

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΒΕΤΑΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ · ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΡΛΟΒΑΣΙ 2018



Διδακτορική Διατριβή

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ  
ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Κωνσταντίνος Βέτας

Υπότροφος του προγράμματος Υπατία  
Επιτροπή Ερευνών, Πανεπιστημίου Αιγαίου

## ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Αθανάσιος Γιαννακόπουλος (Μέλος)  
Τμήμα Στατιστικής  
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Νικόλαος Καραχάλιος (Επιβλέπων)  
Τμήμα Μαθηματικών  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χρήστος Νικολόπουλος (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)  
Τμήμα Μαθηματικών  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χαράλαμπος Σκόκος (Μέλος)  
Department of Mathematics and Applied Mathematics, Faculty of Science  
University of Cape Town, South Africa

Ιωάννης Στρατής (Μέλος)  
Τμήμα Μαθηματικών  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δημήτριος Φραντζεσκάκης (Μέλος)  
Τμήμα Φυσικής  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αγαπητός Χατζηνικήτας (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)  
Τμήμα Μαθηματικών  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

*Στους γονείς μου, Δημήτρη και Ευγενία,  
που αγωνίστηκαν για τη ζωή μου.*

## Ευχαριστίες

Στη παρούσα διατριβή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης των προβλημάτων, που μου προτάθηκαν από τον επιβλέποντα κ. Νίκο Καραχάλιο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Θέλω να τον ευχαριστήσω ολόψυχα, εφόσον η συνεχής υποστήριξη και υπομονή του, ήταν καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ. Βασίλη Κουκουλογιάννη και τον κ. Γιώργο Φωτόπουλο, ερευνητές του Πανεπιστημίου του Κατάρ, για την εξαιρετική συνεργασία και την υπομονή τους, καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της έρευνας. Αισθάνομαι επίσης την ανάγκη, να ευχαριστήσω θερμά τους Καθηγητές, κ. Παναγιώτη Κεβρεκίδη και κ. Δημήτρη Φραντζεσκάκη, για τις ανεκτίμητες συμβουλές τους, τον χρόνο που διέθεσαν, και την προσπάθεια που κατέβαλαν, για αυτή την εργασία.

Ευχαριστώ επίσης θερμά, τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής για τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω το Τμήμα Μαθηματικών και την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για την ακαδημαϊκή και οικονομική υποστήριξη που μου παρείχαν, συμβάλλοντας έτσι στην επιτυχή περάτωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Κωνσταντίνος Βέτας

Σεπτέμβριος 2018



# Περιεχόμενα

Εισαγωγή 2

<b>1 Δυναμικά Συστήματα</b>	<b>7</b>
1.1 Ελκυστές Ημιομάδων . . . . .	7
1.1.1 Ελκυστής Ημιομάδας με Συνάρτηση Lyapunov . . . . .	11
1.2 Διαφορικές Εξισώσεις σε Χώρους Banach . . . . .	12
1.3 Γραμμικοποίηση . . . . .	14
1.4 Θεώρημα Krein–Rutman . . . . .	16
1.5 Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης . . . . .	17
1.6 Θεωρία Διακλαδώσεων . . . . .	18
1.7 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας για Δυναμικά Συστήματα Κλίσης	20
1.8 Ο Χώρος $\ell^p$ . . . . .	24
1.9 Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών της Δεύτερης Παραγώγου	25
<b>2 Δυναμική της Σύγκλισης σε Καταστάσεις Ισορροπίας σε ένα Πλέγμα Klein–Gordon με Τριβή</b>	<b>30</b>
2.1 Η Διακριτή Εξίσωση Klein–Gordon με Δυναμικό $\phi^4$ . . . . .	30
2.2 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας . . . . .	34
2.2.1 Καθολική Ύπαρξη Λύσεων . . . . .	36
2.2.2 Απόδειξη της Σύγκλισης . . . . .	40
2.3 Διακλαδώσεις των Μη-Γραμμικών Σημείων Ισορροπίας . . . . .	61
2.4 Αριθμητική Μελέτη . . . . .	69
2.4.1 Ύπαρξη και Γραμμική Ευστάθεια των Διακλαδισμένων Κλάδων . . . . .	69

---

2.4.2	Εξέλιξη των Χωρικά Εκτεταμένων Αρχικών Συνθηκών .	72
2.4.3	Εξέλιξη των Χωρικά Εντοπισμένων Αρχικών Συνθηκών	82
2.5	Συμπεράσματα . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Έκρηξη για τη Διακριτή Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger με Κέρδος και Απώλεια Ενέργειας</b>	<b>86</b>
3.1	Η Διακριτή Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger . . . . .	86
3.2	Έκρηξη σε Πεπερασμένο Χρόνο . . . . .	92
3.2.1	Χρονικά Τοπική Ύπαρξη Λύσεων . . . . .	92
3.2.2	Εκτιμήσεις του Πεπερασμένου Χρόνου Έκρηξης . . . . .	95
3.3	Αριθμητική Μελέτη . . . . .	102
3.3.1	Χωρικά Εκτεταμένες Αρχικές Συνθήκες . . . . .	103
3.3.2	Μηδενιζόμενες Αρχικές Συνθήκες με Προφίλ $\text{sech}$ . . . . .	107
3.3.3	Αρχικές Συνθήκες με Προφίλ $\tanh^2$ . . . . .	118
3.4	Συμπεράσματα . . . . .	123
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>126</b>





# Εισαγωγή

Η μελέτη των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων πλέγματος είναι μια περιοχή έρευνας με συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον. Οι πρώτες συστηματικές μελέτες αυτών των συστημάτων εμφανίζονται στα τέλη της δεκαετίας του 30, από τους Frenkel και Kontorova στις κρυσταλλικές εξαρθρώσεις. Οι μελέτες αυτές είχαν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση της *Διακριτής Εξίσωσης Klein–Gordon* (DKG). Συγκεκριμένα, το 1939, οι Frenkel και Kontorova παρουσίασαν ένα μοντέλο που περιέγραφε τη δομή και την δυναμική ενός κρυσταλλικού πλέγματος κοντά σε ένα πυρήνα εξάρθρωσης. Το μοντέλο–FK έχει γίνει πλέον ένα από τα βασικά μοντέλα στη φυσική, καθώς έχει αποδειχθεί ότι περιγράφει αξιόπιστα σημαντικά φαινόμενα που παρατηρούνται σε διακριτά μέσα. Παρόλο που το σύστημα έχει ιδιαίτερα απλή μορφή, οι ακριβείς του λύσεις δεν είναι γενικά γνωστές. Ωστόσο, θεμελιώδους σημασίας λύσεις μπορούν να παραχθούν στην περίπτωση του προσεγγιστικού συνεχούς ορίου. Σε αυτό το όριο, το μοντέλο–FK γίνεται τυπικά η ακριβώς ολοκληρώσιμη εξίσωση *sine–Gordon*, η οποία επιτρέπει λύσεις σολιτονίων. Γι' αυτό τον λόγο, το μοντέλο–FK είναι γνωστό ως η *Διακριτή Εξίσωση sine–Gordon* ή *Περιοδική Διακριτή Εξίσωση Klein–Gordon*,

$$\ddot{x}_n - k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \sin x_n.$$

Αργότερα, την δεκαετία του 50 έχουμε την εμφάνιση της Φυσικής των Σολιτονίων, μετά το διάσημο πείραμα των Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou. Σε αυτό το πείραμα, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά, ότι φυσικά συστήματα υπό την επίδραση ασθενών μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων, είναι δυνατόν να παρουσιάσουν ιδιαίτερα μη τετριμμένη συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, το καλοκαίρι του 1953 οι Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou, με την βοήθεια ενός από τους πρώτους ηλεκτρονικούς υπολογιστές του ερευνητικού κέντρου στο Los Alamos, παρήγαγαν το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα: Ένα μονοδιάστατο πλέγμα από σωματίδια τα οποία ήταν συζευγμένα μεταξύ τους μέσω ενός μη αρμονικού δυναμικού, δεν προσέγγιζε απαραίτητα μια κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Η ενέργεια που

εισήχθη σε έναν κόμβο, μεταφέρθηκε αρχικά σε άλλους όπως θα περίμενε κανείς, αλλά στη συνέχεια επέστρεψε σχεδόν τέλεια, σε αυτόν που ήταν αρχικά διεγερμένος. Οι εξισώσεις κίνησης που χρησιμοποιήθηκαν για τους ταλαντωτές, περιγράφονται από το σύστημα

$$\ddot{x}_n - k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = k\alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2],$$

όπου η μεταβλητή  $x_n(t)$  περιγράφει τη μετατόπιση του ταλαντωτή  $x_n$  κατά μήκος της αλυσίδας τους, ως συνάρτηση του χρόνου. Η προηγούμενη εξίσωση είναι στην πραγματικότητα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, για  $n$  αλληλεπιδρώντα σωματίδια. Ο όρος γραμμικής σύζευξης  $k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$ , είναι ουσιαστικά ο συνήθης νόμος του Hooke, και η παράμετρος  $\alpha$ , ορίζει την παρουσία μη γραμμικής δύναμης (βλ. [13]).

Στη σημερινή εποχή, το σύστημα FPU, η Διακριτή Εξίσωση Klein–Gordon και η Διακριτή Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger (DNLS), είναι τα πρωτότυπα συστήματα για τη μελέτη εντοπισμένων φαινομένων. Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων βρίσκουμε στους κρυστάλλους, στα συμπυκνώματα Bose–Einstein, στη βιολογία με τον μηχανισμό Davydov, στην μη-γραμμική οπτική, κ.α.

Σκοπός αυτής της εργασίας, είναι η μελέτη συστημάτων πλέγματος, που αποτελούν θεμελιώδη μοντέλα για διάφορα μη γραμμικά φαινόμενα σε διακριτά μέσα. Τα ερωτήματα που μελετά η παρούσα διατριβή, αντιμετωπίστηκαν με μεθόδους και τεχνικές από περιοχές όπως τη μη-γραμμική φυσική, τη μη-γραμμική ανάλυση, τα δυναμικά συστήματα και την περιοχή της αριθμητικής ανάλυσης, υπό την έννοια των αριθμητικών προσομοιώσεων.

Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε τη βασική θεωρία με τις κατάλληλες τεχνικές από την περιοχή των απειροδιάστατων δυναμικών συστημάτων, που θα είναι χρήσιμες στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που θα συζητηθούν στη συνέχεια. Αυτή η θεωρία μπορεί να βρεθεί και στις αναφορές [26],[27],[57],[65],[69],[74].

Το κίνητρο της μελέτης μας προέρχεται από ένα γενικό ερώτημα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων δυναμικών συστημάτων κλίσης (*gradient systems*). Αυτό το ερώτημα εξετάζει, αν καθολικά ορισμένες και φραγμένες τροχιές, συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας καθώς  $t \rightarrow \infty$ , (βλ. [25],[69]). Όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, υπάρχει παράδειγμα το οποίο παρουσιάζεται από τους R. Palis και W. de Melo (βλ. [57]), όπου ένα δυναμικό σύστημα κλίσης ακόμη και στον  $\mathbb{R}^2$  μπορεί να μη συγκλίνει σε μοναδικό σημείο ισορροπίας και η Αρχή του Αναλλοίωτου να μην είναι εφαρμόσιμη. Από την άλλη μεριά, παραδείγματα με μεγάλο ενδιαφέρον, τα οποία έχουν μελετηθεί

από τους A. Haraux και M. A. Jendoubi (βλ. [26]), είναι αυτά για τα οποία η σύγκλιση επιτυγχάνεται, αλλά σε ένα συνεχές λύσεων ισορροπίας. Επιπλέον, η δομή του  $\omega$ -οριακού συνόλου της ροής είναι μη-τετριμμένη. Ο στόχος μας, είναι να εξάγουμε αποτελέσματα ευστάθειας και σύγκλισης σε μη γραμμικές καταστάσεις για μη γραμμικά πλέγματα με απόσβεση.

Στο Κεφάλαιο 2, ξεκινώντας με την πρώτη παράγραφο, αναφέρουμε βασικά χαρακτηριστικά της διακριτής εξίσωσης Klein–Gordon

$$\ddot{x}_n - k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \omega_d^2(x_n - \beta x_n^3),$$

και το κίνητρο μας για την μελέτη του προβλήματος σύγκλισης. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε την καθολική ύπαρξη λύσεων του προβλήματος αρχικών συνθηκών, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Στην τρίτη παράγραφο παρουσιάζουμε τις αναλυτικές υποθέσεις για την εξίσωση μας και χρησιμοποιώντας κατάλληλες ενεργειακές εκτιμήσεις σε συνδυασμό με μια διακριτή εκδοχή της ανισότητας Łojasiewicz (βλ. [26],[27]), η οποία εφαρμόζεται για πρώτη φορά σε μη-γραμμικά πλέγματα, αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα της σύγκλισης σε μοναδικό σημείο ισορροπίας, για κάθε αρχική συνθήκη του πλέγματος. Στη τέταρτη παράγραφο, διερευνώντας την θεωρία καθολικών διακλαδώσεων (βλ. [61],[65],[74]), επιβεβαιώνουμε το γεγονός ότι στη διακριτή περίπτωση, όλες οι γραμμικές καταστάσεις συνεχίζονται σε μη-γραμμικές καταστάσεις ισορροπίας. Τέλος, εκτελώντας αριθμητικές προσομοιώσεις αναδεικνύουμε την πλούσια δομή του συνόλου των σημείων ισορροπίας και τις δυνατότητες σύγκλισης. Με τις αριθμητικές προσομοιώσεις της εξέλιξης του συστήματος, λαμβάνουμε επίσης, πληροφορίες για την δυναμική ευστάθεια των κλάδων των σημείων ισορροπίας. Πραγματοποιούμε επίσης πρώτες συζητήσεις για την επίδραση της διακριτότητας και την δύναμη απόσβεσης, στην δυναμική της σύγκλισης. *Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν την εξαιρετικά πλούσια και περίπλοκη δυναμική σύγκλισης σε μη-τετριμμένες καταστάσεις ισορροπίας και ταυτόχρονα την πλούσια δομή του συνόλου αυτών των καταστάσεων, ακόμη και στην απλούστερη φαινομενικά περίπτωση, του διευσταθούς δυναμικού.*

Στο Κεφάλαιο 3, αρχικά συζητάμε στη πρώτη παράγραφο και με σύντομο τρόπο, πεδία εφαρμογών της διακριτής μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger

$$i\dot{x}_n - sk(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + |x_n|^2 x_n = 0,$$

σε διάφορα φυσικά συστήματα. Στη συνέχεια, στη δεύτερη παράγραφο, εφοδιάζουμε την προαναφερθείσα εξίσωση, με μηχανισμούς που περιγράφουν γραμμικό και μη-γραμμικό κέρδος, ή απώλεια ενέργειας. Για τη μελέτη μας, θεωρούμε

τόσο την αφεστιάζουσα  $s = 1$ , όσο και την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$  της εξίσωσης. Θεωρώντας το πρόβλημα αρχικών τιμών με περιοδικές συνοριακές συνθήκες ή με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, διερευνούμε και αποδεικνύουμε αναλυτικές συνθήκες για την έκρηξη των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο. Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, λαμβάνουμε υπόψη τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της δυναμικής της συνεχούς περίπτωσης, στην εργασία [6]. Συγκεκριμένα, επεκτείνοντας τα επιχειρήματα της εργασίας [6], στο διακριτό χώρο, και χρησιμοποιώντας κατάλληλο συναρτησιακό  $\ell^2$ -ενέργειας, αποδεικνύουμε αναλυτικές εκτιμήσεις, για το χρόνο έκρηξης με την μορφή άνω και κάτω φραγμάτων. Οι τιμές των πραγματικών συντελεστών των παραπάνω επιδράσεων,  $\gamma$  (γραμμική) και  $\delta$  (μη-γραμμική), ορίζουν περιοχές με διαφορετική δυναμική. Όπως θα δούμε, για  $\gamma, \delta > 0$  έχουμε έκρηξη λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο, ενώ για  $\gamma, \delta < 0$ , φθορά λύσεων. Επιπλέον διακρίνουμε μια κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$ , η οποία διαχωρίζει τις δύο προαναφερθείσες δυναμικές στην περίπτωση όπου,  $\gamma < 0$  και  $\delta > 0$ . Έπειτα, στη τρίτη παράγραφο, παρουσιάζουμε αποτελέσματα αριθμητικών προσομοιώσεων των φαινομένων της έκρηξης και της φθοράς των λύσεων, για μια ευρεία κλάση αρχικών συνθηκών. Στη μελέτη αυτή, διαπιστώνουμε την εγκυρότητα των αναλυτικών εκτιμήσεων. Επιπλέον αναδεικνύεται η χρησιμότητα τους, στο να αναγνωρίζουμε και να ταξινομούμε διαφορετικούς τύπους έκρηξης: *εκτεταμένο*, *εντοπισμένο* ή και δυναμική έκρηξης που συνδυάζει τους παραπάνω τύπους. Τα βασικά αποτελέσματα εντοπίζονται στον ρόλο που έχει η διακριτότητα, το πλάτος των αρχικών συνθηκών, ο αφεστιάζοντας/εστιάζοντας χαρακτήρας του πλέγματος, και οι μηχανισμοί ενέργειας στην επιλογή των διαφορετικών μηχανισμών που οδηγούν στην έκρηξη. Οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης προσεγγίζουν, και σε κάποιες περιπτώσεις είναι σε εξαιρετική συμφωνία, με το άνω ή κάτω φράγμα, αντίστοιχα. Ο συνδυασμός των αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων, δείχνει ότι οι ταυτίσεις αυτές αντιστοιχούν στην εκτεταμένη ή εντοπισμένη δυναμική έκρηξης, αντίστοιχα. Από την άλλη, όταν αυτοί οι χρόνοι βρίσκονται ανάμεσα στα αναλυτικά φράγματα, σχετίζονται με μη τετριμμένη δυναμική μετάβασης στην έκρηξη των λύσεων. Σε αυτή την περίπτωση, η δυναμική είναι συνδυασμός των βασικών τύπων, εξαιτίας της συνεισφοράς της αφεστιάζουσας/εστιάζουσας επίδρασης και του κέρδους/απώλειας ενέργειας. Όσον αφορά την κατανόηση των μηχανισμών έκρηξης και την παραγωγή των κάτω φραγμάτων, τα αποτελέσματα εμβαθύνουν στην περίπτωση του υπό μελέτη μοντέλου στα γενικότερα αποτελέσματα της εργασίας [38]. Τα αποτελέσματα μας φιλοδοξούν να αναδείξουν ουσιαστικές διαφορές στη μαθηματική αντιμετώπιση των παραπάνω ερωτημάτων μεταξύ των διακριτών και συνεχών μοντέλων, αλλά και στην παρατηρήσιμη

δυναμική τους: ο ρόλος της διακριτότητας αποδεικνύεται για μια ακόμη φορά θεμελιώδους σημασίας.

Από τη διατριβή αυτή, έχουν προκύψει οι ακόλουθες εργασίες, οι οποίες έχουν δημοσιευθεί σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με σύστημα κριτών:

- D. J. Frantzeskakis, N. I. Karachalios, P. G. Kevrekidis, V. Koukouloyannis and K. Vetas. *Dynamical transitions between equilibria in a dissipative Klein–Gordon lattice*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **472** (2019), 546-576.
- G. Fotopoulos, N. I. Karachalios, V. Koukouloyannis and K. Vetas. *Collapse dynamics for the discrete nonlinear Schrödinger equation with gain and loss*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **72** (2019), 213-231.

# Κεφάλαιο 1

## Δυναμικά Συστήματα

Ξεκινάμε με ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, στο οποίο γίνεται μια σύντομη αναφορά βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων από την περιοχή των δυναμικών συστημάτων. Αυτές οι πληροφορίες, θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη των προβλημάτων της καθολικής ύπαρξης και της ευστάθειας των λύσεων της διακριτής διαφορικής εξίσωσης Klein–Gordon από τη μια, και της έκρηξης λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο για τη διακριτή μη-γραμμική διαφορική εξίσωση Schrödinger από την άλλη.

### 1.1 Ελκυστές Ημιομάδων

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t)), \quad (1.1)$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u_0. \quad (1.2)$$

Η μεταβλητή  $u(t)$  ανήκει σε ένα γραμμικό, μετρικό χώρο  $\mathcal{X}$  ο οποίος ονομάζεται **χώρος των φάσεων** ενώ  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Ο χώρος των φάσεων  $\mathcal{X}$  μπορεί να είναι χώρος Hilbert ή χώρος Banach.

**Παρατήρηση 1.1.1.** Είναι σημαντικό να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο, ότι η θεωρία που παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να εφαρμοστεί και στα πεπερασμένη και στα άπειρης διάστασης προβλήματα ( $\dim \mathcal{X} < \infty$ ,  $\dim \mathcal{X} = \infty$ ) εξίσου.

Στα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε, ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά των λύσεων ενός συστήματος της μορφής (1.1)-(1.2), καθώς εξελίσσεται στο χρόνο. Η εξέλιξη αυτή περιγράφεται από μια οικογένεια τελεστών  $S(t)$ ,  $t \geq 0$  με  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ .

**Ορισμός 1.1.2** ([69]). Η οικογένεια  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  λέγεται **ημιομάδα τελεστών** αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t)S(s) & s, t \geq 0 \\ S(0) = I & \text{ταυτοτικός στον } \mathcal{X}. \end{cases}$$

Αν επιπλέον οι τελεστές  $S(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  είναι συνεχείς  $\forall t \geq 0$  τότε, η ημιομάδα  $S(t)$  ορίζει ένα **δυναμικό σύστημα** στον  $\mathcal{X}$ . Η  $S(t)$  θα λέμε ότι είναι ένα  $C^r$ -δυναμικό σύστημα, αν οι απεικονίσεις  $S(t)u$  και οι μέχρι τάξης  $r$  Fréchet παράγωγοί τους ως προς  $u$ , είναι συνεχείς.

Αν  $\Phi$  είναι μια κατάσταση του δυναμικού συστήματος στο χρόνο  $s$  τότε,  $S(t)\Phi$  είναι η κατάσταση του συστήματος στο χρόνο  $t+s$  και

$$u(t) = S(t)u(0)$$

$$u(t+s) = S(t)u(s) = S(s)u(t), \quad s, t \geq 0.$$

**Ορισμός 1.1.3** ([69]). Για κάθε αρχική συνθήκη  $u_0 \in \mathcal{X}$ , θα λέμε **θετική τροχιά** του δυναμικού συστήματος  $S(t)$ , το σύνολο

$$\mathcal{O}^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0.$$

Αντίστοιχα, η **αρνητική τροχιά** του δυναμικού συστήματος  $S(t)$ , ορίζεται ως το σύνολο

$$\mathcal{O}^-(u_0) = \bigcup_{t \leq 0} S(t)u_0.$$

Μια **πλήρης τροχιά** του δυναμικού συστήματος  $S(t)$ , θα είναι το σύνολο

$$\mathcal{O}(u_0) = \mathcal{O}^+(u_0) \cup \mathcal{O}^-(u_0).$$



**Παρατήρηση 1.1.4.** Ο τελεστής  $S(t)$  μπορεί να μην είναι αμφιμονοσήμαντα ορισμένος, ως εκ τούτου δεν υπάρχουν πάντοτε οι αρνητικές τροχιές. Αν όμως ο τελεστής  $S(t)$  είναι αμφιμονοσήμαντα ορισμένος τότε, λέμε ότι το δυναμικό σύστημα  $S(t)$  έχει την ιδιότητα της **αντίστροφης μοναδικότητας**. Έτσι ορίζεται ο τελεστής  $S(-t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ .

**Ορισμός 1.1.5** ([69]). Για μια αρχική συνθήκη  $u_0 \in \mathcal{X}$  ή για  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  ορίζουμε το  **$\omega$ -οριακό σύνολο** του  $u_0$  ή του  $\mathcal{A}$  ως εξής:

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0},$$

ή

$$\omega(\mathcal{A}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}.$$

Ανάλογα το  **$\alpha$ -οριακό σύνολο**, όταν υπάρχει, ορίζεται ως εξής:

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}u_0},$$

ή

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}\mathcal{A}}$$

Αποδεικνύεται ότι  $\Phi \in \omega(\mathcal{A})$ , αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων  $\phi_n \in \mathcal{A}$  και  $t_n \rightarrow \infty$  τέτοια ώστε

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \Phi \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Ανάλογα,  $\Phi \in \alpha(\mathcal{A})$  αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία  $\psi_n \rightarrow \Phi$  στον  $\mathcal{X}$  και  $t_n \rightarrow -\infty$  τέτοια ώστε

$$S(t_n)\psi_n \rightarrow \Phi \in \mathcal{A}, \quad \forall n.$$

**Ορισμός 1.1.6** ([69]). Ένα σημείο  $u_0 \in \mathcal{X}$  θα λέγεται **σημείο ισορροπίας** (ή **σταθερό σημείο**), αν

$$S(t)u_0 = u_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$\mathcal{O}(u_0) = \omega(u_0) = \alpha(u_0) = \{u_0\}.$$

**Ορισμός 1.1.7** ([69]). Έστω  $u_0$  να είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης  $S$ . Ορίζουμε την **ευσταθή πολλαπλότητα** του  $u_0$ ,

$$\mathcal{M}_-(u_0) = \{u^* \in \mathcal{O}(u^*), u(t_0) = u^* : u(t) = S(t - t_0)u^* \rightarrow u_0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty\}.$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε την **ασταθή πολλαπλότητα** του  $u_0$ ,

$$\mathcal{M}_+(u_0) = \{u^* \in \mathcal{O}(u^*), u(t_0) = u^* : u(t) \rightarrow u_0 \text{ καθώς } t \rightarrow -\infty\}.$$

Δηλαδή ένα σταθερό σημείο  $u_0$  είναι **ευσταθές** αν  $\mathcal{M}_+(u_0) = \emptyset$  και **ασταθές** αν  $\mathcal{M}_-(u_0) = \emptyset$ .

**Ορισμός 1.1.8** ([69]). Λέμε ότι ένα σύνολο  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  είναι **θετικά αναλλοίωτο** για την ημιομάδα  $S(t)$  αν

$$S(t)\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y} \quad \forall t > 0,$$

**αρνητικά αναλλοίωτο** αν

$$S(t)\mathcal{Y} \supset \mathcal{Y} \quad \forall t > 0$$

και **συναρτησιακά αναλλοίωτο** αν

$$S(t)\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \quad \forall t > 0.$$

**Παρατήρηση 1.1.9.** Μερικά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων είναι: ένα σημείο ισορροπίας ή ένωση σημείων ισορροπίας, οι περιοδικές ή σχεδόν περιοδικές τροχιές, η ασταθής και ευσταθής πολλαπλότητα ενός σημείου ισορροπίας.

**Λήμμα 1.1.10** ([69]). Υποθέτουμε ότι για ένα υποσύνολο  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  και για κάποιο  $t_0 > 0$ , το σύνολο  $\bigcup_{t \geq 0} S(t)\mathcal{A}$  είναι σχετικά συμπαγές στον χώρο  $\mathcal{X}$ . Τότε, το  $\omega(\mathcal{A})$  είναι μη-κενό, συμπαγές και αναλλοίωτο. Όμοια, αν τα σύνολα  $S(t)^{-1}\mathcal{A}$ ,  $t \geq 0$  είναι μη-κενά και για κάποιο  $t_0 > 0$  το σύνολο  $\bigcup_{t \geq 0} S(t)^{-1}\mathcal{A}$  είναι σχετικά συμπαγές τότε,  $\alpha(\mathcal{A})$  είναι μη-κενό, συμπαγές και αναλλοίωτο.

**Ορισμός 1.1.11** ([69]). Ένας **ελκυστής**, είναι ένα σύνολο  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (ι)  $\mathcal{A}$  είναι ένα αναλλοίωτο σύνολο ( $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ ,  $\forall t \geq 0$ ) και
- (ιι)  $\mathcal{A}$  περιέχει μια ανοιχτή περιοχή  $\mathcal{U}$  τέτοια ώστε  $\forall u_0 \in \mathcal{U}$ ,  $S(t)u_0 \rightarrow \mathcal{A}$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $d(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Με  $d$  ορίζουμε την απόσταση  $d(x, \mathcal{A}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y)$ .

**Ορισμός 1.1.12** ([69]). Αν  $\mathcal{A}$  είναι ένας ελκυστής, το μεγαλύτερο ανοιχτό σύνολο  $\mathcal{U}$  που ικανοποιεί την ιδιότητα (ιι) λέγεται **λεκάνη έλξης** του  $\mathcal{A}$ . Θα λέμε ότι ο ελκυστής  $\mathcal{A}$  έλκει ομοιόμορφα ένα σύνολο  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ , αν  $d(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

**Ορισμός 1.1.13** ([69]). Λέμε ότι  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  είναι ένας **καθολικός ελκυστής** για μια ημιομάδα  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  αν ο  $\mathcal{A}$  είναι ένας συμπαγής ελκυστής που έλκει τα φραγμένα σύνολα του  $\mathcal{X}$ .

**Παρατήρηση 1.1.14.** Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο ότι στον προηγούμενο ορισμό, ο καθολικός ελκυστής είναι μοναδικός και είναι το μέγιστο σύνολο ως προς τη σχέση εγκλεισμού μεταξύ των φραγμένων ελκυστών και μεταξύ των φραγμένων συναρτησιακά αναλλοίωτων συνόλων. Γι' αυτό το λόγο λέμε επίσης ότι είναι **μέγιστος ελκυστής**.

**Ορισμός 1.1.15** ([69]). Έστω  $\mathcal{B}$  να είναι ένα υποσύνολο του  $\mathcal{X}$  και  $\mathcal{U}$  μια ανοιχτή περιοχή που περιέχει το  $\mathcal{B}$ . Λέμε ότι  $\mathcal{B}$  είναι **απορροφούν** του  $\mathcal{U}$ , αν η τροχιά κάθε φραγμένου συνόλου του  $\mathcal{U}$  εισέρχεται στο  $\mathcal{B}$  μετά από κάποιο χρόνο.

$$\begin{cases} \forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{B}_0 \text{ είναι φραγμένο,} \\ \exists t_1(\mathcal{B}_0) \text{ τέτοιο ώστε } S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \quad \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0). \end{cases}$$

Επίσης λέμε ότι  $\mathcal{B}$  απορροφά τα φραγμένα σύνολα του  $\mathcal{U}$ .

### 1.1.1 Ελκυστής Ημιομάδας με Συνάρτηση Lyapunov

Συνήθως, στα προβλήματα που αναζητούμε την ευστάθεια των λύσεων και ιδιαίτερα για τις λύσεις που είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς, χρειαζόμαστε μια καλή εκτίμηση για την λεκάνη έλξης αυτών των λύσεων. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια μιας πραγματικής συνάρτησης που αναφέρουμε στον επόμενο ορισμό.

Θεωρούμε σε έναν χώρο Banach  $\mathcal{Y}$  μια ημιομάδα  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  με τις ιδιότητες του ορισμού (1.1.2).

**Ορισμός 1.1.16** ([69]). Μια **συνάρτηση Lyapunov** της ημιομάδας  $S(t)$  σε ένα σύνολο  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ , είναι μια συνεχής συνάρτηση  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε,

- για κάθε  $u_0 \in \mathcal{X}$ , η συνάρτηση  $t \rightarrow F(S(t)u_0)$  είναι φθίνουσα.
- Αν  $F(S(t_1)u_1) = F(u_1)$  για κάποιο  $t_1 > 0$ , τότε, το  $u_1$  είναι σταθερό σημείο της ημιομάδας  $S(t)$ .

**Θεώρημα 1.1.17** ([69]). Έστω μια ημιομάδα  $S(t)$  του ορισμού (1.1.2). Υποθέτουμε ότι  $S(t)$  περιλαμβάνει μια συνεχή συνάρτηση Lyapunov  $F$  ορισμένη στο σύνολο  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  και έναν ολικό ελκυστή  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ . Έστω  $\mathcal{E}$  να είναι το σύνολο των σταθερών σημείων της ημιομάδας. Τότε,

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+(\mathcal{E}).$$

## 1.2 Διαφορικές Εξισώσεις σε Χώρους Banach

Σε αυτή τη παράγραφο θα ορίσουμε την γενίκευση του διαφορικού ενός συναρτησιακού και θα αναφέρουμε τα βασικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων.

**Ορισμός 1.2.1** ([74]). Έστω ένας τελεστής  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , όπου  $\mathcal{X}$  να είναι χώρος Banach. Λέμε ότι ο  $F$  είναι **Fréchet παραγωγίσιμος** σε ένα σημείο  $u \in \mathcal{X}$ , αν υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής  $F' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  τέτοιος ώστε,

$$F'(u) = \lim_{\|a\| \rightarrow 0} \frac{\|F(u+av) - F(u)\|_{\mathcal{X}}}{\|a\|_{\mathcal{X}}} \quad a \in \mathcal{X}.$$

**Ορισμός 1.2.2** ([74]). Ένας τελεστής  $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  όπου  $\mathcal{X}$  χώρος Hilbert, ο οποίος απεικονίζει τα φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα (δηλαδή σύνολα που έχουν συμπαγή κλειστότητα), λέγεται **συμπαγής τελεστής**.

**Θεώρημα 1.2.3** ([74]). Έστω  $\mathcal{U}$  ανοιχτό σύνολο του  $\mathcal{X}$  και  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{X})$  να είναι συμπαγής κοντά σε ένα σημείο  $a \in \mathcal{U}$ . Τότε,  $F'$  είναι συμπαγής.

**Πρόταση 1.2.4 (Θεώρημα Μέσης Τιμής)**. Έστω ένας συνεχής τελεστής  $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ , όπου  $\mathcal{X}$  χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι  $F'(u)$  υπάρχει για όλα τα  $u \in [a, b]$  με  $-\infty < a < b < \infty$ . Τότε, ισχύουν τα εξής

$$\|F(a) - F(b)\| \leq (b - a) \sup_{a < u < b} \|F'(u)\|,$$

$$\begin{aligned} \|F(a) - F(b) - (b-a)F'(u_0)\| \\ \leq (b-a) \sup_{a < u < b} \|F'(u) - F'(u_0)\|, \quad \forall u_0 \in [a, b], \end{aligned}$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(u) du, \quad \text{αν } F' \text{ είναι συνεχής στο } [a, b].$$

**Ορισμός 1.2.5** ([74]). Μια συνάρτηση  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , όπου  $\mathcal{X}$  χώρος Banach, λέγεται **Lipschitz συνεχής** σε φραγμένα υποσύνολα του  $\mathcal{X}$ , με  $\mathcal{B}_M$  να είναι η μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα  $M > 0$ , αν υπάρχει μια σταθερά  $L(M)$  τέτοια ώστε

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L(M)\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{B}_M.$$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\dot{u} = F(u), \tag{1.3}$$

$$u(t_0) = u_0, \tag{1.4}$$

με  $u \in \mathcal{X}$  όπου  $\mathcal{X}$  χώρος Banach με νόρμα.

**Θεώρημα 1.2.6** (Γενικευμένο Θεώρημα Picard-Lindelöf). Για κάθε  $u_0 \in \mathcal{X}$ , έστω  $\mathcal{B}_M = \{u \in \mathcal{X} : \|u - u_0\|_{\mathcal{X}} \leq M\}$  να είναι κλειστή μπάλα του  $\mathcal{X}$  και

$$\mathcal{S}_M = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} : |t - t_0| \leq T(u_0), \|v - u_0\|_{\mathcal{X}} \leq M\}.$$

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής  $F : \mathcal{S}_M \rightarrow \mathcal{X}$  είναι Lipschitz συνεχής και φραγμένος στα φραγμένα σύνολα του  $\mathcal{X}$ . Δηλαδή ισχύει ότι

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L(M)\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{S}_M$$

και

$$\|F(v)\| < K, \quad \forall v \in \mathcal{S}_M,$$

όπου  $L(M), K > 0$  πραγματικές σταθερές. Επιλέγουμε έναν αριθμό  $c$  τέτοιο ώστε  $0 < c < T(u_0)$  και  $Kc < M$ . Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (1) (**Υπαρξη και Μοναδικότητα**). Υπάρχει  $T(u_0) > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $0 < t < T(u_0)$ , υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος (1.3)-(1.4),  $u \in C^1([0, t], \mathcal{X})$ .
- (2) (**Συνεχής Εξάρτηση από τις Αρχικές Συνθήκες**). Η λύση  $u$  εξαρτάται συνεχώς (ως προς την νόρμα του χώρου  $\mathcal{X}$ ) από την αρχική συνθήκη  $u_0$ , για πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Η ακόλουθη πρόταση παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων των διαφορικών εξισώσεων.

**Πρόταση 1.2.7 (Λήμμα του Gronwall)**. Έστω  $f, g : [t_0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι συνεχείς συναρτήσεις, με  $g$  μη-φθίνουσα, και οι οποίες για έναν σταθερό αριθμό  $c > 0$  ικανοποιούν την ανισότητα

$$f(t) \leq g(t) + c \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, T_0].$$

Τότε, ισχύει ότι

$$f(t) \leq g(t) e^{c(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T_0].$$

### 1.3 Γραμμικοποίηση

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την έννοια της γραμμικοποίησης. Υπάρχει ένα σημαντικό θεώρημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων από την εποχή του Henri Poincaré, που δηλώνει ότι η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας μπορεί να εξαχθεί από την γραμμικοποίηση, για μικρές γενικά αρχικές μετατοπίσεις, από το σημείο αυτό. Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση στον  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{u} = F(u)$$

και  $\bar{u}$  είναι ένα σημείο ισορροπίας (δηλαδή  $F(\bar{u}) = 0$ ). Τότε, αν το διαφορικό  $F'(\bar{u})$  έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο αριστερό ημιεπίπεδο,  $Re(z) < 0$ , συνεπάγεται ότι το  $\bar{u}$  είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $r > 0$ , τέτοιο ώστε για όλες τις αρχικές συνθήκες  $u_0$  για τις οποίες ισχύει  $\|u_0 - \bar{u}\| < r$ , οι αντίστοιχες λύσεις  $u \rightarrow \bar{u}$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Τα προβλήματα που θα συζητηθούν εντάσσονται στην κλάση προβλημάτων αρχικών συνθηκών για ημιγραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{u} = Au + F(u) \quad (1.5)$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(t_0) = u_0. \quad (1.6)$$

Η μεταβλητή  $u(t)$  λαμβάνει τιμές σε ένα χώρο Banach  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  και ο τελεστής  $A$  παράγει μια συνεχή ημιομάδα στον  $\mathcal{X}$ . Με αυτό, εννοούμε ότι ο τελεστής  $S(t) = e^{tA}$ ,  $(t \geq 0)$  στον  $\mathcal{X}$  ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (1)  $S(0) = I$ , ταυτοτικός στον  $\mathcal{X}$ .
- (2)  $S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0$ .
- (3)  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$  για κάθε  $x \in \mathcal{X}$ .
- (4) Η απεικόνιση  $t \rightarrow S(t)x$  είναι συνεχής στο  $t > 0$  για κάθε  $x \in \mathcal{X}$ .

Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση  $u \rightarrow F(u)$  είναι τοπικά Lipschitz και ότι η  $F$  είναι Fréchet παραγωγίσιμη. Ορίζουμε  $C([t_1, t_2], \mathcal{X})$  να είναι το σύνολο συνεχών συναρτήσεων  $u(t)$  ορισμένες στο διάστημα  $t_1 \leq t \leq t_2$ , λαμβάνοντας τιμές στο χώρο  $\mathcal{X}$ . Δηλαδή  $u \in C([t_1, t_2], \mathcal{X})$  είναι μια λύση του προβλήματος (1.5)-(1.6) με

$$u(t) = e^{(t-t_1)A} u(t_1) + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A} F(u(s)) ds.$$

**Θεώρημα 1.3.1** ([65]). Για το πρόβλημα (1.5)-(1.6), υπάρχει μοναδική λύση  $u \in C([t_1, t_2], \mathcal{X})$ .

**Ορισμός 1.3.2** ([65]). Έστω  $\bar{u} \in \mathcal{X}$  να είναι ένα σημείο ισορροπίας του προβλήματος (1.5)-(1.6). Δηλαδή η  $\bar{u}$  είναι μια λύση ανεξάρτητη του  $t$ , και ισχύει  $A\bar{u} + F(\bar{u}) = 0$ . Τότε, λέμε ότι η  $\bar{u}$  είναι **γραμμικά ευσταθής**, αν υπάρχουν αριθμοί  $\bar{t}$  και  $\gamma$ , τέτοιοι ώστε  $\|S_L\| \leq e^{-\gamma t}$  αν  $t \geq \bar{t}$ , όπου  $S_L$  είναι ο γραμμικοποιημένος τελεστής στο  $\bar{u}$ .

**Θεώρημα 1.3.3** ([65]). Έστω  $\bar{u}$  και  $S_L$  όπως ορίστηκαν προηγούμενα. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το  $\bar{u}$  είναι γραμμικά ευσταθές.

(β)  $\|S_L(t)\| \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

(γ) Για κάποια  $t > 0$ , το φάσμα του τελεστή  $S_L(t)$  βρίσκεται στο  $\{|z| < 1\}$ .

Αν επιπλέον,  $S_L(t)$  είναι ένας συμπαγής τελεστής για  $t \geq t_0 > 0$  τότε, η επόμενη ιδιότητα είναι ισοδύναμη με τις προηγούμενες.

(δ) Υπάρχει  $\beta < 0$  τέτοιο ώστε, το φάσμα του  $A + F'(\bar{u})$  να βρίσκεται στην περιοχή  $\operatorname{Re}(z) \leq \beta$ .

**Ορισμός 1.3.4** ([65]). Έστω  $\bar{u}$  να είναι ένα σημείο ισορροπίας του προβλήματος (1.5)-(1.6). Τότε, το  $\bar{u}$  είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν υπάρχει μια περιοχή  $\mathcal{N}$  του  $\bar{u}$  και θετικοί αριθμοί  $c, \gamma$  τέτοιοι ώστε, αν  $u$  είναι μια λύση της (1.5) με  $u(0) \in \mathcal{N}$  τότε,  $u$  υπάρχει για κάθε  $t > 0$  και

$$\|u(t) - \bar{u}\| \leq ce^{-\gamma t} \|u(0) - \bar{u}\|, \quad t > 0.$$

## 1.4 Θεώρημα Krein–Rutman

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο παίζει κεντρικό ρόλο στη διερεύνηση των μη γραμμικών προβλημάτων. Ένα παράδειγμα είναι αυτό της θεωρίας διακλαδώσεων. Αυτό το αποτέλεσμα δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες, ένας όχι απαραίτητα αυτοσυζυγής τελεστής, έχει μια πρωτεύουσα ιδιοτιμή με την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση να είναι του ίδιου προσήμου.

Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό της κωνικής διάταξης που χρησιμοποιείται στο θεώρημα που θα αναφέρουμε.

**Ορισμός 1.4.1** ([74]). Έστω  $\mathcal{X}$  να είναι ένας χώρος Banach. Ένα υποσύνολο  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  λέγεται **κώνος**, αν και μόνο αν

- $\mathcal{Y}$  είναι κλειστό, μη κενό και  $\mathcal{Y} \neq \{0\}$ ,
- για  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a, b \geq 0$ ,  $x, y \in \mathcal{Y} \Rightarrow ax + by \in \mathcal{Y}$ ,
- αν  $x \in \mathcal{Y}$  και  $-x \in \mathcal{Y}$  τότε,  $x = 0$ .

**Ορισμός 1.4.2** ([65]). Αν  $\mathcal{Y}$  είναι ένας κλειστός κώνος στον  $\mathcal{X}$  με  $\operatorname{int}(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$  και  $\mathcal{L}$  είναι ένας γραμμικός τελεστής με  $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \setminus \{0\} \rightarrow \operatorname{int}(\mathcal{Y})$  τότε, ο  $\mathcal{L}$  καλείται **ισχυρά θετικός** σε σχέση με τον  $\mathcal{Y}$ .



**Θεώρημα 1.4.3 (Krein–Rutman).** Έστω  $\mathcal{Y}$  να είναι ένας κλειστός κώνος στον  $\mathcal{X}$  με  $\text{int}(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$  και υποθέτουμε ότι αν  $u \in \mathcal{Y} \setminus \{0\}$  τότε,  $-u \notin \mathcal{Y}$ . Έστω  $\mathcal{L}$  να είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής στον  $\mathcal{X}$  ο οποίος είναι ισχυρά θετικός σε σχέση με τον  $\mathcal{Y}$ . Τότε, ο  $\mathcal{L}$  έχει ένα μοναδικό ιδιοδιάνυσμα  $v \in \text{int}(\mathcal{Y})$  με  $\|v\| = 1$  και η αντίστοιχη ιδιοτιμή  $\mu$  είναι θετική.

## 1.5 Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης, το οποίο είναι ουσιώδες εργαλείο για τη θεωρία διακλαδώσεων, στοιχεία της οποίας θα εφαρμόσουμε για την μελέτη του προβλήματος μας.

Έστω η εξίσωση

$$F(x, y) = 0 \quad (1.7)$$

και μια λύση  $(x_0, y_0)$  της εξίσωσης (1.7), για  $y$  σε μια γειτονιά του  $(x_0, y_0)$ . Θέλουμε να βρούμε μια απεικόνιση  $x \mapsto y(x)$  τέτοια ώστε  $y(x_0) = y_0$  και  $F(x, y(x)) = 0$ .

**Θεώρημα 1.5.1** ([74]). Υποθέτουμε ότι

- (1) η απεικόνιση  $F : \mathcal{U}(x_0, y_0) \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  είναι ορισμένη σε μια ανοιχτή περιοχή  $\mathcal{U}(x_0, y_0)$  και  $F(x_0, y_0) = 0$  όπου  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  είναι χώροι Banach επί του  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- (2)  $F_y$  υπάρχει ως μια μερική Fréchet παράγωγος στο  $\mathcal{U}(x_0, y_0)$  και  $F_y : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  είναι 1-1 και επί.
- (3)  $F$  και  $F_y$  είναι συνεχείς στο  $(x_0, y_0)$ .

