



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ολοκληρωτικές εξισώσεις και εφαρμογές

Διπλωματική του
Χρήστου Ι. Δήμα

Επιβλέπων
Αναπληρωτής Καθηγητής: Χρήστος Νικολόπουλος
(Τμήμα Μαθηματικών-Πανεπιστήμιο Αιγαίου)

Σάμος, 2019



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ολοκληρωτικές εξισώσεις και εφαρμογές

Διπλωματική του
Χρήστου Ι. Δήμα

Επιτροπή Διπλωματικής: Χρήστος Νικολόπουλος, Επιβλέπων
Ευστράτιος Πρασίδης
Αγαπητός Χατζηνικήτας

Η Διπλωματική εξετάστηκε και εγκρίθηκε στις .../.../2019

.....
Χ. Νικολόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
(Επιβλέπων)

.....
Ε. Πρασίδης
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

.....
Α. Χατζηνικήτας
Αναπληρωτής Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

.....
Χρήστος Ι. Δήμας

Copyright © Χρήστος Ι. Δήμας, 2019
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος - All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό με κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται η παρούσα σημείωση. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της διατριβής για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτή τη διατριβή εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Σε όποιον
με υποστήριξε
όλα αυτά τα χρόνια

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα τρία μέλη της επιτροπής εξέτασης, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Χ. Νικολόπουλο, τον Επίκουρο Καθηγητή Ε. Πρασίδη και τον Α. Χατζηνικήτα. Αυτή η διπλωματική δεν θα ήταν η ίδια χωρίς τις πολύτιμες οδηγίες του επιβλέποντά μου, Χ. Νικολόπουλο. Ο οποίος ακούραστα με καθοδήγησε ώστε να την ολοκληρώσω.

Οφείλω επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλη μου την οικογένεια. Μου έδωσαν τα πάντα και δεν μου ζήτησαν σχεδόν τίποτα. Εκτός από αυτούς, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τη δεύτερη οικογένειά μου, δηλαδή τους φίλους μου, για την υποστήριξη και την αγάπη τους.

Περίληψη

Σε αυτή την διπλωματική ασχολούμαστε με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις και κάποιες εφαρμογές τους. Αρχικά κάνουμε μιά εισαγωγή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Στη συνέχεια αναφέρουμε τις κατηγορίες ολοκληρωτικών και ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων, και εξετάζουμε έννοιες όπως η γραμμικότητα και η ομογένεια. Στη συνέχεια δείχνουμε πως παράγονται ολοκληρωτικές εξισώσεις από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και αναλύουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής τους. Εξετάζουμε βασικά προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων και αναφέρουμε τις λύσεις που προκύπτουν και κάποια παραδείγματα.

Αναφέρουμε την θεωρία του Fredholm και την εναλλακτική του Fredholm για ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Παρουσιάζουμε κάποιες μεθόδους εύρεσης προσεγγιστικής λύσης για μοντέλα τύπου Volterra και κάποιες εφαρμογές τους. Αναφέρουμε κάποιες ολοκληρωτικές εξισώσεις με λογαριθμικό πυρήνα με κάποιες εφαρμογές τους. Μελετάμε τα ολοκληρώματα Fresnel και κάποιες εφαρμογές τους, την εξίσωση Thomas-Fermi, την μεταφορά θερμότητας με την ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση του Lighthill και κάποιες εφαρμογές της και τέλος μελετάμε την ακτινοβολία θερμότητας σε ένα ημιάπειρο στερεό και κάποιες εφαρμογές του.

Abstract

In this thesis we employ with integral equations and some applications them. Primarily we do a introduction to the integral equations. Subsequently we refer the categories of integral and integro-differential equations, and consider concepts like linearity and homogeneity. Subsequently we display how of the ordinary differential equations the integral equations are produced and resolve one example application of them. We consider basic problems of integral equations and refer the solutions that result and some examples.

We refer the Fredholm's theory and the Fredholm's alternative for integral equations.

We introduce some methods finding approximate solution for the models Volterra type and some applications. We refer some integral equations with logarithmic kernel with some of their applications. We study the Fresnel integrals and some applications of them, the Thomas-Fermi equation, the heat transfer with the Lighthill Singular integral equation and some applications of it, and finally we study the heat radiation in a semi-infinite solid and some applications of it.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	v
Περίληψη	vi
Abstract	vii
Περιεχόμενα	ix
1 Εισαγωγικές έννοιες ολοκληρωτικών εξισώσεων	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Κατηγοριοποίηση ολοκληρωτικών εξισώσεων	4
1.2.1 Ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm	4
1.2.2 Ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra	5
1.2.3 Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra-Fredholm	5
1.2.4 Ιδιόμορφες(singular) ολοκληρωτικές εξισώσεις	6
1.3 Κατηγοριοποίηση ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων	7
1.3.1 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Fredholm	7
1.3.2 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra	8
1.3.3 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra-Fredholm	9
1.4 Γραμμικότητα και ομογένεια	9
1.4.1 Έννοια γραμμικότητας	10
1.4.2 Έννοια της ομογένειας	10
1.5 Προέλευση ολοκληρωτικών εξισώσεων	11
1.6 Ολοκληρωτικές εξισώσεις που παράγονται απο προβλήματα στη θεωρία των συνηθών διαφορικών εξισώσεων	11
1.7 Ολοκληρωτικές εξισώσεις που γίνονται για την μαθηματική περιγραφή εφαρμοσμένων προβλημάτων	19
1.8 Βασικά προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra (στοιχειώδης προσέγγιση)	22
1.9 Λύση μιάς ολοκληρωτικής εξίσωσης	32
2 Εναλλακτική του Fredholm	38
2.1 Θεωρία του Fredholm για γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις	38
2.2 Εναλλακτική του Fredholm	43

3	Εφαρμογές στις ολοκληρωτικές εξισώσεις	46
3.1	Εισαγωγή στις εφαρμογές ολοκληρωτικών εξισώσεων	46
3.2	Μοντέλο πληθυσμού τύπου Volterra	47
3.2.1	Η επαναληπτική μέθοδος μεταβολής	49
3.2.2	Η μέθοδος της λύσης της σειράς	50
3.2.3	Η προσέγγιση του Pade	52
3.3	Ολοκληρωτικές εξισώσεις με λογαριθμικούς πυρήνες	54
3.3.1	Δεύτερου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα	56
3.3.2	Πρώτου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα	60
3.3.3	Μια ακόμη πρώτου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα	64
3.4	Ολοκληρώματα του Fresnel	65
3.5	Η εξίσωση του Thomas-Fermi	70
3.6	Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας και θερμικής ακτινοβολίας	73
3.6.1	Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας:ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση του Lighthill	73
3.6.2	Ακτινοβολία θερμότητας σε ένα ημιάπειρο στερεό	76
	Βιβλιογραφία	80

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες ολοκληρωτικών εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Είναι θεμιτό τον J.Fourier [1] (1768-1830) να τον θεωρήσουμε ως το μνητή της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων, λόγω του γεγονότος ότι βρήκε τον αντίστροφο τύπο, για αυτό που λέμε σήμερα "μετασχηματισμό Fourier" υπό επαρκείς περιορισμούς στις συναρτήσεις f και g . Από την παρακάτω εξίσωση $g(x)=(2\pi)^{-1/2} \int \exp(ixy)f(y)dy$ μπορούμε να παράγουμε την ακόλουθη εξίσωση $f(y)=(2\pi)^{-1/2} \int \exp(-ixy)g(x)dx$. Βέβαια, κάποιος μπορεί να ερμηνεύσει τον αντίστροφο τύπο ως παροχή του αντίστροφου τελεστή (ενός ολοκληρωτικού τελεστή!) του ολοκληρωτικού τελεστή Fourier. Αυτή η ερμηνεία υιοθετήθηκε στο τέλος του περασμένου αιώνα από τον V.Volterra, ο οποίος συσχέτισε το πρόβλημα επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων με το πρόβλημα της εύρεσης των αντιστρόφων συγκεκριμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ο Abel, ασχολήθηκε με την εξίσωση:

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t) dt = F(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

όπου η $u(t)$ αντιπροσωπεύει την άγνωστη συνάρτηση, ενώ $F(x)$ είναι μία καταχωρημένη συνάρτηση. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης παράχθηκε από τον εξής τύπο:

$$u(t) = -\pi^{-1} \sin \alpha \pi \frac{d}{dt} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} F(x) dx.$$

Υπάρχουν δύο ενδιαφέρον χαρακτηριστικά σχετιζόμενα με την εξίσωση του Abel. Πρώτον, ο λεγόμενος πυρήνας $K(t) = t^{-\alpha}$ έχει μια μοναδικότητα ως προς την αρχή των αξόνων και δεύτερον η εξίσωση του Abel είναι εξίσωση τύπου περιέλιξης. Εξίσωση τύπου περιέλιξης είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση,

της οποίας το ολοκλήρωμα περιέχει το γινόμενο δύο συναρτήσεων αφού η μία έχει δεσμευτεί και μετατοπιστεί. Ο Volterra, μελέτησε πιά γενικές εξισώσεις όπως

$$\int_0^x k(x, t)u(t)dt = F(x),$$

ή

$$u(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt = F(x),$$

όπου η u είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Επίσης ο Liouville, ανακάλυψε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + [\rho^2 - a(x)]y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0)=1, y'(0)=0$ είναι ισοδύναμη με την ολοκληρωτική εξίσωση (τύπου Volterra δεύτερου είδους)

$$y(x) - \rho^{-1} \int_0^x a(t) \sin \rho(x - t)y(t)dt = \cos \rho x,$$

προφανώς ανενημέρωτος για τις έρευνες του Abel σχετικά με ολοκληρωτικές εξισώσεις, ο Liouville ασχολήθηκε με την ιδιόμορφη (singular) ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_x^\infty (s - x)^{-1}y(s)ds = f(x),$$

η λύση της οποίας δίνεται απο τον τύπο

$$y(x) = -\pi^{-1} \frac{d}{dx} \int_x^\infty (s - x)^{-1/2} f(s)ds.$$

Αργότερα ο Volterra, έκανε την περίφημη πρώτη του συνεισφορά στη θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων, ο Fredholm ανακάλυψε μια νέα θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων που περιέχει μια παράμετρο της μορφής

$$y(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt = f(x).$$

Η θεωρία αυτή, βασικά αντιπροσωπεύει την επέκταση της επιλυσιμότητας ενός γραμμικού πεπερασμένου διαστασιακά συστήματος $x + \lambda Ax = b$ στην άπειρη διάστασιακά περίπτωση, και έχει αποτελέσει μια απο τις σημαντικότερες πηγές για τη θεμελίωση της γνωστής σήμερα ως γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης.

Παρακάτω θα δώσουμε έναν ορισμό των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ολοκληρωτική εξίσωση είναι μια εξίσωση στην οποία η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα. Η πιά τυπική ολοκληρωτική εξίσωση της $u(x)$ είναι της μορφής

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt, \quad (1.1)$$

όπου $g(x)$ και $h(x)$ είναι τα όρια της ολοκλήρωσης, λ είναι μια σταθερή παράμετρος, και $K(x, t)$ είναι γνωστή συνάρτηση με δύο μεταβλητές x και t και λέγεται πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$, που θα προσδιοριστεί, εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα και σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται και μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $K(x, t)$ δίνονται εκ των προτέρων. Τα όρια ολοκλήρωσης μπορεί να είναι μεταβλητές, σταθερές, ή το ένα μεταβλητή και το άλλο σταθερά.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλές μορφές. Δύο τρόποι που χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν ολοκληρωτικές εξισώσεις εξαρτώνται από τα όρια ολοκλήρωσης, δηλαδή:

1. Αν τα όρια ολοκλήρωσης είναι σταθερά, η ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται Fredholm και δίνεται από τον τύπο:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (1.2)$$

όπου a και b σταθερές.

2. Αν τουλάχιστον ένα από τα όρια ολοκλήρωσης είναι μεταβλητό, η ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται Volterra και δίνεται από τον τύπο:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (1.3)$$

Δύο άλλα είδη που εξαρτώνται από την εμφάνιση της άγνωστης συνάρτησης $u(x)$, ορίζονται ως εξής:

1. Αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ εμφανίζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Fredholm ή Volterra, η ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται πρώτου είδους Fredholm ή Volterra.
2. Αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ εμφανίζεται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα της εξίσωσης Fredholm ή Volterra, η ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται δεύτερου είδους Fredholm ή Volterra.

Στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm ή Volterra που παρουσιάσαμε παραπάνω, αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι μηδέν, τότε προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (1.4)$$

ή

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, \quad (1.5)$$

που λέγονται ομογενείς εξισώσεις Fredholm ή ομογενείς εξισώσεις Volterra αντίστοιχα.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε, ότι μια εξίσωση που περιλαμβάνει ολοκληρώματα και παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης $u(x)$ λέγεται ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση. Η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση Fredholm είναι της μορφής:

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}. \quad (1.6)$$

Η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση Volterra είναι της μορφής:

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt, u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}. \quad (1.7)$$

1.2 Κατηγοριοποίηση ολοκληρωτικών εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλές μορφές, που εξαρτώνται κυρίως από τα όρια ολοκλήρωσης και τον πυρήνα της εξίσωσης. Θα αναφέρουμε μερικούς από του κυριότερους τύπους και κάποιους που θα μας απασχολήσουν παρακάτω.

1.2.1 Ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm

Όπως έχουμε αναφέρει, στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm, τα όρια της ολοκλήρωσης είναι σταθερά. Ακόμα, η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ μπορεί να εμφανιστεί μόνο μέσα στην ολοκληρωτική εξίσωση του τύπου:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt. \quad (1.8)$$

Η οποία λέγεται ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους. Ωστόσο, για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους, η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ εμφανίζεται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα. Η ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους παριστάνεται από τον τύπο:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt. \quad (1.9)$$

Παράδειγμα πρώτου είδους είναι το εξής

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt,$$

και παράδειγμα δεύτερου είδους η εξίσωση

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt.$$

1.2.2 Ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra

Στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra, ένα τουλάχιστον από τα όρια της ολοκλήρωσης είναι μεταβλητά. Για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους, η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ μπορεί να εμφανιστεί μόνο μέσα στην ολοκληρωτική εξίσωση του τύπου:

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \quad (1.10)$$

Ωστόσο, για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra δεύτερου είδους, η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ εμφανίζεται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα. Η ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους παριστάνεται από τον τύπο:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \quad (1.11)$$

Παραδείγματα τύπου Volterra πρώτου είδους είναι τα εξής

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{(t-x)}u(t)dt,$$

και

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (5 + 3x - 3t)u(t)dt.$$

Παραδείγματα τύπου Volterra δεύτερου είδους είναι τα εξής

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt,$$

και

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt.$$

1.2.3 Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra-Fredholm

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra-Fredholm προκύπτουν συχνά από παραβολικά προβλήματα οριακών τιμών, από τη μαθηματική μοντελοποίηση της ανάπτυξης επιδημιών χρονικά στο χώρο, και από διάφορα φυσικά και βιολογικά

μοντέλα. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra-Fredholm εμφανίζονται στη βιβλιογραφία σε δύο μορφές, δηλαδή στη μορφή

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt, \quad (1.12)$$

ή στη μορφή

$$u(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.13)$$

όπου $f(x, t)$ και $F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $D = \Omega \times [0, T]$, και Ω είναι ένα κλειστό υποσύνολο του R^n , $n=1,2,3$. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η εξίσωση (1.12) περιέχει χωριστά ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και Fredholm, ενώ η εξίσωση (1.13) περιέχει τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και Fredholm θα λέγαμε συνδυαζόμενες. Επιπλέον, οι άγνωστες συναρτήσεις $u(x)$ και $u(x, t)$ εμφανίζονται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα. Αυτό είναι γνώρισμα των ολοκληρωτικών εξισώσεων δεύτερου είδους. Παραδείγματα των δύο τύπων είναι τα εξής

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt,$$

και

$$u(x, t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau.$$

1.2.4 Ιδιόμορφες (singular) ολοκληρωτικές εξισώσεις

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt, \quad (1.14)$$

ή δεύτερου είδους

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt, \quad (1.15)$$

λέγονται ιδιόμορφες αν ένα από τα όρια ολοκλήρωσης $g(x)$, $h(x)$ είναι άπειρο ή και τα δύο είναι άπειρα. Επιπλέον, οι προηγούμενες εξισώσεις λέγονται ιδιόμορφες αν ο πυρήνας $K(x, t)$ γίνεται άπειρος σε ένα ή δύο σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης. Επίσης είναι ενδιαφέρον να δούμε εξισώσεις της μορφής:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.16)$$

ή δεύτερου είδους:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, 0 < \alpha < 1. \quad (1.17)$$

Οι δύο τελευταίοι τύποι λέγονται γενικευμένη ολοκληρωτική εξίσωση του Abel και ασθενώς ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις αντίστοιχα. Παραδείγματα ολοκληρωτικών εξισώσεων του Abel, γενικευμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων του Abel, και ασθενώς ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων δίνονται απο

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt,$$

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt,$$

και

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt,$$

αντίστοιχα.

1.3 Κατηγοριοποίηση ολοκληρωτικόδιαφορικών εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλές επιστημονικές εφαρμογές, ιδιαίτερα όταν μετατρέπουμε προβλήματα αρχικών τιμών ή προβλήματα οριακών τιμών σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις περιέχουν και ολοκλήρωμα και διαφορικούς τελεστές. Οι παραγώγοι των άγνωστων συναρτήσεων μπορεί να είναι οποιασδήποτε τάξης.

1.3.1 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Fredholm

Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Fredholm εμφανίζονται όταν μετατρέπουμε διαφορικές εξισώσεις σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Fredholm περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ και μία απο τις παραγώγους του $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ μέσα και έξω απο το ολοκλήρωμα αντίστοιχα. Τα όρια της ολοκλήρωσης σε αυτή τη περίπτωση είναι σταθερά όπως στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm. Η εξίσωση αυτή λέγεται ολοκληρωτικοδιαφορική επειδή περιέχει διαφορικούς και ολοκληρωτικούς τελεστές στην ίδια εξίσωση. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε οτι οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να δίνονται στις ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου

Fredholm για να βρούμε τις συγκεκριμένες λύσεις. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Fredholm εμφανίζονται στη μορφή:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt. \quad (1.18)$$

Όπου $u^{(n)}(x)$ δηλώνει τη n -στη παράγωγο του $u(x)$. Επίσης μπορεί να εμφανίζονται και άλλες παραγώγοι μικρότερης τάξης μαζί με την $u^{(n)}(x)$ στο αριστερό μέλος. Παραδείγματα ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων Fredholm δίνονται απο

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, u(0) = 0,$$

και

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt u(t)dt, u(0) = 0, u'(0) = 1.$$

1.3.2 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra

Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Volterra εμφανίζονται όταν μετατρέπουμε προβλήματα αρχικών τιμών σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Volterra περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ και μία απο τις παραγώγους τους $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ μέσα και έξω απο το ολοκλήρωμα αντίστοιχα. Τουλάχιστον ένα απο τα όρια της ολοκλήρωσης σε αυτή τη περίπτωση είναι μεταβλητά όπως στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra. Η εξίσωση αυτή λέγεται ολοκληρωτικοδιαφορική επειδή περιέχει διαφορικούς και ολοκληρωτικούς τελεστές στην ίδια εξίσωση. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε οτι οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να δίνονται στις ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Volterra για να βρούμε τις συγκεκριμένες λύσεις. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Volterra εμφανίζονται στη μορφή:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt. \quad (1.19)$$

Όπου $u^{(n)}(x)$ δηλώνει τη n -στη παράγωγο του $u(x)$. Επίσης μπορεί να εμφανίζονται και άλλες παραγώγοι μικρότερης τάξης μαζί με την $u^{(n)}(x)$ στο αριστερό μέλος. Παραδείγματα ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων Volterra δίνονται απο

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, u(0) = 0,$$

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, u(0) = -1, u'(0) = 1.$$

1.3.3 Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra-Fredholm

Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra-Fredholm προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra-Fredholm, με μια ή περισσότερες συνήθεις παραγώγους επιπρόσθετα στους ολοκληρωτικούς τελεστές. Οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Volterra-Fredholm εμφανίζονται στη βιβλιογραφία σε δύο μορφές, δηλαδή

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt, \quad (1.20)$$

και

$$u^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1.21)$$

όπου $f(x, t)$ και $F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $D = \Omega \times [0, T]$, και Ω είναι ένα κλειστό υποσύνολο του R^n , $n=1,2,3$. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η εξίσωση (1.20) περιέχει χωριστά Volterra και Fredholm ολοκληρωτικές εξισώσεις, ενώ η εξίσωση (1.21) περιέχει ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και Fredholm θα λέγαμε συνδυαζόμενες. Επίσης μπορεί να εμφανιστούν και άλλες παραγώγοι μικρότερης τάξης. Επιπλέον, οι άγνωστες συναρτήσεις $u(x)$ και $u(x, t)$ εμφανίζονται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα. Αυτό είναι γνώρισμα των ολοκληρωτικών εξισώσεων δεύτερου είδους. Αν οι άγνωστες συναρτήσεις εμφανίζονται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα, οι συναρτήσεις που προκύπτουν είναι πρώτου είδους. Αρχικές συνθήκες θα πρέπει να δίνονται, για να προσδιορίσουμε την συγκεκριμένη λύση. Παραδείγματα τέτοιου τύπου εξισώσεων είναι τα ακόλουθα

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, u(0) = 0,$$

και

$$u'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau, u(0, t) = t^3.$$

1.4 Γραμμικότητα και ομογένεια

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις και οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις εμπίπτουν σε άλλους δύο τύπους κατηγοριοποίησης σύμφωνα με την έννοια της γραμμικότητας και την έννοια της ομογένειας. Αυτές οι δύο έννοιες παίζουν σημαντικό ρόλο στη δομή των λύσεων. Στις επόμενες υποενότητες που ακολουθούν επισημαίνουμε τους ορισμούς αυτών των εννοιών.

1.4.1 Έννοια γραμμικότητας

Αν ο εκθέτης της άγνωστης συνάρτησης $u(x)$ μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ένα, η ολοκληρωτική εξίσωση ή η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση λέγεται γραμμική. Αν η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ έχει εκθέτη διάφορο του ένα, ή αν η εξίσωση περιέχει μη γραμμικές συναρτήσεις του $u(x)$, όπως eu , $\sinh u$, $\cos u$, $\ln(1 + u)$, η ολοκληρωτική εξίσωση ή η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση λέγεται μη γραμμική. Για να εξηγήσουμε αυτήν την έννοια, θεωρούμε τις εξισώσεις:

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad (1.22)$$

$$u(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)u(t)dt, \quad (1.23)$$

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt, \quad (1.24)$$

και

$$u'(x) = 1 + \int_0^1 xte^{u(t)}dt, u(0) = 1. \quad (1.25)$$

Τα πρώτα δύο παραδείγματα ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι γραμμικά Volterra και Fredholm αντίστοιχα, ενώ τα δύο τελευταία είναι μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra και μη γραμμική ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση Fredholm αντίστοιχα.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι γραμμικές εξισώσεις, εκτός από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους, δίνουν μια μοναδική λύση αν υπάρχει αυτή η λύση. Ωστόσο, η λύση μη γραμμικών εξισώσεων μπορεί να μην είναι μοναδική. Οι μη γραμμικές εξισώσεις δίνουν περισσότερες από μια λύσεις και δεν είναι συνήθως εύκολες να τις χειριστούμε.

