ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ -ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διδάσκοντας Πιθανότητες στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των πιθανοτήτων».

ΖΩΡΖΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

ΡΟΔΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ -ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΖΩΡΖΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

Α.Μ. 413/2016015

«Διδάσκοντας Πιθανότητες στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των πιθανοτήτων».

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ/ΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΦΩΚΙΔΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ	**ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ**
ΣΚΟΥΜΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛ	**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ**

ΡΟΔΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδάσκοντας «Πιθανότητες» στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των «πιθανοτήτων».

*

Teaching "Probabilities" in Primary School. Investigating the attitudes, perceptions and beliefs of teachers and prospective teachers about the subject of "probabilities".

ΖΩΡΖΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

Επιβλέπων: Αυγερινός Ευγένιος, Καθηγητής Παν. Αιγαίου

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 13/09/2018

1. Αυγερινός Ευγένιος, Καθηγητής Παν. Αιγαίου ....

2. Φωκίδης Εμμανουήλ, Επίκουρος Καθηγητής Παν. Αιγαίου ....

3. Σκουμιός Μιχαήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής Παν. Αιγαίου ....

ΡΟΔΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της πρωτότυπης μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, ότι έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες και ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ.

ΖΩΡΖΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

Στη μνήμη του Νικήτα.

Σε ευχαριστώ για όλα Δάσκαλε.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε το διδακτικό έτος 2017-2018, στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Πανεπιστημίου Αιγαίου με τίτλο: «Επιστήμες τις Αγωγής – Εκπαίδευση με τη χρήση Νέων Τεχνολογιών».

Για την ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ευγένιο Αυγερινό, ο οποίος με καθοδήγησε σε όλα τα στάδια της εργασίας με τις εύστοχες παρατηρήσεις και συμβουλές του. Τόσο το αδιάκοπο ενδιαφέρον του όσο και η επιστημονική και ηθική βοήθεια που μου προσέφερε, συντέλεσαν καθοριστικά στοιχεία στην ολοκλήρωση του έργου μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστό στον ομότιμο καθηγητή κ. Μιχαήλ Σκουμιό και τον επίκουρο καθηγητή κ. Εμμανουήλ Φωκίδη, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν και αποδέχτηκαν τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου.

Για το χρόνο που μου αφιέρωσε και τις πολύτιμες συμβουλές της, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα, κυρία Ρεμούνδου Δήμητρα. Επιπλέον, ευχαριστώ όλους τους συνάδελφους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα και με μεγάλη προθυμία με αποδέχτηκαν στην τάξη τους.

Ευχαριστώ ακόμα, όλους τους παράγοντες καθηγητές του ΠΜΣ για την αμέριστη υποστήριξη τους και τις γνώσεις που μας προσέφεραν και τη κυρία Νεφέλη Βρατσάλη που ως γραμματεία του προγράμματος μας βοήθησε και μας στήριξε σε κάθε μας ζήτημα.

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στους φίλους και την οικογένεια μου, για την κατανόηση που έδειξαν, την ηθική στήριξη που μου προσέφεραν και την πίστη που έδειξαν στο πρόσωπο μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

TABLE OF CONTENTS

PART TWO

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εποχή που διανύουμε, η ανθρώπινη κοινωνία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί από την ενασχόληση των ανθρώπων με την τεχνολογία, καθώς και το ενδιαφέρον της για τις στοχαστικές διαδικασίες. Το γεγονός ότι οι περισσότερες διαδικασίες της καθημερινότητας είναι στοχαστικές και η γενικότερη εξάρτηση του κοινωνικού συνόλου από την τεχνολογία, οδηγεί στο παραπάνω συμπέρασμα.

Η τεχνολογική εξέλιξη ιδιαίτερα, έχει σηματοδοτήσει τις νεότερες γενιές καθώς και την καθημερινότητα των ανθρώπων. Η συχνότητα της χρήσης της τεχνολογίας σε τομείς όπως η εργασία και ο ελεύθερος χρόνος, επιβάλλει την ένταξη της και στη διδακτική διαδικασία. Από διάφορες έρευνες που έχουν γίνει στο παρελθόν, όσο και από τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μελέτης, διαπιστώνεται ότι τα παιδία αντιμετωπίζουν ως μια θετική επίδραση την ένταξη της τεχνολογίας στη τάξη. Στη συγκεκριμένη εργασία, η ένταξη αυτή, ειδικεύεται στη περίπτωση των μαθηματικών και μάλιστα στο τομέα των «Πιθανοτήτων».

Η διδακτική των πιθανοτήτων γίνεται μέσα από τη τεχνολογία πολύ πιο εύκολη. Τα οφέλη της τεχνολογίας στην εκπαίδευση και ειδικότερα στη διδακτική των μαθηματικών, είναι πολλαπλά. Αξίζει να αναφερθεί ως παράδειγμα, ότι πολλές φορές υπάρχουν ασκήσεις που οι πράξεις ή οι γραφικές παραστάσεις που χρειάζονται, καθίστανται πολύ δύσκολες χωρίς τη χρήση του υπολογιστή. Πιο συγκεκριμένα, στο κλάδο των «Πιθανοτήτων», όπου απασχολεί κυρίως τη παρούσα μελέτη, υπάρχουν διάφορα προγράμματα και λογισμικά, τόσο για την εικονική διεξαγωγή πειραμάτων, όσο και για την οργάνωση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Διάφορα προγράμματα που κυκλοφορούν μπορούν να παρουσιάζουν τα αποτελέσματα του πειράματος σε ένα πίνακα ή ένα διάγραμμα για να είναι πιο κατανοητά από τον μαθητή. Ακόμα, η σημαντικότητα της τεχνολογίας ξεχωρίζει, αφού στη πραγματικότητα, είναι δύσκολο ένας εκπαιδευτικός την ώρα του μαθήματος να επαναλάβει ένα πείραμα πολλές φορές. Κατά συνέπεια, δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για να δείξει ότι υπάρχει περίπτωση να αλλάζει το αποτέλεσμα σε κάθε νέα εκτέλεση ή ότι ποτέ ένα ενδεχόμενο δεν είναι σίγουρο. Από την άλλη όμως, σε έναν υπολογιστή, κάποιος μπορεί να εκτελέσει ένα εικονικό πείραμα, περισσότερες από μια φορές και έτσι ο μαθητής να εξακριβώσει από μόνος του την έννοια της τύχης και των δυνατών αποτελεσμάτων.

Οι στοχαστικές διαδικασίες, χαρακτηρίζουν την ανθρώπινη καθημερινότητα σε μεγάλο βαθμό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα τυχερά παιχνίδια και οι προσπάθειες προβλέψεων. Λόγο της μεγάλης τους απήχησης σε καθημερινές καταστάσεις, κεντρίζουν το ενδιαφέρον της κοινωνίας και κατά συνέπεια χρίζουν επιστημονικής ανάλυσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ανοίγει διάπλατα ο δρόμος για τη θεωρία των πιθανοτήτων.

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των αντιλήψεων των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όσο και των δασκάλων ή των υποψήφιων δασκάλων σχετικά με τις πιθανότητες. Οι πιθανότητες είναι ο κλάδος των μαθηματικών που μελετάει το μέτρο της βεβαιότητας για να πραγματοποιηθεί ένα αποτέλεσμα. Για να διδαχτεί κάποιος πιθανότητες, το γνωστικό του υπόβαθρο θα πρέπει αρχικά να περιλαμβάνει τα βασικά σημεία της θεωρίας συνόλων και της συνδυαστικής. Ακόμα, θα ήταν καλό να γνωρίζει κάποιες έννοιες, όπως «πείραμα», «δειγματικός χώρος» και «ενδεχόμενο».

Από αρχαιοτάτων χρόνων η ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια οδήγησε στην ανάπτυξη των πιθανοτήτων. Πολύ γρήγορα η αναπτυσσόμενη αυτή επιστήμη κέρδισε την προσοχή πολλών μεγάλων προσωπικοτήτων. Έτσι, μία απλή εξήγηση ενός τυχερού παιχνιδιού, δεν άργησε να γίνει ένας από τους σημαντικότερους κλάδους των μαθηματικών. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί και επιστήμονες της εποχής έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στις πιθανότητες, ωστόσο οι Laplace και Gauss ήταν αυτοί που προσέφεραν τα μέγιστα στη Θεωρία.

Η διδακτική της νέας αυτής θεωρίας, σύντομα άρχισε να εξαπλώνεται. Οι πιθανότητες δεν λείπουν από κανένα πρόγραμμα σπουδών. Μάλιστα, η πλειοψηφία των χωρών διδάσκει την «Πιθανότητα» στο δωδέκατο έτος της ηλικίας των παιδιών. Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτή την ηλικία θεωρείται ότι ο μαθητής είναι στη κατάλληλη θέση να κατανοήσει την έννοια.

Στην Ελλάδα, όσο και σε διάφορα προγράμματα σπουδών του εξωτερικού, ένας μαθητής πρέπει να έχει ένα κατάλληλο υπόβαθρο γνώσεων για να μπορέσει να δεχτεί την έννοια της πιθανότητας. Όπως ήταν λογικό λοιπόν, τόσο στο ελληνικό σχολικό πρόγραμμα σπουδών, όσο και στα προγράμματα σπουδών του εξωτερικού, υπάρχει μία σταδιακή ανάπτυξη των εννοιών των πιθανοτήτων και της πολυπλοκότητας των ασκήσεων. Έτσι, τα παιδιά από αρκετά μικρή ηλικία ξεκινάνε να μαθαίνουν την ανάλυση διαγραμμάτων, τη συλλογή και τη κατανομή δεδομένων, καθώς και διάφορες άλλες προπαρασκευαστικές έννοιες πιθανοτήτων. Η πρώτη επαφή με τις αυστηρές μαθηματικές έννοιες των πιθανοτήτων στην Ελλάδα, γίνεται στη Τρίτη τάξη του Γυμνασίου.

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί, είναι ότι το ενδιαφέρον τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών για τις πιθανότητες, καθώς και η άμεση απήχησή τους στην καθημερινή ζωή, δεν θα μπορούσε να μην προσελκύσει το ενδιαφέρον δύο πολύ μεγάλων ερευνών περί τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες. Ο λόγος γίνεται για τα προγράμματα PISA και TIMSS. Οι συγκεκριμένες έρευνες, είναι παγκοσμίου φήμης, διεξάγονται κάθε 3 και 4 χρόνια αντίστοιχα και ασχολούνται με πολύ μεγάλα δείγματα. Παρατηρώντας λοιπόν κανείς τα ερωτηματολόγια τους, κάνουν ιδιαίτερη αναφορά σε ασκήσεις πιθανοτήτων, για να διερευνήσουν τις αντιλήψεις και τη νοητική ικανότητα των μαθητών.

Οι αντιλήψεις των μαθητών λοιπόν, είτε διαισθητικές είτε γνωστικές, δεν είναι ασήμαντες. Αντιθέτως, κρίνονται απαραίτητες. Η διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών προτού ξεκινήσει η διδαχή μιας νέας έννοιας, καθίσταται αναπόφευκτη. Ο λόγος είναι διότι, η νέα έννοια πρέπει να χτιστεί πάνω στις ήδη υπάρχουσες αντιλήψεις. Αλλιώς, ο μαθητής θα επηρεάζεται πάντα από αυτές και ποτέ δεν θα του επιτρέψουν να κατανοήσει πλήρως τη νέα έννοια. Στις πιθανότητες για παράδειγμα οι περισσότεροι μαθητές δεν κατανοούν ότι η πιθανότητα είναι το μέτρο της βεβαιότητας ενός αποτελέσματος, αλλά πιστεύουν ότι η πιθανότητα σημαίνει ότι κάτι μπορεί να συμβεί ή όχι. Πρέπει λοιπόν, να εξακριβωθεί η διαφορά για να επιτευχθεί η μάθηση.

Στη παρούσα έρευνα, η ερευνητική διαδικασία που διενεργήθηκε με δείγμα 653 ατόμων και με συμμετέχοντες παιδιά της Πρωτοβάθμιας, της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, σύλλεξε τα δεδομένα της μέσω ερωτηματολογίου. Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας ήταν να διερευνήσει τις αντιλήψεις μαθητών διαφόρων ηλικιών για την αναγκαιότητα και τη σημαντικότητα των πιθανοτήτων. Ακόμα, την άποψή τους για τη διδακτική των πιθανοτήτων στο σχολείο, την άποψή τους για τη χρήση της τεχνολογίας στη τάξη, καθώς και την εξοικείωσή τους με ορισμούς πιθανοτήτων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν με το ερωτηματολόγιο, διασφαλίστηκαν ποιοτικά τόσο από τον ερευνητή, όσο και από τα στατιστικά προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα.

Αρχικά, περάστηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος Excel στον υπολογιστή. Στη συνέχεια, αναλύθηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος στατιστικής ανάλυσης S.P.S.S. και του προγράμματος της συνεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης CHIC. Το πρόγραμμα S.P.S.S. βοήθησε στη κύρια ανάλυση της έρευνας, ενώ το CHIC, χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί κατά πόσον υπάρχουν ισχυρές συνεπαγωγές μεταξύ των ερωτήσεων. Να σημειωθεί ακόμα, ότι διαφορετικό ερωτηματολόγιο μοιράστηκε στους μαθητές της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, σε σύγκριση με τους φοιτητές και τους εκπαιδευτικούς. Αυτό έγινε, αφού τα παιδιά μικρότερης ηλικίας δεν ήταν σε θέση να ανταπεξέλθουν σε κάποιες ερωτήσεις ή έννοιες που απάρτιζαν το ερωτηματολόγιο της Τριτοβάθμιας.

Τα βασικά ευρήματα της έρευνας ήταν άλλοτε αναμενόμενα και άλλοτε όχι. Αρχικά, οι μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας έχουν καλύτερη αντίληψη για τις έννοιες των πιθανοτήτων και αντεπεξήλθαν καλύτερα στις κοινές ερωτήσεις. Βέβαια, ενδιαφέρον ήταν και τα αποτελέσματα των μικρότερων μαθητών, αφού σε αρκετές περιπτώσεις κατόρθωναν να συγκριθούν με τα αποτελέσματα των μεγαλύτερων ηλικιών. Το ποιο σημαντικό βέβαια, ήταν οι αντιλήψεις των διαφόρων ηλικιών για διάφορες έννοιες πιθανοτήτων (ισοπίθανα ενδεχόμενα, κλασικός ορισμός πιθανότητας κ.α.). Οι περισσότεροι ερωτώμενοι εμφάνιζαν σύγχυση σε απλές ερωτήσεις πιθανοτήτων. Λόγου χάρη, θεωρούσαν ότι σε 2 εκτελέσεις ενός πειράματος, τα αποτελέσματα πρέπει να είναι διαφορετικά. Ακόμα, αποδείχθηκε ότι αρκετοί μπορεί να είχαν μια σωστή αντίληψη για μια έννοια, ωστόσο όταν ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους στο ερωτηματολόγιο, παρουσιάστηκε πρόβλημα. Γενικά, η αδυναμία ολοκλήρωσης μιας αιτιολόγησης ή η αποφυγή της, ήταν ένα από τα χαρακτηριστικά του ερωτηματολογίου.

Τέλος, η συγκεκριμένη μελέτη τελειώνει με μερικές προτάσεις για τους εκπαιδευτικούς και την πολιτεία ως προς τη βελτίωση της διδακτικής των πιθανοτήτων. Η καλύτερη προετοιμασία του μαθήματος, με περισσότερο στοχευμένες ασκήσεις και με την ένταξη της τεχνολογίας στη μαθησιακή διαδικασία, είναι μερικές από αυτές.

ABSTRACT

Nowadays, human society could be characterized by people's technological dependence, as well as its interest in stochastic processes. The fact that most processes of everyday life are stochastic and the dependence of society on technology, leads to the above conclusion.

Technological development in particular, has signaled the younger generations, as well as the daily routine of people. The frequency of use of technology in areas such as work and leisure, requires its inclusion in the teaching process as well. From various past researches and from the results of this study, children are seen as having a positive effect on integrating technology into the classroom. In this work, this integration specializes in the case of mathematics and even in the field of "Probabilities".

Probability teaching is made much easier through technology. The benefits of technology in education and in particular in teaching mathematics are multiple. It is worth mentioning as an example, that there are many exercises where the operations or graphs that are needed, become very difficult without the use of the computer. More specifically, in the "Probability realm", where mainly interest the present study, there are several programs and software, both for virtual experiments and for the organization and presentation of results. Various running programs can show the results of the experiment in a table or diagram to make them more comprehensible to the learner. The importance of technology seems even after the fact, it is difficult for a teacher during class time to repeat an experiment many times. This means that, there is not enough time, the teacher to indicate that it is possible to change the result on every implementation, or that it is not always expected the result. On the other hand, on a computer, one can perform a virtual experiment more than once and so the student can identify the meaning of luck and the possible results.

The stochastic processes characterize human everyday life to a great extent. A good example here, is gambling and forecasting efforts. Because of their great impact in everyday situations, they attract the interest of society and therefore require scientific analysis. This has the effect of opening the way to the theory of probabilities.

The subject of this work, is to study the perceptions of primary and secondary school students, as well as the teachers or prospective teachers about the probabilities. The probabilities are the mathematics sector that studies the measure of certainty in order to achieve a result. To teach a chance, someone cognitive background should initially include the basic points of theory of complexes and combinatorial. Still, it would be good to know some concepts, such as "experiment", "sample space" and "eventuality".

Since ancient times, dealing with gambling has led to the development of probabilities. Very quickly this growing science gained the attention of many great personalities. Thus, a simple explanation of a gambling, become soon one of the most important sectors of mathematics. Many great mathematicians and scientists of the time, turned their interest in the chances, but Laplace and Gauss were the ones who offered the most in the Theory.

The teaching of this new theory soon began to spread. Chances are not missed by any curriculum. In fact, the majority of countries teach the "Probability" in the twelfth year of the children. This is because at this age it is considered that the student is in a position to understand the concept.

In Greece, as well as in various curricula abroad, a student must have an appropriate knowledge base to be able to accept the concept of probability. As was logical, both in the Greek curriculum and in the curriculum abroad, there is a gradual development of the concepts of probabilities and the complexity of the exercises. Thus, children from a very early age start learning the analysis of diagrams, data collection and distribution, and various other preparatory concepts of probability. The first contact with the strict mathematical concepts of probabilities in Greece, is made in the third grade of the secondary school.

What is worth to flag, is the interest of both students and teachers in probabilities, as well as their direct impact on everyday life, attract the interest of two very large studies of mathematics and science . The mention becomes for PISA and TIMSS programs. These surveys are world-renowned, conducted every 3 and 4 years respectively and are dealing with very large samples. By observing their questionnaires, they specifically refer to probability exercises, so as to explore students' perceptions and cognitive abilities.

Thus, students' perceptions, either intuitive or cognitive, are not insignificant. Contrariwise, they are necessary. Exploring pupils' perceptions before learning a new concept becomes inevitable. The reason is because the new concept must be built on the existing perceptions. Otherwise, the student will always be influenced and this perceptions will never allow him to fully understand the new concept. In probabilities, for example, most students do not understand that the probability is the measure of the certainty of an outcome, but they believe that the probability means that something may happen or not. It is therefore necessary to ascertain the difference, so as to achieve learning.

In the present study, the research process carried out with a sample of 653 participants, where are children from Primary, Secondary and Tertiary Education. The data have collected through a questionnaire. The aim of this research was to explore the perceptions of pupils of different ages on the necessity and significance of probabilities. Furthermore, their view of teaching chances at school, their view of the use of technology in the classroom, and their familiarization with probability definitions. The data collected with the questionnaire were both qualitatively secured by the researcher and by the statistical programs used in the survey.

Initially, they passed through the Excel program on the computer. Then, they were analyzed with the help of the statistical analysis program S.P.S.S. and the statistical implicative analysis program named as CHIC. The S.P.S.S. helped in the main analysis of the research, while CHIC was used to check whether there were strong implications between the questions. It should also be noted that a different questionnaire was shared among Primary and Secondary School students compared to students and teachers. This was because the younger children were unable to cope with some questions or concepts, where there are in the Tertiary questionnaire.

The main findings of the research were sometimes awaited and sometimes not. Initially, older students have a better understanding of the concepts of probabilities and better coped with common questions. Of course, the results of the younger pupils were also interesting, since in some cases they managed to compare themselves with the results of the older ages. The most important, were the perceptions of different ages for various probability concepts (equally possible, definition of classical probability, etc.). Most respondents were confused with simple probability questions. For example, they considered that in 2 prosecutionσ of one experiment, the results should be different. Besides, it turned out that many students, may have a proper understanding of a concept, but when asked to justify their choices in the questionnaire, there was a problem. In general, the failure to complete a justification or to avoid it was one of the characteristics of the questionnaire.

Finally, this study ends with a few suggestions for teachers and the state to improve the probability curriculum. Better preparation of the course, with more targeted exercises and with the integration of technology in the learning process, are some of them.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται ως η μητέρα των επιστημών. Η χρησιμότητα τους, όσο και η σημασία τους στην εξέλιξη της καθημερινής μας ζωής, είναι αδιαμφισβήτητη. Πολύ συχνά μέσα στην ημέρα καλούμαστε να χρησιμοποιούμε τις γνώσεις μας στα μαθηματικά και μάλιστα τις περισσότερες φορές χωρίς να το αντιληφθούμε. Η αξία των μαθηματικών φαίνεται από τα πιο απλά καθημερινά πράγματα, μέχρι τις μεγαλύτερες επιστημονικές και τεχνολογικές ανακαλύψεις.

Περίεργο είναι ότι πολλοί δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία και τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην άμεση καθημερινότητα. Λόγου χάρη, ένας εκπαιδευτικός ακούει αρκετά συχνά τους μαθητές του να παραπονιούνται γιατί δυσκολεύονται να καταλάβουν τη χρησιμότητα των «δύσκολων» μαθηματικών εννοιών. Έτσι, κρίθηκε απαραίτητο η παρούσα εργασία να στηριχτεί σε ένα αντικειμενικά πολύ χρήσιμο κλάδο των μαθηματικών.

Η επιλογή του θέματος της παρούσας εργασίας λοιπόν, βασίστηκε στο κλάδο των «Πιθανοτήτων». Οι «Πιθανότητες» βρίσκονται σε πολλές καθημερινές ασχολίες του ανθρώπου (τυχερά παιχνίδια, προβλέψεις, πειράματα τύχης κ.α.) και μπορούν εύκολα να γίνουν αντιληπτές από διάφορες ηλικίες. Η αναζήτηση των αντιλήψεων και των πεποιθήσεων των μαθητών, των φοιτητών και των δασκάλων σχετικά με τις πιθανότητες, είναι το κυρίως θέμα που πραγματεύεται η συγκεκριμένη εργασία. Με τους όρους «αντίληψη» και «πεποίθηση», πραγματεύεται ο τρόπος με τον οποίο οι ερωτώμενοι κατανοούν, αισθάνονται και ερμηνεύουν ένα γεγονός. Επίσης, με τον όρο «στάση», πραγματεύεται η θέση των συμμετεχόντων της έρευνας απέναντι στη χρησιμότητα και τη διδακτική των πιθανοτήτων. Τέλος, λόγο του μεγάλου ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν, μελετώνται οι διαισθητικές παρανοήσεις που εμφανίζουν αρκετοί για έννοιες και καταστάσεις που εντάσσονται στη θεωρία των πιθανοτήτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρησιμότητα των μαθηματικών στη καθημερινή μας ζωή δεν χωράει αμφισβήτηση. Όπως υποστήριζε ο μεγάλος Κινέζος φιλόσοφος, Λάο Τσε, η χρησιμότητα των μαθηματικών φαίνεται όταν προσπαθήσει κανείς να φανταστεί τη ζωή του χωρίς αυτά (ΚΥΜΕ, 2016). Αναζητώντας βέβαια κανείς κλάδους των μαθηματικών που εφαρμόζονται άμεσα στην καθημερινότητα του ανθρώπου, δεν θα μπορούσε να λείπει μια ιδιαίτερη αναφορά στις πιθανότητες.

Η ενασχόληση των ανθρώπων με τα τυχερά παιχνίδια, η προσπάθεια πρόβλεψης των γεγονότων και γενικότερα οι διάφορες στοχαστικές διαδικασίες της καθημερινής ζωής, είναι παράγοντες άμεσης συσχέτισης με τις πιθανότητες. Η σημερινή κοινωνία και τα ενδιαφέροντα της, κάνουν αυτό τον κλάδο των μαθηματικών να φαντάζει ίσως και ο πιο ενδιαφέρον. Αυτό όμως που χρήζει περιέργειας είναι η αντίληψη των παιδιών και των δασκάλων τους για τις πιθανότητες. Τι σχέση έχει η αντίληψη αυτή με τις γνώσεις και την ηλικιακή βαθμίδα κάθε ανθρώπου και πώς αντιλαμβάνεται κάποιος ένα καθημερινό πρόβλημα πιθανοτήτων;

Οι περισσότερες έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς μελετάνε αντιλήψεις σε συγκεκριμένες έννοιες των πιθανοτήτων, λόγου χάρη ισοπίθανα ενδεχόμενα και όχι γενικά. Επίσης, στις ήδη υπάρχουσες έρευνες, υπάρχει έλλειψη διερεύνησης αντιλήψεων για έννοιες όπως τα ανεξάρτητα γεγονότα. Ακόμα πολλές έρευνες ασχολούνται με συγκεκριμένες ηλικίες, χωρίς να υπάρχει ένα ευρύ φάσμα, το οποίο θα δώσει τη δυνατότητα της σύγκρισης των αντιλήψεων των ερωτώμενων. Ενδιαφέρον, θα αποτελούσε ακόμα και η αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος από τις διάφορες ηλικίες.

Ένα πρόβλημα το οποίο φαίνεται να μην προβλέφθηκε από αρκετές έρευνες είναι ότι μελετάνε την αντίληψη των μαθητών για της πιθανότητες με χρήση ερωτηματολογίου, ωστόσο δεν διασφαλίζεται ότι η απάντηση του μαθητή προήλθε από τη πλήρη κατανόηση της ερώτησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να απαντάνε λάθος λόγο της δυσνόητης ερώτησης και όχι λόγο λανθασμένης αντίληψης της πιθανότητας. Ως συνέπεια των παραπάνω, κρίθηκε η αναγκαιότητα διεξαγωγής μιας έρευνας που να αντιμετωπίζει και να αποτρέπει τα παραπάνω προβλήματα. Ακόμα η σχεδίαση της έρευνας από έναν ερευνητή γνώστη του αντικειμένου, όσο και ο έλεγχος της ποιότητας και της αξιοπιστίας της, μέσα από τρία λογισμικά στατιστικής ανάλυσης, υψώνει ψηλά τον πήχη εγκυρότητας και αξιοπιστίας της παρούσας έρευνας.

Ως βασικοί στόχοι στην έρευνα τέθηκαν ακόμα και οι αντιλήψεις των ερωτώμενων για την εισαγωγή της τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Η χρήση της τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία, κρίνεται σήμερα απαραίτητη. Ιδιαίτερα σε έναν τομέα όπως τα μαθηματικά όχι μόνο βοηθάει στην επίλυση ενός προβλήματος, αλλά συμβάλει και στην καλύτερη κατανόηση του από τους μαθητές μέσω της αναπαράστασης των δεδομένων και των γραφικών παραστάσεων.

Η γνώση των αντιλήψεων των μαθητών και ευρύτερα των ανθρώπων, τόσο για τις πιθανότητες, όσο και για τη χρήση της τεχνολογίας στη τάξη βοηθάει στο σχεδιασμό ενός καλύτερου και αποδοτικότερου προγράμματος σπουδών. Η αλλαγή της συμπεριφοράς των διάφορων ηλικιών απέναντι στο ίδιο πρόβλημα, παρέχει πληροφορίες για το γνωστικό και νοητικό επίπεδο κάθε ηλικιακής βαθμίδας. Με άλλα λόγια, η σωστή χρήση των παραπάνω πληροφοριών από έναν εκπαιδευτικό συνεπάγεται την επιτυχή μάθηση.

Η παρούσα εργασία πιο συγκεκριμένα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της, παρατίθεται το θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης μέσα από την αναζήτηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Στη συνέχεια στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την έρευνα.

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων και στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Επίσης, δίνεται ένα ενδιαφέρων πρόβλημα που βασίζεται στη θεωρία πιθανοτήτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνεται μια ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της θεωρίας και αναλύεται η διδακτική της στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα καθώς και σε διαφορά εκπαιδευτικά συστήματα στο διεθνή χώρο.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια ανασκόπηση των αντιλήψεων των μαθητών για τις πιθανότητες από τη διεθνή βιβλιογραφία. Τονίζεται η σημαντικότητα της ανασκόπησης αντιλήψεων των μαθητών και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι αντιλήψεις και οι παρανοήσεις των μαθητών σε προβλήματα πιθανότητας.

Στη συνέχεια το τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους της παρούσας εργασίας, αναφέρεται στη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Το κεφάλαιο ξεκινάει γενικά με τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση και συνεχίζοντας το φαινόμενο ειδικεύεται στη χρήση της τεχνολογίας στα μαθηματικά και στις πιθανότητες.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρατίθενται οι έρευνα και οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις της. Στο κεφάλαιο λοιπόν με τον αριθμό 5, αναγράφονται οι στόχοι, οι σκοποί και η αναγκαιότητα της έρευνας. Συνεχίζοντας στο ίδιο κεφάλαιο περιγράφεται αναλυτικά η ερευνητική στρατηγική και παρουσιάζονται οι τρόποι που προσεγγίσθηκε το ζήτημα της έρευνας, τα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή δεδομένων, όπως επίσης και τα προγράμματα που χρειάστηκαν για την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Διαδεχόμενο το κεφάλαιο της μεθοδολογίας, ακολουθεί το κεφάλαιο των αποτελεσμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται υπό μορφή διαγραμμάτων ή πινάκων τα αποτελέσματα της έρευνας. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση και δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση το σχολιασμό και τη γνώμη του ερευνητή.

Η γνώμη του ερευνητή, παρουσιάζεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο. Το έβδομο κεφάλαιο λοιπόν, φιλοξενεί το σχολιασμό και την άποψη του ερευνητή για το ζήτημα, τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με προγενέστερες έρευνες, καθώς και τις εκπαιδευτικές συνέπιες των αποτελεσμάτων. Η μελέτη ολοκληρώνεται με ένα τελευταίο κεφάλαιο, όπου παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα και μερικές προτάσεις προς τους εκπαιδευτικούς και την πολιτεία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο τέλος της εργασίας, έχει τοποθετηθεί γλωσσάρι για τις διάφορες έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και παράρτημα, στο οποίο παρουσιάζονται τα ερωτηματολόγια της έρευνας.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}: ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Οι Batanero, Chernoff, Engel, Lee και Sánchez (2016), αναφέρουν στο άρθρο τους ότι: *«Οι πιθανότητες ουσιαστικά είναι μια τυπική ενθυλάκωση των διαισθητικών απόψεων της τύχης, που οδηγούν στην ιδέα της εκχώρησης αριθμών σε αβέβαια γεγονότα».* Όπως θα διαπιστώσει κανείς στο κεφάλαιο της ιστορικής αναδρομής των Πιθανοτήτων, αναπτύχθηκαν λόγω της ενασχόλησης του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια. Τα παιχνίδια αυτά όμως, δεν αποτελούν από μόνα τους μαθηματικά προβλήματα. Συνεπώς, αυτό που προέχει είναι το παιχνίδι να μαθηματικοποιηθεί. Έτσι, για τη μελέτη της Θεωρίας Πιθανοτήτων πρέπει κανείς να είναι εξοικειωμένος με την μοντελοποίηση μαθηματικών προβλημάτων και ιδιαίτερα προβλημάτων τυχαιότητας (Κοντογιάννης και Τουμπής 2015), όπως επίσης και από μια σειρά ορισμών και εννοιών που χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στην προκείμενη θεωρία.

1.1 Εισαγωγή στα Σύνολα

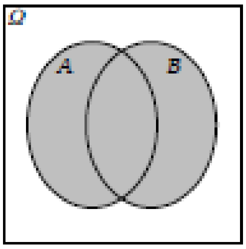
Η έννοια σύνολο ορίζεται στην καθημερινότητα, ως μια συλλογή αντικειμένων (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, 2010) και είναι ευρέως γνωστή στην καθομιλουμένη γλώσσα. Στα μαθηματικά αυτή η έννοια, άρχισε να υφίσταται χάρη στον George Boole (1815-1864), αλλά θεμελιώθηκε και αναπτύχθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό George Cantor (1845-1918), ο οποίος δικαίως θεωρείται και ο θεμελιωτής της «Θεωρίας Συνόλων» (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.).

Σύμφωνα με τον Cantor λοιπόν, έχουμε τον εξής ορισμό για το σύνολο: *«Σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων, οποιασδήποτε φύσεως, τα οποία είναι ορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους, συγκεντρωμένα σε μια ολότητα.»* (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.). Τα αντικείμενα αυτά που απαρτίζουν το σύνολο ονομάζονται στοιχεία του συνόλου (Κοντογιάννης και Τουμπής, ο.π.).

Αυτό που πρέπει να σημειωθεί εδώ, είναι η ανάγκη, τα σύνολα να είναι καλά ορισμένα, καθώς ο παραπάνω ορισμός μπορεί να οδηγήσει σε αντιφάσεις. Το πιο γνωστό παράδειγμα ενός συνόλου που δεν είναι καλά ορισμένο, είναι γνωστό ως «Το παράδοξο του Russel» (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.).

Κατά συνέπεια, σε ένα καλά ορισμένο σύνολο πρέπει κανείς να είναι σε θέσει να διακρίνει τα στοιχεία του. Τα σύνολα έχουν τρείς τρόπους γραφής, ανάλογα με την ανάγκη του εκάστοτε προβλήματος (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.). Ο πρώτος τρόπος, είναι αυτός της αναγραφής, όπου αναγράφονται όλα τα στοιχεία του συνόλου ένα προς ένα (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.). Ο δεύτερος τρόπος είναι πιο συνοπτικός και είναι ο τρόπος της περιγραφής. Σε αυτό τον τρόπο γραφής δεν αναγράφονται όλα τα στοιχεία του συνόλου, αλλά περιγράφονται με μια συγκεκριμένη ιδιότητα (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.). Τέλος, ο τρίτος τρόπος είναι αυτός της αναπαράστασης ενός συνόλου με την βοήθεια ενός σχήματος. Η αναπαράσταση αυτή, γίνεται με τη βοήθεια ενός γραφήματος, γνωστό ως διάγραμμα Venn (Βουγιουκλής, Δραμαλίδης, ο.π.). Παραδείγματα των τριών τρόπων γραφής, παρουσιάζονται παρακάτω.

- Αναγραφή: Α={1,2,3,4,5,6}.
- Περιγραφή: Α=$\{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 6\}$
- Διάγραμμα Venn:



Εικόνα 1.1: Διάγραμμα Venn για δύο σύνολα Α και Β (Κοντογιάννης και Τουμπής, 2015: 9)

Τελικά, η παρουσίαση ενός συνόλου πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μπορεί ο αναγνώστης να ελέγξει αν ένα στοιχείο ανήκει στο σύνολο ή όχι, αλλά και να μπορεί να ξεχωρίσει τα στοιχεία του. Για να δηλωθεί ότι ένα στοιχείο ανήκει στο σύνολο, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός x∈A, και διαβάζεται «το στοιχείο χ ανήκει στο σύνολο Α».

Παρακάτω δίνονται οι βασικοί ορισμοί και οι κανόνες των συνολοθεωριτικών πράξεων που απασχολούν τις πιθανότητες, όπως προκύπτουν από το βιβλίο των

Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Παπασταυρίδη, Πολύζο, Σβέρκο, Αδαμόπουλο και Δαμιανού (2017).

- Δύο σύνολα Α και Β που έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία, λέγονται ίσα. (Συμβολισμός Α=Β).
- Ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. (Συμβολισμός $A \subseteq B$)
- Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία (Συμβολισμός {} ή $\emptyset$).
- Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β. (Συμβολισμός AUB)
- Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β. (Συμβολισμός $A \cap B$).
- Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α . (Συμβολισμός A').
- Διαφορά δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν αποκλειστικά μόνο στο Α και δεν ανήκουν στο Β (Συμβολισμός Α-Β).

Τέλος δίνεται μια πολύ σημαντική έννοια, η οποία κρίνεται ως εξέχουσας σημασίας για τον κλασικό ορισμό της Πιθανότητας. Ο λόγος γίνεται για την έννοια: *Πληθάριθμος ή Πληθικός αριθμός*. Ως «Πληθικός αριθμός» ενός συνόλου Α, καλείται ο αριθμός που δηλώνει το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α και όπως στις περισσότερες βιβλιογραφίες, έτσι και στην παρούσα εργασία θα συμβολίζεται με Ν(Α) (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α., 2017).

1.2 Το Πείραμα

Πολλές φορές μέσα στη μέρα, γίνεται αναφορά στην έννοια της πιθανότητας ή σε κάποιο πρόβλημα το οποίο εμπεριέχει τη λύση του στη θεωρία των πιθανοτήτων. Ένα απλό πείραμα θα μπορούσε να ήταν η ρίψη ενός ζαριού ή ενός νομίσματος. Τι γίνεται λοιπόν, με τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου πειράματος;

Η έννοια πείραμα, όπως είναι λογικό, έχει να κάνει με ένα πρόβλημα της καθημερινότητας, το οποίο δημιουργήθηκε σκόπιμα για την ανάγκη εξαγωγής κάποιου συμπεράσματος πάνω σε ένα θέμα. Τα πειράματα χωρίζονται σε δύο ήδη. Το πείραμα που μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμα του, δεδομένου της γνώσης των συνθηκών κάτω από τις οποίες διαδραματίζεται, ονομάζεται *αιτιοκρατικό ή ντετερμινιστικό πείραμα* (Κουνιάς, Μωυσιάδης, 1995). Αντιθέτως, το πείραμα στο οποίο ο παρατηρητής δεν μπορεί να προβλέψει το αποτέλεσμα του, όποιες και να είναι οι συνθήκες καλείται *πείραμα τύχης* (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, ο.π.).

Η θεωρία των Πιθανοτήτων δεν ασχολείται με αιτιοκρατικά πειράματα, αλλά με πειράματα τύχης. Παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι η ρίψη ενός νομίσματος και η καταγραφή της όψης του ή η ρίψη ενός ζαριού και η καταγραφή της ένδειξης του, η επιλογή μιας κάρτας από μια τράπουλα ή ακόμα και η αυθαίρετη επιλογή μιας οικογένειας με δύο παιδιά και η εξέταση της ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους κ.α. (Κουνιάς, Μωυσιάδης, 1995· Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, 2016).

1.3 Δειγματικός χώρος και Ενδεχόμενα

Σε ένα τυχαίο πείραμα όπως προαναφέρθηκε, δεν μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμα που θα προκύψει, αλλά μπορούν να προβλεφθούν όλα τα δυνατά αποτελέσματα του. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος, ονομάζεται *Δειγματικός χώρος* του πειράματος (Ross,2010). Ο Δειγματικός χώρος ή αλλιώς Δειγματοχώρος του πειράματος συμβολίζεται συνήθως με Ω (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, ο.π.). Για παράδειγμα ο δειγματικός χώρος σε ένα πείραμα ρίψης ενός ζαριού, είναι $Ω=\{1,2,3,4,5,6\}$. Τα στοιχεία 1,2,3,4,5, και 6 του χώρου, ονομάζονται *δυνατά αποτελέσματα* ή *δυνατές περιπτώσεις* του πειράματος. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων ενός πειράματος τύχης είναι ο πληθικός αριθμός του Δειγματικού χώρου, οπότε στο συγκεκριμένο παράδειγμα γράφεται $N(Ω)=6$.

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης καλείται *απλό ενδεχόμενο* ή *απλό γεγονός* (Κουνιάς, Μωυσιάδης, 1995). Ένα σύνολο απλών ενδεχομένων ορίζεται ως *Ενδεχόμενο* ή *Γεγονός* (Κουνιάς, Μωυσιάδης, ο.π.), όλα τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου ονομάζονται *Ενδεχόμενα* (Ross,2010) και τα στοιχεία όπου αυτά αποτελούνται πιθανά αποτελέσματα (Ross,2010). Στη περίπτωση που το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι ένα πιθανό αποτέλεσμα ενός ενδεχομένου, τότε ορίζεται ότι το ενδεχόμενο πραγματοποιείται ή συμβαίνει.

Για παράδειγμα στο παραπάνω πείραμα με το ζάρι, μπορεί να οριστεί ένα ενδεχόμενο Α, το ενδεχόμενο να έρθει άρτιος. Τα πιθανά αποτελέσματα του ενδεχομένου είναι τα 2,4 και 6. Συνεπώς, το Α μπορεί να γραφεί Α={2,4,6} και το πλήθος των στοιχείων του είναι N(A)=3. Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται λοιπόν, εάν σε κάποια εκτέλεση του πειράματος έρθει ένας εκ των αριθμών 2, 4 ή 6, ενώ δεν πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Τέλος για οποιαδήποτε δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, όπως ακριβώς προβλέπει και η θεωρία συνόλων, μπορούν να οριστούν και οι πράξεις τους (Ross, 2010). Έτσι, αν υπάρχει ένα ακόμα ενδεχόμενο Β, το ενδεχόμενο να έρθει αριθμός μικρότερος του 3, τότε θα μπορούσε να οριστεί η ένωση των ενδεχομένων, η τομή, η διαφορά, όπως ακόμα και το συμπλήρωμα κάποιου ενδεχομένου.

- AUB={1,2,3,4,6}
- A∩B={2}
- A-B ={4,6}
- A′={1,3,5}
- B΄={4,5,6}

Τα ενδεχόμενα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή η τομή τους είναι κενή (A∩B=∅) λέγονται ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, ο.π.). Στις πιθανότητες, συνηθίζεται ο δειγματικός χώρος Ω να ονομάζεται ακόμα και βέβαιο ενδεχόμενο επειδή έχει 100% πιθανότητα να συμβεί και για τον αντίστοιχο λόγο το κενό, λέγεται αδύνατο ενδεχόμενο (Ross,2010).

1.4 Εισαγωγή στη Συνδυαστική

Η θεωρία των πιθανοτήτων, αξίζει να σημειωθεί ότι επηρεάζεται και εξαρτάτε άμεσα από τις αρχές της Συνδυαστικής. Πολλές φορές σε ένα καθημερινό πρόβλημα δεν έχει τόσο σημασία η καταγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή η εύρεση του

Δειγματοχώρου, όσο το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων. Λόγου χάρη, για να βρούμε την πιθανότητα κάποιος να κερδίσει το Τζόκερ, θα πρέπει πρώτα να βρεθούν και να καταγραφούν όλα τα δυνατά αποτελέσματα, που προκύπτουν από τους συνδυασμούς των αριθμών. Βέβαια, θα συμφωνήσει κανείς ότι αυτό είναι πρακτικά αδύνατο να γίνει χωρίς την βοήθεια υπολογιστή, αλλά ακόμα και να βρεθούν όλοι οι συνδυασμοί, είναι πάρα πολλοί. Αυτό που έχει σημασία λοιπόν στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να γνωρίζουμε πόσοι είναι όλοι αυτοί οι συνδυασμοί και όχι ποιοι είναι.

Η Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή ενδεχομένων (Κούτρας, 2006). Η ανάπτυξη των συνδυαστικών μεθόδων έδωσε λύσεις σε πολλά προβλήματα όπως αυτό που προαναφέρθηκε, χωρίς να περιορίζει την χρησιμότητα ή την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Οι βασικές αρχές που διέπουν τη Συνδυαστική, είναι η αρχή του Αθροίσματος και η αρχή του Γινομένου. Η αρχή του Αθροίσματος ή αλλιώς Προσθετική Αρχή, χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που η επιλογή των στοιχείων μπορεί να γίνει κατά ομάδες για να υπάρχει πιο εύκολη απαρίθμηση (Κούτρας, 2006). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να απαριθμήσουμε τους τρόπους που μπορεί κάποιος να ταξιδέψει μια ημέρα από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη, αν γνωρίζουμε ότι καθημερινά υπάρχουν 4 δρομολόγια του ΚΤΕΛ, 6 δρομολόγια του τρένου και 3 αεροπορικά. Η απάντηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα προέρχεται από την χρήση της προσθετικής αρχής, καθώς κάποιος μπορεί να ταξιδέψει ή μόνο με ΚΤΕΛ ή μόνο με τρένο ή μόνο με αεροπλάνο και άρα τελικά με 4+6+3=13 δυνατούς τρόπους. Η δεύτερη βασική αρχή της Συνδυαστικής, η αρχή του Γινομένου ή αλλιώς Πολλαπλασιαστική αρχή, χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που η επιλογή των στοιχείων μπορεί να γίνει σε πολλές διαφορετικές φάσεις και κάθε φάση επηρεάζει το πλήθος των επιλογών της επόμενης φάσης (Κούτρας, 2006). Χαρακτηριστικό παράδειγμα της συγκεκριμένης αρχής, είναι η κατασκευή ενός τετραψήφιου αριθμού, όπου στην πρώτη φάση (για το πρώτο ψηφίο) υπάρχουν 9 διαφορετικές επιλογές, στη δεύτερη φάση 10 διαφορετικέ επιλογές (εδώ μπορεί να μπει και το μηδέν), στην τρίτη ομοίως 10 και στη τέταρτη φάση πάλι 10 επιλογές. Τελικά συνολικά σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ διαφορετικοί συνδυασμοί για την κατασκευή ενός τετραψήφιου αριθμού.

Τα προβλήματα Συνδυαστικής και κατά συνέπεια αυτά των Πιθανοτήτων, ταξινομούνται ως προς δύο ανεξάρτητα κριτήρια (Κούτρας, 2006). Πιο συγκεκριμένα το πρώτο κριτήριο έχει να κάνει με τη σειρά καταγραφής, εάν έχει σημασία στο πρόβλημα (Διατάξεις - Μεταθέσεις) ή όχι (Συνδυασμοί) και το δεύτερο κριτήριο έχει να κάνει με το αν επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερο από μια φορές (επανάληψη ή όχι επανάληψη).

Παρακάτω εμφανίζεται ένας πίνακας σχετικά με τους τύπους της συνδυαστικής που είναι χρήσιμοι στη θεωρία των Πιθανοτήτων. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, σε ένα πρόβλημα που πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της συνδυαστικής, πρέπει να ακολουθούνται ορισμένα βήματα για την εύρεση του ακριβές τύπου. Αρχικά πρέπει να εξακριβωθεί στο πρόβλημα εάν είναι συνδυασμού ή διάταξης, δηλαδή εάν έχει σημασία η σειρά των αποτελεσμάτων ή όχι. Έπειτα πρέπει να παρατηρηθεί εάν το πρόβλημα επιτρέπει την επανάληψη ενός στοιχείου ή όχι και τέλος εάν υπάρχει κάποιος περιορισμός σχετικά με τον αριθμό των φορών χρήσης ενός στοιχείου. Με αυτό τον τρόπο καταλήγει κανείς στον τύπου που βρίσκει το συνολικό πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του προβλήματος.

Προτού παρατηρηθεί ο παρακάτω πίνακας θα ήταν καλό να δοθεί ο ορισμός του *«παραγοντικού»*. Το παραγοντικό που συμβολίζεται με ένα θαυμαστικό δίπλα στον αριθμό, σημαίνει τον πολλαπλασιασμό των διαδοχικών φυσικών αριθμών από το ένα μέχρι τον αριθμό αυτό. Γενικά δηλαδή, ισχύει ότι $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$. Λόγου χάρη, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Η χρησιμότητα του συμβολισμού αυτού, φαίνεται στους παρακάτω τύπους.

