ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΏΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Του Δημοσθένη Ι. Γιανναρά

Α.Μ.:4282016003

ΘΕΜΑ: «Εμφανίσεις της έννοιας του εμβαδού στα μαθηματικά και τη φυσική της Α' λυκείου»

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Φραγκίσκος Καλαβάσης, Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ**
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΜΕΛΟΣ**
Μιχαήλ Σκουμιός, Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΜΕΛΟΣ**

ΡΟΔΟΣ 2019

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέως.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Καλαβάση Φραγκίσκο για την πολύτιμη βοήθεια και τη στήριξη του για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Τον ευχαριστώ τόσο για την καθοδήγηση και τις συμβουλές όσο και για τη στάση που κράτησε απέναντι μου σε μία αρκετά δύσκολη περίοδο για μένα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στα μέλη της ομάδας επίβλεψης κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο και ιδιαίτερα στον κ. Κρητικό Γεώργιο για την βοήθεια και την αμεσότητα της υποστήριξης την οποία μου παρείχαν.

Ευχαριστώ πολύ την καθηγήτρια κ. Σκουμπουρδή Χρυσάνθη και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Σκουμιό Μιχαήλ για τη συμμετοχή τους ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την έμπρακτη στήριξη τους σε κάθε δυσκολία και με κάθε δυνατό τρόπο στην προσπάθεια μου αυτή.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στη σύζυγο μου για τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόηση καθ’ όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η μελέτη της έννοιας του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής της Ά λυκείου. Εξετάζονται οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά όπως π.χ. το περιβάλλον της άσκησης, την χρήση των τύπων υπολογισμού, την εμφάνιση μονάδων, την ερμηνεία του εμβαδού και τη διεπιστημονική χρήση της έννοιας του εμβαδού. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσουμε πως εμφανίζεται το εμβαδόν στις δραστηριότητες των δύο σχολικών εγχειριδίων και να καταγράψουμε τις μεταξύ τους συγκλίσεις και αποκλίσεις. Επίσης, μέρος αυτής της εργασίας είναι συγκλίσεις και αποκλίσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων που μελετάμε, της ιστορίας της έννοιας του εμβαδού και των προβλημάτων τα οποία εντοπίζονται από τις έρευνες της διδακτικής όσον αφορά την έννοια του εμβαδού. Στις δραστηριότητες των δύο σχολικών εγχειρίδιων η εμφάνιση της έννοιας του εμβαδού φαίνεται να συγκλίνει ως προς κάποια χαρακτηριστικά ενώ αποκλίνει ως προς κάποια άλλα. Επιπρόσθετα, εντοπίζονται συγκλίσεις αλλά και αποκλίσεις, όσον αφορά το εμβαδόν, ανάμεσα στις εμφανίσεις της έννοιας στην ιστορία και στις δραστηριότητες των δύο σχολικών εγχειριδίων καθώς και μεταξύ των εμφανίσεων της έννοιας στις δραστηριότητες και των προβλημάτων τα οποία αναφέρονται από τα έρευνες της διδακτικής.

Abstract

The present thesis attempts to study the concept of area in high school mathematics and physics textbooks. Examine the activities of textbooks which include the notion of area in relation to some specific characteristics such as: the exercise environment, the use of calculation formulas, the appearance of units, the interpretation of area, and the interdisciplinary use of the area concept. The purpose of this paper is to examine how the concept of area appears in the activities of the two textbooks and to record the convergences and divergences between them. Also part of this work are the convergences and discrepancies between the activities we study, the history of the concept of area, and the problems identified by the didactics' research for the concept of area. In the activities of the two textbooks, the appearance of the notion of area seems to converge in some characteristics while diverging in others. In addition, there are convergences as well as divergences, in terms of area, between the appearances of the concept in history and the activities of the two textbooks, as well as between the appearances of the concept in the activities and the problems reported by teaching research.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων

Κατάλογος εικόνων

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο την διερεύνηση της έννοιας του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής στη βαθμίδα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πιο συγκεκριμένα στη Α' Λυκείου. Επιχειρούμε να εξετάσουμε τις εμφανίσεις της έννοιας του εμβαδού στα δύο σχολικά εγχειρίδια τα οποία διδάσκονται τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο στα σχολεία της Ελλάδας.

Το εμβαδόν είναι μια θεμελιώδης έννοια των Μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα του κλάδου της Γεωμετρίας. Οι μαθητές διδάσκονται την έννοια αυτή ξεκινώντας από τα πρώτα τους σχολικά χρόνια ενώ καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού σχεδόν σε ολόκληρη τη σχολική τους πορεία αλλά και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Η έννοια του εμβαδού απασχολεί σε μεγάλο βαθμό τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και γενικότερα των Θετικών επιστημών. Έτσι λοιπόν, υπάρχει πληθώρα ερευνών σχετικών με το εμβαδόν οι οποίες προσπαθούν να φέρουν στο φως τις δυσκολίες που παρουσιάζει η διδασκαλία της έννοιας και τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών για την έννοια ενώ παράλληλα προτείνουν πιθανές λύσεις για τη θεραπεία των όποιων προβλημάτων.

Οι έρευνες αυτές εξετάζουν τις διάφορες πτυχές της έννοιας του εμβαδού. Για παράδειγμα, οι KordakiκαιPotari (1998) επιχείρησαν να μελετήσουν την κατασκευή και τη χρήση εργαλείων για τη μέτρηση του εμβαδού από τους μαθητές, τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές φαντάζονται, αναπαριστούν και υπολογίζουν το μέγεθος του εμβαδού αλλά και το ρόλο που διαδραματίζει η καθημερινότητα και η σχολική γνώση στη λήψη αποφάσεων και στις ενέργειες των μαθητών.

Υπάρχουν έρευνες οι οποίες εξετάζουν την εφαρμογή της γραμμικότητας σε προβλήματα τα οποία δεν είναι γραμμικά (Ayan&IsiksalBostan, 2018; DeBock, VanDooren, Janssens, &Verschaffel, 2002; DeBock, Verschaffel, &Janssens, 1998). Επιπρόσθετα, αντικείμενο μελέτης αποτελεί και το εμβαδόν μη κανονικών σχημάτων (Παπαδόπουλος, 2009) αλλά και η διατήρηση του (Σταματέλου, 2016).

Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι έρευνες αυτές εκτείνονται σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης, δηλαδή από το νηπιαγωγείο, όπως αυτή των Σκουμπουρδή& Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου (2017) η οποία αφορά τη μέτρηση εμβαδού από νήπια έως και την τριτοβάθμια εκπαίδευση όπως αυτή των Γεωργόπουλος, Μπέλλου, & Μικρόπουλος (2013) η οποία αφορά τη μελέτη της έννοιας του εμβαδού κατά την επίλυση προβλημάτων κινηματικής.

Το εμβαδόν είναι μία αδιαμφισβήτητα μαθηματική γεωμετρική έννοια η οποία όμως κάνει την εμφάνιση της εκτός από τα Μαθηματικά και σε διάφορους άλλους επιστημονικούς τομείς αλλά και στην καθημερινότητα (Kordaki, 2003; Kordaki&Potari, 1998). Η εμπλοκή της έννοιας του εμβαδού στη Φυσική και ειδικότερα η εμφάνιση της στα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ Λυκείου τόσο στο μάθημα των Μαθηματικών όσο και σε αυτό της Φυσικής προκαλεί το ερευνητικό ενδιαφέρον για την μελέτη τόσο του τρόπου εμφάνισης της έννοιας όσο και των δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκεται.

Πιο συγκεκριμένα, το ερευνητικό ενδιαφέρον της εργασίας εστιάζει στις εμφανίσεις της έννοιας, στις χρήσεις της αλλά και στην εφαρμογή της στις δραστηριότητες των δύο διαφορετικών μαθημάτων, των Μαθηματικών και της Φυσικής. Θέλουμε να εντοπίσουμε τους συμβολισμούς τους οποίους αντιστοιχίζονται στον εμβαδόν, τις μονάδες οι οποίες αναφέρονται κάθε φορά στην εκάστοτε δραστηριότητα και αν αυτές είναι εμφανείς, ομοειδής αλλά και πως συμβάλουν στο υπολογισμό του μέτρου. Επιπρόσθετα, επιχειρούμε να εξετάσουμε το περιβάλλον στο οποίο εμπλέκεται η έννοια, αν δηλαδή αναφέρεται η δραστηριότητα σε κατάσταση της καθημερινής ζωής, ή περιορίζεται σε ένα γεωμετρικό σχήμα ή τέλος απαιτεί την εφαρμογή της έννοιας σε κάποιο διάγραμμα.

Επομένως, η ερευνητική σημασία της παρούσας εργασίας είναι η καταγραφή των όσων αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο και η κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων στις οποίες εμφανίζεται η έννοια του εμβαδού με τη χρήση ενός εργαλείου.

Μετά το πέρας της συλλογής των στοιχείων από τις δραστηριότητες των σχολικών βιβλίων, στόχος μας είναι να προβούμε σε κάποια συμπεράσματα σχετικά με τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών για το εμβαδόν και τις δυσκολίες που εντοπίζονται στη διδασκαλία της έννοιας αυτής κάνοντας συσχετίσεις με τα όσα αναφέρει η σχετική βιβλιογραφία της Διδακτικής. Στα συμπεράσματα μας επιχειρούμε επίσης να αναδείξουμε συγκλίσεις και αποκλίσεις μεταξύ των δύο σχολικών εγχειριδίων καθώς και συγκλίσεις και αποκλίσεις μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων και των ιστορικών στοιχείων που αφορούν την έννοια του εμβαδού.

Η διεπιστημονική διάσταση της εργασίας είναι φανερή καθώς μελετάμε μία έννοια και συγκεκριμένα του εμβαδού, σε δύο διαφορετικά επιστημονικά πεδία, των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Η εκπαιδευτική σημασία της έρευνας έχει να κάνει με την ανάδειξη του τρόπου διαχείρισης της έννοιας του εμβαδού στα σχολικά βιβλία των δύο μαθημάτων και στη συσχέτιση με τα όσα αναφέρει η Διδακτική για την έννοια. Πιο συγκεκριμένα, ο εκάστοτε εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει τα στοιχεία της παρούσας έρευνας για τον ορθότερο σχεδιασμό της διδασκαλίας του προκειμένου να αντιμετωπίσει δυσκολίες αλλά και να βοηθήσει τους μαθητές ώστε να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού με σωστό τρόπο όπου και όπως αυτό τους ζητηθεί. Επίσης, παρέχει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να διαχειριστεί με καλύτερο τρόπο την χρήση μιας καθαρά μαθηματικής έννοιας στο μάθημα της Φυσικής.

Η παρούσα εργασία θεωρείται επίκαιρη καθώς ερευνούμε μία έννοια η οποία εμφανίζεται σε δύο διαφορετικά μαθήματα τα οποία αποτελούν μέρος της εκπαιδευτικής πραγματικότητας στην Ελλάδα κατά την περίοδο της συγγραφής της εργασίας.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρέχει ιστορικές πληροφορίες για την έννοια του εμβαδού και πιο συγκεκριμένα ποια ήταν η ανάγκη για τη συγκρότηση της έννοιας και πως τελικά θεμελιώθηκε ενώ παράλληλα παρουσιάζονται κάποια ερωτήματα τα οποία επιχειρούμε στο τέλος του κεφαλαίου να απαντήσουμε ώστε να μπορούμε να προβούμε σε συγκρίσεις ανάμεσα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων και των ιστορικών στοιχείων.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στις έρευνες της διδακτικής για το εμβαδόν και προβάλλει κάποια ερωτήματα τα οποία επιχειρούμε στο τέλος του κεφαλαίου να απαντήσουμε προκειμένου να μπορούμε να συγκρίνουμε τα στοιχεία τα οποία συλλέξαμε από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων τα οποία μελετάμε με τα όσα αναφέρουν οι πρόσφατες έρευνες για τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών και τη δυσκολία στη διδασκαλία του εμβαδού.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται εργαλεία και ταξινομίες τα οποία ταξινομούν τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων. Μέσα από τη μελέτη αυτών επιχειρούμε να εξετάσουμε την εστίαση τους και τον τρόπο με τον οποίο εντοπίζουν τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων και να σχεδιάσουμε ένα κατάλληλο ερευνητικό εργαλείο που εξυπηρετεί ώστε να απαντήσουμε τα ερωτήματα που απασχολούν την έρευνα μας.

Τα επόμενα κεφάλαια αφορούν την έρευνα των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Ά λυκείου. Πιο συγκεκριμένα, το τέταρτο κεφάλαιο περιέχει τη διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων και τις συγκρίσεις τις οποίες επιχειρούμε να κάνουμε ανάμεσα στην ιστορία, τις έρευνες που αφορούν το εμβαδόν και τα σχολικά εγχειρίδια

Ακολουθεί το κεφάλαιο με τη μεθοδολογία την οποία ακολουθούμε. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουμε το δείγμα της έρευνας μας, το ερευνητικό μας εργαλείο και τη διαδικασία για τη συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων, την εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο των συμπερασμάτων, γίνεται η σύγκριση των δεδομένων μεταξύ των δραστηριοτήτων των δύο σχολικών εγχειριδίων. Ακολουθεί η σύγκριση των ιστορικών δεδομένων τα οποία αφορούν το εμβαδόν με τα δεδομένα τα οποία έχουμε συλλέξει από τα σχολικά εγχειρίδια και αμέσως μετά προβαίνουμε σε σύγκριση των δεδομένων τα οποία έχουμε από τα σχολικά εγχειρίδια με αυτά της έρευνας της διδακτικής με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων. Τέλος, παρουσιάζουμε κάποιες πιθανές προεκτάσεις που αφορούν την παρούσα έρευνα.

Ιστορικά στοιχεία

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε να επισημάνουμε κάποια σημεία από την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής προσέγγισης του εμβαδού που συνδέονται με ζητήματα κατανόησης και πλαισίωσης του εμβαδού που μελετάμε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, θα επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε, στη βιβλιογραφία της Ιστορίας των Μαθηματικών τα εξής:

- Σε ποιο περιβάλλον εμφανίζονται στην ιστορία τα προβλήματα υπολογισμού εμβαδού, πχ ο φυσικός κόσμος, η καθημερινή ζωή, οι συναλλαγές, το γεωμετρικό σχήμα, το γράφημα, οι σχολικές ασκήσεις κ.α.
- Εάν απαιτείται αυστηρότητα ή γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού
- Τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα διάφορα προβλήματα και αν επιχειρούν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε πρόβλημα
- Ποιες αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού
- Εάν αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης τόσο του μήκους όσο και του εμβαδού
- Εάν αναφέρονται και καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα

Η γεωμετρία, σύμφωνα με τον Burton 2011, είναι μια σύνθετη λέξη με συστατικά τις λέξεις γη και μέτρηση. Η ανάγκη για τη μέτρηση της γης φαίνεται να δημιουργήθηκε από τους αρχαίους Αιγύπτιους καθώς ο ποταμός Νείλος πλημμύριζε σε ετήσια βάση, με αποτέλεσμα την καταστροφή των γραμμών ιδιοκτησίας ανάμεσα στις καλλιεργήσιμες εκτάσεις για τις οποίες οι Αιγύπτιοι φορολογούνταν. Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, ο φόρος που πλήρωναν οι Αιγύπτιοι πρόκυπτε κατ' αναλογία της έκτασης την οποία κάλυπταν οι καλλιέργειες τους. Η έκταση αυτή μοιραζόταν από το βασιλιά σε όλους με σκοπό την καταβολή φόρου. Σε περίπτωση όμως που οι πλημμύρες κατέστρεφαν την καλλιεργήσιμη έκταση ή μέρος αυτής τότε έπρεπε να πληρωθεί φόρος ανάλογος της εναπομένουσας έκτασης. Κάτι τέτοιο έπρεπε να γνωστοποιηθεί στο βασιλιά και αυτός με τη σειρά του να αποστείλει τα αρμόδια όργανα του με σκοπό να μετρήσουν την έκταση η οποία δεν καταστράφηκε προκειμένου να πληρωθεί ανάλογος φόρος (Burton, 2011).

Σύμφωνα με ιστορικές πηγές λαοί όπως οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι, οι Μεσοποτάμιοι, οι Κινέζοι, οι Ινδοί και οι Έλληνες γνώριζαν την έννοια του εμβαδού και τύπους για τον υπολογισμό εμβαδών ευθύγραμμων και καμπυλόγραμμων σχημάτων (Bashmakova, 2014; Burton, 2011; Jeremy & Roitman, 2014; Katz, 1998). Κάποιοι από τους τύπους αυτούς ήταν σωστοί κατά προσέγγιση, αλλά τα αποτελέσματα τους ήταν αποδεχτά αφού εμφανίζονται π.χ. σε προβλήματα τα οποία πραγματεύονται τον αριθμό των εργατών που χρειάζεται η υλοποίηση κάποιων έργων και γενικότερα επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής στα οποία τα μικρά σφάλματα ακρίβειας δεν έχουν σημαντικές επιπτώσεις (Burton, 2011; Katz, 1998).

Οι κατάλογοι συντελεστών από τους Βαβυλώνιους, ο πάπυρος του Rhind από τους Αιγύπτιους, οι ινδικές Σουλβασούτρες αλλά και η Μαθηματική Τέχνη των Κινέζων αποτελούν τεκμήρια για τον υπολογισμό του εμβαδού κατά προσέγγιση από τους λαούς αυτούς. Οι κατάλογοι συντελεστών περιέχουν φόρμουλες για τον υπολογισμό του εμβαδού αλλά και σχέσεις μεταξύ χαρακτηριστικών γεωμετρικών σχημάτων. Τα υπόλοιπα περιέχουν προβλήματα και πιθανές λύσεις αυτών (Katz, 1998).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στον υπολογισμό εμβαδού ευθύγραμμων τμημάτων δεν γίνεται πάντα αναφορά στην καθετότητα των ευθύγραμμων τμημάτων των οποίων τα μέτρα πολλαπλασιάζονται. Επίσης από τη μελέτη της βιβλιογραφίας προκύπτει το ενδιαφέρον για τον προσδιορισμό του εμβαδού του κύκλου από τους λαούς οι οποίοι είχαν αναπτύξει μαθηματικό συλλογισμό. Αυτό γίνεται φανερό στον πάπυρο του Rhind, στις Σουλβασούτρες αλλά και στη Μαθηματική Τέχνη (Katz, 1998).

Για τον προσδιορισμό του εμβαδού του κύκλου λαοί όπως οι Έλληνες, οι Βαβυλώνιοι και οι Κινέζοι έκαναν χρήση του μήκους και της διαμέτρου του ενώ οι Αιγύπτιοι όχι. Σε διάφορα μαθηματικά κείμενα τα οποία διασώθηκαν υπάρχουν καταγεγραμμένα προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου καθώς και οι πιθανές λύσεις τους. Στα προβλήματα αυτά γίνεται σημαντική προσπάθεια από όλους αυτούς τους αρχαίους λαούς να καταφέρουν να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Με άλλα λόγια να βρουν ένα τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με αυτό του κύκλου (Bashmakova, 2014; Katz, 1998).

Ο τρόπος κατά τον οποίο εργάστηκαν οι προαναφερθέντες για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου ουσιαστικά ακολουθείται και σήμερα (Katz, 1998). Η διαδικασία η οποία ακολουθείται σήμερα για τον υπολογισμό του εμβαδού έχει ως κεντρική ιδέα να μοιραστεί η επιφάνεια σε σχήματα των οποίων ο τύπος για το εμβαδόν τους να είναι γνωστός και έπειτα να αθροιστούν τα επιμέρους εμβαδά (Bashmakova, 2014).

Σύμφωνα με την Bashmakova (2014) ο Ευκλείδης θεμελίωσε τον πολλαπλασιασμό δύο κάθετων ευθύγραμμων τμημάτων ο οποίος ισοδυναμεί με την έννοια του εμβαδού του ορθογωνίου το οποίο προκύπτει από τα δύο κάθετα αυτά ευθύγραμμα τμήματα. Μετά από αυτό, το εμβαδόν ενός ευθύγραμμου σχήματος μπορεί με κατάλληλο διαμερισμό να υπολογιστεί ως άθροισμα επιμέρους εμβαδών. Όμως τα καμπυλόγραμμα σχήματα δεν ήταν δυνατόν να διαμεριστούν σε πεπερασμένο αριθμό γνωστών ευθύγραμμων σχημάτων, γεγονός το οποίο δυσκόλευε τους μαθηματικούς και τους ανάγκαζε να εκτελέσουν άπειρες διαδικασίες.

Οι ιστορικές πηγές δείχνουν ότι οι μαθηματικοί κατάφεραν να ξεπεράσουν τα προβλήματα που εμφανίστηκαν στον υπολογισμό καμπυλόγραμμων σχημάτων. Έλληνες ,όπως ο Αρχιμήδης, και Ισλαμιστές κατάφεραν τον προσδιορισμό του εμβαδού κάτω από καμπύλες όπως αυτές της έλλειψης και της παραβολής. Επίσης σημαντικό ρόλο σε αυτή την κατεύθυνση έπαιξαν μαθηματικοί όπως Cavalieri, Fermat, Pascal, Roberval, Toricelli, Wallis και Gregoire de St. Vincent οι οποίοι ασχολήθηκαν με τον προσδιορισμού εμβαδού παραβολών ανώτερης τάξης, υπερβολών, τριγωνομετρικών καμπυλών, κυκλοειδών και άλλων καμπυλόγραμμων γραφημάτων (Katz, 1998).

Από την αξιοποίηση των παραπάνω ιστορικών στοιχείων μπορούμε να προβούμε σε κάποια συμπεράσματα όσον αφορά τα ερωτήματα τα οποία έχουμε θέσει στην αρχή του κεφαλαίου αυτού. Αρχικά βλέπουμε ότι το περιβάλλον στο οποίο καλούνταν να υπολογίσουν το εμβαδόν ήταν τα προβλήματα καθημερινής ζωής (π.χ. φορολογία, υπολογισμός εργατών) στα οποία μάλιστα δεν απαιτούνταν αυστηρότητα και γίνονταν δεκτές προσεγγιστικές λύσεις (Burton, 2011; Katz, 1998).

Μεγάλη σημασία φαίνεται να είχε η χρήση τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού αλλά και η συλλογή διαφόρων προβλημάτων για τα οποία παρουσιαζόταν και κάποιες λύσεις όπως π.χ οι Σουλβασούτρες και η Μαθηματική Τέχνη. Ουσιαστικά δηλαδή επιχειρούσαν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε πρόβλημα (Katz, 1998).

Σημαντική παρατήρηση αποτελεί ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού απαιτείται ο πολλαπλασιασμός των μηκών ευθύγραμμων τμημάτων, όπως θεμελιώθηκε από τον Ευκλείδη, χωρίς όμως να εντοπίσουμε αναφορά στις μονάδες μέτρησης (Bashmakova, 2014).

Επιπρόσθετα, διακρίνουμε την προσπάθεια για υπολογισμό του εμβαδού σε καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε την προσπάθεια για τον προσδιορισμό του εμβαδού κάτω από διάφορες καμπύλες γραφημάτων όπως π.χ. υπερβολών και τριγωνομετρικών καμπυλών αλλά και την εύρεση ισοδύναμου ευθύγραμμου σχήματος και μάλιστα τετραγώνου με αυτό του κύκλου (Katz, 1998).

Προβλήματα στην κατανόηση και τη διδασκαλία του εμβαδού

Το εμβαδόν είναι μία γεωμετρική έννοια της οποίας η ανάγκη δημιουργήθηκε κυρίως για πρακτικούς λόγους κατά την αρχαιότητα όπως έχει προαναφερθεί. Η θεμελιώδης αυτή έννοια θεωρείτε δύσκολη (Κωστάκης, 2018) και πιο συγκεκριμένα η μέτρηση του εμβαδού δυσκολεύει τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς (Baturo&Nason, 1996). Οι δυσκολίες της έννοιας είναι αρκετές και αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς από το πλήθος των ερευνών οι οποίες σχετίζονται με την έννοια αυτή.

Οι έρευνες οι οποίες αφορούν το εμβαδόν παρατηρούνται σε ολόκληρο το φάσμα της εκπαίδευσης. Υπάρχουν εργασίες οι οποίες εξετάζουν πτυχές της έννοιας στη νηπιακή ηλικία (π.χ. Σκουμπουρδή (CrisanthiSkoumbourdi) & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου (Dimitra Papaioannou- Stravolaimou), 2017), στην πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια (π.χ. Σιδηρόπουλος, 2013) αλλά και πανεπιστημιακή εκπαίδευση (π.χ. Baturo & Nason, 1996) ενώ δεν λείπουν και αυτές οι οποίες αφορούν τους δάσκαλους και καθηγητές.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι δυσκολίες στην κατανόηση και τη διδασκαλία του εμβαδού οι οποίες προκύπτουν από τη μελέτη τέτοιου είδους ερευνών. Η εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία εστιάζει η παρούσα εργασία είναι αυτή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πιο συγκεκριμένα η μετάβαση από τις τάξεις του Γυμνασίου στην Α΄ Λυκείου.

Ειδικότερα, στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στα ακόλουθα ερωτήματα χρησιμοποιώντας τη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών και της Φυσικής. Τα ερωτήματα τα οποία μας απασχολούν είναι τα εξής:

- Σε ποιο περιβάλλον καλούνται οι μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν; Γίνεται αναφορά σε προβλήματα της καθημερινότητας; Ασχολούνται μόνο με γεωμετρικά σχήματα ή και διαγράμματα;
- Απαιτείται αυστηρότητα στον υπολογισμό ή δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση κάνοντας δεκτές προσεγγιστικές λύσεις;
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού;
- Με ποιο τρόπο γίνεται η διαχείριση των προβλημάτων τα οποία αφορούν το εμβαδόν; Ακολουθείται μια παγιωμένη αλγοριθμική διαδικασία ή δίδεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση;
- Σχετίζεται η έννοια του εμβαδού με κάποια συγκεκριμένη αριθμητική πράξη; Αν ναι γιατί;
- Κατά πόσο είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές με τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού; Μπορούν να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν με κατάλληλο τρόπο το εμβαδόν ενός γραφήματος;
- Γίνεται αναφορά μόνο σε ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα ή και σε άλλου είδους σχήματα; Τι είδους προβλήματα εντοπίζονται στις περιπτώσεις αυτές;

Η Σταματέλου (2016) στην προσπάθεια της να αξιοποιήσει της διατήρηση του εμβαδού ενός σχήματος έδωσε ένα πρόβλημα στο οποίο ζητούσε από τους μαθητές να μετασχηματίσουν ένα χαρτaετό σχήματος κανονικού εξάγωνου σε σχήμα «kite» με το ίδιο εμβαδόν. Οι 20 μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στο πείραμα φοιτούσαν στην Ά Γυμνασίου του Πρότυπου Πειραματικού σχολείου της Πάτρας.

Μία από τις δυσκολίες οι οποίες παρατηρήθηκαν είναι ότι ένα μέρος των μαθητών προσπάθησαν να μετρήσουν το μήκος των πλευρών του εξάγωνου προκειμένου να υπολογίσουν το εμβαδόν του. Επισημαίνεται ότι οι τύποι για τον υπολογισμό του εμβαδού των κανονικών πολυγώνων δεν έχουν διδαχθεί και ότι δεν ζητήθηκε ο υπολογισμός του εμβαδού.

Μία παρατήρηση σαν αυτή έρχεται να ενισχύσει την άποψη των Tossavainen, Suomalainen, &Mäkäläinen (2017) ότι η έννοια του εμβαδού συνδέεται με έναν τύπο για τον υπολογισμό του καθώς αρκετά από τα σχολικά εγχειρίδια δεν ορίζουν την έννοια αλλά εισάγουν τύπους για τον υπολογισμό τους.

Επιπρόσθετα, οι Patahuddin, Logan, &Ramful (2018) θέλοντας να ερευνήσουν τα χαρακτηριστικά της χωρικής απεικόνισης έκαναν χρήση της έννοιας του εμβαδού. Τρείς μαθητές grade 7 έως 9 αποτελούσαν τους συμμετέχοντες της έρευνας τους.

Στα συμπεράσματα τους αναφέρεται ότι η έννοια του εμβαδού θα πρέπει να κατανοείται μέσα από ασκήσεις οι οποίες δε χρησιμοποιούν μετρήσεις. Μάλιστα, επισημαίνουν ότι η εισαγωγή των μαθητών στον υπολογισμό του εμβαδού κάνοντας χρήση του τύπου, προκειμένου να εξαχθεί μία αριθμητική τιμή, τους δημιουργεί την ανάγκη χρήσης αριθμών σε υπερβολικό βαθμό όταν διαχειρίζονται με την έννοια του εμβαδού.

Οι Tossavainen κ.ά. (2017) θέλοντας να εξετάσουν τόσο το είδος του ορισμού της έννοιας του εμβαδού το οποίο εκφράζουν οι μελλοντικοί δάσκαλοι και οι εκπαιδευτικοί της κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ελληνικό γυμνάσιο) όσο και το πώς η κατανόηση του ότι το εμβαδόν είναι δισδιάστατο φαίνεται στον τρόπο με τον οποίο απαντούν οι συμμετέχοντες στις ασκήσεις που αφορούν το εμβαδόν, το μήκος και τον όγκο, δημιούργησαν ένα ερωτηματολόγιο με επτά ασκήσεις οι οποίες αφορούν την έννοια του εμβαδού και μία ερώτηση στην οποία ζητούσαν έναν ορισμό για την έννοια του εμβαδού.

Τα ευρήματα της έρευνας είναι σημαντικά καθώς αποκαλύπτουν ότι μόνο το 7% των μελλοντικών εκπαιδευτικών δίνει προσοχή στο ότι το εμβαδόν αποτελεί ένα δισδιάστατο μέγεθος. Ποσοστό 27% συνδέουν την έννοια με τον τύπο υπολογισμού ενώ το 10% δίνει λάθος ορισμό για την έννοια του εμβαδού. Επίσης, μόνο τρεις από τους συμμετέχοντες μπόρεσαν να εκφράσουν με ορθό τρόπο ότι ένα ακανόνιστο επίπεδο σχήμα μπορεί να έχει ένα καλά ορισμένο εμβαδόν.

Ο Σιδηρόπουλος (2013) πραγματοποίησε μία έρευνα με σκοπό την ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο σκέπτονται οι μαθητές του Γυμνασίου όσον αφορά το μάθημα της Γεωμετρίας. Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε στην πόλη της Βέροιας κατά το μήνα Απρίλιο του 2012.

Στους συμμετέχοντες της έρευνας δόθηκε ένα πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το εμβαδόν. Οι τρεις ερωτήσεις του προβλήματος αφορούσαν τη συλλογιστική των μαθητών σχετικά με το τι θα συμβεί στο εμβαδόν αν οι πλευρές ενός τετραγώνου διπλασιαστούν και πως θα δημιουργήσουν ένα τετράγωνο δοσμένου εμβαδού του οποίου οι πλευρές θα είχαν μήκος ίσο με αυτό ενός άρρητου αριθμού.

Η ανάλυση των δεδομένων αποκαλύπτει δυσκολία στη χρήση των μονάδων της μέτρησης μήκους αλλά και του εμβαδού. Οι μαθητές φαίνεται να μην είναι εξοικειωμένοι με τις μονάδες μέτρησης και να δυσκολεύονται να τις χρησιμοποιήσουν και για το λόγο αυτό δεν τις αναφέρουν καθόλου στις απαντήσεις τους.

Οι Fernández, DeBock, Verschaffel, &VanDooren (2014) εκπόνησαν μία έρευνα με σκοπό την εξέταση του αν οι μαθητές συγχέουν τις διαστάσεις με την κατευθυνσημότητα ενός σχήματος με αποτέλεσμα την εφαρμογή της γραμμικότητας σε ασκήσεις περιμέτρου και εμβαδού με λάθος τρόπο. Με τον όρο κατευθυνσημότητα ορίζουν το πλήθος των μη παράλληλων πλευρών ενός επίπεδου σχήματος. Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο έχει κατευθυνσημότητα ίση με τρία.

Τα δεδομένα της έρευνας αντλήθηκαν από ερωτηματολόγιο το οποίο αποτελούνταν από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής χωρίς να απαιτείται η αιτιολόγηση των απαντήσεων. Επίσης, τα δεδομένα αυτά συμπληρώθηκαν από τις συνεντεύξεις αλλά και τις ηχογραφήσεις των μαθητών. Οι 131 μαθητές που έλαβαν μέρος ήταν ηλικίας 14-15 ετών από τέσσερα ισπανικά σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκαλύπτουν την λανθασμένη εφαρμογή γραμμικής συλλογιστικής σε προβλήματα εμβαδού καθώς μόνο το 15,2% απάντησε σωστά στις ερωτήσεις. Ενώ κάποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το εμβαδόν είναι δισδιάστατο στο σύνολο τους φαίνεται η τάση να εφαρμόζουν την γραμμικότητα λανθασμένα. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δίνουν σωστές απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικές με το εμβαδόν όταν τα σχήματα είναι τετράγωνα ή ορθογώνια και αυτό αποδίδεται στο ότι το πλήθος των μη παράλληλων πλευρών του σχήματος είναι ίσος με πλήθος των διαστάσεων, δηλαδή δύο.

