ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

''Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ''

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΣΤΕΛΛΑ ΚΑΝΑΤΑ

ΣΑΜΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Χαλιδιάς

Μέλη εξεταστικής επιτροπής: Κωνσταντίνος Χουσιαδάς

Θεοδόσης Δημητράκος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, σημαντική υπήρξε η προσφορά κάποιων ανθρώπων τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Πρώτο από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Νικόλαο Χαλιδιά για την άψογη συνεργασία μας καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους κυρίους Χουσιαδά και Δημητράκο, για το χρόνο που αφιέρωσαν στην αξιολόγηση της εργασίας αυτής.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για όλη τη στήριξη που μου προσφέρουν όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και στους φίλους μου για την ενθάρρυνση και τις ατέλειωτες όμορφες στιγμές που έχουμε περάσει.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αναλύσει τη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων και να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο η θεωρία αυτή εφαρμόζεται στην Οικονομία.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε βασικές έννοιες της θεωρία πιθανοτήτων που θα χρησιμεύσουν στην συνέχεια, όπως την έννοια του δειγματοχώρου, των απλών ενδεχομένων και της πιθανότητας (απλής και κατά συνθήκη), των ανεξάρτητων ενδεχομένων και παρουσιάζουμε τις τυχαίες μεταβλητές (διακριτές και συνεχείς), ενώ τελειώνουμε το κεφάλαιο εξηγώντας τις έννοιες της μέσης τιμής και της διακύμανσης τυχαίων μεταβλητών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναφερόμαστε στη χρονική αξία του χρήματος και εξηγούμε τα βασικά είδη των επιτοκίων. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή για το αμέσως επόμενο κεφάλαιο, το οποίο αφορά τη χρηματιστηριακή αγορά και τα παράγωγά της. Εξηγούμε τις έννοιες της μετοχής, του συναλλάγματος και των διάφορων ειδών παραγώγων (forwards, futures, swaps και options). Τέλος, κάνουμε έναν διαχωρισμό ανάμεσα στα είδη των συναλλασσομένων.

Το τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας είναι αφιερωμένο στα martingales. Ξεκινάμε με μια σύντομη ιστορική αναδρομή και εξηγούμε την έννοια των πεπερασμένων Μαρκοβιανών αλυσίδων. Αναπτύσσουμε, στη συνέχεια του κεφαλαίου, τη θεωρία γύρω από τα martingales, παραθέτοντας μια σειρά από χρήσιμους ορισμούς και θεωρήματα και εξηγούμε τους μετασχηματισμούς των martingale. Έπειτα, αναφερόμαστε στους χρόνους στάσης και στην ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα, στο επιλεκτικό θεώρημα στάσης και στα ασυμπτωτικά θεωρήματα martingale.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, αναλύουμε τις αυτοχρηματοδοτούμενες διαδικασίες κεφαλαίου και την τιμολόγηση των δικαιωμάτων. Αναπτύσσουμε το μοντέλο της αγοράς και αναλύουμε τις εφικτές στρατηγικές. Εξηγούμε τη διαδικασία αξιών του απλού Ευρωπαϊκού και συνεχίζουμε αναπτύσσοντας την αντίστοιχη διαδικασία και για τα Αμερικάνικα δικαιώματα.

Τέλος, το έκτο κεφάλαιο έρχεται σαν συμπλήρωμα του προηγούμενου κεφαλαίου να εξηγήσει τη μέθοδο τιμολόγησης παραγώγων με χρήση της μεθόδου των ισοδύναμων martingale μέτρων.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to analyze the theory of stochastic processes and to explain how this theory is applied in Economy.

In the first chapter, we present basic concepts of the probability theory that will be needed later, such as the definition of the sampling area, the simple possibilities and probability (simple and by convention), the independent probabilities and we present the random variables (discrete and continuous), while we finish the chapter by explaining the mean and the variance of a random variable.

In the second chapter, we refer to the time value of money and explain the basic types of interest rates. This chapter is an introduction to the next chapter, which deals with the stock market and its derivatives. We explain the concepts of stock, foreign exchange and various kinds of derivatives (forwards, futures, swaps and options). Finally, we make a distinction between the types of businessmen.

The fourth chapter of this paper is dedicated to martingales. We begin with a brief historical review and explain the concept of finite Markov chains. Then we develop the theory of martingales, quoting a series of useful definitions and theorems and explaining the martingale transformations. Next, we refer to staging times and the strong Markovian property, the selective attitude theorem and asymptotic martingale theories.

In chapter five, we analyze self-funded capital procedures and pricing of options. We develop the market model and analyze the feasible strategies. We explain the value process of the simple European option and we continue to develop the corresponding process for the American options as well.

Finally, the sixth chapter comes as a supplement to the previous one to explain the method of pricing derivatives using the method of equivalent martingale measures.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 11

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 11

1.2 ΔΕΙΓΜΑΤΟΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΑΠΛΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ 11

1.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ 13

1.4 ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ (ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ 14

1.5 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ 16

1.6 ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ 17

1.6.1 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 17

1.6.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ 19

1.6.3 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 20

1.7 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ 22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ 24

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 24

2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΕΙΔΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ 24

TREASURY RATES (ΠΟΣΟΣΤΟ ΘΗΣΑΥΡΟΦΥΛΑΚΕΙΟΥ) 24

LIBOR RATES 24

REPO RATES 25

2.3 Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ 27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΓΟΡΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΑ 28

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 28

3.2 Η ΜΕΤΟΧΗ 28

3.3 ΞΕΝΟ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑ ΚΑΙ ΠΡΩΤΕΣ ΥΛΕΣ 30

3.4 FORWARDS ΚΑΙ FUTURES 31

3.5 SWAPS 32

3.6 OPTIONS 33

3.7 ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MARTINGALES 37

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 37

4.2 ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ 39

4.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ 40

4.4 MARTINGALES 42

4.5 ΜΕΡΙΚΟΙ ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ 48
4.6 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MARTINGALE 49
4.7 ΧΡΟΝΟΙ ΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ Η ΙΣΧΥΡΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ 51
4.8 ΤΟ ΕΠΙΛΕΚΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΣΗΣ 54
4.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ MARTINGALES 56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΥΤΟΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ – ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ 59
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 59
5.2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ 60
5.3 ΕΦΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ 63
5.4 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΞΙΩΝ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ 64
5.5 Η ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ 69
5.6 ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ 70
5.7 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ Ή ΠΩΛΗΣΗΣ 71
ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 1 73
ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 2 75
ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 3 76
5.8 ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟ Τ 76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ MARTINGALE ΜΕΤΡΩΝ 79
6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 79
6.2 Η ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ MARTINGALE ΜΕΤΡΩΝ 79
6.3 ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ BLACK & SCHOLES ΜΟΝΤΕΛΟ 84
ΕΠΙΛΟΓΟΣ 91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 92

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προϊστορία και τα πρακτικά προβλήματα στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά είναι μια πολύ παλιά ιστορία. Στην πραγματικότητα, η ιστορία ξεκίνησε την πρώτη μέρα που μια ανθρώπινη κοινωνία αποφάσισε να ανταλλάξει ένα αγαθό με μια άλλη.

Το 1973[1] άνοιξε η πρώτη χρηματιστηριακή εταιρία αγοράς και πώλησης δικαιωμάτων (options) στο Chicago. Την ίδια χρονιά οι Black και Scholes δημοσίευσαν στο περιοδικό Journal of Political Economy την διάσημη πλέον εργασία τους για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος και για τις στρατηγικές εξασφάλισης που μπορούν να υπάρξουν και να εγγυηθούν την εξασφάλιση(hedging), με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους (arbitrage). Μέσα στον ίδιο χρόνο η εργασία τους αυτή επεκτάθηκε από τον Robert Merton.

Οι επαναστατικές αυτές θεωρίες των Black – Scholes και Merton έγιναν πολύ δύσκολα αποδεκτές στο διεθνές οικονομικό και επιστημονικό περιβάλλον. Όπως συμβαίνει σε τέτοιες περιπτώσεις ήταν αρκετά μπροστά από την εποχή τους. Με το χρόνο οι απόψεις τους αφομοιώθηκαν από την επιστημονική κοινότητα και ακολούθησαν και άλλοι καθώς δημιουργήθηκε και σύνδεση της χρηματοοικονομικής θεωρίας με τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών των martingales. Από τότε η θεωρία των μαθηματικών οικονομικών αναπτύχθηκε τάχιστα σε παραλληλία με την τεράστια ανάπτυξη της αγοράς των παραγώγων, η οποία έχει φτάσει στο ύψος πολλών εκατομμυρίων τρισεκατομμυρίων δολαρίων. Όταν τέτοια ποσά διακινούνται σε μια αγορά όπως η αγορά των παραγώγων και η μαθηματική επιστήμη παίζει το σπουδαιότερο ρόλο στη δημιουργία νέων αγορών των παραγώγων τότε έχουμε στα χέρια μας μια πάρα πολύ σοβαρή υπόθεση.

Σήμερα η μαθηματική θεωρία των χρηματοοικονομικών είναι παγκόσμια αποδεκτή και σημαντική και υπάρχει ένας κύριος πυρήνας της, που είναι αρκετά χρήσιμος στο να κτίσει το γνωστικό υπόβαθρο των νέων ανθρώπων.

Η αναγνώριση για τους αρχικούς ερευνητές ήρθε το 1977 με την απονομή του βραβείου Νόμπελ στους δύο επιβιώσαντες από αυτούς, τον Myron Scholes και τον Robert Merton.

Ο πυρήνας της γνώσης στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά έχει εξελιχθεί στη δημιουργία μαθημάτων στα καλά Πανεπιστήμια του κόσμου σχετικά με το αντικείμενο, παρόλο που φαίνεται να υπάρχει ένα πρόβλημα στην εύρεση

[1] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'', Π.-Χ. Γ. Βασιλείου, σελ. 13-16, Εκδόσεις Ζήτη, 2001

ανθρώπων με κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο και επίπεδο για το σκοπό αυτό. Τέτοια μαθήματα έχουν αναπτυχθεί σε τμήματα Μαθηματικών, Οικονομικών και Χρηματοοικονομικών, Στατιστικής, Μηχανικών των Χρηματοοικονομικών και συνδυασμών από αυτά.

Σχεδόν όλα τα μεγάλα χρηματιστηριακά γραφεία και οι μεγάλες τράπεζες έχουν προσλάβει arbitrageurs με εξαιρετική μόρφωση και ικανότητες που κάνουν αποκλειστικά αυτή τη δουλειά. Αναζητούν δηλαδή το σημείο της αγοράς σε όλο τον πλανήτη (όπου αυτό είναι δυνατόν), όπου υπάρχει το βέβαιο κέρδος.

Η μαθηματική θεωρία στο μεταξύ έχει φτάσει σε τέτοιο σημείο ωριμότητας που έχει αρχίσει να γίνεται γνωστή σε ευρύτερα στρώματα εμπλεκομένων και διαπλεκομένων. Αποτέλεσμα αυτού του πράγματος είναι τα περιθώρια κέρδους για τα καθιερωμένα παράγωγα που χρησιμοποιούν τον κωδικό ‘’vanilla’’ να έχουν περιορισθεί σημαντικά. Συνέπεια αυτού είναι η δημιουργία όλο και περισσότερο πολύπλοκων παραγώγων τα λεγόμενα με το προσωνύμιο ‘’εξωτικά’’ παράγωγα ώστε να αυξηθούν τα περιθώρια κέρδους. Αυτό γεννά την ανάγκη νέων μαθηματικών θεωριών για την επίλυση του προβλήματος τιμολόγησης και στρατηγικών εξασφάλισης.

Η μαθηματική θεωρία στα χρηματοοικονομικά έχει σοβαρές απαιτήσεις σε μαθηματικές γνώσεις που είναι κυρίως από τη Θεωρία Μέτρου και Πιθανότητας, Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών, Στοχαστικό Ολοκληρωτικό Λογισμό, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και κυρίως μια όσο το δυνατό βαθύτερη και καθαρότερη στοχαστική σκέψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε όλα σχεδόν τα προβλήματα στα χρηματοοικονομικά και κυρίως σε αυτά στα οποία είναι πολύ σημαντικό να έχουμε κάποια απάντηση υπάρχει μεγάλος βαθμός τυχαιότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι χρηματοοικονομικές οντότητες οι οποίες παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον όπως είναι π.χ. οι τιμές των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν με ακρίβεια. Η μεταβλητότητα που παρουσιάζουν φαίνεται να ακολουθεί τους νόμους της τύχης. Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι τα μοντέλα, τα οποία χρειάζεται να φτιαχτούν για να περιγραφούν και να προβλεφθούν οι σημαντικές αυτές χρηματοοικονομικές οντότητες, περιέχουν τυχαίες μεταβλητές, είναι δηλαδή στοχαστικά μοντέλα.

Η βάση για τη μελέτη της τυχαιότητας των φαινομένων που διακρίνει και μελετά ο άνθρωπος είναι η Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς και η Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών σαν επέκταση αυτής. Στην προσπάθειά μας να δώσουμε στον αναγνώστη, με το οποιοδήποτε μαθηματικό ή μη υπόβαθρο, μια κατανοητή θεματολογία παρακάτω, θα παραθέσουμε στο σημείο αυτό μια Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στα χρήσιμα για τη μελέτη μας αποτελέσματά της.

1.2 ΔΕΙΓΜΑΤΟΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΑΠΛΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Είναι κοινή εμπειρία όταν εκτελούμε φυσικές, χημικές ή οικονομικές μετρήσεις, καθώς και όταν λαμβάνουμε δείγματα από ένα πληθυσμό να παρατηρούμε ότι, χαρακτηριστικά των μετρήσεων ή παρατηρήσεων διαφέρουν από μέτρηση σε μέτρηση ή από δείγμα σε δείγμα. Οι διαφορές αυτές δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν με ακρίβεια και για αυτό θεωρούνται ‘’τυχαίες’’. Η έκφραση ‘’πειράματα τύχης’’ θα χρησιμοποιείται για να περιγράψει τέτοιες διαδικασίες.[2]

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται δειγματοχώρος ή δειγματικός χώρος, και συμβολίζεται με το γράμμα Ω.

Παράδειγμα 1.1

Α) Εάν ρίξουμε ένα ζάρι μια φορά τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα 1,2,3,4,5,6 οπότε ο δειγματοχώρος είναι το σύνολο Ω={1,2,3,4,5,6}.

[2] ‘’Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές’’, Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 14

Β) Εάν ρίξουμε δυο ζάρια και μας ενδιαφέρει το άθροισμα των αποτελεσμάτων τότε τα δυνατά αποτελέσματα είναι 2,3,4,…,12 και κατά συνέπεια ο δειγματοχώρος είναι Ω={2,3,4,…,12}.

Ονομάζουμε ενδεχόμενο ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω. τα δυνατά αποτελέσματα που είναι στοιχεία του δειγματοχώρου Ω καλούνται απλά ενδεχόμενα.

Εάν στο παράδειγμα Β) μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός τότε αυτό αποτελεί ένα ενδεχόμενο Ε το οποίο έχει σαν στοιχεία

$$\mathrm{E} = \{3,5,7,9,11\} \subseteq \Omega$$

Ένα απλό ενδεχόμενο είναι το άθροισμα να είναι 8. Αν το συμβολίσουμε με Α τότε Α={8}.

Είναι σημαντικό να προσδιορίζουμε με ακρίβεια και ορθότητα ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης. Αν αυτό δε γίνει τότε κάθε χρήση του δειγματοχώρου για εξαγωγή συμπερασμάτων θα οδηγεί σε λάθη. Όπως έγινε αντιληπτό και στο παράδειγμα ο δειγματοχώρος εξαρτάται από το πείραμα τύχης και το είδος των συμπερασμάτων στα οποία ενδιαφέρεται ο ‘’πειραματιστής’’ να καταλήξει.

Δειγματοχώροι που είναι είτε πεπερασμένοι είτε αριθμήσιμοι, λέγονται απαριθμητοί ή διακριτοί δειγματοχώροι.

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β του δειγματοχώρου Ω ορίζουμε το ενδεχόμενο $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ να είναι η ένωση των συνόλων Α και Β.

Η χρήση αυτή των συνόλων για τον καθορισμό των ενδεχομένων μας επιτρέπει να εκφράσουμε και τις πράξεις μεταξύ των ενδεχομένων με τις γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β του δειγματοχώρου Ω ορίζουμε το ενδεχόμενο $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ή AB σαν το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα δυνατά αποτελέσματα, που περιέχονται και στα δυο ενδεχόμενα Α και Β δηλαδή από την τομή των συνόλων Α και Β.

Αν $\mathrm{AB} = \emptyset$ τότε τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται ασυμβίβαστα. Η πράξη της τομής δυο ενδεχομένων γενικεύεται και για πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους ενδεχόμενα δηλαδή αν $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_\nu,\ldots$ είναι υποσύνολα του Ω τότε ορίζεται η τομή τους

$$\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_\nu \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i$$

Η ίδια γενίκευση ορίζεται και για την ένωσή τους

$$\mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_\nu \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i$$

Αν τα ενδεχόμενα είναι ανά δυο ασυμβίβαστα, δηλαδή $\mathrm{A}_i \mathrm{A}_j = 0, \forall i \neq j$ και η ένωσή τους είναι όλος ο δειγματοχώρος τότε λέμε ότι αυτά τα ενδεχόμενα αποτελούν μια διαμέριση του δειγματοχώρου.

Αν Α ένα ενδεχόμενο, ορίζουμε με A^c το συμπληρωματικό του ενδεχόμενο ως προς το δειγματοχώρο Ω να είναι το σύνολο που είναι τέτοιο ώστε

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A}^c = \emptyset \text{ και } \mathrm{A} \cup \mathrm{A}^c = \Omega$$

1.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Υπάρχουν πολλά πειράματα τύχης στα οποία όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματοχώρου έχουν τις ίδιες ευκαιρίες να εμφανιστούν. Η διαίσθηση και η εμπειρία μας οδηγούν σε αυτή την περίπτωση να σκεφτούμε ότι όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και αν για παράδειγμα είναι Ν το πλήθος τότε η πιθανότητα εμφάνισης κάποιου από αυτά θα πρέπει να ορισθεί ως $\frac{1}{\mathrm{N}}$. Ένα τέτοιο πείραμα τύχης είναι η ρίψη ενός κανονικού ζαριού όπου η πιθανότητα να έρθει 4 είναι ίση με $\frac{1}{6}$.

Η εμπειρική αυτή παρατήρηση οδήγησε τον De Moivre (1711) στον παρακάτω ορισμό[3].

Έστω Ω ένας δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης του οποίου όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και έστω $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο. Τότε ορίζουμε σαν πιθανότητα του ενδεχομένου Α και το συμβολίζουμε με $prob(\mathrm{A})$ το

$$prob(\mathrm{A}) = \frac{\textit{αριθμός} \quad \textit{στοιχείων} \quad \textit{του} \quad \textit{ενδεχομένου} \quad \mathrm{A}}{\textit{αριθμός} \quad \textit{στοιχείων} \quad \textit{του} \quad \textit{δειγματοχώρου} \quad \Omega}$$

Η παραδοχή της ύπαρξης του ισοπίθανου στη φύση και ακόμα και σε ένα πείραμα τύχης σε ένα εργαστήριο αποτελεί ένα πρόβλημα. Είναι το ανάλογο με την παραδοχή ότι υπάρχει σημείο και ευθεία γραμμή. Εντούτοις η παραδοχή αυτή έδωσε την ευκαιρία στη συστηματοποίηση του λογισμού των πιθανοτήτων από τον

[3] ''Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές'', Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 27

Laplace (1812). Οι βασικές ιδιότητες της πιθανότητας πάνω στις οποίες κτίστηκε η αξιωματική θεμελίωση από τον Kolmogorov (1933) είναι

(α) $prob(\mathrm{A}) \geq 0, \quad \forall \mathrm{A} \subseteq \Omega$

(β) $prob(\Omega) = 1$

(γ) $prob(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = prob(\mathrm{A}) + prob(\mathrm{B}), \quad \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \Omega$ και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1</u>: Έστω Ω ένας δειγματοχώρος και Ƒ μια συλλογή (κλάση) υποσυνόλων του Ω τότε το Ƒ είναι μια σ-άλγεβρα αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) Ω∈Ƒ

(β) αν A∈Ƒ τότε A^c ∈Ƒ

(γ) αν $\{\mathrm{A}_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων της Ƒ τότε $\bigcup_{i=1} \mathrm{A}_i$ ∈Ƒ

Τώρα θα διατυπώσουμε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας όπως αυτός δόθηκε από τον Kolmogorov.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2:</u> Έστω Ω ένας δειγματοχώρος και Ƒ μια κλάση υποσυνόλων του Ω που αποτελεί μια σ-άλγεβρα. Έστω $prob(\cdot)$ μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη στην Ƒ με τιμές στο R τότε αυτή είναι μια πιθανότητα αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα

(α) $prob(\mathrm{A}) \geq 0, \quad \forall \mathrm{A} \in$ Ƒ

(β) $prob(\Omega) = 1$

(γ) $prob\left(\bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{i\in I} prob(\mathrm{A}_i)$ για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων με $\mathrm{A}_i \in$ Ƒ και $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$

1.4 ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ (ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Σε ένα πείραμα τύχης και πριν την εκτέλεση του πειράματος έχουμε το χώρο πιθανοτήτων (Ω,Ƒ,P), δηλαδή το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων, τα γεγονότα A∈ Ƒ και την πιθανότητα $prob(A)$ κάθε γεγονότος, που βέβαια υπακούουν στα αξιώματα των πιθανοτήτων.[4]

[4] ''Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές'', Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 137

Αν τώρα εκτελεσθεί το πείραμα και δεν γνωρίζουμε το ακριβές αποτέλεσμα του πειράματος (απλό ενδεχόμενο), όμως γνωρίζουμε ότι αυτό περιέχεται σε ένα γεγονός Β, δηλαδή το Β έχει συμβεί, τότε αυτή η πληροφορία αλλάζει και την πιθανότητα να έχει συμβεί το Α.

Αυτό συμβαίνει διότι ο νέος δειγματοχώρος αποτελείται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο Β και για να έχει συμβεί το Α θα πρέπει το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι στο Β και στο Α, δηλαδή στο ΑΒ.

Δεν είναι απαραίτητο βέβαια να εκτελεστεί το πείραμα αλλά και πριν την εκτέλεση του πειράματος, θέτουμε το ερώτημα:

Αν $prob(A), prob(B)$ είναι οι πιθανότητες των γεγονότων Α,Β και στην εκτέλεση του πειράματος συμβεί το γεγονός Β, ποια θα είναι η πιθανότητα να έχει συμβεί και το Α; Παρέμεινε αυτή η πιθανότητα ίδια ή μεταβλήθηκε;

Για παράδειγμα, αν για την εισαγωγή στο πανεπιστήμιο με εισαγωγικές εξετάσεις έχουμε μια πιθανότητα p_1, μετά τη δημοσίευση των βαθμών του υποψηφίου στις εξετάσεις, η πιθανότητα αυτή αυξάνεται ή ελαττώνεται ανάλογα με τους βαθμούς. Όμοια αν η πιθανότητα να βρέχει σε ένα τόπο το καλοκαίρι είναι γνωστή, τότε η πιθανότητα αυτή αυξάνει αν παρατηρήσουμε ότι έχει συννεφιά.

Την πιθανότητα του γεγονότος Α, με δεδομένη την πραγματοποίηση του γεγονότος Β, λέμε δεσμευμένη πιθανότητα ή υπό συνθήκη πιθανότητα, συμβολίζουμε με $prob(A/B)$ και διαβάζουμε ''η πιθανότητα του Α δοθέντος του Β''. Σε σχέση με την αρχική πιθανότητα $prob(A)$ που ονομάζεται και ''a priori'', η δεσμευμένη πιθανότητα $prob(A/B)$ ονομάζεται ''a posteriori'', διότι προϋποθέτει μια εκ των υστέρων γνώση. Το επόμενο παράδειγμα διασαφηνίζει αυτή την έννοια και προϊδεάζει για τη σχέση που έχουν οι δυο πιθανότητες.

Παράδειγμα 1.1

Σχηματίζουμε έναν το πολύ διψήφιο αριθμό, παίρνοντας τυχαία με επανάληψη δυο ψηφία από τα $0,1,2,\ldots,9$. Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος θα έχει 100 απλά ενδεχόμενα τα:

$$\Omega = \{00,01,\ldots,09,10,11,\ldots,99\}$$

τα οποία θεωρούμε ισοπίθανα.

Αν λοιπόν Α είναι το γεγονός το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού να ισούται με 6, τότε είναι φανερό ότι

$$A = \{06,15,24,33,42,51,60\}$$

με $prob(A) = \frac{7}{100} = 0{,}07$.

Έστω ότι είναι γνωστό ότι τα δυο ψηφία του αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι αποκλείονται οι αριθμοί $00, 11, \ldots, 99$, δηλαδή ότι ο δειγματοχώρος έχει τώρα 90 απλά ενδεχόμενα, τα:

$$\Omega_1 = \Omega - \{00, 11, \ldots, 99\}$$

Συμβολίζοντας με Β το γεγονός ότι τα ψηφία είναι διαφορετικά, έχουμε για την πιθανότητα του Α δεδομένου του Β

$$prob(A/B) = \frac{6}{90} = 0{,}0667$$

Έστω, λοιπόν, (Ω,Ƒ,P) ένας χώρος πιθανοτήτων όπου Ω είναι ο δειγματοχώρος, Ƒ μια σ-άλγεβρα και $prob(\cdot)$ ένα μέτρο πιθανότητας. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ανάγκη να απαντήσουμε στο ερώτημα ‘’ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α δεδομένου ότι έχει εμφανισθεί το ενδεχόμενο Β’’.

Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι αναζητούμε την υπό συνθήκη πιθανότητα του ενδεχομένου Α δεδομένου του ενδεχομένου Β και το συμβολίζουμε με $prob(\mathrm{A}/\mathrm{B})$, η οποία ορίζεται να είναι

$$prob(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{prob(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{prob(\mathrm{B})} \text{ όπου } prob(\mathrm{B}) \neq 0$$

1.5 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Δυο ενδεχόμενα Α και Β θα λέγονται στοχαστικά ανεξάρτητα ή απλώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$prob(\mathrm{AB}) = prob(\mathrm{A}) \cdot prob(\mathrm{B})$$

Δυο ενδεχόμενα Α και Β τα οποία δεν είναι ανεξάρτητα και δεν είναι ασυμβίβαστα[5] είναι εξαρτώμενα. Είναι προφανές ότι αν τα Α και Β είναι ανεξάρτητα τότε

$$prob(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = prob(\mathrm{A}) \text{ και } prob(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = prob(\mathrm{B})$$

Αν δυο ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα τότε και τα $\mathrm{A}^c, \mathrm{B}^c$ είναι ανεξάρτητα καθώς και τα A, B^c και A^c, B.

[5] ‘’Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές’’, Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 158

Αν θεωρήσουμε περισσότερα από δυο ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ τότε τα ενδεχόμενα αυτά καλούνται ανεξάρτητα ή στοχαστικά πλήρως ανεξάρτητα αν για όλα τα δυνατά υποσύνολα του συνόλου των n ενδεχομένων $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_r\}, r \le n$ ισχύει

$$prob(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap ... \cap \mathrm{A}_r) = prob(\mathrm{A}_1) \cdot prob(\mathrm{A}_2) \cdot ... \cdot prob(\mathrm{A}_r)$$

1.6 ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Θα αποκαλούμε με τον όρο τυχαία μεταβλητή, μια συνάρτηση $X : \Omega \to$ R με πεδίο ορισμού το δειγματοχώρο του πειράματος τύχης και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει ακέραιες τιμές ονομάζεται μια απαριθμητή ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές στο R= $(-\infty, +\infty)$ ονομάζεται μια συνεχής τυχαία μεταβλητή.[6]

1.6.1 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X παίρνει ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών τις οποίες συμβολίζουμε είτε με τους αριθμούς $1,2,3,...,k,...$ είτε με μικρά γράμματα μαζί με τους αντίστοιχους δείκτες $x_1, x_2, ..., x_k, ...$

Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και τη συμβολίζουμε με $f_X(x)$ τη συνάρτηση

$$f_X(x) = prob\{X = x\}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X από τον ορισμό της έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $f_X(x) \ge 0$

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(x_k) = 1$

Οι παραπάνω σχέσεις χαρακτηρίζουν πλήρως τη συνάρτηση πιθανότητας. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις είναι μια συνάρτηση πιθανότητας μιας απαριθμητής τυχαίας μεταβλητής.

Ορίζουμε σαν συνάρτηση κατανομής μιας απαριθμητής τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$ τη συνάρτηση

[6] ''Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές'', Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 191

$$F_X(x) = prob\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} f_X(x)$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ μιας τυχαίας μεταβλητής

(α) $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad για \quad κάθε \quad x$

(β) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = F(\infty) = 1$

(γ) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F(-\infty) = 0$

(δ) η $F_X(x)$ είναι μη-φθίνουσα συνάρτηση

BERNOULLI ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει μόνο δυο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα από αυτά το ονομάζουμε ''επιτυχία'' και το άλλο το ονομάζουμε ''αποτυχία''. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Χ όπως παρακάτω

$$\mathrm{X} = \begin{cases} 1, & επιτυχία \\ 0, & αποτυχία \end{cases}$$

Έστω p η πιθανότητα να εμφανισθεί επιτυχία σε αυτό το πείραμα τύχης. Έχουμε ότι

$$f_X(1) = p \text{ και } f_X(0) = 1 - p$$

ΔΥΩΝΥΜΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Θεωρούμε ν ανεξάρτητες επαναλήψεις του προηγούμενου ονομαζόμενου και δυωνυμικού πειράματος. Αν καλέσουμε με Χ την τυχαία μεταβλητή που είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις ν επαναλήψεις του δυωνυμικού πειράματος τότε η Χ ονομάζεται μια δυωνυμική τυχαία μεταβλητή και η συνάρτηση κατανομής της μια δυωνυμική κατανομή. Γενικά λέμε ότι η Χ ακολουθεί τη δυωνυμική κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας της δυωνυμικής τυχαίας μεταβλητής είναι

$$f_X(x) = prob(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x} \quad για \quad x = 0,1,2,\ldots,\nu$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Υποθέτουμε ότι εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Ορίζουμε με Χ την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων του πειράματος μέχρι την πρώτη επιτυχία. Η X ονομάζεται γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο p. Η συνάρτηση πιθανότητας της X δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = (1-p)^{\nu-1} p$$

POISSON ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Έστω ένα χρονικό διάστημα $[0,t]$ και έστω ένα φαινόμενο το οποίο είναι δυνατόν να εμφανισθεί στο διάστημα αυτό. Ορίζουμε με $X(t)$ την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των εμφανίσεων του φαινομένου στο διάστημα $[0,t]$. Τότε η $X(t)$ ονομάζεται Poisson τυχαία μεταβλητή και έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(0,t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,...$$

ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πληθυσμό από N αντικείμενα από τα οποία α είναι μη ελαττωματικά και εκλέγουμε ν από αυτά χωρίς επανάθεση.

Ορίζουμε με X την τυχαία που εκφράζει τον αριθμό των μη ελαττωματικών αντικειμένων που εκλέξαμε τότε η X ονομάζεται υπεργεωμετρική τυχαία μεταβλητή.

Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \frac{\binom{a}{\mathrm{X}}\left(\frac{\mathrm{N}-a}{\nu - x}\right)}{\left(\frac{\mathrm{N}}{\nu}\right)}$$

1.6.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Ο τρόπος που αναπτύξαμε τη θεμελίωση των χώρων πιθανοτήτων και όλα τα αποτελέσματα μέχρι τώρα είναι επαρκή όταν εργαζόμαστε σε πεπερασμένους χώρους πιθανοτήτων δηλαδή όταν οι δειγματοχώροι είναι πεπερασμένοι.

Ο τρόπος αυτός δεν είναι επαρκής σε δυο κυρίως περιπτώσεις για τη μέχρι τέλους αυστηρή αντιμετώπιση των κλασσικών προβλημάτων:

(α) Όταν εκτελούμε ένα πείραμα τύχης άπειρες φορές και έχουμε να χειριστούμε τον αντίστοιχο δειγματοχώρο και κατ' επέκταση το χώρο πιθανοτήτων και (β) Όταν ο δειγματοχώρος είναι συνέπεια μιας άπειρα λεπτής διαδικασίας όπως είναι για παράδειγμα η επιλογή ενός σημείου από ένα διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών

Μια μαθηματική πλήρης ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων βασισμένη στη θεωρία μέτρου θέτει τα δυο αυτά προβλήματα στο ίδιο πλαίσιο το οποίο επιπλέον καλύπτει και τους πεπερασμένους χώρους πιθανοτήτων.

1.6.3 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει πεδίο τιμών ένα μη αριθμήσιμο σύνολο ονομάζεται μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Είναι προφανές ότι για μια τέτοια τυχαία μεταβλητή δεν ορίζεται η συνάρτηση πιθανότητας όπως ορίστηκε στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών.

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε ορίζουμε σαν συνάρτηση κατανομής αυτής την

$$F_X(x) = prob\{X \le x\}$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $f_X(x)$ τέτοια

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds, \quad -\infty < x < \infty$$

τότε η $F_X(x)$ λέγεται απόλυτα συνεχής και η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή X λέγεται απόλυτα συνεχής. Η συνάρτηση $f_X(x)$ λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X. Η συνάρτηση $F_X(x)$ σαν απόλυτα συνεχής είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη[7].

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η γέννηση της εκθετικής κατανομής στη φύση γίνεται όπου ο χρόνος ζωής ενός φαινομένου είναι τέτοιος ώστε, δεδομένου ότι το φαινόμενο είναι ηλικίας t, η πιθανότητα να τελειώσει ο χρόνος ζωής του στο αμέσως πολύ μικρό χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t)$ είναι ανεξάρτητη από την ηλικία t του φαινομένου και ίση με μια σταθερά. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την εκθετική κατανομή είναι

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

[7] Με την έκφραση σχεδόν παντού στο R εννοούμε όλο το R εκτός από ένα σύνολο σημείων με μέτρο Lebesgue ίσο με το μηδέν.
Ορίζουμε το μέτρο Lebesgue διαστημάτων στο R να είναι το μήκος τους. Τα υποσύνολα του R τα οποία θεωρούμε και για τα οποία το μέτρο Lebesgue ορίζεται είναι το σύνολο των συνόλων Borel.
Η Borel σ-άλγεβρα την οποία συμβολίζουμε με B(R) είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα του R. Τα σύνολα που ανήκουν στο B(R) ονομάζονται σύνολα Borel.

και συνάρτηση κατανομής την

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Μια τυχαία μεταβλητή Χ λέμε ότι έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$ αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ για } b < x < a$$

Η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής είναι

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ για } a \le x \le b$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η τυχαία μεταβλητή Χ θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\mu = 0$ και $\sigma = 1$ δηλαδή όταν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$ θα λέμε ότι η Χ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Αποδεικνύεται ότι αν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Από αυτό προκύπτει ότι για τη μελέτη οποιασδήποτε κανονικής κατανομής αρκεί η μελέτη της τυπικής κανονικής. Η Ζ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $N(0,1)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ -\infty < x < \infty$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή Χ έχει τη λογαριθμοκανονική κατανομή αν ο λογάριθμος αυτής έχει την κανονική κατανομή. Το γενεσιουργό χαρακτηριστικό αυτής της κατανομής είναι ότι ο ρυθμός βλάβης της με την ηλικία του φαινομένου αυξάνει πολύ γρήγορα στην αρχή σε ένα μέγιστο και μετά ελαττώνεται προς το 0 καθώς το $x \to \infty$. Τα ηλεκτρονικά όργανα έχουν συνήθως μια τέτοια φυσική συμπεριφορά. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2} \right\}$$

WEIBULL ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Αυτή είναι μια κατανομή που έχει μελετηθεί ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια στη διεθνή βιβλιογραφία. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull είναι

$$f_X(x) = \alpha\lambda(\lambda x)^{a-1} \exp\left\{-(\lambda x)^a\right\} \text{ για } x > 0$$

1.7 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ[8]

Εάν Χ είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε ονομάζουμε μέση τιμή της Χ και συμβολίζουμε με $E[X]$

(α) αν η Χ είναι μια απαριθμητή τυχαία μεταβλητή και

$$\sum_{\mathrm{K}} |\mathrm{K}| prob[X = K] < \infty$$

τότε ορίζεται η

$$E[X] = \sum_K K \cdot prob[X = K]$$

Είναι δηλαδή στην πραγματικότητα η μέση τιμή ένα είδος βεβαρυμένου μέσου όρου με βάρη τις αντίστοιχες πιθανότητες να εμφανιστούν οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής.

(β) αν η Χ είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

τότε για τη μέση τιμή έχουμε ότι είναι

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Για τη Χ τυχαία μεταβλητή υπολογίζουμε επίσης τη διακύμανσή της, η οποία συμβολίζεται με $Var(X)$, ως εξής

[8] ''Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Θεωρία και Μονοδιάστατες Κατανομές'', Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 224

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Και ορίζουμε ως τυπική απόκλιση την τετραγωνική ρίζα του μεγέθους αυτού, δηλαδή η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής X.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για κάθε νόμισμα πολλά είναι τα υπάρχοντα ποσοστά τόκου, π.χ. άλλο είναι το ποσοστό τόκου για ένα επιχειρηματικό δάνειο, άλλο για ένα καταναλωτικό δάνειο, άλλο στις απλές τραπεζικές καταθέσεις, κλπ. Γενικά το ποσοστό του τόκου είναι μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερος είναι ο πιστωτικός κίνδυνος. Με τις απλές καταθέσεις στις τράπεζες, οι τράπεζες δανείζονται στην πραγματικότητα χρήματα από τους πελάτες τους. Επειδή οι πελάτες τους είναι πάρα πολλοί, μπορούν να επενδύσουν τα χρήματα αυτά με τρόπους που έχουν υψηλότερο πιστωτικό κίνδυνο άρα και υψηλότερο ποσοστό τόκου, που ο μέσος άνθρωπος κινδυνεύει αν το κάνει. Από αυτή τη διαδικασία ο καταθέτης λαμβάνει ένα ποσοστό τόκου ανάλογο ενός πολύ μικρού πιστωτικού κινδύνου κι έτσι η τράπεζα κερδίζει. Ο καταθέτης προσπαθεί με το ποσοστό τόκου που θα εισπράξει σε μια μελλοντική στιγμή, τουλάχιστον να διατηρήσει σταθερή τη χρονική αξία του χρήματός του απέναντι στον πληθωρισμό, στην αύξηση του κόστους ζωής, κλπ.

Στην ελεύθερη αγορά υπάρχει η δυνατότητα της ελεύθερης διακίνησης του χρήματος από τράπεζα σε τράπεζα κι έτσι αυτές συναγωνίζονται και αυτό εξασφαλίζει μια ισορροπία στα ποσοστά τόκου. Στην Ευρωπαϊκή Ένωση είναι ελεύθερη η διακίνηση του χρήματος από χώρα σε χώρα σε προσωπικούς λογαριασμούς, για αυτό και με την νομισματική ένωση γίνεται συγχρόνως η σύγκλιση των επιτοκίων ή ποσοστών τόκου ώστε να διασφαλίζεται η ανυπαρξία του σίγουρου κέρδους (arbitrage).

2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΕΙΔΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ[9]

TREASURY RATES (ΠΟΣΟΣΤΟ ΘΗΣΑΥΡΟΦΥΛΑΚΕΙΟΥ)

Είναι το επιτόκιο με το οποίο η κυβέρνηση μιας χώρας μπορεί να δανεισθεί στο νόμισμα της χώρας αυτής. Τα δάνεια αυτά θεωρούνται σα δάνεια μηδενικού πιστωτικού κινδύνου μια και υποθέτουμε ότι οι κυβερνήσεις των κρατών δεν είναι δυνατόν να βρεθούν σε θέση που να μη μπορούν να αποπληρώσουν δάνεια στο ίδιο τους το νόμισμα.

LIBOR RATES

Η λέξη LIBOR είναι τα αρχικά των λέξεων London InterBank Offer Rate. Είναι το επιτόκιο με το οποίο μια διεθνής τράπεζα δανείζει μια άλλη διεθνή τράπεζα. Τα LIBOR rates καθορίζονται από τις εμπορικές ανταλλαγές μεταξύ των τραπεζών και αλλάζουν όταν οι οικονομικές συνθήκες αλλάζουν. Θεωρούνται δάνεια υψηλότερου

[9] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 62

πιστωτικού κινδύνου από αυτά των Treasury Rates διότι υπάρχει περίπτωση μια μεγάλη διεθνής τράπεζα να πτωχεύσει. Για το λόγο αυτό τα LIBOR είναι μεγαλύτερα γενικώς από τα Treasury Rates.

REPO RATES

Μια συμφωνία repo ή repurchase (επανάκτηση) είναι μια συμφωνία η οποία επιτυγχάνεται από γραφεία επενδύσεων κατά την οποία ο κάτοχος κάποιων παραγώγων τα πουλάει σε κάποιο πελάτη του επενδυτικού γραφείου και μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα τα αγοράζει ξανά σε μια ελαφρώς υψηλότερη τιμή.

Ο τόκος στην περίπτωση αυτή είναι η διαφορά της τιμής με την οποία ο κάτοχος των παραγώγων επανακτά τα παράγωγα από αυτή με την οποία τα πούλησε. Το επιτόκιο repo είναι το επιτόκιο που αντιστοιχίζει σε αυτόν τον τόκο.

Το είδος αυτό της ανταλλαγής με ενδιάμεσους σοβαρά επενδυτικά γραφεία περιέχει μικρό πιστωτικό κίνδυνο. Εάν ο κάτοχος των παραγώγων δεν τιμήσει τη συμφωνία τότε τα παράγωγα μέσω του γραφείου επενδύσεων καταλήγουν στον δανείζοντα. Στην αντίθετη περίπτωση ο κάτοχος των παραγώγων κρατά τα χρήματα.

Το επιτόκιο repo είναι ελαφρώς μόνο μεγαλύτερο από τα Treasury Rates. Το πλέον σύνηθες repo είναι εκείνο στο οποίο επαναδιαπραγμάτευση γίνεται μετά την παρέλευση μιας ημέρας. Αυτού του είδους τα repos ονομάζονται overnight repos (repos της μιας νύχτας).

Συμβολίζουμε γενικά τα επιτόκια με r. Αν και είναι γνωστό ότι εν γένει τα επιτόκια είναι συναρτήσεις του χρόνου θα υποθέσουμε ότι για κάποια χρονικά διαστήματα τα οποία θα είναι επαρκή για τις οικονομικές μας αναλύσεις ότι είναι σταθερά.

Εάν κάποιος δανείζεται K νομισματικές μονάδες για ένα χρονικό διάστημα t με επιτόκιο r για αυτό το χρονικό διάστημα τότε το ποσό που θα πληρώσει στη λήξη του χρονικού αυτού διαστήματος θα είναι

$$K + rK = K(1+r)$$

Το επιτόκιο διακρίνεται στο απλό επιτόκιο και το σύνθετο επιτόκιο.

- Το απλό επιτόκιο είναι όταν αυτό έχει σαν βάση όλο το χρονικό διάστημα δανεισμού ή επένδυσης του κεφαλαίου και ο τόκος προκύπτει σαν ο απλός πολλαπλασιασμός του κεφαλαίου επί το απλό επιτόκιο
- Το σύνθετο επιτόκιο είναι όταν αυτό έχει σαν βάση ένα μικρότερο χρονικό διάστημα από αυτό του δανεισμού ή επένδυσης του κεφαλαίου και τότε το

συνολικό κεφάλαιο που θα έχουμε σαν επιστροφή είναι πλέον σύνθετο από την προηγούμενη περίπτωση του απλού επιτοκίου

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος καταθέτει ένα κεφάλαιο K στην τράπεζα με επιτόκιο r για ένα χρόνο το οποίο είναι σύνθετο με χρονική βάση τους τρεις μήνες. Τότε μετά τη λήξη του πρώτου τριμήνου η τράπεζα θα αποδώσει

$$K\left(1+\frac{r}{4}\right)$$

Μετά την παρέλευση του δεύτερου τριμήνου στο κεφάλαιο πλέον $K\left(1+\frac{r}{4}\right)$ θα αποδώσει στον καταθέτη

$$K\left(1+\frac{r}{4}\right)\left(1+\frac{r}{4}\right)=K\left(1+\frac{r}{4}\right)^{2}$$

Με όμοιο συλλογισμό καταλήγουμε στο συλλογισμό ότι στο τέλος του χρόνου η τράπεζα θα αποδώσει στον καταθέτη

$$K\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4}$$

Γενικά αν σε ένα χρόνο με σύνθετο επιτόκιο r, με βάση χρονική τέτοια ώστε να έχουμε n αποδόσεις, καταθέσουμε ένα κεφάλαιο K τότε το συνολικό κεφάλαιο το οποίο θα μας επιστραφεί είναι

$$K\left(1+\frac{r}{4}\right)^{n}$$

Το σύνθετο επιτόκιο το οποίο αναλύσαμε έως τώρα ήταν διακριτό δηλαδή οι τόκοι αποδίδονται στο κεφάλαιο σε διακριτά σημεία στο χρόνο. Θεωρούμε τώρα ότι με ένα ονομαστικό επιτόκιο r, δηλαδή ένα ετήσιο επιτόκιο r, ότι οι τόκοι αποδίδονται σε n χρονικά σημεία μέσα στο χρόνο, όπου το n είναι πάρα πολύ μεγάλο. Τότε μπορούμε να γράψουμε ότι το κεφάλαιο K θα έχει γίνει

$$\lim_{n\to\infty}K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=K\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=Ke^{r}$$

Ο τρόπος αυτός υπολογισμού του κεφαλαίου με σύνθετο επιτόκιο θα ονομάζεται σύνθετο επιτόκιο σε χρόνο συνεχή ή συνεχές σύνθετο επιτόκιο.

Με τον ίδιο συλλογισμό φτάνει κάποιος στο συμπέρασμα ότι αν έχει ένα κεφάλαιο K στο συνεχές σύνθετο επιτόκιο r τότε μετά από t έτη θα γίνει

$$Ke^{rt}$$

2.3 Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

Η σχέση που συνδέει τη σημερινή αξία του κεφαλαίου $K(0)$ με τη μελλοντική $K(t)$ μετά από χρονικό διάστημα t, βεβαίως κάτω από την υπόθεση ότι ένα κεφάλαιο $K(0)$ θα μπορούσε σαν ελάχιστη επένδυση να παραμείνει στο συνεχές σύνθετο επιτόκιο και να αποδώσει $K(t)$, είναι η ακόλουθη

$$K(t) = K(0)e^{rt}$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται χρονική αξία του χρήματος και συνδέει τη σημερινή αξία του χρήματος $K(0)$ με τη μελλοντική $K(t)$ μέσα από την παραπάνω εξίσωση. Φυσικά στη διακριτή περίπτωση, οι σχέσεις που αναφέραμε παραπάνω αποτελούν μια πολύ καλή προσέγγιση.[10]

Η έννοια της χρονικής αξίας του χρήματος δεν θα πρέπει να συγχέεται με την αγοραστική αξία του χρήματος, που είναι μια διαφορετική έννοια που συνδέεται με το στοιχείο του πληθωρισμού και όχι με τα επιτόκια.

Η χρονική αξία του χρήματος μας επιτρέπει να συγκρίνουμε μεταξύ τους διάφορες χρηματικές δόσεις, προκειμένου να ελέγξουμε ποια είναι καλύτερο να προτιμήσουμε.

[10] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 67

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΓΟΡΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα παράγωγο είναι ένα χρηματικό εργαλείο του οποίου η τιμή εξαρτάται από την τιμή κάποιας άλλης πιο βασικής παραμέτρου. Για παράδειγμα, πολύ συχνά οι μεταβλητές που τα παράγωγα βασίζονται είναι οι τιμές εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων όπως χρυσός, συνάλλαγμα, μετοχές ή και βασικά είδη διατροφής όπως σιτάρι, φρούτα, κλπ.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τη χρηματιστηριακή αγορά και κάποιες δυναμικές της και θα ορίσουμε διάφορα παράγωγα όπως forward contracts (μελλοντικά συμβόλαια), future contracts (μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής), options (δικαιώματα), swaps (ανταλλαγές) και άλλα τα οποία παρουσιάζονται συχνά στην πράξη.

Όλα αυτά τα διαπραγματεύονται κυρίως τράπεζες και χρηματιστηριακοί οργανισμοί και εταιρίες σε όλο τον κόσμο και στο σύνολο αυτού του εμπορίου και τους ανθρώπους που συνήθως το απαρτίζουν αναφερόμαστε σαν την ‘’αγορά πάνω από τον πάγκο’’.

Στο κεφάλαιο αυτό, η προσέγγιση είναι κατά κύριο λόγο περιγραφική έτσι ώστε όταν στη συνέχεια υπεισέρθουμε στο μαθηματικό κομμάτι που αφορά στην αντιμετώπιση των σημαντικών προβλημάτων της ‘’αγοράς πάνω από τον πάγκο’’, να είναι ευδιάκριτες οι έννοιες αυτές, ώστε να μη δημιουργηθεί σύγχυση στον αναγνώστη.

3.2 Η ΜΕΤΟΧΗ

Ένα από τα βασικά χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία είναι πολύ γνωστά στο ευρύ κοινό είναι η μετοχή.[11]

Ας υποθέσουμε ότι μετά από χρόνια προσωπικής έρευνας έχετε βρει ένα προϊόν το οποίο θα είναι πολύ καινοτόμο και θα καλύψει κάποια σημαντική ανάγκη των καταναλωτών αν βγει στην αγορά. Σκέφτεστε ότι αν είχατε μια μικρή μονάδα βιομηχανικής παραγωγής που να το κατασκευάζει, θα μπορούσατε να κατακτήσετε την αγορά και είστε σίγουροι ότι θα είχατε μεγάλη επιτυχία, αλλά δεν υπάρχει η οικονομική δυνατότητα για την υλοποίηση του στόχου σας.

Αποφασίζετε να συγκεντρώσετε το απαιτούμενο κεφάλαιο παίρνοντας χρήματα από φίλους και συγγενείς καθώς και από έναν χορηγό δίνοντάς τους σαν αντάλλαγμα ένα συμβόλαιο ότι έχουν στην ιδιοκτησία τους ένα κομμάτι της

[11] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 78

επιχείρησης τόσο όσο είναι το μέρος που συνέβαλαν στο συνολικό αρχικό κεφάλαιο που συγκεντρώθηκε. Με το συμβόλαιο αυτό θα συμμετέχουν και στο μέρος που τους αναλογεί στα συνολικά ετήσια κέρδη της επιχείρησης. Με τον τρόπο αυτό στην πράξη δώσατε στους συγγενείς και φίλους σας καθώς και στο χορηγό μετοχές. Στην πραγματικότητα οι κάτοχοι των μετοχών στο σύνολό τους έχουν την επιχείρηση σαν δικό τους περιουσιακό στοιχείο και εσάς σας εκλέγουν να διοικήσετε την επιχείρηση. Η διοίκηση της επιχείρησης λειτουργεί με τρόπο τέτοιο ώστε να εξυπηρετεί με τρόπο άριστο τα συμφέροντα των μετοχών της επιχείρησης.

Η επιχείρηση αρχίζει να ανθεί, χρειάζονται νέα κεφάλαια για να αντιμετωπιστεί η ζήτηση. Τα κέρδη της επιχείρησης σίγουρα δε φτάνουν αν όλα επενδυθούν να αντιμετωπίσουν την επέκταση και τότε αποφασίζετε να εισάγετε την επιχείρηση στο Χρηματιστήριο. Με τον τρόπο αυτό οι μετοχές σας θα μπορούν να αγοραστούν και να πουληθούν ελεύθερα σε άγνωστους σε εσάς ανθρώπους και οι κανόνες της αγοράς θα ρυθμίζουν την τιμή της μιας μετοχής. Αν η ζήτησή τους είναι μεγάλη τότε η τιμή της μετοχής της επιχείρησης θα αυξάνει. Στην αντίθετη περίπτωση θα μειώνεται.