Πίνακας 1.1

Πίνακας τύπων συνδυαστικής και η χρήση τους (Κούτρας, 2006)

<table>
<tr><th>Είδος</th><th>Επανάληψη</th><th>Περιορισμός</th><th>Τύποι</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Διατάξεις, Μεταθέσεις</td><td rowspan="2">Με επανάληψη</td><td>Με περιορισμό ως προς το μέγιστο αριθμό φορών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα στοιχείο</td><td>Μετάθεση ν στοιχείων, όπου
το πρώτο εμφανίζεται ν_1 φορές, το δεύτερο ν_2 κτλ.
$\binom{\nu}{\nu_1, \nu_{2,\dots}, \nu_\nu} = \frac{\nu!}{\nu_1!\, \nu_2! \cdots \nu_\nu!}$</td></tr>
<tr><td>Χωρίς περιορισμό</td><td>υ^k</td></tr>
<tr><td colspan="2">Χωρίς επανάληψη</td><td>$(\upsilon)_k = \frac{\upsilon!}{(\upsilon - k)!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Συνδυασμοί</td><td colspan="2">Με επανάληψη</td><td>$\begin{bmatrix} \upsilon \\ k \end{bmatrix} = \frac{(\upsilon + k - 1)!}{k!\,(\upsilon - 1)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Χωρίς επανάληψη</td><td>$\binom{\upsilon}{k} = \frac{\upsilon!}{k! \cdot (\upsilon - k)!}$</td></tr>
</table>

1.5 Αξιωματική Θεμελίωση των Πιθανοτήτων και κλασικός ορισμός

Ένα κύριο χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, όπως προαναφέρθηκε, είναι η αβεβαιότητα για το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Επομένως, αν το Α είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με σιγουριά να προβλέψουμε αν το Α θα πραγματοποιηθεί ή όχι (Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, 2016). Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αντιστοιχίζει σε κάθε ενδεχόμενο Α έναν αριθμό, που εξηγείται ως το μέτρο της «προσδοκίας» με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή ενός αποτελέσματος (Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, ο.π.). Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του Α και τον συμβολίζουμε με P(A) (Ross,2010).

Έστω ένα πείραμα με Δειγματικό χώρο Ω. Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω ορίζεται και ικανοποιεί τα επιμέρους αξιώματα (Ross, ο.π.).

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. P(Ω)=1 (Ω= βέβαιο ενδεχόμενο)
3. Για κάθε ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots$ ισχύει ότι

$$P(\cup_1^n Ai) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με αυτά τα αξιώματα συμπεραίνεται ότι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να ανήκει στο ενδεχόμενο Α ορίζεται με έναν αριθμό από το 0 έως το 1 (Ross, ο.π.). Επίσης, με το αξίωμα 2 φανερώνεται ότι, το μόνο ενδεχόμενο το οποίο είναι σίγουρο ότι θα πραγματοποιηθεί (100% πιθανότητα) είναι το ίδιο το σύνολο Ω. Κανένα άλλο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης δεν έχει πιθανότητα πραγματοποίησης 100%, όπως επίσης και κανένα ενδεχόμενο δεν αποκλείεται ποτέ να πραγματοποιηθεί. Για αυτό λοιπόν, ορίζεται ως άμεση συνεπαγωγή των αξιωμάτων (2) και (3) ότι μηδενική πιθανότητα, είναι η πιθανότητα του κενού ενδεχομένου και συμβολίζεται $P(\emptyset)=0$. Τέλος, όπως γίνεται αντιληπτό, το τελευταίο αξίωμα εκφράζει ότι η πιθανότητα για οσαδήποτε ανεξάρτητα ενδεχόμενα, είναι το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων τους (Ross, ο.π.).

Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα που έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, ονομάζονται *ισοπίθανα ενδεχόμενα* (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, ο.π.). Σε πολλά πειράματα οι δυνατές περιπτώσεις του δειγματικού χώρου, έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν. Ας αναφερθεί για άλλη μια φορά το πείραμα με το ζάρι. Το συγκεκριμένο πείραμα έχει δειγματικό χώρο Ω={1,2,3,4,5,6} και η πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο Ε να έρθει ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως αυτή προκύπτει από τον κλασικό ορισμό της που δίνεται παρακάτω, είναι P(E) = $\frac{1}{6}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν και κυρίως τα αξιώματα (2) και (3), για ένα ενδεχόμενο Α, προκύπτει ο κλασικός ορισμός πιθανότητας (Ross, ο.π.).

$$P(A)=\frac{\alpha\rho\iota\theta\mu ός\ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu άτων\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu έ\nu o\upsilon}{\alpha\rho\iota\theta\mu ός\ \alpha\pi o\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\mu άτων\ \tau o\upsilon\ \Omega}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

<u>Παράδειγμα κλασικού ορισμού Πιθανότητας</u>

Ο πολιτιστικός σύλλογος ενός χωριού, θέλει να δημιουργήσει μια πενταμελή επιτροπή. Τα συνολικά άτομα που απαρτίζουν το σύλλογο, είναι 15, από τα οποία 6 γυναίκες και 9 άνδρες. Αν η επιλογή της πενταμελούς επιτροπής γίνει τυχαία, ποια η πιθανότητα, να αποτελείται από 3 άνδρες και δύο γυναίκες;

Για τη λύση του παραπάνω προβλήματος, θα χρειαστεί να γίνει η υπόθεση ότι το Α είναι το ενδεχόμενο, η επιτροπή να αποτελείται από τρεις άνδρες και δύο γυναίκες. Στη συνέχεια θα πρέπει να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων και το πλήθος των πιθανών αποτελεσμάτων του παραπάνω πειράματος. Δηλαδή με τους συμβολισμούς της θεωρίας Πιθανοτήτων, τα Ν(Ω) και Ν(Α). Η χρήση της συνδυαστικής σε συνδυασμό με τον κλασικό ορισμό Πιθανότητας, δίνουν τη λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

$\binom{6}{2}$= 15 είναι ο αριθμός των επιλογών 2 γυναικών από τις 6.

$\binom{9}{3}$= 84 είναι ο αριθμός των επιλογών 3 άνδρες από τους 9.

Και σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι όλοι οι συνδιασμοί του ενδεχομένου Α είναι: Ν(Α)= $15 \cdot 84$ = 1260

Ν(Ω) = $\binom{15}{5}$ = 3003 είναι ο αριθμός όλων των δυνατών συνδυασμών του πειράματος

Η πιθανότητα για αυτό το ενδεχόμενο είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}}=\frac{1260}{3003}=0{,}4195$$

Ο κλασικός ορισμός πιθανότητας που δόθηκε παραπάνω, συνοδεύεται και από κάποιους κανόνες λογισμού που αξίζουν να παρουσιαστούν. Οι Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων αποδεικνύονται εύκολα και είναι οι εξής:

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει: P(AUB)=P(A)+P(B) (Ross, ο.π.).
2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει: P(A΄)=1-P(A) (Ross, ο.π.).
3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B) (Ross, ο.π.).
4. A⊆B, τότε P(A)≤P(B) (Ross, ο.π.).
5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει P(A-B)=P(A)-P(A∩B) (Ross, ο.π.).

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί, πως ο παραπάνω ορισμός πιθανότητας δεν αρκεί για την περίπτωση άπειρων και μη αριθμήσιμων χώρων πιθανότητας. Ο λόγος μπορεί να φανεί από το εξής παράδειγμα, όπως προκύπτει από το βιβλίο των Κοντογιάννη και Τουμπή (2015).

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε την έννοια ενός τυχαίου «πραγματικού αριθμού» στο διάστημα [0,1]. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ενδεχόμενο Α θα είναι υποσύνολο του διαστήματος [0,1]. Το Α είναι το ενδεχόμενο ο τυχαίος αυτός αριθμός να ανήκει στο ίδιο το Α. Λόγου χάρη, αν Α = [0,1/2], τότε θα θέλαμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας, που να περιγράφει ότι η πιθανότητα ενός τυχαίου πραγματικού αριθμού που βρίσκεται στο διάστημα ανάμεσα στο 0 και το 1, να είναι μικρότερος ή ίσος με 1/2, είναι ίση με 1/2. Δηλαδή, να ισχύει ότι P(A) = 1/2. Συμπερασματικά, αυτό που αναζητείται είναι, για κάθε υποσύνολο Χ του [0,1], η τιμή του μέτρου πιθανότητας P(X) να είναι ίση με το μήκος αυτού του διαστήματος.

Αυτό που πρέπει να σημειωθεί όμως στο παρόν σημείο, είναι ότι μπορεί να αποδειχθεί πως δεν είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο πιθανότητας στο [0,1], το οποίο να ικανοποιεί και τις τρεις συνθήκες του κλασικού ορισμού της πιθανότητας και επιπροσθέτως να δίνει για κάθε υποσύνολο Χ του [0,1], ότι το P(X) ισούται με το μήκος του Χ υποδιαστήματος. Η αιτία της δυσκολίας αυτής, όπως οι Κοντογιάννης και Τουμπής σχολιάζουν, χρεώνεται στην ύπαρξη *«κάποιων πολύ πολύπλοκων, κατά κάποιον τρόπο παθολογικών, υποσυνόλων του [0,1]».* Η λύση του ζητήματος αυτού, είναι να περιοριστούν τα υποσύνολα του αρχικού χώρου πιθανότητας [0,1], όπου απαιτείται να ορίζεται το μέτρο πιθανότητας.

Αυτή η παρατήρηση αποτελεί την έναρξη μια άλλης περιοχής της ανάλυσης, η οποία ονομάζεται θεωρία μέτρου. Γενικά ισχύει ότι, όταν ο χώρος πιθανότητας δεν είναι αριθμήσιμος, υπάρχουν κάποια σπάνια ενδεχόμενα για τα οποία δεν είναι δυνατό να οριστεί η πιθανότητά τους (Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.).

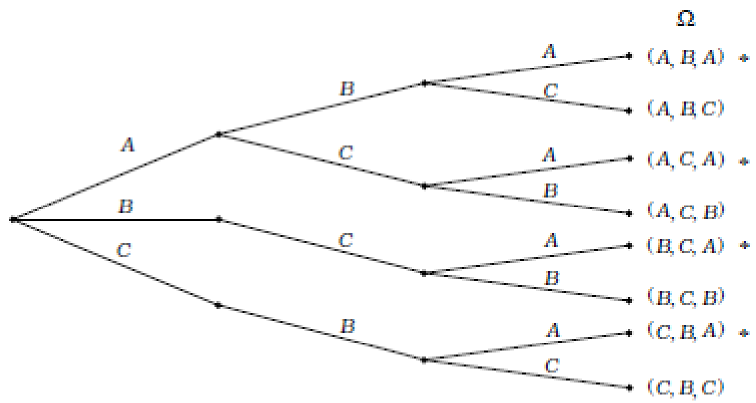
1.6 Ένα ενδιαφέρον Πρόβλημα

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο παρατίθεται ένα ενδιαφέρον και πολύ γνωστό παράδειγμα στη διεθνή βιβλιογραφία, το παιχνίδι « Monty Hall». Το Monty Hall ήταν ένα πολύ γνωστό παιχνίδι της αμερικανικής τηλεόρασης, το οποίο είχε μεγάλη απήχηση στο κοινό και λόγο του μαθηματικού ενδιαφέροντος που παρουσίαζε, απασχόλησε αρκετά την μαθηματική κοινότητα.

Στο τηλεπαιχνίδι υπάρχουν τρεις κουρτίνες και πίσω από μια από αυτές κρύβεται ένα δώρο. Ο διαγωνιζόμενος επιλέγει μία από τις τρεις κουρτίνες, χωρίς βέβαια, να γνωρίζει ποια κρύβει το δώρο (Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.). Μετά από την επιλογή της κουρτίνας του διαγωνιζόμενου, ο παρουσιαστής ανοίγει μία από τις άλλες δύο κουρτίνες που έμειναν και δείχνει ότι εκεί δεν υπάρχει τίποτα. Ο διαγωνιζόμενος σε αυτό το σημείου το παιχνιδιού, έχει τη δυνατότητα να κρατήσει την αρχική του κουρτίνα ή να αλλάξει την κουρτίνα του με την κλειστή κουρτίνα που απέμεινε(Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.). Αφού ο διαγωνιζόμενος αποφασίσει λοιπόν αν θα αλλάξει την κουρτίνα του ή όχι, το παιχνίδι τελειώνει με νίκη ή με ήττα του, ανάλογα με την κουρτίνα που βρίσκεται το δώρο (Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.).

Για την επίλυση του εν λόγο προβλήματος, οι κουρτίνες μπορούν να οριστούν με τα σύμβολα A, B και C (Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.). Μπορεί να θεωρηθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το δώρο βρίσκεται πίσω από την κουρτίνα A. Τα αποτελέσματα παρακάτω, θα περιγράφουν τριάδες της μορφής (X, X, X), όπου τα X παίρνουν τιμές A, B ή C, και το πρώτο στοιχείο δείχνει την αρχική επιλογή του διαγωνιζόμενου, το δεύτερο την κουρτίνα που αποκαλύφθηκε από τον παρουσιαστή, και το τρίτο την τελική κουρτίνα που επέλεξε ο διαγωνιζόμενος (Κοντογιάννης, Τουμπής, ο.π.).

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα δενδροδιάγραμμα όπου βοηθάει στην επεξήγηση του πειράματος, παρουσιάζοντας όλα τα δυνατά αποτελέσματα του. Το δενδροδιάγραμμα είναι ένας εύκολος και εύχρηστος τρόπος που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί, για την εύρεση και παρουσίαση του Δειγματοχώρου, ώστε να μην χαθεί κάποιο δυνατό αποτέλεσμα και να είναι εύκολα κατανοητό από κάποιον αναγνώστη. Όπως φαίνεται παρακάτω, λοιπόν, για το πρώτο στοιχείο υπάρχουν 3 επιλογές για ποια κουρτίνα θα διαλέξει ο διαγωνιζόμενος. Για το δεύτερο στοιχείο υπάρχουν 2 επιλογές αν ο διαγωνιζόμενος έχει αρχικά επιλέξει την κουρτίνα με το δώρο, ενώ υπάρχει μόνο μία αν ο διαγωνιζόμενος έχει επιλέξει κενή κουρτίνα, διότι δεν μπορεί ο παρουσιαστής να ανοίξει την κουρτίνα με το δώρο. Τέλος, για το τρίτο στοιχείο, υπάρχουν πάντα δύο επιλογές, η επιλογή να διατηρήσει την κουρτίνα του και η επιλογή να την αλλάξει. Ο αντίστοιχος χώρος πιθανότητας Ω παρουσιάζεται στο παρακάτω δενδροδιάγραμμα και περιέχει τις 8 δυνατές τριάδες.



Εικόνα 1.2: Δενδροδιάγραμμα για την εύρεση των Δυνατών Αποτελεσμάτων (Κοντογιάννης και Τουμπής, 2015)

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα καταγράφεται ο δειγματικός χώρος του πειράματος ως εξής:

Ω={(A,B,A), (A,B,C), (A,C,A), (A,C,B), (B,C,A), (B,C,B), (C,B,A), (C,B,C)}

Κατά συνέπεια, διαπιστώνεται ότι N(Ω)= 8. Άρα οποιαδήποτε ερώτηση και αν τεθεί πλέον απαντάται με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Για παράδειγμα, ας βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Ε, ο διαγωνιζόμενος να κερδίσει χωρίς να αλλάξει την αρχική του επιλογή. Αφού υποτέθηκε στην αρχή ότι το δώρο βρίσκεται πίσω από την κουρτίνα Α, αναζητάτε η πιθανότητα ο διαγωνιζόμενος να επιλέξει στην αρχή τη κουρτίνα Α και καταλήξει με τελική επιλογή επίσης τη κουρτίνα Α. Σύμφωνα λοιπόν, με το Δειγματικό χώρο του παραπάνω πειράματος, προκύπτει ότι N(E) = 2 και από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα να κερδίσει ο διαγωνιζόμενος είναι $P(E) = \frac{2}{8} = 0{,}25$ ή 25%. Ενώ, αν ονομαστεί Λ, το ενδεχόμενο ο διαγωνιζόμενος να κερδίσει ανεξάρτητα από την αρχική του επιλογή, τότε σημασία έχει να καταλήξει με τη κουρτίνα Α. Από το δενδροδιάγραμμα λοιπόν, προκύπτει ότι N(Λ)=4. Άρα η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $P(Λ) = \frac{4}{8} = 0{,}5$ ή 50%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο} : ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΣΤΟ ΔΙΕΘΝΗ ΧΩΡΟ

Ο Wilder αναφέρει στο βιβλίο του το 1986, ότι για να κατανοήσει κανείς σε βάθος μια επιστήμη, θα πρέπει να αναζητήσει την ιστορία της. Τα πολιτικά δρόμενα, τα κοινωνικά προβλήματα και οι καταστάσεις, είναι παράγοντες που επηρεάζουν την εξέλιξη της επιστήμης (Wilder, 1986). Πολλοί επιστήμονες, ενστερνίζονται την άποψη του Wilder, ότι η επιστήμη όπως τη γνωρίζουμε σήμερα δεν οφείλεται μόνο στις βιογραφίες μεγάλων επιστημόνων, αλλά και στον κοινωνικό τους περιβάλλον.

2.1 Ιστορική αναδρομή

Οι πιθανότητες είναι ένας σχετικά νέος κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με την τυχαιότητα και την μελέτη της πιθανότητας να προβλεφθεί το αποτέλεσμα ενός πειράματος. Ο μεγάλος μαθηματικός-αστρονόμος Marquis de Laplace πίστευε ότι οι πιθανότητες, μια επιστήμη που προήλθε από τη μελέτη των τυχερών παιχνιδιών, είχαν τις προδιαγραφές να γίνουν το πιο σημαντικό πεδίο της ανθρώπινης γνώσης (Ross,2010). Σήμερα ο λογισμός των πιθανοτήτων είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για πολλούς ερευνητές, σε κάθε κλάδο της επιστήμης (Ross, op. cit.).

Το δύσκολο βέβαια, για να βρει κανείς τις ρίζες της επιστήμης αυτής, είναι ότι είχε προκαλέσει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον στο παρελθόν. Τόσο οι μαθηματικοί, όπως ήταν αναμενόμενο, όσο και απλοί λαϊκοί άνθρωποι ασχολήθηκαν με τη συγκεκριμένη επιστήμη (Lightner, 1991). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα οι «Πιθανότητες» να ξεκινήσουν σαν μια εμπειρική επιστήμη και αργότερα να γνωστοποιηθούν σαν μαθηματική επιστήμη (Lightner, op. cit.).

Οι αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι είχαν ασχοληθεί με τυχερά παιχνίδια, ωστόσο δεν ήταν αυτοί που «άνοιξαν τον δρόμο» για τη μελέτη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, 2016). Η ελληνική παράδοση βασίζεται στην πλατωνική φιλοσοφία, στα αξιώματα των μαθηματικών, καθώς και στην ομορφιά της συμμετρίας και της γεωμετρίας και για αυτό τον λόγο οι αρχαίοι Έλληνες δεν ασχολήθηκαν με την τυχαιότητα (Borovcnik, Kapadia, 2014).

Το πρώτο πρόβλημα πιθανοτήτων που γνωστοποιήθηκε ήταν το 1494 από τον Pacioli (1447–1517), ο οποίος δεν κατάφερε να δώσει σωστή λύση, καθώς δεν είχε αναπτυχθεί ακόμα η θεωρία των πιθανοτήτων (Χαραλαμπίδης, 2002). Πολλές προσπάθειες είχαν γίνει για την επίλυση του εν λόγο προβλήματος, καθώς και πολλών άλλων προβλημάτων που πρόκυπταν από τα τυχερά παιχνίδια κυρίως, όπως ήταν αυτά με τις κάρτες και την πιθανότητα να τραβήξει κανείς άσσο ή τη ρίψη των δύο ζαριών και την πιθανότητα να έρθει άθροισμα επτά, όπου μελέτησε ο Ιταλός μαθηματικός Girolamo Cardano (1501-1576) (Lightner, op. cit.).

Στο πρόβλημα του Pacioli, η λύση ήρθε το 1654 με τον Pascal και τον Fermat να προτείνουν τη σωστή απάντηση, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο (Χαραλαμπίδης, ο.π.). Η ημερομηνία αυτή σηματοδοτεί την αρχή του Λογισμού των Πιθανοτήτων. Ο Pascal (1623-1662) και ο Fermat (1608-1665) έπειτα από αλληλογραφία τους, διατύπωσαν για πρώτη φορά γενικές μεθόδους για τον υπολογισμό πιθανοτήτων (Χαραλαμπίδης, ο.π.). Η πρώτη πραγματεία της θεωρίας όμως, δημοσιεύεται μερικά χρόνια αργότερα, το 1658, από τον Ολλανδό μαθηματικό Huyghens.

Η πραγματεία αυτή, σχολιάστηκε στο έργο του James Bernoulli (1654-1705), το οποίο δημοσιεύθηκε το 1713, μερικά χρόνια μετά το θάνατο του, από έναν ανιψιό του, τον Nicolas Bernoulli (Todhunter, 2014). Το έργο του James Bernoulli χωρίζεται σε τέσσερα μέρη. Στο πρώτο μέρος είναι η σχολιασμένη πραγματεία του Huyghens. Στο δεύτερο μέρος μιλάει για τη συνδυαστική. Το τρίτο μέρος της εργασίας είναι αφιερωμένο στη λύση διάφορων προβλημάτων των πιθανοτήτων και τέλος ακολουθεί το τέταρτο μέρος, το οποίο ο συγγραφέας δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει, σχετικά με τη χρήση των πιθανοτήτων στη ψυχολογία και στην οικονομία (Χαραλαμπίδης, ο.π.).

Οι έννοια των πιθανοτήτων άρχισε να γίνεται ευρέως γνωστή και όλο και περισσότεροι επιστήμονες να ασχολούνται με αυτόν τον νέο κλάδο των μαθηματικών. Ο P. Montmort (1678-1719) με το βιβλίο του το 1708, συνέβαλλε στη διάδοση του «νέου κόσμου» των Πιθανοτήτων, στη μαθηματική κοινότητα (Todhunter, op. cit.). Η ποιο σημαντική συμβολή όμως σε αυτό το κομμάτι, ήταν η εργασία και το βιβλίο του Abraham De Moivre (1667-1754). Ο De Moivre έκδωσε την πρότυπη έκδοση του βιβλίου του το 1718. Σε αυτό το βιβλίο ανέλυσε τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων και τους επεξηγούσε με πολλαπλά παραδείγματα (Χαραλαμπίδης, ο.π.).

Ανέλυσε ακόμα τα θεωρήματα και αντιμετώπισε ορισμένα προβλήματα των προκατόχων του (Χαραλαμπίδης, ο.π.).

Ο Λογισμός των πιθανοτήτων άρχισε πλέον να μεγαλώνει και να ελκύει σημαντικές προσωπικότητες των μαθηματικών. Οι Euler (1707-1783), D'Alembert (1717-1783), Thomas Bayes (1702-1761), Laplace (1749-1827) και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της ιστορίας, ο Carl Friedrich Gauss (1777-1866), είναι μερικοί από αυτούς (Borovcnik, Kapadia, ο.π.). Ο Euler ασχολήθηκε με πολλούς τομείς των μαθηματικών και όχι τόσο με τη θεωρία Πιθανοτήτων. Ωστόσο, έκανε μερικές σημαντικές εργασίες για τις πιθανότητες. Από την άλλη, ο D'Alembert δεν είναι γνωστός για τις εργασίες του, όσο για τις αντιρρήσεις που έφερνε στα προβλήματα πιθανότητας και στα θεωρήματα τους. Πολλά παράδοξα και λάθη αποφεύχθηκαν χάρη στην φήμη του (Χαραλαμπίδης, ο.π.).

Ο Thomas Bayes με δύο εργασίες του, το 1763 και το 1764 συμπλέκετε με σημαντικά τμήματα των πιθανοτήτων (Χαραλαμπίδης, ο.π.). Σήμερα είναι γνωστός για την λεγόμενη «Φόρμουλα του Bayes» (Borovcnik, Kapadia, ο.π.). Τέλος, ο Laplace και ο Gauss ήταν αυτοί που «πήραν τα σκήπτρα» και προσέφεραν τα μέγιστα στη Θεωρία των Πιθανοτήτων (Borovcnik, Kapadia, ο.π.). Ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός Laplace, ανέπτυξε τη φόρμουλα του Bayes και θεωρείτε από τους δημιουργούς της «κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων» που γνωρίζουμε σήμερα (Borovcnik, Kapadia, ο.π.). Επίσης, ανέπτυξε τη θεωρία των γεννητριών συναρτήσεων, όπου αποτελούν σημαντικό μέσο για τον χειρισμό προβλημάτων στις πιθανότητες και στη συνδυαστική (Χαραλαμπίδης, ο.π.). Μια σειρά από δημοσιεύσεις, βιβλία και η μελέτη του για τις γεννήτριες συναρτήσεις, έδωσαν μεγάλη ώθηση στον κλάδο και ανοίχτηκαν δρόμοι για περεταίρω εφαρμογές και εργασίες (Todhunter, op. cit.).

Όσον αφορά τον Γερμανό μαθηματικό «γίγαντα», βασιζόμενος κυρίως στους Pascal-Fermat, διατύπωσε και απέδειξε μια σειρά από θεμελιώδη θεωρήματα, με ποιο γνωστό το «Κεντρικό Οριακό Θεώρημα». Το έργο του Gauss αποτελεί την βάση όλης της σύγχρονης Θεωρίας Πιθανοτήτων (Κοντογιάννης και Τουμπής 2015). Χάρη στον Gauss οι πιθανότητες από μια σειρά σκόρπιων ασκήσεων και θεωρημάτων, έγιναν επιστημονικός κλάδος των μαθηματικών (Κοντογιάννης και Τουμπής ο.π.).

Φτάνοντας έτσι στον 20ο αιώνα και στο έργο των Andrei A. Markov (1856-1922) και Andrei N. Kolmogorov (1903-1987). Ο Markov μελέτησε τις ακολουθίες συσχετισμένων δειγμάτων, γνωστές σήμερα ως «αλυσίδες Markov», οι οποίες χρησιμοποιούνται κυρίως σε διάφορες ιστοσελίδες στο διαδίκτυο (Κοντογιάννης και Τουμπής ο.π.). Ενώ ο Ρώσος μαθηματικός Andrei N. Kolmogorov, το 1933 (όπου λογίζεται ως ο πιο πρόσφατος μεγάλος σταθμός της θεωρίας πιθανοτήτων, η οποία μέχρι τότε δεν είχε θεμελιωθεί αξιωματικά), πέτυχε τόσο την αξιωματική θεμελίωση της «θεωρίας», αλλά και με το έργο του επηρεάζει την επιστημονική εξέλιξη μέχρι και σήμερα (Κοντογιάννης και Τουμπής ο.π.).

2.2 Βασικές έννοιες των Πιθανοτήτων στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται τα κεφάλαια και οι παράγραφοι των σχολικών βιβλίων του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος σχετικά με το αντικείμενο των Πιθανοτήτων από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο. Γίνεται μια σύντομη αναφορά στο σημείο και στον τρόπο που ξεκινάει η εισαγωγή και η διδαχή των σχετικών εννοιών και αναλύονται κάποιες ενδεικτικές δραστηριότητες σε κάθε τάξη. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σχολικά βιβλία περιέχουν ποικίλες ασκήσεις πραγματολογικής, εννοιολογικής ή και διαδικαστικής γνώσης, εφαρμοσμένες σε διάφορα πλαίσια με ανάλυση γραπτού κειμένου ή και εικόνων (Krathwohl, 2002), οι οποίες θα ήταν πρακτικά αδύνατο να σχολιαστούν όλες στην παρούσα εργασία.

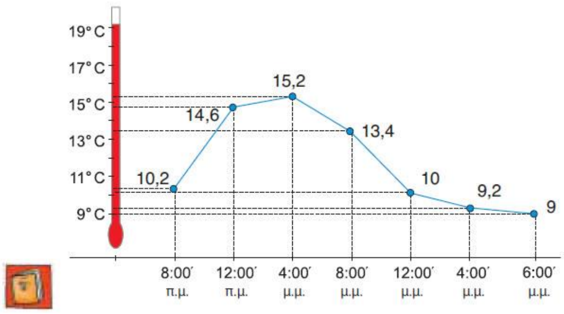
Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, λοιπόν, οι μαθητές αργούν να έρθουν σε επαφή με τις έννοιες «Πιθανότητα» και «Στατιστική». Τα παιδία μαθαίνουν την έννοια «Πιθανότητα» στην ηλικία των 12 με 13 χρονών. Ωστόσο, διάφορες προκαταρκτικές έννοιες αρχίζουν να δομούνται από πιο μικρή ηλικία. Στις πρώτες τάξεις του δημοτικού τα παιδιά μαθαίνουν να ξεχωρίζουν διαγράμματα, να αναλύουν τα αποτελέσματα τους, να βρίσκουν τον μέσο όρο και να συζητούν πάνω σε μια συγκεκριμένη ιδιότητα ενός συνόλου. Η πρώτη ουσιαστική επαφή όμως με βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, όπως «πληθυσμός» και «δείγμα» γίνεται λίγο αργότερα.

Στην Ε΄ Δημοτικού για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο σχολικό βιβλίο των Κακαδιάρη, Μπελίτσου, Στεφανίδη και Χρονοπούλου, τα παιδιά έχουν την πρώτη τους επαφή με τον «πληθυσμό». Βέβαια, οι συγγραφείς δεν δίνουν την έννοια του πληθυσμού ξεκάθαρα, ωστόσο τα παιδιά ξεχωρίζουν το «σύνολο-πληθυσμό» για την ανάγκη της μελέτης του μέσου όρου ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του. Αυτό συνεχίζεται και στη ΣΤ΄ Δημοτικού στο βιβλίο των Κασσιώτη, Κλιάπη και Οικονόμου, όπου η έννοια του μέσου όρου ξαναβρίσκεται στην ύλη. Σε αυτή την ηλικία ακόμα, τα παιδιά μαθαίνουν να ομαδοποιούν δεδομένα, καθώς και να διαβάζουν γραφήματα, όπως εικονογράμματα και ραβδογράμματα, διαδικασίες που συντελούν στην ανάπτυξη της πιθανοτικής τους σκέψης.

Παρακάτω εμφανίζονται δύο ενδεικτικές δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου της΄Ε και της ΄ΣΤ Δημοτικού αντίστοιχα. Οι δραστηριότητες αυτές και των δύο τάξεων χαρακτηρίζονται από διαδικαστική γνώση, καθώς τα παιδιά πρέπει να ξέρουν να διαβάζουν το διάγραμμά και τα γραφήματα για να απαντήσουν στις ερωτήσεις (Krathwohl, op. cit.). Η εφαρμογή των γνώσεων γίνεται σε καθημερινό πλαίσιο με ανάλυση απεικονιστικών στοιχείων, αφού υπάρχουν γραφήματα και διαγράμματα (Krathwohl, op. cit.). Όσον αφορά την ταξινόμηση και την τυπικότητα των δραστηριοτήτων, η ταξινόμηση κρίνεται ισχυρή αφού οι απαντήσεις βασίζονται αποκλειστικά και μόνο στην ανάλυση των γραφημάτων και η τυπικότητα μέση τόσο λόγο των γραφημάτων, αλλά και των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται (Dimopoulos, Koulaidis, Sklaveniti, 2003).

<u>Δραστηριότητα΄Ε Δημοτικού</u>

Παρατηρώ και καταγράφω την εξέλιξη της θερμοκρασίας της ημέρας Παρασκευής.



Εικόνα 2.1: Διάγραμα Θερμοκρασίας-Χρόνου (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, Χρονοπούλου, 2013)

- *Πόση είναι η μέση θερμοκρασία της Παρασκευής κατά τη διάρκεια της ημέρας; Τη σχεδιάζω με μια κόκκινη γραμμή.*

- *Το Σάββατο είχαμε την ίδια μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της ημέρας. Ποιες μπορεί να είναι οι τιμές της θερμοκρασίας που μετρήσαμε;*

(Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, Χρονοπούλου, 2013).

Δραστηριότητα ΄ΣΤ Δημοτικού

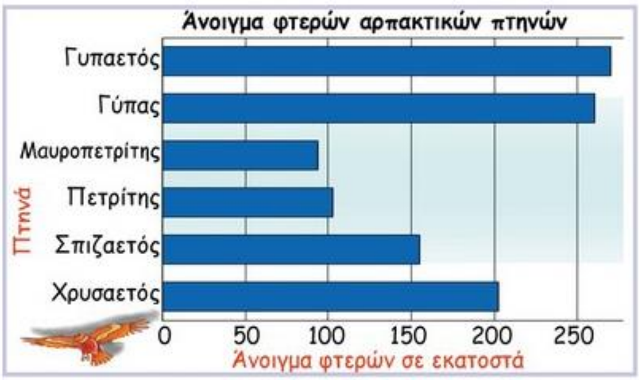
Το γράφημα είναι ένας τρόπος για να μελετήσεις ή να παρουσιάσεις δεδομένα. Παρακάτω παρουσιάζονται στοιχεία για κάποια πουλιά με δύο διαφορετικούς τρόπους.

- *Ποιο πουλί έχει το μεγαλύτερο άνοιγμα φτερών; Χρησιμοποίησες τον πίνακα ή το γράφημα για να το βρεις;*

- *Πόσο ακριβώς είναι το άνοιγμα των φτερών του γυπαετού; Αυτήν την πληροφορία ποια από τις δύο παρουσιάσεις σου την προσφέρει ευκολότερα;*

(Κασσιώτη, Κλιάπης, Οικονόμου, 2013).

Άνοιγμα φτερών αρπακτικών πτηνών	
Πτηνά	Άνοιγμα φτερών σε εκ.
Γυπαετός	270
Γύπας	260
Μαυροπετρίτης	94
Πετρίτης	103
Σπιζαετός	155
Χρυσαετός	203



Εικόνα 2.2: Πίνακας με άνοιγμα φτερών και αντίστοιχο ραβδόγραμμα (Κασσιώτη, Κλιάπης, Οικονόμου, 2013)

Το πέρασμα από το δημοτικό στο γυμνάσιο είναι εμφανές από θέμα μαθηματικής αυστηρότητας. Οι απλές διαδικασίες και πράξεις, δίνουν πλέον τη θέση τους σε ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς και τύπους. Στη Β΄ Γυμνασίου, στο τέταρτο κεφάλαιο της άλγεβρας, δίνονται ρητά οι μαθηματικές έννοιες «πληθυσμός», «δείγμα» και «μεταβλητή». Η εισαγωγή των εννοιών γίνεται με ένα παράδειγμα (όπως η δραστηριότητα που ακολουθεί) για να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαφορά των εννοιών, αλλά και για να εισαχθούν στις βασικές αρχές της στατιστικής (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, Ρεκούμης, 2012). Η παρακάτω δραστηριότητα είναι πραγματολογικής γνώσης, δομημένη σε ένα καθημερινό πλαίσιο και δοσμένη με ανάλυση γραπτού κειμένου (Krathwohl, op. cit.). Η τυπικότητα και η ταξινόμηση της παρακάτω δραστηριότητας, κρίνονται ταυτόχρονα υψηλές (Dimopoulos, Koulaidis, Sklaveniti, op. cit.).

Δραστηριότητα ΄Β Γυμνασίου

Για να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα των ερχομένων βουλευτικών εκλογών, ρωτήσαμε 3.000 φοιτητές για το κόμμα που θα ψηφίσουν.

α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

β) Αν οι φοιτητές προτίμησαν τα κόμματα Α, Β, Γ με ποσοστά 40%, 35% και 25% αντίστοιχα, να βρείτε πόσοι από αυτούς προτίμησαν το Α κόμμα, πόσοι το Β και πόσοι το Γ;

(Βλάμος , Δρούτσας, Πρέσβης, Ρεκούμης 2012: 87).

Η έννοια «Πιθανότητα» εμφανίζεται για πρώτη φορά στο βιβλίο της Γ΄ γυμνασίου στο πέμπτο κεφάλαιο της άλγεβρας και παράγραφο 5.3 (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης, 2013). Οι δύο πρώτες παράγραφοι του κεφαλαίου έχουν να κάνουν με βασικές έννοιες, για να εντάξουν τα παιδιά ομαλά στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Η πρώτη παράγραφος λοιπόν αναφέρεται στα σύνολα και τις πράξεις τους, ενώ η δεύτερη δίνει τους ορισμούς του *δειγματικού χώρου*, του *πειράματος τύχης* και των *ενδεχομένων*. Στόχος των παραγράφων αυτών είναι να αφυπνίσουν την πιθανοτική σκέψη των μαθητών και να τους εντάξουν στις βασικές έννοιες που θα χρειαστούν. Τέλος, εισάγεται ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας με τη χρήση παραδειγμάτων, αλλά και τους βασικούς κανόνες λογισμού πιθανοτήτων, χωρίς τις αποδείξεις τους (Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης, ο.π.). Το σχολικό βιβλίο της συγκεκριμένης τάξης, παρουσιάζει αρκετά λυμένα παραδείγματα στο μαθητή, για να τον διευκολύνει στη κατανόηση των τύπων και των ορισμών. Στην παρούσα φάση, να σημειωθεί, ότι ζητείται από τους μαθητές η απλή χρήση των τύπων, η κατανόηση των εννοιών και απλές ασκήσεις για την εύρεση του δειγματικού χώρου και της πιθανότητας, όπως η ενδεικτική δραστηριότητα που φαίνεται παρακάτω. Η δραστηριότητα αυτή είναι πραγματολογικής γνώσης (Krathwohl, op. cit.) με χαμηλή τυπικότητα, ασθενή ταξινόμηση, εφαρμοσμένη σε ένα καθημερινό πλαίσιο (Dimopoulos, Koulaidis, Sklaveniti, op. cit.).

Δραστηριότητα ΄Γ Γυμνασίου

Επιλέγουμε στην τύχη ένα μήνα του έτους. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: Ο μήνας αρχίζει από Μ.

Β: Ο μήνας είναι θερινός.

Γ: Ο μήνας έχει 31 ημέρες

(Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Τσικοπούλου, Χρυσοβέργης, 2013: 176).

Οι πιθανότητες στο λύκειο παίρνουν ποιο ουσιαστική μορφή. Το κεφάλαιο των πιθανοτήτων στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Παπασταυρίδη, Πολύζο, Σβέρκο, Αδαμόπουλο και Δαμιανού, όπως οι ίδιοι οι συγγραφείς αναφέρουν, είναι ένα τμήμα από το κεφάλαιο των πιθανοτήτων της Γ΄ Λυκείου, από το βιβλίο των Αδαμόπουλο, Δαμιανού και Σβέρκο. Στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου, το κεφάλαιο των πιθανοτήτων, είναι δεύτερο, ακολουθώντας το απαραίτητο εισαγωγικό κεφάλαιο της θεωρίας συνόλων. Και στις δύο τάξεις υπάρχει η ίδια δομή στην εισαγωγή της θεματολογίας των εννοιών τον πιθανοτήτων. Η αρχή του κεφαλαίου περιγράφει την ιστορική αναδρομή των πιθανοτήτων, καθώς και τη σημαντικότητα τους για την καθημερινή ζωή. Έπειτα, εισάγονται οι βασικοί ορισμοί που λαμβάνουν μέρος στη θεωρία των πιθανοτήτων, ακολουθώντας το μοτίβο του βιβλίου της Γ΄ γυμνασίου.

Σε αυτή την ηλικία, τα παιδιά είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν πιο σύνθετα παραδείγματα και να βρουν δυσκολότερους δειγματικούς χώρους και αντίστοιχα ενδεχόμενα. Επίσης, πέραν της απλής χρήσης του κλασικού ορισμού και των κανόνων λογισμού πιθανοτήτων, υπάρχουν πιο σύνθετες ασκήσεις, καθώς και οι αποδείξεις των κανόνων αυτών (Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, 2016: 150· Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης κ.α., 2017: 33). Προφανώς, το βιβλίο της Γ΄ Λυκείου εμβαθύνει περισσότερο από το βιβλίο της Α΄, καθώς οι μαθητές είναι περισσότερο καταρτισμένοι σε μαθηματικές διαδικασίες και η πιθανοτική τους σκέψη είναι πιο ώριμη. Έτσι, το κεφάλαιο με τις πιθανότητες σε αυτό το βιβλίο είναι σαφώς μεγαλύτερο. Περιέχει δύο περεταίρω παραγράφους, όπου έχουν να κάνουν με τη συνδυαστική και την σχέση της με τις πιθανότητες, αλλά και τις βασικές αρχές της δεσμευμένης πιθανότητας και των ανεξάρτητων ενδεχομένων (Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, 2016: 165). Αυτό όμως που αξίζει να σημειωθεί εδώ, είναι ότι οι δύο αυτές παράγραφοι του κεφαλαίου συνηθίζουν να μην διδάσκονται στην ύλη του σχολείου. Γεγονός το οποίο δείχνει την ιδιαιτερότητα της σκέψης που χρειάζεται ένας μαθητής για να κατανοήσει τις πιθανότητες. Η δραστηριότητα που εμφανίζεται παρακάτω, θα μπορούσε κάλλιστα να αναφέρετε και σε μαθητές Ά Λυκείου. Η γνώση για αυτή τη δραστηριότητα πρέπει να είναι εννοιολογική καθώς η επίλυση της απαιτεί την γνώση ορισμών, τύπων και θεωρημάτων (Krathwohl, op. cit.). Το πλαίσιο που ενσωματώνει είναι επίσης καθημερινό και δίνεται με ανάλυση κειμένου. Η ταξινόμηση εδώ κρίνεται ασθενής καθώς χρησιμοποιείται επιστημονική ορολογία, αλλά χρησιμοποιεί ένα καθημερινό λεξιλόγιο (Dimopoulos, Koulaidis, Sklaveniti, op. cit.). Τέλος, η απάντηση απαιτεί χρήση επιστημονικής ορολογίας και χρήση τύπων και για αυτό το λόγο η τυπικότητα κρίνεται υψηλή (Dimopoulos, Koulaidis, Sklaveniti, op. cit.).

Δραστηριότητα Ύ Λυκείου

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).

i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη";

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο "να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα";

(Αδαμόπουλος, Δαμιανού, Σβέρκος, 2016: 155).

2.3 Διεθνή Προγράμματα PISA και TIMSS για τις Πιθανότητες

Το πρόγραμμα PISA, είναι ένα διεθνές πρόγραμμα του ΟΟΣΑ για την Αξιολόγηση των Μαθητών, όπως αποκαλύπτουν και τα αρχικά του «Programme for International Student Assessment». Σκοπός του προγράμματος, είναι μέσα από μια διεθνή έρευνα που διεξάγεται κάθε τρία χρόνια στο χώρο της εκπαίδευσης να βελτιωθούν τα λάθη και οι αδυναμίες του εκπαιδευτικού συστήματος (Καζαντζής, 2007). Να σημειωθεί ακόμα το μέγεθος της έρευνας του προγράμματος, αφού στην τελευταία έρευνα το 2015 έλαβαν μέρος 540.000 μαθητές ηλικίας 15 χρονών, από τις 72 χώρες που συμμετείχαν στο πρόγραμμα (Gurría, 2018).

Στα μαθηματικά, το πρόγραμμα ασχολείται με τον «μαθηματικό αλφαβητισμό». Τα παιδιά οφείλουν να ξέρουν να μαθηματικοποιούν ένα πρόβλημα, ακολουθώντας κάποιους κανόνες όπως στη γλώσσα (Καζαντζής, ο.π.). Πως θα μπορούσαν λοιπόν, οι πιθανότητες να μην απασχολήσουν το πρόγραμμα;

Οι πιθανότητες είναι ένας κλάδος των μαθηματικών, όπου οι αντιλήψεις των μαθητών παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, για αυτό και το πρόγραμμα PISA στα ερωτηματολόγια του έχει αρκετές ερωτήσεις περί πιθανοτήτων. Ο κύριος Γιώργος Ρίζος συνέλεξε στο βιβλίο του το 2009, μερικά από τα προβλήματα που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα για να εξετάσει την έννοια των πιθανοτήτων στους μαθητές και κάποια από αυτά παρουσιάζονται τροποποιημένα παρακάτω.

1. *Το δελτίο καιρού για αγρότες αναφέρει: «Αύριο στην περιοχή του κάμπου της Θεσσαλίας θα βρέξει με πιθανότητα 70% από τις 12 μ.μ. ως τις 8 μ.μ.».*
Με βάση την παραπάνω πρόγνωση, είναι να απαντήσετε αν πιστεύετε ότι είναι σωστές ή λάθος οι προτάσεις:
Α) στο 70% του χρονικού διαστήματος από τις 12 μ.μ. μέχρι τις 8 μ.μ. θα βρέχει στον κάμπο της Θεσσαλίας.
Β) Στο 70% της έκτασης του κάμπου της Θεσσαλίας θα βρέχει αύριο από τις 12 μ.μ. ως τις 8 μ.μ.
Γ) Το 70% της φετινής βροχής στον κάμπο της Θεσσαλίας θα πέσει αύριο από τις 12 μ.μ. ως τις 8 μ.μ.
Δ) Είναι πιο πιθανό το ενδεχόμενο να βρέξει αύριο από τις 12 μ.μ. ως τις 8 μ.μ. στον κάμπο της Θεσσαλίας από το ενδεχόμενο να μη βρέξει.

2. *Έχουμε ρίξει ένα ζάρι τρεις φορές. Και τις τρεις φέραμε εξάρι. Αν το ξαναρίξουμε μία ακόμα φορά. Να απαντήσετε αν πιστεύετε ότι είναι σωστές ή λάθος οι προτάσεις:*

Α) Είναι αδύνατο να φέρουμε έξι ξανά.

Β) Με την τύχη που έχουμε, σίγουρα θα φέρουμε έξι.

Γ) Αφού ρίχνουμε τέσσερις φορές, είναι 1/4

Δ) Είναι 1/6, όπως σε κάθε ρίψη.

Ε) Είναι 50% να φέρουμε έξι και 50% να μη φέρουμε έξι.

3. *Έχουμε 4 είδη (μπέικον, σαλάμι, ζαμπόν, λουκάνικο) για να προσθέσουμε σε μία πίτσα, εκτός από τα βασικά (ζυμάρι, σάλτσα και τυρί) που περιλαμβάνονται υποχρεωτικά. Κάθε πίτσα θέλουμε να έχει τουλάχιστον δύο απ' αυτά τα είδη. Γράψτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς που μπορούμε να φτιάξουμε.*

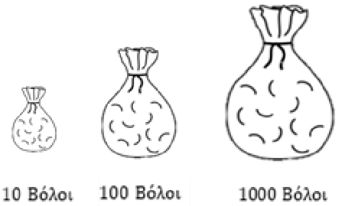
Παρατηρώντας τις παραπάνω ενδεικτικές δραστηριότητες του προγράμματος, είναι ευκόλως κατανοητοί οι στόχοι του. Το PISA αποσκοπεί να διερευνήσει την αντίληψη των μαθητών σε καθημερινά προβλήματα πιθανοτήτων. Δίνοντας διάφορα προβλήματα της καθημερινότητας με ελαφρώς διαφοροποιημένη παρουσίαση, στοχεύει στην διερεύνηση της κατανόησης της ερώτησης από τους μαθητές, και κατά πόσον είναι αυτοί σε θέση να τη συνδυάσουν με την θεωρία των Πιθανοτήτων. Επίσης, πολλές ερωτήσεις εξετάζουν το βαθμό που είναι κατανοητή η έννοια του δειγματικού χώρου, καθώς και τη χρήση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας.

Στο πλαίσιο του Προγράμματος TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study), ερευνώνται τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών συστημάτων που προσδίδουν στους μαθητές την ικανότητα της μαθηματικοποίησης και της επίλυσης καθημερινών προβλημάτων και πως διαφοροποιούνται οι διδακτικές πρακτικές από χώρα σε χώρα (Mullis, Martin, Loveless, 2016). Αυτό που αξιολογεί το πρόγραμμα είναι οι δεξιότητες των μαθητών και η συλλογιστική τους, συνυπολογίζοντας τόσο το περιβάλλον μάθησης στην τάξη και γενικά στο σχολείο, όσο και στο σπίτι (Mullis, Martin, Foy, Hooper, 2015).

