ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Της Μαρίας Δ. Καντιμοίρη
ΑΜ.: 4282016010

ΘΕΜΑ: «Μελετώντας τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου: η περίπτωση της μεταβλητής»

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Καλαβάσης Φραγκίσκος, Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ Πανεπιστημίου Αιγαίου	ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ Πανεπιστημίου Αιγαίου	ΜΕΛΟΣ
Μιχάλης Σκουμιός, Αναπληρωτής Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ Πανεπιστημίου Αιγαίου	ΜΕΛΟΣ

ΡΟΔΟΣ 2019

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων της συγγραφέως.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Καλαβάση για τη συνεργασία και την κατανόηση όλο αυτό το διάστημα. Τον κ. Κρητικό από την συμβουλευτική επιτροπή για την καθοδήγηση και τη ψυχολογική στήριξη κατά τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας. Ακόμη να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Σκουμιό, μέλος της εξεταστικής επιτροπής, για τις εύστοχες παρατηρήσεις του. Και τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου, και ειδικότερα τον σύζυγό μου, για την αμέτρητη υπομονή και συμπαράσταση από την αρχή του Προγράμματος μέχρι και την τελευταία μέρα παράδοσης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία μελετάει την έννοιας της μεταβλητής, η οποία εμφανίζεται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού έως τις τάξεις του Λυκείου. Στόχος της εργασίας είναι η μελέτη της έννοιας στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) και τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου, διότι με τη μετάβαση από την πρώτη στη δεύτερη βαθμίδα εκπαίδευσης πραγματοποιείται και η μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη. Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία θα εστιάσει η εργασία είναι: 1. Πώς εμφανίζεται και με τι συνδέεται η έννοια της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου που διδάσκονται στα ελληνικά σχολεία; Τι τιμές παίρνουν οι μεταβλητές αυτές; 2. Τι παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε συγκρίνοντας την έννοια της μεταβλητής στα δύο εγχειρίδια, αλλά και στα πλαίσια των δυο βαθμίδων; Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού τα γράμματα – σύμβολα εμφανίζονται ως ο άγνωστος συγκεκριμένος αριθμός που ζητάτε να βρεθεί, ενώ στην Α΄ Γυμνασίου υπάρχει ευρεία χρήση του εγγράμματου συμβολισμού στην γενικευμένη του μορφή. Επίσης η αντικατάσταση των γραμμάτων με φυσικούς υπερέχει σε σχέση με τους μη φυσικούς και στις δύο τάξεις. Συγκεκριμένα για τα ΑΠΣ παρατηρήθηκε ότι παρουσιάζουν αναλυτικά την έννοια της μεταβλητής, αλλά αυτό δεν αποτυπώνεται στα σχολικά βιβλία. Τέλος διαπιστώθηκε ότι η μετάβαση στην αλγεβρική σκέψη, από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, πραγματοποιείται απότομα, με τα σχολικά εγχειρίδια να συμβάλλουν σ’ αυτή την απότομη μετάβαση εξαιτίας του τρόπου που παρουσιάζουν τον εγγράμματο συμβολισμό.

Λέξεις κλειδιά: Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων, μεταβλητές, γράμματα – σύμβολα, μετάβαση

ABSTRACT

The present study examines the emergence of the concept of the variable, which appears from the first grades of Primary School and continues to the grades of High School. The aim of the work is to study this concept in the Curriculum and school textbooks of the 6th grade Elementary and the 1st grade Junior High School, as the transition from the first to the second level of education, signifies the transition of arithmetic to algebraic thought. The questions that the work will focus on are: 1. How does the concept of the variable appear in and relate to the concept of variable in the 6th grade Elementary and 1st grade Junior High School textbooks taught in Greek schools? What values do these variables get? 2. What observations can we make by comparing how the concept of the variable appears in the two textbooks, but also within the two levels? The results showed that in the 6th grade Elementary school textbooks the letters - symbols appear as the unknown specific number we are looking for, while in the 1st grade Junior High School there is a widespread use of literary symbolism in its generalized form. Also, the replacement of letters with Natural numbers is superior to non-Natural numbers in both classes. Notably, it was observed that the meaning of the variable was presented in the Curriculum in detail. However, this was not reflected in the textbooks. Finally, it was found that the transition to algebraic thought when passing from Elementary to Junior High school was made abruptly, with school textbooks being a contributing factor due to the way they present literary symbolisms.

Keywords: Analysis of textbooks, variables, letters - symbols, transition

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1 18
Πίνακας 3 25
Πίνακας 4 26
Πίνακας 5 28
Πίνακας 6 40
Πίνακας 7 41
Πίνακας 8 43
Πίνακας 9 46
Πίνακας 10 47
Πίνακας 11 48
Πίνακας 12 50
Πίνακα 13 51
Πίνακας 14 54
Πίνακας 15 60
Πίνακας 16 64
Πίνακας 17 72
Πίνακας 18 76
Πίνακας 19 79
Πίνακας 20 85
Πίνακας 21 86
Πίνακας 22 90
Πίνακας 23 92
Πίνακας 24 95
Πίνακας 25 97
Πίνακας 26 98
Πίνακας 27 99
Πίνακας 28 100
Πίνακας 29 100

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ-ΣΧΗΜΑΤΩΝ-ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 16
Εικόνα 2 17
Εικόνα 3 18
Σχήμα 1 26
Εικόνα 4 34
Εικόνα 5 44
Εικόνα 6 44
Εικόνα 7 44
Εικόνα 8 44
Εικόνα 9 45
Εικόνα 10 45
Εικόνα11 45
Εικόνα 12 45
Εικόνα 13 46
Γράφημα 1 48
Γράφημα 2 49
Γράφημα 3 50
Γράφημα 4 51
Εικόνα 14 61
Εικόνα 15 61
Εικόνα 16 64
Εικόνα17 65
Εικόνα 18 65
Εικόνα 19 66
Εικόνα 20 66
Εικόνα 21 66
Εικόνα 22 67
Εικόνα23 67
Εικόνα 24 67
Εικόνα 25 68
Εικόνα 26 68
Εικόνα 27 68
Εικόνα 28 69
Εικόνα 29 69
Εικόνα 30 70
Εικόνα31 70

Εικόνα 32 70
Εικόνα 33 71
Εικόνα 34 71
Εικόνα 35 71
Εικόνα 36 72
Εικόνα 37 73
Εικόνα 38 76
Εικόνα 39 79
Εικόνα 40 80
Εικόνα 41 80
Εικόνα 42 80
Εικόνα 43 81
Εικόνα 44 81
Εικόνα 45 81
Εικόνα 46 81
Εικόνα 47 82
Εικόνα 48 82
Εικόνα 49 83
Εικόνα 50 83
Εικόνα 51 83
Εικόνα 52 84
Εικόνα 53 84
Εικόνα 54 87
Εικόνα 55 88
Εικόνα 56 88
Εικόνα 57 89
Εικόνα 58 89
Εικόνα 59 89
Εικόνα 60 91
Εικόνα 61 91
Εικόνα 62 91
Εικόνα 63 91
Εικόνα 64 92
Γράφημα 5 93

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ 2

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 3

ABSTRACT 4

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ 5

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ-ΣΧΗΜΑΤΩΝ-ΕΙΚΟΝΩΝ 6

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 15

1.1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση 16

1.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 38

2.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 39

2.1.1. ΔΕΙΓΜΑ 39

2.1.2. Εργαλεία 41

2.1.3. Διαδικασία συλλογής δεδομένων 41

2.1.3.1. Παραδείγματα συλλογής δεδομένων 44

2.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 46

2.2.1. Αποτελέσματα 1ης Φάσης της έρευνας 46

2.2.2. Αποτελέσματα 2ης Φάσης της έρευνας 49

2.2.3. Ανάλυση των βασικών σημείων της έρευνας για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής στα Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου. 51

2.3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 84

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 87

3.1. «Βιβλίο Δασκάλου» Στ΄ Δημοτικού 87

3.2. «Βιβλίο Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου 90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 93

4.1. Συμπεράσματα 93

4.2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ 101

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 102

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ1 106

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 108

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3 109

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4 110

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5 111

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6..112
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 7..114
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 8..115
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 9..117

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της μεταβλητής **κάνει την εμφάνιση** της στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και συνεχίζει μέχρι τις τάξεις του Λυκείου. Η διερεύνηση επομένως της παρουσίασης της, στα προγράμματα και στα εγχειρίδια, θα αναδείξει το εκπαιδευτικό πλαίσιο των δυσκολιών στην κατανόησή της. Στόχος της εργασίας μας είναι η μελέτη της έννοιας της μεταβλητής στα ΑΠ και τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου, καθώς με τη μετάβαση από την πρώτη στη δεύτερη βαθμίδα εκπαίδευσης, πραγματοποιείται και η μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη.

Η ανάλυση και η μελέτη σχολικών εγχειριδίων βρίσκονται στη πρώτη θέση της εκπαιδευτικής επικαιρότητας και έχουν μεγάλη παιδαγωγική σημασία. Το σχολικό βιβλίο σε σχέση με τα άλλα εκπαιδευτικά μέσα πλεονεκτεί. Δίνει την ευκαιρία στο μαθητή για ενεργητική μάθηση, αφού μπορεί να επιλέγει ο ίδιος τον τόπο, τον χρόνο και το ρυθμό που θα το χρησιμοποιήσει. Επίσης εξασφαλίζει ταυτόχρονα την απαραίτητη επικοινωνία ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και στο μαθητή και την ανάπτυξη διαπροσωπικών σχέσεων μέσα στην τάξη, αποτελώντας την ορατή πλευρά του αναλυτικού προγράμματος. Έτσι και τα δύο μαζί αποτελούν τα μέσα εφαρμογής της εκπαιδευτικής πολιτικής (Καψάλης & Χαραλάμπους, 1995). Ακόμη ο Apple (1992) υποστηρίζει ότι τα κείμενα προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να προβαίνουν σε μια κριτική ανάλυση των οικονομικών, πολιτικών και κοινωνικών πραγματικοτήτων, εκτός και εντός της τάξης, οι οποίες βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν και να αναδιαμορφώσουν τα εκπαιδευτικά υλικά.

Αναφορές όπως, τα καθημερινά μαθηματικά ενθαρρύνουν και παροτρύνουν τους μαθητές να λύσουν προβλήματα μαθηματικών (Carroll, 1998) και πως η μάθηση πραγματοποιείται μέσω της αλληλεπίδρασης και της συμμετοχής σε δραστηριότητα, βοηθάνε στην εξαγωγή του συμπεράσματος ότι οι μαθητές δεν πρέπει να είναι παθητικοί δέκτες της γνώσης, αλλά να συμμετέχουν ενεργά κατά τη διαδικασία της μάθησης. Η Τζακάκη Μ. (2015) υποστήριξε ότι για κάθε στοιχείο μαθηματικής γνώσης απαιτείται ένα συστηματικό και ολοκληρωμένο διδακτικό σχέδιο με την αντίστοιχη πλαισίωση με έργα και υλικό, που στην εφαρμογή του θα οδηγήσει τα παιδιά σε μαθηματική δράση αλλά και συστηματική σκέψη . Οι Αντωνόπουλος, Μ., & Χούτου, Χ. (2015) αναφέρουν ότι η ενεργοποίηση της φαντασίας των παιδιών, ειδικά μικρής ηλικίας, βοηθάει στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών που αυτά προσλαμβάνουν μέσα από το παραμύθι, στη δημιουργία συνδέσεων περί αυτών και καθιστούν αυτές στο μυαλό τους κατανοητές και οικείες.

Συνεχίζοντας με τα ευρήματα των Τάτση Κ. και Σκουμπουρδή, Χ. (2009) συμπεραίνουμε ότι στην Ελλάδα ακόμη και από το βιβλίο των Μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού απουσιάζει η δόμηση μιας ενότητας – ή έστω μιας ομάδας δραστηριοτήτων – γύρω από μία προβληματική καθημερινή κατάσταση, η οποία να δίνει την ευκαιρία στο μαθητή να εμπλακεί σε μια κατευθυνόμενη πορεία μαθηματικοποίησης από το συγκεκριμένο/καθημερινό στο αφηρημένο/μαθηματικό. Η μελέτη τους μπορεί να αποτελέσει την αφετηρία μίας λεπτομερούς και εις βάθος ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών υπό το πρίσμα της ρεαλιστικής προσέγγισης. Οι Herbel-Eisenmann B. και Wagner, D. (2005) παρουσιάζουν τον αναγνώστη μοντέλων που αναμένεται να κάνει τα μαθηματικά ανεξάρτητα από τους ανθρώπους που τον περιβάλλουν, και ανεξάρτητο από τους συμμαθητές και τους δασκάλους του, προσπαθώντας να τους κάνει να προβληματιστούν μέσα στην τάξη.

Σε ανάλογες μελέτες μεταξύ χωρών με διαφορετική κουλτούρα παρατηρήθηκε ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών θα πρέπει να βασίζονται σε ΠΣ που είναι κατασκευασμένα σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε κοινωνίας . Η Son J. (2005) που θέλησε να συγκρίνει μαθηματικά εγχειρίδια της Κορέας και των ΗΠΑ αναφέρει ότι τα προβλήματα και στα δύο εγχειρίδια παρουσιάζονται σε καθαρά μαθηματικά πλαίσια και ότι ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων εμπεριέχει μόνο υπολογιστικά βήματα και διαδικαστικές γνώσεις. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως υπάρχει κάποιο κενό ανάμεσα στα όσα περιγράφονται στα εγχειρίδια και σε αυτά που πραγματικά συμβαίνουν στις αίθουσες διδασκαλίας.

«Η χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση αριθμών είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό της άλγεβρας» (Hart, βλ. Usiskin, 1997 σελ.9). Σημαντική, λοιπόν, η μετάβαση από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική και στην χρήση συμβόλων και γραμμάτων με διαφορετική ερμηνεία. Μια από της πιο σημαντικές έννοιες στην άλγεβρα είναι η έννοια της μεταβλητής, η οποία χρησιμοποιείται από την αρχή της διδασκαλίας της σε διαφορετικές καταστάσεις δημιουργώντας στους μαθητές αντίστοιχες αντιλήψεις για την υπόσταση της. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (1996) έχουμε την εμφάνιση της μεταβλητής: (α) ως άγνωστος σε αριθμητικές σχέσεις με κενά ή εξισώσεις , (β) σε ένα γεωμετρικό ή φυσικό τύπο όπου εκφράζει κάποιο συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος και (γ) σε γενικευμένους κανόνες της αριθμητικής ή σε αλγεβρικές σχέσεις. Καταστάσεις που δεν είναι ξεκάθαρες στα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία. Και άλλοι ερευνητές προσπαθούν να αποδώσουν τις διαφορετικές ερμηνείες των γραμμάτων – μεταβλητών αναλόγως με τη χρήση τους στην άλγεβρα. Ο Usiskin (1997) αναλύει τις αντιλήψεις για την άλγεβρα με βάση τη διαφορετική χρήση των μεταβλητών και καταλήγει: (1) Στην άλγεβρα ως γενίκευση της αριθμητικής, όπου οι μεταβλητές είναι μοτίβα γενικευτές (pattern generalizers), (2) Στην άλγεβρα ως μελέτη των διαδικασιών για τη λύση συγκεκριμένου είδους προβλημάτων, όπου οι μεταβλητές είναι άγνωστοι και σταθερές, (3) Στην άλγεβρα ως μελέτη των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, όπου οι μεταβλητές θεωρούνται παράμετροι και τέλος (4) Στην άλγεβρα ως μελέτη δομών, όπου οι μεταβλητές είναι αυθαίρετα σημάδια σε χαρτί. Σε μικρότερες τάξεις του Δημοτικού όπως αναφέρει ο Rubin (2005) μπορούν να εντοπιστούν τρεις ξεχωριστές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης: η γενίκευση, οι έννοιες της ισότητας και η σκέψη με άγνωστες ποσότητες. Αυτά τα τρία στοιχεία της αλγεβρικής λογικής παρέχουν ένα χρήσιμο πλαίσιο για να αναγνωριστεί αν οι μαθητές της

Γ΄ Δ΄και Ε΄ Δημοτικού σκέφτονται αλγεβρικά κι αν μπορούν να ξεχωρίσουν ένα πρόβλημα αν είναι αλγεβρικό.

Υπάρχει ένα γνωστικό χάσμα μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας που μπορεί να χαρακτηριστεί ως αδυναμία των μαθητών να λειτουργήσουν αυθόρμητα με τους αγνώστους (Herscovics και Linchevski, 1994). Οι Herscovics και Linchevski (1994) αποκαλύπτουν στην έρευνα τους (δείγμα 22 μαθητές Α΄ Γυμνασίου) μια αδυναμία στο προ-αλγεβρικό στάδιο. Συγκεκριμένα ,λύνοντας εξισώσεις με έναν άγνωστο, προσπαθούσαν με δοκιμές να βρουν τον αριθμό που λείπει (αριθμητική σκέψη) και μόνο όταν είχαν εξισώσεις με τον άγνωστο και στα δύο μέλη της εξίσωσης χρησιμοποιούσαν αλγεβρική σκέψη. Επίσης και οι MacGrecor και Stacey (1997) διαπίστωσαν ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας έως 15 ετών δεν φαίνεται να μπορεί να ερμηνεύσει τα αλγεβρικά γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς ή ακόμα και ως συγκεκριμένους αγνώστους. Αντιθέτως, αγνοούν τα γράμματα, τα αντικαθιστούν με αριθμητικές τιμές ή τα θεωρούν ως ονόματα στενογραφίας. Η κύρια εξήγηση που δόθηκε στη βιβλιογραφία ήταν μια γενική σχέση με τα επίπεδα της γνωστικής ανάπτυξης.

Από τις μικρές κιόλας τάξεις του Δημοτικού μέχρι και την επίσημη διδασκαλία της άλγεβρας έχουν καταγραφεί κάποιες τάσεις των μαθητών. Αρχικά τα παιδιά θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν αντικείμενα (π.χ μ: μήλα) ή συντομογραφίες (π.χ υ= ύψος) και όχι αριθμούς (MacGregor & Stacey, 1994, βλ. Χρήστου, Βαμβακούση & Van Dooren, 2011). Όταν πρώτο συναντούν την έννοια της μεταβλητής έχουν την τάση να τη χαρακτηρίζουν ως το σύμβολο του αγνώστου που θα πάρει μια τιμή και αργότερα ,σε μεγαλύτερες τάξεις, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται ότι οι μεταβλητές – γράμματα μπορούν να αναπαραστήσουν οποιονδήποτε αριθμό (Asquith και συνεργάτες, 2007, βλ. Χρήστου, Βαμβακούση & Van Dooren, 2011) .

Μια άλλη τάση των μαθητών είναι η χαρακτηριζόμενη από τους Ni και Zhou (2005) ως «Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού» (wholenumberbias) (Ni & Zhou, 2005 βλ. Χρήστου, 2011). Ο Χρήστου (2011) αναφέρει ότι οι μαθητές βασισμένοι στην κατανόηση του αριθμού ως διακριτού και πως υπάρχει πάντα ο επόμενος και ο προηγούμενος, δημιουργούν την πεποίθηση ότι η πρόσθεση κι ο πολ/σμός μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση τους μικραίνει.

Κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη εισάγεται ένας «νέος» συμβολισμός με γράμματα και εικόνες που οι μαθητές θα πρέπει να διαχειριστούν. Θα πρέπει να γίνεται μεθοδική χρήση των σχολικών εγχειριδίων, ΑΠΣ και του βιβλίου του δασκάλου/καθηγητή από τους εκπαιδευτικούς για την καλύτερη έκβαση της διδακτικής πράξης. Η Δημητριάδου (2009) αναφέρει ότι βασική προϋπόθεση για την άμβλυνση του προβλήματος ,της μετάβασης από την αριθμητική στην άλγεβρα, είναι ο σχεδιασμός αναλυτικών προγραμμάτων με σαφείς διδακτικούς στόχους στο θέμα της μετάβασης. Σχολικά βιβλία που να υπηρετούν με συνέπεια και αποτελεσματικότητα αυτούς τους στόχους. Κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και των δύο βαθμίδων, ώστε να ευαισθητοποιηθούν για το θέμα αυτό και ιδίως να ενημερωθούν για την ύλη των Μαθηματικών, που οι μαθητές διδάχθηκαν ή πρόκειται να διδαχθούν, τις δυσκολίες κατανόησης και τις παρανοήσεις σχετικά με τις αριθμητικές και αλγεβρικές έννοιες.

Οι μαθητές κατά την μετάβαση τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο αντιμετωπίζουν διαφόρων ειδών δυσκολίες που οφείλονται σύμφωνα με τους Φιλίππου, Πίττα-Πανταζή και Χρίστου (2001) σε παράγοντες όπως, την αλλαγή του κοινωνικού περιβάλλοντος των παιδιών, την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, τη διοικητική οργάνωση, το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά εγχειρίδια και οι διδακτικές προσεγγίσεις στις δύο βαθμίδες. Σχετικά με την αλγεβρική σκέψη στο Δημοτικό η έρευνα των Χειμωνή και Πίττα-Πανταζή (2014) έδειξε ότι περιλαμβάνει τέσσερις διακριτές μορφές: τη γενικευμένη αριθμητική, το συλλογισμό με μεταβλητές, τη μοντελοποίηση και τις διαδικασίες απόδειξης. Σημαντικές είναι και οι έρευνες (Carraher 2001, Carraher 2006) που καταλήγουν στο συμπέρασμα της ενσωμάτωσης της άλγεβρας στην πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση.

Η έννοια της μεταβλητής έχει μια ιδιαίτερη διεπιστημονική διάσταση, καθώς είναι ένα σημαντικό εργαλείο στη διδασκαλία και εκμάθηση σχολικών μαθηματικών και άλλων σχολικών μαθημάτων (π.χ. φυσική, χημεία, οικονομία). Τα αποδεικτικά στοιχεία της σπουδαιότητας αυτής της έννοιας εμφανίζονται στις πολλές χρήσεις των μεταβλητών στα σχολικά μαθηματικά σήμερα, αλλά και στις δηλώσεις μαθηματικών, εκπαιδευτικών μαθηματικών και ερευνητών για τις μεταβλητές (Dogbey και Kersaint, 2012). Υποστηρίζεται μεταξύ άλλων ότι, η χρήση των μεταβλητών, οι ισχυρισμοί σχετικά με τη πολυπλοκότητα της έννοια της μεταβλητής και τα πολυάριθμα ερευνητικά ευρήματα που δείχνουν τη δυσκολία των μαθητών με μεταβλητές, εξακολουθούν να υποκινούν τους ερευνητές να διερευνήσουν τις παρανοήσεις στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές προκειμένου να αντιμετωπίσουν αυτές τις δυσκολίες. Ωστόσο, ελάχιστες μελέτες έχουν εξετάσει το βαθμό στον οποίο η εν λόγω έννοια εισάγεται ή παρουσιάζεται στο σχολικό πρόγραμμα μαθηματικών. Επιπρόσθετα οι Dogbey και Kersaint επισημαίνουν ότι στην πραγματικότητα, μόνο μία μελέτη (το έργο AAAS 2061 που διεξήχθη το 2000) προσπάθησε να αξιολογήσει την ανάπτυξη μεταβλητών και άλλων θεμάτων (συναρτήσεις και πράξεις) που περιγράφεται από το πρόγραμμα AAAS ως βασικό περιεχόμενο που θα έπρεπε να υπάρχει στο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών Γυμνασίου. Η Δημητρακοπούλου (2014, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ) στην διπλωματική της εργασία αναλύει σχολικά εγχειρίδια Γυμνασίου, ως προς το ρόλο των γραμμάτων – συμβόλων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής, με βάση την κατηγοριοποίηση των Dogbey και Kersaint (2012), και συμπέρανε ότι οι περισσότερες μεταβλητές εμφανίζονται ως «Γενικευμένοι Αριθμοί» σε ποσοστό 34%.

Στην παρούσα εργασία προσπαθούμε να παρουσιάσουμε το νοηματικό και εκφραστικό πέρασμα από την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής, τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που αυτό επιφέρει.

Όσον αφορά το νοηματικό κομμάτι προκύπτει ότι κάποια γράμματα αναπαριστούν μια μεταβλητή, αλλά κάθε γράμμα δεν είναι πάντα μια μεταβλητή. Κατά τη λύση μίας εξίσωσης στο Δημοτικό οι μαθητές προσδοκούν την εύρεση μιας και μόνο τιμής του αγνώστου, που στο Γυμνάσιο – Λύκειο ο ίδιος άγνωστος παίρνει περισσότερες από μια τιμές (πολυωνυμικές εξισώσεις). Αργότερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισάγεται η έννοια της συνάρτησης με το παράδοξο ότι η μεταβλητή που μεταβάλλεται, εξαρτάται από κάποια άλλη που με τη σειρά της μεταβάλλεται. Όσον αφορά τώρα το εκφραστικό μέρος θα διερευνηθεί ο τρόπος παρουσίασης και ο ρόλος των γραμμάτων - συμβόλων στα σχολικά βιβλία της Στ ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, με τη βοήθεια της κατηγοριοποίησης των γραμμάτων της Δημητρακοπούλου (2014, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ), καθώς και οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στα γράμματα που εντοπίζονται.

Κατά τη μελέτη της μετάβαση των παιδιών από τη μια βαθμίδα στην άλλη πρέπει να ληφθεί υπόψη και η αλλαγή του διδάσκοντα, καθώς ο δάσκαλος στο δημοτικό παραδίδει όλα τα μαθήματα, ενώ στο Γυμνάσιο υπάρχουν εκπαιδευτικοί διαφορετικών ειδικοτήτων για κάθε εκπαιδευτική ώρα . Όλα όσα έχουμε αναφέρει εξηγούν την ανάγκη για μελέτη της έννοια της μεταβλητής και του συμβολισμού των γραμμάτων της άλγεβρας κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Τα βασικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν είναι τα εξής :

1. Πώς εμφανίζεται και με τι συνδέεται η έννοια της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου που διδάσκονται στα ελληνικά σχολεία; Τι τιμές παίρνουν οι μεταβλητές αυτές;
2. Τί παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε συγκρίνοντας τον τρόπο εμφάνισης της έννοιας της μεταβλητής στα δύο εγχειρίδια, αλλά και στα πλαίσια των δυο βαθμίδων ;

Η εργασία αρθρώνεται σε τέσσερα κεφάλαια. Αρχικά στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή για τη σημασίας και την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη. Με την ανασκόπηση βιβλιογραφικών ερευνών και δημοσιεύσεων στη Διδακτική των Μαθηματικών επιχειρούμε να εντοπίσουμε συγκεκριμένα σημεία που θα βοηθήσουν την μελέτη μας στα επόμενα κεφάλαια και στην έρευνα πεδίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η εμφάνιση των γραμμάτων – συμβόλων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής στα Αναλυτικά Προγράμματα και στα σχολικά βιβλία Μαθηματικών Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται το βιβλίο του δασκάλου για την Στ΄ Δημοτικού και το βιβλίο του καθηγητή για την Α΄ Γυμνασίου.

Τέλος στο τέταρτο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι τελικές συνδέσεις, όπως επίσης και οι προτάσεις για περεταίρω έρευνα της παρουσίας και της διδασκαλίας της έννοιας της μεταβλητής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

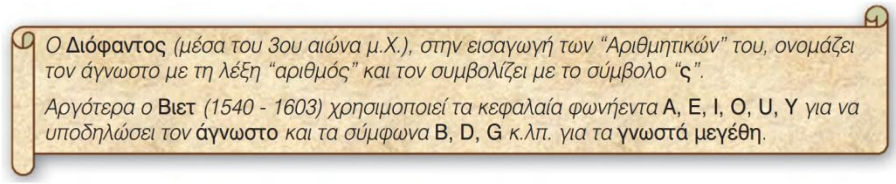
Η σημασία της κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη.

Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής είναι περίπλοκη και συνάμα σημαντική. Από την μελέτη της βιβλιογραφίας μπορούμε να εντοπίσουμε τα βασικά σημεία εστίασης των ερευνών, κατά τα οποία η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής συνδέεται:

- ✓ Με τις δυσκολίες κατανόησης της συμβολικής γραφής,
- ✓ Με τις δυσκολίες της μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη,
- ✓ Με τον τρόπο που παρουσιάζεται η αλγεβρική σκέψη στα αναλυτικά προγράμματα τόσο στου Δημοτικού όσο και στου Γυμνασίου,
- ✓ Με τις δυσκολίες να αντιληφθούν τα παιδιά έννοιες όπως της εξίσωσης, της σταθεράς και της παραμέτρου.
- ✓ Με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την άλγεβρα, τη συμβολική γραφή και τις μεταβλητές,
- ✓ Με την αναγκαιότητα και το περιεχόμενο της συνεχούς επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.

Υπάρχουν πολλές έρευνες που προσπαθούν να αναλύσουν την αλγεβρική σκέψη και πώς η χρήση συμβόλων εισάγει την έννοια της μεταβλητής.

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε κάποια στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη του συμβολικού συστήματος μέσα στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα ο Λεμονίδης (1996) εξηγεί ότι η συμβολική γραφή της άλγεβρας πέρασε από τρία στάδια εξέλιξης: το ρητορικό (rhetorical) , το συγκοπτόμενο (syncopated) και το συμβολικό (symbolic). Στο ρητορικό στάδιο της άλγεβρας, πριν από τον Διόφαντο* (περίπου το 250 μ.Χ) χρησιμοποιείται η καθομιλουμένη γλώσσα για την λύση των ειδικών προβλημάτων και δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα για την αναπαράσταση αγνώστων. Στο δεύτερο στάδιο της συγκοπτόμενης άλγεβρας, από το Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16ου αιώνα, γίνεται χρήση των γραμμάτων για τις άγνωστες ποσότητες και το τρίτο στάδιο της συμβολικής άλγεβρας, περίπου 1600 μ.Χ, χαρακτηρίζεται από τον Francois Viete που εισάγει τη χρήση γραμμάτων και τις δεδομένες ποσότητες. Αυτή η ανακάλυψη εισάγει μια νέα αριθμητική έννοια στα Μαθηματικά, την έννοια του αλγεβρικού αριθμού ή του συμβολικού αριθμού. Αξιοσημείωτο είναι ότι το 1987 σε έρευνα του ο Harper θέλησε να παρατηρήσει τους τρόπους που χρησιμοποιούν 144 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην λύση προβλήματος ,που είχαν ήδη μελετήσει ο Διόφαντος και ο Viete. Τα αποτελέσματα έδειξαν τρεις τύπους επίλυσης :τη ρητορική , τη Διοφαντική και την επίλυση ,που πρότεινε ο Viete, όπως υπάρχει και στην ιστορία των Μαθηματικών. Δηλαδή η ρητορική απάντηση εξελίχθηκε σε απάντηση με τη χρήση γραμμάτων για τον άγνωστο και έπειτα εμφανίζεται η χρήση γραμμάτων για τις δεδομένες ποσότητες.


Ο **Διόφαντος** *(μέσα του 3ου αιώνα μ.Χ.), στην εισαγωγή των "Αριθμητικών" του, ονομάζει τον άγνωστο με τη λέξη "αριθμός" και τον συμβολίζει με το σύμβολο* "ς".
Αργότερα ο **Βιετ** *(1540 - 1603) χρησιμοποιεί τα κεφαλαία φωνήεντα* **A, E, I, O, U, Y** *για να υποδηλώσει τον* **άγνωστο** *και τα σύμφωνα* **B, D, G** *κ.λπ. για τα* **γνωστά μεγέθη**.

Εικόνα 1: Σχολικό βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σελ. 77 Κεφάλαιο 4ο «Εξισώσεις και Προβλήματα» Εκδόσεις ΙΤΥΕ «Διόφαντος»,

Από τις αριθμητικές στις αλγεβρικές έννοιες η μετάβαση δεν γίνεται αυτόματα στη σκέψη του μαθητή. Η κατανόηση της άλγεβρας στηρίζεται στη γνώση και κατανόηση της αριθμητικής και είναι επόμενο οποιαδήποτε ανεπάρκεια στην αριθμητική να προκαλέσει αργότερα δυσκολίες στην άλγεβρα (Δημητριάδου, 2009). Η σχολική άλγεβρα βασίζεται κατά κύριο λόγο στην χρήση γραμμάτων. Η κατανόηση των οποίων καθίσταται εξαιρετικά δύσκολη ιδιαίτερα κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Küchemann (1981), βλ. Δημητρακοπούλου και Χρήστου (2014) σελ. 1). Η βιβλιογραφία επισημαίνει έντονες δυσκολίες των μαθητών με τα γράμματα, ενώ πολλά από τα λάθη και οι χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συχνά συνδέονται με τις δυσκολίες αυτές (Rosnick, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005, βλ. Δημητρακοπούλου και Χρήστου (2014) σελ. 1)).

Η άλγεβρα επικεντρώνεται στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, χρησιμοποιώντας τη συμβολική γλώσσα που παρεμποδίζει τον έλεγχο, παρουσιάζεται κάποια σημασιολογική αδυναμία (Malisan & Spagnolo, 2009). Η σκέψη των μαθητών σχετικά με τη μεταβλητή είναι ανεπαρκής , ιδιαίτερα όσον αφορά τη χρήση εγγράμματων συμβόλων στην άλγεβρα (Küchemann, 1978, Usiskin, 1988). Στη διπλωματική της εργασία η Εξηνταβελώνη (2013, Πανεπιστήμιο Πατρών), αναφέρει ότι οι μαθητές στο μάθημα της Άλγεβρας έρχονται αντιμέτωποι με σωρεία καινούριων πληροφοριών παρατηρώντας πολλές διαφορές αλλά και αρκετές ομοιότητες με τις γνώσεις που είχαν λάβει από την Αριθμητική, γεγονός που πολλές φορές τους δημιουργεί σύγχυση. Συγκεκριμένα οι μαθητές έχουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην κατανόηση βασικών εννοιών όπως της μεταβλητής αλλά και στην επίλυση μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

1.1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Με τα χρόνια έχουν γίνει σημαντικές μελέτες για τη μετάβαση στην αλγεβρική σκέψη και την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής. Παρακάτω θα παραθέσουμε κάποιες από αυτές τις έρευνες και θα εντοπίσουμε τα σημεία εστίασης που προαναφέραμε.

Οι MacGregor και Stacey (1997) παρουσιάζουν στοιχεία συγκεκριμένων πηγών που έχουν παραβλεφθεί στη βιβλιογραφία και οι οποίες μπορεί να σχετίζονται ή όχι με το γνωστικό επίπεδο. Αυτές οι πηγές αφορούν: διαισθητικές υποθέσεις και ρεαλιστική συλλογιστική για μια νέα συμβολική μορφή, αναλογίες με γνωστά συστήματα συμβόλων, παρεμβολές από τη νέα μάθηση στα μαθηματικά και επιπτώσεις παραπλανητικών διδακτικών υλικών. Ο εντοπισμός της προέλευσης των παρερμηνειών είναι απαραίτητος για τη βελτίωση της διδασκαλίας της άλγεβρας. Τα ερευνητικά τους ερωτήματα ήταν: 1) Πώς οι μαθητές που δεν έχουν μάθει οποιαδήποτε άλγεβρα ερμηνεύουν γράμματα και προσπαθούν να γράψουν εκφράσεις; Έρχονται να κάνουν άλγεβρα με προκαταλήψεις σχετικά με τη χρήση των γραμμάτων; 2) Πώς μεταβάλλονται οι μαθητικές ερμηνείες των γραμμάτων και οι απλές αλγεβρικές εκφράσεις κατά τη διάρκεια της τριετής μάθησης της σχολικής άλγεβρας; 3) Ποιες είναι οι ρίζες συγκεκριμένων λαθών και παρανοήσεων;

Ξεκίνησαν την έρευνα τους με ένα μικρό δείγμα 42 μαθητών Α΄ Γυμνασίου (11-12 ετών) αποτελούμενο από δύο τμήματα μικτής ικανότητας που δεν είχαν διδαχθεί άλγεβρα. Τους δόθηκε ένα προ-γνωστικό τεστ (Εικόνα: 2) για να δουν πώς λειτουργούν με αλγεβρικά γράμματα σε άγνωστες ποσότητες. Τα δύο τρίτα του δείγματος δεν απάντησαν καθόλου, ενώ οι διαισθητικές απαντήσεις που έδωσαν οι 14 μαθητές είναι χρήσιμοι δείκτες για το τι μπορεί να σημαίνει το αλγεβρικό γράμμα πριν την εισαγωγή στην άλγεβρα. Έπειτα από 8 εβδομάδες διδασκαλίας στην άλγεβρα, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, τους δόθηκε ένα μετά-γνωστικό τεστ (Εικόνα 2) το ίδιο με το προηγούμενο, απλά άλλαζαν τα ονόματα και τα νούμερα, για να μην απαντήσουν μνημονικά .

Προ-γνωστικό τεστ	**Μετά-γνωστικό τεστ**
1. Ο David είναι 10cm ψηλότερος από τον Con. O Con είναι h cm ψηλός. Τί μπορούμε να γράψουμε για το ύψος του David; ……..	1. Ο Con είναι 8cm ψηλότερος από την Kim. H Kim είναι y cm ψηλή. Τί μπορούμε να γράψουμε για το ύψος του Con; …….
2. Η Sue ζυγίζει 1kg λιγότερο από τον Chris. O Chris ζυγίζει y kg. Τί μπορούμε να γράψουμε για το βάρος της Sue; ……..	2. Ο Sam είναι x cm κοντύτερος από την Eva. H Eva είναι 95cm ψηλή. Τί μπορούμε να γράψουμε για το ύψος του Sam; ……….

Εικόνα 2: Οι ερωτήσεις του προ-γνωστικού τεστ και του μετα-γνωστικού από τους MacGregor και Stacey (1997).

Οι απαντήσεις που δόθηκαν:

Κατηγορίες απαντήσεων	*Ποσοστό προ-γνωστικού τεστ (n = 42)*	*Ποσοστό μετά-γνωστικού τεστ (n= 38)*
Άγνωστη ποσότητα [σωστό] [λανθασμένο]	2% 2%	37% 26%
Συντομευμένη λέξη	2%	0

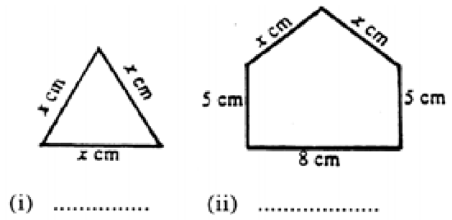
Αλφαβητική τιμή	5%	0
Αριθμητική αξία	5%	8%
Χρήση διαφορετικού γράμματος	5%	8%
Το γράμμα αγνοήθηκε	12%	10%
[καμία απάντηση]	67%	11%

Πίνακας 1: Ποσοστά κατηγοριών απαντήσεων των MacGregor & Stacey (1997)

Παρατηρήθηκε λοιπόν ότι το 63%, δηλαδή 24 μαθητές, από το μετα-γνωστικό τεστ δέχτηκαν ότι ένα αλγεβρικό γράμμα δεν σημαίνει μια λέξη ή χρειάζεται να αντικατασταθεί από έναν αριθμό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με έναν αριθμό για να εκφράσει μια «απάντηση». Επομένως κατανόησαν τη σημασία των αλγεβρικών γραμμάτων αρκετά καλά για να γράψουν μια έκφραση που περιέχει και σύμβολο και αριθμό.