Τότε, ισχύουν τα εξής:

- (α) (Υπαρξη και Μοναδικότητα) Υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $r_0, r$  τέτοιοι ώστε για κάθε  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\|x - x_0\| \leq r_0$ , υπάρχει ακριβώς ένα  $y(x) \in \mathcal{Y}$ , για το οποίο  $\|y(x) - y_0\| \leq r$  και  $F(x, y(x)) = 0$ .
- (β) (Κατασκευή της λύσης) Η ακολουθία  $(y_n(x))$  διαδοχικών προσεγγίσεων που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις:  $y_0(x) \equiv y_0$  και

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - F_y(x_0, y_0)^{-1} F(x, y_n(x)),$$

συγκλίνει στη λύση  $y(x)$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  για όλα τα  $x \in \mathcal{X}$ , για τα οποία ισχύει ότι  $\|x - x_0\| \leq r_0$ .

- (γ) (Συνέχεια) Αν  $F$  είναι συνεχής σε μια γειτονιά του  $(x_0, y_0)$  τότε,  $y(\cdot)$  είναι συνεχής σε μια γειτονιά του  $x_0$ .
- (δ) (Διαφορισιμότητα) Αν  $F$  είναι μια  $C^m$ -απεικόνιση, όπου  $1 \leq m \leq \infty$  σε μια γειτονιά του  $(x_0, y_0)$  τότε,  $y(\cdot)$  είναι επίσης μια  $C^m$ -απεικόνιση σε μια γειτονιά του  $x_0$ .

## 1.6 Θεωρία Διακλαδώσεων

Η θεωρία διακλαδώσεων είναι η μελέτη των πιθανών αλλαγών στη δομή των τροχιών ενός δυναμικού συστήματος, όταν μια παράμετρος μεταβάλλεται. Πολλά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων καταλήγουν στο πρόβλημα της μορφής

$$F(\mu, x) = 0, \quad \mu \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathcal{X} \quad (1.8)$$

όπου  $F : \mathbb{K} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  ένας τελεστής με  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ . Αυτός εξαρτάται από τη παράμετρο  $\mu$ . Αναζητούμε σύνολα λύσεων της μορφής

$$F^{-1}(0) = \{(\mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathcal{X} : F(\mu, x) = 0\}.$$

Με τα επόμενα αποτελέσματα, αναφέρουμε συνθήκες για την  $F$ , που καθορίζουν τότε μια λύση  $(\bar{\mu}, \bar{x})$  της Εξ. (1.8), βρίσκεται πάνω σε μια καμπύλη λύσεων  $(\mu, x(\mu))$ .

**Ορισμός 1.6.1** ([74]). Έστω  $\mathcal{X}$  να είναι ένας χώρος Banach επί του  $\mathbb{K}$ . Το σημείο  $(\mu_0, x_0)$  λέγεται **σημείο διακλάδωσης** της Εξ. (1.8), αν και μόνο αν

- (1)  $F(\mu_0, x_0) = 0$ ,
- (2) για  $n = 1, 2, \dots$  υπάρχουν δύο ακολουθίες  $\{(\mu_n, x_n)\}$  και  $\{(\mu_n, y_n)\}$  των λύσεων της Εξ. (1.8), οι οποίες συγκλίνουν στο  $(\mu_0, x_0)$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , με  $x_n \neq y_n \quad \forall n$ .

Δίνουμε και τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό ([65]): Υποθέτουμε ότι  $\Gamma : (\mu, x(\mu))$  είναι μια καμπύλη λύσεων της Εξ. (1.8). Έστω  $(\mu_0, x_0)$  να είναι ένα εσωτερικό σημείο σε αυτή την καμπύλη, με την ιδιότητα ότι κάθε γειτονιά του  $(\mu_0, x_0)$  στο  $\mathbb{K} \times \mathcal{X}$ , περιέχει λύσεις του (1.8) οι οποίες δεν είναι στη  $\Gamma$ . Τότε, το  $(\mu_0, x_0)$  λέγεται σημείο διακλάδωσης σε σχέση με την  $\Gamma$ . Λύσεις της (1.8) κοντά στο  $(\mu_0, x_0)$  και όχι πάνω στην  $\Gamma$ , συχνά αναφέρονται και **διακλαδισμένες λύσεις** ή **σύνολα διακλάδωσης**.

**Πρόταση 1.6.2** ([74]). Έστω  $\mathcal{X}$  και  $\mathcal{Y}$  να είναι χώροι Banach επί του  $\mathbb{K}$  και έστω  $F : \mathcal{U}(\mu_0, x_0) \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  να είναι μια  $C^1$ -απεικόνιση σε μια γειτονιά του  $(\mu_0, x_0)$ . Αν το  $(\mu_0, x_0)$  είναι ένα σημείο διακλάδωσης της Εξ. (1.8) τότε, ο αντίστροφος τελεστής  $F_x(\mu_0, x_0)^{-1}$  δεν υπάρχει ως ένας συνεχής γραμμικός τελεστής στον χώρο  $\mathcal{Y}$ .

Για το ακόλουθο θεώρημα, συμβολίζουμε με  $\mathcal{N}(T)$  και  $R(T)$  τον πυρήνα και το πεδίο τιμών ενός τελεστή  $T$ , αντίστοιχα.

**Θεώρημα 1.6.3 (Διακλάδωση από μια Απλή Ιδιοτιμή).** Υποθέτουμε ότι  $F(\mu, 0) \equiv 0$ ,  $\mu \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . Επιπλέον έστω  $\mathcal{U} = \mathcal{S} \times \mathcal{V}$  ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$  και  $F \in C^2(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ , όπου  $\mathcal{X}$  και  $\mathcal{Y}$  χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- (α)  $\mathcal{N}(F_x(\mu_0, 0))$  είναι μονοδιάστατος χώρος παραγόμενος από το  $u_0$ .
- (β)  $R(F_x(\mu_0, 0))$  έχει συνδιάσταση 1, δηλαδή  $\dim[\mathcal{Y}/R(F_x(\mu_0, 0))] = 1$ .
- (γ)  $F_{\mu x}(\mu_0, 0)u_0 \notin R(F_x(\mu_0, 0))$ .

Έστω τώρα  $\mathcal{Z}$  να είναι ένα κλειστό υποσύνολο του  $\mathcal{X}$  τέτοιο ώστε  $\mathcal{X} = \text{span}(u_0) \oplus \mathcal{Z}$  (δηλαδή οποιοδήποτε  $x \in \mathcal{X}$  μπορεί να γραφεί ως  $x = \alpha u_0 + z$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathcal{Z}$ ). Τότε, υπάρχει ένα  $\gamma > 0$  και μια  $C^1$ -καμπύλη  $(\mu, \phi) : (-\gamma, \gamma) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{Z}$  τέτοια ώστε

- (1)  $\mu(0) = \mu_0$ ,
- (2)  $\phi(0) = 0$  και
- (3)  $F(\mu(s), s(u_0 + \phi(s))) = 0$  για  $|s| < \gamma$ .

Επιπλέον, υπάρχει μια γειτονιά του  $(\mu_0, 0)$  τέτοια ώστε, οποιοδήποτε λύση της εξίσωσης  $F(x, \mu) = 0$ , είτε βρίσκεται πάνω σε αυτή τη καμπύλη, είτε είναι της μορφής  $(\mu, 0)$ .

Σε πολλά προβλήματα, μια λύση  $\bar{x}$  μιας εξίσωσης  $F(x, \mu) = 0$  αντιστοιχεί σε μια λύση στάσιμης κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = F(\mu, x).$$

Με το ακόλουθο θεώρημα, δίνουμε τις προϋποθέσεις για την εμφάνιση του φαινομένου της καθολικής διακλάδωσης.

**Θεώρημα 1.6.4** ([65]). Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{X}$  είναι ένας χώρος Banach με νόρμα  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $F : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , να είναι της μορφής

$$F(\mu, x) = \mu\mathcal{R}(x) + \mathcal{W}(\mu, x), \quad (1.9)$$

και υποθέτουμε ότι:

- (α)  $\frac{1}{\lambda^*}$  είναι μια απλή ιδιοτιμή του  $\mathcal{R}$ ,
- (β)  $\mathcal{R} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής,
- (γ)  $\mathcal{W} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  είναι συμπαγής τελεστής και
- (δ)

$$\lim_{\|x\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{W}(\mu, x)\|_{\mathcal{X}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = 0. \quad (1.10)$$

Τότε, η κλειστότητα του συνόλου

$$\mathbf{C} = \{(\mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} : (\mu, x) \text{ λύνει την } x - F(\mu, x) = 0, x \neq 0\},$$

περιλαμβάνει ένα μέγιστο συνεχές (το οποίο καλείται και συνεκτικό κλαδί) λύσεων του  $\mathbf{C}$ , το οποίο διακλαδίζεται από το  $(\lambda^*, 0)$ . Το  $\mathbf{C}$ , είτε:

- (1) συναντάει το άπειρο στο  $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$  ή,
- (2) συναντάει το  $x = 0$  στο σημείο  $(\hat{\mu}, 0)$  όπου  $\hat{\mu} \neq \lambda^*$  και  $\frac{1}{\hat{\mu}}$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{R}$ .

## 1.7 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας για Δυναμικά Συστήματα Κλίσης

Για τα δυναμικά συστήματα πλέγματος που θα μελετήσουμε, ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των φραγμένων ημιτροχιών τους, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Ειδικότερα, θα μελετήσουμε τη σύγκλιση των φραγμένων ημιτροχιών σε καταστάσεις ισορροπίας. Το πρόβλημα αυτό είναι μη-τετριμμένο για δυναμικά συστήματα κλίσης, τα οποία ορίζονται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{U} = \nabla F(U), \quad t \geq 0, \quad (1.11)$$

όπου  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , ικανοποιητικά ομαλή συνάρτηση. Ας σχολιάσουμε επιγραμματικά, το θεμελιώδες αποτέλεσμα της σύγκλισης σε καταστάσεις ισορροπίας, για το μη- γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης (1.11): με βάση την αρχή του αναλλοίωτου του LaSalle, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη λύση του συστήματος (1.11),  $U \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Επιπλέον, αν  $N = 1$ , τότε, κάθε λύση του συστήματος (1.11), συγκλίνει σε ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας. Ωστόσο, αν  $N \geq 2$ , είναι συναρπαστικό το ότι η σύγκλιση δεν συμβαίνει πάντα. Αναφέρουμε το ακόλουθο θεμελιώδες παράδειγμα, για το οποίο σύγκλιση σε μοναδικό σημείο ισορροπίας (singleton), αποτυγχάνει.

**Παράδειγμα 1.7.1** ([57]). Θεωρούμε την περίπτωση του συστήματος (1.11), με  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι η συνάρτηση

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r^2-1}} & \text{αν } r < 1, \\ 0 & \text{αν } r = 0, \\ e^{-\frac{1}{r^2-1}} \sin\left(\frac{1}{(r-1)-\theta}\right) & \text{αν } r > 1. \end{cases}$$

και έστω  $J = \nabla F$ . Έχουμε ότι  $J(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ , αν και μόνο αν  $r = 0$  ή  $r = 1$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει τροχιά του  $J$ , της οποίας το  $\omega$ -οριακό σύνολο είναι ένα συνεχές σημείων ισορροπίας, και όχι ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας: Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι είναι ο κύκλος  $C$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Σημειώνουμε ότι  $F^{-1}(0) = C \cup E_1 \cup E_2$ , όπου  $E_1$  και  $E_2$  είναι οι σπείρες που ορίζονται ως εξής:

$$E_1 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 1 + \frac{1}{(\pi + \theta)} \quad \text{όπου } -\pi < \theta < \infty \right\}$$

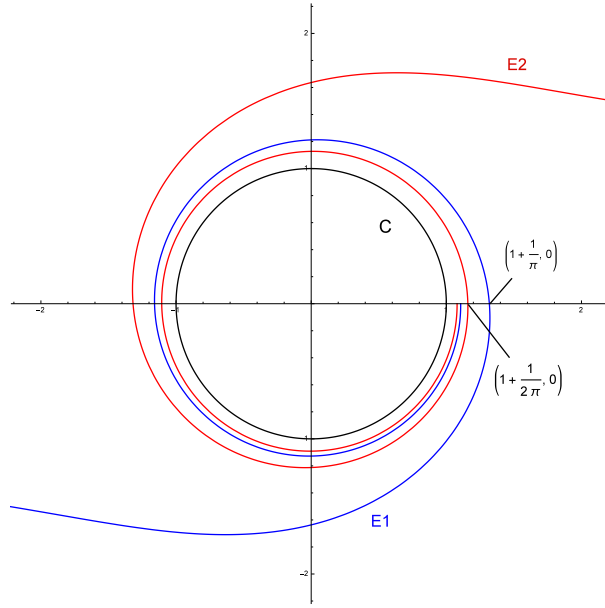
και

$$E_2 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 1 + \frac{1}{(2\pi + \theta)} \quad \text{όπου } -2\pi < \theta < \infty \right\}.$$

Θεωρούμε τώρα την περιοχή

$$\mathcal{U} = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : 1 + \frac{1}{(2\pi + \theta)} < r < 1 + \frac{1}{(\pi + \theta)} \quad \text{και } \theta > 0 \right\}$$

και έστω  $I = \left\{ (x, 0) : 1 + \frac{1}{2\pi} \leq x \leq 1 + \frac{1}{\pi} \right\}$ .



Σχήμα 1.1:

**Λήμμα 1.7.2.** Θα δείξουμε ότι υπάρχει σημείο  $p_0 \in I$  για το οποίο η θετική του τροχιά  $\mathcal{O}(p_0) \subset \mathcal{U}$ . Ως εκ τούτου  $\omega(p_0) = C$ .

*Απόδειξη.* Σχεδιάζουμε ισοσταθμικές καμπύλες της  $F$  στον χώρο  $\mathcal{U}$ . Η τομή της ισοσταθμικής καμπύλης που διέρχεται από ένα σημείο  $p \in I$  με το  $\mathcal{U}$ , είναι ένα συμπαγές τμήμα, του οποίου τα άκρα είναι στο  $I$ , και το μήκος αυτού του τμήματος τείνει στο άπειρο, καθώς το  $p$  πλησιάζει τα άκρα του  $I$ . Έστω  $q \in E_1$ . Καθώς το  $J(q)$  είναι ορθογώνιο στο  $E_1$  και δείχνει εκτός του  $\mathcal{U}$ , (επειδή η  $F$  είναι αρνητική στο  $\mathcal{U}$ ), βλέπουμε ότι η αρνητική τροχιά του  $q$  τέμνει μια από τις ισοσταθμικές καμπύλες σε ένα σημείο στο εσωτερικό του  $I$ . Έτσι η αρνητική τροχιά του  $q$  τέμνει το  $I$ . Συνεπώς το σύνολο

$$K = \{p \in I : S(t)p \in \mathcal{U} \text{ για } 0 \leq t < s \text{ και } S(s)p \in E_1\} \neq \emptyset.$$

Επιπλέον, για δοσμένο σημείο  $q \in E_1$ , υπάρχει ένα σημείο  $p \in K$ , τέτοιο ώστε  $q \in \mathcal{O}^+(p)$ , και το τμήμα της τροχιάς μεταξύ  $p$  και  $q$  να είναι μέσα στο  $\mathcal{U}$ . Από την άλλη μεριά, δοσμένου  $q \in E_2$ , η αρνητική τροχιά του  $q$  επίσης τέμνει το  $I$ , άρα  $K \neq I$ .

Έστω τώρα  $\inf(K) = p_0$ . Ισχυριζόμαστε ότι η θετική τροχιά του  $p_0$  παραμένει στο  $\mathcal{U}$ . Αν δεν ισχύει αυτό τότε, υπάρχει ένα  $q$  στην θετική τροχιά του

$p_0$  τέτοιο ώστε, το τμήμα της τροχιάς μεταξύ του  $p_0$  και του  $q$ , να περιέχεται στο  $\mathcal{U}$  και  $S(t)q \notin \mathcal{U}$  για αρκετά μικρό  $t > 0$ . Ως εκ τούτου  $q \in E_1$  ή  $q \in E_2$  ή  $q \in I$ .

- Αν  $q \in E_1$  τότε, κάθε θετική τροχιά μέσω ενός σημείου του συνόλου  $K$  τέμνει το  $E_1$  σε ένα σημείο της τομής μεταξύ των  $(1 + \frac{1}{\pi}, 0)$  και  $q$ . Άτοπο, γιατί η αρνητική τροχιά κάθε σημείου του  $E_1$  τέμνει το  $I$ , και άρα το  $K$ .
- Αν  $q \in E_2$  ή  $q \in I$  τότε, η θετική τροχιά κάθε σημείου κοντά στο  $p_0$  φεύγει από το  $\mathcal{U}$  χωρίς να συναντήσει το  $E_1$ . Άτοπο γιατί  $\inf(K) = p_0$ .

Συνεπώς η θετική τροχιά του  $p_0$  περιέχεται στο  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (1.11), η σύγκλιση σε μοναδικό σημείο ισορροπίας εξασφαλίζεται κάτω από προϋποθέσεις αναλυτικότητας για την συνάρτηση  $F$ . Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεμελιώδους σημασίας ανισότητα Łojasiewicz [50, 51], την οποία διατυπώνουμε. Συμβολίζουμε με  $\|x\|$  τη νόρμα του  $x$  στον χώρο  $\mathbb{R}^N$  και θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{J} = \{a \in \mathbb{R}^N : \nabla F(a) = 0\}$ .

**Θεώρημα 1.7.3 (Łojasiewicz).** Έστω  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε μια γειτονιά ενός σημείου  $a$  στον  $\mathbb{R}^N$ . Τότε, υπάρχει  $\sigma > 0$  και  $0 < \theta < \frac{1}{2}$  τέτοιο ώστε

$$\|\nabla F(x)\| \geq |F(x) - F(a)|^{1-\theta},$$

για όλα τα  $x \in \mathbb{R}^N : \|x - a\| < \sigma$ .

Με την κρίσιμη βοήθεια του Θεωρήματος 1.7.3, αποδεικνύεται για το σύστημα (1.11) το ακόλουθο αποτέλεσμα σύγκλισης. Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται στις εργασίες [26, 27].

**Θεώρημα 1.7.4.** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι αναλυτική. Αν  $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια  $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , φραγμένη λύση του προβλήματος (1.11), τότε υπάρχει  $a \in \mathcal{J}$  τέτοιο ώστε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\|U(t) - a\|\} = 0.$$

Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε για πρώτη φορά σε μη-γραμμικά πλέγματα, κατάλληλα τροποποιημένη εκδοχή της ανισότητας Łojasiewicz, η οποία θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε το πρόβλημα της σύγκλισης για αυτά τα συστήματα.

## 1.8 Ο Χώρος $\ell^p$

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά των χώρων φάσεων για τα δυναμικά συστήματα που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ταξινομούμε ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, βάσει του βαθμού της αθροιστικότητας τους. Συμβολίζουμε με  $\ell^p$  το σύνολο των διπλά άπειρων ακολουθιών  $u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ , για τις οποίες η νόρμα,

$$\|u\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } 0 < p < \infty, \\ \sup_{-\infty < n < \infty} |u_n| & \text{αν } p = \infty, \end{cases}$$

είναι πεπερασμένη.

Αν  $1 \leq p \leq \infty$  τότε, ο  $\ell^p$  είναι ένας χώρος Banach με νόρμα  $\|\cdot\|_{\ell^p}$ . Για  $-\infty < n < \infty$ , μπορούμε να ορίσουμε ακολουθίες όπως οι  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  ή ακόμα και πεπερασμένες ακολουθίες όπως  $\{u_n\}_{n=\kappa}^m$ , στις οποίες ισχύει ότι  $u_n = 0$  για  $n$  έξω από ένα καθορισμένο διάστημα. Έτσι καθορίζονται οι υπόχωροι του  $\ell^p$ .

Οι ανισότητες Hölder, Minkowski και Young προκύπτουν για του χώρους  $\ell^p$  από τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τους χώρους  $L^p(\mathbb{R})$ . Πιο συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις εξής ακολουθίες,  $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  και  $v = \{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (α) Αν  $u \in \ell^p$  και  $v \in \ell^q$  τότε,  $uv = \{u_n v_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^r$ , όπου  $r$  ικανοποιεί τη σχέση  $1/r = 1/p + 1/q$  και ισχύει ότι

$$\|uv\|_{\ell^r} \leq \|u\|_{\ell^p} \cdot \|v\|_{\ell^q} \quad (\text{Ανισότητα Hölder}).$$

- (β) Αν  $u, v \in \ell^p$  τότε,

$$\|u + v\|_{\ell^p} \leq \|u\|_{\ell^p} + \|v\|_{\ell^p} \quad (\text{Ανισότητα Minkowski}).$$

- (γ) Αν  $u \in \ell^p$  και  $v \in \ell^q$  όπου ισχύει  $1/p + 1/q \geq 1$  τότε, οι σειρές  $(u * v)_n$  που ορίζονται από τη σχέση:

$$(u * v)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n-m} v_m, \quad -\infty < n < \infty,$$

συγκλίνουν απόλυτα. Επιπλέον οι ακολουθίες  $u * v$  ονομάζονται συνέλιξη των  $u$  και  $v$  που ανήκουν στο χώρο  $\ell^r$  με  $1 + 1/r = 1/p + 1/q$  και

$$\|u * v\|_{\ell^r} \leq \|u\|_{\ell^p} \cdot \|v\|_{\ell^q} \quad (\text{Ανισότητα Young}).$$



Είναι αναγκαίο να παρατηρήσουμε ωστόσο, ότι οι χώροι  $\ell^p$  εμφυτεύονται ο ένας στον άλλο με την αντίστροφη σειρά σε σχέση με τις εμφυτεύσεις των χώρων  $L^p(\Omega)$ , όπου  $\Omega$  είναι πεπερασμένο.

Αν ισχύει ότι  $0 < p \leq q \leq \infty$  τότε, έχουμε ότι

$$\ell^p \hookrightarrow \ell^q, \quad \|u\|_{\ell^q} \leq \|u\|_{\ell^p}.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής αν  $q = \infty$  και προκύπτει για  $q \geq p$ , από την άθροιση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p |u_n|^{q-p} \leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right) \|u\|_{\ell^\infty}^{q-p} \\ &\leq \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right) \|u\|_{\ell^p}^{q-p}. \end{aligned}$$

## 1.9 Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών της Δεύτερης Παραγώγου

Σε αυτή την παράγραφο, θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες του τελεστή κεντρικών πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης, που ορίζεται από τη σχέση

$$A(u) = -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}.$$

Αναγνωρίζουμε τον παραπάνω τελεστή, ως την προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης (βλ. [70]). Στα δυναμικά συστήματα πλέγματος, όπως οι διακριτές εξισώσεις Klein-Gordon και Schrödinger, ο παραπάνω τελεστής περιγράφει συνήθως τη γραμμική σύζευξη των σωματιδίων του πλέγματος.

Έστω  $u, v \in \ell^2$  όπου  $u = (u_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$  και  $v = (v_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ . Παρατηρούμε ότι

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = (u_{n+1} - u_n)v_n + u_{n+1}(v_{n+1} - v_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Θα αθροίσουμε κατ' αρχήν από  $n = -\kappa$  έως  $n = \kappa$ , και στην συνέχεια, θα θεωρήσουμε το όριο για  $\kappa \rightarrow \infty$ . Η Εξ. (1.12) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(u_{n+1} - u_n)v_n = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n - u_{n+1}(v_{n+1} - v_n).$$

Έτσι, θεωρώντας τα αθροίσματα στην παραπάνω σχέση, έχουμε ότι

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1} - u_n)v_n = \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n - \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}(v_{n+1} - v_n). \quad (1.13)$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέρους της Εξ. (1.13), έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n &= (u_{-\kappa+1}v_{-\kappa+1} - u_{-\kappa}v_{-\kappa}) \\ &\quad + (u_{-\kappa+2}v_{-\kappa+2} - u_{-\kappa+1}v_{-\kappa+1}) \\ &\quad + \cdots + (u_{\kappa}v_{\kappa} - u_{\kappa-1}v_{\kappa-1}) + (u_{\kappa+1}v_{\kappa+1} - u_{\kappa}v_{\kappa}). \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = u_{\kappa+1}v_{\kappa+1} - u_{-\kappa}v_{-\kappa}.$$

Έτσι καταλήγουμε στην σχέση

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1} - u_n)v_n = (u_{\kappa+1}v_{\kappa+1} - u_{-\kappa}v_{-\kappa}) - \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}(v_{n+1} - v_n).$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι  $u_n, v_n \in \ell^2$ , καθώς  $\kappa \rightarrow \infty$ , οι όροι

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1} - u_n)v_n,$$

και

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}(v_{n+1} - v_n),$$

υπάρχουν. Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1} - u_n)v_n = \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1}v_n - u_nv_n) = \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}v_n - \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_nv_n.$$

Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Hölder για αθροίσματα, τότε:

$$\left| \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}v_n \right| \leq \left( \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_{n+1}\|_{\ell^2} \|v_n\|_{\ell^2}$$

και

$$\left| \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_n v_n \right| \leq \left( \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_n\|_{\ell^2} \|v_n\|_{\ell^2}.$$

Επομένως, αν λάβουμε το όριο καθώς  $\kappa \rightarrow \infty$ , οι όροι συγχλίνουν. Επίσης, καθώς  $\kappa \rightarrow \infty$ , επειδή  $u_n, v_n \in \ell^2$ , ισχύει ότι  $u_n \rightarrow 0, v_n \rightarrow 0$ . Συνεπώς ισχύει ότι,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (u_{\kappa+1} v_{\kappa+1} - u_{-\kappa} v_{-\kappa}) = 0,$$

και συμπεραίνουμε ότι  $\forall u, v \in \ell^2$ ,

$$\sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} (u_{n+1} - u_n) v_n = - \sum_{n=-\kappa}^{n=\kappa} u_{n+1} (v_{n+1} - v_n). \quad (1.14)$$

**Πρόταση 1.9.1.** Για κάθε  $u, v \in \ell^2$  ο τελεστής  $A$  είναι:

- (1) γραμμικός,
- (2) συνεχής,
- (3) συμμετρικός.

*Απόδειξη.* (1) Πράγματι, ο τελεστής είναι γραμμικός εφόσον

$$\begin{aligned} A(u + v) &= - \frac{(u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(u_n + v_n) + (u_{n-1} + v_{n-1}))}{h^2} \\ &= - \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2} \\ &= A(u) + A(v). \end{aligned}$$

(2) Επίσης, ο τελεστής είναι συνεχής συνάρτηση, γιατί ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 \|A(u)\|_{\ell^2} &= \left( \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |2u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 4 \left( \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 4\|u\|_{\ell^2}.
 \end{aligned}$$

Το τελευταίο μας δίνει την ανισότητα,

$$\|A(u)\|_{\ell^2} \leq 4\|u\|_{\ell^2}.$$

Ως εκ τούτου, αφού ο τελεστής είναι γραμμικός και φραγμένος, συνεπάγεται ότι είναι και συνεχής.

(3) Για να αποδείξουμε τη συμμετρικότητα, λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο,

$$\begin{aligned}
 \langle A(u), v \rangle_{\ell^2} &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})v_n \\
 &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} [(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})]v_n \\
 &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)v_n + \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})v_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle A(u), v \rangle_{\ell^2} &= \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_{n+1} + \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) v_{n+1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_{n+1} - \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_n \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) (v_{n+1} - v_n) \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) v_{n+1} - \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) v_n \\
 &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_n + \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_{n+1} \\
 &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) u_n + \frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_n - v_{n-1}) u_n \\
 &= -\frac{1}{h^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) u_n = \langle u, A(v) \rangle_{\ell^2}.
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, ότι στον παραπάνω υπολογισμό, χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.14) με αλλαγή μεταβλητής.  $\square$

## Κεφάλαιο 2

# Δυναμική της Σύγκλισης σε Καταστάσεις Ισορροπίας σε ένα Πλέγμα Klein–Gordon με Τριβή

### 2.1 Η Διακριτή Εξίσωση Klein–Gordon με Δυναμικό $\phi^4$

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη της δυναμικής της διακριτής εξίσωσης Klein–Gordon (DKG) με τριβή,

$$\ddot{U}_n - k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \delta\dot{U}_n + W'(U_n) = 0, \quad \beta, \delta > 0. \quad (2.1)$$

Στη παραπάνω εξίσωση, η  $W$  περιγράφει τη συνάρτηση δυναμικού,

$$W(U_n) = -\frac{\omega_d^2}{2}U_n^2 + \frac{\beta\omega_d^2}{4}U_n^4, \quad (2.2)$$

στην οποία υπακούει κάθε συζευγμένη μονάδα  $U_n$ . Στην Εξ. (2.1), η μεταβλητή  $U_n(t)$  είναι η άγνωστη μετατόπιση του ταλαντωτή που καταλαμβάνει τη  $n$ -ιοστή θέση του πλέγματος και  $k = h^{-2}$  είναι η παράμετρος διακριτοποίησης. Ορίζουμε  $h$  την απόσταση μεταξύ των ταλαντωτών του πλέγματος. Η αλυσίδα (DKG) περιέχει γραμμική φθορά με συντελεστή φθοράς  $\delta > 0$ , ενώ  $\beta$  είναι ο συντελεστής του μη γραμμικού κυβικού όρου.

Όταν  $\delta = 0$ , η Εξ. (2.1) είναι γνωστή ως το διακριτό μοντέλο  $\phi^4$ . Αυτό το μοντέλο, είναι ένα από τα θεμελιώδη μη γραμμικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται στη Φυσική. Το ζήτημα της διακριτοποίησης της Χαμιλτονιανής περίπτωσης του μοντέλου  $\phi^4$ , έχει προσελκύσει έντονο ενδιαφέρον τις τελευταίες δύο δεκαετίες, (βλ. [8, 14, 16, 40, 56, 62, 66]). Οι διακριτοποιήσεις επηρεάζουν σημαντικά [62] ιδιότητες της συνεχούς μη ολοκληρώσιμης περίπτωσης του μοντέλου, όπως οι συγκρούσεις των σολιτονίων φράκταλ [7, 9].

Τόσο η συνεχής, όσο και η διακριτή μορφή του μοντέλου  $\phi^4$ , έχουν χρησιμοποιηθεί στη θεωρία Ginzburg–Landau η οποία περιγράφει την υπεραγωγιμότητα ηλεκτρονίων, στη θεωρία των σιδηροηλεκτρικών και σιδηρομαγνητικών υλικών, στο φαινόμενο της συνδεσμολογίας Josephson και στη μη-γραμμική οπτική. Επίσης, το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί ακόμα και στο κλάδο της Βιολογίας, περιγράφοντας τοπολογικές διεγέρσεις σε μακρομόρια, ή στην αλυσίδα ζευγών βάσεων του DNA. Είναι μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος Davydov που περιγράφουν τη δυναμική της μεταφοράς ενέργειας, που μεταφέρεται σε μια πρωτεΐνη από το μηχανισμό υδρόλυσης - ATP (βλ. τις μονογραφίες [13, 17, 41] και τις δημοσιευμένες εργασίες [21, 22, 31, 42]). Το μοντέλο (DKG), όπως και το μιγαδικό ανάλογο, η Διακριτή Μη-Γραμμική εξίσωση Schrödinger, (DNLS) [41], το οποίο είναι και αυτό ένα δυναμικό πλέγμα με κυβική μη-γραμμικότητα, έχουν προσελκύσει έντονο ενδιαφέρον. Και αυτό λόγω ότι αποτελούν πρωτότυπα συστήματα, στα οποία η αλληλεπίδραση της διακριτότητας και της μη-γραμμικότητας μπορεί να αξιολογηθεί και να συγκριθεί με το αντίστοιχο συνεχές όριο των εξισώσεων αυτών, δηλαδή τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs), (NLS) και (KG). Γενικά, οι κρίσιμες διαφορές μεταξύ των PDEs και των διακριτών μοντέλων, προκαλούνται από την παραβίαση του αναλλοίωτου ως προς τις όποιες χωρικές μετατοπίσεις (translational invariance), στα τελευταία. Αυτό με τη σειρά του έχει σαν αποτέλεσμα, την εμφάνιση των λεγόμενων φραγμάτων Peierls–Nabarro [13, 41].

Το μοντέλο  $\phi^4$  (2.1), είναι το θεμελιώδες μοντέλο για τη μελέτη μεταβατικών καταστάσεων που παρατηρούνται σε αλυσίδες συζευγμένων σωματιδίων. Ξεκινώντας από το πεδίο έλξης μιας τοπικά ευσταθούς κατάστασης, τα σωματίδια διαφεύγουν σε μια γειτονική ευσταθή κατάσταση, μέσω ενός ενεργειακού φράγματος [1, 29, 30]. Το ενεργειακό φράγμα αντιστοιχεί στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού, το οποίο σχετίζεται με ένα σαγματικό σημείο και διαχωρίζει τα δύο ελάχιστα του δυναμικού. Τότε, μπορεί να υπάρχουν τοπολογικές διεγέρσεις “ύπο τη μορφή kink”, οι οποίες παρεμβάλουν μεταξύ των ελαχίστων και παίζουν ένα κρίσιμο ρόλο στη μελέτη των πιθανών μεταβάσεων. Ενώ είναι γνωστό ότι τα διακριτά μοντέλα επιτρέπουν στάσιμες λύσεις “kink” [11, 60], η

παραβίαση του αναλλοίωτου ως προς τις όποιες χωρικές μετατοπίσεις, εγείρει ένα σημαντικό ερώτημα. Αυτό διερευνά αν υπάρχουν οδεύοντα διακριτά kinks. Οι παραπάνω αναφορές, όπως επίσης και μια σειρά από άλλες σχετικές εργασίες όπως [15, 32, 33, 63], παρέχουν μια αίσθηση του ενδιαφέροντος που προκάλεσε αυτό το ερώτημα.

Επιστρέφοντας ξανά στην περίπτωση του μοντέλου το οποίο περιέχει τριβή, η παραπάνω φαινομενολογία των μεταβατικών καταστάσεων, έχει διερευνηθεί σε διάφορα φυσικά φαινόμενα. Σε αυτά οι επιδράσεις της τριβής έχουν προεξέχοντα ρόλο, όπου περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων, μεταβάσεις φάσης, χημική κινητική και άλλα, (βλ. [19, 47, 52, 53, 64]). Συγκεκριμένα, όταν  $\delta > 0$ , το αντίστοιχο του διακριτού μοντέλου  $\phi^4$  με γραμμική τριβή (2.1), έχει προφανή σημασία για τα διακριτά φυσικά φαινόμενα τα οποία αναφέρθηκαν παραπάνω, όταν οι επιδράσεις τριβής δεν μπορούν να αμεληθούν, (βλ. [12, 15, 20, 71]).

Στη μελέτη αυτή, θέλουμε να διερευνήσουμε τη δομή του συνόλου των πιθανών σημείων ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης, η οποία παίζει το ρόλο του ελκυστή για τη δυναμική της όταν  $\delta > 0$ , [69]. Εφοδιάζοντας την εξίσωση (2.1) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, το σύστημα ανήκει στην κλάση ενός δυναμικού συστήματος κλίσης (gradient system), δεύτερης τάξης και πεπερασμένης διάστασης. Για αυτό το σύστημα, η Χαμιλτονιανή ενέργεια έχει το ρόλο της συνάρτησης Lyapunov. Στην παραπάνω διακριτή περίπτωση, χρησιμοποιούμε μια διακριτή εκδοχή της ανισότητας Lojasiewicz [26, 27], για να αποδείξουμε ότι όλες οι φραγμένες λύσεις συγκλίνουν σε μοναδικό σημείο ισορροπίας. Αυτά τα σημεία είναι οι λύσεις του στάσιμου προβλήματος:

$$-k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) = \omega_d^2(U_n - \beta U_n^3). \quad (2.3)$$

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι, η ανισότητα Lojasiewicz αναδεικνύεται ως ένα σημαντικό εργαλείο για τη διερεύνηση των προβλημάτων στα μη-γραμμικά πλέγματα. Η περίπτωση της αλυσίδας DKG με ένα δυναμικό  $\phi^4$ , είναι μόνο ένα παράδειγμα ενός δυναμικού συστήματος πλέγματος, δεύτερου βαθμού. Η προσέγγιση του προβλήματος που χρησιμοποιούμε σε αυτή τη μελέτη, μπορεί να καλύπτει μια ευρεία κλάση δυναμικών συστημάτων κλίσης με τριβή.

Παρόλο που από την άποψη της τοπολογίας του χώρου των φάσεων, η δομή του καθολικού ελκυστή είναι τετριμμένη (εφόσον αποτελείται από μοναδικό σημείο ισορροπίας), σε αυτή τη μελέτη δείχνουμε ότι η δομή του συνόλου των σημείων ισορροπίας δεν είναι διόλου τετριμμένη. Για τις αναλυτικές μας εκτιμήσεις, εφαρμόζουμε αποτελέσματα καθολικών διακλαδώσεων (βλ. [61, 65])



στην Εξ. (2.3). Θεωρούμε ως παράμετρο διακλάδωσης την  $\omega_a^2$ , για να αποδείξουμε ότι κάθε γραμμική ιδιοκατάσταση του συστήματος (δηλαδή λύση υπό την απουσία της μη-γραμμικότητας), μπορεί να επεκταθεί σε μια αντίστοιχη μη-γραμμική. Μια τέτοια αναλυτική προσέγγιση, προσφέρει το πλεονέκτημα του χαρακτηρισμού των κλαδιών των σημείων ισορροπίας, με βάση τον αριθμό αλλαγών προσήμου των λύσεων που σχετίζονται με το κλαδί. Αυτό είναι φυσικό επακόλουθο, της φύσης του γραμμικού αυτοσυζυγή τελεστή και των υποθέσεων της θεωρίας Sturm–Liouville, για τη περίπτωση της μιας διάστασης που μας ενδιαφέρει σε αυτή τη μελέτη. Είναι επίσης σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, εξαιτίας αυτών των αλλαγών προσήμου, τα μη-γραμμικά σημεία ισορροπίας, ως στοιχεία των κλαδιών, μπορεί να ορίζουν μη-τετριμμένες τοπολογικές διασυνδέσεις μεταξύ των στάσιμων καταστάσεων. Αυτές οι καταστάσεις σχετίζονται με τα συμμετρικά ελάχιστα του δυναμικού. Αυτό μας παρέχει με τη σειρά του τη δυνατότητα της σύνδεσης των καταστάσεων ισορροπίας, οι οποίες θεωρούνται εδώ ως παραλλαγές multi-kink του ενός ή δύο kink. Αυτές είναι καταστάσεις που έχουν μελετηθεί σε προηγούμενες μελέτες.

Ένα σημαντικό ερώτημα, στο πλαίσιο του συστήματος DKG (2.1), αφορά το βασικό μηχανισμό ο οποίος οδηγεί την επιλογή της τελικής κατάστασης της σύγκλισης. Έτσι διερευνούμε αυτό το ερώτημα με αναλυτικές εκτιμήσεις, οι οποίες επιβεβαιώνονται από αριθμητικές προσομοιώσεις. Υπό το πρίσμα της ανάλυσης των καθολικών διακλαδώσεων, με μια τέτοια προσέγγιση επιδιώκουμε να εξετάσουμε την πιθανή δυναμική ευστάθεια των κλαδιών των σημείων ισορροπίας. Έτσι θεωρούμε δύο ξεχωριστά σενάρια για την αρχική συνθήκη  $U_n(0)$  και την παράμετρο διακλάδωσης  $\omega_a^2$ . Και για τα δύο αυτά σενάρια, θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες  $U_n(0)$  (που μοιάζουν με τις γραμμικές ιδιοκαταστάσεις) και μηδενικές ταχύτητες  $\dot{U}_n(0) = \mathbf{0}$ , ως εξής.

Για το Σενάριο (I), θεωρούμε ζευγάρια  $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$ , τα οποία αποτελούνται από μικρές τιμές του  $\omega_a^2$  και αρχικές συνθήκες των οποίων η νόρμα ορίζει ένα σημείο του τοπικού διαγράμματος διακλαδώσεων ως εξής: η αρχική συνθήκη έχει τον ίδιο αριθμό αλλαγών προσήμου με αυτό ενός συγκεκριμένου κλαδιού. Λέμε ότι μια τέτοια αρχική συνθήκη είναι όμοια με ένα κλαδί σημείων ισορροπίας. Με αυτό τον τρόπο, το σημείο  $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$ , έχει επιλεγεί σε μια αρκετά μικρή γειτονιά ενός σημείου ισορροπίας του όμοιου κλαδιού. Με το Σενάριο (I), επιδιώκουμε να εκμεταλλευτούμε το πλεονέκτημα της δομής των κλαδιών των σημείων ισορροπίας, μαζί με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, η οποία σχετίζεται με αυτή. Επιβεβαιώνουμε αριθμητικά – με εξαιρετική συμφωνία – τις αναλυτικές προβλέψεις για τη γεωμετρική δομή των κλαδιών, (σύμφωνα με το θεώρημα καθολικών διακλαδώσεων (1.6.4), βλ. [61, 65]), καθώς και το

αποτέλεσμα της αστάθειας στη δυναμική της σύγκλισης. Το τελευταίο εκδηλώνεται από την μεταευστάθεια, φαινόμενο κατά το οποίο τροχιές συνδέουν διαφορετικά σημεία ισορροπίας, μεταβαίνοντας προοδευτικά από περισσότερο σε λιγότερο ασταθείς καταστάσεις. Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι, η εξέλιξη της Χαμιλτονιανής ενέργειας, είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τη πιθανή μεταευσταθή δυναμική.

Για το Σενάριο (II), θεωρούμε μια τυχαία τιμή της παραμέτρου διακλάδωσης  $\omega_d^2$ , ενώ η αρχική συνθήκη είναι και σε αυτή τη περίπτωση όμοια με ένα συγκεκριμένο κλαδί. Ωστόσο, η νόρμα της είναι αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε το αντίστοιχο σημείο ( $\|U_n(0)\|, \omega_d^2$ ), να είναι αρκετά μακριά από στο αντίστοιχο τοπικό διάγραμμα διακλαδώσεων. Στην πραγματικότητα με το Σενάριο (II), θέλουμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για τη δομή του διαγράμματος καθολικών διακλαδώσεων και τις ιδιότητες ευστάθειας οι οποίες σχετίζονται με αυτό. Για την αριθμητική μας διερεύνηση θεωρούμε σταθερές τιμές της παραμέτρου  $\omega_d^2$ , εκτός του γραμμικού φάσματος, ενώ μειώνουμε προοδευτικά το πλάτος μιας αρχικής συνθήκης, η οποία είναι όμοια με ένα κλαδί. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι, καθώς μειώνουμε το πλάτος των αρχικών συνθηκών, τα αποτελέσματα που εξάγουμε δείχνουν αρχικά ότι συγκλίνουν σε γεωμετρικά διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας ενός μη-όμοιου κλαδιού. Το παραπάνω φαινόμενο πραγματοποιείται χωρίς τη μεταευσταθή μετάβαση που παρατηρήθηκε στο Σενάριο (I). Στη συνέχεια μειώνουμε περισσότερο το πλάτος και αποκαλύπτουμε την ύπαρξη ενός ενδιάμεσου διαστήματος από τιμές του πλάτους της αρχικής συνθήκης, για τις οποίες η τελευταία συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας είτε ενός όμοιου ή ενός μη-όμοιου κλαδιού. Τέλος, απεικονίζουμε την ύπαρξη ενός (άνω) κατωφλιού για το πλάτος της αρχικής συνθήκης, κάτω από το οποίο, η τροχιά της αρχικής συνθήκης συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας του όμοιου κλαδιού. Αυτό καταδεικνύει ότι πάνω από τη κατωφλική τιμή, το όμοιο κλαδί ίσως είναι δυναμικά ασταθές και ως εκ τούτου το σύστημα ακολουθεί μια διαφορετικού τύπου δυναμική.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, υποδηλώνουν ότι το διάγραμμα καθολικών διακλαδώσεων μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο.

## 2.2 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας

Για την ανάλυση, θα θεωρούμε έναν αυθαίρετο αριθμό από  $K + 2$  ταλαντωτές που καταλαμβάνουν ίσες αποστάσεις σε ένα διάστημα  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  μήκους  $L$ , με απόσταση  $h = \frac{L}{K+1}$ . Συνεπώς, οι ταλαντωτές τοποθετούνται στα σημεία  $x_n =$

$-L/2 + nh, n = 0, 1, 2, \dots, K + 1$  του διαστήματος  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , με διακριτοποίηση  $-\frac{L}{2} = x_0 < x_1 < \dots < x_{K+1} = \frac{L}{2}$ . Με την παραπάνω περιγραφή μπορούμε στην Εξ. (2.1), να χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό  $U(x_n, t) := U_n(t)$ . Σε μερικές περιπτώσεις θα χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό  $U$  για τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^{K+2}$ , δηλαδή,  $U := \{U_n\}_{n=0}^{K+1}$ . Για την αλυσίδα DKG (2.1), θα θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών, με αρχικές συνθήκες

$$U_n(0) = U_{n,0} \text{ και } \dot{U}_n(0) = U_{n,1} \in \mathbb{R}^{K+2}, \quad (2.4)$$

και συνοριακές συνθήκες Dirichlet στα συνοριακά σημεία  $x_0 = -L/2$  και  $x_{K+1} = L/2$ , δηλαδή:

$$U_0 = U_{K+1} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Όποτε γίνεται αναγκαίο, θα χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό  $\Delta_d$  για την μονοδιάστατη διακριτή Λαπλασιανή

$$\{\Delta_d U\}_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1},$$

που στην περίπτωση μας ορίζεται στο χώρο  $\mathbb{R}^{K+2}$ . Αυτός ο χώρος μπορεί να θεωρηθεί ο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος των τετραγωνικά αθροίσμων ακολουθιών,  $\ell^2$ . Με άλλα λόγια, θα εργαστούμε με τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του χώρου των ακολουθιών  $\ell^p, 1 \leq p \leq \infty$ ,

$$\ell_{K+2}^p = \{X \in \ell^p : X_n = X_{K+1} = 0\}.$$

Δηλαδή, στην περίπτωση πεπερασμένης διάστασης έχουμε ότι  $\ell_{K+2}^p \equiv \mathbb{R}^{K+2}$ , ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|X\|_p = \left( \sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Για το χώρο  $\ell^p$  ισχύει η ισοδυναμία των νορμών,

$$\|X\|_{\ell^q} \leq \|X\|_{\ell^p} \leq (K+2)^{\frac{(q-p)}{qp}} \|X\|_{\ell^q}, \quad 1 \leq p \leq q < \infty. \quad (2.6)$$

Ο χώρος  $\ell_{K+2}^2$  εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(X, Y)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{K+1} X_n Y_n, \quad \|X\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{K+1} X_n^2,$$

του  $\ell^2$ . Σημειώνουμε εδώ ότι στην περίπτωση απειροδιάστατου πλέγματος  $\mathbb{Z}$ , ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\|X\|_{\ell^q} \leq \|X\|_{\ell^p}, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty \quad (2.7)$$

$$0 \leq (-\Delta_d X, X)_{\ell^2} \leq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |X_n|^2. \quad (2.8)$$

Οι σχέσεις (2.7) και (2.8) ισχύουν και στην περίπτωση του συστήματος πεπερασμένης διάστασης.