Ο Machaba (2016) ισχυρίστηκε ότι οι μαθητές δεν κατανοούν πλήρως την έννοια του εμβαδού και προσπάθησε να δώσει απαντήσεις στα εξής ερωτήματα: 1) Υπεργενικεύουν οι μαθητές στη Νότια Αφρική; 2) Εφαρμόζουν τον κανόνα « ίδιο Α – ίδιο Β» 3) Αν ναι, με ποιο τρόπο αιτιολογούν τις αντιλήψεις τους;

Προκειμένου να απαντήσει στα ερωτήματα αυτά έθεσε μία δοκιμασία σε 30 μαθητές grade 10 (Α Λυκείου) από ένα σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της πόλης Soshanguve στη Νότιο Αφρική στο οποίο δεν δίδασκε. Όλοι οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν σε έξι ερωτήσεις ενώ ακολούθησαν και κλινικές συνεντεύξεις με έξι από αυτούς.

Τα ευρήματα φανερώνουν χαμηλές επιδόσεις των μαθητών. Οι μαθητές συγχέουν την έννοια του εμβαδού με τον τύπο για τον υπολογισμό του και αδυνατούν να ορίσουν την έννοια χωρίς τη χρήση του τύπου. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι αν δεν παρέχονται οι μετρήσεις τότε δεν μπορούν οι μαθητές να διευκρινίσουν το εμβαδόν ενός σχήματος. Επιπρόσθετα, αποκαλύπτεται η υπεργενίκευση στην οποία προβαίνουν οι μαθητές ως προς τη χρήση του τύπου. Πιο συγκεκριμένα, στην προσπάθεια τους να εφαρμόσουν τον τύπο «μήκοςxπλάτος» ο οποίος αναφέρεται στο εμβαδόν ορθογωνίων σχημάτων σε ένα ακανόνιστο σχήμα (φύλλο ενός φυτού) αποκρίνονται λέγοντας ότι το φύλλο δεν έχει εμβαδόν. Επίσης, επιμένουν στην άποψη ότι αν ένα σχήμα διατηρεί την περίμετρο του τότε διατηρεί και το εμβαδόν του.

Σύμφωνα με τον Nguyen&Rebello (2011) οι Rasslan και Tall σε έρευνα τους σε μαθητές λυκείου στην Αγγλία έφθασαν στο συμπέρασμα πως οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται στην ερμηνεία προβλημάτων τα οποία απαιτούν τον υπολογισμό εμβαδού αλλά και στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε ευρύτερα πλαίσια.

Η πρόταση τους για την υπερπήδηση αυτού του εμποδίου ήταν να παρουσιάζεται η έννοια ως μία επέκταση των πρότερων γνώσεων και εμπειριών των μαθητών μέσα από μια πληθώρα κατάλληλων παραδειγμάτων.

Οι Graham&Sharp (1999) θέλησαν να εξετάσουν την κατανόηση των γραφημάτων κίνησης σε μαθητές ηλικίας 13 ετών. Οι μαθητές οι οποίοι επιλέχθηκαν για την έρευνα αυτή θεωρούνταν αρκετά ικανοί όσον αφορά τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά.

Η έρευνα διεξήχθη με την απάντηση τριών ασκήσεων, από τρείς ομάδες μαθητών, από περισσότερα από 40 σχολεία, οι οποίοι συμμετείχαν σε Masterclass. Η $3^{η}$ άσκηση περιελάβανε ένα ερώτημα του οποίου η σωστή απάντηση είχε ως προϋπόθεση τη σωστή ερμηνεία του εμβαδού, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι σωστές απαντήσεις στο ερώτημα αυτό δεν οφείλονταν σε σωστό συλλογισμό και μάλιστα οι εικασίες από τους μαθητές ήταν αρκετές και εμφανείς.

Οι μαθητές της Ά λυκείου καλούνται να επιλύσουν ασκήσεις στο μάθημα της Φυσικής στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού. Οι McDermott, Rosenquist &Van Zee (1987) αναφέρουν ότι οι μαθητές προκειμένου να βρουν τη μετατόπιση ενός κινητού πρέπει να υπολογίσουν το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την καμπύλη της γραφικής παράστασης της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο, και τον οριζόντιο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να υπολογίζουν το εμβαδόν σε μονάδες δισδιάστατες (τετραγωνικές) και να τις αντιστοιχίζουν σε μονοδιάστατες μονάδες μήκους.

Η διαδικασία του υπολογισμού τετραγωνικών μονάδων και η σύνδεση-ερμηνεία τους σε μονάδες μήκους στις οποίες μετράτε η μετατόπιση προκαλεί δυσκολία στους μαθητές. Επίσης, αναφέρουν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία στην ποιοτική κατανόηση ενός διαγράμματος το οποίο αφορά την κίνηση. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν τη σημασία της θέσης του εμβαδού σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα και να κατανοήσουν αν πρόκειται για θετική ή αρνητική μετατόπιση.

Σύμφωνα με τους Baturo & Nason (1996) οι οποίοι αναφέρονται στους Nunes, Light, &Mason, η πρακτική η οποία εφαρμόζεται για τη μέτρηση του εμβαδού αποτελεί βασική πηγή δυσκολίας διότι δεν εφαρμόζονται μονάδες μέτρησης εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα, απαιτούνται μετρήσεις τμημάτων των οποίων η αντικατάσταση στους εκάστοτε τύπους εμβαδού μας δίνει το αποτέλεσμα εκφρασμένο σε μονάδες εμβαδού (τετραγωνικές). Ουσιαστικά δηλαδή πολλαπλασιάζονται γραμμικές μετρήσεις για τη μέτρηση του εμβαδού ενώ κάτι τέτοιο απέχει κατά πολύ από εννοιολογικής απόψεως από την έννοια του εμβαδού.

Επιπρόσθετα, οι μαθητές δε μπορούν να κατανοήσουν τη δυσδιάστατη μονάδα μέτρησης του εμβαδού διότι συνεχώς εμπλέκονται σε διαδικασίες με μονοδιάστατες γραμμικές μονάδες τις οποίες πολλαπλασιάζουν (Baturo&Nason, 1996).

Οι Baturo&Nason (1996) κλείνουν το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας τους αναφέροντας ότι οι εμπειρίες μάθησης οι οποίες παρέχονται από τα σχολεία ευθύνονται για τις δυσκολίες στην μέτρηση του εμβαδού. Κατ' αυτό τον τρόπο οι μαθητές απλά απομνημονεύουν τύπους και τους εφαρμόζουν στις διάφορες δραστηριότητες. Επίσης, αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί εστιάζουν περισσότερο στην αριθμητική τιμή του εμβαδού παρά στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας.

Σε έρευνα την οποία έκαναν οι Baturo&Nason (1996) σε 13 πρωτοετείς φοιτητές, μελλοντικούς εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έθεσαν ερωτήματα τα οποία απευθύνονται υπό κανονικές συνθήκες σε μαθητές του έβδομου σχολικού έτους του Queensland.

Στα συμπεράσματα της έρευνας τους αναφέρουν ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν ελλιπή ή λανθασμένη γνώση σχετικά με το εμβαδόν. Παρατήρησαν επίσης ότι η ικανότητα των φοιτητών όσον αφορά την μεταφορά από μια αναπαράσταση σε μια άλλη ήταν περιορισμένη. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σύμφωνα με τον Duval (2006) είναι πολύ σημαντική η ικανότητα του εκπαιδευόμενου να μεταφέρεται από μια αναπαράσταση σε μια άλλη.

Επίσης, φαίνεται πως για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς τα μαθηματικά αποτελούν ένα εργαλείο υπολογισμού και ένα σύνολο από γεγονότα και τους αντίστοιχους κανόνες. Οι φοιτητές αδυνατούν να κάνουν συνδέσεις των μαθηματικών με την πραγματική ζωή και αντιλαμβάνονται μόνο τη συμβολική αναπαράσταση. Τέλος, αναφέρεται ότι η διδασκαλία είναι μάταιη όταν δε συνδέεται με κάποιες σημαντικές δραστηριότητες.

Από την ανασκόπηση των ερευνών της Διδακτικής θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα τα οποία έχουμε θέσει στην αρχή του κεφαλαίου.

Όσον αφορά το περιβάλλον στο οποίο εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι ασκήσεις των ερευνών της Διδακτικής αναφέρονται σε προβλήματα της καθημερινής ζωής κάνοντας χρήση αντικειμένων όπως π.χ. ο χαρταετός (Σταματέλου, 2016) αλλά και καταστάσεις όπως η λίπανση ενός χωραφιού (Fernándezetal., 2014). Ο υπολογισμός του εμβαδού ζητείται τόσο σε ορθογώνια γεωμετρικά σχήματα και κανονικά πολύγωνα (π.χ. Fernández et al., 2014) όσο και σε διαγράμματα όπως αυτό της κίνησης (π.χ. Graham&Sharp, 1999). Παρατηρούμε επίσης ότι τα προβλήματα της καθημερινής ζωής προσπαθούν να τα περιγράψουν με τη βοήθεια των γεωμετρικών σχημάτων. Π.χ. αναφέρεται πως ένα χωράφι έχει σχήμα κανονικού πενταγώνου.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού παρατηρούμε ότι οι προσεγγιστικές λύσεις δεν είναι αποδεκτές διότι οι μαθητές εισάγονται στον υπολογισμό του εμβαδού κάνοντας χρήση τύπων (Patahuddinetal., 2018) και δεν δίδεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση. Έτσι, το εμβαδόν αντιστοιχίζεται σε μία συγκεκριμένη αριθμητική τιμή η οποία προκύπτει από την εφαρμογή του τύπου. Άμεση συνέπεια είναι οι μαθητές να αισθάνονται την ανάγκη να χρησιμοποιούν αριθμούς (Patahuddinetal., 2018) και να αδυνατούν να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού χωρίς να έχουν μετρήσεις (Machaba, 2016).

Η έννοια του εμβαδού είναι στενά συνδεδεμένη με τους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού και δημιουργεί σύγχυση (Machaba, 2016; Tossavainenet al., 2017). Μάλιστα, αρκετά σχολικά εγχειρίδια δεν ορίζουν την έννοια του εμβαδού απλά εισάγουν τους τύπους υπολογισμού (Tossavainenetal., 2017). Έτσι, οι μαθητές αδυνατούν να δώσουν ένα ορισμό για το εμβαδόν χωρίς να χρησιμοποιήσουν κάποιο τύπο υπολογισμού και προσπαθούν να τον εφαρμόσουν και σε ακανόνιστα σχήματα (Machaba, 2016). Επιπρόσθετα, οι μαθητές προσπαθούν να μετρήσουν τις διαστάσεις ενός σχήματος προκειμένου να εφαρμόσουν ένα τύπο υπολογισμού ακόμα και όταν δεν τους ζητείται (Σταματέλου, 2016).

Από την προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να καταλάβουμε ότι η διαχείριση της έννοιας του εμβαδού έχει αντιστοιχηθεί με την εφαρμογή ενός τύπου. Οι μαθητές προσπαθούν να εφαρμόσουν τον τύπο «μήκοςχπλάτος» ακόμα και όταν αυτός δεν είναι κατάλληλος δίνοντας λανθασμένες απαντήσεις όπως ότι ένα φύλλο ενός φυτού δεν έχει εμβαδόν (Machaba, 2016). Δεν δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας αλλά στο αριθμητικό αποτέλεσμα (Baturo&Nason, 1996).

Η έννοια του εμβαδού είναι στενά συνδεδεμένη με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Αυτό συμβαίνει διότι οι μαθητές συγχέουν τον κανόνα «μήκοςχπλάτος» με την έννοια του εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός σχήματος οι μαθητές προκειμένου να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή του εμβαδού πολλαπλασιάζουν γραμμικές μονάδες μέτρησης και καταλήγουν σε τετραγωνικές μονάδες. Όμως, κάτι τέτοιο δεν συνάδει με την έννοια του εμβαδού (Baturo&Nason, 1996).

Οι μαθητές δείχνουν να μην είναι εξοικειωμένοι με τις μονάδες μέτρησης καθώς δυσκολεύονται να τις χρησιμοποιήσουν και κάποιες φορές δεν τις αναφέρουν (Σιδηρόπουλος, 2013). Επίσης, αξιοσημείωτο είναι ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού οι μονάδες οι οποίες χρησιμοποιούνται δεν είναι τετραγωνικές αλλά μονάδες οι οποίες αφορούν μήκος κάτι το οποίο θεωρείται βασική πηγή δυσκολίας (Baturo&Nason, 1996). Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν και να ερμηνεύσουν τις τετραγωνικές μονάδες του εμβαδού με τις μονάδες μήκους στα διαγράμματα κίνησης (McDermottetal., 1987).

Στις έρευνες της Διδακτικής εντοπίζονται και διαφορετικά σχήματα από αυτά των ευθύγραμμων γεωμετρικών σχημάτων. Για παράδειγμα, το σχήμα ενός φύλου ενός φυτού (Machaba, 2016) και άλλοτε μη κλειστές καμπύλες. Τα προβλήματα τα οποία εντοπίζονται είναι η αδυναμία των μαθητών να δώσουν σωστές απαντήσεις λόγω του ότι δε μπορούν να εφαρμόσουν τον τύπο σωστά.

Ταξινόμηση κατηγοριών «ασκήσεων» στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών και της Φυσικής

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρούμε να συγκεντρώσουμε εργαλεία και ταξινομίες τα οποία χρησιμοποιούνται ερευνητικά στην Μαθηματική Εκπαίδευση και στη Διδακτική Μαθηματικών για την κατηγοριοποίηση των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων, με στόχο να αξιοποιήσουμε τις προσεγγίσεις αυτές στην κατασκευή ερευνητικού εργαλείου για τα ερωτήματα της δικής μας προσέγγισης.

Οι ασκήσεις στα σχολικά βιβλία κατηγοριοποιούνται γενικά από τα ερευνητικά εργαλεία βάσει κάποιων χαρακτηριστικών τους.

Μερικά από τα χαρακτηριστικά αυτά είναι οι δεξιότητες οι οποίες πρέπει να έχουν αναπτύξει οι μαθητές προκειμένου να απαντήσουν τα ερωτήματα της άσκησης και η αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών.

Σε άλλες προσεγγίσεις, οι ασκήσεις κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με τη μορφή την οποία έχουν, την καθοδήγηση την οποία παρέχουν στη διδασκαλία, το γνωστικό επίπεδο στο οποίο ανήκουν, τις ενέργειες και τη συμπεριφορά οι οποίες αναμένονται από τους μαθητές, τα ερωτήματα και την ποιότητα αυτών, τον τύπο της απάντησης, το σκοπό που εξυπηρετούν, τη θεματολογία και τη φύση της άσκησης και τον τρόπο σκέψης και τις γνωστικές απαιτήσεις τις οποίες απαιτούν.

Θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε αυτές τις μεθοδολογίες κατηγοριοποίησης ως προς την εστίασή τους και τον τρόπο που εντοπίζουν στα σχολικά βιβλία τα χαρακτηριστικά που έχουν επιλέξει, ώστε να κατασκευάσουμε ένα εργαλείο κατηγοριοποίησης των ασκήσεων και προβλημάτων που παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία μαθηματικών και φυσικής με εστίαση στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Στο περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν (πχ προβλήματα της καθημερινότητας, μόνο σε γεωμετρικά σχήματα ή και σε διαγράμματα)
- Στην απαίτηση αυστηρότητας στον υπολογισμό ή αν δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση κάνοντας δεκτές προσεγγιστικές λύσεις.
- Στην έμφαση ή όχι για τη χρήση τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού
- Στον τρόπο διαχείρισης των προβλημάτων τα οποία αφορούν το εμβαδόν. (πχ αν ακολουθείται μια παγιωμένη αλγοριθμική διαδικασία ή δίδεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση)
- Στην συσχέτιση ή όχι της έννοιας του εμβαδού με κάποια συγκεκριμένη αριθμητική πράξη.(ίσως και στο γιατί αυτής της συσχέτισης)
- Στην εξοικείωση των μαθητών με τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού. Στο κατά πόσο μπορούν να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν με κατάλληλο τρόπο το εμβαδόν ενός γραφήματος.
- Στο αν γίνεται αναφορά μόνο σε ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα ή και σε άλλου είδους σχήματα.(πχ στο αν αλλάζει το είδος των προβλημάτων στις περιπτώσεις αυτές)

Σύμφωνα με τον Τουμάση (2000) οι βασικές γεωμετρικές δεξιότητες τις οποίες πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές είναι οι εξής πέντε:

- Οπτικές δεξιότητες
- Λεκτικές δεξιότητες
- Σχεδιαστικές δεξιότητες
- Λογικές δεξιότητες
- Δεξιότητες εφαρμογής

Βάσει αυτού, οι ασκήσεις και οι δραστηριότητες, τις οποίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τα ζητούμενα τους, στις παραπάνω κατηγορίες δεξιοτήτων.

Οι οπτικές δεξιότητες αφορούν την οπτική αντίληψη των μαθητών. Οι λεκτικές αφορούν την ικανότητα της χρήσης της γλώσσας, του λεξιλογίου και της ορολογίας προκειμένου να είναι σε θέση να διαβάσουν, να μάθουν και να περιγράψουν μαθηματικές έννοιες, ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα, προτάσεις και άλλου είδους μαθηματικές σχέσεις. Οι σχεδιαστικές δεξιότητες αφορούν τις ικανότητες των μαθητών στην δημιουργία ενός γραφήματος προκειμένου να αναπαραστήσουν μια γεωμετρική κατάσταση, κάνοντας χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Οι λογικές δεξιότητες αφορούν τη λογική χρήση των γεωμετρικών πληροφοριών από τους μαθητές προκειμένου να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα. Τέλος, οι δεξιότητες εφαρμογής αποτελούν την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους και τους διάφορους μαθηματικούς τύπους στο πλαίσιο ασκήσεων και δραστηριοτήτων σε επιστημονικούς τομείς όπως π.χ. οικονομία, φυσική, πληροφορική (Τουμάσης, 2000).

Οι Van Hiele ανέπτυξαν ένα μοντέλο το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί τόσο για την αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών όσο και για την καθοδήγηση της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Το συγκεκριμένο μοντέλο κατηγοριοποιεί τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών σε πέντε επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά είναι (Τουμάσης, 2000) :

- Επίπεδο 1: Οπτική αντίληψη του χώρου
- Επίπεδο 2: Ανάλυση
- Επίπεδο 3: Άτυπη σκέψη
- Επίπεδο 4: Τυπική σκέψη
- Επίπεδο 5: Αυστηρότητα

Επίπεδο 1: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται το χώρο ως κάτι το οποίο τους περιβάλει και αντιλαμβάνονται τις γεωμετρικές οντότητες ως ολότητες. Αναγνωρίζουν τη φυσική εμφάνιση ενός γεωμετρικού σχήματος και είναι ικανοί να αναπαράγουν μία εικόνα αλλά και να μάθουν όρους οι οποίοι αφορούν τη γεωμετρία.

Επίπεδο 2: Στο επίπεδο αυτό οι γεωμετρικές έννοιες αναλύονται και οι μαθητές παρατηρούν τις ιδιότητες των σχημάτων. Ακολουθεί η κατηγοριοποίηση των σχημάτων βάσει των ιδιοτήτων τους καθώς και η διάκριση και η αναγνώριση τους μέσω των συστατικών και των μερών τους αντίστοιχα.

Επίπεδο 3: Οι μαθητές σ' αυτό το επίπεδο είναι ικανοί να εντοπίζουν τις σχέσεις και τις ιδιότητες μέσα σε ένα σχήμα αλλά και μεταξύ σχημάτων. Επίσης οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν τους ορισμούς και να αντιληφθούν μη τυπικούς συλλογισμούς.

Επίπεδο 4: Οι μαθητές κατανοούν το ρόλο και τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών θεωρημάτων, ορισμών αποδείξεων κ.τ.λ. Επίσης είναι ικανοί να κατασκευάσουν μαθηματικές αποδείξεις με πολλούς τρόπους, να αντιληφθούν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες αλλά και να ξεχωρίσουν μία πρόταση από την αντίστροφη της.

Επίπεδο 5: Στο επίπεδο αυτό ο μαθητής είναι ικανός να κατανοεί τη γεωμετρία σαν ολότητα της οποίας τα μέρη συνδέουν κάποιες μαθηματικές σχέσεις. Επίσης, μπορεί να εφαρμόζει τις γεωμετρικές του γνώσεις σε ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών αλλά και να ασχολείται με διαφορετικά αξιωματικά συστήματα ευκλείδειων και μη ευκλείδειων γεωμετριών.

Σύμφωνα με την Αναστασοπούλου (2008), οι Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος αναφέρουν ότι ο A. Hoffer πρότεινε πέντε δεξιότητες- ικανότητες των οποίων η ανάπτυξη απαιτείται από τους μαθητές, στην προσπάθεια του να συμπληρώσει την θεωρία των Van Hiele.

Η προσπάθεια του Hoffer είχε ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πίνακα τεσσάρων γραμμών και πέντε στηλών στον οποίο καταγράφονται οι δεξιότητες οι οποίες απαιτούνται και τα επίπεδα της θεωρίας των Van Hieleστα οποία κατατάσσεται μία άσκηση ή εφαρμογή ή θεωρία. Ως προς τη δεξιότητα επιλέγεται η κυριότερη ενώ ως προς το επίπεδο το ανώτερο (Αναστασοπούλου, 2008).

Πίνακας Ι

Δεξιότητες-ικανότητες που πρέπει να αναπτύσσουν οι μαθητές σύμφωνα με την τροποποίηση και συμπλήρωση της θεωρίας των επιπέδων των van Hiele από τον A. Hoffer

	ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ II ΑΝΑΛΥΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ III ΔΙΑΤΑΞΗ-ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ IV ΕΠΑΓΩΓΗ	ΕΠΙΠΕΔΟ V ΑΥΣΤΗΡΟΤΗΤΑ
ΟΠΤΙΚΕΣ	Αναγνωρίζει διάφορα σχήματα από μια εικόνα. Αναγνωρίζει μια πληροφορία που δίνεται με ένα σχήμα.	Μπορεί να διακρίνει τις ιδιότητες ενός σχήματος. Εντοπίζει ένα σχήμα σαν μέρος ενός πιο σύνθετου σχήματος.	Αναγνωρίζει σχέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών σχημάτων. Αναγνωρίζει κοινές ιδιότητες διαφόρων ειδών σχημάτων.	Χρησιμοποιεί πληροφορία σχετική με ένα σχήμα για να συμπεράνει νέα στοιχεία.	Αναγνωρίζει εσφαλμένες παραδοχές σε ένα πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκαν σχήματα. Συλλαμβάνει σχέσεις σχημάτων σε διάφορα επαγωγικά συστήματα.
ΛΕΚΤΙΚΕΣ	Συσχετίζει το σχήμα με τη σωστή ονομασία. Ερμηνεύει προτάσεις που περιγράφουν σχήματα. Καταλαβαίνει από την περιγραφή για ποιο σχήμα πρόκειται.	Περιγράφει με άνεση διάφορες ιδιότητες ενός σχήματος.	Μπορεί να δίνει τον ορισμό εννοιών άνετα και συνειδητά. Διατυπώνει προτάσεις που δείχνουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων.	Κατανοεί τις διαφορές μεταξύ ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων. Διακρίνει τις υποθέσεις από τα συμπεράσματα στην εκφώνηση ενός προβλήματος.	Διατυπώνει προεκτάσεις γνωστών αποτελεσμάτων. Περιγράφει διάφορα επαγωγικά συστήματα.
ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ	Κατασκευάζει με άνεση σχήματα και μπορεί να ονομάζει τα διάφορα μέρη τους.	Μεταφράζει προφορική πληροφορία σε εικόνα. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες ενός σχήματος	Δεδομένων κάποιων σχημάτων, μπορεί να κατασκευάζει άλλα σχήματα που σχετίζονται	Αναγνωρίζει πότε και πώς να χρησιμοποιήσει βοηθητικά στοιχεία σε ένα σχήμα. Από	Αντιλαμβάνεται τα όρια και τις δυνατότητες διαφόρων οργάνων μέτρησης. Αναπαριστά

		για να κατασκευάσει το σχήμα.	με τα αρχικά.	δοσμένη πληροφορία συμπεραίνει πως να κατασκευάσει ένα συγκεκριμένο σχήμα.	σχηματικά έννοιες διαφόρων επαγωγικών συστημάτων.
ΛΟΓΙΚΕΣ	Συνειδητοποιεί ότι υπάρχουν διαφορές και ομοιότητες ανάμεσα στα σχήματα. Κατανοεί τη διατήρηση του σχήματος σε διάφορες σεις.	Τα σχήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διάφορες κατηγορίες. Συνειδητοποιεί ότι οι ιδιότητες χρησιμεύουν για να ξεχωρίζουν.	Κατανοεί τα πλεονεκτήματα ενός καλού ορισμού. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των σχημάτων, για να συμπεράνει αν μια ομάδα σχημάτων εμπεριέχεται σε μια άλλη ομάδα.	Χρησιμοποιεί κανόνες της λογικής για να κατασκευάσει αποδείξεις. Μπορεί να διατυπώνει συμπεράσματα από δοσμένη πληροφορία.	Αντιλαμβάνεται τα όρια και τις δυνατότητες αξιωμάτων και προτάσεων. Γνωρίζει πότε ένα σύστημα αξιωμάτων είναι ανεξάρτητο.
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	Αναγνωρίζει γεωμετρικά σχήματα σε αντικείμενα της πραγματικής ζωής.	Αναγνωρίζει τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων Αναπαριστά φυσικά φαινόμενα με σχέδιο ή με τη βοήθεια μοντέλου.	Κατανοεί την έννοια του μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σχέσεις μεταξύ αντικειμένων του πραγματικού χώρου.	Είναι σε θέση να συμπεραίνει ιδιότητες αντικειμένων από μια πληροφορία και να λύνει προβλήματα που παρουσιάζουν σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.	Χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα, για να αναπαραστήσει αφηρημένα συστήματα. Αναπτύσσει μαθηματικά μοντέλα για φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα.

Πηγή: Αναστασοπούλου (2008)

Ο Τουμάσης (2000) επιχείρησε την παρουσίαση των μορφών που δύναται να έχουν οι εργασίες στο μάθημα των μαθηματικών όπως παρατηρούνται στον Ελλαδικό χώρο. Στην παρουσίαση αυτή υπάρχουν οι παρακάτω κατηγορίες εργασιών – δραστηριοτήτων:

- Επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων:

Πρόκειται για ασκήσεις ή προβλήματα κλιμακωτής δυσκολίας, προσαρμοσμένα στις δυνατότητες των μαθητών της εκάστοτε τάξης, τα οποία δίδονται στους μαθητές μετά το πέρας μιας ενότητας ή κεφαλαίου με στόχο την εμπέδωση τόσο των εννοιών όσο και των διαδικασιών.

- Περιγραφή εννοιών ή διατύπωση ορισμών :

Οι μαθητές στερούνται της ουσιαστικής μαθηματικής κατανόησης διότι γίνονται παθητικοί δέκτες της μάθησης αφού τις περισσότερες φορές δεν ενεργούν και δεν συμμετέχουν στην οικοδόμηση της. Για το λόγο αυτό οι εργασίες αυτές στοχεύουν στην ανάπτυξη ικανοτήτων από τους μαθητές όσον αφορά την παρατηρητικότητα, την ακριβή έκφραση αλλά και την ορθή χρήση της ορολογίας και των συμβόλων.

- Περιλήψεις :

Πρόκειται για γραπτή εργασία στην οποία γίνεται καταγραφή των σημαντικότερων μαθηματικών στοιχείων, ιδεών, τύπων, παρατηρήσεων και διασυνδέσεων της ενότητας ή του κεφαλαίου. Τέτοιου είδους εργασίες βοηθάνε τους μαθητές να έχουν μία ολοκληρωτική εικόνα της ενότητας – κεφαλαίου και συνιστούν σημαντικό εργαλείο για επανάληψη.

- Περιγραφές με τίτλο *«Πώς θα...»*:

Η γραπτή αυτή εργασία έχει ως στόχο να καλύψει τα κενά τα οποία παρουσιάζουν οι μαθητές. Ουσιαστικά τους ζητείται να γράψουν τα βήματα και τον τρόπο που θα εφαρμόσουν τις μαθηματικές διαδικασίες και αλγορίθμους προκειμένου να επιτύχουν την λύση ενός προβλήματος. Οι μαθητές καλούνται να γράψουν αυτό τον οδηγό επίλυσης με δικά τους λόγια προκειμένου να αναπτύξουν την εκάστοτε μεθοδολογία και να την κατανοήσουν πλήρως. Σημαντική θεωρείται η ενασχόληση με τομείς οι οποίοι προκαλούν σύγχυση στους μαθητές με σκοπό την αποσαφήνιση και τη βαθύτερη κατανόηση.

- Κριτική στη λύση ενός προβλήματος :

Τα σχολικά εγχειρίδια ως επί το πλείστον παραθέτουν έτοιμο τον τρόπο επίλυσης μίας άσκησης χωρίς καμία ιδιαίτερη αναφορά στο γιατί επιλέχθηκε αυτός ο τρόπος. Αυτές λοιπόν οι ασκήσεις περιγράφουν τα βήματα της λύσης ενός προβλήματος και αναλύουν τις επιλογές και τις αποφάσεις με σκοπό τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση. Ειδικότερα, πρόκειται για μια γραπτή εργασία στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα και έπειτα ο μαθητής πρέπει να απαντήσει με δικά του λόγια στην ερώτηση: «Πώς σκέφτηκα για να λύσω αυτό το πρόβλημα». Ο μαθητής δηλαδή αναφέρεται στην επιλογή της μεθόδου που ακολούθησε, στα κριτήρια των αποφάσεων του αλλά και το σκοπό που έχει κάθε κίνησή του στον τρόπο που ακολούθησε.

- Μαθηματικό περιοδικό :

Πρόκειται για μία γραπτή εργασία η οποία πραγματοποιείται από το σύνολο της τάξης με κεντρική ιδέα την καταγραφή των σκέψεων, των συναισθημάτων αλλά και των προβλημάτων μάθησης που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση πάντα με το μάθημα των μαθηματικών. Τα θέματα δύναται να επιλέγονται τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Η εργασία αυτή απεικονίζει στον εκπαιδευτικό τα συναισθήματα και τους προβληματισμούς των μαθητών, ενώ δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εκφράσουν καθώς και εξωτερικεύσουν πιθανούς προβληματισμούς οι οποίοι δε γίνονται εμφανείς στα πλαίσια του μαθήματος. Επιπρόσθετα, η μελέτη αυτού του περιοδικού από τον εκπαιδευτικό μπορεί να τον οδηγήσει στη βελτίωση της διδασκαλίας του και στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του.

- Συνθετικές δημιουργικές εργασίες :

Πρόκειται για εργασίες μέσα από τις οποίες επιδιώκεται η οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης. Πιο συγκεκριμένα οι δραστηριότητες αυτές παρέχουν στους μαθητές τις ευκαιρίες να κατανοήσουν τα μαθηματικά και να ερμηνεύσουν καθημερινές πραγματικές καταστάσεις στον κόσμο κάνοντας χρήση των μαθηματικών. Οι εργασίες αυτού του τύπου πραγματοποιούνται σε μεγάλο χρονικό διάστημα προκειμένου να δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να εντοπίσουν διάφορες πτυχές των μαθηματικών. Οι εργασίες αυτές έχουν διεπιστημονικό χαρακτήρα προάγουν την κριτική σκέψη, την ανάληψη πρωτοβουλίας, καλλιεργούν την θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και κάνουν φανερές τις συνδέσεις των γνώσεων των μαθητών με τα διάφορα επιστημονικά πεδία, τον κοινωνικό περίγυρο και την καθημερινότητα.

