



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

ΚΟΜΠΟΙ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Διπλωματική Εργασία της φοιτήτριας
Ντόμπρη Μαρία - Καλλιόπη

Επιβλέπων Καθηγητής: Μεταφτσής Βασίλειος

Καρλόβασι, Φεβρουάριος 2020

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

ΚΟΜΠΟΙ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Διπλωματική Εργασία της φοιτήτριας
Ντόμπρη Μαρία - Καλλιόπη

Επιβλέπων Καθηγητής: Μεταφτσής Βασίλειος

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Μεταφτσής Βασίλειος
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Παπαλεξίου Νικόλαος
Επίκουρος Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πρασίδης Ευστράτιος
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Καρλόβασι, Φεβρουάριος 2020

Περιεχόμενα

1	Κόμποι, κρίκοι και διαγράμματα.	5
1.1	Διαγράμματα κόμπων και κρίκων.	5
1.2	Ισοτοπία και Reidemeister κινήσεις.	8
1.3	Τριχρωματισιμότητα.	10
1.4	Παραδείγματα.	13
1.5	Αριθμητικές αναλλοιώτες.	14
1.6	Chiral, αντιστρέψιμοι και εναλλασσόμενοι κόμποι.	19
1.7	Παράδειγμα.	21
2	Πολυώνυμα κόμπων και κρίκων.	23
2.1	State μοντέλα και πολυώνυμο Kauffman.	23
2.2	Το πολυώνυμο Jones.	37
2.3	Εφαρμογές του πολυωνύμου Kauffman.	38
2.4	Πολυώνυμο H.O.M.F.L.Y..	42
2.5	Πολυώνυμο Alexander.	46
3	Τοπολογικοί χώροι.	51
3.1	Τοπολογικοί χώροι.	51
3.2	Συνέχεια	52
3.3	Συνεκτικότητα.	53
3.4	Ταυτοτικοί Χώροι.	54
3.5	Κόμποι και Ισοτοπία.	55
4	Επιφάνειες	59
4.1	Συνδυαστικές Επιφάνειες	60
4.2	Cutting and Pasting	67
4.3	Αναλλοιώτες επιφανειών: Προσανατολισιμότητα και συνοριακές καμπύλες	75
4.4	Αναλλοιώτες επιφάνειες: Χαρακτηριστική Euler και γένος.	79
4.5	Κόμποι και επιφάνειες.	82
4.6	Παραδείγματα	85

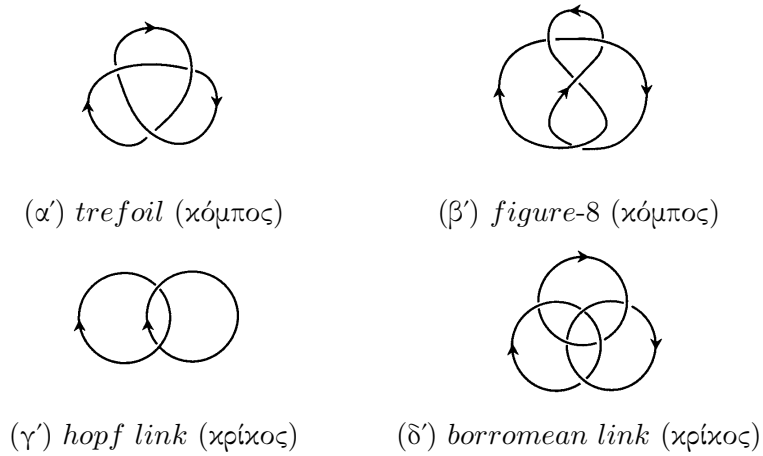
Κεφάλαιο 1

Κόμποι, κρίκοι και διαγράμματα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια του κόμπου (*knot*), του κρίκου (*link*) και της ισοτοπίας αλλά και άλλες έννοιες που μπορούν να χαρακτηρίσουν τους κόμπους και τους κρίκους.

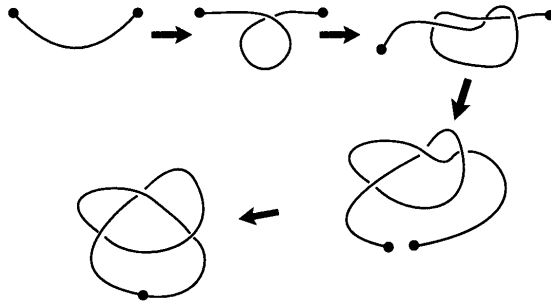
1.1 Διαγράμματα κόμπων και κρίκων.

Η μορφή του κόμπου στον χώρο μπορεί να αποδοθεί από ένα καλά μπλεγμένο κουβάρι σχοινοῦ. Ενώ ο κρίκος προκύπτει από δυο ή και περισσότερα σχοινιά μπλεγμένα μεταξύ τους. Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια του κόμπου, αρκεί να φανταστούμε ένα σχοινί, του οποίου τα άκρα είναι ελεύθερα, σχηματίζοντας συνδέσεις μεταξύ τους, παρά τις όποιες αλληλεπιδράσεις των άκρων, αυτά καταλήγουν ενωμένα, σχηματίζοντας ένα κόμπο. Άρα, μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις δύο παραπάνω έννοιες από τη χρήση ενός ή και περισσότερων σχοινοῦν, τα οποία θα ονομάζονται *συνιστώσες* (*components*). Έτσι, ένας κόμπος έχει μια συνιστώσα και ένας κρίκος δύο ή και περισσότερες συνιστώσες. Η μελέτη των κόμπων και των κρίκων θα γίνει με τη χρήση των διαγραμμάτων, δηλαδή με την εικόνα τόσο του κόμπου, όσο και του κρίκου, από τον τρισδιάστατο χώρο στο επίπεδο. Παρακάτω δίνονται δύο παραδείγματα για κάθε κατηγορία διαγραμμάτων.



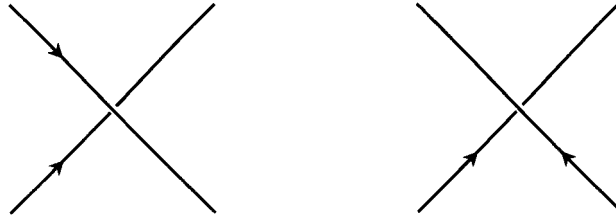
Σχήμα 1.1: κόμποι και κρίκοι

Στα σχήματα 1.1.α, 1.1.β, 1.1.γ και 1.1.δ βλέπουμε μερικά διαγράμματα, στα οποία μπορούμε να διακρίνουμε ότι το σχοινί σπάει σε πολλά κομμάτια σε εκείνα τα σημεία που θα συναντιούνται τα άκρα του σχοινιού. Στην πραγματικότητα, στον τρισδιάστατο χώρο τα "σπασίματα" αυτά δηλώνουν ποιο μέρος του σχοινιού είναι πάνω και ποιο βρίσκεται από κάτω.



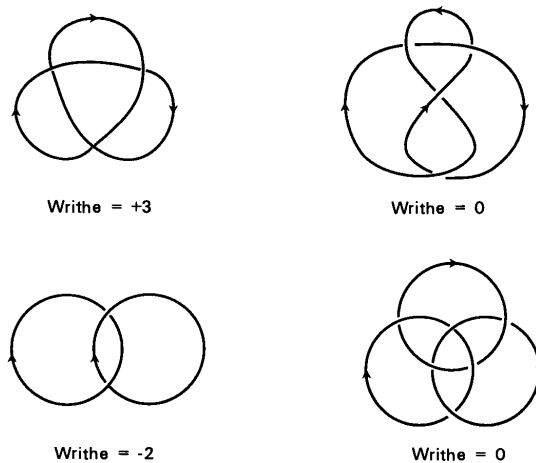
Σχήμα 1.2: αναπαράσταση σχηματισμού του κόμπου

Θα ορίσουμε, λοιπόν, ως τόξο το συνεχές κομμάτι της συνιστώσας και ως διασταύρωση τα σημεία στα οποία συναντιούνται τα τόξα. Σε κάθε διασταύρωση έχουμε ένα κάτω μονοπάτι (*underpass*), δηλαδή ένα κομμάτι σχοινιού που σπάει καθώς συναντάει ένα τόξο-άνω μονοπάτι (*overpass*). Επίσης, ο προσανατολισμός σ' ένα διάγραμμα δηλώνει τη κατεύθυνση κάθε συνιστώσας και συμβολίζεται με ένα βέλος, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Τα διαγράμματα που έχουν κάποιον προσανατολισμό θα τα λέμε προσανατολισμένα. Σε κάθε προσανατολισμένο διάγραμμα οι διασταυρώσεις είναι είτε θετικές είτε αρνητικές με το πρόσημο να προκύπτει όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: θετική διασταύρωση (+1) και αρνητική διασταύρωση (-1) αντιστοίχως!!

Στο προσανατολισμένο διάγραμμα D ορίζουμε την ποσότητα *writhe* να είναι το άθροισμα των προσήμων όλων των διασταυρώσεων και το συμβολίζουμε με $w(D)$.



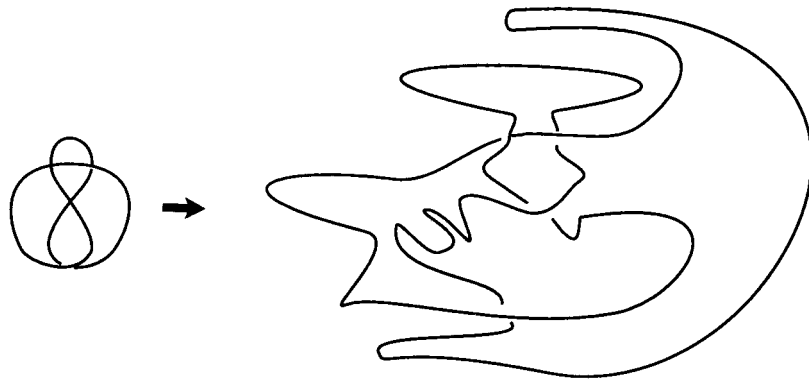
Σχήμα 1.4: Υπολογισμός του *writhe* σε κάθε κόμπος

Στους κρίκους μπορούμε να υπολογίσουμε και το *linking number* των C_i και C_j , όπου C_i και C_j είναι διακριτές συνιστώσες του σε ένα διάγραμμα D και μάλιστα είναι ίσο με το μισό του *writhe*, $w(D)$. Το *linking number* συμβολίζεται με $lk(C_i, C_j)$ και $lk(D)$ είναι το *linking number* του D το άθροισμα όλων των *linking number* των ζευγών των συνιστωσών, δηλαδή:

$$lk(D) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} lk(C_i, C_j)$$

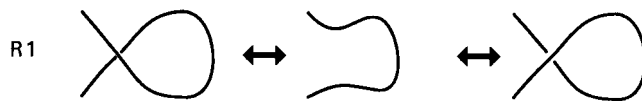
1.2 Ισοτοπία και Reidemeister κινήσεις.

Θα εισάγουμε τώρα την έννοια της ισοτοπίας, σαν μία σχέση ισοδυναμίας μεταξύ διαγραμμάτων, η οποία εξασφαλίζεται μέσω των κινήσεων *Reidemeister*. Αλλά ας ορίσουμε πρώτα ποιες είναι οι κινήσεις *Reidemeister*. Η $R0$ είναι μια κίνηση που επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε το σχοινί μας ελαστικό. Δηλαδή, δημιουργεί μία παραμόρφωση στο διάγραμμα μας χωρίς να επηρεάζει κάποια διασταύρωση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: $R0$ κίνηση

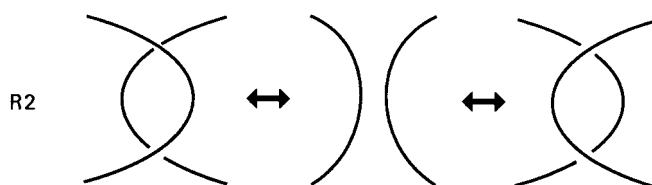
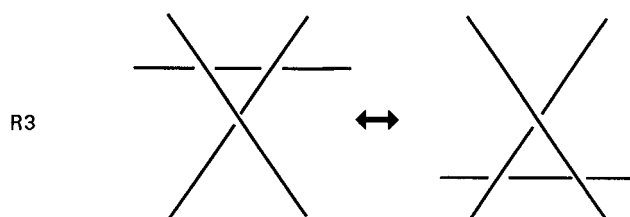
Η $R1$ κίνηση προκαλεί στο νέο διάγραμμά μας μία επιπλέον διασταύρωση (σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6: $R1$ κίνηση

Ενώ η $R2$ κίνηση προσθέτει άλλες δύο διασταυρώσεις (σχήμα 1.7) και η $R3$ διατηρεί τον αριθμό διασταυρώσεων, αφήνοντας το δεύτερο κάτω μονοπάτι ελεύθερο να κινείται, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.8.

Ορισμός 1.2.1. Θα λέμε ότι τα διαγράμματα D και D' είναι **ισοτοπικά** (*isotopic*) μεταξύ τους, αν το D' προκύπτει από το D μέσω μιας αλληλουχίας κινήσεων *Reidemeister*, $R1$, $R2$ και $R3$.

Σχήμα 1.7: $R2$ κίνησηΣχήμα 1.8: $R3$ κίνηση

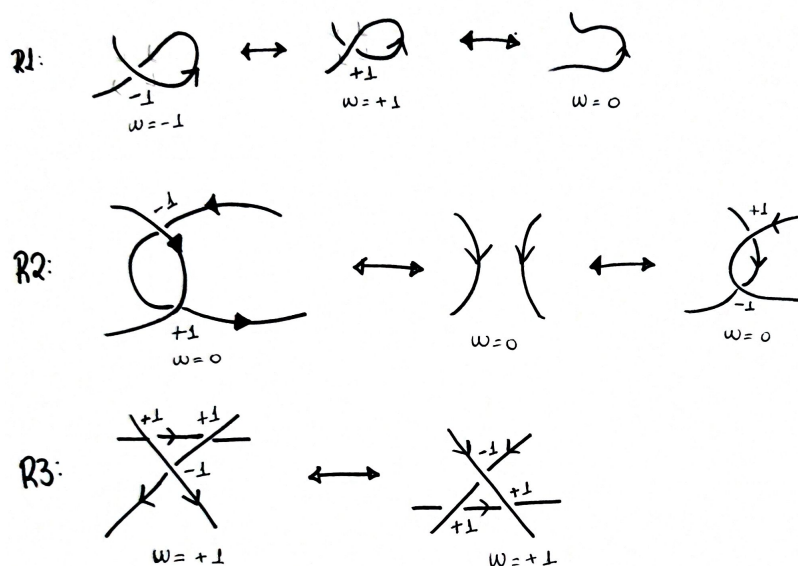
Ορισμός 1.2.2. Θα λέμε ότι τα διαγράμματα είναι **κανονικά ισοτοπικά** (*regularly isotopic*), αν το D' προκύπτει από το D μέσω μιας σειράς $R2$ και $R3$ κινήσεων, χωρίς την $R1$.

Η κλάση ισοτοπίας είναι μια κλάση ισοδύναμων διαγραμμάτων που εμφανίζουν το ίδιο μοτίβο "πλεξίματος", το οποίο μοτίβο αυτό προκύπτει μέσω κινήσεων Reidemeister.

Ορισμός 1.2.3. Όταν ένα διάγραμμα D έχει μια μεταβλητή ίδια με το ισοτοπικό διάγραμμα D' , αλλά και με όλα τα άλλα ισοτοπικά διαγράμματα με το D , τότε οι μεταβλητές αυτές λέγονται **αναλλοίωτες ισοτοπίας** (*invariant isotopy*). Η αναλλοίωτη ισοτοπίας πρέπει να ικανοποιεί τις $R0$, $R1$, $R2$ και $R3$ κινήσεις Reidemeister και μάλιστα όσες μεταβλητές παραμένουν ίδιες μόνο στις κινήσεις $R2$, $R3$ θα λέγονται **αναλλοίωτες κανονικής ισοτοπίας**.

Παράδειγμα 1.2.4. Ο αριθμός συνιστωσών είναι μια αναλλοίωτη ισοτοπίας, καθώς πάρα τις αλλαγές που δημιουργούν στις διασταυρώσεις οι $R1$, $R2$ και $R3$, οι συνιστώσες μένουν οι ίδιες. Π.χ. στο trefoil η συνιστώσα είναι 1, ανεξαρτήτως των δράσεων των R -κινήσεων.

Παράδειγμα 1.2.5. Το *writhe* είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.9 το *writhe* στις $R2$ και $R3$ παραμένει αμετάβλητο, ενώ στην $R1$ προκύπτει μια νέα διασταύρωση είτε θετικού, είτε αρνητικού προσανατολισμού. Αντίστοιχα, το *linking number* είναι αναλλοίωτη κανονικής ισοτοπίας για ένα προσανατολισμένο διάγραμμα κρίκου D .



Σχήμα 1.9: Απόδειξη κανονικής ισοτοπίας του *writhe*

1.3 Τριχρωματισιμότητα.

Ορισμός 1.3.1. Ένα διάγραμμα D λέγεται τριχρωματίσιμο, αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν χρώματα στα τόξα του, ώστε:

3XP1: κάθε τόξο να χρησιμοποιεί ένα χρώμα

3XP2: ακριβώς τρία χρώματα να χρησιμοποιούνται συνολικά στο διάγραμμα

3XP3: σε κάθε διασταύρωση, είτε όλα τα τόξα να έχουν το ίδιο χρώμα, είτε τρία διαφορετικά χρώματα να συναντιούνται.

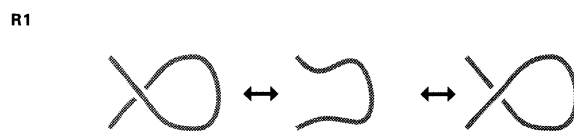
Παραδείγματα 1.3.2.



Σχήμα 1.10: παραδείγματα τριχρωματίσιμων κόμπων

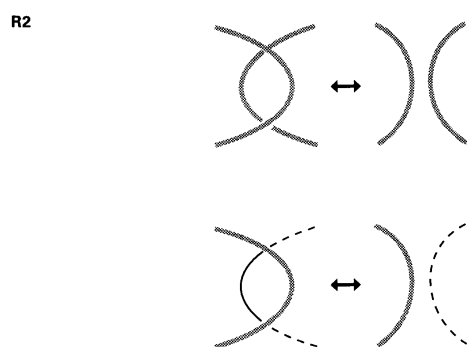
Θεώρημα 1.3.3. *Η τριχρωματισιμότητα είναι μια αναλλοίωτη ισοτοπίας.*

Απόδειξη. Για την κίνηση $R1$ έχουμε υποχρεωτικά τη συμμετοχή ενός μόνο χρώματος.



Σχήμα 1.11

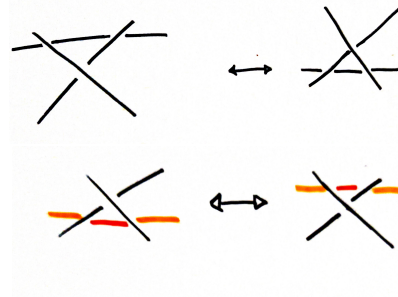
Για την $R2$ έχουμε δύο ενδεχόμενα: είτε τη συμμετοχή ενός μόνο χρώματος σε κάθε τόξο των δύο διασταυρώσεων, είτε τρία ακριβώς χρώματα.



Σχήμα 1.12

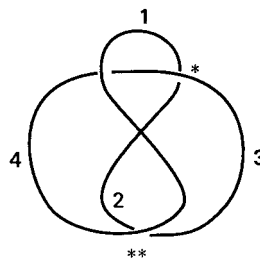
Τέλος, για την $R3$ η τριχρωματισιμότητα εξασφαλίζεται πάλι με τη συμμετοχή ενός μόνο χρώματος ή με τρία, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.13.

□



Σχήμα 1.13

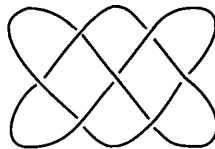
Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το διάγραμμα χωρίς διασταυρώσεις (*unknot*) δεν είναι τριχρωματήσιμο, αφού αποτελείται από ένα μόνο τόξο, άρα ένα μόνο χρώμα μπορεί να συμμετέχει. Επίσης, το *figure – 8* δεν είναι τριχρωματίσιμο. Έστω ότι ξεκινάμε να χρωματίζουμε από την πρώτη (*) διασταύρωση, τοποθετώντας το ίδιο χρώμα και στα τρία τόξα, επομένως στη δεύτερη (**) διασταύρωση έχουμε ήδη χρωματισμένα τα δύο τόξα με το ίδιο χρώμα ως συνέχεια των προηγούμενων τόξων, άρα μπορούμε να τοποθετήσουμε πάλι το ίδιο χρώμα. Οπότε, καταλήγουμε σε ένα διάγραμμα χρωματισμένο με ένα χρώμα. Από την άλλη, αν επιλέξουμε να χρωματίσουμε την πρώτη (*) διασταύρωση με τρία διαφορετικά χρώματα, τότε καταλήγουμε στη δεύτερη (**) διασταύρωση να έχουμε ήδη δυο χρώματα διαφορετικά και προσθέτουμε στο τρίτο τόξο το τρίτο χρώμα, όμως καταλήγουμε στις άλλες διασταυρώσεις να έχουμε ένα χρώμα σε δύο τόξα από τα τρία συμμετέχοντα. Αυτό αντίκειται στον ορισμό της τριχρωματισιμότητας.



Σχήμα 1.14: Συμβολίζουμε με 1,2,3,4 τα ξεχωριστά χρώματα, τα οποία δείχνουν ότι δεν τριχρωματίζεται το *figure-8*

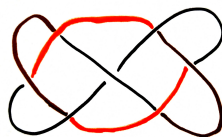
1.4 Παραδείγματα.

1. Ας ελέγξουμε ποιό κόμπος είναι χρωματίσιμος. Έχουμε τον παρακάτω κόμπος.



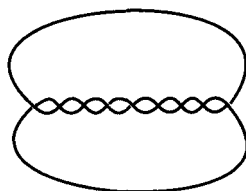
Σχήμα 1.15

Παρατηρούμε πως με τη χρήση των παρακάτω χρωμάτων (καφέ, μαύρο και κόκκινο), τριών στο πλήθος, ο κόμπος χρωματίζεται σύμφωνα με τους κανόνες μας.



Σχήμα 1.16

Αντίστοιχα και για τον παρακάτω κόμπος (σχήμα 1.17) ο χρωματισμός του είναι εφικτός, σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.17

2. Μπορεί η τριχρωματισσιμότητα να εφαρμοστεί και στην μελέτη των κρίκων;



Σχήμα 1.18

Προκειμένου να απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση, θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την τριχρωματισσιμότητα σε κάποιους βασικούς κρίκους. Θα μελετήσουμε τη τριχρωματισσιμότητα για το *Hopf link* και για το *Borromean links*.