1.4.2 Έννοια της ομογένειας

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις και οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις δεύτερου είδους κατηγοριοποιούνται σε ομογενείς και μη μοιογενείς, αν η συνάρτηση $f(x)$ στις δεύτερου είδους Volterra ή Fredholm ολοκληρωτικές εξισώσεις ή ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις είναι και στις δύο μηδέν, η εξίσωση λέγεται ομογενής. Διαφορετικά λέγεται μη ομογενής. Σημειώνουμε ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει για εξισώσεις δεύτερου είδους μόνο. Για να διευκρινίσουμε αυτήν την έννοια θα εξετάσουμε τις εξής εξισώσεις:

$$u(x) = \sin x + \int_0^x xtu(t)dt, \quad (1.26)$$

$$u(x) = x + \int_0^1 (x-t)^2 u(t) dt, \quad (1.27)$$

$$u(x) = \int_0^x (1+x-t)u^4(t) dt, \quad (1.28)$$

και

$$u''(x) = \int_0^x xtu(t) dt, u(0) = 1, u'(0) = 0. \quad (1.29)$$

Οι πρώτες δύο είναι μη ομογενείς επειδή $f(x) = \sin x$ και $f(x) = x$, ενώ οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι ομογενείς επειδή $f(x) = 0$ για κάθε εξίσωση. Συνήθως χρησιμοποιούμε ειδικές προσεγγίσεις για τις ομογενείς εξισώσεις, ενώ άλλες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τις μη ομογενείς εξισώσεις.

1.5 Προέλευση ολοκληρωτικών εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικές και οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις προκύπτουν σε πολλές επιστημονικές και μηχανολογικές εφαρμογές. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra όπως και οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Volterra μπορούν να προκύψουν από τη μετατροπή προβλημάτων αρχικών τιμών με ορισμένες αρχικές τιμές. Ωστόσο, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm και οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Fredholm μπορούν να παραχθούν από προβλήματα οριακών τιμών με δοσμένες οριακές συνθήκες.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η αντιστροφή προβλημάτων αρχικών τιμών σε Volterra ολοκληρωτικές εξισώσεις, και η αντιστροφή ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra σε προβλήματα αρχικών τιμών χρησιμοποιούνται ευρέως στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, η αντιστροφή προβλημάτων οριακών τιμών σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, και η αντιστροφή ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm σε ισοδύναμα προβλήματα οριακών τιμών σπάνια χρησιμοποιούνται, και ο λόγος είναι ότι η τεχνική αυτή απαιτεί περισσότερη δουλειά αν τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη τεχνική του Volterra.

1.6 Ολοκληρωτικές εξισώσεις που παράγονται από προβλήματα στη θεωρία των συνηθών διαφορικών εξισώσεων

Αρκετά προβλήματα στη θεωρία των συνηθών διαφορικών εξισώσεων σχετίζονται με συστήματα της μορφής

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad (1.30)$$

στα οποία η άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ παίρνει τιμές σε ένα πεπερασμένο διαστημακά χώρο R^n , ο $A(t)$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n με πραγματικές τιμές, ενώ η $f(t, x)$ αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση διάνυσμα με τιμές στον R^n , ορισμένες σε κάποιο διάστημα $[t_0, T)$, $T \leq \infty$, και $x \in R^n$ (ή σε ένα υποσύνολο του R^n).

Αν ενδιαφερόμαστε να αποδείξουμε την ύπαρξη μίας λύσης της (1.30), που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$x(t_0) = x^0, x^0 \in R^n, \quad (1.31)$$

τότε είναι βολικό να μετατρέψουμε το πρόβλημα (1.30), (1.31) σε μια ολοκληρωτική εξίσωση με την ίδια άγνωστη συνάρτηση $x(t)$.

Το βασικό εργαλείο στην εύρεση μιας τέτοιας ολοκληρωτικής εξίσωσης, ισοδύναμης με τις (1.30), (1.31), είναι η αλλαγή του τύπου των σταθερών για γραμμικά διαφορικά συστήματα στο τύπο της μορφής

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (1.32)$$

το οποίο δηλώνει ότι η λύση (1.32), υπό την αρχική συνθήκη (1.31), μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του τύπου

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad (1.33)$$

όπου ο $X(t)$ προσδιορίζεται από την $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ στο $[t_0, T)$, $\det X(t_0) \neq 0$, πάνω σε ένα σταθερό (πίνακα) παράγοντα. Αντί αυτού, το γινόμενο $X(t)X^{-1}(s)$, $t \geq s \geq t_0$, προσδιορίζεται μοναδικά (μερικές φορές καλείται ο τελεστής μετάβασης των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης που σχετίζεται με την (1.32)).

Μέσω του τύπου (1.33), βρίσκεται η εξής ολοκληρωτική εξίσωση από τις (1.30), (1.31):

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s, x(s))ds, \quad (1.34)$$

ο οποίος αποτελεί μια περίπτωση μιας πιο γενικής ολοκληρωτικής εξίσωσης, δηλαδή

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s, x(s))ds. \quad (1.35)$$

Στην εξίσωση (1.35) τα x, f και k είναι συναρτήσεις διανύσματα με τιμές στον R^n .

Βέβαια, για να δείξουμε την ισοδυναμία της (1.35) με τις (1.30), (1.31) πρέπει να ισχύουν συγκεκριμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, η συνέχεια των συναρτήσεων του πίνακα $A(t)$, και της συνάρτησης διάνυσμα $f(t, x)$, επαρκούν προκειμένου να είμαστε σε θέση να εργαστούμε όπως πάραπάνω. Αλλά επίσης και οι παρακάτω υποθέσεις στο $k(t, s, x)$:

(a) $f \in C([0, a], R^n)$.

(b) $k : \Delta_\alpha \times R^n \rightarrow R^n$ είναι μετρήσιμο στο (t, s, x) , και είναι συνεχής στο x για κάθε σταθερό $(t, s) \in \Delta_\alpha$.

(c) για κάθε συμπαγές σύνολο $B \subset R^n$, υπάρχει μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $m(t, s)$, τέτοια ώστε

$$|k(t, s, x)| \leq m(t, s), \quad (t, s) \in \Delta_\alpha, \quad x \in B,$$

και

$$\sup \int_0^t m(t, s) ds < \infty, \quad t \in [0, \alpha],$$

(d) για κάθε $t_0 \in [0, a]$, και $x \in C([0, \alpha], R^n)$, $|x(t)| \leq M$ ($M > 0$ αυθαίρετο), έχουμε

$$\sup \int_0^\alpha |k(t, s, x(s)) - k(t_0, s, x(s))| ds \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow t_0,$$

είναι συνθήκες τύπου Καραθοδωρή και είναι αποδεκτές, η διαφορισιμότητα τότε μπορεί να εξασφαλιστεί σχεδόν παντού. Η ισοδυναμία αποδεικνύεται συνήθως μέσα στην κατηγορία των συνεχών (ή ακόμα και των απόλυτα συνεχών) συναρτήσεων.

Απο την (1.34) υποθέτοντας μόνο τη συνέχεια της λύσης $x(t)$, μπορούμε να βρούμε την (1.30) και την (1.31). Άρα, μια συνεχής λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.34) είναι απαραίτητα διαφοροποιήσιμη και ικανοποιεί τις (1.30) και (1.31). Το γεγονός ότι για την ολοκληρωτική εξίσωση ψάχνουμε μόνο για συνεχείς λύσεις, και άρα δεν σχετίζονται με τις ιδιότητες κανονικότητας όπως είναι η διαφορισιμότητα, είναι ένα τεράστιο πλεονέκτημα στους περιλαμβανόμενους τεχνικούς όρους.

Στην ειδική περίπτωση που $A(t) \equiv 0$ (ο μηδενικός πίνακας τάξης n), τότε $X(t)X^{-1}(s) = I$ (ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n), και η (1.34) γίνεται

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (1.36)$$

η οποία είναι γνωστό ότι είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.37)$$

με αρχική συνθήκη την (1.31). Οι περισσότερες μέθοδοι απόδειξης ύπαρξης λύσεων γίνονται με την ολοκληρωτική εξίσωση (1.36), αντί για την (1.37), (1.31).

Ας εξετάσουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση (σύστημα) (1.37), κάτω από κάποιες απαιτήσεις για τη λύση, πιά ισχυρές από την (1.31). Τέτοιες απαιτήσεις είναι γνωστές ως συνθήκες οριακών τιμών.

Αν υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f(x, t)$ στην εξίσωση (1.37) είναι μια συνεχής απεικόνιση από $[a, b] \times D$, με $D \subset \mathbb{R}^n$ στο χώρο \mathbb{R}^n , τότε ψάχνουμε για λύσεις της (1.37) οι οποίες ικανοποιούν την

$$\int_a^b [dH(t)]x(t) = \int_a^b F(t, x(t))dt, \quad (1.38)$$

όπου $H(t)$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n , του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις πραγματικών τιμών με οριακή μεταβολή στο διάστημα $[a, b]$, και $F(t, x)$ είναι όπως η συνάρτηση $f(t, x)$ στην εξίσωση (1.37).

Προκειμένου να βρούμε από την (1.38) τη συνηθισμένη αρχική συνθήκη $x(a) = x^0$ ως μια ειδική περίπτωση, πρέπει να διαλέξουμε $H(t)$ να είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία στη κύρια διαγώνιο να είναι $h(t): h(a)=0, h(t)=1, a < t \leq b$, και $F(t, x) = x^0(b-a)^{-1}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πρόβλημα (1.37), (1.38) είναι ισοδύναμο με μια ολοκληρωτική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση $x(t)$. Πράγματι, από την εξίσωση (1.37) βρίσκουμε

$$x(t) = x(a) + \int_a^t f(s, x(s))ds, t \in [a, b], \quad (1.39)$$

το οποίο είναι πράγματι ισοδύναμο με την εξίσωση (1.37). Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε το $x(a)$ από τη συνθήκη (1.38), τότε θα έχουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση αντί της (1.39). Είναι εύκολο να δούμε ότι οι (1.37), (1.38) είναι ισοδύναμες με την ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει από την (1.39).

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη στο ολοκλήρωμα του Stieltjes δίνει τη σχέση

$$\int_a^b [dH(t)]x(t) = H(b)x(b) - H(a)x(a) - \int_a^b H(t)\dot{x}(t)dt, \quad (1.40)$$

αν υποθέσουμε ότι το $x(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμο (ή τουλάχιστον απόλυτα συνεχές). Αν $x(t)$ είναι μια λύση της (1.37), (1.38), τότε η (1.40) δίνει

$$H(b)x(b) - H(a)x(a) - \int_a^b H(t)f(t, x(t))dt = \int_a^b F(t, x(t))dt. \quad (1.41)$$

Αλλά

$$x(b) = x(a) + \int_a^b f(t, x(t))dt,$$

από την οποία, αντικαθιστώντας στην (1.41) οδηγούμαστε στη σχέση

$$[H(b) - H(a)]x(a) = [H(b) - H(a)] \int_a^b f(t, x(t))dt + \int_a^b F(t, x(t))dt. \quad (1.42)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $H(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\det[H(b) - H(a)] \neq 0. \quad (1.43)$$

Τότε η (1.42) δίνει

$$x(a) = [H(b) - H(a)]^{-1} \left\{ [H(t) - H(b)] \int_a^b f(s, x(s)) ds + \int_a^b F(s, x(s)) ds \right\}, \quad (1.44)$$

η οποία, αν αντικατασταθεί στην (1.39), δίνει

$$x(t) = \int_a^b G(t, s, x(s)) ds, \quad (1.45)$$

όπου

$$G(t, s, x) = \begin{cases} [H(b) - H(a)]^{-1} \{ [H(t) - H(a)] f(s, x) + F(s, x) \}, & a \leq s \leq t, \\ [H(b) - H(a)]^{-1} \{ [H(t) - H(b)] f(s, x) + F(s, x) \}, & t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (1.46)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση (1.45) με την άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα οριακής τιμής (1.37), (1.38). Πράγματι, αν υποθέσουμε την ύπαρξη της συνεχούς διαφοροποιήσιμης λύσης (1.37), (1.38), βρίσκουμε όπως φάνηκε παραπάνω την ολοκληρωτική εξίσωση (1.45). Από την άλλη, αν $x(t)$ είναι μια συνεχής λύση της (1.45), τότε παρατηρώντας την ισοδυναμία των (1.37), (1.44) με την (1.45), βρίσκουμε το αντίστροφο συμπέρασμα.

Μια εξίσωση της μορφής (1.45) θυμίζουμε ότι λέγεται ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm. Η Λύση τέτοιων εξισώσεων και η εύρεση της ύπαρξης των λύσεων είναι συνήθως ένα πολύ πιό πολύπλοκο πρόβλημα από ότι στη περίπτωση των εξισώσεων τύπου Volterra.

Για τον εξοικειωμένο αναγνώστη με τη μέθοδο της συνάρτησης Green στη θεωρία προβλημάτων οριακής τιμής, η εύρεση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.45) από τις (1.37), (1.38), είναι στη πραγματικότητα μια επανάληψη της διαδικασίας που οδηγεί στην κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης.

Η θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι ακόμα μια σημαντική πηγή ολοκληρωτικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, η πρώτη τάξης μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t + \sum_1^n f_i(t, x) u_{x_i} = g(t, x, u), \quad (1.47)$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = \phi(x), \quad x \in D \subset R^n, \quad (1.48)$$

μπορεί να μετατραπεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra αν ικανοποιούνται οι κατάλληλες συνθήκες.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε ότι το δεξί μέλος της (1.47) αντιπροσωπεύει τη παράγωγο της συνάρτησης $u(x, t)$, κατά μήκος των τροχιών του διαφορικού συστήματος (1.37). Με άλλα λόγια, αν στην (1.47) αντικαταστήσουμε το x με $x(t)$ -μια λύση του συστήματος (1.37)-τότε η (1.47) γίνεται

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = g(t, x(t), u(t, x(t))), \quad (1.49)$$

ή συμβολίζοντας το $u(t, x(t))$ με $U(t)$,

$$\frac{d}{dt}U(t) = g(t, x(t), U(t)), \quad (1.50)$$

Αυτό αποτελεί μια συνήθη διαφορική εξίσωση στο U , για κάθε τροχιά $x(t)$ του διαφορικού συστήματος (1.37). Άρα, μπορούμε να συνδέσουμε στην (1.50) την ολοκληρωτική εξίσωση

$$U(t) = \phi(x(0)) + \int_0^t g(s, x(s), U(s))ds, \quad (1.51)$$

η οποία είναι τύπου Volterra. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι, βασισμένοι στον συμβολισμό που υιοθετήθηκε, $U(0)=\phi(x(0))$. Πιο ακριβέστερα, κάθε τροχιά της (1.37) παράγει μια εξίσωση της μορφής (1.51).

Αλλά είναι εύκολο να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (1.51) σε μια ολοκληρωτική εξίσωση που εξαρτάται από την παράμετρο x , με τη υπόθεση ότι η μοναδικότητα ισχύει για το σύστημα (1.37). Πράγματι, αν με $x=F(t; 0, x^0)$ συμβολίσουμε την μοναδική λύση της (1.37), που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0)=x^0 \in R^n$, τότε $x^0=F(0; t, x)$. Η εξίσωση (1.51) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$u(t, x) = \phi(F(0; t, x)) + \int_0^t g(s, F(s; t, x), u(s, F(s; t, x)))ds, \quad (1.52)$$

την οποία μπορούμε εύκολα να χειριστούμε προκειμένου να προσδιορίσουμε την ύπαρξη των λύσεων. Βέβαια, η $x \equiv F(s; t, x)$ αντιπροσωπεύει τη λύση της (1.37), τέτοια ώστε $F(t; t, x)=x$, και αφού υποθέσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα για την (1.37), οι ιδιότητες της $F(s; t, x)$ είναι γνωστές (δηλαδή, συνεχής εξάρτηση, διαφορισμότητα, κτλ.). Με αυτό τον τρόπο, η ύπαρξη των λύσεων για την (1.51) ή (1.52) συνεπάγεται την ύπαρξη λύσεων για την (1.47). Προβλήματα ομαλότητας, όπως η ύπαρξη των παραγώγων που περιλαμβάνονται στην (1.47), πρέπει να συζητηθούν αν θέλουμε μια κλασική λύση της εξίσωσης. Διαφορετικά, η (1.51) ή η (1.52) θα παρέχουν γενικευμένες (μέσες) λύσεις για τη μερική διαφορική εξίσωση (1.37).

Ας σημειώσουμε ότι η μέθοδος που σχιαγραφήσαμε παραπάνω είναι γνωστή ως η μέθοδος των χαρακτηριστικών (δηλαδή, τροχιές του συστήματος (1.37)).

Η επιτυχία της βασίζεται στην δυνατότητα να έχουμε τόση πληροφορία όσο είναι δυνατόν να έχουμε για τη συνάρτηση $F(s; t, x)$, η οποία αντιπροσωπεύει την οικογένεια των τροχιών της (1.47). Οι τροχιές αυτές είναι γνωστές ως χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης (1.47).

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης επίσης οδηγούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις αν ασχοληθούμε με προβλήματα ύπαρξης. Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα τύπου Dirichlet ή Neumann για την εξίσωση του Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, D \subset R^3. \quad (1.53)$$

μπορεί να μετατραπεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής

$$u(P) = f(P) + \int_S k(P, Q)u(Q)dQ, \quad (1.54)$$

όπου $S = \partial D$ υποτίθεται ότι είναι αρκετά ομαλή, και $f(P)$ και $k(P, Q)$ είναι γνωστές συναρτήσεις στο S και στο $S \times S$ αντίστοιχα.

Πρέπει να αναφέρουμε το γεγονός ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που βρήκαμε σε αυτά τα προβλήματα είναι τύπου Fredholm, και ότι η εναλλακτική του Fredholm έχει σημαντικό ρόλο.

Στη περίπτωση των παραβολικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν φαινόμενα της διάχυσης ή μεταφοράς θερμότητας, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτουν με ένα φυσικό τρόπο. Για παράδειγμα, η λύση του προβλήματος οριακής τιμής

$$u_t = \Delta u + f(t, x), t > 0, x \in R^3. \quad (1.55)$$

$$u(0, x) = u_0(x), x \in R^3, \quad (1.56)$$

μπορεί να αναπαρασταθεί κάτω από κατάλληλες συνθήκες από τον τύπο

$$u(t, x) = \int_{R^3} G(t, x - \xi)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \left\{ \int_{R^3} G(t - s, x - \xi)f(s, \xi)d\xi \right\} ds, \quad (1.57)$$

όπου $G(t, x)$ είναι η θεμελιώδης λύση (ή συνάρτηση Green) και δίνεται από το τύπο

$$G(t, x) = 2\sqrt{(\pi t)^{-3}} \exp\{-|x|^2/4t\}, t > 0, x \in R^3. \quad (1.58)$$

Αν τροποποιήσουμε την εξίσωση (1.55) θέτοντας στην f επίσης την u , τότε από (1.57) βρίσκουμε για τη λύση από τη μη γραμμική εξίσωση

$$u_t = \Delta u + f(t, x, u), t > 0, x \in R^3. \quad (1.59)$$

υπό τις αρχικές συνθήκες (1.56), την εξής μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(t, x) = \int_{R^3} G(t, x - y)u_0(y)dy + \int_0^t \left\{ \int_{R^3} G(t - s, x - y)f(s, y, u(s, y))dy \right\} ds. \quad (1.60)$$

Η εξίσωση (1.60) είναι τύπου Volterra στο t , και τύπου Fredholm ως προς x . Μπορούμε να τη δούμε ως μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra αν συμφωνούμε να εξετάσουμε τη $u(t, \cdot)$ ως μια μεταβλητή της οποίας οι τιμές ανήκουν σε ένα συναρτησιακό χώρο απο συναρτήσεις ορισμένες σε ολόκληρο τον χώρο R^3 . Για να γίνουμε πιά συγκεκριμένοι, για κάθε $t > 0$, η $u(t, x)$ υποτίθεται να ανήκει στον συναρτησιακό χώρο των ομοιόμορφα φραγμένων συνεχών συναρτήσεων του R^3 , στον οποίο το $u_0(x)$ συνήθως υποτίθεται να ανήκει. Πάλι, το πλεονέκτημα της χρήσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων, όπως την (1.60), είναι ότι η λύση μπορεί να αναζητηθεί σε ένα συναρτησιακό χώρο του οποίου τα στοιχεία δεν έχουν απαραίτητα ισχυρές ιδιότητες ομαλότητας, όπως απαιτείται όταν ασχολούμαστε κατευθείαν με μερικές διαφορικές εξισώσεις. Απο την άλλη, αν μια απλή συνεχής λύση μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει για μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής της (1.60), αυτό αυτόματα θα συνεπάγεται τις ιδιότητες ομαλότητας που απαιτούνται απο την εξίσωση (1.59).

Ένα ακόμα ενδιαφέρον παράδειγμα παρέχεται απο το πρόβλημα οριακής τιμής

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) + f(u(0, t)) = 0, \quad (1.61)$$

στο πρώτο τεταρτημόριο $x \geq 0, t \geq 0$.

Θα αποδείξουμε ότι η λύση του προβλήματος (1.61) μπορεί να βρεθεί λύνοντας μια ολοκληρωτική εξίσωση. Υποτίθεται ότι η f αντιπροσωπεύει μια μη γραμμική συνάρτηση, ένα χαρακτηριστικό το οποίο αντιστοιχεί σε τέτοια φαινόμενα όπως η συνθήκη ακτινοβολίας Stefan-Boltzman. Η εξίσωση που θα βρούμε για την $u(0, t), t > 0$, θα είναι μια εξίσωση τύπου Volterra με ιδιόμορφο ολοκλήρωμα.

Αφού η λύση της $u_t = u_{xx}$, με αρχική συνθήκη $u(x, 0) = 0$, και η συνθήκη οριακής τιμής $u_x(0, t) + g(t) = 0$ για $t > 0$ δίνεται απο τη σχέση

$$u(x, t) = \int_0^t g(s) \{\pi(t-s)\}^{-1/2} \exp\{-x^2/4(t-s)\} ds, \quad (1.62)$$

για θετικά t , συνειδητοποιούμε ότι το πρόβλημα (1.61) μπορεί να μετατραπεί στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(x, t) = \int_0^t f(u(0, s)) \{\pi(t-s)\}^{-1/2} \exp\{-x^2/4(t-s)\} ds, \quad (1.63)$$

Ο τύπος (1.63) δείχνει ότι είναι επαρκές να γνωρίζουμε το $u(0, t)$, προκειμένου να γνωρίζουμε το $u(x, t)$ σε όλο το πρώτο τεταρτημόριο. Αλλά απο την (1.63) βρίσκουμε

$$u(0, t) = \int_0^t f(u(0, s)) \{\pi(t-s)\}^{-1/2} ds, \quad t > 0. \quad (1.64)$$

Άρα, αν μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης της εξίσωσης (1.64), ο τύπος (1.63) θα παρέχει τη λύση του προβλήματος οριακής τιμής (1.61) σε όλο το τεταρτημόριο. Βέβαια, διάφορες υποθέσεις πρέπει να γίνουν προκειμένου να ισχύει η διαδικασία.

1.7 Ολοκληρωτικές εξισώσεις που γίνονται για την μαθηματική περιγραφή εφαρμοσμένων προβλημάτων

Ένα πρόβλημα το οποίο εμφανίζεται σε πολλά συγγράμματα μηχανικών ασχολείται με τη κίνηση μιας αλυσίδας που γλιστράει από ένα τραπέζι. Υποθέτουμε ότι το συνολικό μήκος της αλυσίδας είναι a , $a > 0$, και ότι η δομή της είναι εύκαμπτη έτσι ώστε όταν γλιστράει στο τραπέζι μπορεί να γλιστράει κατά μήκος μιας δεδομένης καμπύλης. Δυνάμεις τριβής δεν λαμβάνονται υπόψη. Η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας δεν χρειάζεται να είναι μια σταθερά, και πράγματι θέλουμε να προσδιορίσουμε αυτή την πυκνότητα με τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση της αλυσίδας να προδιαγράφεται. Αυτό είναι ένα είδος αντίστροφου προβλήματος σε σχέση με την ολίσθηση της αλυσίδας.

