ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Από τον

Σιαφάκα Βασίλειο

(Α.Μ. 4282017021)

ΘΕΜΑ: «Ανάπτυξη διεπιστημονικής διδασκαλίας για την συνδιδασκαλία βασικών εννοιών της κινηματικής και εννοιών της στατιστικής, σε τεχνολογικά εμπλουτισμένο μαθησιακό περιβάλλον.»

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Μιχαήλ Σκουμιός	**Αναπληρωτής Καθηγητής**	**Πανεπιστήμιο Αιγαίου**	**Επιβλέπων**
Ιωάννης Χατζηγεωργίου	**Καθηγητής**	**Πανεπιστήμιο Αιγαίου**	**Μέλος**
Γεώργιος Φεσάκης	**Αναπληρωτής Καθηγητής**	**Πανεπιστήμιο Αιγαίου**	**Μέλος**

Ρόδος, 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια πρόταση ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο έχει αναπτυχθεί με βάση τις αρχές της διεπιστημονικότητας και των σύγχρονων θεωριών του κονστρουκτιβισμού, για την διδασκαλία εννοιών των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, και συγκεκριμένα της έννοιας της μέσης ταχύτητας και της έννοιας του μέσου όρου. Παράλληλα, διερευνώνται οι προϋπάρχουσες γνώσεις και εναλλακτικές αντιλήψεις των μαθητών με τις οποίες εισήλθαν στην τάξη πριν την εκπαιδευτική παρέμβαση πάνω στις προαναφερθείσες έννοιες. Κατά τον σχεδιασμό της παρέμβασης δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην αντιμετώπιση των βασικών εμποδίων που παρουσιάζουν οι διεπιστημονικές διδασκαλίες σύμφωνα με την διεθνή και εγχώρια βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών μπορούν να αναχαιτιστούν με επιτυχία από την προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση. Παράλληλα, αναδύθηκε ένα σημαντικό γνωστικό κενό γύρω από την έννοια της μέσης ταχύτητας, ενώ παράλληλα η αρχική εννοιολογική κατανόηση του μέσου όρου εμφανίζεται προβληματική.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Διεπιστημονικότητα, Στατιστικός Εγγραμματισμός, Εναλλακτικές Αντιλήψεις, Μέσος Όρος, Μέση Ταχύτητα, Κονστρουκτιβισμός

Ευχαριστίες

Το πρώτο άτομο που θα ήθελα θερμά να ευχαριστήσω είναι η κ. Αγγελική Δημητρακοπούλου, καθότι η καθοδήγησή της αποτελούν την κινητήρια δύναμη πίσω από την παρούσα εργασία. Σε πολλές δύσκολες στιγμές κατά την συγγραφή της εργασίας αυτής έδειξε απίστευτη στήριξη και καθοδήγηση, ποτέ δεν έχασε την πίστη της στο πρόσωπό μου, όπως ποτέ δεν μου αρνήθηκε βοήθεια, θυσιάζοντας προσωπικό της χρόνο για να με καθοδηγήσει. Την ευχαριστώ από καρδιάς.

Ένα θερμό ευχαριστώ οφείλω και στους κ. Σκουμιό Μιχαήλ και κ. Φεσάκη Γεώργιο, γιατί στην ακαδημαϊκή μου πορεία αποτέλεσαν δύο σημαντικές πολύ μορφές που έμαθαν περισσότερα απ’ όσα θα μπορούσα ποτέ να σκεφτώ, ιδίως στον κ. Σκουμιό, που από προπτυχιακό ακόμα επίπεδο αποτέλεσε σημαντική περσόνα και πρότυπο κατά την εξέλιξή μου σαν άνθρωπος και σαν εκπαιδευτικός. Η συμβολή του στην παρούσα εργασία είναι ανεκτίμητη.

Σε καμία των περιπτώσεων δεν θα μπορούσα να παραλείψω τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, τα οποία αφιέρωσαν προσωπικό τους χρόνο για να με βοηθήσουν στην εργασία αυτή, αλλά και τους γονείς που μου εμπιστεύτηκαν τα παιδιά τους.

Δεν θα μπορούσα ποτέ να ξεχάσω διάφορους φίλους και συγγενείς που με στήριξαν κατά την συγγραφή της εργασίας αυτής. Ποτέ δεν θα καταφέρω να τους ευχαριστήσω επαρκώς για την στήριξή τους. Ιδιαιτέρως όμως πρέπει να ευχαριστήσω τον κ. Παπανικολάου Χρήστο και την κ. Παπαμαργαρίτη Αλεξάνδρα, γιατί η εργασία αυτή ποτέ δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί χωρίς την αρωγή τους. Δεν φτάνει μια σελίδα για να καταγράψω την στήριξή τους σε καμία των περιπτώσεων.

Τέλος, το πιο μεγάλο ευχαριστώ το φυλάω για τους γονείς και την αδερφή μου, στους οποίους αφιερώνω το έργο αυτό. Αποτέλεσαν όλοι τις ράγες της πορείες μου ανέκαθεν, και ποτέ οι λέξεις δεν θα επαρκέσουν για να τους εκφράσω τις ευχαριστίες μου.

Περιεχόμενα

Ευρετήριο Πινάκων

1.Εισαγωγή

Παρουσίαση προβληματικής

Οι φυσικές επιστήμες επί αιώνες σαγήνευαν τον άνθρωπο, αλλάζοντας την αντίληψη του κόσμου γύρω του, και αντίστοιχα, η αλλαγή οπτικής του ανθρώπου ανέκαθεν άλλαζε τον τρόπο που αυτός κοιτούσε τις φυσικές επιστήμες (Γκίκας, 1998). Αντίστοιχα, η διδακτική των φυσικών επιστημών εξελίσσεται, ώστε να συμβαδίζει όχι μόνο με τα παραδείγματα των φυσικών επιστημών, όσο και με τις ανάγκες της εκάστοτε κοινωνίας (Ματασαγγούρας, 2002; Good, 1973 στο Furner, 1995; Δημητρακοπούλου, 2018).

Μία από τις αλλαγές που επήλθαν με την πάροδο των αιώνων ήταν και η περιχαράκωση των διαφόρων επιστημών σε οντότητες με σαφή όρια, μια περιχαράκωση η οποία πέρασε και στην διδακτική πρακτική. Ο σκοπός της πρακτικής αυτής ήταν η καλύτερη διδασκαλία των διαφορετικών γνωστικών πεδίων, και λειτουργώντας με την λογική «ο σκοπός αγιάζει τα μέσα», σε μεγάλο βαθμό επιβλήθηκε συνολικά μια μακροχρόνια λογική περιχαράκωσης, η οποία πήγαινε κόντρα στην καθημερινότητα του παιδιού και τον τρόπο που αυτό μαθαίνει.

Ιδιαιτέρως στα γνωστικά αντικείμενα της μέσης ταχύτητας και του μέσου όρου διεθνείς έρευνες απέδειξαν πως οι υφιστάμενοι τρόποι διδασκαλίας εμφανίζουν σημαντικές ελλείψεις την αναχαίτηση των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών που εμφανίζουν από μικρή ηλικία, με αποτέλεσμα οι μαθητές να ενηλικιώνονται έχοντας λανθασμένα νοητικά σχήματα και κατασκευάσματα για τις έννοιες αυτές (Chatzivasileiou, Michalis & Tsalikis, 2010; Reed & Saavedra, 1986; Reed & Jazo, 2002; Borghi et al., 1993; Watson & Callingham, 2003 κ.α.).

Αντίστοιχα, η ίδια η περιχαράκωση, που υποτίθεται υπηρετεί την καλή διδασκαλία των εννοιών και γνωστικών πεδίων, οδηγεί εν τέλει σε σημαντικά ζητήματα, τα οποία γεννιούνται από την ελλιπή επικοινωνία μεταξύ των διαφορετικών γνωστικών πεδίων, όπως αυτά που διαφαίνονται στην περίπτωση της μέσης ταχύτητας, όπου «διαρροές» κακώς δομημένων εννοιών από τα μαθηματικά δημιουργούν καινούργια ζητήματα στην μελέτη μιας έννοιας η οποία είναι εξαιρετικά απαιτητική για τους μαθητές από την φύση της την ίδια (Borghi et al., 1993; Furner, 1995).

Κατ' επέκτασιν, θα ήταν εύλογο να αναρωτηθεί κανείς εάν η κατάργηση των ορίων αυτών και η διδασκαλία της μίας έννοιας μέσα από την άλλη, εν τέλει μπορεί να «θεραπεύσει» το φαινόμενο αυτό, καθώς τα σύνορα μεταξύ των επιστημών από την μία θολώνουν, από την άλλη όμως αναδεικνύονται τα όρια μέσα στα οποία χρησιμοποιείται το κάθε σώμα γνώσης – στην προκειμένη περίπτωση, η μέση ταχύτητα και ο μέσος όρος.

Στόχος διπλωματικής εργασίας

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή διεπιστημονικού εκπαιδευτικού υλικού, το οποίο αφορά την διδασκαλία των εννοιών του μέσου όρου και της μέσης ταχύτητας, χρησιμοποιώντας τις Τ.Π.Ε. ως μέσο επίτευξης της διδασκαλίας αυτής, διαχωρίζοντας το πλαίσιο χρήσης του μέσου όρου και της μέσης ταχύτητας και αναδεικνύοντας την σχέση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών.

Δομή εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας γίνεται η εισαγωγή στην εργασία, παρουσιάζοντας συγκεκριμένα την προβληματική που γέννησε την παρούσα έρευνα, οι στόχοι της συγκεκριμένης εργασίας, η καινοτομία στα όσα προτείνονται σε σχέση με τις υπόλοιπες εργασίες και η δομή της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφική επισκόπηση η οποία οδήγησε στην παρούσα έρευνα, εστιάζοντας 3 βασικούς άξονες:

- *Διδακτικά ζητήματα μέσου όρου,* στα οποία αναλύεται ο ορισμός του μέσου όρου και η σημαντικότητά του, η εκπαίδευση της στατιστικής στην Α'βάθμια εκπαίδευση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος ειδικά, ορίζεται ο στατιστικός εγγραμματισμός και η στατιστική σκέψη, αναφέρονται και αναλύονται έρευνες πάνω στις δυσκολίες, αντιλήψεις, και στρατηγικές επίλυσης των μαθητών που έχουν καταγραφεί διεθνώς, η σημαντικότητα της επαγωγικής σκέψης στην στατιστική (ορισμός και μοντέλα ανάπτυξης), μια ευρύτερη απεικόνιση της ελληνικής πραγματικότητας αναφορικά με την μελέτη στατιστικών εννοιών και τα συμπεράσματα που εξάγονται από όσα προαναφέρθηκαν,

- *Διδακτικά ζητήματα της μέσης ταχύτητας,* όπου αναλύονται οι προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της μέσης ταχύτητας και τον τρόπο που η έννοια αυτή αναπτύσσεται, μελετώνται οι κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση της μέσης ταχύτητας, αναλύονται οι διδακτικές και επιστημολογικές δυσκολίες στην διδασκαλία της μέσης ταχύτητας και τα συμπεράσματα που εξάγονται από όσα συνολικά προαναφέρθηκαν, και,
- *Σχεδιασμός διεπιστημονικής διδασκαλίας,* όπου ορίζεται η διεπιστημονική διδασκαλία και γιατί αυτή είναι σημαντική, παρουσιάζονται τα κυρίαρχα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα που αυτή εμφανίζει, αναλύονται προτεινόμενα μοντέλα ανάπτυξης διεπιστημονικών διδασκαλιών, και τέλος καταγράφονται τα συμπεράσματα της πρότερης ανάλυσης.

Αντικείμενο μελέτης του 3ου κεφαλαίου αποτελεί ο σχεδιασμός και η μεθοδολογία της έρευνας, όπου αναλύονται οι επιμέρους στόχοι της έρευνας, καταγράφεται ο σχεδιασμός και περιγράφεται η έρευνα, και τέλος, αναλύεται το δείγμα και ο τρόπος συλλογής των δεδομένων.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα πριν και μετά την διδακτική παρέμβαση, αλλά και απαντήσεις του δείγματος που προέρχονταν από την διδακτική παρέμβαση και παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για την συνολική διαδικασία.

Στο 5^{ο} και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια συνολική επισκόπηση των αποτελεσμάτων, το οποίο ακολουθεί η συζήτηση και τα συμπεράσματα πάνω στα αποτελέσματα αυτά. Στην συνέχεια, έπονται η καταγραφή των ερευνητικών περιορισμών και προτάσεις για περεταίρω μελέτη και έρευνα.

Στο τέλος της εργασίας αναγράφεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε και το παράρτημα, στο οποίο βρίσκονται τα φύλλα εργασίας, τα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήθηκαν και ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών.

2. Βιβλιογραφική επισκόπηση

2.1 Διδακτικά ζητήματα του μέσου όρου

2.1.1 Η έννοια του μέσου όρου: τι είναι ο μέσος όρος και γιατί είναι σημαντικός.

Δεδομένου ότι από το Ευρωπαϊκό συνέδριο της Λισαβόνας η δημιουργία μιας «γνωσιοκεντρικής» κοινωνίας έχει τεθεί ως στόχος-κλειδί για την μακροπρόθεσμη ανταγωνιστικότητα της Ε.Ε., η χρήση και κατανόηση εννοιών της στατιστικής μετατράπηκε αυτόματα σε αναγκαιότητα, αφού οι στατιστικές έννοιες επηρεάζουν όλο και περισσότερο την καθημερινή ζωή των πολιτών, αναγκαιότητα της οποίας το εκτόπισμα γίνεται εμφανές στα αναλυτικά προγράμματα των περισσότερων χωρών, καθώς το «χτίσιμο» των εννοιών της στατιστικής μετατοπίζεται από την δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση, προς την πρωτοβάθμια και τα πρώτα σχολικά χρόνια (NCTM, 2000; Meletiou-Mavrothetis, Paparistodemou & Styllianou, 2009). Μεταξύ των πυρηνικών στατιστικών εννοιών είναι και ο μέσος όρος, ο οποίος αποτελεί ίσως τον πιο κοινό και συχνό στατιστικό όρο που συναντάει κάποιος στην καθημερινότητά του (Goodchild, 1988; Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010; Pollatsek, Lima & Well, 1981).

Ο μέσος όρος ορίζεται ως το άθροισμα των τιμών των παρατηρήσεων ενός δείγματος, προς το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών. 7 ιδιότητες διακρίνουν τον μέσο όρο, οι οποίες αφορούν (α) την στατιστική/αριθμητική του λειτουργία, (β) την αφαιρετική λειτουργία του μέσου όρου, και τέλος, (γ) την λειτουργία του μέσου όρου ως μέσο αναπαράστασης του συνόλου (Strauss & Bichler, 1988):

I. Ο τιμή του μέσου όρου βρίσκεται αναγκαστικά ανάμεσα στις ακραίες τιμές.
II. Το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών των παρατηρήσεων από τον μέσο όρο είναι μηδέν.
III. Ο μέσος όρος επηρεάζεται από τιμές του συνόλου που είναι διαφορετικές από την τιμή του.
IV. Ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με κάποια από τις τιμές του δείγματος.

V. Ο μέσος όρος μπορεί να είναι ένα κλάσμα ή ρητός αριθμός που ενδεχομένως να μην έχει κανένα νόημα στον πραγματικό κόσμο.
VI. Κατά υπολογισμό του μέσου όρου πρέπει να συνυπολογιστούν και τυχόν μηδενικές τιμές του δείγματος.
VII. Ο μέσος όρος είναι αντιπροσωπευτικός του συνόλου των τιμών που υπολογίστηκαν.

2.1.2 Η στατιστική στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα: η περίπτωση της Α΄-βάθμιας εκπαίδευσης.

Όπως προαναφέρθηκε, οι στατιστικές έννοιες κρίνονται ως αναγκαίες για την εξέλιξη του πολίτη, και κατ’ επέκτασιν οι βάσεις τίθενται ήδη από τα πρώτα σχολικά χρόνια (NCTM, 2000), με το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα να μην αποτελεί εξαίρεση (Δέσλη & Βασιλά, 2017): για την Δ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου, οι στόχοι που έχουν τεθεί για τη διδασκαλία της στατιστικής, αφορούν στη συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων, την αναπαράσταση και την ερμηνεία των ερευνητικών δεδομένων και την προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας, για την Ε΄ τάξη, το ισχύον πρόγραμμα ορίζει την εισαγωγή των μαθητών/ριών στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους και την εξάσκησή τους όχι μόνο στην εύρεση του μέσου όρου, στην οποία περιορίζεται το σχολικό εγχειρίδιο, αλλά και στη συλλογή και επεξεργασία των δεδομένων και στην πινακοποίησή τους σε διαφορετικές μορφές, όπως, για παράδειγμα, σε ποσοστά ή σε απόλυτους αριθμούς απλών κατανομών. Οι ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες αναφέρονται σε προβληματικές καταστάσεις που προκύπτουν από την καθημερινή ζωή των μαθητών, όπως για παράδειγμα η έρευνα για το πόσες φορές γελούν στην τάξη ή στο σπίτι. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών για την Στ΄ τάξη, προβλέπεται η εξοικείωση των μαθητών/ριών με τα διατεταγμένα ζεύγη και ο υπολογισμός του μέσου όρου, για τον οποίο τα σχολικά εγχειρίδια αφιερώνουν ένα κεφάλαιο, καθώς και η μετατροπή προφορικών ή γραπτών δεδομένων σε γράφημα και το αντίστροφο. Το Νέο Πρόγραμμα για τη στατιστική αφορά στην κύρια τροχιά με τίτλο «Δεδομένα, Στατιστική και Πιθανότητες» η οποία υποδιαιρείται σε τέσσερις υπό-τροχιές. Η πρώτη υπό-τροχιά αφορά την ανάγνωση, ερμηνεία, συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων. Στην υπό-τροχιά αυτή, οι στόχοι που τίθενται είναι οι μαθητές προοδευτικά να μπορούν να επεξεργάζονται τα δεδομένα σε πίνακες και διαγράμματα, να ερμηνεύουν κατηγοριοποιημένα δεδομένα, να συγκρίνουν και να εξάγουν συμπεράσματα από τα γραφήματα, να επεξεργάζονται με διαφορετικούς τρόπους την οργάνωση των δεδομένων και να παρουσιάζουν αριθμητικές πληροφορίες, να συλλέγουν και να κωδικοποιούν δεδομένα της καθημερινής ζωής και, με τη βοήθεια της τεχνολογίας, να τα παρουσιάζουν σε γραφήματα. Τέλος, να είναι σε θέση να συγκρίνουν γραφήματα σε διαφορετική κλίμακα. Η δεύτερη υπό-τροχιά είναι η ανάλυση δεδομένων. Στόχοι είναι οι μαθητές να βρίσκουν και να ερμηνεύουν τα μέτρα θέσης και διασποράς, να προσδιορίζουν τις επιδράσεις τους και να εκφράζουν τις σχέσεις των δεδομένων με όρους λόγων, κλασμάτων και ποσοστών, καθώς και, με τη χρήση της τεχνολογίας, να αναλύουν και να ερμηνεύουν δεδομένα. Η τρίτη υπό-τροχιά είναι η αξιολόγηση συμπερασμάτων και δηλώσεων και σε αυτή οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν την ορθή χρήση τίτλων, ετικετών και άλλων στοιχείων σε διαγράμματα και πίνακες, να γνωρίζουν την αντιστοιχία και τα όρια των ποσοστών στα γραφήματα, να είναι σε θέση να μετατρέπουν τους πίνακες σε γράφημα και να επιλέγουν το κατάλληλο γράφημα, να μπορούν να ερμηνεύουν τις τάσεις των δεδομένων και να αναγνωρίζουν τους «μέσους όρους» (μέση τιμή, διάμεσο) και να προσδιορίζουν αν είναι κατάλληλοι για τα δεδομένα, να αναγνωρίζουν ότι οποιαδήποτε παραποίηση κλίμακας, διαγραμμάτων μπορεί να επηρεάσει τα συμπεράσματα, να γνωρίζουν ότι τα επιχειρήματα που βασίζονται σε ένα γράφημα μπορεί να είναι αντιφατικά με άλλο γράφημα και, τέλος, να κατανοούν τη σημασία του μεγέθους του δείγματος στην αξιοπιστία των δεδομένων.

Αυτή η παρουσία του μέσου όρου στα αναλυτικά προγράμματα ήδη από την Δ΄ δημοτικού έχει ως αποτέλεσμα μεγάλο μέρος του μαθητικού πληθυσμού να αναγνωρίζει την ύπαρξή του. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν σημαίνει ότι οι μαθητές είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν ή ότι κατανοούν τις λειτουργίες και χρήσεις του μέσου όρου, ακόμα και σε ένα επιφανειακό επίπεδο.

Ενώ το 62% των μαθητών της 4ης τάξης και 89% των μαθητών της 6ης τάξης είχαν ακούσει τον όρο "μέσος όρος", μόλις το 39% των μαθητών της 4ης μπόρεσε να δώσει ένα ικανοποιητικό παράδειγμα μέσου όρου, με το ποσοστό να ανεβαίνει στο 64% στους μαθητές της 6ης (Chatzivasileiou, Michalis & Tsalikis, 2010). Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν τι σημαίνει ότι ο μέσος όρος των παιδιών είναι 9 χρονών, το 10% των μαθητών της 4ης απάντησε πως είναι η μέγιστη τιμή, 10% με βάση την στρατηγική της "δίκαιης μοιρασιάς" (αθροίζω και διαιρώ με το πλήθος), 6% ότι είναι η ατομική ηλικία, 5% ότι είναι ο διάμεσος, 6% ότι είναι η πιο συχνή ηλικία και 4% ότι είναι η χαμηλότερη τιμή. Από τους μαθητές της 6ης, το 37% όσων απάντησαν δικαιολόγησαν πως είναι η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα (mode), 10% θεωρώντας τον Μ.Ο. ως μέτρο διασποράς, 10% με την στρατηγική του δίκαιου διαμοιρασμού, 3% με χρήση του αλγορίθμου και επίσης 3% με χρήση του διαμέσου. 9 στους 10 μαθητές της έκτης βρήκαν σωστά τον μ.ο. όταν τους ζητήθηκε χρησιμοποιώντας τον σωστό αλγόριθμο, με το ποσοστό να πέφτει σε 1 στους 4 στους μαθητές της 4ης (Chatzivasileiou, Michalis & Tsalikis, 2010).

2.1.3 Στατιστικός εγγραμματισμός και στατιστική σκέψη.

Η μη κατανόηση, ωστόσο, της αντιπροσωπευτικότητας του μέσου όρου και της λειτουργίας του αποτελεί ένα εμπόδιο σημαντικό, το οποίο έχει διάρκεια, οι ρίζες του βρίσκονται σε αρκετά διαφορετικά ζητήματα, ενώ επηρεάζει παράλληλα και την διδασκαλία και κατανόηση και άλλων γνωστικών αντικειμένων, όπως η μέση ταχύτητα (Reed & Saavedra, 1986; Reed & Jazo, 2002; Borghi et al., 1993).

Ένα σημαντικό βήμα για την κατανόηση του μέσου όρου (και κάθε στατιστικής έννοιας) είναι απόκτηση στατιστικής σκέψης και στατιστικού εγγραμματισμού. Ο Gal (2004) όρισε τον στατιστικό εγγραμματισμό ως (α) την ικανότητα των ατόμων να ερμηνεύουν και να αξιολογούν κριτικά στατιστικές πληροφορίες, επιχειρήματα που βασίζονται σε δεδομένα ή στοχαστικά φαινόμενα, τα οποία ίσως συναντήσουν σε πληθώρα διαφορετικών πλαισίων, και όταν κρίνεται σχετικό, (β) την ικανότητά τους να συζητήσουν ή να επικοινωνήσουν τις αντιδράσεις τους σε αυτές τις στατιστικές πληροφορίες, όπως η κατανόηση του νοήματος των πληροφοριών, η γνώμη τους σχετικά με τις επιπτώσεις των πληροφοριών αυτών, ή τις ανησυχίες τους σχετικά με το αν τα συμπεράσματα αυτά γίνονται αποδεκτά. Οι Ben-Zvi & Garfield (2004) αναφέρουν ως αναγκαίες για να επιτευχθεί ο στατιστικός εγγραμματισμός όλες εκείνες τις βασικές και σημαντικές δεξιότητες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την κατανόηση στατιστικών πληροφοριών ή τα αποτελέσματα ερευνών, με τις δεξιότητες αυτές να εμπεριέχουν την οργάνωση των δεδομένων, την κατασκευή και παρουσίαση πινάκων δεδομένων, και την εργασία με διαφορετικές αναπαραστάσεις δεδομένων, κατανόηση του λεξιλογίου και των συμβόλων και την έννοια της πιθανότητας ως μέτρο της αβεβαιότητας.

Ωστόσο, ο στατιστικός εγγραμματισμός δεν επιτυγχάνεται μονομιάς, αλλά χωρίζεται σε 6 βασικά επίπεδα (Watson & Callingham, 2003): το ιδιοσυγκρατικό (1), το ανεπίσημο (2), το μη-συστηματικό (3), το συστηματικο/μη-κριτικό (4), το κριτικό (5) και το κριτικό-μαθηματικό (6). Παρατηρήθηκε ότι το βήμα προς τα υψηλότερα επίπεδα είναι πολύ πιο δύσκολο και απαιτείται στοχευμένη παρέμβαση, όπως επίσης μια εντόνως πιο μαθηματική σκέψη. Στο επίπεδο 1 οι απαντήσεις δίνονται βάσει προσωπικών πεποιθήσεων, αφήνοντας στο περιθώριο το πλαίσιο και τις συσχετιζόμενες ιδέες. Στο επίπεδο 2, παρότι υπάρχει μεγαλύτερη εμπλοκή του πλαισίου στις δικαιολογήσεις των μαθητών, η εμπλοκή παραμένει ενστικτώδης και μη-στατιστική, αντικατοπτρίζοντας μη σχετικές πτυχές του πλαισίου της διεργασίας. Στο επίπεδο 3, υπάρχει ακόμα μεγαλύτερη εμπλοκή με το πλαίσιο, η οποία σε μεγάλο βαθμό εξαρτάται από την μορφή των αντικειμένων. Οι στατιστικές ιδέες που απαιτούνται σε αυτό το επίπεδο είναι ως επί τω πλείστο ποιοτικές και όχι ποσοτικές, ενώ τα συμπεράσματα συχνά δεν συνοδεύονται από επαρκείς δικαιολογήσεις. Στο επίπεδο 4 οι μαθητές χρησιμοποιούν εντόνως τα στοιχεία του πλαισίου της μελέτης που διεξάγουν/αναλύουν, αλλά δεν υπάρχει κριτικός στοχασμός πάνω στα όσα μελετάνε στα διάφορα πλαίσια. Στο επίπεδο 5 προστίθεται η κριτική ανάλυση των πλαισίων των ερευνών, αλλά δεν απαιτούνται ένας υψηλότερου επιπέδου αναλογικός συλλογισμός, αν και απαιτείται η χρήση σωστής ορολογίας, εκτίμησης της διαφοροποίησης του δείγματος και ποιοτική ερμηνεία των πιθανοτήτων. Στο επίπεδο 6, απαιτούνται υψηλού επιπέδου αναλογικοί συλλογισμοί, όπως η εκτίμηση λεπτών σημείων στην χρήση της γλώσσας για την περιγραφή μιας έρευνας ή του δείγματος. Είναι σημαντικό να τονιστεί πως δεν αντιστοιχούν όλες οι έννοιες σε όλα τα επίπεδα, αλλά πρόκειται για μια εξελικτική πορεία, με χαρακτηριστικό παράδειγμα την περίπτωση του μέσου όρου, ο οποίος αντιστοιχεί από το δεύτερο επίπεδο και άνω (Watson & Callingham, 2003), η οποία όμως εξελικτική πορεία δεν είναι ομαλή, καθώς η μετακίνηση από επίπεδο σε επίπεδο δεν είναι αναλογικά εύκολη, αλλά τουναντίον γίνεται όλο και δυσκολότερη: κατά την μελέτη των Watson και Callingham (2015, στο Callingham & Watson, 2017), οι μαθητές της 6ης και 7ης τάξης του εκπαιδευτικού συστήματος της Αυστραλίας σταθεροποιούνται στο 4ο επίπεδο του στατιστικού εγγραμματισμού, κάτι που εν μέρει συμφωνεί και με τα στάδια ανάπτυξης της σκέψης κατά την πιαζετιανή θεωρία, αφού η κριτική και αφαιρετική σκέψη αρχίζει να αναπτύσσεται από την συγκεκριμένη ηλικία και έπειτα.

2.1.4 Δυσκολίες, αντιλήψεις και στρατηγικές επίλυσης στα προβλήματα μέσου όρου.

Ειδικότερα, η περίπτωση του μέσου όρου αποτελεί μία πραγματική πρόκληση, καθώς η ερμηνεία του μέσου όρου είναι άμεσα συνδεδεμένη με το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται και μπορεί ενδεχομένως να οδηγήσει σε παρερμηνείες, όταν δεν αναγνωσθεί κριτικά (Φερεντίνος & Καλλιγάς, 2001), αλλά και επειδή παραμένει μια απαιτητική έννοια ακόμα και στις ανώτερες βαθμίδες της εκπαίδευσης: οι Guimaraes κ.α. (2008) πως οι φοιτητές των παιδαγωγικών τμημάτων δυσκολεύονται σημαντικά στο να απαντήσουν σωστά (το 50.8% των πρωτοετών και το 37.8% των τελειόφοιτων δεν επιλύσαν καμία άσκηση σωστά). Ιδιαιτέρως συχνός ήταν ο εξαναγκασμός του μέσου όρου να συμπίπτει με κάποια από τις τιμές του δείγματος, και ιδιαιτέρως αυτή που είχε τις περισσότερες παρατηρήσεις. Αντίστοιχα, οι Pollatsek, Lima & Well (1981) στην έρευνά τους παρατήρησαν πως από τους 15 φοιτητές ψυχολογίας που συμμετείχαν στις κλινικές συνεντεύξεις τους, μόλις 2 κατάφεραν να λύσουν σωστά προβλήματα μέσου όρου και να υπολογίσουν σωστά το ζητούμενο, το οποίο ήταν η βαθμολόγια ενός φοιτητή μετά το πέρας κάποιων τριμήνων. Η αντιμετώπιση του μέσου όρου ως μιας απλής μαθηματικής φόρμουλας είχε το αποτέλεσμα να μην συνυπολογίσουν παρατηρήσεις οι οποίες είχαν ίδια τιμή και να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο του σταθμισμένου μέσου όρου, αλλά να υπολογίσουν λάθος και το συνολικό άθροισμα, και το πλήθος των παρατηρήσεων. Κατά τους Pollatsek, Lima & Well (1981), για να γίνει κατανοητή η έννοια του μέσου όρου απαιτούνται 3 επίπεδα γνώσης: λειτουργική, υπολογιστική και αναλογική γνώση (functional, computational & analog knowledge). Η πρώτη (λειτουργική) αναφέρεται στην κατανόηση του μέσου όρου ως ουσιαστική έννοια του πραγματικού κόσμου. Ο μέσος όρος αποκτά μια έννοια "ισοδύναμης λογικής κατάστασης" προς το δείγμα/πλήθος που αντιπροσωπεύει. Το δεύτερο επίπεδο γνώσης (υπολογιστική γνώση/computational knowledge), γνώση η οποία αφορά την διαχείριση των απαραίτητων αλγορίθμων για την εύρεση του ΜΟ (όπου μέσα σε αυτή την γνώση προβλέπεται η εύρεση του συνόλου μέσα από τον ΜΟ).

Τέλος, η αναλογική γνώση εμπλέκει οπτικά ή κιναισθητικά μέσα που παρουσιάζουν τον ΜΟ ως "μέσο" ή σημείο ισορροπίας.

Προσπαθώντας να κάνει παρεκτάσεις πάνω στην δουλειά των Pollatsek, Lima & Well (1981), η Mevarech (1983) μελέτησε ένα πολύ εκτενέστερο δείγμα, προσπαθώντας να εντοπίσει *τι* λάθη κάνουν οι μαθητές και *γιατί* αυτά τα λάθη γίνονται. Σε μεγάλο βαθμό οι φοιτητές που συμμετείχαν στην διαδικασία αντιμετώπιζαν τον μέσο όρο ως έναν κοινό αριθμό, κενό από κάποιο νόημα, με αποτέλεσμα να τους δίνεται ένα πλήθος μέσων όρων και να το αντιμετωπίζουν ως ένα κοινό πλήθος: οι φοιτητές υπολόγιζαν τον μέσο όρο των δοθέντων μέσων όρων στα προβλήματα, αγνοώντας το γεγονός πως ο μέσος όρος δεν ήταν απλό νούμερο, αλλά μέτρο θέσης. Η «ψευδαίσθηση» των φοιτητών πως κατέχουν στατιστικές έννοιες, τις οποίες ενσωματώνουν σε προϋπάρχοντα νοητικά σχήματα, οδηγώντας σε βασικά λάθη.

Αντίστοιχα οι Mokros και Russel (1995) μελέτησαν και περιέγραψαν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της 4^{ης}, 6^{ης} και 8^{ης} τάξης προσεγγίζουν τον μέσο όρο και κατέληξαν σε 5 διαφορετικά μοντέλα σκέψης.

I. Ο μέσος όρος ως επικρατούσα τιμή, στρατηγική η οποία οδηγεί σε συνεχή χρήση της επικρατούσας τιμής για να ερμηνευτεί ή να κατασκευαστεί μια κατανομή, σε ανελαστικότητα στην χρήση στρατηγικών, αδυναμία κατασκευής αναπαράστασης όταν δεν τους επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουν τον Μ.Ο. ως στοιχείο, σπάνια ή λανθασμένη χρήση του αλγορίθμου του Μ.Ο., ανάγνωση της επικρατούσας τιμής ως "την πιο μεγάλη", όχι ως αντιπροσωπευτική του δείγματος εν τω συνόλω, συχνή χρήση εγωκεντρικού λογισμού στις λύσεις τους.
II. Η αντιμετώπιση του μέσου όρου ως αλγόριθμου, που οδηγεί στην αντιμετώπιση της εύρεσης του Μ.Ο. ως εκτέλεση των σχολικών διαδικασιών που έμαθαν, στη συχνή χρήση εύρους άχρηστων και κυκλικών στρατηγικών που συγχέουν το σύνολο, τον Μ.Ο. και τα δεδομένα και περιορίζει τις στρατηγικές δικαιολόγησης των λύσεών τους.
III. Ο μέσος όρος ως λογική επιλογή, αντιμετώπιση η οποία χειρίζεται τον μ.ο. ως εργαλείο για την κατανόηση των δεδομένων, με τους μαθητές να χρησιμοποιούν τον μέσο όρο για την μαθηματική και λογική αναπαράσταση των δεδομένων, να χρησιμοποιούν τα πραγματικά τους βιώματα για να κρίνουν

εάν ο μ.ο. είναι λογικός ή όχι, ενδεχομένως να χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο για την χρήση του μ.ο., τσεκάροντας ενδελεχώς εάν το αποτέλεσμα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, να πιστεύουν ότι ο μ.ο. ενός δείγματος δεν είναι μια ακριβής μαθηματική τιμή, αλλά μια προσέγγιση που μπορεί να πάρει κάποια από πολλές τιμές.

IV. Η αντιμετώπιση του Μ.Ο. ως κεντρικό σημείο (midpoint), στρατηγική στην οποία οι μαθητές προσεγγίζουν τον Μ.Ο. ως ένα εργαλείο κατανόησης των δεδομένων, επιλέγουν έναν μέσο όρο που είναι αντιπροσωπευτικός των δεδομένων και από μαθηματικής σκοπιάς, αλλά και στον πραγματικό κόσμο, αναζητούν συνήθως κάποιο «μέσο» για την αναπαράσταση των δεδομένων – το οποίο μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως η διάμεσος, το μέσο του άξονα Χ ή το μέσο του δείγματος -, χρησιμοποιούν την συμμετρία για να κατασκευάσουν την κατανομή των δεδομένων γύρω από τον μέσο όρο, εμφανίζοντας μεγάλη ευκολία όταν η συμμετρία είναι επιτρεπτή, αλλά σημαντικές δυσκολίες στην κατασκευή ή ερμηνεία μη συμμετρικών δειγμάτων, χρησιμοποιούν με ευκολία τον Μ.Ο. για να ελέγξουν τις απαντήσεις και συνήθως πιστεύουν ότι ο μέσος όρος και το μέσο είναι πρακτικά ισοδύναμα μέτρα.

V. Ο μ.ο. ως μαθηματικό σημείο ισορροπίας: ο μ.ο. αντιμετωπίζεται ως εργαλείο κατανόησης των δεδομένων, ένα σημείο ισορροπίας για την αναπαράσταση των δεδομένων, λαμβάνουν υπόψιν τις τιμές όλων των στοιχείων, χρησιμοποιούν τον μέσο όρο ως μια αρχική κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ δεδομένων, συνόλου και μ.ο., δουλεύοντας μεταξύ και προς τις τρεις έννοιες, αναλύουν τα προβλήματα σε επιμέρους κομμάτια και βρίσκουν "υπό-μέσους όρους" ως τρόπο να λύσουν πιο δύσκολα προβλήματα μ.ο.

Σε μεγάλο βαθμό οι Mokros και Russel (1995) εντοπίζουν τις δυσκολίες των μαθητών σε έλλειμα κατανόησης του δείγματος: η μη κατανόηση του γεγονότος ότι κάθε δείγμα είναι ξεχωριστό με δικά του χαρακτηριστικά, οδηγεί στην μη κατανόηση των τρόπων αναπαράστασής του, και άρα στην μη κατανόηση του τι είναι ο μέσος όρος. Είναι, ωστόσο, κρίσιμο πρώτα να δομηθεί η έννοια της αναπαράστασης και μετά να κατασκευαστούν οι ορισμοί των μέτρων θέσης, όπως η διάμεσος και ο μέσος όρος (Mokros & Russel, 1995).

Αντίστοιχα, οι Strauss & Bichler (1988) ερεύνησαν τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η έννοια του μέσου όρου σε μαθητές ηλικίας 8 έως 14 στο Ισραήλ (ο μέσος όρος διδάσκεται στην ηλικία των 12 ετών) και σε ποιο βαθμό κατανοούν τις 7 βασικές ιδιότητες του μέσου όρου. Ερεύνησαν επίσης το κατά πόσο το μέσο περιγραφής των δεδομένων (λεκτική ιστορία, υλικά αντικείμενα, μαθηματικά σύμβολα), αλλά και η φύση των μεταβλητών (συνεχείς ή διακριτές μεταβλητές) επηρεάζουν τον τρόπο σκέψης και τις απαντήσεις των παιδιών. Αν και το μέσο περιγραφής των δεδομένων και η φύση της μεταβλητής (συνεχής ή διακριτή) δεν επηρέασαν τις απαντήσεις των μαθητών, δεν μπορεί να ειπωθεί το ίδιο για την ηλικία. Οι μαθητές όλων των ηλικιών αναγνώρισαν και χρησιμοποίησαν σωστά την 2^{η}, 3^{η} και 4^{η} ιδιότητα του μέσου όρου, μόλις οι μισοί μαθητές ηλικίας 8 ετών απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις της πρώτης ιδιότητας (οι υπόλοιπες ηλικίες απάντησαν σχεδόν ολόσωστα στις αντίστοιχες ερωτήσεις). Η 5^{η} ιδιότητα ήταν ιδιαιτέρως δύσκολη για τους μαθητές ηλικίας 8 ετών (40% επιτυχημένες απαντήσεις), ελαφρώς δυσνόητη για τους μαθητές ηλικίας 10 ετών (80% επιτυχημένες απαντήσεις) και πλήρως κατανοητή από τα άλλα δύο ηλικιακά γκρουπ. Οι πιο δύσκολες ιδιότητες αποδείχτηκαν οι 6^{η} και 7^{η} ιδιότητα (στον υπολογισμό του μέσου όρου πρέπει να συμπεριληφθούν τυχόν μηδενικές τιμές, και ο μέσος όρος αποτελεί είναι αντιπροσωπευτικός του συνόλου των τιμών που υπολογίστηκαν) καθώς για την 6^{η} ιδιότητα τα ποσοστά επιτυχίας για τις ηλικίες 8 ετών ήταν 25%, για 10-χρονους μαθητές 20%, για τους 12-χρονους 60%, ενώ όλοι οι μαθητές ηλικίας 14 ετών έλυσαν σωστά το πρόβλημα. Για την 7^{η} ιδιότητα, σχεδόν κανένας 8-χρονος μαθητής δεν απάντησε σωστά, 25% των 10-χρονων απάντησαν σωστά, 60% και 65% αντίστοιχα των μαθητών ηλικίας 12 και 14 ετών απάντησαν σωστά στις αντίστοιχες ερωτήσεις. Συνεπώς, η συνολικά πιο δύσκολη ιδιότητα προς κατανόηση ήταν αυτή που απευθυνόταν στην αντιπροσωπευτικότητα του μέσου όρου, επιβεβαιώνοντας τα ζητήματα κατανόησης των Mokros και Russel (1995) και την πορεία που προτείνουν, ώστε να επιτευχθεί η κατανόηση του μέσου όρου.

Άλλος ένας ερευνητής που μελέτησε την κατανόηση του μέσου όρου από τους μαθητές ήταν ο Goodchild (1988), ο οποίος μελέτησε μέσω συνέντευξης τον τρόπο σκέψης 17 μαθητών ηλικίας 13 με 14 ετών. Ένα μεγάλο ζήτημα που προέκυψε ήταν η έλλειψη στοχαστικότητας στις ερμηνείες των μαθητών: όταν ζητήθηκε από μαθητές να κατασκευάσουν μια κατανομή, ώστε ο μέσος όρος σπίρτων που προκύπτει να είναι 35, κατασκεύασαν μια πλήρως κανονική κατανομή, όπου οι τιμές που διάλεξαν ήταν πλήρως συμμετρικές εκατέρωθεν του μέσου όρου. Παράλληλα, οι εκφράσεις που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να περιγράψουν τον μέσο όρο περιέγραφαν μέτρο θέσης κατά κύριο λόγο (15 μαθητές). Ένα ακόμα ζήτημα που αναδύθηκε ήταν η αδυναμία των μαθητών είναι πως τυχόν μεγάλες αποκλίσεις σε παρατηρήσεις του δείγματος δεν επηρεάζουν αναλογικά και το συνολικό δείγμα, καθώς «απορροφώνται» από τις μικρότερες αποκλίσεις που είναι πιο κοντά στον μέσο όρο. Τα ζητήματα αυτά κατά κύριο λόγο προκύπτουν από την μη κατανόηση του μέσου όρου, καθώς εγγενές χαρακτηριστικό του είναι η στοχαστικότητα και η αντιπροσωπευτικότητα των δεδομένων, δύο πλευρές που οι μαθητές απέτυχαν να δείξουν βαθιά κατανόηση – όταν ρωτήθηκαν πόσα σπίρτα περιμένουν να βρουν σε ένα κουτάκι που αναφέρει πως κατά μέσο όρο το κάθε κουτί έχει 35 σπίρτα, μόλις ένας μαθητής απάντησε 35, με τους υπόλοιπους να απαντούν λιγότερα, καθώς το εργοστάσιο προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του.

Ο Cai (1998), ωστόσο, ερεύνησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να επιλύσουν προβλήματα μέσου όρου. Παρότι η πλειοψηφία των μαθητών που απάντησαν κατείχαν τον αλγόριθμο του μέσου όρου, μόλις οι μισοί κατάφεραν να αξιοποιήσουν τον αλγόριθμο για να επιλύσουν σωστά πρόβλημα μέσου όρου, χρησιμοποιώντας ωστόσο διαφορετικές στρατηγικές και απεικονίσεις για να υπολογίσουν τον μέσο όρο, με το 1/3 των μαθητών να εφαρμόζουν τον τύπο του μέσου όρου απευθείας, με το οξύμωρο να έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποίησαν σωστά σε επίπεδο πράξεων και αλγορίθμου τον τύπο του μέσου όρου, αλλά απέτυχαν να τον εφαρμόσουν σωστά στην περίπτωση του προβλήματος. Ένα 30% των μαθητών αντίστοιχα προσέθεσε τα διάφορα αριθμητικά στοιχεία και παρήγαγε ένα αποτέλεσμα χωρίς νόημα. Παράλληλα, η επιτυχία στην επίλυση του προβλήματος εμφανίζει ισχυρούς δεσμούς με την αναπαράσταση του προβλήματος που επέλεξαν οι μαθητές: σε σύνολο 244 μαθητών, 5 των μαθητές χρησιμοποίησαν αλγεβρική αναπαράσταση, με όλους να απαντάνε σωστά στο πρόβλημα, 161 μαθητές επέλεξαν αριθμητική επίλυση και από αυτούς το 57% παρήγαγε σωστή απάντηση, 16 χρησιμοποίησαν εικονική αναπαράσταση με το 31% αυτών να απαντάει σωστά και 62 χρησιμοποίησαν λεκτική αναπαράσταση με το ποσοστό επιτυχίας να ανέρχεται στο 26%. Παράλληλα, 3 κυρίαρχες στρατηγικές αναδύθηκαν από τις λύσεις των μαθητών, η στρατηγική της ισορροπίας, όπου οι μαθητές ζωγράφιζαν τα δεδομένα και έκαναν νοητές μεταφορές μεταξύ των παρατηρήσεων μέχρι να φτάσουν νοητά όλες οι παρατηρήσεις στο ίδιο επίπεδο, η αλγοριθμική στρατηγική, όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον τύπο του μέσου όρου για να επιλύσουν το πρόβλημα, και η στρατηγική μαντέματος και ελέγχου, όπου στην ζητούμενη παρατήρηση δινόταν κάποια τιμή και οι μαθητές ερευνούσαν εάν ο μέσος όρος ανερχόταν στο ζητούμενο μέγεθος.

2.1.5 Η σημαντικότητα της επαγωγικής σκέψης στην στατιστική: ορισμός και μοντέλα ανάπτυξης.

Συνεπώς η γνώση του αλγόριθμου, αποστειρωμένη από το πλαίσιο και από τον επαγωγικό συλλογισμό που συνοδεύουν απαραιτήτως την κάθε άσκηση, δεν μπορεί να οδηγήσει απαραιτήτως σε ορθή επίλυση του προβλήματος, ακόμα κι αν αυτός ο συλλογισμός ξεκινάει από μια άτυπη μορφή. Οι Zieffler, del Mas, Garfield, και Gould (2007; στο Παπαριστοδήμου & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2015) προσδιορίζουν την επαγωγική συλλογιστική ως τη διαδικασία όπου οι μαθητές συσχετίζουν αυτό που παρατηρούν στα δεδομένα με ένα θεωρητικό πληθυσμό και ως τον τρόπο με τον οποίο επιχειρηματολογούν ή χρησιμοποιούν πληροφορίες για να υποστηρίξουν αυτές τις συσχετίσεις. Η Watson (2007) αναφέρει ότι η άτυπη επαγωγική συλλογιστική αντιπροσωπεύει την εμπειρία από το σημείο-αφετηρία, όπου οι μαθητές αρχίζουν να θέτουν ερωτήματα για σύνολα δεδομένων, μέχρι το σημείο όπου γίνονται ικανοί να κατανοήσουν την τυπική επαγωγική στατιστική. Οι Rubin κ.ά. (2006) ορίζουν ότι η άτυπη επαγωγική σκέψη αρθρώνεται στην κατανόηση των ακόλουθων συσχετιζόμενων εννοιών: 1. τις ιδιότητες του όλου αντί τις ιδιότητες συγκεκριμένων περιπτώσεων, 2. το μέγεθος του δείγματος και τις επιπτώσεις του στην εκτίμηση πληθυσμιακών παραμέτρων, 3. τον έλεγχο της μεροληψίας και 4. τη διάκριση μεταξύ υποθέσεων που ισχύουν πάντα και υποθέσεων που ισχύουν συχνά ή κάποιες φορές.

Η διδασκαλία της στατιστικής μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη της επαγωγικής συλλογιστικής των μαθητών ήδη από νεαρή ηλικία, μέσω μιας άτυπης, στηριζόμενης στην επίλυση στατιστικών προβλημάτων, διερευνητικής προσέγγισης (Wild & Pfannkuch, 1999; Παπαριστοδήμου & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2015): οκτάχρονοι μαθητές που συμμετείχαν σε έρευνα βίωσαν την επίλυση στατιστικών προβλημάτων ως μια διερευνητική διαδικασία (Παπαριστοδήμου & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2015). Έθεσαν ερωτήματα για ζητήματα που τους ενδιέφεραν, συνέλεξαν δεδομένα, ανάλυσαν και ερμήνευσαν τα δεδομένα τους και τα συσχέτισαν με τα αρχικά τους ερωτήματα, διατύπωσαν το άτυπο στατιστικό συλλογισμό τους με τρεις ευδιάκριτους τρόπους: (α) επιχειρηματολογία με βάση τα δεδομένα, (β) επιχειρηματολογία με βάση τα δεδομένα και γενίκευση, και (γ) επιχειρηματολογία με βάση τα δεδομένα και τη χρησιμοποίηση εννοιών πιθανότητας. Το προσωπικό ενδιαφέρον είναι σημαντικό για την εμπλοκή παιδιών μικρής ηλικίας σε συλλογισμούς σχετικά με την άτυπη στατιστική σκέψη. Τα παιδιά της έρευνάς μας είχαν ενεργή συμμετοχή στη σχολική τους εργασία (project) μια και τα δεδομένα που συνέλλεξαν και ανάλυσαν αφορούσαν αυτούς και τους συμμαθητές τους. Σε αυτή την ηλικία, η προσωπική εμπειρία και το ενδιαφέρον διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο στις αλληλεπιδράσεις των παιδιών με τα δεδομένα. Χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα για τη διερεύνηση προβλημάτων που τους ενδιαφέρουν, τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να συνδέσουν τις στατιστικές έννοιες με εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής (Παπαριστοδήμου & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2015). Το πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται η άτυπη στατιστική συστηματική συλλογιστική επηρεάζεται εντόνως από τα διάφορα πλαίσια και εμπειρίες που το παιδί ήδη έχει: υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες πλαισίων: τα πλαίσια των δεδομένων (data-context), το οποίο είναι συνυφασμένο με τις πτυχές του πραγματικού κόσμου που υφίστανται στο πρόβλημα και τις γνώσεις που είναι αναγκαίες για να λυθεί το πρόβλημα, και τα πλαίσια των εκπαιδευτικών εμπειριών (learning-experience context), που αναφέρεται στο υπόβαθρο που φέρουν οι μαθητές από το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον μέσα στο οποίο επιβιώνουν (Pfannkuch, 2011). Η επιλογή ενός φιλικού και διερευνητικού πλαισίου για την προσέγγιση των στατιστικών εννοιών ναι μεν είναι κατ’ επέκτασιν αναγκαία για την ανάπτυξη του άτυπου στατιστικού συλλογισμού, αλλά θα πρέπει να γίνεται και μια περιοδική απομάκρυνση από το πλαίσιο, καθώς οι μαθητές μαγνητίζονται από το εκάστοτε δείγμα και εγκλωβίζονται στην ιδεα της εύρεσης της ιστορίας πίσω από το δείγμα των παρατηρήσεων, με αποτέλεσμα να μην αντιμετωπίζουν το δείγμα σαν ένα υποθετικό δείγμα που θα μπορούσε να παρατηρηθεί (Pfannkuch, 2011), με αποτέλεσμα να μην αναπτύσσεται η στοχαστικότητα, η οποία είναι κρίσιμη για τον στατιστικό εγγραμματισμό (Cai, 1998; Mokros & Russel, 1995; κ.α.), ιδίως στην περίπτωση του μέσου όρου.

2.1.6 Η ελληνική πραγματικότητα στην διδασκαλία της στατιστικής.

