon(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

ακόμα αν $(a_1, \cdots, a_n)\epsilon(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ τότε $[(a_1, \cdots, 1, \cdots, a_n)]\epsilon U_i \cap U_j$ με $\varphi_i([(a_1, \cdots, 1, \cdots, a_n)]) = (a_1, \cdots, a_n)$ δηλαδή $\varphi_i(U_i \cap U_j) = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$

που είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} = \varphi_i \circ (\varphi_j)^{-1} : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$
$$(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_i}, \cdots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

Άρα είναι C^∞ διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Όμοια αποδεικνύεται η συμβιβαστότητα δύο οποιονδήποτε χαρτών με $i, j = 1, \cdots, n+1$ όπου $i \neq j$. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathcal{A}^*)$ είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n, όπου $\mathcal{A}^*$ είναι ο αντίστοιχος μέγιστος άτλας.

1.2 Λείες απεικονίσεις, εφαπτόμενα διανύσματα

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων. Αυτό θα γίνει αναγάγωντας την έννοια της διαφορισιμότητας μιας απεικόνισης μεταξύ Ευκλείδειων χώρων σε πολλαπλότητες.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω μια συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου M μια λεία πολλαπλότητα και $p \epsilon M$ τότε*
(1) Η f ονομάζεται λεία ή C^∞ στο σημείο p, εάν υπάρχει ένας χάρτης (U, φ) στο p, έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

να είναι λεία στο $\varphi(p)$.
(2) Η f ονομάζεται λεία ή C^∞ στο σημείο p, εάν είναι λεία σε κάθε σημείο $p \epsilon M$.

Παρατήρηση.(1) Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του χάρτη (U, φ). Πράγματι, εάν πάρουμε έναν άλλο χάρτη (V, ψ) στο σημείο $p \epsilon M$, τότε στο σύνολο $\psi(U \cap V)$ θα ισχύει ότι

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

η οποία είναι λεία στο $\psi(p)$.
(2) Μια $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση στο σημείο $p \epsilon M$ είναι και συνεχής στο σημείο $p \epsilon M$. Πράγματι, από τον ορισμό (1.2.1) γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι λεία στο $\varphi(p)$ το οποίο ανήκει σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, θα είναι και συνεχής στο $\varphi(p)$. Οπότε, η $f = (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ θα είναι συνεχής στο σημείο p, αφού γνωρίζουμε ότι η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση.

Ορισμός 1.2.2 *Έστω $f : M^m \longrightarrow N^n$ μια συνεχής απεικόνιση, όπου M^m και N^n είναι λείες πολλαπλότητες διάστασης m και n αντίστοιχα και ένα σημείο $p \epsilon M$ τότε*
(1) Η f ονομάζεται λεία ή C^∞ στο σημείο p, εάν υπάρχουν οι χάρτες (U, φ) στο σημείο p και (V, ψ) στο σημείο $f(p)$ του M^m και N^n αντίστοιχα έτσι ώστε η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

να είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$.
(2) Η f ονομάζεται λεία ή C^∞ στο σημείο p, εάν είναι λεία σε κάθε σημείο $p \epsilon M$.

Παρατήρηση.(1) Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής των χαρτών (U, φ) και (V, ψ). Πράγματι, έστω δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $p \epsilon U$ και $f(p) \epsilon V$ τότε σύμφωνα με τον ορισμό (1.2.2) η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$. Έστω τώρα δύο άλλοι χάρτες (U', φ') και (V', ψ') με $p \epsilon U'$ και $f(p) \epsilon V'$ τότε θα δείξουμε ότι και η απεικόνιση

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi'(p)$. Η $\varphi \circ (\varphi')^{-1}$, είναι λεία, διότι οι χάρτες (U, φ) και (U', φ') είναι συμβιβαστοί. Όμοια η $\psi' \circ \psi^{-1}$, είναι λεία, διότι οι χάρτες (V, ψ) και (V', ψ') είναι συμβιβαστοί. Άρα ισχύει ότι:

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1})$$

Άρα η απεικόνιση $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ είναι λεία στο σημείο $\varphi'(p)$.
Αντίστροφα, έστω δύο χάρτες (U', φ') και (V', ψ') με $p \epsilon U'$ και $f(p) \epsilon V'$ τότε συμφωνα με τον ορισμό (1.2.2) η απεικόνιση

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi'(p)$. Έστω τώρα δύο άλλοι χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $p \epsilon U$ και $f(p) \epsilon V$ τότε θα δείξουμε ότι και η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$. Η $\varphi' \circ \varphi^{-1}$, είναι λεία, διότι οι χάρτες (U, φ) και (U', φ') είναι συμβιβαστοί. Όμοια η $\psi \circ (\psi')^{-1}$, είναι λεία, διότι οι χάρτες (V, ψ) και (V', ψ') είναι συμβιβαστοί. Άρα ισχύει ότι:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ (\psi')^{-1}) \circ (\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})$$

Άρα η απεικόνιση $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω $f : M \longrightarrow N$ και $g : N \longrightarrow K$ είναι λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων, στα $p \epsilon M$ και $f(p) \epsilon N$ αντίστοιχα τότε η σύνθεση*

$$g \circ f : M \longrightarrow K$$

είναι λεία απεικόνιση στο p.

Απόδειξη.

Επειδή, γνωρίζουμε ότι η f είναι λεία απεικόνιση στο σημείο $p \epsilon M$, για κάθε χάρτη (U, φ) της M από τον ορισμό (1.2.2) η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \tag{1.23}$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$. Επιπλέον έχουμε ότι η g είναι λεία απεικόνιση στο σημείο $f(p) \epsilon N$, για κάθε χάρτη (V, ψ) της N και για κάθε χάρτη (W, τ) της K από τον ορισμό (1.2.2) η απεικόνιση

$$\tau \circ g \circ \psi^{-1} \tag{1.24}$$

είναι λεία στο σημείο $\psi(f(p))$. Άρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση που δίνεται από

$$\tau \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$$

είναι λεια στο σημείο $\varphi(p)$. Πράγματι, από τις σχέσεις (1.23) και (1.24) έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\tau \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\tau \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$, ως σύνθεση των λείων απεικονίσεων $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ και $\tau \circ g \circ \psi^{-1}$ στα σημεία $\varphi(p)$ και $\psi(f(p))$, αντίστοιχα. Επομένως, και η σύνθεση $g \circ f : M \longrightarrow K$ είναι λεία απεικόνιση στο σημείο p. $\square$

Ορισμός 1.2.3 *Μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων λέγεται αμφιδιαφόριση αν είναι λεία, 1-1, επί και η αντιστροφή της f^{-1} είναι επίσης λεία απεικόνιση. Στην περίπτωση αυτή οι πολλαπλότητες M και N λέγονται αμφιδιαφορικές.*

Παρατήρηση. Οι πολλαπλότητες M και N του ορισμού (1.2.3) θα πρέπει να είναι ίδιας διάστασης διότι αν οι πολλαπλότητες M και N είναι διαφορετικής διάστασης τότε δεν θα είναι αμφιδιαφορικές. Πιο συγκεκριμένα, αν υπήρχε αμφιδιαφόριση μεταξύ των M^m και N^n, τότε θα υπήρχε ομοιομορφισμός μεταξύ ανοικτών του $\mathbb{R}^m$ και ανοικτών του $\mathbb{R}^n$, το οποίο δεν ισχύει για $m \neq n$.
Πράγματι, έστω δύο πολλαπλότητες M^m και N^n διαφορετικής διάστασης $m \neq n$ και οι χάρτες (U, φ) και (V, ψ) των M^m και N^n αντίστοιχα. Έστω η απεικόνιση $f : M^m \longrightarrow N^n$ να είναι αμφιδιαφόριση. Η $\psi(V)$ είναι ομοιομορφισμός με το V

μέσω του ομοιομορφισμού ψ. Ακόμη, το V είναι ομοιομορφικό με το $f^{-1}(V)$ μέσω του ομοιομορφισμού f και το $f^{-1}(V)$ είναι ομοιομορφικό με το $\varphi(f^{-1}(V))$ μέσω του ομοιομορφισμού φ. Άρα τα $\varphi(f^{-1}(V))$ και $\psi(V)$ είναι ομοιομορφικά. Έτσι, υποχρεωτικά θα πρέπει να ισχύει ότι $m = n$.

Πρόταση 1.2.2 *Έστω μια πολλαπλότητα M^n και (U, φ) ένας χάρτης της. Τότε η συνάρτηση συντεταγμένων $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφόριση.*

Απόδειξη.

Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω ορισμών. □

Πρόταση 1.2.3 *Έστω ένα ανοικτό υποσύνολο U μιας πολλαπλότητας M^n. Αν η απεικόνιση $f : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια αμφιδιαφόριση και το $f(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε το ζεύγος (U, f) είναι ένας χάρτης που ανήκει στην διαφορική δομή της M.*

Απόδειξη.

Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω ορισμών. □

Πρόταση 1.2.4 *Έστω μια συνεχής απεικόνιση $F : M \longrightarrow N$ όπου M και N είναι πολλαπλότητες. Θα αποδείξουμε ότι η F είναι λεία, αν και μόνο αν η $f \circ F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία, για κάθε λεία συνάρτηση $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Απόδειξη.

(Ευθύ) Έστω ότι η $F : M \longrightarrow N$ είναι λεία, τότε και η $f \circ F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία, διότι γνωρίζουμε ότι η σύνθεση λείων απεικονίσεων είναι λεία απεικόνιση. (Αντίστροφο) Έστω ότι η $f \circ F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία στο σημείο $f(p)$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) των M και N αντίστοιχα με $p \epsilon U$ και $F(p) \epsilon V$, επίσης $f = y_i = \pi \circ y$ με $i = 1, 2, \cdots, n$. Αν η $f \circ F$ είναι λεία, τότε η $y_i \circ F$ είναι λεία για κάθε i. Επομένως, η $\pi_i \circ y \circ F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία και απο τον ορισμό της λείας απεικόνισης (1.2.1) η $I \circ (\pi_i \circ y \circ F) \circ \varphi^{-1}$ είναι λεία, όπου I είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Άρα η $\pi_i \circ (y \circ F \circ \varphi^{-1})$ είναι λεία οπότε και η $y \circ F \circ \varphi^{-1}$ είναι λεία. Έτσι, η F είναι λεία. □

Παράδειγμα 1.2.1

Στο παράδειγμα (1.1.6) αποδείχτηκε ότι οι απεικονίσεις $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(t) = t$ και $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\psi(t) = t^3$ αποτελουν δύο διαφορετικές πολλαπλότητες M και M', ίδιας διάστασης 1με τη βοήθεια των χαρτών $(U = \mathbb{R}, \varphi)$ και $(V = \mathbb{R}, \psi)$ αντίστοιχα, στον ίδιο τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι οι πολλαπλότητες M και M' είναι αμφιδιαφορικές, δηλαδή ότι υπάρχει αμφιδιαφόριση f από τη M στη M'. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : M \longrightarrow M'$ με τύπο $f(t) = t^{\frac{1}{3}}$, οποία είναι 1-1 και επί. Επιπλέον, η f είναι λεία, αφού η

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t) = \psi(f(t)) = \psi(t^{\frac{1}{3}}) = (t^{\frac{1}{3}})^3 = t$$

είναι λεία και η f^{-1} είναι λεία, αφού η

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(t) = \varphi(f^{-1}(t^{\frac{1}{3}})) = \varphi(t) = t$$

είναι λεία. Άρα υπάρχει αμφιδιαφόριση $f : M \longrightarrow M'$ όπου M και M' είναι αμφιδιαφορικές.

Παράδειγμα 1.2.2

Έστω $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = z$ θα δείξουμε ότι είναι λεία.
Χρησιμοποιούμε τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) της στερεογραφικής προβολής από το παράδειγμα (1.1.7) και πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $f \circ \varphi^{-1}$ και $f \circ \psi^{-1}$ είναι λείες. Έχουμε από τη σχέση (1.7) ότι

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) = f(\varphi^{-1}(u, v)) =$$

$$f\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right) = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

η οποία είναι λεία, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Παρόμοια από τη σχέση (1.9) έχουμε ότι

$$(f \circ \psi^{-1})(u, v) = f(\psi^{-1}(u, v)) =$$

$$f\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}\right) = \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}$$

η οποία είναι λεία, $f \circ \psi^{-1} : \psi(V) = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Συνεπώς, η f είναι λεία.

Παράδειγμα 1.2.3

Έστω $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ με τύπο $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ θα δείξουμε ότι είναι λεία. Χρησιμοποιούμε τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) της στερεογραφικής προβολής από το παράδειγμα (1.1.7) και πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ και $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ είναι λείες. Έχουμε από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) ότι

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(u, v) = \varphi(f(\varphi^{-1}(u, v))) =$$

$$\varphi\left(f\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right)\right) =$$

$$\varphi\left(\frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right) = (-v, u)$$

η οποία είναι λεία, $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Παρόμοια από τις σχέσεις (1.8) και (1.9) έχουμε ότι

$$(\psi \circ f \circ \psi^{-1})(u, v) = \psi(f(\psi^{-1}(u, v))) =$$

$$\psi\left(f\left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}\right)\right) =$$

$$\psi\left(\frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}\right) = (-v, u)$$

η οποία είναι λεία, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
Συνεπώς, η f είναι λεία.

Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ μια λεία απεικόνιση, όπου M λεία πολλαπλότητα και (U, φ) ένας χάρτης της M και $p \epsilon U$. Συμβολίζουμε με $\pi_1, \cdots, \pi_n$ τις συναρτήσεις συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$. Οπότε για τη συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται στο ανοικτό σύνολο $\varphi(U)$ το οποίο περιέχει το σημείο $\varphi(p)$, θεωρούμε τις

$$D_1(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)}, \cdots, D_n(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)} \tag{1.25}$$

όπου με D_i, $i = 1, \cdots, n$ συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους ως πρός την i-συνιστώσα, υπολογισμένες στο $\varphi(p)$, τις οποίες θα συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_p, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_p \tag{1.26}$$

Οι μερικές παράγωγοι της σχέσεις (1.26) λέγονται μερικές παράγωγοι της f ως προς x_i στο σημείο $p \epsilon U$, όπου $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Οι συναρτήσεις της σχέσης (1.25) είναι λείες στο U, διότι οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}$ όπου $i = 1, \cdots, n$ είναι λείες στο $\varphi(U)$. Από τις σχέσεις (1.25) και (1.26) καταλήγουμε στην σχέση

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = D_i(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)}, i = 1, \cdots, n \tag{1.27}$$

Πρόταση 1.2.5 *Έστω $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ είναι ένας χάρτης της πολλαπλότητας M και $(x_1, \cdots, x_n)$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου $p \epsilon M$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_p = \delta_{ij}, i, j = 1, \cdots, n$$

όπου γνωρίζουμε ότι $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad i = j \\ 0, & \alpha\nu \quad i \neq j \end{cases}$

Απόδειξη.

Από την σχέση (1.27) έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_p = \left.\frac{\partial(x_i \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial(\pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_j}\right|_{\varphi(p)} = \delta_{ij}.$$

□

Ορισμός 1.2.4 *Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M^m \longrightarrow N^n$ μεταξύ πολλαπλοτήτων και δύο χάρτες $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_m))$ και $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ των M^m και N^n αντίστοιχα, έτσι ώστε $f(U) \subset V$. Θα συμβολίζουμε με f_i την απεικόνιση $y_i \circ f = \pi_i \circ y \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή την i συντεταγμένη της f στον χάρτη (V, ψ). Θα ονομάζουμε Ιακωβιανό πίνακα της f ως προς τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) τον ακόλουθο πίνακα $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. Στην περίπτωση όπου οι πολλαπλότητες M και N έχουν την ίδια διάσταση, τότε η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα της f ως προς τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) θα ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα.*

Ορισμός 1.2.5 *Μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων θα ονομάζεται τοπικά αντιστρέψιμη ή τοπική αμφιδιαφόριση στο σημείο $p \epsilon M$, όταν υπάρχει μια περιοχή του σημείου p, για την οποία η απεικόνιση*

$$f|_U : U \longrightarrow f(U),$$

να είναι αμφιδιαφόριση.

Θεώρημα 1.2.1 *(Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης για πολλαπλότητες). Έστω μία λεία απεικόνιση* $f : M \longrightarrow N$ *μεταξύ πολλαπλοτήτων και έστω ένα σημείο* $p \epsilon M$*. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο χάρτες* $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ *γύρω από το σημείο* p *της* M *και* $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ *γύρω από το σημείο* $f(p)$ *της* N *έτσι ώστε να ισχύει ότι* $f(U) \subset V$*. Έστω* $f_i = y_i \circ f$*. Τότε η απεικόνιση* f *είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο* p *αν και μόνο αν ισχύει ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα*

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_p \neq 0.$$

Απόδειξη.

Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης f ως προς τους χάρτες (U, φ) και (V, ψ) είναι

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_p = \left(\frac{\partial(\pi_i \circ \psi \circ f}{\partial x_j}\right)\bigg|_p$$

από την σχέση (1.27) η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_p = \left(\frac{\partial(\pi_i \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}\right)\bigg|_{\varphi(p)}$$

αυτή η σχέση είναι ο Ιακωβιανό πίνακας της απεικόνισης

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

στο σημείο $\varphi(p)$, μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Οπότε από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης στον $\mathbb{R}^n$ θα έχουμε ότι

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_p = det\left(\frac{\partial(\pi_i \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}\right)\bigg|_{\varphi(p)} \neq 0$$

αν και μόνο αν $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο $\varphi(p)$. Όμως γνωρίζουμε ότι οι φ και ψ είναι αμφιδιαφορίσεις, τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο σημείο p. $\square$

Έστω ένα σημείο p του Ευκλείδειου χώρου, μια ανοικτή περιοχή U γύρω από το σημείο p, μια λεία απεικόνιση $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ και ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο p το $e = (e_1, \cdots, e_n)$. Γνωρίζουμε ότι, η παράγωγος της απεικόνισης f στο σημείο p και στην διεύθυνση e δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$e(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$e(f_1 + f_2) = e(f_1) + e(f_2)$$

$$e(\lambda f) = \lambda e(f), \forall \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

$$e(fg) = e(f)g(p) + f(p)e(g)$$

Αυτές τις ιδιότητες θα εκμεταλλευτούμε για να ορίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας πολλαπλότητας.

Επειδή μας ενδιαφέρει μια μικρή ανοικτή περιοχή του σημείου p της συνάρτησης f όπου θα ορίσουμε ένα διάνυσμα, θα λέμε ότι η $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία στο σημείο $p \epsilon M$ αν υπάρχει ανοικτή περιοχή U του p έτσι ώστε ο περιορισμός της f στο U να είναι λεία συνάρτηση. Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο συναρτήσεων f, g που είναι λείες στο σημείο p. Ορίζουμε ότι $f \sim g$ αν υπάρχει ανοικτή περιοχή του σημείου p, τέτοια ώστε $f = g$ ταυτοτικά. Διαπυστώνουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Αυτή η σχέση $\sim$ διαμερίζει το σύνολο των λείων συναρτήσεων γύρω από το σημείο p σε κλάσεις ισοδυναμίας. Έστω $[f]$ η κλάση ισοδυναμίας της συνάρτησης f, την οποία θα ονομάζουμε ”σπόρο” της f. Θα συμβολίζουμε με $C_p^\infty(M)$ το σύνολο όλων των ”σπόρων” των πραγματικών συναρτήσεων σε μια ανοικτή περιοχή του σημείου p.