Η έρευνα συνεχίστηκε με μεγαλύτερο δείγμα (n = 1453) σε 22 σχολεία (τάξεις Α΄ Γυμνασίου ως Α΄ Λυκείου), όπου και τους δόθηκαν τα δύο τεστ με επιπλέον δύο είδη ασκήσεων (Εικόνα: 2 και 3). Οι μαθητές αυτοί είχαν ξανά διδαχθεί κάτι από άλγεβρα.

3. Πόση είναι η περίμετρος των παρακάτω σχημάτων;



4. Το n δηλώνει έναν άγνωστο αριθμό.
Γράψτε το παρακάτω με μαθηματικά σύμβολα:
«Προσθέτω 5 στο n, έπειτα το πολλαπλασιάζω με 3»
………..

Εικόνα 3

Οι απαντήσεις που δόθηκαν για τις 4 ασκήσεις από το δείγμα n=1453 παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση Π		Α΄ Γυμνασίου (n=307)	Β΄ Γυμνασίου (n=511)	Γ΄ Γυμνασίου (n=338)	Α΄ Λυκείου (n=307)
ί ν 1.	O David [h+10]	39%	52%	63%	73%
α κ 2.	H Sue [y-1]	36%	46%	60%	64%
α ς : 3.	(i) Περίμετρος [3x] (ii) Περίμετρος [2x+18]	42% 27%	44% 35%	65% 55%	61% 53%
Π ί ν 4.	Αλγεβρικά [3(n+5)]	14%	17%	25%	47%

Πίνακας 2: Απαντήσεις των 4 ερωτήσεων στο δείγμα n=1453 των MacGregor &Stacey (1997)

Συμπέραναν ότι για τις ασκήσεις 1 και 2 οι απαντήσεις των μαθητών Α΄ Γυμνασίου ήταν ίδιες με αυτές του μικρού δείγματος που προαναφέραμε, ενώ περίπου οι μισοί από την Β΄ Γυμνασίου και το ένα τρίτο των μεγαλύτερων τάξεων απάντησαν σωστά σε αυτές. Οι έξι κατηγορίες ερμηνειών (Πίνακας: 1) που εντοπίστηκαν προηγουμένως παρατηρήθηκαν σε όλες τις τάξεις. Τρεις παρερμηνείες που δεν εμφανίστηκαν στις απαντήσεις της Α΄ Γυμνασίου εμφανίστηκαν στις απαντήσεις των μεγαλύτερων τάξεων όπως: 1) το γράμμα είναι μια ετικέτα που σχετίζεται με το όνομα ενός αντικειμένου, 2) το γράμμα ισούται με 1 εκτός αν ορίζεται διαφορετικά και 3) το γράμμα έχει ένα γενικό κριτήριο που περιλαμβάνει διάφορες ιδιαιτερότητες.

Έπειτα έκαναν μια έρευνα σε τρία σχολεία (n=1806) για δεκατρείς μήνες. Τα συμπεράσματα των MacGregor και Stacey ήταν ότι οι μαθητές συχνά βασίζονται ,για να ερμηνεύσουν γράμματα και αλγεβρικές εκφράσεις , στη διαίσθηση και την εικασία, σε αναλογία με άλλα συστήματα συμβόλων που γνωρίζουν ή σε ψευδή βάση που δημιουργείται από παραπλανητικά διδακτικά υλικά. Συχνά δεν γνωρίζουν τη γενική συνέπεια της μαθηματικής συμβολικής γραφής και τη δύναμη που παρέχει. Οι παρερμηνείες τους οδηγούν σε δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας και μπορεί να παραμείνουν για αρκετά χρόνια αν δεν αναγνωριστούν και διορθωθούν. Επίσης εξηγούν ότι οι παρερμηνείες των νεότερων μαθητών δεν είναι δείκτες χαμηλών επιπέδων γνωστικής ανάπτυξης, αλλά είναι προσεγμένες προσπάθειες να κατανοήσουν μια νέα σημείωση ή προκαλούνται από τη μεταφορά σημασιών από άλλα περιβάλλοντα.

Η επιτυχία των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου στο δείγμα δείχνει ότι πολλοί από αυτούς φαίνεται να έχουν προχωρήσει πέρα από αυτό ή να παρέβλεψαν τις ερμηνείες κατώτερου επιπέδου. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε τη γνωστική διαδρομή που έκαναν για κατανόηση της σημασίας των γραμμάτων. Σε όλες τις τάξεις υπήρχαν μερικοί μαθητές που φάνηκαν να αδυνατούν να ασχοληθούν με τις ακριβείς διαφορές μεταξύ των γραμμάτων και των αναφορών τους που είναι απαραίτητες για την άλγεβρα. Ακόμη, η εσφαλμένη ερμηνεία ενός αλγεβρικού γράμματος ως ονόματος ενός αντικειμένου είναι ένα πολύ γνωστό και σοβαρό εμπόδιο για την γραφή εκφράσεων και εξισώσεων σε συγκεκριμένα πλαίσια. Οι μαθητές παρατηρούν ότι οι έννοιες στα εφαρμοσμένα μαθηματικά συνήθως σημειώνονται με τα αρχικά γράμματα των ονομάτων τους (A για την περιοχή, m για μάζα, t για χρόνο κ.λπ.), οπότε είναι πιθανό ότι αυτή η χρήση των γραμμάτων ενισχύει την πεποίθηση ότι τα γράμματα σε μαθηματικές εκφράσεις και τύπους είναι για λέξεις ή αντικείμενα και όχι για αριθμούς. Υπάρχουν πολλά συστήματα σημείων που χρησιμοποιούνται στο σχολείο και σε καθημερινές δραστηριότητες τόσο διαφορετικές, από τις οποίες οι μαθητές μπορεί να αντλούν χρήσιμες και μη χρήσιμες πληροφορίες και να τις εφαρμόζουν στην άλγεβρα. Το σύστημα συμβόλων της χημείας, για παράδειγμα, μοιάζει με τη γραφή της άλγεβρας στη χρήση των παρενθέσεων που παραπέμπει σε ομαδοποίηση και εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το συνδυασμό των ποσοτήτων. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν τις διαφορετικές έννοιες των συνδυασμένων γραμμάτων στα δύο συστήματα (προσθήκη με την έννοια του χημικού συνδυασμού στη χημεία, αλλά πολλαπλασιασμό στην άλγεβρα) και τις διαφορετικές θέσεις των αριθμών για να δείχνουν πολλαπλάσια ποσοτήτων. Ορισμένα χαρακτηριστικά των σηματοδοτικών συστημάτων είναι διαισθητικά και εύκολα κατανοητά, ενώ άλλα δεν είναι. Μπορεί να επηρεάσουν τις ιδέες των μαθητών ακόμη και συστήματα σημείων, όπως ο τρόπος με τον οποίο τα στοιχεία αριθμούνται σε ένα βιβλίο.

Η σχετική επιτυχία που επιτεύχθηκε από ορισμένες τάξεις στα σχολεία που εξετάσθηκαν και η κακή απόδοση από άλλους υποδηλώνουν ότι παράγοντες όπως οι διαφορετικές προσεγγίσεις στην αρχική άλγεβρα, το διδακτικό υλικό, οι μορφές διδασκαλίας ή το μαθησιακό περιβάλλον έχουν ισχυρό αποτέλεσμα. Οι ερευνητές εντόπισαν συγκεκριμένες προσεγγίσεις και υλικά διδασκαλίας που οδηγούν στην κατανόηση ή την αποτυχία να μάθουν οι μαθητές. Η αλφαβητική ερμηνεία διαπιστώθηκε ότι ήταν συνηθισμένη σε ένα σχολείο όπου ενισχύθηκε με τη χρήση παζλ και κωδικών στα μαθήματα των μαθηματικών. Στην πρώτη ενότητα της άλγεβρας στο σχολικό εγχειρίδιο γίνεται χρήση των γραμμάτων ως συντομευμένες λέξεις και ετικέτες, έτσι δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η επίμονη εσφαλμένη ερμηνεία των γραμμάτων ως συντομευμένες λέξεις, εμφανής στα δεδομένα από τα σχολεία που χρησιμοποιούν τα βιβλία, οφειλόταν εν μέρει ή εξ ολοκλήρου σε αυτή την λανθασμένη αρχική παρουσίαση.

Διαπιστώθηκε ότι μετά την Α΄ Γυμνασίου προκύπτει μια ποικιλία κακής χρήσης αλγεβρικών συμβόλων ως αποτέλεσμα παρεμβολών από τη νέα μάθηση. Σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, μη γνωρίζοντας τύπους εμβαδών ,εισαγωγή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και συνδυασμό με την αβεβαιότητα σχετικά με τη χρήση εκθετικής σημείωσης, προκάλεσαν πολλά λάθη. Οι ερευνητές πρότειναν ότι με ένα τυπικό πρόγραμμα σπουδών οι μαθητές δεν κατανοούν την αλγεβρική συμβολική γραφή. Οι δάσκαλοι πρέπει να γνωρίζουν τις πεποιθήσεις σχετικά με τις έννοιες των γραμμάτων και της μαθηματικής σημείωσης που φέρνουν οι μαθητές μαζί τους στην μάθηση της άλγεβρας και να λαμβάνουν υπόψη αυτές τις πεποιθήσεις στη διδασκαλία τους. Έχουν την ευθύνη να εξασφαλίσουν ότι οι πρώτες εμπειρίες των μαθητών από τη χρήση γραμμάτων στην άλγεβρα αποτελούν τη βάση για μια συνεκτική δομή αλγεβρικής γνώσης. Στα σχολεία όπου εργάστηκαν, οι μαθητές μαθαίνουν άλγεβρα σε μία ή δύο σύντομες ενότητες ανά έτος. Αυτές οι ενότητες συνήθως δεν συνδέονται με άλλες εργασίες και δεν έχουν χρήσιμο σκοπό από την άποψη των μαθητών. Όταν οι αλγεβρικές έννοιες και μέθοδοι δεν χρησιμοποιούνται σε άλλα τμήματα του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών, τα παιδιά τις ξεχνούν και ξεχνούν και τους τρόπους έκφρασής τους. Μπορούν να θυμούνται μόνο ορισμένα χαρακτηριστικά επιφάνειας και χωρικές απεικονίσεις. Κατά συνέπεια, όταν εισάγονται νέες έννοιες και σημειώσεις, οι μαθητές δεν μπορούν να τις συνδέσουν ή να τις διαφοροποιήσουν από αυτά που έχουν διδαχθεί προηγουμένως.

Η χρήση παραπλανητικών διδακτικών υλικών στα πρώτα μαθήματα, που έχουν σκοπό να διευκολύνουν την αρχική μάθηση της άλγεβρας, μπορεί να βλάψει σοβαρά τους μαθητές. Οι ερευνητές εντόπισαν διάφορους παράγοντες που πιστεύουν ότι πρέπει να εξεταστούν για μια ολοκληρωμένη εξήγηση των ιδιαίτερων τρόπων με τους οποίους οι μαθητές ερμηνεύουν τα αλγεβρικά γράμματα και γράφουν τις αλγεβρικές εκφράσεις. Η αναγνώριση των σφαλμάτων τους σε γνωστικό επίπεδο συντελεί μόνο στην αποτυχία να γράψουν σωστές απαντήσεις, δεν εξηγεί τη μεγάλη ποικιλία παρερμηνειών που παρατήρησαν στα δεδομένα τους. Έδειξαν ότι ορισμένες κοινές παρερμηνείες είναι αποτελέσματα συγκεκριμένων διδακτικών προσεγγίσεων και μπορούν να αποφευχθούν. Βέβαια κάποιες αναπτύσσονται από τους ίδιους τους μαθητές. Όμως ορισμένες παρερμηνείες μπορούν να μειωθούν ή να ξεπεραστούν εύκολα με κατάλληλη διδασκαλία.

Επίσης, οι Carraher, Schliemann και Brizuela (2001) ερεύνησαν τις προσθετικές σχέσεις χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς σε μαθητές Γ΄ Δημοτικού (8-9 ετών). Οι μαθητές ήταν από τρεις τάξεις ενός δημοτικού σχολείου μίας πολυπολιτισμικής κοινότητας εργατικής τάξης στη Μεγάλη Βοστώνη. Προσπάθησαν να βρουν αποδείξεις ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας λειτουργούν και χρησιμοποιούν αγνώστους. Πραγματοποίησαν οχτώ 90-λέπτα μαθήματα εβδομαδιαίως για κάθε τάξη με προσωπικές συνεντεύξεις των μαθητών παρουσία ερευνητών, μιας δασκάλας, δύο ατόμων που βιντεοσκοπούσαν και του δασκάλου της τάξης. Διατύπωσαν ένα πρόβλημα μαζί με μια γραμμή που απεικόνιζε μια σειρά μεταβλητών όρων (γραμμή Ν-αριθμού) και παρατήρησαν ότι, οι μαθητές των μικρών τάξεων Δημοτικού ξεκίνησαν με εικονικά σχέδια και συγκεκριμένες τιμές στους άγνωστους, αλλά με την πάροδο του χρόνου, σε αυτό το μάθημα και σε άλλα όπως αυτό, οι μαθητές όλο και περισσότερο κατάφερναν να χρησιμοποιούν αλγεβρικές και αριθμητικές παραστάσεις για να περιγράψουν τις σχέσεις στα προβλήματα. Αναφέρουν πως δεν πρέπει να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά των παιδιών ως εντελώς αυθόρμητη. Στην πραγματικότητα, η συμπεριφορά των παιδιών, ακόμη και όταν είναι ενδεικτική της προσωπικής τους σκέψης, εκφράζεται μέσα από πολιτισμικά εδραιωμένα συστήματα, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών παραστάσεων των διαφόρων ειδών που τους εισαγάγαμε. Δεν αρνούμαστε πως τα παιδιά μπορούν να μάθουν αλγεβρικές έννοιες νωρίς, όμως δεν μπορούν να μάθουν οποιαδήποτε μαθηματική έννοια ανά πάσα στιγμή. Η αλγεβρική κατανόηση θα εξελιχθεί σιγά σιγά κατά τη διάρκεια των ετών, αυτό όμως που θέλουν να τονίσουν οι ερευνητές είναι ότι, δεν χρειάζεται να περιμένουμε την εφηβεία για να βοηθήσουμε την εξέλιξή της.

Συνεχίζουμε με τους Malisani και Spagnolo (2009) που στόχευσαν να μελετήσουν πρώτον αν η έννοια του άγνωστου παρεμποδίζει την ερμηνεία της μεταβλητής σε λειτουργική σχέση και δεύτερον τα είδη της γλώσσας που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων. Τέλος μελέτησαν την έννοια της μεταβλητής στη διαδικασία μετάφρασης από την αλγεβρική γλώσσα στην φυσική γλώσσα. Δόθηκε ερωτηματολόγιο τεσσάρων ερωτήσεων, σε δείγμα 111 μαθητών ηλικίας 16 ως 18 ετών σε Λύκειο στη Ριμπέρα της Ιταλίας, το οποίο έπρεπε να απαντηθεί ατομικά σε 60 λεπτά χωρίς τη βοήθεια βιβλίων ή σημειώσεων. Επιπρόσθετα χρησιμοποιήθηκε ποσοτική ανάλυση γιατί οι μεταβλητές που θα αναλύονταν ήταν πολλές σε αριθμό. Παρατηρήθηκε λοιπόν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν λειτουργικά την μεταβλητή όταν μεσολαβεί η έννοια του αγνώστου. Επίσης πως οι μαθητές χρησιμοποιούν φυσική ή αριθμητική γλώσσα σε ένα όχι καθαρά αλγεβρικό πλαίσιο, ειδικά αυτοί που δεν γνωρίζουν την συμβολική αλγεβρική γλώσσα. Στο πλαίσιο της αναλυτικής γεωμετρίας οι μαθητές με ανεπαρκή γνώση της συμβολικής πρότυπης γλώσσας ήταν σε θέση να εξετάσουν ευκολότερα τις πολλαπλές λύσεις, παρουσία οπτικών αντιπροσωπευτικών μητρώων (registers), προκαλώντας το νοητικό μοντέλο της εξίσωσης που είναι η ευθεία γραμμή. Έτσι, η σχέση μεταβλητών γίνεται "αντιληπτή" μέσω του γραφήματος και ο μαθητής μπορεί πιο εύκολα να "απεικονίσει" πολλαπλές λύσεις.

Μια ακόμη έρευνα για τις ερμηνείες που δίνουν οι μαθητές στα διάφορα σύμβολα της άλγεβρας πραγματοποίησαν οι Christou, Vosniadou και Vamvakoussi (2006). Βασισμένοι στην εννοιολογική αλλαγή, η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως επεξηγηματικό πλαίσιο, οι ερευνητές προσπαθούν να κατανοήσουν τις δυσκολίες των μαθητών κατά την χρήση εγγράμματων συμβόλων ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Το δείγμα ήταν 34 μαθητές Β΄ Γυμνασίου και Γ΄ Γυμνασίου (14,5 ετών κατά μέσο όρο) από δύο σχολεία της Αθήνας. Τους δόθηκε ένα υποχρεωτικής – απάντησης ερωτηματολόγιο με έξι κατηγορίες αλγεβρικών εκφράσεων (Q1:a, Q2:b, Q3:$4g$, Q4: a/b, Q5: $d+d+d$ *και* Q6: $k+3$) και 11 απαντήσεις πολλαπλής επιλογής , στις οποίες έπρεπε να επιλέξουν την αλγεβρική έκφραση που δεν ταιριάζει . Οι εναλλακτικές απαντήσεις που είχαν ήταν θετικά και αρνητικά κλάσματα, θετικά και αρνητικά δεκαδικά ψηφία, θετικοί και αρνητικοί ακέραιοι. Η δωδέκατη επιλογή από τις απαντήσεις ήταν πάντα η σωστή , δηλαδή ότι όλοι οι αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν σε κάθε αλγεβρική έκφραση. Συγκεκριμένα οι οδηγίες που τους δόθηκαν στην εκφώνηση ήταν *«Στην άλγεβρα, χρησιμοποιούμε τα κυριολεκτικά σύμβολα (όπως a, b, x, y, κλπ.) ως επί το πλείστον για να αντιπροσωπεύσουν αριθμούς. Σε αυτό το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιούμε τέτοια σύμβολα. Διαβάστε προσεκτικά τις ακόλουθες ερωτήσεις. Αν νομίζετε ότι υπάρχουν ορισμένοι αριθμοί μεταξύ των συγκεκριμένων εναλλακτικών λύσεων που δεν μπορούν να ανατεθούν στις συγκεκριμένες αλγεβρικές εκφράσεις, τοποθετήστε έναν κύκλο γύρω τους. Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερους από έναν αριθμούς αν θέλετε».* Οι μαθητές απάντησαν στο ερωτηματολόγιο , παρουσία και του καθηγητή τους. Το συμπέρασμα από τις απαντήσεις των παιδιών, επιβεβαίωσαν την υπόθεση της προσέγγισης της εννοιολογικής αλλαγής, ότι η ερμηνεία των μαθητών για τη χρήση των εγγράμματων συμβόλων στην άλγεβρα είναι έντονα επηρεασμένη από την επαφή τους με αριθμούς, ιδίως φυσικούς, στο πλαίσιο της αριθμητικής. Το συμπέρασμα βασίστηκε σε δύο πηγές αποδεικτικών: πρώτον, οι μαθητές τείνουν να υποκαθιστούν μόνο φυσικούς αριθμούς για τα εγγράμματα σύμβολα των αλγεβρικών εκφράσεων και δεύτερον, οι μαθητές ερμήνευσαν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων ως αυτό που θα έχει και ο αριθμός που αντιπροσωπεύουν. Αυτό συνέβαινε, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές διδάσκονται στο σχολείο ότι, κάθε κυριολεκτικό σύμβολο αντιστοιχεί σε μια σειρά πραγματικών αριθμών. Με αυτή τη μελέτη θέλησαν να αποδείξουν ότι το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να μας βοηθήσει να συστηματοποιήσουμε τα λάθη των μαθητών στην ερμηνεία της χρήσης των εγγράμματων συμβόλων στην άλγεβρα και να παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για το σχεδιασμό των προγραμμάτων σπουδών και τη διδασκαλία. Είναι σημαντικό για τους δασκάλους της άλγεβρας καθώς και για τους σχεδιαστές του προγράμματος σπουδών να είναι εξοικειωμένοι με τις πεποιθήσεις των μαθητών και τους πιθανούς λόγους για τα λάθη τους όταν χρησιμοποιούν εγγράμματα σύμβολα σε άλγεβρα, καθώς και σε άλλους τομείς, όπως φυσική, χημεία κ.α.

Λαμβάνοντας υπόψη το ρόλο της άλγεβρας στο Δημοτικό και στα πρώιμα Μαθηματικά ο Rubin (2005) θέλησε να υπερβεί τον περιορισμένο ορισμό των "προβλημάτων με γράμματα" και να αποδώσει μια πιο γενική άποψη της αλγεβρικής σκέψης. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι το NCTM Αρχές και πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά (2000) περιλαμβάνει μια περιγραφή της άλγεβρας που ξεπερνά τα χειριστικά σύμβολα. Στα πρότυπα, η άλγεβρα ορίζεται ως:

• Κατανόηση προτύπων, σχέσεων και λειτουργιών.

• Αντιπροσώπευση και ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων και δομών με χρήση αλγεβρικών συμβόλων.

• Χρήση μαθηματικών μοντέλων για την αναπαραγωγή και κατανόηση ποσοτικών σχέσεων

• Ανάλυση αλλαγών σε διάφορα περιβάλλοντα.

Στην έρευνά του με μαθητές Γ΄ Δημοτικού μέχρι Ε΄ Δημοτικού εξέτασε τρεις ξεχωριστές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης που μπορούν να εντοπιστούν στη στοιχειώδη διδασκαλία των μαθηματικών: τη *γενίκευση, την έννοια της ισότητας και τη σκέψη με άγνωστες ποσότητες.* Αυτά τα τρία συστατικά της αλγεβρικής λογικής παρέχουν ένα χρήσιμο πλαίσιο για να αναγνωριστεί αν οι μαθητές των τάξεων αυτών σκέφτονται αλγεβρικά και για να καθοριστεί αν ένα πρόβλημα μπορούν να το δουν αλγεβρικά. Δίνοντας προβλήματα στα παιδιά βασισμένα σε αυτές τις τρεις έννοιες της άλγεβρας ο Rubin κατέληξε ότι οι μαθητές μικρών τάξεων Δημοτικού ,αν δουλευτούν σωστά από νωρίς και στα τρία αυτά συστατικά της αλγεβρική λογικής τότε στην επίσημη άλγεβρα του Γυμνασίου και Λυκείου ,δεν θα έχουν τόσα πολλά προβλήματα στην κατανόηση της.

Άλλη μια έρευνα εξέτασε πως τα εγγράμματα σύμβολα επηρεάζουν την κατανόηση των αλγεβρικών εκφράσεων από τους μαθητές. Οι ερευνητές McNeil και Weinberg et.al (2010) έχοντας ένα δείγμα 322 μαθητών, 110 Στ΄ Δημοτικού, 119 Α΄ Γυμνασίου και 93 Β΄ Γυμνασίου από ένα σχολείο κέντρο-δυτικά της Αμερικής, χρησιμοποίησε ένα ιστορικό πρόβλημα του Kuchemann (1978, 1981), όπου στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν τα αρχικά των λέξεων που αντιπροσώπευαν (c-cake και b-brownie) και στις άλλες δύο περιπτώσεις μη μνημονικά γράμματα όπως x και y ή Φ και Ψ. Εσφαλμένες απαντήσεις δόθηκαν περισσότερο στην πρώτη κατάσταση με τη μνημονική ερμηνεία των γραμμάτων, έτσι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση μνημονικών συμβόλων μπορεί να εμποδίσει την ερμηνεία των αλγεβρικών εκφράσεων από τους μαθητές.

Την ικανότητα των μαθητών για γενίκευση, αλλά και τη γνώση τους στις πολλαπλές παραστάσεις και μεταβλητές πριν από την επίσημη διδασκαλία των αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εξέτασε η Wilkie (2016). Με δείγμα 102 μαθητές από έξι τάξεις Α΄ Γυμνασίου σε ένα σχολείο της Μελβούρνης και με τη χρήση ενός δοκιμίου με ασκήσεις που αφορούσαν την αλγεβρική σκέψη κατέληξε στα παρακάτω συμπεράσματα: Οι μισοί μαθητές από τους ερωτηθέντες κατάφεραν να δείξουν δυνατότητα για ρητή γενίκευση και το ένα πέμπτο φάνηκε ικανό να κατασκευάσει έναν συμβολικό λειτουργικό κανόνα. Ακόμη οι μισοί κατάφεραν να απεικονίσουν ένα πραγματικό σενάριο γραμμικής σχέσης αλγεβρικά. Υπήρξαν κάποια στοιχεία που έδειξαν να συνδέουν τα αναπτυσσόμενα μοτίβα ή το πραγματικό σενάριο με μια κατάλληλη γραφική αναπαράσταση. Το επίπεδο της ικανότητας γενίκευσης ενός σχεδίου βρέθηκε να συνδέεται με την ευέλικτη σκέψη για εξερεύνηση σχέσεων και το αντίστροφο, και με την εξήγηση της ακαταλληλότητας της αναλογικής συλλογιστικής για τις γραμμικές συναρτήσεις με μια σταθερά.

Οι πολλές χρήσεις των μεταβλητών θα μπορούσαν να είναι ο ένοχος για τις δυσκολίες των μαθητών με αυτή την έννοια, επίσης είναι πιθανό τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν εργάζονται με μεταβλητές να προέρχονται από το πώς αυτή η έννοια παρουσιάζεται στο πρόγραμμα σπουδών και σε μεγάλο βαθμό στο σχολικό βιβλίο που χρησιμοποιούν οι μαθητές (Dogbey και Kersaint, 2012).

Μια έρευνα που εξετάζει την εμφάνιση της έννοια της μεταβλητής σε σχολικά εγχειρίδια είναι των Dogbey και Kersaint

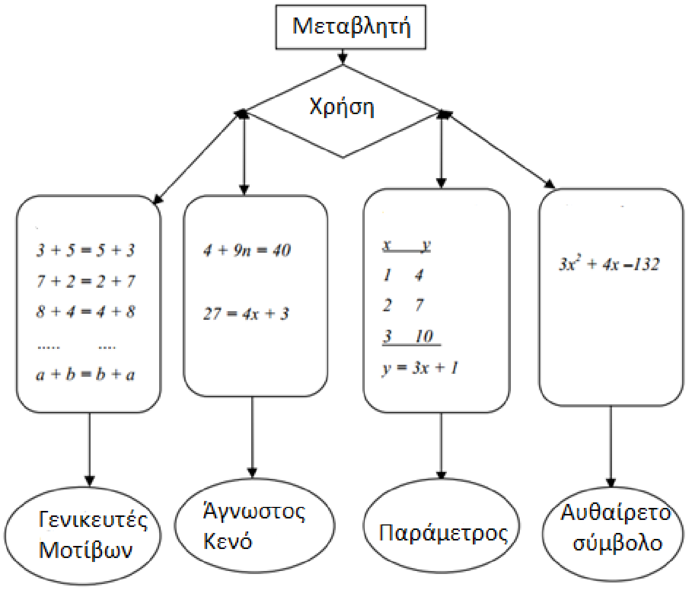
(2012). Πιο συγκεκριμένα θέλησαν να εξετάσουν σε ποιο βαθμό τα πιο δημοφιλή εγχειρίδια μαθηματικών μεσαίων τάξεων στις ΗΠΑ παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των μεταβλητών καθώς και πώς αυτά τα υλικά παρέχουν υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς για να διδάξουν τις μεταβλητές στις αίθουσες διδασκαλίας τους. Επιπρόσθετα, προσπάθησαν να διερευνήσουν το βαθμό στον οποίο η ανάπτυξη και η παρουσίαση των μεταβλητών στα μαθηματικά των μεσαίων τάξεων έχουν αλλάξει κατά τις τελευταίες πέντε δεκαετίες σε τέσσερις πρόσφατες εποχές μαθηματικής εκπαίδευσης στις Ηνωμένες Πολιτείες. Παραθέτουν σε πίνακες προγενέστερες κατηγοριοποιήσεις της μεταβλητής και έπειτα αναφέρουν και αναλύουν αυτήν που χρησιμοποιούν οι ίδιοι στην έρευνα τους.

Ξεκινούν με την ανάλυση του ρόλου του γραμματικού συμβολισμού του Küchemann (1978):

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών του Küchemann		
Ρόλος γραμματικού συμβόλου	**Ορισμός**	**Παράδειγμα**
Γράμμα υπολογίσιμο (Letter evaluated)	Αριθμητική τιμή που μπορεί να καθορίζεται από δοκιμές και σφάλματα.	Αν m=3n+1 και n=4, τότε m=;
Γράμμα που παραβλέπεται (Letter ignored)	Δεν χρειάζεται να διαχειριστούμε την έκφραση που περιέχει τη μεταβλητή.	Αν a+b=43, τότε a+b+2=;
Γράμμα ως αντικείμενο (Letter as object)	Συντόμευση για αντικείμενο αντί για το χαρακτηριστικό της.	P=4s για τον υπολογισμό της περιμέτρου του τετραγώνου
Γράμμα ως συγκεκριμένος άγνωστος (Letter as specific unknown)	Συγκεκριμένος, abeit-άγνωστος, νούμερο που μπορεί να λειτουργήσει χωρίς να υπολογιστεί.	Αν r=s+t και r+s+t=30, τότε r=;
Γράμμα ως γενικευμένος αριθμός	Μπορεί να πάρει πολλές τιμές.	Τί μπορούμε να πούμε για το c αν c+d=10, και c<d ;
Γράμμα ως μεταβλητή	Εκφράσεις με γράμματα καθώς η τιμή τους αλλάζει συνεχώς.	Ποιο είναι μεγαλύτερο 2n ή n+2 ;

Πίνακας 3: Κατηγοριοποίηση μεταβλητών του Küchemann (1978)

Συνεχίζουν με την ανάλυση της χρήσης της μεταβλητής του Usiskin (1988):



Σχήμα 1: Διάγραμμα ροής που απεικονίζει τη χρήση των μεταβλητών στην άλγεβρα, (Usiskin, 1988)

Έπειτα ανέφεραν την κατηγοριοποίηση του Phillip (1992)(βλ. Dogbey & Kersaint):

Κατηγοριοποίηση γραμμάτων-συμβόλων του Philipp	
Χρήσεις των εγγράμματων συμβόλων	*Παραδείγματα*
Ετικέτες	f, y στην 3f = 1y (3 πόδια είναι 1 γιάρδα)
Σταθερές	π, e, c
Άγνωστοι	x στην 5x – 9 = 11
Γενικευμένοι αριθμοί	a, b στην a+b = b+a
Ποικίλες ποσότητες	x, y στην y = 9x - 2
Παράμετροι	m, b στην y = mx+b
Αφηρημένα σύμβολα	e, x στην e*x = x

Πίνακας 4: Κατηγοριοποίηση γραμμάτων-συμβόλων του Philipp (1992)

Τέλος εξηγούν τις κατηγορίες των Schoenfield and Arcavi (1988):

Μεταβλητή είναι ένα γράμμα που αντιπροσωπεύει έναν αριθμό.
Μεταβλητή είναι ένα σύμβολο σε μια μαθηματική φόρμουλα αντιπροσωπεύοντας μια μεταβλητή, κενό θέσης.
Μια ποσότητα που μπορεί να λαμβάνει απεριόριστες τιμές αποκαλείται μεταβλητή.
Μεταβλητή είναι μια ποσότητα δύναμης που με μαθηματικό υπολογισμό ή έρευνα θεωρείται ότι μεταβάλλεται ή έχει τη ικανότητα να μεταβάλλει τις τιμές της.
Μεταβλητή είναι ένας γενικού σκοπού όρος στα μαθηματικά για μια οντότητα που λαμβάνει διάφορες τιμές σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο πλαίσιο. Το πεδίο ορισμού της μεταβλητής μπορεί να περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο σύνολο αριθμών ή αλγεβρικών ποσοτήτων.
Μεταβλητή είναι μια ονομαστική οντότητα που έχει μια τιμή που μπορεί να αλλάξει κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του προγράμματος.
Η μεταβλητή συνδέεται με μια συγκεκριμένη θέση μνήμης και η τιμή της μεταβλητής είναι το περιεχόμενο αυτής της θέσης μνήμης.

Ακόμη σημαντικές οι πληροφορίες που παραθέτουν στην έρευνα τους οι Dogbey και Kersaint για τον Wagner (1999) ο οποίος έδωσε μια άλλη διάσταση στην έννοια της μεταβλητής, εξηγώντας τρόπους όπου οι μεταβλητές είναι παρόμοιες αλλά και διαφορετικές από τις λέξεις και τους αριθμούς. Συγκεκριμένα εξηγεί ο Wagner ότι, αφενός, οι μεταβλητές είναι σαν λέξεις στο ότι ενεργούν ως σύμβολα στα κενά και συχνά επιλέγονται για να συντομεύουν τις λέξεις, έτσι μπορούν να σημαίνουν διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικά πλαίσια. Από την άλλη πλευρά, οι μεταβλητές είναι διαφορετικές από τις λέξεις επειδή πρέπει να διατηρούν την ίδια έννοια στο ίδιο πλαίσιο, ενώ οι λέξεις μπορούν να αλλάξουν σημασίες ακόμη και μέσα στην ίδια φράση. Προειδοποίησε ότι προκειμένου να αντιμετωπιστούν αυτές οι πολυπλοκότητες, είναι επιτακτική ανάγκη να δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να εξερευνήσουν τις διαφορετικές χρήσεις των μεταβλητών. Καταλήγει ο Wagner οτι είναι σημαντικό, όταν διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί άλγεβρα (και γενικότερα σχολικά μαθηματικά), να γνωρίζουν τις διαφορετικές χρήσεις και τις έννοιες των μεταβλητών και να τις συζητούν ρητά με τους μαθητές. Τέτοιες συζητήσεις θα πρέπει να σχετίζονται με το πλαίσιο μέσα στο οποίο διερευνώνται οι μεταβλητές. Επιπλέον, θα πρέπει οι ίδιοι οι δάσκαλοι να είναι γνώστες των διαφορετικών τρόπων χρήσης αυτών των συμβόλων και να αναγνωρίζουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που εκδηλώνουν σε διάφορα περιβάλλοντα (Wagner, 1999 βλ. Dogbey και Kersaint, 2012)

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε παρακάτω με ποια κατηγοριοποίηση των γραμμάτων-συμβόλων πραγματοποίησαν την έρευνα τους οι Dogbey και Kersaint.

Ρόλος των γραμμάτων - συμβόλων	***Ορισμός***	***Παράδειγμα***
Ετικέτα	Συντόμευση για το όνομα του αντικειμένου	f, y στην 3f = 1y (3 πόδια είναι 1 γιάρδα)
Σταθερές	Ποσότητα με συγκεκριμένη τιμή σε συγκεκριμένο περιεχόμενο	π, e, c
Κενή θέση/Συγκεκριμένοι άγνωστοι	Συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός σε λύση εξίσωσης	$x + 5 = 8$
Συνεχής άγνωστοι	Άγνωστες ποσότητες που πρέπει να βρεθούν σε εξισώσεις, εκφράσεις ή ανισότητες	$x^2 – 3x = 28$, $2x – 4 < 7$
Γενικευμένοι αριθμοί	Αντιπροσωπεύει ένα σύνολο αριθμών που επαληθεύουν την σχέση	$a + b = b + a$
Ποικίλες ποσότητες/ Παράμετροι	Λειτουργικές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, οι παράμετροι είναι σταθερές που ποικίλλουν στη γενική μορφή των σχέσεων	x και y στην $y = -2x + 6$ m, b στην $y = mx + b$
Αφηρημένα σύμβολα	Εγγράμματα σύμβολα χωρίς αριθμητική αναφορά	e, x στην $e*x = x$

Πίνακας 5: Κατηγοριοποίηση γραμμάτων – συμβόλων Dogbey & Kersaint (2012)

Για να καταλήξουν στο συγκεκριμένο αναλυτικό πλαίσιο πήραν υπόψη τους: τις αντιλήψεις του Usikin (1988) για τις μεταβλητές, το πλαίσιο των Schwenfeld και Arcavi (1988)(βλ. Dogbey&Kersaint, 2012), την κατηγοριοποίηση των εγγράμματων συμβόλων του Philipps (1992) και τις δυσκολίες κατανόησης των μεταβλητών από τους μαθητές του Küchemann (1978, 1981).

Σημαντικής αξίας φάνηκε η πρόσφατη ερευνητική εργασία των Δημητρακοπούλου και Χρήστου (2014) για την έννοια της μεταβλητής που αποτελείται από δύο μελέτες. Εμείς θα αναφερθούμε στη δεύτερη όπου εξέτασαν αρχικά με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα σε σχέση με τις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄

Γυμνασίου και στη συνέχεια κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται σε αυτά είναι φυσικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα σχεδιάστηκε μια μελέτη ανάλυσης περιεχομένου των σχολικών βιβλίων με βάση την κατηγοριοποίηση των μορφών εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων που πρότειναν οι Dogbey και Kersaint, (2012):

α) «Ετικέτα-Επιγραφή», αν η μεταβλητή απεικόνιζε μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική η οποία μπορούσε να έχει αριθμητική αναφορά, για παράδειγμα ρ-ακτίνα κύκλου, α πλευρά τριγώνου,

β) «Σταθερά», αν η μεταβλητή περιέγραφε μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής, για παράδειγμα π, g ή e, π.χ. στη σχέση $E=\pi\rho^2$,

γ) «Συγκεκριμένος αριθμός», αν περιέγραφε τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που μπορούσε να λάβει η μεταβλητή, για παράδειγμα στην επίλυση της εξίσωσης χ-4=1,

δ) «Γενικευμένος αριθμός», όταν η μεταβλητή μπορούσε να λάβει είτε παραπάνω από δυο τιμές (γνωστές ή άγνωστες) είτε εξέφραζε μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρείχαν μια διαπίστωση, όπως για παράδειγμα στην επίλυση της ανίσωσης $5x+2>3$ ή στην σχέση $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ και

ε) «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» όταν οι μεταβλητές εξέφραζαν μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση δυο μεγεθών, όπως για παράδειγμα στις συναρτήσεις $y=ax+b$.

