ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Διδακτορική Διατριβή:

Μαγιάτης Χαράλαμπος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

17-10-2018

Είμαι ο αποκλειστικός συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ». Η συγκεκριμένη Διδακτορική Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Τμήματος Μαθηματικών. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στην εργασία. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στην εργασία τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα, και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψή τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

Επιβλέπων Καθηγητής:	Μ. Ανούσης
Τριμελής Επιτροπή:	Μ. Ανούσης Ν. Καραχάλιος Ε. Φελουζής
Επταμελής Επιτροπή:	Μ. Ανούσης Δ. Δριβαλιάρης Γ. Ελευθεράκης Ν. Καραχάλιος Ν. Παπαλεξίου Α. Τσολομύτης Ε. Φελουζής

Η δημόσια παρουσίαση αυτής της διατριβής πραγματοποιήθηκε την Παρασκευή 21 Σεπτεμβρίου 2018 στη Σάμο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Μιχαήλ Ανούση για τη συνεργασία και την καθοδήγηση την οποία προσέφερε σε όλους τους τομείς που αφορούν την εκπόνηση αυτής της διατριβής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Νικόλαο Καραχάλιο και τον αναπληρωτή καθηγητή Ευάγγελο Φελουζή για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Αντώνιο Τσολομύτη και τους επίκουρους καθηγητές Δημοσθένη Δριβαλιάρη, Γεώργιο Ελευθεράκη και Νικόλαο Παπαλεξίου για την τιμή που μου έκαναν να κρίνουν την εργασία μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.

Το αντικείμενο της διατριβής είναι η μελέτη πολλαπλασιαστικών και στοιχειωδών τελεστών σε άλγεβρες τελεστών.

Η διατριβή έχει τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε πολλαπλασιαστικούς και στοιχειώδεις τελεστές στην άλγεβρα των adjointable τελεστών σε ένα Hilbert πρότυπο. Δίνουμε χαρακτηρισμούς των συμβόλων των πολλαπλασιαστικών και στοιχειωδών τελεστών σε σχέση με την εικόνα τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο χαρακτηρίζουμε τα k-ακραία σημεία μίας C^*-άλγεβρας με χρήση των συστολικών διαταραχών. Στο τρίτο κεφάλαιο χαρακτηρίζουμε τα συμπαγή στοιχεία ενός ημισταυρωτού γινομένου της μορφής $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$, όπου X τοπικά συμπαγής χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία.

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα και $a, b \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $M_{a,b} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ που ορίζεται $M_{a,b}(x) = axb$ ονομάζεται πολλαπλασιαστικός τελεστής. Τα a, b λέγονται σύμβολα του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,b}$.

Ο K. Vala το 1964 στην εργασία του [30] απέδειξε μία νέα μορφή του Θεωρήματος του Ascoli. Σαν συνέπεια του αποτελέσματος του απέδειξε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό: Έστω E χώρος με νόρμα και $\mathcal{B}(E)$ ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to E$. Αν $T, S \in \mathcal{B}(E)$ είναι μη μηδενικοί τελεστές, τότε ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{T,S} : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν οι τελεστές T και S είναι συμπαγείς. Στην εργασία του [31] το 1967, έδωσε τον ορισμό ενός συμπαγούς στοιχείου μίας άλγεβρας με νόρμα. Ένα στοιχείο a, μίας άλγεβρας με νόρμα είναι συμπαγές εάν η απεικόνιση $x \mapsto axa$ είναι συμπαγής. Με αντίστοιχο τρόπο όρισε τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Ένα στοιχείο a μίας άλγεβρας με νόρμα είναι πεπερασμένης τάξης εάν η απεικόνιση $x \mapsto axa$ είναι πεπερασμένης τάξης. Στην ίδια εργασία απέδειξε μία σειρά από ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με τα συμπαγή στοιχεία και τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης σε άλγεβρες με νόρμα.

Ο K. Ylinen το 1968 απέδειξε στο [34] ότι το σύνολο των συμπαγών στοιχείων μίας C^*-άλγεβρας συμπίπτει με την κλειστή γραμμική θήκη των στοιχείων πεπερασμένης τάξης, και είναι ιδεώδες της άλγεβρας. Το 1972 στο [33] απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα: Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Υπάρχει μία ισομετρική $*$-αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ σε έναν χώρο Hilbert H τέτοια ώστε το $u \in \mathcal{A}$ είναι συμπαγές στοιχείο της $\mathcal{A}$ αν και μόνο αν ο $\pi(u)$ είναι συμπαγής τελεστής στον H. Επίσης απέδειξε ότι ένα στοιχείο $u \in \mathcal{A}$ είναι πεπερασμένης τάξης αν και μόνο αν ο $\pi(u)$ είναι πεπερασμένης τάξης τελεστής στον H.

Το 1996 οι M. Anoussis και E. Katsoulis στο [2] χρησιμοποίησαν μία γεωμετρική ιδιότητα για να χαρακτηρίσουν τα συμπαγή στοιχεία μίας C^*-άλγεβρας. Αν $\mathcal{S}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας ενός χώρου Banach $\mathcal{X}$, τότε το σύνολο των συστολικών διαταραχών του $\mathcal{S}$ είναι το

$$\mathrm{cp}(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{X} : \|x \pm s\| \leq 1, \forall s \in \mathcal{S}\},$$

και το σύνολο των δεύτερων συστολικών διαταραχών είναι το $\mathrm{cp}^2(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}(\mathrm{cp}(\mathcal{S}))$. Απέδειξαν ότι αν a είναι ένα στοιχείο της μοναδιαίας μπάλας μίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε το σύνολο $\mathrm{cp}^2(\{a\})$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει πιστή αναπαράσταση ϕ της $\mathcal{A}$ ώστε ο τελεστής $\phi(a)$ να είναι συμπαγής. Επίσης απέδειξαν το αντίστοιχο αποτέλεσμα για ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης. Στο ίδιο άρθρο αποδεικνύουν ότι αν a είναι ένα στοιχείο της μοναδιαίας μπάλας μίας C^*-άλγεβρας τότε η εικόνα του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,a}$ περιέχεται στην γραμμικη θήκη του συνόλου των δεύτερων διαταραχών του a. Αυτό το αποτέλεσμα αποτέλεσε και την αφετηρία για την μελέτη των πολλαπλασιαστικών τελεστών με χρήση των συστολικών διαταραχων, που κάνουμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Ο G. Andreolas στο [1] απέδειξε πως εάν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}(H_2, H_1)$ είναι ένα TRO (ternary ring of operators) και $a \in \mathcal{V}$, τότε υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση π του $\mathcal{V}$ που απεικονίζει το a σε έναν συμπαγή τελεστή αν και μόνο αν η απεικόνιση $x \mapsto ax^*a$ είναι συμπαγής. Επίσης στο ίδιο άρθρο απέδειξε πως εάν $a \in \mathcal{V}$, τότε υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση π του $\mathcal{V}$ που απεικονίζει το a σε έναν συμπαγή τελεστή αν και μόνο αν το σύνολο τον δεύτερων διαταραχών του μονοσυνόλου $\{a\}$ είναι ασθενώς συμπαγές.

Οι F. J. Fernández-Polo, J. Martínez Moreno και A. M. Peralta στο [13] απέδειξαν ανάλογα αποτελέσματα για JB^*-triples.

Έστω $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert C^*-πρότυπο πάνω σε μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ οι C^*-άλγεβρες των adjointable τελεστών και των γενικευμένων συμπαγών τελεστών στο $\mathcal{X}$. Οι M. Anoussis και I. Todorov στο [5] δίνουν έναν γεωμετρικό χαρακτηρισμό των στοιχείων της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να επεκταθεί το αποτέλεσμα της εργασίας [2] που αναφέραμε γιατί το σύνολο των δεύτερων διαταραχών ενός στοιχείου της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ δεν είναι σχεδόν ποτέ συμπαγές σύνολο. Αντικατέστησαν την συνθήκη της συμπάγειας με μια συνθήκη αριθμησιμότητας και έδωσαν έναν χαρακτηρισμό που χρησιμοποιεί το μέγεθος του συνόλου των δεύτερων διαταραχών. Απέδειξαν ότι ένα τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $\|T\| \leq 1$ περιέχεται στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ αν και και μόνο αν το σύνολο των δεύτερων διαταραχών του μονοσυνόλου $\{T\}$ είναι διαχωρίσιμο. Αυτή η οπτική, ο χαρακτηρισμός δηλαδή των συμβόλων ενός πολλαπλασιαστικού ή στοιχειώδους τελεστή από το μέγεθος της εικόνας του εμφανίζεται σε πολλά αποτελέσματα του πρώτου κεφαλαίου της διατριβής.

Η L. Arambašić στο [7] επέκτεινε το αποτέλεσμα του Ylinen [33] στο πλαίσιο των Hilbert C^*-προτύπων. Απέδειξε πως εάν $\mathcal{V}$ είναι ένα full Hilbert C^*-πρότυπο, υπάρχει πιστή αναπαράσταση $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ώστε ο $\pi(x)$ να είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν το στοιχείο $\langle x, x\rangle$ της $\mathcal{A}$ είναι συμπαγές.

Ένα πεπερασμένο άθροισμα πολλαπλασιαστικών τελεστών λέγεται στοιχειώδης τελεστής.

Το 1979 οι C. K. Fong και A. R. Sourour στο [14] απέδειξαν ότι αν X είναι ένας χώρος Banach και $\mathcal{B}(X)$ η άλγεβρα των γραμμικών φραγμένων τελεστών στον X, τότε ένας στοιχειώδης τελεστής $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και συμπαγείς τελεστές $a_i, b_i \in \mathcal{B}(X)$ για $i = 1, \dots, m$ ώστε $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} M_{a_i,b_i}(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{B}(X)$. Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύει το αποτέλεσμα του Vala για στοιχειώδεις τελεστές.

Ο M. Mathieu στο [24] γενίκευσε το αποτέλεσμα των Fong και Sourour για στοιχειώδεις τελεστές σε prime C^*-άλγεβρες. Στο ίδιο άρθρο απέδειξε πως ένας στοιχειώδης τελεστής Φ σε μία prime C^*-άλγεβρα είναι ασθενώς συμπαγής αν και μόνο αν έχει μία γραφή $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{a_i,b_i}$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα a_i, b_i να είναι συμπαγές στοιχείο για κάθε $i = 1, \dots, k$.

Ο R. M. Timoney [29] γενίκευσε τα αποτελέσματα των Fong και Sourour και Mathieu, και απέδειξε ότι ένας στοιχειώδης τελεστής Φ σε μία C^*-άλγεβρα είναι συμπαγής αν και μόνον αν έχει μία γραφή $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{a_i,b_i}$ ώστε τα a_i, b_i να είναι συμπαγή στοιχεία για κάθε $i = 1, \dots, k$.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά τα κύρια αποτελέσματα της διατριβής.

Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε πολλαπλασιαστικούς και στοιχειώδεις τελεστές στην άλγεβρα των adjointable απεικονίσεων επί του $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Με $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ συμβολίζουμε τους γενικευμένους συμπαγείς τελεστές της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Εισάγουμε και μελετάμε την έννοια του ισχυρά διαχωρίσιμου συνόλου σε C^*-άλγεβρες. Η έννοια αυτή θα χρειαστεί στους χαρακτηρισμούς των πολλαπλασιαστικών και στοιχειωδών τελεστών που θα δοθούν στην συνέχεια.

Στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου αποδεικνύουμε ότι ένας στοιχειώδης τελεστής έχει διαχωρίσιμη εικόνα, αν και μόνον αν η εικόνα του περιέχεται στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης αποδεικνύουμε ότι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής της μορφής $M_{A,A}$ στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ έχει διαχωρίσιμη εικόνα αν και μόνον αν $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Στην τέταρτη ενότητα μελετάμε πολλαπλασιαστικούς τελεστές στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όταν η $\mathcal{A}$ είναι μία prime διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Αποδεικνύουμε ότι τότε και η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Θεώρημα του Mathieu: η νόρμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,b}$ σε μία prime C^*-άλγεβρα είναι ίση με $\|a\|\|b\|$. Ένα βασικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής είναι ο χαρακτηρισμός των συμβόλων του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ σε σχέση με την εικόνα του: Αποδεικνύουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν ένας από τους A, B ανήκει στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Αποδεικνύουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν οι A, B ανήκουν στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Στην πέμπτη ενότητα μελετάμε στοιχειώδεις τελεστές στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όταν η $\mathcal{A}$ είναι μία prime διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Χαρακτηρίζουμε τα σύμβολα ενός στοιχειώδη τελεστή $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ σε σχέση με την εικόνα του: Δείχνουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ αν και μόνον αν υπάρχει μια γραφή του Φ στην οποία όλα τα σύμβολα ανήκουν στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης δείχνουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν ο Φ έχει μία γραφή $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i να ανήκει στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των k-ακραίων σημείων της μοναδιαίας μπάλας μιας C^*-άλγεβρας με μονάδα $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας την έννοια των συστολικών διαταραχών. Τα k-ακραία σημεία ενός κυρτού συνόλου αποτελούν γενίκευση των ακραίων σημείων. Τα ακραία σημεία της μοναδιαίας μπάλας μιας C^*-άλγεβρας με μονάδα έχουν χαρακτηριστεί από τον Kadison [16]. Επίσης δείχνουμε ότι αν $a \in \mathcal{A}$ με $\|a\| \leq 1$ είναι ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης, η εικόνα του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,a}$ συμπίπτει με την γραμμική θήκη του συνόλου $\mathrm{cp}^2(\{a\})$.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε τα συμπαγή στοιχεία σε ένα ημισταυρωτό γινόμενο. Τα ημισταυρωτά γινόμενα αλγεβρών τελεστών εισήχθησαν από τον W. B. Arveson το 1967 στο [8] και έχουν μελετηθεί από πολλούς ερευνητές. Αποδεικνύουμε ένα χαρακτηρισμό των συμπαγών στοιχείων σε ένα ημισταυρωτό γινόμενο της μορφής $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$, όταν X τοπικά συμπαγής χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Ακόμη δείχνουμε ότι το ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία συμπίπτει με το ριζικό του Jacobson της άλγεβρας $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$.

Αν X είναι ένας χώρος Banach, θα συμβολίζουμε X_1 την μοναδιαία μπάλα του X δηλαδή το σύνολο $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ θα συμβολίζουμε $B(x, \varepsilon)$ την ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας ε, δηλαδή το σύνολο $\{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Κεφάλαιο 1

Πολλαπλασιαστικοί τελεστές και Hilbert C^*-πρότυπα.

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια C^*-άλγεβρα και $a, b \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $M_{a,b} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ που ορίζεται $M_{a,b}(x) = axb$ λέγεται πολλαπλασιαστικός τελεστής. Τα a, b λέγονται σύμβολα του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,b}$.

Ένας τελεστής που είναι πεπερασμένο άθροισμα πολαπλασιαστικών τελεστών, λέγεται στοιχειώδης τελεστής.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε πολλαπλασιαστικούς και στοιχειώδεις τελεστές στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όταν η $\mathcal{A}$ είναι μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Με $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ συμβολίζουμε τους γενικευμένους συμπαγείς τελεστές της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα από την θεωρία των Hilbert C^*- προτύπων.

Στην δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου, θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε την έννοια του ισχυρά διαχωρίσιμου συνόλου σε C^*-άλγεβρες. Η έννοια αυτή θα χρειαστεί στους χαρακτηρισμούς των πολλαπλασιαστικών και στοιχειωδών τελεστών που θα δοθούν στις επόμενες ενότητες.

Στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου αποδεικνύουμε ότι ένας στοιχειώδης τελεστής έχει διαχωρίσιμη εικόνα, αν και μόνον αν η εικόνα του περιέχεται στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης αποδεικνύουμε ότι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής της μορφής $M_{A,A}$ στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ έχει διαχωρίσιμη εικόνα αν και μόνον αν $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Στην τέταρτη ενότητα μελετάμε πολλαπλασιαστικούς τελεστές στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όταν η $\mathcal{A}$ είναι μία prime διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Αποδεικνύουμε ότι τότε και η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Θεώρημα του Mathieu (1.4.10): η νόρμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{a,b}$ σε μία prime C^*-άλγεβρα είναι ίση με $\|a\|\|b\|$. Ένα βασικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής είναι ο χαρακτηρισμός των συμβόλων του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με

$A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ σε σχέση με την εικόνα του: Αποδεικνύουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν ένας από τους A, B ανήκει στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Αποδεικνύουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν οι A, B ανήκουν στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης αποδεικνύουμε ότι το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Στην πέμπτη ενότητα μελετάμε στοιχειώδεις τελεστές στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ όταν η $\mathcal{A}$ είναι μία prime διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Χαρακτηρίζουμε τα σύμβολα ενός στοιχειώδη τελεστή $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ σε σχέση με την εικόνα του: Δείχνουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ αν και μόνον αν υπάρχει μια γραφή του Φ στην οποία όλα τα σύμβολα ανήκουν στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης δείχνουμε ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι διαχωρίσιμο σύνολο αν και μόνον αν ο Φ έχει μία γραφή $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i να ανήκει στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Για την απόδειξη των αποτελεσμάτων αυτών χρησιμοποιούμε το ότι το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ και το [23, Theorem 1.1].

1.1 Hilbert C^*-πρότυπα και adjointable τελεστές.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες και αποτελέσματα από την θεωρία των Hilbert C^*-προτύπων, τα οποία θα χρειαστούμε στην συνέχεια. Για περισσότερες πληροφορίες για την θεωρία των Hilbert C^*-προτύπων παραπέμπουμε στα [22], [20], [32].

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι ένα (δεξιό) $\mathcal{A}$-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$, αν υπάρχει μια απεικόνιση $\mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $(x, a) \mapsto xa$ ώστε για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathcal{X}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν τα εξής:*

1. $(x + y)a = xa + ya$;
2. $x(a + b) = xa + xb$;
3. $x(ab) = (xa)b$;
4. $x(\lambda a) = \lambda(xa) = (\lambda x)a$;
5. $x1_{\mathcal{A}} = x$, *(εάν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα).*

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο. Το $\mathcal{X}$ λέγεται $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου αν υπάρχει μία απεικόνιση $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ ώστε για κάθε $a \in \mathcal{A}$, $x, y, z \in \mathcal{X}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν τα εξής:*

1. $\langle x, \lambda y + z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

2. $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$;

3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$;

4. $\langle x, x\rangle \geq 0$;

5. $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ λέγεται $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο στο $\mathcal{X}$.

Πρόταση 1.1.3 (Ανισότητα Cauchy - Schwarz). *Έστω $\mathcal{X}$ ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου και $x, y \in \mathcal{X}$. Τότε*

1.
$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

2.
$$\|\langle y, x\rangle\|^2 \leq \|\langle x, x\rangle\|\|\langle y, y\rangle\|.$$

Πρόταση 1.1.4 (Τριγωνική ανισότητα). *Έστω $\mathcal{X}$ ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου και $x, y \in \mathcal{X}$. Τότε*

$$\|\langle x + y, x + y\rangle\|^{1/2} \leq \|\langle x, x\rangle\|^{1/2} + \|\langle y, y\rangle\|^{1/2}.$$

Πρόταση 1.1.5. *Έστω $\mathcal{X}$ ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου. Η απεικόνιση $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{X}} = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$ είναι μία νόρμα στον $\mathcal{X}$.*

Ορισμός 1.1.6. *Ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι είναι δεξιό $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου που είναι πλήρες ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.*

Αν $\mathcal{X}$ είναι ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, θα λέμε ότι το $\mathcal{X}$ είναι ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.

Αν $\mathcal{X}$ είναι ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο, τότε η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathcal{X}\}$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.1.7. *Έστω $\mathcal{X}$ ένα Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Το $\mathcal{X}$ λέγεται full αν η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathcal{X}\}$ είναι ίση με την $\mathcal{A}$.*

Πρόταση 1.1.8. *[22, Proposition 1.2.4]. Εάν $\mathcal{X}$ είναι ένα $\mathcal{A}$-πρότυπο εσωτερικού γινομένου, τότε $\|xa\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{\mathcal{X}}\|a\|$, $\forall x \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathcal{A}$.*

Πρόταση 1.1.9. *[22, Lemma 1.3.8]. Η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{xa : x \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{A}\}$ είναι ίση με το $\mathcal{X}$.*

Ορισμός 1.1.10. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ πρότυπα πάνω στην $\mathcal{A}$. Μια γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται απεικόνιση προτύπου αν $\forall x \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathcal{A}$ ισχύει*

$$\phi(xa) = \phi(x)a.$$

Παραδείγματα 1.1.11.

1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Η $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με το $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b\rangle = a^*b$, είναι Hilbert C^*-πρότυπο το οποίο ονομάζεται Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{A}$.*

2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ Hilbert C^*-πρότυπα πάνω στην $\mathcal{A}$. Το ευθύ άθροισμα $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ με την δράση*

$$(x \oplus y)a = xa \oplus ya$$

   της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{X}} + \langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{Y}}$$

   είναι ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$.

3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{A}^n$ το ευθύ άθροισμα $\mathcal{A} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}$, ($n$ φορές). Το $\mathcal{A}^n$ με την δράση*

$$(a_1 \oplus a_2 \oplus ...a_n)a = a_1a \oplus a_2a \oplus ...a_na$$

   της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a_1 \oplus a_2 \oplus ...a_n, b_1 \oplus b_2 \oplus ...b_n\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + ...a_n^*b_n$$

   είναι ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$.

4. *Το σύνολο*

$$\left\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathcal{A}, \sum_{i\in\mathbb{N}} a_k^*a_k \text{ συγκλίνει}\right\},$$

   με την δράση

$$(a_i)a = (a_ia)$$

   της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (a_i), (b_i)\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^*b_i$$

   είναι ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$, λέγεται standard Hilbert C^*-πρότυπο και συμβολίζεται $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}$ ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$ και Λ ένα σύνολο δεικτών. Θα λέμε ότι το σύνολο $E_\Lambda = \{e_\lambda : e_\lambda \in \mathcal{X}, \lambda \in \Lambda\}$ παράγει το $\mathcal{X}$, όταν το υποπρότυπο των $\mathcal{A}$-γραμμικών αθροισμάτων του E_Λ είναι πυκνό στο $\mathcal{X}$. Τα στοιχεία e_λ λέγονται γεννήτορες του $\mathcal{X}$. Εάν υπάρχει ένα αριθμήσιμο (αντίστοιχα: πεπερασμένο) σύνολο Λ που παράγει το $\mathcal{X}$, τότε το $\mathcal{X}$ θα λέγεται αριθμήσιμα (αντίστοιχα: πεπερασμένα) παραγόμενο.

Εάν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι Hilbert C^*-πρότυπα πάνω σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τον χώρο των γραμμικών φραγμένων τελεστών $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που είναι απεικονίσεις προτύπου, εφοδιασμένο με την νόρμα τελεστή. Αν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}_b(\mathcal{X})$ τον χώρο $\mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Ορισμός 1.1.12. *Εάν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι Hilbert C^*-πρότυπα πάνω στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, μία απεικόνιση $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ λέγεται adjointable εάν υπάρχει απεικόνιση $T^* : \mathcal{Y} \to X$ τέτοια ώστε*

$$\langle T^*y, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle y, Tx\rangle_{\mathcal{Y}}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Η απεικόνιση T^* λέγεται συζυγής της T.

Πρόταση 1.1.13. *[32, Lemma 15.2.3]. Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Hilbert C^*-πρότυπα πάνω στην $\mathcal{A}$ και $T, S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Τότε:*

1. *Εάν ο T είναι adjointable, τότε ο T και ο T^* είναι φραγμένες απεικονίσεις προτύπου, και κατά συνέπεια $T \in \mathcal{B}_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $T^* \in \mathcal{B}_b(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.*
2. *Εάν ο T είναι adjointable τότε ο συζυγής του είναι μοναδικός, είναι adjointable και ισχύει ότι $(T^*)^* = T$.*
3. *Εάν οι T, S είναι adjointable και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $(\lambda T + S)^* = \overline{\lambda} T^* + S^*$ και $(TS)^* = S^*T^*$.*

Θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ τον χώρο των adjointable απεικονίσεων $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Αν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ τον χώρο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Πρόταση 1.1.14. *[22, 2.1]. Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$. Με την νόρμα τελεστή ο $\mathcal{B}_b(\mathcal{X})$ είναι άλγεβρα Banach. Ο $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ με την νόρμα τελεστή και ενέλιξη την $T \mapsto T^*$ είναι C^*-άλγεβρα.*

Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$. Αν $x, y \in \mathcal{X}$, συμβολίζουμε $\theta_{x,y}$ την απεικόνιση $\theta_{x,y} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ που ορίζεται $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$ για $z \in \mathcal{X}$. Το σύνολο $\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{X}\}$ γενικεύει την έννοια των τελεστών τάξης 1 στα Hilbert C^*-πρότυπα.

Πρόταση 1.1.15. *[22, 2.2]. Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα Hilbert C^*-πρότυπο πάνω στην $\mathcal{A}$. Εάν $x, y \in \mathcal{X}$ και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, τότε:*

1. *Ο* $\theta_{x,y}$ *είναι adjointable και* $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$.

2. $T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y}$ *και* $\theta_{x,y}T = \theta_{x,T^*y}$.

3. $\|\theta_{x,y}\| \leq \|x\|_{\mathcal{X}} \|y\|_{\mathcal{X}}$.

Ορισμός 1.1.16. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία* C^**-άλγεβρα και* $\mathcal{X}$ *ένα Hilbert* C^**-πρότυπο πάνω στην* $\mathcal{A}$. *Το σύνολο των (γενικευμένα) συμπαγών τελεστών πάνω στο* $\mathcal{X}$ *είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου* $\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{X}\}$ *και συμβολίζεται* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Πρόταση 1.1.17. *[22, 2.2]. Το* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ *είναι ιδεώδες της* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Ορισμός 1.1.18. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία* C^**-άλγεβρα. Μία προσεγγιστική μονάδα της* $\mathcal{A}$ *είναι ένα αύξον δίκτυο* $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *θετικών στοιχείων της* $\mathcal{A}$ *με* $\|u_\lambda\| \leq 1$ *γιά κάθε* $\lambda \in \Lambda$, *τέτοιο ώστε* $\lim_\lambda \|a - au_\lambda\| = 0$ *γιά κάθε* $a \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.1.19. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία* C^**-άλγεβρα και* $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *μία προσεγγιστική μονάδα της* $\mathcal{A}$. *Τότε* $\lim_\lambda \|a - u_\lambda a u_\lambda\| = 0$ *γιά κάθε* $a \in \mathcal{A}$.

Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται στο [22, 2.2.4].

Θεώρημα 1.1.20. *Ένα Hilbert* $\mathcal{A}$*-πρότυπο* $\mathcal{X}$ *είναι αριθμήσιμα παραγόμενο αν και μόνο αν η* C^**-άλγεβρα* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ *έχει μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα.*

Το επόμενο θεώρημα είναι θεμελιώδους σημασίας για την μελέτη των αριθμήσιμα παραγόμενων Hilbert C^*-προτύπων. Αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι Hilbert C^*-πρότυπα, λέμε ότι τα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ είναι unitarily ισοδύναμα και συμβολίζουμε $\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y}$ αν υπάρχει $U \in \mathcal{B}(X, Y)$ τέτοιος ώστε $UU^* = Id$ και $U^*U = Id$.

Θεώρημα 1.1.21 (Kasparov stabilization theorem). *[32, 15.4.6].*
Εάν $\mathcal{A}$ *είναι μία* C^**-άλγεβρα και* $\mathcal{X}$ *είναι ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert* C^**-πρότυπο πάνω στην* $\mathcal{A}$, *τότε* $\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A} \simeq \mathcal{H}_\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.1.22. *[22, Example 2.1.2]. Έστω* $\mathcal{A}$ *μία* C^**-άλγεβρα με μονάδα. Για* $i \in \mathbb{N}$, *θέτουμε* $e_i \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$, $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..,)$ *όπου το* 1 *βρίσκεται στην* i*-θέση. Η οικογένεια* $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ *λέγεται η κανονική βάση του* $\mathcal{H}_\mathcal{A}$. *Έστω* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. *Ο πίνακας* $[t_{ij}]$ *με* $t_{ij} = \langle e_i, Te_j\rangle$ *για* $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ *λέγεται πίνακας του* T *ως προς την κανονική βάση του* $\mathcal{H}_\mathcal{A}$.

Το επόμενο Λήμμα θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες ενότητες.

Λήμμα 1.1.23. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μία* C^**-άλγεβρα και* $\mathcal{X}$ *ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert* C^**-πρότυπο πάνω στην* $\mathcal{A}$.
Έστω $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ *μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα της άλγεβρας* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. *Τότε:*

1. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε ότι $\|Q_n x - x\| \to 0$.

2. Αν $A, T, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ και $x \in \mathcal{X}$, τότε

$$\|AQ_nTQ_nBx - ATBx\| \to 0.$$

Απόδειξη

1. Από το [22, Lemma 2.2.3] για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχουν $y, z, w \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $x = \theta_{y,z}(w)$, και άρα

$$\|Q_n x - x\| = \|Q_n\theta_{y,z}(w) - \theta_{y,z}(w)\| \leq \|Q_n\theta_{y,z} - \theta_{y,z}\|\|w\| \to 0.$$

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|AQ_nTQ_nBx - ATBx\| &= \|AQ_nTQ_nBx - AQ_nTBx + AQ_nTBx - ATBx\| \\ &\leq \|AQ_nTQ_nBx - AQ_nTBx\| + \|AQ_nTBx - ATBx\| \\ &\leq \|AQ_nT\|\|Q_nBx - Bx\| + \|A\|\|Q_nTBx - TBx\|.\end{aligned}$$

Όμως $\|Q_nBx - Bx\| \to 0$ και $\|Q_nTBx - TBx\| \to 0$, και άρα $\|AQ_nTQ_nBx - ATBx\| \to 0$.

□

1.2 Ισχυρά διαχωρίσιμα σύνολα.

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε μία έννοια η οποία θα χρησιμοποιηθεί στους χαρακτηρισμούς των πολλαπλασιαστικών και στοιχειωδών τελεστών.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{S}$ ένα φραγμένο υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία προσεγγιστική μονάδα $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Θεωρούμε μία προσεγγιστική μονάδα $\{w_\mu\}_{\mu\in M}$ της $\mathcal{A}$. Τότε για κάθε $\varepsilon' > 0$ υπάρχει $\mu_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|w_\mu s w_\mu - s\| < \varepsilon'$ για κάθε $\mu \geq \mu_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$.*

Απόδειξη

Θεωρούμε $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\|s\| \leq c$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Έστω $\varepsilon' > 0$.

Έχουμε για $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in M$:

$$\|w_\mu s w_\mu - s\| =$$

$$\|w_\mu s w_\mu - w_\mu u_\lambda s u_\lambda w_\mu + w_\mu u_\lambda s u_\lambda w_\mu - u_\lambda s u_\lambda w_\mu + u_\lambda s u_\lambda w_\mu - u_\lambda s u_\lambda + u_\lambda s u_\lambda - s\|$$

$$\leq \|w_\mu(s-u_\lambda s u_\lambda)w_\mu + (w_\mu u_\lambda - u_\lambda)su_\lambda w_\mu + u_\lambda s(u_\lambda w_\mu - u_\lambda) + u_\lambda s u_\lambda - s\|$$
$$\leq \|w_\mu(s-u_\lambda s u_\lambda)w_\mu\| + \|(w_\mu u_\lambda - u_\lambda)su_\lambda w_\mu\| + \|u_\lambda s(u_\lambda w_\mu - u_\lambda)\| + \|u_\lambda s u_\lambda - s\|$$
$$\leq \|s-u_\lambda s u_\lambda\| + c\|w_\mu u_\lambda - u_\lambda\| + c\|u_\lambda w_\mu - u_\lambda\| + \|u_\lambda s u_\lambda - s\|.$$

Υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon'/4$, για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Σταθεροποιούμε $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq \lambda_0$.

Έστω $\mu_0 \in M$, τέτοιο ώστε $\|w_\mu u_{\lambda_1} - u_{\lambda_1}\| < \varepsilon'/4c$ και $\|u_{\lambda_1} w_\mu - u_{\lambda_1}\| < \varepsilon'/4c$ γιά κάθε $\mu \geq \mu_0$. Τότε από την παραπάνω ανισότητα έχουμε, θέτοντας λ_1 στην θέση του λ:

$$\|w_\mu s w_\mu - s\| < \varepsilon'$$

για κάθε $\mu \geq \mu_0$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$.