Το TIMSS έλαβε χώρα για πρώτη φορά το 1995 (Mullis, Martin, Foy, Hooper, op. cit.). Από αυτή την χρονολογία και έπειτα διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια σε μαθητές της τέταρτης και της όγδοης τάξης (Mullis, Martin, Foy, Hooper, op. cit.). Στη τελευταία έρευνα μάλιστα, διεξήχθη σε 57 χώρες και 7 κρατίδια με την συμμέτοχή 580.000 αιτούντων(Mullis, Martin, Foy, Hooper, op. cit.).

Από τα αποτελέσματα του προγράμματος προκύπτει ότι σχεδόν όλες οι χώρες που έλαβαν μέρος στο πρόγραμμα, εντάσσουν τις πιθανότητες στην ύλη των μαθηματικών στην όγδοη τάξη (Mullis, Martin, Loveless, op. cit.). Σε αυτή την ηλικία, η ύλη επικεντρώνεται κυρίως στην κατανόηση της συχνότητας των γεγονότων και τον τρόπο υπολογισμού της (Mullis, Martin, Loveless, op. cit.). Ωστόσο, από τη τέταρτη τάξη αρχίζει να τονίζεται η συλλογή δεδομένων, η ανάλυση τους και η σημασία της γραφικής παράστασης (Mullis, Martin, Loveless, op. cit.). Παρακάτω παρατίθενται μερικές προσαρμοσμένες ενδεικτικές ασκήσεις πιθανοτήτων, που χρησιμοποιήθηκαν από το πρόγραμμα TIMSS της Κύπρου το 2015.

1. *Σε κάθε σακούλι υπάρχει μόνο ένας άσπρος βόλος και οι υπόλοιποι μαύροι.*



Εικόνα 2.3: Σακούλια με βόλους. (TIMSS Κύπρου, 2015)

Χωρίς να κοιτάξεις μέσα στα σακούλια, παίρνεις ένα βόλο από ένα σακούλι. Ποιο σακούλι σου δίνει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρεις τον άσπρο βόλο;

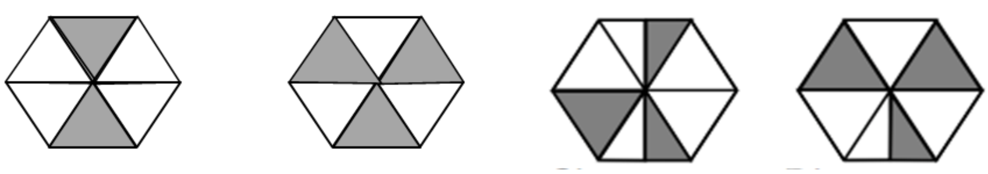
(α) Το σακούλι με τους 10 βόλους

(β) Το σακούλι με τους 100 βόλους

(γ) Το σακούλι με τους 1000 βόλους

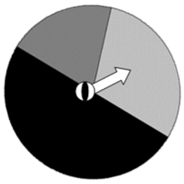
(δ) Όλα τα σακούλια δίνουν την ίδια πιθανότητα

2. *Η Ελένη ρίχνει ένα βελάκι σε κάθε ένα από τους πιο κάτω στόχους. Σε ποιο στόχο το βελάκι έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κτυπήσει σε σκιασμένο κομμάτι;*



Εικόνα 2.4: Στόχοι. (TIMSS Κύπρου, 2015)

3. *Στον παρακάτω τροχό της τύχης, το βέλος μπορεί να σταματήσει σε οποιοδήποτε από τα τρία χρώματα. Στο πίνακα που φαίνεται, παρουσιάζονται πόσες φορές σταμάτησε το βέλος στο κάθε χρώμα μετά από 100 στροφές του τροχού. Πιστεύεις ότι τα αποτελέσματα ήταν τα αναμενόμενα; Ποια είναι η πιθανότητά να έρθει γκρίζο χρώμα;*



Εικόνα 2.5: Τροχός Τύχης (TIMSS Κύπρου, 2015)

Πίνακας 2.1: Αποτελέσματα τροχού

Μαύρο	50
Γκρίζο	30
Μολυβί	20

Όπως ακριβώς και το πρόγραμμα PISA, έτσι και το TIMSS διερευνά τις αντιλήψεις των μαθητών πάνω στις πιθανότητες και ιδιαίτερα την κατανόηση των εννοιών του δειγματοχώρου, των ισοπίθανων ενδεχομένων, τη χρήση του «κλασικού ορισμού Πιθανότητας» καθώς και άλλα, όπως αυτά προκύπτουν και από τις παραπάνω δραστηριότητες.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί βέβαια, η συνεισφορά και των δύο προγραμμάτων στα εκπαιδευτικά συστήματα διαφόρων χωρών, αφού τα αποτελέσματα των ερευνών τους βοηθάνε στην βελτίωση της δομής της ύλης των μαθηματικών, της διδασκαλίας και γενικά της επιστήμης (Mullis, Martin, Foy, Hooper, op. cit.).

2.4 Διδακτική των Πιθανοτήτων στο Διεθνή χώρο

Είναι γενικά γνωστό, πως παρόλο που οι πιθανότητες είναι ένας τομέας των μαθηματικών τόσο χρήσιμος στη καθημερινότητα, τα παιδιά αργούν να κατανοήσουν τις βασικές τους έννοιες. Όπως αναφέρουν στο άρθρο τους το 1997 οι Efraim Fischbein και Ditza Schnarch, τα παιδιά αναπτύσσουν την πιθανοτική τους σκέψη ανάλογα με την ηλικία τους. Αυτό σημαίνει ότι για να εισαχθούν οι κλασικές έννοιες των πιθανοτήτων, πρέπει τα παιδιά να έχουν ήδη αναπτύξει κάποιες βασικές γνώσεις και διαδικασίες.

Στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο, όπως και στην Ελλάδα, τα παιδιά έρχονται σε επαφή με έννοιες πιθανοτήτων στο όγδοο με το ένατο έτος της ηλικίας τους. Ψάχνοντας κανείς στην ύλη των μαθηματικών διαφόρων χωρών, θα διαπιστώσει ότι η δομή τους για τις πιθανότητες ακολουθεί το ίδιο μοτίβο.

Στο δημοτικό για παράδειγμα, οι μαθητές είναι στη κατάλληλη ηλικία να μάθουν να διακρίνουν ένα γενικό πρότυπο των συμβάντων και των πειραμάτων, όπως επίσης και να μαθαίνουν να δίνουν μία λογική εξήγηση στα γεγονότα (Langrall, Mooney, 2015). Επιπλέον, σε αυτή την ηλικιακή βαθμίδα τα παιδιά αναπτύσσοντας τις γνώσεις και την πιθανοτική τους σκέψη, αρχίζουν να κάνουν χρήση των εννοιών της πιθανότητας, να παρατηρούν και να συγκρίνουν διάφορους πληθυσμούς μεταξύ τους (Langrall, Mooney, op. cit.). Πριν μεταβούν στο γυμνάσιο, είναι απαραίτητο να κατανοήσουν ότι η πιθανότητα δεν ισχύει μόνο για σύντομες ακολουθίες τυχαίων αποτελεσμάτων, αλλά και για περισσότερες επαναλήψεις του πειράματος (Langrall, Mooney, op. cit.).

Στο γυμνάσιο από την άλλη, όπου τα παιδιά έχουν μια πιο ολοκληρωμένη μαθηματική αντίληψη και σκέψη, φαίνεται να παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με την αντίληψη ενός ενήλικα για τις πιθανότητες (Langrall, Mooney, op. cit.). Ηλικιακά λοιπόν στο γυμνάσιο, τα παιδιά είναι σε θέση να κατανοήσουν τις έννοιες της πιθανότητας καθώς και της ανεξαρτησίας των γεγονότων (Langrall, Mooney, op. cit.). Με την μετάβαση στο λύκειο, διευρύνεται αρκετά η διδακτέα ύλη, διότι τα παιδιά είναι σε θέση να μελετάνε πιο δύσκολους πληθυσμούς και βγάζοντας συμπεράσματα για το δείγμα, να τα γενικεύουν στον πληθυσμό (Langrall, Mooney, op. cit.).

Στα σχολικά προγράμματα των Ασιατικών χωρών όπως της Σιγκαπούρης, της Κορέας, της Ιαπωνίας, της Κίνας και του Χονγκ Κονγκ, τα παιδιά ξεκινάνε να μαθαίνουν έννοιες των πιθανοτήτων από 8 χρονών (Kyung Mee, 1997; Shimizu, 2002; Gao, 2014). Η πρώτη συνάντηση με έννοιες σχετικές με τις πιθανότητες, γίνεται με την έννοια του μέσου και του μέσου όρου. Στη συνέχεια, κατά το ένατο με δέκατο έτος της ηλικίας ακολουθούν οι έννοιες «γεγονός» και «ενδεχόμενο», και ακολούθως μαθαίνουν να βρίσκουν πιθανότητες απλών ενδεχομένων (Kyung Mee, 1997; Shimizu, 2002; Gao, 2014). Ο λόγος που οι παραπάνω χώρες χρησιμοποιούνται σαν πρότυπο στο παρόν κεφάλαιο, είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την τελευταίες έρευνες του προγράμματος TIMSS το 2011 και το 2015 και δείχνουν τις συγκεκριμένες χώρες να κρατάνε σταθερά τις υψηλότερες θέσεις (Mullis, Martin, Foy, Hooper, op. cit.; Gurría, op. cit.).

Τα πρότυπα αυτών των χωρών έχουν ορισμένα χαρακτηριστικά τα οποία χρήζουν αρκετά μεγάλη σημαντικότητα μελέτης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συγκριτική αξιολόγηση με χαρακτηριστικά συστημάτων άλλων χωρών. Αρχικά λοιπόν, τα παιδαγωγικά συστήματα των πρωτοπόρων χωρών, επικεντρώνονται στην πρόωρη μάθηση των βασικών μαθηματικών εννοιών όπως οι αριθμοί, η μέτρηση και κάποια σκέλη της γεωμετρίας και λιγότερο στην συλλογή και την ανάλυση δεδομένων (Ginsburg, Leinwand, Decker, 2009). Το Χονγκ Κονγκ για παράδειγμα, από την πρώτη μέχρι την τρίτη τάξη, αφιερώνει σχεδόν το μισό του στοχευμένου χρόνου στην αριθμητική και το υπόλοιπο το διαμοιράζει στη γεωμετρία και τη μέτρηση (Ginsburg, Leinwand, Decker, op. cit.). Ακόμα, η δομή της ύλης ακολουθεί μια λογική πορεία ως προς τις μαθηματικές γνώσεις, έτσι ώστε να υπάρχει μια λογική αλληλουχία μεταξύ των εννοιών (Ginsburg, Leinwand, Decker, op. cit.). Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται μια ορθή εξέλιξη στην ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών (Ginsburg, Leinwand, Decker, op. cit.). Το σημαντικό λοιπόν σε αυτό, είναι ότι η οριοθέτηση του περιεχομένου της μάθησης σε συνδυασμό με την εξέλιξη της, διευκολύνει την προσαρμογή της ύλης του μαθήματος ώστε να ταιριάζει στο ρυθμό εκμάθησης του κάθε μαθητή (Ginsburg, Leinwand, Decker, op. cit.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} : ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΑΝΤΙΛΗΨΕΩΝ

3.1 Σημαντικότητα διερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών και η ιδιαιτερότητα των μαθηματικών

Οι αντιλήψεις των μαθητών για το διδακτικό αντικείμενο, κρίνονται πολύ σημαντικές για τη μάθηση. Είναι γεγονός πως κάθε άνθρωπος και συνεπώς κάθε μαθητής προσπαθεί από τη φύση του να δώσει μια λογική εξήγηση σε κάποια φυσικά φαινόμενα. Χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι κατορθώνει ή όχι να πετύχει ή να ανακαλύψει μόνος του την επιστημονική έννοια. Είναι γενικά παραδεχτό, ότι η διδασκαλία θα ήταν αποτελεσματικότερη, εάν ο εκπαιδευτικός έχτιζε την «νέα» έννοια πάνω στην υπάρχουσα αντίληψη των εκπαιδευομένων, καθώς οι αντιλήψεις αυτές, πάντα θα επηρεάζουν την επιστημονική έννοια. Με άλλα λόγια, η νέα γνώση δεν είναι ανεξάρτητη της προηγούμενης και επηρεάζει τη μαθησιακή διαδικασία (Wynne, 2000). Έτσι, αν ο δάσκαλος δεν χτίσει τη νέα γνώση πάνω στις ήδη υπάρχουσες αντιλήψεις, τότε αυτές δεν εξαφανίζονται, υπάρχουν και επηρεάζουν την νέα έννοια εμποδίζοντας την πλήρη κατανόηση της (Wynne, op. cit.).

Ο μηχανισμός υποδοχής της έννοιας και η πρώτη αντίληψη που δημιουργείται, επηρεάζονται από εξωτερικούς παράγοντες. Συχνά, το εξωτερικό περιβάλλον μπορεί να επιβληθεί στη διδακτέα έννοια και ως αποτέλεσμα να μην επέλθει ποτέ η κατανόηση της (Konold, 2002). Στα μαθηματικά, σε αρκετές περιπτώσεις δεν χρειάζεται να καταλάβει κανείς διαισθητικά την θεωρία, όσο τον συνδυασμό των κανόνων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος (Konold, op. cit.). Ωστόσο, βοηθάει την πλειοψηφία των μαθητών, να αποκτήσουν μια διαισθητική αντίληψη των βασικών εννοιών, παρόλο που κάτι τέτοιο μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη για τον εμπειρογνώμονα. Κατά συνέπεια, ο δάσκαλος οφείλει να «διορθώσει» μέσα από τη διδασκαλία του, αυτές τις αντιλήψεις και να βοηθήσει τον μαθητή στην κατανόηση της νέας έννοιας (Konold, op. cit.).

Σε μια επιστήμη, όπως είναι τα Μαθηματικά, η οποία κρίνεται δύσκολη από την πλειονότητα των μαθητών, ένας εκπαιδευτικός δεν έχει να αντιμετωπίσει μόνο την υπάρχουσα αντίληψη μιας έννοιας. Ο Peter Kloosterman σε ένα από τα άρθρα του το 1992, το οποίο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό “School Science and Mathematics”, είχε μιλήσει για μια αδιάφορη έως και εχθρική στάση των μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Αυτό διεξάγει το ασφαλές συμπέρασμα ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει αρχικά να διαπιστώσει τη σχέση του μαθητή με τα μαθηματικά και αφού τη βελτιώσει, να προχωρήσει στην εισαγωγή νέων εννοιών. Στην έρευνα του ο Kloosterman ανακάλυψε ότι βελτιώνοντας το κίνητρο των μαθητών σχετικά με τη μάθηση, αυτοί μαθαίνουν καλύτερα. Επομένως, σημαντικό είναι ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει τις πεποιθήσεις του μαθητή σχετικά με τα μαθηματικά, τη χρησιμότητα τους και το κίνητρο του για να διαβάσει.

Οι αντιλήψεις αυτές όμως δεν αλλάζουν εύκολα. Για παράδειγμα, τα παιδιά που πιστεύουν ότι η επίλυση προβλημάτων είναι άσκοπη και χάσιμο χρόνου, δεν πρόκειται να κάτσουν να διαβάσουν για να μάθουν (Kloosterman, 1991). Η δουλειά ενός καθηγητή μαθηματικών λοιπόν, ξεκινάει με την προσπάθεια αλλαγής της παραπάνω αντίληψης. Τα παιδία πρέπει να πιστέψουν τόσο στη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, όσο και ότι μπορούν να μάθουν μαθηματικά.

3.2 Αντιλήψεις των μαθητών για τις Πιθανότητες

Στο σημερινό κόσμο όλες οι στοχαστικές διαδικασίες είναι μη στατικές. Οι Gallistel, C., Krishan, M., Liu, Y., Miller, R. και Latham, P. το 2014 στο άρθρο τους υποστηρίζουν, ότι όλοι οι άνθρωποι, ακόμα και χωρίς να έχουν κάποια επιστημονική κατάρτιση, δημιουργούν υποσυνείδητα στο μυαλό τους έναν μηχανισμό απόδοσής εξηγήσεων απλών φαινομένων πιθανοτήτων. Βέβαια, μια σωστή πρόβλεψη ενός πειράματος, δεν συνεπάγεται την κατανόηση του θεωρητικού του μέρους. Όπως αναφέρει ο Clifford Konold το 2002, πολλοί είναι αυτοί που αντιλαμβάνονται τις πιθανότητες σαν μια πρόβλεψη του αποτελέσματος σε ένα πείραμα και όχι ως την επιστημονική εξήγηση, σχετικά με τη πιθανότητα εμφάνισης κάποιου δυνατού αποτελέσματος.

Το 1951, οι Piaget και Inhelder στο έργο τους υποστήριξαν πως τα παιδιά είναι σε θέση να κατανοούν τις πιθανότητες από την ηλικία των 12 ετών. Σε αυτή την ηλικία τα παιδιά, αναπτύσσουν τους κατάλληλους διαισθητικούς μηχανισμούς για την κατανόηση των πιθανοτήτων. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον όμως, είναι το πώς αντιλαμβάνεται κάποιος τις πιθανότητες.

Ο Konold στο άρθρο του (2002), προσπάθησε να ερευνήσει το ζήτημα αυτό. Η ανάγκη της έρευνας αυτής, τον οδήγησε σε μια συνέντευξη με κάποιους μαθητές και φοιτητές προς την ανίχνευση της αντίληψης τους σχετικά με μια ερώτηση πιθανοτήτων. Στην ερώτηση που τους έθεσε σχετικά με την πρόβλεψη του καιρού, η οποία δίνει 70% πιθανότητα βροχής, πολλοί μαθητές το θεώρησαν ως δεδομένο, ότι θα βρέξει. Η σκέψη τους είχε να κάνει με το γεγονός, ότι το 70% είναι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό και άρα είναι σίγουρο το αποτέλεσμα. Στη συνέχεια, ερωτήθηκαν σχετικά με το συμπέρασμα που θα καταλήξουν, σε περίπτωση που δεν θα βρέξει. Σε αυτή την περίπτωση οι περισσότεροι απάντησαν ότι η πρόβλεψη θα ήταν λάθος. Υποστηρίζουν, ότι θα ήταν μια σωστή και καλή πρόβλεψη, εάν έβρεχε στο 70% των ημερών για τις οποίες έγινε η πρόβλεψη, αλλά πως αυτή θα ήταν εσφαλμένη σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτό που γίνεται αντιληπτό λοιπόν, είναι ότι η υπερισχύει η διαισθητική αντίληψη, πως αφού το 70% είναι ποιο κοντά στο 100% θα είναι σωστή η φράση «Αύριο θα βρέχει» (Konold, op. cit.). Όπως προσθέτει ο Konold, δεν είναι λίγοι και αυτοί που συμμερίζονται την άποψη ότι το 70% πιθανότητας βροχής, σημαίνει ότι θα υπάρχει 70% υγρασία ή συννεφιά, δηλαδή παράγοντες που προκαλούν την βροχή.

Σε μια συζήτηση με έναν μαθητή, που του τέθηκε η παραπάνω ερώτηση, παρουσιάστηκε αδυναμία γενίκευσης της πρότασης σε περισσότερες από μια μέρες. Ο μαθητής θεώρησε ότι η πρόταση πρέπει να απευθύνεται σε κάθε μέρα ξεχωριστά. Η άποψη που υποστήριξε, είναι πως η φράση «υπάρχει 70% πιθανότητα βροχής», πρέπει να απευθύνεται σε μια μέρα και όχι σε ένα σύνολο ημερών. Επίσης, ο μαθητής θεωρεί πως αν το ποσοστό ήταν 50% τότε την επόμενη μέρα ή θα υπήρχε βροχή ή όχι. Αφού λοιπόν, το ποσοστό είναι σαφώς μεγαλύτερο από το 50%, ο μαθητής διεξάγει το συμπέρασμα ότι την επόμενη μέρα σίγουρα θα βρέχει.

Σε ένα άλλο πείραμα του Clifford Konold το 1983, το οποίο περιγράφουν οι Garfield και Ahlgren (1988) αποδείχθηκε ότι οι μαθητές που παρακολουθούσαν την εξέλιξη του πειράματος δημιουργήσαν ένα αίσθημα εμπιστοσύνης στα επερχόμενα αποτελέσματα. Ανακατασκεύαζαν δηλαδή στο μυαλό τους την πιθανότητα των αποτελεσμάτων ανάλογα με τη συχνότητα που έβλεπαν και όχι με βάση τον ορισμό της έννοιας της πιθανότητας. Αυτό το γεγονός θεωρείται αρκετά επικίνδυνο για την κατανόηση των εννοιών των πιθανοτήτων και συνιστάτε ιδιαίτερη προσοχή από τον δάσκαλο.

Ο Konold (2002), με ένα ακόμα παράδειγμα που χρησιμοποιεί στο άρθρο του, ενισχύει τα παραπάνω αποτελέσματα σχετικά την οπτική θεώρηση του πειράματος. Σε ένα πείραμα, όπου ρίχνεται ένα κόκαλο ακανόνιστου σχήματος 6 πλευρών, δεν μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμα λόγο των πολλών δυνατών αποτελεσμάτων. Ωστόσο, πολλοί μαθητές είναι αυτοί που μετά από 1000 επαναλήψεις του πειράματος διεξήγαν το συμπέρασμα, ότι η πλευρά που ήρθε περισσότερες φορές είναι και η ποιο πιθανή. Οι διδασκόμενοι χρησιμοποιούν την διαισθητική τους αντίληψη για να απαντήσουν στο ερώτημα, χωρίς να λάβουν υπό όψη τις αρχές της θεωρίας πιθανοτήτων. Όλα αυτά έρχονται να ενισχύσουν την άποψη τόσο του συγγραφέα, όσο και πολλών άλλων όπως προαναφέρθηκε, ότι η «νέα» έννοια, πρέπει να χτιστεί πάνω στην ήδη υπάρχουσα αντίληψη του μαθητή.

Σε πολλούς προκαλεί εντύπωση το γεγονός πως ακόμα και σε εργαστηριακά πειράματα, βλέποντας τα αποτελέσματα, δεν σταματούν να επηρεάζονται από τις αντιλήψεις τους. Πολλές φορές κάποιοι μαθητές βλέπουν και καταγράφουν στο μυαλό τους τα αποτελέσματα που θέλουν να δουν και θα τους επιβεβαιώσουν την αρχική τους άποψη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επηρεάζεται η αντίληψη και η κρίση των μαθητών ως προς τα αποτελέσματα του πειράματος. Λόγου χάρη, το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο κύριος Konold (2002), για να μας αποδείξει τον παραπάνω ισχυρισμό, είναι η ρίψη μιας πινέζας. Τα παιδιά μαντεύουν πως η πιθανότητα η πινέζα να πέσει με το καρφάκι στην πάνω μεριά είναι πάνω από 70%. Ωστόσο εκτελώντας το πείραμα, σε 100 επαναλήψεις παρατηρείται ένα αποτέλεσμα 55 ρίψεις πάνω και 45 ρίψεις κάτω. Το περίεργο είναι ότι οι μαθητές ενώ ήταν μπροστά στο πείραμα, μετά το πέρας του πειράματος, ακόμα θεωρούσαν ότι το πάνω μέρος της καρφίτσας έχε περισσότερες πιθανότητες να έρθει από το κάτω. Σε αυτό το πείραμα, οι μαθητές ήταν περισσότερο συγκεντρωμένοι στα αποτελέσματα της πάνω πλευράς και έτσι δεν κατάλαβαν πια πλευρά ήρθε περισσότερες φορές.

Το 2003 ο Albert, J. έκανε μια έρευνα σε φοιτητές στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους, πριν ακόμα δηλαδή διδαχτούν τις πιθανότητες. Η έρευνα του, διεξήχθη σε 75 φοιτητές και αποτελούνταν από 9 ερωτήσεις πιθανοτήτων ανοιχτού και κλειστού τύπου. Τα αποτελέσματα της έρευνα έδειξαν ότι πολλοί μαθητές, ανταπεξήλθαν με ευκολία στις κλασικές ερωτήσεις πιθανότητας. Το πρόβλημα παρουσιάστηκε όταν υπήρχαν ερωτήσεις με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα. Οι περισσότεροι από αυτούς θεωρούσαν τα αποτελέσματα εξίσου πιθανά, ακόμα και σε προβλήματα που δεν μπορούσε να γίνει αυτή η παραδοχή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, ήταν μια ερώτηση περί της αποφοίτησης. Η ερώτηση αυτή, ρώταγε τον μαθητή πόσο πιθανό πιστεύει ότι είναι να αποφοιτήσει σε 4 χρόνια. Η πλειοψηφία λοιπόν απάντησε πως η πιθανότητα αυτή είναι 50%, δηλαδή είτε θα αποφοιτήσουν σε 4 χρόνια είτε όχι. Παρατηρήθηκαν όμως και φοιτητές που χρησιμοποίησαν κάποια ανόητη ή ανούσια πληροφορία της εκφώνησης για να διεξάγουν ένα συμπέρασμα. Το αξιοσημείωτο κομμάτι της έρευνα του Albert βέβαια, είναι ότι γενικά οι φοιτητές απέφευγαν να που την άποψη τους, για να αιτιολογήσουν την επιλογή της απάντησης τους.

Είναι ευρέως αποδεχτό ότι σε τομείς των μαθηματικών, όπως είναι οι πιθανότητες, οι μαθητές παρουσιάζουν εννοιολογικές δυσκολίες. Οι Garfield, J. και Ahlgren, A. (1988) θεωρούν ότι οι περισσότερες έρευνες που γίνονται σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών, δεν εστιάζουν στους υποκειμενικούς ψυχολογικούς μηχανισμούς, που οδηγούν σε μια λανθασμένη κρίση. Σημαντικός παράγοντας λάθους σε μια ερώτηση, είναι μια εσφαλμένη αντίληψη της ερώτησης, για αυτό το λόγο συνιστάται η προσεκτική ανάγνωση της (Garfield και Ahlgren, op. cit.). Το παράδειγμα που χρησιμοποιούν οι συγγράφεις στο άρθρο τους, έχει να κάνει με μια καλοντυμένη και ελκυστική γυναίκα και τίθεται στους μαθητές το ερώτημα «ποια η πιθανότητα, αυτή η γυναίκα να είναι μοντέλο». Από τις απαντήσεις των μαθητών, διεξάγεται το συμπέρασμα, ότι ένα μοντέλο συνηθίζει να είναι μια καλοντυμένη και ελκυστική γυναίκα. Ωστόσο, στην παραπάνω ερώτηση, όπου ερωτάτε το άκρως αντίθετο, οι μαθητές έδωσαν σαν απάντηση, ότι η πιθανότητα να είναι μοντέλο είναι ένα υψηλό ποσοστό της τάξεως του 70%. Προφανώς λοιπόν, μια μη προσεκτική ανάγνωση της ερώτησης οδηγεί σε λάθος συμπεράσματα, τα οποία δεν επιτρέπουν στον ερευνητή να βγάλει το πραγματικό πόρισμα του, σχετικά με την αντίληψη των μαθητών για τις πιθανότητες.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι το γενικό συμπέρασμα στις συζητήσεις με τους μαθητές, είναι το γεγονός ότι δεν κατανοούν ότι η πιθανότητα είναι το μέτρο της βεβαιότητας για να έρθει ένα αποτέλεσμα. Η σύγχυση που δημιουργείται στο μαθητή συνδέει την πιθανότητα με την πρόβλεψη του αποτελέσματος. Έτσι, ακόμα και μετά από αρκετά πειράματα πάνω στις πιθανότητες οι μαθητές πιστεύουν ότι ένας «πιο τυχερός» μαθητής, θα είχε περισσότερες πιθανότητες να προβλέψει το αποτέλεσμα

(Watson, 2005). Γεγονός που αποδεικνύει ότι οι αντιλήψεις και οι πεποιθήσεις του, συνέχεια συγκρούονται με την διδακτέα έννοια και ως αποτέλεσμα αν δεν ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο δεν θα φτάσει ποτέ σε επιτυχία η μάθηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} : ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

4.1 Εισαγωγή της τεχνολογίας στην εκπαίδευση

Ο αιώνας που διανύουμε χαρακτηρίζεται από την παρέμβαση της τεχνολογίας στην καθημερινότητα των ανθρώπων. Οι επιστημονικές ανακαλύψεις και τα τεχνολογικά επιτεύγματα κατορθώνουν να επηρεάσουν, σε μεγάλο βαθμό, τη ζωή του κοινωνικού συνόλου και κατά συνέπεια το μέλλον και τον πολιτισμό του. Η ανθρώπινη ιστορία έχει χαραχθεί από τις τεχνολογικές καινοτομίες που κατεύθυναν την πορεία της και σηματοδότησαν μια επανάσταση (English, 2002). Αναμφισβήτητο γεγονός σήμερα, αποτελεί ότι η εργασία, η διασκέδαση, η οικονομία ακόμα και ο ελεύθερος χρόνος μικρών και μεγάλων που προσαρμόζονται στη χρήση των υπολογιστών των κινητών τηλεφώνων και άλλων τεχνολογικών μέσων. Αποτέλεσμα αυτής της αναδιάρθρωσης της κοινωνίας, είναι οι «Νέες τεχνολογίες» να ενσωματώνονται γρήγορα στις σχολικές πρακτικές και να επηρεάζουν αυτό που οι άνθρωποι διδάσκουν και διδάσκονται (David, 1997).

Δεν αποτελεί εντύπωση λοιπόν, ότι εδώ και αρκετά χρόνια οι νέες τεχνολογίες έχουν ενταχθεί στη μαθησιακή διαδικασία. Λόγου χάρη, μια γρήγορη αναζήτηση στο διαδίκτυο για μια έννοια βγάζει χιλιάδες αποτελέσματα, παραδείγματα και πολλές φορές διάφορα προγράμματα και λογισμικά που βοηθούν τον μαθητή στην κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας. Η διαδραστική μάθηση και γενικά η χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και κάνει το μάθημα πιο άμεσο και παραστατικό. Αυτό που απαιτείται, όμως, για τη χρήση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση είναι η σύνδεση μεταξύ του περιεχομένου του μαθήματος, της παιδαγωγικής μεθόδου και του τεχνολογικού εξοπλισμού, καθώς και η υψηλή κατάρτιση του εκπαιδευτικού στη χρήση της τεχνολογίας και των μηχανισμών της (David, op. cit.). Ένας μορφωμένος και καλά εξοικειωμένος εκπαιδευτικός με την τεχνολογία, μπορεί να την μετατρέψει στο πιο χρήσιμο διδακτικό εργαλείο (Παπαδοπετράκης, 2002).

Η εμπειρία και η καθημερινότητα δείχνουν τα οφέλη των «νέων τεχνολογιών» στην εκπαίδευση. Η αλληλεπίδραση με έναν υπολογιστή για παράδειγμα, προσφέρει πολλές ευκαιρίες για σημαντικές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν την ανάπτυξη του τρόπου σκέψης των μαθητών. Η φύση του προβλήματος, καθώς και η σχέση της δραστηριότητας με τη γνώση αναβαθμίζεται και αποκτά πλέον διαφορετική υπόσταση (English, op. cit.). Αυτό γίνεται φανερό τόσο από την αλλαγή του περιβάλλοντος μάθησης και της οργάνωσης του μαθήματος, όσο και από τις επιπτώσεις των υπολογιστών στις πνευματικές διαδικασίες που χρειάζονται για την επίλυση των προβλημάτων (English, op. cit.).

Αν αναλογιστεί κάποιος χρήστης, την καθημερινότητα του χωρίς την χρήση της τεχνολογίας, θα καταλάβει τον βαθμό που αυτή του είναι απαραίτητη. Οι νεότερες γενιές κυρίως, παρουσιάζουν μια τεχνολογική εξάρτηση στην καθημερινή τους ζωή, γεγονός που δείχνει την βαθιά ανάμιξη της τεχνολογίας στη ζωή του ανθρώπου. Σύμφωνα με αυτά λοιπόν, αλλά και με όσα προαναφέρθηκαν, προκύπτει το εύλογο ερώτημα, γιατί η τεχνολογίες δεν έχουν ενταχθεί ακόμα επίσημα στις μαθησιακές πρακτικές; Δεδομένου όλων των πλεονεκτημάτων της χρήσης της «τεχνολογίας» στη μαθησιακή διαδικασία θα περίμενε κανείς την άμεση και καθολική ένταξή της στην εκπαίδευση.

Σε αντίθεση όμως με αυτό που οι περισσότεροι θα περίμεναν και παρόλη τη διείσδυση της τεχνολογίας στην κοινωνική πραγματικότητα, τα σχολεία εμφανίζουν μια υποτίμηση απέναντι της (English, op. cit.). Πολλές έρευνες αποδεικνύουν, πως η παρουσία του υπολογιστή, δεν έχει πάντα τα αναμενόμενα αποτελέσματα (English, op. cit.). Η χρήση του, απαιτεί καλύτερη ανάλυση του περιεχομένου του μαθήματος και την άριστη τεχνολογική κατάρτιση του εκπαιδευτικού, αλλιώς δεν επιτυγχάνονται οι υψηλοί στόχοι και η βαθύτερη κατανόηση. Η επίδειξη ενός βίντεο για παράδειγμα, μπορεί να εξοικονομεί σχολικό χρόνο, αλλά στερεί από τον μαθητή την ανάπτυξη της φαντασίας του (Παπαδοπετράκης, ο.π.). Λαμβάνοντας υπόψη τα λόγια του μεγάλου φυσικού Albert Einstein, *«Η φαντασία είναι πιο σημαντική από την γνώση. Η γνώση είναι περιορισμένη, ενώ η φαντασία μπορεί να περικυκλώσει τον κόσμο»,* φαίνεται πόσο σημαντική είναι φαντασία για το μαθητή. Κατά συνέπεια, το σύνολο της τάξης στερείτε φαντασίας και χωρίς την καλλιέργεια της, γίνεται πιο φτωχό, ένα αποτέλεσμα που δείχνει ότι υπάρχουν όχι μόνο πλεονεκτήματα, αλλά και μειονεκτήματα χρήσης της «τεχνολογίας» στην εκπαίδευση (Παπαδοπετράκης, ο.π.).

Αξίζει να σημειωθεί ακόμα, όπως συμφωνούν και οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, ότι η «τεχνολογία» θα πρέπει να εξυπηρετεί το περιεχόμενο της διδασκαλίας. Η Παιδεία δεν πρέπει να προσαρμόζεται στην «εξέλιξη της Τεχνολογίας» (Αργύρης, 2002). Με άλλα λόγια, οι αλλαγές στη τεχνολογία πρέπει να επιτρέπουν νέες μορφές αποτελεσματικής παιδαγωγικής και όχι να τις αποκλείουν ή να τις υποβαθμίζουν (David, op. cit.). Όπως και ο κύριος Παπαδοπετράκης το 2002, στην ομιλία του, στο Πανελλήνιο εκπαιδευτικό συνέδριο της Δ.Ο.Ε – Π.Ο.Ε.Δ. ανέφερε ότι, μια μηχανή μπορεί να επεκτείνει την νοητική ή την μυϊκή δύναμη του ανθρώπου, αλλά δεν θα καταφέρει ποτέ να ξεπεράσει τον νοητικό πλούτο μιας κοινωνίας και να αναπληρώσει τη σχέση του μαθητή με τον δάσκαλο.

4.2 Τεχνολογία και διδακτική Μαθηματικών

Η σημαντικότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή κρίνεται αδιαμφισβήτητη και δεν θα μπορούσε να περάσει ανεκμετάλλευτη από τις μεγάλες εταιρίες ανάπτυξης προγραμμάτων και λογισμικών. Πολλά προγράμματα εξειδικευμένα σε μαθηματικές γνώσεις ή και μη, έχουν εισάγει στην «γραμμή εργαλείων» τους, μαθηματικές συναρτήσεις (English, op. cit.). Η χρήση γραφημάτων και γραφικών παραστάσεων, η ανάλυση στατιστικών δεδομένων, η επίλυση τύπων, οι σύνθετοι υπολογισμοί, καθώς και διάφορες άλλες μαθηματικές διαδικασίες, είναι απαραίτητες σε πολλές ειδικότητες. Η τεχνολογία βοηθάει τους μη εξιδεικευμένους με τα μαθηματικά και τα θεωρήματα τους να πάρουν τα αποτελέσματα που χρειάζονται με απλούς και εύκολους τρόπους. Έτσι όχι μόνο σηματοδοτείται, αλλά και επιβάλλεται η εισαγωγή της στη διδακτική των μαθηματικών, αποφεύγοντας φυσικά τις υπερβολές στη χρήση της.

Η τεχνολογία άρχισε να απασχολεί τα μαθηματικά εδώ και πάρα πολλά χρόνια. Από το 1960 άρχισαν να κυκλοφορούν μεμονωμένα διαφορά προγράμματα για συγκεκριμένους υπολογισμούς. Το 1988, λανσαρίστηκε το πρώτο ολοκληρωμένο υπολογιστικό περιβάλλον, γνωστό ακόμη και σήμερα ως Mathematica (Κυριαζής, Ψυχάρης, Κορρές, 2012). Το γεγονός αυτό σηματοδότησε την έναρξη μιας νέας εποχής όχι μόνο για τα μαθηματικά και την τεχνολογία, άλλα και την οικονομία, την φυσική και διάφορες άλλες επιστήμες, όπου τα προγράμματα τεχνικών υπολογισμών βρίσκουν άμεση εφαρμογή (Κυριαζής, Ψυχάρης, Κορρές, ο.π.).

Η γρήγορη ανάπτυξη των υπολογιστικών προγραμμάτων και λογισμικών, ένταξε την τεχνολογία στη διδακτική των Μαθηματικών. Πολλές φορές μάλιστα, η χρήση της τεχνολογίας κρίνεται όχι μόνο βοηθητική, αλλά και απαραίτητη στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η προσεκτικά δομημένη απεικόνιση μιας άσκησης μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις και προσομοιώσεις σχημάτων και γραφικών παραστάσεων, καθιστά την έννοια πιο εύκολα κατανοητή (David, op. cit.). Όπως είναι φυσικό, πολλές ασκήσεις μαθηματικών που απαιτούν αναλυτικά διαγράμματα, σχήματα ή ακόμα και σύνθετους υπολογισμούς, είναι σχεδόν αδύνατον να λυθούν χωρίς τη χρήση της τεχνολογίας και ακόμα πιο αδύνατον να κατανοηθούν από την πλειοψηφία των μαθητών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα των παραπάνω, είναι η χρήση της κλασικής αριθμομηχανής για προβλήματα με πολλές πράξεις.

4.3 Τεχνολογία και διδακτική Πιθανοτήτων

Οι πιθανότητες δεν βρίσκονται στα προγράμματα σπουδών διαφόρων χωρών απλά για να διδαχθούν ως μια αφηρημένη έννοια, αλλά διδάσκονται για να μοντελοποιηθούν πολλά φαινόμενα του πραγματικού κόσμου (Batanero, Chernoff, Engel, Lee και Sánchez 2016). Τα τυχερά παιχνίδια, ο προγραμματισμός των υπολογιστών, οι διάφορες έρευνες, ακόμα και η πρόβλεψη του καιρού, είναι μερικά από αυτά τα φαινόμενα. Όντας λοιπόν, ένας από τους ποιο πρόσφατους και πιο χρήσιμους κλάδους των μαθηματικών όφειλαν να προσελκύσουν την προσοχή της τεχνολογίας. Τα οφέλη που αποκόμισαν από την χρήση της είναι αρκετά και σε ένα βαθμό βοηθάνε στην εξέλιξη της θεωρίας της.

Η ταχύτητα της συλλογής του δείγματος, σε συνδυασμό με τη γρήγορη οργάνωση ανάλυση και σύγκριση των δεδομένων, είναι μερικά από τα πλεονεκτήματα που η τεχνολογία προσφέρει στις πιθανότητες (Batanero, Chernoff, Engel, Lee και Sánchez, 2016). Λόγου χάρη, ας σκεφτεί κανείς πόσο χρόνο εξοικονομεί ένας ερευνητής, όταν ο υπολογιστής από μόνος του, αναλύει τα αποτελέσματα, τα ταξινομεί, τα μορφοποιεί σε πίνακες και δημιουργεί τις ανάλογες γραφικές παραστάσεις. Χρόνος ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λήψη ενός μεγαλύτερου δείγματος και άρα μια πιο αξιόπιστη έρευνα.

Πολλές μεγάλες εταιρίες σήμερα, χρησιμοποιούν προγράμματα ειδικά διαμορφωμένα για τις «Πιθανότητες» και την Στατιστική. Ένα ακόμα πλεονέκτημα των προγραμμάτων αυτών και κατά συνέπεια και των υπολογιστών είναι η δημιουργία μεγάλης βάσης δεδομένων και η ευκολία ανάκτησης των αποτελεσμάτων. Η αναζήτηση και αποθήκευση δεδομένων σε έναν υπολογιστή είναι πλέον πιο γρήγορη και πιο απλή από ότι στο παρελθόν και σε αυτό αξίζει να προστεθεί η μεγαλύτερη μάζα πληροφοριών που έχει τη δυνατότητα ο ερευνητής να συλλέξει.

Τέλος, δεν πρέπει να παραληφθεί η αναφορά στη κατασκευή μοντέλων που περιγράφουν καθημερινά προβλήματα (Batanero, Chernoff, Engel, Lee και Sánchez, op. cit.). Η παρουσία του υπολογιστή, δίνει την δυνατότητα στα παιδιά να μοντελοποιήσουν περισσότερα πραγματικά προβλήματα ή πειράματα, όπως επίσης και την ευχέρεια να διερευνήσουν πολλά σενάρια του προβλήματος, αλλάζοντας κάθε φορά κάποιες παραμέτρους ή προσθέτοντας περισσότερες εκτελέσεις.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

5.1 Αναγκαιότητα και πρωτοτυπία της έρευνας

Ό κλάδος των πιθανοτήτων προσελκύει το ενδιαφέρον τόσο των μαθητών, όσο και μεγαλύτερων ανθρώπων, καθώς σήμερα πολλά προβλήματα βασίζονται στις πιθανότητες και γενικότερα στις στοχαστικές διαδικασίες. Ο λόγος αυτός οδήγησε τη παγκόσμια εκπαίδευση να εισάγει τις πιθανότητες σε όλα τα προγράμματα σπουδών.

Τα παιδιά εντάσσονται από μικρή ηλικία σε πιθανοτικές διαδικασίες και προβλήματα, όπως να μαθαίνουν τρόπους συλλογής δεδομένων και αναπαράστασης των αποτελεσμάτων. Βέβαια, δημιουργείται το ερώτημα, από πιά ηλικία τα παιδιά είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται έννοιες και διαδικασίες Πιθανοτήτων.

Η ανάγκη διερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών στις πιθανότητες, όσο και η ανάγκη εξακρίβωσης της ηλικίας που αυτές πρέπει να διδάσκονται κρίνονται απαραίτητες. Τα προγράμματα σπουδών οφείλουν να ενημερώνονται και να προσαρμόζονται στις ανάγκες και τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με το διδακτικό αντικείμενο, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα της επιτυχούς μάθησης.

Σε πολλές έρευνες που έχουν διεξαχθεί μελετάται η αντίληψη των μαθητών για τις πιθανότητες. Ωστόσο, παρουσιάζονται διάφορα σφάλματα στα αποτελέσματα των εν λόγο ερευνών. Για παράδειγμα, πολλοί ερευνητές δεν θεωρούν σημαντική τη διατύπωση της ερώτησης, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην την καταλαβαίνουν πλήρως και να οδηγούνται σε λάθη. Τα λάθη αυτά, δεν σχετίζονται με τις πιθανότητες, αλλά με την έλλειψη κατανόησης της ερώτησης. Θα ήταν λοιπόν λάθος να διεξαχθούν συμπεράσματα για την αντίληψη των μαθητών στις πιθανότητες από μια δυσνόητη ερώτηση.

Επιπλέον, αναζητώντας κανείς την εγχώρια αλλά και την παγκόσμια βιβλιογραφία, θα διαπιστώσει ότι οι περισσότερες έρευνες διεξάγονται σε ξεχωριστές ηλικιακές βαθμίδες. Αυτό έχει βέβαια ως αποτέλεσμα τον περιορισμό του εξεταζόμενου πληθυσμού και του αντίστοιχου δείγματος, μολαταύτα δυσκολεύει τη σύγκριση των διάφορων ηλικιακών βαθμίδων, αφού δεν γίνεται υπό την ίδια έρευνα. Λόγου χάρη, η διαφοροποίηση του ερωτηματολογίου στις διάφορες ηλικίες στερεί συμπεράσματα σχετικά με την ανάπτυξη της αντίληψης δεδομένου της ηλικίας.

Στη παρούσα εργασία χορηγήθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο σε διάφορες ηλικίες για να εξακριβωθεί η παραπάνω διαφορά, καθώς και η ηλικία που ωριμάζει η αντίληψη των μαθητών. Αξίζει να σημειωθεί ακόμα ότι η συγκεκριμένη έρευνα δεν μελετάει μόνο τις αντιλήψεις των μαθητών, όσο και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών πάνω στο αντικείμενο των πιθανοτήτων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω κρίνεται απαραίτητη η διεξαγωγή ερευνών όπως η δεδομένη, καθώς όχι μόνο συντελούν στη λήψη σημαντικών και ενδιαφέρον στατιστικών συμπερασμάτων, αλλά βοηθάνε στην οικοδόμηση ενός σωστού σχολικού προγράμματος με μεγαλύτερη αξιοπιστία και αποτελεσματικότητα.

5.2 Σκοπός έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει τις αντιλήψεις και τις γνώσεις των μαθητών, των εκπαιδευτικών και των εν δυνάμει εκπαιδευτικών σχετικά με τις πιθανότητες. Η παρούσα ερευνητική εργασία αποσκοπεί να μελετήσει:

1. Τις αντιλήψεις του δείγματος για την αναγκαιότητα και τη χρησιμότητα των «Πιθανοτήτων».
2. Την άποψη τους για τη διδακτική των πιθανοτήτων στο σχολείο.
3. Τις πεποιθήσεις των ερωτώμενων για τους παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση και τη διδακτική διαδικασία.
4. Την άποψη τους για τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση.
5. Τη σχέση των ερωτώμενων με τις πιθανότητες και το επίπεδο της πιθανοτικής τους σκέψης ανάλογα με την ηλικία τους.
6. Την εξοικείωση τους με ορισμούς και έννοιες πιθανοτήτων.

7. Τον τρόπο που σκέφτονται οι ερωτώμενοι σύμφωνα με τα δεδομένα ενός προβλήματος και τον τρόπο που τίθεται η ερώτηση, αλλά και πως αντιλαμβάνονται καθημερινά ζητήματα πιθανοτήτων.
8. Την εμπιστοσύνη που δείχνουν στην πιθανότητα και τη πρόβλεψη στην καθημερινή τους ζωή.
9. Την αντίληψη των ερωτώμενων για την έννοια του «Δειγματικού χώρου».
10. Την αντίληψη τους για τα ισοπίθανα και μη ισοπίθανα ενδεχόμενα.
11. Τη χρήση και τη κατανόηση του κλασικού ορισμού πιθανότητας.
12. Την αντίληψή των μαθητών περί ανεξαρτησίας των γεγονότων.

5.3 Ερευνητικές υποθέσεις

Οι υποθέσεις της παρούσας έρευνας, οι οποίες προέκυψαν στο προπαρασκευαστικό στάδιο της, είναι οι εξής:

1. Οι μαθητές μεγαλύτερων ηλικιών έχουν μεγαλύτερη εξοικείωση με τις έννοιες και τις διαδικασίες των πιθανοτήτων, καθώς η αντίληψη τους είναι περισσότερο ανεπτυγμένη.
2. Όλες οι ηλικίες θεωρούν ότι η παρουσία τεχνολογίας στη τάξη θα βελτιώσει τη μαθησιακή διαδικασία και θα κάνει πιο κατανοητό το μάθημα.
3. Οι ερωτώμενοι που δεν δίνουν έναν σωστό ορισμό για την έννοια «Πιθανότητα», μπορούν να ανταπεξέλθουν στις ερωτήσεις περί αντιλήψεων.
4. Οι απαντήσεις των μαθητών που έχουν διδαχθεί τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, δεν εξαρτώνται άμεσα από διαισθητικές αντιλήψεις ή τον τρόπο που τίθεται η ερώτηση και την παρουσία ή μη σχήματος και εικόνας.