Στην περίπτωση των Ελλήνων μαθητών, το ποσοστό των μαθητών της Α΄ γυμνασίου που απάντησαν σωστά σε ερωτήσεις μέσου όρου ανέρχεται μόλις στο 55% (Χατζηπαντελής, Γκίνης & Κυρίτσης, 2001). Μέρος γι' αυτή την εικόνα οφείλεται στο γεγονός ότι μόλις το 21% των μαθητών είχαν διδαχθεί τις βασικές έννοιες της στατιστικής μέσω δραστηριοτήτων, και απ' αυτό το 21%, το 25,3% των μαθητών διδάχθηκε στατιστική μέσω δραστηριοτήτων μονάχα σε μία από τις τρεις τάξεις του Δημοτικού που προβλέπεται η διδασκαλία της στατιστικής (Χατζηπαντελής, Γκίνης & Κυρίτσης, 2001). Σε μεγάλο βαθμό οι ανεπάρκειες αυτές οφείλονται στην φύση του εκπαιδευτικού συστήματος και τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς: ο Χατζηπαντελής (2003) αναφέρει χαρακτηριστικά πως από 157 ερωτηθείς εκπαιδευτικούς που διδάσκουν στις τελευταίες δύο τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τα 2/3 δίδαξαν όλα τα κεφάλαια της στατιστικής που προβλέπονται, ενώ μόλις το 42% χρησιμοποίησε εμπειρίες των μαθητών για την διδασκαλία των στατιστικών εννοιών, ενώ παράλληλα μόλις 90 από τους 157 θεωρούν πάρα πολύ και αρκετά σημαντικό οι μαθητές να μάθουν διαβάζουν στατιστικούς πίνακες και διαγράμματα (Χατζηπαντελής, 2003).

Βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις σχετικά με την φύση των μαθηματικών ως μάθημα ντετερμινιστικό και ιεραρχικά δομημένης γνώσης εισάγονται στην στατιστική και δρουν ως εμπόδιο στο είδος της εκπαίδευσης που χρειάζονται οι μαθητές για να αναγνωρίζουν και να αντιμετωπίζουν την αβεβαιότητα και την μεταβλητότητα (Makar & Confrey, 2003; στο Meletiou-Mavrotheris, Paparistodemou & Stylianou, 2009). Η τάση των αναλυτικών προγραμμάτων προς τον ντετερμινισμό και τα ακριβή νούμερα δίνει έμφαση στις κεντρικές τιμές (Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003), με αποτέλεσμα να υποτιμάται η μεταβλητότητα στον πραγματικό κόσμο, πράγμα που οδηγεί σε χειρότερες προβλέψεις και συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών ομάδων/δειγμάτων, αφού οι δείκτες του μέσου χρησιμοποιούνται για αυτές τις λειτουργίες, ο συνυπολογισμός του εύρους (variation) θα οδηγούσε σε πολύ καλύτερες προβλέψεις. Πολλοί εκπαιδευτικοί έχουν αδύναμη κατανόηση των στατιστικών εννοιών που διδάσκουν σχετικά με τα στοχαστικά μαθηματικά, με αποτέλεσμα να έχουν συχνά παρόμοιες αντιλήψεις με τους μαθητές τους, επιμένοντας στην διαδικαστική μάθηση έναντι της εννοιολογικής κατανόησης, πράγμα που οδηγεί στην αναζήτηση μιας και μοναδικής λύσης (Meletiou-Mavrotheris, Paparistodemou & Stylianou, 2009), κόντρα πρακτικά προς την ίδια την φύση της στατιστικής. Η διδασκαλία της στατιστικής στην πρωτοβάθμια και την κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση περιορίζεται σε βασικές έννοιες της περιγραφικής στατιστικής και η εισαγωγή στην επαγωγική στατιστική γινόταν στις τελευταίες τάξεις της μέσης εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αδυνατούν να βγάλουν συμπεράσματα βάσει των στατιστικών στοιχείων, με μοναδική ίσως και υπό προϋποθέσεις εξαίρεση το μάθημα «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» της Γ’ Λυκείου (Χατζηπαντελής, 2002).

2.1.7 Συμπεράσματα πάνω στα ζητήματα του μέσου όρου

Αναμφίβολα ο μέσος όρος αποτελεί την πιο κοινή και χρησιμοποιημένη στατιστική έννοια, προσβάσιμη από πάρα πολλές πηγές καθημερινά, καθιστώντας τον εξαιρετικά σημαντικό για την καθημερινότητα των πολιτών. Ωστόσο, η διδασκαλία του εμφανίζει πολλές σημαντικές δυσκολίες, τόσο στο βασικό αλγοριθμικό επίπεδο, όσο και ως έννοια των στοχαστικών μαθηματικών, αλλά και σαν μέτρο αναπαράστασης δεδομένων.

Παρ’ όλο που ο μέσος όρος διδάσκεται από τις μικρότερες τάξεις του δημοτικού (Β’ δημοτικού) στην περίπτωση των ελληνικών σχολείων, η διδασκαλία του αντιμετωπίζει σημαντικές δυσκολίες, οι οποίες προέρχονται πρωτίστως από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι εμφανίζονται επιθετικοί προς τις έννοιες της στατιστικής, και δευτερευόντως από το αναλυτικό πρόγραμμα και την δόμηση και δραστηριότητες που αυτό προτείνει, καθώς και οι τρεις πτυχές του μέσου όρου (αλγοριθμική, στοχαστική, λειτουργία αναπαράστασης) διδάσκονται πραγματικά και στα τρία επίπεδα μονάχα στην Γ΄ λυκείου. Η διαδικαστική γνώση και η κυριαρχία της μοναδικής σωστής απάντησης που υπάρχει στο ελληνικό εκπαιδευτικό σκοτώνει την στοχαστικότητα των μαθηματικών, πράγμα που οδηγεί σε κενό στην ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης.

Η διδασκαλία του μέσου όρου, ωστόσο, ακριβώς λόγω της τριπλής αυτής του φύσης, απαιτεί πρώτα τον στατιστικό εγγραμματισμό των μαθητών σε πρώτη φάση, και την ανάπτυξη της άτυπης επαγωγικής σκέψης σε δεύτερη: ο μεν πρώτος είναι απαραίτητος για να αποφασιστούν τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν για να επιλυθεί το πρόβλημα του μέσου όρου, η μεν δεύτερη για να γίνει κατανοητό το τι συμβολίζει ο μέσος όρος και να δοθεί απάντηση στο εκάστοτε πρόβλημα. Η κακή κατανόηση της έννοιας του μέσου όρου αποτελεί πηγή ζητημάτων και λανθανουσών αντιλήψεων, όπως ο μη υπολογισμός μηδενικών τιμών του δείγματος, ο μη συνυπολογισμός πολλαπλών παρατηρήσεων με ίδια τιμή και η αδυναμία κατασκευής δείγματος από δεδομένο μέσο όρο. Ο αλγόριθμος του μέσου όρου από μόνος του δεν αποτελεί πηγή δυσκολίας, καθώς η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών γνώριζαν τον μέσο όρο, αλλά οριακά οι μισοί στις περισσότερες έρευνες κατάφερναν να απαντήσουν σωστά στα προβλήματα των ερευνητών, φαινόμενο το οποίο εκτεινόταν σε όλες τις ηλικιακές ομάδες που μελετήθηκαν, από παιδιά της Δ΄ δημοτικού, έως και φοιτητές. Αυτή η αντιφατική πραγματικότητα ζωγραφίζει με τα εντονότερα χρώματα το ζήτημα της έλλειψης στατιστικού εγγραμματισμού, παράλληλα με την έλλειψη επαγωγικής σκέψης.

Το πόσο εύκολος είναι στην εφαρμογή (χωρίς να σημαίνει ότι εφαρμόζεται με σωστό τρόπο ωστόσο) ο αλγόριθμος του μέσου όρου γίνεται αντιληπτό και στην μελέτη των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να απαντήσουν σε προβλήματα μέσου όρου, όπου από όλες τις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν, με κυρίαρχες τις απεικονίσεις, τις λεκτικές αναπαραστάσεις, την στρατηγική μαντέματος και ελέγχου και την αριθμητική-αλγοριθμική στρατηγική, η κυρίαρχη ήταν η τελευταία, η οποία όταν πραγματωνόταν μέσα από χρήση αλγεβρικών και όχι απλώς αριθμητικών αναπαραστάσεων εμφάνισε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας. Κατ’ επέκτασιν, η σωστή κατανόηση του δείγματος και των μεταβλητών και ζητουμένων του προβλήματος αποτελεί μεγαλύτερη τροχοπέδη σε σχέση με την κατανόηση του αλγορίθμου, ζήτημα που και πάλι επιδεικνύει το πόσο σημαντικός είναι ο στατιστικός εγγραμματισμός και η επαγωγική σκέψη.

Παράλληλα, η υπερβολική και χωρίς όρια χρήση ρεαλιστικών πλαισίων κατά τη διδασκαλία του μέσου όρου εγκυμονεί κινδύνους, καθώς οι ιστορίες των πλαισίων μαγνητίζουν τους μαθητές και η έμφαση και προσοχή στρέφεται προς τα πλαίσια καθαυτά, έναντι του μέσου όρου, καταλήγοντας να επηρεάζουν τις απαντήσεις τους και την χρήση του αλγορίθμου αναλόγως κάθε φορά.

2.1.8 Διάγραμμα βιβλιογραφικής ανασκόπησης στο ζήτημα του μέσου όρου.

Επαγωγική συλλογιστική: η διαδικασία συσχετισμού των παρατηρήσεων στα δεδομένα με ένα θεωρητικό πληθυσμό και η χρήση πληροφοριών και επιχειρηματολογίας για την στήριξη των συσχετισμών.

Strauss & Bichler, 1988

Λειτουργίες μέσου όρου:

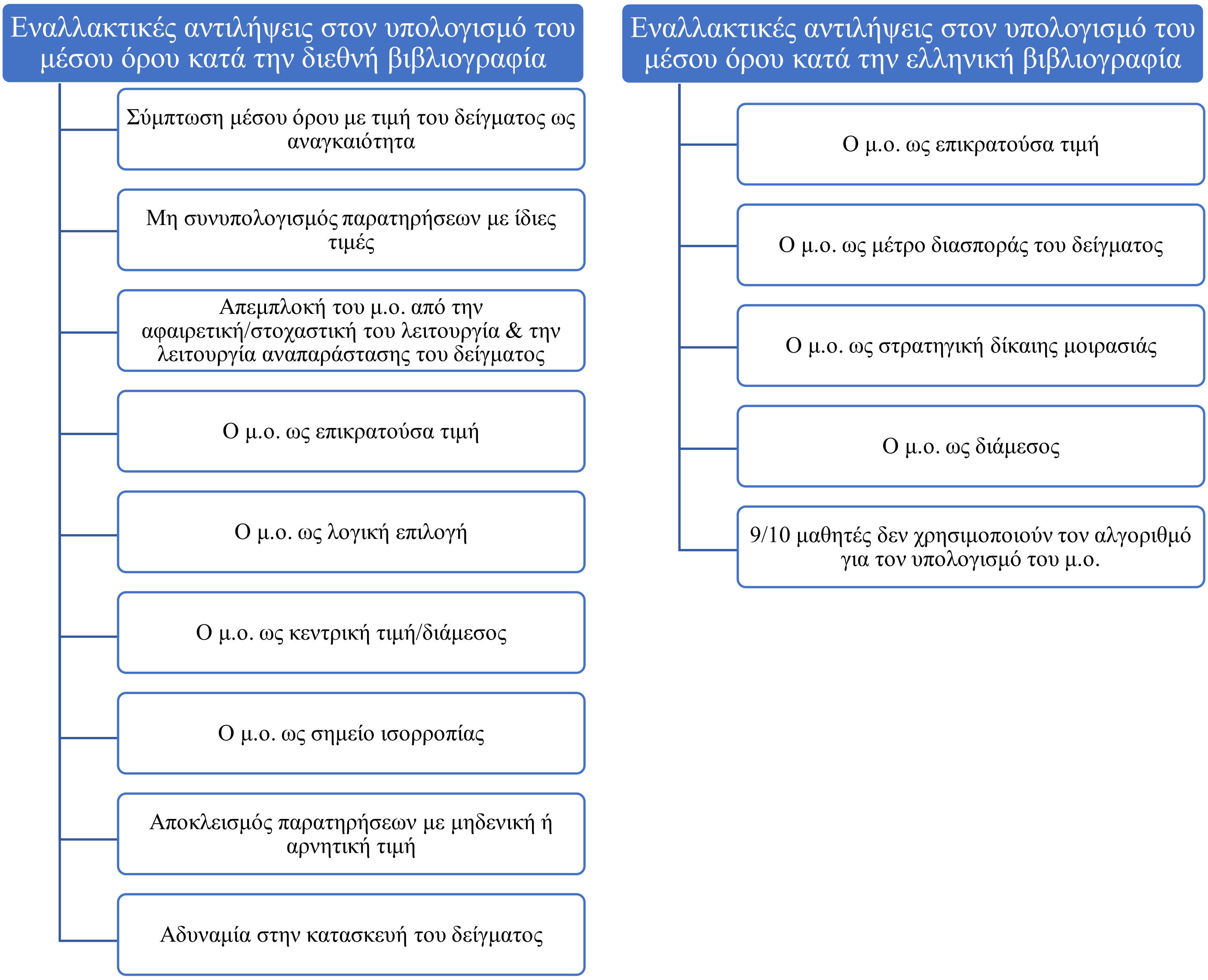
I. Στατιστική/αριθμητική λειτουργία
II. Αφαιρετική λειτουργία
III. Μέσο αναπαράστασης ενός συνόλου δεδομένων

Στατιστικός εγγραμματισμός:

I. κριτική ανάγνωση & αξιολόγηση δεδομένων
II. ικανότητα επικοινωνίας & συζήτησης αντιδράσεων τα στατιστικά δεδομένα.

Ο μέσος όρος στην Ά βάθμια εκπαίδευση:

- Εισαγωγή του μέσου όρου στην ΄Δ Δημοτικού.
- Η διαθεματικότητα περιορίζεται σε στοιχεία της καθημερινότητας των μαθητών.
- 62% των μαθητών της Δ΄ & 64% των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού έχουν ακούσει τον όρο «μέσος όρος (Chatzivasileiou, Michalis & Tsalikis, 2010).
- 39% των μαθητών της Δ΄ & 64% των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού δίνουν επαρκές παράδειγμα για τον μέσο όρο (Chatzivasileiou, Michalis & Tsalikis, 2010).



2.2 Η ανάπτυξη της έννοιας της μέσης ταχύτητας

2.2.1 Προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της μέσης ταχύτητας και ανάπτυξη της έννοιας.

Παρ' ότι η έννοια της ταχύτητας είναι ιδιαιτέρως περίπλοκη (Gravemeijer, 2016), καθώς περιπλέκει 3 διαφορετικές έννοιες, οι οποίες αναπτύσσονται με διαφορετικό τρόπο, σε διαφορετικό χρόνο και με διαφορετικά στάδια (Piaget, 2006; Siegler & Richards, 1979; Wilkening, 1981; κ.α.), τα πρώτα σημάδια διαισθητικής αντίληψης της ταχύτητας εμφανίζονται ήδη από την ηλικία των 18 μηνών (Möhring et al., 2012).

Ιδιαιτέρως στην ηλικία των 24 μηνών, τα βρέφη είναι ικανά να συσχετίσουν τον χρόνο κίνησης με το αναμενόμενο σημείο εξόδου ενός τρένου, προβλέποντας την κίνηση και την στάση του τρένου αναλόγως τον χρόνο κίνησης, αντιλαμβανόμενα την κίνηση ως συνεχή, αντιλαμβανόμενα την σταθερή ταχύτητα του σώματος (Möhring et al., 2012).

Ωστόσο, η διαισθητική αυτή αντίληψη των πειραματικών δεδομένων θα αργήσει πολύ να καταρριφθεί και να αποσαφηνιστούν οι τρείς βασικές έννοιες -ταχύτητα, διάστημα, χρόνος (Piaget, 1970), και συγκεκριμένα, θα πρέπει το παιδί να φτάσει στο στάδιο της συγκεκριμένης λογικής σκέψης (concrete operations). Ο Piaget χώρισε το επίπεδο σκέψεις των παιδιών σε τρία επίπεδα. Στα πρώτα δύο στάδια απουσιάζει η σχετικότητα της ταχύτητας, αφού η διαδρομή δεν έχει διαχωριστεί από τον χρόνο, με αποτέλεσμα ο μεγαλύτερος χρόνος κίνησης να συσχετίζεται με την μεγαλύτερη διαδρομή, ή και το αντίστροφο, με τις έννοιες της ταχύτητας και του χρόνου να είναι δέσμιες του διαστήματος που το σώμα κινείται. Στο δεύτερο ωστόσο στάδιο, στις περιπτώσεις που κινείτο μονάχα ένα σώμα, οι απαντήσεις των μαθητών αποδεικνύονταν σωστές, ακόμη κι αν αυτές είχαν καθαρά διαισθητικές βάσεις. Στην περίπτωση, όμως, που τα κινούμενα σώματα ήταν 2, τότε οι μαθητές αδυνατούσαν να ανταποκριθούν στα ζητούμενα, ιδιαιτέρως στην περίπτωση που οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν τον χρόνο στον οποίο τα σώματα θα συναντηθούν, δικαιολογώντας τις απαντήσεις τους με όρους διαστήματος έναντι χρόνου. Στην ηλικία των 8 με 10 ετών ωστόσο, οι μαθητές είναι πλέον ικανοί να εκτελέσουν αριθμητικούς υπολογισμούς και να προβλέψουν την εξέλιξη/κατάληξη του πειράματος με μεγαλύτερη ακρίβεια, χωρίς κάτι τέτοιο όμως να σημαίνει ότι έχουν ξεπεραστεί οι εγγενείς δυσκολίες του προηγούμενου σταδίου.

Παραταύτα, η έρευνα του Piaget εμφάνιζε έναν ιδιαίτερο περιορισμό λόγω του σχεδιασμού της, καθώς οι μαθητές εξετάζονταν σε μία έννοια κάθε φορά, με αποτέλεσμα να μην αναδεικνύονται ούτε οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εννοιών, ούτε τα αλγεβρικά εργαλεία που οι μαθητές χρησιμοποιούσαν (Siegler & Richards, 1979; Wilkening, 1981). Οι Siegler & Richards (1979) επανασχεδίασαν την πειραματική διαδικασία, ώστε να αποφευχθούν τα επιστημολογικά κενά των πειραμάτων του Piaget (1970), αλλά και έτσι ώστε τα υπό μελέτη σώματα να κινούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, ξεκινώντας από διαφορετικές θέσεις και διένυαν διαφορετικές αποστάσεις σε διαφορετικούς χρόνους, με διαφορετικές ταχύτητες, αναλόγως το αντικείμενο μελέτης κάθε φορά των ερευνητών. Τρία αντίστοιχα μοντέλα ερμηνείας των απαντήσεων των μαθητών αναπτύχθηκαν, σε αντιστοιχία με αυτά του Piaget (1970). Στο πρώτο (I) οι μαθητές απαντούσαν στο ερώτημα, για όποια διάσταση κι αν αυτό αφορούσε, βάσει του σημείου τερματισμού των σωμάτων. Στο δεύτερο μοντέλο (II), οι μαθητές απαντούσαν ομοίως με βάση το σημείο τερματισμού, ενώ όταν το σημείο τερματισμού ήταν κοινό, η επικέντρωση δινόταν στο σημείο έναρξης της κίνησης. Στο τρίτο μοντέλο (III), οι μαθητές ήταν σε θέση να λύσουν όλα τα προβλήματα, ανεξαρτήτως της θέσης έναρξης ή τερματισμού των σωμάτων. Σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα, οι μαθητές ηλικίας 5 ετών χρησιμοποιούσαν κατά κανόνα το μοντέλο (I) σκέψης, δηλαδή ότι το σώμα που κινήθηκε για μεγαλύτερη απόσταση, με μεγαλύτερη ταχύτητα ή για περισσότερο χρόνο ήταν αυτό που σταμάτησε στο πιο μακρινό σημείο, ενώ οι ενήλικες που συμμετείχαν στο πείραμα απαντούσαν συστηματικά βάσει του μοντέλου (III). Οι μαθητές, ωστόσο, 8 ετών και 11 ετών ακροβατούσαν μεταξύ δύο μοντέλων (I & II στην περίπτωση των πρώτων, II & III στην περίπτωση των δεύτερων). Ωστόσο, μόλις 2 μαθητές και από τις δύο ομάδες μπόρεσε συστηματικά να απαντήσει σύμφωνα με το μοντέλο (III) στα προβλήματα που αφορούσαν χρόνο, πράγμα που σημαίνει ότι οι έννοιες της απόστασης και της ταχύτητας αναπτύσσονται πριν από εκείνη του χρόνου. Συνοψίζοντας, λοιπόν, την δουλειά των Siegler & Richards, θα ήταν εύλογο να ειπωθεί πως οι μαθητές στην ηλικία των 5 δεν μπορούν να υπολογίσουν καμία από τις τρεις έννοιες, ενώ οι ενήλικες έχουν πλήρη αντίληψη και των τριών εννοιών. Στο ενδιάμεσο, ωστόσο, οι έννοιες της απόστασης και της ταχύτητας γίνονται κατανοητές συντομότερα από εκείνη του χρόνου.

Ωστόσο, η έρευνα των Siegler & Richard (1979) δεν ανέδειξε τις αλγεβρικές σχέσεις που υπάρχουν εντός των τριών αυτών εννοιών, με αποτέλεσμα να μην είναι εμφανής η κατανόηση των παιδιών αναφορικά με τις σχέσεις που ενώνουν τις τρεις έννοιες, ενώ ο τρόπος μελέτης του Piaget (1970) απομόνωνε τις έννοιες, οπότε στην μελέτη παραδείγματος χάρη του χρόνου, ο μαθητής έπρεπε μονάχα να λάβει υπόψιν του τον χρόνο κίνησης, αγνοώντας την απόσταση που διένυσε το σώμα και την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε (Wilkening, 1981).

Ο Wilkening (1981), στην προσπάθειά του να καλύψει τα προαναφερθέντα ερευνητικά κενά, διεξήγαγε τρία πειράματα, τα οποία είχαν σκοπό να αναδείξουν την κατανόηση τόσο των εννοιών, όσο και των συσχετίσεων μεταξύ τους, με το δείγμα του να αποτελείται από τρία διαφορετικά ηλικιακά γκρουπ (το πρώτο παιδιά ηλικίας 5-6 ετών, το δεύτερο ηλικίας 9-10 ετών, το τρίτο με ενήλικες από 17 έως 34 ετών). Κόντρα στις προαναφερθείσες έρευνες, οι μαθητές ηλικίας 5 ετών γνώριζαν, έστω και σιωπηλά, πως η απόσταση συνδέεται με την ταχύτητα, αλλά και ότι ο χρόνος συνδέεται τόσο με την απόσταση, όσο και με την ταχύτητα, ακόμα και αν έχουν μια αντίστροφη σχέση. Αναγνώριζαν δηλαδή την σχέση μεταξύ των τριών αυτών διαστάσεων, ακόμα κι αν δεν γνώριζαν σε βάθος τις σχέσεις που συνέδεαν τις έννοιες. Η έλλειψη διαφοροποίησης μεταξύ των τριών εννοιών δεν έγκειται στην κατανόηση της ταχύτητας, της απόστασης και του χρόνου, αλλά στον τρόπο που αντιλαμβάνονται αισθητηριακά τις διαστάσεις αυτές.

Το σημείο-κλειδί για τον Wilkening (1981) κρύβεται στην κατανόηση των αλγεβρικών σχέσεων και τυποποίησης, και ιδίως της κατανόησης της διαίρεσης. Για τον υπολογισμό της απόστασης από τον χρόνο και την ταχύτητα, όλα τα ηλικιακά γκρουπ χρησιμοποίησαν τον γενικό κανόνα ότι η απόσταση ισούται με το γινόμενο του χρόνου με την ταχύτητα. Στην περίπτωση των μαθητών ηλικίας 5 ετών το συμπέρασμα αυτό εξάχθηκε από τις κινήσεις των ματιών τους: οι μαθητές κουνούσαν τα μάτια τους σε προκαθορισμένες αποστάσεις, εκεί οπού ήταν αναμενόμενο να βρεθεί το σώμα μετά από μια δεδομένη χρονική περίοδο, με τις αποστάσεις να είναι πάντοτε σταθερές, κατά τον ίδιο τρόπο που κινούσαν και οι ενήλικες τα μάτια τους, κατ’ αντιστοιχία του κανόνα πολλαπλασιασμού για την εύρεση της απόστασης. Για την εύρεση του χρόνου, ωστόσο, για δεδομένη απόσταση και ταχύτητα, οι μαθητές της ηλικίας των 5 ετών αφαιρούσαν το μέτρο της ταχύτητας από δεδομένη απόσταση και χρόνο. Η μεγαλύτερη απόκλιση από το επιστημονικό μοντέλο απαντήθηκαν στον υπολογισμό της ταχύτητας για δεδομένη απόσταση και χρόνο, όπου ακόμα και οι ενήλικες δυσκολεύτηκαν να χρησιμοποιήσουν τον σωστό τύπο και ήταν η μόνη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές ηλικίας 5 ετών δεν ενσωμάτωσαν στις απαντήσεις τους και τις τρεις έννοιες, κρίνοντας την ταχύτητα αποκλειστικά από την απόσταση που διένυσε το κάθε σώμα. Η ερμηνεία του φαινομένου αυτού έγκειται στην υπερφόρτωση της μνήμης με δεδομένα, καθώς οι μαθητές δυσκολεύονται να διατηρήσουν την εικόνα της κίνησης για 2 ή περισσότερα σώματα, με αποτέλεσμα να καταφεύγουν στο τελευταίο εύκολα προσβάσιμο ερέθισμα, το οποίο είναι και το σημείο στο οποίο σταματάει το σώμα, επιβεβαιώνοντας τα παρόμοια ευρήματα των Siegler & Richards (1979), αλλά και των πειραμάτων του Piaget (1970), καθώς ήταν πολύ δύσκολο για τα παιδιά να διατηρήσουν στην μνήμη τους το χρονικό σημείο στο οποίο ξεκίνησε το κάθε σώμα την κίνησή του.

Παρά τον συμπληρωματικό χαρακτήρα των τριών αυτών ερευνών, υπό το πρίσμα ότι κάθε έρευνα συμπλήρωνε την προηγούμενη, καμία από τις τρεις δεν κατάφερε να αναδείξει σε επαρκή βαθμό τις αλγεβρικές σχέσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές για να ερμηνεύσουν τις κινήσεις και να προβλέψουν on paper κάποια από τις τρεις διαστάσεις-έννοιες. Ιδιαίτερα στην έρευνα του Wilkening (1981), έντονο προβληματισμό εγείρει το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές, ιδίως από το δεύτερο ηλικιακό γκρουπ (10-11 ετών) επέλεγαν στρατηγικές πρόσθεσης-αφαίρεσης για να υπολογίσουν την ταχύτητα, πράγμα που δεν έπρεπε να υφίσταντο, δεδομένου ότι πλέον γνώριζαν την έννοια της διαίρεσης. Μέρος των ερωτημάτων αυτών απάντησε ο Thompson (1994), δουλεύοντας με μία μαθήτρια ηλικίας 10 ετών. Το πρώτο ζήτημα που εντόπισε έγκειτο στις *ποσοτικοποιημένες πράξεις* (*quantitative operations*), δηλαδή στην εις βάθος κατανόηση του αποτελέσματος της πράξης, εάν δηλαδή αυτό δημιουργεί ένα καινούργιο μέγεθος, ιδιότητα, κατάσταση κλπ., ή εάν είναι απλή αριθμητική πράξη, εάν δηλαδή δεν αλλάζει το υπό μελέτη μέγεθος. Η μοιρασιά 12 μήλων σε τέσσερις μαθήτριες δεν αλλάζει την μονάδα μέτρησης στο πηλίκο – το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι μήλα. Εάν όμως στο ερώτημα το ζητούμενο είναι πόσες μαθήτριες θα πάρουν από τρία μήλα, εάν μοιραστούν εξίσου 12 μήλα, τότε το πηλίκο δεν θα μετριέται πλέον σε μήλα, αλλά σε μαθήτριες, πράγμα που δεν καθίσταται σαφές πάντα στους μαθητές και αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στην κατανόηση των αλγεβρικών διεργασιών για την κατανόηση της ταχύτητας. Το δεύτερο σκέλος έγκειτο στον τρόπο που η ταχύτητα γινόταν αντιληπτή από τους μαθητές ως αλγεβρικό μέγεθος. Η μαθήτρια αντιλαμβανόταν αρχικά την ταχύτητα σαν «κομμάτια μήκους», στα οποία χώριζε το διανυθέν διάστημα, ενώ ο χρόνος ταυτίζεται με το πλήθος των διαστημάτων αυτών, υπολογίζοντας σωστά το χρονικό διάστημα που απαιτείτο για να διανυθεί η απόσταση. Αντίθετα, όταν το ζητούμενο ήταν η ταχύτητα για δεδομένη απόσταση και χρόνο, η μαθήτρια δυσκολεύτηκε πολύ στο να παράγει απάντηση: ο χρόνος, σε αντίθεση με την ταχύτητα που γίνεται αντιληπτή ως δεδομένα διαστήματα και ένα διάστημα μπορεί εν μέρει να μετρηθεί με αυτή, ο χρόνος δεν έχει μέγεθος μετρήσιμο με μήκος και δεν γινόταν αντιληπτός από την μαθήτρια ως ξεχωριστή, αυτόνομη διάσταση, αλλά σαν πλήθος μηκών. Μονάχα όταν ο χρόνος μετατράπηκε σε αυτόνομο μέγεθος έγινε δυνατή η πλήρης κατανόηση της ταχύτητας, και η ταχύτητα μετατράπηκε από *απόσταση* σε πηλίκο της απόστασης προς τον χρόνο, ενώ παράλληλα και ο χρόνος έπαψε να γίνεται αντιληπτός ως αναλογία μεταξύ απόστασης και ταχύτητας. Τα ευρήματα του

Thompson (1994) σε μεγάλο βαθμό επιβεβαιώνουν κάποιες βασικές υποθέσεις του Wilkening (1981): ο Wilkening στο κλείσιμο της έρευνάς του υπέθεσε πως η διαδικασία του πολλαπλασιασμού γίνεται νοητά πολύ πιο εύκολη, αφού είναι αρκετά εύκολο να αθροιστούν νοητά συνεχόμενες σταθερές ποσότητες, πολύ περισσότερο από την στιγμή που γίνονται και αισθητηριακά αντιληπτές. Αντίθετα, η διαδικασία της διαίρεσης για να υπολογιστεί η ταχύτητα σε δεδομένο χρόνο για δεδομένο διάστημα θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ως συνεχόμενη αφαίρεση, κινούμενοι αντίστροφα. Ωστόσο, τα δεδομένα μεγέθη που έχουν δοθεί, είτε δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν (η διαδρομή χωράει μια φορά ακριβώς στον εαυτό της), είτε δεν γίνονται αισθητηριακά αντιληπτές, στην περίπτωση του χρόνου, με αποτέλεσμα η διαδικασία αυτή να μετατραπεί σε διαδικασία δοκιμής-λάθους, μέχρι να ταιριάξουν τα νούμερα μεταξύ τους (Wilkening, 1981). Κατ' επέκτασιν, το να παρουσιαστεί η ταχύτητα ως το πηλίκο της απόστασης προς τον χρόνο από τους εκπαιδευτικούς κρύβει δύο παραδοχές, οι οποίες οδηγούν στα παραπάνω ζητήματα: α) ότι οι μαθητές έχουν πλήρως κατανοήσει την κίνηση ως σύνθεση δυο **ξεχωριστών** εννοιών, της απόστασης και του χρόνου, και β) ότι αντιλαμβάνονται ότι η ταχύτητα σημαίνει πως ένα συγκεκριμένο μέρος της απόστασης καλύπτεται σε **ανάλογο** χρόνο, χωρίς αυτό να σημαίνει πως οι τιμές των δύο διαστάσεων είναι «κλειδωμένες» σε ένα συγκεκριμένο μέγεθος. Εν συντομία, για να γίνει κατανοητή η διδασκαλία της ταχύτητας με βάση τα υπάρχοντα πρότυπα, πρέπει πρώτα να έχει πλήρως κατανοητή η ταχύτητα και η ποσοτικοποίησή (*quantification*) της (Thompson, 1994).

Αν και η αντίληψη πως το σώμα που κινείται για μεγαλύτερη απόσταση έχει και την μεγαλύτερη ταχύτητα, σε μεγαλύτερες ηλικίες συχνά εμφανίζεται μια αντεστραμμένη αντίληψη, ότι δηλαδή το σώμα το οποίο κινείται για το μικρότερο χρονικό διάστημα έχει και την μεγαλύτερη ταχύτητα (Groves & Doig, 2003). Όπως προέκυψε από την έρευνα των Groves & Doig (2003), οι μαθητές ηλικίας 10 έως 12 ετών μπορούσαν με ευκολία να υπολογίσουν τον χρόνο της κίνησης με την βοήθεια ενός μετρονόμου, μπορούσαν να υπολογίσουν την απόσταση χρησιμοποιώντας φύλλα χαρτιού, αλλά δεν μπορούσαν να εκφράσουν την ταχύτητα ως φύλλα χαρτιού ανά δευτερόλεπτο, αδυνατώντας να αντιληφθούν την ταχύτητα ως ρυθμό φύλλων ανά δευτερόλεπτο, αφού όταν καλούνταν να απαντήσουν αναφορικά με το τι μπορεί να υπολογιστεί με τα φύλλα χαρτιού αναφέρονταν μονάχα στην απόσταση, καθώς οι μαθητές ανέμεναν η ταχύτητα να υπολογιστεί βάσει των κλασσικών μονάδων μέτρησης του μήκους. Επίσης, όταν συνέκριναν δύο μπάλες οι οποίες κάλυπταν φύλλα διαφορετικών μηκών, σημαντική πλειοψηφία των μαθητών απάντησε πως ταχύτερα κινούταν η μπάλα που διένυε την μικρότερη διαδρομή, καθώς αυτή κινούνταν για μικρότερο χρονικό διάστημα ανά φύλλο. Ερευνώντας τις ρίζες της αντίληψης αυτής, η οποία ήταν ιδιαιτέρως δύσκολη στην ανατροπή της, οι μαθητές αναφέρθηκαν στους αγώνες δρόμου, όπου αυτός που τερματίζει στον συντομότερο χρόνο αυτόματα κινείται και ταχύτερα, παραβλέποντας την φύση της διαδρομής και στις δύο περιπτώσεις. Ωστόσο, όταν το πλαίσιο της άσκησης άλλαξε, και αντί για μπάλες πλέον τα κινούμενα σώματα ήταν οι μαθητές οι ίδιοι, έκανε επανεμφάνιση η αντίληψη πως ταχύτερα το σώμα κινείται που φτάνει μακρύτερα.

Κατά κανόνα η έννοια της μέσης ταχύτητας διδάσκεται νωρίτερα, με την διανυσματική ταχύτητα να ακολουθεί χρονικά. Ωστόσο, η σύγχυση και ελλιπής κατανόηση της μέσης ταχύτητας συχνά οδηγεί σε αδυναμία κατανόησης της διανυσματικής ταχύτητας, ακόμα και μέχρι το πανεπιστήμιο (Marshall & Carrejo, 2007). Μέχρι και το πανεπιστήμιο, η έμφαση των φοιτητών δίνεται κατά κύριο λόγο στην διανυθείσα απόσταση, αποκομμένη από την έννοια του χρόνου. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν και οι Marshall & Carrejo (2007), τα θεμέλια της έννοιας της ταχύτητας πρέπει να δίνονται με την μορφή αναλογίας της απόστασης προς τον χρόνο, ιδιαιτέρως όταν ο μαθητής έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια της ταχύτητας, ώστε να γίνει κατανοητή ως ένα ομογενές φαινόμενο, σε αντιστοιχία με τα όσα υποστήριξε ο Thompson (1994).

Η κυριαρχία της θέσης σε σχέση με τις άλλες δύο έννοιες φαίνεται και στην έρευνα του Jones (1983), ο οποίος μελέτησε την κατανόηση της διανυσματικής ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε μαθητές ηλικίας 11 έως και 16 ετών. Πέρα από την σύγχυση διανυσματικής ταχύτητας με την μέση ταχύτητα, καθώς μόλις ένας μαθητής όρισε σωστά την διανυσματική ταχύτητα, η πλειοψηφία των μαθητών ήταν σε θέση να ορίσει την ταχύτητα ως το πηλίκο της απόστασης με τον χρόνο. Παραταύτα, όταν οι μαθητές κλήθηκαν να ερμηνεύσουν τις σχετικές κινήσεις δύο σωμάτων που κινούνταν ταυτόχρονα, οι απαντήσεις τους φανέρωσαν και πάλι την κυριαρχία της θέσης και των αισθητηριακών βιωμάτων των μαθητών: στην περίπτωση ενός αθλητή που φτάνει έναν άλλον που προηγούνταν, οι μαθητές απάντησαν σωστά πως ο αθλητής που προφταίνει τον άλλον κινήθηκε με μεγαλύτερη ταχύτητα, χωρίς όμως να δίνουν μαθηματική εξήγηση, κατά βάση δικαιολογώντας πως εφόσον ξεκίνησε από πιο πίσω και τον έφτασε, έπρεπε να κινηθεί πιο γρήγορα. Αλλά και στην περίπτωση της προσπέρασης δύο οχημάτων, η πλειοψηφία των μαθητών αναγνώρισε πως το όχημα που εκτελεί την προσπέραση κινείται μεν ταχύτερα, αλλά την στιγμή που τα δύο σώματα βρίσκονται παράλληλα, τα μέτρα της ταχύτητας τους στιγμιαία είναι ίσα (Jones, 1983).

2.2.2 Κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες επιρροής της κατανόησης της έννοιας της μέσης ταχύτητας.

Μία σημαντική παράμετρος, η οποία επηρεάζει την κατανόηση και ερμηνεία της μέσης ταχύτητας είναι και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα στους μαθητές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί και η έρευνα των Kadir, Foong, Wong και Kuppan (2011), οι οποίοι μελέτησαν την κατανόηση της μέσης ταχύτητας σε μαθητές των πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Σιγκαπούρη. Όλοι οι μαθητές στο τέλος της προηγούμενης τάξης – έκτης τάξης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση – είχαν διδαχτεί την έννοια της μέσης ταχύτητας ως το πηλίκο της διανυθείσας απόστασης προς τον χρόνο κίνηση, και κατ' επέκτασιν είχαν ήδη έρθει σε επαφή με την έννοια της ταχύτητας - 73% των μαθητών στο pre-test ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσει τον τύπο για να υπολογίσει την μέση ταχύτητα. Παρ' όλα αυτά, οι μαθητές εμφάνισαν σημαντική αδυναμία στον υπολογισμό του χρόνου κίνησης, με αποτέλεσμα να βρουν λανθασμένα αποτελέσματα, όταν μέσα στον χρόνο κίνησης συμπεριλαμβανόταν και χρόνος στον οποίο το σώμα ήταν ακίνητο, όταν το πρόβλημα και τα δεδομένα ήταν λεκτικά. Ωστόσο, όταν το πρόβλημα άλλαξε πλαίσιο, παρέμεινε μεν λεκτικό, αλλά τα δεδομένα δόθηκαν με μορφή πίνακα, οι μαθητές εμφάνισαν 73% ποσοστό επιτυχίας στην επιλογή της σωστής απάντησης. Το 10% των συνολικών απαντήσεων περιείχε κάποια επιφανειακή στρατηγική μέσου όρου, όπου οι μαθητές έβρισκαν μορφές μέσου όρου με βάση τις ταχύτητες που τους δίνονταν στον πίνακα δεδομένων. Σημαντική ήταν να επίσης η αδυναμία των μαθητών να αναπαραστήσουν στο χαρτί την κίνηση μιας μπάλας που κινείται σε διαγραμμισμένο επίπεδο, καθώς μόλις το 5% των μαθητών κατάφερε να ολοκληρώσει σωστά την ερώτηση. Οι υπόλοιποι μαθητές είτε περιέγραψαν την κίνηση μη λαμβάνοντας υπόψιν την αρχική θέση του σώματος (34%), είτε οι θέσεις που επέλεξαν ήταν ενδεικτικές μη σταθερής ταχύτητας (45%), παρόλο που τα δεδομένα της ερώτησης ήταν ενδεικτικά κίνησης με σταθερή ταχύτητα, ενώ τέλος ένα 16% δεν παρήγαγε κανένα γράφημα κίνησης των σωμάτων.

Εξίσου σημαντικοί παράγοντες επιρροής των αντιλήψεων των μαθητών αποτελούν και οι κοινωνικοπολιτιστικοί παράγοντες του περιβάλλοντος στο οποίο ζουν οι μαθητές (Driver et al., 1994). Ένας χαρακτηριστικός και πολύ ισχυρός τέτοιος παράγοντας αποτελεί η γλώσσα, με χαρακτηριστική να είναι η περίπτωση των μαθητών της Ταϊβάν, καθώς η λέξη που χρησιμοποιούν για να αναφερθούν στην καθημερινότητά τους στην ταχύτητα αναφέρεται στην διανυσματική και όχι στην μέση ταχύτητα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να υπολογίζουν την διανυσματική έναντι της μέσης ταχύτητας (Chiu, 2008).

Η δύναμη της γλώσσας επί των αντιλήψεων των μαθητών, τουλάχιστον όσων αφορά την έννοια της μέσης ταχύτητας, γίνεται εμφανής στην έρευνα των Métioui & Baulu MacWillie (2013), στην οποία συγκρίθηκαν οι απαντήσεις γαλλόφωνων μαθητών, ηλικίας 9 έως 12 ετών, σε κοινό ερωτηματολόγιο από αστικές περιοχές του Καναδά, της Γαλλίας και του Μαρόκου. Οι συγκλίσεις μεταξύ των τριών διαφορετικών δειγμάτων ήταν σημαντικότατες, καθώς κανένας μαθητής δεν ενέπλεξε τον χρόνο για να δικαιολογήσει ποιο σώμα θα τερματίσει στην διαδρομή πρώτο, με την έμφαση των μαθητών να δίνεται στο μήκος της διαδρομής, στο σημείο εκκίνησης και στα χαρακτηριστικά του σώματος και τα ποσοστά μεταξύ των 3 αυτών κατηγοριών απαντήσεων να είναι σχετικώς κοντά και στα 3 δείγματα. Ενδιαφέρον επίσης εμφανίζουν οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις τι είναι ταχύτητα και τι είναι χρόνος. Στην μεν πρώτη ερώτηση, οι μαθητές απάντησαν πως η ταχύτητα αναφέρεται στο πόσο γρήγορα γίνεται κάτι, σχετίζεται με μέρη κάποιου οχήματος, σχετίζεται με ατυχήματα, αγώνες και οφέλη σε χρόνο, ή έλλειψη απάντησης. Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι κανένας Μαροκινός μαθητής δεν όρισε την ταχύτητα βάση κάποιας μηχανής ή μέρους αυτής, αν και τα αντίστοιχα ποσοστά Γάλλων και Καναδών μαθητών ήταν αρκετά χαμηλά (7% και 5% αντίστοιχα). Στην δε δεύτερη ερώτηση, στην πρώτη κατηγορία απαντήσεων ο χρόνος ορίστηκε βάσει των μονάδων μέτρησής του, στη δεύτερη ορίστηκε ως η χρονική διάρκεια ή ταχύτητα ενός συμβάντος, στην τρίτη συσχετίστηκε με κομμάτια της ζωής των μαθητών (π.χ. χαρά, ζωή, κάτι σημαντικό κλπ.), στην τέταρτη με το κλίμα, στην πέμπτη κατηγορία απαντήσεων ο χρόνος συνδέθηκε με τα εργαλεία μέτρησης του χρόνου, ενώ τέλος υπήρχαν και οι κενές και μη δεκτές απαντήσεις. Γενικότερα, παρόλο που οι τρεις χώρες έχουν διαφορές μεταξύ τους (κλιματολογικές, γλωσσικές, κοινωνικές, πολιτιστικές κ.α.), τα ποσοστά των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα εμφανίζουν σημαντικές συγκλίσεις, όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν και οι ερευνητές, ενώ παραμένει εντυπωσιακό το γεγονός πως τα ευρήματα του Piaget αναφορικά με τις αντιλήψεις των παιδιών παραμένουν σχετικά, δεδομένου ότι τα παιδιά πλέον εκτίθενται σε καινούργια ερεθίσματα όπως η τηλεόραση, τα βιντεοπαιχνίδια κ.α.

Ωστόσο, πέρα από την γλώσσα, κοινωνικοπολιτισμικά στοιχεία, όπως το εκπαιδευτικό σύστημα και το σύστημα αρχών της κοινωνίας επηρεάζουν σημαντικά την πρόσληψη των εννοιών των Φυσικών Επιστημών (Zhou et al., 2000). Συγκρίνοντας τις επιδόσεις μαθητών από την Αμερική και την Κίνα στις αντίστοιχες $1^{\text{ες}}$, $3^{\text{ες}}$ και $5^{\text{ες}}$ τάξεις έγινε εμφανής η απόκλιση που μπορεί να προκαλέσει το διαφορετικά οργανωμένο εκπαιδευτικό σύστημα. Οι μαθητές παρακολούθησαν όλοι in vivo κινήσεις σωμάτων, και αφού οι ερευνητές έκαναν ερωτήσεις για να επιβεβαιώσουν ότι οι μαθητές είχαν κατανοήσει πλήρως τα δεδομένα, ρωτούσαν τους μαθητές ποιο σώμα ταξίδεψε ταχύτερα, μακρύτερα ή για περισσότερο χρόνο (η σειρά των ερωτήσεων, σύμφωνα με τους ερευνητές δεν επηρέασε την απόδοση των μαθητών όπως προέκυψε από τα δεδομένα), κρατώντας μία μεταβλητή σταθερή (ανεξάρτητη μεταβλητή) και μεταβάλλοντας μία από τις άλλες δύο. Οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σε τρία επίπεδα, όπου στο πρώτο οι μαθητές είτε επικεντρώνονταν στην ανεξάρτητη μεταβλητή, ταυτίζοντας μεταξύ τους τις μεταβλητές, είτε συσχέτιζαν τον χρόνο με την απόσταση, είτε παρήγαγαν μια παράλογη δικαιολόγηση, στο δεύτερο επίπεδο, όπου όσο μεγάλωνε η μία μεταβλητή, τόσο μεγάλωνε και η άλλη (περισσότερη απόσταση σημαίνει περισσότερο χρόνο; περισσότερη ταχύτητα σημαίνει περισσότερη απόσταση κ.α.), και το τρίτο επίπεδο, όπου οι μαθητές ενσωμάτωναν βάσει του τύπου και τις τρεις διαστάσεις για να παράγουν τις απαντήσεις τους. Οι Κινέζοι μαθητές εμφάνισαν ταχύτερη ανάπτυξη στρατηγικών από τους Αμερικανούς μαθητές αντίστοιχης ηλικίας (1η, 3η & 5η τάξη), χρησιμοποιώντας συχνότερα και με λιγότερες παλινδρομήσεις στρατηγικές δεύτερου επιπέδου (any more is more) σε σχέση με στρατηγικές πρώτου επιπέδου (same is same), με τους περισσότερους μαθητές να έχουν μεταβεί σε στρατηγικές 3ου επιπέδου μέχρι την τρίτη τάξη (εφαρμογή τύπου), με τους αντίστοιχους μαθητές από την Αμερική να κάνουν το άλμα στην 5η τάξη, όπου και πάλι οι κινέζοι μαθητές χρησιμοποιούσαν πιο συχνά τους τύπους από τους Αμερικανούς. Οι λόγοι για το φαινόμενο αυτό έγκειται στο σπειροειδές αναλυτικό πρόγραμμα των Αμερικάνων, οι οποίοι εμφανίζουν πιο ομαλούς και κανονικούς ρυθμούς μεταβολής, στην έμφαση στην μαθηματική δικαιολόγηση των Ασιατών από πολύ μικρή ηλικία και στην έμφαση στην ατομική εργασία των μαθητών έναντι της διάλεξης στις αμερικανικές τάξεις, αλλά και την ίδια την διάρθρωση των αναλυτικών προγραμμάτων, αφού οι μαθητές στην Κίνα εκτίθενται στις έννοιες του χρόνου, της απόστασης και της ταχύτητας πριν τους αντίστοιχους μαθητές από την Αμερική. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί στην Κίνα διδάσκονται με έμφαση στα μαθηματικά, πράγμα που επηρεάζει την κατανόηση των μαθηματικών σημαντικά, με παράπλευρο αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση των εξισώσεων κίνησης από τους μαθητές, λόγω ανώτερου μαθηματικού υπόβαθρου. Παράλληλα, τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τα ευρήματα του Piaget (1970) και συγκρούονται με αυτά των Siegler & Richard (1979), αφού πρώτα αναπτύσσεται η έννοια της απόστασης και μετέπειτα ταυτόχρονα αναπτύσσονται οι έννοιες του χρόνου και της ταχύτητας.

Η έρευνα, όμως, των Métioui & Baulu MacWillie μελέτησε παιδιά τα οποία προέρχονταν αποκλειστικά από αστικά περιβάλλοντα, γεγονός που και οι ίδιοι αναφέρουν πως ίσως και να αποτελεί ερευνητικό κενό. Μελετώντας το κατά πόσο επηρεάζονται οι μαθητές του ίδιου εκπαιδευτικού συστήματος αναλόγως τον τύπο του σχολείου και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, οι Zhou, Peverly & Lin (2004) συνέχισαν την μελέτη των απαντήσεων των παιδιών αναφορικά με τις κινήσεις σωμάτων, τις αντιλήψεις που παρουσίαζαν και την απόκλισή τους από το επιστημονικό μοντέλο. Συμμετείχαν συνολικά εκπαιδευτικοί από 6 διαφορετικά σχολεία, 2 από το Πεκίνο και 4 από αγροτικές υποανάπτυκτες περιοχές της βορειοανατολικής Κίνας, ως επέκταση της προηγούμενης τους έρευνας. Στα 4 αυτά σχολεία, οι μαθητές προέρχονταν από παρόμοια κοινωνικοπολιτικά επίπεδα, με την διαφορά μεταξύ των σχολείων να έγκειται στους εκπαιδευτικούς: οι εκπαιδευτικοί σε δύο από τα σχολεία των αγροτικών περιοχών είχαν λάβει επιπλέον επιμόρφωση πάνω στην διδασκαλία των μαθηματικών, ακολουθώντας την μέθοδο TRA. Στην συνέχεια συνέκριναν τα αποτελέσματα μεταξύ των σχολείων και με τα αποτελέσματα των Αμερικανών μαθητών που είχαν συλλεχθεί. Και πάλι οι ερευνητές διετέλεσαν in vivo πείραμα μπροστά στους μαθητές, κρατώντας σταθερή την μία μεταβλητή, μεταβάλλοντας την δεύτερη και ρωτούσαν τι θα γίνει η τρίτη, χωρίζοντας και πάλι τις απαντήσεις στα ίδια τρία επίπεδα με την προαναφερθείσα έρευνα (Zhou et al., 2000). Οι Κινέζοι μαθητές των αγροτικών περιοχών και επιμορφωμένους εκπαιδευτικούς απέδωσαν εξίσου καλά και έδειξαν την ίδια μετάβαση προς στρατηγικές τρίτου επιπέδου ήδη από την τρίτη τάξη όπως και οι μαθητές από το Πεκίνο, ενώ οι μαθητές από παραδοσιακά σχολεία της αγροτικής Κίνας είχαν παρόμοια επίδοση με τους Αμερικανούς μαθητές, ενώ και οι δύο τελευταίες αυτές ομάδες απέδωσαν παρόμοια και η μετάβαση προς στρατηγικές τρίτου επιπέδου (χρήση εξισώσεων/επιστημονικό μοντέλο) έγινε αργότερα από τις δύο άλλες ομάδες, στην πέμπτη τάξη του δημοτικού σχολείου, κάνοντας εμφανή την σημαντικότητα των σωστών εκπαιδευτικών πρακτικών στην διδασκαλία, η οποία εν μέρει αναιρεί τις αρνητικές συνέπειες ενός ενδεχομένως πιο χαμηλού κοινωνικοοικονομικού οικογενειακού περιβάλλοντος (Zhou, Peverly & Lin, 2004).

Πέραν, ωστόσο, του στοιχείου της κουλτούρας, δεδομένου ότι οι Ασιάτες μαθητές συνήθως διδάσκονται βάσει των διδαχών του Κουμφούκιου, αναζητώντας συνεχώς την αυτοβελτίωση (Zhoua et al., 2000), όπως προαναφέρθηκε, και η οργάνωση του εκπαιδευτικού συστήματος παίζει σημαντικό ρόλο, όπως προέκυψε από δύο διαφορετικές έρευνες μεταξύ μαθητών από την Κίνα και την Σιγκαπούρη (Jiang, Hwang & Cai, 2014; Jiang & Chua, 2009), οι οποίες μελετούσαν την απόδοση και τις στρατηγικές των μαθητών σε λεκτικά προβλήματα πάνω στην ταχύτητα και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν. Και στις δύο έρευνες οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν και αναγνωρίστηκαν ήταν 5: α) αριθμητικές στρατηγικές, οι οποίες αποτελούταν μονάχα από πράξεις, β) χρήση εξισώσεων με μεταβλητή (αλγεβρική στρατηγική), γ) χρήση μοντέλου για την παραγωγή ερμηνείας, δ) ενοποίηση μονάδων μέσω εύρεσης αντιστοιχιών μεταξύ διαφορετικών μονάδων (*unitary strategy*) και τέλος, ε) έλλειψη στρατηγικής.

