ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΕ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΡΟΖΑ ΒΛΑΧΟΥ ΑΜ:412/2010001

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ευγένιος Αυγερινός	Καθηγητής	Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Επιβλέπων
Ευαγγελία Αθανασιάδου-Κόττα	Επίκουρη Καθηγήτρια	Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής
Βασιλική Φαρμάκη	Καθηγήτρια	Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος Συμβουλευτικής Επιτροπής
Ιωάννα Μαμωνά-Downs	Καθηγήτρια	Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Πατρών	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Αχιλλέας Δραμαλίδης	Καθηγητής	Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης στην Προσχολική Ηλικία Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Μιχαήλ Φιλιππάκης	Αναπληρωτής Καθηγητής	Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων Πανεπιστημίου Πειραιά	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής
Μιχαήλ Σκουμιός	Αναπληρωτής Καθηγητής	Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής

Ρόδος, Ιανουάριος 2019

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

«Είμαι η αποκλειστική συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «*ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΕ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ*». Η συγκεκριμένη Διδακτορική Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στην εργασία. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στην εργασία τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα, και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψή τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

Η ΔΗΛΟΥΣΑ

Ρόζα Βλάχου

e-mail: r.vlachou@aegean.gr

Σε κάθε παιδί που γνώρισε
τη μαγεία των Μαθηματικών
και σε κάθε δάσκαλο που
μεταλαμπαδεύει αυτή τη μαγεία!

ABSTRACT

The area of rational numbers is an important part of the mathematical education of our students, as their knowledge contributes to the understanding of other mathematical concepts. For this reason many researchers are moving in this field by exploring the students' difficulties. However, in spite of the fact that curriculum change and mathematical school texts adapt to new education needs, students, internationally, continue to have difficulties when handling fractions.

The international literature reports four external factors influencing the understanding of the fractions: 1. the way of teaching, 2. the use or non-representations, 3. the representations of the school books, and 4. the perceptions of the teachers and candidate teachers in the fractions.

We therefore see that several researchers have attributed to each other and to a different factor the difficulties faced by students in fractions. In the present study, believing that these students' difficulties are due to a combination of factors including these four factors together, it attempts through long-term research to highlight these factors in Greece with the ultimate goal of formulating and proposing solutions to reduce of these pupils' difficulties.

In particular, the pupils' difficulties in the fractions are examined in Primary and Secondary Education, then the difficulties of the candidate teachers for the fractions are investigated, the contents of all primary school books are analyzed for the quantity, type and frequency of the representations in fractions and, finally, from the findings of these surveys, a prototype innovative intervention program is designed and implemented to reduce these difficulties.

The innovation introduced is that for the design of intervention programs, not only multiple representations, but also ten structural elements of mathematics (1. Realistic Mathematics Education, 2.History of Mathematics, 3.Open Problem, 4.Breach of Didactic Contract, 5.Counterexamples, 6.Geometric Transformations, 7.Mental Computations and Estimations, 8.Interdisciplinary, 9.Problem Posing plus, 10.Technology) have been used as tools for didactic interventions to enhance the effectiveness of representations, which seems that in recent years, despite being widely used and their positive influence being explored, representations cannot achieve optimal results as the pupils' difficulties in fractions remain international.

The above are investigated in the three research parts of the dissertation.The A΄ research part consists of longitudinal surveys and were designed not only to identify the

difficulties of students in primary and secondary education concerning fractions, but also to explore the stability of the findings of these studies. It is an important research part for designing teaching interventions and educational software, as these findings were the basis and rules upon which the activities were planned. The results of the A΄ research section show that students of Primary and Secondary Education of Greece are very difficult, similar to those presented in the international bibliography.

The B΄ research part aims to identify the causes of these difficulties that students face. Τhe perceptions and beliefs of prospective teachers and the structure and content of Greek mathematics textbooks of primary school are therefore highlighted. The results showed that prospective teachers face major difficulties both in finding a fraction between two fractions and finding fractions on the number line. Prospective teachers appear to show equally significant difficulties when it comes to improper fractions, as the works with these notions had the lowest success rates. On the notion of equally dividing the unit, it was observed that prospective teachers do not face any problem in finding the fraction representing a shape when the unit is divided into as many equal parts as the denominator says. They begin to experience difficulties, however, when the parts in which the unit is divided do not coincide with the denominator of the fraction. Consequently, it seems that prospective teachers have not fully grasped the notion of equal parts of the fractional unit.

In the same research part also includes the content research conducted on Greek textbooks of mathematics of all six grades of primary school. The group of books studied includes student's books, activity books, and teacher’s books- totally, 38 textbooks. The purpose of this research was to check the quality, quantity and appropriateness of representations on the notions of equal parts of the fractional unit, improper fractions and sequences of rational numbers on the geometric model of number line. At the same time, a commentary on the adequacy and type of representations and their correlation with the difficulties that students encounter takes place, based on surveys on these notions. Findings show a limited extent of the chapter of textbooks dealing with these notions, and limited implementation of multiple representations.

Finally, the intervention program, which is the C part of the research and which was implemented on the basis of multiple representations with the help of the ten structural elements of Mathematics, showed an improvement in pupils' performance in fractions in the post-tests and the creation of a positive attitude towards Mathematics. In particular, τhe analysis of the collected data both similarity statistical method and implicative graph showed that multiple representations and ten structural elements of Mathematics helped enough students to reduce their difficulties about classification of fractions as a representation on the number line, as well as the concepts of the unit's division in equal parts and the concept of the improper fractions. The reduction of difficulties of students seems to amplify students' self-esteem about mathematics, as they stated to be more satisfied by their performance and expressed more interest for the subject. In additional, students that stated that they don't like learning mathematics (those students showed low performance on mathematics at school), after the interventions there was a change on their convictions, as they stated that they like mathematics. The more important finding is that the students after the learning process develop a positive attitude in mathematics which helps them to solve difficult tasks such as tasks with improper fractions. This change of positive attitude in mathematics was affected - according to statements of students in interviews – by better understanding.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η περιοχή των ρητών αριθμών είναι ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής παιδείας των μαθητών μας, καθώς η γνώση τους συμβάλλει στην κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών. Για το λόγο αυτό πολλοί ερευνητές κινούνται στο πεδίο των κλασμάτων ερευνώντας τις δυσκολίες των μαθητών πάνω στους ρητούς. Ωστόσο, ιδιαίτερη ανησυχία προκαλεί το γεγονός ότι αυτές οι δυσκολίες παρουσιάζουν μια διαχρονικότητα και μια δυσκαμψία στην αλλαγή τους, παρά το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία στη Ελλάδα έχουν αλλάξει.

Η διεθνής βιβλιογραφία αναφέρει τέσσερις εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση των κλασμάτων: 1. τον τρόπο διδασκαλίας, 2. τη χρήση ή μη αναπαραστάσεων, 3. τις αναπαραστάσεις των σχολικών βιβλίων και 4. τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και υποψήφιων εκπαιδευτικών στα κλάσματα.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι διάφοροι ερευνητές έχουν αποδώσει ο καθένας και σε διαφορετικό παράγοντα τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα. Στην παρούσα έρευνα, πιστεύοντας ότι οι δυσκολίες αυτές των μαθητών οφείλονται σε έναν συνδυασμό παραγόντων που συμπεριλαμβάνει και τους τέσσερις αυτούς παράγοντες μαζί, επιχειρεί μέσα από μια μακρόχρονη έρευνα να αναδείξει αυτούς τους παράγοντες στον ελλαδικό χώρο με τελικό στόχο τη διατύπωση και πρόταξη λύσεων για τη μείωση αυτών των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Πιο συγκεκριμένα, ερευνούνται οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα στην Πρωτοβάθμια και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, στη συνέχεια ερευνούνται οι δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων για τα κλάσματα, αναλύονται τα περιεχόμενα όλων των σχολικών βιβλίων του δημοτικού για την ποσότητα, το είδος και τη συχνότητα των αναπαραστάσεων στα κλάσματα και τέλος από τα πορίσματα αυτών των ερευνών σχεδιάζεται και υλοποιείται πρωτότυπο καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη μείωση αυτών των δυσκολιών.

Η καινοτομία που εισάγεται είναι ότι για το σχεδιασμό των παρεμβατικών προγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία για τις διδακτικές παρεμβάσεις όχι μόνο οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, άλλα και δέκα δομικά στοιχεία των Μαθηματικών (Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Ιστορία των Μαθηματικών, Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Διεπιστημονικότητα, Κατασκευή Προβλήματος και Τεχνολογία) για να ενισχύσουν την αποτελεσματικότητα των αναπαραστάσεων, που φαίνεται ότι τα τελευταία

χρόνια, παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται ευρέως και η θετική τους επιρροή έχει διερευνηθεί, δεν μπορούν αν επιφέρουν βέλτιστα αποτελέσματα, καθώς οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα παραμένουν διεθνώς.

Όλα τα παραπάνω διερευνούνται στα τρία ερευνητικά μέρη της εργασίας. Τα αποτελέσματα του Α΄ ερευνητικού μέρους δείχνουν έντονες δυσκολίες των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης της Ελλάδας, παρόμοιες με αυτές που παρουσιάζει η διεθνής βιβλιογραφία. Στο Β΄ ερευνητικό μέρος αναδεικνύονται οι σημαντικές δυσκολίες που έχουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι πάνω στους ρητούς αριθμούς, που σε κάποιες έννοιες είναι παρόμοιες με αυτές που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, όπως στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, ενώ στο ίδιο ερευνητικό μέρος αναδύονται οι πενιχρές αναπαραστάσεις των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών της Ελλάδας για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τα καταχρηστικά κλάσματα και την τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Τέλος, το Γ΄ ερευνητικό μέρος αποτελεί το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα, που υλοποιήθηκε βάσει των πολλαπλών αναπαραστάσεων με την επικουρία των δέκα δομικών στοιχείων των Μαθηματικών. Η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων, τόσο με τη στατιστική μέθοδο ομοιότητας όσο και με το συνεπαγωγικό διάγραμμα, έδειξε ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις με την επικουρία των δέκα δομικών στοιχείων των Μαθηματικών βοήθησαν αρκετά τους μαθητές να μειώσουν τις δυσκολίες τους όσον αφορά τη σειροθέτηση των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, την έννοια της διαίρεσης της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη και την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων και τη δημιουργία μιας θετικής στάσης για τα Μαθηματικά. Αυτή η αλλαγή θετικής στάσης στα μαθηματικά επηρεάστηκε - σύμφωνα με τις δηλώσεις των μαθητών στις συνεντεύξεις - από την καλύτερη κατανόηση των κλασμάτων.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τελειώνοντας το ταξίδι αυτής της ερευνητικής περιπέτειας θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον καθηγητή μου κ. Ευγένιο Αυγερινό, που πριν από είκοσι χρόνια μου δίδαξε την ομορφιά των Μαθηματικών και από τότε έγινε συνοδοιπόρος μου στις ερευνητικές μου ανησυχίες και υποστηρικτής, σύμβουλος, μέντορας. Δίνοντας πάντα το στίγμα του εμπνευστή που πρεσβεύει ότι οι ερευνητικές περιπέτειες δεν σταματούν ποτέ, αλλά το τέλος κάθε μιας γίνεται η αρχή μιας άλλης, πιο δημιουργικής, που συμπορεύεται με την πείρα, το βίωμα και τη γνώση της προηγούμενης. Τον ευχαριστώ και πάλι και ελπίζω να συνεχίσουμε το υπέροχο αυτό ταξίδι στη γνώση, στην έρευνα, στη δημιουργικότητα, στην ανακάλυψη!

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής την κ. Φαρμάκη Βασιλική και την κ. Αθανασιάδου-Κόττα Ευαγγελία, δύο προσωπικότητες ξεχωριστές και ιδιαίτερες, που η γνωριμία μας έγινε ορόσημο στα σταυροδρόμια της έρευνας, στιγματίζοντας θετικά την ερευνητική αυτή προσπάθεια. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής την κ. Ιωάννα Μαμωνά-Downs, τον κ. Αχιλλέα Δραμαλίδη, τον κ. Μιχαήλ Φιλιππάκη και τον κ. Μιχαήλ Σκουμιό, που δέχτηκαν την πρόταση να μπουν στην επταμελή επιτροπή και που με τα σχόλιά τους και τις παρεμβάσεις τους βοήθησαν στην ολοκλήρωση της διατριβής.

Για το τέλος θα αφήσω ένα ευχαριστώ στους συμφοιτητές μου, υποψήφιους διδάκτορες, Δήμητρα και Θανάση για την όμορφη και προσοδοφόρα συνεργασία μας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Κίνητρο και Υπόβαθρο της Έρευνας

Η έννοια του κλάσματος είναι μια από τις πιο σημαντικές γνωστικές περιοχές των Μαθηματικών και διδάσκεται στους μαθητές από την αρχή του δημοτικού σχολείου σε διάφορα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο και από την Γ΄ τάξη του δημοτικού στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, λόγω της σπουδαιότητας και της αναγκαιότητας της έννοιας για την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών (Jordan, Hansen, Fuchs, Siegler, Gersten & Micklos, 2013· Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2010). Έρευνες έχουν δείξει τη σχέση των κλασμάτων με την επίδοση των μαθητών στην κατασκευή και λύση προβλήματος (Lee & Shin, 2015·Αυγερινός & Βλάχου, 2013). Επιπλέον, η χρήση κλασματικών ποσοτήτων μπορεί να οδηγήσει σε μια πιο ρητή χρήση δομών και σχέσεων σε αλγεβρικές καταστάσεις (Empson, Levi & Carpenter, 2011· Hackenberg, 2013). Η κλασματική γνώση, δηλαδή, επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές γράφουν εξισώσεις για να αναπαραστήσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ δύο άγνωστων ποσοτήτων (Lee & Hackenberg, 2014).

Η συσχέτιση αυτή των ρητών αριθμών με άλλες μαθηματικές έννοιες αποτέλεσε το έναυσμα για πολλούς ερευνητές της εκπαίδευσης τα κλάσματα να γίνουν μια προκλητική και ελκυστική γνωστική περιοχή για έρευνα. Ωστόσο, αυτή η τόσο σημαντική έννοια των Μαθηματικών, παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες κατανόησης από τους μαθητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης (Αυγερινός και Βλάχου, 2014· Boulet, 1998· Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά – Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, 2006· McLeod & Newmarch, 2006· Sfard, 1991), δυσκολίες που έχουν την τάση να οικειοποιούνται και να διατηρούνται μέσα στα γνωστικά σχήματα των μαθητών για τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα, που μπορεί να φτάνει και την ενήλικη ζωή τους (Avgerinos, Vlachou & Kantas, 2012). Έτσι, κατασκευάζονται παρανοήσεις οι οποίες δυσκολεύουν όχι μόνο την εκπαιδευτική διαδικασία, αλλά και τους ίδιους τους μαθητές κατά την εξελικτική μαθησιακή τους πορεία. Σε έρευνα που έγινε στην Αμερική, βάσει ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος, βρέθηκε ότι μόνο το ένα τρίτο των μαθητών ηλικίας 13 ετών μπορούσαν να τοποθετήσουν σωστά ένα απλό κλάσμα πάνω στην αριθμητική γραμμή. Ο χειρισμός της έννοιας των κλασμάτων φαίνεται να δυσκολεύει ακόμη περισσότερο όταν αυτή εντάσσεται μέσα σε πρόβλημα (Αυγερινός & Βλάχου, 2013· Ross & Bruce, 2011).

Η τόσο σημαντική θέση της έννοιας των κλασμάτων, λοιπόν, για την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών, αλλά και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν διαχρονικά οι μαθητές του δημοτικού σε διεθνές επίπεδο έδωσαν το κίνητρο για την έναρξη αυτής της ερευνητικής περιπέτειας με ένα υπόβαθρο προσανατολισμένο στη μείωση αυτών των δυσκολιών.

Η Συμβολή της Έρευνας

Η περιοχή των ρητών αριθμών, όπως είδαμε, είναι ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής παιδείας των μαθητών μας, καθώς η γνώση τους συμβάλλει στην κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών. Για το λόγο αυτό πολλοί ερευνητές κινούνται στο πεδίο αυτό ερευνώντας τις δυσκολίες των μαθητών πάνω στους ρητούς. Ωστόσο, ιδιαίτερη ανησυχία προκαλεί το γεγονός ότι αυτές οι δυσκολίες παρουσιάζουν μια διαχρονικότητα και μια δυσκαμψία στην αλλαγή τους παρά το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία στη Ελλάδα έχουν αλλάξει.

Όλες αυτές οι δυσκολίες έχουν αποδοθεί από διάφορους ερευνητές σε ποικίλους παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Janvier (1987), η ποικιλία των αναπαραστάσεων στα σχολικά βιβλία ενέχει μια σημαντική θέση στην προώθηση της κατανόησης της έννοιας των κλασμάτων. Η κεντρική θέση που κατέχουν τα διάφορα πεδία αναπαράστασης στη διδασκαλία των ρητών υποστηρίζουν κι άλλοι ερευνητές όπως οι Vergnaud (1996), οι Gagatsis, Kyriakides και Panaoura (2004). Επίσης, ο Lo (1993) σε έρευνά του αποδίδει τις δυσκολίες που υπάρχουν στην αντίληψη των κλασμάτων πιθανά στην ακατάλληλη μέθοδο της διδασκαλίας τους στην τάξη. Την ίδια άποψη υποστηρίζει και ο Streefland (1991) προσθέτοντας ότι η αποτυχία στη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος οφείλεται στην πολυπλοκότητα της έννοιας και στην παραδοσιακή προσέγγιση στα κλάσματα, η οποία είναι τυπική και μηχανική από την αρχή (Sfard, 1991).

Τα παραπάνω ενισχύονται από τη διεθνή βιβλιογραφία η οποία για τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, πέρα από τον τρόπο διδασκαλίας των κλασμάτων (Chen & Li, 2009· Howe et al., 2015· Rønning, 2013· Αυγερινός και Βλάχου, 2012), τη χρήση ή μη των αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας κατά τη διδασκαλία της και την ποικιλία των αναπαραστάσεων στα σχολικά βιβλία (Gagatsis & Shiakalli, 2004· Jiang & Chua, 2010· Shahbari & Peled, 2015· Dreher & Kuntze, 2015· Vlachou & Avgerinos, 2016· Deliyianni, Gagatsis, Elia & Panaoura, 2016) εστιάζει και στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και υποψήφιων δασκάλων (Lin, 2010· Lee & Sztajn, 2008· Dubinsky, Arnon & Weller, 2013· Tobias, 2013· Αυγερινός και Βλάχου, 2013· Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016· Thanheiseretal., 2016· Whitacre & Nickerson, 2016). Η εστίαση σε αυτόν τον παράγοντα στηρίζεται στο γεγονός ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι είναι αυτοί που θα κληθούν να διδάξουν την έννοια του κλάσματος και θα πρέπει να κατέχουν την έννοια.

Βάσει των παραπάνω ερευνών διαπιστώνουμε ότι η διεθνής βιβλιογραφία αναφέρει τέσσερις εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση των κλασμάτων, 1. τον τρόπο διδασκαλίας, 2. τη χρήση ή μη αναπαραστάσεων, 3. τις αναπαραστάσεις των σχολικών βιβλίων και 4. τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και υποψήφιων εκπαιδευτικών στα κλάσματα.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι διάφοροι ερευνητές έχουν αποδώσει ο καθένας και σε διαφορετικό παράγοντα τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα. Στην παρούσα έρευνα, πιστεύοντας ότι οι δυσκολίες αυτές των μαθητών οφείλονται σε έναν συνδυασμό παραγόντων που συμπεριλαμβάνει και τους τέσσερις αυτούς παράγοντες μαζί, επιχειρεί μέσα από μια μακρόχρονη έρευνα να αναδείξει αυτούς τους παράγοντες στον ελλαδικό χώρο με τελικό στόχο τη διατύπωση και πρόταξη λύσεων για τη μείωση αυτών των δυσκολιών των μαθητών με παρεμβάσεις στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

Πιο συγκεκριμένα, ερευνούνται οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα στην Πρωτοβάθμια και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, στη συνέχεια ερευνούνται οι δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων για τα κλάσματα, αναλύονται τα περιεχόμενα όλων των σχολικών βιβλίων του δημοτικού για την ποσότητα, το είδος και τη συχνότητα των αναπαραστάσεων στα κλάσματα και τέλος από τα πορίσματα αυτών των ερευνών σχεδιάζεται και υλοποιείται πρωτότυπο καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη μείωση αυτών των δυσκολιών.