Αναμένανε ως επικρατούσες κατηγορίες εμφάνισης των μεταβλητών τις κατηγορίες «*Συγκεκριμένος Αριθμός*» και «*Ετικέτα-Επιγραφή*». Τα αποτελέσματα όμως έδειξαν ότι οι μεταβλητές στην Α΄ Γυμνασίου εμφανίστηκαν με ποσοστό 39% ως «Γενικευμένος αριθμός», στην Β΄ γυμνασίου ως «Ετικέτα» 33% και ως «Γενικευμένος αριθμός» 14% και στην Γ΄ Γυμνασίου ως « Γενικευμένος αριθμός» με 45%. Στο σύνολο λοιπόν, και για τις τρεις τάξεις Γυμνασίου οι μεταβλητές εμφανίστηκαν με την μορφή του «*Γενικευμένου αριθμού*» με ποσοστό 34% ενώ έπονταν η κατηγορία «Ετικέτα- Επιγραφή» με 23%, τρίτες στη σειρά εμφανίστηκαν οι κατηγορίες «Συγκεκριμένος αριθμός» & «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» με ποσοστό 20% και τελευταία η κατηγορία «Σταθερά» με ποσοστό 3%. Όσον αφορά το είδος των αριθμών που ελάμβαναν οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία, η έρευνα έδειξε ότι τα ποσοστά εμφάνισης των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών (48%) έναντι των μη-φυσικών αριθμών (52%) ήταν περίπου τα ίδια. Κατέληξαν επίσης στο συμπέρασμα ότι σε σύγκριση με τα βιβλία που χρησιμοποίησαν στην έρευνα τους οι Dogbey και Kersaint (2012), τα βιβλία του Ελληνικού σχολείου εμφανίζονται να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές με πιο εκλεπτυσμένο τρόπο. Σχετικά με το είδος των αριθμών που αποδίδονται στις μεταβλητές, αν αναλογιστεί κανείς ότι στην κατηγορία «μη-φυσικοί» ανήκουν διαφόρων ειδών αριθμοί, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί που οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί ήδη από την Γ΄ Δημοτικού και οι αρνητικοί αριθμοί (από την Α΄ γυμνασίου), τότε το ποσοστό που πήραν οι μη-φυσικοί αριθμοί ίσως να είναι σχετικά χαμηλό. Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν άλλες ανάλογες μελέτες σχετικά με το είδος του αριθμού που αποδίδονται στις μεταβλητές ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Οι ερευνητές επίσης θεωρούν πως θα ήταν χρήσιμη η ενίσχυση της εμφάνισης των μεταβλητών με τη μορφή των μη-φυσικών αριθμών. Οι μαθητές γνωρίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ήδη από το Δημοτικό σχολείο και τους αρνητικούς ακέραιους-άρρητους αριθμούς από τις Α΄ και Β΄ Γυμνασίου και συνεπώς δεν θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον χειρισμό τους, αν εμφανίζονταν αυξημένη η χρήση των μη φυσικών αριθμών ως τιμές των γραμμάτων. Προτείνουν ότι ένας τρόπος βελτίωσης των υπαρχόντων σχολικών βιβλίων πιθανά να ήταν η εμφανής και ρητή διατύπωση της ύπαρξης και εμφάνισης των διαφορετικών μορφών των μεταβλητών. Έτσι ώστε οι μαθητές να εισάγονται στην πολυπλοκότητα της φύσης τους και να τις αναγνωρίζουν με τις πολλές και διαφορετικές μορφές τους ,δηλαδή ως Επιγραφή, Σταθερά, Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και όχι μόνον με τη μορφή του Συγκεκριμένου αριθμού & του Γενικευμένου αριθμού (Kieran, 2007, βλ. Δημητρακοπούλου και Χρήστου, 2014).

Οι δυσκολίες των παιδιών να αντιληφθούν έννοιες της Άλγεβρας φαίνεται και σε έρευνες που ασχολήθηκαν με το σύμβολο της ισότητας και την εξίσωση, όπως επίσης με τις σταθερές και τις παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα οι Herscovics και Linchevski (1994) διερεύνησαν τα ανώτερα όρια των άτυπων διεργασιών των μαθητών στη λύση των εξισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο πριν από οποιαδήποτε οδηγία ή επεξήγηση. Σκοπός της μελέτης τους ήταν να προσδιοριστεί μια πιθανή οριοθέτηση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας στο πλαίσιο των εξισώσεων. Έτσι επέλεξαν μια ακολουθία από 50 εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο που έπρεπε να επιλυθούν από τους μαθητές πριν από οποιαδήποτε επίσημη εισαγωγή στην άλγεβρα. Ρωτήθηκαν με ατομικές συνεντεύξεις 22 μαθητές Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου στο Μόντρεαλ, από τους οποίους τρεις ήταν μαθητές του 90%, οχτώ ήταν του 80%, πέντε ήταν του 70%, άλλοι πέντε του 60% και ένας του 50%. Κατέβαλαν κάθε δυνατή προσπάθεια για να δημιουργήσουν τις βέλτιστες συνθήκες αφού υπήρχε ένας υπολογιστής για τις αριθμητικές πράξεις, οι σημειώσεις του ερευνητή ήταν πάντα διαθέσιμες στους μαθητές (εξαλείφοντας έτσι την ανάγκη τους να παρακολουθούν), τους υπενθύμιζαν ότι η ορθότητα της απάντησης δεν ήταν το πρωταρχικό μέλημα της έρευνας, αλλά τους ενδιέφεραν οι διαδικασίες που χρησιμοποιούσαν. Κάθε μαθητής έκανε την συνέντευξη μεμονωμένα και ήταν το επίκεντρο της προσοχής δύο ενηλίκων, του ερευνητή και του παρατηρητή, που ενδιαφέρονται για τις διαδικασίες σκέψης του. Όλα τα παραπάνω μας εξηγούν ότι το δείγμα απαντούσε καλύτερα από ό, τι υπό κανονικές συνθήκες στην τάξη. Επιπλέον, το σχολείο που είχε επιλεγεί για τη μελέτη ήταν γνωστό για τις ακαδημαϊκές του αριστείες, έτσι δεδομένου ότι στόχος ήταν να ανακαλύψουν οι ερευνητές το ανώτερο όριο της προ-αλγεβρικής δυνατότητας των 12χρονων, το δείγμα ήταν μια κατάλληλη επιλογή.

Είχε προηγηθεί μια προκαταρκτική αξιολόγηση ώστε να δουν οι ερευνητές κατά πόσο οι μαθητές είναι έτοιμοι για «Άλγεβρα». Τα αποτελέσματα ανά περίπτωση έδειξαν ότι στην ισότητα $34 = 19 + 15$

οι δύο πιο αδύναμοι μαθητές δεν δέχτηκαν σωστή την ισότητα, για την εξίσωση 364 = 796 – n οι περισσότεροι μαθητές το διάβασαν από δεξιά προς αριστερά « n μείον 796 ίσον 364», στην περίπτωση 15 + 7 = 10 + 12 οι μαθητές έγραψαν δύο ξεχωριστές προσθέσεις με το ίδιο αποτέλεσμα 22. Συνεχίζοντας ρωτήθηκαν στις εξής παραστάσεις: Η πρώτη ήταν 5 + 6 x 10 = ? όπου από τους 22 μαθητές οι 17 (77%) απάντησαν 110, που σημαίνει ότι προηγήθηκε η πρόσθεση αντί του πολλαπλασιασμού, στην δεύτερη 17 – 3 x 5 = ? οι 19 από τους 22 έκαναν πρώτα τον πολλαπλασιασμό και μετά την αφαίρεση, στην τρίτη περίπτωση 8 x (5 + 7) = ? όλοι οι μαθητές έκαναν πρώτα την πράξη στην παρένθεση. Μετά από τις διορθώσεις των παραπάνω όλοι οι μαθητές θυμήθηκαν την προτεραιότητα πράξεων και στο τέλος όλοι έλυσαν σωστά την τέταρτη παράσταση 6 + 5 x 4 + 7 x 3 = ? . Οι ερευνητές ήθελαν να αξιολογήσουν την ικανότητα των μαθητών του δείγματος στην διαγραφή οπότε τους ρώτησαν πώς θα εργαζόντουσαν σε αυτές τις περιπτώσεις: 17 + 59 – 59 + 18 – 18 = ? και 237 + 89 – 89 + 67 – 82 + 82 = ? . Στη πρώτη μόνο 5 (από τους οποίους 3 ήταν αδύναμοι μαθητές) είδαν ότι δεν χρειαζόταν πράξη λόγω της διαγραφής. Στην δεύτερη περίπτωση 8 μαθητές έκαναν και τις δύο διαγραφές, άλλοι 8 έκαναν μόνο τη μια και 5 δεν έκαναν καθόλου διαγραφές. Το τελευταίο που ζητήθηκε στην προκαταρκτική εξέταση ήταν να εξηγήσουν τι είναι το «3n». Επειδή είχε γίνει εισαγωγή πιο πριν στο σχολικό βιβλίο της έννοιας των συμβόλων και της μεταβλητής τα παιδιά όλα κατάλαβαν ότι σημαίνει 3 επί n και μάλιστα στην ερώτηση αν αντικαταστήσουμε το n με 3 ή 5 τα παιδιά απάντησαν σωστά ότι το αποτέλεσμα θα είναι 9 ή 15 αντίστοιχα. Στη συνέχεια της μελέτης οι ερευνητές έδωσαν 50 εξισώσεις που ήταν χωρισμένες σε έξι είδη, ώστε να ασχοληθούν οι μαθητές και με τις τέσσερις πράξεις, αλλά και με διάφορες παραλλαγές της θέσης του αγνώστου. Τα είδη των εξισώσεων ήταν: 13 εξισώσεις με έναν άγνωστο στην πρόσθεση ή στην αφαίρεση, 9 εξισώσεις με έναν άγνωστο στον πολλαπλασιασμό ή στην διαίρεση, 7 με ομαδοποιημένους αριθμητικούς όρους, 8 εξισώσεις με άγνωστο στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό, 10 εξισώσεις με εμφάνιση δύο φορές του αγνώστου στην ίδια μεριά και 3 με άγνωστο και στις δύο μεριές της εξίσωσης. Τα αποτελέσματα που καταγράφηκαν αναλυτικά για κάθε περίπτωση εξισώσεων ήταν τα εξής: στις απλές περιπτώσεις φάνηκε ότι οι μαθητές εργάζονται γύρω από τον άγνωστο σε καθαρά αριθμητικό επίπεδο χρησιμοποιώντας την αντίστροφη πράξη. Πολλές φορές κάποια παιδιά αντέγραφαν ξανά την εξίσωση από τα δεξιά προς τα αριστερά για να είναι ο άγνωστος στο πρώτο μέλος ή όταν είχαν να εργασθούν με περισσότερους αριθμητικούς όρους που είχαν μείον δεν κατάφερναν να δώσουν σωστό αποτέλεσμα. Τέλος στην περίπτωση του αγνώστου και στις δύο μεριές προσπάθησαν να κάνουν ότι έκαναν και στην περίπτωση εμφάνισης του αγνώστου δύο φορές στη ίδια μεριά, αυτό οδήγησε στην οριοθέτηση αριθμητικής και άλγεβρας από την άποψη ενός γνωστικού κενού. Ένα γνωστικό χάσμα που χαρακτηρίζεται από την αδυναμία των παιδιών να λειτουργήσουν με ή πάνω στον άγνωστο.

Το σύμβολο της ισότητας, καθώς και τον τρόπο που παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια, μελέτησαν οι McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattic και συν. (2006) σε τέσσερα βιβλία των τάξεων Στ΄ Δημοτικού ως Β΄ Γυμνασίου. Τα δυο από τα βιβλία που επιλέχθηκαν ήταν βασισμένα στις δεξιότητες (π.χ ασκήσεις που απαιτούν μόνο αριθμητικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς), και τα άλλα δύο στα Πρότυπα (Standards-based) χρηματοδοτημένα από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών και σχεδιασμένα με την καθοδήγηση του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) Πρότυπα Σπουδών και Αξιολόγησης για τα Μαθηματικά του Σχολείου. Οι ερευνητές γνώριζαν ότι οι μαθητές αντί να ερμηνεύουν το σημάδι «=» (ίσον) ως σχεσιακό σύμβολο της μαθηματικής ισοδυναμίας, οι περισσότεροι το ερμηνεύουν ως λειτουργικό σύμβολο που σημαίνει "βρείτε το σύνολο" ή "βάλτε την απάντηση".Εξέτασαν κάθε εμφάνιση του συμβόλου «=» (ίσον) σε ένα τυχαία επιλεγμένο δείγμα 50% των σελίδων από κάθε βιβλίο. Κάθε παράσταση με «ίσον» κωδικοποιήθηκε όταν ήταν σε μια πράξη όπου το πλαίσιο σήμαινε ‘ισούται με την απάντηση’ (π.χ. 3 + 4 = 7) ή ένα μη τυπικό πλαίσιο (π.χ., 7 = 3 + 4). Πλαίσιο λειτουργιών ίσων απαντήσεων ορίστηκε ως οποιαδήποτε εξίσωση που περιέχει πράξεις στην αριστερή πλευρά του «ίσον» και από την δεξιά είτε είναι ένας αριθμός (π.χ. 3+ 4 = 7, 2x + 5 = 7) ή μια άγνωστη ποσότητα (π.χ. 3+ 4 = _, 3+ 4 = x). Ένα μη τυπικό πλαίσιο ορίστηκε ως οποιαδήποτε ισοδυναμία που δεν ήταν στο πλαίσιο των λειτουργιών-ίσων-απαντήσεων (π.χ. 7 = 3 + 4, 7 = 7, 1 ft = 12 in., y = x).Παρατήρησαν μετά από την παραπάνω ανάλυση ότι ο αριθμός των συμβόλων των «=» (ίσον) ήταν μεγαλύτερος στα βιβλία της Β΄ Γυμνασίου παρά στης Στ΄ Δημοτικού. Τα βιβλία και των τριών τάξεων που ήταν βασισμένα σε δεξιότητες είχαν περισσότερα σύμβολα του «ίσον» παρά αυτών που ήταν βασισμένα στα Πρότυπα. Τέλος σε όλες τις τάξεις ο αριθμός των εκφράσεων ισότητας που περιείχαν πράξεις και στις δύο μεριές του ίσον (=) (π.χ 3+4=5+2) ήταν πολύ μικρός και για τα δύο είδη πλαισίου.

Τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι τα σχολικά εγχειρίδια παρουσιάζουν το σύμβολο της ισότητας σπάνια σε περιβάλλοντα που προσπαθούν να δώσουν μια σχεσιακή ερμηνεία, η οποία είναι σημαντική για την επιτυχία στην άλγεβρα, αλλά προκαλούν τους μαθητές να συνεχίσουν να ερμηνεύουν το σύμβολο του ίσον ως λειτουργικό. Πηγαίνοντας οι μαθητές σε μεγαλύτερη τάξη η αλλαγή αυτή της ερμηνείας του συμβόλου του ίσον (=) δεν κατακτιέται, ενώ τα βιβλία αυξάνουν την εμφάνιση του ίσον ως ένα λειτουργικό σύμβολο, πιθανότατα δεν είναι αρκετές οι εξισώσεις με πράξεις και στις δύο μεριές του ίσον για να το καταφέρουν. Ακόμη και τα μη τυποποιημένα πλαίσια που εμφανίζεται το ίσον δεν είναι τόσο αποτελεσματικά για την αλλαγή στην κατανόηση του όσο οι ισότητες με πράξεις και στις δύο μεριές. Οι ερευνητές προτείνουν επίσης για την βελτίωση της κατανόησης από τους μαθητές του συμβόλου του ίσον (=) και, συνεπώς, για την καταλληλότερη προετοιμασία τους για την άλγεβρα απαιτούνται αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών, καθώς και αλλαγές στα στοιχειώδη μαθηματικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αν οι μαθητές αναπτυξιακά είναι έτοιμοι για να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν μαθηματικές έννοιες θα πρέπει και παράγοντες όπως εκπαιδευτικοί, πρόγραμμα σπουδών, σχολικά εγχειρίδια να βοηθήσουν για την καλύτερη προετοιμασία των μαθητών για γνώση.

Στην ερευνητική του εργασία ο Βαμβακούσης (2014, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ) εργάσθηκε με 24 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, σε ένα δημόσιο σχολείο της Αθήνας, πάνω σε τρεις έννοιες : της μεταβλητής , της εξίσωσης και της παραμέτρου. Τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας ήταν: Α. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Γ΄ γυμνασίου κατανοούν την έννοια της μεταβλητής; Β. Με ποιο τρόπο οι μαθητές κατανοούν ένα πρόβλημα, το ρόλο του αγνώστου; Έχουν αποκτήσει την ικανότητα να κατασκευάζουν κατάλληλη εξίσωση, σύστημα εξισώσεων ή ανίσωση, για να επιλύσουν το πρόβλημα; Γ. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της παραμέτρου και τη σχέση μεταβλητής – παραμέτρου; Με τη βοήθεια φύλλων εργασίας, ερωτηματολόγιου και συνεντεύξεων ο ερευνητής κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου, αφού συμβόλιζαν αντικείμενα ή ποσότητες με το αρχικό γράμμα του αντικειμένου (π.χ. ψ για το ψάρι). Επιπρόσθετα δεν έχουν αναπτύξει αφηρημένη αλγεβρική σκέψη, γι ΄ αυτό χρησιμοποιούν συνήθως αριθμητικά μοντέλα και λειτουργούν ’διαδικαστικά’ ακολουθώντας σειρές εντολών κατά τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων. Ακόμη έχουν μεγάλη δυσκολία κατά την επίλυση προβλημάτων στην ’μετάφραση’ από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική, αντιμετωπίζουν ευκολότερα προβλήματα ίδια ή παρόμοια με αυτά που ήδη έχουν λύσει και χωρίς να έχουν έλεγχο των λύσεων στα προβλήματα, αποδέχονται όλες τις λύσεις. Τέλος στις εξισώσεις, χρησιμοποιούν το ίσον (=) όπως στο Δημοτικό σχολείο, με το λειτουργικό του ρόλο και όχι ως σύμβολο ισοδυναμίας των δύο μελών της εξίσωσης. Δεν αναγνωρίζουν κοινές δομές σε διαφορετικά σενάρια (αν διαφοροποιηθεί λίγο το σενάριο οδηγούνται σε αποτυχία κατασκευής της εξίσωσης) και σε σχέση με το πρόσημο των μεταβλητών μπερδεύονται πολύ (θεωρώντας π.χ. το –χ αρνητική ποσότητα). Όσο αφορά τις έννοιες σταθεράς και παραμέτρου γράφει ο Σωφρόνης «Τις καλύπτει ένα πέπλο μυστηρίου στα μάτια των μαθητών». Στα σχολικά εγχειρίδια δεν υπάρχει αναφορά για αυτές τις έννοιες ή για το αλγεβρικό αντικείμενο τους. Τελειώνοντας ο ερευνητής αναφέρει την αναγκαιότητα της αξιολόγησης των σχολικών εγχειριδίων αλλά και τον τρόπο που διαχειρίζονται οι εκπαιδευτικοί το εκπαιδευτικό τους υλικό.

Η μελέτη των Φιλίππου, Πίττα-Πανταζή και Χρήστου (2001) παραθέτει κριτήρια αξιολόγησης σχολικών εγχειριδίων και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Αναφέρουν ότι παρόλο που κάποια θέματα διδάχτηκαν στα παιδιά στο Δημοτικό και επαναλαμβάνονται στο Γυμνάσιο, θα περίμενε κανείς να υπάρχει μια ομαλή συνέχεια. Αντ΄ αυτού στα βιβλία των δύο βαθμίδων αποκαλύπτονται σημαντικές διαφορές ως προς τη φιλοσοφία και την προσέγγιση με την οποία είναι γραμμένα. Η έρευνα βασίστηκε στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου που γράφονται με ευθύνη του αντίστοιχου τομέα της Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων. Επέλεξαν να εξετάσουν τα σχολικά βιβλία με βάση τα κριτήρια που προτείνουν οι ερευνητές του Project 2061, στα πλαίσια του Προγράμματος Science for all Americans (Επιστήμη για όλους τους Αμερικανούς).

Κριτήρια αξιολόγησης σχολικών εγχειριδίων και διδασκαλίας

I. **Σκοποί του μαθήματος** (π.χ. Ξεκάθαρη διατύπωση στόχων του μαθήματος και σειρά δραστηριοτήτων)
II. **Οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών σε προϋπάρχουσες γνώσεις και εντοπισμός παρανοήσεων**
III. **Εμπλοκή των μαθητών στα μαθηματικά** (π.χ. Διαθεματική προσέγγιση, άμεση και ενεργός ενασχόληση του μαθητή)
IV. **Ανάπτυξη Μαθηματικών Ιδεών** (π.χ. Εισαγωγή εννοιών, ακριβής και προσεκτική διατύπωση εννοιών, παρουσίαση βήμα με βήμα διαδικασίας, εξάσκηση)
V. **Ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης** (π.χ. Ενθάρρυνση του μαθητή να επεξηγεί τη σκέψη του, να ερμηνεύει δραστηριότητες και αποτελέσματα)
VI. **Αξιολόγηση της προόδου των μαθητών στα μαθηματικά** (π.χ. Αξιολόγηση που να καλύπτει αυτά που έχουν διδαχτεί οι μαθητές)
VII. **Ενίσχυση του μαθησιακού περιβάλλοντος της τάξης** (π.χ. Περιβάλλον ενισχυτικό για τη διδασκαλία και παροχή εκπαιδευτικών προκλήσεων μέσω δραστηριοτήτων ή υλικών προς όλους τους μαθητές)

Εικόνα 4: Κριτήρια αξιολόγησης σχολικών εγχειριδίων και διδασκαλίας (Φιλίππου, Πίττα-Πανταζή και Χρήστου, 2001)

Όσον αφορά το κριτήριο «Σκοποί του μαθήματος» οι μελετητές σχολιάζουν τα εξής: *«Το πρόγραμμα του Γυμνασίου είναι πιο τυποποιημένο. Δίνεται έμφαση στις αλγοριθμικές διαδικασίες, στους τύπους και στην εκτέλεση πράξεων. Απουσιάζει η χρήση διαγραμμάτων, εικόνων και εγκαταλείπεται η εισαγωγή των μαθηματικών εννοιών μέσω δραστηριοτήτων οι οποίες περιλαμβάνουν τη χρήση πραγματικών ή εικονικών αντικειμένων. Οι έννοιες συχνά εισάγονται μέσω μαθηματικών ορισμών και ιδιοτήτων. Τα παιδιά καλούνται να δώσουν ιδιαίτερη έμφαση στις αλγοριθμικές διαδικασίες, στην ακριβή και σαφή μαθηματική έκφραση αλλά όχι στις διαφορετικές αναπαραστάσεις ή διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.»* (σελ. 5).

Από την μελέτη όλων των κριτηρίων κατέληξαν οι ερευνητές πως υπήρχαν αρκετές διαφορές τόσο στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όσο και στην οργάνωση και διδασκαλία των μαθηματικών στις δύο βαθμίδες. Αρκετά από τα χαρακτηριστικά των βιβλίων φάνηκαν να υιοθετούνται από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία τους. Συγκεκριμένα, ο Κύπριος εκπαιδευτικός δεν έχει οτιδήποτε άλλο στη διάθεσή του για να τον καθοδηγήσει στη διαμόρφωση του μαθήματος του, εκτός φυσικά αν υπάρχει προσωπική πρωτοβουλία. Αυτό εξηγεί γιατί σε ένα μεγάλο βαθμό οι εκπαιδευτικοί ,της δημοτικής όσο και της μέσης εκπαίδευσης , βασίζουν τη διδασκαλία τους στο σχολικό εγχειρίδιο που έχουν στα χέρια τους.

Τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, αναφορικά με την κατανόηση των μαθητών σε βασικές αλγεβρικές έννοιες, μελέτησαν οι Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007). Τα ερευνητικά τους ερωτήματα ήταν : 1.Ποιες είναι οι αντιλήψεις των καθηγητών μέσης εκπαίδευσης σχετικά με τη σκέψη των μαθητών σε θέματα που αφορούν το σύμβολο της ισότητας και τη μεταβλητή; 2. Πώς αυτές οι αντιλήψεις συγκρίνονται με την πραγματική απόδοση των μαθητών κατά την εφαρμογή του συμβόλου της ισότητας και της μεταβλητής; Για τις ανάγκες της έρευνας προσκλήθηκαν όλοι οι εκπαιδευτικοί μέσης εκπαίδευσης μιας μικρής αστικής περιοχής κέντρο-δυτικά της Αμερικής. Από τους 85 εκπαιδευτικούς μόνο οι 20 συνεργάστηκαν και πήρε ο καθένας το συμβολικό χρηματικό ποσό των $20 για τη συμμετοχή του. Από τους 20 εκπαιδευτικούς οι 10 δίδασκαν στην ΣΤ΄ Δημοτικού, οι 6 στην Α΄ Γυμνασίου και οι 4 στην Β΄ Γυμνασίου. Οι 4 από αυτούς δίδασκαν μόνο μαθηματικά, ενώ οι υπόλοιποι 16 και άλλα μαθήματα όπως επιστήμες, κοινωνιολογία και λογοτεχνία. Η εκπαιδευτική τους εμπειρία κυμαινόταν από τα 5 ως τα 31 χρόνια και 19 από αυτούς χρησιμοποιούσαν το ίδιο Πρόγραμμα Σπουδών. Δόθηκε ένα δοκίμιο στους μαθητές με τέσσερις ασκήσεις, δύο σχετικά με το σύμβολο της ισότητας και δύο με την μεταβλητή. Έπειτα το ίδιο δοκίμιο δόθηκε στους εκπαιδευτικούς μαζί με τις ερωτήσεις:

1. Ποιες είναι οι σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις που θα περιμένατε από τους μαθητές σας (για κάθε τάξη αντίστοιχα) να δώσουν σε αυτό το πρόβλημα και ποιες στρατηγικές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για τις απαντήσεις τους;
2. Τι πιστεύετε ότι ένας μαθητής που δίνει αυτή την απάντηση μπορεί να σκέφτεται;
3. Ας υποθέσουμε ότι δώσατε αυτό το πρόβλημα σε 100 μαθητές από κάθε τάξη του σχολείου, συμπεριλαμβανομένου ενός ευρέος φάσματος ικανοτήτων. Μπορείτε να αναφέρετε πόσους αναμένετε ότι θα χρησιμοποιήσουν κάθε στρατηγική;
4. Μπορείτε να εξηγήσετε το σκεπτικό σας πίσω από την ανάθεση αυτών των αριθμών;

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί προέβλεψαν σε ένα βαθμό τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο ερώτημα «Πώς πιστεύετε ότι θα ανταποκριθούν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών της μεταβλητής και του συμβόλου ισότητας;». Όσον αφορά τη μεταβλητή, κατάλαβαν ότι κάποιοι μαθητές της μέσης εκπαίδευσης βλέπουν αυτά τα σύμβολα ως αντικείμενα ή πιστεύουν ότι πρέπει να αποδίδουν μόνο μία συγκεκριμένη τιμή. Όταν ζητήθηκε να εξεταστεί η έννοια της ισότητας, οι περισσότεροι καθηγητές γνώριζαν ότι κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι το σύμβολο της ισότητας σημαίνει "δώστε την απάντηση". Ωστόσο, η έκταση αυτής της παρερμηνείας δεν αναμενόταν με ακρίβεια, με τους δασκάλους να προβλέπουν πως πολλοί μαθητές έδωσαν ένα σχετικό ορισμό του συμβόλου της ισότητας.

1.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής μπορεί να συνδέεται με τους ακόλουθους τρόπους με καθένα από τα σημεία που εξετάσαμε:

- Σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης της συμβολικής γραφής:

Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την νέα συμβολική γραφή που εισάγεται στην άλγεβρα, επικρατεί η εσφαλμένη ερμηνεία ενός αλγεβρικού γράμματος ως ονόματος ενός αντικειμένου με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια σύγχυση κατά την γραφή εκφράσεων και εξισώσεων σε συγκεκριμένα πλαίσια. Ενώ φαίνεται να καταλαβαίνουν ότι το γράμμα αντιπροσωπεύει έναν αριθμό, δεν μπορούν εύκολα να δεχθούν ειδικά σε μικρές ηλικίες, ότι μπορεί να πάρει πολλές τιμές. Ακόμη φάνηκε ότι δεν αντικαθιστούν τα γράμματα με μη-φυσικούς αριθμούς παρόλο που τους διδάσκονται πολύ νωρίς.

- Σχετικά με τις δυσκολίες της μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη:

  Οι μαθητές μικρότερων τάξεων (από Γ΄ Δημοτικού) που δεν έχουν διδαχθεί την επίσημη άλγεβρα μπορούν να διαχειριστούν αλγεβρικές εκφράσεις. Μπορεί να ξεκινήσουν με τη χρήση εικονικών σχεδίων και έπειτα να αποδώσουν συγκεκριμένες τιμές στους αγνώστους. Καθώς μεταβαίνουν σε μεγαλύτερες τάξεις επηρεάζονται από την χρήση μνημονικών κανόνων που τους εμποδίζει να ερμηνεύουν αλγεβρικές εκφράσεις. Ειδικότερα όταν εισάγονται και άλλα συμβολικά συστήματα τότε οι παρανοήσεις και οι δυσκολίες αυξάνονται σχετικά με τις μεταβλητές και τους αγνώστους. Οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν λειτουργικά την μεταβλητή όταν μεσολαβεί η έννοια του αγνώστου. Καταλήγουν οι ερευνητές ότι αν από μικρές τάξεις γίνει ομαλά η εισαγωγή στην άλγεβρα και στην έννοια της μεταβλητής τότε τα αποτελέσματα στην κατανόηση σε μεγαλύτερη τάξη θα είναι εντυπωσιακά.

- Σχετικά με τον τρόπο που παρουσιάζεται η αλγεβρική σκέψη στα Αναλυτικά προγράμματα τόσο στου Δημοτικού όσο και στου Γυμνασίου:

  Τα ΑΠ εντάσσουν από νωρίς την αλγεβρική σκέψη στα σχολεία. Αυτό που πρέπει να ληφθεί υπόψη είναι να γίνεται σωστά η διδασκαλία μέσα στην τάξη. Το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται στις αίθουσες διδασκαλίας πρέπει να έχει μια συνοχή από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

- Σχετικά με τις δυσκολίες να αντιληφθούν τα παιδιά έννοιες όπως της εξίσωσης, της σταθεράς και της παραμέτρου:

  Πέρα από την μεταβλητή και το συμβολικό μέρος της άλγεβρας, οι μαθητές έδειξαν να δυσκολεύονται σε έννοιες όπως της εξίσωσης , της σταθεράς και της παραμέτρου. Για το σύμβολο του ίσον (=) κατακτούν μόνο τη λειτουργική ιδιότητα του και δεν μπορούν εύκολα να κατανοήσουν την σχέση ισοδυναμίας. Από φυσική σε αλγεβρική γλώσσα ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών έχει μεγάλη δυσκολία και μπορούν να λύσουν μόνο παρόμοια προβλήματα με αυτά που έχουν λύσει, χωρίς να ελέγχουν τις απαντήσεις, με αποτέλεσμα να τις δέχονται όλες. Επίσης κατά την λύση εξισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο λειτουργούν ‘’διαδικαστικά’’ ακολουθώντας σειρές εντολών, κάνοντας απλά την αντίστροφη πράξη, ώστε όταν εμπλουτιστεί μια εξίσωση να μην μπορούν να τη λύσουν εύκολα. Τέλος για την έννοια της σταθεράς στα βιβλία χρησιμοποιείται σε πολύ μικρό ποσοστό και για την παράμετρο είναι αρκετά συγκεχυμένη έννοια στο μυαλό των μαθητών και δεν βοηθάνε ούτε τα βιβλία για την καλύτερη κατανόηση της.

- Σχετικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την άλγεβρα, τη συμβολική γραφή και τις μεταβλητές :

  Οι έρευνες αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν ότι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών αντιλαμβάνεται τις μεταβλητές ως αντικείμενα ή πιστεύουν ότι πρέπει να αποδίδουν μόνο μία συγκεκριμένη τιμή σε αυτές. Για το σύμβολο της ισότητας κατανοούν ότι οι μαθητές, ιδιαίτερα αυτοί που προέρχονται από το Δημοτικό, έχουν στο μυαλό τους το σύμβολο της ισότητας ως ‘δώσε την απάντηση’. Αυτό υποδηλώνει και την αδυναμία των καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να μπορέσουν να βοηθήσουν τα παιδιά να καταλάβουν το λειτουργικό χαρακτήρα του συμβόλου. Η αλγεβρική σκέψη για να εφαρμοστεί από τους μαθητές, πρέπει πρώτα να γίνει σωστή προετοιμασία από τους εκπαιδευτικούς.

- Σχετικά με την αναγκαιότητα και το περιεχόμενο της συνεχούς επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.

  Οι έρευνες έδειξαν ότι η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε αρκετές περιπτώσεις κρίνεται αναγκαία και υποχρεωτική. Αν ένας δάσκαλος-καθηγητής θέλει να είναι παραγωγικός στην τάξη οφείλει να ενημερώνεται συνεχώς για τους νέους και αποτελεσματικότερους τρόπους στη μετάδοση της γνώσης. Σε κάθε τάξη, σε κάθε βαθμίδα με κάθε νέα έννοια που εισάγεται υπάρχουν δυσκολίες και εμπόδια. Οι έρευνες έχουν δείξει ότι όσο περισσότερο ‘μελετάει’ ο εκπαιδευτικός τόσο πιο εύκολα αντιμετωπίζονται αυτές οι δυσκολίες και τα εμπόδια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η εμφάνιση της έννοιας της μεταβλητής στα Αναλυτικά Προγράμματα και στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τα σχολικά εγχειρίδια και τα Προγράμματα Σπουδών της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου με βάση την εμφάνιση της έννοια της μεταβλητής. Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια κατηγοριοποίηση για τα γράμματα - σύμβολα με αυτήν της επιστημονικής έρευνας της Δημητρακοπούλου (2014, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ) όμως με κάποιες διευκρινίσεις. Έπειτα θα εξετάσουμε τί είδους αριθμοί αποδίδονται στα γράμματα που αντικαθιστούνται με αριθμητικές τιμές. Τέλος θα αναλύσουμε τα σχολικά βιβλία και ΑΠΣ των δύο τάξεων με βάση τα σημεία που εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφία.

Καταρχήν μία σύντομη ιστορική αναδρομή στα ελληνικά Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ). Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) στην ελληνική εκπαίδευση από τη Μεταπολίτευση ως το 1997, παρά τις αλλεπάλληλες μεταρρυθμίσεις, παρέμειναν παραδοσιακά και κλειστά προγράμματα. Στα προγράμματα αυτά κυριαρχούσε η δασκαλοκεντρική μέθοδος διδασκαλίας, έδιναν περισσότερη έμφαση στην επίτευξη γνωστικών στόχων και λιγότερη στη μαθησιακή διαδικασία (Δ.Ε.Π.Π.Σ-Α.Π.Σ., 2003). Με τις εκπαιδευτικές αλλαγές που επιχειρήθηκαν κατά την περίοδο 1997-2003, έγινε προσπάθεια τα ΑΠΣ να αποκτήσουν σταδιακά χαρακτήρα ευέλικτων προγραμμάτων, ώστε η μάθηση να μην είναι μία απλή συσσώρευση γνώσεων αλλά δημιουργική καλλιέργεια των τρόπων κατάκτησης της γνώσης μέσο συμμετοχικών και βιωματικών διαδικασιών (Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, 1997).

Από το 2003, με το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για την υποχρεωτική εκπαίδευση υιοθετήθηκε και η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης και επιχειρήθηκε η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων. Η τελευταία ενημέρωση των ΑΠΣ έγινε το 2011 με το «Νέο Σχολείο του 21ου αιώνα» το οποίο στοχεύει στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης μέσω της ανάδειξης των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: γενίκευση, αφαίρεση, ακρίβεια και συντομία. Το ΠΣ επιδιώκει να διαμορφώσει μαθητές που να σκέφτονται θετικά για τα μαθηματικά και να τα χρησιμοποιούν στο κοινωνικό του περιβάλλον. Το νέο σχολείο έχει σκοπό «*να προετοιμάσει με κριτικό τρόπο τον αυριανό πολίτη της αναδυόμενης Κοινωνίας της Γνώσης, προκειμένου να είναι σε θέση ως υπεύθυνος, δημοκρατικός, ενεργός και σκεπτόμενος πολίτης να αντιμετωπίσει τις προκλήσεις αλλά και να αδράξει τις ευκαιρίες της νέας εποχής, μετασχηματίζοντας την κοινωνική και οικονομική πραγματικότητα που τον περιβάλλει*» (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003).

2.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μελέτη περιλαμβάνει τη 1η φάση όπου αναλύεται το είδος και η συχνότητα εμφάνισης των γραμμάτων - μεταβλητών, τη 2η φάση όπου μελετάται το είδος του αριθμού που αποδίδεται στα γράμματα (φυσικός ή μη φυσικός αριθμός). Στη συνέχεια αναλύονται τα 4 βασικά σημεία της έρευνας σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, τόσο στα σχολικά εγχειρίδια όσο και στα Προγράμματα Σπουδών της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου και τέλος αναλύεται το «Βιβλίο του Δασκάλου» για την Στ΄ Δημοτικού και το «Βιβλίο του Καθηγητή» για την Α΄ Γυμνασίου για τον εντοπισμό των δύο σημείων της έρευνας που αφορούν τους εκπαιδευτικούς..

Το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στα ελληνικά σχολεία κατά κύριο λόγο, είναι τα σχολικά εγχειρίδια, οπότε έχει μεγάλη ερευνητική σημασία να εξετασθούν οι διδακτικές προσεγγίσεις του παρεχόμενου διδακτικού υλικού σε έννοιες όπως η μεταβλητή. Στο βαθμό που είναι γνωστό ελάχιστες μελέτες υπάρχουν που να εξετάζουν τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία (Δημητρακοπούλου, 2014).

Στο αρχικό στάδιο της μελέτης καταγράφηκαν τα γράμματα και ο τρόπος που εμφανίζονταν στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, ομαδοποιήθηκαν και στη συνέχεια κατατάχθηκαν σε πέντε κατηγορίες μορφών εμφάνισης των γραμμάτων που ήταν οι εξής:

- *«Ετικέτα - Επιγραφή»*
- *«Σταθερά»*
- *«Συγκεκριμένος Αριθμός»*
- *«Γενικευμένος Αριθμός»*
- *«Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες».*

Η Δημητρακοπούλου, στην ερευνητική της εργασία, με τη συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση ανέλυσε την παρουσία των γραμμάτων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής στα σχολικά βιβλία Μαθηματικών των τριών τάξεων του Γυμνασίου. Κι αυτή με τη σειρά της στηρίχθηκε στην κατηγοριοποίηση των Dogbey και Kersaint (2012) με κάποιες αλλαγές φυσικά, ώστε να είναι πλησιέστερα στο «πνεύμα» των ελληνικών σχολικών βιβλίων.

2.1.1. ΔΕΙΓΜΑ

Το υλικό που θα αναλυθεί είναι τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου που διδάσκονται στα ελληνικά σχολεία από το 2007 και μετά. Συγκεκριμένα τα βιβλία της Στ΄ Δημοτικού περιλαμβάνουν ένα Βιβλίο Μαθητή και τέσσερα τεύχη Τετραδίων Εργασιών (α΄, β΄ , γ΄ και δ΄ τεύχος), ενώ για την Α΄ Γυμνασίου χρησιμοποιείται ένα βιβλίο μαθητή. Από το 2011 τα σχολικά βιβλία που χρησιμοποιούνται στα ελληνικά σχολεία εκδίδονται από το ΙΤΥΕ (‘Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων’) ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’. Τα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

Βιβλίο Μαθηματικών	**Έτος Έκδοσης**	**Συγγραφείς**	**Εκδότης**
Στ΄ Δημοτικού Βιβλίο Μαθητή	2007	Κασσιώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’
Στ΄ Δημοτικού α΄τεύχος Τετράδιο Εργασιών	2007	Κασσιώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’
Στ΄ Δημοτικού β΄ τεύχος Τετράδιο Εργασιών	2007	Κασσιώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’
Στ΄ Δημοτικού γ΄ τεύχος Τετράδιο Εργασιών	2007	Κασσιώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’
Στ΄ Δημοτικού δ΄ τεύχος Τετράδιο Εργασιών	2007	Κασσιώτη Ο., Κλιάπης Π., Οικονόμου Θ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’
Α΄ Γυμνασίου	2007	Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σπ.	ΙΤΥΕ ‘’ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’’

Πίνακας 6

Επίσης θα αναλυθούν τα ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003) του Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου, καθώς και τα βιβλία των εκπαιδευτικών της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου.