### 2.2.1 Καθολική Ύπαρξη Λύσεων

Ένα σημαντικό ζήτημα προς διερεύνηση που σχετίζεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων εξελικτικών εξισώσεων είναι αυτό της καθολικής ύπαρξης λύσεων. Ξεκινάμε ξαναγράφοντας την Εξ. (2.1) στην ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{U} - k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \delta \dot{U} - \omega_d^2 U + g(U) = 0. \quad (2.9)$$

όπου  $g(U) = \beta \omega_d^2 U_n^3$  ο μη-γραμμικός όρος. Είναι βολικό για την απόδειξη να θεωρήσουμε  $k = 1$ . Υπενθυμίζουμε ότι  $\beta > 0$ .

Ορίζουμε τους γραμμικούς τελεστές,  $A, B, B^* : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ .

$$(BU)_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n+1} - U_n, \quad (B^*U)_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n-1} - U_n,$$

$$(AU)_{n \in \mathbb{Z}} = -(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}).$$

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι ισχύει:

$$A = B^*B = BB^*.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ακόλουθη ημι-γραμμική μορφή

$$\langle U, V \rangle_{\ell_1^2} = \langle BU, BV \rangle_{\ell^2} + \omega_d^2 \langle U, V \rangle_{\ell^2}, \quad (2.10)$$

με νόρμα

$$\|U\|_{\ell_1^2}^2 = \langle U, U \rangle_{\ell_1^2} = \|BU\|_{\ell^2}^2 + \omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2.$$

Επιπλέον αν  $\mathcal{X} = \ell^2$ ,  $\mathcal{V} = \ell_1^2$  και  $\mathcal{D}(A)$  το πεδίο ορισμού του τελεστή  $A$ , τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{V}^*,$$

όπου οι εμφυτεύσεις είναι πυκνές και συνεχείς. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{V}^*$  τον δυϊκό του  $\mathcal{V}$ . Ενώ ισχύει ότι οι νόρμες  $\|\cdot\|_{\ell^2}$  και  $\|\cdot\|_{\ell_1^2}$  είναι ισοδύναμες διότι:

$$\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \leq \|U\|_{\ell_1^2}^2 \leq (4 + \omega_d^2) \|U\|_{\ell^2}^2.$$

Όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο, για τη πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή  $A$  ισχύει ότι,

$$E_1 = \inf_{U \in \ell^2} \frac{\langle AU, U \rangle_{\ell^2}}{\|U\|_{\ell^2}^2}.$$

Έτσι προκύπτει ότι  $\langle AU, U \rangle_{\ell^2} \geq E_1 \|U\|_{\ell^2}^2$ .

**Θεώρημα 2.2.1.** *Για κάθε αρχική συνθήκη, οι λύσεις του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5) ορίζονται καθολικά στο χρόνο.*

*Απόδειξη.* Θα περιοριστούμε για συντομία στην πιο σύνθετη περίπτωση όπου  $\omega_d^2 > E_1$ . Στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τη παραπάνω ημι-γραμμική μορφή. Ξαναγράφουμε την Εξ. (2.9) στην ακόλουθη μορφή,

$$\ddot{U} + \delta \dot{U} + AU + \omega_d^2 U + g(U) = 2\omega_d^2 U. \quad (2.11)$$

Θέτουμε  $V = \dot{U} + \varepsilon U$ , όπου για  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , επιλέγουμε

$$\varepsilon_0 = \min \left( \frac{\delta}{4}, \frac{E_1}{2\delta} \right). \quad (2.12)$$

Τότε, η Εξ. (2.11) γίνεται

$$\dot{V} - \varepsilon \dot{U} + \delta \dot{U} + AU + \omega_d^2 U + g(U) = 2\omega_d^2 U, \quad (2.13)$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της Εξ. (2.13) με  $V$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \dot{V}, V \rangle_{\ell^2} - \langle \varepsilon \dot{U}, V \rangle_{\ell^2} + \langle \delta \dot{U}, V \rangle_{\ell^2} + \langle AU, V \rangle_{\ell^2} + \langle \omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2} + \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} \\ = \langle 2\omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ημι-γραμμική μορφή (2.10) του τελεστή  $A$  καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 \right] + \varepsilon \|U\|_{\ell_1^2}^2 + (\delta - \varepsilon) \|V\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon(\delta - \varepsilon) \langle U, V \rangle_{\ell^2} \\ + \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} = \langle 2\omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Χρειαζόμαστε σε αυτό το σημείο κάποιες εκτιμήσεις πριν προχωρήσουμε. Η επιλογή του  $\varepsilon$  στην (2.12), μαζί με την ανισότητα  $\langle U, V \rangle_{\ell^2} \leq \frac{1}{\sqrt{E_1}} \|U\|_{\ell_1^2} \|V\|_{\ell^2}$  μας δίνει το αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon \|U\|_{\ell_1^2}^2 + (\delta - \varepsilon) \|V\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon (\delta - \varepsilon) \langle U, V \rangle_{\ell^2} \\
 & \geq \varepsilon \|U\|_{\ell_1^2}^2 + (\delta - \varepsilon) \|V\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon (\delta - \varepsilon)}{\sqrt{E_1}} \|U\|_{\ell_1^2} \|V\|_{\ell^2} \\
 & \geq \varepsilon \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \frac{3\delta}{4} \|V\|_{\ell^2}^2 - \frac{\delta \varepsilon}{4\sqrt{E_1}} \|U\|_{\ell_1^2} \|V\|_{\ell^2} \\
 & \geq \frac{\varepsilon}{2} \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|V\|_{\ell^2}^2. \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μη-γραμμικότητα για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} &= \langle g(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \varepsilon \langle g(U), U \rangle_{\ell^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{K+1} \beta \omega_d^2 U_n^3 \dot{U}_n + \varepsilon \sum_{n=0}^{K+1} \beta \omega_d^2 U_n^3 U_n \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta \omega_d^2}{4} \|U\|_{\ell^4}^4 \right) + \varepsilon \beta \omega_d^2 \|U\|_{\ell^4}^4 \\
 &= \frac{d}{dt} G(U) + 4\varepsilon G(U). \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Στην (2.16) έχουμε θέσει με  $G(U) = \frac{\beta \omega_d^2}{4} \|U\|_{\ell^4}^4$ . Από την άλλη μεριά για τον όρο  $2\omega_d^2 \langle U, V \rangle_{\ell^2}$ , παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
 2\omega_d^2 \langle U, V \rangle_{\ell^2} &= 2\omega_d^2 \langle U, \dot{U} \rangle_{\ell^2} + 2\varepsilon \omega_d^2 \langle U, U \rangle_{\ell^2} \\
 &= \frac{d}{dt} (\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2) + 2\varepsilon \omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, εισάγοντας τις σχέσεις (2.15)-(2.16)-(2.17) στην Εξ. (2.14) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2} \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|V\|_{\ell^2}^2 \\
 + 4\varepsilon G(U) - 2\varepsilon \omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Επειδή όμως ισχύει ότι  $2\varepsilon G(U) \geq 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2} \|U\|_{\ell_1^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|V\|_{\ell^2}^2 \\
 + \varepsilon (2G(U) - 2\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Έτσι, θεωρώντας ως  $\Psi = \|U\|_{\ell_1}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2$  και  $\frac{\mu}{2} = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ , η τελευταία ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{d}{dt}\Psi + \mu\Psi \leq 0. \quad (2.18)$$

Επιλύοντας την διαφορική ανισότητα (2.18) λαμβάνουμε την

$$\Psi(t) \leq \Psi(0)e^{-\mu t}.$$

Τώρα για  $t \rightarrow \infty$  παρατηρούμε ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) = 0$  και ότι

$$\Psi(t) \leq |\Psi(0)| := M, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Από τη θεώρηση της  $\Psi(t)$  η τελευταία γράφεται ως

$$\|U\|_{\ell_1}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq M.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η ποσότητα  $\Psi(t)$  είναι αορίστου προσήμου, καθώς περιλαμβάνει τον μη-θετικό όρο  $-2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2$ . Χρησιμοποιώντας ξανά την ισοδυναμία των νορμών  $\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \|U\|_{\ell_1}^2$  λαμβάνουμε τελικά την ανισότητα

$$\|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) \leq M + \omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2. \quad (2.19)$$

Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, σχέση (2.6), λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \omega_d^2(K+2)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\ell^4}^2 \quad (2.20)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Young στη μορφή  $ab \leq \frac{\xi a^2}{2} + \frac{b^2}{2\xi}$  για  $\xi = \frac{\beta}{\omega_d^2}$ , η ανισότητα (2.20) γίνεται

$$\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \frac{\beta\omega_d^2}{2}\|U\|_{\ell^4}^4 + \frac{\omega_d^2}{2\beta}(K+2).$$

Άρα τελικά η ανισότητα (2.19) μετατρέπεται στην

$$\|V\|_{\ell^2}^2 \leq M + \frac{\omega_d^2}{2\beta}(K+2).$$

Από τη τελευταία εξάγουμε ότι οι λύσεις ορίζονται καθολικά στο χρόνο.  $\square$

### 2.2.2 Απόδειξη της Σύγκλισης

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της σύγκλισης σε καταστάσεις ισορροπίας, αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για τις ενεργειακές ποσότητες που δίνονται από το πρόβλημα (2.1)-(2.4)-(2.5). Όταν η παράμετρος απόσβεσης  $\delta = 0$ , το σύστημα (DKG) (2.1) περιγράφει τις εξισώσεις κίνησης που προέρχονται από την Χαμιλτονιανή ενέργεια:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 \\ & - \frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 + \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Από την άλλη μεριά, στη περίπτωση όπου  $\delta > 0$ , η Χαμιλτονιανή ενέργεια διαχέεται σύμφωνα με συγκεκριμένη ενεργειακή σχέση, η οποία προκύπτει ως εξής: Πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (2.1) με  $\dot{U}_n$ , έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{K+1} \ddot{U}_n \dot{U}_n - k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \dot{U}_n + \delta \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n \dot{U}_n = \sum_{n=0}^{K+1} \omega_d^2 (U_n - \beta U_n^3) \dot{U}_n.$$

Ολοκληρώνοντας τη παραπάνω σχέση ως προς  $t$ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n) (\dot{U}_{n+1} - \dot{U}_n) + \delta \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 \\ = \omega_d^2 \sum_{n=0}^{K+1} U_n \dot{U}_n - \beta\omega_d^2 \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 \dot{U}_n. \end{aligned}$$

Συνεπώς η  $\mathcal{H}(t)$  ικανοποιεί την ενεργειακή σχέση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) = & \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 \right] \\ & - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 - \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \right] = -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$



Είναι βολικό για τους υπολογισμούς, να θεωρήσουμε από την Εξ. (2.22), το συναρτησιακό

$$F(U_n) = -\frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 + \frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 - \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4. \quad (2.23)$$

Ξαναγράφουμε την Εξ. (2.22) ως εξής:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} = \frac{d}{dt} F(U_n). \quad (2.24)$$

Εφόσον οι λύσεις του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5) υπάρχουν καθολικά στο χρόνο από το Θεώρημα 2.2.1, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την Εξ. (2.24) στο διάστημα  $[0, t]$ , για αυθαίρετο  $t \in [0, \infty)$ , λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2}^2 - \frac{1}{2} \|\dot{U}(0)\|_{\ell^2}^2 + \delta \int_0^t \langle \dot{U}(s), \dot{U}(s) \rangle ds \\ = F(U_n(t)) - F(U_{n,0}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Τα σημεία ισορροπίας του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5), έχουν τη μορφή  $\bar{\Phi} = (\Phi, \mathbf{0}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$ , όπου οι  $\Phi = (0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K, 0)$  ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (2.5). Επιπλέον, οι  $\Phi$  πρέπει να ικανοποιούν το στάσιμο πρόβλημα

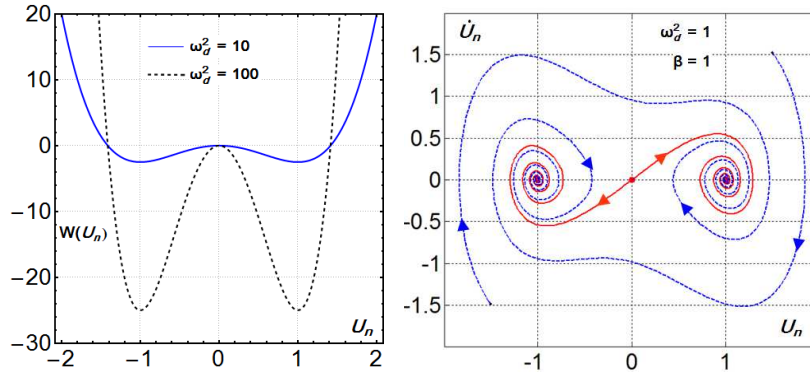
$$-k\Delta_d \Phi_n = \omega_d^2(\Phi_n - \beta\Phi_n^3), \quad (2.26)$$

$$\Phi_0 = \Phi_{K+1} = 0. \quad (2.27)$$

Σημειώνουμε ότι, στη περίπτωση των μη-συζευγμένων σωματιδίων που αντιστοιχεί στη περίπτωση του αντί-συνεχούς ορίου  $k = 0$ , οι καταστάσεις ισορροπίας αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού. Σε αυτή τη περίπτωση κάθε ταλαντωτής υπακούει στην εξίσωση Duffing με γραμμική απόσβεση,

$$\ddot{U}_n + \delta \dot{U}_n = \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3.$$

Το γνωστό πορτραίτο φάσεων για κάθε ταλαντωτή, απεικονίζεται στην δεξιά εικόνα του Σχήματος 2.1. Στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 2.1 απεικονίζεται η συνάρτηση δυναμικού, με τα τοπικά ακρότατα: το ασταθές μέγιστο στο  $U_{\max}^0 = 0$  που αντιστοιχεί στην ενέργεια ηρεμίας  $E_{\max} = W(0) = 0$



Σχήμα 2.1: Αριστερή εικόνα: Γράφημα του δυναμικού (2.2) για  $\omega_d^2 = 10$  (συνεχής μπλε καμπύλη) και  $\omega_d^2 = 1$  (διακεκομμένη μαύρη καμπύλη), όταν  $\beta = 1$ . Δεξιά εικόνα: Δυναμική στη περίπτωση του αντι-συνεχούς ορίου  $k = 0$ , όταν  $\omega_d^2 = 1, \beta = 1, \delta = 0.01$ : κάθε ταλαντωτής  $U_n$  υπακούει στην εξίσωση Duffing με γραμμική τριβή.

και δύο ευσταθή ελάχιστα στα σημεία  $U_{\min}^{\mp} = \mp \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ , που αντιστοιχούν στην  $E_{\min} = W(\mp \frac{1}{\sqrt{\beta}}) = \frac{\omega_d^2}{4\beta}$ . Συμβολίζουμε τις καταστάσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν σε αυτά τα ακρότατα με  $\Phi^* = \{U_{\min}^-, U_{\max}^0, U_{\min}^+\}$ . Τότε, στο όριο  $k = 0$  των μη-συζευγμένων ταλαντωτών, κάθε κατάσταση

$$\Phi = (0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K, 0) \quad \text{με} \quad \Phi_n \in \Phi^* \quad \text{και} \quad n = 1 \dots K,$$

αντιστοιχεί σε ένα σημείο ισορροπίας του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5). Είναι πολύ πιθανό κάποιες από αυτές τις καταστάσεις να συνεχίζονται και για  $k \neq 0$  υπό τη μορφή μονό-παραμετρικών οικογενειών σημείων ισορροπίας, με  $k$  ως παράμετρο, αλλά αυτό το πρόβλημα διακλάδωσης δεν περιλαμβάνεται σε αυτή την εργασία.

Η περίπτωση όμως που θα μελετηθεί στη συνέχεια είναι αυτή του γραμμικού ορίου  $\omega_d^2 = 0$ , όπου η τετριμμένη κατάσταση  $\Phi = (0, 0, \dots, 0, 0) \in \ell_{K+2}^2$ , αντιστοιχεί σε μία λύση του στάσιμου προβλήματος (2.26)-(2.27) και ως εκ τούτου είναι ένα σημείο ισορροπίας του (2.1)-(2.4)-(2.5) για κάθε τιμή του  $k$ .

Σύμφωνα με την Εξ. (2.22), η Χαμιλτονιανή ενέργεια

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) = -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \leq 0,$$

δηλαδή για κάθε  $(U, \dot{U}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$  η  $\mathcal{H}$  ορίζει μια γνήσια συνάρτηση Liapunov για το πρόβλημα (2.1)-(2.4)-(2.5). Έτσι από το Θεώρημα (1.1.17) ισχύει ότι,

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+(\omega(\mathcal{B})).$$

Όλα τα παραπάνω σημεία ισορροπίας περιέχονται στο  $\omega$ -οριακό σύνολο της ροής  $S(t) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \ell^2 \times \ell^2$ . Θυμόμαστε ότι αν το  $\mathcal{B} \subseteq \ell^2 \times \ell^2$  είναι ένα φραγμένο σύνολο τότε,

$$\omega(\mathcal{B}) = \{ \bar{\Phi}_* : \exists t_n \text{ τ.ω } t_n \rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \text{ και} \quad (2.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n) \bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}_*, \quad \forall \bar{\Phi}_0 \in \mathcal{B} \}.$$

Κατά τη σύγκλιση σε ισορροπία, θα πρέπει  $\dot{U}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Η ακόλουθη πρόταση, μας διασφαλίζει ότι η ακόλουθη σύγκλιση ισχύει για κάθε λύση του (2.1)-(2.4)-(2.5).

**Πρόταση 2.2.2.** . Έστω  $\bar{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$ , να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1)-(2.4)-(2.5), για κάθε αρχικές τιμές  $\bar{U}(0) = (U_{n,0}, U_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$ . Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} = 0. \quad (2.29)$$

*Απόδειξη.* Επειδή η μοναδική λύση  $\bar{U}(t)$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο

$$C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2),$$

υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2 > 0$ , τέτοιες ώστε

$$\|U\|_{\ell^2} \leq c_1, \text{ και } \|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq c_2, \quad (2.30)$$

αντίστοιχα. Πρώτα θα επαληθεύσουμε, ότι από τα παραπάνω ομοιόμορφα φράγματα συνεπάγεται επίσης ότι η  $\ddot{U} \in C([0, \infty), \ell^2)$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο χρόνο, δηλαδή,  $\|\ddot{U}\|_{\ell^2} \leq c$ , για κάποια σταθερά  $c > 0$ . Πράγματι, ξαναγράφοντας την Εξ. (2.1), ως

$$\ddot{U}_n = -\delta \dot{U}_n + k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3 \quad (2.31)$$

και εισάγοντας τις νόρμες στην Εξ. (2.31), παίρνουμε ότι

$$\|\ddot{U}\|_{\ell^2} = \| -\delta \dot{U} + k \Delta_d U + f(U) \|_{\ell^2}, \quad (2.32)$$

όπου

$$f(U) = \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3. \quad (2.33)$$

Τώρα, από την Εξ. (2.32) και το γεγονός ότι ο  $-\Delta_d : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$  είναι φραγμένος τελεστής και ισχύει ότι

$$\|-\Delta_d X\|_{\ell^2}^2 \leq 4\|X\|_{\ell^2}^2, \quad \text{για όλα τα } X \in \ell_{K+2}^2,$$

προκύπτει η ανισότητα

$$\begin{aligned} \|\ddot{U}\|_{\ell^2} &= \|-\delta\dot{U} + k\Delta_d U + f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta\|\dot{U}\|_{\ell^2} + k\|\Delta_d U\|_{\ell^2} + \|f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta\|\dot{U}\|_{\ell^2} + 2k\|U\|_{\ell^2} + \|f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta c_2 + 2k c_1 + \|f(U)\|_{\ell^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας την  $\ell_{K+2}^2$ -νόρμα για το δυναμικό (2.33), παίρνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} \|f(U)\|_{\ell^2}^2 &= \omega_d^4 \sum_{n=0}^{K+1} (U_n - \beta U_n^3)^2 = \omega_d^4 \|U - \beta U^3\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \omega_d^4 (\|U\|_{\ell^2}^2 + \beta \|U\|_{\ell^2}^3)^2 \\ &\leq \omega_d^4 (c_1^2 + \beta c_1^3)^2 := c_3. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Σημειώνουμε ότι για να λάβουμε την εκτίμηση (2.35), χρησιμοποιήσαμε την (2.6) για  $q = 6$  και  $p = 2$  η οποία μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την νόρμα του κυβικού όρου στην (2.35) από την ανισότητα

$$\left( \sum_{n=0}^{K+1} U_n^6 \right)^{\frac{1}{6}} \leq \left( \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left( \sum_{n=0}^{K+1} U_n^6 \right) \leq \left( \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 \right)^3.$$

Εισάγοντας την (2.35) στην (2.34), παίρνουμε ότι  $\|\ddot{U}\|_{\ell^2} \leq c := \delta c_2 + 2k c_1 + c_3$ . Αυτό το ομοιόμορφο φράγμα της νόρμας  $\|\ddot{U}\|_{\ell^2}$ , συνεπάγεται ότι  $\dot{U}(t)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $[0, \infty)$  ως εξής: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης

τιμής για την συνάρτηση  $V(t) = \|\dot{U}(t)\|^2$ , έχουμε ότι για τυχαία  $t_1 \geq 0$ ,  $t_2 > 0 \in \mathbb{R}^+$  υπάρχει  $t^* \in (t_1, t_2)$  τέτοιο ώστε

$$|V(t_1) - V(t_2)| \leq |\dot{V}(t^*)| |t_1 - t_2|.$$

Άλλωστε, για την παράγωγο ως προς το χρόνο της  $V(t)$  που δίνεται από την  $\dot{V}(t) = \frac{d}{dt} \langle \dot{U}(t), \dot{U}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{U}(t), \dot{U}(t) \rangle$ , κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\dot{V}(t)| &= 2 \left| \langle \ddot{U}(t^*), \dot{U}(t^*) \rangle \right| \\ &\leq 2 \|\ddot{U}(t^*)\|_{\ell^2} \|\dot{U}(t^*)\|_{\ell^2} \leq m := 2c c_2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Εφόσον το διάστημα  $(t_1, t_2)$  είναι τυχαίο, από την (2.36) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση  $\dot{V}(t)$  είναι φραγμένη και ότι

$$|V(t_1) - V(t_2)| = \left| \|\dot{U}(t_1)\|_{\ell^2}^2 - \|\dot{U}(t_2)\|_{\ell^2}^2 \right| \leq m |t_1 - t_2|.$$

Συμπεραίνουμε ότι, η  $V(t)$  είναι καθολικά Lipschitz συνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη στον  $\mathbb{R}^+$ , συνεπώς τοπικά ολοκληρώσιμη στο  $[0, \infty)$ . Επιπλέον, μπορούμε να λάβουμε από την (2.25), ότι οι  $U$  και  $\dot{U}$  είναι φραγμένες στον  $\ell_{K+2}^2$  (2.30). Έτσι μαζί με το φράγμα από την (2.35), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t \langle \dot{U}(s), \dot{U}(s) \rangle ds &\leq \frac{1}{2} \left| \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2}^2 - \|\dot{U}(0)\|_{\ell^2}^2 \right| \\ &+ |F(U_n(t)) - F(U_{n,0})| < C, \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου  $C$  είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του  $t$ . Παίρνοντας το όριο καθώς  $t \rightarrow \infty$ , στην Εξ. (2.37) συνεπάγεται η ολοκληρωσιμότητα της  $V(t)$  στο  $[0, \infty)$ , και συνεπώς τον ισχυρισμό (2.29).  $\square$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0,$$

το οποίο θα ολοκληρώσει στην Πρόταση (2.2.8), την απόδειξη της σύγκλισης των λύσεων της (2.1)-(2.4)-(2.5) στα σημεία ισορροπίας. Θα εκμεταλλευτούμε

το αποτέλεσμα (2.29), θεωρώντας τη διαφορά  $U - \Phi$  για μεγάλους χρόνους. Η διαφορά αυτή, ικανοποιεί την εξίσωση

$$U(t) - \Phi = U(t_N) - \Phi + \int_{t_N}^t \frac{d}{ds}(U(s) - \Phi) ds.$$

για κάποιο  $t_N \in [0, \infty)$ . Η  $\ell^2$ - νόρμα της διαφοράς  $U - \Phi$ , ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} \leq \|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} + \int_{t_N}^t \left\| \frac{d}{ds}(U(s) - \Phi) \right\|_{\ell^2} ds. \quad (2.38)$$

Η στρατηγική για την απόδειξη είναι η εξής: απαιτώντας  $t \rightarrow \infty$  και οι δύο όροι στο δεξί μέρος της σχέσης (2.38) γίνονται αυθαίρετα μικροί εξασφαλίζοντας τη σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας. Για τον όρο  $\|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2}$ , ο ορισμός του  $\omega$ -οριακού συνόλου μας επιτρέπει να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο  $t_N$  έτσι ώστε το  $U(t_N)$  να είναι αυθαίρετα κοντά στο  $\Phi$ . Να ξεκαθαρίσουμε ότι η ύπαρξη τέτοιων  $U(t_N)$ -τροχιακών σημείων, δεν εξασφαλίζει από μόνη της, τη σύγκλιση ολόκληρης της τροχιάς σε ένα σημείο ισορροπίας  $\Phi$ , εφόσον η τροχιά μπορεί να ξεφεύγει από τη γειτονιά του  $\Phi$ , για  $t > t_N$ . Ωστόσο, το τελευταίο σενάριο θα εξαιρεθεί αποδεικνύοντας ότι ο όρος  $\int_{t_N}^t \left\| \frac{d}{ds}(U(s) - \Phi) \right\|_{\ell^2} ds$  γίνεται αυθαίρετα μικρός για αρκετά μεγάλους χρόνους. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια κατάλληλων ενεργειακών εκτιμήσεων. Τέτοιες εκτιμήσεις θα περιλαμβάνουν τη Χαμιλτονιανή του συντηρητικού συστήματος, ( $\delta = 0$ ) (που όμως είναι συνάρτηση Lyapunov για το πλήρες σύστημα). Θα ξαναγράψουμε τη Χαμιλτονιανή (2.21) ως εξής

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - F(U),$$

όπου η  $F(U)$ , ορίζει το συναρτησιακό (2.23). Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι για μία τροχιά  $(U(t), \dot{U}(t))$  που συγκλίνει σε μία κατάσταση ισορροπίας  $(\Phi, \mathbf{0})$ , η Χαμιλτονιανή της ενέργεια (που είναι μια συνεχής συνάρτηση), θα πρέπει να συγκλίνει ως  $\mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) \rightarrow \mathcal{H}(\Phi, \mathbf{0}) = -F(\Phi)$  για  $t \rightarrow \infty$ . Συνεπώς, αρχικά θα θεωρήσουμε τη διαφορά των Χαμιλτονιανών ενεργειών

$$\mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) - \mathcal{H}(\Phi, \mathbf{0}) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)). \quad (2.39)$$

Από το γεγονός ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} = 0$  και από τη συνέχεια του συναρτησιακού  $F$ , θα πρέπει να ισχύει ότι  $F(U) \rightarrow F(\Phi)$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Έτσι

θα διαχειριστούμε το δεύτερο όρο στο δεξί μέρος της Εξ. (2.38), μέσω της διαφοράς στην Εξ. (2.39). Ωστόσο, επειδή το συναρτησιακό  $F$  είναι τοπικά Lipschitz, μας παρέχει αποκλειστικά μια γραμμική διαφορική ανισότητα για τη διαφορά  $\|U(t) - \Phi\|_{\ell^2}$  που δεν είναι αρκετή για τη σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας. Σε αυτό το σημείο αναδύκνεται ο ρόλος της Ανισότητας Łojasiewicz του Θεωρήματος (1.7.3) (βλ. [26, 27]), η οποία προτείνει την κατάλληλη διαταραχή της διαφοράς των Χαμιλτονιανών ενεργειών στη σχέση (2.39). Η ανισότητα περιλαμβάνει το συναρτησιακό  $F$  και τον μη-γραμμικό τελεστή

$$J(U_n) := k(\Delta_d U)_n + \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3, \quad (2.40)$$

με τον σύντομο συμβολισμό  $J(U)$ .

**Η Διακριτή Μορφή της Ανισότητας Łojasiewicz:** Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε εν συντομία κάποιες πληροφορίες σχετικά με τη διακριτή εκδοχή της ανισότητας Łojasiewicz:

**Λήμμα 2.2.3.** Υπάρχει  $\tilde{\epsilon} > 0$  και  $0 < \theta < 1/2$ , τέτοια ώστε

$$\|J(U)\|_{\ell^2} \geq \nu_0 |F(U) - F(\Phi)|^{1-\theta}, \quad (2.41)$$

για κάθε  $U \in \ell_{K+2}^2$  και κάποια σταθερά  $\nu_0 > 0$  με  $\|U - \Phi\|_{\ell^2} < \tilde{\epsilon}$ .

Στη πραγματικότητα είναι ένα άμεσο πόρισμα του ακόλουθου αποτελέσματος [27, Πόρισμα 5.5, Σελ. 2839], για τις γενικευμένες αναλυτικές συναρτήσεις σε χώρους Hilbert: Θεωρούμε δύο πραγματικούς χώρους Hilbert με την εμφύτευση  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X}$  να είναι πυκνή και συνεχής. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{V}^*$  τον τοπολογικά δυϊκό χώρο του χώρου  $\mathcal{V}$ . Θεωρούμε την εξελικτική τριάδα  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X} \equiv \mathcal{X}^* \hookrightarrow \mathcal{V}^*$ , με συνεχείς και πυκνές εμφυτεύσεις.

**Παρατήρηση 2.2.4.** Με τον όρο εξελικτική τριάδα (γνωστή και ως Gelfand triple) εννοούμε μια τριάδα χώρων  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}^*$  τέτοιους ώστε

- (α) ο  $\mathcal{X}$  είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert ορισμένος με τον δυϊκό του,
- (β) ο  $\mathcal{V}$  είναι ένας διαχωρίσιμος ανακλαστικός χώρος Banach,
- (γ) οι εμφυτεύσεις είναι συνεχείς και πυκνές.

**Θεώρημα 2.2.5.** Έστω  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  να είναι μια αναλυτική συνάρτηση όπου  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  να είναι μια ανοιχτή γειτονιά του  $\phi$  και υποθέτουμε ότι η Fréchet παράγωγος του  $F$  στο  $\phi$ ,  $DF(\phi) = 0$ . Συμβολίζουμε με  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , τον γραμμικό τελεστή που ορίζεται από τη γραμμικοποίηση του  $DF : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , στο  $\phi$ . Υποθέτουμε τις ακόλουθες συνθήκες: (α)  $\ker \mathcal{L}$  είναι πεπερασμένης διάστασης και (β) για κάποιο γραμμικό συμπαγή τελεστή  $\mathcal{K} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , ο τελεστής  $\mathcal{L} + \mathcal{K}$  είναι αντιστρέψιμος.

Τότε, υπάρχουν  $\theta \in (0, 1/2)$ , μια γειτονιά  $\mathcal{Q}$  του  $\phi$  και  $\nu_0 > 0$ , για τα οποία

$$\forall u \in \mathcal{Q}, \quad \|DF(u)\|_{\mathcal{V}^*} \geq \nu_0 |F(u) - F(\phi)|^{1-\theta}. \quad (2.42)$$

Εξαιτίας της πεπερασμένης διάστασης του φασικού χώρου  $\mathcal{V} = \ell_{K+2}^2 \equiv \mathbb{R}^{K+2} \equiv \mathcal{X} \equiv \mathcal{V}^*$ , το Λήμμα 2.2.3, προκύπτει από την άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.5, για τα συναρτησιακά  $F$  που ορίσαμε στην (2.23) και  $J$  που ορίσαμε στη (2.40). Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε με την βοήθεια του ορισμού (1.2.1), τη Fréchet παράγωγο  $J : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  της  $F$ , θεωρώντας τρία συναρτησιακά για κάθε όρο της ως εξής:  $F(U) = F_1(U) + F_2(U) + F_3(U)$  όπου,

$$F_1(U) = -\frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2,$$

$$F_2(U) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2,$$

$$F_3(U) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4$$

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη μορφή,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} F [(U_{n+1} - U_n) + \theta a(V_{n+1} - V_n)] a &= F [(U_{n+1} - U_n) + a(V_{n+1} - V_n)] \\ &- F [(U_{n+1} - U_n)]. \end{aligned}$$



Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το διαφορικό για κάθε όρο της  $F$ . Πρώτα ασχολούμαστε με τον όρο  $F_1$

$$\begin{aligned} \frac{F_1(U + aV) - F_1(U)}{a} &= -\frac{k}{2a} \frac{d}{d\theta} \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\theta V_{n+1}) - (U_n + a\theta V_n)]^2 \\ &= -\frac{k}{a} \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\theta V_{n+1})aV_{n+1} - (U_n + a\theta V_n)aV_n] \\ &= -k \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\theta V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\theta V_n)V_n]. \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{|F_1(U + aV) - F_1(U)|}{|a|} &= \left| k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} + a\theta V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\theta V_n)V_n \right| \\ &\leq k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_{n+1} + a\theta V_{n+1})V_{n+1}| + k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\theta V_n)V_n| \\ &\leq k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_{n+1} + a\theta V_{n+1})| |V_{n+1}| + k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\theta V_n)| |V_n|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ότι τα αθροίσματα είναι φραγμένα  $\forall U_n, V_n \in \ell^2$  καθώς ο  $\mathbb{R}^{K+2}$  είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης. Για να υπολογίσουμε τη παράγωγο

του  $F_1$ : θεωρούμε το όριο  $a \rightarrow 0$  και έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \lim_{a \rightarrow 0} k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} + a\theta V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\theta V_n)V_n \\
 &= k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1}V_{n+1} - U_nV_n) \\
 &= k \left[ \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)V_n + \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)U_{n+1} \right] \\
 &= k \left[ \sum_{n=0}^{K+1} -(V_{n+1} - V_n)U_n + \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)U_{n+1} \right] \\
 &= k \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)(U_{n+1} - U_n).
 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι,

$$\langle F'_1(U), V \rangle = \langle -k\Delta_d U, V \rangle.$$

Για τον δεύτερο όρο παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{F_2(U + aV) - F_2(U)}{a} &= \frac{1}{2a} \frac{d}{d\theta} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^2 \\
 &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)aV_n \\
 &= \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)V_n.
 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{|F_2(U + aV) - F_2(U)|}{|a|} &= \left| \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n) V_n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\theta V_n) V_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |U_n + a\theta V_n| |V_n|, \end{aligned}$$

ο οποίος προκύπτει φραγμένος, όπως πριν. Θεωρώντας ξανά το όριο  $a \rightarrow 0$  καταλήγουμε στο ότι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n) V_n = \sum_{n=0}^{K+1} U_n V_n,$$

και άρα

$$\langle F'_2(U), V \rangle = \sum_{n=0}^{K+1} U_n V_n.$$

Τώρα, για τον τελευταίο όρο της  $F$

$$\begin{aligned} \frac{F_3(U + aV) - F_3(U)}{a} &= -\frac{1}{4a} \frac{d}{d\theta} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^4 \\ &= -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^3 a V_n \\ &= -\sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^3 V_n. \end{aligned}$$

Θεωρώντας και πάλι την απόλυτη τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|F_3(U + aV) - F_3(U)|}{|a|} &= \left| \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^3 V_n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\theta V_n)^3 V_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\theta V_n)^3| |V_n|, \end{aligned}$$

όπου και αυτό το άθροισμα είναι φραγμένο για τον ίδιο λόγο με τα προηγούμενα. Καθώς  $a \rightarrow 0$  έχουμε πάλι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\theta V_n)^3 V_n = \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 V_n,$$

έτσι

$$\langle F'_3(U), V \rangle = \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 V_n.$$

Οπότε από τους παραπάνω υπολογισμούς ότι  $J(U) = DF(U)$ . Συνεπώς κάθε λύση  $\Phi$  του στάσιμου προβλήματος (2.26)-(2.27) ικανοποιεί τη σχέση  $J(\Phi) = \mathbf{0}$ .

Στη συνέχεια, η γραμμικοποίηση του  $J$  στο σημείο ισορροπίας  $\Phi$ , είναι ο γραμμικός τελεστής  $\mathcal{L} : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$ ,

$$\mathcal{L}(U_n) = -k\Delta_d U_n - f'(\Phi_n)U_n, \quad \forall U \in \ell_{K+2}^2,$$

όπου  $f$  δίνεται από τη σχέση (2.33). Εξαιτίας της ισοδυναμίας των νορμών από τη σχέση (2.6), παρατηρούμε ότι ο τελεστής  $\mathcal{L}$  είναι καλά ορισμένος για κάθε σημείο ισορροπίας  $\Phi$ . Ο πυρήνας του,  $\ker \mathcal{L}$  είναι πεπερασμένης διάστασης, ως εκ τούτου η συνθήκη (α) του Θεωρήματος 2.2.5 ικανοποιείται. Στη συνέχεια για να ελέγξουμε τη συνθήκη (β), θεωρούμε τον τελεστή  $\mathcal{K} = \lambda I$ , για κατάλληλο  $\lambda > 0$  και  $I : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$  την ταυτοτική απεικόνιση. Τώρα επειδή ο χώρος  $\ell_{K+2}^2$  είναι πεπερασμένης διάστασης, ο τελεστής  $\mathcal{K}$  είναι συμπαγής. Επιπλέον,

υπάρχει  $\lambda > 0$ , τέτοιο ώστε ο τελεστής  $\Lambda = \mathcal{L} + \mathcal{K}$  είναι συμπίεστικός, και συνεπώς αντιστρέψιμος. Έτσι παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (\Lambda(U), U)_{\ell^2} &= k(-\Delta_d U, U)_{\ell^2} + (\lambda - \omega_d^2) \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2 + 3\omega_d^2 \beta \sum_{n=0}^{K+1} |\Phi_n|^2 |U_n|^2 \\ &\geq E_1 \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2 + (\lambda - \omega_d^2) \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2. \end{aligned}$$

Τότε, επιλέγοντας  $\lambda > \omega_d^2$ , η συμπίεστικότητα  $(\Lambda(U), U)_{\ell^2} > \Omega \|U\|_{\ell^2}^2$ , ικανοποιείται για  $\Omega = E_1 + (\lambda - \omega_d^2) > 0$ . Εφόσον όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.2.5 ικανοποιούνται, εφαρμόζοντας την ανισότητα (2.42) για τα προαναφερθέντα συναρτησιακά, προκύπτει η διακριτή ανισότητα (2.41) του Λήμματος 2.2.3.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημά μας και έχοντας στο μυαλό μας το Λήμμα 2.2.3, θα θεωρήσουμε μια διαταραχή της διαφοράς των Χαμιλτονιανών ενεργειών (2.39):

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) - \varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.43)$$

Θα διευκρινίσουμε σε αυτό το σημείο το ρόλο του όρου  $\varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$  της (2.43). Η νόρμα  $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$  γίνεται αυθαίρετα μικρή για μεγάλους χρόνους, ενώ ο  $J(U)$  είναι ομοιόμορφα φραγμένος στον  $\ell^2$ . Επιπλέον παρατηρούμε από την ανισότητα (2.41), ότι  $\|J(U)\|_{\ell^2}$  είναι φραγμένη από κάτω, από την  $(1 - \theta)$ -δύναμη της διαφοράς  $|F(U) - F(\Phi)|$ . Όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, αυτό το κατώτερο φράγμα μας επιτρέπει να λάβουμε μια εκτίμηση για την  $E(t)$  με όρους της φραγμένης ποσότητας  $\|J(U)\|_{\ell^2}$ , καθώς από προηγούμενο αποτέλεσμα ο όρος  $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$  μηδενίζεται ασυμπτωτικά. Με αυτό το τρόπο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα που δημιουργεί ο όρος της διαφοράς  $|F(U) - F(\Phi)|$ .

Η παραπάνω διαδικασία θα ολοκληρωθεί σε διάφορα βήματα, υπό τη μορφή Λημμάτων.

**Λήμμα 2.2.6.** *Το διαφορικό  $\dot{E}(t)$  του συναρτησιακού (2.43) ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\dot{E}(t) \leq -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\rho^2}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}, \quad (2.44)$$

για κάθε λύση του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5).

Απόδειξη. Ξεκινάμε παραγωγίζοντας την Εξ. (2.43), ως προς το χρόνο. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2.22) και (2.25), βλέπουμε ότι η  $\dot{E}(t)$  ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) \right] - \varepsilon \frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &= -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon \frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Θα δουλέψουμε με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της (2.45), ο οποίος είναι

$$\frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} = \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), \ddot{U} \rangle_{\ell^2}.\quad (2.46)$$

Αντικαθιστώντας την  $\ddot{U}$  από την εξίσωση  $\ddot{U} = -\delta\dot{U} + J(U)$  στην (2.46) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), -\delta\dot{U} + J(U) \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), J(U) \rangle_{\ell^2} - \delta \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 - \delta \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Εισάγοντας την (2.47) στην (2.45), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &\quad - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Θα συνεχίσουμε εκτιμώντας το τελευταίο όρο του δεξιού μέρους της (2.48) εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz. Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνουμε την εκτίμηση

$$\left| \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \right| \leq \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}.$$

Με τη παραπάνω εκτίμηση, η Εξ. (2.48) μετατρέπεται στην ανισότητα

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &\leq -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &\quad - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Παρόμοια, εκτιμούμε την ποσότητα  $\varepsilon \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$  που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της (2.49) ως εξής:

$$\varepsilon \left| \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \right| \leq \varepsilon \| \dot{J}(U) \|_{\ell^2} \| \dot{U} \|_{\ell^2}. \quad (2.50)$$

Επειδή η  $\| \dot{U} \|_{\ell^2}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη, για να εκτιμήσουμε περαιτέρω την ποσότητα  $\varepsilon \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$ , θα χρειαστούμε την εκτίμηση της  $\| \dot{J}(U) \|_{\ell^2}$ . Πρώτα, από τον ορισμό του συναρτησιακού  $J(U)$  στην (2.40), η παράγωγος του ως προς το χρόνο είναι

$$\dot{J}(U_n) = k \Delta_d \dot{U}_n + \omega_d^2 \dot{U}_n - 3\beta \omega_d^2 U_n^2 \dot{U}_n. \quad (2.51)$$

Σημειώνουμε ότι εφαρμόζοντας την ανισότητα (2.7) για  $p = \infty$  και  $q = 2$ ,

$$\begin{aligned} \| U^2 \dot{U} \|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \dot{U}_n^2 \leq \| U \|_{\ell^\infty}^4 \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 \\ &\leq \| U \|_{\ell^2}^4 \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 = \| U \|_{\ell^2}^4 \| \dot{U} \|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Τότε, παρατηρούμε ότι η (2.51) μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής

$$\begin{aligned} \| \dot{J}(U) \|_{\ell^2} &\leq k \| \Delta_d \dot{U} \|_{\ell^2} + \omega_d^2 \| \dot{U} \|_{\ell^2} + 3\beta \omega_d^2 \| U^2 \dot{U} \|_{\ell^2} \\ &\leq 2k \| \dot{U} \|_{\ell^2} + \omega_d^2 \| \dot{U} \|_{\ell^2} + 3\beta \omega_d^2 \| U \|_{\ell^2}^2 \| \dot{U} \|_{\ell^2} \\ &\leq c_4 \| \dot{U} \|_{\ell^2}, \quad c_4 = 2k + \omega_d^2 (3\beta c_1^2 + 1). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.52) με  $\varepsilon$ , έχουμε ότι

$$\varepsilon \| \dot{J}(U) \|_{\ell^2} \leq \frac{\rho^2}{2} \| \dot{U} \|_{\ell^2}, \quad \frac{\rho^2}{2} := \varepsilon c_4. \quad (2.53)$$

Εισάγοντας την (2.53) στην (2.50) καταλήγουμε στην εκτίμηση για τον όρο  $\varepsilon | \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} |$ ,

$$\varepsilon | \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} | \leq \frac{\rho^2}{2} \| \dot{U} \|_{\ell^2}^2. \quad (2.54)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (2.54) στην (2.49), συμπεραίνουμε ότι

$$\dot{E}(t) \leq -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \frac{\rho^2}{2} \| \dot{U} \|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \| J(U) \|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \| J(U) \|_{\ell^2} \| \dot{U} \|_{\ell^2},$$

που είναι ο ισχυρισμός της (2.44).  $\square$

Το Λήμμα (2.2.6) θα χρησιμοποιηθεί ως βοηθητικό εργαλείο για την απόδειξη της ανισότητας στην  $\dot{E}(t)$ , η οποία θα έχει ρόλο κλειδί στην απόδειξη της σύγκλισης  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \bar{\Phi}\|_{\ell^2} = 0$ . Αυτή η ανισότητα δίνεται στο ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 2.2.7.** Έστω  $\bar{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$ , η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1)-(2.4)-(2.5), για κάθε αρχικές συνθήκες  $\bar{U}(0) = (U_{n,0}, U_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$ . Τότε, αυτή η λύση ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα

$$-\dot{E}(t) \geq \frac{\varepsilon}{4} \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.55)$$

*Απόδειξη.* Η ανισότητα (2.55) μπορεί να προκύψει από μια επιπλέον εκτίμηση της ανισότητας (2.44). Πράγματι, ξεκινώντας την διαδικασία, κρατώντας το τελευταίο όρο της (2.44) και εφαρμόζοντας την ανισότητα Young, έχουμε ότι

$$\varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta^2 \varepsilon}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2.$$

Τότε, η ανισότητα (2.44) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\leq -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\rho^2}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta^2 \varepsilon}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \\ &= \left( \frac{-2\delta + \rho^2 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \\ &= \left( \frac{-2\delta + 2\varepsilon c_4 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

από τον ορισμό της σταθεράς  $\rho^2 = 2\varepsilon c_4$  στην (2.53). Επειδή θέλουμε ο συντελεστής της  $\|\dot{U}\|_{\ell^2}^2$  στο δεξί μέρος της (2.56) να είναι αρνητικός, απαιτούμε το  $\varepsilon$  να ικανοποιεί τη σχέση,

$$0 < \varepsilon < \frac{2\delta}{\delta^2 + 2c_4}. \quad (2.57)$$

Με αυτό το τρόπο, προκύπτει ότι

$$\left( \frac{-2\delta + 2\varepsilon c_4 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) := -\varepsilon_1 < 0. \quad (2.58)$$



Τότε, η ανισότητα (2.56) γίνεται

$$\dot{E}(t) \leq -\varepsilon_1 \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$-\dot{E}(t) \geq \varepsilon_1 \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 > 0. \quad (2.59)$$

Στην (2.59), απαιτούμε επιπλέον το  $\varepsilon > 0$ , και να ικανοποιείται ο περιορισμός  $\varepsilon_1 > \varepsilon/2$ . Συνδυάζοντας τις προηγούμενες συνθήκες με την (2.58) καταλήγουμε στην

$$0 < \varepsilon < \frac{2\delta}{\delta^2 + 2c_4 + 1}. \quad (2.60)$$

Παρατηρούμε ότι αν η (2.60) ισχύει τότε, ικανοποιείται η (2.57). Με τον περιορισμό της σχέσης (2.60), από την (2.59) συνεπάγεται ο ισχυρισμός (2.55), δηλαδή ισχύει ότι

$$-\dot{E}(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \right) \geq \frac{\varepsilon}{4} \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2.$$

Αναφέρουμε επίσης ότι χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$\left( \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \right) \geq \frac{1}{2} \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2.$$

□

Μετά από τις παραπάνω προετοιμασίες, συνεχίζουμε με την απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

**Πρόταση 2.2.8.** Έστω  $\bar{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$ , να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών (2.1)-(2.4)-(2.5), για κάθε αρχικές συνθήκες  $\bar{U}(0) = (U_{n,0}, U_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$ . Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0, \quad (2.61)$$

όπου  $\Phi$  είναι λύση της Εξ. (2.26).