Η διάρθρωση της ύλης αποδείχτηκε ξανά πως παίζει σημαντικό ρόλο, αφού στη Σιγκαπούρη οι μαθητές εκτίθεται σε λεκτικά προβλήματα ταχύτητας στα κεφάλαια κυρίως των κλασμάτων και των λόγων, ενώ οι Κινέζοι στα κεφάλαια των αλγεβρικών εξισώσεων. Επίσης, οι κινέζοι μαθητές εκτίθεται νωρίτερα και σε περισσότερες τάξεις σε προβλήματα ταχύτητας. Τα διαφορετικά εκπαιδευτικά εγχειρίδια επίσης ευνοούν την απόδοση των κινέζων μαθητών, τόσο λόγω διάρθρωσης, όσο και λόγο του επιπέδου των προβλημάτων που περιγράφονται. Ακόμη, οι μαθητές της Σιγκαπούρης εμφανιζόντουσαν προοδευτικά λιγότερο ικανοί στην χρήση της στρατηγικής του μοντέλου και της ενοποίησης, με την πτώση αυτή να αποδίδεται σε μια προσπάθεια αλλαγής στρατηγικών υπό χρήση καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν. Ενδιαφέρον παράλληλα είναι το γεγονός ότι οι πρωτοβάθμιοι μαθητές της Σιγκαπούρης, δεδομένου ότι στο τέλος της πρωτοβάθμιας δίνουν εξετάσεις και δέχονται πιο εντατικά μαθήματα από τους αντίστοιχους δευτεροβάθμιους μαθητές, εμφανίζονται πιο ικανοί από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας (Jiang & Chua, 2009). Στους κινέζους μαθητές κυριάρχησαν οι αριθμητικές και αλγεβρικές λύσεις, με τους μαθητές από τη Σιγκαπούρη να χρησιμοποιούν περισσότερες και διαφορετικές στρατηγικές - οι κινέζοι χρησιμοποιούν πιο φορμαλιστικές μεθόδους από τους μαθητές από τη Σιγκαπούρη, οι οποίοι χρησιμοποιούν λιγότερο φορμαλιστικές και περισσότερο απεικονιστικές και ευρετικές στρατηγικές για να λύσουν τα προβλήματα ταχύτητας που τους τέθηκαν (Jiang, Hwang & Cai, 2014; Jiang & Chua, 2009). Η πληθώρα των στρατηγικών δεν εξασφάλισε ωστόσο στους μαθητές από την Σιγκαπούρη συνολικά μεγαλύτερους δείκτες απόδοσης σε σχέση με τους κινέζους, αλλά μεγαλύτερο ποσοστό κινέζων αδυνατούσε να καταγράψει κάποια στρατηγική επίλυσης σε σχέση με τους αντίστοιχους της Σιγκαπούρης (οι τελευταίοι συστηματικά παρήγαγαν κάποια στρατηγική αιτιολόγησης, ακόμη κι αν αυτή ήταν λανθασμένη) (Jiang, Hwang & Cai, 2014; Jiang & Chua, 2009).

2.2.3 Διδακτικές και επιστημολογικές δυσκολίες στην διδασκαλία της μέσης ταχύτητας.

Σημαντική πηγή δυσκολίας για την κατανόηση της μέσης ταχύτητας αποτελεί και η χρήση διαγραμμάτων, καθώς απαιτείται η βαθιά κατανόηση της λειτουργίας των συναρτήσεων και του τρόπου που οι τελευταίες επηρεάζουν την κατασκευή και ερμηνεία μιας γραφικής παράστασης, εμπλέκοντας πληθώρα ζητημάτων που πηγάζουν από τα μαθηματικά (Billings & Klanderman, 2000). Μαθητές αυξημένων ακαδημαϊκών ικανοτήτων ηλικίας 13 ετών δεν είχαν κατανοήσει την έννοια της διανυσματικής ταχύτητας, ενώ για την ερμηνεία διαγραμμάτων (x-t) χρησιμοποιούν ως κριτήριο ερμηνείας της ταχύτητας την θέση των γραφικών παραστάσεων και όχι την κλίση τους (Graham & Sharp, 1998), με ιδιαίτερο σημείο τριβής να αποτελεί το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων, αφού εκεί οι μαθητές έκριναν πως η ταχύτητα ήταν ίση. Οι Billings και Klanderman (2000) αναγνώρισαν 4 βασικά εμπόδια στις μελέτες τους αναφορικά με τα εμπόδια που εμφανίζουν οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στον τρόπο που κατανοούν την μέση ταχύτητα:

1. Σύγχυση στιγμιαίας και μέσης ταχύτητας, που σε μεγάλο βαθμό προέρχεται από την καθημερινότητα των ατόμων (το αμάξι ξεκινάει αργά και επιταχύνει πριν διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του, δημιουργώντας σύγχυση για το ποια είναι η μέση ταχύτητα και ποια η στιγμιαία, μη κατανοώντας πως η επιτάχυνση δεν θα έπρεπε να είναι ορατή στα διαγράμματα μέσης ταχύτητας, με αποτέλεσμα να βρίσκουν τις μέσες ταχύτητες αλγεβρικά σωστά ανά διάστημα, αλλά να ενώνουν τις γραφικές παραστάσεις για να δείξουν την επιτάχυνση).
2. Σύγχυση μεταξύ των καμπυλών στις γραφικές παραστάσεις που δίνονται στους μαθητές, τόσο αναφορικά με το αν το σώμα επιταχύνει/επιβραδύνει/μένει σταθερό, όσο και με το τι συμβολίζει το κάθε διάγραμμα (x-t/v-t) (δεν καταλάβαιναν τι σήμαινε η κλίση σε μια καμπύλη μιας γραφικής παράστασης).

3. Παραβλέπουν την ερμηνεία της κλίσης στην περίπτωση των γραφικών παραστάσεων x-t και τι αυτή υπονοεί για τις ταχύτητες.
4. Οι συμμετέχοντες εμφάνισαν σημαντικές αδυναμίες στην σωστή βαθμονόμηση των πινάκων τους, με αποτέλεσμα τα γραφήματα να μην ανταποκρίνονται στα δεδομένα (προβληματική βαθμονόμηση, γεγονός του 1 λεπτού εμφανιζόταν να έχει ίδια διάρκεια με γεγονός των 10 λεπτών στο διάγραμμα).

Η δυσκολία στην κατανόηση των διαγραμμάτων επιβεβαιώνεται και στις έρευνες του S. K. Reed (Reed & Saavedra, 1986; Reed & Jazo, 2002). Στην πρώτη έρευνα (1986), μελετήθηκε με ποιο τρόπο και με την χρήση ποιων αναπαραστάσεων – αναπαράσταση μέσα από ψηφιακό πρόγραμμα (ανακαλυπτική μέθοδος), μελέτη γραφικών παραστάσεων (γραφική μέθοδος) ή αλγεβρικούς υπολογισμούς (υπολογιστική μέθοδος) – μπορεί ο μαθητής να αποκτήσει βαθύτερη κατανόηση της μέσης ταχύτητας. Δεδομένου ότι η συντριπτική πλειοψηφία χρησιμοποιεί τον απλό μέσο όρο και όχι σταθμισμένο μέσο όρο για να υπολογίσει την μέση ταχύτητα ενός σώματος που επιστρέφει στην αρχική του θέση με διαφορετικού μέτρου ταχύτητα – 84% των μαθητών χρησιμοποίησαν απλό αριθμητικό μέσο όρο και μόλις 5% βρήκαν την σωστή απάντηση (Reed, 1984) –, διαχωρίστηκαν 3 επίπεδα κατανόησης της μέσης ταχύτητας στη συγκεκριμένη δοκιμασία-σενάριο. Στο πρώτο, ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι ο απλός μέσος όρος δεν ικανοποιεί τις πειραματικές συνθήκες και ανάγκες, και πρέπει να χρησιμοποιήσει τον σταθμισμένο μέσο όρο για να παράγει σωστούς υπολογισμούς. Στο δεύτερο ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι η μέση ταχύτητα είναι πιο κοντά στην χαμηλότερη παρά στην υψηλότερη τιμή ταχύτητας, ενώ στο τρίτο συνειδητοποιεί ότι το ανώτερο όριο της μέσης ταχύτητας είναι 2 φορές η τιμή της χαμηλότερης κατά μέτρο ταχύτητας. Στην ανακαλυπτική διαδικασία διδασκαλίας, οι φοιτητές εκτιμούσαν την μέση ταχύτητα πριν δουν την προσομοίωση και έθεταν το σημείο αναφοράς με βάση την εκτίμησή τους, με την γνώση ότι εάν οι εκτιμήσεις τους ήταν σωστές, η κίνηση των δυο διαφορετικών σωμάτων θα χρειαζόταν τον ίδιο χρόνο (ένα σώμα με μεταβλητές ταχύτητες, ένα με την σταθερή ταχύτητα η οποία ήταν ίση με την μέση ταχύτητα του σώματος 1). Βλέποντας τις χρονικές διαφορές μεταξύ των δύο σημείων οι φοιτητές λάμβαναν οπτική ανατροφοδότηση και ρύθμιζαν καταλλήλως τις προσεγγίσεις τους. Η διδασκαλία μέσω γραφικών παραστάσεων απαιτούσε σημαντικά λιγότερο χρόνο, αφού δεν απαιτούταν χρόνος για να βρεθούν τα αρχικά δεδομένα που θα χρειαζόντουσαν για να κατασκευαστεί το διάγραμμα, αφού αυτά ήταν ήδη εκεί, καθιστώντας τον εντοπισμό μοτίβων στα δεδομένα πιο εύκολο και αφαιρώντας παράλληλα φορτίο από την μνήμη των συμμετεχόντων. Στην υπολογιστική μέθοδο, οι μαθητές υπολογίζουν συνεχόμενα την μέση ταχύτητα σε διαφορετικά σενάρια, καταλήγοντας προς το άνω όριο της διπλής τιμής της χαμηλότερης ταχύτητας στο οριακό σενάριο που η ταχύτητα επιστροφής είναι άπειρη. Τα δεδομένα της έρευνας υποδεικνύουν ότι η χρήση γραφημάτων είναι λιγότερο αποτελεσματική σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Η παρέκταση (*extrapolation*) ήταν πολύ πιο αποτελεσματική όταν τα δεδομένα προέρχονταν από πίνακα δεδομένων σε σχέση με τα γραφήματα. Μετά την ανακαλυπτική μέθοδο, οι φοιτητές που απάντησαν σωστά σε ερωτήσεις ανάκλησης παρέκτασης και γενίκευσης ήταν σημαντικά περισσότεροι σε σχέση με τους φοιτητές που πέρασαν από την μέθοδο των γραφημάτων, με την ειδοποιό διαφορά να έγκειται στην πολύ καλύτερη ανατροφοδότηση της ανακαλυπτικής μεθόδου. Η ανακαλυπτική μέθοδος από την μια προσφέρει σημαντικά βελτιωμένες επιδόσεις στην παρέκταση βάσει των δεδομένων, αλλά τα αποτελέσματα δεν ήταν ενθαρρυντικά σε δοκιμασίες γενίκευσης.

Ωστόσο, η ανακαλυπτική μέθοδος από μόνη της βελτίωσε μεν αισθητά τις επιδόσεις των μαθητών (2/3 των συμμετεχόντων έδωσαν απαντήσεις κάτω από το ανώτατο όριο), αλλά δεν ήταν αρκετή για να επέλθει απαγκίστρωση από τον υπολογισμό του απλού μέσου όρου, καθώς οι απαντήσεις παρέμεναν κοντά σχετικά σε αυτόν (Reed & Jazo, 2002), οπότε απαιτείτο περαιτέρω ενίσχυση της διδασκαλίας για να αντιμετωπιστεί το εμπόδιο του μέσου όρου. Επίσης, δεν έγινε πλήρως κατανοητό το άνω όριο του διπλάσιου της χαμηλότερης ταχύτητας κίνησης. Ενισχύοντας την διδασκαλία με επιπλέον 3 μεθόδους αναπαράστασης (πέρα από την οπτική αναπαράσταση – animation, χρησιμοποιήθηκε επίσης η εννοιολογική αναπαράσταση, η γραφική αναπαράσταση και η αλγεβρική αναπαράσταση), τα ποσοστά περιορισμού κάτω από το ανώτατο όριο ανήλθαν σε 80% (20 στους 25 συμμετέχοντες) και 17 από τους 25 συμμετέχοντες κατάφεραν να κατασκευάσουν μέχρι το τέλος της αξιολόγησης έναν απλό τρόπο για να υπολογίζουν με ακρίβεια την μέση ταχύτητα. Από τις τέσσερις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν (animation/οπτική, ορισμός/λεκτική αναπαράσταση, γραφικές παραστάσεις και αλγεβρική αναπαράσταση), η οπτική αναπαράσταση (animation) έπαιξε τον πλέον σημαίνοντα ρόλο, καθώς απέμπλεξε την μέση ταχύτητα από τον αριθμητικό μέσο όρο υπέρ του σταθμισμένου μέσου όρου, βελτίωσε τις εκτιμήσεις, ήλεγξε την ορθότητα των υπολογισμών, παρείχε παραδείγματα για την κατασκευή γραφήματος και απέδειξε το άνω όριο. Η εννοιολογική αναπαράσταση (απόσταση προς χρόνο, ορισμός) παρείχε τα στοιχεία για την προσομοίωση και την ερμηνεία του άνω ορίου. Η γραφική αναπαράσταση ανέδειξε τις λειτουργικές σχέσεις και τα όρια της εξίσωσης, η αλγεβρική αναπαράσταση παρείχε μεθόδους για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, παρέχοντας παράλληλα μια πιο απλή φόρμουλα για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας και τον υπολογισμό του αλγεβρικού ορίου της εξίσωσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις αποδείχτηκαν ιδιαίτερα ωφέλιμες στην παρέμβαση: όταν το δείγμα ρωτήθηκε ποια από τις προσεγγίσεις ήταν περισσότερο βοηθητική για την ερμηνεία του ορίου, 10 μαθητές απάντησαν η αλγεβρική προσέγγιση, 8 επέλεξαν την εννοιολογική προσέγγιση (μέσω ορισμού), και 6 προτίμησαν την γραφική προσέγγιση (ένας μαθητής δεν απάντησε). Επίσης, η μια αναπαράσταση χρησιμεύει στον περιορισμό της άλλης, δρώντας και οι δυο μαζί προς μια πιο λεπτομερή ερμηνεία η μία της άλλης – στην παλαιότερη έρευνα των Reed και Saavedra (1986), η επιρροή των γραφημάτων ήταν ιδιαιτέρως αναποτελεσματική, πράγμα που αναιρέθηκε όταν για την κατασκευή του διαγράμματος χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από τις προσομοιώσεις. Τέλος, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις επιτρέπουν να επιτευχθεί βαθύτερη κατανόηση του εκπαιδευτικού υλικού, αφού από μόνη της η προσομοίωση της κίνησης δεν ήταν επαρκής για να κατανοηθεί και να κατασκευαστεί το άνω όριο, πράγμα που επιτεύχθηκε με την χρήση διαγραμμάτων και αλγεβρικών λύσεων.

Το εμπόδιο του μέσου όρου επιμέρους ταχυτήτων για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας αντιμετωπίστηκε και από την ερευνητική ομάδα των Borghi, De Ambrosis και Massara (1993), η οποία επιχείρησε να διδάξει την έννοια της μέσης ταχύτητας μέσα από προγραμματισμό με χρήση της γλώσσας Logo σε μαθητές ηλικιών 12 & 13 ετών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν, οι μαθητές, παρόλο που στο δημοτικό υποτίθεται διδαχθεί την έννοια του μέσου όρου, έχουν πολύ επιφανειακή αντίληψη του μέσου όρου και δυσκολεύονται πολύ να υπολογίσουν σωστά τον μέσο όρο όταν μία τιμή ήταν μηδέν ή όταν κάποια τιμή επαναλαμβάνεται. Την έννοια της ταχύτητας την διαχειρίστηκαν ως αναλογία των αποστάσεων και των χρονικών περιόδων (σωστά), απαγκιστρωμένοι τελείως όμως από την περιγραφή της κίνησης, ως αμιγή μαθηματική έκφραση. Όταν από τους μαθητές ζητήθηκε να δηλώσουν ποια είναι η αναμενόμενη ταχύτητα για μονοπάτι με διπλή απόσταση, δήλωσαν την διπλή ταχύτητα κατά μέτρο. Γενικότερα, οι μαθητές παρατηρήθηκε πως σε ίσα κατά μήκος κομμάτια υπολόγιζαν τις ταχύτητες ως μέσο όρο των ταχυτήτων, αγνοώντας τυχόν μεταβολές στους χρόνους κίνησης.

2.2.4 Συμπεράσματα πάνω στα ζητήματα της μέσης ταχύτητας

Η έννοια της ταχύτητας αναπτύσσεται ήδη από πολύ μικρές ηλικίες, ωστόσο ωριμάζει μετά τα 9 χρόνια, και μονάχα αφού έχουν αποκτηθεί οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες – η απουσία της διαδικασίας και έννοιας της διαίρεσης αποτελεί ειδοποιό διαφορά για τις αποδόσεις των παιδιών ετών 5 ετών σε σχέση με αντίστοιχα παιδιά ηλικίας 10 ετών, όπως επίσης η έμφαση στην άλγεβρα και τις αλγεβρικές σχέσεις αποτελούν το σημείο-κλειδί της υπεραπόδοσης των Κινέζων μαθητών σε σχέση με τους αντίστοιχους μαθητές της Αμερικής.

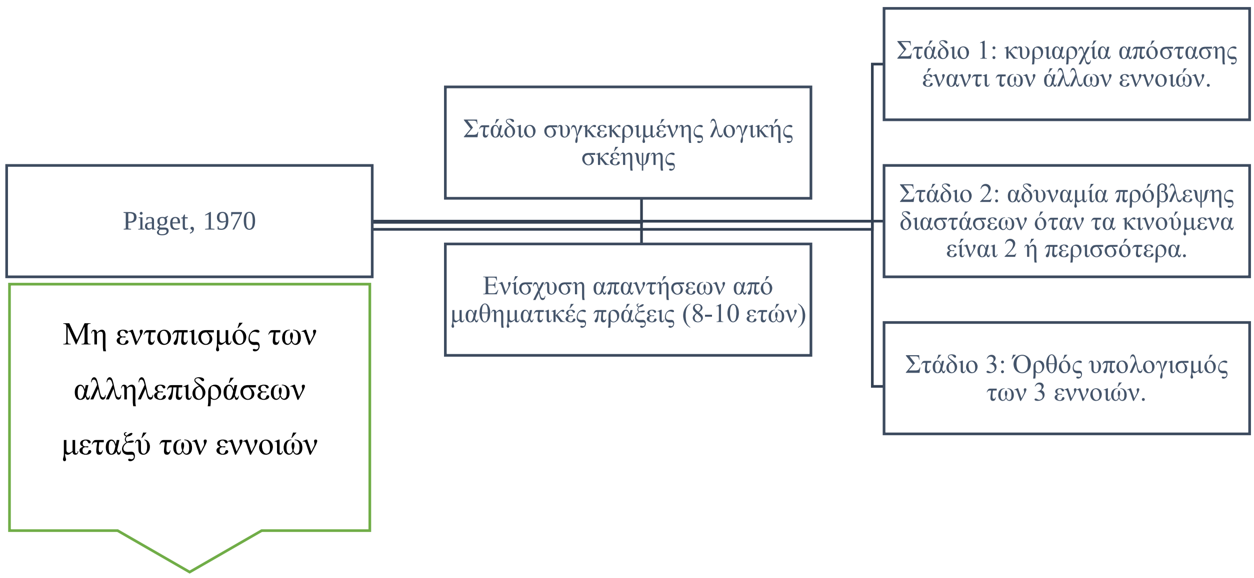
Από τις τρεις έννοιες που συμμετέχουν στον ορισμό της έννοιας της μέσης ταχύτητας - απόσταση, χρόνος, ταχύτητα-, η με διαφορά πιο δυσνόητη είναι ο χρόνος, φαινόμενο που αποδίδεται α) σε έλλειψη μνήμης, β) στην μη αισθητηριακή αντίληψη του χρόνου, χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει ότι οι μαθητές δεν μπορούν να τον μετρήσουν με ακρίβεια. Ευρέως διαδεδομένο είναι επίσης το μοντέλο σκέψης «περισσότερο είναι περισσότερο» (more is more), όπου όλες οι διαστάσεις/έννοιες που συνθέτουν την ταχύτητα είναι δέσμιες της απόστασης. Το σώμα που θα κινηθεί για μεγαλύτερη απόσταση (ή θα τερματίσει πιο μακριά, χωρίς να σημαίνει ότι θα διασχίσει μεγαλύτερη απόσταση) θα έχει κινηθεί απαραιτήτως και για περισσότερο χρόνο ή με μεγαλύτερη ταχύτητα, ενώ στην άλλη πλευρά του νομίσματος, πολλοί μαθητές, κρίνοντας και πάλι από την απόσταση και θεωρώντας πως όταν τα σώματα τερματίζουν στην ίδια θέση, κινούνται με ίδια ταχύτητα και για ίδιο χρόνο. Ιδιαιτέρως η έμφαση στην απόσταση εμφανίζεται ως μια πολύ ισχυρή αντίληψη, η οποία επιμένει ακόμα και μέχρι το πανεπιστήμιο.

Η γνώση, όμως, των βασικών μαθηματικών λειτουργιών ή του τύπου της ταχύτητας από μόνη της δεν εγγυάται και την κατανόηση ή επίλυση προβλήματος απαραιτήτως. Βασικά εμπόδια, όπως η μη κατανόηση του μέσου όρου, ή η έλλειψη κατανόησης της αναλογίας και του λόγου, αποτελούν σημαντικές τροχοπέδες. Η μαθηματική αντιμετώπιση των βασικών αυτών εμποδίων αποτελούν προτεραιότητα στον δρόμο προς την κατανόηση της μέσης ταχύτητας, για διαφορετικούς λόγους ωστόσο η κάθε μία. Η έννοια της αναλογίας, και της αντιμετώπισης της μέσης ταχύτητας ως τέτοια είναι απαραίτητη για την οικοδόμηση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής, της εξίσωσης της ταχύτητας και την σωστή ποσοτικοποίηση της ταχύτητας. Αντίστοιχα, η μη κατανόηση του μέσου όρου οδηγεί σε αλγοριθμικά λάθη στην διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μέσης ταχύτητα, προβλήματα τα οποία είναι αρκετά ανθεκτικά στην μεταβολή και ακολουθούν τους μαθητές ακόμα και στην ενήλικη ζωή τους. Μία εικασία για τον λόγο που αυτό το φαινόμενο είναι πως τα εμπόδια αυτά βασίζονται στον γλωσσικό παράγοντα, καθώς οι δύο έννοιες -μέση ταχύτητα και μέσος όρος- χρησιμοποιούν παρόμοιο λεξιλόγιο στην περίπτωση των αγγλόφωνων μαθητών – average speed και average ή mean αντίστοιχα –

εικασία που μπορεί να έχει παρεκτάσεις αντίστοιχα και στην περίπτωση των ελληνόφωνων μαθητών.

Στον δρόμο προς την αντιμετώπιση των λανθασμένων γνωστικών σχημάτων και των εμποδίων σημείο-κλειδί αποτελούν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις. Οι πιο αποτελεσματικές αναπαραστάσεις για την διδασκαλία αποτελούν τις οπτικές αναπαραστάσεις και οι αναπαραστάσεις από λογισμικά σε πραγματικό χρόνο, ιδιαιτέρως όταν αυτά παρέχουν δεδομένα σε πραγματικό χρόνο, με την λιγότερο αποτελεσματική αναπαράσταση να αποτελούν τα διαγράμματα, καθώς η αφηρημένη τους φύση προκάλεσε σοβαρά ζητήματα στην κατανόηση. Κάθε, ωστόσο, αναπαράσταση από μόνη της είναι ανίκανη να υποστηρίξει την μεταστροφή σε καινούργια νοητικά σχήματα, αφού η αλγεβρική υποστήριξη του εκάστοτε μοντέλου είναι αυτή που αποδεικνύει τον τρόπο λειτουργίας του κάθε μοντέλου και που δικαιολογεί το γιατί αυτό δουλεύει και παρέχει τους μηχανισμούς πρόβλεψης της κίνησης του σώματος. Το φαινόμενο αυτό αποτυπώνεται και στις στρατηγικές επίλυσης που επιλέγουν οι μαθητές: οι μαθητές που χρησιμοποιούν αλγεβρικές λύσεις και εξισώσεις για την επίλυση των προβλημάτων αποδίδουν σταθερά καλύτερα σε σχέση με αυτούς που χρησιμοποιούν λεκτικές, απεικονιστικές, στρατηγικές ενοποίησης μονάδων ή μαθητές που χρησιμοποιούν μοντέλα για να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

2.2.5 Διάγραμμα βιβλιογραφικής ανασκόπησης στο ζήτημα της μέσης ταχύτητας



Siegler & Richards, 1979:

Τα σώματα που παρατηρούν οι μαθητές πλέον ξεκινούν από διαφορετικές θέσεις, με διαφορετικές ταχύτητες & χρόνους κίνησης.

I: Εξάρτηση απάντησης από σημείο έναρξης της κίνησης

II: Σε περίπτωση κοινού τερματισμού, τα μεγέθη εξαρτώνται από το σημείο εκκίνησης του σώματος

Δεν αναδεικνύονται οι αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των εννοιών

Wilkening, 1981

Η ειδοποιός διαφορά στην αδυναμία κατανόησης των 3 εννοιών στους μαθητές 5-6 ετών οφείλεται στην ελλιπή γνώση αλγεβρικών σχέσεων και πράξεων, ιδιαιτέρως της διαίρεσης

Υπολογισμός του χρόνου μέσω αφαίρεσης τμημάτων του μήκους ίσου κατά μήκος με την ταχύτητα και ταύτιση του χρόνου με το πλήθος που τα τμήματα αυτά χωράνε στο μήκος

Υπερφόρτωση της μνήμης, καθώς νοητά ανακαλείται η κίνηση

Αδυναμία υπολογισμού του χρόνου

Η χρήση τύπου για τον υπολογισμό των εννοιών δυσκολεύει ακόμα και τους ενήλικες που συμμετείχαν στο δείγμα.

Οι μαθητές 10-11 ετών χρησιμοποιούν στρατηγικές προσθαφαίρεσης για τον υπολογισμό των εννοιών, κάτι που δεν θα έπρεπε να υφίστατο, δεδομένου ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης.

Thompson, 1994

Η ταχύτητα είναι ποσοτικοποιημένη πράξη, δηλαδή ένα καινούργιο μέγεθος που γεννάται από τις δύο άλλες έννοιες που την συνθέτουν (απόσταση & χρόνος).

Οι μαθητές ορίζουν τον χρόνο όχι ως αυτόνομο μέγεθος, αλλά ως πλήθος θεμελιωδών μεγεθών που χωράνε στην διαδρομή, με το θεμελιώδες μήκος να ισούται με το μέτρο της ταχύτητας, μετατρέποντας την ταχύτητα πρακτικά σε μήκος.

Groves & Doig, 2000

Οι μαθητές συνέδεαν την μεγαλύτερη ταχύτητα με το σώμα που τερματίζει πρώτο, επηρεασμένοι από τους κλειστής διαδρομής αγώνες, όπου νικάει, άρα είναι πιο γρήγορος όποιος τερματίζει πρώτος.

Ενώ ο υπολογισμός του χρόνου με μετρονόμο ήταν εύκολος για τους μαθητές. ο υπολογισμός της ταχύτητας ως ρυθμός μεταβολής διαφορετικού από τα σύνηθη μέτρου μήκους δημιούργησε σημαντικές δυσκολίες.

Κινήσεις πολλαπλών σκελών, με διαφορετική εν δυνάμει κατά μέτρο ταχύτητα ανά σκέλος.

Reed & Saavedra, (1986) & Reed & Jazo (2002):

Η πιο αποτελεσματική μέθοδος διαχωρισμού του μέσου όρου από την μέση ταχύτητα είναι οπτική αναπαράσταση μέσω ψηφιακής αναπαράστασης, που όμως από μόνη της δεν είναι ικανή να θεμελιώσει τα απαιτούμενα γνωστικά σχήματα (απαιτείται αλγεβρική ενίσχυση και ενίσχυση σε λεκτικό επίπεδο μέσω ορισμού).

Ο μέσος όρος επηρεάζει σημαντικά την εύρεση της μέσης ταχύτητας.

Borghi, De Ambrosis & Massara (1993):

Η κακή κατανόηση του μέσου όρου (παράλειψη μηδενικών ή επαναλαμβανόμενων τιμών παρατηρήσεων), με αποτέλεσμα να υπολογίζουν αρχικά την μέση ταχύτητα ως μη σταθμισμένο μέσο όρο, κι ενώ γνώριζαν τον τύπο της μέσης ταχύτητας, αδυνατούσαν να τον εφαρμόσουν για να υπολογίσουν συνολικά την μέση ταχύτητα της κίνησης (π.χ. διπλή απόσταση σήμαινε διπλή κατά μέτρο ταχύτητα).

2.3 Διεπιστημονική διδασκαλία

2.3.1 Τι είναι η διεπιστημονική διδασκαλία; Πλεονεκτήματα & Μειονεκτήματα.

Η διεπιστημονικότητα ως έννοια δεν είναι σύγχρονη, αφού ως έννοια υφίσταται ήδη από την αρχαία Ελλάδα: ο Αριστοτέλης ξεκινάει την θεώρησή του από το *όλο* και μετά ορίζει το *μέρος,* και άρα, η ολότητα δεν μπορεί να οριστεί απλά ως το άθροισμα των μερών, αλλά περιλαμβάνει και τις ιδιαίτερες σχέσεις μεταξύ των μερών, χωρίς τις οποίες δεν θα μπορούσε να υπάρξει η ολότητα (Γκίκας, 1998), κατά τον ίδιο τρόπο που ένα περσικό χαλί δεν είναι απλώς οι κλωστές και οι κόμποι, αλλά η μεγαλύτερη εικόνα που προκύπτει από τις συνδέσεις τους. Αντίστοιχα, η καθημερινότητα δεν χωρίζεται σε γνωστικά αντικείμενα, τα οποία είναι σαφώς οριοθετημένα, αλλά απαιτούν την συνεργασία πολλαπλών γνωστικών πεδίων, απαιτούν την συνεργασία με άλλα άτομο, την συνεργασία με κάποιο ενδεχόμενο μέντορα, απαιτούν ευελιξία στον χειρισμό των γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων που το άτομο έχει αποκτήσει (Barab & Landa, 1997). Χαρακτηριστικό παράδειγμα της αναγκαιότητας αυτής αποτελεί η μέτρηση της περιμέτρου της γης από τον Ερατοσθένη και τον Li Shun-fêng, όπου μονάχα μέσα από την ταυτόχρονη κατανόηση των αρχών των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών μπορούν να γίνουν σε βάθος κατανοητές οι έννοιες που χρησιμοποιούνται (de Hosson, 2016). Εν ολίγοις, η διεπιστημονική μέθοδος ως τρόπος σκέψης είναι πολύ πιο φυσική, προέρχεται από το ίδιο το άτομο και επιτρέπει στον μαθητή «να βλέπει το δάσος και όχι το δέντρο» (Czerniak κ.α., 1999). Γενικότερα δεν είναι τυχαία η προώθηση των διεπιστημονικών αναλυτικών προγραμμάτων στις Η.Π.Α. και στην Ευρώπη μετά την έναρξη του 21^{ου} αιώνα, ιδιαιτέρως προς την κατεύθυνση του STEAM (Science – Φυσικές Επιστήμες, Technology – Τεχνολογία, Engineering – Μηχανική, Arts – Τέχνες, Mathematics – Μαθηματικά), προάγοντας μια πιο ενοποιημένη εμπειρία μάθησης γενικότερα (Δημητρακοπούλου, 2018).

Κατ’ επέκτασιν, η διεπιστημονικότητα στην εκπαίδευση ιδανικά εφαρμόζεται ως τρόπος οργάνωσης ολόκληρου του αναλυτικού προγράμματος, το οποίο συντίθεται διατάσσοντας τα διακριτά μαθήματα, έτσι ώστε το περιεχόμενό τους να συσχετίζεται και να δημιουργούνται γέφυρες μεταξύ των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων (Ματασαγγούρας, 2002; Good, 1973 στο Furner, 1995), κατασκευάζοντας ουσιαστικές συνδέσεις για να αντιμετωπιστούν πραγματικά προβλήματα, τα οποία δημιουργούν ενδιαφέρον για το μάθημα (Good, 1973 στο Furner, 1995), δημιουργώντας μια νέα συνθετική σκέψη, η οποία είναι ισχυρότερη σε σχέση με τα επιμέρους κομμάτια της (Klein, 1996). Στο ίδιο μήκος κύματος, η διεπιστημονική εκπαίδευση άλλοτε ερμηνεύεται ως η ενσωμάτωση των μαθηματικών με τις θετικές επιστήμες και την επέκταση των δυο γνωστικών αυτών πεδίων (Furner & Kumar, 2007), άλλοτε ως «κράμα» μαθηματικών και θετικών επιστημών, όπου τα δύο γνωστικά αντικείμενα δεν μπορούν να διαχωριστούν (Berlin & White, 1992). Καταλήγοντας σε έναν ευρύτερο ορισμό, η διεπιστημονική προσέγγιση, τουλάχιστον όσον αφορά τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες, ορίζεται ως το σύνολο όλων των πιθανών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των δύο γνωστικών πεδίων, από απλές συνδέσεις μεταξύ τους μέχρι τις πρακτικές ενσωμάτωσης των γνωστικών πεδίων (Kiray, 2012).

Γενικότερα, οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών εμφανίζονται ισχυρές, καθώς οι μαθητές που εμφανίζονται δυνατοί σε ένα από τα δύο μαθήματα, εμφανίζονται δυνατοί και στο άλλο (Kiray, Gok & Bozkir, 2015), αν και η σχέση μεταξύ των φυσικών επιστημών και μαθηματικών είναι άνιση: οι γνωστικές δομές που δημιουργούν τα πιο αφαιρετικά μαθηματικά είναι αναγκαία σε πολλά κομμάτια των φυσικών επιστημών, αλλά ωστόσο η ικανότητα ανάγνωσης και κατανόησης κειμένου που απαιτείται π.χ. στην βιολογία δεν είναι εξίσου αναγκαία για τα μαθηματικά, και γενικότερα, είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να ενσωματώσουν τα αφαιρετικά μαθηματικά στις πιο συγκεκριμένες και πραγματιστικές φυσικές επιστήμες, παρά το αντίστροφο (Kiray, Gok & Bozkir, 2015), κι ενώ η ικανότητα επίλυσης προβλήματος εμφανίζει ισχυρές συσχετίσεις με τα μαθηματικά, εμφανίζει ακόμα ισχυρότερη αλληλεπίδραση με τις φυσικές επιστήμες.

Η συγκεκριμένη φιλοσοφία εκπαίδευσης, όμως, εμπεριέχει τόσο πλεονεκτήματα, όσο και μειονεκτήματα (McBride & Silverman, 1991; Czerniak κ.α., 1999), ιδιαιτέρως όταν τα υπό μελέτη γνωστικά πεδία είναι αυτά των θετικών επιστημών και των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τους McBride και Silverman (1991), τα μαθηματικά και οι θετικές επιστήμες είναι από την φύση τους συσχετιζόμενα γνωστικά πεδία, τα οποία διαπλέκονται και στον πραγματικό κόσμο, ενώ συχνά οι θετικές επιστήμες παρέχουν ρεαλιστικά παραδείγματα εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών στον πραγματικό κόσμο, βοηθώντας να γίνουν εις βάθος κατανοητές αφηρημένες έννοιες, ενώ οι φυσικές επιστήμες, από την στιγμή που οι δραστηριότητές τους προβάλουν τις μαθηματικές έννοιες παρέχουν περαιτέρω κίνητρα για την ενασχόληση με τα μαθηματικά.

Αντίστοιχα, όμως, στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι μαθητές συναντούν τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες ως διαφορετικά μαθήματα, ενώ απαιτείται περισσότερος χρόνος για να διδαχτούν οι μαθηματικές έννοιες σε σχέση με αυτές των θετικών επιστημών. Παράλληλα η διαχείριση της τάξης περιπλέκεται σημαντικά σε σχέση με την απλή διδασκαλία των μαθηματικών, με τους εκπαιδευτικούς συχνά να μην έχουν αρκετό υλικό από τις θετικές επιστήμες για την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, αλλά και να μην έχουν συχνά πρόσβαση σε αναλυτικά προγράμματα και εκπαιδευτικό υλικό που να είναι σχεδιασμένο για μια διεπιστημονική διδασκαλία (McBride & Silverman, 1991).

Δεδομένου ότι η διεπιστημονική διδασκαλία απαιτεί επανοργάνωση του αναλυτικού προγράμματος, αναδύονται διάφορα ζητήματα λογιστικής φύσης, τα οποία αφορούν τον απαιτούμενο εξοπλισμό, την συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών, οι οποίοι πρέπει να συνεργαστούν για να συνδυαστούν τα διάφορα γνωστικά πεδία, απαιτώντας περαιτέρω μη-διδακτικό χρόνο από τους εκπαιδευτικούς, ενώ παράλληλα ο σχεδιασμός πρέπει να επιτρέπει στους μαθητές να εντοπίζουν την σύνδεση μεταξύ των διαφόρων γνωστικών πεδίων και τις συνδέσεις που είναι εγγενείς μέσα στα προγράμματα, και όχι απλώς να βλέπουν απομονωμένες δραστηριότητες που σχετίζονται με ένα θέμα (Furner, 1995). Αντίστοιχα όμως, τα διεπιστημονικά προγράμματα καθιστούν τους μαθητές ικανότερους στην επίλυση περίπλοκων προβλημάτων, επιτρέποντάς τους την μεταφορά γνώσης από το ένα γνωστικό πεδίο στο επόμενο αβίαστα, καθώς οι μαθητές αποκτούν ικανότητες υψηλότερης σκέψης, βαθύτερη κατανόηση των γνωστικών αντικειμένων, ενισχύοντάς τους παράλληλα την ικανότητα να συνεργάζονται τόσο με ομόρροπους, όσο και με ενδεχόμενους μέντορες (Furner, 1995; Czerniak κ.α., 1999).

2.3.2 Μοντέλα ανάπτυξης διεπιστημονικών διδασκαλιών

Υπάρχει πληθώρα μοντέλων ανάπτυξης διεπιστημονικών διδασκαλιών, τα οποία βασίζονται σε διαφορετικές φιλοσοφίες, αναλόγως ποιος είναι ο σκοπός της διδασκαλίας. Μια συνήθης ειδοποιός διαφορά είναι η περιχαράκωση γύρω από τις έννοιες και η ισχύς της περιχαράκωσης αυτής (Furner, 1995), καθώς δημιουργεί 5 διαφορετικούς τύπους διδασκαλίας: α) έμφαση στα μαθηματικά, β) έμφαση στα μαθηματικά με στοιχεία φυσικών επιστημών, γ) ισότιμη αντιμετώπιση μαθηματικών και φυσικών επιστημών, δ) έμφαση στις φυσικές επιστήμες με στοιχεία μαθηματικών, ε) έμφαση στις φυσικές επιστήμες (Furner, 1995).

Παράλληλα ανάγεται το ζήτημα του εάν οι μαθητές πρέπει να ξεχωρίζουν τα διαφορετικά γνωστικά πεδία που συμμετέχουν στην διδασκαλία και εάν αυτά πρέπει να είναι διακριτά, ή εάν πρέπει να φαίνονται μονάχα οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων γνωστικών πεδίων. Οι Barab και Landa (1997) απαντούν στα ζητήματα αυτά με το μοντέλο των διεπιστημονικών «αγκυρών»: η διδασκαλία περιστρέφεται γύρω από ένα πρόβλημα που και οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός συμφωνούν πως έχει νόημα να λυθεί, και διάφορους «κόμβους», οι οποίοι είναι απαραίτητοι για να λυθεί η προβληματική κατάσταση, οι οποίοι όμως έχουν πολλαπλά σημεία εισόδου και εύρος δραστηριοτήτων, με ρυθμιζόμενες απαιτήσεις κάθε φορά, αναλόγως το επίπεδο στο οποίο γίνεται η διδασκαλία. Η πηγή των ζητημάτων πηγάζει από τα παιδιά τα ίδια: μαθητές ηπειρωτικών και ορεινών περιοχών φερειπείν εμφανίζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα ζώα του δάσους, άρα η διδασκαλία θα περιστρέφεται γύρω από αυτό το ζήτημα˙ μαθητές νησιωτικών ή παραθαλάσσιων περιοχών εμφανίζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα θαλάσσια ζώα, άρα η διδασκαλία θα περιστραφεί γύρω από ένα κεντρικό πρόβλημα που αφορά τα θαλάσσια ζώα (Barab & Landa, 1997).

Ξεκινώντας από την παραδοχή πως η συσσωμάτωση φυσικών επιστημών και μαθηματικών δεν μπορεί να οριστεί απλώς, οι Berlin και White (1994) πρότειναν ένα μοντέλο ενσωμάτωσης φυσικών επιστημών και μαθηματικών (Berlin-White Integrated Science and Mathematics Model – BWISM), το οποίο αναγνωρίζει 6 πτυχές οι οποίες πρέπει να καλυφθούν σε κάθε διεπιστημονική διδασκαλία: α) μέθοδοι διδασκαλίας, οι οποίες πρέπει να είναι ενεργές και να εμπλέκουν τον μαθητή, συνυπολογίζοντας την βασική εμπειρία του μαθητή στην διδασκαλία και δημιουργώντας παρεκτάσεις με αφετηρία τις εμπειρίες του, β) την συνεχή μετακίνηση από επαγωγική σκέψη, η οποία επέρχεται φυσιολογικά, καθώς το παιδί προσπαθεί να εντοπίσει μοτίβα στα όσα βλέπει γύρω του, για να εντοπίσει μοτίβα, στην παραγωγική σκέψη, ώστε να μπορεί να εφαρμόσει τους κανόνες που έχει μάθει σε καινούργια πλαίσια, και τούμπαλιν, γ) η γνώση του περιεχομένου που θα διδαχθεί, καθώς ιδίως κάποιες έννοιες όπως η συμμετρία, τα συστήματα, οι αναλογίες, η οργάνωση δεδομένων αποτελούν έννοιες που έχουν κοινά στοιχεία και στις φυσικές επιστήμες και στα μαθηματικά, δ) στις στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών, καθώς απαιτείται μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, αλλά και την αποδοχή βασικών παραδοχών, όπως η ευμεταβλητότητα των θετικών επιστημών, η δράση βάσει στοιχείων και δεδομένων, επιθυμία για γνώση, έναν υγιή βαθμό σκεπτικισμού, αντικειμενικότητα, έμφαση στον λογικό συλλογισμό και συνεργατικό πνεύμα, καθώς η διεπιστημονική διδασκαλία από την φύση της απαιτεί συνεργασία μεταξύ των ατόμων, και άρα βλέπει πέρα από υφιστάμενες ομάδες (κοινωνικές, εθνοτικές κλπ.), φέρνοντας κοντά τους μαθητές και βοηθώντας από την μία τους ίδιους να ενισχύσουν την αυτοαντιλήψή τους γύρω από τις ικανότητές τους στις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά, από την άλλη να ανατραπούν κοινωνικά ταμπού και προκαταλήψεις πως τα μαθηματικά και η φυσική είναι «κτήμα» συγκεκριμένων μονάχα ατόμων, και τέλος ε) τις κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές, καθώς ο εκπαιδευτικός πρέπει να ξεχωρίζει πότε οι μαθητές πρέπει να εργάζονται ατομικά, πότε ομαδικά, να καθορίσει το περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές θα προσλάβουν καλύτερα την διδασκαλία, να προωθεί συνεχώς πολλαπλές αναπαραστάσεις, να χρησιμοποιεί τα τεχνολογικά εργαλεία που του παρέχονται και να τα ενσωματώνει στην διδασκαλία του όταν το κρίνει σκόπιμο.

Αντίστοιχα, οι Davison, Miller και Metheny (1995) ασχολήθηκαν με τους διαφορετικούς τύπους ενσωμάτωσης των γνωστικών αντικειμένων στις διεπιστημονικές διδασκαλίες που μπορούν σχεδιαστούν, αναγνωρίζοντας 5 διαφορετικούς τρόπους-επίπεδα με βάση τα οποία μπορεί να επιτευχθεί η ενσωμάτωση – όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν, η διεπιστημονική διδασκαλία επιτρέπει στον μαθητή να μάθει όπως έχει μάθει να μαθαίνει, με έναν φυσικό τρόπο, χωρίς να σκέφτεται πως κάθε φορά χρησιμοποιεί και διαφορετικό γνωστικό πεδίο. Ο πρώτος τρόπος ενσωμάτωσης αφορά την ενσωμάτωση συγκεκριμένων γνωστικών πεδίων γύρω από ένα ανοιχτό πρόβλημα, για το οποίο οι μαθητές πρέπει να πάρουν μια ορθή και ενημερωμένη απόφαση, χρησιμοποιώντας την κριτική τους σκέψη και τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος που κατέχουν, μαθαίνοντας έτσι πως οι κλάδοι των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών περιπλέκονται μεταξύ τους˙ δημιουργούνται, ωστόσο, ζητήματα, καθ’ ότι ορισμένα γνωστικά αντικείμενα των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών πρέπει να διδαχθούν ξεχωριστά, ώστε οι μαθητές να κατέχουν τις βασικές έννοιες, ικανότητες και διαδικασίες. Ο δεύτερος τρόπος ενσωμάτωσης αφορά την ενσωμάτωση ειδικού περιεχομένου, όπου ο εκπαιδευτικός επιλέγει από το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα έναν στόχο για τα μαθηματικά και έναν για τις φυσικές επιστήμες, όπου σχεδιάζει μια δραστηριότητα που θα εμπλέκει και τους δύο στόχους, αναδεικνύοντας έτσι την σχέση των μαθηματικών με την πραγματικότητα των φυσικών επιστημών, και αντιστρόφως, παραταύτα το ζήτημα των βασικών εννοιών και δεξιοτήτων που ίσως πρέπει να διδαχτούν ξεχωριστά παραμένει, ενώ ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιλέξει δύο υφιστάμενους στόχους από τα υπάρχοντα προγράμματα οι οποίοι να μπορούν να εμπλακούν μεταξύ τους. Ο τρίτος τύπος ενσωμάτωσης αφορά την ενσωμάτωση των δεξιοτήτων: μέσα από την διεξαγωγή πειραμάτων, οι μαθητές μπορούν να συνδυάσουν δεξιότητες των μαθηματικών επιστημών με αυτές των φυσικών επιστημών, σχηματίζοντας αρχικά δικές τους ερωτήσεις, για τις οποίες ενδιαφέρονται να βρουν τις απαντήσεις, συνδυάζοντας δεξιότητες μαθηματικών (επίλυση προβλήματος, επιχειρηματολογία, εκτιμήσεις, στατιστικό λογισμό κ.α.) με δεξιότητες των φυσικών επιστημών (παρατήρηση, μετρήσεις, έλεγχος μεταβλητών, δοκιμασία υποθέσεων κ.α.). Η τέταρτη μέθοδος ενσωμάτωσης αποτελεί η μεθοδολογική ενσωμάτωση, η οποία αφορά την ενσωμάτωση των «καλών» πρακτικών διδασκαλίας των φυσικών επιστημών με τις αντίστοιχες «καλές» πρακτικές διδασκαλίες μαθηματικών, όπως για παράδειγμα η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών κατά την εποικοδομητική μέθοδο σε συνδυασμό με την διερευνητική μάθηση των φυσικών επιστημών και τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Τέλος, η τελευταία μέθοδος ενσωμάτωσης είναι η θεματική ενσωμάτωση, η οποία ξεκινάει από ένα ευρύ θέμα, το οποίο αποτελεί το μέσο με το οποίο αλληλοεπιδρούν τα γνωστικά πεδία, όπως για παράδειγμα το ζήτημα μια πετρελαιοκηλίδας, όπου απαιτούνται γνώσεις μαθηματικών (μετρήσεις όγκου, εμβαδού, κόστους αποκατάστασης), αλλά και φυσικών επιστημών (υπολογισμός πυκνότητας, χημική σύσταση, ρεύματα ωκεανών, επίδραση στο οικοσύστημα, χημικές αντιδράσεις).

2.3.3 Συμπεράσματα αναφορικά με την διεπιστημονική διδασκαλία.

Παρ' ότι η ιδέα της διεπιστημονικότητας κάθε άλλο παρά καινούργια είναι, η εφαρμογή της στην εκπαίδευση εμφανίζει τόσο πλεονεκτήματα, όσο και μειονεκτήματα. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Σκουμιός & Σκουμπουρδή (2016), τα αποτελέσματα διαφόρων εμπειρικών ερευνών καταδεικνύουν ότι υπάρχει ισχυρή σύνδεση των αποτελεσμάτων με διάφορους παράγοντες, όπως η φύση της ενοποίησης, οι προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών, ή ο τρόπος αποτίμησης του αποτελέσματος. Ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η έλλειψη ενός καθολικά αποδεκτού ορισμού, ο οποίος θα επέτρεπε για ένα σαφές πλάνο δράσης. Αντ' αυτού, οι ορισμοί ποικίλουν, καθώς ο βαθμός και ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνονται τα διάφορα γνωστικά πεδία στην διδασκαλία αποτελούν σημεία τριβής για τους ερευνητές, με άλλους να υποστηρίζουν μια περιχαρακωμένη προσέγγιση, όπου τα γνωστικά πεδία θα είναι σαφώς διακριτά, άλλοι όμως ερευνητές υποστηρίζουν μια πιο ελεύθερη δομή, στην οποία τα όρια μεταξύ των γνωστικών πεδίων δεν είναι διακριτά, κινούμενοι γύρω από ένα κεντρικό ζήτημα, το οποίο αποτελεί και το μέσο διδασκαλίας των ζητούμενων γνωστικών αντικειμένων. Έπειτα, ιδίως στην περίπτωση των θετικών επιστημών και των μαθηματικών, ανάγεται και το ζήτημα μιας «επικυριαρχίας» του ενός γνωστικού πεδίου: είναι δυνατόν να διδαχθεί φυσικές επιστήμες το παιδί χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο; Αλλά πως θα διδαχθούν οι αφαιρετικές έννοιες των μαθηματικών χωρίς τις θετικές επιστήμες, οι οποίες δίνουν μια πραγματιστική διάσταση σε μαθηματικές έννοιες που κατά τα άλλα είναι απρόσιτες στους μαθητές, όπως π.χ. ο ρυθμός μεταβολής μιας εξίσωσης;

Η διεπιστημονική διδασκαλία έχει κάποιες, ωστόσο, κατά κοινή παραδοχή δυσκολίες. Για να είναι επιτευχθεί απαιτεί μαθητές οι οποίοι έχουν ήδη κατακτήσει βασικές δεξιότητες και γνώσεις στα υπό μελέτη γνωστικά πεδία, ενώ ακόμα και τότε, υπάρχουν ορισμένα γνωστικά αντικείμενα τα οποία πρέπει να διδαχτούν ξεχωριστά. Επίσης, απαιτεί πολύ καλή οργάνωση της διδασκαλίας, ξεκινώντας από το ίδιο το αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά και σε επίπεδο απλής διδασκαλίας, απαιτείται πολύ καλή εμπλοκή των γνωστικών αντικειμένων που θα διδαχτούν, ώστε να ταιριάζουν μεταξύ τους και να «πλέκονται» σε μια ενοποιημένη μορφή. Παράλληλα, απαιτείται συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών διαφορετικών γνωστικών πεδίων, ικανή οργάνωση των διδακτικών ωρών και τεχνολογική υποστήριξη για να φτάσει το μέγιστο των δυνατοτήτων.

