ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΚΝΑΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων και η παρουσίαση των πιο βασικών της αποτελεσμάτων. Ο κύριος προσανατολισμός είναι η παρουσίαση των οριακών θεωρημάτων και τον σπουδαίο ρόλο που αυτά έχουν στη Στατιστική καθώς και στον προγραμματισμό. Η προσομοίωση στοχαστικών και πιθανοθεωρητικών μοντέλων χρησιμοποιώντας παράλληλα και την εφαρμογή οριακών θεωρημάτων έχουν φέρει σημαντικά αποτελέσματα στον επιχειρηματικό κόσμο.

Η εργασία ξεκινάει από τον ορισμό της πιθανότητας και του χώρου πιθανότητας μέσω εργαλείων της θεωρίας μέτρου. Μετέπειτα ορίζεται κατάλληλα η έννοια της τυχαίας μεταβλητής από οποιονδήποτε χώρο πιθανότητας στους πραγματικούς αριθμούς, τον ορισμό της κατανομής και στον τύπο εύρεσης της αναμενόμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής. Στη συνέχεια διατυπώνονται και κατηγοριοποιούνται τα βασικά είδη συγκλίσεων σε χώρους πιθανότητας, καθώς και η παρουσίαση και απόδειξη όλων των βασικών ανισοτήτων .

Μεγάλο κομμάτι της εργασίας αφορά στην μελέτη των βασικών μορφών των κεντρικών Οριακών θεωρημάτων με βάση την βαρύτητα τους κατά φθίνουσα σειρά. Επίσης, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το κλασικό Κ.Ο.Θ. με χρήση χαρακτηριστικής συνάρτησης. Ιδιαίτερη βάση δίνεται σε εφαρμογές του Κ.Ο.Θ. για μη ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Η εργασία ολοκληρώνεταιμε αριθμητικά αποτέλεσματα τα οποία δημιουργήθηκαν με χρήση της γλώσσας R, με στόχο να επαληθευτεί η ισχύς του κλασικού κεντρικού οριακού θεωρήματος αλλά και για την προσομοίωση του απλού συμμετρικού τυχαίου περιπάτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

Βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ορισμός(σ-άλγεβρα) (Durret)

Μια οικογένειασυνόλων $\mathcal{A}$ ονομάζεται σ-άλγεβρα εάν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(β) Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $B^c \in \mathcal{A}$

(γ) Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ τότε

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Ορισμός(πιθανότητα)

Μια συνολοσύναρτηση $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ονομάζεται μέτρο πιθανότητας από την σ-άλγβερα $\mathcal{A}$ στο $[0,1]$ όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

(α) $P(A) \geq 0$για κάθε $A \in \mathcal{A}$

(β) $P(\Omega) = 1$

(γ) Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ ξένα ανα δυο, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$για $i \neq j$τότε:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Ορισμός(Τυχαία μεταβλητή)

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $X: \Omega \to \mathbb{R}$μια τυχούσα συνάρτηση. Η Χ θα καλείται τυχαία μεταβλητή(τ.μ.) όταν ισχύει ότι:

$$\{X \leq b\} := \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}$$

Ορισμός(συνάρτηση κατανομής)

Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ορίζουμε ως συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) Χ την συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ με τύπο

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$$

Συμβολικά θα γράφουμε για συντομία $F_X(x) = P\{X \leq x\}$

Πρόταση(ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής)

Αν $F: \mathbb{R} \to [0,1]$είναι μια συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής Χ, τότε αυτή ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Για κάθε $y, z \in \mathbb{R}$ με $y \leq z$ισχύει ότι $F(y) \leq F(z)$

(β) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(γ) Η Fείναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

(δ) Αν $F(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y)$τότε $F(x^-) = P\{X < x\}$

(ε) $P\{X = x\} = F(x) - F(x^-)$

Ορισμός (Αναμενόμενη- Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής)

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$και μια τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$. Η μέση τιμή της Χ ορίζεται ως

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

- Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με στήριγμα το σύνολο R τότε

$$E(X) = \sum_{x \in R} x f(x)$$

- Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Αν ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $X^+ = \max\{X, 0\}$και $X^- = \max\{-X, 0\}$ τότε είναι σαφές ότι $X = X^+ - X^-, |X| = X^+ + X^-$ και επιπλέον

$$E(X) < \infty \Leftrightarrow E(X^+), E(X^-) < \infty$$

Θέωρημα(Ιδιότητες μέσης τιμής)

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X, Y \geq 0$ή $E|X|, E|Y| < \infty$

(α) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

(β) $E(\alpha X + b) = \alpha E(x) + b$,για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

(γ) Αν $X \geq Y$τότε $E(X) \geq E(Y)$

Απόδειξη

(α) Εξ'ορισμού έχουμε:

$$E(X + Y) = \int_{\Omega} \big(X(\omega) + Y(\omega)\big) P(d\omega)$$

$$= \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) + \int_{\Omega} Y(\omega) P(d\omega) = E(X) + E(Y)$$

(β) Είναι:

$$\int_{\Omega} (\alpha X(\omega) + b) = \alpha \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) + b \int_{\Omega} P(d\omega) = \alpha E(X) + bP(\Omega) = \alpha E(X) + b$$

(γ)

Αφού $X(\omega) \geq Y(\omega)$ για κάθε $\omega \ \in \Omega$θα ισχύει $X(\omega) - Y(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \ \in \Omega$

$$\int_{\Omega} \big(X(\omega) - Y(\omega)\big) P(d\omega) \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) - \int_{\Omega} Y(\omega) P(d\omega) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(X) - E(\Upsilon) \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq E(\Upsilon)$$

Θεώρημα (Ανισότητα Jensen)

Μια πραγματική συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, θα ονομάζεται κυρτή εαν ικανοποιεί το εξής:

$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \quad \text{για κάθε } \lambda\epsilon(0,1) \text{ και για καθε } x, y\epsilon\mathbb{R},$ αν δηλαδή η εικόνα κάθε κυρτού συνδυασμού δεν ξεπερνάει τον αντίστοιχο κυρτό συνδυασμό των εικόνων των x, yμέσω της φ. Μπορεί να αποδειχτεί ότι για μια κυρτή συνάρτηση θα ισχύει ότι:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) + \lambda_3\varphi(x_3) + \cdots + \lambda_n\varphi(x_n)$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 1, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Ιδιαιτέρως ισχύει ακόμα και για άπειρο άθροισμα κυρτών συνδυασμών. Τέλος επειδή η μέση τιμή μιας οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής είναι στην πραγματικότητα κυρτός συνδυασμός, θα ισχύει ότι για κάθε $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ότι:

$$\varphi\big(E(X)\big) \leq E\big(\varphi(X)\big)$$

Παράδειγμα : Έστω η συνάρτηση $\varphi(\mathrm{x}) = x^k, k = 2m, m > 1$,όπου mφυσικός αριθμός Τότε είναι άμεσο ότι $\varphi''(x) = k(k-1)x^{k-2} > 0$, επομένως η συνάρτηση φ είναι κυρτή σε όλο το $(0, +\infty)$.

Αν θεωρήσουμε τότε την τυχαία μεταβλητή X με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ τότε για την παραπάνω συνάρτηση φ συμπεραίνουμε ότι:

$$\mu^{2m} = \varphi\big(E(X)\big) \leq E\big(\varphi(X)\big) = E(X^{2m})$$

Δηλαδή $E(X^{2m}) \geq \mu^{2m}, m \geq 2$

Αντίστοιχα αν η φ είναι κοίλη τότε θα ισχύει ότι $E[\varphi(X)] \leq \varphi[E(X)]$

Παράδειγμα : η $\varphi(x) = \ln x$ *είναι κοίλη στο* $(0, +\infty)$

Άρα για κάθε τ.μ. Χ με $E(x) > 0$ *ισχύει ότι* $E(\ln X) \leq \ln E(X)$

Θεώρημα (Ανισότητα Hölder)

Αν $p, q \in [1, +\infty)$τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$(συζυγείς εκθέτες). Τότε

$$E|XY| \leq E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}$$

Ειδικότερα αν $p = q = 2$ τότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται ως:

$$E|XY| \leq \sqrt{E(|X|^2)}\sqrt{E(|Y|^2)}$$

η οποία είναι γνωστή ως Cauchy-Schwärz.

Με το παραπάνω Θεώρημα αποδεικνύεται ότι αν για μια τ.μ. Χ ισχύει ότι $E(|X|^k) < \infty$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε θα ισχύει ότι $E(|X|^m) < \infty$, για κάθε $m \leq k$ φυσικό.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι λόγω της Cauchy-Schwärz, για τον συντελεστή συσχέτισης $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$θα ισχύει:

$\left|E\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big)\right| \leq \sqrt{E((X - \mu_X)^2}\sqrt{E((Y - \mu_Y)^2}$ή

$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$ ή

$|\rho(X, Y)| \leq 1$,δηλαδή$\rho(X, Y) \in [-1,1]$

Ορισμός

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και η ακολουθία ενδεχομένων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \dots \in \mathcal{A}$ ορίζουμε ως : $\overline{A} = \lim_{n \to +\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_\kappa$να είν

αι το εξής ενδεχομένο : ''εμφανίζονται άπειρα απο τα A_k''. Με λίγα λόγια το $\bar{A}$κρατάει εκείνα τα $\omega \in \Omega$ τα οποία ανήκουν σε άπειρα από τα A_k(αλλά όχι σε όλα).

Αν $x \epsilon \overline{A}$ τότε για κάθε $n \epsilon N$ υπάρχει $k \geq n$ *ώστε* $x \epsilon A_k$ Ομοίως ορίζουμε $\underline{A} = \lim_{n \to +\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Το$\underline{A}$ είναι το εξής ενδεχόμενο: κάθε στοιχείο βρίσκεται τελικά σε κάθε A_k . Δηλαδή αν $x \in \underline{A}$ *, τότε υπάρχει* $n \in N$ *ώστε* $x \in A_k$ *για κάθε* $k \geq n$.

Λήμμα 1:

Αν έχουμε μια ακολουθία $A_1, A_2, \ldots.$ η οποία είναι αύξουσα τότε $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq A_4 \subseteq \cdots)$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ενώ αν αντίστοιχα είναι φθίνουσα τότε

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Παράδειγμα

Ορίζουμε τα εξής υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

$A_n = \left[0\,, \frac{1}{n}\right)$για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $A_1 = [0\,,1) \supseteq A_2 = \left[\,0\,, \frac{1}{2}\right) \supseteq A_3 = \left[\,0\,, \frac{1}{3}\right) \supseteq$ και γενικότερα με απλό επαγωγικό επιχείρημα αποδεικνύεται ότι η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φθίνουσα. Επομένως υπάρχει το $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ ι και επιπλέον $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0, \frac{1}{n}\right) = \left[0, \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right) = [0,0) = \{0\}$

Παράδειγμα

Ας υποτεθεί τώρα η εξής αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων: $A_n = \left[0\,, \frac{n}{n+1}\right)$, $n \in N$. Τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ισχύει η ανισότητα

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

Πράγματι η παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$n(n+2) < (n+1)(n+1) \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$, που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επομένως ισχύει και το παραπάνω. Επομένως πράγματι:

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq .. \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq ..$Συνεπώς θα υπάρχει και το

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0, \frac{n}{n+1}\right) = \left[0, \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\right) = [0,1)$$

Συγκλίσεις τυχαίων μεταβλητών

Σχεδόν βέβαιη σύγκλιση(σ.β)

Έστω η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $X_n \to X$σχεδόν βέβαια εάν ισχύει το εξής:

$P(X_n \to X) = 1$, δηλαδή τα γεγονότα για τα οποία η X_nδεν συγκλίνει στην X έχουν πιθανότητα 0. Βασιζόμενοι στην έννοια σύγκλισης από την Ανάλυση η παραπάνω σύγκλιση μπορεί να μεταφραστεί και ως εξής:
Είναι γνωστό οτι για να ισχυει οτι μια τυχαία ακολουθία αριθμών$X_n \to X$ είναι αρκετό να ισχύει ότι για κάθε φυσικό αριθμό $N \in \mathbb{N}$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$έτσι ώστε $|X_m - X| < \frac{1}{N}$ για κάθε $m \geq k$. Επομένως

$$P(X_n \to X) = 1 \Leftrightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} \bigcap_{m=k}^{+\infty} \left\{|X_m - X| < \frac{1}{n}\right\}\right) = 1$$

Όταν η ακολουθία X_n συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X, θα γράφουμε $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

Σύγκλιση κατά πιθανότητα

Έστω η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία X_nσυγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X, εάν ισχύει το εξής:

$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$, το οποίο θα συμβολίζεται ως

$$X_n \xrightarrow{p} X$$

Αυτή η έννοια σύγκλισης είναι σαφώς ασθενέστερη από την 1η . Εδώ η ερμηνεία αυτής της σύγκλισης έχει ως εξής:
Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, η πιθανότητα τελικά η τυχαία μεταβλητή X_nνα έχει απόσταση από την Χπαραπάνω από ε, συγκλίνει στο 0 καθώς το $n \to +\infty$.
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην τυχαία μεταβλητή X, τότε θα συγκλίνει και κατά πιθανότητα.
Πράγματι, αν ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{a.s.} X$τότε $P(X_n \to X) = 1$. Ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$.
Θα αποδειχθεί ότι $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$. Για το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Το σύνολο A_nουσιαστικά «κρατάει»εκείνα τα ω για τα οποία υπάρχει τυχαία μεταβλητή X_kμε δείκτη κμεγαλύτερο από το «τρέχον» ηγια τα οποίο $|X_m - X| \geq \varepsilon$. Η ακολουθία ενδεχομένων A_nείναι γνησίως φθίνουσα, διότι αν $\omega \in A_{n+1}$τότε υπάρχει $k \geq n + 1$τέτοιο ώστε $|X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon$ και άρα $k \geq n$, συνεπώς $\omega \in A_n$.Επομένως υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} A_n$και επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$$

Επειδή όμως $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ αναγκαστικά θα ισχύει ότι:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n)$$

Επιπλέον αληθεύει ότι $\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \subseteq A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$, συνεπώς θα ισχύει η ανισότητα $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(A_n)$

Επομένως $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σύγκλιση κατά μέση τιμή

Έστω η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία X_nσυγκλίνει κατά μέση τιμή στην τυχαία μεταβλητή X, εάν ισχύει το εξής:

$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$,το οποίο θα συμβολίζεται ως

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} X$$

Σύγκλιση κατά κατανομή

Έστω η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X_nσυμβολίζεται με F_n.Θα λέμε ότι η ακολουθία X_nσυγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X εάν ισχύει το εξής:

$\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq t) = P(X \leq t) = F_X(t)$για κάθε $t \in \mathbb{R}$στο οποίο η συνάρτηση κατανομής Fτης Χείναι συνεχής.Η σύγκλιση αυτή θα συμβολίζεται από εδώ και στο εξής ως $X_n \xrightarrow{d} X$.

Για την ταξινόμηση μεταξύ των συγκλίσεων, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Αν για την ακολουθία μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{p} X$τότε θα ισχύει και ότι $X_n \xrightarrow{d} X$

Απόδειξη

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Λόγω ότι $X_n \xrightarrow{p} X$ θα ισχύει ότι $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα τυχόν $t \in \mathbb{R}$ στο οποίο η F_Xείναι συνεχής. Τότε με βάση το θεώρημα ολικής πιθανότητας λαμβάνουμε ότι:

$$P(X_n \leq t) = P(X_n \leq t, X > t + \varepsilon) + P(X_n \leq t, X \leq t + \varepsilon)$$

Όμως για το ενδεχόμενο $\{X_n \leq t, X \leq t + \varepsilon\}$ είναι:$\{X_n \leq t, X \leq t + \varepsilon\} = \{X_n \leq t\} \bigcap \{X \leq t + \varepsilon\} \subseteq \{X \leq t + \varepsilon\}$. Επιπλέον το ενδεχόμενο $\{X_n \leq t, X > t + \varepsilon\}$είναι ισοδύναμο ότι $X - X_n > \varepsilon$ άρα και $|X - X_n| > \varepsilon$. Έτσι η αρχική ανισότητα διατυπώνεται ως εξής:

$P(X_n \leq t) \leq P(|X - X_n| > \varepsilon) + P(X \leq t + \varepsilon)$.Επίσης εφαρμόζωντας πάλι το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε εντελώς αντίστοιχα και την ανισότητα:

$$P(X \leq t - \varepsilon) \leq P(X_n \leq t) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τις δυο παραπάνω ανισότητες παίρνουμε:

$$P(X \leq t - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

Παίρνοντας τώρα όριο καθώς $n \to +\infty$παίρνουμε ότι:

$$P(X \leq t - \varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t + \varepsilon)$$

για κάθε ε>0. Όμως η F_Xείναι συνεχής στο t, επομένως $\lim_{\varepsilon\to0^+} P(X \leq t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0^+} P(X \leq t + \varepsilon) = F_X(t)$, οπότε παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \to 0^+$ στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει το ζητούμενο.

Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι η ταξινόμηση των συγκλίσεων έχουν ως εξής:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

Ωστόσο γενικά ισχύει ότι:

$$X_n \xrightarrow{d} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$$

Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

Έστω P ένα μέτρο πιθανότητας και $(X_{n\geq 1})$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $|X_n(\omega)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\omega \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{X_n \xrightarrow{d} X}$ δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq t) = P(X \leq t)$για κάθε $t \in \mathbb{R}$.Τότεθα ισχύει ότι: $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$

Το θεώρημα αυτό εν συντομία υποστηρίζει ότι *αν οι τυχαίες μεταβλητές* X_n *είναι ομοιόμορφα φραγμένες από μια σταθερά* $M > 0$ *καιαν* επιπλέον ισχύει ότι $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$ *τότε* μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$E(X_n) \longrightarrow E(X)$, δηλαδή η ακολουθία μέσων τιμών συγκλίνει στην μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X.

Λήμμα Fatou

Αν η ακολουθία τυχαίων μεταβλήτών $(X_n)_{n\geq 1}$ικανοποιεί τη συνθήκη $X_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$ τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \inf E(X_n) \geq E(\lim_{n\to+\infty} \inf X_n)$$

Το $\lim_{n\to+\infty} \inf X_n\,(\omega)$ είναι η τυχαία μεταβλητή που από όλα τα $X_n(\omega)$ «κρατάει» εκείνο που είναι κάθε φορά το μικρότερο. Το Λήμμα αυτό αποδεικνύει ότι η μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής δεν ξεπερνά ποτέ το μέγιστο κάτω φράγμα της ακολουθίας μέσων τιμών $E(X_n)$.Το Λήμμα Fatouήταν ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης αλλά και σε άλλα χρήσιμα θεωρήματα της θεωρίας μέτρου.

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Αν η ακολουθία τυχαίων μεταβλήτών $(X_n)_{n\geq 1}$ικανοποιεί τη συνθήκη $X_n \geq 0$για κάθε $n \geq 1$, είναι αύξουσα και επιπλέον $X_n \xrightarrow{d} X$, τότε

$$E(X_n) \rightarrow E(X)$$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Αν για την ακολουθία τυχαίων μεταβλήτών $(X_n)_{n\geq 1}$ ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{d} X$και επιπλέον $|X_n| \leq Y$για κάθε $n \in \mathbb{N}$με $E(Y) < \infty$, τότε θα ισχύει ότι:

$$E(X_n) \rightarrow E(X)$$

1ο Λήμμα Borel-Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$χώρος πιθανότητας και $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ακολουθία ενδεχομένων έτσι ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$$

Τότε ισχύει ότι $P(\lim supA_n) = 0$, δηλαδή η πιθανότητα να εμφανιστούν άπειρα από τα A_nείναι 0 ή ισοδύναμα με πιθανότητα 1 θα συμβούν πεπερασμένα ενδεχόμενα από αυτά.

Απόδειξη:

Ισχύει εξ' ορισμού ότι: $\lim\sup A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$

ορίζουμε τα σύνολα $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \supseteq \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$, δηλαδή $B_n \supseteq B_{n+1}$, οπότε η ακολουθία ενδεχομένων

$\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$είναι φθίνουσα. Από το προηγούμενο Λήμμα θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \lim\sup A_n$$

Επομένως $P(\lim\sup A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$

$$= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

Δηλαδή $P(\lim\sup A_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$. Από υπόθεση ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = p < +\infty$.Ας ορίσουμε ως $q_n = p - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$την ακολουθία «ουρά» της σειράς. Τότε είναι σαφές ότι $q_n = \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$και επιπλέον

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = p - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) = p - \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = p - p = 0$$

Επομένως $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$, συνεπώς $P(\lim\sup A_n) \leq 0$ και άρα

$P(\lim\sup A_n) = 0$, όπως ακριβώς θέλαμε.