Στο σύνολο $C_p^\infty(M)$ μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε στοιχεία δηλαδή

$$[f + g] = [f] + [g], \forall f, g \epsilon C_p^\infty(M)$$

$$[\lambda f] = \lambda[f], \forall f \epsilon C_p^\infty(M), \lambda \epsilon \mathbb{R}$$

$$[f \cdot g] = [f] \cdot [g], \forall f, g \epsilon C_p^\infty(M)$$

Συνεπώς το σύνολο $C_p^\infty(M)$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις γίνεται ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης.

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα v θα δρα για την ακρίβεια πάνω στα στοιχεία των $[f]$ του $C_p^\infty(M)$, στην πράξη θα θεωρούμε την δράση του διανύσματος v πάνω στους αντιπροσώπους των κλάσεων, και θα γράφουμε $v(f)$ αντί του $v([f])$.

Ορισμός 1.2.6 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και ένα σημείο $p\epsilon M$. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο p είναι μια απεικόνιση*

$$v_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τις εξής ιδιότητες

$$(1) \quad v_p(\lambda f + \mu g) = \lambda v_p(f) + \mu v_p(g)$$

$$(2) \quad v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$$

για κάθε $f, g\epsilon C_p^\infty(M)$ και $\lambda, \mu\epsilon\mathbb{R}$.

Το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων της πολλαπλότητας M στο σημείο p ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του M στο σημείο p και θα το συμβολίζουμε με T_pM. Αν $v_p, w_p\epsilon T_pM$ τότε ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις

$$v_p + w_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, (v_p + w_p)(f) = v_p(f) + w_p(f)$$

$$\lambda v_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, (\lambda v_p)(f) = \lambda(v_p(f))$$

Πρόταση 1.2.6 *Τα $v_p + w_p$ και λv_p είναι εφαπτόμενα διανύσματα της πολλαπλότητας M στο σημείο p για κάθε v_p, w_p εφαπτόμενα διανύσματα της M στο p και κάθε $\lambda\epsilon\mathbb{R}$.*

Απόδειξη.

Έστω $f, g\epsilon C_p^\infty(M)$ και $\mu_1, \mu_2\epsilon\mathbb{R}$ τότε έχουμε για την πρώτη ιδιότητα

$$(v_p + w_p)(\mu_1 f + \mu_2 g) = v_p(\mu_1 f + \mu_2 g) + w_p(\mu_1 f + \mu_2 g) =$$
$$v_p(\mu_1 f) + v_p(\mu_2 g) + w_p(\mu_1 f) + w_p(\mu_2 g) =$$
$$\mu_1 v_p(f) + \mu_2 v_p(g) + \mu_1 w_p(f) + \mu_2 w_p(g) =$$
$$\mu_1(v_p + w_p)(f) + \mu_2(v_p + w_p)(g)$$

για την δεύτερη ιδιότητα

$$(v_p + w_p)(fg) = v_p(fg) + w_p(fg) =$$
$$v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g) + w_p(f)g(p) + f(p)w_p(g) =$$
$$(v_p + w_p)(f)g(p) + f(p)(v_p + w_p)(g)$$

Άρα το $v_p + w_p\epsilon T_pM$, όμοια μπορούμε να δείξουμε και την άλλη σχέση, οπότε $\lambda v_p\epsilon T_pM$. □

Πρόταση 1.2.7 *Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της πολλαπλότητας M στο σημείο p, T_pM είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.*

Έστω μια πολλαπλότητα M^n, $p \epsilon M$ και ένας χάρτης (U, φ). Στον χάρτη αυτό αντιστοιχούν n εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$, τα οποία ορίζουμε ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)} \tag{1.28}$$

όπου $f \epsilon C_p^\infty(M)$ και D_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ συμβολίζουμε την συνήθη μερική παράγωγο ως προς την συντεταγμένη x_i του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.2.8 *Τα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ με $i = 1, 2, \cdots, n$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα της πολλαπλότητας M στο σημείο p.*

Απόδειξη.

Έστω $f, g \epsilon C_p^\infty(M)$ και $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ τότε έχουμε για τη πρώτη ιδιότητα

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (\lambda f + \mu g) = D_i\left((\lambda f + \mu g) \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$D_i\left((\lambda f) \circ \varphi^{-1} + (\mu g) \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} = \left(D_i\left((\lambda f) \circ \varphi^{-1}\right) + D_i\left((\mu g) \circ \varphi^{-1}\right)\right)\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$D_i\left((\lambda f) \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} + D_i\left((\mu g) \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} = \lambda\, D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} + \mu\, D_i\left(g \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$\lambda\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + \mu\, \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p$$

για την δεύτερη ιδιότητα

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (fg) = D_i\left((fg) \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} = D_i\left((f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})\right)\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} \left(g \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p)) + \left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p)) D_i\left(g \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} =$$

$$D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} g(p) + f(p) D_i\left(g \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p g(p) + f(p)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p .$$

□

Πρόταση 1.2.9 *Τα* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ *με* $i = 1, 2, \cdots, n$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του* T_pM.

Απόδειξη.

Έστω $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \epsilon \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0_p$ όπου $0_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $0_p(f) = 0$ τότε $\forall f \epsilon C_p^\infty(M)$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = 0_p(f) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, D_i(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, D_i(\pi_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, D_i(\pi_j)\Big|_{\varphi(p)} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j = 1, \cdots, n$$

δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Πρόταση 1.2.10 *Έστω μια πολλαπλότητα* M^m *και* (U, φ) *ένας χάρτης της γύρω από το σημείο* $p \epsilon U$ *τότε τα εφαπτόμενα διανύσματα* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ *αποτελούν βάση του* T_pM. *Κάθε* $v_p \epsilon T_pM$ *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός σύμφωνα με την σχέση*

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_p(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \tag{1.29}$$

Απόδειξη.

Αρχικά θα χρειαστούμε μια κατασκευή της ανάλυσης. Έστω μια μπάλα $B_\varepsilon(0)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα ε στον $\mathbb{R}^m$ και μια λεία συνάρτηση $F : B_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F(0) = 0$. Τότε $\forall x = (x_1, \cdots, x_m) \epsilon B_\varepsilon(0)$ και από τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης έχουμε

$$F(x) = F(x) - F(0) = F(tx)|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[F(tx)]\;\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{tx} x_i \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{tx} \mathrm{d}t$$

Οι συναρτήσεις $\psi_i : B_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $i = 1, \cdots, m$ που δίνονται από την σχέση

$$\psi_i(x) = \int_0^1 \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{tx} \mathrm{d}t$$

είναι λείες απεικονίσεις. Άρα η F γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$F(x) = \sum_{i=1}^m x_i \psi_i(x)$$

Οπότε έχουμε

$$\left(D_j F\right)(x) = \psi_j(x) + \sum_{i=1}^m x_i \left(D_j \psi_i\right)(x)$$

και στην περίπτωση όπου $x = 0$, $\left(D_j F\right)(0) = \psi_j(0)$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\varphi(p) = 0$, δηλαδή $x_i(p) = 0, \forall i = 1, \cdots, m$. Έστω $f \epsilon C_p^\infty(M)$ όπου $f(p) = 0$. Η συνάρτηση $f \circ \varphi^{-1}$ που ορίζεται σε μια μικρή μπάλα $B_\varepsilon(0)$ με κέντρο το 0 και ακτίνα ε στον $\mathbb{R}^m$ είναι λεία και σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχουν διαφορίσιμες συνατήσεις $\psi_i : B_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $i = 1, \cdots, m$ έτσι ώστε

$$\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(x) = \sum_{i=1}^m x_i \psi_i(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi_i(0) = D_i \left(f \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(p)=0}$$

Άρα $\forall q \epsilon \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(0)\right)$, όπου $x = \varphi(q)$, έχουμε την παρακάτω σχέση

$$f(q) = \sum_{i=1}^m x_i \psi_i\left(\varphi(q)\right) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^m x_i \left(\psi_i \circ \varphi\right)$$

σε μια ανοικτή περιοχή $\varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(0)\right)$ του p. Εάν $f(p) \neq 0$ τότε μπορούμε να θέσουμε $f^* = f - f(p) \Rightarrow f^*(p) = 0$. Άρα υπάρχουν συναρτήσεις ψ_i έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^m x_i \left(\psi_i \circ \varphi\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (1) και (2) του ορισμού (1.2.6) έχουμε ότι

$$v_p(f) = v_p\left(f(p)\right) + v_p\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\left(\psi_i \circ \varphi\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\Big(v_p(x_i)(\psi_i \circ \varphi)(p) + x_i(p)v_p(\psi_i \circ \varphi)\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_p(x_i)\psi_i(0) = \sum_{i=1}^{m} v_p(x_i)D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_0 = \sum_{i=1}^{m} v_p(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f)$$

άρα

$$v_p = \sum_{i=1}^{m} v_p(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Επιπλέον από την πρόταση (1.2.9) έχουμε ότι τα $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του T_pM, άρα τα $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ αποτελούν βάση του T_pM. □

Παράδειγμα 1.2.4

Σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε πως αλλάζει η βάση $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right\}_{i=1}^{m}$ του T_pM^m όταν αλλάξουμε το χάρτη γύρω από το σημείο p. Έστω δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) της πολλαπλότητας M^m γύρω από το σημείο p με βάσεις $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right\}_{i=1}^{m}$ και $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right\}_{i=1}^{m}$ αντίστοιχα. Τότε υπάρχει μοναδικός αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) έτσι ώστε

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \quad \mu\varepsilon \quad i = 1, \cdots, m$$

Εφαρμόζουμε το διάνυσμα $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ πάνω στη συνάρτηση συντεταγμένων x_k, για να υπολογισουμε τους αριθμούς (a_{ij})

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p (x_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}$$

Άρα καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p = \sum_{j=1}^{m}\left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$$

Ο παραπάνω τύπος είναι ο γνωστός κανόνας λείων σύνθετων συναρτήσεων. Επίσης έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p = D_i\left(\pi_j \circ \varphi \circ \psi^{-1}\right)\Big|_{\psi(p)}$$

δηλαδή ο πίνακας $\left(\left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p\right)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της λείας απεικόνισης $\varphi \circ \psi^{-1}$ ένος ανοικτού συνόλου του $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^m$.

1.3 Το διαφορικό μιας απεικόνισης

Έχοντας ορίσει τον εφαπτόμενο χώρο μιας λέιας απεικόνισης το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M^m \longrightarrow N^n$ μεταξύ πολλαπλοτήτων και ένα σημείο $p \epsilon M^m$. Οι εφαπτόμενοι χώροι T_pM^m του M^m στο σημείο p και $T_{f(p)}N^n$ του N^n στο σημείο $f(p)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικοί χώροι διαστάσεως m και n αντίστοιχα. Επειδή το διαφορικό df_p μιας απεικόνισης θα οριστεί από τον T_pM^m στον $T_{f(p)}N^n$, η εικόνα $df_p(v_p)$ ενός διανύσματος v_p στο σημείο p είναι ένα διάνυσμα στο $f(p)$, δηλαδή ένα γραμμικό συναρτησιακό με πεδίο ορισμού το $C^\infty_{f(p)}(N)$.

Ορισμός 1.3.1 *Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων και ένα σημείο $p \epsilon M$. Το διαφορικό της f στο σημείο p είναι μια γραμμική απεικόνιση*

$$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

που ορίζεται από την σχέση

$$df_p(v_p)(g) = v_p(g \circ f) \tag{1.30}$$

για κάθε $v_p \epsilon T_pM$ και $g \epsilon C^\infty_{f(p)}(N)$.

Ο παραπάνω ορισμός περιέχει δύο ισχυρισμούς που πρέπει να ελεγχθούν. Πρώτον, το df_p είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας N στο σημείο $f(p)$.
Πράγματι, έστω $g, h \epsilon C^\infty_{f(p)}(N)$, $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ και $v_p \epsilon T_pM$ τότε, για τη πρώτη ιδιότητα

$$df_p(v_p)(\lambda g + \mu h) = v_p\left((\lambda g + \mu h) \circ f\right) =$$

$$v_p\left(\lambda g \circ f + \mu h \circ f\right) = v_p(\lambda g \circ f) + v_p(\mu h \circ f) =$$
$$\lambda v_p(g \circ f) + \mu v_p(h \circ f) = \lambda df_p(v_p)(g) + \mu df_p(v_p)(h)$$

για την δεύτερη ιδιότητα

$$df_p(v_p)(gh) = v_p\left((gh) \circ f\right) =$$

$$v_p\left((g \circ f)(h \circ f)\right) = v_p(g \circ f)\left(h \circ f\right)(p) + \left(g \circ f\right)(p) v_p(h \circ f) =$$
$$df_p(v_p)(g)h(f(p)) + g(f(p))df_p(v_p)(h).$$

Άρα, $df_p(v_p)\epsilon T_{f(p)}N$ και έτσι το df_p είναι καλά ορισμένο.
Δεύτερον, το διαφορικό df_p είναι γραμμική απεικόνιση.
Πράγματι, έστω $v_p, w_p \epsilon T_pM$, $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ και $g\epsilon C^\infty_{f(p)}(N)$ τότε έχουμε

$$df_p(\lambda v_p + \mu w_p)(g) = (\lambda v_p + \mu w_p)(g \circ f) =$$
$$(\lambda v_p)(g \circ f) + (\mu w_p)(g \circ f) = \lambda v_p(g \circ f) + \mu w_p(g \circ f) =$$
$$\lambda df_p(v_p)(g) + \mu df_p(w_p)(g).$$

Παράδειγμα 1.3.1

Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων, όπου $M = \mathbb{R}^n$ και $N = \mathbb{R}^m$ με συντεταγμένες $x_1, \cdots, x_n$ και $y_1, \cdots, y_m$ αντίστοιχα και ένα σημείο $p\epsilon\mathbb{R}^n$.
Επίσης τα σύνολα $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$ και $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{f(p)} \right\}$ αποτελούν μια βάση του $T_p\mathbb{R}^n$ και του $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Η γραμμική απεικόνιση

$$df_p : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

καθορίζεται από τον πίνακα (a_{ij}) που δίνεται από την σχέση

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right) = \sum_k a_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{f(p)}$$

όπου $a_{kj}\epsilon\mathbb{R}$. Έστω ότι $f_i = y_i \circ f$ η i-συνιστώσα της f με $i = 1, \cdots, m$. Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης τις συναρτήσεις y_i έχουμε

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right)(y_i) = \left(\sum_k a_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{f(p)} \right)(y_i) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p (y_i \circ f) = \sum_k a_{kj}\delta_{ik} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_p = a_{ij}$$

Άρα ο πίνακας του διαφορικού df_p ως προς τις παραπάνω βάσεις είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_p \right).$$

Πρόταση 1.3.1 *(Κανόνας της αλυσίδας) Έστω οι λείες συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων, $f : M \longrightarrow N$ και $g : N \longrightarrow K$ και ένα σημείο $p \epsilon M$ τότε ισχύει ότι*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p. \tag{1.31}$$

Απόδειξη.

Έστω $v_p \epsilon T_p M$ και $h \epsilon C^{\infty}_{f(p)}(N)$ τότε έχουμε

$$d(g \circ f)_p(v_p)(h) = v_p(h \circ (g \circ f)) = v_p(h \circ g \circ f), \quad (*)$$

και

$$\left(dg_{f(p)} \circ df_p\right)(v_p)(h) = dg_{f(p)} \left(df_p((v_p)(h))\right) =$$

$$df_p \left(v_p(h \circ g)\right) = v_p(h \circ g \circ f), \quad (**)$$

Άρα, από τις $(*)$ και $(**)$ έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.2 *Το διαφορικό της ταυτοτικής απεικόνισης $Id : M \longrightarrow M$ σε κάθε σημείο $p \epsilon M$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση $Id : T_p M \longrightarrow T_p M$, δηλαδή ισχύει ότι*

$$d(Id)_p(v_p) = v_p, \forall v_p \epsilon T_p M. \tag{1.32}$$

Απόδειξη.

Έστω $v_p \epsilon T_p M$ και $f \epsilon C^{\infty}_p(M)$ τότε έχουμε

$$d(Id)_p(v_p)(f) = v_p(f \circ Id) = v_p(f)$$

επίσης, $(v_p)(f) = v_p(f)$. Άρα, έπεται το γητούμενο. □

Πρόταση 1.3.3 *Έστω η $f : M \longrightarrow N$ μια αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων και ένα σημείο $p \epsilon M$. Τότε το διαφορικό $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

Απόδειξη.

Επηδεί η $f : M \longrightarrow N$ είναι αμφιδιαφόριση, αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει μια λεία αντίστροφη $f^{-1} : N \longrightarrow M$ τέτοια ώστε

$$Id_M = f^{-1} \circ f : M \longrightarrow M$$

και

$$Id_N = f \circ f^{-1} : N \longrightarrow N.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας της σχέσης (1.31) έχουμε

$$Id_{T_pM} = d(f^{-1} \circ f)_p = \left(df^{-1}_{f(p)}\right) \circ \left(df_p\right)$$

και

$$Id_{T_{f(p)}N} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = \left(df_{f^{-1}(f(p))}\right) \circ \left(df^{-1}_{f(p)}\right) = \left(df_p\right) \circ \left(df^{-1}_{f(p)}\right)$$

Άρα, το df_p έχει αντίστροφη την $df^{-1}_{f(p)}$. Άρα, το df_p είναι ισομορφισμός. □

Πρόταση 1.3.4 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και ένας χάρτης της $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ γύρω από το σημείο $p \epsilon M$. Τότε έχουμε*

$$d\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial \pi_i} \right|_{\varphi(p)}$$

όπου $x_i = \pi_i \circ \varphi$ με $i = 1, \cdots, n$.

Απόδειξη.