Στο επίπεδο στο οποίο γίνεται η κίνηση της αλυσίδας, διαλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως δείχνει το σχήμα 1.1 και συμβολίζουμε με s το μήκος του τόξου της καμπύλης στην οποία εκτελείται η κίνηση της αλυσίδας, με αρχή το σημείο O . Αν με z συμβολίσουμε την συντεταγμένη του γενικού σημείου M της αλυσίδας, τότε η εξίσωση της καμπύλης OC μπορεί να γραφτεί ως

$$z = \phi(s), \quad (1.65)$$

όπου $\phi(s)$ υποτίθεται ότι είναι μια ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί την $\phi(0)=0$.

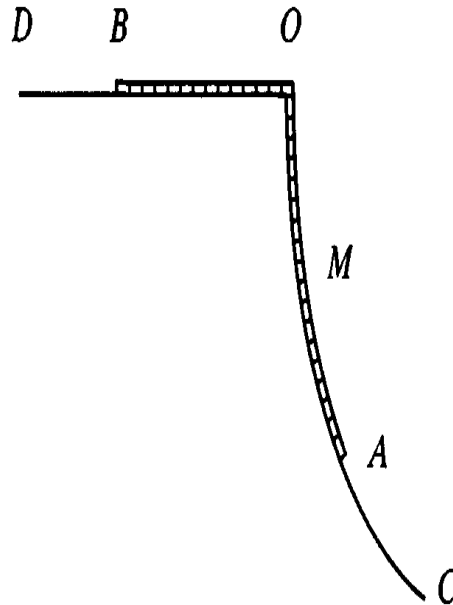
Έστω σ είναι το μήκος του τόξου της καμπύλης OC μεταξύ των σημείων O και A , με A το τέλος της ολίσθησας αλυσίδας. Είναι προφανές ότι η θέση της αλυσίδας είναι γνωστή μόλις το σ είναι γνωστό. Συμβολίζουμε με λ το μήκος του τόξου AM της καμπύλης OC . Τότε $s = \sigma - \lambda$ και συνεπώς η (1.65) οδηγεί στην

$$z = \phi(\sigma - \lambda), \quad (1.66)$$

Αν $f(\lambda)$ είναι η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας στο σημείο M , τότε $f(\lambda)d\lambda$ είναι η μάζα μέρους της αλυσίδας στο M , μήκους $d\lambda$. Το έργο που αντιστοιχεί στην ολίσθηση ενός μέρους της αλυσίδας από το z στο $z+dz$ θα είναι

$$gf(\lambda)d\lambda dz = g\phi'(\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda dz, \quad (1.67)$$

αν λάβουμε υπόψη την (1.66), και συμβολίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας με g ως συνήθως. Άρα, το έργο που συνδέεται με ολόκληρη την αλυσίδα κάτω



Σχήμα 1.1: Ολίσθηση της αλυσίδας πάνω σε τραπέζι

απο το τραπέζι δίνεται απο

$$gd\sigma \int_0^\sigma \phi'(\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda. \quad (1.68)$$

Ας εκτιμήσουμε τώρα την μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο χρονικό διάστημα απο t σε $t+dt$ (την απαραίτητη περίοδο για να μετακινηθεί απο το z στο $z+dz$). Αφού

$$T = \frac{1}{2}Mv^2, \quad (1.69)$$

με $M = \int_0^a f(\lambda)d\lambda$ η συνολική μάζα της αλυσίδας, και αφού $v = ds/dt = d\sigma/dt$, βρίσκουμε

$$dT = M \frac{d\sigma}{dt} \frac{d^2\sigma}{dt^2} dt = M \frac{d^2\sigma}{dt^2} d\sigma. \quad (1.70)$$

Για να βρούμε την εξίσωση της κίνησης, συνδυάζουμε την (1.68) και την (1.70), οι οποίες δίνουν

$$M \frac{d^2\sigma}{dt^2} = g \int_0^\sigma \phi'(\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda, \quad (1.71)$$

Η εξίσωση (1.71) είναι μια ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση στο $\sigma = \sigma(t)$, υποθέτοντας f και ϕ να είναι γνωστά. Με αρχικά δεδομένα σ_0 και v_0 , μπορούμε να βρούμε μια μοναδική λύση της (1.71), η οποία λύνει πλήρως το πρόβλημα του προσδιορισμού της κίνησης μιας ολισθήσας αλυσίδας.

Αντί για την ενασχόληση κατευθείαν με το μηχανικό πρόβλημα, θα εξετάσουμε, όπως είπαμε παραπάνω, ένα αντίστροφο πρόβλημα. Δηλαδή, αν το $f(\lambda)$ είναι άγνωστο και πρέπει να προσδιοριστεί με ένα τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση της αλυσίδας να είναι προσχεδιασμένη εκ των προτέρων, δηλαδή, όταν $\sigma = \sigma(t)$ είναι γνωστό, ή ο νόμος της κίνησης είναι γνωστός ίσως με $d^2\sigma = F(\sigma)dt^2$, τότε η (1.71) οδηγεί στην εξίσωση

$$\int_0^\sigma \phi'(\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda = g^{-1}MF(\sigma), \quad (1.72)$$

η οποία αποτελεί μια εξίσωση τύπου Volterra πρώτου είδους.

Κάτω από υποθέσεις που δεν θα δηλώσουμε εδώ, η εξίσωση (1.72) έχει μια μοναδική λύση $f = f(\lambda)$. Με άλλα λόγια, το αντίστροφο πρόβλημα της ολίσθησης έχει μια μοναδική λύση.

Η κατάσταση γίνεται εντελώς διαφορετική αν ολόκληρη η αλυσίδα έχει γλιστρήσει από το τραπέζι και έχει μια συγκεκριμένη θέση στην καμπύλη OC . Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1.72) πρέπει να αντικατασταθεί από μια παρόμοια εξίσωση

$$\int_0^a \phi'(\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda = g^{-1}MF(\sigma), 0 \leq \sigma \leq a, \quad (1.73)$$

η οποία είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους. Γενικά, τέτοιες εξισώσεις δεν έχουν λύσεις (εκτός αν το δεξιό μέλος ανήκει στο εύρος του ολοκληρωτικού τελεστή που εμφανίζεται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης).

Μια περίπτωση η οποία απεικονίζει αυτή την κατάσταση αντιστοιχεί στην $\phi(s) = s^2/8R$ (δηλαδή, η καμπύλη OC είναι ένα κυκλοειδές), όταν η (1.73) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^a (\sigma - \lambda)f(\lambda)d\lambda = 4g^{-1}RMF(\sigma). \quad (1.74)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (1.74) δεν έχει λύσεις αν η $F(\sigma)$ δεν είναι γραμμική στο σ . Από την άλλη, αν η F είναι γραμμική, τότε μπορεί κάποιος εύκολα να κατασκευάσει περισσότερες από μια λύσεις.

1.8 Βασικά προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra (στοιχειώδης προσέγγιση)

Μεταξύ των διάφορων ολοκληρωτικών εξισώσεων που έχουμε συναντήσει στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, ας εξετάσουμε πρώτα τη μη γραμμική εξίσωση τύπου Volterra (1.35),

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, x(s)) ds, t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.75)$$

Πιο ακριβέστερα, υποθέτουμε f και k να είναι δοσμένες συναρτήσεις n -διάστατων διανυσμάτων, ενώ x είναι η άγνωστη συνάρτηση n -διάστατου διανύσματος. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων της (1.75), τουλάχιστον σε ένα υποδιάστημα του $[t_0, t_0 + a]$, έστω $[t_0, t_0 + \delta]$, με $\delta \leq a$. Για να πετύχουμε αυτό τον στόχο, θα χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Αλλά πρώτα, ας δηλώσουμε επαρκείς συνθήκες στην (1.75), που θα κάνουν εφικτό να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης. Αυτές οι συνθήκες είναι:

- (1) Η f είναι συνεχής απεικόνιση από το $[t_0, t_0 + a]$ στον R^n
- (2) Η k είναι συνεχής απεικόνιση από το $\Delta \times B_r$ στον R^n , όπου

$$\Delta = \{(t, s); t_0 \leq s \leq t_0 + a\} \quad (1.76)$$

και

$$B_r = \{x; x \in R^n, |x| \leq r\}; \quad (1.77)$$

- (3) Η k ικανοποιεί στο $\Delta \times B_r$ τη συνθήκη Lipschitz

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq L|x - y|, \quad (1.78)$$

για κάποιο $L > 0$.

- (4) Αν $b = \sup |f(t)|, t \in [t_0, t_0 + a]$, τότε

$$b < r. \quad (1.79)$$

Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων συνίσταται στη κατασκευή ακολουθιών συνεχών συναρτήσεων

$$x_0(t) = f(t), x_m(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s, x_{m-1}(s)) ds, m \geq 1, \quad (1.80)$$

στο $[t_0, t_0 + a]$ όταν είναι δυνατόν, ή τουλάχιστον σε κάποιο υποδιάστημα $[t_0, t_0 + \delta]$, $\delta < a$.

Απο τη βάση των υποθέσεων μας, κάποιος εύκολα βρίσκει απο την (1.80), οτι τα $x_0(t)$ και $x_1(t)$ ορίζονται και συνεχώς στο $[t_0, t_0+a]$. Προκειμένου να εξακριβώσουμε το γεγονός οτι το $x_2(t)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα, πρέπει να ελέγξουμε αν οι τιμές του $x_1(t)$ ανήκουν στο πεδίο του ορισμού του k , με άλλα λόγια, αν

$$|x_1(t)| \leq r. \quad (1.81)$$

Αν θέσουμε

$$M = \sup |k(t, s, x)| \text{ στο } \Delta \times B_r, \quad (1.82)$$

τότε η (1.80) δίνει

$$|x_1(t)| \leq b + M(t - t_0), t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.83)$$

Αλλά η συνθήκη (1.81) πρέπει να επαληθευτεί, το οποίο σημαίνει το εξής $b + M(t - t_0) \leq r$, ή

$$t - t_0 \leq \frac{r - b}{M}. \quad (1.84)$$

Με

$$\delta = \min \left\{ a, \frac{r - b}{M} \right\}, \quad (1.85)$$

βλέπουμε οτι η $x_2(t)$ ορίζεται σίγουρα στο $[t_0, t_0 + \delta]$. Με επαγωγή, βρίσκουμε οτι όλοι οι όροι της ακολουθίας $\{x_m(t)\}$ ορισμένοι απο την (1.80) είναι συνεχείς στο $[t_0, t_0 + \delta]$.

Τώρα θα αποδείξουμε οτι η ακολουθία (1.80) είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο διάστημα $[t_0, t_0 + \delta]$ σε κάποια συνεχή συνάρτηση $x(t)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) = x(t), \text{ ομοιομορφα στο } [t_0, t_0 + \delta]. \quad (1.86)$$

Αφού

$$x_m(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^m [x_k(t) - x_{k-1}(t)]. \quad (1.87)$$

Θα αποδείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[t_0, t_0 + \delta]$ της σειράς

$$\sum_{k=1}^m [x_k(t) - x_{k-1}(t)]. \quad (1.88)$$

Αλλά προφανώς έχουμε

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq M(t - t_0), \quad (1.89)$$

και για $k > 0$ βρίσκουμε

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq L \int_{t_0}^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)| ds, \quad (1.90)$$

αν λάβουμε υπόψη τις (1.78) και (1.80) απο τις (1.88) και (1.89) εύκολα βρίσκουμε

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \frac{M(L(t-t_0))^m}{L m!}, \quad (1.91)$$

το οποίο εγγυάται την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{x_m(t)\}$ στο $[t_0, t_0+\delta]$.

Αφού

$$|k(t, s, x(s)) - k(t, s, x_m(s))| \leq L|x(s) - x_m(s)|, \quad (1.92)$$

βρίσκουμε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k(t, s, x_m(s)) = k(t, s, x(s)), \quad (1.93)$$

ομοιόμορφα στο σύνολο $\{(t, s); t_0 \leq s \leq t \leq \delta\}$

Τώρα θέτοντας $m \rightarrow \infty$ στη δεύτερη εξίσωση της (1.80) και λαμβάνοντας υπόψη την (1.92), βρίσκουμε για $x(t)$ ορισμένο απο τη (1.86) την εξίσωση Volterra (1.75).

Η μοναδικότητα της λύσης που κατασκευάσαμε παραπάνω, υπό τις συνθήκες (1)-(4), μπορεί να βρεθεί αναπτύσσοντας τυπικά επιχειρήματα. Έστω $y(t)$ μια συνεχής λύση της (1.75) στο $[t_0, t_0+\delta]$. Τότε για $m \geq 1$ η (1.80) οδηγεί στην ανισότητα

$$|y(t) - x_m(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - x_{m-1}(s)| ds, \quad (1.94)$$

Αφού $|y(t) - x_0(t)| \leq M(t - t_0)$, όπως φαίνεται απο την (1.75) όταν $x(t)$ αντικατασταθεί απο $y(t)$, βρίσκουμε απο το παραπάνω (με επαγωγή στο m):

$$|y(t) - x_m(t)| \leq \frac{M(L(t-t_0))^{m+1}}{L(m+1)!}. \quad (1.95)$$

Απο την (1.94) βλέπουμε οτι $y(t)$ είναι επίσης ομοιόμορφο όριο της ακολουθίας $\{x_m(t)\}$ και αφού το όριο είναι μοναδικό βρίσκουμε $y(t) \equiv x(t)$ στο $[t_0, t_0+\delta]$.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.75):

Θεώρημα 1.1. *Αν υποθέσουμε οτι ισχύουν οι συνθήκες (1)-(4) που αναφέραμε παραπάνω, τότε υπάρχει μια μοναδική συνεχής λύση της εξίσωσης (1.75), ορισμένη στο διάστημα $[t_0, t_0+\delta]$, με το δ να δίνεται απο την (1.85). Επιπλέον, αυτή η λύση είναι το ομοιόμορφο όριο της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων (1.80).*

Σημείωση 1.1. Όπως φαίνεται απο την εξίσωση (1.85), πρέπει να περιορίσουμε το διάστημα στο οποίο η λύση της εξίσωσης (1.75) είναι ορισμένη. Με άλλα λόγια, το Θεώρημα 1.1 παρέχει ένα αποτέλεσμα για την τοπική ύπαρξη. Αν

υποθέσουμε ότι το k ορίζεται στο $\Delta \times R^n$ αντί για το $\Delta \times B_r$, γίνεται σαφές ότι δεν υπάρχει ανάγκη να περιορίσουμε το αρχικό διάστημα $[t_0, t_0 + a]$ στο οποίο οι διαδοχικές προσεγγίσεις ορίζονται. Η σύγκλιση αυτής της ακολουθίας είναι ομοιόμορφη στο $[t_0, t_0 + a]$, και η λύση $x(t)$ ορίζεται στο ίδιο διάστημα. Σε αυτή τη περίπτωση βρίσκουμε ένα αποτέλεσμα γενικής ύπαρξης.

Ας δούμε τώρα μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης (1.75), δηλαδή, τη γραμμική περίπτωση: $k(t, s, x) = k(t, s)x$, όπου $k: \Delta \rightarrow \mathcal{L}(R^n, R^n)$ είναι συνεχής. Αφού $k(t, s, x)$ είναι ορισμένη στο $\Delta \times R^n$, είμαστε προφανώς κάτω από τις συνθήκες που περιγράψαμε στη σημείωση 1.1. Άρα, για τη γραμμική εξίσωση Volterra

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (1.96)$$

μπορούμε να ισχυριστούμε τη γενική ύπαρξη (και μοναδικότητα) της λύσης $x(t)$, ορισμένη ως το όριο της διαδοχικής προσέγγισης που κατασκευάσαμε μέσω του τύπου

$$x_0(t) = f(t), x_m(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)x_{m-1}(s)ds, \quad m \geq 1, \quad (1.97)$$

Αν η $f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[t_0, T]$, $T \leq \infty$ και $k(t, s)$ είναι συνεχής στο

$$\Delta' = \{(t, s); t_0 \leq s \leq t < T\}, \quad (1.98)$$

τότε οι διαδοχικές προσεγγίσεις (1.97) συγκλίνουν προς τη λύση $x(t)$, η οποία είναι συνεχής στο $[t_0, T]$ ομοιόμορφα, σε οποιοδήποτε συμπαγές υποδιάστημα $[t_0, t_1] \in [t_0, T]$. Πράγματι, $|k(t, s)|$ οριοθετείται σε κάποιο υποσύνολο Δ' του $t_0 \leq s \leq t \leq t_1 < T$. Άρα, η $k(t, s)x$ επαληθεύει τη συνθήκη του Lipschitz η οποία χρειάζεται για την εύρεση της (1.91) στο $[t_0, t_1]$.

Στη συνέχεια θα βρούμε ένα τύπο που εκφράζει τη (μοναδική) λύση της γραμμικής εξίσωσης (1.96). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα πυρήνα διάσπασης που αντιστοιχεί στον πυρήνα $k(t, s)$.

Ας σημειώσουμε τώρα ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις (1.97), μας επιτρέπουν να γράψουμε

$$x_m(t) = f(t) + \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{j=1}^m k_j(t, s) \right\} f(s)ds, \quad (1.99)$$

όπου

$$k_1(t, s) = k(t, s), k_m(t, s) = \int_s^t k_{m-1}(t, u)k(u, s)du, \quad m \geq 2. \quad (1.100)$$

Απο την (1.100) μπορούμε να βγάλουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τους "επαναλαμβανόμενους" πυρήνες $k_m(t, s)$:

$$|k_m(t, s)| = K_1^m \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (1.101)$$

με $K_1 = \sup |k(t, s)|$, $t_0 \leq s \leq t \leq t_1 < T$. Η εκτίμηση (1.101) συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{m=1}^{\infty} k_m(t, s) = \tilde{k}(t, s), \quad (1.102)$$

σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Δ' . Αν λάβουμε υπόψη την (1.99) τότε ισχύει ο εξής τύπος:

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t \tilde{k}(t, s)f(s)ds. \quad (1.103)$$

Αυτός ο τύπος παρέχει τη λύση της γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.96), για οποιαδήποτε συνεχή $f(t)$. Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι ο τύπος ισχύει για κάποιες συναρτήσεις $f(t)$ οι οποίες δεν είναι απαραίτητα συνεχείς. Αφού ο πυρήνας διάσπασης $\tilde{k}(t, s)$ έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με το τύπο (1.101), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει με ένα απλό τρόπο τη λύση της εξίσωσης (1.96), ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης $f(t)$.

Απο την (1.102) και την (1.100) κάποιος εύκολα βρίσκει την ολοκληρωτική εξίσωση του πλήθους των πυρήνων διάσπασης

$$\tilde{k}(t, s) = k(t, s) + \int_s^t \tilde{k}(t, u)k(u, s)du.$$

Μια παρόμοια εξίσωση βρίσκεται αν παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$k_m(t, s) = \int_s^t k(t, u)k_{m-1}(u, s)du, \quad m > 1,$$

και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (1.102), από αριστερά με το $k(u, t)$, και ολοκληρώσουμε και τις δύο πλευρές ως προς u , από το s στο t :

$$\tilde{k}(t, s) = k(t, s) + \int_s^t k(t, u)\tilde{k}(u, s)du.$$

Μια άμεση εφαρμογή της έννοιας του πυρήνα διάσπασης, και της (1.103), αφορά γραμμικές ολοκληρωτικές ανισότητες (τύπου Volterra).

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι ενδιάμεσες συναρτήσεις είναι πραγματικές, και εξετάσουμε την ανισότητα,

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)y(s)ds, \quad t \in [t_0, T), \quad (1.104)$$

όπου $f(t)$ είναι συνεχής στο $[t_0, T)$, k είναι συνεχής στο Δ' , και

$$k(t, s) \geq 0, \quad \text{στο } \Delta', \quad (1.105)$$

τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t \tilde{k}(t, s)f(s)ds, \quad (1.106)$$

το οποίο δείχνει ότι η συνεχής λύση της ανισότητας (1.104) κυριαρχείται από την λύση της αντίστοιχης εξίσωσης (1.96).

Πράγματι, αν αλλάξουμε το t σε s και το s σε u στην (1.104), και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε με $k(t, s)$ -το οποίο είναι μη αρνητικό- και ολοκληρώσουμε την ανισότητα ως προς s από t_0 ως t , βρίσκουμε αφού προσθέσουμε το $f(t)$ και στις δύο πλευρές

$$f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)y(s)ds \leq f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)f(s)ds + \int_{t_0}^t k_2(t, s)y(s)ds. \quad (1.107)$$

Αλλά η (1.104) δείχνει ότι η (1.107) συνεπάγεται

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s)f(s)ds + \int_{t_0}^t k_2(t, s)y(s)ds, \quad (1.108)$$

σε όλο το διάστημα $[t_0, T)$. Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές της (1.108) με $k(t, s)$, αφού αλλάξουμε το t σε s και το s σε u στην (1.108), κτλ., βρίσκουμε με επαγωγή

$$y(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{j=1}^m k_j(t, s) \right\} f(s)ds + \int_{t_0}^t k_{m+1}(t, s)y(s)ds. \quad (1.109)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του πυρήνα διάσπασης και τις (1.101) και την (1.109) οδηγούμαστε στην (1.106), καθώς $m \rightarrow \infty$.

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας (1.104) συναντιούνται συχνά στην θεωρία των συνηθών διαφορικών εξισώσεων. Η γνωστή ανισότητα του Gronwall-Bellman

$$y(t) \leq C + \int_{t_0}^t k(s)y(s)ds, \quad t \geq t_0, \quad (1.110)$$

με $k(t)$ συνεχές και μη αρνητικό οδηγεί στην σχέση

$$y(t) \leq C \exp \left(\int_{t_0}^t k(s)ds \right). \quad (1.111)$$

Πράγματι, η λύση της σχετικής εξίσωσης

$$x(t) = C + \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds,$$

είναι η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (1.111)

Εκτός απο προβλήματα ύπαρξης και μοναδικότητας για ολοκληρωτικές εξισώσεις, υπάρχουν και πολλά άλλα βασικά προβλήματα τα οποία είναι σημαντικά σε σχέση με τη θεωρία τους, ή για εφαρμογές τους. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ολοκληρωτικών εξισώσεων που παράγαμε στις προηγούμενες ενότητες, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το είδος της συμπεριφοράς των λύσεων τους (στο άπειρο, ή στο τέλος του διαστήματος ύπαρξης). Και πως είναι αυτό το είδος συμπεριφοράς που επηρεάζεται απο αλλαγές στα δεδομένα;

Προκειμένου να προσεγγίσουμε τέτοια προβλήματα, θα περιορίσουμε την έρευνα μας στην περίπτωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra (1.75), κάτω απο τις εξής βασικές υποθέσεις:

- (a) $f:[t_0, \infty) \rightarrow R^n$ είναι συνεχής;
 (b) $k:\Delta' \times R^n \rightarrow R^n$ είναι συνεχής, και εκεί υπάρχει μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση $k_0(t, s)$, ορισμένη στο Δ' , τέτοια ώστε

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq k_0(t, s) |x - y|, \quad (1.112)$$

στο $\Delta' \times R^n$, και

$$k(t, s, 0) = 0 \text{ στο } \Delta'. \quad (1.113)$$

Ας σημειώσουμε οτι η (1.113) δεν περιορίζει τη γενικότητα. Πράγματι, η εξίσωση (1.75) μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή

$$x(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s, 0) ds + \int_{t_0}^t [k(t, s, x(s)) - k(t, s, 0)] ds,$$

το οποίο δείχνει μια ολοκληρωτική συνθήκη που ικανοποιεί την (1.113). Βέβαια, ο παραπάνω τύπος είναι ισοδύναμος με την (1.75).