Η καινοτομία που εισάγεται είναι ότι για το σχεδιασμό των παρεμβατικών προγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία για τις διδακτικές παρεμβάσεις όχι μόνο οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, άλλα και δέκα δομικά στοιχεία των Μαθηματικών για να ενισχύσουν την αποτελεσματικότητα των αναπαραστάσεων, που φαίνεται ότι τα τελευταία χρόνια, παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται ευρέως και η θετική τους επιρροή έχει διερευνηθεί, δεν μπορούν αν επιφέρουν βέλτιστα αποτελέσματα, καθώς οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα παραμένουν διεθνώς. Τα 10 (δέκα) δομικά στοιχεία των Μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκα επικουρικά για να ενισχύσουν την αποδοτικότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι:

1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά
2. Η Ιστορία των Μαθηματικών
3. Το Ανοιχτό Πρόβλημα

4. Η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου
5. Το Αντιπαράδειγμα
6. Οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
7. Οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί
8. Η Διεπιστημονικότητα
9. Η Κατασκευή Προβλήματος και
10. Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ)

Έτσι, η εργασία είναι η πρώτη που ενοποιεί όλους του αιτιώδεις παράγοντες της διεθνούς βιβλιογραφίας για τις δυσκολίες στα κλάσματα και τις διερευνά ταυτόχρονα όλους στον ελλαδικό χώρο και διαχρονικά, για να επιτευχθεί σταθεροποίηση των αποτελεσμάτων, και εν συνεχεία προτάσσει παρεμβατικά προγράμματα που εισάγουν την καινοτομία της ενοποίησης των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τα δέκα δομικά στοιχεία των Μαθηματικών προκειμένου να επιτευχθούν καλύτερα αποτελέσματα αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων.

Η Πρωτοτυπία της Έρευνας

Από την ανάλυση της διεθνούς βιβλιογραφίας παρατηρήθηκε ότι οι περισσότερες έρευνες που αφορούν στα κλάσματα εστιάζουν στον εντοπισμό των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές και λιγότερο στον τρόπο μείωσης και αντιμετώπισής τους. Επιπρόσθετα, τα περισσότερα παρεμβατικά προγράμματα που προτείνονται έχουν εφαρμοστεί σε φοιτητές και πολύ λιγότερα σε μαθητές οι οποίοι βρίσκονται σε πραγματικές συνθήκες τάξης. Με γνώμονα τα παραπάνω σχεδιάστηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας έρευνας, το οποίο εφαρμόστηκε με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων σε πραγματικές συνθήκες τάξης για τέσσερις εβδομάδες ανά ομάδα δείγματος, εισάγοντας και μια καινοτομία στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Πέρα, δηλαδή, από τις αναπαραστάσεις και τα πολλαπλά είδη της που χρησιμοποιούνται στα ερευνητικά παρεμβατικά προγράμματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, στις παρούσες διδακτικές παρεμβάσεις προστέθηκαν και κάποιες άλλες μαθηματικές πρακτικές ως μαθηματικά εργαλεία, τα οποία ενισχύουν επικουρικά τη διδασκαλία δίνοντας ταυτόχρονα μια παιγνιώδη διάσταση στις δραστηριότητες. Αυτά τα μαθηματικά εργαλεία είναι 1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ.

Η επιλογή των δέκα αυτών μαθηματικών πρακτικών έγινε μέσα από την παρατήρηση και την επισταμένη μελέτη της βιβλιογραφίας για τη διδασκαλία των κλασμάτων κυρίως στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Shahbari & Peled, 2015˙ Widjaja, Stacey & Steinle, 2011˙ Vamvakoussi & Vosniadou, 2012˙ Hansen, Mavrikis & Geraniou, 2016˙ Sinclair, Liljedahl & Zazkis, 2006) και την εμπλοκή τρόπων και μεθόδων διδασκαλίας, όπως τα ρεαλιστικά μαθηματικά, το ανοιχτό πρόβλημα οι ΤΠΕ κ.α.. που αποτελούν ερευνητικές προτάσεις (Freudenthal, 1973˙ Jankvist, 2009b˙ Klymchuk, 2001˙ Zaslavsky, 2014˙ Deneme & Ada, 2012). Διαπιστώθηκε, λοιπόν, ότι αν και οι παραπάνω μαθηματικές πρακτικές υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρονται ως μεμονωμένες έννοιες της διδακτικής των μαθηματικών. Μέσα από πιλοτική έρευνα που έγινε από την ερευνήτρια σε αυθεντικές συνθήκες τάξης αναδείχθηκαν οι έντονες συσχετίσεις και οι θετικές επιρροές των δέκα αυτών δομικών στοιχείων στη διδασκαλία των μαθηματικών και εν συνεχεία τολμήθηκε η ενοποίησή τους με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις για τη δημιουργία πρωτότυπου καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Η εφαρμογή του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος υλοποιήθηκε μέσα από διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση πρωτότυπων μέσων, υλικών, εργαλείων και αναπαραστάσεων-ψηφιακών και βιωματικών- που δίνουν μια παιγνιώδη διάσταση στις σχεδιασθείσες διδασκαλίες έτσι ώστε να επιτευχθεί μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Ταυτόχρονα, η παιγνιώδης διάσταση των παρεμβατικών προγραμμάτων τείνει να διεγείρει την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά ώστε να διακρίνουν τη δύναμη και την ομορφιά τους και να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον και την επιθυμίας τους να ασχοληθούν με αυτά.

Επιπλέον, η παρούσα εργασία διερευνά τους πιθανούς παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στα κλάσματα, όπως έχει αναδυθεί από τη διεθνή βιβλιογραφία, προσαρμόζοντας με έρευνες τις αιτίες αυτές στα δεδομένα της ελληνικής εκπαίδευσης. Στο πλαίσιο αυτό της διερεύνησης, η παρούσα ερευνητική εργασία εκτείνεται σε τρία μεγάλα ερευνητικά πεδία. Στο πρώτο ερευνητικό πεδίο διερευνούνται οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα. Στο δεύτερο ερευνητικό πεδίο ανιχνεύονται οι αιτίες αυτών των δυσκολιών όπως αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία, αλλά προσαρμοσμένες και εφαρμοσμένες στην ελληνική εκπαίδευση. Στο τρίτο ερευνητικό πεδίο σχεδιάζονται και εφαρμόζονται πιλοτικά, τελικά παρεμβατικά προγράμματα υπό τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων, που η σχεδίασή τους βασίστηκε στα πορίσματα ερευνών που διεξήχθησαν από το 2010 μέχρι και το 2016 και στοχεύει με παιγνιώδη τρόπο να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν βασικές έννοιες των ρητών αριθμών, δημιουργώντας γνωστικά δίπολα που συνδυάζουν τις Νέες Τεχνολογίες με τη βιωματικότητα, την κριτική σκέψη με τη δημιουργικότητα, τη γνώση με το παιχνίδι, το σχολείο με την ευχαρίστηση, την ομαδικότητα με την προσωπική ανάδειξη ως απαίτηση των στόχων, των αναγκών της σύγχρονης διδακτικής, της συναίσθησης της ποιότητας στα σχολεία και των διδακτικών αρχών που πρεσβεύουν ελεύθερη και ισότιμη συμμετοχή, επιστημονική εντιμότητα, ατομική ιδιαιτερότητα και ομαδική έκφραση.

Επισκόπηση Κεφαλαίων

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 10 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται οι λόγοι και τα κίνητρα για την έναρξη της έρευνας, καθώς η συμβολή της στην επιστημονική κοινότητα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης που έχει γίνει πάνω στη σύγχρονη βιβλιογραφία και αφορούν στο θέμα των αναπαραστάσεων στα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, ερευνήθηκαν τα κυριότερα επιστημονικά περιοδικά της διεθνούς βιβλιογραφίας προκειμένου να μελετηθούν και να καταγραφούν τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν δημοσιευθεί τα τελευταία 12 χρόνια με θέμα τις αναπαραστάσεις στα κλάσματα. Ποιες αναπαραστάσεις, δηλαδή, έχουν αναδειχθεί μέσα από αυτές τις έρευνες ως οι πιο κατάλληλες ή ακατάλληλες για την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές. Από τη μελέτη και την ανάλυση των ερευνών φάνηκε ότι τα αποτελέσματα από τη χρήση μιας αναπαράστασης δεν εξαρτώνται μόνο από το είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιείται αλλά επηρεάζονται και από άλλους παράγοντες όπως είναι η εξοικείωση των μαθητών με τη δοθείσα προς χρήση αναπαράσταση και την ικανότητα των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν την κατάλληλη αναπαράσταση κάθε φορά, για την επίτευξη των διδακτικών και παιδαγωγικών στόχων.

Το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει τη μεθοδολογία της έρευνας, τον σκοπό, τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και τα εργαλεία υλοποίησης και ανάλυσης της έρευνας. Συνοπτικά, το ερευνητικό πλαίσιο της εργασίας διήρκησε έξι χρόνια, έλαβε χώρα στην Ελλάδα και πήραν μέρος συνολικά 1.621 συμμετέχοντες. Η επιλογή του δείγματος ήταν απογραφική, στρωματοποιημένη και συμπτωματική, ανάλογα με τους σκοπούς και τις ανάγκες της εκάστοτε έρευνας. Οι έρευνες ακολούθησαν μια ποιοτική και ποσοτική προσέγγιση. Επίσης έγινε ανάλυση περιεχομένου και μελέτη περίπτωσης. Έτσι, σχηματίστηκε μια τριγωνοποίηση μεθοδολογική, χρονική, τοπική και θεωρητική προκειμένου να επιτευχθεί σταθεροποίηση των πορισμάτων. Αναφορικά με τις μεθόδους συλλογής δεδομένων, χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια και δοκίμια που συντάχθηκαν από την ίδια την ερευνήτρια και που κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές έρευνες. Επίσης, έγιναν διδασκαλίες, ημιδομημένες συνεντεύξεις, βιντεοσκοπήσεις, παρατήρηση και βιβλιογραφική μελέτη. Για την ανάλυση των δεδομένων των ερευνών χρησιμοποιήθηκε, πέρα από την περιγραφική ανάλυση, το Statistical Implicative Analysis του Gras με τη χρήση του λογισμικού CHIC.

Το τέταρτο κεφάλαιο στόχο έχει να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του Δημοτικού) και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Α΄, Β΄, Γ Γυμνασίου, καθώς και Α΄ Λυκείου) πάνω στους ρητούς αριθμούς. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που καλύπτουν όλο το φάσμα των εννοιών του κλάσματος, όπως ισοδυναμία κλασμάτων, πράξεις κλασμάτων, ποσοστά κ.τ.λ..

Το κεφάλαιο 5 στόχο έχει να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που περιορίζονται στη μελέτη των εννοιών που διαπραγματεύεται η παρούσα διατριβή, δηλαδή στις έννοιες της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων, προκειμένου να επιτευχθεί σταθεροποίηση των πορισμάτων. Το κεφάλαιο 4 και 5 αποτελούν το Πρώτο ερευνητικό μέρος της εργασίας.

Το κεφάλαιο 6 αποτελείται από διαχρονικές έρευνες που διεξήχθησαν από το 2011 μέχρι και το 2015 και σκοπό είχαν να ελέγξουν τις αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων πάνω σε διάφορες έννοιες των κλασμάτων, αφού αυτοί είναι που θα κληθούν να διδάξουν στους μαθητές τα κλάσματα και η επιτυχία ή αποτυχία της διδασκαλίας θα εξαρτηθεί και από τις αντιλήψεις που έχουν αυτοί για τα κλάσματα. Στην έρευαν αυτή συμμετείχαν συνολικά 900 υποψήφιοι δάσκαλοι από διάφορα μέρη της Ελλάδας. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων έγινε με τα διαγράμματα ομοιότητας που ανέδειξαν σημαντικές δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων στα κλάσματα.

Στο κεφάλαιο 7 δίνεται έμφαση στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού. Παρουσιάζεται η έρευνα περιεχομένου που έγινε πάνω στα ελληνικά εγχειρίδια των μαθηματικών και των έξι τάξεων του δημοτικού. Η ομάδα των βιβλίων που μελετήθηκε περιλαμβάνει τα βιβλία του μαθητή, τα τετράδια εργασιών και τα βιβλία για το δάσκαλο. Σκοπός της έρευνας αυτής ήταν να ελεγχθεί η ποιότητα, η ποσότητα και η καταλληλότητα των αναπαραστάσεων πάνω στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Ταυτόχρονα γίνεται σχολιασμός για την επάρκεια και το είδος των αναπαραστάσεων και τη συσχέτισή τους με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, βάσει ερευνών, πάνω σε αυτές τις έννοιες. Το κεφάλαιο 6 και 7 αποτελούν το δεύτερο ερευνητικό μέρος της εργασίας που διερευνά τους λόγους και τις αιτίες των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Τα κεφάλαια 8 και 9 απαρτίζουν το τρίτο και τελευταίο ερευνητικό μέρος, που αποτελεί την παρουσίαση προτάσεων για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στις έννοιες του κλάσματος που διερευνά η παρούσα διατριβή, δηλαδή στις έννοιες της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Οι προτάσεις αυτές παρουσιάζονται με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων με χρήση βιωματικών δραστηριοτήτων και δραστηριοτήτων σε ηλεκτρονικά περιβάλλοντα. Έτσι, στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζεται το λογισμικό Fraction Battles, το οποίο δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια για να συμπληρώσει τις διδακτικές παρεμβάσεις για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στους ρητούς.

Στο κεφάλαιο 9 παρουσιάζεται το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη τα πορίσματα των δυο προηγούμενων ερευνητικών μερών, σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν διδασκαλίες για τις έννοιες της αριθμογραμμής, των καταχρηστικών κλασμάτων και το χωρισμό της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη με την καινοτομία της σύνδεσης των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τα 10 δομικά στοιχεία των Μαθηματικών όπως ορίζονται στην παρούσα εργασία. Το δείγμα αποτέλεσαν 78 συμμετέχοντες. Ως εργαλεία της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια/δοκίμια, ημιδομημένες συνεντεύξεις, βιντεοσκοπήσεις, διδακτικές παρεμβάσεις, παρατήρηση και η ανάλυση έγινε με το στατιστικό πακέτο CHIC. Οι τελικές διδασκαλίες χωρίστηκαν σε 10 φάσεις.

Στο κεφάλαιο 10 παρουσιάζονται ομαδοποιημένα τα συμπεράσματα της ερευνητικής αυτής μελέτης και δίνονται οι εκπαιδευτικές εφαρμογές και οι μελλοντικές κατευθύνσεις της έρευνας.

Διασαφήνιση Βασικών Εννοιών

Πριν τη διασαφήνιση των βασικών εννοιών της έρευνας, κρίνεται αναγκαίο σε αυτό το σημείο να γίνει η σύμβαση με τον αναγνώστη ότι όπου αναφέρεται στην παρούσα διατριβή η λέξη «μαθητής» αυτή χρησιμοποιείται για να εκφράσει τόσο τις μαθήτριες όσο και τους μαθητές. Η λέξη «μαθητής» χρησιμοποιείται για λόγους διευκόλυνσης της συγγραφής της παρούσας εργασίας.

Συνεχίζοντας, στην ενότητα αυτή εξετάζονται βασικές έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα έρευνα. Αυτές οι έννοιες είναι οι ρητοί αριθμοί και τα κλάσματα, οι αναπαραστάσεις, τα είδη των αναπαραστάσεων, τα είδη μοντέλων για τα κλάσματα, τα δέκα δομικά στοιχεία των Μαθηματικών που εφαρμόζονται στην παρούσα εργασία και οι στάσεις και πεποιθήσεις.

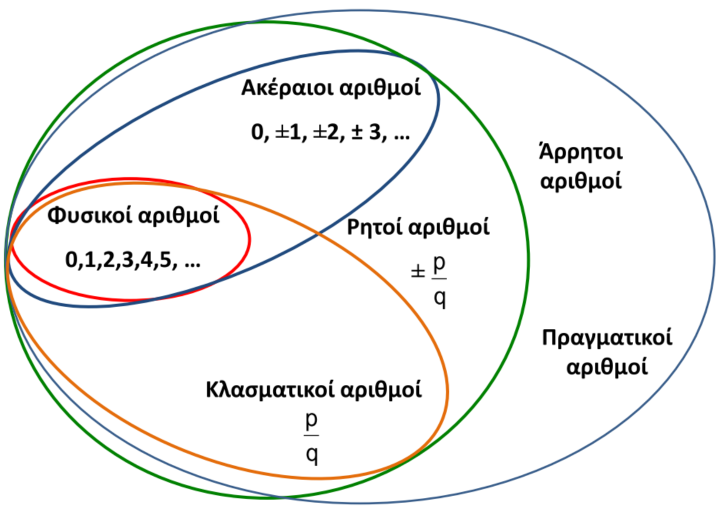
Ρητοί Αριθμοί και Κλάσματα

Η ανάγκη να μετρηθούν μεγέθη μικρότερα μιας μονάδας μέτρησης επιβάλλει την έννοια του κλασματικού αριθμού. Κλασματικός αριθμός είναι η έκφραση της σχέσης των μέτρων ενός «μέρους» p με το «όλο» q ενός μεγέθους. Δηλαδή, ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διαταγμένων ζευγών της μορφής:

$\frac{p}{q}$, $όπου\ \ p, q \neq 0$ είναι φυσικοί αριθμοί (Χασάπης, 2015).

Η σύνθεση των ακέραιων αριθμών με τους κλασματικούς αριθμούς δημιουργεί τους ρητούς αριθμούς. Συνεπώς, οι όροι «κλασματικός αριθμός» και «ρητός αριθμός» δεν είναι συνώνυμοι, όπως φαίνεται και σχηματικά στο Διάγραμμα 1.1. Πιο συγκεκριμένα, ρητός αριθμός είναι ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διαταγμένων ζευγών, όπου p και q ≠ 0 είναι ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή, ένα σύνολο κλασμάτων που εκφράζουν το ίδιο μέτρο (Χασάπης, 2015):

$$Q = \{\frac{p}{q},\ \ p, q\ \in Z, \quad q \neq 0\}$$



Διάγραμμα 1.1. Απεικόνιση της σχέσης των ρητών αριθμών με τους κλασματικούς αριθμούς (Χασάπης, 2015).

Για τη σχέση ρητών αριθμών και κλασμάτων η Lamon (2007) αναφέρει επίσης ότι:

- Όλοι οι ρητοί αριθμοί μπορούν τα γραφτούν σε κλασματική μορφή.
- Όλοι οι αριθμοί που είναι γραμμένοι σε κλασματική μορφή δεν είναι απαραίτητα ρητοί (π.χ. ο αριθμός π/2 δεν είναι ρητός).
- Κάθε κλάσμα δεν αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό ρητό αριθμό (π.χ. τα κλάσματα 1/2, 2/4, 4/8 περιγράφουν τον ίδιο ρητό αριθμό) και ότι ένας μοναδικός ρητός αριθμός αποτελεί βάση για τα ισοδύναμα κλάσματα.
- Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν σε κλασματική μορφή αλλά και σε άλλες μορφές (π.χ. δεκαδική μορφή).
- Οι δεκαδικοί αριθμοί με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών, οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί και τα ποσοστά είναι ρητοί αριθμοί. Οι μη πεπερασμένοι και μη περιοδικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί.

Οι Vosniadou, Vamvakoussi και Skopeliti (2008) επίσης αναφέρουν τα εξής:

- Οι ρητοί αριθμοί δεν βασίζονται στην αρίθμηση και είναι πυκνοί (κανένας ρητός δεν έχει ένα μοναδικό επόμενο ή προηγούμενο αριθμό ενώ υπάρχουν άπειροι ρητοί ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο ρητούς).
- Οι ρητοί δεν υποστηρίζονται από τις στρατηγικές διάταξης των φυσικών αριθμών (το 1/4 είναι μεγαλύτερο από το 1/5), ενώ ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία δεν είναι απαραίτητα ο μεγαλύτερος.
- Οι τέσσερις πράξεις μπορούν είτε να μεγαλώνουν είτε να μικραίνουν τους αριθμούς.

Τελειώνοντας με τους παραπάνω ορισμούς και στο σημείο αυτό, γίνεται η εξής σύμβαση με τον αναγνώστη. Στην παρούσα εργασία, όπου αναφέρονται οι όροι «κλάσματα» και «ρητοί αριθμοί» εννοούνται οι κλασματικό αριθμοί, καθώς στο ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ των μαθηματικών του δημοτικού στην Ελλάδα αναφέρονται μόνο οι θετικοί ρητοί αριθμοί.

