Αναλογιστικά Μέτρα Κινδύνου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Βελιγραντάκη Μαρία

Επιβλέπων : Π. Χατζόπουλος

Οκτώβριος 2018

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εργασία αυτή έχει σκοπό την παρουσίαση των διάφορων μορφών κινδύνου και των μέτρων κινδύνου όπως χρησιμοποιούνται στην Αναλογιστική Επιστήμη. Η μέτρηση κινδύνου είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία της Αναλογιστικής Επιστήμης καθώς και μας καθιστά ικανούς να ποσοτικοποιήσουμε τους διάφορους κινδύνους και σαφώς να τους αντιμετωπίσουμε με μεγαλύτερο βαθμό επιτυχίας.

Στην παρούσα εργασία, εκτός από την έννοια του κινδύνου και τα μέτρα κινδύνου, θα εξετάσουμε τις επιθυμητές ιδιότητες των μέτρων κινδύνου και δημοφιλής τρόπους υπολογισμού τους. Παρόλο που θα παρουσιάσουμε διάφορα μέτρα κινδύνου, ιδιαίτερη σημασία θα δώσουμε στο VaR και στο TVaR, και θα γίνει ειδική αναφορά στον υπολογισμό τους με την μέθοδο προσομοίωσης Monte-Carlo.

Κεφάλαιο 1. Η έννοια του κινδύνου

Ο Μπαμπινιώτης ορίζει ως κίνδυνο το αρνητικό ενδεχόμενο, πιθανότητα να συμβεί κάτι κακό ή οτιδήποτε (πράξη, κατάσταση, συμπεριφορά κ.λπ.) μπορεί να προκαλέσει καταστροφή, να επιφέρει απώλειες και φθορές (2005: 891). Ως έννοια ο κίνδυνος συνδέεται αναπόσπαστα με τον άνθρωπο και όλες τις εκφάνσεις της ζωής του: την προσωπική, την οικονομική, την κοινωνική. Ενυπάρχει σε όλες τις δραστηριότητές του και είναι πέρα από τις δυνάμεις ή τη θέλησή του. Γι' αυτό, ο άνθρωπος αναλίσκεται σε μια αέναη προσπάθεια να ελέγξει κατά το δυνατό περισσότερο τον κίνδυνο, να προβλέψει τις αιτίες και να βρει τρόπους αντιμετώπισής του.

Αλλά και στο σύγχρονο κόσμο ο κίνδυνος καταλαμβάνει μια πολύ σημαντική θέση. Βρίσκεται παντού, στο φυσικό περιβάλλον, στις επιστήμες, στην οικονομία, στην κοινωνία. Είναι το κοινό σημείο για το οποίο η σύγχρονη κοινωνία προβληματίζεται, διερευνά και ανασυνθέτει το σύστημα αξιών της, αναγνωρίζει τα όριά της και δοκιμάζει λύσεις για την ελαχιστοποίηση ή απαλοιφή των δυσμενών αποτελεσμάτων.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η οικονομία ακολουθεί μια κυκλική και όχι γραμμική πορεία. Μετά τη μεγάλη οικονομική ύφεση του 1929 (γνωστή ως κραχ), η χρηματοπιστωτική κρίση του 2008 είναι η μεγαλύτερη ύφεση που βίωσε και ακόμη αντιμετωπίζει η παγκόσμια κοινωνία.

Βέβαια υπάρχουν μεγάλες διαφορές που εστιάζονται κυρίως στο χαρακτηριστικό του παγκοσμιοποιημένου κεφαλαίου που διακρίνει την τελευταία κρίση. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι που την καθιστά πιο σύνθετη και πολύπλοκη και ως εκ τούτου και η αντιμετώπισή της είναι μια σύνθετη, πολύπλοκη και δύσκολη διαδικασία.

Αυτό που χαρακτηρίζει τις σύγχρονες οικονομίες αναφορικά με το παρελθόν είναι η δυνατότητα για τον εντοπισμό του κινδύνου, τη μέτρησή του, την εκτίμηση των συνεπειών του, και στη συνέχεια τη λήψη αποφάσεων για τα μέτρα που πρέπει να παρθούν ώστε ο κίνδυνος να μετριαστεί ή να εξαλειφθεί ανάλογων μέτρων, όπως είναι ο μετριασμός του (Crouhy et al, 2006).

Ο κίνδυνος, ως έννοια, είναι άρρηκτα συνδεμένος με την ανθρώπινη ζωή, τόσο την ατομική όσο και την κοινωνική. Ο άνθρωπος προσπαθεί αμείωτα να αντιμετωπίσει τους κινδύνους, ελέγχοντας το περιβάλλον έτσι ώστε να εξασφαλιστεί όσο το δυνατόν η καταγραφή μικρότερων έως ελάχιστων ζημιών. Ο κίνδυνος, επομένως, αφορά τα άτομα είτε ως φυσικά πρόσωπα (απώλεια ή μείωση εισοδήματος, περιουσίας, αστικής ευθύνης, διακύμανσης στις αξίες των χρηματοοικονομικών τους κεφαλαίων, όπως επίσης και σε κινδύνους που απειλούν τη ζωή και την υγεία τους κ.λπ) είτε ως επιχειρήσεις (κίνδυνος τιμών, πιστωτικούς και καθαρούς, κ.λπ). Επίσης, είναι μια έννοια που συμβαδίζει με τις έννοιες της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας ή της αστάθειας αναφορικά με τις μελλοντικές εξελίξεις.

Η αβεβαιότητα προκύπτει όταν υπάρχει μια άγνωστη, απροσδιόριστη πιθανότητα τέλεσης κάποιου γεγονότος σε ένα σύνολο πιθανών εκβάσεων και ο κίνδυνος που ενυπάρχει είναι αυτή η ακριβώς η αβεβαιότητα της μελλοντικής έκβασης αυτού του γεγονότος. Σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς η αβεβαιότητα έχει δύο διαστάσεις:

- Το εύρος των πιθανών εκβάσεων ενός γεγονότος, που μπορεί να είναι στενό, ευρύ, περιορισμένο ή άγνωστο.
- Η πιθανότητα παρουσίας της έκβασης, που μπορεί να είναι σχετικά εύκολο να καθοριστεί ή να μην είναι δυνατό να υπολογιστεί με ακρίβεια ή και καθόλου (Ελευθεριάδης, χ.χ).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την έννοια του κινδύνου. Ενδεικτικά, ο Χατζόπουλος (2007), υποστηρίζει ότι ως κίνδυνος νοείται η οικονομική απώλεια που ενδέχεται να προκύψει είτε από κάποιο α) φυσικό κίνδυνο (θάνατο, ασθένεια, ναυάγιο, πυρκαγιά, θεομηνία κ.ο.κ.), είτε από β) ανθρώπινη πράξη (τροχαίο ατύχημα κ.ο.κ.), είτε γ) στο πλαίσιο άσκησης οικονομικής δραστηριότητας (επιχειρηματικά, επενδυτικά, συναλλαγματικά, κ.α. ρίσκα).

Ο Νεκτάριος (2003: 30) ορίζει ως κίνδυνο την *αβεβαιότητα σχετικά με την επέλευση ενός ζημιογόνου ενδεχομένου*. Αυτός ο ορισμός περιλαμβάνει τα δύο βασικά συστατικά του κινδύνου, την αβεβαιότητα και τη ζημιά. Με δεδομένο το πρώτο στοιχείο, δηλαδή την αβεβαιότητα, η αντιμετώπιση του κινδύνου απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή.

Ο Knight (1964) ισχυρίζεται ότι η αβεβαιότητα αποτελεί ουσιώδη παράγοντα της ανθρώπινης ζωής και υφίσταται στα όρια της ανθρώπινης γνώσης. Ο κίνδυνος προκύπτει πέρα από αυτή την αβεβαιότητα. Σύμφωνα με τον ISO (International Organization for Standardization) ο κίνδυνος μπορεί να ορισθεί ως ο συνδυασμός της πιθανότητας ενός γεγονότος και των συνεπειών του (ISO-IEC Guide 73).

Ο Κουτσόπουλος (1999) υποστηρίζει ότι κίνδυνος είναι η οικονομική απώλεια που μπορεί να προκύψει είτε από ένα φυσικό γεγονός (π.χ., θάνατος, πλημμύρες, κ.λπ) είτε από ανθρώπινη πράξη ή από μια οικονομική δραστηριότητα. Τέλος, ο Μελάς (2008: 73) ορίζει ως κίνδυνο *την αβεβαιότητα που συνδέεται με κάποιο προσδοκώμενο γεγονός ή αποτέλεσμα*.

Ο Jorion (2007) ορίζει τον κίνδυνο στη χρηματοπιστωτική αγορά ως την απροσδόκητη μεταβολή της αξίας κεφαλαίων, αγαθών, μετοχών και άλλων παραγώγων ή ακόμα και της ισοτιμίας νομισμάτων.

Συμπερασματικά, λοιπόν, η έννοια του κινδύνου εμπεριέχει:

- την πιθανότητα να συμβεί μια ατυχία,
- την αντικειμενική αβεβαιότητα σε σχέση με το αποτέλεσμα μιας καθορισμένης κατάστασης,
- το απρόβλεπτο,
- την τάση των πραγματικών αποτελεσμάτων να διαφέρουν από τα προβλεπόμενα,

- την αβεβαιότητα σε σχέση με την πραγματοποίηση μιας ζημίας,
- την μεταβολή της αξίας οικονομικών αγαθών.

Βέβαια, εδώ η έννοια του κινδύνου δεν ενέχει την κοινωνιολογική οπτική που εστιάζει καθαρά και αποκλειστικά στα αρνητικά στοιχεία αλλά αναφέρεται στην ύπαρξη πιθανών θετικών και επιθυμητών (σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται κίνδυνος προς τα πάνω, upside risk) ή αρνητικών και ανεπιθύμητων (κίνδυνος προς τα κάτω, downside risk) αποτελεσμάτων.

1.1 Κατηγορίες και μορφές κινδύνου

Ο Κόντος (2010: 546) αναφέρει ότι η οικονομική ευημερία και ο πλούτος οφείλεται στην υλοποίηση επιχειρηματικής δράσης, που σημαίνει ανάληψη επιχειρηματικών – χρηματοοικονομικών κινδύνων.

Οι Crouhy et al (2006) τονίζουν ότι η κατανόηση των διαφορετικών τύπων κινδύνων είναι πολύ σημαντική αφού απαιτείται διαφορετική αντιμετώπιση.

Μια πρώτη κατηγοριοποίηση είναι σε υποκειμενικούς και αντικειμενικούς κινδύνους.

Ο υποκειμενικός κίνδυνος έχει να κάνει με τη διαφορετική αντίληψη του κινδύνου που έχουν διαφορετικά άτομα και η οποία επηρεάζει τη συμπεριφορά τους ανάλογα. Ο υψηλός υποκειμενικός κίνδυνος συνεπάγεται συνετή και συντηρητική συμπεριφορά, δηλαδή δεν είναι φιλικά ως προς τον κίνδυνο, ενώ ο χαμηλός υποκειμενικός κίνδυνος οδηγεί σε λιγότερο συντηρητική συμπεριφορά, δηλαδή είναι φιλικά ως προς τον κίνδυνο. Ο υποκειμενικός κίνδυνος έχει να κάνει με τη διανοητική/πνευματική κατάσταση του ατόμου.

Ο αντικειμενικός κίνδυνος μπορεί να μετρηθεί στατιστικά και ορίζεται ως η απόκλιση της πραγματικής ζημιάς από την αναμενόμενη. Σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων, η απόκλιση (το τυπικό σφάλμα) από το μέσο όρο βρίσκεται σε αναλογική σχέση με τη τυπική απόκλιση και σε αντίστροφη σχέση με την τετραγωνική ρίζα των θεωρούμενων περιπτώσεων. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των θεωρούμενων περιπτώσεων, η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να προβλέπει τις μελλοντικές αναμενόμενες ζημιές με περισσότερη ασφάλεια, μειώνοντας έτσι τον αντικειμενικό κίνδυνο, γιατί βασίζεται στο Νόμο των μεγάλων αριθμών. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, όσο αυξάνει ο αριθμός των περιπτώσεων, τόσο οι πραγματικές απώλειες προσεγγίζουν τις αναμενόμενες.

Ο αντικειμενικός κίνδυνος δεν πρέπει να συγχέεται με το ενδεχόμενο ζημιάς, το οποίο είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο. Η έννοια της πιθανότητας ορίζεται ως η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε άπειρο αριθμό παρατηρήσεων, υπό τις αυτές συνθήκες (Χατζόπουλος (2007) και Νεκτάριος (2003)).

Οι κίνδυνοι σύμφωνα με το Νεκτάριο (2003: 31) μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις εξής κατηγορίες:

- καθαροί και κερδοσκοπικοί

  Καθαρός κίνδυνος είναι μια κατάσταση στην οποία υπάρχουν μόνο οι πιθανότητες απώλειας ή μη απώλειας, αλλά όχι κέρδους.

  Ο κερδοσκοπικός είναι μια κατάσταση από την οποία μπορεί να προκύψει κέρδος ή ζημιά ή να διατηρηθεί η αρχική κατάσταση. Παραδείγματα κερδοσκοπικού κινδύνου είναι ο τζόγος και το χρηματιστήριο.

  Κατά κανόνα οι ασφαλιστικές εταιρίες ασφαλίζουν μόνο καθαρούς κινδύνους και όχι κερδοσκοπικούς, καθώς ο νόμος των μεγάλων αριθμών εφαρμόζεται ευκολότερα στους καθαρούς κινδύνους.

- στατικοί και δυναμικοί

  Οι στατικοί κίνδυνοι έχουν την τάση να συμβαίνουν με κανονικότητα, η πιθανότητα επέλευσης τους δεν μεταβάλλεται, είναι πιο προβλέψιμοι και εύκολοι στη μεταχείριση τους από τους ασφαλιστές. Πρόκειται για κινδύνους που ενυπάρχουν σε ένα δεδομένο περιβάλλον και συνδέονται με απώλειες από τη μη ομαλή λειτουργία της φύσης (σεισμοί, πλημμύρες κ.α.) ή από ανθρώπινα λάθη και παραλείψεις (τροχαία ατυχήματα). Οι περισσότεροι στατικοί κίνδυνοι είναι καθαροί.

  Οι δυναμικοί κίνδυνοι (πχ. τεχνολογικές μεταβολές, αλλαγή στις προτιμήσεις των καταναλωτών κ.α.) συνδέονται με ένα μεταβαλλόμενο περιβάλλον και από μία διαρκή κίνηση. Εμφανίζουν αυξομειώσεις στην πιθανότητα επέλευσή τους και είναι λιγότερο προβλέψιμοι από τους στατικούς.

  Οι δυναμικοί κίνδυνοι είναι πάντα κερδοσκοπικοί. Οι δυναμικοί κίνδυνοι έχουν ευρύτερη επίδραση και μπορεί να συνεπάγονται κέρδος για την κοινωνία, ενώ οι στατικοί συνεπάγονται πάντα ζημιά. Η διάκριση των κινδύνων σε σταθερούς και δυναμικούς έχει μεγάλη σημασία για την τιμολόγηση των ασφαλίστρων.

- ❖ γενικευμένοι και ειδικοί.

  Ο γενικευμένος κίνδυνος οφείλεται σε γενικευμένα φαινόμενα που επηρεάζουν όλη την οικονομία ή μια ολόκληρη ομάδα ανθρώπων ή μια ολόκληρη περιοχή. Συνήθως προκαλούνται από κάποιο φυσικό γεγονός πέρα από τον ανθρώπινο έλεγχο ή από την ίδια την κοινωνία, π.χ. πόλεμοι, σεισμοί, επιδημίες κ.α. και χαρακτηρίζονται ως καταστροφικοί κίνδυνοι. Η κρατική αρωγή χρειάζεται για την ασφάλιση τέτοιων κινδύνων.

  Ειδικός είναι ένας κίνδυνος που αναφέρεται σε συγκεκριμένο περιστατικό και επηρεάζει ένα μόνο άτομο ή μια μόνο επιχείρηση και όχι το σύνολο ή τη χώρα.

Τέλος, ο Πριναράκης (1999) πέρα από τα προηγούμενα αναφέρει και τους

- ❖ τακτικούς και έκτακτους

  Τακτικοί είναι οι κίνδυνοι που εμφανίζονται στο συνήθη και ομαλό πολιτικοοικονομικό βίο, ενώ έκτακτοι είναι εκείνοι που εμφανίζονται σε περιόδους αναταραχών, εξεγέρσεων, πολέμων κ.α.

- ❖ ασφαλίσιμους και μη ασφαλίσιμους.

  Η διάκριση αυτή των κινδύνων σχετίζεται με το εάν το αντικείμενο του κινδύνου είναι άξιο νομικής προστασίας, οπότε πρόκειται για ασφαλίσιμους κινδύνους. Μη ασφαλίσιμοι είναι οι κίνδυνοι που αναφέρονται σε αξιόποινες πράξεις π.χ. ασφάλιση αστικής ευθύνης από πράξεις που αποτελούν ποινικό αδίκημα κ.α.

Μία άλλη κατηγοριοποίηση των κινδύνων είναι σε επιχειρηματικούς και χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Οι επιχειρηματικοί αναφέρονται στη δυνατότητα ενός οργανισμού να λειτουργεί αποδοτικά, να παράγει σημαντικά έσοδα και ταμειακές ροές.

Οι κυριότεροι επιχειρηματικοί κίνδυνοι είναι οι :

- κίνδυνοι τιμών,

Οι κίνδυνοι τιμών, αναφέρονται στην αβεβαιότητα ως προς το ύψος της ρευστότητας εξαιτίας πιθανών αλλαγών που μπορεί να συμβούν στις τιμές αγοράς και πώλησης. Ο κίνδυνος στις τιμές πώλησης σχετίζεται με την πιθανότητα αλλαγής των τιμών που απαιτεί η επιχείρηση για τα προϊόντα και τις υπηρεσίες που παρέχει. Ό κίνδυνος στις τιμές αγοράς σχετίζεται με την πιθανότητα αλλαγής των τιμών που πληρώνει η επιχείρηση για την εργασία, τα υλικά και τα λοιπά στοιχεία που χρησιμοποιεί στην παραγωγική της διαδικασία.

- οι πιστωτικοί κίνδυνοι,

Ο πιστωτικός κίνδυνος αναφέρεται στις ζημιές που συμβαίνουν λόγω αθέτησης ή αδυναμία των αντισυμβαλλόμενων σε κάποιο συμβόλαιο να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους.

- οι καθαροί κίνδυνοι.

Μιλήσαμε για τους καθαρούς κινδύνους παραπάνω.

Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι αναφέρονται στην αστάθεια και μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών και επηρεάζουν τους χρηματοοικονομικούς οργανισμούς (τράπεζες, ασφαλιστικές εταιρίες, κ.λπ) και κατηγοριοποιούνται ως:

- κίνδυνος αγοράς

Ο κίνδυνος αγοράς αναφέρεται στις ζημιές που συμβαίνουν από αλλαγές στην αξία εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων, όπως για παράδειγμα χρεογράφων, ή άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων, που εκτίθενται στον κίνδυνο της αγοράς.

- πιστωτικός κίνδυνος,

Μιλήσαμε για τους πιστωτικούς κινδύνους παραπάνω.

- ❖ λειτουργικός κίνδυνος

Ο λειτουργικός κίνδυνους έχει να κάνει με ζημίες σχετιζόμενες με απάτη, ζημία περιουσίας, αποτυχία εξοπλισμού, επιχειρηματικές διαδικασίες, αλλαγή στους νόμους και ζητήματα προσωπικού.

- ❖ κίνδυνος ρευστότητας.

Ο κίνδυνος ρευστότητας αναφέρεται στην αδυναμία ανταπόκρισης σε πληρωμές εντός μικρού χρονικού διαστήματος, είτε λόγω της αύξησης των τιμών τις αγοράς είτε λόγω αδυναμίας έγκαιρης αποπληρωμής των υποχρεώσεων.

Από τους κινδύνους που εμπίπτουν στις ανωτέρω κατηγορίες, δεν αποτελούν όλοι αντικείμενο ασφάλισης. Συγκεκριμένα, οι κίνδυνοι που ασφαλίζονται είναι οι καθαροί, οι στατικοί, οι ειδικοί, οι τακτικοί και οι ασφαλίσιμοι, διότι μπορεί να προβλεφθεί με σχετική ακρίβεια τόσο η έκταση όσο και η συχνότητα των κινδύνων αυτών και κατ’ επέκταση να υπολογιστεί και να χρεωθεί το ανάλογο ασφάλιστρο.

1.2 Παράγοντες κινδύνου

Ο Χατζόπουλος (2007) αναφέρει ότι για να υπολογιστεί η αιτία που προκαλεί τον κίνδυνο αλλά και η ενδεχόμενη ζημία από αυτόν χρησιμοποιούνται η θεωρία των πιθανοτήτων και θεωρίες της στατιστικής.

Παράγοντες κινδύνου ονομάζονται οι παράγοντες που μπορούν να αποτελέσουν την αιτία για την πιθανότητα εκδήλωσης ανεπιθύμητων αποτελεσμάτων/ζημιών. Βέβαια, αυτή η πιθανότητα εξαρτάται από την ύπαρξη πολλών παραγόντων όπως η ταχύτητα, η καινοτομία και οι τεχνολογικές εξελίξεις που μπορούν να δημιουργήσουν καινούργιους κινδύνους κ.λπ.

Οι παράγοντες διακρίνονται σε:

- ❖ Φυσικούς, δηλαδή φυσικές συνθήκες που αυξάνουν το ενδεχόμενο ζημιάς.

- ❖ Ηθικούς (ηθικός κίνδυνος), που αναφέρονται στην αύξηση της πιθανότητας απώλειας ή του μεγέθους της απώλειας λόγω μη έντιμης συμπεριφοράς του ασφαλισμένου και προσπάθειάς του να εξαπατήσει την ασφαλιστική εταιρεία.

- ❖ Αμέλειας, δηλαδή στους παράγοντες εκείνους που αυξάνουν τη συχνότητα και τη σοβαρότητα των απωλειών λόγω αδιαφορίας ή απροσεξίας του ασφαλιζόμενου, επειδή ακριβώς υπάρχει η ασφαλιστική κάλυψη.

Ο ηθικός κίνδυνος δεν μπορεί εύκολα να ενταχθεί σε κλίμακες ασφαλίστρου και είναι δύσκολο να εκτιμηθεί, σε αντίθεση με τον φυσικό κίνδυνο που υπακούει σε αριθμητικές εκτιμήσεις. Οι ηθικοί παράγοντες είναι πιο σοβαροί από τους παράγοντες αμέλειας, εφόσον συνεπάγονται δόλο κατά της ασφαλιστικής εταιρείας.

1.3 Αντιμετώπιση Κινδύνου

Η αναγνώριση της ύπαρξης οικονομικού κινδύνου δημιουργεί την ανάγκη για όσο το δυνατόν πιο ακριβή προσδιορισμό του, με στόχο τη λήψη μέτρων που τον περιορίζουν. Κάθε χρηματοπιστωτικό ίδρυμα οφείλει να χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη προσέγγισή για τη μέτρηση του κινδύνου ανάλογα με τις συνθήκες που αντιμετωπίζει.

Σύμφωνα με τους Χατζόπουλο (2007) και Νεκτάριο (2010), υπάρχουν διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης του κινδύνου.

1. Αποφυγή του κινδύνου

   Ο πιο απλός τρόπος αντιμετώπισης κινδύνου είναι η αποφυγή του. Ο κίνδυνος μπορεί να αποφευχθεί όταν το άτομο δεν αναλαμβάνει κανενός είδους κίνδυνο ή διακόπτεται η όποια δραστηριότητα συνδέεται με τον κίνδυνο. Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα ζημιάς μειώνεται στο μηδέν.