Θα θέλαμε να προσδιορίσουμε μια επαρκής βαθμωτή συνάρτηση $g:[t_0, \infty) \rightarrow R_+$, συνεχής και τέτοια ώστε η λύση της (1.75) να ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|x(t)| \leq Kg(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (1.114)$$

όπου K είναι μια θετική σταθερά.

Μια εκτίμηση όπως την (1.114) παρέχει κάποια πληροφορία στην ανάπτυξη, ή στη συμπεριφορά, της λύσης $x(t)$ σε ολόκληρο τον άξονα $t \geq t_0$. Αυτού του είδους η πληροφορία είναι συνήθως χρήσιμη σε εφαρμογές.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε στη διεξαγωγή αυτής της έρευνας, θα είναι η ίδια μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει, αλλά στη γενίκευση της απο το θεώρημα της απεικόνισης συστολής (ή σταθερού σημείου του Banach):

Έστω (S, d) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος, και $T:S \rightarrow S$ μια απεικόνιση που ικανοποιεί την

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \quad x, y \in S, \quad (1.115)$$

όπου $0 < \alpha < 1$. Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό $\bar{x} \in S$ τέτοιο ώστε

$$\bar{x} = T\bar{x}. \quad (1.116)$$

Επιπλέον, $\bar{x} = \lim x_n$ καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου $x_0 \in S$ διαλέγεται αυθαίρετα, ενώ $x_m = Tx_{m-1}$, $m \geq 1$.

Θα επιλέξουμε τώρα ως κύριο χώρο για το πρόβλημα ύπαρξης που σχετίζεται με την εξίσωση (1.75) το συναρτησιακό χώρο των απεικονίσεων από το $[t_0, \infty)$ στο R^n , τέτοιο ώστε μια ανισότητα του τύπου (1.114) να ισχύει. Βέβαια, η σταθερά K στην (1.114) εξαρτάται από την απεικόνιση x , και η πραγματική συνάρτηση g πρέπει να προσδιοριστεί σε όρους από τα δεδομένα μας. Αφού το σύνολο από εκείνα τα x που ικανοποιούν την (1.114) είναι προφανώς ένας γραμμικός χώρος, είναι επαρκές να εισάγουμε μια κατάλληλη νόρμα. Έστω

$$|x|_g = \sup \{|x(t)|/g(t); t \in [t_0, \infty)\}. \quad (1.117)$$

Το δεξί μέλος της (1.117) είναι πάντα πεπερασμένο, και είναι μια στοιχειώδη άσκηση να δείξουμε ότι $x \rightarrow |x|_g$ είναι μια νόρμα του γραμμικού χώρου των συνεχών απεικονίσεων που ικανοποιούν μια εκτίμηση του τύπου (1.114). Η πληρότητα αυτού του χώρου, τον οποίο θα συμβολίσουμε με $C_g = C_g([t_0, \infty), R^n)$, προκύπτει από τυπικά επιχειρήματα.

Ο τελεστής T ορίζεται τώρα από

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_{t_0}^t k(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, \infty). \quad (1.118)$$

Ενώ η (1.118) δείχνει ότι η $(Tx)(t)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση από το $[t_0, \infty)$ στον R^n , για οποιοδήποτε $x \in C_g$, πρέπει να αποδείξουμε τη συνθήκη

$$TC_g \subset C_g. \quad (1.119)$$

Για να ισχύει η (1.119), είναι απαραίτητο να έχουμε $(T\theta)(t) = f(t) \in C_g$. Με άλλα λόγια, πρέπει να υποθέσουμε

$$f \in C_g([t_0, \infty), R^n). \quad (1.120)$$

Από την άλλη, από τη συνθήκη (b), έχουμε

$$\left| \int_{t_0}^t k(t, s, x(s)) ds \right| \leq K \int_{t_0}^t k_0(t, s) g(s) ds,$$

για κάποιο $K > 0$, εξαρτώμενο από το $x \in C_g$. Άρα, αν υποθέσουμε

$$\int_{t_0}^t k_0(t, s) g(s) ds \leq \alpha g(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (1.121)$$

ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος της (1.118) θα είναι στο C_g , για οποιοδήποτε x στο C_g .

Η ολοκληρωτική ανισότητα (1.121) είναι ο μόνος περιορισμός που πρέπει να επιβάλουμε στην $g(t)$, αν θέλουμε η (1.119) να ισχύει.

Μένει μόνο να εξασφαλίσουμε τη συστολή της απεικόνισης T . Αφού έχουμε

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^t k_0(t, s) |x(s) - y(s)| ds,$$

απο τις (1.117),(1.121) βρίσκουμε

$$|Tx - Ty|_g \leq \sup_t \left\{ \frac{1}{g(t)} \int_{t_0}^t k_0(t, s) g(s) ds \right\} |x - y|_g \leq \alpha |x - y|_g. \quad (1.122)$$

Άρα, αν υποθέσουμε $\alpha < 1$, ο τελεστής T θα είναι μια συστολή στον χώρο C_g , και η μόνη συνθήκη που πρέπει να διατηρήσουμε για τη συνάρτηση $g(t)$ είναι η ανισότητα (1.121), με $\alpha < 1$.

Συνεπώς, προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης (1.75) στο χώρο C_g , πρέπει να κατασκευάσουμε μια θετική λύση $g(t)$ απο την ανισότητα (1.121), για $\alpha < 1$.

Ας λύσουμε τώρα το παραπάνω πρόβλημα για τη συνάρτηση $g(t)$. Θα δείξουμε πως μια λύση της (1.121) μπορεί να βρεθεί. Ορίζουμε

$$\tilde{k}(t) = \sup k_0(u, s), \quad t_0 \leq s \leq u \leq t,$$

και θεωρούμε την ομαλή συνάρτηση

$$k(t) = \int_t^{t+1} \tilde{k}(s) ds, \quad (1.123)$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί την $k(t) \geq \tilde{k}(t) \geq k_0(t, s)$.

Η ανισότητα (1.121) επαληθεύεται αν η ισχυρότερη ανισότητα

$$k(t) \int_{t_0}^t g(s) ds \leq \alpha g(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (1.124)$$

ικανοποιείται. Αλλά μπορούμε εύκολα να δούμε οτι η ανισότητα (1.124) έχει τη λύση

$$g(t) = k(t) \exp \left\{ \alpha^{-1} \int_{t_0}^t k(s) ds \right\}, \quad (1.125)$$

η οποία προφανώς επαληθεύει την $g(t) > 0$ αν $k_0(t, s)$ δεν απαλείφεται ταυτόσημα σε οποιοδήποτε σύνολο $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$, $t_1 \geq t_0$. Βέβαια, αν λάβουμε υπόψη την (1.112), βλέπουμε οτι η τελευταία απαίτηση του $k_0(t, s)$ δεν είναι περιοριστική.

Ως αποτέλεσμα της ανάλυσης που κάναμε παραπάνω σε σχέση με την ολοκληρωτική εξίσωση (1.75), μπορεί να εξαχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2. Θεωρούμε την εξίσωση (1.75), και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

- (1) $f \in C_g([t_0, \infty), R^n)$;
- (2) $k: \Delta' \times R^n \rightarrow R^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση που επαληθεύει μια γενικευμένη συνθήκη Lipschitz του τύπου (1.112), όπου $k_0(t, s)$ είναι μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο Δ' ;
- (3) Η g δίνεται από τον τύπο (1.125)

Τότε υπάρχει μια μοναδική λύση $x \in C_g$ της εξίσωσης (1.75). Αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί από την μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων, η οποία συγκλίνει στο χώρο C_g (συγκεκριμένα, η μέθοδος συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα του ημιάξονα $[t_0, \infty)$).

Το Θεώρημα 1.2 περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις, πολλά αποτελέσματα που σχετίζονται με την οριοθέτηση των λύσεων ή άλλων ειδών ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων στην εξίσωση (1.75). Θα απεικονίσουμε εδώ την εφαρμοσιμότητα αυτού του θεωρήματος στη θεωρία ευστάθειας των συνηθών διαφορικών εξισώσεων της μορφής (1.30). Προκειμένου να παράγουμε το θεώρημα της ασυμπτωτικής ευστάθειας για την (1.30), θα χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s, x(s))ds, \quad (1.126)$$

και επισημαίνουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις $f(t)$, $k_0(t, s)$ και $g(t)$ οι οποίες εμφανίζονται στη διατύπωση του Θεωρήματος 1.2.

Θεωρούμε την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια, της μηδενικής λύσης του διαφορικού συστήματος της πρώτης προσέγγισης $\dot{x} = A(t)x$, η οποία οδηγεί στον εξής τύπο:

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq K \exp\{-\beta(t-s)\}, \quad t \geq s \geq t_0, \quad (1.127)$$

για κατάλληλες θετικές σταθερές K και β . Ακριβέστερα, αυτή η εκτίμηση χαρακτηρίζει την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια.

Αν $f(t, x)$ είναι συνεχής από το $[t_0, \infty) \times R^n$ στο R^n , $f(t, 0) = 0$, και η συνθήκη του Lipschitz $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ ισχύει, τότε μπορούμε να πάρουμε

$$k_0(t, s) = K \exp\{-\beta(t-s)\}, \quad t \geq s \geq t_0. \quad (1.128)$$

Σε αυτή την περίπτωση η ολοκληρωτική ανισότητα (1.121) γίνεται

$$KL \int_{t_0}^t g(s) \exp(\beta s) ds \leq \alpha g(t) \exp(\beta t), \quad t \geq t_0, \quad (1.129)$$

και προφανώς ικανοποιείται από την $g(t) = \exp(-\gamma t)$, $0 < \gamma < \beta$, με τη προϋπόθεση ότι

$$L < \alpha(\beta - \gamma)K^{-1}. \quad (1.130)$$

Απομένει μόνο να ελέγξουμε την συνθήκη (1) απο τη διατύπωση του Θεωρήματος 1.2. Αυτή η συνθήκη μετατρέπεται σε

$$|X(t)X^{-1}(t_0)x^0| \leq C \exp(-\gamma t), \quad t \geq t_0. \quad (1.131)$$

Για να συμβαδίζουν οι (1.131) και η (1.127), μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} |X(t)X^{-1}(t_0)x^0| &\leq |X(t)X^{-1}(t_0)| |x^0| \leq K |x^0| \exp\{-\beta(t - t_0)\} \\ &= K |x^0| \exp(\beta t_0) \exp(-\beta t) \leq K |x^0| \exp(\beta t_0) \exp(-\gamma t), \end{aligned}$$

και παίρνουμε $C = K |x^0| \exp(\beta t_0)$.

Άρα, η λύση $x(t)$ απο την (1.34), η ολοκληρωτική εξίσωση (1.30), με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x^0$, ικανοποιεί μια εκθετική εκτίμηση της μορφής

$$|x(t)| \leq A \exp(-\gamma t),$$

το οποίο συνεπάγεται την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του συστήματος (1.30).

Η συνθήκη (1.130) δείχνει οτι η ασυμπτωτική ευστάθεια, της μηδενικής λύσης, του γραμμικού συστήματος της πρώτης προσέγγισης διατηρείται, μόνο για μηδενικές τιμές της σταθεράς Lipschitz του όρου διαταραχής $f(t, x)$. Πράγματι, αφού $f(t, 0) = 0$, παράγουμε απο την συνθήκη του Lipschitz για $f(t, x)$ την εκτίμηση $f(t, x) = L |x|$, το οποίο δείχνει οτι ο όρος διαταραχής πρέπει να είναι μικρός. Αυτό είναι σε τέλεια αναλογία με τη θεωρία των συνηθών διαφορικών εξισώσεων.

1.9 Λύση μιάς ολοκληρωτικής εξίσωσης

Μια λύση απο μια διαφορική ή μια ολοκληρωτική εξίσωση, προκύπτει με οποιαδήποτε απο τις εξής δυο μορφές:

1) Ακριβής λύση:

Η λύση καλείται ακριβής αν μπορεί να εκφραστεί σε ένα κλειστό τύπο, όπως είναι ένα πολυώνυμο, εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρική συνάρτηση ή το συνδυασμό απο δύο ή περισσότερες απο αυτές τις στοιχειώδης συναρτήσεις. Παραδείγματα απο ακριβείς λύσεις είναι τα παρακάτω:

$$u(x) = x + e^x,$$

$$u(x) = \sin x + e^{2x}, \quad (1.132)$$

$$u(x) = 1 + \cosh x + \tan x,$$

κτλ.

2) Λύση σε μορφή σειράς:

Για συγκεκριμένα προβλήματα, μερικές φορές δεν μπορούμε να βρούμε ακριβείς λύσεις. Σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζουμε την λύση σε μορφή σειράς που μπορεί να συγκλίνει προσεγγιστικά αν υπάρχει μια τέτοια λύση. Άλλες σειρές μπορεί να μην δίνουν ακριβή λύση αλλά να τη προσεγγίζουν, και σε αυτή τη περίπτωση η βρισκόμενη σειρά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αριθμητικούς σκοπούς. Όσο περισσότερους όρους καθορίζουμε τόσο υψηλότερο επίπεδο ακρίβειας μπορούμε να πετύχουμε.

Μια λύση μίας ολοκληρωτικής εξίσωσης ή ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης, είναι μια συνάρτηση $u(x)$ που ικανοποιεί τη δεδομένη εξίσωση. Δηλαδή, η βρισκόμενη λύση $u(x)$ πρέπει να ικανοποιεί και την εξεταζόμενη εξίσωση. Τα ακόλουθα παραδείγματα θα εξεταστούν για να εξηγήσουν τη σημασία μίας λύσης.

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η $u(x) = \sinh x$ είναι μια λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra:

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \quad (1.133)$$

Αντικαθιστώντας τη $u(x) = \sinh x$ στη δεξιά πλευρά της (1.133) δίνει:

$$\begin{aligned} & x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ & = x + (\sinh t - t)|_0^x, \\ & = \sinh x = u(x). \end{aligned} \quad (1.134)$$

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι η $u(x) = \sec^2 x$ είναι μια λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm:

$$u(x) = -\frac{1}{2} + \sec^2 x + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt. \quad (1.135)$$

Αντικαθιστώντας τη $u(x) = \sec^2 x$ στη δεξιά πλευρά της (1.135) δίνει:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} + \sec^2 x + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(t)dt, \\ & -\frac{1}{2} + \sec^2 x + \frac{1}{2}(\tan t)|_0^{\frac{\pi}{4}}, \\ & = \sec^2 x = u(x). \end{aligned} \quad (1.136)$$

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η $u(x) = \sin x$ είναι μια λύση της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης Volterra:

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt. \quad (1.137)$$

Προχωρώντας όπως πριν, και χρησιμοποιώντας τη $u(x) = \sin x$ στις δύο πλευρές της (1.137) βρίσκουμε:

$$u'(x) = \cos x,$$

για το αριστερό μέλος, και για το δεξί έχουμε:

$$1 - \int_0^x \sin t dt = 1 - (-\cos t)|_0^x = \cos x. \quad (1.138)$$

Παράδειγμα 4

Δείξτε ότι η $u(x) = x + e^x$ είναι μια λύση της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης Fredholm:

$$u''(x) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt. \quad (1.139)$$

Αντικαθιστώντας $u(x) = x + e^x$ στις δύο πλευρές της (1.139) βρίσκουμε:

$$u''(x) = e^x,$$

για το αριστερό μέλος, και για το δεξί έχουμε:

$$e^x - \frac{4}{3}x + x \int_0^1 t(t + e^t)dt, \\ e^x - \frac{4}{3}x + x\left(\frac{1}{3}t^3 + te^t - e^t\right)|_0^1 = e^x. \quad (1.140)$$

Παράδειγμα 5

Λύστε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra χρησιμοποιώντας την μέθοδο λύσης της σειράς

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \quad (1.141)$$

Αντικαθιστώντας το $u(x)$ από την σειρά

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.142)$$

και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.141) οδηγούμαστε στην σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \right) dt. \quad (1.143)$$

εκτιμώντας το δεξιό μέλος οδηγούμαστε στη σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n x^{n+2}, \quad (1.144)$$

που μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} x^n, \quad (1.145)$$

ή ισοδύναμα

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{12} a_2 x^4 + \dots \quad (1.146)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.145) παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 1, \\ & \vdots & & \\ a_n &= \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να συνδυαστεί για να βρούμε

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)!}, n \geq 0. \quad (1.148)$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (1.142) παίρνουμε την λύση της σειράς

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (1.149)$$

η οποία συγκλίνει στην ακριβή λύση

$$u(x) = \sinh x. \quad (1.150)$$

Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να βρεθεί εξισώνοντας τους συντελεστές όμοιων όρων και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1.146), από όπου βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 1, & a_2 &= \frac{1}{2} a_0 = 0, \\ a_3 &= \frac{1}{6} a_1 = \frac{1}{3!}, & a_4 &= \frac{1}{12} a_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Αυτό οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν λύνοντας την αναδρομική σχέση.

Παράδειγμα 6

Λύστε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra χρησιμοποιώντας την μέθοδο λύσης της σειράς

$$u(x) = 1 - x \sin x + \int_0^x tu(t)dt. \quad (1.152)$$

Για λόγους απλότητας, θα χρησιμοποιήσουμε μερικούς όρους της σειράς Taylor για το $\sin x$ και για την λύση $u(x)$ στην (1.152) για να βρούμε

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ & = 1 - x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \int_0^x t(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Ολοκληρώνοντας το δεξιό μέλος και συλλέγοντας τους όμοιους όρους του x βρίσκουμε

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots = 1 + \left(\frac{1}{2}a_0 - 1 \right) x^2 + \frac{1}{3}a_1x^3 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}a_2 \right) x^4 + \dots \quad (1.154)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές όμοιων όρων του x στην (1.154) παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_0 - 1 = -\frac{1}{2}, & a_3 &= \frac{1}{3}a_1 = 0, \\ a_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4}, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (1.155)$$

και γενικά

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad n \geq 0. \quad (1.156)$$

Η λύση σε μορφή σειράς δίνεται απο

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \quad (1.157)$$

το οποίο δίνει την ακριβή λύση απο

$$u(x) = \cos x. \quad (1.158)$$

Παράδειγμα 7

Λύστε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra χρησιμοποιώντας την μέθοδο λύσης της σειράς

$$u(x) = 2e^x - 2 - x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \quad (1.159)$$

Προχωρώντας όπως πριν, θα χρησιμοποιήσουμε μερικούς όρους της σειράς Taylor για το e^x και για την λύση $u(x)$ στην σχέση (1.159) για να βρούμε

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ & = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \dots + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Ολοκληρώνοντας το δεξιό μέλος και παίρνοντας τους όμοιους όρους του x βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ & = x + \left(1 + \frac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}a_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}a_2\right)x^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.161)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x στην εξίσωση (1.161) παίρνουμε

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2!}, a_4 = \frac{1}{3!}, \dots \quad (1.162)$$

και γενικά

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1, a_0 = 0. \quad (1.163)$$

Η λύση σε μορφή σειράς δίνεται απο

$$u(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots\right), \quad (1.164)$$

η οποία συγκλίνει στην ακριβή λύση

$$u(x) = xe^x. \quad (1.165)$$

Κεφάλαιο 2

Εναλλακτική του Fredholm

2.1 Θεωρία του Fredholm για γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις

Η εξίσωση τύπου Fredholm, η οποία αποτελεί την ανάλογη της εξίσωσης (1.75), μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s, x(s))ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.1)$$

όπου $f : [a, b] \rightarrow R^n$, $k : Q \times B_r \rightarrow R^n$, με $Q = [a, b] \times [a, b]$ και B_r είναι η μπάλα ακτίνας $r > 0$, με κέντρο την αρχή του R^n .

Κάποιος συνήθως παρατηρεί, ότι για εκείνους τους πυρήνες $k(t, s, x)$, για τους οποίους $k(t, s, x) \equiv 0$ όταν $t \geq s$, η εξίσωση (2.1) μετατρέπεται στην ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (1.75)

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, x(s))ds.$$

Σε πολλά συγγράμματα ή μονογραφίες, η εξίσωση τύπου Volterra συζητιέται εν συντομία, και κατηγοριοποιείται ως ειδική περίπτωση των εξισώσεων του Fredholm.

Ενώ αυτό είναι τυπικά σωστό, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η εξίσωση Volterra, έχει ιδιότητες που δεν συναντάμε στις εξισώσεις Fredholm. Για παράδειγμα, όπως είδαμε στα Θεωρήματα 1.1 και 1.2, οι εξισώσεις Volterra παρέχουν ένα βασίμο παράδειγμα συναρτησιακών εξισώσεων, για τις οποίες κάτω από απλές υποθέσεις, μπορούν να βρεθούν τοπικά και γενικά αποτελέσματα ύπαρξης. Αυτό το χαρακτηριστικό, κάνει τις εξισώσεις τύπου Volterra ένα κατάλληλο εργαλείο στην έρευνα προβλημάτων εξέλιξης. Αν παρατηρήσουμε ότι, για εξισώσεις τύπου Fredholm όπως είναι η εξίσωση (2.1), η τοπική ύπαρξη (δηλαδή, η

ύπαρξη σε ένα μικρό διάστημα $[a, a + \delta]$) δεν έχει λογική, επειδή το δεξιό μέλος περιλαμβάνει τις τιμές της λύσης x σε όλο το διάστημα $[a, b]$, συνειδητοποιούμε ότι η ενασχόληση με εξισώσεις Fredholm, πρόκειται να είναι πιο περίπλοκη από ότι η ενασχόληση με εξισώσεις τύπου Volterra.

Γενικά, δεν μπορούμε να αναμένουμε μια εξίσωση τύπου Fredholm να είναι επιλύσιμη. Ένα από τα απλούστερα παραδείγματα, δίνεται από την εξίσωση

$$x(t) = t + \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, \quad (2.2)$$

με το $k(t, s)$ ορισμένο από

$$k(t, s) = \begin{cases} \pi^2 s(1-t), & 0 \leq s \leq t \\ \pi^2 t(1-s), & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

να δείχνει, όπως αποδεικνύεται ότι η απουσία των λύσεων είναι μάλλον ένα κοινό χαρακτηριστικό των εξισώσεων Fredholm.

Η Εξίσωση (2.2) οδηγεί άμεσα με διαφορίση στην δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση $x'' + \pi^2 x = 0$, καθώς και τις οριακές συνθήκες $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει λύση της βρισκόμενης διαφορικής εξίσωσης που επαληθεύει τις συνθήκες οριακών τιμών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πυρήνας $k(t, s)$ δεν είναι μόνο συνεχής, αλλά είναι επίσης μερικώς συνεχώς διαφορίσιμος.

Σε σχέση με την εξίσωση (2.1), θα κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

(i) $f \in L^2([a, b], R^n)$.

(ii) $k : Q \times R^n \rightarrow R^n$ είναι μετρήσιμο, $k(t, s, 0) \in L^2(Q, R^n)$, και

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq k_0(t, s) |x - y|, \quad (2.3)$$

για κάποιο $k_0(t, s) \in L^2(Q, R_+)$

Κάτω από τις υποθέσεις (i) και (ii), είναι άμεσο ότι η σχέση

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s, x(s))ds \quad (2.4)$$

ορίζει ένα τελεστή, ο οποίος απεικονίζει τον συναρτησιακό χώρο $L^2([a, b], R^n)$ στον εαυτό του. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι

$$|k(t, s, x(s))| \leq |k(t, s, 0)| + k_0(t, s) |x(s)|, \quad (2.5)$$

σχεδόν παντού στο Q , το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο T δρά στο χώρο $L^2([a, b], R^n)$.

Άρα, αν διαλέξουμε το χώρο $L^2([a, b], R^n)$ ως το κύριο χώρο, θα επαρκεί να βρούμε συνθήκες κάτω από τις οποίες ο τελεστής T , που δίνεται από την (2.4) είναι μια συστολή σε αυτόν τον χώρο.