Ωστόσο, τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η διεπιστημονική διδασκαλία είναι επίσης σημαντικότατα. Οι μαθητές, μέσω της διεπιστημονικής μεθόδου μαθαίνουν με έναν πιο φυσικό τρόπο, όπως έχουν μάθει να μαθαίνουν από νεαρή ηλικία. Η κριτική σκέψη οξύνεται, όπως και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Οι μαθητές μαθαίνουν να συνεργάζονται για την επίλυση ενός μείζονος προβλήματος, ενώ αποκτούν και μαθαίνουν εξασκούν ταυτόχρονα δεξιότητες, οι οποίες υπό άλλες περιπτώσεις θα υπόκειντο έναν σαφή διαχωρισμό, ελέω της περιχαράκωσης των γνωστικών πεδίων. Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευελιξία να χρησιμοποιήσουν τεχνικές και στρατηγικές που δεν είναι χαρακτηριστικές της διδακτικής ενδεχομένως κάποιου συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου για την διδασκαλία ενός άλλου αντικειμένου. Η ταυτόχρονη χρήση πολλών γνωστικών αντικειμένων και διαφορετικών δεξιοτήτων καθιστά την διδασκαλία πιο αποδοτική, παρ’ όλο που φαινομενικά εμφανίζεται πιο χρονοβόρα˙ οι μαθητές εμφανίζουν υψηλότερα κίνητρα για ενεργή συμμετοχή στην μάθηση, και η μάθηση επιτυγχάνεται με πιο φυσικό γι’ αυτούς τρόπους, αφού η διεπιστημονική διδασκαλία τους συμπεριλαμβάνει στον σχεδιασμό˙ σημαντικά ζητήματα, τα οποία αφορούν άμεσα τους μαθητές, όπως η ρύπανση του περιβάλλοντος και κοινωνικά ζητήματα της περιοχής τους ενδείκνυνται για την διδασκαλία διεπιστημονικών διδασκαλιών, διδάσκοντας έτσι πέρα από γνώσεις και δεξιότητες, στάσεις.

3. Σχεδιασμός & Μεθοδολογία της έρευνας

3.1 Στόχοι της έρευνας

Η πραγματικότητα του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος στέκεται κόντρα στις διεπιστημονικές διδασκαλίες, καθώς η πολύ ισχυρή περιχαράκωση των μαθημάτων και μια σωρεία άλλων ζητημάτων που αφορούν τις στάσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών αποτελούν σημαντικές τροχοπέδες στην ανάπτυξη, υιοθέτηση και εφαρμογή διεπιστημονικών διδασκαλιών (Μπίκος, 2015), ακόμα και αν το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (-ΔΕΠΠΣ) προσπάθησε να αναχαιτίσει την κατάσταση αυτή, εν τούτοις η προσπάθεια μάλλον μαράζωσε στην πορεία, καθώς ποτέ δεν αναπτύχθηκε ικανός αριθμός διεπιστημονικών δραστηριοτήτων – για λόγους όπως η έλλειψη επιμόρφωσης και ενδιαφέροντος των εκπαιδευτικών, η ελλιπής οικονομική στήριξη και υλικοτεχνική υποδομή και οι χρονικοί περιορισμοί (Σπυροπούλου κ.α., 2010).

Πρωτεύον στόχος της παρούσας έρευνας είναι η ανάπτυξη μιας διεπιστημονικής διδασκαλίας, η οποία επιφέρει μετρήσιμες και διακριτές αλλαγές στον τρόπο που οι μαθητές διαχειρίζονται τις έννοιες του μέσου όρου και της μέσης ταχύτητας.

Παράλληλα, δεύτερος στόχος της έρευνας είναι η καταγραφή των αντιλήψεων και δεξιοτήτων των μαθητών γύρω από τις έννοιες της μέσης ταχύτητας και του μέσου όρου, και η σύγκριση των αντιλήψεων αυτών με τις προβλεπόμενες από την βιβλιογραφία αντιλήψεις.

Τρίτος στόχος είναι να αναδειχθούν οι διαφορές στον τρόπο διαχείρισης των εννοιών αυτών μεταξύ των μαθητών που έχουν ολοκληρώσει την Στ’ Δημοτικού και εκείνων που μόλις ολοκλήρωσαν την Έ Δημοτικού. Η ειδοποιός διαφορά στην προκειμένη περίπτωση είναι η διδασκαλία της έννοιας της εξίσωσης, καθώς οι μαθητές που μόλις ολοκλήρωσαν την Έ Δημοτικού δεν την έχουν διδαχτεί και ενδεχομένως να καταφύγουν σε δευτερεύουσες μαθηματικές στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων μέσης ταχύτητας.

3.2 Σχεδιασμός & περιγραφή της έρευνας

Όπως τεκμηριώθηκε από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, ο μέσος όρος επηρεάζει σημαντικά τις στρατηγικές που οι μαθητές χρησιμοποιούν για να υπολογίσουν την μέση ταχύτητα, δημιουργώντας στην πορεία αρκετά διδακτικά ζητήματα. Το κυριότερο γνωστικό εμπόδιο, ωστόσο, αποτελεί η μη κατανόηση του μέσου όρου και η ελλιπής κατανόηση της φύσης και του ορισμού του (Borghi et al., 1993). Κατ' επέκτασιν, η παρούσα διδασκαλία αναπτύχθηκε ώστε στο τέλος της να γίνονται σαφείς οι σχέσεις που ενώνουν τις έννοιες, αλλά και τα σύνορά τους, ιδιαιτέρως από την στιγμή που οι δύο αυτές έννοιες εμφανίζουν συγκλίσεις σε λεκτικό επίπεδο (κοινή χρήση του όρου «μέσος/-η»), εμφανίζουν αλγοριθμικές ομοιότητες (ο αλγόριθμός τους βασίζεται σε ένα μεγάλο άθροισμα και έπειτα στην διαίρεση με ένα δεύτερο διαφορετικό μέγεθος, ώστε να προκύψει ένα καινούργιο, τρίτο μέγεθος), αλλά και εννοιολογικές συγκλίσεις (και οι δύο έννοιες δεν αποτελούν ακριβή αναπαράσταση της πραγματικής κίνησης, αλλά αναπαραστάσεις που προσπαθούν να δώσουν μια συνολική και αντιπροσωπευτική εικόνα του υπό μελέτη συνόλου). Καθ' αυτόν τον τρόπο ικανοποιούνται και οι συνθήκες που έθεσαν οι Lonning και DeFranco (1997; στο Czerniak κ.α., 1999), δηλαδή η σύγκλιση μεταξύ των εννοιών ενισχύει την κατανόηση και των δύο επιμέρους σωμάτων γνώσης. Παράλληλα, οι μαθητές, βάσει του επιπέδου που θεωρητικώς βρίσκονται βάσει της ηλικίας τους και της τάξης που βρίσκονται, έχουν κατακτήσει τις απαραιτήτως βασικές γνώσεις για τα δύο σώματα γνώσης σε προγενέστερες τάξεις, και άρα είναι έτοιμοι να προχωρήσουν σε εμβάθυνση και εφαρμογή των γνώσεων τους (Gardner & Boix-Mansilla, 1994; στο Czerniak, 1999).

Η διδακτική παρέμβαση βασίστηκε στις αρχές του κονστρουκτιβισμού. Προηγούμενες μελέτες οι οποίες βασίστηκαν σε κονστρουκτιβιστικές και διεπιστημονικές αρχές παρήγαγαν θετικά και πολλά υποσχόμενα αποτελέσματα (Ιντζίδου & Καφούση, 2016; Πετρέλλη & Καφούση, 2016), θέτοντας στέρεα θεμέλια προς την υιοθέτηση του κονστρουκτιβισμού και της διεπιστημονικής προσέγγισης. Οι κονστρουκτιβιστικές θεωρίες μάθησης, είτε μελετάνε τους τρόπους που το άτομο δομεί μόνο του την γνώση (*ατομικός κονστρουκτιβισμός*), είτε τους τρόπους που η μάθηση οργανώνεται σε σύνολα και προέρχεται μέσα από κοινωνικές αλληλεπιδράσεις (*κοινωνικός κονστρουκτιβισμός*), βασίζονται στην ιδέα ότι οι μαθητές εισέρχονται στην εκπαιδευτική διαδικασία με προϋπάρχουσες αντιλήψεις πάνω στα φαινόμενα, αντιλήψεις οι οποίες πηγάζουν από τα βιώματά τους μέχρι την στιγμή της διδασκαλίας (Χαλκιά, 2016). Αυτές οι εναλλακτικές αντιλήψεις και ιδέες συχνά αποκτούν ιδιαίτερο βάρος, καθώς κατά την διάρκεια της διδασκαλίας είτε συγκρούονται με τα πειραματικά δεδομένα, είτε επεκτείνονται, με τον εκπαιδευτικό να τις διαχειρίζεται, ώστε να αντικατασταθούν ή να συμπληρωθούν οι αντιλήψεις των μαθητών από την επιστημονική γνώση (Χαλκιά, 2016). Οι αντιλήψεις αυτές, σύμφωνα με την διεθνή βιβλιογραφία, εμφανίζουν τα εξής χαρακτηριστικά (Χαλκιά, 2016):

- Οι μαθητές προσέρχονται στο σχολείο, έχοντας ήδη ένα σύνολο εναλλακτικών ιδεών σχετικά με τα φαινόμενα και τις έννοιες του φυσικού κόσμου γύρω τους.
- Κατά κύριο λόγο οι αντιλήψεις είναι βιωματικές και βασίζονται στις αισθητηριακές αντιλήψεις και εμπειρίες τους.
- Οι αντιλήψεις εμφανίζουν σημαντικές ασυμβατότητες με την επιστημονική γνώση, παρουσιάζοντας σημαντικές αποκλίσεις από την επιστημονική γνώση.
- Οι αντιλήψεις είναι συχνά παγκόσμιο φαινόμενο, υπερβαίνοντας κάποιες φορές κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες όπως η κοινωνική θέση, η κουλτούρα το φύλο κ.α.
- Ως επί τω πλείστω οι αντιλήψεις βρίσκονται σε λανθάνουσα κατάσταση στο υποσυνείδητο των μαθητών, και άρα πρέπει πρώτα να αναδειχθούν για να επέλθει η αλλαγή τους.
- Οι μαθητές άλλες φορές συγχέουν έννοιες και αδυνατούν να αποδώσουν το ακριβές εννοιολογικό τους περιεχόμενο, ενώ άλλες φορές χρησιμοποιούν «έννοιες-ομπρέλες», οι οποίες αναφέρονται σε ολόκληρες γνωστικές περιοχές.
- Οι αντιλήψεις συνήθως προκύπτουν σε καταστάσεις που οι αλλαγές είναι εμφανείς, αλλά οι στατικές όψεις του ίδιου φαινομένου παραμένουν συνήθως απαρατήρητες.
- Οι εναλλακτικές αντιλήψεις των μαθητών συχνά προκύπτουν από την χρήση γραμμικού αιτιακού συλλογισμού για την ερμηνεία ενός φαινομένου.

- Συχνά οι εναλλακτικές αντιλήψεις των μαθητών εμφανίζουν συνοχή, βασίζονται στην «κοινή λογική» και εμφανίζουν ευρύτερη ερμηνευτική ισχύ, δημιουργώντας πλέον επεξηγηματικά συστήματα.

- Συνήθης πηγή δημιουργίας εναλλακτικών αντιλήψεων αποτελεί η καθημερινή γλώσσα, αναλόγως με το πλαίσιο που χρησιμοποιείται η λέξη στην καθημερινότητα και στην επιστημονική γλώσσα.

- Οι μικροί μαθητές αναγνωρίζουν τα φαινόμενα μόνο όταν μπορούν να τα προσεγγίσουν με τις αισθήσεις τους, οπότε φαινόμενα που απαιτούν νοητικές αναπαραστάσεις για έννοιες όπως ο ηλεκτρισμός να εμφανίζουν σημαντικές δυσκολίες γι' αυτούς.

- Οι εναλλακτικές αντιλήψεις εμφανίζουν μια ανθρωποκεντρική αντίληψη του κόσμου, με τον κόσμο να είναι φτιαγμένο για να υπηρετεί τον κόσμο.

- Πολλές αντιλήψεις γεννιούνται από την απόδοση ανθρωπομορφικών χαρακτηριστικών σε οντότητες του μικρόκοσμου ή του μεγάκοσμου.

- Οι ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές πολλές φορές εξαρτώνται από το πλαίσιο χρήσης τους και τον τύπο της ερώτησης, με αποτέλεσμα στο ίδιο ερώτημα να δίνονται συχνά διαφορετικές απαντήσεις.

- Οι εναλλακτικές αντιλήψεις των μαθητών εμφανίζουν ομοιότητες συχνά με παλαιότερες ιδέες που καταγράφηκαν στην ιστορία της επιστήμης.

Το σχέδιο διδασκαλίας ακολούθησε το μοντέλο 5E (Bybee, 2006), καθώς η συγκεκριμένη μέθοδος προσφέρεται για διδασκαλίες με βάση ένα κεντρικό πρόβλημα, και αποτελείται από 5 βασικά στάδια:

• Στάδιο της εμπλοκής (Engagement): Στην πρώτη φάση της διδασκαλίας, η έμφαση δίνεται στο να εμπλακεί ο μαθητής στην διδασκαλία και να αποκτήσει ενδιαφέρον για το προσφερόμενο γνωστικό αντικείμενο/πεδίο, πρόβλημα, αντικείμενο ή συμβάν, με τις δραστηριότητες αυτής της φάσης να δημιουργούν ενώσεις με παλαιότερες γνώσεις των μαθητών, εκθέτοντας συχνά τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους.

• Στάδιο της εξερεύνησης (Exploration): Άπαξ και το στάδιο της εμπλοκής έχει ολοκληρωθεί, οι μαθητές αρχίζουν να έχουν μια φυσική τάση να θέλουν να ανακαλύψουν περισσότερα γύρω από το ζήτημα που αποτέλεσε αντικείμενο διαπραγμάτευσης της εμπλοκής. Οι δραστηριότητες σε αυτή την φάση σχεδιάζονται έτσι ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν κοινές, συμπαγείς εμπειρίες, πάνω στις οποίες θα ξεκινήσουν να δομούν έννοιες, διαδικασίες και ικανότητες. Ο εκπαιδευτικός παίρνει τον ρόλο του διαμεσολαβητή, ο οποίος εκκινεί την δραστηριότητα και επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν έννοιες, σχέσεις, ενώσεις, μεταβλητές, μοτίβα, κανόνες που διαβλέπουν τις δραστηριότητες βάσει των εμπειριών τους, ενώ μονάχα όταν επιβάλλεται για να συνεχιστεί η διαδικασία εμπλέκεται για να βοηθήσει τους μαθητές.

• Εξήγηση (Explanation): Σε αυτή την φάση ο εκπαιδευτικός απευθύνεται στους μαθητές, ζητώντας τους να του δώσουν τις ερμηνείες τους, και στην συνέχεια ο εκπαιδευτικός εισάγει επιστημονικές ή τεχνολογικές επεξηγήσεις με έναν άμεσο, ρητό και επίσημο τρόπο, ώστε να μπουν σε τάξη οι εμπειρίες από το στάδιο της εξερεύνησης. Ωστόσο, για να γίνει σωστά η διαδικασία αυτή, πρέπει πρώτα να ενωθούν οι ερμηνείες των μαθητών με τα όσα παρατήρησαν στην φάση της εξερεύνησης.

• Επεξεργασία (Elaboration): οι μαθητές εμπλέκονται σε συζητήσεις και δραστηριότητες αναζήτησης δραστηριοτήτων, όπου σκοπός είναι να ταυτοποιηθούν και να εκτελεστούν προσεγγίσεις στο αρχικό ζήτημα, με τους μαθητές να αναλύουν και να υπερασπίζονται τις προσεγγίσεις τους, με την διαδικασία να οδηγεί συνολικά στον καλύτερο ορισμό του ζητήματος και την συλλογή όλων των απαραίτητων πληροφοριών που είναι απαραίτητες για την επίλυση του αρχικού προβληματισμού. Η πηγή των πληροφοριών δεν είναι απαραιτήτως απλώς εξωτερική, αλλά πρέπει να προέρχεται από διάφορες πηγές, όπως οι ίδιοι οι μαθητές, ο εκπαιδευτικός, διαγράμματα, τα πειράματα που προηγήθηκαν, βιβλία κλπ.

• Στάδιο της αξιολόγησης (Evaluation): Στο στάδιο αυτό επέρχεται μια επίσημη αξιολόγηση, στην οποία οι μαθητές χρησιμοποιούν τα όσα έμαθαν σε όλη την διαδικασία, με την αξιολόγηση να είναι είτε επίσημη (μέσα από ένα τεστ), είτε να είναι ανεπίσημη, κατά την διάρκεια όλου του μαθήματος.

Συνολικά, η διδακτική παρέμβαση έχει ως κυρίαρχο θέμα τους αγώνες ταχύτητας, στις διάφορες μορφές τους. Ακολουθήθηκε ένας διπλός κύκλος του μοντέλου 5Ε, όπου η εισαγωγή και η αξιολόγηση ήταν κοινή για τις δύο έννοιες, ωστόσο αναπτύχθηκε πρώτα η μέση ταχύτητα ως αλγοριθμική διαδικασία, και στην συνέχεια έγινε «μετάγγιση» της αλγοριθμικής διαδικασίας εύρεσης του μέσου όρου στην έννοια της μέσης ταχύτητας, θέτοντας και αναδεικνύοντας τα όρια και τις σχέσεις που ορίζουν και ορίζονται από τις δύο έννοιες (το φυλλάδιο εργασίας επισυνάπτεται στο παράρτημα, στο τέλος της εργασίας).

Στην σελίδα 2 γίνεται η εισαγωγή, όπου γίνεται σύνδεση μεταξύ της σχέσης του ανθρώπου και της ταχύτητας από τα αρχαία χρόνια. Στο πρώτο πλαίσιο οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν 3 αγωνίσματα, στα οποία νικάει ο γρηγορότερος, με την διευκρίνηση πως τέτοια υπάρχουν τόσο στον αέρα, όσο και στη γη ή στο νερό. Σκοπός της συγκεκριμένης ερώτησης είναι να αναδειχθεί εάν τυχόν ο μαθητής έχει συνδέσει την ταχύτητα με ένα πολύ συγκεκριμένο αγώνισμα ή τύπο/οικογένεια αγωνισμάτων (π.χ. μηχανοκίνητο αθλητισμό) και σε ποιο μέσο θα είναι το αγώνισμα αυτό (εάν δηλαδή η ταχύτητα συνδέεται κατά κύριο λόγο με το έδαφος, τον αέρα ή το θαλάσσιο περιβάλλον). Στο δεύτερο πλαίσιο, δύο αθλητές αγωνίζονται σε έναν αγώνα δρόμου, όπου ο πρώτος ακολουθεί πιο μεγάλη διαδρομή από τον δεύτερο, αλλά τερματίζουν παραταύτα ταυτόχρονα. Στην πρώτη ερώτηση, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν ποιος νίκησε στον αγώνα, ενώ στο δεύτερο ερωτάται ποιος από τους δύο αθλητές ήταν πιο γρήγορος (σύνδεση ταχύτητας με τερματισμό, σύνδεση ταχύτητας με μήκος διαδρομής), και στο τρίτο καλούνται να αποφασίσουν εάν τελικά η σταθερή απόδοση ή η στιγμιαία υψηλή απόδοση είναι προτιμητέα και να δικαιολογήσουν την άποψη τους.

Στην σελίδα 3 εκκινεί το στάδιο της εξερεύνησης για την έννοια του μέσου όρου. Στο πλαίσιο των αγώνων εισάγεται το αγώνισμα του μηχανοκίνητου αθλητισμού "WRC". Ο λόγος που προτιμήθηκε το συγκεκριμένο αγώνισμα είναι πως η φύση του βασίζεται στην σταθερή απόσταση σε πολλές διαφορετικές διαδρομές, με τους μέσους όρους για διάφορες έννοιες να παίζουν σημαντικό ρόλο στην καλή απόδοση στο συγκεκριμένο αγώνισμα. Στο πρώτο πλαίσιο οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν ποιο από τα δείγματα που παρατίθενται μπορεί ενδεχομένως να είναι σωστά και να έχουν τον σωστό μέσο όρο (μέσος όρος-στόχος είναι η τιμή 3, οι τιμές του δείγματος κυμαίνονται μεταξύ του 1 και του 6 βάσει των περιορισμών της εκφώνησης). Επιλογή μονάχα μίας τριάδας σημαίνει έλλειψη κατανόησης στοχαστικότητας του μέσου όρου. Σωστές απαντήσεις είναι οι 1, 4, 5 & 7. Η επιλογή 3 είναι ενδεικτική ταύτισης του μέσου όρου με το άθροισμα των παρατηρήσεων, ενώ η 2η μη συνυπολογισμού τυχόν περιορισμού, όπως επίσης λάθος είναι και η 6η επιλογή, η οποία θυμίζει μια πιθανή λογική επιλογή, χωρίς όμως μαθηματική βάση. Στο δεύτερο πλαίσιο της σελίδας 3, δίνεται ένας μέσος όρος ο οποίος δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, με τους μαθητές να καλούνται να αποφασίσουν εάν αυτό μπορεί να γίνει ή όχι, δικαιολογώντας παράλληλα την άποψη τους. Βάσει της απάντησής τους, αναδεικνύεται το εάν κατανοούν ότι ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα ή όχι.

Στην σελίδα 4 ξεκινάει το στάδιο της εφαρμογής στον μέσο όρο, το οποίο βασίζεται στην εφαρμογή *Οι εισπράξεις του κινηματογράφου* της ψηφιακής πλατφόρμας «Φωτόδεντρο». Στο συγκεκριμένο στάδιο, ο μαθητής μπαίνει στην θέση του αρχηγού της ομάδας, ο οποίος επιβλέπει τα έσοδα από την προβολή ενός βίντεο στον κινηματογράφο της γειτονιάς, έτσι ώστε ο μέσος όρος των εσόδων κάθε μέρα να είναι 500 ευρώ. Ο λόγος που προτιμήθηκε η χρήση λογισμικών σε αυτή την φάση είναι η σε πραγματικό χρόνο ανατροφοδότηση, η οποία βοηθάει τους μαθητές να βελτιώσουν τις εκτιμήσεις τους κατά των ευρήματα των Reed & Jazo (2002) και Reed & Saavedra (1986). Οι απαντήσεις τους συμπληρώνονται στον πίνακα 1. Η πρώτη ερώτηση αφορά την αποσύνδεση του μέσου όρου από τις παρατηρήσεις καθ' αυτές, με την δεύτερη ερώτηση να ενισχύει περαιτέρω την αποσύνδεση αυτή. Η τρίτη, τέταρτη και πέμπτη ερώτηση του πρώτου πλαισίου αφορούν τον υπολογισμό του αθροίσματος από τις παρατηρήσεις και τη σύγκριση των αθροισμάτων. Το δεύτερο πλαίσιο εισάγει μία καινούργια εβδομάδα, όπου οι δύο πρώτες παρατηρήσεις είναι μηδενικές, οπότε ο μαθητής αναγκάζεται να αναδιανείμει τις παρατηρήσεις, ώστε και πάλι το άθροισμα να είναι το ίδιο (3500 ευρώ), οπότε μετά συγκρίνουν τους μέσους όρους μεταξύ τους (ανάδειξη επιρροής μηδενικών τιμών στον υπολογισμό του μέσου όρου). Στο τελευταίο πλαίσιο, οι μαθητές καλούνται να δώσουν έναν ορισμό για τον μέσο όρο.

Στην σελίδα 5 βρίσκεται το στάδιο της εξήγησης του μέσου όρου, ενώ στην σελίδα 6 ξεκινάει το στάδιο της επεξεργασίας για τον μέσο όρο, όπου αυτή την φορά οι παρατηρήσεις δίνονται στον πίνακα 2, με τον μαθητή στην πρώτη περίπτωση να καλείται να υπολογίσει τον μέσο όρο των πόντων του πρώτου οδηγού, στον δεύτερο να πρέπει να υπολογίσει το άθροισμα των πόντων ενός δεύτερου οδηγού, που όμως έχει τρέξει διαφορετικό πλήθος αγώνων, όπου στην τρίτη ερώτηση συγκρίνονται τα δύο πλήθη μεταξύ τους και στην τελευταία ερώτηση επαναϋπολογίζεται ο συνολικός μέσος όρος πόντων ανά αγώνα και για τους δύο οδηγούς μαζί.

Στην σελίδα 7 εκκινεί το στάδιο της εξερεύνησης για την έννοια της μέσης ταχύτητας, το οποίο μελετάει την περίπτωση ενός αγώνα φόρμουλα 1, όπου τίθεται η εξής προβληματική κατάσταση στους μαθητές: ο ένας οδηγός εκκίνησε στον αγώνα πρώτος, είχε τον πιο γρήγορο γύρο όλου του αγώνα, ωστόσο απέτυχε να νικήσει εν τέλει, δηλαδή, παρ' όλο που ήταν ο πιο γρήγορος οδηγός, δεν κατάφερε να νικήσει. Η επιλεκτική αυτή εστίαση έχει σκοπό την ανάδειξη του τρόπου που οι μαθητές αντιλαμβάνονται την μέση ταχύτητα και το τρόπο που μελετάνε την κίνηση (επιλεκτική εστίαση μονάχα στην κορυφαία απόδοση ή συνολική μελέτη της κίνησης), ιδιαιτέρως υπό το πρίσμα της καταγεγραμμένης από την βιβλιογραφία αντίληψης πως, ο πιο γρήγορος είναι αυτός πάντα που τερματίζει πρώτος (Groves & Doig, 2000).

Το στάδιο της εφαρμογής (σελ. 8) αφορμάται από τον αγώνα του Usain Bolt, και συγκεκριμένα από το βίντεο του αγώνα του, όπου σπάει το παγκόσμιο ρεκόρ των 100 μέτρων, ζητώντας στο τέλος του βίντεο από τους μαθητές να υπολογίσουν την μέση ταχύτητα (σε m/sec) με την οποία κινήθηκε ο Bolt. Η πρώτη ερώτηση αφορά την παρατήρηση της κίνησης του αθλητή, και το κατά πόσο αυτή είναι πραγματικά ομαλή και ομοιόμορφη, η δεύτερη ερώτηση συσχετίζει την προηγουμένως υπολογισμένη μέση ταχύτητα με την μελέτη της κίνησης (εάν αυτή η ταχύτητα που υπολόγισαν οι μαθητές ήταν στιγμιαία, σταθερή σε όλο τον αγώνα ή αντιπροσωπευτική όλων των επιμέρους ταχυτήτων), και τέλος, στην τελευταία ερώτηση, οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν τι σημαίνει η έκφραση «*ο πιο γρήγορος άνθρωπος στην Γη*», υπό το πρίσμα των όσων υπολόγισαν.

Το στάδιο της εφαρμογής συνεχίζει στην σελ. 9 και στον κόσμο της εφαρμογής *Mathworld*, όπου αναπαρίσταται ένας αγώνας δρόμου μεταξύ δύο αγωνιστικών. Στο πρώτο σκέλος, ο ανταγωνιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα, η οποία στο πρώτο σκέλος του αγώνα δίνεται ρητά, ενώ στο δεύτερο σκέλος δίνεται η απόσταση και ο χρόνος ο οποίος απαιτήθηκε για να καλυφτεί η απόσταση, με το ζητούμενο να είναι η ταχύτητα με την οποία πρέπει να τρέξει το αγωνιστικό, ώστε να τερματίσουν μαζί. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει στηθεί έτσι ώστε να ενθαρρύνει τον μαθητή να υπολογίσει τον μέσο όρο των ταχυτήτων, και όχι την συνολική μέση ταχύτητα, ενισχύοντας παροδικά την εν λόγω αντίληψη. Στο δεύτερο, ωστόσο, σκέλος, η συγκεκριμένη στρατηγική δεν δουλεύει, καθώς απαιτείται ο υπολογισμός της συνολικής μέσης ταχύτητας μέσω της κλασσικής εξίσωσης – τυχόν υπολογισμοί μέσου όρου της ταχύτητας θα οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα, και άρα ο μαθητής δεν θα καταφέρει να «νικήσει» τον αντίπαλό του στον αγώνα.

Στην σελίδα 10 βρίσκεται το στάδιο της εξήγησης για την μέση ταχύτητα, το οποίο διαδέχεται στην σελίδα 11 η εφαρμογή για την μέση ταχύτητα, η οποία και πάλι βασίζεται στην χρήση ψηφιακής εφαρμογής, και συγκεκριμένα, της εφαρμογής *η μέση ταχύτητα σε ένα ταξίδι,* από την ψηφιακή πλατφόρμα «Φωτόδεντρο». Συγκεκριμένα, αναφέρεται στον μαθητή πως ο χάρτης που έχει μπροστά του μελετάει έναν ποδηλατικό αγώνα από την Θεσσαλονίκη προς την Αθήνα, στην οποία καλείται να συμπληρώσει τα κενά σε πρώτη φάση που βρίσκονται στην εφαρμογή, ενώ σε δεύτερη φάση, απαντάει στις ερωτήσεις της σελίδας 11. Η πρώτη ερώτηση αφορά το αν η ταχύτητα του ταξιδιού ήταν γενικώς σταθερή ή είχε αυξομειώσεις, η δεύτερη αφορά την φύση της ταχύτητας που ο μαθητής υπολόγισε στην εφαρμογή (στιγμιαία ή συνολική για το ταξίδι), η τρίτη θέτει ως ερώτημα το εάν θα ήταν δόκιμο να υπολογιστούν όλες οι μικρές ταχύτητες, ενώ στην τελευταία ερώτηση ο μαθητής δίνει απάντηση στο τι πιστεύει πως είναι τελικά η μέση ταχύτητα.

Στην σελ. 12 βρίσκεται η συνολική αξιολόγηση και για τις δύο έννοιες. Στους μαθητές δίνεται ένας ημι-συμπληρωμένος πίνακας δεδομένων, όπου οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα δεδομένα που λείπουν, δηλαδή να υπολογίσουν την μέση ταχύτητα μίας εκ των διαδρομών, τον χρόνο που απαιτείται για να ολοκληρωθεί η επόμενη διαδρομή και το μήκος της τελευταίας διαδρομής. Στη συνέχεια, καλούνται να υπολογίσουν την συνολική απόσταση, τον συνολικό χρόνο κίνησης και την συνολική μέση ταχύτητα σε πρώτο στάδιο, και έπειτα τον μέσο όρο απόστασης, χρόνου κίνησης και μέσης ταχύτητας που κινήθηκε το αγωνιστικό ανά διαδρομή. Έχοντας συμπληρωμένο τον πίνακα, οι μαθητές ερωτώνται ποια είναι η συνολική μέση ταχύτητα για όλο τον αγώνα, ποιος είναι ο μέσος όρος της ταχύτητας ανά αγώνα, αλλά και τέλος, σε ποια από τις διαδρομές βάσει των στατιστικών στοιχείων υπήρχε πρόβλημα και χαμηλότερη απόδοση. Την αξιολόγηση ακολουθούν στις σελίδες 13 & 14 οι ερωτήσεις ανατροφοδότησης.

Αντίστοιχα, αναπτύχθηκε κι ένα ερωτηματολόγιο ελέγχου των αντιλήψεων των μαθητών πάνω στις έννοιες της μέσης ταχύτητας και του μέσου όρου, το οποίο δόθηκε στους μαθητές πριν και μετά την διδακτική παρέμβαση, το οποίο αποτελείται από 10 ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου, μερικές εκ των οποίων έχουν πάνω από ένα υποερωτήματα.

Η πρώτη και η δεύτερη ερώτηση διερευνούν εάν οι μαθητές έχουν ακούσει τις εκφράσεις «μέσος όρος» και «μέση ταχύτητα», και εάν ναι, από που τις έχουν ακούσει.

Στην τρίτη ερώτηση δίνεται ένας μέσος όρος ο οποίος δεν έχει λογική στον πραγματικό κόσμο (*6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο κατά μέσο όρο*) και οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος: η πρώτη πρόταση ταυτίζει κάποια τυχαία παρατήρηση με τον μέσο όρο, που όμως ο τελευταίος δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, η δεύτερη πρόταση διερευνά την αποδοχή των μηδενικών τιμών παρατηρήσεων ως ένα πιθανό ενδεχόμενο, η τρίτη πρόταση αναδεικνύει την ερμηνεία του μέσου όρου ως μέτρο κέντρου, ενώ η τελευταία πρόταση αναδεικνύει την στοχαστική λειτουργία του μέσου όρου.

Στην τέταρτη ερώτηση, η οποία είναι πολλαπλής επιλογής, δίνεται ένα δείγμα 10 τιμών, όπου πρέπει να υπολογιστεί ο μέσος όρος τους. Η πρώτη από τις τιμές που δίνονται είναι η τιμή της διαμέσου, η δεύτερη επιλογή είναι μια τιμή η οποία φαντάζει λογική με βάση τα βιώματα των μαθητών, η τρίτη επιλογή αποτελεί την επικρατούσα τιμή, η τέταρτη επιλογή αποτελεί τον μέσο όρο, χωρίς όμως να συνυπολογιστούν οι επαναλαμβανόμενες τιμές. Η τέταρτη επιλογή είναι αντιπροσωπευτική υπολογισμού του μέσου όρου, χωρίς όμως τον συνυπολογισμό των μηδενικών τιμών, ενώ η τελευταία επιλογή αποτελεί την σωστή απάντηση.

Στην πέμπτη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τις τιμές των παρατηρήσεων, ώστε ο μέσος όρος να προκύπτει 4,6, ενώ μία παρατήρηση έχει τιμή 5.

Η έκτη ερώτηση αφορά δύο εργοστάσια, για τα οποία δίνεται ο μέσος όρος των αυτοκινήτων που παράγουν ανά μέρα, και οι ημέρες λειτουργίας του καθενός. Στο πρώτο και στο δεύτερο υποερώτημα οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν ποια από τις τρεις επιλογές που τους δίνονται είναι ενδεικτική των αυτοκινήτων που παράχθηκαν από το πρώτο και στο δεύτερο εργοστάσιο αντίστοιχα. Στο τρίτο υποερώτημα ζητάει τον συνολικό μέσο όρο αυτοκινήτων που παράχθηκαν κατά μέσο όρο ανά μέρα σε πέντε μέρες και απ’ τα δύο εργοστάσια, επιλέγοντας μεταξύ 4 απαντήσεων. Η πρώτη απάντηση προκύπτει από το ημιάθροισμα των μέσων όρων (πρακτικά ο μέσος όρος των μέσων όρων), η δεύτερη απάντηση αποτελεί μια επιλογή που φαντάζει λογική, η τρίτη προκύπτει από το άθροισμα των μέσων όρων, ενώ η τέταρτη αποτελεί την σωστή απάντηση.

Η έβδομη ερώτηση αφορά την μέση ταχύτητα, όπου στο λεκτικό πρόβλημα που περιγράφεται, δίνονται στοιχεία για το μήκος της διαδρομής που ακολούθησε το κάθε σώμα και τον χρόνο που χρειάστηκε για να ολοκληρώσει την διαδρομή, με το ζητούμενο να είναι ποιο από τα δύο σώματα κινήθηκε με μεγαλύτερη ταχύτητα. Η πρώτη απάντηση είναι ενδεικτική εξάρτησης της ταχύτητας από αυτόν που τερματίζει πρώτος, ενώ η τρίτη απάντηση αποτελεί μία στρατηγική εξισορρόπησης (το ένα σώμα ταξιδεύει πιο μακριά, αλλά χρειάζεται περισσότερο χρόνο, το άλλο σώμα χρειάζεται λιγότερο χρόνο, αλλά διανύει μικρότερη διαδρομή, άρα έχουν περίπου ίδια ταχύτητα), με την δεύτερη απάντηση να αποτελεί την σωστή επιλογή.

Στην ερώτηση 8 τίθεται ένα λεκτικό πρόβλημα υπολογισμού μέσης ταχύτητας και συνολικής απόστασης, στο οποίο δίνονται στοιχεία για τις ταχύτητες κίνησης και τους χρόνους κίνησης. Στα δύο υποερωτήματα του προβλήματος ζητείται στο μεν πρώτο να υπολογιστεί η απόσταση που διένυσε το σώμα, επιλέγοντας μεταξύ τριών απαντήσεων (η πρώτη προκύπτει από απλό άθροισμα των μέτρων της ταχύτητας, η δεύτερη ως λογική επιλογή που έχει νόημα για τους μαθητές, ενώ η τρίτη είναι η σωστή απάντηση), ενώ στο δεύτερο υποερώτημα, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν την συνολική μέση ταχύτητα (η πρώτη απάντηση αποτελεί την ταχύτητα με την οποία κινούταν για περισσότερη ώρα και κάλυψε την μεγαλύτερη απόσταση, η δεύτερη απάντηση είναι η σωστή επιλογή, η τρίτη επιλογή προκύπτει από τον μη σταθμισμένο μέσο όρο των ταχυτήτων, ενώ η τέταρτη προκύπτει από τον σταθμισμένο μέσο όρο των ταχυτήτων).

Στο ερώτημα 9, αναφέρεται πως ένα πυροσβεστικό ελικόπτερο καλύπτει 300 χλμ. σε 3 ώρες, όπου στην τελευταία ώρα καλύπτει διπλή απόσταση σε σχέση με τις προηγούμενες 2, ζητώντας από τους μαθητές να υπολογίσουν την μέση ταχύτητα με την οποία κινήθηκε τις πρώτες δύο ώρες. Η πρώτη επιλογή αποτελεί την συνολική μέση ταχύτητα, η δεύτερη απάντηση αποτελεί την μέση ταχύτητα με την οποία κινήθηκε την τελευταία ώρα, ενώ η τελευταία απάντηση αποτελεί την σωστή επιλογή.

Στο 10^{ο} και τελευταίο ερώτημα, δύο κινητά ξεκινάνε ταυτόχρονα, κινούμενα προς τον ίδιο τελικό προορισμό, ακολουθώντας όμως διαφορετικές διαδρομές, με τους μαθητές να πρέπει να απαντήσουν ποιο σώμα θα φτάσει πρώτο. Η πρώτη επιλογή είναι ενδεικτική εξάρτησης της κίνησης από το μήκος της διαδρομής, η δεύτερη ενδεικτική εξάρτησης από το μέτρο της ταχύτητας, ενώ η τελευταία (*θα φτάσουν ταυτόχρονα*) είναι η σωστή απάντηση.

3.3 Γιατί η ανάγκη για την στρατηγική του μέσου όρου στην εύρεση της μέσης ταχύτητας;

Όπως προέκυψε στις έρευνες των Reed & Saavedra (1986) και Reed & Jazo (2002), αλλά και σε άλλες έρευνες (Borghi, De Ambrosis & Massara, 1993), η σύνδεση της μέσης ταχύτητας με τον μέσο όρο δεν είναι ένα υποθετικό σενάριο, αλλά μια υπαρκτή πρακτική. Το γνωστικό εμπόδιο που ελλοχεύει πίσω από αυτή την πρακτική άπτεται περισσότερο την κακή κατανόηση του μέσου όρου, γεγονός που αποδεικνύει την έλλειψη στατιστικού εγγραμματισμού.

Όντως ο μέσος όρος και η μέση ταχύτητα «μοιράζονται» βάσει ορισμού κοινά λειτουργικά στοιχεία: αναπαριστούν στοχαστικά ομάδες δεδομένων, δείχνοντας κατά προσέγγιση ποια τιμή θα περίμενε κανείς να συναντά πιο συχνά ή σε μια τυχαία επιλογή, εάν στο δείγμα επιβαλλόταν μια «κανονικότητα» και όλες οι τιμές εξισώνονταν. Γενικότερα, η λογική της «δίκαιης μοιρασιάς» μετοικεί από τον μέσο όρο στην μέση ταχύτητα, παρουσιάζοντας μια στρεβλή αντίληψη του πώς υπολογίζεται η μέση ταχύτητα, παραβλέποντας ωστόσο βασικά δομικά στοιχεία και των δύο εννοιών, όπως τον τρόπο που διαπλέκονται με άλλες έννοιες, όπως το άθροισμα των στοιχείων του δείγματος, το πλήθος των διαφορετικών παρατηρήσεων, την διαφορετική φύση της ταχύτητας και της απόστασης, και τους τρόπους που οι δύο τελευταίες έννοιες αλληλοεπιδρούν με την έννοια του χρόνου.

Οι μέχρι πρότινος εργασίες συνέδεαν τον μέσο όρο στο επίπεδο της ταχύτητας, παραβλέποντας παραλληλισμούς της μέσης ταχύτητας και του μέσου όρου στα χαμηλότερα επίπεδα του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας, και συγκεκριμένα στο επίπεδο της απόστασης, εξερευνώντας τις σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων μέσα από κλασματικές σχέσεις, οι οποίες αποδεικνύονταν συχνά δύσκαμπτες και δυσνόητες. Η παρούσα πρόταση παρέμβασης προτείνει μια καινούργια αλγεβρική στρατηγική – δεδομένου ότι οι αλγεβρικές στρατηγικές παρατηρήθηκαν ως πολύ πιο αποτελεσματικές σε σχέση με τις υπόλοιπες, τόσο κατά την εύρεση του μέσου όρου (Cai, 1981), όσο και στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσης ταχύτητας (Jiang & Chua, 2009; Jiang, Hwan & Cai, 2014) –, η οποία βασίζεται στον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας ως τον μέσο όρο της **απόστασης** που διανύεται σε δεδομένο

πλήθος χρονικών στιγμών. Μέσα από την οργάνωση των δεδομένων σε πίνακες, οι οποίοι βοηθούν σημαντικά τους μαθητές να οργανώσουν την σκέψη τους στην περίπτωση των λεκτικών προβλημάτων (Kadir κ.α., 2011), υπολογίζεται ο μέσος όρος των αποστάσεων ανά χρονική περίοδο, με τον χρόνο και την απόσταση να υπολογίζονται ως συνεχείς μεταβλητές. Καθ’ αυτόν τον τρόπο, τονίζεται η σχέση μεταξύ χρόνου και απόστασης, η οργάνωση των δεδομένων επιτρέπει στους μαθητές να ταξινομήσουν τα δεδομένα χωρίς να παραλείψουν κάποιο στοιχείο. Παράλληλα, διδάσκονται τα τρία επίπεδα γνώσης του μέσου όρου (Pollatsek, Well & Lima; 1981), καθώς η εφαρμογή του αλγόριθμου, μεταφρασμένου σε όρους μέσης ταχύτητας επιτρέπουν στον μαθητή: α) να κατανοήσει σε πραγματικό χρόνο εάν ο μέσος όρος/μέση ταχύτητα έχει υπολογιστεί σωστά, καθώς σε αντίθετη περίπτωση το κινούμενο σώμα δεν θα τερματίσει την ίδια χρονική στιγμή (λειτουργικό επίπεδο) και βλέπει σε πραγματικό χρόνο την λειτουργία της ισοδύναμης λογικής κατάστασης, καθώς παρατηρεί πως η μετακίνηση από πολλές διαφορετικές ταχύτητες σε μία, αντιπροσωπευτική για όλες, ταχύτητα, β) του επιτρέπει να πειραματιστεί, ώστε να κατανοήσει βαθύτερα τους απαιτούμενους αλγόριθμους για τον σωστό υπολογισμό του μέσου όρου, βλέποντας παραδείγματος χάρη τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει ο μέσος όρος σε τυχόν μηδενικές ή αρνητικές τιμές (υπολογιστική γνώση), γ) παρατηρώντας ότι η μέση ταχύτητα βρίσκεται ενδιάμεσα μεταξύ των οριακών τιμών των επιμέρους ταχυτήτων, σε ένα σημείο «ισορροπίας» μεταξύ των ακραίων τιμών. Η φύση των μεταβλητών που συμμετέχουν (συνεχείς μεταβλητές) δεν θα έπρεπε να προβληματίζει, καθώς οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα τα οποία άπτονται των ιδιοτήτων του μέσου όρου, όπως αποδείχτηκε από την έρευνα των Strauss & Bichler (1988), και όχι με τις μεταβλητές τις ίδιες. Παράλληλα, η έμφαση στην αντιπροσωπευτικότητα, και όχι στην καθολική εφαρμογή σε κάθε χρονική στιγμή της μέσης ταχύτητας, επιτρέπει τον μετέπειτα διαχωρισμό της μέσης ταχύτητας από την στιγμιαία ή την διανυσματική ταχύτητα, γεγονός που εμφανίζεται ως ζήτημα σε πληθώρα ερευνών και επηρεάζει και την κατανόηση και άλλων εννοιών πέρα από τις προαναφερθείσες (Billings & Klanderman, 2000; Graham & Sharp, 1998; Jones, 1983). Τέλος, ο διαχωρισμός του μέσου όρου των ταχυτήτων (η εναλλακτική δηλαδή αντίληψη) από τον μέσο όρο της διανυθείσας απόστασης (αντίληψη-στόχος) επιτρέπει και την βαθύτερη κατανόηση άλλων στατιστικών εννοιών , όπως το δείγμα και το πλήθος, σπάζοντας οριστικά την σύνδεση μεταξύ μέσης ταχύτητας και μέσου όρου ταχύτητας σε επίπεδο ορισμού.

3.4 Δομώντας την έννοια της μέσης ταχύτητας μέσω μαθηματικών εννοιών

Από την μελέτη της βιβλιογραφίας, εμφανίζονται 3 βασικά ρεύματα κατά την διδασκαλία της μέσης ταχύτητας: η διδασκαλία μέσω εξισώσεων, η ανάπτυξη της έννοιας της μέσης ταχύτητας ως αναλογία της απόστασης προς τον χρόνο και η αλγοριθμική εύρεση της μέσης ταχύτητας ως μέσος όρος των επιμέρους ταχυτήτων.

Η διδασκαλία της μέσης ταχύτητας αποτελεί την πλέον πεπατημένη οδό, ωστόσο εμφανίζει αρκετά βασικά ζητήματα: οι μαθητές που διδάσκονται κατά κύριο λόγο με αυτή την μέθοδο εμφανίζουν «ατροφίες» στην χρήση διαφορετικών στρατηγικών, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν σημαντικές αδυναμίες σε προβλήματα που δεν προσφέρονται προς λύση με την συγκεκριμένη μέθοδο, ενώ εμφανίζουν ανελαστικότητα ως προς τις μεθόδους που χρησιμοποιούν, όταν δεν μπορούν να προσαρμόσουν τυχόν αλγεβρικές ή αριθμητικές λύσεις στα ζητούμενα προβλήματα (Jiang & Chua, 2010; Jiang, Hwang & Cai, 2014), ενώ η μη ενίσχυση της διδασκαλίας της μέσης ταχύτητας με ένα «ισχυρό» μαθηματικό πυρήνα επιφέρει σημαντικά μικρότερη πρόοδο σε σχέση με τις ενισχυμένες διδασκαλίες σε βάθος χρόνου (Zhou κ.α., 2000; Zhou κ.α., 2004).

Ο Thompson (1994) αντιμετώπισε τα παραπάνω ζητήματα βασιζόμενος πρώτα στην κατανόηση της έννοιας της αναλογίας, και την κατανόηση πως η αναλογία είναι μια καινούργια έννοια που γεννιέται από τα μεγέθη που συμμετέχουν κατά την κατασκευή της, αναπτύσσοντας μια διδακτική παρέμβαση στα πρότυπα μιας επιμηκυμένης χρονικά συνέντευξης, η οποία αποτελούταν από 3 στάδια: στο πρώτο στάδιο επικεντρώθηκε στην ανίχνευση και επέκταση της έννοιας της ταχύτητας της μαθήτριας, στο δεύτερο στάδιο η εστίαση υπήρξε στην επέκταση των αντιλήψεων της μαθήτριας σχετικά με την μέση ταχύτητα, έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνεται η κοινή κατανόηση της μέσης ταχύτητας, και τέλος, στην τρίτη φάση η εστίαση δόθηκε στην επέκταση της έννοιας της ταχύτητας σε μια πιο γενική έννοια αναλογίας μέσω μιας διαδικασίας γενίκευσης και επακόλουθης ανασκόπησης. Για τις ανάγκες της διδακτικής πρότασης αναπτύχθηκε ένας ηλεκτρονικός μικρόκοσμος, ο οποίος αναπαριστούσε μία χελώνα και έναν λαγό που έτρεχαν σε μια κλειστή διαδρομή σε ευθεία και επέστρεφαν στο αρχικό σημείο. Η παρέμβαση εξελισσόταν μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, με την βοήθεια των οποίων η μαθήτρια κατευθυνόταν από το ένα σκέλος στο επόμενο, οι οποίες προσαρμόζονταν στις απαντήσεις της μαθήτριας. Η έννοια της μέσης ταχύτητας επίσημα εισήχθη από τον Thompson αφού η μαθήτρια του δείγματός του είχε πρώτα άτυπα υπολογίσει σωστά την μέση ταχύτητα σε προηγούμενη δραστηριότητα. Έπειτα, προχώρησε σε επεκτάσεις πάνω σε διαφορετικά σενάρια, τα οποία όμως χρησιμοποιούσαν την ίδια λογική του ρυθμού-αναλογίας για την επίλυσή τους, όπως το πόσο γρήγορα θα γεμίσει μια πισίνα χρησιμοποιώντας δύο αντλίες διαφορετικής ισχύος.

Η πρόταση του Thompson, ωστόσο, εγκυμονεί ένα βασικό ζήτημα, το οποίο δεν αντιμετωπίζεται επαρκώς: διδάσκοντας στα παιδιά ότι η μέση ταχύτητα είναι μια κλειστή αναλογία, υπάρχει κίνδυνος να αλλοιωθεί ο ορισμός της μέσης ταχύτητας, καθώς υποβαθμίζεται η στοχαστική πτυχή της μέσης ταχύτητας, δηλαδή η κατανόηση του γεγονότος ότι εάν επιλεχθεί μια τυχαία στιγμή στην κίνηση, η ταχύτητα με την οποία θα κινείται το σώμα *πιθανότατα* θα είναι ίση με την μέση ταχύτητα, χωρίς όμως αυτό απαραίτητα να σημαίνει ότι όντως αυτό θα συμβεί, κάτι που επιβεβαιώθηκε πειραματικά στην έρευνα των Borghi, De Ambrosis & Massara (1993), όπου παρατηρήθηκε πως οι μαθητές μπορούσαν με ευκολία να υπολογίσουν με ευκολία την αναλογία της απόστασης προς τον χρόνο κίνησης, χωρίς όμως να είναι ικανοί να αντιστοιχήσουν την αναλογία αυτή με τα χαρακτηριστικά της κίνησης.

Η ομάδα των Borghi, De Ambrosis & Massara (1993) ασχολήθηκε και εκείνη με την διδασκαλία του μέσου όρου, υπό διαφορετικό όμως πρίσμα: η μέση ταχύτητα διδάχτηκε ως έννοια μέσα από πειραματικές δραστηριότητες σε περιβάλλον Logo, ενώ παράλληλα πραγματοποιήθηκαν δραστηριότητες, έτσι ώστε να αναπτυχθεί και η έννοια του σταθμισμένου μέσου όρου. Η διδακτική παρέμβαση που σχεδίασαν αποτελείτο από 5 φάσεις και αφορούσε παιδιά ηλικίας 11 έως 12 ετών, δηλαδή στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του ιταλικού εκπαιδευτικού συστήματος. Στην πρώτη φάση καθορίστηκαν οι διαδικασίες μέσα από τις οποίες προκύπταν οι διαφορετικού τύπου κινήσεις σε ένα προκαθορισμένο μονοπάτι, και η μελέτη των κινήσεων που οι μαθητές όρισαν στην χελώνα να εκτελέσει. Στην δεύτερη φάση εισάχθηκε η έννοια του μέσου όρου, μέσω ενός παιχνιδιού με νομίσματα, όπου ίσες αξίες διαφορετικών νομισμάτων μοιράστηκαν σε δύο διαφορετικές ομάδες παιδιών. Στην συνέχεια της ίδιας φάσης, οι αρχές του μέσου όρου (π.χ. σημασία της μηδενικής τιμής, ίδιος μέσος από διαφορετικά δείγματα κ.α.) δρουν ως παράδειγμα για την μέση ταχύτητα, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν πως μη ομαλές κινήσεις, τελείως διαφορετικές μεταξύ τους, μπορούν να έχουν συνολικά την ίδια μέση ταχύτητα. Στην τρίτη φάση, οι μαθητές πλέον υπολόγιζαν την μέση ταχύτητα της χελώνας, τόσο σε διαφορετικά επιμέρους σκέλη της διαδρομής, όσο και στο σύνολό της. Στην τέταρτη φάση, επαναλαμβάνεται παραλλαγή της δραστηριότητας με τα νομίσματα, ώστε να γίνει κατανοητός ο σταθμισμένος μέσος όρος και η εύρεση του συνολικού μέσου όρου από δύο επιμέρους μέσους όρους. Στην συνέχεια, επιτεύχθηκε ο παραλληλισμός με την μέση ταχύτητα, όπου η συνολική μέση ταχύτητα υπολογίστηκε ως το άθροισμα των γινομένων των επιμέρους ταχυτήτων με την διάρκεια της κίνησης ανά μέρος, προς τον συνολικό χρόνο κίνησης. Στην πέμπτη φάση έγινε γενίκευση των ευρημάτων από την έως τώρα διαδικασία, κάνοντας παραλληλισμούς με άλλες καταστάσεις της καθημερινότητας που ενδεχομένως και να μπορούν να εφαρμοστούν παρόμοιοι αλγόριθμοι.