   Πρακτικά, όμως, δεν μπορούν να αποφευχθούν όλοι οι κίνδυνοι, ούτε και είναι πάντα σκόπιμο, καθώς το ζητούμενο δεν είναι η μη ανάληψη των εργασιών ή η διακοπή των υπαρχόντων δραστηριοτήτων. Γενικά, η αποφυγή του κινδύνου αποτελεί αρνητική τεχνική τόσο για την πρόοδο, καθώς με την αποφυγή των πιο επικίνδυνων δραστηριοτήτων χάνονται ταυτόχρονα και τα οφέλη που απορρέουν από αυτές.

2. Ίδια κράτηση του κινδύνου (Ενεργητική και Παθητική)

Τα άτομα και οι επιχειρήσεις αναλαμβάνουν να κρατήσουν ένα μέρος ή το σύνολο των ζημιών που μπορεί να προκύψουν από την επέλευση κάποιου συγκεκριμένου κινδύνου. Η κράτηση του κινδύνου διακρίνεται σε ενεργητική και παθητική.

Στην ενεργητική κράτηση κινδύνου αναγνωρίζεται πλήρως η ύπαρξη κινδύνου και το άτομο ή η επιχείρηση επιλέγει συνειδητά να φέρει ένα μέρος ή και ολόκληρο τον κίνδυνο.

Στην παθητική κράτηση, ο κίνδυνος δεν αναγνωρίζεται και παρακρατείτε ακούσια ή από άγνοια, αδιαφορία ή τεμπελιά. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα επικίνδυνο καθώς το άτομο αναλαμβάνει όλες τις πιθανές οικονομικές συνέπειες χωρίς να το αντιλαμβάνεται.

Η κράτηση κινδύνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις κινδύνων με υψηλή συχνότητα και σχετικά μικρές επιπτώσεις, αλλά δεν ενδείκνυται για κινδύνους με χαμηλή συχνότητα και σημαντικές επιπτώσεις. Οι εταιρείες πληρώνουν τις ζημιές που αναλαμβάνουν χρησιμοποιώντας είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά κεφάλαια (δανεισμό, έκδοση νέων μετοχών κ.α.)

3. Μεταφορά του κινδύνου

Ένας τρόπος αντιμετώπισης του κινδύνου είναι η μεταφορά του σε τρίτους που είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν τον κίνδυνο μέσω διαφόρων όρων, συμβάσεων και συμφωνιών (εγγυήσεις καλής εκτέλεσης έργων, συμβάσεις αποζημίωσης σε περίπτωση που υπάρξουν τραυματισμοί κ.α.).

4. Αντιστάθμιση

Μια άλλη μέθοδος μεταβίβασης του κινδύνου είναι μέσω της διαδικασίας περιορισμού διακύμανσης, όπου κάποιος προστατεύεται έναντι ενός κινδύνου ζημιάς σε σχέση με μια συναλλαγή, κάνοντας μία άλλη συναλλαγή ως αντιστάθμισμα. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μέσω χρηματοοικονομικών παραγώγων τα όποια διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια και χρησιμοποιούνται για να εκμηδενίσουν τις ζημιές που προκύπτουν από αλλαγές στα επιτόκια, στις τιμές των καταναλωτικών προϊόντων, στη συναλλαγματική ισοτιμία κ.α.

5. Έλεγχος Ζημιών

Έλεγχος ζημιών σημαίνει την ανάληψη συγκεκριμένων δραστηριοτήτων που έχουν ως σκοπό τη μείωση της συχνότητας και της σοβαρότητας των ζημιών. Ο έλεγχος των ζημιών μπορεί να επιτευχθεί είτε μειώνοντας το επίπεδο των δραστηριοτήτων και των εργασιών που χαρακτηρίζονται από αυξημένο βαθμό κινδύνου, είτε αυξάνοντας τα μέτρα ασφαλείας και προφύλαξης για τις επικίνδυνες εργασίες.

6. Ασφάλιση

Ο πιο πρακτικός τρόπος αντιμετώπισης των κινδύνων είναι η ασφάλιση. Η ασφάλιση προσφέρει ένα μηχανισμό μεταβίβασης του κινδύνου, μέσω ενός κοινού ταμείου, στο οποίο ο κάθε ασφαλισμένος πληρώνει ένα ασφάλιστρο, σύμφωνα με τον κίνδυνο της ζημιάς που φέρνει στο ταμείο.

7. Εσωτερικός Περιορισμός Κινδύνων

Οι επιχειρήσεις μπορούν να περιορίσουν τους κινδύνους εσωτερικά εφαρμόζοντας διασπορά των κινδύνων, δηλαδή διαφοροποιώντας τις δραστηριότητές τους και μέσω διασποράς του χαρτοφυλακίου τους.

1.4 Διαχείριση Κινδύνου

Η διαχείριση κινδύνων ορίζεται, σύμφωνα με τον Χατζόπουλο (2007), ως το σύνολο των αποφάσεων και ενεργειών για τον εντοπισμό, την ανάλυση και την αντιμετώπιση των κινδύνων σε επίπεδο ατόμων, επιχειρήσεων και ευρύτερου κοινωνικού συνόλου. Η διαχείριση των κινδύνων ενδιαφέρεται μόνο για τους καθαρούς κινδύνους και όχι για τους κερδοσκοπικούς.

Για τη διαχείριση των κινδύνων σε μια επιχείρηση είναι υπεύθυνο ένα τμήμα ειδικά σχεδιασμένο για το σκοπό αυτό και στελεχωμένο με εξειδικευμένα και έμπειρα στελέχη σε τεχνικά θέματα. Σκοπός του είναι η αναζήτηση των αποτελεσματικότερων μέτρων πρόληψης και αποφυγής των ζημιών έτσι ώστε να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση ή ακόμα, σε ορισμένες περιπτώσεις, η πλήρη αποφυγή των κινδύνων στους οποίους είναι εκτεθειμένη η επιχείρηση.

Το πρώτο βήμα στη διαχείριση κινδύνου είναι η αναγνώριση του κινδύνου. Υπάρχουν οι κίνδυνοι που προέρχονται από το εσωτερικό περιβάλλον της επιχείρησης, όπως μηχανικές βλάβες, αμέλεια υπαλλήλων και οι κίνδυνοι που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον όπως φυσικές καταστροφές, πολιτικοί κίνδυνοι και οι κίνδυνοι από την αστική ευθύνη προς τρίτους από την κυκλοφορία ελαττωματικών προϊόντων, καταστροφή του περιβάλλοντος κ.α. Κάποιοι από τους κινδύνους αυτούς είναι φανεροί και γίνονται εύκολα αντιληπτοί, ενώ άλλοι μπορεί να διαφύγουν.

Επόμενο βήμα μετά την αναγνώριση των κινδύνων είναι η εκτίμησή τους. Το ενδεχόμενο ύψος απώλειας και η πιθανότητα να συμβεί ο κίνδυνος τοποθετούνται σε μια αριθμητική κλίμακα (με την πλέον πιθανή και την πλέον σοβαρή να βρίσκονται υψηλότερα στην κλίμακα) και πολλαπλασιάζοντας τη μια με την άλλη προκύπτει ένα συγκριτικό αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα που προκύπτει χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει τη σοβαρότητα των κινδύνων.

Εάν το αποτέλεσμα είναι υψηλό, ο κίνδυνος είναι καταστροφικός και μπορεί να προκαλέσει τη χρεοκοπία της επιχείρησης, εάν το αποτέλεσμα τοποθετείται σε κάποια ενδιάμεση βαθμίδα της κλίμακας, ο κίνδυνος είναι σπουδαίος, και υποχρεώνει την εταιρεία να δανειστεί για να συνεχίσει τη λειτουργία της (αλλά δεν την οδηγεί σε χρεοκοπία) ενώ ένα χαμηλό αποτέλεσμα υποδεικνύει ότι ο κίνδυνος είναι μη σπουδαίος και οι πιθανές ζημιές μπορούν να αντιμετωπιστούν από την περιουσία της εταιρείας, χωρίς να αλλάξει τα σχέδια της.

Το τελευταίο βήμα της διαχείρισης κινδύνων είναι η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου για την αντιμετώπιση τους. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία μέθοδος ή συνδυασμός μεθόδων.

Όταν ο κίνδυνος χαρακτηρίζεται από υψηλή συχνότητα και σοβαρότητα, η καλύτερη μέθοδος για την αντιμετώπισή του είναι η αποφυγή του. Η ασφάλιση δεν συνίσταται λόγο της υψηλής συχνότητας που θα αύξανε σημαντικά το κόστος.

Για τους κινδύνους με υψηλή συχνότητα αλλά χαμηλή σοβαρότητα, καλύτερη μέθοδος είναι η παρακράτηση, αφού τέτοιοι κίνδυνοι μπορούν να αντιμετωπιστούν με τα οικονομικά μέσα που διαθέτει η επιχείρηση. Εναλλακτικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η μείωση, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό ύψος της απώλειας, αλλά και η ασφάλιση υπερβάλλοντος, εφόσον οι μικρές ζημιές αθροιζόμενες μέσα σε μια χρονική περίοδο μπορεί να αποτελέσουν ένα σημαντικό ποσό.

Οι κίνδυνοι με υψηλή σοβαρότητα αλλά χαμηλή συχνότητα αντιμετωπίζονται μέσω της ασφάλισης. Η υψηλή σοβαρότητα σημαίνει ότι η ζημιά είναι καταστροφική και δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί εύκολα από την επιχείρηση, ενώ η χαμηλή συχνότητα που συνδέεται με χαμηλό κόστος ευνοεί τη μεταφορά του κινδύνους στους ασφαλιστές. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί να χρησιμοποιηθεί ένας συνδυασμός κράτησης, μέχρι ένα ποσό και ασφάλισης του υπερβάλλοντος.

Η τελευταία κατηγορία κινδύνων που χαρακτηρίζεται από χαμηλή σοβαρότητα και χαμηλή συχνότητα, αφορά κινδύνους που συμβαίνουν σπάνια και έχουν περιορισμένες οικονομικές επιπτώσεις, με αποτέλεσμα να μην καθίσταται απαραίτητη η μεταβίβασή τους ούτε και η σπατάλη πόρων για την αναζήτηση τρόπων μείωσής τους. Η προτιμώμενη πρακτική είναι η παρακράτηση.

Σε κάθε περίπτωση, όπως αναφέρει ο Χατζόπουλος (2007) "πρέπει να υπάρχει μια λογική σχέση μεταξύ του κόστους μεταβίβασης κινδύνου και αξίας που προκύπτει στον μεταβιβαζόμενο. Πρώτον, οι κίνδυνοι δεν πρέπει να παρακρατούνται όταν η ενδεχόμενη απώλεια είναι μεγάλη σε σχέση με τα ασφάλιστρα που εξοικονομούνται σε περίπτωση παρακράτησης. Δεύτερον, υπάρχουν περιπτώσεις όπου το ασφάλιστρο είναι δυσανάλογα υψηλό σε σχέση με το μεταφερόμενο κίνδυνο, δηλαδή το ασφάλιστρο αντιπροσωπεύει τα πολλά ενώ η πιθανή απώλεια τα λίγα".

Δεδομένου ότι δεν είναι δυνατόν να ασφαλιστεί μια επιχείρηση σε όλους τους πιθανούς κινδύνους, θα δοθεί προτεραιότητα στην μεταφορά εκείνων των κινδύνων στους οποίους δεν μπορεί να ανταπεξέλθει οικονομικά.

Κεφάλαιο 2. Μέτρα Κινδύνου

Από τις συμφωνίες της Βασιλείας I, II, III και IV και μετά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα όπως οι τράπεζες και οι ασφαλιστικές εταιρίες έχουν αυξήσει τις προσπάθειες τους για να εκτιμήσουν τα εσωτερικά τους ρίσκα όπως επίσης την κοινοποίηση των αξιολογήσεων στο κοινό.

Τα μέτρα κινδύνου είναι ένας τρόπος να ποσοτικοποιηθεί ένας κίνδυνος. Υπάρχουν πολλά μέτρα για την μέτρηση ενός κινδύνου στον τομέα της ασφάλισης και των χρηματοοικονομικών. Το πιο γνωστό μέτρο κινδύνου είναι η Αξία σε Κίνδυνο (Value at risk ή VaR). Πάνω στη θεωρία της Αξίας σε Κίνδυνο βασίζεται επίσης και η Αξία σε Κίνδυνο Ουράς (Tail Value at Risk).

Ένας τρόπος για να εκφράσουμε έναν κίνδυνο είναι με μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή X. Άρα ένα μέτρο κινδύνου είναι μία αντιστοίχιση ρ μεταξύ του χώρου των τυχαίων μεταβλητών και του συνόλου πραγματικών αριθμών και θα συμβολίζεται με $\rho(X)$.

Γενικά μπορούμε να σκεφτούμε το $\rho(X)$ ως το ποσό που πρέπει να προσθέσουμε στον κίνδυνο X, έτσι ώστε να γίνεται αποδεχτός.

Παραδείγματος χάριν, εάν το X είναι ο κίνδυνος απώλειας σε ένα χαρτοφυλάκιο, τότε το $\rho(X)$ είναι το ποσό που πρέπει να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο ως δικλείδα ασφαλείας ενάντια στον κίνδυνο της απώλειας. Ένας από τους τρόπους καθορισμού αυτού του ποσού $\rho(X)$ είναι το VaR.

Οι προσεγγίσεις για την εκτίμησή του κινδύνου μπορούν να ταξινομηθούν σε 4 κατηγορίες:

1. Προσέγγισή πλασματικού ποσού. Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγισή ο κίνδυνος ορίζεται ως το άθροισμα των ονοματικών αξιών των μεμονωμένων αξιογράφων ενόσω χαρτοφυλακίου, συχνά συνοδευόμενα από αντίστοιχα βάρη, τα οποία βασίζονται σε εκτιμήσεις του κινδύνου για την κατηγορία περιουσιακών στοιχείων που ανήκουν. Μειονέκτημα αυτής της προσέγγισής είναι πως δεν αποτυπώνονται τα οφέλη της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου στο συνολικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει (Crouhy et al., 2000).

2. Μετρά ευαισθησίας παραγόντων. Αποτυπώνουν την αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου που θα συμβεί λόγω προκαθορισμένης αλλαγής σε κάποιον υποκείμενο παράγοντα κινδύνου. Προσφέρουν χρήσιμες πληροφορίες για την ακμαιότητα ενός χαρτοφυλακίου σε σχέση με την πραγματοποίηση ή μη συγκεκριμένων γεγονότων, ωστόσο το πλεονέκτημά τους είναι ότι δεν μπορούν να αξιολογήσουν το συνολικό κίνδυνο της θέσης του χαρτοφυλακίου (McNeil et al., 2005).

3. Μέτρα κινδύνου βασισμένα σε κατανομές απώλειας. Οι απώλειες είναι το κεντρικό αντικείμενο στη διαχείριση κινδύνου, άρα είναι προφανές ότι η μέτρησή κινδύνου μπορεί να βασίζεται στην κατανομή τους. Μέτρα όπως η διασπορά ή το VaR, μπορούν να αποτυπώσουν μια καλή εικόνα για το μέγεθος του κινδύνου. Επιπλέον, αν εκτιμηθεί κατάλληλα, η κατανομή των απωλειών αντανακλά και τις επιπτώσεις της διαφοροποίησης των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου (McNeil et al., 2005). Το μειονέκτημα όμως είναι ότι οποιαδήποτε εκτίμησή βασίζετε σε ιστορικά δεδομένα, κάτι που κάνει την εκτίμησή της κατανομής των απωλειών να έχει μεγάλη αβεβαιότητα και είναι μια αρκετά πολύπλοκή διαδικασία.

4. Μέτρα κινδύνου βασισμένα σε υποθέσεις. Με αυτόν τον τρόπο ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου εκτιμάται στη βάση ενός συνόλου αρνητικών υποθέσεων, π.χ. της μέγιστης απώλειας (McNeil et al., 2005).

2.1 Συνεπή Μέτρα Κινδύνου

Έχουν γίνει πολλές μελέτες πάνω στη συμπεριφορά των μέτρων κινδύνου όταν αρκετές απώλειες συνδυάζονται και αντιμετωπίζονται ως μια ενιαία απώλεια. Οι συνδυασμένοι κίνδυνοι είναι σημαντικοί στη μελέτη των αναγκών του κεφαλαίου μιας εταιρείας λαμβάνοντας υπόψη τη συνολική της έκθεση στον κίνδυνο.

Ωστόσο, όταν τα μέτρα κινδύνου εφαρμόζονται σε ξεχωριστά τμήματα, τα αποτελέσματα τους θα πρέπει να είναι συνεπή με κάποιο τρόπο με τα αποτελέσματα που λαμβάνονται όταν το μέτρο του κινδύνου εφαρμόζεται σε ολόκληρη την εταιρεία (Χατζόπουλος).

Ο Artzner ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια της συνοχής - συνέπειας το 1997.

Για να θεωρείται ένα μέτρο κινδύνου συνεπές (coherent risk measure) τότε πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω 4 ιδιότητες. Για X, Y τυχαίες μεταβλητές ζημιάς ή κίνδυνοι και c μια θετική σταθερά οι 4 ιδιότητες ορίζονται ως:

1. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

$$\rho(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) \leq \rho(\mathrm{X})+\rho(\mathrm{Y})$$

Υποπροσθετικότητα σημαίνει ότι μια συγχώνευση των κινδύνων δεν προκαλεί επιπλέον κίνδυνο ή αντίθετα ότι η διάσπαση ενός μεγάλου κινδύνου σε επιμέρους μικρότερους κινδύνους δεν μειώνει τον κίνδυνο.

Οι κίνδυνοι μπορούν να μειωθούν μόνο με τη διαφοροποίηση τους. Μπορούμε να ορίσουμε αυτή τη διαφοροποίηση ως τη διαφορά του αθροίσματος των μέτρων κινδύνου των επιμέρους κινδύνων X, Y με του μέτρου κινδύνου του αθροίσματος του X και Y.

$$\left[\rho(\mathrm{X})+\rho(\mathrm{Y})\right]-\rho(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$$

Για τα υποπροσθετικά μέτρα κινδύνου αυτή η αφαίρεση θα έχει πάντα θετικό αποτέλεσμα. Όταν ισχύει η ισότητα μιλάμε για προσθετικότητα.

2. Μονοτονία (Monotonicity)

$$\mathrm{A}\nu\ \mathrm{X} \leq \mathrm{Y}\ \textit{τότε}\ \rho(\mathrm{X}) \leq \rho(\mathrm{Y})$$

Μονοτονία ουσιαστικά είναι το πόσο που απαιτείται για να γίνει ο X κίνδυνος αποδεχτός είναι πάντα μικρότερο αυτού που απαιτείται για να αποδεχτούμε τον κίνδυνο Y όταν αυτός είναι μεγαλύτερος από τον X.

3. Θετική Ομοιογένεια (Positive homogeneity)

$$\rho(c*\mathrm{X}) = c*\rho(\mathrm{X})$$

Θετική Ομοιογένεια σημαίνει ότι το μέτρο κινδύνου ενός κινδύνου X και άρα το ποσό που χρειάζεται για να γίνει αποδεχτός δεν εξαρτάται του νομίσματος στο οποίο μετράτε ο κίνδυνος.

4. Μεταφραστική Αμεταβλητότητα (Translational invariant)

$$\rho(\mathrm{X}+c) = \rho(\mathrm{X})+\mathrm{c}$$

Μεταφραστική Αμεταβλητότητα σημαίνει ότι για οποιαδήποτε αύξηση του κινδύνου X με ένα ποσό c πρέπει να υπάρχει μια αντίστοιχη αύξηση στο ποσό που απαιτείται για να γίνει αποδεχτός ο κίνδυνος X.

Παράδειγμα 2.1.1 (Θετική Ομοιογένεια)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Θετικής Ομοιογένειας, να δειχθεί ότι ρ(0) = 0. Επιπλέον χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Θετικής Ομοιογένειας και Μονοτονίας να δειχθεί ότι, αν X ≥ 0 τότε ρ(X) ≥ 0.

Λύση:

Αρχικά σημειώνουμε ότι ρ(0) = ρ(c *0) για κάθε c.

Σύμφωνα με την ιδιότητα Θετικής Ομοιογένειας, έχουμε ότι ρ(c*0) = c*ρ(0) για κάθε c ≥ 0.

Άρα, ρ(0) = c*ρ(0) για κάθε c ≥ 0, το οποίο συνεπάγεται ρ(0) = 0 .

Τώρα για X ≥ 0, έχουμε, από την ιδιότητα Μονοτονίας ότι ρ(X) ≥ ρ(0), και από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ρ(X) ≥ 0.

Επιπλέον, αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα Μεταφραστική Αμεταβλητότητα σε ένα συνεπή μέτρο κινδύνου και υποθέσουμε ότι X = 0, τότε για κάθε μη αρνητική σταθερά c έχουμε

$$
\begin{aligned}
\rho(c) &= \rho(\mathrm{X}+c) \\
&= \rho(\mathrm{X}) + \mathrm{c} \\
&= \rho(0) + \mathrm{c} \\
&= 0 + \mathrm{c} \\
&= \mathrm{c}
\end{aligned}
$$

Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι αν ένας κίνδυνος παίρνει μια σταθερή αξία, η τιμή ενός συνεπή μέτρου κινδύνου πρέπει να είναι ίση με τη σταθερή αξία του κινδύνου.

2.2 Άλλες Επιθυμητές Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου

Οι 4 παραπάνω ιδιότητες είναι απαραίτητες για τη συνέπεια των μέτρων κινδύνου, ωστόσο όμως υπάρχουν και άλλες ιδιότητες που δεν έχουν να κάνουν με τη συνέπεια ενός μέτρου κινδύνου αλλά είναι και αυτές επιθυμητές και χρήσιμες.

1. Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (non-excessive loading ή no-ripoff)

   Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το μέτρο κινδύνου είναι μικρότερο ή ίσο από τη μέγιστη δυνατή ζημιά. Δηλαδή πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\rho(\mathrm{X}) \leq \max[\mathrm{X}] = F_X^{-1}(1), \text{για κάθε } \tau.\mu. \mathrm{X}$$

2. Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (non-negative loading)

   Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το μέτρο κινδύνου πρέπει να είναι μεγαλύτερο από την αναμενόμενη ζημιά, αλλιώς σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών θα έχουμε βέβαιη χρεωκοπία. Δηλαδή πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\rho(\mathrm{X}) \geq \mathrm{E}[\mathrm{X}], \text{για κάθε } \tau.\mu. \mathrm{X}$$

3. Σταθερότητα ή μη αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας (Constancy ή no unjustified loading)

   Για μία μη-τυχαία ζημιά c ο ασφαλιστής πρέπει να έχει ισόποσο κεφάλαιο c. Πολύ απλά η ιδιότητα της σταθερότητας ενός μέτρου κινδύνου σημαίνει:

$$\rho(c) = c,\ \textit{για κάθε σταθερά}\ c$$

4. Επαναληψιμότητα (Iterativity)

   Σύμφωνα με τους Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit (2001) η ιδιότητα της επαναληψιμότητας είναι η εξής:

$$\rho(\mathrm{X}) = \rho\left[\rho[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}]\right],\ \textit{για κάθε}\ \mathrm{X}, \mathrm{Y}$$

   Το ασφάλιστρο του X μπορεί να υπολογιστεί σε 2 βήματα. Αρχικά υπολογίζουμε το ρ(·) για τη δεσμευμένη κατανομή του X, δεδομένου ότι Y = y, έτσι το ασφάλιστρο που θα βρούμε θα είναι συναρτήσει του y, έστω f(y). Μετά θα εφαρμόσουμε πάλι την αρχή ασφαλίστρου για την τ.μ. ρ[X |Y] = f(y).