Αφού

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = \int_a^b k_0(t, s) |x(s) - y(s)| ds \quad (2.6)$$

για σχεδόν όλα τα $t \in [a, b]$, από την (2.6) παράγουμε άμεσα

$$|Tx - Ty|_{L^2} \leq \alpha |x - y|_{L^2} \quad (2.7)$$

όπου

$$\alpha^2 = \int_a^b \int_a^b k_0^2(t, s) dt ds. \quad (2.8)$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα (2.7) και την αρχή της απεικόνισης συστολής, μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.1. *Κάτω από τις υποθέσεις (i) και (ii), που διατυπώσαμε παραπάνω, η μη γραμμική εξίσωση Fredholm (2.1) έχει μια μοναδική λύση στο χώρο $L^2([a, b], R^n)$, υπό την προϋπόθεση*

$$\int_a^b \int_a^b k_0^2(t, s) dt ds < 1. \quad (2.9)$$

Πόρισμα 2.1. *Η γραμμική εξίσωση*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad (2.10)$$

στην οποία $f \in L^2([a, b], R^n)$, και $k : Q \rightarrow \mathcal{L}(R^n, R^n)$ είναι μετρήσιμο και ικανοποιεί την

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < 1, \quad (2.11)$$

έχει μια μοναδική λύση στο χώρο $L^2([a, b], R^n)$.

Σημείωση 2.1. Συνθήκες όπως η (2.9) ή η (2.11) είναι σίγουρα πολύ περιοριστικές. Απαιτούν ο πυρήνας, ή η συνάρτηση της γενικευμένης συνθήκης του Lipschitz, να είναι μικρή στην νόρμα L^2 . Γενικά μιλώντας, αυτό είναι ένα σπάνιο φαινόμενο στη θεωρία εξισώσεων του Fredholm. Τουλάχιστον στην γραμμική περίπτωση, πιο καλύτερα αποτελέσματα είναι διαθέσιμα για εξισώσεις Fredholm της μορφής της (2.10). Για να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τέτοια αποτελέσματα, επαρκεί να εισάγουμε μια παράμετρο στην εξίσωση (2.10), δηλαδή

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad (2.12)$$

και να υποθέσουμε, αντι για την (2.11), τη λιγότερο περιοριστική συνθήκη

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty \quad (2.13)$$

Βέβαια, το πόρισμα του Θεωρήματος 2.1, δίνει ότι η εξίσωση (2.12) έχει μια μοναδική λύση στο $L^2([a, b], R^n)$, για κάθε f που ανήκει στο χώρο, αμέσως μόλις το $|\lambda|$ είναι αρκετά μικρό. Ακριβέστερα, αρκεί να υποθέσουμε ότι

$$|\lambda| < \left\{ \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds \right\}^{-1/2} \quad (2.14)$$

προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα στον L^2 , για κάθε $f \in L^2$, για την εξίσωση (2.12). Όπως γνωρίζουμε, η συνθήκη (2.14) επίσης επαρκεί για την σύγκλιση στον L^2 των διαδοχικών προσεγγίσεων κατασκευασμένων με τον τυπικό τρόπο:

$$x^0(t) \text{ αυθαιρετο στο } L^2, x^{m+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x^m(s)ds, m \geq 0.$$

Με μικρές αλλαγές, σε σύγκριση με τα επιχειρήματα που κάναμε στη προηγούμενη ενότητα, στη περίπτωση ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra (1.96), βρίσκουμε ότι η μοναδική λύση της (2.12), κάτω από την υπόθεση (2.14), δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \tilde{k}(t, s, \lambda)f(s)ds, \quad (2.15)$$

όπου ο πυρήνας διάσπασης $\tilde{k}(t, s, \lambda)$ δίνεται από

$$\tilde{k}(t, s, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j(t, s)\lambda^{j-1}, \quad (2.16)$$

με

$$k_1(t, s) = k(t, s), k_m(t, s) = \int_a^b k_{m-1}(t, u)k_1(u, s)du, m \geq 2. \quad (2.17)$$

Από τη συνθήκη (2.13), όλα τα $k_m(t, s)$, $m \geq 1$, είναι στον $L^2(Q, \mathcal{L}(R^n, R^n))$. Επιπλέον, η σειρά (2.16) είναι συγκλίνουσα στον L^2 , για εκείνες τις τιμές του λ που ικανοποιούν την (2.14). Πράγματι, αν θέσουμε

$$A^2(t) = \int_a^b |k(t, s)|^2 ds, B^2(s) = \int_a^b |k(t, s)|^2 ds \quad (2.18)$$

τότε και το $A(t)$ και το $B(s)$ είναι στον $L^2(Q, R)$, και

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds = \int_a^b A^2(t) dt = \int_a^b B^2(s) ds. \quad (2.19)$$

Αυτό αμέσως οδηγεί στην εκτίμηση

$$|K_m(t, s)| \leq A(t)B(s)K^{m-2}, \quad m \geq 2, \quad (2.20)$$

σχεδόν παντού στον Q . Συνεπώς, οι όροι της σειράς στο δεξιό μέλος της (2.16), κυριαρχούνται από τους όρους της σειράς

$$A(t)B(s) |\lambda| \sum_{m=0}^{\infty} (|\lambda| K)^m, \quad (2.21)$$

σχεδόν παντού στον Q . Λαμβάνοντας υπόψη την (2.19), μπορούμε να δούμε ότι η σειρά (2.21), είναι συγκλίνουσα στον $L^2(Q, R)$, για λ να ικανοποιεί την (2.14). Επιπλέον, η σειρά συγκλίνει απόλυτα, σχεδόν παντού στον Q .

Τι συμβαίνει στην (2.12) αν η συνθήκη (2.14) για το λ δεν ικανοποιείται, αλλά το k είναι τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.13);

Με άλλα λόγια, τι μπορούμε να πούμε για την επιλυσιμότητα της εξίσωσης (2.12), όταν το λ είναι ένας αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός; Ο Fredholm κατάφερε να δώσει μια πλήρη απάντηση για το πρόβλημα που διατυπώσαμε παραπάνω, γνωστή ως εναλλακτική του Fredholm, και πρέπει να δώσουμε έμφαση στο ότι αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί ένα από τα κύρια κομμάτια της κλασικής ανάλυσης, καθώς και τον δημιουργό της γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης.

Για να αποδείξουμε την εναλλακτική του Fredholm, περιορίζουμε τη μελέτη μας στον χώρο $L^2([a, b], C)$ όπου το C αντιπροσωπεύει το πεδίο των μιγαδικών αριθμών. Επίσης επιτρέπουμε το λ να παίρνει μιγαδικές τιμές. Είναι προφανές ότι η ανάλυση που κάναμε παραπάνω για την γραμμική εξίσωση (2.12) εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση του χώρου $L^2([a, b], C^m)$, και συγκεκριμένα για το χώρο $L^2([a, b], C)$.

Πρίν διατυπώσουμε την εναλλακτική του Fredholm, θα ορίσουμε την συζυγή εξίσωση της εξίσωσης (2.12):

$$y(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_a^b \overline{k(s, t)} y(s) ds, \quad (2.22)$$

Μερικές φορές, αντί $\overline{k(s, t)}$ θα γράφουμε απλά $k^*(t, s)$. Ο πυρήνας $k^*(t, s)$ καλείται συζυγής πυρήνας της $k(t, s)$. Η συνάρτηση $g(t)$ στην (2.22) είναι οποιαδήποτε συνάρτηση στον L^2 .

Οι ομογενείς εξισώσεις που σχετίζονται με την (2.12) και την (2.22) είναι αντίστοιχα

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)x(s) ds, \quad (2.23)$$

και

$$y(t) = \bar{\lambda} \int_a^b k^*(t, s)y(s)ds. \quad (2.24)$$

Θεώρημα 2.2. (Fredholm). Οποιοσδήποτε από τις εξισώσεις (2.12) και (2.22) έχουν μια μοναδική λύση στον $L^2([a, b], C)$ για κάθε $f, g \in L^2([a, b], C)$, στην περίπτωση των ομογενών εξισώσεων έχουν μόνο τη τετριμμένη λύση, ή οι ομογενείς εξισώσεις έχουν μη μηδενικές λύσεις. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση (2.12) έχει λύσεις αν και μόνο αν η f είναι ορθογώνια σε κάθε λύση $y(t)$ της συζυγούς ομογενούς εξίσωσης (2.24):

$$\int_a^b f(t)\overline{y(t)}dt = 0. \quad (2.25)$$

2.2 Εναλλακτική του Fredholm

Ορισμός 2.1. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \rightarrow X$ σε ένα χώρο με νόρμα X λέγεται ότι ικανοποιεί την εναλλακτική του Fredholm αν το A είναι τέτοιο ώστε να ισχύει είτε το (I) είτε το (II) από τα παρακάτω:

(I) Οι μη ομογενείς εξισώσεις

$$Ax = y, \quad A^*f = g$$

($A^* : X' \rightarrow X'$ ο συζυγής τελεστής του A) έχουν λύσεις x και f , αντίστοιχα, για κάθε δεδομένο $y \in X$ και $g \in X'$, οι λύσεις είναι μοναδικές. Οι αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις

$$Ax = 0, \quad A^*f = 0$$

έχουν μόνο τις τετριμμένες λύσεις $x = 0$ και $f = 0$, αντίστοιχα.

(II) Οι ομογενείς εξισώσεις

$$Ax = 0, \quad A^*f = 0$$

έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων

$$x_1, \dots, x_n, \quad \text{και} \quad f_1, \dots, f_n \quad (n \geq 1),$$

αντίστοιχα. Οι μη ομογενείς εξισώσεις

$$Ax = y, \quad A^*f = g$$

δεν είναι επιλύσιμες για όλα τα y και g , αντίστοιχα: αυτά έχουν μια λύση αν και μόνο αν y και g είναι τέτοια ώστε

$$f_k(y) = 0, \quad g(x_k) = 0$$

($k=1, \dots, n$), αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.3. (Εναλλακτική του Fredholm). Έστω $T : X \rightarrow X$ είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο με νόρμα X , και έστω $\lambda \neq 0$. Τότε $T_\lambda = T - \lambda I$ ικανοποιεί την εναλλακτική του Fredholm.

Αυτή η δήλωση των αποκλειστικά εναλλακτικών, είναι ιδιαίτερα σημαντική για εφαρμογές, διότι, αντί να δείξουμε την ύπαρξη μίας λύσης κατευθείαν, ε-

ίναι συχνά απλούστερο να αποδείξουμε ότι η ομογενής εξίσωση έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Η θεωρία των συμπαγών γραμμικών τελεστών του Riesz, προέκυψε από τη θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων δεύτερου είδους του Fredholm

$$x(s) - \mu \int_a^b k(s,t)x(t)dt = \tilde{y}(s) \quad (2.26)$$

και γενικεύει τα γνωστά αποτελέσματα του Fredholm, ο οποίος πρώτα ανέπτυξε τη θεωρία των χώρων Hilbert και Banach. Θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή εφαρμόζοντας τη θεωρία των συμπαγών γραμμικών τελεστών σε εξισώσεις της μορφής της (2.26).

Θέτοντας $\mu=1/\lambda$ και $\tilde{y}(s) = -y(s)/\lambda$, όπου $\lambda \neq 0$, έχουμε

$$Tx - \lambda x = y \quad (2.27)$$

με T ορισμένο από

$$(Tx)(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt. \quad (2.28)$$

Συνέπειες της γενικής θεωρίας, μπορούν τώρα να ερμηνευτούν από τη (2.27). Πράγματι, έχουμε

Θεώρημα 2.4. (Εναλλακτική του Fredholm για ολοκληρωτικές εξισώσεις). Αν το k στην (2.26) είναι τέτοιο ώστε $T : X \rightarrow X$ στη (2.27) και (2.28) είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο με νόρμα X , τότε η εναλλακτική του Fredholm ισχύει για το T_λ : έτσι είτε η (2.26) έχει μια μοναδική λύση για όλα τα $\tilde{y} \in X$ ή η ομογενής εξίσωση που αντιστοιχεί στην (2.26) έχει πεπερασμένο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων μη τετριμμένων λύσεων (δηλαδή, λύσεις $\neq 0$).

Υποθέτουμε ότι το T στη (2.27) είναι συμπαγής (συνθήκη για αυτή θα δοθεί παρακάτω). Τότε αν το λ είναι μέσα στο σύνολο $\rho(T)$ του T , το $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ υπάρχει, ορίζεται σε όλα τα X , είναι φραγμένο και δίνει τη μοναδική λύση

$$x = R_\lambda(T)y$$

από τη (2.27) για κάθε $y \in X$. Αφού το $R_\lambda(T)$ είναι γραμμικό, $R_\lambda(T)0 = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η ομογενής εξίσωση $Tx - \lambda x = 0$ έχει μόνο τη τετριμμένη λύση $x = 0$. Άρα $\lambda \in \rho(T)$ δίνει τη περίπτωση (I) της εναλλακτικής του Fredholm.

Έστω $\lambda > \|T\|$. Υποθέτοντας ότι X είναι ένας μιγαδικός χώρος Banach, έχουμε $\lambda \in \rho(T)$ από το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.5. Το φάσμα $\sigma(T)$ απο ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \rightarrow X$, σε ένα μιγαδικό χώρο Banach X είναι συμπαγές, και βρίσκεται μέσα σε ένα δίσκο που δίνεται απο

$$|\lambda| = \|T\|$$

Επιπλέον, η εξίσωση:

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \kappa T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa T)^j = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j$$

δίνει

$$R_\lambda(T) = -\lambda^{-1}(I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + \dots). \quad (2.29)$$

Κατά συνέπεια, για τη λύση $x = R_\lambda(T)y$ έχουμε την αναπαράσταση

$$x = -\frac{1}{\lambda}(y + \frac{1}{\lambda}Ty + \frac{1}{\lambda^2}T^2y + \dots), \quad (2.30)$$

η οποία καλείται σειρά Neumann.

Η περίπτωση (II) της εναλλακτικής του Fredholm βρίσκεται αν πάρουμε ένα μη μηδενικό $\lambda \in \sigma(T)$ (αν υπάρχει ένα τέτοιο λ), όπου $\sigma(T)$ είναι το φάσμα του T .

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

3.1 Εισαγωγή στις εφαρμογές ολοκληρωτικών εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, προκύπτουν από πολλά επιστημονικά προβλήματα και προβλήματα μηχανικών. Μια μεγάλη κατηγορία από προβλήματα αρχικών και οριακών τιμών, μπορούν να μετατραπούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra ή Fredholm. Η δυναμική θεωρία, συνεισέφερε περισσότερο από οποιοδήποτε πεδίο, για να δώσει ώθηση στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Μοντέλα μαθηματικής φυσικής, όπως είναι τα προβλήματα διάχυσης, σκέδασης στη κβαντική μηχανική, συμπαγής απεικόνισης, και κυμάτων νερού, επίσης συνεισέφεραν στη δημιουργία των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Πολλές άλλες εφαρμογές, στην επιστήμη και στη μηχανική, περιγράφονται από ολοκληρωτικές εξισώσεις ή ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις. Το μοντέλο ανάπτυξης του πληθυσμού Volterra, βιολογικά είδη που ζούν μαζί, η διάδοση των διαθέσιμων ψαριών σε μια καινούργια λίμνη, η μεταφορά θερμότητας και η θερμική ακτινοβολία, είναι ίσως μεταξύ των περιοχών που περιγράφονται από ολοκληρωτικές εξισώσεις. Πολλά επιστημονικά προβλήματα, δίνουν αξία στις ολοκληρωτικές εξισώσεις με λογαριθμικούς πυρήνες. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις συχνά προκύπτουν στην ηλεκτροστατική, λιγότερο συχνά σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής, προβλήματα διάχυσης ηλεκτρομαγνητικής, και διάδοσης ακουστικών και ελαστικών κυμάτων.

Σε αυτό το κείμενο, παρουσιάζουμε μια ποικιλία από μεθόδους, για να χειριστούμε όλους τους τύπους ολοκληρωτικών εξισώσεων. Τα προβλήματα που χειριστήκαμε, οδήγησαν στις περισσότερες περιπτώσεις στον προσδιορισμό των ακριβών λύσεων. Επειδή δεν είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε ακριβείς λύσεις σε προβλήματα φυσικών επιστημών, περισσότερη δουλειά αφιερώνεται στην εύρεση

ποιοτικών προσεγγίσεων, που δίνουν έμφαση στη δομή της λύσης.

Αυτός είναι ο σκοπός των ενόνητων που ακολουθούν· να χειριστούμε κάποιες ολοκληρωτικές εξισώσεις, που παίρνουμε απο μια ποικιλία απο πεδία. Την βρισκόμενη σειρά θα την επεξεργαστούμε, για να γίνει η κατανόηση της συμπεριφοράς της λύσης και κάποιες απο τις ιδιότητες του εξεταζόμενου φαινομένου. Για κάθε εφαρμογή, θα επιλέξουμε μία ή δύο σωστές προσεγγίσεις, απο τις μεθόδους που παρουσιάσαμε σε αυτή την εργασία. Ο αναγνώστης μπορεί να δοκιμάσει διαφορετικές μεθόδους για κάθε εφαρμογή.

Τα πολυώνυμα συχνά χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουμε δυναμοσειρές. Ωστόσο, τα πολυώνυμα τείνουν να παρουσιάζουν ταλαντώσεις που ίσως να παράγουν σφάλματα. Επιπρόσθετα, τα πολυώνυμα δεν μπορούν ποτέ να εκρηγνύνονται σε πεπερασμένο χρόνο, και αυτό κάνει τις μοναδικότητες μη προφανείς. Για να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες, η σειρά Taylor είναι καλύτερα διαχειρίσιμη απο τις προσεγγίσεις του Pade, για αριθμητικές προσεγγίσεις.

3.2 Μοντέλο πληθυσμού τύπου Volterra

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το μοντέλο του Volterra, για την ανάπτυξη πληθυσμών ενός είδους μέσα σε ένα κλειστό σύστημα. Το μοντέλο πληθυσμού του Volterra χαρακτηρίζεται απο μία μη γραμμική ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση Volterra

$$\frac{dP}{dT} = aP - bP^2 - cP \int_0^T P(x)dx, P(0) = P_0, \quad (3.1)$$

όπου με $P = P(T)$ συμβολίζουμε το πληθυσμό στο χρόνο T , a , b , και c είναι σταθερές και θετικές παραμέτρους, $a > 0$ είναι ο συντελεστής του ποσοστού γεννήσεων, $b > 0$ είναι ο συντελεστής του πληθυσμού, $c > 0$ είναι ο συντελεστής τοξικότητας, και P_0 είναι ο αρχικός πληθυσμός. Ο συντελεστής c δείχνει την ουσιαστική συμπεριφορά της εξέλιξης του πληθυσμού, πρίν αυτού το επίπεδο πέσει στο μηδέν μακροπρόθεσμα.

Όταν $b = 0$ και $c = 0$, η εξίσωση (3.1) γίνεται η διαφορική εξίσωση του Malthus

$$\frac{dP}{dT} = aP, P(0) = P_0, \quad (3.2)$$

Η εξίσωση του Malthus (3.2), υποθέτει οτι η ανάπτυξη είναι ανάλογη με το τρέχον πληθυσμό. Η εξίσωση (3.2) είναι χωριζομένων μεταβλητών με μία λύση που δίνεται απο

$$P(T) = P_0 e^{aT}. \quad (3.3)$$

Είναι προφανές οτι η εξίσωση (3.3), αντιπροσωπεύει μια αύξηση πληθυσμού για $a > 0$, και μια μείωση πληθυσμού για $a < 0$.

Όταν $c = 0$, η εξίσωση (3.1) γίνεται το λογιστικό μοντέλο αύξησης που είναι

$$\frac{dP}{dT} = aP - bP^2, P(0) = P_0, \quad (3.4)$$

Ο Verhulst δημιούργησε το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης (3.4), που εξαλείφει τα ανεπιθύμητα αποτελέσματα της απεριόριστης ανάπτυξης, εισάγοντας τον περιοριστικό όρο ανάπτυξης $-bP^2$. Η λύση του λογιστικού μοντέλου ανάπτυξης (3.4) είναι

$$P(T) = \frac{aP_0e^{aT}}{a + bP_0(e^{aT} - 1)}, \quad (3.5)$$

όπου

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(T) = \frac{a}{b}. \quad (3.6)$$

Ο Volterra εισήγαγε ένα ολοκληρωτικό όρο $-cP \int_0^T P(x)dx$ στο λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης (3.4), για να πάρει το μοντέλο ανάπτυξης του πληθυσμού του Volterra (3.1). Ο επιπρόσθετος ολοκληρωτικός όρος, χαρακτηρίζει την συσσωρευμένη τοξικότητα που παράχθηκε από τη χρονική στιγμή μηδέν. Πολλές χρονικές κλίμακες και κλίμακες πληθυσμών μπορούν να εφαρμοστούν. Ωστόσο, εφαρμόζουμε τη κλίμακα χρόνου και πληθυσμού εισάγοντας τις αδιάστατες μεταβλητές

$$t = \frac{cT}{b}, u = \frac{bP}{a}, \quad (3.7)$$

για να βρούμε το χωρίς διαστάσεις μοντέλο ανάπτυξης πληθυσμού του Volterra

$$\kappa \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, u(0) = u_0, \quad (3.8)$$

όπου $u \equiv u(t)$ είναι ο κλιμακόμενος πληθυσμός από όμοια άτομα στο χρόνο t , και η χωρίς διαστάσεις παράμετρος $\kappa = c/(ab)$ είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο Volterra εισήγαγε αυτό το μοντέλο για ένα πληθυσμό $u(t)$ από όμοια άτομα, τα οποία παρουσιάζουν συνωστισμό και ευαισθησία στο ποσό των παραγόμενων τοξίνων.

Ένα αξιοσημείωτο ποσό ερευνητικής εργασίας έχει παραχθεί, για να προσδιορίσει αριθμητικές και αναλυτικές λύσεις του μοντέλου ανάπτυξης του πληθυσμού (3.8). Η αναλυτική λύση σε πεπλεγμένη μορφή

$$u(t) = u_0 e^{(\frac{1}{\kappa} \int_0^t [1 - u(\tau) - \int_0^\tau u(x)dx]d\tau)}, \quad (3.9)$$

δείχνει ότι $u(t) > 0$ για όλα τα t αν ο αρχικός πληθυσμός $u_0 > 0$. Ωστόσο, αυτός ο κλειστός τύπος δεν μπορεί να οδηγήσει σε μια κατανόηση της συμπεριφοράς της εξέλιξης του πληθυσμού. Ως αποτέλεσμα, η έρευνα κατευθύνεται προς την ανάλυση του πληθυσμού, που αυξάνει ραγδαία κατά μήκος της λογιστικής καμπύλης, που ακολουθήσε από τη μείωση της στο μηδέν, μακροπρόθεσμα.

Η χωρίς διαστάσεις παράμετρος κ , παίζει ένα σπουδαίο ρόλο στη συμπεριφορά του $u(t)$, σχετικά με τη ραγδαία αύξηση σε ένα συγκεκριμένο εύρος, που ακολουθήθηκε από μια εκθετική μείωση ως την εξαφάνιση. Για κ μικρά, ο πληθυσμός δεν είναι ευαίσθητος στις τοξίνες, ενώ ο πληθυσμός είναι πολύ ευαίσθητος στις τοξίνες για μεγάλα κ . Επιπλέον, για μεγάλα κ , φαίνεται ότι η λύση είναι ανάλογη της $\text{sech}^2(t)$.