Από τον ορισμό (1.3.1) και την σχέση (1.27) έχουμε, έστω $f \epsilon C^{\infty}_{\varphi(p)}(M)$ τότε

$$d\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right)(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f \circ \varphi_p) =$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \pi_i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi_p \circ \varphi_p^{-1}) = \left. \frac{\partial}{\partial \pi_i} \right|_{\varphi(p)} (f)$$

Από το οποίο έπεται η ζητούμενη σχέση. □

Πρόταση 1.3.5 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και ένας χάρτης της $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ γύρω από το σημείο $p \epsilon M$. Τότε έχουμε ότι το σύνολο*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \cdots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$$

αποταλεί μια βάση του εφαπτόμενου χώρου T_pM.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων απεικονίζει βάσεις σε βάσεις. Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση (1.3.4) έχουμε ότι ο ισομορφισμός

$$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}M$$

στέλνει τη βάση $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ στο σύνολο $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{\varphi(p)}$ το οποίο είναι βάση του $T_{\varphi(p)}M$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.6 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και δύο χάρτες γύρω από το σημείο p, έστω $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$, $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$. Τότε στην τομή $U \cap V$ ισχύει ότι*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}, \, j = 1, \cdots, n.$$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\forall p \epsilon U \cap V$ τα σύνολα $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right\}$ και $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p\right\}$ αποτελούν και τα δύο βάσεις του εφαπτόμενου χώρου T_pM, οπότε υπάρχει πίνακας $(a_{ij}(p))\epsilon\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k a_{kj}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη τη συνάρτηση συντεταγμένων y_i έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i) = \sum_k a_{kj}\frac{\partial}{\partial y_k}(y_i) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_k a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij}$$

Άρα, καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση. □

Πρόταση 1.3.7 *Έστω μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $f : M^m \longrightarrow N^n$, ένα σημείο $p\epsilon M$ και δύο χάρτες $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_m))$ γύρω από το σημείο p της M^m και $(V, \psi = (y_1, \cdots, y_n))$ γύρω από το σημείο $f(p)$ της N^n. Τότε το διαφορικό*

$$df_p : T_pM^m \longrightarrow T_{f(p)}N^n$$

έχει πίνακα ως πρός τις βάσεις $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$ *και* $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(p)} \right\}$ *τον*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(p),$$

όπου $f_i = y_i \circ f$.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι το df_p καθορίζεται πλήρως από τους αριθμούς $a_{ij} \epsilon \mathbb{R}$, δηλαδή

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)}, j = 1, \cdots, m$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης την συνάρτηση συντεταγμένων y_i, έχουμε ότι

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(y_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)}(y_i) \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (y_i \circ f) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ki} \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p) = a_{ij}$$

Από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. □

Μια άλλη συμαντική κατηγορία λείων απεικονίσεων είναι οι καμπύλες. Θα δούμε μια χρήσιμη μέθοδο υπολογισμού του διαφορικού χρησιμοποιώντας καμπύλες σε πολλαπλότητες.

Ορισμός 1.3.2 *Έστω* (a, b) *ένα ανοικτό διάστημα του* $\mathbb{R}$. *Μια λεία απεικόνιση*

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow M$$

ονομάζεται (λεία) καμπύλη στη πολλαπλότητα M, *όπου το* (a, b) *υποθέτουμε ότι περιέχει το μηδέν. Μια καμπύλη* γ *έχει αρχή το* p, *εάν το* $\gamma(0) = p$. *Για* $t_0 \epsilon (a, b)$, *το διάνυσμα* $d\gamma_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) \epsilon T_{\gamma(t_0)}M$, *ονομάζεται διάνυσμα ταχύτητας της* γ *στο* $\gamma(t_0)$. *Θα γράφουμε ότι*

$$d\gamma_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \gamma'(t_0). \qquad (1.33)$$

Παρατήρηση. Στην περίπτωση που έχουμε μια καμπύλη $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, ο συμβολισμός $\gamma'(t)$ μπορεί να επιφέρει κάποια σύγχυση. Συμβιλίζουμε με t τη συντεταγμένη στο πεδίο ορισμού (a,b) και με x την αντίστοιχη στο πεδίο τιμών του $\mathbb{R}$. Άρα σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό (1.3.2), το $\gamma'(t)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\gamma(t)\epsilon\mathbb{R}$, συνεπώς προκύπτει ότι $\gamma'(t) = \lambda \left.\frac{d}{dx}\right|_{\gamma(t)}$ με $\lambda\epsilon\mathbb{R}$. Στον απειροστικό λογισμό με $\gamma'(t)$ συμβολίζουμε την παράγωγο μιας πραγματικής συνάρτησης, η οποία είναι αριθμός. Οι παραπάνω έννοιες είναι διαφορετικές, συνεπώς ας συμβολίσουμε με $\dot{\gamma}(t)$ την παράγωγο αυτή.

Πρόταση 1.3.8 *Έστω μια λεία καμπύλη $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ και $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ ένας χάρτης στο σημείο $\gamma(t)$. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t)$ δίνεται από την σχέση*

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}_i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)}$$

όπου $\gamma_i = x_i \circ \gamma$. Συνεπώς, η ταχύτητα $\gamma'(t)$, παριστάνεται από το διάνυσμα $(\dot{\gamma}_1(t), \cdots, \dot{\gamma}_n(t))$ ως προς την βάση $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_{\gamma(t)}M$.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_i. Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης την συνάρτηση συντεταγμένων x_j έχουμε

$$\gamma'(t)x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) x_j \Rightarrow$$

$$d\gamma_{\gamma(t)} \left(\frac{d}{dt} \right) x_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(x_j \circ \gamma) = a_j \Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma_j) = \dot{\gamma}_j(t) = a_j$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.3.9 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M, ένα σημείο $p\epsilon M$ και ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $v_p \epsilon T_p M$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ μια λεία καμπύλη, έτσι ώστε να ισχύει ότι $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v_p$.*

Απόδειξη.

Έστω ένας χάρτης $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ γύρω από το σημείο $p \epsilon M$ με την ιδιότητα $\varphi(p) = 0 \epsilon \mathbb{R}$. Τα $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ με $i = 1, \cdots, n$ αποτελούν βάση του $T_p M$. Άρα υπάρχουν αριθμοί $a_i \epsilon \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

και έστω $\pi_1, \cdots, \pi_n$ οι κανονικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$ με $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Θεωρούμε την καμπύλη $a : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$a(t) = \varphi(p) + t(a_1, \cdots, a_n)$$

με ε κατάλληλα μικρό έτσι ώστε $a(t) \epsilon \varphi(U)$. Ορίζουμε την $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ με τύπο

$$\gamma(t) = (\varphi^{-1} \circ a)(t)$$

τότε έχουμε

$$\gamma(0) = (\varphi^{-1} \circ a)(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p$$

και από τις προτάσεις (1.3.4) και (1.3.9) έπεται

$$\gamma'(0) = (d\varphi^{-1})_0 (da)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) = d\varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial \pi_i}\right|_0 \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = v_p$$

Άρα, ισχύει ότι $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v_p$. □

Πρόταση 1.3.10 *Έστω ένα εφαπτόμενο διάνυσμα v_p μιας πολλαπλότητας M στο σημείο $p \epsilon M$ και $f \epsilon C_p^{\infty}(M)$. Τότε αν μια λεία καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ διέρχεται από το σημείο p και είναι τέτοια ώστε $\gamma'(0) = v_p$, έχουμε*

$$v_p f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (1.3.1) και (1.3.2) έχουμε ότι

$$v_p f = \gamma'(0) f = d\gamma_{\gamma(t)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

□

Πρόταση 1.3.11 *Έστω μια λεία συνάρτηση μεταξύ πολλαπλοτήτων $f : M \longrightarrow N$, ένα σημείο $p \epsilon M$ και ένα διάνυσμα $v_p \epsilon T_p M$. Αν γ είναι μια λεία καμπύλη με αρχή το σημείο $\gamma(0) = p$ και διάνυσμα ταχύτητας $\gamma'(0) = v_p$, τότε ισχύει ότι*

$$df_p(v_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Απόδειξη.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v_p$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (1.3.1) και (1.3.2) καθώς και την πρόταση (1.3.1) που αναφέρεται στον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$df_p(v_p) = df_p(\gamma'(0)) = (df_p \circ d\gamma_0)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right) =$$

$$d(f \circ \gamma)_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

□

Με την βοήθεια του διαφορικού, μπορούμε να διατυπώσουμε την εκδοχή για πολλαπλότητες ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος της Ανάλυσης, το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης.

Ορισμός 1.3.3 *Έστω $f : M^m \longrightarrow N^n$ μια λεία απεικόνιση και ένα σημείο $p \epsilon M^m$. Βαθμίδα ή τάξη της f στο σημείο p ονομάζεται η διάσταση του υποχώρου $df_p(T_p M^m)$ του διανυσματικού χώρου $T_{f(p)} N^n$. Συμβολίζουμε την βαθμίδα με rank.*

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω $f : M^n \longrightarrow N^n$ μια λεία απεικόνιση και ένα σημείο $p \epsilon M^n$ όπου το διαφορικό της f έχει βαθμίδα n. Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή U του σημείου p έτσι ώστε η $f|_U$ να είναι αμφιδιαφόριση του U σε μια περιοχή του $f(p)$.*

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι μια απλή αναγωγή στο θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$, αυτό θα γίνει με τη βοήθεια χαρτών γύρω από τα σημεία p και $f(p)$. Έστω (U, φ) ένας χάρτης του M^n γύρω από το σημείο p με $\varphi(p) = 0$ και (V, ψ) ένας χάρτης του N^n γύρω από το σημείο $f(p)$. Θεωρούμε την λεία απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{R}^n, U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

Οι απεικονίσεις φ και ψ είναι αμφιδιαφορίσιμες, οπότε

$$rank(d\varphi_p) = rank(d\psi_{f(p)}) = n$$

και

$$rank(d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))_0 = rank(d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi_0^{-1}) = n$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, ο περιορισμός της $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ σε μια μικρή ανοικτή περιοχή K του $0 \epsilon \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφόριση. Επίσης, επειδή οι ψ και φ^{-1} είναι αμφιδιαφορίσιμες, ο περιορισμός της συνάρτησης f στο ανοικτό $\varphi^{-1}(K)$ είναι και αυτός αμφιδιαφόριση. $\square$

Παράδειγμα 1.3.2

Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1^2 x_2, x_1 + x_2)$. Αν $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ είναι τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα ως προς τον ταυτοτικό χάρτη τότε θα υπολογίσουμε $df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p\right)$ και $df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p\right)$ στο σημείο $p = (1, 2)$.
Έχουμε ότι $f(p) = f(1, 2) = (2, 2, 3)$ και

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p\right)(y_k)\right)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p (y_k \circ f)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)} = \sum_{k=1}^{3}\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p (\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^3} \circ f)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{3} D_1\left.\left(\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^2}^{-1}\right)\right|_{Id_{\mathbb{R}^2}}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)} = \sum_{k=1}^{3} D_1\left.(\pi_k \circ f)\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)} =$$

$$2\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{f(p)} + 4\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_{f(p)} + \left.\frac{\partial}{\partial y_3}\right|_{f(p)} = 2\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{(2,2,3)} + 4\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_{(2,2,3)} + \left.\frac{\partial}{\partial y_3}\right|_{(2,2,3)}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζουμε και το $df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p\right)$ στο σημείο $p = (1, 2)$.

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p\right) = \cdots = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{(2,2,3)} + \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_{(2,2,3)} + \left.\frac{\partial}{\partial y_3}\right|_{(2,2,3)}$$

Παράδειγμα 1.3.3

Για την διαφορίσιμη απεικόνιση της προβολής $\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(m \geq n)$ με τύπο $\pi(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_n)$ θα βρούμε το $d\pi_p$ σε κάθε $p\epsilon\mathbb{R}^m$ ως προς τον ταυτοτικό χάρτη. Έχουμε,

$$d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(y_k)\right)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (y_k \circ \pi)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} = \sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^n} \circ \pi)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} D_i\left(\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^n} \circ \pi \circ Id_{\mathbb{R}^m}^{-1}\right)\Big|_{Id_{\mathbb{R}^m}}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} = \sum_{k=1}^{n} D_i\,(\pi_k \circ \pi)|_p\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\pi(p)} = \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{\pi(p)}$$

Η βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης $d\pi_p$ είναι n, διότι

$$d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{\pi(p)}, \cdots, d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_{\pi(p)}, d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right|_p\right) = 0, \cdots, d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p\right) = 0$$

Παράδειγμα 1.3.4

Έστω η απεικόνιση της ένθεσης $i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(m \leq n)$ με τύπο $i(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0)$ (υπάρχουν $n-m$ μηδενικά) θα βρούμε το di_p σε κάθε $p\epsilon\mathbb{R}^m$ ως προς τον ταυτοτικό χάρτη. Έχουμε,

$$di_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\sum_{k=1}^{n}\left(di_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(y_k)\right)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (y_k \circ i)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} = \sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^m} \circ i)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} D_i\left(\pi_k \circ Id_{\mathbb{R}^n} \circ i \circ Id_{\mathbb{R}^m}^{-1}\right)\Big|_{Id_{\mathbb{R}^m}}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} = \sum_{k=1}^{n} D_i\,(\pi_k \circ i)|_p\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{i(p)} = \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{i(p)}$$

Η βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης di_p είναι m.

1.4 Εμβαπτίσεις, εμφυτεύσεις και υποπολλαπλότητες

Πολλά παραδείγματα πολλαπλοτήτων, όπως η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^n$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$, επιφάνειες και καμπύλες στην στοιχειώδη Διαφορική Γεωμετρία, δεν εμφανίζονται αφηρημένα, αλλά ως υποσύνολα άλλων πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 1.4.1 *Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M^m \longrightarrow N^n$ και ένα σημείο $p \epsilon M^m$ τότε*
(1) Η f ονομάζεται εμβάπτιση στο σημείο p, εάν το διαφορικό

$$df_p : T_pM^m \longrightarrow T_{f(p)}N^n$$

είναι 1-1 ($m \leq n$). Επίσης η f ονομάζεται εμβάπτιση, εάν είναι εμβάπτιση, σε κάθε σημείο $p \epsilon M^m$.
(2) Η f ονομάζεται υπεμβάπτιση στο σημείο p, εάν το διαφορικό

$$df_p : T_pM^m \longrightarrow T_{f(p)}N^n$$

είναι επί ($m \geq n$). Επίσης η f ονομάζεται υπεμβάπτιση, εάν είναι υπεμβάπτιση, σε κάθε σημείο $p \epsilon M^m$.
(3) Η f ονομάζεται εμφύτευση, εάν είναι εμβάπτιση και η $f : M^m \longrightarrow f(M^m)$ είναι ομοιομορφισμός, όταν η εικόνα $f(M^m)$ είναι εφοδιασμένη με την σχετική τοπολογία της πολλαπλότητας N^n.

Παρατήρηση. Γνωρίζουμε ότι στην γενική τοπολογία, εάν ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής και ο τοπολογικός χώρος Y είναι Hausdorff, τότε μια συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ είναι ομοιομορφισμός. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $X = M$ και $Y = f(M)$, συμπεραίνουμε ότι εάν η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής, μια εμβάπτιση $f : M \longrightarrow N$ που είναι 1-1, είναι εμφύτευση. Θα αποδείξουμε σε παράδειγμα πως αυτό δεν ισχύει γενικά για μη-συμπαγή M.

Παράδειγμα 1.4.1

Για $m < n$ η απεικόνιση της ένθεσης $i : \mathbb{R}^m \longrightarrow N^n$, με τύπο

$$i(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots, 0)$$

είναι μια εμβάπτιση.
Για $m > n$ η απεικόνιση της προβολής $\pi : \mathbb{R}^m \longrightarrow N^n$, με τύπο

$$\pi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_n)$$

είναι μια υπεμβάπτιση.

Παράδειγμα 1.4.2

Έστω μια λεία απεικόνιση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο

$$f(t) = (t, t^2)$$

είναι εμφύτευση. Διότι, $f'(0) = 1$ άρα $df_p : T_p\mathbb{R} \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^2$ είναι 1-1, δηλαδή εμβάπτιση. Επιπλέον το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $f(\mathbb{R})$, αφού η $f : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R})$ είναι 1-1, επί, συνεχής και αντίστροφη συνεχής.
Στην περίπτωση που είχαμε την λεία απεικόνιση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο

$$f(t) = (t^2, t^3)$$

δεν είναι εμφύτευση. Διότι $f'(0) = 0$ άρα $df_p : T_p\mathbb{R} \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^2$ δεν είναι 1-1, δηλαδή δεν είναι εμβάπτιση.

Παράδειγμα 1.4.3

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο

$$\gamma(t) = \left(\sin(t), \frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

Αφού $\gamma'(t) = (\cos(t), \cos(2t)) \neq 0$ για κάθε $t \epsilon \mathbb{R}$ άρα το $d\gamma_p : T_p\mathbb{R} \longrightarrow T_{\gamma(p)}\mathbb{R}^2$ είναι 1-1 δηλαδή η γ είναι εμβάπτιση. Δεν είναι όμως εμφύτευση.
Ο περιορισμός $\gamma|_{(0,2\pi)}$ είναι εμβάπτιση του ανοικτού διαστήματος $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ στον $\mathbb{R}^2$, αλλά δεν είναι εμφύτευση, μολονότη είναι 1-1, διότι η εικόνα $\gamma(0, 2\pi)$ με την σχετική τοπολογία από τον $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφική με το $(0, 2\pi)$ οι περιοχές του σημείου $\gamma(\pi) = (0, 0)$ της εικόνας με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι διάστημα, ενώ οι συνεκτικές περιοχές του σημείου $t = \pi$ στον $\mathbb{R}$ είναι διάστημα.
Τέλος ο περιορισμός $\gamma|_{(0,\pi)}$ είναι εμφύτευση του $(0, \pi)$ στον $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 1.4.2 *(1) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ένα σημείο $p\epsilon M$ θα ονομάζεται κρίσιμο σημείο της f όταν το $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ δεν είναι επί.*
(2) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ένα σημείο $Q\epsilon N$ είναι μια κρίσιμη τιμή της f αν και μόνο αν υπάρχει ένα σημείο στην αντιστροφη εικόνα $f^{-1}(Q)$ το οποίο είναι κρίσιμο σημείο.
(3) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ένα σημείο $p\epsilon M$ θα ονομάζεται κανονικό σημείο της f όταν δεν είναι κρίσιμο σημείο, δηλαδή το $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ είναι επί.
(4) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ ένα σημείο $Q\epsilon N$ είναι μια κανονική τιμή της f αν και μόνο αν κάθε σημείο στην αντιστροφη εικόνα $f^{-1}(Q)$ είναι ένα κανονικό σημείο.

Πρόταση 1.4.1 *Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Ένα σημείο $p\epsilon M$ είναι κρίσιμο σημείο της f αν και μόνο αν ως προς κάποιον χάρτη $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_n))$ που περιέχει το σημείο $p\epsilon M$, ισχύει ότι*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p = 0, j = 1, \cdots, n$$

Απόδειξη.

Από την πρόταση (1.3.7) το διαφορικό $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ παριστάνεται από τον πίνακα $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p$ με $j = 1, \cdots, n$. Η εικόνα του διαφορικού df_p είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$, άρα θα έχει διάσταση είτε 0 είτε 1, συνεπώς η απεικόνιση df_p είναι είτε η μηδενική είτε είναι επί. Οπότε συμπεραίνουμε ότι το διαφορικό df_p δεν είναι επί αν και μόνο αν $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p = 0, j = 1, \cdots, n$. □

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω μια απεικόνιση $f : M^m \longrightarrow N^n$ μεταξύ πολλαπλοτήτων που είναι εμβάπτιση και ένα σημείο $p\epsilon M^m$ $(m \leq n)$. Τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή U του σημείου p και χάρτης (V, ψ) του N^n γύρω από το σημείο $f(p)$ με συντεταγμένες $y_1, \cdots, y_n$ τέτοια ώστε*
(1) $y_{m+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0$ για κάθε $q\epsilon V \cap f(U)$
(2) Ο περιοπισμός $f|_U$ είναι εμφύτευση.