5. Συνέχεια όσον αφορά τη σύγκλιση κατά κατανομή

   Έστω $\{X_n, n = 1.2\ldots\}$ μια ακολουθία κινδύνων που συγκλίνει κατά κατανομή στην X, $X_n \to_d X$, $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),\ \textit{για κάθε σημείο συνέχειας}\ x\ \textit{της}\ F_X$$

   Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \rho[X_n] = \rho(X)$$

6. Αντικειμενικότητα (Objectivity)/Νόμος του αναλλοίωτου

   Η ρ(X) εξαρτάται από το X μόνο μέσω της συνάρτησής κατανομής F_X του X. Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η F_X έχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την μέτρηση του κινδύνου του X.

$$X =_d Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$$

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Πρέπει να έχουμε υπόψη ότι εκτός από την αρχή του καθαρού ασφαλίστρου, την οποία θα δούμε παρακάτω, καμία από τις αρχές που μελετήθηκαν από τους Goovaerts, De Vijlder, και Haezendonck (1984) πληρούν ταυτόχρονα όλες τις παραπάνω ιδιότητες.

2.3 Αρχή Υπολογισμού Ασφαλίστρων (Premium Calculation Principles)

Η πρώτη χρήση μέτρων κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη ήταν με την δημιουργία των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων.

Σημειώνουμε με ρ(X) το ασφάλιστρο που χρεώνει ένας ασφαλιστής για να καλύψει τον κίνδυνο X. Άρα το ασφάλιστρο ρ(X) είναι μια συνάρτηση του κινδύνου X. Ο κανόνας που αναθέτει μια αριθμητική τιμή στο ασφάλιστρο λέγεται αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου.

Κάποιοι τρόποι υπολογισμού ασφαλίστρων σύμφωνα με τους Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit (2001) είναι οι εξής:

- Το *καθαρό ασφάλιστρο* (net premium), επίσης γνωστό και ως αρχή της ισοδυναμίας, είναι ίσο με την αναμενόμενη τιμή ενός κινδύνου X.

$$\rho(X) = \mathrm{E}[X]$$

- Η *αρχή της αναμενόμενης τιμής* (expected value principle), όπου το ασφάλιστρο είναι ίσο με το καθαρό ασφάλιστρο συν μία επιβάρυνση.

$$\rho(X) = \mathrm{E}[\mathrm{X}] + \alpha * \mathrm{E}[\mathrm{X}] = (1+a) * \mathrm{E}[\mathrm{X}], \mu\varepsilon\, \alpha > 0$$

Όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση.

Αξιοσημείωτο είναι ότι στην αρχή της αναμενόμενης τιμής ο κίνδυνος εξαρτάται μόνο από τη μέση τιμή και την επιβάρυνση α. Έτσι, δύο μεταβλητές ζημιάς με την ίδια μέση τιμή και επιβάρυνση θα έχουν τον ίδιο κίνδυνο, ανεξάρτητα από τις ροπές υψηλότερης τάξης όπως η διακύμανση.

Για να διαφοροποιηθούν τέτοιες μεταβλητές ζημιάς, μπορούμε να εξετάσουμε την αρχή της διακύμανσης ή την αρχή της τυπικής απόκλισης.

- Η *αρχή της διακύμανσης* (variance principle), η οποία είναι παρόμοια με την αρχή της αναμενόμενης τιμής.

$$\rho(X) = \mathrm{E}[X] + \alpha * \sigma^2[X], \mu\varepsilon\, \alpha > 0$$

ή αλλιώς

$$\rho(X) = \mathrm{E}[X] + \alpha * Var[X], \mu\varepsilon\, \alpha > 0$$

Όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση.

- Η *αρχή της τυπικής απόκλισης* (standard deviation principle), η οποία είναι παρόμοια με την αρχή της διακύμανσης.

$$\rho(X) = \mathrm{E}[X] + \alpha * \sigma[X], \mu\varepsilon\, \alpha > 0$$

ή αλλιώς

$$\rho(X) = \mathrm{E}[X] + \alpha * \sqrt{\sigma^2[X]}, \mu\varepsilon\, \alpha > 0$$

ή αλλιώς

$$\rho(X)=\mathrm{E}[X]+\alpha*\sqrt{Var[X]}, \mu\varepsilon\, \alpha>0$$

Όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση.

Σύμφωνα με τις αρχές διακύμανσης και τυπικής απόκλισης υπολογισμού ασφαλίστρων, οι κατανομές των ζημιών με μεγαλύτερη διασπορά θα έχουν μεγαλύτερο κίνδυνο.

- Η *αρχή της τροποποιημένης διακύμανσής* (modified variance principle) είναι μια τροποποίηση της αρχής της διακύμανσης. Οι αλλαγές στην νομισματική μονάδα αλλάζει το περιθώριο ασφαλείας. Η παρακάτω τροποποίηση για α>0 μπορεί να το αλλάξει αυτό.

$$\rho(X)=\begin{cases} E[X]+a*\dfrac{Var[X]}{E[X]}, & \gamma\iota\alpha\, \mathrm{E}[\mathrm{X}]>0 \\ 0, & \gamma\iota\alpha\, \mathrm{E}[\mathrm{X}]=0 \end{cases}$$

Όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση.

- Η *εκθετική αρχή* (exponential principle) υπολογίζει το ασφάλιστρο ως εξής:

$$\rho(\mathrm{X})=\frac{1}{\alpha}*\log\left(m_X(\alpha)\right), \mu\varepsilon\, \alpha>0$$

Όπου α είναι μια θετική παράμετρος και λέγεται αποστροφή στον κίνδυνο, και m_x είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της X και ορίζεται ως:

$$m_X=\mathrm{E}\left[e^{\alpha*X}\right]$$

Για α→0 έχουμε το καθαρό ασφάλιστρο, ενώ για α→∞ βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή του κινδύνου X.

- Η *αρχή ασφαλίστρου μηδενικής ωφελιμότητας* (zero-utility premium principle), Buhlmann (1970).

  Έστω v μία μη φθίνουσα συνάρτηση ωφελιμότητας. Το ασφάλιστρο μηδενικής ωφελιμότητας είναι η λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$v(0) = \mathrm{E}\left[v\left(\rho(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\right)\right]$$

  Η συνάρτηση v(X) είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας του κάθε ασφαλιστή. Άρα, v(0) είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας μηδενικού κεφαλαίου πριν την ασφάλιση και v(ρ(X)-X) είναι η ωφελιμότητα μετά την ασφάλιση κατά του κινδύνου X με το ασφάλιστρο ρ(X).

- Η *αρχή της μέσης τιμής* (mean value principle), Hardy (1952).

$$f\left(\rho(\mathrm{X})\right) = \mathrm{E}\left[f(X)\right]$$

  Όπου η f είναι μια μη φθίνουσα μη αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε η E[f(X)] να είναι πεπερασμένη. Για f(X) = x έχουμε το καθαρό ασφάλιστρο ενώ για f(X) = $e^{\alpha * x}$, με α>0 έχουμε την εκθετική αρχή ασφαλίστρου.

  Όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση.

- Η *Ελβετική αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου* (the Swiss premium calculation principle), Gerber (1974). Με αυτήν την αρχή ο Gerber έθεσε στο ίδιο πλαίσιο την αρχή της μέσης τιμής και την αρχή μηδενικής ωφελιμότητας.

  Έστω w(·) μια μη αρνητική, μη φθίνουσα συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και z μια παράμετρος στο (0,1). Το ασφάλιστρο ρ(X) σύμφωνα με την Ελβετική αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου είναι η λύση της εξίσωσης.

$$\mathrm{E}\left[w\left(X - z * \rho(X)\right)\right] = w\left((1-z) * \rho(X)\right)$$

Παράδειγμα 2.3.1 (Αρχή Αναμενόμενης Τιμής)

Δείξε ότι η αρχή αναμενόμενης τιμής υπολογισμού ασφαλίστρου ικανοποιεί τις ιδιότητες της Υποπροσθετικότητας, Θετικής Ομοιογένειας και Μονοτονίας αλλά όχι τη Μεταφραστική Αμεταβλητότητα.

Λύση:

Για οποιουσδήποτε κινδύνους X και Y όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) &= (1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}+\mathrm{Y}] \\ &= (1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}]+(1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{Y}] \\ &= \rho(\mathrm{X})+(\mathrm{Y})\end{aligned}$$

Έτσι, η ιδιότητα της Υποπροσθετικότητας ισχύει.

Τώρα για την ιδιότητα της Θετικής Ομοιογένειας Y = θ*X με θ ≥ 0, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(\mathrm{Y}) &= (1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{Y}] \\ &= (1+\alpha)*\mathrm{E}[\theta*\mathrm{X}] \\ &= \theta*(1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}] \\ &= \theta*\rho(\mathrm{X})\end{aligned}$$

Για δύο κινδύνους X και Y, με X ≥ Y συνεπάγεται E[X] ≥ E[Y],

$$\rho(\mathrm{X}) = (1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}] \geq (1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{Y}] = \rho(Y)$$

Άρα ισχύει και η ιδιότητα της μονοτονίας.

Εξετάζουμε την ιδιότητα Μεταφραστική Αμεταβλητότητα. Θεωρούμε μια αυθαίρετη σταθερά θ > 0. Σημειώστε ότι, αν α > 0

$$\rho(\mathrm{X}+\theta)=(1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}+\theta]>(1+\alpha)*\mathrm{E}[\mathrm{X}]+\theta=\rho(\mathrm{X})+\theta$$

Έτσι, η ιδιότητα Μεταφραστική Αμεταβλητότητα δεν είναι ισχύει αν α> 0.

Αυτό σημαίνει ότι η αρχή η αναμενόμενης τιμής υπολογισμού ασφαλίστρου δεν είναι σε γενικές γραμμές συνεπή μέτρο κινδύνου. Ωστόσο, όταν α = 0, η ιδιότητα Μεταφραστική Αμεταβλητότητα ισχύει. Έτσι, το καθαρό ασφάλιστρο είναι ένα συνεπή μέτρο κινδύνου.

Παράδειγμα 2.3.2 (Αρχή Τυπικής Απόκλισης)

Αποδείξτε ότι η αρχή της τυπικής απόκλισης υπολογισμού ασφαλίστρου ικανοποιεί τις ιδιότητες της Υποπροσθετικότητας, Θετικής Ομοιογένειας και τη Μεταφραστική Αμεταβλητότητα αλλά όχι της Μονοτονίας. Για να δείτε ότι δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της Μονοτονίας, λάβετε υπόψιν τη διμεταβλητή (X,Y), που λαμβάνει τη τιμή (0,4) με πιθανότητα 0.25 και την τιμή (4,4) με πιθανότητα 0.75. Χρησιμοποιώντας α = 1, δείξτε ότι η μονοτονία δεν ικανοποιείται.

Λύση:

Για οποιουσδήποτε κινδύνους X και Y, με X < Y όπου α είναι μια θετική παράμετρος, που αντιπροσωπεύει την επιβάρυνση, έχουμε

$$\rho(X)=\mathrm{E}[X]+\alpha*\sigma[X],$$

και

$$\rho(\mathrm{Y})=\mathrm{E}[\mathrm{Y}]+\alpha*\sigma[\mathrm{Y}]$$

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}+\mathrm{Y}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{X}\right]+\mathrm{E}\left[\mathrm{Y}\right]$$

$\kappa\alpha\iota$

$$\begin{aligned}\sigma^2\left[X+Y\right]&=\sigma^2\left[X\right]+\sigma^2\left[Y\right]+2*\operatorname{cov}\left[X,Y\right]\\&\leq\sigma^2\left[X\right]+\sigma^2\left[Y\right]+2*\sigma^2\left[X\right]*\sigma^2\left[Y\right]=\left(\sigma^2\left[X\right]+\sigma^2\left[Y\right]\right)^2\end{aligned}$$

όπου το cov[X,Y] εδώ είναι η συνδιακύμανση και πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση της μονάδας. Επομένως,

$$\sigma\left[X+Y\right]\leq\sigma\left[X\right]+\sigma\left[Y\right]$$

Έτσι έχουμε

$$\rho(X+Y)\leq E\left[X\right]+E\left[Y\right]+\alpha*(\sigma\left[X\right]+\sigma\left[Y\right])=\rho(X)+\rho(Y),$$

το οποίο αποδεικνύει την υποπροσθετικότητα.

Επιπλέον έχουμε

$$E\left[c*X\right]=c*E\left[X\right]\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma\left[c*X\right]=c*\sigma\left[X\right]$$

$\kappa\alpha\iota$

$$E\left[c+X\right]=c+E\left[X\right]\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma\left[c+X\right]=\sigma\left[X\right]$$

Άρα

$$\rho\left(c*X\right)=c*E\left[X\right]+c*\alpha*\sigma\left[X\right]=c*\rho\left(X\right)$$

$\kappa\alpha\iota$

$$\rho\left(c+X\right)=c+E\left[X\right]+\alpha*\sigma\left[X\right]=c+\rho\left(X\right)$$

τα οποία αποδεικνύουν τη θετική ομοιογένεια και τη μεταφραστική αμεταβλητότητα αντίστοιχα.

Τώρα για E[X] = 3, E[Y] = 4, σ[X] = $\sqrt{4}$, σ[Y] = 0 και α = 1 παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\rho(X) = 3 + \sqrt{3} = 4,732 > \rho(Y) = 4 + 0 = 4$$

Πράγμα που αφού X < Y παραβιάζει την ιδιότητα της μονοτονίας.

Παράδειγμα 2.3.3

Έστω ότι ένας κίνδυνος X ακολουθεί κανονική κατανομή με E[X] = 5, σ^2[X] = 36 και α = 2. Βρείτε το ρ(X) χρησιμοποιώντας:

a) το καθαρό ασφάλιστρο,
b) την αρχή αναμενόμενης τιμής,
c) την αρχή της διακύμανσης,
d) την αρχή της τυπικής απόκλισης και
e) την αρχή της τροποποιημένης διακύμανσής

Λύση:

a) Για το καθαρό ασφάλιστρο έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \mathrm{E}[\mathrm{X}] \\ &= 5 \end{aligned}$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει τον ασφαλιστή 5€.

b) Για την αρχή αναμενόμενης τιμής έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho(X) &= (1+a)*\mathrm{E}[\mathrm{X}] \\ &= (1+2)*5 \\ &= 15\end{aligned}$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει τον ασφαλιστή 15€.

c) Για την αρχή της διακύμανσης έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \mathrm{E}[X]+\alpha*\sigma^2[X] \\ &= 5+2*36 \\ &= 77\end{aligned}$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει τον ασφαλιστή 77€.

d) Για την αρχή της τυπικής απόκλισης έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \mathrm{E}[X]+\alpha*\sqrt{\sigma^2[X]} \\ &= 5+2*\sqrt{36} \\ &= 5+2*6 \\ &= 17\end{aligned}$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει τον ασφαλιστή 17€.

e) Για την αρχή της τροποποιημένης διακύμανσης έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho(X) &= E[X]+a*\frac{Var[X]}{E[X]} \\ &= 5+2*\frac{36}{5} \\ &= 19,4\end{aligned}$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει τον ασφαλιστή 19,4€.

Οι ιδιότητες του συνεπή κινδύνου περιορίζουν το σύνολο των μέτρων κινδύνου που χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση και τη ρύθμιση του κινδύνου. Παρόλα αυτά, δεν προσδιορίζουν ένα μοναδικό μέτρο του κινδύνου που πρέπει να χρησιμοποιείται στην πράξη.

Ορισμένα μέτρα κινδύνου, όπως το καθαρό ασφάλιστρο παρόλο που είναι συνεπή μέτρο κινδύνου δεν είναι κατάλληλο για όλες τις περιπτώσεις διαχείρισης κινδύνου. Έτσι, η επιλογή του κατάλληλου μέτρου κινδύνου που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από πρόσθετους παράγοντες.

2.4 Αξία σε Κίνδυνο (Value at risk ή VaR)

Το VaR το χρησιμοποιούσαν οι αναλογιστές πολύ πριν άρχισε να χρησιμοποιείται από επενδυτές. Ανάμεσα στους αναλογιστές ονομάζεται επίσης και *μέτρο κινδύνου ποσοστημορίου.*

Αρχικά το VaR αποσκοπούσε στη μέτρηση των κινδύνων στις αγορές των παραγώγων, αλλά διευρύνθηκε η χρήση του στους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς για την μέτρηση των επενδυτικών κινδύνων και ιδιαίτερα του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου.

Άλλες εφαρμογές εμφανίστηκαν στις εταιρείες που έχουν ιδιαίτερη έκθεση σε χρηματοοικονομικές αγορές, όπως εταιρείες που εμπορεύονται προϊόντα τα οποία αποτελούν χρηματιστηριακά υποκείμενα, και στην συνέχεια από εταιρείες διαφόρων κλάδων. Ο λόγος της ευρείας χρήσης του VaR είναι επειδή αποτελεί ένα μέτρο μέτρησης κινδύνου που εύκολα κατανοείται και από μη ειδικούς στη διαχείριση κινδύνων.

Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους μέτρησης κινδύνων, το VaR παρέχει μία ολοκληρωμένη εικόνα του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, η οποία λαμβάνει υπόψη της, τις διάφορες συσχετίσεις (correlations) καθώς και την τρέχουσα θέση (current position) του χαρτοφυλακίου. Οι συσχετίσεις είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας για τη μέτρηση του VaR σε χαρτοφυλάκια με μεγάλες θέσεις σε χρηματοοικονομικά παράγωγα. Συνεπώς, το VaR είναι μία μέθοδος, το οποίο προβλέπει τους πιθανούς μελλοντικούς κινδύνους με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Παράλληλα, η μεθοδολογία του VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευρέως και για τη μέτρηση και άλλων μορφών κινδύνων.

Το VaR αποτελεί μία συνοπτική απεικόνιση του κινδύνου της αγοράς και παράλληλα περιλαμβάνει δύο πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά:

1) την πιθανότητα, που εκφράζει το πόσο πιθανό είναι οι ζημίες να είναι μεγαλύτερες από το δεδομένο ποσό και

2) μετράει τον κίνδυνο, σε νομισματικές μονάδες, δηλαδή μετράει το ποσό το οποίο θα χαθεί σε μία δεδομένη χρονική περίοδο, το οποίο εξαρτάται από τη χρονική περίοδο για την οποία το χαρτοφυλάκιο παραμένει σταθερό.

Στην οικονομική θεωρία, το VaR είναι μια μέτρηση που δηλώνει πώς η αξία στην αγορά ενός περιουσιακού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είναι πιθανόν να μειωθεί στη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

Όταν αναφερόμαστε στο VaR συχνά αναφέρουμε και έναν βαθμό βεβαιότητας ο οποίος επιλέγεται αυθαίρετα αλλά είναι τυπικά 95% ή 99%.

Με λίγα λόγια το VaR είναι η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχει ένα χαρτοφυλάκιο από έναν κίνδυνο X σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και για μια συγκεκριμένη πιθανότητα p, με $p \in (0,1)$.

Αλλά ένας άλλος, πιο επίσημός στατιστικός ορισμός είναι ο εξής:

Δεδομένου ενός κινδύνου X, το VaR του X σε 100*p% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι το 100*p ποσοστημόριο της κατανομής του X και ορίζεται ως:

$$VaR_p(X) = F_X^{-1}(p) = X_p$$

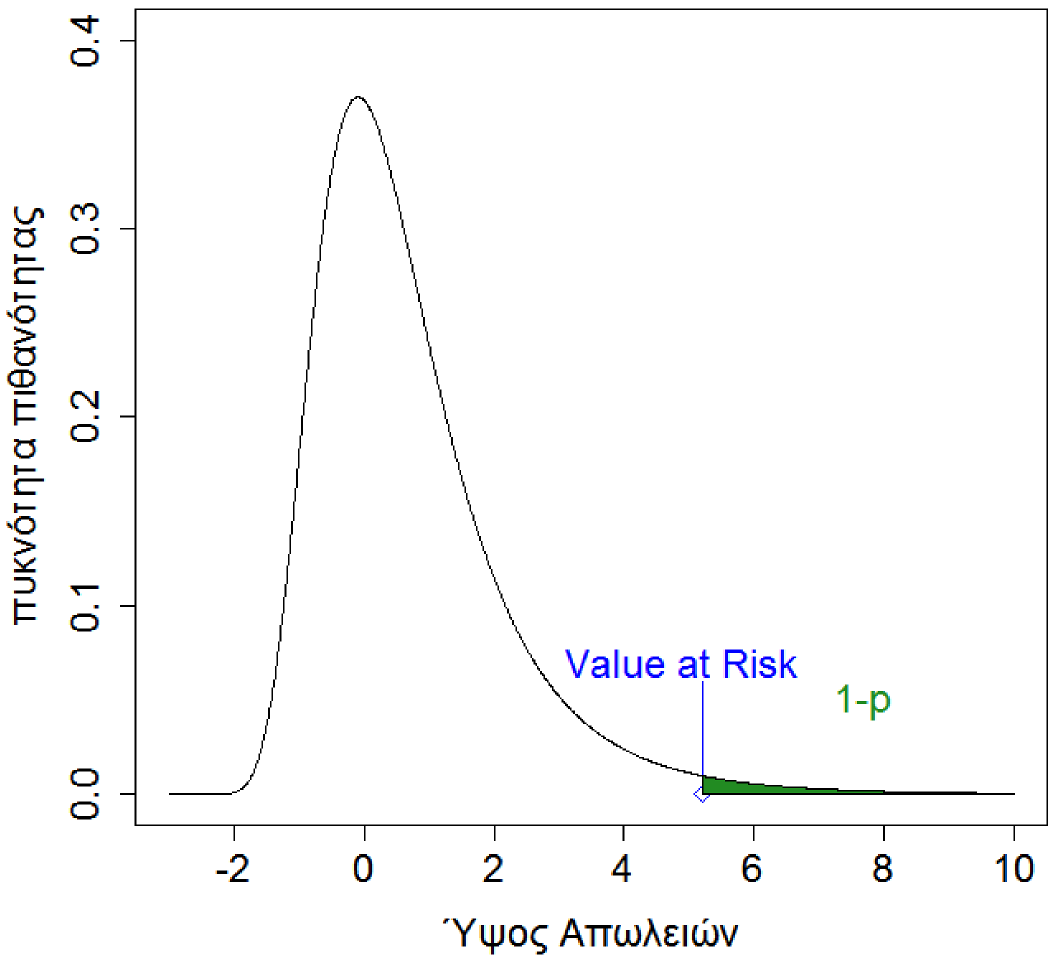
Όπου το X είναι τυχαία μεταβλητή ζημιάς και το $F_X^{-1}(p)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής $F_\chi(p)$ και ορίζεται ως:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\left\{x \in R \mid F_x(x) \geq p\right\} = \sup\left\{x \in R \mid F_x(x) < p\right\}$$

Για συνεχείς κατανομές, μπορούμε απλώς να γράψουμε το VaR του ρ(X) για την τυχαία μεταβλητή ζημιάς X ως την τιμή του VaR που ικανοποιεί το παρακάτω:

$$\Pr\left(X \leq VaR_p\right) = p$$

Όπου p = 1 – α, με α να είναι το επίπεδο σημαντικότητας. Η πιθανότητα p λαμβάνεται συνήθως να είναι κοντά στο 1 (για παράδειγμα, 0.95 ή 0.99), έτσι ώστε η πιθανότητα ζημιάς X που υπερβαίνει τη $\mathrm{VaR}_p(X)$ να είναι μικρή.



Σχήμα 2.4.1: Τιμή της Αξίας σε Κίνδυνο στο p επίπεδο εμπιστοσύνης.