Παραταύτα, η δουλειά των Borghi, De Ambrosis & Massara (1993) εξακολουθεί να μην καθιστά σαφή την στοχαστική πτυχή της μέσης ταχύτητας, καθώς δεν γίνεται κάποια ρητή αναφορά σε αυτή. Παράλληλα, περιορίζονται αυστηρά σε ένα μονάχα σενάριο εφαρμογής, σε ένα πολύ συγκεκριμένο πλαίσιο, πράγμα που γεννά ερωτήσεις σχετικά με το κατά πόσο είναι εφικτό με βάση την παρούσα προτεινόμενη διδασκαλία να αντιμετωπιστούν συνολικά οι εναλλακτικές αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την μέση ταχύτητα (όπως π.χ. ο υπολογισμός του χρόνου κίνησης από δοθείσα απόσταση και ταχύτητα), ενώ η διδασκαλία του μέσου όρου είναι αυστηρά περιορισμένη στα λειτουργικά εκείνα κομμάτια που οι ερευνητές χρειάστηκαν για να κατασκευάσουν με την χρήση αναλογιών την έννοια της μέσης ταχύτητας, αφήνοντας εν δυνάμει γνωστικά εμπόδια, όπως η ταύτιση του μέσου όρου με την διάμεσο ανεπηρέαστα. Η χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Logo ναι μεν επέτρεπε τον εντοπισμό των αντιλήψεων των μαθητών, όπως επίσης τον εντοπισμό των λαθών από τους ίδιους τους μαθητές, αλλά ωστόσο, το πλαίσιο της άσκησης, όπως τουλάχιστον περιγράφεται από τους ερευνητές, είναι αποκομμένο από κάποια ρεαλιστική κατάσταση, εγείροντας ερωτήματα σχετικά με το πόσο οι μαθητές όντως μαθαίνουν τι είναι η μέση ταχύτητα και που χρησιμοποιείται στην καθημερινότητά τους.

Αντίστοιχες έρευνες έχει διεξάγει και ο Reed με δύο διαφορετικές ερευνητικές ομάδες (Reed & Saavedra, 1986; Reed & Jazo, 2002). Στην πρώτη έρευνα (Reed & Saavedra, 1986) σχεδίασαν 3 μεθόδους διδασκαλίας και μέτρησαν ποια απ’ όλες επέφερε τα καλύτερα αποτελέσματα μεταξύ της εγκατάλειψης της εφαρμογής του απλού μέσου όρου κατά την εύρεση της μέσης ταχύτητας (εναλλακτική αντίληψη) και της αντικατάστασής του από το μοντέλο εύρεσης της μέσης ταχύτητας βάσει του σταθμισμένου μέσου όρου (επιστημονική αντίληψη). Η πρώτη μέθοδος (ανακαλυπτική μέθοδος) βασιζόταν στην ανακαλυπτική μάθηση: οι μαθητές με βάση τα αρχικά δεδομένα της άσκησης έθεταν μόνοι τους μια μέση ταχύτητα σε ψηφιακό πρόγραμμα αναπαράστασης κινήσεων σωμάτων και παρατηρούσαν το κατά πόσο οι υπολογισμοί τους ήταν ορθοί, παρατηρώντας ένα σημείο αναφοράς να κινείται σε σχέση με ένα δεύτερο, το οποίο κινούταν με βάση τις προκαθορισμένες προδιαγραφές. Κρίνοντας από την οπτική ανατροφοδότηση, οι μαθητές προσάρμοζαν την μέση ταχύτητα ώστε τα δύο σώματα να τερματίσουν μαζί και προσπαθούσαν να καθορίσουν το ανώτατο όριο για την συνολική μέση ταχύτητα. Η μέθοδος γραφημάτων βασιζόταν στην αρχή πως η παρουσίαση των δεδομένων σε γράφημα (στην προκειμένη περίπτωση γράφημα μέσης ταχύτητας/ταχύτητας επιστροφής) θα ήταν πιο αποδοτική και θα παρουσίαζε τα δεδομένα με οικονομία χρόνου και χώρου, αίροντας έτσι την ανάγκη για πολλαπλές διαφορετικές προσομοιώσεις κίνησης και συλλογής δεδομένων από κάθε μία από αυτές, ώστε να μειωθεί το απαιτούμενο γνωστικό φορτίο. Η τρίτη μέθοδος διδασκαλίας βασιζόταν στους αλγεβρικούς υπολογισμούς (υπολογιστική μέθοδος), όπου υπολογίζοντας προοδευτικά τις μέσες ταχύτητες σε διαφορετικά σενάρια, οι μαθητές έφταναν στο τελευταίο ακραίο στάδιο, όπου η ταχύτητα επιστροφής άγγιζε το άπειρο, με αποτέλεσμα να υπολογίζεται πως το όριο της μέσης ταχύτητας θα είναι το πολύ το διπλάσιο της πιο μικρής κατά μέτρο ταχύτητας σε κίνηση δύο ίσων σκελών. Στην συνέχεια, διεξήχθησαν 3 διδακτικά πειράματα:

- Στο πρώτο πείραμα μετρήθηκε η βελτίωση στις εκτιμήσεις της μέσης ταχύτητας που έδιναν οι μαθητές με την βοήθεια γραφημάτων και με την βοήθεια της ψηφιακής προσομοίωσης, διδάσκοντας διαδοχικά με την μία μετά την άλλη μέθοδο, με αντίστροφη σειρά σε κάθε ομάδα ελέγχου (ανακαλυπτική-μέθοδος γραφημάτων και μέθοδος γραφημάτων-ανακαλυπτική αντίστοιχα), όπου οι μετρήσεις απόδοσης μετά από κάθε στάδιο έδειξαν πως, αν και η σειρά των μεθόδων δεν έχει σημασία, η μέθοδος γραφημάτων αποδείχθηκε λιγότερο αποδοτική και αποτελεσματική από την ανακαλυπτική, αν και η τελευταία δεν βελτίωσε τις απαντήσεις των μαθητών σε δραματικό βαθμό. Ωστόσο, οι απαντήσεις σε μεγάλο βαθμό δεν πλησίαζαν τα όρια της ασυμπτώτου, όντας πολλές φορές έως και χίλιες φορές μεγαλύτερες από το άνω όριο.

- Στο δεύτερο πείραμα, ενισχύθηκε η γραφική μέθοδος, όπου τα διαγράμματα μέσης ταχύτητας/ταχύτητας επιστροφής απέκτησαν περισσότερες τιμές, ώστε να τονιστεί το άνω όριο της ασυμπτώτου (δύο φορές η μικρότερη σε μέτρο ταχύτητα), προστέθηκε και δεύτερο διάγραμμα, ενώ προστέθηκε και στις δύο διδασκαλίες η υπολογιστική μέθοδος και στις δύο ομάδες ελέγχου, μετά το πέρας της μεθόδου των γραφημάτων, όπου μέσα από δύο δοθέντα παραδείγματα, οι συμμετέχοντες υπολόγιζαν την μέση ταχύτητα μέσα από ένα πίνακα δεδομένων. Από τις τρεις μεθόδους, η πιο υποσχόμενη μέθοδος για την διδασκαλία της μέσης ταχύτητας βάσει αποτελεσμάτων αποδείχτηκε η ανακαλυπτική, λόγω της ενεργής εμπλοκής των μαθητών που παρουσίαζε. Η υπολογιστική μέθοδος δεν βοήθησε τους μαθητές να συμπεράνουν ποιο θα είναι το άνω όριο, ενώ η συμπερίληψη περισσοτέρων τιμών στην μέθοδο των γραφημάτων και η συμπερίληψη ενός ακόμη γραφήματος δεν βελτίωσε στην αποτελεσματικότητα της διαδικασίας.
- Στο τρίτο πείραμα, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το πρώτο πείραμα, με την διαφορά ότι οι τιμές μεταξύ αρχικής και τελικής ταχύτητας είχαν μεγάλες αριθμητικές διαφορές (αρχική ταχύτητα 10 μίλια ανά ώρα, τελική 800 μίλια ανά ώρα), όπου στην ανακαλυπτική μέθοδο, η ταχύτητα επιστροφής ήταν σταθερά 10 μίλια την ώρα, ενώ η αρχική ταχύτητα ανέβαινε προοδευτικά από τα 40 μίλια/ ώρα στα 800. Η ανακαλυπτική μέθοδος είχε ως αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση των αποδεχτών εκτιμήσεων (κάτω από το ανώτατο όριο της ασυμπτώτου), ωστόσο εμφάνισε μελανή εικόνα στα ερωτήματα που απαιτούσαν γενίκευση, γεγονός που οι ερευνητές απέδωσαν σε κακή κατανόηση του ορίου της ασυμπτώτου.

Βασιζόμενοι στην δουλειά των Reed & Saavedra (1986), οι Reed & Jazo (2002) ανέπτυξαν ένα καινούργιο λογισμικό, το οποίο βασίστηκε στην αρχική επιτυχία της ανακαλυπτικής μεθόδου, ενσωματώνοντας όμως πλέον και την μέθοδο των γραφικών παραστάσεων, και την υπολογιστική μέθοδο, ώστε να γίνουν ορατές στους μαθητές οι συνδέσεις μεταξύ των τριών μεθόδων. Η διδασκαλία εξελίχθηκε σε 9 στάδια:

- Εισαγωγή της έννοιας της μέσης ταχύτητας ως σταθμισμένο μέσο όρο και όχι απλό αριθμητικό μέσο όρο.

- Προβλήματα εκτίμησης, όπου οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν την μέση ταχύτητα χωρίς να την υπολογίσουν, στους οποίους παρέχεται παράλληλα οπτική ανατροφοδότηση, ώστε να δουν πόσο κοντά είναι η εκτίμησή τους με την πραγματική τιμή.
- Ο τρόπος που η χαμηλότερη ταχύτητα περιορίζει την μέση ταχύτητα, καθώς οι μαθητές κρατάνε σταθερή την αρχική ταχύτητα και πειραματίζονται με την ταχύτητα επιστροφής και την μέση ταχύτητα που προκύπτει ως αποτέλεσμα, εκτιμώντας παράλληλα την τιμή της ασυμπτώτου.
- Ο λόγος που η μέση ταχύτητα περιορίζεται από την χαμηλότερη ταχύτητα, εξηγώντας το όριο μέσα από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας ως το πηλίκο της συνολικής απόστασης προς τον συνολικό χρόνο κίνησης, ενώ η κατανόηση του άνω ορίου ενισχύεται από την υποθετική μελέτη του σεναρίου που το σώμα επιστρέφει σε μηδενικό χρόνο κίνησης (απειρισμός της ταχύτητας επιστροφής).
- Υπολογισμός αλγεβρικού τύπου καθορισμού του σταθμισμένου μέσου όρου για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, και συγκεκριμένα ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές στάθμισης, δοκιμάζοντας παράλληλα την ακρίβεια των υπολογισμών.
- Σύγκριση μεταξύ του σταθμισμένου μέσου όρου και του κλασσικού ορισμού της μέσης ταχύτητας, όπου από την σύγκρισή τους προκύπτει ότι η γνώση της απόστασης και του χρόνου κίνησης δεν απαιτείται, εάν είναι γνωστές η αρχική ταχύτητα και η ταχύτητα επιστροφής.
- Απλοποίηση του τύπου του σταθμισμένου μέσου όρου, μέσω αλγεβρικών μετατροπών.
- Χρήση της σταθμισμένου μέσου όρου, μέσω αλγεβρικών μετατροπών, για τον υπολογισμό του άνω μέσου όρου.
- Σύνοψη της διδακτικής πρότασης.

Συνολικά, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν (μέθοδος γραφικών παραστάσεων, ανακαλυπτική μέθοδος, υπολογιστική/αλγεβρική μέθοδος) βοήθησε σημαντικά του συμμετέχοντες να κατανοήσουν τις υπό μελέτη έννοιες, δρώντας συμπληρωματικά η μία με την άλλη, με την πλειοψηφία ωστόσο των συμμετεχόντων να δηλώνει πως προτιμάει την οπτική αναπαράσταση του ψηφιακού προγράμματος. Παράλληλα, οι αναπαραστάσεις δούλεψαν συμπληρωματικά στον περιορισμό του ορίου η μία της άλλης, με αποτέλεσμα η χρήση δεδομένων από την ανακαλυπτική μέθοδο στην μέθοδο γραφικών παραστάσεων να αναιρεί τα εμπόδια που εμφανίστηκαν στην έρευνα των Reed & Saavedra (1986). Παράλληλα, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων βοήθησε στην βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Συνολικά, οι έρευνες των Reed & Saavedra (1986) και Reed & Jazo (2002) καθιστούν την χρήση άνω της μίας, και συγκεκριμένα την οπτική αναπαράσταση της κίνησης, αναπαράστασης επιτακτική. Ωστόσο, σαν πρόταση διδασκαλίας, και οι δύο ερευνητικές ομάδες μελέτησαν ένα πολύ κλειστό διδακτικό σενάριο, το οποίο αφορά ένα σώμα που πηγαινοέρχεται σε μια κλειστή διαδρομή, και γενικότερα οι αλγόριθμοι που προτείνονται στην διδασκαλία τους περιορίζονται αυστηρά από το πλαίσιο χρήσης τους. Η έννοια της μέσης ταχύτητας στον πραγματικό κόσμο και πάλι δεν έγινε σε κάποιο σημείο ιδιαιτέρως εμφανής ή σαφής, ενώ η φύση των παρεμβάσεων απαιτούν ένα αρκετά ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο, καθώς πραγματεύονται έννοιες όπως τα μαθηματικά όρια, οι οποίες αργούν πολύ να εισαχθούν στην γνώση των μαθητών.

Μία ακόμα πτυχή η οποία διαφοροποιεί την παρούσα εργασία σε σχέση με τις προηγούμενες είναι πως πρόκειται για ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού, και κατ' επέκτασιν δεν αποτελεί μια ερευνητική πρόταση που μελετάει συγκεκριμένες πτυχές μονάχα της διδασκαλίας. Ως εκπαιδευτικό υλικό ορίζεται κάθε οντότητα (πόρος, εργαλείο, αντικείμενο, τεχνούργημα), οποιουδήποτε μέσου και οποιασδήποτε υλικότητας (φυσική, βιομηχανική, ψηφιακή) που εντεταγμένη μέσα σε ένα κατάλληλο περιβάλλον μαθησιακής δραστηριότητας και σχεδιαστικά εμπλουτισμένη από ένα πλέγμα δυνητικών δυναμικών αλληλεπιδράσεων, δύναται να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να εκπαιδεύσει και τον μαθητή να μάθει (Δημητρακοπούλου, 2018). Οι προηγούμενες έρευνες οι οποίες μελέτησαν τα συγκεκριμένα ζητήματα δεν κάλυπταν και τις πέντε διαστάσεις του εκπαιδευτικού υλικού τις οποίες αναγνωρίζει η Δημητρακοπούλου (2018), καθώς αναφέρονται μεν τα εκπαιδευτικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται, τα είδη των μαθησιακών δραστηριοτήτων και η ενδεχόμενη υποστήριξη στους μαθητές, ωστόσο υπάρχουν αδυναμίες στις δυναμικές που παρουσιάζουν οι προτάσεις σε βάθος χρόνου, αλλά και η υποστήριξη που παρέχεται στους διδάσκοντες.

3.5 Δείγμα της έρευνας και συλλογή δεδομένων.

Στην έρευνα συμμετείχαν 4 μαθητές, δύο μαθητές από την Στ' Δημοτικού (1 κορίτσι και 1 αγόρι) και άλλοι 2 από την Α' Γυμνασίου (2 κορίτσια). Το δείγμα επιλέχθηκε τυχαία, με μοναδική συνθήκη την ηλικία, καθώς μέρος της έρευνας διερευνά εάν η εισαγωγή της έννοιας της εξίσωσης στην Στ' Δημοτικού επηρεάζει ή όχι την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσης ταχύτητας.

Η Μ1 είναι μία μέτρια προς καλή μαθήτρια, η οποία στον ελεύθερο της χρόνο ασχολείται με τις πολεμικές τέχνες και αγαπημένο μάθημά της δήλωσε πως είναι η φυσική. Πηγαίνει στην Στ' Δημοτικού.

Ο Μ2 είναι ένας πολύ καλός μαθητής, ο οποίος στον ελεύθερο του χρόνο παίζει ποδόσφαιρο και ασχολείται με τα ηλεκτρονικά παιχνίδια, ενώ το αγαπημένο του μάθημα δήλωσε πως ήταν τα μαθηματικά. Πηγαίνει Στ' Δημοτικού.

Η Μ3 είναι μία μέτρια προς καλή μαθήτρια, η οποία στον ελεύθερο της χρόνο ασχολείται με την κολύμβηση και πιο παλιά ασχολούταν με τον στίβο. Αγαπημένο της μάθημα δήλωσε πως ήταν η γλώσσα και η λογοτεχνία. Πηγαίνει στην Ά Γυμνασίου.

Η Μ4 είναι μία μέτρια μαθήτρια, η οποία στον ελεύθερο της χρόνο ασχολείται με τον χορό. Δήλωσε πως δεν έχει αγαπημένο μάθημα. Πηγαίνει στην Ά Γυμνασίου.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν από 4 διαφορετικές πηγές:

Α. Τα ερωτηματολόγια pre-test, όπως αναλύθηκαν πιο πριν.

Β. Τα φύλλα εργασίας και τις απαντήσεις των μαθητών.

Γ. Ηχογραφήσεις κατά την διάρκεια τόσο της διδακτικής παρέμβασης (συμπλήρωση φύλλων εργασίας), όσο και από μετέπειτα συζήτηση πάνω στα ερωτηματολόγια pre-test/post-test.

Δ. Τα ερωτηματολόγια post-test, τα οποία ήταν πανομοιότυπα με τα πρώτα ερωτηματολόγια, με την διαφορά ότι οι μαθητές δεν συμπλήρωσαν τις πρώτες δύο ερωτήσεις.

Η διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα στον προσωπικό χώρο των παιδιών, υπό την άδεια των γονέων τους. Κατά μέσο όρο η διδακτική παρέμβαση διήρκησε περίπου 2 ώρες, ενώ για τα ερωτηματολόγια χρειάστηκαν περίπου 10-15 λεπτά. Όλοι οι γονείς συμφώνησαν με την συλλογή των ηχητικών δεδομένων, ωστόσο μόνο οι γονείς του Μ3 έδωσαν συγκατάθεση για συλλογή φωτογραφικού υλικού.

4. Ανάλυση έρευνας & Αποτελέσματα

4.1 Ανάλυση δεδομένων

Σε πρώτη φάση θα αναλυθούν συνολικά τα ερωτηματολόγια pre-test, στην συνέχεια θα αναλυθούν οι απαντήσεις από τα φύλλα εργασίας και τέλος οι απαντήσεις του post-test ερωτηματολογίου.

Αφού παρουσιαστούν και αναλυθούν τα δεδομένα από τις τρεις γραπτές πηγές, θα δομηθεί το προφίλ του κάθε μαθητή ξεχωριστά, εμπλουτίζοντας τα στοιχεία που συλλέχθηκαν από τα γραπτά των μαθητών με τα δεδομένα που ηχογραφήθηκαν κατά την διάρκεια των παρεμβάσεων.

4.2 Αποτελέσματα pre-test ερωτηματολογίων

Πίνακας 1: αποτελέσματα ερώτησης 1 (pre-test)

ΕΡ.1: Έχεις ακούσει την έκφραση «μέσος όρος»;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
Ναι	+	+	+	+
Όχι				
Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;	Στο σχολείο	Στο σχολείο	Στο σχολείο	Στο σχολείο

Όλοι οι μαθητές ανεξαιρέτως είχαν ακούσει τον όρο μέσος όρος, όλοι από το σχολείο.

Πίνακας 2: αποτελέσματα ερώτησης 2 (pre-test)

ΕΡ.2: Έχεις ακούσει την έκφραση «μέση ταχύτητα»;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
Ναι		+	+	

Όχι	+			+
Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;	-	Στο σχολείο	Στο σχολείο	-

Αντίθετα, μόνο 2 από τους 4 μαθητές έχουν ακούσει την έννοια της μέσης ταχύτητας, παρόλο που υπάρχει ρητά και στην ύλη της Έ δημοτικού, αλλά και διάσπαρτη σε προβλήματα των μαθηματικών στην ύλη του Δημοτικού. Σε αντίθεση με τον μέσο όρο, 2 από τους μαθητές που συμμετείχαν δεν είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια της μέσης ταχύτητας πριν την διδακτική παρέμβαση, ούτε στο σχολείο, ούτε στην καθημερινότητά τους.

Πίνακας 3: αποτελέσματα ερώτησης 3 (pre-test)

ΕΡ.3: Σε μία έρευνα που έγινε στο οδικό δίκτυο της Ρόδου, βρέθηκε ότι υπάρχουν 6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; (Βάλε ένα «Σ» σε αυτές που θεωρείς σωστές, «Λ» σε αυτές που θεωρείς λάθος.)				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
Ένας από τους δρόμους της Ρόδου είχε 6,7 πινακίδες.	Λ	Λ	Σ	Λ
Κάποιος δρόμος μπορεί και να μην έχει καμία πινακίδα.	Λ	Σ	Λ	Σ
Οι περισσότεροι δρόμοι της Ρόδου είχαν ή 6 ή 7 πινακίδες.	Σ	Λ	Λ	Σ
Αν περπατούσαμε σε ένα τυχαίο δρόμο της Ρόδου, θα περιμέναμε να βρούμε 6 με 7 πινακίδες περίπου στον δρόμο.	Σ	Λ	Σ	Λ

Μονάχα η Μ3 θεώρησε πως ένας δρόμος μπορεί να έχει 6,7 πινακίδες, ενώ οι Μ2 και Μ4 ορθώς αναγνώρισαν πως κάποιος δρόμος είναι πιθανόν να μην έχει καμία πινακίδα. Η Μ1 και Μ4 θεώρησαν σωστή την πρόταση πως οι περισσότεροι δρόμοι έχουν ή 6 ή 7 πινακίδες, ενώ αντίστοιχα σωστή θεώρησαν την τελευταία πρόταση μονάχα οι Μ1 και Μ3. Συνολικά οι απαντήσεις δίνουν μια πρώτη αντίληψη του μέσου όρου ως μέτρο θέσης/μέτρο των κεντρικών τιμών, ενώ η αποδοχή των μηδενικών τιμών από τους μαθητές εμφανίζεται προβληματική. Παράλληλα, η στοχαστικότητα του μέσου όρου δεν φαίνεται ιδιαιτέρως ανεπτυγμένη, δεδομένου του εγκλωβισμού των τιμών γύρω από την τιμή που δόθηκε στον μέσο όρο. Γενικότερα, ο μέσος όρος ορισμένος ως «6,7» δημιουργεί προβληματισμό, τόσο όσον αφορά το εάν η πλειοψηφία των δρόμων έχουν όντως 6 ή 7 πινακίδες, ή τελικά οι τιμές των πινακίδων *αναμένεται* να είναι μεταξύ 6 και 7, με το δείγμα να είναι σχετικώς μοιρασμένο.

Πίνακας 4: αποτελέσματα ερώτησης 4 (pre-test)

ΕΡ. 4: Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:				
	M1	M2	M3	M4
6 κλήσεις ανά ημέρα			+	
10 κλήσεις ανά μέρα				
3 κλήσεις ανά μέρα				
7 κλήσεις ανά μέρα				
5,66 κλήσεις ανά μέρα				
5,1 κλήσεις ανά μέρα	+	+		+

Φαινομενικά, 3 στους 4 που συμμετείχαν στην έρευνα επέλεξαν σωστά την τελευταία επιλογή, η οποία είναι και η σωστή. Ωστόσο, μόνο ο Μ2 υπολόγισε σωστά τον μέσο όρο, καθώς η Μ1 όταν ερωτήθηκε γιατί επέλεξε την συγκεκριμένη επιλογή δήλωσε πως της φάνηκε η πιο σωστή απάντηση, ενώ η Μ4 διαίρεσε με λάθος πλήθος το άθροισμα των παρατηρήσεων, καθώς κατά δήλωση της δεν συνυπολόγισε την μηδενική τιμή στο πλήθος. Η τιμή που βρέθηκε πιο κοντά στο πηλίκο που υπολόγισε ήταν το 5,1 και καθ' αυτόν τον τρόπο επέλεξε την τιμή. Αντίστοιχα, η Μ3 επέλεξε την μεσαία τιμή, τόσο ως διάμεσο, όσο και μεταξύ των ακραίων τιμών, ταυτίζοντας τον μέσο όρο με τον διάμεσο. Μόλις 2 μαθητές (Μ2, Μ4) επέλεξαν τις απαντήσεις τους ακολουθώντας κάποιο αλγόριθμο ή αλγεβρική πράξη.

Πίνακας 5: αποτελέσματα ερώτησης 5 (pre-test)

ΕΡ.5: Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις;				
	M1	M2	M3	M4
$1^η$	4	4,5	3	10
$2^η$	3	4,5	1	5
$3^η$	2	4,5	2	5

4η	6	4,5	4	1
5η	**5**	**5**	**5**	**5**

Κανένας δεν κατάφερε να συμπληρώσει σωστά το δείγμα, ώστε ο μέσος όρος να προκύψει ο ζητούμενος μέσος όρος. Η Μ1 συμπλήρωσε στην τύχη το δείγμα, δίνοντας διαισθητικά τιμές που εν δυνάμει θα μπορούσαν να δώσουν τον ζητούμενο μέσο όρο. Ο Μ2 πολλαπλασίασε τον μέσο όρο με το πλήθος των παρατηρήσεων, αφαίρεσε την τελευταία παρατήρηση από το άθροισμα, αλλά διαίρεσε το υπόλοιπο με το 4 (το πλήθος των υπολοίπων παρατηρήσεων) και έδωσε στις υπόλοιπες μέρες τιμή ίση με το πηλίκο της διαίρεσης. Η Μ3 και Μ4 κινήθηκαν με τον ίδιο τρόπο με την Μ1, συμπληρώνοντας τις τιμές του δείγματος διαισθητικά.

Πίνακας 6: αποτελέσματα ερώτησης 6 (pre-test)

ΕΡ.6: Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλεψε μονάχα 3 μέρες..				
1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
31				
155	+	+	+	+
71				
Άλλο				
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
200				+
40				
120	+	+	+	
Άλλο				
3. Στην διάρκεια των 5 ημερών, πόσα αμάξια παρήχθησαν συνολικά για την εταιρία και από τα δύο εργοστάσια μαζί κατά μέσο όρο ανά ημέρα;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
35,5 αμάξια	+	+		
36 αμάξια				+
71 αμάξια			+	
55 αμάξια				

Όλοι οι συμμετέχοντες ολοκλήρωσαν σωστά το πρώτο σκέλος της ερώτησης 6, ενώ στο δεύτερο σκέλος λάθος επιλογή έκανε μονάχα η Μ4, η οποία υπολόγισε το άθροισμα των παρατηρήσεων με βάση λάθος πλήθος (πολλαπλασίασε τον μέσο όρο με

5 αντί για 4 που δούλεψε το δεύτερο εργοστάσιο). Στον εκ νέου υπολογισμό του μέσου όρου και για τα δύο εργοστάσια μαζί, η Μ1 και η Μ4 απάντησαν καθαρά στην τύχη, με βάση αυτό που τους φαινόταν πιο πιθανή απάντηση. Ο Μ2 υπολόγισε το άθροισμα των εργοστασίων, όπως διαίρεσε με το 8, προσθέτοντας τις μέρες λειτουργίας των εργοστασίων και επιλέγοντας την τιμή που ήταν πιο κοντά στο πηλίκο που υπολόγισε. Η Μ3 επέλεξε την απάντησή της με βάση την τιμή που της φαινόταν περίπου στην μέση, κάνοντας όλο και πιο αισθητή την επιρροή της διαμέσου στον τρόπο που η Μ3 κατανοεί τον μέσο όρο.

Πίνακας 7: αποτελέσματα ερώτησης 7 (pre-test)

ΕΡ. 7: Ο Ανδρέας και ο Βαγγέλης ξεκινάνε τρέχουν ταυτόχρονα. Ο Ανδρέας καλύπτει μια απόσταση 100 μέτρων σε 10 δευτερόλεπτα και τερματίζει, ενώ ο Βαγγέλης διασχίζει μια απόσταση 240 μέτρων και τερματίζει όταν το ρολόι δείχνει 12 δευτερόλεπτα. Ποιος από τους δύο έτρεξε πιο γρήγορα;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
Ο Ανδρέας				+
Ο Βαγγέλης	+	+		
Έτρεχαν και οι δύο με την ίδια ταχύτητα			+	

Μονάχα η Μ1 και ο Μ2 επέλεξαν σωστές απαντήσεις, με την μεν πρώτη να αποδίδει την απάντησή της στο γεγονός πως ο Βαγγέλης έτρεξε 140 μέτρα παραπάνω, ενώ χρειάστηκε μονάχα 2 δευτερόλεπτα παραπάνω, και άρα κινήθηκε πιο γρήγορα, ενώ ο Μ2 δικαιολόγησε την απάντησή του λέγοντας πως, εφόσον οι χρόνοι που κινήθηκαν οι δύο τους ήταν πολύ κοντά (2 δευτερόλεπτα διαφορά), και ο Βαγγέλης διένυσε μεγαλύτερη απόσταση, τότε θα πήγαινε με μεγαλύτερη ταχύτητα. Η Μ3 δικαιολόγησε την επιλογή της με βάση την στρατηγική της αναπλήρωσης: ο μεν κινήθηκε για λιγότερο χρόνο, αλλά και για μικρότερη ταχύτητα, ο δε κινήθηκε για περισσότερο χρόνο, αλλά έκανε μεγαλύτερη διαδρομή, άρα η μία διάσταση αναπληρώνει για την άλλη, με αποτέλεσμα να πηγαίνουν με την ίδια ταχύτητα. Η Μ4 βάσισε την απάντησή της καθαρά στο ποιος τερμάτισε πρώτος, με μοναδικό κριτήριο τον χρόνο κίνησης.

Πίνακας 8: αποτελέσματα ερώτησης 8 (pre-test)

ΕΡ.8: Ένας οδηγός ξεκινάει από την Βιέννη και κινείται με ταχύτητα 120 χλμ./ώρα για δύο ώρες προς τις Άλπεις. Στη συνέχεια κάνει στάση για 1 ώρα και μετά, συνεχίζει να ανεβαίνει το βουνό με ταχύτητα 90 χλμ./ώρα για μια ώρα. Σταματάει όμως λόγω ενός ατυχήματος και βάζει αλυσίδες, χάνοντας άλλη μια ώρα ακινητοποιημένος. Αφού έβαλε τις αλυσίδες στα λάστιχά του, κινήθηκε για άλλες δύο ώρες με 40 χλμ./ώρα, μέχρι που έφτασε στον προορισμό του.				
1. Πόσα χιλιόμετρα διένυσε ο οδηγός;				
	M1	M2	M3	M4
250 χλμ.	+	+	+	+
500 χλμ.				
410 χλμ.				
2. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα που κινήθηκε ο οδηγός στο σύνολο του ταξιδιού;				
	M1	M2	M3	M4
120 χλμ./ώρα				
58.5 χλμ./ώρα		+		+
35.7 χλμ./ώρα			+	
83.3 χλμ./ώρα	+			

Όλοι οι μαθητές ανεξαιρέτως για τον υπολογισμό της ταχύτητας άθροισαν τα μέτρα της ταχύτητας και επέλεξαν στο πρώτο σκέλος της ερώτησης την επιλογή 250 χλμ. Εντύπωση προκαλεί πως όλοι οι μαθητές δήλωσαν πως άθροισαν τα *χιλιόμετρα* της εκφώνησης, αγνοώντας τις μονάδες μέτρησης (*χιλιόμετρα/ώρα*).

Για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, οι Μ1 και Μ3 ακολούθησαν και πάλι το ένστικτό τους στην επιλογή της απάντησής τους, με βάση αυτό που τους φαινόταν πιο λογικό. Ο Μ2 διαίρεσε το άθροισμα των ταχυτήτων με την τιμή 5, πιθανότατα βάσει των σκελών που είχε η κίνηση και επέλεξε την τιμή που ήταν πιο κοντά στο πηλίκο που υπολόγισε. Η Μ4 κινήθηκε με έναν αντίστοιχο τρόπο, χωρίς να δηλώνει με ποια τιμή διαίρεσε το άθροισμα των ταχυτήτων, επιλέγοντας παραταύτα την σωστή τιμή, αν και πιθανότατα η επιλογή είχε αρκετή δόση τύχης.

Πίνακας 9: αποτελέσματα ερώτησης 9 (pre-test)

ΕΡ.9: Ένα ελικόπτερο της πυροσβεστικής κατά την διάρκεια μιας επιχείρησης πυρόσβεσης κάλυψε μια απόσταση ίση με 300 χλμ. σε 3 ώρες. Εάν την τελευταία ώρα κάλυψε την διπλάσια απόσταση σε σχέση με αυτή που είχε καλύψει τις προηγούμενες δύο, με τι ταχύτητα κινούταν τις προηγούμενες δύο ώρες;				
	M1	M2	M3	M4
100 χλμ./ώρα				+
200 χλμ./ώρα	+	+		
50 χλμ./ώρα			+	

Στην ερώτηση 9 μονάχα η Μ3 επέλεξε και δικαιολόγησε σωστά την απάντησή της. Συγκεκριμένα, ανέφερε πως αν κινηθεί με 50 χιλιόμετρα τις πρώτες δύο ώρες θα διανύσει απόσταση 100 χιλιομέτρων, και καλύπτοντας την διπλάσια απόσταση την τελευταία ώρα, δηλαδή 200 χιλιόμετρα, θα έχει καλύψει 300 χιλιόμετρα σε 3 ώρες. Οι Μ1 & Μ4 επέλεξαν στην τύχη τις απαντήσεις τους, ενώ ο Μ2 υπολόγισε την απάντηση πολλαπλασιάζοντας την τιμή που επέλεξε με το 3 και την απόσταση (300 χλμ.) με το 2, και αφού σύγκρινε τα γινόμενα και διαπίστωσε ότι είναι ίδια, δέχτηκε ως σωστή την απάντηση που επέλεξε.

Πίνακας 10: αποτελέσματα ερώτησης 10 (pre-test)

ΕΡ.10: Η Γιάννα ξεκίνησε από την Αθήνα για να πάει σε μια παραλία της Πάτρας, η οποία απέχει 240 χλμ. από το σπίτι της, πηγαίνοντας με 80 χλμ./ώρα. Ο παππούς της ξεκίνησε από την Κόρινθο για την ίδια παραλία, η οποία απέχει 120 χλμ. από την ίδια παραλία, με τον ίδιο προορισμό με την Γιάννα, αλλά επειδή πήγαινε με το αγροτικό του όχημα, κινούταν με 40 χλμ./ώρα. Ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος;				
	M1	M2	M3	M4
Ο παππούς				
Η Γιάννα				
Θα φτάσουν ταυτόχρονα.	+	+	+	+

Όλοι οι μαθητές επέλεξαν την σωστή απάντηση, αλλά μονάχα ο Μ2 χρησιμοποίησε μαθηματικές πράξεις για να δικαιολογήσει την απάντησή του, θέτοντας ωστόσο υπό αμφισβήτηση το γεγονός ότι όντως μπορούν να ξεκινήσουν ταυτόχρονα και οι δύο, ώστε να φτάσουν ταυτόχρονα. Όλοι οι υπόλοιποι δικαιολόγησαν την απάντησή τους με βάση μια εξισορροπητική στρατηγική, κατά την οποία η μεγαλύτερη απόσταση αντισταθμίζεται από την μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα, και αντίστοιχα η μικρότερη κατά μέτρο ταχύτητα αντισταθμίζεται από την μικρότερη απόσταση.

Συνολικά, αναδύονται αρκετά ζητήματα, τα οποία άπτονται τόσο του μέσου όρου, όσο και της μέσης ταχύτητας. Υπάρχει αδυναμία κατασκευής δείγματος από δεδομένο μέσο όρο, ενώ παράλληλα είναι ελλιπής η κατανόηση της έννοιας του μέσου όρου, ιδιαιτέρως της ανεπίσημης στατιστικής επαγωγικής σκέψης. Ενώ και οι 4 συμμετέχοντες έχουν έρθει σε επαφή στο σχολείο με τον μέσο όρο, μόλις δύο από αυτούς χρησιμοποιούν με σχετική ευχέρεια τον αλγόριθμο του μέσου όρου, έστω και σε συγκεκριμένα σενάρια.

Η εικόνα που ζωγραφίζεται από τα ζητούμενα της μέσης ταχύτητας είναι ακόμα πιο ζοφερή, καθώς το μισό μονάχα δείγμα έχει έρθει σε επαφή με την έννοια της μέσης ταχύτητας. Οι δύο που δήλωσαν πως είχαν ακούσει την έννοια της μέσης ταχύτητας παρήγαγαν καλύτερες απαντήσεις, αν και πάλι μονάχα ένας μαθητής (Μ2) χρησιμοποίησε εξισώσεις κίνησης (έστω και σε μια ανεπίσημη μορφή). Γενικότερα στους μαθητές εμφανίστηκε μια αντίληψη αναπλήρωσης, όπου οι έννοιες της απόστασης και του χρόνου και αυτές της απόστασης και της ταχύτητας δρουν ως ανάλογα ποσά, πράγμα που δεν είναι στην βάση του ψευδές, αλλά ισχύει κάτω από πολύ αυστηρές προϋποθέσεις. Η συγκεκριμένη λογική, ωστόσο, παίρνει μια μορφή αναπλήρωσης, καθώς οι «ανάλογες» ή και «αντιστρόφως ανάλογες» έννοιες εφαρμόζονται εν συγκρίσει με άλλα σώματα, πρακτικά εκμηδενίζοντας την όποια τους μαθηματική βάση. Ένα ακόμα ζήτημα το οποίο αναδύθηκε πολύ έντονα είναι η κακή κατανόηση των μονάδων μέτρησης από τους μαθητές, γεγονός που οδήγησε σε αθροίσματα ταχυτήτων χωρίς νόημα, με αποτέλεσμα να συγχέεται η απόσταση με την ταχύτητα στο μυαλό των μαθητών, απλώς και μόνο από την μονάδα μέτρησης.

4.3 Απαντήσεις των μαθητών στο φυλλάδιο εργασίας

Οι απαντήσεις των μαθητών θα παρουσιαστούν οργανωμένες σε πίνακα, οργανωμένους ανά στάδιο της διδασκαλίας, με την σειρά που έλαβαν χώρα οι διδακτικές παρεμβάσεις.

Πίνακας 11: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 1

	1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
	1.1 Μπορείς να ονομάσεις 3 σύγχρονα αγωνίσματα που ο πιο γρήγορος νικάει;
Μ1	Αγώνες δρόμου/ Αγώνες ιππασίας/ Κολύμβηση
Μ2	Στίβος/ Ιππασία/ Αγώνες με αυτοκίνητα
Μ3	Τρέξιμο/ Κολύμβηση/ Αντοχή
Μ4	Τρέξιμο/ Άλμα επί κοντώ/ Κολύμβηση
	1.2 Ποιος από τους δύο νίκησε;
Μ1	Ισοπαλία
Μ2	Ο πάνω
Μ3	Θεωρώ ότι νίκησε ο πρώτος δρομέας
Μ4	Ισοπαλία
	1.3 Ποιος θεωρείς ότι ήταν πιο γρήγορος και γιατί;
Μ1	Ο Δεύτερος γιατί ήταν πιο μπροστά.
Μ2	Ο πάνω γιατί έχει μεγαλύτερη απόσταση.
Μ3	Θεωρώ ότι ήταν πιο γρήγορος ο πρώτος δρομέας γιατί ξεκίνησε πιο πίσω
Μ4	Και οι 2
	1.4 Νικάει πάντα ο πιο γρήγορος στους αγώνες;
Μ1	Όχι απαραίτητα.
Μ2	Όχι, γιατί κάποιος μπορεί να κόψει δρόμο.
Μ3	Ναι, νικάει πάντα ο πιο γρήγορος.
Μ4	Ναι
	1.5 Είναι σημαντικό σε έναν αγώνα ο αθλητής να έχει σταθερά υψηλή απόδοση, ή είναι πιο σημαντικό να έχει πολύ υψηλή απόδοση για λίγο; Γιατί;
Μ1	Γιατί αν ένας αγώνας έχει μεγάλη διαδρομή θα κερδίσει ο αθλητής με την μεγαλύτερη αντοχή και απόδοση.
Μ2	Να πηγαίνει γρήγορα για να κρατάει ενέργειες για μετά.
Μ3	Θεωρώ ότι πρέπει να κρατάει σταθερή ταχύτητα και στο τέλος να τρέχει πιο γρήγορα.
Μ4	Αν ένας αθλητής κάνει στην αρχή λιγότερη δύναμη μετά.

Όλοι οι συμμετέχοντες αναγνώρισαν με επιτυχία αγωνίσματα ταχύτητας (με εξαίρεση την Μ4, όπου η μία της επιλογή απαιτεί μεν ταχύτητα κατά την εκτέλεση του αθλήματος, δεν είναι όμως η ταχύτητα ο νικητήριος παράγοντας). Στην ερώτηση που αφορά τους δρομείς το δείγμα είναι διχασμένο μεταξύ της ισοπαλίας (Μ1, Μ4) και της νίκης του δρομέα που διένυσε μεγαλύτερη απόσταση σε ίσο χρόνο, συνδέοντας την νίκη με τον αθλητή που κινήθηκε ταχύτερα. Όταν η εστίαση μεταφέρθηκε στο ποιος ήταν ταχύτερος, η Μ1 αναφέρει πως ο δρομέας που ήταν πιο μπροστά είναι ο πιο γρήγορος, επιβεβαιώνοντας το μοντέλο σκέψης του Piaget. Αντίθετα, οι Μ2 και Μ3 αναγνώρισαν πως, εφόσον ο πρώτος δρομέας διένυσε περισσότερη απόσταση σε ίσο χρόνο, αναγκαστικά κινήθηκε ταχύτερα. Αντίθετα, η Μ4 πως και οι δύο κινήθηκαν με την ίδια ταχύτητα, δεδομένου ότι τερματίζουν μαζί. Στο ερώτημα εάν νικάει πάντα ο πιο γρήγορος, η Μ1 αναγνώρισε πως υπάρχουν πολλοί παράγοντες, όπως π.χ. η αντοχή, που επηρεάζουν την απόδοση σε έναν αγώνα, ο Μ2 έκανε αναφορά σε μικρότερη διαδρομή (πιθανότατα επηρεασμένος από βιντεοπαιχνίδια αγώνων αυτοκινήτων, όπου η συγκεκριμένη στρατηγική είναι πάγια), η Μ3 δήλωσε πως πάντα νικάει ο πιο γρήγορος, δικαιολογώντας με βάση τα βιώματά της από το παρελθόν της στον στίβο, ενώ η Μ4 δήλωσε κατηγορηματικά πως πάντα νικάει ο πιο γρήγορος. Στην τελευταία, ωστόσο, ερώτηση της εισαγωγής, δήλωσαν ανεξαιρέτως όλοι πως είναι προτιμότερη η διατήρηση των δυνάμεων, παρά η πολύ υψηλή απόδοση για μικρό χρονικό διάστημα.

Πίνακας 12: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 2.1

	2.1 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ
	2.1.1 Ποιες από τις παρακάτω θέσεις θα μπορούσαν να είναι τα αποτελέσματα της ομάδας στα τελευταία 3 πρωταθλήματα (κύκλωσε όσες επιλογές θεωρείς σωστές);
Μ1	($1^{η}$, $5^{η}$,$3^{η}$)/ ($2^{η}$, $6^{η}$, $1^{η}$)/ ($2^{η}$, $3^{η}$, $4^{η}$)
Μ2	($1^{η}$,$5^{η}$,$3^{η}$)/ ($7^{η}$, $1^{η}$, $1^{η}$)/ ($2^{η}$, $6^{η}$, $1^{η}$)/ ($5^{η}$, $2^{η}$, $3^{η}$)/ ($2^{η}$, $3^{η}$, 4η)
Μ3	($3^{η}$,$3^{η}$,$3^{η}$)/ ($2^{η}$, 6η, $1^{η}$)
Μ4	($3^{η}$, $3^{η}$, $3^{η}$)
	2.1.2 Ποιος από τους δύο έχει δίκιο; Μπορεί όντως μια ομάδα να τερματίζει κατά μέσο όρο 2,3η; Γιατί;
Μ1	Ο φίλος λέει αλήθεια γιατί αν είναι κατά μέσο όρο τότε έχει δίκιο
Μ2	Μπορεί γιατί κάποιες θέσεις δεν έχουν σταθερό νούμερο
Μ3	Πιστεύω οι θέσεις είναι ακέραιοι αριθμοί.
Μ4	Ο πρώτος γιατί οι θέσεις είναι ακέραιος αριθμός.

Στην πρώτη ερώτηση του σταδίου της εξερεύνησης, η Μ1 παρέλειψε την επιλογή (3,3,3), χωρίς ωστόσο να δικαιολογεί επαρκώς σχετικά με το σκεπτικό που ακολούθησε κατά την επιλογή των απαντήσεών της. Το κριτήριο επιλογής των απαντήσεών της ήταν η αληθοφάνεια, καθώς η επιλογή (3,3,3) δεν της φάνηκε πραγματοποιήσιμη. Ο Μ2 αντίστοιχα κινήθηκε με το ένστικτο, χωρίς να ακολουθήσει κάποιο σαφή κανόνα, επιλέγοντας όσα φαίνονταν σωστά. Η Μ3 βρήκε μόλις 2 από τις 4 σωστές επιλογές, κινούμενη όμως από μια επιλογή διαμέσου: διάλεξε τα δείγματα εκείνα που η τιμή του μέσου όρου βρισκόταν περίπου στην μέση. Αντίθετα, η Μ4 επέλεξε ως μοναδική σωστή επιλογή εκείνη που οι τιμές του δείγματος ισούταν με τον μέσο όρο. Στην δεύτερη ερώτηση της φάσης, η Μ1 αναγνώρισε μονάχα πως ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να έχει ακέραιη τιμή ή να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, ο Μ2 δήλωσε πως ίσως υπό προϋποθέσεις κάτι τέτοιο είναι όντως εφικτό, ενώ οι Μ3 και Μ4 εγκλωβίστηκαν στα δεδομένα του ερωτήματος και δήλωσαν πως εφόσον δεν είναι ακέραιος αριθμός, η τιμή δεν μπορεί να γίνει δεχτή.

Πίνακας 13: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 2.2

	2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ
	2.2.1 Εισέπραξες κάθε μέρα περισσότερα από 500 ευρώ, ή μονάχα κάποιες μέρες;
Μ1	Όχι κάθε μέρα
Μ2	Στη δεύτερη εβδομάδα κάποιες ναι, κάποιες όχι
Μ3	Μονάχα κάποιες μέρες
Μ4	Καμία
	2.2.2 Ποια μέρα εισέπραξες τα περισσότερα χρήματα;
Μ1	Το Σάββατο
Μ2	Κυριακή
Μ3	Την Πέμπτη της $2^{ης}$ εβδομάδας
Μ4	Τετάρτη εβ.1
	2.2.3 Πόσα χρήματα μάζεψες την πρώτη εβδομάδα;
Μ1	3500
Μ2	3500
Μ3	3500
Μ4	3500
2	*2.2.4 Πόσα χρήματα μάζεψες την δεύτερη εβδομάδα;*
Μ1	3500
Μ2	3500
Μ3	3500
Μ4	3500
	2.2.5 Πόσα χρήματα μάζεψες συνολικά;
Μ1	7000
Μ2	7000
Μ3	7000
Μ4	7000
	2.2.6 Εάν υποθέσουμε ότι τις υπόλοιπες μέρες έχουμε ακριβώς τα ίδια έσοδα με την εβδομάδα δύο, ο μέσος όρος θα μείνει ίδιος;
Μ1	Ναι
Μ2	Όχι, θα ήταν πιο χαμηλός
Μ3	Όχι
Μ4	Όχι
	2.2.7 Εάν όχι, τότε μπορούμε με λιγότερες μέρες λειτουργίας να πετύχουμε τον ίδιο μέσο όρο εσόδων;
Μ1	Ναι αν ανέβουν τα έσοδα
Μ2	Ναι μπορούμε
Μ3	Ναι
Μ4	Ναι

	2.2.8 Πόσα λεφτά μαζεύτηκαν τελικά στο τέλος της κάθε εβδομάδας;
M1	3500 περίπου
M2	3500
M3	3500
M4	3500
	2.2.9 Τι σημαίνει τελικά ότι εισπράξαμε κατά μέσο όρο 500 ευρώ ανά μέρα; Ότι κάθε μέρα παίρναμε 500 ευρώ ή κάτι άλλο;
M1	Όχι, δεν σημαίνει ότι παίρναμε 500 ευρώ κάθε μέρα, αλλά κάποιες αυτές
M2	Κάπου γύρω στα 400-600 ευρώ την μέρα
M3	Σημαίνει ότι το μέσο ποσό είναι 500
M4	Σημαίνει ότι κάθε μέρα τα χρήματα που εισπράττουμε είναι 500.

Στο συγκεκριμένο στάδιο οι μαθητές δούλεψαν με την εφαρμογή *Οι εισπράξεις του κινηματογράφου*, δίνοντας ελεύθερα τιμές στις διάφορες μέρες και παίρνοντας οπτική επιβεβαίωση πως ο μέσος όρος ήταν 500. Ενδιαφέρον έχει ο πίνακας του Μ2, ο οποίος ήταν ο μόνος ο οποίος στην πρώτη εβδομάδα έβαλε κάθε μέρα ως τιμή των εσόδων την τιμή του μέσου όρου (500), ενώ στις υπόλοιπες εβδομάδες μεριμνούσε οι ημέρες προς το τέλος της εβδομάδας να εμφανίζονται πιο εμπορικές, κατ' αντιστοιχία με την πραγματικότητα. Τα πεδία των ερωτήσεων 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 συμπληρώθηκαν με ευκολία ορθά χωρίς εξαιρέσεις από τους μαθητές. Στην ερώτηση 2.2.6, η οποία αφορούσε την σύγκριση της δεύτερης με την τρίτη εβδομάδα (η τρίτη εβδομάδα έχει τις δύο πρώτες μέρες μηδενικά έσοδα), η Μ1 θεώρησε πως εάν τα έσοδα μεταφερθούν από την εβδομάδα 2 στην εβδομάδα 3 αυτούσια, τότε ο μέσος όρος δεν θα μειωθεί, αν και στην αμέσως επόμενη ερώτηση η απάντηση της διόρθωσε τον εαυτό της, καθώς δήλωσε πως για να διατηρηθεί ο μέσος όρος, απαιτείται αύξηση στα ημερήσια έσοδα για τις ημέρες λειτουργίας στην εβδομάδα 3. Στην τελευταία ερώτηση, όπου οι μαθητές καλούνται να δώσουν έναν ορισμό για το τι πιστεύουν πως σημαίνει 500 ευρώ κατά μέσο όρο κάθε μέρα, η Μ1 δήλωσε πως σημαίνει ότι μονάχα κάποιες από αυτές τις μέρες τα έσοδα ήταν 500 ευρώ, ο Μ2 δήλωσε πως τα έσοδα θα είναι κάπου στα 400-600 ευρώ κάθε μέρα, η Μ3 χρησιμοποίησε τον όρο «μέσο ποσό» για να περιγράψει την σκέψη της, ενώ η Μ4 δήλωσε πως κάθε μέρα τα χρήματα που θα εισπραχτούν θα είναι 500 ευρώ, σε αναντιστοιχία με όσα έγραψε στην ερώτηση 2.2.1.