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη της (2.61) χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι  $E(t) \geq 0$ , για όλα τα  $t \geq 0$ . Θα θεωρήσουμε μόνο τη περίπτωση όπου  $E(t) > 0$  εφόσον η περίπτωση  $E(t) = 0$  είναι προφανής. Όπως θα δούμε παρακάτω, το Λήμμα 2.2.3 μας υποδεικνύει να ασχοληθούμε με τη ποσότητα  $[E(t)]^{1-\theta}$ . Αν θυμηθούμε τον ορισμό της  $E(t)$  στην Εξ. (2.43), παρατηρούμε ότι ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned} [E(t)]^{1-\theta} &= \left[ \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) - \varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle \right]^{1-\theta} \\ &\leq \left[ \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + |F(U) - F(\Phi)| + \varepsilon \left| \langle J(U), \dot{U} \rangle \right| \right]^{1-\theta}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα  $(a + b)^r \leq K_r(a^r + b^r)$ , που ισχύει για κάποιο  $K_r > 0$  και για κάθε  $a, b, r > 0$  όταν  $r = 1 - \theta$ . Την ανισότητα θα την εφαρμόσουμε στο δεξί μέρος της (2.62). Με αυτό το τρόπο έχουμε ότι

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq K_\theta \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\theta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\theta)} + |\langle J(U), \dot{U} \rangle|^{1-\theta} \right). \quad (2.63)$$

Κάνοντας μια εκτίμηση για τον όρο  $|\langle J(U), \dot{U} \rangle|^{1-\theta}$  της (2.63) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz, οδηγούμαστε στην σχέση

$$\begin{aligned} [E(t)]^{1-\theta} &\leq K_\theta \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\theta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\theta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ο όρος  $\|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\theta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\theta}$  στην (2.64), μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση της ανισότητας Young στη μορφή  $ab \leq a^p/p + b^q/q$  με  $1/p + 1/q = 1$ , η οποία ισχύει για όλα τα  $a, b > 0$ , ως εξής: θέτοντας  $p = 1/(1 - \theta) > 1$  και  $q = 1/\theta$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\theta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\theta} &\leq (1 - \theta) \|J(U)\|_{\ell^2} + \theta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)} \\ &\leq \|J(U)\|_{\ell^2} + \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)}. \end{aligned}$$

Τελικά, εισάγοντας την παραπάνω εκτίμηση στην (2.64), έχουμε ότι η  $[E(t)]^{1-\theta}$

ικανοποιεί την σχέση

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq K_\theta \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\theta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\theta)} + \|J(U)\|_{\ell^2} + \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)} \right).$$

Τώρα, από τον ορισμό του  $\omega$ -οριακού συνόλου (2.28), ο οποίος περιέχει όλα τα σημεία ισορροπίας, υπάρχει μια ακολουθία  $t_n \rightarrow \infty$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  τέτοια ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(t_n) - \Phi\|_{\ell^2} = 0$ . Με άλλα λόγια υπάρχει  $N \in \mathbb{N}^*$ , τέτοιο ώστε,

$$\|U(t_n) - \Phi\|_{\ell^2} < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}, \quad \forall n \geq N. \quad (2.65)$$

για οσοδήποτε μικρό  $\tilde{\epsilon} > 0$ . Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας του Λήμματος 2.2.7, η  $E(t)$  είναι φθίνουσα. Επιπλέον επειδή η  $E(t) > 0$ , έχουμε ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$ . Το τελευταίο, μαζί με το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.2.2, μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μεταξύ των ακολουθιών  $t_n \rightarrow \infty$ , την ίδια ακολουθία  $t_n$  και το ίδιο  $\tilde{\epsilon}$  με τα προηγούμενα. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\|\dot{U}(t_n)\|_{\ell^2} \leq 1 \quad \text{και} \quad \frac{4\tilde{K}_\theta}{\theta\epsilon} [E(t_n)]^\theta < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}, \quad \forall n \geq N. \quad (2.66)$$

Από την (2.65), μπορούμε να ορίσουμε με

$$\bar{t} := \sup \{t_n \geq t_N \mid \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} < \tilde{\epsilon}, \quad t \in [t_N, t_n]\}. \quad (2.67)$$

Ως εκ τούτου, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2.3 χρησιμοποιώντας την (2.67), συμπεραίνουμε ότι

$$\|J(U(t))\|_{\ell^2} \geq \nu_0 |F(U(t)) - F(\Phi)|^{1-\theta}, \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}]. \quad (2.68)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\theta)} \leq \|\dot{U}\|_{\ell^2} \quad \text{και} \quad \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)} \leq \|\dot{U}\|_{\ell^2}, \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}]. \quad (2.69)$$

Συμπεραίνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την (2.68) και την (2.69), η ανισότητα (2.64) μετατρέπεται στην

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq \tilde{K}_\theta \left( \|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right), \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}],$$

όπου  $\tilde{K}_\theta = \max\{\nu_0, 2\}K_\theta$ . Αυτό συνεπάγεται ότι

$$[E(t)]^{\theta-1} = \frac{1}{[E(t)]^{1-\theta}} \geq \frac{1}{\tilde{K}_\theta} \frac{1}{\left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}\right)}, \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}]. \quad (2.70)$$

Παραγωγίζοντας τη ποσότητα  $[E(t)]^\theta$  ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας την (2.70), παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ανισότητα

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}[E(t)]^\theta &= -\theta\dot{E}(t)[E(t)]^{\theta-1} \\ &\geq \frac{\theta\varepsilon}{4} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}\right)^2 [E(t)]^{\theta-1} \\ &\geq \frac{\theta\varepsilon}{4} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}\right)^2 \times \\ &\quad \times \frac{1}{\tilde{K}_\theta \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}\right)}, \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}]. \end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην διαφορική ανισότητα για την  $[E(t)]^\theta$ :

$$-\frac{d}{dt}[E(t)]^\theta \geq \frac{\theta\varepsilon}{4\tilde{K}_\theta} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}\right), \quad \forall t \in [t_N, \bar{t}]. \quad (2.71)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.71) ως προς το χρόνο  $t \in (t_N, \bar{t})$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [E(t_N)]^\theta &\geq \frac{\theta\varepsilon}{4\tilde{K}_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} dt \\ &\quad + \frac{\theta\varepsilon}{4\tilde{K}_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|J(U(t))\|_{\ell^2} dt + [E(\bar{t})]^\theta. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Επειδή οι δύο τελευταίοι ολοκληρωτικοί όροι της (2.72) είναι θετικοί, προκύπτει η ανισότητα

$$\int_{t_N}^{\bar{t}} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} dt \leq \frac{4\tilde{K}_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_N)]^\theta. \quad (2.73)$$

Γνωρίζουμε από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ότι

$$U(\bar{t}) - \Phi = U(t_N) - \Phi + \int_{t_N}^{\bar{t}} \frac{d}{dt}(U(t) - \Phi) dt.$$

Αν λάβουμε τις νόρμες των παραπάνω ποσοτήτων και χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα,

$$\|U(\bar{t}) - \Phi\|_{\ell^2} \leq \|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} + \int_{t_N}^{\bar{t}} \left\| \frac{d}{dt}(U(t) - \Phi) \right\|_{\ell^2} dt. \quad (2.74)$$

Επιπλέον, από την (2.66) έχουμε ότι η ανισότητα,  $\frac{4\tilde{K}_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t)]^\theta < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ , ισχύει όχι μόνο για  $t \in [t_N, \bar{t}]$ , αλλά για όλα τα  $t \geq t_N$ . Συνεπώς, από την (2.73) συνεπάγεται επίσης ότι

$$\int_{t_N}^{\bar{t}} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} dt < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \quad (2.75)$$

Εξάλλου ισχύει ότι  $\|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ . Συνεπώς, αν εισάγουμε την τελευταία εκτίμηση μαζί με την σχέση (2.75), στην (2.74), θεωρώντας ότι  $\bar{t} \rightarrow \infty$ , οδηγούμαστε στο ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0$ . Με αυτό το τρόπο ολοκληρώνουμε την απόδειξη.  $\square$

### 2.3 Διακλαδώσεις των Μη-Γραμμικών Σημείων Ισορροπίας

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την ύπαρξη της δεύτερης κλάσης των σημείων ισορροπίας του προβλήματος (2.1)-(2.4)-(2.5). Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο αυτά έχουν τη μορφή  $\bar{\Phi} = (\Phi, \mathbf{0})$ , όπου οι  $\Phi$  είναι λύσεις του μη-γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (2.26)-(2.27).

Το αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε εδώ είναι διπλό. Θα δείξουμε όχι μόνο την ύπαρξη λύσεων της (2.26)-(2.27), αλλά θα επιβεβαιώσουμε επίσης ότι αυτά τα σημεία ισορροπίας, διακλαδίζονται από τις ιδιοτιμές του γραμμικού διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών:

$$-k\Delta_d \varphi_n^j = E \varphi_n^j, \quad (2.76)$$

$$\varphi_0^j = \varphi_{K+1}^j = 0. \quad (2.77)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του (2.76)-(2.77) είναι (βλ. [36]),

$$\begin{aligned} E_j(h) &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{j\pi h}{2L} \right) \\ &= \frac{4(K+1)^2}{L^2} \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(K+1)} \right), \quad j = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (2.78)$$

με πρωτεύουσα ιδιοτιμή  $E_1$

$$E_1(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{\pi h}{2L} \right) = \frac{4(K+1)^2}{L^2} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2(K+1)} \right).$$

Είναι επίσης χρήσιμο για την αριθμητική μελέτη, να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών σε διάφορες καταστάσεις διακριτότητας: Η διακριτή περίπτωση αντιστοιχεί στη περίπτωση όπου  $h = O(1)$ . Στη συνεχή περίπτωση όπου  $h \rightarrow 0$  και στην αντί-συνεχή περίπτωση με  $h \rightarrow \infty$ , παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} E_1(h) &= \lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (\text{συνεχές όριο}), \\ \lim_{h \rightarrow \infty} E_1(h) &= 0, \quad (\text{αντί-συνεχές όριο}). \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα στη περίπτωση του  $L = 1$  έχουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} E_1(h) &= \lambda_1 = \pi^2, \\ 4 \leq E_1(h) &\leq \pi^2, \quad \text{για } 0 < h \leq 1. \end{aligned}$$

Επίσης θυμόμαστε ότι για την  $E_1 > 0$ , ισχύει ότι

$$E_1 = \inf_{\substack{X \in \ell_{K+2}^2 \\ X \neq 0}} \frac{(-k\Delta_d X, X)_{\ell^2}}{\sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2}.$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι

$$E_1 \sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2 \leq k(-\Delta_d X, X)_{\ell^2} \leq 4k \sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2. \quad (2.79)$$

Οι διακλαδώσεις των μη γραμμικών σημείων ισορροπίας θα είναι συνέπεια του Θεωρήματος (1.6.4) του Rabinowitz (βλέπε επίσης [61],[65]). Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα χρειαζόμαστε κάποια προεργασία, ώστε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (2.26) στη μορφή που ζητά το θεώρημα,

$$\Phi - \mathcal{F}(\mu, \Phi) = 0. \quad (2.80)$$

Το πρώτο βήμα, είναι να ορίσουμε το γραμμικό τελεστή  $\mathcal{R}$  και να μελετήσουμε τις ιδιότητές του. Ο  $\mathcal{R}$  θα είναι ο αντίστροφος του τελεστή

$$\mathcal{T}(\Phi_n) = -k\Delta_d \Phi_n.$$

Η συζήτηση πιο πάνω, για τις ιδιοτιμές  $E_j$  του γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.27)-(2.77), συνεπάγεται τα ακόλουθα: Ο τελεστής  $\mathcal{T}$  είναι , θετικός και αυτοσυζυγής στο χώρο Hilbert  $\mathcal{X} := \ell_{K+2}^2$ , το οποίο προκύπτει από την (2.79). Οι ιδιοτιμές του δίνονται από την (2.78) και μπορούν να διαταχθούν ως εξής

$$0 < E_1 < E_2 < \dots < E_K.$$

Εκάθαρα, ο τελεστής  $\mathcal{T}$  είναι αντιστρέψιμος και ορίζεται ο αντίστροφός του,  $\mathcal{R} := \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Τώρα, ξαναγράφουμε την Εξ. (2.26) στην ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{T}(\Phi) - \omega_d^2 \Phi - \mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi) = 0, \quad \Phi \in \mathcal{X}. \quad (2.81)$$

Ο  $\mathcal{G} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  είναι ο μη-γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi_n) = -\omega_d^2 \beta \Phi_n^3.$$

Εισάγοντας στην Εξ. (2.81) το τελεστή  $\mathcal{R}$ , παίρνουμε την εξίσωση

$$\Phi - \omega_d^2 \mathcal{R}(\Phi) - \mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi) = 0. \quad (2.82)$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ. (2.82) είναι σύμφωνη με τις (1.9)-(2.80), με  $\mathcal{R}(\Phi) = \mathcal{T}^{-1}(\Phi)$ , και  $\mathcal{W}(\omega_d^2, \Phi) = \mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)$ . Είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα (1.6.4) χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.82) και να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 2.3.1.** *Υπάρχει ένα μέγιστο συνεχές λύσεων  $\mathbf{C}_{E_j}$  της εξίσωσης (2.26) με  $j = 1, \dots, K + 1$  που διακλαδίζεται από τις  $(E_j, 0)$  και  $\mathbf{C}_{E_j}$  είτε (1) συναντά το άπειρο στο  $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$  ή (2) συναντά το  $\Phi = 0$  σε ένα σημείο  $(\hat{\omega}_d^2, 0)$ , όπου  $\hat{\omega}_d^2 \neq E_n$  και  $\frac{1}{\hat{\omega}_d^2}$  είναι μια ιδιοτιμή του  $\mathcal{R}$ .*

*Απόδειξη.* Εφόσον η Εξ. (2.82) έχει θεωρηθεί στον πεπερασμένης διάστασης χώρο  $\mathcal{X}$ , οι τελεστές  $\mathcal{R}$ , και  $\mathcal{W} = \mathcal{R}\mathcal{G}$  είναι συμπαγείς. Εξάλλου οι ιδιοτιμές του  $\mathcal{R}$  είναι οι  $1/E_j$ ,  $j = 1, \dots, K + 1$ , και είναι όλες απλές. Συνεπώς, μένει

μόνο να εξετάσουμε τις συνθήκες μεταβολής της (1.10): Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\mathcal{W}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} &= \frac{\|\mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\
 &\leq \frac{\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\
 &\leq \frac{\omega_d^2 \beta \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\Phi\|_{\mathcal{X}}^3}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\
 &= \omega_d^2 \beta \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\Phi\|_{\mathcal{X}}^2.
 \end{aligned}$$

Για τις παραπάνω εκτιμήσεις χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα (2.6), με  $q = 3$  και  $p = 2$ . Θεωρώντας  $\|\Phi\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ , παρατηρούμε ότι  $\lim_{\|\Phi\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{W}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} = 0$  και με αυτό το τρόπο καταλήγουμε στην απόδειξη της πρότασης.  $\square$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες των κλαδιών  $\mathbf{C}_{E_j}$ . Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητο να θυμηθούμε κάποιες περαιτέρω ιδιότητες του διακριτού, γραμμικού προβλήματος των ιδιοτιμών (2.76)-(2.77).

Αρχικά από το Θεώρημα (1.4.3) συνεπάγεται ότι η ιδιοσυνάρτηση  $\phi_n^1$  που σχετίζεται με την ιδιοτιμή  $E_1$  είναι θετική, υπό την έννοια ότι  $\phi_n^1 > 0$  για όλα τα  $n = 1, \dots, K$ , εκτός από τα σημεία  $n = 0$  και  $n = K + 1$ , όπου ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (2.77). Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.76)-(2.77) είναι το ανάλογο του διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών Sturm - Liouville

$$-\psi''(x) = \lambda\psi(x), \quad -L/2 < x < L/2,$$

$$\psi(-L/2) = \psi(L/2) = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω προβλήματος, είναι  $\lambda_j = \frac{j^2\pi^2}{L^2}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις  $\psi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$ , οι οποίες έχουν ακριβώς  $j - 1$  κομβικά σημεία.

Έχοντας στο μυαλό μας τις παραπάνω ιδιότητες του διακριτού προβλήματος ιδιοσυναρτήσεων (2.76)-(2.77), ορίζουμε τα σύνολα στον  $\mathcal{X}$ ,

$$S_j := \{X \in \mathbb{R}^{K+2} : X_0 = X_{K+1} = 0\} \quad (2.83)$$

με ακριβώς  $j - 1$  κομβικά σημεία}.



Αυτά τα σύνολα είναι ανοιχτά στον  $\mathcal{X}$ , εφόσον  $\forall X \in S_j$  η ανοιχτή μπάλα

$$B(X, \varrho) = \{X \in S_j : \|X - Y\|_{\mathcal{X}} < \varrho, Y \in \mathcal{X}\}$$

βρίσκεται στο  $S_j$ , θεωρώντας  $\varrho$  - οσοδήποτε μικρό. Για παράδειγμα, για  $\varrho$  - οσοδήποτε μικρό έχουμε οσοδήποτε μικρή διαταραχή των συντεταγμένων του  $X$  στο  $S_j$ . Συνεπώς, όλα τα διανύσματα του  $\mathcal{X}$  που είναι στην  $B(X, \varrho)$  έχουν τον ίδιο αριθμό κομβικών σημείων.

Επιστρέφοντας στις λύσεις  $\Phi_n$  του μη γραμμικού στάσιμου προβλήματος (2.26)-(2.27), η θεωρία διακλαδώσεων της Παραγράφου (1.6) και το θεώρημα (1.5.1) (βλ. [61, 65, 74]), διασφαλίζουν ότι το κλαδί  $\mathbf{C}_{E_j}$  μπορεί να αναπαρασταθεί τοπικά από μια  $C^1$ - καμπύλη

$$(\mu, \Phi) : (-\gamma, \gamma) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{X},$$

για κάποια οσοδήποτε μικρά  $\gamma$ . Αυτή η αναπαράσταση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\mu(0) = E_j, \quad \chi(0) = 0, \quad (2.84)$$

$$(\mu(s), \Phi(s)) = (\mu(s), s(\varphi^j + \chi(s))), \quad |s| < \gamma. \quad (2.85)$$

Εδώ, το  $\mu(s) := \omega_d^2(s)$  και  $\|\chi(s)\|_{\mathcal{X}} = O(|s|)$ , σε μια γειτονιά του σημείου διακλάδωσης  $(E_j, 0)$ . Επιπλέον υπάρχει μια γειτονιά του  $(E_j, 0)$ , τέτοια ώστε κάθε λύση του (2.26)-(2.27) (ή ισοδύναμα, της μη γραμμικής εξίσωσης (2.82)), να βρίσκεται στη καμπύλη ή να είναι ακριβώς στο σημείο  $(E_j, 0)$ . Η επόμενη πρόταση, αναφέρεται σε μια τοπική ιδιότητα καμπυλότητας του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_j}$ .

**Πρόταση 2.3.2.** *Θεωρούμε τη τοπική αναπαράσταση (2.84)-(2.85) του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_j}$ . Τότε,  $\mu'(0) = 0$ ,  $\mu''(0) > 0$ , δηλαδή η τοπική αναπαράσταση έχει τα κοίλα άνω.*

*Απόδειξη.* Εισάγουμε την τοπική αναπαράσταση του κλαδιού

$$(\mu(s), \Phi(s)) = (\mu(s), s(\varphi^j + \chi(s)))$$

στην (2.26), και διαιρούμε με  $s > 0$ . Έτσι, έχουμε ότι

$$-k\Delta_d(\varphi_n^j + \chi_n(s)) + \mu(s)\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 = \mu(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s)).$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $s$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -k\Delta_d\chi'_n(s) &+ \mu(s) [2s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 3\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi'_n(s)] \\ &+ \mu'(s)[\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3] \\ &= \mu'(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s)) + \mu(s)\chi'_n(s). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Θέτουμε με  $s = 0$  στην (2.86), και χρησιμοποιούμε επίσης ότι  $\mu(0) = E_j$ ,  $\chi_n(0) = 0$ . Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα

$$-k\Delta_d\chi'_n(0) - \mu'(0)\varphi_n^j = E_j\chi'_n(0). \quad (2.87)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.87) με  $\varphi_n^j$  και αθροίζοντας τους όρους, λαμβάνουμε την σχέση

$$-k \sum_{n=0}^{K+1} \Delta_d\chi'_n(0)\varphi_n^j - \sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)(\varphi_n^j)^2 = \sum_{n=0}^{K+1} E_j\chi'_n(0)\varphi_n^j.$$

Αθροίζοντας κατά παράγοντες το πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι

$$-k \sum_{n=0}^{K+1} \chi'_n(0)\Delta_d\varphi_n^j - \sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)(\varphi_n^j)^2 = \sum_{n=0}^{K+1} E_j\chi'_n(0)\varphi_n^j. \quad (2.88)$$

Εφόσον  $E_j$  και  $\varphi_n^j$  είναι λύσεις του διακριτού γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.27)-(2.77), ισχύει ότι

$$-k \sum_{n=0}^{K+1} \chi'_n(0)\Delta_d\varphi_n^j = \sum_{n=0}^{K+1} E_j\chi'_n(0)\varphi_n^j.$$

Ως εκ τούτου, η (2.88) μας δίνει το αποτέλεσμα

$$\sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)|\varphi_n^j|^2 = 0.$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι  $\mu'(0) = 0$ . Για να υπολογίσουμε την  $\mu''(s)$ , παραγωγίζουμε την (2.86) ως προς  $s$ :

$$\begin{aligned}
 & -k\Delta_d\chi_n''(s) + \mu(s)[2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 6s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi_n'(s)] \\
 & + 2\mu'(s)s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 \\
 & + \mu(s)[6\beta s(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi_n'(s) + 6\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))\chi_n'(s)^2 \\
 & + 3\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi_n''(s)] + 3s^2\beta\mu'(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi_n'(s) \\
 & + \mu'(s)[2s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 3s^2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2\chi_n'(s)] \\
 & + \mu''(s)(s^2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3) \\
 & = \mu''(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s)) + \mu'(s)\chi_n'(s) \\
 & + \mu'(s)\chi_n'(s) + \mu(s)\chi_n''(s). \tag{2.89}
 \end{aligned}$$

Για μια ακόμη φορά, θέτουμε  $s = 0$  στην (2.89) και χρησιμοποιούμε ότι  $\mu'(0) = 0$ , το οποίο αποδείχθηκε παραπάνω. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τις σχέσεις,  $\mu(0) = E_j$ ,  $\chi_n(0) = 0$  και με αυτό το τρόπο φτάνουμε στην εξίσωση

$$-k\Delta_d\chi_n''(0) + 2\beta E_j(\varphi_n^j)^3 = \mu''(0)\varphi_n^j + E_j\chi_n''(0). \tag{2.90}$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στην Εξ. (2.88), από την Εξ. (2.90) παίρνουμε ότι

$$-k \sum_{n=0}^{K+1} \chi_n''(0)\Delta_d\varphi_n^j + 2\beta \sum_{n=0}^{K+1} E_j(\varphi_n^j)^4 = \sum_{n=0}^{K+1} \mu''(0)(\varphi_n^j)^2 + \sum_{n=0}^{K+1} E_j\chi_n''(0)\varphi_n^j.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας ξανά ότι οι  $(E_j, \varphi_n^j)$  είναι λύσεις του προβλήματος (2.76)-(2.77), τελικά οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\mu''(0) \sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2 = 2\beta E_j \sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^4. \tag{2.91}$$

Η εξίσωση ξεκάθαρα συνεπάγεται ότι  $\mu''(0) > 0$ .  $\square$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.91) μπορούμε να εξάγουμε μια εκτίμηση σχετικά με την τιμή της  $\mu''(0)$ . Έτσι έχουμε ότι

$$\mu''(0) = 2\beta E_j \frac{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^4}{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2}. \tag{2.92}$$

Μπορούμε επίσης να λάβουμε μια προσέγγιση μέσα από την ακόλουθη φόρμουλα

$$\frac{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^4}{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2} = \frac{\int_0^\pi a^4 \sin^4(jx) dx}{\int_0^\pi a^2 \sin^2(jx) dx} = \frac{3a^2}{4}.$$

Ως εκ τούτου η Εξ. (2.92) γίνεται

$$\mu''(0) = \frac{3}{2} a^2 \beta E_j, \quad (2.93)$$

όπου  $a$  είναι το πλάτος της κανονικοποίησης της διακριτής ιδιοσυνάρτησης  $\varphi_n^j$ .

Η επόμενη πρόταση μας διασφαλίζει ότι το μέγιστο συνεχές των λύσεων  $\mathbf{C}_{E_j}$  είναι μή φραγμένο σύνολο.

**Πρόταση 2.3.3.** Για κάθε  $k > 0$ , το μέγιστο συνεχές των λύσεων  $\mathbf{C}_{E_j}$  της Εξ. (2.26) που διακλαδίζεται από τα σημεία  $(E_j, 0)$  συναντά το άπειρο στο  $\mathbb{R}$ .

*Απόδειξη.* α) Θυμόμαστε ότι κάθε λύση  $(\mu, \Phi)$  κοντά στο  $(E_j, 0)$  έχει τον ίδιο αριθμό κομβικών σημείων με τις  $\Phi^j$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $E_j$ . Αυτό οφείλεται στη  $C^1$ -αναπαράσταση των λύσεων  $\Phi$  που έχει τη μορφή,  $\Phi_n(s) = s\Phi_n^j + s\chi_n(s)$ . Για παράδειγμα, κάθε γραμμική κατάσταση  $\Phi^j$  ανήκει στο σύνολο  $S_n$  που ορίσαμε στην Εξ. (2.83) και  $\|\chi\|_X = O(|s|)$ . Τότε, η λύση  $\Phi$  ικανοποιεί την εκτίμηση  $\|\Phi(s)\|_X \leq |s| \|\Phi^j\|_X + O(s^2)$  στη γειτονιά των σημείων διακλάδωσης  $(E_j, 0)$ . Ως εκ τούτου, εφόσον το σύνολο  $S_j$  είναι ανοικτό, έχουμε από τη παραπάνω εκτίμηση, ότι  $\Phi \in S_j$  για  $|s| < \gamma$ .

β) Τώρα για όλα τα  $(\mu, \Phi) \in \mathbf{C}_{E_j}$  και για κάθε  $j = 0, 1, 2, \dots, K$ , θεωρούμε την δείκτη συνάρτηση:

$$f(\mu, \Phi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \Phi \in S_n \\ 0 & \text{αν } \Phi = 0, \mu = E_j, m \neq j, \end{cases}$$

για την οποία ισχύει ότι  $f(\mu, \Phi) = 0$  αν το κλαδί  $\mathbf{C}_{E_j}$ , συναντά τον άξονα  $(\mu, 0)$  σε μια άλλη ιδιοτιμή  $E_m \neq E_j$ . Σημειώνουμε ότι η  $f$  είναι καλά ορισμένη σύμφωνα με τις δύο περιπτώσεις που περιγράψαμε σε προηγούμενη πρόταση. Από το (α) έχουμε ότι αν  $(\mu, \Phi)$  βρίσκεται σε μια μικρή γειτονιά του  $(E_j, 0)$  τότε,  $f(\mu, \Phi) = 1$ . Έτσι, η  $f$  είναι σταθερή σε μια μικρή γειτονιά του  $(E_j, 0)$  και δεν μπορεί να αλλάξει τιμή. Δηλαδή, η  $f$  είναι τοπικά σταθερή. Το σύνολο  $S_j$  είναι ανοικτό και η συνάρτηση  $f$  είναι τοπικά σταθερή σε ένα συνεκτικό σύνολο  $\mathbf{C}_{E_j}$ . Ξεκάθαρα και από τα δύο αυτά γεγονότα μαζί, συνεπάγεται ότι η  $f$  είναι συνεχής. Άρα, το σύνολο  $f(\mathbf{C}_{E_j})$  πρέπει να είναι επίσης συνεκτικό, εφόσον η

εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου μιας συνεχούς συνάρτησης θα πρέπει να είναι συνεκτικό σύνολο. Ωστόσο, η  $f$  λαμβάνει ακέραιες τιμές και το γεγονός ότι το  $f(\mathbf{C}_{E_j})$  είναι συνεκτικό σύνολο, συνεπάγεται ότι η  $f$  θα πρέπει να είναι σταθερή με  $f = 1$ , για όλα τα  $(\mu, \Phi) \in \mathbf{C}_{E_j}$ . Συνεπώς, το  $\mathbf{C}_{E_j}$  δεν μπορεί να περιέχει ένα σημείο  $(E_m, 0)$  με  $E_m \neq E_j$  και το  $\mathbf{C}_{E_j}$  θα πρέπει να είναι μη-φραγμένο.  $\square$

## 2.4 Αριθμητική Μελέτη

Σε αυτή τη παράγραφο, διερευνούμε αριθμητικά την δυναμική του συστήματος (2.1)-(2.4)-(2.5). Ο πρώτος μας στόχος μεριμνά την αριθμητική μελέτη της ιδιότητας της *Δυναμικής Ευστάθειας* του συστήματος, η οποία εξαρτάται άμεσα από την ύπαρξη και τη γραμμική ευστάθεια των κλαδιών των σημείων ισορροπίας που προσδιορίζονται στις Προτάσεις (2.3.1)-(2.3.2).

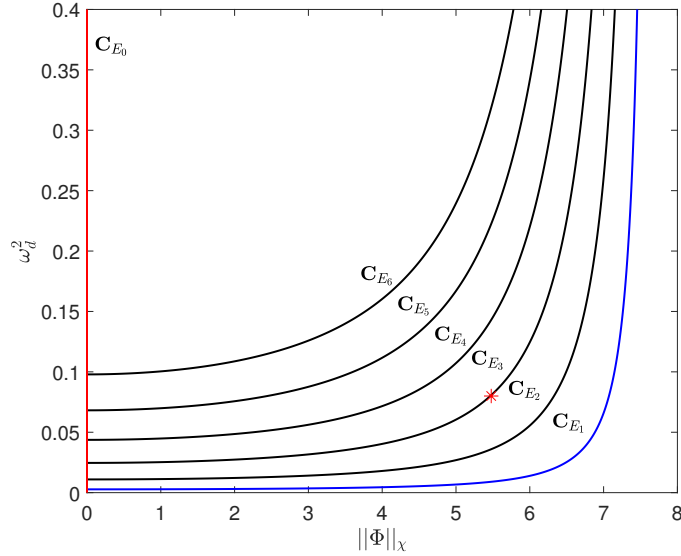
Για την συζήτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, είναι επίσης σημαντικό να επισημάνουμε το ρόλο της παραμέτρου  $\omega_d^2$ : με αλλαγή της μεταβλητής του χρόνου  $t \rightarrow \frac{1}{h}t$ , ξαναγράφουμε την Εξ. (2.1) στη μορφή

$$\ddot{U}_n - \Delta_d U + \delta \dot{U}_n = \Omega_d^2 (U_n - \beta U_n^2), \quad t > 0, \quad \Omega_d^2 = h^2 \omega_d^2, \quad \delta = h\delta.$$

Η αλλαγή κλίμακας της πλεγματικής παραμέτρου του προβλήματος, την κάνει σημαντική ώστε να σχολιάσουμε σε αυτό το σημείο τη φύση του συνεχούς και του αντί-συνεχούς ορίου. Για το αντί-συνεχές όριο χρειάζεται να θεωρήσουμε για την Εξ. (2.1), το όριο  $\omega_d^2 \rightarrow \infty$ . Σε αυτή τη περίπτωση η μη-γραμμικότητα κυριαρχεί και βρισκόμαστε πλέον στη περίπτωση των ασύζευκτων ταλαντωτών. Από την άλλη μεριά, για μικρές τιμές του  $\omega_d^2$ , ο γραμμικός όρος σύζευξης γίνεται σημαντικός. Ωστόσο, εξαιτίας της φύσης του μοντέλου μας, λαμβάνουμε το ασυμπτωτικά γραμμικό όριο, καθώς  $\omega_d^2 \rightarrow 0$ .

### 2.4.1 Ύπαρξη και Γραμμική Ευστάθεια των Διακλαδισμένων Κλάδων

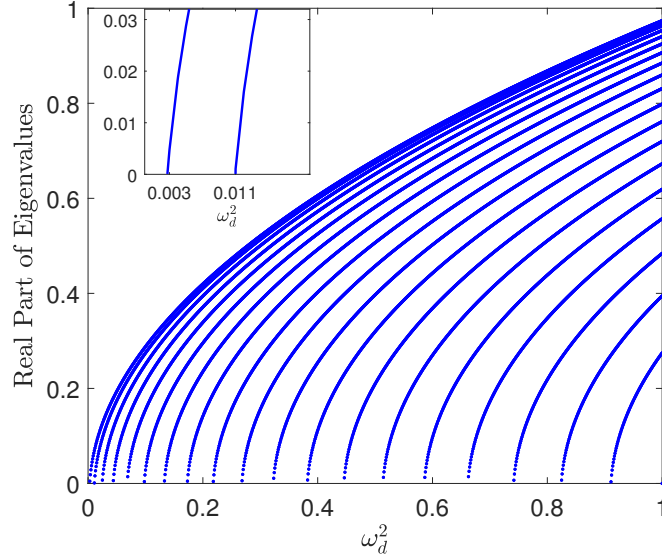
Ξεκινάμε την αριθμητική μελέτη, επιβεβαιώνοντας αριθμητικά την θεωρία των καθολικών διακλαδώσεων που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στο Σχήμα 2.2, υπολογίζουμε αριθμητικά τα κλαδιά των σημείων ισορροπίας  $\mathbf{C}_{E_j}$ , για  $j = 1, \dots, 6$ , με  $K = 59$ ,  $L = 60$  και  $\beta = 1$ . Σε αυτό το σημείο συμβολίζουμε με  $\mathbf{C}_{E_0}$  το κλαδί (ο κάθετος άξονας του  $\omega_d^2$ ) που αντιστοιχεί στη τετριμμένο σημείο ισορροπίας  $\Phi_0 = \mathbf{0}$ . Όπως παρατηρούμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής μας μελέτης είναι σε πλήρη συμφωνία με την αναλυτική μελέτη, για την



Σχήμα 2.2: Τοπική αναπαράσταση των κλαδιών των μη γραμμικών σημείων ισορροπίας  $C_{E_j}$  που διακλαδίζονται από τις τιμές της παραμέτρου  $\omega_d^2$  και οι οποίες αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών (2.76)-(2.77). Το σχήμα δείχνει τα πρώτα έξι κλαδιά των σημείων ισορροπίας που διακλαδίζονται από το  $\omega_d^2 = E_j$  για  $j = 1, \dots, 6$ , όπου  $E_1 = 0.003, E_2 = 0.011, E_3 = 0.025, E_4 = 0.0437, E_5 = 0.0681, E_6 = 0.0978$ . Παράμετροι:  $K = 59, L = 60$ , και  $\beta = 1$ . Το σημείο (με αστέρι)  $(\|U_n(0)\|, \omega_d^2) = (5.48, 0.08)$  αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη που βρίσκεται κοντά σε νόρμα (με ακρίβεια της τάξης  $10^{-2}$ ) με μια λύση ισορροπίας  $\Phi_3 \in C_3$ .

γεωμετρική δομή των κλαδιών. Τα κλαδιά διακλαδίζονται από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\omega_d^2 = E_j$  του γραμμικού διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών (2.76)-(2.77), ενώ είναι τοπικά κυρτά όπως έχει αποδειχθεί στη Πρόταση (2.3.2). Επιπλέον γίνονται μη φραγμένα όπως αποδείχθηκε στη Πρόταση (2.3.3).

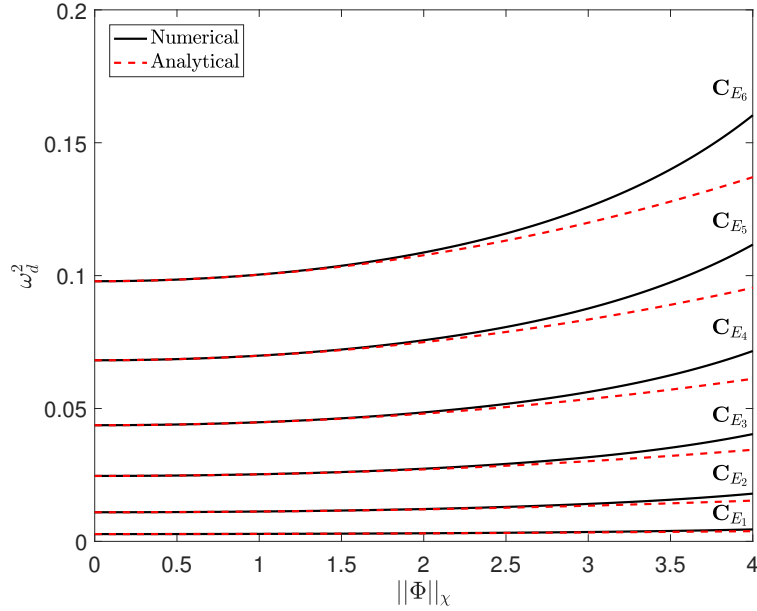
Στη συνέχεια μελετούμε την γραμμική ευστάθεια των κλαδιών των σημείων ισορροπίας  $C_{E_j}$ . Επιβεβαιώνουμε αριθμητικά ότι κάθε κλαδί  $C_{E_j}$  που γεννιέται, καθώς το  $\omega_d^2$  περνάει από τις ιδιοτιμές  $E_j$ , σχετίζεται με  $j - 1$  πλήθος ασταθών ιδιοτιμών. Ως εκ τούτου τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας  $\Phi_j$  έχουν μια  $j - 1$  -διάστασης ασταθή πολλαπλότητα. Μια τέτοια ασταθή δομή είναι παρόμοια με αυτή που περιγράφεται από την αναφορά [65, Θεώρημα 24.14, Σελ. 538], για συνεχή δυναμικά συστήματα κλίσης. Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζουμε το γραμ-



Σχήμα 2.3: Αριθμητική επιβεβαίωση για την εμφάνιση ασταθών ιδιοτιμών του  $\mathbf{C}_{E_0}$  καθώς η παράμετρος διακλάδωσης  $\omega_d^2$  περνάει από τους γραμμικούς κόμβους  $E_j$ . ( $K = 59$ ).

μικροποιημένο φάσμα του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_0}$ . Παρατηρούμε ότι, καθώς η παράμετρος διακλάδωσης  $\omega_d^2$  αυξάνεται, γεννιούνται ασταθείς ιδιοτιμές του  $\mathbf{C}_{E_0}$  για τις οποίες, το θετικό πραγματικό μέρος αυξάνεται. Στο ένθετο του Σχήματος 2.3 μπορούμε να δούμε ότι για  $0 < \omega_d^2 < 0.003$ , το  $\mathbf{C}_{E_0}$  δεν έχει καμία ασταθή ιδιοτιμή. Η πρώτη ασταθή ιδιοτιμή εμφανίζεται όταν η παράμετρος διακλάδωσης είναι  $\omega_d^2 = 0.003 = E_1$ , όπου γεννιέται και το πρώτο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_1}$ . Το διακλαδισμένο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_1}$  είναι ευσταθές ενώ το  $\mathbf{C}_{E_0}$  αποκτά μια ασταθή ιδιοτιμή. Η δεύτερη ιδιοτιμή του  $\mathbf{C}_{E_0}$ , της οποίας το πραγματικό μέρος περνάει από το μηδέν, εμφανίζεται όταν  $\omega_d^2 = 0.011 = E_2$ . Τότε, πραγματοποιείται και η δεύτερη διακλάδωση, αυτή του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_2}$ . Το νέο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_2}$  κληρονομεί μια θετική ιδιοτιμή και την αντίστοιχη μονοδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα, ενώ το  $\mathbf{C}_{E_0}$  αποκτά δύο ασταθείς ιδιοτιμές. Το Σχήμα 2.3 επιβεβαιώνει το γεγονός ότι, όταν  $\omega_d^2 = E_j$ , το κλαδί  $\mathbf{C}_{E_0}$  αποκτά την  $j$ -ιοστή του ασταθή ιδιοτιμή. Συμπεραίνουμε ότι κάθε κλαδί  $\mathbf{C}_{E_j}$  κληρονομεί  $j - 1$  ασταθείς ιδιοτιμές, οι οποίες δημιουργούν την  $j - 1$  - διάστασης ασταθή πολλαπλότητα.

Είναι ενδιαφέρον το επόμενο συγκριτικό διάγραμμα. Χρησιμοποιώντας το τύπο της σχέσης (2.93)  $\mu''(0) = \frac{3}{2}a^2\beta E_j$ , αναπαριστούμε στο Σχήμα 2.4 την



Σχήμα 2.4:

αναλυτική προσέγγιση της δομής των κλαδιών, σε σχέση με τα αριθμητικά υπολογισμένα κλαδιά του Σχήματος 2.2. Έτσι παρατηρούμε ότι για μικρές νόρμες, είναι σε πλήρη συμφωνία. Να σημειώσουμε ότι το πλάτος  $a$  για το σύνολο των παραμέτρων που χρησιμοποιήσαμε, έχει την τιμή  $a = 0.182$ .

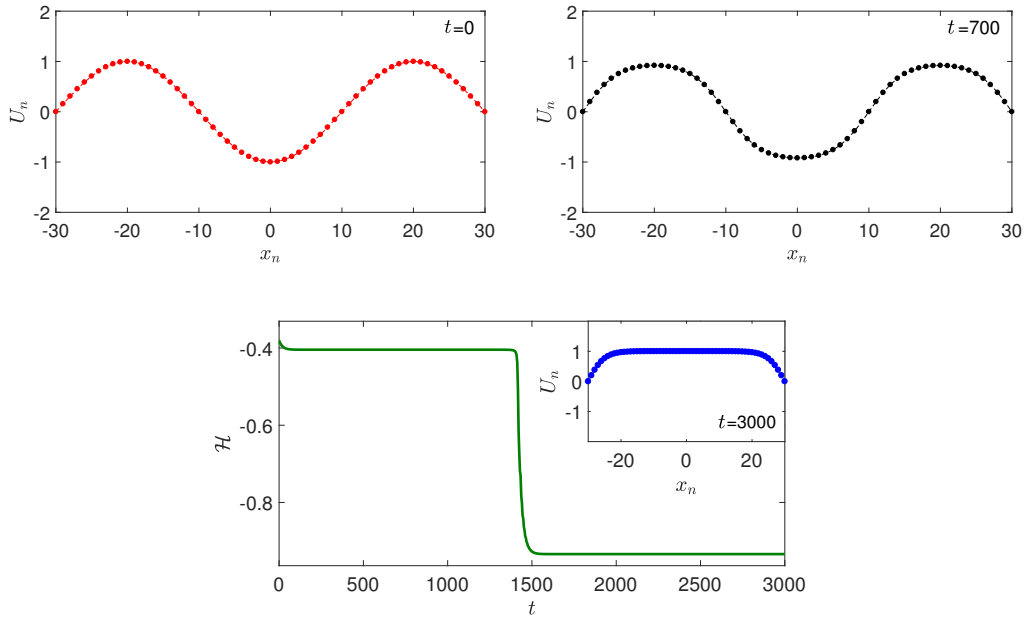
#### 2.4.2 Εξέλιξη των Χωρικά Εκτεταμένων Αρχικών Συνθηκών

Σύμφωνα με τις πληροφορίες που εξάγαμε για τις ασταθείς ιδιότητες των κλαδιών των σημείων ισορροπίας, αποκτά ενδιαφέρον η αριθμητική μελέτη για τις πιθανές ελκτικές ιδιότητες τέτοιων σημείων ισορροπίας. Θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες της μορφής:

$$U_n(0) = U_{n,0} = a \sin\left(\frac{j\pi hn}{L}\right), \quad j = 1, \dots, K \quad (2.94)$$

όπου  $h = \frac{L}{K+1}$  είναι η απόσταση του πλέγματος και  $a > 0$  είναι το πλάτος της (2.94).





Σχήμα 2.5: Μετασταθής δυναμική και σύγκλιση στη βασική κατάσταση του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_1}$ , για την αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_3}$  και πλάτος  $a = 1$ . Άλλες παράμετροι:  $K = 59$ ,  $\omega_a^2 = 0.08$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.05$ . Η μεταστάθεια παρατηρείται στην εξέλιξη της Χαμιλτονιανής ενέργειας [πράσινη συνεχής καμπύλη].