Στις περιπτώσεις που έχουμε ένα διακριτό κίνδυνο X (κίνδυνος που προέρχεται από διακριτή κατανομή ζημιάς), μπορεί να υπάρχει κάποια ασάφεια στον ορισμό της $F_X^{-1}(p)$. Έτσι ένας γενικότερος ορισμός της $\mathrm{VaR}_p(X)$ είναι ο παρακάτω:

$$VaR_p = \inf\left\{x \in [0,\infty) : F_x(x) \geq p\right\}$$

Κάτι άλλο που μπορούμε να βρούμε με τη χρήση του VaR είναι το όφελος διαφοροποίησης. Το όφελος διαφοροποίησης το χρησιμοποιούμε όταν έχουμε παραπάνω από έναν κίνδυνο. Ουσιαστικά είναι η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των VaR των επιμέρους κινδύνων X_i και του VaR του συνολικού κινδύνου X.

$$\acute{o}\phi\varepsilon\lambda o\varsigma\ \delta\iota\alpha\phi o\rho o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta\varsigma = \sum_{i=1}^{n} VaR_{X_i} - VaR_X$$

Το όφελος διαφοροποίησης μας βοηθάει να υπολογίσουμε πόσα χρήματα μπορούμε να κερδίσουμε ή να χάσουμε εάν διαφοροποιήσουμε τον συνολικό κίνδυνο X στους επιμέρους κινδύνους X_i.

Το VaR δεν είναι:

- Το χειρότερο σενάριο
- Το VaR δεν μετράει ζημιές κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες της αγοράς
- Το VaR δεν απευθύνεται σε συσσωρευτικές ζημιές
- Το VaR, δεν είναι αρκετό από μόνο του για την μέτρηση κινδύνου

Το VaR υπολογίζεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Αποτιμάμε την τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου.
2. Υπολογίζουμε τη μεταβλητότητα των παραγόντων που επιδρούν στον κίνδυνο π.χ. την τυπική απόκλιση.
3. Ορίζουμε το χρονικό ορίζοντα διακράτησης του χαρτοφυλακίου.
4. Θέτουμε το διάστημα εμπιστοσύνης.
5. Υπολογίζουμε τη δυνητική ζημία χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες των προηγούμενων βημάτων.

Παράδειγμα 2.4.1 (Κανονική Κατανομή)

Έστω κίνδυνος X που ακολουθεί κατανομή $N(33,109^2)$. Θέλουμε να βρούμε το $VaR_{95\%}(X)$ και το $VaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

$$\Pr\left(X \le VaR_{95\%}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{VaR_{95\%} - 33}{109}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \left(\frac{VaR_{95\%} - 33}{109}\right) = 1,645$$

$VaR_{95\%}(X) = 212,31€$

Και με τον ίδιο τρόπο

$$\Pr\left(X \le VaR_{99\%}\right) = 0,99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{VaR_{99\%} - 33}{109}\right) = 0,99$$

$$\Rightarrow \left(\frac{VaR_{99\%} - 33}{109}\right) = 2,33$$

$VaR_{99\%}(X) = 286,97€$

Βρήκαμε τα ποσοστιαία σημεία από τον Πίνακα 1, στο παράρτημα, ο οποίος παραθέτει τα ποσοστιαία σημεία της τυπικής κανονικής κατανομής.

Παράδειγμα 2.4.2 (Κατανομή Pareto)

Έστω κίνδυνος X που ακολουθεί κατανομή Pareto με $\mu=33$ και $\sigma^2=109^2$. Θέλουμε να βρούμε το $VaR_{95\%}(X)$ και το $VaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

Σε αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση των Klugman, Panjer and Willmot (2004) με λίγο διαφορετικούς συμβολισμούς για να αποφύγουμε σύγχυση με πολλά α. Οι σ.π.π. και α.σ.κ. είναι οι εξής:

$$f_X(x) = \frac{\gamma * \theta^{\gamma}}{(\theta + x)^{\gamma+1}}$$

Και

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^{\gamma}$$

Με την μέθοδο των ροπών βρίσκουμε θ=39,660 και γ=2,2018.

Άρα

$$\Pr\left(X \leq VaR_{95\%}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + VaR_{95\%}}\right)^{\gamma} = 0,95$$

$$\Rightarrow VaR_{95\%} = 114,95$$

Με τον ίδιο τρόπο

$$\Pr\left(X \leq VaR_{99\%}\right) = 0,99$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + VaR_{99\%}}\right)^{\gamma} = 0,99$$

$$\Rightarrow VaR_{99\%} = 281,48$$

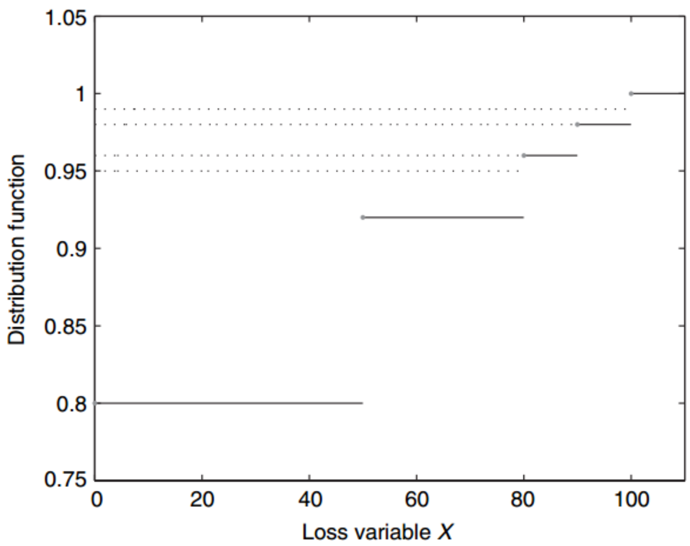
Παράδειγμα 2.4.3 (Διακριτή Κατανομή)

Να βρείτε τα $VaR_{95\%}$, $VaR_{96\%}$, $VaR_{98\%}$ και $VaR_{99\%}$, από την ακόλουθη διακριτή κατανομή ζημιάς.

$$X = \begin{cases} 100 & prob -> 0.02 \\ 90 & prob -> 0.02 \\ 80 & prob -> 0,04 \\ 50 & prob -> 0.12 \\ 0 & prob -> 0,80 \end{cases}$$

Λύση:

Δεδομένου ότι έχουμε διακριτή κατανομή, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της VaR για διακριτές κατανομές. Η συνάρτηση κατανομής σχεδιάζεται στο Σχήμα 2.4.2 παρακάτω. Οι διακεκομμένες οριζόντιες γραμμές αντιστοιχούν στα επίπεδα πιθανοτήτων 0,95, 0,96, 0,98 και 0,99. Σημειώστε ότι η συνάρτηση κατανομής είναι ένα step function. Για VaR_p χρειαζόμαστε την τιμή του X που αντιστοιχεί στην πιθανότητα ίσου επιπέδου ή το επόμενο υψηλότερο βήμα από ό, τι είναι το p. Έτσι, VaR_p για p = 0.95, 0.96, 0.98,και 0,99, είναι, αντιστοίχως, 80, 80, 90, και 100.



Σχήμα 2.4.2 Συνάρτηση κατανομής της ζημιάς και VaR του Παραδείγματος 2.4.3.

Είναι γνωστό ότι το VaR δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου γιατί δεν ικανοποιεί ένα την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

Η αποτυχία του VaR να είναι υποπροσθετικό, μπορεί να δειχθεί από ένα απλό, μα ακραίο παράδειγμα του Wirch.

Παράδειγμα 2.4.4 (Παράδειγμα Wirch – ασυνέπεια του VaR)

Ας συμβολίσουμε με Z μια τυχαία μεταβλητή ζημιάς με τις ακόλουθες τιμές για τη συνάρτηση κατανομής:

$$\begin{aligned} &F_z(1) = 0,91, \\ &F_z(90) = 0,95, \\ &F_z(100) = 0,96 \end{aligned}$$

Το $VaR_{95\%}(Z)$ είναι 90 επειδή υπάρχει μία 5% πιθανότητα να υπερβεί το 90. Υποθέτοντας ότι τώρα διαχωρίζουμε τον κίνδυνο Z σε δύο ξεχωριστούς (αλλά εξαρτημένους) κινδύνους X και Y έτσι ώστε οι δύο ξεχωριστοί κίνδυνοι συνολικά να είναι ίσοι με τον κίνδυνο Z, δηλαδή, Z=X+Y.

Ένας τρόπος να τους ορίσουμε είναι:

$$X = \begin{cases} Z, & Z \le 100 \\ 0, & Z > 100 \end{cases}$$

Και

$$Y = \begin{cases} 0, & Z \le 100 \\ Z, & Z > 100 \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση κατανομής για τον κίνδυνο X ικανοποιεί:

$$F_z(1) = 0{,}95,$$
$$F_z(90) = 0{,}99,$$
$$F_z(100) = 1$$

που υποδηλώνει ότι το $VaR_{95\%}$ (X)=1.

Παρόμοια, η συνάρτηση κατανομής για τον κίνδυνο Y ικανοποιεί την F_Y = 0,96, το οποίο υποδηλώνει ότι υπάρχει μια 96% ευκαιρία για καθόλου ζημία.

Γι' αυτό ένα 95% ποσοστημόριο δεν μπορεί να υπερβεί το 0, κι έτσι το $VaR_{95\%}(Y) \leq 0$.

Συνεπώς, το άθροισμα των 95% ποσοστημορίων για το X και το Y είναι λιγότερο από το $VaR_{95\%}(Z)$, το οποίο παραβιάζει την υποπροσθετικότητα.

2.4.1 Τρόποι υπολογισμού του VaR

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα, από πολύ απλά μέχρι και πολύπλοκα, τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το VaR. Το κάθε μοντέλο έχει τις δικές του υποθέσεις με την πιο κοινή υπόθεση να είναι ότι ο βέλτιστος εκτιμητής για τις μελλοντικές αλλαγές στην αγορά είναι τα ιστορικά δεδομένα.

Τα πιο γνωστά μοντέλα υπολογισμού του VaR είναι:

1. Το μοντέλο Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance).
2. Η Ιστορική Προσομοίωση (Historical Simulation).
3. Η Προσομοίωση Monte-Carlo (Monte-Carlo Simulation).
4. Το μοντέλο RiskMetrics (για απλά χαρτοφυλάκια)

2.4.1.1 Μοντέλο Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης

Το μοντέλο Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης το οποίο είναι επίσης γνωστό και ως delta-normal μοντέλο δέχεται ότι οι αποδόσεις των στοιχείων του χαρτοφυλακίου ακολουθούν την κανονική κατανομή. Έτσι, θεωρώντας ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε και η απόδοση χρησιμοποιεί την κανονική κατανομή.

Η μέθοδος λειτουργεί χρησιμοποιώντας ιστορικά στοιχεία και υπολογίζει διακυμάνσεις και συσχετίσεις για όλους τους παράγοντες που συντελούν στην ύπαρξη του κινδύνου. Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται από ένα σύνολο στοιχείων που ακολουθούν την κανονική κατανομή και συνδυάζονται γραμμικά μεταξύ τους και τον πίνακα συσχέτισης τους.

Ο τύπος υπολογισμού του VaR με αυτήν την μέθοδο είναι:

$$VaR_{X_{\Pi}} = \sqrt{VaR'_{X_i} * C * VaR_{X_i}}$$

Όπου $VaR_{X_{\Pi}}$ είναι το VaR για το χαρτοφυλάκιο, το VaR_{X_i} είναι ο πίνακας των VaR του κάθε στοιχείου X_i, το VaR'_{X_i} είναι ο ανάστροφος πίνακας των VaR του κάθε στοιχείου X_i και το C είναι ο πίνακας συσχέτισης των στοιχείων X_i.

Κάποια από τα πλεονεκτήματα χρήσης αυτής της μεθόδου είναι:

i. Είναι αποτελεσματική και γρήγορη με τη χρήση Η/Υ.
ii. Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ή Central Limit Theorem) αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και σε μη κανονικούς παράγοντες κινδύνου δεδομένου όμως ότι αυτοί είναι πολλοί και ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Ενώ κάποια από τα μειονεκτήματα συμπεριλαμβάνουν το ότι:

i. Υποθέτει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή.
ii. Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική όταν οι θέσεις του χαρτοφυλακίου είναι μη γραμμικές.

iii. Απαιτεί την εκτίμηση της μεταβλητότητας των παραγόντων κινδύνου καθώς και τις συσχετίσεις των αποδόσεων τους.
iv. Δεν γίνεται να το χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για το VaR.

2.4.1.2 Μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης

Η μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης είναι η πιο απλή μέθοδος υπολογισμού της VaR γιατί η μόνη υπόθεση που κάνει είναι ότι η κατανομή των αποδόσεων των κινδύνων θα παραμείνει η ίδια στο μέλλον με αυτήν που ήταν στο παρελθόν.

Είναι ένα στατιστικό μέτρο δυνητικής ζημιάς που χρησιμοποιεί την πραγματική κατανομή των δεδομένων. Το VaR που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο τείνει να έχει υψηλότερες τιμές για κατανομές με παχιές ουρές.

Για να υπολογίσουμε το VaR με τη μέθοδο Ιστορικής Προσομοίωσης χρειαζόμαστε τα ιστορικά δεδομένα του χαρτοφυλακίου, πιο συγκεκριμένα τις αποδόσεις το χαρτοφυλακίου μέχρι και την «σημερινή» περίοδο. Μετά:

1. Υπολογίζουμε τις μεταβολές στα ιστορικά δεδομένα για όλα τα στοιχεία (κίνδυνους) του χαρτοφυλακίου για να παράγουμε μια σειρά μεταβολών στην αξία του χαρτοφυλακίου.
2. Υπολογίζουμε το εκατοστημόριο.
3. Το VaR του χαρτοφυλακίου είναι η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου που βρίσκεται στο εκατοστημόριο που αντιστοιχεί σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης

Κάποια από τα πλεονεκτήματα χρήσης αυτής της μεθόδου είναι:

i. Δεν υποθέτει την κανονικότητα των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.
ii. Δεν χρειάζεται να εκτιμήσει τη μεταβλητότητα ή τις συσχετίσεις.
iii. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για το VaR.

Ενώ κάποια από τα μειονεκτήματα συμπεριλαμβάνουν το ότι:

i. Χρειάζεται μεγάλος όγκος ιστορικών δεδομένων.
ii. Απαιτεί έντονη χρήση του Η/Υ.
iii. Δεν συμπεριλαμβάνει ακραία γεγονότα.

2.4.1.3 Προσομοίωση Monte-Carlo

Η Προσομοίωση Monte-Carlo, είναι μια στοχαστική διαδικασία όπου με χρήση τυχαίων αριθμών και τη στατιστική προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος που έχει πιθανοτική ερμηνεία. Η βασική τους ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν τυχαίες λύσεις για την επίλυση προβλημάτων που μπορεί να είναι προκαθορισμένα.

Σε ένα πείραμα Monte-Carlo χρησιμοποιείται προσομοίωση με μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Αυτή η μέθοδος πολύ απλά κάνει την υπόθεση ότι οι μελλοντικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου είναι τυχαία προσομοιωμένες.

Κάποια από τα πλεονεκτήματα χρήσης αυτής της μεθόδου είναι:

i. Μπορούμε να χειριστούμε οποιαδήποτε κατανομή.
ii. Είναι πιο ακριβής όταν υπάρχουν μη γραμμικοί παράγοντες κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο.
iii. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για το VaR.

Ενώ κάποια από τα μειονεκτήματα συμπεριλαμβάνουν το ότι:

i. Απαιτεί έντονη χρήση του Η/Υ.
ii. Χρειάζεται μεγάλο αριθμό δεδομένων.
iii. Χρειάζεται υποθέσεις από το χρήστη που επηρεάζουν τα συμπεράσματα.
iv. Δεν συμπεριλαμβάνει ακραία γεγονότα.

Περισσότερα για την προσομοίωση Monte-Carlo και για το πώς χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του VaR και του TVaR θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

2.4.1.4 Μοντέλο RiskMetrics

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του VaR είναι το RiskMetrics. Το μοντέλο διακύμανσης RiskMetrics δημιουργήθηκε για πρώτη φορά το 1989, όταν ο Sir Dennis Weatherstone, ο νέος πρόεδρος της J.P. Morgan, ζήτησε μια ημερήσια αναφορά που μετράει και εξηγεί τους κινδύνους της επιχείρησής του. Σχεδόν τέσσερα χρόνια αργότερα το 1992, η J.P. Morgan προώθησε τη μέθοδο RiskMetrics στην αγορά, η οποία ήταν ελεύθερα διαθέσιμη στην αγορά. Η επιτυχία του RiskMetrics ήταν τόσο μεγάλη που η JP Morgan το έκανε ξεχωριστή εταιρία, το RiskMetrics Group. Ουσιαστικά είναι μια μεθοδολογία που περιέχει τεχνικές και σύνολα δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (VaR) ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων.

Ο στόχος της RiskMetrics είναι η προώθηση και βελτίωση της διαφάνειας των κινδύνων αγοράς, η δημιουργία ενός σημείου αναφοράς για τη μέτρηση του κινδύνου και η παροχή συμβουλών στους πελάτες σχετικά με τη διαχείριση των κινδύνων αγοράς. Είναι μια μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για απλά χαρτοφυλάκια (δηλαδή χαρτοφυλάκια που δεν περιλαμβάνουν συστατικά σημαντικών options). Το RiskMetrics προβλέπει την μεταβλητότητα των οικονομικών αξιογράφων και των συσχετίσεων τους, επιτρέποντας μας να υπολογίσουμε το VaR πολύ εύκολα.

Η μεθοδολογία RiskMetrics για τον υπολογισμό του VaR υποθέτει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ή της επένδυσης ακολουθούν την κανονική κατανομή. Μετά την προώθηση των συνόλων δεδομένων μεταβλητότητας και συσχετισμού των J.P. Morgan's και Reuters, η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης που χρησιμοποιείτε για τον υπολογισμό του VaR έγινε ένα βιομηχανικό πρότυπο, όπως είχε σχεδιάσει η RiskMetrics.

Για παράδειγμα, η κατανομή κερδών και ζημιών ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων θεωρείται ότι κατανέμεται κανονικά. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο RiskMetrics για τον υπολογισμό του VaR, ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου πρέπει πρώτα να επιλέξει το επίπεδο εμπιστοσύνης και την περίοδο ανασκόπησης. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγει μια περίοδο ανασκόπησης 252 ημερών ή ενός έτους διαπραγμάτευσης. Το επιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης είναι 95% και η αντίστοιχη τιμή της αθροιστικής κατανομής πρέπει να πολλαπλασιάζεται με την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου. Η πραγματική ημερήσια τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια ενός έτους διαπραγμάτευσης είναι 3,67%. Η τιμή της αθροιστικής κατανομής για 95% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι 1.645. Το VaR για το χαρτοφυλάκιο, κάτω από το επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, είναι -6,04% (-1,645 * 3,67%). Επομένως, υπάρχει πιθανότητα 5% ότι η απώλεια του χαρτοφυλακίου, κατά το δεδομένο χρονικό ορίζοντα, θα υπερβεί το 6,04%.

Μια άλλη μέθοδος για τον υπολογισμό του VaR ενός χαρτοφυλακίου είναι η χρήση των συσχετισμών και των τυπικών αποκλίσεων των αποδόσεων μετοχών που παρέχονται από το RiskMetrics. Αυτή η μέθοδος υποθέτει επίσης ότι οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή. Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό του

VaR παίρνει το τετράγωνο των κατανεμημένων κεφαλαίων για το πρώτο περιουσιακό στοιχείο, πολλαπλασιαζόμενο με το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης του, και προσθέτοντας αυτή την τιμή στο τετράγωνο των κατανεμημένων κεφαλαίων για το δεύτερο περιουσιακό στοιχείο πολλαπλασιασμένο με το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης του δεύτερου περιουσιακού στοιχείου. Στη συνέχεια, η τιμή αυτή προστίθεται σε δύο πολλαπλασιαζόμενη με τα κατανεμημένα κεφάλαια για το πρώτο περιουσιακό στοιχείο πολλαπλασιαζόμενα με τα κατανεμημένα κεφάλαια για το δεύτερο περιουσιακό στοιχείο πολλαπλασιασμένα με την μεταβλητότητα του πρώτου και του δεύτερου περιουσιακού στοιχείου και τη συσχέτιση μεταξύ των δύο περιουσιακών στοιχείων.

2.4.2 Οριακή VaR (ΔVaR)

Η Οριακή VaR που συμβολίζεται ως ΔVaR υποδηλώνει το πόσο οι μικρές αλλαγές του ποσοστού συμμετοχής κάθε κινδύνου X_i επηρεάζει το VaR του συνολικού κινδύνου X.

Για τον υπολογισμός της ΔVaR:

$$\Delta VaR_p^i = \frac{\partial}{\partial w_i} * \frac{VaR_p(X_i)}{X}$$

Εάν οι κίνδυνοι ακολουθούν κανονική κατανομή τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον παρακάτω τύπο:

$$\Delta VaR_{X_i} = a * \frac{Cov(X_i, X)}{\sigma_X}$$

όπου το w_i είναι το βάρος που έχουμε εναποθέσει στον X_i κίνδυνο, το α είναι το επίπεδο σημαντικότητας, το $Cov(X_i, X)$ είναι η συνδιακύμανση του κινδύνου X_i με το συνολικό κίνδυνο X και το σ_X είναι η τυπική απόκλιση του συνολικού κινδύνου X.

2.4.3 Συνιστώσα VaR (CVaR)

Η Συνιστώσα VaR που συμβολίζεται CVaR καθορίζει το ποσό και το ποσοστό συμμετοχής του κάθε κινδύνου X_i στο VaR του συνολικού κινδύνου X.

Για τον υπολογισμό του CVaR:

$$CVaR_{X_i} = \Delta VaR_{X_i} * w_i * X$$

όπου το ΔVaR_{X_i} είναι η οριακή VaR του κινδύνου X_i, το w_i είναι το βάρος που έχουμε εναποθέσει στον X_i κίνδυνο και το X είναι ο συνολικός κίνδυνος.

Για το ποσοστό συμβολής του κάθε κινδύνου X_i στο VaR του συνολικού κινδύνου έχουμε:

$$\pi o\sigma o\sigma\tau\grave{o}\,\sigma\upsilon\mu\beta o\lambda\grave{\eta}\varsigma = \frac{CVaR_{X_i}}{VaR_X}$$

Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$VaR_p(X) = \sum_{i=1}^{n} CVaR_p^{X_i}$$

2.5 Αξία σε Κίνδυνο Ουράς (Tail Value at Risk ή TVaR)

Ένα άλλο μειονέκτημα του VaR, εκτός του ότι δεν είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, είναι το γεγονός ότι σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης p δεν δίνει καμία πληροφορία για το πάχος της ουράς της συνάρτησης κατανομής.

Εάν μια κατανομή έχει βαριά (παχιά) ουρά αυτό σημαίνει ότι βγάζει μεγάλες πιθανότητες σε μεγάλες τιμές ζημιάς και άρα είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τι συμβαίνει με τις μεγάλες τιμές καθώς αυτές ασκούν περισσότερη επιρροή στην συνολική απώλεια. Δηλαδή το VaR δεν υπολογίζει το μέγεθος της ζημιάς στην περίπτωση που το γεγονός που ξεπερνάει το 100p ποσοστημόριο προκύψει.