$\square$

Ορισμός 1.2.2. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{S}$ ένα φραγμένο και διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{S}$ ονομάζεται ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο, εάν υπάρχει προσεγγιστική μονάδα $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$, ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$.*

Παρατήρηση 1.2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{S}$ ένα ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{A}$. Έπεται από το Λήμμα 1.2.1 ότι αν $\{w_\mu\}_{\mu\in M}$ είναι μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\mu_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|w_\mu s w_\mu - s\| < \varepsilon$ για κάθε $\mu \geq \mu_0$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$.*

Παρατήρηση 1.2.4. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{S}$ ένα φραγμένο και διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{A}$ και $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{S}$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο εάν και μόνον εάν $\lim_\lambda \sup\{\|u_\lambda s u_\lambda - s\| : s \in \mathcal{S}\} = 0$.*

Λήμμα 1.2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα, $\mathcal{S}$ ένα ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{A}$ και $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|s - u_\lambda s\| < \varepsilon$ (αντίστ. $\|s u_\lambda - s\| < \epsilon$) για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ και για κάθε $s \in S$.*

Απόδειξη *Έστω $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|s\| \leq c$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Θεωρούμε $\varepsilon_1 > 0$ και $\lambda_1 \in \Lambda$ ώστε $\|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon_1$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_1$ και για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Επειδή $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα, για $\varepsilon_2 > 0$ υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\|u_{\lambda_1} - u_\lambda u_{\lambda_1}\| < \varepsilon_2$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_2$. Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq \lambda_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\|s - u_\lambda s\| &= \|s - u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} + u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} - u_\lambda u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} + u_\lambda u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} - u_\lambda s\| \\
&\leq \|s - u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1}\| + \|u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} - u_\lambda u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1}\| + \|u_\lambda u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} - u_\lambda s\| \\
&\leq \|s - u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1}\| + \|u_{\lambda_1} - u_\lambda u_{\lambda_1}\|\|s u_{\lambda_1}\| + \|u_\lambda\|\|u_{\lambda_1} s u_{\lambda_1} - s\| \\
&< 2\varepsilon_1 + c\varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ και $\varepsilon_2 = \varepsilon/2c$, και έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατηρήσεις 1.2.6. *1. Σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα ένα υποσύνολο $\mathcal{S}$ της $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο εάν και μόνον εάν είναι φραγμένο και διαχωρίσιμο σύνολο. Κατά συνέπεια, σε μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα, η μοναδιαία μπάλα είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο.*

2. *Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $\mathcal{K}(H)$ η άλγεβρα των συμπαγών τελεστών επί του H, και $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του H. Θεωρούμε για $i \in \mathbb{N}$ την ορθή προβολή E_i στον υπόχωρο που παράγει το e_i. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, διαχωρίσιμο αλλά όχι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(H)$.*

3. *Σε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ένα ολικά φραγμένο υποσύνολο $\mathcal{S}$ της $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω μία προσεγγιστική μονάδα $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ της $\mathcal{A}$.*

   Επειδή το $\mathcal{S}$ είναι ολικά φραγμένο, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $t_1, t_2, ..., t_m \in \mathcal{S}$, ώστε

$$\mathcal{S} \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}(t_i, \varepsilon/3).$$

   Επειδή η $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$, ώστε

$$\|u_\lambda t_i u_\lambda - t_i\| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}\;, \;\forall\lambda \geq \lambda_0,\; \forall i, 1 \leq i \leq m$$

   Έστω $s \in \mathcal{S}$. Υπάρχει t_{i_0} με $1 \leq i_0 \leq m$ ώστε $s \in \mathrm{B}(t_{i_0}, \varepsilon/3)$. Έχουμε για $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \|u_\lambda s u_\lambda - s\| &= \|u_\lambda s u_\lambda - u_\lambda t_{i_0} u_\lambda + u_\lambda t_{i_0} u_\lambda - t_{i_0} + t_{i_0} - s\| \\ &\leq \|u_\lambda\|\|s - t_{i_0}\|\|u_\lambda\| + \|u_\lambda t_{i_0} u_\lambda - t_{i_0}\| + \|t_{i_0} - s\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

4. *Θεωρούμε την C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$, των adjointable τελεστών στο standard Hilbert πρότυπο $\mathcal{H}_\mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα. Εάν $e_1 = (1, 0, 0, ...) \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$, το υποσύνολο $\mathcal{S} = \{\theta_{e_1\cdot a, e_1} : a \in \mathcal{A}, \|a\| \leq 1\}$ της $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο αλλά όχι ολικά φραγμένο σύνολο.*

5. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία C^*-άλγεβρα που αποτελείται από συμπαγή στοιχεία (δηλαδή για κάθε $a \in \mathcal{A}$ η απεικόνιση $x \mapsto axa$ ορίζει συμπαγή τελεστή στην $\mathcal{A}$), τότε κάθε ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο είναι ολικά φραγμένο. Έστω $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μία προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{S}$ ένα ισχυρά διαχωρίσιμο σύνολο της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $\|u_\lambda s u_\lambda - s\| < \varepsilon/2$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$ και για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Επιλέγω $\lambda_1 \in \Lambda$ με $\lambda_1 \geq \lambda_0$. Το σύνολο $u_{\lambda_1}\mathcal{S}u_{\lambda_1}$ είναι προσυμπαγές, επομένως υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $s_1, s_2, ..., s_m \in \mathcal{S}$ ώστε*

$$u_{\lambda_1}\mathcal{S}u_{\lambda_1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}(u_{\lambda_1}s_i u_{\lambda_1}, \varepsilon/2) \ ,$$

και άρα

$$\mathcal{S} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}(u_{\lambda_1}s_i u_{\lambda_1}, \varepsilon).$$

6. *Στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{K}(H)$, την άλγεβρα των συμπαγών τελεστών σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H, τα ισχυρά διαχωρίσιμα σύνολα και τα ολικά φραγμένα σύνολα ταυτίζονται.*

7. *Αν H είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $\mathcal{B}(H)$ η άλγεβρα των φραγμένων γραμμικών τελεστών στον H, $\mathcal{K}(H)$ η άλγεβρα των συμπαγών τελεστών στον H και $\mathcal{S}$ η μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{K}(H)$, τότε το $\mathcal{S}$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{B}(H)$ αλλά δεν είναι ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{K}(H)$.*

   Γενικότερα, αν θεωρήσουμε την C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ των adjointable τελεστών στο standard Hilbert πρότυπο $\mathcal{H}_\mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και την C^*-άλγεβρα των συμπαγών τελεστών $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ στο $\mathcal{H}_\mathcal{A}$, τότε η μοναδιαία μπάλλα της $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ αλλά δεν είναι ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο της $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$.

1.3 Πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα. Αν $a, b \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $M_{a,b} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, που ορίζεται $M_{a,b}(x) = axb$ γιά $x \in \mathcal{A}$ ονομάζεται πολλαπλασιαστικός τελεστής. Μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ λέγεται στοιχειώδης τελεστής αν είναι της μορφής $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$ με $a_i, b_i \in \mathcal{A}$. Έχουμε τότε ότι $\Phi = \sum_{i=1}^{n} M_{a_i,b_i}$. Θα συμβολίζουμε $\mathcal{EL}(\mathcal{A})$ τον χώρο των στοιχειωδών τελεστών πάνω στην $\mathcal{A}$.

Εάν Φ είναι ένας στοιχειώδης τελεστής στην $\mathcal{A}$, το ελάχιστο μήκος $l(\Phi)$ του Φ είναι ο ελάχιστος αριθμός πολλαπλασιαστικών τελεστών που απαιτούνται ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με τον Φ. Κάθε γραφή του Φ με

$l(\Phi)$ πολλαπλασιαστικούς τελεστές λέγεται ελαχιστική αναπαράσταση του Φ.

Στην ενότητα αυτή $\mathcal{A}$ θα είναι μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο.

Στην ενότητα αυτή μελετάμε πολλαπλασιαστικούς και στοιχειώδεις τελεστές στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ένα βασικό αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 1.3.5 στο οποίο δείχνουμε ότι αν ένας στοιχειώδης τελεστής έχει διαχωρίσιμη εικόνα, τότε η εικόνα του περιέχεται στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επίσης αποδεικνύουμε ότι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής της μορφής $M_{A,A}$ στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ έχει διαχωρίσιμη εικόνα αν και μόνον αν $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$(Θεώρημα 1.3.6). Ο M. Mathieu έδωσε στο [23] ένα χαρακτηρισμό για τους θετικούς πολλαπλασιαστικούς τελεστές σε μια C^*-άλγεβρα. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των θετικών πολλαπλασιαστικών τελεστών στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ που έχουν διαχωρίσιμη εικόνα.

Παρατήρηση 1.3.1. *Συμβολίζουμε* $[.] : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ *την απεικόνιση πηλίκο* $T \mapsto [T]$. *Θεωρούμε* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$. *Η απεικόνιση* $[T] \mapsto [\Phi(T)]$ *είναι καλά ορισμένη και ορίζει έναν στοιχειώδη τελεστή στην* C^**-άλγεβρα* $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$. *Θα συμβολίζουμε* $[\Phi]$ *αυτόν τον τελεστή. Αν* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ *με* $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ *όπου* $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *για* $i = 1, \dots, k$ *και* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *έχουμε ότι* $[\Phi]([T]) = \sum_{i=1}^{k}[A_i][T][B_i]$. *Από αυτή την σχέση προκύπτει ότι* $l([\Phi]) \leq l(\Phi)$. *Συμβολίζουμε* $\|[\Phi]\|_Q$ *την νόρμα του* $[\Phi]$. *Έχουμε* $\|[\Phi]\|_Q \leq \|\Phi\|$ *γιά κάθε* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Θα συμβολίζουμε $P_n : \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ για $n \in \mathbb{N}$ την προβολή $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$. Η $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ [22, Proposition 2.2.1.]. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$, θα συμβολίζουμε $P_{(n,m)}$ την προβολή $P_m - P_n$.

Αν Q είναι μια θετική συστολή, θα συμβολίζουμε $Q^{\perp}$ τον τελεστή $I - Q$. Αν $\mathcal{X}$ ένα Hilbert C^*-πρότυπο και $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, θα συμβολίζουμε L_A τον πολαλαπλασιαστικό τελεστή $M_{A,I}$ και R_A τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{I,A}$.

Παρατήρηση 1.3.2. *Έστω* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ *και* $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα του* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. *Από την ισότητα* $\Phi = M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}}\Phi + L_{Q_n}\Phi + R_{Q_n}\Phi - M_{Q_n,Q_n}\Phi$, *έχουμε ότι*

$$[\Phi] = [M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}}\Phi],$$

και άρα

$$\|[\Phi]\|_Q = \|[M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}}\Phi]\|_Q \leq \|M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}}\Phi\|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. *Αντίστοιχα, από την ισότητα* $\Phi = \Phi M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}} + \Phi L_{Q_n} + \Phi R_{Q_n} - \Phi M_{Q_n,Q_n}$, *έχουμε ότι*

$$[\Phi] = [\Phi M_{Q_n^{\perp},Q_n^{\perp}}],$$

και άρα $\|[\Phi]\|_Q \leq \|\Phi M_{Q_n^\perp, Q_n^\perp}\|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 1.3.3. *Θεωρούμε* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ *με* $\|[\Phi]\|_Q = r \neq 0$ *και μία αριθμήσιμη προσεγγιστική μονάδα* $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ *του* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. *Έστω* $\varepsilon > 0$. *Τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $m > n$, *στοιχείο* $T \in Q_n^\perp Q_m \mathcal{B}(\mathcal{X})_1 Q_m Q_n^\perp$ *και* $x \in \mathcal{X}_1$, *ώστε* $\|\Phi(T)x\| \geq r - \varepsilon$.

Απόδειξη Έχουμε ότι $r = \|[\Phi]\|_Q = \|[\Phi M_{Q_n^\perp, Q_n^\perp}]\|_Q \leq \|\Phi M_{Q_n^\perp, Q_n^\perp}\|$, από την παρατήρηση 1.3.2. Άρα υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$ ώστε $\|\Phi M_{Q_n^\perp, Q_n^\perp}(S)\| = \|\Phi(Q_n^\perp S Q_n^\perp)\| \geq r - \varepsilon/4$. Κατά συνέπεια, υπάρχει $x \in \mathcal{X}$ με $\|x\| \leq 1$, ώστε $\|\Phi(Q_n^\perp S Q_n^\perp)x\| \geq r - \varepsilon/2$. Από το Λήμμα 1.1.23, $\lim_{m\to\infty} \|\Phi(Q_n^\perp Q_m S Q_m Q_n^\perp)x\| = \|\Phi(Q_n^\perp S Q_n^\perp)x\|$ και άρα υπάρχει $m > n$ τέτοιο ώστε $\|\Phi(Q_n^\perp Q_m S Q_m Q_n^\perp)x\| \geq r - \varepsilon$. Θέτουμε $T = Q_n^\perp Q_m S Q_m Q_n^\perp$.

□

Θεώρημα 1.3.4. *Εάν* $\mathcal{A}$ *είναι μία διαχωρίσιμη* C^**-άλγεβρα με μονάδα και* $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A}))_1$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο* $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1)$ *είναι διαχωρίσιμο.*

2. $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$.

Απόδειξη Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Υποθέτουμε ότι $\Phi(\mathcal{B}_1(\mathcal{H}_\mathcal{A})) \nsubseteq \mathcal{K}_1(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. Τότε έχουμε $\|[\Phi]\|_Q = r > 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n_k \in \mathbb{N}$, $m_k \in \mathbb{N}$, $Y_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$, $x_k \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$, τέτοια ώστε:

1. $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$

2. $Y_k = P_{(n_k,m_k)} Y_k P_{(n_k,m_k)}$

3. $\|x_k\| \leq 1$, $x_k = P_{n_k}^\perp x_k$

4. $\|\Phi(Y_k)x_k\| \geq r - \varepsilon$

5. $\|\Phi(Y_l)x_k\| \leq \varepsilon/2^{l+k}$ για κάθε $l < k$.

Θέτουμε $n_1 = 1$. Για τον στοιχειώδη τελεστή $R_{P_{n_1}^\perp}\Phi$, από το λήμμα 1.3.3, υπάρχουν $m_1 \in \mathbb{N}$ με $m_1 > n_1$, $Y_1 \in P_{(n_1,m_1)}\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1 P_{(n_1,m_1)}$ και $y_1 \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε $\|\Phi(Y_1)P_{n_1}^\perp y_1\| \geq r - \varepsilon$. Θέτουμε $x_1 = P_{n_1}^\perp y_1$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τα n_i, m_i, Y_i, x_i για $1 \leq i \leq k$. Θα κατασκευάσουμε τα n_{k+1}, m_{k+1}, Y_{k+1}, x_{k+1}.

Οι τελεστές $\Phi(Y_i)$ για $1 \leq i \leq k$ είναι συμπαγείς. Συνεπώς υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\|\Phi(Y_i)P_n^\perp\| \leq \varepsilon/2^{i+k+1}$ για κάθε $i < k+1$, για κάθε $n \geq n_0$. Επιλέγουμε $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > \max\{n_0, m_k\}$. Έχουμε $\|[R_{P_{n_{k+1}}^\perp}\Phi]\|_Q = \|[\Phi]\|_Q = r$. Άρα από το Λήμμα 1.3.3 υπάρχουν $m_{k+1} \in \mathbb{N}$, $m_{k+1} > n_{k+1}$, $Y_{k+1} \in$

$P_{(n_{k+1},m_{k+1})}\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1 P_{(n_{k+1},m_{k+1})}$, $y_{k+1} \in (\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ώστε $\|\Phi(Y_{k+1})P^{\perp}_{n_{k+1}}y_{k+1}\| \geq r - \varepsilon$. Θέτουμε $x_{k+1} = P^{\perp}_{n_{k+1}}y_{k+1}$. Τα n_i, m_i, Y_i, x_i για $1 \leq i \leq k+1$ ικανοποιούν τις $(1), (2), (3), (4), (5)$.