Αναπαραστάσεις και Μαθηματικά

Στην εκπαίδευση σε αρκετές περιπτώσεις δεν μπορεί να επιτευχθεί κατανόηση χωρίς τη βοήθεια αναπαραστάσεων. Μια τέτοια περίπτωση είναι η έννοια των κλασμάτων. Στην εκπαίδευση των Μαθηματικών, η έννοια της αναπαράστασης χρησιμοποιείται ως ισοδύναμη με ένα σημάδι που αντιπροσωπεύει μια μαθηματική έννοια. Είναι εκείνα τα σύμβολα ή νοητικές εικόνες με τις οποίες διάφορα στοιχεία μετατρέπονται σε μαθηματικές ιδέες (Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico & Gómez, 2016).

Οι αναπαραστάσεις, εκπεφρασμένες ως ένας τρόπος μοντελοποίησης των Μαθηματικών, μετατρέπονται σε χρήσιμα εργαλεία για την εννοιολογική κατανόηση και την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης. Ως τέτοιες καθιστούν τις μαθηματικές ιδέες πιο συγκεκριμένες και διαθέσιμες για στοχασμό βοηθώντας τους μαθητές να δείξουν τις σκέψεις τους και να κατανοήσουν περίπλοκες έννοιες (Coulombe & Berenson, 2001).

Οι αναπαραστάσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις εξωτερικές/σημειωτικές και εσωτερικές/νοητικές. Οι εξωτερικές/σημειωτικές αναφέρονται σε όλους τους φορείς (σύμβολο, σχήμα, διάγραμμα) οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα. Οι εσωτερικές/νοητικές αφορούν κυρίως τις νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε, οι οποίες αντιστοιχούν σε εσωτερικούς σχηματισμούς της πραγματικότητας. Εξαιτίας της φύσης τους δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Η ύπαρξή τους δηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων (Goldin, 1998 ˙Janvier, 1987). Ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις υπάρχει αμφίδρομη σχέση. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων, οι οποίες αφορούν και την πρότασή μας, εξαρτάται από την ερμηνεία των εσωτερικών αναπαραστάσεων. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές παρουσιάζουν μια εξωτερική αναπαράσταση φανερώνει στοιχεία για το πώς έχουν κατανοήσει αυτές τις πληροφορίες εσωτερικά.

Η επιτυχημένο μετάβαση από τη μία αναπαράσταση μιας έννοιας σε άλλη συμβάλλει στην ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη διαπίστωση του Duval (2006), η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης μιας έννοιας από τους μαθητές.

Στην παρούσα εργασία, όταν αναφερόμαστε στον όρο αναπαράσταση θα εννοείται η εξωτερική αναπαράσταση.

Είδη Αναπαραστάσεων στους Ρητούς Αριθμούς-Πολλαπλές Αναπαραστάσεις

Για να σκεφτούμε και να επικοινωνούμε με τις μαθηματικές ιδέες πρέπει κάπως να τις παρουσιάσουμε. Η επικοινωνία απαιτεί οι αναπαραστάσεις να είναι εξωτερικές, λαμβάνοντας την ποικιλία των μορφών, συμπεριλαμβανομένων των εικόνων (π.χ. σχεδίαση, γραφήματα), των γραπτών συμβόλων (π.χ. αριθμοί, εξισώσεις, λέξεις), των χειριστικών μοντέλων (π.χ. αριθμογραμμή, μπλοκ μοτίβου, κλασματικοί κύκλοι), της προφορικής γλώσσας (π.χ. συζητήσεις σε ολόκληρη την τάξη) και των πραγματικών καταστάσεων (Lesh, Post & Behr, 1987˙ Ryken, 2009). Στις παραπάνω πέντε μορφές μπορεί να προστεθεί και ένα έκτο σύστημα αναπαράστασης, τα εικονικά χειραπτικά (virtual manipulatives) (Moyer, Bolyard & Spikeel, 2002, όπ. αναφ. στο Λεμονίδης, 2016, σ. 56), που ορίζονται ως «ερμηνείες των κοινών μαθηματικών χειραπτικών υλικών και εργαλείων που βασίζονται στον υπολογιστή» και «μια διαδραστική, web-based οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικειμένου που παρουσιάζει ευκαιρίες για την κατασκευή μαθηματικής γνώσης» (Moyer, Bolyard & Spikeel, 2002, όπ. αναφ. στο Λεμονίδης, 2016, σ. 102). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι η ποικιλία χρήσης αυτών των έξι εξωτερικών παραστάσεων κατά τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας (Διάγραμμα 1.2).

Διάγραμμα 1.2. Οι 6 αναπαραστάσεις του κλάσματος

(Λεμονίδης, 2016, σ. 56)

Σύμφωνα με έρευνες (Card, MacKinlay, & Shneiderman, 1999· Cuoco & Curcio, 2001· Cheng, 2002· Dreher & Kuntze, 2015) η αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών με πολλούς τρόπους παίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική κατανόηση και προσδίδει αξία στις διαδικασίες διδασκαλίας. Αναφορικά με τα κλάσματα, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές να αναδομήσουν τα διαφορετικά εννοιολογικά χαρακτηριστικά του κλάσματος και να δημιουργήσουν κατανοητά νοητικά μοντέλα της έννοιας (Rau, Aleven & Rummel, 2009).

Επιπλέον, οι πρόσφατες τάσεις στα προγράμματα σπουδών, συμπεριλαμβανομένων των προτύπων που αναπτύχθηκαν από το National Council of Teachers of Mathematics

(NCTM 2000), κατέδειξαν τον παραγωγικό ρόλο που μπορούν να παίξουν τα μοντέλα και άλλες εξωτερικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (Jacobson & Izsak, 2015). Παρόλο που οι αναπαραστάσεις προσθέτουν πολυπλοκότητα, είναι απαραίτητη η χρήση μιας σειράς αναπαραστάσεων για την ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος από τους μαθητές, διότι κάθε μία παρέχει συνδέσεις με τις διάφορες μορφές των κλασματικών εννοιών και τα παιδιά χρειάζονται υποστήριξη για να κάνουν ενεργές συνδέσεις μέσα και μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων (Hansen, Mavrikis & Geraniou, 2016).

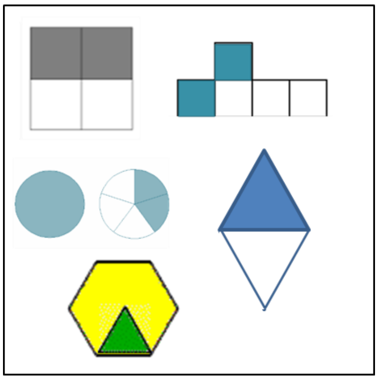
Μοντέλα Κλασμάτων

Πέρα από τις έξι μορφές αναπαράστασης υπάρχουν και τρία μοντέλα που χρησιμοποιούμε για τα κλάσματα. Οι Van de Walle, Karp και Bay-Williams (2012) αναφέρονται σε τρεις κατηγορίες μοντέλων για την αναπαράσταση κλασμάτων:

1. τα μοντέλα εμβαδού (αναπαράσταση επιφάνειας),
2. τα μοντέλα συνόλων (αναπαράσταση διακριτών ποσοτήτων) και
3. τα μοντέλα μήκους (αναπαράσταση αριθμογραμμής).

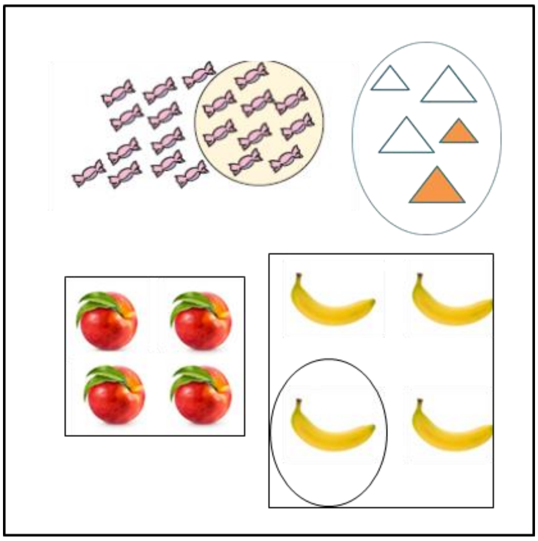
Η χρήση και των τριών αυτών μοντέλων είναι βασική κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων, καθώς στα τρία αυτά μοντέλα είναι διαφορετικός ο τρόπος που ορίζεται το όλο και τα ίσα μέρη, κάτι που θα απασχολήσει την παρούσα έρευνα σε μεγάλο βαθμό.

1. Μοντέλα εμβαδού. Στα μοντέλα εμβαδού, όπου τα μεγέθη είναι συνεχή, υπάρχει μια επιφάνεια η οποία αποτελεί το όλο και διαιρείται σε ίσα μέρη. Η χρήση των μοντέλων εμβαδού είναι βασική, καθώς προϋποθέτει την ανάπτυξη συλλογισμών σχετικά με τη σχέση μέρους – όλου (Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2010). Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι οι κύκλοι, ορθογώνιες επιφάνειες, διάφορα γεωμετρικά σχήματα, τετραγωνισμένο χαρτί, οι γεωπίνακες, τα μπλοκ μοτίβων (Διάγραμμα 1.3).



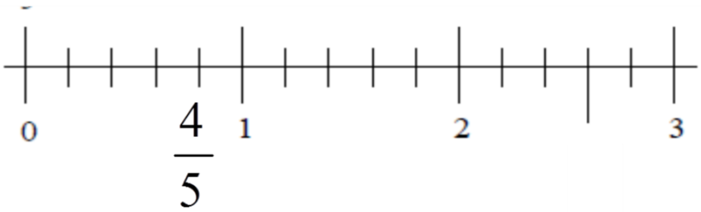
Διάγραμμα 1.3. Παραδείγματα μοντέλων εμβαδού που χρησιμοποιούνται στην παρούσα έρευνα.

2. Μοντέλα συνόλων. Τα μοντέλα συνόλων περιλαμβάνουν σύνολα διακριτών αντικειμένων, δηλαδή, αντικειμένων που μπορούν να καταμετρηθούν. Σε αυτά τα μοντέλα το σύνολο από όλα τα στοιχεία αποτελεί τη μονάδα αναφοράς (το όλο), ενώ τα ίσα μέρη ορίζονται με υποσύνολα του αρχικού συνόλου (Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2010). Η προστιθέμενη αξία αυτών των μοντέλων είναι ότι παρουσιάζουν αρκετές δυνατότητες για συνδέσεις με πολλές καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων (Διάγραμμα 1.4).



Διάγραμμα 1.4. Παραδείγματα μοντέλων συνόλου που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

3. Μοντέλα μήκους. Στα μοντέλα αυτά είτε σχεδιάζουμε και υποδιαιρούμε ευθείες γραμμές, είτε συγκρίνουμε χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος τους. Στα μοντέλα μήκους έχουμε συνεχείς ποσότητες και το όλο εκφράζεται με τη μονάδα μήκους, ενώ τα ίσα μέρη ορίζονται από τις ίσες αποστάσεις και το κλάσμα δείχνει τη θέση ενός σημείου (Λεμονίδης, 2016). Μοντέλα μήκους είναι η αριθμογραμμή, οι κλασματικές λωρίδες, διάφορα ευθύγραμμα τμήματα (Διάγραμμα 1.5).



Διάγραμμα 1.5. Μοντέλο μήκους. Το 0 μέχρι το 1 είναι το όλο, που είναι χωρισμένο σε 5 ίσα μέρη.

Τα 10 Δομικά Στοιχεία του Παρεμβατικού Προγράμματος

Στις διδακτικές παρεμβάσεις χρησιμοποιήθηκαν εκτός από τις αναπαραστάσεις και τα διάφορα είδη αυτών και 10 δομικά στοιχεία των Μαθηματικών:

1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά,
2. η Ιστορία των Μαθηματικών,
3. το Ανοιχτό Πρόβλημα,
4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου,
5. Το Αντιπαράδειγμα,
6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί,
7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί,
8. η Διεπιστημονικότητα,
9. η Κατασκευή Προβλήματος και
10. οι ΤΠΕ.

Στη συνέχεια ακολουθεί η περιγραφή των 10 δομικών αυτών στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν στις διδακτικές παρεμβάσεις για να υποστηρίξουν τις αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

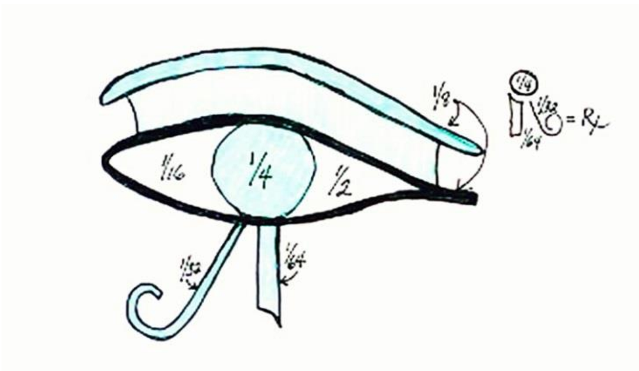
Ρεαλιστικά Μαθηματικά (Realistic Mathematics Education). Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά είναι μια φιλοσοφική θεώρηση διδακτικής και μάθησης την οποία συνέλαβε ο Freudenthal (1973, 1983) σκεπτόμενος ότι τα Μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να έχουν επιρροή από και προς την κοινωνία και να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητά στους μαθητές. Η συγκεκριμένη μορφή της μαθηματικής εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται ως ρεαλιστική όχι μόνο επειδή σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο, αλλά διότι δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φανταστούν (Streefland, 1991). Η μάθηση, δηλαδή, κατασκευάζεται από τους ίδιους τους μαθητές στο πλαίσιο κοινωνικής αλληλεπίδρασης.

Σύμφωνα με τον Treffers (1993), οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν εργαλεία οργάνωσης των φαινομένων του πραγματικού κόσμου. Επομένως ο μαθητής πρέπει να μάθει να χειρίζεται αυτά τα εργαλεία στο πλαίσιο μιας προοδευτικής μαθηματικοποίησης, μέσα σε ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον. Σε κάθε φάση της μαθηματικοποίησης, ο μαθητής αναστοχάζεται πάνω σε κάθε ενέργεια ή απόφασή του, εκτιμά την πρόοδό του, ανταλλάσσει απόψεις με τους άλλους, αξιολογεί τα προϊόντα της μαθηματικοποίησης και ερμηνεύει τα αποτελέσματα που παίρνει (Avgerinos & Skufi, 2007· Streefland,1991).

Ιστορία των Μαθηματικών (History of Mathematics). Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκπαίδευση, είτε ως εργαλείο είτε ως στόχος (Jankvist, 2009a˙ Jankvist, 2009b). Στην πρώτη περίπτωση η ιστορία είναι ένα βοηθητικό μέσο στη μάθηση των Μαθηματικών, τόσο ως κίνητρο και επιρροή για μάθηση όσο και γνωστικά. Η ιστορία ως στόχος αφορά τη μάθηση της ίδιας της ιστορίας των Μαθηματικών.

Ο Fried (2001) συνοψίζει σε τρεις θεματικές τους λόγους για τους οποίους προτείνεται από πολλούς ερευνητές η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών: (1) κάνει πιο ανθρώπινα τα μαθηματικά, (2) κάνει τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, πιο κατανοητά και πιο απτά, (3) διαφωτίζει έννοιες, προβλήματα και επίλυση προβλημάτων. Οι Tzanakis et al. (2002) αναφέρουν συγκεκριμένους τρόπους με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ιστορία των μαθηματικών, μεταξύ των οποίων ερευνητικές εργασίες βασισμένες σε ιστορικά κείμενα, ιστορικά προβλήματα, παιχνίδια, βιωματικές δραστηριότητες, αναφορά σε λάθη, παρανοήσεις, παράδοξα του παρελθόντος.

Ένα παράδειγμα των παραπάνω από την αρχαία Αίγυπτο είναι το wejat eye, το μαγικό μάτι του Horus, που αναπαριστά το κλάσμα 63/64 (Διάγραμμα 1.6). Από την ιστορική αυτή αναπαράσταση μπορείς να επεκταθείς σε προβλήματα, παιχνίδια, διαθεματικές δραστηριότητες. Πρόκειται για το μάτι του μυθικού θεού Horus, γιου του Osiris και της Isis, που το έχασε στη μάχη ενάντια στον Set. Με ένα μαγικό τρόπο το μάτι του Horus έγινε καλά, και το πρόσφερε στον πατέρα του, Osiris, με την ελπίδα να του αποκαταστήσει τη ζωή. Έτσι, το μάτι του Horus συχνά χρησιμοποιούνταν για να συμβολίσει τη θυσία, τη θεραπεία, την αποκατάσταση και την προστασία (Stewart, 2009). Τα διαφορετικά μέρη του ματιού του Horus πιστεύεται ότι χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους Αιγυπτίους για αναπαραστήσουν τη μονάδα διαιρεμένη με τις πρώτες έξι δυνάμεις του δύο. Το άθροισμα όλων των κομματιών είναι 63/64, ενώ το 1/64 είναι η μαγεία με την οποία το μάτι γίνεται ολόκληρο (Schatz, 2008).



Διάγραμμα 1.6. Το μάτι wedjat, το μαγικό μάτι του Horus (Schatz, 2008, σ. 28).

Ανοιχτό Πρόβλημα (Open problem). Το πρόβλημα αποτελεί έννοια που απαντάται σε όλες τις επιστήμες και τους κλάδους τους, αλλά παράλληλα και στην καθημερινή μας ζωή. Για τον Mayer (1985) πρόβλημα εμφανίζεται όταν κάποιος αντιμετωπίζει μια δεδομένη κατάσταση, θέλει να φθάσει σε μια άλλη ζητούμενη, αλλά δεν γνωρίζει τον άμεσο τρόπο πρόσβασης ή επίτευξης του σκοπού αυτού. Με κριτήριο τη δυνατότητα επίλυσης ενός προβλήματος, ένα πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί ανοιχτό. Ανοιχτά λέγονται τα προβλήματα που δεν έχουν μόνο μία αλλά πολλές σωστές απαντήσεις (Pehkonen, 1997).

Τόσο η αντιμετώπιση, όσο και η διατύπωση ανοιχτών προβλημάτων αποτελούν διαδικασίες που απαιτούν ιδιαίτερες αναλυτικές και συνθετικές ικανότητες, ορθολογική σκέψη, αλλά και σωστό και εμπεριστατωμένο χειρισμό της φυσικής γλώσσας. Οι δεξιότητες που αποκτούνται από τους μαθητές μέσω της ενασχόλησής τους με αυτά αποτελούν εφόδια γενικής χρηστικότητας, αφού μπορούν να λογίζονται ως γνωστικά εργαλεία χρήσιμα για κάθε δραστηριότητα που είτε διαπερνά όλο το φάσμα των επιστημών είτε αναφέρεται σε καθημερινές καταστάσεις.

Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου (Breach of Didactical contract). Στο πλαίσιο της προσπάθειας ερμηνείας των λαθών και της συμπεριφοράς των παιδιών, η Διδακτική των Μαθηματικών ανέπτυξε την έννοια του «διδακτικού συμβολαίου», το οποίο ορίζεται ως ένα σιωπηρό και περιοριστικό είδος συμφωνίας ανάμεσα στο διδάσκοντα, το μαθητή και το γνωστικό αντικείμενο, πρόβλημα, άσκηση ή μαθηματική έννοια και διακανονίζει τις μεταξύ τους σχέσεις (Brousseau, 1984). Με άλλα λόγια, το διδακτικό συμβόλαιο είναι ένα σύνολο αμοιβαίων υποχρεώσεων που ο μαθητής και ο δάσκαλος θέτουν ρητά ή σιωπηρά.

Συνήθως, τα προβλήματα στα σχολικά βιβλία επιδέχονται μια και μόνο απάντηση η οποία προκύπτει μετά από κατάλληλη χρήση και συνδυασμό όλων των προτεινόμενων δεδομένων με βάση τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Αυτό διαμορφώνει τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση τυπικών σχολικών προβλημάτων. Οι μαθητές τηρούν τους κανόνες του διδακτικού συμβολαίου παρουσιάζοντας κοινές συμπεριφορές στην επίλυση των προβλημάτων. Με άλλα λόγια οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να δίνουν απάντηση σε κάθε πρόβλημα που τους παρουσιάζεται, κάνοντας χρήση των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος. Η αρνητική επίδραση του διδακτικού συμβολαίου αρχίζει ήδη στο δημοτικό σχολείο και είναι έντονη στα μη συνηθισμένα προβλήματα, ενώ στο γυμνάσιο και στο λύκειο το διδακτικό συμβόλαιο επιδρά και στα προβλήματα ρουτίνας, καθώς δημιουργεί στερεότυπες αντιλήψεις στους μαθητές σχετικά με την επίλυση μαθηματικών έργων (Γαγάτσης και Μάρκου, 2004). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να τίθεται στόχος μιας επιτυχημένης διδασκαλίας η διαμόρφωση ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος για την επιτυχή ρήξη του διδακτικού συμβολαίου και μέσω αυτής, της μάθησης Μαθηματικών.