Οι παραπάνω υποθέσεις διαφέρουν μεταξύ τους και γίνονται για όλη την έκταση της έρευνας. Αυτές προκύπτουν τόσο από την καθημερινή εμπειρία, όσο και από την προέρευνα της παρούσας εργασίας.

Η πρώτη υπόθεση βασίζεται στη λογική άποψη, ότι η αντίληψη των μαθητών αναπτύσσεται με την ηλικία. Ακολουθεί η δεύτερη υπόθεση, η οποία είναι αποτέλεσμα της γενικής αντίληψης που επικρατεί σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Τέλος οι δύο τελευταίες υποθέσεις βασίζονται στη χρήση των γνώσεων των μαθητών. Οι μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί τις πιθανότητες, είναι λογικό να απαντάνε στις ερωτήσεις με τις διαισθητικές τους αντιλήψεις και απόψεις, εν απουσία μαθηματικής αυστηρότητας και επηρεαζόμενοι από την παρουσία σχημάτων και εικόνων. Τι γίνεται όμως με αυτούς που έχουν διδαχθεί την έννοια;

5.4 Ερευνητική στρατηγική

Κατά τη διεξαγωγή μιας έρευνας είναι πολύ σημαντικό για τον ερευνητή ο τρόπος προσέγγισης και συλλογής των δεδομένων. Σήμερα, οι περισσότερες έρευνες βασίζονται σε δύο συνήθης τρόπους προσέγγισης. Η πρώτη προσεγγιστική μέθοδος είναι η ποσοτική και η δεύτερη η ποιοτική.

Η ποσοτική προσέγγιση είναι μια έρευνα μεγάλης κλίμακας και διεξάγετε κυρίως μέσο ερωτηματολογίου ή δομημένης συνέντευξης (Dawson, 2007). Ο συγκεκριμένος τύπος έρευνας δεν απαιτεί από τον ερευνητή την άμεση επαφή του με το δείγμα, ωστόσο απαιτεί μια αυστηρή αλληλουχία βημάτων κατά τη σχεδίαση και την εκτέλεση της (Dawson, 2007). Η ποιοτική προσέγγιση δεν έχει την αυστηρότητα και το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιεί η ποσοτική, ωστόσο παρουσιάζει ιδιαίτερη επιστημονική σημασία. Ο ερευνητής επιδιώκει να ερευνήσει την ιδιαιτερότητα του φαινομένου που μελετά σε βάθος και να διαμορφώσει μια ολοκληρωτική προσέγγιση (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Σε αυτή την μέθοδο, το σημαντικό είναι ότι μπορεί το δείγμα να είναι μικρότερο, αλλά ο ερευνητής έχει επαφή με το δείγμα για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και μέσω παρατήρησης, συνέντευξης ή ακόμα και διδασκαλίας, διεξάγει τα συμπεράσματα για τις συμπεριφορές και τις εμπειρίες των ερωτώμενων (Dawson, 2007).

Η παρούσα ερευνητική εργασία είναι μία ατομική μελέτη που ανατέθηκε στον ερευνητή με πρωτοβουλία του και κατόπιν συνεννόησης με τον επιβλέποντα καθηγητή. Το πλαίσιο διεξαγωγής της έρευνας είναι η εκπαίδευση και μελετώνται οι αντιλήψεις μαθητών και εκπαιδευτικών πάνω στις πιθανότητες. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η παρούσα έρευνα δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο τη ποσοτική ή μόνο την ποιοτική προσέγγιση για να επιτύχει τη μέγιστη δυνατή αυστηρότητα και αξιοπιστία. Η παρουσία τόσο ποσοτικών, όσο και ποιοτικών στοιχείων οδηγεί σε μια μεικτή ερευνητική προσέγγιση. Σε αυτή τη προσέγγιση οι δύο μέθοδοι λειτουργούν συμπληρωματικά μεταξύ τους και προσφέρουν στον ερευνητή μια καλύτερη και πληρέστερη διερεύνηση του εξεταζόμενου ζητήματος (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας έρευνας, τείνουν να είναι πιο αξιόπιστα, καθώς ο ερευνητής μπορεί να αντισταθμίσει τα αδύνατα σημεία της μιας μεθόδου με την άλλη, καθώς και να δώσει απαντήσεις σε ένα ευρύτερο φάσμα των ερευνητικών ερωτημάτων (Ίσαρη & Πουρκός, 2015).

5.5 Μέσα συλλογής δεδομένων

Ο τρόπος συλλογής των αποτελεσμάτων στην παρούσα έρευνα έγινε με τη χρήση ερωτηματολογίων, τα οποία συντάχθηκαν από τον ερευνητή, προσαρμοσμένα στις ανάγκες και τους στόχους της έρευνας. Τα ερωτηματολόγια σχεδιάστηκαν και δομήθηκαν έτσι ώστε να αξιολογούν ένα ευρύ φάσμα περιεχομένων, καταγράφοντας τις πεποιθήσεις, τις αντιλήψεις και τις γνώσεις ενός μεγάλου ηλικιακού φάσματος ερωτώμενων σχετικά με τις Πιθανότητες.

Τα ερωτηματολόγια που δόθηκαν στο δείγμα ήταν δύο ειδών με αρκετά κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Γενικά, υπήρξε η προσπάθεια, οι ερωτήσεις να μην διαφέρουν πολύ για τις ανάγκες της έρευνας. Το πρώτο ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε σε μαθητές ΄Δ τάξης Δημοτικού έως και ΄Γ τάξης Λυκείου. Ήταν μικρότερο σε μέγεθος και όπου ήταν δυνατό, αποφεύχθηκε η χρήση επιστημονικής ορολογίας, καθώς και ερωτήσεις που η απάντηση τους απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις πιθανοτήτων. Ο κύριος λόγος που δόθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο σε όλες αυτές τις ηλικιακές βαθμίδες, είναι να εξακριβωθεί η διαφορά της αντίληψης των μαθητών δεδομένου της ηλικίας στο ίδιο ακριβώς πρόβλημα, αλλά και να απαντήσει σε ερωτήματα όπως: Πότε αρχίζει να αλλάζει η αντίληψη των μαθητών; Ποια η διαφορά στο τρόπο σκέψης που ακολουθεί κάθε ηλικία για να αντιμετωπίσει την ίδια κατάσταση;

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο, το οποίο ήταν και μεγαλύτερο σε έκταση, απευθυνόταν σε φοιτητές και εκπαιδευτικούς. Εδώ, υπήρχαν περισσότεροι ορισμοί και παραδείγματα με τη χρήση πιο αυστηρής ορολογίας, λεξιλογίου και επιστημονικών φράσεων. Αυτό έγινε για τον ακριβή λόγο ότι εκτός από τις αντιλήψεις, σε αυτό το τμήμα του δείγματος, στόχος του ερευνητή ήταν να ελέγξει ακόμα και τις γνώσεις των εκπαιδευτικών και των εν δυνάμει εκπαιδευτικών σε ένα αντικείμενο που κρίνονται κάποια στιγμή να διδάξουν.

5.5.1 Δοκιμαστική χρήση ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο πριν αρχίσει να μοιράζεται στο κυρίως δείγμα, χρησιμοποιήθηκε δοκιμαστικά. Η πιλοτική εφαρμογή του, έγινε από 18 έως 22 Δεκεμβρίου του 2017, σε μαθητές διαφόρων τάξεων και σε κάποιους φοιτητές του πρώτου και δεύτερου έτους του Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής εκπαίδευσης Ρόδου. Αυτό έγινε για να εξακριβωθεί ο χρόνος διεκπεραίωσης του, καθώς και εάν υπήρχαν ερωτήσεις με ασάφειες ή παρεξηγήσεις που δυσκόλευαν τους ερωτώμενους και χρειαζόντουσαν κάποια περεταίρω διευκρίνιση.

Η δοκιμαστική αυτή εφαρμογή συντέλεσε θετικά στη πορεία της έρευνας, καθώς διορθώθηκαν και επαναδιατυπώθηκαν ορισμένες ερωτήσεις που κρίθηκαν δυσνόητες από τους περισσότερους μαθητές. Επιπλέον, άλλαξε η δομή του ερωτηματολογίου, ώστε να φαίνεται μικρότερο και να μην κουράζει τον ερωτώμενο και μετά από τις τροποποιήσεις βελτιώθηκε ο χρόνος συμπλήρωσης του. Ο αρχικός εκτιμώμενος χρόνος υλοποίησης, ήταν 35 λεπτά, ωστόσο η πιλοτική εφαρμογή απέδειξε ότι οι ερωτώμενοι χρειαζόντουσαν περισσότερο από μία ολόκληρη διδακτική ώρα. Έτσι, αφαιρέθηκαν κάποιες ερωτήσεις που θεωρήθηκαν περιττές και ανούσιες και ο χρόνος αποπεράτωσης του ερωτηματολογίου κατέβηκε στα 25 λεπτά.

5.5.2 Παρουσίαση τελικού ερωτηματολογίου

Και τα δύο ερωτηματολόγια που συντάχθηκαν για τις ανάγκες τις της συγκεκριμένης έρευνας ακολουθούν την ίδια δομή. Η έρευνα ξεκινάει συλλέγοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ερωτώμενων όπως φύλο, μορφωτικό επίπεδο και ηλικία, για να εξακριβωθεί ο βαθμός που αυτά έχουν σχέση με τις προς μελέτη μεταβλητές.

Η ιδιότητα του ερευνητή ως εκπαιδευτικού και ειδικότερα μαθηματικού, του προσφέρει το πλεονέκτημα να γνωρίζει τη συμπεριφορά και τη στάση των συμμετεχόντων απέναντι στα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, η εμπειρία του ερευνητή και η ενασχόληση του με μαθητές διαφόρων ηλικιών, έπαιξε καθοριστικό παράγοντα στη δόμηση του ερωτηματολογίου, έτσι ώστε να κατασκευαστεί ένα ευχάριστο, αλλά και αυστηρά δομημένο ερωτηματολόγιο, όπου μπορεί να διακριθεί η σωστή συμπλήρωση του, από την τυχαία. Επιπλέον, αρκετές έρευνες έχουν γίνει στην εκπαίδευση πιθανοτήτων και στη συλλογή αντιλήψεων, οι οποίες βοήθησαν αρκετά στην υποκείμενη κατασκευή. Έτσι, τόσο με διάφορες τεχνικές που εφάρμοσε ο ερευνητής, όσο και με αυτή την εξωτερική υποστήριξη, ενισχύεται ακόμα περισσότερο η ποιότητα και η αξιοπιστία του παρόντος ερωτηματολογίου.

Οι τεχνικές που εφάρμοσε ο ερευνητής κατά το σχεδιασμό της έρευνας και του ερωτηματολογίου, του επιτρέπουν να εξακριβώσει την εγκυρότητα κάθε ερωτηματολογίου ή ακόμα και το σημείο που το ερωτηματολόγιο μπορεί να θεωρηθεί έγκυρο. Για παράδειγμα, αυτό που ο ερευνητής ήθελε να προλάβει είναι η ενδεχόμενη κόπωση κυρίως των παιδιών νεαρής ηλικίας κατά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Πολλά παιδιά ξεκινάνε το ερωτηματολόγιο δίνοντας την απαραίτητη προσοχή, αλλά συνεχίζουν με μια τυχαία συμπλήρωση του, όταν αυτά κουραστούν ή δυσκολευτούν. Για αυτό τον λόγο απαιτήθηκε μια αυστηρή δομή στην επιλογή και στη σειρά κατάταξης των ερωτήσεων, ώστε να είναι ευδιάκριτο το συγκεκριμένο σημείο και να αποφευχθούν τα σφάλματα στην έρευνα. Επιπλέον, να σημειωθεί ότι δεν θεωρήθηκε απαραίτητη η κλιμάκωση της δυσκολίας των ερωτήσεων, για να παρακινηθούν οι μαθητές να διαβάσουν και να προσπαθήσουν όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου. Με αυτό τον τρόπο, γίνεται ευκολότερη η δουλειά του ερευνητή για να διαχωρίσει τα έγκυρα και τα άκυρα ερωτηματολόγια, καθώς και ελαχιστοποιείται η πιθανότητα, αρκετοί μαθητές να συμπληρώσουν το μισό ερωτηματολόγιο, χωρίς να προσπαθήσουν το υπόλοιπο επειδή θεωρείται δύσκολο. Σημαντικό ρόλο έπαιξε ακόμα, ότι τα προβλήματα που είχαν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές, προσαρμόστηκαν σε καθημερινά προβλήματα ή σε παιχνίδια, ώστε το ερωτηματολόγιο να κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερωτώμενων, να είναι ευχάριστο και να μην κουράζει.

Αυτό που αξίζει όμως να σημειωθεί, είναι ο καθοριστικός παράγοντας στην αξιοπιστία των ερωτηματολογίων που συντέλεσε η τελευταία ερώτηση. Στο τέλος του ερωτηματολογίου, προστέθηκε μια ερώτηση για να αναφέρουν οι συμμετέχοντες της έρευνας τις ερωτήσεις που τους δυσκόλεψαν. Ο ερευνητής κατά την διόρθωση των ερωτηματολογίων, έλαβε αρκετά υπόψιν τη συγκεκριμένη ερώτηση, αφού οι ερωτώμενοι εκεί έγραφαν την ερώτηση που τους δυσκόλεψε και δεν απάντησαν καθόλου, ή απάντησαν στη τύχη. Ως αποτέλεσμα αυτού, σε κάθε ερωτηματολόγιο δινόταν ιδιαίτερη προσοχή στις ερωτήσεις που στιγματιζόντουσαν από τον ερωτώμενο ως δύσκολες και αρκετές φορές ακυρώθηκαν απαντήσεις που θεωρήθηκαν μη αξιόπιστες και μη έγκυρες.

Κάθε ερωτηματολόγιο χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος μελετάει γενικά τη σχέση των ερωτώμενων με τα μαθηματικά και τις πιθανότητες, τις γνώσεις τους σε διάφορες πιθανοτικές έννοιες, καθώς και εξετάζεται η ικανότητα των μαθητών να δώσουν έναν συγκεκριμένο ορισμό της έννοιας «Πιθανότητα». Οι μικροί σε ηλικία ερωτώμενοι βέβαια, όπως είναι λογικό, δεν έχουν επαρκείς γνώσεις σε αυτό το κλάδο των μαθηματικών, αφού δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της Πιθανότητας. Ωστόσο, ζητείται από τον ερευνητή η απάντηση τους σε ερωτήσεις όπως για παράδειγμα «Τι είναι ενδεχόμενο» ή «τι καλούμε πείραμα τύχης;» κ.α., για να εξακριβωθούν οι αντιλήψεις των μαθητών σε έννοιες που ακούνε καθημερινά. Ακόμα, σε αυτό το κομμάτι του ερωτηματολογίου, εξακριβώνονται οι πεποιθήσεις των συμμετεχόντων της έρευνας για τη διδακτική των πιθανοτήτων και γενικότερα των μαθηματικών. Λόγου χάρη, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική των πιθανοτήτων και κατά πόσον αυτή η διαδικασία θα γινόταν ευκολότερη με τη χρήση της τεχνολογίας.

Αυτό που αξίζει να τονιστεί για τις ερωτήσεις του πρώτου μέρους για τη μέτρηση των πεποιθήσεων και των στάσεων, είναι ότι η πλειοψηφία τους βασίζεται στην κλίμακα Likert. Ο ερευνητής επέλεξε να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη κλίμακα με 4 επίπεδα (πολύ/αρκετά/λίγο/καθόλου) για να δώσει τη δυνατότητα στους ερωτώμενους να δώσουν μια πιο ακριβή απάντηση. Η ενδιάμεση επιλογή στα παραπάνω επίπεδα, δεν κρίθηκε απαραίτητη, για να αποφευχθεί ο ουδέτερος παράγοντας και ο παράγοντας τύχη. Επίσης πολλές φορές, μια ουδέτερη στάση σε ένα ζήτημα αρκετών διαφορετικών ανθρώπων δεν είναι πάντα η ίδια. Αν κάποιος για παράδειγμα απαντήσει πως ούτε διαφωνεί, ούτε συμφωνεί, δεν σημαίνει ότι εν μέρη δεν κλείνει προς κάποια κατεύθυνση.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου παρουσιάζονται κάποια προβλήματα τα οποία προσαρμόστηκαν από διάφορες έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς στο εσωτερικό και στο εξωτερικό και αποσκοπούν στη κατανόηση της σκέψης των ερωτώμενων, καθώς και της χρήσης των γνώσεων ή των αντιλήψεων τους στην επίλυση ενός προβλήματος. Σε αυτό το τμήμα της έρευνας, υπάρχει και η ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο ερωτηματολογίων που χρησιμοποιήθηκαν στις διαφορετικές ηλικιακές βαθμίδες.

Στο ερωτηματολόγιο των μαθητών, εκτός από τη χρήση απλούστερης γλώσσας, περισσότερων εξηγήσεων στα προβλήματα και την αποφυγή επιστημονικών φράσεων, αποτελείται από 9 ερωτήσεις, εκ των οποίων δύο ερωτήσεις μελετάνε την αντίληψη του ερωτώμενου για την έννοια των πιθανοτήτων μέσα από καθημερινά γεγονότα και προβλήματα. Στη συνέχεια, χωρίς να ακολουθούν συγκεκριμένη σειρά για να μην χαρακτηριστεί το ερωτηματολόγιο μονότονο, αλλά και για να εναλλάσσεται η σκέψη του μαθητή στα διάφορα προβλήματα, υπάρχουν 5 ερωτήσεις που μελετάνε τα ισοπίθανα ενδεχόμενα και 2 τα μη ισοπίθανα. Με άλλα λόγια, κατά πόσον ο μαθητής είναι σε θέση να κατανοήσει ότι δύο ενδεχόμενα μπορεί να έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν ή όχι. Χαρακτηριστικό αυτών των ερωτήσεων, είναι η σύνδεση τους με απλά καθημερινά γεγονότα ή παιχνίδια, που κάθε ερωτώμενος αντιμετωπίζει στην προσωπική του ζωή.

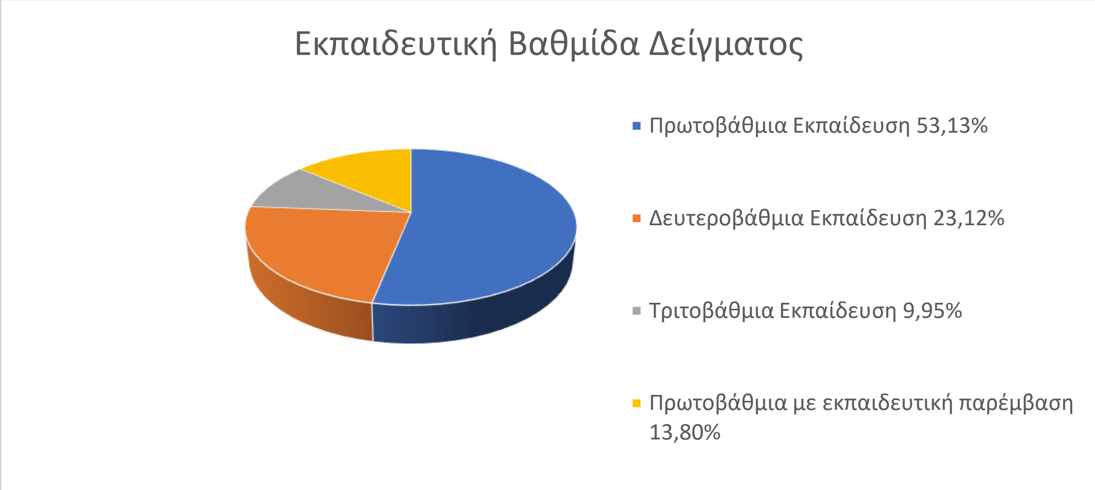
Στο ερωτηματολόγιο των φοιτητών και των εκπαιδευτικών, υπάρχουν τόσο οι ίδιες ερωτήσεις, εμπλουτισμένες με περισσότερες επιστημονικές έννοιες, όσο και ερωτήσεις που απαιτούν πιο εξειδικευμένες γνώσης θεωρίας πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, έχουν προστεθεί συνολικά 3 ερωτήσεις σχετικά με την έννοια του «Δειγματικού χώρου» και πώς αυτός διαμορφώνεται ανάλογα με τα ζητούμενα του προβλήματος και 1 ερώτηση που ζητάει αιτιολόγηση με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Τα παιδιά δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν μια τέτοια εκφώνηση, χωρίς να διδαχθούν τις κατάλληλες έννοιες. Για αυτό το λόγο οι ερωτήσεις αυτού του τύπου, απείχαν από τα ερωτηματολόγια των μαθητών.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι σε όλες τις ερωτήσεις, ο ερωτώμενος πρέπει να αιτιολογήσει την απάντησή του. Ο λόγος της αιτιολόγησης, είναι για να μελετηθεί ο τρόπος σκέψης των ερωτώμενων και όχι μόνο μια σωστή ή λάθος απάντηση, να ελαχιστοποιηθεί ο παράγοντας τύχη, καθώς και να ελέγξει ο ερευνητής εάν οι μαθητές και γενικότερα οι ερωτώμενοι, είναι σε θέση να αιτιολογήσουν ένα πιθανοτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας έννοιες πιθανοτήτων ή απλά την εμπειρία τους. Ακόμα, υπάρχουν ερωτήσεις που εξετάζουν την ίδια έννοια με διαφορετική προσέγγιση της εκφώνησης. Δηλαδή υπάρχουν ερωτήσεις που περιγράφουν το πρόβλημα μέσω της εκφώνησης και ερωτήσεις που συνοδεύονται από μια εικόνα ή ένα σχήμα και βοηθάνε το μαθητή στην κατανόηση της. Αυτό γίνεται για να εξακριβωθεί εάν η εκφώνηση και ο τρόπος παρουσίασης της ερώτησης επηρεάζει την απάντηση του μαθητή και αν τα παιδιά χρησιμοποιούν διαφορετικές ιδέες για να περιγράψουν την ίδια κατάσταση, ακόμα και όταν αυτή παρουσιάζεται με διαφορετικό τρόπο. Επίσης, είναι ένας ακόμα παράγοντας, για να διασφαλίσει την εγκυρότητα του ερωτηματολογίου, αφού επιτρέπει στον ερευνητή να συγκρίνει τις δύο όμοιες ερωτήσεις και να εξακριβώσει εάν υπήρχε παράγοντας τύχη κατά την απάντηση.

5.6 Πληθυσμός και δείγμα έρευνας

Η έρευνα διεξάχθηκε στη Ρόδο με δείγμα 653 άτομα. Πιο συγκεκριμένα, συμμετείχαν 437 μαθητές των Δημοτικών σχολείων του νησιού και ειδικότερα, 96 μαθητές ηλικίας 8 με 9 χρονών, 266 ηλικίας 10 με 11 χρονών και 62 ηλικίας 11 με 13 χρονών. Ακόμα, 151 μαθητές Γυμνασίων και Λυκείων με τον αριθμό αυτόν να διαμοιράζεται σε 35 μαθητές 13 και 14 χρονών, 88 μαθητές 15 και 16 χρονών και 27 μαθητές 17 και 18 χρονών. Τέλος, 45 φοιτητές του παιδαγωγικού Τμήματος Ρόδου, καθώς και 20 εκπαιδευτικοί από διάφορα σχολεία που επισκέφτηκε ο ερευνητής διαφόρων ηλικιών από 18 έως 54 χρονών.

Από τους 437 μαθητές της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ξεχωρίζουν 90 μαθητές, οι οποίοι έλαβαν το ερωτηματολόγιο έπειτα από διδακτική παρέμβαση του ερευνητή. Οι μαθητές αυτοί αναλυτικότερα, αποτελούν δείγμα μαθητών της ΄Δ, Έ και ΄ΣΤ Δημοτικού στα σχολεία της Ρόδου και πιο συγκεκριμένα από το 2^{o} Δημοτικό σχολείο της πόλεως Ρόδου.



Διάγραμμα 5.1: Ποσοστά που αποτελείται το Δείγμα

Το συνολικό δείγμα του πληθυσμού αναλύεται σε 331 άνδρες και 322 γυναίκες. Αναλυτικότερα, υπήρχαν 229 αγόρια και 208 κορίτσια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, 81 αγόρια και 69 κορίτσια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και τέλος, 21 άνδρες και 44 γυναίκες από την τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Πίνακας 2

Διάγραμμα 5.2: Ποσοστά που αποτελείται το Δείγμα ανά φύλο

Φύλο	Άνδρες	Γυναίκες
Πρωτοβάθμια	184	163
Δευτεροβάθμια	81	69
Τριτοβάθμια	21	44
Παρέμβαση	45	45

Πίνακας 5.1: Κατανομή Ανδρών και Γυναικών ανά εκπαιδευτική βαθμίδα

Στην παρούσα εργασία για την επιλογή του δείγματος χρησιμοποιήθηκε δειγματοληπτική έρευνα. Ο πληθυσμός ολόκληρου του νησιού βέβαια, δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος. Για τον λόγο αυτό κρίθηκε αναγκαία η στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία για την συλλογή των δεδομένων, χωρίζοντας το νησί σε τρεις ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς των σχολείων της πόλεως Ρόδου, η δεύτερη ομάδα αποτελείται τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς των χωριών του νησιού και η τρίτη ομάδα από τους φοιτητές του παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Η τυχαία δειγματοληψία σε κάθε μια από τις παραπάνω ομάδες, κρίνεται αναλογική, αφού το μέγεθος του δείγματος από κάθε ομάδα πρέπει να είναι ανάλογο του πληθυσμού της.

5.7 Διαδικασία χορήγησης ερωτηματολογίου

Η χορήγηση του ερωτηματολογίου έγινε από τις 5 Φεβρουαρίου του 2018 έως τις 19 Μαρτίου του 2018 σε διάφορα σχολεία και σε φοιτητές του παιδαγωγικού τμήματος Ρόδου. Πιο συγκεκριμένα για τα σχολεία, στο $1^{ο}$ και $2^{ο}$ πειραματικό σχολείο Ρόδου, στο $7^{ο}$ Δημοτικό Σχολείο, στο $3^{ο}$ Γυμνάσιο, στο $1^{ο}$ και $3^{ο}$ Λύκειο και σε διάφορα χωριά όπως Παραδείσι, Κρητηνία, Σαλάκος, Έμπωνα και άλλα. Τέλος, στο σχολείο όπου έγινε η διδακτική παρέμβαση από τον ίδιο τον ερευνητή, είναι το $2^{ο}$ Δημοτικό σχολείο Ρόδου.

Τα περισσότερα ερωτηματολόγια δόθηκαν με την παρουσία του ίδιου του ερευνητή για να εξακριβωθεί και να διασωθεί η αξιοπιστία και η ποιότητα της έρευνας. Η εκπαιδευτική του ιδιότητα, συντέλεσε καθοριστικό παράγοντα στο να εξυπηρετηθεί και να βοηθηθεί από τους εκάστοτε συναδέλφους. Στα σχολεία και τις περιοχές όπου η πρόσβαση του ερευνητή κρίθηκε για κάποιο λόγο δύσκολη, τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν από τους εκπαιδευτικούς του σχολείου, αφού προηγούμενός υπήρξε επικοινωνία με τον ερευνητή σχετικά με την ενημέρωση τους για τους σκοπούς της έρευνας, τους στόχους, τις πιθανές απορίες των μαθητών και γενικές οδηγίες για τη διαδικασία συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου.

Η διαδικασία έλαβε μέρος μία κανονική σχολική μέρα. Αρχικά γνωστοποιήθηκε στους ερωτώμενους ο λόγος και ο σκοπός και η σημασία της έρευνας, για να κατανοήσουν τη σημασία της και να εκφράσουν ακριβώς αυτό που σκέφτονται και μάλιστα με σαφήνεια και αμεροληψία. Τονίστηκε ιδιαίτερα, ότι το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και αντιπροσωπεύει μια έρευνα αντιλήψεων και όχι γνώσεων, για αυτό το λόγο δεν βαθμολογείτε και κάθε απάντηση θεωρείτε σωστή. Αυτό έπαιξε καθοριστικό ρόλο κατά τη συμπλήρωση, καθώς απέβαλλε το άγχος των μαθητών. Τέλος, δόθηκαν κάποιες εξηγήσεις και άρχισε η συμπλήρωση του.

Στους μαθητές του 2^{ου} Δημοτικού σχολείου, πριν τη χορήγηση του ερωτηματολογίου, ο ερευνητής αφιέρωσε 20 λεπτά σε μια παρέμβαση – συζήτηση για τις πιθανότητες. Σε αυτή τη συζήτηση με τους μαθητές παρουσιάστηκαν διάφορα παραδείγματα και εξηγήθηκαν κάποιες βασικές έννοιες πιθανοτήτων με τρόπο κατανοητό για την ηλικία των μαθητών. Έπειτα από αυτή την παρέμβαση μοιράστηκαν προς συμπλήρωση τα ερωτηματολόγια.

Η ολοκλήρωση του ερωτηματολογίου διήρκησε κατά μέσο όρο 30 λεπτά, όπως ακριβώς είχε διαπιστωθεί και στη πιλοτική έρευνα. Τα παιδιά, αλλά και γενικά το σύνολο των ερωτωμένων, δεν εμφάνισαν ιδιαίτερες δυσκολίες, αλλά δεν έλειψαν και οι άγνωστες λέξεις κυρίως σε παιδιά μικρότερης ηλικίας (π.χ. κατάρτιση), όπου ο ερευνητής ή οι εκπαιδευτικοί ήταν παρόντες για να επιλύσουν το πρόβλημα και να αποφευχθεί κάποια ενδεχόμενη τυχαία απάντηση. Το ερωτηματολόγιο κρίθηκε μεγάλο, ωστόσο ευχάριστο από τους περισσότερους μαθητές, αφού δεν κούρασε και οι ερωτήσεις άρεσαν στα παιδιά.

5.8 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Έπειτα από την ολοκλήρωση της διαδικασίας χορήγησης και συγκέντρωσης των ερωτηματολογίων ο ερευνητής έλεγξε μία προς μία τις απαντήσεις, έτσι ώστε να διασφαλίσει την εγκυρότητα τους. Από αυτή τη διαδικασία, προέκυψαν κάποιες άκυρες απαντήσεις, διότι θεωρήθηκε ότι απαντήθηκαν τυχαία, πρόχειρα και χωρίς την απαραίτητη προσοχή στην ερώτηση, σύμφωνα με τα κριτήρια που έθεσε ο ερευνητής κατά τον σχεδιασμό του ερωτηματολογίου και παρουσιάστηκαν παραπάνω. Επίσης, 10 ερωτηματολόγια ακυρώθηκαν ολοκληρωτικά, αφού όπως διαπιστώθηκε από τις παρόμοιες ερωτήσεις που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο απλά για να συγκριθούν οι απαντήσεις τους και να διαπιστωθεί ο βαθμός τυχαιότητας των απαντήσεων, οι απαντήσεις απόκλιναν «χαοτικά». Οι άκυρες απαντήσεις και τα ερωτηματολόγια, θεωρήθηκαν ως κενές και δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας.

Στη συνέχεια προχώρησε το στάδιο της κωδικοποίησης των απαντήσεων. Αρχικά, κάθε ερωτηματολόγιο αντιστοιχίστηκε από τον ερευνητή με έναν μοναδικό αριθμό που δήλωνε το σχολείο προέλευσης και τον αύξοντα αριθμό του ερωτηματολογίου. Αυτό έγινε για να μπορεί ο ερευνητής να ελέγξει τα δεδομένα που θα εισαγόντουσαν στον υπολογιστή για τυχόν σφάλματα κατά την μεταφορά των κωδικοποιημένων απαντήσεων. Έπειτα, κωδικοποιήθηκαν όλες οι απαντήσεις για να μπορούν να εισαχθούν σε ένα αρχείο Excel και να γίνει ο πρώτος έλεγχος διασφάλισης ποιότητας και η διόρθωση, όπως είχε σχεδιαστεί από τον ερευνητή. Τα δεδομένα που προέκυψαν στο πρόγραμμα Excel, διατηρήθηκαν ως βάση δεδομένων και εισάχθηκαν στη συνέχεια σε άλλα δύο υπολογιστικά προγράμματα για μια πιο αυστηρή στατιστική ανάλυση.

Ο χωρισμός των ερωτηματολογίων έγινε σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές, με βάση τις οποίες διαχωρίστηκαν και τα αρχεία Excel είναι: Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και τέλος της Παρέμβασης. Σε αυτή τη φάση της ανάλυσης έγινε ακόμα μια διαλογή των δεδομένων της έρευνας, διορθώνοντας λάθη που υπήρξαν κατά την κωδικοποίηση

Η στατιστική επεξεργασία και η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων, τόσο περιγραφικά, όσο και επαγωγικά σε ορισμένες ερωτήσεις, πραγματοποιήθηκε με διάφορα στατιστικά προγράμματα και κυρίως με τη χρήση του στατιστικού πακέτου S.P.S.S. και του προγράμματος συνεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification).

5.8.1 Η ανάλυση με το S.P.S.S.

Τα δεδομένα από το αρχείο Excel εισάχθηκαν στο S.P.S.S., όπου έγινε κατηγοριοποίηση των μεταβλητών, αντιστοιχίστηκαν με τιμές και παραμέτρους και έτσι ξεκίνησε η ποσοτική ανάλυση των ερωτήσεων του ερωτηματολογίου.

Από το συγκεκριμένο πρόγραμμα προέκυψε ο αριθμός των απαντήσεων σε κάθε ερώτηση και τα αντίστοιχα ποσοστά. Με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ανάλυσης δημιουργήθηκαν προσαρμοσμένα διαγράμματα και πίνακες, για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Όπως θα εξακριβωθεί παρακάτω κάθε πίνακας ή διάγραμμα προσαρμοστικέ, ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων. Επιπλέων, πίνακες συναφών ερωτήσεων σχολιάζονται μαζί, για να εξακριβωθεί η διαφορά των απαντήσεων, δεδομένου της αλλαγής του τρόπου εκφώνησης. Τέλος, στο επίπεδο περιγραφής των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται πίνακες συχνοτήτων και διαγράμματα τόσο για τις ποσοτικές όσο και για τις ποιοτικές μεταβλητές για να συμβάλλουν στην ευχερέστερη ανάγνωση της έρευνας.

5.8.2 Το πρόγραμμα CHIC και η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση

Στη συνέχεια τα δεδομένα επανακωδικοποιήθηκαν σε δίτιμες κατηγορικές μεταβλητές για τις ανάγκες του προγράμματος CHIC, που χρησιμοποιήθηκε για την επαγωγική ανάλυση. Αναφορικά με το πρόγραμμα αυτό, βασίζεται στις αρχές της σενεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης και για αυτό το λόγο κρίνεται πρώτιστος απαραίτητο, να σχολιαστεί η έννοια και οι βασικές θέσεις της «συνεπαγωγικής στατιστικής».

Το 1995, ο Gras πρότεινε μια μέθοδο ανάλυσης δεδομένων, η οποία να μπορεί να συγκρίνει τη συσχέτιση δύο γεγονότων και να εξάγει συμπεράσματα. Η ανάγκη χρήσης μιας τέτοιας μεθόδου σε διάφορους κλάδους της επιστήμης, οδήγησε σε μια ανακάλυψη, η οποία μπορεί να συγκρίνει την ένταση συνεπαγωγής δύο ή περισσότερων γεγονότων. Δεδομένου το μέγεθος της έντασης, διεξάγει συμπεράσματα για το βαθμό αποδοχής της (Gras, Kuntz, 2008). Η μέθοδος αυτή, είναι γνωστή σήμερα ως «Συνεπαγωγική Στατιστική Ανάλυση» και έχει ανέλθει σε μια πολύ χρήσιμη μέθοδο ανάλυσης δεδομένων.

Ο κύριος λόγος που αυτή η μέθοδος ξεχώρισε, είναι χάρη της μη συμμετρικότητας των δεδομένων της, σε αντίθεση με διάφορες άλλες μεθόδους που κυκλοφορούν (Gras, Suzuki, Guillet, Spagnolo, 2008). Είναι μια ισχυρή μέθοδος για την ποσοτικοποίηση της ποιότητας μιας συνεπαγωγής, λαμβάνοντας υπόψιν και την ύπαρξη εξαιρέσεων (Gras, Kuntz, 2008). Σύμφωνα με αυτήν, ένας ερευνητής ή ακόμα και ένας εκπαιδευτικός μπορεί να προβλέψει τη συμπεριφορά ενός μαθητή σε μια ερώτηση B, δεδομένης της απάντησης του σε μια πιο σύνθετη ερώτηση A (Gras, Kuntz, 2008). Διάφορα προγράμματα που δομήθηκαν πάνω σε αυτή τη μέθοδο, υπολογίζουν την ένταση μιας συνεπαγωγής, δηλαδή το ποσοστό εμπιστοσύνης μιας δεδομένης πρόβλεψης (Gras, Kuntz, 2008). Αυτό σημαίνει ότι χάρη σε αυτό τον τρόπο ανάλυσης, είναι εφικτή η συμπλοκή των γεγονότων με κανόνες μεταξύ τους (Gras, Kuntz, 2008). Πιο αναλυτικά, όπως ο κανόνας του Bayes στις πιθανότητες, όπου μετριέται η πιθανότητα επιτυχίας ενός ενδεχομένου Β, δεδομένου την επιτυχία ενός ενδεχομένου Α, έτσι και στη συνεπαγωγική στατιστική εξετάζεται η επιτυχία της ερώτησης Β δεδομένου την επιτυχία ή αντίστοιχα την αποτυχία μίας ερώτησης Α. Βέβαια να σημειωθεί ότι, ένας κανόνας όπου όλα τα υποκείμενα έχουν επιτύχει στην ερώτηση Β ή αποτύχει στην ερώτηση Α, θεωρείται ασήμαντος. Για αυτό το λόγο ένας κανόνας πρέπει να θεωρείται εκπληκτικός, για να μην τείνει η ένταση της συνεπαγωγής στο μηδέν (Gras, Kuntz, 2008).

Ένας κανόνας συσχέτισης μιας ερώτησης Α και μιας ερώτησης Β δημιουργείται επαγωγικά, αφού ανιχνευθούν κάποιες «σταθερές» στη σκέψη των υποκειμένων (Gras, Kuntz, 2008). Στη περίπτωση που το επίπεδο εμπιστοσύνης του, φτάσει σε ένα ικανοποιητικό επίπεδο τότε ο κανόνας επαληθεύεται, σε αντίθετη περίπτωση όπου εμφανίζεται ένα σημαντικό ποσοστό αντιπαραδειγμάτων όπου ο αρχικός κανόνας δεν ισχύει, τότε αυτός επαναπροσδιορίζεται η απορρίπτετε (Gras, Kuntz, 2008).

Με λίγα λόγια, η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση, είναι μια γνήσια μέθοδος στατιστικής ανάλυσης βασιζόμενη στο μέγεθος της έντασης των συνεπαγωγών (Gras, Kuntz, 2008). Το αντικείμενο της, είναι η εξόρυξη και η αξιολόγηση κανόνων μεταξύ των γεγονότων (Gras, Kuntz, 2008). Ενδεικτικά σύμφωνα με τον θεμελιωτή της, είναι κατάλληλη για την αναζήτηση ιεραρχικής ταξινόμησης ομοιοτήτων και συνεπαγωγής μεταξύ των μεταβλητών (Gras, Kuntz, 2008).

Το πρόγραμμα CHIC λοιπόν, βασιζόμενο στη παραπάνω μέθοδο ανάλυσης δεδομένων, είναι ένα πρόγραμμα που παράγει κανόνες συσχέτισης μεταξύ δύο ή περισσότερων γεγονότων (Gras, Kuntz, 2008). Διαθέτοντας όλα τα γραφικά και αριθμητικά αποτελέσματα διάφορων άλλων εμπορικών λογισμικών, το πρόγραμμα είναι εξοπλισμένο με νέες διαδικασίες, ελέγχους και δείκτες ερμηνείας των αποτελεσμάτων (Μάρκος, 2006). Ο συνδυασμός των δυνατοτήτων του προγράμματος βασίζεται σε αλγορίθμους του μαθηματικού προγράμματος MATLAB και της γλώσσας οπτικού προγραμματισμού Delphi 7, χάρη σε αυτό το CHIC καθίσταται ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία συνεπαγωγικής ανάλυσης (Μάρκος, 2006).

Ο τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων του, γίνεται με βάση την ένταση τόσο της συνεπαγωγής, όσο και της ομοιότητας των μεταβλητών. Το πρόγραμμα δύναται να κατασκευάσει δύο είδη ειδικών δενδροδιαγραμμάτων και ενός γραφήματος. Η πιο κλασική παρουσίαση του είναι το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας, όπου φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των αντικειμένων που αναλύονται (Γαγάτσης, Μάρκου, 2001). Το ιεραρχικό δενδροδιάγραμμα, φανερώνει τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών κατά σειρά προτεραιότητας (Γαγάτσης, Μάρκου, 2001). Τέλος, αν χρήστης επιθυμεί να δει όλους τους κανόνες και να διακρίνει αυτούς που έχουν μεγαλύτερη ένταση για ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, τότε κατασκευάζει το συνεκτικό διάγραμμα (Γαγάτσης, Μάρκου, 2001).

Σημαντικό είναι ότι οι μεταβλητές στα παραπάνω διαγράμματα και γραφήματα που παρουσιάζονται με έντονο μαύρο, έχουν επίπεδο σημαντικότητας 99% (Γαγάτσης, Μάρκου, 2001). Στη περίπτωση του συνεκτικού διαγράμματος μάλιστα, το χοντρό βέλος δηλώνει 99% επίπεδο σημαντικότητας, ενώ το λεπτό μόλις 95% (Γαγάτσης, Μάρκου, 2001).

Όπως οι Gras και Kuntz (2008) αναφέρουν, τα προγράμματα στατιστικής συνεπαγωγής εμφανίζουν ορισμένες ιδιότητες στον χειρισμό των μεταβλητών που τα κάνουν να ξεχωρίζουν. Για παράδειγμα, τα μέτρα συσχέτισης δεν είναι γραμμικά και βασίζονται αρκετά σε μεθόδους πιθανοτήτων, γεγονός που απλοποιεί τη ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Ακόμα, η σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι ασύμμετρη και με βάση αυτή ο ερευνητής μπορεί να διαλέξει το κατάλληλο γράφημα για να παρουσιάσει τα αποτελέσματα του. Το CHIC χρησιμοποιεί αρκετά κατανομές πιθανοτήτων, όπως η Bernoulli και η binomial και για αυτό πολλές φορές η κωδικοποίηση των μεταβλητών του προσαρμόζεται σε 0 και 1 (1=επιτυχία και 0=αποτυχία) (Gras, Kuntz, 2008). Αν η κωδικοποίσηση απαιτεί περισσότερες από δύο επιλογές, τότε η κωδικοποίηση θα πρέπει να αντιστοιχιστεί με αριθμούς μεταξύ του διαστήματος [0,1] (Γαλουζή, 2017). Επιπροσθέτως, επιτρέπει το χειρισμό ασαφών μεταβλητών εισάγοντας τυπικές μεθόδους, οι οποίες βοηθούν στην αποφυγή υποκειμενικότητας, προκαταλήψεων και ανακριβειών στις μετρήσεις (Γαλουζή, 2017).

Τα κριτήρια παραγωγής κανόνων συσχέτισης επιλέγονται από το χρήστη και μπορούν να είναι είτε κριτήρια ομοιότητας είτε συνεπαγωγής (Γαλουζή, 2017). Ο χρήστης, έχοντας υπολογίσει τους κανόνες που χρειάζεται, μπορεί να προχωρήσει στη κατασκευή ενός δενδροδιαγράμματος με προσανατολισμένη ταξινόμηση ή και μη, ανάλογα το είδος των κανόνων. Επιπλέον, ένα άλλο πλεονέκτημα που δίνει το συγκεκριμένο πρόγραμμα είναι η επιλογή της κλασσικής ανάλυσης ή της εντροπικής ανάλυσης στην αρχή κάθε υπολογισμού (Gras, Kuntz, 2008). Το χαρακτηριστικό πλεονέκτημα της εντροπικής ανάλυσης είναι ότι δεν εξετάζει μόνο ένα συγκεκριμένο κανόνα αλλά και τον αντίστροφο του. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ο εφοδιασμός του προγράμματος με έναν αλγόριθμο που ελέγχει τη διαφορετικότητα των συσχετίσεων για να διασφαλίζεται η πρωτοτυπία των κανόνων που αναλύονται (Gras, Kuntz, 2008).

Σύμφωνα με τους παραπάνω, η μεγάλη ποικιλία δεικτών, ελέγχων και γενικότερα των διαδικασιών του CHIC, ενισχύουν την εγκυρότητα και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μιας έρευνας. Οι ειδικοί πίνακες καθώς και τα εξειδικευμένα διαγράμματα του προγράμματος προσφέρουν καινοτόμες δυνατότητες στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει η ανάλυση του δείγματος και των αποτελεσμάτων της έρευνας. Η σειρά με την οποία θα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα παρακάτω θα είναι ίδια με αυτή των στόχων της έρευνας για να διευκολυνθεί ο αναγνώστης.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι το παρόν κεφάλαιο αποτελεί αποκλειστικά μόνο την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας και σε καμία περίπτωση δεν αντιπροσωπεύει την άποψη του ερευνητή επί του θέματος, η οποία θα αναλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Αρχικά παρουσιάζεται ένας πίνακας που εξηγεί τις μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα, για την ανίχνευση κάποιον χαρακτηριστικών του δείγματος. Ο συγκεκριμένος πίνακας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόδειγμα για τον αναγνώστη, για τη κατανόηση των διαγραμμάτων και των πινάκων που θα ακολουθήσουν. Η παρουσία των μεταβλητών αυτών, είναι απαραίτητη για τη δημιουργία μιας συνολικής εικόνας σχετικά με τα χαρακτηριστικά του δείγματος, καθώς δίνει ενδιαφέρουσες πληροφορίες στη συσχέτιση αυτών των χαρακτηριστικών με τις αντιλήψεις που μελετήθηκαν στην έρευνα.