Ορισμός 1.4.3 *Μια m-διάστατη πολλαπλότητα M ονομάζεται υποπολλαπλότητα της n-διάστατης πολλαπλότητας N $(m \leq n)$ όταν*
(i) $M \subseteq N$
(ii) η απεικόνιση της ένθεσης $i : M \longrightarrow N$ με $i(p) = p$ είναι εμφύτευση.

Παρατήρηση. (1) Αν σε ένα ανοικτό σύνολο A μιας πολλαπλότητας N θεωρήσουμε την σχετική τοπολογία που επάγεται από την N τότε γνωρίζουμε ότι το σύνολο A γίνεται κατά φυσικό τρόπο πολλαπλότητα. Η πολλαπλότητα αυτή είναι υποπολλαπλότητα της N ίδιας διάστασης.
(2) Συνέπεια του προηγούμενου ορισμού είναι ότι η τοπολογία της υποπολλαπλότητας M είναι η σχετική τοπολογία που επάγει η πολλαπλότητα M στο N.

Ορισμός 1.4.4 *(1) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων. Αν $c \epsilon N$ τότε το σύνολο*

$$f^{-1}(\{c\}) = \{p \epsilon M : f(p) = c\}$$

ονομάζεται σύνολο στάθμης και θα το συμβολίζουμε με $f^{-1}(c)$. Το $c \epsilon N$ ονομάζεται στάθμη του συνόλου $f^{-1}(c)$. Αν $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, τότε το σύνολο $Z(f) = f^{-1}(0)$ ονομάζεται σύνολο μηδενισμού της απεικόνισης f.
(2) Έστω μια λεία απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων ένα στοιχείο $c \epsilon N$ είναι μια κανονοκή τιμή της f αν και μόνο αν είτε το c δεν ανήκει στην εικόνα της f, είτε για κάθε σημείο $p \epsilon f^{-1}(c)$ το διαφορικό $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ είναι επί. Η αντίστροφη εικόνα του συνόλου $f^{-1}(c)$ μιας κανονοκής τιμής $c \epsilon N$ ονομάζεται κανονικό σύνολο στάθμης. Αν $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ και το σύνολο μηδενισμού $f^{-1}(0)$ αυτής της απεικόνισης είναι ένα κανονικό σύνολο στάθμης τότε αυτό ονομάζεται κανονικό σύνολο μηδενισμού.

Λήμμα 1.4.1 *Έστω μια λεία απεικόνιση $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Τότε το κανονικό σύνολο στάθμης $g^{-1}(c)$ με στάθμη c, είναι ίσο με το κανονικό σύνολο μηδενισμού $f^{-1}(0)$ της συνάρτησης $f = g - c$.*

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\forall p \epsilon M$,

$$g(p) = c \iff f(p) = g(p) - c = 0$$

Συνεπώς $g^{-1}(c) = f^{-1}(0) \equiv S$. Άρα $\forall p \epsilon M$ ισχύει ότι $df_p = dg_p$, οπότε οι συναρτήσεις f και g έχουν τα ίδια κρίσιμα σημεία. Επειδή η g δεν έχει κανένα κρίσιμο σημείο στο σύνολο S, ακριβώς το ίδιο θα ισχύει και για την f. $\square$

Θεώρημα 1.4.2 *Έστω μια λεία απεικόνιση $g : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου M^m μια πολλαπλότητα. Τότε ένα κανονικό σύνολο στάθμης $g^{-1}(c) \neq \emptyset$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα της M^m διάστασης $m - 1$.*

Απόδειξη.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f = g - c$, από το λήμμα (1.4.1) έχουμε ότι το $f^{-1}(0) \equiv S$ είναι ένα κανονικό σύνολο στάθμης για την συνάρτηση f. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $p \epsilon S$, τότε επειδή το p είναι ένα κανονικό σημείο της f θα υπάρχει χάρτης $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_m))$ γύρω από το σημείο p έτσι ώστε για κάποια i να ισχύει ότι $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p \neq 0$. Ο Ιακωβιανός πίνακας της λείας συνάρτησης f είναι

$$\mathcal{J}_p(f) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p & \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_p & \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

του οποίου η Ιακωβιανή ορίζουσα στο σημείο p είναι $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p \neq 0$. Άρα από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει μια περιοχή U_p του σημείου p στην οποία οι συναρτήσεις $f, x_2, \cdots, x_m$ αποτελουν ένα τοπικό συστημα συνυεταγμένων. Θεωρούμε την πρώτη συντεταγμένη του χάρτη $(U, \varphi = (f, x_2, \cdots, x_m))$ να είναι ίση με το μηδεν, τότε ορίζεται το σύνολο στάθμης $S \cap U_p$, άρα ο χάρτης $(U, \varphi = (f, x_2, \cdots, x_m))$ είναι ένας προσαρτημένος χάρτης ως προς S. Επειδή θεωρήσαμε τυχαίο σημείο $p \epsilon S$, το σύνολο S αποτελεί μια κανονική υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας M διάστασης $m - 1$. □

Παράδειγμα 1.4.4

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

η οποία είναι μια πολλαπλότητα διάστασης 2 και μια λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Τότε $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(0)$. Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Το σημείο $(0, 0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f το οποίο δεν ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Άρα όλα τα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας είναι κανονικά σημεία της f και το σημείο 0 αποτελεί μια κανονική τιμή της συνάρτησης f. Οπότε η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ αποτελεί μια κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$ διάστασης $3 - 1 = 2$.

Θεώρημα 1.4.3 *(Θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης) Έστω μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $f : M^m \longrightarrow N^n$ τότε ένα κανονικό σύνολο στάθμης $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ όπου $c \epsilon N^n$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας M^m διάστασης $m - n$.*

Παράδειγμα 1.4.5

Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από όλα εκείνα τα σημεία (x, y, z) που ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2, x + y + z = 0$$

θα ελέγξουμε αν το S είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3, x + y + z) = (u, v)$$

τότε το σύνολο S είναι το σύνολο στάθμης $f^{-1}(2, 0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας της f είναι

$$\mathcal{J}(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία (x, y, z) για τα οποία η τάξη του πίνακα $\mathcal{J}(f)$ είναι μικρότερη του 2. Αυτό ικανοποιείται όταν όλες οι 2×2 ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα $\mathcal{J}(f)$ είναι μηδέν δηλαδή έχουμε

$$det \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad det \begin{pmatrix} 3x^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

(Η τρίτη συνθήκη προκύπτει απο τις άλλες δύο $det \begin{pmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$). Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε τις παρακάτω λύσεις

$$y = \pm x, z = \pm y$$

Επειδή για την S ισχύει η σχέση $x + y + z = 0$ παίρνουμε $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ το οποίο δεν ικανοποιεί την εξίσωση $x^3 + y^3 + z^3 = 2$. Άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο σύνολο S. Άρα το σύνολο S δεν είναι κανονικό σύνολο στάθμης. Άρα το σύνολο S είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^3$ διάστασης $3 - 2 = 1$.

1.5 Εφαπτόμενη δέσμη

Θα πρέπει να ορίσουμε την εφαπτόμενη δέσμη σε μια πολλαπλότητα M. Η εφαπτόμενη δέσμη είναι μια συλλογή από εφαπτόμενους χώρους, η οποία μεταβάλλεται κατά λείο τρόπο και παραμετρικοποιείται μέσω των σημείων της πολλαπλότητας M. Η εφαπτόμενη δέσμη αποτελεί παράδειγμα μιας διανυσματικής δέσμης σε μια πολλαπλότητα M, η οποία είναι μια συλλογή από διανυσματικούς χώρους που μεταβάλλεται κατά λείο τρόπο και παραμετρικοποιείται μέσω των σημείων της πολλαπλότητας M.

Ορισμός 1.5.1 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M. Ηεφαπτόμενη δέσμη της πολλαπλότητας M είναι η ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων T_pM της πολλαπλότητας M*

$$TM = \bigcup_{p\epsilon M} T_pM = \Big\{(p, v_p) : p\epsilon M, v_p \epsilon T_pM\Big\}.$$

Παρατήρηση. Η ένωση του παραπάνω ορισμού είναι διακεκριμμένη, διότι για δύο διαφορετικά σημεία $p \neq q$ στην πολλαπλότητα M οι εφαπτόμενοι χώροι T_pM και T_qM είναι διαφορετικοί.

Η τοπολογία της εφαπτόμενης δέσμης. Έστω μια λεία πολλαπλότητα M^m και ένας χάρτης της $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_m))$ γύρω από το σημείο $p\epsilon M$. Θεωρούμε το σύνολο

$$TU = \bigcup_{p\epsilon U} T_pU = \bigcup_{p\epsilon U} T_pM$$

και έστω ένα διάνυσμα $v_p \epsilon T_pM$. Τότε γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα v_p γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ με $i = 1, \cdots, m$ του εφαπτόμενου χώρου T_pM, δηλαδή έχουμε

$$v_p = \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

οπού οι συντελεστές a_i με $i = 1, \cdots, m$ εξαρτώνται από το διάνυσμα v_p. Ορίζουμε την απεικόνιση $\bar{\varphi} : TU \subset TM \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$\bar{\varphi}(p, v_p) = \Big(x_1(p), \cdots, x_m(p), a_1(v_p), \cdots, a_m(v_p)\Big)$$

Η απεικόνιση $(\bar{\varphi})^{-1}$ έχει ως αντίστροφη την απεικόνιση

$$(\varphi(p), a_1, \cdots, a_m) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)$$

η οποία είναι 1-1 και επί. Το διαφορικό της φ στο p, $d\varphi_p : T_pU \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ είναι

$$d\varphi_p(v_p) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial \pi_i}\right|_{\varphi(p)}$$

δηλαδή μπορούμε να ταυτίσουμε το διαφορικό $d\varphi_p(v_p)$ με το διάνυσμα στήλη $(a_1, \cdots, a_m)\epsilon\mathbb{R}^m$. Τέλος θα χρησιμοποιούμε την απεικόνιση

$$\bar{\varphi} : TU \subset TM \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

για να μεταφέρουμε την τοπολογία του $\varphi(U)\times\mathbb{R}^m$ στο σύνολο TU. Αυτό συμβαίνει όταν ένα σύνολο A στο TU είναι ανοικτό αν και μόνο αν το σύνολο $\bar{\varphi}(A)$ είναι ανοικτό στο $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. Το σύνολο $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ έχει την κανονική τοπολογία ως ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{2m}$. Το σύνολο TU είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ με τον τρόπο που ορίσαμε την τοπολογία. Οπότε σύμφωνα με την τοπολογία που ορίσαμε μπορούμε να δείξουμε ότι η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση τοπολογίας.

Για την διαφορίσιμη δομή. Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και ένας λείος άτλαντας $\{(U_a, \varphi_a)\}$. Θα δείξουμε ότι ο άτλαντας $\{(TU_a, \bar{\varphi}_a)\}$ αποτελεί έναν λείο άτλαντα για την εφαπτόμενη δέσμη TM. Ισχύει ότι

$$TM = \bigcup_a TU_a$$

Θα δείξουμε τη συμβατότητα των χαρτών $(TU_a, \bar{\varphi}_a)$ και $(TU_b, \bar{\varphi}_b)$ στην τομή των χαρτών $TU_a \cap TU_b$. Έστω οι δύο βάσεις $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right\}_{j=1}^{m}$ και $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p \right\}_{i=1}^{m}$ του εφαπτόμενου χώρου T_pM, τότε γνωρίζουμε ότι κάθε δάνυσμα $v_p\epsilon T_pM$ μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή

$$v_p = \sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{m} b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p \tag{1.34}$$

Εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης τη συνάρτηση y_k και έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_k) = \sum_{i=1}^{m} b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p (y_k) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^{m} b_i\delta_{ik} \Rightarrow$$

$$b_k = \sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|_p \tag{1.35}$$

όπου $k = 1, \cdots, m$. Για τον άτλαντα $\{(U_a, \varphi_a)\}$ έστω ότι $\varphi_a = (x_1, \cdots, x_m)$ και $\varphi_b = (y_1, \cdots, y_m)$ τότε χρησιμοποιώντας την σχέση (1.34) έχουμε η απεικόνιση

$$\bar{\varphi}_a \circ \bar{\varphi}_b : \varphi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \varphi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^m$$

έχει την ακόλουθη μορφή

$$(\varphi_a(p), a_1, \cdots, a_m) \mapsto \left(p, \sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) \mapsto \left(\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}(\varphi_a(p)), b_1, \cdots, b_m\right)$$

Ακόμη από την σχέση (1.35) έχουμε

$$b_k = \sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{j=1}^{m} a_j \left.\frac{\partial(\varphi_b \circ \varphi_a^{-1})_k}{\partial \pi_j}\right|_{\varphi_a(p)}$$

Η απεικόνιση $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ είναι λεία, οπότε και η απεικόνιση $\bar{\varphi}_b \circ (\bar{\varphi}_a)^{-1}$ θα είναι λεία. Άρα η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης $2m$ με άτλαντα τον $\{(TU_a, \bar{\varphi}_a)\}$.

1.6 Διανυσματικά πεδία

Η ιδέα του διανυσματικού πεδίου προέρχεται από την Φυσική, όπου ερευνώνται διάφορα πεδία δυνάμεων.

Ορισμός 1.6.1 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M, ένα λείο διανυσματικό πεδίο X είναι μια απεικόνιση $X : M \longrightarrow TM$ η οποία σε κάθε σημείο $p\epsilon M$ αντιστοιχεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \epsilon T_pM$, με $X(p) = X_p\epsilon T_pM$ έτσι ώστε για κάθε λεία συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(Xf)(p) = X_pf$ να είναι λεία. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων της πολλαπλότητας M.*

Παρατήρηση. (1) Στα επόμενα, όταν αναφέρουμε τον όρο διανυσματικό πεδίο, θα εννοούμε λείο διανυσματικό πεδίο.
(2) Θα συμβολίζουμε με $D(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τον ορισμό (1.6.1) το διανυσματικό πεδίο X είναι μια απεικόνιση

$$D(M) \mapsto D(M), f \mapsto Xf.$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε ορίσει στον ορισμό (1.2.6) για ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, προκύπτει ότι η απεικόνιση $Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(Xf)(p) = X_pf$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική:

$$X(f+g)(p) = X_pf + X_pg, \forall f, g\epsilon D(M)$$

$$X(\lambda f)(p) = \lambda X_pf, \forall f\epsilon D(M), \lambda\epsilon\mathbb{R}$$

$$X(fg)(p) = X_pfg(p) + f(p)X_pg, \forall f, g\epsilon D(M)$$

Το σύνολο $\mathcal{X}(M)$ έχει κατά φυσικό τρόπο την αλγεβρική δομή ενός $D(M)$-γραμμικού χώρου, δηλαδή για $X, Y\epsilon\mathcal{X}(M)$ το άθροισμα $X+Y$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p$$

και για $f\epsilon D(M)$ το διανυσματικό πεδίο fX ορίζεται ως εξής

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Έστω μια λεία πολλαπλότητα M^m και ένας χάρτης $(U, \varphi = (x_1, \cdots, x_m))$ γύρω από το σημείο $p\epsilon M^m$. Σε αυτόν τον χάρτη αντιστοιχούν τα τοπικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon \mathcal{X}(U)$ $(i = 1, \cdots, m)$ με τιμές στο σημείο $p\epsilon U$. Τα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ονομάζονται βασικά διανυσματικά πεδία συντεταγμένων. Για μια $f\epsilon D(M)$ ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = D_i \left(f \circ \varphi^{-1} \right)\Big|_{\varphi(p)}$$

συνεπώς τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ είναι πράγματι λεία διανυσματικά πεδία. Από την πρόταση (1.2.10) συμπεραίνουμε ότι ένα $X\epsilon\mathcal{X}(M^m)$ έχει την μορφή

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

όπου $a_i = X(x_i)$ με $i = 1, \cdots, m$. Άρα το διανυσματικό πεδίο X είναι λείο εάν οι συνιστώσες του a_i, στο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων x_i, είναι λείες συναρτήσεις.

Θεωρούμε δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) της πολλαπλότητας M^m με

$$U \cap V \neq \emptyset.$$

Τότε τα βασικά πεδία $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ και $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}$ αντίστοιχα είναι ορισμένα αμφότερα στο ανοικτό σύνολο $U \cap V$. Για μια συνάρτηση $f\epsilon D(M)$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \epsilon D(U \cap V)$$

αλλά γενικά ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \neq \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

Θα αποδείξουμε όμως ότι ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{1.36}$$

Πράγματι, από τον ορισμό έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$$

γνωρίζουμε στον $\mathbb{R}^n$ ότι $D_i D_j = D_j D_i$ οπότε

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = D_j\left(D_i(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi =$$

$$D_jD_i(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi = D_iD_j(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Όταν μας δοθούν δύο διανυσματικά πεδία X και Y μιας πολλαπλότητας M, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $X_pY : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $p\epsilon M$ από την σχέση

$$\left(X_pY\right)(f) = X_p\left(Yf\right) \tag{1.37}$$

Δείχνουμε ότι η σχέση (1.37) δεν είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Θα δείξουμε δηλαδή ότι κάποια από της ιδιότητες του ορισμού (1.2.6) δεν ικανοποιείται:
για την πρώτη ιδιότητα έχουμε

$$\left(X_pY\right)(\lambda f+\mu g) = X_p\left(Y(\lambda f+\mu g)\right) =$$

$$X_p\left(\lambda Yf+\mu Yg\right) = \lambda X_p\left(Yf\right)+\mu X_p\left(Yg\right)$$

για την δεύτερη ιδιότητα έχουμε

$$\left(X_pY\right)(fg) = X_p\left(Y(fg)\right) = X_p\left((Yf)g+f(Yg)\right) =$$

$$X_p\left(Yf\right)g(p)+\left(Yf\right)(p)X_p(g)+X_p(f)\left(Yg\right)(p)+f(p)X_p\left(Yg\right) =$$

$$X_p\left(Yf\right)g(p)+f(p)Y_pX_p(g)+X_p(f)Y_pg(p)+f(p)X_p\left(Yg\right) =$$

$$\left(X_p(Yf)+X_p(f)Y_p\right)g(p)+f(p)\left(Y_pX_p(g)+X_p(Yg)\right) \neq$$

$$\left((XY)_p\left(f\right)\right)g(p)+f(p)\left((XY)_p\left(g\right)\right)$$

Οπότε δεν ικανοποιείται η ιδίοτητα (2) του ορισμού (1.2.6), συνεπώς δεν είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο p.