Αντιπαράδειγμα (Counterexamples). Τα παραδείγματα σχετίζονται με πολλές δραστηριότητες των Μαθηματικών, από τη μάθηση και την προσπάθεια κατανόησής τους ως τη διδασκαλία, το σχεδιασμό προγραμμάτων σπουδών και την έρευνα (Zazkis & Chernoff, 2008). Αποτελούν συγκεκριμένες περιπτώσεις της γενικότητας, όπου δίνεται κάτι συγκεκριμένο ως αναπαράσταση μιας γενικής κλάσης με την οποία ο μαθητής πρέπει να εξοικειωθεί (Watson & Mason, 2005). Συμβάλλουν στη θεμελίωση νέων εννοιών, στη γενίκευση, στην αφαιρετική σκέψη, στον αναλογικό συλλογισμό, στην επεξήγηση και απόδειξη, στην επαλήθευση περιπτώσεων, στην κατανόηση αλγορίθμων και στον έλεγχο του ρόλου των περιορισμών (Zaslavsky, 2014).

Σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία έχουν οι συγκεκριμένες κατηγορίες των αντιπαραδειγμάτων. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ένα παράδειγμα που δείχνει ότι μια δοσμένη υπόθεση δεν ισχύει και ένα και μόνο αντιπαράδειγμα αρκεί για να αντικρούσει μία εικασία (Klymchuk, 2012). Ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων έχει αναγνωριστεί και συζητηθεί για τη δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης (Klymchuk, 2001) που προκαλείται όταν ένας μαθητής βρίσκεται αντιμέτωπος με μία αντίφαση ή ασυνέπεια στις ιδέες του. Τα μη παραδείγματα βοηθούν στην αντίληψη των ορίων μιας έννοιας ή διαδικασίας.

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί (Geometric Transformations). Η γεωμετρία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς όλες τις στερεές κινήσεις. Λέγοντας στερεή κίνηση εννοούμε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου ή του χώρου που διατηρούν την απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων, τις λεγόμενες ισομετρίες. Έτσι, μετασχηματισμό ονομάζουμε κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση ενός συνόλου A σε ένα σύνολο B, δηλαδή, $f{:}A \rightarrow B$ (Yaglom, 1962, 2009). Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αφορούν μεταφορές, μετατοπίσεις, στροφές, συνθέσεις, αναλύσεις σχημάτων, ανακλάσεις και συμμετρίες.

Η άσκηση των παιδιών στους μετασχηματισμούς κρίνεται απαραίτητη για την ανάπτυξη και την εννοιολογική ολοκλήρωση της γεωμετρικής τους σκέψης. Οι μαθητές με τους μετασχηματισμούς μπορούν να βελτιώσουν την οπτική τους ευλυγισία, να διερευνήσουν ιδιότητες και σχέσεις, να επεξεργαστούν συνθέσεις σχημάτων, να κάνουν νοερούς μετασχηματισμούς και να καλλιεργήσουν την ανάπτυξη προεμβαδικών εννοιών.

Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί (Mental Computation and Estimation). Νοερός υπολογισμός είναι η διαδικασία κατά την οποία κάποιος εκτιμά με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα χωρίς τη βοήθεια εξωτερικών μέσων, όπως συγκεκριμένων αντικειμένων, μολυβιού και χαρτιού (Maclellan, 2001). Οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που δεν απαιτείται ακριβής απάντηση. Κατά την εκτίμηση οι ακριβείς αριθμοί μετατρέπονται σε προσεγγιστικούς με τους οποίους γίνεται ο νοερός υπολογισμός, έτσι ώστε να βρεθεί ένα αποτέλεσμα αρκετά κοντά στο πραγματικό. Συνεπώς, όταν οι νοητικές διαδικασίες καταλήγουν σε ένα ακριβές αποτέλεσμα θεωρούνται νοεροί υπολογισμοί, ενώ όταν οδηγούν σε μια προσεγγιστική απάντηση είναι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί (Maclellan, 2001).

Ο Thompson (1999) συνοψίζει στα παρακάτω σημεία τους λόγους για τους οποίους προτείνεται να δοθεί έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς στην εκπαίδευση: (1) χρησιμοποιούνται περισσότερο στην καθημερινή ζωή, (2) προωθούν τη δημιουργική και ανεξάρτητη σκέψη, (3) συμβάλλουν στην βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, (4) αναπτύσσουν την «αντίληψη του αριθμού» (number sense), (5) αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη ικανοτήτων εκτίμησης, (6) βοηθούν στην κατανόηση πιο κλασσικών μεθόδων υπολογισμού.

Οι νοεροί υπολογισμοί απαιτούν την χρήση στρατηγικών που διαφέρουν από τους αλγορίθμους που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς με μολύβι και χαρτί (Maclellan, 2001). Οι στρατηγικές αυτές ποικίλουν, είναι πιο ευέλικτες, δημιουργικές και ιδιοσυγκρασιακές, ενώ οι αριθμοί αντιμετωπίζονται πιο ολιστικά. Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται στη χρήση δικών τους στρατηγικών επίλυσης, να τις συζητούν και να τις μοιράζονται (Heirdsfield, 2002). Η εύρεση στρατηγικών για την εφαρμογή νοερών υπολογισμών απαιτεί από τους μαθητές μια πιο ενεργητική στάση στη μάθηση. Για να αναπτύξει ο μαθητής μεγάλο εύρος στρατηγικών απαιτείται ένα περιβάλλον όπου θα μπορεί ελεύθερα να επιλέξει τι θα κάνει, να πειραματιστεί και να ανταλλάξει ιδέες.

Διεπιστημονικότητα (Interdisciplinary). Η σύνδεση διαφορετικών θεματικών περιοχών στο σχολικό πρόγραμμα έχει προκαλέσει την προσοχή στην έρευνα για την εκπαίδευση, καθώς θεωρείται ότι μπορεί να αποτελεί έναν πιο συνεκτικό και αποτελεσματικό τρόπο διδασκαλίας. Ο τρόπος, ο βαθμός και ο σκοπός όμως της σύνδεσης αυτής ποικίλουν με αποτέλεσμα να υπάρχουν διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις. Έχει προταθεί και μελετηθεί η ενοποίηση της διδασκαλίας διαφορετικών κλάδων, όπως των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες, η διεπιστημονική προσέγγιση, στην οποία διατηρούνται τα διακριτά και αυτοτελώς διδασκόμενα μαθήματα, αλλά επιχειρείται με ποικίλους τρόπους να συσχετιστεί το περιεχόμενο τους και η διαθεματική προσέγγιση, στην οποία ο τρόπος οργάνωσης του αναλυτικού προγράμματος καταργεί ως πλαίσιο επιλογής και οργάνωσης της σχολικής γνώσης τα διακριτά μαθήματα και αντιμετωπίζει τη γνώση ως ολότητα (Ματσαγγούρας, 2002). Η διεπιστημονική προσέγγιση με σκοπό την παραγωγή πιο αποτελεσματικών διδασκαλιών θεωρείται ότι μπορεί να διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στην εκπαίδευση, καθώς βοηθάει τους μαθητές να συνδέσουν το σχολείο, το μάθημα και τη ζωή μεταξύ τους (Deneme & Ada, 2012).

Στην παρούσα πρόταση περιλαμβάνεται η ανάπτυξη δραστηριοτήτων με διεπιστημονικές προεκτάσεις. Ο συνδυασμός των μαθηματικών με άλλα μαθήματα θεωρείται ότι συμβάλει στην καλύτερη αντίληψη των εννοιών, στη δυνατότητα συνδυασμού, επίλυσης προβλημάτων και κριτικής σκέψης και συγχρόνως στην καλλιέργεια θετικής στάσης προς τα Μαθηματικά.

Κατασκευή Προβλήματος (Problem Posing). Ως κατασκευή ή θέση προβλήματος (problem posing) θεωρείται η δημιουργία νέων προβλημάτων και ερωτήσεων για τη διερεύνηση μιας δοσμένης κατάστασης, αλλά και η αναμορφοποίηση ενός προβλήματος κατά την επίλυσή του (Silver, 1994). Είναι μια ανοιχτή διαδικασία διερεύνησης και δημιουργίας προβλημάτων.

Η θέση και η επίλυση προβλημάτων έχουν αναγνωριστεί ως κεντρικά θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005), ενώ προτείνεται η κατασκευή προβλήματος ως εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης (NCTM, 2000). Από έρευνες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος έχει φανεί ότι συνδέεται με τη δημιουργικότητα και έχει θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν λεκτικά προβλήματα (Silver, 1994). Η θέση ενός προβλήματος από τους μαθητές μπορεί να οδηγήσει σε πιο ευέλικτη σκέψη, να ενισχύσει τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, να διευρύνει την αντίληψη των μαθηματικών εννοιών και να παγιώσει βασικές έννοιες (English, 1998).

Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών (Technology). Οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών (ΤΠΕ) έχουν ενταχθεί στην καθημερινότητα των μαθητών και επηρεάζουν την εκπαιδευτική διαδικασία προσφέροντας νέες δυνατότητες αλλά και προκλήσεις για τους εκπαιδευτικούς. Η ολοκληρωμένη χρήση των ΤΠΕ επηρεάζει κάθε πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης (NCTM, 2000) και επιφέρει αλλαγές στην εκπαιδευτική διαδικασία, ενώ το παιδαγωγικό πλαίσιο και το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να επανεξετάζονται (Kaput & Thompson, 1994).

Οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τη διδακτική αξιοποίηση των ΤΠΕ έχουν πραγματοποιηθεί σε επίπεδο δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ πρόσφατες έρευνες μελετούν τη χρήση λογισμικών, κυρίως δυναμικής γεωμετρίας, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Sinclair & Moss, 2012). Οι μελλοντικοί δάσκαλοι θα πρέπει να είναι προετοιμασμένοι και εξοικειωμένοι με τις ΤΠΕ για να τις χρησιμοποιήσουν στην εκπαιδευτική διαδικασία αποτελεσματικά (Powers & Blubaugh, 2005).

Στάσεις και Πεποιθήσεις

Σύμφωνα με τους Φιλίππου & Χρίστου (όπ. ανάφ. στο Καλάργυρος, 2018, σ. 24), με τον όρο στάσεις εννοούμε τις τάσεις του υποκειμένου να ανταποκρίνεται με ομοιόμορφο τρόπο σε συγκεκριμένα γεγονότα, άτομα ή μαθήματα. Πρόκειται για μόνιμες τάσεις ή μοτίβα, συναισθηματικά φορτισμένης αντίδρασης του υποκειμένου σε μια κατάσταση που εμπεριέχει γνωστικούς και συναισθηματικούς παράγοντες. Οι στάσεις περιέχουν το στοιχείο υποκειμενικής αντίληψης και αξιολόγησης βασικών παραμέτρων της κατάστασης που εξετάζεται και καθορίζουν τη συμπεριφορά του ατόμου. Βασική προέλευση των στάσεων είναι οι προηγούμενες εμπειρίες, θετικές ή αρνητικές, που διαμορφώνουν τα συναισθήματα του ατόμου. Ειδικότερα ως προς τα Μαθηματικά υπάρχουν πολλές συνιστώσες των στάσεων όπως ως προς τη δυσκολία των Μαθηματικών, ως προς τη σημασία ή χρησιμότητά τους και ως προς την απόλαυση από την ενασχόληση με τα μαθηματικά. Οι στάσεις, γενικά, φαίνεται να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της συμπεριφοράς των μαθητών, αφού οι θετικές στάσεις συνδέονται με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά (Hart & Walker, 1993· Schoenfeld, 1982).

Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις ενός ατόμου ορίζονται ως οι πεποιθήσεις που έχουν σχέση με τη φύση της γνώσης και με τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης (Hofer & Pintrich, 1997· Rott & Leuders, 2016· Schommer, 1990). Σχετίζονται με το πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν και πώς οι ατομικές τους πεποιθήσεις επηρεάζουν τη γνωστική διαδικασία. Άλλοι ερευνητές τις ορίζουν ως τις πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση της γνώσης και την απόκτησή της (Chan & Elliot, 2004). Αναφορές σχετικά με τον ορισμό των επιστημολογικών πεποιθήσεων βρίσκουμε και στη μελέτη των Chan, & Elliot (2004). Ορίζουν τις επιστημολογικές πεποιθήσεις ως ένα συγκεκριμένο τύπο πεποιθήσεων που περιλαμβάνεται στο γενικότερο σύστημα πεποιθήσεων του ατόμου. Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις θεωρούνται ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος γιατί έχουν σχέση με το πώς ένα άτομο αξιολογεί τη γνώση σε σχέση με την αξιοπιστία της (Bromme, Kienhues & Stahl, 2008). O Mandler (1989) αναφέρει ότι οι πεποιθήσεις του ατόμου είναι σχετικά παγιωμένες καταστάσεις, ενώ οι Buelens, Clement και Clarebout (2002) αναφέρουν ότι οι επιστημολογικές πεποιθήσεις του δασκάλου επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών.

Σύμφωνα με έρευνες οι πεποιθήσεις των μαθητών για τη χρησιμότητα των μαθηματικών μπορούν να επεξηγήσουν κατά μεγάλο μέρος τη διασπορά στην επίδοση στα μαθηματικά και της μαθηματικοφοβίας (Hart & Walker, 1993). Η φοβία για τα Μαθηματικά έχει σα βασική αιτία την πεποίθηση των μαθητών ότι δεν μπορούν να βελτιώσουν τα αποτελέσματά τους στα μαθηματικά. Η εντύπωση αυτή επηρεάζει όχι μόνο το γνωστικό τομέα αλλά και το συναισθηματικό, δημιουργώντας μια αντιπάθεια με επακόλουθο την έλλειψη κινήτρων και ενδιαφέροντος. Πέρα όμως από τη θεωρία του Mandler (1989) που δίνει περισσότερη σημασία στη φύση των μαθηματικών ως παράγοντας δυσκολίας των μαθητών, η Baxton (1981) υποστηρίζει ότι πηγές επηρεασμού των πεποιθήσεων των μαθητών είναι οι επιδράσεις του ίδιου του δασκάλου και η ατμόσφαιρα της τάξης.

Όταν ο μαθητής αρχίζει να ασχολείται με την οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών, έχει ήδη διαμορφωμένο ένα σύνολο πεποιθήσεων και στάσεων για το τι είναι και τι σημαίνει να κάνει μαθηματικά, το οποίο διαμορφώνει τις συνθήκες μέσα στις οποίες εργάζεται (Cobb, Yackel &Wood, 1989· Hart & Walker, 1993). Το σύνολο αυτό διαμορφώθηκε με την ήδη υπάρχουσα εμπειρία του παιδιού μέσα στο περιβάλλον που ζει. Στη συνέχεια, τα συναισθήματα του παιδιού διαμορφώνονται σε αλληλεπίδραση λογικής και γνωσιολογικών παραγόντων. Υπάρχουν τρεις ερμηνευτικές δυνατότητες:

- α) Αλληλεπίδραση λογικής – συναισθημάτων. Στη διάρκεια των μαθηματικών δραστηριοτήτων οι μαθητές χρησιμοποιούν υπάρχοντα γνωστικά σχήματα και τη λογική τους. Αυτό επηρεάζει τα συναισθήματα του μαθητή και η θετική ή αρνητική ανατροφοδότηση δημιουργεί θετικά ή αρνητικά συναισθήματα (Buxton, 1981).
- β) Υφιστάμενες εμπειρίες. Πολλές φορές ο μαθητής δεν αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα για πρώτη φορά, αλλά έχει προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο αν είναι συναισθηματικά φορτισμένες. Αν υπάρχει αρνητική προδιάθεση, ο μαθητής δε δοκιμάζει τις μαθηματικές δραστηριότητες με αποτέλεσμα να παρεμποδίζεται η λειτουργία της λογικής (Φιλίππου & Χρίστου, 2001).

- γ) Η επίδραση του δασκάλου. Το μάθημα ταυτίζεται συχνά με το διδάσκοντα, με αποτέλεσμα ο βαθμός αποδοχής ή απόρριψης της συμπεριφοράς του δασκάλου να διαμορφώνει καθοριστικά τις στάσεις των μαθητών. Ο δάσκαλος με όλη του τη συμπεριφορά και δράση παρεμβαίνει τόσο στα συναισθήματα όσο και στη λογική των μαθητών (Nimier, 1988).

Τελειώνοντας με τους παραπάνω ορισμούς και στο σημείο αυτό, γίνεται η εξής επισήμανση. Ό,τι εμποδίζει, δυσκολεύει, παρακωλύει τον μαθητή να φτάσει σε καλή επίδοση στις θεωρίες για τα κλάσματα, στις πράξεις και τις εφαρμογές τους, ανεξάρτητα αν αυτό είναι πεποίθηση (belief), στάση (attitude), αντίληψη (perception) ή επιστημολογικό εμπόδιο (epistemological obstacle), για λόγους διευκόλυνσης στην παρούσα εργασία το ονομάζουμε «δυσκολίες». Αναγνωρίζουμε, βέβαια, ότι χρειάζεται αρκετές φορές να υπάρξει σαφής και ενδελεχής εξειδικευμένη έρευνα ανάλογα με την ένταση που υπάρχει το φαινόμενο αυτό στα παραπάνω, αλλά κάτι τέτοιο δεν είναι στο πλαίσιο των στόχων της παρούσας διατριβής.

Σύνοψη

Η σημαντικότητα της έννοιας των κλασμάτων, η σύνδεσή της με άλλες μαθηματικές έννοιες και οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα που παραμένουν διαχρονικά αποτέλεσαν το κίνητρο για την έναρξη της παρούσας έρευνας. Οι δυσκολίες αυτές έχουν αποδοθεί από τους ερευνητές του διεθνούς χώρου σε διάφορους παράγοντες, όπως στον τρόπος διδασκαλίας, στη χρήση ή μη αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία, στις αναπαραστάσεις των σχολικών εγχειριδίων και στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών εν ενεργεία και υποψήφιων. Προκειμένου να ελεγχθεί ολιστικά η κατάσταση στον ελλαδικό χώρο σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, η παρούσα έρευνα πήρε και τους τέσσερις παράγοντες που αναφέρει η διεθνής βιβλιογραφία και του διερεύνησε στην Ελλάδα δίνοντας ένα στίγμα στην επιστημονική κοινότητα για του που βρίσκεται η Ελλάδα σε αυτό τον τομέα.

Με βάση τα πορίσματα των παραπάνω διερευνήσεων σχεδιάστηκε ένα παρεμβατικό πρόγραμμα με μια καινοτομική κατεύθυνση. Για τη σχεδίαση και την υλοποίησή του, δηλαδή, επιχειρήθηκε να χρησιμοποιηθούν πέρα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και δέκα μαθηματικές πρακτικές επικουρικά, καθώς φάνηκε από τις διεθνείς έρευνες ότι από μόνες τους οι αναπαραστάσεις παρουσιάζουν κάποιο κενό, αφού, παρά την ευρεία χρήση τους διεθνώς και την ενίσχυση των αναλυτικών προγραμμάτων διάφορων χωρών με πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα παραμένουν.

Τα 10 δομικά στοιχεία των Μαθηματικών που προστέθηκαν ως ενίσχυση των πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, η Ιστορία των Μαθηματικών, το Ανοιχτό Πρόβλημα, η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, το Αντιπαράδειγμα, οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, η Διεπιστημονικότητα, η Κατασκευή Προβλήματος και οι ΤΠΕ. Τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή σε πρωτότυπες δραστηριότητες με τη χρήση ποικίλων μέσων και υλικών.