Λήμμα

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα $1 - x \leq e^{-x}$

Απόδειξη

Έστω $f(x) = e^{-x} - 1 + x, x \in \mathbb{R}$. Τότε η fείναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = -e^{-x} + 1$. Τότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (μοναδική ρίζα).
Επομένως διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Επειδή
$f'(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$,συμπεραίνουμε ότι fγνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επίσης:

$f'(-1) = 1 - e < 0$, συμπεραίνουμε ότι fγνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Άρα η f

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 0$. Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα $f(x) \geq f_{min} = f(0) = e^{-0} - 1 + 0 = 0 \Rightarrow e^{-x} - 1 + x \geq 0$

$\Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ο Λήμμα Borel-Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$χώρος πιθανότητας και $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ακολουθία **ανεξάρτητων** ενδεχομένων έτσι ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$$

Τότε ισχύει ότι $P(\lim supA_n) = 1$

Απόδειξη

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)'\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k{}'\right)\right)$$

Τώρα ισχύει ότι:

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k{}'\right) = \prod_{k=n}^{+\infty} P(A_k') = \prod_{k=n}^{+\infty}\big(1 - P(A_k)\big)$$

Από την ανισότητα του προηγούμενου Λήμματος λαμβάνουμε ότι:

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k{}'\right) = \prod_{k=n}^{+\infty} P(A_k') = \prod_{k=n}^{+\infty}\big(1 - P(A_k)\big) \leq \prod_{\kappa=n}^{+\infty} e^{-P(A_k)}$$

$$= e^{-\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)} \leq e^{-\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)} = e^{-\infty} = 0$$

Επομένως $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k{}') = 0$, ενώ $P(\limsup A_n) = 1 - 0 = 1$

1η εφαρμογή του Borel-Cantelli

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$με $P(X_n = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ορίζουμε το ενδεχόμενο $A_n = \{X_n = 1\}$. Τότε $P(A_n) = P(X_n = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} < \infty$$

Από το 1ο λήμμα Borel-Cantelliθα ισχύει ότι $P(\limsup A_n) = 0$.Αυτό όμως σημαίνει ότι $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty}\{X_k = 1\}) = 0$. Δηλαδή δεν υπάρχει πιθανότητα να παρατηρήσουμε άπειρα από τα X_kνα πάρουν την τιμή 1. Αυτό το αποτέλεσμα ισοδύναμα διατυπώνεται και ως εξής:

$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty}\{X_k = 0\}) = 1$, δηλαδή με πιθανότητα 1 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$τέτοιο ώστε

$X_k = 0$, για κάθε $k \geq n_0$. Επομένως σχεδόν βέβαια ισχύει ότι $X_n \to 0$.

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός

Έστω X μια πραγματική τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση $\varphi_X: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με τύπο $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X.

Αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^\kappa$ με $X = (X^1, X^2, .., X^\kappa)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X: \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{C}$ ορίζεται μέσω του τύπου

$\varphi_X(\alpha) = E\left(e^{i<\alpha,X>}\right)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^\kappa$, όπου το $<.,.>$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^\kappa$ το οποίο ορίζεται ως:

$< \alpha, X > \sum_{i=1}^{k} a^i X^i$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ιδιαιτέρως σημαντική διότι χρησιμοποιείται για την απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος και επίσης αποτελεί μια τεχνική απόδειξης της σύγκλισης κατά κατανομής τυχαίων μεταβλητών. Το παρακάτω θεώρημα παρέχει και μια μεθοδολογία για τον τρόπο που μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση για να συμπεραίνουμε τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Θεώρημα

(I) Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο $\mathbb{R}$. Τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$για κάθε πραγματικό αριθμόtστο οποίο ορίζεται η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(II) Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο $\mathbb{R}^\kappa$. Τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n}(\alpha) \to \varphi_X(\alpha)$για κάθε διάνυσμα$\alpha$στο $\mathbb{R}^\kappa$στο οποίο ορίζεται η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

Εφαρμογή

Χαρακτηριστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής :

Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε η X έχει χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{itx\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + itx\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2x(\mu + it) + \mu^2\right]\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x - (\mu + it)\right)^2 - 2it\mu - i^2t^2\right]\right\} dx$$

$$= \exp\left\{\frac{it\mu}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{\left(x - (\mu + it)\right)^2}{2\sigma^2}\} dx = \exp\left\{\frac{i}{\sigma}\right.$$

Εφαρμογή

Έστω ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$για την οποία υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \mu_n$=0, $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = 3$.Χρησιμοποιώντας τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις δείχνουμε ότι$X_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,3)$.

Απόδειξη

Ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{d} \varphi_X(t)$για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι:

$$\varphi_{X_n}(t) = \exp\{\frac{it\mu_n}{\sigma_n^2} - \frac{t^2}{2\sigma_n^2}\} \rightarrow \exp\{ it \times \frac{0}{3} - \frac{t^2}{6}\} = \exp\{-\frac{t^2}{6}\}$$

Για την τυχαία μεταβλητή $X \sim N(0,3)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο :

$\varphi_X(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{6}\right\}$, επομένως έχουμε ότι $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$για κάθε $t \in \mathbb{R}$και επομένως

$$X_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,3)$$

Κεφάλαιο 2:

ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ορισμός :

Δύο ενδεχόμενα Α,Β ονομάζονται ανεξάρτητα όταν $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Αντίστοιχα δυο τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες εάν για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$ *ισχύει ότι*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Τέλος , δυο σ-άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ *είναι ανεξάρτητες αν για κάθε*
$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{F}$ τα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

Η ακολουθία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ *είναι ανεξάρτητη εάν*
για κάθε $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *και για καθε* $A_i \in \mathcal{A}_i$ *ισχύει οτι* $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \epsilon I} P(A_i)$

Λήμμα (Ικανή συνθήκη ανεξαρτησίας)

Ικανή συνθήκη ανεξαρτησίας και ισοδύναμη με τον προηγούμενο ορισμό είναι η εξής :
Η ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ *είναι ανεξάρτητη εάν*
$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ για κάθε $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Θεώρημα

Μια ικανή συνθήκη ώστε η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1X_2, \ldots, X_n$ να είναι ανεξάρτητη, είναι η ακόλουθη:

$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$,δηλαδή
$F_{x_1x_2x_3,..,x_n}(x_1x_2x_3, \ldots, x_n) = F_{x_1}(x_1)\, F_{x_2}(x_2) \ldots F_{x_n}(x_n)$

Απόδειξη :

Επιλέγουμετα σύνολα $A_\iota = \{\omega \in \Omega :\ X_i(\omega) \leq X_i\}$για $i = 1,2, \ldots, n$ και εφαρμόζουμε το παραπάνω Λήμμα.

Θεώρημα

Έστω οτι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *οι οποίες είναι ανεξάρτητες , και η κάθε μια έχει κατανομή* P_i *. Τότε η τ.μ*$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$έχει κατανομή

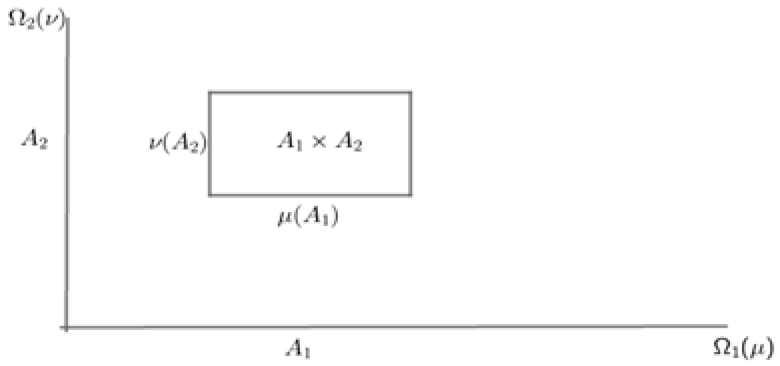
$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

Απόδειξη

$$P\big((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\big) = P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n)$$

$$= P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\ldots.P(X_n \in A_n) = P_1(A_1)\,P_2(A_2)\ldots..P_n(A_n)$$
$$= (P_1 \times P_2 \times\ldots\times P_n)(A_1 \times A_2 \times\ldots\times A_n)$$

Ενδεικτικά για $n = 2$ και X_1, X_2ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή μ, ν αντίστοιχα, το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$ στον χώρο πιθανότητας $\Omega_1 \times \Omega_2$ για ένα ορθογώνιο $A_1 \times A_2$, έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Θεώρημα(μέσες τιμές)

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. Χ,Υμε κατανομές μ, ν αντίστοιχα. Θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ολοκληρώσιμη με $h(x, y) \geq 0$για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Τότε $E\big(h(X, Y)\big) = \iint h(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$

Ειδικότερα αν για την συνάρτηση h υπάρχουν $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ολοκληρώσιμες έτσι ώστε $h(x, y) = f(x)g(y)$τότε

$$E\big(h(X, Y)\big) = E\big(f(X)g(Y)\big) = E\big(f(X)\big)E\big(g(Y)\big)$$

Απόδειξη

Είναι $E\big(h(X, Y)\big) = \iint h(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \iint h(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$

Επιπλέον αν $h(x, y) = f(x)g(y)$ τότε:

$$E\big(h(X, Y)\big) = E\big(f(X)g(Y)\big) = \iint f(x)g(y)\, d\mu(x) d\nu(y)$$

$$= \int f(x) \left(\int g(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int f(x) E\big(g(Y)\big) d\mu(x)$$

$$= E\big(g(Y)\big)\int f(x)d\mu\,(x) = E\big(f(X)\big)E\big(g(Y)\big)$$

Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$είναι ανεξάρτητες τ.μ. και $X_i \geq 0, E(|X_i|) < +\infty$για κάθε $i = 1,2,..,n$, τότε ισχύει ότι:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Απόδειξη

Θέτουμε $X = X_1, Y = X_2 X_3 \dots X_n$. Τότε οι τ.μ. X,Yείναι ανεξάρτητες και επιπλέον ισχύει ότι $E(|X|) = E(|X_1|) < +\infty$ και $E(|Y|) = E(|X_2 X_3 \dots X_n|) < +\infty$. Τότε

χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E(XY) = E(X)E(Y) = E(X_1)E(X_2 X_3 \dots X_n)(1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε εκ νέου $X = X_2, Y = X_3 X_4 \dots X_n$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και επιπλέον
$E(|X|) = E(|X_2|) < +\infty$ και $E(|Y|) = E(|X_3 X_4 \dots X_n|) < +\infty$.

Οπότε $E(X_2 X_3 \dots X_n) = E(X_2)E(X_3 X_4 \dots X_n)(2)$

Από τις (1) και (2)

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1)E(X_2)E(X_3 X_4 \dots X_n)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1)E(X_2)E(X_3)\dots E(X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Ωστόσο αν για δυο τυχαίες μεταβλητές X, Yισχύει ότι $E(XY) = E(X)E(Y)$, τότε δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητες. Πράγματι ας θεωρήσουμε το εξής παράδειγμα:

X\Y	1	0	-1
1	*0*	*¼*	*0*
0	*1/8*	*¼*	*1/8*
-1	*0*	*¼*	*0*

Είναι:

$$P(X=1)=\frac{1}{4}, P(X=0)=\frac{1}{2}, \qquad P(X=-1)=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=1)=\frac{1}{8}, P(Y=0)=\frac{3}{4}, P(Y=-1)=\frac{1}{8}$$

Επομένως,

$$E(X)=1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{4}=0$$
$$E(Y)=1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{3}{4}+(-1)\times\frac{1}{8}=0$$

$$E(XY)=\sum_{x,y=-1}^{1} x.y.P(X=x,Y=y)=1\times1\times0+1\times0\times\frac{1}{4}+1\times(-1)\times0$$

$$+0\times1\times\frac{1}{8}+0\times0\times\frac{1}{4}+0\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times1\times0+(-1)\times0\times\frac{1}{4}$$
$$+(-1)\times(-1)\times0=0$$

Άρα $E(XY)=E(X)E(Y)=0$

Όμως οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες αφού

$P(X=1)=\frac{1}{4}, P(Y=1)=\frac{1}{8}$όμως $P(X=1,Y=1)=0\neq P(X=1)P(Y=1)$

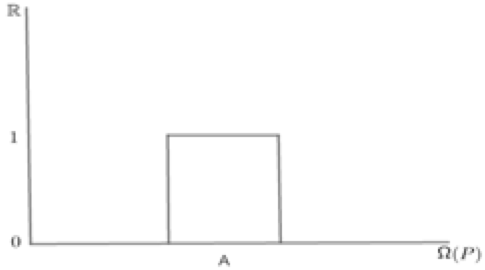
Ας θεωρήσουμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},P)$, ένα τυχόν σύνολο $A\ \in\ \mathcal{A}$και τη συνάρτηση-τυχαία μεταβλητή

$$h(x)=\mathbb{I}(x\ \in A)=\begin{Bmatrix}1, αν\ x\ \in A\\ 0, αν\ x\ \notin A\end{Bmatrix}$$

Τότε $E\big(h(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{I}(x\ \in A)dP(x)=\int_A\ 1dP(x)=P(A)$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα ισοδυναμεί με το να βρούμε το μέτρο-εμβαδόν του ορθογωνίου του σχήματος το οποίο έχει πλάτος ίσο με 1 και μήκος ίσο με $P(A)$. Αυτό η παρατήρηση θα είναι πολύ βοηθητική για τα θεωρήματα που ακολουθούν.

Το εμβαδόν της δείκτριας ενος ενδεχομένου ισούτε με την πιθανότητα του ενδεχομένου που εξετάζει η δείκτρια.



Θεώρημα :

Έστω X,Y ανεξάρτητες τ.μ , με συναρτήσεις κατανομών $F(x) = P(X \leq x), G(y) = P(Y \leq y)$ $αντίστοιχα\ τότε$ $P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z - y)dG(y)$.

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} F(z - y)dG(y)$ ονομάζεται συνέλιξη της F με την G και συμβολίζεται $F * G$, $(F * G)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z - y)dG(y)$

Απόδειξη :

Έστω $h(x, y) = \mathbb{I}_{\{x+y\leq z\}}$ $για\ z\ σταθερό$

Δηλαδή h(x,y)= $\begin{Bmatrix} 1\ εάν\ x + y \leq z \\ 0\ εάν\ x + y > z \end{Bmatrix}$

Έστω μ,ν τα μέτρα πιθανότητας που αντιστοιχούν στις κατανομές F,G

τότε για σταθερό y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(x + y \leq z)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(x \leq z - y)d\mu(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(-\infty, z - y)d\mu(x) = P(X \leq z - y) = F(z - y)$$

Τώρα έχουμε:

$$P(X + Y \leq z) = E(\mathbb{I}(X + Y \leq z))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(X + Y \leq z)d\mu(x)d\nu(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}(X \leq z - y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z - y)d\nu(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z - y)dG(y)$$

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ανεξάρτητη της Yκαι έχει συνάρτηση πυκνότητας f , ενώ η τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση κατανομής

$$G(y) = P(Y \leq y)$$

Τότε η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $X + Y$θα έχει πυκνότητα $\rho(x)$ που δίνεται από τον τύπο:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)dG(y)$$

Τέλος αν η τυχαία μεταβλητή Yέχει πυκνότητα $dG(y) = g(y)dy$τότε

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Απόδειξη

Από το παραπάνω Θεώρημα είναι σε συνδυασμό με το Θέωρημα Fubini:

$$P(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)dG(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} f(x-y)dxdG(y)$$
$$= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, dG(y)\, dx = \int_{-\infty}^{z} \rho(x)dx$$

οπότε η πυκνότητα πράγματι δίνεται από τον παραπάνω τύπο. Τέλος αν η Y έχει πυκνότητα $dG(y) = g(y)dy$ τότε

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Ανισότητες πιθανοτήτων

Πρόταση (Ανισότητα του Markov)

Εστω Χ τ.μ ώστε Χ$\geq 0. Τοτε\ \ για\ \ καθε\ \alpha > 0\ ισχυει\ η\ ανισότητα$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{\alpha}$$

Απόδειξη

Έστω η τυχαία μεταβλητή$I_{\{X \geq \alpha\}} = \begin{Bmatrix} 1, αν\ X \geq \alpha \\ 0, αν\ X < \alpha \end{Bmatrix}$

$Τότε\ E(I_{\{X \geq \alpha\}}) = \int_{\Omega} I_{\{X(\omega) \geq \alpha\}} dP(\omega) = P(X \geq \alpha) \times 1$

Ισχυρισμός για κάθε α> 0

$$\alpha \times I\{X \geq \alpha\} \leq X$$

$Αν\ X < \alpha\ τότε\ \ το\ αριστερό\ μέλος\ ισούται\ με\ 0\ και\ το\ δεξιό\ μέλος\ με\ X$

$Αν\ X \geq \alpha\ τότε\ το\ αριστερό\ μέλος\ ισούται\ με\ \alpha$

$Άρα\ \alpha \leq X\ που\ ισχύει\ ,\ \ ολοκληρώνοντας\ \alpha \times P(X \geq a) \leq E(X) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$

Ανισότητα Chebyshev

Έστω Χ μια τυχαία μεταβλήτη με $\sigma^2 = Var(X) < +\infty$. Τότε αν $\mu = E(X)$,για κάθε $\kappa > 0$ισχύει η ανισότητα:

$$P(|X - \mu| \geq \kappa) \leq \frac{\sigma^2}{\kappa^2}$$

Η ανισότητα Chebyshev μας είναι χρήσημη επειδή μας δίνει άνο φράγμα για την πιθανότητα η τυχαία μας μεταβλητή να απέχει απο την μέση της τιμή τουλάχιστον κατα κ

Απόδειξη

Θέτω $\Upsilon = |X - \mu|^2 \geq 0$. Τότε $E(\Upsilon) = E(|X - \mu|^2) = Var(X) = \sigma^2 < +\infty$

Από την ανισότητα Markovδιαλέγοντας $\alpha = \kappa^2$ έχουμε ότι

$$P(\Upsilon \geq k^2) \leq \frac{E(\Upsilon)}{k^2} \Rightarrow P(|X - \mu|^2 \geq \kappa^2) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

$$\Rightarrow P(|X-\mu| \geq \kappa) \leq \frac{\sigma^2}{\kappa^2}$$

Πρόταση(μόνοπλευρη παραλλαγή της Chebyshev)

Έστω X τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει ότι $E(X)=0, Var(X)=\sigma^2>0$. Τότε για κάθε $\alpha>0$ ισχύει ότι:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$$

Απόδειξη

Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ $ισχύει$ ότι $X \geq a \Leftrightarrow X+b \geq a+b$. Για την τυχαία μεταβλητή $Y=(X+b)^2 \geq 0$, έχουμε $E(Y)=E(X^2)+2bE(X)+b^2=E(X^2)+b^2=\sigma^2+b^2$θα ισχύει η ανισότητα Markov :

$$\begin{gathered}P(X \geq a)=P(X+b \geq a+b) \leq P((X+b)^2 \geq (a+b)^2) \\ =P(Y \geq (a+b)^2) \leq \frac{E(Y)}{(a+b)^2}=\frac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2}\end{gathered}$$

Η παράσταση $\frac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2}$ ελαχιστοποιείται όταν $b=\frac{\sigma^2}{\alpha}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$P(X \geq a) \leq \min_{b>0} \frac{\sigma^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{\sigma^2+\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2}{\left(\alpha+\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2}=\frac{\alpha^2\sigma^2+\sigma^4}{(\alpha^2+\sigma^2)^2}=\frac{\sigma^2(\alpha^2+\sigma^2)}{(\alpha^2+\sigma^2)^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$$

Πρόταση(Φράγματα Chernoff)

Ας υποτεθεί οτι για μια τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι ορίζεται η ροπογεννήτρια τους $M_X(t)=E(e^{tX})$. Τότε

- για κάθε $t>0$: $P(X \geq a) \leq e^{-ta}M_X(t)$
- για κάθε $t<0$: $P(X \leq a) \leq e^{-ta}M_X(t)$

Απόδειξη

- Αν $t > 0$ τότε ισχύει ότι:

$$P(X \geq a) = P(tX \geq ta) = P(e^{tX} \geq e^{ta})$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov για την τυχαία μεταβλητή $Y = e^{tX}$ και $\varepsilon = e^{ta}$ λαμβάνουμε ότι :

$$P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t)$$

- Αν $t < 0$ τότε ισχύει ότι:

$$P(X \leq a) = P(tX \geq ta) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t)$$

Εφαρμογή

Έστω η $Z{\sim}N(0,1)$. Τότε γνωρίζουμε ότι $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$για κάθε $t \in \mathbb{R}$

Τότε για κάθε $t > 0, a > 0$ισχύει ότι

$$P(Z \geq a) = e^{-ta} e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2} - ta}$$

Επιλέγοντας $t = a > 0$ βρίσκουμε ότι

$$P(Z \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Εφαρμογή – Poisson

Αν $X{\sim}Poisson(\lambda)$ τότε $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,2, \ldots$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^k}{k!}$$
$$= \exp(-\lambda) \cdot \exp(\lambda \cdot \exp(t))$$
$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Η πιθανότητα $P(X \geq m) = \sum_{k=m}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ δεν υπολογίζεται ακριβώς με μορφή κλειστού τύπου. Όμως από τα φράγματα Chernoff μπορεί να διαπιστωθεί ότι: για κάθε $t > 0$ $P(X \geq m) \leq \exp(-mt) \cdot \exp(-\lambda) \cdot \exp(\lambda \cdot \exp(t))$. Επιλέγοντας $t = \ln(\frac{m}{\lambda})$ με$m > \lambda$ τότε:

$$P(X \geq m) \leq e^{-m\ln(\frac{m}{\lambda})} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^{\ln(\frac{m}{\lambda})}} = (\frac{m}{\lambda})^{-m} \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{m} = \frac{\lambda^m}{m^m} \cdot e^{m-\lambda}$$