Όταν μας δοθούν δύο διανυσματικά πεδία X και Y μιας πολλαπλότητας M, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $X_pY, Y_pX : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο $p\epsilon M$ από την σχέση

$$\left(X_pY-Y_pX\right)(f) = X_p\left(Yf\right)-Y_p\left(Xf\right) \tag{1.38}$$

Δείχνουμε ότι η σχέση (1.38) είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Θα δείξουμε δηλαδή ότι οι ιδιότητες του ορισμού (1.2.6) ικανοποιούνται:
για την πρώτη ιδιότητα έχουμε

$$\left(X_pY-Y_pX\right)(\lambda f+\mu g) = X_p\left(Y(\lambda f+\mu g)\right)-Y_p\left(X(\lambda f+\mu g)\right) =$$

$$X_p\left(\lambda Yf+\mu Yg\right)-Y_p\left(\lambda Xf+\mu Xg\right)=$$
$$\lambda X_p\left(Yf\right)+\mu X_p\left(Yg\right)-\lambda Y_p\left(Xf\right)-\mu Y_p\left(Xg\right)=$$
$$\lambda\left(X_p\left(Yf\right)-Y_p\left(Xf\right)\right)+\mu\left(X_p\left(Yg\right)-Y_p\left(Xg\right)\right)=$$
$$\lambda\left(X_pY-Y_pX\right)(f)+\mu\left(X_pY-Y_pX\right)(g)$$

για την δεύτερη ιδιότητα έχουμε

$$\left(X_pY-Y_pX\right)(fg)=X_p\left(Y(fg)\right)-Y_p\left(X(fg)\right)=$$
$$X_p\left((Yf)g+f(Yg)\right)-Y_p\left((Xf)g+f(Xg)\right)$$
$$X_p(Yf)g(p)+(Yf)(p)X_p(g)+X_p(f)(Yg)(p)+f(p)X_p(Yg)-Y_p(Xf)g(p)-(Xf)(p)Y_p(g)-$$
$$-Y_p(Xg)(p)-f(p)Y_p(Xg)=$$
$$X_p(Yf)g(p)+f(p)X_p(Yg)-Y_p(Xf)g(p)-f(p)Y_p(Xg)=$$
$$\left(X_p(Yf)-Y_p(Xf)\right)g(p)+f(p)\left(X_p(Yg)-Y_p(Xg)\right)=$$
$$\left(X_pY-Y_pX\right)(f)g(p)+f(p)\left(X_pY-Y_pX\right)(g).$$

Ορισμός 1.6.2 *Έστω δύο λεία διάνυσματικά πεδία X και Y ορισμένα σε ένα ανοικτό υποσύνολο U μιας πολλαπλότητας M και ένα σημείο $p\epsilon M$. Το γινόμενο Lie των διανυσματικών πεδίων X και Y είναι το διανυσματικό πεδίο [X,Y] το οποίο είναι τέτοιο ώστε για κάθε $f\epsilon C_p^\infty(M)$ να ισχύει*

$$[X,Y]_p(f)=X_p\left(Yf\right)-Y_p\left(Xf\right). \qquad (1.39)$$

Πρόταση 1.6.1 *Το γινόμενο Lie είναι ένας τελεστής*

$$[.,.]:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow\mathcal{X}(M)$$

στον διανυσματικό χώρο των λείων διανυσματικών πεδίων. Με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned}&(1)\quad [X,Y]=-[Y,X]\\&(2)\quad [\lambda X_1+\mu X_2,Y]=\lambda[X_1,Y]+\mu[X_2,Y],\lambda,\mu\epsilon\mathbb{R}\\&(3)\quad [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0\end{aligned}$$

Απόδειξη.

Έστω ένα σημείο $p\epsilon M$ και $f\epsilon C_p^\infty(M)$ έχουμε

(1)

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf) =$$
$$-\Big(Y_p(Xf) - X_p(Yf)\Big) = -[Y,X]_p(f)$$

(2)

$$[\lambda X_1 + \mu X_2, Y]_p(f) = (\lambda X_1 + \mu X_2)_p\,(Yf) - Y_p\,((\lambda X_1 + \mu X_2)f) =$$
$$\lambda X_{1p}(Yf) + \mu X_{2p}(Yf) - Y_p\,(\lambda X_1 f + \mu X_2 f) =$$
$$\lambda X_{1p}(Yf) + \mu X_{2p}(Yf) - \lambda Y_p(X_1 f) - \mu Y_p(X_2 f) =$$
$$\lambda\Big(X_{1p}(Yf) - Y_p(X_1 f)\Big) + \mu\Big(X_{2p}(Yf) - Y_p(X_2 f)\Big) =$$
$$\lambda[X_1,Y]_p(f) + \mu[X_2,Y]_p(f)$$

(3)

$$([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]])_p\,(f) = 0$$

Για ευκολία πράξεων θα αντιμετωπίσουμε κάθε όρο της παραπάνω σχέσης χωριστά

$$\bullet\,([X,[Y,Z]])\,(f) = X\,([Y,Z]f) - [Y,Z](Xf) =$$
$$X\,(Y(Zf) - Z(Yf)) - (Y(ZXf) - Z(YXf)) =$$
$$XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf \quad (*)$$
$$\bullet\,([Y,[Z,X]])\,(f) = Y\,([Z,X]f) - [Z,X](Yf) =$$
$$Y\,(Z(Xf) - X(Zf)) - (Z(XYf) - X(ZYf)) =$$
$$YZXf - YXZf - ZXYf + XZYf \quad (**)$$
$$\bullet\,([Z,[X,Y]])\,(f) = Z\,([X,Y]f) - [X,Y](Zf) =$$
$$Z\,(X(Yf) - Y(Xf)) - (X(YZf) - Y(XZf)) =$$
$$ZXYf - ZYXf - XYZf + YXZf \quad (***)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις $(*)$, $(**)$, $(***)$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.6.2 *Έστω μια λεία πολλαπλότητα M και δύο διανυσματικά πεδία $X, Y\epsilon\mathcal{X}(M)$. Τότε $\forall f, g\epsilon C_p^\infty(M)$ ισχύει η ταυτότητα*

$$[fX, gY] = fg\,[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X. \qquad (1.40)$$

Απόδειξη.

Έστω $h \epsilon C_p^\infty(M)$ τότε έχουμε

$$[fX, gY](h) = (fX)((gY)h) - (gY)((fX)h) =$$

$$f(X)(g(Yh)) - g(Y)(f(Xh)) =$$

$$f((Xg)(Yh) + g(X(Yh))) - g((Yf)(Xh) + f(Y(Xh))) =$$

$$f(Xg)(Yh) + fg(X(Yh)) - g(Yf)(Xh) - fg(Y(Xh)) =$$

$$fg(X(Yh) - Y(Xh)) + f(Xg)(Yh) - g(Yf)(Xh) =$$

$$fg[X, Y]h + f(Xg)Y(h) - g(Yf)X(h)$$

Άρα $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$ □

Έστω ένας χάρτης (U, φ) μιας πολλαπλότητας M^m με συντεταγμένες x_i τότε γνωρίζουμε από την σχέση (1.36) ότι

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

με $1 \leq i, j \leq n$.
Πράγματι, $\forall p \epsilon U, \forall f \epsilon C_p^\infty(M)$ έχουμε

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]_p(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right) - \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right) =$$

$$D_i\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right) \circ \varphi^{-1}\right)\Bigg|_{\varphi(p)} - D_j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right) \circ \varphi^{-1}\right)\Bigg|_{\varphi(p)} =$$

$$D_i\left(D_j\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)\Big|_{\varphi(p)} - D_j\left(D_i\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)\Big|_{\varphi(p)} = 0.$$

Επειδή $D_i D_j = D_j D_i$.

Έστω δύο διανυσματικά πεδία $X, Y \epsilon \mathcal{X}(M^m)$ με παραστάσεις στο U τότε έχουμε

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

όπου $a_i, b_j \epsilon D(U)$. Από την ιδιότητα (2) της πρότασης (1.6.1) και την πρόταση (1.6.2) υπολογίζουμε

$$[X,Y] = \left[\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j}\left[a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] =$$

$$\sum_{i,j}\left(a_i b_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$\sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ορισμός 1.6.3 *Έστω μία πολλαπλότητα M, ένα λείο διανυσματικό πεδίο X της πολλαπλότητας M και ένα σημείο $p \epsilon M$. Μια ολοκληροτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου X είναι μια λεία καμπύλη $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \forall t \epsilon (a,b). \tag{1.41}$$

Το ανοικτό διάστημα (a,b) περιέχει το σημείο 0. Αν $\gamma(0) = p$ τότε θα λέμε ότι η ολοκληρωτική καμπύλη έχει αρχή το σημείο p.

Παράδειγμα 1.6.1

Έστω το διανυσματικό πεδίο $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \epsilon \mathbb{R}^2$. Θα βρούμε μια ολοκληρωτική καμπύλη γ του X με αρχή το σημείο $p = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.
Έστω $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ μια ολοκληρωτική καμπύλη και από την σχέση (1.33) έχουμε

$$\gamma'(t) = d\gamma_t\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right) =$$

$$\left(d\gamma_t\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\right)(x)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + \left(d\gamma_t\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\right)(y)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)} =$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t (x \circ \gamma)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + \left.\frac{d}{dt}\right|_t (y \circ \gamma)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)} =$$

$$x'(t)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + y'(t)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}$$

Από την σχέση (1.41) έχουμε

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \Rightarrow$$

$$x'(t)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + y'(t)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)} = -y(t)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\gamma(t)} + x(t)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\gamma(t)}$$

Από το παραπάνω προκύπτουν οι εξισώσεις

$$x'(t) = -y(t) \quad \textit{και} \quad y'(t) = x(t)$$

με αρχικές τιμές $x(0) = x_0$ και $y(0) = y_0$.
Αντικαθιστώντας την $y'(t) = x(t) \Rightarrow y''(t) = x'(t)$ στην $x'(t) = -y(t)$ προκύπτει

$$y''(t) + y(t) = 0$$

Η λύση της οποίας είναι

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t).$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 \Rightarrow A = y_0$. Επιστρέφοντας στην εξίσωση

$$y'(t) = x(t)$$

έχουμε

$$x(t) = -y_0\sin(t) + B\cos(t).$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 \Rightarrow B = x_0$.
Άρα, οι λύσεις είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= -y_0\sin(t) + x_0\cos(t) \\ y(t) &= y_0\cos(t) + x_0\sin(t) \end{aligned}$$

1.7 Διαμερισμός της μονάδας

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράφουμε μια τοπολογική ιδιότητα των λείων πολλαπλοτήτων με πολλές εφαρμογές στην Ανάλυση και στην Γεωμετρία. Είναι ο λεγόμενος διαμερισμός της μονάδας. Ο διαμερισμός της μονάδας είναι μια κατασκευή πάνω σε πολλαπλότητες που μας επιτρέπει να κάνουμε συναρμολόγηση απεικονίσεων, που ορίζονται τοπικά, με λείο τρόπο.

Ορισμός 1.7.1 *Μια συλλογή υποσυνόλων $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ ενός τοπολογικού χώρου M ονομάζεται τοπικά πεπερασμένη, αν για κάθε σημείο $p\epsilon M$, υπάρχει μια περιοχή V_p του σημείου p τέτοια ώστε $V_p \cap U_a \neq \emptyset$ για πεπερασμένο αριθμό δεικτών $a\epsilon A$, δηλαδή πεπερασμένος αριθμός συνόλων U_a τέμνει την περιοχή V_p του σημείου p.*

Ορισμός 1.7.2 *Θεωρούμε δύο καλύψεις $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ και $\{V_i\}_{i\epsilon I}$ του τοπολογικού χώρου M, δηλαδή $\bigcup_{a\epsilon A} U_a = M$ και $\bigcup_{i\epsilon I} V_i = M$. Τότε αν για κάθε δείκτη $a\epsilon A$ υπάρχει δείκτης $i\epsilon I$ τέτοιος ώστε $V_i \subset U_a$, η κάλυψη $\{V_i\}_{i\epsilon I}$ ονομάζεται εκλέπτυνση της κάλυψης $\{U_a\}_{a\epsilon A}$.*

Ορισμός 1.7.3 *Ένας τοπολογικός χώρος M ονομάζεται παρασυμπαγής αν*
(α) είναι Hausdorff και
(β) για κάθε ανοικτή κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ του τοπολογικού χώρου M, υπάρχει μια άλλη τοπικά πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\{V_i\}_{i\epsilon I}$ του τοπολογικού χώρου M, η οποία είναι εκλέπτυνση της $\{U_a\}_{a\epsilon A}$.

Θεώρημα 1.7.1 *Κάθε τοπολογικός χώρος Hausdorff, τοπικά συμπαγής και με αριθμήση βάση είναι παρασυμπαγής.*

Ορισμός 1.7.4 *Μια πολλαπλότητα ονομάζεται παρασυμπαγής όταν ως τοπολογικός χώρος είναι παρασυμπαγής.*

Θεώρημα 1.7.2 *Κάθε πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής χώρος.*

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι κάθε Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^m$ με $m = 1, 2, \cdots$ είναι τοπικά συμπαγής τότε έχουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι τοπικά συμπαγής. Επίσης από τον ορισμό της πολλαπλότητας (1.1.1) προκύπτει ότι η πολλαπλότητα M είναι Hausdorff και έχει αριθμήση βάση. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα (1.7.1) η πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής χώρος. □

Θεώρημα 1.7.3 *Έστω μια ανοικτή κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ της πολλαπλότητας M τότε υπάρχει ανοικτή κάλυψη $\{V_a\}_{a\epsilon A}$ της πολλαπλότητας M, από το ίδιο σύνολο δεικτών, τέτοια ώστε $\bar{V}_a \subset U_a, \forall a\epsilon A$.*

Απόδειξη.

Εκλέγουμε μια περιοχή V_p του σημείου $p\epsilon M$ τέτοια ώστε: πρώτον η περιοχή V_p να είναι πεδίο ορισμού κάποιου χάρτη και $\bar{V}_p$ συμπαγές (διότι η πολλαπλότητα M είναι τοπικά συμπαγής) και δεύτερον το $\bar{V}_p$ να περιέχεται σε κάποιο σύνολο U_a. Η $\{V_p\}_{p\epsilon M}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη. Επειδή η πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής υπάρχει μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_i'\}_{i\epsilon I}$ της $\{V_p\}_{p\epsilon M}$. Θέτουμε $\forall a$

$$I_a = \left\{ i\epsilon I : \bar{V'}_i \subset U_a \right\}, V_a = \bigcup_{i\epsilon I_a} V_i'$$

Άρα η συλλογή $\{V_a\}_{a\epsilon A}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη της πολλαπλότητας M. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι

$$\bar{V}_a = \bigcup_{i\epsilon I_a} \bar{V'}_i \quad (*)$$

δηλαδή, επειδή κάθε $\bar{V'}_i$ περιέχεται στο U_a, θα ισχύει $\bar{V}_a \subset U_a$ και συνεπώς η συλλογή $\{V_a\}_{a\epsilon A}$ είναι η ανοικτή κάλυψη της πολλαπλότητας M που επιθυμούμε. Θα αποδείξουμε την σχέση $(*)$. Είναι προφανές ότι

$$\bigcup_{i\epsilon I_a} \bar{V'}_i \subset \bar{V}_a$$

Από την άλλη έχουμε, αν το σημείο p είναι τυχαίο του $\bar{V}_a$, επειδή η $\{V_i'\}_{i\epsilon I}$ είναι πεπερασμένη μπορούμε να πάρουμε μια αρκετά μικρή περιοχή W του σημείου p έτσι ώστε ο αριθμός $i\epsilon I_a$ για τα οποία $W \cap V_i' \neq \emptyset$, να είναι πεπερασμένος. Έστω οι πεπερασμένοι δείκτες $i_1, \cdots, i_k$ του $i\epsilon I_a$. Θα αποδείξουμε ότι

$$p\epsilon \bigcup_{a=1}^{k} \bar{V}_{i_a}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$p \notin \bigcup_{a=1}^{k} \bar{V}_{i_a}.$$

Άρα υπάρχει περιοχή W' του σημείου p που περιέχεται στο W τέτοια ώστε

$$W' \cap \bigcup_{a=1}^{k} \bar{V}_{i_a} = \emptyset.$$

Αν i είναι ένα στοιχείο του I_a διαφορετικό των i_a με $a = 1, \cdots, k$ τότε, επειδή $W \cap V_i' = \emptyset$ έχουμε ότι ισχύει $W' \cap V_i' = \emptyset$. Άρα για τυχαίο $i \epsilon I_a$, ισχύει $W' \cap V_i' = \emptyset$, άρα $W \cap V_a = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο διότι $p \epsilon \bar{V}_a$. Συνεπώς $p \epsilon \bigcup_{a=1}^{k} \bar{V}_{i_a}$, δηλαδή ισχύει η σχέση $(*)$. $\square$

Θεώρημα 1.7.4 *Έστω μια περιοχή U μιας πολλαπλότητας M σε ένα σημείο $p \epsilon M$. Τότε μπορούμε να διαλέξουμε μια αρκετά μικρή περιοχή W του σημείου p και μια λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ολόκληρη τη πολλαπλότητα M τέτοια ώστε*
(α) $\bar{W} \subset U$
(β) $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ στο $\bar{W}$ και $f = 0$ στο συμπλήρωμα του U, δηλαδή στο $M - U$.

Απόδειξη.

Έστω μια πολλαπλότητα M^m και (U, φ) ένας χάρτης της γύρω από το σημείο $p \epsilon M^m$ με $\varphi(p) = 0$. Αν $x_i = \pi_i \circ \varphi$, $i = 1, \cdots, m$ είναι οι συντεταγμένες του χάρτη τότε ισχύει ότι $x_i(p) = 0$. Αν $\alpha, \beta > 0$ αρκετά μικροί αριθμοί με $\beta < \alpha$ τότε θέτουμε

$$V_p = \{q \epsilon U : |x_i(q)| < \alpha, i = 1, \cdots, m\}$$

$$W_p = \{q \epsilon U : |x_i(q)| < \beta, i = 1, \cdots, m\}$$

Τα V_p και W_p είναι περιοχές του σημείου p και μάλιστα ισχύει ότι $\bar{W}_p \subset V_p$. Έστω μια λεία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι τέτοια ώστε

$$\begin{cases} g(t) = 1, & \alpha\nu \quad |t| \leq \beta \\ 0 < g(t) < 1, & \alpha\nu \quad \beta < |t| < \alpha \\ g(t) = 0, & \alpha\nu \quad |t| \geq \alpha \end{cases}$$

(παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης θα δώσουμε στην συνέχεια). Ορίζουμε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f_p : M \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$f_p(q) = \begin{cases} g(x_1(q)) \cdot g(x_2(q)) \cdots g(x_m(q)), & \alpha\nu \quad q \epsilon V_p \\ 0, & \alpha\nu \quad q \notin V_p \end{cases}$$

Για την f_p έχουμε ότι

$$f_p(q) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad q \epsilon \bar{W}_p \\ 0 < f_p(q) < 1, & \alpha\nu \quad q \epsilon (V_p - \bar{W}_p) \\ 0, & \alpha\nu \quad q \notin V_p \end{cases}$$

□

Παράδειγμα 1.7.1

Για να είναι απόλυτα ολοκληρωμένη η απόδειξη του θεωρήματος (1.7.4) πρέπει να δείξουμε την ύπαρξη μιας λείας συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta > 0$ η οποία είναι τέτοια ώστε

$$\begin{cases} g(t) = 1, & \alpha\nu \quad |t| \leq \beta \\ 0 < g(t) < 1, & \alpha\nu \quad \beta < |t| < \alpha \\ g(t) = 0, & \alpha\nu \quad |t| \geq \alpha \end{cases}$$

Θεωρούμε την λεία συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t^2}}, & \alpha\nu \quad t > 0 \\ 0, & \alpha\nu \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Έστω $h(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$, η οποία είναι και αυτή λεία συνάρτηση με

$$\begin{cases} h(t) = 0, & \alpha\nu \quad t \leq 0 \\ 0 < h(t) < 1, & \alpha\nu \quad 0 < t < 1 \\ h(t) = 1, & \alpha\nu \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση

$$g(t) = h\left(\frac{t+\alpha}{\alpha-\beta}\right) h\left(\frac{-t+\alpha}{\alpha-\beta}\right)$$

Για την συνάρτηση $g(t)$ έχουμε $0 \leq g(t) \leq 1$. Ακόμη $g(t) = 0$ αν $|t| \geq \alpha$ και $g(t) = 1$ αν $|t| \leq \beta$. Άρα η ύπαρξη της λείας συνάρτησης $g(t)$ ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος (1.7.4).