Το κεφάλαιο κλείνει με την επισκόπηση των κεφαλαίων της διατριβής και τους ορισμούς των βασικών εννοιών της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΙΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Στον παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης που έγινε πάνω στη σύγχρονη βιβλιογραφία και αφορούν στο θέμα των αναπαραστάσεων στα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, ερευνήθηκαν τα κυριότερα επιστημονικά περιοδικά της διεθνούς βιβλιογραφίας προκειμένου να μελετηθούν και να καταγραφούν τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν δημοσιευθεί τα τελευταία 12 χρόνια με θέμα τις αναπαραστάσεις στα κλάσματα. Ποιες αναπαραστάσεις, δηλαδή, έχουν αναδειχθεί μέσα από αυτές τις έρευνες ως οι πιο κατάλληλες ή ακατάλληλες για την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές. Από τη μελέτη και την ανάλυση των ερευνών φάνηκε ότι τα αποτελέσματα από τη χρήση μιας αναπαράστασης δεν εξαρτώνται μόνο από το είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιείται αλλά επηρεάζονται και από άλλους παράγοντες όπως είναι η εξοικείωση των μαθητών με τη δοθείσα προς χρήση αναπαράσταση και την ικανότητα των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν την κατάλληλη αναπαράσταση κάθε φορά, για την επίτευξη των διδακτικών και παιδαγωγικών στόχων.

Η Αναπαράσταση της Κλασματικής Μονάδας και Διδακτικά Λάθη

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των κλασμάτων οι εκπαιδευτικοί είναι δυνατόν, χάρη συντομίας, αλλά και για σχεδιαστικούς λόγους να προβούν στο σχηματισμό αναπαραστάσεων οι οποίες αποτυπώνονται με λάθος τρόπο. Οι Muzheve και Capraro (2012) προκειμένου να επισημάνουν τις λάθος αναπαραστάσεις που ενδεχομένως χρησιμοποιούν κάποιοι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων έδωσαν μία άλλη διάσταση στην έρευνά τους μιλώντας για τη φυσική γλώσσα και τις ιδιοσυγκρασιακές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των κλασμάτων (natural language and idiosyncratic representations). Έδωσαν τον όρο ιδιοσυγκρασιακές αναπαραστάσεις στις αναπαραστάσεις αυτές που δεν έχουν να κάνουν με τον ορισμό του National Council of Teachers of Mathematics που ορίζει τις αναπαραστάσεις ως επίσημες, τυποποιημένες και διεθνώς αναγνωρίσιμες αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για την επικοινωνία στα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα τα διαγράμματα, οι γραφικές αναπαραστάσεις και οι συμβολικές εκφράσεις, αλλά σε αυτές που είναι πιο προσιτές στους μαθητές. Τέτοιες αναπαραστάσεις είναι για παράδειγμα οι μετρητές, φωτογραφίες, εικόνες, σχέδια, αποκόμματα, μικρόκοσμοι κ.α. που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους ως συμπληρωματικές για τους δικούς τους σκοπούς και που δεν υπήρχαν στα βιβλία που διδάσκουν.

Οι διδασκαλίες που έγιναν κατά την έρευνα αφορούσαν στη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και ποσοστό. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η γλώσσα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους επηρεάζει πολύ την μετέπειτα κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές. Για παράδειγμα, στην έρευνα φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί όριζαν το κλάσμα ως μέρος ενός συνόλου, χαρακτήριζαν τον παρονομαστή ως το συνολικό αριθμό των κομματιών του συνόλου και τον αριθμητή τον αριθμό των κομματιών του συνόλου που εξετάζονται ή το μέρος. Τέτοιοι χαρακτηρισμοί, αν και σωστοί μέσα στο πλαίσιο στο οποίο διατυπώθηκαν, περιόρισαν τη σύλληψη ορισμένων μαθητών να περιλαμβάνουν αριθμούς στους οποίους ο παρονομαστής δεν είναι κατ 'ανάγκη μεγαλύτερος από τον αριθμητή, όπως τα καταχρηστικά κλάσματα.

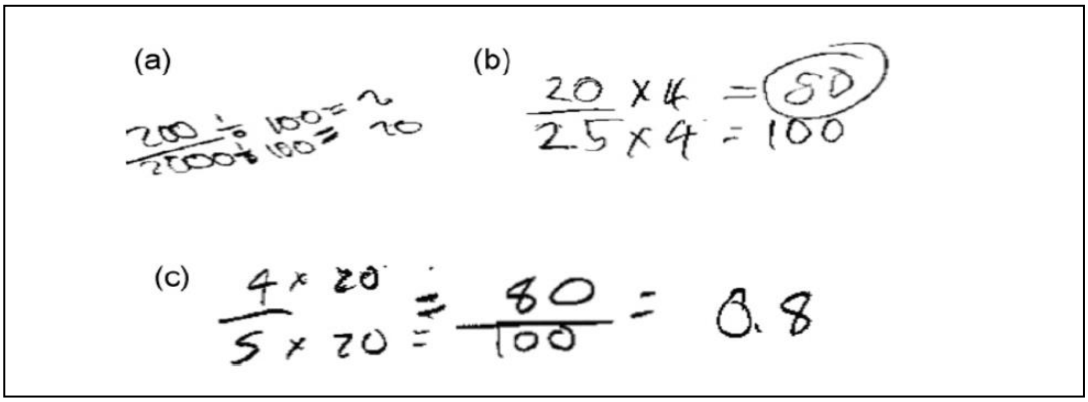
Άλλες λέξεις που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους στην παρούσα έρευνα ήταν οι λέξεις βόρεια, κορφή, νταντά και γείτονας για να βοηθήσουν τους μαθητές να θυμούνται ποιο μέρος του κλάσματος είναι ο αριθμητής και τις λέξεις κάτω μέρος, σκύλος για τον παρονομαστή. Ενώ η χρήση αυτής της φυσικής γλώσσας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν ποιος αριθμός είναι ο διαιρετέος και ποιος αριθμός ο διαιρέτης κατά τη μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, ωστόσο ενισχύεται η αντίληψη ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστή του κλάσματος είναι δύο ξεχωριστοί αριθμοί όπως μία νταντά και ένας σκύλος που δεν μπορούν να συνδεθούν με κανέναν τρόπο. Παρόμοια επιχειρήματα μπορούν να διατυπωθούν σχετικά με τη χρήση της λέξης πάνω, όπως στο «2 πάνω από 5» για το κλάσμα $\frac{2}{5}$ και η χρήση της φράσης «6 από 12» για το κλάσμα $\frac{6}{12}$, καθώς και αυτές οι φράσεις μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές στη λάθος αντίληψη ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι ξεχωριστές οντότητες ή απλώς ακέραιοι αριθμοί.

Πέρα από τη χρήση της φυσικής γλώσσας, η έρευνα εντόπισε και άλλους παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων όπως η λάθος χρήση των ιδιοσυγκρασιακών αναπαραστάσεων, έτσι όπως τις όρισαν οι συγκεκριμένοι ερευνητές. Φάνηκε, λοιπόν, ότι κατά τη συμβολική αναπαράσταση του κλάσματος σε ποσοστό και δεκαδικό αριθμό, όταν παραλειπόταν από τους εκπαιδευτικούς το σύμβολο της ισότητας (Διάγραμμα 2.1) αυτό ενίσχυε τη λαθεμένη αντίληψη που έχουν οι μαθητές οι οποίοι θεωρούν ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ ενός κλάσματος, ενός δεκαδικού κι ενός ποσοστού (Pagni, 2004˙ Sweeney & Quinn, 2000˙ Avgerinos,Vlachou & Kantas, 2012).

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{50}{100} \quad 0.5 \quad 50\%$$
$$\frac{5}{3} \quad 1\frac{2}{3}$$

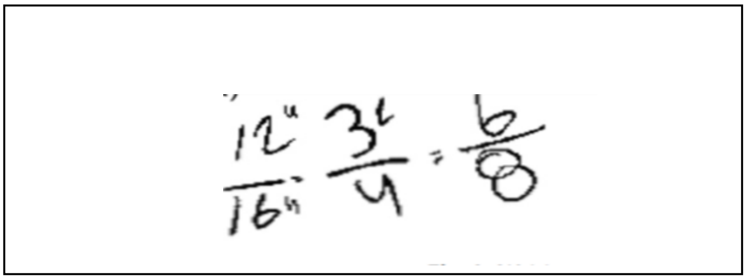
Διάγραμμα 2.1. Παράδειγμα μη χρήσης του συμβόλου της ισότητας.

Μια άλλη ιδιοσυγκρασιακή αναπαράσταση που η λάθος χρήση της επηρέασε αρνητικά τους μαθητές είναι η χρήση δύο συμβόλων ισότητας στο ίδιο κλάσμα (Διάγραμμα 2.2) ενώ ήταν επαρκές το ένα, με συνέπεια αυτό να υιοθετείται και από τους μαθητές και να ενισχύεται έτσι η λαθεμένη αντίληψη ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι δύο ξεχωριστές οντότητες.



Διάγραμμα 2.2. Χρήση διπλού συμβόλου ισότητας.

Επιπλέον, μια άλλη αναπαράσταση που χρησιμοποίησαν οι εκπαιδευτικοί σε αυτήν την έρευνα και ενίσχυσε τις παρανοήσεις των μαθητών ήταν η γραφή ως εκθέτες ή δείκτες των αριθμών με τους οποίους πρέπει το κλάσμα να πολλαπλασιαστεί ή να διαιρεθεί (Διάγραμμα 2.3). Η αναπαράσταση αυτή είναι δυνατόν να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές επηρεάζοντας τη μελλοντική μάθηση. Για παράδειγμα, γράφοντας $\frac{3^2}{4^2}$ ενώ θέλουμε να αναπαραστήσουμε $\frac{3*2}{4*2}$ αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση, καθώς οι μαθητές γνωρίζουν πως ο συμβολισμός 3^2 ερμηνεύεται ως 3×3.

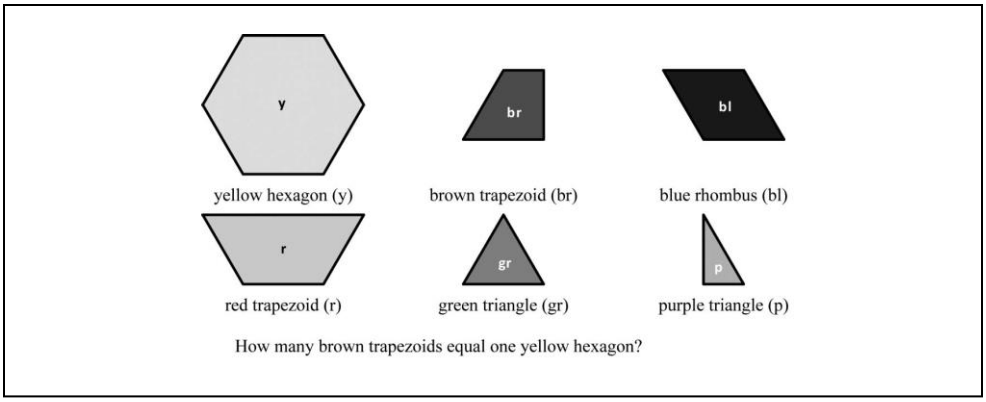


Διάγραμμα 2.3. Παράδειγμα αναπαράστασης τελεστών ως εκθέτες.

Άλλες αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς ως ιδιοσυγκρασιακές αναπαραστάσεις σε αυτή την έρευνα ήταν το πλέγμα με εκατό χωρίσματα (hundreds grid). Η αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη μετατροπή του κλάσματος σε ποσοστό. Δηλαδή, για να συγκρίνουν τα κλάσματα $\frac{3}{20}$ και $\frac{4}{25}$ τα μετέτρεπαν σε κλάσματα με παρονομαστή το 100, δηλαδή $\frac{15}{100}$ και $\frac{16}{100}$. Στη συνέχεια σκίαζαν τα αντίστοιχα τετράγωνα στο πλέγμα δίνοντας έτσι μια οπτική εξήγηση στο γεγονός ότι το $\frac{4}{25}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{3}{20}$. Ωστόσο, αυτή η αναπαράσταση με πλέγμα των εκατοντάδων δε φάνηκε να βοήθησε τους μαθητές, καθώς στις γραπτές δοκιμασίες σχεδόν οι μισοί μαθητές δεν μπόρεσαν να σκιάσουν τα $\frac{3}{5}$ σε αυτό. Η εξήγηση που δίνεται από τους ερευνητές είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί έδιναν έμφαση στην εύρεση του κλάσματος με παρονομαστή το 100 και μετά στη σκίαση του πλέγματος με τα 100 τετράγωνα. Ακολουθώντας, λοιπόν, αυτή την προσέγγιση αποτύγχαναν να προσεγγίσουν το κλάσμα ως μέρος ενός συνόλου, όπου θα έπρεπε πρώτα οι μαθητές να σκιάσουν τα 3 από κάθε 5 τετράγωνα για να καταλήξουν να έχουν σκιάσει τα 60 από τα 100 τετράγωνα που δείχνει ότι $\frac{3}{5}$ = 60%, δηλαδή, να χρησιμοποιούν το πλέγμα εκατοντάδων για να διευκολύνουν τη μετατροπή κλασμάτων σε ποσοστό.

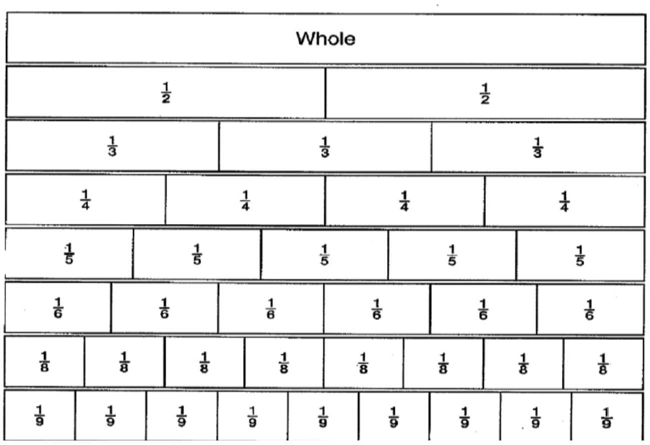
Η μελέτη αυτή κλείνει με το συμπέρασμα ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν λεκτικές και οπτικές αναπαραστάσεις που φαίνεται να οδηγούν τους μαθητές σε παρανοήσεις. Το προγράμματα κατάρτισης των εκπαιδευτικών πρέπει, λοιπόν, να επικεντρωθεί στον τρόπο σκέψης των μαθητών και στο πως οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αποφεύγουν να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις που μπορεί να επηρεάσουν αρνητικά τη μάθηση στο μέλλον.

Μια άλλη έρευνα των Cramer & Wyberg (2009) ασχολήθηκε με τον εντοπισμό των αναπαραστάσεων που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια του κλάσματος και της ισοδιαμέρισης. Μέσα από αυτή την έρευνα, που έγινε σε μαθητές της τέταρτης και πέμπτης τάξης, αναδείχθηκε η περιορισμένη αξία των μπλοκ μοτίβων (Pattern blocks–Διάγραμμα 2.4) στην υποβοήθηση των μαθητών να κατασκευάζουν νοητικές εικόνες για την έννοια του μέρους-όλου, καθώς και η περιορισμένη αξία αυτών στην οικοδόμηση της έννοιας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων.

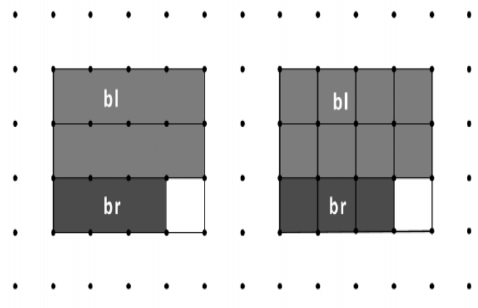


*Διάγραμμα 2.4.*Μπλοκ μοτίβων (Pattern blocks).

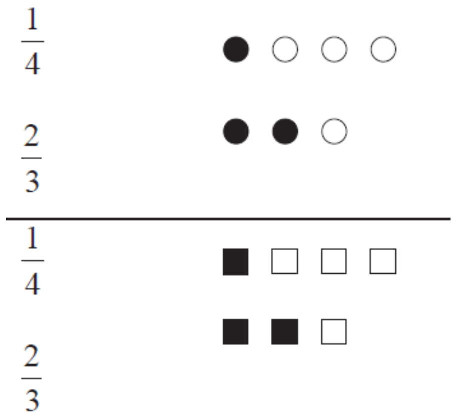
Επιπλέον, στην ίδια έρευνα φάνηκε ότι το διάγραμμα κλασμάτων (fraction chart-Διάγραμμα 2.5) βοήθησε τους μαθητές στο να βάλουν στη σειρά κλάσματα με ίδιο αριθμητή, αλλά δε φάνηκε να βοηθάει τους μαθητές στις δραστηριότητες εκτίμησης. Επιπρόσθετα, ούτε το μοντέλο με τις κουκίδες του γεωπίνακα (dot model-Διάγραμμα 2.6) ούτε το μοντέλο διακριτών μονάδων (chip model- Διάγραμμα 2.7) φάνηκε να επηρεάζει την αρχική αντίληψη των μαθητών της πέμπτης τάξης για τον αλγόριθμο της πρόσθεσης των κλασμάτων.



Διάγραμμα 2.5. Διάγραμμα κλασμάτων με κλασματικές λωρίδες (fraction chart).



Διάγραμμα 2.6. Μοντέλο κουκίδων στον γεωπίνακα(dot model).



Διάγραμμα 2.7. Μοντέλο διακριτών μονάδων (chip model).

Επιπρόσθετα, ο λάθος σχεδιασμός των αναπαραστάσεων από τους εκπαιδευτικούς κατά τη μαθησιακή διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις, σύμφωνα με την έρευνα των Olive and Vomvoridi (2006). Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα αυτή εξετάζει τις γνωστικές αλλαγές που γίνονται σε έναν μαθητή πάνω στην έννοια του κλάσματος κατά τη διαδικασία προσαρμογής της διδασκαλίας σύμφωνα με τις γνωστικές ανάγκες του μαθητή. Εξετάστηκε, δηλαδή, η περίπτωση ενός μαθητή της έκτης τάξης. Οι ερευνητές ξεκίνησαν με την υπόθεση ότι ο εκπαιδευτικός υποθέτει πως ο μαθητής του έχει κατανοήσει την αναγκαιότητα της διαίρεσης μιας κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη. Επίσης, ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει την περίπτωση κάποιοι μαθητές να μην έχουν κατανοήσει τη σημασία των ίσων μερών σε μια δοσμένη κλασματική μονάδα. Με αυτά τα δεδομένα ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει την παρακάτω αναπαράσταση (Διάγραμμα 2.8) κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του για να αναπαραστήσει τη λύση του προβλήματος πώς θα μοιράσει 8 πίτσες σε 10 ανθρώπους.

Διάγραμμα 2.8. Αναπαράσταση εκπαιδευτικού για το πώς μπορούν να μοιραστούν 8 πίτσες σε 10 ανθρώπους.

Ωστόσο, στην αναπαράσταση του εκπαιδευτικού δεν τηρείται, απεικονιστικά τουλάχιστον, η ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Σε άλλο μάθημα που ακολούθησε κατά τη διάρκεια της ίδιας έρευνας ο εκπαιδευτικός προσπάθησε να χωρίσει ένα κύκλο σε πέντε μέρη (Διάγραμμα 2.9), μια διαδικασία δύσκολη όπως ανέφερε και ο εκπαιδευτικός. Εντούτοις, παρά το γεγονός ότι η αναπαράσταση δεν ήταν ακριβής, αμέλησε να αναφέρει ότι προσπαθεί να χωρίσει τον κύκλο σε πέντε ίσα μέρη, θεωρώντας το δεδομένο. Ο μαθητής τελικά φάνηκε, μέσα από συνεντεύξεις, ότι είχε έλλειψη της αναγκαιότητας της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας παρά τις αρχικές υποθέσεις του εκπαιδευτικού.

Μέσα από αυτήν την έρευνα, λοιπόν, φάνηκε πόσο αρνητικά μπορούν να επηρεάσουν τις αντιλήψεις των μαθητών οι λάθος αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη μαθησιακή διαδικασία.

*Διάγραμμα 2.9.*Σχεδιάγραμμα εκπαιδευτικού στην προσπάθειά του να χωρίσει έναν κύκλο σε πέντε ίσα μέρη.