Αρα $P(X \geq m) \leq \frac{e^{m-\lambda}\lambda^m}{m^m}$

Εφαρμογή – Τζόγος

Ας θεωρήσουμε έναν τζογαδόρο , ο οποίος σε κάθε γύρο κερδίζει ή χάνει με 1$ με πιθανότητα 1/2 .Δηλαδή X_i κέρδος του παίκτη στο i-γύρο τότε $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$: συνολικό κέρδο σε n-γύρους

Γενικά $S_n \in \{-n, \ldots., n\}$

$$M_{X_1}(t) = E(e^{t \cdot X_1}) = e^{t \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} + e^{t(-1)}\frac{1}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Απο τον απειροστικό λογισμό είναι γνωστό ότι :

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots ..$$

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots ..$$

$$e^t + e^{-t} = 2\left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots ..\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!} = 2\sum_{\kappa=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = 2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

Η ανισότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη διότι μας επιτρέπει να φράξουμε την ποσότητα $e^t + e^{-t}$από το εκθετικό $2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$

Πράγματι θα δειχθεί με επαγωγή ότι για κάθε φυσικό αριθμό κ ισχύει η ανισότητα : $\boldsymbol{(2\kappa)! \geq 2^{\kappa}\kappa!}$

Παρατηρούμε ότι για κ=0,1 η ανισότητα είναι προφανής και ισχύει ως ισότητα

Για κ=2 παρατηρούμε ότι $(2.2)! = 4! = 24 \geq 2^2 2! = 8$

Ας υποτεθεί ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιον φυσικό $k \geq 2$. Θα αποδείξουμε ότι θα ισχύει και για τον φυσικό $(k + 1)$

Έχουμε: $\big(2(\kappa + 1)\big)! = (2\kappa + 2)! = (2\kappa + 2)(2\kappa + 1)(2\kappa)!$

Από την επαγωγική υπόθεση $(2\kappa)! \geq 2^{\kappa}\kappa!$, επομένως:

$$\big(2(\kappa+1)\big)! = (2\kappa+2)! = (2\kappa+2)(2\kappa+1)(2\kappa)! \geq$$
$$\geq (2\kappa+2)(2\kappa+1)2^{\kappa}\kappa! \geq 2.(\kappa+1)2^{\kappa}\kappa! = 2^{\kappa+1}(\kappa+1)!$$

Άρα πράγματι για $\kappa = 0,1,2,\dots$ αληθεύει ότι $(\boldsymbol{2\kappa})! \geq \boldsymbol{2^{\kappa}\kappa}!$

Άρα $\frac{e^t+e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M_{X_1}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}, \forall\ t>0$. Λόγω του γεγονότος ότι οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής S_n υπολογίζεται άμεσα ως εξής:

$$M_{S_n}(t) = E(e^{t\cdot S_n}) = E(e^{tX_1}\cdot e^{tX_2}\cdot \dots\cdot e^{tX_n}) = (M_{X_1}(t))^n \leq (e^{\frac{t^2}{2}})^n = e^{\frac{nt^2}{2}}$$

Αρα $\mathrm{M_{S_n}(t)} \leq \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{nt}^2}{2}}$ και επομένως σύμφωνα με τα φράγματα Chernoff για κάθε $\alpha > 0$ θα ισχύει ότι $\mathrm{P(S_n} \geq a) \leq \mathrm{e}^{-\mathrm{t}a}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{nt}^2}{2}}$ ειδικότερα για $\mathrm{t} = \frac{\alpha}{\mathrm{n}}$ ‘έχουμε ότι: $\mathrm{P(S_n \geq a)} \leq \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{\mathrm{n}}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha^2}{2\mathrm{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{2\mathrm{n}}}$.

Για παράδειγμα για $\mathrm{n} = 10, \alpha = 6\$$, είναι: $\mathrm{P(S_{10}} \geq 6) \leq \mathrm{e}^{\frac{-36}{20}} \cong 16.53\%$

Δηλαδή δεν είναι αρκετά πιθανόν να έχουμε πάνω από 6$ κέρδος μετά από 10 γύρους. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{2\mathrm{n}}} = 0$ για κάθε $\alpha > 0$. άρα θεωρητικά μετά από πολύ μεγάλο αριθμό γύρων περιμένουμε ότι η πιθανότητα να έχουμε θετικό κέρδος συγκλίνει στο 0(ο ρυθμός μείωσης του κέρδους πέφτει εκθετικά με τον χρόνο).

Παραδείγματα

1.
Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή η οποία καθορίζει τον αριθμό προιόντων σε ένα εργοστάσιο σε 1 ημέρα. Δίνεται ότι η μέση τιμή είναι 50 και διασπορά είναι ίση με 25.

Τότε $P(X > 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$

Επίσης $P(|X-50| \geq 10) = P\big(X\ \in (-\infty, 40] \cup [60, +\infty)\big) \leq \frac{25}{100} = 0.25$

Επομένως $P(40 \leq X \leq 60) \geq 0.75$

2.

Έστω $X \sim U(0,10)$. Τότε γνωρίζουμε ότι $E(X) = \frac{0+10}{2} = 5, Var(X) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{25}{3}$

Τότε $P(|X-5| > 4) \leq \frac{\frac{100}{12}}{16} \cong 5.2$, το οποίο είναι ένα κάκιστο φράγμα για την πιθανότητα, ενώ στην πραγματικότητα έχουμε:

$$P(|X-5| > 4) = P(\{X < 1\} \cup \{X > 9\}) = \int_0^1 f(x)dx + \int_9^{10} f(x)dx = 0.2$$

Πρόταση

Έστω η τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει ότι $Var(X) = 0$. Τότε η τυχαία μεταβλητή X είναι σταθερή με πιθανότητα 1, δηλαδή

$P(X = \mu) = 1$, όπου $\mu = E(X)$

Απόδειξη

Θέτουμε $\mu = E(X)$.Από την ανισότητα Chebyshev για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$P\left(|X-\mu| > \frac{1}{n}\right) \leq \frac{Var(X)}{\frac{1}{n^2}} \Rightarrow P\left(|X-\mu| > \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

Επομένως $P\left(|X-\mu| \geq \frac{1}{n}\right) = 0$για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα

$P\left(|X-\mu| \leq \frac{1}{n}\right) = 1$για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\lim_{n\to+\infty} P\left(|X-\mu| \leq \frac{1}{n}\right) = 1$. Τότε επειδή η συνάρτηση κατανομής είναι συνεχής το όριο μπορεί να μπει μέσα στο όριο, επομένως:

$$P\left(|X-\mu| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow P(|X-\mu| \leq 0) = 1$$

$$P(|X-\mu| = 0) = 1 \Rightarrow P(X = \mu) = 1$$

Νόμοι των μεγάλων αριθμών

Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω $X_1X_2X_3, ...$ ισόνομες και ανεξάρτητες με $E(X_i) = \mu < \infty. Τότε\ για\ κάθε\ \varepsilon > 0\ με\ Var(X_\iota) = \sigma^2 < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Από στατιστική άποψη το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $\overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ να έχει ε-απόσταση από τη μέση τιμή μ, είναι αρκετά μικρή.

Απόδειξη

Έχουμε $E\left(\frac{X_1X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_1) = \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu \ldots + \frac{1}{n}\mu = \mu$

$$Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}Var(X_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Απο ανισότητα Chebyshev για κάθε $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \times \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{n \times \varepsilon^2} = 0$$

Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών

Θεώρημα(Ισχυρός νόμος μεγάλων αριθμών για ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία)

Έστω $\{X_n : n \geq 1\}$ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $E(X_i) = \mu < \infty$. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu$$

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu = 0$.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Θα αποδειχθεί ότι:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=0$, με πιθανότητα 1. Η απόδειξη χωρίζεται σε βήματα ως εξής:

Βήμα 1

Θα βρούμε το ανάπτυγμα του $S_n^4=(X_1+X_2+\cdots+X_n)^4$χρησιμοποιώντας το πολυωνυμικό θεώρημα:

$$(X_1+X_2+\cdots+X_n)^4=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=4}\frac{4!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\dots k_n!}X_1^{k_1}X_2^{k_2}\dots X_n^{k_n}$$

Οι γενικοί όροι που θα εμφανιστούν από το παραπάνω ανάπτυγμα είναι οι εξής:

- X_i^4:nόροι σε πλήθος με συντελεστή $\frac{4!}{0!0!0!..4!0!...0!}=1$
- $X_i^2X_j^2, i\neq j$: $\binom{n}{2}$όροι σε πλήθος με συντελεστή $\frac{4!}{2!2!0!....0!}=\frac{4.3.2.1}{2.2}=6$
- $X_i^3X_j^1, i\neq j$
- $X_i^2X_j^1X_k^1, i\neq j\neq k$
- $X_i^1X_j^1X_m^1X_k^1, i\neq j\neq m\neq k$

Λόγω ανεξαρτησίας θα έχουμε $E\left(X_i^1X_j^1X_m^1X_k^1\right)=E(X_i)\dots E(X_k)=0$

$$E\left(X_i^2X_j^1X_k^1\right)=E(X_i^2)E\left(X_j\right)E(X_k)=E(X_i^2)\times 0\times 0=0$$

$$E\left(X_i^3X_j^1\right)=E(X_i^3)E\left(X_j\right)=E(X_i^3)\times 0=0$$

$$E\left(X_i^2X_j^2\right)=E(X_i^2)E\left(X_j^2\right),E(X_i^4)$$

Βήμα 2

Συνεπώς ορίζοντας $E(X_1^4)=K$έχουμε ότι

$$E(S_n^4)=nE(X_1^4)+6\binom{n}{2}E(X_1^2)E(X_2^2)=nK+3n(n-1)Var(X_1)^2$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarzμπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$Var(X_1)=E(X_1^2)=E(X_1^2\times 1)\leq\sqrt{E(X_1^4)}\sqrt{1^2}=\sqrt{E(X_1^4)}=\sqrt{K}$$

Επομένως $Var(X_1)^2\leq K$

Οπότε $E(S_n^4) = nK + 3n(n-1)Var(X_1)^2 \leq nK + 3n(n-1)K$, άρα

$$E\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3n(n-1)K}{n^4}$$

Άρα, αθροίζοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{K}{n^3} + + \frac{3n(n-1)K}{n^4}\right) < +\infty$$

καθώς από την ανάλυση είναι γνωστό το αποτέλεσμα ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A}{n^{\rho}} < \infty\ \alpha\nu\ \rho > 1$$

Επιπλέον είναι γνωστό το ακόλουθο αποτέλεσμα για σειρές:

$$A\nu \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \infty\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$$

Επομένως

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1$$

Αρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1$

Βήμα 3

$$A\nu\ \ \mu \neq 0\ , \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \tau\iota\varsigma\ \tau.\mu\ Z_i = X_i\ \kappa\alpha\iota\ \theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$A\pi o\pi\rho\iota\nu \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\ \mu\varepsilon\ \ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1\ \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{n} = 0\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1$$

Επομένως $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n} = 0\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right) = 0\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \ 1$

$\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1$.

Λήμμα

Εάν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό , τότε$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\overline{x_n}\to 0$

Απόδειξη

Θέτουμε $s=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$ (από την υπόθεση , $s\in\mathbb{R}$), και $s_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$. Τότε από υπόθεση $s_n\to s$

Όμως $s_n-s_{n-1}=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{x_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{k}=\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)-\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)=\frac{x_n}{n}$,

(όπου $s_0=0$) , οπότε $x_n=n(s_n-s_{n-1})$ και έτσι $\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}k(s_k-s_{k-1})=\frac{1}{n+1}\big(s_1+2(s_2-s_1)+\ldots+n(s_n-s_{n-1})+(n+1)(s_{n+1}-s_n)\big)=\frac{1}{n+1}(-s_1-s_2-\ldots-s_n+(n+1)s_{n+1})=-\frac{n}{n+1}\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}+s_{n+1}$ Από την υπόθεση , $s_n\to s$ (και άρα , $s_{n+1}\to s$) και λόγω του (i) , $\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}\to s$, που σημαίνει ότι $\frac{x_1+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\to -1\cdot s+s=0$, δηλαδή $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\to 0$.

Θεώρημα των τριών σειρών του Kolmogorov

Έστω $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\alpha>0$ έτσι ώστε:

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}P(|X_n|\geq a)$ συγκλίνει
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}E(X_n I\{|X_n|\geq a\})$ συγκλίνει
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}Var(X_n I\{|X_n|\geq a\})$ συγκλίνει

Πόρισμα:

Αν για την ακολουθία $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}Var(X_n)<+\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$ συγκλίνει με πιθανότητα 1.
(Απόδειξη: βιβλίο Παπαδάτου: Θεωρία πιθανοτήτων)

Θεώρημα(Ισχυρός νόμος μεγάλων αριθμών για ανεξάρτητη ακολουθία Kolmogorov)

Έστω $\{X_n, n\geq 1\}$ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $E(X_n)=\mu_n<\infty$.για τις οποίες ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2}<+\infty$.Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}{n} = 0$, δηλαδή $\overline{X_n} - \overline{\mu_n} \to 0$, με πιθανότητα 1.

Απόδειξη

Ορίζουμε $Y_n = X_n - E(X_n) = X_n - \mu_n$, ικανοποιούν το εξής : $E(Y_n) = 0$, $Var(Y_n) = Var(X_n - \mu_n) = Var(X_n)$. Οπότε η ακολουθία $\{Y_n, n \geq 1\}$
Ικανοποιεί επίσης τη συνθήκη:

$$E(Y_n) = 0\,, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} Var\left(\frac{Y_n}{n}\right) < +\infty$$

Από το προηγούμενο πόρισμα θα υπάρχει τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε:
$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{Y_k(\omega)}{k} \to Y(\omega), \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ n \to \infty$ με πιθανότητα 1.
Εκτός ίσως απο κάποια $\omega \in \Omega$, τα οποία ανήκουν σε ένα ενδεχόμενο A με $P(A) = 0$, φυσικά η Y(ω) είναι πεπερασμένη για κάθε $\omega \in A^c$. Απο το προηγούμενο Λήμμα αν $\omega \in A^c$ τότε :

$$\overline{Y_n}(\omega) = \frac{Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_n(\omega)}{n} \to 0\,, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ n \to \infty$$

Επειδή $\omega \in A^c$ και $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0 = 1$, συμπεραινουμε ότι :
$P(\overline{Y_n} \to 0) = 1$. Τότε όμως, αντικαθιστώντας την ακολουθία Y_n έχουμε :

$$\overline{Y_n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{(X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2) + \cdots + (X_n - \mu_n)}{n}$$
$$= \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n} = \overline{X_n} - \overline{\mu_n}$$

Συνεπώς αφού $\overline{Y_n} \to 0 \Rightarrow \overline{X_n} - \overline{\mu_n} \to 0$, με πιθανότητα 1, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα(Κ.Ο.Θ.)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$. Τότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(a)$$

Για να αποδειχθεί το θεώρημα αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα

Έστω $Z_1, Z_2, \ldots$ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομών F_{Z_n}με αντίστοιχες ροπογεννήτριες $M_{Z_n}, n \geq 1$,και Z μια τυχαία μεταβλητή με αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής F_Zκαι ροπογεννήτρια M_Z. Τότε ισχύει το εξής:

Αν $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)\ \forall\ t\ \in \mathbb{R}$ τότε $F_{Z_n}(t) \to F_Z(t)$για κάθε tστο οποίο η F_Zείναι συνεχής.

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ. με χρήση ροπογεννήτριας.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
Λόγω ισονομίας υποθέτουμε ότι όλες οι X_iέχουν ροπογεννήτρια $M(t)$η οποία ορίζεται για κάθε $t\ \in \mathbb{R}$ και είναι πεπερασμένη.

Θα υπολογίσουμε την ροπογεννήτρια της $Z \sim N(0,1)$

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)\right\} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz + t^2 - t^2)\right\} dz = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-t)^2\right\} dz$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}$$

Βρίσκουμε τώρα την ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $Z_i = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$

$$M_{Y_i}(t) = M_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(\exp\left\{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right\}\right) = M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}}$δίνεται από τον τύπο

$$M_{S_n}(t) = E(\exp\{tS_n\}) = E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\exp\left\{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Θεωρούμε $L(t) = \log\big(M(t)\big)$.Η συνάρτηση $L(t)$είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$L'(t) = \frac{d}{dt} \log M(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}$$

$$L''(t) = \frac{dL'(t)}{dt} = \frac{M(t)M''(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}$$

Όμως$M'(t) = \frac{d}{dt}E(e^{tX_i}) = E(X_i e^{tX_i}) \Rightarrow M'(0) = E(X_i) = \mu = 0$

και$M(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{M'(t)} = \mathrm{E}(\mathrm{X_i^2 e^{tX_i}}) \Rightarrow \mathrm{M''(0)} = \mathrm{E}(X_i^2) = Var(X_i) + \left(E(X_i)\right)^2 = 1$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$L(0) = \log\big(M(0)\big) = \log\big(E(e^{0.X_i})\big) = \log 1 = 0$$

$$L'(0) = \frac{M'(0)}{M(0)} = \frac{\mu}{1} = \mu = 0$$

$$L''(0) = \frac{M(0)M''(0) - (M'(0))^2}{\left(M(0)\right)^2} = E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = 1$$

Σκοπός είναι να δειχθεί ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} M_{S_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$$

ή ισοδύναμα:

$$\lim_{n\to+\infty} \log M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} nL\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$$

Εφαρμόζουμε δυο διαδοχικές φορές τους κανόνες l'hospital και λαμβάνουμε:

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{L'\left(t\cdot n^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(t\cdot n^{-\frac{1}{2}}\right)'}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot n^{-\frac{3}{2}}\cdot L'\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{-n^{-2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{t}{2}\cdot L'\cdot(\frac{t}{\sqrt{n}})}{n^{-\frac{4}{2}+\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{t}{2}\cdot L'\cdot(\frac{t}{\sqrt{n}})}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{t}{2}\cdot L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdot(t\cdot n^{-\frac{1}{2}})'}{-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{t}{2}L''(\frac{t}{\sqrt{n}})t(-\frac{1}{2})n^{\frac{-3}{2}}}{\left(\frac{-1}{2}\right)n^{\frac{-3}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{t^2}{2}L''(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{\mathrm{n}}})=\frac{\mathrm{t}^2}{2}\mathrm{L''}(0) = \frac{t^2}{2}$$

Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$$

Άρα $F_{S_n}(\alpha) \to F_z(a)$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \le a) = P(Z \le a)$ή ισοδύναμα:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi(a)$$

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ. με χρήση χαρακτηριστικής συνάρτησης

Για να δείξουμε την σύγκλιση κατά κατανομή της $\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ είναι αρεκτό να δείξουμε ότι η χ.σ. , $\varphi_n(t), της\ (S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ συκλίνει , κατά σημείο , προς την χ.σ. $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$, της τυποποιημένης κανονικής . Επειδή όμως $\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{X_k-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{S_n}$ όπου $\widetilde{S_n} = \widetilde{X_1} + \cdots + \widetilde{X_n}$ είναι τα μερικά αθροίσματα της $\left\{\widetilde{X_\iota} = \frac{X_i-\mu}{\sigma}, \iota \ge 1\right\}, και E(\widetilde{X_\iota}) = 0, Var(\widetilde{X_\iota}) = 1$, αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση του $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mu = 0\ και \sigma^2 = 1$ (οπότε $E(X_1^2) = 1$) και, δυνάμει του θεωρήματος ότι:

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{i^j E(X^j)}{j!} + o(t^n)$$

έχουμε την έκφραση ότι $\varphi_{X_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, καθώς $t \to 0$, όπου $o(t^2)$ είναι κάποια (μιγαδική) συνάρτηση , τέτοια ώστε $|\frac{o(t^2)}{t^2}| \to 0$, καθώς $t \to 0$. Τότε όμως , για σταθερό $t \ne 0$, έχουμε από το Λήμμα .. ότι $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$καθώς $n \to \infty$ *διότι αν* $y_n = \frac{t}{\sqrt{n}} \to 0, y_n \ne 0,$ *και συνεπώς* $n \cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right) = \frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{\frac{t^2}{n}}t^2 = \frac{o\left[\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right]}{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}t^2 = \frac{o(y_n^2)}{y_n^2}t^2 \to 0$, *καθώς* $n \to \infty$ *που σημαίνει ότι και* $z_n = -\frac{t^2}{2} + n \cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right) \to -\frac{t^2}{2} = z.$

Η συνθήκη Lindeberg

Έστω η ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$E(X_j) = 0, Var(X_j) = \sigma_j^2 < +\infty$$

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Τότε η διασπορά της τυχαίας μεταβλητήςS_nδίνεται ως:

$$v_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Η ακολουθία θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη του Lindebergεάν ισχύει το ακόλουθο:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{v_n^2} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2\, I(|X_j| \geq \varepsilon v_n) = 0, \forall\, \varepsilon > 0$$

Θεώρημα (Κ.Ο.Θ. των Lindeberg-Feller)

Θεωρούμε την ανεξάρτητη ακολουθία τυχαιών μεταβλητών $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$, όπου $E(X_j) = 0, Var(X_j) = \sigma_j^2 < +\infty$, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Lindeberg.

Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n}{v_n} \leq a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Η συνθήκη του Lindebergείναι ικανή αλλά όχι γενικά αναγκαία(το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά). Όμως εαν η ακολουθία των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_j : j \geq 1\}$ικανοποιεί τη συνθήκη των αμελητέων διασπορών:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max\limits_{1 \leq k \leq n} \sigma_\kappa^2}{\sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2} = 0$$

τότε ικανοποιείται και η συνθήκη του Lindeberg
Η παραπάνω συνθήκη εξηγεί ότι η συνεισφορά διασποράς , σ_κ^2 , της X_κείναι πολύ μικρή σε σύγκριση με το συνολικό άθροισμα διασπορών, το οποίο είναι η διασπορά της $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Θεώρημα (Κ.Ο.Θ. του Lyapunov)

Θεωρούμε την ανεξάρτητη ακολουθία τυχαιών μεταβλητών $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$, όπου $E(X_j) = 0, Var(X_j) = \sigma_j^2 < +\infty$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $E\left(|X_j|^{2+\delta}\right) < \infty$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Τότε η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής S_n δίνεται ως:

$$v_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Αν ισχύει η συνθήκη Lyapunov:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} E\left(|X_j|^{2+\delta}\right) = 0$$

Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{v_n} \le a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα (Κ.Ο.Θ. για φραγμένες τυχαίες μεταβλητές)

Θεωρούμε την ανεξάρτητη ακολουθία τυχαιών μεταβλητών $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$, όπου $E(X_j) = 0, Var(X_j) = \sigma_j^2 < +\infty$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|X_j| \le M$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Τότε η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής S_n δίνεται ως:

$$v_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η ακολουθία v_n αποκλίνει δηλαδή:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j^2 = +\infty$$

Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{v_n} \le a\right) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

Επειδή $|X_j| \leq M$για κάθε $j \geq 1$τότε ισχύει ότι $\left|X_j\right|^3 \leq M^2 < \infty$. Επομένως

$$E\left(\left|X_j\right|^3\right) \leq E(M^3) = M^3 < \infty$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{X_j, j \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lyapunovγια δ=1
Τότε,

$$0 \leq \frac{1}{v_n^3}\sum_{j=1}^{n} E\left(\left|X_j\right|^3\right) = \frac{1}{v_n^3}\sum_{j=1}^{n} E\left(\left|X_j\right|^2\left|X_j\right|\right) \leq \frac{M}{v_n^3}\sum_{j=1}^{n} E\left(\left|X_j\right|^2\right) = \frac{M}{v_n^3} v_n^2 = \frac{M}{v_n}$$

Επειδή όμως η v_nαποκλίνει, αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$συνεπώς

$\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{v_n} = 0$, επομένως από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n^3}\sum_{j=1}^{n} E\left(\left|X_j\right|^3\right) = 0$$

Επομένως πράγματι ικανοποιείται η συνθήκη του Lyapounovγια $\delta = 1$

Το συμπέρασμα έπεται τώρα άμεσα από το Κ.Ο.Θ. του Lyapounov.

Ερώτημα

Έστω ότι για κάθε $\kappa \geq 1$μια τυχαία μεταβλητή $X_k \sim \exp(\lambda_\kappa)$, ανεξάρτητες μη ισόονομες όπου $\lambda_\kappa > 0$. Πως πρέπει να επιλεγούν οι σταθερές $\lambda_\kappa > 0$ έτσι ώστε για την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ να ισχύει ότι:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Προσέγγιση μέσω ροπογεννήτριας

Η πυκνότητα της $X_k \sim \exp(\lambda_\kappa)$ δίνεται από τον τύπο: $f_{X_k}(x) = \frac{1}{\lambda_\kappa} \exp\left\{-\frac{x_k}{\lambda_\kappa}\right\}$, επομένως η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X_kδίνεται ως εξής:

$$M_{X_k}(t) = E(e^{tX_k}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\lambda_\kappa} \exp\left\{-\frac{x}{\lambda_\kappa}\right\} dx = \frac{1}{\lambda_\kappa} \int_0^{+\infty} \exp\left\{x\left(t - \frac{1}{\lambda_\kappa}\right)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda_\kappa} \frac{1}{t - \frac{1}{\lambda_\kappa}} \int_0^{+\infty} \left(t - \frac{1}{\lambda_\kappa}\right) \exp\left\{x\left(t - \frac{1}{\lambda_\kappa}\right)\right\} dx = \frac{1}{1 - t\lambda_\kappa}\ , t < \frac{1}{\lambda_\kappa}$$

Για την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ισχύει ότι λόγω ανεξαρτησίας:

$$\mu_n = E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_\kappa\, , \sigma_n^2 = Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_\kappa^2$$

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{tX_k}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - t\lambda_\kappa}$$

Θεωρούμε τώρα την τυχαία μεταβλητή $U_n = \frac{S_n - \mu_n}{\sigma_n}$. Η ροπογεννήτρια της U_nδίνεται από τον τύπο:

$$M_{U_n}(t) = E(e^{tU_n}) = E\left(e^{t\left(\frac{S_n - \mu_n}{\sigma_n}\right)}\right) = \exp\left\{-t\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right\} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sigma_n}}\right)$$

$$= \exp\left\{-t\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right\} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{t\lambda_\kappa}{\sigma_n}} = \exp\left\{-t\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right\} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t\lambda_\kappa}{\sigma_n}\right)^{-1}$$

Λογαριθμίζοντας τότε την άνω σχέση οδηγούμαστε στην:

$$\log M_{U_n}(t) = -t\frac{\mu_n}{\sigma_n} - \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - t\frac{\lambda_\kappa}{\sigma_n}\right)$$

Πρέπει ναβρούμε συνθήκη για τα λ_κ έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$\lim_{n \to +\infty} \log M_{U_n}(t) = -\frac{t^2}{2}$$

Προσέγγιση μέσω συνθήκης Lyapunov

Θα βρούμε μια συνθήκη για τα $\lambda_\kappa > 0$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Lyapunovμε $\delta = 1$.

Για το λόγο αυτό πρέπει να υπολογίσουμε την $E(X_\kappa^3)$ για κάθε $\kappa \geq 1$.

Παραγωγίζοντας την ροπογεννήτρια $M_{X_k}(t) = \frac{1}{1-t\lambda_\kappa}$ τρεις φορές, λαμβάνουμε ότι:

$M'''_{X_\kappa}(t) = \frac{6\lambda_\kappa^3}{(1-t\lambda_\kappa)^4}$, επόμενως $E(X_\kappa^3) = \frac{6\lambda_\kappa^3}{1^4} = 6\lambda_\kappa^3$.

Η συνθήκη Lyapunovγια $\delta = 1$ διατυπώνεται ως εξής:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sigma_n^3} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^3) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_\kappa^3}{\{\sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa^2\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Άρα αν τα λ_κ επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε θα ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Για παράδειγμα επιλέγοντας $\lambda_\kappa = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

ενώ

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{n}\lambda_{\kappa}^{3}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}<+\infty$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{\kappa}^{3}}{\{\sum_{\kappa=1}^{n}\lambda_{\kappa}^{2}\}^{\frac{3}{2}}}=0$$

Εφαρμογή

Για κάθε $j\geq 1$ επιλέγουμε ανεξάρτητες $X_j \sim U\left(-\frac{1}{\sqrt{j}},\frac{1}{\sqrt{j}}\right)$

Τότε $E(X_j)=\frac{\frac{1}{\sqrt{j}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)}{2}=0, V(X_j)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{j}}+\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^2}{12}=\frac{1}{3j}$

Είναι άμεσο ότι όλες οι X_jέχουν Τρίτη ροπή, καθώς:

$$E\left(\left|X_j\right|^3\right)=\int_{-\frac{1}{\sqrt{j}}}^{\frac{1}{\sqrt{j}}}|x|^3\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{j}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)}dx=-\frac{\sqrt{j}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{j}}}^{0}x^3dx+\frac{\sqrt{j}}{2}\int_{0}^{\frac{\sqrt{j}}{2}}x^3dx=\frac{1}{4j^{\frac{7}{2}}}$$

Παρατηρούμε ότι για τις X_j ισχύει η προφανής ανισότητα $\left|X_j\right|\leq 1$ για κάθε $j\geq 1$

Επίσης από την ανάλυση είναι γνωστό ότι $\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j}=+\infty$, επομένως

$\lim_{n\to+\infty}v_n^2=+\infty$και άρα:

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3j}}}\leq a\right)=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

για κάθε$\alpha\ \in\ \mathbb{R}$

Πρόβλημα

Έστω $W_1, W_2, W_3, \ldots$,ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $E(W_1) = 0, \sigma^2 = Var(W_1) \in (0, +\infty)$. Έστω επίσης

$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} a_j W_j$, όπου $a_j \neq 0$ για κάθε $j \geq 1$. Έαν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\max\limits_{1\le j\le n} |a_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}} = 0$$

τότε ισχύει ότι:

$$\frac{T_n}{\sqrt{Var(T_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Απόδειξη

Ορίζουμε τις ποσότητες $m_n \coloneqq \max\limits_{1\le j\le n} |a_j|$, $S_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$. Τότε από υπόθεση έχουμε ότι:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{m_n}{S_n} = 0$. Ορίζουμε για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $j = 1,2,3, \ldots, n$ως $X_{nj} = \frac{a_j W_j}{\sqrt{n}}$. Τότε $T_n = \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$. Θα αποδειχθεί ότι η τυχαί ακολουθία X_{nj}ικανοποιεί τη συνθήκη του Lindeberg.

Είναι: $\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{n} Var\left(X_{nj}\right) = \sum_{j=1}^{n} Var(\frac{a_j}{\sqrt{n}} W_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} S_n^2$

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και θα δείξουμε ότι ποσότητα

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{j=1}^{n} E\left(X_{nj}^2 I\{|X_{nj}| > \varepsilon \sigma_n\}\right)$$

πηγαίνει στο 0 καθώς $n \to +\infty$.

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{j=1}^{n} E\left(X_{nj}^2 I\{|X_{nj}| > \varepsilon \sigma_n\}\right) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{j=1}^{n} E\left(\frac{a_j^2}{n} W_j^2 I\left\{\frac{|a_j|}{\sqrt{n}} |W_j| > \varepsilon \sigma_n\right\}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{n} E\left(\frac{a_j^2}{n} W_j^2 I\left\{|W_j| > \frac{\varepsilon\sigma_n\sqrt{n}}{|a_j|}\right\}\right) \leq \frac{1}{\sigma_n^2}\frac{S_n^2}{n} E\left(W^2 I\left\{|W| > \frac{\varepsilon\sigma_n\sqrt{n}}{m_n}\right\}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2}\frac{S_n^2}{n} E\left(W^2 I\left\{\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon S_n}{m_n}\right\}\right)$$

Επειδή $\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{n}{\sigma^2 S_n^2}$η παραπάνω φράσσεται ως εξής:

$$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{n} E\left(X_{nj}^2 I\{|X_{nj}| > \varepsilon\sigma_n\}\right) \leq \frac{1}{\sigma^2} E(W^2 I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right)$$
$$= E\left(\frac{W^2}{\sigma^2} I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right)\right)$$

όπου από υπόθεση είναι γνωστό ότι $\frac{m_n}{S_n} \to 0$,επομένως $\frac{S_n}{m_n} \to +\infty$,θα ισχύει υποχρεωτικά ότι
$I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right) \to 0$ σχεδόν βέβαια, διότι $W < +\infty$με πιθανότητα 1, άρα αν ίσχυε ότι $I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right) \nrightarrow 0$, τότε θα υπήρχαν άπειροι φυσικοί nέτσι ώστε $\frac{|W|}{\sigma} \geq \varepsilon\frac{S_n}{m_n} \to +\infty$, το οποίο είναι άτομο. Άρα $\frac{W^2}{\sigma^2} I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right) \to 0$ και επιπλέον $\frac{W^2}{\sigma^2} I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right) \leq \frac{W^2}{\sigma^2}$
Τέλος επειδή$E(W^2) < \infty$, ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις για το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{W^2}{\sigma^2} I\left(\frac{|W|}{\sigma} > \frac{\varepsilon.S_n}{m_n}\right)\right) = 0$$

Μέθοδος Δέλτα

Η μέθοδος Δέλτα είναι μια ιδιαιτέρως χρήσιμη τεχνική για τον κλάδο της Στατιστικής, διότι επιτρέπει να βρίσκουμε ασυμπτωτικές κατανομές διαφόρων ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών, με άμεση συνέπεια την απαλοιφή άγνωστων παραμέτρων. Η μέθοδος Δέλτα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα

Ας υποτεθεί η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n \geq 1\}$για την οποία ισχύει ότι είναι ασυμπτωτικά κανονική, δηλαδή υπάρχει ακολουθία $\sigma_n \to 0$τέτοια ώστε

$$\frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \to^d Z \sim N(0,1)$$

Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $x_o = \mu$, με $g'(\mu) \neq 0$. Τότε η ακολουθία τ.μ. $\{g(X_n), n \geq 1\}$ικανοποιεί το εξής:

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{\sigma_n |g'(\mu)|} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{\sigma_n} \xrightarrow{d} Z \sim N\left(0, \left(g'(\mu)\right)^2\right)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{Bmatrix} \frac{g(x)-g(\mu)}{x-\mu} - g'(\mu), x \neq \mu \\ 0, x = \mu \end{Bmatrix}$

Επειδή η gείναι διαφορίσιμη στο $x_o = \mu$θα ισχύει ότι,

$$g'(\mu) = \lim_{x \to \mu} \frac{g(x) - g(\mu)}{x - \mu}$$

και άρα η hείναι αυτομάτως συνεχής στο $x_o = \mu$, καθώς

$$\lim_{x\to\mu} h(x) = \lim_{x\to\mu}\left[\frac{g(x)-g(\mu)}{x-\mu} - g'(\mu)\right] = g'(\mu) - g'(\mu) = 0 = h(\mu)$$

Από υπόθεση επειδή $\sigma_n \to 0$είναι άμεσο ότι $X_n \to^d \mu$ και αφού hσυνεχής στο

$x_o = \mu\ και\ h'(\mu) = 0$, παίρνουμε ότι $h(X_n) \to^d h(\mu) = 0$

Τώρα με βάση το Θεώρημα του Slutsky έχουμε ότι

$$\left\{\begin{matrix} h(X_n) \to^d 0 \\ \dfrac{X_n-\mu}{\sigma_n} \to^d Z\sim N(0,1) \end{matrix}\right\}$$

Άρα $h(X_n)\frac{X_n-\mu}{\sigma_n} \to^d 0.Z = 0$, δηλαδή$\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n} - g'(\mu)\frac{X_n-\mu}{\sigma_n} \to^d 0$

Επειδή από υπόθεση $g'(\mu) \neq 0$, διαιρώντας τα μέλη με $g'(\mu)$ παίρνουμε ότι:

$$\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} - \frac{X_n-\mu}{\sigma_n} \to^d 0$$

Τώρα, $\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} = \frac{X_n-\mu}{\sigma_n} + \frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} - \frac{X_n-\mu}{\sigma_n} \to^d N(0,1) + 0 = N(0,1)$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $-\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} \to^d N(0,1)$

Επομένως $\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n |g'(\mu)|} \to^d N(0,1)$.

Πόρισμα

Έστω η ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n \geq 1\}$με $E(X_n) = \mu < \infty$ και $Var(X_n) = \sigma^2, 0 < \sigma^2 < +\infty$. Τότε για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο $x_o = \mu$ με $g'(\mu) \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{n}\frac{g(\overline{X_n}) - g(\mu)}{\sigma|g'(\mu)|} \to^d Z\sim N(0,1)$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας το Κεντρικό οριακό θεώρημα για την ακολουθία $\{\overline{X_n}, n \geq 1\}$ έχουμε

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \to^d Z \sim N(0,1)$$

Για την ακολουθία $\sigma_n = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ισχύει ότι $\sigma_n \to 0$, επομένως εφαρμόζοντας τη μέθοδο Δέλτα για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$στο $x_o = \mu$με $g'(\mu) \neq 0$

έχουμε:

$\frac{g(\overline{X_n}) - g(\mu)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}|g'(\mu)|} \to^d Z \sim N(0,1)$ ή ισοδύναμα $\sqrt{n}\frac{g(\overline{X_n}) - g(\mu)}{\sigma|g'(\mu)|} \to^d Z \sim N(0,1)$

Εφαρμογή

Έστω $X_{1,}X_{2,}X_3, \dots, \sim N(0, \sigma^2)$,έστω $T^2 = Var(X_1^2) = E(X_1^4) - (E(X_1^2))^2$

Απο το κεντρικό οριακό θεώρημα ξέρουμε ότι $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - nE(X_1^2)}{\sqrt{T^2 n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ αφού $E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = \sum_{i=1}^n Var(X_i^2) = nVar(X_1^2) = nT^2$, Άρα $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{T^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση$g(x) = \ln x$. Τότε η gείναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (0, +\infty)$με $g'(x) = \frac{1}{x}$, άρα $g'(\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \neq 0$.

Θέτω $\sigma_n = \sqrt{\frac{T^2}{n}}$. Τότε $\sigma_n \to 0$. Από τη μέθοδο Δέλτα έχουμε:

$$\frac{g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - g(\sigma^2)}{|g'(\sigma^2)|\sqrt{\frac{T^2}{n}}} \to^d Z \sim N(0,1)$$

Τώρα είναι γνωστό ότι:

$\tau^2 = Var(X_1^2) = E(X_1^4) - \left(E(X_1^2)\right)^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$, οπότε

$$\sqrt{n}\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - \ln(\sigma^2)}{\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2\sqrt{2}} \to^d Z \sim N(0,1)$$

ή ισοδύναμα

$$\sqrt{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{\iota=1}^{n}X_i^2\right)-\ln(\sigma^2)\right)\to^d Z\sim N(0,2)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη μέθοδο Δέλτα με τον παραπάνω τρόπο, είναι δυνατόν να βρεθεί μια αντιστρεπτή ποσότητα για την παράμετρο σ^2 η οποία να μην εξαρτάται από κάποια άλλη παράμετρο και να έχει πλήρως καθορισμένη κατανομή(για κατασκευή Διαστήματος εμπιστοσύνης είτε για έναν κατάλληλο έλεγχο υποθέσεων για την παράμετρο σ^2.

Λήμμα

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή , με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Αν U είναι μια ομοιόμορφη στο $(0,1)$, τότε ισχύει ότι $Y=F_X^{-1}(U)=^d X$

Απόδειξη

Είναι:

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P\left(F_X^{-1}(U)\le t\right)=P\left(U\le F_X(t)\right)=\int_0^{F_X(t)}1\,du=F_X(t)$$

Άρα πράγματι $Y=^d X$

Παράδειγμα

$X\sim\exp(1)$. Τότε $f(x)=e^{-x}, F_X(x)=\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}, x>0$

$y=1-e^{-x}\Rightarrow\ e^{-x}=1-y\Rightarrow\ -x=\ln(1-y)\Rightarrow x=-\ln(1-y)$

Άρα$F_X^{-1}(x)=-\ln(1-x)$. Γενικότερα αν $X\sim\exp(\theta)$ τότε:

$$F_X(x)=\int_0^x\theta e^{-\theta t}dt=1-e^{-\theta x}, x>0$$

$y=1-e^{-\theta x}\Rightarrow\ e^{-\theta x}=1-y\Rightarrow\ -\theta x=\ln(1-y)\Rightarrow x=\dfrac{-\ln(1-y)}{\theta}$

Άρα $F_X^{-1}(x)=-\frac{\ln(1-x)}{\theta}$, $0<x<1$

Από το λήμμα αν $U\sim U(0,1)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $-\frac{\ln(1-U)}{\theta}\sim\exp(\theta)$

Ορισμός:Ποσοστημόριο μιας Κατανομής

Έστω αριθμός $0<p<1$.Τότε ορίζουμε ως $p-$ ποσοστημόριο μιας κατανομής είναι ο μοναδικός αριθμός ξ_p ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $F(x)=p$, δηλαδή η λύση της εξίσωσης $P\left(X\le\xi_p\right)=p$. Πρακτικά, είναι ο αριθμός ξ_p όπου το p% του δείγματος είναι μικρότεροι απο αυτόν τον αριθμόξ_p.

Για $p = \frac{1}{2}$ ο αριθμός που είναι λύση της εξίσωσης $F(x) = \frac{1}{2}$ ονομάζεται διάμεσος ή αριθμός Levy της κατανομής

Παράδειγμα

Στην $\exp(1)$ *η λύση της* $F(x) = \frac{1}{2}$*είναι η* $x = \ln 2$.Αρα η διάμεσοςτηςεκθετικής $\exp(1)$ *είναι*

$\delta = \ln 2 < E(X) = 1.$

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα *:*

Σε μια αυθαίρετη κατανομή F όπου η εξίσωση $F(x) = \frac{1}{2}$ δεν λύνεται αναλυτικά, με ποιό τρόπο εκτιμάται η διάμεσος ?