Πίνακας 6.1
Αντιστοίχιση μεταβλητών με ερωτήσεις για την εξακρίβωση των χαρακτηριστικών του δείγματος

Μεταβλητές	**Ερωτήσεις**
GI1.1	Σχέση με τα Μαθηματικά.
GI1.2	Σχέση οικογενειακού περιβάλλοντος και μαθηματικά.
BUse1.3	Χρησιμότητα μαθηματικών.
BUse1.4	Χρησιμότητα Πιθανοτήτων.
BUse1.5	Άποψη ότι η «Πιθανότητα» σχετίζεται με την «Τύχη».
BUse1.5	Η γνώση Πιθανοτήτων, δίνει πλεονέκτημα στα παιχνίδια τύχης.
Bf1.7	Άποψη ότι οι «πιθανότητες» σχετίζονται με την έγκυρη πρόβλεψη.
BT1.8	Άποψη σχετικά με τη σωστή διδακτική των πιθανοτήτων στο σχολείο.
Bkn1.9	Πεποίθηση για επαρκείς γνώσεις πάνω στις «Πιθανότητες».
BT1.10	Πεποίθηση για να διδάσκονται οι Πιθανότητες πιο νωρίς στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

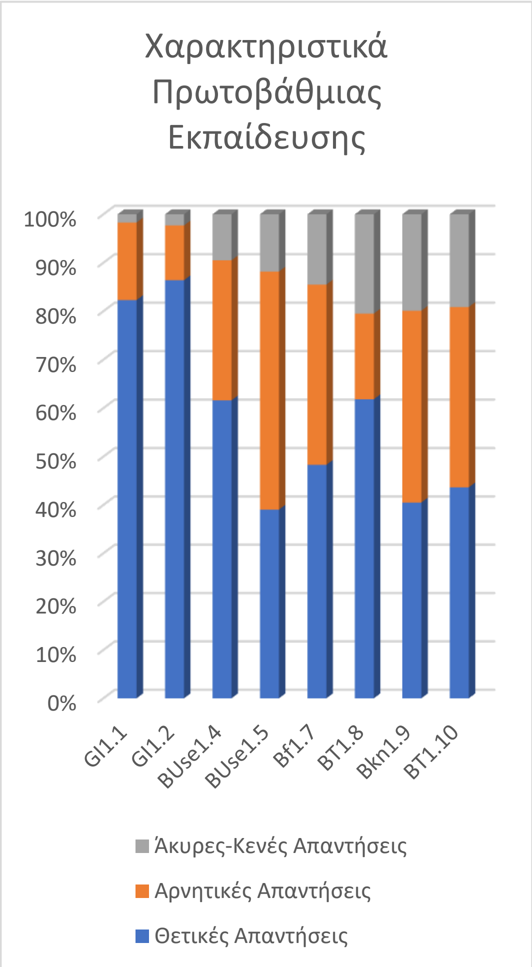
Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα για να διαγνωστούν κάποια χαρακτηριστικά του δείγματος που επηρεάζουν άμεσα την έρευνα, οι ερωτήσεις ξεκινούσαν αναζητώντας τη σχέση των ερωτώμενων ή του οικογενειακού τους περιβάλλοντος με τα μαθηματικά. Έπειτα, αναζητούσαν τις απόψεις του δείγματος σχετικά με τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα, τη χρησιμότητα των πιθανοτήτων και τις απόψεις για τη συσχέτιση των πιθανοτήτων με παράγοντες όπως η «τύχη» και η «πρόβλεψη». Σε αυτή την αναζήτηση, δεν θα μπορούσε φυσικά να λείπει και η ερώτηση για τις γνώσεις των ερωτώμενων στις πιθανότητες.

6.2 Χαρακτηριστικά δείγματος και αντιλήψεις για την αναγκαιότητα και τη σημαντικότητα των πιθανοτήτων

Διάφορα χαρακτηριστικά των υποκειμένων του δείγματος μπορεί να επηρεάσουν την έρευνα. Μερικά από αυτά μελετήθηκαν και αντιστοιχίστηκαν με μεταβλητές στον Πίνακα 6.1 της προηγούμενης παραγράφου. Παρακάτω εμφανίζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των συγκεκριμένων μεταβλητών και τα οποία χωρίζονται σε ξεχωριστές γραφικές παραστάσεις ανάλογα με την κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα.

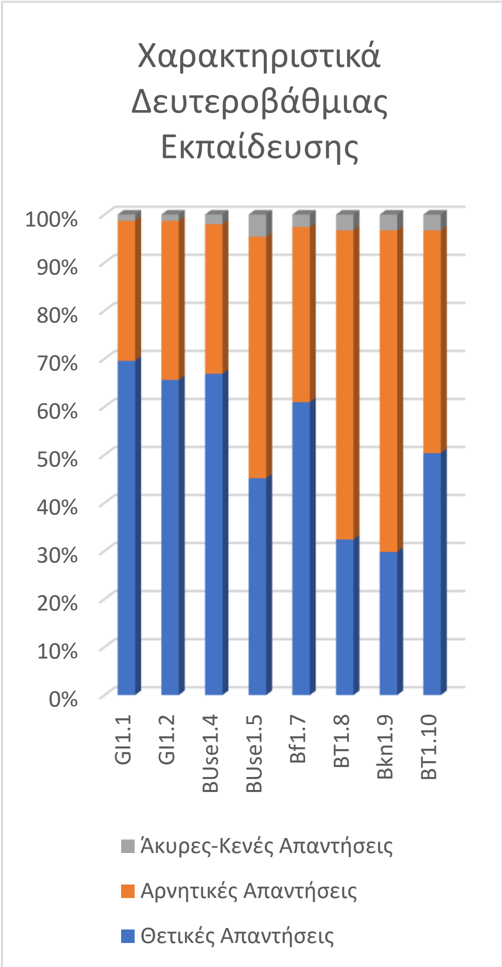
Διάγραμμα 6.1

Χαρακτηριστικά Πρωτοβάθμιας



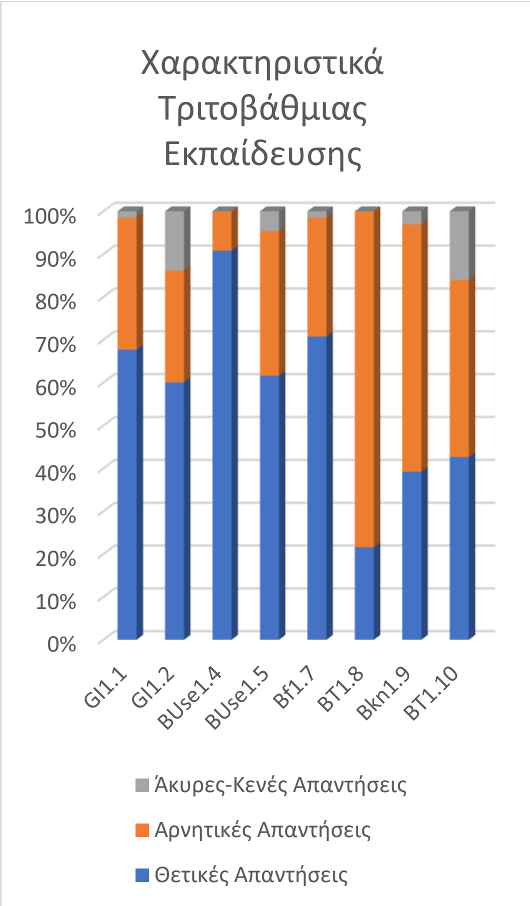
Διάγραμμα 6.2

Χαρακτηριστικά Δευτεροβάθμιας



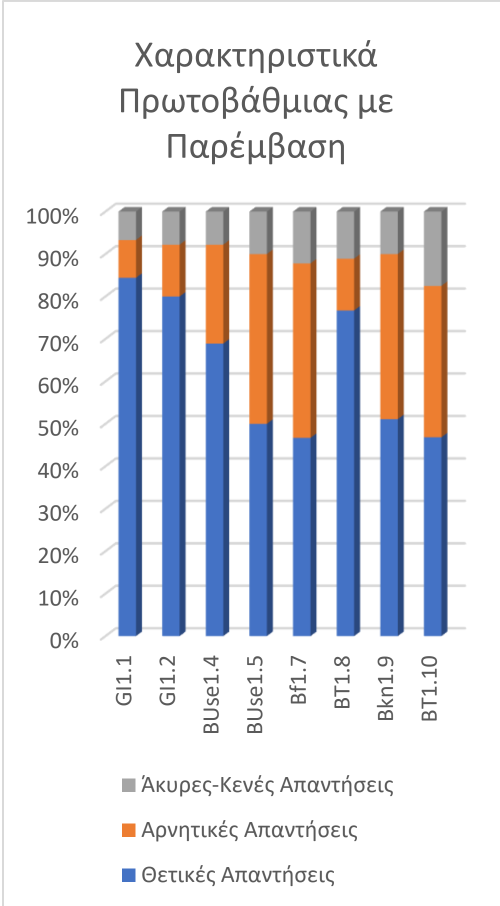
Διάγραμμα 6.3

Χαρακτηριστικά Τριτοβάθμιας



Διάγραμμα 6.4

Χαρακτηριστικά Παρέμβασης

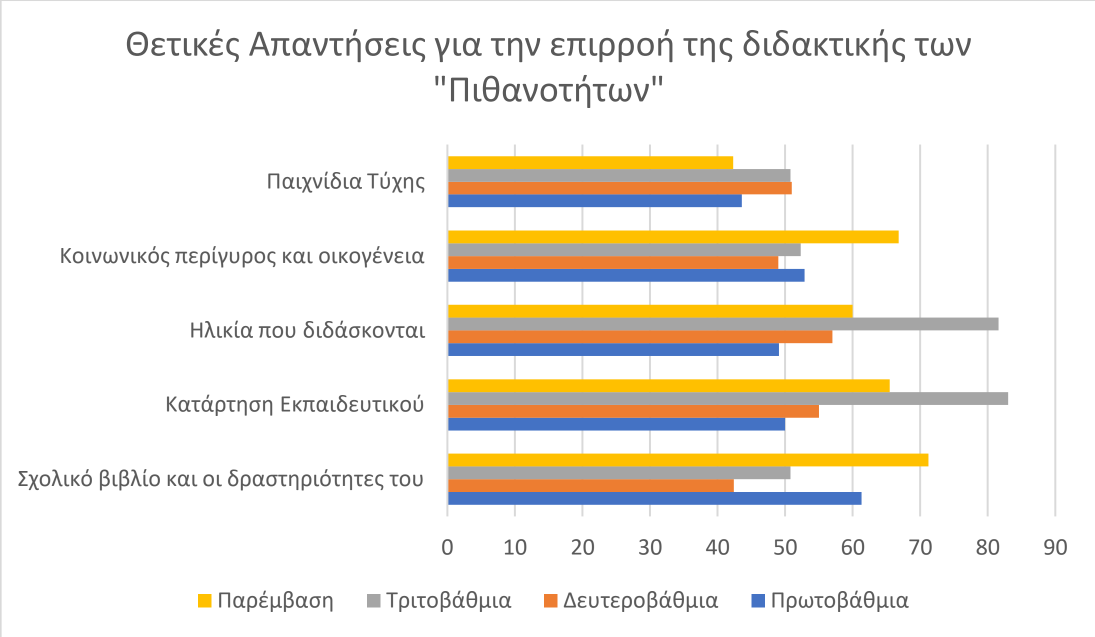


Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, θα συγκριθούν τα ποσοστά των απαντήσεων ανά μεταβλητή, έτσι ώστε να παρατηρηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ των διαφορετικών βαθμίδων. Παρατηρείται ένα πολύ υψηλό ποσοστό στις πρώτες δύο μεταβλητές κάθε γραφικής παράστασης. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση των ερωτώμενων με τα μαθηματικά αλλά και η σχέση του οικογενειακού τους περιβάλλοντος με τα μαθηματικά είναι ιδιαίτερα καλή, με τα ποσοστά να κυμαίνονται αρκετά πάνω από 50%. Στη συνέχεια, για τις επόμενες δύο μεταβλητές που ακολουθούν και αφορούν τη χρήση των μαθηματικών και τη χρήση των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα αντίστοιχα, παρατηρείται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση ένα ποσοστό πάνω από 60%, να πιστεύουν στη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα, ενώ ένα ποσοστό λίγο πάνω από 40% να πιστεύουν στη χρησιμότητα των Πιθανοτήτων. Τα αντίστοιχα ποσοστά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, είναι 70% για τα μαθηματικά και λίγο πάνω από το 50% για τις πιθανότητες. Εκπληκτικό είναι το ποσοστό της χρησιμότητας των μαθηματικών στην καθημερινότητα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, όπου σχεδόν το 90% απάντησε θετικά και λίγο κάτω από το 60% είναι η απάντηση για τη χρησιμότητα των πιθανοτήτων. Όσον αφορά την παρέμβαση τα ποσοστά κινούνται σε μέτρια πλαίσια, λίγο πάνω από 60% και λίγο πάνω από 50% για τις δύο μεταβλητές αντίστοιχα. Συνεχίζοντας την επόμενη μεταβλητή Bf1.7, έχει να κάνει με τις απόψεις των ερωτώμενων σχετικά με τη σχέση των πιθανοτήτων με τις προβλέψεις. Εδώ, δεν παρατηρείται καμία ουσιαστική διαφορά, αφού σχεδόν όλες οι βαθμίδες κυμαίνονται σε ποσοστά από 40% έως 60%.

Στις τελευταίες τρεις μεταβλητές που φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις, οι ερωτήσεις πραγματεύονται τις γνώσεις των ερωτώμενων περί των πιθανοτήτων αλλά και τη διδακτική τους στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης φαίνονται να είναι ευχαριστημένοι από τη διδακτική των πιθανοτήτων στο σχολείο, ωστόσο δεν θεωρούν ότι έχουν επαρκείς γνώσεις στις πιθανότητες ή ότι αυτές θα έπρεπε να διδάσκονται σε πιο μικρή ηλικία. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές φαίνονται να μην είναι ευχαριστημένοι με τη διδαχή των πιθανοτήτων με το αντίστοιχο ποσοστό να ξεπερνάει το 60%. Όσον αφορά τη διδακτική των πιθανοτήτων στο σχολείο και την ηλικία που διδάσκονται, οι απόψεις διίστανται, φτάνοντας κοντά στο 50% θεωρώντας ότι θα έπρεπε να διδάσκονται νωρίτερα. Στην τριτοβάθμια εκπαίδευση τώρα, επίσης χαμηλό είναι το ποσοστό για τη διδακτική τους ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα και όσον αφορά τα ποσοστά περί των επαρκών γνώσεων και να διδάσκονται πιο σε πιο μικρή ηλικία, κυμαίνονται μεταξύ 40% και 50% και για τα δύο. Τέλος, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπου προηγήθηκε παρέμβαση από τον ερευνητή πριν από τη χορήγηση του ερωτηματολογίου, φαίνεται ένα πολύ υψηλό ποσοστό πάνω από 70% να είναι ευχαριστημένοι από τη διδακτική των πιθανοτήτων και με τα άλλα δύο ποσοστά να βρίσκονται γύρο στο 50%.

6.3 Αντιλήψεις σχετικά με τη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας

Η διδακτική μιας έννοιας, όπως είναι λογικό, επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, όπως τον κοινωνικό περίγυρο, την κατάρτιση του εκπαιδευτικό, το σχολικό βιβλίο καθώς και άλλους. Παρακάτω εμφανίζεται ένα διάγραμμα, όπου οι μαθητές απαντάνε σύμφωνα με την άποψη τους, τον παράγοντα που επηρεάζει περισσότερο τη διδακτική των πιθανοτήτων.

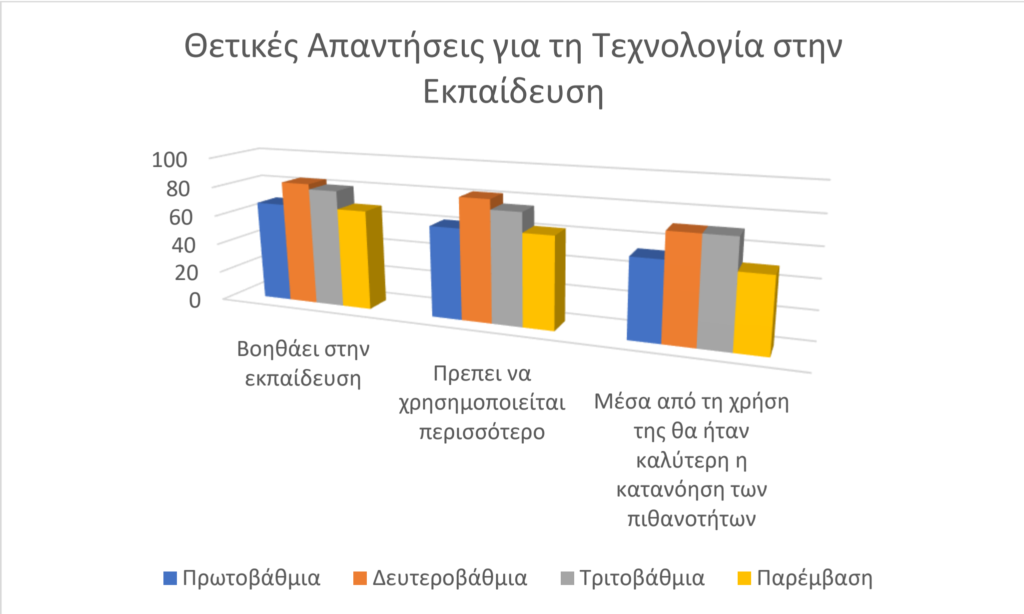


Διάγραμμα 6.5: Θετικές απαντήσεις για την επιρροή των Πιθανοτήτων

Στη γραφική αυτή παράσταση, όπως φαίνεται ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό της Τριτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (πάνω από 80% και πάνω από 55% αντίστοιχα) θεωρεί πολύ σημαντική την ηλικία που διδάσκονται οι «Πιθανότητες», καθώς και την κατάρτιση εκπαιδευτικού. Ωστόσο, εξίσου σημαντικό για τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι και η εμπειρία των μαθητών με τα καθημερινά παιχνίδια τύχης (πάνω από 50%), το κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών (σχεδόν 50%), όσο και το σχολικό βιβλίο με τις δραστηριότητες του (πάνω από 40%). Όσον αφορά τις επιλογές των παιδιών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, το σημαντικότερο είναι το σχολικό βιβλίο με ποσοστό λίγο πάνω από 60% και ακολουθεί ο κοινωνικός περίγυρος με ποσοστό που ξεπερνάει το 50%. Τέλος, τα παιδιά της παρέμβασης με ποσοστό από 60% έως και λίγο πάνω 70% θεωρούν εξίσου σημαντικά το σχολικό βιβλίο, την κατάρτιση του εκπαιδευτικού, την ηλικία που διδάσκονται, όπως επίσης και τον κοινωνικό περίγυρο που μεγαλώνουν.

6.4 Αντιλήψεις σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση

Η χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση, είναι ένα φαινόμενο που διαρκώς κερδίζει έδαφος στα μοντέρνα προγράμματα σπουδών. Παρακάτω φαίνονται σε ένα ραβδόγραμμα οι απόψεις των μαθητών για τη χρήση της τεχνολογίας στη διδακτική των «πιθανοτήτων».



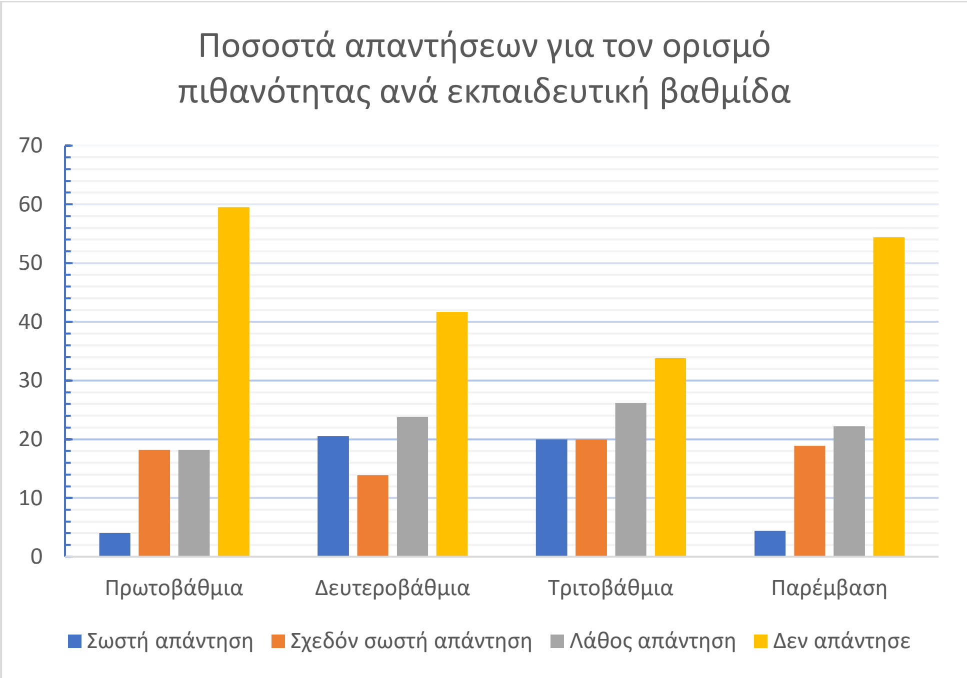
Διάγραμμα 6.6: Θετικές απαντήσεις για την χρήση Τεχνολογίας στην εκπαίδευση

Όπως παρατηρείται, οι απαντήσεις των μαθητών είναι χωρισμένες στις διάφορες σχολικές βαθμίδες. Αρκετά μεγάλα είναι τα ποσοστά των μαθητών όπου πιστεύουν ότι η χρήσης τεχνολογίας βοηθάει στην εκπαιδευτική διαδικασία, με τα ποσοστά αυτά να κυμαίνονται από 60% έως και πάνω 80% στις διάφορες σχολικές βαθμίδες. Ομοίως, όπως μπορεί να δει κανείς, αρκετά μεγάλα είναι τα ποσοστά των παιδιών που πιστεύουν πως πρέπει η τεχνολογία να χρησιμοποιείται περισσότερο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η άποψη αυτή, έρχεται να ενισχυθεί με την πεποίθηση ότι μέσα από τη χρήση τους θα ήταν καλύτερη κατανόηση των πιθανοτήτων. Αξιοσημείωτο σε αυτό το διάγραμμα είναι τα συντριπτικά ποσοστά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου τα παιδιά σε αυτή τη βαθμίδα έχουν τα μεγαλύτερα ποσοστά θετικών απαντήσεων. Σχετικά μικρότερα ποσοστά, είναι αυτά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, χωρίς με αυτό τον τρόπο να υποβαθμίζεται η άποψη των μαθητών αυτών, όπου πιστεύουν ότι η χρήση της τεχνολογίας βοηθάει τη μάθηση στη τάξη και άρα θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί περισσότερο.

6.5 Γνώσεις δείγματος περί πιθανοτήτων

6.5.1 Ορισμός πιθανότητας

Σχετικά με την ερώτηση που τους τέθηκε στο ερωτηματολόγιο για να δώσουν έναν ορισμό στην έννοια πιθανότητα, αρκετά μεγάλα ήταν τα ποσοστά των μαθητών που δεν απάντησαν. Στη παρακάτω γραφική παράσταση, φαίνεται το ποσοστό των σωστών, των λάθος, των μερικώς σωστών και των κενών απαντήσεων κάθε σχολικής βαθμίδας.



Διάγραμμα 6.7: Απαντήσεις για ορισμό Πιθανότητας

Η παρατήρηση του εν λόγο διαγράμματος, δείχνει ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των μαθητών από κάθε βαθμίδα να μην απάντησε στην ερώτηση. Οι βαθμίδες της Δευτεροβάθμιας και της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, εμφανίζουν ένα ποσοστό γύρο στα 20% σωστών απαντήσεων. Βέβαια, αυτές οι προσπάθειες ήταν αρκετά λιγότερες από τις συνολικές προσπάθειες που έγιναν για να απαντήσουν στην ερώτηση, καθώς όπως φαίνεται τα ποσοστά των λάθος απαντήσεων, είναι αρκετά μεγαλύτερα. Τέλος, αυτό που παρατηρείται, είναι το αξιοσημείωτο ποσοστό (από 15% έως 20%) κάθε βαθμίδας, να δώσει έναν αρκετά καλό ορισμό, ο οποίος δεν βασίζεται πλήρως στο σωστό.

6.5.2 Πιθανότητα και καθημερινή ζωή

Οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή, είτε σε ένα παιχνίδι τύχης, είτε σε μία πρόβλεψη. Είναι λοιπόν γεγονός ότι στην καθημερινότητα θα υπάρχουν διάφορες εκφράσεις, οι οποίες χρησιμοποιούν γνώσεις πιθανοτήτων. Πώς όμως αντιλαμβάνονται οι μαθητές αυτές τις εκφράσεις;

Στους παρακάτω πίνακες εμφανίζονται οι αντιλήψεις των μαθητών για τις εκφράσεις ή καταστάσεις της καθημερινότητας που εμπεριέχουν τη χρήση πιθανοτήτων.

Πίνακας 6.2

Η φράση, «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας»

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτεροβάθ.**	**Τριτοβάθ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Η φράση, «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας», σημαίνει:				
η πιθανότητα μετράει την τύχη	16,5	15,6	17,9	7,7
η πιθανότητα προβλέπει την τύχη	22	20	17,9	9,2
η πιθανότητα νικάει την τύχη	9	5,6	15,6	1,5
η πιθανότητα διευκρινίζει ποιο από τα αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει σε μια εκτέλεση του πειράματος	23,1	25,6	29,8	70,8
η πιθανότητα βοηθάει την τύχη	8,4	13,3	10,6	7,7
Δεν απάντησε	21,1	20	7,9	3,1

Όπως μπορεί να δει κανείς, στο πίνακα αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μαθητών ανά βαθμίδα εκπαίδευσης και εμφανίζεται το ποσοστό επιλογής κάθε απάντησης. Ο πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα στην ερώτηση περί της σημασίας της έκφρασης «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας». Τα θετικό σε αυτό τον πίνακα, όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει είναι ότι η πλειοψηφία των μαθητών κάθε βαθμίδας απάντησε σωστά. Δηλαδή, ότι «η Πιθανότητα» διευκρινίζει το αποτέλεσμα που είναι πιο πιθανό να προκύψει σε μία εκτέλεση του πειράματος. Ωστόσο, στις βαθμίδες Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια και στα παιδιά της εκπαιδευτικής παρέμβασης, το ποσοστό αυτό δεν φαίνεται να είναι ιδιαίτερα υψηλό (ούτε το 30%). Επίσης, εξίσου σημαντικά ποσοστά είναι το 21,1% των μαθητών της Πρωτοβάθμιας που άφησαν κενή την ερώτηση και το 20% της παρέμβασης με το 17,9% της Δευτεροβάθμιας, όπου πιστεύουν ότι «η πιθανότητα προβλέπει την τύχη».

Πίνακας 6.3
Καθημερινή Χρήση Πιθανοτήτων

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθμια**	**Παρέμβαση**	**Δευτεροβάθμια**
	f%	**f%**	**f%**
Σε τι καθημερινή δραστηριότητα χρησιμοποιούμε την «πιθανότητα»;			
Σε τυχερά παιχνίδια	16,8	30	6,6
Σε προβλέψεις	19,1	8,9	20,5
Σε προβλήματα τύχης	6,9	13,3	5,3
Στο καζίνο	11	11,1	7,3
Σε όλα τα παραπάνω	28,9	18,9	53,6
Δεν απάντησε	17,3	17,8	6,6

Αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο πίνακας 6.3. Η συγκεκριμένη ερώτηση αξίζει να σημειωθεί, ότι δεν θεωρήθηκε απαραίτητη να γίνει στη Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στις υπόλοιπες εκπαιδευτικές βαθμίδες όμως διεξάγονται ιδιαίτερα χρήσιμα και ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Η ερώτηση πραγματευόταν, όπως παρουσιάζεται και στο πίνακα παραπάνω, τις καθημερινές δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, το μεγαλύτερο ποσοστό για όλες τις βαθμίδες ήταν σωστή απάντηση. Ωστόσο, δεν είναι δυνατό να μη προσέξει κανείς τα αρκετά μεγάλα ποσοστά που εμφανίζουν η Πρωτοβάθμια και η Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη χρήση των πιθανοτήτων μόνο για προβλέψεις. Ακόμα, οι μαθητές της παρέμβασης, έχουν διαμοιράσει τα ποσοστά τους, με το ποσοστό των μαθητών που δεν απάντησα στην ερώτησή και αυτών που πιστεύουν ότι χρησιμοποιείται μόνο στα προβλήματα τύχης να ξεχωρίζει.

Πίνακας 6.4

Πίνακας Απαντήσεων για την καθημερινή έκφραση «Η πρόβλεψη του καιρού δίνει 70% πιθανότητα βροχής»

Ερωτήσεις	Πρωτοβάθ.		Παρέμβ.		Δευτεροβάθ.		Τριτοβάθ.	
	Σ	Κενό	Σ	Κενό	Σ	Κενό	Σ	Κενό
Η πρόβλεψη του καιρού δίνει 70% πιθανότητα βροχής.								
Η πιθανότητα να βρέξει αύριο, είναι πάνω από 50%, άρα σίγουρα θα βρέχει	51,7	15,3	60	6,7	66,2	7,3	80	1,5
Από τις επόμενες 10 ημέρες είναι πιθανό να βρέχει τις 7	30,6	19,1	40	7,8	18,5	7,3	15,4	1,5
Αν αύριο δεν βρέξει τελικά, σημαίνει πως η πρόβλεψη είναι εσφαλμένη	47,7	19,9	55,6	7,8	57,6	7,9	87,7	1,5
Το ποσοστό να βρέξει αύριο είναι μεγαλύτερο από το να μην βρέξει	43,6	21,4	43,3	7,8	69,5	8,6	86,2	1,5
Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα βροχής αύριο.	46,8	21,7	47,8	7,8	78,8	8,6	75,4	1,5
Αύριο θα βρέχει	60,7	21,4	62,2	7,8	74,8	7,6	93,8	1,5
Αύριο η υγρασία θα είναι αυξημένη κατά 70% και άρα μπορεί να βρέξει	39	21,7	53,3	7,8	60,9	8,6	95,4	1,5
Αύριο μπορεί να βρέξει ή και όχι, ωστόσο το πιθανότερο είναι να βρέχει	45,4	21,7	44,4	7,8	67,5	8,6	73,8	1,5

Ο πίνακας που παρατίθεται παραπάνω ασχολείται με τη κατανόηση και αντίληψη των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα. Οι απαντήσεις κατανέμονται σύμφωνα με τις απαντήσεις κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας και χωρίζονται σε σωστές και μη απαντημένες.

Η φράση «η πρόγνωση του καιρού δίνει 70% πιθανότητα βροχής», είναι μια φράση που με διάφορες παραλλαγές την ακούει κανείς συχνά στην καθημερινότητα. Οι απαντήσεις που χρήζουν ενδιαφέροντος στη συγκεκριμένη ερώτηση είναι για παράδειγμα το 51,7% της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, το 60% της παρέμβασης, το 66,2% της Δευτεροβάθμιας και το 80% της Τριτοβάθμιας, όπου θεωρούν ότι δεν είναι σίγουρο ότι την επόμενη μέρα θα βρέχει παρόλο που το 70% είναι ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό. Αρκετά μεγάλα είναι και τα ποσοστά όπου οι μαθητές ρωτήθηκαν σχετικά με την άρνηση της έκφρασης αν την επόμενη μέρα δεν βρέξει. Εδώ, το 52,3% της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θεώρησε πως η έκφραση θα ήταν εσφαλμένη. Επίσης, αρκετά μεγάλο ποσοστό λάθους είχαν τόσο η παρέμβαση με 44,4% όσο και η Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με ποσοστό 42,4%.

Ενδιαφέρον ακόμα χρήζουν και οι δύο τελευταίες ερωτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος, όπου αρκετά μεγάλο ποσοστό των μαθητών κυρίως από τη Πρωτοβάθμια εκπαίδευση και τη παρέμβαση θεώρησαν ότι το 70% μπορεί να σημαίνει αυξημένη υγρασία και άρα θα βρέχει. Τέλος, θα έλεγε κανείς ότι εντύπωση προκαλεί το υψηλό ποσοστό λάθους τόσο της Πρωτοβάθμιας, όσο και της παρέμβασης, που ανέρχεται περίπου στο 55% για την έκφραση «Αύριο μπορεί να βρέξει ή και όχι, ωστόσο το πιθανότερο είναι να βρέχει».

Πίνακας 6.5
Πίνακας Απαντήσεων για Πείραμα με Ζάρι

Ερωτήσεις	Πρωτοβάθμια		Παρέμβαση		Δευτεροβάθμια		Τριτοβάθμια	
	Σωστό %	Κενό %	Σωστό %	Κενό %	Σωστό %	Κενό %	Σωστό %	Κενό %
Έχουμε ρίξει ένα ζάρι τρεις φορές. Και τις τρεις φέραμε εξάρι. Σκοπεύουμε να το ξαναρίξουμε μία ακόμα φορά.								
Είναι αδύνατο να φέρουμε έξι ξανά.	54,6	27,2	53,3	13,3	74,8	11,3	70,8	21,5
Με την τύχη που έχουμε, σίγουρα θα φέρουμε έξι	52,9	27,5	68,9	12,2	72,2	11,9	76,9	20
Αφού ρίχνουμε τέσσερις φορές, είναι 1/4	46,8	28,9	62,2	12,2	65,6	11,9	53,8	24,6
Είναι 1/6, όπως σε κάθε ρίψη	20,2	29,5	27,8	13,3	49	11,9	50,8	24,6
Είναι 50% να φέρουμε έξι και 50% να μη φέρουμε έξι	27,5	28,3	36,7	12,2	53	11,3	50,8	21,5

Ο πίνακας 6.4 είναι μια ερώτηση που αφορά την αντίληψη των πιθανοτήτων και του κλασικού ορισμού, μετά από αρκετές επαναλήψεις του πειράματος. Η ερώτηση που κρίνονται οι μαθητές να σκεφτούν είναι τι θα γίνει τη τέταρτη φορά που θα ρίξουμε το ζάρι, αν τις προηγούμενες τρεις φορές έρθει εξάρι. Οι απαντήσεις στο επιμέρους πρόβλημα είχαν ποικίλες απόψεις. Τα πιο σημαντικά ευρήματα της συγκεκριμένης ερώτησης είναι για παράδειγμα, το πολύ μικρό ποσοστό (20,2%) της Πρωτοβάθμιας και της παρέμβασης (27,8%) στην απάντηση ότι η πιθανότητα είναι 1/6. Επίσης αρκετά μεγάλα ήταν τα ποσοστά των μαθητών για όλες τις βαθμίδες στην τελευταία ερώτηση, όπου υποστηρίζει ότι η πιθανότητα είναι 50%, θεωρώντας ότι θα έρθει 6 ή δεν θα έρθει.

6.5.3 Πείραμα Τύχης

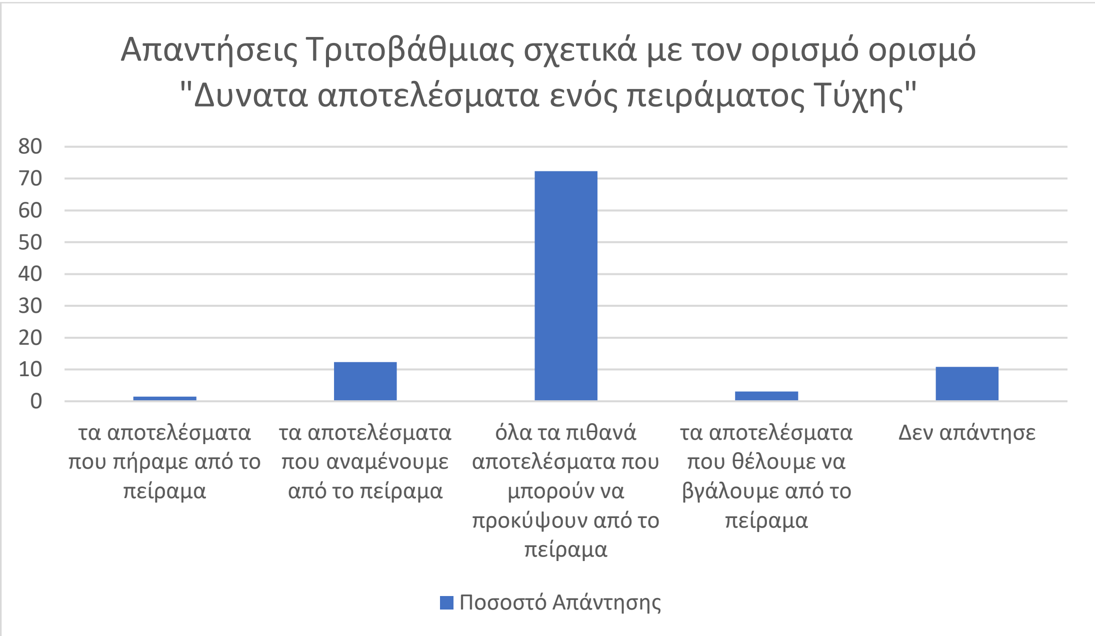
Στην παρούσα παράγραφο μελετάται η αντίληψη των ερωτώμενων σχετικά με τα πειράματα τύχης και τα χαρακτηριστικά τους.

Πίνακας 6.6
Πίνακας Απαντήσεων για Πείραμα Τύχης

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτεροβάθ.**	**Τριτοβάθ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Τι καλούμε πείραμα τύχης;				
ένα πείραμα που διεξάγεται στην τύχη	24	26,7	20,5	4,6
ένα πείραμα που γίνεται από λάθος.	11,6	7,8	14,6	4,6
ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.	48,8	43,3	60,9	56,9
ένα φυσικό πείραμα που έγινε τυχαία και προέκυψαν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα.	0	0	0	24,6
Δεν απάντησε	15,6	22,2	4	9,2

Η πρώτη ερώτηση που εμφανίστηκε στο ερωτηματολόγιο, πραγματευόταν τον ορισμό του πειράματος τύχης. Οι απαντήσεις κατανέμονται στον παραπάνω πίνακα μαζεμένες και χωρισμένες ανά εκπαιδευτική βαθμίδα. Όπως γίνεται αντιληπτό, εμφανίζεται το ποσοστό επιλογής κάθε απάντησης. Ευχάριστο είναι ότι σε όλες τις βαθμίδες το μεγαλύτερο ποσοστό απάντησε σωστά. Ωστόσο, κανείς δεν μπορεί να αγνοήσει τα αρκετά μεγάλα ποσοστά των μαθητών που δεν απάντησαν στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση (15,6%) και τη παρέμβαση (22,2%), καθώς και το μεγάλο ποσοστό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (20,5%) όπου απάντησε ότι είναι ένα πείραμα που γίνεται στην τύχη. Τέλος, εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι το 24,6% των ερωτώμενων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης απάντησε ότι πείραμα τύχης είναι ένα φυσικό πείραμα που έγινε τυχαία, αλλά προέκυψαν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα.

Δεν θα μπορούσε στην ερώτηση για το πείραμα τύχης να λείπει ο ορισμός των δυνατών αποτελεσμάτων. Βέβαια, η έννοια «Δυνατά αποτελέσματα» ενός πειράματος τύχης, θεωρήθηκε αρκετά δύσκολη για τους μαθητές και έτσι δόθηκε μόνο στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.



Διάγραμμα 6.8: Απαντήσεις Τριτοβάθμιας για «Δυνατά Αποτελέσματα»

Στο ιστόγραμμα που προέκυψε από την ανάλυση, φαίνεται ότι η πλειοψηφία (πάνω από 70%) έδωσε τον σωστό ορισμό, ενώ λίγοι ήταν αυτοί όπου δεν απάντησαν στην ερώτηση σε ποσοστό 10%.

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο πίνακα δεν θεωρήθηκε απαραίτητο οι μικροί μαθητές να δώσουν έστω και μια διαισθητική απάντηση για τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος. Ωστόσο χρειάστηκε να απαντήσουν, τι είναι απολύτως απαραίτητο να γνωρίζει κάποιος για ένα πείραμα τύχης.

Πίνακας 6.7
Τι είναι απαραίτητο για ένα πείραμα Τύχης

Ερωτήσεις	Πρωτοβ.	Παρέμβ.	Δευτερ.	Τριτ.
	f%	f%	f%	f%
Τι είναι απολύτως απαραίτητο να γνωρίζουμε για ένα πείραμα τύχης;				
το σύνολο των αποτελεσμάτων που είναι δυνατόν να προκύψουν σε κάθε εκτέλεση του πειράματος	30,3	23,3	41,1	41,5
το χώρο που διεξάγεται το πείραμα	15,6	11,1	10,6	9,2
τα αποτελέσματα από τις πρώτες εκτελέσεις του πειράματος	20,5	26,7	21,9	9,2
την ποιότητα και το είδος του πειράματος.	12,7	14,4	18,5	24,6
Δεν απάντησε	20,8	24,4	7,9	15,4

Όπως φαίνεται και στον πίνακα, το μεγαλύτερο ποσοστό της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (30,3%) απάντησε το σύνολο των αποτελεσμάτων που είναι δυνατόν να προκύψουν από το πείραμα. Τα παιδιά της εκπαιδευτικής παρέμβασης από την άλλη, απάντησαν (26,7%) ότι χρειάζεται να γνωρίζουμε τα αποτελέσματα από τις πρώτες εκτελέσεις του πειράματος. Οι συμμετέχοντες μεγαλύτερων ηλικιών, αυτοί της Δευτεροβάθμιας (41,1%) και της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (41,5%), απάντησαν «το σύνολο των αποτελεσμάτων που είναι δυνατόν να προκύψουν από το πείραμα». Ακόμα, εξίσου σημαντικά είναι τα ποσοστά όλων των βαθμίδων, που υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την ποιότητα και το είδος του πειράματος.

6.5.4 Δειγματικός Χώρος

Ο δειγματικός χώρος σαν έννοια, ήταν από αυτές που θεωρήθηκαν από τον ερευνητή πιο δύσκολες και για αυτό οι ερωτήσεις περί δειγματικών χώρων ενσωματώθηκαν μόνο στο ερωτηματολόγιο για την τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Πίνακας 6.8
Ορισμός Δειγματικού χώρου

Ερωτήσεις	**Τριτοβάθμια**
	f%
Τι καλούμε «Δειγματοχώρο» ενός πειράματος τύχης;	
το δείγμα που παίρνουμε από έναν πληθυσμό, για να εκτελέσουμε το πείραμα	20
όλα τα αναμενόμενα αποτελέσματα του πειράματος	21,5
τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος	16,9
το χώρο που διεξάγεται το πείραμα	9,2
ο χώρος-περιοχή που παίρνουμε το δείγμα	10,8
Δεν απάντησε	21,5

Στον πίνακα 6.8, παρατίθενται οι απαντήσεις του δείγματος της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης σε μορφή ποσοστών για τον ορισμό του «Δειγματικού χώρου». Ένα μεγάλο ποσοστό των ερωτώμενων (21,5%) άφησε την ερώτηση κενή. Όμως, από τις απαντήσεις που δόθηκαν ξεχώρισε με ποσοστό 21,5% η επιλογή ότι είναι «όλα τα αναμενόμενα αποτελέσματα του πειράματος». Επίσης, το 20% των φοιτητών και των εκπαιδευτικών πιστεύει ότι ο δειγματικός χώρος είναι το δείγμα που παίρνουμε από ένα πληθυσμό για να εκτελεστεί το πείραμα. Ακολούθησαν με λιγότερα ποσοστά και άλλες απαντήσεις, όπως τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος ή ο χώρος - περιοχή όπου εκλέγεται το δείγμα.

Μοιράστηκαν λοιπόν τα ποσοστά στον ορισμό του Δειγματικού χώρου. Τι έγινε όμως όταν οι ερωτώμενοι χρειάστηκε να βρουν οι ίδιοι το Δειγματικό χώρο ενός πειράματος;

Πίνακας 6.9
Πρώτη άσκηση εύρεσης Δειγματικού χώρου

Ερωτήσεις	**Τριτοβάθμια**
	f%
Ρίχνουμε δύο ζάρια ταυτόχρονα και πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς που έρχονται στην πάνω πλευρά. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος;	
Σωστή απάντηση	13,8
Λάθος απάντηση	41,5
Δεν απάντησε	44,6
Αν ο Μιχάλης λαμβάνει 1 ευρώ αν το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι ζυγός αριθμός και ο Γιάννης λαμβάνει 1 ευρώ αν το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός. Είναι δίκαιο αυτό το παιχνίδι;	
Ναι	40
Όχι	35,4
Δεν απάντησε	24,6
Σωστή αιτιολόγηση	21,5
Λάθος αιτιολόγηση	43
Χωρίς αιτιολόγηση	35,4

Στον πίνακα 6.9, παρουσιάζονται οι απαντήσεις ενός προβλήματος, στο οποίο οι ερωτώμενοι καλούνταν να βρούνε το δειγματικό χώρο ενός πειράματος για να αιτιολογήσουν την απάντηση σε μια ερώτηση που τους τέθηκε. Το πείραμα αποτελούσε τη ρίψη δύο ζαριών και τον πολλαπλασιασμό των αποτελεσμάτων τους. Στο ερώτημα της καταγραφής του δειγματικού χώρου, πολύ λίγες ήταν οι θετικές απαντήσεις με ποσοστό 13,8%. Ενώ οι περισσότεροι κινήθηκαν με λάθος απάντηση (41,5%) ή δεν απάντησαν (44,6%). Στη συνέχεια, στο δεύτερο ερώτημα του προβλήματος σε μία ερώτηση όπου χρησιμοποιούσε τα στοιχεία του Δειγματικού χώρου σε συνδυασμό με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, παρατηρείται ότι το 35,4% των ερωτώμενων απάντησαν σωστά, αλλά από αυτό μόνο το 21,5% έδωσε σωστή αιτιολόγηση.

Ο πίνακας που ακολουθεί αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα όπου η αναζήτηση του Δειγματικού χώρου κρινόταν πιο εύκολη. Η ερώτηση συνδύαζε την εύρεση των δυνατών αποτελεσμάτων με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Πίνακας 6.10
Δεύτερη άσκηση εύρεσης Δειγματικού χώρου και συνδυασμός με κλασικό ορισμό πιθανότητας

Ερωτήσεις	**Τριτοβάθμια**
	f%
Σε ένα πείραμα τύχης, ρίχνουμε ένα ζάρι και ένα νόμισμα. Να καταγράψετε τον δειγματοχώρο του πειράματος.	
Σωστή απάντηση	23,1
Λάθος απάντηση	33,8
Δεν απάντησε	43,1
Ποια πιστεύετε ότι είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, να έρθει άρτιος αριθμός και κορόνα με βάση τον κλασικό ορισμό πιθανότητας;	
Σωστή απάντηση	21,5
Λάθος απάντηση	27,7
Δεν απάντησε	50,8

Επιγραμματικά, από τη μελέτη του πίνακα 6.10, σωστή απάντηση έδωσε το 23,1% του δείγματος. Να σημειωθεί βέβαια ότι το 43,1% των ερωτώμενων στη συγκεκριμένη ερώτηση απέφυγαν να απαντήσουν. Συνεχίζοντας την ανάλυση των στοιχείων του πίνακα, όταν οι μαθητές όταν έπρεπε να χρησιμοποιήσουν την πιθανότητα με ενδεχόμενα και να απαντήσουν με βάση τον κλασικό ορισμό, μόνο το 21,5% έδωσε σωστή απάντηση, ενώ το 50,8% δεν έδωσε καμία.

Η τελευταία άσκηση με Δειγματικό χώρο, κρίθηκε ίσως η πιο δύσκολη με βάση τα αποτελέσματα. Ο λόγος είναι ότι η εκφώνηση άλλαζε τα δεδομένα και στο δεύτερο ερώτημα ζήταγε ένα καινούριο δειγματικό χώρο.

Πίνακας 6.11
Τρίτη άσκηση εύρεσης Δειγματικού χώρου και εναλλαγή του ανάλογα με τα ζητούμενα

Ερωτήσεις	**Τριτοβάθμια**
	f%
Από μια τράπουλα με 52 φύλλα τραβάμε τυχαία ένα φύλλο και καταγράφουμε το είδος του ως προς το σχήμα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;	
Σωστή απάντηση	7,7
Λάθος απάντηση	33,8
Δεν απάντησε	58,5
Αν στο ίδιο πείραμα καταγράφαμε το χρώμα, ποιος θα ήταν τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος;	
Σωστή απάντηση	12,3
Λάθος απάντηση	27,7
Δεν απάντησε	60

Εδώ, φαίνεται να υπάρχει δυσκολία στην αναζήτηση ορισμένων Δειγματικών χώρων. Στην αρχική ερώτηση μόνο το 7,7% έδωσε σωστή απάντηση, ενώ μετά την αλλαγή της ερώτησης, το ποσοστό αυξήθηκε στο 12,3%. Επίσης, να σημειωθούν και σε αυτόν τον πίνακα τα ποσοστά των κενών απαντήσεων, τα οποία και στα δύο ερωτήματα αγγίζουν περίπου το 60%.