2.1.2. Εργαλεία

Στη παρούσα μελέτη για την κατηγοριοποίηση των γραμμάτων που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ γυμνασίου θα χρησιμοποιηθεί ποσοτική ανάλυση. Κατά τον εντοπισμό των 6 σημείων που εστιάζει η έρευνα για τις δυσκολίες που εμφανίζονται στην κατανόηση της έννοια της μεταβλητή στα σχολικά βιβλία, στα ΠΣ και στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου θα χρησιμοποιηθεί ανάλυση περιεχομένου.

2.1.3. Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Κατά την συλλογή των δεδομένων της 1ης φάσης της μελέτης ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία:

Επισημάναμε σε κάθε σελίδα του σχολικού βιβλίου (Βιβλίο Μαθητή και Τετράδιο Εργασιών) τόσο τον τρόπο εμφάνισης των γραμμάτων-συμβόλων όσο και τη συχνότητα τους. Έπειτα κατηγοριοποιήσαμε τα δεδομένα σύμφωνα με τις πέντε κατηγορίες που αναφέρονται στον Πίνακα: 8.

Αριθμήσαμε πόσοι και ποιοι εγγράμματοι συμβολισμοί υπάρχουν στα βιβλία που χρησιμοποιούνται στην Στ΄ Δημοτικού από την πρώτη διδακτική σελίδα μέχρι και την τελευταία (6 Θεματικές Ενότητες).

Βιβλίο ανάλυσης	**Πρώτη σελίδα ανάλυσης**	**Τελευταία σελίδα ανάλυσης**
Βιβλίο Μαθητή Στ΄ Δημοτικού	9	170
Τετράδιο Εργασιών τευχος α΄	7	42
Τετράδιο Εργασιών τευχος β΄	7	42
Τετράδιο Εργασιών τευχος γ΄	7	42
Τετράδιο Εργασιών τευχος δ΄	7	40
Σύνολο διδακτικών σελίδων : 304		

Πίνακας 7

Αναλύσαμε τα γράμματα - σύμβολα που υπάρχαν:

Α) Στο Βιβλίο Μαθητή:

- ✓ Στις Δραστηριότητες ,
- ✓ Στους Ορισμούς,

- ✓ Στα Παραδείγματα,
- ✓ Στις Εφαρμογές,
- ✓ Στις Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση,
- ✓ Στην Ανακεφαλαίωση.

Β) Στα Τετράδια Εργασιών:

- ✓ Στις Ασκήσεις,
- ✓ Στα Προβλήματα,
- ✓ Στις Δραστηριότητες με επεκτάσεις,
- ✓ Στα Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση.

Δεν συμπεριλάβαμε:

- ✓ Τα εισαγωγικά σημειώματα των κεφαλαίων διότι η πιθανή συμβολική γραφή που αναφέρουν, δεν συμπίπτει με το ερευνητικό ενδιαφέρον της παρούσας μελέτης.
- ✓ Τις ανακεφαλαιώσεις διότι επαναλαμβάνουν τις περισσότερες φορές ότι έχει αναφερθεί στα κεφάλαια.

Έτσι τα δεδομένα που συλλέξαμε αφορούν:

α) το πλήθος των διδακτικών σελίδων κάθε εγχειριδίου,

β) το πλήθος των διδακτικών σελίδων που περιέχουν εγγράμματο συμβολισμό,

γ) τη συχνότητα και το είδος των γραμμάτων - συμβόλων που εμφανίζονταν σε κάθε κεφάλαιο.

Η κατηγοριοποίηση της μορφής εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα έρευνα στηρίζεται στην κατηγοριοποίηση της Δημητρακοπούλου (2014, σελ.84) αλλά με τις διευκρινήσεις για το πότε τα γράμματα – σύμβολα αντιστοιχούν σε μεταβλητή και πότε δεν αντιστοιχούν σε μεταβλητή. Αυτή η διαφοροποίηση του ρόλου των γραμμάτων – συμβόλων είναι κεντρικό σημείο για το πέρασμα από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη. Στην αλγεβρική γραφή όπου συνυπάρχουν αριθμητικά σύμβολα και γράμματα – σύμβολα θα πρέπει ο μαθητής και ο διδάσκων να μπορούν να διευκρινίζουν τον εκάστοτε ρόλο του γράμματος – συμβόλου. Για παράδειγμα το γράμμα «π» άλλοτε μπορεί να συμβολίζει τη σταθερά $\pi = \frac{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma} = 3{,}14$, άλλοτε μπορεί να συμβολίζει το πηλίκο στον αλγόριθμο της διαίρεσης $\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon$.

Κατηγορίες μορφών εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων στα Σχολικά Βιβλία			
	Κατηγορία	**Ορισμός**	**Παραδείγματα**
I	*Επιγραφή – Ετικέτα* ***(Θεωρείται μεταβλητή, εκτός των γραμμάτων – συμβόλων που σημαίνουν μονάδες μέτρησης)***	Απεικονίζει μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική, η οποία μπορεί να έχει μονότιμη αριθμητική αναφορά.	ρ-ακτίνα κύκλου, α-πλευρά τριγώνου
II	*Σταθερά* ***(Δεν θεωρείται μεταβλητή)***	Περιγράφει μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής.	π , e, g
III	*Συγκεκριμένος Αριθμός (Γνωστός ή Άγνωστος)* ***(Θεωρείται μεταβλητή)***	Περιγράφει τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που μπορεί να λάβει μια μεταβλητή	$x - 4 = 1$ $x^2 = 9$ Α=1, σημείο στην αριθμογραμμή
IV	*Γενικευμένος αριθμός* ***(Μπορεί να θεωρηθεί μεταβλητή)***	Αναφέρεται σε μεταβλητές που λαμβάνουν είτε παραπάνω από δυο τιμές(γνωστές ή άγνωστες) είτε εκφράζουν μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρέχουν μια αληθή διαπίστωση.	$5x+2>3$ ***(στην ανίσωση αναζητάτε το υποσύνολο των λύσεων)*** $α + β = β + α$ ***(ενώ η ταυτότητα ισχύει για όλα τα σημεία ενός συνόλου)***
V	*Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες* ***(Θεωρείται μεταβλητή, εδώ υπάρχει ταυτόχρονη παρουσία δύο ή περισσότερων γραμμάτων με τον περιορισμό που θέτει η σχέση μεταξύ τους.)***	Εκφράζει μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση δυο μεγεθών.	$y = 3\,x + 2$

Πίνακας 8: Κατηγοριοποίηση από την ερευνητική εργασία Δημητρακοπούλου (2014) σελ. 84.

Στη $2^{η}$ φάση θα λάβουμε υπόψη τους εγγράμματους συμβολισμούς που εμφανίζονται στα βιβλία αυτά με την μορφή ενός μόνον γράμματος και οι οποίοι αντικαθιστούνται από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό. Θα εξετάσουμε σε κάθε περίπτωση αν αντικαθιστούνται από φυσικούς «ΦΑ» ή από μη φυσικούς αριθμούς «ΜΦΑ».

Τέλος θα εξετάσουμε την εμφάνιση της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά εγχειρίδια και στα ΑΠΣ με βάση τα 6 σημεία εστίασης που εντοπίσαμε.

2.1.3.1. Παραδείγματα συλλογής δεδομένων

Στη συνέχεια δίνονται αναλυτικά παραδείγματα καταχώρησης για κάθε μια από τις πέντε κατηγορίες μορφών εμφάνισης των γραμμάτων.

❖ Κατηγορία Ι : *«Ετικέτα» ή Επιγραφή»*

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα γράμματα που απεικονίζουν μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική η οποία μπορεί να έχει μονότιμη αριθμητική αναφορά. Έτσι συλλέγουμε:

1) Γράμματα που εκφράζουν μια συγκεκριμένη σχέση – τύπο αλγεβρικά ή γεωμετρικά, όπως η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης με Δ= Διαιρετέος, δ= διαιρέτης και π= πηλίκο και στη γεωμετρία τα Ε= Εμβαδό, β= βάση, υ= ύψος, Ο= Όγκος και τα α, β, γ = πλευρές σχημάτων.

Από τη διαίρεση Δ : δ = π μπορώ να πω ότι ισχύει Δ = δ · π.

Εικόνα 5: Σελ.22 Κεφάλαιο 7 Στ΄ Δημοτικού

$E_{(\text{παραλληλογράμμου})} = β \cdot υ$

Εικόνα 6: Σελ. 150 Κεφάλαιο 62 Γεωμετρία Στ΄ Δημοτικού

$O_{(\text{παραλληλεπιπέδου})} = α \cdot β \cdot γ.$

Εικόνα 7: Σελ.166 Κεφάλαιο 70 Γεωμετρία Στ΄ Δημοτικού

❖ Κατηγορία ΙΙ : «*Σταθερά»*

Στην κατηγορία αυτή τα γράμματα χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ποσότητες σταθερής αξίας όπως για παράδειγμα ο αριθμός «π», το οποίο όπως γνωρίζουμε είναι ο άρρητος αριθμός 3,1415926535…., ο οποίος κατά προσέγγιση χρησιμοποιείται ως π= 3,14.

❖ Κατηγορία ΙΙΙ *: «Συγκεκριμένος Αριθμός- γνωστός ή άγνωστος»*

Στην κατηγορία αυτή το γράμμα κατέχει τη θέση ενός ή το πολύ δυο συγκεκριμένων γνωστών ή άγνωστων αριθμών κι έτσι συμπεριλαμβάνει:

1) Γράμματα που απεικονίζουν αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, όπως το παρακάτω παράδειγμα τα Α=2 και Β=6

Εικόνα 8: Σελ.16 Κεφάλαιο 4 Στ΄ Δημοτικού

2) Γράμματα που επιλέγονται τυχαία για να συμβολίσουν τον άγνωστο σε ένα πρόβλημα, όπως το γράμμα α παρακάτω

1ο βήμα: Συμβολίζω την έκταση του Ατλαντικού με ένα γράμμα. Π.χ. το ***α*** και γράφω:
Η έκταση του Ατλαντικού: ***α***
Η έκταση του Ειρηνικού .... τετρ. χμ.
Η έκταση του Ινδικού: .... τετρ. χμ
2ο βήμα: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή ***α*** με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.

Εικόνα 9: Σελ. 62 Κεφάλαιο 25 Στ΄ Δημοτικού

3) Γράμματα που δηλώνουν τον άγνωστο σε εξίσωση.

Να λύσεις τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot x = 30$ **β)** $20 \cdot x = 2$ **γ)** $5 \cdot x = 4$ **δ)** $3 \cdot x = 0{,}75$

Εικόνα 10: Σελ 25 Κεφάλαιο 28 β΄ τεύχος ΤΕ Στ΄ Δημοτικού

4) Γράμματα που συμβολίζουν μια γωνία.

$\hat{o} = 65^o, \hat{\imath} = 60^o, \hat{s} = 55^o$

Εικόνα11: Σελ.142 Κεφάλαιο 58 Γεωμετρία Στ΄ Δημοτικού

❖ Κατηγορία IV : «*Γενικευμένος αριθμός*»

Στην κατηγορία αυτή τα γράμματα χρησιμοποιούνται σε εκφράσεις που αναπαριστούν κάποια μοτίβα ή εκφράζουν αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρέχουν μια αληθή διαπίστωση ή διατυπώνουν γενικές ιδιότητες. Επίσης στην κατηγορία αυτή περιέχονται γράμματα που λαμβάνουν περισσότερες των δυο τιμών (γνωστών ή αγνώστων). Έτσι συλλέγουμε γράμματα που εμφανίζονται:

1) Σε σχέσεις που αναπαριστούν οποιονδήποτε αριθμό. Παρακάτω το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τις ηλικίες του Κώστα και της Σμαρώς σε κάθε χρονιά. Μετά απάντησε στις ερωτήσεις.

Χρονιά	Ηλικία Σμαρώς	Ηλικία Κώστα
2006	12	16
2007		
2008		
2009		
2010		

- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 12, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 12 + ...
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 25, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 25 + ...
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι **x**, η ηλικία του Κώστα θα είναι: ....

Εικόνα 12: Σελ. 61 Κεφάλαιο 25 Στ΄ Δημοτικού

2) Σε τύπους γεωμετρίας, όπου με την αντικατάσταση κάποιων γραμμάτων με αριθμούς υπολογίζουμε την άγνωστη ποσότητα. Τύπος υπολογισμού Όγκου με δεδομένες διαστάσεις α, β και γ

Ο όγκος της πρώτης πισίνας ήταν: $O_{(\text{παραλληλεπιπέδου})} = α \cdot β \cdot γ$

.... • .... • .... = ...

Εικόνα 13: σελ.166 Κεφάλαιο 70 Γεωμετρίας Στ΄ Δημοτικού

2.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

2.2.1. Αποτελέσματα 1ης Φάσης της έρευνας

Σε αυτή τη φάση θα αναλύσουμε τα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή και α΄, β΄, γ΄, και δ΄τεύχος από τα Τετράδια Εργασιών) και Α΄ Γυμνασίου με βάση την κατηγορία και τη συχνότητα που εμφανίζονται τα γράμματα - σύμβολα.

Α) Αναλογίες & Ποσοστά Σελίδων που περιέχουν γράμματα – σύμβολα

Πίνακας συχνοτήτων & ποσοστών των διδακτικών σελίδων που περιέχουν γράμματα - συμβόλων					
Σχολικό βιβλίο	***Διδακτικές σελίδες***	***Διδακτικές σελίδες που περιέχουν γράμματα - σύμβολα***	***Ποσοστό***	***Πρώτη διδακτική σελίδα που περιέχει γράμματα - σύμβολα***	***Τελευταία διδακτική σελίδα που περιέχει γράμματα - σύμβολα***
Βιβλίο Μαθητή Στ Δημοτικού	162	151	96%	16	170
Τετράδιο εργασιών Στ ΄ Δημοτικού: α΄τεύχος β΄τεύχος γ΄τεύχος δ΄τεύχος	36 36 36 34	- 20 1 1	0% 56% 3% 3%	- 8 21 13	- 27 21 13
Σύνολο Στ΄Δημοτικού	304	173	58%		
Α΄ Γυμνασίου*	211	136	65%	12	226

Πίνακας 9

*Τα αποτελέσματα της Α΄ Γυμνασίου είναι από την διπλωματική εργασία της Δημητρακοπούλου (2014,Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ)

Στη συγκεκριμένη ανάλυση τα ποσοστά που βρήκαμε από το πλήθος των σελίδων που περιέχουν γράμματα - σύμβολα προς το συνολικό πλήθος των διδακτικών σελίδων έδειξαν ότι στο ΒΜ της Στ΄ Δημοτικού το 96% περιέχει γράμματα - σύμβολα (ένα ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό), ενώ στα ΤΕ το ποσοστό είναι 56% μόνο στο β΄ τεύχος (εδώ περιέχεται η $2^η$ Θεματική Ενότητα «Εξισώσεις»). Στο σύνολο όλων των διδακτικών σελίδων της Στ΄ Δημοτικού το ποσοστό που περιέχει γράμματα - σύμβολα είναι 58% . Για την Α΄ Γυμνασίου το 65% των διδακτικών σελίδων περιέχουν γράμματα - σύμβολα, το οποίο είναι μοιρασμένο στις σελίδες του σχολικού βιβλίου και μάλιστα παρατηρήσαμε ότι γίνεται μια συχνή χρήση του εγγράμματου συμβολισμού σε όλα τα κεφάλαια και ιδιαίτερα στο κομμάτι της θεωρίας.

Β) ***Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των γραμμάτων - συμβόλων Στ΄ Δημοτικού***

Λεπτομερής κατηγοριοποίηση των γραμμάτων - συμβόλων της Στ΄ Δημοτικού για κάθε σχολικό εγχειρίδιο (Βιβλίο Μαθητή και α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος Τετραδίων Εργασιών).

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των γραμμάτων - συμβόλων Στ΄ Δημοτικού							
Κατηγορία	***Συχν/τα ΒΜ***	***Συχν/τα α΄τεύχος ΤΕ***	***Συχν/τα β΄τεύχος ΤΕ***	***Συχν/τα γ΄τεύχος ΤΕ***	***Συχν/τα δ΄τεύχος ΤΕ***	***Σύνολο***	***Ποσοστό***
Ετικέτα - Επιγραφή	36	-	-	-	-	*36*	*23%*
Σταθερά	7	-	-	-	-	*7*	*4%*
Συγκεκριμένος αριθμός	80	-	28	1	1	*110*	*69%*
Γενικευμένος αριθμός	6	-	-	-	-	*6*	*4 %*
Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες	-	-	-	-	-	*0*	*0%*
Σύνολο γραμμάτων/ συμβόλων						159	100%

Πίνακας 10

Γράφημα 1: Κατηγορίες γραμμάτων – συμβόλων της Στ΄ Δημοτικού

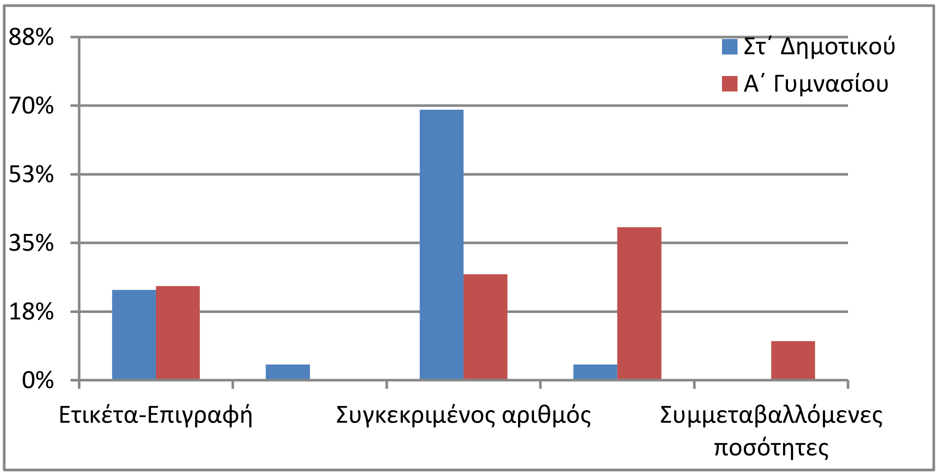
Από την παραπάνω κατηγοριοποίηση παρατηρήσαμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό ,στα εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού, καταλαμβάνει η κατηγορία «Συγκεκριμένος Αριθμός» 69%, ακολουθεί η κατηγορία «Ετικέτα-Επιγραφή» με 23% και οι κατηγορίες «Γενικευμένος Αριθμός» και «Σταθερά» με το ίδιο ποσοστό 4% . Οι «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» κατέχουν μηδενικό ποσοστό ,αφού δεν υπάρχουν στα βιβλία του Δημοτικού.

Γ) Μεταβολές στις κατηγορίες των μορφών εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων ανά τάξη

Εφόσον έχουν αναλυθεί τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στην Στ΄ Δημοτικού, από εδώ και πέρα θα χαρακτηρίζουμε ως «Στ΄ Δημοτικού» το σύνολο των διδακτικών σελίδων αυτής της τάξης δηλαδή, το ΒΜ και τα τέσσερα τεύχη των ΤΕ. Παρακάτω παραθέτουμε τα ποσοστά κάθε κατηγορίας γραμμάτων - συμβόλων ανά τάξη.

Συχνότητες & Ποσοστά Εμφάνισης των Κατηγοριών των γραμμάτων - συμβόλων στα Σχολικά Βιβλία ανά τάξη.		
Κατηγορία / Σχολικό Βιβλίο	**Στ΄ Δημοτικού**	**Α΄ Γυμνασίου**
Ετικέτα - Επιγραφή	36 (23%)	71 (24%)
Σταθερά	7 (4%)	- (0%)
Συγκεκριμένος αριθμός	110 (69%)	79 (27%)
Γενικευμένος αριθμός	6 (4%)	116 (39%)
Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες	- (0%)	31 (10%)
Σύνολο γραμμάτων-συμβόλων	159 (100%)	297 (100%)

Πίνακας 11



Γράφημα 2: Μεταβολές των κατηγοριών των γραμμάτων - συμβόλων ανά τάξη

Από την σύγκριση των κατηγοριών του εγγράμματου συμβολισμού των τάξεων Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου προκύπτει ότι στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού το γράμμα - σύμβολο χρησιμοποιείται, κατά κύριο λόγο, ως «Συγκεκριμένος Αριθμός». Ενώ στο Γυμνάσιο μειώνεται κατά πολύ αυτή η χρήση (από 69% σε 27%) και παρατηρείται μια σημαντική αύξηση της κατηγορίας «Γενικευμένος Αριθμός» (από 4% σε 39%). Η αύξηση αυτής της κατηγορίας κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο δείχνει την τάση για γενίκευση στο Γυμνάσιο. Επιπρόσθετα στην Α΄ Γυμνασίου εισάγεται η κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» με την διδασκαλία των συναρτησιακών σχέσεων των γραμμάτων x και y στο Κεφάλαιο «Ανάλογα – Αντιστρόφως Ανάλογα ποσά ». Τέλος η «Ετικέτα-Επιγραφή» έχει το ίδιο ποσοστό και στις δύο τάξεις, λόγω των γεωμετρικών τύπων που διδάσκονται στα Κεφάλαια της Γεωμετρίας στα σχολικά βιβλία των τάξεων αυτών.

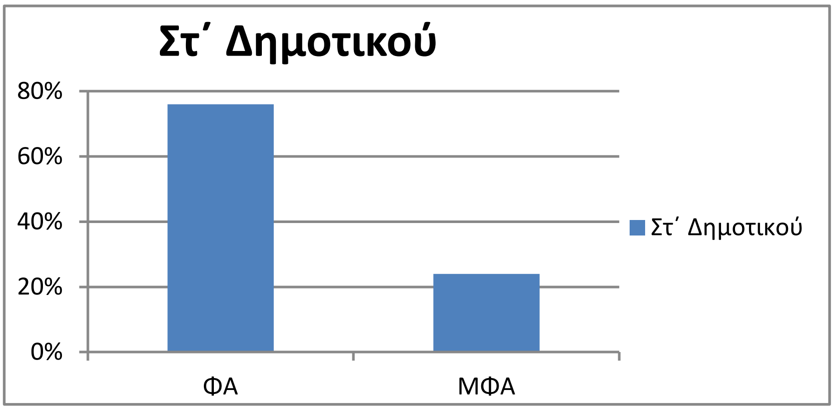
2.2.2. Αποτελέσματα 2ης Φάσης της έρευνας

Α) Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων ως ΦΑ-ΜΦΑ της Στ΄ Δημοτικού

Σε αυτή τη φάση θα αναλύσουμε τι είδους αριθμός αποδίδεται στα γράμματα – σύμβολα που εντοπίστηκαν. Οι φυσικοί αριθμοί διδάσκονται από το νήπιο και οι μη φυσικοί αριθμοί, δηλαδή δεκαδικοί και κλάσματα, από την Γ΄ Δημοτικού. Για τις μεταβλητές των σχολικών εγχειριδίων της Στ΄ Δημοτικού καταγράφηκαν τα παρακάτω.

Συχνότητα & Ποσοστά Εμφάνισης των Μεταβλητών ως ΦΑ-ΜΦΑ της Στ΄ Δημοτικού				
Σχολικό Βιβλίο	**Βιβλίο Μαθητή**	**Τετράδια Εργασιών**	**Σύνολο**	**Ποσοστό**
Φυσικός Αριθμός (ΦΑ)	69	21	90	76%
Μη Φυσικός Αριθμός (ΜΦΑ)	20	9	29	24%
Σύνολο μεταβλητών			119	100%

Πίνακας 12



Γράφημα 3: Ποσοστά του είδους αριθμητικών τιμών των γραμμάτων (Φ-ΜΦ) της Στ΄Δημοτικού

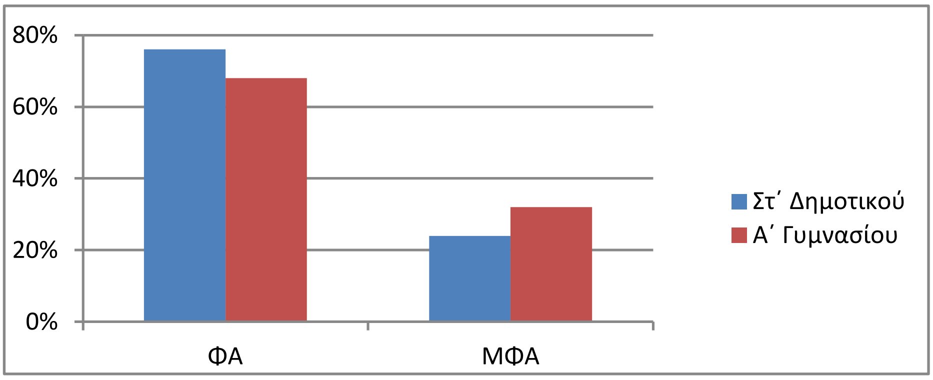
Παρατηρήσαμε μια αυξημένη χρήση των Φυσικών Αριθμών κατά την αντικατάσταση των γραμμάτων με τις αριθμητικές τους τιμές. Τα ποσοστά ήταν 76% για τους Φυσικούς και 24% για τους Μη Φυσικούς. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι στο Δημοτικό οι εγγράμματοι συμβολισμοί δεν εκφράζουν τόσο κλασματικές ή δεκαδικές ποσότητες. Μη Φυσικούς αριθμούς καταγράψαμε περισσότερο στα Κεφάλαια της Γεωμετρίας κατά τον υπολογισμό Γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως του όγκου γεωμετρικών στερεών.

Β) Μεταβολές στις κατηγορίες εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων ως Φυσικών Αριθμών (ΦΑ) ή Μη Φυσικών Αριθμών (ΜΦΑ) ανά τάξη

Στον παρακάτω Πίνακα φαίνεται μια πρώτη σύγκριση στις τιμές που αποδίδονται στα γράμματα - σύμβολα (ΦΑ ή ΜΦΑ) ανά τάξη.

Μεταβολές στις κατηγορίες εμφάνισης των γραμμάτων - συμβόλων ως Φυσικών Αριθμών (ΦΑ) ή Μη Φυσικών Αριθμών (ΜΦΑ) ανά τάξη			
Τάξη	**ΦΑ**	**ΜΦΑ**	**Σύνολο**
Στ΄ Δημοτικού	90(76%)	29(24%)	119(100%)
Α΄ Γυμνασίου	116 (68%)	55(32%)	171 (100%)

Πίνακα 13



Γράφημα 4: Μεταβολές των τιμών των γραμμάτων - συμβόλων (Φ-ΜΦ) ανά τάξη

Στην Στ΄ Δημοτικού παρατηρήθηκε ότι κυριαρχούν οι «Φυσικοί Αριθμοί» (ΦΑ) σε σχέση με τους «Μη Φυσικούς Αριθμούς» (ΜΦΑ). Ακόμη και στην Α΄ γυμνασίου, όπου τα ποσοστά ήταν 68% ΦΑ και 32% ΜΦΑ, φάνηκε ότι τα γράμματα χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τιμές που αποδίδονται με Φυσικούς Αριθμούς. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με τον διδακτικό στόχο της Α΄ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές πρέπει να διαχειρίζονται με ευχέρεια όλα τα είδη των αριθμών, μάλιστα στο τελευταίο κεφάλαιο της άλγεβρας θα διδαχθούν και τους ρητούς (Θετικοί – Αρνητικοί Αριθμοί) .

2.2.3. Ανάλυση των βασικών σημείων της έρευνας για την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής στα Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου.

Μετά από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου ως προς τη μορφή εμφάνισης των μεταβλητών και των τιμών που τους αποδίδονται, θα εντοπίσουμε τα βασικά σημεία της έρευνας, τόσο για τα Προγράμματα Σπουδών όσο και για τα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων.

Α) Ανάλυση του τρόπου παρουσίας της αλγεβρικής σκέψης στο Πρόγραμμα Σπουδών της Στ΄ Δημοτικού

Στα ελληνικά σχολεία τα σχολικά βιβλία είναι εγκεκριμένα από το αρμόδιο Υπουργείο, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ) και για αυτό κατέχουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Στα ΔΕΠΠΣ (2003) αναφέρεται ως σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών η ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και η επιτυχή ένταξή του στην κοινωνία, αυτό πραγματοποιείτε εφόσον τα Μαθηματικά:

Ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.

Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών.» (βλ. ΔΕΠΠΣ, 2003 σελ.250).

Μετά από τις δυσκολίες και τα εμπόδια που διαπιστώθηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία τα ΠΣ εισάγουν την άλγεβρα από πολύ νωρίς. Συγκεκριμένα με την εισαγωγή των εννοιών του μοτίβου και της αλληλουχίας, στις μικρές τάξεις του Δημοτικού, βοηθούν τα παιδιά να εξοικειωθούν με έννοιες της άλγεβρας που θα διδαχθούν σε μεγαλύτερες τάξεις. Η εισαγωγή πραγματοποιείται σε ένα πρώιμο στάδιο και εξελίσσεται με τη πάροδο του χρόνου.

Τα νέα ΑΠΣ κατέληξαν ότι «*Η **άλγεβρα** συνιστά μία από τις σπουδαιότερες αλλά και δυσκολότερες ενότητες των μαθηματικών από άποψη μάθησης αλλά και διδασκαλίας.»* (ΔΕΠΠΣ - ΑΠΣ, 2003). Η άλγεβρα χαρακτηρίζεται είτε ως η γενικευμένη αριθμητική είτε ως η μελέτη του αριθμητικού συστήματος και της δομής του, η οποία ενδιαφέρεται μόνο για γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή, για αντιπροσώπους κλάσεων αριθμών (ΔΕΠΠΣ - ΑΠΣ, 2003). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργείται η εντύπωση ότι αφού οι μαθητές γνωρίζουν να χειρίζονται αριθμούς θα μπορούν με τον ίδιο τρόπο να διαχειριστούν και τα γράμματα, κάτι τέτοιο όμως δεν είναι αλήθεια. Η χρήση των μεταβλητών σε παραδείγματα, όπως σε αλγεβρικές παραστάσεις αντί των αριθμητικών που είχαν συνηθίσει να λύνουν οι μαθητές, είναι κάτι διαφορετικό και δύσκολο ως προς τον τρόπο σκέψης. Επίσης η γλώσσα (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στις αλγεβρικές εκφράσεις, όπως για παράδειγμα "έστω α ένας τυχαίος θετικός αριθμός", δεν είναι άμεσα κατανοητή από τους μαθητές.

Για την ομαλότερη εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη τα Νέα Προγράμματα Σπουδών προτείνουν δυο βασικές κατευθύνσεις/προσανατολισμούς: (1) Την έμφαση στον αλγεβρικό συλλογισμό, δηλαδή στην αναπαράσταση, στη γενίκευση, στην τυποποίηση καταστάσεων και στην κανονικότητα, (2) Την ανάπτυξη όλων των τροχιών της αλγεβρικής γνώσεις, από το Νηπιαγωγείο μέχρι και το Γυμνάσιο (ΠΙ, 2003).

Στον παρακάτω Πίνακα εξηγούμε αναλυτικά τους γενικούς στόχους (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες), αναλόγως τον άξονα γνωστικού περιεχομένου, στα Μαθηματικά του Δημοτικού. Σημαντικό να μελετήσουμε τα στάδια γνώσης που εφαρμόζονται στους μαθητές από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού μέχρι και λίγο πριν το Γυμνάσιο.

Τάξη	**Άξονες γνωστικού περιεχομένου**	**Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες)**
Α΄ Δημοτικού:	Μετρήσεις	Να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.
Β΄ Δημοτικού :	Μετρήσεις	Να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.
Γ΄ Δημοτικού:	Μετρήσεις	Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο και να διαπιστώνουν ότι η διαδικασία επανάληψης συνεχίζεται επ' άπειρον.
Δ΄ Δημοτικού :	Μετρήσεις Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων	Να διαπιστώνουν την ύπαρξη απλών αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων. Να εξασκούνται στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία ερευνητικών δεδομένων.

Ε΄ Δημοτικού:	Μετρήσεις Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων	Να διαπιστώνουν την ύπαρξη, να περιγράφουν και να επεκτείνουν απλά αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. Να εισαχθούν στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους. Να εξασκηθούν στην ανάγνωση και κατασκευή ραβδογράμματος, εικονογράμματος και γραφικών παραστάσεων, καθώς και στην οργάνωση δεδομένων σε πίνακες.
Στ΄ Δημοτικού	Μετρήσεις Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων Στατιστική Λόγοι και Αναλογίες Εξισώσεις	Να διατυπώνουν έναν κανόνα για κάποιο απλό αριθμητικό ή το γεωμετρικό μοτίβο. Να εξασκούνται στη συλλογή και καταγραφή των δεδομένων ενός προβλήματος, στην κατασκευή πινάκων δεδομένων και γραφικών παραστάσεων (ραβδογράμματα, ιστογράμματα), στη μετατροπή προφορικών ή γραπτών περιγραφών δεδομένων σε γραφικές παραστάσεις και αντιστρόφως και στη διατύπωση προβλέψεων για την εξέλιξη ενός φαινομένου. Να εξοικειωθούν με την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους και να υπολογίζουν το μέσο όρο. Να γνωρίζουν την απλή μέθοδο των τριών. Να κατανοούν και να εφαρμόζουν τις έννοιες του λόγου, της αναλογίας και του ποσοστού. Να λύνουν απλές εξισώσεις με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων.

Πίνακας 14

Από την Α΄ Δημοτικού γίνεται εισαγωγή της έννοιας του αριθμητικού και γεωμετρικού μοτίβου, πρωτίστως να το αναγνωρίζουν, έπειτα να το περιγράφουν και τέλος να το επεκτείνουν. Στην Γ΄ Δημοτικού μαθαίνουν για τη διαδικασία της επανάληψης του μοτίβου επ’ άπειρον, ενώ στην Δ΄ Δημοτικού θα πρέπει να διαπιστώνουν από μόνοι τους την ύπαρξη απλών αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων. Στην Ε΄ Δημοτικού εκτός από την αναγνώριση της ύπαρξης των μοτίβων, θα πρέπει να περιγράφουν και να επεκτείνουν απλά μοτίβα. Στην Ε΄ Δημοτικού γίνεται η εισαγωγή της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους που θα εξελιχθεί τα επόμενα χρόνια. Στο βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού αναφέρεται ο πρώτος επίσημος ορισμός της μεταβλητής (Εικόνα 18) και διδάσκεται η έννοια της εξίσωσης (Εικόνα: 21). Στόχος είναι οι μαθητές να λύνουν με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων εξισώσεις με έναν άγνωστο, που θα τους χρειαστεί στο πέρασμα τους στην επόμενη βαθμίδα. Στην τελευταία τάξη του Δημοτικού εισάγονται και επίσημα οι έννοιες του Λόγου και της Αναλογίας.

Τα ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ προτείνουν κάποιες ενδεικτικές δραστηριότητες για κάθε θεματική ενότητα, εκτός αυτών του σχολικού βιβλίου, για την κατανόηση δύσκολων εννοιών. Είναι προσωπική πρωτοβουλία του εκπαιδευτικού να δώσει στους μαθητές επιπλέον υλικό για την πραγμάτωση μιας πιο ολοκληρωμένης διδασκαλίας. Παρακάτω αναφέρονται παραδείγματα προτεινόμενων δραστηριοτήτων στο Δημοτικό.

Τάξη	**Στόχοι**	**Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Α΄ Δημοτικού		Μετρήσεις Μοτίβα	Σχηματισμός μοτίβων απλών γεωμετρικών σχημάτων. Σχηματισμός αριθμητικών μοτίβων ανεβαίνοντας ή κατεβαίνοντας 2-2 μέχρι το 20.
Β΄ Δημοτικού	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα.	Μετρήσεις Μοτίβα (4 ώρες)	Κατασκευή μοτίβων με χάντρες ή άλλα υλικά. Σχηματισμός αριθμητικών μοτίβων ανεβαίνοντας ή κατεβαίνοντας 2-2, 3-3, 5-5 και 10-10 μέχρι το 100. Η διαθεματική προσέγγιση: Ζωγραφίζουν γεωμετρικά μοτίβα, χαρακτηριστικά διαφόρων πολιτισμών (Αισθητική Αγωγή).

Γ΄ Δημοτικού	Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο επανάληψης αριθμών όπως στο σχήμα του τριγώνου του Pascal και να διαπιστώσουν ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να μπορούν να διπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους στη σειρά.	Μετρήσεις Μοτίβα (4 ώρες)	Συμπλήρωση των αριθμών σε ένα τρίγωνο Pascal 1 1 1 1 2 1 … στο οποίο είναι συμπληρωμένες οι πρώτες 3 γραμμές. Δίνονται στα παιδιά: ο κανόνας "πολλαπλασίασε επί 2" και η σειρά των αριθμών 1,2,4,8,16,32,…και ζητείται να συνεχίσουν τη σειρά των αριθμών αυτών με τον προηγούμενο κανόνα και να βρουν τον 13^{o} όρο.
Δ΄ Δημοτικού	Να μπορούν να διαπιστώνουν την ύπαρξη απλών γεωμετρικών μοτίβων. Να μπορούν να τριπλασιάζουν (τετραπλασιάζουν κ.λπ.) φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους μιας τέτοιας αριθμητικής ακολουθίας. Να γνωρίζουν τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη, τον τύπο Δ=δ.π+υ , ο≤ υ <δ και με τη βοήθεια του τύπου	Μετρήσεις Μοτίβα (4 ώρες) Αριθμοί και πράξεις Υπολογισμοί (εισαγωγή του αλγορίθμου της Ευκλείδειας διαίρεσης)	Αναγνωρίζουν το μοτίβο επανάληψης αριθμών σε ένα σχήμα (π.χ. τρίγωνο Pascal), να διαπιστώσουν ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Δίνονται στα παιδιά: ο κανόνας "πολλαπλασίασε επί 3" και η σειρά των αριθμών 1, 3, 6, 9, 12…και ζητείται να συνεχίσουν τη σειρά των αριθμών αυτών και να βρουν τον 10ο όρο.

