



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ**  
**ΠΜΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Η ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ POINCARÉ ΚΑΙ ΤΑ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΑ**  
**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

**ΣΙΟΖΙΟΥ ΒΑΙΑ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΣΑΜΟΣ 2018**

Στους γονείς μου, Βάιο και Βασιλική  
και στον αδελφό μου Χρήστο.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	3
------------------	---

## ΠΙΝΑΚΑΣ

ΕΙΚΟΝΩΝ.....	4
--------------	---

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	7
------------------	---

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	8
---------------	---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Συστήματα

1.1 Από το γραμμικό στο μη-γραμμικό σύστημα. Διάγραμμα φάσεων.....	9
--	---

1.2 Συντηρητικά συστήματα δεύτερης τάξης.....	11
---	----

1.2.1 Καμπύλες στάθμης- Η εξίσωση του Νεύτωνα.....	11
--	----

1.2.2 Κρίσιμες καμπύλες στάθμης- Ομοκλινείς και Ετεροκλινείς τροχιές.....	12
---	----

1.3 Οι ακολουθίες Poincare.....	18
---------------------------------	----

1.3.1 Τμήματα Poincare για μη-αυτόνομα συστήματα.....	21
---	----

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Χαμιλτονιανά συστήματα

2.1 Χαμιλτονιανά Συστήματα.....	28
---------------------------------	----

2.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	28
--------------------------------------	----

2.3 Το διατεταγμένο σύστημα.....	34
----------------------------------	----

2.4	Διατεταγμένα	Χαμιλτονιανά
συστήματα.....	37	
2.5	Τροχιές	και τομές
Poincare.....	43	
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>		<b>49</b>

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα:1 Φασική τοπολογία ενός γραμμικού (α) και ενός μη-γραμμικού (β) συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.....	10
Εικόνα:2 Μελέτη σε περιοχή μη εκφυλισμένου τοπικού μεγίστου.....	13
Εικόνα:3 Καμπύλες στάθμης σε περιοχές σε περιοχή τοπικού μεγίστου.....	14
Εικόνα:4 Τοπικό διάγραμμα φάσης σε περιοχή μεγίστου.....	15
Εικόνα:5 Ομοκλινείς τροχιά.....	15
Εικόνα:6 Ετεροκλινείς τροχιά.....	16
Εικόνα:7 Η U εκφυλισμένη με τοπικό μέγιστο.....	17
Εικόνα:8 Οι πρώτες ‘επιστροφές’ που σχετίζονται με τον σπειροειδή κύκλο.....	18
Εικόνα:9 Εκφυλισμένο τοπικό μέγιστο.....	20
Εικόνα:10 Cobweb για την ακολουθία $\{r_n\}$ .....	21
Εικόνα:11 Η λύση είναι σχεδιασμένη σε κύλινδρο.....	24
Εικόνα:12 Ένας ανοιχτός κόμβος ανοίγει για να δείξει την προβολή.....	24

Εικόνα:13	Οι πρώτες επιστροφές που ελήφθησαν από τα τμήματα.....	25
Εικόνα:14	Σταθερό σημείο της περιοδικής λύσης.....	26
Εικόνα:15	Επιστροφή.....	27
Εικόνα:16 (α)	Ο τόρος όπως ορίζεται από τους δύο κύκλους (β) Περιέλιξη των τροχιών γύρω από ένα τόρο (γ) Οι μεταβλητές δράσης αντιστοιχούν στις ακτίνες του τόρου (δ)	31
Εικόνα:17 (α)	Τομή των τόρων (β) Το ίδιο σε οριζόντια παρουσίαση.....	33
Εικόνα:18	Το φασικό διάγραμμα και οι ακολουθίες σημείων Poincare.....	35
Εικόνα:19 (α)	Το επίπεδο Poincare (β) και (γ) Παρουσιάζουν μια μεγέθυνση της περιοχής γύρω.....	36
Εικόνα:20	Φάσματα ισχύος για (α) Μια τροχιά πολύ κοντά στην ευσταθή περιοδική τροχιά (β) Μια ημιπεριοδική τροχιά (γ) Μια τροχιά πολύ κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά.....	37
Εικόνα:21	Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος KAM.....	38
Εικόνα:22	Η αλλαγή της μορφής της περιοχής ενός συντονισμένου κύκλου.....	39
Εικόνα:23	Αλυσίδες Poincare-Birkhoff στο διαταραγμένο εκκρεμές.....	40
Εικόνα:24	Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στην ζώνη συντονισμού	

(α) Σε μια ολοκληρώσιμη περίπτωση  
 (β) Στην μη-ολοκληρώσιμη περίπτωση  
 (γ) Η συνέχεια της πολλαπλότητας  
 .....41

Εικόνα:25 (α) Το ομοκλινικό πλέγμα  
 (β) Μεγέθυνση του πλέγματος.....42

Εικόνα:26 Σχηματική αναπαράσταση της τομής Poincare για ένα διατεταγμένο.....42

Εικόνα:27 (α) Το δυναμικό του συστήματος  
 (β) Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για διάφορες τιμές ενέργειας.....44

Εικόνα:28 Τροχιές του συστήματος για  $\alpha=1$   
 (α) Γύρω από το σημείο ισορροπίας  
 (β) Μια ημιπεριοδική τροχιά  
 (γ) Ημιπεριοδική τροχιά.....44

Εικόνα:29 (α) Παρουσίαση μιας ημιπεριοδικής τροχιάς  
 (β) Τομές της τροχιάς με ένα επιλεγμένο επίπεδο.....45

Εικόνα:30 (α) Η τομή Poincare για ολοκληρώσιμη περίπτωση  
 (β) Η περιοδική τροχιά του κέντρου της περιοχής A στο επίπεδο xy  
 (γ) Το ίδιο για την περιοδική τροχιά της περιοχής B.....46

Εικόνα:31 (α) Τομή Poincare για  $\varepsilon=0.02$   
 (β) Μεγέθυνση της περιοχής A  
 (γ) Περιοδική ευσταθής τροχιά.....48

Εικόνα:32 Τομές Poincare για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .....48

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον κύριο Νικόλαο Καραχάλιο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, που μου έδωσε την δυνατότητα να πραγματοποιήσω την πτυχιακή μου εργασία. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για την άποψη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους καθώς και για το διαρκές ενδιαφέρον του και την υποστήριξή του.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα, όλους του καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής κρίσης της εργασίας, τον κύριο Κωνσταντίνο Χουσιάδα, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και τον κύριο Χρήστο Νικολόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών που δέχτηκαν να αφιερώσουν κάποιο από τον πολύτιμο χρόνο τους για την αξιολόγηση της εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω για όλη την στήριξη και την βοήθεια τους, τις φίλες μου Δέσποινα και Μαρία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά, τους γονείς μου και τον αδελφό μου, για την αγάπη, την στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου δείχνουν όλα αυτά τα χρόνια. Πέραν όμως από την πολύτιμη αυτή στήριξη, μου έδωσαν όλα τα εφόδια ώστε να γίνω ένας σωστός άνθρωπος και αυτό είναι κάτι που δεν μαθαίνετε, αλλά μεταδίδεται. Το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτή την εργασία.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε στα γραμμικά και στα μη-γραμμικά συστήματα, καθώς και στο διάγραμμα φάσεων. Όπου οι υπόχωροι του γραμμικού συστήματος αντιστοιχούν σε φασικές τροχιές ασυμπτωτικές προς το σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος. Θα κάνουμε χρήση του επιπέδου φάσης για να μελετήσουμε τα μη-γραμμικά συστήματα. Θα μελετήσουμε εξισώσεις δευτέρου βαθμού και πιο συγκεκριμένα την εξίσωση του Νεύτωνα για την κίνηση ενός υλικού σημείου σε ένα μονοδιάστατο μέσο. Θα αναφερθούμε στις κρίσιμες καμπύλες στάθμης καθώς και στις ομοκλινείς και ετεροκλινείς τροχιές. Καθώς και στις ακολουθίες Poincare για αυτόνομα συστήματα και στα τμήματα Poincare για μη-αυτόνομα συστήματα.

Τα Χαμιλτονιανά συστήματα αποτελούν έναν μεγάλο κλάδο των δυναμικών συστημάτων με συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία και σημαντικές εφαρμογές κυρίως σε θέματα Θεωρητικής Φυσικής. Θα αναφερθούμε μόνο σε συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας. Στην ενότητα αυτή θα μιλήσουμε για διαταραγμένα συστήματα καθώς και για διαταραγμένα Χαμιλτονιανά συστήματα, το σύστημα ονομάζεται διαταραγμένο σύστημα ή σύστημα κοντά στην ολοκληρωσιμότητα. Καθώς και στις τομές και τροχιές Poincare.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## 1.1 Από το γραμμικό στο μη γραμμικό σύστημα. Διάγραμμα φάσεων.

Κοντά στα σημεία ισορροπίας μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξέλιξη του συστήματος με το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα. Δίνει όμως πράγματι το γραμμικό σύστημα σωστή πληροφορία για την εξέλιξη του γραμμικού συστήματος ;

### Παράδειγμα 1:

Θα με μελετήσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  του συστήματος

$$\dot{x} = -y - x^3, \dot{y} = x - y^3$$

χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov  $V = x^2 + y^2$ .

**Λύση:** Βρίσκουμε

$$\dot{V} = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0,0)$$

και άρα το σημείο  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές . Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος έχει ιδιοτιμές  $\lambda = \pm i$  και συνεπώς υποδεικνύει (λανθασμένα!) ότι το  $(0,0)$  είναι κέντρο.

Είδαμε στο **παράδειγμα 1** ότι το γραμμικό σύστημα υποδεικνύει ότι το  $(0,0)$  είναι κέντρο και συνεπώς γύρω από αυτό θα πρέπει να έχουμε περιοδικές ταλαντώσεις των δυναμικών μεταβλητών .Όμως η ανάλυση κατά Lyapunov μας δείχνει ότι έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια ,δηλαδή οι τροχιές τείνουν προς το  $(0,0)$  .Το ερώτημα λοιπόν, που τίθεται είναι αν το φασικό διάγραμμα κοντά στα σημεία ισορροπίας είναι **τοπολογικά ισοδύναμο** με αυτό του γραμμικού συστήματος .Θα ορίσουμε την τοπολογική ισοδυναμία και θα αναφερθούμε στο **θεώρημα Hartman-Grobman**.

### Ορισμό 1:

Έστω ότι έχουμε δύο διαφορετικά δυναμικά συστήματα με λύσεις τις ροές  $\Phi(x,t)$  και  $\Psi(x,t)$  .Αν υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση  $h = E^2 \rightarrow E^2$  ,η οποία να είναι 1-1 (δηλαδή είναι αντιστρέψιμη) και η αντίστροφη της είναι συνεχής (αυτό ονομάζεται ομομορφισμός) τέτοια ώστε,

$$\Phi(h(x),t) = h(\Psi(x,t))$$

και αν η  $h$  διατηρεί τον προσανατολισμό της φασικής ροής ,τότε τα δύο δυναμικά συστήματα ονομάζονται **τοπολογικά ισοδύναμα**.

### Θεώρημα 1: Hartman-Grobman

Έστω το μη-γραμμικό σύστημα  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$  και μία περιοχή  $E$  του χώρου των φάσεων που περιέχει ένα σημείο ισορροπίας  $(x_0, y_0)$  στο οποίο αντιστοιχεί το

γραμμικοποιημένο σύστημα  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$ . Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές

του πίνακα  $A$  με πραγματικό μέρος διάφορο του μηδενός ( $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$  και  $\text{Re } \lambda_2 \neq 0$ ), τότε οι τροχιές του μη-γραμμικού συστήματος στην περιοχή  $E$  είναι τοπολογικά ισοδύναμες (ή συζυγείς) με τις τροχιές του γραμμικού συστήματος σε μια περιοχή του γύρω από το  $(0, 0)$ .

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα μπορεί ναδειχτεί ότι οι **υπόχωροι** του γραμμικού συστήματος αντιστοιχούν σε φασικές τροχιές, ασυμπτωτικές προς το σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος, που ονομάζονται **αναλλοίωτες πολλαπλότητες**. Μάλιστα οι αναλλοίωτες πολλαπλότητες εφάπτονται στους γραμμικούς υπόχωρους στο σημείο ισορροπίας.



**Εικόνα 1:** Φασική τοπολογία ενός γραμμικού (α) και ενός μη-γραμμικού (β) συστήματος γύρω από ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας (σάγμα).

Όταν μια πολλαπλότητα ξεκινά και τελειώνει στο ίδιο σημείο ισορροπίας (διαγράφει δηλαδή ένα βρόγχο στο φασικό χώρο) ονομάζεται **ομοκλινική πολλαπλότητα**. Αν μια πολλαπλότητα αρχίζει και τελειώνει σε διαφορετικά σημεία ισορροπίας τότε ονομάζεται **ετεροκλινική πολλαπλότητα**.

Συμπερασματικά, και τα σημεία ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος χαρακτηρίζονται ως σαγματικά, κόμβοι, εστίες και κέντρα. Αν όλες οι ιδιοτιμές του γραμμικού συστήματος έχουν πραγματικό μέρος αρνητικό,  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ευσταθές** ενώ, αν έστω και μία ιδιοτιμή έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **γραμμικά ασταθές**. Επιπλέον, το σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος, του πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , ονομάζεται **υπερβολικό**

,δηλαδή υπερβολικά σημεία χαρακτηρίζονται τα σάγματα, οι κόμβοι και οι εστίες, όχι τα κέντρα. Άρα το θεώρημα Hartman-Grobman ισχύει μόνο για την γειτονία των υπερβολικών σημείων.

## 1.2 Συντηρητικά συστήματα δεύτερης τάξης.

### 1.2.1 Καμπύλες στάθμης- Η εξίσωση του Νεύτωνα.

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε χρήση του επιπέδου φάσης για να μελετήσουμε μη γραμμικά συστήματα. Ξεκινούμε με εξισώσεις δευτέρου βαθμού ,συγκεκριμένα την εξίσωση του Νεύτωνα για την κίνηση ενός υλικού σημείου σε ένα μονοδιάστατο μέσο ,τις οποίες στη συνέχεια θα γράψουμε στη μορφή συστήματος.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' - f(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

όπου η  $f$  είναι μία συνάρτηση  $C^1$ . Γράφουμε την (1.2.1) σε μορφή συστήματος:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Καλούμε τις ποσότητες

$$T = \frac{1}{2}(x')^2 = \frac{1}{2}x_2^2 \text{ Κινητική Ενέργεια}$$

$$U = -\int_0^x f(\xi) d\xi \text{ Δυναμική Ενέργεια}$$

$$H = T + U \text{ Ολική Μηχανική Ενέργεια}$$

Το επόμενο θεώρημα είναι η διατύπωση της Αρχής διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας;

#### Θεώρημα 2:(Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας).

Έστω η λύση  $(x_1(t), x_2(t))$  του συστήματος (1.2.2). Τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{2}x_2^2(t) + U(x_1(t)) = \frac{1}{2}x_2^2(0) + U(x_1(0)). \quad (1.2.3)$$

#### Απόδειξη:

Έχουμε για κάθε  $t$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}x_2^2(t) + U(x_1(t)) \right] = x_2x_2' + U'(x_1)x_1'$$

από την (1.2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} &= x_2f(x_1) - f(x_1)x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα (1.2.2) είναι Χαμιλτονιανό

$$x_1' = \frac{\partial H}{\partial x_2}, x_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad (1.2.4)$$

με Χαμιλτονιανή  $H$  που δίνεται από την

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi.$$

Το **θεώρημα 2**: διατυπώνεται ισοδύναμα

$$H(x_1(t), x_2(t)) = H(x_1(0), x_2(0)).$$

**Ορισμός 2:**

Η **Καμπύλη στάθμης**  $H_c$  της συνάρτησης  $H$  ορίζεται ως το σύνολο

$$H_c = \{(x_1, x_2) / H(x_1, x_2) = c\},$$

όπου  $c$  πραγματική σταθερά.

Τα **σημεία ισορροπίας**  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  του (1.2.2) εξ ορισμού δίνονται από τις εξισώσεις

$$\bar{x}_2 = 0, f(\bar{x}_1) = 0,$$

και από την (1.2.4) προκύπτει ότι συμπίπτουν με τα **κρίσιμα σημεία** της  $H$ , δηλαδή

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \frac{\partial H}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0.$$

## 1.2.2 Κρίσιμες Καμπύλες Στάθμης – Ομοκλινείς και Ετεροκλινείς Τροχιές.

Θεωρούμε την περίπτωση που η  $c$  είναι κρίσιμη τιμή αλλά υποθέτουμε ότι δεν είναι εκφυλισμένη:

$$U(a) = c, U'(a) = 0, U''(a) \neq 0,$$

**Λήμμα 1:(Morse)**

Έστω  $F(x)$  συνάρτηση  $C^3$  ορισμένη σε περιοχή  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  του  $x=0$ , με  $F(0) = F'(0) = 0$  και  $F''(0) \neq 0$ . Τότε υπάρχει  $C^1$  αλλαγή μεταβλητών  $x = h(y)$  με

$$h'(0) = \sqrt{\frac{2}{F''(0)}} \neq 0 \quad (1.2.5)$$

τέτοια ώστε για  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  ισχύει η σχέση

$$F'(x) = F'(h(y)) = (\text{sign} F''(0)) y^2.$$

**Παρατήρηση 1:**

Έστω  $F(x)$  συνάρτηση  $C^3$  ορισμένη σε περιοχή του  $x = \xi$  τέτοια ώστε  $F'(\xi) = 0$  και  $F''(\xi) \neq 0$ . Θεωρούμε για  $z = x - \xi$  την

$$\tilde{F}(z) = F(z + \xi) - F(\xi).$$

Για την οποία ισχύει ότι  $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0) = 0$  και  $\tilde{F}''(0) = F''(\xi) \neq 0$ , εφαρμόζοντας το

**Λήμμα 1** παίρνουμε

$$\tilde{F}(z) = (\text{sign} \tilde{F}''(0)) y^2$$

Ισοδύναμα

$$F(x) - F(\xi) = (\text{sign} F''(\xi)) y^2,$$

όπου

$$y = z(\varphi(z))^{\frac{1}{2}} = (x - \xi)(\varphi(x - \xi))^{\frac{1}{2}}$$

ή

$$y = z(-\varphi(z))^{\frac{1}{2}} = (x - \xi)(-\varphi(x - \xi))^{\frac{1}{2}},$$

με

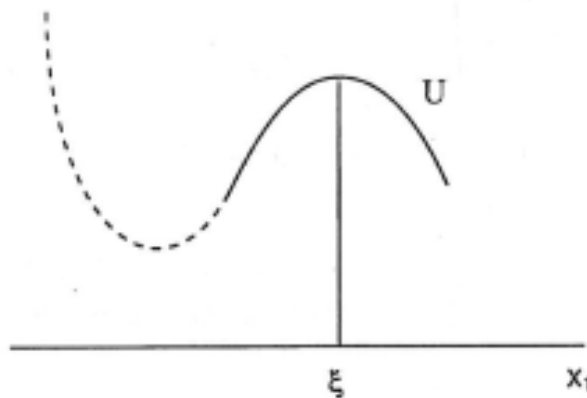
$$\varphi(z) = \int_0^1 t f(z) dt, f(z) = \tilde{F}'(z) = F'(z + \xi).$$

### Παράδειγμα 2:

Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

σε περιοχή του σημείου ισορροπίας  $(\xi, 0)$ , όπου  $\xi$  μη εκφυλισμένο τοπικό μέγιστο της  $U$ , δηλαδή  $U''(\xi) < 0$ .