Πίνακας 14: απαντήσεις των μαθητών στην ενότητα 2.4

	2.4 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ
	2.4.1 Πόσους πόντους πήρε κατά μέσο όρο ο πρώτος οδηγός

M1	16,6
M2	25+15+15+10+18:5=83:5=16,6
M3	16,6
M4	16,5
	2.4.2 Ο δεύτερος οδηγός πήρε κατά μέσο όρο 15 πόντους ανά αγώνα, αλλά έτρεξε έναν αγώνα περισσότερο. Πόσους πόντους συγκέντρωσε συνολικά;
M1	15*6=90
M2	5+1=6 15x6=90
M3	15x6=90
M4	15*6=90
	2.4.3 Ποιος από τους δύο οδηγούς συγκέντρωσε μέχρι στιγμής περισσότερους πόντους;
M1	Ο δεύτερος οδηγός έχει πιο πολλούς πόντους.
M2	Ο δεύτερος.
M3	Ο δεύτερος οδηγός
M4	Ο Δεύτερος.
	2.4.4 Πόσους πόντους συγκεντρώνει κατά μέσο όρο ανά αγώνα, στους πρώτους 6 αγώνες η ομάδα για το πρωτάθλημα κατασκευαστών;
M1	90+83=173 173:6=28,83
M2	83+90=173 Περίπου 28,83 πόντοι (σ.σ. έγινε σε εξωτερικό της απάντησης η διαίρεση 173:6 κάθετα).
M3	28.83 πόντους κατά μέσο όρο ανά αγώνα (σ.σ. οι πράξεις έγιναν κάθετα σε εξωτερικό της απάντησης χώρο).
M4	90+83=173:6=28,83

Στο στάδιο της εξερεύνησης όλοι οι μαθητές ολοκλήρωσαν με επιτυχία τα ερωτήματα, με κυριότερο χαρακτηριστικό και των 4 να είναι πως ξέφυγαν από την ενστικτώδη σκέψη και χρησιμοποίησαν αλγεβρικές πράξεις για να υπολογίσουν τα αποτελέσματά τους.

Πίνακας 15: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 3.1

	3.1 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ
	3.1.1 Γιατί πιστεύεις πως έγινε αυτό;
M1	Για διάφορους, όπως αν έγινε κάποιο ατύχημα ή καθυστέρησε κάποιον
M2	Γιατί πήγαινε πολύ γρήγορα και θα σταμάτησε η μηχανή
M3	Πιστεύω ότι στο τέλος αύξανε ταχύτητα
M4	Ο Hamilton ήταν εξίσου γρήγορος
	3.1.2 Τελικά ποιος από τους δύο οδηγούς ήταν πιο γρήγορος;
M1	Προφανώς αυτός που κέρδισε, δηλ. ο Hamilton
M2	Ο Verstappen

Μ3	Ο Verstappen γιατί ήταν πιο γρήγορος αλλά στο τέλος κατάφεραν να τον κερδίσουν.
Μ4	Στην αρχή ήταν ο Verstappen και μετά ο Hamilton.
	3.1.3 Θεωρείς πως το αποτέλεσμα ήταν δίκαιο ή όχι; Γιατί;
Μ1	Ναι, γιατί ο Verstappen μπορεί απλώς να καθυστέρησε σε κάποιον γύρο και να έχασε χρόνο
Μ2	Είναι δίκαιο γιατί πήγαινε πολύ γρήγορα και θα σταμάτησε η μηχανή του
Μ3	Ναι, γιατί στο τέλος αυτός κέρδισε.
Μ4	Δίκαιο.

Στο στάδιο της εξερεύνησης της μέσης ταχύτητας τίθεται στην αρχή ένα αντιφατικό ζήτημα στους μαθητές (ο φαινομενικά πιο γρήγορος εν τέλει χάνει), με τους μαθητές να καλούνται να απαντήσουν γιατί έγινε το συγκεκριμένο φαινόμενο. Η Μ1, η οποία δήλωσε πως έχει δει αγώνες φόρμουλα 1 (τους οποίους αφορά το πλαίσιο της ερώτησης), δήλωσε πως κάποια καθυστέρηση ενδεχομένως να έκανε τον πιο γρήγορο οδηγό να χάσει χρόνο ή κάποιο ενδεχόμενο ατύχημα τον καθυστέρησε. Ο Μ2 απέδωσε την απώλεια της πρωτοπορίας σε μηχανική βλάβη, ενώ η Μ3 μετέφερε και πάλι την εμπειρία της από τον στίβο στην ερώτηση, λέγοντας πως πιθανότατα ο πιο αργός οδηγός φύλαξε τις δυνάμεις του για το τέλος. Η Μ4 δήλωσε ότι ο πιο αργός οδηγός ήταν εξίσου γρήγορος, γι’ αυτό και κέρδισε εν τέλει. Όταν το δείγμα κλήθηκε να απαντήσει ποιος από τους δύο ήταν πιο γρήγορος, η Μ1 δήλωσε κατηγορηματικά πως πιο γρήγορος ήταν ο νικητής του αγώνα, ενώ οι Μ2 και Μ3 δήλωσαν πως ο αρχικά πιο γρήγορος οδηγός ήταν ο ταχύτερος όλων. Αντίθετα, η Μ4 δήλωσε πως αρχικά ο οδηγός που έχασε ήταν ταχύτερος, αλλά στο τέλος ο οδηγός που νίκησε κινήθηκε με μεγαλύτερη ταχύτητα. Όλοι ανεξαιρέτως θεώρησαν το αποτέλεσμα δίκαιο, δικαιολογώντας την νίκη του ενός οδηγού έναντι του άλλου με βάση τα αρχικά τους επιχειρήματα.

Πίνακας 16: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 3.2

	3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ
	3.2.1 Πηγαίνει από την αρχή έως το τέλος με την ίδια ταχύτητα;
Μ1	Όχι.
Μ2	Όχι.
Μ3	Όχι.
Μ4	Ναι.
	3.2.2 Πώς θα χαρακτήριζες την ταχύτητα με την οποία υπολόγισες ότι κινήθηκε ο Bolt, στιγμιαία, σταθερή ή κάπως αλλιώς; Γιατί;
Μ1	Κάπως αλλιώς γιατί στην αρχή δεν έτρεχε όσο γρήγορα όσο πιο μετά.

Μ2	Είναι στιγμιαία γιατί στην αρχή πήγαινε αργά και μετά έτρεξε πιο γρήγορα και κέρδισε.
Μ3	Δεν ήταν σταθερή γιατί στο τέλος ήταν πιο γρήγορος.
Μ4	Δεν ξέρω.
	3.2.3 Τι σημαίνει τελικά η φράση «ο πιο γρήγορος άνθρωπος στην Γη» κατά την γνώμη σου; Τι ξεχωρίζει τον Bolt σε σχέση με τους υπόλοιπους αθλητές;
Μ1	Ότι δεν έχει βρεθεί κανένας να κατακτήσει το ρεκόρ του, καθώς ήταν πιο γρήγορος από όλους.
Μ2	Γιατί είναι πιο γρήγορος από τους υπόλοιπους.
Μ3	Έτρεξε με έναν πολύ καλό χρόνο σε μια αρκετά μεγάλη απόσταση.
Μ4	Από γονίδια και από άθληση.
	3.2.4 Με τι ταχύτητα πρέπει να τρέξεις για να τερματίσετε μαζί; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις όσα υπολόγισες!
Μ1	*Η μαθήτρια ζήτησε να μην απαντήσει.*
Μ2	Για να τερματίσουν μαζί πρέπει να πηγαίνουν με την ίδια ταχύτητα. Το υπολόγισα, αφού πάει και αυτός με την ίδια ταχύτητα, πρέπει να πάω και εγώ.
Μ3	25 μέτρα 4 δευτερόλεπτα
Μ4	*Η μαθήτρια ζήτησε να μην απαντήσει.*
	3.2.5 Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθείς εσύ, ώστε να νικήσεις τον αντίπαλό σου; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις τα όσα υπολόγισες!
Μ1	*Η μαθήτρια ζήτησε να μην απαντήσει.*
Μ2	Πηγαίνει με 20 το δευτερόλεπτο ενώ εγώ πηγαίνω με 80 το δευτερόλεπτο (160:8=20)
Μ3	23 δευτερόλεπτα
Μ4	*Η μαθήτρια ζήτησε να μην απαντήσει.*

Το στάδιο της εφαρμογής στην μέση ταχύτητα εμφανίζει μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς μόνο οι μισοί από το δείγμα το ολοκλήρωσαν. Συγκεκριμένα, οι Μ1 και Μ4, οι οποίες δήλωσαν πως δεν είχαν ακούσει τον όρο μέση ταχύτητα πριν την διδακτική παρέμβαση, δεν ολοκλήρωσαν τις ερωτήσεις 3.2.4, 3.2.5, καθώς και δεν υπολόγισαν την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ο Bolt κατά το σπάσιμο του παγκοσμίου ρεκόρ στο Βερολίνο. Αντίθετα, οι Μ2 και Μ3 που δήλωσαν πως είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια, ολοκλήρωσαν όλες τις δραστηριότητες. Η άρνηση των Μ1 και Μ4 πήγαζε καθαρά από την έλλειψη σαφή ορισμού για την ταχύτητα και την έλλειψη αλγεβρικών εργαλείων για τον υπολογισμό της. Συγκεκριμένα, η Μ4 εμφάνισε και δυσκολίες στο να ξεχωρίσει την σταθερή από την στιγμιαία ταχύτητα: ενώ οι υπόλοιποι αναγνωρίζουν πως ο Bolt δεν κινήθηκε με την ίδια ταχύτητα από την αρχή στο τέλος στο ερώτημα 3.2.1, η Μ4 δηλώνει πως κινείται με σταθερή ταχύτητα. Κανένας μαθητής δεν κατάφερε να χαρακτηρίσει σωστά την ταχύτητα που υπολόγισε για την κίνηση του Bolt (στις Μ1 και Μ4 δόθηκε το στατιστικό στοιχείο πως κινήθηκε με 45 χλμ./ώρα, ώστε να μπορέσουν να απαντήσουν στο ερώτημα, χωρίς όμως να έχουν τις λύσεις στο ερώτημα που ζητούμενο ήταν η ταχύτητα του Bolt), καθώς οι μαθητές αναγνώριζαν πως ο όρος *σταθερή* δεν επαρκούσε, αφού στο τέλος επιτάχυνε. Στο ερώτημα 3.2.3, κανένας δεν χρησιμοποίησε τον όρο ταχύτητα για να δικαιολογήσει την απάντησή του, χρησιμοποιώντας παραπλήσιους όρους (*γρήγορος*, απαντήσεις Μ1 και Μ2), ενώ η Μ3 εισάγει την έννοια του χρόνου στην απάντησή της, δηλώνοντας πρώτα τον χρόνο και έπειτα την απόσταση, υπονοώντας ένα γνωστικό σχήμα στο οποίο ο χρόνος παίζει κυρίαρχο ρόλο.

Όπως προειπώθηκε, τα ερωτήματα 3.2.4 και 3.2.5 τα απάντησαν μονάχα οι Μ2 και Μ3, ακολουθώντας όμως διαφορετικές στρατηγικές και προσεγγίσεις στην σκέψη τους. Ο Μ2 παρατήρησε πως η ταχύτητα του αντιπάλου είναι σταθερή, οπότε υιοθέτησε αυτή την ταχύτητα για δικιά του και δήλωσε κατευθείαν την σωστή απάντηση. Στο ερώτημα 3.2.5, υπολόγισε την συνολική μέση ταχύτητα, διαιρώντας την συνολική απόσταση με τον χρόνο κίνησης, δηλώνοντας μια τιμή πολύ μεγαλύτερη από αυτή του αντιπάλου του, με αποτέλεσμα να τον νικήσει κατά κράτος. Αντίθετα, η Μ3 υπολόγισε πρώτα τον χρόνο κίνησης του αντιπάλου στο ερώτημα 3.2.4 και μετά υπολόγισε πως πρέπει να κάνει 25 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο για να φτάσει τον αντίπαλό της. Στο ερώτημα 3.2.5, η Μ3 κινήθηκε με αντίστοιχο τρόπο με τον Μ2, αθροίζοντας την συνολική απόσταση και διαιρώντας την με τον συνολικό χρόνο, υπολόγισε πως η μέση ταχύτητα του αντιπάλου ήταν 20 m/s. Ωστόσο, στην απάντησή της χρησιμοποίησε λάθος μονάδα μέτρησης, ενδεικτική του πόσο ισχυρά συνδεδεμένη είναι η έννοια της ταχύτητας – η πιο σωστά η έννοια «γρήγορα» - με τον χρόνο κίνησης.

Πίνακας 17: απαντήσεις των μαθητών στην ενότητα 3.4

	3.4 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ
	3.4.1 Θεωρείς ότι η ταχύτητα του ποδηλάτη ήταν σταθερή σε όλη την διαδρομή;
Μ1	Όχι, γιατί στην αρχή θα πήγαινε πιο αργά, μετά πιο γρήγορα κτλ.
Μ2	Μπορεί ναι μπορεί και όχι.
Μ3	Όχι
Μ4	Όχι
	3.4.2 Η ταχύτητα του ποδηλάτη που υπολόγισες ήταν στιγμιαία ή αφορούσε όλο το ταξίδι;
Μ1	Αφορούσε όλο το ταξίδι.
Μ2	Αφορά όλο το ταξίδι γιατί είναι η μέση ταχύτητα.
Μ3	Αφορούσε όλο το ταξίδι
Μ4	Όλο το ταξίδι.

	3.4.3 Θα είχε νόημα να υπολογίσουμε τις στιγμιαίες ταχύτητες που είχε κάθε φορά ο ποδηλάτης; Γιατί;
M1	Όχι, γιατί με την μέση ταχύτητα αντικαθιστούμε όλες τις υπόλοιπες.
M2	Όχι γιατί είναι πάρα πολλές.
M3	Δεν θα είχε νόημα γιατί είναι πάρα πολλές
M4	Όχι.
	3.4.4 Τελικά τι είναι η μέση ταχύτητα;
M1	Μία ταχύτητα με την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες τις υπόλοιπες στιγμιαίες ταχύτητες του σώματος σε μια διαδρομή.
M2	Μέση ταχύτητα είναι περίπου με πόση ταχύτητα πηγαίνει κάτι συνολικά σε μια διαδρομή.
M3	Είναι η ταχύτητα την οποία περιμένω ένα σώμα να πηγαίνει από την αρχή μέχρι το τέλος του ταξιδιού
M4	Ο μέσος όρος των αποστάσεων που διανύει κάτι που κινείται κάθε χρονική στιγμή.

Στην ερώτηση 3.4.1 (η οποία αφορούσε προσομοίωση ταξιδιού στην εφαρμογή *Η μέση ταχύτητα σε ένα ταξίδι*) μονάχα ο Μ2 άφησε ανοιχτο το ενδεχόμενο το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα – όλοι οι υπόλοιποι δήλωσαν κατηγορηματικά πως η ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα δεν είναι σταθερή. Η ταχύτητα που υπολόγισαν για τις ανάγκες της εφαρμογής ήταν σύμφωνα με τους μαθητές για όλο το ταξίδι, ωστόσο μόνο ο Μ2 έγραψε πως ήταν η μέση ταχύτητα. Στο ερώτημα 3.4.2 έχει ενδιαφέρον η απάντηση της Μ1, γιατί συν σε αυτό που δήλωσαν οι Μ2 και Μ3, η Μ1 δήλωσε πως οι στιγμιαίες ταχύτητες αντικαταστάθηκαν συνολικά από την μέση ταχύτητα, και άρα δεν έχει νόημα να χρησιμοποιηθούν οι στιγμιαίες. Ενδιαφέρον επίσης εμφανίζει ο ορισμός που δίνουν οι μαθητές στην έννοια της μέσης ταχύτητας. Η Μ1 εστίασε στην αντικατάσταση των στιγμιαίων ταχυτήτων, από μία, καθολική ταχύτητα. Ο Μ2 έδωσε έναν παραπλήσιο ορισμό, ο οποίος όμως δεν ήταν εξίσου ακριβής. Η Μ3 έδωσε έναν ορισμό ο οποίος είναι επηρεασμένος από την στοχαστικότητα του μέσου όρου, ενώ η Μ4 ορίζει την μέση ταχύτητα ως τον μέσο όρο των αποστάσεων που διένυσε το σώμα σε κάθε χρονική στιγμή.

Πίνακας 18: απαντήσεις μαθητών στην ενότητα 4.1

	4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ
	4.1 Ποια είναι η μέση ταχύτητα για όλες τις ειδικές συνολικά;
M1	114,69
M2	114,7

Μ3	114,7 χμ/h
Μ4	114,69
	4.2 Ποιος είναι ο μέσος όρος των ταχυτήτων των ειδικών διαδρομών για το σύνολο του αγώνα;
Μ1	115,295
Μ2	115,13
Μ3	115,295 χμ/h
Μ4	115,29
	4.3 Σε κάποια από αυτές τις διαδρομές μάθαμε ότι ο οδηγός αντιμετώπισε ένα μηχανικό πρόβλημα. Σε ποια απ' όλες φαντάζεσαι πως έγινε αυτό;
Μ1	Στην #4 -> 70
Μ2	Η 4ρτη γιατί αυτή η ταχύτητα έχει τη μεγαλύτερη διαφορά από τον μέσο όρο
Μ3	Στην #4 διαδρομή.
Μ4	70

Όλο το δείγμα συμπλήρωσε με επιτυχία τον πίνακα 3, χρησιμοποιώντας ωστόσο αριθμομηχανές λόγω των απαιτητικών πράξεων. Οι μαθητές με επιτυχία διαχώρισαν την συνολική μέση ταχύτητα από τον μέσο όρο των ταχυτήτων, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους αλγόριθμους κάθε φορά. Επίσης αναγνώρισαν την παρατήρηση με την μεγαλύτερη απόκλιση από τον μέσο όρο ως την ενδεχόμενη προβληματική κατάσταση, δηλώνοντας πως η συγκεκριμένη παρατήρηση λογικά είναι η ένδειξη της βλάβης.

4.4 Απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια post-test

Τα ερωτηματολόγια post-test ήταν πανομοιότυπα με τα pre-test ερωτηματολόγια, αν και ζητήθηκε από το δείγμα να μην συμπληρώσει τις 2 πρώτες ερωτήσεις. Χορηγήθηκαν 2 μέρες μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης, και πάλι στον χώρο των παιδιών, ενώ μετά την ολοκλήρωσή τους ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν το σκεπτικό τους πίσω από κάθε απάντηση, διαδικασία η οποία ηχογραφήθηκε.

Πίνακας 19: αποτελέσματα ερώτησης 3 (post-test)

ΕΡ.3: Σε μία έρευνα που έγινε στο οδικό δίκτυο της Ρόδου, βρέθηκε ότι υπάρχουν 6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; (Βάλε ένα «Σ» σε αυτές που θεωρείς σωστές, «Λ» σε αυτές που θεωρείς λάθος.)

	M1	M2	M3	M4
Ένας από τους δρόμους της Ρόδου είχε 6,7 πινακίδες.	Λ	Λ	Λ	Λ
Κάποιος δρόμος μπορεί και να μην έχει καμία πινακίδα.	Σ	Σ	Σ	Σ
Οι περισσότεροι δρόμοι της Ρόδου είχαν ή 6 ή 7 πινακίδες.	Λ	Σ	Λ	Λ
Αν περπατούσαμε σε ένα τυχαίο δρόμο της Ρόδου, θα περιμέναμε να βρούμε 6 με 7 πινακίδες περίπου στον δρόμο.	Σ	Σ	Σ	Σ

Με εξαίρεση τον χαρακτηρισμό «σωστό» της τρίτης πρότασης από τον Μ2, όλοι οι υπόλοιποι είχαν απολύτως σωστές επιλογές στους χαρακτηρισμούς των προτάσεων ως σωστές ή λάθος, με τις ηχογραφήσεις να επιβεβαιώνουν την εικόνα που καταγράφεται στο χαρτί. Κάτι που, ωστόσο, ίσως εγείρει κάποιους μικρούς προβληματισμούς είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δικαιολόγησαν τις λάθος προτάσεις με αντιπαραδείγματα και όχι καταφεύγοντας στον ορισμό.

Πίνακας 20: αποτελέσματα ερώτησης 4 (post-test)

ΕΡ. 4: Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:				
	M1	M2	M3	M4
6 κλήσεις ανά ημέρα				
10 κλήσεις ανά μέρα				
3 κλήσεις ανά μέρα				
7 κλήσεις ανά μέρα				
5,66 κλήσεις ανά μέρα				
5,1 κλήσεις ανά μέρα	+	+	+	+

Και εδώ οι μαθητές έπραξαν ορθά και υπολόγισαν σωστά τον μέσο όρο, δικαιολογώντας μετά και ρητά την επιλογή τους με αλγεβρικές πράξεις, γεγονός που δείχνει κατάκτηση του βασικού αλγορίθμου του μέσου όρου (Μ1, Μ3), αλλά και βελτίωση των υφιστάμενων γνωστικών δομών.

Πίνακας 21: αποτελέσματα ερώτησης 5 (post-test)

ΕΡ.5: Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
1η	8	5	0	4
2η	6	5	9	1
3η	3	5	5	5
4η	1	3	4	8
5η	**5**	**5**	**5**	**5**

Όλο το δείγμα ολοκλήρωσε με επιτυχία την δοκιμασία κατασκευής δείγματος από γνωστό μέσο όρο. Εντύπωση προξενεί το δείγμα του Μ2 και της Μ3 για διαφορετικούς λόγους. Ο μεν Μ2 δείχνει μία τάση να διατηρεί τις τιμές του δείγματός του κοντά στον μέσο όρο, κάτι που αποτυπώνεται και στην ερώτηση 3, στον χαρακτηρισμό της πρότασης 3 ως λάθος. Αντίστοιχα, η Μ3 έβαλε ως τιμή της πρώτης μέρας το 0, δικαιολογώντας μάλιστα μετά πως και στην δραστηριότητα που ολοκληρώθηκε στην διδακτική παρέμβαση είχε μάθει πως η μηδενική τιμή επηρεάζει τον μέσο όρο, και άρα πρέπει να συνυπολογιστεί και αυτή.

Πίνακας 22: αποτελέσματα ερώτησης 6 (post-test)

ΕΡ.6: Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλεψε μονάχα 3 μέρες..				
1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
31				
155	+	+	+	+
71				
Άλλο				
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;				

200				
40				
120	+	+	+	+
Άλλο				
3. Στην διάρκεια των 5 ημερών, πόσα αμάξια παρήχθησαν συνολικά για την εταιρία και από τα δύο εργοστάσια μαζί κατά μέσο όρο ανά ημέρα;				
35,5 αμάξια				
36 αμάξια				
71 αμάξια				
55 αμάξια	+	+	+	+

Τα πρώτα δύο υποερωτήματα εξ’ αρχής συμπληρώθηκαν σωστά από τους μαθητές, και κατ’ επέκτασιν δεν προξενεί εντύπωση πως συμπληρώθηκαν σωστά από σχεδόν όλους τους μαθητές. Το γεγονός πως πλέον είχαν έρθει σε τριβή με τον αλγόριθμο του μέσου όρου και μπορούσαν με επάρκεια να προσδιορίζουν το πλήθος των παρατηρήσεων οδήγησε στην πολύ καλή απόδοση και στο τελευταίο υποερώτημα, με τις τυχαίες επιλογές να αντικαθίστανται από αλγεβρικές πράξεις και σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 23: αποτελέσματα ερώτησης 7 (post-test)

ΕΡ. 7: Ο Ανδρέας και ο Βαγγέλης ξεκινάνε τρέχουν ταυτόχρονα. Ο Ανδρέας καλύπτει μια απόσταση 100 μέτρων σε 10 δευτερόλεπτα και τερματίζει, ενώ ο Βαγγέλης διασχίζει μια απόσταση 240 μέτρων και τερματίζει όταν το ρολόι δείχνει 12 δευτερόλεπτα. Ποιος από τους δύο έτρεξε πιο γρήγορα;				
	M1	M2	M3	M4
Ο Ανδρέας				
Ο Βαγγέλης	+	+	+	+
Έτρεχαν και οι δύο με την ίδια ταχύτητα				

Και εδώ η αντικατάσταση των τυχαίων επιλογών από αλγεβρικές πράξεις οδήγησε σε θεαματική βελτίωση των απαντήσεων, καθώς το δείγμα στο σύνολό του κατέφυγε σε μια άτυπη εξίσωση κίνησης και υπολόγισε την ταχύτητα, αντί να καταφύγει στο προηγούμενο διαισθητικό μοντέλο αναπλήρωσης.

Πίνακας 24: αποτελέσματα ερώτησης 8 (post-test)

ΕΡ.8: Ένας οδηγός ξεκινάει από την Βιέννη και κινείται με ταχύτητα 120 χλμ./ώρα για δύο ώρες προς τις Άλπεις. Στη συνέχεια κάνει στάση για 1 ώρα και μετά, συνεχίζει να ανεβαίνει το βουνό με ταχύτητα 90 χλμ./ώρα για μια ώρα. Σταματάει όμως λόγω ενός ατυχήματος και βάζει αλυσίδες, χάνοντας άλλη μια ώρα ακινητοποιημένος. Αφού έβαλε τις αλυσίδες στα λάστιχά του, κινήθηκε για άλλες δύο ώρες με 40 χλμ./ώρα, μέχρι που έφτασε στον προορισμό του.				
1. Πόσα χιλιόμετρα διένυσε ο οδηγός;				
	M1	M2	M3	M4
250 χλμ.				
500 χλμ.				
410 χλμ.	+	+	+	+
2. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα που κινήθηκε ο οδηγός στο σύνολο του ταξιδιού;				
	M1	M2	M3	M4
120 χλμ./ώρα				
58.5 χλμ./ώρα	+	+	+	+
35.7 χλμ./ώρα				
83.3 χλμ./ώρα				

Το πρόβλημα κατά την συμπλήρωση του συγκεκριμένου ερωτήματος κατά την διαδικασία του pre-test ήταν ο λανθασμένος υπολογισμός του διανυθέντος διαστήματος, γεγονός που συμπαρέσυρε και τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας. Ωστόσο, έχοντας διαχωρίσει την ταχύτητα και τις μονάδες μέτρησης της ταχύτητας από αυτές του διαστήματος, πλέον το δείγμα ήταν σε θέση να ολοκληρώσει με επάρκεια την άσκηση.

Πίνακας 25: αποτελέσματα ερώτησης 9 (post-test)

ΕΡ.9: Ένα ελικόπτερο της πυροσβεστικής κατά την διάρκεια μιας επιχείρησης πυρόσβεσης κάλυψε μια απόσταση ίση με 300 χλμ. σε 3 ώρες. Εάν την τελευταία ώρα κάλυψε την διπλάσια απόσταση σε σχέση με αυτή που είχε καλύψει τις προηγούμενες δύο, με τι ταχύτητα κινούταν τις προηγούμενες δύο ώρες;				
	M1	M2	M3	M4
100 χλμ./ώρα				+
200 χλμ./ώρα		+		
50 χλμ./ώρα	+		+	

Στην πιο απαιτητική ερώτηση του φυλλαδίου, μονάχα η Μ3 απάντησε σωστά και με επάρκεια, καθώς η Μ1 επέλεξε μεν την σωστή απάντηση, το έκανε όμως διαισθητικά, χωρίς να ακολουθήσει κάποια λογική ή κανόνα. Ο Μ2 έκανε λάθος επιλογή, ωστόσο το σκεπτικό του ήταν σωστό: σκέφτηκε πως αφού την τελευταία ώρα διένυσε την διπλάσια απόσταση, τότε θα διένυσε 200 χλμ. την τελευταία ώρα και 100 τις προηγούμενες δύο, μη κάνοντας ωστόσο το παραπάνω βήμα για να υπολογίσει την σωστή ταχύτητα. Η Μ3 έδωσε την ίδια εξήγηση που είχε δώσει και στο pre-test σχετικά με την επιλογή της, ενώ η Μ4 δήλωσε πως δεν ήξερε τι ακριβώς να κάνει, οπότε υπολόγισε την μέση ταχύτητα και επέλεξε την αντίστοιχη τιμή.

Πίνακας 26: αποτελέσματα ερώτησης 10 (post-test)

ΕΡ.10: Η Γιάννα ξεκίνησε από την Αθήνα για να πάει σε μια παραλία της Πάτρας, η οποία απέχει 240 χλμ. από το σπίτι της, πηγαίνοντας με 80 χλμ./ώρα. Ο παππούς της ξεκίνησε από την Κόρινθο για την ίδια παραλία, η οποία απέχει 120 χλμ. από την ίδια παραλία, με τον ίδιο προορισμό με την Γιάννα, αλλά επειδή πήγαινε με το αγροτικό του όχημα, κινούταν με 40 χλμ./ώρα. Ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος;				
	Μ1	Μ2	Μ3	Μ4
Ο παππούς				
Η Γιάννα				
Θα φτάσουν ταυτόχρονα.	+	+	+	+

Όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές διαίρεσαν την απόσταση με την ταχύτητα και υπολόγισαν το πηλίκο, δηλαδή τον χρόνο, δηλώνοντας πως θα φτάσουν ταυτόχρονα και αφήνοντας οριστικά απαντήσεις που βασίζονταν στην λογική της αναπλήρωσης ή επιλογές καμωμένες στην τύχη.

4.5 Δεδομένα που συλλέχθηκαν από την ανατροφοδότηση και τις ηχογραφήσεις & σημεία αναφοράς στην εξέλιξη της σκέψης των μαθητών

4.5.1 Η περίπτωσης της Μ1

Πίνακας 27: απαντήσεις της μαθήτριας Μ1 στα ερωτήματα ανατροφοδότησης

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ
5.1 Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο στο που θέλει να μάθει για την ταχύτητα και τον μέσο όρο;
Ναι.
5.2 Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;
Ναι γιατί έμαθα πολλά.
5.3Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;
Οι τελευταίες ασκήσεις.
5.4 Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις που θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική στο απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
Ναι. Η άσκηση στη σελίδα 9.
5.5 Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;
Στη σελ. 9 η άσκηση
5.6 Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;
Ναι, γιατί έβλεπα αν το έκανα σωστά ή λάθος και μου ήταν πιο εύκολο.
5.7 Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;
Θα άλλαζα ίσως λίγο τις μεγάλες σε όψη ασκήσεις.

Η Μ1 μπορεί να χαρακτηριστεί και ως «παίκτης ψυχολογίας»: νιώθει ανασφάλεια όταν δεν γνωρίζει καλά μια έννοια και αρνείται να ασχοληθεί με αυτή εάν δεν είναι σίγουρη, έστω και διερευνητικά, ενώ άπαξ και έχει έρθει σε επαφή με το αντικείμενο μια φορά, πολύ γρήγορα μπορεί να εφαρμόσει τα όσα έχει διδαχτεί. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός πως τα αγαπημένα της σημεία, όπως προκύπτει από την απομαγνητοφώνηση των διαλόγων, είναι αυτά που έπονται του σταδίου της εξήγησης, όπου πλέον έχει καταλάβει τις έννοιες και είναι έτοιμη να εφαρμόσει τα όσα γνωρίζει:

(*Στάδιο ανατροφοδότησης*)

Ε: Αφού όντως άλλαξαν κάποια πράγματα από αυτά που πίστευες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα, ποια δραστηριότητα σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;

Μ1: Εεεε, αυτή που κάναμε πριν λίγο, η τελευταία...

Ε: Άρα στο τέλος τέλος κατάλαβες πώς πραγματικά δουλεύουν, έτσι;

Μ1: Ναι, ναι…

[…]

Ε: Θες να γυρίσεις να δεις και να μου πεις ένα-δύο σημεία; Στο φυλλάδιο σου;

Μ1: Εεεεμ, είναι εκείνη η άσκηση… στη σελίδα 9

Ε: Μάλιστα, αυτό με τα λογισμικά, την προσομοίωση

Μ1: Ναι.

Ε: Των dragsters

Μ1: Ναι.

Ε: Την οποία δεν την κάναμε καθόλου γιατί δεν θυμόσουν τον τύπο, αλλά τώρα νιώθεις σίγουρη για τον εαυτό σου να την ξανακάνεις, έτσι;

Μ1: Ναι.

Ε: Ποιο σημείο σε δυσκόλεψε περισσότερο;

Μ1: Εεεεμ

Ε: Σε όλο το φυλλάδιο;

Μ1: Στη σελίδα 9 αυτή η άσκηση, γιατί μου φάνηκε λίγο πιο δύσκολη απ' όλες τις υπόλοιπες.

Γίνεται, λοιπόν, εμφανές ότι η Μ1 έχει μερική μονάχα κατανόηση των εννοιών που πραγματεύεται η διδακτική παρέμβαση, ωστόσο μόλις αποκτά επαφή με τις έννοιες, μαθαίνει τους βασικούς τύπους και έννοιες και εφαρμόζει μόνη της όσα έμαθε, νιώθει ασφάλεια ξανά και είναι έτοιμη να αντιμετωπίσει όσα πριν δεν είχε καν ασχοληθεί. Η εικόνα αυτή αποτυπώνεται χαρακτηριστικά τόσο στις επιδόσεις του post-test ερωτηματολογίου, όσο και στις απαντήσεις για το post-test ερωτηματολόγιο:

(*Απόσπασμα δικαιολόγησης ερώτησης 5)*

Ε: Πώς εργάστηκες πάνω-κάτω;

Μ1: Εε, το πολλαπλασίασα το 4,6 με το 5, μου βγήκε 23, και έλεγα ότι μέσα σε αυτές τις μέρες μέσα όλο αυτό το σύνολο να μου κάνει 23, αφαίρεσα το 5 και άπλωσα τις υπόλοιπες παρατηρήσεις.

Ε: Παρατηρώ ότι μέσα στο πλήθος σου δεν έχεις το 4 ή το 5-

Μ1: Ναι

Ε: Ωστόσο ο μέσος όρος σου βγήκε αυτός που ήθελ-

Μ1: Ναι

Ε: Άρα δεν είναι απαραίτητο να έχουμε το 4 ή το 5-

Μ1: Όχι δεν είναι.

Η αυτοπεποίθηση με την οποία απαντάει η Μ1 δεν έχει καμία σχέση με τις αρχικές απαντήσεις που έδινε κατά την διάρκεια των ηχογραφήσεων για τα pre-test ερωτηματολόγια. Η ειδοποιός διαφορά είναι ότι η μαθήτρια πλέον γνωρίζει τι να κάνει, σε αντίθεση με την πρότερη κατάσταση που τα κενά της δημιουργούσαν ανασφάλεια.

Το φαινόμενο αυτό γίνεται αισθητό ήδη από το pre-test, όπου η μαθήτρια «δανειζόταν» στοιχεία της λογικής και των υπολοίπων μαθηματικών γνωστικών της σχημάτων για να δικαιολογήσει την σκέψη της:

[Δικαιολόγηση ερώτησης 4]

Μ1: Εεε, σκέφτηκα περισσότερο, κοίταξα τις κλήσεις που έκοψε κάθε μέρα και σκέφτηκα ότι δεν μπορεί να είναι ούτε 6 γιατί κάποιες μέρες είναι 3, ούτε 3 γιατί κάποιες μέρες είναι 10 ή 7, οπότε βρήκα κάτι στη μέση.

[Δικαιολόγηση ερώτησης 5]

Μ1: Σκέφτηκα περισσότερο δηλαδή, αφού είναι 4,6, πρέπει να είναι κάτι κοντά στο 4, κάτι πιο κοντά στο 5 ή στο 6…

Ε: Αλλά και πάλι τυχαία ώστε να είναι κοντά στον μέσο όρο, έτσι;

Μ1: Ναι.

[Δικαιολόγηση ερώτησης 6.1]

Μ1: Αφού ήταν πέντε μέρες, έκανα 5 επί το 31 που ήταν τα αμάξια, που έβγαλε στο σύνολο το πρώτο εργοστάσιο, και βρήκα το 155.

Ε: Και για το δεύτερο εργοστάσιο πάλι το ίδιο σκέφτηκες;

Μ1: Ναι.

Ε: Όμως μετά όταν σου ζητάει τον μέσο όρο και των δύο εργοστασίων ανά ημέρα, πώς το σκέφτηκες και έβαλες το 35.5;

Μ1: Αφού ήταν η μία ημέρα και το ένα έβγαζε 35, κάπου εκεί, εεε, και το άλλο έβγαζε κοντά στο 40, σκέφτηκα ότι το πιο σωστό θα ήταν το 35 (σ.σ. εννοεί την επιλογή 35.5).

Ε: Και γιατί δεν επέλεξες το 36 ας πούμε; Γίνεται να βγει 35.5 αμάξια;

Μ1: Όχι [γελάει].

Ε: Αλλά τότε γιατί επέλεξες το 35.5 και όχι το 36 ας πούμε;

Μ2: Δεν ξέρω απλά μου φάνηκε πιο σωστό.

Στο κομμάτι που το πρόβλημα μπορούσε να λυθεί με τις υπάρχουσες γνωστικές δομές (υπολογισμός συνολικών αυτοκινήτων που παρήχθησαν από τα δύο εργοστάσια), η μαθήτρια δεν αντιμετώπισε κανένα ζήτημα – αντιθέτως, η φωνή της έδειχνε αυτοπεποίθηση. Ωστόσο, όταν το ζήτημα που μελετήθηκε άλλαξε προς τον μέσο όρο, η αυτοπεποίθηση εξαφανίστηκε, έγινε πιο διστακτική και άρχισε να βασίζεται περισσότερο στην λογική παρά στα μαθηματικά. Κυρίαρχο σχήμα εδώ είναι ο περιορισμός του μέσου όρου μεταξύ των δύο πρότερων μέσων όρων, σε μια μορφή συμμετρίας. Αυτό που όμως μπήκε σε τελείως δεύτερη μοίρα ήταν το πλήθος των παρατηρήσεων, καθώς η μαθήτρια δεν το αναφέρει πουθενά στις δικαιολογήσεις της, υποβαθμίζοντάς το ως προς την σημαντικότητά του.

4.5.2 Η περίπτωση του Μ2

Πίνακας 28: απαντήσεις του μαθητή Μ2 στις ερωτήσεις ανατροφοδότησης

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ
5.1 Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο στο που θέλει να μάθει για την ταχύτητα και τον μέσο όρο;
Ναι
5.2 Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;
Ναι
5.3Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;
Αυτό με την ταχύτητα και τα αυτοκίνητα

5.4 Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις που θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική στο απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
Όχι
5.5 Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;
Με τα αυτοκίνητα, γιατί έπρεπε να υπολογίσω πόση ταχύτητα έπρεπε να βάλω για να κερδίσω.
5.6 Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;
Με βοήθησαν να τα μάθω πιο γρήγορα
5.7 Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;
Δεν θα άλλαζα τίποτα

Ο Μ2 ήταν ο μόνος από το δείγμα που εξ' αρχής χρησιμοποίησε αλγεβρικές λύσεις για να επιλέξει τις απαντήσεις του και εμφάνισε την συνολικά καλύτερη εικόνα αναφορικά με την κατάκτηση των εννοιών πριν την παρέμβαση (παρόλο που ήταν στο νεότερο ηλικιακό γκρουπ). Αν και φαινομενικά η κατανομή του δείγματος φάνηκε να δυσκολεύει τον μαθητή στο pre-test, στην πραγματικότητα αυτό που όντως του λείπει είναι η συμπερίληψη του πλαισίου της εκφώνησης, καθώς από την μία έδωσε ως τιμές δεκαδικούς αριθμούς σε παρατηρήσεις που από την φύση τους είναι ακέραιοι αριθμοί, από την άλλη εντόπισε μεν τιμές που έδιναν μέσο όρο 3 στην ερώτηση 2.1.1, αλλά συμπεριέλαβε και μία τριάδα αριθμών η οποία βάσει εκφωνήσεως δεν είχε νόημα (7,1,1), καθώς ξεπερνούσε τις ακραίες τιμές. Το παράδοξο, ωστόσο, έγκειται στο γεγονός ότι από την εξήγηση του μαθητή για τον τρόπο που διάλεξε τις επιλογές δεν είναι αποτέλεσμα αλγοριθμικής σκέψης ή αλγεβρικής πράξης, αλλά περισσότερο εφαρμογή μιας άτυπης λογικής και ενστίκτου:

Ε: Πώς την διάλεξες την κάθε μία;

Μ2: Για, ανάλογα τις θέσεις, αν έχει μόνο καλές, θα, δηλαδή αν έχει μόνο πρώτη θέση [δείχνει την επιλογή 1,1,1], θα έπρεπε να ήμουν πρώτος…

Ε: Σωστό

Μ2: Αν έχει μόνο 3, θα έπρεπε να ήμουν κάπου τέταρτος, όμως αν έχει δύο καλές θέσεις και μία κακή ή μία πρώτος και δύο άλλες μέτριες…

Ε: Μμμχμ

Μ2: Σίγουρα θα ήμουν τρίτος.

Ε: Μάλιστα, οπότε λίγο με την λογική το πήγες…

Μ2: Ναι.

Αν και αργότερα τείνει να σταθεροποιεί τις τιμές των δειγμάτων κοντά στον μέσο όρο (ερώτηση 5 post-test), φαίνεται ότι στην αρχή της διδακτικής πορείας δυσκολεύεται να εφαρμόσει αυθόρμητα τα όσα γνωρίζει για τον μέσο όρο, καταβαλλόμενος από το ένστικτό του, αν και το αρχικό pre-test ζωγράφισε μια εντελώς διαφορετική εικόνα, όπου κάθε απάντηση έκρυβε από πίσω μια – ορθή ή μη – αλγεβρική δικαιολόγηση.

Αντίθετα, στις 2 αγαπημένες του ερωτήσεις της διδακτικής παρέμβασης (3.2.4, 3.2.5) κινήθηκε μέσω αλγεβρικών πράξεων, χωρίς να επηρεαστεί πουθενά η σκέψη του από άλλα δεδομένα:

Ε: Με τι ταχύτητα θα πρέπει να τρέξεις εσύ για να τον ισοφαρίσεις; Να τερματίσετε μαζί;

Μ2: Ακριβώς την ίδια.

Ε: Πάρα πολύ ωραία, δηλαδή ποια;

Μ2: 25 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Ε: Ωραία, για πάτησε την εδώ… Για να πατήσουμε play… Τερμάτισαν μαζί;

Μ2: Ναι.

Ε:Ωραία, πώς υπολόγισες περίπου την ταχύτητα, πώς την ήξερες;

Μ2: Αφού λέει ότι είναι 25, 25 μέτρα το δευτερόλεπτο σταθερά, είπα, αφού πήγε σταθερά, πρέπει και γω να πάω σταθερά το ίδιο πολύ.

Ε: Ωραία, για γράψε μου το.

[Ο μαθητής καταγράφει την απάντησή του]

Ε: Πάρα πολύ όμορφα. Τώρα όμως έρχεται ο επαναληπτικός αγώνας και σας δίνουν οι κριτές 160 μέτρα. Το κόκκινο αγωνιστικό διανύει τα πρώτα 40 μέτρα σε 4 δευτερόλεπτα και τα υπόλοιπα 120 σε άλλα 4 δευτερόλεπτα. Με ποια ταχύτητα πρέπει να πηγαίνεις εσύ ώστε να τον νικήσεις; [σύντομη σιωπή] Σου έρχεται καμία ιδέα;

Μ2: Θα πήγαινα με 80 μέτρα το δευτερόλεπτο…

Ε: Πώς το σκέφτηκες;

Μ2: Διπλασίασα την ώρα, δηλαδή όσο πηγαίνει αυτός σε 4 δευτερόλεπτα, να πηγαίνω εγώ σε ένα δευτερόλεπτο, οπότε αυτός πηγαίνει 120 μέτρα σε 4 δευτερόλεπτα, εγώ θα πηγαίνω 320 στα τέσσερα δευτερόλεπτα, άρα θα νικήσω.

Άξιο αναφοράς είναι πως πριν την απάντηση προηγήθηκαν οι σχετικές μαθηματικές πράξεις, και παρόλο που η αρχική δήλωση περί διπλασιασμού της ταχύτητας είναι αδόκιμη (ο μαθητής την τετραπλασίασε), η λογική που πρόβαλλε ο μαθητής ήταν καθόλα ορθή και αποτελεσματική.

Γενικότερα, λοιπόν, ο Μ2 εμφανίζει μια ισχυρή εξάρτηση των απαντήσεών του με το πλαίσιο των ασκήσεων, καθώς στο κατάλληλο πλαίσιο χρησιμοποιεί αλγεβρικές πράξεις για να δικαιολογήσει τις απαντήσεις του, ενώ σε άλλα πλαίσια, περισσότερο άτυπα χρησιμοποιεί περισσότερο το ένστικτό του.

4.5.3 Η περίπτωση της Μ3

Πίνακας 29: απαντήσεις της μαθήτριας Μ3 στις ερωτήσεις ανατροφοδότησης

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ
5.1 Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο στο που θέλει να μάθει για την ταχύτητα και τον μέσο όρο;
Ναι
5.2 Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;
Έμαθα περισσότερα
5.3Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;
Στις ασκήσεις αμέσως μετά την θεωρία
5.4 Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις που θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική στο απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
Όχι
5.5 Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;
Με δυσκόλεψαν περισσότερο οι τελευταίες σελίδες, ενώ περισσότερο μου άρεσαν οι πρώτες
5.6 Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;
Ήταν πιο διαδραστικό άρα με βοήθησε

5.7 Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;
Όχι, δεν θα ήθελα να αλλάξω κάτι.

Και η Μ3 λειτούργησε με παρόμοιο τρόπο με την Μ1, έχοντας την ανάγκη για εξωτερική βοήθεια πριν πραγματικά αποδώσει στο πλήρες των δυνατοτήτων της, ωστόσο το γεγονός ότι γνώριζε και τις δύο έννοιες πριν μπει στην διδακτική διαδικασία την βοήθησαν σημαντικά να ολοκληρώσει την παρέμβαση. Ωστόσο, υπάρχουν δύο σημεία που είναι άξια αναφοράς ως προς την σκέψη της, ένα για τον μέσο όρο και ένα για την μέση ταχύτητα αντίστοιχα.

Η Μ3 αρχικά αντιλαμβανόταν τον μέσο όρο ως διάμεσο, γεγονός που εμφανίζεται σε αρκετά σκέλη της ηχογράφησης:

Μ3: Ότι μμμ, ο μέσος όρος, η μέση τιμή, το μέσο ποσό απ' όλα αυτά είναι 500 [προφορική απάντηση στην ερώτηση 2.2.9].

[Απάντηση ερώτησης 4 pre-test]

Ε: […] Πώς το σκέφτηκες;

Μ3: Εεεε, σκέφτηκα ότι είναι ο μέσος όρος από όλα αυτά που καταγράφετε εκεί, γιατί όπως σας είπα δεν θυμάμαι πολύ καλά τον μέσο όρο, και σκέφτηκα ότι είναι η μέση ποσότητα από αυτά που καταγράφετε…

Ε: Άρα είναι περίπου στην μέση θα λέγαμε..

Μ3: Ναι, αυτό είναι το σκεπτικό…

Ε:[εκφώνηση ερώτησης 5]

Μ3: Και αυτό το έκανα με το ίδιο σκεπτικό, αλλά δεν μου φαίνεται τόσο μα τόσο σωστό.

[Εισαγωγή προβλήματος 6 pre-test]

Ε:Και μας ζητάει τώρα να βρούμε στην διάρκεια των 5 ημερών πόσα αμάξια έφτιαξαν κατά μέσο όρο ***μαζί.*** *Η απάντησή σου είναι 71 αμάξια. Πώς το σκέφτηκες;*

Μ3: Μχμμ, είναι η μέση, είναι το μέσο, το πόσο, και στα δύο είναι ο αριθμός.

Ε: Είναι ανάμεσα σε αυτά τα δύο.

Μ3: Μμχμμ.

Η λέξη «μέσο» ταυτίζεται στο μυαλό της μαθήτριας με την διάμεσο, άλλοτε ψάχνοντας μια τιμή για τον μέσο όρο που ισαπέχει σχετικά από όλες τις παρατηρήσεις (ερώτηση 5), άλλοτε ψάχνοντας την διάμεσο (ερώτηση 4). Αν και η πρώτη αντίληψη έχει λογική (το άθροισμα των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τον μέσο όρο είναι μηδέν), η μαθήτρια δεν την έχει αναπτύξει σε επαρκή βαθμό, ενώ την χρησιμοποιεί μονάχα υπό συγκεκριμένα πλαίσια. Γενικότερα, εμφανίζει μια τάση αντίστοιχη με εκείνη της Μ1, με την διαφορά ότι δίνει περισσότερη έμφαση σε ένα άτυπο φαινόμενο συμμετρίας, και λιγότερη στην ιδιότητα του μηδενικού αθροίσματος των διαφορών από τις παρατηρήσεις, πιθανότατα α) γιατί δεν γνωρίζει την ιδιότητα, παρά μόνο διαισθητικά, β) η συμμετρία είναι εύκολα οπτικοποιήσιμη και άρα βοηθάει την μαθήτρια να εκλογικεύσει την απάντησή της.

Επίσης εντυπωσιακός είναι ο τρόπος που αντιμετωπίζει τα προβλήματα μέσης ταχύτητας. Σε αντίθεση με όλους τους υπόλοιπους, η έμφασή της είναι στον χρόνο και όχι στην απόσταση ή στην ταχύτητα:

Ε: Τι ξεχωρίζει τον Bolt απ' όλους τους υπόλοιπους αθλητές;

Μ3: Εεεεμ, το νομίζω, τον ξεχώρισε ότι, εεεμ, ουσιαστικά ήταν πιο γρήγορος, έτρεξε έναν πολύ καλό χρόνο σε μια πολύ καλή απόσταση.

[εκφώνηση ερώτησης 3.2.4]

Ε: […] Άρα όταν σε ρωτάει κάποιος για την ταχύτητα εδώ τι έρχεται στον νου σου;

Μ3: Εεεμ, ο πρώτος έκανε 4 δευτερόλεπτα, οπότε εγώ πρέπει να… πρέπει και γω να τρέξω 4 δευτερόλεπτα για τρέξω μαζί του…

Ε: Ωραία

Μ3: Και να ισοφαρίσω για τερματίσω μαζί του

Ε: Ωραία, άρα;

Μ3: Άρα τέσσερα δευτερόλεπτα και γω.

Η ερμηνεία για την επικυριαρχία του χρόνου έναντι των άλλων εννοιών, κόντρα σε αυτό που προβλέπει φαινομενικά η βιβλιογραφία, ερμηνεύεται πιθανότατα από την παλαιότερη εμπειρία της μαθήτριας ως αθλήτριας στίβου: πιο γρήγορος δεν είναι αυτός που έχει την μεγαλύτερη *ταχύτητα*, αλλά αυτός που τερματίζει *σε λιγότερο χρόνο*. Αυτή η ειδοποιός διαφορά μεταβάλλει τις ισορροπίες, με αποτέλεσμα ο χρόνος από παραγκωνισμένη έννοια να αναδύεται σε κυρίαρχη, αποδεικνύοντας πόσο ισχυρά είναι τα βιώματα των παιδιών στις αντιλήψεις που αυτά σχηματίζουν.

4.5.4 Η περίπτωση της Μ4

Πίνακας 30: απαντήσεις της μαθήτριας Μ4 στις ερωτήσεις ανατροφοδότησης

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ
5.1 Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο στο που θέλει να μάθει για την ταχύτητα και τον μέσο όρο;
Ναι
5.2 Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;
Έμαθα να εφαρμόζω καλύτερα τον μέσο όρο και έμαθα την μέση ταχύτητα
5.3Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;
Οι ασκήσεις
5.4 Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις που θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική στο απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
Όχι από αυτό, μόνο από το άλλο [*σ.σ. εννοεί το ερωτηματολόγιο pre-test*]
5.5 Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;
Με δυσκόλεψε η μέση ταχύτητα με τις φόρμουλες
5.6 Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;
Με βοήθησαν επειδή τα έβλεπα πιο καλά
5.7 Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;
Δεν θέλω να αλλάξω κάτι.

Η Μ4 εμφανίζει τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά με την Μ1, με την διαφορά ότι η Μ4 έχει μία ελαφρώς καλύτερη κατανόηση του μέσου όρου, πράγμα που αποτυπώνεται στο pre-test, όπου η Μ4 κατάφερε, έστω και λανθασμένα, να υπολογίσει έναν μέσο όρο ο οποίος ήταν βασισμένος σε αλγεβρική σκέψη. Ωστόσο, καθώς η διδακτική παρέμβαση προχωρούσε και εφάρμοζε τα όσα μάθαινε, άρχισε να αντιλαμβάνεται τα λάθη στο pre-test ερωτηματολόγιο.

[*Ηχογράφηση post-test ερώτηση 4*]

Ε: Μου απάντησες και αυτή την φορά ότι είναι 5,1.

Μ4: Ναι, τα πρόσθεσα όλα μαζί και το διαίρεσα με το 10.

Ε: Τι άλλαξε σε σχέση με την προηγούμενη φορά;

Μ4: Ε, την προηγούμενη φορά το είχα βάλει λίγο στην τύχη γιατί νόμιζα ότι το «0» δεν επηρεάζει, ενώ τώρα το μέτρησα και αυτό… Σαν την εφαρμογή που κάναμε.