Μία ευρέως διαδεδομένη ταξινομία είναι αυτή του Bloom. Η ταξινομία αυτή αποτελεί μία περιγραφή των γνωστικών επιπέδων στα οποία είναι δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν οι ικανότητες οι οποίες αναπτύσσονται από τους μαθητές στα πλαίσια μια δραστηριότητας. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για την ταξινόμηση των δραστηριοτήτων βάσει των γνωστικών στόχων με ιεραρχικό τρόπο. Τα έξι επίπεδα της ταξινομίας του Bloomείναι τα εξής (Τουμάσης, 2000):

- Γνώση

Οι δραστηριότητες απαιτούν από το μαθητή να κάνει χρήση της μνήμης, να αναγνωρίζει και να μπορεί να ανακαλεί διαφόρων ειδών πληροφορίες όπως ορολογία τύπους, θεωρίες κτλ.

- Κατανόηση

Στο επίπεδο αυτό ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει μια έννοια τόσο καλά ώστε να μπορεί να τη χρησιμοποιήσει. Το επίπεδο της κατανόησης απαρτίζεται από τα παρακάτω υπό-επίπεδα.

Μετάφραση-Μετατροπή: Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να εκφράζει, όπως αυτός αντιλαμβάνεται, μία κατάσταση. Επίσης και η μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική και αντίστροφα.

Ερμηνεία: Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να μπορεί να ερμηνεύσει και να ξεχωρίσει τα σημαντικότερα από τα λιγότερο σημαντικά στοιχεία τα οποία αφορούν τη γνώση.

Προέκταση: Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να γενικεύει, να διευρύνει και άλλοτε να προτείνει πιθανές προεκτάσεις.

- Εφαρμογή

Το επίπεδο αυτό απαιτεί από το μαθητή να είναι σε θέση να επιλέξει ανάμεσα στις γνώσεις του ποια έννοια ή μεθοδολογία θα χρησιμοποιήσει προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα το οποίο του δόθηκε.

- Ανάλυση

Ανάλυση στοιχείων: Πρόκειται για την δυνατότητα του μαθητή να αντιλαμβάνεται και να ξεχωρίζει μέσα σε μία πληθώρα στοιχείων αυτά που του είναι χρήσιμα.

Ανάλυση σχέσεων: Πρόκειται για την ικανότητα της αναγνώρισης των σχέσεων μεταξύ των μερών μιας γνωστικής κατάστασης.

Ανάλυση οργανωτικών αρχών: Πρόκειται για την ανάλυση των αρχών οργάνωσης αλλά και τον εντοπισμό των προθέσεων του δημιουργού μίας δραστηριότητας.

- Σύνθεση

Παραγωγή προσωπικού έργου: Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να προβαίνει σε γραπτές ή προφορικές ανακοινώσεις ιδεών και εμπειριών. Επιπρόσθετα, να είναι παραγωγικός και δημιουργικός.

Παραγωγή ενός σχεδίου δράσης: Πρόκειται για τη δυνατότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνώσης τους, από τους μαθητές για να φθάσουν στη λύση ενός προβλήματος.

Παραγωγή ενός συνόλου αφηρημένων σχέσεων: Πρόκειται για τη δυνατότητα του μαθητή να συμπεραίνει, να ταξινομεί να συνδυάζει βάσει κάποιων δεδομένων κάθε φορά.

- Αξιολόγηση

Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να εκτιμήσει με ποσοτικό ή ποιοτικό τρόπο τις λύσεις ή τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε σε ένα πρόβλημα, βάσει κριτηρίων που δημιούργησε ο ίδιος ή του δόθηκαν. Τα κριτήρια κατηγοριοποιούνται ως εξής:

Εσωτερικά κριτήρια: Πρόκειται για την ικανότητα του μαθητή να κρίνει μία δραστηριότητα ως προς την ακρίβεια, τα λάθη και τη αλληλουχία λογικών συλλογισμών.

Εξωτερικά κριτήρια: Πρόκειται για τη σύγκριση με μία δραστηριότητα της ίδιας κατηγορίας η οποία θεωρείται πρότυπο ή εξετάζονται στοιχεία όπως ο σκοπός, το όφελος, τα μέσα κτλ.

Η ταξινομία του Bloom παρουσιάζει κάποιες αδυναμίες με αποτέλεσμα να αμφισβητείται ως προς την αποτελεσματικότητα στην πράξη. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η προσπάθεια προσαρμογής της ταξινομία αυτής για την χρήση της στον τομέα των μαθηματικών.

Οι Avital και Shettleworth προσπάθησαν να προσαρμόσουν την ταξινομία του Bloom δημιουργώντας τρία επίπεδα στα οποία μπορούν να ταξινομηθούν οι δραστηριότητες. Η ταξινομία αυτή χαρακτηρίζεται από το μειονέκτημα της ως προς την κατάταξη των δραστηριοτήτων σύμφωνα με το επίπεδο των μαθητών στους οποίους απευθύνεται. Λαμβάνοντας όμως υπόψη το μέσο μαθητή οι κατηγορίες έχουν ως εξής (Τουμάσης, 2000):

- Ανάκληση ή Ανάγνωση

Στην κατηγορία αυτή κατατάσσονται οι δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν την αναγνώριση μαθηματικών στοιχείων αλλά και την ανάκληση διαφόρων τύπων όπως π.χ. εμβαδόν ενός τριγώνου.

- Αλγοριθμική σκέψη

Στην κατηγορία αυτή κατατάσσονται οι δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν από το μαθητή να κάνει εφαρμογή μιας μεθόδου και να ακολουθήσει αλγοριθμικές διαδικασίες των οποίων είναι γνώστης. Πιο συγκεκριμένα απαιτείται ο μαθητής να προβεί σε γενικεύσεις καθώς η εφαρμογή η οποία απαιτείται από την δραστηριότητα δεν την έχει διδαχθεί αυτούσια ο μαθητής.

- Ανοιχτή έρευνα

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι δραστηριότητες οι οποίες είναι πρωτόγνωρες για το μαθητή και κατά κάποιο τρόπο ο μαθητής δε διαθέτει έτοιμη τη μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος που παρουσιάζουν. Ο μαθητής πρέπει να έχει την ικανότητα να παράγει ένα τρόπο επίλυσης του προβλήματος και όχι να ανακαλεί έτοιμες λύσεις.

Ο Wilsonταξινομεί τις δραστηριότητες σύμφωνα με την συμπεριφορά η οποία αναμένεται από τους μαθητές μετά από την παράδοση ενός μαθήματος το οποίο αφορά σε μία μαθηματική έννοια. Ο Wilsonταξινομεί τις ασκήσεις και τις δραστηριότητες ως εξής (Τουμάσης, 2000):

- Αναγνώριση – Υπολογισμός

Στο επίπεδο αυτό κατατάσσονται οι ασκήσεις οι οποίες απαιτούν από το μαθητή τόσο την ανάκληση όσο και την απομνημόνευση πληροφοριών . Επίσης πρόκειται για ασκήσεις εμπέδωσης οι οποίες έχουν στόχο την εκτέλεση πράξεων και όχι τη λήψη αποφάσεων.

- Κατανόηση

Στην κατηγορία αυτή κατατάσσονται οι ασκήσεις οι οποίες απαιτούν:

1. την καλή γνώση των εννοιών προκειμένου να ληφθεί μία απόφαση από το μαθητή
2. την ικανότητα κωδικοποίησης πληροφοριών από ένα σύστημα σε ένα άλλο π.χ. φυσική γλώσσα σε γεωμετρική
3. την ικανότητα του μαθητή να αντιλαμβάνεται την αλληλουχία λογικών συλλογισμών.

- Εφαρμογή

Οι δραστηριότητες οι οποίες κατατάσσονται σε αυτή την κατηγορία είναι αυτές οι οποίες απαιτούν την λήψη αποφάσεων, την επιλογή μεθοδολογίας και την εφαρμογή της δεδομένου ότι οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί.

- Ανάλυση ή Ανακάλυψη

Στην τελευταία αυτή κατηγορία κατατάσσονται ασκήσεις οι οποίες απαιτούν τόσο τη σύνθεση όσο και την ανάλυση ενός θέματος. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για προβληματικές καταστάσεις με τις οποίες ο μαθητής δεν έχει ασχοληθεί προηγουμένως και θα πρέπει αναπτύξει μια μεθοδολογία προκειμένου να φτάσει στη λύση τους ή άλλοτε να προβεί σε μια μαθηματική απόδειξη και όχι απλά στην ανάκληση της εκάστοτε πρότασης.

Οι ασκήσεις οι οποίες περιλαμβάνονται στα τεστ αξιολόγησης των μαθητών και κατ' επέκταση και στις σχολικές δραστηριότητες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με άξονα τον τύπο της απάντησης. Σύμφωνα με τον Τουμάση (2000) οι τύποι διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες και στις αντίστοιχες υποκατηγορίες τους. Οι δύο κύριες κατηγορίες είναι: 1) Ερωτήσεις καθορισμένης απάντησης 2) Ερωτήσεις ελεύθερης απάντησης.

Ερωτήσεις καθορισμένης απάντησης

i. Ερωτήσεις τύπου σωστό-λάθος

Στις ερωτήσεις αυτού του τύπου ο μαθητής πρέπει να επιλέξει αν είναι σωστή ή εσφαλμένη η αναφορά του εκάστοτε ερωτήματος. Θεωρείται αποπροσανατολιστικός και απατηλός τρόπος απάντησης.

ii. Ερωτήσεις τροποποιημένου τύπου σωστό-λάθος

Πρόκειται για ένα βελτιωμένο μοντέλο των ερωτήσεων σωστό –λάθος και απαιτεί από το μαθητή αν χαρακτηρίσει μία πρόταση ως λανθασμένη να προβεί και στην αντίστοιχη διόρθωση με κάποιο τρόπο. Αυτός ο τύπος ερωτημάτων είναι δύσκολος στην κατασκευή και οι μαθητές δεν είναι πάντα εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους ερωτήματα. Όμως, αυτού του είδους τα ερωτήματα ελαχιστοποιούν το φαινόμενο της απάντησης από τους μαθητές στην τύχη και παρέχουν μία πληθώρα δυνατών ερωτημάτων προκειμένου να ελεγχθούν λειτουργίες οι οποίες κατατάσσονται στα ανώτερα γνωστικά επίπεδα.

iii. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Στα ερωτήματα αυτά δίνεται μία ερώτηση και κάτω από αυτή κάποιες πιθανές απαντήσεις μεταξύ των οποίων και μία ή περισσότερες σωστές τις οποίες ο μαθητής πρέπει να επιλέξει. Οι ερωτήσεις αυτού του τύπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση των λειτουργιών οι οποίες μπορεί να ανήκουν τόσο στα κατώτερα όσο και στα ανώτερα γνωστικά επίπεδα. Επίσης, οι ερωτήσεις αυτού του τύπου πλεονεκτούν από την άποψη ότι μπορούν να διορθώνονται γρήγορα και ταυτόχρονα να ελέγχουν ένα ευρύ φάσμα γνώσεων μειώνοντας σημαντικά την πιθανότητα μιας τυχαίας απάντησης από το μαθητή.

iv. Ερωτήσεις σύζευξης ή αντιστοίχισης

Πρόκειται για ερωτήσεις οι οποίες απαρτίζονται από δύο στήλες και σπανιότερα από περισσότερες στις οποίες ο μαθητής καλείται να αντιστοιχίσει με σωστό τρόπο τα στοιχεία της κάθε στήλης με αυτά της επόμενης είτε με μια γραμμή είτε γράφοντας δίπλα το γράμμα ή τον αριθμό του αντιστοιχιζόμενου στοιχείου. Αυτού του τύπου οι ερωτήσεις δεν παρουσιάζουν σημαντικά πλεονεκτήματα και για το λόγο αυτό δε χρησιμοποιούνται συχνά.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα αυτής της κατηγορίας ερωτημάτων, πέραν όσων καταγράφονται παραπάνω, είναι το γεγονός ότι εκμηδενίζεται η υποκειμενικότητα λόγω κοινών κριτηρίων αξιολόγησης.

Ερωτήσεις ελεύθερης απάντησης

i. Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού διαστήματος

Τα ερωτήματα αυτά χρησιμοποιούνται κυρίως για να ελέγξουν αν ο μαθητής είναι σε θέση να ανακαλέσει με ακρίβεια μαθηματικές έννοιες και υπολογιστικούς τύπους. Αποτελούνται από προτάσεις οι οποίες περιέχουν ένα ή περισσότερα κενά τα οποία ο μαθητής πρέπει να τα συμπληρώσει με την κατάλληλη λέξη.

ii. Ερωτήσεις ανάπτυξης

Στις ερωτήσεις αυτές ο μαθητής καλείται να απαντήσει άλλοτε με σύντομο τρόπο και άλλοτε με μεγαλύτερη έκταση. Είναι κατάλληλες για την αξιολόγηση γνώσεων οι οποίες εντάσσονται σε υψηλά επίπεδα των εκάστοτε γνωστικών ταξινομιών και απαιτούν κριτικές και συνθετικές ικανότητες από το μαθητή.

Αυτές οι ερωτήσεις χαρακτηρίζονται ως παραδοσιακές για το σύστημα της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης και μάλιστα ο Τουμάσης (2000) αναφέρει ότι οι ερωτήσεις αυτές μονοπωλούν στα σχολικά βιβλία.

Κάποια από τα πλεονεκτήματα τα οποία παρουσιάζουν αυτές οι ερωτήσεις είναι η ελεύθερη έκφραση, η γλωσσική ανάπτυξη και η ευκαιρία για λογικούς συλλογισμούς από το μαθητή. Επίσης, ενθαρρύνεται η δημιουργία, η παράθεση επιχειρημάτων αλλά και ο σχεδιασμός. Τέλος, ο μαθητής δε μπορεί να δώσει μια τυχαία απάντηση ενώ ο εκπαιδευτικός μπορεί εύκολα και γρήγορα να συντάξει τέτοιου είδους ερωτήσεις.

Οι σκοποί της διδασκαλία των μαθηματικών διαχωρίζονται στις εξής τρεις κατηγορίες (Τουμάσης, 2000):

1. Πρακτικοί σκοποί

Ουσιαστικά πρόκειται για τους σκοπούς οι οποίοι αφορούν τη χρήση και τη σημαντικότητα των μαθηματικών για την καθημερινότητα ενός ανθρώπου ή της κοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται στις ικανότητες υπολογιστικών πράξεων, τη χρήση μαθηματικής κωδικοποίησης σε προβλήματα της καθημερινότητας καθώς και στην ερμηνεία αντικειμένων όπως γραφικές παραστάσεις.

2. Ειδολογικοί ή μορφωτικοί σκοποί

Πρόκειται για τους σκοπούς οι οποίοι αφορούν τη διανοητική ανάπτυξη του ατόμου και τη δημιουργία νοητικών δομών όσον αφορά τα χαρακτηριστικά ώστε ο μαθητής να είναι σε θέση να κάνει γενικεύσεις και να μπορεί να εφαρμόσει τις γνώσεις του και σε άλλους τομείς ή προβληματικές καταστάσεις.

3. Πολιτισμικοί σκοποί

Πρόκειται για τους σκοπούς οι οποίοι προάγουν την αξία και το πόσο σημαντικά είναι τα μαθηματικά για τον πολιτισμό. Πιο συγκεκριμένα, σκοποί σαν και αυτούς είναι η αντίληψη της αρμονίας και της ομορφιάς, η οποία αντικατοπτρίζεται από τα γεωμετρικά σχήματα τα οποία απαντώνται στη φύση, η κατανόηση της αξίας των μαθηματικών ως προς την διαμόρφωση της κοινωνίας κ.α.

Οι σκοποί αυτοί θα πρέπει να συνοδεύονται και από κατάλληλες δραστηριότητες στη σχολική τάξη. Έτσι, οι δραστηριότητες θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τους παραπάνω σκοπούς τους οποίους εξυπηρετούν.

Οι ασκήσεις και οι διάφορες δραστηριότητες περιλαμβάνουν κάποια ερωτήματα. Βάσει αυτών των ερωτημάτων τα οποία τίθενται μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με το στόχο τον οποίο επιδιώκουν. Σύμφωνα με τον Τουμάση (2000) υπάρχουν οι παρακάτω κατηγορίες ως προς το ερώτημα:

- Να δημιουργήσουν την ανάγκη ενός νέου θέματος
- Να προκαλέσουν τους μαθητές
- Να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές π.χ. αλληλεπιδράσεις
- Να αναπτύξουν οι μαθητές ικανότητα αξιολόγησης
- Να ενισχύσουν την ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται τις μεθόδους και τις διάφορες τεχνικές
- Οι μαθητές να προβούν σε διάγνωση
- Οι μαθητές να προβούν σε ερμηνεία
- Να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών να εξερευνήσουν
- Να παρακινεί τους μαθητές να προβούν σε ερωτήσεις
- Να αναπτύξουν οι μαθητές τη δυνατότητα της εφαρμογής της γνώσης τους σε διαφορετικά πλαίσια.

Επιπρόσθετα, ο Τουμάσης (2000) αναφέρει ότι τα ερωτήματα αυτά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν όσον αφορά την ποιότητα τους στα εξής επίπεδα:

- Ερωτήσεις χαμηλότερου επιπέδου

Στις ερωτήσεις αυτές απαιτείται από το μαθητή να κάνει πράξεις, να επιλύει απλές ασκήσεις και να ανακαλεί πληροφορίες από τη μνήμη του.

- Ερωτήσεις υψηλότερου επιπέδου
    - Αντιπροσώπευση-ερμηνεία πληροφορίας: απαιτεί από το μαθητή να αντιπροσωπεύσει με κατάλληλο μαθηματικό τρόπο κάποια δεδομένα ή καταστάσεις
    - Εξήγηση: Απαιτεί από το μαθητή να προβεί σε εξηγήσεις
    - Ανάλυση, συσχέτιση και εφαρμογή πληροφορίας: Απαιτεί από το μαθητή να προβεί σε γενικεύσεις και να δίνει τη δική του ερμηνεία
    - Ανοικτή έρευνα:

    - Πρόκειται για ερωτήματα τα οποία ο μαθητής δεν τα έχει συναντήσει ποτέ, ούτε αυτούσια ούτε με παρόμοιο τρόπο.
    - Πρόκειται για ερωτήματα τα οποία απαιτούν από το μαθητή να προβαίνει σε παρατηρήσεις και γενικότερα να διερευνά ένα θέμα το οποίο μάλιστα δεν είναι καλά ορισμένο.
- Ερωτήσεις γνώμης και αξιολόγησης

Πρόκειται για ερωτήσεις οι οποίες απαιτούν άλλοτε την αξιολόγηση ενός θέματος από το μαθητή και άλλοτε να εκφράσει τη γνώμη και την άποψη του.

Οι Καφούση, Σκουμπουρδή, & Τάτσης (2009) στην εργασία τους η οποία αφορά την ανάλυση του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Ά Δημοτικού έκαναν χρήση ενός εργαλείου για την γλωσσολογική ανάλυση των δραστηριοτήτων. Το εργαλείο αυτό προέρχεται κατά βάση από τη γραμματολογική προσέγγιση του Halliday και έχει ως σκοπό να μελετήσει τρεις λειτουργίες του κειμένου. Οι λειτουργίες αυτές είναι η εμπειρική, η διαπροσωπική και η κειμενική.

- Εμπειρική λειτουργία

Όσον αφορά τη μαθηματική δραστηριότητα: Χρησιμοποιήθηκε η κατηγοριοποίηση του Halliday σχετικά με τις διαδικασίες των δραστηριοτήτων. Ο Halliday αναφέρει τις εξής έξι κατηγορίες διαδικασιών (Καφούση et al., 2009):

1. πρακτικές (material): πρόκειται για διαδικασίες οι οποίες απαιτούν την ενέργεια του μαθητή π.χ. γράψε
2. νοητικές (mental): πρόκειται για εσωτερικές διαδικασίες όπως μαθαίνω
3. συσχετιστικές (relational): πρόκειται για διαδικασίες οι οποίες απαιτούν υπολογισμούς, συγκρίσεις κτλ
4. λεκτικές (verbal): πρόκειται για διαδικασίες που απαιτούν ο μαθητής να μιλήσει
5. συμπεριφοριστικές (behavioural): δεν αναλύονται
6. υπαρξιστικές (existential): δεν αναλύονται

Σύμφωνα με τη Morgan η οποία αναφέρεται από τους Καφούσηetal. (2009), τα ποσοστά των τριών πρώτων διαδικασιών φανερώνουν την αντίληψη ως προς τη φύση των μαθηματικών την οποία προωθούν τα κείμενα.

Όσον αφορά την εμπλοκή του μαθητή: Πρόκειται για τον τρόπο με τον οποίο η δραστηριότητα απαιτεί να εμπλακεί ο μαθητής και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες.

i. Δραστηριότητες οι οποίες επιτρέπουν τη συζήτηση, την εύρεση διαφορετικών τεχνικών για τη λύση μιας άσκησης ή και τα δύο μαζί
ii. Δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν συγκεκριμένη ενέργεια από το μαθητή

Επιπρόσθετα, οι Καφούση et al.(2009) αναφέρονται στον Li σύμφωνα με τον οποίο οι δραστηριότητες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν βάσει του τύπου της απάντησης την οποία απαιτούν. Οι τύποι αυτοί είναι οι εξής:

1. απάντηση με αναγραφή αριθμού μετά την εκτέλεση μιας διαδικασίας
2. απάντηση με γραπτή μαθηματική έκφραση, όπως 7-4
3. απάντηση με το σχεδιασμό μιας μορφής εικόνας (π.χ. χάραξη δημιουργία γραφήματος),
4. λεκτική απάντηση
5. άλλου είδους γραπτή απάντηση (π.χ. γραφή μιας εξήγησης)

- Διαπροσωπική λειτουργία

Οι Καφούση et al., (2009) αναφέρουν ότι σύμφωνα με τη Morgan, η λειτουργία αυτή αναφέρεται στη σχέση η οποία υπάρχει μεταξύ του μαθητή και του συγγραφέα της δραστηριότητας. Επίσης, εδώ διακρίνεται και ο ρόλος τον οποίο αποδίδεται στο μαθητή όσον αφορά τα μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα, γίνεται κατηγοριοποίηση των ρημάτων των δραστηριοτήτων ως προς δύο άξονες:

i. Πρόσωπο του ρήματος
ii. Και τη χρήση της προστακτικής έγκλισης αυτού

Η Morgan θεωρεί ότι όταν το ρήμα είναι στο πρώτο πρόσωπο τόσο στον ενικό όσο και στον πληθυντικό τότε φανερώνει με ποιο τρόπο θέλει ο συγγραφέας να εμπλακεί ο μαθητής ή την ενασχόληση του σε ατομικό επίπεδο η οποία επιδιώκεται.

- Κειμενική λειτουργία

Όσον αφορά τις εξηγήσεις: Οι Newton&Newtonοι οποίοι αναφέρονται από τους Καφούση et al. (2009) ανέπτυξαν επτά κατηγορίες εξηγήσεων. Οι πρώτες πέντε χαρακτηρίζονται ως εξηγήσεις σκοπού ενώ οι άλλες δύο ως εξηγήσεις αιτίας.

Εξηγήσεις σκοπού:

i. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν το σκοπό της εκάστοτε δραστηριότητας
ii. Εξηγήσεις με στόχο να δοθεί ένας σκοπός στο σενάριο το οποίο πραγματεύεται η δραστηριότητα ή παράθεση παραδείγματος στους μαθητές
iii. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν το σκοπό των μαθηματικών ενεργειών (π.χ. πράξεις)
iv. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν το σκοπό των λέξεων, των μονάδων, των συμβόλων συμβάσεων και μη λεκτικών αναπαραστάσεων
v. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν στο σκοπό και το τι επιδιώκει η εκφώνηση της δραστηριότητας

Εξηγήσεις αιτίας:

vi. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν την αιτιολόγηση των διαφόρων ισχυρισμών ως προς τα μαθηματικά
vii. Εξηγήσεις οι οποίες αφορούν την αιτιολόγηση των διαφόρων ισχυρισμών οι οποίοι δε σχετίζονται με τα μαθηματικά

Τέλος, οι Καφούση et al., (2009) επιχείρησαν την κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων όσον αφορά τη θεματολογία. Πιο συγκεκριμένα, εξέτασαν μέσα από ποια πλαίσια μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν τη σχέση των μαθηματικών με την καθημερινότητα και άλλους επιστημονικούς τομείς όπως οικονομία, εκπαίδευση, αθλητισμός και άλλα.

Σύμφωνα με τον Pólya ο οποίος αναφέρεται από την Darlington (2014) οι ερωτήσεις διακρίνονται σε συνηθισμένες (routine) και μη συνηθισμένες (non routine). Με αυτό το σκεπτικό τα προβλήματα μπορούν να χαρακτηριστούν ως συνηθισμένα (ρουτίνας) ή μη συνηθισμένα (μη ρουτίνας).

Συνηθισμένο πρόβλημα – πρόβλημα ρουτίνας: Πρόκειται για πρόβλημα το οποίο μπορεί να λύσει κάποιος αν απλώς αντικαταστήσει τα δεδομένα του σε ένα τυπικά επιλυμένο και γενικευμένο πρόβλημα ή υλοποιώντας τα βήματα ενός παραδείγματος το οποίο είναι καλά ορισμένο με την απουσία οποιασδήποτε πρωτοτυπίας.

Μη συνηθισμένο πρόβλημα: Πρόκειται για πρόβλημα του οποίου η επίλυση απαιτεί την πολύ καλή κατανόηση όλων των στοιχείων των οποίων το απαρτίζουν ενώ σύμφωνα με τους Elia et al. οι οποίοι αναφέρονται από την Darlington (2014), οι ερωτήσεις αυτού του είδους προβλημάτων απαιτούν δημιουργική σκέψη προκειμένου να αναπτυχθεί μία μεθοδολογία για να επιτευχθεί η λύση του προβλήματος εφόσον πρώτα έχει γίνει κατανοητό.

Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω η ταξινομία του Bloom παρουσιάζει κάποια προβλήματα ειδικότερα κατά την εφαρμογή της στα μαθηματικά. Αυτό αναφέρεται από τον Τουμάση (2000) ενώ στο άρθρο της Darlington (2014)εκφράζεται η άποψη ότι οι διάφορες ταξινομίες αδυνατούν κατά την εφαρμογή τους στα μαθηματικά.

Πέραν των ταξινομιών οι οποίες περιγράφονται παραπάνω ως τροποποιήσεις αυτής του Bloom στη βιβλιογραφία συναντάμε και την ταξινομία MATH. Σύμφωνα με την Darlington (2014), πρόκειται για μία τροποποιημένη ταξινομία βασισμένη στην ταξινομία Bloom, η οποία δημιουργήθηκε από τους Smith et al. (Darlington, 2014).

Η ταξινομία αυτή σχεδιάστηκε με σκοπό να δημιουργηθούν μαθηματικές εκτιμήσεις τέτοιες ώστε να συντελούν στην αξιολόγηση των μαθητών τόσο σε επίπεδο γνώσεων όσο και σε επίπεδο δεξιοτήτων. Επιπρόσθετα, η ταξινομία αυτή προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να κάνουν φανερή την κατανόηση η οποία αφορά στα μαθηματικά και μάλιστα σε διαφορετικά επίπεδα (Darlington, 2014).

Οι κατηγορίες της ταξινόμησης δημιουργήθηκαν για να εκφράσουν τη φύση της άσκησης και όχι το βαθμό δυσκολίας τους και παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα όπως αναφέρεται από την (Darlington, 2014):

Πίνακας ΙΙ
Κατηγορίες ταξινόμησης της φύσης της άσκησης και όχι του βαθμού δυσκολίας

Συνήθης διαδικασίες		
ΟΜΑΔΑ Α	Πραγματική γνώση και συστήματα πραγματικότητας (Factual Knowledge and Fact Systems)	Φέρνει στο μυαλό πληροφορίες οι οποίες έχουν μαθευτεί προγενέστερα με τη μορφή που δόθηκαν
	Κατανόηση (Comprehension)	Αποφασίζει εάν οι συνθήκες ενός ορισμού ικανοποιούνται, κατανοεί τη σημαντικότητα των συμβόλων σε ένα τύπο και τα αντικαταστεί σε αυτόν, αναγνωρίζει παραδείγματα και αντιπαραδείγματα
	Συνήθης χρήση των διαδικασιών (Routine Use of Procedures)	Χρησιμοποιεί μια διαδικασία ή αλγόριθμο σε ένα οικείο πλαίσιο. Όταν εκτελούνται κατάλληλα, όλοι οι άνθρωποι λύνουν το πρόβλημα σωστά με τον ίδιο τρόπο. Οι μαθητές θα έχουν προηγουμένως εκτεθεί σε αυτές

		σε ασκήσεις εξάσκησης.
Χρήση των υπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων με νέους τρόπους		
ΟΜΑΔΑ Β	Μεταφορά πληροφοριών (Information Transfer)	Μεταφορά πληροφοριών από λεκτική σε αριθμητική γλώσσα και αντίστροφα, απόφαση εάν πληρούνται οι συνθήκες ενός εννοιολογικού ορισμού, αναγνώριση της εφαρμογής ενός γενικού τύπου σε συγκεκριμένα πλαίσια, σύνοψη μη τεχνικών όρων, πλαισίωση μαθηματικών επιχειρημάτων από λεκτική περιγραφή, εξήγηση σχέσεων μεταξύ των συστατικών μερών, εξήγηση διαδικασιών, παρομοίωση των συστατικών ενός ισχυρισμού στη δική τους λογική σειρά.
	Εφαρμογή σε νέες καταστάσεις (Application in New Situations)	Επιλογή και εφαρμογή κατάλληλων μεθόδων ή πληροφοριών σε νέες καταστάσεις.
Εφαρμογή της εννοιολογικής γνώσης για την κατασκευή μαθηματικών επιχειρημάτων		
ΟΜΑΔΑ Γ	Δικαιολόγηση και ερμηνεία (Justifying and Interpreting)	Απόδειξη ενός θεωρήματος προκειμένου να δικαιολογήσει ένα αποτέλεσμα, μία μέθοδο, ένα τύπο, εύρεση σφαλμάτων στο συλλογισμό, αναγνώριση περιορισμών ενός μοντέλου, προσδιορισμός καταλληλόλητας ενός μοντέλου, συζήτηση σημασίας δοσμένου παραδείγματος, αναγνώριση ασταθών υποθέσεων.
	Συνέπειες, Εικασίες και Συγκρίσεις (Implications, Conjectures and Comparisons)	Εφόσον έχει δοθεί ή έχει βρεθεί ένα αποτέλεσμα ή μια κατάσταση να εξαχθούν οι συνέπειες, να γίνουν εικασίες, και να υπάρχει η δυνατότητα δικαιολόγησης ή απόδειξης αυτών. Ο μαθητής επίσης έχει τη δυνατότητα να κάνει συγκρίσεις, με αιτιολόγηση σε πολλά μαθηματικά πλαίσια.
	Εκτίμηση (Evaluation)	Εκτίμηση της αξίας του υλικού για ένα συγκεκριμένο σκοπό με βάση καθορισμένα κριτήρια-τα

		κριτήρια δίνονται στους μαθητές ή τα καθορίζουν οι ίδιοι.

Πηγή: Darlington (2014)

Οι Mellor, Clark, &Essien (2018) για τις ανάγκες της έρευνας τους έκαναν χρήση ενός τροποποιημένου οδηγού ανάλυσης δραστηριοτήτων ο οποίος όπως αναφέρουν οι προηγούμενοι αναπτύχθηκε από τους Stein, M.K., Smith, M.P., Henningsen, M., & Silver, E..

Αυτός ο οδηγός έχει ως στόχο την αξιολόγηση του εκπαιδευτικού υλικού βάσει του επιπέδου των γνωστικών απαιτήσεων και του τρόπου σκέψης ο οποίος απαιτείται από τους μαθητές προκειμένου να επιλύσουν μία άσκηση.

Ο συγκεκριμένος οδηγός κατηγοριοποιεί τις ασκήσεις σε δύο επίπεδα ως προς τις απαιτήσεις τα οποία χαρακτηρίζονται ως επίπεδο χαμηλών απαιτήσεων και επίπεδο υψηλότερων απαιτήσεων. Επιπρόσθετα, στα επίπεδα αυτά διακρίνονται οι εξής κατηγορίες ασκήσεων: i)απομνημόνευση, ii)διαδικασίες χωρίς συνδέσεις, iii) διαδικασίες με συνδέσεις, iv) κάνω μαθηματικά. Οι πρώτες δύο κατηγορίες εντάσσονται στο επίπεδο χαμηλών απαιτήσεων ενώ οι δύο άλλες στο επίπεδο υψηλότερων απαιτήσεων. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας ο οποίος περιγράφει πως κατηγοριοποιείται μία άσκηση όπως ανακτήθηκε και μεταφράστηκε από την εργασία των Mellor et al.(2018):

Πίνακας III

Κατηγοριοποίηση των ασκήσεων σύμφωνα με την ταξινομία των Stein et al.