Επιπρόσθετα, οι Hodgen, Küchemann, Brown και Coe (2010) στο δεύτερο μέρος της έρευνάς τους πραγματοποίησαν συνεντεύξεις σε ομάδες των 2,3 ή 4 μαθητών ηλικίας 12 και 13 ετών για να διερευνήσουν ποιες αναπαραστάσεις χρησιμοποιούν αυθόρμητα οι μαθητές για τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπήρχε μια κοινή τάση από τους μαθητές να χρησιμοποιούν το μοντέλο του μέρους-όλου για να αναπαραστήσουν κλάσματα και μάλιστα εξετάζοντας συνήθως τμήματα ενός κύκλου. Η αναπαράσταση αυτή, δηλαδή η χρήση προκατασκευασμένων διαγραμμάτων, χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία και από άλλες έρευνες για να απεικονίζουν και να συγκρίνουν κλάσματα οι μαθητές.

Ωστόσο, κάποιες φορές φάνηκε ότι η χρήση αυτών των έτοιμων διαγραμμάτων εμπόδιζε την επιτυχή κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων (Hodgen, Küchemann, Brown & Coe, 2010). Την ίδια άποψη υποστηρίζουν και οι Anghileri (2000) και Askew (2000), οι οποίοι αναφέρουν ότι η δυνατότητα για την απόκτηση μιας ολοκληρωμένης κατανόησης για τα κλάσματα περιορίζεται εάν η αναπαράσταση επικεντρώνεται μόνο στο κλάσμα ως μέρος ενός συνόλου. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η έρευνα του Kleve (2010) ο οποίος διαπίστωσε αυτή τη δυσλειτουργία της αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος ως μέρος ενός συνόλου στην περίπτωση των καταχρηστικών κλασμάτων. Οι μαθητές, δηλαδή, δυσκολεύονταν να κατανοήσουν πως γίνεται το 9/8 να αναπαρασταθεί με ένα κύκλο που έχει χωριστεί σε 8 ίσα μέρη.

Μια άλλη έρευνα των Shahbari & Peled (2015) προτείνει τη χρήση δραστηριοτήτων που αναφέρονται στα κλάσματα σε πραγματικές καταστάσεις με χαρακτηριστικά μοντελοποίησης (Διάγραμμα 2.10) για την προώθηση της κατανόησης του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη. Η εφαρμογή της παραπάνω δραστηριότητας όχι μόνο πέτυχε στην παραγωγή εννοιολογικής αλλαγής στην κατανόηση των μαθητών στα κλάσματα, αλλά γενικεύθηκε περαιτέρω και μεταφέρθηκε και στα ποσοστά.

Διάγραμμα 2.10. Μοντέλο σε πραγματικές καταστάσεις για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας κατά Shahbari & Peled (2015).

Το Κλάσμα ως Αναπαράσταση στο Γεωμετρικό Μοντέλο της Αριθμητικής Γραμμής

Μια σειρά ερευνών εντοπίστηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία που αναφέρονται στα κλάσματα ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Μία από αυτές τις έρευνες είναι των Brousseau, Brousseau και Warfield (2007) η οποία περιγράφει μια διαδικασία διδασκαλίας πάνω στους ρητούς και τους δεκαδικούς αριθμούς και πιο συγκεκριμένα πώς να μεταφέρονται οι μαθητές από τους ρητούς στη δεκαδική μορφή τους, η οποία στηρίζεται στον κονστρουκτιβισμό και που έλαβε χώρα στο τέλος της δεκαετίας του 70. Το πείραμα πραγματοποίησε ο Guy Brousseau από κοινού με τη σύζυγό του, Nadine Brousseau στην τάξη της στο Ecole Jules Michelet. Κλήθηκαν, λοιπόν, να διδάξουν την ύλη για τους ρητούς και δεκαδικούς αριθμούς που απαιτούνται από το εθνικό πρόγραμμα με μία προσεκτικά δομημένη και αλληλοεξαρτώμενη διαδικασία.

Το πείραμα αυτό περιελάμβανε συνολικά 65 μαθήματα (σε 15 κύκλους) και πραγματοποιήθηκαν στην τέταρτη τάξη του σχολείου Michelet, με στόχο να οδηγήσει τους μαθητές μέρα με την ημέρα στο να εφεύρουν, να κατανοήσουν και να γίνουν πολύ καλοί με όλες τις πτυχές αυτών των δύο βασικών μαθηματικών δομών. Τα μαθήματα επανελήφθησαν σε δύο παράλληλες τάξεις με διαφορετικούς δασκάλους σε μια περίοδο άνω των 15 ετών, πράγμα που σημαίνει ότι έλαβαν μέρος σε αυτά τα μαθήματα περισσότεροι από 750 μαθητές. Η συγκεκριμένη έρευνα αποτελεί το ένα από τα τέσσερα άρθρα που συνολικά περιγράφουν αυτά τα 65 μαθήματα. Το μεγαλύτερο μέρος αποτελείται από τη μέτρηση κλασμάτων (κύκλοι 1-7), εν συνεχεία εξετάζονται τα κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή (κύκλοι 8-11) και τέλος μετά το πέρας των παραπάνω κύκλων οι ρητοί γίνονται συνειδητοί αναφορικά με την ομογενοποίηση των τριών εννοιών τους (κύκλοι 12-15). Η περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθεί αφορά τους κύκλους 4-7. Χαρακτηριστικό είναι αυτό που αναφέρουν στην εισαγωγή του άρθρου τους οι συγγραφείς ότι, δηλαδή, αισθάνθηκαν ότι η μελέτη για τους δεκαδικούς αριθμούς καθιστά περιττή τη μελέτη για τα κλάσματα, ιδίως στο επίπεδο των παιδιών του δημοτικού σχολείου, καθώς επίσης φαίνεται να είναι περιττή και για όλες τις τεχνικές εργασίες της σύγχρονης κοινωνίας. Από την άλλη πλευρά, οι εν λόγω όροι είναι εξαιρετικά πολύπλοκοι και δύσκολοι να επιτευχθούν σε ένα συνηθισμένο περιβάλλον.

Πριν την περιγραφή των μαθημάτων, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι μαθητές γνωρίζουν πώς να συγκρίνουν δύο ρητούς αριθμούς εκφρασμένους ως κλάσματα. Αλλά πώς μπορούν να τα σειροθετούν; Και πώς μπορούν να προσεγγίσουν το άθροισμά τους κάνοντάς τα ομώνυμα; Στα προβλήματα αυτά οι μαθητές επινοούν δεκαδικά κλάσματα και τρόπους με τους οποίους μπορούν να τα επιλύσουν. Ακολουθεί η εισαγωγή ενός νέου τρόπου για τη γραφή των δεκαδικών κλασμάτων, θεσπίζουν πολύ απλούς κανόνες για την εκτέλεση των κύριων αριθμητικών πράξεων στους αριθμούς αυτούς.

Στα δύο πρώτα μαθήματα οι μαθητές παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Ο δάσκαλος γράφει στον πίνακα 10 περίπου κλάσματα από τα οποία διαλέγει 3. Οι μαθητές καλούνται να δώσουν ένα αποτέλεσμα για το άθροισμά τους όσο το δυνατόν πιο γρήγορα. Στην αρχή, οι μαθητές υπολογίζουν το ακριβές ποσό, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που έμαθαν στο πρώτο μέρος. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού οι μαθητές χρειάζεται να δώσουν μια απάντηση πολύ γρήγορα κι έτσι δεν προλαβαίνουν να κάνουν τις πράξεις, αλλά έχουν τη δυνατότητα να απαντήσουν με ένα διάστημα: «Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από… και μικρότερο από…». Για τις απαντήσεις εργάζονται σε μικρές ομάδες ή ατομικά. Οι αιτιολογήσεις για τις απαντήσεις τους γίνονται δημόσια και κατευθύνονται από τον δάσκαλο

Στο τρίτο μάθημα δίνεται έμφαση στο λεξιλόγιο και στους υπολογισμούς των διαστημάτων μεταξύ των ρητών. Σκοπός αυτών των τριών μαθημάτων είναι να υποκινήσει τους μαθητές να προσεγγίζουν με πολλούς τρόπους τη μέτρηση των κλασμάτων και αποτελούν την εισαγωγή των επόμενων πέντε μαθημάτων.

Ο τέταρτος κύκλος ξεκινάει με ένα παιχνίδι στο οποίο οι μαθητές χωρίζονται σε δύο ομάδες. Οι μαθητές της Α ομάδας επιλέγουν ένα κλάσμα ανάμεσα στο διάστημα 0 έως 10, το γράφουν στο τετράδιό τους χωρίς όμως να το ανακοινώσουν στην ομάδα Β. Η ομάδα Β προσπαθεί να βρει δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς μεταξύ των οποίων να βρίσκεται το κλάσμα της ομάδας Α. Αυτό το πετυχαίνει κάνοντας διάφορες διερευνητικές ερωτήσεις της μορφής: είναι το κλάσμα μεταξύ του 7 και του 9; Γίνεται συμφωνία μεταξύ των ομάδων ποια μεριά του διαστήματος θα είναι κλειστή και ποια ανοιχτή. Η ομάδα Α μπορεί να απαντήσει μόνο με ένα «ναι» ή ένα «όχι». Οι απαντήσεις καταγράφονται στον πίνακα από την ομάδα Β (Διάγραμμα 2.11). Όταν η ομάδα Β βρει το διάστημα μεταξύ του οποίου βρίσκεται το κλάσμα της ομάδας Α, τότε η ομάδα Α δείχνει το κλάσμα σε όλη την τάξη για να επιβεβαιωθεί το αποτέλεσμα.

TEAM A
[0, 7) yes ~~[5, 10)~~ no

Διάγραμμα 2.11. Πίνακας με τη διαδικασία της εύρεσης του ζητούμενου διαστήματος.

Μετά το πέρας τριών με τεσσάρων γύρων του παιχνιδιού, το παιχνίδι παίζεται δύο εναντίων δύο. Ο δάσκαλος καταγράφει στον πίνακα τα κλάσματα των ομάδων και τα διαστήματα που προτείνονται. Μετά από το παιχνίδι του κύκλου αυτού (4^{ος} κύκλος), οι μαθητές είναι ικανοί να τοποθετούν ένα κλάσμα μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

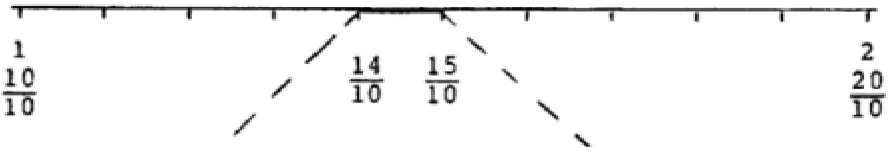
Το πρώτο μάθημα του 5^{ου} κύκλου χωρίζεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι του 4^{ου} κύκλου. Στη δεύτερη φάση επεμβαίνει ο δάσκαλος και ζητάει από τους μαθητές να γράψουν εντός 2 λεπτών όσα περισσότερα κλάσματα μπορούν μεταξύ του διαστήματος των δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών που έχουν βρει στην πρώτη φάση. Στην τρίτη φάση οι μαθητές καλούνται να μικρύνουν το διάστημα μεταξύ του οποίου βρίσκεται το υπό εξέταση κλάσμα χρησιμοποιώντας κλάσματα, για παράδειγμα [6/2 και 7/2). Στο τέλος αυτού του μαθήματος οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν ένα κλάσμα σε διάστημα μικρότερο του 1, κατανοούν ότι υπάρχουν πολλά κλάσματα μεταξύ αυτού του διαστήματος και ότι ένα διάστημα μπορεί να μικρύνει.

Στο δεύτερο μάθημα του 5^{ου} κύκλου οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι του πρώτου μαθήματος, αλλά για τα διαστήματα χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα. Στο τέλος του μαθήματος αυτού οι μαθητές κατανοούν την αναγκαιότητα να εκφράζουν τα διαστήματα με δεκαδικά κλάσματα.

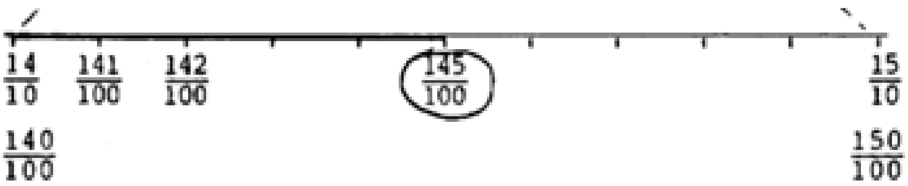
Στο τρίτο μάθημα του ίδιου κύκλου γίνεται χρήση της αναπαράστασης των κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή. Σε πρώτη φάση ο δάσκαλος επιλέγει ένα κλάσμα (για παράδειγμα το 145/100) το οποίο γράφει σε ένα μη φανερό μέρος και οι μαθητές δουλεύοντας σε ομάδες των 2 ή 3 ατόμων γράφουν στα τετράδιά τους τα διαστήματα που εικάζουν ότι μπορεί να ανήκει το κλάσμα του δασκάλου. Όταν όλες οι ομάδες γράψουν ένα διάστημα, ξεκινάει η διαδικασία των ερωτήσεων από τους μαθητές προς το δάσκαλο (για παράδειγμα, είναι το κλάσμα μεταξύ του 0 και του 5 κ.ο.κ.). Η διαδικασία των ερωτήσεων συνεχίζεται μέχρι οι μαθητές να βρουν ένα διάστημα μεγέθους 1 (σε αυτή την περίπτωση το διάστημα [1,2)). Στη συνέχεια ο δάσκαλος αναπαριστά μία αριθμογραμμή στον πίνακα (Διάγραμμα 2.12).

Διάγραμμα 2.12. Το διάστημα [1,2) στην αριθμογραμμή.

Το παιχνίδι συνεχίζεται βρίσκοντας οι μαθητές μικρότερα διαστήματα από το ένα για να προσδιορίσουν τη θέση του κλάσματος, τα οποία χρωματίζονται πάνω στην αριθμογραμμή. Το παιχνίδι σταματάει αφού βρεθεί το μικρότερο διάστημα, δηλαδή το [145/100, 146/100) (Διαγράμματα 2.13 και 2.14).

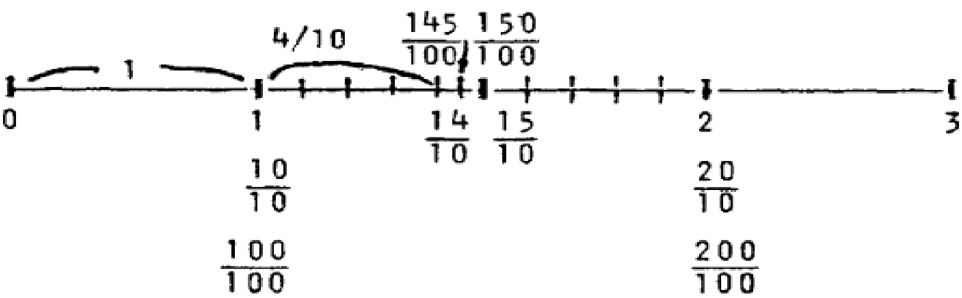


Διάγραμμα 2.13. Τα δεκαδικά κλάσματα 14/10 και 15/10 στην αριθμογραμμή.



Διάγραμμα 2.14. Το σημείο αναζήτησης πάνω στην αριθμογραμμή.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να ζωγραφίσουν πάνω στην αριθμογραμμή το διάστημα από το 0 έως το κλάσμα 145/100. Για να το πετύχουν αυτό, χωρίζουν το κλάσμα σε μονάδες, δέκατα και εκατοστά (Διάγραμμα 2.15). Στο τέλος οι μαθητές καλούνται να κάνουν την πρόσθεση των μονάδων, των δέκατων και των εκατοστών: 1+4/10+ 5/100 = 100/100+ 40/100+ 5/100= 145/100.



Διάγραμμα 2.15. Η αριθμητική γραμμή στην τελική μορφή της.

Σε δεύτερη φάση συνεχίζεται το ίδιο παιχνίδι με κλάσματα χιλιοστών (για παράδειγμα 975/1000). Στην Τρίτη φάση το παιχνίδι παίζεται με την εξής μορφή: ένας μαθητής βγαίνει έξω από την τάξη και οι υπόλοιποι βρίσκουν ένα κλάσμα. Ο μαθητής μετά ρωτάει έναν έναν τους συμμαθητές του για τις μονάδες, τα δέκατα, τα εκατοστά (κ.ο.κ.) τα οποία πιθανό να έχει το υπό εξέταση κλάσμα. Στο τέλος του τρίτου μαθήματος οι μαθητές μπορούν γρήγορα και σίγουρα να τοποθετούν δεκαδικά κλάσματα στην αριθμογραμμή. Στο τέταρτο μάθημα παίζουν το ίδιο παιχνίδι της τρίτης φάσης του τρίτου μαθήματος, αλλά τώρα οι απαντήσεις καταγράφονται σε πίνακα. Στη συνέχεια, τα κλάσματα του πίνακα καταγράφονται στον πίνακα της τάξης (για παράδειγμα 239/1000, 325/100 κ.ο.κ.).

Στη συνέχεια ο δάσκαλος γράφει στον πίνακα τους αριθμούς 7345/100, 7345/10, 7345/10000, 7345/1000 και τους ρωτάει αν πρόκειται για τον ίδιο αριθμό. Αφού οι μαθητές απαντήσουν θετικά, ο δάσκαλος προσθέτει την υποδιαστολή και τους εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο διαβάζονται οι δεκαδικοί αριθμοί:

$$73.45,\ 734.5,\ 0.7345,\ 7.345$$

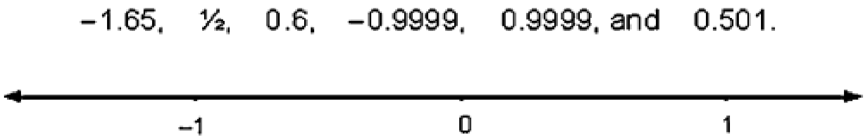
Κατόπιν γίνονται παραδείγματα μετατροπής από κλάσματα σε δεκαδικούς και από δεκαδικούς σε κλάσματα. Μετά το τέλος αυτού του μαθήματος σχεδόν όλοι οι μαθητές μπορούν να καταλάβουν και να γράψουν δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς και το αντίστροφο. Όταν ένας αριθμός είναι με τη μορφή δεκαδικού μπορούν να βρουν τις μονάδες, τα δέκατα, τα εκατοστά κ.ο.κ.

Όλες οι παραπάνω δραστηριότητες οδηγούν τους μαθητές σε βαθιά γνώση της έννοιας του κλάσματος και της δεκαδικής μορφής του, καθώς και στην εξεύρεση στρατηγικών αντιμετώπισης παρόμοιων προβλημάτων.

Αξιοσημείωτα είναι και τα αποτελέσματα της έρευνας των Hodgen, Küchemann, Brown και Coe (2010) οι οποίοι χρησιμοποίησαν για την έρευνά τους το 2008 τα δοκίμια μιας παλιότερης έρευνας του 1977 για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων στη δεκαδική τους μορφή σε περίπου 3000 μαθητές ηλικίας 11-14 ετών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών στην τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή βελτιώθηκαν, καθώς το 1977 τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 50% και το 2008 ήταν 83%. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η ίδια αναπαράσταση είχε διαφορετικά αποτελέσματα στις επιδόσεις των μαθητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μια εξήγηση που έδωσαν οι ερευνητές σε αυτή τη διαφορά των ποσοστών επιτυχίας ήταν το γεγονός ότι η αναπαράσταση της αριθμογραμμής τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται ευρέως στα αναλυτικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, κάτι που δε συνέβαινε πριν 30 χρόνια.

Στο ίδιο συμπέρασμα, για τη συσχέτιση της επιτυχίας των μαθητών σε μια αναπαράσταση με την εξοικείωση των μαθητών με αυτή, καταλήγει και η έρευνα των Jiang & Chua (2010). Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές σύγκριναν τις επιδόσεις μαθητών της έκτης τάξης του δημοτικού (1.070 μαθητών από την Κίνα και 1.002 μαθητών από τη Σιγκαπούρη) στην επίλυση τριών προβλημάτων σχετικά με τα κλάσματα. Οι μαθητές από την Κίνα ακολούθησαν συμβολικές αναπαραστάσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων, ενώ οι μαθητές από τη Σιγκαπούρη γραφικές αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στα δύο από τα τρία προβλήματα οι μαθητές από την Κίνα είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Σιγκαπούρης, αν και θα περίμενε κανείς το αντίθετο λόγω της χρήσης των γραφικών αναπαραστάσεων που έκανα οι μαθητές από τη Σιγκαπούρη. Μια από τις εξηγήσεις που δόθηκε και εδώ από τους ερευνητές είναι το γεγονός ότι τα βιβλία της Κίνας περιλαμβάνουν περισσότερα προβλήματα παρόμοια με αυτά του δοκιμίου σε σχέση με τα βιβλία της Σιγκαπούρης. Έτσι, οι μαθητές από την Κίνα, αν και χρησιμοποίησαν παραδοσιακές μεθόδους συμβολικής αναπαράστασης για την επίλυση των προβλημάτων, ωστόσο σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας.