Σημαντικό ρόλο, ωστόσο, έπαιξαν και τα λογισμικά, καθώς το στοιχείο της διαδραστικότητας, του ελέγχου και της άμεσης ανατροφοδότησης ήταν αυτά που εν τέλει έδωσαν την επιβεβαίωση στην Μ4 ότι μπορεί και έχει απαντήσει σωστά στις ερωτήσεις, επιβεβαιώνοντας τους καινούργιους γνωστικούς μηχανισμούς που ανέπτυξε:

Ε: Σε βοήθησαν (οι δραστηριότητες);

Μ4:Ναι με βοήθησαν…

Ε: Πώς σε βοήθησαν;

Μ4:Να τα κατανοήσω καλύτερα..

Ε: Θέλω να πω με ποιο τρόπο; -Επειδή τα χειριζόσουν, επειδή σου---

Μ4: Επειδή ήταν πιο κατανοητά

Ε: Μχμ, ωραία… Η οπτικοποίηση δηλαδή σε βοήθησε…

Μ4: Ναιι…

Συνεπώς, οι εφαρμογές βοήθησαν την Μ4 να αποκρυσταλλώσει τα όσα είχε δεχτεί στην φάση της εξήγησης, αλλά και να αποσαφηνίσει πράγματα που γνώριζε παλαιότερα, αλλά αμφιταλαντευόταν για το αν είναι σωστά ή όχι.

Παράλληλα, έχει ενδιαφέρον ο τρόπος που η Μ4 υπολόγισε την μέση ταχύτητα στο β΄ σκέλος της ερώτησης 8:

Ε; Δηλαδή;

Μ4:Αααφού μία έλεγε 120 χιλιόμετρα, μετά πήγε 90, μετά πήγε 40, εεε συνολικά, το κανα πρόσθεση αυτά και διαίρεση.

Ε: Άρα τα πρόσθεσες όλα μαζί και τα διαίρεσες με το πόσα είναι.

Μ4: Ναι, αλλά κάπως στο μυαλό…

Ε: Ωραία, και σου βγήκε 58,5.

Μ4: Περίπου εκεί.

Μην έχοντας κάποια στρατηγική για να ανταπεξέλθει στο συγκεκριμένο ζήτημα, η Μ4 κατέφυγε σε ένα είδος μέσου όρου, ενδεχομένως επηρεασμένη από την λέξη *μέση* ταχύτητα που ρητά δηλώνεται στην εκφώνηση. Συνεπώς, η έννοια του μέσου όρου καλύπτει τα γνωστικά κενά που υπάρχουν σε εκείνη της μέσης ταχύτητας, δημιουργώντας αυτό το καινούργιο γνωστικό σχήμα, το οποίο πιθανότατα έχει τις ρίζες του, όχι σε κοινές αλγοριθμικές διαδικασίες, αλλά στο γλωσσικό σκέλος. Δεν προξενεί εντύπωση, λοιπόν, το γεγονός ότι η Μ4 όρισε στην αντίστοιχη ερώτηση του φύλλου εργασίας ως τον μέσο όρο των αποστάσεων ανά μονάδα χρόνου, καθώς αυτός ο ορισμός είναι πιο κοντά στα γνωστικά σχήματα που είχε σχηματίσει για την μέση ταχύτητα, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους μαθητές.

5. Συμπεράσματα

5.1 Επισκόπηση των αποτελεσμάτων

Συνολικά τα αποτελέσματα κρίνονται ως πολύ ενθαρρυντικά. Στο σύνολό τους οι μαθητές βελτίωσαν σημαντικά τις απαντήσεις τους από το ερωτηματολόγιο pre-test στο post-test. Το θετικότερο, ίσως, βήμα που έγινε από την όλη διαδικασία είναι η μεταστροφή των μαθητών από μια ενστικτώδη λογική, σε μια λογική μαθηματικής απόδειξης και ορθολογικής σκέψης. Η σημαντική αυτή βελτίωση αποτέλεσε τον βασικό λόγο της βελτίωσης που παρατηρήθηκε.

Τα λογισμικά λειτούργησαν κατά τον αναμενόμενο τρόπο, δίνοντας την οπτική επιβεβαίωση επί των γνωστικών δομών που κατείχαν ή απέκτησαν μετά το στάδιο της εξήγησης, ενώ η διαδραστικότητα των εφαρμογών επέτρεψε στους μαθητές να πειραματιστούν σε πραγματικό χρόνο με τις επιλογές τους.

Ένα ενδεχομένως μελανό σημείο της διδασκαλίας ήταν η έλλειψη έμφασης στην χρήση μονάδων μέτρησης. Μόνο η Μ3 συμπεριέλαβε μονάδα μέτρησης αυθόρμητα στις απαντήσεις της στο τέλος της διδασκαλίας, και δεδομένου ότι η μονάδα μέτρησης οφείλεται για την κακή απόδοση των μαθητών σε μερικά ερωτήματα του ερωτηματολογίου, ίσως να έπρεπε να δοθεί περισσότερη έμφαση στις μονάδες μέτρησης, ακόμα κι αν αυτή η αδυναμία δεν μεταφράστηκε σε επιρροή στα post-test ερωτηματολόγια.

Οι μαθητές φάνηκαν ευχαριστημένη από την διαδικασία, καθώς όλοι θα το πρότειναν σε συμμαθητές τους, ενώ οι αλλαγές που προτάθηκαν ήταν ελάχιστες. Παράλληλα, το στάδιο της εξήγησης φαίνεται να διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην επίτευξη των στόχων, καθώς για τις Μ1 και Μ4 αποτελεί το σημείο από το οποίο και έπειτα καταφέρνουν να ανταποκριθούν στα ζητούμενα.

Και τα δύο γνωστικά αντικείμενα ήταν από μερικώς έως και καθόλου ανεπτυγμένα στους μαθητές του δείγματος, με την μέση ταχύτητα να βρίσκεται σε σαφώς χειρότερη μοίρα αφού δύο από τις μαθήτριες του δείγματος δεν είχαν καν ακούσει την έννοια. Οι δύο αυτές μαθήτριες είναι και που μετέπειτα στην διδακτική παρέμβαση θα αρνηθούν να ολοκληρώσουν και κάποια σκέλη του φυλλαδίου, καθώς δεν γνώριζαν τους απαραίτητους τύπους για να παράγουν την οποιαδήποτε απάντηση.

Ο μέσος όρος συχνά αντιμετωπίζεται με όρους και λογική αντίστοιχη της διαμέσου, χωρίς ωστόσο σαφή αλγεβρική υποστήριξη. Η κατανόηση γενικά του ορισμού της μέσης ταχύτητας είναι προβληματική, καθώς τα όρια της αντιπροσώπευσης του πραγματικού κόσμου και της μαθηματικής στοχαστικότητας που εμπεριέχονται στον μέσο όρο είναι θολά και διευκρινισμένα. Υπάρχει μερική μονάχα κατανόηση και γνώση του αλγορίθμου του μέσου όρου a priori, ενώ οι μαθητές δεν ανέφεραν αυθόρμητα περιπτώσεις χρήσης του μέσου όρου από την καθημερινότητά τους, περαιτέρω ένδειξη της μερικής μονάχα κατανόησης της έννοιας. Σημαντική δυσκολία εμφάνισε η κατασκευή του δείγματος, καθώς κανένας μαθητής δεν ολοκλήρωσε σωστά την ερώτηση 4 του pre-test ερωτηματολογίου. Οι ενστικτώδεις απαντήσεις των μαθητών τείνουν προς μια υβριδική λογική μεταξύ διαμέσου και του μέσου όρου των μέσων όρων, ενώ συνήθως το πλήθος είτε παραγκωνίζεται, είτε υπολογίζεται λειψό χωρίς μερικές παρατηρήσεις μέσα.

Η μέση ταχύτητα εμφανίζει μια ακόμα πιο χαοτική εικόνα, καθώς μόλις ένας μαθητής εξ' αρχής χρησιμοποίησε αλγεβρικές λύσεις για να δικαιολογήσει τις απαντήσεις του. Η μη ενασχόληση στο σχολείο με την έννοια οδήγησε σε γνωστικό έλλειμμα που αποτυπώθηκε από την μία στις τυχαίες επιλογές απαντήσεων στο pre-test, στην αδυναμία και άρνηση να ολοκληρωθούν σκέλη της διδακτικής παρέμβασης από την άλλη. Οι απαντήσεις που συλλέχθηκαν συνολικά εμφανίζουν ορισμένες αποκλίσεις από τις αναμενόμενες αντιλήψεις και εμφανίζουν μια σχετική ποικιλομορφία, καθώς είναι στενά συνδεδεμένες με τα βιώματα των μαθητών, με τις επιρροές να είναι πιο εμφανείς στην διδακτική παρέμβαση. Μια ισχυρή αντίληψη που αναδύθηκε ήταν η «αναπλήρωση» της μίας έννοιας από την άλλη, όπου οι έννοιες αναπληρώνουν η μία την άλλη και καλύπτουν τα ελλείμματα από την μία, «καταστρέφουν» τα πλεονάσματα από την άλλη, το οποίο όμως φαινόμενο παρατηρείται μονάχα όταν συγκρίνονται οι κινήσεις δύο ή περισσοτέρων σωμάτων. Παράλληλα, ελλείψει μαθηματικών μηχανισμών για τον υπολογισμό των εννοιών, το κενό αυτό καλύπτουν οι μηχανισμοί του μέσου όρου, υποδηλώνοντας μια σύνδεση μεταξύ των δύο εννοιών, που πιθανότατα οφείλεται στον γλωσσικό κώδικα και στην κοινή ορολογία. Τέλος, και οι 4 συμμετέχοντες έδωσαν μετά το στάδιο της εξήγησης διαφορετικό ορισμό για την μέση ταχύτητα, οι οποίοι ήταν επαρκείς, σχετικώς ακριβείς, αλλά δίνουν έμφαση σε διαφορετικά σκέλη της διδασκαλίας κάθε φορά.

5.2 Συζήτηση & Συμπεράσματα

Οι Σκουμιός και Σκουμπουρδή (2015) έχουν ασκήσει κριτική σε πολλές «καινοτόμες» διδακτικές προτάσεις, οι οποίες ωστόσο αδυνατούν να απαντήσουν σε βασικά ερωτήματα όπως: α) είναι ή δεν είναι απαραίτητες, β) έχει αξιολογηθεί η χρήση τους σε σχέση με αντίστοιχα εκπαιδευτικά υλικά ή προτάσεις, γ) είναι σαφής η θεωρητική τους βάση ή βασίζονται σε αυθαίρετα πορίσματα, δ) είναι σαφής ή ασαφής ο τρόπος εφαρμογής τους στην διδακτική πράξη, ε) αποτελούν μέρος μιας συνέχειας ή μεμονωμένες προτάσεις;

Παρά τον διερευνητικό της χαρακτήρα, η παρούσα ερευνητική πρόταση εμπεριέχει μια διδακτική πρόταση/παρέμβαση, η οποία αναπτύχθηκε βάσει κριτηρίων που προτάθηκαν από τους ίδιους ερευνητές (Σκουμιός & Σκουμπουρδή, 2015):

- Το υλικό κατασκευάστηκε μετά από αποτίμηση της αναγκαιότητάς του, όπως τεκμηριώθηκε στην βιβλιογραφική ανασκόπηση και στον σχεδιασμό της έρευνας,
- Πραγματοποιήθηκε τόσο διαμορφωτική, όσο και συνολική αξιολόγηση,
- Το υλικό που αναπτύχθηκε ακολουθεί σύγχρονες θέσεις για την μάθηση, σύμφωνα με τις αρχές της διεπιστημονικής διδασκαλίας και του κονστρουκτιβισμού,
- Υποστηρίζει τη επιχειρηματολογία των μαθητών σε διάφορα σημεία της,
- Περιέχει στοιχεία ενημέρωσης και επιμόρφωσης για κάθε εκπαιδευτικό που ενδεχομένως θελήσει να εφαρμόσει την παρούσα διδακτική παρέμβαση,
- Υποστηρίζει και ενθαρρύνει την χρήση πρακτικών των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών από τους μαθητές,
- Συνολικά παρουσιάζει συνοχή, καθώς επεκτείνει τις υφιστάμενες μαθησιακές τροχιές των μαθητών, εστιάζει σε δύο πυρηνικές έννοιες των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, οι οποίες εμφανίζονται συχνότατα τόσο στην

καθημερινή ζωή, όσο και στην ακαδημαϊκή ζωή των μαθητών, και δημιουργεί την γνώση μέσα από την συγχρονισμένη ανάπτυξη των πρακτικών και της γνώσης.

Αυτά τα κριτήρια ήταν και ο λόγος που η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση επέφερε τα ζητούμενα εκπαιδευτικά αποτελέσματα και ο προσεκτικός σχεδιασμός, καθώς τα αποτελέσματα των post-test ερωτηματολογίων ήταν πολύ ενθαρρυντικά.

Η έννοια της μέσης ταχύτητας είναι οριακά ανεπτυγμένη, παρόλο που προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα και υπάρχει στην ύλη της Έ και ΣΤ΄ δημοτικού. Η προβληματική κατάσταση που δημιουργείται οξύνεται από το γεγονός πως οι μαθητές του δείγματος που δεν γνώριζαν από πριν την μέση ταχύτητα αρνήθηκαν να λύσουν τις αντίστοιχες δραστηριότητες, ενώ δυσκολεύτηκαν εξαιρετικά πολύ να παράγουν κάποια στρατηγική ή μηχανισμό για να λύσουν τις δραστηριότητες, την ώρα που συνομήλικοί τους παράγουν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων μέσης ταχύτητας.

Τρία είναι τα κυρίαρχα ευρήματα από την διερεύνηση των αντιλήψεων πάνω στην μέση ταχύτητα:

1. Η στρατηγική της αναπλήρωσης κατά την διάρκεια σύγκρισης των κινήσεων δύο διαφορετικών σωμάτων, η οποία δεν αφορά την κυριαρχία της μίας έννοιας έναντι των υπολοίπων, σε αντίθεση με τα ευρήματα της προϋπάρχουσας βιβλιογραφίας, αλλά το «κλείδωμα» της ζητούμενης έννοιας και την εξισορρόπηση των άλλων δύο εννοιών, με στόχο την επίτευξη ισότητας μεταξύ των κινήσεων δύο σωμάτων, ακόμα και αν τα χαρακτηριστικά της μίας κίνησης είναι ξένα προς εκείνα της άλλης. Μία εικασία η οποία δεν αποτυπώθηκε στα αποτελέσματα, ήταν πως η εισαγωγή της έννοιας της εξίσωσης στην Στ' Δημοτικού ίσως επηρέαζε τα αποτελέσματα υπέρ του μεγαλύτερου σε ηλικία δείγματος. Ωστόσο, η σύνδεση αυτή δεν προέκυψε πουθενά, εξισώσεις δεν χρησιμοποιήθηκαν από κανένα μαθητή, με την στρατηγική της αναπλήρωσης να επικρατεί κατά κράτος αρχικά ακόμα και έναντι των απλών αλγεβρικών λύσεων.
2. Η εναλλακτική αντίληψη που ανέφεραν οι Groves & Doig (2001), ότι δηλαδή ταχύτερος είναι αυτός που τερματίζει πρώτος, είναι εξαιρετικά ισχυρή και παίζει συχνά τον ρόλο ρυθμιστικού παράγοντα επί των υπολοίπων τριών εννοιών, μεταβάλλοντας ενδεχομένως τις αντιλήψεις που είχε καταγράψει ο

Piaget (1970) (κυριαρχία της απόστασης έναντι των υπολοίπων εννοιών), αλλά και των Métioui & MacWillie (2013), οι οποίοι θεώρησαν στην συγκεκριμένη έρευνα πως οι αντιλήψεις των παιδιών δεν αποκλίνουν από το μοντέλο που περιέγραψε ο Piaget το 1970, παρόλη την τεχνολογική πρόοδο.

3. Ελλείψει στρατηγικής για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, ο μέσος όρος φαίνεται να επηρεάζει και να αναπληρώνει το κενό στην περίπτωση του δείγματος αυθόρμητα, κατ’ αντιστοιχία με παλαιότερες έρευνες (Reed & Saavedra, 1986; Reed & Jazo, 2002).

Προβληματισμό προξενεί η μικρή εξοικείωση των παιδιών με μία έννοια η οποία είναι τόσο σημαντική για την νευτώνεια Φυσική. Οι μαθητές δεν έχουν δομημένη γνώση του τι είναι η ταχύτητα, κάτι που χαρακτηριστικά φαίνεται από την παντελή έλλειψη μονάδων μέτρησης στις απαντήσεις τους. Γενικότερα οι μαθητές αδυνατούν να παράγουν οποιουδήποτε είδους λύση, ακόμα και λανθασμένη, σε δραστηριότητες που δεν έχουν ξανασυναντήσει, σε αντίθεση με αντίστοιχους μαθητές από άλλα εκπαιδευτικά συστήματα, οι οποίοι σε νεαρότερη ηλικία παρήγαγαν πληθώρα διαφορετικών απαντήσεων. Ωστόσο, η συγκεκριμένη συζήτηση ανοίγει ένα καινούργιο τελείως προβληματισμό, ο οποίος δεν μπορεί να σχολιαστεί με βάση τα δεδομένα της παρούσας έρευνας. Σε κάθε περίπτωση, η μηδενική επαφή με την έννοια δημιουργεί σημαντικά ζητήματα, καθώς οι μαθητές αισθάνονται αμήχανα και φοβικά στην ενασχόλησή τους με την ταχύτητα, πράγμα που μακροπρόθεσμα τους οδηγεί μακριά από τις Φυσικές Επιστήμες.

Αντίστοιχοι προβληματισμοί εγείρονται και από την έννοια του μέσου όρου, ο οποίος μελετάται ήδη από τις 3 τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Δεδομένου ότι αποτελεί την πιο κοινή στατιστική έννοια, οι μαθητές δείχνουν πολύ μικρή κατανόηση του τι πραγματικά είναι ο μέσος όρος κυρίως σε επίπεδο θεωρίας. Σε αλγοριθμικό επίπεδο η εικόνα που εμφανίζει το δείγμα το επίπεδο είναι σαφώς καλύτερο από το αντίστοιχο της μέσης ταχύτητας, παραταύτα οι μαθητές δεν γνωρίζουν τι ακριβώς είναι ο μέσος όρος, ούτε και που το συναντάνε στην καθημερινότητά τους. Λόγω των γλωσσικών όρων που χρησιμοποιούνται, η σύνδεση με τον διάμεσο (ή έστω την αντίστοιχη λογική του μέσου ή κάποιου είδους συμμετρίας) είναι σχεδόν αυθόρμητη, επιβεβαιώνοντας την σχετική βιβλιογραφία (Κυρίτσης, Χατζηπαντελής & Γκίνης, 2001). Ωστόσο, ο μέσος όρος είναι πολύ στενά συνδεδεμένος με το πλαίσιο χρήσης του, και εάν δεν αναπτυχθεί η άτυπη επαγωγική σκέψη των μαθητών γενικότερα, ούτε θα βελτιωθεί ο στατιστικός εγγραμματισμός των μαθητών, αλλά ούτε και οι δεξιότητές τους γενικότερα, ακόμα και σε ένα πιο επιφανειακό επίπεδο.

5.3 Περιορισμοί της έρευνας

Σε κάθε περίπτωση τα συμπεράσματα και τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γίνουν γενικεύσιμα χωρίς προσοχή ή περαιτέρω έρευνα, καθώς το δείγμα είναι πολύ μικρό για να γίνει κάτι τέτοιο. Παράλληλα, οι διδακτικές παρεμβάσεις έγιναν με ένα παιδί κάθε φορά μόνο του και στον προσωπικό του χώρο, οπότε η αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας σε περισσότερα παιδιά ταυτόχρονα δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη κατά τον ίδιο τρόπο και στον ίδιο βαθμό.

5.4 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και μελέτη

Το φαινόμενο της αναπλήρωσης κατά την μελέτη της μέσης ταχύτητας πρέπει να μελετηθεί περαιτέρω και σε μεγαλύτερο δείγμα, ώστε να χαρτογραφηθεί και αυτή η αντίληψη, η οποία φαίνεται να είναι αρκετά διαδεδομένη.

Αντίστοιχα, σε συνέχεια της παρούσας διδακτικής πρότασης θα ήταν δόκιμο να δοκιμαστεί, είτε αυτούσια, είτε με αλλαγές, μέσα σε μία τάξη με σχετικό πλήθος μαθητών, και να συγκριθούν τα αποτελέσματά της με αντίστοιχες κλασσικές διδασκαλίες του μέσου όρου και της μέσης ταχύτητας.

Επιτακτική είναι η ανάγκη να γίνει μία χαρτογράφηση της παρουσίας της έννοιας της ταχύτητας γενικότερα στα μαθήματα του Δημοτικού. Η εικόνα που έδειξαν οι μαθητές γύρω από την έννοια δεν είναι ενθαρρυντική, καθώς δύο μαθήτριες δεν γνώριζαν την έννοια της μέσης ταχύτητας καν, και άρα πρέπει να δοθεί μέριμνα ώστε να φανούν οι λόγοι που οι μαθητές τελειώνουν το δημοτικό μη γνωρίζοντας μια τόσο σημαντική για την καθημερινότητά τους έννοια.

Τέλος, μια αντίστοιχη ανασκόπηση πρέπει να πραγματοποιηθεί και για την έννοια του μέσου όρου, καθώς η κακή εννοιολογική κατανόηση σε επίπεδο ορισμού δημιουργεί σημαντικά ζητήματα, και άρα μέσω αυτής της χαρτογράφησης της έννοιας του μέσου όρου θα αναδυθούν τα κενά στο παρόν υλικό και πρακτικές, ώστε να αντιμετωπιστεί και αυτό το ζήτημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barab, S. A., & Landa, A. (1997). Designing effective interdisciplinary anchors. *Educational leadership*, *54*(6).

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3–25). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Berlin, D. & White, A. (1992). Report from the NSF/SSMA Wingspread Conference: A network integretad science and mathematics teaching and laerning. *School Science and Mathematics*, 92(6), 340-342.

Berlin, D.F. & White, A.L. (1994). The Berlin-White Integrated Science and Mathematics Model. *School Science and Mathematics*, 94(1), 2-4.

Bikos, K. (2015). Η διεπιστημονικότητα στην εκπαιδευτική πράξη. *Culture and Research*, *4*, 55-64.

Billings, E. M., & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice k-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, *100*(8), 440-450.

Borghi, L., De Ambrosis, A., & Massara, C. I. (1993). Understanding average speed: a study on students aged 11 to 12 years. *Physics Education*, *28*(1), 33.

Cai, J. (1998). Exploring Students' Conceptual Understanding of the Averaging Algorithm. *School Science And Mathematics*, 98(2), 93-98. doi: 10.1111/j.1949-8594.1998.tb17398.x

Callingham, R. & Watson, J. (2017). The Development of Statistical Literacy at School. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 181-201. Retrieved from http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ

Chatzivasileiou, E., Michalis, I., & Tsaliki, C. (2010, July). Elementary school students' understanding of concept of arithmetic mean. In *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics. Ljubljana, Slovenia*.

Chiu, Y. J. (2008). A Study on the Misconceptions of Average Velocity from Teaching and Learning Approaches. In *Conference of Asian Science Education (CASE2008), Kaohsiung, Taiwan, February* (pp. 20-23).

Czerniak, C. M., Weber, W. B., Sandmann, A. & Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and Mathematics*, 99(8), 421-430.

Davison, D. M., Miller, K. W., & Metheny, D. L. (1995). What does integration of science and mathematics really mean?. *School science and mathematics*, *95*(5), 226-230.

de Hosson, C. (2016). Promoting an Interdisciplinary Teaching through the use of Elements of Greek and Chinese early Cosmologies. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (επιμ.) *2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 77-86), Ρόδος.

Furner, J. (1995). *Planning for Interdisciplinary Instruction: A Literature Review*. ERIC Document Reproduction Service no. ED 385–515

Furner, J.M. & Kumar, D.D. (2007). The mathematics and science integration argument: a stand for teacher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3(3), 185-189

Gal, I. (2004). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gal, I., & Ograjenšek, I. (2017). Official Statistics and Statistics Education: Bridging the Gap. *Journal Of Official Statistics*, 33(1), 79-100. doi: 10.1515/jos-2017-0005

Goodchild, S. (1988). School pupils' understanding of average. *Teaching Statistics*, *10*(3), 77-81.

Graham, T. & Sharp, J. (1999). An investigation into able students' understanding of motion graphs. *Teaching Mathematics and its Applications, 18*, 128–135.

Gravemeijer, K., Figueiredo, N., Feijs, E., Galen, F., Keijzer, R., Munk, F., & Frink, C. (2016). *Measurement and geometry in upper primary school* (pp. 47-54, 65-67). Rotterdam: Sense Publishers.

Groves, S., & Doig, B. (2003, January). Shortest equals fastest: upper primary childrens pre-conceptions of speed. In *International symposium elementary maths teaching: Prague, the Czech Republic, Charles University, Faculty of Education, August 24-29, 2003: proceedings* (pp. 79-83). Charles University.

Jiang, C., & Chua, B. L. (2010). Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between Chinese and Singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(1), 73-96.

Jiang, C., Hwang, S., & Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 27-50.

Jones, A. T. (1983). Investigation of students' understanding of speed, velocity and acceleration. *Research in Science Education, 13*(1), 95-104.

Kadir, M. S., Foong, S. K., Wong, D. J. S., & Kuppan, L. (2011). PbI1@ School: On secondary one students' understanding of speed.

Kıray, S.A. (2012). A new model for the integration of science and mathematics: The balance model. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies*, 4(3), 1181-1196

Kiray, S.A., Gok, B., & Bozkir, A.S. (2015). Identifying the factors affecting science and mathematics achievement using data mining methods. *Journal of Education in Science, Environment and Health (JESEH)*, 1(1), 28-48.

Magina, S., Cazorla, I., Gitirana, V., & Guimarães, G. (2008). Conceptions and misconceptions of average: A comparative study between teachers and students. *Anais do ICME, 11*, 1-8.

Marshall, J. A., & Carrejo, D. J. (2008). Students' mathematical modeling of motion. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *45*(2), 153-173.

McBride, J. W., & Silverman, F. L. (1991). Integrating Elementary/Middle School Science and Mathematics. *School Science and Mathematics*, *91*(7), 285-92.

Meletiou-Mavrotheris, M., and Stylianou, D. (2003a). On the Formalist View of Mathematics: Impact on Statistics Instruction and Learning. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Online: [http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG5/TG5_list.html].

Meletiou-Mavrotheris, M., Paparistodemou, E., & Stylianou, D. (2009). Enhancing statistics instruction in elementary schools: Integrating technology in professional development. *The Mathematics Enthusiast*, 6(1), 57-78.

Métioui, A. & MacWillie, M.B. (2013). Children’s beliefs about the concepts of distance, time and speed. *European Centre for Research Training and Development* UK, 1(2) 24-38.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies In Mathematics*, 14(4), 415-429. doi: 10.1007/bf00368237

Möhring, W., Cacchione, T., & Bertin, E. (2012). On the origin of the understanding of time, speed, and distance interrelations. *Infant Behavior and Development*, *35*(1), 22-28.

Mokros, J., & Russell, S. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal For Research In Mathematics Education*, 26(1), 20. doi: 10.2307/749226

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pfannkuch, M. (2011) The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study, *Mathematical Thinking and Learning*, 13:1-2, 27-46, DOI: 10.1080/10986065.2011.538302

Piaget, J. (1970). *The child's conception of movement and speed* (trans: Holloway GET, MacKenzie MJ). Routledge & Kegan Paul, London.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 191-204.

Reed, S. K., & Jazo, L. (2002). Using multiple representations to improve conceptions of average speed. *Journal of Educational Computing Research*, *27*(1), 147-166.

Reed, S. K., & Saavedra, N. C. (1986). A comparison of computation, discovery, and graph procedures for improving students' conception of average speed. *Cognition and Instruction*, *3*(1), 31-62.

Rubin, A., Hammerman, J., & Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Siegler, R., & Richards, D. (1979). Development of time, speed, and distance concepts. *Developmental Psychology*, 15(3), 288-298. http://dx.doi.org/10.1037//0012-1649.15.3.288

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average. *Journal For Research In Mathematics Education*, 19(1), 64. doi: 10.2307/749111

Thompson, P. W. (1994). *The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate*. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.

Watson, J. (2007, August). *Facilitating beginning inference with TinkerPlots for novice grade 7 students.* Paper presented at the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5). Warwick, UK.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical Literacy: a Complex Hierarchical Construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46. Retrieved from http:// fehps.une.edu.au/serj

Wilkening, F. (1981). Integrating velocity, time, and distance information: A developmental study. *Cognitive Psychology*, 13(2), 231-247. DOI: 10.1016/0010-0285(81)90009-8

Zhou, Z., Peverly, S. T., & Lin, C. (2004). Cross-and within-cultural variations in children's understanding of distance, time, and speed interrelationships: A follow-up study. *The Journal of genetic psychology*, *165*(1), 5-27.

Zhou, Z., Peverly, S. T., Boehm, A. E., & Chongde, L. (2000). American and Chinese children's understanding of distance, time, and speed interrelations. *Cognitive Development*, *15*(2), 215-240.

Γκίκας, Σ. (1998). *Φιλοσοφικό λεξικό.* 7η έκδ. Κεντρική διάθεση Θ. Βαρελή. Αθήνα.

Δεσλή, Δ., & Βασιλά, Α. (2018). Παρουσίαση και σύγκριση του ισχύοντος και του νέου Προγράμματος Σπουδών των μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου αναφορικά με τη διδασκαλία της Στατιστικής. *Παιδαγωγική επιθεώρηση*, *63*.

Δημητρακοπούλου, Α. (2018). Τάσεις και Διαστάσεις «Περιβαλλόντων Εκπαιδευτικών Υλικών» για Τεχνολογικά εμπλουτισμένες Μαθησιακές Δραστηριότητες: Ορισμοί και Προσδιορισμοί. Σκουμπουρδή Χ. και Σκουμιός Μ. *3ο Πανελλήνο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή: «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»*, (σελ. 117-145), Ρόδος.

Ιντζίδου, Γ. & Καφούση, Σ. (2016). Σχεδιασμός συνθετικών μαθησιακών δραστηριοτήτων για τα μαθηματικά και τη φυσική: κλάσματα και μείγματα. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (επιμ.) *2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 165-175), Ρόδος.

Κυρίτσης, Ι., Χατζηπαντελής, Θ., & Γκίνης, Δ. (2001). Οι γνώσεις των μαθητών του δημοτικού σε έννοιες της στατιστικής και η διαφοροποίηση τους μετά από διδακτική προσέγγιση μέσω δραστηριοτήτων. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (18), 198-211.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, Τεύχος 7, σελ. 19- 36.

Παπαριστοδήμου, Έ., & Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ. (2015). Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΤΥΠΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΙΚΡΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (8), 87-106.

Σκουμιός, Μ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (επιμ.) *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο: Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 14-37), Ρόδος.

Σκουμπουρδή, Χ. & Σκουμιός, Μ. (2016). Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις; Στο Μ. Σκουμιός & Χ. Σκουμπουρδή (επιμ.). *2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 77-86), Ρόδος.

Σπυροπούλου, Δ., Αναστασάκη, Α., Δεληγιάννη, Δ., Κούτρα, Χ., & Μπούρας, Σ. (2010). Τα καινοτόμα προγράμματα στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση: λειτουργική διεισδυτικότητα και βιωσιμότητα.

Φερεντίνος, Σ., & Καλλιγάς, Χ. (2001). Η μέση τιμή ως αξιόπιστος ερμηνευτικός παράγων. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (18), 212-221.

Χαλκιά, Κ. (2016). *Διδάσκοντας Φυσικές Επιστήμες* (4η εκδ., σελ. 87-94, 111). Αθήνα: Πατάκη.

Χατζηπαντελής, Θ. (2003). Η διαδρομή του παιδιού στη Στατιστική και τις Πιθανότητες, από την προσχολική ηλικία έως την ενηλικίωση…. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (20), 27-40.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο pre-test/post-test

Αναθεωρημένο ερευνητικό ερωτηματολόγιο (pre-test/post-test).

Ερευνητικά ερωτήματα προς απάντηση:

- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσου όρου;
- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσης ταχύτητας;

1.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέσος όρος»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

____

____

2.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέση ταχύτητα»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

____

____

3.Σε μία έρευνα που έγινε στο οδικό δίκτυο της Ρόδου, βρέθηκε ότι υπάρχουν 6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; (Βάλε ένα «Σ» σε αυτές που θεωρείς σωστές, «Λ» σε αυτές που θεωρείς λάθος.)

- Ένας από τους δρόμους της Ρόδου είχε 6,7 πινακίδες.
- Κάποιος δρόμος μπορεί και να μην έχει καμία πινακίδα.
- Οι περισσότεροι δρόμοι της Ρόδου είχαν ή 6 ή 7 πινακίδες.
- Αν περπατούσαμε σε ένα τυχαίο δρόμο της Ρόδου, θα περιμέναμε να βρούμε 6 με 7 πινακίδες περίπου στον δρόμο.

1

4.Κατά την διάρκεια δύο εβδομάδων, ένας αστυνομικός έκοψε τον έξης αριθμό κλήσεων:

Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ	Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ
7	3	10	3	6	3	3	11	5	0

Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:

- 6 κλήσεις ανά μέρα
- 10 κλήσεις ανά μέρα
- 3 κλήσεις ανά μέρα
- 7 κλήσεις ανά μέρα
- 5,66 κλήσεις ανά μέρα
- 5,1 κλήσεις ανά μέρα

5.Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις;

Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η
Κλήσεις					5

6.Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλεψε μονάχα 3 μέρες..

1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 31
   b. 155
   c. 71
   d. Άλλο_____
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 200

2

b. 40
c. 120
d. Αλλο_____

3. Στην διάρκεια των 5 ημερών, πόσα αμάξια παρήχθησαν για την εταιρία και από τα δύο εργοστάσια μαζί κατά μέσο όρο ανά ημέρα;
   a. 35,5 αμάξια
   b. 36 αμάξια
   c. 71 αμάξια
   d. 55 αμάξια

7.Ο Ανδρέας και ο Βαγγέλης ξεκινάνε τρέχουν ταυτόχρονα. Ο Ανδρέας καλύπτει μια απόσταση 100 μέτρων σε 10 δευτερόλεπτα και τερματίζει, ενώ ο Βαγγέλης διασχίζει μια απόσταση 240 μέτρων και τερματίζει όταν το ρολόι δείχνει 12 δευτερόλεπτα. Ποιος από τους δύο έτρεξε πιο γρήγορα;

- Ο Ανδρέας
- Ο Βαγγέλης
- Έτρεχαν και οι δύο με την ίδια ταχύτητα

8.Ένας οδηγός ξεκινάει από την Βιέννη και κινείται με ταχύτητα 120 χλμ./ώρα για δύο ώρες προς τις Άλπεις. Στη συνέχεια κάνει στάση για 1 ώρα και μετά, συνεχίζει να ανεβαίνει το βουνό με ταχύτητα 90 χλμ./ώρα για μια ώρα. Σταματάει όμως λόγω ενός ατυχήματος και βάζει αλυσίδες, χάνοντας άλλη μια ώρα ακινητοποιημένος. Αφού έβαλε τις αλυσίδες στα λάστιχά του, κινήθηκε για άλλες δύο ώρες με 40 χλμ./ώρα, μέχρι που έφτασε στον προορισμό του.

- Πόσα χιλιόμετρα διένυσε ο οδηγός;
  - 250 χλμ.
  - 500 χλμ.
  - 410 χλμ.
- Ποια ήταν η μέση ταχύτητα που κινήθηκε ο οδηγός στο σύνολο του ταξιδιού;
  - 120 χλμ./ώρα
  - 58,5 χλμ./ώρα
  - 35,7 χλμ./ώρα

3

- 83,3 χλμ./ώρα

9.Ένα ελικόπτερο της πυροσβεστικής κατά την διάρκεια μιας επιχείρησης πυρόσβεσης κάλυψε μια απόσταση ίση με 300 χλμ. σε 3 ώρες. Εάν την τελευταία ώρα κάλυψε την διπλάσια απόσταση σε σχέση με αυτή που είχε καλύψει τις προηγούμενες δύο, με τι ταχύτητα κινούταν τις προηγούμενες δύο ώρες;

- 100 χλμ./ώρα
- 200 χλμ./ώρα
- 50 χλμ./ώρα

10.Η Γιάννα ξεκίνησε από την Αθήνα για να πάει σε μια παραλία της Πάτρας, η οποία απέχει 240 χλμ. από το σπίτι της, πηγαίνοντας με 80 χλμ./ώρα. Ο παππούς της ξεκίνησε από την Κόρινθο για την ίδια παραλία, η οποία απέχει 120 χλμ. από την ίδια παραλία, με τον ίδιο προορισμό με την Γιάννα, αλλά επειδή πήγαινε με το αγροτικό του όχημα, κινούταν με 40 χλμ./ώρα. Ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος;

- Ο παππούς
- Η Γιάννα
- Θα φτάσουν ταυτόχρονα

Φυλλάδιο Διδακτικής Παρέμβασης

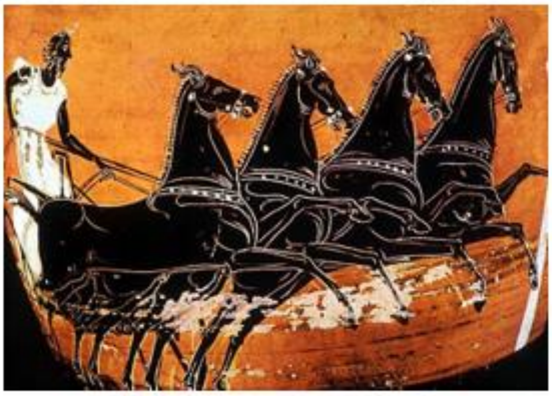
Ονοματεπώνυμο: ____

1

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανέκαθεν η ταχύτητα και οι αγώνες δρόμου ήταν κάτι που εξίταρε και ενθουσίαζε τον άνθρωπο… Πάντοτε είχε την ανάγκη να πάει όλο και πιο γρήγορα!

Δεν είναι τυχαίο που στους Αρχαίους Ολυμπιακούς αγώνες υπήρχαν 7(!) διαφορετικά αθλήματα ταχύτητας…



Σήμερα υπάρχουν πολλές μορφές αγωνισμάτων που ο πιο γρήγορος νικάει. Αγωνίσματα τέτοια υπάρχουν τόσο στην γη, όσο και στο νερό – ακόμα και στον αέρα! Μπορείς να ονομάσεις 3 σύγχρονα αγωνίσματα που ο πιο γρήγορος νικάει;

- ______________________
- ______________________
- ______________________

Δίπλα βλέπεις τον αγώνα δύο αρχαίων δρομέων, οι οποίοι ξεκινάνε μαζί και τερματίζουν μαζί.

- Ποιος από τους δύο νίκησε;

____

- Ποιος θεωρείς ότι ήταν πιο γρήγορος και γιατί;

____

- Νικάει πάντα ο πιο γρήγορος στους αγώνες;

____

- Είναι σημαντικό σε έναν αγώνα ο αθλητής να έχει σταθερά υψηλή απόδοση, ή είναι πιο σημαντικό να έχει πολύ υψηλή απόδοση για λίγο; Γιατί;

____
____
____

2.1 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Το WRC είναι μια άλλη μορφή μηχανοκίνητου αθλητισμού, η οποία, σε αντίθεση με την Formula 1 διεξάγεται εκτός δρόμου, σε ανοιχτές διαδρομές, όπου οι οδηγοί τρέχουν μόνοι τους και χρονομετρούνται. Οι οδηγοί πρέπει να διασχίσουν τις «ειδικές» αυτές διαδρομές (Ε.Δ.) στον μικρότερο δυνατό χρόνο. Ο οδηγός που θα διανύσει όλες τις διαδρομές συνολικά σε λιγότερο χρόνο στέφεται και νικητής του αγώνα! Αναλόγως την θέση του, ο οδηγός παίρνει συγκεκριμένους πόντους, ενώ η ομάδα παίρνει τόσους πόντους, όσους και το άθροισμα της βαθμολογίας των οδηγών της. Στο τέλος της αγωνιστικής σεζόν, η ομάδα και ο οδηγός με τους περισσότερους πόντους στέφονται πρωταθλητές στα αντίστοιχα πρωταθλήματα οδηγών και κατασκευαστών!

Η ομάδα σου κατά μέσο όρο στα 3 τελευταία πρωταθλήματα βρίσκεται στην θέση 3 στην κατάταξη των κατασκευαστών (στο πρωτάθλημα συμμετέχουν 6 ομάδες συνολικά). Ποιες από τις παρακάτω θέσεις θα μπορούσαν να είναι τα αποτελέσματα της ομάδας στα τελευταία 3 πρωταθλήματα (κύκλωσε όσες επιλογές θεωρείς σωστές);

1. ($1^{η}$, $5^{η}$, $3^{η}$)
2. ($7^{η}$, $1^{η}$, $1^{η}$)
3. ($1^{η}$, $1^{η}$, $1^{η}$)
4. ($3^{η}$, $3^{η}$, $3^{η}$)
5. ($2^{η}$, $6^{η}$, $1^{η}$)
6. ($5^{η}$, $2^{η}$, $3^{η}$)
7. ($2^{η}$, $3^{η}$, $4^{η}$)

3

Δύο φίλοι συζητάνε για τις αγαπημένες τους ομάδες:
Α: Η ομάδα μου τερματίζει κατά μέσο όρο $3^{η}$. Η δικιά σου;
Β: Η δικιά μου είναι καλύτερη, τερματίζει κατά μέσο όρο $2{,}3^{η}$.
Α: Η δικιά μου είναι καλύτερη, γιατί εσύ λες ψέματα, δεν υπάρχει θέση 2,3... Μην με κοροϊδεύεις!
Β: Μα δεν σου λέω ψέματα! Όντως έτσι είναι...

Ποιος από τους δύο έχει δίκιο; Μπορεί όντως μια ομάδα να τερματίζει κατά μέσο όρο $2{,}3^{η}$; Γιατί;

____
____
____
____

2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ωστόσο, το να είσαι αρχηγός ομάδας έχει κι άλλες ευθύνες: πρέπει να μαζεύεις χρήματα για την ομάδα σου, ώστε να μπορεί να διαγωνίζεται! Με την *Εφαρμογή 1* μπορείς να υπολογίσεις τα έσοδα που θα έχεις κάθε μέρα από τις προβολές του ντοκιμαντέρ με τους αγώνες της ομάδας σου! Εάν και τις δύο εβδομάδες εισέπραξες κατά μέσο όρο 500 ευρώ ανά ημέρα, συμπλήρωσε τον πίνακα 1 με τα χρήματα που εισέπραξες κάθε μέρα.

- Εισέπραξες κάθε μέρα περισσότερα από 500 ευρώ, ή μονάχα κάποιες μέρες;

____

- Ποια μέρα εισέπραξες τα περισσότερα χρήματα;

____

- Πόσα χρήματα μάζεψες την πρώτη εβδομάδα;

____

- Πόσα χρήματα μάζεψες την δεύτερη εβδομάδα;

____

- Πόσα χρήματα μάζεψες συνολικά;

____

Την τρίτη εβδομάδα, ο κινηματογράφος ήταν κλειστός τις δύο πρώτες μέρες λόγω επισκευών.

- Εάν υποθέσουμε ότι τις υπόλοιπες μέρες έχουμε ακριβώς τα ίδια έσοδα με την εβδομάδα δύο, ο μέσος όρος θα μείνει ίδιος;

____

- Εάν όχι, τότε μπορούμε με λιγότερες μέρες λειτουργίας να πετύχουμε τον ίδιο μέσο όρο εσόδων;

____

- Πόσα λεφτά μαζεύτηκαν τελικά στο τέλος της κάθε εβδομάδας;

____

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΕΣΟΔΑ ΑΠ'Ο ΝΤΟΚΙΜΑΝΤΕΡ

Ημέρα	Εβδ. 1	Εβδ. 2	Εβδ. 3
Δ			0
ΤΡ			0
ΤΕΤ			
ΠΕΜ			
ΠΑΡ			
ΣΑΒ			
ΚΥΡ			
ΣΥΝ			
Μ.Ο.	500	500	500

Τι σημαίνει τελικά ότι εισπράξαμε κατά μέσο όρο 500 ευρώ ανά μέρα; Ότι κάθε μέρα παίρναμε 500 ευρώ ή κάτι άλλο;

____

____

____

____

____

4

2.3 ΕΞΗΓΗΣΗ

Τι είναι λοιπόν ο μέσος όρος;

Ο μέσος όρος είναι ένα εργαλείο που μας δείχνει πόσο *περίπου* είναι οι περισσότερες παρατηρήσεις μας, δηλαδή εάν επέλεγα μία τυχαία παρατήρηση, ποια θα ήταν η τιμή που θα περίμενα να έχει αυτή. Ο μέσος όρος είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που μας επιτρέπει να ρυθμίζουμε την καθημερινότητά μας και να ξέρουμε τί να περιμένουμε. Τον χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την θερμοκρασία που περιμένουμε να έχει μία μέρα, χρησιμοποιώντας δεδομένα από τις υπόλοιπες ημέρες, μας επιτρέπει να περιγράφουμε την απόδοση των μαθητών με ένα νούμερο, χωρίς να αναφέρουμε όλα τα μαθήματα ξεχωριστά, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε πόση βενζίνη καίει ένα αμάξι σε ένα ταξίδι κ.α. Γενικότερα, ο μέσος όρος είναι η πιο κοινή *στατιστική έννοια* και όχι άδικα, γιατί μας βοηθάει σε πολλά κομμάτια της καθημερινότητάς μας.

Για να βρω τον μέσο όρο προσθέτω ΟΛΕΣ ανεξαιρέτως τις παρατηρήσεις, ακόμα κι αν αυτές επαναλαμβάνονται ή είναι 0, και τις διαιρώ με το πλήθος τους (το πόσες είναι δηλαδή), υπολογίζοντας στο πλήθος ΟΛΕΣ τις παρατηρήσεις που χρησιμοποίησα. Εάν παραδείγματος χάρη τα λεφτά που πήρα μέσα σε μια βδομάδα ήταν 0, 3, 5, 0, 3, 8, 4, τότε ο μέσος όρος θα είναι:

$$M.O. = \frac{0+3+5+3+0+8+4}{7}$$

ο οποίος μου κάνει περίπου 3,28 ευρώ κατά μέσο *κάθε μέρα*. Έτσι, εάν περάσουν 7 ημέρες, όπου κάθε μέρα θα παίρνω 3,28 ευρώ, τότε στο τέλος της εβδομάδας θα πάρω 23 ευρώ, όσα πήρα και στην πραγματικότητα συνολικά.

Ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με κάποια από τις παρατηρήσεις, ούτε είναι η μεσαία τιμή του δείγματος, όπως παρατηρώ από πάνω. Πολλές φορές ο μέσος όρος μπορεί να παίρνει τιμές που δεν έχουν νόημα στην πραγματικότητα (π.χ. 5,5 παιδιά κατά μέσο όρο παίζουν μπάλα στο διάλειμμα), αλλά αυτό δεν μας πειράζει: ο μέσος όρος μας δείχνει τι τιμή πάνω κάτω περιμένουμε να έχει μια τυχαία παρατήρηση ενός συγκεκριμένου δείγματος, και όχι πόσο όντως πραγματικά είναι (και τίποτα παραπάνω).

Διαφορετικά δείγματα μπορεί να έχουν τον ίδιο μέσο όρο: οι τριάδες (1,5,3), (7,1,1), (3,3,3), (2,6,1), (2,3,4), (8,0,1) έχουν όλες τον ίδιο μέσο όρο, παρόλο που μεταξύ τους είναι διαφορετικές. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά, τα αθροίσματα των παρατηρήσεων σε όλες τριάδες κάνουν 9. Γενικότερα, διαφορετικές παρατηρήσεις που έχουν το ίδιο άθροισμα συνολικά και το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων, έχουν και ίδιους μέσους όρους. *Ο μέσος όρος εξαρτάται μονάχα από το άθροισμα των παρατηρήσεων και το πλήθος τους, και όχι από ξεχωριστές μεμονωμένες παρατηρήσεις.*

Ωστόσο, δεν πρέπει να ξεχνάω ότι ο μέσος όρος περιγράφει πραγματικά φαινόμενα. Π.χ., εάν ψάχνω τον μέσο όρο της βαθμολογίας ενός μαθητή στην Στ' Δημοτικού, δεν μπορώ να δεχτώ παρατηρήσεις οι οποίες είναι μεγαλύτερες από 10, γιατί οι βαθμοί πηγαίνουν από το 0 έως το 10.

5

2.4 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Στο τέλος της αγωνιστικής περιόδου, συγκεντρώνονται οι πόντοι των οδηγών, όπου προέρχονται από την κατάταξή τους στο τέλος κάθε αγώνα, και οι πόντοι της κάθε ομάδας, οι οποίοι ισούνται με το άθροισμα των πόντων των οδηγών της ομάδας. Ο οδηγός με τους περισσότερους πόντους κατακτά το πρωτάθλημα οδηγών, ενώ η ομάδα με τους περισσότερους συνολικούς πόντους το πρωτάθλημα κατασκευαστών.

Πίνακας 2: Πόντοι πρώτου οδηγού		
Αγώνας	Θέση	Πόντοι
#1	1ος	25
#2	3ος	15
#3	3ος	15
#4	5ος	10
#5	2ος	18

6

Η συγκομιδή βαθμών της ομάδα σου από τον οδηγό Α τους πέντε πρώτους αγώνες της σεζόν περιγράφεται στον πίνακα 2.

- Πόσους πόντους πήρε κατά μέσο όρο ο πρώτος οδηγός;

____
____
____

- Ο δεύτερος οδηγός πήρε κατά μέσο όρο 15 πόντους ανά αγώνα, έχοντας όμως έναν αγώνα περισσότερο. Πόσους πόντους συγκέντρωσε συνολικά;

____
____
____

- Ποιος από τους δύο οδηγούς συγκέντρωσε μέχρι στιγμής περισσότερους πόντους;

____
____
____

- Πόσους πόντους συγκεντρώνει κατά μέσο όρο ανά αγώνα, στους πρώτους 6 αγώνες, η ομάδα για το πρωτάθλημα κατασκευαστών;

____
____
____

3.1 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Η Formula 1 είναι ένα από τα πιο απαιτητικά αθλήματα του μηχανοκίνητου αθλητισμού, των σπορ δηλαδή που οι αθλητές αγωνίζονται με κάποιο μηχανικό μέσο, όπως π.χ. τα αγωνιστικά της εικόνας, τα οποία μπορούν να κινηθούν με ταχύτητες που φτάνουν πολλές φορές μέχρι και τα 370 χλμ./ώρα!

Τα αγωνιστικά τρέχουν σε μία κλειστή πίστα, η οποία έχει διάφορες στροφές και ευθείες, ενώ το σημείο τερματισμού είναι και το σημείο εκκίνησης.

Νικητής είναι αυτός που θα ολοκληρώσει ένα καθορισμένο αριθμό γύρο πρώτος!

Όπως πάντα, ο πιο γρήγορος νικάει!

Στον τελευταίο όμως αγώνα, έγινε το εξής παράδοξο: ο οδηγός με το μπλε-κίτρινο αγωνιστικό, ο Verstappen, ξεκίνησε από την πρώτη θέση και κατέγραψε τον πιο γρήγορο γύρο του αγώνα, από την αρχή έως και το τέλος του, ωστόσο έχασε από τον οδηγό του ασημί αγωνιστικού, τον Hamilton...

1. Γιατί πιστεύεις πως έγινε αυτό;

____
____
____

2. Τελικά ποιος από τους δύο οδηγούς ήταν πιο γρήγορος;

____
____
____

3. Θεωρείς πως το αποτέλεσμα ήταν δίκαιο ή όχι; Γιατί;

____
____
____

7

3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το 2009 ο Usain Bolt διένυσε 100m σε 9,81 sec στο διεθνές πρωτάθλημα του Βερολίνου και ανακηρύχθηκε «ο ταχύτερος άνθρωπος της Γης», φτάνοντας ταχύτητες οι οποίες είναι κοντά στα όρια ταχύτητας κίνησης των αυτοκινήτων εντός των πόλεων!

- Μπορείς να υπολογίσεις την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ο Bolt, μετρημένη σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/sec);

Παρατήρησε τώρα τον αγώνα του Bolt, με προσοχή από την αρχή έως το τέλος.