Για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$, ορίζουμε $Y_J = \sum_{k\in J} Y_k$. Τότε $Y_J \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι αν $I \subseteq \mathbb{N}$, $J \subseteq \mathbb{N}$, $I \neq J$, τότε $\|\Phi(Y_J) - \Phi(Y_I)\| \geq r$.

Έχουμε

$$Y_J - Y_I = \sum_{k=1}^{\infty} b(k) Y_k,$$

όπου $b(k) = 1$ αν $k \in J - I$, $b(k) = -1$ αν $k \in I - J$ και $b(k) = 0$, αν $k \notin (J - I) \cup (I - J)$.

Έστω $l \in J - I$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(Y_J) - \Phi(Y_I)\| &= \left\| \Phi(\sum_{k=1}^{\infty} b(k)Y_k) \right\| \\
&\geq \left\| \Phi(\sum_{k=1}^{\infty} b(k)Y_k)x_l \right\| \\
&\geq \|\Phi(Y_l)x_l\| - \sum_{k=1}^{l-1} \|b(k)\Phi\left(Y_k\right)x_l\| - \sum_{k=l+1}^{\infty} \|b(k)\Phi(Y_k)x_l\| \\
&\geq r - \varepsilon - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\varepsilon}{2^{l+k}} - \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+l}} \\
&\geq r - \varepsilon - \varepsilon \geq r - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτοντας $\varepsilon = r/4$, έχουμε

$$\|\Phi(Y_J) - \Phi(Y_I)\| \geq r/2$$

και άρα το $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1)$ δεν είναι διαχωρίσιμο.

Η συνεπαγωγή απο το *2* στο *1* είναι άμεση. □

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*
2. *$\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*

Απόδειξη Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Ας υποθέσουμε ότι $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i,B_i}$ με $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Θεωρούμε $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A})$ με

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \tilde{B}_i = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{k} M_{\tilde{A}_i,\tilde{B}_i} \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}}))_1$. Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από το Kasparov stabilization theorem (1.1.21) και το Θεώρημα 1.3.4, $\tilde{\Phi}(\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ και επομένως $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.

Η συνεπαγωγή από το *2* στο *1* είναι άμεση. □

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*
2. *Το σύνολο $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*
3. *Έχουμε $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και το σύνολο $M_{A,A}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *3*. Έστω $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μιά προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|Q_nA - A\| < \varepsilon/2$ και $\|AQ_n - A\| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως

$$\begin{aligned} \|Q_nAXAQ_n - AXA\| &= \|Q_nAXAQ_n - AXAQ_n + AXAQ_n - AXA\| \\ &\leq \|Q_nA - A\|\|XAQ_n\| + \|AX\|\|AQ_n - A\| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$.

Η συνεπαγωγή από το *3* στο *2* είναι άμεση.

Δείχνουμε ότι το *2* συνεπάγεται το *1*. Από το Θεώρημα 1.3.5 έχουμε ότι $AA^*A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, άρα $AA^*AA^* \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $|A^*| \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Από το [27, πρόταση 1.4.5] συμπεραίνουμε ότι $A^* \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και άρα $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

□

Παρατήρηση 1.3.7. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Απο το θεώρημα του Vala προκύπτει ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{A,B} : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν οι A και B είναι συμπαγείς τελεστές. Θεωρούμε μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{A,B} : \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Παρατηρούμε ότι χωρίς επιπλέον υποθέσεις για την $\mathcal{A}$, δεν μπορούμε να έχουμε κάποιο αντίστοιχο αποτέλεσμα με το θεώρημα του Vala.*

Έστω X ένας συμπαγής χώρος Haussdorf και $C(X)$ η C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων επί του X. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g \in C(X)$, $f \neq 0, g \neq 0$ με ξένους φορείς. Θέτουμε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, $A(h_1, h_2, ...) =$

$(fh_1, fh_2, ...)$ *και* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$, $B(h_1, h_2, ...) = (gh_1, gh_2, ...)$. *Έχουμε ότι* $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. *Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή* $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. *Έστω* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ *και* $[t_{i,j}]$, *ο πίνακας του* T *ως προς την κανονική βάση του* $\mathcal{H}_\mathcal{A}$. *Έχουμε*

$$M_{A,B}(T) = ATB = [ft_{i,j}g] = 0,$$

και κατά συνέπεια ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής με μη συμπαγή σύμβολα μπορεί να είναι ο μηδενικός.

Πρόταση 1.3.8. *Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστικό τελεστή* $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *με* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$*:*

1. *Εάν* A *ή* B *ανήκουν στο* $\mathcal{K}(\mathcal{X})_1$, *τότε το σύνολο* $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ *είναι διαχωρίσιμο.*

2. *Εάν* $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ *τότε* $M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1\right) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ *και το σύνολο* $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ *είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη

Το 1 είναι άμεσο.

Δείχνουμε το 2. Έστω $\varepsilon > 0$. *Έστω* $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *μία προσεγγιστική μονάδα της* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. *Υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\|BQ_n - B\| < \varepsilon/2$ *και* $\|Q_nA - A\| < \varepsilon/2$ *για κάθε* $n \geq n_0$. *Επομένως:*

$$\begin{aligned}
\|Q_nAXBQ_n - AXB\| &= \|Q_nAXBQ_n - Q_nAXB + Q_nAXB - AXB\| \\
&\leq \|Q_nAX\|\|BQ_n - B\| + \|Q_nA - A\|\|XB\| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$ *και για κάθε* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$. □

Θα δώσουμε τώρα ένα χαρακτηρισμό για τους θετικούς πολλαπλασιαστικούς τελεστές. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα [23, 6, Example 5.2.15]:

Θεώρημα 1.3.9. *Έστω* $S = M_{a,b}$ *ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής στην* $\mathcal{A}$ *με* $a, b \in \mathcal{A}$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο* S *είναι θετικός.*

2. *Ο* S *είναι πλήρως θετικός.*

3. *Υπάρχει* $c \in \mathcal{A}$ *ώστε* $S = M_{c^*,c}$.

Πρόταση 1.3.10. *Εάν* $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *με* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο* $M_{A,B}$ *είναι θετικός και το σύνολο* $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ *είναι διαχωρίσιμο.*

2. *Ο $M_{A,B}$ είναι πλήρως θετικός και το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*

3. *Υπάρχει $C \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ ώστε $M_{A,B} = M_{C^*,C}$.*

4. *Ο $M_{A,B}$ είναι θετικός, $M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1\right) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

5. *Ο $M_{A,B}$ είναι πλήρως θετικός, $M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1\right) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

6. *Ο $M_{A,B}$ είναι θετικός και $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*

7. *Ο $M_{A,B}$ είναι πλήρως θετικός και $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 1.3.9, το *1* είναι ισοδύναμο με το *2*, το *4* είναι ισοδύναμο με το *5* και το *6* είναι ισοδύναμο με το *7*. Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *3*. Από το Θεώρημα 1.3.9, υπάρχει $C \in \mathcal{A}$ ώστε $M_{A,B} = M_{C^*,C}$. Από το Θεώρημα 1.3.5, $C^*C \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ και άρα $C \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$. Η συνεπαγωγή από το *3* στο *4* έπεται από την Πρόταση 1.3.8. Η συνεπαγωγή από το *4* στο *6* είναι άμεση. Η συνεπαγωγή από το *6* στο *1* είναι άμεση. □

1.4 Prime C^*-άλγεβρες και πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Θεωρούμε μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{A}$ και ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{X}$. Θα μελετήσουμε πολλαπλασιαστικούς τελεστές στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ της μορφής $M_{A,B}$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Από την παρατήρηση 1.3.7 προκύπτει ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο με το αποτέλεσμα του Vala για πολλαπλασιαστικούς τελεστές στο $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Θα δούμε στην ενότητα αυτή ότι αυτό είναι δυνατόν αν η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα. Δείχνουμε ότι τότε και η C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα (Θεώρημα 1.4.8).

Πολλαπλασιστικοί και στοιχειώδεις τελεστές σε prime C^*-άλγεβρες έχουν μελετηθεί απο τον M. Mathieu [24, 25]. Θα χρησιμοποιήσουμε ιδέες και αποτελέσματα από τις εργασίες αυτές στην μελέτη των πολλαπλασιαστικών τελεστών στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Προκύπτει απο ένα αποτέλεσμα του Mathieu (Θεώρημα 1.4.10), ότι το φαινόμενο που εμφανίζεται στην παρατήρηση 1.3.7 δεν μπορεί να εμφανιστεί σε πολλαπλασιαστικούς τελεστές σε prime C^*-άλγεβρες. Πράγματι, ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{a,b}$ σε μιά prime C^*-άλγεβρα είναι 0 αν και μόνον αν $\|a\|\|b\| = 0$.

Τα κύρια αποτελέσματα της ενότητας αυτής είναι τα ακόλουθα: Θεωρούμε μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{A}$ και ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι αν $M_{A,B}$ είναι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, τότε η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ αν και μόνον αν $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ (Θεώρημα 1.4.11). Επίσης δείχνουμε ότι αν $M_{A,B}$ είναι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής στην $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, τότε η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ αν και μόνον αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ η $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ (Θεώρημα 1.4.13). Τέλος, δείχνουμε ότι το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (Θεώρημα 1.4.16). Το αποτέλεσμα αυτό έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον και θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη ενότητα.

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό και βασικές ιδιότητες των prime C^*-αλγεβρών [9, II. 5.4].

Εάν $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ είναι ιδεώδη μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, θα συμβολίζουμε $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ την κλειστή γραμμική θήκη όλων των γινομένων a_1a_2, με $a_1 \in \mathcal{J}_1$ και $a_2 \in \mathcal{J}_2$. Το $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Ένα κλειστό ιδεώδες $\mathcal{I}$ της $\mathcal{A}$ λέγετε prime, εάν $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$, και για κάθε δύο κλειστά ιδεώδη $\mathcal{J}_1$ και $\mathcal{J}_2$ της $\mathcal{A}$, με $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ έχουμε ότι $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{I}$ ή $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$.*

Ορισμός 1.4.2. *Μία C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται prime, εάν το $\{0\}$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{A}$.*

Πρόταση 1.4.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime.*

2. *Αν $a, b \in \mathcal{A}$ και $axb = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.*

3. *Εάν $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ είναι ιδεώδη της $\mathcal{A}$, και $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \{0\}$, τότε $\mathcal{J}_1 = \{0\}$ ή $\mathcal{J}_2 = \{0\}$.*

Πρόταση 1.4.4. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\mathcal{A}$ μία C^*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$. Αν οι μοναδικοί αναλλοίωτοι υπόχωροι για την $\mathcal{A}$ είναι οι H και $\{0\}$, τότε η $\mathcal{A}$ είναι prime.*

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ η C^*-άλγεβρα των adjointable απεικονίσεων πάνω στο standart Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο $\mathcal{H}_\mathcal{A}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα,*

2. *Η $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

3. *Η $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

Απόδειξη Η ισοδυναμία των *2* και *3* προκύπτει απο το [25, Lemma 2.2] και το [20, Theorem 2.4].

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Θεωρούμε $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Θεωρούμε τον πίνακα $[a_{ij}]$ του A και τον πίνακα $[b_{ij}]$ του B ως προς την κανονική βάση του $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Εφόσον οι A και B είναι μη μηδενικοί τελεστές, υπάρχουν $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k,l} \neq 0$ και $b_{m,n} \neq 0$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ ώστε $a_{kl}xb_{mn} \neq 0$. Έστω $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$, ο τελεστής του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση είναι ο $[x_{ij}]$, με $x_{ij} = 0$ αν $(i, j) \neq (l, m)$ και $x_{lm} = x$. Τότε $AXB \neq 0$.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Εάν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, τότε μπορούμε να βρούμε μη μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ ώστε $axb = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε τον τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ του οποίου ο πίνακάς ως προς την κανονική βάση είναι ο $[a_{ij}]$ με $a_{ij} = 0$ αν $(i, j) \neq (1, 1)$ και $a_{11} = a$ και τον τελεστή $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ οποίου ο πίνακάς ως προς την κανονική βάση είναι ο $[b_{ij}]$ με $b_{ij} = 0$ αν $(i, j) \neq (1, 1)$ και $b_{11} = b$. Τότε $A \neq 0$, $B \neq 0$ και $AXB = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και άρα η $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ δεν είναι prime.
□

Παρατήρηση 1.4.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα. Εάν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, μπορούμε να βρούμε τελεστές $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) - \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ ώστε $A\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})B = \{0\}$. Εφόσον η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime, τότε μπορούμε να βρούμε μη μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ ώστε $axb = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε τον τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ του οποίου ο πίνακάς ως προς την κανονική βάση είναι ο $[a_{ij}]$ με $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $a_{ii} = a$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και τον τελεστή $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ του οποίου ο πίνακάς ως προς την κανονική βάση είναι ο $[b_{ij}]$ με $b_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $b_{ii} = b$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) - \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και $AXB = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$.*

Παρατήρηση 1.4.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο το οποίο είναι full. Θεωρούμε $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$. Τότε υπάρχουν $x, y \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε ο τελεστής $\theta_{x,ya}$ να είναι μη μηδενικός. Πράγματι, επειδή το $\mathcal{X}$ είναι full, $ya = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{X}$ αν και μόνο αν $a = 0$. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $y \in \mathcal{X}$ ώστε $ya \neq 0$. Επειδή $\langle ya, ya \rangle \in \mathcal{A}$ και $\langle ya, ya \rangle \neq 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $x \in \mathcal{X}$ ώστε $x\langle ya, ya \rangle \neq 0$. Έχουμε $\theta_{x,ya}(ya) = x\langle ya, ya \rangle \neq 0$.*

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:*

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

2. *Η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

3. *Η $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

Τότε $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$. Επιπλέον, αν το $\mathcal{X}$ είναι full, τότε $2 \Leftrightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Απόδειξη

Η ισοδυναμία των *2* και *3* προκύπτει απο το [25, Lemma 2.2] και το [20, Theorem 2.4].

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Εάν η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, από την Πρόταση 1.4.3 υπάρχουν μη μηδενικοί τελεστές $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε $A\mathcal{B}(\mathcal{X})B = 0$. Θέτουμε $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ με

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι τελεστές $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$ της C^*-άλγεβρας $\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ είναι μη μηδενικοί και $\tilde{A}\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})\tilde{B} = 0$. Αυτό είναι άτοπο γιατί η $\mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ είναι ισόμορφη με την $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και άρα είναι prime C^*-άλγεβρα από το Θεώρημα 1.4.5.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Εάν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα, από την Πρόταση 1.4.3 μπορούμε να βρούμε μη μηδενικά στοιχεία $a, b \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $a\mathcal{A}b = 0$. Από την παρατήρηση 1.4.7, μπορούμε να επιλέξουμε $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ ώστε $\theta_{x,ya^*} \neq 0$ και $\theta_{z,wb^*} \neq 0$. Τότε για $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ έχουμε

$$\theta_{x,ya^*} X \theta_{z,wb^*} = \theta_{xa\langle y,Xz\rangle b,w} = 0$$

και άρα η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime C^*-άλγεβρα. □

Παρατήρηση 1.4.9. *Η συνεπαγωγή 2 ⇒ 1 δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι το $\mathcal{X}$ είναι full. Πράγματι, αν $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ και $\mathcal{X} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$ με $\langle x+0, y+0\rangle = \overline{x}y + 0$ και δράση της $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{X}$ είναι $(x+0)(a+b) = xa+0$, τότε $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \mathbb{C}$ που είναι prime, ενώ η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime.*

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα [25, Proposition 2.3].