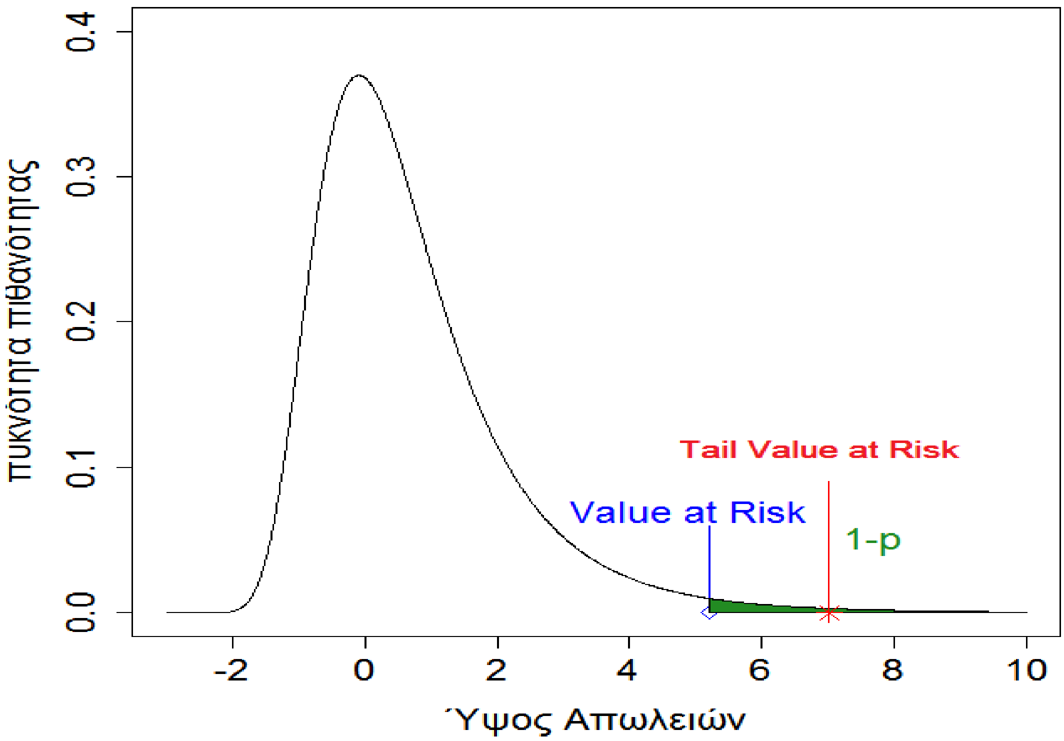
Ένας τρόπος να επιλυθεί αυτό το πρόβλημα είναι με τη χρήση ενός διαφορετικού μέτρου κινδύνου, την Αξία σε Κίνδυνο Ουράς (Tail Value at Risk ή TVaR).

Η Αξία σε Κίνδυνο Ουράς για μπορεί να οριστεί ως εξής:

Έστω τυχαία μεταβλητή ζημιάς που αναπαριστά έναν κίνδυνο X. Το TVaR για επίπεδο εμπιστοσύνης p, συμβολίζεται με $TVaR_p(X)$ και αναπαριστά την αναμενόμενη ζημιά δεδομένου ότι οι ζημιές έχουν ξεπεράσει το 100p ποσοστημόριο της κατανομής του X.

$$TVaR_p(X) = E\left(X \mid X > VaR_p\right) = \frac{\int_{VaR_p}^{\infty} x * f(x)\,dx}{1 - F\left(VaR_p\right)}$$

Ο συγκεκριμένος τύπος αφορά συνεχής κατανομές κινδύνου.



Σχήμα 2.5.1: Τιμή της Αξίας σε Κίνδυνο και της Αξίας σε Κίνδυνο Ουράς στο p επίπεδο εμπιστοσύνης.

Επιπλέον, εάν το TVaR είναι πεπερασμένο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα κατά μέρη και την αντικατάσταση μεταβλητών για να γράψουμε ως:

$$TVaR_p(X) = \frac{\int_p^1 VaR_u(x)\,du}{1-p}$$

Άρα μπορούμε επίσης να πούμε ότι το TVaR είναι ο αριθμητικός μέσος όλων των τιμών του VaR που ξεπερνούν το επίπεδο p.

Ένας άλλος τρόπος γραφής του TVaR είναι ο παρακάτω:

$$TVaR_p(X) = E\left(X \mid X > VaR_p\right)$$

$$= VaR_p + \frac{\int_{x_p}^{\infty}\left(x - VaR_p\right)*\left(f(x)\right)dx}{1-p}$$

$$= VaR_p(X) + e\left(VaR_p\right)$$

Όπου $e(VaR_p)$ είναι η μέση συνάρτηση υπερβάλλουσας απώλειας (mean excess loss function) υπολογισμένη στο 100p ποσοστημόριο.

Το TVaR έχει καταστεί ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου στην αναλογιστική πρακτική. Είναι διαισθητικό, εύκολο στην κατανόηση και εφαρμογή. Ως μέσος, είναι πιο ισχυρό σε σχέση με το σφάλμα δειγματοληψίας από το VaR. Όταν αναφερόμαστε στο TVaR συχνά αναφέρουμε και έναν βαθμό βεβαιότητας ο οποίος επιλέγεται αυθαίρετα αλλά είναι τυπικά 95% ή 99%, όπως και στο VaR. Το TVaR χρησιμοποιείται για τα στοχαστικά αποθέματα και τη φερεγγυότητα για τις ασφαλίσεις ζωής συνδεδεμένες με μετοχές του Καναδά και των ΗΠΑ.

Παράδειγμα 2.5.1 (Κανονική Κατανομή)

Έστω μια κανονική κατανομή με μέσο μ, διασπορά σ^2, και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2*\pi}*\sigma}*e^{-\frac{1}{2*\sigma^2}*(\chi-\mu)^2}$$

Εάν συμβολίσουμε με φ(x) και Φ(x) την σ.π.π. και τη αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) αντίστοιχα της τυπικής κανονικής κατανομής N(0,1). Τότε:

$$VaR_p\left(X\right)=\mu+\sigma*\Phi^{-1}\left(X\right)$$

Και μετά από λίγες πράξεις μπορεί να δειχθεί ότι:

$$TVaR_p\left(X\right)=\mu+\sigma*\frac{\varphi\left[\Phi^{-1}\left(p\right)\right]}{1-p}$$

Σε αντίθεση με το VaR, το TVaR είναι συνεπές μέτρο κινδύνου και σύμφωνα με τους Klugman, Panjer και Willmot (2008) παρόλο που είναι ένα από τα πολλά πιθανά συνεπή μέτρα κινδύνου, το TVaR είναι ειδικά πολύ χρήσιμο για εφαρμογές στην ασφάλιση όπου το σχήμα της ουράς είναι σημαντικό.

Το TVaR προτάθηκε ως μέτρο κινδύνου σχεδόν ταυτόχρονα από διάφορες ομάδες επιστημόνων και για αυτό το λόγο είναι γνωστό και με άλλα ονόματα όπως το Δεσμευμένη Προσδοκία Ουράς (Conditional Tail Expectation - CTE) από τον Wirch καθώς επίσης και Αναμενόμενο Έλλειμα (Expected Shortfall - ES).

Παράδειγμα 2.5.2 (Κανονική Κατανομή)

Ας πάρουμε την ίδια κανονική κατανομή όπως στο παράδειγμα 2.4.1 του VaR, $N(33,109^2)$. Θέλουμε να βρούμε το $TVaR_{95\%}(X)$ και το $TVaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

Η ζημιά είναι συνεχής οπότε το TVaR95% είναι $E[X|X > VaR_{95\%}]$. Ας συμβολίσουμε με φ(z) την σ.π.π. της τυπικής κανονικής κατανομής N(0,1), έχουμε:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*(z)^2}$$

Τότε:

$$TVaR_p = E\left[X \mid X > VaR_p\right]$$

$$= \frac{1}{1-p} * \int_{VaR_p}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2*\pi}*\sigma} * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

Θέτουμε $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ τότε

$$TVaR_p = \frac{1}{1-p} * \int_{\frac{VaR_p-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma * z + \mu}{\sqrt{2*\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*(z)^2} dz$$

$$= \frac{1}{1-p} * \int_{\frac{VaR_p-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma * z}{\sqrt{2*\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*(z)^2} + \mu * \int_{\frac{VaR_p-\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(z) dz$$

Αντικαθιστώντας $u = \frac{z^2}{2}$ στο πρώτο κομμάτι και παρατηρώντας για το δεύτερο ότι:

$$\mu * \left(1 - \Phi\left(\frac{VaR_p - \mu}{\sigma}\right)\right) = \mu * (1-p)$$

Τότε παίρνουμε για το $TVaR_p$τον εξής τύπο για την κανονική κατανομή:

$$TVaR_p = \mu + \frac{\sigma}{1-p} * \varphi\left(\frac{VaR_p - \mu}{\sigma}\right)$$

Άρα το $TVaR_{95\%}$ για την $N(33,109^2)$ είναι 257,83€ και το $TVaR_{99\%}$ είναι 323,52€.

Παράδειγμα 2.5.3 (Κατανομή Pareto)

Ας πάρουμε την ίδια κατανομή Pareto όπως στο παράδειγμα 2.4.2 του VaR με μ=33 και $\sigma^2=109^2$. Θέλουμε να βρούμε το $TVaR_{95\%}(X)$ και το $TVaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

Για την κατανομή Pareto με $\theta > 0$ και $\gamma > 1$ έχουμε:

$$TVaR_p = \frac{\theta}{\gamma-1} + VaR_p * \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις βρίσκουμε ότι το $TVaR_{95\%}$ είναι 243,60€ και το $TVaR_{99\%}$ είναι 548,70€

2.6 Κάποια σχόλια για το VaR και το TVaR

1. Προφανώς $TVaR_p \geq VaR_p$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν το VaR_p είναι η μέγιστη αξία της τυχαίας μεταβλητής της ζημιάς του κινδύνου.
2. Το $VaR_{0\%}$είναι η ελάχιστη ζημιά, το $VaR_{50\%}$είναι η διάμεση απώλεια και το $TVaR_{0\%}$ είναι η μέση ζημιά.

3. Το TVaR αντικατοπτρίζει μόνο τις απώλειες που υπερβαίνουν το VaR και ως εκ τούτου είναι ευαίσθητο κυρίως σε ακραία γεγονότα.

4. Η διαφορά μεταξύ του VaR και του TVaR είναι γενικά μεγάλη και το πρόσθετο επενδυμένο κεφάλαιο σε σύγκριση με το VaR δίνει μόνο μια μικρή αύξηση της ασφαλισμένης περιόδου. Ως εκ τούτου, το χάσμα μεταξύ του VaR και του TVaR, που είναι μια οικονομική επιβάρυνση για την ασφαλιστική επιχείρηση, είναι στην πράξη δυσανάλογα υψηλό σε σύγκριση με το κέρδος της και ως εκ τούτου δεν είναι αποδεκτό.

5. Σε μερικές περιπτώσεις οι αρνητικές τιμές μπορεί να εξαιρεθούν από τους υπολογισμούς, στην οποία περίπτωση το VaR_p στο παράδειγμα της κανονικής κατανομής θα είναι 0 για p < 0,38. Για το $TVaR_p$ οι αρχικές τιμές για το παράδειγμα της κανονικής κατανομής θα αυξάνονταν, καθώς το $TVaR_p$ θα οριζόταν για την μεταβλητή ζημιάς X ως:

$$E\left[\max\left(X,0\right) \mid X > VaR_p\right]$$

6. Για την εκθετική κατανομή E(θ), οι τύποι του VaR_p και του $TVaR_p$ είναι οι εξής:

Η σ.π.π. και η α.σ.κ.της εκθετικής κατανομής είναι αντίστοιχα:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\theta}*e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x>0$$

$$F\left(x\right)=1-e^{\left(-\frac{x}{\theta}\right)}$$

κι έτσι το εκατοστημόριο λύνει το

$$p=1-e^{\left(-\frac{VaR_p}{\theta}\right)}$$

και η λύση είναι

$$VaR_p\left(X\right)=-\theta*\ln\left(1-p\right)$$

Και επειδή η εκθετική κατανομή έχει ιδιότητα λήθης $\mathrm{e}(\mathrm{VaR}_p) = \theta$

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X) + e(VaR_p)$$

$$= VaR_p(X) + \theta$$

Εξαιτίας της ιδιότητας λήθης της εκθετικής κατανομής η υπερβολή της TVaR πάνω από τη VaR είναι μια σταθερά θ για όλες τις τιμές του p.

7. Παρακάτω παρατίθενται τύποι του VaR και του TVaR για μερικές κατανομές:

Κατανομή	VaR	TVaR
Κανονική	$\mu+\sigma * z_p$	$\mu+\sigma * \frac{\varphi(z_p)}{1-p}$
Εκθετική	$-\theta * \ln(1-p)$	$VaR_p(X)+\theta$
Λογαριθμοκανονική	$e^{\mu+\sigma * z_p}$	$e^{\mu+0,5*\sigma^2*\frac{\varphi(\sigma-z_p)}{1-p}}$
Pareto Τύπου II Lomax	$\frac{\theta}{(1-p)^{1/\alpha}}-\theta$	$VaR_p(X)+\frac{\theta+VaR_p(X)}{\alpha-1}$ $\quad για\ \alpha>1$
		$VaR_p(X)+\frac{\alpha+\theta}{\alpha-1}$ $\quad για\ \alpha>1$
		$\frac{\theta}{\alpha-1} * \left[1+\frac{\alpha}{\theta} * VaR_p(X)\right]$ $\quad για\ \alpha>1$

Για την κανονική κατανομή, οι παράμετροι είναι μ (μέση τιμή) και σ (τυπική απόκλιση).

Η εκθετική κατανομή στον πίνακα έχει παραμετροποιηθεί από μια παράμετρο θ, η οποία συμβαίνει να είναι ο μέσος όρος της.

Η λογαριθμοκανονική κατανομή παραμετροποιείται από μ και σ, πράγμα που σημαίνει ότι ο λογάριθμος της λογαριθμοκανόνικης κατανομής είναι μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ.

Η κατανομή Pareto τύπου II Lomax παραμετροποιείται από μια shape παράμετρο α και μια scale παράμετρο θ. Ο πίνακας παρέχει τρεις συνθέσεις του TVaR. Σημειώστε ότι για να υπάρχει ο μέσος όρος, η shape παράμετρος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 1. Έτσι, το TVaR δεν ορίζεται όταν α ≤ 1.

Παράδειγμα 2.6.1 (Εκθετική Κατανομή)

Έστω κίνδυνος X που ακολουθεί κατανομή E(33). Θέλουμε να βρούμε το $VaR_{95\%}(X)$ και το $VaR_{99\%}(X)$ καθώς επίσης και το $TVaR_{95\%}(X)$ και το $TVaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που παρατέθηκαν στον παραπάνω πίνακα για την εκθετική κατανομή. Για το VaR έχουμε:

$$\begin{aligned} VaR_{95\%} &= -\theta * \ln(1-p) \\ &= -33 * \ln(1-0.95) \\ &= -33 * \ln(0.05) \\ &= -33 * (-3) \\ &= 99 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} VaR_{99\%} &= -\theta * \ln(1-p) \\ &= -33 * \ln(1-0.99) \\ &= -33 * \ln(0.01) \\ &= -33 * (-4,61) \\ &= 152,13 \end{aligned}$$

Για το TVaR έχουμε:

$$\begin{aligned} TVaR_{95\%} &= VaR_{95\%}(X) + \theta \\ &= 99 + 33 \\ &= 132 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} TVaR_{99\%} &= VaR_{99\%}(X) + \theta \\ &= 152,13 + 33 \\ &= 185,13 \end{aligned}$$

Άρα το $VaR_{95\%}(X) = 99€$, το $VaR_{99\%}(X) = 152{,}13€$, το $TVaR_{95\%}(X) = 132€$ και το $TVaR_{99\%}(X) = 185{,}13€$

Παράδειγμα 2.6.2 (Pareto Τύπου II Lomax)

Έστω κίνδυνος X που ακολουθεί κατανομή Pareto(α = 4, θ = 26). Θέλουμε να βρούμε το $VaR_{95\%}(X)$ και το $VaR_{99\%}(X)$ καθώς επίσης και το $TVaR_{95\%}(X)$ και το $TVaR_{99\%}(X)$.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που παρατέθηκαν στον παραπάνω πίνακα για την Pareto κατανομή. Για το VaR έχουμε:

$$\begin{aligned} VaR_{95\%} &= \frac{\theta}{(1-p)^{1/\alpha}} - \theta \\ &= \frac{26}{(1-0,95)^{1/4}} - 26 \\ &= \frac{26}{(0,05)^{1/4}} - 26 \\ &= \frac{26}{0,0125} - 26 \\ &= 2.080 - 26 \\ &= 2.054 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} VaR_{99\%} &= \frac{\theta}{(1-p)^{1/\alpha}} - \theta \\ &= \frac{26}{(1-0,99)^{1/4}} - 26 \\ &= \frac{26}{(0,01)^{1/4}} - 26 \\ &= \frac{26}{0,0025} - 26 \\ &= 10.400 - 26 \\ &= 10.374 \end{aligned}$$

Για το TVaR θα χρησιμοποιήσουμε και τους 3 τύπους, οπότε για το TVaR έχουμε:

a)

$$
\begin{aligned}
TVaR_{95\%} &= VaR_{95\%}\left(X\right) + \frac{\theta + VaR_{95\%}\left(X\right)}{\alpha - 1} \\
&= 2.054 + \frac{26 + 2.054}{4 - 1} \\
&= 2.054 + \frac{2.080}{3} \\
&= 2.054 + 693,33 \\
&= 2.747,33
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
TVaR_{99\%} &= VaR_{99\%}\left(X\right) + \frac{\theta + VaR_{99\%}\left(X\right)}{\alpha - 1} \\
&= 10.374 + \frac{26 + 10.374}{4 - 1} \\
&= 10.374 + \frac{10.400}{3} \\
&= 10.374 + 3.466,67 \\
&= 13.840,67
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
TVaR_{95\%} &= VaR_{95\%}\left(X\right) + \frac{\alpha + \theta}{\alpha - 1} \\
&= 2.054 + \frac{4 + 26}{4 - 1} \\
&= 2.054 + \frac{30}{3} \\
&= 2.054 + 10 \\
&= 2.064
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
TVaR_{99\%} &= VaR_{99\%}\left(X\right) + \frac{\alpha + \theta}{\alpha - 1} \\
&= 10.374 + \frac{4 + 26}{4 - 1} \\
&= 10.374 + \frac{30}{3} \\
&= 10.374 + 10 \\
&= 10.384
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
TVaR_{95\%} &= \frac{\theta}{\alpha-1} * \left[1+\frac{\alpha}{\theta} * VaR_{95\%}\left(X\right)\right] \\
&= \frac{26}{4-1} * \left(1+\frac{4}{26} * 2.054\right) \\
&= \frac{26}{3} * \left(1+\frac{8.216}{26}\right) \\
&= 8,67 * \left(1+316\right) \\
&= 8,67 * 317 \\
&= 2.748,39
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
TVaR_{99\%} &= \frac{\theta}{\alpha-1} * \left[1+\frac{\alpha}{\theta} * VaR_{99\%}\left(X\right)\right] \\
&= \frac{26}{4-1} * \left(1+\frac{4}{26} * 10.374\right) \\
&= \frac{26}{3} * \left(1+\frac{41.496}{26}\right) \\
&= 8,67 * \left(1+1.596\right) \\
&= 8,67 * 1.597 \\
&= 13.845,99
\end{aligned}
$$

Άρα το $VaR_{95\%}(X)$ = 2.054€, το $VaR_{99\%}(X)$ = 10.374€, το $TVaR_{95\%}(X)$ = 2.747,33€/2.064€/2.748,39€ και το $TVaR_{99\%}(X)$ = 10.840,67€/10.384€/13.845,99€.

Κεφάλαιο 3. Μέτρα Κινδύνου Παραμόρφωσης

Η λειτουργία παραμόρφωσης είναι μια μαθηματική συσκευή που κατασκευάσει τα μέτρα κινδύνου παραμόρφωσης. Θα ορίσουμε παρακάτω τη συνάρτηση παραμόρφωσης και τη θα σχετίσουμε με το μέτρο κινδύνου, και, στη συνέχεια, δείχνουμε ότι ορισμένα από τα μέτρα κινδύνου που συζητήσαμε ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

Τα μέτρα κινδύνου παραμόρφωσης ορίζονται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση επιβίωσης (σωρευτική συνάρτηση κατανομής) για τη ζημιά, $S(x) = 1 - F(x)$. Θεωρούμε μόνο μη αρνητικές ζημιές, δηλαδή $X \geq 0$ (καθώς αυτές οι μέθοδοι μπορούν να προσαρμοστούν για κατανομές κέρδους/ ζημιάς).

Τα μέτρα κινδύνου παραμόρφωσης είναι αυτά που μπορούν να εκφραστούν στη μορφή:

$$H(X) = \int_0^\infty g\left(S(x)\right)dx$$

όπου $g(\cdot)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση,

Με $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$.

Η συνάρτηση $g(\cdot)$ λέγεται συνάρτηση παραμόρφωσης. Η μέθοδος λειτουργεί ανακατανέμοντας τις πιθανότητες έτσι ώστε τα χείριστα αποτελέσματα να συνδέονται με μια τεχνητά διογκωμένη πιθανότητα. Η συνάρτηση $g(S(x))$ είναι μια αναπροσαρμοσμένη με βάση τον κίνδυνο συνάρτηση επιβίωσης.

Έτσι, το μέτρο του κινδύνου παραμόρφωσης H(X) είναι ο μέσος όρος των $\bar{X}$ κινδύνων ζημίας.

Το VaR και TVaR μέτρα κινδύνου είναι και τα δυο στην κλάση των μέτρων κινδύνου παραμόρφωσης. Αυτά είναι μακράν τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα παραμόρφωσης για την κεφαλαιακή επάρκεια, ωστόσο και άλλα μέτρα φαίνονται στην πράξη, ιδιαίτερα για τον καθορισμό ασφαλίστρων σε ασφάλιση ακινήτων και ατυχημάτων.

Η συνάρτηση παραμόρφωσης που ορίζει το VaR_p μέτρο κινδύνου είναι

$$g\left(S(x)\right) = \begin{cases} 0 \ \alpha\nu \ 0 \leq S(x) \leq 1-p \\ 1 \ \alpha\nu \ 1-p \leq S(x) \leq 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση παραμόρφωσης που ορίζει το $TVaR_p$ μέτρο κινδύνου είναι

$$g\left(S(x)\right)=\begin{cases} S(x)/(1-p) \ \alpha\nu \ 0 \le S(x) \le 1-p \\ 1 \qquad \alpha\nu \ 1-p \le S(x) \le 1 \end{cases}$$

Εκτός από το VaR και το TVaR το καθαρό ασφάλιστρο είναι επίσης ένα μέτρο κινδύνου παραμόρφωσης. Αυτό μπορεί να φανεί εύκολα με τον καθορισμό

g(u) = u

που πληροί τις προϋποθέσεις g (0) = 0 και g (1) = 1 και g (·) είναι αύξουσα.

Τώρα

$$H(X)=\int_0^\infty g\left(S(x)\right)dx$$

$$=\int_0^\infty S(x)dx$$

$$=E[X]$$

Άλλα μέτρα κινδύνου παραμόρφωσης συμπεριλαμβάνουν το μετασχηματισμό του αναλογικού κινδύνου (proportional hazard (PH) transform) (Wang (1995, 1996)):

$$g\left(S(x)\right)=\left(S(x)\right)^{1/\kappa} \ \gamma\iota\alpha \ \ \kappa \ge 1$$

Η παράμετρος κ είναι ένα μέτρο αποφυγής του κινδύνου, μεγαλύτερες τιμές του κ αντιστοιχούν σε μεγαλύτερο επίπεδο ασφάλειας.