Η τιμή των μετοχών των εταιριών που συμμετέχουν στο Χρηματιστήριο κάθε χώρας δημοσιεύεται στον ημερήσιο τύπο. Η τιμή που αναγράφεται είναι η τιμή κλεισίματος της προηγούμενης ημέρας, δηλαδή η τιμή που είχε η μετοχή την ώρα που έκλεινε το Χρηματιστήριο.

Η τιμή της μετοχής στο Χρηματιστήριο είναι μια τυχαία μεταβλητή. Στην πραγματικότητα αφού κάθε μέρα η τιμή κλεισίματος αλλάζει μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή της μετοχής είναι μια στοχαστική διαδικασία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ όπου X_1 είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή της μετοχής την ημέρα 1, X_2 είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή της μετοχής την ημέρα 2, κλπ.

Η κατασκευή στοχαστικών μοντέλων που θα αντιλαμβάνονται αυτές τις ‘’κινήσεις’’ και θα τις αξιοποιούν είναι ένα ανοικτό επιστημονικό πρόβλημα.

Ο κάτοχος ενός αριθμού μετοχών είναι θεωρητικά ιδιοκτήτης ενός μέρους της επιχείρησης και αν η επιχείρηση έχει ετήσια κέρδη λαμβάνει τα λεγόμενα μερίσματα. Στα κέρδη του φυσικά περιλαμβάνεται και η άνοδος της τιμής της μετοχής στο Χρηματιστήριο. Τα μερίσματα έρχονται στον κάτοχο της μετοχής σε τακτά χρονικά διαστήματα, όπως κάθε τετράμηνο ή εξάμηνο ή χρόνο. Η τιμή πώλησης μιας μετοχής έχει κάποια συνάρτηση με το αν πρόκειται να πληρωθεί σύντομα μέρισμα ή έχει μόλις εισπραχθεί. Τα μερίσματα των μετοχών υπόκεινται σε φορολογία.

Αρκετά συχνά, όταν η τιμή μιας μετοχής έχει ανέβει αρκετά ψηλά, η εταιρία ανακοινώνει split (σπάσιμο) της μετοχής. Αν για παράδειγμα έχουμε 100 μετοχές των 200 ευρώ και η εταιρία αποφασίσει σπάσιμο της μετοχής στα δυο, αυτό σημαίνει ότι θα αποκτήσουμε 200 μετοχές των 100 ευρώ η καθεμιά. Το συνολικό μας, δηλαδή, κεφάλαιο παραμένει σταθερό. Η ενέργεια αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από ένα ψυχολογικό παιχνίδι, το οποίο μερικές φορές οδηγεί στη ζήτηση αυτών των μετοχών και κατά συνέπεια, στην άνοδό τους.

3.3 ΞΕΝΟ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑ ΚΑΙ ΠΡΩΤΕΣ ΥΛΕΣ

Οι τιμές με τις οποίες κάποιος μπορεί να ανταλλάξει το νόμισμα της χώρας στην οποία κερδίζει χρήματα με το νόμισμα μιας άλλης χώρας αποτελούν το συνάλλαγμα.[12] Ο κόσμος του ξένου συναλλάγματος είναι ένας χώρος όπου ‘’πάνω από τον πάγκο’’ χάνονται και κερδίζονται τεράστια ποσά, χωρίς κάποιος να καταβάλει τον συνήθως αναγκαίο για αυτό κόπο. Υπάρχουν διεθνείς οργανισμοί προστασίας του συναλλάγματος μιας χώρας, όπου μια χώρα γίνεται δεκτή μόνο αν ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Αυτό γιατί το επενδυτικό παιχνίδι με το ξένο συνάλλαγμα είναι τόσο ισχυρό σε παγκόσμια κλίμακα που μπορεί να κλονίσει την οικονομία μιας χώρας. Παρόλο που οι τιμές του συναλλάγματος παρουσιάζουν τον ίδιο βαθμό τυχαιότητας, καθώς και τα ίδια παιχνίδια ‘’χειρισμού’’ με τις μετοχές, οι κεντρικές τράπεζες με εργαλείο ελέγχου τα ονομαστικά επιτόκια προσπαθούν να ελέγξουν, με μικρή όμως επιτυχία, τις τιμές του ξένου συναλλάγματος. Απαραίτητο στοιχείο ισορροπίας είναι η ύπαρξη του μη-σίγουρου κέρδους (no-arbitrage) στις πωλήσεις των συναλλαγματικών τραπεζικών προϊόντων για αυτό και οι μαθηματικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στα χρηματοοικονομικά έχουν αυτό σαν στόχο.

Οι πρώτες ύλες είναι ακατέργαστα υλικά όπως μέταλλα, χρυσός, ασήμι, σιτάρι, φρούτα, κλπ. Η έλλειψή τους προκαλεί άνοδο της τιμής τους ενώ η υπερπαραγωγή ή η υπερπροσφορά πτώση τους. Πολλά από αυτά τα προϊόντα έχουν και εποχιακές μεταβολές. Το εμπόριο των πρώτων υλών είναι φυσικά τεράστιο και τα ποσά που διακινούνται στο χώρο αυτό τεράστια. Δε λείπουν φυσικά οι προσπάθειες χειρισμού της αγοράς, με την έννοια της τεχνητής ανόδου συγκεκριμένων προϊόντων σε κατάλληλες εποχές. Στις περιπτώσεις αυτές, οι κυβερνήσεις με κατάλληλες παρεμβάσεις προσπαθούν συνεχώς να αντιμετωπίσουν τέτοια φαινόμενα. Η προσπάθεια της επίτευξης καλύτερης τιμής μιας πρώτης ύλης τόσο από τον αγοραστή όσο και από τον πωλητή έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών χρηματοοικονομικών προϊόντων και η ‘’πάνω από τον πάγκο’’ οικονομία γύρω από τις πρώτες ύλες ανθεί.

[12] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 82

3.4 FORWARDS ΚΑΙ FUTURES

Ένα μελλοντικό συμβόλαιο είναι ένα απλό παράγωγο της χρηματοοικονομικής αγοράς. Είναι μια συμφωνία για την αγορά ή πώληση ενός προϊόντος σε ένα μελλοντικό χρόνο σε μια συγκεκριμένη τιμή. Η τιμή αυτή ονομάζεται τιμή παράδοσης (delivery price)[13].

Ένα μελλοντικό συμβόλαιο είναι μια εμπορική πράξη ''πάνω από τον πάγκο'' μεταξύ δυο χρηματιστηριακών οργανισμών ή ενός χρηματιστηριακού οργανισμού κι ενός από τους πελάτες του. Υπάρχουν επομένως δυο πλευρές σε κάθε μελλοντικό συμβόλαιο – forward contract. Η μια είναι αυτή του αγοραστή του προϊόντος που περιέχεται στο μελλοντικό συμβόλαιο, η αποκαλούμενη long position ή μακριά θέση και αυτή η πλευρά έχει την υποχρέωση να αγοράσει το προϊόν στην καθορισμένη ημερομηνία στην τιμή παράδοσης. Η άλλη είναι του πωλητή του προϊόντος που περιέχεται στο μελλοντικό συμβόλαιο, η λεγόμενη short position ή κοντή θέση και αυτή η πλευρά έχει την υποχρέωση να πουλήσει το προϊόν στην καθορισμένη ημερομηνία στην τιμή παράδοσης. Το κόστος σύναψης ενός μελλοντικού συμβολαίου είναι μηδέν και για τις δυο θέσεις long και short.

Μια λίγο διαφορετική μορφή των forwards είναι τα future contracts ή μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής. Στα futures έχουμε πάλι την υποχρέωση της αγοράς ή πώλησης ενός συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου, αλλά έχουμε διαφοροποίηση σε δυο σημεία:

(α) τα μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής είναι αντικείμενο εμπορικό σε γραφεία ανταλλαγών (exchange). Τα γραφεία ανταλλαγών τυποποιούν τα συμβόλαια αυτά με λεπτομερείς αναφορές στην ποιότητα των περιουσιακών στοιχείων, που είναι η βάση του μελλοντικού συμβολαίου ανταλλαγής. Επειδή συνήθως οι δυο πλευρές δε γνωρίζουν η μια την άλλη για αυτό αυτά τα γραφεία προσφέρουν μηχανισμούς εγγυήσεων και προς τις δυο πλευρές ότι θα τηρηθεί ένα μελλοντικό συμβόλαιο ανταλλαγής.

(β) στα μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγής δεν υπάρχει συγκεκριμένη ημερομηνία παράδοσης του περιουσιακού στοιχείου που αποτελεί το αντικείμενο του μελλοντικού συμβολαίου ανταλλαγής. Αναφέρεται όμως ο μήνας της παράδοσης και το γραφείο ανταλλαγών προσδιορίζει την περίοδο μέσα στο μήνα που θα γίνει η παράδοση. Για πρώτες ύλες συνήθως ο χρόνος παράδοσης είναι ένας ολόκληρος μήνας. Ο κάτοχος της short position, αυτός δηλαδή που πουλάει το περιουσιακό στοιχείο έχει συνήθως το δικαίωμα του χρόνου μέσα στην συγκεκριμένη περίοδο που θα γίνει η παράδοση.

[13] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 83

Τα μεγαλύτερα γραφεία ανταλλαγών μέσα από τα οποία διακινείται ένα μεγάλο μέρος του εμπορίου είναι το Chicago Board of Trade (CBOT) και το Chicago Mercantile Exchange (CME).

Όταν ένα γραφείο ανταλλαγών φτιάχνει ένα συμβόλαιο πρέπει να προσδιορίσει σε πολλές λεπτομέρειες το είδος του συμβολαίου μεταξύ των δυο πλευρών. Το πρώτο βέβαια στοιχείο του συμβολαίου είναι το αντικείμενό του δηλαδή το περιουσιακό στοιχείο το οποίο πωλείται ή αγοράζεται. Συνήθως υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία ποιότητας στο σε διαπραγμάτευση προϊόν. Έτσι, σε ένα γραφείο ανταλλαγών έχουν κατηγοριοποιηθεί οι ποιότητες κάθε εμπορεύσιμου προϊόντος έτσι ώστε να περιγράφεται επακριβώς και χωρίς ασάφειες το τι ακριβώς θα παραλάβει αυτός που έχει τη μακριά θέση ή θα πουλήσει αυτός που έχει την κοντή θέση. Σε μερικές περιπτώσεις αν η ποιότητα η οποία παραδίδεται δεν είναι η προβλεπόμενη, τότε η τιμή παράδοσης προσαρμόζεται στην νέα ποιότητα από το γραφείο ανταλλαγών. Ένα δεύτερο στοιχείο είναι το χρηματικό μέγεθος των μελλοντικών συμβολαίων ανταλλαγής. Εάν το χρηματικό μέγεθος των μελλοντικών συμβολαίων ανταλλαγής είναι πολύ μεγάλο, τότε μπορεί να μην υπάρχει ζήτηση ενώ αν είναι πολύ μικρό τότε μπορεί να μην είναι συμφέρον, ούτε για τον αγοραστή ούτε για τον πωλητή λόγω των εξόδων που συνεπάγεται. Ένα τρίτο στοιχείο είναι οι συνθήκες και ο τρόπος παράδοσης που από άποψης μαθηματικών μεθόδων δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Άλλο στοιχείο είναι οι μήνες παράδοσης που διαφέρουν από προϊόν σε προϊόν και όπως ήδη αναφέραμε ορίζεται ο χρόνος παράδοσης ή να είναι ολόκληρος ο μήνας ή μια χρονική περίοδος μέσα σε ένα μήνα. Μέσα σε αυτή τη χρονική περίοδο αυτός που κατέχει τη short position είναι εκείνος που θα επιλέξει την ημέρα παράδοσης. Τέλος, υπάρχει ένα άνω όριο στον αριθμό των μελλοντικών συμβολαίων ανταλλαγής που μπορεί να υπογράψει ένα φυσικό πρόσωπο. Αυτό είναι ένα μέτρο προφύλαξης απέναντι σε ‘’φαινόμενα χειρισμού της αγοράς’’.

Η μεγαλύτερη πλειοψηφία από τα μελλοντικά συμβόλαια ανταλλαγών δεν πραγματοποιούνται από τα φυσικά πρόσωπα για τα οποία συντάχθηκε το μελλοντικό συμβόλαιο ανταλλαγής. Ο λόγος είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα συμβόλαια αυτά αποτελούν εμπορεύσιμο είδος για τους κατόχους. Είναι δηλαδή πολύ συχνά το φαινόμενο από το ίδιο φυσικό πρόσωπο η σύνταξη ενός νέου συμβολαίου ανταλλαγής μέσω ενός γραφείου που να συμπεριλαμβάνει μέσα στην τελική του μορφή σαν περιουσιακό στοιχείο ένα παλαιότερο μελλοντικό συμβόλαιο ανταλλαγής.

3.5 SWAPS

Ένα swap ή μια ανταλλαγή είναι μια συμφωνία ανάμεσα σε δυο οργανισμούς ή εταιρίες για την ανταλλαγή μετρητών σε προκαθορισμένα μελλοντικά χρονικά σημεία[14]. Η συμφωνία περιλαμβάνει τις ημερομηνίες που πρέπει να πληρωθούν τα μετρητά, τον τρόπο υπολογισμού τους και τι παίρνει καθένας από τους οργανισμούς. Τα πλέον συνήθη swaps ή ανταλλαγές είναι αυτά που ονομάζονται interest rate swaps ή ανταλλαγές επιτοκίων και currency swaps ή ανταλλαγές συναλλάγματος.

Ξεκινάμε περιγράφοντας τα interest rate swaps. Ο πλέον συνήθης τύπος είναι αυτός στον οποίο ο οργανισμός Α συμφωνεί, σε ένα κεφάλαιο το οποίο απλώς καθορίζεται χωρίς να πληρώνεται από καμία πλευρά, να πληρώνει στον οργανισμό Β ένα σταθερό επιτόκιο σε ετήσια βάση σε τακτά χρονικά διαστήματα και ο οργανισμός Β συμφωνεί στο ίδιο κεφάλαιο να πληρώνει στα ίδια χρονικά διαστήματα ένα κυμαινόμενο επιτόκιο ορισμένου τύπου. Τις περισσότερες φορές το κυμαινόμενο αυτό επιτόκιο είναι το LIBOR. Όπως είδαμε, αυτός είναι ο τόκος καταθέσεων που δίνουν η μια τράπεζα στην άλλη όταν κάνει καταθέσεις ή δάνεια. Το επιτόκιο LIBOR αλλάζει συνεχώς καθώς αλλάζουν οι οικονομικές συνθήκες. Το LIBOR είναι ένα επιτόκιο αναφοράς για τις διεθνείς οικονομικές αγορές και η διακύμανσή του είναι ενδεικτική των υπαρχόντων τάσεων.

Πολύ συχνά η ανταλλαγή γίνεται με μεσάζοντα ένα χρηματιστηριακό οργανισμό ο οποίος παίρνει προμήθεια και από τις δυο πλευρές η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς που γίνονται.

Άλλη μια ενδιαφέρουσα ανταλλαγή είναι αυτή των currency swaps. Στην απλή μορφή της η ανταλλαγή αυτή περιλαμβάνει συμφωνία ανταλλαγής κεφαλαίου και επιτοκίου σε ένα νόμισμα με ένα άλλο κεφάλαιο και επιτόκιο σε άλλο νόμισμα. Το ποιος θα βγει κερδισμένος και ποιος θα χάσει από την ανταλλαγή εξαρτάται φυσικά από το πώς θα κυμανθεί η τιμή του ενός νομίσματος σε σχέση με το άλλο κατά τη διάρκεια της συμφωνίας.

3.6 OPTIONS

Ένα σημαντικό είδος παραγώγου είναι το δικαίωμα ή επιλογή ή option. Διακρίνουμε δυο είδη δικαιώματος, το Ευρωπαϊκό δικαίωμα (European option) και το Αμερικανικό δικαίωμα (American option)[15]. Τα δυο είδη των δικαιωμάτων έχουν δυο πλευρές κι έτσι διακρίνουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

(α) το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή European call option είναι ένα συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να αγοράσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη τιμή στο τέλος της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου

[14] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 88
[15] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 91

(β) το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης ή European put option είναι ένα συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι και την υποχρέωση, να πουλήσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη τιμή στο τέλος της χρονικής διάρκειας του συμβολαίου

(γ) το Αμερικανικό δικαίωμα αγοράς ή American call option είναι ένα συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι και την υποχρέωση, να αγοράσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη τιμή οποτεδήποτε μέσα στη χρονική διάρκεια του συμβολαίου

(δ) το Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης ή American put option είναι ένα συμβόλαιο που μας δίνει το δικαίωμα, όχι και την υποχρέωση, να πουλήσουμε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη τιμή οποτεδήποτε μέσα στη χρονική διάρκεια του συμβολαίου

Τα δικαιώματα διαφέρουν από όλα τα προηγούμενα παράγωγα που συζητήσαμε μέχρι τώρα από το γεγονός ότι δεν υπάρχει υποχρέωση για κάποια ενέργεια. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι είναι τυχαία μεταβλητή του τι θα προκύψει. Από την άλλη πλευρά τα δικαιώματα δεν είναι δυνατόν να αγοράζονται χωρίς επιβάρυνση γιατί δεν υπάρχει υποχρέωση να προκύψει μια οικονομική πράξη ώστε να προστεθεί σε αυτήν το οποιοδήποτε κέρδος ή κόστος για τον οποιονδήποτε.

Τα δυο αυτά στοιχεία καθιστούν το πρόβλημα της εύρεσης του κόστους το οποίο θα πρέπει να έχει ένα option ή δικαίωμα ένα ενδιαφέρον στοχαστικό πρόβλημα.

Τα δικαιώματα πώλησης ή αγοράς αποτελούν ένα τεράστιο αντικείμενο εμπορίου σε όλο τον κόσμο. Τα περιουσιακά στοιχεία που αποτελούν το αντικείμενο των δικαιωμάτων είναι συνήθως μετοχές, ξένο συνάλλαγμα, δείκτες μετοχών και μελλοντικά συμβόλαια.

Ένα δικαίωμα με περιουσιακό στοιχείο μια μετοχή συνήθως ονομάζεται stock option ή δικαίωμα μετοχής. Ένα δικαίωμα μετοχής αναφέρεται από το μήνα που ανήκει η ημερομηνία λήξης του. Για παράδειγμα λέμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς Μαϊου όταν η λήξη του δικαιώματος αγοράς μιας μετοχής είναι μέσα στο Μάιο. Υπάρχουν έξι κυρίως παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος μετοχής:

(α) η παρούσα αξία της μετοχής

(β) η συμφωνημένη τιμή παράδοσης της μετοχής

(γ) η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος

(δ) η διακύμανση των τιμών της μετοχής

(ε) το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο

(στ) τα μερίσματα τα οποία αναμένονται κατά το χρόνο ζωής του δικαιώματος

Ένα από τα πλεονεκτήματα που έχει ένα δικαίωμα είναι οι συνδυασμοί που μπορεί να κάνει ο αγοραστής. Το πλεονέκτημα προκύπτει από την ευχέρεια που έχει ο αγοραστής να το εξασκήσει ή όχι. Υπάρχουν μερικοί πολύ γνωστοί στρατηγικοί συνδυασμοί τους οποίους και θα αναλύσουμε

- STRADDLE
  Στην περίπτωση αυτή αγοράζουμε το δικαίωμα αγοράς και πώλησης μιας μετοχής με την ίδια τιμή παράδοσης και στην ίδια χρονική διάρκεια. Αν την ημέρα λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή παράδοσής της τότε το straddle έχει ζημία. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αγοραστής έχει πληρώσει δυο δικαιώματα. Αντίθετα αν την ημέρα λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι μακριά από την τιμή παράδοσής της είτε θετικά είτε αρνητικά τότε υπάρχει κέρδος για τον αγοραστή. Για το λόγο αυτό το straddle είναι κατάλληλο όταν αναμένονται μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή της μετοχής
- STRIPS & STRAPS
  Στην περίπτωση του strip αγοράζονται σε αναλογία ένα δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής προς δυο δικαιώματα πώλησης με την ίδια τιμή παράδοσης και την ίδια ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Στην περίπτωση αυτή η στρατηγική προσαρμόζεται στο γεγονός ότι αναμένεται μια μεγάλη αλλαγή στην τιμή της μετοχής προς τα κάτω.
  Το strap αποτελείται από την αγορά σε αναλογία δυο δικαιώματα αγοράς προς ένα δικαίωμα πώλησης. Στην περίπτωση αυτή η στρατηγική προσαρμόζεται στο γεγονός ότι αναμένεται μια μεγάλη αλλαγή στην τιμή της μετοχής προς τα πάνω.
- STRANGLES
  Στην περίπτωση του strangle ο παίκτης αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης μιας μετοχής με την ίδια ημερομηνία λήξης αλλά διαφορετικές τιμές παράδοσης.

3.7 ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ

Οι συναλλασσόμενοι με τα διάφορα παράγωγα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το χαρακτήρα που φανερώνουν οι ενέργειές τους[16]. Αυτές οι τρεις μεγάλες κατηγορίες είναι οι παρακάτω:

1. HEDGERS (ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΤΕΣ)

[16] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 93

Το είδος αυτό των συναλλασσομένων χρησιμοποιούν την αγορά και τις δυνατότητες που τους παρουσιάζονται, για να εξασφαλιστούν έναντι του ρίσκου που παρουσιάζουν οι μεγάλες αλλαγές στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων, των επιτοκίων της αγοράς, κλπ. Η εξασφάλιση (hedging) είναι βασικό είδος συμπεριφοράς πολλών επιχειρήσεων στην προσπάθεια επιβίωσής τους σε έντονα ανταγωνιστικά περιβάλλοντα.

2. SPECULATORS (ΚΕΡΔΟΣΚΟΠΟΙ)

   Το είδος αυτό των συναλλασσομένων διακρίνονται από το γεγονός ότι χρησιμοποιούν την αγορά για να επιτύχουν γρήγορα και μεγάλα κέρδη. Είναι οι άνθρωποι που συνήθως παίρνουν ρίσκα βέβαιοι ότι θα κερδίσουν, πολλές φορές και μόνο γιατί το θέλουν με τόσο πάθος που δεν μπορούν να κάνουν αλλιώς. Έχουν δηλαδή όλα τα χαρακτηριστικά του παίκτη και οι ενέργειές τους θυμίζουν περισσότερο τζόγο παρά επενδύσεις. Είναι σαφώς το αντίθετο από τους hedgers οι οποίοι προσπαθούν συνεχώς να απαλλαγούν από το ρίσκο. Είναι φανερό ότι εκεί που φυτρώνουν οι hedgers ευδοκιμούν και οι speculators μια και όταν υπάρχουν κάποιοι οι οποίοι επιθυμούν να απαλλαγούν από το ρίσκο συνήθως υπάρχουν κάποιοι που αισιοδοξούν να το φορτωθούν. Τους speculators τους διακρίνεις εύκολα στα χρηματιστήρια όπου αγοράζουν και πωλούν την ίδια μετοχή στη διάρκεια μιας ημέρας προσπαθώντας ακόμη και να κερδίσουν στο γενικό κατήφορο.

3. ARBITRAGEURS

   Το είδος αυτό των συναλλασσόμενων προσπαθούν να εξερευνήσουν την αγορά ή να συνδυάσουν αγορές αναζητώντας το σίγουρο κέρδος. Όπου εμφανιστούν οι ευκαιρίες σίγουρου κέρδους σε μια αγορά εξαφανίζονται μια που ενεργούν πολλοί μαζί και ανατρέπουν τις ισορροπίες ζήτησης και αγοράς.

   Οι αγορές προσπαθούν να αποκλείσουν τις ευκαιρίες βέβαιου κέρδους γιατί οι εμφανίσεις πολλών arbitrageurs μπορεί να καταστρέψουν τις ισορροπίες και είναι άγνωστο που και πότε το σύστημα θα ισορροπήσει ξανά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MARTINGALES

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για τη διαχείριση δυναμικών καταστάσεων οι οποίες περιέχουν σε μεγάλο βαθμό τυχαιότητα, που ξεδιπλώνεται μέσα στο χρόνο, χρειαζόμαστε καινούργια εργαλεία και δομές και ένα τέτοιο είναι οι στοχαστικές διαδικασίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω,F,P). Εάν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος των μελών της οικογένειας τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Εάν το πλήθος των μελών της οικογένειας δεν είναι αριθμήσιμο τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $\{X_t, t \geq 0\}$ ή $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται μια διαδικασία σε χρόνο διακριτό, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2

Ο χώρος των καταστάσεων S, είναι ο χώρος που δημιουργείται από όλες τις πιθανές τιμές X_t. Εάν $S = \{0,1,2,\ldots\}$ αναφερόμαστε στη στοχαστική διαδικασία σαν μια στοχαστική διαδικασία με ακέραιες τιμές η μια διακριτών καταστάσεων διαδικασία. Εάν $S = (-\infty, \infty)$ τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μια στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές. Εάν ο S είναι ο R^n τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μια $n-$διάστατη στοχαστική διαδικασία.

Για να εξηγήσει κανείς την ''κατάσταση'' σύντομα, θα πρέπει να γίνει αντιληπτό 'ότι η παρούσα κατάσταση ενός φυσικού συστήματος μπορεί να καθοριστεί συνήθως από ένα σύνολο αριθμών που περιγράφουν το σύστημα. Στις εφαρμογές λοιπόν, σαν κατάσταση του συστήματος θα ορίζεται το σύνολο των στοιχείων που χρειαζόμαστε για να οριστεί το σύστημα σε μια χρονική στιγμή.