Θεώρημα 1.4.10. *Έστω $\mathcal{A}$ μία C^*-άλγεβρα με μονάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα.*

2. $\|M_{a,b}\| = \|a\|\|b\|$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 1.4.11. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα. Εάν $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $A, B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

2. $M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1\right) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ *και το σύνολο* $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ *είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην* $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη Η συνεπαγωγή από το *1* στο *2* προκύπτει από την Πρόταση 1.3.8. Θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Θεωρούμε μια προσεγγιστική μονάδα $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Έστω ότι $A \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Τότε η ακολουθία $\{Q_n^\perp A\}_{n=1}^\infty$ δεν τείνει στο μηδέν, άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $\|Q_n^\perp A\| \geq r$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα 1.4.5 η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα με μονάδα. Από το θεώρημα 1.4.10, έχουμε ότι $\|M_{Q_n^\perp A,B}\| = \|Q_n^\perp A\|\|B\| \geq r\|B\|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, τέτοιο ώστε $\|M_{Q_n^\perp A,B}(Y_n)\| \geq \frac{r\|B\|}{2}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sup_{Y\in\mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_nAYBQ_n - AYB\| &\geq \|Q_m^\perp (Q_nAY_mBQ_n - AY_mB)\| \\ &= \|\left(Q_m^\perp Q_nAY_mBQ_n - Q_m^\perp AY_mB\right)\|\end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Όμως $\lim_{m\to\infty} Q_m^\perp Q_n = 0$ και άρα

$$\sup_{Y\in\mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_nAYBQ_n - AYB\| \geq \frac{r\|B\|}{2}.$$

Επειδή το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{Y\in\mathcal{B}(\mathcal{X})_1} \|Q_nAYBQ_n - AYB\| = 0$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Η απόδειξη είναι όμοια αν $B \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$. □

Λήμμα 1.4.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα. Θεωρούμε $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ με $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. Θέτουμε $r = \|[A]\|\|[B]\|$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m > n$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ με $T = P_{(n,m)}TP_{(n,m)}$ και $x \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$ με $x = P_n^\perp x$ και $\|x\| \leq 1$ ώστε $\|ATBx\| \geq r - \varepsilon$.*

Απόδειξη Από το θεώρημα 1.4.5 η $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι prime C^*-άλγεβρα με μονάδα και από το θεώρημα 1.4.10 έχουμε

$$\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp BP_n^\perp}\| = \|AP_n^\perp\|\|P_n^\perp BP_n^\perp\| \geq \|[A]\|\|[B]\| = r.$$

Άρα υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)_1$ ώστε $\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp AP_n^\perp}(S)\| \geq r - \varepsilon/4$, και $y \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$ με $\|y\| \leq 1$ ώστε

$$\|M_{AP_n^\perp, P_n^\perp AP_n^\perp}(S)y\| = \|AP_n^\perp SP_n^\perp BP_n^\perp y\| \geq r - \varepsilon/2.$$

Από το Λήμμα 1.1.23

$$\lim_{m\to\infty} AP_n^{\perp}P_mSP_n^{\perp}P_mBP_n^{\perp}y = AP_n^{\perp}SP_n^{\perp}BP_n^{\perp}y$$

και άρα υπάρχει $m > n$ τέτοιο ώστε

$$\|AP_n^{\perp}P_mSP_n^{\perp}P_mBP_n^{\perp}y\| \geq r - \varepsilon.$$

Ο $T = P_{(n,m)}SP_{(n,m)}$ και το $x = P_n^{\perp}y$ ικανοποιούν το συμπέρασμα του Λήμματος.

□

Θεώρημα 1.4.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα. Εάν $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ με $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$.*

2. *Το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*

Απόδειξη Η συνεπαγωγή από το *1* στο *2* είναι άμεση από την Πρόταση 1.3.8. Θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Από το Θεώρημα 1.3.4 έχουμε ότι $A\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1 B \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$. Θα υποθέσουμε ότι $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θέτουμε $r = \|[A]\|\|[B]\|$. Έχουμε $r > 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n_l \in \mathbb{N}, m_l \in \mathbb{N}, Y_l \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)_1, x_l \in \mathcal{H}_A$ τέτοια ώστε:

1. $n_l < m_l < n_{l+1} < m_{l+1}$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

2. $Y_l = P_{(n_l,m_l)}YP_{(n_l,m_l)}$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

3. $\|x_l\| \leq 1$ και $x_l = P_{n_l}^{\perp}x_l$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

4. $\|AY_lBx_l\| \geq r - \varepsilon$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

5. $\|A(Y_1 + Y_2 + ...Y_{l-1})Bx_l\| \leq \varepsilon/2^l$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$

6. $\|AY_qBx_l\| \leq \varepsilon/2^q$ για κάθε $q \in \mathbb{N}$ και για κάθε $l < q$.

Θέτουμε $n_1 = 1$. Από το λήμμα 1.4.12 υπάρχουν $m_1 \in \mathbb{N}$ με $m_1 > n_1$, $Y_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})_1$ με $Y_1 = P_{(n_1,m_1)}Y_1P_{(n_1,m_1)}$ και $x_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ με $\|x_1\| \leq 1$ και $x_1 = P_{n_1}^{\perp}x_1$ ώστε $\|AY_1Bx_1\| \geq r - \varepsilon$.

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει τα n_i, m_i, Y_i, x_i για $i = 1, 2, , ..., l$. Κατασκευάζουμε τα $n_{l+1}, m_{l+1}, Y_{l+1}, x_{l+1}$.

Ο τελεστής $A(Y_1 + \cdots + Y_l)B$ είναι συμπαγής, άρα υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|A(Y_1 + \cdots + Y_l)BP_k^{\perp}\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}$ για κάθε $k \geq k_1$. Υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ότι $\|P_k^\perp Bx_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}$ για κάθε $k \geq k_2$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l$. Επιλέγουμε $n_{l+1} > \max\{k_1, k_2, m_l\}$. Από το θεώρημα 1.4.10, έχουμε ότι

$$\|M_{AP_{n_{l+1}}^\perp, P_{n_{l+1}}^\perp BP_{n_{l+1}}^\perp}\| = \|AP_{n_{l+1}}^\perp\|\|P_{n_{l+1}}^\perp BP_{n_{l+1}}^\perp\| \geq \|[A]\|\|[B]\| = r.$$

Από το λήμμα 1.4.12, υπάρχει $m_{l+1} \in \mathbb{N}$ με $m_{l+1} > n_{l+1}$, $Y_{l+1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ με $Y_{l+1} = P_{(n_{l+1}, m_{l+1})} Y_{l+1} P_{(n_{l+1}, m_{l+1})}$ και $x_{l+1} \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$ με $\|x_{l+1}\| \leq 1$ και $x_{l+1} = P_{n_{l+1}}^\perp x_{l+1}$ ώστε $\|AY_{l+1}Bx_{l+1}\| \geq r - \varepsilon$.

Το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί.

Θέτουμε $Y_0 = \sum_{i=1}^\infty Y_i$. Έχουμε $Y_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$. Ο τελεστής AY_0B είναι συμπαγής. Έστω $l \in \mathbb{N}$. Για το διάνυσμα x_l της ακολουθίας $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|AY_0BP_{n_l}^\perp\| &\geq \|AY_0BP_{n_l}^\perp x_l\| \\
&\geq \|AY_0Bx_l\| \\
&\geq \|AY_lBx_l\| - \left\| A\left(\sum_{i=1}^{l-1} Y_i\right) Bx_l \right\| - \sum_{i=l+1}^\infty \|AY_iBx_l\| \\
&\geq r - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^l} - \sum_{i=l+1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^i} \\
&\geq r - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Επειδή ο τελεστής AY_0B είναι συμπαγής, $\lim_{l\to\infty} \|AY_0BP_{n_l}^\perp\| = 0$ και άρα $r - 2\varepsilon \leq 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Συμπεραίνουμε ότι $r = 0$ που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 1.4.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Εάν $M_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $A, B \in \mathcal{B}_1(\mathcal{X})$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *A ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*
2. *το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο.*

Απόδειξη Η συνεπαγωγή από το *1* στο *2* είναι άμεση από την Πρόταση 1.3.8. Θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $M_{A,B}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι διαχωρίσιμο. Ορίζουμε τους τελεστές $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A})$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$M_{\tilde{A},\tilde{B}}\left(\mathcal{B}_1(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A})\right) = \begin{pmatrix} M_{A,B}\left(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την Πρόταση 1.4.13 προκύπτει ότι $\tilde{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ ή $\tilde{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{A})_1$, επομένως $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ ή $B \in \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$. □

Θεώρημα 1.4.15. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\mathcal{A}$ είναι prime.*

2. *Το ιδεώδες $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$.*

Απόδειξη Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Αν το $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ δεν είναι prime ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$, υπάρχουν δύο μη μηδενικά κλειστά ιδεώδη $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ του $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ ώστε $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ με $\mathcal{J}_1 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και $\mathcal{J}_2 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. Έστω $C \in \mathcal{J}_1$ και $D \in \mathcal{J}_2$ με $\|C\| \leq 1$, $\|D\| \leq 1$ και $C, D \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. Τότε $C\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1 D \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})_1$ το οποίο είναι άτοπο από το Θεώρημα 1.3.4 και το Θεώρημα 1.4.13.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *1*. Από την παρατήρηση 1.4.6 αν η $\mathcal{A}$ δεν είναι prime, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ με $A, B \notin \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ τέτοια ώστε $A\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})B \subseteq \{0\}$. Θεωρούμε το ιδεώδες $\mathcal{J}_1$ της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ που παράγεται από το A και το ιδεώδες $\mathcal{J}_2$ της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ που παράγεται από το B. Τότε $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \{0\} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και $\mathcal{J}_1 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και $\mathcal{J}_2 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ και άρα το $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ δεν είναι prime ιδεώδες της $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$. □

Θεώρημα 1.4.16. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Τότε το ιδεώδες $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη Αν το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ δεν είναι prime ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, υπάρχουν δύο μη μηδενικά κλειστά ιδεώδη $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ με $\mathcal{J}_1 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $\mathcal{J}_2 \nsubseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Έστω $C \in \mathcal{J}_1$ και $D \in \mathcal{J}_2$ με $\|C\| \leq 1, \|D\| \leq 1$ και $C, D \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Τότε $C\mathcal{B}(\mathcal{X})_1 D \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$, το οποίο είναι άτοπο από το Θεώρημα 1.3.5 και το θεώρημα 1.4.14. □

Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο. Δεν γνωρίζουμε εάν η υπόθεση ότι το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ συνεπάγεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι prime C^*-άλγεβρα.

1.5 Στοιχειώδεις τελεστές

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε δύο θεωρήματα για στοιχειώδεις τελεστές.

Θεώρημα 1.5.1. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.

2. *Υπάρχουν υποσύνολα $\{A_1, \dots, A_k\}$, $\{B_1, \dots, B_k\}$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i ή B_i να ανήκουν στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \dots, k$ και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$.*

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το *1* συνεπάγεται το *2*. Έστω $\sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$ μία αναπαράσταση του Φ με ελάχιστο μήκος ώστε τα μη συμπαγή στοιχεία του συνόλου $\{B_1, \dots, B_k\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα modulo $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Θέτουμε $J = \{i \in \{1, \dots, k\} : B_i \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})\}$. Τότε $[\Phi] = \sum_{i=1}^k M_{[A_i],[B_i]} = \sum_{i \in J} M_{[A_i],[B_i]}$. Από την πρόταση 1.4.16 το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, και άρα το πηλίκο $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι prime C^*-άλγεβρα. Επειδή τα $\{[B_i], i \in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στην C^*-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$, από το [24, Theorem 1.1] προκύπτει ότι $[A_i] = [0]$ για $i \in J$, άρα $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \in J$. Από τα παραπάνω $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i} = \sum_{i \in J} M_{A_i,B_i} + \sum_{i \in J^c} M_{A_i,B_i}$ με $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \in J$ και $B_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i \notin J$.

Η συνεπαγωγή από το *2* στο *1* είναι άμεση. □

Θεώρημα 1.5.2. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

2. *Υπάρχουν $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$.*

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το *1* συνεπάγεται το *2*. Από το Θεώρημα 1.5.1, υπάρχουν $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ώστε τουλάχιστον ένα από τα A_i ή B_i να ανήκουν στο $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \dots, k$ και $\Phi = \sum_{i=1}^k M_{A_i,B_i}$. Ας υποθέσουμε ότι $A_1 \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $B_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επειδή $l(\Phi) = k$, τα στοιχεία του συνόλου $\{B_1, \dots, B_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από [21, Lemma 2.4] υπάρχει $\Psi = \sum_{i=1}^l M_{C_i,D_i} \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ ώστε $\Psi(B_1) \neq 0$ και $\Psi(B_i) = 0$ για $i = 2, \dots, k$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|C_i\|, \|D_i\| \leq 1$, για $i = 1, \dots, l$. Θεωρούμε μια προσεγγιστική μονάδα $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ της $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Από την Πρόταση 1.4.10 για τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{Q_n^\perp A_1, \Psi(B_1)}$ έχουμε

$$\|M_{Q_n^\perp A_1, \Psi(B_1)}\| = \|Q_n^\perp A_1\| \|\Psi(B_1)\| \geq \|[A_1]\| \|\Psi(B_1)\| = r > 0,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$, ώστε

$$\|M_{Q_n^\perp A_1, \Psi(B_1)}(Y_n)\| \quad > \quad r/2 > 0. \tag{1.1}$$

Έχουμε

$$\sum_{i=1}^l \Phi(Y_n C_i) D_i = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k A_j Y_n C_i B_j D_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l A_j Y_n C_i B_j D_i$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A_j Y_n \sum_{i=1}^{l} C_i B_j D_i = \sum_{j=1}^{k} A_j Y_n \Psi(B_j) = A_1 Y_n \Psi(B_1),$$

και άρα

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} Q_n^{\perp} \Phi(Y_n C_i) D_i \right\| \;=\; \left\| Q_n^{\perp} A_1 Y_n \Psi(B_1) \right\| > \frac{r}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το Λήμμα 1.2.5,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{l} Q_n^{\perp} \Phi(Y_n C_i) D_i \right\| = 0$$

το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο. Η περίπτωση όπου $A_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ και $B_1 \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$ αποδεικνύεται ανάλογα.

Η συνεπαγωγή από το 2 στο 1 είναι άμεση από Πρόταση 1.3.8. □

Παρατήρηση 1.5.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $l > k$ και $A_1, \dots, A_l, B_1, \dots, B_l \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{l} M_{A_i,B_i}$. Έπεται από το Θεώρημα ότι τότε υπάρχουν $C_1, \dots, C_k, D_1, \dots, D_k \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{C_i,D_i}$.*

Πρόταση 1.5.4. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία διαχωρίσιμη μοναδιαία prime C^*-άλγεβρα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο Φ είναι πλήρως θετικός και $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$.*
2. *Υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $A_1, \dots, A_k$ του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i^*,A_i}$.*
3. *Ο Φ είναι πλήρως θετικός, $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$ και το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη Αρχικά θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Εφόσον Φ είναι πλήρως θετικός, από το [25, Theorem 4.10] υπάρχουν $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ γραμμικά ανεξάρτητα ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i^*,A_i}$. Μένει να δείξουμε ότι $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για $i = 1, \dots, k$. Εφόσον $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{X})_1$, έχουμε $\Phi(I) \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Άρα $\Phi(I) = \sum_{i=1}^{k} A_i^* A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Επειδή σε μία C^*-άλγεβρα τα ιδεώδη είναι hereditary υπάλγεβρες, έχουμε ότι $A_i^* A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε i, $1 \le i \le n$ και άρα $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε i, $1 \le i \le n$.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *3*. Εάν $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{A_i^*,A_i}$, από το [25, Theorem 4.10] έχουμε ότι ο Φ είναι πλήρως θετικός. Εφόσον $A_i \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ από την Πρόταση 1.3.8 έχουμε ότι το σύνολο $M_{A_i^*,A_i}(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ υπάρχει m_i ώστε $\|Q_m A_i^* X A_i Q_m - A_i^* X A_i\| \leq \varepsilon/k$ για κάθε $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})_1$ και $m > m_i$. Θέτουμε $m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$. Τότε

$$\|Q_m \Phi(X) Q_m - \Phi(X)\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|Q_m A_i^* X A_i Q_m - A_i^* X A_i\| \leq \varepsilon,$$

για κάθε $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{X})$ και $m > m_0$, επομένως το σύνολο $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{X})_1)$ είναι ισχυρά διαχωρίσιμο στην $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Τέλος η συνεπαγωγή από το *3* στο *1* είναι προφανής. $\square$

Παρατήρηση 1.5.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία διαχωρίσιμη prime C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{X}$ ένα αριθμήσιμα παραγόμενο Hilbert $\mathcal{A}$-πρότυπο και $\Phi \in \mathcal{EL}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))_1$ με $l(\Phi) = k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $l > k$ και $A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{l} M_{A_i^*,A_i}$. Έπεται από την Πρόταση ότι τότε υπάρχουν $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ ώστε $\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_{B_i^*,B_i}$.*

Κεφάλαιο 2

k-ακραία σημεία

Έστω K ένα κλειστό κυρτό σύνολο σε έναν χώρο με νόρμα. Ένα σημείο x του K λέγεται k-ακραίο σημείο εάν δεν ανήκει στο εσωτερικό κανενός υποσυνόλου του K πραγματικής διάστασης $k+1$. Το σύνολο των k-ακραίων σημείων του K θα συμβολίζεται $\mathrm{ext}_k(K)$. Η έννοια του k-ακραίου σημείου γενικεύει την έννοια του ακραίου σημείου. Αν $x \in K$, τότε το x είναι ακραίο σημείο αν και μόνον αν $x \in \mathrm{ext}_0(K)$. Θεωρούμε μια C^*-άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{A}$. Ο Kadison υπολόγισε τα ακραία σημεία της μοναδιαίας μπάλας της $\mathcal{A}$ στο [16].