Παράδειγμα 3.1 (Κατανομή Pareto)

Υποθέτουμε X ~Pareto(γ,θ). Τότε η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$S(x)=\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{\gamma}$$

έτσι η συνάρτηση επιβίωσης παραμόρφωσης είναι

$$g\left(S\left(x\right)\right)=\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{\gamma/\kappa}$$

Αυτή είναι μια καινούργια συνάρτηση επιβίωσης για Pareto (γ/κ, θ) κατανομή. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης επιβίωσης (για μια μη αρνητική ζημιά) είναι η μέση απώλεια, έτσι

$$H\left(\mathrm{X}\right)=\frac{\theta}{\frac{\gamma}{\kappa}-1}$$

δεδομένου ότι $\gamma/\kappa > 1$, διαφορετικά είναι απροσδιόριστο.

Υποθέτουμε $\theta = 1200$ and $\gamma = 13$.

Η μέση ζημιά είναι 100€, η τυπική απόκλιση είναι 109€, και το $VaR_{95\%}$ είναι 311€. Το PH-transform μέτρο κινδύνου για, λέμε, $\kappa = 3$ είναι 360€.

Παράδειγμα 3.2 (Εκθετική Κατανομή)

Αν $X \sim E(\theta)$, βρείτε το PH-transform του X με την παράμετρο κ.

Λύση:

Η συνάρτηση επιβίωσης του X είναι

$$S(x)=e^{-\theta * x}$$

έτσι η συνάρτηση επιβίωσης παραμόρφωσης είναι

$$g\left(S(x)\right)=(e^{-\theta * x})^{1/\kappa}=e^{-\theta * x/\kappa}$$

Αυτή είναι μια καινούργια συνάρτηση επιβίωσης για Ε(θ/κ) κατανομή. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης επιβίωσης (για μια μη αρνητική ζημιά) είναι η μέση απώλεια, έτσι

$$H(\mathrm{X}) = \frac{\kappa}{\theta}$$

Ένα πρόβλημα με τη παραμόρφωση αναλογικού κινδύνου είναι το ότι δεν υπάρχει εύκολη μετάφραση του κ.

Ο μετασχηματισμός διπλής ισχύος ορίζεται με τη χρήση της παραμόρφωσης

$$g\big(S(x)\big) = 1 - \big(1 - S(x)\big)^{\kappa}$$

Αυτό το μέτρο κινδύνου έχει μια μετάφραση για τον ακέραιο κ, είναι η αναμενόμενη τιμή του μέγιστου από ένα δείγμα από κ παρατηρήσεις της ζημιάς Χ.

Υποθέτουμε ότι κ = 20, και εφαρμόζουμε την παραμόρφωση διπλής ισχύς στο παράδειγμα 3.1 παραπάνω για την ζημία. Δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό αναλυτικά, αλλά μπορούμε να κάνουμε μία αριθμητική ολοκλήρωση. Το αποτέλεσμα είναι Η(Χ)=363€.

3.1 Μετασχηματισμός Wang (Wang's Transform ή WT)

Ο Μετασχηματισμός Wang (Wang's Transform (WT) Wang (2002)) περιγράφει μια μετατοπισμένη Κανονική αρχή ασφαλίστρου (δηλαδή μια αρχή ασφαλίστρου που ακολουθεί την κανονική κατανομή), σε όρους μιας συνάρτησης παραμόρφωσης,

$$g\big(S(x)\big) = \Phi\Big(\Phi^{-1}\big(S(x)\big) + \kappa\Big)$$

Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι έχουμε μια λογαριθμοκανονική ζημιά με παραμέτρους μ = 0 και σ = 1. Η μέση ζημιά είναι 1,65 και η τυπική απόκλιση είναι 2,16. Θεωρείστε μια δεξιά ουρά πιθανότητας ζημιάς- για παράδειγμα, Pr [X > 12]. Η πραγματική πιθανότητα είναι:

$$1-\Phi\left(\frac{\log(12)-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(2,4849)=0,0065$$

Η πιθανότητα που αποδίδεται από τον μετασχηματισμό Wang, με κ = 1, βρίσκετε αφού πρώτα πάρουμε $\Phi^{-1}(0,0065) = -2,4849$. Τώρα μετακινούμε με κ = 1 για να δώσει -1,4849. Τώρα εφαρμόζουμε ξανά την Κανονική συνάρτηση κατανομής για να δώσει την παραμορφωμένη πιθανότητα ουράς

$$g\left(S(12)\right)=\Phi(-1,4849)=0,06879$$

Έτσι, η παραμορφωμένη πιθανότητα να βρίσκεται σε αυτή τη μακρινή ουρά είναι περισσότερο από δέκα φορές μεγαλύτερη από την πραγματική πιθανότητα, δίνοντας μεγαλύτερο βάρος στην ουρά στον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής. Αυτή η αρχή ασφαλίστρου λειτουργεί καλά με λογαριθμοκανονικές ζημιές, καθώς η παραμορφωμένη συνάρτηση επιβίωσης είναι η συνάρτηση επιβίωσης για μια λογαριθμοκανονική κατανομή με μετατοπισμένη παράμετρο μ.

Παράδειγμα 3.1.1 (Λογαριθμοκανονική Κατανομή)

Να δειχτεί ότι εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Wang συνάρτησης παραμόρφωσης σε μια Lognormal(μ, σ) συνάρτηση ζημιάς δίνει μια Lognormal(μ + κ*σ, σ) συνάρτηση επιβίωσης.

Λύση:

Η συνάρτηση επιβίωσης του X είναι:

$$S(x)=1-\Phi\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

Έχουμε

$$g\left(S(x)\right)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-\Phi\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)\right)+\kappa\right)$$

$$=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{-\log(x)+\mu}{\sigma}\right)\right)+\kappa\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-\log(x)+\mu}{\sigma}+\kappa\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-\log(x)+\mu+\kappa*\sigma}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{\log(x)-\mu-\kappa*\sigma}{\sigma}\right)$$

όπου είναι η παραμόρφωση για τη Lognormal (μ + κσ, σ), όπως απαιτείται.

Παράδειγμα 3.1.2 (Κανονική Κατανομή)

Αν X ακολουθεί N(μ,σ^2), βρείτε την κατανομή της ζημίας σύμφωνα με το Wang μετασχηματισμό.

Λύση:

Η συνάρτηση επιβίωσης του X είναι:

$$S(x) = 1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Έχουμε

$$g(S(x)) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)+\kappa\right)$$

$$= \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{-x+\mu}{\sigma}\right)\right)+\kappa\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-x+\mu}{\sigma}+\kappa\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-x+\mu+\kappa^*\sigma}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{x-\mu-\kappa^*\sigma}{\sigma}\right)$$

όπου είναι η παραμόρφωση για τη Normal (μ + κσ, σ).

Τα παραδείγματα 3.1.1 και 3.1.2 δείχνουν ότι ο Wang-μετασχηματισμός απώλειας παραμένει στην ίδια οικογένεια της αρχικής κατανομής απώλειας για την περίπτωση της κανονικής και λογαριθμοκανονικής απώλειας.

Ένα άλλο πλεονέκτημα του Wang μετασχηματισμού είναι ότι μπορεί να εφαρμόζεται για τη μέτρηση των κινδύνων των περιουσιακών στοιχείων του ενεργητικού, καθώς, οπότε η κ θα λάβει αρνητική αξία. Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτό μπορούν να βρεθούν στο Wang (2000).

Κεφάλαιο 4. Άλλα Μέτρα Κινδύνου

Όλα τα μέτρα κινδύνου που αναφέρονται μέχρι τώρα είναι μέτρα φερεγγυότητας - δηλαδή, μπορούν να ερμηνευθούν ως ασφάλιστρα ή κεφαλαιακές απαιτήσεις για χρηματοοικονομικούς και ασφαλιστικούς κινδύνους. Μια άλλη κατηγορία μέτρων κινδύνου είναι μέτρα μεταβλητότητας.

Στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου Μέσης Διακύμανσης, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ή η τυπική του απόκλιση λαμβάνεται ως μέτρο κινδύνου. Είναι σαφές ότι πρόκειται για τα πιο κοινά μέτρα μεταβλητότητας. Υποθέτουμε ότι μια μεγαλύτερη διακύμανση δείχνει μια πιο επικίνδυνη τυχαία μεταβλητή ζημιάς.

4.1 Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation)

Στη στατιστική, η τυπική απόκλιση που συμβολίζεται ως σ είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης και είναι ένα μέτρο που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το ποσό της μεταβολής ενός συνόλου τιμών δεδομένων.

Μια χαμηλή τυπική απόκλιση υποδηλώνει ότι τα σημεία των δεδομένων τείνουν να είναι κοντά στο μέσο όρο (που ονομάζεται επίσης η αναμενόμενη τιμή) του συνόλου, ενώ μία υψηλή τυπική απόκλιση υποδεικνύει ότι τα στοιχεία απλώνονται πάνω από ένα ευρύτερο φάσμα των τιμών.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

4.2 Διακύμανση (Variance)

Η διακύμανση μιας τ.μ. X, συμβολίζεται ως σ^2 ή $Var(X)$ και είναι η αναμενόμενη τιμή της τετραγωνικής απόκλισης της τυχαίας μεταβλητής από τη μέση τιμή, και άτυπα μετρά πόσο μακριά ένα σύνολο (τυχαίων) αριθμών απλώνεται από τη μέση τιμή του. Η διακύμανση είναι επίσης το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης, η δεύτερη κεντρική ροπή της κατανομής, και η συνδιασπορά της τυχαίας μεταβλητής με τον εαυτό της.

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Όπου μ = E(X), η αναμενόμενη αξία (μέσος) μιας τ.μ. X.

Πρέπει να έχουμε υπόψιν μας ότι αν μια συνεχής κατανομή δεν έχει αναμενόμενη τιμή, όπως στην περίπτωση της Cauchy κατανομής, δεν έχει ούτε διακύμανση. Πολλές άλλες κατανομές, για τις οποίες η αναμενόμενη τιμή δεν υπάρχει, επίσης, δεν έχουν πεπερασμένη διακύμανση, επειδή το ολοκλήρωμα στον ορισμό της διακύμανσης αποκλίνει. Ένα παράδειγμα είναι μια κατανομή Pareto της οποίας ο δείκτης k ικανοποιεί την $1 < k \leq 2$.

Η διακύμανση προφανώς δεν είναι ποτέ αρνητική καθώς τα τετράγωνα είναι πάντα είτε 0 είτε θετικά. Κάτι που κάνει τους στατιστικούς να μην χρησιμοποιούν τη διακύμανση είναι το γεγονός ότι η διακύμανση δεν χρησιμοποιεί την μονάδα μέτρησης της τ.μ. X αλλά την τετραγωνική μονάδα μέτρησης. Για αυτό το λόγο πολλοί στατιστικοί προτιμούν να χρησιμοποιούν την τυπική απόκλιση που είδαμε παραπάνω.

4.3 Ημί-διακύμανση (Semi-Variance)

Ένα άλλο μέτρο κινδύνου μεταβλητότητας είναι το μέτρο της ημί-διακύμανσης. Το κίνητρο είναι ότι μόνο η διακύμανση στη χειρότερη πλευρά είναι σημαντική στη μέτρηση του κινδύνου. Έτσι, αντί να μετρήσουμε τη διακύμανση σ^2 ως

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu_x)^2\right]$$

βλέπουμε μόνο τη χειρότερη πλευρά του μέσου όρου. Επειδή έχουμε να κάνουμε με τυχαία μεταβλητή ζημιάς, αυτό αντιστοιχεί σε υψηλότερες τιμές του X, έτσι ώστε η ημί-διακύμανση είναι:

$$\sigma_{sv}^2 = E\left[\left(\max(0, X-\mu_x)\right)^2\right]$$

που γενικά υπολογίζεται από την ημί-διακύμανση του δείγματος, για ένα μέγεθος δείγματος n,

$$sv^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\max\left(x_i - \bar{x}, 0\right)\right)^2}{n}$$

Όπου $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$

Ο μέσος όρος μπορεί να αντικατασταθεί στον υπολογισμό με μια αυθαίρετη, γνωστή τιμή οριακής παραμέτρου, τ. Αυτή μερικές φορές ονομάζεται κατώτατη ημί-διακύμανση, δηλαδή sv^2_τ:

$$sv_\tau^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\max\left(x_i - \tau, 0\right)\right)^2}{n}$$

Για μια τυχαία μεταβλητή Y κέρδους και ζημιάς, όπου μια θετική τιμή δείχνει κέρδος και μια αρνητική τιμή δείχνει ζημιά, η ημί-διακύμανση είναι γνωστή ως η ημί-διακύμανση μείωσης (downside), έτσι ώστε η οριακή ημί-διακύμανση μείωσης, για παράδειγμα, είναι

$$sv_\tau^2 = E\left[\left(\min\left(0, Y - \tau\right)\right)^2\right]$$

και τ = 0 θα ήταν ένα συχνό όριο, δηλαδή θα μετράει την διακύμανση των ζημιών χωρίς τη συνεισφορά των κερδών.

Η ημί-απόκλιση μείωσης είναι η τετραγωνική ρίζα της ημί –διακύμανσης μείωσης.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα μέτρα κινδύνου μεταβλητότητας για να κατασκευάσουμε μέτρα κινδύνου φερεγγυότητας. Εάν αφήσουμε το ν(X) να υποδηλώνει ένα μέτρο κινδύνου μεταβλητότητας, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο κινδύνου φερεγγυότητας χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, το ρ(X) = E[X] + α*ν(X).
Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει αυτή τη μορφή στην αρχή διακύμανσης και τυπικής απόκλισης υπολογισμού ασφαλίστρων. Ωστόσο, κανένα από τα μέτρα κινδύνου φερεγγυότητας αυτού του τύπου δεν είναι συνεπή.

Η αρχή της τυπικής απόκλισης ρ(X) = E[X] + α*σ(X) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της μονοτονίας και ούτε η αρχή της διακύμανσης $\rho(X) = E[X] + \alpha^*\sigma^2(X)$ ούτε η αρχή ημί-διακύμανσης $\rho(X) = E[X] + a^*\sigma^2_{sv}$ ικανοποιούν την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

4.4 Συντελεστής Βήτα (Beta Coefficient)

Ο συντελεστής βήτα (beta coefficient) είναι ένας δείκτης που περιγράφει τη σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, έστω μια μετοχή, και της μεταβλητότητας της αγοράς.

Υψηλός συντελεστής βήτα συνεπάγεται ότι η τιμή, και κατ' επέκταση η απόδοση, μιας επένδυσης επηρεάζεται σημαντικά από τις κινήσεις της αγοράς. Μικρές τιμές του συντελεστή beta σημαίνει ότι η απόδοση της επένδυσης μένει σχετικά ανεπηρέαστη από τις διακυμάνσεις της απόδοσης της αγοράς. Αρνητικό βήτα σημαίνει ότι όταν οι αποδόσεις της αγοράς είναι θετικές η απόδοση της επένδυσής θα είναι αρνητικές και το ανάποδο. Είναι δυνατόν επίσης μία επένδυση να έχει θετικό βήτα και αρνητική απόδοση ή αντίθετα, θετική απόδοση και αρνητικό βήτα.

Στον υπολογισμό του beta οι κινήσεις της αγοράς αντιπροσωπεύονται συνήθως από το γενικό δείκτη του χρηματιστηρίου, όπως ο S&P500 αν και μπορούν να χρησιμοποιηθούν κι άλλοι πιο συγκεκριμένοι δείκτες, ανάλογα με τις ανάγκες των επενδυτών.

Ο συντελεστής βήτα στηρίζεται σε δύο σημαντικούς παράγοντες:

- τη σχετική μεταβλητότητα (volatility) των αποδόσεων μιας συγκεκριμένης επένδυσης σε σχέση με τις αποδόσεις της αγοράς
- τη συσχέτιση (correlation) μεταξύ της απόδοσης της επένδυσης και της απόδοσης της αγοράς

Ο τύπος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του συντελεστή βήτα είναι ο παρακάτω:

$$beta = \frac{\operatorname{cov}\left(Z_p, Z_m\right)}{\sigma_m^2}$$

Όπου $\operatorname{cov}(Z_p, Z_m)$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ της απόδοσης της επένδυσης και της απόδοσης της αγοράς και σ^2_m είναι η διασπορά της αγοράς.

Για τις διάφορες τιμές του συντελεστή βήτα έχουμε:

Για Beta= 1

Ένας συντελεστής beta ίσος με τη μονάδα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η απόδοση μιας επένδυσής θα έχει την ίδια μεταβλητότητα με τις αποδόσεις της αγοράς. Μπορεί η απόδοση του χρεογράφου να μεταβάλλεται στο διπλάσιο σε σχέση με την αγορά (beta=2) αλλά η συσχέτιση με αυτή να είναι +0,5 (2*0,5=1).

Για Beta > 1

Σημαίνει ότι η απόδοση της επένδυσης είναι περισσότερο μεταβλητή από αυτή της αγοράς και ότι η συσχέτιση τους είναι θετική. Αυτές οι επενδύσεις είναι στενά συνδεδεμένες με την αγορά και επηρεάζονται έντονα από αυτή.

Για Beta< 1

Συντελεστής beta μικρότερος της μονάδας σημαίνει είτε ότι η απόδοση της επένδυσης είναι μικρής μεταβλητότητας (λιγότερο μεταβλητή από την απόδοση της αγοράς), είτε ότι οι αποδόσεις των δύο έχουν πολύ μικρή συσχέτιση μεταξύ τους.

Για Beta = 0

Η συσχέτιση των αποδόσεων είναι μηδέν, άρα κινούνται ανεξάρτητα. Σε περιβάλλον μηδενικού πληθωρισμού και θετικής απόδοσης, στην ουσία ο επενδυτής έχει θετικές ταμειακές ροές ανεξαρτήτως κίνησης της αγοράς.

Για Beta < 0

Αρνητικό βήτα σημαίνει ότι η απόδοση της επένδυσης κινείται αντίθετα από αυτή της αγοράς (η συσχέτιση των αποδόσεων είναι αρνητική).

Συνήθως όσο υψηλότερος είναι ο συντελεστής βήτα, τόσο μεγαλύτερο συστημικό κίνδυνο ενσωματώνει η επένδυση.

Κεφάλαιο 5. Εκτίμηση Μέτρων Κινδύνου με την Προσομοίωση Monte Carlo

Η προσομοίωση Μόντε Κάρλο παρουσιάστηκε το 1949 με την δημοσίευση των Nicholas Metropolis και Stanislaw Ulam "Η μέθοδος Μόντε Κάρλο" στο περιοδικό Journal of the American Statistics Association. Το όνομα Μόντε Κάρλο προέρχεται από την ομώνυμη πόλη του Μονακό. Η ιδέα αυτή ήταν γνωστή και νωρίτερα όπου κάποια προβλήματα στατιστικής λυνόντουσαν με τυχαία δειγματοληψία.

Οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι μια ευρεία κατηγορία υπολογιστικών αλγορίθμων που βασίζονται σε επαναλαμβανόμενη τυχαία δειγματοληψία για την επίτευξη αριθμητικών αποτελεσμάτων. Όπως αναφέραμε και παραπάνω η βασική τους ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν τυχαίες λύσεις για την επίλυση προβλημάτων που μπορεί να είναι προκαθορισμένα.

Χρησιμοποιούνται συχνά σε φυσικά και μαθηματικά προβλήματα και είναι πολύ χρήσιμα όταν είναι δύσκολο ή αδύνατο να χρησιμοποιηθούν άλλες προσεγγίσεις. Οι προσομοιώσεις Monte Carlo χρησιμοποιούνται κυρίως σε τρεις κατηγορίες προβλημάτων: βελτιστοποίηση, αριθμητική ολοκλήρωση και δημιουργία ισοπαλιών από μια κατανομή πιθανότητας.

Γενικά, οι προσομοιώσεις Monte Carlo μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος που έχει πιθανοτική ερμηνεία. Με τον νόμο μεγάλων αριθμών, τα ολοκληρώματα που περιγράφονται από την αναμενόμενη τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής μπορούν να προσεγγιστούν με τη λήψη του εμπειρικού μέσου (επίσης γνωστό ως ο μέσος του δείγματος) ανεξάρτητων δειγμάτων της μεταβλητής.

Δεν υπάρχει συναίνεση για τον ορισμό του Monte Carlo. Για παράδειγμα, ο Ripley (2008) ορίζει την πιο πιθανοποιητική μοντελοποίηση ως στοχαστική προσομοίωση, με το Monte Carlo να προορίζεται για την ολοκλήρωση Monte Carlo και τις στατιστικές δοκιμές Monte Carlo.

O Sawilowsky (2003) κάνει διάκριση μεταξύ μιας προσομοίωσης, μιας μεθόδου Monte Carlo και μιας προσομοίωσης Monte Carlo:

- Μια προσομοίωση είναι μια πλασματική αναπαράσταση της πραγματικότητας,
- Μια μέθοδος Monte Carlo είναι μια τεχνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ενός μαθηματικού ή στατιστικού προβλήματος και
- Η προσομοίωση του Monte Carlo χρησιμοποιεί επαναλαμβανόμενη δειγματοληψία για να αποκτήσει τις στατιστικές ιδιότητες κάποιου φαινομένου (ή συμπεριφοράς).

Οι μέθοδοι του Monte Carlo ποικίλλουν, αλλά τείνουν να ακολουθούν ένα συγκεκριμένο μοτίβο:

1. Καθορίστε έναν τομέα πιθανών εισροών.
2. Δημιουργήστε εισροές τυχαία από μια κατανομή πιθανότητας.
3. Εκτελέστε ένα ντετερμινιστικό υπολογισμό των εισροών
4. Συγκεντρώστε τα αποτελέσματα.

Οι χρήσεις των μεθόδων Monte Carlo απαιτούν μεγάλες ποσότητες τυχαίων αριθμών και η χρήση τους ώθησε την ανάπτυξη των γεννητριών αριθμών ψευδοτυχαίων αριθμών, οι οποίες ήταν πολύ ταχύτερες από ό, τι οι πίνακες τυχαίων αριθμών που είχαν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για τη στατιστική δειγματοληψία.

Τα πρότυπα για τα πειράματα Monte Carlo στα στατιστικά πειράματα καθορίστηκαν από τον Sawilowsky. Στην εφαρμοσμένη στατιστική, οι μέθοδοι Monte Carlo χρησιμοποιούνται γενικά για τρεις σκοπούς:

1. Για τη σύγκριση στατιστικών για μικρά δείγματα υπό ρεαλιστικές συνθήκες δεδομένων. Αν και οι ιδιότητες σφάλματος τύπου I και ισχύος των στατιστικών μπορούν να υπολογιστούν για τα δεδομένα που προέρχονται από τις κλασσικές θεωρητικές κατανομές (π.χ. κανονική κατανομή) για ασυμπτωτικές συνθήκες, πραγματικά δεδομένα δεν έχουν συνήθως τέτοιες κατανομές.
2. Να παρέχουν εφαρμογές δοκιμών υποθέσεων που είναι πιο αποτελεσματικές από τις ακριβείς δοκιμές όπως οι επαναδειγματολογικές δοκιμές (οι οποίες είναι συχνά αδύνατο να υπολογιστούν), ενώ είναι ακριβέστερες από τις κρίσιμες τιμές για ασυμπτωτικές κατανομές.
3. Για την παροχή τυχαίου δείγματος από την posterior κατανομή για Bayesian συμπεράσματα. Αυτό το δείγμα προσεγγίζει και συνοψίζει όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της posterior κατανομής.

5.1 Αξία σε Κίνδυνο (VaR)

Στις αναλογιστικές εφαρμογές χρησιμοποιούμε συχνά την προσομοίωση Monte Carlo για να εκτιμήσουμε τις κατανομές ζημιάς, ειδικά όταν οι υποκείμενες διαδικασίες είναι πολύ πολύπλοκες για αναλυτικό χειρισμό.