Επιπρόσθετα, η έρευνα των Widjaja, Stacey και Steinle (2011) αναφέρεται στη σημαντικότητα που έχει για τη μαθηματική εκπαίδευση στο σχολειό η διδασκαλία των αρνητικών αριθμών και της αριθμογραμμής που δεν πρέπει να περιορίζεται σε ακέραιους αριθμούς, όπως συμβαίνει συχνά, αλλά πρέπει επίσης να περιλαμβάνει αρνητικά κλάσματα και δεκαδικούς. Η έρευνά τους ανάδειξε σημαντικές δυσκολίες σε ασκήσεις όπως αυτές του Διαγράμματος 2.16 από τους συμμετέχοντες που ήταν εκπαιδευόμενοι δάσκαλοι. Οι δυσκολίες αναδείχθηκαν από τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας που σημείωσαν οι 94 συμμετέχοντες στην έρευνα να τοποθετήσουν αρνητικούς δεκαδικούς αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή.



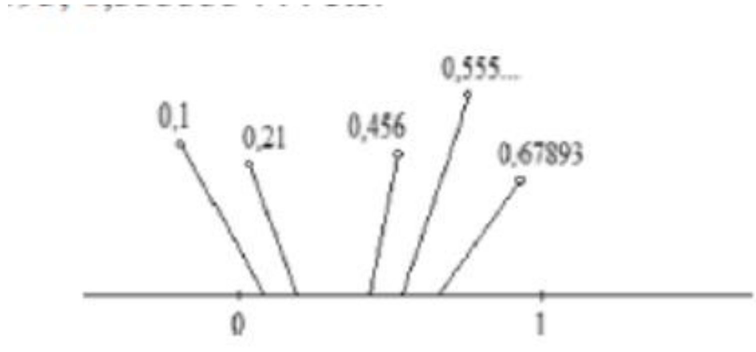
Διάγραμμα 2.16. Άσκηση τοποθέτησης δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων στην αριθμογραμμή που δόθηκε σε εκπαιδευόμενους δασκάλους.

Σε αυτό το σημείο οι Widjaja, Stacey και Steinle (2011) αναφέρουν πόσο σημαντική είναι η εξοικείωση τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών με την αριθμητική γραμμή και με την τοποθέτηση κλασμάτων πάνω σε αυτή στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων, όπως υποστηρίζει και η έρευνα των Hodgen, Küchemann, Brown και Coe (2010).

Επιπρόσθετα, στο άρθρο τους οι Vamvakoussi και Vosniadou (2012) επικεντρώθηκαν στην ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, παρουσίασαν δύο πειράματα για να διερευνήσουν την εκπαιδευτική αξία της αντιστοίχισης μεταξύ των εννοιών «αριθμός» και «γραμμή» με την κατανόηση της πυκνότητας από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στο πρώτο πείραμα, στο οποίο συμμετείχαν 229 μαθητές Α΄ Γυμνασίου έως Α΄ Λυκείου, οι ερευνητές σχεδίασαν ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, αποτελούμενο από τρία μέρη που το κάθε μέρος περιελάμβανε 5 στοιχεία. Τα στοιχεία από το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου ζητούσαν να βρεθούν πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ δύο ρητών αριθμών, κάνοντας χρήση ποικίλων απολήξεων των διαστημάτων (π.χ. ακέραιοι, δεκαδικοί, κλάσματα). Τα στοιχεία από το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου ήταν όμοια με τα στοιχεία του αριθμητικού μέρους, αλλά πάνω στην αριθμογραμμή ήταν τοποθετημένοι δύο αριθμοί. Τα στοιχεία από το τρίτο μέρος ζητούσαν τους αριθμούς που αντιστοιχούν σε σημεία πάνω σε τμήμα μιας ευθείας γραμμής, χρησιμοποιώντας ποικίλα μήκη και ποικίλες κατευθύνσεις του τμήματος.

Στο δεύτερο πείραμα, που σχεδιάστηκε βάσει των πορισμάτων του πρώτου πειράματος, συντάχθηκε ένα σύντομο κείμενο διδακτικής παρέμβασης. Οι συμμετέχοντες ήταν 149 μαθητές της Β' Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Και τα τρία κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν στη διδακτική παρέμβαση είχαν ένα κοινό μέρος Τ1 (Βασικό Κείμενο) το οποίο αναφερόταν σε έναν αριθμό μεταξύ άλλων αριθμών που ορίζονταν στο διάστημα 0 και 1. Ο ζητούμενος αριθμός αποτελούσε τη σωστή απάντηση και υπενθύμιζε στους μαθητές τους αριθμούς πάνω σε σημείο. Το βασικό κείμενο Τ1 συνεχίστηκε με την επίκληση της έννοιας του διαστήματος μεταξύ του 0 και του 1 πάνω στην αριθμητική γραμμή και παρουσιάστηκαν αρκετά παραδείγματα δεκαδικών αριθμών στο διάστημα αυτό. Αυτή η τελευταία παράγραφος εμπλουτίστηκε με την εισαγωγή δύο εικόνων που απεικονίζουν το διάστημα και τα παραδείγματα που δόθηκαν με τους δεκαδικούς ενδιάμεσους αριθμούς (Διάγραμμα 2.17). Αυτές οι εικόνες ήταν όμοιες με εκείνες που συνήθως απεικονίζονται στα βιβλία των συμμετεχόντων, όταν παρουσιάζονται αριθμοί πάνω στην αριθμητική γραμμή.



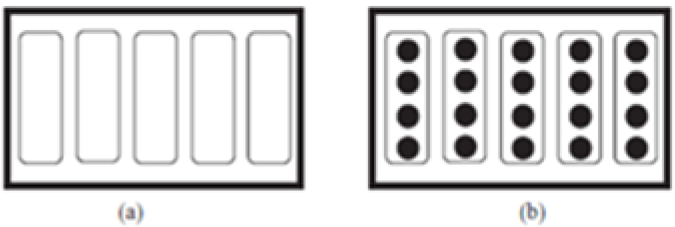
Διάγραμμα 2.17. Εμπλουτισμός της αριθμογραμμής του πειράματος με Εικόνα-Κείμενο.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η διάταξη σημείων πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ήταν πράγματι δύσκολο για τους μαθητές. Φάνηκε, όμως, ότι το άπειρο των σημείων σε ένα τμήμα είναι πιο προσιτή έννοια για τους μαθητές από το άπειρο των αριθμών σε διάστημα. Στη μελέτη παρέμβασης τους, λοιπόν, προσπάθησαν να υποστηρίξουν τους μαθητές να χτίσουν την ιδέα της πυκνότητας σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, κάνοντας σαφή την αντιστοίχιση αριθμών-σημείων και βοηθώντας τους μαθητές εκ νέου να αναπαραστήσουν το ευθύγραμμο τμήμα ως μια πυκνή σειρά από σημεία. Αυτή η αναλογική γεφύρωση βοήθησε την αντίληψη των μαθητών αναφορικά με την πτυχή της πυκνότητας.

Αναπαραστάσεις των Επιπέδων της Μονάδας (Levels of Units)

Οι εννοιολογικές μονάδες (Conceptual units) των διάφορων τύπων διαδραμάτισαν κεντρικό ρόλο στην έρευνα για τις αντιλήψεις των παιδιών στους ακέραιους και στους ρητούς αριθμούς. Το σημαντικότερο σημείο στην ακόλουθη συζήτηση είναι η διάκριση μεταξύ των δύο και τριών επιπέδων των μονάδων αυτών (levels of units), η οποία εξηγείται πρώτα στο πλαίσιο των ακέραιων αριθμών.

Έτσι, η έρευνα του Izsák, 2008 που έγινε σε μαθητές της έκτης τάξης αναφορικά με τη χρήση αναπαραστάσεων στηρίχθηκε στο συλλογισμό της διάκρισης των γραφικών αναπαραστάσεων για τη γραφική επίλυση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων σε τρία επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει την αναπαράσταση του αριθμού σε διακριτές μονάδες. Στο δεύτερο επίπεδο έχουμε την αναπαράσταση των διακριτών μονάδων του αριθμού σε ένα σύνολο, όπως αυτή παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.18α. Τέλος, το τρίτο επίπεδο που είναι το πιο σύνθετο περιλαμβάνει μονάδες μέσα στις διακριτές μονάδες του συνόλου (Διάγραμμα 2.18β).



Διάγραμμα 2.18. α) Ο αριθμός 5 σε δύο επίπεδα β) ο αριθμός 20 σε τρία επίπεδα.

Σύμφωνα με τον Steffe (1988, 1994 όπως αναφέρεται στο Izsák, 2008), ένα παιδί που μπορεί να αναγνωρίσει τα δύο πρώτα επίπεδα μπορεί να κατανοήσει και έναν ακέραιο αριθμό, ως χωριστή-διακριτή μονάδα (το πρώτο επίπεδο της γραφικής αναπαράστασης) και μία ομάδα ως μια ενιαία οντότητα (ολόκληρη η ομάδα είναι το δεύτερο επίπεδο της γραφικής αναπαράστασης).

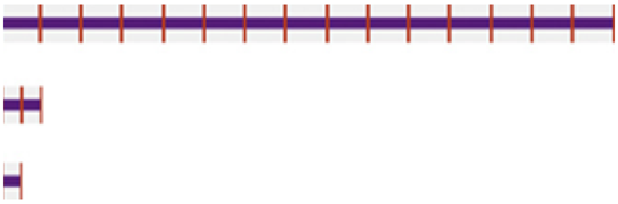
Ο Steffe ισχυρίζεται ότι αυτό το παιδί που έχει καταφέρει να γνωρίσει τα δύο παραπάνω επίπεδα μπορεί να αναγνωρίσει και σύνθετες γραφικές αναπαραστάσεις. Μέσω του συντονισμού των σύνθετων αναπαραστάσεων, ένα παιδί μπορεί να παράγει τρία επίπεδα αναπαραστάσεων, ενσωματώνοντας σύνθετες μονάδες εντός σύνθετων μονάδων (τρίτο επίπεδο γραφικής αναπαράστασης).

Οι δύο περιπτωσιολογικές μελέτες που περιλαμβάνει η συγκεκριμένη έρευνα δείχνουν ότι η χρήση των τριών επιπέδων γραφικών αναπαραστάσεων φάνηκε αναγκαία αλλά όχι επαρκής για την ερμηνεία και την αξιολόγηση των διάφορων τρόπων που οι μαθητές θα αρχίσουν να επιλύουν πολλών επιπέδων δομές όταν χρησιμοποιούν γραφικές αναπαραστάσεις για να πολλαπλασιάζουν κλάσματα. Σημαντικός παράγοντας, δηλαδή, φαίνεται να είναι και η γνώση των εκπαιδευτικών πάνω σε αυτά τα τρία επίπεδα, αλλά και ο παιδαγωγικός σκοπός για τον οποίο χρησιμοποιούνται οι αναπαραστάσεις. Στο σημείο αυτό ο Shulman (1986, 1987) και οι Rowland, Huckstep και Thwaites (2003) αναφέρουν πόσο σημαντική είναι η επιλογή της σωστής αναπαράστασης από τον εκπαιδευτικό που θεωρούν ότι αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο οι γνώσεις του εκπαιδευτικού μετασχηματίζονται για να διευκολυνθεί η πρόσβασή τους στους μαθητές.

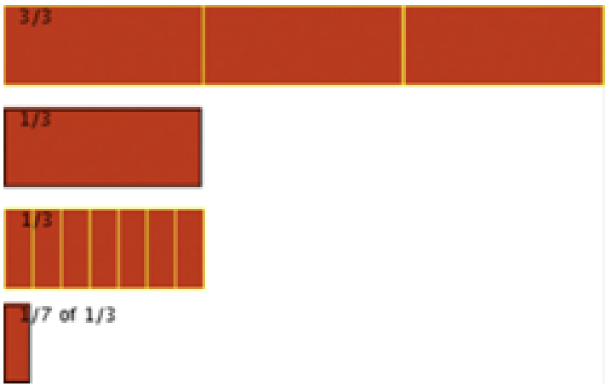
Επιπρόσθετα, τα τρία παραπάνω επίπεδα γραφικών αναπαραστάσεων φαίνονται να αποτελούν σημαντική μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία περαιτέρω θεμάτων όπου τα κλάσματα αντιμετωπίζονται ως αριθμητικές ποσότητες. Τέλος, τα τρία αυτά επίπεδα γραφικών αναπαραστάσεων μπορούν να υποστηρίξουν γραμμικές ή χωρικές αναπαραστάσεις για να προσδιοριστούν απαντήσεις στα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.

Με το ίδιο θέμα ασχολήθηκαν στην έρευνά τους και οι Hackenberg και Tillema (2009) τονίζοντας τη σημασία αυτών των τριών επιπέδων στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Για τους σκοπούς της έρευνάς τους χρησιμοποίησαν ως μέσα αναπαράστασης το λογισμικό microworlds, TIMA και τα εργαλεία Sticks και JavaBars τα οποία αναπτύχθηκαν για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν νοητικές λειτουργίες όπως η διαμέριση, η επανάληψη και η αποσύνθεση (disembedding) στα κλάσμα.

Μια κεντρική διαφορά μεταξύ των δύο προγραμμάτων είναι ότι στο Sticks οι μαθητές εργάζονται μόνο σε τμήματα της γραμμής (sticks), (Διάγραμμα 2.19) ενώ στο JavaBars οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν ορθογώνια διάφορων διαστάσεων (Διάγραμμα 2.20). Στις δραστηριότητες του πειράματος, που αφορούσαν στη σύνθεση κλασμάτων κατά τον πολλαπλασιασμό, συμμετείχαν δύο ζευγάρια μαθητών της Στ΄ τάξης του δημοτικού για οχτώ μήνες. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η εσωτερίκευση των δύο επιπέδων της μονάδας μιας συγκεκριμένης πολλαπλασιαστικής έννοιας είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της έννοιας της κλασματικής μονάδας, ενώ η εσωτερίκευση των τριών επιπέδων της μονάδας είναι απαραίτητη για την κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος. Επιπρόσθετα, τα λογισμικά αυτά διευκόλυναν τους μαθητές να παγιώσουν τη χρήση των δύο και τριών επιπέδων της μονάδας και ως εκ τούτου, την έννοια του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων.

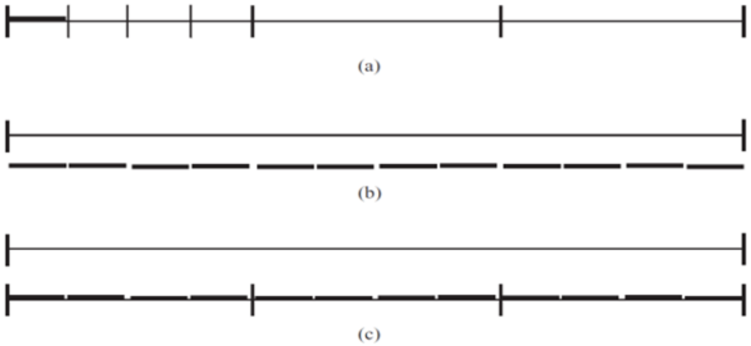


Διάγραμμα 2.19. Το λογισμικό Sticks.

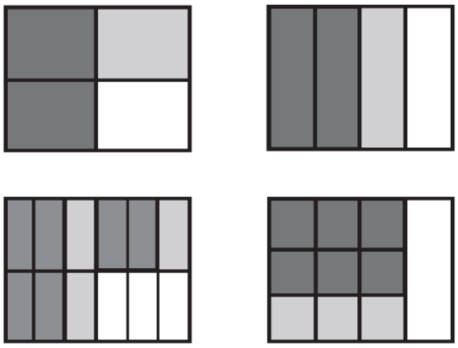


Διάγραμμα 2.20. Το λογισμικό JavaBars.

Άλλοι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το παραπάνω θέμα για την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων είναι οι Izsák (2008), ο Hackenberg (2007) και οι Empson, Junk, Dominguez και Turner (2006). Στην έρευνά του ο Izsák (2008) για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων χρησιμοποίησε αναπαραστάσεις ως ποσότητες μήκους (Διάγραμμα 2.21) ή ως ποσότητες περιοχής (Διάγραμμα 2.22). Αυτή η έρευνα στηρίζεται στη θεωρία των δύο και τριών επιπέδων της ποσοτικής μονάδας και καταδεικνύει ότι η συλλογιστική των τριών επιπέδων της μονάδας είναι απαραίτητη για την κατανόηση των κλασμάτων. Γενικά, με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και διάφορων στρατηγικών παρέχονται εναλλακτικές λύσεις από τις οποίες κάθε μαθητής μπορεί να καταλάβει τα τρία επίπεδα της μονάδας και την έννοια του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων.

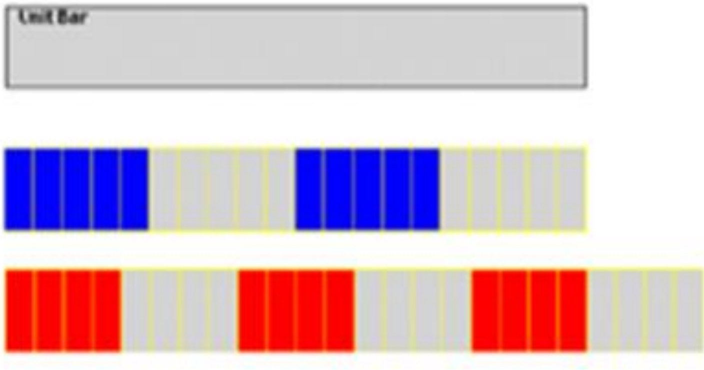


Διάγραμμα 2.21. Μοντέλα μήκους για την αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων: 1/3*1/4.



Διάγραμμα 2.22. Τέσσερις τρόποι για την αναπαράσταση σε μοντέλα επιφάνειας της πράξης 3/4*2/3.

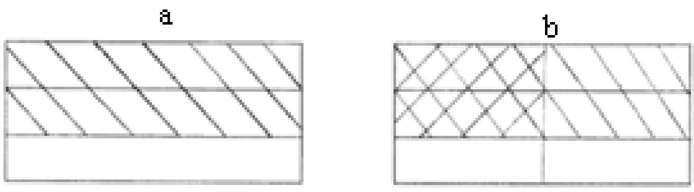
Επιπρόσθετα, ο Hackenberg (2007) προσέγγισε τα καταχρηστικά κλάσματα μέσα από τα τρία επίπεδα των μονάδων χρησιμοποιώντας το JavaBars, υποστηρίζοντας ότι η κατασκευή καταχρηστικών κλασμάτων απαιτεί την εσωτερικοποίηση των τριών επιπέδων της μονάδας (Διάγραμμα 2.23).



Διάγραμμα 2.23. Αναπαράσταση του 6/5 στο JavaBars.

Αναπαραστάσεις και Πράξεις Κλασμάτων

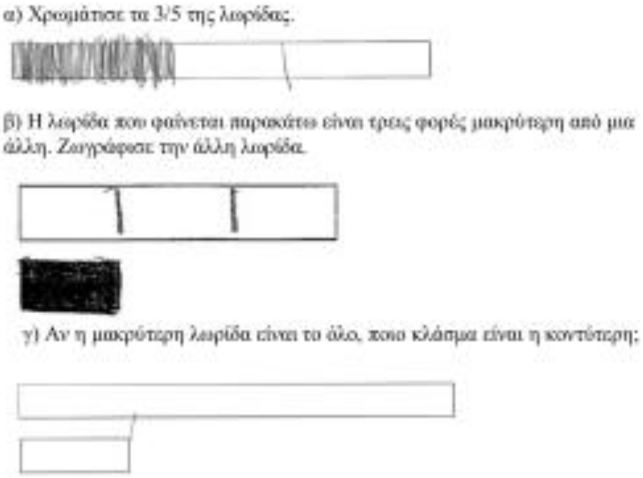
Όσον αφορά τις τέσσερις πράξεις με κλάσματα την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση οι Chen και Li (2009) διεξήγαν μια μελέτη περίπτωσης που εξέταζε τα χαρακτηριστικά της συνεκτικότητας της διδασκαλίας σε μια τάξη των κινέζων δασκάλων τόσο μέσα από ατομικά μαθήματα όσο και μέσα από μια ακολουθία τεσσάρων μαθημάτων σχετικά με τη διαίρεση κλάσματος. Υπήρχαν πάνω από 50 μαθητές της έκτης τάξης στην αίθουσα. Κάθε μάθημα διήρκεσε περίπου 40 λεπτά. Μέσα από τις διδασκαλίες, ο δάσκαλος και οι μαθητές παρουσίαζαν πολλαπλές αναπαραστάσεις για να βοηθήσουν στην κατανόηση και χρησιμοποιήθηκαν κυρίως ευθύγραμμα τμήματα (Διάγραμμα 2.24). Πιο συγκεκριμένα, η εικονική αναπαράσταση του Διαγράμματος 2.24 χρησιμοποιήθηκε για να αναδείξει τη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Ο δάσκαλος σχεδιάζει την εικονική αναπαράσταση για να δείξει το 2/3 (Διάγραμμα 2.24a). Στη συνέχεια σχεδιάζει μια αναπαράσταση (Διάγραμμα 2.24b) για να βρεθεί πόσο κάνει $\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{2}$ και επιβεβαιώνει ότι αυτές οι δύο εκφράσεις (π.χ. $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\div 2$) έχουν την ίδια απάντηση δημιουργώντας στους μαθητές μια εννοιολογική σύνδεση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων.