Στην κλασική στατιστική η εκτίμηση που χρησιμοποιείται ευρεώς για την διάμεσο προσδιορίζετε απο την εξης διαδικασία :

Δοθέντος του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ δημιουργούμε το ταξινομημένο δείγμα $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \dots, X_{(n)}$ όπου $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$, $X_{(2)}$ η δεύτερη μικρότερη τυχαία μεταβλητή κοκ. Τότε η εκτιμήτρια που διαλέγουμε για την διάμεσο δ είναι η : $\hat{\delta}_n = X_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

Ωστόσο είναι σωστό ότι για την εκτιμήτρια $\hat{\delta}_n$ότι ισχύει $\hat{\delta}_n \xrightarrow{d} \delta$; Σε αυτό το ερώτημα απαντάει το επόμενο θεώρημα:

Λήμμα:

Έστω $U_1, \dots, U_n \sim U(0,1)$και η τυχαία μεταβλτή $Y_n = U_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, στο διατεταγμένο δείγμα $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \dots, U_{(n)}$Τότε ισχύει ότι

$$\sqrt{n}\left(Y_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Απόδειξη:

Η ομοιόμορφη κατανομή έχει συνάρτηση κατανομής $F(x) = \left\{\begin{matrix} 0, x \leq 0 \\ x, 0 < x < 1 \\ 1, x \geq 1 \end{matrix}\right\}$. Θα

υπολογίσουμε αρχικά την πυκνότητα της $Y_n = U_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

$$f_{Y_n}(u) = \lim_{du \to 0} \frac{P(Y_n \in (u, u + du])}{du}$$

Δηλαδή αν το du είναι αρκετά μικρό έχουμε:

$$f_{Y_n}(u)du \cong P(Y_n \in (u, u+du]) = F_{Y_n}(u+du) - F_{Y_n}(u)$$

Η πιθανότητα $P(Y_n \in (u, u+du])$ ακολουθεί την πολυωνυμική κατανομή διότι:

- Πρώτα πρέπει να επιλέξουμε από τις nομοιόμορφες, $\left[\frac{n}{2}\right]$οι οποίες να είναι μικρότερες από το δοθέν u, το οποίο γίνεται με $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ τρόπουςκαι με πιθανότητα $F(u)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$.
- Έπειτα από τις $n - \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$τυχαίες μεταβλητές που απομένουν, 1 ακριβώς πρέπει να πέφτει στο διάστημα $(u, u+du]$, το οποίο γίνεται με $\binom{n-\left[\frac{n}{2}\right]}{1}$ τρόπους και με πιθανότητα $\left(F(u+du) - F(u)\right)^1 \cong f(u)du$.
- Από τις τυχαίες μεταβλητές που έμειναν, πρέπει όλες να πέφτουν μετά από το $u + du$, το οποίο γίνεται με 1 τρόπο και με πιθανότητα $\left(1 - F(u+du)\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$.

$$P(Y_n \in (u, u+du]) = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \times F(u)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times \left(F(u+du) - F(u)\right)^1 \times \left(1 - F(u+du)\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}$$
$$\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \times F(u)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times f(u)du \times \left(1 - F(u+du)\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P(Y_n \in (u, u+du])}{du} = \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \times F(u)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times f(u) \times \left(1 - F(u+du)\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}$$
$$= \frac{1}{B\left(\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]\right)} F(u)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \times f(u) \times \left(1 - F(u)\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$$
$$= \frac{1}{B\left(\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]\right)} u^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \times (1-u)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Έτσι $Y_n \sim Beta\left(\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right]\right), E(Y_n) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1}$ $, Var(Y_n) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]\times\left(n+1-\left[\frac{n}{2}\right]\right)}{(n+1)^2(n+2)}$

Ισχύει λόγω της ανισότητας: $\frac{n}{2} - 1 < \left[\frac{n}{2}\right] \le \frac{n}{2}$ισχύει ότι

$$\frac{n-2}{2(n+1)} < \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1} \le \frac{n}{2(n+1)}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n-2}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

επομένως από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $E(Y_n) \to \frac{1}{2}$ με παρόμοιο συλλογισμό μπορεί να δειχθεί ότι $Var(Y_n) \to 0$.

Έστω τώρα η τυχαία μεταβλητή $X_n = \sqrt{n}\frac{Y_n - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n}\left(Y_n - \frac{1}{2}\right)$
Τότεχρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

- $\mathrm{n}! \cong \mathrm{n}^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$
- $i! \cong i^{i+\frac{1}{2}}e^{-i}\sqrt{2\pi}$

Μπορούμε να δείξουμε ότι για την πυκνότητα της X_n:

$$f_{X_n}(x) = 2\sqrt{n}f_{Y_n}\left(\frac{x - 2\sqrt{n}}{-\sqrt{n}}\right)$$
$$= \frac{n!}{\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)!\,(n-1)!\,\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$$

ισχύει ότι $\lim_{n\to+\infty} f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (κατά σημείο) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα

Δίνεται η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$ από μια αυθαίρετη συνεχή κατανομή F.Συμβολίζουμε με $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$τις διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές της ακολουθίας. Η διάμεσος, έστω δ, αυτής της κατανομής, προσδιορίζεται από την εξίσωση $F(\delta) = \frac{1}{2}$. Τότε ισχύει ότι:

$$\sqrt{n}\left(X_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} - \delta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4f^2(\delta)}\right)$$

Απόδειξη

Είναι γνωστό το εξής αποτέλεσμα: Αν $U_1, U_2, \dots, U_n$είναι ανεξάρτητες ισόνομες ομοιόμορφες (0,1)τότε:

$$\sqrt{n}\left(U_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Δέλτα για την συνάρτηση $g(x) = F^{-1}(x), 0 < x < 1$, οπότε παίρνουμε ότι.

$$\sqrt{n}\left(F^{-1}\left(U_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \left(\left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)'\right)^2 \frac{1}{4}\right)$$

Όμως από το προηγούμενο λήμμα ισχύει ότι $X =^d F^{-1}(U)$επομένως θα ισχύει και ότι $X_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} =^d F^{-1}\left(U_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}\right)$. Επίσης ισχύει ότι η διάμεσος δ είναι η λύση της εξίσωσης$F(\delta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Τέλος πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο $\left(F^{-1}(u)\right)'$. Για το σκοπό αυτό ξεκιναμε από την ταυτότητα:

$F\left(F^{-1}(u)\right) = u, \forall\ 0 < u < 1$. Επομένως παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή u, παίρνουμε:

$$\frac{d}{du}\left\{F\left(F^{-1}(u)\right)\right\} = 1 \Rightarrow F'\left(F^{-1}(u)\right)\left(F^{-1}(u)\right)' = 1 \Rightarrow \left(F^{-1}(u)\right)' = \frac{1}{F'\left(F^{-1}(u)\right)} = \frac{1}{f\left(F^{-1}(u)\right)}$$

Για $u = \frac{1}{2}$λαμβάνουμε ότι:

$$\left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)' = \frac{1}{f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f(\delta)}$$

Άρα αντικαθιστώντας στο αποτέλεσμα της μεθόδου δέλτα λαμβάνουμε ότι:

$$\sqrt{n}\left(X_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} - \delta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4f^2(\delta)}\right)$$

Επομένως ασυμπτωτικά ο εκτιμητής $\hat{\delta} = X_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής της πραγματικής διαμέσου δ.

Άμεση εφαρμογή

Αν $X \sim \exp(1)$, έχουμε $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$.Το δ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$F(\delta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\delta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\delta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\delta = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \delta = \ln 2 \cong 0.6931472$$

Πράγματι αν επιλέξουμε $n = 200$ τυχαίους αριθμούς της εκθετικής με παράμετρο 1, τότε $\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = 101$. Αν λοιπόν διατάξουμε τις 200 μεταβλητές από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη θα πρέπει η 101^{η} παρατήρηση να είναι πολύ κοντά στο $\ln 2$.Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία $m = 50$.Ο κώδικας σε γλώσσα Rκαι τα αντίστοιχα αποτελέσματα είναι τα εξής:

```
> m=30

> n=200

> x=matrix(nrow=m,ncol=n)

> for(i in 1:m){

+ x[i,]=rexp(n,1)

+ x[i,]=sort(x[i,])}

> mu=mean(x[,floor(n/2)+1])

> s=var(x[,floor(n/2)+1])

>mu

[1] 0.7010331

>s

[1] 0.004741909
```

Παρατηρούμε ότι $mu = 0.7010331 \cong \ln 2 = 0.6931472$

Τρέχοντας το ίδο για m=300 λαμβάνουμε:

```
> m=300

> n=200

> x=matrix(nrow=m,ncol=n)

> for(i in 1:m){

+ x[i,]=rexp(n,1)

+ x[i,]=sort(x[i,])}

> mu=mean(x[,floor(n/2)+1])
```

```
> s=var(x[,floor(n/2)+1])
> mu
[1] 0.6955954
> s
[1] 0.004727802
```

Παρατηρούμε ότι $mu = 0.6955954 \cong \ln 2 = 0.6931472$

Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει το θεώρημα.

Πολυδιάστατο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $\{X_j : j \geq 1\}$μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητων και ισόνομων στον $\mathbb{R}^\kappa$ έτσι ώστε $E(X_j) = \mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k)$ και πίνακα διασποράς

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \cdots & \sigma_{1\kappa} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \cdots & \sigma_{2\kappa} \\ \vdots & & \\ \sigma_{\kappa 1} & \sigma_{\kappa 2} \cdots & \sigma_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\kappa \times \kappa}$,θετικά ορισμένος. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$τότε ισχύει ότι:

$$\Sigma^{-1} \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \text{ ή } \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z_\Sigma \sim N_\kappa(0, \Sigma)$$

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα Cramer-Wald ορίζουμε $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}}$και θα αποδειχθεί ότι $Y_n \xrightarrow{d} Z_\Sigma \sim N_\kappa(0, \Sigma)$, δείχνοντας ότι για κάθε διάνυσμα

$\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k)$ οτι ισχύει $< \alpha, Y_n > \xrightarrow{d} < a, Z_\Sigma >$. Τώρα αν $Z_\Sigma \sim N_\kappa(0, \Sigma)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $< a, Z_\Sigma >$ είναι κανονική στο $\mathbb{R} N(0, \alpha' \Sigma \alpha)$ όπου με α' δηλώνεται το ανάστροφο διάνυσμα $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha^k \end{pmatrix}$. Για την τυχαία μεταβλητή του αθροίσματος χρειαζόμαστε τα εξής:

$$S'_n = \begin{pmatrix} S_n^1 \\ S_n^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^1 + X_2^1 + \cdots + X_n^1 \\ X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} X_j^1 \\ \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} X_j^k \end{pmatrix}$$

Η οποία έχει μέση τιμή: $E(S_n') = \begin{pmatrix} E(\sum_{j=1}^{n} X_j^1) \\ E(\sum_{j=1}^{n} X_j^2) \\ . \\ . \\ E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\mu^1 \\ n\mu^2 \\ . \\ . \\ n\mu^\kappa \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ . \\ . \\ \mu^\kappa \end{pmatrix}$

Θα υπολογίσουμε τώρα αναλυτικά το εσωτερικό γινόμενο $< \alpha, Y_n >$.Είναι:

$$< \alpha, Y_n >= \sum_{i=1}^{k} a^i Y_n^i = \sum_{i=1}^{k} a^i \frac{S_n^i - n\mu^i}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} a^i \left(S_n^i - n\mu^i\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a^i (X_{ij} - \mu^i)$$

$:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} V_j$, όπου $V_j = \sum_{i=1}^{k} a^i (X_{ij} - \mu^i)$για κάθε $j = 1,2, \dots, n$. Έχουμε $E\left(V_j\right) = 0$και

$Var\left(V_j\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{k} a^i \left(X_{ij} - \mu^i\right)\right) = a'\Sigma\alpha \in \mathbb{R}$.Από την εφαρμογή του κλασσικού κεντρικού οριακού θεωρήματος έχουμε ότι:

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} V_j \xrightarrow{d} N(0, a'\Sigma\alpha)$. Επομένως ισχύει ότι $< \alpha, Y_n >= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} V_j \xrightarrow{d} N(0, a'\Sigma\alpha)$ όπου η $N(0, a'\Sigma\alpha)$ είναι η κατανομή της $< \alpha, Z_\Sigma >$.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά αποτελέσματα

Με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R, μέσω προσομοίωσης ελέγχουμε την ορθότητα του Κ.Ο.Θ. Θα ελεγχθεί η ισχύς του κλασικού Κ.Ο.Θ.(περίπτωση ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών)για την τυχαία μεταβλητή $\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma}$. για τις εξής κατανομές:

- Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = \frac{1}{2}$
- Κατανομή Poissonμε παράμετρο $\theta = 3$
- Κατανομή Bernoulliμε πιθανότητα επιτυχίας $\theta = 0.4$
- Απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος(simplerandomwalk)

Η ιδέα προσομοίωσης έχει ως εξής:

Βήμα 1: Καθορισμός δυο δεικτών rκαι n

Βήμα 2: Για κάθε διαφορετική τιμή $i = 1,2, \dots, r$δημιουργούμε πανεξάρτητες παρατηρήσεις από την κατανομή που μας αφορά και έπειτα από αυτές τις ηπαρατηρήσεις υπλογίζουμε τον δειγματικό μέσο όρο

$$\overline{X_\iota} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + \cdots + X_{in}}{n}, i = 1,2,3 \dots, r$$

Βήμα 3: Με αυτό τον τρόπο έχουμε δημιουργήσει rανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής$\overline{X}$. Έπειτα δημιουργούμε τις κανονικοποιημένες-κεντροποιημένες παρατηρήσεις:

$$Z_i = \sqrt{n}\frac{\overline{X_\iota}-\mu}{\sigma}, \text{όπου } \mu = E(X_1), \sigma^2 = Var(X_i)$$

Έπειτα η καμπύλη κατανομής των $Z_1, \dots, Z_r$πρέπει να είναι κοντά στην καμπύλη της κανονικής κατανομής N(0,1) , όπως επίσης και το ιστόγραμμα συχνοτήτων των $Z_1, \dots, Z_r$ οφείλει να είναι «κοντά» στο ιστόγραμμα συχνοτήτων της N(0,1). Ας σημειωθεί δε, ότι περιμένουμε η κατανομή να προσεγγίζει την N(0,1) καθώς οι δείκτες rκαι παυξάνουν αρκετά(ανάλογα και με την κατανομή από την οποία ξεκινάμε).

Εκθετική Κατανομή

OR-κώδικας που παράγει το ιστόγραμμα της N(0,1)(με μέγεθος δείγματος r=1000) είναι:

```
r=1000
n=5000
theta=1/2
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)}
hist(normal,col="red",main="Distribution of the N(0,1)")
```

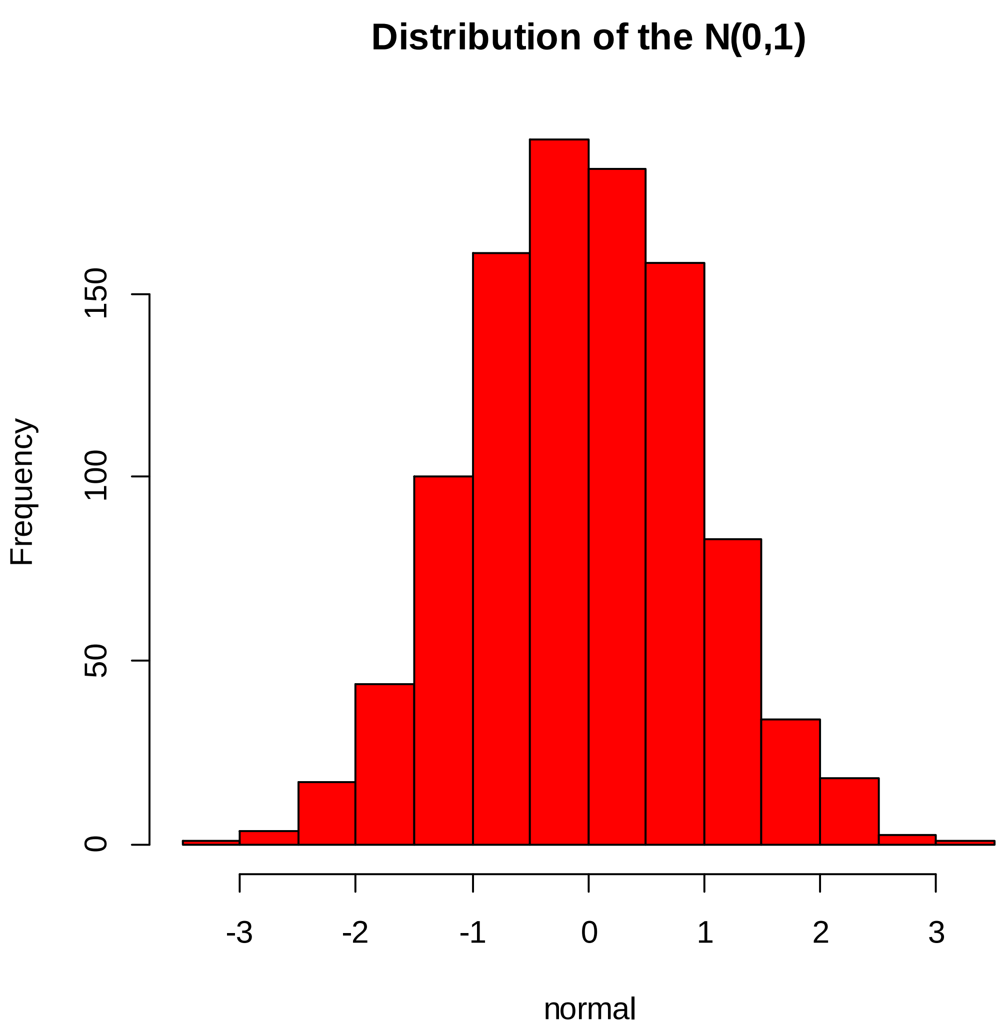


Figure 1: Histogram of N(0,1) with sample size r=1000

OR-κώδικας που παράγει την καμπύλη κατανομήςτης N(0,1) (με μέγεθος δείγματος r=1000) είναι:

```
r=1000
n=5000
theta=1/2
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)}
s=plot(density(normal))
```

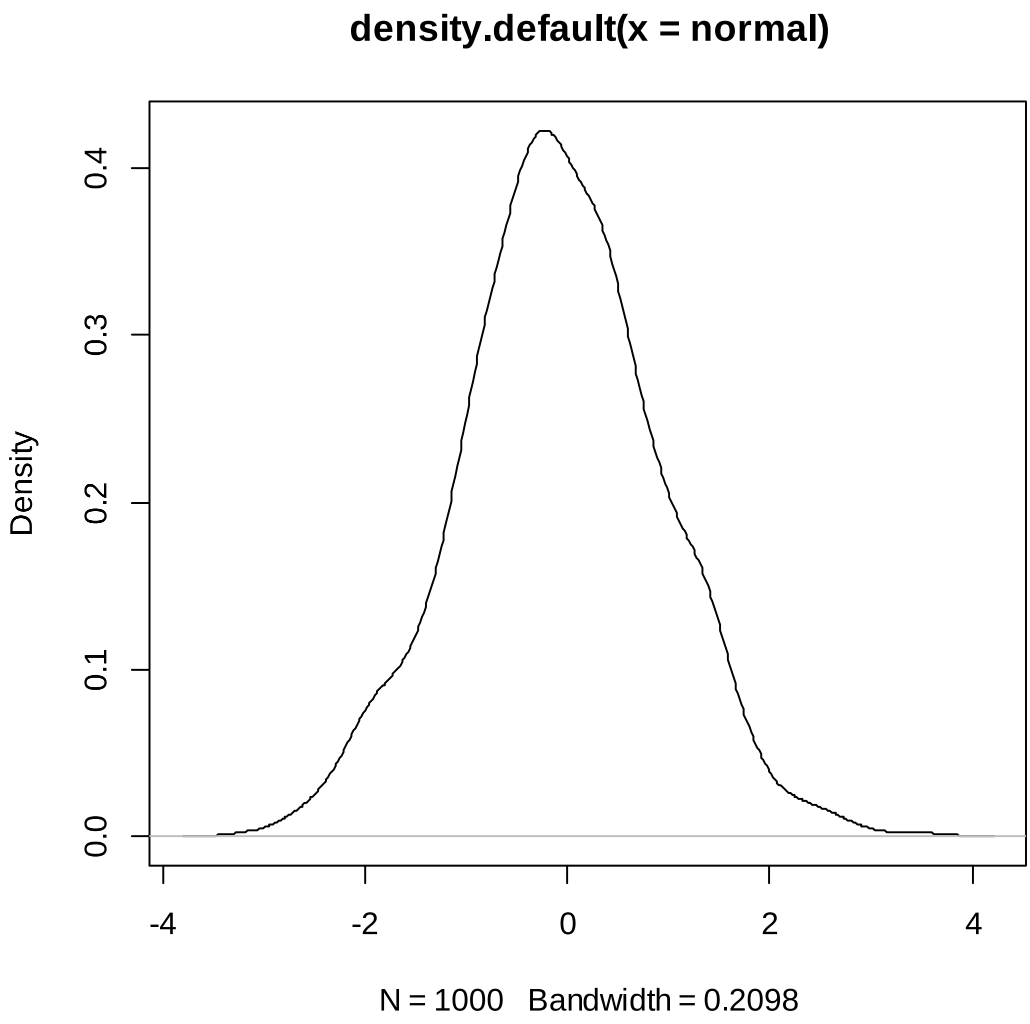


Figure 2: Density plot of N(0,1) having r=1000

ΟR-κώδικας που παράγει το ιστόγραμμα των δειγματικών μέσων της εκθετικής με παράμετρο $\theta = \frac{1}{2}$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=100, n=50) είναι:

```
r=100
n=50
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
for(i in 1:r){
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
hist(x,col="gray",main="Distribution of the mean")
```