Ταξινομία των Stein et al.			
Δραστηριότητες χαμηλού επιπέδου απαιτήσεων	Οι δραστηριότητες απομνημόνευσης έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά: • Περιλαμβάνουν αναπαραγωγή πρότερων γνώσεων οι οποίες αφορούν γεγονότα, τύπους, κανόνες ή ορισμούς. • Δε μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας μια διαδικασία • Δεν είναι ασαφείς-ακριβής αναπαραγωγή υλικού το οποίο έχει ιδωθεί προγενέστερα • Δεν έχουν συνδέσεις με έννοιες ή νοήματα τα οποία υποκρύπτουν παράγοντες, κανόνες τύπους ή ορισμούς	Δραστηριότητες υψηλότερου επιπέδου απαιτήσεων	Οι δραστηριότητες διαδικασιών με συνδέσεις έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά: • Εστιάζουν στην προσοχή των μαθητών στη χρήση των διαδικασιών για το σκοπό ανάπτυξης επιπέδων βαθύτερης κατανόησης. • Προτείνουν τρόπους για να ακολουθήσουν οι οποίοι είναι γενικές διαδικασίες οι οποίες έχουν στενές συνδέσεις με τις υποκείμενες εννοιολογικές ιδέες. • Κάνουν συνδέσεις μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων. • Γενικά, οι διαδικασίες δεν μπορούν να ακολουθηθούν χωρίς νόημα. Οι εκπαιδευόμενοι πρέπει να εμπλακούν με τις εννοιολογικές ιδέες που

			αποτελούν τη βάση των διαδικασιών.
	Δραστηριότητες διαδικασιών χωρίς συνδέσεις • Είναι αλγοριθμικές • Έχουν λίγη ασάφεια σχετικά με το τι χρειάζεται να γίνει • Δεν έχουν συνδέσεις με τις έννοιες ή τα νοήματα τα οποία υποκρύπτουν τη διαδικασία • Εστιάζουν στη σωστή απάντηση παρά στην κατανόηση • Δεν απαιτούν εξηγήσεις (ή εξήγηση μόνο για τη διαδικασία).		Οι δραστηριότητες κάνω μαθηματικά είναι δραστηριότητες οι οποίες: • Απαιτούν πολύπλοκη και μη αλγοριθμική σκέψη. • Απαιτούν από τους μαθητές να εξερευνήσουν και να κατανοήσουν τη φύση των μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών ή σχέσεις. • Απαιτούν την αυτο-παρακολούθηση ή την αυτορρύθμιση των γνωστικών διαδικασιών από κάποιον. • Απαιτούν οι μαθητές να έχουν πρόσβαση και να χρησιμοποιούν σχετικές γνώσεις και εμπειρίες. • Απαιτούν από τους εκπαιδευόμενους να αναλύσουν την δραστηριότητα και να εξετάσουν ενεργά τους περιορισμούς της δραστηριότητας που μπορούν να περιορίσουν πιθανές στρατηγικές επίλυσης και λύσεις. • Απαιτούν σημαντική γνωστική προσπάθεια και μπορεί να περιλαμβάνουν κάποιο επίπεδο άγχους λόγω της απρόβλεπτης φύσης των διαδικασιών λύσης

Πηγή: Mellor et al. (2018)

Σύμφωνα με τους Manouchehri, Yao, Fleming, & Gomez, (2016), οι οποίοι αναφέρονται στους Grønmo, Lindquist, Arora, &Mullis, κάνοντας χρήση των γνωστικών τομέων TIMSS είναι δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν οι δραστηριότητες στους εξής τρεις τομείς:

1. Τομέας γνώσης

Ο τομέας αυτός περιλαμβάνει τη γνώση των γεγονότων, των αλγορίθμων και των θεωρημάτων. Ο μαθητής μπορεί ανεξάρτητα από το βαθμό δυσκολίας της δραστηριότητας να την εκτελέσει εφόσον είναι εξοικειωμένος με τέτοιου είδους δραστηριότητες.

2. Τομέας εφαρμογής

Στον τομέα αυτό εντάσσονται δραστηριότητες οι οποίες αφορούν επίλυση προβλήματος και στρατηγικές εφαρμογής οι οποίες απαιτούν επέκταση γνωστών γεγονότων και αλγορίθμων.

3. Τομέας συλλογισμού

Στον τομέα αυτό εντάσσονται δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν την εξαγωγή συμπερασμάτων, την τυποποίηση γενικεύσεων, τον προσδιορισμό δομικών συνδέσεων καθώς και την σύνδεση αναπαραστάσεων που αφορούν έννοιες.

Μετά τη συλλογή των παραπάνω εργαλείων και ταξινομιών στο κεφάλαιο αυτό, μελετώντας τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν και εντοπίζουν τα στοιχεία των δραστηριοτήτων των εγχειριδίων συνθέτουμε το δικό μας ερευνητικό εργαλείο που παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Ερευνητικά ερωτήματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας τα οποία αφορούν τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών και φυσικής της Ά λυκείου στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού.

Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα ακόλουθα:

- Σε ποιο περιβάλλον εμφανίζεται ο υπολογισμός του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα διάφορα προβλήματα και αν επιχειρούν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε πρόβλημα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Ποιες αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν απαιτείται από τις δραστηριότητες η ερμηνεία του εμβαδού ενός γραφήματος στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν αναφέρονται και καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Αν η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Αν εντοπίζονται συμβολισμοί για το εμβαδόν και ποιοι είναι αυτοί στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής

Επίσης, πέραν των ερευνητικών ερωτημάτων τα οποία αφορούν τις συγκλίσεις και αποκλίσεις ανάμεσα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής που αφορούν την έννοια του εμβαδού, στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρουμε και συγκλίσεις και αποκλίσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων των εγχειριδίων και της ιστορίας αλλά και της έρευνας της Διδακτικής σχετικά με την έννοια του εμβαδού.

Μέθοδος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε ποιο είναι το δείγμα της έρευνας μας, το ερευνητικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιούμε και την διαδικασία την οποία ακολουθούμε για τη συλλογή δεδομένων, την εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

Δείγμα

Το δείγμα της εργασία αυτής αποτελείται από τις δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού, των εξής σχολικών εγχειριδίων:

- Φυσική Γενικής Παιδείας Ά Γενικού Λυκείου (Βλάχος et al., n.d.)
- Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α τάξης Γενικού Λυκείου (Ανδρεαδάκης et al., 1991)

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι στην Ά λυκείου οι μαθητές διδάσκονται το μάθημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Όμως, στο επίσημο εγχειρίδιο του μαθήματος αυτού δεν βρέθηκαν δραστηριότητες σχετικές με την έννοια του εμβαδού ώστε να τις συμπεριλάβουμε στην παρούσα εργασία καθώς η έννοια του εμβαδού αποτελεί αντικείμενο μελέτης για το μάθημα της Ευκλείδειας γεωμετρίας στη Β λυκείου.

Εργαλείο ανάλυσης ασκήσεων και προβλημάτων

Σύμφωνα με τις Pepin and Haggarty, οι οποίες αναφέρονται από τις Καφούση, Σκουμπουρδή, & Τάτσης, (2009), τα σχολικά βιβλία μπορούν να αναλυθούν ως προς το περιεχόμενο, τη δομή, τη χρήση τους από μαθητές και εκπαιδευτικούς αλλά και συνδυαστικά.

Επιπρόσθετα, οι Τσατσαρώνη και Κουλαϊδής στους οποίους γίνεται αναφορά από την Ξενάκη (2017) αναφέρουν *ότι « οι μελέτες επικεντρώνονται με επιλεκτικό τρόπο σε κάποια στοιχεία…».*

Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Α λυκείου και πιο συγκεκριμένα στις ασκήσεις και τα προβλήματα στα οποία εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού. Μελετάμε τα βιβλία του μαθητή και καταγράφουμε στοιχεία των ασκήσεων και των προβλημάτων με σκοπό την ανάλυση των δεδομένων και την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα ερωτήματα τα οποία επιχειρεί να απαντήσει η έρευνα μας.

Με το εργαλείο μας:

- εντοπίζουμε και καταγράφουμε το περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού,
- ελέγχουμε αν η εκφώνηση της δραστηριότητας επιτρέπει με κάποιο τρόπο την απάντηση με προσεγγιστικές λύσεις,
- καταγράφουμε αν η δραστηριότητα απαιτεί την ανάκληση ή και τη χρήση κάποιου τύπου για τον υπολογισμό εμβαδού
- καταγράφουμε αν η δραστηριότητα επιλύεται με την εφαρμογή μιας γνωστής αλγοριθμικής διαδικασίας ή μεθοδολογίας
- καταγράφουμε αν η εκφώνηση συνδέει ή παρακινεί τους μαθητές στην εκτέλεση μιας πράξης,
- ελέγχουμε αν αναφέρονται μονάδες ή όχι και καταγράφουμε το είδος τους,

- καταγράφουμε αν απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού ενός γραφήματος,
- καταγράφουμε το είδος των γεωμετρικών σχημάτων (ευθύγραμμα ή μη) και αν παρατηρείται κάτι διαφορετικό στις περιπτώσεις μη ευθύγραμμων σχημάτων.
- καταγράφουμε αν η έννοια του εμβαδού όπως εντοπίζεται στην άσκηση ή πρόβλημα έχει καθαρά μαθηματική-γεωμετρική σημασία (μέγεθος επιφάνειας) ή χρησιμοποιείται με διεπιστημονικό τρόπο προκειμένου να εκφράσει κάτι διαφορετικό.
- Ελέγχουμε αν εντοπίζονται συμβολισμοί και τους καταγράφουμε.

Πίνακας IV

Ερευνητικό εργαλείο ανάλυσης των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων

<table>
<tr><td rowspan="21">Άξονες ανάλυσης</td><td rowspan="4">Περιβάλλον</td><td>Καθημερινότητα</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Γεωμετρικό σχήμα</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Διάγραμμα</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Άλλο</td><td>Αναφορά</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Προσεγγιστικές λύσεις</td><td>Ναι</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Όχι</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ανάκληση ή και εφαρμογή τύπου</td><td>Απαιτείται</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Δεν απαιτείται</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Αλγοριθμική διαδικασία ή μεθοδολογία</td><td>Ναι</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Όχι</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Συσχέτιση με πράξη</td><td>Ναι</td><td>Πράξη</td><td></td></tr>
<tr><td>Όχι</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Μονάδες</td><td rowspan="2">Αναφέρονται</td><td rowspan="2">Είδος</td><td>Ομοειδείς</td></tr>
<tr><td>Μη Ομοειδείς</td></tr>
<tr><td>Δεν αναφέρονται</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ερμηνεία γραφήματος</td><td>Απαιτείται</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Δεν απαιτείται</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Είδος σχημάτων</td><td>Ευθύγραμμα</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Μη ευθύγραμμα</td><td>Αναφορά</td><td>Τι αλλάζει</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Διεπιστημονικότητα</td><td>Εντοπίζεται</td><td>Αναφορά</td><td></td></tr>
<tr><td>Δεν εντοπίζεται</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Συμβολισμός	Εντοπίζεται	Αναφορά
		Δεν εντοπίζεται	

Διαδικασία

Για την παρούσα εργασία εξετάζουμε τα δύο σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και της φυσικής της Ά λυκείου και πιο συγκεκριμένα εστιάζουμε στις δραστηριότητες που εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού. Αφού έχουμε εντοπίσει τις δραστηριότητες στις οποίες η έννοια του εμβαδού εμπλέκεται με οποιοδήποτε τρόπο τότε τις αναλύουμε σύμφωνα με το ερευνητικό μας εργαλείο.

Στη συνέχεια, συντάσσουμε πίνακες συχνοτήτων οι οποίοι αφορούν τα αποτελέσματα της ανάλυσης μας για τις δραστηριότητες του κάθε σχολικού εγχειρίδιου ξεχωριστά και αναφέρουμε τα αποτελέσματα αυτά στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων. Εκμεταλλευόμενοι τα αποτελέσματα αυτά προβαίνουμε στα συμπεράσματα της εργασίας μας μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δύο σχολικών εγχειριδίων, των ιστορικών στοιχείων καθώς και των στοιχείων τα οποία συλλέχθηκαν από τις έρευνες της διδακτικής και αφορούν την έννοια του εμβαδού.

Ανάλυση δραστηριοτήτων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών και φυσικής

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρούμε να κάνουμε μία ανάλυση των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Ά λυκείου στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού σύμφωνα με το ερευνητικό μας εργαλείο προκειμένου να δώσουμε απαντήσεις στα ερωτήματα που μας απασχολούν στην παρούσα εργασία.

Ανάλυση δραστηριοτήτων εγχειριδίου μαθηματικών

Το σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών της Ά λυκείου των οποίων τις δραστηριότητες επιχειρούμε να εξετάσουμε, ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προκειμένου να δώσουμε απαντήσεις στα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι το:

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α τάξης Γενικού Λυκείου (Ανδρεαδάκης et al., 1991).

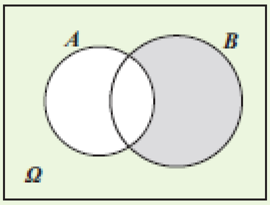
Στο παρόν σχολικό εγχειρίδιο εντοπίζονται 19 δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις δραστηριότητες και αναλύουμε την καθεμία σύμφωνα με το εργαλείο το οποίο έχουμε παρουσιάσει προηγουμένως.

Δραστηριότητες μαθηματικών στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού.

Εικόνα 1

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

6. Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;
(α) Β (β) Α′ (γ) Α – Β (δ) Β – Α.
(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7-9 είναι σωστή ή λάθος.
Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

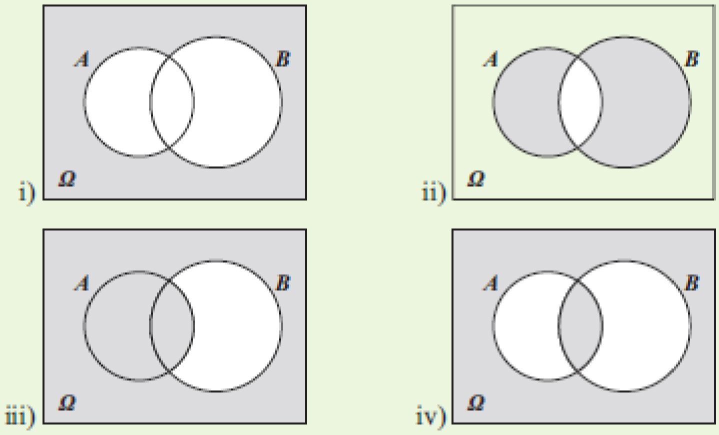


Η άσκηση αυτή βρίσκεται στο $1^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου το οποίο αφορά τις Πιθανότητες. Το περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού είναι το διάγραμμα Venn. Στην εκφώνηση δεν εντοπίζετε η δυνατότητα κάποιας προσεγγιστικής λύσης. Η άσκηση δεν απαιτεί την ανάκληση και τη χρήση τύπου εμβαδού. Ωστόσο, η απάντηση δίδεται εφόσον ο μαθητής ακολουθήσει μια γνωστή μεθοδολογία. Η εκφώνηση δεν συσχετίζει την έννοια του εμβαδού με κάποια συγκεκριμένη πράξη όμως η απάντηση παραπέμπει στην αφαίρεση. Δεν γίνεται καμία αναφορά σε μονάδες και απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού. Ως προς τα σχήματα παρατηρούμε ένα συνδυασμό κύκλων και ορθογωνίου. Η έννοια του εμβαδού αντιπροσωπεύει το ενδεχόμενο, μία έννοια των πιθανοτήτων και παρατηρούμε τους συμβολισμούς Α,Β,Ω,Α΄,Α-Β,Β-Α.

Εικόνα 2

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

11. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:



Η άσκηση αυτή βρίσκεται επίσης στο $1^{ο}$ κεφάλαιο των Πιθανοτήτων. Το περιβάλλον είναι πάλι αυτό του διαγράμματος Venn. Δεν εντοπίζεται αναφορά η οποία να κάνει δεκτή προσεγγιστική λύση και δεν απαιτείται ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού. Αυτό το οποίο απαιτείται είναι χρήση μεθοδολογίας κατά την οποία το εμβαδόν ενός χωρίου προκύπτει ως άθροισμα η διαφορά άλλων εμβαδών. Η εκφώνηση αναφέρεται σε πράξεις όχι όμως αριθμητικές αλλά πράξεις συνόλων. Μονάδες δεν αναφέρονται και απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού. Και εδώ έχουμε ένα συνδυασμό σχημάτων από κύκλους και ορθογώνιο. Πάλι η έννοια του εμβαδού αντιπροσωπεύει την έννοια του ενδεχόμενου και οι συμβολισμοί που εντοπίζονται είναι οι εξής: Ω,Α,Β.

Εικόνα 3

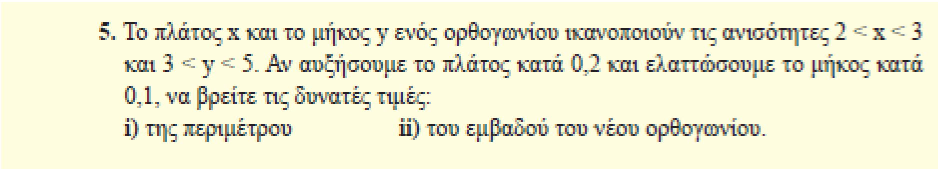
Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L = 4α$ και εμβαδόν $E = α^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

Η άσκηση αυτή εντοπίζεται στη 2.1 παράγραφο η οποία αφορά τις πράξεις και τις ιδιότητες τους. Το περιβάλλον είναι το γεωμετρικό σχήμα, ορθογώνιο. Στην εκφώνηση δεν εντοπίζεται καμία αναφορά για δυνατότητα προσεγγιστικής λύσης ενώ απαιτείται η χρήση τύπου για την επίλυση της. Επίσης, η άσκηση απαιτεί μία οικεία ως προς τους μαθητές μεθοδολογία για τη λύση της. Η εκφώνηση αναφέρει ότι το εμβαδόν είναι ίσο με μία δύναμη, κάτι το οποίο μπορούμε να πούμε ότι παραπέμπει άμεσα στον πολλαπλασιασμό. Δεν αναφέρονται μονάδες και δεν απαιτείται κάποια ερμηνεία. Τα σχήματα είναι ευθύγραμμα και δεν συναντάμε κάποιο στοιχείο διεπιστημονικότητας ως προς το εμβαδόν. Εδώ, το εμβαδόν συμβολίζεται με Ε.

Εικόνα 4

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



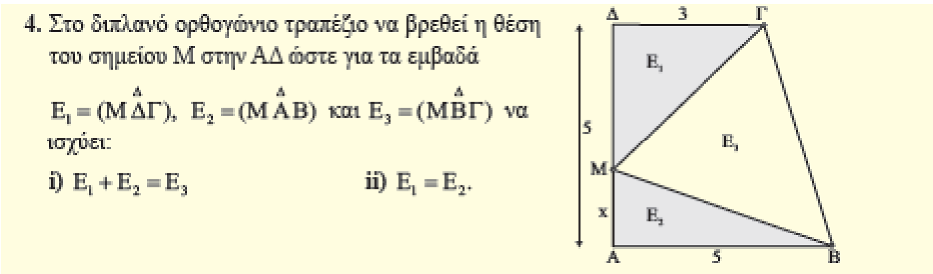
5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

i) της περιμέτρου **ii)** του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

Πρόκειται για μία άσκηση της παραγράφου 2.2, η οποία αναφέρεται στην διάταξη πραγματικών αριθμών. Το περιβάλλον της άσκησης είναι ένα γεωμετρικό σχήμα, το ορθογώνιο. Η άσκηση δεν επιτρέπει την απάντηση με προσεγγιστική λύση και απαιτεί ανάκληση τύπου εμβαδού και εκτέλεση αλγοριθμικής διαδικασίας αφού όμως πρώτα ο μαθητής προβεί σε ανάλυση και γενίκευση. Η άσκηση προκειμένου να επιλυθεί απαιτεί πολλαπλασιασμό δύο ανισοτήτων κάτι το οποίο μπορούμε να πούμε ότι συσχετίζει άμεσα την έννοια του εμβαδού με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Δε γίνεται καμία αναφορά σε μονάδες και δεν απαιτείται κανενός είδους ερμηνεία. Το είδος του σχήματος είναι ευθύγραμμο και δεν εντοπίζεται κάποιο στοιχείο διεπιστημονικής αναφοράς ως προς την έννοια του εμβαδού. Επίσης, δεν σημειώνεται κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 5

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΑΔ ώστε για τα εμβαδά

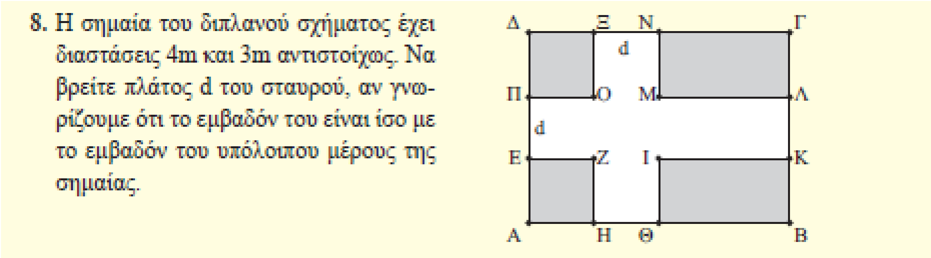
$E_1 = (\overset{\triangle}{\text{ΜΔΓ}})$, $E_2 = (\overset{\triangle}{\text{ΜΑΒ}})$ και $E_3 = (\overset{\triangle}{\text{ΜΒΓ}})$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ **ii)** $E_1 = E_2$.

Η άσκηση αυτή βρίσκεται στην παράγραφο 3.1 η οποία αφορά τις εξισώσεις 1^{ου} βαθμού. Το περιβάλλον είναι αυτό του γεωμετρικού σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνουμε ένα ορθογώνιο τραπέζιο το οποίο απαρτίζεται από τρία τρίγωνα. Δεν υπάρχει αναφορά η οποία να επιτρέπει προσεγγιστική λύση. Η άσκηση απαιτεί την ανάκληση τύπων εμβαδού και αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης εξισώσεων. Εντοπίζεται συσχέτιση της πράξηςτου πολλαπλασιασμού με τη έννοια του εμβαδού καθώς δίνονται μετρήσεις οι οποίες πρέπει να πολλαπλασιαστούν ενώ δεν αναφέρονται καθόλου μονάδες. Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Δεν παρατηρείται κάποια αναφορά διεπιστημονικού χαρακτήρα ως προς την έννοια του εμβαδού και εντοπίζονται συμβολισμοί όπως E_1, E_2, E_3, (ΜΔΓ), (ΜΑΒ), (ΜΒΓ).

Εικόνα 6

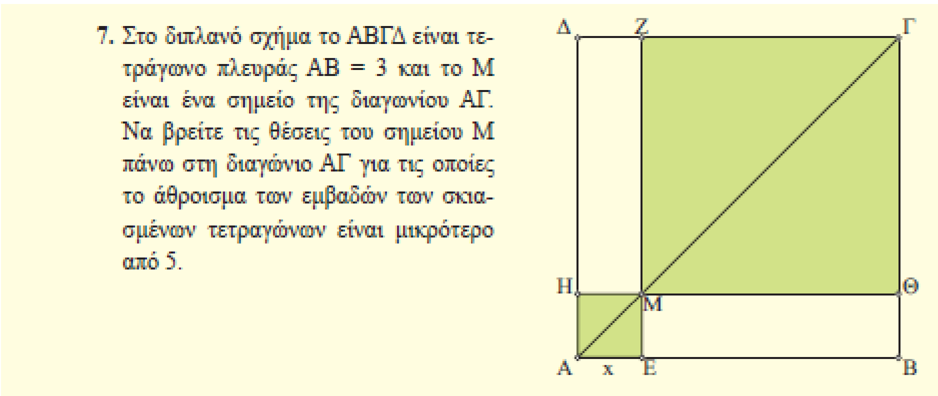
Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



Η θέση της άσκησης είναι στην παράγραφο 3.3 η οποία αφορά τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Το περιβάλλον της άσκησης είναι ένα αντικείμενο της καθημερινότητας (σημαία) το οποίο αναπαρίσταται από ένα σύνθετο γεωμετρικό σχήμα. Δεν εντοπίζεται αναφορά η οποία να επιτρέπει προσεγγιστικές λύσεις. Η άσκηση απαιτεί την ανάκληση τύπων εμβαδού και την εφαρμογή αλγορίθμου επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης ενώ ο μαθητής χρειάζεται να σκεφτεί και να εργαστεί πρωτότυπα. Η έννοια του εμβαδού συσχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού καθώς δίνονται μήκη τα οποία απαιτείται να πολλαπλασιαστούν. Επίσης παρατηρούμε αναφορά ομοειδών μονάδων μήκους (m). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Δεν εντοπίζεται διεπιστημονική αναφορά ούτε και κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 7

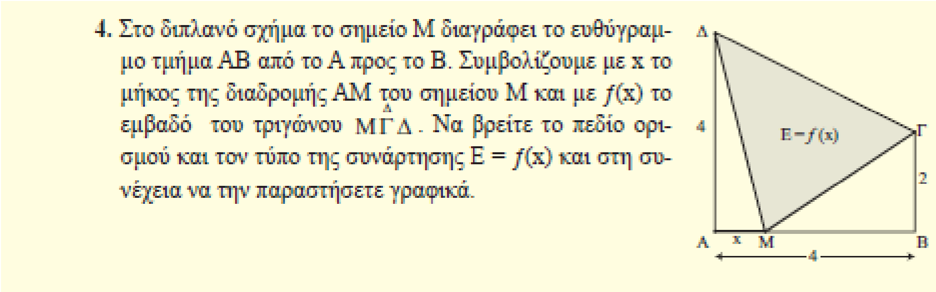
Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



Η άσκηση βρίσκεται στην παράγραφο 4.2 η οποία αφορά τις ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Το περιβάλλον της άσκησης είναι αυτό του γεωμετρικού σχήματος και πιο συγκεκριμένα ένας συνδυασμός από τετράγωνα. Δεν εντοπίζεται καμία αναφορά στην εκφώνηση η οποία να επιτρέπει προσεγγιστική λύση. Για τη λύση της άσκησης απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπου εμβαδού. Η άσκηση επιλύεται με την εφαρμογή μίας γνωστής μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται εννοιολογικά με την αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού και δεν αναφέρονται καθόλου μονάδες. Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Δεν εντοπίζεται καμία διεπιστημονική αναφορά για την έννοια του εμβαδού και δεν αναφέρεται κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 8

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

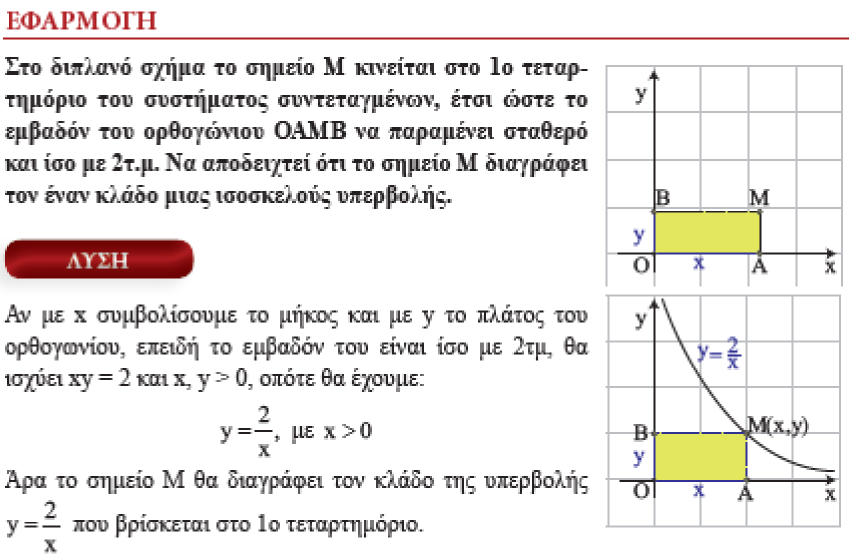


4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΜΓΔ}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $Ε = f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

Η άσκηση αυτή βρίσκεται στην παράγραφο 6.3 η οποία αφορά τις συναρτήσεις της μορφής f(x)=αx+β. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα και πιο συγκεκριμένα το τραπέζιο το οποίο είναι διαμερισμένο με ευθύγραμμα τμήματα σε τρίγωνα. Στην εκφώνηση της άσκησης δεν εντοπίζετε κάποια αναφορά η οποία να επιτρέπει μία προσεγγιστική λύση. Απαιτείται ανάκληση και χρήση τύπων εμβαδού και η εφαρμογή μίας γνωστής μεθοδολογίας για την επίλυση της άσκησης. Η έννοια του εμβαδού συσχετίζεται άμεσα με τον πολλαπλασιασμό καθώς η άσκηση δημιουργεί την ανάγκη μέσω των μετρήσεων των οποίων παρέχει για την εκτέλεση του και δε γίνεται καμία αναφορά σε μονάδες. Δεν απαιτείται κάποια ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Ως προς τη διεπιστημονικότητα, παρατηρούμε ότι η έννοια του εμβαδού αντιστοιχίζεται στην έννοια της συνάρτησης. Εντοπίζονται οι δύο συμβολισμοί Ε και f(x).

Εικόνα 9

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ κινείται στο 1ο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΑΜΒ να παραμένει σταθερό και ίσο με 2τ.μ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ διαγράφει τον έναν κλάδο μιας ισοσκελούς υπερβολής.

ΛΥΣΗ

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος και με y το πλάτος του ορθογωνίου, επειδή το εμβαδόν του είναι ίσο με 2τμ, θα ισχύει $xy = 2$ και $x, y > 0$, οπότε θα έχουμε:

$$y = \frac{2}{x}, \text{ με } x > 0$$

Άρα το σημείο Μ θα διαγράφει τον κλάδο της υπερβολής $y = \frac{2}{x}$ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Η παραπάνω εφαρμογή βρίσκεται στην παράγραφο 7.2 η οποία αφορά τη μελέτη της συνάρτησης f(x)=α/x.Το περιβάλλον της άσκησης είναι ένα γράφημα με ένα ορθογώνιο, πάνω σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Από την εκφώνηση προκύπτει πως δεν γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Για την επίλυση της άσκησης απαιτείται η ανάκληση και εφαρμογή τύπου εμβαδού αλλά και η εφαρμογή μιας μεθοδολογίας γνωστής στους μαθητές. Η δοσμένη λύση της εφαρμογής φανερώνει την άμεση συσχέτιση της έννοιας του εμβαδού με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Αναφέρονται μονάδες και πιο συγκεκριμένα τετραγωνικές μονάδες εμβαδού (τετραγωνικό μέτρο τ.μ.). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία ενώ το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Δεν εντοπίζεται κάποια διεπιστημονική αναφορά ως προς το εμβαδόν ούτε κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 10

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

> **6.** Οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ μεταβάλλονται έτσι, ώστε το εμβαδόν του να παραμένει σταθερό και ίσο με 2 τετραγωνικές μονάδες. Να εκφράσετε το μήκος y της ΑΓ συναρτήσει του μήκους x της ΑΒ και στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

Η άσκηση αυτή βρίσκεται επίσης στην παράγραφο 7.2 όπως και η προηγούμενη εφαρμογή. Το περιβάλλον της άσκησης είναι αυτό του γεωμετρικού σχήματος (ορθογώνιο τρίγωνο). Δεν εντοπίζεται αναφορά η οποία να κάνει δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού και η εφαρμογή μίας γνωστής μεθοδολογίας για τη λύση της άσκησης. Η έννοια του εμβαδού δε συσχετίζεται με κάποια αριθμητική πράξη. Αναφέρεται απλά ότι οι μονάδες είναι τετραγωνικές και δεν απαιτείται καμία ερμηνεία ως προς το εμβαδόν. Τα σχήμα είναι ευθύγραμμο και δεν εντοπίζεται διεπιστημονική αναφορά αλλά ούτε και κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 11

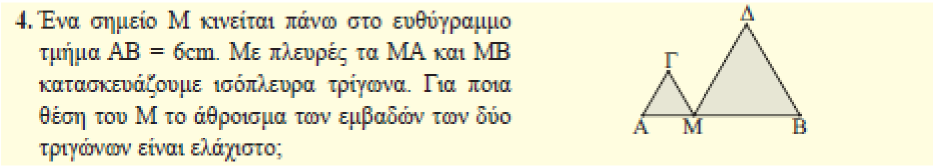
Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

> **3.** Οι διαστάσεις x,y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται, έτσι ώστε η περίμετρός του να παραμένει σταθερή και ίση με 20 μ.
>
> **i)** Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο Ε = f(x) που δίνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.
>
> **ii)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεγιστοποιείται για x = 5 και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του.