Χρησιμοποιώντας μία τυπική προσομοίωση Monte Carlo, παράγουμε ένα μεγάλο αριθμό από ανεξάρτητες προσομοιώσεις της τυχαίας μεταβλητής ζημιάς Χ. Ας υποθέσουμε πως παράγουμε N τέτοιες τιμές και τις διατάσσουμε από μικρότερη πως μεγαλύτερη, έτσι ώστε η $X_{(j)}$ είναι η j-κοστή μικρότερη προσομοιωμένη τιμή για το Χ. Υποθέτουμε πως η εμπειρική κατανομή του $X_{(j)}$ είναι μία εκτίμηση της πραγματικής υποκείμενης κατανομής της Χ.

Για παράδειγμα, έστω ότι χρησιμοποιούμε προσομοίωση Monte Carlo για να παράγουμε ένα δείγμα 1000 τιμών από μία τυχαία μεταβλητή ζημιάς. Μας ενδιαφέρει το $VaR_{95\%}$ και το $TVaR_{95\%}$ για την ζημιά. Έχουμε δύο σημαντικές ερωτήσεις; η πρώτη είναι: πως χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα για να εκτιμήσουμε τα μέτρα κινδύνου; η δεύτερη είναι, πόση αβεβαιότητα υπάρχει στις εκτιμήσεις;

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να εκτιμήσουμε το $VaR_{95\%}$ του Χ. Ένας προφανής εκτιμητής, θα είναι το $X_{(950)}$. Ο παραπάνω εκτιμητής είναι προφανής υποψήφιος, γιατί είναι το 95% ποσοστημόριο της εμπειρικής κατανομής, που καθορίζεται από το δείγμα Monte Carlo $\{X_{(j)}\}$ – δηλαδή το 95% των προσομοιωμένων τιμών για το Χ, είναι μικρότερες ή ίσες με το $X_{(950)}$. Από την άλλη, το 5% του δείγματος είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το $X_{(951)}$, οπότε είναι και αυτός ένα ακόμα πιθανός εκτιμητής.

Στο *Loss Models* (Klugman, Panjer and Willmot (2004)), η 'εξομαλυμένη εμπειρική εκτίμηση' που προτάθηκε, είναι να υποθέσουμε ότι το $X_{(j)}$, είναι μία εκτίμηση του $\frac{j}{(N+1)}$ ποσοστημορίου της κατανομής, και χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή για να πάρουμε το επιθυμητό ποσοστημόριο. Αυτό σημαίνει ότι το $X_{(950)}$ υποθέτεται ως εκτίμηση του $\frac{950}{1001} = 94{,}905\%$ ποσοστημόριο, και το $X_{(951)}$ υποθέτεται πως είναι εκτίμηση του $\frac{951}{1001} = 95{,}005\%$ ποσοστημορίου. Η γραμμική παρεμβολή για το 95% ποσοστημόριο θα μας δώσει το παρακάτω αποτέλεσμα

$$VaR_{95\%} \approx (0{,}05)\, X_{(950)} + (0{,}95)\, X_{(951)}$$

Γενικεύοντας, έχουμε τρεις πιθανούς εκτιμητές για το VaR_p, από ένα δείγμα από N προσομοιωμένες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής ζημιάς, όπου $N * p$ υποθέτουμε πως είναι ακέραιος

1. $X_{(N*p)}$
2. $X_{(N*p+1)}$
3. Παρεμβάλουμε μεταξύ $X_{(N*p)}$ και $X_{(N*p+1)}$, υποθέτοντας πως X_r είναι μία εκτίμηση του $\frac{r}{(N+1)}$ ποσοστημόριο – ο 'εξομαλυμένος εμπειρικός εκτιμητής'.

Για αυτούς τους εκτιμητές, δεν υπάρχει καμία εγγύηση πως κάποιος θα είναι καλύτερος από τους υπόλοιπους. Ο καθένας είναι πιθανός να παρουσιάσει κάποια μεροληψία, αλλά αυτή η μεροληψία θα είναι σχετικά μικρή για μεγάλα δείγματα. Δεν μπορούμε ούτε να είμαστε σίγουροι πως το πραγματικό p-ποσοστημόριο βρίσκεται μεταξύ των $E\left[X_{(N*p)}\right]$ και $E\left[X_{(N*p+1)}\right]$.

Στην πράξη, για τις αναλογιστικές κατανομές ζημιάς που χρησιμοποιούμαι συχνά, όπου ενδιαφερόμαστε για την δεξιά ουρά της κατανομής ζημιάς, συχνά έχουμε μικρότερη μεροληψία εάν χρησιμοποιήσουμε το $X_{(N*p+1)}$ ή τον εξομαλυμένο εμπειρικό εκτιμητή. Είναι επίσης άξιο αναφοράς πως και οι τρεις εκτιμητές είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτοι, οπότε για μεγάλα δείγματα, η μεροληψία θα είναι μικρή. Επίσης, η μεροληψία τείνει να είναι μεγαλύτερη στις μακρύτερες ουρές της κατανομής.

Ο Πίνακας 2, στο παράρτημα, είναι ένα απόσπασμα από ένα δείγμα 1000 τιμών που προσομοιωθήκαν από το παράδειγμα της Κανονικής κατανομής απώλειας, με μέσο όρο 33 και τυπική απόκλιση 109. Αυτές είναι οι 100 μεγαλύτερες προσομοιωμένες τιμές.

Φυσικά, στην πράξη, όταν χρησιμοποιούμε Monte Carlo, δεν ξέρουμε τις πραγματικές τιμές των ποσοστημορίων. Έστω ότι χρησιμοποιούμε το $X_{(N*p)}$ ως εκτίμηση του α-ποσοστημορίου. Αυτή η εκτίμηση θα είναι επιρρεπής στη μεταβλητότητα της δειγματοληψίας. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προσομοιώσεις γύρω από την εκτίμηση για να κατασκευάσουμε ένα μη-παραμετρικό διάστημα εμπιστοσύνης για το πραγματικό p-ποσοστημόριο VaR_p για την κατανομή.

Ο αριθμός των προσομοιωμένων τιμών που πέφτουν κάτω από το πραγματικό α-ποσοστημόριο, VaR_p, είναι μία τυχαία μεταβλητή M, έστω, με διωνυμική κατανομή. Κάθε προσομοιωμένη τιμή του X, ή πέφτει πιο χαμηλά από το VaR_p – με πιθανότητα p – ή γίνεται το αντίθετο με πιθανότητα $(1-p)$. Οπότε

$$M \sim binomial(N, p),$$

που σημαίνει πως:

$$E\left[M\right] = n * p$$

$$Var\left[M\right] = N * p * (1-p)$$

Έστω πως θέλουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το VaR_p. Πρώτα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $E[M]$, έστω (m_L, m_U), τέτοιο ώστε:

$$\Pr\left[m_L < M \le m_U\right] = 0{,}9$$

και περιορίζουμε το διάστημα να είναι συμμετρικό γύρο από το N*p, έτσι ώστε $m_L = N*p-\alpha$ και $m_U = N*p+\alpha$. Οπότε εάν το $F_M(x)$ είναι η διωνυμική συνάρτηση κατανομής για το Μ

$$F_M\left(N*p+\alpha\right)-F_M\left(N*p-\alpha\right)=0,9$$

χρησιμοποιώντας την Κανονική προσέγγιση στην διωνυμική κατανομή, έχουμε:

$$\alpha=\Phi^{-1}\left(\frac{1+0,9}{2}\right)*\sqrt{N*p*\left(1-p\right)}$$

Το 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $E[M]$ δίνει το εύρος των διατεταγμένων τιμών που προσομοιώθηκαν με Monte Carlo, που αντιστοιχούν σε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το VaR_p:

$$\Pr\left[VaR_p\in\left(L_{(N*p-\alpha)},L_{(N*p+\alpha)}\right)\right]=0,9$$

Στην πράξη, εάν το α δεν είναι ακέραιος αριθμός, θα στρογγυλοποιούσαμε στον επόμενο ακέραιο, αλλά και η παρεμβολή θα ήταν επίσης αποδεκτή λύση.

Η εκτίμηση για το $X_{(950)}$ από αυτό το προσομοιωμένο παράδειγμα είναι 209,2. Έστω πως θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για αυτήν την εκτίμηση. Βρίσκουμε πως:

$$\alpha=\left(\Phi^{-1}\left(0,95\right)\right)*\sqrt{1000*\left(0,95\right)*\left(0,95\right)}=\left(1,645\right)*\left(6,892\right)=11,33$$

Στρογγυλοποιώντας την τιμή του α στο 12, θα έχουμε το παρακάτω 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το $VaR_{95\%}$:

$$\left(X_{(938)},X_{(962)}\right)=\left(200,5\ ,\ 231,4\right)$$

Οπότε, γενικά, η διαδικασία για το μη παραμετρικό q-διάστημα εμπιστοσύνης για το N*p διατεταγμένο στατιστικό είναι:

1. Υπολογίζουμε το:

$$\alpha = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right) * \sqrt{N * p * (1-p)}$$

2. Στρογγυλοποιούμε το α προς τα πάνω στον επόμενο ακέραιο
3. Το q-διάστημα εμπιστοσύνης είναι: $\left(X_{(N*p-\alpha)}, X_{(N*p+\alpha)}\right)$

Για να είναι η Κανονική προσέγγιση έγκυρη, χρειαζόμαστε N*(1-p) (ή N*p εάν είναι μικρότερο) να είναι τουλάχιστον κοντά στο 5.

Ένας άλλος τρόπος να ερευνήσουμε την αβεβαιότητα, θα ήταν να επαναλάβουμε τις προσομοιώσεις πολλές φορές, δηλαδή να προσομοιώσουμε έναν μεγάλο αριθμό δειγμάτων, R, το καθένα μεγέθους N. Το κάθε προσομοιωμένο δείγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε το VaR. θέτουμε $\widehat{VaR}_p(i)$ την εκτίμηση από το i-κοστό προσομοιωμένο δείγμα. Οι R τιμές των $\widehat{VaR}_p(i)$ μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα. δείγματα. Τότε θα χρησιμοποιούσαμε τον μέσο αυτών ως το εκτιμώμενο μέτρο κινδύνου:

$$\widehat{VaR}_p = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} \widehat{VaR}_p(i)$$

και η δειγματική τυπική απόκλιση του μέτρου κινδύνου είναι μία εκτίμηση του τυπικού σφάλματος:

$$\hat{s}_{VaR} = \frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^{R} \left(\widehat{VaR}_p(i) - VaR_p\right)^2$$

Έπειτα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δειγματική τυπική απόκλιση για να κατασκευάσουμε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης για το μέτρο κινδύνου, για παράδειγμα, για ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης θα χρησιμοποιούσαμε το:

$$(\widehat{VaR}_p - 1{,}64\hat{s}_{VaR}, \widehat{VaR}_p + 1{,}64\hat{s}_{VaR})$$

Μπορούμε να το δείξουμε αυτό με το $Normal(33, 109^2)$ παράδειγμα. Με 1000 επαναλήψεις, η κάθε μία με μέγεθος 1000, βρίσκουμε πως οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των Monte Carlo εκτιμητών είναι:

$$\bar{X}_{(950)} = 211,53 \qquad s_{X(950)} = 7,30$$

$$\bar{X}_{(951)} = 212,61 \qquad s_{X(951)} = 7,34$$

$$\text{Μ}\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma\ \text{Ε}\xi o\mu\alpha\lambda\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma\ \text{Ε}\kappa\tau\iota\mu\eta\tau\acute{\eta}\varsigma = 212,56$$

Η πραγματική τιμή για το 95% ποσοστημόριο είναι 212,29: ο εξομαλυμένος εκτιμητής έχει ένα σχετικό σφάλμα που κατά μέσο όρο είναι 0,13%. Χρησιμοποιώντας το $X_{(950)}$ θα έχουμε σχετικό σφάλμα που κατά μέσο όρο θα είναι -0,36%, και η χρήση του $X_{(951)}$ μας δίνει σχετικό σφάλμα που κατά μέσο όρο θα είναι 0,15%.

Παρόμοια, οι 99% εκτιμητές, αυτήν την φορά χρησιμοποιώντας 5000 επαναλήψεις του δείγματος, θα είναι.

$$\bar{X}_{(990)} = 284,41 \qquad s_{X(990)} = 12,5$$

$$\bar{X}_{(991)} = 288,41 \qquad s_{X(991)} = 12,9$$

$$\text{Μ}\acute{\varepsilon}\sigma o\varsigma\ \text{Ε}\xi o\mu\alpha\lambda\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma\ \text{Ε}\kappa\tau\iota\mu\eta\tau\acute{\eta}\varsigma = 288,37$$

που είναι συγκρίσιμο αποτέλεσμα με την πραγματική τιμή του 99% ποσοστημορίου, που είναι 286,57.

Εάν χρησιμοποιήσουμε το $X_{(951)}$ ως τον εκτιμητή για το $VaR_{95\%}$, η μέση τιμή είναι 212,61 και η τυπική απόκλιση από τις 1000 προσομοιώσεις είναι $s_{VaR_{95\%}} = 7{,}34$. Αυτό μας δίνει ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το $VaR_{95\%}$ το οποίο θα είναι το $(200{,}57\,, 224{,}65)$, που είναι παρόμοιο με το μη-παραμετρικό 90% διάστημα εμπιστοσύνης, αλλά κατασκευάστηκε πιο δύσκολα επειδή έπρεπε να πάρουμε 999 παραπάνω προσομοιωμένα δείγματα, το καθένα με 1000 προσομοιωμένες τιμές ζημιάς.

5.2 Αξία σε Κίνδυνο Ουράς (TVaR)

Το TVaR είναι ο μέσος των χειρότερων 100(1-p)% από την κατανομή ζημιάς, οπότε εκτιμάμε το TVaR χρησιμοποιώντας τον μέσο των χειρότερων 100(1-p)% προσομοιώσεων, εάν το $N * (1-p)$ είναι ακέραιος.

$$\widehat{\mathrm{TVaR}}_p = \frac{1}{N*(1-p)} \sum_{j=N*p+1}^{N} X_{(j)}$$

Για παράδειγμα, οι τιμές στον Πίνακα 1, στο παράρτημα, δείχνουν τις χειρότερες 100 προσομοιώσεις από ένα δείγμα $N = 1000$. Για να εκτιμήσουμε το 95% TVaR, υπολογίζουμε τον μέσο όρο από τις χειρότερες 50 τιμές και παίρνουμε ως αποτέλεσμα 260,68€. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι συγκρίσιμο με την πραγματική τιμή 257,83€ του παραδείγματος 2.5.2.

Ο πιο προφανής υποψήφιος για να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση του εκτιμητή του TVaR, είναι $\frac{s_1}{\sqrt{N*(1-p)}}$, όπου s_1 είναι η τυπική απόκλιση των χειρότερων 100(1-p)% προσομοιωμένων ζημιών:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{N*(1-p)-1} \sum_{\iota=N*p+1}^{N} \left(X_{(j)} - \widehat{\mathrm{TVaR}}_p\right)^2}$$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τύπο, επειδή σε γενικές γραμμές, ξέρουμε πως η διακύμανση του μέσου ενός δείγματος είναι ίση με την δειγματική διακύμανση διαιρεμένη με το μέγεθος του δείγματος. Αυτό όμως, κατά μέσο όρο, θα υποτιμήσει την αβεβαιότητα. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι το $V\left[\widehat{\mathrm{TVaR}}_p\right]$. Μπορούμε να δεσμεύσουμε πάνω στον εκτιμητή ποσοστημορίων $\widehat{VaR}_p$, έτσι ώστε:

$$Var\left[\widehat{\mathrm{TVaR}}_p\right] = E\left[Var\left[\widehat{\mathrm{TVaR}}_p|\widehat{VaR}_p\right]\right] + Var\left[E\left[\widehat{\mathrm{TVaR}}_p|\widehat{VaR}_p\right]\right]$$

Το plug-in $\frac{s_1{}^2}{N*(1-p)}$ εκτιμάει τον πρώτο όρο: χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν μας και τον δεύτερο όρο, που επηρεάζει την επίδραση της αβεβαιότητας στο ποσοστημόριο.

Ένας τρόπος να επιτρέψουμε και τους δύο όρους, είναι χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική συνάρτηση επιρροής των Manistre and Hancock (2005). Η διακύμανση του εκτιμητή του TVaR μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας

$$s^2_{\mathrm{TVaR}_p} = \frac{s_1{}^2 + p * (\widehat{\mathrm{TVaR}}_p + \widehat{VaR}_p)}{N * (1-p)}$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 1, στο παράρτημα, με $\mathrm{p} = 0{,}95$, για παράδειγμα, έχουμε $\widehat{VaR}_{95\%} = 212{,}56$ σύμφωνα με τον εξομαλυμένο εκτιμητή, και το 95% TVaR υπολογίζεται όπως πάνω 260,68€. Η τυπική απόκλιση των μεγαλύτερων 50 τιμών στον Πίνακα 1 είναι 37,74. Επίσης, $N = 1000$, $p = 0{,}95$ οπότε η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι:

$$\sqrt{\frac{37{,}73^2 + 0{,}95*(260{,}68 - 212{,}56)}{50}} = 5{,}42$$

Παρατηρήστε πως ο πρώτος όρος του παραπάνω τύπου είναι το ίδιο $\frac{s_1}{\sqrt{N*(1-p)}}$ που προτείναμε προηγουμένως; ο δεύτερος όρος επιτρέπει την ύπαρξη της αβεβαιότητας στο ποσοστημόριο.

Μία άλλη προσέγγιση για το τυπικό σφάλμα, είναι να επαναλάβουμε την προσομοίωση δείγματος πολλές φορές και να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του εκτιμητή, όπως θα κάναμε για το ποσοστημόριο. Αυτό είναι αποτελεσματικό, αλλά ακριβό επειδή χρειάζεται περισσότερη προσομοίωση.

Κεφάλαιο 6. Συμφωνίες της Βασιλείας

Οι Συμφωνίες της Βασιλείας αναφέρονται στις Συμφωνίες Τραπεζικής Εποπτείας - Βασιλεία I (Basel I), Βασιλεία II (Basel II), Βασιλεία III (Basel III) και Βασιλεία IV (Basel IV) - που εκδόθηκαν από την Επιτροπή Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (Basel Committee on Banking Supervision - BCBS). Ονομάζονται Συμφωνίες της Βασιλείας καθώς η BCBS διατηρεί τη γραμματεία της στην Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών στη Βασιλεία της Ελβετίας και η επιτροπή συνεδριάζει κανονικά εκεί. Οι Συμφωνίες της Βασιλείας είναι ένα σύνολο συστάσεων για κανονισμούς στον τραπεζικό κλάδο.

Παλαιότερα, η Επιτροπή της Βασιλείας αποτελούνταν από εκπροσώπους από τις κεντρικές τράπεζες και τις ρυθμιστικές αρχές των χωρών που ανήκουν στο G10, συν το Λουξεμβούργο και την Ισπανία. Από το 2009, όλες οι άλλες μεγάλες οικονομίες του G-20 εκπροσωπούνται, καθώς και ορισμένες άλλες μεγάλοι τραπεζικοί τόποι όπως το Χονγκ Κονγκ και η Σιγκαπούρη.

Η επιτροπή δεν έχει την εξουσία να εφαρμόζει τις συστάσεις, αν και οι περισσότερες χώρες μέλη καθώς και ορισμένες άλλες χώρες τείνουν να εφαρμόζουν τις πολιτικές της επιτροπής. Αυτό σημαίνει ότι οι συστάσεις επιβάλλονται μέσω εθνικών (ή πανευρωπαϊκών) νόμων και κανονισμών, παρά ως αποτέλεσμα των συστάσεων της επιτροπής - έτσι μπορεί να περάσει κάποιο χρονικό διάστημα μεταξύ των συστάσεων και της εφαρμογής ως νόμου σε εθνικό επίπεδο.

6.1 Συμφωνία Βασιλείας I

Η συμφωνία της Βασιλείας I είναι οι συζητήσεις από τραπεζίτες, από όλο τον κόσμο, και το 1988, η Επιτροπή Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία στη Βασιλεία , Ελβετία, δημοσίευσε ένα σύνολο ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων για τις τράπεζες. Αυτό είναι γνωστό και ως Συμφωνία της Βασιλείας του 1988 και εφαρμόστηκε νομικά στις χώρες που ανήκουν στο γκρουπ G10 το 1992. Ένα νέο σύνολο κανόνων γνωστό ως Βασιλεία II αναπτύχθηκε αργότερα με την πρόθεση να αντικαταστήσει τις συμφωνίες της Βασιλείας I.

Ωστόσο, κάποιοι επέκριναν ότι επέτρεψαν στις τράπεζες να αναλάβουν πρόσθετους κινδύνους, οι οποίοι θεωρήθηκαν ως μέρος της αιτίας της αμερικανικής χρηματοπιστωτικής κρίσης που ξεκίνησε το 2008. Στην πραγματικότητα, οι ρυθμιστικές αρχές των τραπεζών στις ΗΠΑ αποφάσισαν να απαιτήσουν από μια τράπεζα να ακολουθήσει το σύνολο των κανόνων (Βασιλεία I ή Βασιλεία II) δίνοντας την επιλογή στην τράπεζα. Εξαιτίας αυτού αναμενόταν ότι μόνο οι λίγες πολύ μεγάλες αμερικανικές τράπεζες θα λειτουργούσαν σύμφωνα με τους κανόνες της Βασιλείας II, ενώ οι άλλες θα ρυθμίζονται από το πλαίσιο της συμφωνίας της Βασιλείας. Η Βασιλεία III αναπτύχθηκε ως απάντηση στην οικονομική κρίση, δεν αντικαθιστά ούτε τη Βασιλεία I ή II, αλλά επικεντρώνεται σε διάφορα ζητήματα που σχετίζονται κυρίως με τον τραπεζικό κίνδυνο.

6.1.1 Κύριο πλαίσιο

Η Βασιλεία I, δηλαδή η συμφωνία της Βασιλείας του 1988, επικεντρώνεται πρωτίστως στον πιστωτικό κίνδυνο και την κατάλληλη στάθμιση κινδύνου των περιουσιακών στοιχείων. Τα περιουσιακά στοιχεία των τραπεζών ταξινομήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με τον πιστωτικό κίνδυνο, έχοντας συντελεστές στάθμισης κινδύνου. Οι συντελεστές στάθμισης κινδύνου είναι οι παρακάτω: 0% (π.χ. μετρητά, χρυσό) , 20% (εγγυήσεις υπό μορφή στεγαστικών δανείων με την υψηλότερη βαθμολογία AAA), 50% (ομόλογα δημοτικών εσόδων, στεγαστικά δάνεια), 100% (για παράδειγμα, το εταιρικό χρέος) και κάποια περιουσιακά στοιχεία που δίδονται χωρίς αξιολόγηση. Οι τράπεζες με διεθνή παρουσία υποχρεούνται να κατέχουν κεφάλαιο ίσο με το 8% των σταθμισμένων περιουσιακών στοιχείων τους (risk-weighted assets - RWA).

Οι τράπεζες οφείλουν επίσης να αναφέρουν στοιχεία εκτός ισολογισμού, όπως πιστωτικές επιστολές και παράγωγα. Όλα αυτά επηρεάζουν τα σταθμισμένα περιουσιακά στοιχεία. Η έκθεση υποβάλλεται συνήθως στην Ομοσπονδιακή Τράπεζα Επενδύσεων.

Από το 1988, το πλαίσιο αυτό εισήχθη σταδιακά στις χώρες μέλη του G10, που αποτελείται από 13 χώρες από το 2013: Βέλγιο, Καναδά, Γαλλία, Γερμανία, Ιταλία, Ιαπωνία, Λουξεμβούργο, Ολλανδία, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία, Ηνωμένο Βασίλειο και ΗΠΑ.