Επίσης θεωρούμε μηδενική αρχική ταχύτητα

$$\dot{U}_n(0) = U_{n,1} = \mathbf{0}.$$

Χρησιμοποιούμε το εξής συμβολισμό για την αρχική συνθήκη

$$U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_j},$$

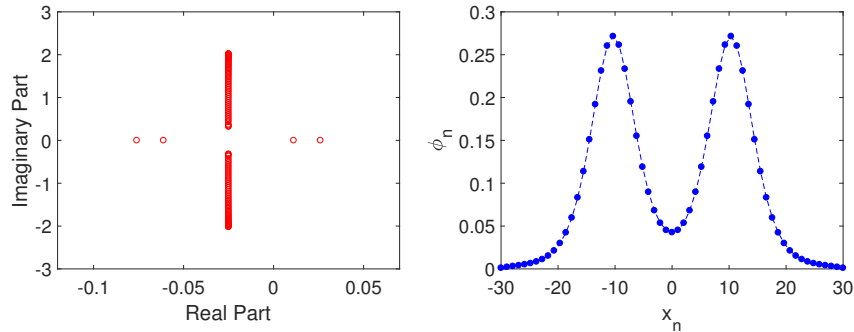
για να περιγράψουμε την ακόλουθη ιδιότητα της (2.94): η  $U_n(0)$  έχει τις ίδιες αλλαγές προσήμου με τη μη-γραμμική στάσιμη κατάσταση  $\Phi_j \in \mathbf{C}_{E_j}$  της αλυσίδας (DKG) (2.1)-(2.4)-(2.5) (που είναι λύσεις του μη-γραμμικού στάσιμου προβλήματος (2.26)-(2.27)). Υπενθυμίζουμε ότι μία μη-γραμμική στάσιμη κατάσταση  $\Phi_j \in \mathbf{C}_{E_j}$  έχει  $j - 1$  αλλαγές προσήμου. Λέμε ότι μια τέτοια αρχική συνθήκη είναι όμοια με ένα κλαδί  $\mathbf{C}_{E_j}$ .

**Σενάριο I:** Εξετάζουμε την δυναμική του συστήματος, όταν το ζευγάρι της αρχικής συνθήκης (2.94)  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_j}$  και η τιμή της παραμέτρου διακλάδωσης

$E_j < \omega_a^2$ , ορίζουν ένα σημείο  $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$  στο διάγραμμα διακλάδωσης. Αυτό το σημείο είναι αρκετά κοντά σε νόρμα, με μία λύση ισορροπίας του κλαδιού  $C_{E_j}$  (σημείο με αστέρι στο Σχήμα 2.2).

Με το Σενάριο I θέλουμε να διερευνήσουμε το φαινόμενο, κατά το οποίο μια αρχική συνθήκη επιλέγεται έτσι ώστε να ορίζει μια τροχιά αρκετά κοντά σε μια ευσταθή πολλαπλότητα ενός ασταθούς σημείου ισορροπίας  $\Phi_j \in C_{E_j}$ . Με αυτό το τρόπο λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας των κλαδιών που έχει γίνει προηγούμενα, θέλουμε να διερευνήσουμε τη κατάσταση σύγκλισης του συστήματος.

Ξεκινάμε με την παρουσίαση του πρώτου παραδείγματος για την αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq C_{E_3}$  πλάτους  $a = 1$  και αντίστοιχη νόρμα  $\|U_n(0)\| = 5.47$ . Στο Σχήμα 2.5 απεικονίζεται η δυναμική της αρχικής συνθήκης. Θεωρούμε επιπλέον τις εξής παραμέτρους:  $K = 59$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega_a^2 = 0.08$  και δύναμη απόσβεσης  $\delta = 0.05$ . Με αυτό το τρόπο η αρχική συνθήκη επιλέγεται σε ένα σημείο  $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2) = (5.48, 0.08)$  (όπως απεικονίζεται με αστέρι στο διάγραμμα διακλάδωσης του Σχήματος 2.2), το οποίο είναι πολύ κοντά σε νόρμα με ένα σημείο ισορροπίας του κλαδιού  $C_{E_3}$ . Η αριστερή εικόνα της πρώτης γραμμής του Σχήματος 2.5 δείχνει την αρχική συνθήκη (2.94) για  $t = 0$ . Έχει γίνει ολοκλήρωση του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 3000$  και το αποτέλεσμα της δυναμικής φαίνεται στη δεύτερη γραμμή. Παρατηρούμε ότι το κλαδί  $C_{E_3}$  είναι δυναμικά ασταθές και η λύση επιλέγει να συγκλίνει στη βασική  $\Phi_1$  που ανήκει στο κλαδί  $C_{E_1}$  με νόρμα  $\|\Phi_1\| = 7.07$ . Η Χαμιλτονιανή ενέργεια



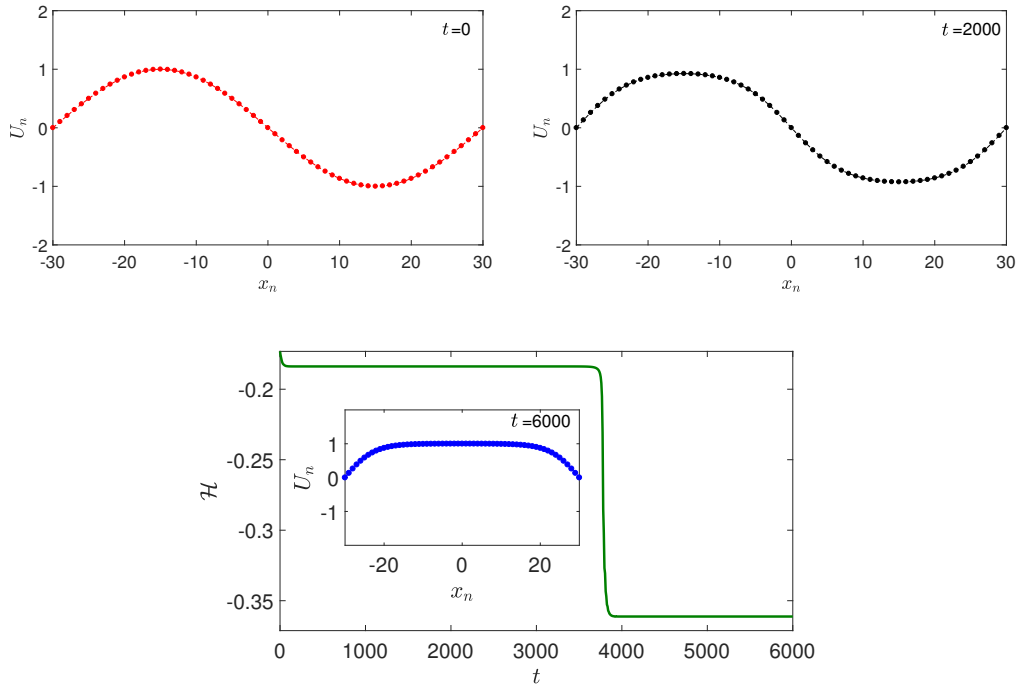
Σχήμα 2.6: Αριστερή εικόνα: Ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο σημείο ισορροπίας  $\Phi_3 \in C_{E_3}$  (Σχήμα 2.5, πρώτη γραμμή, δεύτερη εικόνα). Δεξιά εικόνα: Ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή (με τιμή 0.026) της αριστερής εικόνας.

επιβεβαιώνει τη μεταστατή<sup>1</sup> δυναμική όπως φαίνεται από τα δύο διαφορετικά επίπεδα του γραφήματος της στη δεύτερη γραμμή του Σχήματος 2.5: Σε αυτή τη περίπτωση, η μεταστάθεια περιλαμβάνει ένα σημείο ισορροπίας  $\Phi_3 \in \mathbf{C}_{E_3}$  (που φαίνεται στη δεξιά εικόνα της πρώτης γραμμής), για ενέργεια  $\mathcal{H} = -0.4$  και την βασική κατάσταση  $\Phi_1 \in \mathbf{C}_{E_1}$  για ενέργεια  $\mathcal{H} = -0.93$ . Τέτοια μεταστατή δυναμική περιγράφει το εξής φαινόμενο: Στο σημείο  $(\|U_n(0)\|, \omega_d^2) = (5.48, 0.08)$  που επιλέξαμε την αρχική συνθήκη, ορίζεται μια τροχιά που προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας  $\Phi_3 \in \mathbf{C}_{E_3}$  μέσω της ευσταθούς πολλαπλότητας, για χρονικό διάστημα  $0 < t < 1500$ . Στη συνέχεια οδηγείται μέσω της ασταθούς πολλαπλότητας στη βασική κατάσταση  $\Phi_1 \in \mathbf{C}_{E_1}$ . Αυτή η δυναμική είναι σύμφωνη με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που συζητήσαμε στη προηγούμενη παράγραφο. Στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 2.6 παρατηρούμε ότι η λύση  $\Phi_3$  έχει δύο θετικές ιδιοτιμές που ορίζουν την δισδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα. Στη δεξιά εικόνα απεικονίζεται η ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη από τις ασταθείς ιδιοτιμές της λύσης  $\Phi_3$  και όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η ιδιοκατάσταση  $\phi_n^{55} \simeq \mathbf{C}_{E_1}$ .

Έτσι η ασταθής πολλαπλότητα που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοκατάσταση οδηγεί το σύστημα σε μία λύση  $\Phi_1 \in \mathbf{C}_{E_1}$ . Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο, ότι παρόλο που σε όλα τα παραδείγματα της μελέτης μας χρησιμοποιούμε σαν τελικό χρόνο ολοκλήρωσης ένα πεπερασμένο αριθμό, όταν το σύστημα καταλήξει σε μια ευσταθή κατάσταση δεν περιμένουμε να φύγει από αυτή.

Για το δεύτερο παράδειγμα του Σεναρίου I, θεωρούμε την αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_2}$  πλάτους  $a = 1$  με νόρμα  $\|U_n(0)\| = 5.48$  και  $\omega_d^2 = 0.036$ . Αυτή τη φορά η αρχική συνθήκη επιλέγεται σε ένα σημείο  $(\|U_n(0)\|, \omega_d^2) = (5.48, 0.036)$  που βρίσκεται πολύ κοντά σε νόρμα με ένα σημείο ισορροπίας του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_2}$ . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, έχει γίνει ολοκλήρωση του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 6000$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν ίδιες με αυτές του παραδείγματος του Σχήματος 2.5. Η αριστερή εικόνα της 1ης γραμμής στο Σχήμα 2.7 δείχνει την αρχική συνθήκη (2.94) για χρόνο  $t = 0$ . Όπως φαίνεται, το κλαδί  $\mathbf{C}_{E_2}$  είναι δυναμικά ασταθές και η λύση επιλέγει να συγχλίνει στη βασική κατάσταση  $\Phi_1$  που ανήκει στο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_1}$ . Η Χαμιλτονιανή ενέργεια επιβεβαιώνει ξανά τη μεταστατή δυναμική. Η εξέλιξη του φαινομένου είναι απόλυτα σύμφωνη με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που συζητήθηκε στη προηγούμενη παράγραφο. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.8 η λύση  $\Phi_2$  έχει μια μονοδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα που αντιστοιχεί στην μοναδική θετική ιδιοτιμή της.

<sup>1</sup>Μετασταθής ή μεταευσταθής, είναι η προσπάθεια μετάφρασης του όρου metastable.

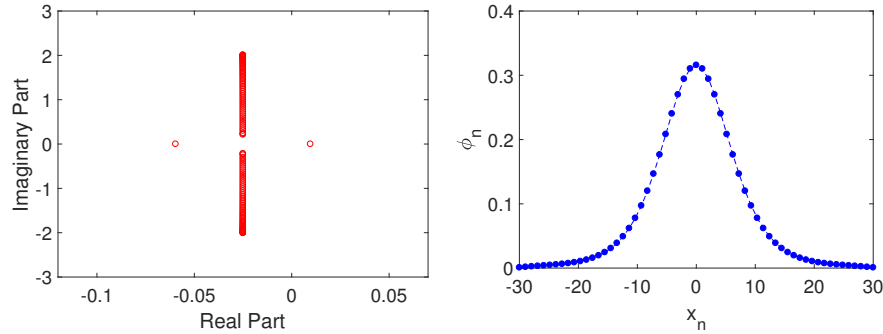


Σχήμα 2.7: Μετασταθής δυναμική και σύγκλιση στη βασική κατάσταση του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_1}$ , για αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_2}$  και πλάτος  $a = 1$ . Άλλες παράμετροι:  $K = 59$ ,  $\omega_d^2 = 0.036$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.05$ . Η μεταστροφή παρατηρείται στην εξέλιξη της Χαμιλτονιανής ενέργειας [πράσινη συνεχής καμπύλη].

**Παρατήρηση 2.4.1.** Παρατηρούμε εδώ ότι εφόσον ξεκινήσαμε με μία περιττή αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_2}$  και καταλήξαμε σε μία άρτια τελική κατάσταση  $\mathbf{C}_{E_1}$ , η ισοτιμία (parity) της λύσης δεν διατηρείται σε αυτή τη περίπτωση, όπως θα περιμέναμε. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί ένα σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης επειδή το σφάλμα στρογγυλοποιήσεως, το οποίο υπάρχει όταν η τροχιά βρίσκεται στην  $\mathbf{C}_{E_2}$ , μεγαλώνει εκθετικά κατά μήκος της άρτιας ασταθούς κατεύθυνσης η οποία οδηγεί το σύστημα να συγκλίνει στο  $\mathbf{C}_{E_1}$ .

**Σενάριο II:** Εξετάζουμε την εξέλιξη όταν η παράμετρος  $\omega_d^2$  είναι τυχαία, και η αρχική συνθήκη (2.94)  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_j}$  για διάφορα πλάτη.

Με το Σενάριο II θέλουμε να διερευνήσουμε το ρόλο της ισχύς της μη γραμμικότητας στη σύγκλιση της δυναμικής σε ένα σημείο ισορροπίας  $\Phi_j$ , όταν

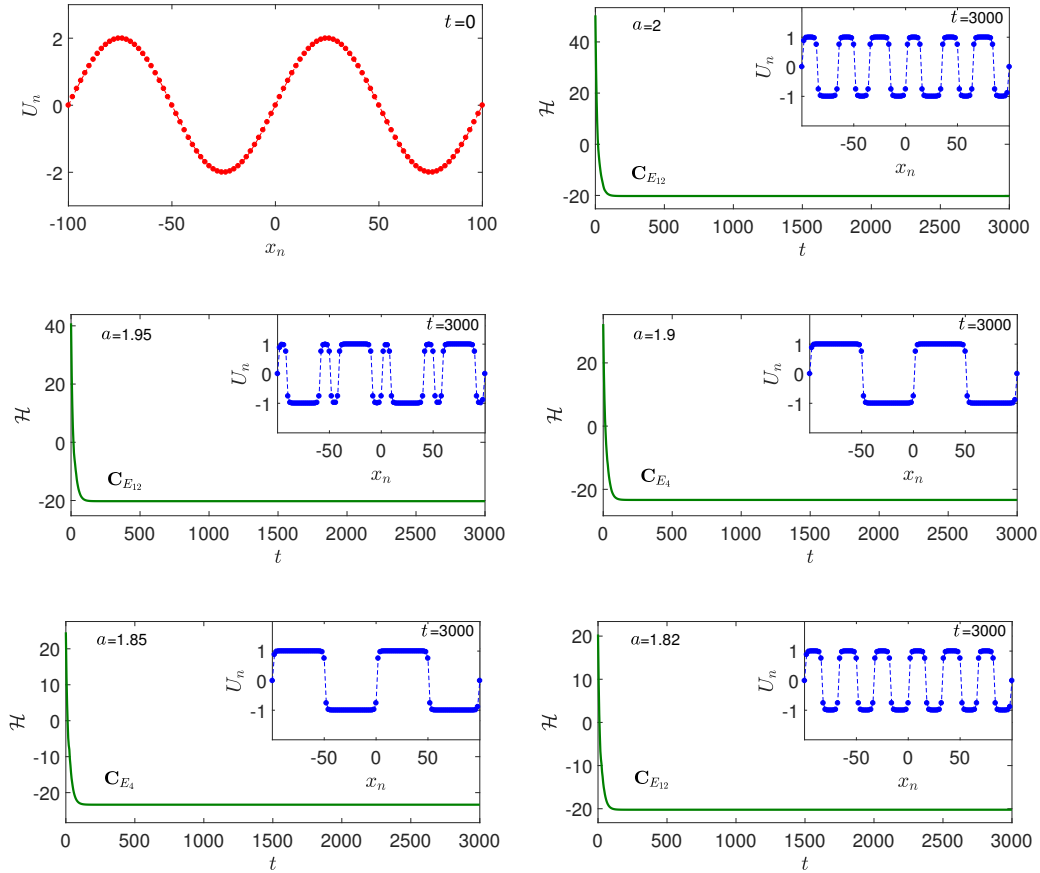


Σχήμα 2.8: Αριστερή εικόνα: Ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο σημείο ισορροπίας  $\Phi_2 \in \mathbf{C}_{E_2}$  (Σχήμα 2.7, πρώτη γραμμή, δεύτερη εικόνα). Δεξιά εικόνα: Ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή (με τιμή 0.0096) της αριστερής εικόνας.

η αρχική συνθήκη για διάφορα πλάτη σχετίζεται με ένα κλαδί με το τρόπο που ορίζεται παραπάνω. Επιλέγουμε αυτή τη φορά μεγάλες τιμές για τη παράμετρο διακλάδωσης  $\omega_d^2$  και για την νόρμα της αρχικής συνθήκης, έτσι εφόσον βρισκόμαστε πολύ μακριά από τη περιοχή του τοπικού διαγράμματος διακλάδωσης, δεν έχουμε αναμενόμενη εικόνα για την εξέλιξη της δυναμικής του συστήματος.

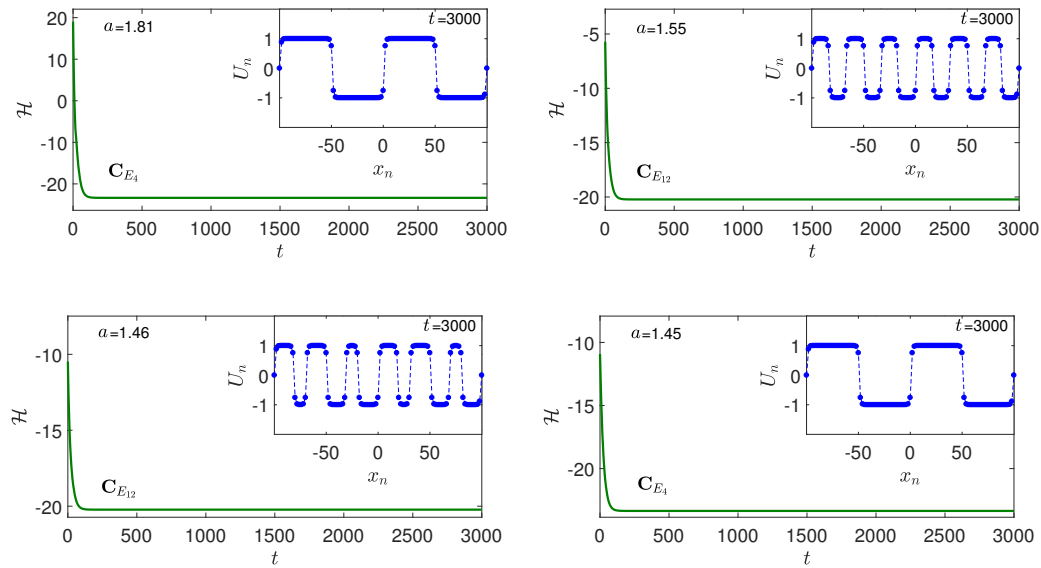
Για την αριθμητική μελέτη αυτού του σεναρίου, θεωρούμε δύο παραδείγματα για την αρχική συνθήκη (2.94):  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  και  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_9}$  εξετάζοντας την δυναμική για διάφορες τιμές του πλάτους  $a$ . Και για τα δύο παραδείγματα θεωρούμε τις εξής παραμέτρους:  $\omega_d^2 = 1$ ,  $K = 99$ ,  $L = 200$ ,  $\beta = 1$  και  $\delta = 0.05$ . Η ολοκλήρωση του συστήματος γίνεται μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 3000$ .

**Αρχική Συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$ :** Οι πρώτες δύο γραμμές του Σχήματος 2.9 απεικονίζουν την δυναμική της αρχικής συνθήκης  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  πλάτους  $a = 2$  και αντίστοιχης νόρμας  $\|U_n(0)\| = 14.14$ . Φαίνεται καθαρά ότι το σημείο όπου λάβαμε την αρχική συνθήκη,  $(\|U_n(0)\|, \omega_d^2) = (14.14, 1)$ , βρίσκεται πολύ μακριά από το αντίστοιχο τοπικό διάγραμμα διακλάδωσης, εφόσον το  $\omega_d^2 = 1$  είναι εκτός του πεπερασμένου φάσματος των ιδιοτιμών όπου ισχύει ότι  $E_{99} = 0.99$ . Σε αυτή τη περίπτωση το διάγραμμα διακλάδωσης είναι όμοιο με αυτό του Σχήματος 2.2. Το σύστημα συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_{12}}$  μειωμένης νόρμας  $\|\Phi_{12}\| = 9.37$ . Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι σε σχέση με το Σενάριο I, η σύγκλιση σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_{12}}$ , πραγματοποιείται χωρίς μεταστατή μεταβολή, όπως



Σχήμα 2.9: Δυναμική για αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$ , για  $\omega_d^2 = 1$ , για διάφορες τιμές πλάτους. Μειώνοντας τις τιμές του πλάτους, παρατηρούμε τη σύγκλιση σε σημεία ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών από το  $\mathbf{C}_{E_4}$ , και την εμφάνιση τιμών  $a$  για τις οποίες η λύση συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας  $\bar{\Phi}_4 \in \mathbf{C}_{E_4}$ . Παράμετροι:  $K = 99$ ,  $L = 200$ ,  $\beta = 1$  και  $\delta = 0.05$ .

επιβεβαιώνεται και από την Χαμιλτονιανή ενέργεια που φαίνεται στην εικόνα της δεύτερης γραμμής του Σχήματος 2.9. Το συμμετρικό μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας  $\Phi_{12} \in \mathbf{C}_{E_{12}}$  αντιστοιχεί στην ενέργεια  $\mathcal{H} = -20.22$ . Επίσης παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της δυναμικής του συστήματος είναι σε πλήρη συμφωνία με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, μιας και η τελική κατάσταση του συστήματος είναι ευσταθής έχοντας μόνο ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Όπως θα δούμε, αυτή η εικόνα κυριαρχεί και στα επόμενα αποτελέσματα της μελέτης μας. Μειώνοντας το πλάτος  $a$ , παρατηρούμε κάποια αξιοσημείωτα

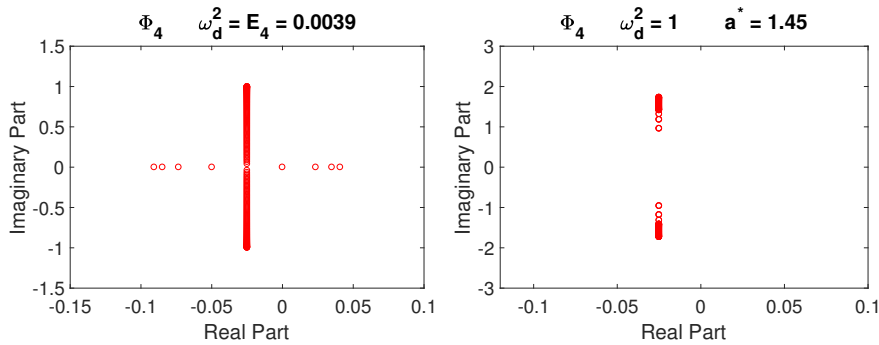


Σχήμα 2.10: (Συνέχεια του Σχήματος 2.9): Ανίχνευση ενός κατωφλιού ευστάθειας  $a^* = 1.45$ : Για  $a \leq a^*$ , η αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$ , συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας  $\Phi_4 \in \mathbf{C}_{E_4}$ .

χαρακτηριστικά. Για  $a = 1.95$ , με αντίστοιχη νόρμα  $\|U_n(0)\| = 13.8$  όπου η δυναμική φαίνεται στη πρώτη εικόνα της τρίτης γραμμής, παρατηρούμε την σύγκλιση σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας του  $\mathbf{C}_{E_{12}}$ . Αυτό έχει την ίδια νόρμα και την ίδια ενέργεια με το προηγούμενο αλλά η τελική κατάσταση έχει τελείως διαφορετικό προφίλ. Αυτό το αποτέλεσμα μας υποδεικνύει ότι έχουν πραγματοποιηθεί δευτερεύουσες διακλαδώσεις στο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_{12}}$ .

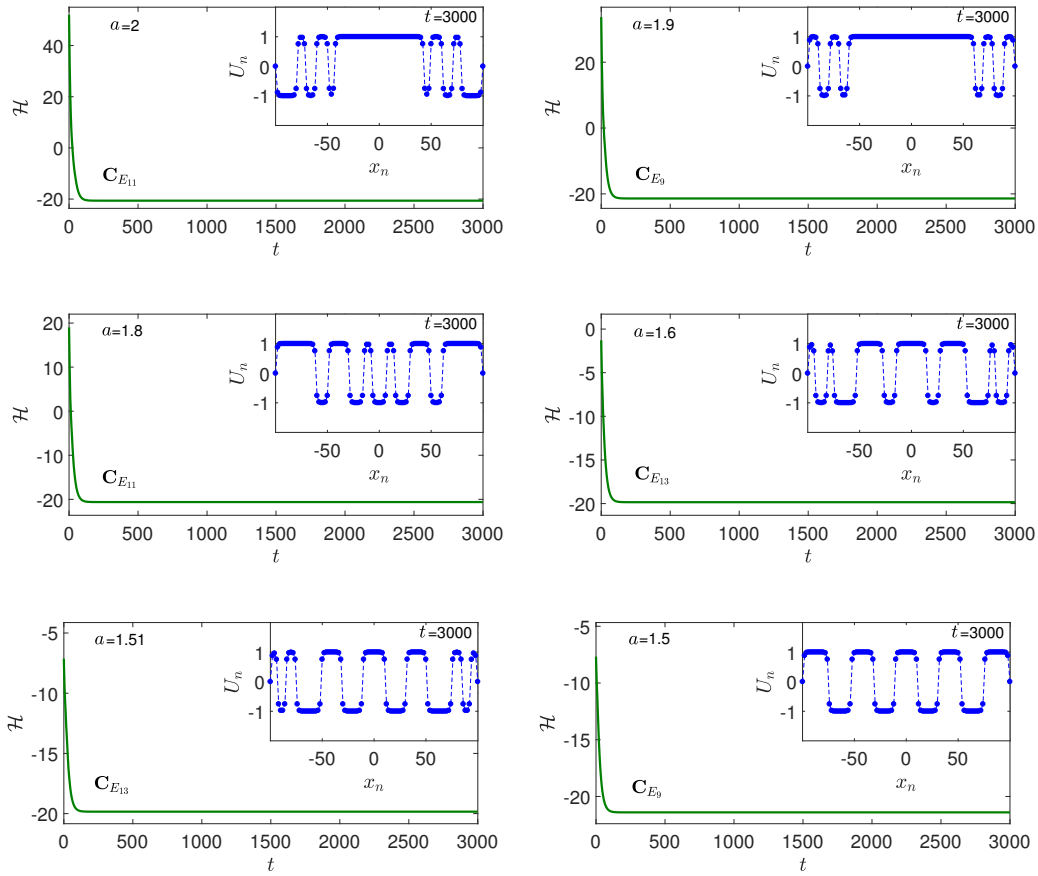
Μειώνοντας το πλάτος περισσότερο, διακρίνουμε τιμές πλάτους  $a = 1.9, 1.85, 1.81$  για τις οποίες η αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  με νόρμες  $\|U_n(0)\| = 13.4, 13.07, 12.8$  αντίστοιχα, συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_4}$ . Αυτό το σημείο ισορροπίας έχει νόρμα  $\|\Phi_4\| = 9.77$  και ενέρ-

για  $\mathcal{H} = -23.36$ . Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται στη δεύτερη εικόνα της τρίτης γραμμής και στη πρώτη εικόνα της τέταρτης γραμμής του Σχήματος 2.9, όπως επίσης και στη πρώτη εικόνα της πρώτης γραμμής του Σχήματος 2.10. Για όλες τις τιμές μεταξύ των προαναφερθέντων  $a$ , η αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  συγκλίνει σε γεωμετρικά διαφορετικές μη-γραμμικές καταστάσεις του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_{12}}$ , όπως απεικονίζονται στη δεύτερη εικόνα της πρώτης γραμμής και στη πρώτη εικόνα της δεύτερης γραμμής του Σχήματος 2.10, για πλάτη  $a = 1.55$  και  $a = 1.46$  αντίστοιχα. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι μια τέτοια συμπεριφορά μας υποδεικνύει ότι έχουν πραγματοποιηθεί διαδοχικές διακλαδώσεις στο κλαδί  $\mathbf{C}_{E_{12}}$  και τα καινούρια κλαδιά μπορεί να είναι ασύμπτωτα ή ακόμα και να διασταυρώνονται με το κλαδί  $\mathbf{C}_{E_4}$ . Τέλος διαπιστώνουμε ότι το πλάτος  $a^* = 1.45$  που αντιστοιχεί σε νόρμα της αρχικής συνθήκης  $\|U_n(0)\| = 10.25$ , ορίζει ένα **κατωφλικό πλάτος** του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_4}$ . Για όλα τα  $a \leq a^*$ , η αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας  $\Phi_4 \in \mathbf{C}_{E_4}$ . Άλλη μια παρατήρηση είναι ότι το  $\Phi_4$  είναι μια ελκτική κατάσταση και στις περιπτώσεις των τιμών πλάτους  $a = 1.9, 1.85, 1.81$ . Από την παραπάνω δυναμική συμπεριφορά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η επιλογή μιας αρχικής συνθήκης  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$ , με πλάτος μικρότερο από το κατωφλικό, ορίζει μια τροχιά στη περιοχή της ευσταθούς πολλαπλότητας του  $\mathbf{C}_{E_4}$ . Συμπληρωματικά το Σχήμα 2.11 απεικονίζει στην αριστερή εικόνα το διάγραμμα των ιδιοτιμών ενός σημείου ισορροπίας  $\Phi_4$  του ασταθούς κλάδου  $\mathbf{C}_{E_4}$  για  $\omega_d^2 = E_4 = 0.0039$ . Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του γραμμικού διακριτού προβλήματος



Σχήμα 2.11: Αριστερή εικόνα: Ιδιοτιμές που αντιστοιχούν σε σημείο ισορροπίας  $\Phi_4 \in \mathbf{C}_{E_4}$  (Ασταθής κλάδος). Δεξιά εικόνα: Ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο σημείο ισορροπίας  $\Phi_4 \in \mathbf{C}_{E_4}$  (Ευσταθής διακλαδισμένος κλάδος) που συνέκλινε η αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  για πλάτος  $a^* = 1.45$ .





Σχήμα 2.12: Δυναμική για μια αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_9}$ , με  $\omega_d^2 = 1$  και για διάφορες τιμές πλάτους  $a$ . Μειώνοντας το πλάτος παρατηρούμε σύγκλιση σε σημεία ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών από το  $\mathbf{C}_{E_9}$  και την εμφάνιση τιμών πλάτους  $a$  για τις οποίες η λύση συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας  $\Phi_9 \in \mathbf{C}_{E_9}$ . Το κατώφλι ευστάθειας ανιχνεύεται για  $a^* = 1.5$ . Άλλες παράμετροι:  $K = 99$ ,  $L = 200$ ,  $\beta = 1$  και  $\delta = 0.05$ .

ιδιοτιμών (2.76)-(2.77), που έχει μια τρισδιάστατη ασταθή πολλαπλότητα. Από την άλλη μεριά στη δεξιά εικόνα βλέπουμε το διάγραμμα των ιδιοτιμών της στάσιμης κατάστασης  $\Phi_4$  ενός διακλαδισμένου ευσταθούς κλαδιού, στην οποία κατέληξε η αρχική συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_4}$  για το κατωφλικό πλάτος  $a^* = 1.45$ .

**Αρχική Συνθήκη  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_9}$ :** Στο Σχήμα 2.12 βλέπουμε την δυναμική για την περίπτωση όπου η αρχική συνθήκη (2.94),  $U_n(0) \simeq \mathbf{C}_{E_9}$  και η

παράμετρος  $\omega_a^2 = 1$ . Μειώνοντας το πλάτος  $a$  παρατηρούμε την σύγκλιση σε μη-γραμμικά σημεία ισορροπίας διαφορετικών διακλαδισμένων κλαδιών με μια πλούσια χωρική δομή: Για πλάτος  $a = 2$  με αντίστοιχη νόρμα της αρχικής συνθήκης  $\|U_n(0)\| = 14.14$ , παρατηρούμε τη σύγκλιση στη στάσιμη κατάσταση  $\Phi_{11} \in \mathbf{C}_{E_{11}}$ , με νόρμα  $\|\Phi_{11}\| = 9.42$  και ενέργεια  $\mathcal{H} = -20.62$ . Για πλάτος  $a = 1.9$  όπου η νόρμα της αρχικής συνθήκης είναι  $\|U_n(0)\| = 13.43$ , πραγματοποιείται η σύγκλιση στη στάσιμη κατάσταση  $\Phi_9 \in \mathbf{C}_{E_9}$  με  $\|\Phi_9\| = 9.53$  και ενέργεια  $\mathcal{H} = -21.4$ . Στη περίπτωση  $a = 1.8$  με αντίστοιχη νόρμα  $\|U_n(0)\| = 12.72$  παρατηρούμε ότι ενώ η αρχική συνθήκη συγκλίνει και πάλι στη βασική κατάσταση  $\Phi_{11} \in \mathbf{C}_{E_{11}}$ , η δομή είναι διαφορετική από αυτή της περίπτωσης για  $a = 2$ . Στη συνέχεια για πλάτος  $a = 1.6$ , που αντιστοιχεί σε νόρμα  $\|U_n(0)\| = 11.31$ , η αρχική συνθήκη συγκλίνει στην στάσιμη κατάσταση  $\Phi_{13} \in \mathbf{C}_{E_{13}}$  με  $\|\Phi_{13}\| = 9.32$  και  $\mathcal{H} = -19.84$ . Για  $a = 1.51$  και  $\|U_n(0)\| = 10.68$  έχουμε σύγκλιση ξανά στη κατάσταση  $\Phi_{13} \in \mathbf{C}_{E_{13}}$  με  $\|\Phi_{13}\| = 9.32$ . Τελικά το κατωφλικό πλάτος για την δυναμική ευστάθεια του κλαδιού  $\mathbf{C}_{E_9}$  είναι  $a^* = 1.5$ , όπου  $\|U_n(0)\| = 10.6$ .

### 2.4.3 Εξέλιξη των Χωρικά Εντοπισμένων Αρχικών Συνθηκών

Τέλος, το τρίτο μέρος εξετάζει το ρόλο της δύναμης απόσβεσης στη δομή των κλαδιών των σημείων ισορροπίας. Σε αυτή τη μελέτη θεωρούμε εντοπισμένες αρχικές συνθήκες της μορφής:

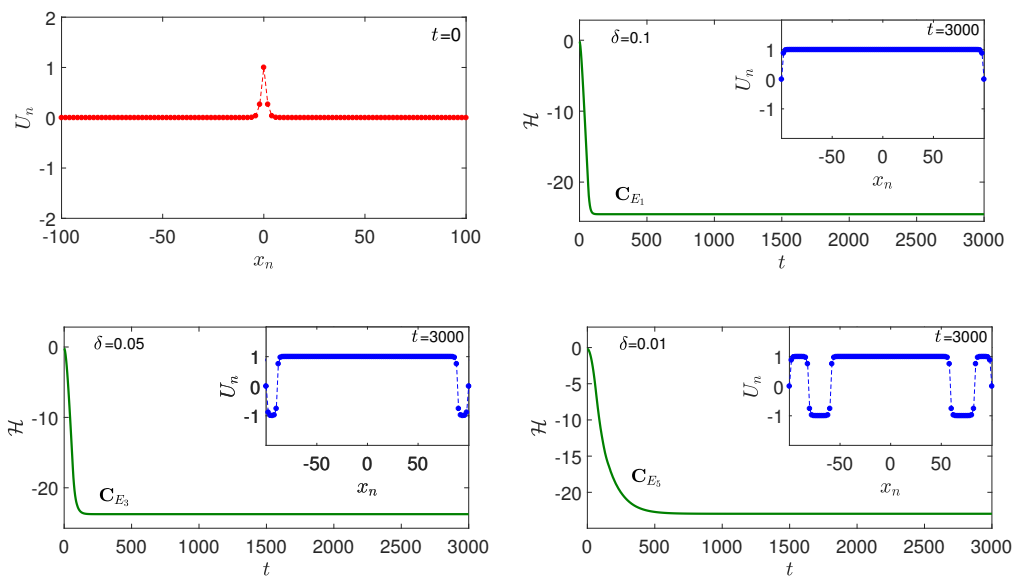
$$U_n(0) = U_{n,0} = a \operatorname{sech} \left( -\frac{L}{2} + nh \right), \quad (2.95)$$

όπου  $h = \frac{L}{K+1}$  είναι η απόσταση του πλέγματος και  $a > 0$  είναι το πλάτος της (2.94). Ενώ υποθέτουμε μηδενική αρχική ταχύτητα

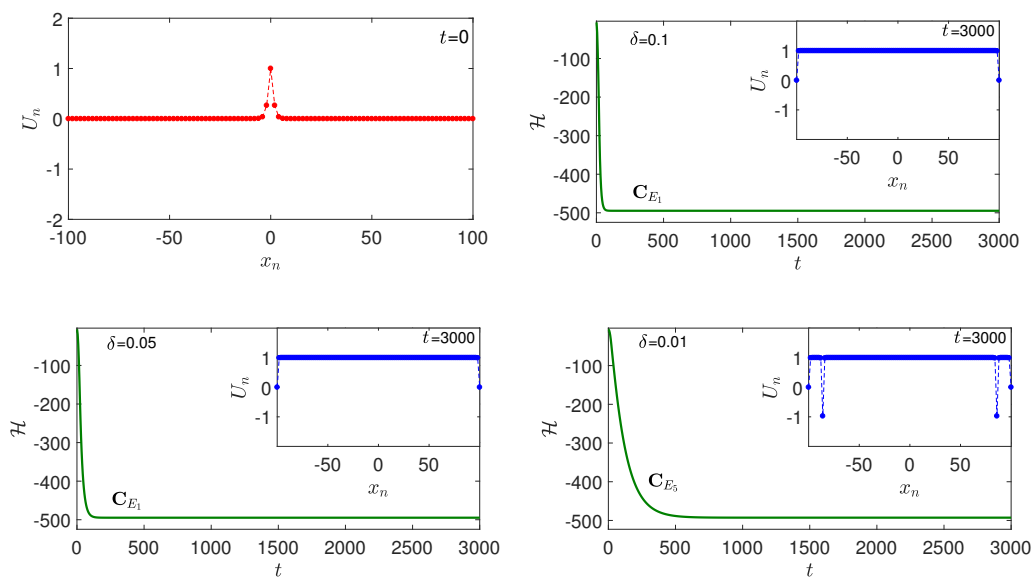
$$\dot{U}_n(0) = U_{n,1} = \mathbf{0}.$$

Επίσης σημειώνουμε ότι εφόσον θεωρούμε πεπερασμένη αλυσίδα, οι αρχικές συνθήκες (2.95) ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (2.5) μόνο ασυμπτωτικά. Ωστόσο αφού το μικρότερο ημι-μήκος της αλυσίδας έχει θεωρηθεί  $L/2 = 100$ , το σφάλμα είναι της τάξης  $10^{-44}$  συνεπώς δεν επηρεάζονται οι αριθμητικοί υπολογισμοί.

Το Σχήμα 2.13 απεικονίζει τη δυναμική της αρχικής συνθήκης (2.95) για τις παραμέτρους:  $\omega_a^2 = 1$ ,  $K = 99$ ,  $L = 200$  και  $\beta = 1$ . Στη πρώτη εικόνα του Σχήματος 2.13 παρατηρούμε το προφίλ της αρχικής συνθήκης. Οι υπόλοιπες



Σχήμα 2.13: Δυναμική για μια αρχική συνθήκη (2.95), για  $\omega_d^2 = 1$ ,  $K = 99$ ,  $L = 200$ ,  $\beta = 1$  και για διάφορες τιμές της δύναμης απόσβεσης  $\delta$ .



Σχήμα 2.14: Δυναμική για μια αρχική συνθήκη (2.95), για  $\omega_d^2 = 20$ ,  $K = 99$ ,  $L = 200$ ,  $\beta = 1$  και για διάφορες τιμές της δύναμης απόσβεσης  $\delta$ .

εικόνες απεικονίζουν την δυναμική του συστήματος για τις τιμές της δύναμης απόσβεσης  $\delta = 0.1, 0.05, 0.01$ . Για  $\delta = 0.1$  η σύγκλιση πραγματοποιείται στο σημείο ισορροπίας  $\Phi_1 \in \mathbf{C}_1$  που είναι και η βασική κατάσταση. Για μικρότερες τιμές της δύναμης απόσβεσης παρατηρούμε αλλαγή της τελικής κατάστασης. Εντοπίζεται μια κατωφλική τιμή για την δύναμη απόσβεσης  $\delta^* = 0.05$  κάτω από την οποία, το σύστημα συγκλίνει στα σημεία ισορροπίας  $\Phi_3 \in \mathbf{C}_3$  και  $\Phi_5 \in \mathbf{C}_5$ . Παρατηρούμε συνεπώς ότι για μεγάλες τιμές του  $\delta$  η τελική κατάσταση έχει τον ίδιο αριθμό σημείων μηδενισμού με την αρχική συνθήκη. Ενώ για μικρότερες τιμές του  $\delta$  περισσότεροι ταλαντωτές αλλάζουν πηγάδι δυναμικού που στη περίπτωση μας είναι το  $-1$ .

Την ίδια συμπεριφορά παρατηρούμε και στην περίπτωση του δεύτερου παραδείγματος του Σχήματος 2.14. Επειδή όμως σε αυτή την περίπτωση, έχουμε αυξήσει τη δύναμη της μη-γραμμικότητας  $\omega_d^2 = 20$ , η κατωφλική τιμή της δύναμης απόσβεσης για την οποία αλλάζει η τελική κατάσταση, είναι μικρότερη. Λαμβάνουμε αυτό το αποτέλεσμα εξαιτίας της περιορισμένης μεταφοράς ενέργειας, λόγω της μεγαλύτερης διακριτότητας του συστήματος.

## 2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετήσαμε τις δυναμικές μεταβάσεις μεταξύ σημείων ισορροπίας της αλυσίδας Klein–Gordon με τριβή, εφοδιασμένη με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Προσπαθήσαμε να διαλευκάνουμε το περίπλοκο ενεργειακό τοπίο που υπαγορεύει την αντίστοιχη δυναμική.

Αρχικά, συζητήσαμε τη σύγκλιση σε μοναδικό, μη-τετριμμένο σημείο ισορροπίας, καθώς το σύστημα ανήκει στη κλάση ενός δυναμικού συστήματος κλίσης, δεύτερου βαθμού. Αναδείξαμε το ρόλο της διακριτής εκδοχής της ανισότητας Łojasiewicz, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την κλάση συστημάτων. Στη συνέχεια, εφαρμόσαμε στη διακριτή περίπτωση, τη θεωρία καθολικών διακλαδώσεων, για να αποδείξουμε ότι τα κλαδιά των μη-γραμμικών σημείων ισορροπίας, διακλαδίζονται από τις γραμμικές ιδιοκαταστάσεις της διακριτής Λαπλασιανής. Κατά συνέπεια, χαρακτηρίσαμε τα κλαδιά των καταστάσεων ισορροπίας, από τον αριθμό των αλλαγών προσήμου. Ως εκ τούτου, τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας μπορεί να ορίζουν μη-τετριμμένες τοπολογικές παρεμβολές μεταξύ των προσκείμενων ελαχίστων του δυναμικού  $\phi^4$ .

Στην συνέχεια, πραγματοποιώντας αριθμητικές προσομοιώσεις σε συνδυασμό με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας των κλαδιών, καταφέραμε να αποκαλύψουμε σημαντικά χαρακτηριστικά σχετικά με την πολύπλοκη δομή της δυναμι-

κής της σύγκλισης. Είδαμε ότι η δυναμική αυτή εξαρτάται από τη διακριτότητα, τη μη-γραμμικότητα και τη τριβή. Στα αριθμητικά πειράματα, αρχικά θεωρήσαμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες, οι οποίες μοιράζονταν τον ίδιο αριθμό αλλαγών προσήμου με τα σημεία ισορροπίας ενός συγκεκριμένου κλαδίου. Μεταβάλλοντας τη δύναμη της μη-γραμμικότητας και της διακριτότητας, αποκαλύψαμε τον πλούτο των δυναμικών μεταβάσεων της δυναμικής της σύγκλισης, σε καταστάσεις ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών. Ενώ είδαμε την ποικιλία της χωρικής δομής των σημείων ισορροπίας. Επιπλέον καταλάβαμε το ρόλο του πλάτους της αρχικής συνθήκης στη σύγκλιση σε διαφορετικές τελικές καταστάσεις των κλαδιών.

Συνοψίζοντας, σε ένα απλό πλέγμα με τριβή, το οποίο περιγράφει την φαινομενολογία των μεταβατικών καταστάσεων, δείξαμε ότι ενώ ο καθολικός ελκυστής είναι τετριμμένος σε σχέση με την τοπολογία του χώρου των φάσεων, μπορεί να οδηγήσει σε ένα εξαιρετικά μη-τετριμμένο ενεργειακό τοπίο. Αυτό το τοπίο, ορίζεται από την πλούσια δομή του συνόλου των σημείων ισορροπίας και τη ποικιλία των πιθανοτήτων για την δυναμική της σύγκλισης.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε σε αυτή τη μελέτη, μπορεί να ανοίξουν το δρόμο για μια μελλοντική μελέτη σε πολλές ενδιαφέρουσες κατευθύνσεις. Μια σημαντική κατεύθυνση είναι το να διερευνήσουμε περαιτέρω τη δομή του διαγράμματος καθολικών διακλαδώσεων, έχοντας ως κίνητρο τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά τα οποία καταδεικνύονται στην παρούσα μελέτη. Άλλη μία φυσική επιλογή είναι να επεκτείνουμε την παρούσα θεώρηση σε περιπτώσεις ανώτερης διάστασης, όπου ο ρόλος της σύζευξης των ταλαντωτών είναι πιο σημαντικός. Είναι επίσης σχετικό να θεωρήσουμε, μέσω των μεθόδων που παρουσιάζονται εδώ, τη φαινομενολογία διαφορετικών τύπων δυναμικού. Όπως το δυναμικό Morse, το οποίο σχετίζεται με τη μετουσίωση του DNA, όπως έχει μοντελοποιηθεί από το μοντέλο Peyrard–Bishop [59]. Εικάζουμε ότι οι τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι περισσότερο σχετικές σε τέτοια προβλήματα. Τέλος, είναι σίγουρα σχετικό να διερευνήσουμε τη δυναμική της σύγκλισης σε άλλα πλέγματα με τριβή, δεύτερης ή ανώτερης τάξης, όπως τη δυναμική των μη-γραμμικών μετα-υλικών, (βλ. [72, 73]).