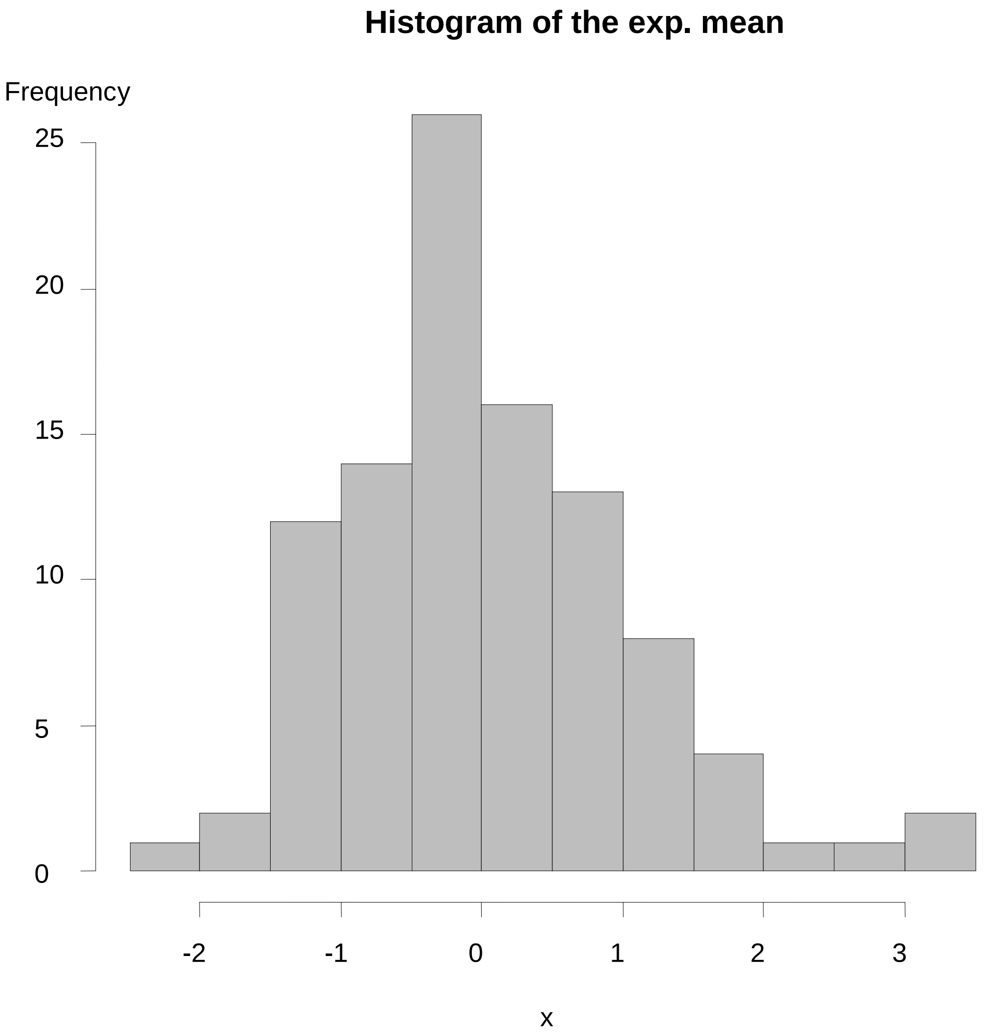


Figure 3: Histogram of exponential mean, having r=100 and n=50

ΟR-κώδικας που παράγει το ιστόγραμμα των δειγματικών μέσων της εκθετικής με παράμετρο $\theta = \frac{1}{2}$(με μεγάλο μέγεθος δείγματος r=1000, n=5000) είναι:

```
r=1000
n=5000
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
for(i in 1:r){
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
hist(x,col="gray",main="Distribution of the mean")
```

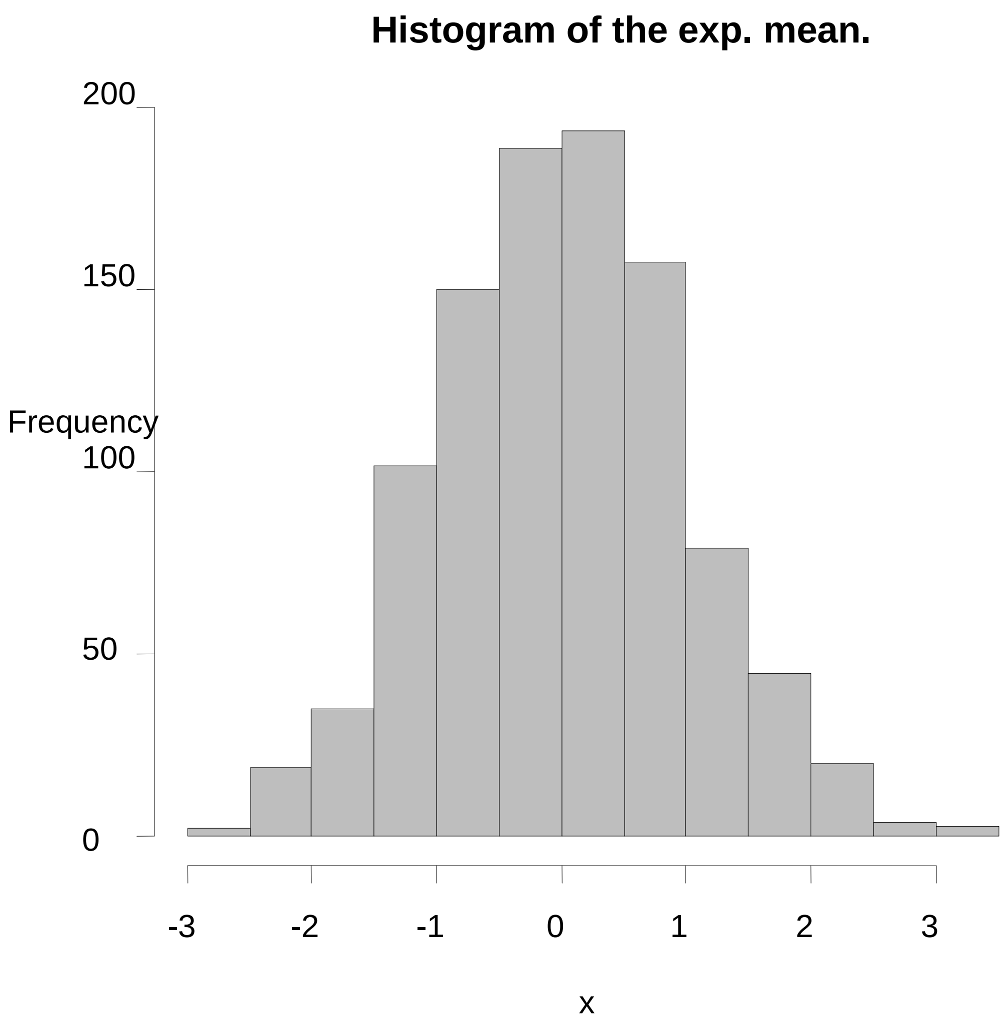


Figure 4: Histogram of exponential mean, having r=1000 and n=5000

OR-κώδικας που παράγει την καμπύλη κατανομής των δειγματικών μέσων της εκθετικής με παράμετρο $\theta = \frac{1}{2}$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=100, n=50) είναι:

```
r=100
n=50
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
h=plot(density(x))
```

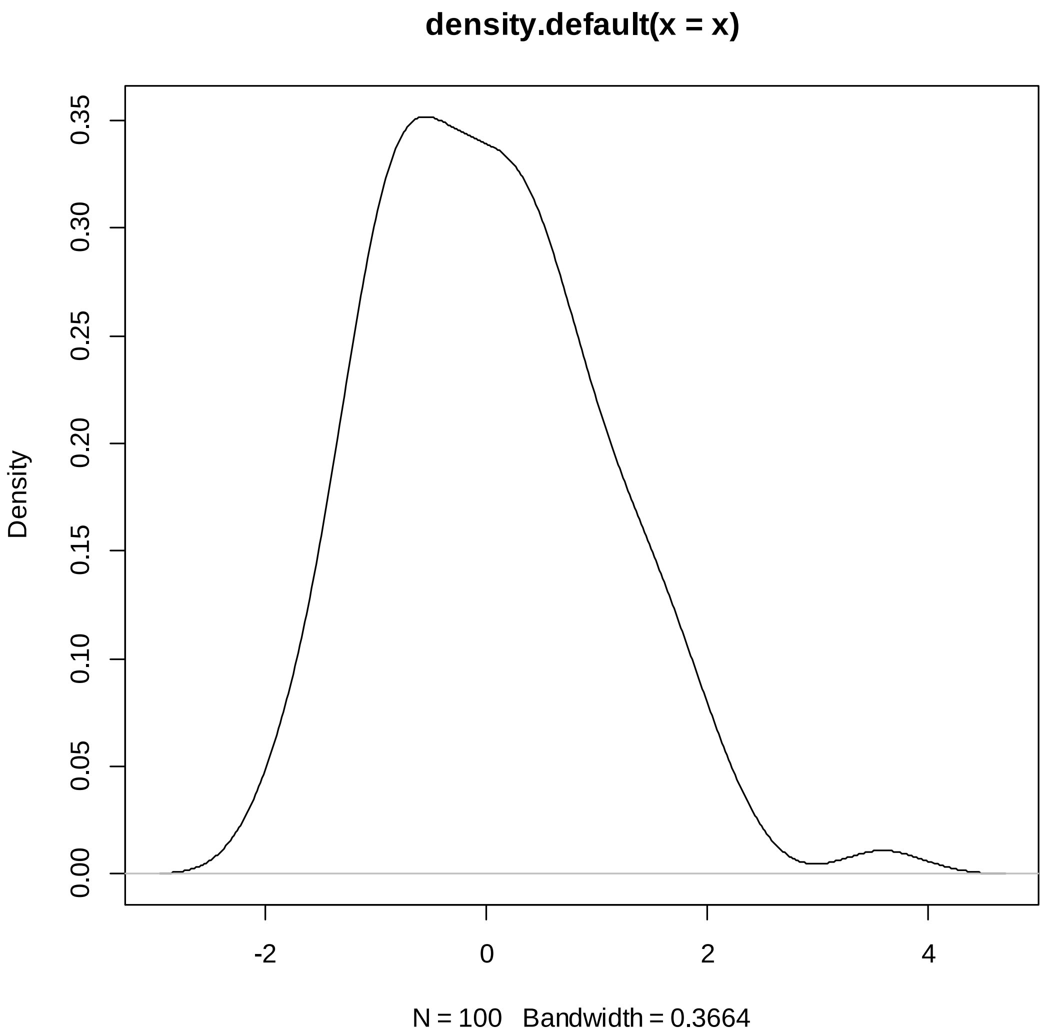


Figure 5: Density plot of exponential mean having r=100, n=50

OR-κώδικας που παράγει την καμπύλη κατανομής των δειγματικών μέσων της εκθετικής με παράμετρο $\theta = \frac{1}{2}$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=1000, n=5000) είναι:

```
r=1000
n=5000
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
for(i in 1:r){
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
h=plot(density(x))
```

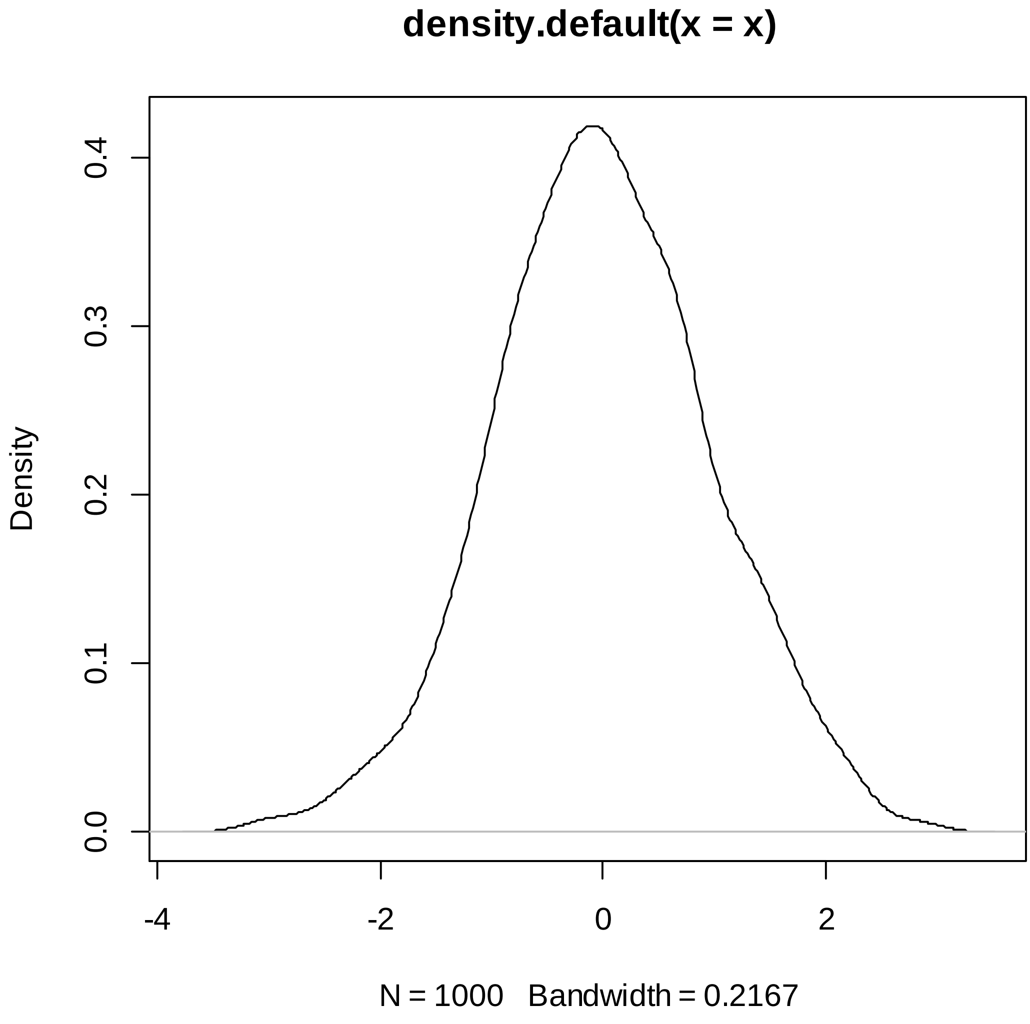


Figure 6: Density plot of exponential mean having r=1000, n=5000

Από τα παραπάνω γραφήματα είναι σαφές ότι η σύγκλιση των δειγματικών μέσων της εκθετικής δεν επέρεχεται αμέσως καθώς βλέπουμε ότι για r=100 και n=50, η κατανομή δεν έχει πάρει ακόμη την καμπανοειδή μορφή της κανονικής N(0,1). Αυτό όμως αλλάζει για αυξανόμενες τιμές του rτου n. Η «αργή» σύγκλιση ενδεχομένως να οφείλεται και στην τιμή της παραμέτρου θ που επιλέχθηκε. Ωστόσο παρατηρούμε ότι η ισχύς του Κ.Ο.Θ. εδώ ισχύει. Μπορεί να ελεγχθεί ότι αν το rκαι το nείναι πολύ μεγάλα, τότε η καμπύλη θα γίνει ακριβώς ίδια με την κανονική N(0,1), με τον κώδικα

```
r=7000
n=8000
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
h=plot(density(x))
```

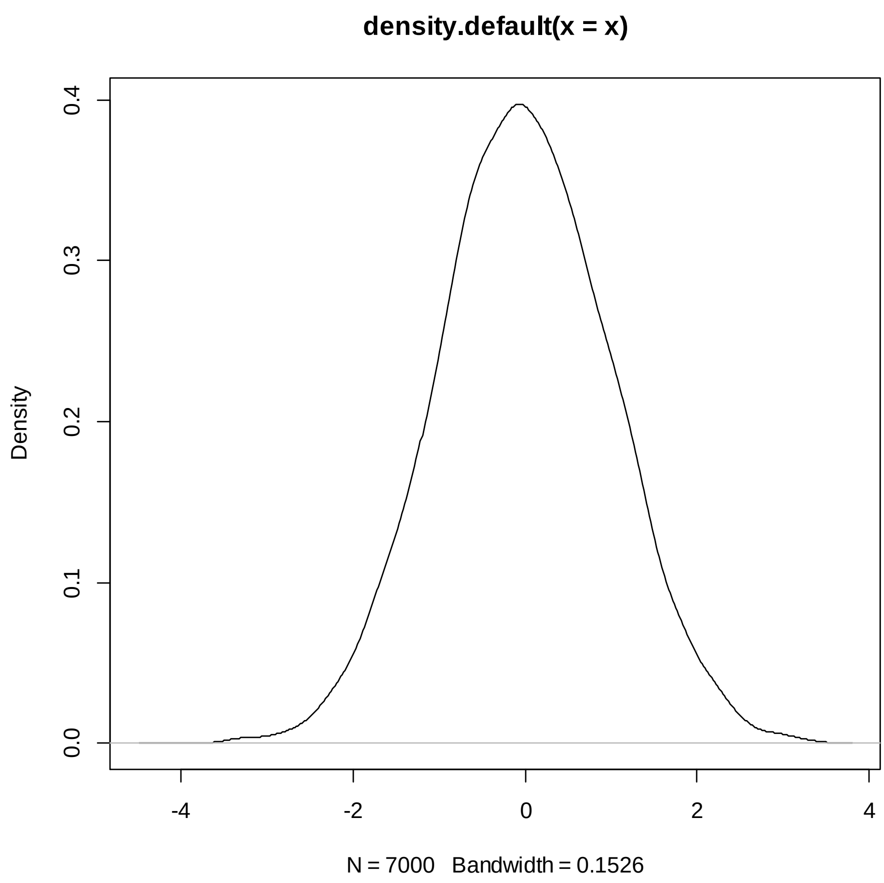


Figure 7Density plot of exponential mean having r=7000, n=8000

ΚατανομήPoisson

ΟR-κώδικας που παράγει το ιστόγραμμα συχνοτήτων των δειγματικών μέσων της Poisson με παράμετρο $\theta = 3$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=100, n=50) είναι:

```
r=100
n=50
theta=3
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rpois(n,theta)}
x=c(1:r)
for(i in 1:r){
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-theta)/(sqrt(theta))}
h=plot(density(x))
hist(x,col="gray",main="Distribution of the mean")
```

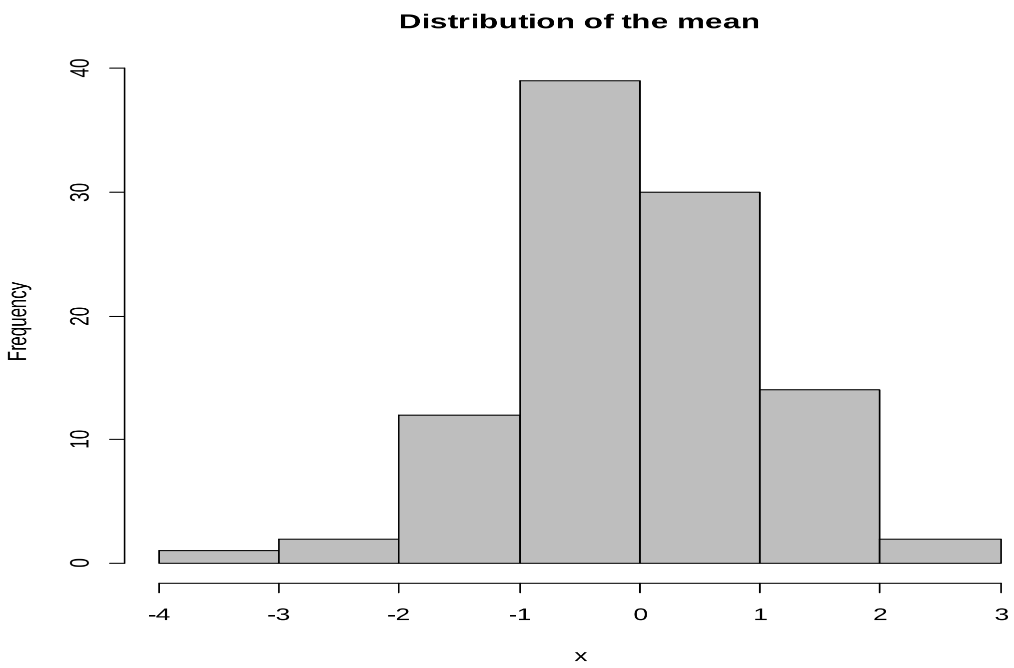


Figure 8Histogram of poisson mean having r=100, n=50

OR-κώδικας που παράγει το ιστόγραμμα συχνοτήτων των δειγματικών μέσων της Poisson με παράμετρο $\theta = 3$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=1000, n=5000) είναι:

```
r=1000
n=5000
theta=3
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rpois(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-theta)/(sqrt(theta))}
h=plot(density(x))
s=plot(density(normal))
hist(x,col="gray",main="Distribution of the mean")
```