Σχήμα 1.19

Προφανώς για το *hopf link* είναι αδύνατο να εφαρμοστεί η τριχρωματισσιμότητα, ενώ στα *borromean links* μπορούμε να βάλουμε στην 1 διασταύρωση το χρώμα κόκκινο, στην 2 το καφέ και μαύρο χρώμα και στην 5 να προσθέσουμε πάλι το μαύρο χρώμα, έτσι παρ' όλο που στην 6 διασταύρωση είναι όλα καλά, στην 4 και 3 υπάρχει η συμμετοχή μόνο δύο χρωμάτων. Οπότε παρατηρούμε ότι δε μπορούμε να την εφαρμόσουμε τριχρωματισσιμότητα.

1.5 Αριθμητικές αναλλοιώτες.

Οι ιδιότητες ενός κόμπου ή κρίκου ορίζονται μέσω της κλάσης ισοτοπίας, στην οποία ανήκει το διάγραμμα του κόμπου και είναι αναλλοιώτες ισοτοπίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι με τον όρο κόμπο θα εννοούμε όλα τα διαγράμματα που ανήκουν σε μία κλάσης ισοτοπία και άρα πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε την κλάση ισοτοπίας του κόμπου. Γι' αυτό θα χρησιμοποιούμε το ονομαζόμενο διάγραμμα, όπως είναι το *trefoil* ή το *figure - 8*.

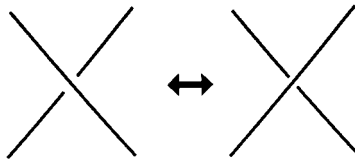
Αριθμός διασταυρώσεων

Έστω ένας κόμπος K , ο αριθμός διασταυρώσεων $c(K)$ του K είναι ο ελάχιστος αριθμός των διασταυρώσεων σε ένα διάγραμμα στην κλάση ισοτοπία K . Δηλαδή, ο αριθμός διασταυρώσεων είναι το πλήθος των διασταυρώσεων στην απλούστερη εικόνα ενός κόμπου K . Ένα διάγραμμα ενός κόμπου K με $c(K)$ διασταυρώσεις ονομάζεται ελάχιστο διάγραμμα.

Παραδείγματα 1.5.1. $c(\text{unknot})=0$, $c(\text{trefoil})=3$ και $c(\text{figure-8})=4$. Αυτά είναι τα ελάχιστα διαγράμματα για κάθε κατηγορία διασταυρώσεων πλήθους 0, 3 και 4 αντιστοίχως.

Αριθμός λύσεων

Μία αλλαγή διασταύρωσης (*crossing change*) σε ένα διάγραμμα είναι η αλλαγή ενός άνω μονοπατιού σε κάτω και ενός κάτω μονοπατιού σε άνω.

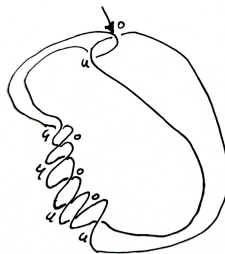


Σχήμα 1.20: Αλλαγή διασταύρωσης

Οι αλλαγές στις διασταυρώσεις αλλάζουν την ισοτοπία σ' ένα διάγραμμα.

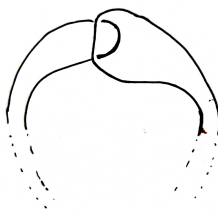
Λήμμα 1.5.2. Έστω ένα διάγραμμα D με c διασταυρώσεις. Αν αλλάξουμε το πολύ $c/2$ διασταυρώσεις του D , θα έχουμε ένα *unknot* διάγραμμα, δηλαδή λύνεται ο κόμπος.

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη του λήμματος, θα το επαληθεύσουμε για μερικά διαγράμματα.



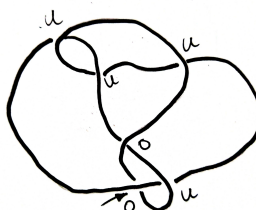
Σχήμα 1.21

Εδώ παρατηρούμε ότι οι διασταυρώσεις είναι $c=9$, τα άνω μονοπάτια $o=4$ και κάτω μονοπάτια $u=4$. Έχουμε ότι $c/2=4$. Αν δράσουμε πάνω στη διασταύρωση που υποδεικνύει το βέλος μας ο κόμπος λύθηκε, καθώς όλες πλέον οι διασταυρώσεις απλά ξελύνονται. Άρα έχουμε μια λύση.



Σχήμα 1.22: Ο λυμένος πλέον κόμπος

Με την ίδια λογική βλέπουμε πως ο κόμπος αυτός έχει διασταυρώσεις $c=6$, άνω μονοπάτια $o=2$, κάτω μονοπάτια $u=4$ και $c/2=3$.



Σχήμα 1.23

Αν δράσουμε πάνω στη διασταύρωση που υποδεικνύει το βέλος για άλλη μια φορά λύνεται ο κόμπος με αριθμό λύσεων $u(D)=1$.



Σχήμα 1.24: Ο λυμένος πλέον κόμπος

Άρα παρατηρούμε ότι πληρείται το θεώρημα, αλλά ας δούμε και την ακριβή απόδειξη.

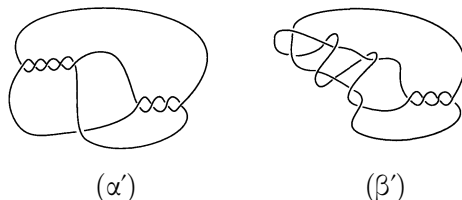
Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε πάνω στο διάγραμμα D σ' ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω σ' ένα τόξο. Καθώς κινούμαστε πάνω στο τόξο συναντάμε τη πρώτη διασταύρωση, όπου και σημειώνουμε σε τι θέση είμαστε, δηλαδή αν βρισκόμαστε σε άνω ή κάτω μονοπάτι. Το ίδιο γίνεται μέχρι να περάσουμε απ' όλες τις διασταυρώσεις, ώστε εν τέλει κάθε διασταύρωση να έχει χαρακτηριστεί είτε ως άνω, είτε ως κάτω. Έπειτα μετράμε το πλήθος τόσο των κάτω, όσο και των άνω μονοπατιών. Όποιο πλήθος είναι το μικρότερο, από αυτά θα ξεκινήσουμε να κάνουμε αλλαγές στις διασταυρώσεις. Η όλη αυτή διαδικασία μπορεί να περιλαμβάνει το πολύ $c/2$ αλλαγές, καθώς ήδη θα έχουμε καταλήξει σε ένα διάγραμμα κύκλου (*unknot*).

□

Ο αριθμός λύσεων $u(K)$ ενός κόμπου K είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός αλλαγών που μπορούν να γίνουν στις διασταυρώσεις, ώστε να δοθεί τελικά ένα διάγραμμα *unknot*. Κάνοντας διάφορες δοκιμές σε κόμπους καταλαβαίνουμε ότι είναι δύσκολο να υπολογιστεί ο αριθμός λύσεων, ειδικά για διαγράμματα με πολλές διασταυρώσεις. Μάλιστα, θα δούμε και στο ακόλουθο θεώρημα ότι η δυσκολία βρίσκεται και στο γεγονός ότι για μία κλάση ισοτοπίας διαγραμμάτων ο αριθμός λύσεων δεν προκύπτει απαραίτητα από το ελάχιστο διάγραμμα.

Θεώρημα 1.5.3. (*Bleiler 1984*) *Ο αριθμός λύσεων ενός κόμπου δεν δίνεται απαραίτητα από το ελάχιστο διάγραμμα.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε έναν κόμπο με το διάγραμμα του να δίνεται από το σχήμα 1.25(α'). Παρατηρούμε ότι αυτό έχει αριθμό διασταυρώσεων ίσο με 10. Ακολουθώντας το μοτίβο της παραπάνω απόδειξης βρίσκουμε ότι ο αριθμός λύσεων είναι ίσος με 2. Αντίθετα, αν βρούμε τον αριθμό λύσεων για τον κόμπο του διαγράμματος σχήμα 1.25(β'), θα δούμε ότι παρά τις 14 διασταυρώσεις, είναι ίσος με 1. Έτσι ενώ το πρώτο διάγραμμα είναι το ελάχιστο διάγραμμα, ο αριθμός λύσεων γι' αυτήν την κλάση ισοτοπίας προκύπτει από το διάγραμμα με περισσότερες διασταυρώσεις.

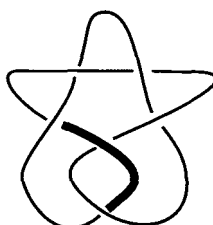


Σχήμα 1.25

□

Αριθμός γεφυρών Με τον όρο *γέφυρα* (*bridge*) εννοούμε ένα τόξο, το οποίο τουλάχιστον μία φορά βρίσκεται σε θέση άνω μονοπατιού.

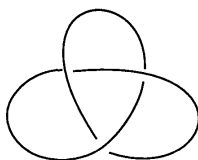
Παράδειγμα 1.5.4. Το έντονα σκιαγραφημένο τόξο είναι η γέφυρα.



Σχήμα 1.26: Γέφυρα

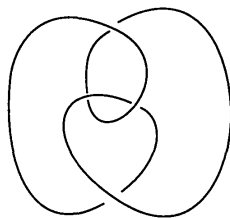
Ο αριθμός γεφυρών $b(K)$ ενός κόμπου είναι ο ελάχιστος αριθμός γεφυρών που έχει το διάγραμμα του κόμπου. Κατά κανόνα ο αριθμός γεφυρών του *unknot* είναι 1. Έτσι, όταν ένας κόμπος θα έχει $b(K)=1$ τότε αυτός είναι *unknot*.

Παράδειγμα 1.5.5. Το βασικό διάγραμμα του *trefoil* έχει 3 γέφυρες.



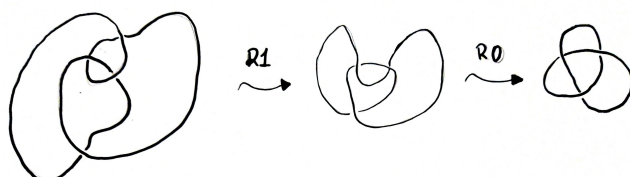
Σχήμα 1.27: $b(\text{trefoil}) = 3$

Ενώ το διάγραμμα του *trefoil* έχει 2 γέφυρες.



Σχήμα 1.28: $b(\text{trefoil}) = 2$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι μέσω της κίνησης $R1$ το διάγραμμα αυτό καταλήγει στο βασικό *trefoil*.

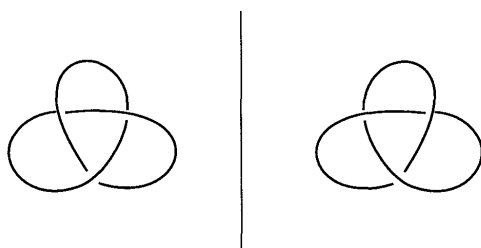


Σχήμα 1.29: Ύπαρξη ισοτοπίας μεταξύ των διαγραμμάτων

1.6 Chiral, αντιστρέψιμοι και εναλλασσόμενοι κόμποι.

Ορισμός 1.6.1. Μία **κατοπτρική εικόνα** (*mirror image*) του D , $D^!$, είναι ένα διάγραμμα κόμπου που προέρχεται από το D διάγραμμα, αλλάζοντας όλες τις διασταυρώσεις. Δηλαδή, κάθε κάτω μονοπάτι γίνεται άνω και κάθε άνω γίνεται κάτω μονοπάτι.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν κάθε κατοπτρική εικόνα $D^!$ είναι ισοτοπική με το διάγραμμα D . Παρατηρώντας το *trefoil* και την κατοπτρική εικόνα του, όπως βλέπουμε στην εικόνα 1.30, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε κάποια αλληλουχία κινήσεων *Reidemeister*, ώστε να είναι ισοτοπικά. Εν αντιθέσει με το *figure – 8* το οποίο είναι ισοτοπικό με το κατοπτρικό του (σχήμα 1.33).



Σχήμα 1.30

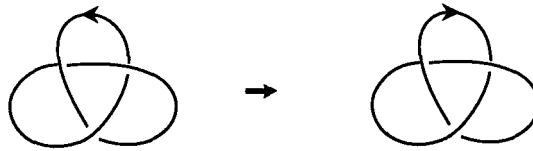
Η μεθοδολογία που ακολουθείται κατά την μετατροπή διαγραμμάτων στις κατοπτρικές τους εικόνες είναι να αλλάζουμε όλες τις διασταυρώσεις, όπως έχει ήδη οριστεί, ενώ για τη μετατροπή από κατοπτρική εικόνα στο αρχικό διάγραμμα αρκεί να γυρίσουμε τον κόμπο κατά 180 μοίρες και έτσι αντιστρέφονται όλα τα άνω και κάτω μονοπάτια.

Ορισμός 1.6.2. Ένα διάγραμμα λέγεται *chiral*, αν είναι ισοτοπικό με την κατοπτρική του εικόνα. Ενώ, αν δεν είναι λέγεται *achiral*.

Έστω τώρα ένα προσανατολισμένο διάγραμμα D . Το D' είναι το ίδιο το D αλλά με τον αντίθετο προσανατολισμό. Μπορεί εύκολα να διερωτηθεί κανείς, αν αυτά τα διαγράμματα είναι μεταξύ τους ισοτοπικά.

Ορισμός 1.6.3. Ένας κόμπος D λέγεται *αντιστρέψιμος* (*invertible*), αν είναι ισοτοπικός με τον εαυτό του και αντίθετο προσανατολισμό

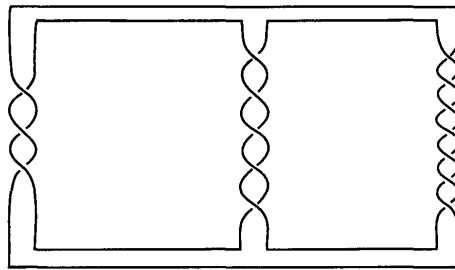
Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το *trefoil* που είναι αντιστρέψιμο.



Σχήμα 1.31

Τέλος, μία ακόμη σημαντική κατηγορία διαγραμμάτων είναι τα εναλλασσόμενα (*alternating*)

Ορισμός 1.6.4. Ένα διάγραμμα κόμπου D λέγεται *εναλλασσόμενο*, αν υπάρχει αυστηρή εναλλαγή στην ακολουθία κάτω και άνω μονοπατιών. Με άλλα λόγια, αν συναντάμε εναλλάξ άνω και κάτω μονοπάτια.



Σχήμα 1.32: Εναλλασσόμενο διάγραμμα

Κεφάλαιο 2

Πολυώνυμα κόμπων και κρίκων.

Η ιδέα χρήσης των πολυωνύμων για τους κόμπους και κρίκους αποτελεί ένα σπουδαίο μέρος της θεωρίας των κόμπων, καθώς αυτά αποτελούν μία επιπλέον αναλλοίωτη για τη μελέτη των κόμπων. Τα πολυώνυμα των κόμπων εμφανίζονται για πρώτη φορά στο έργο του J. W. Alexander (1928) ενώ το 1984 ο V. F. R. Jones τα χρησιμοποίησε για την αναπαράστασή τους μέσω διαγραμμάτων και δημιούργησε έτσι νέους δρόμους τόσο στη θεωρία κόμπων όσο και στη Γεωμετρία και Φυσική. Μάλιστα, το 1990 τιμήθηκε με το Fields Medal ενώ ήδη το 1985 δημιούργησε το δικό του πολυώνυμο. Το πολυώνυμο αυτό γενικεύτηκε σε πολυώνυμο δύο μεταβλητών από τους Jones και Alexander. Ωστόσο ο Kauffman ήταν αυτός που έθεσε τις βάσεις για όλα τα παραπάνω πολυώνυμα, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω.

2.1 State μοντέλα και πολυώνυμο Kauffman.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το έργο του Kauffman αποτελεί τη βάση για την εμφάνιση των πολυωνύμων, έτσι θα εξετάσουμε σε ένα πρώτο στάδιο την ιδέα του για το πολυωνυμικό state model (Kauffman 1987) και αργότερα θα δοθεί το πολυώνυμο του Kauffman.

Ας ανακαλέσουμε πρώτα την έννοια της κανονικής ισοτοπίας και ειδικότερα τότε δύο διαγράμματα είναι κανονικά ισότοπα. Έστω D και D' δύο μη-προσανατολισμένα διαγράμματα. Τα D , D' θα λέγονται κανονικά ισότοπα αν το D διαφέρει από το D' κατά μια ακολουθία κινήσεων $R2$ και $R3$ (με την $R1$ κίνηση να απαγορεύεται).

Θα συμβολίζουμε τώρα με U ένα διάγραμμα ενός *unknot* με καμία διασταύρωση και D είναι ένα *link* διάγραμμα. Τότε ορίζουμε ως DU το διάγραμμα

που προκύπτει με μια επιπλέον *unknot* συνιστώσα του διαγράμματος D , χωρίς να επιφέρει αλλαγές στις διασταυρώσεις. Το πολυώνυμο αγκύλη (bracket polynomial) ενός διαγράμματος D είναι το Laurent πολυώνυμο $\langle D \rangle$ μιας μεταβλητής A να ορίζεται ως εξής:

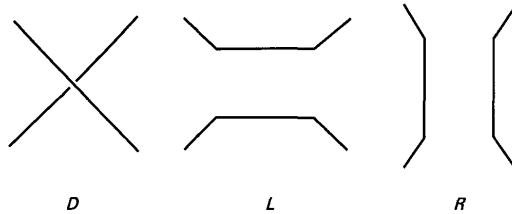
$$BP1: \langle U \rangle = 1$$

$$BP2: \langle DU \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle$$

$$BP3: \langle \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \rangle = A \langle \left\langle \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right\rangle \rangle + A^{-1} \langle \left\langle \begin{array}{c} \rangle \\ \langle \end{array} \right\rangle \rangle$$

Παρατήρηση 2.1.1. Οι $BP1$ και $BP2$ είναι προφανές ότι αφορούν διάγραμμα που είναι είτε ενός *unknot* είτε το περιέχουν, εν αντιθέσει με το $BP3$ που επιτρέπει τον υπολογισμό του $\langle D \rangle$ για κάθε διάγραμμα D . Με άλλα λόγια, το $\langle D \rangle$ υπολογίζεται με επαγωγή στον αριθμό διασταυρώσεων μέσω τις $BP3$ μέχρις ότου να φτάσουμε σε διάγραμμα χωρίς διασταυρώσεις, όπου και θα εφαρμοστούν οι $BP1$ και $BP2$.

Παρατήρηση 2.1.2. Για την $BP3$ παίρνουμε οποιοδήποτε διάγραμμα D και επιλέγουμε οποιαδήποτε διασταύρωση του D : διαγράφουμε τη διασταύρωση και σκεπτόμαστε τώρα τα χωρισμένα σχοινιά



Σχήμα 2.1

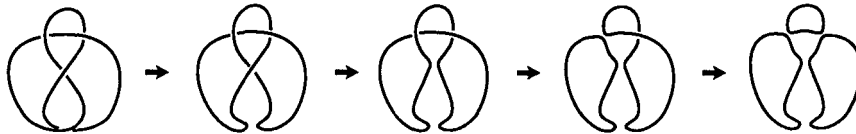
Φανταζόμαστε ότι ταξιδεύουμε ανάμεσα σε κάθε από τα δύο σχοινιά παραμένοντας στο *overpass* προς το πρώην *crossing* σημείο: ενώνουμε αυτά τα σχοινιά με εκείνα από το *underpass*, τα οποία βρίσκονται στα αριστερά μας, δίνοντας νέο διάγραμμα L . Αν αντί να ενώνουμε τα σχοινιά από τα *overpasses* με εκείνα από τα *underpasses*, τα οποία βρίσκονται στα δεξιά μας, θα αποκτούσαμε ένα νέο διάγραμμα R . Ο κανόνας $BP3$ τώρα λέει ότι $\langle D \rangle = A \langle L \rangle + A^{-1} \langle R \rangle$. Η αφαίρεση των διασταυρώσεων και η επανένωσή τους δεν είναι συνδυασμός από *Reidemeister*-κινήσεις.

Σημειώνουμε, τώρα, ότι το $BP3$ εισάγει:

$$BP3: \langle \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \rangle = A \langle \left\langle \begin{array}{c} \rangle \\ \langle \end{array} \right\rangle \rangle + A^{-1} \langle \left\langle \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right\rangle \rangle$$

Άρα ξεκινώντας από το διάγραμμα D , μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα πολυώνυμο $\langle D \rangle$. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να αλλάξουμε το διάγραμμα μέσω διαδοχικών μειώσεων στον αριθμό των διασταυρώσεων.

Παράδειγμα 2.1.3.



Σχήμα 2.2: Ένας πιθανός τρόπος κατακερματισμού των διασταυρώσεων στο $f-8$

Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία, προκύπτει το ερώτημα αν το πολυώνυμο αγκύλης $\langle D \rangle$ εξαρτάται από τον "δρόμο" που ακολουθήσαμε, κατακερματίζοντας τις διασταυρώσεις. Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι δεν εξαρτάται από τη σειρά αλλαγής διασταυρώσεων, καθώς και ότι το πολυώνυμο αγκύλης συμπεριφέρεται καλά μέσω των $R2$ και $R3$ κινήσεων. Θα αποδείξουμε πρώτα το τελευταίο, έχοντας δεχτεί ότι πράγματι δεν εξαρτάται από την σειρά των διασταυρώσεων που αλλάζουμε:

Λήμμα 2.1.4. Η πολυωνυμική αγκύλη είναι μια αναλλοίωτη κανονική ισοτοπίας, η οποία δίνεται μέσω της εφαρμογής των $R2$ και $R3$ κινήσεων σ' ένα διάγραμμα, αφήνοντας αναλλοίωτη την πολυωνυμική αγκύλη.

Απόδειξη. Για την $R2$ -κίνηση ξεκινάμε από τη πάνω διασταύρωση, κατακερματίζοντας την και συνεχίζουμε και στη δεύτερη ανάλογα:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{smoothing} \rangle + A^{-1} \langle \text{smoothing} \rangle \tag{BP3}$$

$$= A (A \langle \text{smoothing} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing} \rangle) + A^{-1} (A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{smoothing} \rangle) \tag{BP3'}$$

$$= (A^2 + A^{-2}) \langle \text{smoothing} \rangle + \langle \text{crossing} \rangle + \langle \text{smoothing} \cdot U \rangle$$

$$= \langle \text{crossing} \rangle \tag{BP2}$$

Για την $R3$ αντιστοίχως υπολογίζουμε:

□

$$\langle \overline{\text{X}} \rangle = A \langle \overline{\text{U}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\text{I}} \rangle \quad (\text{BP3})$$

$$= A \langle \overline{\text{U}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\text{I}} \rangle \quad (\text{R2})$$

$$= \langle \overline{\text{X}} \rangle$$

Λήμμα 2.1.5. Η πολυωνυμική αγκύλη δεν είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας. Η R1 δίνει τις ακόλουθες αλλαγές:

$$\langle \overline{\text{R}} \rangle = -A^3 \langle \overline{\text{I}} \rangle$$

$$\langle \overline{\text{B}} \rangle = -A^{-3} \langle \overline{\text{I}} \rangle$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\text{R}} \rangle &= A \langle \overline{\text{O}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\text{B}} \rangle \\ &= -A(A^2 + A^{-2}) \langle \overline{\text{I}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\text{I}} \rangle \\ &= -A^3 \langle \overline{\text{I}} \rangle \end{aligned}$$

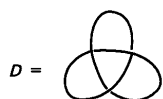
Αντίστοιχα υπολογίζεται και η άλλη περίπτωση της R1. □

Παράδειγμα 2.1.6.

$$D = \text{⊕}$$

$$\begin{aligned} \langle \text{⊕} \rangle &= A \langle \text{⊗} \rangle + A^{-1} \langle \text{⊖} \rangle \\ &= -A^4 \langle \text{○} \rangle - A^{-4} \langle \text{○} \rangle \\ &= -(A^4 + A^{-4}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.7.