Παράδειγμα 4.1

Η λίμνη του Μαραθώνα αποτελεί την πηγή τροφοδοσίας σε νερό ολόκληρου σχεδόν του νομού Αττικής. Η περιεκτικότητά της σε νερό και κατά συνέπεια η επάρκειά της για τη σημαντικότατη συμβολή της στη ζωή των κατοίκων της περιοχής εξαρτάται από πολλούς τυχαίους παράγοντες. Οι τυχαίοι αυτοί παράγοντες μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: στην πρώτη ανήκουν αυτοί οι οποίοι συμβάλλουν στην αύξηση του νερού στη λίμνη και στη δεύτερη κατηγορία αυτοί οι οποίοι συμβάλλουν στην ελάττωση του νερού. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση είναι η πρόβλεψη της στοχαστικής διαδικασίας X_t που εκφράζει την ποσότητα του νερού στη λίμνη τη χρονική στιγμή t. Η τυχαία μεταβλητή X_t είναι προφανές ότι παίρνει τιμές σε ένα συνεχές διάστημα και ότι η παράμετρος t είναι μια μεταβλητή που εν γένει στις εφαρμογές θα παίρνει τιμές σε ένα συνεχές διάστημα. Είναι λοιπόν η X_t μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο και χώρο συνεχή. Προφανώς η X_t είναι συνάρτηση άλλων δύο στοχαστικών διαδικασιών, της Y_t που είναι το συνολικό ύψος του νερού στο διάστημα $(0,t)$ και της Z_t που είναι το ποσό του νερού που καταναλώνεται στο χρονικό διάστημα $(0,t)$. Οι στοχαστικές διαδικασίες Y_t και Z_t είναι εν γένει σε χρόνο συνεχή και χώρο συνεχή.

<u>Παράδειγμα 4.2</u>

Δυο σκακιστές Α και Β ξεκινούν ένα παιχνίδι έχοντας ο Α 100 ευρώ και ο Β 80 ευρώ. Συμφωνούν να στοιχηματίζουν 5 ευρώ το παιχνίδι και να συνεχίζουν να παίζουν ώσπου ο ένας να καταστρέψει οικονομικά τον άλλο. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Α ένα παιχνίδι είναι 0.3 και η ισοπαλία έχει πιθανότητα 0.5. ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z_t ως εξής:

$$Z_t = \begin{cases} 1, & ο \ \mathrm{A} \ κερδίζει \ την \ παρτίδα \ t \\ 0, & όταν \ υπάρχει \ ισοπαλία \\ -1, & ο \ \mathrm{B} \ κερδίζει \ την \ παρτίδα \ t \end{cases}$$

και προφανώς έχουμε

$$πιθ\{Z_t = 1\} = 0.3 \text{ και } πιθ\{Z_t = 0\} = 0.5 \text{ και } πιθ\{Z_t = -1\} = 0.2$$

Ορίζουμε με

X_t=τη στοχαστική διαδικασία που εκφράζει τις παρτίδες που έχει κερδίσει ο παίκτης Α επιπλέον από τον Β μέχρι και την t παρτίδα.

Προφανώς, η X_t είναι μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο διακριτό, μια που η παράμετρος t μετράει παρτίδες και κατά συνέπεια οι τιμές που παίρνει $t = 0,1,2,\dots$. Ο παίκτης Α είναι δυνατόν να κερδίσει 80/5=16 παρτίδες περισσότερες από τον Β, γιατί τότε θα έχει κερδίσει όλα τα χρήματα του Β και το παιχνίδι θα σταματήσει. Επίσης, ο παίκτης Α έχει τη δυνατότητα να χάσει 100/5=20 παρτίδες περισσότερες από τον Β, γιατί τότε θα χάσει όλα τα χρήματα που διαθέτει και το παιχνίδι θα σταματήσει. Επομένως, ο χώρος καταστάσεων της στοχαστικής διαδικασίας X_t θα είναι

$$S = \{16,15,14,\dots,0,-1,-2,\dots,-20\}$$

Επίσης είναι προφανές ότι

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_t$$

Η στοχαστική διαδικασία X_t είναι γνωστή ως απλός τυχαίος περίπατος και είναι προφανές ότι η X_t είναι μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο και χώρο διακριτό.

4.2 ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Στα πρώτα δέκα χρόνια του περασμένου αιώνα δημοσιεύθηκαν αρκετές εργασίες που μπορούν να θεωρηθούν σαν αρχή της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών. Η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών τέθηκε πάνω σε σωστές και αυστηρές μαθηματικές βάσεις στη διάρκεια της δεκαετίας 1930-1940 από τον Kolmogorov και τη σχολή του.

Ο Bachelier (1900) ανέλυσε τις μεταπτώσεις στις τιμές των προϊόντων στην αγορά και οδηγήθηκε σε μια σημαντική ειδική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών. Το 1905 η ίδια διαδικασία διαπιστώθηκε από τον Einstein στην πολύ γνωστή του εργασία για την κίνηση Brown, Einstein (1905). Μεταξύ των εργασιών του Bachelier και Einstein υπάρχει η διατριβή του Lundberg (1903) γραμμένη στα Σουηδικά. Ο Lundberg εξετάζει το ποσό των εισπράξεων μιας ασφαλιστικής εταιρίας και οδηγήθηκε σε μια σημαντική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών. Το 1905 η διαδικασία Poisson προτάθηκε από τον Elrang, σε ένα πρόβλημα συνωστισμού σε τηλεφωνικές γραμμές και από τον Rutherford-Geiger (1908) στην ανάλυση της ραδιενεργού αποσύνθεσης. Όλες αυτές οι πρωτοπόρες εργασίες χρησιμοποιούσαν μαθηματικές μεθόδους που λίγο-πολύ στερούνταν μαθηματικής αυστηρότητας. Όμως ανέπτυξαν μια θαυμάσια ικανότητα για το διαισθητικό χειρισμό προβλημάτων και μεθόδων, που έπρεπε να περιμένουν ως το 1930 για να τεθούν πάνω σε αυστηρές μαθηματικές βάσεις. Από τότε μέχρι σήμερα οι στοχαστικές διαδικασίες έχουν γνωρίσει ραγδαία και τεράστια ανάπτυξη και εφαρμογές τους εμφανίζονται σε όλους σχεδόν τους κλάδους της επιστήμης. Η αιτία των πολλών αυτών εφαρμογών μπορεί να αποδοθεί στο μεγάλο βαθμό αβεβαιότητας που συνυπάρχει σε κάθε εκδήλωση της καθημερινής ζωής.

Ο σπόρος της μελέτης των Μαρκοβιανών αλυσίδων ρίχτηκε στα 1905 από τον Markov, που τότε ήταν καθηγητής του Πανεπιστημίου της Μόσχας. Το αρχικό του κίνητρο ήταν να γενικεύσει το πρόβλημα σε μια σειρά από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli τοποθετώντας μια εξάρτηση για την κάθε δοκιμή σε σχέση με την προηγούμενη. Διαισθητικά διαβάζοντας την αρχική αυτή δουλεία δίνεται η εντύπωση ότι ο συγγραφέας δεν έχει αίσθηση της πραγματικής αξίας της δουλειάς. Το φαινόμενο αυτό δεν είναι βέβαια τόσο ασύνηθες στην επιστήμη.

Σήμερα, οι εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι σημαντικές και πολύ εκτεταμένες. Η δυναμική επίσης των νέων εφαρμογών τους είναι μεγάλη και αυτό είναι πολύ γνωστό.

4.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Τα πλέον σημαντικά ίσως στοχαστικά μοντέλα στις Επιχειρησιακές Έρευνες είναι αυτά που μπορούν να τεθούν κάτω από το γενικό τίτλο πεπερασμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες[17]. Μπορεί κανείς να βρει εύκολα εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε εντελώς διαφορετικές επιστήμες όπως στην καρκινογένεση, στις τάσεις της αγοράς, στους κινδύνους των επιχειρήσεων, στις ασφαλιστικές μεθόδους, στα πληθυσμιακά προβλήματα, στη δημογραφία, στην αστρονομία, στη θεωρία αποθήκευσης, κλπ.

Χαρακτηριστικό όλων αυτών των συστημάτων είναι ότι έχουν την ιδιότητα του Markov ή Μαρκοβιανή ιδιότητα. Αυτή με απλά λόγια λέει ότι η πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης του συστήματος εξαρτάται από την παρούσα του κατάσταση και δεν εξαρτάται από το παρελθόν του. Με αυτό εννοούμε ότι όλη η αναγκαία πληροφορία για την πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς περιέχεται στην παρούσα κατάσταση του συστήματος.

Σε αυστηρή θεμελίωση μια στοχαστική διαδικασία καλείται Μαρκοβιανή, αν για κάθε $t, t_1, t_2, ..., t_k$

$$prob\{a < X_t < \beta / X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n\} = prob\{a < X_t < \beta / X_{t_n} = x_1\} \quad (4.3.1)$$

όπου $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$.

Εδώ θα μελετήσουμε την κατηγορία των Μαρκοβιανών διαδικασιών σε χρόνο διακριτό, με χώρο καταστάσεων διακριτό. Την κατηγορία αυτή των Μαρκοβιανών διαδικασιών ονομάζουμε Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια αλυσίδα του Markov σαν μια ακολουθία $X_0, X_1, X_2, ...$ διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα ότι η υπό συνθήκη κατανομή της X_{n+1} όταν δίνονται οι $X_0, X_1, X_2, ...$ εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_n, δηλαδή

$$prob\{X_{n+1} = k / X_n = r, ..., X_0 = \lambda\} = prob\{X_{n+1} = k / X_n = r\}$$

Ειδικά, όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε έχουμε τις λεγόμενες πεπερασμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες. Όταν δεν

[17] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 183

αναφερόμαστε συγκεκριμένα αν ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος ή αριθμήσιμος, τότε πάντοτε θα υπονοείται ότι είναι πεπερασμένος.

Έστω $X_t \quad (t = 0,1,...)$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές από το χώρο των καταστάσεων $S = (1,2,...,k)$. Ορίζουμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες

$$p_{ij}(t) = prob\{X_t = j / X_t = i\} \quad για \quad i, j = 1,2,...,k \quad και \quad t = 1,2,... \qquad (4.3.2)$$

Οι πιθανότητες $p_{ij}(t)$ είναι η πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_t να μεταβεί στην κατάσταση j δεδομένου ότι την προηγούμενη χρονική στιγμή ήταν στην κατάσταση i. Οι πιθανότητες $p_{ij}(t)$ για $i, j = 1,2,...,k$ και $t = 0,1,...$ ονομάζονται και πιθανότητες μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ο πλέον βολικός τρόπος αναφοράς σε αυτές τις πιθανότητες είναι με τη μορφή ενός πίνακα $\mathrm{P}(t)$, με πεπερασμένες διαστάσεις όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι πεπερασμένος. Δηλαδή είναι σημαντικό ότι κάθε στοιχείο του πίνακα εκτιμάται μόνο του. Αυτό ελαττώνει σημαντικά τον αριθμό των ελάχιστων δεδομένων που μας είναι αναγκαία για να εκτιμήσουμε τον πίνακα μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Αντίστροφα, κάθε στοχαστικός πίνακας P ορίζει μονοσήμαντα μια Μαρκοβιανή αλυσίδα τουλάχιστον θεωρητικά. Αν τώρα οι καταστάσεις του έχουν και φυσικό νόημα, τότε έχουμε ένα πραγματικό πρόβλημα και όχι ένα σενάριο επιστημονικής φαντασίας.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας X_t θα είναι

$$\mathrm{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) ... p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22(t)} ... p_{2k}(t) \\ ... & \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) ... p_{kk}(t) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathrm{P}(t)$ ονομάζεται πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας για το χρονικό διάστημα $[t-1, t)$. Είναι προφανές ότι αν οι πιθανότητες $p_{ij}(t)$ είναι συναρτήσεις της χρονικής στιγμής χρειαζόμαστε τις τιμές τους για κάθε χρονική στιγμή t. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3</u>

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται στατική ή ομογενής, αν η πιθανότητα μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη είναι ανεξάρτητη από το χρόνο που γίνεται η μετάβαση. Έτσι έχουμε για όλες τις καταστάσεις i και j

$$prob\{X_t = j / X_{t-1} = i\} = p_{ij} \quad για \quad κάθε \quad t = 1,2,... \tag{4.3.3}$$

Όταν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν είναι ομογενής τότε ονομάζεται μη-ομογενής.

Στην ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι προφανές ότι έχουμε ένα μόνο πίνακα μετάβασης P σε αντίθεση με τη μη-ομογενή Μαρκοβιανή όπου έχουμε μια ακολουθία πινάκων μετάβασης $\{\mathrm{P}(t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του πίνακα μετάβασης P είναι ότι είναι μη-αρνητικός, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι θετικά ή μηδέν και ότι το άθροισμα των γραμμών του είναι ίσο με τη μονάδα. Κάθε πίνακας που έχει τις δυο αυτές ιδιότητες καλείται στοχαστικός πίνακας. Πράγματι, αν πάρουμε μια γραμμή του πίνακα, έχουμε

$$\begin{aligned} & p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{ik} = prob\{X_t = 1 / X_{t-1} = i\} + ... + prob\{X_t = k / X_{t-1} = i\} = \\ & = prob\{(X_t = 1) \cup (X_t = 2) \cup ... \cup (X_t = k) / X_{t-1} = i\} = prob\{X_t \in S / X_{t-1} = i\} = 1 \end{aligned}$$

Ο πίνακας P μιας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας περιέχει όλη την επαρκή πληροφορία για αυτήν. Με αυτό εννοούμε ότι για να απαντήσουμε σε όλα τα σημαντικά προβλήματα μιας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας, μας είναι επαρκής η γνώση του πίνακα P.

4.4 MARTINGALES

Μια άλλη σημαντική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών είναι αυτή των Martingales. Οι ρίζες της μελέτης των Martingales βρίσκονται στα τυχερά παιχνίδια. Στην πραγματικότητα η ονομασία Martingale προέρχεται από μια παλιά στρατηγική γύρω στα 1815 όπου όταν κάποιος χάνει σε μια παρτίδα ενός τυχερού παιχνιδιού, τότε διπλασιάζει το στοίχημα στην επόμενη παρτίδα για να επανακτήσει τα χρήματά του[18].

Τα τυχερά παιχνίδια αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης από τα πολύ παλιά χρόνια και είναι γνωστή η αλληλογραφία του Pascal με τον Fermat γύρω στα 1654. Ο όρος Martingale για την κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών που θα παρουσιάσουμε οφείλεται στον J. Ville (1939). Τα Martingales μελετήθηκαν εκτεταμένα από τον Paul Levy από το 1934 και από τον J. L. Doob από το 1940 και μετά. Κλασσικά βιβλία σήμερα είναι αυτά των Doob (1953), Karlin και Taylor (1975) και David Williams (1991).

Σήμερα η θεωρία των Martingales έχει μια εκτεταμένη ανάπτυξη και μεγάλη ευρύτητα εφαρμογών από τη θεωρία πιθανοτήτων έως τη μαθηματική ανάλυση και σε άλλους χώρους της επιστήμης όχι καθαρά μαθηματικούς. Εδώ θα δούμε και θα

[18] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 188

αναπτύξουμε ένα πυρήνα γνώσεων για τα Martingales που είναι επαρκής για την ανάπτυξη χρηματοοικονομικών εφαρμογών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ σε χρόνο διακριτό είναι ένα martingale εάν ισχύουν τα παρακάτω

(α) $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$ και

(β) $\mathrm{E}[X_{n+1} / X_0, X_1, ..., X_n] = X_n$

Από το (β) του παραπάνω ορισμού παρατηρούμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X_n είναι το κεφάλαιο μιας επένδυσης, τότε η μέση τιμή του κεφαλαίου μετά την πάροδο μιας χρονικής περιόδου είναι ίση με το κεφάλαιο. Το παιχνίδι δηλαδή που παίζεται με αυτή την επένδυση έχει τον χαρακτήρα του arbitrage.

Θα δώσουμε τώρα έναν ευρύτερο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ και $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ δυο στοχαστικές διαδικασίες σε χρόνο διακριτό. Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με την διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ εάν ισχύουν τα παρακάτω

(α) $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty$

(β) $\mathrm{E}[X_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = X_n$ και

(γ) η X_n είναι μια συνάρτηση των $Y_0, Y_1, ..., Y_n$

Η τυχαία μεταβλητή Y_n της στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ δεν είναι κατά ανάγκη μια πραγματική τυχαία μεταβλητή. Μπορεί για παράδειγμα να είναι ένα διάνυσμα που τη στιγμή n να περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για την κατάσταση του οικονομικού περιβάλλοντος της επένδυσης X_n. Αν για παράδειγμα η X_n αποτελεί την τιμή ενός χαρτοφυλακίου μετοχών η Y_n μπορεί να είναι το διάνυσμα των τιμών των μετοχών που είναι αντιπροσωπευτικές όλων των κατηγοριών μετοχών στο χρηματιστήριο. Είναι πολύ χρήσιμο να θεωρούμε την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $Y_0, Y_1, ..., Y_n$ σαν την πληροφορία ή την ιστορία της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι τη χρονική στιγμή n ή τη φάση n.

Στο σημείο αυτό, δίνουμε δυο απλές γενικεύσεις της στοχαστικής διαδικασίας των martingales.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.6

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ σε χρόνο διακριτό. Συμβολίζουμε με

$$X_n^- = \min\{X_n, 0\} \text{ για } n = 0,1,2,\ldots$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ θα είναι ένα supermartingale εάν ισχύουν τα παρακάτω

(α) $\mathrm{E}[X_n^-] > -\infty$

(β) $\mathrm{E}[X_{n+1} / X_0, X_1, \ldots, X_n] \leq X_n$

Από το (β) του ορισμού 4.5 παρατηρούμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X_n είναι το κεφάλαιο μιας επένδυσης τότε η μέση τιμή του κεφαλαίου μετά την πάροδο μιας χρονικής στιγμής είναι μικρότερη από το κεφάλαιο. Το supermartingale δηλαδή είναι μια διαδικασία η οποία κατά ένα ‘’βεβαρυμμένο μέσο όρο’’ ελαττώνεται συνεχώς.

Τα martingales συνδέονται στενά με τις αρμονικές συναρτήσεις στην πιθανοθεωρητική θεωρία δυναμικού. Η ονομασία των supermartingales προήλθε από το γεγονός ότι αυτή η διαδικασία αντιστοιχεί στις υπεραρμονικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.7

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ και $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ δυο στοχαστικές διαδικασίες σε χρόνο διακριτό. Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα supermartingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ εάν ισχύουν τα παρακάτω

(α) $\mathrm{E}[X_n^-] > -\infty$

(β) $\mathrm{E}[X_{n+1} / Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] \leq X_n$

(γ) η X_n είναι μια συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$

Μια άλλη στοχαστική διαδικασία με ιδιότητες αντίθετες από το supermartingale είναι το submartingale.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ σε χρόνο διακριτό. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ θα είναι ένα submartingale εάν ισχύουν τα παρακάτω

(α) $\mathrm{E}\left[X_n^+\right] < \infty$ όπου $X_n^+ = \max\{X_n, 0\}$

(β) $\mathrm{E}\left[X_{n+1} / X_0, X_1, \ldots, X_n\right] \geq X_n$

Από το (β) του ορισμού 4.7 παρατηρούμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X_n είναι ένα submartingale και εκφράζει το κεφάλαιο μιας επένδυσης τότε η μέση τιμή του κεφαλαίου μετά την πάροδο μιας χρονικής στιγμής είναι μεγαλύτερη από το κεφάλαιο. Αυτό βέβαια είναι μια πολύ καλή περίπτωση για επένδυση.

Παρατηρούμε ότι στους ορισμούς 4.4, 4.6 κα 4.7 περιέχεται η συνθήκη << η X_n είναι μια συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$>>. Αυτό σημαίνει ότι ουσιαστικά η γνώση των $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ προσδιορίζει πλήρως την τιμή της X_n. Έστω ότι η X_n είναι

$$X_n = g(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$$

τότε έχουμε ότι

$$\mathrm{E}\left[X_n / Y_0, Y_1, \ldots, Y_n\right] = \mathrm{E}\left[g(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) / Y_0, Y_1, \ldots, Y_n\right] = g(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = X_n$$

Θα δώσουμε τώρα τις παρακάτω σημαντικές προτάσεις.

<u>Πρόταση 4.1</u>: Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι martingale σε σχέση με την $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε αν $m < n$ έχουμε ότι

$$\mathrm{E}\left[X_n / Y_0, Y_1, \ldots, Y_m\right] = X_m$$

<u>Πρόταση 4.2</u>: Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι martingale σε σχέση με την $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Τότε

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = \mathrm{E}\left[X_0\right] \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Παράδειγμα 4.3

Μια χρηματιστηριακή εταιρία πουλά δικαιώματα αγοράς συνεχώς, τα οποία έχουν βάση διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία. Το αναμενόμενο κέρδος ή ζημία είναι πεπερασμένο για κάθε ένα από τα δικαιώματα αγοράς. Η αξία των περιουσιακών στοιχείων σχηματίζεται ανεξάρτητα του καθενός από όλα τα άλλα. Το αναμενόμενο κέρδος από κάθε δικαίωμα αγοράς για τη χρηματιστηριακή εταιρία είναι μηδέν, ικανοποιώντας έτσι την αρχή του no-arbitrage. Αν X_n είναι το συνολικό κέρδος της χρηματιστηριακής εταιρίας από την υλοποίηση των n δικαιωμάτων αγοράς, δείξτε ότι αν εξακολουθεί να επενδύει σε δικαιώματα αγοράς, τότε η X_n είναι ένα martingale σε σχέση με το κέρδος ή τη ζημία από τα δικαιώματα αγοράς.

Έστω Y_i η τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται να είναι

Y_i : η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το κέρδος ή τη ζημία από το i δικαίωμα αγοράς (call option) για $i = 1,2,...,n$.

Αφού το αναμενόμενο κέρδος ή ζημία είναι πεπερασμένο αυτό σημαίνει ότι

$$E[|Y_n|] < \infty$$

Είναι προφανές ότι η χρηματιστηριακή εταιρία από 0 πωλήσεις δικαιωμάτων αγοράς θα έχει μηδενικό αναμενόμενο κέρδος ή ζημία και επομένως έχουμε ότι

$$Y_0 = 0 \text{ και } E[Y_0] = 0$$

Επιπλέον όμως το αναμενόμενο κέρδος για τη χρηματιστηριακή εταιρία είναι μηδέν για κάθε ένα από τα δικαιώματα αγοράς (no-arbitrage) και έτσι έχουμε ότι

$$E[Y_n] = 0 \text{ για } n = 1,2,...$$

Η τυχαία μεταβλητή X_n έχει οριστεί να είναι το συνολικό κέρδος της χρηματιστηριακής εταιρίας από την υλοποίηση των n δικαιωμάτων αγοράς επομένως

$$X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$|X_n| = |Y_1 + Y_2 + ... + Y_n| \le |Y_1| + |Y_2| + ... + |Y_n|$$

Παίρνουμε τη μέση τιμή και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$E(|X_n|) \le E(|Y_1 + Y_2 + ... + Y_n|) \le E(|Y_1|) + E(|Y_2|) + ... + E(|Y_n|) \le \infty$$

Θα δείξουμε τώρα τη δεύτερη συνθήκη στην πορεία μας για να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς την $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} &E[X_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = E[Y_1 + Y_2 + ... + Y_n + Y_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = \\ &= E[X_n + Y_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = E[X_n / Y_0, Y_1, ..., Y_n] + E[Y_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] \end{aligned}$$

Έχουμε όμως ότι αφού $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ η τιμή της X_n προσδιορίζεται πλήρως από τις $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ και επομένως

$$E[X_n / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = X_n$$

επιπλέον έχουμε από την υπόθεση ότι τα n δικαιώματα αγοράς έχουν βάση διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία κατά συνέπεια ότι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ είναι ανεξάρτητες άρα

$$E[Y_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = E[Y_{n+1}] = 0$$

Από τα παραπάνω, λοιπόν, γίνεται

$$E[X_{n+1} / Y_0, Y_1, ..., Y_n] = X_n$$

Η συνθήκη ότι η X_n είναι συνάρτηση των $Y_0, Y_1, ..., Y_n$ είναι προφανής αφού έχουμε ότι $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ επομένως η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Δηλαδή το συνολικό κέρδος ή ζημία της χρηματιστηριακής εταιρίας είναι ένα martingale σε σχέση με το κέρδος ή τη ζημία από κάθε δικαίωμα αγοράς με διαφορετική βάση σαν περιουσιακό στοιχείο που πουλά.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε και θα αποδείξουμε μια πρόταση η οποία είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε χρηματοοικονομικά προβλήματα.

<u>Πρόταση 4.3</u>: Έστω $Y_0, Y_1, Y_2, ...$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Επιπλέον θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $E[|X|] < \infty$. Τότε η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ που ορίζεται σαν

$$X_n = E[X / Y_0, Y_1, .., Y_n]$$

είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Το martingale $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται και διαδικασία του Doob.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω Z είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε είναι γνωστό ότι

$$|E(Z)| \leq E(|Z|)$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$E[|X_n|] = E\{|E[X / Y_0,\dots,Y_n]|\} \leq E\{E[|X / Y_0,\dots,Y_n|]\} = E[|X|] < \infty$$

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει και η δεύτερη συνθήκη για να είναι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ένα martingale ως προς την $Y_0,\dots,Y_n$.

$$E[X_{n+1} / Y_0, Y_1,\dots,Y_n] = E\{E[X / Y_0,\dots,Y_n] / Y_0,\dots,Y_n\} = E\{X / Y_0,\dots,Y_n\} = X_n$$

Η τρίτη συνθήκη είναι προφανής και επομένως το ζητούμενο αποδείχθηκε.