Θεώρημα 1.7.5 *Έστω μια πολλαπλότητα M, K ένα συμπαγές υποσύνολο της M και U ένα ανοικτό υποσύνολο της M το οποίο περιέχει το K. Τότε υπάρχει μια λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $0 \leq f \leq 1$, $f > 0$ στο K και $f = 0$ στο $M - U$.*

Απόδειξη.

Από το θεώρημα (1.7.4) γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο $p\epsilon K$ υπάρχει περιοχή V_p του σημείου p ($\bar{V}_p \subset U$) και μια λεία συνάρτηση $f_p : M \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $0 \leq f_p \leq 1$, $f_p = 1$ στο V_p και $f_p = 0$ στο $M - U$. Επειδή το υποσύνολο K είναι συμπαγές, επιλέγουμε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων $p_1, \cdots, p_n$ του K έτσι ώστε

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}.$$

Η συνάρτηση

$$f = \frac{1}{n}\left(f_{p_1} + \cdots + f_{p_n}\right)$$

είναι η επιθυμητή. □

Ορισμός 1.7.5 *Έστω μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε μια πολλαπλότητα M. Το κάλυμμα του συνόλου*

$$\{p\epsilon M : f(p) \neq 0\}$$

λέγεται στήριγμα της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\sigma(f)$.

Ορισμός 1.7.6 *Ένας διαμερισμός της μονάδας σε μια πολλαπλότητα M είναι μια συλλογή λείων συναρτήσεων $\{f_a\}_{a\epsilon A}$, όπου $f_a : M \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*
(1) $0 \leq f_a(p) \leq 1$ για κάθε $a\epsilon A$ και για κάθε $p\epsilon M$
(2) Η συλλογή των στηριγμάτων $\{\sigma(f_a)\}_{a\epsilon A}$ περιέχεται σε μια τοπικά πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ της πολλαπλότητας M
(3) $\displaystyle\sum_{a\epsilon A} f_a(p) = 1$ για κάθε $p\epsilon M$.

Παρατήρηση. Το παραπάνω άθροισμα έχει νόημα επειδή μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος όρων του αθροίσματος είναι μη μηδενικοί.

Θεώρημα 1.7.6 *Έστω μια πολλαπλότητα M και μια τοπικά πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ της M. Αν $\forall a\epsilon A$ το $\bar{U}_a$ είναι συμπαγές, τότε υπάρχει διαμερισμός της μονάδας ως προς την κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$.*

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε από το θεώρημα (1.7.3) ότι μπορούμε να επιλέξουμε ανοικτές καλύψεις $\{V_a\}_{a\epsilon A}$ και $\{W_a\}_{a\epsilon A}$ της πολλαπλότητας M έτσι ώστε $\bar{W}_a \subset U_a$ και $\bar{V}_a \subset W_a$ $\forall a\epsilon A$. Ακόμη από το θεώρημα (1.7.5) γνωρίζουμε ότι $\forall a$ υπάρχει λεία συνάρτηση $g_a : M \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $0 \le g_a \le 1$, $g_a > 0$ στο U_a και $g_a = 0$ στο $M - W_a$. Το στήριγμα της g_a περιέχεται στο $\bar{W}_a$ και συνεπώς και στο U_a, διότι $\bar{W}_a \subset U_a$. Τώρα επειδή η $\{U_a\}_{a\epsilon A}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, $\forall p\epsilon M$ μπορούμε να διαλέξουμε μια περιοχή U του σημείου p αρκετά μικρή ώστε ο αριθμός των U_a που τέμνουν την U να είναι πεπερασμένος. Άρα οι συναρτήσεις g_a είναι 0 στο U, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό $a\epsilon A$. Θέτουμε $\forall p\epsilon M$

$$g(p) = \sum_{a\epsilon A} g_a(p).$$

Η συνάρτηση $g : M \to \mathbb{R}$ είναι λεία στην πολλαπλότητα M. Επειδή η $\{V_a\}_{a\epsilon A}$ είναι ανοικτή κάλυψη της M με $g_a \ge 0$ και $g_a > 0$ στο V_a, έχουμε ότι $g > 0$. Θέτουμε

$$f_a = \frac{g_a}{g}, \forall a\epsilon A$$

τότε η συλλογή $\{f_a\}_{a\epsilon A}$ είναι ένας διαμερισμός της μονάδας ως προς την κάλυψη $\{U_a\}_{a\epsilon A}$. $\square$

Πόρισμα 1.7.1 *Έστω U ανοικτό, V κλειστό υποσύνολο μιας πολλαπλότητας M με $V \subset U$ και μια λεία συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $F : M \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση με $F|_V = f$ και $\sigma(F) \subset U$.*

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ανοικτή κάλυψη $\{U, M - V\}$ της πολλαπλότητας M και ένα διαμερισμό της μονάδας $\{f_1, f_2\}$ με $\sigma(f_1) \subset U$ και $\sigma(f_2) \subset M - V$. Επεκτείνουμε την f σε μια απεικόνιση $\bar{f} : M \to \mathbb{R}$ με αυθαίρετο τρόπο και ορίζουμε την F από την σχέση

$$F(p) = f_1(p)\bar{f}(p).$$

Τότε έχουμε $F\epsilon C_p^\infty(M)$ διότι $F(p) = 0$ αν $p\epsilon M - \sigma(f_1) \supset M - U$ και η $\bar{f}$ είναι λεία στο U. Επίσης, $\sigma(F) \subset \sigma(f_1) \subset U$. Τέλος, επειδή $f_2(p) = 0$, για $p\epsilon V$, ισχύει $f_1(p) = 1$, για $p\epsilon V$. Άρα $F(p) = f(p)$, για $p\epsilon V$. $\square$

Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από τα θέματα που αναφέρονται στο κεφάλαιο 1 παραπέμπτουμε τον αναγνώστη στις αναφορές ([1], [2], [4], [6], [7], [8], [9]).

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές μορφές

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις διαφορικές μορφές ξεκινώντας από τον $\mathbb{R}^n$ και στη συνέχεια σε πολλαπλότητες.

Συγκεκριμένα στην παράγραφο 2.1 μελετάμε τις διαφορικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$. Δίνουμε τον ορισμό μιας k-μορφής και του εξωτερικού γινομένου, καθώς και ιδιότητες και θεωρήματα που εξάγονται από αυτούς τους ορισμούς.

Τέλος, στην παράγραφο 2.2 μελετάμε τις διαφορικές μορφές σε πολλαπλότητες. Δίνουμε τους ορισμούς k-συναλλίωτος τανυστής, τανυστικό γινόμενο, αντισυμμετρικός τανυστής, εξωτερικό γινόμενο και k-μορφής και τελικά αποδεικνύουμε το σημαντικό θεώρημα το οποίο μετατρέπει διαφορικές k-μορφές σε διαφορικές $k + 1$-μορφές.

2.1 Διαφορικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την εξωτερική άλγεβρα για την περίπτωση που ο διανυσματικός χώρος V είναι ο εφαπτόμενος χώρος $T_p\mathbb{R}^n$. Οι διαφορικές μορφές είναι k-γραμμικές συναρτήσεις που ορίζονται σς ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει το σημείο p. Άρα, όπως θα δούμε στην συνέχεια είναι δυνατόν να οριστεί η έννοια παραγώγισης των διαφορικών μορφών κατά μοναδικό τρόπο, γνωστή ως εξωτερική παράγωγος. Το πιο σπουδαίο είναι ότι αυτές οι έννοιες μπορούν να γενικευτούν και σε πολλαπλότητες.

Ορισμός 2.1.1 *Έστω* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό. Μια διαφορίσιμη 1-μορφή είναι μια απεικόνιση* ω *η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε* $p \epsilon U$ *ένα διάνυσμα* $\omega_p \epsilon T_p^* \mathbb{R}^n$*, δηλαδή*

$$\omega : U \to \bigcup_{p \epsilon U} T_p^* \mathbb{R}^n, p \mapsto \omega_p \epsilon T_p^* \mathbb{R}^n.$$

Μια τέτοια απεικόνιση ω *μπορεί να γραφεί ως*

$$\omega_p = a_1(p)(dx_1)_p + \cdots + a_n(p)(dx_n)_p$$

ή εν συντομία ως

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)(dx_i)_p$$

όπου οι $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι πραγματικές συναρτήσεις. Εάν οι συναρτήσεις αυτές είναι διαφορίσιμες τότε η* ω *καλείται διαφορική μορφή βαθμού 1.*

Παρατήρηση. (1) Η ένωση $\bigcup_{p \epsilon U} T_p^* \mathbb{R}^n$ αποτελείται από ξένα μεταξύ τους υποσύνολα.
(2) Θα ονομάζουμε μία διαφορίσιμη 1-μορφή απλώς 1-μορφή.
(3) Οι 1-μορφές είναι αντικείμενα δυϊκά των διανυσματικών πεδίων X στο U, δεδομένου ότι ένα διανυσματικό πεδίο X στο U μπορεί να θεωρηθεί μια απεικόνιση

$$X : U \to T_p M, p \mapsto X_p \epsilon T_p M.$$

Ορισμός 2.1.2 *Έστω μια λεία απεικόνιση* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Το διαφορικό της* f *είναι η 1-μορφή* df *για την οποία έχουμε ότι, έστω* $p \epsilon U, X_p \epsilon T_p U$ *τότε*

$$(df)_p(X_p) = X_p f.$$

Παράδειγμα 2.1.1

Αν $x_1, \cdots, x_n$ είναι οι συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$, τότε οι $dx_1, \cdots, dx_n$ είναι οι 1-μορφές στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε 1-μορφή ω στον $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως

$$\omega = a_1(x_1, \cdots, x_n)dx_1 + \cdots + a_n(x_1, \cdots, x_n)dx_n.$$

Ορισμός 2.1.3 *Έστω* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό. Μια διαφορίσιμη μορφή βαθμου* k *ή απλώς* k*-μορφή είναι μια απεικόνιση* ω *η οποία αντιστοιχεί σε κάθε* $p \epsilon U$ *μια ενναλάσσουσα* k*-γραμμική συνάρτηση του* $T_p^*\mathbb{R}^n$*, δηλαδή* $\omega_p \epsilon \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$*, όπου με* $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$ *συμβολίζουμε το σύνολο των απεικονίσεων οι οποίες είναι διγραμμικές και ενναλάσσουσες.*
Γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$\left\{(dx_I)_p = (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\right\}$$

αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$*, συνεπώς για κάθε* $p \epsilon U$ *η μορφή* ω_p *γράφεται ως*

$$\omega_p = \sum a_I(p)(dx_I)_p, 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n, a_I(p) \epsilon \mathbb{R}$$

ή διαφορετικά

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\cdots,i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p.$$

Ορίζουμε τώρα κάποιες θεμελιώδεις πράξεις στο σύνολο των k-μορφών ως εξής: Αν ω και φ είναι δυο k-μορφές στον $\mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum a_I dx_I, \varphi = \sum b_I dx_I$$

τότε έχουμε την δυνατότητα ορισμού του αθροίσματος

$$\omega + \varphi = \sum (a_I + b_I) dx_I.$$

Ορισμός 2.1.4 *Έστω* ω *μια* k*-μορφή και* φ *μια* s*-μορφή τότε ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο* $\omega \wedge \varphi$*, το οποίο αποτελεί μια* $(k+s)$*-μορφή ως εξής: αν*

$$\omega = \sum a_I dx_I, I = (i_1, \cdots, i_k), i_1 < \cdots < i_k$$

και

$$\varphi = \sum b_J dx_J, J = (j_1, \cdots, j_s), j_1 < \cdots < j_s$$

τότε έχουμε

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I dx_J.$$

Πρόταση 2.1.1 *Υποθέτουμε ότι η* ω *είναι μια* k*-μορφή, η* φ *είναι μια* s*-μορφή και η* θ *είναι μια* r*-μορφή, τότε το εξωτερικό γινόμενο στον* $\mathbb{R}^n$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(1) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$
(2) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$
(3) Εάν $r = s$*, τότε* $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$.

Απόδειξη.

Έστω ότι έχουμε

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, I = (i_1, \cdots, i_k), i_1 < \cdots < i_k,$$

$$\varphi = \sum_J b_J dx_J, J = (j_1, \cdots, j_s), j_1 < \cdots < j_s$$

και

$$\theta = \sum_K c_K dx_K, K = (k_1, \cdots, k_r), k_1 < \cdots < k_r$$

τότε από τον ορισμό του εξωτερικού γινιμένου (2.1.4)
(1)

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \left(\sum_{IJ} a_I b_J dx_I dx_J\right) \wedge \sum_K c_K dx_K =$$

$$\sum_{IJK} a_I b_J c_K (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = \sum_{IJK} a_I b_J c_K dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) =$$

$$\sum_I a_I dx_I \wedge \left(\sum_{JK} b_J c_K (dx_J \wedge dx_K)\right) = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$$

(2)

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} =$$

$$\sum_{IJ} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{ik} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} =$$

$$\sum_{IJ} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}$$

Επειδή το J αποτελείται από s στοιχεία επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και έχουμε τελικά ότι

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{ks} (\varphi \wedge \omega).$$

(3) Αφού ισχύει ότι $r = s$, έχουμε

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum_I a_I dx_I \wedge \left(\sum_J (b_J + c_J) dx_J \right) =$$

$$\sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J + \sum_{IJ} a_I c_J dx_I \wedge dx_J = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta.$$

□

Παρατήρηση. Παρότι $dx_i \wedge dx_i = 0$, δεν ισχύει γενικά ότι $\omega \wedge \omega = 0$ για οποιαδήποτε μορφή ω. Για παράδειγμα, εάν

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$$

τότε

$$\omega \wedge \omega = 2x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Έστω ω μια διαφορική k-μορφή σε ένα ανοικτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$. Θα ορίσουμε μια διαφορική $(k+1)$-μορφή $d\omega$ στο U την οποία θα ονομάζουμε εξωτερική παράγωγο της ω. Γνωρίζουμε ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δίνεται από τον τύπο

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ορισμός 2.1.5 *Έστω* $\omega = \sum_I a_I dx_I$ *μια* k*-μορφή στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $k \geq 1$. *Η εξωτερική παράγωγος* $d\omega$ *της* ω *είναι η* $(k+1)$*-μορφή*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left(\sum_J \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I$$

Παράδειγμα 2.1.2

Έστω ότι έχουμε $\omega = xyzdx + yzdy + (x + z)dz$ θα υπολογίσουμε το $d\omega$:

$$d\omega = d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x + y) \wedge dz =$$

$$(yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy + (dx + dz) \wedge dz =$$

$$-xzdx \wedge dy + (1 - xy)dx \wedge dz - ydy \wedge dz.$$

Θεώρημα 2.1.1 *(α) Για κάθε C^l-διαφορικές k-μορφές ω_1, ω_2, όπου $l \geq 2$ έχουμε*

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

(β) Εάν η ω είναι τυχαία C^l-διαφορική k-μορφή και η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια C^l-διαφορίσιμη απεικόνιση, όπου $l \geq 2$ έχουμε

$$d(f\omega) = f(d\omega).$$

(γ) Για κάθε k-μορφή ω και για κάθε s-μορφή φ έχουμε

$$d(\omega \wedge \varphi) = (d\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge (d\varphi).$$

(δ) Για κάθε C^l-διαφορική k-μορφή ω, όπου $l \geq 2$ έχουμε

$$d(d\omega) = d^2\omega = 0.$$

Παρατήρηση. Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα γίνει στην επόμενη παράγραφο (2.2), όπου θα διατυπώσουμε ξανά το ίδιο θεώτημα αλλά σε πολλαπλότητες, όχι στον $\mathbb{R}^n$.

2.2 Διαφορικές μορφές σε πολλαπλότητες

Οι διανυσματικοί χώροι που θα χρησιμοποιήσουμε στην παράγραφο αυτή θα είναι πραγματικοί και πεπερασμένης διάστασης. Έστω ο διανυσματικός χώρος V με διάσταση n. Με V^* συμβολίζουμε τον δυϊκό του, δηλαδή το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \to \mathbb{R}$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ορισμένα κατά φυσικό τρόπο.

Ορισμός 2.2.1 *Μια συνάρτηση* $\tau : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k-\phi o\rho\acute{\varepsilon}s} \to \mathbb{R}$ *λέγεται πολυγραμμική εάν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή, δηλαδή ισχύει*
(1) $\tau(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \cdots, v_k) = \tau(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \tau(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$
(2) $\tau(v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_k) = \lambda\tau(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$
για κάθε i τέτοιο ώστε $1 \leq i \leq k$ *και* $\lambda\epsilon\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2.2 *Μια πολυγραμμική απεικόνιση* $\tau : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k-\phi o\rho\acute{\varepsilon}s} \to \mathbb{R}$ *λέγεται k-συναλλοίωτος τανυστής πάνω στο V ή συναλλοίωτος τανυστής βαθμού k.*

Στην περίπτωση όπου $k = 1$, ένας 1-συναλλοίωτος τανυστής είναι απλώς μια γραμμική μορφή στον V. Το συνήθες εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι παράδειγμα ενός 2-συναλλοίωτου τανυστή στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω τώρα δύο k-συναλλοίωτοι τανυστές $\tau, \sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k-\phi o\rho\acute{\varepsilon}s} \to \mathbb{R}$ πάνω στο V και $\lambda\epsilon\mathbb{R}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε:
το άθροισμα των k-συναλλοίωτων τανυστών

$$(\tau + \sigma) : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k-\phi o\rho\acute{\varepsilon}s} \to \mathbb{R}$$

με

$$(\tau + \sigma)(v_1, \cdots, v_k) = \tau(v_1, \cdots, v_k) + \sigma(v_1, \cdots, v_k)$$

και το γινόμενο του k-συναλλοίωτου τανυστή τ και του $\lambda\epsilon\mathbb{R}$,

$$(\lambda\tau) : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k-\phi o\rho\acute{\varepsilon}s} \to \mathbb{R}$$

με

$$(\lambda\tau)(v_1, \cdots, v_k) = \lambda\tau(v_1, \cdots, v_k).$$

Είναι προφανές ότι οι $(\tau+\sigma)$ και $(\lambda\tau)$ είναι k-συναλλοίωτοι τανυστές πάνω στο V και ότι το σύνολο των k-συναλλοίωτων τανυστών με τις παραπάνω πράξεις που ορίσαμε γίνεται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Για $k = 1$, αποκτούμε τον λεγόμενο δυϊκό χώρο V^* του V.