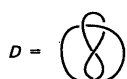


$$\langle \text{trefoil} \rangle = A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle$$

$$= A^7 - A^3 - A^{-5}$$

$$\langle \text{trefoil} \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5$$

Παράδειγμα 2.1.8.



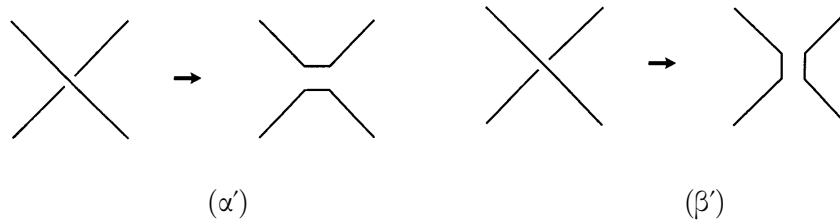
$$\langle \text{trefoil} \rangle = A \langle \text{trefoil} \rangle + A^{-1} \langle \text{trefoil} \rangle$$

$$= A(A^7 - A^3 - A^{-5}) - A^{-4} \langle \text{trefoil} \rangle$$

$$= A^8 - A^4 - A^{-4} - A^{-4}(A^4 + A^{-4})$$

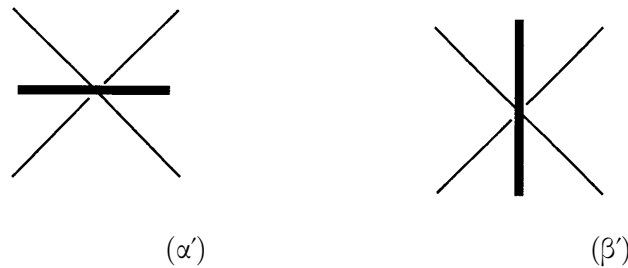
$$= A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$$

Στην παραπάνω απόδειξη και παραδείγματα θεωρήσαμε πως η επιλογή σειράς κατακερματισμού των διασταυρώσεων δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα, όπως ακριβώς ισχυρίστηκε ο *Kauffman* με τη χρήση της έννοιας του *state* (κατάσταση). Πιο συγκεκριμένα για ένα οποιοδήποτε διάγραμμα, έστω D , κάθε διασταύρωση έχει δύο τρόπους να εξαλειφθεί όπως ήδη αναφέρθηκε χάρις τον κανόνα *BP3*, όπως στις 2.3.α' και 2.3.β'. Ο συνδυασμός αυτών των επιλογών για όλες τις διασταυρώσεις δίνει και μια άλλη κατάσταση (*state*).



Σχήμα 2.3

Αφού διαλέξουμε ένα τρόπο κατακρεματισμού της διασταύρωσης θα τοποθετήσουμε ένα διαχωριστικό σημάδι (splitting marker) πάνω στη διασταύρωση σύμφωνα με τον τρόπο που επιλέξαμε να "σπάσουμε" τη διασταύρωση αυτή και να ενώσουμε τις περιοχές 2.4.α' και 2.4.β'.

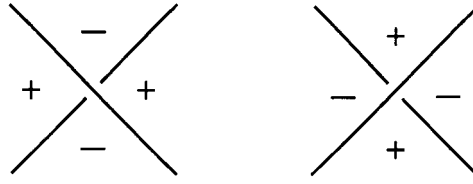


Σχήμα 2.4

Όταν τελικά πάνω σ' όλες τις διασταυρώσεις του διαγράμματος θα έχουμε τοποθετήσει τα διαχωριστικά σημάδια θα έχουμε πάρει ένα *state* (μια κατάσταση) για το D . Εν ολίγοις, ένα διάγραμμα με c διασταυρώσεις θα έχει 2^c πιθανά *states*. Αν, λοιπόν, εφαρμόσουμε σ' όλες τις διασταυρώσεις τα διαχωριστικά σημάδια θα πάρουμε ένα τελικό διάγραμμα ενός *unlink* με τον αριθμό των συνιστωσών να εξαρτάται από το *state*. Το πολυώνυμο αγκύλης του *unlink* διαγράμματος θα καθορίζεται από τα $BP1$ και $BP2$ και θα δίνεται ως εξής: $f(-(A^2 + A^{-2}))^{k-1}$, όπου K είναι το πλήθος των συνιστωσών.

Τώρα, ας σκεφτούμε πάλι τον υπολογισμό του $\langle D \rangle$ για ένα διάγραμμα D . Επαναλαμβάνοντας τη χρήση του $BP3$ οδηγούμαστε στην έκφραση του $\langle D \rangle$ σαν ένα άθροισμα όρων $\pm A^m \langle U \cdots U \rangle$, όπου $U \cdots U$ είναι ένα διάγραμμα ενός *unlink*, με έναν ακριβώς όρο για κάθε *state* του D . Αυτή η έκφραση είναι μοναδικά ορισμένη από το D και $\langle D \rangle$ άρα είναι ανεξάρτητο από τον επιλεγμένο δρόμο για τον υπολογισμό του. Μπορούμε να αποκτήσουμε μια μορφή για το $\langle D \rangle$ σαν ένα άθροισμα πάνω στα *states* του.

Ας σκεφτούμε τις K γειτονικές περιοχές που προκύπτουν σε μια διασταύρωση στο D που βρίσκονται μεταξύ του *overpass* και ενός *underpass*.



Σχήμα 2.5: Η ύπαρξη θετικών και αρνητικών περιοχών σε κάθε διασταύρωση

Στη περίπτωση που <<κυκλώνουμε>> τη διασταύρωση αριστερόστροφα, θα την καλούμε θετική. Τις άλλες δύο περιοχές θα τις ονομάζουμε αρνητικές. Παρατηρούμε ότι στη πρόσφατη συζήτηση για την εξάλειψη των διασταυρώσεων, για να εφαρμοστεί το *BP3* στο διάγραμμα L , αποκτήθηκε από το D μέσω της ένωσης των χωρισμένων σχοινιών, έτσι ώστε να ενώνονται οι δύο θετικές περιοχές, ενώ το διάγραμμα R αποκτήθηκε ενώνοντας τις δύο αρνητικές περιοχές.

Ένα διαχωριστικό σημάδι ενώνει, λοιπόν, περιοχές με το ίδιο πρόσημο και στο *BP3* βλέπουμε ότι το $\langle L \rangle$ πολλαπλασιάζεται με το A και το $\langle R \rangle$ με το A^{-1} . Έστω S να είναι κάποια κατάσταση (*state*) του διαγράμματος D και $p(S)$, $n(S)$ να είναι ο αριθμός των θετικών και αρνητικών περιοχών αντίστοιχα, σύμφωνα με τα διαχωριστικά σημάδια που χρησιμοποιήθηκαν σ' αυτό το *state*. Ορίζουμε το $\langle D | S \rangle := A^{p(S)-n(S)}$ και γράφουμε $|S|$ να είναι ο αριθμός των συνιστωσών των *unlink* που προκύπτουν σ' αυτό το *state* για το D διάγραμμα, καθώς ήδη έχουμε αφαιρέσει όλες τις διασταυρώσεις. Το πολυώνυμο αγκυλών, $\langle D \rangle$, για το D διάγραμμα θα λαμβάνει λοιπόν το $\langle D | S \rangle$ σαν έναν συντελεστή.

Πρόταση 2.1.9. *Ας είναι D ένα link diagram. Τότε*

$$\langle D \rangle = \sum_s \langle D | S \rangle [-(A^2 + A^{-2})]^{|S|-1}$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλα τα *state* του S του διαγράμματος D .

Παρ' όλο που η μορφή αυτή του πολυωνύμου αγκύλης είναι αρκετά χρήσιμη, καταλαβαίνουμε και με όσα ήδη έχουμε αναφέρει για τη μελέτη των κόμπων στο κεφάλαιο 1- ότι δεν είναι αρκετά ισχυρή, καθώς δεν αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας, παρά μόνο κανονικής ισοτοπίας. Έτσι προκύπτει το πολυώνυμο του Kauffman μιας μεταβλητής.

Ειδικότερα, έστω L ένας προσανατολισμένος κρίκος και D ένα προσανατολισμένο διάγραμμα του L . Έστω το *writhe* $w(D)$. Ορίζουμε το *Laurent* πολυώνυμο $f(L)$ να είναι:

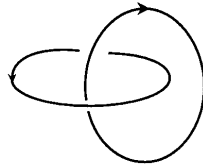
$$f(L) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$$

όπου $\langle D \rangle$ το πολυώνυμο αγκύλης για το διάγραμμα D , αγνοώντας τον προσανατολισμό του. Παρ' όλο που όπως παρατηρήσαμε οι δύο ποσότητες, $w(D)$ και $\langle D \rangle$, είναι αναλλοίωτες κανονικής ισοτοπίας, το $f(L)$ είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας.

Θεώρημα 2.1.10. Το πολυώνυμο $f(L)$ είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας.

Απόδειξη. Αφού $w(D)$ και $\langle D \rangle$ είναι αναλλοίωτες κανονικής ισοτοπίας, άρα και το $f(L)$ είναι. Άρα, χρειάζεται να ελέγξουμε μόνο το αποτέλεσμα για την $R1$, όπου αυτή είτε εισάγει είτε αφαιρεί μια διασταύρωση και έτσι αλλάζει το $w(D)$ στο $w(D)^{\pm 1}$. Ο όρος $(-A)^{-3w(D)}$ στο $f(L)$ συνεισφέρει έναν επιπλέον όρο $-A^{\pm 3}$, ο οποίος ακυρώνεται από τον όρο $\langle D \rangle$, όπως δίνεται στο Λήμμα που δώσαμε προηγουμένως. \square

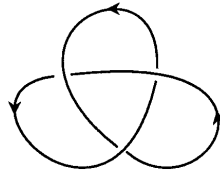
Παράδειγμα 2.1.11. $L = \text{left-hand Hopf link}$



Σχήμα 2.6

$$f(L) = -A^6(A^4 + A^{-4}) = -A^{10} - A^2$$

Παράδειγμα 2.1.12. $L = \text{left-hand trefoil}$



Σχήμα 2.7

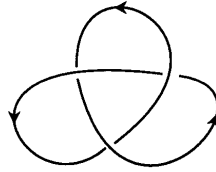
$$f(L) = -A^9(A^7 - A^3 - A^{-5})$$

Παράδειγμα 2.1.13. $L = \text{right-hand trefoil}$

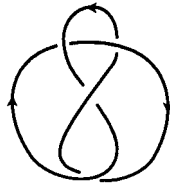
$$f(L) = -A^{-9}(A^{-7} - A^{-3} - A^5)$$

Παράδειγμα 2.1.14. $L = \text{figure-8 knot}$

$$f(L) = \langle D \rangle = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$$



Σχήμα 2.8



Σχήμα 2.9

Παρατηρούμε ότι τα παραδείγματα 2.1.12 και 2.1.13 είναι παρόμοια, απλά αλλάζοντας το A σε A^{-1} . Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην ερώτηση: Το πολυώνυμο *Kauffman* ενός διαγράμματος D' , όπου D' είναι το κατοπτρικό του D , παρατηρείται πάντα η αλλαγή του A σε A^{-1} ; Αν η απάντηση είναι ναι, τότε θα πρέπει τα achiral knots να έχουν τέτοιο πολυώνυμο *Kauffman*, αφού είναι συμμετρικά. Δηλαδή τα A, A^{-1} είναι ίδια, άρα θα έχουν ίδια πολυώνυμα *Kauffman* όπως στην περίπτωση του *figure - 8*. Οπότε οδηγούμαστε στο παρακάτω:

Πρόταση 2.1.15. Έστω L ένα link diagram και $L^!$ ο αντικατοπτρισμός του. Τότε το $f(L^!)$ προκύπτει από το $f(L)$ αλλάζοντας το A με το A^{-1} . Επιπλέον, το $\langle L^! \rangle$ προκύπτει από το $\langle L \rangle$ με τον ίδιο τρόπο.

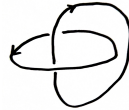
Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι:

$$\begin{cases} \langle L^! \rangle (A) = \langle L \rangle (A^{-1}) \\ f[L^!](A) = f[L](A^{-1}) \end{cases}$$

Το $L^!$ προκύπτει από το L με αντιστροφή όλων των διασταυρώσεων και ο υπολογισμός του $\langle L^! \rangle$ από το διάγραμμα προκύπτει ακριβώς όπως για το $\langle L \rangle$ εκτός από τους ρόλους του A και A^{-1} , τα οποία αντιστρέφονται αντιστοίχως. Επίσης, ισχύει ότι $w(L^!) = -w(L)$, καθώς αν το L έχει μια διασταύρωση όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3 (για θετική διασταύρωση), τότε όταν την αντιστρέψουμε καταλήγουμε να έχουμε μια διασταύρωση όπως στο σχήμα 1.3 αλλά για αρνητική διασταύρωση. Άρα αποδεικνύεται ότι αθροιστικά

για όλες τις διασταυρώσεις σε ένα διάγραμμα L θα έχουμε τα αντίθετα πρόσημα για κάθε διασταύρωση του $L^!$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

Παράδειγμα 2.1.16. Υπολογίστε το $\langle D \rangle$ για τα ακόλουθα.
Έχουμε ένα *Hopf link* :



Σχήμα 2.10: *Hopf link*

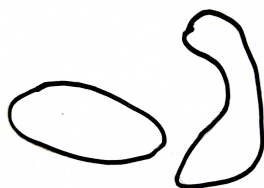
όπου οι καταστάσεις (states) $S=4$ και το writhe $W(D)=+2$. Έτσι, παίρνουμε τα εξής:

$$p(S)=1, n(S)=1, |S|=1 \text{ και } \langle D|S \rangle = 1$$



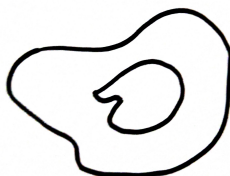
Σχήμα 2.11: state 1

$$p(S)=2, n(S)=0, |S|=2 \text{ και } \langle D|S \rangle = A^2$$



Σχήμα 2.12: state 2

$$p(S)=0, n(S)=2, |S|=2 \text{ και } \langle D|S \rangle = A^{-2}$$

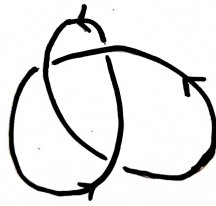


Σχήμα 2.13: state 3

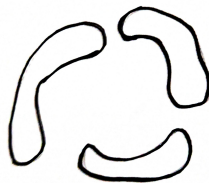
$$p(S)=1, n(S)=1, |S|=1 \text{ και } \langle D|S \rangle = 1$$

Σχήμα 2.14: *state 4*

Τελικά, παίρνουμε $\langle D \rangle = -(A^4 + A - 4)$
 Έπειτα έχουμε ένα *trefoil*, όπου $S=8$ και $w(D)=+3$

Σχήμα 2.15: *trefoil*

$$p(S)=3, n(S)=0, |S|=3 \text{ και } \langle D|S \rangle = A^3$$

Σχήμα 2.16: *state 1*

$$p(S)=2, n(S)=1, |S|=2 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A$$



Σχήμα 2.17: *state 2*

$$p(S)=2, n(S)=1, |S|=2 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A$$



Σχήμα 2.18: *state 3*

$$p(S)=2, n(S)=1, |S|=2 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A$$

Σχήμα 2.19: *state 4*

$$p(S)=1, n(S)=2, |S|=1 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A^{-1}$$

Σχήμα 2.20: *state 5*

$$p(S)=1, n(S)=2, |S|=1 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A^{-1}$$

Σχήμα 2.21: *state 6*

$$p(S)=1, n(S)=2, |S|=1 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A^{-1}$$



Σχήμα 2.22: state 7

$$p(S)=0, n(S)=3, |S|=2 \text{ και} \\ \langle D|S \rangle = A^{-3}$$



Σχήμα 2.23: state 8

$$\text{Έτσι παίρνουμε ότι } \langle D \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

2.2 Το πολυώνυμο Jones.

Τα πολυώνυμα του *Kauffman* και *Jones* είναι παρόμοια, με εξαίρεση το κομμάτι της μεταβλητής. Μάλιστα, το πολυώνυμο του *Jones* είναι και αυτό αναλλοίωτο ισοτοπίας για προσανατολισμένους κόμπους-κρίκους. Ειδικότερα, το πολυώνυμο του *Jones* ορίζεται ως εξής:

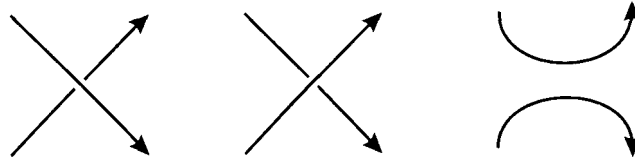
$$V_L(t) = f(L)(t^{-1/4})$$

όπου L είναι ο προσανατολισμένος κόμπος, $V_L(t)$ συμβολίζει το πολυώνυμο του *Jones* και t η μεταβλητή μας και θα πρέπει να ορίζεται και αυτός μέσω δύο κανόνων:

$JP1$: $V_{U(t)} = 1$, όπου U : προσανατολισμένο oriented unknot.

$$JP2: \begin{matrix} t^{-1}V & \nearrow & (t-t)V & \searrow & (t)=(t^{1/2}-t^{-1/2})V & \searrow & (t) \\ & \times & & \times & & \times & \end{matrix}$$

Στη $JP2$ δείχνουμε μόνο το κομμάτι του *link*, στο οποίο οι αλλαγές εμφανίζονται, άρα η $JP2$ δίνει έμμεσα το πολυώνυμο *Jones* μέσω τριών *links* όπως φαίνεται στο σχήμα 2.24.



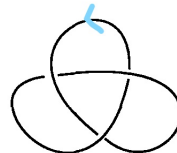
Σχήμα 2.24

Παράδειγμα 2.2.1. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Jones για το:

Σχήμα 2.25: *hopf link*

$$V_L(t) = -t^{-5/2} + t^{-1/2}$$

Παράδειγμα 2.2.2. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Jones για το:

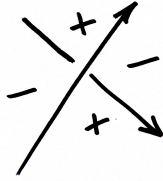
Σχήμα 2.26: *trefoil*

$$V_L(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

2.3 Εφαρμογές του πολυωνύμου Kauffman.

Εφαρμογή 2.3.1. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν έχουμε έναν K προσανατολισμένο κόμπο και \bar{K} να είναι ο ίδιος κόμπος με τον K αλλά με αντίθετο προσανατολισμό.

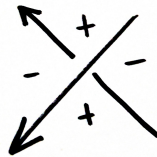
Απόδειξη. Ας ασχοληθούμε πρώτα με τον K κόμπο. Σε κάποια διασταύρωσή του θα συναντάμε το ακόλουθο διάγραμμα της διασταύρωσης K_1



Σχήμα 2.27

$$w(K_1) = +1$$

Στο \overline{K} τώρα κόμπος στην αντίστοιχη διασταύρωση θα έχουμε τα ίδια ακριβώς τόξα ως άνω και κάτω μονοπάτια (*overpass* και *underpass*) αλλά με αντίθετους προσανατολισμούς, δηλαδή το \overline{K}_1



Σχήμα 2.28

$$w(\overline{K}) = +1$$

και αντίστοιχα σε κάθε άλλη διασταύρωση θα συμβαίνει το ίδιο. Άρα $w(K) = w(\overline{K})$.

Επίσης, το $\langle \overline{K} \rangle = \langle K \rangle$ καθώς δε άλλαξε κανένα άνω και κάτω μονοπάτι από το K και το \overline{K} , άρα θα διατηρούν τις ίδιες θετικές και αρνητικές περιοχές. Επομένως, θα έχουμε $f(K) = f(\overline{K})$.

□

Εφαρμογή 2.3.2. Τι συμβαίνει τώρα αν ασχοληθούμε με τους κρίκους (*links*) και πιο συγκεκριμένα με κρίκους δύο συνιστωσών;

Απόδειξη. Έστω λοιπόν L προσανατολισμένος κρίκος δύο συνιστωσών και L' ένας προσανατολισμένος κρίκος δύο συνιστωσών και όπως ο L , με τη διαφορά ότι μόνο η μία συνιστώσα θα έχει αντίθετο προσανατολισμό. Προφανώς, δεν έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν και οι δύο συνιστώσες έχουν αντίθετους προσανατολισμούς ως προς τον L , καθώς ισχύει ότι και στην εφαρμογή 2.3.1. Άρα ας πάρουμε έναν L κρίκο:



Σχήμα 2.29

$w(L) = -2$
και ως L' :



Σχήμα 2.30

$w(L') = +2$
και για κάθε άλλη περίπτωση προσανατολισμού στον L και L' θα έχουμε
 $w(L) = -w(L')$

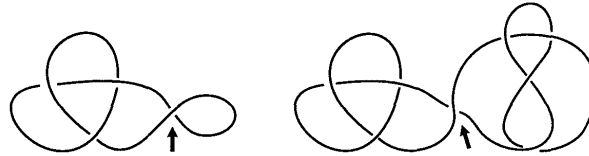
$$\langle D|S \rangle = \langle D'|S \rangle \quad \text{και} \quad \langle D \rangle = \langle D' \rangle$$

όπου D το διάγραμμα του L κρίκου και D' το διάγραμμα του L' . Άρα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f(L) &= (-A)^{-3w(L)} \langle D \rangle \\ &= (-A)^{-3(-w(L'))} \langle D' \rangle \\ &= (-A)^{-3w(L')} \langle D' \rangle (-A)^{6w(L')} \\ &= f(L')(A^2)^{3w(L')} \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.3.3. Ένας ισθμός σ' ένα *link* διάγραμμα είναι μια διασταύρωση στην οποία υπάρχουν μόνο τρεις περιοχές.



Σχήμα 2.31: Ισθμοί

Ορισμός 2.3.4. Ένα διάγραμμα λέγεται **ανηγμένο** (*reduced*) αν δεν υπάρχει κανένας ισθμός.

Ορισμός 2.3.5. Ένα διάγραμμα λέγεται **συνεκτικό** (*connected*) αν δεν προκύπτει ως ξένη ένωση δύο μικρότερων διαγραμμάτων.

Λήμμα 2.3.6. Έστω D ένα συνεκτικό *link* διάγραμμα με C διασταυρώσεις. Τότε το D χωρίζει το επίπεδο σε $C + 2$ περιοχές.