Όπως δηλώθηκε πριν, πολλές αναλυτικές και αριθμητικές μέθοδοι, έχουν χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουν κλειστής μορφής λύση, και αριθμητικές προσεγγίσεις στο μοντέλο πληθυσμού του Volterra (3.8). Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε δύο μεθόδους, για να προσδιορίσουμε μια προσέγγιση με ένα λογικό επίπεδο ακρίβειας, της λύση του μοντέλου πληθυσμού Volterra (3.8). Οι δύο μέθοδοι είναι η επαναληπτική μέθοδο μεταβολής, και η μέθοδο λύσης σε μορφή σειράς. Η αποτελεσματικότητα αυτών των δύο μεθόδων, μπορεί να βελτιωθεί δραματικά, προσδιορίζοντας περισσότερους όρους δυνάμεων της σειράς. Επιπλέον, η συμπεριφορά της δομής της λύσης σε αυτό αυξάνει ραγδαία στη λογιστική καμπύλη, και μειώνει εκθετικά για την εξάλειψη του μακροπρόθεσμα, τυπικά μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις του Pade της βρισκόμενης σειράς.

3.2.1 Η επαναληπτική μέθοδος μεταβολής

Για να αποφύγουμε την φορτική δουλειά των πολυωνύμων Adomian, τα οποία είναι ένας τρόπος υπολογισμού πολυωνύμων τα οποία χρησιμεύουν στην μέθοδο διάσπασης Adomian για τον υπολογισμό της υποτιθέμενης άγνωστης γραμμικής συνάρτησης που διασπάται και αναπαριστάται σε μία άπειρη σειρά. Θα εφαρμόσουμε την επαναληπτική μέθοδο μεταβολής για να παράγουμε τυπικά μια προσέγγιση στο μοντέλο ανάπτυξης πληθυσμού Volterra

$$\frac{du}{dt} = 10u(t) - 10u^2(t) - 10u(t) \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = 0.1 \quad (3.10)$$

όπου, για λόγους απλότητας, επιλέξαμε $\kappa = 0.1$ και $u(0) = 0.1$. Η επαναληπτική μέθοδο μεταβολής, παρέχει ραγδαία συγκλίνουσα διαδοχική προσέγγιση της λύσης. Η διόρθωση συναρτησιακά, για την ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (3.10) είναι

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \left(u_n'(r) - 10u_n(r) + 10u_n^2(r) + 10u_n(r) \int_0^r u_n(x)dx \right) dr, \quad n \geq 0, \quad (3.11)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\lambda=-1$, για πρώτης τάξης ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις. Μπορούμε να επιλέξουμε $u_0(x)=u(0)=0.1$. Χρησιμοποιώντας αυτήν

την επιλογή στη διόρθωση συναρτησιακά, η (3.11) δίνει τις εξής διαδοχικές προσεγγίσεις

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= 0.1, \\
 u_1(x) &= 0.1 + 0.9t - 0.05t^2, \\
 u_2(x) &= 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 - 3.28333333t^3 - 0.770833333t^4 \\
 &\quad + 0.07t^5 - 0.001388888889t^6, \\
 u_3(x) &= 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 + 6.316666667t^3 - 24.7375t^4 - 19.1225t^5 \\
 &\quad + 38.10513889t^6 + 2.631746032t^7 - 8.542214780t^8 + O(t^9), \\
 &\vdots \\
 u_8(x) &= 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 + 6.316666667t^3 - 5.5375t^4 \\
 &\quad - 63.70916667t^5 - 156.0804167t^6 - 18.47323411t^7 \\
 &\quad + 1056.288569t^8 + O(t^9),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

κοκ. Βασισμένοι σε αυτό, η προσέγγιση του $u(t)$ δίνεται απο

$$\begin{aligned}
 u(t) &= 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 + 6.316666667t^3 - 5.5375t^4 - 63.70916667t^5 \\
 &\quad - 156.0804167t^6 - 18.47323411t^7 + 1056.288569t^8 + O(t^9), \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Για να αυξήσουμε το βαθμό ακρίβειας, περισσότερες προσεγγίσεις θα πρέπει να προσδιοριστούν, και περισσότεροι όροι θα πρέπει να συμπεριληφθούν.

3.2.2 Η μέθοδος της λύσης της σειράς

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδος της λύσης της σειράς, σε μια μη γραμμική ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση Volterra

$$\frac{du}{dt} = 10u(t) - 10u^2(t) - 10u(t) \int_0^t u(x)dx, u(0) = 0.1 \tag{3.14}$$

όπου επιλέξαμε την αρχική συνθήκη $u(0) = 0.1$, και την αδιάστατη παράμετρο $\kappa = 0.1$.

Υποθέτοντας ότι η $u(t)$ είναι αναλυτική, τότε μπορεί να αναπαρασταθεί απο μια σειρά δυνάμεων της μορφής

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{3.15}$$

Αντικαθιστώντας την (3.15) στις δύο πλευρές της (3.14) δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = & 10 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) - 10 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)^2 \\ & - 10 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

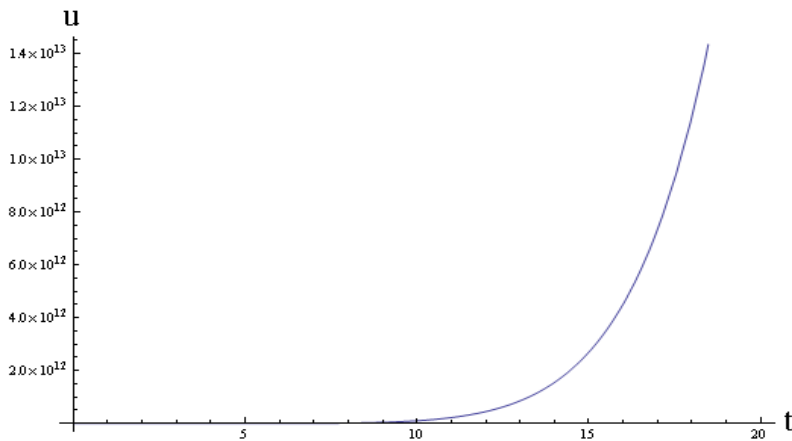
Εκτιμώντας το ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά, εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του t από τις δύο πλευρές, και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη, οδηγούμαστε σε

$$\begin{aligned} a_0 = 0.1, \quad a_1 = 0.9, \quad a_2 = 3.55, \\ a_3 = 6.316666667, \quad a_4 = -5.537500000, \quad a_5 = -63.70916667, \\ a_6 = -156.0804167, \quad a_7 = -18.47323411, \quad a_8 = 1056.288569, \end{aligned} \quad (3.17)$$

κοκ.

Η προσέγγιση του $u(t)$ δίνεται προχωρώντας όπως πριν, η λύση της σειράς $u(t) = 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 + 6.316666667t^3 - 5.5375t^4 - 63.70916667t^5 - 156.0804167t^6 - 18.47323411t^7 + 1056.288569t^8 + O(t^9)$, (3.18)

βρίσκεται χρησιμοποιώντας την (3.17) στη (3.15). Η βρισκόμενη προσέγγιση (3.18) είναι συνεπής με τη προσέγγιση (3.13), που βρήκαμε πριν χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο μεταβολής.



Σχήμα 3.1: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(t)$ για την μέθοδο της λύσης σε σειρά και της επαναληπτικής μεθόδου μεταβολής.

Παρατηρούμε, από την γραφική παράσταση, ότι για τη συγκεκριμένη μέθοδο, όσο αυξάνει το t αυξάνει και η προσέγγιση και για μεγάλα t αποκλίνει στο άπειρο.

3.2.3 Η προσέγγιση του Pade

Για να εξετάσουμε πιο προσεκτικά τη μαθηματική δομή του $u(t)$ όπως φάνηκε παραπάνω, προσπαθούμε να μελετήσουμε τη ραγδαία αύξηση κατά μήκος της λογιστικής καμπύλης που θα φτάσει στο μέγιστο, στη συνέχεια ακολούθως φθίνει αργά εκθετικά όπου $u(t) \rightarrow 0$ καθώς το $t \rightarrow \infty$.

Τα πολυώνυμα συχνά χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουν σειρές με δυνάμεις. Ωστόσο, τα πολυώνυμα τείνουν να παρουσιάζουν ταλαντώσεις, που μπορούν να παράγουν σφάλματα. Επιπρόσθετα, τα πολυώνυμα δεν μπορούν ποτέ να εκρηγνύονται σε πεπερασμένο χρόνο. Για να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες, η σειρά Taylor είναι καλύτερα διαχειρίσιμη από την προσέγγιση του Pade, για αριθμητικές προσεγγίσεις.

Οι προσεγγίσεις του Pade, έχουν το πλεονέκτημα του χειρισμού της προσέγγισης πολυωνύμου, σε μια ρητή συνάρτηση, για να κερδίσουμε περισσότερη πληροφορία για το $u(t)$. Η προσέγγιση του Pade, αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση με την αναλογία δύο πολυωνύμων. Οι συντελεστές από τα πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας τους συντελεστές στην επέκταση Taylor της συνάρτησης. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις προσεγγίσεις Pade, με τη χρήση προγραμμάτων σε υπολογιστή όπως είναι το Maple ή το Mathematica.

Συνεπώς, τη σειρά (3.18) πρέπει να την διαχειριστούμε για να κατασκευάσουμε αρκετές προσεγγίσεις του Pade, όπου η απόδοση των προσεγγίσεων, δείχνει υπεροχή επί των λύσεων της σειράς.

Για να δώσουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για την προσέγγιση του Pade, θα υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ που θέλουμε να τη προσεγγίσουμε με μία ρητή συνάρτηση, που θα είναι ο λόγος δυο πολυωνύμων n και m βαθμού. Έστω:

$$N = n + m$$

όπου $R_N(x)$ και $f(x)$ είναι το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x)$ (δηλαδή οι $R_N(x)$ και $f(x)$ ταυτίζονται και για τις N πρώτες παραγώγους τους). Οπότε

$$\begin{aligned} R_N &\approx (c_0 + c_1x + \dots + c_Nx^N) - \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{1 + b_1x + \dots + b_mx^m} = \\ &\frac{(c_0 + c_1x + \dots + c_Nx^N)(1 + b_1x + \dots + b_mx^m) - (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)}{1 + b_1x + \dots + b_mx^m} \\ &= R_N(x) \end{aligned}$$

για να είναι οι πρώτες N παραγώγοι και $b_1c_0 + c_1 - a_1 = 0$ ίσες για $x_1 = 0.5$ θα πρέπει οι συντελεστές του πολυωνύμου στον αριθμητή ως και τάξης N να είναι μηδέν. Αυτό έχει ως συνέπεια να υπάρχουν N εξισώσεις για τους άγνωστους

συντελεστές

$$\begin{aligned}
 b_2c_0 + b_1c_1 + c_2 - a_2 &= 0 \\
 b_3c_0 + b_2c_1 + b_1c_2 + c_3 - a_3 &= 0 \\
 b_m c_{n-m} + b_{m-1}c_{n-m} + \dots + c_n - a_n &= 0 \\
 &\vdots \\
 b_m c_{n-m+1} + b_{m-1}c_{n-m+2} + \dots + c_{n+1} &= 0 \\
 b_m c_{n-m+2} + b_{m-1}c_{n-m+3} + \dots + c_{n+2} &= 0 \\
 b_m c_{N-m} + b_{m-1}c_{N-m+1} + \dots + c_N &= 0 \\
 &\vdots \\
 R_9(x)
 \end{aligned}$$

Απο τις σχέσεις αυτές λύνοντας το σύστημα των N εξισώσεων για τους N αγνώστους συντελεστές υπολογίζω τη ρητή συνάρτηση. Σε κάθε γραμμή οι δείκτες κάθε όρου έχουν άθροισμα N .

Παράδειγμα

Να βρεθεί η προσέγγιση Pade, $\arctan x$, για τη συνάρτηση $R_{5,4}(x)$ με πολυώνυμο πέμπτου βαθμού στον αριθμητή και τέταρτου στον παρονομαστή. το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

είναι:

$$\begin{aligned}
 f(x) - R_9(x) &= \\
 \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9)(1 + b_1x + \dots + b_4x^4) - (a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5)}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4}
 \end{aligned}$$

οπότε

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = -\frac{1}{3} + b_2$$

Άρα καταλήγω στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
 a_4 &= -\frac{1}{3}b_1 + b_3, \quad a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}b_2 + b_4 \\
 \frac{1}{5}b_1 - \frac{1}{2}b_3 &= 0, \quad -\frac{1}{7} + \frac{1}{5}b_2 - \frac{1}{3}b_4 = 0 \\
 -\frac{1}{7}b_1 + \frac{1}{5}b_3 &= 0, \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{7}b_2 + \frac{1}{5}b_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 1, & a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{7}{9}, & a_4 &= 0, & a_5 &= \frac{64}{945} \\ b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{10}{9}, & b_3 &= 0, & b_4 &= \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

που δέχεται τις παρακάτω τιμές ως λύσεις:

$$\arctan x \approx R_9(x) = \frac{x + \frac{7}{9}x^3 + \frac{64}{945}x^5}{1 + \frac{10}{9}x^2 + \frac{5}{21}x^4}$$

Δηλαδή η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$R_9(1) = 0.7856$$

3.3 Ολοκληρωτικές εξισώσεις με λογαριθμικούς πυρήνες

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε πρώτου και δεύτερου είδους ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm με λογαριθμικούς πυρήνες. Ένα παράδειγμα από τέτοιες εξισώσεις, είναι το εξωτερικό πρόβλημα οριακής τιμής για τη διδιάστατη εξίσωση του Helmholtz, χαρακτηριζόμενη από μία δεύτερου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα.

Είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε και να αποδείξουμε τις εξής ταυτότητες:

Ταυτότητα 1

Η πρώτη ταυτότητα είναι η

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \cos t dt = -\pi \cos x. \quad (3.19)$$

Για να αποδείξουμε αυτή τη ταυτότητα, ολοκληρώνουμε το δεξιό μέλος κατά μέρη, για να βρούμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \cos t dt \\ &= \left[\log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \sin t \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cot \frac{x-t}{2} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cot \frac{x-t}{2} dt, \end{aligned} \quad (3.20)$$

αντικαθιστώντας

$$w(x, t) = \frac{x-t}{2}, \quad (3.21)$$

στο δεξιό μέλος της (3.20) δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \cos t dt = -\sin x \int_{\frac{x+\pi}{2}}^{\frac{x-\pi}{2}} (\cot w - \sin 2w) dw + 2 \cos x \int_{\frac{x+\pi}{2}}^{\frac{x-\pi}{2}} \cos^2 w dw. \quad (3.22)$$

Η ολοκλήρωση στο δεξιό μέλος της (3.22) αποδεικνύει την ταυτότητα (3.19).

Ταυτότητα 2

Η δεύτερη ταυτότητα είναι η

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \sin t dt = -\pi \sin x. \quad (3.23)$$

Ολοκληρώνουμε το αριστερό μέλος της (3.23) κατά μέρη και δίνει

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \sin t dt \\ &= \left[-\log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \cos t \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cot \frac{x-t}{2} dt, \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cot \frac{x-t}{2} dt, \end{aligned} \quad (3.24)$$

αντικαθιστώντας

$$w(x, t) = \frac{x-t}{2}, \quad (3.25)$$

στην (3.24), και προχωρώντας όπως πριν, βρίσκουμε την δεύτερη ταυτότητα (3.23)

Ταυτότητα 3

Η τρίτη ταυτότητα είναι η

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \cos 2t dt = -\frac{\pi}{2} \cos 2x, \quad (3.26)$$

Ταυτότητα 4

Η τέταρτη ταυτότητα είναι η

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| \sin 2t dt = -\frac{\pi}{2} \sin 2x. \quad (3.27)$$

Οι δύο τελευταίες ταυτότητες, μπορούν να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο.

Πολλά επιστημονικά προβλήματα, οδηγούν σε προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων με λογαριθμικούς πυρήνες. Το εξωτερικό οριακό πρόβλημα τιμής,

για την δισδιάστατη εξίσωση Helmholtz, συνήθως οδηγεί σε μία ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους με λογαριθμικό πυρήνα, δηλαδή, αρκετά μη καλά τοποθετημένο κατά την λογική του Hadamard.

Μερικά θέματα, όπου μια διατύπωση από ένα πρόβλημα μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων με λογαριθμικούς πυρήνες έχει χρησιμοποιηθεί, αναφέρονται ως εξής:

1. Έρευνα της ηλεκτροστατικής, και προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού χαμηλής συχνότητας.
2. Μέθοδοι για υπολογισμό της συμπαγούς απεικόνισης, για ένα δεδομένο χώρο.
3. Λύση των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σκέδασης.
4. Προσδιορισμός της διάδοσης ακουστικών και ελαστικών κυμάτων.

Σε αυτά που ακολουθούν, θα μελετήσουμε τα δύο είδη ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Fredholm με λογαριθμικούς πυρήνες.

3.3.1 Δεύτερου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα

Σε αυτή την ενότητα, επιλέγουμε το εξωτερικό πρόβλημα οριακής τιμής, για την δισδιάστατη εξίσωση του Helmholtz, χαρακτηριζόμενη από μία δεύτερου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$u(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t)u(t)dt, x \in [-\pi, \pi], \quad (3.28)$$

όπου ο πυρήνας $K(x, t)$ είναι λογαριθμικός, που δίνεται από

$$K(x, t) = -\frac{a(x, t)}{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| + b(x, t) \quad (3.29)$$

με

$$a(x, t) = a_0 + a_1(x, t) \sin^2 \frac{x-t}{2}, \quad (3.30)$$

όπου a_0 είναι μια σταθερά, $a_1(x, t)$ και $b(x, t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του (x, t) , και είναι 2π περιδικές σε κάθε μεταβλητή.

Πολλές αριθμητικές μέθοδοι, έχουν χρησιμοποιηθεί για να ερευνήσουν αυτήν την εξίσωση. Οι περισσότερες από αυτές τις μεθόδους υποφέρουν από υπολογιστικές δυσκολίες. Σε αυτό το κείμενο, παρουσιάσαμε πολλές μεθόδους για να χειριστούμε ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους. Σε μερικές από τις μεθόδους που εφαρμόσαμε πριν, χρειάζεται ο πυρήνας να είναι

διαχωρίσιμος. Στην (3.28), ο πυρήνας δεν είναι διαχωρίσιμος, άρα επιλέγουμε μέθοδο διάσπασης Adomian για να χειριστούμε την ολοκληρωτική εξίσωση του Fredholm δεύτερου είδους (3.28).

Η μέθοδος διάσπασης του Adomian

Η μέθοδος διάσπασης του Adomian, θα χρησιμοποιηθεί για να χειριστούμε ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους, που δίνονται απο

$$u(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t)u(t)dt, x \in [-\pi, \pi], \quad (3.31)$$

όπου ο πυρήνας $K(x, t)$ είναι λογαριθμικός, που δίνεται απο την σχέση

$$K(x, t) = -\frac{a(x, t)}{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| + b(x, t) \quad (3.32)$$

με

$$a(x, t) = a_0 + a_1(x, t) \sin^2 \frac{x-t}{2}, \quad (3.33)$$

όπου a_0 είναι μια σταθερά, $a_1(x, t)$ και $b(x, t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του (x, t) , και είναι 2π περιοδικές σε κάθε μεταβλητή.

Η μέθοδος διάσπασης Adomian, διασπά τον γραμμικό όρο $u(x)$ σε μια άπειρη σειρά

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (3.34)$$

όπου τα συστατικά $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$ θα προσδιοριστούν αναδρομικά. Αντικαθιστώντας την (3.34) στις δύο πλευρές της (3.31) δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) K(x, t)u(t)dt, x \in [-\pi, \pi], \quad (3.35)$$

Τα στοιχεία μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_{k+1}(x) &= - \int_{-\pi}^{\pi} u_k(t)K(x, t)dt, k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα στοιχεία, η λύση σε μορφή σειράς βρίσκεται χρησιμοποιώντας την (3.34). Αυτό θα απεικονιστεί απο τις παρακάτω εφαρμογές.

Εφαρμογή 1

Ως μια πρώτη εφαρμογή, εξετάζουμε μια περίπτωση, όπου ο τομέας είναι μια κυκλική περιοχή

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_1 = R \cos x, x_2 = R \sin x. \quad (3.37)$$

Για την πρώτη εφαρμογή, θεωρήθηκε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= 2f(x_1, x_2) = 2x_1 = 2R \cos x, \\ a(x, t) &= -i, i = \sqrt{-1}, \\ b(x, t) &= -\frac{1}{2\pi}(1 + 2i), \end{aligned} \quad (3.38)$$

όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής περιοχής. Χρησιμοποιώντας την (3.36) δίνει

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2R \cos x, \quad u_1(x) = 2iR \cos x, \\ u_2(x) &= 2i^2 R \cos x, \quad u_3(x) = 2i^3 R \cos x, \end{aligned} \quad (3.39)$$

βρισκόμενα από τη πρώτη ταυτότητα. Ως αποτέλεσμα, η λύση σε σειρά δίνεται από

$$u(x) = 2R \cos x(1 + i + i^2 + i^3 + \dots), \quad (3.40)$$

που συγκλίνει στο

$$u(x) = R(1 + i) \cos x, \quad (3.41)$$

βρισκόμενο αφού υπολογίσουμε το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς.

Εφαρμογή 2

Ως μια δεύτερη εφαρμογή, εξετάζουμε τη περίπτωση, όπου ο τομέας είναι μια κυκλική περιοχή

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_1 = R \cos x, x_2 = R \sin x. \quad (3.42)$$

Για την δεύτερη εφαρμογή, θεωρήθηκε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= 2f(x_1, x_2) = 2x_2 = 2R \sin x, \\ a(x, t) &= -i, i = \sqrt{-1}, \\ b(x, t) &= -\frac{1}{2\pi}(1 + 2i), \end{aligned} \quad (3.43)$$

όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής περιοχής. Χρησιμοποιώντας την (3.36) δίνει

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2R \sin x, \quad u_1(x) = 2iR \sin x, \\ u_2(x) &= 2i^2 R \sin x, \quad u_3(x) = 2i^3 R \sin x, \end{aligned} \quad (3.44)$$

βρισκόμενα από την δεύτερη ταυτότητα. Ως αποτέλεσμα, η λύση σε σειρά δίνεται από

$$u(x) = 2R \sin x(1 + i + i^2 + i^3 + \dots), \quad (3.45)$$

που συγκλίνει στο

$$u(x) = R(1 + i) \sin x, \quad (3.46)$$

βρισκόμενη αφού υπολογίσουμε το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς.

Εφαρμογή 3

Ως μια τρίτη εφαρμογή, εξετάζουμε τη περίπτωση, όπου ο τομέας είναι μια κυκλική περιοχή

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_1 = R \cos x, x_2 = R \sin x. \quad (3.47)$$

Για την τρίτη εφαρμογή, θεωρήθηκε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x_1^2 - x_2^2) = 2x_2 = 2R^2 \cos 2x, \\ a(x, t) &= -i, i = \sqrt{-1}, b(x, t) = -\frac{1}{2\pi}(1 + 2i), \end{aligned} \quad (3.48)$$

όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής περιοχής. Χρησιμοποιώντας την (3.36) δίνει

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2R^2 \cos 2x, \quad u_1(x) = R^2 i \cos 2x, \\ u_2(x) &= \frac{R^2}{2} i^2 \cos 2x, \quad u_3(x) = \frac{R^2}{4} i^3 \cos 2x, \end{aligned} \quad (3.49)$$

βρίσκονται χρησιμοποιώντας την τρίτη ταυτότητα. Ως αποτέλεσμα, η λύση σε σειρά δίνεται από

$$u(x) = 2R^2 \cos 2x \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{4} + \frac{i^3}{8} + \dots \right), \quad (3.50)$$

και είναι ένας κλειστός τύπος

$$u(x) = \frac{4}{5} R^2 (2 + i) \cos 2x, \quad (3.51)$$

Εφαρμογή 4

Ως μια τελευταία εφαρμογή, εξετάζουμε τη περίπτωση, όπου ο τομέας είναι μια κυκλική περιοχή

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_1 = R \cos x, x_2 = R \sin x. \quad (3.52)$$

Για την τελευταία εφαρμογή, θεωρήθηκε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x_1 x_2 = 2R^2 \sin 2x, \\ a(x, t) &= -i, i = \sqrt{-1}, b(x, t) = -\frac{1}{2\pi}(1 + 2i), \end{aligned} \quad (3.53)$$

όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής περιοχής. Χρησιμοποιώντας την (3.36) δίνει

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2R^2 \sin 2x, \quad u_1(x) = R^2 i \sin 2x, \\ u_2(x) &= \frac{R^2}{2} i^2 \sin 2x, \quad u_3(x) = \frac{R^2}{4} i^3 \sin 2x, \end{aligned} \quad (3.54)$$

βρίσκονται χρησιμοποιώντας την τρίτη ταυτότητα. Ως αποτέλεσμα, η λύση σε σειρά δίνεται απο

$$u(x) = 2R^2 \sin 2x \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{4} + \frac{i^3}{8} + \dots\right), \quad (3.55)$$

και είναι ένας κλειστός τύπος

$$u(x) = \frac{4}{5} R^2 (2 + i) \sin 2x. \quad (3.56)$$

3.3.2 Πρώτου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα

Μια ολοκληρωτική εξίσωση, της οποίας ο πυρήνας είναι ίσος με το λογάριθμο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων σε ένα επίπεδο, κλειστό, ομαλό και που απεικονίζεται απο μια απλή καμπύλη είναι υπό έρευνα. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται απο μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm, με λογαριθμικό πυρήνα και δίνεται απο τη σχέση

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t)u(t)dt, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (3.57)$$

όπου ο πυρήνας $K(x, t)$ είναι λογαριθμικός και δίνεται απο τη σχέση

$$K(x, t) = \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right|. \quad (3.58)$$

Η άγνωστη συνάρτηση $u(x)$, και η γνωστή συνάρτηση $f(x)$, είναι 2π περιοδικές συναρτήσεις.