Η άσκηση αυτή βρίσκεται στην παράγραφο 7.3 η οποία αφορά τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Το περιβάλλον της άσκησης είναι αυτό του γεωμετρικού σχήματος, του ορθογωνίου. Δεν εντοπίζεται κάποια αναφορά η οποία να κάνει δεκτή προσεγγιστική λύση. Η λύση της άσκησης απαιτεί ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού αλλά και γνωστής μεθοδολογίας. Παρατηρείται συσχέτιση με την πράξη του πολλαπλασιασμού καθώς η εκφώνηση αναφέρει διαστάσεις x,y κάτι το οποίο δημιουργεί την ανάγκη εφαρμογής του κανόνα «μήκοςxπλάτος». Αναφέρεται μόνο η μονάδα μέτρησης μήκους της περιμέτρου η οποία είναι τα μέτρα (μ). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού και το σχήμα της άσκησης είναι ευθύγραμμο. Εντοπίζεται διεπιστημονική αναφορά η οποία αντιστοιχεί την έννοια του εμβαδού σε αυτή της συνάρτησης. Οι συμβολισμοί οι οποίοι καταγράφονται είναι το Ε και το f(x).

Εικόνα 12

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

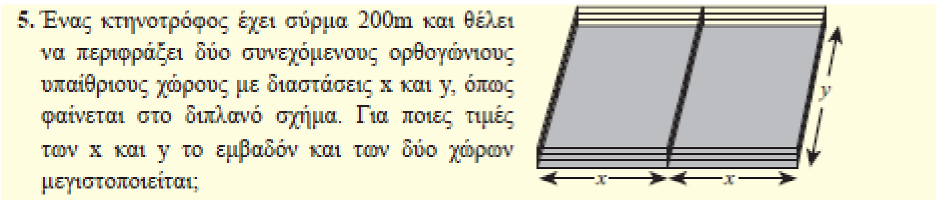


4. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6cm. Με πλευρές τα ΜΑ και ΜΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα. Για ποια θέση του Μ το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ελάχιστο;

Στην ίδια παράγραφο 7.3 βρίσκεται και η παραπάνω άσκηση. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα και πιο συγκεκριμένα τα τρίγωνα. Η εκφώνηση της άσκησης δεν επιτρέπει προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού τριγώνου και η χρήση γνωστής μεθοδολογίας. Η έννοια του εμβαδού δε συσχετίζεται με κάποιο τρόπο με κάποια αριθμητική πράξη. Αναφέρεται μία μονάδα μέτρησης μήκους και συγκεκριμένα τα εκατοστά (cm). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Δεν εντοπίζεται κανένα είδος διεπιστημονικής αναφοράς για την έννοια του εμβαδού και κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 13

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

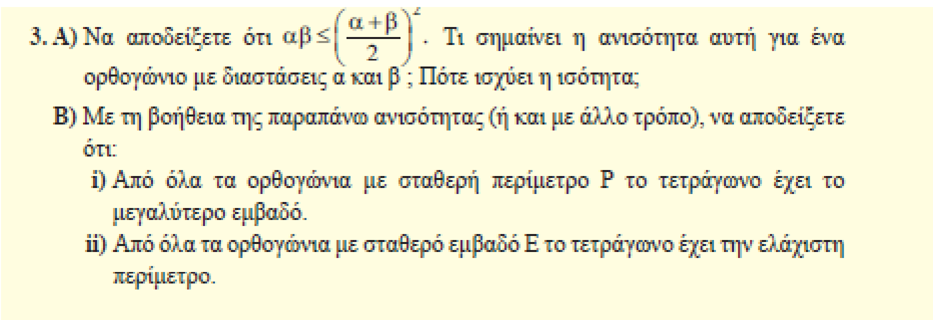


5. Ένας κτηνοτρόφος έχει σύρμα 200m και θέλει να περιφράξει δύο συνεχόμενους ορθογώνιους υπαίθριους χώρους με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για ποιες τιμές των x και y το εμβαδόν και των δύο χώρων μεγιστοποιείται;

Πρόκειται για μία ακόμη άσκηση της παραγράφου 7.3. Το περιβάλλον της άσκησης είναι ένα πρόβλημα της καθημερινότητας το οποίο συνοδεύεται με ένα σχήμα αποτελούμενο από δύο ορθογώνια. Δεν υπάρχει αναφορά η οποία να κάνει δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού αλλά και η χρήση γνωστής μεθοδολογίας. Αναφέρονται οι διαστάσεις x,yτου ορθογωνίου κάτι το οποίο δημιουργεί την ανάγκη εκτέλεσης της πράξης του πολλαπλασιασμού. Η μονάδα η οποία αναφέρεται είναι μία μονάδα μήκους, το μέτρο (m). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Δεν εντοπίζεται καμία διεπιστημονική αναφορά ως προς την έννοια του εμβαδού και κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 14

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



3. Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. Τι σημαίνει η ανισότητα αυτή για ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β ; Πότε ισχύει η ισότητα;

Β) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας (ή και με άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι:

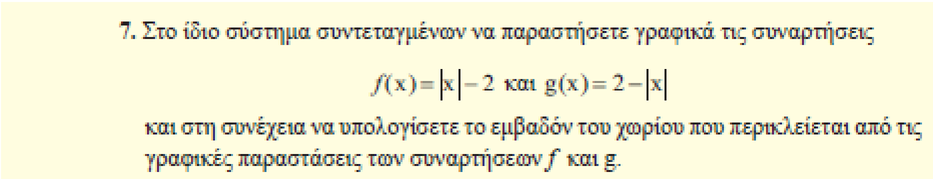
i) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο Ρ το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

ii) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό Ε το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Η άσκηση αυτή βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου 7 το οποίο αφορά τη μελέτη βασικών συναρτήσεων και αποτελεί άσκηση επανάληψης. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα. Δεν υπάρχει αναφορά από την οποία να προκύπτει ότι επιτρέπονται προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού και η εφαρμογή μιας γνωστής μεθοδολογίας. Η άσκηση συσχετίζει την έννοια του εμβαδού με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Δεν αναφέρονται μονάδες και απαιτείται ερμηνεία ως προς το εμβαδόν. Τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Δεν εντοπίζεται καμία διεπιστημονική αναφορά για το εμβαδόν και εντοπίζεται ο συμβολισμός Ε.

Εικόνα 15

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

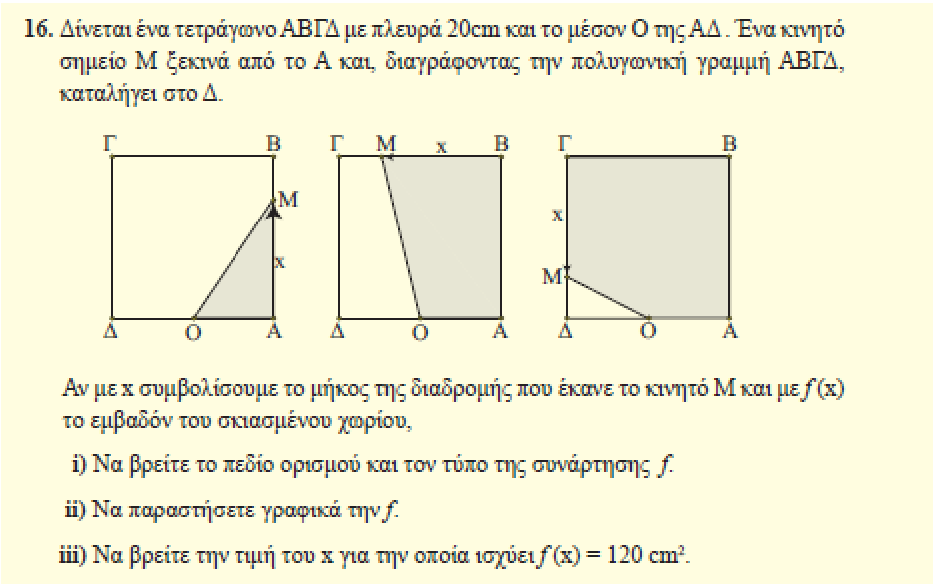
$$f(x)=|x|-2 \quad \text{και} \quad g(x)=2-|x|$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

Άλλη μία επαναληπτική άσκηση του κεφαλαίου 7. Το περιβάλλον είναι το γεωμετρικό σχήμα που προκύπτει από τη γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων. Δεν υπάρχει αναφορά που να κάνει δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση αριθμητικής πράξης με την έννοια του εμβαδού και δεν αναφέρονται μονάδες. Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Δεν εντοπίζεται καμία διεπιστημονική αναφορά για το εμβαδόν και κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 16

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών



16. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20cm και το μέσον Ο της ΑΔ. Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, καταλήγει στο Δ.

Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Να παραστήσετε γραφικά την f.

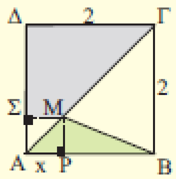
iii) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) = 120$ cm².

Επαναληπτική άσκηση του κεφαλαίου 7. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα. Δεν υπάρχει καμία αναφορά σύμφωνα με την οποία να γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και χρήση τύπων εμβαδού και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Η έννοια του εμβαδού συσχετίζεται με την αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού λόγω της δοσμένης μέτρησης της πλευράς του τετραγώνου. Αναφέρονται μονάδες, μία μήκους (cm) και μία εμβαδού (cm^2). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Ως προς τη διεπιστημονικότητα, το εμβαδόν αντιστοιχίζεται στην έννοια της συνάρτησης με συμβολισμό f(x).

Εικόνα 17

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

17. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 μ. και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ με (ΑΡ) = x. Συμβολίζουμε με f(x) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ και με g (x) το εμβαδόν του τραπεζίου ΜΓΔΣ.



i) Να αποδείξετε ότι

$f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 2$ και $g(x) = -0{,}5x^2 + 2,\ 0 \leq x \leq 2.$

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

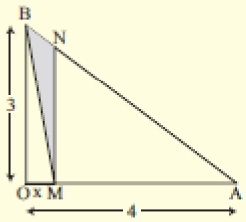
iii) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις f και g και να βρείτε, με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, με προσέγγιση την τιμή του x για την οποία τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

Επαναληπτική άσκηση του κεφαλαίου 7. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα και υπάρχει αναφορά η οποία κάνει δεκτή προσεγγιστική λύση η οποία όμως δεν αφορά τον υπολογισμό του εμβαδού. Η άσκηση απαιτεί την ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού και εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Η έννοια του εμβαδού συσχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό και αναφέρεται η μονάδα μήκους μέτρο (μ). Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Ως προς τη διεπιστημονικότητα, η έννοια του εμβαδού αντιστοιχίζεται σε αυτήν της συνάρτησης. Ο συμβολισμός που εντοπίζεται είναι το f(x).

Εικόνα 18

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

18. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, το Μ είναι τυχαίο σημείο της ΟΑ και ΜΝ//ΟΒ. Αν (ΟΑ) = 4, (ΟΒ) = 3 και (ΟΜ) = x, και Ε(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ,



i) Να αποδείξετε ότι

$(MN) = \frac{3(4-x)}{4}$ και $E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x.$

ii) Να βρείτε τη θέση του Μ για την οποία το εμβαδόν Ε(x) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του Ε(x).

Επαναληπτική άσκηση του κεφαλαίου 7.Το περιβάλλον της άσκησης είναι το γεωμετρικό σχήμα. Δεν υπάρχει κάποια αναφορά η οποία να κάνει δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού και η εφαρμογή μιας γνωστής μεθοδολογίας. Συσχετίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού με την έννοια του εμβαδού και δεν αναφέρονται μονάδες. Δεν απαιτείται καμία ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Εντοπίζεται διεπιστημονική αναφορά για την έννοια του εμβαδού το οποίο αντιστοιχίζεται σε συνάρτηση και εντοπίζονται δύο συμβολισμοί, το Ε(x) και η αλγεβρική παράσταση $\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x.$

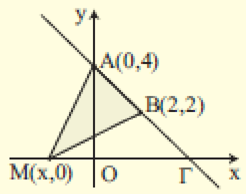
Εικόνα 19

Στιγμιότυπο άσκησης σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

19. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α(0,4) και Β(2,2), καθώς και το σημείο Μ(x,0) που κινείται κατά μήκος του άξονα x'x.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στο οποίο τέμνει η ευθεία ΑΒ τον άξονα x'x.

ii) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{MAB}$ συναρτήσει της τετμημένης x του σημείου Μ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.



Η άσκηση αυτή είναι η τελευταία επαναληπτική άσκηση το κεφαλαίου 7. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο διακρίνονται γεωμετρικά σχήματα. Δεν υπάρχει αναφορά η οποία να επιτρέπει τις προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπου και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Συσχετίζεται η έννοια του εμβαδού με την πράξη του πολλαπλασιασμού και δεν αναφέρονται καθόλου μονάδες. Δεν απαιτείται κάποια ερμηνεία και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Ως προς τη διεπιστημονικότητα, το εμβαδόν αντιστοιχίζεται για μία ακόμη φορά στην έννοια της συνάρτησης. Δεν υπάρχει κανένας συμβολισμός.

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση κάποιων αναφορών και παραδειγμάτων από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής σύμφωνα με τις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια του εμβαδού στο μάθημα και της δραστηριότητες της φυσικής ώστε να εκφραστούν κάποια φυσικά μεγέθη και να επιλυθούν κάποιες δραστηριότητες στις οποίες το εμβαδόν έχει εργαλειακό χαρακτήρα.

Παρουσίαση αναφορών φυσικής

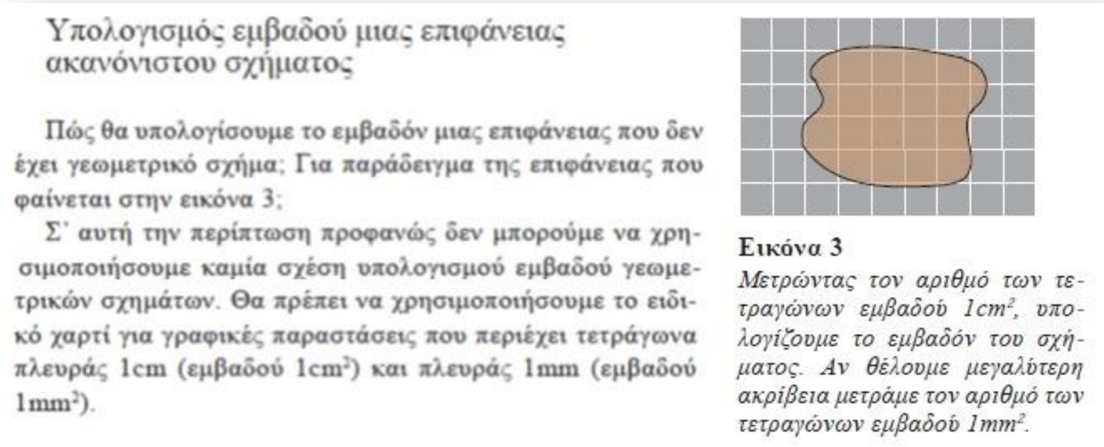
Στο σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής γίνεται μία εισαγωγή η οποία αφορά την έννοια του χώρου και αναφέρεται ότι το μέγεθος των αντικειμένων του χώρου μπορεί να περιγραφεί αν χρησιμοποιηθούν οι διαστάσεις τους. Μία από τις διαστάσεις αυτές είναι το εμβαδόν του οποίου η μέτρηση και η σύγκριση ανάγκασε τους ανθρώπους να ορίσουν κάποιες μονάδες για τη μέτρηση του.

Αρχικά οι μονάδες αυτές φαίνεται πως ήταν αντίστοιχες ενός μέρους του ανθρώπινου σώματος ενώ με την εξέλιξη της επιστήμης συντάχθηκε το διεθνές σύστημα μονάδων στο οποίο ως μονάδα μέτρησης εμβαδού ορίζεται το τετραγωνικό μέτρο, οι υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια του τα οποία όμως προκύπτουν από τη μονάδα μέτρησης της απόστασης, το μέτρο.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των δραστηριοτήτων του βιβλίου της φυσικής παρουσιάζουμε κάποιες αναφορές του βιβλίου. Οι αναφορές αυτές αποτελούν μέθοδο για τον υπολογισμό του εμβαδού ή ενός φυσικού μεγέθους. Για τον υπολογισμό των φυσικών μεγεθών, κατά την εφαρμογή των μεθόδων αυτών χρησιμοποιείται η έννοια του εμβαδού και πιο συγκεκριμένα υπολογίζεται το εμβαδόν ενός σχήματος το οποίο προκύπτει από τους άξονες του διαγράμματος και την καμπύλη η οποία απεικονίζεται.

Εικόνα 20

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής



Υπολογισμός εμβαδού μιας επιφάνειας ακανόνιστου σχήματος

Πώς θα υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας που δεν έχει γεωμετρικό σχήμα; Για παράδειγμα της επιφάνειας που φαίνεται στην εικόνα 3;

Σ' αυτή την περίπτωση προφανώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καμία σχέση υπολογισμού εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ειδικό χαρτί για γραφικές παραστάσεις που περιέχει τετράγωνα πλευράς 1cm (εμβαδού $1cm^2$) και πλευράς 1mm (εμβαδού $1mm^2$).

Εικόνα 3

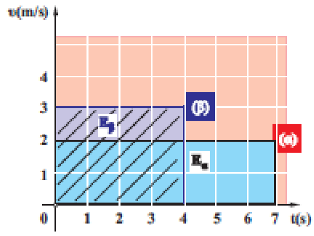
Μετρώντας τον αριθμό των τετραγώνων εμβαδού $1cm^2$, υπολογίζουμε το εμβαδόν του σχήματος. Αν θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια μετράμε τον αριθμό των τετραγώνων εμβαδού $1mm^2$.

Η παραπάνω εικόνα αποτελεί μία αναφορά η οποία βρίσκεται στο εισαγωγικό κεφάλαιο και έχει στόχο να εισάγει τους μαθητές στη μέτρηση του εμβαδού ακανόνιστου σχήματος με τη χρήση του μιλλιμετρέ χαρτιού. Στην αναφορά αυτή βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούν οι μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός ακανόνιστου σχήματος κατά προσέγγιση καθώς δεν υπάρχει τύπος σύμφωνα με τον οποίο να μπορεί να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τέτοιου σχήματος. Μάλιστα, το εμβαδόν εδώ φαίνεται να είναι ίσο με το πλήθος των τετραγώνων τα οποία περιέχονται στο ακανόνιστο αυτό σχήμα.

Εικόνα 21

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής

Αν παραστήσουμε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο, τη σταθερή ταχύτητα $υ_α = 2m/s$ και $υ_β = 3m/s$ των δύο κινητών, προκύπτουν οι ευθείες γραμμές (α) και (β) που φαίνονται στην εικόνα 1.1.12.



Εικόνα 1.1.12
Γραφική παράσταση της ταχύτητας των κινητών σε συνάρτηση με το χρόνο. Τα εμβαδά $E_α$ (μπλε) και $E_β$ (γραμμοσκιασμένο), δίνουν τις μετατοπίσεις των κινητών α, β, αντίστοιχα.

Οι ευθείες (α) και (β) είναι παράλληλες στον άξονα του χρόνου.

Υπολογίζοντας τα εμβαδά $E_α$ και $E_β$ μεταξύ των αντίστοιχων ευθειών (α), (β) και των αξόνων ταχύτητα - χρόνος, βρίσκουμε:

$E_α$ = βάση · ύψος = 7s · 2m/s = 14m,
δηλαδή τη μετατόπιση του κινητού α
και $E_β$ = βάση · ύψος = 4s · 3m/s = 12m,
δηλαδή τη μετατόπιση του κινητού β.

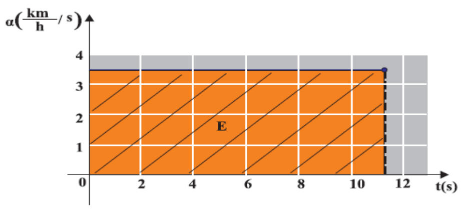
Μπορούμε λοιπόν από τη γραφική παράσταση υ = f(t) να υπολογίζουμε τη μετατόπιση Δx, βρίσκοντας το αντίστοιχο εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των αξόνων υ, t και της ευθείας που παριστά την ταχύτητα.

Στη διπλανή εικόνα παρατηρούμε την περιγραφή μιας διαδικασίας με την οποία το βιβλίο εξηγεί στους μαθητές τον τρόπο που μπορούν να αξιοποιήσουν το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου προκειμένου να υπολογίσουν τη μετατόπιση ενός κινητού. Πιο συγκεκριμένα, ο υπολογισμός της μετατόπισης ανάγεται στον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου το οποίο προκύπτει από τους άξονες και την ευθεία της γραφικής παράστασης στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Εδώ για τον υπολογισμό του εμβαδού πολλαπλασιάζονται μονάδες οι οποίες δεν είναι ομοειδείς (ταχύτητα & χρόνος) και το εμβαδόν φαίνεται να αντιστοιχεί στη μετατόπιση ενός κινητού σώματος. Ουσιαστικά, το εμβαδόν χρησιμοποιείται με διεπιστημονικό τρόπο προκειμένου να εκφράσει ένα φυσικό μέγεθος και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μόνο η αριθμητική τιμή του εμβαδού.

Εικόνα 22

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής

Η γραφική παράσταση της σταθερής επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση του αυτοκινήτου που μελετάμε, θα είναι ευθεία γραμμή, παράλληλη στον άξονα του χρόνου t, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.1.19.



Εικόνα 1.1.19

Ποια μπορεί να είναι η φυσική σημασία του γραμμοσκιασμένου εμβαδού της εικόνας 1.1.19; Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης (ευθείας) και των αξόνων επιτάχυνσης και χρόνου είναι:

$$E = βάση \cdot ύψος = 3,51\frac{km/h}{s}11,4s = 40km/h = υ$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας κατά την χρονική διάρκεια των 11,4s της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου. Άρα το εμβαδό, μεταξύ της ευθείας που αναπαριστά την επιτάχυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, και των αξόνων επιτάχυνσης και χρόνου, είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας Δυ.

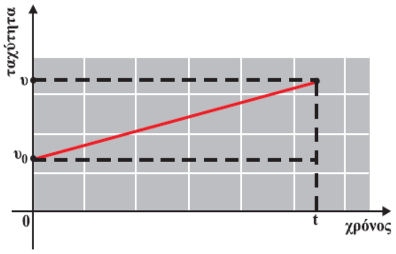
Ομοίως εργαζόμαστε για την κατασκευή των διαγραμμάτων της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο υ = f(t) και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο α = f(t) στην περίπτωση της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης.

Στην αναφορά αυτή βλέπουμε ότι το βιβλίο αναφέρεται στην αξιοποίηση του διαγράμματος επιτάχυνσης-χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, αν υπολογίσουμε το εμβαδόν που προκύπτει από τους άξονες και την ευθεία της επιτάχυνσης παίρνουμε την αριθμητική τιμή της μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού το οποίο κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Και σε αυτή την περίπτωση πολλαπλασιάζονται μονάδες οι οποίες δεν είναι ομοειδείς (επιτάχυνση & χρόνος) και το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά ως εργαλείο υπολογισμού της μεταβολής της ταχύτητας.

Εικόνα 23

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που παριστά την ταχύτητα και των αξόνων υ, t (Εικ. 1.1.20) είναι ίσο με τη μετατόπιση στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Οπότε, αν υπολογίσουμε το εμβαδόν, εικόνα 1.1.20, χρησι-



Εικόνα 1.1.20

μοποιώντας αντί των αριθμητικών τιμών, τα σύμβολα υ, $υ_0$, t, οδηγούμαστε στην εξίσωση για τη μετατόπιση Δx. Δηλαδή:

$$E_{τραπ} = \frac{\text{άθροισμα βάσεων}}{2} \cdot \text{ύψος} \quad \text{ή} \quad Δx = \frac{υ + υ_0}{2}(t - 0)$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα είναι: $υ = υ_0 + αt$. Συνεπώς:

$$Δx = \frac{υ_0 + αt + υ_0}{2} t = \frac{2υ_0 t + αt^2}{2} \text{ ή } Δx = υ_0 t + \frac{1}{2} αt^2$$

και αν $x_0 = 0$, έχουμε:

$$x = υ_0 t + \frac{1}{2} αt^2 \qquad (1.1.10)$$

Ομοίως στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση προκύπτει ότι:

$$x = υ_0 t - \frac{1}{2} αt^2 \qquad (1.1.11)$$

Στην αναφορά αυτή βλέπουμε τη μέθοδο αξιοποίησης του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου για τον υπολογισμό της μετατόπισης ενός κινητού κατά την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Συγκεκριμένα υπολογίζεται το εμβαδόν του τραπεζίου το οποίο σχηματίζεται από την ευθεία της ταχύτητας και τους άξονες. Και εδώ πολλαπλασιάζονται μονάδες που δεν είναι ομοειδείς και το ζητούμενο είναι απλά η αριθμητική τιμή. Επίσης, παρατηρούμε μία ακόμη χρήση της έννοιας του εμβαδού με τρόπο διεπιστημονικό για την έκφραση ενός φυσικού μεγέθους.

Εικόνα 24

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής

Το θεώρημα Merton

Οι κινήσεις των σωμάτων μελετήθηκαν θεωρητικά τον 13° αιώνα, πολύ πριν από την εποχή του Γαλιλαίου (16ος αιώνας), ο οποίος θεωρείται ο θεμελιωτής της Φυσικής Επιστήμης όπως τη γνωρίζουμε εμείς σήμερα.

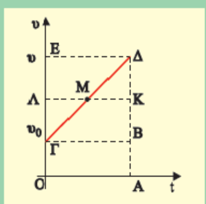
Ένα από τα αποτελέσματα των μελετών της περιόδου αυτής, που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα στη διδασκαλία της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, είναι το "Θεώρημα της μέσης ταχύτητας". Το θεώρημα αυτό ονομάζεται και θεώρημα Merton, επειδή μελετήθηκε στο αντίστοιχο κολλέγιο της Οξφόρδης.

Με σύγχρονη ορολογία, το θεώρημα αναφέρεται σε μία κίνηση που είναι ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα $υ_0$, διαρκεί χρόνο t και έχει τελική ταχύτητα υ. Το θεώρημα ορίζει ότι, το διάστημα που διανύθηκε είναι το ίδιο με αυτό που θα διήνυε στον ίδιο χρόνο άλλο κινητό που θα είχε σταθερή ταχύτητα ίση με τη μέση τιμή των ταχυτήτων $υ_0$, υ.

Δηλαδή η απόσταση αυτή είναι:

$$s = \frac{(υ_0 + υ)}{2} t .$$

Ενδιαφέρον έχει η ιδιαίτερη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του θεωρήματος από τον Oresme, στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού, στις αρχές του 14ου αιώνα. Ο Oresme σκέφτηκε ότι, εφόσον η ποσότητα $υ_0 t$ είναι γινόμενο δύο αριθμών, μπορεί να παρασταθεί με το εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με πλευρές $υ_0$, t, όπως το ΟΑΒΓ στην εικόνα. Ομοίως, το υt θα είναι το εμβαδόν ΟΑΔΕ. Ο Oresme επίσης συμπέρανε ότι το εμβαδόν ΟΑΔΓ θα παριστάνει το διάστημα που διανύθηκε από το κινητό που έκανε την επιταχυνόμενη κίνηση.



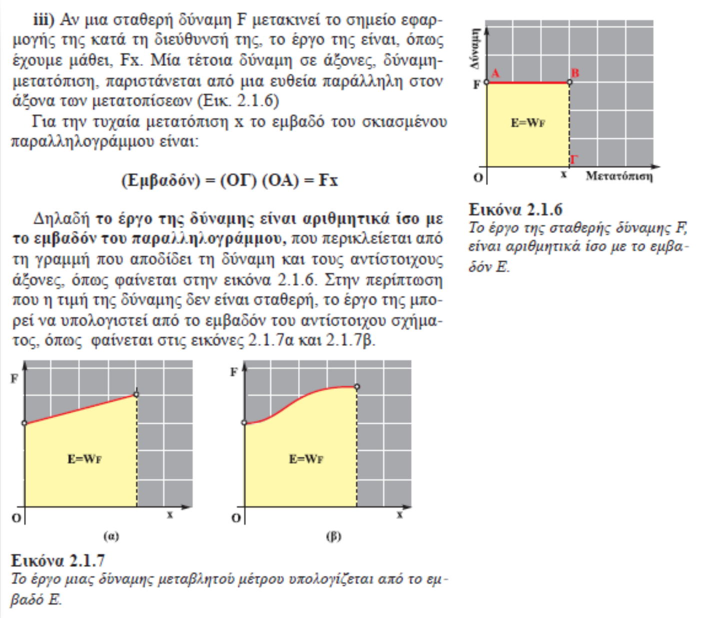
Πράγματι, αν συνδεθούν τα μέσα των τμημάτων ΓΕ και ΒΔ με το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, τα τρίγωνα ΓΛΜ και ΚΔΜ αποδεικνύεται ότι είναι ίσα. Συνεπώς, το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΑΔΓ και του ορθογώνιου ΟΑΚΛ είναι ίσα. Όμως, το εμβαδόν ΟΑΚΛ αντιστοιχεί στο γινόμενο $\frac{υ_0 + υ}{2} t$, διότι η ΚΛ διέρχεται από τα μέσα των ΒΔ, ΓΕ και $ΟΛ = υ_0 + \frac{υ - υ_0}{2} = \frac{υ + υ_0}{2}$.

Άρα το διάστημα που διανύεται με τη μέση ταχύτητα είναι ίσο με αυτό που διανύεται με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στο στιγμιότυπο αυτό βλέπουμε την απόδειξη ενός θεωρήματος της φυσικής με τη χρήση του εμβαδού. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στο ότι το γινόμενο της ταχύτητας με το χρόνο μπορεί να παρασταθεί από το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με τις αντίστοιχες πλευρές. Επίσης, η απόσταση την οποία διανύει ένα κινητό που κινείται ομαλά επιταχυνόμενα με αρχική ταχύτητα μπορεί να παρασταθεί από το εμβαδόν ενός τραπεζίου. Έτσι, με σύγκριση τριγώνων και αξιοποίηση του εμβαδού αποδεικνύεται το θεώρημα. Για άλλη μια φορά έχουμε πολλαπλασιασμό μη ομοειδών μονάδων και την εφαρμογή της έννοιας του εμβαδού με διεπιστημονικό τρόπο ώστε να πετύχουμε μία απόδειξη.

Εικόνα 25

Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής



iii) Αν μια σταθερή δύναμη F μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της, το έργο της είναι, όπως έχουμε μάθει, Fx. Μία τέτοια δύναμη σε άξονες, δύναμη-μετατόπιση, παριστάνεται από μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των μετατοπίσεων (Εικ. 2.1.6)

Για την τυχαία μετατόπιση x το εμβαδό του σκιασμένου παραλληλογράμμου είναι:

(Εμβαδόν) = (ΟΓ) (ΟΑ) = Fx

Δηλαδή **το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου,** που περικλείεται από τη γραμμή που αποδίδει τη δύναμη και τους αντίστοιχους άξονες, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.1.6. Στην περίπτωση που η τιμή της δύναμης δεν είναι σταθερή, το έργο της μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του αντίστοιχου σχήματος, όπως φαίνεται στις εικόνες 2.1.7α και 2.1.7β.

Εικόνα 2.1.6
Το έργο της σταθερής δύναμης F, είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν E.

Εικόνα 2.1.7
Το έργο μιας δύναμης μεταβλητού μέτρου υπολογίζεται από το εμβαδό E.

Αυτή η τελευταία αναφορά του βιβλίου η οποία κάνει χρήση της έννοιας του εμβαδού σχετίζεται με το έργο μιας δύναμης. Πιο συγκεκριμένα, το εμβαδόν του ορθογώνιο το οποίο προκύπτει από τους άξονες και την ευθεία της δύναμης στο διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης είναι αριθμητικά ίσο με το έργο αυτής. Για άλλη μια φορά πολλαπλασιάζονται μονάδες οι οποίες δεν είναι ομοειδείς και το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά προκειμένου να εκφράσει μια φυσική έννοια. Επίσης, σε περιπτώσεις που η δύναμη δεν είναι σταθερή το έργο υπολογίζεται και πάλι με παρόμοιο τρόπο από σχήματα όπως αυτό του τραπεζίου ή σχήματα τα οποία έχουν μία μη ευθύγραμμη πλευρά.

Μετά την παρουσίαση των παραπάνω αναφορών του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής της Ά λυκείου συνεχίζουμε με την ανάλυση των δραστηριοτήτων του εγχειριδίου αυτού σύμφωνα με το ερευνητικό μας εργαλείο στην επόμενη παράγραφο.