Εικόνα 2: Μελέτη σε περιοχή μη εκφυλισμένου τοπικού μεγίστου.

**Λύση:** Υπενθυμίζουμε ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (1.2.2) δίνονται από τις εξισώσεις

$$x_2 = 0, f(x_1) = 0.$$

Έχουμε

$$U'(\xi) = f(\xi) = 0, U''(\xi) = f'(\xi) < 0.$$

ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{1}{2} x_2^2 + [U(x_1) - U(\xi)] = c - U(\xi) = \text{σταθερά} =: E. \quad (1.2.6)$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας  $(\xi, 0)$  αντιστοιχεί στην τιμή  $E = 0$ . Θέτουμε

$$F(x) = U(x) - U(\xi)$$

και εφαρμόζουμε την **παρατήρηση 1** που δίνει για  $x_1$  σε περιοχή του  $\xi$

$$U(x_1) - U(\xi) = -y^2,$$

Καθώς  $U'(\xi) < 0$ . Συνεπώς ως προς τις μεταβλητές  $y$  και  $x_2$  η

$$\frac{1}{2}x_2^2 + [U(x_1) - U(\xi)] = c - U(\xi) = \text{σταθερά} =: E.$$

παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}x_2^2 - y^2 = E. \quad (1.2.7)$$

η οποία παριστάνει οικογένεια υπερβολών για  $E \neq 0$ , με τις ασυμπτωτικές ευθείες

$$x_2 = \pm\sqrt{2}y, \quad (1.2.8)$$

που αντιστοιχούν στην τιμή  $E = 0$  (βλέπε Εικόνα 2).

Ως προς τις μεταβλητές  $y$  και  $x_2$  το αντίστοιχο σύστημα είναι γραμμικό,

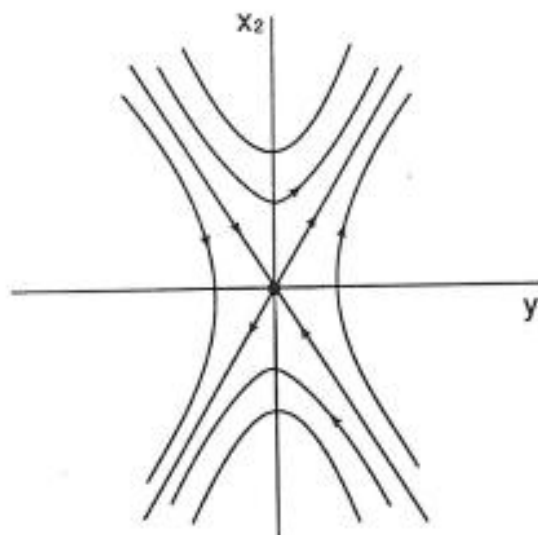
$$\begin{cases} y' = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{2}x_2^2 - y^2 \right) = x_2 \\ x_2' = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}x_2^2 - y^2 \right) = 2y \end{cases}$$

που σε μορφή πινάκων γράφεται

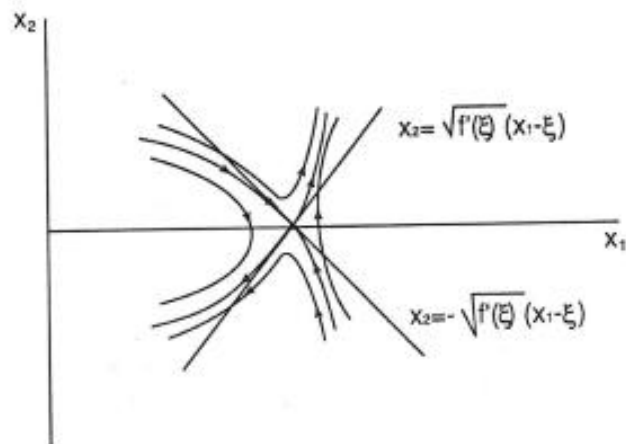
$$\begin{bmatrix} y \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_2 \end{bmatrix},$$

ή ισοδύναμα

$$y'' - 2y = 0,$$



**Εικόνα 3:** Καμπύλες στάθμης σε περιοχή τοπικού μεγίστου.



**Εικόνα 4:** Τοπικό διάγραμμα φάσης σε περιοχή μεγίστου. Οι ασύμπτωτες ευθείες της Εικόνας 3 και οι διαχωρίζουσες της Εικόνας 4 είναι αμφιδιαφορικά σύνολα.

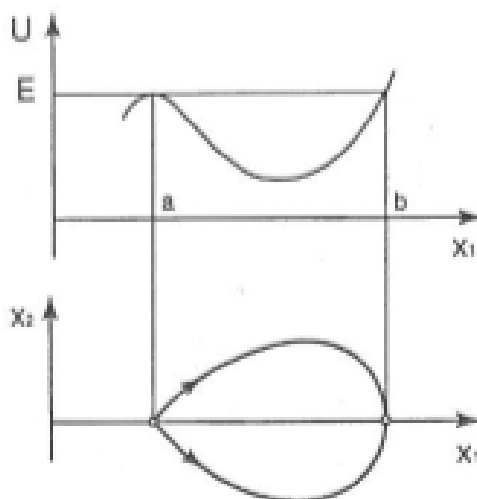
Η γενική λύση της οποίας είναι

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

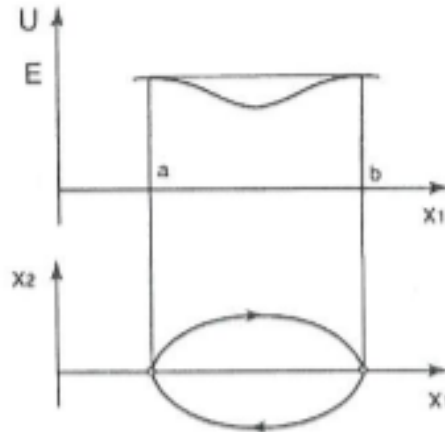
Το διάγραμμα φάσης του γραμμικού συστήματος δίνεται από την **Εικόνα 3**. Οι ασύμπτωτες ευθείες αντιστοιχούν στις λύσεις όπου  $c_1 = 0$  είτε  $c_2 = 0$ .

Το συμπέρασμα είναι ότι το διάγραμμα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος στο  $x_1, x_2$  - *επίπεδο* (βλέπε **Εικόνα 4**) γύρω από το σημείο  $(\xi, 0)$ , είναι αμφιδιαφορικό με το διάγραμμα του γραμμικού συστήματος, και ειδικά οι ασύμπτωτες ευθείες της **Εικόνας 3** αντιστοιχούν στις διαχωρίζουσες της **Εικόνας 4**. Ακριβώς αυτό εννοούσαμε με την τοπική ισοδυναμία.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις που αντιστοιχούν στα Εικόνας 5 και Εικόνας 6.



**Εικόνα 5:** Ομοκλινής τροχιά.



Εικόνα 6: Ετεροκλιής τροχιά.

### Η ομοκλιής περίπτωση (0)

Θεωρούμε διάστημα  $(a, b)$  και συνάρτηση  $U$  με τις ιδιότητες

$$U(a) = U(b) = c, U'(a) = 0, \\ U'(b) \neq 0, U''(a) < 0.$$

### Η ετεροκλιής περίπτωση (E)

Θεωρούμε διάστημα  $(a, b)$  και συνάρτηση  $U$  με τις ιδιότητες

$$U(a) = U(b) = c, U'(a) = U'(b) = 0, \\ U''(a) < 0, U''(b) < 0.$$

### Θεώρημα 3: (Ομοκλονικής Τροχιάς)

Έστω  $(x_1(t), x_2(t))$  λύση του συστήματος  $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases}$  με

$(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$ , όπου  $c$  όπως στην (O), με  $x_1^0 \in (a, b)$ . Τότε ισχύουν τα εξής (βλέπε Εικόνα 5):

$$(\alpha) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (a, 0)$$

και

$$(\beta) \quad H_c = \{(x_1(t), x_2(t)) / t \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, 0)\}.$$

### Θεώρημα 4: (Ετεροκλιής Τροχιάς)

Έστω  $(x_1(t), x_2(t))$  η λύση του συστήματος  $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases}$  με

$(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$ , όπου  $c$  όπως στην (E), με  $x_1^0 \in (a, b)$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

$$(\alpha) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (a, 0), \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (b, 0)$$

Και



$$(\beta) \quad H_c = \{x_1(t), \pm x_2(t) / t \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, 0) \cup (b, 0)\}.$$

**Παρατήρηση 2: (για το θεώρημα 4)**

Υπάρχουν δύο ετεροκλινείς τροχιές μία αύξουσα και μία φθίνουσα (βλέπε Εικόνα 6).

**Παράδειγμα 3:**

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' - x + \frac{3}{2}x^2 = 0. \quad (1.2.9)$$

Έχουμε

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2, U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3,$$

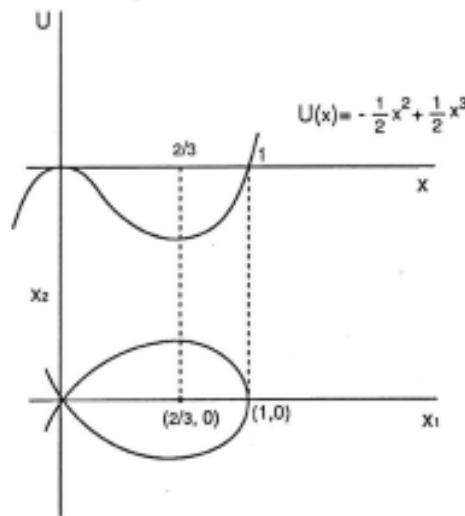
με  $U(0) = U(1) = 0$  (βλέπε Εικόνα 7).

Στο  $x = 0$  η  $U$  έχει μη εκφυλισμένο τοπικό μέγιστο. Συνεπώς το **Θεώρημα 3** εγγυάται την ύπαρξη ομοκλινούς τροχιάς. Συμβαίνει όμως να έχουμε έκφραση σε κλειστή μορφή για την ομοκλινή :

$$x(t) = 1 - \tanh^2 \frac{t}{2}.$$

**Λύση:** Η επαλήθευση έχει ως εξής: κάνοντας χρήση των τύπων

$$\frac{d}{dt}(\tanh t) = \operatorname{sech}^2 t, \frac{d}{dt}(\operatorname{sech} t) = -\operatorname{sech} t \tanh t \quad (1.2.10)$$



**Εικόνα 7:** Παράδειγμα:3.

έχουμε

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^4 \frac{t}{2} + \tanh^2 \frac{t}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \left[ \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} - 2 \tanh^2 \frac{t}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left( 1 - \tanh^2 \frac{t}{2} \right) \left[ 1 - 3 \tanh^2 \frac{t}{2} \right], \\ -x(t) &= -1 + \tanh^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

και

$$\frac{3}{2}x^2(t) = \frac{3}{2} \left[ 1 + \tanh^4 \frac{t}{2} - 2 \tanh^2 \frac{t}{2} \right],$$

συνεπώς η (1.2.10) επαληθεύεται. Στο επίπεδο φάσης η ομοκλινής τροχιά δίνεται από την

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left( 1 - \tanh^2 \frac{t}{2}, -\tanh \frac{t}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \right)$$

και ισχύουν τα όρια

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0).$$

### 1.3 Οι ακολουθίες Poincare

Εξετάζουμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = X(x, y), \dot{y} = Y(x, y)$$

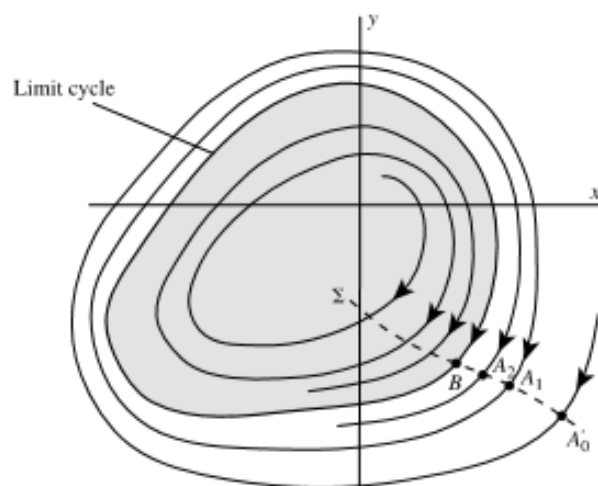
και το διάγραμμα φάσης στο  $(x, y)$  επίπεδο. Έστω  $\Sigma$  να είναι σημείο του επιπέδου με την ιδιότητα να κόβει κάθε τροχιά φάσης εγκάρσια σε κάποιο σημείο του διαγράμματος φάσης, το οποίο δεν είναι εφαπτόμενο σε μια διαδρομή φάσης. Ονομάζεται **τμήμα Poincare** του διαγράμματος φάσης. Σκεφτόμαστε ένα σημείο  $AO: (x_0, y_0)$  στο τμήμα Poincare  $\Sigma$  που εμφανίζεται στην Εικόνα 8. Αν ακολουθήσουμε την διαδρομή φάσης  $AO$  προς την κατεύθυνση της ροής τότε το επόμενο κόβει την τομή  $\Sigma$  με την ίδια λογική στο  $A_1: (x_1, y_1)$ .

Αυτό το σημείο είναι το **πρώτο αποτέλεσμα** του **χάρτη Poincare** του τμήματος  $AO$ . Όμως, δεν συνεπάγεται ότι ένα τέτοιο σημείο πρέπει να υπάρχει. Αλλά, αν υπάρχει τότε ονομάζεται πρώτο αποτέλεσμα. Αν συνεχίσουμε στην διαδρομή φάσης τότε το πρώτο αποτέλεσμα του  $A_1$  είναι  $A_2: (x_2, y_2)$  (βλέπε Εικόνα 8). Μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτή την διαδικασία σαν μια απεικόνιση η οποία για κάθε επιλεγμένο  $\Sigma$  και για κάθε  $(x, y)$  πάνω στο  $\Sigma$ ,

$$(x', y') = P_{\Sigma}(x, y)$$

Οπότε  $(x', y')$  είναι το σημείο του πρώτου αποτελέσματος της διαδρομής  $(x, y)$ . Για διαδοχικές "επιστροφές" ξεκινάμε από  $(x_0, y_0)$ . Χρησιμοποιούμε την παράσταση

$$(x_2, y_2) = P_{\Sigma}(P_{\Sigma}(x_0, y_0)) = P_{\Sigma}^2(x_0, y_0), \quad (x_n, y_n) = P_{\Sigma}^n(x_0, y_0)$$



**Εικόνα 8:** Οι πρώτες "επιστροφές" που σχετίζονται με έναν οριακό κύκλο, και την τομή Poincare,  $A_0, A_1, \dots$  είναι οι πρώτες "επιστροφές" της  $A_0, A_1, \dots$  με την ίδια έννοια στις  $\Sigma$  και  $B$ , οι οποίες είναι τα σταθερά σημεία τα όποια πλησιάζουν την παραπάνω ακολουθία.

Ο χρόνος έναρξης για μια ακολουθία των πρώτων αποδόσεων είναι άσχετη, εφόσον το σύστημα είναι αυτόνομο. Σημειώνουμε ότι η χρονική περίοδος μεταξύ "επιστροφών" δεν είναι γενικά συνεχής.

Η **Εικόνα 8** παρουσιάζει ένα συνεχές κύκλο ορίου με εσωτερικές και εξωτερικές διαδρομές φάσης που στρέφονται προς τον κύκλο.

Στις "επιστροφές"  $A_1, A_2, \dots$  ξεκινάμε από το  $A_0$  προς  $\Sigma$  προσεγγίζοντας το σημείο  $B$  που είναι το σημείο τομής του οριακού κύκλου στο  $\Sigma$ . Μία όμοια προσέγγιση των αποδόσεων του  $B$  λαμβάνει χώρο εάν  $A_0$  είναι επάνω στο  $\Sigma$  αλλά και μέσα στον οριακό κύκλο. Εάν το  $B$  επιλέγεται ως το αρχικό σημείο του  $\Sigma$  τότε όλες οι "επιστροφές" που είναι στο  $B$ :  $B$  είναι ένα **σταθερό σημείο που καθορίζει την  $P_\Sigma$** . Όλες είναι ακολουθίες που ξεκινούν κοντά στο  $\Sigma$ , αλλά το αποτέλεσμα είναι κοντά στο  $B$ , καθώς πλησιάζουμε στο  $B$ . Η συμπεριφορά αυτών των αποτελεσμάτων δείχνει ότι το  $B$  είναι ευσταθή σταθερό σημείο. Σε γενικές γραμμές ονομάζουμε την  $A_0, A_1, \dots$  **ακολουθία Poincare** (δεν είναι απαραίτητο να είναι σταθερή).

Μπορούμε να δούμε από την Εικόνα 8, ότι το  $B$  θα μπορούσε να έχει εναλλακτική τομή  $\Sigma$  και επίσης, ότι κάθε σημείο στο οριακό κύκλο είναι ένα πιθανό σημείο επαφής ενός τέτοιου τμήματος.

#### Παράδειγμα 4:

Να κατασκευάσετε την απεικόνιση των πρώτων επιστροφών  $P_\Sigma$  για των διαφορικών εξισώσεων .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - x\sqrt{(x^2 + y^2)} , \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y\sqrt{(x^2 + y^2)} , \end{aligned}$$

Θεωρούμε ως  $\Sigma$  τον θετικό ημιάξονα  $y=0, x>0$  με αρχικό σημείο το  $(x_0, 0)$  με  $(x_0 < \mu)$ . Στις πολικές συντεταγμένες οι εξίσώσεις γίνονται

$$\dot{r} = r(\mu - r), \dot{\theta} = -1$$

με λύσεις

$$r = \mu r_0 \{r_0 + (\mu - r_0)e^{-\mu t}\}, \quad \theta = -t + \theta_0$$

Με αρχικές συνθήκες  $r(0) = r_0$  και  $\theta(0) = \theta_0$ . Από την διαφορική εξίσωση ως προς το  $r$  προκύπτει ότι  $r = \mu$  είναι ένας οριακός κύκλος ο οποίος είναι ευσταθής. Απαλείψουμε το  $t$  και οι τροχιές δίνονται από την σχέση

$$r = \mu r_0 \left\{ r_0 + (\mu - r_0) e^{\mu(\theta - \theta_0)} \right\}$$

Η αρχική συνθήκη αντιστοιχεί στο  $\theta_0 = 0$  και κάθε επιστροφή του αρχικού σημείου γίνεται όταν διαγράφονται γωνίες  $\theta = -2\pi, -4\pi, \dots$ . Έτσι με αρχικό σημείο  $(r_0, 0)$ , προκύπτει η ακολουθία

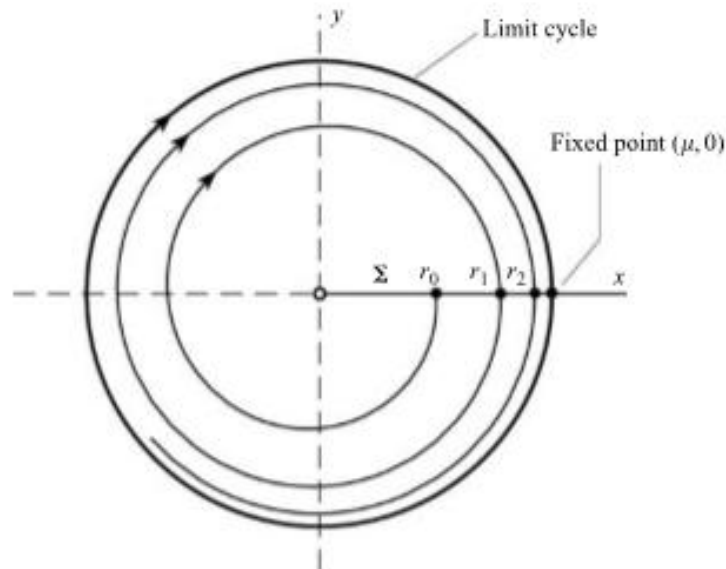
$$r_n = \mu r_0 / \left\{ r_0 + (\mu - r_0) e^{-\mu 2n\pi} \right\}, \theta_n = -2n\pi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.3.1)$$

Έχουμε ότι  $n \rightarrow \infty$  η ακολουθία των σημείων προσεγγίζει το σταθερό σημείο  $(\mu, 0)$ , όπως φαίνεται στην Εικόνα 9, που αντιστοιχεί στο σημείο τομής με τον οριακό κύκλο.