4.5 ΜΕΡΙΚΟΙ ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε I_t είναι ένα σύνολο πληροφορίας το οποίο τίθεται στη διάθεση του ανθρώπου που έχει την ευθύνη των αποφάσεων στο χρόνο t. Θα δώσουμε τώρα έναν ορισμό σχετικά με τα σύνολα πληροφορίας $I_t \quad (t = 1,2,\dots)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.9

Έστω $\{I_t, t \in [0,\infty]\}$ μια οικογένεια συνόλων πληροφορίας τα οποία γίνονται γνωστά ακολουθιακά συνεχώς στους ανθρώπους που αξιοποιούν την πληροφορία. Θα λέμε ότι αυτή η οικογένεια αποτελεί ένα φιλτράρισμα αν για οποιαδήποτε k,m,n έχουμε ότι

$$I_k \subseteq I_m \subseteq I_n \subseteq \dots \text{ για κάθε } k,m,n$$

Ο ορισμός του φιλτραρίσματος μιας οικογένειας συνόλων πληροφορίας μας ανοίγει το δρόμο να συσχετίσουμε αυτή τη ροή πληροφορίας με την εξέλιξη μιας στοχαστικής διαδικασίας. Αυτό γίνεται στον παρακάτω ορισμό μιας προσαρμοσμένης στοχαστικής διαδικασίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.10

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ και μια οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$. Θα λέμε ότι η στοχαστική $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ αν για κάθε t το σύνολο της πληροφορίας που περιέχεται στην τυχαία μεταβλητή X_t υπάρχει στο σύνολο πληροφορίας I_t. Με άλλα λόγια, η τυχαία μεταβλητή X_t θα είναι γνωστή όταν δίνεται το σύνολο πληροφορίας I_t.

Αφού εμβαθύνει στους παραπάνω δυο ορισμούς ο αναγνώστης, τότε είναι ώριμος να κατανοήσει τον όχι πολύ διαφορετικό, αλλά ελαφρά τροποποιημένο και ισοδύναμο ορισμό ενός martingale.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.11

Έστω $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία. Θα λέμε ότι είναι ένα martingale σε σχέση με μια οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ και σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας p εάν για κάθε $t=1,2,...$

1. η $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$

2. η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της X_t σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας p είναι πεπερασμένη για κάθε t δηλαδή

$$E[|X_t|]<\infty \text{ για κάθε } t=0,1,2,...$$

3. ισχύει η σχέση

$$E[X_{n+1}/I_1,I_2,...,I_n]=X_n \text{ για κάθε } n=0,1,2,...$$

4.6 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MARTINGALE[19]

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale. Αν για παράδειγμα η τυχαία μεταβλητή X_n εκφράζει την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου τότε ιδιαίτερη σημασία έχουν οι διαφορές

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1} \text{ για κάθε } n=1,2,...$$

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή C_n ορίζεται σαν

C_n ={το ποσό που επενδύεται τη στιγμή $n-1$ που είναι γνωστή η τιμή της X_{n-1} με σκοπό το κέρδος από τη διαφορά ΔX_n}

τότε προφανώς το κέρδος αυτό γίνεται γνωστό τη στιγμή n και είναι

$$C_n\Delta X_n = C_n(X_n - X_{n-1})$$

Αν θεωρήσουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ (προφανώς C_0 δεν υπάρχει) τότε είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ όπου Y_n είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τα συνολικό κέρδος μέχρι τη στιγμή n είναι ίση με

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_n(X_k - X_{k-1}) := (C*X)_n$$

[19] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 201

Η στοχαστική διαδικασία $\{(C*X)_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται ο μετασχηματισμός martingale της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από τη $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Η στοχαστική διαδικασία $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ ονομάζεται η προβλέψιμη διαδικασία. Ο λόγος είναι γιατί η τυχαία μεταβλητή C_n καθορίζεται με βάση την πληροφορία της <<ιστορίας>> της διαδικασίας X_n μέχρι και τη χρονική στιγμή $n-1$. Είναι φανερό ότι

$$Y_n - Y_{n-1} = C_n\left(X_n - X_{n-1}\right)$$

και ότι

$$\left(C*X\right)_0 = 0$$

Είναι σημαντικό εδώ να σημειώσουμε ότι ο μετασχηματισμός martingale $\left(C*X\right)_n$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την προβλέψιμη διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι το διάκριτο ανάλογο του στοχαστικού ολοκληρώματος $\int CdX$.

Εδώ παραθέτουμε ένα πολύ βασικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1

Έστω $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια προβλέψιμη διαδικασία με μη αρνητικές τιμές. Υποθέτουμε ότι η $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$είναι φραγμένη στο $[0,\infty]$δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$C_n < K \text{ για κάθε } n = 1,2,...$$

Έστω η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ η οποία είναι ένα martingale. Τότε ο μετασχηματισμός martingale $\left(C*X\right)_n$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ από την προβλέψιμη διαδικασία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Σημειώνουμε πως οι μετασχηματισμοί martingale σαν εργαλείο κυριαρχούν στη θεωρία των στοχαστικών χρηματοοικονομικών σε χρόνο διακριτό όπως η θεωρία του στοχαστικού ολοκληρωτικού λογισμού κυριαρχεί στην αντίστοιχη θεωρία σε χρόνο συνεχή.

4.7 ΧΡΟΝΟΙ ΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ Η ΙΣΧΥΡΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Μια από τις έννοιες οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόδειξη ασυμπτωματικών κυρίως αποτελεσμάτων είναι η έννοια του χρόνου στάσης ή όπως αναφέρονται σε σχετικοί βιβλιογραφία, χρόνοι Markov[20].

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.12

Έστω $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ $(t = 0,1,2,..)$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία έχει έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων και ορίζεται σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω,Ƒ,P). Μια τυχαία μεταβλητή τ ορισμένη σε αυτό το χώρο ονομάζεται χρόνος στάσης εάν παίρνει μόνο μη αρνητικές ακέραιες τιμές και αν για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n το ενδεχόμενο

$$\{\omega : \tau(\omega) \le n\}$$

προσδιορίζεται πλήρως από τις $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε μερικές στοιχειώδεις ιδιότητες του χρόνου στάσης:

(α) αν s και τ είναι δυο χρόνοι στάσης για μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ τότε και το $s+\tau$ είναι ένας χρόνος στάσης για τη στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$

(β) αν s και τ είναι δυο χρόνοι στάσης για μια στοχαστική διαδικασία τότε και η τυχαία μεταβλητή $\min\{s,\tau\}$ είναι ένας χρόνος στάσης για την ίδια στοχαστική διαδικασία. Το ίδιο ισχύει και για το $\max\{s,\tau\}$.

Τώρα, θα δώσουμε δυο νέες έννοιες για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.13

Ένα τυχαίο ενδεχόμενο A ονομάζεται προγενέστερο του χρόνου $n \ge 0$ για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ αν και μόνο αν προσδιορίζεται πλήρως από τις τυχαίες μεταβλητές $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Όμοια ένα τυχαίο ενδεχόμενο B ονομάζεται μεταγενέστερο του χρόνου $n \ge 0$ αν και μόνο αν προσδιορίζεται πλήρως από τις τυχαίες μεταβλητές $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Για παράδειγμα, ένα τυχαίο ενδεχόμενο A προγενέστερο του χρόνου $n \ge 0$ μπορεί να είναι

A ={η Μαρκοβιανή αλυσίδα να έχει την πορεία $i_0, i_1, \ldots, i_n$

[20] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 205

δηλαδή ουσιαστικά το A προσδιορίζεται πλήρως από

$$\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n\}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές πολύ χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 4.4: Όλα τα τυχαία ενδεχόμενα προγενέστερα (αντίστοιχα μεταγενέστερα) μιας δεδομένης χρονικής στιγμής n για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αποτελούν σ-άλγεβρες.

Πρόταση 4.5: Για κάθε τυχαίο ενδεχόμενο A προγενέστερο του χρόνου n, για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ έχουμε

$$prob\{X_{n+1} = i_{n+1} / X_n = i_n, A\} = prob\{X_{n+1} = i_{n+1} / X_n = i_n\}$$

Γενικά, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

Πρόταση 4.6: Εάν A είναι ένα προγενέστερο τυχαίο ενδεχόμενο, B ένα μεταγενέστερο τυχαίο ενδεχόμενο του χρόνου n για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε

$$prob\{B / X_n = i_n, A\} = prob\{B / X_n = i_n\}$$

Θα γενικεύσουμε τώρα την έννοια του προγενέστερου (ή μεταγενέστερου) τυχαίου ενδεχομένου του χρόνου n, για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αντικαθιστώντας τη δεδομένη χρονική στιγμή n με ένα χρόνο στάσης της Μαρκοβιανής αλυσίδας που όπως γνωρίζουμε είναι μια τυχαία μεταβλητή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.14

Έστω τ ένας χρόνος στάσης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$. Ένα τυχαίο ενδεχόμενο A είναι προγενέστερο του χρόνου στάσης τ αν και μόνον αν για οποιοδήποτε $n = 0,1,2,...$ το τυχαίο ενδεχόμενο $A \cap \{\tau = n\}$ είναι προγενέστερο του χρόνου n για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$. Ισοδύναμα το τυχαίο ενδεχόμενο A είναι προγενέστερο του χρόνου στάσης τ για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν το A προσδιορίζεται πλήρως από τις τυχαίες μεταβλητές

$$\{X_0, X_1, ..., X_\tau\}$$

Παρόμοια ένα τυχαίο ενδεχόμενο B είναι μεταγενέστερο του χρόνου στάσης τ για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν το B προσδιορίζεται πλήρως από τις τυχαίες μεταβλητές

$$\{X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, ...\}$$

Μετά τον ορισμό του τυχαίου ενδεχομένου προγενέστερου ενός χρόνου στάσης για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2

Έστω τ ένας χρόνος στάσης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. Εάν A είναι ένα τυχαίο ενδεχόμενο προγενέστερο του χρόνου τ τότε

$$prob\{X_{\tau+1} = j / X_\tau = i, A\} = prob\{X_{\tau+1} = j / X_\tau = i\} = p_{ij}$$

για οποιαδήποτε $i, j \in S$ για τα οποία έχει έννοια η παραπάνω πιθανότητα.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι ο χρόνος στάσης τ παίρνει τις τιμές $0,1,2,....$ και ότι τα ενδεχόμενα που θα πάρουν κάθε μια από αυτές τις τιμές είναι ανά δυο ασυμβίβαστα, επομένως

$$\begin{aligned}
&prob\{X_{\tau+1} = j, X_\tau = i, A\} = \\
&= \sum_{n\geq 0} prob\{X_{\tau+1} = j, X_\tau = i, \tau = n, A\} = \\
&= \sum_{n\geq 0} prob\{X_{n+1} = j, X_n = i, \tau = n, A\} = \\
&= \sum_{n\geq 0} prob\{X_n = i, \tau = n, A\} prob\{X_{n+1} = j / X_n = i, \tau = n, A\}
\end{aligned}$$

Όμως το τυχαίο ενδεχόμενο $A \cap \{\tau = n\}$ είναι προγενέστερο της χρονικής στιγμής n για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ άρα

$$prob\{X_{n+1} = j / X_n = i, \tau = n, A\} = prob\{X_{n+1} = j / X_n = i\} = p_{ij}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
&prob\{X_{\tau+1} = j / X_\tau = i, A\} = \sum_{n\geq 0} prob\{X_\tau = i, \tau = n, A\} p_{ij} = \\
&= p_{ij} \sum_{n\geq 0} prob\{X_n = i, \tau = n, A\} = p_{ij} prob\{X_\tau = i, A\}
\end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε

$$p_{ij} = \frac{prob\{X_{\tau+1} = j, X_\tau = i, A\}}{prob\{X_\tau = i, A\}} = prob\{X_{\tau+1} = j / X_\tau = i, A\}$$

Την παραπάνω σχέση την αποδείξαμε για οποιοδήποτε τυχαίο ενδεχόμενο A προγενέστερο του χρόνου στάσης τ. Ένα τέτοιο όμως είναι και όλος ο δειγματοχώρος Ω που είναι το σίγουρο ενδεχόμενο και κατά συνέπεια μπορεί να παραληφθεί δηλαδή

$$prob\{X_{\tau+1} = j / X_{\tau} = i\} = p_{ij}$$

Το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε μεταξύ των άλλων μας λέει ότι αν για βήμα στη Μαρκοβιανή αλυσίδα αντί τη μονάδα ορίσουμε ένα χρόνο στάσης της, τότε αυτή διατηρεί τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και επιπλέον η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης μετάβασης είναι η ίδια. Η ιδιότητα αυτή μιας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας ονομάζεται και ισχυρή ιδιότητα του Markov.

4.8 ΤΟ ΕΠΙΛΕΚΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΣΗΣ

Επανερχόμαστε και πάλι στις στοχαστικές διαδικασίες $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ που είναι martingales και στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε ένα από τα βασικά θεωρήματα των martingales τα οποία έχουν ιδιαίτερη αξία στα χρηματοοικονομικά προβλήματα[21].

Αρχίζουμε με μια πρόταση και στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια λήμματα προτού προχωρήσουμε στο βασικό Optional Sampling Theorem.

Πρόταση 4.7: Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Αν τ είναι ένας χρόνος στάσης της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ τότε το τ είναι ένας χρόνος στάσης και της στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Λήμμα 4.1: Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ και έστω τ ένας χρόνος στάσης. Τότε για όλα τα $n \geq k$ έχουμε ότι

$$E\left[X_n I_{(\tau=k)}\right] = E\left[X_k I_{(\tau=k)}\right]$$

Λήμμα 4.2: Εάν $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ και τ είναι ένας χρόνος στάσης για τη $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ τότε για όλα τα $n = 1,2,\ldots$ έχουμε ότι

$$E[X_0] = E[X_{\tau \wedge n}] = E[X_n]$$

Λήμμα 4.3: έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τέτοια ώστε $E[|X|] < \infty$ και έστω τ είναι ένας χρόνος στάσης τέτοιος ώστε $prob\{\tau < \infty\} = 1$. Τότε

[21] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 210

$$\lim_{n\to\infty} E\left[XI_{(\tau\geq n)}\right]=0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} E\left[XI_{(\tau\geq n)}\right]=E[X]$$

Στο σημείο αυτό, ακολουθούν τα εξής παρακάτω θεωρήματα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3</u>

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale και έστω τ είναι ένας χρόνος στάσης. Εάν

$$prob\{\tau<\infty\}=1 \text{ και } E\left[\sup_{n\geq 0}\left|X_{\tau\wedge n}\right|\right]<\infty$$

τότε ισχύει ότι

$$E[X_\tau]=E[X_0]$$

δηλαδή η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς το χρόνο στάσης τ.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι το επόμενο θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4</u>

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Έστω επιπλέον τ είναι ένας χρόνος στάσης για την $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ και υποθέτουμε ότι

$$E(\tau)<\infty$$

και ότι η μέση τιμή των προσαυξήσεων της $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ για κάθε χρονική στιγμή $n<\tau$ δεδομένης της πληροφορίας για την $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $n<\tau$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει μια σταθερά K τέτοια ώστε

$$E\left[\left|X_{n+1}-X_n\right|/Y_0,Y_1,\ldots,Y_n\right]\leq k \text{ για } n<\tau$$

Τότε

$$E[X_\tau]=E[X_0]$$

Δηλαδή η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς το χρόνο στάσης τ.

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το Optional Stopping Θεώρημα του Doob.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.5

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale και έστω τ είναι ένας χρόνος στάσης. Υποθέτουμε ότι ισχύει

(α) ο χρόνος στάσης είμαι μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένες τιμές δηλαδή $prob\{\tau < \infty\} = 1$

(β) το martingale $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ έχει πεπερασμένη κατά μέτρο μέση τιμή δηλαδή $E[|X_\tau|] < \infty$

(γ) ισχύει η ασυμπτωτική συνθήκη $\lim_{n\to\infty} E[X_n I_{(\tau>n)}] = 0$ τότε $E[X_\tau] = E[X_0]$

δηλαδή η $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale ως προς το χρόνο στάσης τ.

4.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ MARTINGALES

Τα ασυμπτωτικά θεωρήματα για τα martingales είναι από τα πλέον ισχυρά θεωρήματα στη θεωρία πιθανοτήτων και με εφαρμογές σε άλλους τομείς της Μαθηματικής επιστήμης[22]. Θα αρχίσουμε την παρουσίασή τους με ένα χρήσιμο ορισμό αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό μιας δείκτριας συνάρτησης $\mathrm{I}_{(|X_n|>C)}$.

$$\mathrm{I}_{(|X_n|>C)} = \begin{cases} 1, & |X_n| > C \\ 0, & |X_n| < C \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.15

Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ ή μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ θα λέμε ότι αυτή είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη εάν

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\geq 0} E[|X_n| I_{(|X_n|>C)}] = 0$$

Θα δώσουμε τώρα δυο ικανές συνθήκες για να είναι μια στοχαστική διαδικασία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη οι οποίες αναγνωρίζονται πολύ ευκολότερα από το βασικό ορισμό.

[22] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 221

(α) Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν

$$X_n \leq Y \text{ για κάθε } n$$

(β) Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για k και a σταθερές με $a > 0$ έχουμε ότι

$$E\left[|X_n|^{1+a}\right] \leq k < 0 \text{ για κάθε } n$$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα σύγκλισης των martingales.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.6</u>

(Βασικό θεώρημα σύγκλισης των martingales)

(α) Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα submartingale τέτοιο ώστε $\sup_{n\geq 0} E\left[|X_n|\right] < \infty$ τότε υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή X στην οποία η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει με πιθανότητα ένα, δηλαδή

$$prob\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1$$

(β) Εάν η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα martingale και είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε επιπλέον έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|\right] = 0$ και

$$E[X_n] = E[X] \text{ για όλα τα } n$$

Θα διαπιστώσουμε τώρα το λεγόμενο θεώρημα σύγκλισης κατά τετραγωνικό μέσο των martingales.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7</u>

(Martingale mean square convergence theorem)

Έστω $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ένα martingale και για την οποία για κάποια σταθερά k ισχύει ότι

$$E\left[X_n^2\right] \leq k < \infty \text{ για όλα τα } n$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει καθώς το n πάει στο άπειρο σε μια τυχαία μεταβλητή X και κατά πιθανότητα και κατά τετραγωνικό μέσο. Δηλαδή

$$prob\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1$$

και

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|X_n - X\right|^2\right] = 0$$

επιπλέον

$$E\left[X_n\right] == E\left[X_0\right] = E\left[X\right]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΥΤΟΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ – ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η περίοδος από την αγορά του Ευρωπαϊκού δικαιώματος μιας μετοχής μέχρι τη στιγμή παράδοσης ή μη της μετοχής ονομάζεται trading horizon (εμπορικός ορίζοντας).

Γενικότερα όμως έστω ένα σύνολο

$$\hat{T} = \{0,1,2,\ldots,T\}$$

όπου 0 είναι η αρχή μιας οποιασδήποτε οικονομικής ενέργειας και T είναι το πέρας αυτής. Το σύνολο $\hat{T}$ θα ονομάζεται εμπορικός ορίζοντας και τα στοιχεία του συνόλου $\hat{T}$ δηλαδή τα $0,1,\ldots,T$ σαν trading dates (εμπορικές ημέρες).

Έως τώρα υποθέταμε ένα δεδομένο χώρο πιθανοτήτων (Ω,Ƒ,P) μέσα στον οποίο είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε στοχαστικά μοντέλα, δηλαδή εξισώσεις που θα περιέχουν τυχαίες μεταβλητές για να περιγράψουμε, να προβλέψουμε και να δώσουμε λύσεις στρατηγικής για όλες τις ‘’καταστάσεις της αγοράς’’. Στις προηγούμενες ενότητες, ο Ω είναι ένας πεπερασμένος χώρος πιθανοτήτων, δηλαδή έχει ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων ω με το καθένα από αυτά να έχει θετική πιθανότητα. Θα αναφερόμαστε σε στοχαστικά μοντέλα που αναφέρονται σε πεπερασμένους χώρους πιθανοτήτων σαν μοντέλα πεπερασμένης αγοράς (finite market models). Οι πραγματικές αγορές φυσικά είναι σχεδόν πάντα πεπερασμένες και έτσι δε θα χάνουμε δουλεύοντας σε πεπερασμένο Ω ούτε σε γενικότητα ούτε σε ουσία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με τη γενική θεώρηση της διαδικασίας αξίας ενός χαρτοφυλακίου τις στρατηγικές εμπορίου των χαρτοφυλακίων και θα ορίσουμε τις αυτοχρηματοδοτούμενες διαδικασίες χαρτοφυλακίου.

Μετά από αυτή τη γενική θεώρηση των ‘’καταστάσεων της αγοράς’’ θα περάσουμε στη μελέτη της Δ-στρατηγικής διαδικασίας ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς μετοχής σε ένα πεπερασμένο εμπορικό ορίζοντα, κάτω από τη συνθήκη του μη-βέβαιου κέρδους. Όμοια θα μελετήσουμε και την αντίστοιχη διαδικασία εξασφάλισης σε πεπερασμένο εμπορικό ορίζοντα.

Το κεφάλαιο θα κλείσει με τη μελέτη του Αμερικανικού δικαιώματος μετοχής, όπου το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί οποτεδήποτε μέσα στον εμπορικό ορίζοντα και κατά συνέπεια θα εισέλθουν ενδιαφέρουσες έννοιες που γνωρίσαμε όπως οι χρόνοι στάσης και το Optional Sampling Theorem.

5.2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$S_i(t) = \{\text{η τιμή της μονάδας του περιουσιακού στοιχείου } i \text{ τη χρονική στιγμή } t\}$$

Είναι σημαντικό για την καλύτερη κατανόηση σε ότι ακολουθεί παρακάτω, να ξεκαθαρίσουμε ότι όταν αναφερόμαστε στη χρονική στιγμή t, αυτό είναι ένα σημείο πάνω στην ευθεία που μετρά το χρόνο, ενώ όταν λέμε την έκφραση ''στο χρόνο t'' εννοούμε το διάστημα $[t-1,t]$. Δηλαδή η αρχή του χρόνου t είναι η χρονική στιγμή $t-1$, που είναι συγχρόνως και το τέλος του χρόνου $t-1$, και τέλος του είναι η χρονική στιγμή t, που είναι συγχρόνως και η αρχή του χρόνου $t+1$[23].

Υποθέτουμε ότι η ''κατάσταση'' της αγοράς περιγράφεται από τις τιμές $d+1$ περιουσιακών στοιχείων τις οποίες μαζεύουμε σε ένα διάνυσμα $S(t)$ όπου

$$S(t) = \{S_0(t), S_1(t), \ldots, S_d(t)\}, \quad t \in T$$

Είναι φανερό ότι για κάθε $i = 0,1,\ldots,d$ και για μια συγκεκριμένη τιμή του t η $S_i(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Για όλες τις τιμές του $t \in T$ η $\{S_i(t)\}_{t=0}$ αποτελεί προφανώς μια στοχαστική διαδικασία. Η $\{S(t)\}_{t=0}$ αποτελεί μια $d+1$-διάστατη στοχαστική διαδικασία, η οποία περιγράφει την εξέλιξη μέσα στο χρόνο των τιμών $d+1$ περιουσιακών στοιχείων που περιγράφουν την ''κατάσταση'' της αγοράς. Η $\{S(t)\}_{t=0}$ ονομάζεται και price process ή securities price process, δηλαδή στοχαστική διαδικασία τιμών.

Όταν λέμε περιουσιακό στοιχείο, αυτό περιλαμβάνει για παράδειγμα την τιμή ενός τόνου σιταριού, ένα κιλό χρυσάφι, την τιμή του βαρελιού του πετρελαίου, κλπ. Θα βοηθάει όμως περισσότερο στην κατανόηση αν η εποπτική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι ότι οι $S_i(t)$ για $i = 1,\ldots,d$ αποτελούν τις τιμές τη χρονική στιγμή t κάποιων μετοχών ή παραγώγων τους και κατά συνέπεια το $S(t)$ είναι η αξία μονάδας του χαρτοφυλακίου. Από αυτή την εποπτική εικόνα που θα χρησιμοποιήσουμε από το σημείο αυτό προκύπτει και η ονομασία securities price processes.

Παραδοσιακά το περιουσιακό στοιχείο με δείκτη 0 λαμβάνεται να είναι μια επένδυση χωρίς ρίσκο δηλαδή για παράδειγμα καταθέσεις σε μια τράπεζα, οι ομολογίες σε μια τράπεζα, κλπ. Οι υπόλοιπες d επενδύσεις περιέχουν κίνδυνο και χρησιμοποιούμε για αυτές τους δείκτες $1,2,\ldots,d$.