Η έννοια των συστολικών διαταραχών ενός σημείου της μοναδιάιας μπάλας ενός χώρου Banach εισήχθη στο [2]. Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι αν a είναι ένα στοιχείο της μοναδιαίας μπάλας μίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε το σύνολο των δεύτερων διαταραχών του a είναι συμπαγές αν και μόνον αν υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε ο τελεστής $\pi(a)$ να είναι συμπαγής. Συναφή προβλήματα έχουν μελετηθεί στα [1], [3], [4], [5] και [19].

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των k-ακραίων σημείων της μοναδιαίας μπάλας μιας C^*-άλγεβρας χρησιμοποιώντας την έννοια των συστολικών διαταραχών.

2.1 Γεωμετρικά συμπαγή στοιχεία και στοιχεία πεπερασμένης τάξης σε C^*-άλγεβρες

Αν $\mathcal{S}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας ενός χώρου Banach $\mathcal{X}$, τότε οι *συστολικές διαταραχές* του $\mathcal{S}$ ορίζονται ως

$$\mathrm{cp}(\mathcal{S}) = \{x \in \mathcal{X} : \|x \pm s\| \leq 1, \forall s \in \mathcal{S}\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο εγκλεισμός $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ συνεπάγεται $\mathrm{cp}(\mathcal{S}_1) \supseteq \mathrm{cp}(\mathcal{S}_2)$. Επιπλέον, ένα στοιχείο x της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{X}$ είναι ένα ακραίο σημείο αν και μόνο αν $\mathrm{cp}(\{x\}) = \{0\}$.

Ορίζουμε τις συστολικές διαταραχές ανώτερης τάξης χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση $\mathrm{cp}^{n+1}(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}\left(\mathrm{cp}^n(\mathcal{S})\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathrm{cp}(\mathcal{S})$ είναι ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{X}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{cp}^2(\mathcal{S})$ και από αυτό έπεται ότι $\mathrm{cp}^3(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}(\mathcal{S})$ και γενικώτερα $\mathrm{cp}^n(\mathcal{S}) = \mathrm{cp}^{n+2}(\mathcal{S})$ για κάθε $S \subseteq X$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η έννοια των δεύτερων διαταραχών μελετάται στο [2] όπου και αποδεικνύεται ότι το σύνολο των δεύτερων διαταραχών ενός στοιχείου a της μοναδιαίας μπάλας μίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε ο τελεστής $\pi(a)$ να είναι συμπαγής.

Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, $\mathcal{A}$ θα είναι μία C^*-άλγεβρα με μονάδα. Αν $x \in \mathcal{A}$, θα γράφουμε $\mathrm{cp}^n(x)$ αντί για $\mathrm{cp}^n(\{x\})$.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα στοιχείο a της $\mathcal{A}$ λέγεται γεωμετρικά συμπαγές αν το $\mathrm{cp}^2(a)$ είναι συμπαγές.*

Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα για το σύνολο των δεύτερων διαταραχών σε C^*-άλγεβρες δίνεται στην ακόλουθη πρόταση [2, Proposition 1.2].

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $a \in \mathcal{A}_1$ και $x \in \mathcal{A}$. Αν $\|x\| \leq 1/2$, τότε $axa \in \mathrm{cp}^2(a)$.*

Θεωρούμε μία μεγιστική οικογένεια μη ισοδύναμων ανά δύο irreducible αναπαραστάσεων της $\mathcal{A}$, $\{(\rho_i, H_i)\}_{i\in I}$, όπου H_i χώροι Hilbert. Η αναπαράσταση $(\rho, H_\rho) = (\sum_{i\in I} \oplus\rho_i, \sum_{i\in I} \oplus\mathcal{H}_i)$ λέγεται reduced atomic representation της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με ρ.

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει από το [2, Theorem 2.2] και την απόδειξη του. Δίνουμε την απόδειξη για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 2.1.3. *Εάν $a \in \mathcal{A}_1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το στοιχείο a είναι γεωμετρικά συμπαγές.*
2. *Το σύνολο $a\mathcal{A}_1 a$ είναι προσυμπαγές.*
3. *Ο τελεστής $\rho(a)$ είναι συμπαγής.*
4. *Υπάρχει πιστή αναπαράσταση τ της $\mathcal{A}$ ώστε ο τελεστής $\tau(a)$ να είναι συμπαγής.*

Απόδειξη Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Από την Πρόταση 2.1.2, έχουμε ότι $a\mathcal{A}_1 a \subseteq 2\mathrm{cp}^2(a)$ και άρα το $a\mathcal{A}_1 a$ είναι προσυμπαγές.

Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *3*. Ας υποθέσουμε ότι $K = \overline{\rho(a)\rho(\mathcal{A}_1)\rho(a)}^{\|\cdot\|}$. Το σύνολο K είναι norm-συμπαγές και άρα strongly-συμπαγές. Από το Kaplansky's density theorem, έχουμε:

$$K = \overline{\sum_i \oplus\rho_i(a)\rho_i(\mathcal{A}_1)\rho_i(a)}^{\mathrm{SOT}} = \sum_i \oplus\rho_i(a)\mathcal{B}(H_i)_1\rho_i(a)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι ο τελεστής $\rho_i(a)$ είναι συμπαγής για κάθε $i \geq 1$ ([2, Lemma 2.1]) και ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\|\rho_i(a)\| \leq \varepsilon$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος i, και άρα ο τελεστής $\rho(a)$ είναι συμπαγής.

Η συνεπαγωγή από το *3* στο *4* προκύπτει από το ότι η ρ είναι πιστή [17, Proposition 10.3.10]. Τέλος η συνεπαγωγή από το *4* στο *1* είναι άμεση από το [2, Theorem 2.2]. □

Αν $\mathcal{S}$ είναι υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου, θα συμβολίζουμε $\operatorname{span}\mathcal{S}$ την γραμμική θήκη του $\mathcal{S}$.

Ορισμός 2.1.4. *Ένα στοιχείο a της $\mathcal{A}_1$ λέγεται πεπερασμένης γεωμετρικής τάξης αν $\dim\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) < +\infty$.*

Το ακόλουθο είναι το [2, Lemma 3.1].

Λήμμα 2.1.5. *Εάν $A \in \mathcal{B}(H)_1$ με $\operatorname{rank}(A) = n$ τότε $\dim\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(A) = n^2$.*

Πρόταση 2.1.6. *Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία C^*-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και $a \in \mathcal{A}_1$, τότε $\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) = \operatorname{span} a\mathcal{A}a$.*

Απόδειξη Υπάρχουν χώροι Hilbert $H_1, H_2, ..., H_n$ ώστε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H_1) \oplus \mathcal{B}(H_2) \oplus ... \oplus \mathcal{B}(H_n)$. Αν $a \in \mathcal{A}_1$, $a = a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ με $a_i \in \mathcal{B}(H_i)_1$ γιά κάθε $i = 1, 2, ..., n$, είναι άμεσο ότι $\operatorname{cp}^2(a) = \operatorname{cp}^2(a_1) \oplus \operatorname{cp}^2(a_2) \oplus ... \operatorname{cp}^2(a_n)$, όπου το $\operatorname{cp}^2(a_i)$ υπολογίζεται στην $\mathcal{B}(H_i)$ γιά κάθε $i = 1, 2, ...n$. Από το Λήμμα 2.1.5 έχουμε $\dim\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) = \sum_{i=1}^n r_i^2$, όπου $r_i = \operatorname{rank} a_i$ γιά κάθε $i = 1, 2, ...n$. Έχουμε $\dim\operatorname{span} a\mathcal{A}a = \sum_{i=1}^n \dim\operatorname{span} a_i\mathcal{B}(H_i)a_i = \sum_{i=1}^n r_i^2$. Από την Πρόταση 2.1.2, $\operatorname{span} a\mathcal{A}a \subseteq \operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a)$ και άρα $\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) = \operatorname{span} a\mathcal{A}a$. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $a \in \mathcal{A}_1$ και e μία προβολή στην $\mathcal{A}$ ώστε $eae = a$. Συμβολίζουμε $\operatorname{cp}_e^n(a)$ το σύνολο των n-οστών συστολικών διαταραχών του a υπολογισμένων στην $e\mathcal{A}e$. Τότε $\operatorname{cp}^2(a) \subseteq \operatorname{cp}_e^2(a)$. Εάν επιπλέον $e\mathcal{A}e$ είναι πεπερασμένης διάστασης τότε $\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) = \operatorname{span}\operatorname{cp}_e^2(a)$.*

Απόδειξη Το σύνολο $\operatorname{cp}_e(a) \oplus e^\perp\mathcal{A}_1e^\perp$ περιέχεται στο $\operatorname{cp}(a)$. Εάν $y \in \operatorname{cp}^2(a)$ τότε $\|y \pm s\| \leq 1$ για κάθε $s \in e^\perp\mathcal{A}_1e^\perp$ ως εκ τούτου $y \in e\mathcal{A}e$. Επίσης $\|y \pm s\| \leq 1$ γιά κάθε $s \in \operatorname{cp}_e(a)$ και άρα $\operatorname{cp}^2(a) \subseteq \operatorname{cp}_e^2(a)$.

Από την πρόταση 2.1.6 έχουμε ότι $\operatorname{span}\operatorname{cp}_e^2(a) = \operatorname{span} ae\mathcal{A}ea$, ενώ από την πρόταση 2.1.2 έχουμε ότι $\operatorname{span} a\mathcal{A}a \subseteq \operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a)$. Άρα $\operatorname{span}\operatorname{cp}_e^2(a) = \operatorname{span} ae\mathcal{A}ea \subseteq \operatorname{span} a\mathcal{A}a \subseteq \operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a)$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης προκύπτει ότι $\operatorname{span}\operatorname{cp}^2(a) = \operatorname{span}\operatorname{cp}_e^2(a)$. □

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει από το [2, Theorem 2.2] και την απόδειξή του. Δίνουμε την απόδειξη για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 2.1.8. *Εάν $a \in \mathcal{A}_1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το στοιχείο a είναι πεπερασμένης γεωμετρικής τάξης.*

2. *Ο διανυσματικός χώρος $\operatorname{span} a\mathcal{A}_1a$ είναι πεπερασμένης διάστασης.*

3. *Ο τελεστής $\rho(a)$ είναι πεπερασμένης τάξης.*

4. *Υπάρχει πιστή αναπαράσταση τ της $\mathcal{A}$, ώστε ο τελεστής $\tau(a)$ είναι πεπερασμένης τάξης.*

Απόδειξη Δείχνουμε την συνεπαγωγή από το *1* στο *2*. Από την Πρόταση 2.1.2 έχουμε ότι $a\mathcal{A}_1 a \subseteq 2 \cdot \mathrm{cp}^2(a)$, και άρα ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

Τώρα θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *2* στο *3*. Το σύνολο $a\mathcal{A}_1 a$ είναι προσυμπαγές και από το Θεώρημα 2.1.3 ο τελεστής $\rho(a)$ είναι συμπαγής. Άρα και ο τελεστής $\rho(aa^*)$ είναι συμπαγής. Έχουμε ότι $\rho(aa^*) = \sum \lambda_i f_i$, όπου λ_i οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\rho(aa^*)$ και f_i οι ορθογώνιες προβολές στους αντίστοιχους ιδιόχωρους. Επειδή ο $\rho(aa^*)$ είναι συμπαγής, οι f_i είναι πεπερασμένης διάστασης. Θέτουμε $x_i = \rho(a^*) f_i$. Οι τελεστές $\{x_i\}$ έχουν ορθογώνιες εικόνες και άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Έχουμε ότι $\rho(a)x_i\rho(a) \in \mathrm{span}\{a\mathcal{A}_1 a\}$ για κάθε $i \geq 1$. Επειδή $\rho(a)x_i\rho(a) = \rho(a)\rho(a^*)f_i\rho(a) = \lambda_i f_i \rho(a)$, οι τελεστές $\rho(a)x_i\rho(a)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Εφόσον ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a$ είναι πεπερασμένης διάστασης, ο τελεστής $\rho(aa^*)$ είναι πεπερασμένης τάξης και άρα και ο $\rho(a)$ είναι πεπερασμένης τάξης.

Η συνεπαγωγή από το *3* στο *4* είναι άμεση.

Τέλος θα δείξουμε την συνεπαγωγή από το *4* στο *1*. Έστω K ο χώρος της αναπαράστασης τ και f μία πεπερασμένης τάξης προβολή του $\mathcal{B}(K)$ τέτοια ώστε $f\tau(a)f = \tau(a)$. Η C^*-άλγεβρα $f\mathcal{B}(K)f \cap \tau(\mathcal{A})$ είναι πεπερασμένης διάστασης και περιέχει το $\tau(a)$. Έστω u η μονάδα της $f\mathcal{B}(K)f \cap \tau(\mathcal{A})$. Τότε $u \in \tau(\mathcal{A})$, η $u\tau(\mathcal{A})u$ είναι πεπερασμένης διάστασης και $u\tau(a)u = \tau(a)$. Από την Πρόταση 2.1.7, το a είναι πεπερασμένης γεωμετρικής τάξης. □

Πόρισμα 2.1.9. *Εάν $a \in \mathcal{A}_1$ με $\dim \mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a < \infty$, τότε $\mathrm{span}\, \mathrm{cp}^2(a) = \mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a$.*

Πόρισμα 2.1.10. *Έστω $a \in \mathcal{A}_1$.*

1. *εάν $\dim \mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a < \infty$, τότε $\mathrm{span}\, \mathrm{cp}^2(a) = \mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a$.*

2. *εάν $\dim \mathrm{span}\, \mathrm{cp}^2(a) < \infty$, τότε $\mathrm{span}\, \mathrm{cp}^2(a) = \mathrm{span}\, a\mathcal{A}_1 a$.*

Απόδειξη Αρχικά θα αποδείξουμε το (1). Από το θεώρημα 2.1.8 ο τελεστής $\rho(a)$ είναι πεπερασμένης τάξης. Έστω e μία προβολή πεπερασμένης τάξης στον H_ρ ώστε $e\rho(a)e = \rho(a)$. Η C^*-άλγεβρα $e\mathcal{B}(H_\rho)e \cap \rho(\mathcal{A})$ είναι πεπερασμένης διάστασης και περιέχει το $\rho(a)$. Έστω u η μονάδα της $e\mathcal{B}(H_\rho)e \cap \rho(\mathcal{A})$. Τότε $u \in \rho(\mathcal{A})$, η $u\rho(\mathcal{A})u$ είναι πεπερασμένης διάστασης και $u\rho(a)u = \rho(a)$. Από τις Προτάσεις 2.1.6 και 2.1.7 έπεται ότι $\mathrm{span}\, \mathrm{cp}^2(a) = \mathrm{span}\, a\mathcal{A}a$.

Το (2) αποδεικνύεται από το [2, Proposition 1.2] και το (1). □

2.2 k-ακραία σημεία της μοναδιαίας μπάλας σε C^*-άλγεβρες.

Στην ενότητα αυτή δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των k-ακραίων σημείων της μοναδιαίας μπάλας της $\mathcal{A}$. Στο [10] έγινε ένας χαρακτηρισμός των στοιχείων του συνόλου $\mathrm{ext}_k(\mathcal{A}_1)$ για $k \leq 2$.

Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Λήμμα 2.2.1. *Έστω H ένας χώρος Hilbert. Εάν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A\| = 1$ και $\|A \pm B\| = 1$. Τότε:*

1. *Υπάρχουν φραγμένοι τελεστές S, T τέτοιοι ώστε $B = S(1 - A^*A)^{1/2}$ και $B = (1 - AA^*)^{1/2}T$.*

2. *Υπάρχουν φραγμένοι τελεστές R, Q τέτοιοι ώστε $B = R(1-(A^*A)^{1/2})^{1/2}$ και $B = (1 - (AA^*)^{1/2})^{1/2}Q$.*

Απόδειξη Το *1* είναι το [26, Lemma 1]. Το *2* προκύπτει απο το *1* αν θέσουμε $R = S(1 + (A^*A)^{1/2})$ και $Q = (1 + (AA^*)^{1/2})T$.

□

Το ακόλουθο είναι το [26, Theorem 3]:

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $A, X \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A\| = 1$ και $\|X\| \leq 1$. Αν $B = (1 - (AA^*)^{1/2})^{1/2}X(1 - (A^*A)^{1/2})^{1/2}$, τότε $\|A \pm B\| = 1$.*

Λήμμα 2.2.3. *Εάν A, B είναι τελεστές πεπερασμένης τάξης πάνω σε έναν χώρο Hilbert H, τότε $A\mathcal{B}(H) \cap \mathcal{B}(H)B = A\mathcal{B}(H)B$.*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι $A\mathcal{B}(H)B \subseteq A\mathcal{B}(H) \cap \mathcal{B}(H)B$. Εάν $W \in A\mathcal{B}(H) \cap \mathcal{B}(H)B$ τότε $W = AX = YB$, όπου $X, Y \in \mathcal{B}(H)$. Έστω Q η προβολή στον $\mathrm{coker}B$. Επειδή ο B είναι πεπερασμένης τάξης, υπάρχει $G \in \mathcal{B}(H)$, ώστε $Q = GB$. Τότε $W = WQ = AXQ = AXGB \in A\mathcal{B}(H)B$. □

Πρόταση 2.2.4. *Έστω $a \in \mathcal{A}$ με $\|a\| = 1$.*

1. *Εάν $\dim \left[(I - |a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I - |a|)^{\frac{1}{2}}\right] < +\infty$, τότε:*

$$\mathrm{span}\,\mathrm{cp}^1(a) = (I - |a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I - |a|)^{\frac{1}{2}}.$$

2. *Εάν $\dim \mathrm{span}\,\mathrm{cp}^1(a) < +\infty$, τότε:*

$$\mathrm{span}\,\mathrm{cp}^1(a) = (I - |a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I - |a|)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη

Αρχικά θα δείξουμε το *1.* Έχουμε από το Θεώρημα 2.2.2 $(I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}} \subseteq \operatorname{span}\operatorname{cp}^1(a)$.

Θέτουμε $S = \rho\left((I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}}\right)$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος S είναι πεπερασμένης διάστασης, ισούται με την κλειστή θήκη του για την strong τοπολογία, και άρα

$$S = \sum_i \oplus \left[\rho_i\left((I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\right)\mathcal{B}(H_i)\,\rho_i\left((I-|a|)^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Θεωρούμε τα σύνολα $I_1 = \{i : \rho_i(I-|a^*|) \neq 0\}$ και $I_2 = \{i : \rho_i(I-|a|) \neq 0\}$. Εάν $I_0 = I_1 \cap I_2$, το σύνολο I είναι πεπερασμένο και για κάθε $i \in I_0$ οι τελεστές $\rho_i(I-|a^*|)$ και $\rho_i(I-|a|)$ είναι πεπερασμένης τάξης. Θεωρούμε $x \in \operatorname{cp}^1(a)$. Από το λήμμα 2.2.1, έχουμε ότι $\rho_i(x) \in \mathcal{B}(H_i)\rho((I-|a|)^{\frac{1}{2}})$ και $\rho_i(x) \in \rho_i((I-|a^*|)^{\frac{1}{2}})\mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I_0$.

Επειδή και οι τελεστές $\rho_i(I-|a^*|)$ και $\rho_i(I-|a|)$ είναι πεπερασμένης τάξης, από το λήμμα 2.2.3, έχουμε ότι $\rho_i(x) \in \rho_i((I-|a^*|)^{\frac{1}{2}})\mathcal{B}(H_i)\rho_i((I-|a|)^{\frac{1}{2}})$ για κάθε $i \in I_0$ και άρα

$$\rho(x) \in \sum_i \left[\rho_i((I-|a^*|)^{\frac{1}{2}})\mathcal{B}(H_i)\rho_i((I-|a|)^{\frac{1}{2}})\right] = S,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $x \in (I-|a^*|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Το *2* έπεται από το *1* και από την σχέση $(I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}} \subseteq \operatorname{span}\operatorname{cp}^1(a)$. □

Το επόμενο θεώρημα είναι το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| = 1$ και $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\dim\operatorname{span}\operatorname{cp}^1(a) \leq k$.
2. $a \in \operatorname{ext}_{2k}(\mathcal{A}_1)$.
3. $a \in \operatorname{ext}_{2k+1}(\mathcal{A}_1)$.
4. $\dim\left[(I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}}\right] \leq k$.

Απόδειξη Αρχικά δείχνουμε ότι το *1* συνεπάγεται το *2*. Υποθέτουμε ότι $\dim\operatorname{span}\operatorname{cp}^1(a) \leq k$ και $a \notin \operatorname{ext}_{2k}(\mathcal{A}_1)$. Εφόσον $a \notin \operatorname{ext}_{2k}(\mathcal{A}_1)$ το a θα περιέχεται στο εσωτερικό ενός υποσυνόλου V του $\mathcal{A}_1$ διάστασης $2k+1$. Έστω $B \subset V$ μία μπάλα με κέντρο το a, διάστασης $2k+1$. Η μπάλα $B-\{a\}$ έχει κέντρο το 0 και διάσταση $2k+1$. Θεωρούμε $2k+1$ στοιχεία $s_1, s_2, ..., s_{2k+1} \in B-\{a\}$ πού είναι γραμμικά ανεξάρτητα επί του $\mathbb{R}$. Έχουμε $s_i \in B-\{a\}$ και $-s_i \in B-\{a\}$

και άρα $s_i+a \in B$ και $-s_i+a \in B$ για κάθε $i=1,2,...,2k+1$. Άρα $s_i \in \mathrm{cp}^1(a)$ για κάθε $i=1,2,...,2k+1$. Αυτό είναι άτοπο γιατί $\dim \operatorname{span} \mathrm{cp}^1(a) \leq k$.

Η συνεπαγωγή από το *2* στο *3* είναι άμεση καθώς $\mathrm{ext}_{2k}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathrm{ext}_{2k+1}(\mathcal{A}_1)$.

Δείχνουμε ότι το *3* συνεπάγεται το *1*. Υποθέτουμε ότι $a \in \mathrm{ext}_{2k+1}(\mathcal{A}_1)$ και $\dim \operatorname{span} \mathrm{cp}^1(a) > k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Υποθέτουμε ότι $\dim \operatorname{span} \mathrm{cp}^1(a) < +\infty$.

Τότε μπορώ να βρω $k+1$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $s'_1, \ldots, s'_{k+1} \in \operatorname{span} \mathrm{cp}^1(a)$. Από την Πρόταση 2.2.4, $s'_1, \ldots, s'_{k+1} \in (I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}}$. Υπάρχουν $\xi'_1, \ldots, \xi'_{k+1} \in \mathcal{A}$ ώστε $s'_i = (I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\xi'_i(I-|a|)^{\frac{1}{2}}$ για $i=1,\ldots,k+1$. Θέτουμε $s_i = \frac{s'_i}{\|\xi'_i\|}$ και $\xi_i = \frac{\xi'_i}{\|\xi'_i\|}$ για $i=1,\ldots k+1$. Τότε $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}, \mathrm{i}\xi_1, \ldots, \mathrm{i}\xi_{k+1} \in \mathcal{A}_1$.

Θέτουμε

$$V_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \xi_i + \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i i \xi_i : \sum_{i=1}^{k+1} (|\lambda_i| + |\mu_i|) \leq 1, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Το V_0 περιέχεται στο $\mathcal{A}_1$. Θέτουμε

$$V = (I-|a^*|)^{\frac{1}{2}} V_0 (I-|a|)^{\frac{1}{2}}.$$

Έχουμε

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i i s_i : \sum_{i=1}^{k+1} (|\lambda_i| + |\mu_i|) \leq 1, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Από το Θεώρημα 2.2.2 το V περιέχεται στο $\mathrm{cp}^1(a)$. Επίσης έχει πραγματική διάσταση $2k+2$ και έχει το 0 στο εσωτερικό του. Άρα το $a+V$ έχει το a στο εσωτερικό του, έχει πραγματική διάσταση $2k+2$ και $a+V \subseteq \mathcal{A}_1$, που είναι άτοπο.

Υποθέτουμε ότι $\dim \operatorname{span} \mathrm{cp}^1(a) = +\infty$.

Από την Πρόταση 2.2.4 υπάρχουν $2k+2$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $s'_1, \ldots, s'_{2k+2} \in (I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}(I-|a|)^{\frac{1}{2}}$. Θεωρούμε $\xi'_1, \ldots, \xi'_{2k+2} \in \mathcal{A}$ ώστε $s'_i = (I-|a^*|)^{\frac{1}{2}}\xi'_i(I-|a|)^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $i=1,\ldots,2k+2$. Από το Θεώρημα 2.2.2, έχουμε $s_i = \frac{s'_i}{\|\xi'_i\|} \in \mathrm{cp}^1(a)$, για $i=1,\ldots,2k+2$.

Θέτουμε

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{2k+2} \lambda_i s_i : \sum_{i=1}^{2k+2} |\lambda_i| \leq 1, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Το V περιέχεται στο $\mathrm{cp}^1(a)$, έχει πραγματική διάσταση $2k+2$ και έχει το 0 στο εσωτερικό του. Άρα το $a+V$ έχει το a στο εσωτερικό του, $a+V \subseteq \mathcal{A}_1$ και έχει πραγματική διάσταση $2k+2$ που είναι άτοπο.

Η ισοδυναμία του *1* με το *4* είναι άμεση από την πρόταση 2.2.4. □

Κεφάλαιο 3

Συμπαγή στοιχεία σε ημισταυρωτά γινόμενα

3.1 Ημισταυρωτά γινόμενα

Τα ημισταυρωτά γινόμενα αλγεβρών τελεστών εισήχθησαν από τον W. B. Arveson το 1967 στο [8] και έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης από πολλούς ερευνητές. Για πληροφορίες για τα ημισταυρωτά γινόμενα παραπέμπουμε στο άρθρο επισκόπησης [11] και στις βιβλιογραφικές αναφορές που περιέχει.

Θεωρούμε έναν τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff X και έναν ομοιομορφισμό $\phi : X \to X$.

Θα συμβολίζουμε $C_0(X)$ τη C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο F του X που περιέχει το σύνολο $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Για $n \in \mathbb{Z}_+$ θεωρούμε την απεικόνιση $\alpha^n : C_0(X) \to C_0(X)$, η οποία ορίζεται $f \mapsto f \circ \phi^n$. Η απεικόνιση α^n είναι ένας ισομετρικός $*$-ενδομορφισμός της C^*-άλγεβρας $C_0(X)$. Έχουμε $\alpha^n(f) = f \circ \phi^n$, για $n \in \mathbb{Z}_+$ και $f \in C_0(X)$.

Θεωρούμε τον χώρο των τυπικών αθροισμάτων της μορφής

$$\sum_{n=0}^{k} U^n f_n$$

με $k \in \mathbb{Z}_+$ και $f_n \in C_0(X)$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Συμβολίζουμε $\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ τον χώρο Banach που είναι η πλήρωση του χώρου αυτού ως προς τη νόρμα

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} U^n f_n \right\|_1 = \sum_{n=0}^{k} \|f_n\|_{C_0(X)}$$

Εάν $U^n f, U^m g \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$, ορίζουμε την πράξη

$$U^n f \cdot U^m g = U^{m+n} \alpha^m(f) g$$

και την επεκτείνουμε γραμμικά. Με την πράξη αυτή ο $\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ είναι άλγεβρα Banach.

Θεωρούμε μία πιστή αναπαράσταση (π, H_0) της $C_0(X)$ σε έναν χώρο Hilbert H_0.

Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Θεωρούμε την συνήθη βάση $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\pi} : \ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X)) \to \mathcal{B}(H)$ ως εξής:

$$\tilde{\pi}(U^n f)(\xi \otimes e_k) = \pi\left(\alpha^k(f)\right) \xi \otimes e_{k+n}$$

για $\xi \otimes e_k \in H$.

Η απεικόνιση $\tilde{\pi}$ είναι μία αναπαράσταση της άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ στον χώρο Hilbert H. Η $\tilde{\pi}$ είναι συστολή. Θα δείξουμε ότι η $\tilde{\pi}$ είναι $1-1$.

Ας υποθέσουμε ότι $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} U^n f_n \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ και $x, y \in H_0$ είναι δύο μοναδιαία διανύσματα. Για $m \in \mathbb{Z}_+$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\pi}(A)(x \otimes e_0), y \otimes e_m \rangle &= \sum_n \langle \tilde{\pi}(U^{\mathrm{n}} f_{\mathrm{n}})(x \otimes e_0), y \otimes e_m \rangle \\
&= \sum_n \langle \pi(f_n) x \otimes e_n, y \otimes e_m \rangle \\
&= \langle (\pi(f_m) x \otimes e_m, y \otimes e_m \rangle \\
&= \langle \pi(f_m) x, y \rangle,
\end{aligned}$$

καθώς $\pi(f_n)x \otimes e_n$ και $y \otimes e_m$ είναι κάθετα για $n \neq m$. Από την τελευταία ισότητα έχουμε ότι

$$\|f_m\|_{C_0(X)} = \|\pi(f_m)\|_{\mathcal{B}(H_0)} \leq \|\tilde{\pi}(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}. \tag{3.1}$$

Ως εκ τούτου, εάν $\tilde{\pi}(A) = 0$ τότε $f_m = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$, επομένως $A = 0$.

Ορισμός 3.1.1. *Το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathcal{A} = C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$, είναι η κλειστή γραμμική θήκη του $\tilde{\pi}(\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$ στον $\mathcal{B}(H)$.*

Για $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} U^n f_n \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))$, θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{\pi}(A) \in \mathcal{B}(H)$ και ορίζουμε τον n^o-συντελεστή Fourier του $\tilde{\pi}(A)$ την ποσότητα $E_n(\tilde{\pi}(A)) \equiv f_n \in C_0(X)$. Από την ανίσωση 3.1, η απεικόνιση $E_n : \tilde{\pi}\left(\ell^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))\right) \to C_0(X)$ είναι συστολή για την operator norm και ως εκ τούτου επεκτείνεται ως συστολή στο ημισταυρωτό γινόμενο $\mathcal{A}$.

Θα δείξουμε πως ορίζεται ο $n^{ος}$-συντελεστής Fourier ενός στοιχείου A του ημισταυρωτού γινομένου $\mathcal{A}$. Για το στοιχείο $A \in \mathcal{A}$ υπάρχει ακολουθία $\{A_m\} \subset \tilde{\pi}\left(l^1(\mathbb{Z}_+, C_0(X))\right)$ ώστε $\|A - A_m\|_{\mathcal{B}(H)} \to 0$. Ορίζουμε $E_n(A) = \lim_m E_n(A_m)$.

Παρατήρηση 3.1.2. *Εάν $A, B \in \mathcal{A}$, και $E_n(A) = E_n(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$, τότε $A = B$. Για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{A}$ θα θεωρούμε την τυπική σειρά $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n f_n$, όπου $f_n = E_n(A)$. Σημειώνουμε ότι το A ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη των $U^n f_n$.*

3.2 Συμπαγή στοιχεία σε ημισταυρωτά γινόμενα.

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach θα συμβολίζουμε $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ το ριζικό Jacobson της $\mathcal{A}$. Στο [12] οι Donsig , Katavolos και Manousos χαρακτήρισαν το ριζικό του Jacobson στα ημισταυρωτά γινόμενα.

Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται recurrent για το δυναμικό σύστημα (X, ϕ), εάν για κάθε περιοχή V του x, υπάρχει $n \geq 1$ ώστε $\phi^n(x) \in V$. Συμβολίζουμε X_r το σύνολο των reccurent σημείων του δυναμικού συστήματος (X, ϕ).