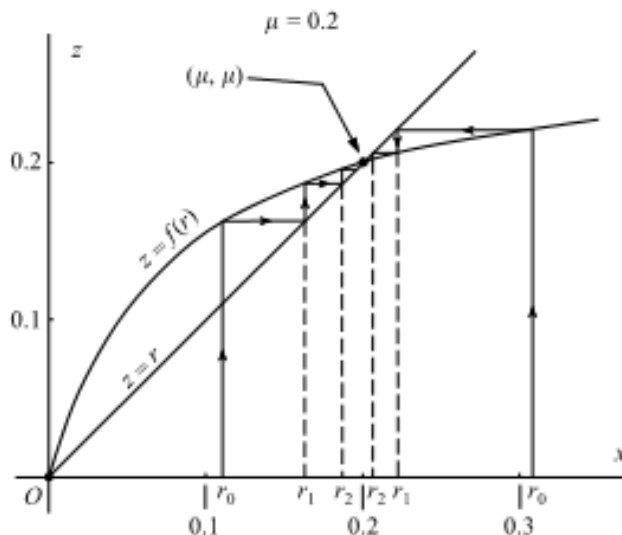
Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να μετατρέψουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης σε μορφή ακολουθίας

$$r_{n+1} = \frac{\mu r_0}{r_0 + (\mu - r_0) e^{-2(n+1)\mu\pi}} = \frac{\mu r_n}{r_n (1 - e^{-2\mu\pi})} = f(r_n), \quad (1.3.2)$$

υποστηρίζουμε ότι με την διαγραφή του  $r_0$  χρησιμοποιούμε και πάλι την εξίσωση (1.3.1). Η (1.3.2) είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης εξίσωσης για  $r_n$ . Ενώ γνωρίζουμε τη λύση  $r_n, n=0, 1, \dots$  σε αυτήν την περίπτωση, είναι κατατοπιστικό να



**Εικόνα 9:** Σύγκλιση της ακολουθίας  $r_n$  προς το σταθερό σημείο  $(\mu, 0)$ .



**Εικόνα 10:** Cobweb γράφημα για την ακολουθία  $\{r_n\}$  δίνεται από την (1.3.2) με  $\mu = 0.2$ .

δούμε πώς μπορούμε να την παριστάνουμε γραφικά. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 10 σχεδιάστε την καμπύλη  $z = f(r)$  και την γραμμή  $z = r$ . Τα **σταθερά σημεία** του τμήματος Poincare εμφανίζονται όπου η γραμμή και η καμπύλη τέμνονται δηλαδή όπου  $r$  ικανοποιεί την  $r = f_r$ , όπως περιμένουμε η λύση είναι  $r = 0$  και  $r = \mu$ . Η ακολουθία των τιμών του  $r$  ξεκινώντας από την  $r = r_0$  εμφανίζεται επίσης στην Εικόνα 10, που έχει κατασκευαστεί από τα cobwebs γραφήματα για  $r_0 < \mu$  και  $r_0 > \mu$  εμφανίζονται στην εικόνα ενώ η σταθερότητα του σταθερού σημείου υποδεικνύεται από τα cobwebs γραφήματα που συγκλίνουν προς το σημείο  $(\mu, \mu)$ . Περιγράφεται η διαδοχική σχεδίαση από την (1.3.2) που αντιστοιχεί στην  $P_\Sigma$  που αναφέρεται στην αρχή του του τμήματος.

### 1.3.1 Τμήματα Poincare για μη αυτόνομα συστήματα

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά του συστήματος μπορούν να αποκαλύψουν τους χάρτες Poincare ή τις ακολουθίες. Για παράδειγμα όπως έχουμε δει, σε αυτόνομα συστήματα περιοδικής λύσεις μπορούν να υπάρξουν όταν εμφανιστούν σταθερά σημεία, έτσι ώστε να διατηρούνται κάποιες χρήσιμες πληροφορίες εάν οι διαδρομές φάσεων της Εικόνας 9 ή 10 διαγράφονται και διατηρούνται μόνο οι κουκίδες του χάρτη Poincare. Αλλά για τα αυτόνομα συστήματα δεν υπάρχει ιδιαίτερο πλεονέκτημα χρησιμοποιώντας τον χάρτη των πρώτων "επιστροφών" οι διαδρομές μπορούν να σχεδιαστούν (αριθμητικά εάν είναι απαραίτητο) και τα διαγράμματα φάσης ερμηνεύονται χωρίς δυσκολία. Για τα μη-αυτόνομα συστήματα, τα διαγράμματα των τροχιών που προβάλλονται στο  $(x, y)$  επίπεδο εμφανίζονται ως "κόμποι" (ή "κουβάρι") από τεμνόμενες και αυτό-τεμνόμενες με καμπύλες. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι κάθε αρχική συνθήκη ορίζει μοναδική λύση η οποία δημιουργεί τροχιά η οποία για να απεικονιστεί ως μη-τεμνόμενη θα πρέπει το σύστημα να θεωρηθεί σε χώρο διάστασης κατά συν ένα μεγαλύτερη. Τα σημαντικά χαρακτηριστικά μπορεί να είναι εντελώς κριμένα σε ένα τέτοιο διάγραμμα, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι χάρτες Poincare για τον

εντοπισμό της βασικής κατασκευής όπως περιοδικών λύσεων που έχουν αναγκαστική ή υποαρμονική συχνότητα.

Στο πλαίσιο αυτό ,η έρευνα των περιοδικών λύσεων ,σχεδόν περιοδικών λύσεων και παρόμοια φαινόμενα είναι σε ένα σημαντικό βαθμό διερευνητική υπόθεση στην οποία ο υπολογισμός παίζει σημαντικό κομμάτι .Μια αναζήτηση για κρυμμένες περιοδικότητες όπως είναι οι υποαρμονικές περιόδους πραγματοποιείται καλύτερα ξεκινώντας με μια περίοδο στο μυαλό και έπειτα ψάχνετε για λύσεις με αυτή την περίοδο.

Σε αυτή την περίπτωση μία παραλλαγή του χάρτη Poincare είναι συνήθως πιο προνομακική αν αναζητούμενες λύσεις αναμένεται να έχουν περίοδο  $T$  ,τότε θα πρέπει να σχεδιάσουμε στο  $x, y$  επίπεδο μία σειρά από σημεία που υπολογίζονται κατά περιόδους  $T, 2T, 3T, \dots$  κατά μήκος των διαδρομών φάσης που ξεκινούν από διάφορες καταστάσεις και δείτε αν κάποιες από αυτές τις ακολουθίες δείχνουν ότι πλησιάζουμε σε μία περιοδική λύση .Αυτό δεν συμπίπτει με τον ορισμό ενός χάρτη Poincare, ο οποίος δεν περιλαμβάνει καμία αναφορά για χρονικά διαστήματα, αλλά διχοτομεί μίας διαδρομής φάσης που ερευνά με μία άλλη δεδομένη καμπύλη (το "τμήμα").Οι δύο διαδικασίες μπορούν να έχουν πλεονέκτημα για την ανάλυση (ειδικά σε πολυδιάστατες περιπτώσεις) να συγκεντρωθούν με τον τρόπο που προτείνεται από το ακόλουθο παράδειγμα .

Εξετάστε το μη αυτόνομο σύστημα πρώτης τάξης της ενότητας διαστάσεων

$$\dot{x} = -\frac{1}{8}x + \cos t \quad (1.3.3)$$

που έχει την γενική λύση

$$x = ce^{-t/8} + \frac{8}{65}(\cos t + 8\sin t).$$

Η δεξιά πλευρά της (1.3.3)έχει χρονική περίοδο  $2\pi$  .Στην πραγματικότητα αν το  $t$  αντικατασταθεί από το  $t + 2\pi$  σε όλη την εξίσωση παραμένει αμετάβλητη, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι όλες οι λύσεις έχουν περίοδο  $2\pi$ .Αν αρχίσουμε με μία δεδομένη αρχική κατάσταση και προχωρήσουμε δια μέσου ενός διαστήματος κατά μήκος  $2\pi$  τότε η κατάσταση στην οποία έφτασε είναι η αρχική κατάσταση για το επόμενο διάστημα, αλλά αυτή η δεύτερη κατάσταση θα είναι διαφορετική από την πρώτη.

Με την ακόλουθη τεχνική, ( η εξίσωση 1.3.3)μπορεί να γραφτεί ως αυτόνομο σύστημα μιας διάστασης πιο πάνω. Ορίζουμε μία νέα μεταβλητή  $\theta$  για να πάρει την θέση του  $t$  και να ξαναγράψουμε τις σχέσεις ως

$$\dot{x} = -\frac{1}{8}x + \cos \theta \quad (1.3.4)$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (1.3.5)$$

(η ανεξάρτητη μεταβλητή εξακολουθεί να είναι το  $t$  ).Είναι επίσης απαραίτητο να προσδιοριστεί το  $\theta$  σε σχέση με το  $t$

$$\theta(0) = 0 \quad (1.3.6)$$

Τα δισδιάστατα συστήματα (1.3.4) και (1.3.5) έχουν τώρα την ιδιότητα ότι αν αντικαθιστούν από  $\theta + 2n\pi$  για  $\theta$ , το  $n$  είναι ένας ακέραιος αριθμός τότε το σύστημα παραμένει αμετάβλητο .Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα μπορούμε να σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση των υπολογιζόμενων τιμών του  $x$  σε ίση χρονική

περίοδο  $2\pi$  σε έναν χάρτη Poincare που σχετίζεται με (1.3.4) και (1.3.5) όχι σε ένα επίπεδο χώρο  $(x, y)$  αλλά σε κυλινδρική επιφάνεια. Ο χώρος κατασκευάζεται με την συλλογή λωρίδας.

$$-\infty < x < \infty, 0 < \theta \leq 2\pi$$

Από το επίπεδο  $(x, y)$  και τυλίγοντας γύρω από έναν κύλινδρο περιφέρειας  $2\pi$ , έτσι ώστε η πλευρά  $\theta = 0$  να συνδέεται στην πλευρά  $\theta = 2\pi$ . Σε αυτό το διάστημα και για όλες τις φορές, οι εξισώσεις (1.3.4) και (1.3.5) καθώς και οι λύσεις τους αντιπροσωπεύονται από καμπύλες που τυλίγονται γύρω από τον κύλινδρο και κατά την διάρκεια των διαδοχικών λύσεων οι οποίες περιστρέφονται περισσότερο από μια φορά και ενώνονται ομαλά (βλέπε Εικόνα 1.3.4). Η περιοδική μεταβλητή  $\theta$  είναι μία γωνία, η οποία εξηγεί την επιλογή της γραφικής παράστασης.

Με παρόμοιο τρόπο το δισδιάστατο σύστημα

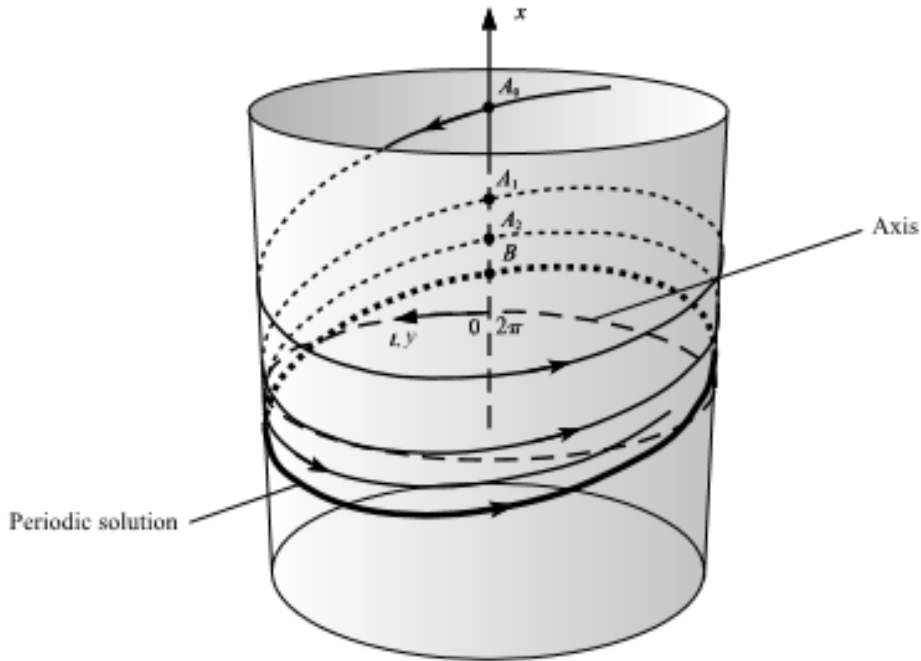
$$\dot{x} = X(x, y, t), \dot{y} = Y(x, y, t)$$

όπου τα  $X$  και  $Y$  έχουν περιοδική περίοδο  $T$  σε  $t$ , είναι ισοδύναμο με το σύστημα

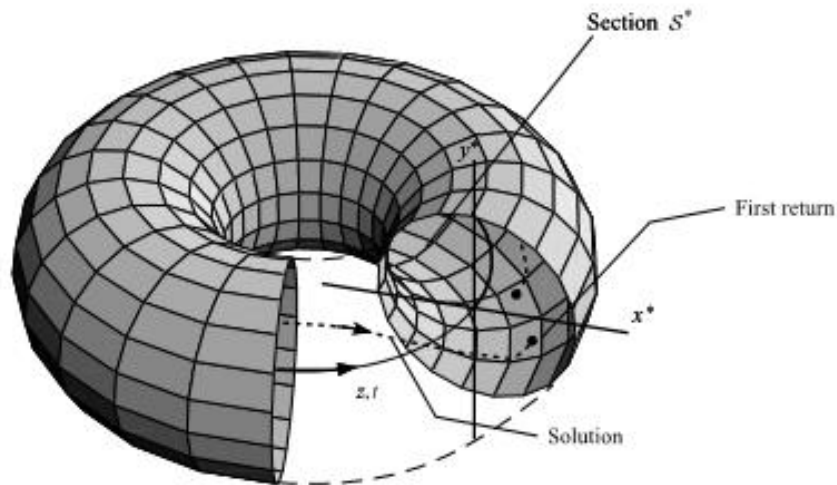
$$\dot{x} = X(x, y, (2\pi/T)\theta), \dot{y} = Y(x, y, (2\pi/T)\theta), \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$$

όπου  $X$  και  $Y$  είναι τώρα  $2\pi$  περιοδικά στο  $\theta$ . Στην πραγματικότητα ο χρόνος αναδιατάσσεται για να εξασφαλιστεί ότι το  $t$  είναι ακόμη μία γωνιακή μεταβλητή. Αυτό μπορεί να απεικονιστεί ως ένας "Τοροειδής χώρος" για τον οποίο τα επίπεδα  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  (ισοδύναμο με το  $t = 0, T, 2T, \dots$ ) έχουν κλίση ώστε να συμπίπτουν με το  $\theta = 0$ , το οποίο χρησιμεύει ως τμήμα για μία ακολουθία Poincare.

Η  $\theta$  καμπύλη στην οποία σχεδιάζονται οι τιμές των  $x$  και  $y$  για το  $\theta$  είναι μεταξύ του  $2\pi n$  και  $2\pi(n+1)$  στο  $\theta$  μεταξύ  $0$  και  $2\pi$  δηλώνεται συνήθως με το σύμβολο  $S$ . Ο τοροειδής χώρος φάσης είναι  $R^2 \times S$ . Μαθηματικά το λέμε αυτό  $\theta = 2\pi t/T \pmod{2\pi}$ . Γενικά, μία ακολουθία Poincare για το τμήμα  $\theta = \theta_0$  με αρχικές συντεταγμένες εκκίνησης  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  θα αποτελείται από την ακολουθία ζευγών συντεταγμένων  $(x(t_0, nT), y(t_0, nT))$  στο επίπεδο  $(x, y)$ .



**Εικόνα 11:** Η λύση (1.3.3) είναι σχεδιασμένη σε κύλινδρο περιφέρειας  $2\pi$ . Στο τμήμα  $y = 0$  (που περιλαμβάνει  $t = 2\pi, 4\pi, \dots$ ) ο χάρτης Poincare είναι η ακολουθία  $A_0, A_1, A_2, \dots$  με το οριακό σημείο  $B$  στην περιοδική λύση  $x = \frac{8}{65}(\cos t + 8 \sin t)$ .

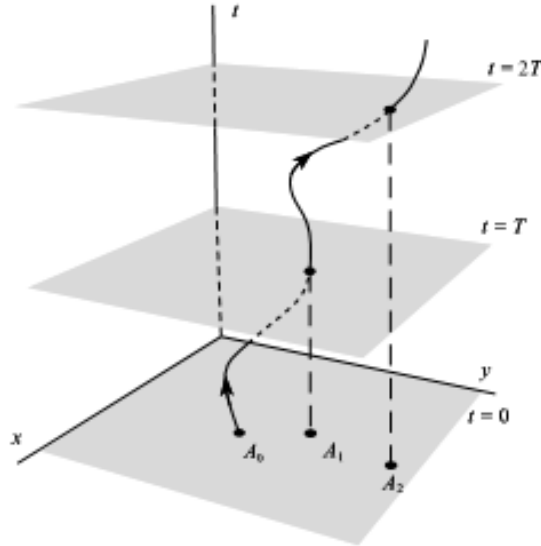


**Εικόνα 12:** Ένας ανοιχτός κόμβος ανοίγει για να δείξει την προβολή  $S^*$  στο επίπεδο  $(x^*, y^*)$ .

Εάν το διάγραμμα φάσης καταλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο  $(x, y)$ , τότε δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε μια απεικόνιση της ροής. Ωστόσο μπορεί να σχεδιαστεί εάν το  $(x, y)$  επίπεδο χαρτογραφηθεί πάνω στο διαμετρικό επίπεδο  $(x^*, y^*)$  χρησιμοποιώντας τον ημισφαιρικό μετασχηματισμό του τμήματος 3.3. Ο χάρτης Poincare εμφανίζεται στην συνέχεια ως μια εγκάρσια τομή  $S^*$  ενός “καρουλιού” ο οποίος είναι ένας δίσκος ακτίνας μονάδας όπως φαίνεται στην Εικόνα 12.