## Κεφάλαιο 3

# Έκρηξη για τη Διακριτή Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger με Κέρδος και Απώλεια Ενέργειας

### 3.1 Η Διακριτή Μη-Γραμμική Εξίσωση Schrödinger

Η διακριτή μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger (DNLS)

$$i\dot{\psi}_n + k(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + f(|\psi_n|^2)\psi_n = 0,$$

είναι ένα από τα θεμελιώδη μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα πλέγματος. Στην Εξ. (3.1), η  $\psi_n(t)$  είναι η μιγαδική μεταβλητή του συζευγμένου ταλαντωτή στην  $n$ -οστή θέση του μονοδιάστατου πλέγματος. Με  $k = 1/2h^2$  συμβολίζουμε τη παράμετρο διακριτοποίησης και με  $h$  την απόσταση μεταξύ των ταλαντωτών. Η ικανοποιητικά ομαλή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αναπαριστά μια γενικευμένη μη-γραμμικότητα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και προηγούμενα, το συνεχές όριο της DNLS Εξ. (3.1) αντιστοιχεί στην μονοδιάστατη μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS), η οποία είναι μια μερική διαφορική εξίσωση (PDE).

Ομοίως με την NLS, που είναι το πρότυπο μοντέλο για την διάδοση μη-γραμμικών κυμάτων, η εξίσωση DNLS είναι συνδεδεμένη με τη μαθηματική περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων. Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων είναι: η διάδοση αυτοπαγιδευμένων μορφών στα βιομόρια και στις οπτικές ίνες, στα συμπηκνώματα Bose–Einstein στα πλέγματα, (βλ. [18, 41, 42, 43]). Επιπλέον,

η εξίσωση DNLS σχετίζεται με ένα άλλο σημαντικό πλέγμα, την εξίσωση DKG

$$\ddot{U}_n - \varepsilon(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + W'(U_n) = 0. \quad (3.1)$$

Στην Εξ. (3.1), η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι η παράμετρος σύζευξης των ταλαντωτών, ενώ η  $W(U)$  είναι η συνάρτηση δυναμικού. Η εξίσωση DNLS (3.1) προκύπτει, όταν αναζητούμε εκτεταμένες λύσεις για την εξίσωση DKG, της μορφής:

$$U_n(t) = \psi_n(t)e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad \psi_n \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

όπου με c.c. συμβολίζουμε τη μιγαδική συζυγία.

Για παράδειγμα, στην [45] αναφέρεται ότι, στη περίπτωση της Εξ. (3.1) η οποία υπακούει σε ένα κυβικό ή τεταρτοβάθμιο δυναμικό  $W(U)$ , η περιβάλλουσα  $\psi_n(t)$  των λύσεων (3.2), ικανοποιεί την εξίσωση DNLS με κυβική μη γραμμικότητα ( $f(\rho) = \rho$ ).

Ωστόσο, μια κρίσιμη σημασίας διαφορά μεταξύ των μοντέλων DNLS και DKG, αφορά το ζήτημα της καθολικής ύπαρξης των λύσεων τους στο χρόνο. Η εξίσωση DKG μπορεί να επιδεικνύει λύσεις οι οποίες εκρήγνυνται σε πεπερασμένο χρόνο, ανάλογα με τον τύπο δυναμικού και το μέγεθος των αρχικών δεδομένων. Γενικά το φαινόμενο της έκρηξης χαρακτηρίζεται από την ισχύ της μη-γραμμικότητας όταν τα αρχικά δεδομένα είναι αρκετά μεγάλα. Ωστόσο, η εξίσωση DKG παρέχει ένα παράδειγμα, στο οποίο τα αρχικά δεδομένα μπορεί να περιέχονται ακόμη και βαθιά μέσα στο πεδίο έλξης μιας ευσταθούς κατάστασης. Μια τέτοια διαδικασία καταδεικνύει την ύπαρξη μιας ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ των αλληλεπιδρώντων ταλαντωτών, που μπορεί να οδηγήσει στη δυναμική της έκρηξης προς το άπειρο. Το πιο απλό παράδειγμα το οποίο σχετίζεται με την παραπάνω φαινομενολογία, είναι η εξίσωση DKG με ένα τεταρτοβάθμιο δυναμικό, (βλ. [1]). Από την άλλη μεριά, η αντίστοιχη εξίσωση DNLS (3.1), δεν επιδεικνύει δυναμική έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο. Οι λύσεις του μοντέλου DNLS με γενικευμένες μη-γραμμικότητες  $f$ , υπάρχουν πάντα καθολικά στο χρόνο, σε αντίθεση με το αντίστοιχο μοντέλο της μη γραμμικής εξίσωσης NLS, (βλ. [67]). Αυτή η εντυπωσιακή διαφορά μεταξύ της εξίσωσης DNLS και της συνεχούς περίπτωσης της, ισχύει ανεξάρτητα από το μέγεθος των αρχικών δεδομένων ή ακόμα και της διάστασης του πλέγματος, (βλ. [37]).

Ως εκ τούτου, σε πλέγματα τύπου DNLS, το φαινόμενο της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, μπορεί να συμβεί μόνο υπό τη παρουσία γραμμικών/μη γραμμικών επιδράσεων. Γι' αυτό το λόγο, θα διερευνήσουμε την δυναμική της διακριτής μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger με κέρδος και απώλεια ενέργειας,

$$i\dot{\psi}_n - sk(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + |\psi_n|^2\psi_n = i\gamma\psi_n + i\delta|\psi_n|^2\psi_n, \quad (3.3)$$

με  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Στην Εξ. (3.3), το  $\psi_n(t)$  είναι η μιγαδική μεταβλητή που περιγράφει τη δυναμική του ταλαντωτή στη  $n$ -οστή θέση του πλέγματος. Θεωρούμε ένα τυχαίο αριθμό  $N + 1$  ταλαντωτών οι οποίοι τοποθετούνται στο διάστημα  $\Omega = [-L, L]$  μήκους  $2L$  και ισαπέχουν. Για  $s = -1$  έχουμε τη λεγόμενη εστιάζουσα περίπτωση (focusing), όπου υπάρχουν λύσεις διακριτών “φωτεινών σολιτονίων”. Για  $s = 1$  έχουμε τη αφεστιάζουσα περίπτωση (defocusing) όπου υπάρχουν λύσεις διακριτών “σκοτεινών σολιτονίων”. Σημειώνουμε ότι οι λύσεις αυτές δεν δίνονται σε κλειστή μορφή, καθώς το Χαμιλτονιανό όριο  $\gamma = \delta = 0$  δεν είναι πλήρως ολοκληρώσιμο. Ωστόσο, για την ύπαρξή τους, η οποία αποδεικνύεται με μια ποικιλία μεθόδων, παραπέμπουμε στην μονογραφία [41]. Συμβολίζουμε με  $k = 1/2h^2$  την παράμετρο διακριτοποίησης και με  $h = \frac{2L}{N}$  την απόσταση μεταξύ των ταλαντωτών του πλέγματος. Οι ταλαντωτές τοποθετούνται στα σημεία

$$x_n = -L + nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

του διαστήματος  $\Omega$ . Μαζί με τις αρχικές συνθήκες

$$\psi_n(0) = \psi_{n,0}, \quad (3.5)$$

εφοδιάζουμε την Εξ. (3.3) είτε με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$\psi_n = \psi_{n+N} \quad (3.6)$$

ή με συνοριακές συνθήκες *Dirichlet*

$$\psi_0 = \psi_N = 0. \quad (3.7)$$

Μπορούμε ακόμη, να θεωρήσουμε ένα άπειρο πλέγμα εφοδιασμένο με μηδενιζόμενες συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \psi_n = 0. \quad (3.8)$$

Για λόγους συντομίας θα συμβολίζουμε με  $(\mathcal{P})$ , το πρόβλημα των περιοδικών αρχικών - συνοριακών τιμών (3.3)-(3.5)-(3.6), ενώ με  $(\mathcal{D})$  το πρόβλημα των *Dirichlet* ή μηδενιζόμενων αρχικών - συνοριακών τιμών (3.3)-(3.5)-(3.7) ή (3.8). Η Εξ. (3.3), είναι εφοδιασμένη με γραμμικές και μη-γραμμικές επιδράσεις κέρδους/απώλειας. Η παράμετρος  $\gamma$  περιγράφει τη γραμμική απώλεια ( $\gamma < 0$ ) (ή



κέρδος ( $\gamma > 0$ ), ενώ η παράμετρος  $\delta$  το μη-γραμμικό κέρδος ( $\delta > 0$ ) (ή απώλεια ( $\delta < 0$ )). Οι επιδράσεις αυτές σχετίζονται με φυσικά φαινόμενα όπως, η εξέλιξη των εντοπισμένων μορφών στην μη-γραμμική οπτική, (βλ. [24, 39, 48, 49]). Στο πλαίσιο αυτό, η παράμετρος  $\gamma$  περιγράφει τη γραμμική απορρόφηση της ενέργειας ( $\gamma < 0$ ) (ή τη γραμμική ενίσχυση της ενέργειας ( $\gamma > 0$ )), ενώ η παράμετρος  $\delta$  τη μη-γραμμική ενίσχυση ( $\delta > 0$ ) (ή την μη-γραμμική απορρόφηση ( $\delta < 0$ )). Για το ρόλο αυτών των επιδράσεων σε διακριτές και συνεχείς περιπτώσεις διαφόρων συστημάτων, βλ. [3, 4, 5, 23, 28, 44]. Γενικά, τέτοιες επιδράσεις παίζουν ένα κρίσιμη σημασίας ρόλο στην ευστάθεια των εντοπισμένων μορφών. Ωστόσο, η πιθανή αστάθεια τέτοιων δομών, οδηγεί στο φαινόμενο της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό το φαινόμενο έχει αποδειχθεί να είναι, ένα κύριο χαρακτηριστικό της δυναμικής συμπεριφοράς των μοντέλων DNLS τα οποία περιέχουν επιδράσεις κέρδους/απώλειας ενέργειας (βλ [24, 49]).

Ξεκινάμε την παρουσίαση της μελέτης μας, όπου στην πρώτη παράγραφο αναφέρουμε τα αποτελέσματα για την καλή συναρτησιακή τοποθέτηση των προβλημάτων ( $\mathcal{P}$ ) και ( $\mathcal{D}$ ). Στη συνέχεια θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών ( $\mathcal{P}$ ), περιγράφοντας τις αναλυτικές συνθήκες για την έκρηξη των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο. Το κίνητρο για την επιλογή αυτών των μεθόδων, έρχεται από τα αποτελέσματα της δυναμικής της συνεχούς περίπτωσης του μοντέλου, τα οποία συζητούνται στην αναφορά [6]. Επεκτείνοντας τις τεχνικές αυτές, από τον συνεχή στον διακριτό χώρο και χρησιμοποιώντας ένα συναρτησιακό κέρδους, αποδεικνύουμε ένα αναλυτικό άνω φράγμα για το χρόνο έκρηξης. Αυτό το άνω φράγμα είναι η κατά μέσο όρο υπολογισμένη νόρμα, των αρχικών δεδομένων και των επιδράσεων  $\gamma$  και  $\delta$ .

Παρατηρούμε ότι οι περιοχές της έκρηξης και της φθοράς των λύσεων ορίζονται από τις τιμές των παραμέτρων,  $\gamma, \delta > 0$  και  $\gamma, \delta < 0$  αντίστοιχα. Ενώ ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι, στην περιοχή όπου  $\gamma < 0, \delta > 0$ , διακρίνουμε μια κρίσιμη τιμή για τη γραμμική απώλεια,  $\gamma^* < 0$ , η οποία διαχωρίζει τη δυναμική της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο από τη φθορά των λύσεων. Την ίδια εικόνα έχουμε και στη συνεχή περίπτωση του μοντέλου.

Στη συνέχεια, θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών ( $\mathcal{D}$ ). Για αυτό το πρόβλημα, ο χώρος των φάσεων είναι ο χώρος των τετραγωνικά αθροίσμων ακολουθιών,  $\ell^2$ . Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις εγκλεισμού,  $\ell^q \subset \ell^p$  για  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ , μεταξύ των χώρων  $\ell^p$  και διακρίνουμε αυτή τη φορά, ένα κάτω φράγμα για τον χρόνο έκρηξης των λύσεων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε εδώ, ότι τα παραπάνω αναλυτικά επιχειρήματα ισχύουν μόνο για τα εγγενώς διακριτά μοντέλα και όχι για τις αντίστοιχες συνεχείς περιπτώσεις τους. Οι χώροι  $L^p(\Omega)$ , εμφυτεύονται ο ένας στον άλλο με αντίστροφη σειρά σε σχέση με

τις εμφυτεύσεις των χώρων  $\ell^p$ , όταν  $\Omega \subset \mathbb{R}^K$ , και ο  $K \geq 1$  είναι πεπερασμένος. Ενώ από την άλλη μεριά, οι εμφυτεύσεις για τους χώρους  $\ell^p$ , δεν ισχύουν όταν  $\Omega = \mathbb{R}^K$ , (βλ. [2]). Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η εκδήλωση της επίδρασης της διακριτότητας, η οποία είναι υπεύθυνη για την παραβίαση του αναλλοίωτου ως προς τις όποιες χωρικές μετατοπίσεις (translational invariance). Το τελευταίο είναι ένα κύριο χαρακτηριστικό μεταξύ των διαφορών των διακριτών και συνεχών περιπτώσεων των μοντέλων, (βλ. [41]).

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε την αριθμητική διερεύνηση για την δυναμική των προβλημάτων,  $(\mathcal{P})$  και  $(\mathcal{D})$ . θέλουμε να εξετάσουμε την ισχύ των αναλυτικών αποτελεσμάτων, καθώς και την συμπεριφορά του συστήματος, σε διάφορες περιπτώσεις των παραμέτρων. Θεωρούμε τρία διαφορετικά παραδείγματα αρχικών συνθηκών: χωρικά εκτεταμένες, μηδενιζόμενες και φθίνουσες σε ένα πεπερασμένο υπόβαθρο.

Προχωρούμε στη παρουσίαση των αποτελεσμάτων των αριθμητικών προσομοιώσεων, οι οποίες σχετίζονται με το πρόβλημα  $(\mathcal{P})$  και έχουν τη μορφή διακριτών επίπεδων κυμάτων. Σε αυτή τη περίπτωση, παρατηρούμε μια εξαιρετική συμφωνία μεταξύ του αναλυτικού άνω φράγματος και του αριθμητικού χρόνου έκρηξης. Αυτή η συμφωνία ισχύει για διάφορες τιμές των παραμέτρων του πλέγματος και των αρχικών συνθηκών. Αυτή η εξαιρετική συμφωνία τόσο για την εστιάζουσα περίπτωση όσο και για την αφεστιάζουσα, επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι τα γραφήματα ως προς το χρόνο, για την έκρηξη του υποβάθρου και του αναλυτικού άνω φράγματος για τον χρόνο έκρηξης του συναρτησιακού της νόρμας, συμπίπτουν. Στην πραγματικότητα, η εξέλιξη του συναρτησιακού αποδεικνύεται να είναι αυτή των εκτεταμένων αρχικών συνθηκών, που διέπονται από μια κυβική  $(\Sigma\Delta E)$ . Σε αυτή την περίπτωση, η έκρηξη της λύσης εκδηλώνεται μέσω μιας αύξησης του πλάτους της αρχικής κατάστασης, σε όλο το πλέγμα. Αυτού του είδους η συμπεριφορά, ορίζει την *ασθενή ή εκτεταμένη έκρηξη*. Θεωρώντας και την κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$ , επιβεβαιώνεται αριθμητικά ότι η αναλυτική εκτίμηση της παραμέτρου είναι αρκετά ακριβής. Για  $\gamma < \gamma^*$  η λύση φθίνει και για  $\gamma > \gamma^*$  η λύση εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Στην επόμενη παράγραφο, παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις μηδενιζόμενες αρχικές συνθήκες, οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος  $(\mathcal{P})$ . Αυτές οι συνθήκες σχετίζονται ασυμπτωτικά και με τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet του προβλήματος  $(\mathcal{D})$ . Επίσης έχουν τη μορφή ενός διακριτοποιημένου προφίλ, τύπου sech και θυμίζουν ένα διακριτό φωτεινό σολιτόνιο. Φαίνεται πώς η συμπεριφορά του συστήματος υπό τις χωρικά εντοπισμένες αρχικές συνθήκες, είναι πολυπλοκότερη σε σχέση με αυτή των εκτεταμένων αρχικών συνθηκών. Εφόσον τα εντοπισμένα αρχικά δεδομένα

συμφωνούν και με τα δύο προβλήματα, ( $\mathcal{P}$ ) και ( $\mathcal{D}$ ), εξετάζουμε του αριθμητικούς χρόνους έκρηξης έναντι τόσο του αναλυτικού άνω φράγματος όσο και του κάτω αντίστοιχα. Παρατηρούμε έπειτα την εκδήλωση δύο διαφορετικών τύπων μεταβατικής συμπεριφοράς πριν την εκδήλωση της έκρηξης. Ο πρώτος, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μια μεταβατική διασπορά ενέργειας στα αρχικά στάδια της εξέλιξης και την έκρηξη ενός σημαντικού μέρους του πλέγματος. Αυτή η συμπεριφορά θυμίζει την εκτεταμένο τύπο έκρηξης, και εκδηλώνεται σε περιπτώσεις μικρότερης διακριτότητας και για μικρά πλάτη των αρχικών συνθηκών. Γενικά μια τέτοια συμπεριφορά, επιδεικνύουν αφεστιάζοντα πλέγματα. Όταν πραγματοποιείται εκτεταμένη έκρηξη, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης είναι κοντά (και σε μερικές περιπτώσεις σε εξαιρετική συμφωνία), με το αναλυτικό άνω φράγμα. Το δεύτερο είναι η εντοπισμένη ή ισχυρή έκρηξη. Αυτός ο τύπος έκρηξης παρουσιάζει εντοπισμό της ενέργειας και σε μερικές περιπτώσεις εκδηλώνεται από μια εξέλιξη, πριν την έκρηξη, όμοια με τις αρχικές συνθήκες. Επίσης, αυτός ο τύπος έκρηξης εκδηλώνεται σε περιπτώσεις μεγαλύτερης διακριτότητας και μεγαλύτερου πλάτους για τις αρχικές συνθήκες. Ενώ τέτοια συμπεριφορά, επιδεικνύουν εστιάζοντα πλέγματα. Όταν πραγματοποιείται η εντοπισμένη έκρηξη, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης συγκλίνουν σε μια εξαιρετική συμφωνία με το αναλυτικό κάτω φράγμα. Στη περίπτωση ενδιάμεσης διακριτότητας, οι χρόνοι έκρηξης, βρίσκονται μεταξύ του άνω και κάτω φράγματος.

Η αριθμητική διερεύνηση καταλήγει, με τη μελέτη της δυναμικής των αρχικών συνθηκών που φθίνουν σε ένα πεπερασμένο (μη-μηδενικό) υπόβαθρο. Αυτές έχουν τη μορφή ενός διακριτοποιημένου προφίλ  $\tanh^2$ . Τέτοιες αρχικές συνθήκες είναι συμβατές με το πρόβλημα ( $\mathcal{P}$ ) και θυμίζουν το προφίλ ενός βυθίσματος της πυκνότητας πάνω σε ένα πεπερασμένο υπόβαθρο, δηλαδή ένα διακριτό σκοτεινό σολιτόνιο. Τα ευρήματα της αριθμητικής μελέτης για την αφεστιάζουσα περίπτωση, επιβεβαιώνουν την εξαιρετική συμφωνία των αριθμητικών χρόνων έκρηξης με το αναλυτικό φράγμα, όπως και στη περίπτωση των εκτεταμένων αρχικών συνθηκών. Παρόλο που αναλυτικά το κάτω φράγμα δεν ισχύει για την παραπάνω κλάση αρχικών συνθηκών, (εφόσον δεν ικανοποιούν το πρόβλημα ( $\mathcal{D}$ )), το περιλαμβάνουμε στις αριθμητικές προσομοιώσεις και φαίνεται να είναι κάτω φράγμα. Οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται μεταξύ των αναλυτικών εκτιμήσεων. Επιπλέον, στην εστιάζουσα περίπτωση, παρατηρούμε ότι οι αριθμητικοί χρόνοι προσεγγίζουν το κάτω φράγμα καθώς το σύστημα προσεγγίζει το συνεχές όριο. Ενώ όταν αυξάνουμε την απόσταση των ταλαντωτών στο πλέγμα, οι αριθμητικοί χρόνοι συγκλίνουν στο άνω φράγμα. Αυτή η εντυπωσιακή συμπεριφορά έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα της περίπτωσης των εντοπισμένων αρχικών συνθηκών. Ενώ δίνει το κίνητρο για

μια μελλοντική διερεύνηση που να εξηγεί αυτή τη συμπεριφορά.

## 3.2 Έκφραση σε Πεπερασμένο Χρόνο

### 3.2.1 Χρονικά Τοπική Ύπαρξη Λύσεων

Θα αναφέρουμε σε αυτό το σημείο κάποιες πληροφορίες για την συναρτησιακή τοποθέτηση του προβλήματος. Για συντομία, αναφέρουμε μόνο την εστιάζουσα περίπτωση του προβλήματος ( $\mathcal{P}$ ). Σημειώνουμε όμως, ότι τα αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και στη περίπτωση του προβλήματος ( $\mathcal{D}$ ), είτε για την εστιάζουσα είτε για την αφεστιάζουσα περίπτωση και μπορούν να αποδειχθούν με παρόμοιο τρόπο.

Θεωρούμε το πρόβλημα ( $\mathcal{P}$ ) στο χώρο των περιοδικών ακολουθιών με περίοδο  $N$ ,

$$\ell_{\text{per}}^p := \left\{ \psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C} : \psi_n = \psi_{n+N}, \quad \|\psi\|_{\ell_{\text{per}}^p} := \left( h \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad (3.9)$$

$1 \leq p < \infty$ . Σημειώνουμε εδώ, ότι ο ορισμός της νόρμας  $\ell_{\text{per}}^p$ , προκύπτει από την αριθμητική προσέγγιση της νόρμας  $L^p(\Omega)$ . Η περίπτωση  $h = O(1)$  αντιστοιχεί στη διακριτή περίπτωση, ενώ όταν  $h \rightarrow 0$  τότε, προσεγγίζουμε τη συνεχή περίπτωση της εξίσωσης NLS. Αν θέσουμε  $p = 2$  στην (3.9), θα λάβουμε τον συνήθη χώρο Hilbert των τετραγωνικά αθροίσιμων περιοδικών ακολουθιών, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το πραγματικό εσωτερικό γινόμενο

$$(\psi, \phi)_{\ell_{\text{per}}^2} = h \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \bar{\phi}_n \quad \psi, \phi \in \ell_{\text{per}}^2. \quad (3.10)$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό  $\Delta_d$  για την μονοδιάστατη διακριτή Λαπλασιανή

$$\Delta_d : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow \ell_{\text{per}}^2, \quad \{\Delta_d \psi\}_{n \in \mathbb{Z}} = \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}, \quad (3.11)$$

η οποία ορίζει ένα  $\mathbb{C}$ -γραμμικό, αυτοσυζυγή και αρνητικό τελεστή στον χώρο  $\ell_{\text{per}}^2$ . Οι ιδιότητες του προηγούμενου τελεστή δείχνονται στο ακόλουθο Λήμμα.

**Λήμμα 3.2.1.** Για κάθε  $\psi \in \ell_{\text{per}}^2$ , θεωρούμε το γραμμικό τελεστή  $(B\psi)_{n \in \mathbb{Z}} = \psi_{n+1} - \psi_n$ . Ο τελεστής  $\Delta_d : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow \ell_{\text{per}}^2$  ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

$$(\Delta_d \psi, \psi)_{\ell_{\text{per}}^2} = -\|B\psi\|_{\ell_{\text{per}}^2}^2 \leq 0, \quad (3.12)$$

$$(\Delta_d \phi, \psi)_{\ell_{\text{per}}^2} = -(B\phi, B\psi)_{\ell_{\text{per}}^2} = (\phi, \Delta_d \psi)_{\ell_{\text{per}}^2}, \quad \forall \phi, \psi \in \ell_{\text{per}}^2. \quad (3.13)$$

*Απόδειξη.* Η άθροιση κατά παράγοντες για δύο διακριτές συναρτήσεις  $\{\psi_n\}_{n=0}^{n=N}$  και  $\{\phi_n\}_{n=0}^{n=N}$  δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{n=0}^N (\psi_{n+1} - \psi_n) \phi_n = (\psi_{N+1} \phi_{N+1} - \psi_0 \phi_0) - \sum_{n=0}^N (\phi_{n+1} - \phi_n) \psi_{n+1}.$$

Αν εφαρμόσουμε τη παραπάνω σχέση και τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες (2.4), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \psi_n \bar{\psi}_n &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \bar{\psi}_n \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_{n+1} - \psi_n) \bar{\psi}_n + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_{n-1} - \psi_n) \bar{\psi}_n \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\psi_{n+1} - \psi_n) \bar{\psi}_n - \operatorname{Re} \sum_{m=-1}^{N-2} (\psi_{m+1} - \psi_m) \bar{\psi}_{m+1} \\ &= \operatorname{Re}[\bar{\psi}_N \psi_N - \bar{\psi}_0 \psi_0] - \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\psi}_{n+1} - \bar{\psi}_n) \psi_{n+1} \\ &\quad - \operatorname{Re}[\psi_{N-1} \bar{\psi}_{N-1} - \psi_{-1} \bar{\psi}_{-1}] + \operatorname{Re} \sum_{m=-1}^{N-2} (\bar{\psi}_{m+1} - \bar{\psi}_m) \psi_m. \end{aligned}$$

Δηλαδή προκύπτει η σχέση

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \psi_n \bar{\psi}_n = -\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\psi}_{n+1} - \bar{\psi}_n) \psi_{n+1} + \operatorname{Re} \sum_{m=-1}^{N-2} (\bar{\psi}_{m+1} - \bar{\psi}_m) \psi_m.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε πάλι τις συνοριακές συνθήκες, μπορούμε να παρατηρή-

σοιμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\psi}_{n+1} - \bar{\psi}_n) \psi_{n+1} + \operatorname{Re}[\psi_{-1}(\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_{-1})] + \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{N-2} (\bar{\psi}_{m+1} - \bar{\psi}_m) \psi_m \\
 & = - \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\psi}_{n+1} - \bar{\psi}_n) \psi_{n+1} + \operatorname{Re}[\psi_{N-1}(\bar{\psi}_N - \bar{\psi}_{N-1})] \\
 & + \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{N-2} (\bar{\psi}_{m+1} - \bar{\psi}_m) \psi_m.
 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \psi_n \bar{\psi}_n & = - \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\psi}_{n+1} - \bar{\psi}_n) (\psi_{n+1} - \psi_n) \\
 & = - \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_{n+1} - \psi_n|^2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (3.14) με  $h$ , λαμβάνουμε την Εξ. (3.12). Από την άλλη, αν επαναλάβουμε τη παραπάνω διαδικασία για τη ποσότητα  $\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \phi_n \bar{\psi}_n$ , θα λάβουμε την Εξ. (3.13).  $\square$

Συνεπώς, από το Λήμμα 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής  $i\Delta_d : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow \ell_{\text{per}}^2$  είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικός, αντισυμμετρικός και επομένως, ο  $i\Delta_d$  παράγει μια ομάδα  $(\mathcal{T}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ , από ισομετρίες στον χώρο  $\ell_{\text{per}}^2$ . Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για τον τελεστή  $k\Delta_d$ . Συνεπώς, αν θεωρήσουμε  $T > 0$  και μια αρχική συνθήκη  $(\psi_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}} := \psi^0 \in \ell_{\text{per}}^2$  τότε, μια συνάρτηση  $\psi \in C([0, T], \ell_{\text{per}}^2)$  είναι μια λύση του προβλήματος (3.3)-(3.6)-(3.5), για  $s = -1$ , αν και μόνο αν

$$\psi(t) = \mathcal{T}(t)\psi^0 + i \int_0^t \mathcal{T}(t-\sigma)F(\psi(\sigma))d\sigma, \tag{3.15}$$

με

$$(F(\psi))_{n \in \mathbb{Z}} := i\gamma\psi_n + (i\delta - 1)|\psi_n|^2\psi_n.$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα εγγυάται την ύπαρξη λύσεων του προβλήματος αρχικών συνοριακών συνθηκών (3.3)-(3.6)-(3.5). Για την απόδειξη βλέπε επίσης την αναφορά [37, Θεώρημα 2.1. σελ.94].

**Θεώρημα 3.2.2 (Τοπική Ύπαρξη Λύσεων).** Έστω  $\psi^0 \in \ell_{\text{per}}^2$  και  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Τότε, υπάρχει μια συνάρτηση  $T_{\max} : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow (0, \infty]$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Για κάθε  $\psi^0 \in \ell_{\text{per}}^2$ , υπάρχει  $\psi \in C^1([0, T_{\max}(\psi^0)), \ell_{\text{per}}^2)$  τέτοιο ώστε για κάθε  $0 < T < T_{\max}(\psi^0)$ ,  $\psi$  είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (3.3)-(3.6)-(3.5) στο  $C^1([0, T], \ell_{\text{per}}^2)$  (καλή τοποθέτηση του προβλήματος).

(β) Για κάθε  $t \in [0, T_{\max}(\psi^0))$ ,

$$T_{\max}(\psi^0) - t \geq \frac{1}{2(L(R) + 1)} := T_R, \quad R = 2\|\psi(t)\|_{\ell_{\text{per}}^2},$$

όπου  $L(R)$  είναι η σταθερά Lipschitz για την απεικόνιση  $F : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow \ell_{\text{per}}^2$ . Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα: (i)  $T_{\max}(\psi^0) = \infty$ , ή (ii)  $T_{\max}(\psi^0) < \infty$  και  $\lim_{t \uparrow T_{\max}(\psi^0)} \|\psi(t)\|_{\ell_{\text{per}}^2} = \infty$  (Μέγιστικότητα).

(γ)  $T_{\max} : \ell_{\text{per}}^2 \rightarrow (0, \infty]$  είναι κάτω ημισυνεχής. Επιπλέον, αν  $\{\psi_{n0}\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι μια ακολουθία στο  $\ell_{\text{per}}^2$  τέτοια ώστε  $\psi_{n0} \rightarrow \psi^0$  και αν  $T < T_{\max}(\psi^0)$  τότε,  $S(t)\psi_{n0} \rightarrow S(t)\psi^0$  στο  $C^1([0, T], \ell_{\text{per}}^2)$ , όπου  $S(t)\psi^0 = \psi(t)$ ,  $t \in [0, T_{\max}(\psi^0))$ , δηλώνει τη λύση της Εξ. (3.15) (Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα).

### 3.2.2 Εκτιμήσεις του Πεπερασμένου Χρόνου Έκρηξης

**Άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης για περιοδικές συνοριακές συνθήκες**

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη περίπτωση (β)(ii) του Θεωρήματος 3.2.2, όπου ισχύει ότι  $T_{\max}(\psi^0) < \infty$  και  $\lim_{t \uparrow T_{\max}(\psi^0)} \|\psi(t)\|_{\ell_{\text{per}}^2} = \infty$ . Θα αποδείξουμε λοιπόν, κάποιες εκτιμήσεις για το χρόνο έκρηξης  $T_{\max}(\psi^0)$ . Είναι βολικό όπως θα δούμε να εφαρμόσουμε ενεργειακές υποθέσεις για το συναρτησιακό

$$M(t) = \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2. \quad (3.16)$$

Το κίνητρο για την επιλογή αυτού του συναρτησιακού έρχεται από το νόμο διατήρησης της ενέργειας που ικανοποιείται από τις λύσεις του προβλήματος (3.3)-(3.5)-(3.6):

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 = 2\gamma \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 + 2\delta \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4. \quad (3.17)$$

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (3.3) με  $\bar{\psi}_n$  και στη συνέχεια αθροίζουμε κατά παράγοντες. Λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.2.1 και κρατώντας τα φανταστικά μέρη της τελικής εξίσωσης, φτάνουμε στην Εξ. (3.17). Είναι εμφανές ότι ο όρος  $\exp(-2\gamma t)$  είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας για το γραμμικό μέρος (συναρτήσει του όρου  $\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2$ ) της Εξ. (3.17). Για  $\gamma = \delta = 0$ , η Εξ. (3.17) είναι η διατήρηση της  $\ell_{\text{per}}^2$ -νόρμας του μοντέλου DNLS. Συνεπώς το συναρτησιακό (3.16) είναι η χωρικά υπολογισμένη κατά μέσο όρο ισχύς (power)  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2$ , πολλαπλασιασμένη με τον παραπάνω ολοκληρωτικό παράγοντα. Το συναρτησιακό αυτό ικανοποιεί την διαφορική ισότητα που δίνεται στο παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 3.2.3.** Για  $\psi^0 \in \ell_{\text{per}}^2$ , θεωρούμε τη μοναδική λύση  $\psi \in C^1([0, T_{\max}(\psi^0)), \ell_{\text{per}}^2)$  του προβλήματος  $(\mathcal{P})$ . Τότε, η  $M(t)$  ικανοποιεί τη διαφορική ισότητα

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{2e^{-2\gamma t}}{N} \left( \delta \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 \right). \quad (3.18)$$

*Απόδειξη.* Παραγωγίζουμε την Εξ. (3.16) ως προς το χρόνο και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\frac{dM(t)}{dt} = -2\gamma \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 + \frac{2e^{-2\gamma t}}{N} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{\psi}_n \bar{\psi}_n. \quad (3.19)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο  $\dot{\psi}_n$  από την Εξ. (3.3), στον δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της Εξ. (3.19) έχουμε ότι

$$\frac{2e^{-2\gamma t}}{N} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{\psi}_n \bar{\psi}_n = \frac{2e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{\xi=1}^4 J_{\xi}$$

όπου

$$J_1 = \operatorname{Re} \left( isk \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \psi_n \bar{\psi}_n \right), \quad J_2 = \operatorname{Re} \left( i \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 \psi_n \bar{\psi}_n \right),$$

$$J_3 = \operatorname{Re} \left( \gamma \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \bar{\psi}_n \right) \quad \text{και} \quad J_4 = \operatorname{Re} \left( \delta \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 \psi_n \bar{\psi}_n \right).$$



Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1, για τον όρο  $J_1$  έχουμε ότι

$$J_1 = \operatorname{Re} \left( isk \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_d \psi_n \bar{\psi}_n \right) = 0.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

$$J_2 = \operatorname{Re} \left( i \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 \right) = 0.$$

Άρα φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι  $J_1 = J_2 = 0$ , και καταλήγουμε ότι η Εξ. (3.19) γίνεται η

$$\frac{dM(t)}{dt} = -2\gamma \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 + 2\gamma \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 + 2\delta \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4,$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.  $\square$

Έτσι, με τους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε μια σχέση για την χρονική παράγωγο του συναρτησιακού  $M$ , το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του επόμενου σημαντικού θεωρήματος. Αυτό μας παρέχει τις υποθέσεις για την έκρηξη των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο.

**Θεώρημα 3.2.4 (Έκρηξη σε Πεπερασμένο Χρόνο).** Για κάθε  $\psi^0 \in \ell_{\text{per}}^2$ , θεωρούμε τη μοναδική λύση  $\psi \in C^1([0, T_{\max}(\psi^0)], \ell_{\text{per}}^2)$  του προβλήματος (3.3)-(3.6)-(3.5). Υποθέτουμε ότι η παράμετρος  $\delta > 0$  και ότι η αρχική συνθήκη  $\psi^0$  είναι τέτοια ώστε να ισχύει ότι  $M(0) > 0$ . Τότε, το  $T_{\max}$  είναι πεπερασμένο ως εξής:

$$(i) \quad T_{\max} \leq \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right] := \hat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] \quad (3.20)$$

$$\text{για } \gamma \neq 0 \quad \text{και} \quad \gamma > \gamma^* := -\delta M(0), \quad (3.21)$$

$$(ii) \quad T_{\max} \leq \frac{1}{2\delta M(0)} := \hat{T}_{\max}^0[\delta, M(0)], \quad \text{για } \gamma = 0. \quad (3.22)$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy - Schwartz, έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2 \leq \sqrt{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Έτσι, από τον ορισμό της συνάρτησης  $M(t)$  προκύπτει ότι

$$M(t) \leq \frac{e^{-2\gamma t}}{\sqrt{N}} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.24)$$

ή ισοδύναμα, λαμβάνουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$M(t)^2 \leq \frac{e^{-4\gamma t}}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 \right). \quad (3.25)$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιώντας το διαφορικό της  $M(t)$  από την Εξ. (3.18) του Λήμματος 3.2.3, λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^4 = e^{2\gamma t} \frac{N}{2\delta} \frac{dM(t)}{dt}. \quad (3.26)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.25) και (3.26), παίρνουμε ότι

$$M(t)^2 \leq \frac{e^{-2\gamma t}}{2\delta} \frac{dM(t)}{dt}, \quad (3.27)$$

ή ισοδύναμα

$$2\delta e^{2\gamma t} \leq \frac{\frac{dM(t)}{dt}}{M(t)^2}. \quad (3.28)$$

Εφόσον ισχύει ότι  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{M(t)} \right] = -\frac{\frac{dM(t)}{dt}}{M(t)^2}$ , παίρνουμε την διαφορική ανισότητα

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{M(t)} \right] \leq -2\delta e^{2\gamma t}. \quad (3.29)$$

Από την ολοκλήρωση της Εξ. (3.29) ως προς το χρόνο συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{M(t)} \leq \frac{1}{M(0)} - 2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds.$$

Επειδή όμως  $M(t) > 0$  παρατηρούμε ότι η  $M(0) > 0$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds \leq \frac{1}{M(0)}. \quad (3.30)$$

Στη συνέχεια προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

(1) Αν υποθέσουμε ότι  $\gamma \neq 0$ , η Εξ. (3.30) συνεπάγεται ότι

$$\frac{2\delta}{2\gamma}(e^{2\gamma t} - 1) \leq \frac{1}{M(0)} \Rightarrow e^{2\gamma t} \leq 1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)}.$$

Έτσι για  $\frac{\gamma}{\delta M(0)} > -1$ , λαμβάνουμε την εκτίμηση για το χρόνο έκρηξης,

$$t \leq \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right].$$

(2) Αν υποθέσουμε  $\gamma = 0$  τότε, από την (3.30) έχουμε ότι

$$2\delta t \leq \frac{1}{M(0)}.$$

Έτσι ο χρόνος έκρηξης είναι

$$t \leq \frac{1}{2\delta M(0)}.$$

□

**Ορισμός μιας κρίσιμης τιμής για τη παράμετρο γραμμικού κέρδους/απώλειας ενέργειας που διαχωρίζει την καθολική ύπαρξη από την έκρηξη λύσεων.** Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι από τον ορισμό του αναλυτικού άνω φράγματος του χρόνου έκρηξης (3.21),

$$\widehat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta M(0)} \right],$$

μπορούμε να ορίσουμε μια κρίσιμη τιμή για το γραμμικό κέρδος/απώλεια ενέργειας ως

$$\gamma^* = -\delta M(0).$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma^*} \widehat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = +\infty$$

ενώ  $\widehat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)]$  είναι πεπερασμένο αν

$$\gamma > \gamma^*. \quad (3.31)$$

Τότε, η σχέση (3.31) μας υποδεικνύει ότι όταν  $\delta > 0$ , η κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$  λειτουργεί ως ένα κρίσιμο σημείο που διαχωρίζει τη δυναμική σε δύο διαφορετικές συμπεριφορές: έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για  $\gamma > \gamma^*$  και καθολική ύπαρξη για  $\gamma < \gamma^*$ .

### Κάτω φράγμα του χρόνου έκρηξης για συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Σε αυτή την παράγραφο εξάγουμε ένα κάτω φράγμα για το χρόνο έκρηξης που ισχύει για το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$ . Και στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet (3.7), αλλά και στην περίπτωση των μηδενιζόμενων συνοριακών συνθηκών (3.8), θεωρούμε το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$  στον άπειρης διάστασης χώρο των ακολουθιών

$$\ell^p := \left\{ \psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C} : \|\psi\|_{\ell^p} := \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Οι χώροι  $\ell^p$ , ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση στοιχειώδους εμφύτευσης (βλέπε επίσης [2, σελ. 35]):

$$\ell^q \subset \ell^p, \quad \|\psi\|_{\ell^p} \leq \|\psi\|_{\ell^q}, \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty. \quad (3.32)$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι οι εγκλεισμοί στη σχέση (3.32) εξακολουθούν να ισχύουν και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλέγματος εφοδιασμένου με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Συμβολίζουμε τους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης του χώρου  $\ell^p$  που σχετίζονται με τις συνοριακές συνθήκες (3.7), με  $\ell_0^p$ . Υπενθυμίζουμε ότι κάθε στοιχείο του  $\ell_0^p$  μπορεί να επεκταθεί σε ένα στοιχείο  $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$  θέτοντας  $\psi_n = 0$  για  $n \geq N$  και  $n \leq 0$ . Επομένως, για λόγους απλότητας και συντομίας, η απόδειξη θα παρουσιαστεί μόνο για τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Θα θεωρήσουμε ξανά το αντίστοιχο συναρτησιακό  $M(t)$ , ωστόσο αυτή τη φορά θα χρησιμοποιηθεί και η συνήθης νόρμα

$$P(t) = \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n(t)|^2. \quad (3.33)$$

**Θεώρημα 3.2.5.** Για  $\psi^0 \in \ell_0^2$ , θεωρούμε τη μοναδική λύση

$$\psi \in C^1([0, T_{\max}(\psi^0)), \ell_0^2),$$

του προβλήματος  $(\mathcal{D})$ . Υποθέτουμε ότι η παράμετρος  $\delta > 0$  και ότι η αρχική συνθήκη  $\psi^0$  είναι τέτοια ώστε  $P(0) > 0$ . Τότε, ο  $T_{\max}$  είναι πεπερασμένος

αριθμός ως εξής:

$$(i) \quad T_{\max} \geq \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta P(0)} \right] := \bar{T}_{\max}[\gamma, \delta, P(0)] \quad (3.34)$$

$$\text{για } \gamma \neq 0 \quad \text{και} \quad \gamma > \gamma^* := -\delta P(0), \quad (3.35)$$

$$(ii) \quad T_{\max} \geq \frac{1}{2\delta P(0)} := \bar{T}_{\max}^0[\delta, P(0)], \quad \text{για } \gamma = 0. \quad (3.36)$$

*Απόδειξη.* Το Λήμμα 3.2.3 εξακολουθεί να ισχύει και στη περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, και το συναρτησιακό

$$M(t) = \frac{e^{-2\gamma t}}{N} \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n|^2, \quad (3.37)$$

ικανοποιεί τη διαφορική ισότητα

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{2e^{-2\gamma t}}{N} \left( \delta \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n|^4 \right). \quad (3.38)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την σχέση (3.32) για  $p = 4$  και  $q = 2$ , λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\frac{dM(t)}{dt} \leq \frac{2\delta e^{-2\gamma t}}{N} \left( \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n|^2 \right)^2.$$

Η παραπάνω ανισότητα μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή της τετραγωνικής διαφορικής ανίσωσης

$$\dot{M}(t) \leq 2\delta N e^{2\gamma t} M(t)^2. \quad (3.39)$$

Τώρα, θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{x}(t) = 2\delta N e^{2\gamma t} x(t)^2, \quad x(0) = M(0). \quad (3.40)$$

Η λύση της (3.40) είναι

$$x(t) = \frac{\gamma M(0)}{\gamma + \delta N M(0) - \delta N M(0) e^{2\gamma t}}.$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι  $NM(0) = P(0)$  και το μέγιστο διάστημα της ύπαρξης της λύσης είναι

$$\bar{T}_{\max} = \frac{1}{2\gamma} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta NM(0)} \right] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta P(0)} \right]. \quad (3.41)$$

Επειδή η συνάρτηση  $f(t, x) := 2\delta N e^{2\gamma t} x(t)^2$  είναι γνησίως αύξουσα για τη μεταβλητή  $x$ , για  $x > 0$ , το αποτέλεσμα προκύπτει από τη αρχή σύγκρισης [75, σελ. 937–943], μεταξύ της Σ.Δ.Ε (3.40) και της διαφορικής ανισότητας (3.39). Έτσι έχουμε ότι  $M(t) \leq x(t)$  για κάθε  $t \in [0, T]$  (ένα διάστημα όπου και οι συναρτήσεις  $x(t)$  και  $M(t)$  είναι πεπερασμένες). Αν επαναλάβουμε τα επιχειρήματα του Θεωρήματος 3.2.4 τότε, η  $M(t)$  εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο. Παρατηρούμε λοιπόν ότι λόγω της ανισότητας  $M(t) \leq x(t)$ , η συνάρτηση  $x(t)$  εκρήγνυται νωρίτερα από τη  $M(t)$ . Ως εκ τούτου η καινούρια εκτίμηση  $\bar{T}_{\max}$  (3.41) αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το χρόνο έκρηξης. Επιπλέον, αν συγκρίνουμε τις ποσότητες των σχέσεων (3.41) και (3.20), λαμβάνουμε ότι ισχύει  $\bar{T}_{\max}[\gamma, \delta, P(0)] < \hat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)]$ .  $\square$

### 3.3 Αριθμητική Μελέτη

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης μας για την δυναμική της έκρηξης/φθοράς των λύσεων της εξίσωσης (3.3). Για τη μελέτη θεωρούμε τρεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες: (α) χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες, (β) αρχικές συνθήκες με προφίλ  $\text{sech}$ , οι οποίες θυμίζουν τα “διακριτά φωτεινά σολιτόνια” και (γ) αρχικές συνθήκες με προφίλ  $\tanh^2$ , οι οποίες θυμίζουν τα “διακριτά σκοτεινά σολιτόνια”. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και για την αφεστιάζουσα περίπτωση ( $s = 1$ ) και για την εστιάζουσα περίπτωση ( $s = -1$ ) της διακριτής μη-γραμμικής εξίσωσης Schrödinger. Σε αυτή τη διερεύνηση, για την αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος χρησιμοποιούμε μια μέθοδο Runge–Kutta τετάρτου βαθμού, με μεταβλητό βήμα  $\Delta t \propto \min[\Delta t_0, 1/\max|\psi_n|^2]$ , όπου  $\Delta t_0$  είναι ένα κατάλληλο αρχικό βήμα (βλ. [10]). Στη συνέχεια ο χρόνος έκρηξης προκύπτει όταν η τιμή του  $\Delta t$  γίνεται μικρότερη κάποιας καθορισμένης κατωφλικής τιμής, ή ισοδύναμα όταν η τιμή του  $\max|\psi_n|^2$ , ξεπερνάει μια κατάλληλη τιμή κατωφλίου.