[23] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 230

Υποθέτουμε ότι όλα τα περιουσιακά στοιχεία $0,1,2,\ldots,d$ είναι εντελώς διαχωρίσιμα με την έννοια ότι μπορούμε να επενδύσουμε για παράδειγμα 2,84 μονάδες του περιουσιακού στοιχείου $i=0,1,\ldots,d$. Δε χρειάζεται με άλλα λόγια οι μονάδες επένδυσης να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$\delta_i(t)$: {η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό μονάδων του περιουσιακού στοιχείου i τη χρονική στιγμή t που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής}

Ορίζουμε το διάνυσμα $\delta(t)$ να είναι

$$\delta(t)=\left(\delta_0(t),\delta_1(t),\ldots,\delta_d(t)\right)$$

Η στοχαστική διαδικασία $\left\{\delta(t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται και εμπορική στρατηγική (trading strategy) ή dynamic portfolio (δυναμικό χαρτοφυλάκιο) στο χρόνο t.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$V_\delta(t)$:{η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την αξία της συνολικής επένδυσης με βάση την εμπορική στρατηγική $\delta(t)$ τη χρονική στιγμή t}

Η στοχαστική διαδικασία $\{V_\delta(t)\}_{t=0}$ ονομάζεται και διαδικασία αξίας με βάση την εμπορική στρατηγική $\left\{\delta(t)\right\}_{t=0}^{\infty}$. Είναι εύκολα φανερό ότι

$$V_\delta(t)=\delta(t)\left[S(t)\right]'=\sum_{i=0}^{d}\delta_i(t)S_i(t) \text{ για } t=1,2,\ldots,T$$

και με αρχική συνθήκη

$$V_\delta(0)=\delta(1)\left[S(0)\right]'$$

Η αξία $V_\delta(0)$ είναι το αρχικό κεφάλαιο του επενδυτή. Οι επενδυτές διαλέγουν το χαρτοφυλάκιό τους του χρόνου t μόλις γίνουν γνωστές οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή $t-1$ και κατέχουν αυτό το χαρτοφυλάκιο στη διάρκεια του χρόνου t δηλαδή στο χρονικό διάστημα $(t-1,t)$. Τη χρονική στιγμή t δηλαδή στην αρχή του χρόνου $t+1$ οι επενδυτές προσαρμόζουν την εμπορική τους στρατηγική με βάση τη γνώση των τιμών των περιουσιακών στοιχείων τη χρονική στιγμή t. Είναι δηλαδή με βάση τον ορισμό του προηγούμενου κεφαλαίου η στοχαστική διαδικασία $\left\{\delta(t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ προσαρμοσμένη στη στοχαστική διαδικασία $\left\{S(t)\right\}_{t=0}$. Επιπλέον με την ορολογία του ίδιου κεφαλαίου η στοχαστική διαδικασία $\left\{\delta(t)\right\}_{t=0}^{\infty}$ είναι προβλέψιμη σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\left\{S(t)\right\}_{t=0}$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι με τις αλλαγές των επενδύσεων δεν υπάρχουν έξοδα μεταβίβασης και ότι η δυνατότητα δανεισμού είναι απεριόριστη. Επιπλέον υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν short sales δηλαδή πώληση περιουσιακών στοιχείων που δεν υπάρχουν στην κατοχή του πωλητή.

Τη χρονική στιγμή t μόλις έχουν γίνει γνωστές οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων $S(t)$ ο επενδυτής εφαρμόζει την εμπορική στρατηγική $\delta(t+1)$ η οποία θα παραμείνει σταθερά κατά τη διάρκεια του χρόνου $t+1$ δηλαδή στο χρονικό διάστημα $[t-1,t]$. Η αξία τότε του χαρτοφυλακίου που τη στιγμή t που γίνονται γνωστές οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων $S(t)$ είναι $\delta(t)[S(t)]'$ μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια του χρόνου $t+1$ και γίνεται $\delta(t+1)[S(t)]'$. Δεδομένου ότι νέα κεφάλαια δεν επενδύονται παρά μόνο μέσω του numeraire έχουμε προφανώς ότι

$$\delta(t+1)[S(t)]' = \delta(t)[S(t)]'$$

Τη χρονική στιγμή $t+1$ που γίνονται γνωστές οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων $S(t+1)$ η αξία του χαρτοφυλακίου $V_\delta(t+1) = \delta(t+1)[S(t+1)]'$. Η διαφορά των αξιών του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t+1$ που είναι $V_\delta(t+1)$ από την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t που είναι $V_\delta(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned} V_\delta(t+1) - V_\delta(t) &= \delta(t+1)[S(t+1)]' - \delta(t)[S(t)]' = \delta(t+1)[S(t+1)]' - \delta(t+1)[S(t)]' = \\ &= \delta(t+1)[S(t+1) - S(t)]' = \delta(t+1)[\Delta S(t+1)]' \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το κέρδος του επενδυτή από το χαρτοφυλάκιό του στη διάρκεια του χρόνου $t+1$. Αυτό μας δίνει την αφορμή να ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία κέρδους.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1</u>

Έστω μια στοχαστική διαδικασία τιμών $[S(t)]_{t=0}$ και μια εμπορική στρατηγική $[\delta(t)]_{t=0}$. Ορίζουμε σαν στοχαστική διαδικασία κέρδους και τη συμβολίζουμε με $G_\delta(t)$ (gain process) με βάση την εμπορική στρατηγική $[\delta(t)]_{t=0}$ τη στοχαστική διαδικασία που δίνεται από τη σχέση

$$G_\delta(t) = \sum_{i=1}^{t} \delta(i)[\Delta S(i)]' \text{ για } t = 1,2,\ldots,T$$

Μια τέτοια στοχαστική διαδικασία αξίας $[V_\delta(t)]_{t=0}$ ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη. Θα δώσουμε τώρα μια πρόταση που μας παρέχει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια στοχαστική διαδικασία αξίας αυτοχρηματοδοτούμενη.

Πρόταση 5.1: Έστω μια στοχαστική διαδικασία τιμών $\{S(t)\}_{t=0}$ και μια εμπορική στρατηγική $\{\delta(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Η στοχαστική διαδικασία αξίας $\{V_\delta(t)\}_{t=0}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αν και μόνο αν ισχύει

$$\Delta\delta(t)\left[S(t-1)\right]' = 0$$

5.3 ΕΦΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε πότε μια στοχαστική διαδικασία αξιών $\{V_\delta(t)\}_{t=0}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη[24]. Σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη διαδικασία αξιών για ένα μοντέλο αγοράς οδηγούν ένας μεγάλος αριθμός από εμπορικές στρατηγικές, οι οποίες όλες μαζί αποτελούν το σύνολο Δ των εμπορικών στρατηγικών που οδηγούν σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στοχαστική διαδικασία αξιών $\{V_\delta(t)\}$.

Στο σύνολο Δ όμως περιέχονται και εμπορικές στρατηγικές με αρνητικά στοιχεία πέρα από αυτό που αντιστοιχεί στο numeraire. Το φυσικό νόημα ενός αρνητικού στοιχείου σε μια εμπορική στρατηγική είναι ότι ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα να δανείζεται περιουσιακά στοιχεία ή να πουλά περιουσιακά στοιχεία χωρίς να τα κατέχει. Αυτό όμως έχει αποκλειστεί από τις υποθέσεις μας για αυτό το λόγο ορίζουμε ένα υποσύνολο του Δ το Δ_ε το οποίο περιέχει εκείνες τις εμπορικές στρατηγικές που έχουν όλα τα μη-numeraire στοιχεία της θετικά ή μηδέν. Το σύνολο Δ_ε ονομάζεται το σύνολο των εφικτών εμπορικών στρατηγικών που οδηγούν σε αυτοχρηματοδοτούμενες διαδικασίες αξιών.

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της ευκαιρίας κέρδους για μια διαδικασία αξιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2

Έστω μια στοχαστική διαδικασία τιμών $\{S(t)\}_{t=0}$ και το σύνολο των εφικτών εμπορικών στρατηγικών Δ_ε που οδηγούν σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη διαδικασία αξιών $\{V_\delta(t)\}_{t=0}$. Μια εφικτή εμπορική στρατηγική $\hat{\delta}(t)$ είναι μια ευκαιρία κέρδους η οποία είναι τέτοια ώστε το αρχικό κεφάλαιο να είναι μηδέν και

$$V_{\hat{\delta}}(t) \geq 0 \text{ για όλα τα } t \in T$$

[24] ‘’Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά’’ Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 237

και επιπλέον η τελική μέση τιμή της αξίας

$$E[V_{\hat{\delta}}(t)] > 0$$

Το φυσικό νόημα του παραπάνω ορισμού είναι ότι ευκαιρία κέρδους είναι μια εμπορική στρατηγική η οποία με αρχικό κεφάλαιο 0 και χωρίς δανεισμό περιουσιακών στοιχείων ή πώληση περιουσιακών στοιχείων που δεν κατέχουμε μας οδηγεί μέσα από ένα σύνολο μη αρνητικών αξιών σε μια αυστηρά θετική αναμενόμενη τελική αξία, δηλαδή σε ένα αναμενόμενο βέβαιο κέρδος.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3</u>

Έστω μια στοχαστική διαδικασία τιμών $\{S(t)\}_{t=0}$ και το σύνολο των εφικτών εμπορικών στρατηγικών Δ_{ε} που οδηγούν σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη διαδικασία αξιών $\{V_{\delta}(t)\}_{t=0}$. Η στοχαστική διαδικασία τιμών $\{S(t)\}_{t=0}$ θα ονομάζεται βιώσιμη εάν το σύνολο των εφικτών εμπορικών στρατηγικών Δ_{ε} δεν περιέχει μια ευκαιρία κέρδους.

Θα δώσουμε τώρα έναν ορισμό λιγότερο περιοριστικό από τον Ορισμό 5.2.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4</u>

Έστω μια στοχαστική διαδικασία τιμών $\{S(t)\}_{t=0}$ και το σύνολο των εφικτών εμπορικών στρατηγικών Δ_{ε} που οδηγούν σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη διαδικασία αξιών $\{V_{\delta}(t)\}_{t=0}$. Μια εφικτή εμπορική στρατηγική $\hat{\delta}(t)$ είναι μια ασθενής ευκαιρία κέρδους αν είναι τέτοια ώστε το αρχικό κεφάλαιο να είναι μηδέν και

$$V_{\hat{\delta}}(t) \geq 0 \text{ για όλα τα } t \in T$$

και επιπλέον η τελική μέση τιμή της αξίας

$$E[V_{\hat{\delta}}(t)] \geq 0$$

Όταν για ένα μοντέλο υπάρχει μια ασθενής ευκαιρία κέρδους $\hat{\delta}(t)$ τότε αποδεικνύεται ότι από αυτή μπορεί να βρεθεί μια ευκαιρία κέρδους $\hat{\delta}'(t)$ για το μοντέλο αγοράς. Αυτό αποτελεί και την κύρια χρησιμότητα της έννοιας της ασθενούς ευκαιρίας κέρδους.

5.4 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΞΙΩΝ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ

Έστω τράπεζα με επιτόκιο r και το περιουσιακό στοιχείο είναι το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής.

Στην περίπτωση αυτή ο εμπορικός ορίζοντας είναι N χρονικές στιγμές δηλαδή [25]

$$\hat{T} = \{0,1,\ldots,N\}$$

Η στοχαστική διαδικασία τιμών αποτελείται κυρίως από τη στοχαστική διαδικασία τιμών της μετοχής η οποία τη χρονική στιγμή k είναι συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών $\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)$ και τη συμβολίζουμε με $S_k\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i για $i = 1,2,\ldots,k$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και η X_i εκφράζει το αποτέλεσμα του παρακάτω δυωνυμικού πειράματος

$$X_i = \begin{cases} 1, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; p \;\; \sigma\tau\eta\nu \;\; \acute{\alpha}\nu o\delta o \;\; \tau\eta\varsigma \;\; \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma \\ 0, & \mu\varepsilon \;\; \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; 1-p \;\; \sigma\tau\eta\nu \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta o\delta o \;\; \tau\eta\varsigma \;\; \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma \end{cases}$$

Η στοχαστική διαδικασία αξίας είναι η

$$V_k(X_1, X_2, \ldots, X_k) \text{ για } k = 0,1,\ldots,N$$

Η βέλτιστη εμπορική στρατηγική που υπολογίζεται σε αυτή την περίπτωση είναι προφανώς η στοχαστική διαδικασία

$$\hat{\Delta}_0, \hat{\Delta}_1(X_1), \hat{\Delta}_2(X_1, X_2), \ldots, \hat{\Delta}_N(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η μετοχή στο χρόνο 1 μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές την aS_0 και την bS_0 και υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη

$$b < 1 + r < a$$

Με βάση αυτή τη συνθήκη ορίζονται οι ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο πιθανότητες

$$q = \frac{1+r-b}{a-b} \text{ και } 1-q = \frac{a-(1+r)}{a-b}$$

των οποίων το πιθανοθεωρητικό τους νόημα είναι ότι αν υποθέσουμε ότι το $(1+r)$ κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $\left[b, a\right]$ τότε η q είναι η συνάρτηση κατανομής του $(1+r)$ και το $1-q$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης. Ορίζουμε, λοιπόν, τη μέση τιμή E_q με βάση το μέτρο πιθανότητας q μιας τυχαίας μεταβλητής Y η οποία έχει σχέση με το δυωνυμικό πείραμα X επιτυχίας αποτυχίας να είναι

$$E_q[Y] = qY(X=1) + (1-q)Y(X=0)$$

Άμεσο αποτέλεσμα του ορισμού αυτού της μέσης τιμής είναι το ακόλουθο

[25] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 239

$$E_q\left[S_1(X_1)\right] = qS_1(X_1=1) + (1-q)S_1(X_1=0) =$$
$$= aqS_0 + b(1-q)S_0 = a\frac{1+r-b}{a-b}S_0 + b\frac{a-(1+r)}{a-b}S_0 =$$
$$= \frac{(a-b)+(a-b)r}{a-b}S_0 = (1+r)S_0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, η μέση απόδοση με βάση το ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας είναι ίσο με την απόδοση που θα είχαμε αν το καταθέταμε στην τράπεζα.

Θεωρούμε, τώρα, τη διαδικασία αξίας V_1 η οποία είναι συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X_1 κα θεωρούμε τη μέση τιμή με βάση το μέτρο πιθανότητας q της $(1+r)^{-1}V_1$. Τότε έχουμε

$$E_q\left[(1+r)^{-1}V_1\right] = (1+r)^{-1}E_q\left[V_1\right] = (1+r)^{-1}\left[qV_1(1) + (1-q)V_1(0)\right] = V_0$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η στοχαστική διαδικασία $\left\{(1+r)^{-k}S_k\right\}_{k=0}$, η οποία είναι η στοχαστική διαδικασία τιμών της μετοχής (ή και οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου) με αναγωγή των τιμών στο χρόνο 0 είναι ένα martingale με τη μέση τιμή E_q με βάση το μέτρο πιθανότητας q.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1

Στο απλό δυωνυμικό μοντέλο η στοχαστική διαδικασία τιμών $\left\{(1+r)^{-k}S_k\right\}_{k=0}$ της μετοχής είναι ένα martingale, όταν σαν μέση τιμή πάρουμε την E_q, σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\left\{X_k\right\}_{t=1}$.

Απόδειξη

(α) Θα δείξουμε ότι η $\left\{(1+r)^{-k}S_k\right\}_{k=0}$ είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας $\left\{X_k\right\}_{t=1}$.

Πράγματι, η τιμή της S_k είναι αμέσως γνωστή όταν είναι γνωστές οι τιμές των $X_1, X_2, ..., X_k$. Για παράδειγμα, αν $k=5$ και έχουμε ότι

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1$$

τότε η

$$S_5 = a^3 b^2 S_0$$

αφού αυτό σημαίνει τρεις ανόδους και δυο καθόδους της τιμής της.

(β) Θα δείξουμε ότι η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της $\left\{(1+r)^{-k} S_k\right\}_{k=0}$ με βάση το μέτρο πιθανότητας q είναι πεπερασμένη για κάθε k, δηλαδή

$$E_q\left[\left|(1+r)^{-k} S_k\right|\right] < \infty \text{ για κάθε } k = 0,1,2,\ldots$$

Πράγματι, έχουμε ότι $\left|(1+r)^{-k} S_k\right| = (1+r)^{-k} S_k$ και επιπλέον έχουμε δείξει ότι

$$E_q\left[(1+r)^{-k} S_k\right] = S_0 < \infty$$

πεπερασμένο.

(γ) Θα δείξουμε και την τρίτη απαίτηση για να είναι η στοχαστική διαδικασία $\left\{(1+r)^{-k} S_k\right\}_{k=0}$ με βάση το μέτρο πιθανότητας q ένα martingale, δηλαδή

$$E_q\left[(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} / X_1, X_2, \ldots, X_k\right] = (1+r)^{-k} S_k$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&E_q\left[(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} / X_1, X_2, \ldots, X_k\right] = (1+r)^{-(k+1)} E_q\left[S_{k+1} / X_1, X_2, \ldots, X_k\right] = \\
&= (1+r)^{-(k+1)} (qaS_k + (1-q)bS_k) = (1+r)^{-(k+1)} (qa + (1-q)b) S_k = \\
&= (1+r)^{-(k+1)} \left(a\frac{1+r-b}{a-b} + b\frac{a-(1+r)}{a-b} \right) S_k = \\
&= (1+r)^{-(k+1)} \left(\frac{(a-b)+(a-b)r}{a-b} \right) S_k = (1+r)^{-k} S_k
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα την αναγόμενη στο 0 διαδικασία αξιών $\left\{(1+r)^{-1} V_k\right\}_{k=0}$ όπου το V_k είναι μια συντομογραφία του $V_k(X_1, X_2, \ldots, X_k)$. Θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα για αυτή τη διαδικασία.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2</u>

Θεωρούμε το δυωνυμικό μοντέλο Ευρωπαϊκού δικαιώματος σε χρόνο N και έστω η στοχαστική διαδικασία αξιών

$$V_k = V_k(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

τότε η αναγόμενη στο 0 στοχαστική διαδικασία αξιών είναι ένα martingale με βάση το μέτρο πιθανότητας q σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\left\{X_k\right\}_{k=0}$.

<u>Απόδειξη</u>

(α) Θα δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\left\{(1+r)^{-1} V_k\right\}_{k=0}$ είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας $\left\{X_k\right\}_{k=1}$.

Πράγματι, η $V_k = V_k(X_1, X_2, ..., X_k)$ είναι συνάρτηση των $X_1, X_2, ..., X_k$ και επομένως είναι δεδομένη η τιμή της όταν είναι γνωστές οι τιμές των $X_1, X_2, ..., X_k$.

(β) Θέλουμε να δείξουμε ότι η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της $\{(1+r)^{-1} V_k\}_{k=0}$ με βάση το μέτρο πιθανότητας q είναι πεπερασμένη για κάθε k δηλαδή

$$E_q\left[\left|(1+r)^{-k} V_k\right|\right] < \infty \text{ για κάθε } k = 0,1,2,...$$

Αυτό όμως είναι άμεσο από το γεγονός ότι έχουμε ήδη δείξει ότι

$$E_q\left[(1+r)^{-k} V_k\right] = V_0 < \infty$$

πεπερασμένο.

(γ) Θα δείξουμε και την τρίτη απαίτηση για να είναι η στοχαστική διαδικασία $\{(1+r)^{-1} V_k\}_{k=0}$ με βάση το μέτρο πιθανότητας q ένα martingale δηλαδή

$$E_q\left[(1+r)^{-(k+1)} V_{k+1} / X_1, X_2, ..., X_k\right] = (1+r)^{-k} V_k$$

Έχουμε ότι

$$E_q\left[(1+r)^{-(k+1)} V_{k+1} / X_1, X_2, ..., X_k\right] = (1+r)^{-(k+1)} E_q\left[V_{k+1} / X_1, X_2, ..., X_k\right]$$

Τώρα, για καλύτερη κατανόηση, θα γράψουμε τη μέση τιμή $E_q\left[V_{k+1} / X_1, X_2, ..., X_k\right]$ πιο αναλυτικά θέτοντας μιας και έχουμε το σύμβολο του δεδομένου στις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_k$ τις τιμές

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&E_q\left[V_{k+1}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k, X_{k+1}) / X_1 = x_1, ..., X_k = x_k\right] = \\
&= q V_{k+1}\left(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k, X_{k+1} = 1\right) + (1-q) V_{k+1}(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k, X_{k+1} = 0) = \\
&= (1+r) V_k(X = x_1, ..., X = x_k)
\end{aligned}$$

άρα άμεσα έχουμε ότι

$$E_q\left[(1+r)^{-(k+1)} V_{k+1} / X_1, X_2, ..., X_k\right] = (1+r)^{-(k+1)} (1+r) V_k = (1+r)^{-k} V_k$$

κατά συνέπεια η στοχαστική διαδικασία αξιών είναι ένα martingale με βάση το μέτρο πιθανότητας q σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{X_k\}_{k=1}$.

Τα παραπάνω δυο θεωρήματα έχουν τα παρακάτω άμεσα πορίσματα.

Πόρισμα 5.1: Στο απλό δυωνυμικό μοντέλο έστω η στοχαστική διαδικασία τιμών $\left\{(1+r)^{-k} S_k\right\}_{k=0}$ της μετοχής τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μέσες τιμές με βάση το μέτρο πιθανότητας q

(α) $E_q\left[(1+r)^{-k} S_k / X_1, X_2, ..., X_m\right] = (1+r)^{-m} S_m$ για $m < k$

(β) $E_q\left[(1+r)^{-k} S_k\right] = S_0$

Πόρισμα 5.2: Θεωρούμε το δυωνυμικό μοντέλο Ευρωπαϊκού δικαιώματος σε χρόνο N και έστω η αναγόμενη στο 0 στοχαστική διαδικασία αξιών $\left\{(1+r)^{-1} V_k\right\}_{k=0}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις μέσες τιμές με βάση τα μέτρα πιθανότητας q

(α) $E_q\left[(1+r)^{-k} V_k / X_1, X_2, ..., X_m\right] = (1+r)^{-m} S_m$ για $m < k$

(β) $E_q\left[(1+r)^{-k} V_k\right] = E[V_0]$

5.5 Η ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ[26]

Σε αυστηρή θεμελίωση μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ καλείται Μαρκοβιανή αν για κάθε $t_1, t_2, ..., t_k$

$$prob\left\{a < X_t < b / X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_n} = x_n\right\} = prob\left\{a < X_t < b / X_{t_n} = x_n\right\}$$

όπου $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$.

Ισοδύναμα για μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ θα καλείται Μαρκοβιανή αν για κάθε $k = 0,1,2,...$

$$prob\left\{X_{k+1} = x_{k+1} / X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_k = x_k\right\} = prob\left\{X_{k+1} = x_{k+1} / X_k = x_k\right\}$$

Θα αποδείξουμε τώρα μια πρόταση χρήσιμη γιατί μας παρέχει ένα ισοδύναμο ορισμό της Μαρκοβιανής ιδιότητας.

Πρόταση 5.2: Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ τότε αυτή είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία αν για κάθε συνάρτηση $h(X_{k+1})$ για την οποία ισχύει ότι

$$E\left[\left|h(X_{k+1})\right|\right] < \infty$$

έχουμε ότι

[26] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 244

$$E[h(X_{k+1})/X_0, X_1, \ldots, X_k] = E[h(X_{k+1})/X_k]$$

Στο σημείο αυτό, δίνουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 5.1: Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων (Ω,Ƒ,P) και μια οικογένεια πληροφορίας I η οποία αποτελεί μια υπό συνθήκη – άλγεβρα του Ƒ. Έστω X, Y δυο τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι τέτοιες ώστε

(1) η X είναι ανεξάρτητη από την οικογένεια πληροφορίας I

(2) η Y είναι προσαρμοσμένη στην οικογένεια πληροφορίας I

Αν $f(X,Y)$ είναι μια συνάρτηση των δυο μεταβλητών τότε ορίζουμε σαν $g(y)$ τη συνάρτηση

$$g(y) = E[f(X, Y = y)]$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$E[f(X,Y)/\mathrm{I}] = g(Y)$$

5.6 ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Τα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς ή πώλησης μιας μετοχής ή οποιουδήποτε άλλου περιουσιακού στοιχείου διαφέρουν σημαντικά από τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά δικαιώματα. Έστω $\hat{T} = \{0,1,2,\ldots,T\}$ ο εμπορικός ορίζοντας του Αμερικάνικου δικαιώματος για να το εξασκήσει ενώ είναι δυνατόν να το εξασκήσει και οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t = 0,1,2,\ldots,T$ με την ίδια πάντοτε τιμή παράδοσης η οποία έχει καθοριστεί με την αγορά του[27].

Αυτό είναι το νέο στοιχείο που καθιστά τη μέθοδο τιμολόγησης του Ευρωπαϊκού δικαιώματος καθώς και τη στοχαστική διαδικασία εξασφάλισης $\{\Delta_k\}_{k=0}^{T}$ σαν μη κατάλληλη για εφαρμογή στην περίπτωση του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς ή πώλησης.

Η χρονική στιγμή έστω τ εξάσκησης του Αμερικάνικου δικαιώματος είναι πλέον μια τυχαία μεταβλητή και αναζητείται μεταξύ των άλλων ποια είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή εξάσκησης του Αμερικάνικου δικαιώματος από τον κάτοχό του.

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε τρία εύλογα βασικά προβλήματα.

(1) Ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης του Αμερικάνικου δικαιώματος από το χρηματιστηριακό οργανισμό. Δηλαδή αναζητούμε μια τιμολόγηση του

[27] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 250

Αμερικάνικου δικαιώματος τέτοια ώστε να μας οδηγήσει σε μια αυτοχρηματοδοτούμενη διαδικασία αξίας.

(2) Να βρούμε μια βέλτιστη στρατηγική εξασφάλισης για το χρηματιστηριακό οργανισμό δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία

$$\hat{\Delta}_0, \hat{\Delta}_1(X_1), \hat{\Delta}_2(X_1, X_2), \ldots, \hat{\Delta}_T(X_1, X_2, \ldots, X_T)$$

αγοράς ή πώλησης μετοχής ή περιουσιακού στοιχείου η οποία να προσφέρει εξασφάλιση με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

(3) Να βρεθεί ποια είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή εξάσκησης του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης ή αγοράς από τον κάτοχό του.

5.7 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ Ή ΠΩΛΗΣΗΣ[28]

Θα προχωρήσουμε, στο σημείο αυτό, στην απόδειξη του παρακάτω προβλήματος:

''Ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική εξασφάλισης σε ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης ή αγοράς για το χρηματιστηριακό οργανισμό, δηλαδή ποια πρέπει να είναι η στοχαστική διαδικασία αγοράς ή πώλησης μετοχής ή περιουσιακού στοιχείου

$$\hat{\Delta}_0, \hat{\Delta}_1(X_1), \hat{\Delta}_2(X_1, X_2), \ldots, \hat{\Delta}_T(X_1, X_2, \ldots, X_T)$$

η οποία να προσφέρει εξασφάλιση με βάση την αρχή του μη βέβαιου κέρδους.''

Θα ξεκινήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα για έναν εμπορικό ορίζοντα $T = 3$ και μετά θα δώσουμε ένα γενικό αλγόριθμο που θα περιέχει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για οποιοδήποτε T.