Θα χρειαστούμε ένα ακόμη ορισμό πριν προχωρήσουμε στα αποτελέσματα. Το *span* του πολυωνύμου αγκύλης $\langle D \rangle$ είναι η διαφορά ανάμεσα στις μέγιστες και στις ελάχιστες δυνάμεις του A που προκύπτουν από αυτό: ανακαλούμε ότι το $\langle D \rangle$ μπορεί να περιέχει και αρνητικές και θετικές δυνάμεις του A .

Παράδειγμα 2.3.7. Το $-A^5 - A^{-3} + A^{-7}$ έχει *span* $5 - (-7) = 12$.

Είναι προφανές ότι ο ορισμός του *span* επεκτείνεται σε κάθε *Laurent* πολυώνυμο μιας μεταβλητής.

Θεώρημα 2.3.8. Αν ένας κόμπος L έχει ένα συνεκτικό (*connected*), ανηγμένο (*reduced*) και εναλλασσόμενο διάγραμμα D με C διασταυρώσεις, τότε το *span* του $\langle D \rangle$ είναι $4C$. Έτσι κάθε δυο συνεκτικά, ανηγμένα και εναλλασσόμενα διαγράμματα ενός δοθέντος κόμπου έχει τον ίδιο αριθμό διασταυρώσεων.

Πρόταση 2.3.9. Έστω D είναι ένα συνεκτικό, ανηγμένο και εναλλασσόμενο διάγραμμα με C διασταυρώσεις, p θετικές περιοχές και n αρνητικές περιοχές, τότε ο μέγιστος όρος του $\langle D \rangle$ είναι $(-1)^{n-1} A^{C+2n-2}$ και ο ελάχιστος όρος είναι $(-1)^{p-1} A^{-C-2p+2}$.

Απόδειξη. Έστω S είναι μία κατάσταση (*state*) του D με όλα τα διαχωριστικά σημάδια να ενώνουν θετικές περιοχές, τότε $p(S) = C$ και $n(S) = 0$. Επίσης $|S| = n$ και $\langle D|S \rangle = A^C$, δηλαδή το S συνεισφέρει κατά έναν όρο

$(-1)^{n-1}A^C(A^2 + A^{-2})^{n-1}$ στην έκφραση του $\langle D \rangle$ ως ένα άθροισμα όλων των καταστάσεων, και έτσι πράγματι προκύπτει ο μέγιστος όρος του $\langle D \rangle$ να είναι ο $(-1)^{n-1}A^{C+2n-2}$. Αντίστοιχα υπολογίζεται και ο ελάχιστος όρος, αφού πρώτα τοποθετηθούν όλα τα διαχωριστικά σημάδια να ενώνουν όλες τις αρνητικές περιοχές και έχουμε εν τέλει $p(S) = 0$ και $n(S) = C$. \square

Με βάση την παραπάνω απόδειξη μπορούμε πλέον να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημά μας:

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το span του $\langle D \rangle$ είναι ίσο με $C + 2n - 2 - (-C - 2p + 2) = 2C + 2(n + p) - 4$, όμως $n + p$ είναι ο συνολικός αριθμός περιοχών του $\langle D \rangle$, το οποίο είναι επίσης ίσο με $C + 2$. Επομένως, το span του $\langle D \rangle$ είναι ίσο με $4C$. \square

Θεώρημα 2.3.10. *Αν ένα link L έχει ένα συνεκτικό (connected) διάγραμμα D , το οποίο έχει c διασταυρώσεις τότε το $\text{span} \langle D \rangle$ είναι το πολύ $4c$.*

Αυτό το θεώρημα ακολουθείται από ένα αποτέλεσμα, το οποίο ο *Kaufman* καλεί "dual state lemma". Δοθέντος ενός *state* S ενός συνεκτικού (connected) διαγράμματος D , το dual state \hat{S} προκύπτει από το S αλλάζοντας όλα τα splitting marker.

Λήμμα 2.3.11 (Dual state lemma). *Ας είναι S ένα state ενός συνεκτικού (connected) διαγράμματος D και ας είναι \hat{S} ένα dual state. Υποθέτουμε ότι το D έχει r περιοχές. Τότε $|S| + |\hat{S}| \leq r$.*

2.4 Πολυώνυμο H.O.M.F.L.Y..

Το πολυώνυμο *H.O.M.F.L.Y.* φέρει το όνομα αυτό από τα αρχικά ονομάτων των P. J. Freyd, D. N. Yetter, d. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. C. Millet και A. Ocneanu, ενώ το έργο τους αυτό δημοσιεύτηκε το 1985 (Freyd et al.).

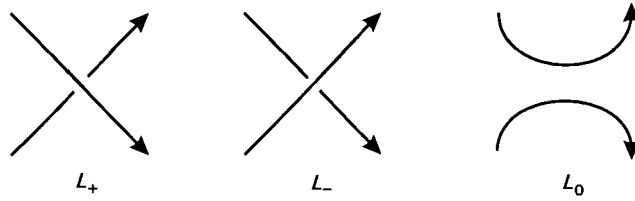
Έστω L να είναι ένας προσανατολισμένος κόμπος. Το πολυώνυμο *H.O.M.F.L.Y.* για τον L , συμβολίζεται $P(L)(lim)$ και είναι το μοναδικό δυο μεταβλητών *Laurent* πολυώνυμο ορισμένο ως εξής:

HP1: $P(L)$ είναι αναλλοίωτη ιστοπίας.

HP2: $P(U) = 1$

HP3: Αν L_+ , L_- και L_0 είναι 3-προσανατολισμένος link όμοια εκτός από μία διασταύρωση, στην οποία βλέπουμε στο σχήμα 2.32

$$\text{τότε } lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$$



Σχήμα 2.32

Παρατήρηση 2.4.1. Οι $HP2$ και $HP3$ ιδιότητες αποτελούν την πιο πρακτική διαδικασία για τον υπολογισμό του πολυωνύμου ενός κόμπου, το οποίο προκύπτει μέσω αλλαγών στις διασταυρώσεις και ειδικότερα εξάλειψη αυτών στο διάγραμμα.

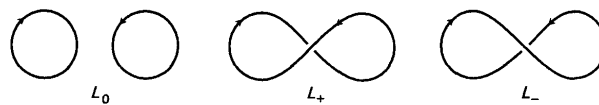
Ας δούμε κάποια βασικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 2.4.2. Οι c -συνιστώσες *unlink*.



Σχήμα 2.33

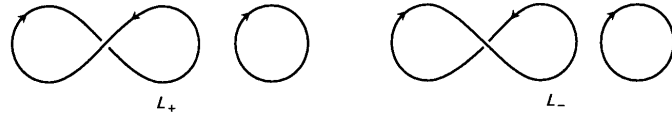
Συμβολίζουμε το c -συνιστώσες *unlink* ως U^c . Όταν $U^1 = U$, $HP1$ μας λέει ότι $P(U^1) = 1$. Τώρα, ας σκεφτούμε το U^2 . Ξεκινάμε μ' ένα διάγραμμα του U^2 χωρίς καμία διασταύρωση και το παίρνουμε ως L_0 .



Σχήμα 2.34

Τότε εισάγουμε μια διασταύρωση για να μας δίνει το L_+ και L_- .

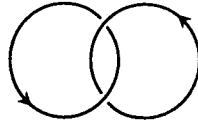
Καθένα από τα L_+, L_- είναι τώρα ένα *unknot* και έτσι μέσω εφαρμογής του $HP3$ δίνεται ότι $l+l^{-1}+mP(U^2) = 0$ και τελικά παίρνουμε: $P(U^2) = -m^{-1}(l+l^{-1})$. Τι συμβαίνει τώρα για το U^3 ; Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, παίρνοντας ως L_0 ένα 3-συνιστωσών *unlink* χωρίς καμία διασταύρωση και εισάγοντας μια διασταύρωση της μορφής L_+ και L_- : αυτά είναι 2-συνιστώσες *unlink*s. Εμείς έχουμε $P(L_+) = -m^{-1}(l+l^{-1}) = P(L_-)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το



Σχήμα 2.35

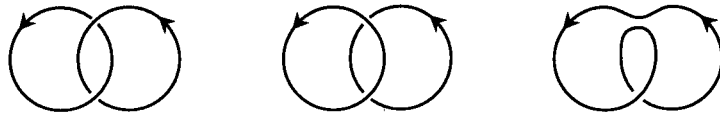
$P(L_0)$, όπου το HP3 δίνει $l[-m^{-1}(l+l^{-1})+l^{-1}[-m^{-1}(l+l^{-1})+mP(L_0)] = 0$ και βλέπουμε ότι $P(U^3) = P(L_0) = (-m^{-1}(l+l^{-1}))^2$. Γράφουμε για $\mu^{-1}(l+l^{-1})$ και τελικά θα πάρουμε επαγωγικά $P(U^c) = \mu^{c-1}$.

Παράδειγμα 2.4.3. Το *left - hand Hopf link*.



Σχήμα 2.36

Δουλεύουμε στην πάνω διασταύρωση η οποία έχει αρνητικό πρόσημο έτσι ώστε να πάρουμε το δοθέν διάγραμμα ως L_- για να αποκτήσουμε τα εξής διαγράμματα:



Σχήμα 2.37

Ξέρουμε ότι $P(L_+) = \mu$ και ότι $P(L_0) = 1$. Εφαρμόζοντας το HP3 δίνεται μια ισότητα $l\mu + l^{-1}P(L_-) + m = 0$ από την οποία παίρνουμε ότι $P(L_-) = -l(m + lm) = -lm + l^3m^{-1} + lm^{-1}$.

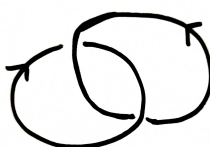
Όπως είδαμε και στο πολυώνυμο του *Kauffman*, υπάρχουν κάποιες ιδιαιτερότητες για τα διαγράμματα και τα αντιστρέψιμα και κατοπτρικά τους διαγράμματα.

Πρόταση 2.4.4. Ας είναι L ένα προσανατολισμένο link, με αντίστροφο \bar{L} και mirror image $L^!$. Τότε $P(L)(l, m) = P(\bar{L})(l, m) = P(L^!)(l^{-1}, m)$

Απόδειξη. Αντιστρέφοντας τον προσανατολισμό σ' όλες τις συνιστώσες του L αφήνουμε τα πρόσημα των διασταυρώσεων ίδια, έτσι ο υπολογισμός του $P(\bar{L})$ είναι όμοιος με αυτόν του $P(L)$. Παίρνοντας μια κατοπτρική εικόνα αλλάζουμε τα πρόσημα σε κάθε διασταύρωση, έτσι ώστε ο υπολογισμός του $P(L')$ είναι ίδιος με τον $P(L)$ με l και l^{-1} αντεστραμμένα. \square

Παράδειγμα 2.4.5. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο *Homfly* για το *right-hand Hopf link*.

Λύση:



Σχήμα 2.38

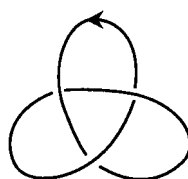
$$lP(\text{Hopf}) = l^{-1}P(\text{Hopf}) - mP(\text{Hopf})$$

$$lP(\text{Hopf}) = -l^{-1}\mu - m$$

$$P(L_+) = -l^{-2}\mu - ml^{-1} = l^{-3}m^{-1} + m^{-1}l^{-1} - ml^{-1}$$

Παράδειγμα 2.4.6. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο *Homfly* για το *left-hand trefoil* και για το *right-hand trefoil*.

Λύση:



Σχήμα 2.39

$$l^{-1}P(\text{Trefoil}) = -lP(\text{Trefoil}) - mP(\text{Trefoil})$$

$$P(L_-) = -l^2P(\text{Trefoil}) - lm[l^{-1}P(\text{Trefoil})] = -2l^2 - l^4 - m^2l^2$$

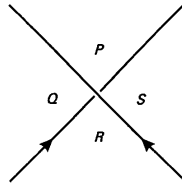
Αντίστοιχα για το *right-hand trefoil* υπολογίζεται ότι:

$$P(\text{Trefoil}) = -l^{-2}P(\text{Trefoil}) - ml^{-1}P(\text{Trefoil}) = m^2l^{-2} - 2l^{-2} - l^{-4}$$

2.5 Πολυώνυμο Alexander.

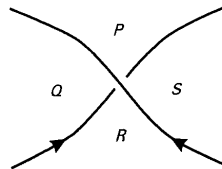
Ο Alexander J.W. εισήγαγε το ομώνυμο πολυώνυμο (Alexander 1928) έπειτα από τα πολυώνυμα του *Kaufman* και *H.O.M.F.L.Y.* αλλάζοντας τη μεταβλητή και φυσικά παραμένοντας σε πολυώνυμο μιας μεταβλητής. Το πολυώνυμο Alexander προκύπτει εμπλέκοντας τις περιοχές που διακρίνονται σε κάθε διασταύρωση.

Έστω D ένα προσανατολισμένο *link* διάγραμμα με c διασταυρώσεις. Τότε από το Λήμμα 2.3.6 γνωρίζουμε ότι το επίπεδο χωρίζεται σε $c + 2$ περιοχές. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα $M(D)$, του οποίου οι γραμμές δηλώνουν τις διασταυρώσεις του D και οι στήλες υποδηλώνουν από τις περιοχές, έτσι ώστε $M(D)$ να έχει μέγεθος $c \times (c + 2)$.



Σχήμα 2.40: Η διαστύρωση με τις περιοχές της

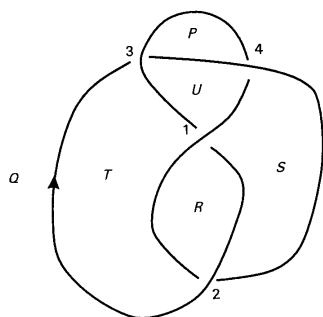
Υποθέτουμε ότι οι περιοχές P, Q, R και S συναντιούνται στην i -οστή διασταύρωση του D . Τότε στη γραμμή i του $M(D)$ εισάγουμε σε κάθε στήλη τα $t, -t, 1, -1$, με κάθε στήλη να αντιπροσωπεύει τις περιοχές P, Q, R, S που περικλείουν την i διασταύρωση. Τέλος βάζουμε μηδέν στις υπόλοιπες στήλες, δηλαδή σε αυτές τις περιοχές που δεν συνορεύουν με αυτή τη διασταύρωση. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τον κανόνα προσήμων μας οι περιοχές Q και S είναι θετικές. Σ' έναν ισθμό, μόνο τρεις περιοχές προκύπτουν που είναι γειτονικές σε μια διασταύρωση. Άρα η στήλη υποδηλώνει την επαναλαμβανόμενη περιοχή που λαμβάνει το άθροισμα των κατανεμημένων συμβόλων σ' εκείνη την περιοχή.



Σχήμα 2.41

Για παράδειγμα, το *figure – 8* με τις διασταυρώσεις και περιοχές σημειωμένες όπως φαίνεται, έχει τον ακόλουθο πίνακα:

$$M(D) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccccc} P & Q & R & S & T & U \\ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -1 & t & 1 & -t \\ 0 & -t & -1 & 1 & t & 0 \\ t & -t & 0 & 0 & 1 & -1 \\ t & -1 & 0 & 1 & 0 & -t \end{array} \right) \end{array}$$



Σχήμα 2.42: *f-8* με τις αντίστοιχες περιοχές του

Τώρα διαγράφουμε από το $M(D)$ οποιοσδήποτε δύο στήλες που αντιπροσωπεύουν δυο περιοχές, οι οποίες είναι γειτονικές στο D , δηλαδή χωρίζονται μεταξύ τους μέσω ενός τόξου. Η αφαίρεση αυτή των στηλών δίνει ένα νέο πίνακα $(c \times c)$, τον $M_0(D)$. Το πολυώνυμο του Alexander συμβολίζεται με Δ_D και ορίζεται να είναι η ορίζουσα του $M_0(D)$: $\Delta_D = \det(M_0(D))$. Είναι ξεκάθαρο ότι Δ_D είναι ένα πολυώνυμο του t μιας μεταβλητής μαζί με ακεραίους συντελεστές ± 1 . Αν στο παρακάτω παράδειγμα διαγράψουμε τις στήλες T και U θα αποκτήσουμε:

$$M_0(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & -t & -1 & 1 \\ t & -t & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

και υπολογίζουμε την ορίζουσα, η οποία δίνει και το πολυώνυμο:

$$\Delta_D(t) = -1(-t + 2t^2) - t(t - t^2) = t^3 - 3t^2 + t$$

Αν τώρα να διαγράψουμε απο το $M(D)$ τις στήλες R και S θα πάρουμε:

$$M_0(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & -t & t & 0 \\ t & -t & 1 & -1 \\ t & -1 & 0 & -t \end{vmatrix}$$

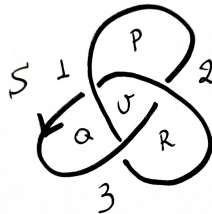
και ξανά υπολογίζουμε την ορίζουσα να είναι:

$$\Delta_D(t) = t^2 - t^3 + t(-t^2 - t^2 + t^3) = t^4 - 3t^3 + t^2$$

Όπως βλέπουμε, αυτό το πολυώνυμο διαφέρει από το πρώτο κατά έναν όρο επί t χωρίς όμως να διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους και αυτό το αποτέλεσμα απέδειξε και διατύπωσε ο *Alexander*. Δίνεται το παρακάτω Θεώρημα, χωρίς την απόδειξη του. Αν κάποιος επιθυμεί μπορεί να καταφύγει στην εκτενή απόδειξη του *Alexander* (1928).

Θεώρημα 2.5.1. Δοθέντος ενός προσανατολισμένου *link diagram* D , η ορίζουσα $\det(M_0(D))$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής των διαγεγραμμένων στηλών του πίνακα $M(D)$, κατά έναν όρο $\pm t^m$ για κάποιους ακεραίους m . Επιπλέον, $\det(M_0(D))$ είναι μια αναλλοίωτη ισοτοπίας.

Παράδειγμα 2.5.2. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο *Alexander* για το *trefoil* και το *Hopf link*.



Σχήμα 2.43

Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

$$M(D) = \begin{matrix} & P & Q & R & S & U \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & -1 & -t \\ t & 0 & 1 & -1 & -t \\ 0 & 1 & t & -1 & t \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Διαγράφουμε τώρα δύο στήλες με γειτονικό τόξο και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την εκάστοτε ορίζουσα, παίρνοντας ως

$$\Delta_D(t) = -t^2 - 1 + t$$

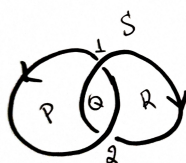
(με τη διαγραφή των Q, U στηλών). Ισοδύναμα με την διαγραφή των P, S βρίσκουμε:

$$\Delta_D(t) = t^3 - t^2 + t$$

. Με την διαγραφή των P, U έχουμε ότι

$$\Delta_D(t) = 1 + t^2 - t$$

Για το Hopf link:



Σχήμα 2.44

$$M(D) = \begin{matrix} & P & Q & R & S \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -t & t \\ -1 & t & -t & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Αφού πάλι διαγράφουμε δύο στήλες με γειτονικό τόξο, υπολογίζουμε την ορίζουσα. Με τη διαγραφή των Q, R έχουμε:

$$\Delta_D(t) = -1 + t$$

Με τη διαγραφή των P, Q και R, S παίρνουμε αντιστοίχως:

$$\Delta_D(t) = -t + t^2$$

$$\Delta_D(t) = +1 - t$$

Σημειώνουμε πως τα πολυώνυμα αυτά είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, με την έννοια ότι διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατά μια δύναμη (θετική ή αρνητική) του t .

Κεφάλαιο 3

Τοπολογικοί χώροι.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε το θεωρητικό υπόβαθρο που θα μας εισάγει ομαλά στη μελέτη των επιφανειών των κόμπων, αφού οριστεί ο τοπολογικός χώρος και κάποιες ιδιότητες πάνω σ' αυτόν.

3.1 Τοπολογικοί χώροι.

Ορισμός 3.1.1. Έστω X ένα σύνολο, μη κενό. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, μία συλλογή υποσυνόλων του X , που ονομάζονται ανοιχτά σύνολα, καλείται τοπολογία πάνω στο X αν ισχύει:

- α. το κενό σύνολο και το X είναι ανοιχτά
- β. η άπειρη ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο
- γ. η πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

Θα συμβολίζουμε με (X, \mathcal{T}) και θα καλούμε τοπολογικό χώρο, το σύνολο X μαζί με τη συλλογή των υποσυνόλων του με τις παραπάνω ιδιότητες. Αξίζει να σημειώσουμε ότι για κάθε σύνολο X , μπορούμε να έχουμε πολλές και διαφορετικές τοπολογίες, όμως κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες θα γίνεται επιλογή μιας μόνο τοπολογίας.

Παραδείγματα 3.1.2. 1. Δοθέντος οποιουδήποτε συνόλου X , ορίζουμε κάθε υποσυνόλου το X να είναι ανοιχτό. Η τοπολογία αυτή θα λέγεται διακριτή τοπολογία πάνω στον X .

2. Η συνήθης τοπολογία στον \mathbb{R}^n , ($n \geq 1$). Για $x, y \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Αυτή είναι η συνηθισμένη μορφή της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στον \mathbb{R}^n . Θα καλούμε ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r , και θα τη συμβολίζουμε με $B(x, r)$, το υποσύνολο $\{y \in \mathbb{R}^k \mid \|x - y\| < r\}$, όπου $r > 0$. Αν $k = 1$, τότε μία ανοιχτή μπάλα στον \mathbb{R} θα είναι ένα ανοιχτό διάστημα, ενώ αν $k = 2$, μία ανοιχτή μπάλα στον \mathbb{R}^2 είναι ένας ανοιχτός δίσκος.

Τώρα η συνήθης τοπολογία στον \mathbb{R}^n θα ορίζεται με τις ανοιχτές μπάλες ως εξής: ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό αν, για κάθε $x \in U$, τότε υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε $B(x, r) \subseteq U$. Σημειώνουμε ότι το r εξαρτάται από το x .

Έστω τώρα X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, θα λέμε ότι το A είναι κλειστό αν το συμπλήρωμά του, X/A , είναι ανοιχτό. Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, κάθε υποσύνολό του, $A \subseteq X$, είναι εφοδιασμένο με μία τοπολογία ώστε όλα τα ανοιχτά σύνολα στο A να είναι της μορφής $A \cap U$ με U να είναι ανοιχτό στο X . Τότε αυτή η μορφή θα ορίζει τον τοπολογικό υπόχωρο στο A , ενώ το A είναι ένας υπόχωρος του X .

Λήμμα 3.1.3. Αν A είναι ένας κλειστός υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X , και αν $C \subseteq A$ είναι κλειστό στο A , τότε το C είναι κλειστό στο X .