Επειδή στην περίπτωση (β) των αρχικών συνθηκών θεωρούμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet, σημειώνουμε ότι αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται μόνο ασυμπτωτικά καθώς  $L \rightarrow \infty$ . Ωστόσο όταν το  $L$  είναι πεπερασμένο, το σφάλμα

της ολοκλήρωσης έχει αμελητέα επίδραση στη δυναμική του συστήματος, καθώς είναι της τάξης  $\exp(-L)$  και η μικρότερη τιμή του  $L$  που χρησιμοποιούμε είναι  $L = 50$ .

### 3.3.1 Χωρικά Εκτεταμένες Αρχικές Συνθήκες

Ως πρώτο παράδειγμα για την αριθμητική μελέτη, θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες της μορφής

$$\psi_n(0) = Ae^{-i\frac{\pi K x_n}{L}}, \quad (3.42)$$

όπου  $A > 0$  είναι το πλάτος,  $\tilde{K} := \pi K/L$ ,  $K \in \mathbb{N}$  είναι ο κυματάρηθος και  $x_n$  η διακριτή χωρική συντεταγμένη (3.4). Αντικαθιστώντας στην Εξ. (3.3) τη  $\psi_n = W(t)e^{i\tilde{K}x_n}$ , έχουμε ότι

$$i\dot{W} - skCW + |W|^2W = i\gamma W + i\delta|W|^2W, \quad (3.43)$$

όπου  $C = -4 \sin^2(\tilde{K}/2)$ . Θεωρώντας τον παράγοντα φάσης  $W(t) = e^{i\omega t}w(t)$  με  $\omega = -skC$ , ο οποίος απορροφά τον δεύτερο όρο στην Εξ. (3.43), καταλήγουμε στην

$$i\dot{w} + |w|^2w = i\gamma w + i\delta|w|^2w.$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την πολική αναπαράσταση  $w(t) = f(t)e^{i\theta(t)}$  λαμβάνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε) τύπου Bernoulli,

$$\dot{f} = \gamma f + \delta f^3 \quad (3.44)$$

όπου  $\dot{\theta} = f^2$  και  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν θεωρήσουμε την αρχική εκτίμηση  $f(0) = f_0$  για το πλάτος, και θέσουμε  $y = \frac{1}{f^2}$  τότε, η ΣΔΕ (3.44) γίνεται

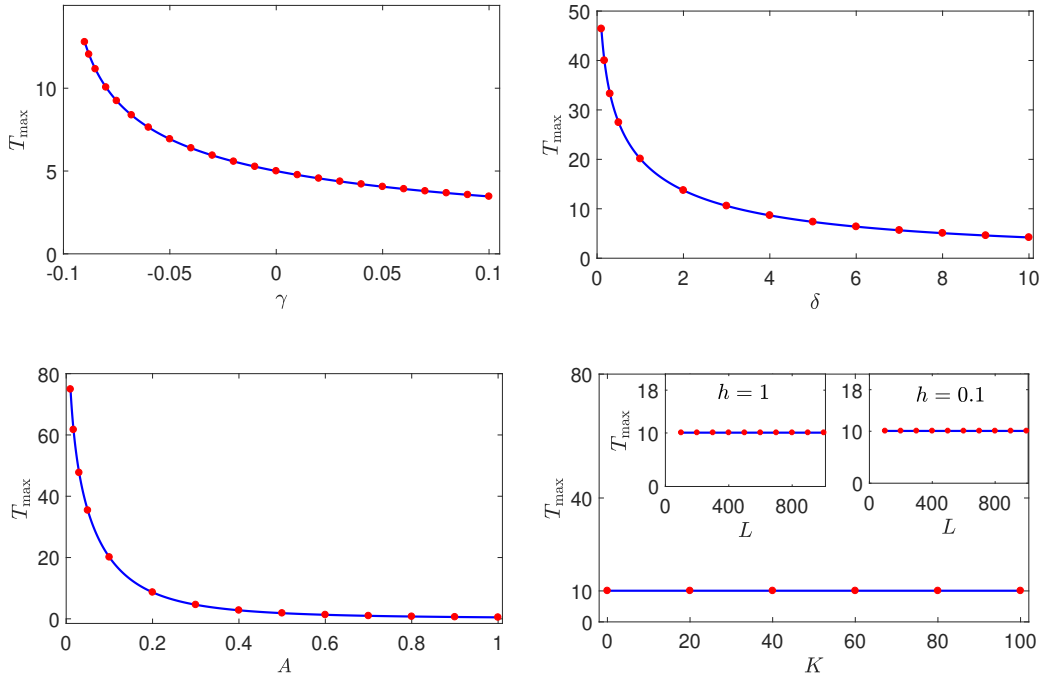
$$\dot{y} + 2\gamma y = -2\delta.$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα  $e^{2\gamma t}$  έχουμε ότι

$$\frac{d(e^{2\gamma t}y)}{dt} = -2\delta e^{2\gamma t} \Rightarrow e^{2\gamma t}y = -2\delta \int_0^t e^{2\gamma s} ds + y_0$$

δηλαδή

$$y = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\delta e^{-2\gamma t}}{\gamma} + y_0 e^{-2\gamma t} = \frac{-\delta + \delta e^{-2\gamma t} + \gamma y_0 e^{-2\gamma t}}{\gamma},$$



Σχήμα 3.1: Σύγκριση μεταξύ του αναλυτικού άνω φράγματος  $\hat{T}_{\max}$ , που απεικονίζεται από μια συνεχή (μπλε) καμπύλη και των αριθμητικά υπολογισμένων χρόνων έκρηξης, που φαίνονται ως (κόκκινες) βούλες, στη περίπτωση των χωρικά εκτεταμένων αρχικών συνθηκών (3.42) και τη περίπτωση της αφεστιάζουσας περίπτωσης  $s = 1$ . Άνω αριστερή εικόνα: Σύγκριση συναρτήσεως του  $\gamma \in [-0.09, 0.1]$ . Άλλες παράμετροι:  $\delta = 0.1, A = 1, L = 100, N = 100$  και  $K = 10$ . Άνω δεξιά εικόνα: Σύγκριση συναρτήσεως του  $\delta \in [0.1, 10]$ . Σε αυτή τη περίπτωση  $\gamma = 0.04, A = 0.1$  και οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με τη προηγούμενη περίπτωση. Κάτω αριστερή εικόνα: Σύγκριση συναρτήσεως του  $A \in [0.01, 1]$  για  $\gamma = 0.04, \delta = 1, L = 100, N = 100$  και  $K = 10$ . Κάτω δεξιά εικόνα: Η κύρια εικόνα δείχνει την ανεξαρτησία του χρόνου έκρηξης από τον κυματάριθμο  $K$ . Τα ένθετα απεικονίζουν την ανεξαρτησία του αριθμητικού χρόνου έκρηξης από το ημι-μήκος  $L$ , στην αριστερή εικόνα  $h = 1$  και στη δεξιά  $h = 0.1$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = -0.08, \delta = 0.1, A = 1$  και  $L = 100$ .

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{f^2} = \frac{-\delta + \delta e^{-2\gamma t} + \gamma \frac{1}{f_0^2} e^{-2\gamma t}}{\gamma}$$



Συνεπώς, το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη ΣΔΕ (3.44) εφοδιασμένο με την αρχική συνθήκη  $f_0$ , έχει τη μοναδική λύση

$$f^2(t) = \frac{\gamma f_0^2 e^{2\gamma t}}{\gamma + \delta f_0^2 - \delta f_0^2 e^{2\gamma t}}. \quad (3.45)$$

Έτσι λαμβάνουμε τον πεπερασμένο χρόνο στον οποίο η λύση της Εξ. (3.45) εκρήγνυται,

$$\tilde{T}_{\max} = \frac{1}{2\gamma} \log \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta f_0^2} \right],$$

και ο οποίος συμπίπτει με το άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.4. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για την αρχική συνθήκη (3.42)

$$M(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \left| e^{-\frac{iK\pi n}{L}} \right|^2 = A^2$$

και το άνω φράγμα του χρόνου έκρηξης είναι

$$\hat{T}_{\max}[\gamma, \delta, M(0)] = \frac{1}{2\gamma} \log \left[ 1 + \frac{\gamma}{\delta A^2} \right]. \quad (3.46)$$

Έτσι λαμβάνουμε τη κρίσιμη τιμή  $\gamma^* = -\delta A^2$ , όπως επίσης την εκτίμηση για τη περίπτωση όπου  $\gamma = 0$  η οποία είναι,

$$\hat{T}_{\max}^0[\delta, A] = \frac{1}{2\delta A^2}.$$

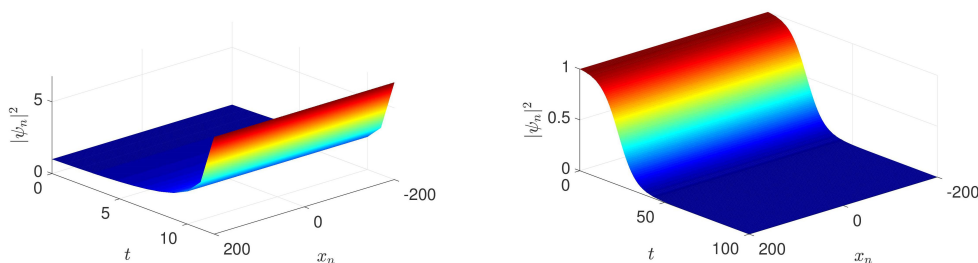
**Παρατήρηση 3.3.1.** Στην περίπτωση των χωρικά εκτεταμένων αρχικών συνθηκών (3.42), η έκρηξη είναι χωρικά ομογενής και εκδηλώνεται με την αύξηση του διακριτού επίπεδου κύματος  $f(t)$ . Αυτή είναι η ακραία περίπτωση της **εκτεταμένης ή ασθενούς έκρηξης**.

Η ακρίβεια του αναλυτικού άνω φράγματος  $\hat{T}_{\max}$  (3.46) για το χρόνο έκρηξης παρατηρείται και αριθμητικά. Στο Σχήμα 3.1, το συγκρίνουμε με τον αριθμητικό χρόνο έκρηξης ως μια συνάρτηση διαφορετικής παραμέτρου κάθε φορά. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αντιστοιχούν στη περίπτωση της αφεστίζουσας DNLS και για  $N = 100$ . Επιπλέον, αναφέρουμε ότι παρόμοια αποτελέσματα εξάγονται και στη περίπτωση της εστίζουσας εξίσωσης DNLS. Συγκεκριμένα, στη άνω αριστερή εικόνα του Σχήματος 3.1, συγκρίνουμε το αναλυτικό και το αριθμητικό χρόνο έκρηξης ως συνάρτηση του  $\gamma$ . Οι υπόλοιπες

παράμετροι επιλέγονται ως εξής  $\delta = 0.1$ ,  $A = 1$ ,  $L = 100$  και  $K = 10$ . Παρατηρούμε ότι το αναλυτικό άνω φράγμα είναι μια ακριβής εκτίμηση για το αριθμητικό χρόνο έκρηξης. Η μεγάλη ακρίβεια είναι επίσης ενδεικτική για  $\gamma = 0$ , όπου ο αναλυτικός χρόνος είναι  $\hat{T}_{\max}^0[0.1, 1] = 5$  και ο αριθμητικός είναι  $T_{num} = 5$ .

Σχεδόν απόλυτη ταύτιση παρατηρείται επίσης, όταν συγκρίνουμε το αναλυτικό άνω φράγμα με τον αριθμητικό χρόνο έκρηξης, συναρτήσει και των υπολοίπων παραμέτρων. Στην άνω δεξιά εικόνα του Σχήματος 3.1, απεικονίζουμε την σύγκριση ως συνάρτηση του  $\delta$ , για γραμμικό κέρδος ενέργειας  $\gamma = 0.04$ , πλάτος  $A = 0.1$  και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες με πριν. Η κάτω αριστερή εικόνα του Σχήματος 3.1, απεικονίζει τη σύγκριση ως συνάρτηση του πλάτους  $A$  με τις υπόλοιπες παραμέτρους ως εξής:  $\gamma = 0.04$ ,  $\delta = 1$ ,  $L = 100$ ,  $K = 10$ . Το αναλυτικό άνω φράγμα (3.46) είναι ανεξάρτητο του κυματάριθμου  $K$  και του ημι-μήκους  $L$ . Αυτό το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό για τους αριθμητικούς χρόνους έκρηξης επιβεβαιώνεται και στη κάτω δεξιά εικόνα του Σχήματος 3.1. Οι παράμετροι κέρδους/απώλειας ενέργειας είναι  $\gamma = -0.08$ ,  $\delta = 0.1$ . Για το μήκος του διαστήματος,  $L = 100$  και το πλάτος  $A = 1$ . Τα ένθετα, απεικονίζουν τα αριθμητικά αποτελέσματα για δύο επιλογές της παραμέτρου διακριτοποίησης,  $h = 1$  (αριστερό ένθετο) και  $h = 0.1$  (δεξί ένθετο). Υπενθυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό των ταλαντωτών της κάθε επιλογής των  $h$  και  $L$ , χρησιμοποιούμε τη σχέση  $N = 2L/h$ .

Η παράμετρος διαχωρισμού της συμπεριφοράς της δυναμικής  $\gamma^* = -\delta A^2$ ,



Σχήμα 3.2: Αριστερή εικόνα: Έκρηξη της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  για την χωρικά εκτεταμένη αρχική συνθήκη (3.42), για  $\delta = 0.1$ ,  $A = 1$ ,  $L = 200$ ,  $K = 10$ ,  $N = 100$  και  $\gamma = -0.09$ . Δεξιά εικόνα: Φθορά της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  για την χωρικά εκτεταμένη αρχική συνθήκη για τις ίδιες παραμέτρους με την προηγούμενη περίπτωση, αλλά για  $\gamma = -0.11$ . Και οι δύο εικόνες εξετάζουν την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ .

παρατηρείται να είναι ακριβής αριθμητικά, στη διάκριση μεταξύ του πεπερασμένου χρόνου έκρηξης (για  $\gamma > \gamma^*$ ) και της καθολικής ύπαρξης λύσεων ( $\gamma < \gamma^*$ ), όταν θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες (3.42). Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται η εξέλιξη της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  της παραπάνω αρχικής συνθήκης, για δύο διαφορετικές τιμές του γραμμικού κέρδους/απώλειας ενέργειας  $\gamma$ , και για τη περίπτωση της αφεστιάζουσας περίπτωσης  $s = 1$ . Η αριστερή εικόνα απεικονίζει την εξέλιξη της πυκνότητας για  $\gamma = -0.09 > \gamma^*$ , ικανοποιώντας τη παραμετρική συνθήκη για πεπερασμένο χρόνο έκρηξης στο  $T_{num} = 12$ . Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι η δυναμική της έκρηξης διέπεται από τη Σ.Δ.Ε (3.44). Από την άλλη μεριά η δεξιά εικόνα απεικονίζει την εξέλιξη της πυκνότητας για  $\gamma = -0.11 < \gamma^*$ , όπου αναμένουμε καθολική ύπαρξη. Παρατηρούμε ότι η καθολική ύπαρξη σχετίζεται με τη φθορά της πυκνότητας. Η απεικονιζόμενη δυναμική της φθοράς είναι σε συμφωνία με τη φθορά της λύσης (3.45), που επιτυγχάνεται όταν  $\gamma < -\delta f_0^2 < 0$ .

Ολοκληρώνουμε τη παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων για τις χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες, σημειώνοντας ότι ακριβώς ίδια αποτελέσματα έχουν επιβεβαιωθεί και για τη περίπτωση της εστιάζουσας εξίσωσης  $s = -1$ , αλλά δεν κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστούν εδώ.

### 3.3.2 Μηδενιζόμενες Αρχικές Συνθήκες με Προφίλ $\text{sech}$

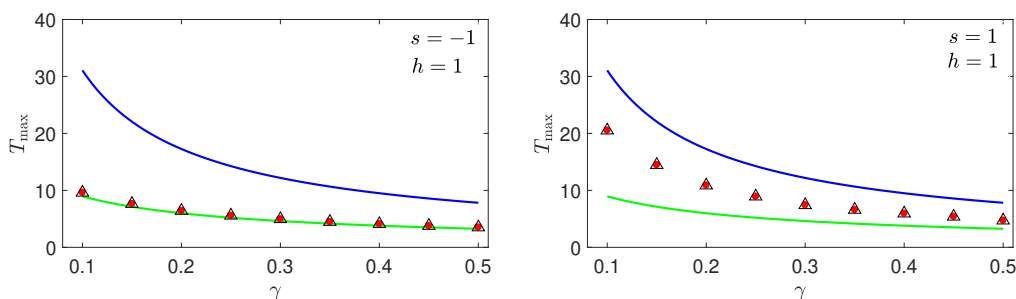
Ως δεύτερο παράδειγμα για την αριθμητική μας μελέτη, θεωρούμε την αρχική συνθήκη με προφίλ της μορφής

$$\psi_n(0) = A \text{sech} x_n, \quad (3.47)$$

όπου  $A > 0$  είναι το πλάτος και  $x_n$  η διακριτή χωρική συντεταγμένη (3.4). Σε αυτή τη περίπτωση, η αρχική συνθήκη προσομοιάζει στο προφίλ ενός διακριτού φωτεινού σολιτονίου ως μια αρχική κατάσταση.

Για την μελέτη μας, θεωρούμε τόσο το πρόβλημα ( $\mathcal{P}$ ) όσο και το πρόβλημα ( $\mathcal{D}$ ). Έτσι, θα λάβουμε τους αριθμητικούς χρόνους έκρηξης, χρησιμοποιώντας τόσο τις περιοδικές όσο και τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, οι οποίοι θα συγκριθούν με το αναλυτικό άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$  (3.20)-(3.22), και το αναλυτικό κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$  (3.34)-(3.36).

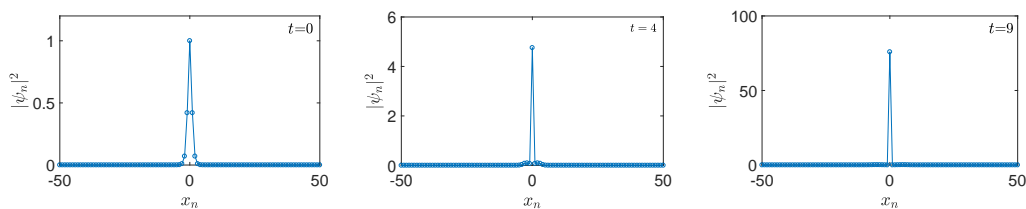
Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζεται η σύγκριση συναρτήσεως της παραμέτρου  $\gamma \in [0.1, 0.5]$ . Η αριστερή εικόνα δείχνει τα αποτελέσματα για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ , και η δεξιά εικόνα για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ . Οι υπόλοιποι παράμετροι είναι  $\delta = 0.01$ ,  $A = 1$ ,  $L = 50$  και  $h = 1$  ( $N = 100$ ). Παρατηρούμε ότι και για τις δύο περιπτώσεις, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης των



Σχήμα 3.3: Αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης [(κόκκινες) βούλες για το πρόβλημα  $(\mathcal{P})$  - τρίγωνα για το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$ ], για την αρχική συνθήκη με προφίλ  $\text{sech}$  (3.47) σε σύγκριση με το αναλυτικό άνω φράγμα [άνω (μπλε) καμπύλη] και κάτω φράγμα [κάτω (πράσινη) καμπύλη], ως συνάρτηση του  $\gamma \in [0.1, 0.5]$ . Αριστερή εικόνα για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$  και δεξιά εικόνα για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ . Άλλες παράμετροι:  $\delta = 0.01$ ,  $A = 1$ ,  $L = 50$  ανδ  $N = 100$  ( $h = 1$ ).

αριθμητικών λύσεων των προβλημάτων  $(\mathcal{P})$  [(κόκκινες) βούλες] και  $(\mathcal{D})$  [τρίγωνα], συμπίπτουν. Αυτή η σύμπτωση αιτιολογεί το γεγονός ότι για αυτές τις τιμές της παραμέτρου, οι συνοριακές συνθήκες δεν επηρεάζουν τη δυναμική. Ως εκ τούτου, παρόλο που έχουμε εξαγάγει τα δύο αναλυτικά φράγματα χρησιμοποιώντας διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, στην πραγματικότητα για την αριθμητική διερεύνηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί ως ένα κάτω φράγμα και ως ένα άνω φράγμα τόσο για το πρόβλημα  $(\mathcal{P})$  όσο και για το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$ . Το Σχήμα 3.3 αιτιολογεί επίσης το γεγονός ότι όλοι οι αριθμητικά υπολογισμένοι χρόνοι έκρηξης βρίσκονται μεταξύ των δύο αναλυτικών εκτιμήσεων, που επιβεβαιώνουν την ανάλυση της Παραγράφου 3.2.2. Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνουμε και όταν η σύγκριση πραγματοποιείται συναρτήσει της παραμέτρου  $\delta$ .

Συνεχίζουμε τώρα, με μια λεπτομερέστερη ανάλυση των αποτελεσμάτων της αριστερής εικόνας του Σχήματος 3.3, όπου θεωρούμε την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης, βρίσκονται αρκετά μακριά από το άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$  (3.20) και συμφωνούν με το αναλυτικό κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$  (3.34). Αυτή η συμπεριφορά των αριθμητικών χρόνων έκρηξης, αναδεικνύει μια διαφορετική δυναμική από αυτή της εκτεταμένης έκρηξης που παρουσιάστηκε στη Παράγραφο 3.3.1. Πράγματι, αυτός ο διαφορετικός τύπος δυναμικής φαίνεται και στο Σχήμα 3.4, στο οποίο απεικονίζονται τα στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$ . Αυτή η περίπτωση είναι ίδια



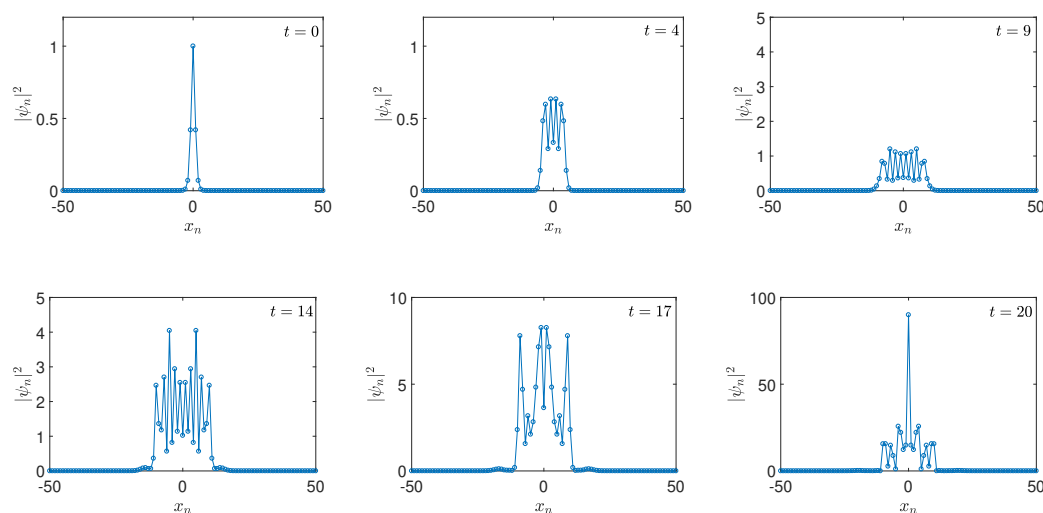
Σχήμα 3.4: Στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ , θεωρώντας της αρχική συνθήκη (3.47) με πλάτος  $A = 1$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $N = 100$  ( $h = 1$ ).

με αυτή της αριστερής εικόνας του Σχήματος 3.3, για  $\gamma = 0.1$ . Παρατηρούμε λοιπόν την απουσία διασποράς της ενέργειας εξαιτίας της εστιάζουσας επίδρασης και της αυξημένης διακριτότητας. Έτσι το πλέγμα εκρήγνυται κατευθείαν από το κεντρικό ταλαντωτή όπου η ενέργεια είναι εντοπισμένη. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους της χωρικά εκτεταμένης αρχικής συνθήκης. Συνεπώς, συμφωνούν με το αναλυτικό κάτω φράγμα που εξάγαμε για την εντοπισμένη αρχική συνθήκη και τις λύσεις του προβλήματος ( $\mathcal{D}$ ).

**Παρατήρηση 3.3.2.** Στην περίπτωση των εντοπισμένων αρχικών συνθηκών (3.47) και για τις προαναφερθείσες παραμέτρους, η μεταβατική δυναμική πριν την έκρηξη είναι αυτοόμοια (*selfsimilar*), και εκδηλώνεται από την αύξηση του πλάτους του κεντρικού ταλαντωτή. Αυτή είναι η ακραία περίπτωση της **εντοπισμένης ή ισχυρής έκρηξης**.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη δεξιά εικόνα του Σχήματος 3.3, όπου θεωρούμε την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης, παρουσιάζουν μια ποιοτική συμπεριφορά όμοια με αυτή των αναλυτικών φραγμάτων, αλλά ποσοτικά βρίσκονται μεταξύ αυτών. Αυτή η συμπεριφορά των αριθμητικών χρόνων έκρηξης, αναδεικνύει μια δυναμική που είναι διαφορετική και από αυτή της εκτεταμένης αλλά και από αυτή της εντοπισμένης έκρηξης. Το Σχήμα 3.5 δείχνει τα στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$ , για την αρχική συνθήκη (3.47) και για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ . Εδώ το  $\gamma = 0.1$ , ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του Σχήματος 3.3. Επειδή το μοντέλο είναι αφεστιάζων, έχει την τάση να διασπείρει την αρχικά εντοπισμένη ενέργεια κατά μήκος του πλέγματος. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η ενέργεια μεταφέρεται στους γειτονικούς ταλαντωτές στα πρώιμα στάδια της εξέλιξης, και ως αποτέλεσμα αυτής της διασποράς, το αρχικό

πλάτος μειώνεται. Παρατηρούμε το φαινόμενο αυτό, στο μεσαίο στιγμιότυπο της πρώτης γραμμής για τη χρονική στιγμή  $t = 4$ . Για  $t = 9$  οι διεγερμένοι ταλαντωτές θυμίζουν την εκτεταμένη κατάσταση της αρχικής συνθήκης (3.42). Στη συνέχεια, οι γραμμικές και μη-γραμμικές επιδράσεις γίνονται πιο ισχυρές και αποτρέπουν την περαιτέρω διασπορά ενέργειας κατά μήκος του πλέγματος.



Σχήμα 3.5: Περίπτωση αφεστιάζουσας  $s = 1$ : στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  προς την έκρηξη, όταν  $\gamma = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $N = 100$  ( $h = 1$ ) και  $A = 1$ .

Το μήκος της αλυσίδας που καλύπτεται από τους διεγερμένους ταλαντωτές, σταθεροποιείται και η κερδισμένη ενέργεια αναδιανέμεται μεταξύ αυτών, οδηγώντας τους σε ταλαντούμενη συμπεριφορά αυξημένου πλάτους. Αυτή η δυναμική, απεικονίζεται στα στιγμιότυπα της δεύτερης γραμμής για  $t \in [14, 20]$ . Επιπλέον, τα στιγμιότυπα στις χρονικές στιγμές  $t = 17$  και  $t = 20$  δείχνουν ότι η αναδιανομή της ενέργειας μεταξύ των διεγερμένων ταλαντωτών, έχει σαν αποτέλεσμα τη συγκέντρωση της ενέργειας στον κεντρικό ταλαντωτή και τη διαμόρφωση μιας κρίσιμης εντοπισμένης δομής πριν την έκρηξη. Το αντίκτυπο αυτού του μηχανισμού καταδεικνύεται τη χρονική στιγμή  $t = 20$ . Σε αυτήν, το πλάτος του κεντρικού ταλαντωτή προσεγγίζει τη τιμή  $|\psi(x_{50})|^2 \sim 100$ , καθώς έχει κερδίσει ενέργεια από τους γειτονικούς του, που τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχουν μικρότερο πλάτος. Συνοψίζοντας, στα πρώτα στάδια της εξέλιξης, η δυναμική θυμίζει το σενάριο της εκτεταμένης έκρηξης, εφόσον το πλέγμα τείνει να

διαμορφώνει μία εκτεταμένη κατάσταση. Στη συνέχεια, η κερδισμένη ενέργεια κυριαρχεί, ενώ αποτρέπει τη χωρική επέκταση αυτής της κατάστασης σε όλο το πλέγμα. Έτσι, σε προχωρημένο στάδιο εξέλιξης πριν την έκρηξη, θυμίζει το σενάριο της εντοπισμένης έκρηξης. Αυτή η μετάβαση της δυναμικής από τον εκτεταμένο τύπο στον εντοπισμένο τύπο έκρηξης, δικαιολογεί το γεγονός ότι οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται μεταξύ των αναλυτικών φραγμάτων.

**Παρατήρηση 3.3.3.** [Ταξινόμηση των τύπων έκρηξης.] Οι αναλυτικές εκτιμήσεις  $\hat{T}_{\max}$  και  $\bar{T}_{\max}$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ταξινόμηση του τύπου έκρηξης του πλέγματος (3.3).

- Στο σενάριο της εκτεταμένης έκρηξης, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης είναι σε εξαιρετική συμφωνία ή βρίσκονται κοντά στο αναλυτικό άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$ . Η φύση αυτής της συμπεριφοράς προϋποθέτει γενικά για μεγαλύτερους χρόνους ύπαρξης των λύσεων.
- Στο σενάριο της εντοπισμένης έκρηξης, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης είναι σε εξαιρετική συμφωνία ή βρίσκονται κοντά στο αναλυτικό κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ . Γενικά, αυτή η συμπεριφορά σχετίζεται με μικρότερους χρόνους ύπαρξης των λύσεων.
- Όταν η μεταβατική δυναμική πριν την έκρηξη είναι συνδυασμός των παραπάνω σεναρίων τότε, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται μεταξύ των αναλυτικών εκτιμήσεων. Τέτοια συμπεριφορά σχετίζεται με ενδιάμεσους χρόνους ύπαρξης.

**Παρατήρηση 3.3.4.** [Αφεστιάζων/εστιαζών μηχανισμός, συντονισμοί με το γραμμικό φάσμα και ο αντίστοιχος τύπος έκρηξης] Όταν θεωρούμε μηδενιζόμενες αρχικές συνθήκες, ο εκτεταμένος ή ο εντοπισμένος τύπος έκρηξης σχετίζεται με τον αφεστιάζοντα ή με τον εστιαζοντα τύπο πλέγματος αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

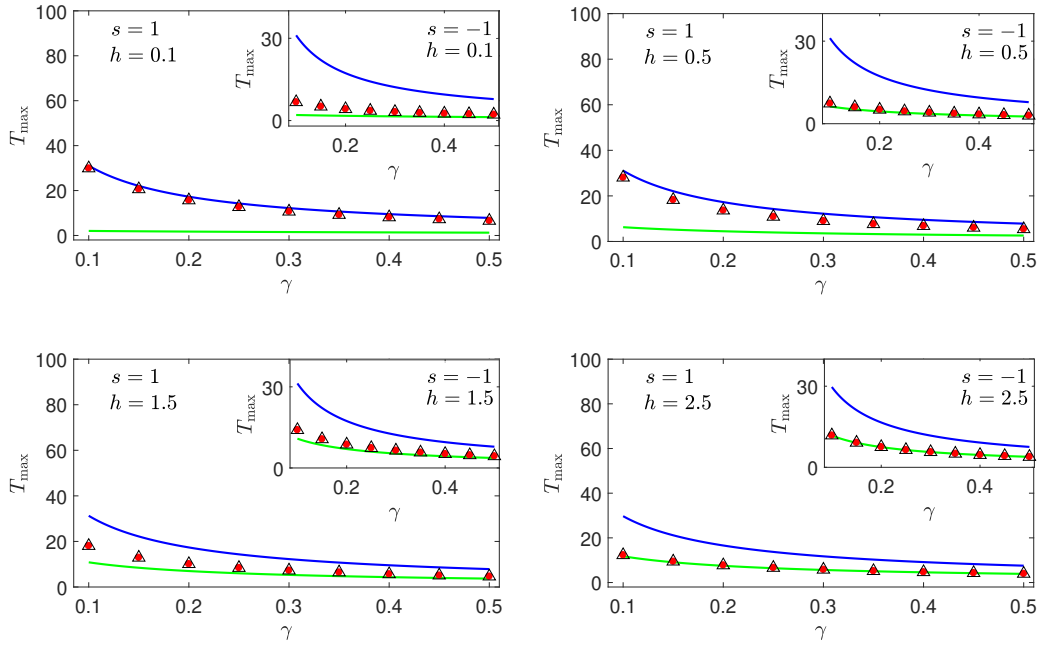
- Το αφεστιάζων ( $s = 1$ ) πλέγμα (3.3), εξυπηρετεί το σενάριο εκτεταμένης έκρηξης, καθώς σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα τείνει να χάσει την εντοπισμένη του αρχική κατάσταση (τουλάχιστον στα πρώιμα στάδια της εξέλιξης πριν την έκρηξη). Αυτή η συμπεριφορά γίνεται περισσότερο φανερή στη συνεχή/μικρού πλάτους περίπτωση. Ο θεμελιώδης μηχανισμός διασποράς της ενέργειας για την αρχική συνθήκη που θεωρούμε, είναι ο συντονισμός της λύσης με το γραμμικό φάσμα του συστήματος.

Έτσι όταν το σύστημα προσεγγίζει το συνεχές όριο, το γραμμικό φάσμα γίνεται περισσότερο εκτεταμένο. Επίσης όταν το πλάτος της λύσης μειώνεται, οι αντίστοιχες συχνότητες της λύσης προσεγγίζουν αυτές του γραμμικού φάσματος. Ο συνδυασμός των παραπάνω φαινομένων αυξάνει την πιθανότητα συντονισμού και τη διασπορά της ενέργειας της αρχικής κατάστασης. Ως αποτέλεσμα, η μεταβατική δυναμική θυμίζει το σενάριο εκτεταμένης έκρηξης.

- Το εστιάζων ( $s = -1$ ) πλέγμα (3.3), εξυπηρετεί το σενάριο της εντοπισμένης έκρηξης. Αυτή η συμπεριφορά γίνεται πιο φανερή στη διακριτή/μεγάλου πλάτους περίπτωση. Όταν το σύστημα είναι στην καθαρά διακριτή περίπτωση ή προσεγγίζει το αντισυνεχές όριο, το γραμμικό φάσμα συρρικνώνεται. Επιπλέον, το πλάτος της αρχικής συνθήκης γίνεται μεγαλύτερο και οι συχνότητες της λύσης κινούνται μακριά από το γραμμικό φάσμα. Ο συνδυασμός των παραπάνω φαινομένων, εξαναγκάζει στον εντοπισμό της λύσης αντί της διασποράς της. Συνεπώς, η μεταβατική δυναμική θυμίζει το σενάριο της εντοπισμένης έκρηξης.
- Η παράμετρος  $h$  που καθορίζει τη διακριτότητα του συστήματος, μπορεί να επηρεάζει δραματικά τη δυναμική της έκρηξης του πλέγματος το οποίο ορίζεται ως αφεστιάζων (μέσω της επιλογής της παραμέτρου  $s = 1$ ). Επί παραδείγματι, ένα αφεστιάζων πλέγμα μπορεί να παρουσιάζει έναν εντοπισμένου τύπου έκρηξης για μεγάλες τιμές της παραμέτρου διακριτοποίησης. Από την άλλη μεριά, αυτό το φαινόμενο δεν συμβαίνει σε τέτοια έκταση, στο εστιάζων ( $s = -1$ ) πλέγμα.

Για μια περαιτέρω διευκρίνηση των παραπάνω ισχυρισμών, προχωρούμε στην αριθμητική διερεύνηση εξετάζοντας τη συμπεριφορά του συστήματος για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $h$ . Το Σχήμα 3.6 επεκτείνει τη μελέτη του Σχήματος 3.3, για τις τιμές της παραμέτρου  $h = 0.1, 0.5, 1.5$  και  $2.5$ . Οι κύριες εικόνες απεικονίζουν τα αποτελέσματα για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ , ενώ τα ένθετα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Στην αφεστιάζουσα περίπτωση, όταν  $h = 0.1$ , παρατηρούμε μία εξαιρετική συμφωνία με το άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$ . Το γεγονός αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία και με τους ισχυρισμούς των Παρατηρήσεων 3.3.3 - 3.3.4. Εφόσον είμαστε στη συνεχή περίπτωση και το σύστημα είναι αφεστιάζων, εξυπηρετεί τον εκτεταμένο τύπο έκρηξης. Αυτή η συμπεριφορά του συστήματος επιβεβαιώνεται και στο Σχήμα 3.7, που δείχνει τα στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας, για  $s = 1$ ,  $h = 0.1$  και  $\gamma = 0.1$ . Προσεγγίζοντας το συνεχές όριο, η διασπορά

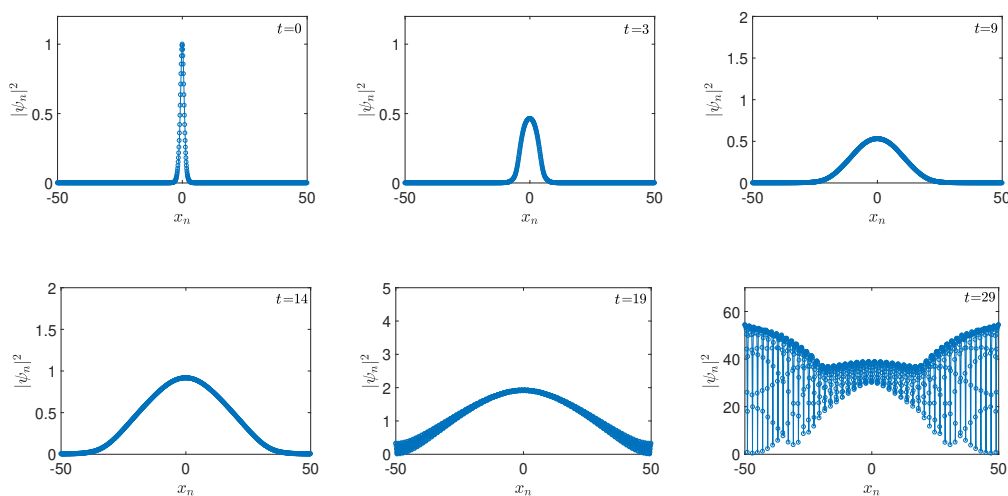




Σχήμα 3.6: Αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης [(κόκκινες) βούλες για το πρόβλημα  $(\mathcal{P})$ -τρίγωνα για το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$ ], για την αρχική συνθήκη με προφίλ  $\text{sech}$  (3.47), έναντι του αναλυτικού άνω φράγματος [άνω (μπλε) καμπύλη] και του κάτω φράγματος [κάτω (πράσινη) καμπύλη], συναρτήσει του  $\gamma \in [0.1, 0.5]$ . Κύριες εικόνες για την αφεσιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ , και ένθετα για την εστιάζουσα  $s = -1$ . Σε όλες τις εικόνες έχουμε τις παραμέτρους,  $L = 50$ ,  $\delta = 0.01$  και  $A = 1$ . Άνω αριστερή εικόνα:  $N = 1000$  και  $h = 0.1$ . Άνω δεξιά εικόνα:  $N = 200$  και  $h = 0.5$ . Κάτω αριστερή εικόνα:  $N = 67$  και  $h = 1.5$ . Κάτω δεξιά εικόνα:  $N = 40$  και  $h = 2.5$ .

της ενέργειας κατά μήκος του πλέγματος αυξάνεται εξαιτίας της αφεσιάζουσας επίδρασης. Η αρχική συνθήκη μετατρέπεται από μια χωρικά εντοπισμένη σε μια πιο εκτεταμένη χωρικά διαμόρφωση. Αυτή η εκτεταμένη κατάσταση θυμίζει ένα επίπεδο κύμα, όπως φαίνεται στα στιγμιότυπα  $t = 19$  και  $t = 29$  πριν την έκρηξη της λύσης. Μια τέτοια εξέλιξη συνιστά ακόμα ένα παράδειγμα του σεναρίου εκτεταμένης έκρηξης της Παρατήρησης 3.3.3. Επιστρέφουμε ξανά στο Σχήμα 3.6. Καθώς αυξάνουμε τη τιμή του  $h$  και το σύστημα κινείται σε πιο διακριτή περίπτωση, οι χρόνοι έκρηξης απομακρύνονται από το άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$  και προσεγγίζουν την αναλυτική εκτίμηση  $\bar{T}_{\max}$ . Όταν το  $h = 2.5$ , οι αριθμητικές τιμές πρακτικά συμπίπτουν με το κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ . Η παραπά-

νω αντιστροφή από την εκτεταμένη στην εντοπισμένη έκρηξη δεν ισχύει στο εστιάζων μοντέλο  $s = -1$ , όπως φαίνεται και στα ένθετα του Σχήματος 3.6. Η εστιάζουσα φύση του πλέγματος παραμένει ακόμα και για μικρές τιμές της παραμέτρου  $h$ . Από την άλλη μεριά, παρουσιάζεται αυξημένη για μεγάλες τιμές του  $h$  και οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης συγκλίνουν στο κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ . Παρατηρούμε δε, την απόλυτη ταύτιση για  $h \geq 1.5$ .



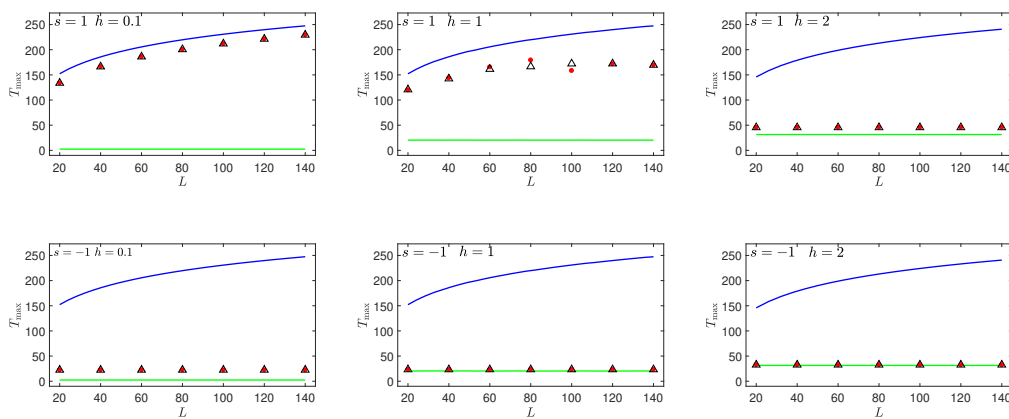
Σχήμα 3.7: Αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ : στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας  $|\psi_n|^2$  προς την έκρηξη, όταν  $\gamma = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $N = 1000$  ( $h = 0.1$ ) και  $A = 1$ .

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τα αναλυτικά φράγματα  $\hat{T}_{\max}$  και  $\bar{T}_{\max}$  με τους αριθμητικούς χρόνους έκρηξης συναρτήσει του ημι-μήκους  $L \in [20, 140]$ . Εδώ, θεωρούμε μικρές τιμές των παραμέτρων κέρδους ενέργειας,  $\gamma = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  και πλάτος της αρχικής συνθήκης  $A = 1$ . Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης απεικονίζονται στην άνω (κάτω) γραμμή του Σχήματος 3.8, για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$  (εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ ) και για τρεις τιμές της παραμέτρου διακριτοποίησης  $h = 0.1, 1$  και  $2$ , αντίστοιχα.

Στην αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ , παρατηρούμε για μια ακόμη φορά την επιρροή που ασκεί η διακριτότητα στη δυναμική του πλέγματος. Η μετατροπή της φύσης της δυναμικής της έκρηξης από εκτεταμένη σε εντοπισμένη, απορρέει από τη παραπάνω επιρροή αυξάνοντας τη παράμετρο διακριτοποίησης από  $h = 0.1$  σε  $h = 2$ .

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η αναστροφή αυτής της δυναμικής, που φαίνεται και στην άνω γραμμή δεύτερη εικόνα, παρουσιάζεται πέρα από την

ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής του ημι-μήκους  $L_{cr} \simeq 90$ . Συγκεκριμένα, η κατωφλική τιμή του ημιμήκους, έχει την εξής ιδιότητα: Για  $L < L_{cr}$ , οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης διατηρούν την τάση της λογαριθμικής εξάρτησης του άνω φράγματος  $\hat{T}_{max}$ . Ενώ για  $L \geq L_{cr}$ , οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης προσεγγίζουν μια σταθερά. Η τάση προς το κάτω φράγμα  $\bar{T}_{max}$ , αναδεικνύει το γεγονός ότι όταν το μήκος υπερβεί την κρίσιμη τιμή  $L_{cr}$ , αποτρέπεται η διασπορά ενέργειας κατά μήκος του πλέγματος. Έτσι περιορίζεται σε ένα υποδιάστημα του.