6.5.5 Ενδεχόμενα

Η έννοια «ενδεχόμενο», είναι χαρακτηριστική και πολλές φορές κάποιος τη συναντά στην καθημερινότητα. Τι πιστεύουν όμως δεδομένης της ηλικίας και της εκπαιδευτικής βαθμίδας οι συμμετέχοντες για τον ορισμό αυτής της έννοιας;

Πίνακας 6.12
Ορισμός «Ενδεχομένου»

Ερωτήσεις	Πρωτοβάθμια	Παρέμβαση	Δευτεροβάθμια	Τριτοβάθμια
	f%	f%	f%	f%
Τι από τα παρακάτω πιστεύετε ότι είναι «ενδεχόμενο»;				
ένα πιθανό αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτέλεση του πειράματος	15,6	22,2	17,2	49,2
κάτι που μπορεί να συμβεί υπό προϋποθέσεις	20,2	18,9	26,5	39,6
ένα γεγονός που ενδέχεται να συμβεί στο μέλλον	30,3	21,1	36,4	10,8
δεν έχει καμία σχέση με τις πιθανότητες	8,7	14,4	9,9	0
Δεν απάντησε	25,1	23,3	9,9	3,1

Στον πίνακα 6.12, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στον ορισμό της λέξης «ενδεχόμενο», χωρισμένες για άλλη μια φορά στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Τα ποσοστά που προκαλούν εντύπωση στο συγκεκριμένο πίνακα είναι το 49,2% της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και το 22,2% των παιδιών της εκπαιδευτικής παρέμβασης, όπου υποστηρίζουν ότι ενδεχόμενο είναι ένα πιθανό αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτέλεση του πειράματος. Αυτό, αποτελούσε και την πλειοψηφία των απαντήσεων της Τριτοβάθμιας. Όσον αφορά τις μικρότερες βαθμίδες, τα μεγαλύτερα ποσοστά εμφανίστηκαν στην απάντηση ότι είναι ένα γεγονός που ενδέχεται να συμβεί στο μέλλον, με 36,4% για τη Δευτεροβάθμια και 30,3% για την Πρωτοβάθμια. Τέλος να σημειωθεί ότι δεν έλειψαν και οι απαντήσεις όπου θεώρησαν την έννοια ασύνδετη με τις πιθανότητες.

Πίνακας 6.13

Ορισμός «βέβαιου ενδεχομένου»

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθμια**	**Παρέμβαση**	**Δευτεροβάθμια**	**Τριτοβάθμια**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται «βέβαιο»;				
όταν είναι σίγουρο ότι θα συμβεί	57,8	50	68,9	60
όταν είναι σίγουρο ότι δεν θα συμβεί	4	5,6	4	3,1
όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι 50%	8,4	17,8	2	4,6
όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην συμβεί	13,3	8,9	17,9	29,2
Δεν απάντησε	16,5	17,8	7,3	3,1

Ως συνέχεια του προηγούμενου πίνακα, ο πίνακας 6.13 πραγματεύεται την ερώτηση για τον ορισμό του «βέβαιου ενδεχόμενου». Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης ερώτησης είναι εξίσου σημαντικά, καθώς όπως παρατηρούμε τα μεγαλύτερα ποσοστά κάθε βαθμίδας απάντησαν σωστά στην ερώτηση. Βέβαια, αξίζει να σημειωθεί το εκπληκτικό για τη συγκεκριμένη ερώτηση ποσοστό (29,2%) της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπου απάντησε πως «βέβαιο ενδεχόμενο» είναι ένα ενδεχόμενο που έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί από ότι να μη συμβεί.

6.5.5.1 Ισοπίθανα Ενδεχόμενα

Ισοπίθανα ενδεχόμενα, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας και όπως προκύπτει από την ανάλυση της ίδιας της λέξης, είναι δύο ενδεχόμενα που έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν. Πολλές φορές κάποιος αντιλαμβάνεται την έννοια διαισθητικά, όμως όταν πρέπει να χειριστεί αυτή την έννοια μέσα σε ένα πρόβλημα τα αποτελέσματα δεν είναι προφανή. Για την εξέταση της συγκεκριμένης έννοιας, δόθηκαν διάφορες παραλλαγές ασκήσεων στο ερωτηματολόγιο. Λόγου χάρη, υπήρχαν ασκήσεις που τα δεδομένα δινόντουσαν με περιγραφή στην εκφώνηση και ασκήσεις που τα δεδομένα παρουσιαζόντουσαν μέσο μιας εικόνας. Όλες όμως οι ασκήσεις που παρουσιάστηκαν στο ερωτηματολόγιο, ήταν προβλήματα που αντιμετωπίζει κανείς στην καθημερινότητα.

Να σημειωθεί ότι και ο ορισμός των ισοπίθανων ενδεχομένων, ρωτήθηκε μόνο στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και όχι στις μικρότερες βαθμίδες. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας κατανομής των απαντήσεων των φοιτητών και των εκπαιδευτικών σχετικά με τον ορισμό της έννοιας.

Πίνακας 6.14
Ορισμός «Ισοπίθανα Ενδεχόμενα»

Ερωτήσεις	**Τριτοβάθμια**
	f%
Τι καταλαβαίνεις από την έκφραση «ισοπίθανα ενδεχόμενα»;	
ότι δεν γίνεται να συμβούν ταυτόχρονα.	0
γίνεται να συμβούν ταυτόχρονα.	7,7
ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί	0
δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά ξέρουμε ποιο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα	3,1
δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά υπάρχει πιθανότητα να έρθουν και τα δύο	15,4
δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά ξέρουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να συμβεί ήτο ένα ή το άλλο	69,2
Δεν απάντησε	4,6

Το 69,2% θεωρεί ότι και τα δύο ενδεχόμενα είναι πιθανά, ωστόσο δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα πραγματοποιηθεί. Σημαντικό είναι το πολύ μικρό ποσοστό (4,6%), όπου δεν έδωσε καμία απάντηση, γεγονός που δείχνει την απλότητα και την ευκολία της έννοιας για τις μεγαλύτερες ηλικίες. Βέβαια, δεν περνάει απαρατήρητο το 15,4% των απαντήσεων, όπου θεωρούν ότι δεν γνωρίζει κανείς πιο ενδεχόμενο θα πραγματοποιηθεί, αλλά μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο.

Ο επόμενος πίνακας, πραγματεύεται μια ερώτηση μελέτης των αντιλήψεων για τα «Ισοπίθανα γεγονότα» μέσα από την επίλυση ενός προβλήματος. Τα δεδομένα της εκφώνησης του συγκεκριμένου προβλήματος δόθηκαν με περιγραφή στην εκφώνηση. Όπως και στους πίνακες που προηγήθηκαν, οι απαντήσεις κατανέμονται σύμφωνα με τις απαντήσεις κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας και εμφανίζονται τα ποσοστά επιλογής κάθε απάντησης, όπως επίσης και τα ποσοστά αιτιολόγησης των απαντήσεων.

Πίνακας 6.15
Πρώτη άσκηση για Ισοπίθανα ενδεχόμενα

Ερωτήσεις	**Πρωτ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτ.**	**Τριτ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Σε ένα σακούλι Α υπάρχουν 4 βόλοι, 2 μπλε και 2 πράσινοι και σε ένα σακούλι Β υπάρχουν 6 βόλοι, 3 μπλε και 3 πράσινοι. Από ποιο σακούλι υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβηχτεί τυχαία ένας μπλε βόλος;				
Σωστή απάντηση	11,8	18,9	31,1	58,5
Σακούλι Α	20,5	17,8	26,5	7,7
Σακούλι Β	43,9	41,1	29,1	27,7
Άλλο	0,9	3,3	2,6	0
Δεν απάντησε	22,8	18,9	10,6	6,2
Σωστή αιτιολόγηση	9,8	6,7	27,8	47,7
Λάθος αιτιολόγηση	41,3	46,7	27,2	23,1
Χωρίς αιτιολόγηση	48,3	46,7	45	29,2

Παρατηρώντας λοιπόν τον πίνακα 6.15 φαίνεται ότι σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα κανένα από τα ποσοστά της σωστής απάντησης δεν συνάδει με τη σωστή αιτιολόγηση. Για παράδειγμα, στην τριτοβάθμια εκπαίδευση το 58,5% απάντησαν σωστά, αλλά μόνο το 47,7% αιτιολόγησε σωστά την επιλογή του. Επίσης αυτό που αξίζει να προσεχθεί στον πίνακα αυτόν, είναι το πολύ μεγάλο ποσοστό των ερωτώμενων, όπου άφησε καινή την ερώτηση.

Συνεχίζοντας την παράγραφο των «Ισοπίθανων Ενδεχομένων», δόθηκε στους ερωτώμενους μια άσκηση που προκύπτει μέσα από την αντιμετώπιση μιας καθημερινής κατάστασης.

Πίνακας 6.16
Δεύτερη άσκηση για Ισοπίθανα ενδεχόμενα

Ερωτήσεις	**Πρωτ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτ.**	**Τριτ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Ένα κουτί δημητριακών δίνει δώρο μια κάρτα ή ένα αυτοκόλλητο. Τι πιστεύτε ότι θα βρείτε στο κουτί;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	10,4	27,8	21,9	63,1
Κάρτα	35	22,2	28,5	21,5
Αυτοκόλλητο	28,9	25,6	35,1	10,8
Άλλο	4,3	7,8	6,6	1,5
Δεν απάντησε	21,4	16,7	7,9	3,1
Αν το πρώτο κουτί έχει κάρτα, τότε στο δεύτερο κουτί θα έχει το αυτοκόλλητο;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	19,1	30	37,7	64,6
Ναι	21,4	18,9	13,9	7,7
Όχι	38,2	35,6	39,7	24,6
Άλλο	2	2,2	0	0
Δεν απάντησε	19,4	13,3	8,6	3,1
Σωστή αιτιολόγηση (Ισοπίθανα)	20,2	13,3	14,6	30,8
Λάθος αιτιολόγηση	25,7	36,7	35,8	26,2
Χωρίς αιτιολόγηση	54	50	0,7	43,1

Στον πίνακα αυτό, φαίνεται τόσο η εκφώνηση και τα ερωτήματα του προβλήματος, όσο και οι απαντήσεις των μαθητών ανά τα ερωτήματα. Η πλειοψηφία των μαθητών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης απάντησε με ποσοστό 28,9% «αυτοκόλλητο», ενώ τα παιδιά στα οποία προηγήθηκε η διδακτική παρέμβαση του ερευνητή, απάντησαν με ποσοστό 27,8% ότι μπορεί να παρίσταται οποιοδήποτε από τα δύο δώρα. Εντύπωση προκαλεί το μεγαλύτερο ποσοστό της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (35,1%) όπου επίσης επέλεξε την επιλογή «αυτοκόλλητο». Έπειτα, απλά για να σημειωθεί, το 63,1% της τριτοβάθμιας απάντησε σωστά στο πρώτο ερώτημα της άσκησης. Στη συνέχεια, στο δεύτερο ερώτημα, τέθηκε στα παιδιά μια ερώτηση για να ανιχνευθεί εάν αλλάζουν τα ποσοστά και οι επιλογές τους δεδομένου της πρώτης επιλογής. Όπως μπορεί κανείς να προσέξει στον πίνακα, τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών είναι εντελώς διαφορετικά. Παρατηρείται μία αύξηση στα ποσοστά που υποστηρίζουν ότι δεδομένου ότι την πρώτη φορά ήρθε κάρτα, τη δεύτερη φορά θα υπάρχει αυτοκόλλητο. Επίσης, φαίνεται να αυξάνονται και τα ποσοστά της σωστής απάντησης στη δεύτερη φορά εκτέλεσης του πειράματος (δηλαδή στο δεύτερο ερώτημα) σε σύγκριση με την πρώτη. Τέλος, όσον αφορά την αιτιολόγηση να σημειωθεί ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των ερωτώμενων δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσει τις επιλογές του, ή τις αιτιολόγησε λάθος.

Μια ακόμα ερώτηση του ερωτηματολογίου, η οποία δόθηκε με τη μορφή άσκησης, έθετε ουσιαστικά στους μαθητές το πολύ απλό ερώτημα, αν είναι δίκαιη η ρίψη ενός αμερόληπτου κέρματος. Η ερώτηση απαιτούσε τόσο την απάντηση «Ναι» ή «Όχι» των συμμετεχόντων, όσο και την αιτιολόγηση αυτής της απάντησης.

Πίνακας 6.17
Τρίτη άσκηση για Ισοπίθανα ενδεχόμενα (Ρίψη νομίσματος)

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθμια**	**Παρέμβαση**	**Δευτεροβάθμια**	**Τριτοβάθμια**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Είναι δίκαιη η ρίψη ενός αμερόληπτου κέρματος;				
Ναι	53,2	63,3	68,2	81,5
Όχι	14,8	15,6	19,2	10,7
Δεν απάντησε	32,1	21,1	12,6	7,7
Σωστή αιτιολόγηση	6,1	11,1	27,2	63,1
Λάθος αιτιολόγηση	35	40	21,9	12,3
Δεν απάντησε	59	48,9	51	24,6

Στον πίνακα 6.17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις επιλογές των ερωτώμενων. Το θετικό είναι ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά από κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα απάντησαν σωστά στην ερώτηση. Ωστόσο, για άλλη μία φορά υπάρχει τεράστια διαφορά ανάμεσα στα ποσοστά της σωστής αιτιολόγησης και της σωστής απάντησης. Έπειτα, αρκετά μεγάλα είναι και τα ποσοστά (κυρίως για τους μαθητές των μικρότερων βαθμίδων εκπαίδευσης), όπου δεν έδωσαν καμία αιτιολόγηση.

Ο επόμενος πίνακας που παρουσιάζεται, αντιπροσωπεύει μια ερώτηση, όπου τα δεδομένα της εκφώνησης δόθηκαν μέσο μιας εικόνας. Η συγκεκριμένη ερώτηση παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με την ερώτηση του πίνακα 6.15 που παρουσιάστηκε παραπάνω. Αυτό γίνεται για να ελεγχθούν τόσο οι απαντήσεις των μαθητών όσον αφορά την ποιότητα τους, όσο και οι διαφορές των απαντήσεων στον τρόπο που δίνονται τα δεδομένα.

Πίνακας 6.18

Τέταρτη άσκηση για Ισοπίθανα ενδεχόμενα (Δεδομένα μέσω εικόνας)

Ερωτήσεις	**Πρωτοβάθ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτεροβάθ.**	**Τριτοβάθ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Σε ένα σακούλι Α υπάρχουν μερικοί άσπροι και μερικοί μαύροι βόλοι και σε ένα σακούλι Β το ίδιο, αλλά με περισσότερους βόλους. Από ποιο σακούλι υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρει κανείς τυχαία, έναν άσπρο βόλο;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	9,5	15,6	17,9	60
Σακούλι Α	20,5	17,8	37,7	9,2
Σακούλι Β	37,9	46,7	27,2	23,1
Άλλο	0,9	2,2	3,3	0
Δεν απάντησε	31,2	17,8	13,9	7,7
Σωστή αιτιολόγηση	9,8	7,8	19,2	53,8
Λάθος αιτιολόγηση	37,6	37,8	30,5	23,1
Χωρίς αιτιολόγηση	52,6	54,4	50,3	23,1

Στη συγκεκριμένη άσκηση λοιπόν, όπως προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων που συσσωρεύτηκαν στον πίνακα 6.18, το μεγαλύτερο ποσοστό της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (37,9%) και της παρέμβασης (46,7%), επέλεξαν ότι μεγαλύτερη πιθανότητα υπάρχει αν γίνει η επιλογή από το σακούλι Β. Η Δευτεροβάθμια εκπαίδευση με ποσοστό 37,7% επέλεξε το σακούλι Α, ενώ η Τριτοβάθμια με ποσοστό 60%, απάντησε σωστά στην ερώτηση. Δεν έλλειψαν βέβαια και εδώ τα μεγάλα ποσοστά αποφυγής της αιτιολόγησης, όπως και η μεγάλη διαφορά στα ποσοστά της σωστής απάντησης και της σωστής αιτιολόγησης.

6.5.5.2 Μη Ισοπίθανα Ενδεχόμενα

Στην καθημερινή ζωή τα περισσότερα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, αλλά μη ισοπίθανα. Για αυτό το λόγο δεν θα μπορούσαν να λείπουν από το ερωτηματολόγιο της παρούσας έρευνας, ερωτήσεις και ασκήσεις που να χρησιμοποιούν τη θεωρία των «μη ισοπίθανων ενδεχομένων».

Η πρώτη ερώτηση για αυτού του είδους τα ενδεχόμενα, τίθεται μέσο μιας άσκησης, όπου έχει αρκετές επαναλήψεις του πειράματος. Οι απαντήσεις κατανέμονται στο παρακάτω πίνακα, σύμφωνα με τις επιλογές και τις απαντήσεις κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας ξεχωριστά. Επιγραμματικά, το πρόβλημα θέτει το ερώτημα του πιο πιθανού αποτελέσματος στη ρίψη ενός ζαριού με 4 κόκκινες πλευρές και 2 άσπρες.

Πίνακας 6.19
Πρώτη άσκηση για Μη Ισοπίθανα ενδεχόμενα

Ερωτήσεις	**Πρωτ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτ.**	**Τριτ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Ρίχνουμε ένα ζάρι το οποίο έχει 4 πλευρές κόκκινες και 2 πλευρές άσπρες και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της πάνω πλευράς. Ποιο πιστεύετε ότι θα είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	7,2	21,1	11,3	36,9
Άσπρο	18,8	15,6	33,1	3,1
Κόκκινο	44,8	44,4	45,7	52,3
Άλλο	0,3	0	0,7	0
Δεν απάντησε	28,9	18,9	9,3	7,7
[Συνέχεια]				
Σωστή αιτιολόγηση	30,9	23,3	31,1	47,7
Λάθος αιτιολόγηση	10,7	10	10	13,9
Δεν απάντησε	58,4	66,7	58,9	38,5
Ποιο πιστεύετε ότι θα είναι το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	9	21,1	13,2	29,2
[Συνέχεια]				

Άσπρο	26,3	26,7	38,4	7,7
Κόκκινο	27,7	27,8	36,4	43,1
Άλλο	1,4	1,1	0,7	0
Δεν απάντησε	35,5	23,3	11,3	20
Σωστή αιτιολόγηση	17,6	16,7	21,9	35,4
Λάθος αιτιολόγηση	13	12,2	11,9	13,9
Δεν απάντησε	69,4	71,1	66,2	50,8
Ποιο χρώμα εμφανίζεται συχνότερα μετά από 16 ρίψεις;				
Άσπρο	18,2	20	26,5	70,8
Κόκκινο	40,8	36,7	53,6	10,8
Άλλο	5,5	14,4	6	7,7
Δεν απάντησε	35,5	28,9	13,9	10,8
Ήταν αυτό αναμενόμενο;				
Σωστή αιτιολόγηση	17,1	12,2	30,3	46,2
Λάθος αιτιολόγηση	12,1	16,7	8,6	10,8
Δεν απάντησε	70,8	71,1	61,2	43,1

Όπως φαίνεται λοιπόν στον πίνακα, οι ερωτώμενοι κάθε βαθμίδας εκπαίδευσης θεωρούν ότι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης θα είναι κόκκινο με αρκετά μεγάλα ποσοστά. Το αξιοπερίεργο στο συγκεκριμένο πίνακα, είναι ότι υπάρχουν αρκετά μεγάλα ποσοστά όπου δεν δόθηκαν αιτιολογήσεις και όπου δόθηκαν είχαν αρκετά μεγάλη διαφορά με τη σωστή απάντηση. Πολύ σημαντική είναι η παρατήρηση των αποτελεσμάτων της δεύτερης ρίψης, όπου τα ποσοστά φαίνεται να άλλαξαν ριζικά. Στη δεύτερη ρίψη φαίνεται το άσπρο να «κερδίζει πόντους» κατά την άποψη των μαθητών. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι το ποσοστό 18,8% της Πρωτοβάθμιας για να έρθει άσπρο στην πρώτη ρίψη, γίνεται 26,3% στη δεύτερη. Μετά από 16 εκτελέσεις του ίδιου πειράματος, οι μαθητές στην πλειοψηφία τους, πιστεύουν ότι τη μεγαλύτερη συχνότητα θα την εμφανίζει το κόκκινο χρώμα, αλλά δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την άποψη τους. Η Τριτοβάθμια εκπαίδευση όμως, ισχυρίζεται με το εκπληκτικό ποσοστό 70,8%, ότι μετά από 16 ρίψεις θα επικρατεί το λευκό χρώμα, παρόλο που το 46,2% έδωσε σωστή αιτιολόγηση του ζητήματος.

Συνεχίζοντας, όπως προηγουμένως στα «ισοπίθανα ενδεχόμενα», έτσι και εδώ δεν θα μπορούσε να λείπει η ερώτηση, όπου τα δεδομένα της εκφώνησης δίνονται με τη χρήση μιας εικόνας. Η εικόνα παρουσίαζε έναν απλό τροχό τύχης, όπου εμφανιζόταν πέντε φορές το 1 ευρώ και τρεις τα 10 ευρώ. Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν δημιουργήθηκε ο πίνακας 6.20.

Πίνακας 6.20
Δεύτερη άσκηση για Μη Ισοπίθανα ενδεχόμενα

Ερωτήσεις	**Πρωτοβ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτεροβ.**	**Τριτοβ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Σε έναν τροχό της τύχης, όπου τα 10 ευρώ εμφανίζονται 3 φορές και το 1 ευρώ 5 φορές, τι θα έρθει στη πρώτη ρίψη;				
Οποιοδήποτε (Σωστό)	6,1	16,7	13,2	26,2
10 ευρώ	28	20	20,5	3,1
1 ευρώ	34,1	38,9	53,6	55,4
Άλλο	2	0	1,3	3,1
Δεν απάντησε	29,8	24,4	11,3	12,3
Ποιο είναι πιο πιθανό να έρθει;				
1 ευρώ	42,2	46,7	73,5	81,5
10 ευρώ	22,3	25,6	11,2	4,6
Δεν απάντησε	35,5	27,8	15,2	13,8
Σωστή αιτιολόγηση	22,8	28,9	43	69,2
Λάθος αιτιολόγηση	20,8	16,7	13,2	4,6
Δεν απάντησε	56,4	57,4	43,7	26,2

Η περισσότεροι από τους ερωτώμενους, απάντησαν ότι στην πρώτη ρίψη θα έρθει 1 ευρώ, ενώ στην ερώτηση «ποιο είναι πιο πιθανό να έρθει», πάλι η συντριπτική πλειοψηφία απάντησε 1 ευρώ. Το πρόβλημα εμφανίζεται και σε αυτή την ερώτηση, όταν ζητήθηκε από τους ερωτώμενους να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Πολύ μεγάλα ήταν τα ποσοστά, όπου δεν έδωσαν καμία αιτιολόγηση.

Τέλος, δόθηκε μια ερώτηση συναφής με κάποιες ερωτήσεις των ισοπίθανων ενδεχομένων. Η συγκεκριμένη ερώτηση, έθετε στους συμμετέχοντες ένα ερώτημα μη ισοπίθανων γεγονότων, το οποίο χρειαζότανε την χρήση του κλασικού ορισμού πιθανότητας για τη λύση του. Τα αποτελέσματα της ερώτησης παρουσιάζονται παρακάτω και σύμφωνα με αυτά, είναι λογικό να χαρακτηριστεί η ερώτηση ως «εύκολη».

Πίνακας 6.21
Τρίτη άσκηση για Μη Ισοπίθανα ενδεχόμενα

Ερωτήσεις	**Πρωτοβ.**	**Παρέμβ.**	**Δευτεροβ.**	**Τριτοβ.**
	f%	**f%**	**f%**	**f%**
Σε ένα σακούλι Α υπάρχουν 8 βόλοι, 6 μπλε και 2 πράσινοι και σε ένα σακούλι Β υπάρχουν 8 βόλοι, 4 μπλε και 4 πράσινοι. Από ποιο σακούλι υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβηχτεί τυχαία, ένας μπλε βόλος;				
Σακούλι Α (Σωστό)	48	41,1	60,3	83,1
Σακούλι Β	12,7	24,4	23,2	9,2
Άλλο	6,1	15,6	1,3	3,1
Δεν απάντησε	33,2	18,9	15,2	4,6
Σωστή αιτιολόγηση	30,3	24,4	37,1	64,6
Λάθος αιτιολόγηση	13	16,7	8	7,7
Χωρίς αιτιολόγηση	56,6	58,9	55	27,7

Από τα δεδομένα του πίνακα, παρατηρείται ότι όλες οι εκπαιδευτικές βαθμίδες, κατά την πλειοψηφία τους, απάντησαν σωστά στην ερώτηση. Φυσικά όμως, δεν έλειψαν και τα αξιοσημείωτα ποσοστά των κενών απαντήσεων.

6.6 Αποτελέσματα Συνεπαγωγικής Ανάλυσης

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της συνεπαγωγικής ανάλυσης που προέκυψαν από τη χρήση του προγράμματος CHIC, προέκυψαν αρκετές ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών. Παρακάτω, εμφανίζονται ξεχωριστά ανά τις εκπαιδευτικές βαθμίδες τα αποτελέσματα και τα διαγράμματα αυτής της ανάλυσης. Να σημειωθεί ότι υπήρχαν πολλές συσχετίσεις στη συγκεκριμένη έρευνα, ωστόσο για τη διατήρηση της αξιοπιστίας της έρευνας καταγράφηκαν μόνο οι συσχετίσεις με ποσοστό ομοιότητας πάνω από 99%.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το κομμάτι της ανάλυσης ήταν ένα μέρος των ερωτήσεων με τις πεποιθήσεις και οι απαντήσεις των ερωτώμενων στα έργα – ασκήσεις του ερωτηματολογίου. Το υπόλοιπο μέρος των πεποιθήσεων, όπως και οι αιτιολογήσεις των ασκήσεων, δεν θεωρήθηκαν απαραίτητα από τον ερευνητή να πάρουν μέρος σε αυτό το είδος ανάλυσης. Με άλλα λόγια, για τα δημογραφικά στοιχεία των ερωτώμενων και η ευχέρεια αιτιολόγησης, δεν κρίθηκαν απαραίτητα στοιχεία για την αναζήτηση της συνεπαγωγής τους με άλλες μεταβλητές στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας.

Τα διαγράμματα ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα που εμφανίζονται, παρουσιάζουν τους κανόνες της συνεπαγωγής που μπορούν να αναπτυχθούν μεταξύ των μεταβλητών. Αξίζει ακόμα να σημειωθεί σε αυτό το σημείο για το συνεπαγωγικό διάγραμμά (το οποίο δίνει και τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της έρευνας), ότι ο βαθμός της πολυπλοκότητας του δείχνει όχι μόνο το μέγεθος της έρευνας, αλλά και την ποιότητα της.

Στην αρχή του κεφαλαίου 6, παρατέθηκε ο πίνακας 6.1, όπου παρουσιάζει την αντιστοιχία κάποιον μεταβλητών με την ερμηνεία τους. Παρακάτω, εμφανίζεται ένας πίνακας με την αντιστοιχία των υπόλοιπων μεταβλητών της έρευνας με τις αντίστοιχες ερωτήσεις τους.

Πίνακας 6.22
Αντιστοίχιση μεταβλητών με ερωτήσεις για την εξακρίβωση των χαρακτηριστικών του δείγματος

Μεταβλ.	**Αντιστοίχιση με ερωτήσεις**
D2	Ορισμός «Πιθανότητας».
[Συνέχεια]	

D4.1	Ορισμός «Πείραμα Τύχης».
B4.2	Καθημερινές δραστηριότητες με πιθανότητες.
D4.2	Ορισμός «Δυνατά αποτελέσματα» ενός πειράματος τύχης.
B4.3	Απαραίτητες γνώσεις για το πείραμα τύχης.
D4.4	Ορισμός «Δειγματικού χώρου».
D4.5	Ορισμός «Ενδεχόμενου».
D4.6	Ορισμός «Ισοπίθανα ενδεχόμενα».
B4.7	Ορισμός «Βέβαιου Ενδεχόμενου».
B4.6 ή B4.8	Ορισμός έκφρασης: «Η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας».
P1.1	Η πιθανότητα πάνω από 50%, άρα σίγουρο αποτέλεσμα.
P1.2	70% πιθανότητα σημαίνει: «Από τις 10, συμβαίνει τις 7».
P1.3	Αν με 70% πιθανότητα βροχής, δεν βρέξει τελικά, σημαίνει πως η πρόβλεψη είναι εσφαλμένη.
P1.4	70% πιθανότητα βροχής, το ποσοστό να βρέξει είναι μεγαλύτερο από το να μην βρέξει.
P1.5	70% πιθανότητα βροχής, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα.
P1.6	70% πιθανότητα βροχής, Αύριο θα βρέχει.
P1.7	70% πιθανότητα βροχής, άρα η υγρασία θα είναι αυξημένη κατά 70% και άρα μπορεί να βρέξει.
P1.8	70% πιθανότητα βροχής, μπορεί να βρέξει ή και όχι, ωστόσο το πιθανότερο είναι να βρέχει.
EP1.1	Πείραμα με επιλογή από σακούλια, ισοπίθανα ενδεχόμενα, δεδομένα στην εκφώνηση.
EP2.1	Πείραμα με ισοπίθανα, δύο επιλογές, πρώτη εκτέλεση του πειράματος.
EP2.2	Πείραμα με ισοπίθανα, δύο επιλογές, δεύτερη εκτέλεση πειράματος.
NEP1.1.1	Πείραμα με μεροληπτικό ζάρι, αποτέλεσμα πρώτης ρίψης.
NEP1.2.1	Πείραμα με μεροληπτικό ζάρι, αποτέλεσμα δεύτερης ρίψης.
NEP1.3	Πείραμα με μεροληπτικό ζάρι, αποτελέσματα μετά από 16 ρίψεις.
NEP1.4.1	Πείραμα με μεροληπτικό ζάρι, αποτελέσματα μετά από 16 ρίψεις, αναμενόμενα αποτελέσματα.
NEP2.1	Τροχός τύχης, αποτέλεσμα πρώτης ρίψης.
NEP2.2.1	Τροχός τύχης, πιο πιθανό αποτέλεσμα πρώτης ρίψης.
EP3.1	Ρίψη νομίσματος.
NEP3.1	Δειγματικός χώρος, δύο ζάρια και πολλαπλασιασμός των αποτελεσμάτων.
NEP3.2.1	Χρήση κλασικού ορισμού και σύγκριση πιθανοτήτων.
EP4.1	Πείραμα με επιλογή από σακούλια, ισοπίθανα ενδεχόμενα, δεδομένα στην εικόνα.
DigX.1.1.	Δειγματικός χώρος σε πείραμα με ζάρι και νόμισμα.
DigX.1.2	Πιθανότητα ενός ενδεχομένου με κλασικό ορισμό.
P2.1	Μετά από 3 φορές εξάρι, αδύνατο να έρθει πάλι 6.
P2.2	Μετά από 3 φορές εξάρι, σίγουρα τη τέταρτη θα έρθει πάλι 6.
P2.3	Μετά από 3 φορές εξάρι, η πιθανότητα να έρθει 6 είναι 1/4.
P2.4	Μετά από 3 φορές εξάρι, η πιθανότητα να έρθει 6 είναι 1/6.
P2.5	Μετά από 3 φορές εξάρι, είναι 50% να ξαναέρθει 6 και 50% να μην έρθει.
NEP4.1	Πείραμα με επιλογή από σακούλια, μη ισοπίθανα ενδεχόμενα, δεδομένα στην εκφώνηση.
DigX.2.1	Δειγματικός χώρος τράπουλας, επιλογή ως προς το είδος.
DigX.2.2	Δειγματικός χώρος τράπουλας επιλογή ως προς το χρώμα.

6.6.1 Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

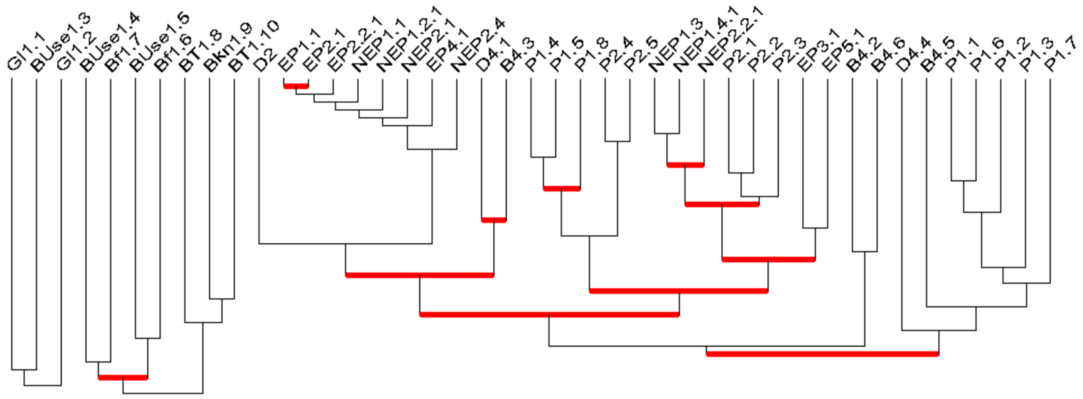
Στο πίνακα που παρουσιάζεται παρακάτω, φαίνονται οι ισχυρές συσχετίσεις και το ποσοστό ομοιότητας τους για τη Πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στη συνέχεια ακολουθεί το διάγραμμα ομοιότητας που προέκυψε από τη συνεπαγωγική ανάλυση των ερωτήσεων για τις πεποιθήσεις των ερωτώμενων με τα αντίστοιχα έργα.

Πίνακας 6.23

Πίνακας ισχυρών συσχετίσεων ανάμεσα σε ασκήσεις και έργα της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Επίπεδο	Πεποιθήσεις - Έργα	Ομοιότητα %
1	(EP1.1 EP2.1)	100%
2	((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1)	100%
3	(((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1)	100%
4	((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1)	100%
5	(((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1)	100%
6	((((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1) EP4.1)	100%
7	(NEP1.3 NEP1.4.1)	100%`
8	(P2.4 P2.5)	99,9991%
9	(((((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1) EP4.1) NEP2.4)	99,999%
10	(P1.4 P1.5)	99,9963%
11	((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1)	99,9956%
12	(P2.1 P2.2)	99,9894%
13	(P1.1 P1.6)	99,9883%
14	((P1.4 P1.5) P1.8)	99,976%
15	((P2.1 P2.2) P2.3)	99,9756%
16	(((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1) ((P2.1 P2.2) P2.3))	99,9456%
[Συνέχεια]		

17	((P1.1 P1.6) P1.2)	99,9321%
18	(D4.1 B4.3)	99,8785%
19	(EP3.1 EP5.1)	99,8414%
20	(((P1.4 P1.5) P1.8) (P2.4 P2.5))	99,7648%
21	(D2 (((((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1) EP4.1) NEP2.4))	99,7001%
22	(B4.2 B4.6)	99,6929%
23	((((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1) ((P2.1 P2.2) P2.3)) (EP3.1 EP1.5))	99,6583%
24	(((P1.1 P1.6) P1.2) P1.3)	99,573%
25	((D2 (((((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1) EP4.1) NEP2.4)) (D4.1 B4.3))	99,2625%
26	((((P1.1 P1.6) P1.2) P1.3) P1.7)	99,2054%



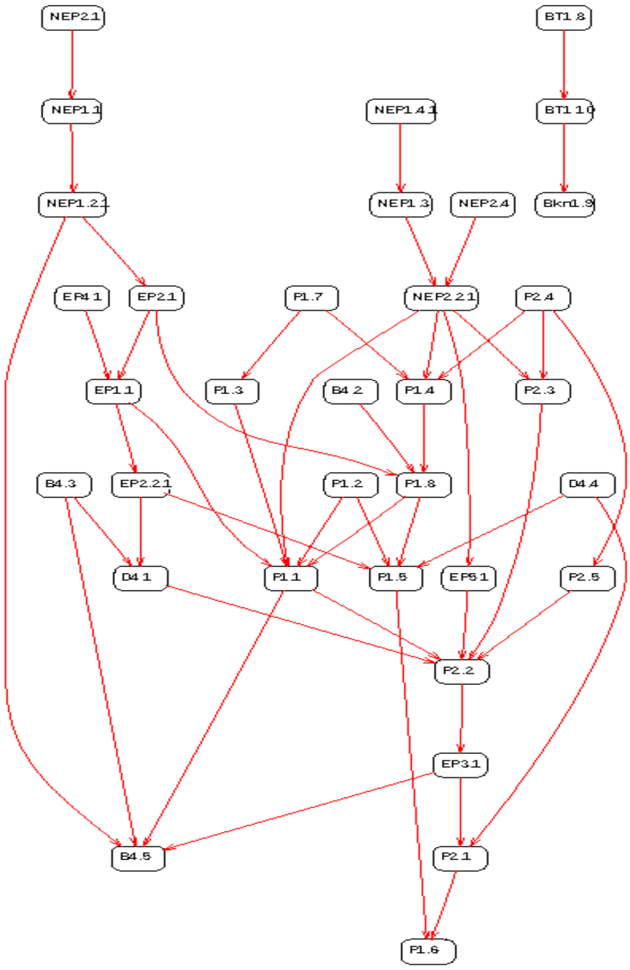
Διάγραμμα 6.9: Διάγραμμα Ομοιότητας για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Παρακάτω λοιπόν, θα σχολιαστούν ενδεικτικά μερικά από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των στοιχείων του πίνακα και του διαγράμματος ομοιότητας. Έτσι, η ανάλυση αυτών των στοιχείων διεξάγει τα εξής συμπεράσματα:

- Η πλειοψηφία των μαθητών που απάντησαν σωστά το πρώτο έργο ισοπίθανων ενδεχομένων με τα σακούλια, απάντησαν σωστά και τη πρώτη ερώτηση του επόμενου αντίστοιχου έργου EP2.1, όπου πραγματευόταν την τυχαία επιλογή μεταξύ δύο αποτελεσμάτων [(EP1.1 EP2.1)].

- Οι περισσότεροι μαθητές που απάντησαν σωστά τα παραπάνω έργα, απάντησαν σωστά και στην ερώτηση που πραγματευόταν τη δεύτερη εκτέλεση του πειράματος με τα ισοπίθανα ενδεχόμενα και τις δύο δυνατές επιλογές. Επίσης, έλυσαν σωστά και την ερώτηση για το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης του μεροληπτικού ζαριού, στη συνέχισαν έλυσαν σωστά και την ερώτηση για τη δεύτερη ρίψη του ίδιου προβλήματος και έπειτα την ερώτηση με το αποτέλεσμα της πρώτης στροφής του τροχού της τύχης. Και τελικά, κατέληξαν να λύσουν σωστά και το πείραμα των ισοπίθανων ενδεχομένων που έδινε τα δεδομένα μέσο μιας εικόνας στην εκφώνηση [((((((EP1.1 EP2.1) EP2.2.1) NEP1.1) NEP1.2.1) NEP2.1) EP4.1)].
- Ένα μεγάλο μέρος των μαθητών που έλυσε σωστά το την ερώτηση του μεροληπτικού ζαριού μετά από 16 ρίψεις, κατάφερε να απαντήσει και στην ερώτηση αν αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο [(NEP1.3 NEP1.4.1)].
- Σχεδόν όλοι οι μαθητές που έλυσαν σωστά την ερώτηση για την πιθανότητα να έρθει 6 μετά από τρεις συνεχόμενες εκτελέσεις του πειράματος, απάντησαν σωστά και ότι αυτή η πιθανότητα δεν είναι 50% [(P2.4 P2.5)].
- Οι μαθητές που έλυσαν σωστά τις ερωτήσεις με τα αποτελέσματα των 16 ρίψεων του μεροληπτικού ζαριού, έλυσαν και την ερώτηση με το πιο πιθανό αποτέλεσμα του τροχού της τύχης [((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1)].
- Πολλοί μαθητές που έλυσαν τις ερωτήσεις περί πιθανότητας, στη τέταρτη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού, απάντησαν επίσης ότι «70% πιθανότητα βροχής», σημαίνει ότι, μεγαλύτερη πιθανότητα είναι να βρέξει, ωστόσο μπορεί και να μη βρέξει [((P1.4 P1.5) P1.8)].
- Σχεδόν όλοι οι μαθητές έλυσαν τις ερωτήσεις με τις 16 ρίψεις του μεροληπτικού ζαριού και την ερώτηση σχετικά με το αποτέλεσμα που έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να έρθει στο τροχό της τύχης. Ακόμα οι μαθητές που έλυσαν τις ερωτήσεις για το αποτέλεσμα της τέταρτης ρίψης ενός αμερόληπτου κέρματος, δεδομένου ότι τις πρώτες τρεις ήταν έξι, τα κατάφεραν και στην ερώτηση περί πιθανότητας του συγκεκριμένου ενδεχομένου. Βέβαια αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι από αυτούς που έλυσαν την πρώτη ομάδα ερωτήσεων, έλυσαν και τη δεύτερη [(((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1) ((P2.1 P2.2) P2.3))].

➢ Οι μαθητές που έλυσαν και τις δύο ομάδες της προηγούμενης κουκίδας, κατάφεραν στη συνέχεια να λύσουν και τις ερωτήσεις με τη ρίψη του νομίσματος και με το μεγάλο ποσοστό βροχής [((((NEP1.3 NEP1.4.1) NEP2.2.1) ((P2.1 P2.2) P2.3)) (EP3.1 EP1.5))].



Διάγραμμα 6.10: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου, ακολουθεί η ανάλυση του συνεπαγωγικού διαγράμματος των απαντήσεων των μαθητών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Κάποιες σημαντικές συνεπαγωγές που προκύπτουν από το παραπάνω διάγραμμα αναλύονται παρακάτω.

➢ NEP2.1 → NEP1.1 → NEP1.2.1 → EP2.1 → EP1.1 → EP2.2.1 → D4.1 → P2.2 → EP3.1 → P2.1 → P1.6

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις ασκήσεις NEP2.1, NEP1.1 και NEP1.2.1 για τα μη ισοπίθανα ενδεχόμενα, συνέχισαν με σωστές απαντήσεις και στις ασκήσεις ίδιου τύπου για τα ισοπίθανα ενδεχόμενα (EP2.1, EP1.1, EP2.2.1), έδωσαν ένα σωστό ορισμό για τα πειράματα τύχης, είχαν σωστή αντίληψη για τη σχέση ενός πειράματος με τις προηγούμενες εκτελέσεις του, καθώς και σωστή αντίληψη σχετικά με την σχέση των πιθανοτήτων με προβλέψεις και εμπειρικά γεγονότα.

- BT1.8 → BT1.10 → BKn1.9

Οι μαθητές που είναι ευχαριστημένοι από τον τρόπο που διδάσκονται οι έννοιες των πιθανοτήτων στο σχολείο, θεωρούν ότι μια τόσο σημαντική έννοια θα έπρεπε να διδάσκεται νωρίτερα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, ωστόσο πιστεύουν ότι έχουν επαρκείς γνώσεις στο τομέα των πιθανοτήτων.

- NEP1.4.1 → NEP1.3 → NEP2.2.1 → P1.4 → P1.8 → P1.5 → P1.6

Όσοι απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις περί αναμενόμενων αποτελεσμάτων σε πείραμα με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα (NEP1.4.1), απάντησαν σωστά και στις ερωτήσεις μη ισοπίθανων ενδεχομένων με αρκετές επαναλήψεις του πειράματος (NEP1.3) και σε ερωτήσεις που αναζητούν το πιο πιθανό αποτέλεσμα (NEP2.2.1). Στη συνέχεια, κατανόησαν τη χρήση ποσοστών στις πιθανότητες, τη χρήση της έννοιας στην καθημερινότητα και τη σχέση της με τις προβλέψεις.

- EP4.1 → EP1.1 → EP2.2.1 → D4.1 → P2.2 → EP3.1 → B4.5

Τα παιδιά με σωστές απαντήσεις στη τέταρτη, στη πρώτη και το δεύτερο ερώτημα της δεύτερης ερώτησης για τα ισοπίθανα γεγονότα, έδωσαν σωστό ορισμό για το πείραμα τύχης, απέρριψαν τη σχέση της πιθανότητας με εμπειρικά γεγονότα και προβλέψεις, απάντησαν σωστά ακόμα και στη τρίτη ερώτηση περί ισοπίθανων γεγονότων και όρισαν σωστά τη λέξη «Βέβαιο».

- NEP2.1 → NEP2.2.1 → P1.4 → P1.8 → P1.1 → P2.2 → EP3.1 → B4.5

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις NEP2.1 και NEP2.2.1 των μη ισοπίθανων ενδεχομένων (όπου τα δεδομένα της εκφώνησης δηλωθήκαν με τη χρήση μια εικόνας), είχαν αρκετά σωστή αντίληψη για τη χρήση των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα, όπως και την ερμηνεία κάποιον συχνών καθημερινών εκφράσεων. Τέλος, έλυσαν σωστά την τρίτη ερώτηση των ισοπίθανων ενδεχομένων με το νόμισμα και εξηγούν σωστά τη λέξη «Βέβαιο».

- P1.7 → P1.3 → P1.1 → P2.2 → EP3.1 → P2.1 → P1.6

Τέλος, οι μαθητές που αντιλαμβάνονται σωστά τη χρήση τις πιθανότητας σε ορισμένες εκφράσεις της καθημερινότητας, έλυσαν την τρίτη ερώτηση των ισοπίθανων γεγονότων, κατανοούν τη σχέση πιθανότητας και πρόβλεψης και αντιλήφθηκαν σωστά ότι ποσοστό 70% πιθανότητα βροχής, δε σημαίνει ότι αύριο θα βρέχει.