Πάνω από 100 άλλες χώρες υιοθέτησαν, τουλάχιστον επιφανειακά, τις αρχές που ορίζονται στη Βασιλεία I. Η αποτελεσματικότητα με την οποία εφαρμόζονται οι αρχές διαφέρει, ακόμη και εντός των εθνών του G10.

6.2 Συμφωνία Βασιλείας ΙΙ

Η Βασιλεία II είναι η δεύτερη από τις Συμφωνίες της Βασιλείας (που επεκτάθηκε και αντικαταστάθηκε εν μέρει από τη Βασιλεία III), οι οποίες αποτελούν συστάσεις για την τραπεζική νομοθεσία και τους κανονισμούς που εξέδωσε η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (BCBS).

Η Συμφωνία της Βασιλείας II δημοσιεύθηκε αρχικά τον Ιούνιο του 2004 και αποσκοπούσε στην τροποποίηση των διεθνών τραπεζικών προτύπων που ελέγχουν το κεφάλαιο που έπρεπε να κατέχουν οι τράπεζες για να προφυλαχθούν από τους χρηματοοικονομικούς και λειτουργικούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν οι τράπεζες.

Οι κανονισμοί αυτοί αποσκοπούσαν στο να διασφαλίσουν ότι όσο σημαντικότερο είναι ο κίνδυνος που μια τράπεζα είναι εκτεθειμένη, τόσο μεγαλύτερο είναι το ποσό κεφαλαίου που πρέπει να διαθέτει η τράπεζα για να διαφυλάξει τη φερεγγυότητά της και τη συνολική οικονομική σταθερότητά της. Η Βασιλεία II προσπάθησε να το επιτύχει με τη θέσπιση απαιτήσεων διαχείρισης κινδύνου και κεφαλαίου, προκειμένου να διασφαλίσει ότι μια τράπεζα διαθέτει επαρκή κεφάλαια για τον κίνδυνο που μια τράπεζα είναι εκτεθειμένη μέσω των δανειστικών, επενδυτικών και εμπορικών δραστηριοτήτων της. Έμφαση δόθηκε στη διατήρηση επαρκούς συνέπειας των κανονισμών ώστε να περιοριστεί η ανταγωνιστική ανισότητα μεταξύ των διεθνώς ενεργών τραπεζών.

Η Βασιλεία II εφαρμόστηκε τα έτη πριν από το 2008 και τέθηκε σε εφαρμογή στις αρχές του 2008 στις περισσότερες μεγάλες οικονομίες, η χρηματοοικονομική κρίση του 2008 παρενέβη πριν η Βασιλεία II μπορούσε να καταστεί πλήρως αποτελεσματική. Καθώς γινόταν η διαπραγμάτευση της συμφωνίας της Βασιλείας III, η κρίση ήταν έπαιξε μεγάλο ρόλο και ως εκ τούτου προβλέφθηκαν και υιοθετήθηκαν πιο αυστηρά πρότυπα σε ορισμένες βασικές χώρες, μεταξύ άλλων στην Ευρώπη και τις ΗΠΑ.

6.2.1 Σκοπός

Η τελική έκδοση της συμφωνίας της Βασιλείας II έχει ως στόχο:

- Την εξασφάλιση ότι η κατανομή κεφαλαίου είναι περισσότερο ευαίσθητη στον κίνδυνο.

- Την ενίσχυση των απαιτήσεων γνωστοποίησης που θα επιτρέπουν στους συμμετέχοντες στην αγορά να εκτιμούν την κεφαλαιακή επάρκεια ενός ιδρύματος.
- Την εξασφάλιση του ποσοτικού προσδιορισμού του πιστωτικού κινδύνου, του λειτουργικού κινδύνου και του κινδύνου αγοράς βάσει δεδομένων και επίσημων τεχνικών.
- Την προσπάθεια μεγαλύτερης ευθυγράμμισης των οικονομικών και κανονιστικών κεφαλαίων για τη μείωση του πεδίου εφαρμογής του ρυθμιστικού αρμπιτράζ.

Ενώ η τελική συμφωνία έχει ασχοληθεί σε μεγάλο βαθμό με το θέμα του ρυθμιστικού αρμπιτράζ, εξακολουθούν να υπάρχουν τομείς όπου οι κανονιστικές κεφαλαιακές απαιτήσεις θα αποκλίνουν από το οικονομικό κεφάλαιο.

6.2.2 Η συμφωνία σε λειτουργία: Τρεις πυλώνες

Η Βασιλεία II χρησιμοποιεί μια έννοια "τριών πυλώνων":

1. ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (αντιμετώπιση του κινδύνου),
2. εποπτική επισκόπηση και
3. πειθαρχία της αγοράς.

Η συμφωνία της Βασιλείας Ι αφορούσε μόνο τμήματα καθενός από αυτούς τους πυλώνες. Για παράδειγμα: όσον αφορά τον πρώτο πυλώνα της Βασιλείας II, μόνο ένας κίνδυνος, ο πιστωτικός κίνδυνος, εξετάστηκε με απλό τρόπο, ενώ ο κίνδυνος αγοράς ήταν μια δευτερεύουσα σκέψη και ο λειτουργικός κίνδυνος δεν αντιμετωπίστηκε καθόλου.

6.2.2.1 Ο πρώτος πυλώνας: Ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις

Ο πρώτος πυλώνας αφορά τη διατήρηση του ρυθμιστικού κεφαλαίου που υπολογίζεται για τρεις βασικούς κινδύνους που αντιμετωπίζει μια τράπεζα: τον πιστωτικό κίνδυνο, τον λειτουργικό κίνδυνο και τον κίνδυνο αγορά. Οι άλλοι κίνδυνοι δεν θεωρούνται πλήρως ποσοτικοποιήσιμοι σε αυτό το στάδιο.

1. Ο πιστωτικός κίνδυνος μπορεί να υπολογιστεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους διαφορετικού βαθμού πολυπλοκότητας, δηλαδή την τυποποιημένη προσέγγιση, το IRB Foundation, το Advanced IRB και το General IB2 Restriction. Το IRB αντιπροσωπεύει την "εσωτερική προσέγγιση βάσει αξιολόγησης" (Internal Rating-Based Approach).
2. Για τον επιχειρησιακό κίνδυνο, υπάρχουν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις - προσέγγιση βασικού δείκτη, τυποποιημένη προσέγγιση και η προσέγγιση εσωτερικής μέτρησης.
3. Για τον κίνδυνο αγοράς, η προτιμώμενη προσέγγιση είναι η VaR (αξία σε κίνδυνο).

Καθώς οι συστάσεις της Βασιλείας II γίνονται σταδιακά από τον τραπεζικό κλάδο, θα μεταφερθούν από τις τυποποιημένες απαιτήσεις σε πιο εξειδικευμένες και ειδικές απαιτήσεις που έχουν αναπτυχθεί για κάθε κατηγορία κινδύνου από κάθε μεμονωμένη τράπεζα. Η ανοδική τάση για τις τράπεζες που αναπτύσσουν τα δικά τους ειδικά συστήματα μέτρησης κινδύνου είναι ότι θα ανταμείβονται με δυνητικά χαμηλότερες κεφαλαιακές απαιτήσεις.

6.2.2.2 Ο δεύτερος πυλώνας: Εποπτική επισκόπηση

Πρόκειται για ρυθμιστική απάντηση στον πρώτο πυλώνα, παρέχοντας στους ρυθμιστικούς φορείς καλύτερα «εργαλεία» σε σχέση με τα προηγούμενα διαθέσιμα. Παρέχει επίσης ένα πλαίσιο αντιμετώπισης του συστημικού κινδύνου, του κινδύνου συνταξιοδότησης, του κινδύνου συγκέντρωσης, του στρατηγικού κινδύνου, του κινδύνου φήμης, του κινδύνου ρευστότητας και του νομικού κινδύνου, ο οποίος συνδυάζεται με τον τίτλο του υπολειπόμενου κινδύνου. Οι τράπεζες μπορούν να αναθεωρήσουν το σύστημα διαχείρισης κινδύνων τους.

6.2.2.3 Ο τρίτος πυλώνας: Η πειθαρχία της αγοράς

Ο πυλώνας αυτός αποσκοπεί στη συμπλήρωση των ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων και της διαδικασίας ελέγχου εποπτείας, με την ανάπτυξη ενός συνόλου απαιτήσεων γνωστοποίησης που θα επιτρέψουν στους συμμετέχοντες στην αγορά να εκτιμήσουν την κεφαλαιακή επάρκεια ενός ιδρύματος.

Η πειθαρχία της αγοράς συμπληρώνει τον κανονισμό, καθώς η ανταλλαγή πληροφοριών διευκολύνει την αξιολόγηση της τράπεζας από άλλους, συμπεριλαμβανομένων επενδυτών, αναλυτών, πελατών, άλλων τραπεζών και οργανισμών αξιολόγησης, γεγονός που οδηγεί σε καλή εταιρική διακυβέρνηση.

Ο στόχος του τρίτου πυλώνα είναι να επιτραπεί η λειτουργία της πειθαρχίας της αγοράς, απαιτώντας από τα ιδρύματα να αποκαλύπτουν λεπτομέρειες σχετικά με το πεδίο εφαρμογής, το κεφάλαιο, τις εκθέσεις κινδύνου, τις διαδικασίες αξιολόγησης κινδύνου και την κεφαλαιακή επάρκεια του ιδρύματος. Πρέπει να είναι συνεπής με τον τρόπο με τον οποίο η ανώτατη διοίκηση, συμπεριλαμβανομένου του συμβουλίου, αξιολογεί και διαχειρίζεται τους κινδύνους του ιδρύματος.

Όταν οι συμμετέχοντες στην αγορά έχουν επαρκή κατανόηση των δραστηριοτήτων μιας τράπεζας και των ελέγχων που διαθέτει για τη διαχείριση της έκθεσης της στον κίνδυνο, είναι σε θέση να διακρίνουν καλύτερα τις τραπεζικές οργανώσεις έτσι ώστε να ανταμείβουν όσους διαχειρίζονται με σύνεση τους κινδύνους τους και τιμωρούν εκείνους που δεν το κάνουν.

Αυτές οι γνωστοποιήσεις πρέπει να γίνονται τουλάχιστον δύο φορές το χρόνο, με εξαίρεση τις ποιοτικές γνωστοποιήσεις που παρέχουν περίληψη των γενικών στόχων και πολιτικών διαχείρισης κινδύνων που μπορούν να γίνονται ετησίως.

Τα θεσμικά όργανα καλούνται επίσης να δημιουργήσουν μια επίσημη πολιτική σχετικά με το τι θα αποκαλύπτουν και τον έλεγχο τους, μαζί με την επικύρωση και τη συχνότητα αυτών των γνωστοποιήσεων. Γενικά, οι γνωστοποιήσεις του τρίτου πυλώνα ισχύουν για το ανώτατο ενοποιημένο επίπεδο του τραπεζικού ομίλου στον οποίο εφαρμόζεται το πλαίσιο της Βασιλείας ΙΙ.

6.3 Συμφωνία Βασιλείας ΙΙΙ

Η Βασιλεία ΙΙΙ είναι ένα παγκόσμιο, εθελοντικό ρυθμιστικό πλαίσιο για την επάρκεια τραπεζικών κεφαλαίων, τις δοκιμασίες καταπόνησης και τον κίνδυνο ρευστότητας στην αγορά. Συμφωνήθηκε από τα μέλη της επιτροπής τραπεζικής εποπτείας της Βασιλείας κατά την περίοδο 2010-2011 και είχε προγραμματιστεί να εισαχθεί από το 2013 έως το 2015. Ωστόσο, αλλαγές από την 1η Απριλίου 2013 επέκτειναν την εφαρμογή έως τις 31 Μαρτίου 2018 και επεκτάθηκαν και πάλι στις 31 Μαρτίου 2019.

Η τρίτη δόση των συμφωνιών της Βασιλείας αναπτύχθηκε ως απάντηση στις ελλείψεις της δημοσιονομικής ρύθμισης που αποκαλύφθηκε από την οικονομική κρίση της περιόδου 2007-2008. Η Βασιλεία III αποσκοπεί στην ενίσχυση των κεφαλαιακών απαιτήσεων της τράπεζας με την αύξηση της ρευστότητας των τραπεζών και τη μείωση της μόχλευσης των τραπεζών.

6.3.1 Βασικές Αρχές

Η Βασιλεία III αποσκοπεί στην ενίσχυση των απαιτήσεων του βασικού κανονισμού της Βασιλείας II σχετικά με το ελάχιστο κεφάλαιο της τράπεζας.

6.3.1.1 Απαιτήσεις Κεφαλαίου

Ο αρχικός κανόνας της Βασιλείας III από το 2010 προέβλεπε ότι οι τράπεζες θα αυτοχρηματοδοτούνται με 4,5% των ιδίων κεφαλαίων (αύξηση από 2% στη Βασιλεία II) των σταθμισμένων περιουσιακών στοιχείων.

Επιπλέον, η Βασιλεία III εισήγαγε δύο πρόσθετα κεφαλαιακά αποθέματα:

- Ένα υποχρεωτικό "αποθεματικό διατήρησης κεφαλαίου", που αντιστοιχεί στο 2,5% των σταθμισμένων περιουσιακών στοιχείων.
- Ένα "διακριτικό αντικυκλικό ρυθμιστικό στοιχείο", το οποίο επιτρέπει στις εθνικές ρυθμιστικές αρχές να απαιτούν επιπλέον 2,5% του κεφαλαίου κατά τη διάρκεια περιόδων υψηλής πιστωτικής επέκτασης.

6.3.1.2 Αναλογία Μόχλευσης

Η Βασιλεία III εισήγαγε έναν ελάχιστο δείκτη μόχλευσης. Πρόκειται για δείκτη μόχλευσης χωρίς βάση στον κίνδυνο. Οι τράπεζες αναμένεται να διατηρήσουν δείκτη μόχλευσης άνω του 3% βάσει της Βασιλείας III.

Τον Ιούλιο του 2013, η Ομοσπονδιακή Τράπεζα των ΗΠΑ ανακοίνωσε ότι ο ελάχιστος δείκτης μόχλευσης της Βασιλείας III θα ήταν 6% για 8 τράπεζες με συστημική σημασία και 5% για ασφαλισμένες χρηματοπιστωτικές εταιρείες.

6.3.1.3 Απαιτήσεις Ρευστότητας

Η Βασιλεία III εισήγαγε δύο απαιτούμενες αναλογίες ρευστότητας.

- Ο «δείκτης κάλυψης ρευστότητας» απαιτεί από μια τράπεζα να διαθέτει επαρκή ρευστά περιουσιακά στοιχεία υψηλής ποιότητας για να καλύψει τις συνολικές καθαρές εκροές μετρητών της για διάστημα πάνω 30 των ημερών.
- Ο «Δείκτης Καθαρών Σταθερών Χρηματοδοτήσεων» απαιτεί το διαθέσιμο ποσό σταθερής χρηματοδότησης να υπερβαίνει το απαιτούμενο ποσό σταθερής χρηματοδότησης για πάνω από ένα χρόνο εκτεταμένου στρες.

6.4 Συμφωνία Βασιλείας IV

Η Βασιλεία IV είναι ένας αμφισβητούμενος όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αλλαγές που συμφωνήθηκαν το 2016 και το 2017 στα διεθνή τραπεζικά πρότυπα γνωστά ως Συμφωνίες της Βασιλείας. Οι ρυθμιστικές αρχές υποστηρίζουν ότι αυτές οι αλλαγές απλώς συμπληρώνουν τις μεταρρυθμίσεις της Βασιλείας III, που συμφωνήθηκαν αρχικά το 2010-11, αν και οι περισσότερες από τις μεταρρυθμίσεις της Βασιλείας III συμφωνήθηκαν λεπτομερώς εκείνη την εποχή. Οι επικριτές της μεταρρύθμισης, ειδικότερα εκείνοι του τραπεζικού κλάδου, ισχυρίζονται ότι η Βασιλεία IV απαιτεί σημαντική αύξηση του κεφαλαίου και θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ένας ξεχωριστός γύρος μεταρρυθμίσεων.

6.4.1 Απαιτήσεις

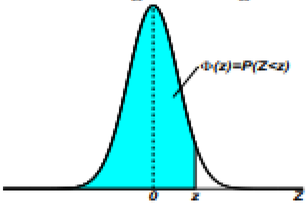
Η Βασιλεία IV εισάγει αλλαγές που περιορίζουν τη μείωση του κεφαλαίου που μπορεί να προκύψει από τη χρήση των εσωτερικών μοντέλων με βάση της προσέγγισης εσωτερικών αξιολογήσεων από τις τράπεζες. Αυτό περιλαμβάνει:

- Ένα τυποποιημένο πάτωμα, έτσι ώστε η κεφαλαιακή απαίτηση να είναι πάντα τουλάχιστον 72,5% της απαίτησης βάσει της τυποποιημένης προσέγγισης.
- Η ταυτόχρονη μείωση των τυποποιημένων συντελεστών στάθμισης για τα στεγαστικά δάνεια χαμηλού κινδύνου.
- Η απαίτηση από τις τράπεζες να πληρούν υψηλότερες μέγιστες αναλογίες μόχλευσης (ένα αρχικό ανώτατο όριο μόχλευσης αναμένεται να καθοριστεί ως μέρος της ολοκλήρωσης του πακέτου Basel III).
- Ένας υψηλότερος δείκτης μόχλευσης για τις Παγκόσμιες Συστηματικά Σημαντικές Τράπεζες, με την αύξηση ίση με το 50% του αναπροσαρμοσμένου με βάση τον κίνδυνο δείκτη κεφαλαίου.
- Λεπτομερέστερη γνωστοποίηση των αποθεματικών και άλλων χρηματοοικονομικών στατιστικών.

Παράρτημα

Πίνακας 1: Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονικής Κατανομής.

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$z = 1.28 \iff \Phi(z) = 0.90$

$z = 1.65 \iff \Phi(z) = 0.95$

$z = 2.33 \iff \Phi(z) = 0.99$

$z = 3.08 \iff \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Πίνακας 2: Είναι ένα απόσπασμα από ένα δείγμα 1000 τιμών που προσομοιάστηκαν από το παράδειγμα της Κανονικής κατανομής απώλειας, με μέσο όρο 33 και τυπική απόκλιση 109

$L_{(901)}$ to $L_{(910)}$									
169.1	170.4	171.3	171.9	172.3	173.3	173.8	174.3	174.9	175.9
$L_{(911)}$ to $L_{(920)}$									
176.4	177.2	179.1	179.7	180.2	180.5	181.9	182.6	183.0	183.1
$L_{(921)}$ to $L_{(930)}$									
183.3	184.4	186.9	187.7	188.2	188.5	191.8	191.9	193.1	193.8
$L_{(931)}$ to $L_{(940)}$									
194.2	196.3	197.6	197.8	199.1	200.5	200.5	200.5	202.8	202.9
$L_{(941)}$ to $L_{(950)}$									
203.0	203.7	204.4	204.8	205.1	205.8	206.7	207.5	207.9	209.2
$L_{(951)}$ to $L_{(960)}$									
209.5	210.6	214.7	217.0	218.2	226.2	226.3	226.9	227.5	227.7
$L_{(961)}$ to $L_{(970)}$									
229.0	231.4	231.6	233.2	237.5	237.9	238.1	240.3	241.0	241.3
$L_{(971)}$ to $L_{(980)}$									
241.6	243.8	244.0	247.2	247.8	248.8	254.1	255.6	255.9	257.4
$L_{(981)}$ to $L_{(990)}$									
265.0	265.0	268.9	271.2	271.6	276.5	279.2	284.1	284.3	287.8
$L_{(991)}$ to $L_{(1000)}$									
287.9	298.7	301.6	305.0	313.0	323.8	334.5	343.5	350.3	359.4

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Ελευθεριάδης, Ι.(χ.χ). *Ανάλυση Επιχειρηματικών Κινδύνων*, ανακτήθηκε από http://compus.uom.gr/BA129/document/Dialeksh_01/risk_analysis.pdf

Ηλιόπουλος, Γ. (1988). *Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων*. Αθήνα: Σταμούλη.

Κουτσόπουλος, Κ. Ι. (1999). *Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος Ι Θεωρία των Κινδύνων*. Αθήνα: Συμμετρία.

Μελάς Κ., (2008). *Εισαγωγή στη τραπεζική χρηματοοικονομική διοικητική*. Αθήνα: Εξάντας.

Μπαμπινιώτης, Γ. (2005). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας. 2η έκδοση.

Νεκτάριος, Μ. (2010). *Διοικητική Κινδύνων και Ασφαλίσεις Επιχειρήσεων*. Αθήνα: Σταμούλη.

Νεκτάριος, Μ. (2003). *Εισαγωγή στην Ιδιωτική Ασφάλιση*. Αθήνα: Forum.

Πριναράκης, Ε. Μ. (1999). *Γενικές Αρχές της Ιδιωτικής Ασφαλίσεως*. Αθήνα: Forum.

Χατζόπουλος, Φ. Π. (2007). *Ασφαλίσεις Ζωής και Υγείας*. Αθήνα: Συμμετρία.

Ξένη

Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). *On the coherence of expected shortfall*. Journal of Banking and Finance.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., and Heath, D. (1997). *Thinking coherently*. RISK.

Basel Committee on Banking Supervision, (1988). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Basel, Switzerland.

Basel Committee on Banking Supervision, (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – A Revised Framework*. Basel, Switzerland.

Basel Committee on Banking Supervision, (2011). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. Basel, Switzerland.

Buhlmann H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer-Verlag, New York.

Crouhy M, Galai, D., & Mark, R. (2000). *A comparative analysis of current credit risk models.* Journal of Banking & Finance 24.

Crouhy M., Galai, D., & Mark, R. (2006). *The Essentials of Risk Management*. New York: McGraw-Hill.

Denuit M, Dhaene J., Goovaerts M.J., Kaas R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks, Measures, Orders and Models.* John Wiley & Sons, Ltd.

Gerber H.U, (1974). *The dilemma between dividends and safety a generalization of the Lundberg-Cramer formulas.* Scand. Actuarial Journal.

Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer, New York.

Goovaerts M.J., De Vijlder F., and Haezendonck J. (1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications.* North-Holland, Amsterdam.

Hardy G.H., (1952). *A course of Pure Mathematics.* Cambridge Mathematic Library.

Hardy M.R., (2006). *An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications.* Society of Actuaries, U.S.A.

Jorion P, (2001). *Value at Risk.* McGraw-Hill, New York.

Jorion P, (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* 3rd Edition, McGraw-Hill, New York.

Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., and Denuit M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Klugman S., Panjer H. and Willmot G. (2004). *Loss Models: From data to decisions.* (2nd Ed.) Wiley.

Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. (2008). *Loss Models, From Data to Decisions.* A John Wiley & Sons, Hoboken, New York

Knight, H. F. (1964). *Risk Uncertainty and profit*. New York.

Manistre J. and Hancock G. (2005). *Variance of the CTE Estimator*. North American Actuarial Journal.

McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton Series in Finance

Nicolaus, D. (2017). *Basel IV – capital and strategic planning*. KPMG.

Ripley, B. D. (2008). *Stochastic Simulation.* Wiley-Blackwell, 1987

RiskMetrics Group, (1999). *Risk management guide,* RiskMetrics Group

Sawilowsky, S. and Fahoome, G. (2003). *Statistics through Monte Carlo Simulation with Fortran.* Oak Park: JMASM.

Wang, S. (1995). *Insurance Pricing and Increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms.* Insurance: Mathematics and Economics 1.

Wang, S. (1996). *Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density*. ASTIN Bulletin 26.

Wang, S. (2002), *A universal framework for pricing financial and insurance risks.* ASTIN Bulletin 32.