	αυτού να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης.		
Ε΄ Δημοτικού	Με τη βοήθεια του τύπου της Ευκλείδειας διαίρεσης Δ=δ.π+υ, ο≤υ<δ να κάνουν τη δοκιμή της. Να αναγνωρίζουν ένα μοτίβο επανάληψης αριθμών, π.χ. στο τρίγωνο Pascal, και να διαπιστώσουν ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να μπορούν να τετραπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς και να προβλέπουν τους επόμενους όρους στη σειρά. Να συλλέγουν και να καταγράφουν δεδομένα. Να πινακοποιούν δεδομένα (κατανομές συχνοτήτων σε ποσοστά ή	Αριθμοί και πράξεις Μέθοδοι ακριβούς υπολογισμού (διαίρεση φυσικών) Μετρήσεις Μοτίβα (3 ώρες) Συλλογή και Επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική Στατιστική (5 ώρες)	Συμπλήρωση ημιτελών πράξεων ή διόρθωση εσφαλμένων αλγορίθμων για εμβάθυνση στην κατανόηση των τεχνικών των πράξεων. Οι μαθητές χρωματίζουν τους αριθμούς της αριθμογραμμής ή άλλου σχήματος π.χ. τρίγωνο του Pascal που είναι μικρότεροι του 50 και είναι πολλαπλάσια του 2,3,8 και 9. Δίνονται στα παιδιά: ο κανόνας "πολλαπλασίασε επί 4" και η σειρά των αριθμών 1, 4, 16 ,64, …και ζητείται να συνεχίσουν τη σειρά των αριθμών αυτών με τον προηγούμενο κανόνα και να βρουν τον 8ο όρο. Οι μαθητές αναλαμβάνουν τη διερεύνηση ενός προβλήματος που προκύπτει από την άμεση εμπειρία τους. Στην εργασία αυτήν

	απόλυτους αριθμούς απλών κατανομών, διαγραμμάτων και γραφικών, εικονόγραμμα, ραβδόγραμμα). Να μετατρέπουν προφορικές ή γραπτές περιγραφές δεδομένων σε γραφικές, και αντίστροφα. Να βρίσκουν το μέσο όρο δεδομένων.		μπορούν οι μαθητές να συλλέξουν τα κατάλληλα δεδομένα και να τα παρουσιάσουν με τη μορφή στατιστικών διαγραμμάτων Έρευνα για το πόσες φορές γελούν στην τάξη, στο σπίτι. Καταγραφή δεδομένων, γραφική παρουσίαση, εύρεση του μέσου όρου (Γλώσσα, Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή).
Στ΄ Δημοτικού	Να γνωρίσουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και να βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας με τη "χιαστί" μέθοδο. Να γνωρίσουν την έννοια του ποσοστού ως λόγου, ως πηλίκου και ως δεκαδικού. Να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Να προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν σε έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό. Να προσδιορίζουν	Λόγοι, αναλογίες Λόγοι, αναλογίες, ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, ποσοστά. Απλή μέθοδος των τριών. (20 ώρες) Εξισώσεις Εισαγωγή στην επίλυση εξισώσεων	Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά να προσεγγιστούν με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα. Συλλογή πληροφοριών και συζήτηση για τις διατροφικές ανάγκες των παιδιών (ποσοστά, θερμίδες, θρέψη, καταναλωτής, υγεία) (Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή, Φυσικά, Γλώσσα). Χρησιμοποιώντας ζυγαριά με δυο δίσκους, τοποθετούν στον ένα βάρος 100 γραμ. και στον άλλο 40 γραμ. Προβληματίζονται για το βάρος που πρέπει να τοποθετήσουν ακόμη, ώστε η ζυγαριά να ισορροπήσει παριστάνοντας τον αρχικά με το γράμμα χ. Στη

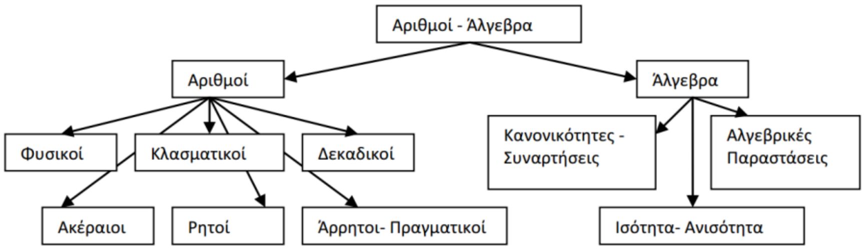
	τον αριθμό με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουν ή να διαιρέσουν έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό.	(6 ώρες)	συνέχεια τοποθετούν στον ένα δίσκο βάρος 140 γραμ. και στον άλλο 100 και προβληματίζονται για το πόσο βάρος θα αφαιρέσουν για να ισορροπήσει η ζυγαριά, παριστάνοντας το αρχικά με τον άγνωστο χ.
	Να μπορούν να αναγνωρίζουν να περιγράφουν και να επεκτείνουν αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. Να μπορούν να διατυπώνουν έναν κανόνα για κάποιο απλό αριθμητικό ή το γεωμετρικό μοτίβο.	Μετρήσεις Μοτίβα 4 ώρες)	Να βρεθεί και να διατυπωθεί ο κανόνας με τον οποίο συνεχίζεται η παρακάτω ακολουθία των αριθμών: 720, 360, 120, ..., Να βρεθεί ο 8ος όρος της.
	Να συλλέγουν, να καταγράφουν και να ταξινομούν δεδομένα Να πινακοποιούν δεδομένα (κατανομές συχνοτήτων σε ποσοστά ή απόλυτους αριθμούς απλών κατανομών, διαγραμμάτων και γραφικών εικονόγραμμα, ραβδόγραμμα). Να μετατρέπουν προφορικές ή γραπτές	Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων Στατιστική (6 ώρες)	Χρησιμοποιούν τις έννοιες της στατιστικής στις εκλογές στην τάξη τους. Συζητούν και καταγράφουν στατιστικούς όρους για τις Εκλογές στην Ελλάδα και στην Ευρωπαϊκή ένωση. (Συλλογή δεδομένων, κειμενογράφος, χρήση Διαδικτύου) (Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή, Γεωγραφία, Γλώσσα, Νέες Τεχνολογίες)

	περιγραφές δεδομένων σε γραφικές, και αντίστροφα. Να βρίσκουν το μέσο όρο δεδομένων.		

Πίνακας 15

Ξεκινώντας από την Α΄ Δημοτικού προτείνουν για τον σχηματισμό αριθμητικών μοτίβων το ανέβασμα ή το κατέβασμα δυο-δυο των αριθμών μέχρι το 20. Στη Β΄ Δημοτικού με την χρήση εποπτικού υλικού (χάντρες) και της ζωγραφικής προσπαθούν να κατασκευάσουν μοτίβα, μια διαθεματική προσέγγιση μέσο της Αισθητικής Αγωγής για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Χαρακτηριστική η πρόταση του 'τριγώνου του Pascal' στην Γ΄ Δημοτικού για την κατανόηση της ακολουθίας των αριθμών. Στην Δ΄ Δημοτικού υπάρχει στις δραστηριότητες η χρήση αριθμητικών μοτίβων, όπως 1,3,6,9,… , όπου τα παιδιά πρέπει να σκεφτούν ότι ο επόμενος όρος είναι ο τριπλάσιος του προηγούμενου και να συνεχίσουν μέχρι τον $10^{ο}$ όρο. Καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού, οι απαιτήσεις σχετικά με την αλγεβρική σκέψη είναι μεγαλύτερες και οι δραστηριότητες στις ακολουθίες αριθμών να έχουν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας, καταλήγοντας στην Στ΄ Δημοτικού να ζητείται ο $8^{ος}$ όρος της ακολουθίας 720, 360, 120, … . Έχοντας γίνει η εισαγωγή της έννοιας της εξίσωσης στην Στ΄ Δημοτικού ο παραπάνω Πίνακας του ΔΕΠΠΣ προτείνει μια χαρακτηριστική εφαρμογή με τη χρήση της ζυγαριάς και του άγνωστου x.

Συνεχίζοντας την ανάλυση των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ για το Δημοτικό, να παραθέσουμε μια ανάλυση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (2003) που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της πράξης «Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών», συγκεκριμένα για το έργο με τίτλο «Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Αρχικά παρουσιάζεται το παρακάτω σχήμα εξηγώντας το διαχωρισμό των βασικών μαθηματικών περιεχομένων της «αλγεβρικής περιοχής», οι οποίες είναι οι Αλγεβρικές Παραστάσεις, η Ισότητα – Ανισότητα και οι Κανονικότητες και Συναρτήσεις.



Σχήμα 1. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Αριθμοί – Άλγεβρα

Εικόνα 14: Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής ενότητας «Αριθμοί-Άλγεβρα» ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003

Άλγεβρα	*Κανονικότητες*	- αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, εύρεση κανόνα
	Ισότητα- ανισότητα	- κατανόηση σχέσης - ιδιότητες και τύποι
	Αλγεβρικές παραστάσεις	- αριθμητικές παραστάσεις - εξισώσεις και επίλυση - συναρτήσεις

Εικόνα 15: Ανάλυση των περιεχομένων της Άλγεβρας ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003

Με βάση αυτό τον διαχωρισμό παρουσιάζονται παρακάτω σε μορφή πίνακα συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ) σε βασικά θέματα ανά θεματική ενότητα (θεματικός άξονας. Στη τρίτη στήλη προτείνονται δραστηριότητες και στη τέταρτη το εκπαιδευτικό υλικό.

Για την Στ΄ Δημοτικού οι μαθητές προσδοκάτε να:

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ).	**Βασικά Θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Α1. Αναπαριστούν και μελετούν κανονικότητες σε διαφορετικά αναπαραστατικά συστήματα *Α2.* Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων και αντιστρόφων ανάλογων ποσών. *Α3.* Διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών. *Α4*. Διερευνούν την έννοια της μεταβλητής σε γνωστούς τύπους από τη φυσική και τη γεωμετρία	Κανονικότητες/ Συναρτήσεις (3 ώρες)	(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)[1]	Βιβλίο μαθητή σελίδα 129 δραστηριότητα 2, σελίδα 131 δραστηριότητα 2

Α5. Εκφράζουν συμβολικά ένα πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση, διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση. *Α6.* Συζητούν για τη δομή μιας αριθμητικής παράστασης χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία (πχ. άθροισμα και όροι του, γινόμενο και παράγοντές του). *Α7.* Υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (με παρενθέσεις και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη μέχρι 4). *Α8.* Χρησιμοποιούν γράμματα ως μεταβλητές στον γενικό όρο κανονικοτήτων και συναρτήσεων.	Αλγεβρικές παραστάσεις (3 ώρες)	Τα ερευνητικά ευρήματα συγκλίνουν στη διαπίστωση ότι οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης τείνουν να ερμηνεύουν ένα γράμμα ως το όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως ένα συγκεκριμένο άγνωστο. Είναι, λοιπόν, ιδιαίτερα σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες που θα τους επιτρέψουν να συνειδητοποιήσουν τις ποικίλες ερμηνείες του εγγράμματου συμβόλου στην άλγεβρα.	
Α12. Χρησιμοποιούν γράμματα ως άγνωστους σε απλές αριθμητικές εξισώσεις ενός βήματος και επιλύουν τις αντίστοιχες εξισώσεις.	Ισότητες / Ανισότητες (3 ώρες)	Η επίλυση μιας εξίσωσης προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να τη χειρίζεται ως αντικείμενο. Ωστόσο, η σχετική έρευνα αποκαλύπτει ότι συχνά οι μαθητές είτε ακολουθούν μεθόδους επίλυσης με μικρή εμβέλεια είτε υιοθετούν την τυπική μέθοδο, εργαζόμενοι μηχανικά. Και στις δύο περιπτώσεις,	Ψηφιακό περιβάλλον για τον υπολογισμό εμβαδών χωρίων, , όπως το παρακάτω μπορούν να βρεθούν στο διαδυκτιακό τόπο. http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

		σύντομα οδηγούνται σε αδιέξοδο. Στην τάξη αυτή είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση σε άτυπες μεθόδους επίλυσης όπως για παράδειγμα δοκιμή και πλάνη κατευθύνοντας στην αναγκαιότητα μιας πιο γενικευμένης – τυπικής μεθόδου επίλυσης.	

Πίνακας 16

[1] Η ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1 έχει δοθεί στον προηγούμενο πίνακα Πίνακας15

Η παραπάνω ανάλυση των ΠΜΑ είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον εκπαιδευτικό για την επίτευξη των γνωστικών στόχων που θέτει. Συγκεκριμένα με την επιλογή των παραπάνω δραστηριοτήτων και του εκπαιδευτικού υλικού παρουσιάζονται αλγεβρικές έννοιες που είναι δύσκολες στην κατανόηση και θα βοηθούσαν εκπαιδευτικούς και μαθητές για την καλύτερη εμπέδωση και εφαρμογή τους. Ο Πίνακας αυτός προτείνεται και για την αξιολόγηση της κατάκτησης των στόχων κάθε Ενότητας από τους μαθητές.

Β) Ανάλυση των σχολικών βιβλίων της Στ΄ Δημοτικού ως προς τα βασικά σημεία της έρευνας

Η πρώτη επαφή με τη συμβολική γραφή στο βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού γίνεται στο 4^{ο} Κεφάλαιο: «Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών» (σελ.16) Εικόνα: ….. Δεν έχει γίνει κάποια αναφορά πριν στα γράμματα ή στην έννοια της μεταβλητής.

Εικόνα 16: Σχολικό Βιβλίο Στ΄ Δημοτικού 4ο Κεφάλαιο «Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών» σελ.16 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ ¨ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ¨)

Οι συμβολισμοί Α και Β αναφέρονται σε συγκεκριμένους αριθμούς, οι οποίοι και φαίνονται στο σχήμα. Είναι μια πρώτη δραστηριότητα όπου ένα γράμμα αντιπροσωπεύει έναν αριθμό.

Έπειτα στο 7^{ο} Κεφάλαιο «Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών» στις «Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση» υπάρχει η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης «Δ : δ = π» και η «Δ = δ · π» (σελ.22) που ανήκει στην κατηγορία «Ετικέτα-Επιγραφή». Την συγκεκριμένη ισότητα την έχουν διδαχτεί σε προηγούμενη τάξη, οπότε θεωρείται γνωστή από τα παιδιά. Σε αυτή τη σχέση τα γράμματα αντιπροσωπεύουν μαθηματικούς όρους Δ= Διαιρετέος , δ= διαιρέτης και π= πηλίκο. Δεν αναλύεται περισσότερο η συγκεκριμένη σχέση, είναι μια αναφορά στο τέλος του μαθήματος σε μία κλειστού τύπου άσκηση Σωστό-Λάθος και δεν ζητείτε να γίνουν επαληθεύσεις ή αντικαταστάσεις αριθμητικών τιμών. Να σχολιάσουμε σε αυτό το σημείο ότι αργότερα στη Γεωμετρία το γράμμα π θα συμβολίζει μια σταθερά (π=3,14).

Επίσημη εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής γίνεται στη $2^{η}$ Θεματική Ενότητα «Εξισώσεις». Αποτελείται από πέντε Κεφάλαια και ο προτεινόμενος χρόνος από το ΠΣ είναι έξι διδακτικές ώρες.

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
25. Η εξερεύνηση του άγνωστου!	Η έννοια της μεταβλητής	61
26. Μαθαίνω να ισορροπώ!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος	63
27. Μαθηματικά σε κίνηση!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος	65
28. Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου	67
29. Αντανακλάσεις...	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης	69
Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται	*Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 2: Εξισώσεις*	71

Εικόνα17: Πίνακας περιεχομένων της Θεματικής ενότητας «Εξισώσεις» Στ΄Δημοτικού

Στη σελίδα 61 του $25^{ου}$ Κεφαλαίου «Η έννοια της μεταβλητής» δίνεται ο ορισμός της μεταβλητή με ένα παράδειγμα ακριβώς δίπλα.

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και **γράμματα.**

Άγνωστος / Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** το οποίο χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό, λέγεται **μεταβλητή.**

Παραδείγματα

Εμβαδό τετραγώνου: $\mathbf{α^2}$,
όπου **α** = το μήκος της πλευράς του.

Εικόνα 18: Ορισμός μεταβλητής Σχολικό Βιβλίο Στ΄ Δημοτικού σελ.62 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ ¨ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ¨)

Ακριβώς πριν από τον ορισμό υπάρχει αναφορά στην αριθμητική παράσταση, την οποία έχουν διδαχθεί τα προηγούμενα χρόνια, μια παράσταση που περιέχει αριθμούς και πράξεις. Έπειτα αναφέρεται η είσοδος των γραμμάτων σε αυτή, για να καταλήξει στον ορισμό της μεταβλητής, μια παράσταση που περιέχει εκτός από αριθμούς και γράμματα. Ο ‘νέος’ αυτός συμβολισμός προκαλεί τους μαθητές να κάνουν ένα μεγάλο νοητικό και εκφραστικό άλμα. Τα γράμματα που θα ακολουθούν στη μαθηματική τους ζωή έχουν όνομα: μεταβλητές. Δίπλα από τον ορισμό δίνεται ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του: Εμβαδόν τετραγώνου : $α^2$. Η μεταβλητή «α» είναι κατηγορίας «Ετικέτας – Επιγραφής» συμβολίζοντας, όπως έχουν ξανά δει σε παλαιότερη τάξη, το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου. Η χρήση του γράμματος «α» ως μήκος πλευράς γεωμετρικού σχήματος θα παρατηρήσουμε ότι γίνεται συχνά στη Γεωμετρία.

Δεν υπάρχουν άλλα παραδείγματα στο ΒΜ για την εμπέδωση αλγεβρικών εκφράσεων που πρόκειται να τους ζητηθούν στις δραστηριότητες του ΤΕ. Υπάρχουν μόνο δύο εφαρμογές που χρησιμοποιούν μια μεταβλητή «Συγκεκριμένος Αριθμός» και μια «Γενικευμένος Αριθμός» (Παράρτημα: …) Εισαγωγή στη άλγεβρα έχει γίνει σε μικρότερες τάξεις , αλλά υπάρχει η λάθος αντίληψη της ταύτισης της άλγεβρας με συμβολικούς χειρισμούς. Η μοντελοποίηση των προβλημάτων που υπάρχει στα Μαθηματικά της Στ΄ Δημοτικού θέτει τους μαθητές στη σκέψη να αποδώσουν τους λεκτικούς όρους σε αλγεβρικούς και να συνδυάσουν αριθμούς και σύμβολα για να επεξεργαστούν αλγεβρικές παραστάσεις.

✓ Παράδειγμα στο ΤΕ χρήσης του όρου «μεταβλητή».

Γράψε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή:
- Το άθροισμα ενός αριθμού και του 12.
- Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4.
- Ένας αριθμός αυξημένος κατά 24.

Εικόνα 19: ΤΕ Στ΄ Δημοτικού β΄ τεύχος σελ.19 Κεφάλαιο 25ο «Η έννοια της μεταβλητής».

Στη ασκήσεις πρέπει να αντικαταστήσουν την κατάλληλη τιμή στην μεταβλητή για να βρουν την αριθμητική λύση, έτσι δημιουργείται η αντίληψη ότι ένα γράμμα αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό. Εισαγωγή στην έννοια της εξίσωσης δεν έχει γίνει ακόμη.

✓ Παράδειγμα στο ΤΕ δοκιμής αριθμητικών τιμών του γράμματος α για επαλήθευση της ισότητας.

Εξέτασε ποιος από τους αριθμούς 22, 15, 26, 19, 21 και 30 επαληθεύει την αριθμητική παράσταση $α - 15 = 6$.

Εικόνα 20: ΤΕ σελ. 20 Κεφάλαιο 25ο «Η έννοια της μεταβλητής».

Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της εξίσωσης για πρώτη φορά στο Δημοτικό. Με τη χρήση του όρου «άγνωστη ποσότητα», τοποθετείται μια μεταβλητή (γράμμα x, y ή z …) στη θέση του αριθμού που ζητείται να βρεθεί.

Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι ένα πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με μια ισότητα βάζοντας στη θέση του άγνωστου ποσού μια μεταβλητή.

Εξίσωση	Παραδείγματα
Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα x ή ψ ή z, … κτλ, λέγεται **εξίσωση** με έναν άγνωστο.	$x + 5 = 12$
Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.	Η λύση της εξίσωσης $x + 5 = 12$ είναι ο αριθμός 7. Αν αντικαταστήσω τη μεταβλητή με το 7 έχω $7 + 5 = 12$
Όταν ο άγνωστος έχει τη θέση **προσθετέου**, για να λύσω την εξίσωση **αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο.**	Η λύση της εξίσωσης $x + 5 = 12$ είναι $x = 12 - 5$

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν πρέπει να αφαιρέσω έναν αριθμό από τη μία πλευρά, για να συνεχίσει να ισορροπεί, πρέπει να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό κι από την άλλη.

Εικόνα 21: Ορισμός εξίσωσης ΒΜ Στ΄ Δημοτικού 26ο Κεφάλαιο «Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος» σελ. 64 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ ¨ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ¨)

Στα κεφάλαια αυτά παρατηρείται μια εκτενής χρήση της συμβολικής γραφής και ιδιαίτερα του λατινικού γράμματος «x» (χι). Είναι το γράμμα που χρησιμοποιείται περισσότερο στις εξισώσεις στο ΒΜ και στο ΤΕ, με αποτέλεσμα οι μαθητές να κάνουν μία σύνδεση x = άγνωστος = μεταβλητή. Να τονίσουμε ότι στα παραδείγματα επίλυσης εξισώσεων οι μεταβλητές είναι κατά κανόνα της κατηγορίας «Συγκεκριμένος Αριθμός» και αυτό για την καλύτερη κατανόηση από τους μαθητές, ότι το γράμμα αντικαθιστάται από μια συγκεκριμένη τιμή, δηλαδή από έναν αριθμό ο οποίος επαληθεύει την ισότητα.

Η έννοια της ισότητας των δύο μελών μιας εξίσωσης δεν έχει κατανοηθεί από τα παιδιά, πιστεύουν ακόμη ότι το σύμβολο του ίσον (=) σημαίνει ‘ η απάντηση είναι’ (McNeil & Alibali, 2005a, βλ. McNeil, 2006). Η σχέση ισοδυναμίας που εκφράζει το σύμβολο του ίσον (=) γίνεται αντιληπτή σε μεγαλύτερες τάξεις του Γυμνασίου, με αποτέλεσμα οι μαθητές Στ΄ Δημοτικού να δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τη μέθοδο της ζυγαριάς για την επίλυση εξισώσεων.

Παρακάτω δίδονται μερικά παραδείγματα, μέσα από τα οποία οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης και του αγνώστου (x) .

1) Επίλυση της εξίσωσης με το νου. Εφαρμογή διαφόρων τιμών και έλεγχος. Μια διαδικασία που είχαν συνηθίσει οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις χωρίς την χρήση του κανόνα της αντίστροφης πράξης.

- Να λύσεις με τον νου την εξίσωση: x + 2 = 9.

  Λύση

- Να λύσεις με τον νου την εξίσωση: (3 + 2 + 7) + x = 19.

  Λύση

Εικόνα 22: ΤΕ Στ΄Δημοτικού β΄τεύχος σελ.22 Κεφάλαιο 26ο «Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος»

- Να λύσεις με τον νου τις εξισώσεις και να τις επαληθεύσεις.

  Σημείωση: το x μερικές φορές μπορεί να είναι μικρότερο από τη μονάδα.

  α) 20 : x = 2 **β)** 3 : x = 30 **γ)** 18 : x = 9 **δ)** 5 : x = 0,05

  Λύση

Εικόνα23: ΤΕ Στ΄ Δημοτικού β΄ τεύχος σελ.28 Κεφάλαιο 29ο «Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης».

2) Επίλυση εξίσωσης με τη βοήθεια χρήσης της μεθόδου της «ζυγαριάς»

- Να εξετάσετε αν ο αριθμός 15 είναι η λύση της εξίσωσης 32 – x = 17.

  Μπορείτε να παραστήσετε (και να περιγράψετε) με τη βοήθεια της ζυγαριάς την εξίσωση και τη λύση της;

  Λύση

  Απάντηση: ....

Εικόνα 24: ΤΕ Στ΄ Δημοτικού β΄τεύχος σελ.25 Κεφάλαιο 27ο «Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος»

3) Επίλυση εξισώσεων με τη βοήθεια της αντίστροφης πράξης.

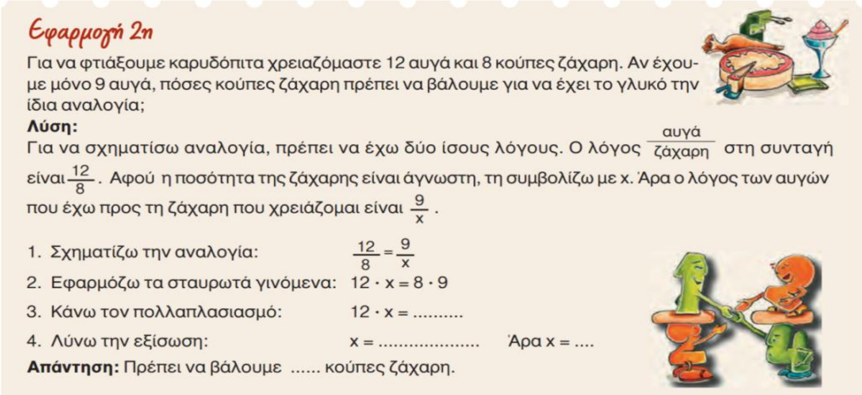
- Να λύσεις τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot x = 30$ **β)** $20 \cdot x = 2$ **γ)** $5 \cdot x = 4$ **δ)** $3 \cdot x = 0{,}75$

Λύση

Εικόνα 25: ΤΕ Στ΄ Δημοτικού β΄τεύχος σελ.26 Κεφάλαιο 28ο «Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου».

Στα κεφάλαια της 3^{ης} Θεματικής Ενότητας «Λόγοι – Αναλογίες» παρατηρήθηκε μια συνεχή χρήση του γράμματος «x» (χι), η οποία αντιπροσωπεύει την άγνωστη ποσότητα στις αναλογίες.



Εφαρμογή 2η

Για να φτιάξουμε καρυδόπιτα χρειαζόμαστε 12 αυγά και 8 κούπες ζάχαρη. Αν έχουμε μόνο 9 αυγά, πόσες κούπες ζάχαρη πρέπει να βάλουμε για να έχει το γλυκό την ίδια αναλογία;

Λύση:

Για να σχηματίσω αναλογία, πρέπει να έχω δύο ίσους λόγους. Ο λόγος $\frac{\text{αυγά}}{\text{ζάχαρη}}$ στη συνταγή είναι $\frac{12}{8}$. Αφού η ποσότητα της ζάχαρης είναι άγνωστη, τη συμβολίζω με x. Άρα ο λόγος των αυγών που έχω προς τη ζάχαρη που χρειάζομαι είναι $\frac{9}{x}$.

1. Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$
2. Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $12 \cdot x = 8 \cdot 9$
3. Κάνω τον πολλαπλασιασμό: $12 \cdot x =$ ....
4. Λύνω την εξίσωση: x = ... Άρα x = ...

Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε ...... κούπες ζάχαρη.

Εικόνα 26: ΒΜ Στ΄ Δημοτικού σελ.80 Κεφάλαιο:32ο «Αναλογίες»

Στο αντίστοιχο Κεφάλαιο του ΤΕ υπάρχουν ασκήσεις με κενό χωρίς τη χρήση μεταβλητής.

Να συμπληρώσεις τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς ώστε οι λόγοι να αποτελούν αναλογίες.

$\frac{8}{4} = \frac{6}{\;}$ $\frac{9}{10} = \frac{18}{\;}$ $\frac{3}{8} = \frac{\;}{24}$

....

....

$\frac{6}{24} = \frac{3}{\;}$ $\frac{9}{12} = \frac{3}{\;}$ $\frac{5}{7} = \frac{\;}{21}$

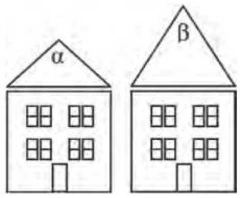
....

....

Εικόνα 27: σελ. 33 ΤΕ β΄ τεύχος Στ΄ Δημοτικού Κεφάλαιο 32ο «Αναλογίες»

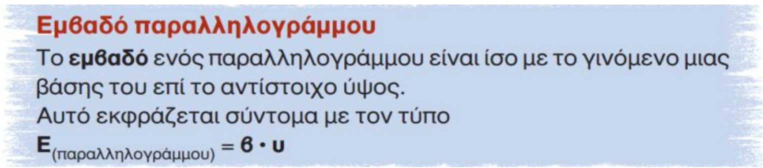
Με την είσοδο της έννοιας των αναλογιών οι μαθητές χρησιμοποιούν στα προβλήματα το γράμμα-άγνωστο (x στην πλειοψηφία) για να εκφράσουν την ζητούμενη ποσότητα, έπειτα για τον υπολογισμό της άγνωστης ποσότητας καταλήγουν σε εξίσωση με έναν άγνωστο. Μάλιστα σε όλα τα παραδείγματα της 3^{ης} ενότητας ο άγνωστος είναι φυσικός αριθμός.

Συνεχίζοντας την ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου, στην 6^{η} Θεματική Ενότητα «Γεωμετρία». Σε αυτήν την Ενότητα χρησιμοποιείται η συμβολική γραφή με τη χρήση γραμμάτων. Για παράδειγμα οι γωνίες συμβολίζονται σε δύο παραδείγματα ως ένα γράμμα και αυτά μελετήσαμε.



Εικόνα 28: ΒΜ Κεφάλαιο 57ο «Γωνίες» σελ. 139

Στην παραπάνω Εικόνα δηλώνεται η γωνία που σχηματίζει η σκεπή του κάθε σπιτιού με τα γράμματα α και β και ανήκουν στην κατηγορία «Ετικέτα – Επιγραφή». Μετέπειτα αναφέρονται οι τύποι των εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων, όπως επίσης των εμβαδών και όγκων γεωμετρικών στερεών. Σε κάθε Κεφάλαιο στη θεωρία δίνεται το αντίστοιχος ορισμός με τον τύπο του, όπως παρακάτω.



Εμβαδό παραλληλογράμμου

Το **εμβαδό** ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο
$E_{(παραλληλογράμμου)} = β \cdot υ$

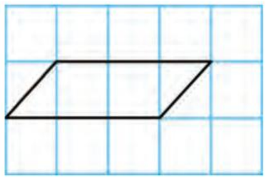
Εικόνα 29: Ορισμός Εμβαδού παραλληλογράμμου σχολικό βιβλίο Στ΄ Δημοτικού σελ.150 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ΄ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ΄).

Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούνται και άλλα γράμματα για τον συμβολισμό γεωμετρικών όρων, όπως πλευρά, εμβαδό, όγκος. Οι μαθητές συνδυάζουν το αρχικό γράμμα των λέξεων που αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές, με την ίδια τη μεταβλητή (Ε = Εμβαδόν, β = βάση, υ = ύψος). Δικαιολογείται επομένως το αποτέλεσμα την ανάλυσης μας ότι η χρήση μεταβλητών στην $6^{η}$ Θεματική Ενότητα - ‘Γεωμετρία’ ήταν κυρίως ως «Ετικέτα-Επιγραφή» στη θεωρία και «Συγκεκριμένος Αριθμός» στις εφαρμογές. Επίσης δεν υπάρχουν ασκήσεις για εφαρμογή των γεωμετρικών τύπων με τη χρήση μεταβλητών στο ΒΜ μόνο ελάχιστες περιπτώσεις που παραθέτουμε παρακάτω. Ακόμη και στα ΤΕ της Ενότητας δεν ζητείται από τα παιδιά να εφαρμόσουν τους τύπου άμεσα, αλλά από την εκφώνηση γίνεται αντιληπτό ότι απαιτείται η χρήση των τύπων και έπειτα η αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών για τον υπολογισμό γεωμετρικών ποσοτήτων. Δίνουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα.

1) Η πρώτη δραστηριότητα στο ΒΜ για την εισαγωγή των μαθητών στο εμβαδό του παραλληλογράμμου.

Δραστηριότητα 1η

Η Ιφιγένεια σχεδίασε αυτό το παραλληλόγραμμο σε μιλιμετρέ χαρτί. Κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 εκατοστόμετρο. Η ίδια λέει ότι το παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 3 τ.εκ.



- Έχει δίκιο; ....
- Εξήγησε γιατί:..

....

Εικόνα 30: ΒΜ Στ΄ Δημοτικού σελ.150 Κεφάλαιο 62ο «Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου»

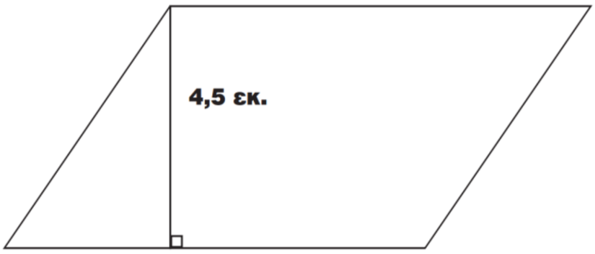
2) Οι δύο πρώτες εφαρμογές στο ΤΕ για εξάσκηση του εμβαδού παραλληλογράμμου.

✓

Να χαράξεις ένα παραλληλόγραμμο στον κενό χώρο και να υπολογίσεις το εμβαδό του.

✓

Το ύψος ενός παραλληλογράμμου είναι 4,5 εκ. και το εμβαδό του 38,25 τ.εκ. Να υπολογίσεις τη βάση σχηματίζοντας μια εξίσωση και να επαληθεύσεις το αποτέλεσμα με τον χάρακά σου.



Λύση

Εικόνα31: ΤΕ Στ΄ Δημοτικού δ΄ τεύχος σελ.22 Κεφάλαιο 62ο «Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου».

Στο ένα παράδειγμα ζητείτε από τους μαθητές να κατασκευάσουν μόνοι τους το σχήμα (ένα παραλληλόγραμμο) και μετά να υπολογίσουν το εμβαδό του με τη χρήση του τύπου που έχουν διδαχθεί στο ΒΜ. Στο επόμενο παράδειγμα υπάρχει το σχήμα και το ύψος του παραλληλογράμμου, στα δεδομένα δίνεται το εμβαδόν αριθμητικά και ζητάτε να υπολογιστεί η βάση. Είναι μια απαιτητική εφαρμογή του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, όπου πρέπει να λυθεί με τη κατασκευή εξίσωσης με άγνωστο τη βάση και όχι το εμβαδό που είχαν συνηθίσει μέχρι τώρα να λύνουν.

3) Η πρώτη δραστηριότητα στο ΒΜ για την εισαγωγή των μαθητών στο εμβαδό του τριγώνου.

Ένα τοστ έχει σχήμα ορθογώνιου. Πολλές τοστιέρες όταν ψήνουν το τοστ το χωρίζουν στα δύο, όπως δείχνει το σκίτσο.

- Ποια είναι η σχέση του καθενός από τα δύο κομμάτια με το αρχικό τοστ;

....

- Πώς θα έβρισκες την έκταση της επιφάνειας (το εμβαδό) του αρχικού τοστ;

....

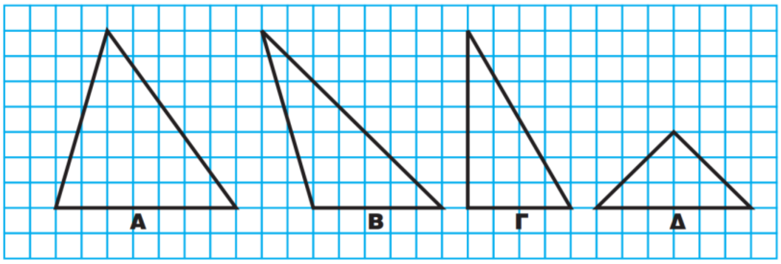
- Πόσο από αυτό το εμβαδό αντιστοιχεί σε καθένα από τα δύο τριγωνικά κομμάτια στα οποία μοιράστηκε το αρχικό τοστ; ....

Εικόνα 32: ΒΜ Στ΄ Δημοτικού σελ.151 Κεφάλαιο 63ο «Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου».

Η παραπάνω δραστηριότητα βοηθάει τους μαθητές να εξάγουν τη σχέση του εμβαδού του τριγώνου (είναι το μισό του παραλληλογράμμου που διδάχτηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο).

4) Άσκηση στο ΤΕ για την κατανόηση του εμβαδού τριγώνου.

Στα παρακάτω τρίγωνα να χαράξεις τα ύψη και να υπολογίσεις τα εμβαδά.



Εικόνα 33: ΤΕ δ΄τεύχος σελ.24 Κεφάλαιο 63ο «Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου».

Παρόλο που έχει διδαχθεί στα παιδιά ο τύπος του εμβαδού του τριγώνου στο ΒΜ, παρατηρείται ότι στο ΤΕ δε γίνεται εφαρμογή του τύπου με τις μεταβλητές, αλλά μέσο του τετραγωνισμένου χαρτιού γίνεται εξάσκηση πρώτα στην χάραξη του ύψους στα τρίγωνα και έπειτα στον υπολογισμό του εμβαδού τους χωρίς την χρήση μεταβλητών.

Περισσότερη χρήση των γεωμετρικών τύπων με μεταβλητές είχαμε στα Κεφάλαια των στερεών. Εφαρμογές για εμπέδωση είναι οι παρακάτω:

Μέσα σε ένα άδειο χαρτονένιο κουτί με διαστάσεις 70 x 50 x 30 εκατοστά πόσα μικρότερα χάρτινα κουτιά με διαστάσεις 7 x 5 x 3 εκατοστά μπορούμε να βάλουμε;

Εικόνα 34: Σελ. 37 ΤΕ Στ΄ Δημοτικού δ΄ τεύχος Κεφάλαιο 70ο «Όγκος κύβου και ορθογωνίου παραλ/δυο»

Στο σχήμα φαίνεται ένα σιλό (αποθηκευτικός χώρος για δημητριακά). Η εσωτερική του διάμετρος είναι 13 μ. Το ύψος του (χωρίς τη στέγη) είναι 20 μ. Να βρεις τη χωρητικότητά του.

Εικόνα 35: Σελ.39 ΤΕ Στ΄ Δημοτικού δ΄ τεύχος Κεφάλαιο 71ο «Όγκος κυλίνδρου»

Στο ΒΜ της Στ΄ Δημοτικού παρατηρήθηκε ότι μεγαλύτερη χρήση γραμμάτων γίνεται στη Θεματική Ενότητα 2: «Εξισώσεις» και στη Θεματική Ενότητα 6 «Γεωμετρία». Όσον αφορά τα ΤΕ στο β΄ τεύχος υπήρχε αναφορά στην μεταβλητή και τις εξισώσεις, στα υπόλοιπα τεύχη δεν χρησιμοποιούνται σχεδόν καθόλου οι μεταβλητές στις ασκήσεις ή στα προβλήματα, μόνο σε κάποια προβλήματα γεωμετρίας που ζητείται από τα παιδιά να γράψουν τον γεωμετρικό τύπο και να κάνουν αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών.

Οι μαθητές της Στ΄ Δημοτικού έρχονται σε επαφή με την έννοια της σταθεράς. Η μοναδική σταθερά που διδάσκεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού είναι το π (π=3,14).

Από τα παραπάνω διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό του κυκλικού δίσκου είναι περίπου 3 φορές το τετράγωνο της ακτίνας. Επίσης γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου είναι περίπου 3 φορές η διάμετρος. Αυτός ο αριθμός, ο «περίπου 3» ονομάζεται π και είναι στην πραγματικότητα ένας αριθμός με πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία, ωστόσο για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνο τα δύο: λέμε $\pi = 3{,}14$.

Εικόνα 36: ΒΜ 65ο Κεφάλαιο «Βρίσκω το εμβαδό κυκλικού δίσκου» σελ. 156

Οι έννοιες της εξίσωσης και της σταθεράς εισάγονται στα σχολικά βιβλία της Στ΄ Δημοτικού, ενώ αυτή της παραμέτρου δεν εμφανίζεται στο Δημοτικό αλλά σε μεγαλύτερες τάξεις.

Γ) Ανάλυση του τρόπου παρουσίας της αλγεβρικής σκέψης στο Πρόγραμμα Σπουδών της Α΄ γυμνασίου

Το ΠΣ χωρίζει την διδακτέα ύλη της Ά Γυμνασίου σε «Αριθμητική – Άλγεβρα» και «Γεωμετρία» Στον πίνακα παρακάτω φαίνονται οι γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες) σχετικά με τον γνωστικό άξονα «Αριθμητικός και Αλγεβρικός λογισμός» στην Α΄ Γυμνασίου.