Απόδειξη. Έστω ότι το C είναι κλειστό στο A , τότε το συμπλήρωμά του θα είναι ανοιχτό στο A , δηλαδή το $C \setminus A = A \cap U$ για κάποιο ανοιχτό σύνολο U υποσύνολο του X . Πράγματι,

$$X \setminus C = (X \setminus A) \cup (A \setminus C) = (X \setminus A) \cup (A \cap U) = (X \setminus A) \cup U.$$

Άρα $X \setminus A$ και U είναι ανοιχτά στο X και έτσι και το $X \setminus C$ είναι ανοιχτό στο X . Επομένως, C είναι κλειστό στο X . \square

Τέλος, θα ορίσουμε την τοπολογία γινόμενο, η οποία ορίζεται ως εξής: Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, θα ορίσουμε την τοπολογία γινόμενο πάνω στον $X \times Y$ να δίνεται από όλα τα ανοιχτά σύνολα της μορφής $U \times V$, όπου U και V να είναι ανοιχτά υποσύνολα του X και Y αντιστοίχως.

3.2 Συνέχεια

Έστω τώρα X και Y δυο τοπολογικοί χώροι και η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ θα είναι συνεχής, αν αντιστρέφει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά. Με άλλα λόγια, για κάθε V ανοιχτό σύνολο στο Y , η αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(V)$ να είναι ανοιχτό στο X . Δεδομένου ότι η συνέχεια ορίζεται μέσω των ανοιχτών συνόλων, αυτή θα εξαρτάται από την επιλογή των τοπολογιών για κάθε σύνολο X και Y .

Πρόταση 3.2.1. Έστω \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία. Τότε $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής αν και μόνο αν δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοια ώστε $\|x - y\| < \delta$ να ισχύει $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι f είναι συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η ανοιχτή μπάλα $B(f(x), \varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο στον \mathbb{R}^n και έτσι $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον \mathbb{R}^m , όπου $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, το οποίο είναι $\|x - y\| < \delta$ και ισχύει $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. \square

Λήμμα 3.2.2. Έστω X, Y και Z είναι τοπολογικοί χώροι. Αν $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω W είναι ένα ανοιχτό σύνολο στο Z . Μέσω της συνέχειας της g , ξέρουμε ότι $V = g^{-1}(W)$ είναι ανοιχτό στον Y και αντίστοιχα μέσω της συνέχειας της f παίρνουμε ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X . Άρα για $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ είναι ανοιχτό στον X και έχουμε τελικά ότι $g \circ f$ είναι συνεχής. \square

Λήμμα 3.2.3 (Gluing lemma). Δοθείσας συνάρτησης $f : X \rightarrow Y$, υποθέτουμε ότι υπάρχουν κλειστά σύνολα A και B τέτοια ώστε $X = A \cup B$ και μάλιστα οι περιορισμοί της f στο A και B , $f|_A : A \rightarrow Y$ και $f|_B : B \rightarrow Y$, είναι συνεχείς. Τότε f είναι συνεχής.

Έστω τώρα X και Y τοπολογικοί χώροι και μια $f : X \rightarrow Y$, η οποία είναι 1-1, επί και συνεχής και η αντίστροφή της, $f^{-1} : Y \rightarrow X$, είναι επίσης συνεχής, τότε η f καλείται ομοιομορφισμός.

Επίσης, μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ καλείται εμφύτευση, αν είναι 1-1, συνεχής και με συνεχή αντίστροφη. Μερικά παραδείγματα εμφυτεύσεων είναι: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ όπου δίνεται η απεικόνιση $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ όπου δίνεται η απεικόνιση $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ για $x^2 + y^2 = 1$.

3.3 Συνεκτικότητα.

Προτού ορίσουμε την συνεκτικότητα, θα υπενθυμίσουμε μια βασική έννοια αυτή της διαμέρισης. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα ζεύγος (A, B) με $A, B \neq \emptyset$, όπου A, B είναι κλειστά υποσύνολα του X , τέτοια ώστε $X = A \cup B$ και $A \cap B = \emptyset$ καλείται διαμέριση του X .

Ορισμός 3.3.1. Ένας χώρος X λέγεται συνεκτικός αν δεν υπάρχει καμία τέτοια διαμέριση για το X .

Πρόταση 3.3.2. Ένας τοπολογικός χώρος X , θα είναι συνεκτικός αν και μόνο αν τα μοναδικά ανοιχτά και ταυτόχρονα κλειστά υποσύνολα του είναι το κενό και ο εαυτός του.

Πρόταση 3.3.3 (Διατήρηση Συνεκτικότητας). Έστω X συνεκτικός χώρος και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση, τότε η εικόνα $f(X)$ είναι συνεκτική.

3.4 Ταυτοτικοί Χώροι.

Δοθέντος ενός τοπολογικού χώρου X , ένα σύνολο Υ , και μιας συνάρτησης $f : X \rightarrow Y$, η ταυτοτική τοπολογία στο Υ προκύπτει, ορίζοντας $U \subseteq Y$ να είναι ανοιχτό αν και μόνο αν η αντίστροφη του εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στο X . Έτσι έχουμε την f συνεχής.

Μία σημαντική εφαρμογή της ταυτοτικής τοπολογίας είναι αυτή που προκύπτει από την απεικόνιση $X \rightarrow X/\sim$, δηλαδή όταν παίρνουμε ένα x και το στέλνουμε στην κλάση $[x] \in X/\sim$.

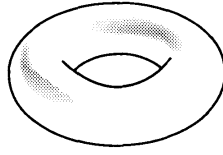
Παραδείγματα 3.4.1.

- a. Παίρνουμε ένα ορθογώνιο και ταυτίζουμε τις δύο αντίθετες πλευρές του ορθογωνίου, έχοντας κάνει μία μισή περιστροφή. Το αποτέλεσμα είναι ένα Möbius band. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ένα ορθογώνιο στον \mathbb{R}^2 και έστω $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, όπου το \mathbb{R}^2 είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία και R με την τοπολογία υποχώρου, έχοντας πάρει τη σχέση ισοδυναμίας \sim στον R να γενικεύεται ως εξής: για όλα τα $y \in [0, 1]$: $(0, y) \sim (2, 1 - y)$. Τότε ο R/\sim με την ταυτοτική τοπολογία είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για ένα Möbius band.



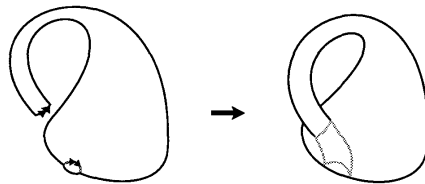
Σχήμα 3.1: Möbius band

- b. Ξεκινάμε πάλι από το ορθογώνιο μας και ενώνοντας τις δύο πλευρές του ορθογωνίου, σχηματίζουμε έναν άδειο κύλινδρο. Στο τελευταίο βήμα μας ενώνουμε τους δυο κύκλους που προέκυψαν από το κύλινδρο μεταξύ τους, ώστε τελικά να πάρουμε έναν τόρο. Ειδικότερα, παίρνοντας πάλι το ίδιο R από το a. παράδειγμα με τις εξής σχέσεις ισοδυναμίας: $(0, y) \sim (2, y)$ και $(x, 0) \sim (x, 1)$.



Σχήμα 3.2: Τόρος

c. Τι συμβαίνει τώρα αν ενώσουμε τα παραδείγματα a. και b., εισάγοντας μια στροφή στον τόρο μας; Εισάγουμε στο R μία σχέση ισοδυναμίας όπου: $(x, 0) \sim (x, 1)$ και $(0, y) \sim (2, 1 - y)$. Αν και είναι δύσκολο να φανταστούμε το αποτέλεσμα, η παραπάνω διαδικασία μας δίνει την φιάλη του Klein.



Σχήμα 3.3: Φιάλη Klein

3.5 Κόμποι και Ισοτοπία.

Παίρνουμε τον \mathbb{R}^n πάντα με τη συνήθη τοπολογία του και ορίζουμε με τον συμβολισμό S^1 τον κύκλο $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ με την τοπολογία υποχώρου. Λαμβάνοντας υπόψη όσα έχουν συζητηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια πλέον μπορούμε να δώσουμε τον αυστηρό ορισμό του κόμπου (*knot*) και του κρίκου (*link*).

Ορισμός 3.5.1. Ένας κόμπος είναι μια εμφύτευση $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ορισμός 3.5.2. Ένας κρίκος με c συνιστώσες είναι μια εμφύτευση.

$$S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τους παρακάτω ορισμούς. Όσον αφορά τον ορισμό του κόμπου η συνάρτηση k από το S^1 έχει συγκεκριμένες ιδιότητες. Μάλιστα, η k είναι $1 - 1$ και επί, το οποίο και εξηγεί και τον άτυπο ορισμό που δώσαμε στο κεφάλαιο 1 για το σχοινί που σχηματίζει τον κόμπος, ότι δηλαδή αυτό δεν τέμνεται στην πραγματικότητα και οι διασταυρώσεις δεν είναι τομές

του σχοινοῦ. Ἐπειτα, ἡ k εἶναι συνεχῆς συνάρτηση με την ἔννοια ὅτι ὑπάρχει μια συνεχῆς συνάρτηση ἀπὸ την εικόνα του στον S^1 και αὐτὸ υποδηλώνει πὼς το σχοινὶ εἶναι ἄσπαστο.

Τώρα προκύπτει τὸ ερώτημα, πότε μπορούμε να σκεφτοῦμε δύο κόμπους k και l να εἶναι ἴδιοι. Ἐνας τρόπος να φανταζόμαστε τὸν k κόμπο να εἶναι ἴδιος με τὸν l εἶναι με μια συνεχῆ κίνηση τῆς εικόνας του k με τέτοιο τρόπο ὥστε ἡ τελικὴ εικόνα να εἶναι ἡ εικόνα του l κόμπου. Ἡ ἰδέα αὐτὴ τῆς συνεχούς κίνησης τῶν εικόνων τους στον \mathbb{R}^3 οδηγεῖ στον ὀρισμὸ τῆς *ambient* ἰσοτοπίας (*isotopy*), κατὰ τὴν ὁποία οἱ παραμορφώσεις τῶν εικόνων γίνονται χάρις τὸν ὁμοιομορφισμό στον \mathbb{R}^3 . Θα δώσουμε τὸν ὀρισμὸ τῆς *ambient* ἰσοτοπίας, ἀφὸς ξεκαθαρίσουμε ὅτι λαμβάνουμε μια παράμετρο t , ἡ ὁποία θα ἀντιπροσωπεύει τὸν χρόνο. Με ἄλλα λόγια για χρόνο $t = 0$ μέχρι τὸν χρόνο $t = 1$ θα πραγματοποιοῦνται οἱ παραμορφώσεις, δηλαδή μια συνεχῆ ἀκολουθία ὁμοιομορφισμῶν στον \mathbb{R}^3 .

Ὄρισμὸς 3.5.3. Δύο κόμποι k και l εἶναι *ambient* ἰσοτοπικοί, ἀν ὑπάρχει μια συνεχῆ συνάρτηση $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ὥστε,

1. $h_0 = H(-, 0)$ εἶναι ἡ ταυτότητα $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
2. Για ὅλα τα $t \in [0, 1]$, $h_t = H(-, t)$ εἶναι ἓνας ὁμοιομορφισμὸς $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
3. Ἀν $h_1 = H(-, 1)$, τότε $h_1 \circ k = l$

Ἀν k και l εἶναι *ambient* ἰσοτοπικοί, τότε οἱ κόμποι $h_1 \circ k$ με $t \in [0, 1]$ δίνουν μια συνεχῶς μεταβαλλόμενη οἰκογένεια παραμορφώσεων ἀπὸ τὸν k στον l . Ἡ *ambient* ἰσοτοπία τῶν κόμπων και τῶν κρίκων εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογος τοπολογικὰ με τὴν ἰσοτοπία τῶν κόμπων ὅπως ὀρίστηκε στο κεφάλαιο 1 με τὴν διαφορά ὅτι ἡ τελευταία εἶναι μια πιο ἀδύναμη ἔννοια ἀπὸ αὐτὴ τῆς *ambient* ἰσοτοπίας. Τὸ παραπάνω διατυπώνεται αὐστηρὰ στο ἀκόλουθο Θεώρημα. Ἡ ἀπόδειξη που βασίζεται στις κινήσεις *Reidemeister* μπορεῖ να βρεθεῖ στο βιβλίο *Reidemeister 1932*.

Θεώρημα 3.5.4. Δύο κόμποι εἶναι *ambient* ἰσοτοπικοί ἀν και μόνον ἀν ἔχουν ἰσοτοπικά διαγράμματα.

Στο σημεῖο αὐτὸ μπορούμε να δώσουμε κι ἄλλες σχέσεις ἰσοδυναμίας μεταξὺ τῶν συναρτήσεων $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, οἱ ὁποῖες θα ὀρίζουν πότε δύο κόμποι εἶναι ἴδιοι. Ἀς σκεφτοῦμε ἓναν ὁμοιομορφισμό $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ὡς ἀνάλογο τῆς ἀλλαγῆς θέσεως ὥστε δύο κόμποι $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $l : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ να εἶναι ἰσοδύναμοι ἀν ὑπάρχει ἓνας ὁμοιομορφισμὸς $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιος ὥστε $l = hk$. Μια κλάση ἰσοδυναμίας κόμπων κάτω ἀπὸ τὴ σχέση ἰσοδυναμίας τῶν ὀρισμῶν ἰσοδυναμίας που δόθηκε ὀνομάζεται τύπος κόμπων (*knot type*). Με βάση ὅλα τα

παραπάνω είναι προφανές ότι πως η *ambient* ισοτοπία είναι πολύ πιο ισχυρή έννοια της ισοδυναμίας. Για παράδειγμα το right-hand και left-hand trefoil είναι ισοδύναμοι.

Τέλος, θα ονομάζουμε έναν κόμπο L γραμμικό ως προς τα κομμάτια του αν η εικόνα του στον \mathbb{R}^3 είναι μια ένωση πεπερασμένου πλήθους από κομμάτια γραμμών και έτσι ένας τέτοιος κόμπος μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάγραμμα του οποίου τα τόξα είναι ευθείες γραμμές.

Παράλληλα, ένας κόμπος λέγεται *tame* αν είναι ισοδύναμος με ένα γραμμικό ως προς τα κομμάτια του κόμπο. Οι κόμποι της κατηγορίας *tame* (*tameness*) έχουν πεπερασμένο πλήθος διασταυρώσεων και στην αντίθετη περίπτωση μιλάμε για κόμπους *wild*, τους οποίους και δεν θα μελετήσουμε σ' αυτήν την εργασία.

Κεφάλαιο 4

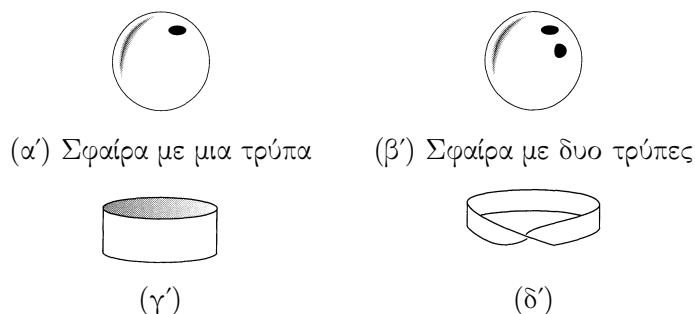
Επιφάνειες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις επιφάνειες με σκοπό να καταλήξουμε στις επιφάνειες των κόμπων. Οι κόμποι, λοιπόν, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι μιας διάστασης αντικείμενα που όμως ζουν στις τρεις διαστάσεις, ενώ οι επιφάνειες είναι αντικείμενα δύο διαστάσεων. Στο προηγούμενο κεφάλαιο δώσαμε μερικές επιφάνειες που προκύπτουν από το Λήμμα *Gluing*.



Σχήμα 4.1

Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να δώσουμε απαντήσεις σε ερωτήματα όπως τι είναι επιφάνεια, πώς προκύπτει η ταξινόμηση επιφανειών και πώς μπορούμε να φτιάξουμε μια επιφάνεια μέσω ενός κόμπου. Υπάρχουν, ειδικότερα, κατηγορίες επιφανειών όπως αυτές που έχουν τρύπες και ακμές εντός τους.



Σχήμα 4.2

Λόγου χάρη, είδαμε στο κεφάλαιο 3 πώς να κατασκευάζουμε ένα Möbius band και έναν τόρο (*torus*). Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και να ενώσουμε n πλήθους τόρους ή ακόμα και μια σφαίρα μπορούμε να την συναντήσουμε με n το πλήθος τρύπες.



Σχήμα 4.3

Όλα τα παραπάνω είναι κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα επιφανειών, όπου σε κάθε περίπτωση ανάλογα με τις ιδιότητες που φέρουν, όπως είναι οι τρύπες ή οι τόροι (*tori*), θα τις ταξινομούμε με παρόμοιο τρόπο όπως στους κόμπους, δηλαδή με τη χρήση αναλλοιώτων. Αξίζει επιπλέον να σημειώσουμε πως όταν θα συναντάμε δύο επιφάνειες που είναι όμοιες μεταξύ τους, πλέον θα γινόμαστε πιο ακριβείς, αναφέροντας ότι οι επιφάνειες S_1 και S_2 είναι ομοιομορφικές, δηλαδή υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $S_1 \rightarrow S_2$.

4.1 Συνδυαστικές Επιφάνειες

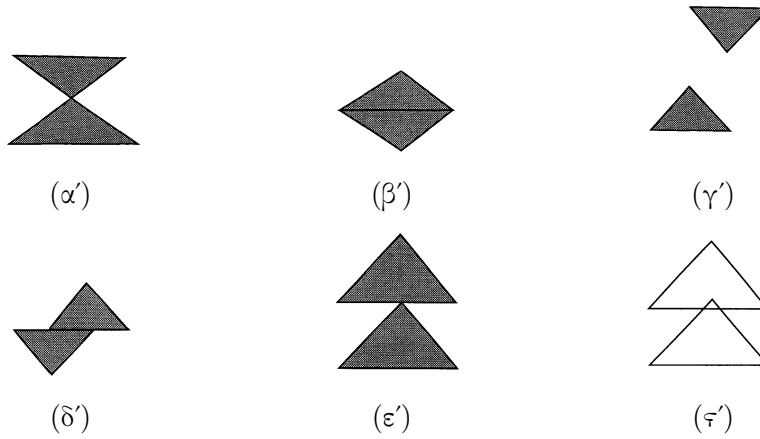
Ορισμός 4.1.1. *Μια συνδυαστική επιφάνεια S είναι η πεπερασμένη ένωση συμπαγών τριγώνων που ικανοποιούν τα παρακάτω.*

- S1. Δύο τρίγωνα ενώνονται είτε σε μια μόνο ακμή, είτε σε μια μόνο κορυφή ή πουθενά.*
- S2. Κάθε ακμή είναι μια ακμή ενός ή δύο μόνο τριγώνων.*
- S3. Για κορυφή v , ονομάζουμε αστέρι, S_{tv} , να είναι η ένωση εκείνων των τριγώνων που έχουν ως μια κορυφή το v , τότε το S_{tv} είναι ομοιομορφικό με έναν δίσκο.*
- S4. Ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε κορυφές υπάρχει ένα μονοπάτι, δηλαδή ένα συνεχές σύνολο ακμών των τριγώνων που τις ενώνουν.*

Η ύπαρξη τριγώνων σε μια επιφάνεια που ικανοποιεί τα $S1 - S4$ λέγεται τριγωνοποίηση της επιφάνειας.

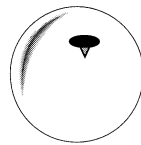
Ας δούμε καλύτερα τον ορισμό και των ιδιοτήτων που φέρει.

Σχετικά με την $S1$: μπορούμε να έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις ενώσεων ακμών τριγώνων όπως φαίνονται στα σχήματα 4.4.α, 4.4.β, αντιθέτως απαγορεύεται να έχουμε ενώσεις που φαίνονται στα σχήματα 4.4.γ', 4.4.δ', 4.4.ε' και 4.4.ζ'.



Σχήμα 4.4

Για την S_2 : αν μια ακμή e , ανήκει μόνο σ' ένα τρίγωνο, τότε αυτή είναι η συνοριακή ακμή και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση μία ακμή θα ανήκει σε δύο μόνο τρίγωνα και ποτέ σε παραπάνω. Η ύπαρξη συνοριακών ακμών υποδηλώνει την ύπαρξη τρύπας.

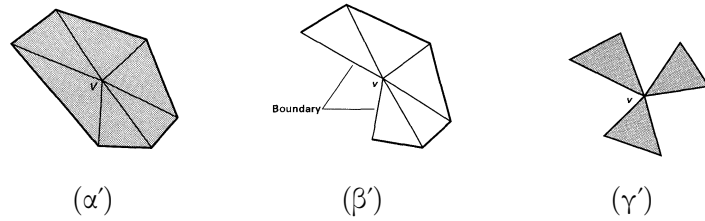


Σχήμα 4.5

Η S_3 ιδιότητα ορίζει την έννοια αστέρι, $S_t v$, της κορυφής v . Υπάρχουν δύο εκδοχές που συναντάμε, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της S_2 , σχήμα 4.6.α' και σχήμα 4.6.β'. Στην πρώτη εκδοχή έχουμε μία ένωση τριγώνων που έχουν κανονικές ακμές με κοινή κορυφή και στην δεύτερη εκδοχή που παρατηρούνται δύο συνοριακές ακμές. Παρ' όλα αυτά την περίπτωση όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6.γ' δε θα τη συναντήσουμε ποτέ.

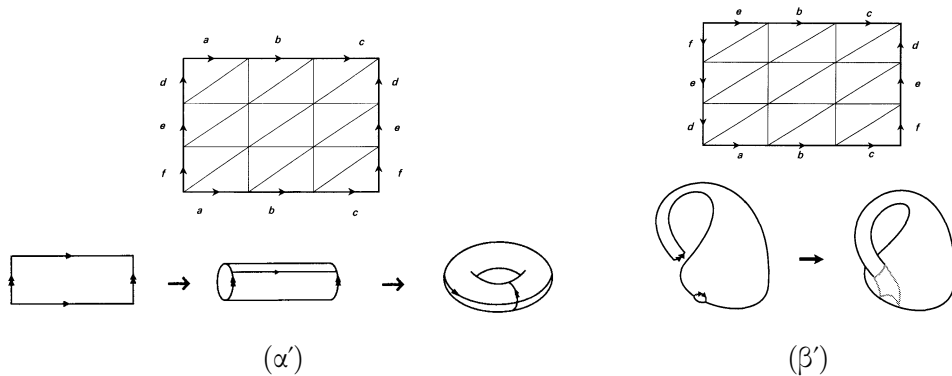
Τέλος για την S_4 , αναφέραμε την ύπαρξη ενός μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών και πιο συγκεκριμένα ένα μονοπάτι σ' έναν τοπολογικό χώρο X είναι μια συνεχής απεικόνιση $a : [0, 1] \rightarrow X$. Θα λέμε ότι ενώνονται τα σημεία $a(0)$ και $a(1)$ και ότι το X είναι συνεκτικό μονοπάτι αν κάθε δύο σημεία μπορούν να ενώνονται μέσω ενός μονοπατιού. Ειδικότερα, για $x, y \in X$ υπάρχει ένα μονοπάτι στο X τέτοιο ώστε $a(0) = x$ και $a(1) = y$. Έτσι λοιπόν και η ίδια η S επιφάνεια θα είναι συνεκτικό μονοπάτι.