Μια εναλλακτική μέθοδος προβολής μίας ακολουθίας σημείων Poincare που λαμβάνεται σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα  $T$  κατά μήκος μιας διαδρομής φάσης είναι να αφήσουμε τον χρόνο  $t$  να είναι ο τρίτος (κάθετος) άξονας. Πάρτε τα τμήματα  $t=0, t=T, t=2T, \dots$  και στη συνέχεια προβάλλεται τα σημεία για μια συγκεκριμένη διαδρομή φάσης πίσω στο



**Εικόνα 13:** Οι πρώτες επιστροφές που ελήφθησαν από τα τμήματα  $t=0, t=T, t=2T, \dots$  στο χώρο  $(x, y, t)$ .

επίπεδο  $t=0$  όπως φαίνεται στο Εικόνα 13. Προφανώς οποιασδήποτε άλλος χρόνος έναρξης  $t=t_0$  με τα χρονικά βήματα του  $T$  μπορεί να επιλεγεί όπως περιγράφεται παραπάνω.

### Παράδειγμα 5:

Βρείτε τις ακολουθίες Poincare με  $T=2\pi$  θεωρώντας ως τομή  $\Sigma$  τον οριζόντιο άξονα  $\theta=0$  για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες και εντοπίστε το αντίστοιχο σταθερό σημείο για την μη-αυτόνομη εξίσωση

$$\ddot{x} + 3\dot{x} = 10\cos t$$

στο επίπεδο φάσης για το οποίο  $\dot{x} = y$ .

Όταν εισάγουμε μία νέα μεταβλητή  $\theta = t$  (στην περίπτωση αυτή  $T=2\pi$ ), το σύστημα παίρνει την αυτόνομη μορφή

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -2x - 3y + 10\cos \theta, \dot{\theta} = 1 \text{ με } \theta(0) = 0,$$

και μία ακολουθία Poincare που ορίζεται από επιστροφές για  $t=0, 2\pi, \dots$  προκύπτει ως ακολουθία σημείων όταν η τροχιά τέμνει το  $(x, y)$  επίπεδο. Χρησιμοποιούμε πάλι την λύση της διαφορικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες  $x = x_0, y = y_0$

$$x = (-5 + 2x_0 + y_0)e^{-t} + (4 - x_0 - y_0)e^{-2t} + \cos t + 3\sin t$$

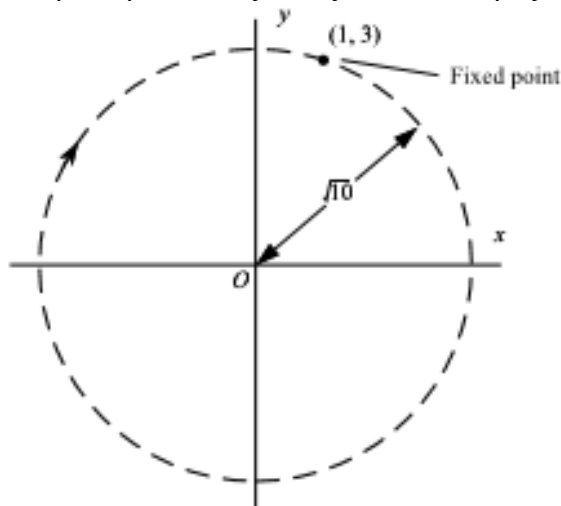
$$y = -(-5 + 2x_0 + y_0)e^{-t} - 2(4 - x_0 - y_0)e^{-2t} - \sin t + 3\cos t.$$

Η ακολουθία που αρχίζει από το  $(x_0, y_0)$  στο επίπεδο  $\theta=0$  δίνεται από το σύστημα

$$x_n = (-5 + 2x_0 + y_0)e^{-2n\pi} + (4 - x_0 - y_0)e^{-4n\pi} + 1$$

$$y_n = -(-5 + 2x_0 + y_0)e^{-2n\pi} - 2(4 - x_0 - y_0)e^{-4n\pi} + 3$$

για  $n = 1, 2, \dots$ . Καθώς  $n \rightarrow \infty$ , βλέπουμε ότι  $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 3)$  ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες  $(x_0, y_0)$ . Αυτό είναι το σταθερό σημείο της ακολουθίας Poincare. Δεν θα φανεί το ίδιο σημείο  $(1, 3)$  αν θεωρήσουμε μία αρχική χρονική στιγμή  $t = t_0$  έχει διαφορετική τιμή από το μηδέν ή από ένα άλλο πολλαπλάσιο των  $2\pi$ , αλλά ίσως να μην είναι απαραίτητο να διερευνηθούν όλες αυτές οι δυνατότητες δεδομένου ότι



**Εικόνα 14:** Σταθερό σημείο στο  $(1, 3)$  της περιοδικής λύσης του  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 10\cos t$  στο  $t = 0, 2\pi, \dots$ . Ο κύκλος είναι ο σταθερός οριακός κύκλος  $x = \cos t + 3\sin t, y = -\sin t + 3\cos t$ . Ξεκινώντας από το  $(x_0, y_0)$  η ακολουθία ακολουθεί πλησιάζοντας την σπειροειδή διαδρομή.

η ύπαρξη ενός μοναδικού σημείου, ανεξάρτητο από το  $(x_0, y_0)$  υποδηλώνει την δυνατότητα είτε ενός σημείου ισορροπίας είτε μίας κλειστής διαδρομής της περιόδου  $2\pi$  ή ενός ολοκληρωμένου πολλαπλάσιου του  $2\pi$ . Στην τελευταία περίπτωση περιλαμβάνει μία αρχική προϋπόθεση για τον υπολογισμό ολόκληρου του κύκλου.

### Παράδειγμα 6:

Βρείτε την ακολουθία Poincare με σταθερό χρονικό διάστημα  $2\pi$  για τη λύση του

$$64\ddot{x} + 16\dot{x} + 65x = 64\cos t$$

πού ξεκινάν από το  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . Υπολογίστε επίσης τις συντεταγμένες του σταθερού σημείου με περιοδικές λύσεις.

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι  $p_1 = -\frac{1}{8} + i$  και  $p_2 = -\frac{1}{8} - i$ . Για να βρούμε την υποχρεωτική περιοδική λύση

$$x = A\cos t + B\sin t$$

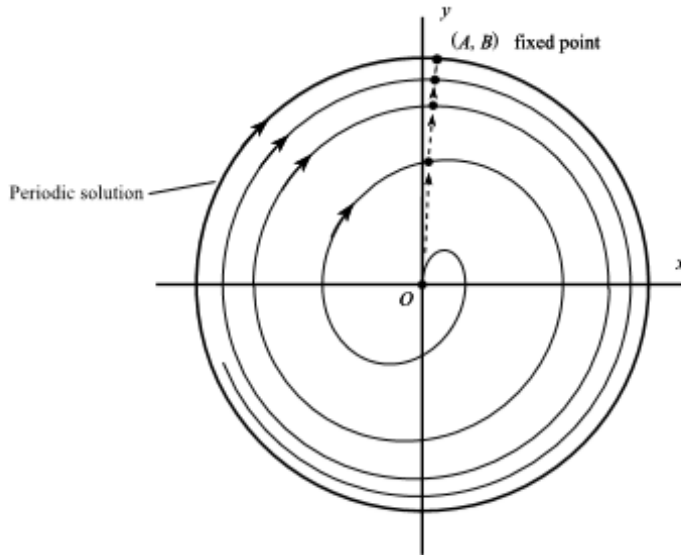
Κάνοντας αντικατάσταση προκύπτει ότι  $A = 64/257$  και  $B = 1024/257$ . Η γενική λύση είναι

$$x = e^{-t/8}(C\cos t + D\sin t) + (64\cos t + 1024\sin t)/257.$$

Οι αρχικές συνθήκες δηλώνουν ότι  $C = -64/257$  και  $D = -1032/257$ . Η ακολουθία των πρώτων αποδόσεων αυτής της λύσης δίνεται από

$$x_n = A \left( 1 - e^{-\frac{1}{4}n\pi} \right), y_n = B \left( 1 - e^{-\frac{1}{4}n\pi} \right), n = 1, 2, \dots$$

**Εικόνα 15:** Δείχνει την ακολουθία των πρώτων αποδόσεων από την αρχή. Ως  $n \rightarrow \infty$  η ακολουθία των κουκίδων προσεγγίζει το σταθερό σημείο στο  $(A, B)$ . Αυτό είναι ένα σημείο της διαδρομής φάσης που αντιστοιχεί στην εξαναγκασμένη περιοδική απάντηση  $A \cos t + B \sin t$ .



**Εικόνα 15:** Πρώτη επιστροφή για  $64\ddot{x} + 16\dot{x} + 65x = 64 \cos t, \dot{x} = y$  που λαμβάνονται στο  $t = 0, 2\pi, \dots$  ξεκινώντας από το  $(0, 0)$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## 2.1 Χαμιλτονιανά Συστήματα.

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα  $n$  βαθμών ελευθερίας περιγράφεται από  $2n$  δυναμικές μεταβλητές  $q_i, p_i, i=1, \dots, n$ , και τις εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i=1, 2, \dots, n, \quad (2.1.1)$$

όπου

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \quad (2.1.2)$$

η **συνάρτηση Χάμιλτον** του συστήματος. Οι μεταβλητές  $q_i, p_i$  καλούνται συζυγείς κανονικές μεταβλητές (γενικευμένες συντεταγμένες και γενικευμένες ορμές, αντίστοιχα). Η ιδιαίτερη δομή των εξισώσεων που παρουσιάζουν τα Χαμιλτονιανά συστήματα (2.1.1) ονομάζεται **συμπλεκτική δομή**.

Τα Χαμιλτονιανά συστήματα αποτελούν έναν μεγάλο κλάδο των δυναμικών συστημάτων με συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία και σημαντικές εφαρμογές κυρίως σε θέματα θεωρητικής Φυσικής. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μόνο περιγραφικά τα σημαντικότερα στοιχεία της δυναμικής τους και θα αναφερθούμε μόνο σε **συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας** ( $n=2$ ). Τα συστήματα με  $n > 2$  παρουσιάζουν ιδιαίτερα δυναμικά χαρακτηριστικά και η πλήρη μελέτη τους, έστω και υπολογιστικά, είναι ιδιαίτερα σύνθετη.

## 2.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Έστω ένα Χαμιλτονιανό σύστημα με  $n=2$  και  $H = H(x, y, p_x, p_y)$ . Ο χώρος φάσεων είναι τεσσάρων διαστάσεων και οι εξισώσεις του συστήματος θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned}$$

(2.1.3)

Σε μια μεγάλη κατηγορία μηχανικών συστημάτων, τα οποία περιγράφουν την κίνηση ενός υλικού σημείου μάζας  $m$  μέσα σε δυναμικό  $V = V(x, y)$ , η συνάρτηση Χάμιλτον ορίζεται ως εξής

$$H = T + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$$

(2.1.4)

όπου  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$  οι συνιστώσες της ορμής του υλικού σημείου. Αν εφαρμόσουμε τις (2.1.3) στην (2.1.4) τότε παίρνουμε τις διαφορικές εξισώσεις του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

### Σχόλιο 1:

Αν θεωρήσουμε μια αλλαγή μεταβλητών  $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (x', y', p_x', p_y')$  τότε η Χαμιλτονιανή γίνεται  $H = H(x', y', p_x', p_y')$  αλλά οι εξισώσεις (2.1.3) ισχύουν εφόσον ο μετασχηματισμός είναι **κανονικός**. Οι κανονικοί μετασχηματισμοί διέπονται από συγκεκριμένα κριτήρια. Επίσης στο παραπάνω σύστημα η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο και, συνεπώς, το σύστημα είναι αυτόνομο. Αν η συνάρτηση  $H$  εξαρτάται άμεσα από το χρόνο τότε με κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό μπορούμε να μετατρέψουμε το σύστημα σε αυτόνομο αλλά θα αυξηθούν οι βαθμοί ελευθερίας κατά ένα.

#### ι) Σημεία Ισορροπίας

Το διανυσματικό πεδίο του συστήματος θα ορίζεται ως

$$f = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, -\frac{\partial H}{\partial x}, -\frac{\partial H}{\partial y} \right\}$$

και τα σημεία ισορροπίας  $\Sigma(x^*, y^*, p_x^*, p_y^*)$  θα προκύπτουν ως ρίζες του αλγεβρικού συστήματος  $f = 0$ . Το γραμμικοποιημένο σύστημα θα περιγράφεται από τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_x \partial p_y} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_y} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_y} \end{pmatrix}.$$

(2.1.5)

Αποδεικνύεται ότι

α)  $\det|\mathbf{A}| = 1$

β) Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι δύο ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  τότε και οι  $-\lambda_1, -\lambda_2$  είναι επίσης ιδιοτιμές. Όποτε αν  $\lambda_1 \neq \alpha + i\beta$  τότε

$$\lambda_2 = \alpha + i\beta, \lambda_3 = -\alpha + i\beta, \lambda_4 = -\alpha - i\beta.$$

Συνεπώς, αν  $\alpha \neq 0$ , τότε θα υπάρχει ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος και άρα το σημείο ισορροπίας θα είναι ασταθές. Μάλιστα θα υπάρχει, αντίστοιχα, και ιδιοτιμή με πραγματικό μέρος. Έτσι αν οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές λέμε ότι το σημείο

ισορροπίας είναι υπερβολικό, ενώ αν είναι μιγαδικές έχουμε μιγαδική αστάθεια. Η μόνη περίπτωση να έχουμε ευστάθεια είναι αν  $\alpha=0$  (κέντρο) και το σημείο ισορροπίας ονομάζεται ελλειπτικό.

ίι) Αγκύλη Poisson και ολοκληρωσιμότητα

Η αγκύλη Poisson δύο συναρτήσεων  $A = A(x, y, p_x, p_y)$  και  $B = B(x, y, p_x, p_y)$  ορίζεται ως

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p_x} - \frac{\partial A}{\partial p_x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial p_y} - \frac{\partial A}{\partial p_y} \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (2.1.6)$$

Αν  $F = F(x, y, p_x, p_y)$  είναι μία συνάρτηση των κανονικών μεταβλητών τότε κατά μήκος των τροχιών του συστήματος η ολική παράγωγος ως προς τον χρόνο της  $F$  θα δίνεται από την σχέση

$$\frac{dF}{dt} = [F, H]. \quad (2.1.7)$$

Άρα η  $F = F(x, y, p_x, p_y)$  αποτελεί ένα **ολοκλήρωμα** της κίνησης αν

$$[F, H] = 0. \quad (2.1.8)$$

Προφανώς ισχύει πάντα ότι  $[H, H] = 0$  οπότε η συνάρτηση Χάμιλτον αποτελεί πάντα ολοκλήρωμα της κίνησης. Σημειώνουμε ότι, για το μηχανικό σύστημα (2.1.4) η  $H$  συμπίπτει με το ολοκλήρωμα της ενέργειας.

Αν ένα Χαμιλτονιανό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας διαθέτει ένα επιπλέον ολοκλήρωμα  $F = F(x, y, p_x, p_y)$  πλην της  $H$ , και το οποίο βέβαια είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της  $H$ , τότε λέμε ότι το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο κατά **Liouville**.

ίίι) Δυναμική ολοκληρώσιμων συστημάτων.

Έστω ένα ολοκληρώσιμο Χαμιλτονιανό σύστημα  $H = H(x, y, p_x, p_y)$ . Αποδεικνύεται ότι μπορούμε στο χώρο φάσεων (έστω τοπικά), όπου οι τροχιές είναι περατωμένες να ορίσουμε ένα κανονικό μετασχηματισμό σε νέες μεταβλητές  $J_1, J_2$ , οι οποίες ονομάζονται **δράσεις**, και τις συζυγείς τους  $w_1$  και  $w_2$ , οι οποίες ορίζονται με  $\text{mod } 2\pi$  και ονομάζονται **μεταβλητές γωνίας**. Σε αυτές τις μεταβλητές (action-angle variables) η ολοκληρώσιμη συνάρτηση Χάμιλτον γράφεται ως

$$H = H(J_1, J_2), \quad (2.1.9)$$

δηλαδή οι μεταβλητές γωνίας αποτελούν αγνοήσιμες συντεταγμένες (δεν εμφανίζονται μέσα στην Χαμιλτονιανή). Για την (2.1.9) οι εξισώσεις του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial w_1} = 0, \dot{w}_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \omega_1(J_1, J_2), \\ \dot{J}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial w_2} = 0, \dot{w}_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \omega_2(J_1, J_2). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι άμεσα ολοκληρώσιμες. Προκύπτει προφανώς ότι

$$J_1 = c_1, J_2 = c_2, \quad (2.1.11)$$

Όπου  $c_1, c_2$  σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Συνεπώς οι ποσότητες  $\omega_i = \omega_i(J_1, J_2)$  είναι επίσης σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και ονομάζονται **συχνότητες** της κίνησης. Έτσι, ολοκληρώνοντας και τις εξισώσεις για τις μεταβλητές γωνίας, παίρνουμε

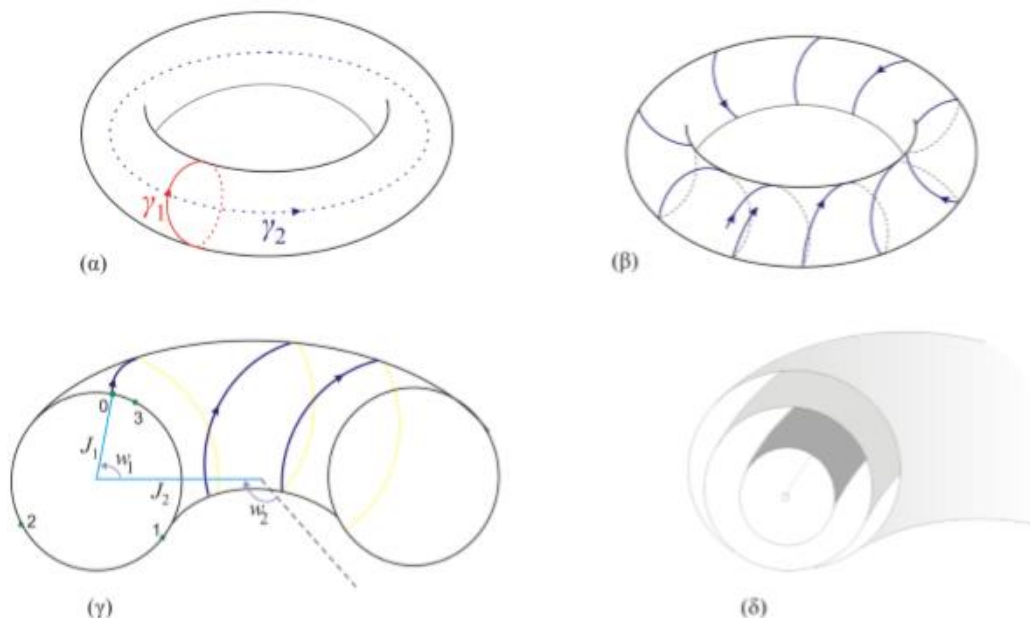
$$w_1 = \omega_1 t + c_3, w_2 = \omega_2 t + c_4, \quad (2.1.12)$$

όπου  $c_3, c_4$  είναι, επίσης, σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

### Σχόλιο 2:

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ένα ολοκληρώσιμο σύστημα μπορεί πάντα να επιλυθεί αρκεί να προσδιοριστεί ο κατάλληλος κανονικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει την αρχική Χαμιλτονιανή μορφή (2.1.9). Αν και η ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας κατά Liouville, εγγυάται την ύπαρξη ενός τέτοιου κανονικού μετασχηματισμού, στην πράξη δεν είναι εύκολο να βρεθεί ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Εξάλλου τα ολοκληρώσιμα συστήματα είναι πολύ σπάνια και, αν αφαιρέσουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις, περιορίζονται κυρίως μόνο σε συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας. Βέβαια, τα αυτόνομα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας είναι όλα ολοκληρώσιμα.