Οι αξίες V_k που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο σε κάθε δυνατή εξέλιξη έχουν ήδη αναφερθεί προηγουμένως και το χρηματιστηριακό γραφείο θα χρησιμοποιήσει σαν numeraire την Τράπεζα. Αυτό σημαίνει ότι οι δυνατότητες που υπάρχουν για το χρηματιστηριακό γραφείο είναι οι παρακάτω:

1. να αγοράζει ή να πουλά μετοχές που είναι η βάση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης ή αγοράς της μετοχής σε κάθε χρονική στιγμή καθόλη τη διάρκεια του εμπορικού ορίζοντα, ανάλογα με ποια εξέλιξη έχει προηγηθεί

2. να αξιοποιήσει τα V_0 χρήματα που έχει εισπράξει και να δανεισθεί ή να δανείσει χρήματα με επιτόκιο r σε κάθε χρονική στιγμή καθόλη τη διάρκεια του εμπορικού ορίζοντα

[28] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 251

Αρχίζουμε με τη χρονική στιγμή 0. Το χρηματιστηριακό γραφείο έχει εισπράξει V_0 χρήματα από την πώληση του Αμερικάνικου δικαιώματος της μετοχής. Στην περίπτωση που έχουμε ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς της μετοχής οι αναλογίες είναι ήδη γνωστές και έτσι η μετατροπή των αποτελεσμάτων και των σκεπτικών που οδηγούν σε αυτά είναι εφικτή στον αναγνώστη.

Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του Αμερικάνικου δικαιώματος στο σημείο 0 δεν εξασκεί το δικαίωμά του. Το χρηματιστηριακό γραφείο τότε πρέπει να ενεργήσει για να πετύχει την εξασφάλιση για το χρόνο 1.

Είναι γνωστό ότι το V_0 τα χρήματα που το χρηματιστηριακό γραφείο έχει εισπράξει είναι υπολογισμένα έτσι ώστε

$$V_0 = \max\left\{E_q\left[(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right], \max\{(\Pi - S_0), 0\}\right\}$$

Διακρίνονται οι παρακάτω δυο περιπτώσεις:

- $V_0 = E_q\left\{(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right\}$

  Στην περίπτωση αυτή το V_0 έχει υπολογιστεί για να είναι δυνατή η εξασφάλιση για τις δυο δυνατές επόμενες αξίες χαρτοφυλακίου που θα παρουσιαστούν είτε την $V_1(1)$ είτε την $V_1(0)$ αφού

  $$V_0 = E_q\left\{(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right\} = \frac{1}{1+r}\left\{qV_1(1) + (1-q)V_1(0)\right\}$$

  Η βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_0$ που επιτυγχάνει την εξασφάλιση σε αυτή την περίπτωση είναι

  $$\hat{\Delta}_0 = \frac{V_1(1) - V_1(0)}{(a-b)S_0}$$

  επομένως $\hat{\Delta}_0$ πρέπει να είναι η ενέργεια του χρηματιστηριακού γραφείου.

- $V_0 = \max\{(\Pi - S_0), 0\}$

  Έχουμε ήδη υποθέσει δυο πράγματα:

  (α) ο κάτοχος του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης της μετοχής δεν έχει εξασκήσει το δικαίωμά του στο χρόνο 0

  (β) $V_0 = \max\{(\Pi - S_0), 0\}$ το οποίο σημαίνει ότι

  $$V_0 = \max\{(\Pi - S_0), 0\} > E_q\left\{(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right\}$$

Όμως $E_q\left\{(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right\}=V_0^*$ είναι τα χρήματα που χρειάζεται το χρηματιστηριακό γραφείο για να πετύχει την εξασφάλιση στο χρόνο 1 και είναι γνωστό, όπως είδαμε και προηγούμενα, ότι

$$\hat{\Delta}_0=\frac{V_1(1)-V_1(0)}{(a-b)S_0}$$

Άρα στην πραγματικότητα στην περίπτωση αυτή περισσεύουν χρήματα στο χρηματιστηριακό γραφείο τα οποία είναι ίσα με

$$R_0=\max\{(\Pi-S_0),0\}-E_q\left\{(1+r)^{-1}V_1(X_1)\right\}=V_0^{(\varepsilon)}-V_0^*$$

τα οποία μπορεί να επενδύσει αλλού.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_0$ του χρηματιστηριακού γραφείου δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\Delta}_0=\frac{V_1(1)-V_1(0)}{(a-b)S_0}=\frac{V_1(1)-V_1(0)}{S_1(1)-S_1(0)}$$

Το νέο στοιχείο όμως είναι ότι ορίστηκε μια νέα τυχαία μεταβλητή η $R_0=V_0^{(\varepsilon)}-V_0^*$ που αποτελεί ένα είδος αποθεματικού κεφαλαίου.

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 1

Αν τη χρονική στιγμή 1 ο κάτοχος του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης της μετοχής εξασκήσει το δικαίωμα τότε προφανώς το πρόβλημα τερματίζεται. Υποθέτουμε οπότε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας δεν εξασκεί το δικαίωμα, κι έτσι διακρίνουμε τις δύο προφανείς περιπτώσεις.

(α) Τη χρονική στιγμή 1 έχουμε άνοδο της μετοχής

Στην περίπτωση αυτή η αξία του χαρτοφυλακίου που έχουμε δημιουργήσει είναι $V_1(1)$ και αναζητούμε τη βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_1(1)$ για το χρηματιστηριακό γραφείο. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. $V_1(1)=E_q\left[(1+r)^{-1}V_2(X_1,X_2)/X_1=1\right]$

Στην περίπτωση αυτή το $V_1(1)$ έχει υπολογιστεί για να είναι δυνατή η εξασφάλιση για τις δυο δυνατές επόμενες αξίες χαρτοφυλακίου που θα παρουσιαστούν είτε την $V_2(1,0)$ είτε την $V_2(1,1)$ αφού

$$V_1(1)=E_q\left[(1+r)^{-1}V_2(X_1,X_2)/X_1=1\right]=\frac{1}{1+r}\left[qV_2(1,1)+(1-q)V_2(1,0)\right]$$

Η βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_1(1)$ που επιτυγχάνει την εξασφάλιση σε αυτή την περίπτωση υπολογίζεται να είναι

$$\hat{\Delta}_1(1) = \frac{V_2(1,1) - V_2(1,0)}{S_2(1,1) - S_2(1,0)}$$

επομένως $\hat{\Delta}_1(1)$ πρέπει να είναι η ενέργεια του χρηματιστηριακού γραφείου.

2. $V_1(1) = \max\{(\Pi - S_1(1)),0\}$

Αυτό σημαίνει ότι

$$V_1(1) = \max\{(\Pi - S_1(1)),0\} > E_q\{(1+r)^{-1}V_2(X_1,\mathrm{X}_2)/\mathrm{X}_1 = 1\}$$

Όμως $E_q\{(1+r)^{-1}V_2(X_1,\mathrm{X}_2)/\mathrm{X}_1 = 1\} = V_2^*(1)$ είναι τα χρήματα που χρειάζεται το χρηματιστηριακό γραφείο για να πετύχει την εξασφάλιση στο χρόνο 2 και είναι γνωστό ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι

$$\hat{\Delta}_1(1) = \frac{V_2(1,1) - V_2(1,0)}{S_2(1,1) - S_2(1,0)}$$

Επομένως περισσεύουν χρήματα στο χρηματιστηριακό γραφείο.

<u>*(β) Τη χρονική στιγμή 1 έχουμε κάθοδο της μετοχής*</u>

Στην περίπτωση αυτή η αξία του χαρτοφυλακίου που έχουμε δημιουργήσει είναι $V_1(0)$ και αναζητούμε τη βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_1(0)$ για το χρηματιστηριακό γραφείο. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. $V_1(0) = E_q\left[(1+r)^{-1}V_2(X_1,X_2)/X_1 = 0\right]$

Στην περίπτωση αυτή το $V_1(0)$ έχει υπολογιστεί για να είναι δυνατή η εξασφάλιση για τις δυο δυνατές επόμενες αξίες του χαρτοφυλακίου που θα παρουσιαστούν είτε την $V_2(0,1)$ είτε την $V_2(0,0)$ αφού

$$V_1(0) = E_q\left[(1+r)^{-1}V_2(X_1,X_2)/X_1 = 0\right] = \frac{1}{1+r}\left[qV_2(0,1) + (1-q)V_2(0,0)\right]$$

Η βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_1(0)$ που επιτυγχάνει την εξασφάλιση σε αυτή την περίπτωση έχει υπολογιστεί ότι είναι

$$\hat{\Delta}_1(0) = \frac{V_2(0,1) - V_2(0,0)}{S_2(0,1) - S_2(0,0)}$$

Επομένως $\hat{\Delta}_1(0)$ πρέπει να είναι η ενέργεια του χρηματιστηριακού γραφείου.

2. $V_1(0) = \max\{(\Pi - S_1(0)),0\}$

Αυτό σημαίνει ότι

$$V_1(0) = \max\{(\Pi - S_1(0)),0\} > E_q\{(1+r)^{-1}V_2(X_1,\mathrm{X}_2)/\mathrm{X}_1 = 0\}$$

Όμως $E_q\{(1+r)^{-1}V_2(X_1,\mathrm{X}_2)/\mathrm{X}_1 = 0\}$ είναι τα χρήματα που χρειάζεται το χρηματιστηριακό γραφείο για να πετύχει την εξασφάλιση στο χρόνο 2 και είναι γνωστό ότι στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη στρατηγική είναι

$$\hat{\Delta}_1(0) = \frac{V_2(0,1) - V_2(0,0)}{S_2(0,1) - S_2(0,0)}$$

Επομένως περισσεύουν χρήματα στο χρηματιστηριακό γραφείο

$$R_1(0) = \max\{(\Pi - S_1(0)),0\} - E_q\{(1+r)^{-1}V_2(X_1,X_2)/X_1 = 0\} = V_1^{(\varepsilon)}(0) - V_1^*(0)$$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 2

Αν τη χρονική στιγμή 2 ο κάτοχος του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης της μετοχής εξασκήσει το δικαίωμα τότε προφανώς το πρόβλημα τερματίζεται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας δεν εξασκεί το δικαίωμά του. Θα αναλύσουμε τώρα το τι πρέπει να συμβεί την χρονική στιγμή 2 αρκετά πυκνά σε σχέση με την έως τώρα ανάλυσή μας. Όμως η προσεκτική μελέτη των ενεργειών στις χρονικές στιγμές 0 και 1 σίγουρα το επιτρέπει. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. $V_2(X_1,X_2) = E_q\left[(1+r)^{-1}V_3(X_1,X_2,X_3)/X_1,X_2\right]$

Στην περίπτωση αυτή το $V_2(X_1,X_2)$ έχει υπολογιστεί για να είναι δυνατή η εξασφάλιση για τις δυο δυνατές αξίες του χαρτοφυλακίου που θα παρουσιαστούν είτε την $V_3(X_1,X_2,1)$ είτε την $V_3(X_1,X_2,0)$ αφού

$$V_2(X_1,X_2) = E_q\left[(1+r)^{-1}V_3(X_1,X_2,X_3)/X_1,X_2\right] = \frac{1}{1+r}\left[qV_3(X_1,X_2,1) + (1-q)V_3(X_1,X_2,0)\right]$$

Η βέλτιστη στρατηγική $\hat{\Delta}_2(X_1,X_2)$ που επιτυγχάνει την εξασφάλιση σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\hat{\Delta}_2(X_1,X_2) = \frac{V_3(X_1,X_2,1) - V_3(X_1,X_2,0)}{S_3(X_1,X_2,1) - S_3(X_1,X_2,0)}$$

2. $V_2(X_1,X_2) = \max\{(\Pi - S_2(X_1,X_2)),0\}$

Αυτό σημαίνει ότι

$$V_2(X_1,X_2)=\max\{(\Pi-S_2(X_1,X_2)),0\}>E_q\left[(1+r)^{-1}V_3(X_1,X_2,X_3)/X_1,X_2\right]$$

Όμως $E_q\left[(1+r)^{-1}V_3(X_1,X_2,X_3)/X_1,X_2\right]$ είναι τα χρήματα που χρειάζεται το χρηματιστηριακό γραφείο για να πετύχει την εξασφάλιση στο χρόνο 2 και όπως ήδη αναφέραμε η βέλτιστη στρατηγική είναι

$$\hat{\Delta}_2(X_1,X_2)=\frac{V_3(X_1,X_2,1)-V_3(X_1,X_2,0)}{S_3(X_1,X_2,1)-S_3(X_1,X_2,0)}$$

Επομένως περισσεύουν χρήματα στο χρηματιστηριακό γραφείο

$$R_2(X_1,X_2)=\max\{(\Pi-S_2(X_1,X_2)),0\}-E_q\left[(1+r)^{-1}V_3(X_1,X_2,X_3)/X_1,X_2\right]=$$
$$=V_2^{(\varepsilon)}(X_1,X_2)-V_2^{*}(X_1,X_2)$$

ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ 3

Στη χρονική στιγμή 3 ο κάτοχος του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης μετοχής ή θα κάνει χρήση του δικαιώματος ή θα το χάσει.

Το χρηματιστηριακό γραφείο εφαρμόζοντας την προτεινόμενη βέλτιστη στρατηγική εξασφάλισης

$$\hat{\Delta}_0,\hat{\Delta}_1(X_1),\hat{\Delta}_2(X_1,X_2)$$

επιτυγχάνει την εξασφάλιση σε οποιαδήποτε εξέλιξη με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους.

5.8 ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟ Τ

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε μερικά βασικά θεωρήματα προκειμένου να μεταφέρουμε όλα όσα αναφέραμε στην παραπάνω ενότητα για χρόνο 3 στη γενική περίπτωση χρόνου T. Δεν θεωρείται αναγκαίο, στο σημείο αυτό, ωστόσο, να παρατεθούν και οι αποδείξεις των παραπάνω αναφερόμενων θεωρημάτων.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3</u>

Θεωρούμε το δυωνυμικό μοντέλο Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε χρόνο T και έστω η στοχαστική διαδικασία

$$V_k=V_k(X_1,X_2,\ldots,X_k)$$

τότε η αναγόμενη στο 0 στοχαστική διαδικασία αξιών

$$\left\{(1+r)^{-1}V_{k+1}\right\}_{k=0}$$

είναι ένα supermartingale με βάση το μέτρο πιθανότητας q σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{X_k\}_{k=0}$.

Το θεώρημα αυτό ακολουθεί η παρακάτω πολύ χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 5.3

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ η οποία είναι αναγόμενη στο μηδέν είναι ένα supermartingale και έστω επιπλέον ότι

$$X_k \geq \max\{(\Pi - S_k(X_1, X_2, ..., X_k)), 0\}$$

τότε η $\{X_k\}_{k=0}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την $\{V_k\}_{k=0}$ δηλαδή

$$X_k \geq V_k \text{ για } k = 0,1,2,...,T$$

δηλαδή η αναγόμενη στο μηδέν στοχαστική διαδικασία αξιών είναι το μικρότερο supermartingale με την ιδιότητα

$$V_k \geq \max\{(\Pi - S_k(X_1, X_2, ..., X_k)), 0\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.4

Στο απλό δυωνυμικό μοντέλο ενός Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης μιας μετοχής (ή οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου) η στοχαστική διαδικασία

$$\max\{(\Pi - S_n(X_1, X_2, ..., X_n)), 0\}_{n=0}$$

αναγόμενη στο μηδέν είναι ένα supermartingale όταν σαν μέση τιμή πάρουμε την E_q σε σχέση με τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n=1}$.

Πρόταση 5.4

Έστω η αναγόμενη στο μηδέν στοχαστική διαδικασία αξιών $\{(1+r)^{-k} V_k\}_{k=0}$ και η αναγόμενη στο μηδέν στοχαστική διαδικασία εξόφλησης του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης $\{(1+r)^{-k}[(\Pi - S_k) \vee 0]\}_{k=0}$ τότε ισχύει

$$V_k \geq E_q\{(1+r)^{-k}[(\Pi - S_k) \vee 0]\}$$

Εννοείται ότι αρχίζοντας στο μηδέν είναι δεδομένα η τιμή S_0 της μετοχής και η τιμή V_0 πώλησης του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης της μετοχής.

Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε το ακόλουθο και άκρως σημαντικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5

Έστω η αναγόμενη στο μηδέν στοχαστική διαδικασία αξιών $\{(1+r)^{-k}V_k\}_{k=0}$ και η αναγόμενη στο μηδέν στοχαστική διαδικασία εξόφλησης του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης $\{(1+r)^{-k}[(\Pi - S_k)\vee 0]\}_{k=0}$ τότε η βέλτιστη στιγμή για τον κάτοχο του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης της μετοχής είναι ο χρόνος στάσης

$$\tau_0 = \min_{(0,T)}\left\{k : (1+r)^{-k}V_k = (1+r)^{-k}\left[(\Pi - S_k)\vee 0\right]\right\}$$

Στην περίπτωση αυτή η αναγόμενη στο μηδέν μέση τιμή με βάση το μέτρο πιθανότητας q της αξίας εξόφλησης του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης είναι ίση με την τιμολόγηση κέρδους του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης δηλαδή

$$V_0 = E_q\left[(1+r)^{-\tau_0}[(\Pi - S_n)\vee 0]\right] \geq \max_{\tau_k} E_q\left[(1+r)^{-\tau_k}V_{\tau_k}\right]$$

όπου τ_k για $k = 0,1,2,\ldots$ είναι οι χρόνοι στάσης

$$\tau_k = \min_{(\tau_{k-1},T)}\left\{n \geq \tau_{k-1} : (1+r)^{-n}V_n = (1+r)^{-n}\left[(\Pi - S_n)\vee 0\right]\right\} \text{ για } k = 0,1,2,\ldots$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$E_q\left[(1+r)^{-\tau_n - n}V_{\tau_k + n}\right] = E_q\left[(1+r)^{-\tau_{k+1}}V_{\tau_{k+1}}\right] = E_q\left[(1+r)^{-\tau_{k+1}}[(\Pi - S_{\tau_{k+1}})\vee 0\right]$$

για $n = 1,2,\ldots,\tau_{k+1} - \tau_k - 1$ και $k = 0,1,2,\ldots$

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στον υπολογισμό της αξίας εξόφλησης ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης, αφού βοηθάει στην αποτίμηση ενός τέτοιου συμβολαίου. Έχοντας ορίσει το V_0 ως μια συνάρτηση της τιμής της μετοχής σήμερα, δηλαδή

$$V_0 = F(0, S_0)$$

μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου πώλησης. Ο κάθε πωλητής ενός συμβολαίου τέτοιου είδους επιλέγει να κοστολογήσει το προϊόν του βάσει ενός μοντέλου, είτε κάποιου γνωστού είτε εμπειρικά (χωρίς να έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει κάποιο που να περιγράφει ακριβώς την πραγματικότητα). Άρα, οι τιμές για το ίδιο προϊόν, είναι διαφορετικές και εξαρτώμενες από τον τρόπο κοστολόγησης. Φυσικά, είναι πολύ πιθανόν για τον αγοραστή να επιλέξει το φθηνότερο πωλητή.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, πάντως, το παραπάνω θεώρημα δίνει τη δυνατότητα τιμολόγησης του δικαιώματος στη βέλτιστη στιγμή για τον κάτοχό του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ MARTINGALE ΜΕΤΡΩΝ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ενότητα αυτή, θα αναπτύξουμε τη μέθοδο των ισοδύναμων martingale μέτρων ή των ουδέτερων ως προς τον κίνδυνο μέτρων πιθανοτήτων για οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο και για όλα τα δυνατά παράγωγα.

6.2 Η ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ MARTINGALE ΜΕΤΡΩΝ[29]

Έστω $S(t)$ με $t \in [0,\infty)$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία υποθέτουμε ότι εκφράζει την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο t. Η γενικότερη υπόθεση που μπορεί να γίνει για την $S(t)$ είναι ότι είναι λύση της γενικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης διάχυσης, δηλαδή της

$$dS(t) = \mu(S(t),t)dt + \sigma(S(t),t)dW_t$$

Έστω ένα χρηματιστηριακό γραφείο το οποίο εμπορεύεται ένα παράγωγο για το χρονικό διάστημα $[0,T]$. Δηλαδή T είναι η καταληκτική ημερομηνία του χρηματιστηριακού παραγώγου στο οποίο δεν υπάρχει το δικαίωμα της εξόφλησης νωρίτερα από το T.

Ορίζουμε με $r(t)$ το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης ή δανεισμού από την τράπεζα η άλλη σταθερή πηγή ρευστού χρήματος, $\Delta(t)$ τον αριθμό κομματιών του περιουσιακού στοιχείου που αποτελεί τη βάση του χρηματιστηριακού παραγώγου στο χρόνο t, που έχει στην κατοχή του το χρηματιστηριακό γραφείο.

Υποθέτουμε ότι το παράγωγο είναι δικαίωμα αγοράς και έστω $V(S(t),t)$ η αξία του παράγωγου στο χρόνο t. Το ζητούμενο όπως πάντα είναι η εύρεση της τιμής πώλησης του παραγώγου του δικαιώματος αγοράς του περιουσιακού γραφείου η οποία με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους να παρέχει μια πολιτική εξασφάλισης $\Delta(t)$ για το χρηματιστηριακό γραφείο. Όπως πάντα δηλαδή η τιμή πώλησης θα είναι $V(S(0),0)$ η οποία και θα αποτελέσει το αρχικό κεφάλαιο του χρηματιστηριακού γραφείου.

Συμβολίζουμε με $Y(t)$ το κεφάλαιο του χρηματιστηριακού γραφείου στο χρόνο t το οποίο σχηματίζει για να πετύχει την εξασφάλιση έναντι του παράγωγου δικαιώματος αγοράς του περιουσιακού στοιχείου.

[29] ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'' Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001, σελ. 434

Έστω $B(t)$ η οικογένεια των σ-αλγεβρών η παραγόμενη από τις τυχαίες μεταβλητές

$$B(t) = \sigma\left\{W_s \quad \gamma\iota\alpha \quad s \le t\right\}$$

Προφανώς η στοχαστική διαδικασία $\Delta(t)$ είναι $B(t)$-μετρήσιμη όπως και η $Y(t)$.

Ας υποθέσουμε ότι η βέλτιστη πολιτική εξασφάλισης στο χρόνο t είναι η αγορά $\Delta(t)$ κομματιών του περιουσιακού στοιχείου που είναι η βάση του παραγώγου. Τότε ακολουθώντας τα κατάλληλα βήματα παίρνουμε ότι το διαφορικό της βέλτιστης επενδυτικής πολιτικής θα είναι

$$\begin{aligned}
&dY(t) = \Delta(t)dS(t) + r(t)[Y(t) - \Delta(t)S(t)]dt = \\
&= \ldots = \Delta(t)[\mu(S(t),t)dt + \sigma(S(t),t)dW_t] + r(t)[Y(t) - \Delta(t)S(t)]dt = \\
&= \{\Delta(t)\mu(S(t),t)dt + r(t)[Y(t) - \Delta(t)S(t)]\}dt + \sigma(S(t),t)\Delta(t)W_t = \\
&= \{\Delta(t)[\mu(S(t),t) - r(t)S(t)] + r(t)Y(t)\}dt + \sigma(S(t),t)\Delta(t)W_t
\end{aligned}$$

Χωρίς ιδιαίτερο περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\mu(S(t),t)$ και $\sigma(S(t),t)$ είναι διαχωρίσιμες δηλαδή είναι της μορφής

$$\mu(S(t),t) = \mu(t)S(t) \quad \text{και} \quad \sigma(S(t),t) = \sigma(t)S(t)$$

οπότε η παραπάνω σχέση θα πάρει τη μορφή

$$dY(t) = \Delta(t)S(t)[\mu(t) - r(t)]dt + r(t)Y(t)dt + \sigma(t)S(t)\Delta(t)dW_t$$

Η διαφορά $[\mu(t) - r(t)]$ ονομάζεται επιβράβευση ρίσκου και το φυσικό της νόημα φαίνεται αν θεωρήσουμε το

$$[\mu(t) - r(t)]S(t) = \mu(t)S(t) - r(t)S(t)$$

το οποίο αναμένεται να είναι θετικό με την έννοια ότι

$$\mu(t)E[s(t)/B_0] \ge r(t)E[S(t)/B_0]$$

όπου $\mu(t)$ είναι το ρεύμα ανόδου του περιουσιακού στοιχείου στην αγορά. Αν και τα πράγματα φυσικά δεν είναι έτσι τότε γιατί κάποιος να ρισκάρει και να μην πάει για το σίγουρο $r(t)$.

Γράφουμε λοιπόν

$$dY(t) = \Delta(t)S(t)\sigma(t)\left[\frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}dt + dW_t\right] + r(t)Y(t)dt$$

όπου η έκφραση

$$\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$$

έχει το φυσικό νόημα ότι είναι η σχετική επιβράβευση ρίσκου σε σχέση με τη διακύμανση $\sigma(t)$ που εμφανίζει η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στην αγορά. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται και η τιμή του ρίσκου στην αγορά.

Η υπόθεση που κάναμε για πρώτη φορά στην παράγραφο αυτή ότι το επιτόκιο είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου είναι ρεαλιστική. Είναι γνωστό ότι τα επιτόκια και οι μεταβολές τους χρησιμοποιούνται από τις κυβερνήσεις για τον έλεγχο πολλών δεικτών της οικονομίας μιας χώρας. Επίσης είναι φανερό ότι η εξάπλωση των ηλεκτρονικών μέσων επικοινωνίας έχουν φέρει μια παγκοσμιοποίηση της οικονομίας και ότι οι αλλαγές των επιτοκίων σε πολύ ισχυρές οικονομικά χώρες επηρεάζουν τις οικονομίες όλων των χωρών, τη συναλλαγματική τους κατάσταση και άλλες παραμέτρους της οικονομικής και κοινωνικής ζωής τους. Αν λοιπόν $K(t)$ είναι το κεφάλαιο το οποίο έχουμε καταθέσει στο χρόνο t και έστω Δt ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα τότε το κεφάλαιο στο χρόνο $t+\Delta t$ δηλαδή το $K(t+\Delta t)$ κατά προσέγγιση θα είναι ίσο με

$$K(t+\Delta t)=K(t)(1+r(t)\Delta t)$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=r(t)K(t)$$

Παίρνοντας και στα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης στο όριο του $\Delta t\to 0$ έχουμε ότι

$$K'(t)=\frac{dK(t)}{dt}=r(t)K(t)$$

και τελικά

$$K(t)=K(0)\int_0^t r(s)ds$$

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε την παρακάτω άκρως σημαντική πρόταση.