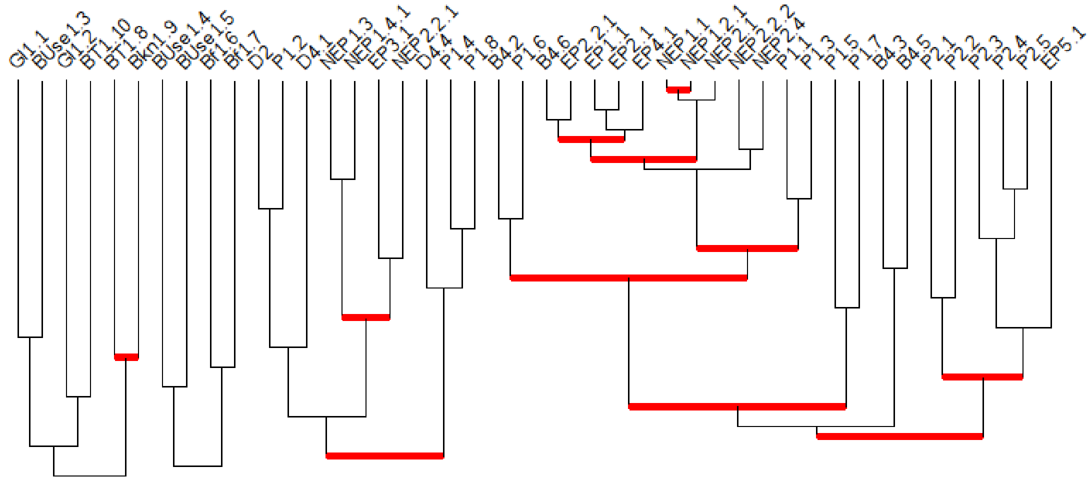
6.6.2 Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο έτσι και εδώ θα αναλυθούν τα αποτελέσματα της συνεπαγωγικής ανάλυσης για τα δεδομένα της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Πίνακας 6.24
Πίνακας ισχυρών συσχετίσεων ανάμεσα σε ασκήσεις και έργα της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Επίπεδο	Πεποιθήσεις-Έργα	Ομοιότητα %
1	(NEP1.1 NEP1.2.1	100%
2	((NEP1.1 NEP1.2.1) NEP2.1)	100%
3	(EP1.1 EP2.1)	99,9991%
4	(B4.6 EP2.2)	99,9982%
5	((EP1.1 EP2.1) EP4.1)	99,9937%
6	((B4.6 EP2.2) ((EP1.1 EP2.1) EP4.1))	99,9887%
7	(NEP2.2.2 NEP2.4)	99,8997%
8	(((B4.6 EP2.2) ((EP1.1 EP2.1) EP4.1)) ((NEP1.1 NEP1.2.1) NEP2.1))	99,8851%
[Συνέχεια]		

9	((((B4.6 EP2.2) ((EP1.1 EP2.1) EP4.1)) ((NEP1.1 NEP1.2.1) NEP2.1)) (NEP2.2.2 NEP2.4))	99,5551%
10	(NEP1.3 NEP1.4.1)	99,4409%
11	(P2.4 P2.5)	99,0932%



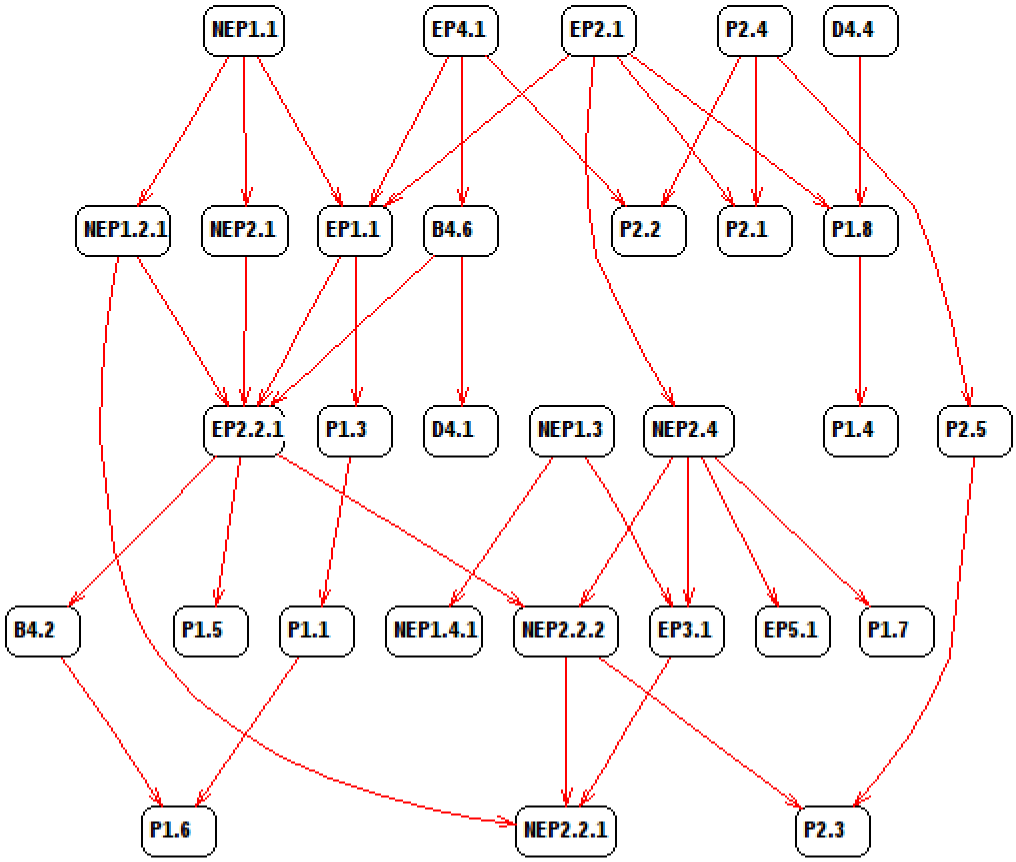
Διάγραμμα 6.11: Διάγραμμα Ομοιότητας για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο παραπάνω πίνακα και στο διάγραμμα ομοιότητας, έχουμε ενδεικτικά ότι:

- Πολλοί μαθητές που κατάφεραν να λύσουν τις ερωτήσεις για το αποτέλεσμα της πρώτης και της δεύτερης ρίψης του μεροληπτικού κέρματος, έλυσαν επίσης και την ερώτηση σχετικά με το αποτέλεσμα της πρώτης στροφής του τροχού της τύχης [((NEP1.1 NEP1.2.1) NEP2.1)].
- Μεγάλο ποσοστό των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που έλυσε σωστά το πείραμα με τα σακούλια που έδινε τα δεδομένα στην εκφώνηση, έλυσε και το όμοιο πείραμα με τα σακούλια που έδινε τα δεδομένα μέσο εικόνας, καθώς και το πείραμα με τα ισοπίθανα και τη πιθανή επιλογή της πρώτης ρίψης [((EP1.1 EP2.1) EP4.1)].
- Οι μαθητές που έλυσαν τις ερωτήσεις με τη πιθανότητα και την έκφραση «μέτρο της βεβαιότητας», όσο και την ερώτηση για τη δεύτερη εκτέλεση του πειράματος των ισοπίθανων ενδεχομένων με τις δύο δυνατές επιλογές,

κατάφεραν να λύσουν και την τριάδα των ερωτήσεων της προηγούμενης κουκίδας [((B4.6 EP2.2) ((EP1.1 EP2.1) EP4.1))].

- Ένα μεγάλο μέρος των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα από τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κατάφερε να λύσει τα προβλήματα B4.6 και EP2.2.1, καθώς και τις τριάδες των προβλημάτων EP1.1, EP2.1, EP4.1 και NEP1.1, NEP1.2.1, NEP2.1. Συμπιάνεται λοιπόν ότι η πρώτη δυάδα συνεπάγεται τη πρώτη τριάδα και τα 5 αυτά προβλήματα την τελευταία τριάδα προβλημάτων [(B4.6 EP2.2.1) ((EP1.1 EP2.1) EP4.1)) ((NEP1.1 NEP1.2.1) NEP2.1))].



Διάγραμμα 6.12: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Στη συνέχεια μερικές χρήσιμες και ενδιαφέρουσες συνεπαγωγές που προκύπτουν από την ανάλυση του παραπάνω διαγράμματος είναι:

- EP4.1 → B4.6 → D4.1

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στη τέταρτη ερώτηση των ισοπίθανων γεγονότων, έδωσαν σωστό ορισμό για τη φράση «πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας» και για το πείραμα τύχης.

- EP2.1 → EP1.1 → P1.3 → P1.1 → P1.6

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις πρώτες δύο ερωτήσεις για τα ισοπίθανα ενδεχόμενα, έχουν καλή αντίληψη της χρήσης των πιθανοτήτων στην καθημερινή ζωή.

- D4.4 → P1.8 → P1.4

Όσοι έδωσαν σωστό ορισμό για την έννοια του «ενδεχομένου», απάντησαν σωστά στην ερώτηση που χρησιμοποιεί τις πιθανότητες στη καθημερινή ζωή και αντιλήφθηκαν σωστά τη πιθανότητα με τη χρήση του ποσοστού.

- EP4.1 → EP1.1 → EP2.2.1 → B4.2 → P1.6

Τα παιδία που απάντησαν σωστά στην ερώτηση EP4.1 με τα ισοπίθανα ενδεχόμενα και την εικόνα στην εκφώνηση, απάντησαν σωστά και σε άλλες ερωτήσεις με ισοπίθανα ενδεχόμενα (EP1.1 και EP2.2.1), γνωρίζουν σε ποιες καθημερινές δραστηριότητες χρησιμοποιούνται συχνά οι πιθανότητες και έχουν σωστή αντίληψη για τις πιθανότητες και την πρόβλεψη.

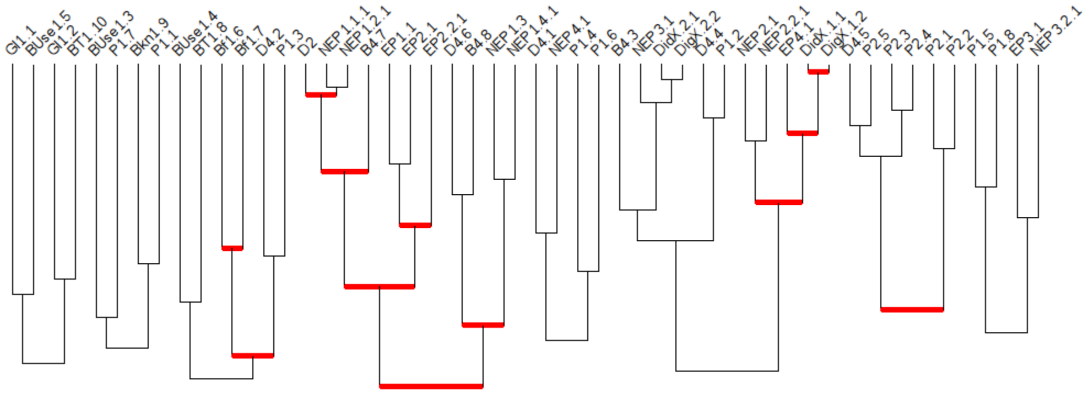
6.6.3 Τριτοβάθμια Εκπαίδευση

Το δείγμα της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης ήταν φανερά μικρότερο από τα αντίστοιχα των δύο προηγούμενων βαθμίδων και αυτό φαίνεται και στα παρακάτω αποτελέσματα. Να σημειωθεί εδώ, ότι η μεταβλητή NEP3.1 ήταν ο τροχός της τύχης, ενώ η NEP2.1 μια ερώτηση με δειγματικό χώρο δύο ζαριών. Η αλλαγή στη κωδικοποίηση προέκυψε, λόγο των περισσότερων μεταβλητών που χρειάστηκαν στη κωδικοποίηση του ερωτηματολογίου της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Πίνακας 6.25

Πίνακας ισχυρών συσχετίσεων ανάμεσα σε ασκήσεις και έργα της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης

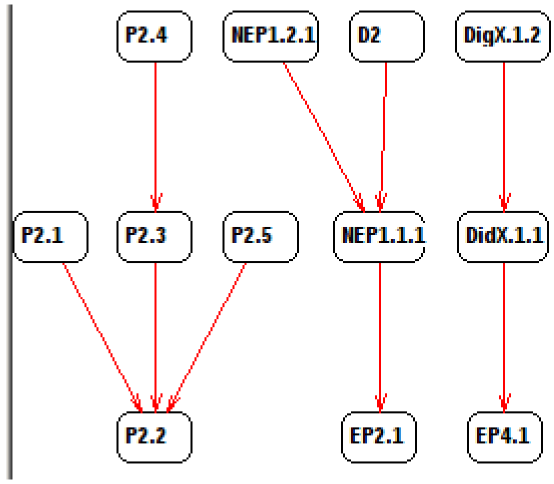
Επίπεδο	Πεποιθήσεις-Έργα	Ομοιότητα %
1	(DidX.1.1 DigX.1.2)	99,9992%
2	(DidX.2.1 DigX.2.2)	99,9992%
3	(NEP1.1.1 NEP1.2.1)	99,9983%
4	(D2 (NEP1.1.1 NEP1.2.1))	99,8985%
5	(NEP3.1 (DidX.2.1 DigX.2.2))	99,3109%
6	(P2.3 P2.4)	99,2388%



Διάγραμμα 6.13: Διάγραμμα Ομοιότητας για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης

- Όσοι απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα της πρώτης ερώτησης του δειγματικού χώρου με το ζάρι και το νόμισμα, απάντησαν και στο δεύτερο [(DidX.1.1 DigX.1.2)].
- Επίσης όσοι απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα της δεύτερης ερώτησης για το δειγματικό χώρο με την τράπουλα και το είδος των χαρτιών, απάντησαν και στο δεύτερο με το δειγματικό χώρο ως προς το χρώμα [(DidX.2.1 DigX.2.2)].
- Όσοι απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα της πρώτης άσκησης των μη ισοπίθανων ενδεχομένων με το μεροληπτικό ζάρι, απάντησαν και στο δεύτερο ερώτημα για τη δεύτερη ρίψη του ίδιου ζαριού [(NEP1.1.1 NEP1.2.1)].

- Οι ερωτώμενοι που έδωσαν έναν σωστό ορισμό για την πιθανότητα, απάντησαν και σωστά στις ερωτήσεις για τα αποτελέσματα της πρώτης και της δεύτερης ρίψης του μεροληπτικού ζαριού [(D2 (NEP1.1.1 NEP1.2.1))].
- Οι συμμετέχοντες της έρευνας που απάντησαν την ερώτηση για το αποτέλεσμα της πρώτης στροφής του τροχού, κατάφεραν να απαντήσουν σωστά και τις ερωτήσεις με την εναλλαγή του δειγματικού χώρου στο πρόβλημα με τη τράπουλα [(NEP3.1 (DidX.2.1 DigX.2.2))].
- Όλοι σχεδόν απάντησαν σωστά τις ερωτήσεις σχετικά με την πιθανότητα στη τέταρτη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού, που στις πρώτες τρεις ρίψεις έφερε έξι [(P2.3 P2.4)].



Διάγραμμα 6.14: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης

Και από το διάγραμμα διεξάγονται τα εξής:

- P2.4 → P2.3 → P2.2

Όσοι απάντησαν ότι η πιθανότητα να έρθει 6 στη ρίψη ενός ζαριού είναι 1/6, απάντησαν και ότι δεν είναι ¼ και ας γίνεται 4 φορές το πείραμα. Τέλος, κατέληξαν ότι η επόμενη ρίψη θα μπορούσε να ήταν και αυτή 6.

- NEP1.2.1 → NEP1.1.1 → EP2.1

Οι εκπαιδευτικοί και οι φοιτητές που ανταπεξήλθαν σωστά στις ερωτήσεις για τα μη ισοπίθανα ενδεχόμενα στη ρίψη ενός ζαριού με 4 κόκκινες πλευρές και 2 άσπρες, απάντησαν σωστά και στην ερώτηση των ισοπίθανων ενδεχομένων με τα δημητριακά και το δώρο.

- D2 → NEP1.1.1 → EP2.1

Όσοι έδωσαν έναν σωστό ορισμό στην έννοια της πιθανότητας, απάντησαν σωστά στη πρώτη ερώτηση για τα μη ισοπίθανα ενδεχόμενα και τη ρίψη του μεροληπτικού ζαριού και στη δεύτερη ερώτηση των ισοπίθανων ενδεχομένων και το πείραμα με τα δύο δυνατά αποτελέσματα.

- DigX.1.2 → DigX.1.1 → EP4.1

Οι ερωτώμενοι που απάντησαν σωστά και στα δύο ερωτήματα της ερώτησης με το δειγματικό χώρο που προκύπτει από τη ρίψη ενός ζαριού και ενός νομίσματος, απάντησαν σωστά και στην τέταρτη ερώτηση για τα ισοπίθανα ενδεχόμενα, που εμφανίζει τα δεδομένα της ερώτησης στην εικόνα.

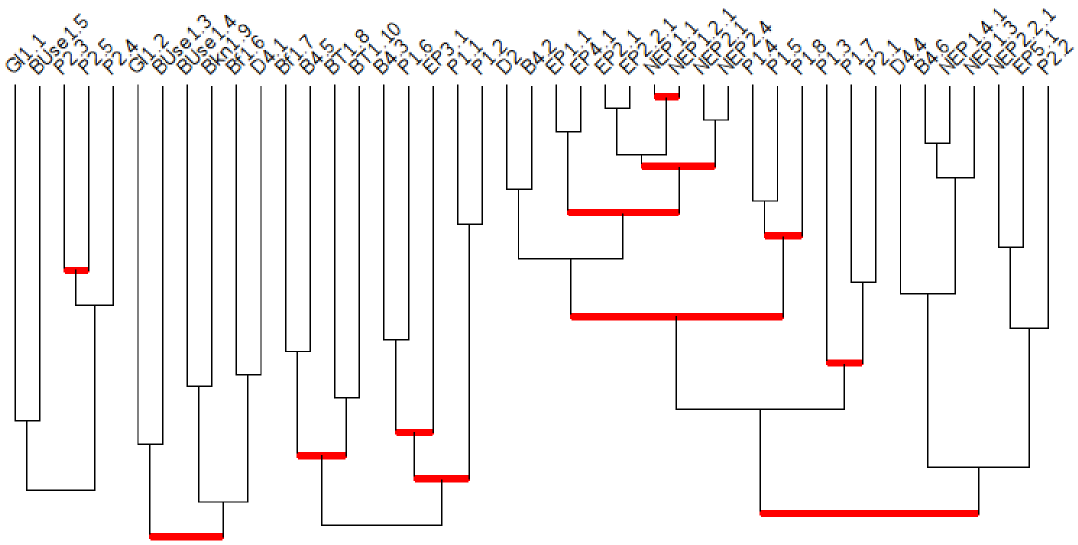
6.6.4 Παρέμβαση

Έχει ξανά αναφερθεί στη παρούσα εργασία, ότι οι μαθητές της εκπαιδευτικής παρέμβασης αποτελούνται από μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Βέβαια, τα αποτελέσματα της έρευνας που αναλύθηκαν παραπάνω έδειξαν εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Παρακάτω, εμφανίζονται τα αποτελέσματα της σενεπαγωγικής ανάλυσης του συγκεκριμένου δείγματος.

Πίνακας 6.26
Πίνακας ισχυρών συσχετίσεων ανάμεσα σε ασκήσεις και έργα των μαθητών της διδακτικής παρέμβασης

Επίπεδο	Πεποιθήσεις-Έργα	Ομοιότητα %
1	(NEP1.1 NEP1.2.1)	100%
2	(EP2.1 EP2.2.1)	99,9937%
3	(NEP2.1 NEP2.4)	99,9876%
4	(EP1.1 EP4.1)	99,9505%
5	(B4.6 NEP1.4.1)	99,9197%
[Συνέχεια]		

6	((EP2.1 EP2.2.1) (NEP1.1 NEP1.2.1))	99,845%
7	(((EP2.1 EP2.2.1) (NEP1.1 NEP1.2.1)) (NEP2.1 NEP2.4	99,6744%
8	((B4.6 NEP1.4.1) NEP1.3	99,5931%
9	(D2 B4.2)	99,509%
10	(P1.4 P1.5)	99,1837%
11	((EP1.1 EP4.1) (((EP2.1 EP2.2.1) (NEP1.1 NEP1.2.1)) (NEP2.1 NEP2.4)))	98,8407%



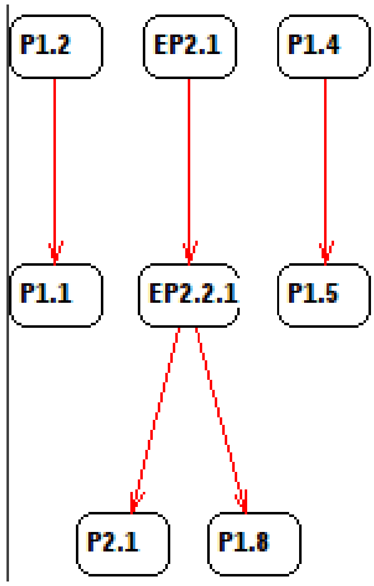
Διάγραμμα 6.15: Διάγραμμα Ομοιότητας για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της διδακτικής παρέμβασης

Παρατηρώντας τον πίνακα και το γράφημα σχολιάζονται μερικά αποτελέσματα που χρήζουν σημασίας.

- Όλοι απάντησαν στις ερωτήσεις για τη πρώτη και τη δεύτερη ρίψη του μεροληπτικού ζαριού [(NEP1.1 NEP1.2.1)].
- Όσοι έδωσαν μια σωστή εξήγηση της φράσης «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας», απάντησαν ότι σε ένα πείραμα με μη ισοπίθανα γεγονότα

μετά από πολλές εκτελέσεις του πειράματος τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα [(B4.6 NEP1.4.1)].

- Οι συμμετέχοντες που απάντησαν σωστά στην ερώτηση με τη πρώτη και δεύτερη επιλογή του κουτιού με τα δημητριακά και το δώρο, απάντησαν σωστά και για τις πρώτες δύο ρίψεις του μεροληπτικού κέρματος [((EP2.1 EP2.2.1) (NEP1.1 NEP1.2.1))].
- Όσοι απάντησαν σωστά στην ακολουθία της προηγούμενης κουκίδας, κατέληξαν να απαντήσουν επίσης σωστά και στις ερωτήσεις τόσο για το πρώτο, όσο και για το πιθανότερο πρώτο αποτέλεσμα του τροχού της τύχης [(((EP2.1 EP2.2.1) (NEP1.1 NEP1.2.1)) (NEP2.1 NEP2.4))].
- Τα παιδία που «μετέφρασαν» σωστά τη φράση «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας» και απάντησαν σωστά και την ερώτηση που υπέθετε ότι στις 16 ρίψεις του μεροληπτικού κέρματος τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα, απάντησαν και ποια θα είναι αυτά τα αποτελέσματα [((B4.6 NEP1.4.1) NEP1.3)].
- Οι μαθητές που έδωσαν ένα σωστό ορισμό για την πιθανότητα, γνωρίζουν και σε ποιες καθημερινές δραστηριότητες χρησιμοποιείται [(D2 B4.2)].



Διάγραμμα 6.16: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα για τα έργα και τις πεποιθήσεις των μαθητών της διδακτικής παρέμβασης

Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα των μαθητών της εκπαιδευτικής παρέμβασης προκύπτουν ότι:

- P1.2 → P1.1

Οι συμμετέχοντες που απάντησαν ότι πιθανότητα 70% να βρέχει σημαίνει ότι στις επόμενες 10 μέρες είναι πιθανό να βρέχει τις 7, απάντησαν επίσης ότι μπορεί το 70% να είναι πάνω από το μισό, αλλά δεν είναι σίγουρο ότι θα βρέχει.

- EP2.1 → EP2.2.1 → P1.8

Οι ερωτώμενοι που απάντησαν σωστά στην ερώτηση με το δώρο και το κουτί δημητριακών την πρώτη φορά, απάντησαν σωστά και στη δεύτερη εκτέλεση του ίδιου πειράματος και απάντησαν σωστά επίσης ότι ποσοστό 70% βροχή, σημαίνει ότι ή θα βρέξει ή και όχι, με μεγαλύτερη πιθανότητα όμως να βρέξει.

- EP2.1 → EP2.2.1 → P2.1

Ένα μεγάλο μέρος των ερωτώμενων που απάντησε σωστά τις πρώτες δύο ερωτήσεις της προηγούμενης κουκίδας, απάντησε και ότι σε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα δεν αποκλείεται να ξαναέρθει το ίδιο αποτέλεσμα με τις προηγούμενες εκτελέσεις.

- P1.4 → P1.5

Τέλος, όσοι απάντησαν ότι «70% πιθανότητα βροχής αύριο» σημαίνει ότι το ποσοστό να βρέξει είναι μεγαλύτερο από το να μη βρέξει, απάντησαν και ότι υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα βροχής την επόμενη μέρα.

6.7 Παρατηρήσεις πάνω στο ερωτηματολόγιο

Στο κεφάλαιο που αναλύεται η δομή του ερωτηματολογίου, αναφέρθηκε ότι υπήρχε μια τελευταία ερώτηση που στόχο είχε να μαζέψει τις απόψεις των μαθητών για το ερωτηματολόγιο και τις ερωτήσεις που δυσκόλεψαν τους ερωτώμενους. Οι περισσότεροι ερωτώμενοι και κυρίως τα παιδία των μικρότερων ηλικιών απάντησαν με ευχάριστη διάθεση και βοήθησαν τον ερευνητή να διεξάγει τα συμπεράσματα του.

Η συγκεκριμένη ερώτηση, αξίζει να αναφερθεί ότι βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τον ερευνητή να καθορίσει την αξιοπιστία τόσο ενός ολόκληρου ερωτηματολογίου, όσο και τμήμα του. Με άλλα λόγια ο ερευνητής έλεγχε περισσότερο και με μεγαλύτερη καχυποψία τις ερωτήσεις όπου ένας μαθητής δυσκολεύτηκε. Έτσι, αυτά τα δεδομένα έχουν χρησιμοποιηθεί για να διασφαλίσουν τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Λόγο της συγκεκριμένης ερώτησης, κάποια ερωτήματα που απαντήθηκαν από τους ερωτώμενους, θεωρήθηκαν άνευ σημασίας από τον ερευνητή, ή ακόμα και άκυρα. Τα ερωτήματα αυτά, δεν παρουσιάστηκαν καθόλου στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων και δεν κρίνονται άξια σχολιασμού.

Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί (όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει παρατηρώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω σε πίνακες), ότι κάθε ηλικιακή βαθμίδα δυσκολευόταν σε διαφορετικά προβλήματα. Λόγο αυτού, μπορεί κανείς να πει χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι δυσκολίες των ερωτήσεων ήταν υποκειμενικές για κάθε μαθητή. Κατά συνέπεια αυτού, τα δεδομένα της ερώτησης που αφορούν τη δυσκολία κάθε ερωτώμενου, δεν κρίνονται απαραίτητα να αναφερθούν στη συγκεκριμένη εργασία. Αυτό που χρήζει σημασίας και είναι άξιο αναφοράς σχετικά με τη παρουσία της ερώτησης αυτής στο ερωτηματολόγιο, είναι ο σχολιασμός του ερωτηματολογίου από τους μαθητές.

Με βάση το σχολιασμό αυτό, 10 ερωτηματολόγια από ολόκληρο το δείγμα κρίθηκαν ως άκυρα και 5 θεωρήθηκαν άκυρα από ένα σημείο και μετά. Ο λόγος είναι διότι τα παιδιά κυρίως της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όταν άρχιζαν να δυσκολεύουν οι ερωτήσεις απαντούσαν τυχαία και στο τέλος μίλησαν με ειρωνικά σχόλια για το ερωτηματολόγιο και την αξία των πιθανοτήτων. Βέβαια, να σημειωθεί ότι υπήρχαν αρκετά ερωτηματολόγια, όπου οι συμμετέχοντες ευχαρίστησαν τον ερευνητή και θεώρησαν το ερωτηματολόγιο ξεκούραστο και ευχάριστο.

Περίπου 10 μαθητές από Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, χαρακτήρισαν το ερωτηματολόγιο ως «εύκολο», ενώ 14 μαθητές ως «δύσκολο». Οι ερωτώμενοι που το χαρακτήρισαν δύσκολο, ήταν κυρίως μαθητές της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και όπως πολλοί ανέφεραν, δυσκολεύτηκαν σε ασκήσεις που ήθελαν χρήση ποσοστών ή παρουσιαζόντουσαν με πιο σύνθετο λεξιλόγιο.

Τέλος, να σημειωθεί ότι, ορισμένοι εκπαιδευτικοί είτε γιατί δυσκολεύτηκαν να ανταπεξέλθουν στο ερωτηματολόγιο τους, είτε γιατί δεν θέλησαν να συνεργαστούν με τον ερευνητή, δεν θεώρησαν απαραίτητο το ερωτηματολόγιο να μοιραστεί στους μαθητές. Κάποια από τα ερωτηματολόγια αυτά, λήφθηκαν πίσω κενά ή με τη σημείωση «Δεν τα συμπληρώνουμε γιατί δεν διδάσκουμε πιθανότητες».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο}: ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια συζήτηση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Τα αποτελέσματα τέτοιων ερευνών, είναι καλό να λαμβάνονται υπόψιν κατά το σχεδιασμό της ύλης και των σχολικών προγραμμάτων σπουδών, καθώς συνάδουν στη βελτίωση της ποιότητας και της αποδοτικότητας του μαθήματος. Έτσι, το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται όχι μόνο το σχολιασμό των αποτελεσμάτων της έρευνας, αλλά και τις εκπαιδευτικές συνέπιες που προκύπτουν από τα αποτελέσματα αυτά.

7.1 Αποτελέσματα Έρευνας

Αρχικά, για διευκόλυνση του αναγνώστη, ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν σε προγενέστερο κεφάλαιο της συγκεκριμένης εργασίας. Τα ερωτήματα αυτά κατά την πλειοψηφία τους, επιβεβαιώθηκαν από τα αποτελέσματα της έρευνας, όπως επίσης συνάδουν και με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών που παρουσιάστηκαν στο πρώτο μέρος αυτής της μελέτης.

Η πρώτη υπόθεση του ερευνητή, πραγματευόταν τις επιδώσεις των μαθητών μεγαλύτερης ηλικίας, όπου φαντάζουν φανερά καλύτερες από τις μικρότερες ηλικίες λόγο των γνώσεων και των εμπειριών τους. Η ανεπτυγμένη αντίληψη των μεγαλύτερων ερωτώμενων, ξεχώρισε όχι μόνο στις σωστές απαντήσεις, αλλά και στις προσπάθειες αιτιολόγησης των συγκεκριμένων απαντήσεων. Σε πολλές ερωτήσεις, φάνηκε ότι η αντίληψη των μαθητών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με αυτές της Τριτοβάθμιας, όπως ακριβώς είχαν αποδείξει με την έρευνα τους οι Langrall και Mooney το 2015. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτού, είναι τα αποτελέσματα των ερωτήσεων με τα ισοπίθανα ενδεχόμενα. Στο παράδειγμα με τη ρίψη του νομίσματος, οι μεγαλύτεροι σε ηλικία μαθητές έδωσαν μια πιο σωστή αιτιολόγηση, ακόμα και αν δεν έκαναν χρήση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας ή της έννοιας των ισοπίθανων ενδεχομένων. Από την άλλη μεριά, οι μικροί μαθητές απάντησαν περισσότερο διαισθητικά, αφού αρκετοί απάντησαν ότι η ρίψη είναι δίκαιη εφόσον το συμφώνησαν και οι δύο παίχτες. Ακόμα στις ερωτήσεις με τα σακούλια και τις μπάλες, υπήρχε η πεποίθηση στις νεαρές ηλικίες, ότι περισσότερες μπάλες σημαίνει μεγαλύτερη πιθανότητα, ενώ η Τριτοβάθμια και η Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, είχαν σαφώς καλύτερα ποσοστά απάντησης και αιτιολόγησης.

Η δεύτερη υπόθεση αφορά τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Όπως είχε υποτεθεί, όλες οι ηλικίες θα θεωρούσαν τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία ως θετική. Η συγκεκριμένη υπόθεση ήρθε να επιβεβαιωθεί από τα αποτελέσματα της έρευνας, καθώς όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, πολύ μεγάλα ήταν τα ποσοστά που οι ερωτώμενοι θα ήθελαν την ένταξη της χρήσης της τεχνολογίας στην εκπαίδευση.

Η επόμενη ερευνητική υπόθεση, αφορούσε τους ερωτώμενους που δεν μπορούν να δώσουν ένα σωστό ορισμό στην έννοια «πιθανότητα». Η πεποίθηση του συγγραφέα, υποστηρίζει ότι μια λάθος αντίληψη της έννοιας, δεν συνεπάγετε και τη λάθος χρήση της έννοιας αυτής στις ερωτήσεις – έργα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα ποσοστά των εκπαιδευτικών βαθμίδων που ήταν σε θέση να δώσουν έναν σωστό ή έστω έναν σχετικά σωστό ορισμό για την έννοια ήταν πολύ μικρά. Χαρακτηριστικά να αναφερθεί ότι μόνο το 9,47% του συνολικού δείγματος κατάφερε να δώσει σωστό ορισμό. Ωστόσο, υπήρχαν ερωτήσεις με αρκετά μεγάλα ποσοστά επιτυχίας. Λόγου χάρη, στις ερωτήσεις για τη χρήση της έννοιας σε καθημερινές εκφράσεις τα ποσοστά επιτυχίας όλων των βαθμίδων ήταν πολύ μεγάλα. Επίσης, η συνεπαγωγική ανάλυση επιβεβαίωσε τη παραπάνω άποψη, αφού δεν υπήρξε καμία ισχυρή συνεπαγωγή εναντίον της.

Μία μόνο υπόθεση απορρίφθηκε, αφού δεν επιβεβαιώθηκε η αίσθηση του ερευνητή ότι όσοι γνωρίζουν τον κλασικό ορισμό πιθανότητας θα απέφευγαν και τις διαισθητικές απαντήσεις. Αντιθέτως μάλιστα, πολλοί ήταν αυτοί που παρόλο τις γνώσεις τους περί πιθανοτήτων, αιτιολόγησαν ή απάντησαν κάποιες ερωτήσεις εμπειρικά και διαισθητικά. Στο ερωτηματολόγιο για παράδειγμα υπήρχε μια ερώτηση σχετικά με το δώρο που θα μπορούσε να υπάρχει σε ένα κουτί δημητριακών. Η τυχαία επιλογή του δώρου που βρισκόταν σε κάθε κουτί ήταν μεταξύ ενός αυτοκόλλητου ή μιας κάρτας. Τα αποτελέσματα της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη συγκεκριμένη ερώτηση (όπου οι ερωτώμενοι έχουν διδαχτεί τον κλασικό ορισμό πιθανότητας τουλάχιστον τρεις φορές μέχρι να φτάσουν στη κατάσταση φοίτησης στο πανεπιστήμιο), δίνουν 64,6% στη σωστή απάντηση, αλλά μόνο το 30,8% αιτιολογεί σωστά. Αυτή η διαφορά γεννάει πολλά ερωτήματα σχετικά με τη γνώση και τη διαισθητική αντίληψη των ερωτώμενων.

Μια γενική παρατήρηση στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που αφορά ολόκληρο το δείγμα, είναι ότι οι ερωτώμενοι απάντησαν σωστά σε πολλές από τις ερωτήσεις, ωστόσο, αρκετές από τις απαντήσεις τους ήταν διαισθητικές ή εμπειρικές. Τα δεδομένα αυτά, έρχονται να επιβεβαιώσουν την έρευνα του Albert το 2003, όπου είχε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές απαντάνε σωστά στις ερωτήσεις κλασικής πιθανότητας, αλλά αποφεύγουν να δώσουν την πιθανή αιτιολόγηση τους. Το συμπέρασμα αυτό στη παρούσα μελέτη, διεξάγεται από τις αιτιολογήσεις που έδωσαν οι ερωτώμενοι στις ασκήσεις του ερωτηματολογίου, όπως επίσης και από τα λάθη που έκαναν σε κάποιες εύκολες ερωτήσεις. Με μια γρήγορη ματιά στους πίνακες που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 6, θα καταλάβει κανείς τη διαφορά των σωστών απαντήσεων και των σωστών αιτιολογήσεων, με τις πρώτες να εμφανίζουν σε πολλές ερωτήσεις κατά πολύ μεγαλύτερο ποσοστό.

Βέβαια, από την άλλη πλευρά, να σημειωθεί ότι δεν έλειψαν και ερωτήματα με σωστή αιτιολόγηση, αλλά λάθος απάντηση. Προς ενίσχυση των παραπάνω έρχεται το παράδειγμα της ερώτησης με το μεροληπτικό ζάρι, όπου είχε 4 κόκκινες πλευρές και 2 άσπρες. Όλες οι εκπαιδευτικές βαθμίδες δίχως εξαίρεση, όσο και τα παιδιά της εκπαιδευτικής παρέμβασης, φανερώνουν μεγαλύτερα ποσοστά στη σωστή αιτιολόγηση από ότι στη σωστή απάντηση. Μια πιθανή εξήγηση του φαινομένου αυτού στη συγκεκριμένη άσκηση, έρχεται να δοθεί από τις αιτιολογήσεις αρκετών μικρών μαθητών, όπου παρόλη τη σωστή τους σκέψη, θεωρούν ότι δεν γίνεται να έρθει δύο συνεχόμενες φορές το ίδιο χρώμα και έτσι αλλάζουν την επιλογή τους. Δεν είναι λίγοι μάλιστα αυτοί που σημείωσαν ότι την πρώτη φορά δεν μπορούν να προβλέψουν τι χρώμα θα έρθει, αλλά τη δεύτερη φορά θα έρθει το χρώμα που δεν ήρθε στην πρώτη. Φυσικά όμως, δεν έλλειψε και το αξιοσημείωτο ποσοστό όπου κατανοεί ότι υπάρχει διαφορά στην πιθανότητα να έρθει «Κόκκινο» ή «Άσπρο» δεδομένου ότι οι κόκκινες πλευρές είναι περισσότερες, ωστόσο αδυνατεί να εξηγήσει τον λόγο χωρίς τη χρήση των διαισθήσεων.

Στη συνέχεια, αξίζει να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στα θετικά ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών της εκπαιδευτικής παρέμβασης. Οι ηλικίες των μαθητών αυτών, κυμαίνονται από 8 έως 12 ετών, και όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στους πίνακες των αποτελεσμάτων τα ποσοστά είναι σαφώς υψηλότερα από τα αντίστοιχα της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Γεγονός που αποδεικνύει ότι οι μαθητές είναι σε θέση από αρκετά μικρή ηλικία να κατανοήσουν την έννοια της «Πιθανότητας». Αυτό αντικρούει την έρευνα των Piaget και Inhelder, όπου το 1951 υποστήριξαν ότι ένας μαθητής αντιλαμβάνεται την έννοια της πιθανότητα στην ηλικία των 12 ετών και ενισχύει τις έρευνες του Konold το 2002.

Οι Garfield και Ahlgren το 1988 στις έρευνες τους απέδειξαν, ότι μετά από αρκετές επαναλήψεις του πειράματος και συνεχείς εμφανίσεις του ίδιου αποτελέσματος, δημιουργείται στα παιδιά ένα αίσθημα εμπιστοσύνης. Η παρούσα μελέτη από την άλλη, απέδειξε πως για όλο αυτό το ευρύ φάσμα ηλικιών που χρησιμοποίησε δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Λόγου χάρη, στην ερώτηση με το αμερόληπτο ζάρι, όπου μετά από έξι συνεχόμενες φορές που ήρθε 6, η πλειοψηφία των ερωτώμενων κάθε βαθμίδας απάντησε σωστά για το αποτέλεσμα της έβδομης ρίψης, χωρίς να επηρεαστεί από τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Να σημειωθεί όμως ότι, στην ίδια έρευνα των Garfield και Ahlgren, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πολύ μαθητές δεν κατανόησαν πλήρως την εκφώνηση. Το γεγονός αυτό, έρχεται να το επιβεβαιώσει και η συγκεκριμένη μελέτη, αφού πολλοί μαθητές οδηγήθηκαν σε παρερμηνείες για κάποια ερωτήματα. Αρκετοί, σχολίασαν στην τελευταία ερώτηση τα ερωτήματα που τους δυσκόλεψαν και έγγραψαν τις ασκήσεις που τους φάνηκαν δυσνόητες. Φυσικά, αυτό έρχονται να το βεβαιώσουν και παραδείγματα μέσα από τις απαντήσεις των ερωτηματολογίων. Για παράδειγμα, κάποιοι συμμετέχοντες δεν κατάλαβαν ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τις εικόνες στη λύση των ασκήσεων ή δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ ερωτήσεων όπως «Πιο είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης;» και «Πιο είναι το πιθανότερο αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης;».

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα που στιγμάτισε τη συγκεκριμένη έρευνα, είναι η αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος από διαφορετικές ηλικίες. Πολλές από τις απαντήσεις «μικρών» και «μεγάλων» είναι πολλές φορές όχι μόνο συγκρίσιμες, αλλά υπήρχαν περιπτώσεις που τα παιδιά της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης απαντούσαν καλύτερα από ότι παιδιά της Δευτεροβάθμιας. Να σημειωθεί ακόμα, ότι μερικές φορές η απλοϊκή σκέψη των μικρών παιδιών, έδινε ποιοτικά καλύτερες αιτιολογήσεις ακόμα και από τους φοιτητές και τους εκπαιδευτικούς.

Τα προβλήματα στο ερωτηματολόγιο φάνηκαν κυρίως στις ερωτήσεις με τα ισοπίθανα και μη ισοπίθανα ενδεχόμενα. Όπως και στην έρευνα του Albert το 2003, έτσι και εδώ εμφανίστηκαν αρκετά προβλήματα τόσο στην κατανόηση της ερώτησης, όσο και στην ευχέρεια της αιτιολόγησης. Στην ερώτηση με το κουτί των δημητριακών για παράδειγμα, οι πλειοψηφία των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας δεν απάντησε σωστά. Υπήρξαν βέβαια ενδιαφέρουσες απαντήσεις από πλευράς κυρίως των μικρών μαθητών, οι οποίες αναφέρονται για εκπαιδευτικό σκοπό. Παραδείγματος χάριν, πολλοί θεωρούσαν ότι τα μισά κουτιά θα έπρεπε να έχουν κάρτες και τα άλλα μισά θα έπρεπε να έχουν αυτοκόλλητα. Άλλοι πάλι θεωρούσαν ότι όλα τα κουτιά θα έχουν αυτοκόλλητα διότι είναι το φθηνότερο υλικό και απλά η εταιρία ψεύδεται για να πουλήσει περισσότερο. Επίσης, υπήρχαν και αυτοί που πίστευαν ότι οι υπάλληλοι ήξεραν το περιεχόμενο κάθε κουτιού και τα τοποθετούσαν στα ράφια με ένα συγκεκριμένο μοτίβο.

Άλλα αποτελέσματα που χρίζουν αναφοράς είναι, για παράδειγμα στην άσκηση με τον τροχό της τύχης, όπου πολλοί θεώρησαν πως αν ελέγξουν τη δύναμη που τον γυρίζουν, θα προβλέψουν και το αποτέλεσμα. Επίσης, οι απαντήσεις που έδωσαν για την έκφραση «Πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας» ή στον ορισμό του πειράματος τύχης, ακόμα και αν στη πλειοψηφία τους είναι σωστές, οι λανθασμένες (όπου αποτελούν ένα αρκετά σημαντικό ποσοστό του δείγματος) φανερώνουν μια σύγχυση της «Πιθανότητας» με την πρόβλεψη. Έτσι όπως είχε αποδείξει και ο Watson στην έρευνα του το 2005 και ο Konold το 2002.

Στις ερωτήσεις που απευθύνθηκαν μόνο στη Τριτοβάθμια εκπαίδευση και ζητούσαν την εύρεση του δειγματικού χώρου, η λύση τους επιζητάει πιο εξειδικευμένες γνώσεις πιθανοτήτων. Τα αποτελέσματα όμως έδειξαν ότι οι φοιτητές και οι δάσκαλοι στερούνται αυτών των γνώσεων. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων, κινήθηκαν πολύ χαμηλά και εξαρτιόντουσαν άμεσα από το ζητούμενο της εκφώνησης. Για παράδειγμα, αρκετοί ερωτώμενοι βρήκαν τον Δειγματικό χώρο όταν ζητούσε το χρώμα των καρτών μιας τράπουλας, αλλά δεν μπόρεσαν να ανταποκριθούν στον ίδιο βαθμό όταν ζητήθηκε ο Δειγματικός χώρος ως προς το είδος του σχήματος.

Τελειώνοντας, να σχολιαστούν οι όμοιες ερωτήσεις, όπου άλλαζε ο τρόπος εκφώνησης στη παρουσίαση των δεδομένων. Τα αποτελέσματα με μικρό ποσοστό διαφοράς βέβαια, έδειξαν ότι η παρουσία της εικόνας δεν βοήθησε τους μαθητές. Μόνο στη Τριτοβάθμια εκπαίδευση και στις ερωτήσεις των ισοπίθανων ενδεχομένων, εμφανίζεται μια μικρή βελτίωση στις απαντήσεις με την παρουσία της εικόνας.

Πολύ σημαντικό εύρημα της εργασίας είναι, ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται την έννοια της πιθανότητας από μικρή ηλικία, περίπου 8 ετών, όπου ήταν και η μικρότερη ηλικία που χορηγήθηκε το ερωτηματολόγιο. Βέβαια, μεγαλώνοντας και κερδίζοντας περισσότερες εμπειρίες και σε άλλους τομείς των μαθηματικών τα παιδιά ανταπεξέρχονται συνεχώς καλύτερα. Λόγου χάρη, στις ερωτήσεις που περιείχαν ποσοστά, τα παιδιά του Δημοτικού δυσκολεύτηκαν, σε αντίθεση με τους μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου. Έτσι, μπορεί να διεξαχθεί ασφαλώς το συμπέρασμα ότι ανάλογα με την ηλικία ωριμάζει η αντίληψη των παιδιών, ωστόσο πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν ότι αναλογικά αυξάνονται και οι γνώσεις τους, οι οποίες επηρεάζουν τις απαντήσεις των ερωτήσεων.

7.2 Απόρροια της Έρευνας στην Εκπαίδευση και Προτάσεις Παρέμβασης

Τα δεδομένα που προέκυψαν από την έρευνα, φανερώνουν προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι ερωτώμενοι κατά τη χρήση εννοιών των πιθανοτήτων. Όπως προκύπτει από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, τα εν λόγο προβλήματα, είναι ανάλογα με την ηλικία των συμμετεχόντων. Η ελλιπής γνώση, η σύγχυση εννοιών, καθώς και η επιρροή τους από τις διαισθητικές τους αντιλήψεις, είναι μερικά από αυτά. Επίσης, μέσα από την ενασχόληση τους με τα έργα που παρατέθηκαν στο ερωτηματολόγιο, προέκυψαν δυσκολίες στη κατανόηση των ασκήσεων και στη μαθηματικοποίηση των προβλημάτων.

Η χρήση της παρούσας μελέτης στην εκπαίδευση θα μπορούσε να αξιοποιηθεί τόσο από έναν εκπαιδευτικό, όσο και για τη βελτιστοποίηση της δομής του σχολικού προγράμματος σπουδών. Ο εκπαιδευτικός, μπορεί να χρησιμοποιήσει τις αντιλήψεις και τις δυσκολίες των μαθητών κάθε ηλικιακής ομάδας, ώστε να μπορέσει να συνθέσει ένα κατάλληλο σχέδιο διδασκαλίας. Αυτό είναι απαραίτητο, αφού όπως έχει προαναφερθεί, για να επιτευχθεί η μάθηση, πρέπει η νέα έννοια να δομηθεί πάνω στις υπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών, για να αποφευχθούν οι συγχίσεις και οι παρανοήσεις.

Το γεγονός ότι οι περισσότερες απαντήσεις του ερωτηματολογίου ήταν διαισθητικές, ανεξάρτητα από την ηλικία και τις γνώσεις των ερωτώμενων, επιβάλλει τη μελέτη ερευνών, όπως η δεδομένη, πριν τη διδασκαλία των πιθανοτήτων. Ακόμα, η άποψη των μαθητών ότι θα ήθελαν να χρησιμοποιείται περισσότερο η τεχνολογία κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, είναι ένα ακόμα κομμάτι που ένας εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει υπόψιν κατά το σχεδιασμό του μαθήματος.

Επιπροσθέτως, η δυσκολία των μαθητών στη κατανόηση της ερώτησης, στη μαθηματικοποίηση ενός προβλήματος, ακόμα και στη σωστή και αυστηρά δομημένη αιτιολόγηση, απαλλαγμένη από εμπειρίες και διαισθητικές αντιλήψεις, είναι ένα φαινόμενο που χρίζει υψίστης σημασίας στη διδακτική των μαθηματικών. Τόσο τα σχολικά εγχειρίδια, όσο και ο εκάστοτε εκπαιδευτικός, πρέπει να δίνουν περισσότερο χρόνο και προσοχή σε τέτοια ενδεχόμενα. Η μαθηματική σκέψη καλλιεργείτε από μικρή ηλικία και έτσι η σωστή μαθησιακή ανάπτυξη των παιδιών είναι πολύ σημαντική για την αποφυγή τέτοιων φαινομένων.

Τέλος, σχετικά με το σχεδιασμό των σχολικών προγραμμάτων και της ύλης, θα έπρεπε να συνυπολογιστεί το γεγονός ότι τα παιδιά είναι σε θέση να κατανοήσουν την έννοια «πιθανότητα» από μικρή ηλικία. Βέβαια, όπως η έρευνα έδειξε, υπάρχουν έννοιες δύσκολα κατανοητές για τους μικρούς μαθητές και απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή και ειδική μεταχείριση από τον εκπαιδευτικό. Έννοιες όπως «ισοπίθανα ενδεχόμενα», «δειγματικός χώρος», «δυνατά αποτελέσματα του πειράματος» κ.α., θα πρέπει να διδάσκονται στην κατάλληλη ηλικία και με περισσότερο στοχευμένες ασκήσεις και παραδείγματα για να επιτευχθεί η μάθηση. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει, αφού στα διάφορα ήδη όμοιων ασκήσεων που οι συμμετέχοντες αντιμετώπισαν, υπήρξαν διαφορετικές διαδικασίες σκέψης και επίλυσης.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της εργασίας λοιπόν, αυτό που σίγουρα θα μείνει στον αναγνώστη είναι η χρησιμότητα και η σημαντικότητα των πιθανοτήτων στην καθημερινή ζωή. Ένας κλάδος των μαθηματικών ο οποίος γνώρισε την άνθηση λόγω της ενασχόλησης των ανθρώπων με τα τυχερά παιχνίδια. Ασφαλές θα ήταν το συμπέρασμα, ότι οι πιθανότητες είναι ένας από τους πιο ευρέως χρησιμοποιούμενους κλάδους των μαθηματικών στη καθημερινή ζωή.