Ανάλυση δραστηριοτήτων εγχειριδίου φυσικής

Το σχολικό εγχειρίδιο φυσικής της Ά λυκείου των οποίων τις δραστηριότητες επιχειρούμε να εξετάσουμε, ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προκειμένου να δώσουμε απαντήσεις στα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι το:

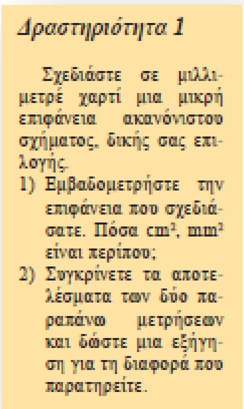
Φυσική, Ά Γενικού Λυκείου (Βλάχος et al., n.d.)

Στο παρόν σχολικό εγχειρίδιο εντοπίζονται 31 δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις δραστηριότητες και αναλύουμε την καθεμία σύμφωνα με το εργαλείο το οποίο έχουμε παρουσιάσει προηγουμένως.

Δραστηριότητες φυσικής στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού.

Εικόνα 26

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής



Δραστηριότητα 1

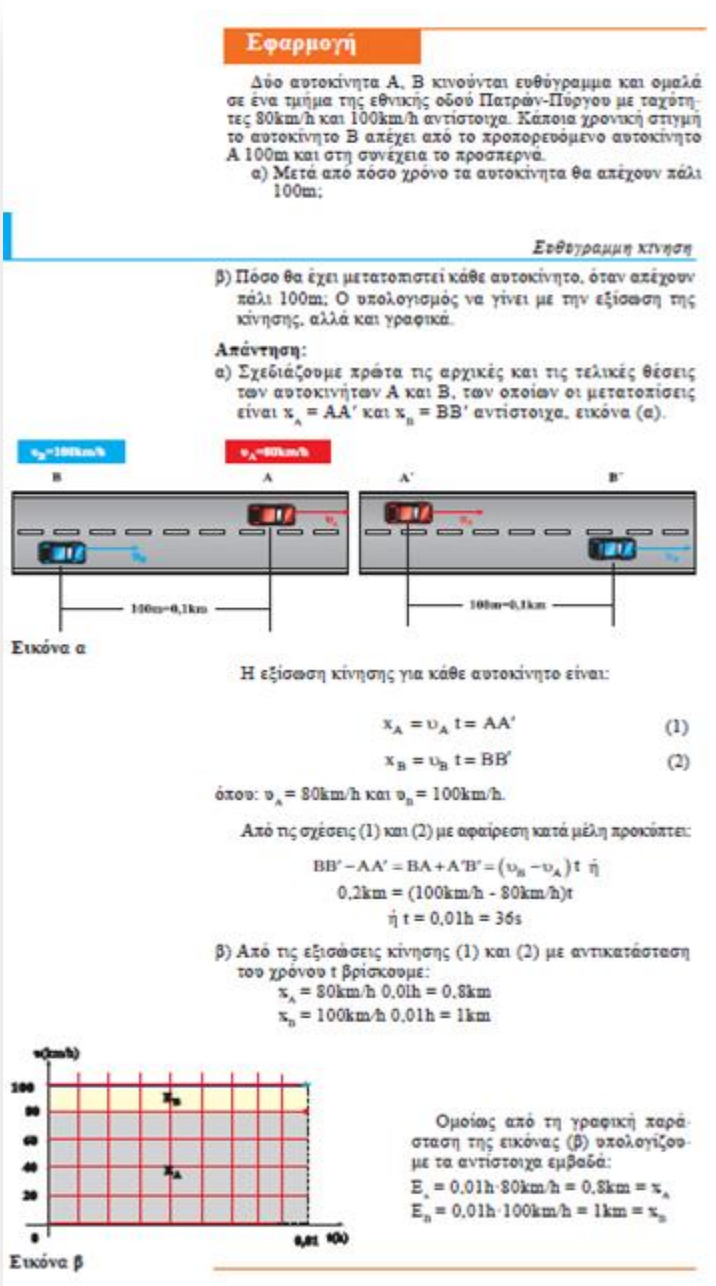
Σχεδιάστε σε μιλλιμετρέ χαρτί μια μικρή επιφάνεια ακανόνιστου σχήματος, δικής σας επιλογής.

1) Εμβαδομετρήστε την επιφάνεια που σχεδιάσατε. Πόσα cm^2, mm^2 είναι περίπου;
2) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω μετρήσεων και δώστε μια εξήγηση για τη διαφορά που παρατηρείτε.

Πρόκειται για μία δραστηριότητα του εισαγωγικού κεφαλαίου. Το περιβάλλον είναι αυτό του ακανόνιστου σχήματος. Επιτρέπονται προσεγγιστικές λύσεις και δεν απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού. Απαιτείται όμως γνωστή μεθοδολογία και το εμβαδόν είναι ίσο με το πλήθος των τετραγώνων κάτι το οποίο φανερώνει πολλαπλασιασμό. Αναφέρονται μονάδες εμβαδού και δεν απαιτείται καμία ερμηνεία. Πρόκειται για ένα μη ευθύγραμμο ακανόνιστο σχήμα, δεν εντοπίζεται διεπιστημονική αναφορά ούτε και κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 27

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



Εφαρμογή

Δύο αυτοκίνητα Α, Β κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά σε ένα τμήμα της εθνικής οδού Πατρών-Πύργου με ταχύτητες 80km/h και 100km/h αντίστοιχα. Κάποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο Β απέχει από το προπορευόμενο αυτοκίνητο Α 100m και στη συνέχεια το προσπερνά.

α) Μετά από πόσο χρόνο τα αυτοκίνητα θα απέχουν πάλι 100m;

Ευθύγραμμη κίνηση

β) Πόσο θα έχει μετατοπιστεί κάθε αυτοκίνητο, όταν απέχουν πάλι 100m; Ο υπολογισμός να γίνει με την εξίσωση της κίνησης, αλλά και γραφικά.

Απάντηση:

α) Σχεδιάζουμε πρώτα τις αρχικές και τις τελικές θέσεις των αυτοκινήτων Α και Β, των οποίων οι μετατοπίσεις είναι $x_A = AA'$ και $x_B = BB'$ αντίστοιχα, εικόνα (α).

Εικόνα α

Η εξίσωση κίνησης για κάθε αυτοκίνητο είναι:

$$x_A = \upsilon_A t = AA' \quad (1)$$

$$x_B = \upsilon_B t = BB' \quad (2)$$

όπου: $\upsilon_A = 80km/h$ και $\upsilon_B = 100km/h$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$BB' - AA' = BA + A'B' = (\upsilon_B - \upsilon_A)t \text{ ή}$$

$$0{,}2km = (100km/h - 80km/h)t$$

$$\text{ή } t = 0{,}01h = 36s$$

β) Από τις εξισώσεις κίνησης (1) και (2) με αντικατάσταση του χρόνου t βρίσκουμε:

$x_A = 80km/h \cdot 0{,}01h = 0{,}8km$

$x_B = 100km/h \cdot 0{,}01h = 1km$

Ομοίως από τη γραφική παράσταση της εικόνας (β) υπολογίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά:

$E_A = 0{,}01h \cdot 80km/h = 0{,}8km = x_A$

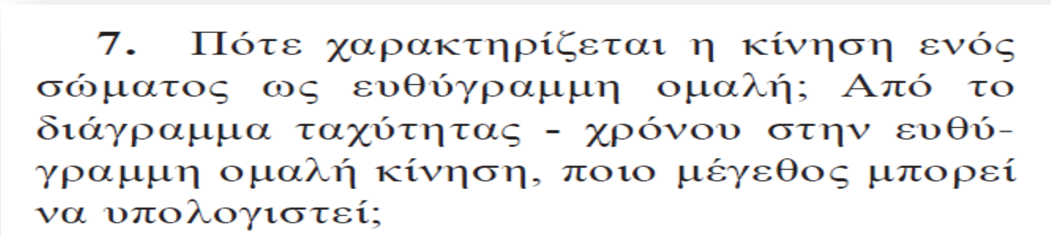
$E_B = 0{,}01h \cdot 100km/h = 1km = x_B$

Εικόνα β

Η εφαρμογή αυτή βρίσκεται στη παράγραφο της ευθύγραμμης κίνησης. Το περιβάλλον μπορούμε αρχικά να πούμε ότι είναι μια κατάσταση της καθημερινότητας όμως η διαχείριση του εμβαδού γίνεται σε διάγραμμα. Δεν υπάρχει αναφορά ώστε να μπορούν να γίνουν δεκτές προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται ανάκληση και χρήση τύπου για το εμβαδόν καθώς και εφαρμογή μεθοδολογίας. Η έννοια του εμβαδού συσχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και αναφέρονται μονάδες οι οποίες δεν είναι ομοειδείς και συγκεκριμένα μονάδες ταχύτητας (km/h), χρόνου (h)&(s) και μήκους (km).Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού για το οποίο εντοπίζουμε καθαρή διεπιστημονική αναφορά σύμφωνα με την οποία και εδώ το εμβαδόν εκφράζει μετατόπιση. Έχουμε δύο συμβολισμούς E_A και E_B.

Εικόνα 28

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

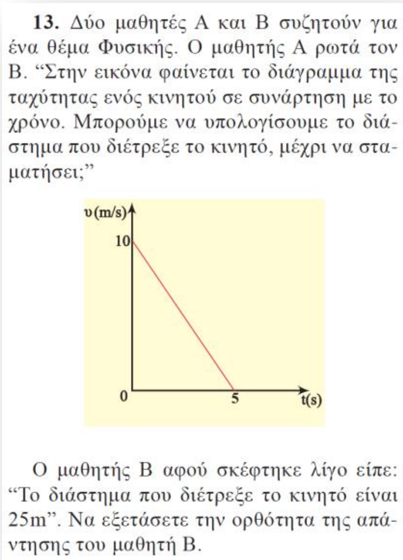


7. Πότε χαρακτηρίζεται η κίνηση ενός σώματος ως ευθύγραμμη ομαλή; Από το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ποιο μέγεθος μπορεί να υπολογιστεί;

Το περιβάλλον της ερώτησης είναι αυτό του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου. Δεν γίνεται καμία αναφορά σε λύσεις ώστε να μπορούμε να δούμε αν επιτρέπονται προσεγγιστικές ή όχι. Δε μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος τύπος στην ερώτηση όμως απαιτείται γνώση της μεθόδου. Δε παρατηρούμε συσχέτιση με κάποια αριθμητική πράξη και δεν υπάρχει καμία αναφορά σε μονάδες. Απαιτείται ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού και το σχήμα το οποίο προκύπτει είναι ευθύγραμμο. Παρατηρούμε καθαρή διεπιστημονική αναφορά της έννοιας του εμβαδού το οποίο εκφράζει μετατόπιση χωρίς όμως κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 29

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



13. Δύο μαθητές Α και Β συζητούν για ένα θέμα Φυσικής. Ο μαθητής Α ρωτά τον Β. "Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο. Μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διέτρεξε το κινητό, μέχρι να σταματήσει;"

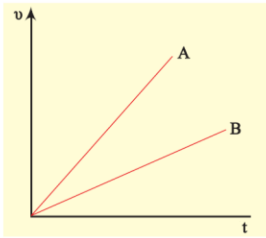
Ο μαθητής Β αφού σκέφτηκε λίγο είπε: "Το διάστημα που διέτρεξε το κινητό είναι 25m". Να εξετάσετε την ορθότητα της απάντησης του μαθητή Β.

Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Η απάντηση δε μπορεί να είναι προσεγγιστική ενώ απαιτείται η ανάκληση και εφαρμογή τύπου για το εμβαδόν και γνώση της μεθοδολογίας. Δίνονται μετρήσεις πράγμα το οποίο συσχετίζει το εμβαδόν με τον πολλαπλασιασμό και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται δεν είναι ομοειδείς. Πιο συγκεκριμένα είναι μονάδες ταχύτητας (m/s) και χρόνου (t).Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα ενώ η χρήση της έννοιας είναι καθαρά διεπιστημονική καθώς εκφράζει διάστημα. Επίσης, δεν παρατηρούμε κάποιο συμβολισμό.

Εικόνα 30

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής

14. Στην εικόνα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα δύο κινητών, που κινούνται ευθύγραμμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.



Α. Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των δυο κινητών.

Β. Ποιο από τα δύο κινητά διανύει μεγαλύτερη απόσταση στον ίδιο χρόνο κίνησης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Το περιβάλλον για άλλη μια φορά είναι το διάγραμμα ταχύτητας χρόνου. Η απάντηση δε μπορεί να είναι προσεγγιστική. Δεν απαιτείται ανάκληση ή χρήση τύπου για το εμβαδόν όμως απαραίτητη είναι η γνώση της μεθόδου. Δε σχετίζεται το εμβαδόν με κάποια αριθμητική πράξη και δεν παρουσιάζονται καθόλου μονάδες. Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει απόσταση και δεν υπάρχουν συμβολισμοί.

Εικόνα 31

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής

16. Ένα όχημα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

t(s)	υ(m/s)	s(m)
0	0	0
1	2	
		4
	8	

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να συμπληρωθεί και κάνοντας χρήση του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου πράγμα το οποίο σημαίνει πως το περιβάλλον μπορεί να είναι το διάγραμμα-ταχύτητας χρόνου. Δε μπορούν να δοθούν προσεγγιστικές λύσεις ενώ χρειάζεται η ανάκληση τύπου για το εμβαδόν και η εφαρμογή του καθώς και η γνώση της μεθόδου. Η πράξη του πολλαπλασιασμού σχετίζεται με το εμβαδόν καθώς παρέχονται μετρήσεις και παρουσιάζονται μη ομοειδείς μονάδες χρόνου (t), ταχύτητας (m/s) και μήκους (m). Απαιτείται ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται με διεπιστημονικό τρόπο για να εκφράσει απόσταση και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 32

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

25. Να συμπληρωθούν τα κενά στις επόμενες προτάσεις:

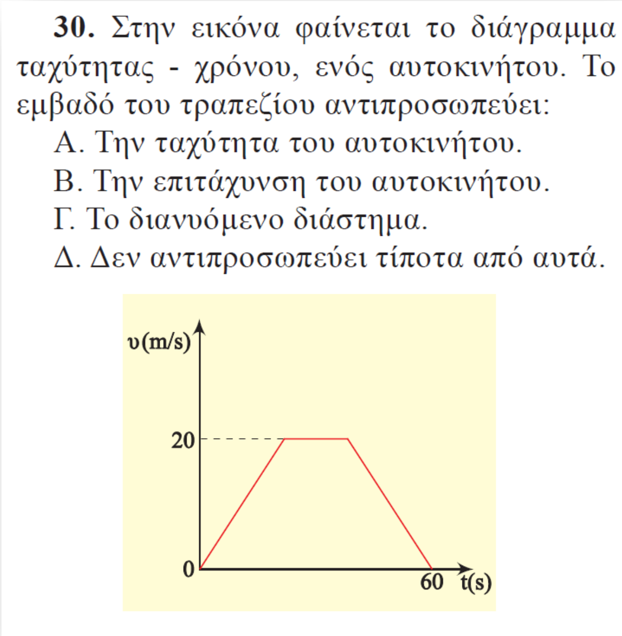
Α. Σε διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό, από το .... του τμήματος μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα χρόνου, υπολογίζουμε τη θέση του κινητού.

Β. Σε ένα διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό από την ………………… της γραφικής παράστασης υπολογίζουμε την τιμή της επιτάχυνσης.

Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δεν υπάρχει δυνατότητα προσεγγιστικής απάντησης στην ερώτηση. Δεν απαιτείται ανάκληση ή χρήση τύπου για το εμβαδόν όμως απαιτείται η γνώση της μεθοδολογίας για την απάντηση. Δεν παρατηρείται συσχέτιση αριθμητικής πράξης με την έννοια του εμβαδού και δεν αναφέρονται καθόλου μονάδες. Απαιτείται όμως η ερμηνεία του εμβαδού, το σχήμα είναι ευθύγραμμο, η χρήση του εμβαδού είναι διεπιστημονική και δεν αναφέρεται κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 33

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



30. Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου, ενός αυτοκινήτου. Το εμβαδό του τραπεζίου αντιπροσωπεύει:

Α. Την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Β. Την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

Γ. Το διανυόμενο διάστημα.

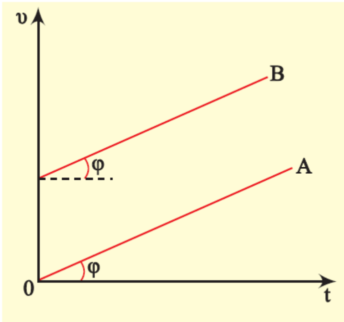
Δ. Δεν αντιπροσωπεύει τίποτα από αυτά.

Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και η απάντηση δε μπορεί να είναι προσεγγιστική. Για τον υπολογισμό του εμβαδού απαιτείται ανάκληση και εφαρμογή τύπου αλλά και γνωστή μεθοδολογίας. Παρατηρούμε συσχέτιση της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έννοια του εμβαδού ενώ αναφέρονται μη ομοειδείς μονάδες ταχύτητας (m/s) και χρόνου (t). Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού, το σχήμα είναι ευθύγραμμο ενώ το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά χωρίς καμία αναφορά ως προς το συμβολισμό.

Εικόνα 34

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

31. Στην εικόνα φαίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου για δύο δρομείς που κινούνται ευθύγραμμα.



Με ποια από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;

Α. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια επιτάχυνση.

Β. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα.

Γ. Οι δύο δρομείς κινούνται ο ένας δίπλα στον άλλο.

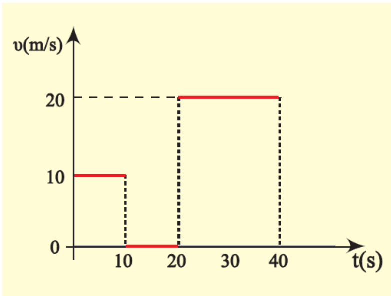
Δ. Στον ίδιο χρόνο διανύουν ίσες αποστάσεις.

Για την απάντηση του Δ ερωτήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια του εμβαδού. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και η απάντηση δε μπορεί να είναι προσεγγιστική. Δεν απαιτείται η χρήση τύπων αλλά η γνώση της μεθοδολογίας και δεν παρατηρούμε συσχέτιση με αριθμητική πράξη για την έννοια του εμβαδού. Δεν αναφέρονται καθόλου μονάδες και απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού. Το σχήμα είναι ευθύγραμμο και το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά χωρίς κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 35

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

3. Όχημα κάνει ευθύγραμμη κίνηση και το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στην εικόνα.



Α. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διανύει το όχημα.
Β. Ποια είναι η τιμή της μέσης ταχύτητας του οχήματος;
Γ. Να γίνει το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.

Για τον υπολογισμό του διαστήματος που διένυσε το όχημα μπορούμε να κάνουμε χρήση της έννοιας του εμβαδού. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δεν δίνεται η δυνατότητα απάντησης κατά προσέγγιση. Απαιτείται η ανάκληση και η χρήση τύπων αλλά και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού λόγω των μετρήσεων που παρέχονται και οι μονάδες οι οποίες εμφανίζονται δεν είναι ομοειδείς. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για μονάδες ταχύτητας (m/s) και μονάδες χρόνου(s). Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο.Το εμβαδόν χρησιμοποιείτε διεπιστημονικά για να εκφράσει διάστημα και δεν εντοπίζουμε κανένα συμβολισμό για το εμβαδον.

Εικόνα 36

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

5. Περιπολικό αρχίζει να καταδιώκει μοτοσυκλετιστή που βρίσκεται σε απόσταση d = 500m μπροστά από το περιπολικό. Το περιπολικό έχει σταθερή ταχύτητα $υ_π$ = 30m/s, ενώ ο μοτοσυκλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_Μ$ = 20m/s.

Να βρεθούν:
Α. Ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει το περιπολικό τον μοτοσυκλετιστή.
Β. Το διάστημα που θα διανύσει το περιπολικό στο χρόνο αυτό.

Για τον υπολογισμό του διαστήματος που διένυσε το περιπολικό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Πρόκειται για μία καθημερινή κατάσταση όμως η διαχείριση του εμβαδού γίνεται στο διάγραμμα ταχύτητας χρόνου. Δε ζητείται προσεγγιστική λύση και απαιτείται η ανάκληση και εφαρμογή τύπου εμβαδού αλλά και γνωστής μεθοδολογίας. Οι μετρήσεις οι οποίες παρέχονται παραπέμπουν στην πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες μήκους (m) και ταχύτητας (m/s). Απαιτείται ερμηνεία του εμβαδού, το σχήμα είναι ευθύγραμμο, το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει διάστημα και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός γι' αυτό.

Εικόνα 37

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

6. Η εξίσωση κίνησης ενός ποδηλάτη που κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά είναι:

$x = 10t$ (x σε m, t σε s).

Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για την κίνηση αυτή, από t = 0 μέχρι t = 5s.

Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε ο ποδηλάτης σε 5s.

Και εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν για τον υπολογισμό του διαστήματος που διένυσε ο ποδηλάτης. Για μία ακόμη φορά το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δεν δίνεται η δυνατότητα προσεγγιστικής λύσης. Για τον υπολογισμό απαιτείται τόσο η ανάκληση και χρήση τύπου για το εμβαδόν καθώς και η εφαρμογή της γνωστής μεθοδολογίας. Ο πολλαπλασιασμός σχετίζεται με την έννοια του εμβαδού αφού παρέχονται μετρήσεις των διαστάσεων. Οι μονάδες που αναφέρονται δεν είναι ομοειδείς και αφορούν απόσταση (m) και χρόνο(t). Η ερμηνεία του εμβαδού απαιτείται και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για την έκφραση διαστήματος χωρίς όμως κάποιο συμβολισμό.

Εικόνα 38

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

7. Ένας μοτοσυκλετιστής ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση $2m/s^2$.

Να υπολογιστούν:

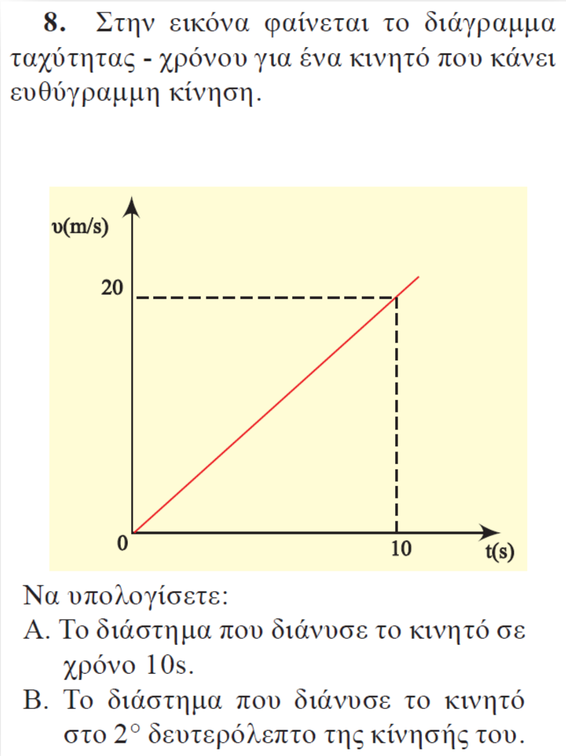
Α. Η ταχύτητά του μετά από 15s.

Β. Η απόσταση που διάνυσε στο χρόνο αυτό.

Πρόκειται για μία κατάσταση της καθημερινότητας την οποία όμως μπορούμε να απαντήσουμε αν χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν στο περιβάλλον του διαγράμματος επιτάχυνσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου. Η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού καθώς και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας είναι απαραίτητα. Οι μετρήσεις που παρέχονται σχετίζουν το εμβαδόν με την πράξη του πολλαπλασιασμού ενώ οι μονάδες τους δεν είναι ομοειδείς και αφορούν επιτάχυνση (m/s^2) και χρόνο (t). Η ερμηνεία του εμβαδού είναι απαραίτητη, το σχήμα είναι ευθύγραμμο ενώ το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά προκειμένου να εκφράσει ταχύτητα αλλά και απόσταση χωρίς όμως κάποιο συμβολισμό.

Εικόνα 39

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



8. Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό που κάνει ευθύγραμμη κίνηση.

Να υπολογίσετε:

Α. Το διάστημα που διάνυσε το κινητό σε χρόνο 10s.

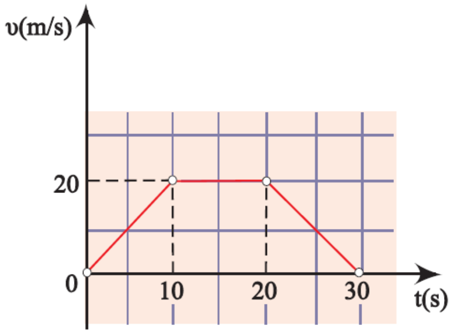
Β. Το διάστημα που διάνυσε το κινητό στο 2° δευτερόλεπτο της κίνησής του.

Για τον υπολογισμό του διαστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έννοια του εμβαδού. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Η ανάκληση και η χρήση τύπων εμβαδού καθώς και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας είναι και εδώ απαραίτητα. Παρέχονται μετρήσεις οι οποίοι σχετίζουν το εμβαδόν με την πράξη του πολλαπλασιασμού ενώ οι μονάδες που αναφέρονται δεν είναι ομοειδείς και αφορούν χρόνο (t) και ταχύτητα (m/s).Η ερμηνεία του εμβαδού απαιτείται και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά προκειμένου να εκφραστεί ένα διάστημα χωρίς την παρουσία κάποιου συμβολισμού.

Εικόνα 40

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

9. Η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο, στα πρώτα 30s της κίνησής του δίνεται από το διάγραμμα της εικόνας.



Να υπολογιστούν:

Α. Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό.

Β. Η τιμή της μέσης ταχύτητας του κινητού.

Για τον υπολογισμό του διαστήματος που διένυσε το κινητό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δε μπορούμε να απαντήσουμε προσεγγιστικά. Η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδό αλλά και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας είναι απαραίτητα. Δίδονται μετρήσεις οι οποίες σχετίζουν το εμβαδόν με τον πολλαπλασιασμό και αναφέρονται μονάδες ταχύτητας (m/s) και χρόνου (s). Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού του γραφήματος και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει διάστημα χωρίς όμως να υπάρχει κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 41

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

10. Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε μια ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη σχέση

$υ = 8 + 2t$ (υ σε m/s, t σε s).

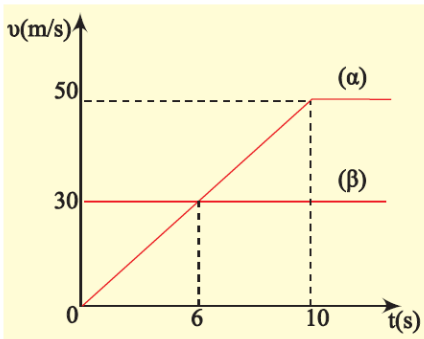
Να βρείτε το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο από τη χρονική στιγμή 2s μέχρι τη χρονική στιγμή 4s.

Ο υπολογισμός του διαστήματος που διάνυσε το αυτοκίνητο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του εμβαδού. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δε ζητείται προσεγγιστική λύση. Χρειάζεται η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδόν και η εφαρμογή γνωστής μεθόδου για τη λύση της άσκησης. Δεν παρέχονται μετρήσεις ώστε να σχετίζεται το εμβαδόν με κάποια πράξη και οι μονάδες που αναφέρονται είναι ταχύτητας (m/s) και χρόνου (s). Το εμβαδόν απαιτείται να ερμηνευθεί και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει απόσταση χωρίς κάποιο συμβολισμό.

Εικόνα 42

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

***11.** Δύο κινητά βρίσκονται στο ίδιο σημείο ευθύγραμμου δρόμου και ξεκινούν ταυτόχρονα. Στο διάγραμμα της εικόνας φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για τα δύο αυτά κινητά.



Να υπολογιστούν:

Α. Σε ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα των κινητών έχει την ίδια τιμή;

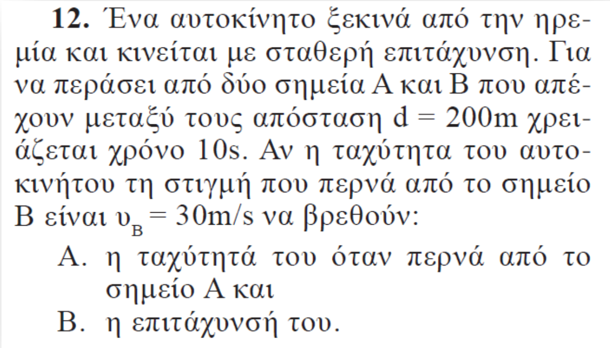
Β. Στα 10s πόσα m προηγείται το κινητό β του κινητού α;

Γ. Σε ποια χρονική στιγμή συναντώνται τα κινητά;

Τα ερωτήματα Β και Γ μπορούν να απαντηθούν με τη χρήση του εμβαδού. Το περιβάλλον της άσκησης είναι αυτό του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου και οι λύσεις δε μπορούν να είναι προσεγγιστικές. Για την απάντηση η ανάκληση και χρήση τύπων εμβαδού είναι απαραίτητη καθώς η γνώση της μεθοδολογίας. Οι μετρήσεις παραπέμπουν στην πράξη του πολλαπλασιασμού ενώ οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται δεν είναι ομοειδείς και αφορούν ταχύτητα (m/s) και χρόνο (t). Το εμβαδόν του γραφήματος απαιτείται να ερμηνευθεί και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Για άλλη μια φορά το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει απόσταση και δεν παρατηρούμε κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 43

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



12. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Για να περάσει από δύο σημεία Α και Β που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 200m χρειάζεται χρόνο 10s. Αν η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή που περνά από το σημείο Β είναι $υ_B$ = 30m/s να βρεθούν:

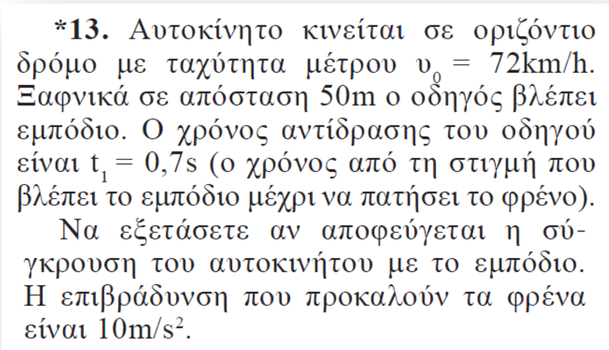
Α. η ταχύτητά του όταν περνά από το σημείο Α και

Β. η επιτάχυνσή του.

Για τη λύση της άσκησης αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Το περιβάλλον στο οποίο μπορούμε να εργαστούμε για να λύσουμε την άσκηση είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου χωρίς δυνατότητα προσεγγιστικής λύσης. Η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδόν είναι απαραίτητα καθώς και η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Παρέχονται μετρήσεις οι οποίες σχετίζουν το εμβαδόν με την πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται δεν είναι ομοειδείς και αφορούν απόσταση (m) και ταχύτητα (m/s). Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά ως απόσταση και δεν εντοπίζουμε κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 44

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής



***13.** Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 72km/h. Ξαφνικά σε απόσταση 50m ο οδηγός βλέπει εμπόδιο. Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι t_1 = 0,7s (ο χρόνος από τη στιγμή που βλέπει το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο).

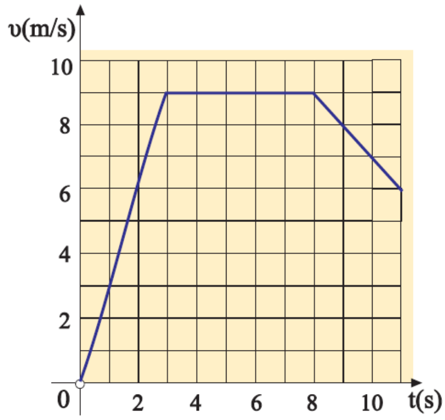
Να εξετάσετε αν αποφεύγεται η σύγκρουση του αυτοκινήτου με το εμπόδιο. Η επιβράδυνση που προκαλούν τα φρένα είναι 10m/s^2.

Για να απαντήσουμε σε αυτή την άσκηση μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου σύμφωνα με τα δεδομένα και έπειτα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου το οποίο σχηματίζεται. Άρα το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δε μπορούμε να απαντήσουμε κατά προσέγγιση. Η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδόν αλλά και η εφαρμογή της μεθοδολογίας είναι απαραίτητη στην περίπτωση αυτή. Οι μετρήσεις που δίνονται σχετίζουν την έννοια του εμβαδού με τον πολλαπλασιασμό και οι μονάδες οι οποίες παρουσιάζονται είναι μονάδες ταχύτητας (m/s), χρόνου (s) και επιβράδυνσης (m/s^2). Απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα που δημιουργείται είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει απόσταση και δεν παρατηρούμε κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 45

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

16. Η κίνηση ενός δρομέα δίνεται προσεγγιστικά από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.