<u>*Πρόταση 6.1:*</u> Έστω (Ω,Ƒ,P) ένας χώρος πιθανοτήτων και W_t μια διαδικασία Weinner. Έστω B_t η οικογένεια των σ-αλγεβρών η παραγόμενη από την W_t. Θεωρούμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες $S(t), t\in[0,T]$ και $\Delta_t, t\in[0,T]$ όπως ορίστηκαν είναι B_t - μετρήσιμες. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι συναρτήσεις $\mu(t)$, $r(t)$ και $\sigma(t)$ όπως

ορίστηκαν είναι συνεχείς συναρτήσεις και επιπλέον αν είναι στοχαστικές διαδικασίες ότι είναι B_t - μετρήσιμες. Υποθέτουμε ότι

$$E_p\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{\mu(x)-r(x)}{\sigma(x)}\right]^2 dx\right]\right\}<\infty$$

και θέτοντας

$$d\widetilde{W}_t=\theta(t)dt+dW_t$$

όπου

$$\theta(t)=\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$$

ορίζουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z(T)dP \text{ για κάθε } A\in \mathcal{F}$$

όπου

$$Z(t)=\exp\left\{-\int_0^t\theta(x)dW_x-\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(x)dx\right\}$$

Τότε έχουμε

(α) σε σχέση με το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}$ η στοχαστική διαδικασία $\frac{S(t)}{R(t)}$ είναι ένα martingale

$$E_{\widetilde{P}}\left(\frac{S(t)}{R(t)}/B_s\right)=\frac{S(s)}{R(s)} \text{ για κάθε } s\in[0,t)$$

ή όπως αλλιώς γράφεται

$$E_{\widetilde{P}}[S(t)/B_s]=R(t)\frac{S(s)}{R(s)} \text{ για κάθε } s\in[0,t)$$

(β) σε σχέση με το μέτρο $\widetilde{P}$ η στοχαστική διαδικασία $\frac{Y(t)}{R(t)}$ είναι ένα martingale δηλαδή

$$E_{\widetilde{P}}\left(\frac{Y(t)}{R(t)}/B_s\right)=\frac{Y(s)}{R(s)} \text{ για κάθε } s\in[0,t)$$

ή όπως αλλιώς γράφεται

$$E_{\widetilde{P}}[Y(t)/B_s] = R(t)\frac{Y(s)}{R(s)} \text{ για κάθε } s \in [0,t)$$

Η παραπάνω μέθοδος μας έδωσε μια κατά το δυνατόν γενική μέθοδο η οποία αναλόγως την περίπτωση του περιουσιακού στοιχείου που καθορίζει τη μορφή της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών και το παράγωγο που καθορίζει τη συνάρτηση εξόφλησης μας παρέχει μια μέθοδο τιμολόγησης του παράγωγου με τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής ως προς ένα martingale μέτρο ισοδύναμου του αρχικού μέτρου πιθανότητας της αγοράς. Ο υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής στις περισσότερες περιπτώσεις γνωστών παραγώγων όπως τα Vanilla[30] παράγωγα είναι εφικτός.

Παραμένει όμως ανοικτό το πρόβλημα της εύρεσης της στοχαστικής διαδικασίας $\Delta(t), t \in [0,T]$ η οποία μας παρέχει την επενδυτική πολιτική εξασφάλισης $Y(t)$.

Χρησιμότατο εργαλείο στην απόδειξη της ύπαρξης λύσης στην εύρεση της κατάλληλης στοχαστικής διαδικασίας $\Delta(t), t \in [0,T]$ είναι το παρακάτω θεώρημα, το οποίο εδώ για τους λόγους της μελέτης μας το παραθέτουμε χωρίς την απόδειξή του.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1</u>

Έστω ένας χώρος πιθανότητας (Ω,Ƒ,P) και μια διαδικασία Wienner W_t. Έστω B_t η οικογένεια των σ-αλγεβρών παραγόμενη από τις τυχαίες μεταβλητές

$$B_t = \sigma\left\{W_s \quad \gamma\iota\alpha \quad s \le t\right\}$$

η οποία αποτελεί ένα φιλτράρισμα.

Έστω $Y(t), 0 \le t \le T$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία αποτελεί ένα martingale ως προς το μέτρο πιθανότητας P και σε σχέση με την οικογένεια των σ-αλγεβρών B_t.

Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\gamma(t), 0 \le t \le T$ προσαρμοσμένη στην οικογένεια σ-αλγεβρών B_t τέτοια ώστε

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \gamma(x)dW_x$$

ή όπως αλλιώς γράφεται

[30] Με τον όρο *Vanilla παράγωγα*, αναφερόμαστε στις απλές μορφές παράγωγων προϊόντων, όπως options και swaps που περιέχουν τυποποιημένα και όχι σύνθετα χαρακτηριστικά

$$dY(t) = \gamma(t)dW_t \text{ για κάθε } t \in [0,T]$$

Και επιπλέον οι τροχιές της $X(t)$ είναι συνεχείς.

6.3 ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ BLACK & SCHOLES ΜΟΝΤΕΛΟ

Το κλασικό μοντέλο Black & Scholes επεκτείνεται σε πολλές κατευθύνσεις. Πρώτον, ο αριθμός των επικίνδυνων πρωτογενών τίτλων (μετοχές) μπορεί να είναι μεγαλύτερος από 1. Δεύτερον, η υποκείμενη κίνηση Brown θεωρείται πολυδιάστατη αντί για μονοδιάστατη. Τέλος, ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν θεωρείται πια σταθερός (ή ντετερμινιστικός). Για κάθε $i = 1,\dots,k$, η διαδικασία τιμών $Z^i = S^i$ της $i-$οστής μετοχής μοντελοποιείται ως διαδικασία Ito

$$dS_t^i = S_t^i\left(\mu_t^i dt + \sigma_t^i dW_t\right)$$

με $S_0^i > 0$, ή ισοδύναμα,

$$dS_t^i = S_t^i\left(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right)$$

όπου $W = \left(W^1,\dots,W^d\right)$ είναι μια τυπική $d-$διάστατη κίνηση Brown, ορισμένη σε ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας (Ω,Ƒ,P). Για ευκολία, θεωρούμε ότι το υποκείμενο φίλτρο F συμπίπτει με το F^W, δηλαδή παράγεται η F διήθηση από την κίνηση Brown W. Οι συντελεστές σ^i και μ^i ακολουθούν προοδευτικά μετρήσιμες διεργασίες στο χώρο (Ω,Ƒ,P), με τιμές στο R^d και R, αντίστοιχα. Μια ειδική αλλά σημαντική περίπτωση επιτυγχάνεται με την υπόθεση ότι για κάθε i ο συντελεστής μεταβλητότητας σ^i αντιπροσωπεύεται από ένα σταθερό διάνυσμα στον R^d και ο ρυθμός εκτίμησης μ^i είναι ένας πραγματικός αριθμός. Για συντομία, γράφουμε $\sigma = \sigma_t$ για να υποδηλώσουμε τον πίνακα μεταβλητότητας – δηλαδή, τον εξαρτώμενο από το χρόνο τυχαίο πίνακα $\left[\sigma_t^{ij}\right]$, του οποίου η $i-$οστή σειρά αντιπροσωπεύει τη μεταβλητότητα της $i-$οστής μετοχής. Η τελευταία πρωτεύουσα ασφάλεια, ο λογαριασμός ταμιευτηρίου, έχει τη διαδικασία τιμών $Z^{k+1} = B$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$dB_t = r_t B_t dt,\quad B_0 = 1$$

για μια περιορισμένη, μη-αρνητική, προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία επιτοκίου r .

Για να διασφαλίσουμε την απουσία ευκαιριών arbitrage, υποθέτουμε την ύπαρξη μιας $d-$διάστατης, προοδευτικά μετρήσιμης διαδικασίας γ έτσι ώστε η ισότητα

$$r_t - \mu_t^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \gamma_t^j = \sigma_t^i \gamma_t \tag{6.1}$$

ικανοποιείται ταυτόχρονα για κάθε $i = 1,2,...,k$. Σημειώνουμε ότι η τιμή αγοράς για τον κίνδυνο γ δεν είναι μοναδική, γενικά. Πράγματι, η μοναδικότητα της λύσης γ στην (6.1) ισχύει μόνο αν $d \le k$ και ο πίνακας μεταβλητότητας σ είναι μη-μοναδικός, τότε

$$\gamma_t = \sigma_t^{-1}(r_t 1 - \mu_t), \quad \forall t \in [0, T^*]$$

όπου 1 υποδηλώνει το $d-$ διάστατο διάνυσμα με κάθε στοιχείο ίσο με την μονάδα, και μ_t είναι το διάνυσμα με συντελεστές μ_t^i. Δοθείσης μιας διαδικασίας γ που ικανοποιεί τη σχέση (6.1), υιοθετούμε ένα μέτρο P* στον (Ω, F_{T^*}) θέτοντας

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left(\int_0^{T^*} \gamma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^{T^*} |\gamma_u|^2 du \right) \tag{6.2}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η δεξιά πλευρά της (6.2) είναι καλά ορισμένη. Το εκθετικό Doléans

$$\eta_t = \varepsilon_t \left(\int_0^t \gamma_u dW_u \right) = \exp\left(\int_0^t \gamma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma_u|^2 du \right)$$

είναι γνωστό ότι ακολουθεί ένα αυστηρά θετικό supermartingale (αλλά όχι απαραίτητα ένα martingale) υπό το P, έτσι ώστε η περίπτωση $E_{P^*}(\eta_{T^*}) < 1$ να μην αποκλείεται εκ των προτέρων. Συμπεραίνουμε ότι η σχέση (6.2) ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας P* ισοδύναμο του P αν και μόνο αν η η ακολουθεί ένα P-martingale. Επομένως, είναι απαραίτητο να ελεγχθεί αν μια δεδομένη διαδικασία γ δημιουργεί ένα σχετικό ισοδύναμο martingale μέτρο[31]. Υποθέτουμε, από εδώ και στο εξής, ότι η τάξη των μέτρων martingale είναι μη-κενή. Με βάση το θεώρημα Girsanov, η διαδικασία W^*, η οποία ισούται με

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \gamma_u du, \quad \forall t \in [0, T^*]$$

είναι μια $d-$ διάστατη τυπική κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας (Ω,Ƒ,P*). Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής $\frac{S_t^i}{B_t}$ ικανοποιεί κάτω από P*, την

[31] Για την τελευταία ιδιότητα, αρκεί (αλλά δεν είναι απαραίτητο) το γ να ακολουθεί μια οριοθετημένη διαδικασία

$$d\left(\frac{S_t^i}{B_t}\right)=\left(\frac{S_t^i}{B_t}\right)\sigma_t^i dW_t^*$$

για κάθε $i=1,2,...,k$. Αυτό σημαίνει ότι οι μειωμένες τιμές όλων των μετοχών ακολουθούν τοπικά martingales κάτω από P*, έτσι ώστε κάθε μέτρο πιθανότητας που ορίζεται μέσω των (6.1)-(6.2) να είναι ένα martingale μέτρο για το μοντέλο μας (που αντιστοιχεί στην επιλογή του λογαριασμού ταμιευτηρίου ως αριθμητικού στοιχείου). Για κάθε σταθερό P*, καθορίζουμε μια τάξη Φ(P*) των αποδεκτών στρατηγικών διαπραγμάτευσης και την τάξη των στρατηγικών τιμωρίας σε σχέση με το B. Ας τονίσουμε ωστόσο, ότι δεν υποθέτουμε πλέον ότι μια διαδικασία ϕ που αντιπροσωπεύει μια εμπορική στρατηγική είναι απαραιτήτως τοπικά οριοθετημένη[32]. Το τυποποιημένο μοντέλο της αγοράς που λαμβάνεται κατά αυτόν τον τρόπο, αναφέρεται ως πολυδιάστατο μοντέλο Black & Scholes.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1</u>

Το πολυδιάστατο μοντέλο Black & Scholes είναι πλήρες εάν οποιαδήποτε P*-ενσωματωμένη ενδεχόμενη αξίωση X που είναι οριοθετημένη από κάτω είναι εφικτή. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τέτοια αξίωση X υπάρχει μια αποδεκτή στρατηγική διαπραγμάτευσης $\phi\in\phi_0^{k+1}$ έτσι ώστε $X=V_T(\phi)$. Σε αντίθετη περίπτωση, το μοντέλο της αγοράς είναι ατελές.

Ο δείκτης $k+1$ αναφέρεται στο γεγονός ότι επιλέξαμε το λογαριασμό αποταμίευσης ως αριθμητικό στοιχείο. Θυμόμαστε επίσης ότι, κατά παραδοχή, η διαδικασία επιτοκίου r είναι μη-αρνητική και οριοθετημένη. Η ενσωμάτωση και η οριοθέτηση του X είναι επομένως ισοδύναμη με την ενσωμάτωση και την οριοθέτηση της προεξοφλημένης αξίωσης X/B_T. Από την άλλη πλευρά, δεν θέτουμε εκ των προτέρων ότι η μοναδικότητα ενός martingale μέτρου διατηρείται – έτσι η P*-ενσωμάτωση του X αναφέρεται σε ένα αυθαίρετο martingale μέτρο για το μοντέλο. Το επόμενο αποτέλεσμα καθιερώνει αναγκαίες και επαρκείς συνθήκες για την πληρότητα του μοντέλου Black & Scholes.

<u>Πρόταση 6.2:</u> Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (i) το πολυδιάστατο μοντέλο Black & Scholes είναι πλήρες, (ii) η ανισότητα $d\le k$ ισχύει και ο πίνακας μεταβλητότητας σ έχει πλήρη τάξη για Lebesgue όταν $t\in[0,T^*]$, με πιθανότητα 1, (iii) υπάρχει ένα μοναδικό martingale μέτρο P* για τις προεξοφλημένες τιμές των μετοχών $S^i/B,\ i=1,2,..,k$.

[32] Στην παρούσα διάταξη, αν η διαδικασία του πλούτου ακολουθεί ένα (τοπικό) martingale κάτω από ένα martingale μέτρο P*, τότε ακολουθεί απαραιτήτως ένα τοπικό martingale κάτω από κάθε ισοδύναμο martingale μέτρο

Θα εξετάσουμε τώρα με ακρίβεια την προσέγγιση της μέσης διακύμανσης στην αντιστάθμιση των μη-πραγματοποιήσιμων απαιτήσεων σε μια ελλιπή αγορά. Συνδέουμε το γενικό όρο αντιστάθμισης μέσου-διακύμανσης με μια αυθαίρετη μέθοδο αντιστάθμισης των μη-πραγματοποιήσιμων ενδεχόμενων απαιτήσεων που βασίζονται στην αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση. Σε ένα συνεχές χρονικό πλαίσιο, συνήθη προβλήματα βελτιστοποίησης είναι τα ακόλουθα:

(1) Για ένα συγκεκριμένο $c \in R$, ελαχιστοποιούμε

$$J_1(\phi) = E_P\left\{\left(X^* - c - \int_0^T \phi_u dS_u^*\right)^2\right\} \tag{6.3}$$

επάνω σε όλες τις αυτοχρηματοδοτούμενες εμπορικές στρατηγικές ϕ.

(2) Ελαχιστοποιούμε

$$J_2(\phi) = E_P\left\{\left(X^* - c - \int_0^T \phi_u dS_u^*\right)^2\right\} \tag{6.4}$$

επάνω σε όλα τα $c \in R$ και σε όλες τις αυτοχρηματοδοτούμενες εμπορικές στρατηγικές ϕ.

(3) Ελαχιστοποιούμε

$$J_3(\phi) = Var_P\left(X^* - \int_0^T \phi_u dS_u^*\right) \tag{6.5}$$

επάνω σε όλες τις αυτοχρηματοδοτούμενες εμπορικές στρατηγικές ϕ.

Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα (2) σχετίζεται με την κλειστότητα, στο χώρο $L^2(P)$ των $F_T -$μετρήσιμων τυχαίων μεταβλητών, του ακόλουθου συνόλου

$$G_T = \left\{\int_0^T \phi_u dS_u \,/\, \int_0^T \phi_u dS_u^* \in \mathrm{H}_P^2\right\}$$

Στον τελευταίο τύπο, γράφουμε H_P^2 για να συμβολίσουμε την κλάση όλων των πραγματικών ειδικών semimartingales με πεπερασμένη H_P^2 νόρμα, όπου

$$\|Z\|_{H_P^2} = \left\| |Z_0| + \langle M, M \rangle_T^{1/2} \right\|_{L^2(P)} + \left\| \int_0^T dA_u \right\|_{L^2(P)}$$

και $Z = Z_0 + M + A$ είναι η κανονική αποσύνθεση του Z. Αν η εκπτωτική τιμή S^* ακολουθεί ένα τετραγωνικά-ενοποιήσιμο martingale κάτω από P, τότε η κλειστότητα του διαστήματος G_T των στοχαστικών ολοκληρώσεων είναι απλή, δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα Ito ορίζει μια ισομετρία.

Μια διαφορετική προσέγγιση στην αντιστάθμιση των μη-πραγματοποιήσιμων αξιώσεων, που αναφέρονται ως ελαχιστοποίηση του κινδύνου, αρχίζει με την αύξηση της τάξης των στρατηγικών διαπραγμάτευσης προκειμένου να υπάρξουν πρόσθετες μεταφορές κεφαλαίων (αναφερόμενα ως κόστη).

Φτιάχνουμε ένα μέτρο πιθανότητας P και υποθέτουμε ότι η κανονική αποσύνθεση του S^* κάτω από P είναι $S^* = S_0^* + M + A$. Για μια δοθείσα ζημιά X, θεωρούμε την τάξη όλων των στρατηγικών αναπαραγωγής, όχι απαραίτητα αυτοχρηματοδοτούμενων, έτσι ώστε η προεξοφλημένη διαδικασία του πλούτου ακολουθεί ένα semimartingales πραγματικών τιμών τάξης H_P^*. Εξ' ορισμού, η (προεξοφλημένη) διαδικασία κόστους $C(\phi)$ μιας στρατηγικής ϕ ισούται

$$C_t(\phi) = V_t^*(\phi) - \int_0^t \phi_u dS_u^*, \quad \forall t \in [0, T^*]$$

όπου $V_t^*(\phi) = \phi_t S_t^*$. Όπως σε ένα διακριτό χρόνο, μια τοπική ελαχιστοποίηση κινδύνου βασίζεται στην κατάλληλα καθορισμένη ελάχιστη τιμή της διαδικασίας κόστους.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1</u>

Λέμε ότι μια τετραγωνικά-ενοποιήσιμη τυχαία μεταβλητή X^* συμπίπτει με την Föllmer-Schweizer αποσύνθεση ως προς S^* κάτω από P εάν

$$X^* = c_0 + \int_0^T \xi_u dS_u^* + L_T \tag{6.6}$$

όπου c_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός, ξ είναι μια προβλέψιμη διαδικασία τέτοια ώστε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T \xi_u dS_u^*$ ανήκει στην τάξη H_P^2 και L είναι ένα τετραγωνικά-ενοποιήσιμο martingale αυστηρά ορθογώνιο στο M κάτω από P, με $L_0 = 0$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, που δίνεται χωρίς απόδειξη, υπογραμμίζει τη σημασία της αποσύνθεσης Föllmer-Schweizer στο παρόν πλαίσιο. Βασικά, λέει ότι μια στρατηγική αναπαραγωγής τοπικά που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο καθορίζεται από τη διαδικασία ξ στην παραπάνω σχέση.

<u>Πρόταση 6.2:</u> Έστω X μια Ευρωπαϊκή απαίτηση, τη στιγμή T, έτσι ώστε X^* είναι τετραγωνικά-ενοποιήσιμο κάτω από P. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (i) το X

ακολουθεί μια τοπική στρατηγική αναπαραγωγής που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο, και (ii) το X^* δέχεται μια Föllmer-Schweizer αποσύνθεση ως προς την τιμή της μετοχής S^* κάτω από P.

Επιπλέον, αν η (ii) ισχύει, τότε υπάρχει μια τοπική στρατηγική αναπαραγωγής που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο ϕ^* έτσι ώστε $(\phi^*)^i = \xi^i$ για $i = 1,2,..,k$, όπου ξ δίνεται από την (6.6). Τελικά, για κάθε τοπική στρατηγική ελαχιστοποίησης κινδύνου ϕ, έχουμε

$$\int_0^t \phi_u dS_u^* = \int_0^t \xi_u dS_u^* \quad \forall t \in [0, T^*]$$

Από την παραπάνω πρόταση, είναι σαφές ότι η αποσύνθεση Föllmer-Schweizer παρέχει μια τακτοποιημένη μέθοδο αναζήτησης στρατηγικής για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου τοπικά. Αυτό με τη σειρά του εγείρει το ζήτημα της αποτελεσματικής εύρεσης της αποσύνθεσης Föllmer-Schweizer μιας δεδομένης αποζημίωσης. Επιπλέον, εάν το X ακολουθεί την τοπικά αναπαραγωγική στρατηγική που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο ϕ^* τότε το αρχικό κόστος ισούται με $V_0(\phi^*) = C_0(\phi^*) = E_{\hat{P}}(X^*)$ (υπενθυμίζουμε ότι $B_0 = 1$). Πιο γενικά, η ακόλουθη μορφή του risk-neutral τύπου εκτίμησης είναι

$$V_t(\phi^*) = B_t E_{\hat{P}}(X^* / F_t) \; \forall t \in [0, T^*] \tag{6.7}$$

Παρά την ομοιότητά της με τον τυποποιημένο τύπο της risk-neutral εκτίμησης κινδύνου, η παραπάνω ισότητα είναι ουσιαστικά ασθενέστερη, καθώς η δεξιά πλευρά προφανώς σχετίζεται με την επιλογή του ελάχιστου martingale μέτρου (μέσω της επιλογής της πραγματικής πιθανότητας P). Από την άλλη πλευρά, όταν εφαρμόζεται σε μια εφικτή αξίωση, δίνει το σωστό αποτέλεσμα – δηλαδή, την arbitrage τιμή του X στην αγορά Black &Scholes. Εισάγουμε της μέτρησης ενός ελάχιστου martingale για ένα συνεχές, τιμολογημένο semimartingale S^*, με την κανονική αποσύνθεση $S^* = S_0^* + M + A$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2</u>

Ένα μέτρο martingale $\hat{P}$ για το S^* καλείται απλοποιημένο martingale μέτρο που σχετίζεται με το P αν υπάρχει κάποιο τοπικό $P-$martingale έντονα ορθογώνιο μέτρο (κάτω από P) σε κάθε τοπικό martingale M^i για $i = 1,2,..,k$ που παραμένει τοπικό martingale κάτω από $\hat{P}$.

<u>Πρόταση 6.2:</u> Ένα απλοποιημένο μέτρο martingale $\hat{P}$ που σχετίζεται με το P υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει μια σταδιακά μετρήσιμη R^d-μετρήσιμη διαδικασία $\hat{\gamma}$ έτσι ώστε:

(i) για κάθε $i = 1,2,..,k$

$$r_t - \mu_t^i = \sigma_t^i \hat{\gamma}_t \,,\ l \otimes P - a.e.\ \ on\ \ [0,T^*] \times \Omega_i$$

(ii) το Doléans εκθετικό $E(U^{\hat{\gamma}})$ της διαδικασίας $U_t^{\hat{\gamma}} = \int_0^t \hat{\gamma}_u dW_u$ είναι ένα martingale κάτω από P, και

(iii) με πιθανότητα 1, σχεδόν για κάθε t έχουμε $\hat{\gamma}_t \in J_m \sigma_t^* = (\ker \sigma_t)$.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια του αναγνώστη τόσο αναφορικά με τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών martingales, αλλά πολύ περισσότερο όσον αφορά την εφαρμογή της θεωρίας αυτής στην Οικονομία και συγκεκριμένα στην αξιολόγηση διαφόρων ειδών χρεογράφων.

Στο πρώτο κεφάλαιο, κάναμε μια εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων, ενώ στο δεύτερο, αναφερθήκαμε στη χρονική αξία του χρήματος, προχωρώντας έτσι στο τρίτο κεφάλαιο, στο οποίο αναφερθήκαμε στη χρηματιστηριακή αγορά και τα παράγωγά της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναλύσαμε τη θεωρία των martingales κάνοντας εκτενή αναφορά σε βασικά θεωρήματα και ορισμούς, ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο μιλήσαμε για τις αυτοχρηματοδοτούμενες διαδικασίες κεφαλαίου και την τιμολόγηση των δικαιωμάτων.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αυτής, εξηγήσαμε τη μέθοδο τιμολόγησης παραγώγων με χρήση της μεθόδου των ισοδύναμων martingale μέτρων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ''Θεωρία Πιθανοτήτων: Κλασσική Πιθανότητα – Μονοδιάστατες Κατανομές'', Σ. Κουνιάς – Χ. Μωυσιάδης, Εκδόσεις Ζήτη, 1995

2. ''Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές'', Χ. Χαραλαμπίδης, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009

3. ''Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά'', Π. – Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, 2001

4. ''Στοχαστικές Ανελίξεις: Θεωρία και Εφαρμογές'', Τ.Ι. Δάρας – Π. Θ. Σύψας, Εκδόσεις Ζήτη,2003

5. ''Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά: Δικαιώματα και άλλα θέματα'', Sheldon M. Ross, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, 2007

6. ''Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών, Μέρος Α΄'', Δ. Κωνσταντινίδης, Εκδόσεις Σταμούλη, 2009

7. ''Βασικές Αρχές Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών'', Νικόλαος Χαλιδιάς, Εκδόσεις Broken, 2018

8. ''Martingale Methods in Financial Modelling'', M. Musiela – M. Rutkowski, Springer Publications, Second Edition, 2000