Στις μεταβλητές δράσης-γωνίας, οι εξισώσεις (2.1.11) και (2.1.12) περιορίζουν την τροχιά πάνω στην συμπαγή πολλαπλότητα του δισδιάστατου τόρου (σαμπρέλα). Οι δράσεις  $J_1, J_2$  αντιστοιχούν στις δύο ακτίνες των κύκλων  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ , οι οποίοι ορίζουν τον τόρο, ενώ οι γωνίες  $w_1$  και  $w_2$ , οι οποίες αυξάνονται γραμμικά, απεικονίζουν την θέση της τροχιάς πάνω στην επιφάνεια του τόρου. Οι τροχιές, λοιπόν, μπορούν να περιγραφούν ως περιελίξεις πάνω στο τόρο όπως δείχνει το Εικόνα 16:(β).



**Εικόνα 16:** α) ο τόρος όπως ορίζεται από τους δύο κύκλους  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  β) Περιέλιξη των τροχιών γύρω από ένα τόρο. γ) Οι μεταβλητές δράσης αντιστοιχούν στις ακτίνες του τόρου και οι μεταβλητές γωνίας (ως προς κάποιες γραμμές αναφοράς) δείχνουν την θέση του συστήματος πάνω στο τόρο. δ) Φωλιασμένα τόροι για  $J_2 = \text{σταθ.}$

Αν  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ , όπου  $p, q$  ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η τροχιά είναι περιοδική με περίοδο

$$T = p \frac{2\pi}{\omega_1} = q \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Πράγματι, για μια τροχιά σε ένα συγκεκριμένο τόρο, και για αρχικές γωνίες  $c_3 = w_{10}, c_4 = w_{20}$ , θα είναι

$$w_1(0) = w_{10}, w_1(T) = \omega_1 p \frac{2\pi}{\omega_1} + w_{10} = 2p\pi + w_{10} \equiv w_{10}$$

$$w_2(0) = w_{20}, w_2(T) = \omega_2 q \frac{2\pi}{\omega_2} + w_{20} = 2q\pi + w_{20} \equiv w_{20}$$

Για μια περίοδο λοιπόν θα έχουμε  $p$  στροφές γύρω από τον κύκλο  $\gamma_1$  και  $q$  στροφές γύρω από τον κύκλο  $\gamma_2$ . Αν όμως ο λόγος των συχνοτήτων δεν είναι ρητός, τότε η τροχιά θα περιελίσσεται στον τόρο χωρίς να κλείσει ποτέ και χωρίς να μπορεί να τέμνει τον εαυτό της. Θα γεμίσει, λοιπόν πυκνά, τον όρο και θα ονομάζεται ημπεριοδική τροχιά.

Ο λόγος

$$\rho(J_1, J_2) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

(2.1.13)

ονομάζεται **αριθμός περιστροφής** και χαρακτηρίζει τον εκάστοτε τόρο του ολοκληρώσιμου συστήματος. Οι τόροι με ρητό αριθμό περιστροφής ονομάζονται **συντονισμένοι τόροι**. Ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο ενός συντονισμένου τόρου θα έχουμε περιοδική κίνηση.

Αν θεωρήσουμε μία σταθερή τιμή για δράση  $J_2$  τότε, για διάφορες τιμές της δράσης  $J_1$ , έχουμε ένα σύνολο φωλιασμένων τόρων, όπως δείχνει η Εικόνα 16:(δ).

**iv)** Η τομή Poinscare του ολοκληρώσιμου συστήματος

Θεωρούμε ένα σύνολο φωλιασμένων τόρων για δεδομένη τιμή της δράσης  $J_2$  και ένα επίπεδο (τομή) το οποίο ορίζεται σε μία σταθερή γωνία  $w_2 = \text{σταθ.}$  και κόβει κάθετα τους φωλιασμένους τόρους. Καθώς περιελίσσεται η τροχιά γύρω από κάποιον τόρο, παρακολουθούμε τις τομές της τροχιάς με το παραπάνω επίπεδο και έτσι παίρνουμε μια ακολουθία σημείων,  $\Pi$ , πάνω στην τομή. Η ακολουθία αυτή αντιπροσωπεύει την τροχιά και ονομάζεται τομή Poinscare (δες Εικόνα 16:(γ)),

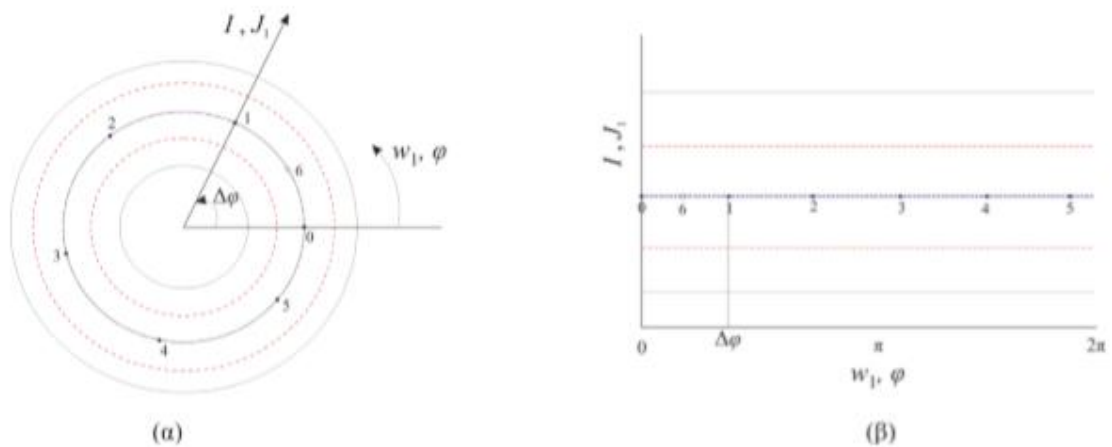
$$\Pi = \{(I_k, \varphi_k), w_2 = 2k\pi, k = 1, 2, 3, \dots, J_2 = \text{σταθ.}\}$$

(2.1.14)

όπου  $I_k$  η τιμή του  $J_1$  κατά την  $k$ -ιοστή τομή της τροχιάς με την τομή και  $\varphi_k$  η τιμή της γωνίας  $w_1$  κατά την ίδια τομή (δες Εικόνα 17). Η τομή των φωλιασμένων τόρων με το επίπεδο δίνει ένα σύνολο ομόκεντρων κύκλων. Για αρχικές συνθήκες πάνω σε έναν κύκλο τα σημεία του συνόλου  $\Pi$  θα ανήκουν στον ίδιο κύκλο (αναλλοίωτος κύκλος). Ο



κάθε τόρος του συνόλου θα έχει έναν αριθμό περιστροφής ο οποίος θα είναι συνάρτηση μόνο της δράσης  $J_1$  (ή, ισοδύναμα του  $I$ ).



**Εικόνα 17:** α) Η τομή των τόρων  $J_2 = σταθ.$  με το επίπεδο  $w_2 = σταθ.$  β) το ίδιο σε οριζόντια παρουσίαση.

Ο χρόνος μεταξύ δύο τομών της τροχιάς με το επίπεδο της τομής Poincare είναι  $t^* = 2\pi / \omega_2$ . Οπότε η γωνία  $\Delta\varphi = \varphi_{\kappa+1} - \varphi_\kappa$ , μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων στην τομή θα είναι

$$\Delta\varphi = \omega_1 t^* = \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\rho(I)$$

Αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο  $\Sigma_0$ , πάνω σε έναν συντονισμένο τόρο, όπου  $\rho = p/q$ ,  $p, q$  πρώτοι ακέραιοι μεταξύ τους, μετά από  $q$  τομές της τροχιάς με το επίπεδο, το σημείο  $\Sigma_q$  θα συμπίπτει με το σημείο  $\Sigma_0$ . Έτσι, η ακολουθία Poincare θα αποτελείται από  $q$  σημεία, γεγονός που υποδηλώνει την περιοδικότητα της τροχιάς με περίοδο  $T = 2q\pi / \omega_2$ . Αν ο αριθμός περιστροφής είναι άρρητος τότε τα σημεία της ακολουθίας Poincare γεμίζουν πυκνά τον αναλλοίωτο κύκλο και αυτό υποδηλώνει ημιπεριοδική τροχιά. Η κατανομή των συντονισμένων τόρων στο σύνολο των φωλιασμένων τόρων είναι ισοδύναμη με την κατανομή των ρητών αριθμών μέσα στους πραγματικούς.

Η ακολουθία (2.1.14) των σημείων της τομής Poincare δίνεται από την διακριτή απεικόνιση

$$\begin{aligned} I_{\kappa+1} &= I_\kappa, \\ \varphi_{\kappa+1} &= \varphi_\kappa + 2\pi\rho(I_\kappa). \end{aligned}$$

(2.1.15)

Η (2.1.15) ονομάζεται στροφική απεικόνιση και ουσιαστικά περιγράφει την δυναμική όλων των ολοκληρώσιμων Χαμιλτονιανών συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας.

### Σημείωση 1:

Όλες οι παραπάνω έννοιες γενικεύονται και σε συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας ( $n > 2$ ). Οι τόροι αποτελούν πολλαπλότητας διάστασης ίσης με  $n$

και βρίσκονται 2n-διάστασης χώρο φάσεων. Δεν μπορούμε, βέβαια, να έχουμε την γεωμετρική εποπτεία, όπως αυτήν που παρουσιάσαμε παραπάνω για n=2.

### Σημείωση 2:

Μια Χαμιλτονιανή  $H = H(x, y, p_x, p_y)$  ονομάζεται διαχωρίσιμη (separable) εάν μπορεί να γραφεί στη μορφή  $H = H_1(x, p_x) + H_2(y, p_y)$ . Τότε οι  $H_1$  και η  $H_2$  αποτελούν ολοκληρώματα της Χαμιλτονιανής και, συνεπώς, κάθε διαχωρίσιμη Χαμιλτονιανή είναι ολοκληρώσιμη.

## 2.3 Το διαταραγμένο σύστημα.

Θεωρούμε και πάλι το σύστημα  $\dot{x} = y, \dot{y} = ax - \beta x^3 + F_0 \sin \omega t$

με  $\alpha = -1$  και  $\beta = 1$ , αλλά τώρα με  $F_0 \neq 0$ . Η τομή Poincare του διαταραγμένου συστήματος παρουσιάζεται στην Εικόνα 19. Σε σύγκριση με το αδιατάρακτο σύστημα (Εικόνα 18) έχουμε τα εξής.

ι) Το σημείο ισορροπίας (0,0) στο αδιατάρακτο σύστημα αντιπροσωπεύει, ανεξάρτητα της επιλογής του  $\omega$ , με ένα σημείο στην ακολουθία Poincare,  $\Pi_0 = \{(0,0)\}$ . Κάτω από την επίδραση μιας σχετικά μικρής διαταραχής, με  $0 < F_0 < \varepsilon, (\varepsilon \ll 1)$  και για κάποια γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , αποδεικνύεται ότι, εν γένει, και στο διαταραγμένο σύστημα η ακολουθία  $\Pi_0$  συνεχίζει να υπάρχει ως ακολουθία  $\Pi_0 = \{(x_0, y_0)\}$ , με το σημείο της στη γειτονιά του (0,0). Τώρα όμως το  $(x_0, y_0)$  αντιπροσωπεύει μια περιοδική τροχιά περιόδου 1, δηλαδή με περίοδο  $T = 2\pi/\omega$  (κεντρικό σημείο στην Εικόνα 19).

ii) Οι τροχιές οι οποίες στο αδιατάρακτο σύστημα αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές με συχνότητα  $\omega_0$ , αλλά δεν είναι κοντά σε ρητό λόγο (με μικρό παρανομαστέι) με την συχνότητα της διέγερσης  $\omega$ , στο διαταραγμένο σύστημα θα αντιπροσωπεύονται με ακολουθίες Poincare άπειρων σημείων (ημιπεριοδικές ταλαντώσεις), οι οποίες, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , γεμίζουν πυκνά καμπύλες, οι οποίες ονομάζονται αναλλοίωτες καμπύλες. Ονομάζονται αναλλοίωτες διότι, αν ξεκινήσουμε με αρχικές συνθήκες πάνω σε μια τέτοια καμπύλη, όλα τα σημεία της ακολουθίας Poincare θα ανήκουν πάνω σε αυτήν την καμπύλη. Για μικρές διαταραχές, οι αναλλοίωτες καμπύλες γεωμετρικά βρίσκονται κοντά στις αντίστοιχες φυσικές καμπύλες του αδιατάρακτου συστήματος.

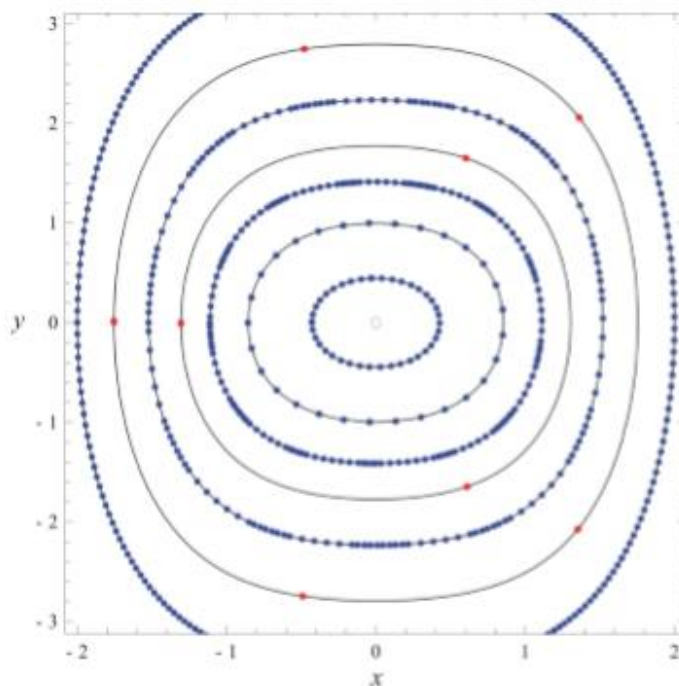
iii) Για αρχικές συνθήκες στις οποίες  $\omega_0 / \omega = p/q$  (p,q ακέραιοι), το αδιατάρακτο σύστημα αντιπροσωπεύεται από μια ακολουθία Poincare με q σημεία, τα οποία βρίσκονται πάνω στην αντίστοιχη φασική καμπύλη. Φυσικά, από όποιο σημείο αυτής της φασικής καμπύλης και αν ξεκινήσουμε θα πάρουμε και πάλι μια ακολουθία q σημείων. Άρα, στην τομή Poincare, για  $F_0 = 0$ , έχουμε άπειρες ακολουθίες q σημείων, οι οποίες ανήκουν στην ίδια φασική καμπύλη του αδιατάρακτου συστήματος.

Υπό την επίδραση της διαταραχής,  $F_0 \neq 0$ , αποδεικνύεται ότι, από όλες τις άπειρες q-περιοδικές λύσεις επιβιώνει μόνο ένας ζυγός αριθμός, συνήθως μόνο δύο, που η κάθε μια αντιπροσωπεύεται από q-σημεία. Στην οποία περιλαμβάνεται η περίπτωση

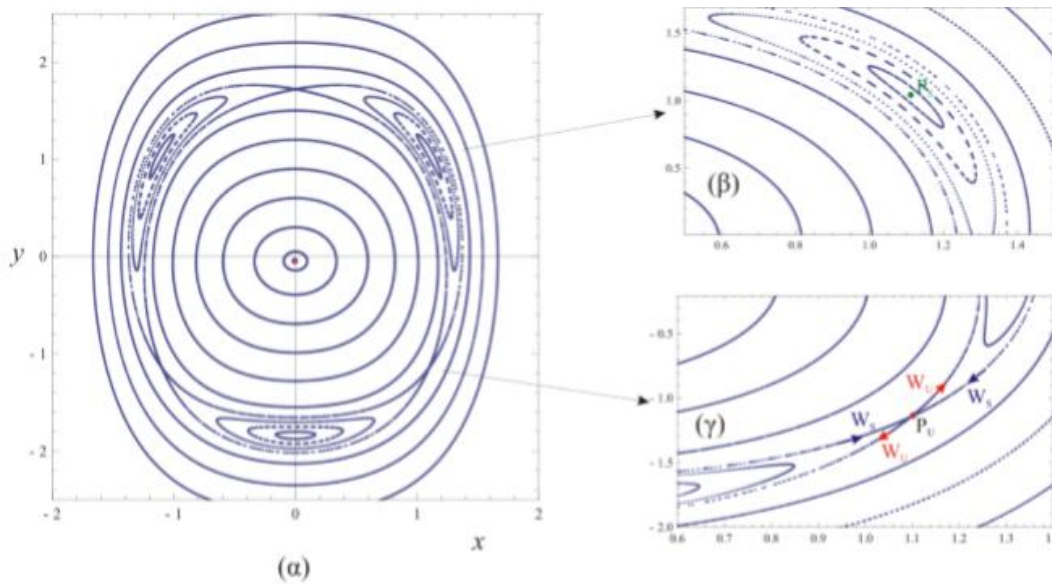
μιας φασικής καμπύλης με  $\omega_0 / \omega = 1/3 (q = 3)$ . Η μια περιοδική τροχιά που επιβιώνει της διαταραχής αντιπροσωπεύεται από τρία σημεία, τα οποία περικλείονται από σχεδόν ελλειπτικές αναλλοίωτες καμπύλες που ονομάζονται **νησίδες** (islands). Η τοπολογία του επιπέδου Poinscare στην γειτονιά αυτών των σημείων, μοιάζει με κέντρο (πάνελ β) και λέμε ότι έχουμε μία **ευσταθή περιοδική τροχιά** πολλαπλότητας 3. Η δεύτερη περιοδική τροχιά αντιπροσωπεύεται από τρία σημεία στο επίπεδο Poinscare, γύρω από τα οποία η τοπολογία των αναλλοίωτων καμπύλων μοιάζει με αυτήν του σάγματος. Μάλιστα αποδεικνύεται η ύπαρξη στην επιφάνεια Poinscare ευσταθών ( $W^s$ ) και ασταθών ( $W^u$ ) ασυμπτωτικών πολλαπλοτήτων, οι οποίες αποτελούνται από σημεία που τείνουν ασυμπτωτικά προς τα σημεία που αντιπροσωπεύουν την περιοδική τροχιά ή απομακρύνονται από αυτά, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια **ασταθή περιοδική τροχιά** πολλαπλότητας q.

### Σημείωση 3:

Η έννοια της ευστάθειας ορίζεται με σκεπτικό αντίστοιχο με αυτό που χαρακτηρίσαμε τα σημεία ισορροπίας.