- Πηγαίνει από την αρχή έως το τέλος με την ίδια ταχύτητα;

____
____
____

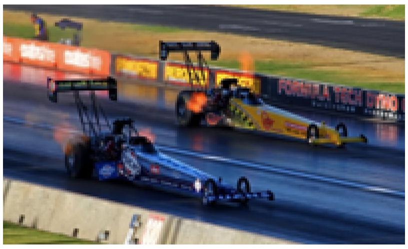
- Πώς θα χαρακτήριζες την ταχύτητα με την οποία υπολόγισες ότι κινήθηκε ο Bolt, στιγμιαία, σταθερή ή κάπως αλλιώς; Γιατί;

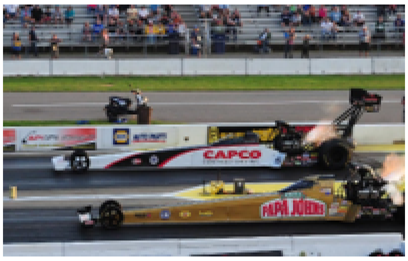
____
____
____

- Τι σημαίνει τελικά η φράση «ο πιο γρήγορος άνθρωπος στην Γη» κατά την γνώμη σου; Τι ξεχωρίζει τον Bolt σε σχέση με τους υπόλοιπους αθλητές;

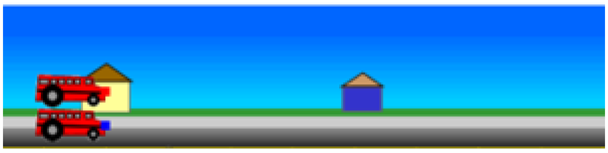
____
____
____

8





Οι αγώνες dragster είναι από τους πιο εντυπωσιακούς του μηχανοκίνητου αθλητισμού! Στις ανώτερες κατηγορίες αγωνίζονται ειδικά αγωνιστικά, όπως αυτά στις φωτογραφίες, τα οποία αποδίδουν πάνω από 1000 ίππους, κάνοντάς τα στην ευθεία πιο γρήγορα και από μονοθέσια της F1! Οι διαγωνιζόμενοι αγωνίζονται σε ευθείες πίστες, διαφορετικού μήκους αναλόγως την κατηγορία, και νικητής είναι ο πρώτος που θα περάσει την γραμμή τερματισμού!



Φαντάσου ότι είσαι οδηγός αγώνων στο γαλάζιο αγωνιστικό! Σε έναν αγώνα μήκους 100 μέτρων, το κόκκινο αγωνιστικό ξεκινάει να κινείται για πρώτα 25 μέτρα με ταχύτητα 25 μέτρων ανά δευτερόλεπτο, ενώ τα υπόλοιπα μέτρα τα διανύει σε 4 δευτερόλεπτα, κινούμενο με την ίδια ταχύτητα. Με τι ταχύτητα πρέπει να τρέξεις για να τερματίσετε μαζί; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις όσα υπολόγισες!

____
____
____
____

Μετά την ισοπαλία όμως οι κριτές έκριναν πως πρέπει να δοθεί ένας επαναληπτικός αγώνας, ο οποίος θα είναι στην διαδρομή των 160 μέτρων. Το κόκκινο αγωνιστικό διένυσε τα πρώτα 40 μέτρα σε 4 δευτερόλεπτα, ενώ για τα υπόλοιπα 120 χρειάστηκε άλλα 4 δευτερόλεπτα. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθείς εσύ, ώστε να νικήσεις τον αντίπαλό σου; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις τα όσα υπολόγισες!

____
____
____

3.3 ΕΞΗΓΗΣΗ

Τι είναι λοιπόν η μέση ταχύτητα;

Ένα αμάξι μπορεί να κινείται σε πολλές διαφορετικές στιγμές με διαφορετική ταχύτητα κάθε φορά. Πιστόσο, σε ένα ταξίδι μας ενδιαφέρει πότε θα ξεκινήσουμε μια διαδρομή και πότε θα φτάσουμε στο τέλος της. Για αυτό τον λόγο, αντικαθιστούμε τις πολλές διαφορετικές ταχύτητες, με μία ενιαία και σταθερή, όπου αν ξεκινούσαμε την ίδια διαδρομή με αυτή την ταχύτητα και κινούμασταν σταθερά με αυτήν, θα φτάναμε στον ίδιο χρόνο στο τέλος της διαδρομής.

Η μέση ταχύτητα, λοιπόν, είναι ο μέσος όρος της απόστασης που διανύει ένα σώμα ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή πόσα εκατοστά/μέτρα/χιλιόμετρα κλπ. διανύει κατά μέσο όρο ένα σώμα σε ένα δευτερόλεπτο/λεπτό/ώρα. Για να υπολογίσω την μέση ταχύτητα χρησιμοποιώ τον τύπο:

$$Μέση\ Ταχύτητα = \frac{συνολική\ απόσταση}{συνολικός\ χρόνος\ κίνησης}$$

Δεν ξεχνάω πως στην μέση ταχύτητας πρέπει να συνυπολογίσω τυχόν χρόνο που το σώμα ίσως μένει ακίνητο: όπως στον μέσο όρο οι μηδενικές παρατηρήσεις επηρεάζουν το πλήθος μου και πρέπει να τις συνυπολογίσω, έτσι και εδώ πρέπει να μην ξεχάσω να βάλω τον χρόνο που το σώμα μένει ακίνητο, εάν φυσικά αυτός περιλαμβάνεται στην κίνηση που μελετάω.

Για να έχουν δύο σώματα ίδια μέση ταχύτητα αρκεί να διανύσουν ίση απόσταση σε ίσο χρόνο. Εάν γνωρίζω την μέση ταχύτητα και τον χρόνο κίνησης, μπορώ πολύ εύκολα να υπολογίσω την απόσταση που διένυσε το σώμα, πολλαπλασιάζοντας την μέση ταχύτητα με τον χρόνο κίνησης (όπως για να βρω το άθροισμα από τον μέσο όρο, πολλαπλασιάζω τον μέσο όρο με το άθροισμα).

Αντίστοιχα, για να υπολογίσω τον χρόνο κίνησης, αρκεί να γνωρίζω πόσες φορές χωράει η τιμή της μέσης ταχύτητας στην συνολική απόσταση. Έτσι, γνωρίζοντας την τιμή της ταχύτητας που κινούμαστε στο περίπου και το πόσο απέχουμε από τον προορισμό μας, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο ακόμα θέλουμε για να φτάσουμε!

Όπως και ο μέσος όρος, η μέση ταχύτητα δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με κάποια από τις πραγματικές τιμές που παίρνει η στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος. Η μέση ταχύτητα είναι ***αντιπροσωπευτική*** της κίνησης, και δεν την περιγράφει με απόλυτη ακρίβεια, που ωστόσο μας επιτρέπει να κάνουμε ακριβείς υπολογισμούς για τον χρόνο κίνησης και το μήκος της διαδρομής.

10

3.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα από τα πιο συναρπαστικά αθλήματα είναι η ποδηλασία! Σε κάποιες κατηφόρες οι ποδηλάτες φτάνουν μέχρι και τα 150 χλμ./ώρα! Στην Εφαρμογή 3 βλέπεις τα δεδομένα από έναν τέτοιο αγώνα ποδηλασίας αντοχής, με αφετηρία την Θεσσαλονίκη και τερματισμό στην Αθήνα. Μπορείς να συμπληρώσεις τα στοιχεία που λείπουν, ώστε να υπολογίσεις την απόδοση του ποδηλάτη;

- Θεωρείς ότι η ταχύτητα του ποδηλάτη ήταν σταθερή σε όλη την διαδρομή;

____

- Η ταχύτητα του ποδηλάτη που υπολόγισες ήταν στιγμιαία ή αφορούσε όλο το ταξίδι;

____

- Θα είχε νόημα να υπολογίσουμε τις στιγμιαίες ταχύτητες που είχε κάθε φορά ο ποδηλάτης; Γιατί;

____

- Τελικά τι είναι η μέση ταχύτητα;

____
____
____
____
____

11

4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 4 ΕΙΔΙΚΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ			
Ε.Δ.	Μήκος (χλμ.)	Χρόνος (ώρες)	Μέση ταχύτητα (χλμ./ώρα)
#1	76	0,57	
#2	108,5	0,78	139,10
#3	47,5		118,75
#4		0,7	62,85
ΣΥΝ			
Μ.Ο.			

Μετά από 4 αγώνες ήρθαν τα πρώτα αποτελέσματα της ομάδας σου! Ωστόσο, ο βοηθός σου κατά λάθος έριξε νερό πάνω τους και κάποιες τιμές χάθηκαν... Συμπλήρωσε τα κενά στον πίνακα 3 με βάση τα όσα έχεις γνωρίζεις και απάντησε στις από κάτω ερωτήσεις των ιδιοκτητών της ομάδας!

- Ποια είναι *η μέση ταχύτητα* για όλες τις ειδικές συνολικά;

____

____

____

- Ποιος είναι *ο μέσος όρος των ταχυτήτων* των ειδικών διαδρομών για το σύνολο του αγώνα;

____

____

____

- Σε κάποια από αυτές τις διαδρομές μάθαμε ότι ο οδηγός αντιμετώπισε ένα μηχανικό πρόβλημα. Σε ποια απ' όλες φαντάζεσαι πως έγινε αυτό;

____

____

____

12

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

- Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο σου που θέλει να μάθει για την μέση ταχύτητα και τον μέσο όρο;

- Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;

- Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;

- Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική σου απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;

- Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;

- Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες, ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;

13

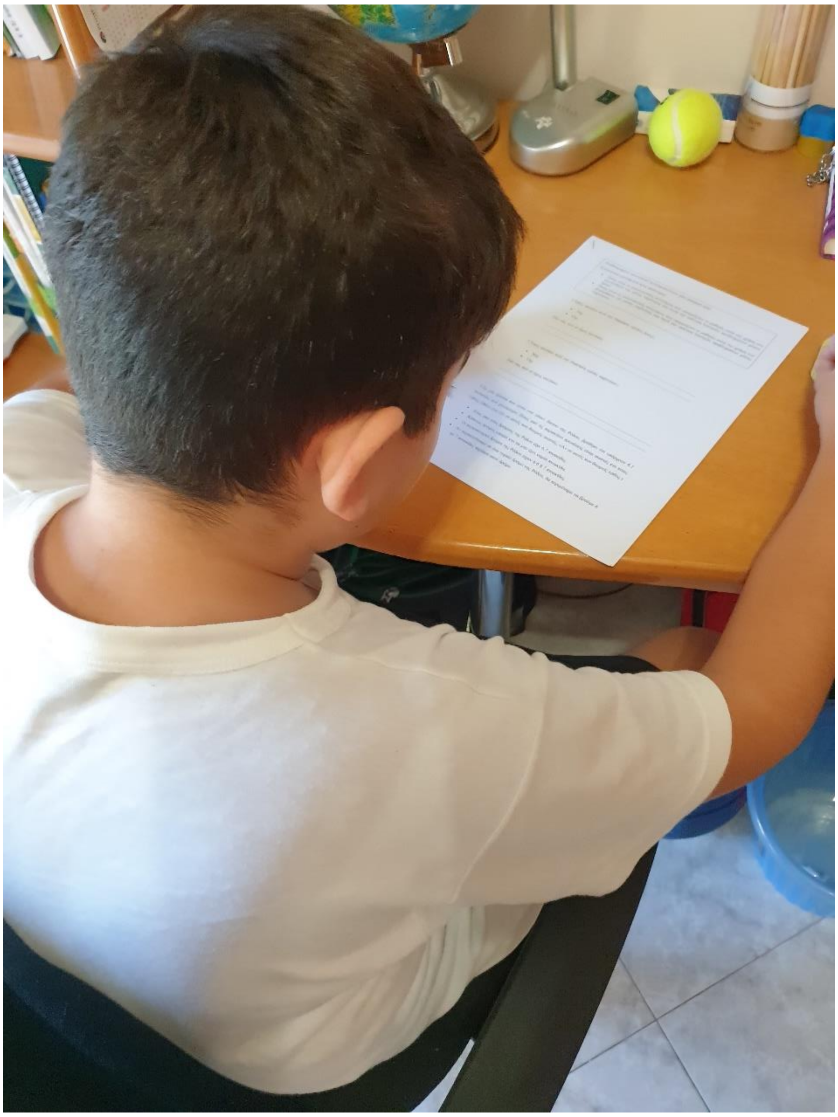
- **Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;**

____
____
____

14

Στιγμιότυπα & Υλικό από τις παρεμβάσεις

Απαντήσεις και υλικό από την παρέμβαση στον Μ2



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανέκαθεν η ταχύτητα και οι αγώνες δρόμου ήταν κάτι που εξίταρε και ενθουσίαζε τον άνθρωπο... Πάντοτε είχε την ανάγκη να πάει όλο και πιο γρήγορα!

Δεν είναι τυχαίο που στους Αρχαίους Ολυμπιακούς αγώνες υπήρχαν 7(!) διαφορετικά αθλήματα ταχύτητας...

Σήμερα υπάρχουν πολλές μορφές αγωνισμάτων που ο πιο γρήγορος νικάει. Αγωνίσματα τέτοια υπάρχουν τόσο στην γη, όσο και στο νερό – ακόμα και στον αέρα! Μπορείς να ονομάσεις 3 σύγχρονα αγωνίσματα που ο πιο γρήγορος νικάει;

- στίβος
- ιππασία
- αγώνες με αυτοκίνητα

Δίπλα βλέπεις τον αγώνα δύο αρχαίων δρομέων, οι οποία ξεκινάνε μαζί και τερματίζουν μαζί.

- Ποιος από τους δύο νίκησε;

  ο πάνω

- Ποιος θεωρείς ότι ήταν πιο γρήγορος και γιατί;

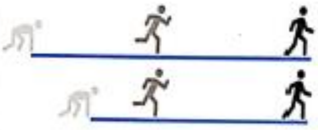
  Ο πάνω γιατί έχει μεγαλύτερη απόσταση

- Νικάει πάντα ο πιό γρήγορος στους αγώνες;

  Όχι γιατί κάποιος μπορεί να κόψει δρόμο

- Είναι σημαντικό σε έναν αγώνα ο αθλητής να έχει σταθερά υψηλή απόδοση, ή είναι πιο σημαντικό να έχει πολύ υψηλή απόδοση για λίγο; Γιατί;

  Να τρέχει γρήγορα για να κερδίσει πολλές φορές για μετά



21 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Το WRC είναι μια άλλη μορφή μηχανοκίνητου αθλητισμού, η οποία, σε αντίθεση με την Formula 1 διεξάγεται εκτός δρόμου, σε ανοιχτές διαδρομές, όπου οι οδηγοί τρέχουν μόνοι τους και χρονομετρούνται. Οι οδηγοί πρέπει να διασχίσουν τις «ειδικές» αυτές διαδρομές (ΕΔ) στον μικρότερο δυνατό χρόνο. Ο οδηγός που θα διανύσει όλες τις διαδρομές συνολικά σε λιγότερο χρόνο στέφεται και νικητής του αγώνα! Αναλόγως την θέση του, ο οδηγός παίρνει συγκεκριμένους πόντους, ενώ η ομάδα παίρνει τόσους πόντους, όσους και το άθροισμα της βαθμολογίας των οδηγών της. Στο τέλος της αγωνιστικής σεζόν, η ομάδα και ο οδηγός με τους περισσότερους πόντους στέφονται πρωταθλητές στα αντίστοιχα πρωταθλήματα οδηγών και κατασκευαστών!

Η ομάδα σου κατά μέσο όρο στα 3 τελευταία πρωταθλήματα βρίσκεται στην θέση 3 στην κατάταξη των κατασκευαστών (στο πρωτάθλημα συμμετέχουν 6 ομάδες συνολικά). Ποιες από τις παρακάτω θέσεις θα μπορούσαν να είναι τα αποτελέσματα της ομάδας στα τελευταία 3 πρωταθλήματα (κύκλωσε όσες επιλογές θεωρείς σωστές):

1. (1η, 5η, 3η)
2. (7η, 1η, 1η)
3. (1η, 1η, 1η)
4. (3η, 3η, 3η)
5. (2η, 6η, 1η)
6. (5η, 2η, 3η)
7. (2η, 3η, 4η)

3

Δύο φίλοι συζητάνε για τις αγαπημένες τους ομάδες:

Α: Η ομάδα μου τερματίζει κατά μέσο όρο 3η. Η δικιά σου;

Β: Η δικιά μου είναι καλύτερη, τερματίζει κατά μέσο όρο 2,3η.

Α: Η δικιά μου είναι καλύτερη, γιατί εσύ λες ψέματα, δεν υπάρχει θέση 2,3... Μην με κοροϊδεύεις!

Β: Μα δεν σου λέω ψέματα! Όντως έτσι είναι...

Ποιος από τους δύο έχει δίκιο; Μπορεί όντως μια ομάδα να τερματίζει κατά μέσο όρο 2,3η; Γιατί;

Μπορεί γιατί κάποιες θέσεις δεν θα έχει σταθερό καλύτερο

2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ωστόσο, το να είσαι αρχηγός ομάδας έχει κι άλλες ευθύνες: πρέπει να μαζεύεις χρήματα για την ομάδα σου, ώστε να μπορεί να διαγωνίζεται! Με την *Εφαρμογή 1* μπορείς να υπολογίσεις τα έσοδα που θα έχεις κάθε μέρα από τις προβολές του ντοκιμαντέρ με τους αγώνες της ομάδας σου! Εάν και τις δύο εβδομάδες εισέπραξες κατά μέσο όρο 500 ευρώ ανά ημέρα, συμπλήρωσε τον πίνακα 1 με τα χρήματα που εισέπραξες κάθε μέρα.

- Εισέπραξες κάθε μέρα περισσότερα από 500 ευρώ ή μονάχα κάποιες μέρες;

  Στην δεύτερη εβδομάδα λίγες [illegible]
- Ποια μέρα εισέπραξες τα περισσότερα χρήματα;

  Κυριακή
- Πόσα χρήματα μάζεψες την πρώτη εβδομάδα;

  3.500
- Πόσα χρήματα μάζεψες την δεύτερη εβδομάδα;

  3.500
- Πόσα χρήματα μάζεψες συνολικά;

  7.000

Την τρίτη εβδομάδα, ο κινηματογράφος ήταν κλειστός τις δύο πρώτες μέρες λόγω επισκευών.

- Εάν υποθέσουμε ότι τις υπόλοιπες μέρες έχουμε ακριβώς τα ίδια έσοδα με την εβδομάδα δύο, ο μέσος όρος θα μείνει ίδιος;

  Όχι θα ήταν πιο χαμηλός
- Εάν όχι, τότε μπορούμε με λιγότερες μέρες λειτουργίας να πετύχουμε τον ίδιο μέσο όρο εσόδων;

  Ναι μπορούμε
- Πόσα λεφτά μαζεύτηκαν τελικά στο τέλος της κάθε εβδομάδας;

  3.500

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΕΣΟΔΑ ΑΠΟ ΝΤΟΚΙΜΑΝΤΕΡ

Ημέρα	Εβδ. 1	Εβδ. 2	Εβδ. 3
Δ	500	520	0
ΤΡ	500	500	0
ΤΕΤ	500	500	680
ΠΕΜ	500	400	680
ΠΑΡ	500	400	660
ΣΑΒ	500	560	660
ΚΥΡ	500	580	820
ΣΥΝ	3.500	3.500	3.500
ΜΟ	500	500	500

Τι σημαίνει τελικά ότι εισπράξαμε κατά μέσο όρο 500 ευρώ ανά μέρα; Ότι κάθε μέρα παίρναμε 500 ευρώ ή κάτι άλλο;

Κάπου γύρω στα 400-600 € την μέρα

4

23 ΕΞΗΓΗΣΗ

Τι είναι λοιπόν ο μέσος όρος;

Ο μέσος όρος είναι ένα εργαλείο που μας δείχνει πόσο *περίπου* είναι οι περισσότερες παρατηρήσεις μας, δηλαδή εάν επέλεγα μία τυχαία παρατήρηση, ποια θα ήταν η τιμή που θα περίμενα να έχει αυτή. Ο μέσος όρος είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που μας επιτρέπει να ρυθμίζουμε την καθημερινότητά μας και να ξέρουμε τί να περιμένουμε. Τον χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την θερμοκρασία που περιμένουμε να έχει μία μέρα, χρησιμοποιώντας δεδομένα από τις υπόλοιπες ημέρες, μας επιτρέπει να περιγράφουμε την απόδοση των μαθητών με ένα νούμερο, χωρίς να αναφέρουμε όλα τα μαθήματα. Ξεχωριστά, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε πόση βενζίνη καίει ένα αμάξι σε ένα ταξίδι κ.α. Γενικότερα, ο μέσος όρος είναι η πιο κοινή *στατιστική έννοια* και όχι άδικα, γιατί μας βοηθάει σε πολλά κομμάτια της καθημερινότητάς μας.

Για να βρω τον μέσο όρο προσθέτω ΟΛΕΣ ανεξαιρέτως τις παρατηρήσεις, ακόμα κι αν αυτές επαναλαμβάνονται ή είναι 0, και τις διαιρώ με το πλήθος τους (το πόσες είναι δηλαδή), υπολογίζοντας στο πλήθος ΟΛΕΣ τις παρατηρήσεις που χρησιμοποίησα. Εάν παραδείγματος χάρη τα λεφτά που πήρα μέσα σε μια βδομάδα ήταν 0, 3, 5, 0, 3, 8, 4, τότε ο μέσος όρος θα είναι:

$$M.O. = \frac{0+3+5+3+0+8+4}{7}$$

ο οποίος μου κάνει περίπου 3,28 ευρώ κατά μέσο *κάθε μέρα*. Έτσι, εάν περάσουν 7 ημέρες, όπου κάθε μέρα θα παίρνω 3,28 ευρώ, τότε στο τέλος της εβδομάδας θα πάρω 23 ευρώ, όσα πήρα και στην πραγματικότητα συνολικά.

Ο μέσος όρος δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με κάποια από τις παρατηρήσεις, ούτε είναι η μεσαία τιμή του δείγματος, όπως παρατηρώ από πάνω. Πολλές φορές ο μέσος όρος μπορεί να παίρνει τιμές που δεν έχουν νόημα στην πραγματικότητα (π.χ. 5,5 παιδιά κατά μέσο όρο παίζουν μπάλα στο διάλειμμα), αλλά αυτό δεν μας πειράζει: ο μέσος όρος μας δείχνει τι τιμή πάνω κάτω περιμένουμε να έχει μια τυχαία παρατήρηση ενός συγκεκριμένου δείγματος, και όχι πόσο όντως πραγματικά είναι (και τίποτα παραπάνω).

Διαφορετικά δείγματα μπορεί να έχουν τον ίδιο μέσο όρο οι τριάδες (1,5,3), (7,1,1), (3,3,3), (2,6,1), (2,3,4), (8,0,1) έχουν όλες τον ίδιο μέσο όρο, παρόλο που μεταξύ τους είναι διαφορετικές. Εάν παρατηρήσουμε προσεκτικά, τα αθροίσματα των παρατηρήσεων σε όλες τριάδες κάνουν 9. Γενικότερα, διαφορετικές παρατηρήσεις που έχουν το ίδιο άθροισμα συνολικά και το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων, έχουν και ίδιους μέσους όρους. *Ο μέσος όρος εξαρτάται μονάχα από το άθροισμα των παρατηρήσεων και το πλήθος τους, και όχι από ξεχωριστές μεμονωμένες παρατηρήσεις.*

Ωστόσο, δεν πρέπει να ξεχνάω ότι ο μέσος όρος περιγράφει πραγματικά φαινόμενα. Π.χ., εάν ψάχνω τον μέσο όρο της βαθμολογίας ενός μαθητή στην ΣΤ' Δημοτικού, δεν μπορώ να δεχτώ παρατηρήσεις οι οποίες είναι μεγαλύτερες από 10, γιατί οι βαθμοί πηγαίνουν από το 0 έως το 10.

5

24 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Στο τέλος της αγωνιστικής περιόδου, συγκεντρώνονται οι πόντοι των οδηγών, όπου προέρχονται από την κατάταξή τους στο τέλος κάθε αγώνα, και οι πόντοι της κάθε ομάδας, οι οποίοι ισούνται με το άθροισμα των πόντων των οδηγών της ομάδας. Ο οδηγός με τους περισσότερους πόντους κατακτά το πρωτάθλημα οδηγών, ενώ η ομάδα με τους περισσότερους συνολικούς πόντους το πρωτάθλημα κατασκευαστών.

Πίνακας 2: Πόντοι πρώτου οδηγού		
Αγώνας	Θέση	Πόντοι
#1	1ος	25
#2	3ος	15
#3	3ος	15
#4	5ος	10
#5	2ος	18

6

83 | 5 = 16,6

173 | 6 = 28,83

Η συγκομιδή βαθμών της ομάδα σου από τον οδηγό Α τους πέντε πρώτους αγώνες της σεζόν περιγράφεται στον πίνακα 2.

- Πόσους πόντους πήρε κατά μέσο όρο ο πρώτος οδηγός;

25+15+15+10+18:5=83:5=16,6

- Ο δεύτερος οδηγός πήρε κατά μέσο όρο 15 πόντους ανά αγώνα, έχοντας όμως έναν αγώνα περισσότερα. Πόσους πόντους συγκέντρωσε συνολικά;

5+1=6 15x6=90

- Ποιος από τους δύο οδηγούς συγκέντρωσε μέχρι στιγμής περισσότερους πόντους;

Ο δεύτερος

- Πόσους πόντους συγκεντρώνει κατά μέσο όρο ανά αγώνα, στους πρώτους 6 αγώνες, η ομάδα για το πρωτάθλημα κατασκευαστών;

83+90=173

Περίπου 28,83 πόντοι

3.1 ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

Η Formula 1 είναι ένα από τα πιο απαιτητικά αθλήματα του μηχανοκίνητου αθλητισμού, των σπορ δηλαδή που οι αθλητές αγωνίζονται με κάποιο μηχανικό μέσο όπως π.χ. τα αγωνιστικά της εικόνας, τα οποία μπορούν να κινηθούν με ταχύτητες που φτάνουν πολλές φορές μέχρι και τα 370 χλμ/ώρα!

Τα αγωνιστικά τρέχουν σε μία κλειστή πίστα, η οποία έχει διάφορες στροφές και ευθείες, ενώ το σημείο τερματισμού είναι και το σημείο εκκίνησης.

Νικητής είναι αυτός που θα ολοκληρώσει ένα καθορισμένο αριθμό γύρο πρώτος!

Όπως πάντα, ο πιο γρήγορος νικάει!

Στον τελευταίο όμως αγώνα, έγινε το εξής παράδοξο: ο οδηγός με το μπλε-κίτρινο αγωνιστικό, ο Verstappen, ξεκίνησε από την πρώτη θέση και κατέγραψε τον πιο γρήγορο γύρο του αγώνα, από την αρχή έως και το τέλος του, ωστόσο έχασε από τον οδηγό του ασημί αγωνιστικού, τον Hamilton...

1. Γιατί πιστεύεις πως έγινε αυτό;

Γιατί πήγαινε πολύ [illegible]

[illegible]

2. Τελικά ποιος από τους δύο οδηγούς ήταν πιο γρήγορος;

Ο Verstappen

3. Θεωρείς πως το αποτέλεσμα ήταν δίκαιο ή όχι; Γιατί;

Είναι δίκαιο γιατί [illegible]

[illegible]

7

3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το 2009 ο Usain Bolt διένυσε 100m σε 9,81 sec στο διεθνές πρωτάθλημα του Βερολίνου και ανακηρύχθηκε «ο ταχύτερος άνθρωπος της Γης», φτάνοντας ταχύτητες οι οποίες είναι κοντά στα όρια ταχύτητας κίνησης των αυτοκινήτων εντός των πόλεων!

- Μπορείς να υπολογίσεις την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ο Bolt, μετρημένη σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/sec);

$100/9{,}81 = 10$

Παρατήρησε τώρα τον αγώνα του Bolt, με προσοχή από την αρχή έως το τέλος.

- Πηγαίνει από την αρχή έως το τέλος με την ίδια ταχύτητα;

Όχι

- Πώς θα χαρακτήριζες την ταχύτητα με την οποία υπολόγισες ότι κινήθηκε ο Bolt, στιγμιαία, σταθερή ή κάπως αλλιώς; Γιατί;

Είναι στιγμιαία γιατί στην αρχή ξεκίνησε "αργά" και μετά έτρεξε πιο γρήγορα και με ρυθμό

- Τι σημαίνει τελικά η φράση «ο πιο γρήγορος άνθρωπος στην Γη» κατά την γνώμη σου; Τι ξεχωρίζει τον Bolt σε σχέση με τους υπόλοιπους αθλητές;

Γιατί ήταν πιο γρήγορος από τους άλλους

8

Οι αγώνες dragster είναι από τους πιο εντυπωσιακούς του μηχανοκίνητου αθλητισμού! Στις ανώτερες κατηγορίες αγωνίζονται ειδικά αγωνιστικά, όπως αυτά στις φωτογραφίες, τα οποία αποδίδουν πάνω από 1000 ίππους, κάνοντάς τα στην ευθεία πιο γρήγορα και από μονοθέσια της F1! Οι διαγωνιζόμενοι αγωνίζονται σε ευθείες πίστες, διαφορετικού μήκους αναλόγως την κατηγορία, και νικητής είναι ο πρώτος που θα περάσει την γραμμή τερματισμού!

Φαντάσου ότι είσαι οδηγός αγώνων στο γαλάζιο αγωνιστικό! Σε έναν αγώνα μήκους 100 μέτρων, το κόκκινο αγωνιστικό ξεκινάει να κινείται για πρώτα 25 μέτρα με ταχύτητα 25 μέτρων ανά δευτερόλεπτο, ενώ τα υπόλοιπα μέτρα τα διανύει σε 4 δευτερόλεπτα, κινούμενο με την ίδια ταχύτητα. Με τι ταχύτητα πρέπει να τρέξεις για να τερματίσετε μαζί; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις όσα υπολόγισες!

Για να τερματίσουν μαζί πρέπει να πηγαίνουν με την ίδια ταχύτητα, το [illegible] [illegible] πρέπει και αυτός την ίδια ταχύτητα πρέπει να πάω και εγώ.

Μετά την ισοπαλία όμως οι κριτές έκριναν πως πρέπει να δοθεί ένας επαναληπτικός αγώνας, ο οποίος θα είναι στην διαδρομή των 160 μέτρων. Το κόκκινο αγωνιστικό διένυσε τα πρώτα 40 μέτρα σε 4 δευτερόλεπτα, ενώ για τα υπόλοιπα 120 χρειάστηκε άλλα 4 δευτερόλεπτα. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθείς εσύ, ώστε να νικήσεις τον αντίπαλό σου; Χρησιμοποίησε την εφαρμογή 2 για να επιβεβαιώσεις τα όσα υπολόγισες!

Πηγαίνει με 20 τα δευτερόλεπτα άρα εγώ πηγαίνω με 80 τα δευτερόλεπτα.

160:8=20

9

3.3 ΕΞΗΓΗΣΗ

33 35

Τι είναι λοιπόν η μέση ταχύτητα;

Ένα αμάξι μπορεί να κινείται σε πολλές διαφορετικές στιγμές με διαφορετική ταχύτητα κάθε φορά. Ωστόσο, σε ένα ταξίδι μας ενδιαφέρει πότε θα ξεκινήσουμε μια διαδρομή και πότε θα φτάσουμε στο τέλος της. Για αυτό τον λόγο, αντικαθιστούμε τις πολλές διαφορετικές ταχύτητες, με μία ενιαία και σταθερή, όπου αν ξεκινούσαμε την ίδια διαδρομή με αυτή την ταχύτητα και κινούμασταν σταθερά με αυτήν, θα φτάναμε στον ίδιο χρόνο στο τέλος της διαδρομής.

Η μέση ταχύτητα, λοιπόν, είναι ο μέσος όρος της απόστασης που διανύει ένα σώμα ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή πόσα εκατοστά/μέτρα/χιλιόμετρα κλπ. διανύει κατά μέσο όρο ένα σώμα σε ένα δευτερόλεπτο/λεπτό/ώρα. Για να υπολογίσω την μέση ταχύτητα χρησιμοποιώ τον τύπο:

$$Μέση\ Ταχύτητα = \frac{συνολική\ απόσταση}{συνολικός\ χρόνος\ κίνησης}$$

Δεν ξεχνάω πως στην μέση ταχύτητας πρέπει να συνυπολογίσω τυχόν χρόνο που το σώμα ίσως μένει ακίνητο: όπως στον μέσο όρο οι μηδενικές παρατηρήσεις επηρεάζουν το πλήθος μου και πρέπει να τις συνυπολογίσω έτσι και εδώ πρέπει να μην ξεχάσω να βάλω τον χρόνο που το σώμα μένει ακίνητο, εάν φυσικά αυτός περιλαμβάνεται στην κίνηση που μελετάω.

Για να έχουν δύο σώματα ίδια μέση ταχύτητα αρκεί να διανύσουν ίση απόσταση σε ίσο χρόνο. Εάν γνωρίζω την μέση ταχύτητα και τον χρόνο κίνησης, μπορώ πολύ εύκολα να υπολογίσω την απόσταση που διένυσε το σώμα, πολλαπλασιάζοντας την μέση ταχύτητα με τον χρόνο κίνησης (όπως για να βρω το άθροισμα από τον μέσο όρο, πολλαπλασιάζω τον μέσο όρο με το άθροισμα).

Αντίστοιχα, για να υπολογίσω τον χρόνο κίνησης, αρκεί να γνωρίζω πόσες φορές χωράει η τιμή της μέσης ταχύτητας στην συνολική απόσταση. Έτσι, γνωρίζοντας την τιμή της ταχύτητας που κινούμαστε στο περίπου και το πόσο απέχουμε από τον προορισμό μας, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο ακόμα θέλουμε για να φτάσουμε!

Όπως και ο μέσος όρος, η μέση ταχύτητα δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζεται με κάποια από τις πραγματικές τιμές που παίρνει η στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος. Η μέση ταχύτητα είναι *αντιπροσωπευτική* της κίνησης, και δεν την περιγράφει με απόλυτη ακρίβεια, που ωστόσο μας επιτρέπει να κάνουμε ακριβείς υπολογισμούς για τον χρόνο κίνησης και το μήκος της διαδρομής.

10

3.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα από τα πιο συναρπαστικά αθλήματα είναι η ποδηλασία! Σε κάποιες κατηγορίες οι ποδηλάτες φτάνουν μέχρι και τα 150 χλμ/ώρα! Στην Εφαρμογή 3 βλέπεις τα δεδομένα από έναν τέτοιο αγώνα ποδηλασίας αντοχής, με αφετηρία την Θεσσαλονίκη και τερματισμό στην Αθήνα. Μπορείς να συμπληρώσεις τα στοιχεία που λείπουν, ώστε να υπολογίσεις την απόδοση του ποδηλάτη;

- Θεωρείς ότι η ταχύτητα του ποδηλάτη ήταν σταθερή σε όλη την διαδρομή;

  Μπορεί και ναι και όχι

- Η ταχύτητα του ποδηλάτη που υπολόγισες ήταν στιγμιαία ή αφορούσε όλο το ταξίδι;

  Αφορά όλο το ταξίδι, γιατί είναι η μέση ταχύτητα

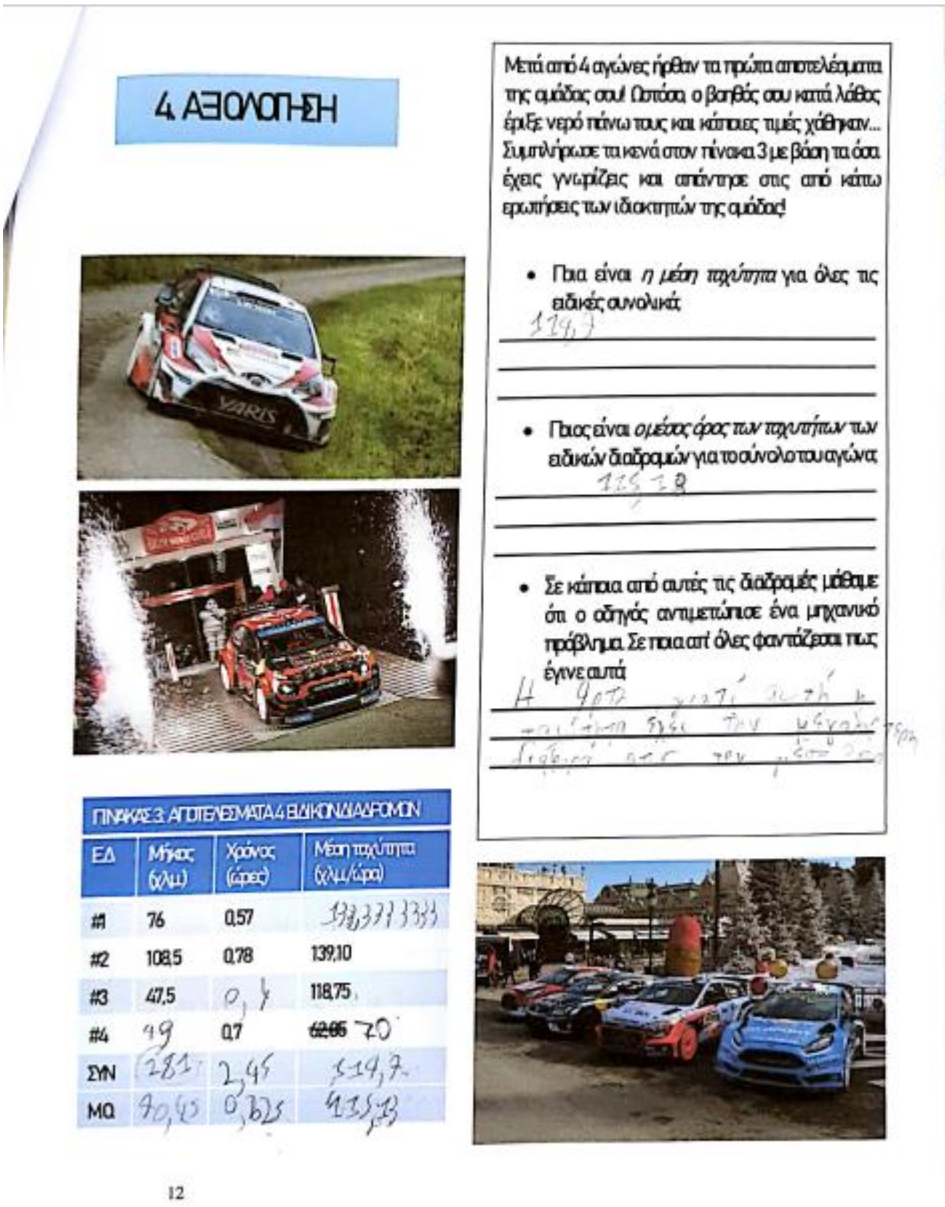
- Θα είχε νόημα να υπολογίσουμε τις στιγμιαίες ταχύτητες που είχε κάθε φορά ο ποδηλάτης; Γιατί;

  Όχι, γιατί είναι πάρα πολλές

- Τελικά τι είναι η μέση ταχύτητα;

  Μέση ταχύτητα είναι περίπου [illegible] ταχύτητα [illegible] συνολικά σε μία διαδρομή

11



4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Μετά από 4 αγώνες ήρθαν τα πρώτα αποτελέσματα της ομάδας σου! Ωστόσο, ο βοηθός σου κατά λάθος έριξε νερό πάνω τους και κάποιες τιμές χάθηκαν... Συμπλήρωσε τα κενά στον πίνακα 3 με βάση τα όσα έχεις γνωρίζεις και απάντησε στις από κάτω ερωτήσεις των ιδιοκτητών της ομάδας!

- Ποια είναι *η μέση ταχύτητα* για όλες τις ειδικές συνολικά;
  119,7
- Ποιος είναι *ο μέσος όρος των ταχυτήτων* των ειδικών διαδρομών για το σύνολο του αγώνα;
  115,18
- Σε κάποια από αυτές τις διαδρομές μάθαμε ότι ο οδηγός αντιμετώπισε ένα μηχανικό πρόβλημα. Σε ποια απ' όλες φαντάζεσαι πως έγινε αυτό;
  Η 4η γιατί αυτή η ταχύτητα έχει την μεγαλύτερη [illegible] από την μέση [illegible]

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 4 ΕΙΔΙΚΩΝ ΔΙΑΔΡΟΜΩΝ

ΕΔ	Μήκος (χλμ)	Χρόνος (ώρες)	Μέση ταχύτητα (χλμ/ώρα)
#1	76	0,57	133,3333333
#2	108,5	0,78	139,10
#3	47,5	0,4	118,75
#4	49	0,7	~~62,86~~ 70
ΣΥΝ	281	2,45	114,7
ΜΟ	70,25	0,625	115,18

12

5. ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

- Θα πρότεινες το συγκεκριμένο φυλλάδιο σε κάποιο φίλο σου που θέλει να μάθει για την μέση ταχύτητα και τον μέσο όρο;

  Ναι

- Παρατήρησες κάποια αλλαγή σε σχέση με όσα ήξερες για τον μέσο όρο και την μέση ταχύτητα σε σχέση με όσα ήξερες στην αρχή; Εάν ναι, τι άλλαξε στην πορεία;

  Ναι

- Εάν όντως άλλαξαν τα όσα πίστευες στην αρχή των δραστηριοτήτων, ποιο σημείο σε βοήθησε περισσότερο να αλλάξεις γνώμη;

  Αυτή με την ταχύτητα με τα αυτοκίνητα

- Δες ξανά τις δραστηριότητες που συμπλήρωσες από την αρχή. Υπάρχουν απαντήσεις θα ήθελες να αλλάξεις σε σχέση με την αρχική σου απάντηση; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;

  Όχι

- Ποιο σημείο θεωρείς ότι σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί; Ποιο σημείο σου άρεσε αντίστοιχα περισσότερο;

  Με τα αυτοκίνητα γιατί έπρεπε να υπολογίσω πόση ταχύτητα έπρεπε να βάλω για να των [illegible].

- Τα ψηφιακά λογισμικά σε βοήθησαν να κατανοήσεις καλύτερα τις έννοιες, ή σε δυσκόλεψαν; Γιατί;

  Με βοήθησαν για να τα μάθω πιο γρήγορα.

13

- Υπάρχει κάποιο σημείο στην διαδικασία ή στο φυλλάδιο που θα ήθελες να αλλάξεις; Ποιο είναι αυτό και γιατί θεωρείς ότι πρέπει να αλλάξει;

Δεν θα άλλαζα τίποτα.

14

ΓΠ Pre

Αναθεωρημένο ερευνητικό ερωτηματολόγιο (pre-test/post-test).

Ερευνητικά ερωτήματα προς απάντηση:

- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσου όρου;
- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσης ταχύτητας;

1.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέσος όρος»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

Στο σχολείο

2.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέση ταχύτητα»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

Στο σχολείο

3.Σε μία έρευνα που έγινε στο οδικό δίκτυο της Ρόδου, βρέθηκε ότι υπάρχουν 6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; (Βάλε ένα «Σ» σε αυτές που θεωρείς σωστές, «Λ» σε αυτές που θεωρείς λάθος.)

- Λ Ένας από τους δρόμους της Ρόδου είχε 6,7 πινακίδες.
- Σ Κάποιος δρόμος μπορεί και να μην έχει καμία πινακίδα.
- Λ Οι περισσότεροι δρόμοι της Ρόδου είχαν ή 6 ή 7 πινακίδες.
- Λ Αν περπατούσαμε σε ένα τυχαίο δρόμο της Ρόδου, θα περιμέναμε να βρούμε 6 με 7 πινακίδες περίπου στον δρόμο.

1

4.Κατά την διάρκεια δύο εβδομάδων, ένας αστυνομικός έκοψε τον έξης αριθμό κλήσειων:

Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ	Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ
7	3	10	3	6	3	3	11	5	0

Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:

- 6 κλήσεις ανά μέρα
- 10 κλήσεις ανά μέρα
- 3 κλήσεις ανά μέρα
- 7 κλήσεις ανά μέρα
- 5,66 κλήσεις ανά μέρα
- 5,1 κλήσεις ανά μέρα

5.Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις; 23-5=18

Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η
Κλήσεις	4,5	4,5	4,5	4,5	5

6.Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλευε μονάχα 3 μέρες..

1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 31
   b. 155
   c. 71
   d. Άλλο_____
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 200

2

4.Κατά την διάρκεια δύο εβδομάδων, ένας αστυνομικός έκοψε τον έξης αριθμό κλήσειων:

Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ	Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ
7	3	10	3	6	3	3	11	5	0

Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:

- 6 κλήσεις ανά μέρα
- 10 κλήσεις ανά μέρα
- 3 κλήσεις ανά μέρα
- 7 κλήσεις ανά μέρα
- 5,66 κλήσεις ανά μέρα
- 5,1 κλήσεις ανά μέρα

5.Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις; 23 - 5 = 18

Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η
Κλήσεις	4,5	4,5	4,5	4,5	5

6.Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλεψε μονάχα 3 μέρες..

1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 31
   b. 155
   c. 71
   d. Άλλο_____
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 200

2

- 83,3 χλμ./ώρα

9.Ένα ελικόπτερο της πυροσβεστικής κατά την διάρκεια μιας επιχείρησης πυρόσβεσης κάλυψε μια απόσταση ίση με 300 χλμ. σε 3 ώρες. Εάν την τελευταία ώρα κάλυψε την διπλάσια απόσταση σε σχέση με αυτή που είχε καλύψει τις προηγούμενες δύο, με τι ταχύτητα κινούταν τις προηγούμενες δύο ώρες;

- 100 χλμ./ώρα
- 200 χλμ./ώρα
- 50 χλμ./ώρα

10.Η Γιάννα ξεκίνησε από την Αθήνα για να πάει σε μια παραλία της Πάτρας, η οποία απέχει 240 χλμ. από το σπίτι της, πηγαίνοντας με 80 χλμ./ώρα. Ο παππούς της ξεκίνησε από την Κόρινθο για την ίδια παραλία, η οποία απέχει 120 χλμ. από την ίδια παραλία, με τον ίδιο προορισμό με την Γιάννα, αλλά επειδή πήγαινε με το αγροτικό του όχημα, κινούταν με 40 χλμ./ώρα. Ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος;

- Ο παππούς
- Η Γιάννα
- Θα φτάσουν ταυτόχρονα

240 | 80
−240 | 3

120 | 40
−120 | 3

4

Αναθεωρημένο ερευνητικό ερωτηματολόγιο (pre-test/post-test).

Ερευνητικά ερωτήματα προς απάντηση:

- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσου όρου;
- Ποιες είναι οι εναλλακτικές αντιλήψεις που εφαρμόζουν οι μαθητές κατά την χρήση του αλγόριθμου της μέσης ταχύτητας και κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων μέσης ταχύτητας;

1.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέσος όρος»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

____

____

2.Έχεις ακούσει ποτέ την έκφραση «μέση ταχύτητα»;

- Ναι
- Όχι

Εάν ναι, πού το έχεις ακούσει;

____

____

3.Σε μία έρευνα που έγινε στο οδικό δίκτυο της Ρόδου, βρέθηκε ότι υπάρχουν 6,7 πινακίδες ανά χιλιόμετρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; (Βάλε ένα «Σ» σε αυτές που θεωρείς σωστές, «Λ» σε αυτές που θεωρείς λάθος.)

- Λ Ένας από τους δρόμους της Ρόδου είχε 6,7 πινακίδες.
- Σ Κάποιος δρόμος μπορεί και να μην έχει καμία πινακίδα.
- Σ Οι περισσότεροι δρόμοι της Ρόδου είχαν ή 6 ή 7 πινακίδες.
- Σ Αν περπατούσαμε σε ένα τυχαίο δρόμο της Ρόδου, θα περιμέναμε να βρούμε 6 με 7 πινακίδες περίπου στον δρόμο.

1

4.Κατά την διάρκεια δύο εβδομάδων, ένας αστυνομικός έκοψε τον έξης αριθμό κλήσεων:

Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ	Δ	Τρ	Τετ	Π	Παρ
7	3	10	3	6	3	3	11	5	0

Ο μέσος όρος των κλήσεων που έκοβε κάθε μέρα, τις τελευταίες δύο εβδομάδες είναι:

- 6 κλήσεις ανά μέρα
- 10 κλήσεις ανά μέρα
- 3 κλήσεις ανά μέρα
- 7 κλήσεις ανά μέρα
- 5,66 κλήσεις ανά μέρα
- 5,1 κλήσεις ανά μέρα

5.Ένας άλλος τροχονόμος έκοψε 4,6 κλήσεις κατά μέσο όρο ανά μέρα, σε διάρκεια 5 ημερών. Μπορείς να συμπληρώσεις στον παρακάτω πίνακα πόσες κλήσεις έκοψε κάθε μέρα, εάν την τελευταία μέρα έκοψε 5 κλήσεις;

Ημέρα	1η	2η	3η	4η	5η	Σύνολο
Κλήσεις	5	5	5	3	5	23

6.Μια εταιρία αυτοκινήτων έχει 2 εργοστάσια. Το πρώτο παρήγαγε στις 5 μέρες λειτουργίας του 31 αμάξια κατά μέσο όρο κάθε μέρα, ενώ το δεύτερο παρήγαγε 40 αμάξια κάθε μέρα λειτουργίας του κατά μέσο όρο, αλλά δούλεψε μονάχα 3 μέρες..

1. Πόσα αμάξια παρήγαγε το πρώτο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 31
   b. 155
   c. 71
   d. Άλλο_____
2. Πόσα αμάξια παρήγαγε το δεύτερο εργοστάσιο συνολικά;
   a. 200

2

b. 40
c. 120
d. Άλλο_____

3. Στην διάρκεια των 5 ημερών, πόσα αμάξια παρήχθησαν για την εταιρία και από τα δύο εργοστάσια μαζί κατά μέσο όρο ανά ημέρα;
   a. 35,5 αμάξια
   b. 36 αμάξια
   c. 71 αμάξια
   d. 55 αμάξια

7.Ο Ανδρέας και ο Βαγγέλης ξεκινάνε τρέχουν ταυτόχρονα. Ο Ανδρέας καλύπτει μια απόσταση 100 μέτρων σε 10 δευτερόλεπτα και τερματίζει, ενώ ο Βαγγέλης διασχίζει μια απόσταση 240 μέτρων και τερματίζει όταν το ρολόι δείχνει 12 δευτερόλεπτα. Ποιος από τους δύο έτρεξε πιο γρήγορα;

- Ο Ανδρέας
- Ο Βαγγέλης
- Έτρεχαν και οι δύο με την ίδια ταχύτητα

8.Ένας οδηγός ξεκινάει από την Βιέννη και κινείται με ταχύτητα 120 χλμ./ώρα για δύο ώρες προς τις Άλπεις. Στη συνέχεια κάνει στάση για 1 ώρα και μετά, συνεχίζει να ανεβαίνει το βουνό με ταχύτητα 90 χλμ./ώρα για μια ώρα. Σταματάει όμως λόγω ενός ατυχήματος και βάζει αλυσίδες, χάνοντας άλλη μια ώρα ακινητοποιημένος. Αφού έβαλε τις αλυσίδες στα λάστιχά του, κινήθηκε για άλλες δύο ώρες με 40 χλμ./ώρα, μέχρι που έφτασε στον προορισμό του.

❖ Πόσα χιλιόμετρα διένυσε ο οδηγός;
   - 250 χλμ.
   - 500 χλμ.
   - 410 χλμ.

❖ Ποια ήταν η μέση ταχύτητα που κινήθηκε ο οδηγός στο σύνολο του ταξιδιού;
   - 120 χλμ./ώρα
   - 58,5 χλμ./ώρα
   - 35,7 χλμ./ώρα

3

- 83,3 χλμ./ώρα

9.Ένα ελικόπτερο της πυροσβεστικής κατά την διάρκεια μιας επιχείρησης πυρόσβεσης κάλυψε μια απόσταση ίση με 300 χλμ. σε 3 ώρες. Εάν την τελευταία ώρα κάλυψε την διπλάσια απόσταση σε σχέση με αυτή που είχε καλύψει τις προηγούμενες δύο, με τι ταχύτητα κινούταν τις προηγούμενες δύο ώρες;

- 100 χλμ./ώρα
- 200 χλμ./ώρα
- 50 χλμ./ώρα

10.Η Γιάννα ξεκίνησε από την Αθήνα για να πάει σε μια παραλία της Πάτρας, η οποία απέχει 240 χλμ. από το σπίτι της, πηγαίνοντας με 80 χλμ./ώρα. Ο παππούς της ξεκίνησε από την Κόρινθο για την ίδια παραλία, η οποία απέχει 120 χλμ. από την ίδια παραλία, με τον ίδιο προορισμό με την Γιάννα, αλλά επειδή πήγαινε με το αγροτικό του όχημα, κινούταν με 40 χλμ./ώρα. Ποιος από τους δύο θα φτάσει πρώτος;

- Ο παππούς
- Η Γιάννα
- Θα φτάσουν ταυτόχρονα

4