Τάξη	**Άξονες γνωστικού περιεχομένου**	**Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες)**
	Αριθμητική - Άλγεβρα	
Α΄ Γυμνασίου	Αριθμητικός και Αλγεβρικός λογισμός Ανάλογα ποσά και Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Οι μαθητές επιδιώκεται: Να γνωρίσουν τα σύνολα των φυσικών των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών, να μπορούν να εκτελούν με ευχέρεια τις πράξεις στα σύνολα αυτά, να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση εξισώσεων και προβλημάτων. Να γνωρίσουν το σύνολο των αρνητικών ρητών και κατ' επέκταση το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και προβλήματα στα σύνολα αυτά. Να γνωρίσουν τις έννοιες του λόγου, της αναλογίας, των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (π.χ. προβλήματα ποσοστών, μερισμού κτλ.).

Πίνακας 17

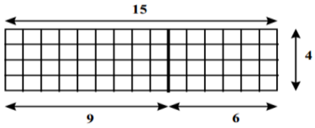
Στην Α΄ Γυμνασίου, στα πλαίσια του αλγεβρικού λογισμού, απαιτείται η επίλυση εξισώσεων με την εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων σε όλα τα σύνολα αριθμών (φυσικοί, δεκαδικοί, κλάσματα και ρητοί). Από την ανάγνωση του ΠΣ για την Α΄ Γυμνασίου προκύπτει πως θεωρείται προαπαιτούμενη από την Στ΄ Δημοτικού η γνώση της έννοιας της μεταβλητής για την επίλυση εξισώσεων. Στην Α΄ γυμνασίου διδάσκονται οι ρητοί αριθμοί καθώς και η λύση εξισώσεων στο σύνολο αυτό. Για την επίλυση προβλημάτων στα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά χρησιμοποιείται κατά κανόνα η μεταβλητή x ως η άγνωστη ποσότητα.

Στην Α΄ Γυμνασίου θεωρείται γνωστή η έννοια της μεταβλητής και έτσι το ΠΣ επιμένει περισσότερο στην επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων. Η έννοια της μεταβλητής και της συμβολικής γραφής γενικότερα υπάρχει από την αρχή της διδασκαλίας της Α΄ Γυμνασίου. Για παράδειγμα στη Θεματική Ενότητα του ΠΣ της Α΄ Γυμνασίου «Πρόσθεση, Αφαίρεση και Πολ/σμός Φυσικών Αριθμών» προτείνετε για την επιμεριστική ιδιότητα η παρακάτω δραστηριότητα.

–Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει

$$4 \cdot (9+6) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6$$

$$4 \cdot (15-6) = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 6$$



και στη συνέχεια με κατάλληλα σχήματα δικαιολογήστε τις ισότητες:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

και

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Εικόνα 37: Σελ. 276 ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ 2003

Μια δραστηριότητα που συνδυάζει αριθμητική και αλγεβρική σκέψη με τη βοήθεια σχήματος. Στη συνέχεια στην ενότητα «Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα -Χαρακτήρες διαιρετότητας» αναφέρεται ο παρακάτω στόχος για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου.

Να κατανοήσουν ότι οι εκφράσεις: «Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ», «Ο δ είναι διαιρέτης του Δ», «Ο Δ διαιρείται με τον δ» είναι ισοδύναμες με την έκφραση: «Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια».

Τα γράμματα «Δ» για τον Διαιρετέο και «δ» για τον διαιρέτη ανήκουν στην κατηγορία «Ετικέτα – Επιγραφή», χρησιμοποιούνται ως όροι της ευκλείδειας διαίρεσης. Γράμματα που έχουν χρησιμοποιηθεί και στο παρελθόν στη Γεωμετρία για τον συμβολισμό και άλλων εννοιών, όπως δ = διάμετρος.

Στο Κεφάλαιο των «Κλασμάτων» προτείνεται για την κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων η σχέση: «Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε αδ=βγ »

Στόχος αυτή της σχέσης είναι να χρησιμοποιούν οι μαθητές τη «χιαστί» ιδιότητα για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει μέχρι τώρα στο σχολικό βιβλίο η ερμηνεία ότι μεταξύ δύο γραμμάτων υπάρχει η πράξη του πολ/σμού. Στη παραπάνω σχέση θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να αναφερθεί σε αυτό το φαινόμενο αν τη διδάξει με αυτό τον τρόπο.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι στόχοι με τις ενδεικτικές δραστηριότητες του ΠΣ για κάθε Θεματική Ενότητα για την Α΄ Γυμνασίου.

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Αριθμοί - Άλγεβρα		
Εξισώσεις και Προβλήματα		
Να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης. Να ελέγχουν αν κάποιος αριθμός είναι λύση εξίσωσης. Να λύνουν με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων εξισώσεις της μορφής: α+x=β, x-α=β, α-x=β, αx=β, α:x=β και x:α=β	Η έννοια της εξίσωσης Οι εξισώσεις: α+x=β, x-α=β, α-x=β, αx=β, α:x=β και x:α=β *(2 ώρες)*	Να τονιστεί με κατάλληλες δραστηριότητες η διαδικασία επιλογής της μεταβλητής και η «μετάφραση» σε μαθηματική γλώσσα ενός πραγματικού προβλήματος.
Να λύνουν προβλήματα, τεσσάρων πράξεων. Να λύνουν απλά προβλήματα με τη βοήθεια των εξισώσεων των παραπάνω μορφών.	Επίλυση προβλημάτων *(3 ώρες)*	Προβλήματα που προέρχονται από τα μαθηματικά ή από τις εμπειρίες και το περιβάλλον των μαθητών έτσι ώστε, να δοθεί η ευκαιρία για να παρουσιαστούν διάφορες ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως: -σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση -δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς και εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις -βρίσκω ένα μοντέλο. -υποθέτω και ελέγχω.

Ανάλογα ποσά-Αντιστρόφως ανάλογα ποσά		
Να σχεδιάζουν ένα σύστημα ημιαξόνων. Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του.	Παράσταση σημείων στο επίπεδο. *(1 ώρα)*	Μελέτη διαγραμμάτων (καμπύλη ανάπτυξης βρεφών, καμπύλες θερμοκρασίας κτλ.) Σχεδίαση ευθυγράμμων σχημάτων, με βάση τις συντεταγμένες χαρακτηριστικών τους σημείων
Να κατανοήσουν την έννοια του λόγου. Να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας. Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$ μέσω αναζήτησης της τέταρτης αναλόγου $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{x}$ Να γνωρίζουν ότι γενικά $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta}$	Λόγος δύο αριθμών Αναλογία (2 ώρες)	Χρήση διαφόρων ειδών σχέσεων από την καθημερινή ζωή π.χ. η σύνθεση μίας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι, 20% πολυεστέρας. Να εκφρασθεί η σύνθεση με τη βοήθεια λόγου. (Οι υπόλοιπες βρίσκονται στο Παράρτημα: …)
Να αναγνωρίζουν αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών. Να συμπληρώνουν πίνακες ανάλογων ποσών όταν δίνεται ο λόγος τους. Να υπολογίζουν το λόγο δύο αναλόγων ποσών, όταν δίνονται οι πίνακές τους. Να χρησιμοποιούν το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας.	Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών. *(2 ώρες)*	Τα ανάλογα ποσά σε διάφορες περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας π.χ. -Η σχέση διαστήματος και χρόνου σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. -Σχέση περιμέτρου τετραγώνου και πλευράς του.
Να αναπαριστούν γραφικά μια σχέση αναλογίας και να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων.	Γραφική αναπαράσταση σχέσης αναλογίας *(1 ώρα)*	
Να οργανώνουν τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογικά σε πίνακα και με βάση τον πίνακα να κατασκευάζουν όπου κρίνεται απαραίτητο και τη γραφική παράσταση. Να λύνουν τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια: αριθμητικό και γραφικό.	Προβλήματα αναλογιών *(2 ώρες)*	Δραστηριότητες όπου ο συντελεστής αναλογίας να μην είναι μόνο της μορφής τιμή/κιλό, τιμή/μέτρο, διάστημα/μονάδα χρόνου κ.τλ., όπως π.χ.: -Καθαρίζω 5 κιλά κεράσια και παίρνω 3 κιλά καθαρά κεράσια (χωρίς κουκούτσια). Αν καθαρίσω 7 κιλά κεράσια τι ποσότητα καθαρών κερασιών θα πάρω; (Οι υπόλοιπες βρίσκονται στο Παράρτημα: …) Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά σε

Να διακρίνουν αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να κατασκευάζουν πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Να παριστάνουν με σημεία ενός συστήματος αξόνων τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να χαράσσουν την καμπύλη που περνά απ' αυτά. Να γνωρίζουν ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό. Να λύνουν προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά *(2 ώρες)*	διάφορες περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας π.χ. -Σχέση αριθμού ημερών και εργατών που απαιτούνται για την κατασκευή συγκεκριμένου έργου. -Σχέση ταχύτητας και χρόνου που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό μια συγκεκριμένη απόσταση.

Πίνακας 18

Με την είσοδο στον αλγεβρικό λογισμό το ΠΣ θέτει ως στόχο τη λύση εξισώσεων με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων των μορφών α+x=β, x-α=β, α-x=β, αx=β, α:x=β και x:α=β, όπου x άγνωστος και α, β όροι που θα αντικατασταθούν με αριθμούς για να πάρει η εξίσωση η μορφή που έχουν συνηθίσει οι μαθητές, πχ 3 + x = 8 ή 24 : x = 8.

Στους ρητούς αριθμούς, το τελευταίο κεφάλαιο της «Αριθμητικής - Άλγεβρας», οι μαθητές πρέπει να εμπεδώσουν ότι το πρόσημο του αριθμού υπάρχει 'μέσα' στο γράμμα. Στη διαίρεση ρητών προσπαθεί το ΠΣ να εξηγήσει ότι το πηλίκο α : β είναι η λύση της εξίσωσης β · x = α, η οποία ισοδυναμεί με την x = α : β. Υπάρχει πάλι η χρήση του αγνώστου x και των μεταβλητών όρων α , β.

Να γνωρίζουν ότι το πηλίκο α:β ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x=\alpha$ δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία: $\beta \cdot x=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha:\beta$ Να βρίσκουν το πηλίκο δυο ρητών.

Εικόνα 38: Σελ. 283 ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ 2003

Στην Ενότητα «Ανάλογα ποσά και Αντιστρόφως Ανάλογα ποσά» η έννοια της μεταβλητής παίρνει επιπλέον διάσταση, αυτή της συμμεταβολής. Η εισαγωγή του 'πίνακα τιμών' αναφέρεται σε δύο αγνώστους που ο ένας θα μεταβάλλεται με βάση τον άλλο. Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους εισάγεται με την χάραξη γραφικών παραστάσεων, για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας το ΠΣ προτείνει τη μελέτη διαγραμμάτων όπως της καμπύλης ανάπτυξης των βρεφών, καμπύλες θερμοκρασίας κτλ.

Ολοκληρώνεται η παρουσίαση της αλγεβρικής σκέψης στα ΑΠΣ παραθέτοντας σε μορφή πίνακα τα ΠΜΑ για την Άλγεβρα της Α΄ Γυμνασίου με τις προτεινόμενες δραστηριότητες και το εποπτικό υλικό.

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά Θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
*Α1.*Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση. *Α2.* Προσδιορίζουν ένα σημείο (ως διατεταγμένο ζεύγος) σε σύστημα αξόνων. *Α3.* Αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.	***Κανονικότητες/ Συναρτήσεις*** • αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων *(4 ώρες)*	Η ανάγκη συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί αργότερα στις συναρτήσεις. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ. 74 (ασκ 15), παρ. 6.1 (παράσταση σημείων στο επίπεδο) Ψηφιακό περιβάλλον:
Α4. Χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε τύπους (σε καταστάσεις καθημερινής ζωής, φυσικής, κλπ) *Α5.* Μοντελοποιούν προβλήματα με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων. *Α6.* Μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές	***Αλγεβρική παράσταση*** • μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις *(6 ώρες)*	Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων. Επιπλέον, η	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ 16, 72, 74 Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftik

παραστάσεις και αντίστροφα (π.χ. το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3, 2α+3). *Α7.* Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης και κατασκευάζουν πίνακες τιμών. *Α8.* Χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα για να απλοποιήσουν γραμμικές αλγεβρικές παραστάσεις (αναγωγή ομοίων όρων). *Α9.* Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. η 2x+3 είναι άθροισμα, το 2x είναι γινόμενο).		αναγωγή όμοιων όρων υποστηρίζεται αρχικά με μοντέλα /μεταφορές και στη συνέχεια με την επιμεριστική ιδιότητα. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ2)*	o _yliko_enotita_4.pdf σελ 1–11.
Α10. Αναγνωρίζουν πότε ένας αριθμός είναι λύση εξίσωσης σε διαφορετικές μορφές εξισώσεων. *Α11.* Αναγνωρίζουν ποσά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα και επιλύουν προβλήματα με πίνακες και με εξισώσεις της μορφής α·β=γ·x και α/β=γ/x. *Α12.* Διερευνούν και διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα - μεταφορές.	***Ισότητα – Ανισότητα*** • η εξίσωση (αx+β=γ) ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. • μετασχηματισμοί εξίσωσης. *(7 ώρες)*	Οι διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου και των αντίστροφων πράξεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράλληλα με την μέθοδο των ισοδύναμων ισοτήτων. Η χρήση μοντέλων / μεταφορών (ζυγαριά, πλακίδια) οδηγεί τόσο στη διατύπωση των ιδιοτήτων της ισότητας, όσο και στη διαδικασία	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος) http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ. 12-19 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος).

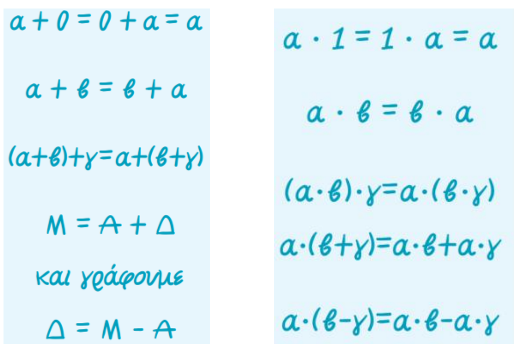
		επίλυσης μιας εξίσωσης. Η επίλυση των εξισώσεων πρέπει να γίνεται με ιδιότητες της ισότητας και όχι με μνημονικούς κανόνες (πχ όταν αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο), οι οποίοι αποκρύπτουν το νόημα της διαδικασίας. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ3, ΑΔ4)*	

Πίνακας 19

Οι δραστηριότητες ΑΔ1, ΑΔ2, ΑΔ3 ΚΑΙ ΑΔ4 βρίσκονται στο Παράρτημα2

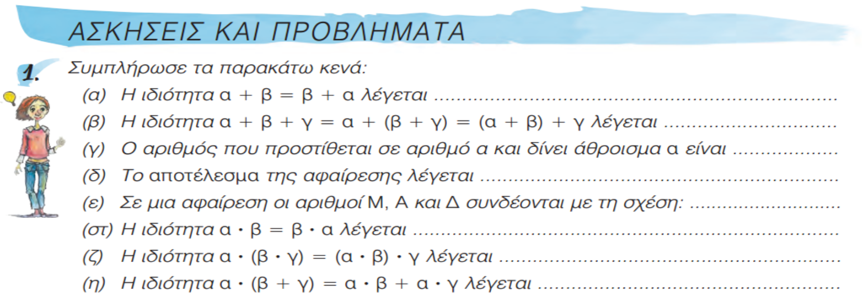
Δ) Ανάλυση του σχολικού βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου ως προς τα βασικά σημεία της έρευνας

Το σχολικό εγχειρίδιο που χρησιμοποιείται στην Α΄ Γυμνασίου είναι το ΒΜ, το οποίο χωρίζεται σε δύο μέρη Αριθμητική-Αλγεβρα και Γεωμετρία. Από το 1^{o} κεφάλαιο παρατηρείται μια εκτενή χρήση της συμβολικής γραφής στην Θεωρία. στη σελ. 15 υπάρχουν οι ιδιότητες των πράξεων, τις οποίες έχουν διδαχθεί ονομαστικά σε προηγούμενη τάξη χωρίς όμως τη χρήση συμβόλων.



Εικόνα 39: Ιδιότητες πράξεων Κεφάλαιο Α1.2 «Πρόσθεση, Αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών σχολικό βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σελ.15 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ ‘ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ’)

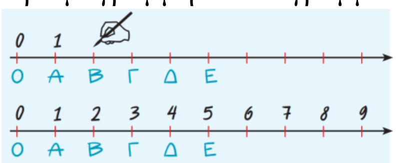
Έπειτα στις Ασκήσεις – Προβλήματα υπάρχει πάντα μια ερώτηση κλειστού τύπου «Συμπλήρωσης κενού», όπου απαιτείτε η αντιγραφή σχέσεων με γράμματα που έχουν διδαχθεί στη θεωρία, ή Ασκήσεις Σωστού – Λάθους».


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
(α) Η ιδιότητα α + β = β + α λέγεται ....
(β) Η ιδιότητα α + β + γ = α + (β + γ) = (α + β) + γ λέγεται ....
(γ) Ο αριθμός που προστίθεται σε αριθμό α και δίνει άθροισμα α είναι ....
(δ) Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης λέγεται ....
(ε) Σε μια αφαίρεση οι αριθμοί Μ, Α και Δ συνδέονται με τη σχέση: ....
(στ) Η ιδιότητα α · β = β · α λέγεται ....
(ζ) Η ιδιότητα α · (β · γ) = (α · β) · γ λέγεται ....
(η) Η ιδιότητα α · (β + γ) = α · β + α · γ λέγεται ....

Εικόνα 40: σελ. 17 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α1.2 «Πρόσθεση, Αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

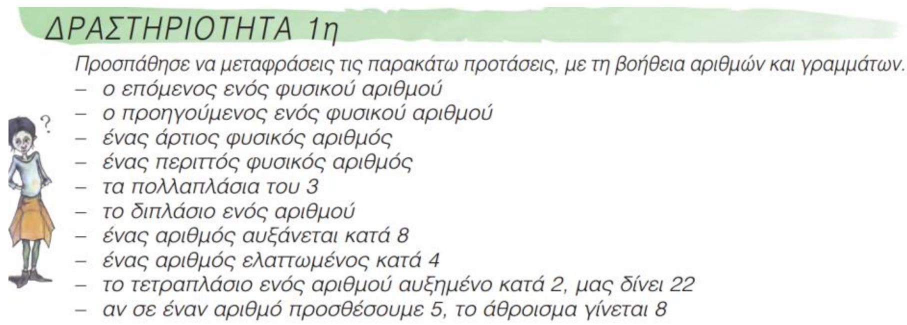
Νωρίτερα στην σελ. 12 Κεφάλαιο Α1.1 «Φυσικοί αριθμοί-Διάταξη-Στρογγυλοποίηση» χρησιμοποιείται η παρακάτω αριθμογραμμή και τα γράμματα απεικονίζουν τους Αριθμούς 0,1,2,…



Εικόνα 41: Σελ.12 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α1.1 «Φυσικοί αριθμοί-Διάταξη-Στρογγυλοποίηση»

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το συμβολισμό της άλγεβρας από πολύ νωρίς χωρίς να υπάρχει κάποια αναφορά στην έννοια της μεταβλητή ή της αλγεβρικής έκφρασης. Στο ίδιο Κεφάλαιο στην παράγραφο Α1.3 εισάγεται η έννοια της δύναμης και ο συμβολισμός «$α^ν$», της κατηγορίας «Ετικέτα – Επιγραφή». Σε παρακάτω Κεφάλαιο δίνεται η ευκλείδεια διαίρεση $Δ=δ·π + υ$ με τον περιορισμό $υ<δ$. Μια σχέση που διδάσκεται από την Ε΄ Δημοτικού και ανήκει στη κατηγορία «Ετικέτα – Επιγραφή».

Αργότερα στο 4^ο Κεφάλαιο διδάσκονται οι εξισώσεις, όπου εκεί η μεταβλητή x χρησιμοποιείται ως ο άγνωστος. Στην πρώτη Δραστηριότητα του Κεφαλαίου οι μαθητές καλούνται να εξασκηθούν στην μετατροπή λεκτικής διατύπωσης σε μαθηματικές σχέσεις με γράμματα.


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Προσπάθησε να μεταφράσεις τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων.
– ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού
– ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού
– ένας άρτιος φυσικός αριθμός
– ένας περιττός φυσικός αριθμός
– τα πολλαπλάσια του 3
– το διπλάσιο ενός αριθμού
– ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8
– ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4
– το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει 22
– αν σε έναν αριθμό προσθέσουμε 5, το άθροισμα γίνεται 8

Εικόνα 42: Δραστηριότητα 1η Κεφάλαιο 4ο Α΄ Γυμνασίου σελ. 72 (Εκδόσεις ΙΤΥΕ'ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ')

Μετά από τη χρήση γραμμάτων τα παιδιά εισάγονται στην έννοια της εξίσωσης και της επίλυσης της. Παρόμοιες δραστηριότητες είχαν κληθεί να λύσουν στο ΤΕ της Στ΄ Δημοτικού (τεύχος β΄).

1. Εφαρμογή του ορισμού των πράξεων.

Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;
(α) $x + 4{,}9 = 15{,}83$ (β) $40{,}4 + x = 93{,}19$ (γ) $53{,}404 - x = 4{,}19$ (δ) $38 - x = 7{,}1$.

Εικόνα 43: σελ.74 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α4.1 «Η έννοια της εξίσωσης»

2. Εμφάνιση του αγνώστου σε κλάσμα.

Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει; (α) $\frac{3}{x} = \frac{12}{20}$, (β) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$, (γ) $\frac{35}{40} = \frac{x}{8}$, (δ) $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$.

Εικόνα 44: σελ.74 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α4.1 «Η έννοια της εξίσωσης»

3. Εξισώσεις που προτείνεται να λυθούν με τον ορισμό των πράξεων, με ιδιαίτερη δυσκολία στις περιπτώσεις (α) και (γ).

Βρες την τιμή του φυσικού αριθμού x: (α) $\frac{x+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$, (β) $\frac{5}{8} + \frac{x}{16} = \frac{3}{4}$, (γ) $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{10} = 1$.

Εικόνα 45: σελ.74 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α4.1 «Η έννοια της εξίσωσης»

Οι προτεινόμενες διδακτικές ώρες του ΠΣ για το Κεφάλαιο 4.1 « Η έννοια της εξίσωσης» είναι δύο ώρες. Ενώ μετά από τρεις διδακτικές ώρες στο κεφάλαια 4.1 και 4.2 περνάνε στο 4.3 Κεφάλαιο «Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων», όπου καλούνται να λύσουν προβλήματα αφού πρώτα φτιάξουν την αλγεβρική εξίσωση με έναν άγνωστο.

- ✓ Παράδειγμα επίλυσης προβλήματος με τη χρήση εξισώσεων.

Η διαφορά της ηλικίας της κόρης από τη μητέρα της είναι 25 χρόνια.
Αν η κόρη είναι 18 ετών, πόσων ετών είναι η μητέρα;

Εικόνα 46: ΒΜ Α΄ Γυμνασίου σελ. 78 Κεφάλαιο Α4.3 «Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων» (ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ).

Σημαντική η είσοδος της μελέτη της γραφικής παράστασης και του ‘πίνακα τιμών’ στο 6^{ο} Κεφάλαιο «Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως Ανάλογα ποσά». Κεφαλαία γράμματα όπως για παράδειγμα Α(1,2) , δηλώνουν το διατεταγμένο ζεύγος Α(x,y) και εισάγεται η κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» που δεν έχουν ξανά διδαχθεί οι μαθητές σε προηγούμενη τάξη. Επίσης στο Κεφάλαιο Α 6.4 «Γραφική παράσταση σχέση αναλογίας» οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν το εκφραστικό άλμα των ‘μεταβλητών που μεταβάλλονται’, δηλαδή οι μεταβλητές που μεταβάλλονται αναλόγως των αριθμητικών τιμών που παίρνουν άλλες μεταβλητές.

Αντιστοίχισε κάθε πίνακα με ένα από τους προτεινόμενους τύπους:

(Α)

x	4	7	12
y	10	17,5	30

(Β)

x	5	7,5	9
y	11	16	19

(Γ)

x	2	3	10
y	7	9	23

(Δ)

x	2	4	6
y	6	3	2

(Ε)

x	2	5	0,5
y	1	2,5	0,25

(Ζ)

x	0,2	6	10
y	2,4	14	22

(Η)

x	1	1,2	2,5
y	3	3,6	7,5

(Θ)

x	0,8	1	1,5
y	2,2	3	5

(1) $y = 2x + 3$

(2) $y = 3x$

(3) $y = 12:x$

(4) $y = 2,5x$

(5) $y = 2x + 2$

(6) $y = 2x + 1$

(7) $y = 4x - 1$

(8) $y = 0,5x$

Εικόνα 47: ΒΜ Α΄ Γυμνασίου σελ. 101 Κεφάλαιο Α 6.4 «Γραφική παράσταση σχέση αναλογίας» (Εκδόσεις ΙΤΥΕ'ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ')

Η παραπάνω δραστηριότητα απαιτεί από τους μαθητές να έχουν κατανοήσει τους ‘πίνακες τιμών’ και την συναρτησιακή σχέση των μεταβλητών x και y. O άγνωστος x μετατρέπεται σε μια μεταβλητή που γνωρίζουμε τις διάφορες τιμές που παίρνει και ψάχνουμε τις τιμές της άλλης μεταβλητής y. Συνεχίζοντας στο 6^{ο} Κεφάλαιο στα «Προβλήματα αναλογιών» υπάρχουν λυμένα παραδείγματα όπου χρησιμοποιούνται και οι δύο μεταβλητές x και y ως άγνωστοι. (Παραδείγματα Πινάκων αναλογίας με αγνώστους τα x και y σελ. 104 Α΄ Γυμνασίου)

Τιμή αγοράς	100	360.000
Τιμή πώλησης	128	y

Δηλαδή: $\frac{100}{128} = \frac{360.000}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 360.000 \cdot 128$

συνεπώς, $y = \frac{360.000 \cdot 128}{100}$. Άρα, $y = 460.800$ €

Έχουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

Τιμή αγοράς	360.000	100
Κέρδος	31.680	x

Δηλαδή: $\frac{360.000}{31680} = \frac{100}{x}$

Επομένως, $360.000 \cdot x = 31680 \cdot 100$ συνεπώς, $x = \frac{31.680 \cdot 100}{360.000}$.

Άρα, $x = 8,8$. Το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι 8,8%.

Εικόνα 48: σελ. 104 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Κεφάλαιο Α6.6»Προβλήματα Αναλογιών»

Στο τελευταίο Κεφάλαιο της Άλγεβρας «Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί» εισάγεται η έννοια του πρόσημου των ρητών αριθμών και η χρήση των μεταβλητών στην θεωρία είναι κυρίως της κατηγορίας «Γενικευμένος Αριθμός»,

- **Αντιμεταθετική ιδιότητα**
  (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου)
  $\boxed{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα**
  $\boxed{\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$
- **Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού με τη μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό**.
  $\boxed{1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha}$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:
  $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ και $\boxed{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$

Εικόνα 49: σελ. 130 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Α 7.5 «Ιδιότητες πολ/σμού»

ενώ στις Ασκήσεις είναι της κατηγορίας «Συγκεκριμένος Αριθμός».

8. *Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:*

$A = (\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-2)(\alpha+2)$, όταν $\alpha = 3$

$B = \beta(\beta-3)(\beta+3)(\beta-5)(\beta+5)$, όταν $\beta = 2$

$\Gamma = \gamma(2\gamma-1)(3\gamma+1)(4\gamma-2)(\gamma+2)(\gamma-2)$, όταν $\gamma = 0,5$

9. *Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

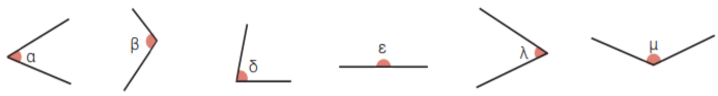
x	y	z	ω	A=xyz	B=yxω	Γ=xA–B	AB+Γ
–2	0,5	+1	–3				
$-\frac{1}{2}$	+6	–4	–0,3				
–2	$+\frac{3}{2}$	0,2	–7				

Εικόνα 50: Α 7.5 Ασκήσεις σελ. 132 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου

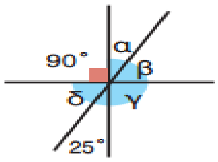
Όσον αφορά τη Γεωμετρία στο εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου γίνεται χρήση γραμμάτων για το συμβολισμό γεωμετρικών όρων. Οι μαθητές από τις μικρές τάξεις έχουν συνδυάσει συγκεκριμένα γράμματα για τον συμβολισμό ποσοτήτων στη Γεωμετρία, όπως για παράδειγμα το «Ε» σημαίνει το Εμβαδό σχημάτων, το «ρ» την ακτίνα κύκλου κ.α.

Ξεκινώντας από το Β1.5 Κεφάλαιο «Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας» αναλύουμε τις γωνίες που συμβολίζονται με ένα μόνο γράμμα. Οι μεταβλητές στις παρακάτω ασκήσεις ανήκουν στην κατηγορία «Συγκεκριμένος Αριθμός» και ζητείτε από τους μαθητές να σχεδιαστούν γωνίες, να υπολογιστούν με τη χρήση μοιρογνωμονίου ή χωρίς.

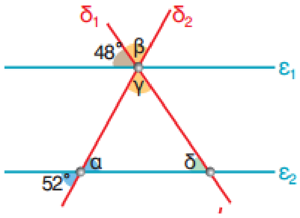
1) *Να βρεις το μέτρο των παρακάτω γωνιών:*



Εικόνα 51: Σελ. 168 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Β1.5 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας.

2) 

Εικόνα 52: Σελ.179 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Β1.8 Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

3) 

Εικόνα 53: σελ. 224 ΒΜ Α΄ Γυμνασίου Β3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.

Στη Γεωμετρία της Α΄ Γυμνασίου οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται περισσότερο στην απεικόνιση γωνιών. Δεν υπάρχει η χρήση των τύπων που είχαμε στην Στ΄ Δημοτικού για τον υπολογισμό Εμβαδών και Όγκων.

2.3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στη συγκεκριμένη μελέτη για την παρουσία της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά εγχειρίδια και στα ΑΠΣ της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου επισημαίνονται τα εξής:

Σημεία εστίασης της έρευνας για την Στ΄ Δημοτικού	**Ευρήματα στα σχολικά βιβλία**
Δυσκολίες κατανόησης της συμβολικής γραφής	Υπάρχει ο ορισμός της «μεταβλητής» αλλά δεν εξηγείται αρκετά η έννοια, για την καλύτερη κατανόηση και εφαρμογή της στις ασκήσεις. Η κατανόηση των συμβόλων – γραμμάτων από το Δημοτικό κρίνεται απαραίτητη για την μετέπειτα αλγεβρική πορεία.
Δυσκολίες μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη	Η χρήση αριθμών σε παραστάσεις και προβλήματα αντικαθίστανται από αλγεβρικούς όρους (σύμβολα και αριθμούς). Οι ασκήσεις εφαρμογής γραμμάτων δεν έχουν κλίμακα δυσκολίας. Δεν σημειώνεται ότι θα μεταβούμε σε έναν καινούριο τρόπο σκέψης («νέα γλώσσα»).

Δυσκολία μαθητών με έννοιες (εξίσωση, σταθερά, παράμετρος)	Στα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού διδάσκεται η έννοια της εξίσωσης, ενώ έννοιες όπως η σταθερά και η παράμετρος αναφέρονται σε επόμενες τάξεις του Γυμνασίου. Στη Γεωμετρία υπάρχει μόνο η χρήση της σταθεράς του π (π=3,14) στον κύκλο.
	Ευρήματα στα ΑΠΣ
Τρόπος παρουσίασης της αλγεβρικής σκέψης στα αναλυτικά προγράμματα του Δημοτικού.	Τα προγράμματα σπουδών εξηγούν αναλυτικά τον τρόπο που θα πρέπει να γίνεται η εισαγωγή της αλγεβρικής σκέψης τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο. Στα σχολικά εγχειρίδια δεν αποτυπώνονται αυτά που εξηγούν τα ΠΣ με αποτέλεσμα η διδασκαλία βασικών εννοιών να γίνεται ταχεία και με προχειρότητα.

Πίνακας 20

Σημεία εστίασης της έρευνας για την Α΄ Γυμνασίου	**Ευρήματα στα σχολικά βιβλία**
Δυσκολίες κατανόησης της συμβολικής γραφής	Η γνώση της έννοιας της μεταβλητής θεωρείται γνωστή από προηγούμενη τάξη. Η συμβολική γραφή και η χρήση γραμμάτων ξεκινάει από τα πρώτα κεφάλαια. Η θεωρία (όπως ιδιότητες πράξεων) παρουσιάζεται στους μαθητές πιο αφηρημένα και γενικευμένα.
Δυσκολίες μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη	Η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα πραγματοποιείται από τις πρώτες σελίδες χωρίς να υπάρχει στάδιο εισαγωγής στο «νέο» τρόπο σκέψης. Στη θεωρία , όπως επίσης και στις ασκήσεις, χρησιμοποιούνται αλγεβρικοί όροι που πρέπει οι μαθητές να ακολουθήσουν.

Δυσκολία μαθητών με έννοιες (εξίσωση, σταθερά, παράμετρος)	Η έννοια της εξίσωσης εμπλουτίζεται και οι απαιτήσεις στις ασκήσεις αυξάνονται. Στην Α΄ Γυμνασίου προωθείται περισσότερο η επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων. Οι μεταβλητές ως άγνωστοι κυριαρχούν και σε όλα τα Κεφάλαια επισημαίνεται η χρήση της εξίσωσης. Η έννοια της σταθεράς είναι περιορισμένη, ενώ της παραμέτρου δεν εμφανίζεται στην Α΄ Γυμνασίου.
	Ευρήματα στα ΑΠΣ
Τρόπος παρουσίασης της αλγεβρικής σκέψης στα αναλυτικά προγράμματα του Γυμνασίου.	Στα ΑΠΣ του Γυμνασίου παρατηρείται η ένταξη της αλγεβρικής σκέψης, από τις ιδιότητες των πράξεων με όλα τα είδη αριθμών (φυσικοί, κλάσματα, δεκαδικοί και ρητοί), μέχρι τη Γεωμετρία στον υπολογισμό γωνιών χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου.

Πίνακας 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάλυση ως προς τα βασικά σημεία της έρευνας των Βιβλίων των Εκπαιδευτικών της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου

3.1. «Βιβλίο Δασκάλου» Στ΄ Δημοτικού

Στο «Βιβλίο του Δασκάλου» αναλύονται οι δραστηριότητες που υπάρχουν στο ΒΜ, όπως επίσης και ο τρόπος επίλυσης και η λύση των προβλημάτων του ΤΕ που έχουν κάποια δυσκολία. Στην αρχή κάθε θεματικής ενότητας υπάρχει ένα γράμμα προς τους γονείς (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ4 και 5), το οποίο πρέπει να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί, ώστε να ενημερωθούν για το περιεχόμενο και τον τρόπο εργασίας κάθε ενότητας. Συγκεκριμένα στην Ενότητα «Εξισώσεις» της Στ΄ Δημοτικού η επιστολή προς τους γονείς αναφέρει:

Τι θα μάθουμε σε αυτή την ενότητα

Η δεύτερη ενότητα, που είναι σχετικά μικρή σε χρονική διάρκεια, είναι η ενότητα των **ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.**

Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της μεταβλητής, δηλαδή τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στις αριθμητικές παραστάσεις.

Η **λύση των εξισώσεων** δεν θα προσανατολίζεται καθαρά στην τεχνική, αλλά περισσότερο στην ανάπτυξη του τρόπου σκέψης που χρειάζεται να υιοθετήσει το παιδί για να μετατρέψει ένα πρόβλημα σε μια αριθμητική παράσταση. Θα το αφήσουμε να ανακαλύψει ότι κάποιο από τα στοιχεία του προβλήματος είναι απαραίτητο να συμβολιστεί επειδή είναι άγνωστο, προκειμένου να ολοκληρωθεί η αριθμητική παράσταση.

Η λύση για την εξίσωση που θα δημιουργηθεί θα εξηγηθεί τόσο με τη μέθοδο της ζυγαριάς που πρέπει πάντα να ισορροπεί («ό,τι κάνω από τη μια πλευρά πρέπει να κάνω και από την άλλη») όσο και με τη μέθοδο των αντίθετων πράξεων. Κάθε παιδί θα μπορέσει έτσι να επιλέξει τον τρόπο που είναι πιο βολικός στη σκέψη του για να ερμηνεύσει και να λύσει την εξίσωση.

Εικόνα 54: σελ.71 «Βιβλίο Δασκάλου» Στ΄Δημοτικού

Εξηγείτε αναλυτικά «Τι θα μάθουν» τα παιδιά σε αυτή την ενότητα, όπως την εισαγωγή των γραμμάτων και των συμβόλων σε αριθμητικές παραστάσεις. Σε αυτή την ενότητα θα αναπτυχθεί ο τρόπος σκέψης για την μετατροπή ενός προβλήματος σε παράσταση και όχι μόνο στην τεχνική λύσης μιας εξίσωσης.

Έπειτα δίνονται οι στόχοι του Κεφαλαίου:

- ✓ Να κατανοούν οι μαθητές την έννοια «μεταβλητή»
- ✓ Να χρησιμοποιούν μεταβλητές για να εκφράζουν τιε σχέσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις
- ✓ Να επιλέγουν μεταβλητές και να σχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις .

Μετά από τους στόχους εξηγείται «τι αναμένεται από τους μαθητές» στο συγκεκριμένο Κεφάλαιο των «Εξισώσεων» .

- ✓ Να ορίζουν και να χρησιμοποιούν μεταβλητές σε αριθμητικές παραστάσεις.
- ✓ Να βρίσουν το αποτέλεσμα των αριθμητικών παραστάσεων αντικαθιστώντας τη μεταβλητή με τον αριθμό που εκφράζει την τιμή της

Στη συνέχεια αναφέρονται οι πιθανές δυσκολίες του κεφαλαίου.

Πιθανές δυσκολίες του κεφαλαίου

Ενώ τα παιδιά κατανοούν τη διαδικασία του συμβολισμού ενός άγνωστου ποσού με ένα γράμμα, δυσκολεύονται να καταλάβουν την έννοια της μεταβλητής.

Δυσκολίες επίσης παρατηρήθηκαν στην έκφραση των δεδομένων ενός προβλήματος με αριθμητική παράσταση όταν υπάρχουν εκφράσεις όπως για παράδειγμα, «μικρότερος κατά...» «δεύτερος σε...» που περιγράφουν τις σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα του προβλήματος.

Επιπλέον, πολλές φορές τα παιδιά δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι όταν γράφουμε αριθμό (ή μεταβλητή) δίπλα σε μεταβλητή, εννοείται πως ανάμεσά τους υπάρχει το «επί», δηλαδή, 4x σημαίνει 4 • x, αβ σημαίνει α • β και 3(x + 2) σημαίνει 3 • (x + 2).

*Τα παιδιά εισάγονται για πρώτη φορά στη **διαδικασία της μοντελοποίησης των προβλημάτων με τη βοήθεια των μεταβλητών**. Επειδή η διαδικασία αυτή είναι δύσκολη για τους μαθητές, χρησιμοποιούνται πίνακες όπου καταγράφονται τα δεδομένα ώστε τα παιδιά να διακρίνουν τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα, τα ζητούμενα και τη μεταβλητή.*

Εικόνα 55: σελ. 72 «Βιβλίο Δασκάλου» Στ΄ Δημοτικού

Πιθανή δυσκολία αυτού του Κεφαλαίου είναι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, σε αντίθεση με την διαδικασία συμβολισμού του αγνώστου με ένα γράμμα, που το αντιλαμβάνονται πιο εύκολα. Η μοντελοποίηση των προβλημάτων με τη βοήθεια των μεταβλητών είναι μια κύρια δυσκολία που θα συναντήσουν τα παιδιά σε αυτή την ενότητα.