Ας ανακαλέσουμε στη μνήμη μας τώρα τον τρόπο με τον οποίο κατασκευ-



Σχήμα 4.6

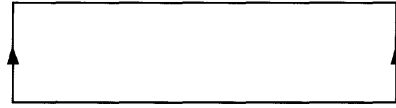
άζουμε μέσω ενός ορθογωνίου τη φιάλη του *Klein* ή ένα τόρο. Η μέθοδος ανάλογα με τη κάθε περίπτωση ήταν η ένωση των πλευρών του ορθογωνίου, αφού έχει προηγηθεί ή όχι μια στροφή. Αν λόγου χάρη ασχοληθούμε με το ορθογώνιο στο σχήμα 4.7.α υπάρχουν ακμές στο διάγραμμα αυτό που φέρουν κάποιες ετικέτες και μάλιστα παρατηρούνται οι ίδιες ετικέτες δύο φορές η καθεμία. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα αγνοώντας τις εσωτερικές ακμές, ενώνουμε τις δύο μεγάλες πλευρές μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε τόσο τα ονόματα των ετικετών να συμπίπτουν όσο και οι κατευθύνσεις, δηλαδή να ταυτίζονται οι ακμές και αντίστοιχα πραγματοποιούμε την ένωση των δύο άλλων μικρότερων πλευρών μέσα στο \mathbb{R}^3 , ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι ο τόρος. Στην περίπτωση που έχουμε ένα ορθογώνιο όπως στο σχήμα 4.7.β τότε με τη μέθοδο *Gluing* το αποτέλεσμα θα είναι η φιάλη του *Klein*, καθώς οι μεγάλες πλευρές θα ενωθούν όπως και παραπάνω, αλλά οι μικρότερες πλευρές για να ενωθούν θα πρέπει να υπάρξει μια στροφή ώστε τόσο οι ετικέτες των ακμών όσο και οι κατευθύνσεις να ταυτίζονται ανάλογα.



Σχήμα 4.7

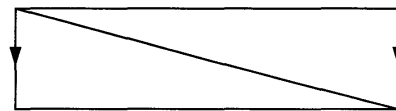
Αφού έχουμε πλέον ορίσει την τριγωνοποίηση σε μια συνδυαστική επιφάνεια, ας δούμε τώρα πως οι κανόνες αυτοί δρούν. Έστω ότι έχουμε ένα κύλινδρο (σχήμα 4.8) που θέλουμε να τριγωνοποιήσουμε. Θα εξετάσουμε πι-

θανές τριγωνοποιήσεις που εύκολα σκεφτόμαστε, όμως οι κανόνες του ορισμού τις απορρίπτουν.



Σχήμα 4.8

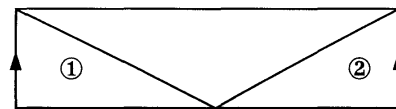
- Προσπάθεια 1



Σχήμα 4.9

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν δύο τρίγωνα με μια κοινή ακμή, όμως καθώς έχουμε κύλινδρο στον \mathbb{R}^3 , μιλάμε δηλαδή για ταύτιση των ακμών με βάση την ετικέτα και τον προσανατολισμό κατάλληλα, άρα πλέον έχουν δύο πλευρές κοινές που αντίκειται στην $S1$.

- Προσπάθεια 2

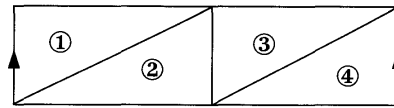


Σχήμα 4.10

Τα τρίγωνα 1 και 2 έχουν με μια πρώτη ματιά μια κοινή κορυφή, όμως μέσω της ταύτισης/ένωσης προκύπτουν τρεις κοινές ακμές, που είναι αδύνατον να συμβαίνει λόγω της $S1$.

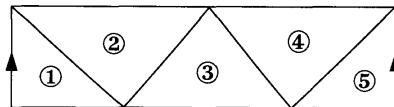
- Προσπάθεια 3

Τα τρίγωνα 1 και 3 έχουν πάλι δύο κοινές ακμές που αντίκειται στην $S1$.



Σχήμα 4.11

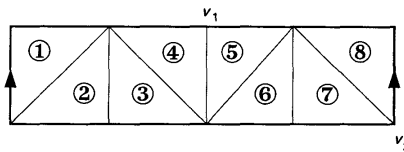
- Προσπάθεια 4



Σχήμα 4.12

Παρατηρούμε κι εδώ ότι τα τρίγωνα 2 και 4 θα έχουν εξίσου δύο κοινές κορυφές.

- Προσπάθεια 5

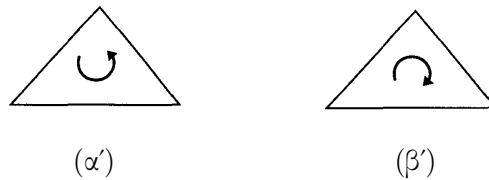


Σχήμα 4.13

Είναι φανερό πως η τριγωνοποίηση αυτή πληροί τους κανόνες $S1$, $S2$, $S3$ και $S4$ καθώς ανάμεσα σε δύο κορυφές το μονοπάτι υπάρχει και είναι συνεκτικό και επίσης υπάρχουν αστέρια $S_i v_1$ και $S_i v_2$, τα οποία περιλαμβάνουν αντίστοιχα τα 3, 4, 5 και 6 και τα υπόλοιπα 1, 2, 7, 8 που το σύνολο αυτών είναι ομοιομορφικό με τον δίσκο. Επομένως καταφέραμε να βρούμε μια τριγωνοποίηση για τον κύλινδρο, όπως αντίστοιχα στην εικόνα 4.13 έχουμε μια τριγωνοποίηση για τον τόρο. Ωστόσο, προκύπτουν κάποια εύλογα ερωτήματα, όπως αν μπορούμε να βελτιώσουμε την τριγωνοποίηση με τη χρήση λιγότερων τριγώνων ή πως μπορούμε να αλλάξουμε την τριγωνοποίηση κόβοντας μικρά τρίγωνα σε μικρότερα (υποδιαίρεση αρχικού τριγώνου). Παρ' όλα αυτά τα ερωτήματα, κύριος σκοπός μας θα παραμείνει η ταξινόμηση επιφανειών μέσω αναλλοίωτων, οι οποίες δεν θα εξαρτώνται, όπως θα δούμε αργότερα, από την τριγωνοποίησή μας.

Οι πρώτη μας αναλλοίωτη επιφάνεια είναι η προσανατολισσιμότητα (orientability). Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες επιφανειών, οι προσανατολίσιμες (orientable) και οι μη-προσανατολίσιμες (non-orientable). Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα επιφανειών που θα φανούν αργότερα αρκετά χρήσιμα στη μελέτη ταξινόμησης επιφανειών είναι ο τόρος και η σφαίρα που είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες, εν αντιθέσει με τη φιάλη του *Klein*, το Möbius band και το προβολικό επίπεδο που δεν είναι. Το προβολικό επίπεδο θα το μελετήσουμε λεπτομερώς αργότερα, για την ώρα όμως θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την έννοια της προσανατολισσιμότητας και τις κατηγορίες στις οποίες διακρίνεται.

Έστω, λοιπόν, μια επιφάνεια που έχει τριγωνοποιηθεί. Δηλαδή, έχουμε μια επιφάνεια χωρισμένη σε τρίγωνα, στα οποία θα δώσουμε προσανατολισμούς. Οι προσανατολισμοί αυτοί μπορεί να είναι δύο ειδών όπως στο σχήματα 4.14.α και 4.14.β.



Σχήμα 4.14

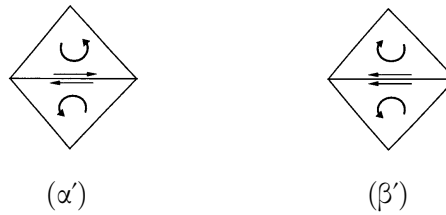
Με τον τρόπο που δίνεται ο προσανατολισμός σ' ένα τρίγωνο, αμέσως και οι ακμές υιοθετούν τον ίδιο προσανατολισμό.



Σχήμα 4.15

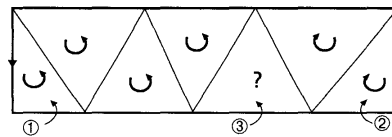
Τι συμβαίνει όμως όταν δυο τρίγωνα είναι γειτονικά; Διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις (σχήμα 4.16), όπου αν στην κοινή ακμή υπάρχουν δύο αντίθετες κατευθύνσεις τότε τα τρίγωνα είναι όμοια προσανατολισμένα, ενώ όταν έχουν κοινή ακμή με την ίδια κατεύθυνση, τότε αυτά είναι διαφορετικά προσανατολισμένα.

Επομένως, θα λέμε ότι μια επιφάνεια S είναι προσανατολισμένη (orientable) αν όλα τα τρίγωνα της έχουν τον ίδιο ακριβώς προσανατολισμό. Στην αντίθετη περίπτωση θα μιλάμε για μια μη-προσανατολισμένη επιφάνεια (non-orientable).



Σχήμα 4.16

Η τεχνική για να αποδείξουμε ότι μια επιφάνεια είναι προσανατολισμένη είναι αφού την έχουμε τριγωνοποιήσει να ξεκινήσουμε από ένα τυχαίο τρίγωνο, δίνοντάς του έναν προσανατολισμό, και να συνεχίσουμε για κάθε νέο γειτονικό τρίγωνο να δίνουμε τον ίδιο ακριβώς προσανατολισμό ώπου να καταλήξουμε να έχουμε όλα τα τρίγωνα με τον ίδιο ακριβώς προσανατολισμό. Βέβαια υπάρχει και το ενδεχόμενο η τεχνική αυτή να μην μπορέσει να ολοκληρωθεί επιτυχώς. Στην περίπτωση αυτή θα μιλάμε για μια μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια, όπως συμβαίνει στο σχήμα 4.17 που αναπαριστά το Möbius band. Ειδικότερα, ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε από το 1 τρίγωνο και βάζουμε σε κάθε νέο γειτονικό τρίγωνο τον ίδιο προσανατολισμό. Παρατηρούμε όμως ότι το τρίγωνο 2 είναι αυτό που θα πρέπει να ενωθεί με το τρίγωνο 1 με τέτοιο τρόπο ώστε οι προσανατολισμοί των ακμών να ταυτίζονται. Αντίστοιχα, και αφού αυτά είναι γειτονικά θα πρέπει να έχει το 2 τον ίδιο προσανατολισμό με το 1 που όμως λόγω της ταύτισης ακμών υιοθετεί τον ανάποδο προσανατολισμό και έτσι αφού και το γειτονικό του τριγώνου 2 έχει τον ίδιο προσανατολισμό, φτάνουμε στο 3 τρίγωνο όπου δεν μπορεί να τοποθετήσει κανέναν από τους δύο προσανατολισμούς, αφού τα δύο γειτονικά του έχουν αντίθετους προσανατολισμούς. Έτσι, αποδείξαμε πράγματι ότι το Möbius band είναι μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια.



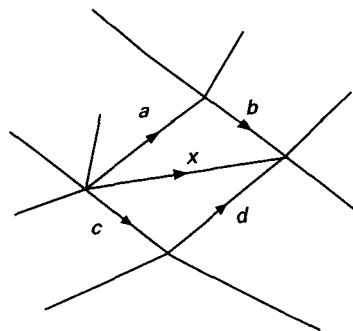
Σχήμα 4.17

4.2 Cutting and Pasting

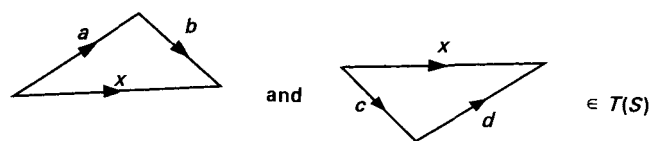
Το Cutting and Pasting είναι μια μέθοδος βαθύτερης ανάλυσης των επιφανειών που ακολουθεί κάποια βασικά βήματα με σκοπό να καταλήξουμε σ' ένα νέο συμβολισμό επιφανειών. Η ιδέα είναι να σχηματίζουμε εντός της επιφάνειας τρίγωνα, δίνοντας σε κάθε ακμή από μία ετικέτα και γράφοντας σε κάθε ακμή και στις δύο πλευρές τους τα σύνολα της ετικέτας. Έπειτα ενώνουμε αυτά τα τρίγωνα ξανά ώστε να πάρουμε πάλι την επιφάνειά μας αυτή τη φορά σαν ένα πολύγωνο, το οποίο στις εξωτερικές του ακμές θα φέρει κάποιες από τις ετικέτες που δώσαμε. Ας εξετάσουμε όμως πιο αναλυτικά τα βήματα.

• ΒΗΜΑ 1

Δημιουργούμε τρίγωνα μέσα στην επιφάνεια S και σε κάθε ακμή δίνουμε ετικέτα και προσανατολισμό με ένα γράμμα και ένα βέλος αντίστοιχα. Οι διακριτές ακμές θα έχουν και διακριτές ετικέτες. Θα συμβολίζουμε με $T(S)$ το σύνολο όλων των τριγώνων στην S που φέρουν ετικέτα με σκοπό από το $T(S)$ να ανακατασκευάσουμε την επιφάνεια S .



(α')



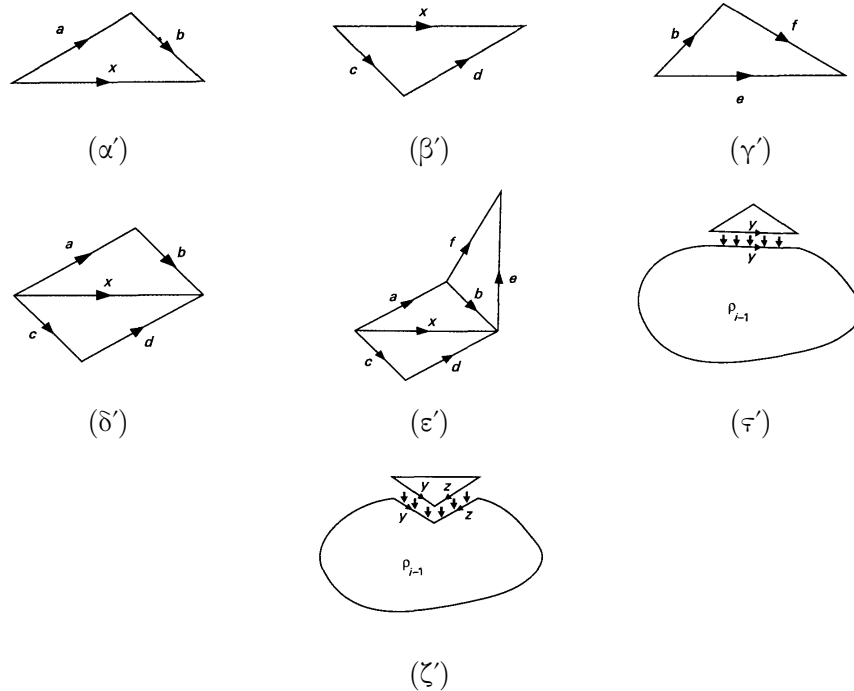
(β')

Σχήμα 4.18

• ΒΗΜΑ 2

Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε τυχαία ένα τρίγωνο από το $T(S)$. Έστω το $t_0 \in T(S)$. Βρίσκουμε ένα άλλο τρίγωνο $t_1 \in T(S)$ το οποίο να

έχει μια ακμή με την ίδια ετικέτα με το t_0 και τα κολλάμε μεταξύ τους ώστε να ταυτίζονται όχι μόνο οι ετικέτες αλλά και οι προσανατολισμοί. Έτσι θα έχουμε κατασκευάσει ένα πρώτο πολύγωνο που θα είναι ομοιομορφικό με έναν δίσκο p_1 . Στη συνέχεια διαλέγουμε άλλο ένα τρίγωνο που να έχει κάποια ετικέτα ακμής του ίδια με μια ή δύο από αυτές που βρίσκονται στο p_1 , θα ενωθούν πάλι με τους ίδιους κανόνες και θα κατασκευαστεί ένα νέο λίγο μεγαλύτερο πολύγωνο ομοιομορφικό μ' ένα δίσκο p_2 . Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία ώσπου να εξαντλήσουμε την $T(S)$ και να έχουμε κατασκευάσει το τελικό μας πολύγωνο. Αξίζει βέβαια να αποσαφηνίσουμε πως η ένωση τριγώνων θα γίνεται με δύο τρόπους ανάλογα με το πόσες κοινές ακμές θα έχει το νέο τρίγωνο που θα προστεθεί στο p_i και εφόσον επιτρέπεται η ένωση αυτή.



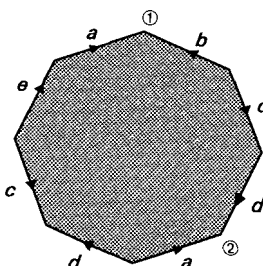
Σχήμα 4.19

Άρα λοιπόν, έχουμε ξεκινήσει από μια επιφάνεια S την οποία μέσω της δημιουργίας τριγώνων και της ονομασίας των ακμών με ετικέτες και προσανατολισμούς ανακατασκευάσαμε την S παίρνοντας ένα πολύγωνο της μορφής σχήμα 4.20. Η νέα αυτή μορφή της επιφάνειας μπορεί να ονομασθεί με βάση τις ετικέτες των ακμών. Επιλέγουμε μια τυχαία κορυφή και ξεκινάμε με τη φορά με αυτή του ρολογιού να γράφουμε τις ετικέτες στη σειρά, όσες ετικέτες έχουν αντίθετη φορά με αυτή του ρολογιού λαμ-

βάνουν μια δύναμη -1 , ενώ οι υπόλοιπες γράφονται απλά με το όνομά τους. Έτσι από το σχήμα 4.20 προκύπτει η ονομασία με αρχή την 1:

$$b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$$

Βέβαια, η ονομασία της επιφάνειας S δεν εξαρτάται από την επιλογή της κορυφής την οποία ξεκινήσαμε. Έτσι η ονομασία με αρχή την 2 κορυφή $a^{-1}dc^{-1}eab^{-1}cd$ είναι ισοδύναμη με την παραπάνω.



Σχήμα 4.20

Επομένως, η αρχική επιφάνεια S δίνεται με μια νέα μορφή, αυτή του πολυγώνου και θα την ονομάζουμε συμβολοεπιφάνεια.

• ΒΗΜΑ 3

Το βήμα αυτό περιλαμβάνει τις ισοδύναμες αλλαγές που μπορούμε να κάνουμε στην επιφάνεια μας ώστε να λάβει μια καλύτερη μορφή η συμβολοεπιφάνεια και έτσι να διακρίνουμε πιο εύκολα κάποιες αναλλοίωτες. Οι αλλαγές αυτές ονομάζονται διαδικασίες (*operations*).

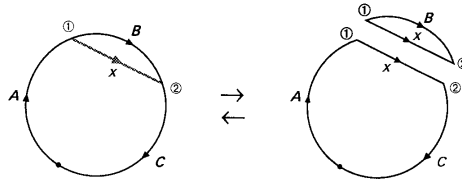
– Διαδικασία 1

$$ABC \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{cat}} \\ \xleftarrow{\text{paste}} \end{array} Ax C^{-1} \quad \text{και} \quad Bx^{-1}$$

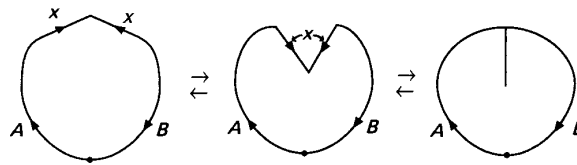
Με κεφαλαία γράμματα συμβολίζουμε το σύνολο ετικετών που συμμετέχουν στην συμβολοεπιφάνεια και δεν περιλαμβάνουν το x και το x^{-1} . Η σημασία αυτής της διαδικασίας είναι το κόψιμο ενός τριγώνου ή η επικόλλησή του στην κοινή ακμή με βάση τον προσανατολισμό και είναι αρκετά συχνή όπως θα δούμε παρακάτω.

– Διαδικασία 2

$$Axx^{-1}B \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{paste}} \\ \xleftarrow{\text{cat}} \end{array} AB$$



Σχήμα 4.21



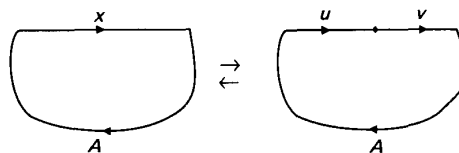
Σχήμα 4.22

– Διαδικασία 3

$$x \rightarrow uv$$

Έστω x είναι μια ακμή της συμβολοεπιφάνειας. Αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ζεύγος u και v ακμές, οι οποίες δεν συμμετέχουν, πουθενά αλλού μέσα στην συμβολοεπιφάνεια. Αντίστοιχα, μπορεί ένα ζεύγος u και v να αντικατασταθεί από το x . Δηλαδή,

$$uv \rightarrow x$$

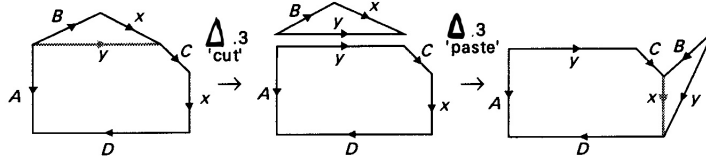


Σχήμα 4.23

– Σύνθετες Διαδικασίες

Οι διαδικασίες αυτές βασίζονται πάνω στις στοιχειώδεις τρεις διαδικασίες, που ήδη αναφέραμε.

– Διαδικασία 4



Σχήμα 4.24

$$ABxCxD \rightleftharpoons AyCB^{-1}y$$

Αντικαθιστούμε το $ABxCxD$ από το $AyCB^{-1}y$, όπου το y είναι ένα νέο σύμβολο που δεν περιέχεται πουθενά στα A, B, C και D .

– Διαδικασία 5

$$ABxCx^{-1}D \rightleftharpoons AyCy^{-1}BD$$

– Διαδικασία 6

$$AxBCxD \rightleftharpoons AyCyB^{-1}D$$

– Διαδικασία 7

$$AxBCx^{-1}D \rightleftharpoons AyCBy^{-1}D$$

Σε κάθε περίπτωση το y είναι μια νέα ετικέτα που δεν συμμετέχει πουθενά αλλού στα A, B, C , και D .