Έστω $\{e_1, \cdots, e_n\}$ είναι η βάση του V, τότε η δυϊκή βάση $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ του V^* ορίζεται από την

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Ορισμός 2.2.3 *Έστω τ ένας k-συναλλοίωτος τανυστής και σ ένας s-συναλλοίωτος τανυστής τότε μπορούμε να ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο $\tau \otimes \sigma$ να είναι ένας $k+s$-συναλλοίωτος τανυστής, που ικανοποιεί την σχέση*

$$\tau \otimes \sigma(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) = \tau(v_1, \cdots, v_k)\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s})$$

Πρόταση 2.2.1 *Για συναλλοίωτους τανυστές ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*
(1) $(\tau_1 + \tau_2) \otimes \sigma = \tau_1 \otimes \sigma + \tau_2 \otimes \sigma$
(2) $\tau(\sigma_1 + \sigma_2) = \tau \otimes \sigma_1 + \tau \otimes \sigma_2$
(3) $(\lambda\tau) \otimes \sigma = \lambda(\tau \otimes \sigma) = \tau \otimes (\lambda\sigma), \lambda \epsilon \mathbb{R}$
(4) $(\tau \otimes \sigma) \otimes \omega = \tau \otimes (\sigma \otimes \omega)$
(5) Γενικά ισχύει $\tau \otimes \sigma \neq \sigma \otimes \tau$.

Απόδειξη.

(1)Έστω ότι οι τ_1, τ_2 είναι k-συναλλοίωτοι τανυστές και η σ είναι s-συναλλοίωτος τανυστής τότε έχουμε

$$(\tau_1 + \tau_2) \otimes \sigma(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$(\tau_1 + \tau_2)(v_1, \cdots, v_k)\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$(\tau_1(v_1, \cdots, v_k) + \tau_2(v_1, \cdots, v_k))\,\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$\tau_1(v_1, \cdots, v_k)\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) + \tau_2(v_1, \cdots, v_k)\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$\tau_1 \otimes \sigma(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) + \tau \otimes \sigma(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s})$$

Άρα, $(\tau_1 + \tau_2) \otimes \sigma = \tau_1 \otimes \sigma + \tau_2 \otimes \sigma$.
(2)Έστω ότι οι σ_1, σ_2 είναι s-συναλλοίωτοι τανυστές και η τ είναι k-συναλλοίωτος τανυστής τότε έχουμε

$$\tau(\sigma_1 + \sigma_2)(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$\tau(v_1,\cdots,v_k)(\sigma_1+\sigma_2)(v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)\left(\sigma_1(v_{k+1},\cdots,v_{k+s})+\sigma_2(v_{k+1},\cdots,v_{k+s})\right) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma_1(v_{k+1},\cdots,v_{k+s})+\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma_2(v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\tau\otimes\sigma_1(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})+\tau\otimes\sigma_2(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})$$

Άρα, $\tau(\sigma_1+\sigma_2) = \tau\otimes\sigma_1+\tau\otimes\sigma_2$.
(3) Έστω ότι τ είναι k-συναλλοίωτος τανυστής και σ είναι s-συναλλοίωτος τανυστής τότε έχουμε

$$(\lambda\tau)\otimes\sigma(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$(\lambda\tau)(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\lambda\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\lambda\left(\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})\right) =$$
$$\lambda\left(\tau\otimes\sigma(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})\right)$$

Άρα, $(\lambda\tau)\otimes\sigma = \lambda(\tau\otimes\sigma)$. Από την άλλη έχουμε

$$(\lambda\tau)\otimes\sigma(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$(\lambda\tau)(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\lambda\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)\lambda\sigma(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)(\lambda\sigma)(v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s}) =$$
$$\tau\otimes(\lambda\sigma)(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})$$

Άρα, $(\lambda\tau)\otimes\sigma = \tau\otimes(\lambda\sigma)$.
(4) Έστω ότι τ είναι k-συναλλοίωτος τανυστής, σ είναι s-συναλλοίωτος τανυστής και ω είναι r-συναλλοίωτος τανυστής τότε έχουμε

$$(\tau\otimes\sigma)\otimes\omega(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s},v_{k+s+1},\cdots,v_{k+s+r}) =$$
$$(\tau\otimes\sigma)(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})\omega(v_{k+s+1},\cdots,v_{k+s+r}) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)\sigma(v_{k+1},\cdots,v_{k+s})\omega(v_{k+s+1},\cdots,v_{k+s+r}) =$$
$$\tau(v_1,\cdots,v_k)(\sigma\otimes\omega)(v_{k+1},\cdots,v_{k+s},v_{k+s+1},\cdots,v_{k+s+r}) =$$

$$\tau \otimes (\sigma \otimes \omega)(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}, v_{k+s+1}, \cdots, v_{k+s+r})$$

Άρα, $(\tau \otimes \sigma) \otimes \omega = \tau \otimes (\sigma \otimes \omega)$.
(5) Έστω ότι τ είναι k-συναλλοίωτος τανυστής και σ είναι s-συναλλοίωτος τανυστής τότε έχουμε

$$\tau \otimes \sigma(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+s}) =$$

$$\tau(v_1, \cdots, v_k)\sigma(v_{k+1}, \cdots, v_{k+s})$$

Από την άλλη έχουμε

$$\sigma \otimes \tau(v_1, \cdots, v_s, v_{s+1}, \cdots, v_{s+k}) =$$

$$\sigma(v_1, \cdots, v_s)\tau(v_{s+1}, \cdots, v_{s+k})$$

τα οποία είναι διαφορετικά, άρα $\tau \otimes \sigma \neq \sigma \otimes \tau$. □

Θα συμβολίζουμε με S_k την ομάδα μεταθέσεων των αριθμών $1, \cdots, k$. Αν έχουμε $\pi \epsilon S_k$ τότε θα γράφουμε

$$(-1)^{\pi} = 1$$

όταν η μετάθεση π είναι άρτια και θα γράφουμε

$$(-1)^{\pi} = -1$$

όταν η μετάθεση π είναι περιττή.

Ορισμός 2.2.4 *Ένας k-συναλλοίωτος τανυστής τ θα λέγεται αντισυμμετρικός εάν για κάθε μετάθεση $\pi(1, \cdots, k) = (\pi(1), \cdots, \pi(k))$ ισχύει ότι*

$$\tau(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(k)}) = (-1)^{\pi}\tau(v_1, \cdots, v_k). \tag{2.1}$$

Ισοδύναμα, ένας k-συναλλοίωτος τανυστής τ θα λέγεται αντισυμμετρικός εάν ισχύει ότι

$$\tau(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -\tau(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) \tag{2.2}$$

δηλαδή εάν αλλάξουμε την θέση δύο τυχαίων μεταβλητών αλλάζει το πρόσημο του τ.

Για κάθε αντισυμμετρικό k-συναλλοίωτο τανυστή τ ισχύει ότι

$$\tau(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) = 0$$

δηλαδή αν δύο τυχαίες μεταβλητές γίνουν ίδιες τότε η τιμή είναι μήδεν.

Είναι προφανές ότι το άθροισμα αντισυμμετρικών k-συναλλοίωτων τανυστών είναι αντισυμμετρικός k-συναλλοίωτος τανυστής επίσης και το γινόμενο ενός αντισυμμετρικού k-συναλλοίωτου τανυστή με έναν πραγματικό αριθμό λ είναι και αυτό αντισυμμετρικός k-συναλλοίωτος τανυστής. Άρα το σύνολο των αντισυμμετρικών k-συναλλοίωτων τανυστών εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις γίνεται ένας γραμμικός υπόχωρος του συνόλου των k-συναλλοίωτων τανυστών. Θα συμβολίζουμε με $\Lambda^k(V^*)$ το σύνολο των αντισυμμετρικών k-συναλλοίωτων τανυστών. Είναι φανερό ότι $\Lambda^1(V^*) = V^*$ και επισης θέτουμε $\Lambda^0(V^*) = D(M)$.

Το τανυστικό γινόμενο $\tau \otimes \sigma$ δύο αντισυμμετρικών συναλλοίωτων τανυστών τ και σ δεν είναι αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής. Δηλαδή αν $\tau \epsilon \Lambda^k(V^*)$ και $\sigma \epsilon \Lambda^s(V^*)$ τότε το $\tau \otimes \sigma$ δεν είναι στοιχείο του $\Lambda^{k+s}(V^*)$. Αυτό θα το αποδείξουμε με το παρακάτω παράδειγμά.

Παράδειγμα 2.2.1

Θεωρούμε μια βάση $\{e_1, e_2\}$ του $V = \mathbb{R}^2$ και ας είναι $v_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ως προς αυτή την βάση με $i = 1, 2$. Ορίζουμε $\tau : V \times V \to \mathbb{R}$ με

$$\tau(v_i, v_j) = det \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι η τ είναι αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής βαθμού 2. Από τον ορισμό έχουμε

$$\tau(e_1, e_1) = \tau(e_2, e_2) = 0 \quad \textit{και} \quad \tau(e_1, e_2) = -\tau(e_2, e_1) = 1$$

Υπολογίζουμε τα εξής

$$\tau \otimes \tau(e_1, e_2, e_1, e_2) = \tau(e_1, e_2)\tau(e_1, e_2) = 1$$

$$\tau \otimes \tau(e_1, e_1, e_2, e_2) = \tau(e_1, e_1)\tau(e_2, e_2) = 0$$

Άρα, $\tau \otimes \tau(e_1, e_2, e_1, e_2) \neq -\tau \otimes \tau(e_1, e_1, e_2, e_2)$. Οπότε το $\tau \otimes \tau$ δεν είναι αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να ορίσουμε ένα καινούργιο γινόμενο έτσι ώστε το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών συναλλοίωτων τανυστών να είναι αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής. Για το σκοπό αυτό θα δούμε πως απο ένα τυχαίο k-συναλλοίωτο τανυστή τ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα k-συναλλοίωτο τανυστή τον οποίο θα συμβολίζουμε με $alt(\tau)$ και θα τον ονομάζουμε αντισυμμετρικό k-συναλλοίωτο τανυστή του τ. Ορίζουμε

$$alt(\tau)(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \epsilon S_k} (-1)^{\pi} \tau(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(k)}) \tag{2.3}$$

Πρόταση 2.2.2 *Εάν ο τ είναι ένας k-συναλλοίωτος τανυστής τότε και ο $alt(\tau)$ είναι ένας αντισυμμετρικός k-συναλλοίωτος τανυστής, δηλαδή $alt(\tau) \epsilon \Lambda^k(V^*)$. Επίσης αν ο τ είναι ένας αντισυμμετρικός k-συναλλοίωτος τανυστής, δηλαδή $\tau \epsilon \Lambda^k(V^*)$ τότε $alt(\tau) = \tau$. Άρα ισχύει ότι $alt(alt(\tau)) = alt(\tau)$.*

Απόδειξη.

Συμβολίζουμε με (i, j) τη μετάθεση που αλλάζει την θέση των αριθμών στις θέσεις i και j και διατηρεί τους υπόλοιπους αριθμούς. Τότε για $\pi \epsilon S_k$ θέτουμε

$$\pi' = \pi \circ (i, j).$$

Ακόμη είναι φανερό ότι όταν το π διατρέχει το S_k, τότε το π' διατρέχει το S_k. Οπότε από την σχέση (2.3) έχουμε

$$alt(\tau)(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \epsilon S_k} (-1)^{\pi} \tau(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(i)}, \cdots, v_{\pi(j)}, \cdots, v_{\pi(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \epsilon S_k} (-1)^{\pi'} \tau(v_{\pi'(1)}, \cdots, v_{\pi'(i)}, \cdots, v_{\pi'(j)}, \cdots, v_{\pi'(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \epsilon S_k} (-1)(-1)^{\pi'} \tau(v_{\pi'(1)}, \cdots, v_{\pi'(j)}, \cdots, v_{\pi'(i)}, \cdots, v_{\pi'(k)}) =$$

$$-\frac{1}{k!} \sum_{\pi \epsilon S_k} (-1)^{\pi'} \tau(v_{\pi'(1)}, \cdots, v_{\pi'(j)}, \cdots, v_{\pi'(i)}, \cdots, v_{\pi'(k)}) =$$

$$alt(\tau)(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$$

Άρα, $alt(\tau)\epsilon\Lambda^k(V^*)$.
Από τον ορισμό (2.2.4) και την σχέση (2.3) έχουμε ότι

$$alt(\tau)(v_1,\cdots,v_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\epsilon S_k}(-1)^{\pi}\tau(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})=$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{\pi\epsilon S_k}\tau(v_1,\cdots,v_k)=\tau(v_1,\cdots,v_k)\frac{1}{k!}\sum_{\pi\epsilon S_k}1=$$

$$\tau(v_1,\cdots,v_k)$$

Άρα, $alt(\tau)=\tau$. □

Όπως είδαμε παραπάνω το τανυστικό γινόμενο αντισυμμετρικών συναλλοίωτων τανυστών δεν είναι εν γένει αντισυμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής. Θα ορίσουμε ένα νέο γινόμενο που αυτό να μην συμβαίνει.

Ορισμός 2.2.5 *Έστω $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$ και $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ τότε ονομάζουμε εξωτερικό γινόμενο ή και σφήνα γινόμενο των τ και σ και το συμβολίζουμε με $\tau\wedge\sigma$ τον αντισυμμετρικό συναλλοίωτο τανυστή, που ορίζεται από την σχέση*

$$\tau\wedge\sigma=alt(\tau\otimes\sigma) \tag{2.4}$$

Έτσι αν $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$ και $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ τότε

$$\tau\wedge\sigma\epsilon\Lambda^{k+s}(V^*).$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την αναλυτική έκφραση του εξωτερικού γινομένου, οπότε από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) έχουμε

$$alt(\tau\otimes\sigma)(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+s})=$$

$$\frac{1}{(k+s)!}\sum_{\pi\epsilon S_{k+s}}(-1)^{\pi}(\tau\otimes\sigma)(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)},v_{\pi(k+1)},\cdots,v_{\pi(k+s)})=$$

$$\frac{1}{(k+s)!}\sum_{\pi\epsilon S_{k+s}}(-1)^{\pi}\tau(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})\sigma(v_{\pi(k+1)},\cdots,v_{\pi(k+s)})$$

Άρα,

$$\tau\wedge\sigma=\frac{1}{(k+s)!}\sum_{\pi\epsilon S_{k+s}}(-1)^{\pi}\tau(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})\sigma(v_{\pi(k+1)},\cdots,v_{\pi(k+s)}) \tag{2.5}$$

Πρόταση 2.2.3 *Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες*
(1) Αν $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$ *και* $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ *τότε*

$$\tau \wedge \sigma = (-1)^{ks}\sigma \wedge \tau.$$

(2) Αν $\tau_1, \tau_2\epsilon\Lambda^k(V^*)$, $\sigma_1, \sigma_2\epsilon\Lambda^s(V^*)$ *και* $\lambda, \mu\epsilon\mathbb{R}$ *τότε*

$$(\lambda\tau_1 + \mu\tau_2) \wedge \sigma_1 = \lambda\tau_1 \wedge \sigma_1 + \mu\tau_2 \wedge \sigma_1$$

$$\tau_1(\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2) = \lambda\tau_1 \wedge \sigma_1 + \mu\tau_1 \wedge \sigma_2.$$

(3) Αν $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$, $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ *και* $\lambda\epsilon\mathbb{R}$ *τότε*

$$\lambda(\tau \wedge \sigma) = (\lambda\tau) \wedge \sigma = \tau \wedge (\lambda\sigma).$$

(4) Αν $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$, $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ *και* $\rho\epsilon\Lambda^r(V^*)$ *τότε*

$$(\tau \wedge \sigma) \wedge \rho = \tau \wedge (\sigma \wedge \rho).$$

(5) Αν $\tau\epsilon\Lambda^k(V^*)$, $\sigma\epsilon\Lambda^s(V^*)$ *και* $\rho\epsilon\Lambda^r(V^*)$ *τότε*

$$(\tau \wedge \sigma) \wedge \rho = \tau \wedge (\sigma \wedge \rho) = alt\,(\tau \otimes \sigma \otimes \rho)\,.$$

Παρατήρηση. Η ιδιότητα (5) μπορεί να γραφεί γενικά

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_m = alt\,(\tau_1 \cdots \tau_m)$$

όπου $\tau_i\epsilon\Lambda^{\rho_i}(V^*)$ με $i = 1, \cdots, m$.

Θεωρούμε τώρα μια βάση $\{e_1, \cdots, e_n\}$ του V και ας είναι $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ η δυϊκη της βάση. Τότε το σύνολο των αντισυμμετρικών k-συναλλοίωτων τανυστών

$$\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\} \tag{2.6}$$

αποτελεί βάση του $\Lambda^k(V^*)$.

Το σύνολο των αντισυμμετρικών k-συναλλοίωτων τανυστών που ορίζεται από την παραπάνω σχέση έχει $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ στοιχεία, δηλαδή έχουμε

$$dim\Lambda^k(V^*) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 1 \leq k \leq n.$$

Στην περίπτωση όπου $n = k$ έχουμε ότι

$$dim\Lambda^n(V^*) = 1$$

που σημαίνει ότι, στον V με $dimV = n$ η ορίζουσα και τα αριθμητικάτης πολλαπλάσια είναι οι μόνοι αντισυμμετρικοί n-συναλλοίωτοι τανυστές.

Από την σχέση (2.5) προκύπτει ο ακόλουθος υπολογιστικός τύπος

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(v_1, \cdots, v_k) = \sum_{\pi\epsilon S_k} (-1)^{\pi} \varphi_{i_1}(v_{\pi(1)}) \cdots \varphi_{i_k}(v_{\pi(k)}).$$

Πρόταση 2.2.4 *Οι γραμμικές μορφές* $\tau_1, \cdots, \tau_k$ *είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν*

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k = 0.$$

Απόδειξη.

Πράγματι, αν οι τ_i με $i = 1, \cdots, k$ είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε θα ισχύει ότι

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \tau_j$$

άρα

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_{k-1} \wedge \tau_j = 0$$

διότι σε κάθε όρο του αθροίσματος εμφανίζεται δύο φορές η ίδια γραμμική μορφή. Εάν τώρα οι τ_i είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε υπάρχουν $\tau_{k+1}, \cdots, \tau_n$ ώστε το σύνολο

$$\{\tau_1, \cdots, \tau_k, \tau_{k+1}, \cdots, \tau_n\}$$

να είναι βάση του V^*. Τότε όμως ο n-συναλλοίωτος τανυστής

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n$$

είναι βάση του $\Lambda^n(V^*)$. Άρα θα ισχύει ότι

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n \neq 0$$

οπότε και

$$\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k \neq 0.$$

□

Θεωρούμε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης m. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε σημείο $p\epsilon M$ έχουμε έναν διανυσματικό χώρο διάστασης m, τον οποίο συμβολίζουμε με T_pM και ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Επίσης σε κάθε σημείο p υπάρχει ο δυϊκός χώρος του T_pM, τον οποίο συμβολίζουμε με T_p^*M και ονομάζεται συνεφαπτόμενος χώρος της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Έτσι λοιπόν σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας M μπορούμε να μιλάμε για συναλλοίωτους τανυστές και για μορφές. Θέλουμε να κατασκευάσουμε πάνω στην πολλαπλότητα M "αντικείμενα" τα οποία σε κάθε σημείο της M να είναι τανυστές και μορφές. Αυτά όμως τα "αντικείμενα" να αλλάζουν από σημείο σε σημείο, ομαλά.