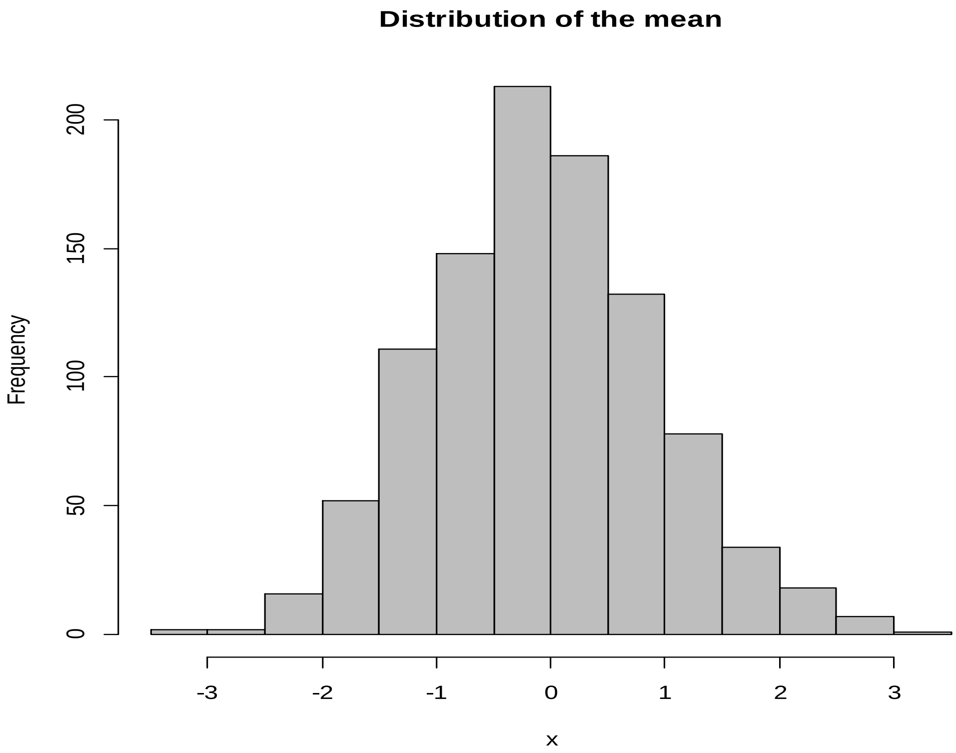


Figure 9Histogram of poisson mean having r=1000, n=5000

OR-κώδικας που παράγει την καμπύλη κατανομής των δειγματικών μέσων της Poisson με παράμετρο $\theta = 3$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=100, n=5000) είναι:

```
r=100
n=50
theta=3
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rpois(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-theta)/(sqrt(theta))}
h=plot(density(x))
```

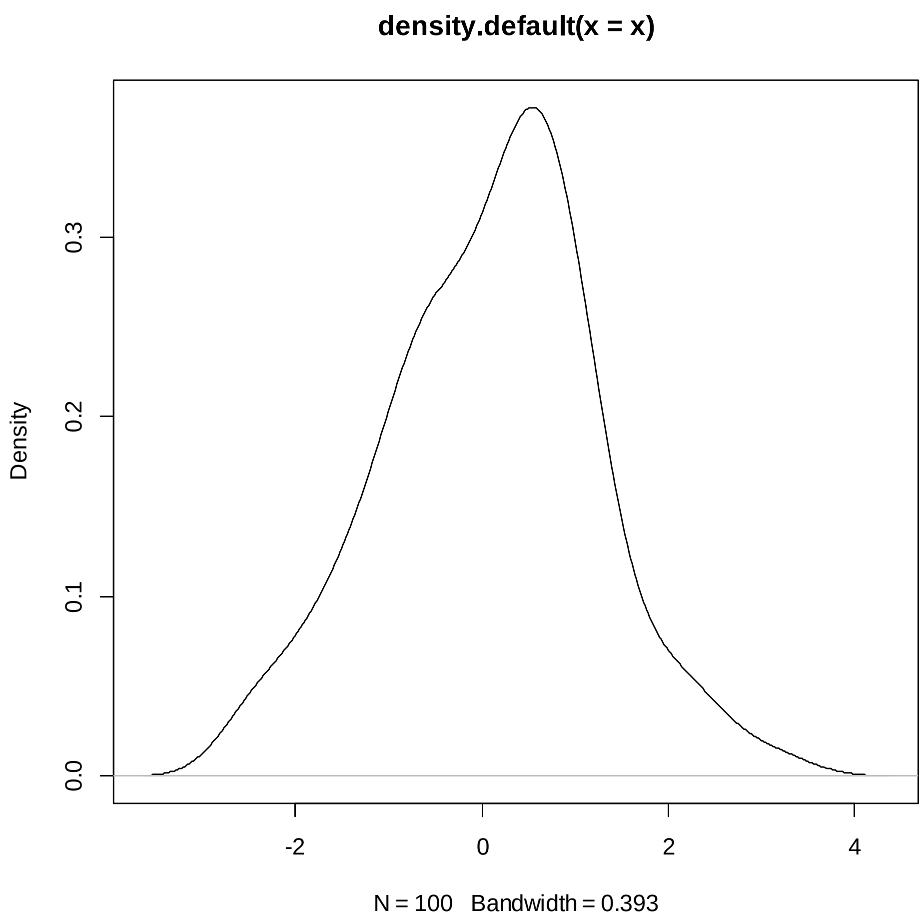


Figure 10Density plot of poisson mean having r=100, n=50

ΟR-κώδικας που παράγει την καμπύλη κατανομής των δειγματικών μέσων της Poisson με παράμετρο $\theta = 3$(με μικρό μέγεθος δείγματος r=100, n=5000) είναιr=1000

```
n=5000
theta=3
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rpois(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-theta)/(sqrt(theta))}
h=plot(density(x))
```

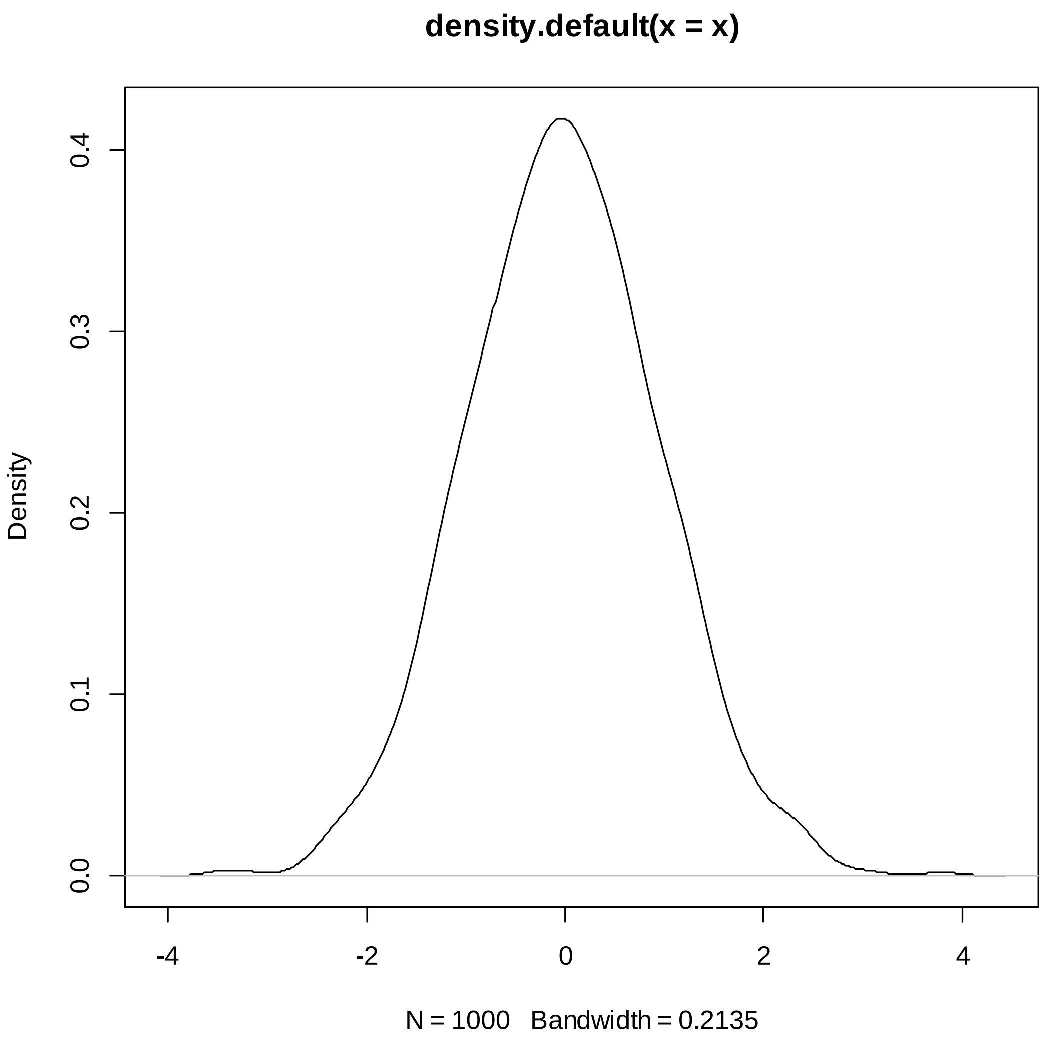


Figure 11Density plot of poisson mean having r=1000, n=5000

Από τα παραπάνω γραφήματα είναι σαφές ότι η σύγκλιση των δειγματικών μέσων της Poisson δεν επέρεχεται αμέσως καθώς βλέπουμε ότι για r=100 και n=50, η κατανομή δεν έχει πάρει ακόμη την καμπανοειδή μορφή της κανονικής N(0,1). Αυτό όμως αλλάζει για αυξανόμενες τιμές του rτου n. Η «αργή» σύγκλιση ενδεχομένως να οφείλεται και στην τιμή της παραμέτρου θ που επιλέχθηκε. Ωστόσο παρατηρούμε ότι η ισχύς του Κ.Ο.Θ. εδώ ισχύει. Μπορεί να ελεγχθεί ότι αν το rκαι το nείναι πολύ μεγάλα, τότε η καμπύλη θα γίνει ακριβώς ίδια με την κανονική N(0,1), με τον κώδικα

```
r=7000
n=8000
theta=1/2
z=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
z[i,]=rexp(n,theta)}
x=c(1:r)
normal=c(1:r)
for(i in 1:r){
normal[i]=rnorm(1,0,1)
x[i]=sqrt(n)*(mean(z[i,])-1/theta)/(1/theta)}
h=plot(density(x))
```

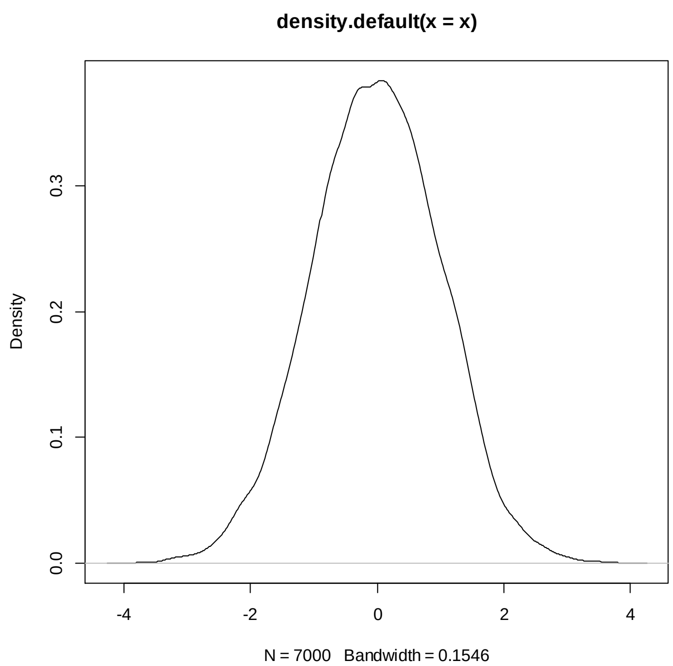
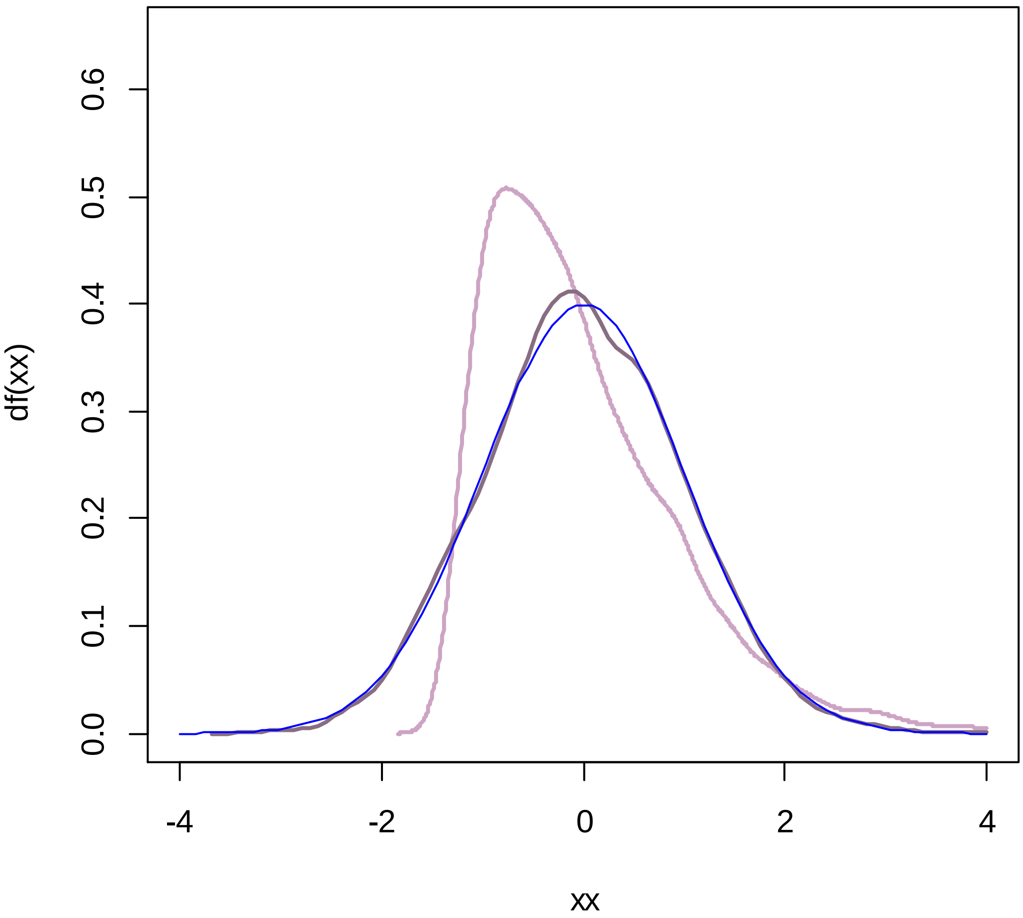


Figure 12Density plot of poisson mean having r=7000, n=8000

Για να συγκρίνουμε τώρα απευθείας τη σύγκλιση των πυκνοτήτων γνωστών τυχαίων μεταβλητών στην πυκνότητα της κανονικής κατανομής, χρησιμοποιούμε τις γραφικές μεθόδους της Rγια τις εξής κατανομές: Εκθετική, Poisson, Διωνυμική και Ομοιόμορφη.

Εκθετική:

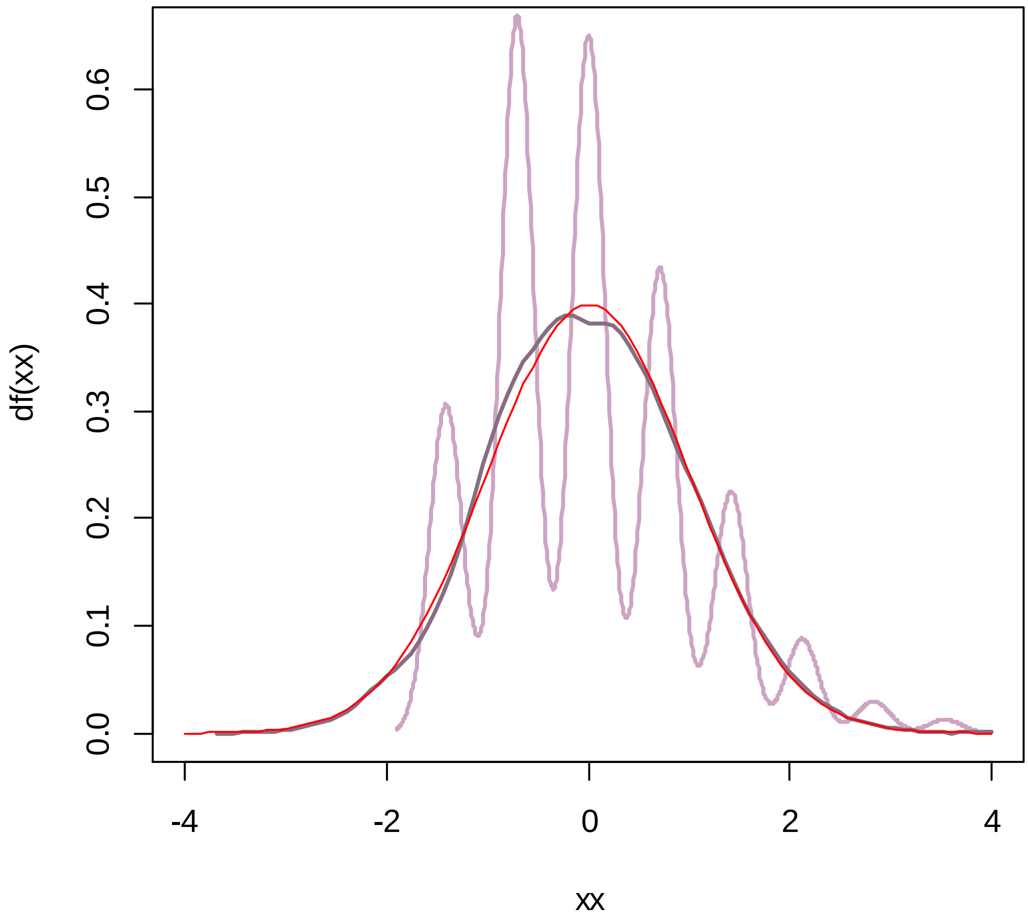
```
darken <- function(color, factor=1.4){
  col <- col2rgb(color)
  col <- col/factor
  col <- rgb(t(col), maxColorValue=255)
  col
}


sampleExp <- function(SS, n, lambda){
  mu <- 1/lambda; sigma <-sqrt(1/lambda^2)
  v<-c(1:SS)
  for(i in 1:SS) v[i]=(sum(rexp(n, rate = lambda))-n*mu)/(sqrt(n)*sigma)
  return(v)
}




set.seed(11)
col0 <- "#CDA4C3"
inf<- -4; sup <- -inf
xx <- seq(from=inf, to=sup, by=(sup-inf)/1000)
L <- c(2, 500)
for(i in L){
   x <- sampleExp(SS=5000, n=i, lambda=1)
   df <- approxfun(density(x, adjust=1.0))
   if(i == L[1]){
     plot(xx, df(xx), type='l', col=col0, lwd=2, xlim=c(inf,sup), ylim=c(0,0.65))
   }
   else{
     col0 <- darken(color=col0, factor=1.5)
     curve(df(x), from=inf, to=sup, col=col0, lwd=2, add=T)
}
}
curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), from=inf, to=sup, col="blue", lwd=1, add=T)
```



Poisson:

```
samplepois<-function(SS,n,lambda){
mu<-lambda; sigma<-sqrt(lambda)
v<-c(1:SS)
for(i in 1:SS) v[i]=(sum(rpois(n,lambda))-n*mu)/(sqrt(n)*sigma)
return(v)
}

set.seed(11)
col0 <- "#CDA4C3"
inf<- -4; sup <- -inf
xx <- seq(from=inf, to=sup, by=(sup-inf)/1000)
L <- c(2, 500)
for(i in L){
  x <- samplepois(SS=5000, n=i, lambda=1)
  df <- approxfun(density(x, adjust=1.0))
```

```
  if(i == L[1]){
    plot(xx, df(xx), type='l', col=col0, lwd=2, xlim=c(inf,sup), ylim=c(0,0.65))
  }
  else{
    col0 <- darken(color=col0, factor=1.5)
    curve(df(x), from=inf, to=sup, col=col0, lwd=2, add=T)
  }
}
curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), from=inf, to=sup, col="red", lwd=1, add=T)
```