**Εικόνα 18:** Το φασικό διάγραμμα και οι ακολουθίες σημείων Poinscare με περίοδο  $T=4\pi/9$ . Οι ακολουθίες με τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν σε υπό-αρμονικές ταλαντώσεις ως προς την ιδεατή εξωτερική διαταραχή ( $F_0 = 0$ ) συχνότητας  $\omega=9/2$ .

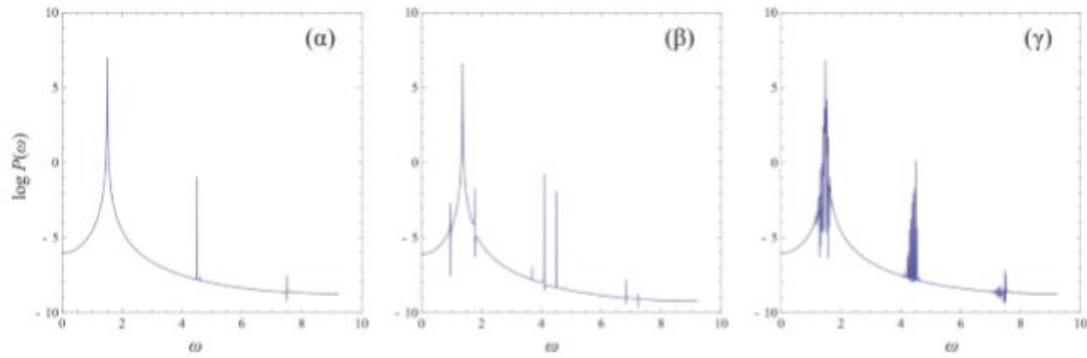


**Εικόνα 19:** Το επίπεδο Poincaré, όπως αυτό στην Εικόνα 18, αλλά για το διατεταγμένο σύστημα με  $f=0.2$ . Τα πάνελ (β) και (γ) παρουσιάζουν μια μεγέθυνση της περιοχής γύρω από το ένα από τα τρία σημεία που αντιπροσωπεύουν την ευσταθή ( $P_s$ ) και την ασταθή περιοδική τροχιά ( $P_u$ ), αντίστοιχα. Επίσης παρουσιάζονται οι συσταθείς ( $W^s$ ) και οι ασταθείς ( $W^u$ ) πολλαπλότητες.

Στην Εικόνα 20 παρουσιάζονται τα φάσματα ισχύος κάποιων τροχιών. Στο πάνελ (α) παρουσιάζεται το φάσμα της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς (φυσικά τώρα οι αρχικές συνθήκες δίνονται με περιορισμένη ακρίβεια). Παρατηρούμε την παρουσία σημαντικών κορυφών στις συχνότητες  $\omega_0 = 3/2$  και  $\omega = 9/2$ . Γενικά το φάσμα μιας περιοδικής τροχιάς στο μη γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει κορυφές στα πολλαπλάσια της  $\omega_0$ .

Στο πάνελ (β) έχουμε το φάσμα μιας ημπεριοδικής τροχιάς. Παρατηρούμε τώρα την ύπαρξη και άλλων κορυφών σε θέσεις που δεν αποτελούν πολλαπλάσια της θέσης μιας βασικής κορυφής. Γενικά το φάσμα μιας ημπεριοδικής τροχιάς αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό φασματικών κορυφών. Θεωρητικά μπορεί να δείχτεί ότι το φάσμα μιας ημπεριοδικής τροχιάς αποτελείται από άπειρες αλλά διακριτές κορυφές. Βέβαια στην πράξη λίγες από αυτές είναι σημαντικού πλάτους.

Στο πάνελ (γ) έχουμε το φάσμα μιας τροχιάς με αρχικές συνθήκες κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά. Μια τέτοια τροχιά πρακτικά εξελίσσεται κοντά στην ασταθή και ευσταθή πολλαπλότητα της περιοδικής τροχιάς. Παρατηρούμε πλέον την παρουσία πολλών φασματικών γραμμών γύρω από τις βασικές φασματικές γραμμές της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς. Αποδεικνύεται ότι οι ασυμπτωτικές τροχιές έχουν συνεχή φάσματα. Σημειώνουμε ότι, η ομαλή συνέχεια των φασμάτων στις προηγούμενες περιπτώσεις έχει να κάνει με την υπολογιστική προσέγγιση. Τώρα όμως έχουμε την παρουσία πολλών σημαντικών κορυφών πολύ κοντά της μιας με την άλλη.



**Εικόνα 20:** Φάσματα ισχύος για (α) μια τροχιά πολύ κοντά στην ευσταθή περιοδική τροχιά (β) μια ημιπεριοδική τροχιά (γ) μια τροχιά πολύ κοντά στην ασταθή περιοδική τροχιά.

### Σχόλιο 3:

Το σύστημα  $\dot{x} = y, \dot{y} = ax - \beta x^3 + F_0 \sin \omega t$  είναι ένα Χαμιλτονιανό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας αλλά μη-αυτόνομο. Τα δυναμικά του χαρακτηριστικά είναι ποιοτικά ισοδύναμα με αυτά που παρουσιάζουν τα αυτόνομα Χαμιλτονιανά συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας. Ένα ιδιαίτερο και νέο στοιχείο της δυναμικής σχετίζεται με την τοπολογία των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων της επιφάνειας Poincare. Στην Εικόνα 19 φαίνονται ότι οι πολλαπλότητες αυτές, οι οποίες αντιστοιχούν στα τρία σημεία  $P_u$  της ασταθούς περιοδικής τροχιάς ενώνονται ομαλά. Εν γένει όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

## 2.4 Διαταραγμένα Χαμιλτονιανά Συστήματα.

Έστω ένα ολοκληρώσιμο σύστημα  $H = H_0(x, y, p_x, p_y)$  με ένα ολοκλήρωμα  $F = F(x, y, p_x, p_y)$ , δηλαδή  $[F, H_0] = 0$ . Ο χώρος των φάσεων αποτελείται από αναλλοίωτους δισδιάστατους τόρους πάνω στους οποίους περιελίσσονται οι τροχιές. Θεωρούμε τώρα έναν όρο  $H_1(x, y, p_x, p_y)$  που προστίθεται στην Χαμιλτονιανή, πολλαπλασιασμένη με μια μικρή παράμετρο  $\varepsilon$ ,

$$H = H_0(x, y, p_x, p_y) + \varepsilon H_1(x, y, p_x, p_y)$$

(2.1.16)

Το σύστημα (2.1.16) ονομάζεται διαταραγμένο σύστημα ή σύστημα κοντά στην ολοκληρωσιμότητα (near integrable system). Η παράμετρος  $\varepsilon$  μετράει το μέγεθος της διαταραχής. Τα κύρια σημεία της δυναμικής του διαταραγμένου συστήματος δίνονται από τα τρία σημαντικά θεωρήματα, τα οποία περιγράφουμε χωρίς αποδείξεις παρακάτω:

#### ι) Το θεώρημα Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM theorem)

Έστω ένα σύνολο φωλιασμένων τόρων, που ο καθένας αντιστοιχεί σε ένα αριθμό περιστροφής  $\rho = \omega_1 / \omega_2$ . Θεωρούμε όλους τους τόρους για τους οποίους ισχύει η συνθήκη

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{q^{5/2}} \quad (2.1.17)$$

για οποιουδήποτε ακέραιους  $p, q$ . Η ποσότητα  $K = K(\varepsilon)$  εξαρτάται από το μέγεθος της διαταραχής και τείνει στο μηδέν καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ουσιαστικά η συνθήκη (2.1.17) εξαιρεί τους συντονισμένους τόρους, όπου το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται, καθώς και μικρές γειτονιές τους με πλάτος  $K(\varepsilon)q^{-5/2}$ , το οποίο μειώνεται καθώς αυξάνει ο παρονομαστής του λόγου συχνοτήτων.

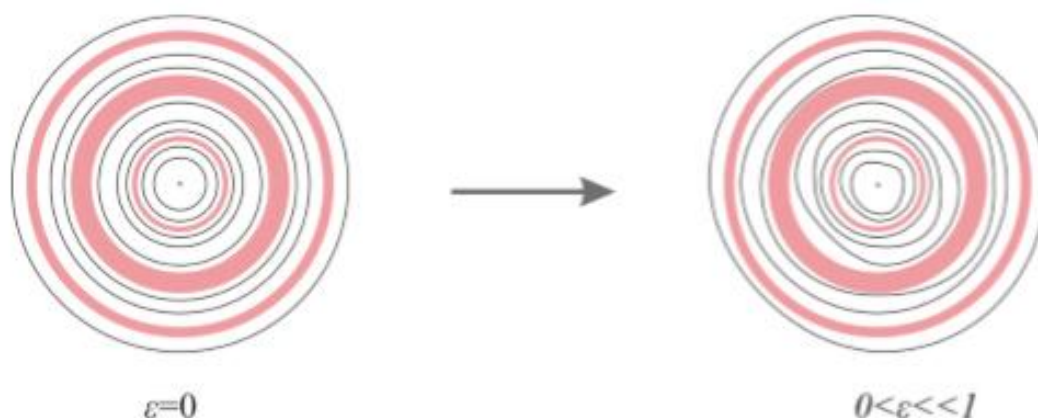
Αντιστοιχούμε όλους τους λόγους  $p/q$  στο διάστημα  $[0,1)$  αφαιρώντας το ακέραιο μέρος του λόγου (ο παρονομαστής δεν αλλάζει). Στο διάστημα αυτό για κάθε λόγο  $p/q$  η συνθήκη (2.1.17) αφαιρεί και ένα διάστημα. Θα περίμενε κανείς ότι, αφού έχουμε άπειρους λόγους, να εξαιρεθεί όλο το διάστημα  $[0,1)$ . Όμως καθώς αυξάνει ο παρονομαστής  $q$  τα διαστήματα που εξαιρούνται γίνονται όλο και μικρότερα. Αν πάρουμε την ένωση όλων των εξαιρεθέντων διαστημάτων προκύπτει ότι

$$\sum_{p < q} \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{p}{q} \right| \leq 5.224K(\varepsilon)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι  $O(\varepsilon)$  και τείνει στο μηδέν καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Άρα οι περιοχές οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη (2.1.17) είναι μεγέθους  $1 - O(\varepsilon)$ , δηλαδή, για πολύ μικρή διαταραχή περιλαμβάνει σχεδόν όλο το σύνολο των τόρων. Πάντα θα εξαιρούνται οι συντονισμένοι τόροι και οι γειτονιές τους.

Το **θεώρημα KAM** μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά ως εξής:

Οι τόροι του ολοκληρώσιμου συστήματος, οι οποίοι βρίσκονται μακριά από συντονισμούς, έτσι ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη (2.1.17), διατηρούνται στο διαταραγμένο σύστημα και απλώς παραμορφώνονται ελαφρά. Όσο πιο μικρή είναι η διαταραχή τόσο περισσότεροι τόροι διατηρούνται.



**Εικόνα 21:** Σχηματική παράσταση του θεωρήματος KAM. Οι αναλλοίωτοι κύκλοι (μαύρες γραμμές) που βρίσκονται έξω από τις γειτονιές συντονισμών (έγχρωμες περιοχές) παραμορφώνονται κάτω από την διαταραχή αλλά διατηρούνται ως κλειστές αναλλοίωτες καμπύλες.

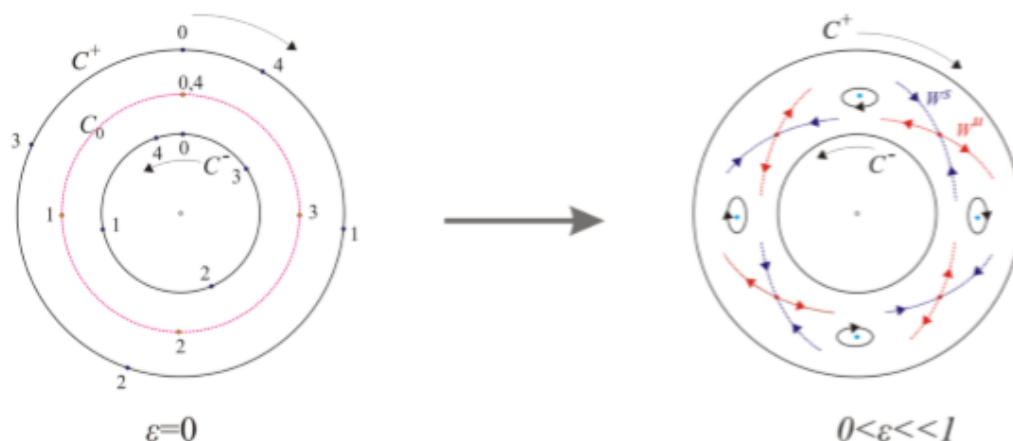
## ii) Το θεώρημα Poincare-Birkhoff

Έστω ένας συντονισμένος τόρος της ολοκληρώσιμης Χαμιλτονιανής  $H_0$  με αριθμό περιστροφής  $\rho = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  και πρώτοι μεταξύ τους. Αυτός απεικονίζεται στην τομή Poincare  $w_2 = \text{σταθ.σε}$  έναν αναλλοίωτο κύκλο  $C_0$ . Όπως αναφέραμε στην

προηγούμενη παράγραφο, ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στο  $C_0$ . Συνεπώς ένας συντονισμένος τόρος του ολοκληρώσιμου συστήματος φέρει άπειρες περιοδικές τροχιές. Σημειώνουμε ότι η ροή των σημείων της απεικόνισης Poincare μέσα ( $C^-$ ) και έξω ( $C^+$ ) από την περιοχή του συντονισμού έχει αντίθετη ροή (δες Εικόνα 18, αριστερά).

Σύμφωνα με το θεώρημα Poincare-Birkhoff, υπό την επίδραση της διαταραχής  $\varepsilon H_1$ , από το άπειρο σύνολο των περιοδικών τροχιών που φέρει ένας συντονισμένος τόρος μόνο ένας πεπερασμένος ζυγός αριθμός αυτών συνεχίζονται ως περιοδικές. Συνήθως επιβιώνουν μόνο δύο περιοδικές τροχιές, η μια είναι ευσταθής και η άλλη ασταθής. Περισσότερες περιοδικές τροχιές συνεχίζονται μόνο υπό προϋποθέσεις ύπαρξης συμμετριών στο σύστημα.

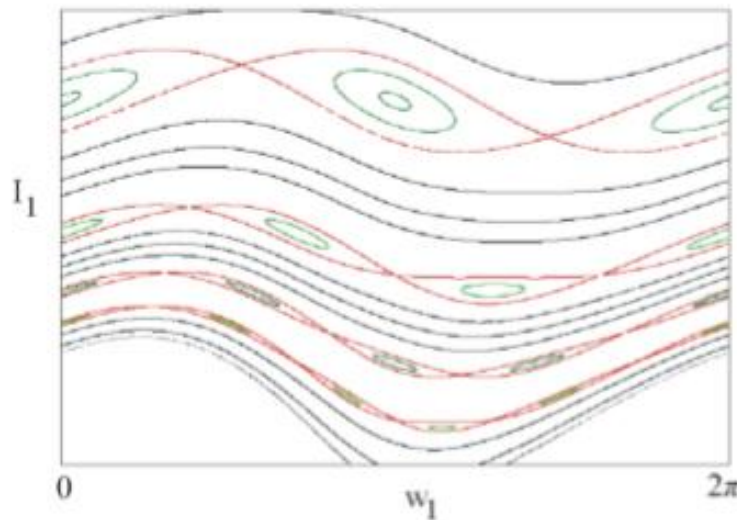
Η έννοια της ευστάθειας έχει να κάνει με την ροή των σημείων της τομής σε σχέση με τα περιοδικά σημεία. Στην περίπτωση της ευστάθειας, έχουμε σημεία που σχηματίζουν αναλλοίωτες καμπύλες, οι οποίες περικλείουν τα σημεία της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς (νησίδες). Στην περίπτωση της αστάθειας, κοντά στα σημεία της περιοδικής τροχιάς, οι αναλλοίωτες καμπύλες της τομής έχουν την μορφή σάγγατος. Διακρίνουμε δύο πολλαπλότητες, μια ευσταθή, την  $W^s$  και μια ασταθή, την  $W^u$ . Πάνω στην  $W^s$  τα σημεία της τομής πλησιάζουν ασυμπτωτικά προς τα σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν την περιοδική τροχιά, ενώ πάνω στην  $W^u$  απομακρύνονται από αυτά (Εικόνα 22, δεξιά).



**Εικόνα 22:** Σχηματική η αλλαγή της μορφής της περιοχής ενός συντονισμένου αναλλοίωτου κύκλου (για  $q=4$ ) υπό την επίδραση της διαταραχής. Στο δεξιό πάνελ τα μπλε σημεία αντιπροσωπεύουν την ευσταθή περιοδική τροχιά που επιβιώνει, και τα κόκκινα σημεία την ασταθή τροχιά. Οι αναλλοίωτοι κύκλοι  $C^-$  και  $C^+$  διατηρούνται σύμφωνα με το θεώρημα KAM.

Η παραπάνω δυναμική στις ζώνες συντονισμού είναι η ίδια με αυτήν που περιγράψαμε για τον διαταραγμένο ταλαντωτή. Για πολύ μικρές διαταραχές, οι πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$  μαζί με τις νησίδες γύρω από τα ευσταθή περιοδικά σημεία σχηματίζουν τις λεγόμενες αλυσίδες Poincare – Birkhoff. Το πλάτος αυτών των

αλυσίδων εξαρτάται από τον αριθμό των περιοδικών σημείων πάνω στην τομή, δηλαδή τον ακέραιο  $q$ . Διακρίνουμε διάφορες αλυσίδες Poincare-Birkhoff (για διάφορους συντονισμούς) καθώς και τις περιοχές KAM ανάμεσα τους.

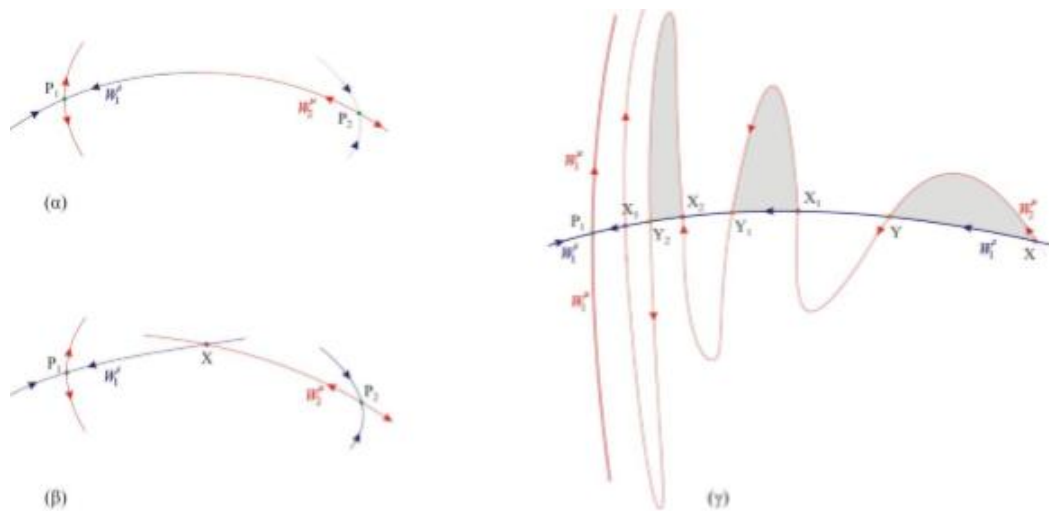


**Εικόνα 23:** Αλυσίδες Poincare-Birkhoff στο διαταραγμένο εκκρεμές –τυπική απεικόνιση (σε οριζόντια απεικόνιση).

### iii) Ομοκλιτικό Χάος (η θεωρία Poincare –Sample)

Παραπάνω είδαμε ότι οι ασταθείς περιοδικές τροχιές που επιβιώνουν με την διαταραχή πάνω σε ένα συντονισμένο τόρο συνοδεύονται από ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$ , αντίστοιχα. Στην Εικόνα 20:(α) η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα, δύο γειτονικών σημείων της τομής Poincare, τα οποία αντιστοιχούν σε μια ασταθή περιοδική τροχιά, ενώνονται ομαλά. Αυτό όμως ισχύει μόνο στην περίπτωση που το διαταραγμένο σύστημα διαθέτει κάποιο ολοκλήρωμα της κίνησης. Εν γένει, ένα διαταραγμένο σύστημα δεν διαθέτει κάποιο άλλο ολοκλήρωμα πλην της Χαμιλτονιανής και η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα δεν υποχρεούνται να ενώνονται ομαλά. Αντίθετα η γενική περίπτωση είναι η εγκάρσια τομή τους όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 20:(β). Εδώ να σημειώσουμε ότι τέμνονται οι πολλαπλότητες  $W^s$  και  $W^u$  όχι οι τροχιές που ανήκουν πάνω σε αυτές. Επίσης αποδεικνύεται ότι, η  $W^s$  δεν μπορεί να τέμνει τον εαυτό της και το ίδιο ισχύει για την  $W^u$ . Το σημείο τομής  $X$  ονομάζεται **ομοκλιτικό σημείο**.