Στα παρακάτω Κεφάλαια της 2^{ης} Θεματικής Ενότητας αναφέρεται ως πιθανή δυσκολία η εφαρμογή της διαδικασίας μετατροπής ενός λεκτικού προβλήματος σε μαθηματική ισότητα με μια μεταβλητή, καθώς και της εφαρμογής της αντίστροφης πράξης για τη λύση μιας εξίσωσης με έναν άγνωστο.

Μια άλλη σημαντική βοήθεια για τους εκπαιδευτικούς είναι τα προτεινόμενα κριτήρια αξιολόγησης βασισμένα στους στόχους που έχουν τεθεί για τη συγκεκριμένη ενότητα. Προτεινόμενες ερωτήσεις του κριτηρίου στην Ενότητα των «Εξισώσεων» υπάρχουν στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ6. Μερικά παραδείγματα θα σχολιαστούν παρακάτω.

1) Δίνονται πέντε πιθανές απαντήσεις και οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν μία από αυτές.

Η κυρία Δροσινού είναι 36 ετών. Ο γιος της είναι 8 ετών. Οι ηλικίες του κυρίου Δροσινού, της γυναίκας του και του γιου τους δίνουν άθροισμα 77. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μπορεί να μας δώσει την ηλικία (η) του κυρίου Δροσινού;

- 77 + 36 + 8 = n
- 36 + n = 77 + 8
- 36 + 8 = 77 + n
- 77 - 8 = 36 - n
- 36 + 8 + n = 77

Εικόνα 56: Προτεινόμενη άσκηση σε κριτήριο αξιολόγησης από το «Βιβλίο του Δασκάλου»

2) Λύση εξισώσεων

7. Να βρεις την τιμή του x για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- x + 4 = 16 • 2 ....
- x – 6 = 83,7 + 9 ....
- 18 – x = 107 – 90 ....
- x : 2 = 1 ....
- 24 : x = 1 + 1,4 ....
- 18 • x = 9 ....

Εικόνα 57: Προτεινόμενη άσκηση σε κριτήριο αξιολόγησης από το «Βιβλίο του Δασκάλου»

Στη 3η Θεματική Ενότητα «Λόγοι – Αναλογίες» το Βιβλίο του Δασκάλου αναφέρεται να επιμείνουν οι εκπαιδευτικοί στις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τις μεθόδους λύσης, όπως α) η αναγωγή στη μονάδα, β) ο σχηματισμό αναλογίας και γ) η απλή μέθοδος των τριών. Δεν υπάρχει άμεση δυσκολία στην χρήση μεταβλητών σε αυτή την ενότητα. Αυτό που αξίζει να σχολιαστεί είναι μια προτεινόμενη άσκηση στο κριτήριο αξιολόγησης. Οι ‘πίνακες τιμών’ που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού αναγράφουν με λόγια τα ‘ποσά’. Στο παρακάτω παράδειγμα που προτείνει το βιβλίο του Δασκάλου αναπαριστά τα ‘ποσά’ με τις μεταβλητές x και y, που ανήκουν στην κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες», η οποία δεν έχει εντοπιστεί καθόλου στα σχολικά βιβλία.

8. Μελέτησε τους παρακάτω πίνακες και αναγνώρισε αν τα ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα στην κάθε περίπτωση.

					Ανάλογα	Αντιστρόφως ανάλογα	Άλλο
x	3	5	7	9	☐	☐	☐
ψ	5	7	9	11			
x	9	12	18	36	☐	☐	☐
ψ	4	3	2	1			
x	6	9	12	15	☐	☐	☐
ψ	8	12	16	20			

Εικόνα 58: Προτεινόμενη δραστηριότητα στους «λόγους – αναλογίες» από το «Βιβλίο του Δασκάλου»

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση του βιβλίου του εκπαιδευτικού με την 6η Ενότητα της «Γεωμετρίας» τονίζονται οι δυσκολίες που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές στον υπολογισμό του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων και έπειτα εμβαδό και όγκο γεωμετρικών στερεών χωρίς να επιμένουν στην απομνημόνευση των τύπων που διδάσκονται στη θεωρία. Παρακάτω δίνεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου επίλυσης των προβλημάτων με τη βοήθεια του τύπο του εμβαδού τραπεζίου χωρίς τη χρήση γραμμάτων.

Το εμβαδό κάθε τραπεζίου είναι (17 + 11) • 3 : 2 = 42 τ.μ. Το εμβαδό κάθε τριγώνου είναι 6 • 3 : 2 = 9 τ.μ. και το συνολικό εμβαδό 102 τ.μ. (μπορεί να βρεθεί και ως 6 • 17 = 102).

Εικόνα 59: Προτεινόμενος τρόπος λύσης άσκησης στο εμβαδό τραπεζίου από το «Βιβλίο του Δασκάλου»

Γίνεται κατευθείαν αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών των μεταβλητών και υπολογισμός του εμβαδού. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στον υπολογισμό του όγκου του στερεού. Στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ8 υπάρχει το κριτήριο αξιολόγησης που προτείνεται σε αυτή την ενότητα.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση του βιβλίου του Δασκάλου της Στ΄ Δημοτικού καταγράφονται τα ευρήματα σχετικά με τα βασικών σημείων της έρευνας από την ανάλυση του Βιβλίου του Δασκάλου για την Στ΄ Δημοτικού και του Βιβλίου του Καθηγητή για την Α΄ Γυμνασίου.

Τα βασικά σημεία εστίασης της έρευνας για την Στ΄ Δημοτικού	**Οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς από το «Βιβλίο Δασκάλου»**
Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την άλγεβρα, την συμβολική γραφή και τις μεταβλητές	Στους εκπαιδευτικούς δίνονται προτάσεις για βελτίωση της διδασκαλίας με εποπτικό υλικό, φύλλα εργασίας για περισσότερη εξάσκηση, κριτήρια αξιολόγησης κ.α. στα βιβλία των δασκάλων. Από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού εφαρμόζονται έννοιες άλγεβρας (μοτίβα, αλληλουχίες, εικονικές παραστάσεις) ο δάσκαλος οφείλει να μελετάει τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών για την συμβολική γραφή και να στηρίζει εκεί τη μετάδοση της νέας γνώσης.
Επιμόρφωση εκπαιδευτικών (αναγκαιότητα, περιεχόμενο)	Εκφράζεται η ανάγκη για συνεχής επιμόρφωση σε θέματα διδακτικής.

Πίνακας 22

3.2. «Βιβλίο Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

Το «Βιβλίο του Καθηγητή» για τα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου περιέχει έναν ενδεικτικό προγραμματισμό της διδακτέας ύλης, τονίζει τον στόχο των δραστηριοτήτων του ΒΜ και προτείνει «Πρόσθετες Ερωτήσεις, Δραστηριότητες, Ασκήσεις και Προβλήματα» για εξάσκηση και εμπέδωση της ύλης. Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός δίνει στο μαθητή τη δυνατότητα της δοκιμής και της σύνθεσης πάνω στο νέο υλικό που διδάχθηκε. Συγκεκριμένα χαρακτηρίζει το περιεχόμενο του πρώτου Κεφαλαίου της «Αριθμητικής-Άλγεβρας» ως επαναληπτικό, γι' αυτό προτείνονται κάποιες ασκήσεις με μεταβλητές, ενδεικτικό παράδειγμα:

Συμπλήρωσε τις τρεις πρώτες στήλες του πίνακα με διάφορους μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς και υπολόγισε τα αθροίσματα της $4^{ης}$ και $5^{ης}$ στήλης.
Τι παρατηρείς;

α	β	γ	(α + β) + γ	α + (β + γ)

Εικόνα 60: Προτεινόμενη άσκηση από το «Βιβλίο του Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

Στο $2^{ο}$ Κεφάλαιο κλάσμα η χρήση γραμμάτων υπάρχει σε θεωρητικό επίπεδο. Για παράδειγμα:

1) Στην εισαγωγή της έννοια του κλάσματος.

Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{κ}{λ}$. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί κ και λ ο καθένας χωριστά και πώς μαζί; Υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί που αφορούν τους αριθμούς κ και λ στο κλάσμα $\frac{κ}{λ}$;

Εικόνα 61: Προτεινόμενη άσκηση από το «Βιβλίο του Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

2) Στα ισοδύναμα κλάσματα.

Αν γνωρίζεις ότι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, ποια σχέση συνδέει τα α, β, γ και δ; Δώσε ένα παράδειγμα.

Εικόνα 62: Προτεινόμενη άσκηση από το «Βιβλίο του Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αναφερθούν στην έννοια της μεταβλητής για να εισάγουν τις παραπάνω σχέσεις στα κλάσματα.

Στη $4^{η}$ Θεματική Ενότητα «Εξισώσεις» δίνονται οι παρακάτω διευκρινήσεις για τον στόχο των πρώτων δραστηριοτήτων του σχολικού βιβλίου του Κεφαλαίου Α 4.1.

Οι τέσσερις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:

- η $1^{η}$, την εμπέδωση του τρόπου μετατροπής των λεκτικών σε μαθηματικές εκφράσεις.
- η $2^{η}$, το χειρισμό των αριθμητικών παραστάσεων για απλούστερη έκφραση.
- η $3^{η}$, την αναγκαιότητα χρήσης της έννοιας της εξίσωσης μέσα από τη λύση ενός απλού προβλήματος.
- η 4η, τη διαδικασία επαλήθευσης ή μη μιας ισότητας παραστάσεων για συγκεκριμένες τιμές των γραμμάτων που περιέχει.

Εικόνα 63: Στόχοι για το Κεφάλαιο των εξισώσεων από το «Βιβλίο του Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

Στο Παράρτημα υπάρχουν όλες οι προτεινόμενες Ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου. Ενδιαφέρον έχει ο βαθμός δυσκολίας αυτών των Ασκήσεων, διότι προτείνονται δραστηριότητες αρκετά απαιτητικές ως προς την διαχείριση των γραμμάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις.

Στο $6^{ο}$ Κεφάλαιο «Λόγοι - Αναλογίες» οι «Συμμεταβαλλόμενες» ποσότητες x και y χρησιμοποιούνται σε ‘πίνακες τιμών’ για την απόδοση της σχέσης αναλογίας με στόχο τη χάραξη της γραφικής παράστασης. Η λύση προβλημάτων με Ανάλογα και Αντιστρόφως ανάλογα ποσά απαιτεί τη γνώση διαχείρισης εξισώσεων. Στο παρακάτω παράδειγμα πρώτα πρέπει να δημιουργηθούν οι λόγοι και έπειτα να λυθεί εξίσωση:

Ο λόγος δύο αριθμών είναι $\frac{15}{4}$. Αν ο ένας αριθμός είναι ο 60 να βρεις τον άλλον.

Εικόνα 64 Προτεινόμενο παράδειγμα Α 6.3 σελ. 61 «Βιβλίο Καθηγητή» Α΄ Γυμνασίου

Στο 7^{ο} Κεφάλαιο των ρητών αριθμών το Βιβλίο του καθηγητή επιμένει στο πρόσημο των αριθμών. Χρήση των γραμμάτων δεν προτείνεται σε πολλές πρόσθετες ασκήσεις.

Στη Γεωμετρία η χρήση μεταβλητών περιορίζεται στην αναπαράσταση γωνιών.

Τα βασικά σημεία εστίασης της έρευνας για την Α΄ Γυμνασίου	**Οδηγίες προς τον εκπαιδευτικό στο «Βιβλίο του Καθηγητή»**
Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την άλγεβρα, την συμβολική γραφή και τις μεταβλητές	Οι καθηγητές των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, ειδικά της Α΄ Γυμνασίου οφείλουν να ελέγχουν το γνωστικό επίπεδο των μαθητών τους στην αρχή της σχολικής χρονιάς, διότι προέρχονται από μια άλλη βαθμίδα, για την αποφυγή προβλημάτων στο μέλλον.
Επιμόρφωση εκπαιδευτικών (αναγκαιότητα, περιεχόμενο)	Οι καθηγητές Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης οφείλουν να ενημερώνονται για τα πλαίσια και των δύο βαθμίδων σχετικά με το αντικείμενο τους για να είναι πιο αποτελεσματικοί.

Πίνακας 23

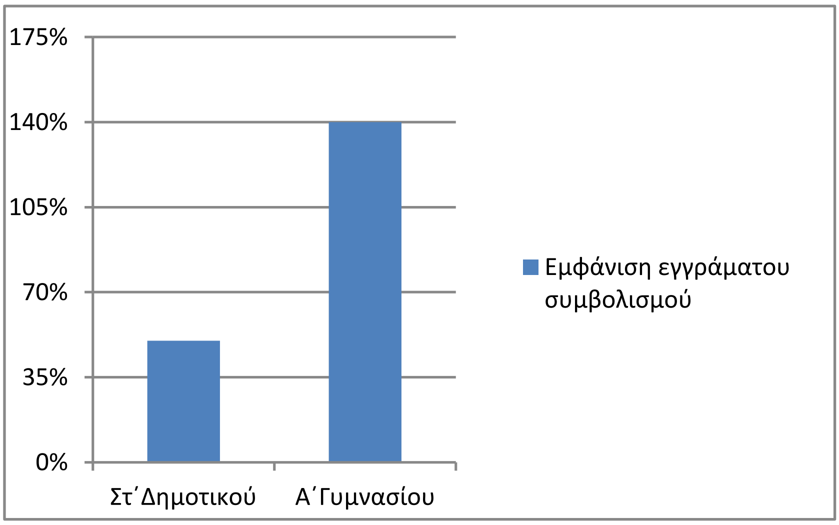
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνονται οι τελικές συνδέσεις των αποτελεσμάτων όλων των κεφαλαίων. Έπειτα απαντώνται τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην εισαγωγή και στο τέλος αυτού προτείνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα της παρουσίας και της διδακτικής χρήσης των γραμμάτων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής.

4.1. Συμπεράσματα

Η παρούσα μελέτη εστίασε σε 6 βασικά σημεία, που εντοπίστηκαν από τη βιβλιογραφία, όσον αφορά τις δυσκολίες κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Για την μελέτη αυτών των δυσκολιών αναλύσαμε τα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, τα βιβλία των εκπαιδευτικών και τα ΑΠΣ των δύο βαθμίδων. Επίσης αναλύσαμε την εμφάνιση των γραμμάτων – συμβόλων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής (5 κατηγορίες χρήσης των γραμμάτων-συμβόλων) στα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια καθώς και το είδος των αριθμητικών τιμών που τους αποδίδονται (Φυσικός – Μη Φυσικός Αριθμός).

Στα αποτελέσματα της κατηγοριοποίησης παρατηρήσαμε ότι στις 304 διδακτικές σελίδες των σχολικών εγχειριδίων της Στ΄ Δημοτικού υπήρχαν 159 φορές γράμματα-σύμβολα ποσοστό 52%. Ενώ για το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου στις 211 διδακτικές σελίδες υπήρχαν 297 φορές εγγράμματοι συμβολισμοί ποσοστό 141%.



Γράφημα 5: Ποσοστά εμφάνισης γραμμάτων – συμβόλων ανά τάξη

Τα παραπάνω ποσοστά έδειξαν την μεγάλη αλλαγή στον ‘κόσμο’ των παιδιών με τη μετάβαση από το βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου. Η χρήση εγγράμματου συμβολισμού στο εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου εμφανίστηκε σε πολλά Κεφάλαια της διδακτέας ύλης.

Τα ποσοστά εμφάνισης των γραμμάτων κάθε κατηγορίας ξεχωριστά κατανεμήθηκαν ως εξής: Για την Στ΄ Δημοτικού η

«Συγκεκριμένος αριθμός» εμφανίστηκε με ποσοστό 68%, ακολούθησε η κατηγορία «Ετικέτα - Επιγραφή» με ποσοστό 23%, ενώ οι κατηγορίες «Γενικευμένος αριθμός» και «Σταθερά» εμφανίστηκε με πολύ μικρότερα ποσοστά 5% και 4% αντίστοιχα. Η κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» δεν εμφανίστηκε καθόλου (0%). Τα αποτελέσματα για την Α΄ Γυμνασίου για κάθε κατηγορία ήταν τα εξής: 39% για την κατηγορία «Γενικευμένος αριθμός», ακολούθησαν οι κατηγορίες «Συγκεκριμένος αριθμός» με ποσοστό 27% και «Ετικέτα-Επιγραφή» με 24%, η κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» εμφανίστηκε με ποσοστό 10%, ενώ η «Σταθερά» δεν υπήρχε καθόλου (0%).

Το ποσοστό εμφάνισης της κατηγορίας «Συγκεκριμένος αριθμός» στην Στ΄ Δημοτικού μπορεί να θεωρηθεί ως αναμενόμενο, διότι στην βαθμίδα αυτή τα γράμματα χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο ως ο άγνωστος που ζητάτε κατά την επίλυση μιας εξίσωσης. Στην Α΄ Γυμνασίου επικρατούσα κατηγορία ήταν η «Γενικευμένος αριθμός», χαρακτηριστικό της εφαρμογής μιας πιο γενικευμένης χρήσης των γραμμάτων. Η γενίκευση που χαρακτηρίζει την ύλη της Α΄ Γυμνασίου έχει ως επακόλουθο τη μείωση στο μισό περίπου του ποσοστού της κατηγορίας «Συγκεκριμένος αριθμός» από 68% στην Στ΄ Δημοτικού, σε 27% στην Α΄ Γυμνασίου. Η αμέσως επόμενη κατηγορία στην Στ΄Δημοτικού ήταν η «Ετικέτα – Επιγραφή» (23%) και αυτό λόγο της εμφάνισης των γεωμετρικών τύπων του Εμβαδού και του Όγκου στην $6^{η}$ Ενότητα, ενώ στην Α΄ Γυμνασίου η κατηγορία αυτή κατείχε την $3^{η}$ θέση με 24%. Οι Συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές δεν εντοπίστηκαν καθόλου στις διδακτικές σελίδες του Δημοτικού που εξετάσαμε, αφού δεν διδάσκονται σε αυτή τη βαθμίδα. Στην Α΄ Γυμνασίου η κατηγορία «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» (ποσοστό 10%) εμανίζεται στο $6^{ο}$ Κεφάλαιο «Ανάλογα ποσά- Αντιστρόφως ανάλογα ποσά», όπου εισάγεται η έννοια της γραφικής παράστασης, η χρήση των μεταβλητών x και y στους ‘πίνακες τιμών’ και η διδασκαλία των συναρτησιακών σχέσεων $y=α·x$ και $y·x=α$.

Σχετικά με το είδος των αριθμών που αποδίδονται κατά την αντικατάσταση των γραμμάτων με τις αριθμητικές τους τιμές (Φ ή ΜΦ) εντοπίσαμε ότι στην Στ΄ Δημοτικού οι «Φυσικοί αριθμοί» κατέχουν ποσοστό 58% και οι «Μη Φυσικοί» 42%. Μικρή διαφορά αν σκεφτεί κανείς ότι τα παιδιά γνωρίζουν δεκαδικούς και κλάσματα από την Γ΄ Δημοτικού. Για την Α΄ Γυμνασίου οι «Φυσικοί αριθμοί» κατείχαν ποσοστό 68% και οι «Μη Φυσικοί» ποσοστό 32%. Μικρό το ποσοστό για τους μη φυσικούς και σε αυτή την τάξη, αν ληφθεί υπόψη ότι οι μαθητές στο Γυμνάσιο πρέπει να γνωρίζουν να διαχειρίζονται όλα τα είδη των αριθμών, ακόμη και των ρητών που διδάσκοντα στο τελευταίο κεφάλαιο της άλγεβρας (θετικοί και αρνητικοί).

Δεν υπάρχουν έρευνες που να έχουν μελετήσει την εμφάνιση των γραμμάτων στα ελληνικά σχολικά βιβλία του Δημοτικού για να συγκριθούν και να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα μας. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για τις πιθανές δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο σχετικά με την έννοια την μεταβλητής και του εγγράμματου συμβολισμού.

Για την ολοκλήρωση των συμπερασμάτων της παρούσας έρευνας παρουσιάζονται οι πίνακες με τις τελικές συνδέσεις από τις 5 παρουσίες – σημασίες γραμμάτων - συμβόλων σε σχέση με την έννοια της μεταβλητής στα σχολικά εγχειρίδια των δύο τάξεων και των 6 βασικών σημείων που εντοπίσαμε.

Δυσκολίες κατανόησης της συμβολικής γραφής					
	Ετικέτα-Επιγραφή	**Σταθερά**	**Συγκεκριμένος αριθμός**	**Γενικευμένος αριθμός**	**Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες**
Στ΄ Δημοτικού	π:πηλίκο δ:διάμετρος δ:διαιρέτης υ:ύψος υ:υπόλοιπο Χρήση γραμμάτων ως στενογραφίας λέξεων (π.χ σ: γλυκά Σοφίας, κ: κάρτες, ω: ώρες)	π=3,14	Ταύτιση του αγνώστου με το γράμμα x.	Απαντήσεις γενικευμένης μορφής, π.χ x+4	
Α΄ Γυμνασίου				Ιδιότητες πράξεων εκφράζονται με εγγράμματο συμβολισμό, π.χ Αντιμεταθετική α+β=β+α.	Συναρτησιακές σχέσεις y=α·x και y·x=α.

Πίνακας 24

Οι δυσκολίες ως προς τη συμβολική γραφή εντοπίστηκαν για την Στ΄ Δημοτικού στην ερμηνεία του γράμματος π, όπου στην άλγεβρα χρησιμοποιείται ως το πηλίκο του αλγορίθμου της διαίρεσης, ενώ στη γεωμετρία η τιμή του είναι σταθερή 3,14(και άρα δεν μεταβάλλεται). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορεί να θεωρηθεί το π ως μεταβλητή στη γεωμετρία. Υπάρχουν και άλλα γράμματα με διπλή ερμηνεία όπως το δ που στην άλγεβρα θεωρείται ως διαιρέτης, ενώ στην γεωμετρία ως διάμετρος και το γράμμα υ που στην άλγεβρα σημαίνει το υπόλοιπο, ενώ στην γεωμετρία το ύψος. Ακόμη η χρήση των αρχικών γραμμάτων των λέξεων που αντιπροσωπεύουν οι εγγράμματοι συμβολισμοί, όπως κ για τον συμβολισμό των καρτών που ζητούνται σε ένα πρόβλημα, μπορεί να εμποδίσει την ερμηνεία των αλγεβρικών εκφράσεων από τους μαθητές (McNeil και Weinberg et.al 2010). Οι μαθητές φεύγοντας από την Στ΄ Δημοτικού έχουν ταυτίσει το γράμμα x με τον άγνωστο. Από τις 62 εμφανίσεις γραμμάτων-συμβόλων στην Άλγεβρα, οι 32 αναφέρονται στο γράμμα x (ποσοστό 50%). Τέλος να τονίσουμε την δυσκολία των μαθητών στο Δημοτικό να δεχθούν μια απάντηση αλγεβρικής μορφής, όπως το παράδειγμα σελ. 61 στο ΒΜ της Στ΄ Δημοτικού όπου δίνεται η ηλικία της Σμαρώς x και ο Κώστας τέσσερα χρόνια μεγαλύτερος της και ζητάτε η ηλικία του Κώστα; Η απάντηση x +4 δεν είναι εύκολα αποδεκτή από τους μαθητές, έχοντας στο μυαλό τους μια τελική απάντηση που να περιέχει μόνο αριθμούς και όχι γράμματα.

Το σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου από τις πρώτες σελίδες χρησιμοποιεί τη συμβολική γραφή, όπως αναφέρθηκε πριν, 140% εμφάνιση γραμμάτων – συμβόλων στις 211 διδακτικές σελίδες. Αυτός ο ‘νέος κόσμος’ που έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές Δημοτικού, στην πλειοψηφία του αποτελείται από γενικευμένα γράμματα – σύμβολα. Για παράδειγμα στη θεωρία χρησιμοποιούνται συνεχώς εγγράμματοι συμβολισμοί για τις ιδιότητες των πράξεων (αντιμεταθετική α+β=β+α), ιδιότητες κλασμάτων, στη γεωμετρία για την απόδοση γεωμετρικών σχέσεων. Η νέα κατηγορία που εισάγεται στην Α΄ Γυμνασίου είναι η «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» (x και y) στις Αναλογίες. Οι σχέσεις y=α·x και y·x=α προστίθενται στον κατάλογο δυσκολιών της συμβολική γραφής της άλγεβρας.

Συνεχίζουμε στα συμπεράσματα μας, με τις δυσκολίες που καταγράφηκαν στη βιβλιογραφία ως προς τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη σε σχέση με τις 5 κατηγορίες των γραμμάτων – συμβολισμών ανά τάξη.

Δυσκολίες μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη					
	Ετικέτα-Επιγραφή	**Σταθερά**	**Συγκεκριμένος αριθμός**	**Γενικευμένος αριθμός**	**Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες**
Στ΄ Δημοτικού	Έκφραση γεωμετρικών τύπων (Ε=β·υ αντί Εμβαδό παρ/μου ισούται με βάση επί ύψος)			Εφαρμογές μετατροπής λεκτικών εκφράσεων με αλγεβρικές σχέσεις (Ένας αριθμός αυξημένος κατά 5)	
Α΄ Γυμνασίου				Ευρεία χρήση αυτής της κατηγορίας Στους ρητούς το γράμμα ‘κρύβει’ το πρόσημο.	Εισαγωγή δύο μεταβλητών (ποσά x και y) στους πίνακες τιμών. Απεικόνιση γραφικών παραστάσεων

Πίνακας 25

Στην Στ΄ Δημοτικού οι γεωμετρικοί τύποι δίνονταν με λεκτικό τρόπο, όπως το εμβαδό παραλ/μου ισούται με το γινόμενο της βάσης με το αντίστοιχο ύψος. Με την είσοδο των γραμμάτων στην κατηγορία «Ετικέτα – Επιγραφή» οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τη σχέση Ε =β·υ. Ακόμη μια δυσκολία από την μετάβαση της αριθμητικής στη αλγεβρική σκέψη είναι η είσοδος της έννοιας των εξισώσεων που θα εξηγήσουμε παρακάτω και οι εφαρμογές μετατροπής λεκτικών εκφράσεων σε αλγεβρικές. Σε τέτοιου είδους μετατροπές απαιτείται από τους μαθητές στην ουσία να μεταφράσουν την απλή γλώσσα σε μαθηματική. Στην Α΄ Γυμνασίου καταλήξαμε ότι στην Κατηγορία «Συγκεκριμένος αριθμός» η δυσκολία στην μετάβαση των μαθητών στην άλγεβρα βρίσκεται στην επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια εξίσωσης. Οι μαθητές γνωρίζουν να λύνουν το πρόβλημα και να καταλήγουν στην εύρεση του αγνώστου βάση παλαιότερων απλούστερων μεθόδων, όμως με την είσοδο της αλγεβρικής σκέψης απαιτείται η δημιουργία εξίσωσης με την άγνωστη ποσότητα να αντιπροσωπεύεται από ένα γράμμα – άγνωστο και να υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης. Στο Κεφάλαιο των ρητών εμφανίζεται η δυσκολία κατανόησης του πρόσημου κατά την χρήση των γραμμάτων. Σημαντική η εμφάνιση της νέας κατηγορίας εγγράμματου συμβολισμού που θα επιφέρει μεγάλες αλλαγές στον αλγεβρικό συμβολισμό με την χάραξη της γραφικής παράστασης και της κατανόησης της ταυτόχρονης μεταβολής των τιμών των δύο γραμμάτων.

Στην άλγεβρα παρουσιάζονται κάποιες σημαντικές έννοιες που εντοπίσαμε στην βιβλιογραφία όπως της εξίσωσης, της σταθεράς και της παραμέτρου. Από την έρευνα μας συμπεράναμε ότι το γράμμα «π» εμφανίζεται στην κατηγορία «Σταθερά» μόνο στην γεωμετρία της Στ΄ Δημοτικού όπου διδάσκεται ο κύκλος, στην Α΄ Γυμνασίου δεν εμφανίζεται καθόλου. Επίσης η έννοια της παραμέτρου δεν εμφανίστηκε στις τάξεις που μελετήσαμε, παρουσιάζεται σε μεγαλύτερες τάξεις του Γυμνασίου.

Δυσκολία μαθητών με έννοιες (εξίσωση, σταθερά, παράμετρος)					
	Ετικέτα-Επιγραφή	**Σταθερά**	**Συγκεκριμένος αριθμός**	**Γενικευμένος αριθμός**	**Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες**
Στ΄ Δημοτικού		Το π=3,14 είναι ‘σταθερός αριθμός’στην γεωμετρία.	Εφαρμογή μεθόδων λύσης εξίσωσης για την εύρεση ενός συγκεκριμένου αριθμού και όχι με τη βοήθεια δοκιμών.		
Α΄ Γυμνασίου			Εφαρμογή πιο σύνθετων μεθόδων λύσης εξισώσεων για την εύρεση ενός συγκεκριμένου αριθμού.		

Πίνακας 26

Σχετικά με τις δυσκολίες στην έννοια της εξίσωσης συνοψίζοντας όσα έχουν ήδη αναφερθεί, διαπιστώνουμε πως για την Στ΄ Δημοτικού είναι μια νέα έννοια που έχει απαιτήσεις. Η χρήση του γράμματος x στα περισσότερα παραδείγματα προκαλεί συγχύσεις στα παιδιά στην εμπέδωση των αλγεβρικών εκφράσεων και οι μέθοδοι επίλυσης δεν είναι άμεσα διαχωρίσιμοι στο Δημοτικό. Μεταβαίνοντας οι μαθητές στην επόμενη βαθμίδα οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται περισσότερο και στην επίλυση προβλημάτων, όπου και αυξάνουν τον βαθμό δυσκολίας των ασκήσεων. Η μέθοδος λύσης των εξισώσεων που επιλέγεται στην Α΄ Γυμνασίου είναι πιο τυπική και συχνά τα παιδιά απομνημονεύουν διαδικασίες χωρίς να κατανοούν τις ιδιότητες των πράξεων ή τις σχέσεις ισοδυναμίας του «ίσον» που εφαρμόζουν (ΔΕΠΣΣ-ΑΠΣ, 2003).

Τρόπος παρουσίασης της αλγεβρικής σκέψης στα αναλυτικά προγράμματα Δημοτικού και Γυμνασίου					
	Ετικέτα-Επιγραφή	**Σταθερά**	**Συγκεκριμένος αριθμός**	**Γενικευμένος αριθμός**	**Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες**
Στ΄ Δημοτικού					
Α΄ Γυμνασίου					

Πίνακας 27

Κατά τη συσχέτιση των 5 κατηγοριών εμφάνισης του εγγράμματου συμβολισμού με το βασικό σημείο της έρευνας μας ως προς τον τρόπο παρουσίασης της αλγεβρικής σκέψης στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών Δημοτικού και Γυμνασίου, δεν εντοπίσαμε άμεσες συνδέσεις. Τα ΑΠΣ θέτουν ξεκάθαρους στόχους για την εισαγωγή της άλγεβρας και τονίζουν την αναγκαιότητα της εισαγωγής αυτής από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού. Έρευνες αναφέρουν ότι με κατάλληλα παρεμβατικά προγράμματα διδασκαλίας οι μαθητές Δημοτικού μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη (Irwin & Britt, 2005, βλ. Χειμωνή & Πίττα-Πανταζή, 2014). Τα ΑΠΣ προτείνουν από την Α΄ Δημοτικού την χρήση μοτίβων και αλληλουχίας αριθμών, ώστε τα παιδιά να έρθουν σε επαφή με σημαντικές αλγεβρικές εκφράσεις που θα εμβαθύνουν στη συνέχεια της σχολικής τους ζωής. Αναφέρουν τις πιθανές δυσκολίες που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη, αλλά δεν ξεκαθαρίζουν τις παρανοήσεις και τα εμπόδια από την εισαγωγή των γραμμάτων – συμβόλων, με αποτέλεσμα να αναφέρονται στα εγγράμματα σύμβολα με τον όρο «μεταβλητή».

Από την ανάλυση των βιβλίων των εκπαιδευτικών όσον αφορά τις αντιλήψεις των διδασκόντων για το πώς κατανοούν οι μαθητές την εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη και τη χρήση των μεταβλητών καταλήξαμε στα παρακάτω συμπεράσματα.

Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την άλγεβρα, την συμβολική γραφή και τις μεταβλητές.	
Στ΄ Δημοτικού	Οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται τον τρόπο που κατανοούν οι μαθητές τη διαδικασία συμβολισμού του αγνώστου και υπολογισμού του ως Συγκεκριμένου αριθμού, δυσκολεύονται όμως να εξηγήσουν το ρόλο του γράμματος ως μεταβλητή σε ορισμένες κατηγορίες, ειδικά όταν το γράμμα παίρνει περισσότερες από μια τιμές όπως στη κατηγορία «Γενικευμένος αριθμός».
Α΄ Γυμνασίου	Οι μαθητές ερχόμενοι από την πρώτη βαθμίδα εκπαίδευσης δεν έχουν κατανοήσει τις λειτουργίες του εγγράμματου συμβολισμού και της έννοιας της μεταβλητής με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται να τα χρησιμοποιήσουν σε πιο σύνθετες και γενικευμένες καταστάσεις όπως στις σχέσεις συν-μεταβολής ή στους ρητούς αριθμούς.

Πίνακας 28

Ως προς την αναγκαιότητα και το περιεχόμενο της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών από την μελέτη του Βιβλίου του Δασκάλου για την Στ΄ Δημοτικού και το Βιβλίο του Καθηγητή για την Α΄ Γυμνασίου, δεν παρατηρήσαμε κάποιες συνδέσεις με τις δυσκολίες και τα εμπόδια στην κατανόηση του ρόλου των γραμμάτων – συμβόλων της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Οι διδάσκοντες τόσο στην Πρωτοβάθμια, όσο και στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση ακολουθούν την ορολογία που τους δίνεται στα σχολικά εγχειρίδια, χρησιμοποιώντας την έννοια των μεταβλητών γενικότερα για τους εγγράμματους συμβολισμούς.

Επιμόρφωση εκπαιδευτικών (αναγκαιότητα, περιεχόμενο)	
Στ΄ Δημοτικού	-
Α΄ Γυμνασίου	-

Πίνακας 29

Η αλγεβρική σκέψη με την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής προκαλεί τους μαθητές να κάνουν δυο ειδών «άλματα», ένα νοηματικό και ένα εκφραστικό. Κατά το νοηματικό πέρασμα χρειάζεται να ανακαλύψουν ότι ένα γράμμα μπορεί να πάρει πολλές τιμές ή να εξαρτάται από τις τιμές μίας άλλης. Όσον αφορά το εκφραστικό πέρασμα οφείλουν να κατανοήσουν τις διάφορες μορφές που μπορεί να πάρει ένα γράμμα αναλόγως τη χρήση του.

Κατά το πέρασμα από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο εκτός από την μετάβαση στο γνωστικό μέρος του μαθήματος των Μαθηματικών υπάρχει και το πέρασμα στα νέα δεδομένα της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι μαθητές καλούνται να εξοικειωθούν με την εναλλαγή προσώπων διαφορετικού αντικειμένου ανά διδακτική ώρα, με την εισαγωγή νέων μαθημάτων και με τον διαφορετικό τρόπο εξέτασης και αξιολόγησης.

4.2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα όσον αφορά την παρουσία και διδακτική χρήση των γραμμάτων – συμβόλων της έννοια της μεταβλητής θα μπορούσε να είναι: η μελέτη για την εισαγωγή ενός προ-αλγεβρικού σταδίου από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού, ώστε να κατανοούν οι μαθητές από νωρίς τους διαφορετικούς τρόπους χρήσης του εγγράμματου συλλαβισμού. Επίσης θα πρέπει να διερευνηθεί ένας πιο ομαλός τρόπος μετάβασης της συμβολικής γραφής από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Τέλος μεγάλο ενδιαφέρον θα είχαν έρευνες βασισμένες στους τρόπους συνεργασίας όλων όσων εμπλέκονται στη διδακτική διαδικασία και μάθηση (εκπαιδευτικοί, συγγραφείς βιβλίων και συγγραφείς ΑΠΣ), ώστε να λειτουργούν σαν ένας ενιαίος μηχανισμός με συνεχή επικοινωνία για τα ‘νέα’ δεδομένα που προκύπτουν στην εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αντωνόπουλος, Μ., & Χούτου, Χ. (2015). Το παραμύθι ως εκπαιδευτικό υλικό στο Δημοτικό. *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμετοχή "Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες."* , (σσ. 652-662). Ρόδος.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic conceptsQ Equal sign and variable . *Mathematical Thinking and Learning* , 249-272.

Βαμβακούσης Σ.(2014) «Η Κατανόηση της έννοιας της Μεταβλητής, του Αγνώστου και της Παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου» Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών: ΕΚΠΑ. Ανακτήθηκε 28/09/2018 από:http://me.math.uoa.gr/dipl/2013-2014/dipl_sofronis_vamvakousis_.pdf

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can Young Students Operate on Unknowns? *In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 130-140). The Netherlands: Utretch University .

Carraher, D. (2006). ArithmeticbandbAlgebra in Early Mathematics Education. *Journal fo rResearch in Mathematics Education* , σσ. 87-115.

Christou, K., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra. Στο *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (σσ. 283-297). Elsevier Press.

Δημητρακοπούλου, Σ., & Χρήστου, Κ. (2014). Πώς Ερμηνεύουν οι Μαθητές τα Γράμματα-Μεταβλητές & Πώς αυτά εμφανίζονται στα Σχολικά Βιβλία του Γυμνασίου;. *5ο Συνεδριο Εν.Ε.Δι.Μ "Τα Μαθηματικά στο Σχολείο και στη Καθημερινή Ζωή".* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Δημητριάδου, Ε. (2009). Η Μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα όπως Διαμορφώνεται Μέσα από τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τα Σχολικά Βιβλία Δημοτικού-Γυμνάσιου. *3ο Συνεδριο Εν.Ε.Δι.Μ "Μαθηματική Εκαπίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές"* (σσ. 363-372). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Δημητρακοπούλου Στ. (2014). «Χρήση Γραμμάτων ως Μεταβλητές. Τρόποι κατανόησης από τους Μαθητές και Τρόποι εμφάνισης στα Σχολικά βιβλία του Γυμνασίου». Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών: ΕΚΠΑ Ανακτήθηκε 4/10/2018 από: https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/frontend/file/lib/default/data/1320748/theFile

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), Τόμος Α΄ (2003). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό

Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε 12/06/2017 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/ και http://ebooks.edu.gr

Dogbey, J. (2010). Concepts of variable in middle-grades mathematics textbooks during four eras of mathematics education in the United States. Florida, South, United States.

Dogbey, J., & Kersaint, G. (2012). Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbook in the USA: Trends from 1957 through 2009. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* , pp. 1-30.

Εξηνταβελώνη Στ. (2013). «Μελέτη της μετάβασης από την Αριθμητική στην Άλγεβρα και τρόποι βελτιστοποίησης της διδασκαλίας». Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών. Ανακτήθηκε:7/4/2019από:http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/7243/1/Nimertis_Exintaveloni%28math%29.pdf

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics* , pp. 59-78.