Θεώρημα 3.2.1. *[12, Theorem 1]*

Έστω X ένας τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και ϕ ένας ομοιομορφισμός του X. Τότε

$$\mathrm{Rad}(C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U^n f_n \in C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+ : f_n|_{X_r} = 0, \forall n \right\}.$$

Να υπενθυμίσουμε πως εάν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach και $A \in \mathcal{A}$, τότε το A λέγεται συμπαγές στοιχείο, εάν το σύνολο $A\mathcal{A}_1 A$ είναι προσυμπαγές.

Στην ενότητα αυτή θα χαρακτηρίσουμε τα συμπαγή στοιχεία του ημισταυρωτού γινομένου $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$, όπου X ένας τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και $\phi : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Επίσης θα δείξουμε ότι το ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία είναι το ριζικό Jacobson του $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$.

Στην συνέχεια αυτής της ενότητας X θα είναι ένας τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος ο οποίος δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία, $\phi : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός και $\mathcal{A}$ το ημισταυρωτό γινόμενο $C_0(X) \times_\phi \mathbb{Z}_+$.

Στα ημισταυρωτά γινόμενα είναι δυνατόν να υπάρχει μηδενικός πολλαπλασιαστικός τελεστής με μη μηδενικά σύμβολα.

Παράδειγμα 3.2.2. *Θεωρούμε $X = \mathbb{R}$ και $\phi(x) = x + 2$. Έστω $A = U^n f \in \mathcal{A}$ με $n > 1$ και $\mathrm{supp}(f) \subseteq [0, 1]$. Τότε*

$$\begin{aligned} M_{A,A}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} U^m g_m\right) &= U^n f \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}_+} U^m g_m\right) U^n f \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} U^{2n+m} \alpha^{n+m}(f) \alpha^n(g_m) f \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} U^{2n+m} (f \circ \phi^{n+m})(g_m \circ \phi^n) f \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $(f \circ \phi^{n+m}) f = 0$ για κάθε $m \geq 0$ καθώς $\mathrm{supp}(f) \cap \phi^{-n-m}(\mathrm{supp}(f)) = \emptyset$ για κάθε $m \geq 0$.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.2.3. *[18, Theorem 1]*
Έστω X ένας τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος ο οποίος δεν περιέχει μεμονωμένα σημεία. Αν $f \in C_0(X)$ και η απεικόνιση $T_f : C_0(X) \to C_0(X)$ που ορίζεται $T_f(g) = fg$ είναι συμπαγής, τότε $f = 0$.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω $A = U^n f \in \mathcal{A}$. Τότε ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{A,A}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο $M_{A,A}$ είναι μηδενικός.*

Απόδειξη Έστω $m \in \mathbb{Z}_+$ και $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στην $C_0(X)$ με $\|g_k\|_{C_0(X)} \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Τότε η ακολουθία

$$\left(M_{A,A}\left(U^m g_k \circ \phi^{-n}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(U^{2n+m} f \circ \phi^{n+m} g_k f\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως η ακολουθία

$$\left(f \circ \phi^{n+m} g_k f\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0(X)$$

έχουν συγκλίνουσα υπακολουθία καθώς η $E_{2n+m} : \mathcal{A} \to C_0(X)$ είναι συστολή. Άρα ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{f\circ\phi^{n+m},f} : C_0(X) \to C_0(X)$ είναι συμπαγής για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$. Από το Θεώρημα 3.2.3 έχουμε ότι $f \circ \phi^{n+m} f = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$. Και άρα $M_{A,A} = 0$. □

Πρόταση 3.2.5. *Έστω $A = U^n f \in \mathcal{A}$ με $f \neq 0$. Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{A,A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν $n \geq 1$ και $f \circ \phi^{n+m} f = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$.*

Απόδειξη Από την Πρόταση 3.2.4, αν ο τελεστής $M_{A,A}$ είναι συμπαγής τότε $\left(f \circ \phi^{n+m}\right) f = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$. Από αυτό προκύπτει ότι $f = 0$ όταν $n = 0$. Άρα $n > 1$, και $f \circ \phi^{n+m} f = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$.

Αντίστροφα, αν ισχύει η συνθήκη της Πρότασης, τότε από την απόδειξη της Πρότασης 3.2.4 προκύπτει ότι ο $M_{A,A}$ είναι ο μηδενικός τελεστής. □

Πρόταση 3.2.6. *Εάν $A = U^n f \in \mathcal{A}$ είναι συμπαγές στοιχείο της $\mathcal{A}$, τότε $A \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη Από την Πρόταση 3.2.5 έχουμε $n \geq 1$. Έστω x_r ένα recurrent σημείο του (X, ϕ) ώστε $f(x_r) \neq 0$. Υπάρχει μία περιοχή U_{x_r} του x και $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x)| > \varepsilon$ για κάθε $x \in U_{x_r}$. Θεωρούμε μία ακολουθία $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ώστε $\phi^{n+k_m}(x_r) \in U_{x_r}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έχουμε $|f \circ \phi^{n+k_n}(x_r) f(x_r)| > \varepsilon^2$, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 3.2.4. Άρα $f(x_r) = 0$. Από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε ότι $A \in \mathrm{Rad}\mathcal{A}$. □

Θεώρημα 3.2.7. *Εάν $A \in \mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το A είναι συμπαγές στοιχείο.*

2. *$M_{A,A} = 0$.*

3. *Αν $f_n = E_n(A)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$, τότε $\left(f_m \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ για $l, m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το *1* συνεπάγεται το *3*. Θα συμβολίζουμε $\mathcal{A}_{m1}$ το σύνολο όλων των μονωνύμων που περιέχονται στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{A}$. Το σύνολο $M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})$ είναι προσυμπαγές, και άρα το σύνολο

$$E_{l+k}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) = \left\{\sum_{n=0}^{k}\left(f_{k-n} \circ \phi^{l+n}\right)(g_l \circ \phi^n) f_n : g_l \in C_0(X)_1\right\}$$

είναι προσυμπαγές. Άρα το σύνολο

$$E_0\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) = \{f_0 g_0 f_0 : g_0 \in C_0(X)_1\}$$

είναι προσυμπαγές σύνολο και από το Θεώρημα 3.2.3 προκύπτει ότι $f_0 = 0$.

Θεωρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$. Θα υποθέσουμε ότι η συνθήκη $\left(f_m \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ αληθεύει για κάθε $l \in \mathbb{Z}_+$ και για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}_+$ με $0 \leq m+n \leq n_0$ και Θα δείξουμε ότι η συνθήκη $\left(f_m \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ αληθεύει για κάθε $l \in \mathbb{Z}_+$ και για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}_+$ με $0 \leq m+n \leq n_0+1$.

Για $n \in \{0, n_0+1\}$ έχουμε $f_n = 0$ ή $f_m = 0$ και άρα το συμπέρασμα ισχύει για $n \in \{0, n_0+1\}$. Εάν πολλαπλασιάσουμε το $E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right)$ με f_1 προκύπτει

$$E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) f_1 = \left\{\sum_{n=1}^{n_0}\left(f_{n_0+1-n} \circ \phi^{l+n}\right)(g_l \circ \phi^n) f_n f_1 : g_l \in C_0(X)_1\right\}.$$

Από την υπόθεσή μας, $\left(f_m \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ για κάθε $0 \leq n+m \leq n_0$, παρατηρούμε ότι $\left(f_{n_0+1-n} \circ \phi^{(l+n-1)+1}\right) f_1 = 0$ εάν $0 \leq n_0+1-n+1 \leq n_0$ ή εάν $n \geq 2$. Άρα

$$E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) f_1 = \left\{\left(f_{n_0} \circ \phi^{l+1}\right)\left(g_l \circ \phi^1\right) f_1 f_1 : g_l \in C_0(X)_1\right\}.$$

Από το Θεώρημα 3.2.3 προκύπτει ότι $\left(f_{n_0} \circ \phi^{l+1}\right) f_1 = 0$.

Τώρα θα υποθέσουμε ότι $\left(f_{n_0+1-n} \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ και κάθε $n \leq r$, όπου $r \leq n_0$. Θα δείξουμε ότι $\left(f_{n_0+1-r-1} \circ \phi^{l+r+1}\right) f_{r+1} = 0$. Πολλαπλασιάζοντας το σύνολο $E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right)$ με f_{r+1} προκύπτει

$$E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) f_{r+1} = \left\{\sum_{n=r+1}^{n_0}\left(f_{n_0+1-n} \circ \phi^{l+n}\right)(g_l \circ \phi^n) f_n f_{r+1} : g_l \in C_0(X)_1\right\}.$$

Σημειώνουμε ότι $\left(f_{n_0+1-n} \circ \phi^{(l+n-r-1)+r+1}\right) f_{r+1} = 0$ εάν $n_0+1-n+r+1 \leq n_0$ ή εάν $n \geq r+2$. Άρα

$$E_{l+n_0+1}\left(M_{A,A}(\mathcal{A}_{m1})\right) f_{r+1} = \left\{ \left(f_{n_0+1-r-1} \circ \phi^{l+r+1}\right) \left(g_l \circ \phi^{r+1}\right) f_{r+1} f_{r+1} : g_l \in C_0(X)_1 \right\}.$$

Από το Θεώρημα 3.2.3, $\left(f_{n_0+1-r-1} \circ \phi^{l+r+1}\right) f_{r+1} = 0$. Άρα $\left(f_m \circ \phi^{l+n}\right) f_n = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}_+$ ώστε $n+m = n_0+1$.

Η συνεπαγωγές από το 3 στο 2 και από το 2 στο 1 είναι άμεσες. □

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι το ιδεώδες που παράγεται από το σύνολο των συμπαγών στοιχείων της $\mathcal{A}$ είναι το ριζικό Jacobson της $\mathcal{A}$.

Ένα υποσύνολο $V \subset X$ λέγεται wandering εάν τα σύνολα $V, \phi^{-1}(V), \phi^{-2}(V) \dots$ είναι ξένα ανά δύο.

Εάν $f \in C_0(X)$ θα συμβολίζουμε $\mathrm{D}(f) = f^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$.

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη της Πρότασης 3.2.5 για $n = 1$ ισοδυναμεί με το ότι το σύνολο $D(f)$ είναι wandering.

Λήμμα 3.2.8. *Εάν $\mathcal{C}$ είναι η κλειστή άλγεβρα που παράγεται από το σύνολο $\{f \in C_0(X) : \mathrm{D}(f)$ είναι wandering$\}$, τότε η $\mathcal{C}$ είναι ίση με την άλγεβρα $\mathcal{R} = \{f \in C_0(X) : f(X_r) = \{0\}\}$.*

Απόδειξη Θα συμβολίζουμε με Y την ένωση όλων των ανοικτών wandering υποσυνόλων του X. Επειδή η ϕ είναι ομοιομορφισμός, έχουμε $\phi(Y) = Y$ και $\phi(X-Y) = \phi(X-Y)$. Το δυναμικό σύστημα $(\phi|_{X-Y}, X-Y)$ δεν περιέχει κανένα wandering ανοικτό σύνολο. Από το [15, Theorem 1.27] το σύνολο των recurrent σημείων του $X-Y$ είναι πυκνό στο $X-Y$. Άρα $f|(X-Y) = 0$, για κάθε $f \in \mathcal{R}$ και άρα $\mathcal{R} \subseteq C_0(Y)$. Έχουμε $C_0(Y) \subseteq \mathcal{R}$ και άρα $C_0(Y) = \mathcal{R}$.

Από το θεώρημα Stone-Weierstrass έχουμε ότι $\mathcal{C} = C_0(Y)$ και άρα $\mathcal{R} = \mathcal{C}$.
□

Παρατήρηση 3.2.9. *Από το Λήμμα και την Πρόταση 3.2.5 έχουμε ότι αν $f \in \mathcal{C}$ και $n \geq 1$, τότε το $U^n f$ ανήκει στο ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία της $\mathcal{A}$.*

Θεώρημα 3.2.10. *Το ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι το* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη Έστω A ένα συμπαγές στοιχείο της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{Z}_+$ και $f = E_n(A)$. Από το Θεώρημα 3.2.7, το $U^n f$ είναι συμπαγές στοιχείο της $\mathcal{A}$. Από την Πρόταση 3.2.6, $U^n f \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$, και άρα $A \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.

Έστω $A \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{Z}_+$ και $f = E_n(A)$. Έχουμε $U^n f \in \mathrm{Rad}\mathcal{A}$ [12, page 133]. Αρκεί να δείξουμε ότι το $U^n f$ περιέχεται στο ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε Y και $\mathcal{C}$ όπως στο Λήμμα 3.2.8. Από το Θεώρημα 3.2.1 $f(X_r) = \{0\}$ και άρα $f \in C_0(Y)$. Απο το Λήμμα 3.2.8 το στοιχείο f περιέχεται στην $\mathcal{C}$. Άρα το $U^n f$ περιέχεται στο ιδεώδες που παράγεται από τα συμπαγή στοιχεία της $\mathcal{A}$.

□

Βιβλιογραφία

[1] G. Andreolas, *Compact operators in TRO's*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3169–3178.

[2] M. Anoussis and G. Katsoulis, *Compact operators and the geometric structure of C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2115–2122.

[3] M. Anoussis and E. G. Katsoulis, *Compact operators and the geometric structure of nest algebras*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 319-335.

[4] M. Anoussis, V. Felouzis and I. Todorov, *Contractive perturbations in C^*-algebras*, J. Operator Theory **59** (2008), 53-68.

[5] M. Anoussis and I. Todorov, *Compact operators on Hilbert modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 257-261.

[6] P. Ara and M. Mathieu, *Local multipliers of C^*-algebras*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, London, 2003.

[7] L. Arambašić, *Another characterization of Hilbert C^*-modules over compact operators*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 735-740.

[8] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math. **89** (1967), 578-642.

[9] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 122. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[10] L. Dalla, S. Giotopoulos and N. Katseli, *Skeletons of the unit ball of C^*-algebras*, Math. Balkanica (N.S.) **1** (1987), 83–88.

[11] K. R. Davidson, A. H. Fuller and E. T.A. Kakariadis, *Semicrossed products of operator algebras: a survey*, New York J. Math., to appear, http://www.math.uwaterloo.ca/ krdavids/preprints.html

[12] A. Donsig, A. Katavolos and A. Manoussos, *The Jacobson radical for analytic crossed products*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 129–145.

[13] F. J. Fernández-Polo, J. Martínez Moreno and A. M. Peralta *Contractive perturbations in JB^*-triples*. J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), 349–364.

[14] C. K. Fong and A. R. Sourour, *On the operator indentity* $\sum A_k X B_k \equiv 0$, Canad. J. Math. **31** (1979), 845–857.

[15] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and Combinatorial Number Theory*, M. B. Porter Lectures, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[16] R.V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. Of Math. **54** (1951), 325–338.

[17] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundametals of the theory of operator algebras. Vol. II*, Academic Press, 1986.

[18] H. Kamowitz, *On compact multipliers of Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 79–80.

[19] E. G. Katsoulis, *Geometry of the unit ball and representation theory for operator algebras*, Pacific J. Math. **216** (2004), 267-292.

[20] E. C. Lance, *Hilbert C^*-module a toolkin for operator algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[21] B. Magajna, *A Transitivity Theorem for Algebras of Elementary Operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3169–3178.

[22] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, Translations of Mathematical Monographs, 226, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[23] M. Mathieu, *A characterization of positive multiplications on C^*-algebras*, Math. Japon. **29** (1984), 375–382.

[24] M. Mathieu, *Elementary operators on prime C^*-algebras II*, Glasgow Math. J. **30** (1988), 275–284.

[25] M. Mathieu, *Elementary operators on prime C^*-algebras I*, Math. Ann. **284** (1989), 223–244.

[26] R. L. Moore, T. T. Trent, *Extreme points of certain operator algebras*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 645–650.

[27] G. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, **14**. Academic Press, Inc., London-New York, 1979.

[28] E. Saksman and H. O. Tylli, *The Apostol-Fialkow Formula for Elementary Operators on Banach Spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 1–26.

[29] R. M. Timoney, *Some Formulae for Norms of Elementary Operators*, J. Operator Theory **57** (2007), 121–145.

[30] K. Vala, *On Compact Sets of Compact Operator*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. **351** (1964).

[31] K. Vala, *Sur les éléments compacts d'une algèbre normée*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. **407** (1967).

[32] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and C^*-algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993.

[33] K. Ylinen, *A note on the compact elements of C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 305–306.

[34] K. Ylinen, *Compact and finite-dimensional elements of normed algebras*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. **428** (1968).