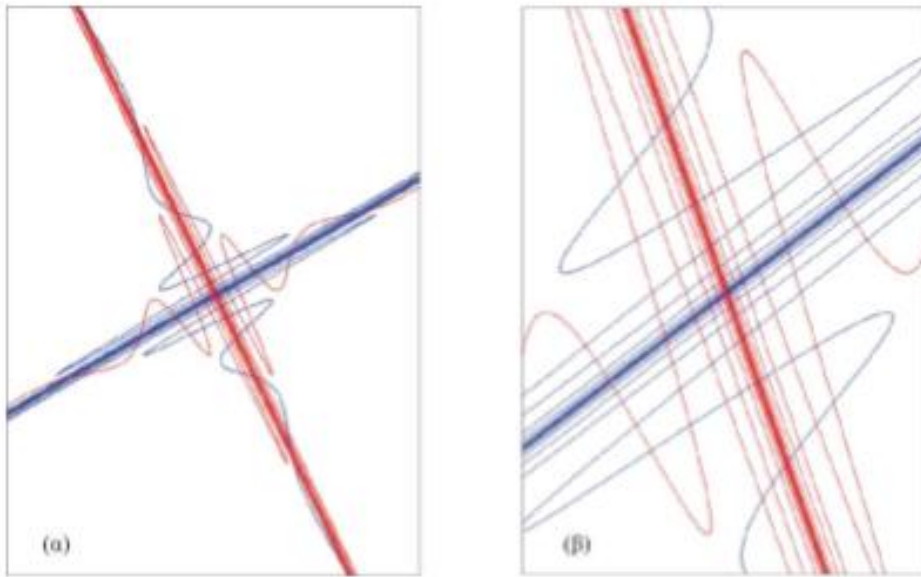




**Εικόνα 24:** Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στην ζώνη συντονισμού α) σε μια ολοκληρώσιμη περίπτωση β) στην μη-ολοκληρώσιμη περίπτωση (γενική) όπου οι πολλαπλότητες τέμνονται γ)η συνέχεια της πολλαπλότητας  $W^u$  μετά την τομή της με την  $W^s$  και ο σχηματισμός των ομοκλικών λοβών.

Λόγω της συνεχούς ροής, ένα ομοκλικό σημείο  $X$  απεικονίζεται σε ένα άλλο ομοκλικό σημείο και έτσι έχουμε μια ακολουθία ομοκλικών σημείων,  $X, X_1, X_2$  κτλ., (βλέπε Εικόνα 20:(γ)), τα οποία τείνουν ασυμπτωτικά προς τα σημεία της περιοδικής τροχιάς, το σημείο  $P_1$  στο πάνελ (γ). Ανάμεσα στα παραπάνω ομοκλικά σημεία (όπου η ροή είναι από κάτω προς τα πάνω) έχουμε και τα ομοκλικά σημεία  $Y, Y_1, Y_2$  κλπ., όπου η ροή είναι από πάνω προς τα κάτω. Επειδή τα σημεία των παρακάτω ακολουθιών τείνουν ασυμπτωτικά στο  $P_1$ , οι αποστάσεις  $X_k Y_k$  μειώνονται εκθετικά καθώς το  $k$  αυξάνεται. Όμως τα εμβαδά που περικλείονται μεταξύ των πολλαπλοτήτων και ανάμεσα σε δύο ομοκλικά σημεία (οι γκρι περιοχές του σχήματος) οφείλουν να έχουν το ίδιο εμβαδόν αφού η ροή είναι διατηρητική. Έτσι, αφού τα σημεία  $X_k$  και  $Y_k$  πλησιάζουν μεταξύ τους, καθώς το  $k$  αυξάνει, οι περιοχές επιμηκύνονται κατά την διεύθυνση της  $W^u$  του  $P_1$  και συρρικνώνεται κατά την διεύθυνση του  $W^s$  σχηματίζοντας τους ομοκλικούς λοβούς.

Ομοκλικοί λοβοί σχηματίζονται και από την ευσταθή πολλαπλότητα καθώς πλησιάζει ασυμπτωτικά στην περιοδική τροχιά για  $t \rightarrow -\infty$ . Οι λοβοί της ασταθούς πολλαπλότητας τέμνουν τους λοβούς της ευσταθούς πολλαπλότητας σχηματίζοντας το λεγόμενο **ομοκλικό πλέγμα**, το οποίο περιορίζεται στη ζώνη του συντονισμού, μεταξύ των αναλλοίωτων κύκλων  $C^-$  και  $C^+$  (δες Εικόνα 21) οδηγεί στην ευαίσθητη εξάρτηση των τροχιών από τις αρχικές συνθήκες και την **χαοτική εξέλιξη**. Η δομή αυτή μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά με το **πέταλο του Smale**, όπως ονομάζεται η διακριτή απεικόνιση που την περιγράφει.



**Εικόνα 25:** α) Το ομοκλινικό πλέγμα όπως υπολογίζεται για την απεικόνιση Suris ( $\delta=1/3$ ,  $\varepsilon=0.001$ ) β) Μεγέθυνση του πλέγματος.

**Σχόλιο 3:**

Η διακριτή εξέλιξη των τροχιών ενός Χαμιλτονιανού συστήματος πάνω στην τομή Poincare μπορεί να προσομοιωθεί με την χρήση διακριτών διατηρητικών απεικονίσεων. Π.χ. η διαταραγμένη απεικόνιση Suris δίνεται από τις εξισώσεις

$$x_{k+1} = x_k + 4\pi^2 y_{k+1} \pmod{2\pi}, y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k) + \varepsilon \sin x_k \text{ με}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi^2} \arctan\left(\frac{\delta \sin x}{1 + \delta \cos x}\right), -1 < \delta < 1 \text{ και είναι ολοκληρώσιμη για } \varepsilon = 0. \text{ Διαθέτει}$$

τα σημεία  $(\pm\pi, 0)$  είναι ασταθή σταθερά σημεία των οποίων οι ασύμπτωτες πολλαπλότητες ενώνονται ομαλά. Για  $\varepsilon \neq 0$ , οι πολλαπλότητες τέμνονται εγκάρσια και σχηματίζουν το ομοκλινικό πλέγμα που δίνεται στην Εικόνα 21.



**Εικόνα 22:** Σχηματική παράσταση της τομής Poincare για ένα διατεταγμένο Χαμιλτονιανό σύστημα όπως σχεδιάστηκε από τον V. Arnold στο άρθρο του “Small Denominators and Problems of stability of motion in classical and celestial mechanics” (Russian Mathematical Surveys, vol.18:6, pp85-191, 1963). Η

σχεδίαση στηρίζεται σε στοιχεία της θεωρίας του Poincare, χωρίς υπολογιστικές ενδείξεις. Στο βιβλίο των Diacu & Holmes (1996) στη σελίδα 96 αναφέρεται το εξής <<O Poincare δεν είχε σχεδιάσει το ομοκλινικό πλέγμα που περιγράψαμε πρωτύτερα. Άλλα σημείωσε στο τέλος του βιβλίου του (Le methodes nouvelles de la mecanique celeste, 1899) ότι, μια τέτοια εικόνα ήταν πολύ περίπλοκη ώστε να σχεδιαστεί και πρόσθεσε ότι, τα στοιχεία αυτά μπορούν να μας δώσουν μια καλή ιδέα σχετικά με το πόσο δύσκολα είναι τα περισσότερα προβλήματα στη δυναμική>>.

## 2.5 Τροχιές και τομές Poincare.

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανικό Χαμιλτονιανό σύστημα

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y).$$

(2.1.18)

Ας υποθέσουμε (για μια πιο κατανοητή περιγραφή) ότι η (2.1.18) περιγράφει την κίνηση υλικού σημείου μάζας  $m=1$  υπό την επίδραση του δυναμικού  $V$ . Έτσι η Χαμιλτονιανή  $H$  συμπίπτει με την μηχανική ενέργεια  $E$  της τροχιάς. Οι εξισώσεις της κίνησης εν γένει λύνονται αριθμητικά. Μια τροχιά ενέργεια  $E$  θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$E - V(x, y) \geq 0.$$

(2.1.19)

Η (2.1.19) ορίζει τον τόπο στο επίπεδο  $xy$  στον οποίο μπορεί να εξελιχθεί η τροχιά. Η καμπύλη  $E - V(x, y) = 0$  είναι το όριο αυτού του τόπου και ονομάζεται καμπύλη μηδενικής ταχύτητας.

### Παράδειγμα 7:

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στο σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-ay)^4,$$

(2.1.20)

όπου  $a$  σταθερή παράμετρος. Εφαρμόζοντας τις (2.1.3) έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

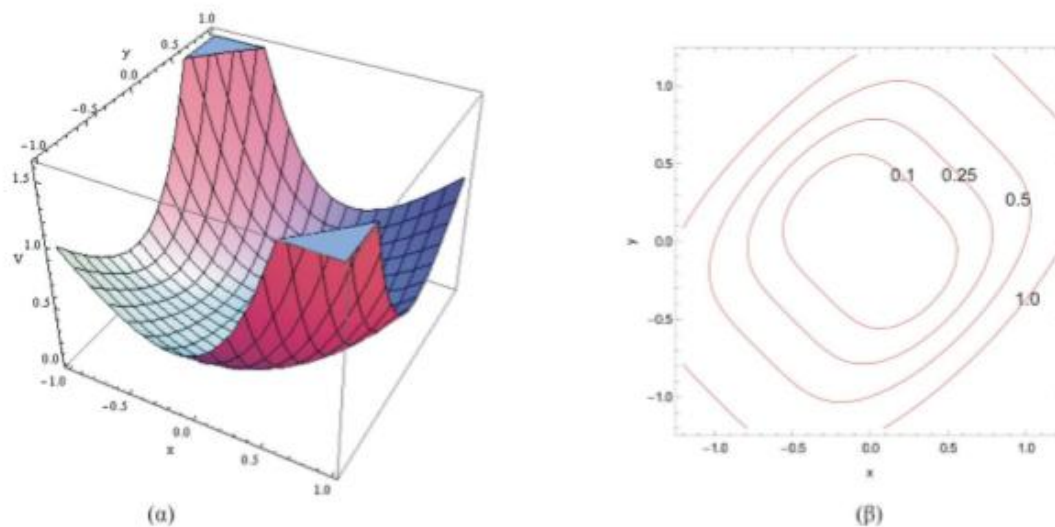
$$\begin{aligned} \dot{x} = p_x, \dot{p}_x &= -\frac{1}{2}(x+y) - (x-ay)^3 \\ \dot{y} = p_y, \dot{p}_y &= -\frac{1}{2}(x+y) + a(x-ay)^3 \end{aligned}$$

(2.1.21)

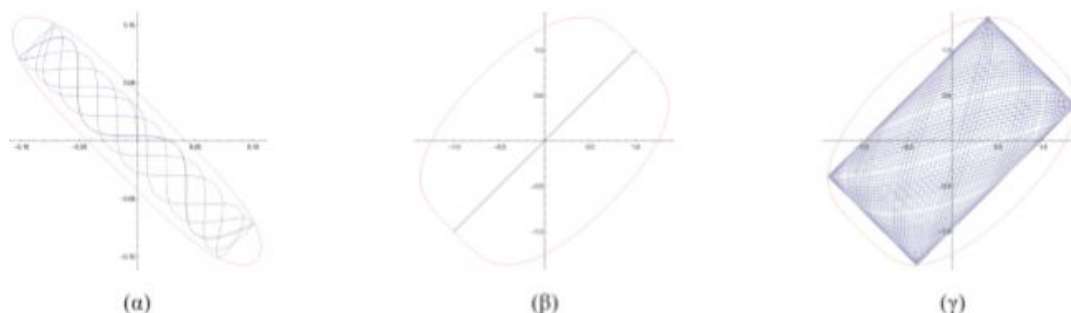
Το σύστημα διαθέτει ένα σημείο ισορροπίας στο  $(x, y, p_x, p_y) = (0, 0, 0, 0)$  και ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος (2.1.5) μας δίνει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = 0$$

Η ύπαρξη μηδενικών ιδιοτιμών δηλώνει κρίσιμη γραμμική ευστάθεια. Όμως το δυναμικό παρουσιάζει στο  $(0,0)$  ολικό ελάχιστο για  $a > -1$ , η (2.1.19) δίνει για  $E > 0$  έναν κλειστό τόπο γύρω από το  $(0,0)$  μέσα στο οποίο θα πρέπει να εξελίσσονται οι τροχιές (Εικόνα 23). Με αυτήν την έννοια το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και μια τροχιά γύρω από αυτό παρουσιάζεται στην Εικόνα 23:(α).



**Εικόνα 27:** α) Το δυναμικό του συστήματος (2.1.20) β) Καμπύλες μηδενικής ταχύτητας για διάφορες τιμές ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση η επιτρεπτή περιοχή κίνησης ορίζεται από την κλειστή περιοχή που ορίζουν οι καμπύλες μηδενικής ταχύτητας.



**Εικόνα 28:** Τροχιές (μπλε καμπύλες) του συστήματος (2.1.20) για  $a = 1$  α) γύρω από το σημείο ισορροπίας (0,0) β) μια περιοδική τροχιά γ) ημπεριοδική τροχιά. Η καμπύλη μηδενικής ταχύτητας παρουσιάζεται με το κόκκινο χρώμα.

Στην Εικόνα 24:(β) παρουσιάζεται μία περιοδική τροχιά, η οποία δίνεται αναλυτικά από το ευθύγραμμο τμήμα  $x = y$  το οποίο περιορίζεται στον τόπο που επιβάλλει η συνθήκη (2.1.19). Γενικότερα οι τροχιές είναι ημπεριοδικές, δεν κλείνουν στον χώρο φάσεων και στο επίπεδο  $xy$  γεμίζουν πυκνά έναν χώρο που αποτελεί υποσύνολο του τόπου που ορίζεται από την καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (Εικόνα 24:(γ)). Στο χώρο των φάσεων οι τροχιές αυτές περιελλίσσονται σε επιφάνειες οι οποίες είναι τοπολογικά ισοδύναμες με τόρους.

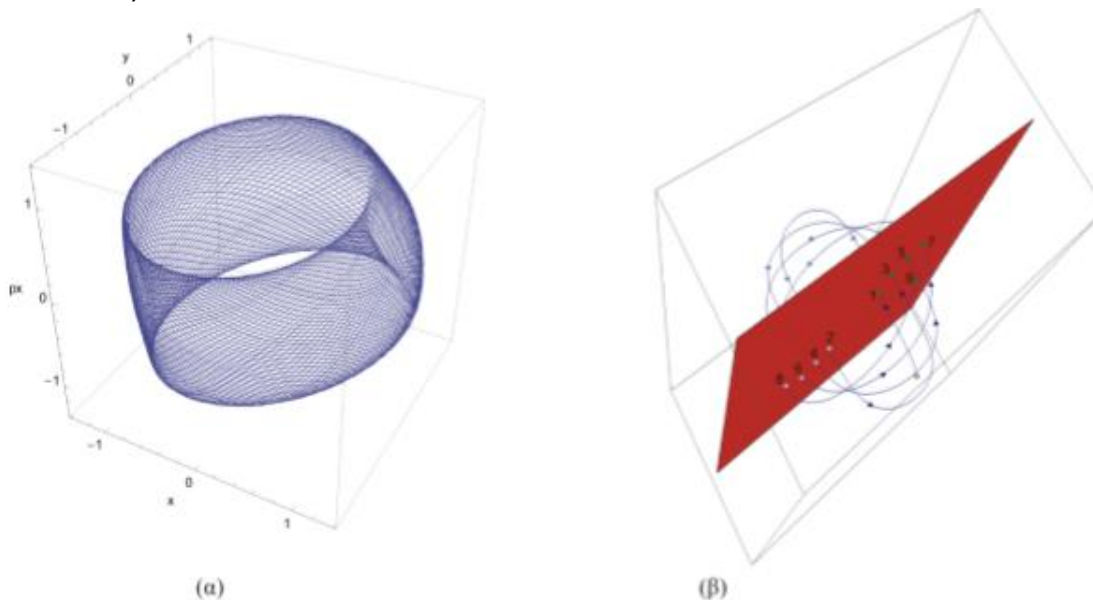
Μέσα τετραδιάστατο χώρο φάσεων μπορούμε να ορίσουμε τρισδιάστατα υποσύνολα τα οποία αντιστοιχούν σε μια δεδομένη τιμή ενέργειας. Σε ένα τέτοιο υποσύνολο με ενέργεια  $E_0$  μια τροχιά μπορεί να σχεδιαστεί στον τρισδιάστατο χώρο, π.χ. τον  $x - y - p_x$ . Στην Εικόνα 8-20(α) δίνουμε ένα παράδειγμα μιας ημπεριοδικής

τροχιάς στον παραπάνω χώρο. Κάθε σημείο αυτού του χώρου ορίζει πλήρως μια αρχική συνθήκη αφού, δεδομένης της τιμής της ενέργειας, η γενικευμένη ορμή  $p_y$  καθορίζεται από την σχέση

$$p_y = \pm \sqrt{2(E_0 - V(x, y)) - p_x^2}$$

(2.1.22)

Βέβαια υπάρχει μια αβεβαιότητα ως προς το πρόσημο. Αν κόψουμε τον παραπάνω τρισδιάστατο χώρο με ένα επίπεδο τότε η τροχιά τέμνει αυτό το επίπεδο σε διάφορα σημεία όπως φαίνεται στην Εικόνα 25:(β). Τα σημεία αυτά μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ακολουθίες ανάλογα με την διεύθυνση με την οποία η τροχιά τέμνει το επίπεδο (πράσινα και γκρι σημεία). Η πρώτη ή η δεύτερη ακολουθία σημείων αποτελεί μια ακολουθία σημείων Poincare ή, απλά, μια τομή Poincare της τροχιάς με ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές που είδαμε για τους διατηρητικούς εξαναγκασμένους ταλαντωτές.