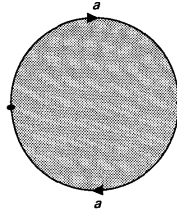
• ΒΗΜΑ 4

Στο βήμα αυτό θα ορίσουμε τα *crosscaps* που αποτελούν μια βασική ιδιότητα για τη συμβολοεπιφάνεια μας και μάλιστα ένα χαρακτηριστικό που μας φέρνει πιο κοντά στις αναλλοίωτες. Ωστόσο, αναφέραμε προηγουμένως πως μια μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι και το προβολικό επίπεδο, το οποίο συμβολίζεται με \mathbb{P}^2 και ορίζεται να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ εφοδιασμένο με τη σχέση ισοδυναμίας:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Ο παραπάνω ορισμός καθιστά προφανές το γεγονός ότι το \mathbb{P}^2 αποτελεί τοπολογικό χώρο. Μάλιστα, αν το $(x, y, z) \in S^2$, όπου S^2 η μοναδιαία

σφαίρα τότε αφού $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ παίρνουμε $x = -x$, $y = -y$ και $z = -z$ και αν πάρουμε τον δίσκο $D = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$ των x , y και z το προβολικό επίπεδο δεν μπορεί να εμφυτευθεί στον \mathbb{R}^3 καθώς δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ως επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 χωρίς σημεία αυτοτομής. Έτσι, σαν συμβολοεπιφάνεια του προβολικού επιπέδου παίρνουμε τον δίσκο του σχήματος 4.25.



Σχήμα 4.25

Τώρα μπορούμε πιο εύκολα να ορίσουμε την έννοια των *crosscaps*. Ένα *crosscap* είναι ένα προβολικό επίπεδο που περιέχεται στην S , δηλαδή έχει σύμβολο aa . Η παρουσία του προβολικού επιπέδου και κατ' επέκταση και του *crosscap* υπονοεί μια μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια. Ας δούμε όμως πρώτα πως μπορούμε να κατασκευάσουμε σε μια συμβολοεπιφάνεια που εμφανίζει κάπου $a \cdots a$, ένα *crosscap* $aa \cdots$.

Έστω η $ABxCxD$.

$$\begin{aligned} ABxCxD &\xrightarrow{\text{Διαδικασία 4}} AyCB^{-1}yD \\ &\xrightarrow{\text{Διαδικασία 6}} AzzBC^{-1}D \quad (\text{παίρνοντας το } C \text{ άδειο} \\ &\quad \text{και το } B \cong CB^{-1}) \end{aligned}$$

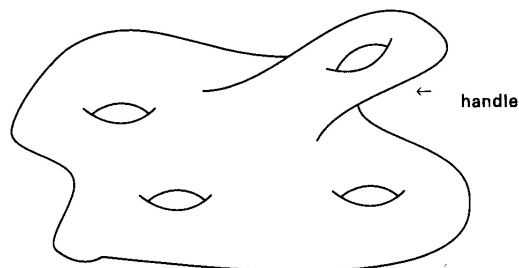
Με την έννοια "άδειο" εννοούμε ότι το C δεν περιέχει κάποια ετικέτα. Αντίστοιχα, θεωρούμε και το A να είναι άδειο και έτσι παίρνουμε $zzBC^{-1}D$. Αν τα B , C^{-1} και D δεν περιέχουν κάποιο μοτίβο της μορφής $a \cdots a$ τότε έχουμε την παρουσία ενός *crosscap*. Σε αντίθετη περίπτωση εξετάζουμε καθ' ένα από αυτά και λειτουργούμε αναλόγως, ώστε τελικά να λάβουμε μια μορφή

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n B$$

όπου B δεν περιέχει κανένα άλλο *crosscap*, παρά μόνο κάποιο μοτίβο $x \cdots x^{-1}$.

- **ΒΗΜΑ 5** Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένας τόρος προκύπτει από ένα ορθογώνιο, του οποίου οι απέναντι πλευρές ταυτίζονται. Έτσι η συμβολοεπιφάνεια του τόρου είναι $aba^{-1}b^{-1}$. Αν, λοιπόν, μια συμβολοεπιφάνεια περιέχει το μοτίβο $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$ τότε στην επιφάνεια αυτή υπάρχει

έναν επισυναπτόμενο τόρο. Ο επισυναπτόμενος τόρος μοιάζει με χερούλι και θα λέμε ότι η επιφάνεια έχει ένα χερούλι (*handle*), αν ένα τέτοιο μοτίβο εμφανίζεται μέσα στη συμβολοεπιφάνεια.



Σχήμα 4.26

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε μέσω των διαδικασιών που έχουμε μελετήσει παραπάνω να επέμβουμε στην συμβολοεπιφάνεια ώστε να έχουν τακτοποιηθεί κατάλληλα οι ετικέτες των ακμών, δηλαδή:

$$\begin{aligned} ABaCbDa^{-1}Eb^{-1}F &\rightarrow AxCbDx^{-1}Beb^{-1}F \rightarrow \\ AuBEDCyu^{-1}y^{-1}F &\rightarrow Auvu^{-1}v^{-1}BEDCF \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο αν το A είναι κενό, τότε έχουμε απλά τη παρουσία ενός *handle*, ειδάλλως αν το A είναι μια σειρά *crosscaps* τότε θα έχουμε κατασκευάσει μια συμβολοεπιφάνεια με τακτοποιημένες τις ετικέτες, ώστε να πάρουμε: $[crosscaps][handles][υπόλοιπο]$

- **ΒΗΜΑ 6** Στο βήμα αυτό δεν θα ασχοληθούμε με την έννοια το υπολοίπου που αναφέρθηκε προηγουμένως, αλλά και με ένα περίεργο φαινόμενο που παρατηρείται αν σε μια συμβολοεπιφάνεια συναντήσουμε ένα *crosscap* και ένα *handle*. Ειδικότερα αν έχουμε:

$$crosscap + handle = 3 crosscaps$$

Απόδειξη.

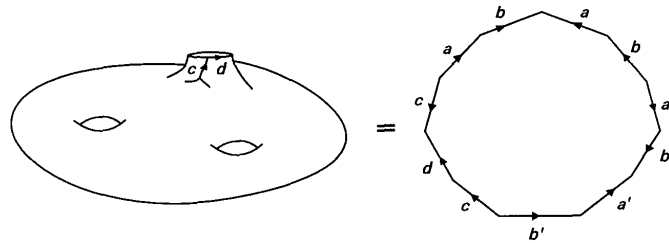
$$\begin{aligned} a_1a_1a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} &\rightarrow a_1a_1y_2a_2^{-1}y_2^{-1}a_2^{-1} \rightarrow \\ a_1a_1y_2y_2a_2^{-1}a_2^{-1} &\rightarrow a_1a_1y_2y_2y_1y_1 \end{aligned}$$

□

Επομένως, όταν η συμβολοεπιφάνεια μας έχει τη μορφή $[crosscaps][handles][\text{υπόλοιπο}]$ χάρις του παραπάνω φαινομένου θα έχουμε τελικά ένα μοτίβο:

- α. $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n H$, όπου H είναι το υπόλοιπο, δηλαδή μια ακολουθία χωρίς $crosscaps$ και $handles$ ή το H είναι άδειο.
- β. $a_1 b_2 a_1^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} H$, για το H ισχύει το ίδιο με παραπάνω.

- **ΒΗΜΑ 7** Τώρα θα ασχοληθούμε με το H για το οποίο υποθέτουμε ότι δεν είναι άδειο. Θα ονομάζουμε $cuff$ το H αν περιέχει την ακολουθία ακμών cdc^{-1} , δηλαδή αν παρατηρείται μια μόνο νέα ακμή (εδώ d).



Σχήμα 4.27

Η ύπαρξη ενός $cuff$ μέσα σε μια συμβολοεπιφάνεια, όπως φανερώνει και η εικόνα (σχήμα 4.27) υποδηλώνει την παρουσία μιας τρύπας στην επιφάνειά μας.

Πρόταση 4.2.1. Κάθε συμβολοεπιφάνεια μπορεί να προσαρμοστεί σύμφωνα με τις Διαδικασίες 1,2 και 3, ώστε αν AH είναι η συμβολοεπιφάνεια, το A είναι μια ακολουθία $crosscaps$ ή $handles$ (όχι και τα δυο ταυτόχρονα) και H μια σειρά από $cuffs$. Αυτή η μορφή θα ονομάζεται κανονική μορφή (*formal norm*).

Παρατήρηση 4.2.2. Αν δυο επιφάνειες S_1, S_2 έχουν τις ίδιες κανονικές μορφές τότε τα πολύγωνα τους είναι ομοιομορφικά και κατ' επέκταση και οι ίδιες οι επιφάνειες.

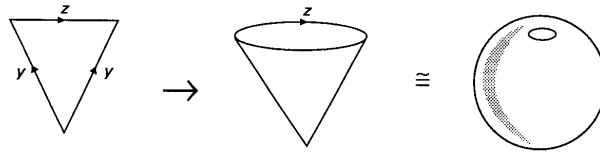
Θεώρημα 4.2.3 (Ταξινόμηση επιφανειών). Δυο επιφάνειες είναι ομοιομορφικές αν και μόνο αν οι κανονικές μορφές των επιφανειών αυτών έχουν τον ίδιο αριθμό $crosscaps$ ή $handles$ και το ίδιο πλήθος $cuffs$.

Παραδείγματα 4.2.4.

1. Μια σφαίρα έχει συμβολοεπιφάνεια aa^{-1} που είναι η “κενή” κανονική μορφή, όπως είναι προφανές.

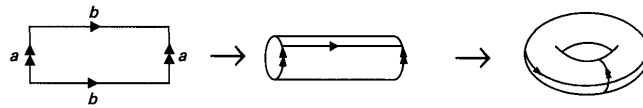
4.3. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ: ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

2. Η κανονική μορφή $yzzy^{-1}$ είναι μια σφαίρα με μια τρύπα.



Σχήμα 4.28

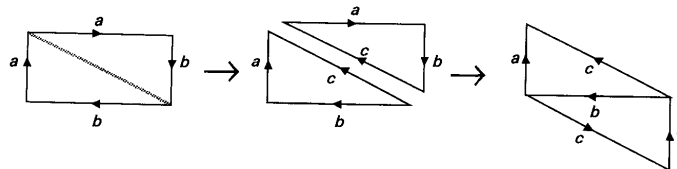
3. $aba^{-1}b^{-1}$ είναι ένας τόρος.



Σχήμα 4.29

4. aa είναι το προβολικό επίπεδο.

5. $a_1a_1a_2a_2$ υποδηλώνει την ύπαρξη 2 crosscaps και αντιπροσωπεύει την συμβολοεπιφάνεια της φιάλης του Klein.



Σχήμα 4.30

4.3 Αναλλοίωτες επιφανειών: Προσανατολισιμότητα και συνοριακές καμπύλες

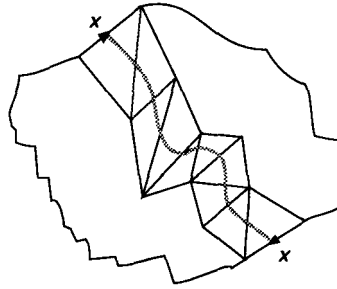
Με βάση όσων μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε πλέον από μια επιφάνεια, και επιλέγοντας μια τριγωνοποίησή της και αφού εφαρμόζουμε όλους τους κανόνες, να καταλήξουμε σε μια συμβολοεπιφάνεια και μάλιστα να ανακατασκευάσουμε την συμβολοεπιφάνεια ώστε να είναι φανερή η ύπαρξη των *crosscaps* ή *handles* και *cuffs*. Η ύπαρξη τέτοιων ακολουθιών είναι αρκετά χρήσιμη για την εξαγωγή πληροφοριών για τα χαρακτηριστικά μιας επιφάνειας, όπως είναι η προσανατολισιμότητα και οι συνοριακές καμπύλες.

- Προσανατολισιμότητα

Η πρώτη αναλλοίωτη είναι η *προσανατολισιμότητα* (*orientability*) που ήδη έχει αναλυθεί, αλλά ας δούμε μια πιο αυστηρή προσέγγιση.

Πρόταση 4.3.1. *Μια επιφάνεια S είναι μη-προσανατολίσιμη αν και μόνο αν η κανονική μορφή της συμβολοεπιφάνειας περιέχει ένα $crosscap$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συμβολοεπιφάνεια της S περιέχει ένα $crosscap$, οπότε αυτή θα περιέχει σε κάποιο σημείο το μοτίβο $\dots x \dots x \dots$. Επιλέγουμε ένα μονοπάτι εντός του πολυγώνου μας με αρχή το πρώτο x και τέλος το δεύτερο x , περνώντας ανάμεσα από κάποιες ακμές των ενδιάμεσων τριγώνων το πολύ μια φορά.



Σχήμα 4.31

Αφού ήδη έχουμε προσανατολίσει κατάλληλα τα τρίγωνα ανάμεσα σ' αυτό το μονοπάτι, δηλαδή επιλέγοντας προσανατολισμό για όλα τα ενδιάμεσα τρίγωνα καταλήγουμε πως η επιφάνεια δεν είναι προσανατολίσιμη, καθώς καταλήγουμε στα δυο τρίγωνα που έχουν ως ακμές τα x να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό οι κοινές του ακμές που θα ταυτιστούν. Πράγμα που αντίκειται στον κανόνα των προσανατολίσιμων τριγώνων. \square

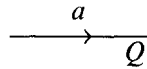
Παρατήρηση 4.3.2. *Αν η συμβολοεπιφάνεια δεν περιέχει $crosscaps$ αλλά $handles$, τότε η επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.*

- Συνοριακές καμπύλες.

Όπως η παρουσία των $crosscaps$ και $handles$ δίνει πληροφορία για την επιφάνεια μας, έτσι και η ύπαρξη των $cuffs$. Ένα $cuff$ είδαμε ότι είναι το μοτίβο cdc^{-1} , ωστόσο αν η συμβολοεπιφάνεια μας περιέχει δυο ακμές που εμφανίζονται μόνο μια φορά δεν μπορούμε να είμαστε τόσο σίγουροι ότι έχουμε ένα ή δύο $cuffs$, λόγω της Διαδικασίας 3. Έτσι μια άλλη

4.3. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ: ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

προσέγγιση για το πλήθος των *cuffs* είναι οι κορυφές που αποτελούν το πολύγωνο μας. Π.χ. Στον τόρο $aba^{-1}b^{-1}$ όλες οι ακμές ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή, ενώ στο $aba^{-1}b^{-1}cfe^{-1}$ χρειάζεται δυο κορυφές. Ας δούμε λεπτομερώς πως βάζουμε ετικέτες κορυφών μέσα στην συμβολοεπιφάνεια. Έστω a η ακμή, Q η κορυφή



Σχήμα 4.32

αν η ετικέτα της ακμής a εμφανίζεται άλλη μια φορά πάνω στο σύνορο της επιφάνειας, τότε και εκείνη παίρνει την ίδια κορυφή. Συνεχίζουμε πάλι στην a και στην επόμενη ακμή που ακολουθεί το a πάνω στο σύνορο της επιφάνειας, έστω b



Σχήμα 4.33

έχει και αυτή την ίδια κορυφή στο τέλος της ακμής της και εξετάζουμε αν υπάρχει και δεύτερη φορά η ακμή b πάνω στο σύνορο. Συνεχίζουμε τη ίδια διαδικασία ώσπου είτε όλη η συμβολοεπιφάνεια να έχει τη ίδια κορυφή, είτε σε κάποιο σημείο να έχει προκύψει μια νέα κορυφή.

Παράδειγμα 4.3.3. Έχουμε την συμβολοεπιφάνεια: $aabbcdc^{-1}$
 έστω η κορυφή Q στο τέλος της a : η ίδια η Q κορυφή βρίσκεται στην αρχή

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & a & b & b & c & d & c^{-1} \\
 Q & & & & & &
 \end{array}$$

της δεύτερης a ακμής, οπότε τοποθετούμε την κορυφή αυτή και στο τέλος στην δεύτερης a και στην αρχή της πρώτης a .

$$\begin{array}{ccccccc} a & a & b & b & c & d & c^{-1} \\ Q & Q & & & & & \end{array}$$

Έπειτα τοποθετούμε την κορυφή αυτή και στο τέλος της συμβολοεπιφάνειας δηλαδή στο τέλος της c^{-1} . Ύστερα κοιτάζουμε τις υπόλοιπες ακμές, όπου για τις b κάνουμε τα ίδια ακριβώς βήματα, ώσπου να φτάσουμε στην αρχή της d όπου και θα πάρει μια νέα κορυφή R . Δηλαδή θα έχουμε τα εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} a & a & b & b & c & d & c^{-1} \\ Q & Q & Q & Q & Q & & Q. \\ \\ a & a & b & b & c & d & c^{-1} \\ Q & Q & Q & Q & Q & R & R & Q \end{array}$$

Ορισμός 4.3.4. Μια ακμή θα λέγεται συνοριακή ακμή, αν εμφανίζεται μία μόνο φορά.

Στο παραπάνω παράδειγμα ήταν συνοριακή ακμή η d , ενώ η $b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$ έχει δυο συνοριακές ακμές τις b, e και δυο κορυφές.

$$\begin{array}{ccccccc} b^{-1} & c & d & a^{-1} & d & c^{-1} & e & a \\ Q & R & Q & Q & Q & Q & R & Q & Q \end{array}$$

Οι ακμές b, e μοιράζονται τις ίδιες κορυφές και έτσι σχηματίζουν μια συνοριακή καμπύλη (*boundary curve*). Αξίζει να σημειώσουμε πως μια συνοριακή καμπύλη προκύπτει από την ένωση συνοριακών ακμών που έχουν κοινές κορυφές, αλλά δεν εξαρτάται ούτε αυτή η αναλλοίωτη από την τριγωνοποίηση της επιφάνειας.

Πρόταση 4.3.5. Ο αριθμός των συνοριακών καμπυλών είναι ίδιος με τον αριθμό των *cuffs* στην κανονική μορφή της συμβολοεπιφάνειας. Παράλληλα η συνοριακή καμπύλη αποτελεί αναλλοίωτη επιφάνειας.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η συνοριακή καμπύλη είναι αναλλοίωτη επιφάνειας αρκεί να δούμε πως αυτή επηρεάζεται ή όχι από τις τρεις βασικές διαδικασίες. Στην Διαδικασία 1 η νέα ακμή x προκύπτει δυο φορές και αυτό δεν αλλάζει τον αριθμό των συνοριακών ακμών και κατ' επέκταση καμπυλών. Στην Διαδικασία 2 παρατηρείται το ίδιο ακριβώς φαινόμενο με τη Διαδικασία 1. Ενώ στην Διαδικασία 3 αν η x δεν είναι συνοριακή ακμή τότε δεν αλλάζει κάτι, αν όμως η x είναι μια συνοριακή ακμή, τότε ο αριθμός των συνοριακών ακμών θα αυξηθεί κατά 1, αλλά δεν θα επηρεαστεί προφανώς ο αριθμός των

4.4. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ EULER ΚΑΙ ΓΕΝΟΣ.79

συνοριακών καμπυλών, ο οποίος θα παραμείνει ο ίδιος. Άρα, πράγματι είναι μια αναλλοίωτη της επιφάνειας.

□

4.4 Αναλλοίωτες επιφάνειας: Χαρακτηριστική Euler και γένος.

Θα εισάγουμε σε αυτή τη παράγραφο άλλες δύο αναλλοίωτες επιφανειών και θα ξεκινήσουμε πάλι από μια συνδυαστική επιφάνεια S με a_0 διακριτές κορυφές, a_1 διακριτές ακμές και a_2 τρίγωνα. Η χαρακτηριστική Euler $x(S)$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(S) = a_0 - a_1 + a_2$$

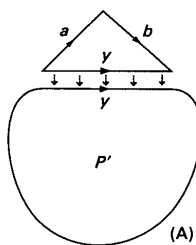
Πρόταση 4.4.1. Έστω P ένα πολύγωνο που αναπαριστά την επιφάνεια S . Υποθέτουμε ότι από την συμβολοεπιφάνεια της S προκύπτουν v ξεχωριστές κορυφές και e ξεχωριστές ακμές πάνω στο σύνορο του P , τότε έχουμε:

$$x(S) = v - e + 1$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε k τρίγωνα που τριγωνοποίησαν την επιφάνεια. Αν $k = 1$ τότε $S = P$ και $a_0 = v$, $a_1 = e$ και $a_2 = 1$, άρα προκύπτει το ζητούμενο.

Έστω τώρα ότι $K > 1$ και μάλιστα στο τελικό αποτέλεσμα έχουμε τη συμμετοχή k τριγώνων για το σχηματισμό του πολυγώνου P . Θα εξετάσουμε το τελικό αποτέλεσμα για το P που θα προκύψει από το P_{k-1} με την τελευταία προσθήκη του k -τριγώνου. Βέβαια υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τον τρόπο που θα ενωθεί το k τρίγωνο με το P' πολύγωνο.

α' περίπτωση



Σχήμα 4.34

Στη περίπτωση αυτή θα δούμε πως κολλάει το τρίγωνο αυτό και το αποτέλεσμα που θα επιφέρει στην $x(S)$ ανάλογα με τις ακμές. Ειδικότερα, πρώτα θα θεωρήσουμε ότι οι a και b ακμές δεν ανήκουν στο σύνορο του P' και ενώνονται στην y ακμή. Έτσι, έχουμε τη προσθήκη δύο νέων ακμών και μιας νέας κορυφής, δηλαδή $v = v' + 1$, $e = e' + 1$ και αυτό γιατί χάνουμε την y αλλά κερδίζουμε δύο άλλες ακμές, άρα έχουμε ότι $v - e + 1 = v' - e' + 1$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν γίνεται καμία νέα αλλαγή, αφού:

$$\begin{aligned} x(S') &= a'_0 - a'_1 + a'_2 = v' - e' + 1 \\ x(S) &= a_0 - a_1 + a_2 = (a'_0 + 1) - (a'_1 + 2) + (a'_2 + 1) \\ &= a'_0 - a'_1 + a'_2 = x(S') = v' - e' + 1 = v - e + 1 \end{aligned}$$

Άρα πράγματι αποδείχτηκε ότι $x(S) = v - e + 1$.

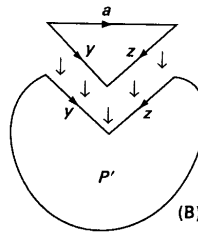
Αν τώρα υποθέσουμε ότι η a ακμή συμμετέχει ήδη μια φορά στο σύνορο P , τότε θα έχουμε μεν ένα νέο τρίγωνο, μια νέα ακμή την b και καμία άλλη αλλαγή στο πλήθος των κορυφών. Δηλαδή, $v = v'$, $e = e'$ αφού έχουμε νέα ακμή την b αλλά ήδη έχουμε χάσει την y και έχουμε ήδη "υπολογίσει" την a , οπότε πάλι ισχύει $v' - e' + 1 = v - e + 1$ και μάλιστα έχουμε ότι:

$$a_0 = a'_0, \quad a_1 = a'_1 + 1, \quad a_2 = a'_2 + 1 \quad \text{άρα} \quad x(S) = x(S')$$

Αντίστοιχα, υπολογίζεται για την b .