Καγκουρά, Θ., Σπύρου, Π., Ηλία, Ι., & Μονογυιού, Α. (2008). Αλλαγή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. *10ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου: "Ποιότητα στην Εκπαίδευση: Ερευνα και Διδασκαλία"* (σσ. 195-212). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Καψάλης, Α., & Χαραλάμπους, Δ. (1995). *Σχολικά εγχειρίδια : θεσμική εξέλιξη και σύγχρονη προβληματική.* Αθήνα: Έκφραση.

Küchmann, D. (1978). Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School* , 23-26.

Küchmann, D. (1981). Algebra. In K. M. (Ed.), *Children’s understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και Αντιλήψεις των Μαθητών κατά το Πέρασμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ΄* , σσ. 61-70

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics* , pp. 1-19.

Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought:The role of the “variable”. *Springer* .

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., et al. (2006). Middle-school students’ understanding of the equal sign: The books they read can’t help. *Cognition & Instruction* , 367-385.

McNeil, N., & Weinberg, A. (2010). A is for Apple:Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions. *Joyrnal of Educational Psychology* , 625-634.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia

Philipp, R. A. (1992). The many uses of Algebraic Variables. *Mathematics Teacher* , 560.

Rubin. (2005). Three Components of Algebraic Thinking:Generalization, Equality, Unknown Quantities. *EdTechLeaders* .

Son, J. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and dividion of fractions in Korea and in the US. . *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 201-208). Melbourne: PME.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher* , 420-427.

Τάτσης, Κ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Μελέτη Πλαισίου των Δραστηριοτήτων του Σχολικού Εγχειριδίου των Μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού. *3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Εν.Ε.Δι.Μ "Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές"* (σσ. 383-392). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Τζακάκη, Μ. (2015). Μαθηματική δραστηριότητα μέσα στο Παιχνίδι και στο Εκπαιδευτικό Υλικό. *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή "Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες."*, (σσ. 60-71). Ρόδος.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and uses of Variables. In *A.F. Coxford (Ed.), The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1997). Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching Children Mathematics* , 346-356.

Wagner, S. (1999). What are these things called variables. In B. M. (Ed), *Algebraic thinking, Grades K-12: Reading from the NCTM's school-based journals other publications* (pp. 316-320). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Φιλίππου, Γ., Πίττα-Πανταζή, Δ., & Χρήστου, Κ. (2001). Από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο: Η Περίπτωση των Μαθηματικών. *Εισήγηση στο 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.* Αθήνα.

Χειμωνή, Μ., & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2014). Μορφές Αλγεβρικής Σκέψης στο Δημοτικό Σχολείο. *5ο Συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ "Τα Μαθηματικά στο Σχολείο στην Καθημερινή Ζωή.".* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Χρήστου, Κ., Βαμβακούση, Ξ., & Van Dooren, W. (2011). Τι Αριθμητικές Τιμές (Δεν) Παίρνουν οι Μεταβλητές; Απαντήσεις Φλαμανδών και Ελλήνων Μαθητών. *4ο Συνέδριο Εν.Ε.Δι.Μ "Η τάξη ως Πεδίο Ανάπτυξης της Μαθηματικής Δραστηριότητας"*, (σσ. 539-548). Ιωάννινα.

Χρήστου, Κ. (2014). Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού στις Αριθμητικές Πράξεις. *5ο Συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ "Τα Μαθηματικά στο Σχολείο στην Καθημερινή Ζωή."*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ1

Σελ. 61-61 ΒΜ Στ΄ Δημοτικού

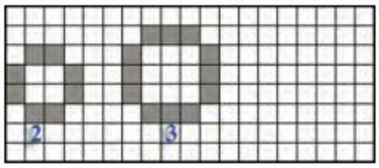
Κεφάλαιο 25ο **Η έννοια της μεταβλητής**

Η εξερεύνηση του άγνωστου!

Κατανοώ την έννοια «μεταβλητή».
Χρησιμοποιώ μεταβλητές για να εκφράσω τις σχέσεις στις εκφράσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις.
Επιλέγω μεταβλητές και σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε σε μιλιμετρέ χαρτί το γράμμα «Ο» σε δύο μεγέθη. Ανάλογα με τον αριθμό των τετραγώνων της πλευράς του καθενός τα ονομάσαμε μέγεθος 2 και μέγεθος 3.



- Συνέχισε βάφοντας όσα τετράγωνα χρειάζεται για να σχηματιστεί το επόμενο μέγεθος (μέγεθος 4).
- Πόσα τετράγωνα πρέπει να βάψεις για κάθε πλευρά;

....

....

Μέγεθος του γράμματος	*2*	*3*	*4*	*9*	*12*
Τετράγωνα που χρειάζονται					

- Συμπλήρωσε στον διπλανό πίνακα τον συνολικό αριθμό από σκιασμένα τετράγωνα που χρειάζεται για να σχηματιστεί κάθε μέγεθος.
- Παρατήρησε τον πίνακα και εξήγησε με ποιον τρόπο μεταβάλλεται ο συνολικός αριθμός των τετραγώνων όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των τετραγώνων της πλευράς. ....
- Η σχέση του συνολικού αριθμού τετραγώνων με το μέγεθος είναι «...επί το μέγεθος» ή ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ισούται με το γινόμενο «............. · **μ**» (όπου **μ** το μέγεθος).
- Υπολόγισε με τον σύντομο τρόπο (4 · μ) τα συνολικά τετράγωνα για το μέγεθος 17.

....

- Τι μεγέθους είναι το όμικρον που έχει 132 τετράγωνα; ....

Δραστηριότητα 2η

Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τις ηλικίες του Κώστα και της Σμαρώς σε κάθε χρονιά. Μετά απάντησε στις ερωτήσεις.

Χρονιά	Ηλικία Σμαρώς	Ηλικία Κώστα
2006	12	16
2007		
2008		
2009		
2010		

- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 12, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 12 + ...
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 25, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 25 + ...
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι **x**, η ηλικία του Κώστα θα είναι: ....

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και **γράμματα**.

Άγνωστος / Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** το οποίο χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό, λέγεται **μεταβλητή**.

Παραδείγματα

Εμβαδό τετραγώνου: α^2,
όπου α = το μήκος της πλευράς του.

Εφαρμογή 1η ***Επιλέγω μεταβλητή***

«Στη γιορτή είχαμε 4 γλυκά που έφερε η Φρόσω, 10 που έφερα εγώ και αυτά που έφερε η Σοφία. Τα έφαγαν όλα!» Να εκφράσετε με μια αριθμητική παράσταση τον αριθμό των γλυκών που έφαγαν στη γιορτή.

Λύση

Οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή και μια μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση οποιουδήποτε αριθμού. Για να εκφράσουμε μια φράση με αριθμητική παράσταση ακολουθούμε τρία βήματα:

1. Προσδιορίζουμε την άγνωστη ποσότητα.
2. Επιλέγουμε μια μεταβλητή για την άγνωστη ποσότητα.
3. Προσδιορίζουμε τις πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς και τη μεταβλητή.

Στη συγκεκριμένη φράση:

1. Έχουμε έναν άγνωστο: τα γλυκά που έφερε η Σοφία.
2. Επιλέγουμε σ = τα γλυκά της Σοφίας.
3. Έφαγαν τα γλυκά της Σοφίας, συν 4, συν 10. Άρα έφαγαν $\sigma + 4 + 10$, δηλαδή $\sigma + 14$.

Θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης όταν μάθουμε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η μεταβλητή της.

Απάντηση: Έφαγαν $\sigma + 14$, όπου σ τα γλυκά της Σοφίας.

Εφαρμογή 2η ***Υπολογίζω τις τιμές***

Με βάση το σχήμα να εκφράσεις τις σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ωκεανών χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή. Αν ο Ατλαντικός έχει έκταση 100.000.000 τετρ. χλμ. υπολόγισε την έκταση των άλλων ωκεανών.

Λύση - Απάντηση

1º βήμα: Συμβολίζω την έκταση του Ατλαντικού με ένα γράμμα. Π.χ. το α και γράφω:

Η έκταση του Ατλαντικού: α
Η έκταση του Ειρηνικού .... τετρ. χμ.
Η έκταση του Ινδικού: .... τετρ. χμ

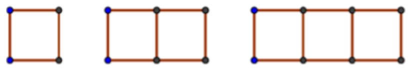
2º βήμα: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή α με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.

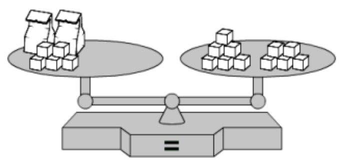
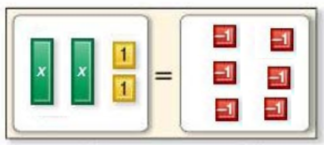
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: **μεταβλητή.** Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή σε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Στην αριθμητική παράσταση $2 \cdot (♣ - 1)$ δεν υπάρχει μεταβλητή.	❐	❐
Το γινόμενο α^2 είναι το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 2.	❐	❐
Η ισότητα $2x = 2 \cdot x$ είναι σωστή.	❐	❐

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2
ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ 2003

ΑΔ1	Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ  α) Να βρείτε πόσα σπίρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπίρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.	**Α1, Α2, Α3**

ΑΔ2	Στο ταξί πληρώνουμε 1,19€ για «σημαία» και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε (α) για μια διαδρομή 7 χιλιομέτρων, (β) για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.	**Α5**
ΑΔ3	Στο διπλανό σχήμα οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα. Περιγράψτε τον τρόπο που θα το υπολογίζατε, αν είχατε μπροστά σας τη ζυγαριά και δεν είχατε χαρτί και μολύβι. Πώς θα περιγράφατε τον παραπάνω τρόπο με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης; 	**Α12, Α13**
ΑΔ4	Στο διπλανό σχήμα περιγράφεται μια ισότητα (τα δύο x εκφράζουν τον ίδιο αριθμό). Μπορείτε να βρείτε το x χωρίς χαρτί και μολύβι; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε το πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. 	**Α12, Α13**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Σελ.104 Α΄ Γυμνασίου

2. *Ένας μεσίτης αγοράζει ένα σπίτι 360.000 € και σκοπεύει να το πουλήσει με κέρδος 28%. Σε έναν πελάτη έκανε έκπτωση 15%, επί της τιμής πώλησης.*

(α) Πόσο πουλήθηκε το σπίτι στον πελάτη αυτόν;

(β) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους του μεσίτη, για το σπίτι αυτό;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

Δύο ποσά που συνδέονται με ποσοστιαία σχέση, είναι ποσά ανάλογα.

(α) Για να βρεθεί η τιμή πώλησης του σπιτιού πρέπει ν' αφαιρεθεί η έκπτωση που έγινε στην αρχική τιμή πώλησης. Δηλαδή:

- Θα υπολογίσουμε την αρχική τιμή πώλησης του σπιτιού. Στην τιμή κόστους θα έχουμε κέρδος 28%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή κόστους 100 € πωλείται 128 €. Τότε, ο πίνακας αναλογίας θα είναι:

Τιμή αγοράς	100	360.000
Τιμή πώλησης	128	y

Δηλαδή: $\frac{100}{128} = \frac{360.000}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 360.000 \cdot 128$

συνεπώς, $y = \frac{360.000 \cdot 128}{100}$. Άρα, $y = 460.800$ €

- Θα υπολογίσουμε την τιμή πώλησης μετά την έκπτωση που έγινε. Στην τιμή πώλησης έγινε έκπτωση 15%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή πώλησης 100 € πωλείται 85 €. Ας γράψουμε τον πίνακα αναλογίας:

Αρχική τιμή πώλησης	100	460.800
Τιμή πώλησης με έκπτωση 15%	85	y

Δηλαδή: $\frac{100}{85} = \frac{460.800}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 85 \cdot 460.800$ συνεπώς, $y = \frac{85 \cdot 460.800}{100}$

Άρα, $y = 391.680$ €. Ο πελάτης αγόρασε το σπίτι 391.680 €.

(β) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό κέρδους επί της τιμής αγοράς, πρέπει να ανάγουμε το κέρδος στα 100 €. Το κέρδος του εμπόρου είναι:

391.680 € $- 360.000$ € $= 31.680$ €

Έχουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

Τιμή αγοράς	360.000	100
Κέρδος	31.680	x

Δηλαδή: $\frac{360.000}{31.680} = \frac{100}{x}$

Επομένως, $360.000 \cdot x = 31.680 \cdot 100$ συνεπώς, $x = \frac{31.680 \cdot 100}{360.000}$.

Άρα, $x = 8,8$. Το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι $8,8\%$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4
Σελ. 20 Βιβλίο Δασκάλου Στ΄ Δημοτικού

Αγαπητοί γονείς και κηδεμόνες,

Μαζί με την έναρξη της νέας σχολικής χρονιάς ξεκινάμε και μια προσπάθεια ενημέρωσής σας για το μάθημα των Μαθηματικών της Στ΄ τάξης.

Όπως θα παρατηρήσατε, το φετινό βιβλίο των Μαθηματικών είναι χωρισμένο σε 6 μεγάλες θεματικές ενότητες. Πριν από τη διδασκαλία κάθε ενότητας θα λαμβάνετε μια επιστολή σχετικά με την ύλη που περιλαμβάνει κάθε ενότητα. Με αυτή την επιστολή θα σας παρουσιάσουμε τον τρόπο εργασίας και τα περιεχόμενα της πρώτης θεματικής ενότητας.

Τρόπος εργασίας γενικά

Κάθε μάθημα ξεκινά με δραστηριότητες, οι οποίες οδηγούν τους μαθητές βήμα προς βήμα στην ανακάλυψη της μαθηματικής έννοιας. Είναι σημαντικό αυτή η ανακάλυψη να γίνεται **από το μαθητή στην τάξη,** όπου το παιδί εργάζεται σε κλίμα συνεργατικό μαζί με τους συμμαθητές του.

Το βιβλίο είναι δομημένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να υποβοηθούνται οι μαθητές να **ανακοινώνουν τις στρατηγικές επίλυσης και το συλλογισμό τους,** κάτι που μας ενδιαφέρει εξίσου με τη λύση ενός προβλήματος.

Μπορείτε να κάνετε πολλά πράγματα και στο σπίτι για να βοηθήσετε το παιδί σας να πετύχει στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα:

1. Βοηθήστε το παιδί σας στην προσπάθειά του να είναι οργανωμένο και ελέγξτε το αν κάνει την εργασία του σε τακτική βάση.
2. Ελέγξτε αν κατάλαβε το μάθημα στο τμήμα που περιέχει τους *στόχους* και τις *ερωτήσεις για αυτοέλεγχο.* Ζητήστε από το παιδί σας να σας εξηγήσει τους *νέους όρους* του μαθήματος ή τη λύση ενός προβλήματος.
3. Αντί να προσπαθήσετε εσείς να εξηγήσετε στο παιδί σας αυτό που διδάχθηκε στην τάξη, ζητήστε από εκείνο να εξηγήσει σε εσάς αυτά που κατάλαβε και αυτά που ίσως δεν κατάλαβε τόσο καλά. Η προσπάθεια να εξηγήσει θα το βοηθήσει στην κατανόηση.
4. Ενθαρρύνετε το παιδί σας. Βασικός στόχος όλων μας είναι να βοηθήσουμε τα παιδιά να τα «καταφέρουν» στα Μαθηματικά του Δημοτικού και να ενισχύσουμε την αυτοπεποίθησή τους για να περάσουν χωρίς δυσκολίες στα Μαθηματικά του Γυμνασίου.

Τι θα μάθουμε σε αυτή την ενότητα

Η πρώτη ενότητα, που είναι και η μεγαλύτερη σε χρονική διάρκεια, είναι η ενότητα **ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ** και είναι χωρισμένη σε δύο μέρη. Το πρώτο αποτελεί μια γενική επανάληψη της αριθμητικής που το παιδί διδάχθηκε στις προηγούμενες τάξεις. Στο δεύτερο μέρος ασχολούμαστε με τους διαιρέτες και τα πολλαπλάσια των αριθμών. Σε αυτή τη φάση το παιδί θα μάθει πώς να βρίσκει το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. Ακόμη θα μάθει τι είναι οι δυνάμεις και πώς να γράφει έναν αριθμό με τη βοήθεια δυνάμεων ή να τον αναλύει σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Σημείωση: Η ανακεφαλαίωση που περιλαμβάνεται στο τέλος κάθε ενότητας είναι εξαιρετικά χρήσιμη ώστε να έχετε μια συνοπτική και πλήρη εικόνα της ενότητας αυτής.

Με εκτίμηση,
... δ................ του παιδιού σας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

Σελ. 71 Βιβλίο Δασκάλου Στ΄Δημοτικού

Αγαπητοί γονείς και κηδεμόνες,

Σας καλωσορίζουμε στη δεύτερη θεματική ενότητα του βιβλίου.

Τι θα μάθουμε σε αυτή την ενότητα

Η δεύτερη ενότητα, που είναι σχετικά μικρή σε χρονική διάρκεια, είναι η ενότητα των **ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.**

Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της μεταβλητής, δηλαδή τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στις αριθμητικές παραστάσεις.

Η **λύση των εξισώσεων** δεν θα προσανατολίζεται καθαρά στην τεχνική, αλλά περισσότερο στην ανάπτυξη του τρόπου σκέψης που χρειάζεται να υιοθετήσει το παιδί για να μετατρέψει ένα πρόβλημα σε μια αριθμητική παράσταση. Θα το αφήσουμε να ανακαλύψει ότι κάποιο από τα στοιχεία του προβλήματος είναι απαραίτητο να συμβολιστεί επειδή είναι άγνωστο, προκειμένου να ολοκληρωθεί η αριθμητική παράσταση.

Η λύση για την εξίσωση που θα δημιουργηθεί θα εξηγηθεί τόσο με τη μέθοδο της ζυγαριάς που πρέπει πάντα να ισορροπεί («ό,τι κάνω από τη μια πλευρά πρέπει να κάνω και από την άλλη») όσο και με τη μέθοδο των αντίθετων πράξεων. Κάθε παιδί θα μπορέσει έτσι να επιλέξει τον τρόπο που είναι πιο βολικός στη σκέψη του για να ερμηνεύσει και να λύσει την εξίσωση.

Πώς να βοηθήσετε στο σπίτι:

1. Ελέγξτε την κατανόηση του μαθήματος στο τμήμα που περιέχει τους στόχους και τις ερωτήσεις για αυτοέλεγχο. Ζητήστε από το παιδί σας να σας εξηγήσει τους νέους όρους του μαθήματος ή τη λύση ενός προβλήματος.
2. Αντί να προσπαθήσετε εσείς να εξηγήσετε στο παιδί σας αυτό που διδάχθηκε στην τάξη, ζητήστε από εκείνο να εξηγήσει σε εσάς αυτά που κατάλαβε και αυτά που ίσως δεν κατάλαβε τόσο καλά.
3. Μην προσπαθήσετε να οδηγήσετε τη σκέψη του παιδιού σας στις τεχνικές και τις μεθόδους που έχετε συνηθίσει εσείς. Όλοι μας διδαχθήκαμε Μαθηματικά με διαφορετικές μεθόδους διδασκαλίας, άλλα βιβλία και «διαφορετική φιλοσοφία» από τη σημερινή.
4. Προσπαθήστε να βρείτε παραδείγματα από την καθημερινή ζωή της οικογένειας (π.χ. κάποιος συντελεστής στα κοινόχρηστα της πολυκατοικίας, κάποιος φόρος όπως ο ΦΠΑ ή κάποια έκπτωση) στα οποία μπορεί να υπάρχει η χρήση μεταβλητής και αφήστε το παιδί να σας εξηγήσει πώς χρησιμοποιείται.

Σημείωση: Στην ενότητα αυτή θα γίνει χρήση του προγράμματος υπολογιστικών φύλλων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή και το παιδί θα έρθει σε επαφή και με τη σχετική ορολογία (πίνακες, στήλες, γραμμές, κελιά κ.λπ.) χωρίς αυτό να σημαίνει ότι χρειάζεται να τα απομνημονεύει.

Με εκτίμηση,
... δ............... του παιδιού σας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

Σελ. 82-83 Βιβλίο Δασκάλου Στ΄ Δημοτικού

Κριτήριο αξιολόγησης για τη θεματική ενότητα 2

1. Η συνδρομή για συμμετοχή στον όμιλο κολύμβησης είναι 15 € το μήνα και 2 € κάθε φορά που χρησιμοποιείται η πισίνα. Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή και φτιάξε μια αριθμητική παράσταση που να δίνει τα χρήματα που θα πληρώνεις το μήνα, ανάλογα με το πόσες φορές θα χρησιμοποιήσεις την πισίνα.

Απάντηση: ....

2. Η βαρύτητα του Δία είναι 2,64 φορές μεγαλύτερη από τη βαρύτητα της Γης. Διάλεξε μια μεταβλητή για το βάρος των αντικειμένων στη Γη και γράψε μια αριθμητική παράσταση που θα σου δίνει το βάρος τους στο Δία. Μετά αντικατάστησε τη μεταβλητή με το δικό σου βάρος και βρες πόσο θα ζύγιζες στο Δία.

Απάντηση: ....

3. Η κυρία Δροσινού είναι 36 ετών. Ο γιος της είναι 8 ετών. Οι ηλικίες του κυρίου Δροσινού, της γυναίκας του και του γιου τους δίνουν άθροισμα 77. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μπορεί να μας δώσει την ηλικία (n) του κυρίου Δροσινού;

- $77 + 36 + 8 = n$
- $36 + n = 77 + 8$
- $36 + 8 = 77 + n$
- $77 - 8 = 36 - n$
- $36 + 8 + n = 77$

4. ♣ + ✻ = 10
✻ - ♣ = 2

Τα ✻ έχουν παντού την ίδια τιμή.
Τα ♣ έχουν παντού την ίδια τιμή.
Ποια είναι η τιμή του ♣ ;

3
4
5
6
7

5. Η Αμάντα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τη φίλη της και χρειάζεται 40 πόντους για να κερδίσει. Έχει ήδη συγκεντρώσει 27 πόντους. Συμπλήρωσε την εξίσωση του προβλήματος και λύσε την.

.... + x = ...

Απάντηση:..

6. Ο Δημήτρης αγόρασε παγωτά που το καθένα κόστιζε 1,12 €. Έδωσε 5 € και πήρε ρέστα 1,64 €. Διάλεξε από τις παρακάτω εξισώσεις τη σωστή και λύσε την. (α = αριθμός των παγωτών)

$α = 5 – 1{,}64 \cdot 1{,}12$
$5 : 1{,}12 = α + 1{,}64$
$1{,}12 \cdot α = 5 – 1{,}64$

Απάντηση:..

7. Να βρεις την τιμή του x για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x + 4 = 16 \cdot 2$ ....
- $x - 6 = 83{,}7 + 9$ ....
- $18 - x = 107 - 90$ ....
- $x : 2 = 1$ ....
- $24 : x = 1 + 1{,}4$ ....
- $18 \cdot x = 9$ ....

8. Η ομάδα μπάσκετ του σχολείου αγόρασε 8 μπλούζες. Το συνολικό κόστος τους ήταν 39,20 €. Να γράψεις την εξίσωση που δείχνει πώς προέκυψε το συνολικό κόστος από την τιμή της μιας μπλούζας και να τη λύσεις.

Απάντηση:..

9. Ο Άγγελος έχει 8 κουτιά. Βάζει ίσο αριθμό από μπίλιες σε κάθε κουτί. Αν οι μπίλιες του είναι x συνολικά, συμπλήρωσε:

μπίλιες σε κάθε κουτί =

Γράψε την εξίσωση όταν γνωρίζεις ότι το σύνολο είναι 112 μπίλιες και άγνωστος x είναι ο αριθμός των κουτιών:

10. Γράψε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $v + 2 = 6$.

....
....
....
....

11. Γράψε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την εξίσωση $\kappa : 4 = 32$.

....
....
....
....

12. Το μέγεθος της μεγεθυσμένης φωτογραφίας είναι 8 φορές το αρχικό της μέγεθος. Γράψε την εξίσωση που δείχνει τη σχέση τους, χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή **Μ** για το μέγεθος της μεγεθυσμένης φωτογραφίας και τη μεταβλητή **μ** για το αρχικό μέγεθος.

13. Γράψε την εξίσωση που εκφράζει τη φράση: Ο πληθυσμός της πόλης μας διπλασιάστηκε μέσα σε μια δεκαετία. Στην προηγούμενη απογραφή ήταν 12.000 κάτοικοι.

14. Υπάρχει ένας «τύπος» που βοηθά τους γιατρούς να υπολογίζουν την ποσότητα του αίματος κάθε ανθρώπου: «Η ποσότητα του αίματός μας (σε λίτρα) βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το βάρος μας (σε κιλά) με το 0,08». Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο να βρεις το βάρος του ανθρώπου που έχει 4 λίτρα αίμα.

Απάντηση: ....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 7
Σελ. 142 βιβλίο δασκάλου Στ΄ Δημοτικού

Αγαπητοί γονείς και κηδεμόνες,

Σας καλωσορίζουμε στην έκτη θεματική ενότητα του βιβλίου.

Τι θα μάθουμε σ' αυτή την ενότητα

Η έκτη ενότητα, που είναι η τελευταία του βιβλίου, είναι αφιερωμένη στη **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα μελετήσουμε τα σχήματα και τα στερεά σώματα (πραγματικά αντικείμενα), όπως είναι αυτά που υπάρχουν γύρω μας καθώς και το πώς μπορούμε να τα αποτυπώσουμε στο χαρτί (θεωρητικά αντικείμενα) με τα γεωμετρικά όργανα.

Θα ξεκινήσουμε από τις **γωνίες** (μέτρηση και κατασκευή γωνιών), θα θυμηθούμε τα **πολύγωνα** σχήματα και θα μάθουμε τις **ιδιότητες των τετράπλευρων σχημάτων**. Θα ανακαλύψουμε και θα μάθουμε τους τύπους με τους οποίους βρίσκουμε τα **εμβαδά** των σχημάτων (τριγώνου, παραλληλόγραμμου, τραπεζίου, κύκλου). Μέσα στην υπο-ενότητα των επίπεδων σχημάτων θα μελετήσουμε και τις **έννοιες της μεγέθυνσης και σμίκρυνσης** σχημάτων, καθώς και την **έννοια της συμμετρίας**.

Στην υπο-ενότητα των στερεών θα μελετήσουμε τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και τον κύλινδρο. Θα μάθουμε πώς να κατασκευάζουμε αυτά τα σώματα (ανάπτυγμα) και να βρίσκουμε το εμβαδό της επιφάνειάς τους και τον όγκο τους.

Σημείωση: Στην ενότητα της γεωμετρίας έχουν φυσιολογικά ενταχθεί **οι μετρήσεις εμβαδού, όγκου** και **χωρητικότητας** που έλειπαν από την ενότητα των μετρήσεων.

Πώς να βοηθήσετε στο σπίτι

1. Βεβαιωθείτε ότι το παιδί έχει τα όργανα που χρειάζεται (χάρακες, διαβήτη, μοιρογνωμόνιο).
2. Προσπαθήστε μαζί με το παιδί σας να βρείτε **αντικείμενα από την καθημερινή ζωή** (π.χ. η επιφάνεια της ήρεμης θάλασσας: επίπεδο, η πανσέληνος: κύκλος, η κολόνα ενός ναού: κύλινδρος κ.λπ.) που θα σας θυμίζουν κάποιο γεωμετρικό σχήμα ή σώμα και επισημάνετέ το.
3. Αναφορικά με τη **συμμετρία** είναι πολύ χρήσιμο να συνδεθεί η μαθηματική έννοια με την έννοια με την οποία χρησιμοποιείται η λέξη στην καθημερινή μας ζωή (π.χ. το πρόσωπό μας, τα δύο ίσα χέρια και πόδια μας, το σώμα μιας πεταλούδας κ.λπ.) ακόμη και με την τέχνη τόσο των καλλιτεχνών όσο και των απλών ανθρώπων (π.χ. κεντημένες ποδιές, χαλιά, έπιπλα, πέτρινα βρυσάκια κ.ά.).
4. Προσπαθήστε σε **πραγματικές ανάγκες χρήσης μιας μέτρησης εμβαδού, όγκου και χωρητικότητας** κάποιου δοχείου (π.χ. μια μοκέτα στο δωμάτιο, υπολογισμός πληρωμής για ελαιοχρωματισμό κάποιου χώρου, γέμισμα του ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου κ.ά.) να βάλετε το παιδί να συμμετέχει στον υπολογισμό.

Σημείωση: Βεβαιωθείτε ότι το παιδί έχει αντιληφθεί τη διαφορά του όγκου και της χωρητικότητας. Μη διστάσετε σε περίπτωση αμφιβολίας να επικοινωνήσετε μαζί μου.

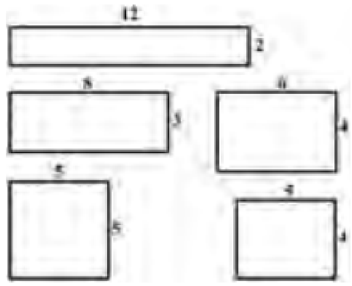
Με εκτίμηση,
... δ................ του παιδιού σας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 8

Σελ. 162 – 163 Βιβλίο Δασκάλου ΣΤ΄ Δημοτικού

Κριτήριο αξιολόγησης για τη θεματική ενότητα 6

1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει εμβαδό 24 τ.εκ. και περίμετρο 20 εκ.;



2. Α. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δεν είναι δυνατό να υπάρχει;

α. τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες
β. τρίγωνο με ίσες πλευρές
γ. τραπέζιο με δύο ορθές γωνίες
δ. τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες

Απάντηση: ....

Β. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες;

3. Η Αγγελική θέλει να φτιάξει έναν κύλινδρο από χαρτί. Ποιο συνδυασμό σχημάτων από τους παρακάτω θα χρειαστεί;

α. 4 τρίγωνα και 1 τετράγωνο
β. 2 τρίγωνα και 1 ορθογώνιο
γ. 2 κύκλους και 1 ορθογώνιο
δ. 3 κύκλους και 1 τετράγωνο

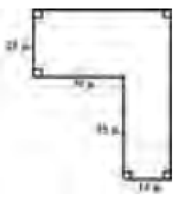
4. Μία από τις γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 50°. Πόσο είναι η άλλη;

Απάντηση: ....

5. Το πλάτος ενός ορθογώνιου χαλιού είναι 4 μέτρα. Αν η περίμετρός του είναι 20 μέτρα ποιο είναι το εμβαδό του;

Απάντηση: ....

6. Αυτή είναι η κάτοψη ενός εργοστασίου. Πόσα τετραγωνικά μέτρα πλακάκια χρειάζονται για το δάπεδο; Πόσα μέτρα είναι η περίμετρος για να τοποθετηθεί μια ξύλινη μαρκίζα;



Απάντηση: ....

7. Ποια είναι η πλησιέστερη εκτίμηση για τη γωνία XYZ;

α. 225°
β. 135°
γ. 90°
δ. 45°
ε. 10°

8. Ο όγκος ενός κύβου είναι 125 κ.εκ. Πόσα εκατοστά νομίζεις ότι είναι η ακμή του;

α. 12 εκ.

β. 25 εκ.

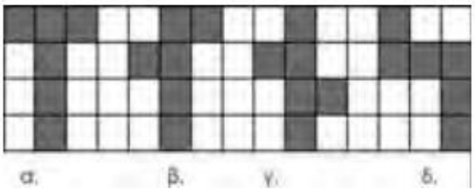
γ. 6 εκ.

δ. 5 εκ.

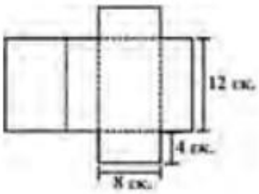
9. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δοχείο με διαστάσεις 50 εκ., 30 εκ. και 20 εκ. γεμίζει από μια βρύση που στάζει. Πόσα λίτρα νερό θα χωρέσει;

Απάντηση: ....

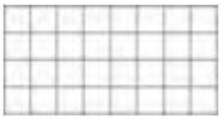
10. Ποιο από τα παρακάτω δεν είναι ανάπτυγμα κύβου;



11. Η Βαγγελιώ έφτιαξε ένα κουτί και θέλει να το ντύσει με βελουτέ χαρτί. Πόσα τ.εκ. χαρτί θα χρειαστεί;



12. Σχεδίασε ένα κύλινδρο, δώσε τις διαστάσεις του και γράψε ένα πρόβλημα που να ζητά τον όγκο του.



....

....

....

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 9

Σελ. 51-52 Βιβλίο καθηγητή Α΄Γυμνασίου

Κεφάλαιο Α.4. Εξισώσεις και προβλήματα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 5 διδακτικές ώρες

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις: $\alpha + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$ & $x : \alpha = \beta$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τέσσερις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:

- η 1η, την εμπέδωση του τρόπου μετατροπής των λεκτικών σε μαθηματικές εκφράσεις.
- η 2η, το χειρισμό των αριθμητικών παραστάσεων για απλούστερη έκφραση.
- η 3η, την αναγκαιότητα χρήσης της έννοιας της εξίσωσης μέσα από τη λύση ενός απλού προβλήματος.
- η 4η, τη διαδικασία επαλήθευσης ή μη μιας ισότητας παραστάσεων για συγκεκριμένες τιμές των γραμμάτων που περιέχει.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δείξει τη διαδικασία που απαιτείται για να επιλυθεί ένα πρόβλημα με την εύρεση της κατάλληλης εξίσωσης και τον ορισμό του αγνώστου, που αντιπροσωπεύει την άγνωστη ποσότητα και επαληθεύει τη λύση της εξίσωσης και συνεπώς του αντίστοιχου προβλήματος.

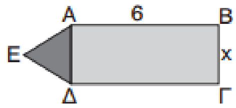
Οι δεκαπέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε εννέα κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση αντιστοίχισης μεταξύ λεκτικών και μαθηματικών εκφράσεων,
(β) η 2η αφορά τη μετατροπή των μαθηματικών εκφράσεων σε λεκτικές,
(γ) η 3η αφορά, αντιστρόφως, τη μετατροπή των λεκτικών εκφράσεων σε μαθηματικές,
(δ) η 4η αφορά το χειρισμό των αριθμητικών παραστάσεων για απλούστερη έκφραση,
(ε) η 5η αφορά την αντικατάσταση παραστάσεων με γράμματα μέσα σε άλλες παραστάσεις,
(στ) η 6η αφορά τους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, σε μία μαθηματική έκφραση,
(ζ) η 7η έως και η 9η αφορούν την επαλήθευση αριθμητικών παραστάσεων όταν αντικαθιστούμε τα γράμματα με συγκεκριμένες τιμές,
(η) η 10η έως και η 12η αφορούν την εύρεση των λύσεων διαφόρων εξισώσεων και
(θ) η 13η έως και η 15η αφορούν προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια εξίσωσης των προαναφερομένων μορφών.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Να μετατρέψεις σε αριθμητικές παραστάσεις τις εκφράσεις: (α) Τα $\frac{3}{5}$ ενός αριθμού, (β) Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι 4, (γ) Το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών, (δ) Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού μειωμένα κατά 2, (ε) Ένας αριθμός αυξημένος κατά τα $\frac{5}{9}$ αυτού.
2. Διατύπωσε λεκτικά την μαθηματική έκφραση $2x+3 = 7$
3. Γράψε συντομότερα τις παραστάσεις: (α) $3\alpha+5\alpha$, (β) $8x+7x+4x$, (γ) $15\beta-9\beta$, (δ) $2\alpha+\alpha$, (ε) $x+x+x+x$, (στ) $5\omega+12\omega-3\omega$, (ζ) $3\cdot x+0,5\cdot x+7,8\cdot x+5,3\cdot x$, (η) $4,2\cdot t-2,9\cdot t+32\cdot t-4,89\cdot t$.

4. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.(α) Να εκφράσεις με τη βοήθεια του x: (i) την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, (ii) την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ και (iii) την περίμετρο του σχήματος ΑΒΓΔΕ. (β) Να βρεις τις αριθμητικές τιμές των περιμέτρων των σχημάτων αν x=2 και x=1,5.(γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔΕ θα γίνει 27;



5. Βρες ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, είναι λύσεις της εξίσωσης $3 \cdot x=21$.
6. Αν $x = 4$, $y = 2$ και $\omega = 2{,}5$, να βρεις τις τιμές των παραστάσεων: (α) $(x+2)\cdot y+3\cdot x\cdot y\cdot \omega$, (β) $(x+y)^2$, (γ) $x^2+2\cdot x\cdot y+y^2$, (δ) $(x-\omega)2$, (ε) $x^2-2\cdot x\cdot \omega+\omega^2$, (στ) $3x^2+5y^2+4\omega^2$.
7. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν: (α) $(\alpha+\beta:\gamma)\cdot(\delta-\varepsilon)$, (β) $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma-\delta)-\varepsilon$, (γ) $(\alpha+3\cdot\beta):2.\gamma-(\delta+\varepsilon)$, αν $\alpha = 810$, $\beta = 420$, $\gamma=3{,}1$, $\delta = 7{,}8$ και $\varepsilon = 0{,}1$.
8. Αν $\alpha = 50$ να βρεις τις τιμές των διαφορών: (α) $\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{8}$, (β) $\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{3}$, (γ) $\frac{2\alpha}{5}-\frac{3\alpha}{10}$, (δ) $\frac{4\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{7}$.
9. Αν $x\cdot y = \frac{5}{8}$ και $z\cdot\omega = \frac{3}{4}$, να βρεις το γινόμενο $x\cdot(y\cdot z)\cdot\omega$.
10. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Η εξίσωση $5x-2=7$ δεν έχει λύση στους φυσικούς αριθμούς	☐	☐
(β) Ο αριθμός 5 είναι ρίζα της εξίσωσης $35-x=30$.	☐	☐
(γ) Η εξίσωση $\omega+32=39$ έχει ρίζα τον αριθμό 3.	☐	☐

11. Βρες τις 8 τιμές του φυσικού αριθμού ν, για τις οποίες το κλάσμα $\dfrac{\frac{63}{\nu+1}}{\frac{3}{2}}$ είναι φυσικός αριθμός.
12. Σύγκρινε τα κλάσματα (α) $\frac{\alpha+4}{\alpha+2}$ και (β) $\frac{\alpha-3}{\alpha-2}$ με τη μονάδα.
13. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού x δεν έχει νόημα το κλάσμα $\frac{1}{x-1}$.
14. Για να υπολογιστεί η βαθμολογία μιας ομάδας σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα υποθέτουμε ότι κάθε νίκη (ν) βαθμολογείται με 2 βαθμούς, κάθε ήττα (η) με 0 και κάθε ισοπαλία (ι) με 1 βαθμό. Οι ομάδες α, β, γ, δ πήραν την βαθμολογία που φαίνεται στο πίνακα. Να υπολογίσεις τη βαθμολογία κάθε ομάδας.

	ν	ι	η	β
Ομάδα α	2	1	1	
Ομάδα β	2	1	1	
Ομάδα γ	3	1	0	
Ομάδα δ	1	2	1	

15. Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο όταν κινείται με ταχύτητα υ για χρόνο t, είναι $\upsilon\cdot t$. Να βρεις πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει το αυτοκίνητο αν (α) $\upsilon=80$ Km/h και $t=3$h και (β) $\upsilon=120$ Km/h και $t=5$h.
16. Να αντιστοιχίσεις κάθε εξίσωση της 1ης στήλης με τη ρίζα της στη 2η στήλη:

1η στήλη	2η στήλη
$x-3=8$	0
$x+5=5$	3
$3x=9$	11