**Εικόνα 29:** α) Παρουσίαση μιας ημιπεριοδικής τροχιάς (δες Εικόνα 8-19(γ)) στον τρισδιάστατο χώρο β) Τομές της τροχιάς με ένα επιλεγμένο επίπεδο (τομή Poincare).

Από υπολογιστική άποψη μια τομή Poincare για τα συστήματα της μορφής (2.1.18) μπορεί να οριστεί για ένα δεδομένο επίπεδο ενέργειας  $E_0$  με το επίπεδο  $y=0$  και με φορά που ορίζεται από το πρόσημο της ορμής  $p_y$ , π.χ.  $p_y > 0$ . Άρα η ακολουθία Poincare θα ορίζεται από τα σημεία  $(x, p_x)$  στα οποία η τροχιά της ενέργειας  $E_0$  τέμνει το επίπεδο  $y=0$  με τη φορά που καθορίζει η ορμή  $p_y$ ,

$$\Pi(x_0, p_{x0}, E_0) = \left\{ (x(t_k), p_x(t_k)) / x(0) = x_0, p_{x0} = p_x(0), y(t_k) = 0, p_y(t_k) > 0, E = E_0 \right\}$$

(2.1.23)

Φυσικά κάθε σημείο του επιπέδου της τομής αντιπροσωπεύει συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Το  $(x, p_x)$  είναι δεδομένο από το σημείο της τομής. Επίσης είναι πάντα  $y=0$  και το  $p_y$  δίνεται με τη σχέση (2.1.22) με το πρόσημο με το οποίο ορίζουμε την τομή. Συνεπώς κάθε σημείο της τομής (2.1.23) ανήκει σε μια μοναδική τροχιά.

### Σημείωση 3:

Το επίπεδο της τομής Poincare πρέπει να οριστεί κατάλληλο ώστε να τέμνει εγκάρσια την τροχιά. Διαφορετικά η τροχιά δεν θα δώσει μια ακολουθία σημείων Poincare. Βέβαια η τομή μπορεί να οριστεί για την αντίθετη φορά και επίσης με ένα άλλο επίπεδο, π.χ. το επίπεδο  $x=0$ .

Μελετώντας τροχιές με την ίδια τιμή ενέργειας  $E=E_0$ , μπορούμε να παριστάνουμε όλες αυτές τις τροχιές πάνω σε μια τομή Poincare. Είναι εύχρηστο να επιλέγουμε ως αρχικές συνθήκες την  $y(0)=0$  (δηλαδή πάνω στην τομή), ενώ το σημείο  $(x_0, p_{x0})$ , καθώς και όλη η ακολουθία σημείων (2.1.23), θα πρέπει να βρίσκονται στον τόπο (επιτρεπτή περιοχή) που ορίζεται από τη σχέση

$$p_x^2 \leq 2(E_0 - V(x, 0)).$$

(2.1.24)

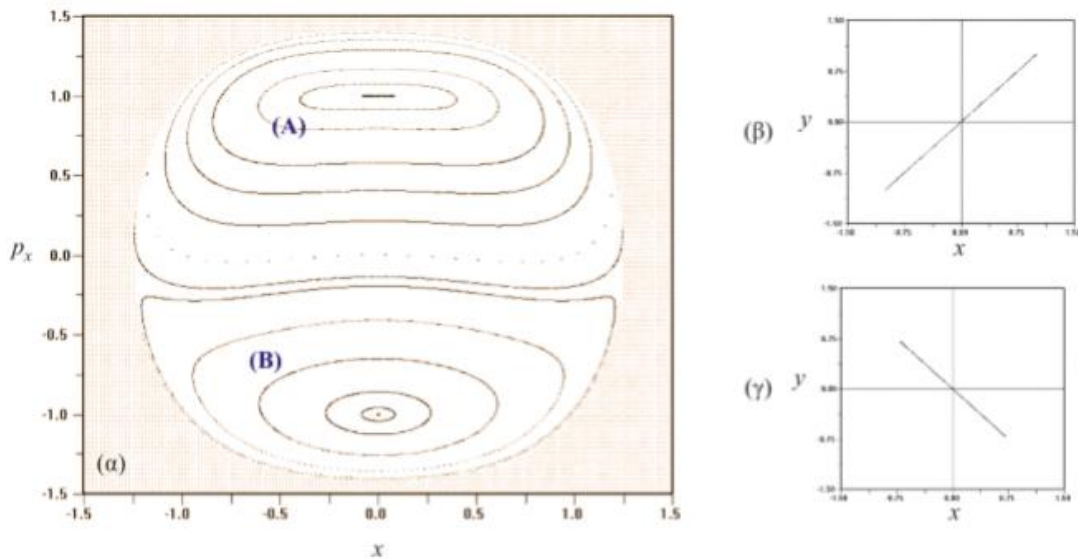
Το  $p_y(0)$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.1.22). Οι περιοδικές τροχιές θα δίνουν μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων ενώ οι ημιπεριοδικές τροχιές θα καλύπτουν πυκνά μια αναλλοίωτη καμπύλη που αντιπροσωπεύει τον αντίστοιχο τόρο στο χώρο φάσεων. Οι χαοτικές τροχιές θα δώσουν μια διάσπαρτη κατανομή σημείων μέσα στην ζώνη του συντονισμού και κυρίως κοντά στις ασταθείς περιοδικές τροχιές.

Για  $a=1$ , το σύστημα (2.1.20) είναι ολοκληρώσιμη με δεύτερο ολοκλήρωμα το

$$I = (\dot{x} + \dot{y})^2 + (x + y)^2.$$

(2.1.25)

Η τομή Poincare του συστήματος παρουσιάζεται στην Εικόνα 8-21. Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο σύνολα φωλιασμένων τόρων (Α και Β) και, θεωρητικά, στο καθένα από αυτά θα μπορούσαμε να ορίσουμε μεταβλητές δράσης-γωνιάς. Στο κέντρο αυτών των περιοχών έχουμε τις δύο θεμελιώδεις περιοδικές τροχιές (κύκλοι  $\gamma_2$ , δεξ Εικόνα 16), οι οποίες στο επίπεδο  $xy$  παρουσιάζονται στα πάνελ (β) και (γ). Αυτές περιστοιχίζονται από αναλλοίωτες καμπύλες που γενικά αντιστοιχούν σε τόρους με ημιπεριοδικές τροχιές. Φυσικά, πάντα κοντά σε αυτές θα έχουμε και συντονισμένους τόρους που φέρουν περιοδικές τροχιές. Η ολοκληρωσιμότητα δεν επιτρέπει την ύπαρξη αλυσίδων Poincare-Birkhoff και φυσικά χαοτικών τροχιών.



**Εικόνα 26:** α) Τομή Poincaré  $y=0, p_y > 0$  για το σύστημα (2.1.20) με  $a=1$  (ολοκληρώσιμη περίπτωση) β) Η περιοδική τροχιά του κέντρου της περιοχής A στο επίπεδο  $xy$  γ) το ίδιο για την περιοδική τροχιά στην περιοχή B. Η σκιασμένη περιοχή αποτελεί την μη επιτρεπτή περιοχή κίνησης.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως παράμετρο διαταραχής για το σύστημα (2.1.20) την παράμετρο

$$\varepsilon = 1 - \alpha$$

Έτσι για  $\varepsilon = 0.98$  παρουσιάζουμε την τομή Poincaré του συστήματος στην Εικόνα 27. Σε σχέση με την τομή του ολοκληρώσιμου συστήματος ( $\varepsilon=0$ ) παρατηρούνται εύκολα δύο σημαντικές μεταβολές.

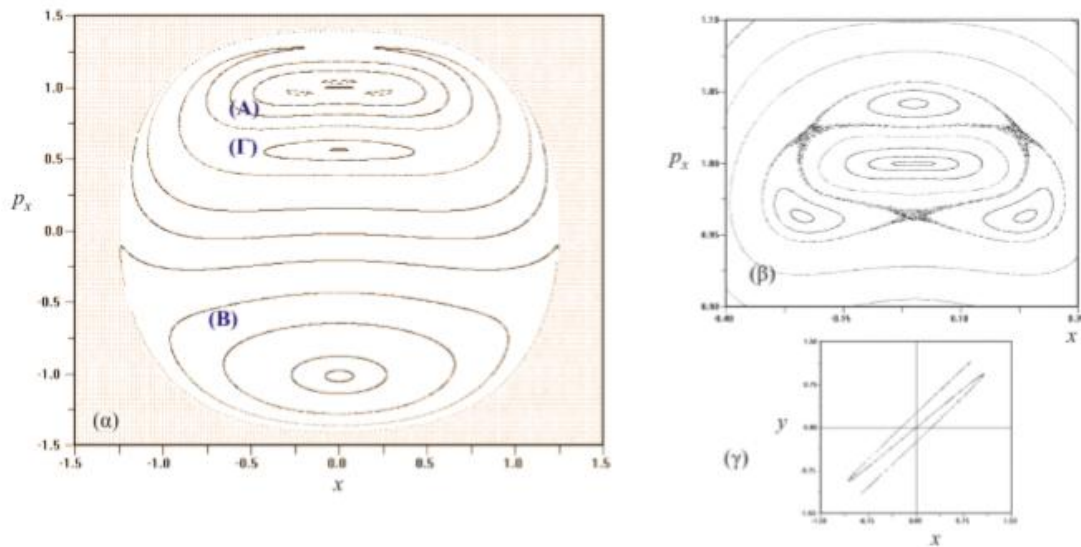
ι) Έχουμε την ευδιάκριτη παρουσία μιας αλυσίδας Poincaré-Birkhoff που δημιουργήθηκε από το συντομότερο τόρο  $p/q = 1/3$  στην περιοχή A. Το πάνελ (β) του σχήματος αποτελεί μια μεγέθυνση της περιοχής. Παρατηρούμε την παρουσία χαοτικών τροχιών γύρω από τα τρία ασταθή περιοδικά σημεία της τομής, γεγονός που αποδεικνύει την μη ολοκληρωσιμότητα του συστήματος για τη συγκεκριμένη τιμή της διαταραχής.

ii) Η δημιουργία μιας νέας περιοχής (Γ) γύρω από μία νέα περιοδική τροχιά. Η περιοχή αυτή αποτελεί μια αλυσίδα Poincaré-Birkhoff στο συντονισμό  $1/1$  (μπορείτε να εντοπίσετε τη θέση της ασταθούς περιοδικής τροχιάς;)

Κάτι το οποίο δεν φαίνεται στην Εικόνα είναι η παρουσία στην περιοχή (A), εκτός των συντονισμών  $1/1$  και  $1/3$  και πολλών άλλων συντονισμών  $1/n$  και ο καθένας από αυτούς έχει μια αντίστοιχη αλυσίδα Poincaré-Birkhoff. Καθώς αυξάνει η διαταραχή, των πλάτος των αλυσίδων αυξάνει και οι αλυσίδες <<συγκρούονται>> μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αλληλοεπικάλυψη συντονισμών** (resonance overlap of Chirikov) και το οποίο έχει ως συνέπεια την σημαντική διεύρυνση της χαοτικής περιοχής. Αυτό φαίνεται στην Εικόνα 28:(α) όπου αυξήθηκε η παράμετρος διαταραχής στην τιμή  $\varepsilon = 0.2$ . Βέβαια παρατηρούμε ότι το χάος υπάρχει μόνο στην πάνω περιοχή (περιοχή A του ολοκληρώσιμου συστήματος) και περιορίζεται η περιοχή τους από κάποιον τόρο (η τελευταία αναλλοίωτοι καμπύλη). Στην περιοχή B οι χαοτικές τροχιές

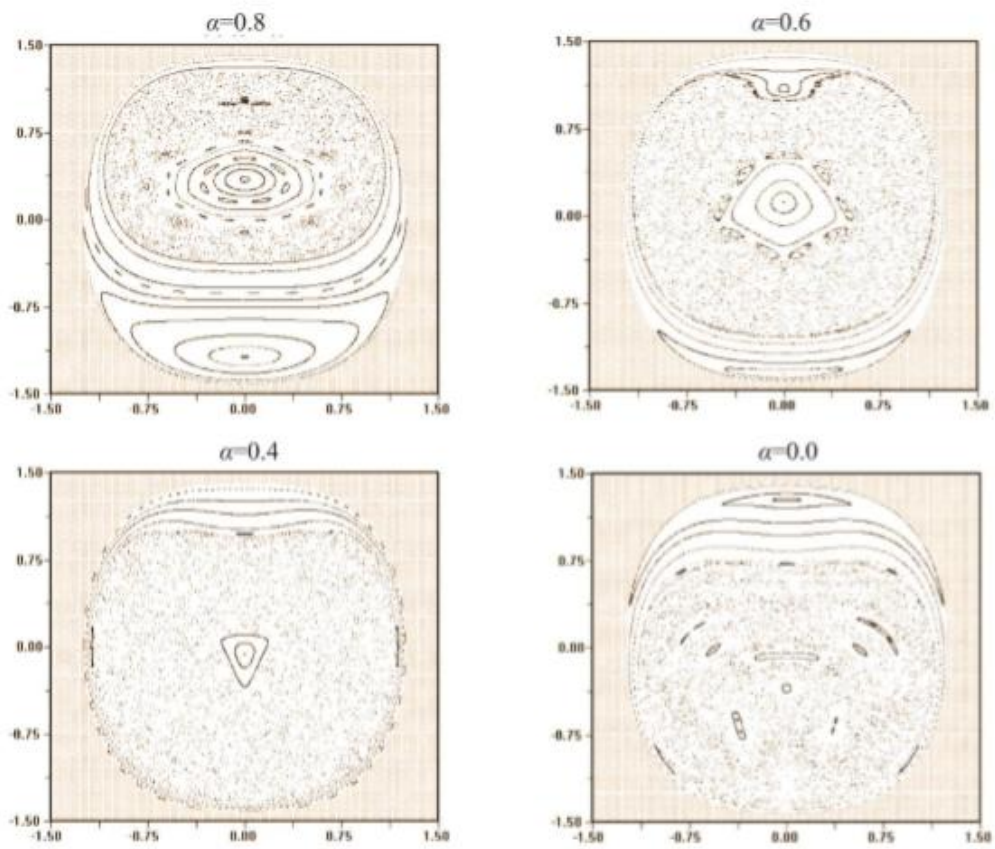
πρέπει να περιορίζονται μόνο σε πολύ στενές αλυσίδες που δεν εντοπίζονται εύκολα υπολογιστικά.

Συνεχίζοντας την αύξηση της διαταραχής παίρνουμε τις υπόλοιπες τομές του σχήματος (Εικόνα 28). Τελικά για  $\alpha = 0$  ή ( $\varepsilon = 1$ ) έχουμε μια χαοτική θάλασσα, στην οποία υπάρχουν πολλές μικρές νησίδες. Τώρα το χάος εξαπλώνεται στην κάτω περιοχή της τομής ενώ η πάνω περιοχή έχουμε την ύπαρξη ενός συνόλου φωλιασμένων τόρων με μια νέα περιοδική τροχιά στο κέντρο τους. Γενικά, στο χώρο φάσεων ενός μη ολοκληρώσιμου Χαμιλτονιανού συστήματος οι κανονικές και οι χαοτικές τροχιές συνυπάρχουν σε αντίθεση με τα απωλεστικά συστήματα, όπου οι τροχιές καταλήγουν είτε σε ένα κανονικό ή σε ένα χαοτικό ελκυστή.



**Εικόνα 27:** α) τομή Poincare ( $y = 0, p_y = 0$ ) για  $\varepsilon=0.02$  ( $\alpha=0.98$ ). β) Μια μεγέθυνση της περιοχής (A) της τομής γ) η περιοδική ευσταθής περιοδική τροχιά στο κέντρο των νησίδων (συντονισμός 1/3).





**Εικόνα 28:** Τομές Poincaré ( $y=0, p_y=0$ ) για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  του συστήματος (2.1.20).

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [1] Antsaklis, J.P., Michel, N.A.: Linear Systems, The Mc Graw-Hill Comp., 1977.
- [2] Arrowsmith, D.K. & Place, C.M., 1990. An Introduction to Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press
- [3] Rugh, J.W.: Linear System Theory, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [4] Spiegel, R.M: Applied Differential Equations, Prentice-Hall Inc., 1997.
- [5] Collatz, L.: Differential Equations, Wiley, 1986.
- [6] Elaydi, N.S.: An Introduction to Difference Equation, Second edition, Springer, 1990.
- [7] Edwards, C., Penney, E.D.: Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, Fourth Edition, Prentice Hall, 2000.
- [8] Hale, J.K.: Ordinary Differential Equations, Second edition, R.E.: Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1980.
- [9] Blanchard, P., Devaney, L.R.: Hall, R.G.: Differential Equations, Brooks/ Coll Publishing Company, 1998.
- [10] Sanchez, D.: Ordinary Differential Equations and Stability Theory, Dover, 1979.
- [11] Arnold, V.I.: Ordinary Differential Equations, M.I.T. Press, 1978.
- [12] Simmons, G.F.: Differential Equations with Applications and Historical Notes, Tata Mc Graw Hill, 1974.
- [13] Arrowsmith, D.K.: Place, C.M: Ordinary Differential Equations, Chapman and Hall, 1982.
- [14] Gupta, C.S.: Transform and State Variable Methods in Linear Systems, John Wile & Sons, 1966.
- [15] Marsden, J.E.: Tromba A.I., Vector Calculus, 5th edition, W.H.: Freeman and Company, New York.
- [16] Baker, G.L. & Gollub, J.P., 1990. Chaotic Dynamics: an introduction. New York: Cambridge University Press.
- [17] Devany, R.L., 1989. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed. Redwood: AddisonWesley.

- [18] Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers. Boston: Birkhauser.
- [19] Kulenovic, M.R.S. & Merino, O., 2002. Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica. Chapman and Halls/CRC.
- [20] Enns, R.H. & McGuire, G.C., 2001. Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers. Boston: Birkhauser.
- [21] Kulenovic, M.R.S. & Merino, O., 2002. Discrete Dynamical systems and Difference Equations with Mathematica. Chapman and Halls/CRC.

### **Ελληνική Βιβλιογραφία**

- [1] Βογιατζής Γ., Μελετιδίου Ε., Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, 2015.
- [2] Αλικάκος, Ν., Καλογερόπουλος, Γ.: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 2003.
- [3] Δάσιος, Γ.: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πάτρα, 1983.
- [4] Σιαφάρικας, Π.Δ.: Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Τόμοι I/II, Πάτρα, 2002,2000.
- [5] Σμυρλής, Γ.Σ. Δ.Σ.: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Λευκωσία, 2007.
- [6] Στράντζαλος, Π., Κατάβολος, Α.: Εισαγωγή στη Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων, Καρδαμίτσα, 1986.
- [7] Παντελίδη, Γ.Ν., Κραββαρίτη, Δ.Χ., Χατζησάββα, Ν.Σ.: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Έκδοση β!, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 1996.
- [8] Φίλος, Γ.Χ.: Μια Εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιωάννινα, 1986.
- [9] Κάππος, Δ.: Διαφορικά Εξισώσεις, Αθήνα, 1966.
- [10] Αθανασιάδης, Χ., Καλογερόπουλος, Γ., Στρατής, Ι.: Μαθηματικά Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Σημειώσεις παραδόσεων, Αθήνα, 1990.