Τέλος, αν και η a και η b συμμετέχουν ήδη στο σύνορο P' , τότε θα έχουμε ότι $v = v'$, $e = e' - 1$ και $a_0 = a'_0$, $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2 + 1$. Άρα πάλι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

β' περίπτωση



Σχήμα 4.35

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει αν η προσθήκη του k τριγώνου στο P' όπως γίνεται στο σχήμα 4.35. Παρατηρώντας το σχήμα 4.35 παρατηρούμε πως η μόνη επιλογή που έχουμε είναι να ελέγξουμε αν η ακμή a είναι ήδη πάνω

4.4. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ EULER ΚΑΙ ΓΕΝΟΣ.81

στο σύνορο της P ή όχι και αντιστοίχως υπολογίζεται το $x(S)$, όπως και παραπάνω.

□

Λήμμα 4.4.2. Όλες οι Διαδικασίες που οδηγούν στην κανονική μορφή της συμβολοεπιφάνειας δεν επηρεάζουν τις τιμές v και e , δηλαδή την χαρακτηριστική Euler. Με άλλα λόγια, η χαρακτηριστική Euler είναι μια αναλλοίωτη επιφάνειας.

Απόδειξη. Είναι σχεδόν προφανής και ανάλογη η απόδειξη με αυτή της συνοριακής καμπύλης, καθώς τόσο η Διαδικασία 1 είναι ακριβώς ίδια με το μοτίβο της προηγούμενης απόδειξης, όσο και η Διαδικασία 2 και 3 που προσφέρουν μια νέα κορυφή και μια νέα ακμή, άρα η ποσότητα $v - e + 1$ παραμένει αναλλοίωτη. □

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε υπολογίσει μια νέα αναλλοίωτη επιφάνειας αυτή της χαρακτηριστικής Euler, η οποία δείξαμε ότι είναι ανεξάρτητη της τριγωνοποίησης και μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τη κανονική μορφή του πολυγώνου της επιφάνειας S . Αλλά ας δούμε τώρα πως λειτουργεί η χαρακτηριστική Euler ανάλογα με το προσανατολισμό της επιφάνειας.

- **Είδος:** Μη προσανατολίσιμη επιφάνεια με g : *crosscaps*, r : *cuffs*. Κανονική μορφή:

$$a_1 a_1 \cdots a_g a_g y_1 z_1 y_1^{-1} \cdots y_r z_r y_r^{-1}$$

$$v = \# \text{κορυφών} = r + 1$$

$$e = \# \text{ετικετών} = 2r + g$$

$$x(S) = 2 - g - r$$

- **Είδος:** Προσανατολίσιμη επιφάνεια με g : *crosscaps*, r : *cuffs*. Κανονική μορφή:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} y_1 z_1 y_1^{-1} \cdots y_r z_r y_r^{-1}$$

$$v = \# \text{κορυφών} = r + 1$$

$$e = \# \text{ετικετών} = 2r + 2g$$

$$x(S) = 2 - 2g - r$$

Η επόμενη αναλλοίωτη επιφάνειας προκύπτει άμεσα από τη χαρακτηριστική Euler και ονομάζεται γένος (*genus*) g . Σε μια μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια το γένος είναι ο αριθμός των *crosscaps*.

Αν S μη-προσανατολίσιμη $g = 2 - r - x(S)$

Αν S προσανατολίσιμη $g = \frac{1}{2}(2 - r - x(S))$

Στο σημείο αυτό θα αναδιατυπώσουμε το θεώρημα της ταξινόμησης επιφανειών.

Θεώρημα 4.4.3. Δύο επιφάνειες S_1 και S_2 είναι ομοιομορφικές αν και μόνον αν και οι δύο είναι προσανατολίσιμες ή και οι δύο είναι μη-προσανατολίσιμες και έχουν τον ίδιο αριθμό συνοριακών καμπυλών και γένος.

Παράδειγμα 4.4.4. Η συμβολοεπιφάνειά $b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$

Είδος μη προσανατολίσιμη επιφάνεια λόγω της ύπαρξης του $\cdots d \cdots d \cdots$ κορυφές

$$\begin{array}{ccccccccccc} b^{-1} & c & d & a^{-1} & d & c^{-1} & e & a & & & \\ Q & R & Q & Q & Q & Q & R & Q & Q & & \end{array}$$

Συνοριακές ακμές είναι οι b και e και δίνουν μια συνοριακή καμπύλη, άρα $r = 1$, ενώ το γένος προκύπτει αφού υπολογίσουμε την $x(S)$.

$$x(S) = v - e + 1 = 2 - 5 + 1 = -2$$

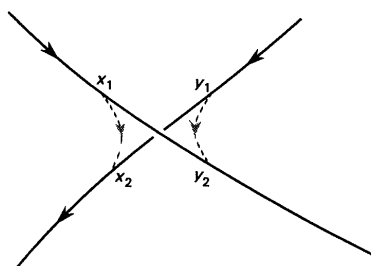
οπότε $g(S) = 3$. Έτσι, η κανονική μορφή είναι η: $a_1a_1a_2a_2a_3a_3zyzy^{-1}$.

4.5 Κόμποι και επιφάνειες.

Στην τελευταία αυτή παράγραφο θα αναλύσουμε την σχέση των κόμπων και όσων ήδη αναφέρθηκαν στα άλλα κεφάλαια για τις επιφάνειες. Ωστόσο, ο κύριος μας στόχος θα είναι η απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος του *Seifert*.

Θεώρημα 4.5.1. Δοθέντος ενός κόμπου K (στον \mathbb{R}^3) υπάρχει μια προσανατολίσιμη επιφάνεια S με μια συνοριακή καμπύλη εμφυτευμένη στον \mathbb{R}^3 με τέτοιο τρόπο που το σύνορο της S να είναι ο κόμπος K .

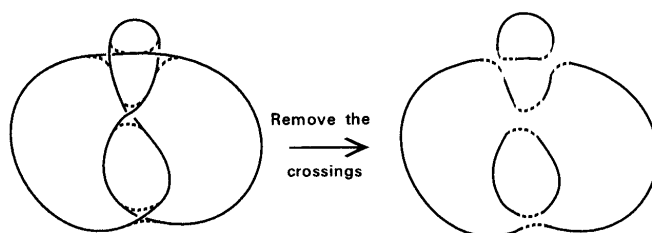
Απόδειξη. Έστω ένας κόμπος K στον \mathbb{R}^3 . Παίρνουμε μια προβολή του K και προσανατολίζουμε το διάγραμμα. Στη συνέχεια σε κάθε διασταύρωση προσθέτουμε δύο επιπλέον προσανατολισμένα τόξα με σύμφωνο προσανατολισμό όπως προκύπτει από το σχήμα 4.36.



Σχήμα 4.36

Τώρα, θα διαγράψουμε το ενδιάμεσο κομμάτι από τα τόξα, δηλαδή τη διασταύρωση, δημιουργώντας έτσι ένα σύνολο από προσανατολισμένους κύκλους που θα τους ονομάζουμε *Seifert* κύκλους.

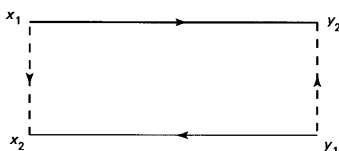
Ειδικότερα, ας δούμε πως αυτή η μέθοδος λειτουργεί σ' ένα *figure - 8*



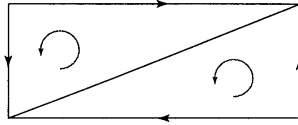
Σχήμα 4.37

Τελευταίο βήμα για τους κύκλους του *Seifert* είναι να τους γεμίσουμε ώστε να κατασκευάσουμε δίσκους.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα κομμάτια των διασταυρώσεων που έχουμε απομακρύνει. Για κάθε διασταύρωση έχουμε δύο τόξα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.37, τα οποία σχηματίζουν ένα ορθογώνιο που όταν τριγωνοποιείται αποδεικνύεται ότι είναι προσανατολισμένο.

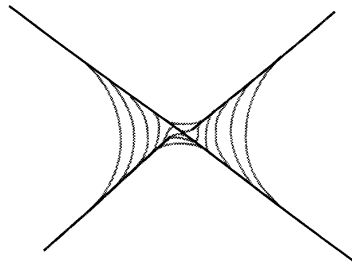


Σχήμα 4.38



Σχήμα 4.39

Τέλος, κάθε διασταύρωση την καθιστούμε συμπαγή. Έτσι, κατασκευάσαμε

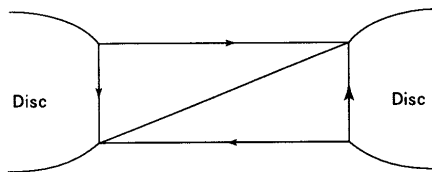


Σχήμα 4.40

από μια προβολή του κόμπου μια επιφάνεια προσανατολισμένη. \square

Πρόταση 4.5.2. Η επιφάνεια S κατασκευάζεται από ένα κόμπο K μέσω της παραπάνω μεθόδου και έχει γένος $g = \frac{1}{2}(d - s + 1)$, όπου d ο αριθμός των διασταυρώσεων του K , s ο αριθμός των καμπυλών του Seifert που προκύπτουν από τον κόμπο K .

Απόδειξη. Ένας δίσκος έχει προφανώς χαρακτηριστική 1, έστω $x(d) = 1$



Σχήμα 4.41

Η επιφάνεια που προκύπτει από τον κόμπο K θα έχει $x(S) = s - d$ καθώς ο αριθμός των κορυφών της επιφάνειας είναι a_0 αφού δεν αλλάζει ο αριθμός αυτός. Ενώ ο αριθμός των ακμών a_1 αυξάνεται κατά 3 και στα τρίγωνα αυξάνεται κατά 2 για κάθε ορθογώνιο που προκύπτει για κάθε διασταύρωση.

Άρα πράγματι $x(S) = s - d$ και για μια προσανατολισμένη επιφάνεια $g(S) = \frac{1}{2}(d - s + 1)$

□

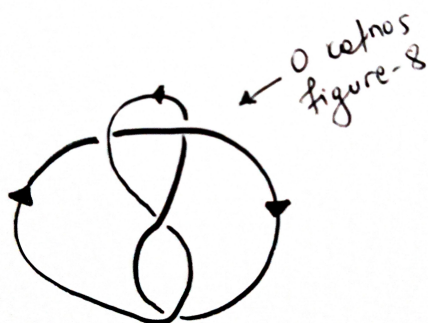
Ορισμός 4.5.3. Το γένος ενός κόμπου K , $g(K)$, είναι το ελάχιστο γένος όλων των προσανατολισμένων επιφανειών που έχουν σαν σύνορο τον κόμπο K , δηλαδή $g(K) \leq \frac{1}{2}(d - s + 1)$

Παρατήρηση 4.5.4. 1. Αν $g(K) = 0$ τότε K είναι ο *unknot* κόμπος.

2. Αν K είναι ένας κόμπος, όχι όμως ο τετριμμένος, που παράγει μια επιφάνεια με γένος 1, τότε $g(K) = 1$.

3. Υπάρχει άμεση σχέση του γένους του κόμπου με το πολυώνυμο *Alexander*. Πιο συγκεκριμένα, αν ο κόμπος είναι ένας εναλλασσόμενος κόμπος τότε το $g(K)$ είναι ίσο με το μισό του βαθμού του πολυωνύμου αυτού για το K . Γενικά όμως ο βαθμός του πολυωνύμου του *Alexander* είναι μικρότερο ή ίσο του $2g(K)$.

Παράδειγμα 4.5.5. Ας δούμε πως παράγεται η επιφάνεια ενός *figure - 8*: Παίρνουμε έναν τέτοιο κόμπο και δίνουμε έναν τυχαίο προσανατολισμό (σχήμα 4.42).



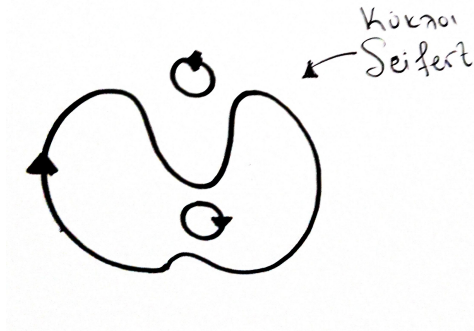
Σχήμα 4.42

Ύστερα δημιουργούμε του κύκλους *Seifert* με τη μέθοδο που γνωρίζουμε (σχήμα 4.43).

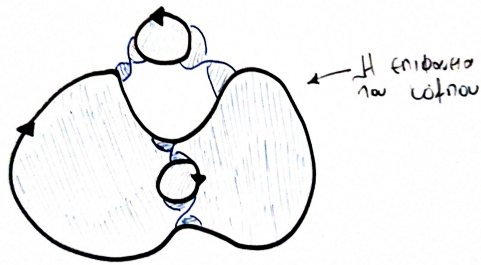
Τέλος, προσθέτουμε τις συμπαγείς διασταυρώσεις και καθιστούμε εξίσου συμπαγείς και τους κύκλους του *Seifert* (σχήμα 4.44).

4.6 Παραδείγματα

1. Το *Mobius band* αναπαρίσταται όπως φαίνεται στο σχήμα 4.45. Να βρούμε την κανονική μορφή της συμβολοεπιφάνειας $abac$.



Σχήμα 4.43



Σχήμα 4.44

Λύση:

Επομένως η κανονική μορφή είναι $ddc^{-1}b$, όπως αποδεικνύεται και από το σχήμα 4.46.

2. Βρείτε τον αριθμό των διακριτών κορυφών για ένα πολύγωνο με τη συμβολοεπιφάνεια να περιέχει g *crosscaps* ή *handles* και r *cuffs*.

Λύση:

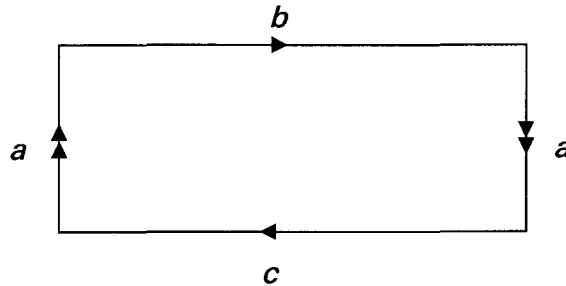
Αν έχουμε g *crosscaps* και r *cuffs* θα έχουμε την εξής κανονική μορφή:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g c_1 b_1 c_1^{-1} \dots c_r b_r c_r^{-1}.$$

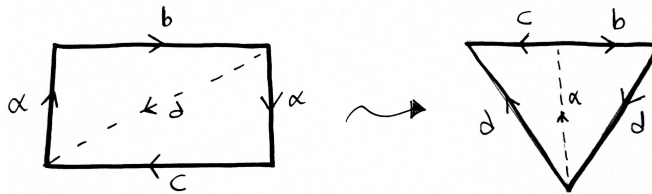
Αν έχουμε g *handles* και r *cuffs* θα έχουμε την εξής κανονική μορφή:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} \dots c_r d_r c_r^{-1}$$

Σε κάθε περίπτωση όμως, όπως είδαμε και σε άλλα παραδείγματα τόσο το μοτίβο των *handles* όσο και των *crosscaps* μοιράζονται την ίδια, έστω Q κορυφή. Ενώ για το μοτίβο ενός *cuff* γνωρίζουμε ότι θα έχει μεν η αρχή των c_i την Q κορυφή, ωστόσο για κάθε $d-i$ θα προκύπτουν r στο



Σχήμα 4.45



Σχήμα 4.46

πλήθος κορυφές για κάθε i . Άρα, θα έχουμε και στις δύο περιπτώσεις $1 + r$ κορυφές.

3. Πόσες κορυφές χρειάζεται η συμβολοεπιφάνεια $abc^{-1}adb^{-1}efd^{-1}$.

Λύση: Θα χρειαστούμε 3 κορυφές για την παραπάνω συμβολοεπιφάνεια, καθώς ξεκινάμε με την ακμή a και την κορυφή Q και συνεχίζουμε να τοποθετούμε την Q κορυφή στις ακμές αυτές που έχουν την ίδια κοινή ακμή. Φτάνουμε στο σημείο όμως που λόγω δυο ακμών που εμφανίζονται μονές φορές (e, f) θα υπάρχουν άλλες δυο κορυφές G, F .

$$\alpha \underset{Q}{b} \underset{Q}{c^{-1}} \underset{G}{\alpha} \underset{Q}{d} \underset{Q}{b} \underset{G}{c^{-1}} \underset{F}{e} \underset{Q}{f} \underset{Q}{d^{-1}}$$

4. Ταξινομήστε τις ακόλουθες επιφάνειες δίνοντας το γένος, την χαρακτηριστική *Euler*, προσανατολισσιμότητα, κλπ.

Λύση:

Η $eabc^{-1}adb^{-1}ef$ είναι μια μη-προσανατολισιμη επιφάνεια, με συνοριακές ακμές τις f, d , άρα το $r=2$. Επίσης έχει τρεις κορυφές Q, P, S , οπότε

$$x(S) = v - e + 1 = 3 - 6 + 1 = -2 \text{ και } g(S) = 2 - x(S) - r = 2$$

$$\begin{array}{cccccccc} e & a & b & c^{-1} & a & d & b & c^{-1} & e & f \\ \alpha & \alpha & \rho & \varsigma & \alpha & \rho & \rho & \varsigma & \alpha & \alpha \end{array}$$

Επομένως, $a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 b_1 a_3^{-1} a_4 b_2 a_4^{-1}$.

Η $ab^{-1}cda^{-1}d^{-1}c^{-1}eb$ είναι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια με μια συνοριακή ακμή την e , δηλαδή $r=1$. Προκύπτουν τρεις κορυφές και έτσι $x(S) = v - e + 1 = 3 - 5 + 1 = -1$ και έτσι $g(S) = 1/2(2 - x(S) - r) = 1$.

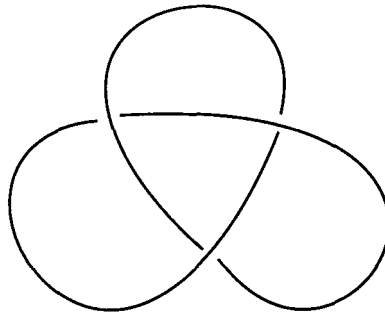
$$\begin{array}{cccccccc} a & b^{-1} & c & d & a^{-1} & d^{-1} & c^{-1} & e & b \\ \alpha & \alpha & \rho & \varsigma & \alpha & \alpha & \varsigma & \rho & \rho & \alpha \end{array}$$

Σχήμα 4.47

Επομένως, $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_3 b_2 a_3^{-1}$.

5. Βρείτε τα γένη για κάθε κόμπο.

α. *trefoil* (σχήμα 4.48).



Σχήμα 4.48

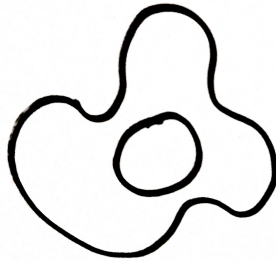
Η επιφάνεια που προκύπτει από τον κόμπο (σχήμα 4.49):

$$\text{Άρα } g(\text{trefoil}) = 1/2(3 - 2 + 1) = 1.$$

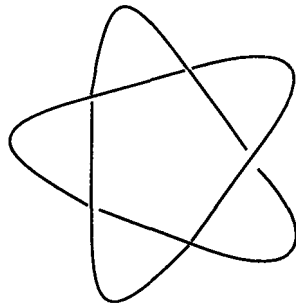
β. *cinquefoil* (σχήμα 4.50).

Η επιφάνεια που προκύπτει από τον κόμπο (σχήμα 4.51):

$$\text{Άρα } g(\text{cinquefoil}) = 1/2(5 - 2 + 1) = 2$$

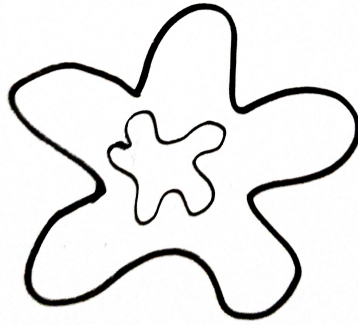


Σχήμα 4.49

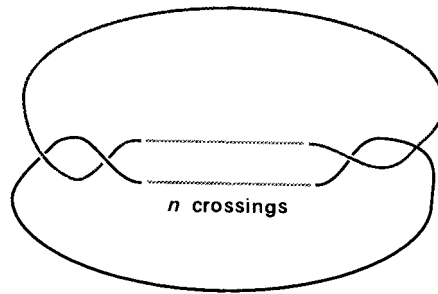


Σχήμα 4.50

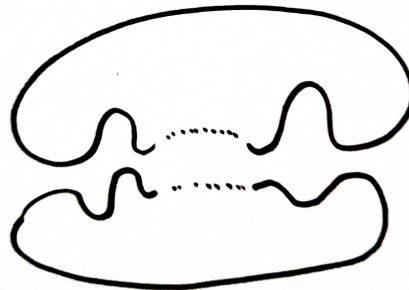
- γ. Οποιοσδήποτε $(2, n)$ -torus κόμπος (σχήμα 4.52).
 Η επιφάνεια που προκύπτει από τον κόμπος (σχήμα 4.53):
 Άρα $g(n - \text{torus}) = 1/2(n - 2 + 1) = 1/2(n - 1)$
- δ. οποιοδήποτε γενικευμένο *figure - 8* κόμπος (σχήμα 4.54).
 Η επιφάνεια που προκύπτει από τον κόμπος (σχήμα 4.55):
 Άρα $g(f - 8) = 1/2(k - (k - 1) + 1) = 1$



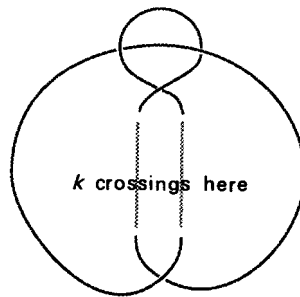
Σχήμα 4.51



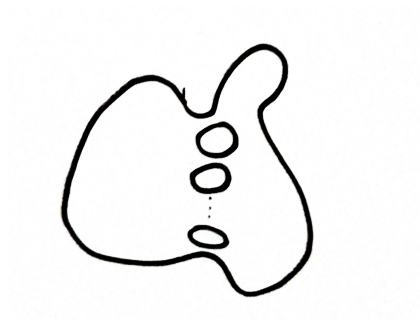
Σχήμα 4.52



Σχήμα 4.53



Σχήμα 4.54



Σχήμα 4.55

Βιβλιογραφία

- [1] N. D. Gilbert, T. Porter. (1994) *Knots and Surfaces*. OXFORD NEW YORK TOKYO. OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- [2] David w. Farmer and Theodore B. Stanford. *Knots and Surfaces. A Guide to Discovering Mathematics*. American Mathematical Society.
- [3] Louis H. Kauffman. New invariants in the theory of knots. *Astérisque*, tome 163-164 (1988),p. 137-219.
- [4] COLIN C. ADAMS. *The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*.
- [5] A. Stoimenow. On polynomials and surfaces of variously positive links. *J. Eur. Math. Soc.* 7,477-509 (2005).
- [6] Kehuan Shi. Bracket Polynomial and Jones Polynomial. May 29th, 2014.
- [7] Dominic Goulding. April, 2010. *Knot Theory: The Yang-Baxter Equation, Quantum Groups and Computation of the Homfly Polynomial*.