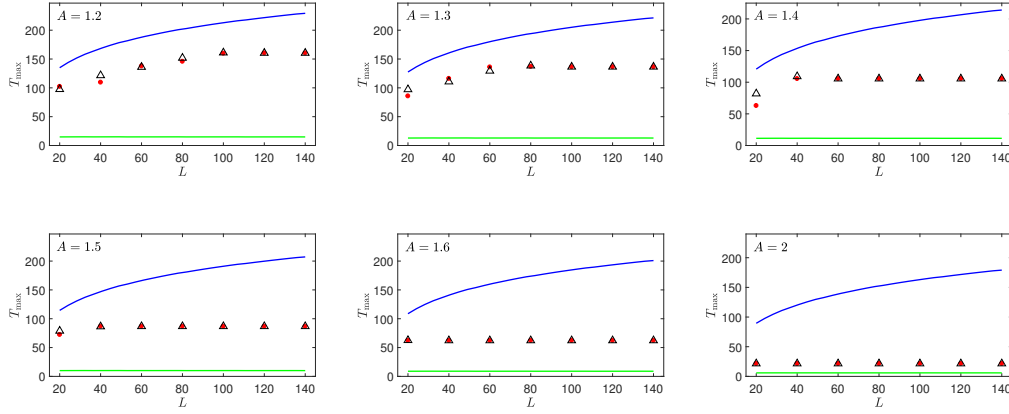


Σχήμα 3.8: Αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης [(κόκκινες) βούλες για το πρόβλημα (P)-τρίγωνα για το πρόβλημα (D)], για την αρχική συνθήκη με προφίλ  $\text{sech}$  (3.47), σε σύγκριση με το αναλυτικό άνω φράγμα [άνω (μπλε) καμπύλη] και κάτω φράγμα [κάτω (πράσινη) καμπύλη], συναρτήσεως του  $L \in [20, 140]$ . Άνω (κάτω) γραμμή για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$  (εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ ). Για τις τιμές της παραμέτρου  $h = 0.1, 1, 2$   $h = 0.1$  και υπόλοιπες παράμετροι:  $\gamma = 0.01, \delta = 0.01$  και  $A = 1$ .

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που παρατηρούμε και στη δεύτερη εικόνα της πρώτης γραμμής του Σχήματος 3.8, είναι μια διαφορά μεταξύ των αριθμητικών χρόνων έκρηξης που υπολογίστηκαν λύνοντας αριθμητικά τα προβλήματα (P) και (D). Αυτή η διαφορά παρατηρείται για τις τιμές του  $L$  κοντά στο  $L_{cr}$ . Η διαφορά αυτή υποδηλώνει ευαισθησία στις αλληλεπιδράσεις των συνοριακών σημείων του πλέγματος, στα όρια του  $L_{cr}$ . Αυτές οι αλληλεπιδράσεις καταδεικνύουν την παραπάνω μετατροπή της δυναμικής από εκτεταμένη σε εντοπισμένη.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο, ότι οι ισχυρισμοί της Παρατήρησης 3.3.4 επιβεβαιώνονται από τα αποτελέσματα της άνω γραμμής της εικόνας, αλλά και από αυτά της κάτω, για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Η εστιάζουσα

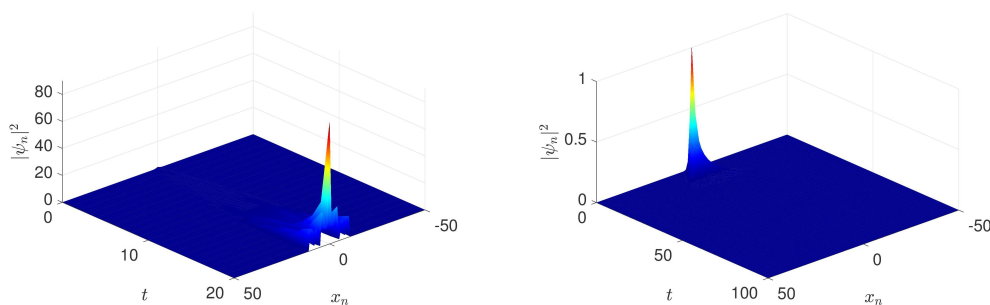
επίδραση αυξάνεται καθώς αυξάνουμε τις τιμές της παραμέτρου  $h$ , και οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης τείνουν να συμφωνούν εξαιρετικά με το κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ .



Σχήμα 3.9: Αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ : Αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης [(κόκκινες) βούλες για το πρόβλημα  $(\mathcal{P})$ -τρίγωνα για το πρόβλημα  $(\mathcal{D})$ ], για την αρχική συνθήκη με προφίλ  $\text{sech}$  (3.47), σε σύγκριση με το αναλυτικό άνω φράγμα [άνω (μπλε) καμπύλη] και κάτω φράγμα [κάτω (πράσινη) καμπύλη], συναρτήσει του  $L \in [20, 140]$ . Κάθε εικόνα απεικονίζει τα αποτελέσματα για αυξανόμενο πλάτος  $A$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  και  $h = 1$ .

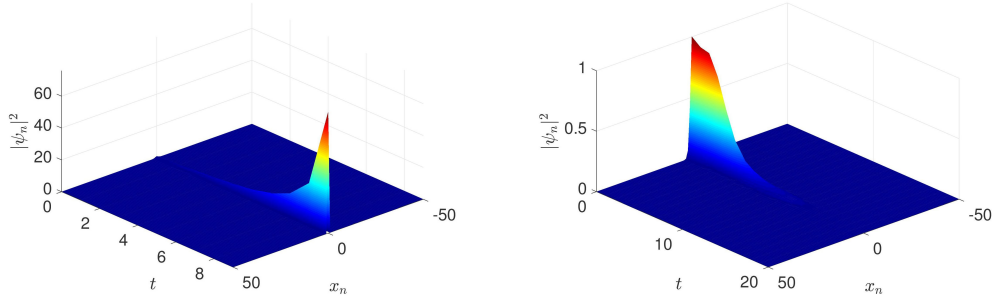
Εναλλακτικά, για να μελετήσουμε αυτή την αντιστροφή στη δυναμική της έκρηξης που συζητήσαμε προηγούμενα, μπορούμε να αυξήσουμε το πλάτος της αρχικής συνθήκης. Κάθε εικόνα του Σχήματος 3.9, απεικονίζει για διάφορες τιμές του πλάτους  $A$ , τα αποτελέσματα της σύγκρισης των αριθμητικών χρόνων έκρηξης με τα αναλυτικά φράγματα  $\hat{T}_{\max}$  και  $\bar{T}_{\max}$ , συναρτήσει του  $L$ . Η παράμετρος διακριτοποίησης έχει επιλεγεί ως  $h = 1$ , ενώ οι άλλες παράμετροι είναι  $\gamma = \delta = 0.01$ . Για αυξανόμενο πλάτος, η επίδραση της μη-γραμμικότητας γίνεται ισχυρή και κάνει την αρχική διέγερση του συστήματος εντοπισμένη, αποτρέποντας τη διασπορά της. Το τελευταίο περιγράφεται και στην Παρατήρηση 3.3.4. Για αυξανόμενο πλάτος  $A$ , ο εκτεταμένος τύπος έκρηξης υπερिशύχει για μικρές τιμές του ημι-μήκους  $L$ . Αυτό εκδηλώνεται με τη μείωση της κρίσιμης τιμής  $L_{\text{cr}}$ , για την οποία πραγματοποιείται η μετάβαση από τη εκτεταμένη στην εντοπισμένη έκρηξη. Για να μπορέσουμε να έχουμε έναν εκτεταμένο τύπο έκρηξης, θα πρέπει να μειώσουμε το ημι-μήκος του πλέγματος έτσι ώστε η αφεστιάζουσα επίδραση να είναι ισοδύναμη με την επίδραση της μη-γραμμικότητας. Και σε αυτή τη μελέτη διαπιστώνουμε την ύπαρξη της κρίσιμης τιμής  $L_{\text{cr}}$ , όταν

παρατηρούμε μια διαφορά μεταξύ των αριθμητικών χρόνων έκρηξης που υπολογίστηκαν από τις αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων ( $\mathcal{P}$ ) και ( $\mathcal{D}$ ). Επιπλέον, διακρίνουμε μια κρίσιμη τιμή για το πλάτος της αρχικής συνθήκης (που εδώ είναι  $A = 1.6$ ), πάνω από την οποία, υπερिशχύει ο εντοπισμένος τύπος έκρηξης. Σε αυτές τις μεγάλες τιμές πλάτους, οι αριθμητικοί χρόνοι προσεγγίζουν μια σταθερά και είναι ανεξάρτητοι από το μήκος του πλέγματος.



Σχήμα 3.10: Αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ : Αριστερή εικόνα: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη, για τη παράμετρο  $\gamma = 0.1 > \gamma^* \simeq 0$ . Δεξιά εικόνα: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς την φθορά της λύσης, για  $\gamma = -0.1 < \gamma^*$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι και για τις δύο περιπτώσεις:  $\delta = 0.01, L = 50, A = 1$  και  $N = 100$ .

Ολοκληρώνουμε την αριθμητική μελέτη της δυναμικής των μηδενιζόμενων αρχικών συνθηκών (3.47), εξετάζοντας τη κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$ , η οποία έχει αποδειχθεί αναλυτικά ότι διαχωρίζει τη δυναμική του συστήματος από την καθολική ύπαρξη σε έκρηξη της λύσης. Η αριστερή εικόνα του Σχήματος 3.10 απεικονίζει τη χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη όταν  $\gamma = 0.1$ , για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ . Τα στιγμιότυπα αυτής της περίπτωσης φαίνονται και στο Σχήμα 3.5. Η δεξιά εικόνα δείχνει τη χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς τη φθορά, όταν  $\gamma = -0.1$ . Άλλες παράμετροι:  $\delta = 0.01, L = 50, A = 1$  και  $N = 100$ . Επειδή το σύστημα είναι αφεστιάζων, επιδεικνύει διασπορά της ενέργειας σε γειτονικούς ταλαντωτές. Επιβεβαιώνεται επιπλέον, ότι η παράμετρος  $\gamma^* \simeq 0$  διαχωρίζει τα δύο είδη δυναμικής. Έκρηξη λύσης για  $\gamma > \gamma^*$  και φθορά για  $\gamma < \gamma^*$ . Από την άλλη μεριά, η αριστερή εικόνα του Σχήματος 3.11, απεικονίζει τη χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη, για το παράδειγμα της εστιάζουσας περίπτωσης  $s = -1$ . Αυτή η περίπτωση φαίνεται επίσης στα στιγμιότυπα του Σχήματος 3.4. Η δεξιά εικόνα του Σχήματος 3.11, δείχνει τη δυναμική του συστήματος προς τη φθορά. Οι



Σχήμα 3.11: Εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ : Αριστερή εικόνα: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη, για  $\gamma = 0.1 > \gamma^* \simeq 0$ . Δεξιά εικόνα: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας προς τη φθορά, για  $\gamma = -0.1 < \gamma^*$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι ίδιες και για τις δύο περιπτώσεις:  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $A = 1$  και  $N = 100$ .

παράμετροι είναι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για το παράδειγμα της αφεστιάζουσας περίπτωσης. Αυτή τη φορά βλέπουμε ότι δεν υπάρχει διασπορά ενέργειας κατά μήκος του πλέγματος, εξαιτίας της εστιάζουσας φύσης του συστήματος. Τέλος επιβιβιώνεται και εδώ η κρίσιμη τιμή  $\gamma^* \approx 0$ , που διαχωρίζει τη δυναμική του συστήματος.

### 3.3.3 Αρχικές Συνθήκες με Προφίλ $\tanh^2$

Το τελευταίο παράδειγμα της αρχικής συνθήκης που θα μελετήσουμε έχει τη μορφή:

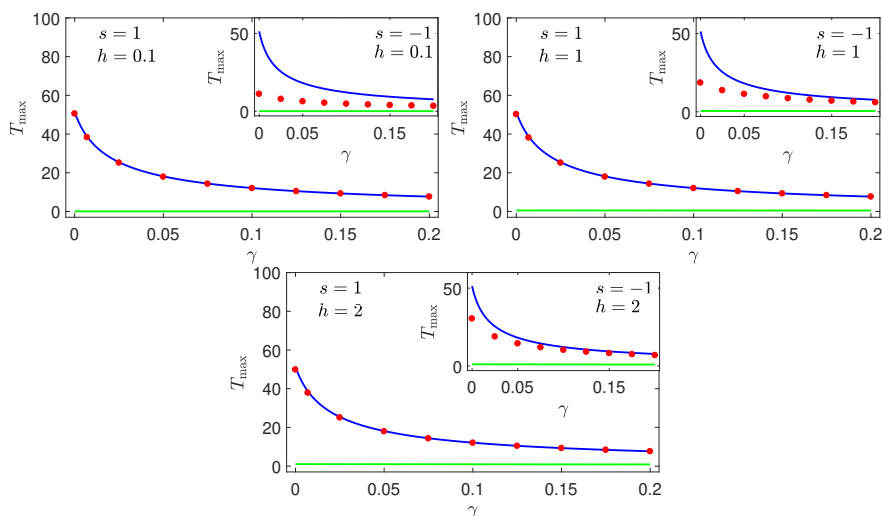
$$\psi_n(0) = A \tanh^2 x_n, \quad (3.48)$$

όπου  $A > 0$  είναι το πλάτος και  $x_n$  η διακριτή χωρική συντεταγμένη (3.4). Η διακριτή συνάρτηση (3.48) έχει ένα προφίλ που θυμίζει το βύθισμα της πυκνότητας ενός “διακριτού σκοτεινού σολιτονίου” πάνω σε ένα υπόβαθρο. Αυτή η αρχική συνθήκη είναι συμβατή με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες (2.4).

Το Σχήμα 3.12 δείχνει τα αποτελέσματα της σύγκρισης των αριθμητικών χρόνων έκρηξης με το αναλυτικό άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$  (3.20) και το κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$  (3.34), συναρτήσει της παραμέτρου  $\gamma \in [0, 0.2]$  και για τρεις τιμές της παραμέτρου διακριτοποίησης  $h = 0.1, 1$  και  $2$ . Οι άλλες παράμετροι είναι:  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ , και  $A = 1$ . Οι κύριες εικόνες απεικονίζουν τα αποτελέσματα της αφεστιάζουσας περίπτωσης  $s = 1$  και τα ένθετα αυτά της εστιάζουσας  $s = -1$ .

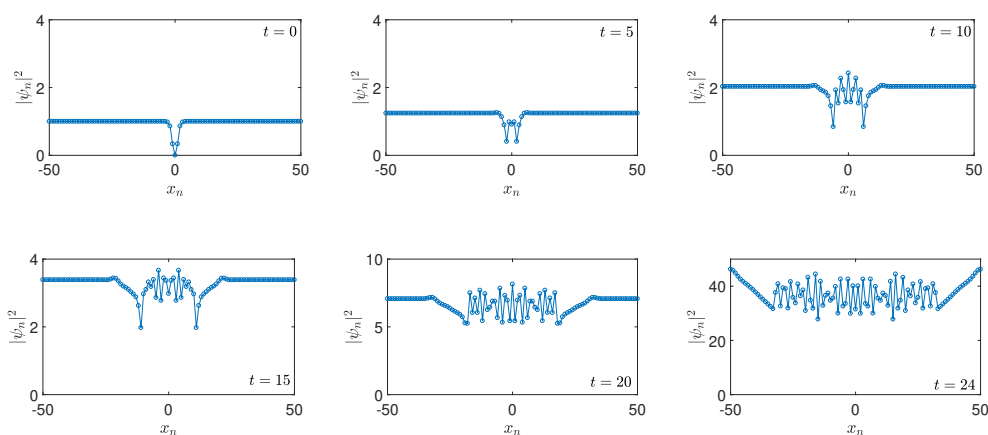
**Παρατήρηση 3.3.5.** Παρόλο που το κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$  δεν ισχύει αναλυτικά για το πρόβλημα αρχικών τιμών ( $\mathcal{P}$ ), με το οποίο είναι συμβατή η αρχική συνθήκη (3.48), το λαμβάνουμε υπόψη μας για τη μελέτη του Σχήματος 3.12. Αυτή η θεώρηση γίνεται για να εξετάσουμε αριθμητικά αν το  $\bar{T}_{\max}$  είναι κάτω φράγμα και στη περίπτωση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών. Στόχος μας είναι να διερευνήσουμε αν μπορεί να μας παρέχει την πληροφορία που αναφέρεται στις Παρατηρήσεις 3.3.3 και 3.3.4, για την πιθανή μεταβατική δυναμική μεταξύ των διαφορετικών τύπων έκρηξης ακόμα και σε αυτή τη περίπτωση αρχικών συνθηκών.

Στην αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ , αποδεικνύεται ότι το άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$  είναι μια ακριβής εκτίμηση για τους αριθμητικούς χρόνους έκρηξης, για όλες τις τιμές της παραμέτρου διακριτοποίησης  $h$ . Αυτή η εξαιρετική συμφωνία μπορεί να δικαιολογηθεί αν εξετάσουμε τη συμπεριφορά της δυναμική των λύσεων. Στο Σχήμα 3.13, απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας

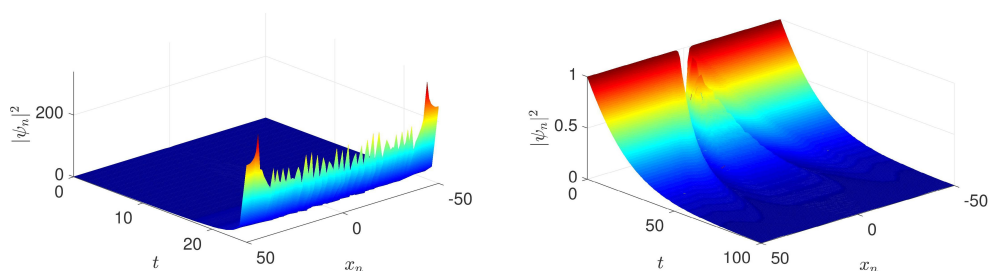


Σχήμα 3.12: Αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης [(κόκκινες) βούλες για το πρόβλημα ( $\mathcal{P}$ )], για την αρχική συνθήκη με προφίλ  $\tanh^2$  (3.48), σε σύγκριση με το αναλυτικό άνω φράγμα [άνω (μπλε) καμπύλη] και κάτω φράγμα [κάτω (πράσινη) καμπύλη], συναρτήσεως του  $\gamma \in [0, 0.2]$ . Κύριες εικόνες (ένθετα) για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$  (εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ ) απεικονίζουν τα αποτελέσματα της σύγκρισης για τρεις τιμές της παραμέτρου  $h = 0.1, 1$  και  $2$ . Άλλες παράμετροι:  $\delta = 0.01, A = 1$ , και  $L = 50$ .

μιας τέτοιας λύσης, όταν  $\gamma = 0.025$  και  $h = 1$ . Παρατηρούμε μια αύξηση του ύψους του υποβάθρου μαζί με μια ταυτόχρονη εξάπλωση της διαταραχής που προκλήθηκε από το αρχικό κεντρικό βύθισμα της πυκνότητας, σε όλο το πλέγμα. Εφόσον αυτή η συμπεριφορά είναι ένα καλό παράδειγμα του σεναρίου εκτεταμένης έκρηξης που περιγράφεται και στις Παρατηρήσεις 3.3.3-3.3.4, περιμένουμε τη συμφωνία των αριθμητικών χρόνων έκρηξης με το  $\hat{T}_{\max}$ . Στο Σχήμα 3.14 απεικονίζεται η χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας. Βλέπου-



Σχήμα 3.13: Στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης της πυκνότητας για την αρχική συνθήκη (3.48) με πλάτος  $A = 1$ , για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = 0.025$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $h = 1$  και  $L = 50$ .



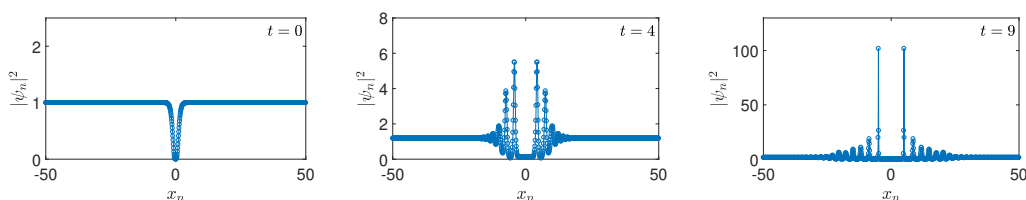
Σχήμα 3.14: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας για την αφεστιάζουσα περίπτωση  $s = 1$ , όταν  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $h = 1$ ,  $N = 100$  και  $A = 1$ . Αριστερή εικόνα: Εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη, όταν  $\gamma = 0.025 > \gamma^* \simeq -0.01$ . Δεξιά εικόνα: Φθορά της πυκνότητας όταν  $\gamma = -0.03 < \gamma^* \simeq -0.01$ .



με ότι ενώ αρχικά υπερισχύει ο εκτεταμένος τύπος έκρηξης, στα τελικά στάδια της εξέλιξης διαμορφώνονται δύο κορυφές που βρίσκονται κοντά στα συνοριακά σημεία. Για αυτό το σύνολο των παραμέτρων η κρίσιμη τιμή είναι  $\gamma^* \simeq -0.01$  και παρατηρούμε το φαινόμενο της έκρηξης εφόσον  $\gamma = 0.025 > \gamma^* \simeq -0.01$ . Από την άλλη μεριά όταν  $\gamma = -0.03 < \gamma^* \simeq -0.01$ , η δεξιά εικόνα του Σχήματος 3.14, απεικονίζει τη φθορά της πυκνότητας. Αυτή η συμπεριφορά συμφωνεί με την ανάλυση για τη κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$ . Σε αυτό το παράδειγμα αρχικής συνθήκης, βλέπουμε μια ενδιαφέρουσα δυναμική. Πριν τη φθορά της λύσης, παρατηρούμε το διαχωρισμό του αρχικού βυθίσματος σε δύο οδεύοντα βυθίσματα. Για την κατανόηση αυτής της ενδιαφέρουσας συμπεριφοράς θα πρέπει να γίνει βαθύτερη μελέτη της ύπαρξης και της συμπεριφοράς πληθώρας μορφών διακριτών σκοτεινών σολιτονίων για το διατηρητικό όριο  $\gamma = \delta = 0$ , η οποία μπορεί να αποτελέσει μια ενδιαφέρουσα μελλοντική ερευνητική κατεύθυνση (βλ. [34, 35, 41, 46, 54, 55, 58, 68]).

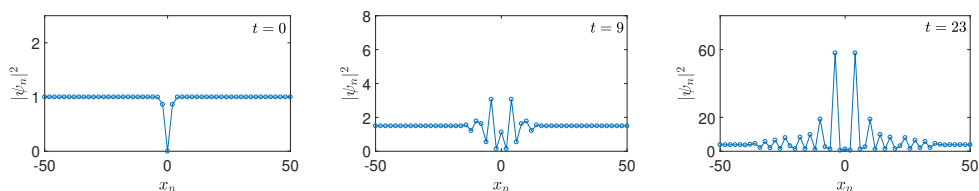
Επιστρέφουμε τώρα στα ένθετα του Σχήματος 3.12, τα οποία αναφέρονται στην εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$  και στα οποία παρατηρούμε ένα ενδιαφέρον φαινόμενο. Για  $h = 0.1$ , οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται κοντά στο κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ , παρόλο που η αρχική συνθήκη (3.48) δεν ικανοποιεί το πρόβλημα ( $\mathcal{D}$ ). Καθώς η παράμετρος διακριτοποίησης  $h$  αυξάνεται, οι χρόνοι έκρηξης απομακρύνονται από το κάτω φράγμα και προσεγγίζουν το άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$ .

Αυτή η συμπεριφορά έρχεται σε αντίθεση με αυτή που παρατηρήθηκε στη περίπτωση των μηδενιζόμενων αρχικών συνθηκών και που συζητήσαμε στη Παράγραφο 3.3.2. Για την κατανόηση του φαινομένου αυτού μπορούμε να παρατηρήσουμε τα Σχήματα 3.15 και 3.16, τα οποία απεικονίζουν τα στιγμιότυπα της χρονικής εξέλιξης της πυκνότητας όταν  $h = 0.1$  και  $h = 2$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 3.15: Στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας για την αρχική συνθήκη (3.48), με πλάτος  $A = 1$  και για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ , και  $N = 1000$  ( $h = 0.1$ ).

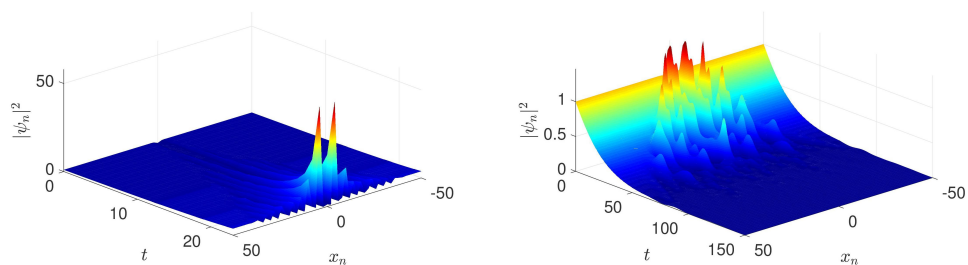
Στο Σχήμα 3.15 παρατηρούμε ότι το εστιάζων πλέγμα με  $h = 0.1$ , τείνει να



Σχήμα 3.16: Στιγμιότυπα της εξέλιξης της πυκνότητας για την αρχική συνθήκη (3.48), με πλάτος  $A = 1$  και για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ . Άλλες παράμετροι:  $\gamma = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ , και  $N = 50$  ( $h = 2$ ).

μετασχηματίζει το αρχικό “σκοτεινό διακριτό σολιτόνιο” σε μια “διακριτή φωτεινή” σειρά κυμάτων όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο  $t = 4$ . Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή βλέπουμε την εμφάνιση δύο κορυφών κοντά στο αρχικό κεντρικό βύθισμα. Τη χρονική στιγμή  $t = 9$ , αυτοί οι ταλαντωτές κερδίζουν ύψος εξαιτίας της κερδισμένης ενέργειας και τελικά πραγματοποιείται η έκρηξη μέσω αυτών. Αυτή η καθόλου τετριμμένη μεταβατική δυναμική διαφέρει δραματικά από την ανάλογη της αφεστιάζουσας περίπτωσης (όπου κυριαρχεί η αύξηση του ύψους του υποβάθρου), και είναι περισσότερο συμβατή με το σενάριο της εντοπισμένης έκρηξης. Το τελευταίο εξηγεί και το γεγονός ότι οι χρόνοι έκρηξης βρίσκονται κοντά στο κάτω φράγμα  $\bar{T}_{\max}$ .

Για  $h = 2$ , παρατηρούμε στο Σχήμα 3.16 κάποιες ομοιότητες αλλά και κάποιες διαφορές της μεταβατικής δυναμικής, με αυτή της περίπτωσης  $h = 0.1$ . Παρόλο που η έκρηξη πραγματοποιείται εξαιτίας της εμφάνισης αυτών των φωτεινών σολιτονικών δομών, για αυτή τη περίπτωση διακριτότητας έχουμε



Σχήμα 3.17: Χωροχρονική εξέλιξη της πυκνότητας για την εστιάζουσα περίπτωση  $s = -1$ , όταν  $\delta = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $h = 2$ ,  $N = 50$  και  $A = 1$ . Αριστερή εικόνα: Εξέλιξη της πυκνότητας προς την έκρηξη, όταν  $\gamma = 0.01 > \gamma^* \simeq -0.01$ . Δεξιά εικόνα: Φθορά της πυκνότητας, όταν  $\gamma = -0.03 < \gamma^* \simeq -0.01$ .

διασπορά ενέργειας κατά μήκος του πλέγματος και ως εκ τούτου περισσότερους ταλαντωτές με αυξημένο πλάτος. Όλη η εξέλιξη θυμίζει περισσότερο το σενάριο της εκτεταμένης έκρηξης και αυτό εξηγεί γιατί οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται κοντά στο άνω φράγμα  $\hat{T}_{\max}$ .

Η δυναμική της έκρηξης για τη περίπτωση όπου  $h = 2$  απεικονίζεται και στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 3.17. Σημειώνουμε ότι το γραμμικό κέρδος ενέργειας είναι  $\gamma = 0.01 > \gamma^* \simeq -0.01$ . Σε αντίθεση με τη προηγούμενη περίπτωση, όταν  $\gamma = -0.03 < \gamma^* \simeq -0.01$ , έχουμε φθορά της πυκνότητας όπως φαίνεται στην δεξιά εικόνα. Η κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$  που διαχωρίζει τη δυναμική σε φθορά και έκρηξη λύσεων, υπολογίστηκε αριθμητικά με ακρίβεια της τάξης  $10^{-2}$ .

### 3.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, για την αναλυτική μελέτη θεωρήσαμε την δυναμική της έκρηξης της διακριτής μη-γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (3.3), (DNLS), με κέρδος και απώλεια ενέργειας. Η παραπάνω μελέτη επιβεβαιώθηκε και από αριθμητικές προσομοιώσεις. Το μοντέλο έχει σημαντικές εφαρμογές, στη μη-γραμμική οπτική. Περιγράφει τη δυναμική από συζευγμένους ταλαντωτές, όπου έχουν σημασία τα γραμμικά και μη-γραμμικά κέρδη και απώλειες ενέργειας. Αποδείξαμε άνω και κάτω φράγματα για τους χρόνους έκρηξης, υπό την έννοια των αναλυτικών ενεργειακών εκτιμήσεων. Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι, βρέθηκε μία κρίσιμη τιμή  $\gamma^*$  η οποία διαχωρίζει τη περίπτωση της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, από την φθορά των λύσεων, όταν  $\gamma < 0$ ,  $\delta > 0$ . Για τη μελέτη μας θεωρήσαμε τόσο την εστιάζουσα όσο και την αφεστιάζουσα περίπτωση του μοντέλου μας. Αποδείξαμε το άνω φράγμα για το πλέγμα με περιοδικές συνθήκες, ενώ το κάτω φράγμα για το πλέγμα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Στη δεύτερη περίπτωση, εκμεταλλευτήκαμε την σειρά των σχέσεων εγκλεισμού για τους χώρους αθροίσιμων ακολουθιών, που ισχύουν μόνο για το διακριτό μοντέλο.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα εξετάστηκαν από αριθμητικές προσομοιώσεις, για διάφορα παραδείγματα αρχικών συνθηκών: χωρικά εκτεταμένων, εντοπισμένων (που θυμίζουν το προφίλ ενός διακριτού φωτεινού σολιτονίου) και φθίνουσες σε ένα πεπερασμένο υπόβαθρο (που θυμίζουν το προφίλ ενός διακριτού σκοτεινού σολιτονίου). Τα ευρήματα της αριθμητικής μελέτης αποκάλυψαν ότι, οι αναλυτικές εκτιμήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ταξινόμηση διαφορετικών τύπων έκρηξης των λύσεων.

Για παράδειγμα, για χωρικά εκτεταμένα αρχικά δεδομένα, αποδείχτηκε μια εξαιρετική συμφωνία του άνω φράγματος με τους χρόνους έκρηξης. Ο χρόνος έκρηξης του συστήματος όρισε την ακραία περίπτωση της *εκτεταμένης* (ή ασθενούς) έκρηξης.

Στην περίπτωση των εντοπισμένων αρχικών συνθηκών, η συμπεριφορά του συστήματος αποδείχτηκε να είναι πολυπλοκότερη. Εντοπίσαμε δύο διαφορετικούς τύπους έκρηξης. Ο πρώτος είναι ένας τύπος εκτεταμένης έκρηξης, όπου ένα μεγάλο μέρος ή και ολόκληρο το πλέγμα εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο. Η δυναμική αυτής της περίπτωσης θυμίζει την εξέλιξη των χωρικά εκτεταμένων αρχικών συνθηκών και ευνοείται από την αφεστιάζουσα περίπτωση της εξίσωσης DNLS. Όταν έχουμε εκτεταμένη έκρηξη, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης προσεγγίζουν και σε κάποιες περιπτώσεις συμφωνούν εξαιρετικά με το αναλυτικό άνω φράγμα. Ο δεύτερος τύπος είναι η *εντοπισμένη* (ή ισχυρή) έκρηξη. Σε αυτή την περίπτωση η έκρηξη πραγματοποιείται μέσω ενός ταλαντωτή, χωρίς διασπορά ενέργειας. Αυτή η συμπεριφορά, ευνοείται από την εστιάζουσα περίπτωση του πλέγματος. Όταν έχουμε εντοπισμένη έκρηξη, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης προσεγγίζουν και σε κάποιες περιπτώσεις συμφωνούν εξαιρετικά, με το κάτω φράγμα. Στην ενδιαμέση περίπτωση διακριτότητας/πλάτους, παρατηρήσαμε έναν συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων δυναμικής. Σε αυτή την περίπτωση, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται μεταξύ των αναλυτικών φραγμάτων. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι χρόνοι έκρηξης ακολουθούν ποιοτικά, τις συναρτησιακές εξαρτήσεις από τις παραμέτρους, οι οποίες προβλέφθηκαν από τις αναλυτικές εκτιμήσεις.

Στην περίπτωση των αρχικών συνθηκών με ένα βύθισμα της πυκνότητας, βρήκαμε σημαντικές διαφορές μεταξύ της αφεστιάζουσας και της εστιάζουσας περίπτωσης. Στην εστιάζουσα περίπτωση, η δυναμική θυμίζει αυτή της εκτεταμένης έκρηξης. Συνεπώς, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης συμφωνούν εξαιρετικά με το αναλυτικό φράγμα. Στην εστιάζουσα περίπτωση αποκαλύψαμε και ένα ενδιαφέρον φαινόμενο. Στην συνεχή περίπτωση, οι αριθμητικοί χρόνοι έκρηξης βρίσκονται κοντά στο αναλυτικό κάτω φράγμα. Ενώ στη διακριτή περίπτωση βρίσκονται κοντά στο άνω φράγμα. Αυτό το φαινόμενο διαφέρει δραματικά από το αντίστοιχο των εντοπισμένων αρχικών συνθηκών καθώς, μια ενίσχυση της διακριτότητας σχετίζεται με περιορισμένη διασπορά ενέργειας και την εντοπισμένη έκρηξη.

Τα αποτελέσματα μας, ανοίγουν το δρόμο για μια καλύτερη κατανόηση της δυναμικής της γενικής περίπτωσης της εξίσωσης DNLS, που θεωρήσαμε. Μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση θα ήταν να διερευνήσουμε τη δυναμική της έκρηξης για τη περίπτωση των πλεγμάτων, ανώτερης τάξης. Εκεί η μεγάλη

διάσταση, μπορεί να επηρεάζει δραματικά την εξέλιξη του συστήματος. Από την άλλη μεριά, κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει εκτεταμένα μοντέλα με μη-γραμμικότητες, (βλ. [41]), ή μη-γραμμικούς όρους που περιγράφουν φαινόμενα που επιτρέπουν γρήγορη διάδοση ενέργειας κατα μήκος του πλέγματος. (βλ. [34, 54, 55]).

# Βιβλιογραφία

- [1] V. Achilleos, A. Álvarez, J. Cuevas, D. J. Frantzeskakis, N. I. Karachalios, P. G. Kevrekidis, and B. Sánchez-Rey, *Escape dynamics in the discrete repulsive  $\phi^4$  model*, Physica D **244** (2013), 1–24.
- [2] R. A. Adams and J. F. Fournier, *Sobolev Spaces* (Elsevier, 2003)
- [3] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, 2012).
- [4] N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons. Nonlinear Pulses and Beams* (Chapman and Hall, 1997).
- [5] N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine*, Lecture Notes in Physics **751** (Springer-Verlag, 2008).
- [6] Z. A. Anastassi, G. Fotopoulos, D. J. Frantzeskakis, T. P. Horikis, N. I. Karachalios, P. G. Kevrekidis, I. G. Stratis and K. Vetas, *Spatiotemporal algebraically localized waveforms for the nonlinear Schrödinger equation with gain and loss*, Phys. D **355** (2017), 24–33.
- [7] P. Anninos, S. Oliveira, and R. A. Matzner, *Fractal structure in the scalar  $\lambda(\phi^2 - 1)^2$  theory*, Phys. Rev. D **44**, 1147 (1991).
- [8] I. V. Barashenkov O. F. Oxtoby and D. E. Pelinovsky, *Translationally invariant discrete kinks from one-dimensional maps*, Phys. Rev E **72** (2005), 035602 (R).
- [9] D. K. Campbell, J. F. Schonfeld, C. A. Wingate, *Resonance structure in kink-antikink interactions in  $\phi^4$  theory*, Phys. D **9**, 1 (1983).

- 
- [10] C. H. Cho, S. Hamada and H. Okamoto, *On the finite difference Approximation for a parabolic blow-up problem*, Japan J. Indust. Appl. Math. **24** (2007), 131–160.
- [11] J. A. Combs and S. Yip, *Single-kink dynamics in a one-dimensional atomic chain: A nonlinear atomistic theory and numerical simulation*, Phys. Rev. B **28** (1983), 6873.
- [12] J. C. Comte, P. Marquié, and M. Remoissenet, *Dissipative lattice model with exact traveling discrete kink-soliton solutions: Discrete breather generation and reaction diffusion regime*, Phys. Rev. E **60** 6 (1999), 7484.
- [13] T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, (Cambridge University Press, 2010).
- [14] S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis, A. Khare and A. Saxena, *Exact static solutions to a translationally invariant discrete  $\phi^4$  model*, J. Phys. A **40**, 6267 (2007).
- [15] S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis and N. Yoshikawa, *Discrete Klein–Gordon models with static kinks free of the Peierls–Nabarro potential*, J. Phys. A.: Math. Gen. **38** (2005), 7617.
- [16] S. V. Dmitriev, A. Khare, P. G. Kevrekidis, A. Saxena, and L. Hadzievski, *High-speed kinks in a generalized discrete  $\phi^4$  model*, Phys. Rev. E **77**, 056603 (2008).
- [17] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and nonlinear wave equations* (Academic Press, New York, 1982).
- [18] J. C. Eilbeck and M. Johansson, *The discrete nonlinear Schrödinger equation - 20 years on, Localization and Energy Transfer in Nonlinear Systems*: pp. 44-67. Proceedings of the Third Conference San Lorenzo de El Escorial Madrid, Spain, 17-21 June 2002 (World Scientific, 2003).
- [19] P. Fife, *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988).
- [20] G. Filatrella and B. A. Malomed, *The alternating-current-driven motion of dislocations in a weakly damped Frenkel–Kontorova lattice*, J. Phys.: Condens. Matter **11** (1999), 7103.

- 
- [21] S. Flach and A. V. Gorbach, *Discrete breathers: Advances in theory and applications*, Phys. Rep. **467** (2008), 1–116.
- [22] S. Flach and C. R. Willis, *Discrete breathers*, Phys. Rep. **295** (1998), 181–264.
- [23] L. Gagnon, *Solitons on a continuous-wave background and collision between two dark pulses: some analytical results*, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 469 (1993).
- [24] G. Gligorić, A. Maluckov, L. Hadžievski and B. A. Malomed, *Soliton stability and collapse in the discrete nonpolynomial Schrödinger equation with dipole-dipole interactions*, Phys. Rev. E **79** (2009), 053609–1–6.
- [25] J. K. Hale. *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*. Mathematical Surveys and Monographs 25 Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1988)
- [26] A. Haraux and M. A. Jendoubi, *Convergence of solutions of second-order gradient-like systems with analytic nonlinearities*, J. Differential Equations **144** (1998), 313–320.
- [27] A. Haraux and M. A. Jendoubi, *The Lojasiewicz gradient inequality in the infinite-dimensional Hilbert space framework*, J. Funct. Anal. **260** (2011), 2826.
- [28] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications* (Oxford University Press, 1996).
- [29] D. Hennig, S. Fugmann, L. Schimansky-Geier, and P. Hänggi, *Self-organized escape of oscillator chains in nonlinear potentials*, Phys. Rev. E **76** (2007), 041110.
- [30] D. Hennig, L. Schimansky-Geier, and P. Hänggi, *Role of energy exchange in the deterministic escape of a coupled nonlinear oscillator chain*, Europhys. Lett. **78** (2007), 20002.
- [31] D. Hennig and G. Tsironis, *Wave transmission in nonlinear lattices* Phys. Rep. **307** (1999), 333–432.
- [32] G. Iooss and G. James, *Localized waves in nonlinear oscillator chains*, Chaos **15** (2005), 015113.



- 
- [33] G. Iooss and D. Pelinovsky, *Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices*, Physica D **216** (2006), 327–345.
- [34] M. Johansson, *Discrete nonlinear Schrödinger approximation of a mixed Klein-Gordon/Fermi-Pasta-Ulam chain: Modulational instability and a statistical condition for creation of thermodynamic breathers*. Physica D **216** (2006), 62–70.
- [35] M. Johansson and Y. S. Kivshar, *Discreteness-induced oscillatory instabilities of dark solitons*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 85–88.
- [36] N.I. Karachalios, B. Sánchez-Rey, P.G. Kevrekidis, and J. Cuevas, *Breathers for the discrete nonlinear Schrödinger equation with nonlinear hopping*, J. Nonlinear Sci. **23** (2013), 205.
- [37] N. I. Karachalios and A. N. Yannacopoulos, *Global existence and compact attractors for the discrete nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **217** (2005), 88–123.
- [38] N. I. Karachalios, H. Nistazakis and A. N. Yannacopoulos, *Asymptotic Behavior of Solutions of Complex Discrete Evolution Equations: The Discrete Ginzburg-Landau Equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **A 19** (2007), 711–736.
- [39] E. Kenig, B. A. Malomed, M. C. Cross, and R. Lifschitz, *Intrinsic localized modes in parametrically driven arrays of nonlinear resonators*, Phys. Rev. E **80** (2009), 046202–1–7.
- [40] P. G. Kevrekidis, *On a class of discretizations of Hamiltonian nonlinear partial differential equations*, Physica D **183** (2003), 68–86.
- [41] P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2009).
- [42] P. G. Kevrekidis, *Non-linear waves in lattices: past, present, future*, IMA J. Appl. Math. **76** (2011), 389–423.
- [43] P. G. Kevrekidis, K. O. Rasmussen and A. R. Bishop, *The discrete nonlinear Schrödinger equation: a survey of recent results*, Internat. J. Mod. Phys. B **15** (2001) 2833–2900.

- 
- [44] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, 2003).
- [45] Y. S. Kivshar, M. Haelterman, A. Sheppard, *Standing localized modes in nonlinear lattices*, Phys. Rev. E **50** (1994), 3161–3170.
- [46] Y. S. Kivshar, W. Królikowski and O. Chubykalo, *Dark solitons in discrete lattices*, Phys. Rev. E **50** (1994), 5021–5031.
- [47] H. A. Kramers, *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*, Physica **7** (1940), 284–304.
- [48] F. Lederer, G. I. Stegemanb, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, Y. Silberberg, *Discrete solitons in optics*, Physics Reports **463** (2008), 1–126.
- [49] B. A. Malomed, E. Ding, K. W. Chow and S. K. Lai, *Pinned modes in lossy lattices with local gain and nonlinearity*, Phys. Rev. E **86** (2012), 036608–1–8.
- [50] S. Łojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, in: *Colloques internationaux du CNRS: Les équations aux dérivées partielles*, Paris, 1962, Editions du CNRS, Paris, 1963, pp. 87–89.
- [51] S. Łojasiewicz, *Ensembles Semi-Analytiques*, *Publ. Inst. Hautes Etudes Sci., Bures-sur-Yvette, 1965*, preprint.
- [52] K. Mischaikow, *Global asymptotic dynamics of gradient-like bistable equations*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 1199–1224.
- [53] Y. Nishiura, *Far-From-Equilibrium Dynamics* (American Mathematical Society, 2002).
- [54] M. Öster, Y. B. Gaididei, M. Johansson and P. Christiansen, *Nonlocal and nonlinear dispersion in a nonlinear Schrödinger-type equation: exotic solitons and short-wavelength instabilities*. Physica D **198** (2004), 29–50.
- [55] M. Öster, M. Johansson, *Phase twisted modes and current reversals in a lattice model of waveguide arrays with nonlinear coupling*. Phys. Rev. E **71** (2005), 025601 (R).

- 
- [56] O. F. Oxtoby, D. E. Pelinovsky, and I.V. Barashenkov, *Travelling kinks in discrete  $\phi^4$  models*, Nonlinearity **19**, 217 (2005).
- [57] J. Palis and W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag, BerlinNew York, (1982)
- [58] D. E. Pelinovsky and P. G. Kevrekidis, *Stability of discrete dark solitons in nonlinear Schrödinger lattices*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 185206 (10pp).
- [59] M. Peyrard and A. R. Bishop, *Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2755 (1989).
- [60] P. Prelovšek and I. Sega, *Domain-wall-like excitations in a discrete one-dimensional anharmonic lattice model*, J. Phys. C **14**, 5609 (1981).
- [61] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487–513.
- [62] I. Roy, S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis, and A. Saxena, *Comparative study of different discretizations of the  $\phi^4$  model*, Phys. Rev. E **76**, 026601 (2007).
- [63] A. V. Savin, Y. Zolotaryuk and J. C. Eilbeck, *Moving kinks and nano-pterons in the nonlinear Klein–Gordon lattice*, Physica D **138** (2000), 267–281.
- [64] A. C. Scott, *Nonlinear Universe* (Springer-Verlag, 2007).
- [65] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* (Springer-Verlag, New-York, 1994).
- [66] J. M. Speight, *A discrete  $\phi^4$  system without a Peierls - Nabarro barrier*, Nonlinearity **10**, 1615 (1997).
- [67] C. Sulem and P. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse* (Springer-Verlag, 1999).
- [68] H. Susanto and M. Johansson, *Discrete dark solitons with multiple holes*, Phys. Rev. E **72** (2005), 016605–1–7.

- 
- [69] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [70] A. Tveito and R. Winther *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach* (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- [71] A. V. Ustinov, M. Cirillo and B. A. Malomed, *Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **47** 13 (1993), 8357.
- [72] G. P. Veldes, J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Coupled backward- and forward-propagating solitons in a composite right- and left-handed transmission line*, Phys. Rev. E **88**, 013203 (2013).
- [73] Yannan Shen, P. G. Kevrekidis, G.P. Veldes, D. J. Frantzeskakis, D. DiMarzio, X. Lan, V. Radisic. *From solitons to rogue waves in nonlinear left-handed metamaterials*. Phys. Rev. E **95**, 032223 (2017).
- [74] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems* (Springer-Verlag, New-York, 1986).
- [75] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IIB: Nonlinear Monotone Operators* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).