Πολλές αριθμητικές μεθόδοι, έχουν χρησιμοποιηθεί για να ερευνήσουν αυτήν την εξίσωση, αλλά οι περισσότερες απο αυτές τις μεθόδους εμφανίζουν υπολογιστικές δυσκολίες. Σε αυτό το κείμενο, παρουσιάζουμε δύο μεθόδους για να χειριστούμε ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm πρώτου είδους. Στην (3.57), ο πυρήνας δεν είναι διαχωρίσιμος, επομένως επιλέγουμε τη μέθοδο κανονικοποίησης, συνδυαζόμενη με τη μέθοδο διάσπασης Adomian, για να χειριστούμε ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους (3.57).

Η μέθοδος κανονικοποίησης συνδυαζόμενη με τη μέθοδο διάσπασης Adomian

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κανονικοποίησης συνδυαζόμενη με τη μέθοδο αποσύνθεσης Adomian, για να χειριστούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους, που δίνεται απο

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t)u(t)dt, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (3.59)$$

όπου ο πυρήνας $K(x, t)$ είναι λογαριθμικός και δίνεται απο

$$K(x, t) = \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right|. \quad (3.60)$$

Η μέθοδος κανονικοποίησης, συνίσταται για την αντικατάσταση ενός μη καλώς τοποθετημένου προβλήματος απο ένα καλώς τοποθετημένο πρόβλημα. Η μέθοδος της κανονικοποίησης, μετασχηματίζει την γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους (3.59), στην προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$\mu u_\mu(x) = f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) u_\mu(t) dt, x \in [-\pi, \pi], \quad (3.61)$$

όπου μ είναι μια μικρή θετική παράμετρος. Είναι σαφές οτι η (3.61) είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους, που μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\mu} f(x) - \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) u_\mu(t) dt, x \in [-\pi, \pi], \quad (3.62)$$

παρατηρούμε οτι η εξίσωση (3.62), θα λυθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο διάσπασης του Adomian. Η λύση u_μ της εξίσωσης (3.62) συγκλίνει στη λύση $u(x)$ της (3.59), καθώς το $\mu \rightarrow 0$. Η ακριβής λύση μπορεί να βρεθεί απο

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_\mu(x). \quad (3.63)$$

Η μέθοδος διάσπασης του Adomian, διασπά τον γραμμικό όρο $u(x)$ σε μια άπειρη σειρά

$$u_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\mu_n}(x), \quad (3.64)$$

όπου τα συστατικά $u_{\mu_0}(x), u_{\mu_1}, u_{\mu_2}, \dots$ θα προσδιοριστούν αναδρομικά. Αντικαθιστώντας την (3.64) στις δύο πλευρές της (3.62) δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\mu_n}(x) = \frac{1}{\mu} f(x) - \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{\mu_n}(t) \right) K(x, t) dt, x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.65)$$

Τα στοιχεία μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_{\mu_0}(x) &= \frac{1}{\mu} f(x), \\ u_{\mu_{k+1}}(x) &= -\frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} u_{\mu_k}(t) K(x, t) dt, k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Έχοντας προσδιορισμένα τα στοιχεία $u_{\mu_0}(x), u_{\mu_1}, u_{\mu_2}, \dots$, η λύση σε μορφή σειράς βρίσκεται χρησιμοποιώντας την (3.64). Η βρισκόμενη λύση της σειράς, μπορεί να συγκλίνει σε μια κλειστή λύση, αν υπάρχει τέτοια λύση. Διαφορετικά, η σειρά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αριθμητικούς σκοπούς.

Εφαρμογή 1

Ως μια πρώτη εφαρμογή, εξετάζουμε την περίπτωση που δίνεται απο

$$-\frac{\pi}{2} \cos 2x = \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u(t) dt, x \in [-\pi, \pi] \quad (3.67)$$

Ακολουθώντας την τεχνική κανονικοποίησης, η εξίσωση (3.67) μετασχηματίζεται στην δεύτερου είδους εξίσωση Fredholm

$$u_{\mu}(x) = -\frac{\pi}{2\mu} \cos 2x - \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u_{\mu}(t) dt, x \in [-\pi, \pi] \quad (3.68)$$

Η μέθοδος διάσπασης Adomian, επιτρέπει την χρήση του

$$u_{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\mu_n}(x), \quad (3.69)$$

και την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_{\mu_0}(x) &= -\frac{\pi}{2\mu} \cos 2x, \\ u_{\mu_{k+1}}(x) &= -\frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u_{\mu_k}(t) dt, k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Χρησιμοποιώντας την τρίτη ταυτότητα που δόθηκε παραπάνω παίρνουμε τα στοιχεία

$$\begin{aligned} u_{\mu_0}(x) &= -\frac{\pi}{2\mu} \cos 2x, & u_{\mu_1}(x) &= -\frac{\pi^2}{4\mu^2} \cos 2x \\ u_{\mu_2}(x) &= -\frac{\pi^3}{8\mu^3} \cos 2x, & u_{\mu_3}(x) &= -\frac{\pi^4}{16\mu^4} \cos 2x \end{aligned} \quad (3.71)$$

κοκ. Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (3.69), παίρνουμε την προσεγγιστική λύση

$$u_{\mu}(x) = -\frac{\pi}{2\mu} \cos 2x \left(1 + \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\pi^2}{4\mu^2} + \frac{\pi^3}{8\mu^3} + \dots \right), \quad (3.72)$$

αυτή δίνει

$$u_{\mu}(x) = \frac{-\pi}{2\mu - \pi} \cos 2x. \quad (3.73)$$

Η ακριβής λύση $u(x)$ της (3.67) δίνεται από την σχέση

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{\mu}(x) = \cos 2x. \quad (3.74)$$

Εφαρμογή 2

Ως μια τελευταία εφαρμογή, εξετάζουμε το πρόβλημα

$$-\frac{\pi}{2} \sin 2x = \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (3.75)$$

Ακολουθώντας την τεχνική κανονικοποίησης, η εξίσωση (3.75) μετασχηματίζεται στην δεύτερου είδους εξίσωση Fredholm

$$u_{\mu}(x) = -\frac{\pi}{2\mu} \sin 2x - \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u_{\mu}(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (3.76)$$

Η μέθοδος διάσπασης Adomian επιτρέπει την χρήση του

$$u_{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\mu_n}(x), \quad (3.77)$$

και την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_{\mu_0}(x) &= -\frac{\pi}{2\mu} \sin 2x, \\ u_{\mu_{k+1}}(x) &= -\frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x-t}{2} \right| u_{\mu_k}(t) dt, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Χρησιμοποιώντας την τέταρτη ταυτότητα που δόθηκε παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_{\mu_0}(x) &= -\frac{\pi}{2\mu} \sin 2x, & u_{\mu_1}(x) &= -\frac{\pi^2}{4\mu^2} \sin 2x \\ u_{\mu_2}(x) &= -\frac{\pi^3}{8\mu^3} \sin 2x, & u_{\mu_3}(x) &= -\frac{\pi^4}{16\mu^4} \sin 2x \end{aligned} \quad (3.79)$$

κοκ. Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (3.77) δίνει την προσεγγιστική λύση

$$u_{\mu}(x) = \frac{-\pi}{2\mu - \pi} \sin 2x. \quad (3.80)$$

Η ακριβής λύση $u(x)$ της (3.75) είναι

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{\mu}(x) = \sin 2x. \quad (3.81)$$

3.3.3 Μια ακόμη πρώτου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με λογαριθμικό πυρήνα

Τώρα εξετάζουμε μια ακόμη πρώτου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, με λογαριθμικό πυρήνα, που δίνεται απο

$$\int_{-1}^1 \ln|x-t| u(t) dt = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad (3.82)$$

όπου α είναι μια σταθερά.

Χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις

$$x = \cos A, \quad t = \cos B, \quad (3.83)$$

στην (3.82) έχουμε

$$\int_0^\pi \ln|\cos A - \cos B| g(B) dB = \alpha, \quad 0 < A < \pi, \quad (3.84)$$

όπου

$$g(B) = -\sin Bu(\cos B) \quad (3.85)$$

Αντικαθιστώντας την επέκταση

$$g(B) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nB) \quad (3.86)$$

και χρησιμοποιώντας το τύπο του αθροίσματος,

$$\ln|\cos x - \cos y| = -\ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)\cos(ky)}{k}, \quad (3.87)$$

στην (3.84) βρίσκουμε

$$\int_0^\pi \left(-\ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kA)\cos(kB)}{k} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nB \right) dB = \alpha, \quad (3.88)$$

χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας συναρτήσεων του ημιτόνου, βρίσκουμε

$$-\pi a_0 \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi a_n \frac{\cos nA}{n} = \alpha. \quad (3.89)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές όμοιων όρων απο τις δύο πλευρές, έχουμε

$$a_0 = -\frac{\alpha}{\pi \ln 2}, \quad a_n = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.90)$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (3.86) δίνει την ακριβή λύση

$$u(x) = -\frac{\alpha}{\pi \ln 2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right). \quad (3.91)$$

Αντικαθιστώντας την (3.91) στην (3.82) δίνει την εξής ταυτότητα

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|x-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\pi \ln 2, \quad -1 < x < 1, \quad (3.92)$$

3.4 Ολοκληρώματα του Fresnel

Τα ολοκληρώματα του Fresnel $\text{Fresnel}S(x)$ και $\text{Fresnel}C(x)$, συμβολίζονται με $S(x)$ και $C(x)$ αντίστοιχα, είναι δύο σημαντικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην οπτική. Προκύπτουν σε φαινόμενα διάθλασης, και ορίζονται απο

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad (3.93)$$

και

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt. \quad (3.94)$$

Ο συντελεστής $\frac{\pi}{2}$, καλείται κανονικοποιημένος παράγοντας. Τα ολοκληρώματα Fresnel είναι πλήρεις συναρτήσεις, δηλαδή αναλυτικές, με την εξής παράσταση σε σειρά

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}, \quad (3.95)$$

και

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}. \quad (3.96)$$

Τα ολοκληρώματα Fresnel έχουν τις ειδικές τιμές

$$\begin{aligned} S(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = -\frac{1}{2}, \\ C(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} C(x) = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τέσσερες εφαρμογές, που περιλαμβάνουν την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm και την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, όπου θα εμπλέκονται τα ολοκληρώματα του Fresnel.

Εφαρμογή 1

Ως μια πρώτη εφαρμογή, εξετάζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους

$$u(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 u(t) dt. \quad (3.98)$$

Η μέθοδος κατευθείαν υπολογισμού, θα χρησιμοποιηθεί για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα, άρα μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$u(x) = \cos x + \alpha \cos \frac{\pi}{2}x^2, \quad (3.99)$$

όπου

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt. \quad (3.100)$$

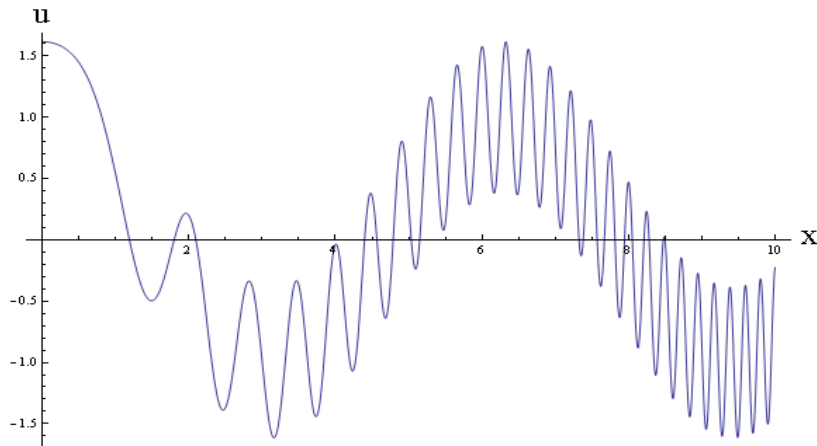
Για να προσδιορίσουμε το α , αντικαθιστούμε την (3.99) στην (3.100), υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για να βρούμε ότι

$$\alpha = \frac{1}{1 - C\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad (3.101)$$

Αντικαθιστώντας την (3.101) στην (3.99) παίρνουμε την ακριβή λύση

$$u(x) = \cos x + \left(\frac{1}{1 - C\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \cos \frac{\pi}{2}x^2, \quad (3.102)$$

Απο τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η λύση είναι περιοδική και τα-



Σχήμα 3.2: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ για την πρώτη εφαρμογή των ολοκληρωμάτων του Fresnel.

λαντώνεται. Επίσης αυξάνει ο χρόνος της περιόδου της ταλάντωσης καθώς αυξάνει το x .

Εφαρμογή 2

Ως μια δεύτερη εφαρμογή, εξετάζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους

$$\frac{\pi^2}{72} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)u(t)dt. \quad (3.103)$$

Η μέθοδος κανονικοποίησης, θα συνδυαστεί με τη μέθοδο κατευθείαν υπολογισμού, για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα. Η μέθοδος κανονικοποίησης μετασχηματίζει την (3.103) στην ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους

$$u_{\mu}(x) = \frac{\pi^2}{72\mu} \sin \frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 u_{\mu}(t) dt. \quad (3.104)$$

Η μέθοδος κατευθείαν υπολογισμού μετατρέπει την (3.104) στην

$$u_{\mu}(x) = \left(\frac{\pi^2}{72\mu} - \frac{\alpha}{\mu} \right) \sin \frac{\pi}{2} x^2, \quad (3.105)$$

όπου

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u_{\mu}(t) dt. \quad (3.106)$$

Για να προσδιορίσουμε το α , αντικαθιστούμε την (3.105) στη (3.106), υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για να βρούμε ότι

$$\alpha = \frac{\pi^2}{72} \left(\frac{S\left(\frac{\pi}{6}\right)}{S\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mu} \right). \quad (3.107)$$

Αντικαθιστώντας την (3.107) στη (3.105), παίρνουμε τη προσεγγιστική λύση

$$u_{\mu}(x) = \frac{\pi^2}{72} \left(\frac{1}{S\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mu} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right). \quad (3.108)$$

Συνεπώς, η ακριβής λύση της (3.103) βρίσκεται απο

$$u(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{\mu}(x) = \left(\frac{\pi^2}{72} \right) \left(\frac{1}{S\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right) \sin \frac{\pi}{2} x^2. \quad (3.109)$$

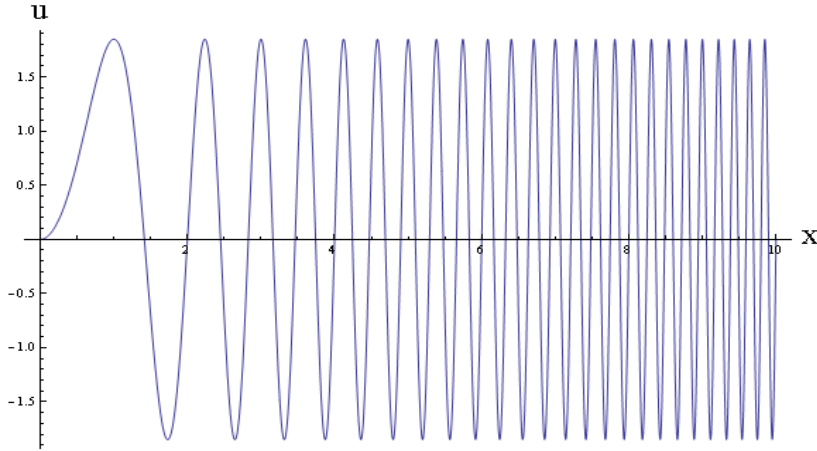
Παρατηρούμε ότι $u(x) = x$ είναι ακόμα μια λύση αυτής της εξίσωσης. Αυτό είναι δυνατό επειδή αυτό το πρόβλημα είναι μια μη καλώς τοποθετημένη εξίσωση. Είναι λογικό για τα μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα, να έχουν περισσότερες απο μία λύσεις.

Επίσης παρατηρούμε στο Σχήμα 3.3 ότι η λύση ταλαντώνεται και όσο αυξάνει το x μικραίνει ο χρόνος της περιόδου της ταλάντωσης.

Εφαρμογή 3

Ως μια τρίτη εφαρμογή, εξετάζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου είδους

$$u(x) = 1 - x + \cos x^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right) + \int_0^x u(t) dt. \quad (3.110)$$



Σχήμα 3.3: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ για την δεύτερη εφαρμογή των ολοκληρωμάτων του Fresnel.

Επιλέγουμε τη μέθοδο διάσπασης Adomian για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα. Η μέθοδος διάσπασης Adomian διασπά το γραμμικό όρο $u(x)$ σε μια άπειρη σειρά

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (3.111)$$

όπου τα στοιχεία $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$ θα προσδιοριστούν αναδρομικά. Αντικαθιστώντας τη (3.111) στη (3.110) παίρνουμε

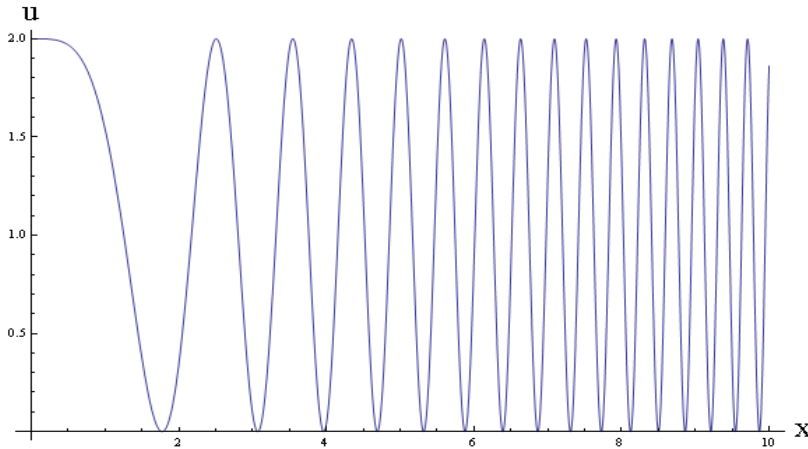
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - x + \cos x^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt. \quad (3.112)$$

Τα στοιχεία μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - x + \cos x^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right), \\ u_{k+1}(x) &= \int_0^x u_k(t) dt, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Αυτή δίνει

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - x + \cos x^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right), \\ u_1(x) &= x - \frac{1}{2} x^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right) + \frac{1}{2} \sin x^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} x C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} x \right). \end{aligned} \quad (3.114)$$



Σχήμα 3.4: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ για την τρίτη εφαρμογή των ολοκληρωμάτων του Fresnel.

Οι αιώνιοι όροι εμφανίζονται μεταξύ $u_0(x)$ και $u_1(x)$. Απαλείφοντας τους αιώνιους όρους από το u_0 , η ακριβής λύση δίνεται από

$$u(x) = 1 + \cos x^2. \quad (3.115)$$

Παρατηρούμε στο Σχήμα 3.4 ότι η λύση ταλαντώνεται και όσο αυξάνει το x μικραίνει ο χρόνος της περιόδου της ταλάντωσης.

Εφαρμογή 4

Ως μια τελευταία εφαρμογή, εξετάζουμε την μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου είδους

$$u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}C(\sqrt{2}x) + x\right) + \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) u^2(t) dt. \quad (3.116)$$

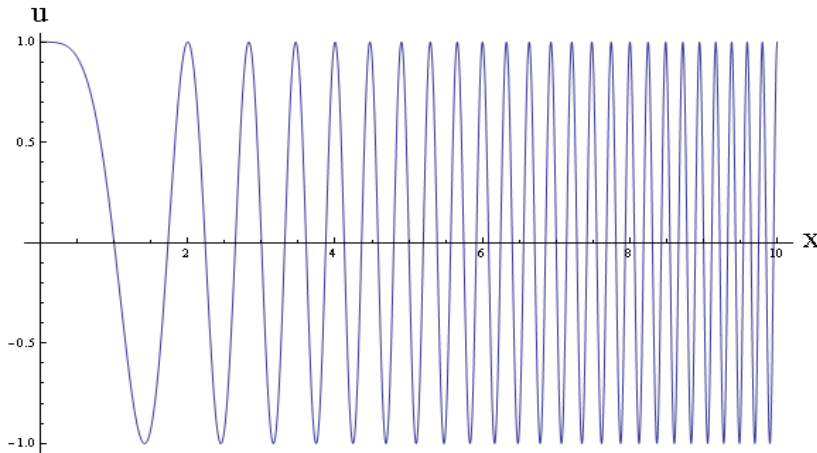
Επιλέγουμε τη τροποποιημένη μέθοδο διάσπασης Adomian, για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα. Προχωρώντας όπως πριν, αντικαθιστούμε το $u(x)$ με τη σειρά διάσπασης. Η τροποποιημένη μέθοδο διάσπασης Adomian επιτρέπει τη χρήση της σχέσης αναδρομικά.

$$u_0(x) = \frac{\pi}{2}x^2, \\ u_1(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}C(\sqrt{2}x) + x\right) + \int_0^x \sin \frac{\pi}{2}x^2 u_0^2(t) dt = 0. \quad (3.117)$$

Ως αποτέλεσμα, η ακριβής λύση δίνεται από

$$u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right). \quad (3.118)$$

Από την γραφική παράσταση στο Σχήμα 3.5 παρατηρούμε ότι η λύση ταλαντώνεται και όσο αυξάνει το x μικραίνει ο χρόνος της περιόδου της ταλάντωσης.



Σχήμα 3.5: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ για την τέταρτη εφαρμογή των ολοκληρωμάτων του Fresnel.

3.5 Η εξίσωση του Thomas-Fermi

Η εξίσωση του Thomas-Fermi παράχθηκε ανεξάρτητα, από τον Thomas (1927) και τον Fermi (1928), για να μελετήσουν τα δυναμικά και την ηλεκτρονιακή κατανομή σε ένα άτομο. Αυτή η εξίσωση παίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φυσική. Η εξίσωση του Thomas-Fermi χρησιμοποιήθηκε επίσης στη μοριακή θεωρία, τη θεωρία στερεάς κατάστασης, και τους κώδικες υδροδυναμικής. Η χωρίς διαστάσεις εξίσωση του Thomas-Fermi, είναι μια μη γραμμική ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση Volterra δεύτερου είδους που δίνεται από

$$u' = B + \int_0^x u^{\frac{3}{2}}(t)t^{-\frac{1}{2}}dt. \quad (3.119)$$

Για ένα απομονωμένο άτομο, οι οριακές συνθήκες δίνονται από

$$u(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (3.120)$$

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό $u'(0) = B$ είναι σημαντικό. Αυτό θα είναι το κέντρο αυτής της μελέτης.