Να υπολογίσετε:

Α. Τη μέση ταχύτητα του δρομέα και

Β. Την επιτάχυνσή του, όπου η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη.

Για να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα αρκεί να υπολογίσουμε την απόσταση την οποία διένυσε ο δρομέας κάνοντας χρήση του εμβαδού και να διαιρέσουμε με το χρόνο τον οποίο χρειάστηκε. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δε μπορούμε να απαντήσουμε προσεγγιστικά. Απαιτείται η ανάκληση και χρήση τύπου για το εμβαδόν καθώς και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Αναφέρονται μετρήσεις οι οποίες σχετίζουν το εμβαδόν με τον πολλαπλασιασμό και πιο συγκεκριμένα οι μονάδες των μετρήσεων αυτών δεν είναι ομοειδείς και αφορούν ταχύτητα (m/s) και χρόνο (t). Και εδώ απαιτείται η ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι για ακόμα μια φορά ευθύγραμμο. Η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται και πάλι με διεπιστημονικό τρόπο για να εκφράσει απόσταση και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 46

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

17. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0 = 10m/s$ και ο οδηγός κάνοντας χρήση των φρένων προκαλεί στο αυτοκίνητο σταθερή επιβράδυνση $α = 2m/s^2$.

Α. Μετά από πόσο χρόνο η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα υποδιπλασιαστεί και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει στο χρόνο αυτό;

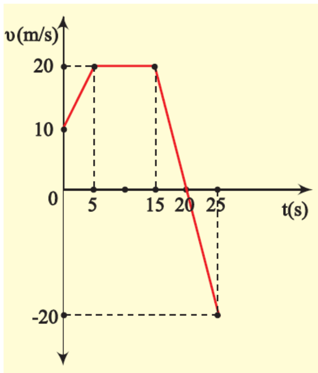
Β. Για πόσο χρόνο θα κινηθεί το αυτοκίνητο με τη σταθερή αυτή επιβράδυνση και πόσο διάστημα θα διανύσει;

Με κατάλληλη ερμηνεία των δεδομένων και σωστή σχεδίαση του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν για να απαντήσουμε στα ερωτήματα τα οποία αφορούν τα διαστήματα τα που θα διανύσει το αυτοκίνητο. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και οι απαντήσεις δε μπορούν να είναι κατά προσέγγιση. Η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδόν είναι απαραίτητα και η γνώση και εφαρμογή της μεθοδολογίας επίσης. Οι μετρήσεις που αναφέρονται σχετίζουν το εμβαδόν με την πράξη του πολλαπλασιασμού και δεν είναι ομοειδείς. Αναφέρονται μονάδες ταχύτητας (m/s)και επιτάχυνσης (m/s^2) και το εμβαδόν πρέπει να ερμηνευθεί κατάλληλα. Το σχήμα είναι ευθύγραμμο και η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει απόσταση. Δεν παρατηρούμε κανένα συμβολισμό για το εμβαδόν.

Εικόνα 47

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

19. Στο διάγραμμα αποδίδεται γραφικά η ταχύτητα ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο.

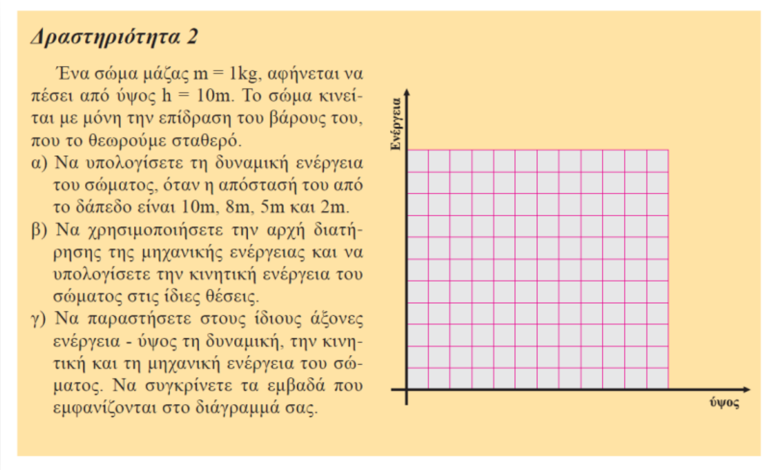


Α. Να περιγράψετε την κίνηση του κινητού έως τη χρονική στιγμή 25s.
Β. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του, από τη χρονική στιγμή μηδέν έως τη χρονική στιγμή 5s.
Γ. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το κινητό και τη μετατόπισή του για τα 25s της κίνησής του.
Δ. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια των 25s.

Πρόκειται για μία ακόμη άσκηση όπου το εμβαδόν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαντηθούν κάποια ερωτήματα. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου και δεν υπάρχει αναφορά η οποία να επιτρέπει τις λύσεις κατά προσέγγιση. Για τον υπολογισμό απαιτείται η ανάκληση και η εφαρμογή τύπου αλλά και γνωστής μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες ταχύτητας (m/s) και χρόνου (s). Το εμβαδόν απαιτείται να ερμηνευθεί τόσο αριθμητικά όσο και ως προς την θέση του στους άξονες. Τα σχήματα είναι ευθύγραμμα και η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά ως μετατόπιση και ως διάστημα. Δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 48

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής



Δραστηριότητα 2

Ένα σώμα μάζας m = 1kg, αφήνεται να πέσει από ύψος h = 10m. Το σώμα κινείται με μόνη την επίδραση του βάρους του, που το θεωρούμε σταθερό.

α) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, όταν η απόστασή του από το δάπεδο είναι 10m, 8m, 5m και 2m.

β) Να χρησιμοποιήσετε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος στις ίδιες θέσεις.

γ) Να παραστήσετε στους ίδιους άξονες ενέργεια - ύψος τη δυναμική, την κινητική και τη μηχανική ενέργεια του σώματος. Να συγκρίνετε τα εμβαδά που εμφανίζονται στο διάγραμμά σας.

Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται να συγκριθούν κάποια εμβαδά. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα Ενέργειας-ύψους και δεν υπάρχει αναφορά σε κάποια προσεγγιστική λύση. Για την λύση απαιτείται η ανάκληση και εφαρμογή τύπου εμβαδού καθώς και εφαρμογή μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες βάρους (kg) και μήκους (m). Η σύγκριση στοχεύει στην ερμηνεία του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Το εμβαδόν δεν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά και δεν εντοπίζεται κάποιος συμβολισμός.

Εικόνα 49

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται στην εθνική οδό με σταθερή ταχύτητα υ = 30m/s. Αν η αντίσταση Α του αέρα δίνεται από τη σχέση Α = 4υ (Α σε Ν και υ σε m/s), να βρείτε το έργο της για μετατόπιση του αυτοκινήτου κατά 50m.

Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί με τη χρήση της έννοιας του εμβαδού. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης. Δεν υπάρχει κάποια αναφορά η οποία επιτρέπει τις προσεγγιστικές λύσεις και απαιτείται τόσο η ανάκληση και εφαρμογή τύπων εμβαδού όσο και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και η άσκηση αναφέρει μονάδες ταχύτητας (m/s), δύναμης (N) και μετατόπισης-μήκους (m). Το εμβαδόν απαιτείται να ερμηνευθεί κατάλληλα και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Η χρήση της έννοιας του εμβαδού είναι διεπιστημονική και εκφράζει το έργο μιας δύναμης και στην άσκηση δεν εντοπίζεται κάποιος συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 50

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής

7. Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα υ = 4m/s με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F = 40N. Να βρεθεί:

Α. Το έργο της τριβής για μετατόπιση x = 5m.

Β. Ο ρυθμός με τον οποίο η προσφερόμενη στο σώμα ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

Για τον υπολογισμό του έργου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα δύναμης-απόστασης και δε δίνεται η δυνατότητα προσεγγιστικών λύσεων. Η ανάκληση και η χρήση τύπου για το εμβαδόν είναι απαραίτητη καθώς και η εφαρμογή μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι αφορούν ταχύτητα (m/s), δύναμη (N) και μετατόπιση (m).Απαιτείται κατάλληλη ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει έργο μιας δύναμης και δεν εντοπίζουμε κανένα συμβολισμό.

Εικόνα 51

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου της φυσικής

9. Ένας μαθητής σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας m = 100kg πάνω σ' έναν οριζόντιο δρόμο με τον οποίο το κιβώτιο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,5. Πόση ενέργεια προσφέρει ο μαθητής στο κιβώτιο, αν το μετατοπίσει με σταθερή ταχύτητα, κατά 10m; ($g = 10m/s^2$).

Για τον υπολογισμό της ενέργειας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης και δεν υπάρχει αναφορά προσεγγιστικής λύσης. Η ανάκληση και εφαρμογή τύπου εμβαδού απαιτείται καθώς και η εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας. Η πράξη του πολλαπλασιασμού σχετίζεται με το εμβαδόν και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες μάζας (kg), απόστασης (m) και επιτάχυνσης (m/s^2).Απαιτείται ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει ενέργεια. Δεν υπάρχει κανένας συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 52

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

11. Να βρείτε το έργο μιας δύναμης η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά x = 10m, κατά τη διεύθυνσή της αν το μέτρο της είναι:

Α. F = 4N Β. F = (10-x)N

Στην άσκηση αυτή το έργο μπορεί να υπολογιστεί από τη χρήση του εμβαδού. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα δύναμης-απόστασης και δεν υπάρχει αναφορά η οποία να επιτρέπει προσεγγιστικές λύσεις. Απαιτείται τόσο η ανάκληση και εφαρμογή τύπου για το εμβαδόν καθώς και η εφαρμογή μεθοδολογίας. Ο πολλαπλασιασμός σχετίζεται με την έννοια του εμβαδού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες δύναμης (N) και απόστασης (m). Απαιτείται ερμηνεία του εμβαδού και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να εκφράσει έργο και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 53

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

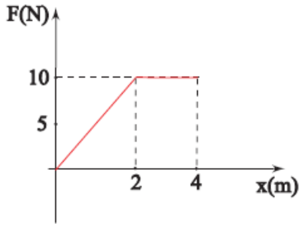
***15.** Ένα σώμα μάζας m, είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση F = 8 - x (x σε m, F σε N). Αν η ταχύτητα του σώματος μετά από μετακίνησή του κατά 10m είναι υ = 2m/s, να βρείτε τη μάζα m του σώματος.

Η άσκηση αυτή ζητάει τη μάζα ενός σώματος όμως για να βρεθεί πρέπει να χρησιμοποιηθεί το έργο μιας δύναμης το οποίο υπολογίζεται από το εμβαδόν. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα δύναμης-απόστασης και δεν υπάρχει αναφορά προσεγγιστικής λύσης. Η ανάκληση και εφαρμογή τύπου είναι απαραίτητη καθώς και η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μονάδες απόστασης (m), ταχύτητας (m/s) και δύναμης (N).Το εμβαδόν απαιτείται να ερμηνευθεί κατάλληλα και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Η έννοια του εμβαδού χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να υπολογιστεί το έργο μιας δύναμης και δεν εντοπίζεται κάποιος συμβολισμός για το εμβαδόν.

Εικόνα 54

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

18. Ένα κιβώτιο μάζας m = 2kg είναι ακίνητο, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Υποθέστε ότι στο κιβώτιο ασκούμε οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται όπως φαίνεται στην εικόνα.



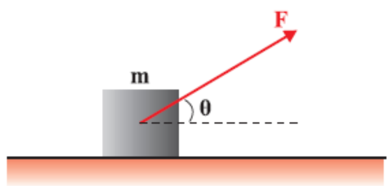
Πόση είναι η ταχύτητα του κιβωτίου όταν η μετατόπισή του είναι 4m;

Στην άσκηση αυτή ζητείται η ταχύτητα όμως πρέπει πρώτα να υπολογιστεί το έργο μιας δύναμης το οποίο προκύπτει από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα δύναμης-απόστασης και δε μπορεί να απαντηθεί προσεγγιστικά. Η ανάκληση και η εφαρμογή τύπου εμβαδού απαιτείται καθώς και η εφαρμογή μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και αναφέρονται μονάδες μάζας (kg), δύναμης (N) και απόστασης (m).Απαιτείται ερμηνεία του εμβαδού και το σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται με διεπιστημονικό τρόπο για τον υπολογισμό του έργου δύναμης και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 55

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

***21.** Ένα σώμα μάζας m = 2kg ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει μ = 0,25. Ασκούμε στο σώμα δύναμη F, που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της, σύμφωνα με τη σχέση F = 10 + 5x (x σε m, F σε N).



Να υπολογίσετε:

Α. Κατά πόσο θα μετακινηθεί το σώμα, πριν εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο;

Β. Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται: ημθ = 0,8, συνθ = 0,6 και $g = 10m/s^2$.

Το δεύτερο ερώτημα μπορεί να απαντηθεί εφόσον υπολογιστεί το έργο δύο δυνάμεων και αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση του εμβαδού. Το περιβάλλον είναι το διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης και δεν επιτρέπονται προσεγγιστικές λύσεις. Η ανάκληση και χρήση τύπου απαιτούνται καθώς και η εφαρμογή μεθοδολογίας. Η πράξη του πολλαπλασιασμού σχετίζεται με το εμβαδόν και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται είναι μάζας (kg), μετατόπισης (m) και δύναμης (N). Το εμβαδόν απαιτείται να ερμηνευθεί κατάλληλα και τα σχήματα είναι ευθύγραμμα. Για μία ακόμα φορά το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για να υπολογιστεί το έργο δυνάμεων και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός.

Εικόνα 56

Στιγμιότυπο δραστηριότητας του σχολικού εγχειρίδιου της φυσικής

22. Ένα σώμα μάζας m = 1kg ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα επάνω, που η τιμή της είναι F = 30 - x (x σε m, F σε N). Αν η δύναμη καταργείται αμέσως μετά το μηδενισμό της να υπολογίσετε:

Α. Το έργο της δύναμης.
Β. Τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα ανεβαίνοντας.
Γ. Τη μέγιστη ανύψωση του σώματος.
Δ. Την ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο οριζόντιο επίπεδο.
($g = 10m/s^2$).

Για τον υπολογισμό του έργου της δύναμης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εμβαδόν. Το περιβάλλον της άσκησης είναι το διάγραμμα δύναμης-μετατόπισης και δεν υπάρχει αναφορά η οποία να επιτρέπει τις προσεγγιστικές λύσεις. Η άσκηση απαιτεί την ανάκληση και χρήση τύπου εμβαδού και εφαρμογή μεθοδολογίας. Το εμβαδόν σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού και οι μονάδες οι οποίες αναφέρονται αφορούν μάζα (kg), απόσταση (m) και δύναμη (N).Απαιτείται κατάλληλη ερμηνεία του εμβαδού και ο σχήμα είναι ευθύγραμμο. Το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά για τον υπολογισμό του έργου μιας δύναμης και δεν εντοπίζεται κανένας συμβολισμός.

Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Ά λυκείου σύμφωνα με την ανάλυση μας.

Αποτελέσματα ανάλυσης δραστηριοτήτων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών και φυσικής

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων τα οποία αφορούν την ανάλυση των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών και φυσικής σύμφωνα με το ερευνητικό μας εργαλείο. Στην παρουσίαση αυτή αξιοποιούμε και κάποιους πίνακες συχνοτήτων, τους οποίους κατασκευάσαμε με τη χρήση του λογισμικού πακέτου SPSS.

Αποτελέσματα ανάλυσης δραστηριοτήτων σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών

Αρχικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων από το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Α’ λυκείου και ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που αφορούν στις δραστηριότητες του εγχειριδίου της φυσικής της ίδιας τάξης.

Όσον αφορά το περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού στις σχολικές δραστηριότητες του βιβλίου των μαθηματικών μπορούμε εύκολα να έχουμε μία εικόνα από τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας V

Περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν το εμβαδόν στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Περιβάλλον	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Γεωμετρικό σχήμα	13	68,4
Καθημερινότητα	2	10,5
Γράφημα-Διάγραμμα	2	10,5
Διάγραμμα Venn	2	10,5
Σύνολο	19	100,0

Παρατηρούμε ότι ένα μεγάλο ποσοστό της τάξεως του 68,4% των δραστηριοτήτων των μαθηματικών στις οποίες οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού χρησιμοποιούν το γεωμετρικό σχήμα. Εντοπίζονται άλλα τρία περιβάλλοντα τα οποία αφορούν την καθημερινότητα, γραφήματα-διαγράμματα και τα διαγράμματα Venn τα οποία συγκεντρώνουν όλα ποσοστό 10,5%.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως το περιβάλλον του γεωμετρικού σχήματος κατέχει σημαντικά υψηλότερα ποσοστά από τα υπόλοιπα περιβάλλοντα αλλά και ότι το καθένα από τα υπόλοιπα αυτά περιβάλλοντα κατέχει ένα πολύ μικρό ποσοστό στις σχολικές δραστηριότητες.

Από τις 19 δραστηριότητες των μαθηματικών στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού μόνο μία δέχεται προσεγγιστική λύση σύμφωνα με την εκφώνηση της όμως η προσεγγιστική αυτή λύση δεν αφορά τον υπολογισμό του εμβαδού. Κατά συνέπεια όλες οι δραστηριότητες απαιτούν αυστηρότητα στον υπολογισμό του εμβαδού και δεν κάνουν δεκτές προσεγγιστικές λύσεις.

Η πλειοψηφία των δραστηριοτήτων φαίνεται να δίνει πολύ μεγάλη έμφαση στους τύπους υπολογισμού του εμβαδού καθώς μόνο 2 από τις 19 δραστηριότητες δεν απαιτούν ανάκληση ή και χρήση κάποιου τύπου για το εμβαδόν. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για δραστηριότητες οι οποίες κάνουν χρήση του περιβάλλοντος των διαγραμμάτων Venn. Ο πίνακας που ακολουθεί μας δείχνει την υπεροχή των ασκήσεων οι οποίες δίνουν έμφαση στους τύπους έναντι αυτών που δεν δίνουν.

Πίνακας VI
Απαίτηση των δραστηριοτήτων των μαθηματικών για ανάκληση ή χρήση τύπου εμβαδού

Ανάκληση ή και χρήση τύπου	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	2	10,5
Ναι	17	89,5
Σύνολο	19	100,0

Όλες οι ασκήσεις μαθηματικών οι οποίες μελετάμε λύνονται εφόσον οι μαθητές ακολουθήσουν τα βήματα ενός αλγορίθμου και γενικότερα αν εφαρμόσουν μία γνωστή μέθοδο. Οι αλγόριθμοι και οι μέθοδοι είναι γνωστές στους μαθητές από το Γυμνάσιο ή και το Δημοτικό. Επομένως, πρόκειται για ασκήσεις οι οποίες λύνονται με μία «έτοιμη συνταγή».
Οι περισσότερες από τις ασκήσεις συσχετίζουν την έννοια του εμβαδού με μια αριθμητική πράξη και ως επί το πλείστον με αυτή του πολλαπλασιασμού. Ένας λόγος είναι η αναφορά μέτρων μήκους η οποία ενεργοποιεί στους μαθητές την εφαρμογή του κανόνα «μήκος x πλάτος». Από τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων βλέπουμε το πλήθος και τα ποσοστά αναλυτικά ως προς τη συσχέτιση της έννοιας του εμβαδού με μια αριθμητική πράξη.

Πίνακας VII
Συσχέτιση του εμβαδού με αριθμητική πράξη των δραστηριοτήτων των μαθηματικών

Συσχέτιση με πράξη	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	3	15,8
Ναι	16	84,2
Σύνολο	19	100,0

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις συχνότητες οι οποίες αφορούν στις αριθμητικές πράξεις που σχετίζονται με την έννοια του εμβαδού.

Πίνακας VIII
Πράξη με την οποία συνδέεται το εμβαδόν στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Πράξη	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Πολλαπλασιασμός	14	87,5
Αφαίρεση	1	6,3
Πράξεις συνόλων	1	6,3
Σύνολο	16	100,0

Μονάδες αναφέρονται μόνο στις 8 από τις 19 συνολικά δραστηριότητες οι οποίες εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού πράγμα το οποίο δε βοηθάει τους μαθητές να εξοικειωθούν με τις μονάδες και τη διαχείριση τους. Ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων παρουσιάζει αναλυτικότερα τα αποτελέσματα.

Πίνακας IX

Αναφορά μονάδων στις δραστηριότητες των δραστηριοτήτων των μαθηματικών

Μονάδες	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Δεν αναφέρονται	11	57,9
Αναφέρονται	8	42,1
Σύνολο	19	100,0

Οι μονάδες οι οποίες παρουσιάζονται είναι αυτές του μήκους, του εμβαδού και άλλοτε συνυπάρχουν. Από τις 8 ασκήσεις οι οποίες αναφέρουν μονάδες οι 5 αφορούν μόνο μονάδες μήκους ενώ μόνο 3 μονάδες εμβαδού κάτι το οποίο δε βοηθάει ιδιαίτερα τους μαθητές να καταλάβουν πως το εμβαδών έχει τη δική του μονάδα μέτρησης και διαιωνίζει τον κανόνα «μήκοςx πλάτος». Το αποτελέσματα από τη δική μας ανάλυση των δραστηριοτήτων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας X

Είδη μονάδων που εμφανίζονται στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Είδος μονάδων	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Μήκους	5	62,5
Εμβαδού	2	25,0
Μήκους & Εμβαδού	1	12,5
Σύνολο	8	100,0

Εντοπίστηκε μόνο μία άσκηση η οποία αναφέρει δύο μετρήσεις οι οποίες συνοδεύονται από μονάδες μήκους και είναι ομοειδείς.

Όσο αφορά την ερμηνεία του εμβαδού μόνο το 15,8% των δραστηριοτήτων απαιτούν κάτι τέτοιο όπως φαίνεται και από τον παρακάτω πίνακα. Από αυτό το μικρό ποσοστό καταλαβαίνουμε ότι δε δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση και την ερμηνεία της έννοιας του εμβαδού από τις ασκήσεις των μαθηματικών με συνέπεια οι μαθητές να μην βοηθούνται στην ανάπτυξη ποιοτικής ερμηνείας και εννοιολογικής κατανόησης.

Πίνακας XI

Απαίτηση ερμηνείας του εμβαδού από τις δραστηριότητες των μαθηματικών

Ερμηνεία εμβαδού	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	16	84,2
Ναι	3	15,8
Σύνολο	19	100,0

Το είδος των σχημάτων τα οποία εμφανίζονται στις ασκήσεις των μαθηματικών είναι κυρίως αυτό των ευθύγραμμων σχημάτων με ποσοστό 89,5%. Το υπόλοιπο 10,5% αντιστοιχεί σε δύο ασκήσεις στις οποίες τα σχήματα προκύπτουν από το συνδυασμό κύκλων και ορθογωνίου και η απάντηση έχει μορφή συνόλου ή πράξεων μεταξύ συνόλων.

Πίνακας XII

Είδος σχήματος του οποίου το εμβαδόν υπολογίζεται στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Είδος σχήματος	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %

Ευθύγραμμο	17	89,5
Συνδυασμός ευθύγραμμων και μη	2	10,5
Σύνολο	19	100,0

Στις ασκήσεις των μαθηματικών εντοπίζονται κάποιες διεπιστημονικές αναφορές οι οποίες αφορούν την έννοια του εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα, όλες αυτές οι αναφορές μπορούμε να πούμε ότι είναι ενδοδιεπιστημονικές καθώς πρόκειται για αναφορές στις οποίες η έννοια του εμβαδού αντιστοιχίζεται είτε σε μία συνάρτηση η οποία έχει σύνολο τιμών μονάδων εμβαδού και περιγράφει τη μεταβολή του εμβαδού ως προς τη μεταβολή του μήκους ενός τμήματος είτε σε αναφορές στις οποίες το εμβαδόν αναπαριστά κάποιο ενδεχόμενο στο πλαίσιο του κλάδου των πιθανοτήτων. Αναλυτικότερα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στους παρακάτω πίνακες.

Πίνακας XIII

Χρήση της έννοια του εμβαδού με διεπιστημονικό τρόπο στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Διεπιστημονικότητα		
	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	12	63,2
Ναι	7	36,8
Σύνολο	19	100,0

Πίνακας XIV

Διεπιστημονική αναφορά για το εμβαδόν στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Διεπιστημονική αναφορά	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Συνάρτηση	5	71,4
Ενδεχόμενο	2	28,6
Σύνολο	7	100,0

Τέλος, όσον αφορά το συμβολισμό του εμβαδού, μπορούμε να πούμε ότι περίπου οι μισές ασκήσεις κάνουν τη χρήση κάποιου συμβολισμού για την έννοια του εμβαδού και πιο αναλυτικά αυτό φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας XV

Αναφορά συμβολισμού για το εμβαδόν στις δραστηριότητες των μαθηματικών

Συμβολισμοί	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	9	47,4
Ναι	10	52,6
Σύνολο	19	100,0

Δύο από τις ασκήσεις χρησιμοποιούν για το συμβολισμό του εμβαδού τα γράμματα Α, Β, Ω και πράξεις μεταξύ αυτών καθώς θεωρούνται σύνολα ενδεχομένων από τον κλάδο των πιθανοτήτων. Τρείς ασκήσεις χρησιμοποιούν το σύμβολο Ε, μία το σύμβολο Ε ακολουθούμενο από τους αριθμούς 1, 2, 3 με τη μορφή δείκτη π.χ. E_1 και τη μορφή (ΑΒΓ) όπου Α, Β, Γ είναι οι κορυφές του σχήματος το οποίο προκύπτει από την σύνδεση των σημείων αυτών με ευθύγραμμα τμήματα. Σε πέντε ασκήσεις το εμβαδόν συμβολίζεται με f(x) κάτι το οποίο παραπέμπει σε συνάρτηση και σε μία από αυτές τις πέντε ο τύπος της συνάρτησης αποτελεί μία αλγεβρική παράσταση. Πολύ εύκολα μπορεί κάποιος να καταλάβει ότι έχουμε μία μεγάλη ποικιλία από συμβολισμούς σε ένα σχετικά μικρό δείγμα ασκήσεων κάτι το οποίο ίσως να αποτελεί παράγοντα σύγχυσης των μαθητών όσο αφορά την έννοια του εμβαδού.

Αποτελέσματα ανάλυσης δραστηριοτήτων σχολικού εγχειριδίου φυσικής
Το περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού στο σχολικό εγχειρίδιο της φυσικής φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας XVI
Περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν το εμβαδόν στις δραστηριότητες της φυσικής

Περιβάλλον	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Γράφημα-Διάγραμμα	30	96,8
Ακανόνιστο σχήμα	1	3,2
Σύνολο	31	100,0

Το μεγαλύτερο ποσοστό το κατέχουν οι δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν από τους μαθητές να διαχειριστούν το εμβαδόν στο περιβάλλον του διαγράμματος ενώ μόνο μία δραστηριότητα απαιτεί την διαχείριση του εμβαδού στο περιβάλλον του ακανόνιστου σχήματος.
Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε και για τις προσεγγιστικές λύσεις όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας XVII
Επιτρέπονται προσεγγιστικές λύσεις στον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες της φυσικής;

Προσεγγιστικές λύσεις	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	30	96,8
Ναι	1	3,2
Σύνολο	31	100,0

Μόνο μία από τις τριανταμία δραστηριότητες επιτρέπουν να λυθεί η άσκηση με προσεγγιστικό τρόπο.
Όσον αφορά την ανάκληση τύπων εμβαδού και τη χρήση τους τα αποτελέσματα απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας XVIII
Απαίτηση των δραστηριοτήτων της φυσικής για ανάκληση ή χρήση τύπου εμβαδού

Ανάκληση ή και χρήση τύπου	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	5	16,1
Ναι	26	83,9
Σύνολο	31	100,0

Βλέπουμε ότι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της τάξεως του 83,9% απαιτεί από τους μαθητές να ανακαλέσουν από τη μνήμη τους ένα τύπο για το εμβαδόν και να τον χρησιμοποιήσουν. Εν αντιθέσει οι δραστηριότητες οι οποίες δεν απαιτούν την ανάκληση και χρήση εμβαδού κατέχουν ένα μικρό ποσοστό (16,1%).
Όλες οι δραστηριότητες απαιτούν την εφαρμογή μιας μεθοδολογίας είτε αυτή είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις είτε παρουσιάζεται στην αρχή του εκάστοτε κεφαλαίου το οποίο περιέχει τις δραστηριότητες.
Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει αν το εμβαδόν σχετίζεται με μια αριθμητική πράξη ή όχι.

Πίνακας XIX

Συσχέτιση του εμβαδού με αριθμητική πράξη των δραστηριοτήτων της φυσικής

Συσχέτιση με πράξη	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	4	12,9
Ναι	27	87,1
Σύνολο	31	100,0

Ένα μεγάλο ποσοστό των δραστηριοτήτων φαίνεται να σχετίζεται με κάποια αριθμητική πράξη και μάλιστα η πράξη αυτή είναι ο πολλαπλασιασμός.
Στις δραστηριότητες άλλοτε αναφέρονται μονάδες και άλλοτε όχι. Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει τα αποτελέσματα όσον αφορά την εμφάνιση μονάδων στις δραστηριότητες.

Πίνακας XX

Αναφορά μονάδων στις δραστηριότητες των δραστηριοτήτων της φυσικής

Μονάδες	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Δεν αναφέρονται	4	12,9
Αναφέρονται	27	87,1
Σύνολο	31	100,0

Το μεγαλύτερο ποσοστό δραστηριοτήτων αναφέρει μονάδες ενώ οι δραστηριότητες οι οποίες δεν αναφέρουν μονάδες κατέχουν ένα πολύ μικρό ποσοστό της τάξεως του 12,9%.
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε το είδος των μονάδων που αναφέρονται σε όσες από τις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου αναφέρονται μονάδες.

Πίνακας XXI

Είδη μονάδων που εμφανίζονται στις δραστηριότητες της φυσικής

Είδος μονάδων	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Εμβαδού	1	3,7
Ταχύτητας, Χρόνου & Μήκους	2	7,4
Ταχύτητας & Μήκους	3	11,1
Ταχύτητας & Χρόνου	8	29,6
Μήκους & Χρόνου	1	3,7
Επιτάχυνσης & Χρόνου	1	3,7
Ταχύτητας, Χρόνου & Επιβράδυνσης	1	3,7
Ταχύτητας & Επιβράδυνσης	1	3,7
Βάρους & Μήκους	1	3,7
Ταχύτητας, Μήκους & Δύναμης	3	11,1
Μάζας, Μήκους & Επιτάχυνσης	1	3,7
Δύναμης & Μήκους	1	3,7
Μάζας, Δύναμης & Μήκους	3	11,1
Σύνολο	27	100,0

Το είδος το μονάδων παρουσιάζει μεγάλη ποικιλία και μάλιστα σε όλες τις δραστηριότητες στις οποίες παρουσιάζονται παραπάνω από μία μετρήσεις οι μονάδες τους δεν είναι ομοειδείς.

Όσον αφορά την ερμηνεία του εμβαδού των διαγραμμάτων, ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει κατά πόσο οι δραστηριότητες της φυσικής απαιτούν ή όχι την ερμηνεία του εμβαδού.

Πίνακας XXII

Απαίτηση ερμηνείας του εμβαδού από τις δραστηριότητες της φυσικής

Ερμηνεία εμβαδού	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	1	3,2
Ναι	30	96,8
Σύνολο	31	100,0

Βλέπουμε ότι μόνο μία δραστηριότητα δεν απαιτεί την ερμηνεία του εμβαδού από τις τριανταμία.
Τα σχήματα των οποίων το εμβαδών καλούνται να υπολογίσουν οι μαθητές στις δραστηριότητες απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας XXIII

Είδος σχήματος του οποίου το εμβαδόν υπολογίζεται στις δραστηριότητες της φυσικής

Είδος σχήματος	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Ευθύγραμμο	30	96,8
Μη ευθύγραμμο	1	3,2
Σύνολο	31	100,0

Αρκετά σημαντικό είναι ότι όλες οι δραστηριότητες εκτός από μία απαιτούν από τους μαθητές να διαχειριστούν το εμβαδόν σε ευθύγραμμα σχήματα. Η μία στην οποία το σχήμα δεν είναι ευθύγραμμο πρόκειται για ένα ακανόνιστο σχήμα.
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε κατά πόσο το εμβαδόν χρησιμοποιείται διεπιστημονικά ή όχι στις δραστηριότητες της φυσικής.