Ορισμός 2.2.6 *Έστω μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης m και ο δυϊκός χώρος T_p^*M της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Μια διαφορική μορφή τ βαθμού k, ή απλώς μια k-μορφή στην M είναι μια απεικόνιση*

$$p\epsilon M \mapsto \tau_p\epsilon\Lambda^k(T_p^*M),$$

η οποία είναι λεία με την εξής έννοια: εάν $X_1, \cdots, X_k$ είναι λεία διανυσματικά πεδία της M τότε η συνάρτηση

$$\tau(X_1, \cdots, X_k) : M \to \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \quad \tau(X_1, \cdots, X_k)(p) = \tau_p\left(X_{1p}, \cdots, X_{kp}\right)$$

είναι λεία. Θα γράφουμε $\Lambda^k(T_p^*M) = \Lambda_p^k$ και θα συμβολίζουμε με $\Lambda^k(M)$ το σύνολο των k-μορφών της M.

Αν τ, φ είναι διαφορικές μορφές k βαθμού και $f : M \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση τότε μπορούμε να ορίσουμε την πρόσθεση διαφορικών μορφών και τον πολλαπλασιασμό διαφορικής μορφής με λεία συνάρτηση, εκτελώντας τις πράξεις αυτές σημειακά:

$$\tau, \varphi\epsilon\Lambda^k(M) \Rightarrow \tau + \varphi\epsilon\Lambda^k(M)$$

$$\tau\epsilon\Lambda^k(M), f\epsilon D(M) \Rightarrow f\tau\epsilon\Lambda^k(M).$$

Επίσης αν τ είναι διαφορική μορφή k βαθμού και φ είναι διαφορική μορφή s βαθμού τότε μπορούμε να ορίσουμε το εξωτερικό τους γινόμενο:

$$\tau\epsilon\Lambda^k(M), \varphi\epsilon\Lambda^s(M) \Rightarrow \tau \wedge \varphi\epsilon\Lambda^{k+s}(M).$$

Μια διαφορική μορφή 0-βαθμού είναι προφανώς μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ λεία, δηλαδή

$$\Lambda^0(M) = D(M)$$

και αν $\tau \epsilon \Lambda^k(M)$ τότε

$$f \wedge \tau = f\tau.$$

Έστω μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M και ας είναι $\{U_a, \varphi_a\}_{a\epsilon A}$ μια διαφορίσιμη δομή, δηλαδή ένας άτλας της πολλαπλότητας M. Θεωρούμε έναν χάρτη (U, φ) της M με συντεταγμένες $x_1, \cdots, x_m$. Ορίζουμε τώρα τα βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ στο U. Αν X είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο της M, τότε στο U έχουμε μια τοπική έκφραση του X που δίνεται από την σχέση:

$$X = \sum_{i=1}^{m} X x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Θέλουμε να ορίσουμε κάτι ανάλογο και για τις διαφορικές μορφές. Δηλαδή, αν έχουμε μια διαφορική μορφή k-βαθμού να βρούμε μια τοπική της έκφραση.

Έστω ένας χάρτης (U, φ) της πολλαπλότητας M με συντεταγμένες $x_1, \cdots, x_m$. Οι διαφορικές 1-μορφές $dx_1, \cdots, dx_m$ ορίζονται στο U είναι δηλαδή $dx_i \epsilon \Lambda^1(U)$ με $i = 1, \cdots, m$. Σε κάθε σημείο $p\epsilon U$ η δυϊκή βάση της $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p$ είναι η $dx_1|_p, \cdots, dx_m|_p$. Διότι ισχύει παντού στο U η ακόλουθη σχέση $dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$. Γνωρίζουμε ότι η σχέση (2.6) αποτελεί μια βάση του $\Lambda^k(V^*)$ οπότε οι k-μορφές $\left.dx_{i_1}\right|_p \wedge \cdots \wedge \left.dx_{i_k}\right|_p = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \left.dx_{i_k}\right|_p$ με $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ αποτελεί μια βάση του Λ_p^k για κάθε σημείο $p\epsilon U$. Άρα αν $\tau \epsilon \Lambda^k(U)$ θα έχουμε

$$\tau(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} a_{i_1 \cdots i_k}(p)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \left.dx_{i_k}\right|_p .$$

Έστι έχουμε στο U:

$$\tau = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{2.7}$$

όπου $a_{i_1 \cdots i_k}$ είναι συναρτήσεις ορισμένες στο U.

Για τις συναρτήσεις $a_{i_1 \cdots i_k}$ παρατηρούμε από την ιδιότητα (5) της πρότασης (2.2.3)

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) =$$

$$k!alt\,(dx_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx_{i_k})\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)=$$
$$k!\frac{1}{k!}\sum_{\pi\epsilon S_k}(-1)^{\pi}dx_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\pi_{j_1}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{\pi_{j_k}}}\right)=$$
$$\sum_{\pi\epsilon S_k}(-1)^{\pi}\delta_{i_1\pi_{j_1}}\cdots\delta_{i_1\pi_{j_1}}=\begin{cases}1, & \alpha\nu\quad i_1=j_1,\cdots,i_k=j_k\\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$$

Από την σχέση (2.7) έχουμε

$$\tau\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m}a_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)=a_{j_1\cdots j_k}$$

Έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\tau=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m}\tau\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\tag{2.8}$$

Η σχέση (2.8) μας δίνει μια έκφραση της $\tau\epsilon\Lambda^k(U)$, όπου (U,φ) είναι ο χάρτης της πολλαπλότητας M με συντεταγμένες $x_1,\cdots,x_m$.

Στην περίπτωση όπου $f:U\to\mathbb{R}$ είναι μια λεία συνάρτηση γνωρίζουμε ότι το $df\epsilon\Lambda^1(U)$ οπότε από την σχέση (2.8) έχουμε

$$df=df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)dx_1+\cdots+df\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)dx_m$$

όμως από τον ορισμό του διαφορικού έχουμε την σχέση

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

οπότε προκύπτει

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m.$$

Έστω (U,φ) ένας χάρτης της πολλαπλότητας M και $\tau\epsilon\Lambda^k(M)$ τότε ο περιορισμός $\tau|_U$ της τ στο U είναι μια διαφορική μορφή στο $\Lambda^k(U)$. Οπότε από τα παραπάνω έχουμε

$$\tau|_U=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m}\tau|_U\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

ή απλούστερα

$$\tau|_U = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

όπου $a_{i_1\cdots i_k}$ είναι λείες συναρτήσεις στο U.

Γνωρίζουμε ότι το διαφορικό μιας λείας συνάρτησης $f : M \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορική μορφή βαθμού 1. Με άλλα λόγια το σύμβολο d μετατρέπει διαφορικές 0-μορφές (λείες συναρτήσεις) σε διαφορικές 1-μορφές. Θέλουμε τώρα να γενικεύσουμε κατά κάποιο τρόπο αυτή την διαδικασία. Δηλαδή να βρούμε ένα σύμβολο (τελεστή) d που θα μετατρέπει διαφορικές k-μορφές σε διαφορικές $k+1$-μορφές και το οποίο θα συμπίπτει με το διαφορικό που ξέρουμε όταν περιοριστούμε στις διαφορικές 0-μορφές. Έχουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M τότε υπάρχει ένας και μόνος τελεστής d στην M ώστε για κάθε ακέραιο $k \ge 0$ να έχουμε*

$$d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(1) Ο d είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός.
(2) Εάν $f \epsilon D(M)$ τότε

$$d(f) = df.$$

(3) Εάν $\tau \epsilon \Lambda^k(M)$ και $\omega \epsilon \Lambda^s(M)$ τότε

$$d(\tau \wedge \omega) = d\tau \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge d\omega.$$

(4) $d^2 = d \circ d = 0$. Δηλαδή, για κάθε διαφορική μορφή

$$d(d\tau) = 0.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρειαζόμαστε το ακόλουθο σημαντικά χρήσιμο λήμμα το οποίο διαβεβαιώνει ότι κάθε τελεστής d εξαρτάται μόνο από την συμπεριφορά του τ σε μια μικρή γειτονιά της M.

Λήμμα 2.2.1 *Ας είναι $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ ένας γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος (2.2.1). Υποθέτουμε ότι $\tau \epsilon \Lambda^k(M)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\tau|_W = 0$, όπου W είναι ανοικτό υποσύνολο της M, τότε*

$$(d\tau)|_W = 0.$$

Επίσης, αν $\tau, \omega \epsilon \Lambda^k(M)$ και είναι τέτοια ώστε $\tau|_W = \omega|_W$ τότε

$$(d\tau)|_W = (d\omega)|_W.$$

Απόδειξη.

Παίρνουμε ένα σημείο $x_0 \epsilon W$ τότε γνωρίζουμε από το θεώρημα (1.7.4) ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_0) = 1$ και $f(x) = 0$ για όλα τα $x \epsilon M - W$. Η διαφορική μορφή $f\tau$ είναι ταυτοτικά μηδέν στη M. Λόγω της γραμμικότητας του d θα έχουμε

$$d(f\tau) = 0.$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (3) του θεωρήματος (2.2.1) θα έχουμε

$$0 = d(f\tau) = (df) \wedge \tau + f d\tau$$

παίρνοντας τώρα την τιμή στο x_0 θα έχουμε

$$0 = (df)|_{x_0} \wedge \tau_{x_0} + f(x_0) d\tau|_{x_0}$$

από την υπόθεση έχουμε ότι $\tau|_W = 0$ και $f(x_0) = 1$, οπότε

$$d\tau|_{x_0} = 0.$$

Άρα, $d\tau(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \epsilon W$. Άρα,

$$d\tau|_W = 0.$$

Αν τώρα έχουμε

$$\tau|_W = \omega|_W \Rightarrow (\tau - \omega)|_W = 0$$

έτσι ώστε

$$0 = (d(\tau - \omega))\,|_W = (d\tau - d\omega)\,|_W \Rightarrow$$
$$d\tau|_W = d\omega|_W.$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το σημαντικό θεώρημα (2.2.1)
Απόδειξη.

Για την μοναδικότητα του d. Υποθέτουμε ότι υπάρχει

$$d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος και δείχνουμε ότι είναι μοναδικός. Έστω (U, φ) ένας χάρτης της πολλαπλότητας M με συντεταγμένες $x_1, \cdots, x_m$ και $\tau \epsilon \Lambda^k(M)$ τότε ο περιορισμός του τ στο U μπορεί να εκφραστεί ως

$$\tau|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots dx_{i_k}$$

όπου $a_{i_1 \cdots i_k}$ είναι λείες συναρτήσεις στο U. Η $\tau|_U$ δεν είναι διαφορική μορφή στη M αλλά είναι στο U οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το d σε αυτή. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο U_1 με $\bar{U}_1 \subset U$. Γνωρίζουμε από το θεώρημα (1.7.4) ότι υπάρχει μια λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \alpha\nu \quad x \epsilon \bar{U}_1 \\ f(x) = 0, & \alpha\nu \quad x \epsilon M - U \end{cases}$$

τότε ορίζουμε $\bar{\tau} \epsilon \Lambda^k(M)$ με

$$\bar{\tau} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (f a_{i_1 \cdots i_k})\, d(f x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f x_{i_k})$$

δηλαδή είναι διαφορική k-μορφή στη M με $\bar{\tau}|_{U_1} = \tau|_{U_1}$.
Εδώ με fh για $h \epsilon \Lambda^k(M)$ εννοούμε την ομαλή συνάρτηση στη M που ορίζεται από την σχέση

$$(fh)(x) = \begin{cases} f(x)h(x), & \alpha\nu \quad x \epsilon U \\ 0, & \alpha\nu \quad x \notin U \end{cases}$$

Από το λήμμα (2.2.1) έχουμε ότι ισχύει

$$d\bar{\tau}|_{U_1} = d\tau|_{U_1}.$$

Παίρνουμε το $d\bar{\tau}$ και εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του θεωρήματος, οπότε έχουμε

$$d\bar{\tau} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} d\left((f a_{i_1 \cdots i_k})\, d(f x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f x_{i_k})\right) =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} d(f a_{i_1 \cdots i_k}) \wedge d(f x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f x_{i_k}) + \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (f a_{i_1 \cdots i_k})\, d\left(d(f x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f x_{i_k})\right) =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} d(f a_{i_1 \cdots i_k}) \wedge d(f x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f x_{i_k}).$$

Εφόσον κάθε όρος του δεύτερου αθροίσματος είναι μηδέν απότις ιδιότητες (3) και (4) του θεωρήματος. Επειδή $f(x) = 1$ αν $x \epsilon U_1$ και $d\bar{\tau}|_{U_1} = d\tau|_{U_1}$ έχουμε

$$d\tau|_{U_1} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i_1 \cdots i_k})\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει την μοναδικότητα, αλλά επιπλέον δίνει και μια τοπική έκφραση για την $d\tau$.
Για την ύπαρξη του d. Θεωρούμε πάλι ένα χάρτη (U, φ) της πολλαπλότητας M με συντεταγμένες $x_1, \cdots, x_m$ και $\tau \epsilon \Lambda^k(U)$ τότε

$$\tau = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$d_U : \Lambda^k(U) \to \Lambda^{k+1}(U)$$

που δίνεται από την σχέση

$$d_U(\tau) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i_1 \cdots i_k})\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \quad (*)$$

Η σχέση $(*)$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του θεωρήματος αν περιοριστούμε σε μορφές του U. Οι ιδιότητες (1) και (2) του θεωρήματος ικανοποιούνται προφανώς. Για να επαληθεύσουμε την ιδιότητα (3) και (4) του θεωρήματος, σημειώνουμε αρχικά ότι κάθε μορφή του $\Lambda^k(U)$ είναι ένα άθροισμα των μορφών με τύπο

$$a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \quad (**)$$

Από την γραμμικότητα του d και την επιμεριστικότητα του εξωτερικού πολλαπλασιασμού $(\wedge)$ ως προς την πρόσθεση αρκεί να ελεγχθούν οι ιδιότητες (3) και (4) του θεωρήματος σε μορφές του τύπου $(**)$.
Για την ιδιότητα (3). Υποθέτουμε ότι

$$\tau = a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

και

$$\omega = b_{j_1 \cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

Τότε

$$d(\tau \wedge \omega) = d\left(a_{i_1\cdots i_k} b_{j_1\cdots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\right) =$$

$$\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) b_{j_1\cdots j_l} + a_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l}) \right) dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} =$$

$$\left(\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge \left(b_{j_1\cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \right) +$$

$$+(-1)^k \left(a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge \left(\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l}) dx_r \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \right) =$$

$$(d\tau) \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge d\omega.$$

Για την ιδιότητα (4). Υποθέτουμε ότι

$$\tau = a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

τότε

$$d^2\tau = d\left(\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) \right) dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Αλλά βέβαια οι όροι σε αυτή την έκφραση με $r = s$ είναι μηδέν εφόσον

$$dx_r \wedge dx_r = 0.$$

Επιπλέον για $r \neq s$ από την ισότητα

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k})$$

έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k}) dx_s \wedge dx_r = -\frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k}) dx_r \wedge dx_s.$$

Με αυτό τον τρόπο οι υπολειπόμενοι όροι μηδενίζονται καθώς είναι αντίθετοι μεταξύ τους. Έτσι ο d_U έχει όλες τις ιδιότητες του θεωρήμας από (1) έως (4).
Με την μοναδικότητα, κάθε γραμμικός τελεστής στο $\Lambda^k(U)$ έχοντας αυτές τις ιδιότητες μπορεί να δοθεί από το τύπο $(*)$. Συγκεκριμένα αν το U_1 είναι οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του U τότε θα έχουμε

$$d_{U_1}\left(\tau|_{U_1}\right) = \left(d_U\left(\tau|_U\right)\right)|_{U_1}.$$

Από όπου μπορούμε να ορίσουμε το $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ από την παρακάτω σχέση

$$(d\tau)|_U = d_U\left(\tau|_U\right)$$

για όλα τα $\tau \epsilon \Lambda^k(M)$ και οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του U. Αυτό το d ορίζεται καλά, επειδή αν το U και V είναι μη ξένες ανοικτές περιοχές

$$\left(d_U\left(\tau|_U\right)\right)|_{U\cap V} = d_{U\cap V}\left(\tau|_{U\cap V}\right) = \left(d_V\left(\tau|_V\right)\right)|_{U\cap V}.$$

Άρα το d έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες εφόσον το d_U τις έχει για κάθε U. □

Ορισμός 2.2.7 *Η μοναδική γραμμική απεικόνιση $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ που εξασφαλίζεται από το θεώρημα (2.2.1) λέγεται εξωτερική παράγωγος. Η διαφορική μορφή $d\tau$ λέγεται εξωτερική παράγωγος της τ.*

Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από τα θέματα που αναφέρονται στο κεφάλαιο 2 παραπέμπτουμε τον αναγνώστη στις αναφορές ([1], [2], [3], [4], [6], [7], [8]).

όλα είναι δρόμος

αρκεί κάθε φορά να είσαι σε θέση

να επιλέξεις το σωστό

Βιβλιογραφία

[1] KOBAYASHI S.-NOMIZU K. : Foundations of Differential Geometry volume 1 Publishers 1963.

[2] CARMO M. do : Riemannian geometry, Birkhauser Boston. Berlin 1992.

[3] CARMO M. do : Differential forms and applications, Springer 1994.

[4] SINGER I.-THORPE J. : Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Scott, Foresman and company.

[5] MUNKRES J. : Topology 2nd editio

[6] ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗΣ Δ. : Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 1994.

[7] ΠΑΠΑΝΤΩΝΙΟΥ Β. : Διαφορίσιμες πολλαπλότητες, Πανεπιστήμιο Πατρών 2007.

[8] ΑΡΒΑΝΙΤΙΓΙΩΡΓΟΣ Α. : Ηλεκρονικές σημειώσεις : Γεωμετρία πολλαπλοτήτων 2015.

[9] ΤΣΙΧΛΙΑΣ Χ. : Χειρόγραφες σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία 2019.

[10] FRALEIGH J. : Εισαγωγή στην άλγεβρα, Πανεπιστημιακες Εκδόσεις Κρήτης 2013.

[11] ΧΡΥΣΑΚΗΣ Θ. : Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα 2013.

[12] PRESSLEY A. : Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία, Πανεπιστημιακες Εκδόσεις Κρήτης 2016.

[13] ΤΣΑΜΑΤΟΣ Π. : Τοπολογία, Εκδόσεις Τζιόλα 2008.

[14] MARSDEN J.-TROMBA A. : Διανυσματικός Λογισμός, Πανεπιστημιακες Εκδόσεις Κρήτης 2013.