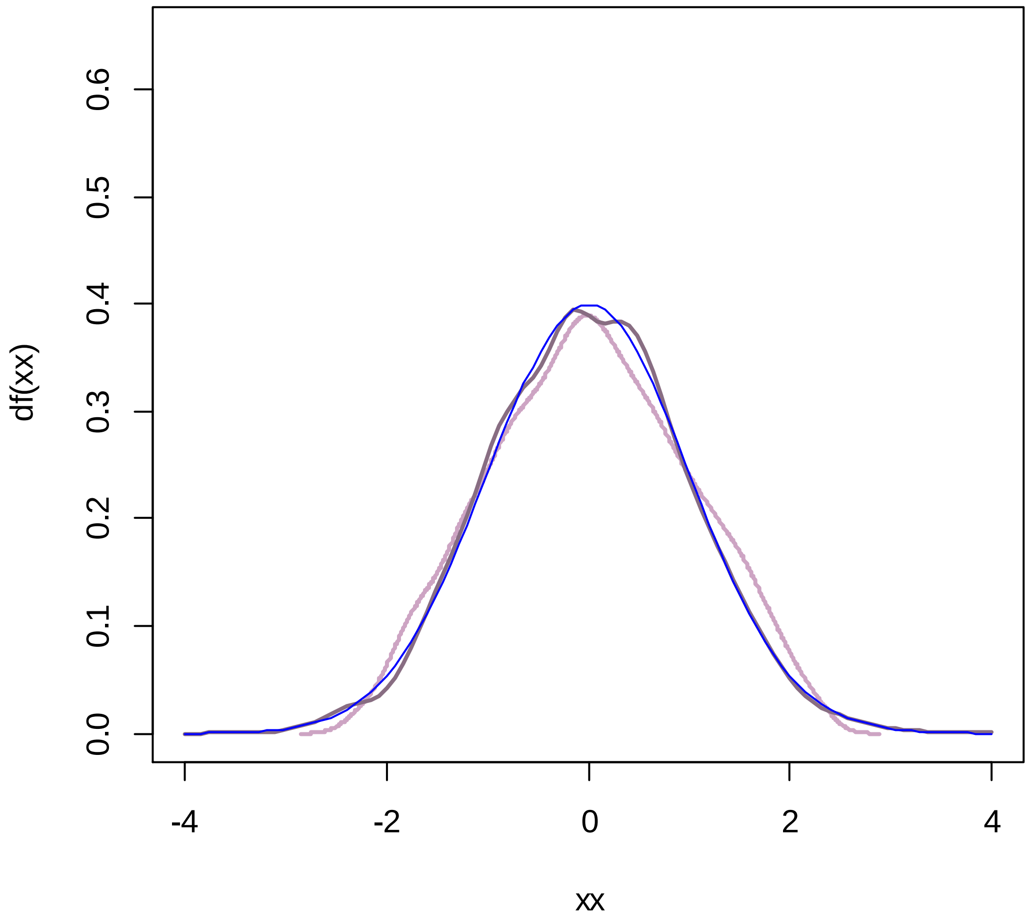


Διωνυμική:

Ομοιόμορφη:

```
sampleUnif <- function(SS, n, a, b){

  mu <- (a+b)/2; sigma <- sqrt((b-a)^2/12)
```

```
  v<-c(1:SS)

  for(i in 1:SS) v[i] <- (sum(runif(n, min=a, max=b))-n*mu)/(sqrt(n)*sigma)

return(v)

}




set.seed(11)

col0 <- "#CDA4C3"

inf<- -4; sup <- -inf

xx <- seq(from=inf, to=sup, by=(sup-inf)/1000)

L <- c(2, 500)

for(i in L){

   x <- sampleUnif(SS=5000, n=i, a=-2, b=2)

   df <- approxfun(density(x, adjust=1.0))

   if(i == L[1]){

     plot(xx, df(xx), type='l', col=col0, lwd=2, xlim=c(inf,sup), ylim=c(0,0.65))

   }

   else{

     col0 <- darken(color=col0, factor=1.5)

     curve(df(x), from=inf, to=sup, col=col0, lwd=2, add=T)

}

}

curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), from=inf, to=sup, col="blue", lwd=1, add=T)
```



df(xx)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
-4
-2
0
2
4
xx

Απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος

Ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τις εξής τιμές : $X = \begin{Bmatrix} -1, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ +1, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$. Έπειτα θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την X.

Κατόπιν θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο αρχίζει από τη θέση 0 σε έναν οριζόντιο άξονα και ορίζουμε το τυχαίο άθροισμα $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Τότε η τυχαία μεταβλητή S_nμας δείχνει την τυχαία θέση του σωματιδίου μετά από nβήματα έχοντας αρχίσει από την αρχική θέση 0. Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με το παιχνίδι εκείνο στο οποίο ένας παίκτης στρίβει ένα νόμισμα, στο οποίο αν φέρει γράμματα κερδίζει +1 χρηματική μονάδα, διαφορετικά κερδίζει -1 χρηματική μονάδα. Σε μια τέτοια περίπτωση το S_nμας δίνει το καθαρό κέρδος του παίκτη μετά από nγύρους.
Με πολύ απλές πράξεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$E(X_i) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 < +\infty$$

Λόγω ανεξαρτησίας είναι άμεσο ότι:

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$$

$$Var(S_n) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Συνεπώς το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.) μπορεί να εφαρμοστεί, δηλαδή

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \to Z \sim N(0,1)$$

ή ισοδύναμα $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$. Δηλαδή αν το nείναι αρκετά μεγάλο η ασυμπτωτική κατανομή της $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$είναι κανονική N(0,1). Θα επαληθεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με προσομοίωση μέσω της γλώσσας R.

O R-κώδικας που παράγει ένα τυχαίο μονοπάτι του απλού συμμετρικού τυχαίου περιπάτου με αρχική θέση $S_0 = 0$είναι:

```
n=30
r=30
p=0.5
s=matrix(nrow=r,ncol=n)
for(i in 1:r){
s[i,1]=0}
for(i in 1:r){
for(j in 2:n){
u=runif(1,0,1)
if(u<=p){
s[i,j]=s[i,j-1]+1}
if(u>p){s[i,j]=s[i,j-1]-1}}}
plot(s[1,],type="l")
```

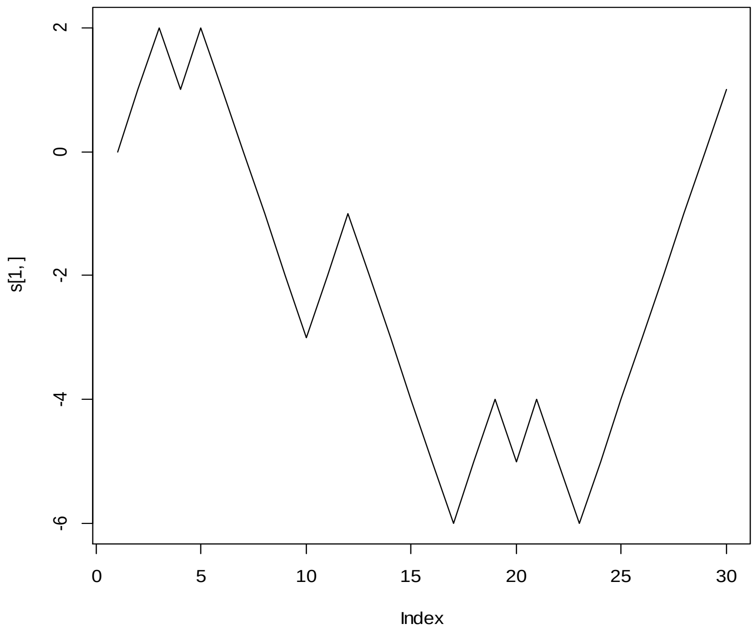


Figure 13 Simple symmetric random walk taking n=30 steps

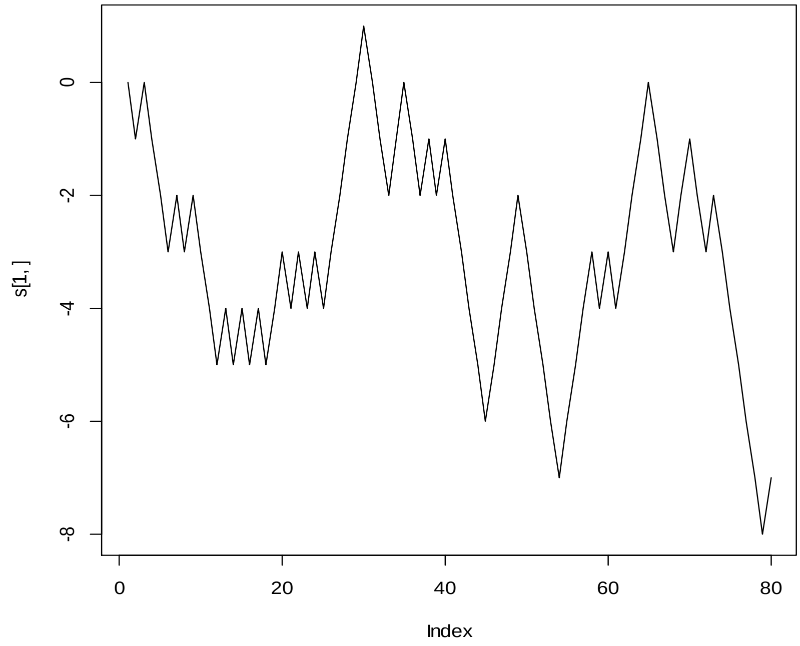


Figure 14Simple symmetric random walk taking n=80 steps

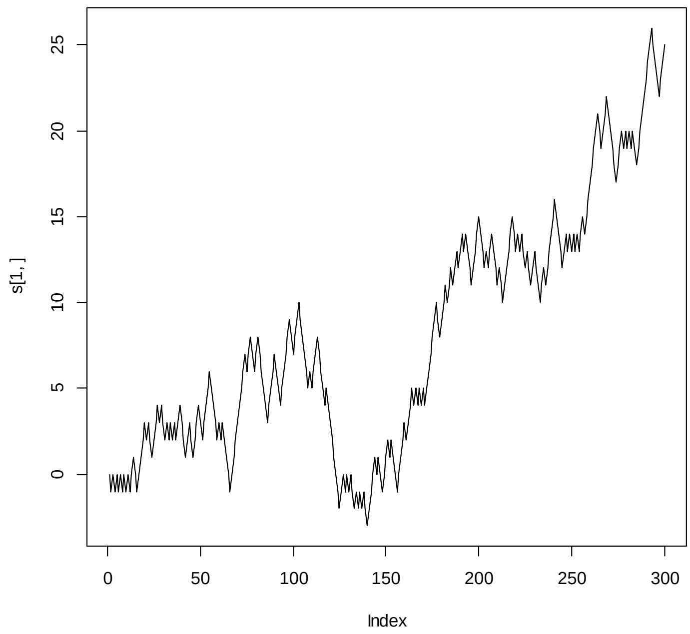


Figure 15Simple symmetric random walk taking n=300 steps

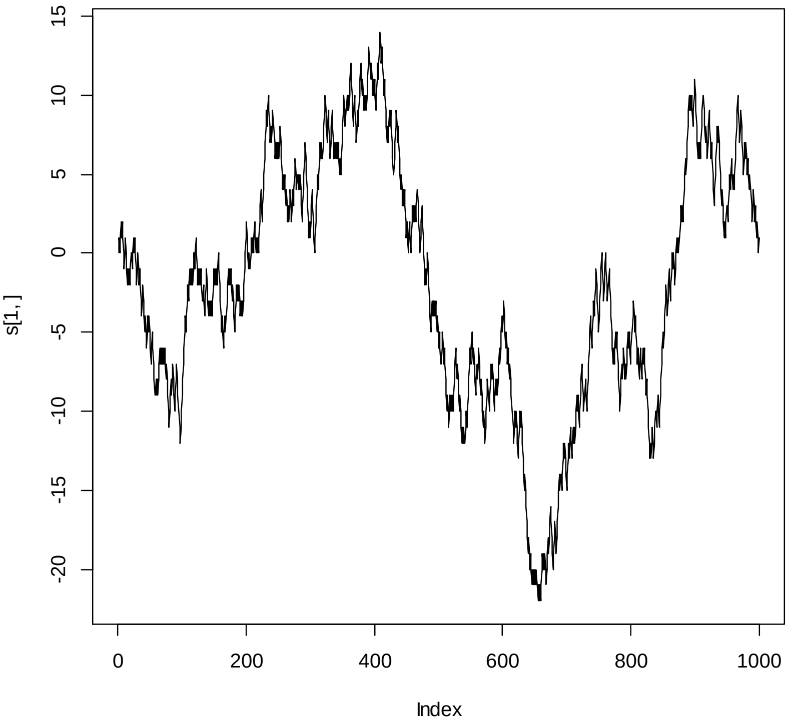


Figure 16Simple symmetric random walk taking n=1000 steps

Λόγω του Κ.Ο.Θ. όπως και πριν παρατηρούμε ότι $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$και επομένως χρησιμοποιώντας τα ποσοστημόρια της κανονικής κατανομής μπορούμε να δούμε ότι:

$$P(N < S_n < M) = 1 - a \Rightarrow P\left(\frac{N}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\right) = 1 - a$$

$\Rightarrow P\left(\frac{N}{\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\right) = 1 - a$.Λόγω της συμμετρίας τη τυποποιημένης κανονικής θα έχουμε ότι $\frac{M}{\sqrt{n}} = z_{a/2}, \frac{N}{\sqrt{n}} = -z_{a/2}$. Άρα προσεγγιστικά για μεγάλες τιμές του ηπεριμένουμε ότι $M = \sqrt{n} \times z_{a/2}, N = -\sqrt{n} \times z_{a/2}$, συνεπώς:

$S_n \in [-\sqrt{n} \times z_{\frac{a}{2}}, \sqrt{n} \times z_{\frac{a}{2}}]$ με πιθανότητα 1-α

- Η τυχαία μεταβλητή $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \cong Z$ με πιθανότητα 95% βρίσκεται στο διάστημα [-1.96,1.96] ή ισοδύναμα $S_n \in [-1.96\sqrt{n}, 1.96\sqrt{n}]$με πιθανότητα 95%

Τα αποτελεσμάτα αυτά μπορούν να επιβεβαιωθούν μέσω της γλώσσας R με τον εξής τρόπο: Με σταθερό πλήθος n=1000 προσομοιώνουμε r=100 σενάρια (δηλαδή προσομοιώνουμε την τυχαία μεταβλητή S_{1000} 100 διαφορετικές επαναλήψεις) και με έναν μετρητή με το όνομα «times» μετράμε πόσες φορές από τις r επαναλήψεις, η τυχαία μεταβλητή S_{1000}πέφτει στο διάστημα $[-1.96\sqrt{1000}, 1.96\sqrt{1000}] = [-61.98, 61.98]$. Τότε ο αριθμός $q = \frac{times}{r}$εκφράζει την επιθυμητή συχνότητα, η οποία λόγω σύγκλισης στο Κ.Ο.Θ. οφείλει να είναι αρκετά κοντά στο 0.95. Πράγματι ο κώδικας Rγια n=1000 και r=100 δίνεται ώς εξής(παρακάτω εμφανίζονται και τα αποτελέσματα του κώδικα):

```
> n=1000
> r=100
> p=0.5
>times=0
> L=-1.96*sqrt(n)
> R=-L
> s=matrix(nrow=r,ncol=n)
>for(i in 1:r){
+ s[i,1]=0}
>for(i in 1:r){
+ for(j in 2:n){
+ u=runif(1,0,1)
+ if(u<=p){
+ s[i,j]=s[i,j-1]+1}
+ if(u>p){s[i,j]=s[i,j-1]-1}}
+ if((s[i,n]>=L)&(s[i,n]<=R)){times=times+1}}
>plot(s[1,],type="l")
> q=times/r
> q
[1] 0.96
```

Η τιμή 0.96 είναι αρκετά κοντά στο επιθυμητό 0.95. Αυξάνοντας το r=100 σε r=1000, η προσομοίωση εμφανίζει:

```
>n=1000
> r=1000
> p=0.5
>times=0
> L=-1.96*sqrt(n)
> R=-L
> s=matrix(nrow=r,ncol=n)
>for(i in 1:r){
+ s[i,1]=0}
>for(i in 1:r){
+ for(j in 2:n){
+ u=runif(1,0,1)
+ if(u<=p){
+ s[i,j]=s[i,j-1]+1}
+ if(u>p){s[i,j]=s[i,j-1]-1}}
+ if((s[i,n]>=L)&(s[i,n]<=R)){times=times+1}}
>plot(s[1,],type="l")
> q=times/r
> q
[1] 0.952
```

Παρομοίως μπορούμε να επαληθεύσουμε τη συχνότητα 90% πάλι με ανάλογη χρήση της R: Με σταθερό πλήθος n=250προσομοιώνουμε r=100 σενάρια (δηλαδή προσομοιώνουμε την τυχαία μεταβλητή S_{250} 100 διαφορετικές επαναλήψεις) και με έναν μετρητή με το όνομα «times» μετράμε πόσες φορές από τις r επαναλήψεις, η τυχαία μεταβλητή S_{100}πέφτει στο διάστημα $\left[-1.65\sqrt{250}, 1.65\sqrt{250}\right] = [-26.08,26.08]$. Τότε ο αριθμός $q = \frac{times}{r}$εκφράζει την επιθυμητή συχνότητα, ηοποία λόγω σύγκλισης στο Κ.Ο.Θ. οφείλει να είναι αρκετά κοντά στο 0.9. Πράγματι ο κώδικας Rγια n=250 και r=100 δίνεται ώς εξής(παρακάτω εμφανίζονται και τα αποτελέσματα του κώδικα):

```
> n=250
> r=100
> p=0.5
>times=0
> L=-1.65*sqrt(n)
> R=-L
> s=matrix(nrow=r,ncol=n)
>for(i in 1:r){
+ s[i,1]=0}
>for(i in 1:r){
+ for(j in 2:n){
+ u=runif(1,0,1)
+ if(u<=p){
+ s[i,j]=s[i,j-1]+1}
+ if(u>p){s[i,j]=s[i,j-1]-1}}
+ if((s[i,n]>=L)&(s[i,n]<=R)){times=times+1}}
>plot(s[1,],type="l")
> q=times/r
```

> q
[1] 0.88

Η τιμή 0.88 είναι αρκετά κοντά στο επιθυμητό 0.90. Αυξάνοντας το r=100 σε r=1000, η προσομοίωση εμφανίζει:

```
> n=250
> r=1000
> p=0.5
>times=0
> L=-1.65*sqrt(n)
> R=-L
> s=matrix(nrow=r,ncol=n)
>for(i in 1:r){
+ s[i,1]=0}
>for(i in 1:r){
+ for(j in 2:n){
+ u=runif(1,0,1)
```

```
+ if(u<=p){
+ s[i,j]=s[i,j-1]+1}
+ if(u>p){s[i,j]=s[i,j-1]-1}}
+ if((s[i,n]>=L)&(s[i,n]<=R)){times=times+1}}
>plot(s[1,],type="l")
> q=times/r
> q
[1] 0.895
```

Οι προσομοιώσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι και στην περίπτωση του 90% καθώς και του 95% με την αύξηση του r, η συχνότητα $q = \frac{times}{r}$ συκλίνει ολοένα και περισσότερο στην θεωρητική πιθανότητα που υποδεικνύει το Κ.Ο.Θ, οπότε συμπεραίνουμε και πρακτικά πάλι την ισχύ του Κ.Ο.Θ.. Εδώ μάλιστα η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής S_nτεχνικά είναι πολύ δύσκολη(έχει περίτεχνους υπολογισμούς), ενώ με τη χρήση του Κ.Ο.Θ. μπορούμε να βρούμε καλά άνω και κάτω φράγματα(εξαρτώμενα από το n), για την τυχαία μεταβλητή S_nμε κάποια καλή πιθανότητα.

Βιβλιογραφία

1. Durret : Probability Theory and Examples, Edition 4.1, April 21, 2013

2. Sheldon Ross: A first course in probability

3. Ν.Παπαδάτος: Θεωρία Πιθανοτήτων,ΕΚΠΑ 2006

4. Probability and measure, 3rd edition, Patrick Billingsley

5. Lecture Notes on probability theory, Bruce K.Driver 2007

6. Head or Tails: An Introduction to Limit Theorems in Probability

7. Ahsanullah, M., Nevzorov, V. B., and Shakil, M. (2013). An introduction to order statistics. Atlantis Press.

8. Lecture notes on order statistics, Introduction and notation, university of Colardo.

   link: https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/order_stats.pdf

9. Elements of Large-Sample Theory, E.L.Lehmann, Springer 1999

10. Machine Learning with R - Second Edition: Expert techniques for predictive modeling to solve all your data analysis problems, Brett Lantz

11. The Art of R Programming: A Tour of Statistical Software Design, Norman Matloff