Πολλές αριθμητικές και αναλυτικές προσεγγίσεις, χρησιμοποιήθηκαν για να χειριστούν την εξίσωση του Thomas-Fermi (3.119). Εδώ θα παρουσιάσουμε κάποιες ξεχωριστές μεθόδους, για να χειριστούμε τις μη γραμμικές ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις δεύτερου είδους. Για να μεταφέρουμε αυτή τη μελέτη, επιλέγουμε την επαναληπτική μέθοδο μεταβολής, προκειμένου να διεξάγουμε μια κατάλληλη ανάλυση σε αυτή την εξίσωση. Η επαναληπτική μέθοδο μεταβολής εισάγει τη διόρθωση συναρτησιακά

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - B - \int_0^t (u_n^{\frac{1}{2}}(r)r^{-\frac{1}{2}}dr) \right) dt. \quad (3.121)$$

Πρώτα επιλέγουμε τη προσέγγιση $u_0(x) = 1$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την επιλογή του $u_0(x)$ στη διόρθωση συναρτησιακά, έχουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις, και θέτοντας $x^{\frac{1}{2}} = t$, η προσέγγιση του $u_8(t)$ βρίσκεται εύκολα ότι είναι

$$\begin{aligned}
 u_8(t) = & 1 + Bt^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}Bt^5 + \frac{1}{3}t^6 + \frac{3}{70}B^2t^7 + \frac{2}{15}Bt^8 \\
 & + \left(-\frac{1}{252}B^3 + \frac{2}{27}\right)t^9 + \frac{1}{175}B^2t^{10} + \left(\frac{1}{1056}B^4 + \frac{31}{1485}B\right)t^{11} \\
 & + \left(\frac{4}{405} + \frac{4}{1575}B^3\right)t^{12} + \left(-\frac{3}{9152}B^5 + \frac{557}{100100}B^2\right)t^{13} \\
 & + \left(-\frac{29}{24255}B^4 + \frac{4}{693}B\right)t^{14} \\
 & + \left(\frac{101}{52650} + \frac{7}{49920}B^6 - \frac{623}{351000}B^3\right)t^{15} - \left(\frac{46}{45045}B^2 - \frac{68}{105105}B^5\right)t^{16} \\
 & + \left(-\frac{3}{43520}B^7 - \frac{113}{1178100}B + \frac{153173}{116424000}B^4\right)t^{17} \\
 & + \left(-\frac{4}{10395}B^6 + \frac{1046}{675675}B^3 + \frac{23}{473850}\right)t^{18} \\
 & + \left(\frac{799399}{698377680}B^2 - \frac{1232941}{1278076800}B^5 + \frac{99}{2646016}B^8\right)t^{19} \\
 & + \left(-\frac{99856}{70945875}B^4 + \frac{51356}{103378275}B + \frac{256}{1044225}B^7\right)t^{20} \\
 & + \left(\frac{705965027}{966226060800}B^6 - \frac{33232663}{25881055200}B^3 + \frac{35953}{378132300} - \frac{143}{6537216}B^9\right)t^{21} \\
 & + \left(\frac{43468}{33622875}B^5 - \frac{6272}{38105925}B^8 - \frac{250054}{342953325}B^2\right)t^{22} + O(t^{23})
 \end{aligned}$$

Δηλώθηκε πρίν, ότι σκοπεύουμε να μελετήσουμε τη μαθηματική συμπεριφορά του δυναμικού $u(x)$, για να μας επιτρέψει να προσδιορίσουμε την αρχική κλίση του δυναμικού $B = u'(0)$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το σχηματισμό των προσεγγίσεων Pade, οι οποίες έχουν το πλεονέκτημα του χειρισμού της πολυωνυμικής προσέγγισης σε μια λογική συνάρτηση, για να κερδίσουμε περισσότερη πληροφορία για την $u(x)$. Σημειώνεται ότι η Pade, βρίσκει αλγορίθμους που φτιάχνονται σε βοηθητικά προγράμματα, στις περισσότερες γλώσσες χειρισμού όπως είναι το Maple και το Mathematica.

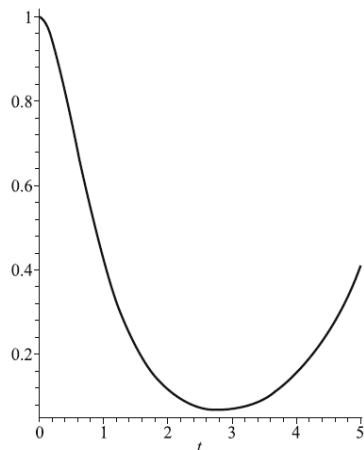
Μπορεί να βρεθεί ότι η διαγώνια προσέγγιση είναι η πιο αποτελεσματική προσέγγιση, επομένως κατασκευάζουμε μόνο τις διαγώνιες προσεγγίσεις $[2/2], [4/4], [5/5]$ και $[10/10]$. Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη $u(\infty) = 0$,

η διαγώνια προσέγγιση $[M, M]$ εξαφανίζεται αν ο συντελεστής του t με την υψηλότερη δύναμη στον αριθμητή εξαφανίζεται. Χρησιμοποιώντας υπολογιστές, κατασκευάζουμε χρήσιμα προγράμματα για την επίλυση των πολυωνύμων που προκύπτουν, και βρίσκουμε τις τιμές της αρχικής κλίσης $B = u'(0)$ που αναφέρεται παρακάτω στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1 Προσεγγίσεις του Pade και αρχικές κλίσεις $B = u'(0)$

Προσεγγίσεις Pade	Αρχική κλίση $B = u'(0)$
[2/2]	-1.211413729
[4/4]	-1.550525919
[5/5]	-1.586834763
[10/10]	-1.587652774

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι στην εφαρμογή της οριακής συνθήκης $u(\infty) = 0$, στις διαγώνιες προσεγγίσεις $[M/M]$, μια πολυωνυμική εξίσωση για τα αποτελέσματα B , δίνει πολλές ρίζες, μολονότι η εξίσωση Thomas-Fermi έχει μια μοναδική λύση. Θυμηθείτε ότι η $u(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, άρα $u'(0) < 0$. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μιγαδικές ρίζες και μη φυσικές



Σχήμα 3.6: Η προσέγγιση Pade [8/8] του $u(t)$.

θετικές ρίζες αποκλείστηκαν. Επίσης είναι προφανές ότι το σφάλμα μειώνεται δραματικά, με την αύξηση του βαθμού των προσεγγίσεων του Pade. Επιπλέον, κάνοντας την γραφική παράσταση της παραλλαγής της προσέγγισης του Pade $u(t)$, τότε για $|u'(0) < 1.587652774|$, μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε τη μείωση του $u(t)$, που θα πλησιάσει ένα ελάχιστο, ακολουθούμενο απο μια αύξηση μετά απο αυτό. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.6.

Το σχήμα 3.6 δείχνει τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων [8/8] του Pade του $u(t)$ και ερευνά την μείωση του $u(t)$, που θα πλησιάσει ένα ελάχιστο ακολουθούμενο απο μια αύξηση μετά απο αυτό.

3.6 Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας και θερμικής ακτινοβολίας

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε δύο μοντέλα μαθηματικής φυσικής. Το πρώτο μοντέλο είναι ένα μοντέλο ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Abel Volterra, που περιγράφει την θερμοκρασιακή κατανομή κατά μήκος της επιφάνειας, όταν η μεταφορά θερμότητας σε αυτό εξισορροπείται από την ακτινοβολία από αυτό. Το δεύτερο μοντέλο είναι επίσης ένα μοντέλο ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Abel Volterra, που προσδιορίζει την θερμοκρασία, σε ένα ημιάπειρο στερεό, στους οποίου την επιφάνεια μπορεί να διαχέεται θερμότητα μη γραμμικής ακτινοβολίας.

3.6.1 Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας:ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση του Lighthill

Ο Lighthill εισήγαγε μια μη γραμμική ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία περιγράφει την θερμοκρασιακή κατανομή της επιφάνειας ενός βλήματος που κινείται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο. Ο Lighthill εξέτασε μια ομοιόμορφη ροή θερμότητας, και εξήγαγε την θερμοκρασιακή κατανομή κατά μήκος της επιφάνειας, όταν η μεταφορά θερμότητας σε αυτό εξισορροπείται από την ακτινοβολία από αυτό. Αυτό οδήγησε στην ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση του Lighthill

$$\{F(z)\}^4 = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^z \frac{F'(s)}{\left(z^{\frac{3}{2}} - s^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} ds, \quad (3.122)$$

με οριακές συνθήκες

$$F(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0. \quad (3.123)$$

Αν εφαρμόσουμε κατάλληλο μετασχηματισμο μπορούμε να μετατρέψουμε την (3.122) στη μη γραμμική ιδιόμορφη εξίσωση του Volterra δεύτερου είδους που δίνεται από

$$u(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^x \frac{t^{\frac{1}{3}} u^4(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt, \quad x \in [0, 1], \quad (3.124)$$

όπου

$$u(x) = F(x^{\frac{2}{3}}), \quad (3.125)$$

$$u(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0. \quad (3.126)$$

Επιλέγουμε τη μέθοδο διάσπασης Adomian για να χειριστούμε τη μη γραμμική ιδιόμορφη εξίσωση (3.124). Η μέθοδος Adomian υποθέτει ότι ο γραμμικός

όρος $u(x)$ διασπάται απο τη σειρά

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (3.127)$$

και ο μη γραμμικός όρος $u^4(x)$ απο τη σειρά

$$u^4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad (3.128)$$

όπου $A_n(x)$ τα πολυώνυμα Adomian. Σε οτι ακολουθεί απαριθμούμε μερικά απο τα πολυώνυμα του Adomian για $u^4(x)$:

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^4, \\ A_1 &= 4u_0^3u_1, \\ A_2 &= 4u_0^3u_2 + 6u_0^2u_1^2, \\ A_3 &= 4u_0^3u_3 + 12u_0^2u_1u_2 + 4u_0u_1^3, \\ A_4 &= 4u_0^3u_4 + 12u_0^2\left(\frac{1}{2}u_2^2 + u_1u_3\right) + 12u_0u_1^2u_2 + u_1^4, \\ A_5 &= 4u_0^3u_5 + 12u_0^2(u_1u_4 + u_2u_3) + 12u_0(u_1^2u_3 + u_1u_2^2) + 4u_1^3u_2, \\ A_6 &= 4u_0^3u_6 + 12u_0^2\left(u_1u_5 + u_2u_4 + \frac{1}{2}u_3^2\right) + 4u_0(3u_1^2u_4 + 6u_1u_2u_3 + u_2^3) \\ &\quad + (4u_1^3u_3 + 6u_1^2u_2^2), \end{aligned} \quad (3.129)$$

και ούτω καθεξής για άλλα πολυώνυμα Adomian. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση

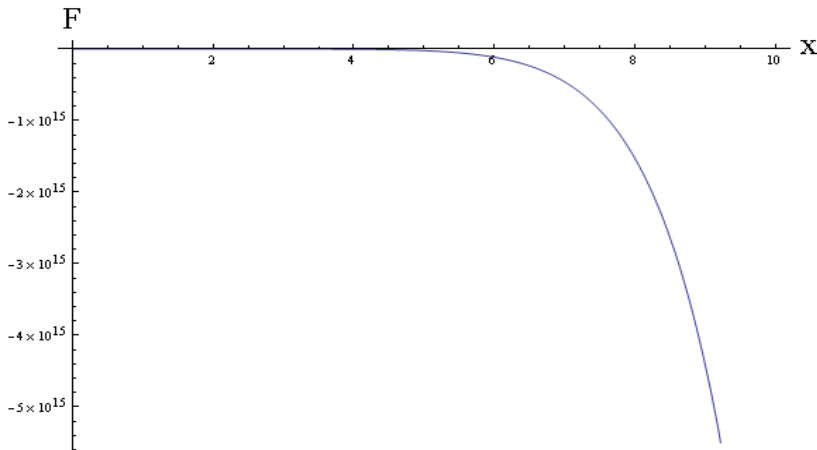
$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_{k+1}(x) &= -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^x \frac{t^{\frac{1}{3}} A_k(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Ανάλογα, βρίσκουμε τα εξής στοιχεία

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= -\frac{\sqrt{\pi} \sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} x^{\frac{2}{3}} = -1.460998487x^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= \frac{18}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^3} x^{\frac{4}{3}} = 7.249416142x^{\frac{4}{3}}, \\
 u_3(x) &= -\frac{80\left(9\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^3 + \pi^2\right)}{9\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^6} x^2 = -46.44973783x^2, \\
 u_4(x) &= \frac{112\sqrt{3}\pi\left(180\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^6 + \pi\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^3(81\sqrt{3} + 20\pi) + 2\sqrt{3}\pi^3\right)}{135\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^{12}} \\
 &= 332.7552332x^{\frac{8}{3}}, \\
 u_5(x) &= -2536.820572x^{\frac{10}{3}}, \\
 u_6(x) &= 20120.06098x^4, \\
 u_7(x) &= -163991.8463x^{\frac{14}{3}}, \\
 u_8(x) &= 1363564.301x^{\frac{16}{3}}, \\
 u_9(x) &= -11511356x^6. \tag{3.131}
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την (3.125) και την (3.131) παίρνουμε την λύση σε σειρά



Σχήμα 3.7: Η γραφική παράσταση της λύσης $F(x)$ σε σειρά.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 - 1.460998487x + 7.249416142x^{\frac{4}{3}} - 46.44973783x^2 \\
 &\quad + 332.7552332x^{\frac{8}{3}} - 2536.820572x^{\frac{10}{3}} + 20120.06098x^4 \\
 &\quad - 163991.8463x^{\frac{14}{3}} + 1363564.301x^{\frac{16}{3}} - 11511356x^6 + \dots \tag{3.132}
 \end{aligned}$$

Απο τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 3.7 παρατηρούμε ότι η F μειώνεται καθώς αυξάνει το x και για μεγάλα x πάει στο μειον άπειρο δηλαδή αποκλίνει.

Για να δείξουμε ότι η βρισκόμενη σειρά ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο $x = \infty$, κατασκευάζουμε τις προσεγγίσεις Pade $[1/1], [2/2], [3/3]$ και $[4/4]$,

και εκτιμώντας τα όρια αυτών των προσεγγίσεων στο $x = \infty$, βρίσκουμε μια ακολουθία που συγκλίνει στο 0.

3.6.2 Ακτινοβολία θερμότητας σε ένα ημιάπειρο στερεό

Σε αυτό το μέρος, θα μελετήσουμε έναν τύπο Abel μη γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra που δίνεται απο

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t) - u^n(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad (3.133)$$

όπου $u(x)$ δίνει την θερμοκρασία στην επιφάνεια για όλο το χρόνο. Το φυσικό πρόβλημα το οποίο προβάλλεται προς εξέταση απο την (3.133), είναι αυτό του προσδιορισμού της θερμοκρασίας σε ένα ημιάπειρο στερεό, στου οποίου την επιφάνεια μπορεί να διαχέεται θερμότητα απο μη γραμμική ακτινοβολία. Στην επιφάνεια, ενέργεια εισέρχεται σύμφωνα με την δοσμένη συνάρτηση $f(t)$, ενώ ενέργεια ακτινοβολίας εξέρχεται σε αναλογία $u^n(t)$. Η εξίσωση (3.133) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u^n(t) dt. \quad (3.134)$$

Η μέθοδος διάσπασης Adomian, χειρίζεται τέτοια προβλήματα αποτελεσματικά. Σε οτι ακολουθεί, θα επιλέξουμε μόνο δύο περιπτώσεις για το $f(x)$ και το n .

Εφαρμογή 1

Ως μια πρώτη εφαρμογή, επιλέγουμε $f(x) = \frac{1}{2}$ και $n = 4$. Βασισμένη σε αυτή την επιλογή, η εξίσωση (3.134) γίνεται

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u^4(t) dt, \quad (3.135)$$

που ρυθμίζει την σχέση της ακτινοβολίας θερμότητας, απο ένα ημιάπειρο στερεό, που έχει μια σταθερή πηγή θερμότητας.

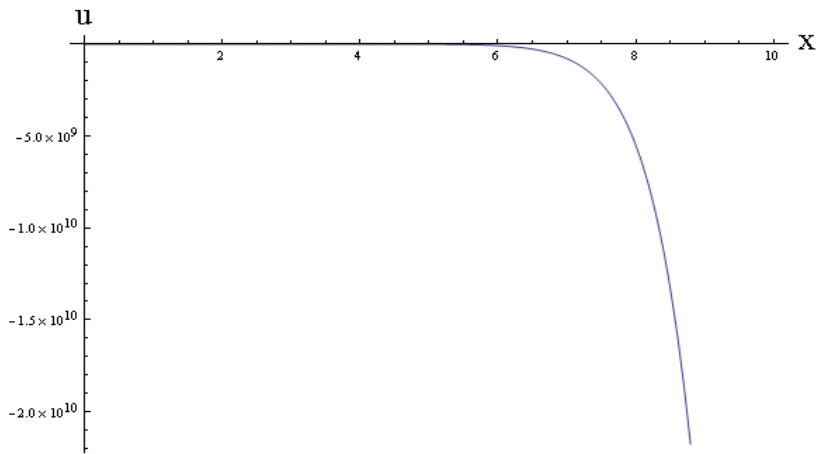
Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις του Adomian για το $u(x)$ και το $u^4(x)$, όπως είδαμε παραπάνω απο τις (1.157) και (1.160), και θέτοντας την αναδρομική σχέση

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad u_{k+1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{A_k(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt, \quad k \geq 0. \quad (3.136)$$

βρίσκουμε τα εξής στοιχεία

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= \sqrt{\frac{x}{\pi}} = 0.5641895835x^{\frac{1}{2}}, \\
 u_1(x) &= -\frac{16}{15}\sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^5} = -0.06097531350x^{\frac{5}{2}}, \\
 u_2(x) &= \frac{16384}{4725}\sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^9} = 0.0200836987x^{\frac{9}{2}}, \\
 u_3(x) &= -\frac{200278016}{14189175}\sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^{13}} = -0.08283272764x^{\frac{13}{2}}, \\
 u_4(x) &= \frac{491444116652032}{7761123995625}\sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)^{17}} = 0.003765092063x^{\frac{17}{2}}, \\
 u_5(x) &= -0.001806440429x^{\frac{21}{2}}, \\
 u_6(x) &= 0.0008970031915x^{\frac{25}{2}}, \\
 u_7(x) &= -0.0004561205497x^{\frac{29}{2}},
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

και ούτω κάθε εξής. Η λύση της σειράς δίνεται απο



Σχήμα 3.8: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ σε σειρά της ακτινοβολίας θερμότητας σε ημιάπειρο στερεό, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Adomian.

$$\begin{aligned}
 u(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\
 &\times (0.5641895835 - 0.06097531350x^2 + 0.0200836987x^4 \\
 &- 0.08283272764x^6 + 0.003765092063x^8 - 0.001806440429x^{10} \\
 &+ 0.0008970031915x^{12} - 0.0004561205497x^{14} + \dots)
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Στο Σχήμα 3.8 παρατηρούμε απο τη γραφική παράσταση ότι η u μειώνεται καθώς αυξάνει το x και για μεγάλα x πάει στο μειον άπειρο δηλαδή αποκλίνει.

Εφαρμογή 2

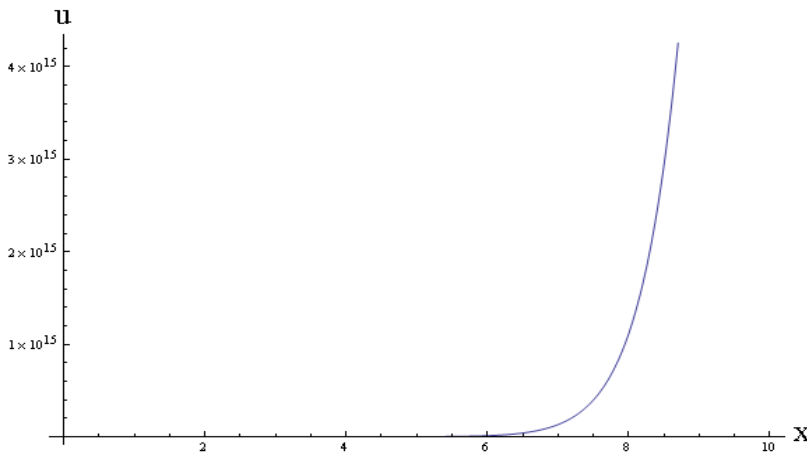
Ως μια δεύτερη εφαρμογή, επιλέγουμε $f(x) = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ και $n = 3$. Βασιζόμενοι σε αυτή την επιλογή, η εξίσωση (3.134) γίνεται

$$u(x) = x - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u^3(t) dt, \quad (3.139)$$

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις του Adomian για το $u(x)$ και το $u^3(x)$, και θέτοντας την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_{k+1}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{A_k(t)}{\sqrt{x-t}} dt, k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.140)$$

βρίσκουμε τα εξής στοιχεία



Σχήμα 3.9: Η γραφική παράσταση της λύσης $u(x)$ σε σειρά της ακτινοβολίας θερμότητας σε ημίαπειρο στερεό, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Adomian.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, & u_1(x) &= -0.5158304764x^{\frac{7}{2}} \\ u_2(x) &= 0.6187500000x^6, & u_3(x) &= -0.8971997531x^{\frac{17}{2}}, \\ u_4(x) &= 1.414175172x^{11}, & u_5(x) &= -2.335723848x^{\frac{27}{2}}, \\ u_6(x) &= 3.974710222x^{16}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

και ούτω κάθε εξής. Η λύση της σειράς δίνεται απο

$$\begin{aligned} u(x) &= x - 0.5158304764x^{\frac{7}{2}} + 0.6187500000x^6 - 0.8971997531x^{\frac{17}{2}} \\ &+ 1.414175172x^{11} - 2.335723848x^{\frac{27}{2}} + 3.974710222x^{16} + \dots \end{aligned} \quad (3.142)$$

Στο Σχήμα 3.9 παρατηρούμε απο τη γραφική παράσταση ότι η u αυξάνεται καθώς αυξάνει το x και για μεγάλα x πάει στο άπειρο δηλαδή αποκλίνει.

Για να μελετήσουμε την δομή της βρισκόμενης λύσης, πρώτα αντικαθιστούμε το $t = x^{\frac{1}{2}}$, κατασκευάζουμε κατάλληλες προσεγγίσεις Pade, και ακολουθούμε την μέθοδο που εφαρμόσαμε πριν, για να δείξουμε οτι η βρισκόμενη σειρά ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο $x = \infty$, δηλαδή, κατασκευάζουμε τις προσεγγίσεις Pade $[1/1], [2/2], [3/3]$ και $[4/4]$, και εκτιμώντας τα όρια αυτών των προσεγγίσεων στο $x = \infty$, βρίσκουμε μια ακολουθία που συγκλίνει στο 0.

Βιβλιογραφία

- [1] C.Corduneanu, *Integral equations and applications* Cambridge University press, New-York, 1991.
- [2] E.Creyszig, *Introductory functional analysis with applications* University of Windsor, New-York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto.
- [3] Abdul-Majid Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral equations Methods and applications* Higher Education press, London, New-York, 2011.
- [4] P.J.G. Long, *Introduction to Octave* University of Cambridge, 2005.
- [5] T.L.Cromer, *Asymptotically periodic solutions to Volterra integral equations in epidemic models* University of Alabama, 1985.
- [6] Niklas Hartung, *Efficient resolution of metastatic tumour growth models by reformulation into integral equations* Aix-Marseille University, 2014.