Πίνακας XXIV

Χρήση της έννοια του εμβαδού με διεπιστημονικό τρόπο στις δραστηριότητες της φυσικής

Διεπιστημονικότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Όχι	2	6,5
Ναι	29	93,5
Σύνολο	31	100,0

Στο μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων της φυσική στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού παρατηρούμε πως αυτό χρησιμοποιείται με διεπιστημονικό τρόπο και στον επόμενο πίνακα παρουσιάζουμε τις διεπιστημονικές αναφορές οι οποίες εντοπίζονται στις δραστηριότητες της φυσικής και αφορούν το εμβαδόν.

Πίνακας XXV

Διεπιστημονική αναφορά για το εμβαδόν στις δραστηριότητες της φυσικής

Διεπιστημονική αναφορά	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
Μετατόπιση	2	6,9
Απόσταση-διάστημα	17	58,6
Ταχύτητα & Απόσταση	1	3,4

Μετατόπιση & Διάστημα	1	3,4
Έργο δύναμης	7	24,1
Ενέργεια	1	3,4
Σύνολο	29	100,0

Το μεγαλύτερο ποσοστό το κατέχουν αναφορές οι οποίες αφορούν κάποια απόσταση ή διάστημα και ακολουθούν οι αναφορές που αφορούν το έργο μιας δύναμης. Επίσης, υπάρχουν αναφορές οι οποίες αφορούν ταχύτητα μετατόπιση και ενέργεια.
Τέλος, όσον αφορά το συμβολισμό για το εμβαδόν μόνο σε μία δραστηριότητα συναντάμε συμβολισμούς και συγκεκριμένα τους E_α και E_β.
Στο επόμενο κεφάλαιο επιχειρούμε να προβούμε σε κάποια συμπεράσματα τα οποία αφορούν στις συγκλίσεις ή αποκλίσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων της ιστορίας και της έρευνας της διδακτικής.

Συμπεράσματα

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο επιχειρούμε να συντάξουμε τα συμπεράσματα της έρευνας μας. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουμε τις συγκλίσεις και αποκλίσεις μεταξύ των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων τα οποία μελετάμε, τι αναφέρει η ιστορία και οι έρευνες της διδακτικής και προτείνουμε κάποιες πιθανές προεκτάσεις της έρευνας.

Συγκλίσεις και αποκλίσεις δραστηριοτήτων Μαθηματικών και Φυσικής

Στην παράγραφο αυτή επιχειρούμε να παρουσιάσουμε τις συγκλίσεις και τις αποκλίσεις των δραστηριοτήτων σύμφωνα με τους άξονες ανάλυσης μας όπως εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία αναλύονται στην παρούσα εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, επιχειρούμε να συγκρίνουμε μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Α λυκείου τα εξής:

- Σε ποιο περιβάλλον εμφανίζεται ο υπολογισμός του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα διάφορα προβλήματα και αν επιχειρούν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε πρόβλημα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Ποιες αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής
- Εάν αναφέρονται και καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα στις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής

Αρχικά όσον αφορά το περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού στα δύο σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών και φυσικής βλέπουμε ότι στο βιβλίο των μαθηματικών το εμβαδόν οι μαθητές καλούνται να το διαχειριστούν ως επί το πλείστον σε κάποιο γεωμετρικό σχήμα ενώ στο βιβλίο της φυσικής σχεδόν όλες οι δραστηριότητες αφορούν το περιβάλλον του διαγράμματος.

Στις δραστηριότητες των μαθηματικών δεν υπάρχουν αναφορές οι οποίες να επιτρέπουν προσεγγιστικές λύσεις και το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τις δραστηριότητες της φυσικής με εξαίρεση μόνο μία άσκηση καθώς δεν αναφέρεται ούτε από την εκφώνηση αλλά και η εφαρμογή των τύπων δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο.

Για την ανάκληση και χρήση των τύπων εμβαδού βλέπουμε ότι τόσο οι δραστηριότητες των μαθηματικών όσο και της φυσικής δίνουν πολύ μεγάλη σημασία σε αυτό καθώς και στα δύο σχολικά εγχειρίδια για την επίλυση των δραστηριοτήτων η ανάκληση και χρήση τους είναι απαραίτητα σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Και στα δύο σχολικά εγχειρίδια οι δραστηριότητες οι οποίες εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού απαιτούν από τους μαθητές να ακολουθήσουν τα βήματα μιας αλγοριθμικής διαδικασίας ή μιας μεθοδολογίας η οποία είτε τους παρέχεται στην αρχή κάθε παραγράφου η οποία αφορά ένα γνωστικό αντικείμενο ή είναι είδη γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Βλέπουμε λοιπόν πως η διαχείριση της έννοιας του εμβαδού γίνετε μέσω της παροχής στους μαθητές ενός συνόλου ασκήσεων οι οποίες μπορούν να επιλυθούν αν ακολουθήσουν μία διαδικασία.

Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι δραστηριότητες και των δύο σχολικών εγχειριδίων σχετίζουν την έννοια του εμβαδού με την αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού καθώς μέσω της εφαρμογής του τύπου οι μαθητές αναγκάζονται να εκτελούν πολλαπλασιασμούς άλλοτε με μονάδες που αφορούν μήκος και άλλοτε με μονάδες οι οποίες έχουν κάποια φυσική σημασία όπως π.χ. δύναμη και απόσταση.

Όσον αφορά τις μονάδες μπορούμε να πούμε ότι το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών αναφέρει μονάδες στις δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκεται το εμβαδόν σε ένα ποσοστό λίγο μικρότερο από το 50% των δραστηριοτήτων εν αντιθέσει με το βιβλίο της φυσικής όπου ποσοστό της τάξης του 87,1% των δραστηριοτήτων αναφέρουν μονάδες. Είναι εμφανές πως στη φυσική δίνεται περισσότερη έμφαση στις μονάδες σε σχέση με τα μαθηματικά.

Το είδος των μονάδων που αναφέρονται από τα σχολικά εγχειρίδια ποικίλει και πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι δεν αναφέρονται μονάδες εμβαδού σε μεγάλο βαθμό αλλά διάφορες άλλες μονάδες οι οποίες πρέπει να πολλαπλασιαστούν για να υπολογιστεί το εμβαδόν και μάλιστα στη περίπτωση της φυσική μας αφορά μόνο η αριθμητική τιμή. Κάτι τέτοιο δεν βοηθάει τους μαθητές να εξοικειωθούν με τις μονάδες του εμβαδού και να κατανοήσουν ότι το εμβαδόν έχει δική του μονάδα μέτρησης και δεν είναι μία απλή εφαρμογή ενός τύπου.

Οι μονάδες τις οποίες πρέπει να διαχειριστούν για να υπολογίσουν οι μαθητές το εμβαδόν όσον αφορά το βιβλίο της φυσικής δεν είναι ομοειδής ενώ στο βιβλίο των μαθηματικών μόνο μία άσκηση παρουσιάζει δύο ομοειδείς μονάδες οι οποίες πολλαπλασιάζονται προκειμένου να υπολογιστεί το εμβαδόν.

Το εμβαδόν στις περισσότερες δραστηριότητες των μαθηματικών δεν απαιτείται να ερμηνευθεί εν αντιθέσει με τις δραστηριότητες της φυσικής όπου σχεδόν όλες οι δραστηριότητες απαιτούν την ερμηνεία του εμβαδού ενός διαγράμματος.

Τα σχήματα των οποίων οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδόν είναι κυρίως ευθύγραμμα τόσο στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών όσο και σε αυτές του βιβλίου της φυσικής.

Όσον αφορά τη διεπιστημονικότητα, οι δραστηριότητες των μαθηματικών που χρησιμοποιούν την έννοια του εμβαδού με διεπιστημονικό τρόπο και μάλιστα ενδοδιεπιστημονικό κατέχουν ποσοστό 36,8% ενώ οι δραστηριότητες της φυσικής μπορούμε να πούμε ότι χρησιμοποιούν την έννοια του εμβαδού καθαρά διεπιστημονικά προκειμένου να εκφράσουν ένα φυσικό μέγεθος σε ποσοστό 93,5%.

Οι διεπιστημονικές αναφορές οι οποίες εντοπίζονται στα μαθηματικά και αφορούν το εμβαδόν είναι αυτές της συνάρτησης και του ενδεχομένου. Παρατηρούμε ότι είναι ενδοδιεπιστημονικές αναφορές και όχι καθαρά διεπιστημονικές καθώς πρόκειται για έννοιες των μαθηματικών. Στις δραστηριότητες της φυσικής, οι διεπιστημονικές αναφορές οι οποίες εντοπίζονται είναι καθαρά διεπιστημονικές αφού αφορούν φυσικά μεγέθη με τις αναφορές οι οποίες αφορούν κάποια απόσταση ή διάστημα να κατέχουν το μεγαλύτερο ποσοστό και ακολουθούν οι αναφορές που αφορούν έργο μιας δύναμης και έπιτα αναφορές που αντιστοιχούν σε μετατόπιση, ενέργεια και ταχύτητα.

Όσον αφορά το συμβολισμό για το εμβαδόν αυτό το οποίο παρατηρείται είναι ότι περίπου οι μισές δραστηριότητες (52,6%) του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών αναφέρουν κάποιο συμβολισμό. Οι συμβολισμοί αυτοί είναι συνήθως το γράμμα Ε είτε μόνο του είτε ακολουθούμενο από ένα αριθμό με τη μορφή δείκτη ενώ χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός f(x) για να δηλώσει ότι το εμβαδόν είναι μία συνάρτηση της οποίας η τιμή μεταβάλλεται σύμφωνα με τη μεταβολή μίας άλλης ποσότητας. Οι δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου της φυσικής δεν αναφέρουν κάποιο συμβολισμό για το εμβαδόν εκτός από μία η οποία ακολουθεί το συμβολισμό με το γράμμα Ε ακολουθούμενο από ένα πεζό γράμμα με τη μορφή δείκτη.

Συγκλίσεις και αποκλίσεις ιστορικών στοιχείων και σχολικών εγχειριδίων

Στην παράγραφο αυτή επιχειρούμε να κάνουμε μία σύγκριση και να παρουσιάσουμε αν τα δεδομένα από την ιστορική ανασκόπηση του εμβαδού συγκλίνουν ή αποκλίνουν με αυτά των δεδομένων από τα σχολικά εγχειρίδια τα οποία εξετάζουμε στην παρούσα εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, επιχειρούμε να συγκρίνουμε μεταξύ των ιστορικών στοιχείων και των αποτελεσμάτων τα οποία έχουμε από την ανάλυση των εγχειριδίων μας τα εξής:

- Σε ποιο περιβάλλον εμφανίζεται ο υπολογισμός του εμβαδού στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Εάν γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα διάφορα προβλήματα και αν επιχειρούν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε πρόβλημα στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Ποιες αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Εάν αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια
- Εάν αναφέρονται και καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα στην ιστορία και στα σχολικά εγχειρίδια

Οι Burton (2011) και Katz (2013) αναφέρουν ότι το εμβαδόν χρησιμοποιήθηκε αρχικά σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής σε θέματα τα οποία αφορούσαν φορολογία, υπολογισμό εργατών για την υλοποίηση ενός έργου και γενικότερα για πρακτικούς σκοπούς της καθημερινής ζωής. Τα σχολικά εγχειρίδια τα οποία εξετάζουμε δεν προσεγγίζουν την έννοια του εμβαδού μέσω καταστάσεων της καθημερινής καθώς μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των δραστηριοτήτων των μαθηματικών (10,5%) αναφέρεται σε καταστάσεις καθημερινής ζωής και οι δραστηριότητες του εγχειριδίου της φυσικής απαιτούν από τους μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού ως εργαλείο για την έκφραση και τον υπολογισμό ενός φυσικού μεγέθους σε περιβάλλον κάποιου διαγράμματος.

Ιστορικά παρατηρούμε ότι οι λύσεις κατά προσέγγιση ήταν αποδεκτές σε προβλήματα τα οποία εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού και τα μικρά σφάλματα παραβλέπονταν καθώς ο υπολογισμός του εμβαδού αφορούσε καθαρά πρακτικά θέματα. Αντίθετα οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής της Α λυκείου δεν αφήνουν τα περιθώρια προσεγγιστικής λύσης καθώς η πλειονότητα τους απαιτεί την εφαρμογή τύπου όπου επιστρέφεται ένα αυστηρό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Πολύ σημαντική φαίνεται πως είναι η χρήση τύπων υπολογισμού για το εμβαδόν τόσο από τα ιστορικά δεδομένα, σύμφωνα με τα οποία η χρήση των τύπων είχε μεγάλη σημασία, όσο και από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και της φυσικής της Α λυκείου καθώς το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων που εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού απαιτούν για την επίλυση τους την ανάκληση και την εφαρμογή τύπου υπολογισμού του εμβαδού.

Όσον αφορά τη διαχείριση των δραστηριοτήτων που εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού βλέπουμε ότι τα ιστορικά στοιχεία περιέχουν αναφορές σύμφωνα με τις οποίες τα προβλήματα και οι ασκήσεις καταγράφονταν και με τον τρόπο αυτό δημιουργήθηκαν κάποιες συλλογές ασκήσεων (π.χ. Σουλβασούτρες, Μαθηματική Τέχνη κ.α.) που περιείχαν προβλήματα και κάποιες έτοιμες λύσεις. Παρόμοια φαίνεται να είναι και η διαχείριση της έννοιας του εμβαδού και από τα δύο σχολικά εγχειρίδια τα οποία εξετάζουμε. Το εμβαδόν αντιμετωπίζεται ως μία αλγοριθμική διαδικασία μέσω της οποίας αντικαθιστούνται κάποιες μετρήσεις σε ένα τύπο εμβαδού ο οποίος επιστρέφει μία αριθμητική τιμή τόσο στις δραστηριότητες των μαθηματικών όσο και σε αυτές της φυσικής. Οι μαθητές για να καταφέρουν να λύσουν τις ασκήσεις πρέπει να γνωρίζουν μεθοδολογία από προηγούμενες τάξεις ή τη μεθοδολογία η οποία παρουσιάζεται στην αρχή κάθε κεφαλαίου το οποίο περιέχει τις εκάστοτε δραστηριότητες. Ουσιαστικά και στα δύο σχολικά εγχειρίδια παρατηρούμε μία σύγκλιση με τα ιστορικά στοιχεία ότι δηλαδή παρέχεται μία έτοιμη συνταγή για τις ασκήσεις των οποίων η λύση θα ζητηθεί.

Σύμφωνα με τα ιστορικά δεδομένα, ο Ευκλείδης θεμελίωσε το εμβαδόν ως την επιφάνεια που ορίζουν δύο ευθύγραμμα τμήματα για τον υπολογισμό της οποίας πολλαπλασιάζονται τα μήκη των ευθύγραμμων αυτών τμημάτων. Ανάλογη είναι και η εικόνα που παίρνουμε από τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των εγχειριδίων της έρευνας μας καθώς για τον υπολογισμό του εμβαδού οι μαθητές πρέπει να προβούν στον πολλαπλασιασμό κάποιων μετρήσεων κατά την εφαρμογή των τύπων.

Στα ιστορικά στοιχεία δεν γίνονται αναφορές στις μονάδες των μετρήσεων. Όσον αφορά τις δραστηριότητες του βιβλίου των μαθηματικών μόνο 8 από τις 19 παρουσιάζουν μονάδες μετρήσεων και οι περισσότερες από αυτές αφορούν μήκος. Αντίθετα, οι περισσότερες δραστηριότητες της φυσικής, οι 27 από τις 31, αναφέρουν μονάδες μέτρησης και μάλιστα συναντάμε μεγάλη ποικιλία μονάδων. Οι μονάδες αυτές αφορούν χρόνο, μήκος, ταχύτητα, επιτάχυνσης, επιβράδυνσης, βάρους και εμβαδού. Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι μόνο μία άσκηση από το βιβλίο της φυσικής αναφέρει μονάδες εμβαδού και τρεις ασκήσεις από το βιβλίο των μαθηματικών.

Ο προσδιορισμός του εμβαδού κάτω από διάφορες καμπύλες γραφημάτων αλλά και των καμπυλόγραμμων σχημάτων φαίνεται πως απασχολούσε σε μεγάλο βαθμό τους μαθηματικούς από τα ιστορικά δεδομένα. Αντίθετα τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και της φυσικής της έρευνας μας διαχειρίζονται την έννοια του εμβαδού ως επί το πλείστον σε ευθύγραμμα σχήματα.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι το περιβάλλον το οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού δεν είναι πλέον αυτό των καταστάσεων της καθημερινής ζωής μέσα από τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων και δεν ζητούνται προσεγγιστικές λύσεις καθώς το εμβαδόν είναι άμεσα συνδεδεμένο με τύπους υπολογισμού. Οι τύποι παίζουν μεγάλο ρόλο στις ασκήσεις που εμπλέκουν την έννοια του εμβαδού και η διαχείριση των δραστηριοτήτων γίνεται βάσει της μεθοδολογίας και των παραδειγμάτων τα οποία παρουσιάζουν τα σχολικά εγχειρίδια. Η αριθμητική πράξη του πολλαπλασιασμού είναι στενά συνδεδεμένη με τον υπολογισμό του εμβαδού καθώς για τον υπολογισμό απαιτείται η εφαρμογή τύπων οι οποίοι πολλαπλασιάζουν μετρήσεις. Όσον αφορά τις μονάδες, ιστορικά φαίνεται να μην γίνεται αναφορά σε αυτές, οι δραστηριότητες των μαθηματικών να μη δίνουν τη σημασία η οποία απαιτείται ενώ αντίθετα οι δραστηριότητες της φυσικής δίνουν πολύ μεγάλη σημασία σε αυτές. Τέλος, παρατηρούμε ότι σχεδόν όλες οι δραστηριότητες τόσο των μαθηματικών όσο και της φυσικής της Α λυκείου ασχολούνται με το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων.

Συγκλίσεις και αποκλίσεις έρευνας διδακτικής και σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών και φυσικής Α λυκείου

Στην παράγραφο αυτή επιχειρούμε να συγκρίνουμε τα όσα έχουμε επισημάνει στο κεφάλαιο της έρευνας της διδακτικής σε σχέση με το εμβαδόν με τα αποτελέσματα μας τα οποία αφορούν την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής.

Πιο συγκεκριμένα, επιχειρούμε να εκφράσουμε κάποια συμπεράσματα για τις δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται από τις έρευνες τις διδακτικής.

Τα ερωτήματα τα οποία μας απασχολούν είναι τα ακόλουθα:

- Σε ποιο περιβάλλον εμφανίζεται ο υπολογισμός του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια και στην έρευνα της διδακτικής
- Εάν γίνονται δεκτές προσεγγιστικές λύσεις στα σχολικά εγχειρίδια και τι δείχνουν οι έρευνες της διδακτικής
- Ποια είναι η σημασία της χρήσης τύπων για τον υπολογισμό του εμβαδού σύμφωνα με την έρευνα της διδακτικής και τα σχολικά εγχειρίδια
- Τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα διάφορα προβλήματα και αν επιχειρούν να παρέχουν μια έτοιμη «συνταγή» για κάθε προβλήματα σχολικά εγχειρίδια και τι δείχνουν οι έρευνες της διδακτικής
- Ποιες αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια και τι δείχνουν οι έρευνες της διδακτικής
- Εάν αναφέρονται στις μονάδες μέτρησης τα σχολικά εγχειρίδια και τι δείχνουν οι έρευνες της διδακτικής
- Εάν αναφέρονται και καμπυλόγραμμα σχήματα και σε γραφήματα στα σχολικά εγχειρίδια και τι δείχνουν οι έρευνες της διδακτικής

Το περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι μαθητές να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και της φυσικής είναι κυρίως το γεωμετρικό σχήμα και τα διαγράμματα αντίστοιχα. Εν αντιθέσει το περιβάλλον το οποίο φαίνεται πως χρησιμοποιεί η έρευνα για την διαχείριση της έννοιας του εμβαδού είναι αυτό της καθημερινής ζωής το οποίο μεταφέρεται κατάλληλα σε γεωμετρικά σχήματα (π.χ. Fernándezetal., 2014; Σταματέλου, 2016). Βέβαια δεν λείπουν και αυτά στα οποία η διαχείριση του εμβαδού γίνεται σε διαγράμματα (π.χ. Graham&Sharp, 1999).

Όσον αφορά τις λύσεις κατά προσέγγιση, οι δραστηριότητες των εγχειριδίων τα οποία εξετάζουμε δεν τις κάνουν αποδεκτές πράγμα το οποίο συμφωνεί με τα όσα αναφέρονται και στην έρευνα της διδακτικής. Πιο συγκεκριμένα, ο υπολογισμός του εμβαδού προκύπτει από την εφαρμογή ενός τύπου που επιστρέφει μία ακριβή αριθμητική τιμή. Αυτό σύμφωνα με τον Machaba (2016) οδηγεί τους μαθητές σε αδυναμία διαχείρισης της έννοιας του εμβαδού όταν δεν τους παρέχονται μετρήσεις ενώ οι Patahuddin et al. (2018) αναφέρουν ότι με τον τρόπο αυτό της άμεσης σύνδεσης του εμβαδού με τον τύπο υπολογισμού δημιουργείται η ανάγκη στους μαθητές για χρήση αριθμών.

Τόσο στο εγχειρίδιο των μαθηματικών όσο και σε αυτό της φυσικής οι δραστηριότητες φαίνεται να δίνουν μεγάλη σημασία στην ανάκληση και την εφαρμογή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού καθώς χωρίς αυτούς δε μπορεί να επιτευχθεί η λύση των ασκήσεων. Οι έρευνες της διδακτικής δείχνουν ότι η σύνδεση της έννοιας του εμβαδού με τους τύπους υπολογισμού προκαλεί σύγχυση στους μαθητές (Machaba, 2016; Tossavainen et al., 2017) και μάλιστα οι μαθητές αδυνατούν να δώσουν έναν ορισμό για το εμβαδόν χωρίς να χρησιμοποιήσουν ένα τύπο υπολογισμού ενώ παράλληλα προσπαθούν να εφαρμόσουν τύπους και σε ακανόνιστα σχήματα (Machaba, 2016). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τη Σταματέλου (2016) οι μαθητές αρκετές φορές έχουν την τάση να μετρούν τμήματα προκειμένου να εφαρμόσουν ένα τύπο υπολογισμού ακόμα και όταν δεν τους ζητείται κάτι τέτοιο. Η σύνδεση του εμβαδού με τους τύπους υπολογισμού είναι κάτι το οποίο δεν συνάδει με την έννοια του εμβαδού και οδηγεί τους μαθητές στην απλή αντικατάσταση αριθμών σε ένα τύπο και την εκτέλεση τους. Βέβαια κάποιος ο οποίος έχει κατακτήσει την έννοια του εμβαδού μπορεί να κατανοήσει ότι κάτι τέτοιο απέχει από την έννοια του εμβαδού.

Οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής δίνουν πολύ μεγάλη έμφαση στην ανάκληση και εφαρμογή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού όπως φαίνεται από την ανάλυση μας. Σύμφωνα με τους Baturo & Nason, (1996) η χρήση τύπων και η έμφαση στο αριθμητικό αποτέλεσμα συνιστά πρόβλημα της εννοιολογικής κατανόησης του εμβαδού. Επίσης, πολλά σχολικά εγχειρίδια δεν ορίζουν την έννοια του εμβαδού αλλά εισάγουν τους μαθητές στην έννοια παρουσιάζοντας τους τύπους υπολογισμού (Patahuddin et al., 2018) χωρίς να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Επιπρόσθετα, οι μαθητές λανθασμένα προσπαθούν να εφαρμόσουν τύπους με τρόπο ακατάλληλο και οδηγούνται σε λάθος απαντήσεις (Machaba, 2016).

Παρατηρούμε ότι οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής στις οποίες εμπλέκεται η έννοια του εμβαδού απαιτούν για την επίλυση τους τη γνώση της μεθοδολογίας και των διαδικασιών τα οποία παρουσιάζονται στην αρχή του κάθε κεφαλαίου το οποίο περιέχει τις δραστηριότητες αυτές. Σε κάποιες από τις δραστηριότητες αυτές οι γνώσεις οι οποίες απαιτούνται είναι μεθοδολογία από προηγούμενες τάξεις. Σύμφωνα τώρα με τις έρευνες της διδακτικής λόγω της πάγιας εφαρμογής των τύπων και του ζητούμενου μιας αριθμητικής τιμής η εννοιολογική κατανόηση δεν επιτυγχάνεται όπως θα έπρεπε (Machaba, 2016) διότι η έννοια του εμβαδού έχει αναχθεί σε γνώση των τύπων.

Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι αυτή που χρησιμοποιείται στο μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής για τον υπολογισμό του εμβαδού. Αυτό φαίνεται να έχει ως εξήγηση τον κανόνα μήκοςxπλάτος τον οποίο συχνά οι μαθητές προσπαθούν να εφαρμόσουν αλλά και την πράξη την οποία πρέπει να εκτελέσει ο μαθητής κατά την εφαρμογή ενός τύπου υπολογισμού του εμβαδού. Σύμφωνα όμως με τους Baturo & Nason, (1996) ο πολλαπλασιασμός κάποιων μετρήσεων και ιδιαίτερα γραμμικών για τον υπολογισμό του εμβαδού δεν συνάδει με την έννοια του εμβαδού.

Οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών και της φυσικής παρουσιάζουν διαφορές στην εμφάνιση μονάδων. Μόνο οι μισές σχεδόν δραστηριότητες των μαθηματικών παρουσιάζουν μονάδες ενώ σχεδόν όλες οι δραστηριότητες της φυσικής παρουσιάζουν μονάδες. Ο Σιδηρόπουλος (2013)αναφέρει ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τις μονάδες και ότι δυσκολεύονται να τις διαχειριστούν. Επομένως ίσως το γεγονός ότι οι δραστηριότητες των μαθηματικών δεν αναφέρουν μονάδες να διατηρεί αυτό το πρόβλημα το οποίο αφορά τις μονάδες. Οι μονάδες οι οποίες πολλαπλασιάζονται για τον υπολογισμό του εμβαδού στις δραστηριότητες των μαθηματικών είναι γραμμικές και το αποτέλεσμα τετραγωνική μονάδα. Αυτό σύμφωνα με τους Baturo & Nason (1996) αποτελεί βασική πηγή δυσκολίας για τους μαθητές. Στο σημείο αυτό αντιλαμβανόμαστε πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν το οποίο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό μετρήσεων οι οποίες αφορούν φυσικά μεγέθη όπως χρόνο, ταχύτητα, δύναμη και αλλά. Ουσιαστικά, οι μαθητές μπερδεύονται και πρέπει να γίνει σαφές ότι ο υπολογισμός του εμβαδού αποτελεί ένα τρόπο έκφρασης ενός φυσικού μεγέθους χωρίς να αλλοιώνεται η έννοια του εμβαδού.

Όσον αφορά το είδος των σχημάτων στα οποία οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν την έννοια του εμβαδού τόσο το βιβλίο των μαθηματικών όσο και αυτό της φυσικής κάνουν χρήση ευθύγραμμων τμημάτων ως επί το πλείστον. Ωστόσο το γεγονός αυτό φαίνεται πως βοηθάει τους μαθητές να μπορούν να εφαρμόσουν σωστά τους τύπους υπολογισμού.

Προτάσεις για περεταίρω έρευνα

Η παρούσα έρευνα μπορεί να έχει κάποιες προεκτάσεις καθώς η έννοια του εμβαδού συναντάται σχεδόν σε όλο το εκπαιδευτικό φάσμα. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσε να μελετηθεί η εμφάνιση της έννοιας του εμβαδού στα σχολικά εγχειρίδια και τις δραστηριότητες τις οποίες περιέχονται σε αυτά σε άλλες τάξεις και σε διαφορετικά μαθήματα. Επίσης, μία πιθανή και απαραίτητη έρευνα θα ήταν η αξιολόγηση της κατανόησης της έννοιας από τους μαθητές μέσω ερωτηματολογίου και η αξιολόγηση του κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διεπιστημονική χρήση της έννοιας του εμβαδού μέσα από την εμφάνιση της στα σχολικά εγχειρίδια και τις δραστηριότητες.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ayan, R., &IsiksalBostan, M. (2018). Middle School Students' Reasoning in Nonlinear Proportional Problems in Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(3), 503–518. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9777-z

Bashmakova, I. G. (2014). *Ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών* (Ι. Βανδουλάκης, Trans.). Αθήνα: Παπασωτηρίου.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235–268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics: An introduction* (7th ed). New York: McGraw-Hill.

Darlington, E. (2014). Contrasts in mathematical challenges in A-level Mathematics and Further Mathematics, and undergraduate mathematics examinations. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *33*(4), 213–229.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 311–334. https://doi.org/10.1023/A:1021205413749

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the Linear Model in Secondary School Students' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(1), 65–83. https://doi.org/10.1023/A:1003151011999

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fernández, C., De Bock, D., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2014). Do students confuse dimensionality and “directionality”? *The Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 166–176. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.07.001

Graham, T., & Sharp, J. (1999). *An investigation into able students’ understanding of motion graphs*.

Jeremy, M., & Roitman, J. (2014, January 14). *Notes on the History of Mathematics*. Retrieved from https://www.math.ku.edu/~roitman/HistoryNotes.pdf

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (2nd ed; Γ. Χριστιανίδης, Ed.; Κ. Χατζηκυριάκου, Trans.). Reading, Mass: Addison-Wesley.

Katz, V. J. (2013). *ΙστορίατωνΜαθηματικών: Μιαεισαγωγή* (Γ. Χριστιανίδης, Ed.; Κ. Χατζηκυριάκου, Trans.).

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students’ strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 177–209. https://doi.org/10.1023/A:1024065107302

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). Children’s approaches to area measurement through different contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(3), 303–316. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80065-2

Machaba, F. M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, *37*(1), 1–11.

Manouchehri, A., Yao, X., Fleming, A., & Gomez, M. (2016). What Do Mathematics Achievement Examinations Assess? A Critical Item Analysis. *Athens Journal of Education*, *3*(4), 313–330.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503–513.

Mellor, K., Clark, R., & Essien, A. A. (2018). Affordances for learning linear functions: A comparative study of two textbooks from South Africa and Germany. *Pythagoras*, *39*(1), 1–12.

Nguyen, D.-H., & Rebello, N. S. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *7*(1), 010112.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction*, *3*(1), 39–54.

Patahuddin, S., Logan, T., & Ramful, A. (2018). Characteristics of Spatial Visualisation: Perspectives from Area of Composite Shapes. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Tossavainen, T., Suomalainen, H., & Mäkäläinen, T. (2017). Student teachers' concept definitions of area and their understanding about two-dimensionality of area. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(4), 520–532. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1254298

Αναστασοπούλου, Π. (2008). *Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων του γυμνασίου σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele* (Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (1991). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α τάξης Γενικού Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος».

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., & Τιμοθέου, Γ. (n.d.). *Φυσική Γενικής Παιδείας Ά Γενικού Λυκείου*. ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Γεωργόπουλος, Κ., Μπέλλου, Ι., & Μικρόπουλος, Τ. (2013). Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών κλίσης και εμβαδού στις γραφικές παραστάσεις κινηματικών φαινομένων. In Δ. Βαβουγυιός & Σ. Παρασκευόπουλος (Eds.), *8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση*. Βόλος: Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Καφούση, Σ., Σκουμπουρδή, Χ., & Τάτσης, Κ. (2009). Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α΄ Δημοτικού. *Ευκλείδης γ, ΕΜΕ Τεύχος*, *71*, 42–62.

Κωστάκης, Λ. (2018). *Επί της Θεμελίωσης της Έννοιας του «Εμβαδού»* (Διπλωματική Εργασία). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Αθήνα.

Ξενάκη, Α. (2017). *Οι διαδικασίες μέτρησης και υπολογισμού κατά τη μετάβαση από την έννοια του μήκους στην έννοια εμβαδού: Συγκριτική μελέτη στα βιβλία μαθηματικών και γεωγραφίας της Στ΄δημοτικού* (Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

Σιδηρόπουλος, Α. (2013). *Ο ρόλος του διπλού τετραγωνικού πλέγματος ως διδακτικού μέσου/βοηθήματος στο Γυμνάσιο: Η περίπτωση του διπλασιασμού του τετραγώνου.* (Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

Σκουμπουρδή (Crisanthi Skoumbourdi), Χ., & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου (Dimitra Papaioannou- Stravolaimou), Δ. (2017). Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων. *Έρευνα Στη Διδακτική Των Μαθηματικών*, (6), 39–59. https://doi.org/10.12681/enedim.15034

Σταματέλου, Υ.-Ε. (2016). *Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο: η περίπτωση του μετασχηματισμού γεωμετρικών σχημάτων σε σχήματα με το ίδιο εμβαδόν* (Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα.

Τουμάσης, Μ. (2000). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.