Αυτό που έκανε εντύπωση όμως, είναι ότι δεν διδάσκεται στις μικρές ηλικίες. Γεγονός που όπως απέδειξε η συγκεκριμένη μελέτη, θα μπορούσε στους μικρούς μαθητές να είχε εξαιρετική απήχηση και επιτυχία. Μάλιστα, με την κατάλληλη διδασκαλία, σε βαθμό συγκρίσιμο με τη Δευτεροβάθμια και τη Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Όπως διαπιστώνει κανείς, στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, σε πολλές περιπτώσεις οι νεαρές ηλικίες ανταπεξήλθαν πολύ καλά. Φυσικά, υπήρχαν και κάποια προβλήματα όπως ήταν αναμενόμενο, ωστόσο με τη κατάλληλη διδακτική παρέμβαση και καθοδήγηση, τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν πλήρως αρκετές πιθανοτικές έννοιες.

Η διδακτική παρέμβαση για μια έννοια όμως, δεν είναι απλή υπόθεση. Στο θεωρητικό κομμάτι της παρούσας εργασίας, τονίστηκε ιδιαίτερα η σημαντικότητα της ανίχνευσης των αντιλήψεων των μαθητών και η δόμηση της νέας έννοιας πάνω στην υπάρχουσα αντίληψη. Αυτό πρέπει να γίνει, αφού συχνό φαινόμενο κατά την ανάλυση της έρευνας, ήταν οι διαισθητικές απαντήσεις. Η απάντηση σε μια ερώτηση που δεν συνοδευόταν από την κατάλληλη αιτιολόγηση, ήταν σε μεγάλο βαθμό επηρεασμένη από τη διαίσθηση του μαθητή. Με άλλα λόγια, οι αισθήσεις πολλές φορές δίνουν μια φαινομενικά σωστή απάντηση στην άσκηση, αλλά απέχει πολύ από την πραγματική λύση. Αυτό συμβαίνει, επειδή συχνά απομακρύνουν κάποιον από τον πραγματικό ορισμό μιας έννοιας. Έτσι, ας αναφερθεί για ακόμα μια φορά, ότι η σημαντικότητα διερεύνησης των αντιλήψεων των μαθητών κρίνεται όχι απλά χρήσιμη, αλλά απαραίτητη.

Κάτι ακόμα που αξίζει να σημειωθεί στη συγκεκριμένη εργασία, είναι η άποψή των μαθητών για τη βελτίωση της διδασκαλίας. Ξεκάθαρα οι μαθητές υποστηρίζουν ότι θα ήθελαν η τεχνολογία να λαμβάνει μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αυτό, είναι μια προτροπή για τους εκπαιδευτικούς να την εντάξουν.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθούν κάποιες προτάσεις που διεξάγονται άμεσα ή έμμεσα με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας και στόχο έχουν να βελτιστοποιήσουν τις αντιλήψεις και τις γνώσεις των μαθητών.

Προς τους εκπαιδευτικούς:

- Οι νέες έννοιες που διδάσκουν να βασίζονται πάνω στις υπάρχουσες αντιλήψεις.
- Να οργανώνουν το μάθημα λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες, αλλά και την άποψη των μαθητών (π.χ. για τη χρήση της τεχνολογίας).
- Οι ασκήσεις να είναι στοχευμένες και να ξεκαθαρίζεται πλήρως η έννοια που διδάσκεται, έτσι ώστε να μη δημιουργείται σύγχυση.
- Να χρησιμοποιούν πολλαπλά παραδείγματα για να μάθουν οι μαθητές να ανταπεξέρχονται σε αλλαγές των καταστάσεων της εκφώνησης.
- Να είναι όσο το δυνατόν καλύτερα προετοιμασμένοι και καταρτισμένοι στις έννοιες των πιθανοτήτων που πρόκειται να διδάξουν.
- Να εφαρμόζουν πειράματα τύχης και να εξηγούν παράλληλα τις έννοιες για να είναι πιο κατανοητές.
- Να χρησιμοποιούν διάφορα λογισμικά που κυκλοφορούν, τόσο για τη παρουσίαση των αποτελεσμάτων, όσο και για να έχουν το πλεονέκτημα να εκτελέσουν πολλές επαναλήψεις του πειράματος.

Προς τη Πολιτεία:

- Να βελτιώσει τα σχολικά εγχειρίδια και τις ασκήσεις τις οποίες πραγματεύονται.
- Να μην παραμελεί τις «Πιθανότητες» στη σχολική ύλη.
- Να καταρτίσει καλύτερα τους εκπαιδευτικούς στα ζητήματα των πιθανοτήτων.
- Να διδάσκονται κάποιες πιθανοτικές έννοιες σε μικρότερη ηλικία.
- Να αναπτύξει λογισμικά και βίντεο με προβλήματα πιθανοτήτων και πειράματα τύχης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ. & Σβέρκος, Α. (2016). *Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής: Γ΄ Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ.,Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Α. & Δαμιανού, Χ. (2017). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων: Α΄ Γενικού Λυκείου.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2013). *Μαθηματικά Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Albert, J. (2003). Teacher's Corner: College Students' Conceptions of Probability. *The American Statistician*, Vol. 57, No. 1, 37-45.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2012). *Μαθηματικά Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Βουγιουκλής, Θ. & Δραμαλίδης, Α. (2010). *Εισαγωγή σε βασικές Μαθηματικές Έννοιες: μια πρώτη προσέγγιση.* Ξάνθη: Εκδόσεις Σπανίδη.

Batanero C., Chernoff E., Engel J, Lee H. & Sanchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. *Topical Surveys ICME-13*

Borovcnik, M. & Kapadia, R. (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. In E.J. Chernoff and B. Sriraman (eds.) *Probabilistic Thinking, Advances in Mathematics Education*, Dordrecht: Springer.

Γαγάτσης, Α. & Μάρκου, Α. (2001). Η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση ως ένα αποτελεσματικό εργαλείο εκπαιδευτικής έρευνας. http://www.pee.gr/wp-content/uploads/praktika_synedrion_files/e19_11_03/sin_ath/mer_g_th_en_i/gagatsis.htm: Τελευταία ανάκτηση την 15/6/2018

Γαλουζή, Γ. (2017). *Νευροεπιστήμες και Μαθηματική Εκπαίδευση: Μια προσέγγιση για την εμπλοκή των νευροεπιστημών σε τομείς εκμάθησης των μαθηματικών. Η περίπτωση της συμβολής των νευροεπιστημών στην ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών μέσα από το σύγχρονο εκπαιδευτικό λογισμικό, ο ρόλος των χειρονομιών και ανάδειξη της ανάγκης επανεισαγωγής της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.* (Μεταπτυχιακή Διατριβή). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

David, M. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.

Dawson, C. (2007). *A practical guide to research methods*. Oxford: How To Books.

Dimopoulos, K., Koulaidis, V., & Sklaveniti, S. (2003). Towards an Analysis of Visual Images in School Science Textbooks and Press Articles about Science and Technology. *Research in Science Education*, 33(2), 189-216.

English, L. (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997) . The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 96–105.

Future School. Countries Curriculum. Ημερομηνία ανάκτησης 15-6-2018, από https://www.futureschool.com/countries/

Gallistel, C., Krishan, M., Liu, Y., Miller, R. & Latham, P. (2014). The Perception of Probability. *Psychological Review, American Psychological Association*, Vol. 121, No. 1, 96–123

Gao, W. (2014). The chinese new mathematics Curriculum reform at two Elementary schools: two cases Compared. Dissertations - ALL. Paper 108.

Garfield, J & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19, No. 1, 44-63

Ginsburg, A., Leinwand, S. & Decker, K. (2009). Informing Grades 1–6 Mathematics Standards Development: What Can Be Learned From High-Performing Hong Kong, Korea, and Singapore?. (Prepared for Human Resource Development Working Group Asian Pacific Economic Cooperation). Washigton: American Institutes for Research.

Gras, R. (1995). Ανάλυση ενός ερωτηματολογίου με τη Συνεπαγωγική Μέθοδο. Στου A. Γαγάτση (Εκδ.) *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (σσ. 97-109). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

Gras, R. & Kuntz, P. (2008). An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development. *Studies in Computational Intelligence (SCI)*, 127, 11 – 40.

Gurría, A. (2018). *PISA 2015 Results in Focus.* OECD.

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας: Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση.* Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Καζαντζής, Π. (2007). *PISA: Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών.* Αθήνα: ΕΠΤΑΛΟΦΟΣ Α.Β.Ε.Ε.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου, Γ. (2013). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Κασσιώτη, Ό., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2013). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού.* Αθήνα: ΙΤΥΕ-Διόφαντος.

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης (2013). TIMSS CYPRUS 2015. Ημερομηνία ανάκτησης 13-10-2017, από http://www.pi.ac.cy/keea/timss2015/material.html

Κοντογιάννης, Γ. & Τουμπής, Σ. (2015). *Στοιχεία Πιθανοτήτων: Με εφαρμογές στη στατιστική και την πληροφορική.* Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

Κουνιάς, Σ. & Μωυσιάδης, Χ. (1995). *Θεωρία Πιθανοτήτων 1: Κλασική Πιθανότητα, Μονοδιάστατες Κατανομές.* Αθήνα, Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Ζήτη.

Κούτρας Μ. (2006). *Εισαγωγή στη Συνδυαστική.* Αθήνα, εκδόσεις Α. Σταμούλης.

Κυριαζής, Α., Ψυχάρης, Σ. & Κορρές, Κ. (2012). *Η Διδασκαλεία και η Μάθηση των Θετικών Επιστημών με τη Βοήθεια του Υπολογιστή. Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση.* Αθήνα, εδόσεις Παπαζήση.

Kloosterman, P. & Stage, F. (1992). Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics*. Academic Research Library, pp. 109.

Konold, C. (2002). Understanding students' Beliefs about probability. In E. Von Glasersfeld (eds.) *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Krathwohl, D. (2002). A revision of bloom's taxonomy: An overview. *Theory into Practice*, Vol. 41, No. 4, 212-218.

Kyung Mee, P. (1997). School Mathematics Curriculum in Korea. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education* Vol. 1, No. 1, 43–59

Langrall, C., & Mooney, E. (2015). Characteristics of Elementary School Students' Probabilistic Reasoning. *Mathematics Education Library*, 40, 95-119.

Lightner J. (1991). A Brief Look at the History of Probability and Statistics. *The Mathematics Teacher*, Vol. 84, No. 8, pp 623-630.

Mullis, I., Martin, M., Foy, P. & Hooper, M. (2015). TIMSS 2015 International Results in Mathematics. *IEA TIMSS & PIRLS International Study Center*, 83

Mullis, I., Martin, M. & Loveless, T. (2016). *20 Years of TIMSS International Trends in Mathematics and Science Achievement, Curriculum, and Instruction.* TIMSS & PIRLS International Study Center: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Παπαδοπετράκης, Ε. (2002). *Οι υπολογιστές στην εκπαίδευση: Μύθοι και Πραγματικότητα.* (16ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Δ.Ο.Ε – Π.Ο.Ε.Δ., Αλεξανδρούπολη).

Ρίζος, Γ. (2009). *Στο δρόμο για τον PISA: Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA*. Θεσσαλονίκη: εκδόσεις Μαυρίδη.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children* (L. Leake, P. Burrell & H. Fischbein, Trans.) London: Routledge and Kegan Paul.

PISA Programme for International Student Assessment. PISA 2015 Results. Ημερομηνία ανάκτησης 15-6-2018, από http://www.oecd.org/pisa/

Ross, S. (2010). *Βασικές αρχές θεωρίας Πιθανοτήτων* (Β. Φελούζης, Μτφ., Επιμ.). Αθήνα: εκδόσεις Κλειδάριθμος (πρότυπη έκδοση 1976).

Shimizu, Y. (2002*). Capturing the structure of Japanese mathematics lessons: Some findings of the international comparative studies*. (Paper presented at the ICMI-Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education and Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore).

TIMSS & PIRLS. Student Achievement – TIMSS 2015 and TIMSS Advanced 2015 International Results. Ημερομηνία ανάκτησης 15-6-2018, από http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement/

Todhunter, I. (2014). *A History of the Mathematical Theory of Probability*. United Kingdom: Cambridge University Press (πρωτότυπη έκδοση, 1865).

Χαραλαμπίδης, Χ. (2002). *Ιστορική Ανασκόπηση των Πιθανοτήτων*. (19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα).

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle School students. *Mathematics Education Library*, 40, 145-169

Watson, J.D. & Moritz, J.B. (2003). Fairness of dice: a longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34: 270–304.

Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των Μαθηματικών εννοιών*. (Δ. Ψυχογίος, Μτχ., Επιμ.). Αθήνα: εκδόσεις Κουτσούμπος.

Wynne, H. (2000). *Teaching, leaning and assessing science 5-12*. Paul Chapman Publishing Ltd.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναστασιάδου, Σ. (2004). Χρήση μεθόδων συνεπαγωγικής στατιστικής – Μελέτη περίπτωσης με θέμα: «Οι πεποιθήσεις των δασκάλων για τη στατιστική». (17^{o} Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής, Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο).

Anagnostopoulou, K.,Hatzinikita, V.,Christidou, V. & Dimopoulos, K. (2011). PISA Test Items and School-Based Examinations in Greece: Exploring the relationship between global and local assessment discourses. *International Journal of Science Education*, 35(4), 636-662.

Arbaugh, F. & Brown, C. (2005). Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change?. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 499–536.

Batanero, C. & Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, Vol. 3, No. 1, 3-13.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2015). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. *Mathematics Education Library*, 40, 241-266.

Becker, J. & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 511–64). Dordrecht: Kluwer Academic.

Bright G. (1989). Teaching Mathematics with Technology: Probability. *The Arithmetic Teacher*, Vol. 36, No. 9, 16-18.

Δαμιανού, Χ. & Κούτρας, Μ. (2003). *Εισαγωγή στη Στατιστική: Μέρος 1*. Αθήνα: εκδόσεις Συμμετρία.

Ferreira Dos Santos, R., Kataoka Yumi V. & Karrer M. (2014). Teaching probability with the support of the R statistical software. *Statistics Education Research Journal*, 13(2), 132-147.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive sources of Probabilistic Thinking in Children*. Boston: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gellert, U. (2004). Didactic material confronted with the concept of mathematical literacy. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 163–79.

Graham, J. (2005). *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*. United States of America: Springer Science and Business Media, Inc.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111–29.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 15–33.

Hatzinikita, V., Dimopoulos, K. & Christidou, V. (2008). PISA test items and school textbooks related to science: A textual comparison. *Science Education*, 92(4), 664-687.

Isaías, P., Spector, M., Ifenthaler, D. & Sampson, D. (2015). *E-Learning Systems, Environments and Approaches: Theory and Implementation.* Springer International Publishing.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101–25.

Κουλαϊδής, Β., Δημόπουλος, Κ., Σκλαβενίτη, Σ., & Χρηστίδου, Β. (2002). *Τα κείμενα της Τεχνο-επιστήμης στο Δημόσιο Χώρο*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Langrall, C., & Mooney, E. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. In G. Jones (ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 95-119). New York: Springer.

Lopes & de Moura (2002). *Probability and statistics in elementary school: a research of Teachers' training.* (ICOTS 6, Universidade Estadual de Campinas)

Μάρκος, Α. (2006*). Βοήθεια στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της Παραγοντικής Ανάλυσης των Αντιστοιχιών & Αλγόριθμοι Ανάλυσης και Κατασκευής Ειδικών Πινάκων Εισόδου*. (Διδακτορική Διατριβή). Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη.

Marcou A. & Gagatsis A. (2002). Representations and Learning of Fractions. In A. Rogerson (eds.) *The Humanistic Renaissance in Mathematics Education* (pp. 250-253). Palermo, Italy

Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175–97.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 602–25.

Sadaghiani, H. & Bao, L. (2005). Student Difficulties in Understanding Probability in Quantum Mechanics. *Physics Education Research Conference,* Vol. 818, No. 61

Sanduk, M. (2012). Is the Technology a New Way of Thinking?. *The Journal of Technology Studies*, 38 ½, 105-114.

Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and Directions. In D.A. Grows (eds.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Library.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia and M. Borovcnik (eds.) *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 135–68. Dordrecht: Kluwer Academic.

Sullivan P., Clarke D. & Clarke B. (2013). Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning. *Mathematics teacher education*, Vol. 9

Tarr J. & Graham J. (1997). A Framework for Assessing Middle School Students' Thinking in Conditional Probability and Independence. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 9, No.1, 39-59.

Tsakiridou, H. & Vavyla, E. (2015). Probability Concepts in Primary School. *American Journal of Educational Research*, Vol. 3, No. 4, 535-540.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35.

Vincent, M. & Laurent, T. (2016). *A study of the teaching of probability to students Judged or not with learning difficulties in mathematics in regular elementary classes in Quebec*. (13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg).

ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Αδύνατο ενδεχόμενο: Το ενδεχόμενο που δεν έχει καμία πιθανότητα να συμβεί ή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι μηδέν.

Αιτιοκρατικό ή ντετερμινιστικό πείραμα: Το πείραμα όπου δεδομένων των συνθηκών διεξαγωγής του, μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμα του.

Αλυσίδες Markov: Ακολουθίες συσχετισμένων δειγμάτων που χρησιμοποιούνται κυρίως σε διάφορα πληροφοριακά συστήματα και στο διαδίκτυο.

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: Τα ενδεχόμενα, όπου η πραγματοποίηση του ενός, δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα: Τα ενδεχόμενα που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα, δηλαδή η τομή τους είναι κενή ($A \cap B = \emptyset$).

Βέβαιο ενδεχόμενο: Το ενδεχόμενο που είναι σίγουρο με πιθανότητα 1 ότι θα πραγματοποιηθεί.

Γεννήτριες συναρτήσεις: Θεωρία που ανέπτυξε ο μεγάλος μαθηματικός Laplace και χρησιμοποιείται στην αντιμετώπιση διάφορων προβλημάτων απαρίθμησης.

Δειγματικός χώρος: Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Δεσμευμένη πιθανότητα: Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο Α, δεδομένου της πραγματοποίησης ενός άλλου ενδεχομένου Β.

Διαδραστική μάθηση: Η χρήση της τεχνολογίας στη μάθηση και η αλληλεπίδραση των μαθητών με ένα προσομοιωμένο περιβάλλον μάθησης.

Δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις: Τα αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν σε ένα πείραμα τύχης.

Εικονόγραμμα: Το διάγραμμα που χρησιμοποιεί εικόνες, οι οποίες περιγράφουν μια συγκεκριμένη ποσότητα του ελεγχόμενου αντικειμένου.

Ενδεχόμενο ή Γεγονός: Ένα σύνολο με στοιχεία του μερικά αποτελέσματα του πειράματος.

Δενδροδιάγραμμα: Το διάγραμμα που αποτελείται από κλάδους και βοηθάει στην επίλυση ασκήσεων συνδυαστικής και πιθανοτήτων.

Εντροπική ανάλυση: Η εξέταση και η ανάλυση ενός κανόνα, αλλά και του αντιστρόφου του.

Ισοπίθανα ενδεχόμενα: Τα ενδεχόμενα που έχουν ίδια Πιθανότητα να συμβούν.

Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων: Οι μαθηματικοί κανόνες που συνοδεύουν τον κλασικό ορισμό της Πιθανότητας.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Θεώρημα που ανέπτυξε ο μεγάλος μαθηματικός Gauss και παρουσιάζει τις πολλαπλές εφαρμογές της κανονικής κατανομής και τη σύνδεση της με άλλες κατανομές.

Μαθηματικός αλφαβητισμός: Η γνώση κάποιου, για να μπορεί να μαθηματικοποιεί ένα πρόβλημα.

Μαθηματικοποίηση: Η διαδικασία μετατροπής ενός προβλήματος από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική.

Πείραμα τύχης: Το πείραμα που όποιες και να είναι οι συνθήκες, δεν μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμα του.

Πιθανά αποτελέσματα: Τα αποτελέσματα για να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο.

Πληθάριθμος ή Πληθικός αριθμός ενός συνόλου Α: Ο αριθμός που δηλώνει το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α και συμβολίζεται με Ν(Α).

Ραβδόγραμμα: Το γράφημα που αποτελείται από ορθογώνιες στήλες με τις βάσεις τους πάνω στον οριζόντιο ή στο κατακόρυφο άξονα και χρησιμοποιείται για τη γραφική αναπαράσταση των τιμών μια ποιοτικής μεταβλητής.

Συνδυαστική: Είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή ενδεχομένων.

Συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση: Η μέθοδος ανάλυσης που συγκρίνει τη συναπαγωγική ένταση δύο ή περισσότερων γεγονότων.

Σύνολο: Είναι μια συλλογή αντικειμένων, οποιασδήποτε φύσεως, τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους, συγκεντρωμένα σε μια ομάδα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Ερωτηματολόγιο για φοιτητές και εκπαιδευτικούς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Π.Μ.Σ. Επιστήμες της Αγωγής – Εκπαίδευση με χρήση Νέων τεχνολογιών

Ανώνυμο Ερωτηματολόγιο

Αγαπητοί φοιτητές και εκπαιδευτικοί,

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων αναφορικά με το αντικείμενο των «πιθανοτήτων». Το παρόν ερωτηματολόγιο, το οποίο θα σας παρακαλούσα θερμά να συμπληρώσετε, αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας που πραγματοποιώ στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής – Εκπαίδευση με χρήση Νέων τεχνολογιών» με τίτλο: *«Διδάσκοντας «Πιθανότητες» στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των πιθανοτήτων»*.

Η παρακάτω έρευνα είναι ανώνυμη και τα αποτελέσματα της προορίζονται καθαρά για εκπαιδευτικό σκοπό. Ο χρόνος υλοποίησης του ερωτηματολογίου δεν ξεπερνάει τα 30 λεπτά.

Σας ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων για τον πολύτιμο χρόνο που αφιερώνεται και σας εύχομαι κάθε επιτυχία.

Με εκτίμηση
Μιχαήλ Δ. Ζώρζος
Καθηγητής Μαθηματικών και μεταπτυχιακός φοιτητής στο ΠΤΔΕ Ρόδου

Ερωτηματολόγιο

Γενικές Ερωτήσεις

Φύλλο: Άνδρας ☐ Γυναίκα ☐ **Ηλικία** ………..

Γραμματικές Γνώσεις: μαθητής ☐ φοιτητής ☐ μεταπτυχιακός ☐ διδακτορικός ☐ εργαζόμενος ☐

Ερωτήσεις μέρος 1ο

1. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις σύμφωνα με την άποψη σας και την εμπειρία σας.

	Ερωτήσεις	Πολύ	Αρκετά	Λίγο	Καθόλου
1	Ποια η σχέση σας με τα Μαθηματικά;				
2	Στο οικογενειακό σας περιβάλλον γνωρίζουν μαθηματικά;				
3	Θεωρείτε ότι τα μαθηματικά είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα ή σε αυτό που σπουδάσατε;				
4	Πόσο χρήσιμη θεωρείτε την έννοια «Πιθανότητα» στην καθημερινή ζωή;				
5	Η «Πιθανότητα» σχετίζεται με την «Τύχη»;				
6	Θεωρείτε ότι κάποιος που γνωρίζει καλά «Πιθανότητες» έχει πλεονέκτημα σε ένα παιχνίδι τύχης;				
7	Βοηθάνε οι «πιθανότητες» στην έγκυρη πρόβλεψη ενός αποτελέσματος;				
8	Είστε ευχαριστημένοι από τον τρόπο που διδάσκονται οι πιθανότητες στο σχολείο;				
9	Θεωρείτε τις γνώσεις σας επαρκείς πάνω στο αντικείμενο αυτό;				
10	Θεωρείτε, πως μια τόσο σημαντική έννοια θα έπρεπε να διδάσκεται σε πιο μικρή ηλικία;				
11	Σε ποια τάξη θα προτείνατε να γίνει η γνωριμία των μαθητών με τις πιθανότητες;	………………			
12	Θεωρείτε, πως η τεχνολογία βοηθάει στην εκπαιδευτική διαδικασία;				
13	Θα θέλατε η τεχνολογία να χρησιμοποιούταν περισσότερο στο μάθημα;				
14	Θεωρείτε, ότι αν γινόταν χρήση της τεχνολογίας θα κατανοούσατε περισσότερο την έννοια των πιθανοτήτων;				

2. Στη καθημερινότητα, ακούγονται συχνά έννοιες όπως «πιθανό», «απίθανο», «πιθανότητα» κ.α. θα μπορούσατε λοιπόν, να δώσετε έναν σύντομο ορισμό για την πιθανότητα;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

3. Σε τι βαθμό θεωρείτε πως επηρεάζουν τις γνώσεις σας για τις «Πιθανότητες» τα παρακάτω;

	Ερωτήσεις	**Πολύ**	**Αρκετά**	**Λίγο**	**Καθόλου**
1	Σχολικό βιβλίο και οι δραστηριότητες του				
2	Κατάρτιση εκπαιδευτικού				
3	Ηλικία που διδάσκονται				
4	Κοινωνικός περίγυρος και οικογένεια				
5	Παιχνίδια τύχης				

4. Στις παρακάτω ερωτήσεις να κυκλώσετε ποια ή ποιες απαντήσεις θεωρείτε σωστές.

- Τι καλούμε πείραμα τύχης;

α) ένα πείραμα που διεξάγεται στην τύχη.
β) ένα πείραμα που γίνεται από λάθος.
γ) ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.
δ) ένα φυσικό πείραμα που έγινε τυχαία και προέκυψαν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα.

- Τι ονομάζουμε δυνατά αποτελέσματα σε ένα πείραμα τύχης;

α) τα αποτελέσματα που πήραμε από το πείραμα
β) τα αποτελέσματα που αναμένουμε από το πείραμα
γ) όλα τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από το πείραμα
δ) τα αποτελέσματα που θέλουμε να βγάλουμε από το πείραμα

- Τι είναι απολύτως απαραίτητο να γνωρίζουμε για ένα πείραμα τύχης;

α) το σύνολο των αποτελεσμάτων
β) το χώρο που διεξάγεται το πείραμα
γ) τα αποτελέσματα από τις πρώτες εκτελέσεις του πειράματος
δ) την ποιότητα και το είδος του πειράματος

- Τι καλούμε Δειγματοχώρο ενός πειράματος τύχης;

α) το δείγμα που παίρνουμε από έναν πληθυσμό, για να εκτελέσουμε το πείραμα
β) όλα τα αναμενόμενα αποτελέσματα του πειράματος
γ) τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος
δ) το χώρο που διεξάγεται το πείραμα
ε) ο χώρος-περιοχή που παίρνουμε το δείγμα

- Τι από τα παρακάτω πιστεύετε ότι είναι «ενδεχόμενο»;

α) ένα πιθανό αποτέλεσμα
β) κάτι που μπορεί να συμβεί υπό προϋποθέσεις
γ) ένα γεγονός που ενδέχεται να συμβεί στο μέλλον
δ) δεν έχει καμία σχέση με τις πιθανότητες

- Τι καταλαβαίνεις από την έκφραση «ισοπίθανα ενδεχόμενα»;

α) ότι δεν γίνεται να συμβούν ταυτόχρονα.
β) γίνεται να συμβούν ταυτόχρονα.
γ) ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί.

δ) δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά ξέρουμε ποιο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα.
ε) δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά υπάρχει πιθανότητα να έρθουν και τα δύο.
στ) δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο θα συμβεί, αλλά ξέρουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να συμβεί ήτο ένα ή το άλλο.

➢ Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται «βέβαιο»;
α) όταν είναι σίγουρο ότι θα συμβεί
β) όταν είναι σίγουρο ότι δεν θα συμβεί
γ) όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι 50%
δ) όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην συμβεί

➢ Η φράση, «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας», σημαίνει:
α) η πιθανότητα μετράει την τύχη
β) η πιθανότητα προβλέπει την τύχη
γ) η πιθανότητα νικάει την τύχη
δ) η πιθανότητα διευκρινίζει ποιο από τα αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει σε μια εκτέλεση του πειράματος
ε) η πιθανότητα βοηθάει την τύχη

Ερωτήσεις μέρος 2ο

1. (Προσαρμοσμένο από Konold, 2002)
Η πρόβλεψη του καιρού δίνει 70% πιθανότητα βροχής. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις θεωρείτε ότι είναι σωστές;
α) Η πιθανότητα να βρέξει αύριο, είναι πάνω από 50%, άρα σίγουρα θα βρέχει. ☐
β) Από τις επόμενες 10 ημέρες είναι πιθανό να βρέχει τις 7. ☐
γ) Αν αύριο δεν βρέξει τελικά, σημαίνει πως η πρόβλεψη είναι εσφαλμένη. ☐
δ) Το ποσοστό να βρέξει αύριο είναι μεγαλύτερο από το να μην βρέξει ☐
ε) Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα βροχής αύριο. ☐
στ) Αύριο θα βρέχει ☐
ζ) Αύριο η υγρασία θα είναι αυξημένη κατά 70% και άρα μπορεί να βρέξει ☐
η) Αύριο μπορεί να βρέξει ή και όχι, ωστόσο το πιθανότερο είναι να βρέχει. ☐

2. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)
Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι Α υπάρχουν 4 βόλοι, 2 μπλε και 2 πράσινοι. Στο σακούλι Β υπάρχουν 6 βόλοι, 3 μπλε και 3 πράσινοι. Από ποιο σακούλι έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξω τυχαία, χωρίς να κοιτάζω μέσα στο σακούλι, ένα μπλε βόλο; Α ☐ Β ☐ ΑΛΛΟ………
Γιατί;
……………………………………………………………………………………………

3. Πηγαίνοντας στο σούπερ μάρκετ, βρίσκουμε ένα κουτί δημητριακών μιας γνωστής μάρκας, το οποίο δίνει δώρο μια κάρτα ή ένα αυτοκόλλητο της εθνικής ομάδας μπάσκετ.
α) Τι πιστεύτε ότι θα βρείτε στο κουτί; Κάρτα ☐ Αυτοκόλλητο ☐

Άλλο ………..

β) Αν βρούμε την κάρτα στο πρώτο κουτί, τότε στο δεύτερο κουτί θα βρούμε το αυτοκόλλητο;

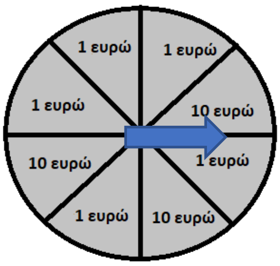
Ναι ☐ Όχι ☐ Άλλο ……………… Γιατί;………………………………

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι το οποίο έχει 4 πλευρές κόκκινες και 2 πλευρές άσπρες. Επαναλαμβάνουμε το συγκεκριμένο πείραμα 16 φορές.
α) Ποιο πιστεύετε ότι θα είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και γιατί;
Άσπρο ☐ Κόκκινο ☐ Άλλο……………
Γιατί;………………………………………………………………
β) Ποιο χρώμα εμφανίζεται συχνότερα μετά από 16 ρίψεις;
Άσπρο ☐ Κόκκινο ☐ Άλλο………
γ) Ήταν αυτό αναμενόμενο και γιατί; Ναι ☐ Όχι ☐
………………………………………………………………………………..……

5. Ο Μιχάλης και ο Γιάννης παίζουν ένα παιχνίδι που περιλαμβάνει την ρίψη δύο δίκαιων ζαριών (καθένα από τα οποία αριθμείται από 1 έως 6). Ρίχνουν και τα δύο ζάρια και πολλαπλασιάζουν τους αριθμούς τους. Ο Μιχάλης λαμβάνει 1 ευρώ αν το αποτέλεσμα είναι ένας ζυγός αριθμός και ο Γιάννης λαμβάνει 1 ευρώ αν το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός.
α) ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος;
……………………………………………………………………………………
β) Είναι δίκαιο αυτό το παιχνίδι; Ναι ☐ Όχι ☐
Γιατί;……………………………………………………………………………….

6. Ο Γιώργος και η Άννα παίζουν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι και αποφασίζουν να στρίψουν ένα νόμισμα για το ποιος θα παίξει πρώτος. Είναι δίκαιη αυτή η απόφαση και για τους δύο; Αιτιολογήστε με λίγα λόγια το σκεπτικό σας. Ναι ☐ Όχι ☐
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

7. Παρακάτω εμφανίζεται ένας τροχός της τύχης. Ποιο από τα παρακάτω ποσά έχουμε μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσουμε στον παρακάτω τροχό και γιατί; Τι πιστεύεις ότι θα έρθει στην πρώτη ρίψη;



Πρώτη ρίψη: 10 ευρώ ☐ 1 ευρώ ☐
Άλλο………..
Μεγαλύτερη πιθανότητα: 10 ευρώ ☐ 1 ευρώ ☐

Αιτιολόγηση:………………………………………………………………………

8. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)
Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι Α έχω μερικούς άσπρους και μερικούς μαύρους βόλους. Στο σακούλι Β έχω το ίδιο, αλλά με περισσότερους βόλους. Από ποιο σακούλι έχω μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρω τυχαία, έναν άσπρο βόλο;

α) Απάντηση: A ☐ B ☐ Άλλο………………

β) Γιατί;…………………………………………………………………………………..

9. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πείραμα τύχης, ρίχνουμε ένα ζάρι και ένα νόμισμα. Να καταγράψετε τον δειγματοχώρο του πειράματος. Ποια πιστεύετε ότι είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, να έρθει άρτιος αριθμός και κορόνα με βάση τον κλασικό ορισμό πιθανότητας;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

10. (Προσαρμοσμένο από Ρίζος Γ., 2009)

Έχουμε ρίξει ένα ζάρι τρεις φορές. Και τις τρεις φέραμε εξάρι. Σκοπεύουμε να το ξαναρίξουμε μία ακόμα φορά. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος τις προτάσεις:

A) Είναι αδύνατο να φέρουμε έξι ξανά. ☐

B) Με την τύχη που έχουμε, σίγουρα θα φέρουμε έξι. ☐

Γ) Αφού ρίχνουμε τέσσερις φορές, η πιθανότητα είναι 1/4 ☐

Δ) Η πιθανότητα είναι 1/6, όπως σε κάθε ρίψη. ☐

Ε) Είναι 50% να φέρουμε έξι και 50% να μη φέρουμε έξι. ☐

11. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)

Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι A υπάρχουν 8 βόλοι, 6 μπλε και 2 πράσινοι. Στο σακούλι B υπάρχουν 8 βόλοι, 4 μπλε και 4 πράσινοι. Από ποιο σακούλι έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξω τυχαία, ένα μπλε βόλο;

α) Απάντηση: A ☐ B ☐ Άλλο……………..

β) Γιατί; ………………………………………………………………………..

2. Ερωτηματολόγιο για μαθητές

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Π.Μ.Σ. Επιστήμες της Αγωγής – Εκπαίδευση με χρήση Νέων τεχνολογιών

Ανώνυμο Ερωτηματολόγιο

Αγαπητοί φοιτητές και εκπαιδευτικοί,

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων αναφορικά με το αντικείμενο των «πιθανοτήτων». Το παρόν ερωτηματολόγιο, το οποίο θα σας παρακαλούσα θερμά να συμπληρώσετε, αποτελεί μέρος της διπλωματικής εργασίας που πραγματοποιώ στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Επιστήμες της Αγωγής – Εκπαίδευση με χρήση Νέων τεχνολογιών» με τίτλο: *«Διδάσκοντας «Πιθανότητες» στο Δημοτικό σχολείο. Διερεύνηση των στάσεων, αντιλήψεων και πεποιθήσεων των δάσκαλων και υποψήφιων δασκάλων για το αντικείμενο των πιθανοτήτων»*.

Η παρακάτω έρευνα είναι ανώνυμη και τα αποτελέσματα της προορίζονται καθαρά για εκπαιδευτικό σκοπό. Ο χρόνος υλοποίησης του ερωτηματολογίου δεν ξεπερνάει τα 30 λεπτά.

Σας ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων για τον πολύτιμο χρόνο που αφιερώνεται και σας εύχομαι κάθε επιτυχία.

Με εκτίμηση
Μιχαήλ Δ. Ζώρζος
Καθηγητής Μαθηματικών και μεταπτυχιακός φοιτητής στο ΠΤΔΕ Ρόδου

Ερωτηματολόγιο

Γενικές Ερωτήσεις

Φύλλο: Άνδρας ☐ Γυναίκα ☐ **Ηλικία** ………..

Γραμματικές Γνώσεις: μαθητής ☐ φοιτητής ☐ μεταπτυχιακός ☐ διδακτορικός ☐ εργαζόμενος ☐

Ερωτήσεις μέρος 1ο

1. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις σύμφωνα με την άποψη σας και την εμπειρία σας.

	Ερωτήσεις	**Πολύ**	**Αρκετά**	**Λίγο**	**Καθόλου**
1	Ποια η σχέση σας με τα Μαθηματικά;				
2	Στο οικογενειακό σας περιβάλλον γνωρίζουν μαθηματικά;				
3	Θεωρείτε ότι τα μαθηματικά είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα ή σε αυτό που θέλετε να σπουδάσατε;				
4	Πόσο χρήσιμη θεωρείτε την έννοια «Πιθανότητα» στην καθημερινή ζωή;				
5	Η «Πιθανότητα» σχετίζεται με την «Τύχη»;				
6	Θεωρείτε ότι κάποιος που γνωρίζει καλά «Πιθανότητες» έχει πλεονέκτημα σε ένα παιχνίδι τύχης;				
7	Βοηθάνε οι «πιθανότητες» στην έγκυρη πρόβλεψη ενός αποτελέσματος;				
8	Είστε ευχαριστημένοι από τον τρόπο που διδάσκονται οι πιθανότητες στο σχολείο;				
9	Θεωρείτε τις γνώσεις σας επαρκείς πάνω στις «Πιθανότητες»;				
10	Θεωρείτε, πως μια τόσο σημαντική έννοια θα έπρεπε να διδάσκεται σε πιο μικρή ηλικία;				
11	Σε ποια τάξη θα προτείνατε να γίνει η γνωριμία των μαθητών με τις πιθανότητες;	….…………..			
12	Θεωρείτε, πως η τεχνολογία βοηθάει στην εκπαιδευτική διαδικασία;				
13	Θα θέλατε η τεχνολογία να χρησιμοποιούταν περισσότερο στο μάθημα;				
14	Θεωρείτε, ότι αν γινόταν χρήση της τεχνολογίας θα κατανοούσατε περισσότερο την έννοια των πιθανοτήτων;				

2. Στη καθημερινότητα, ακούγονται συχνά έννοιες όπως «πιθανό», «απίθανο», «πιθανότητα» κ.α. θα μπορούσατε λοιπόν, να δώσετε έναν σύντομο ορισμό για την πιθανότητα;

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

3. Σε τι βαθμό θεωρείτε πως επηρεάζουν τις γνώσεις σας για τις «Πιθανότητες» τα παρακάτω;

	Ερωτήσεις	**Πολύ**	**Αρκετά**	**Λίγο**	**Καθόλου**
1	Σχολικό βιβλίο και οι δραστηριότητες του				
2	Κατάρτιση εκπαιδευτικού				
3	Ηλικία που διδάσκονται				
4	Κοινωνικός περίγυρος και οικογένεια				
5	Παιχνίδια τύχης				

4. Στις παρακάτω ερωτήσεις να κυκλώσετε ποια ή ποιες απαντήσεις θεωρείτε σωστές.

- Τι καλούμε πείραμα τύχης;

α) ένα πείραμα που διεξάγεται στην τύχη.
β) ένα πείραμα που γίνεται από λάθος.
γ) ένα πείραμα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.
δ) ένα φυσικό πείραμα που έγινε τυχαία και προέκυψαν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα.

- Σε τι καθημερινή δραστηριότητα χρησιμοποιούμε την «πιθανότητα»;

α) σε τυχερά παιχνίδια β) σε προβλέψεις
γ) σε προβλήματα τύχης δ) στο καζίνο ε) σε όλα τα παραπάνω

- Τι είναι απολύτως απαραίτητο να γνωρίζουμε για ένα πείραμα τύχης;

α) το σύνολο των αποτελεσμάτων
β) το χώρο που διεξάγεται το πείραμα
γ) τα αποτελέσματα από τις πρώτες εκτελέσεις του πειράματος
δ) την ποιότητα και το είδος του πειράματος

- Τι από τα παρακάτω πιστεύετε ότι είναι «ενδεχόμενο»;

α) ένα πιθανό αποτέλεσμα
β) κάτι που μπορεί να συμβεί υπό προϋποθέσεις
γ) ένα γεγονός που ενδέχεται να συμβεί στο μέλλον
δ) δεν έχει καμία σχέση με τις πιθανότητες

- Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται «βέβαιο»;

α) όταν είναι σίγουρο ότι θα συμβεί
β) όταν είναι σίγουρο ότι δεν θα συμβεί
γ) όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι 50%
δ) όταν η πιθανότητα να συμβεί είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην συμβεί

- Η φράση, «η πιθανότητα είναι το μέτρο της τυχαιότητας», σημαίνει:

α) η πιθανότητα μετράει την τύχη
β) η πιθανότητα προβλέπει την τύχη
γ) η πιθανότητα νικάει την τύχη
δ) η πιθανότητα διευκρινίζει ποιο από τα αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να προκύψει σε μια εκτέλεση του πειράματος
ε) η πιθανότητα βοηθάει την τύχη

Ερωτήσεις μέρος 2ο

1. (Προσαρμοσμένο από Konold, 2002)

Η πρόβλεψη του καιρού δίνει 70% πιθανότητα βροχής. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις θεωρείτε ότι είναι σωστές;

α) Η πιθανότητα να βρέξει αύριο, είναι πάνω από 50%, άρα σίγουρα θα βρέχει. ☐
β) Από τις επόμενες 10 ημέρες είναι πιθανό να βρέχει τις 7. ☐
γ) Αν αύριο δεν βρέξει τελικά, σημαίνει πως η πρόβλεψη είναι εσφαλμένη. ☐
δ) Το ποσοστό να βρέξει αύριο είναι μεγαλύτερο από το να μην βρέξει ☐
ε) Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα βροχής αύριο. ☐
στ) Αύριο θα βρέχει ☐
ζ) Αύριο η υγρασία θα είναι αυξημένη κατά 70% και άρα μπορεί να βρέξει ☐
η) Αύριο μπορεί να βρέξει ή και όχι, ωστόσο το πιθανότερο είναι να βρέχει. ☐

2. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)

Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι Α υπάρχουν 4 βόλοι, 2 μπλε και 2 πράσινοι. Στο σακούλι Β υπάρχουν 6 βόλοι, 3 μπλε και 3 πράσινοι. Από ποιο σακούλι έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξω τυχαία, χωρίς να κοιτάζω μέσα στο σακούλι, ένα μπλε βόλο; Α ☐ Β ☐ ΑΛΛΟ………
Γιατί;
…………………………………………………………………………………………

3. Πηγαίνοντας στο σούπερ μάρκετ, βρίσκουμε ένα κουτί δημητριακών μιας γνωστής μάρκας, το οποίο δίνει δώρο μια κάρτα ή ένα αυτοκόλλητο της εθνικής ομάδας μπάσκετ.
α) Τι πιστεύτε ότι θα βρείτε στο κουτί; Κάρτα ☐ Αυτοκόλλητο ☐

Άλλο ………..

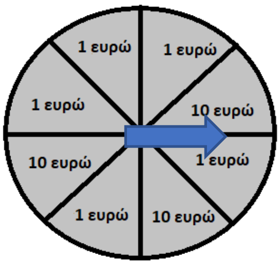
β) Αν βρούμε την κάρτα στο πρώτο κουτί, τότε στο δεύτερο κουτί θα βρούμε το αυτοκόλλητο;

Ναι ☐ Όχι ☐ Άλλο ………………. Γιατί;………………………………

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι το οποίο έχει 4 πλευρές κόκκινες και 2 πλευρές άσπρες. Επαναλαμβάνουμε το συγκεκριμένο πείραμα 16 φορές.
α) Ποιο πιστεύετε ότι θα είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και γιατί;
Άσπρο ☐ Κόκκινο ☐ Άλλο……………
Γιατί;……………………………………………………………………
β) Ποιο χρώμα εμφανίζεται συχνότερα μετά από 16 ρίψεις;
Άσπρο ☐ Κόκκινο ☐ Άλλο………
γ) Ήταν αυτό αναμενόμενο και γιατί; Ναι ☐ Όχι ☐
…………………………………………………………………………………..……

5. Ο Γιώργος και η Άννα παίζουν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι και αποφασίζουν να στρίψουν ένα νόμισμα για το ποιος θα παίξει πρώτος. Είναι δίκαιη αυτή η απόφαση και για τους δύο; Αιτιολογήστε με λίγα λόγια το σκεπτικό σας. Ναι ☐ Όχι ☐
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

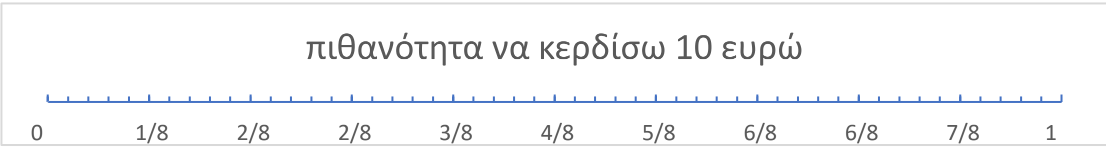
6. Παρακάτω εμφανίζεται ένας τροχός της τύχης. Ποιο από τα παρακάτω ποσά έχουμε μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσουμε στον παρακάτω τροχό και γιατί; Τι πιστεύεις ότι θα έρθει στην πρώτη ρίψη;



Πρώτη ρίψη: 10 ευρώ ☐ 1 ευρώ ☐
Άλλο………..
Μεγαλύτερη πιθανότητα: 10 ευρώ ☐ 1 ευρώ ☐

Αιτιολόγηση:……………………………………………………………………………

Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε 10 ευρώ με την πρώτη προσπάθεια; Διάλεξε την πιθανότητα από τον παρακάτω άξονα.



7. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)
Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι Α έχω μερικούς άσπρους και μερικούς μαύρους βόλους. Στο σακούλι Β έχω το ίδιο, αλλά με περισσότερους βόλους. Από ποιο σακούλι έχω μεγαλύτερη πιθανότητα να πάρω τυχαία, έναν άσπρο βόλο;

Α **Β**

α) Απάντηση: Α ☐ Β ☐ Άλλο………………

β) Γιατί;……………………………………………………………………………..

8. (Προσαρμοσμένο από Ρίζος Γ., 2009)
Έχουμε ρίξει ένα ζάρι τρεις φορές. Και τις τρεις φέραμε εξάρι. Σκοπεύουμε να το ξαναρίξουμε μία ακόμα φορά. Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λάθος τις προτάσεις:

Α) Είναι αδύνατο να φέρουμε έξι ξανά. ☐

Β) Με την τύχη που έχουμε, σίγουρα θα φέρουμε έξι. ☐

Γ) Αφού ρίχνουμε τέσσερις φορές, η πιθανότητα είναι 1/4 ☐

Δ) Η πιθανότητα είναι 1/6, όπως σε κάθε ρίψη. ☐

Ε) Είναι 50% να φέρουμε έξι και 50% να μη φέρουμε έξι. ☐

9. (Προσαρμοσμένο από Θ. Αφαντίτη & Ιάσονας Λαμπριανού, 2002)
Έχω δύο σακούλια με βόλους. Στο σακούλι Α υπάρχουν 8 βόλοι, 6 μπλε και 2 πράσινοι. Στο σακούλι Β υπάρχουν 8 βόλοι, 4 μπλε και 4 πράσινοι. Από ποιο σακούλι έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα να τραβήξω τυχαία, ένα μπλε βόλο;

α) Απάντηση: A ☐ B ☐ Άλλο……………..
β) Γιατί; ……………………………………………………………………..