Διάγραμμα 2.24. Εικονική αναπαράσταση για τη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλάσματος ($\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\div 2$).

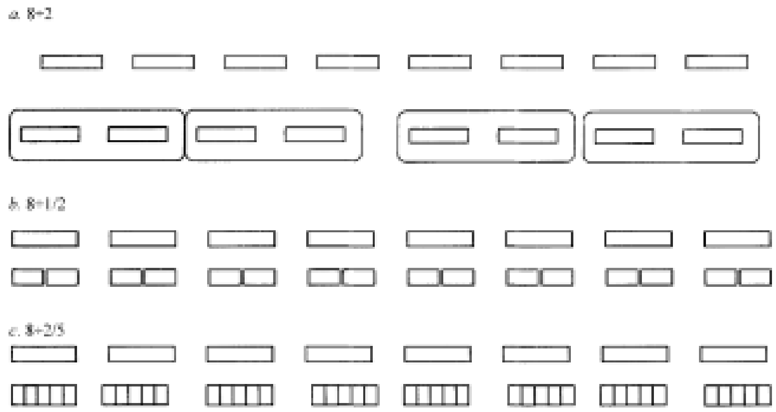
Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής δείχνουν ότι η γνώση που κατέχει ο δάσκαλος για την έννοια που διδάσκεται και η κατάλληλη χρήση των αναπαραστάσεων διευκόλυναν την κατασκευή μιας συνεκτικής διδασκαλίας στην τάξη και βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν το πραγματικό πρόβλημα. Μέσα, δηλαδή, από τη χρήση των σωστών αναπαραστάσεων οι πλειοψηφία των μαθητών ήταν σε θέση να χρησιμοποιεί τουλάχιστον έναν τρόπο αναπαράστασης για να βρίσκει και να δικαιολογεί τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων.

Οι Norton και Wilkins (2009) στην έρευνά τους που διήρκησε δύο χρόνια και έλαβαν μέρος συνολικά 84 μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, χρησιμοποίησαν τις αναπαραστάσεις του Διαγράμματος 2.25. Τα πορίσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τις διαφορές μεταξύ του μέρους – όλου και της μεριστικής συλλογιστικής με κλάσματα και καταλήγουν ότι η κατανόηση του μερισμού ενός κλάσματος από τους μαθητές διευκολύνει την ανάπτυξη του διαχωρισμού.

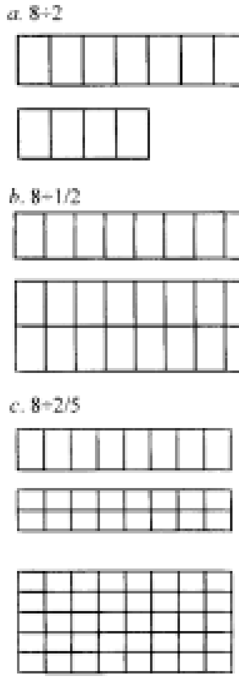


Διάγραμμα 2.25. α) Αναπαράσταση του μέρους-όλου. β) Αναπαράσταση της διαμέρισης. γ) Αναπαράσταση του μέρους-όλου και του διαχωρισμού.

Οι Lee και Sztajn (2008) επίσης ασχολήθηκαν με τη διαίρεση κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνά τους αναφέρονται στον επαναπροσδιορισμό της μέτρησης και της ερμηνείας του διαχωρισμού της διαίρεσης από τους ακέραιους αριθμούς στα κλάσματα. Δηλαδή, προτείνουν ότι η εστίαση στην ιδέα της μονάδας μπορεί να θεωρηθεί ως αλλαγή μονάδας (unit-changing-Διάγραμμα 2.26) και διατήρηση μονάδων (unit-keeping-Διάγραμμα 2.27). Οι ερμηνείες που αφορούν στην τήρηση της μονάδας και στην αλλαγή της μονάδας επιτρέπουν μια συζήτηση που απαντά στο ερώτημα γιατί αναστρέφεται και πολλαπλασιάζεται. Για να κατανοήσουμε τη διαίρεση στο πλαίσιο των κλασμάτων, η προσοχή στη μονάδα υποδεικνύει ότι, κατά τη διαδικασία της «μετασχηματισμού» διαίρεσης σε πολλαπλασιασμό αναζητούμε τη μονάδα του διαιρέτη ή τη μονάδα του διαιρετέου.



Διάγραμμα 2.26. Αναπαράσταση «αλλαγή μονάδας» (Unit-changing interpretation).

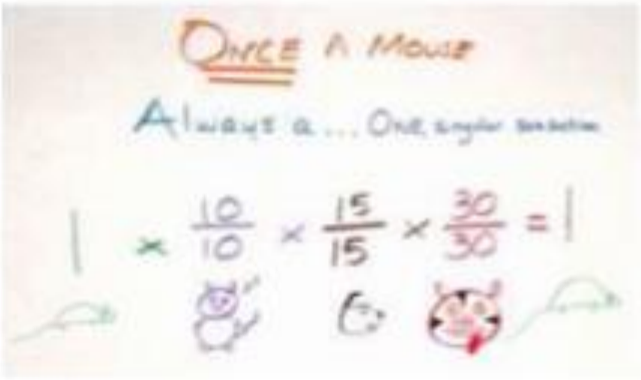


Διάγραμμα 2.27. Αναπαράσταση «διατήρηση της μονάδας» (Unit-keeping).

Στα προβλήματα μέτρησης, ο διαιρετέος και το πηλίκο δεν έχουν την ίδια μονάδα. Επομένως, αυτή την περίπτωση την ονομάζουν οι ερευνητές αλλαγή μονάδας (unit-changing). Το Διάγραμμα 2.26 δείχνει τρία προβλήματα και τις αναπαραστάσεις για την ερμηνεία της αλλαγής της μονάδας στη διαίρεσης. Σε κάθε περίπτωση, υπολογίζουμε τον διαιρέτη και τον διαιρετέο χρησιμοποιώντας την ίδια μονάδα. Το πηλίκο, ωστόσο, βασίζεται σε μια νέα μονάδα μέτρησης που είναι 2, 1/2 ή 2/5 της μονάδας που διαιρείτε και τα αποτελέσματα της μέτρησης είναι 4, 16 και 20 αντίστοιχα. Ένας τρόπος να σκεφτούμε τα προβλήματα μέτρησης είναι ότι θέλουμε να μετρήσουμε τον διαιρετέο χρησιμοποιώντας τη νέα μονάδα μέτρησης που ορίζει ο διαιρέτης.

Στα προβλήματα μερισμού, ο διαιρετέος και το πηλίκο έχουν την ίδια μονάδα που οδηγεί σε αυτό που ονομάζουμε διατήρηση της μονάδας (unit-keeping). Το Διάγραμμα 2.27 δείχνει την ερμηνεία της διατήρησης μονάδων για τα τρία προβλήματα που εξετάζονται. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο διαιρέτης υποδεικνύει τη σχέση του διαιρετέου σε συνάρτηση με αυτό που θέλουμε να βρούμε. Για να επιλύσουμε κάθε ένα από τα προβλήματα διατήρησης μονάδων (unit-keeping), κατασκευάζουμε μια μονάδα μέτρησης για τον διαιρέτη και στη συνέχεια μετράμε τη νέα μονάδα χρησιμοποιώντας τη μονάδα του διαιρετέου. Το μέλημα σε ένα πρόβλημα μερισμού είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μονάδα καταμέτρησης του διαιρετέου για να συνθέσουμε και να μετρήσουμε τι είναι σε μια μονάδα μέτρησης για τον διαιρέτη. Ως εκ τούτου, οι Lee και Sztajn ισχυρίζονται ότι και οι δύο ερμηνείες, η διατήρηση μονάδων και η αλλαγή των μονάδων, υποστηρίζουν την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων και της διαίρεσης.

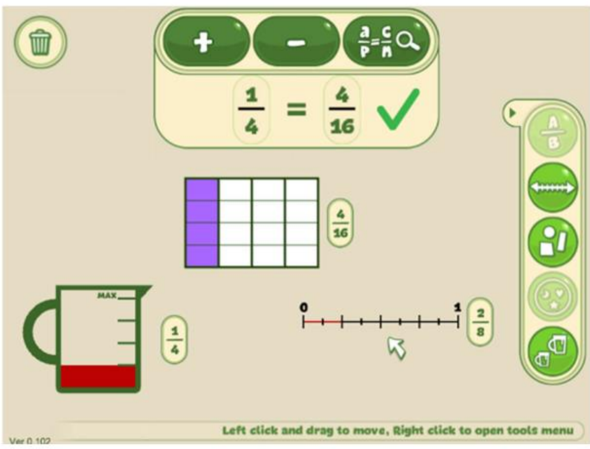
Η έρευνα του Ryken (2009) εξετάζει το ρόλο των οπτικών αναπαραστάσεων στην μάθηση των μαθηματικών. Η έρευνα δίνει έμφαση στο ρόλο των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη δημιουργία και την αναδημιουργία νέων αντιλήψεων. Στην περίπτωση των κλασμάτων, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα στο Διάγραμμα 2.28. Συγκεκριμένα, μια εξίσωση κλάσματος χρησιμοποιείται για να διερευνήσει την έννοια της ισότητας και να τονίσει ότι παρόλο που το ποντίκι περνάει από μια σειρά μετασχηματισμών, το νέο ζώο είναι ακόμα ποντίκι. Σε αυτήν την παράσταση στον ποντικός έχει εκχωρηθεί μια αρχική τιμή 1 και κάθε μετασχηματισμό αποδίδεται με έκφραση κλάσματος που είναι ίση με 1. Έτσι, το μαθηματικό μοντέλο των μαθητών εκφράζει τόσο την ισότητα (όλα τα ζώα αποδίδουν τιμές κλασμάτων ίσες με 1) όσο και την ανισότητα (με τη χρήση διαφορετικών χρωμάτων). Έτσι, τα μαθηματικά μοντέλα μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων βοηθούν τους μαθητές να μάθουν μια βασική διαδικασία που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και παρέχουν μια ευκαιρία να διερευνηθεί πώς οι υποθέσεις επηρεάζουν την επίλυση προβλημάτων.



Διάγραμμα 2.28. Μαθηματικό μοντέλο αναπαράστασης: Μοντέλο ισότητας κλασμάτων.

Ψηφιακές Αναπαραστάσεις Κλασμάτων

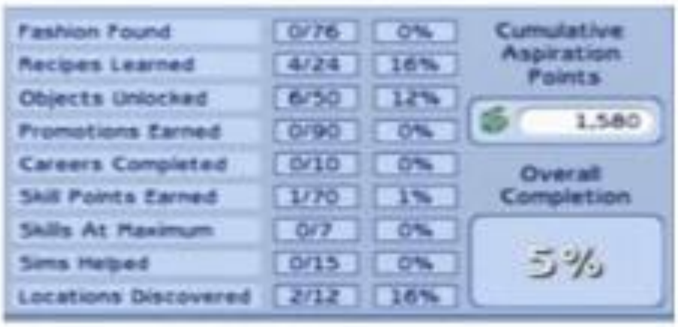
Οι Hansen, Mavrikis και Geraniou (2016) αναφέρονται στο άρθρο τους στο iTalk2Learn. To iTalk2Learn είναι ένα εργαστήριο κλασμάτων με στόχο την ανάπτυξη μιας έξυπνης πλατφόρμας διδασκαλίας ανοιχτού κώδικα που υποστηρίζει τη μάθηση μαθητών για μαθητές ηλικίας 5 έως 11 ετών. Επιτρέπει στους μαθητές να μάθουν από ένα σύστημα με πιο φυσικό τρόπο από ποτέ. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να προσφέρουν το σωστό μάθημα την κατάλληλη στιγμή για κάθε παιδί, επιτρέποντας την εξατομικευμένη μάθηση σε κλίμακα. Επιπλέον, το iTalk2Learn χρησιμοποιεί μια ποικιλία αναπαραστάσεων κλασμάτων (αριθμογραμμή, διαγράμματα, μέτρηση υγρών, γραπτά σύμβολα), συμπεριλαμβανομένων των συνεχών και διακριτών μονάδων σε μία, δύο και τρεις διαστάσεις αναπτύσσοντας με αυτό τον τρόπο την εννοιολογική κατανόηση των ρητών από τους μαθητές (Διάγραμμα 2.29).



Διάγραμμα 2.29. iTalk2Learn: Τέσσερις αναπαραστάσεις για το κλάσμα 1/4.

Επιπρόσθετα, οι Satwicz και Stevens (2008) διεξήγαν μια εθνογραφική έρευνα 6 μηνών στο πλαίσιο μιας μελέτης να κατανοήσουμε πως μαθαίνουν οι άνθρωποι στις διάφορες εμφάσεις της ζωής του, για παράδειγμα στο σπίτι, στο σχολείο, στη δουλειά. Στην έρευνα αυτή φάνηκε πως η χρήση της αναπαράστασης, όταν έχει να κάνει με τα στενά ενδιαφέροντα των παιδιών, απομονωμένη από το πλαίσιο της υποχρεωτικής μάθησης, βοηθάει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και εμπεδώνεται μέσα από την ίδια την ανάγκη για πρακτική εφαρμογή. Ο λόγος γίνεται για τα ηλεκτρονικά παιχνίδια και τις αριθμητικές αναπαραστάσεις που αυτά χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 2.30, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού ο παίχτης έρχεται σε επαφή με την αναπαράσταση του κλάσματος και τις διάφορες μορφές του όπως τους δεκαδικούς αριθμούς, τους λόγους και τα ποσοστά. Οι παίχτες φαίνεται να διαχειρίζονται με άνεση και χωρίς κάποια δυσκολία τις αριθμητικές αυτές μορφές και μάλιστα σε βάθος, αφού είναι στοιχεία τα οποία πρέπει να ερμηνεύσουν σωστά για να συνεχίσουν το παιχνίδι τους. Έτσι, οι συμμετέχοντες, χωρίς να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά δεδομένα με τη συμβατική έννοια του όρου, μπορούν να τα χρησιμοποιούν για να κάνουν προβλέψεις για τις μελλοντικές τους στρατηγικές και να καθορίσουν τις ενέργειές τους.

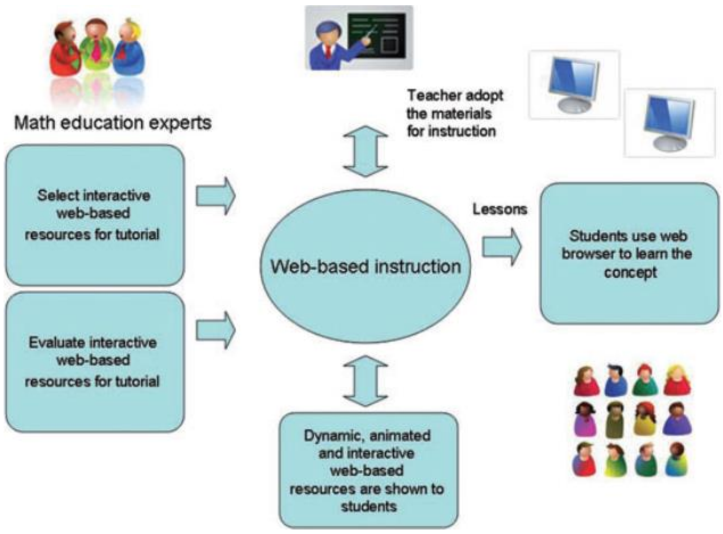


Διάγραμμα 2.30. Ποσοτικές αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια ηλεκτρονικού παιχνιδιού.

Αυτό επιτυγχάνεται με τις δύο πτυχές που αποδίδονται στα ηλεκτρονικά παιχνίδια. Η μία είναι ότι τα παιχνίδια αυτά ως παιχνίδια ανοιχτού τύπου επιτρέπουν την ευέλικτη και πολλαπλή πορεία επίτευξης των στόχων και από την άλλη συχνά αυτά τα παιχνίδια ανοιχτού τύπου συνδέονται με σαφώς καθορισμένα καθήκοντα και σαφείς δείκτες επιδόσεων. Η ισορροπία αυτή επιτρέπει την εμφάνιση πολλών διαφορετικών ειδών στόχων στην αριθμητική πρακτική.

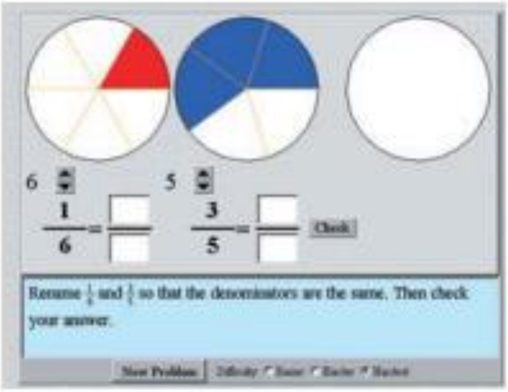
Αν και δεν πραγματοποιήθηκε κάποια επίσημη διαρκή εξωτερική αξιολόγηση των ιδεών που θα μπορούσαν να επικαλεστούμε αργότερα ως απόδειξη των ικανοτήτων τους, ωστόσο, δεν μπορεί να αγνοηθεί η χρησιμότητα των ηλεκτρονικών παιχνιδιών σε σημαντικές μαθηματικές έννοιες όπως στα ποσοστά και τις αναλογίες πάνω στις οποίες έχουν σχεδιαστεί τα ηλεκτρονικά παιχνίδια.

Θετικά ευρήματα για τη χρήση ηλεκτρονικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των κλασμάτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση βρέθηκαν στην έρευνα του Lin (2010) ο οποίος συνέκρινε την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας που στηρίζεται στο διαδίκτυο και της παραδοσιακής διδασκαλίας δημιουργώντας το μοντέλο Web-Based instruction (WBI) (Διάγραμμα 2.31)



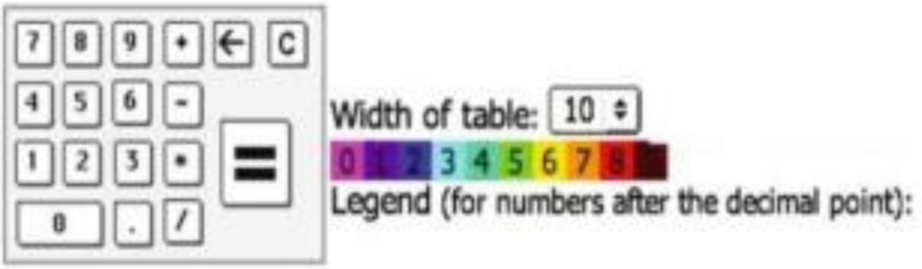
Διάγραμμα 2.31. Διάγραμμα του Web-based instruction model.

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης δείχνουν ότι η χρήση του WBI είναι σημαντικά πιο αποτελεσματική ως μέθοδος διδασκαλίας στους μαθητές, δίνοντας τους τις ευκαιρίες να προωθήσουν τις διαδικαστικές και εννοιολογικές τους γνώσεις σχετικά με τα κλάσματα. Ομοίως, οι διαδικτυακοί ιστότοποι που χρησιμοποιούνται για διαδικτυακή διδασκαλία (Διάγραμμα 2.32) παρέχουν ένα δυναμικό και κινούμενο εργαλείο για τη βελτίωση των οπτικών και εννοιολογικών ικανοτήτων των μαθητών στη μάθηση των κλασμάτων. Τα παραπάνω ευρήματα συμφωνούν με αυτά των Fuchset, Fuchs, Hamlet και Powell (2006) και Schorr και Goldin (2008).



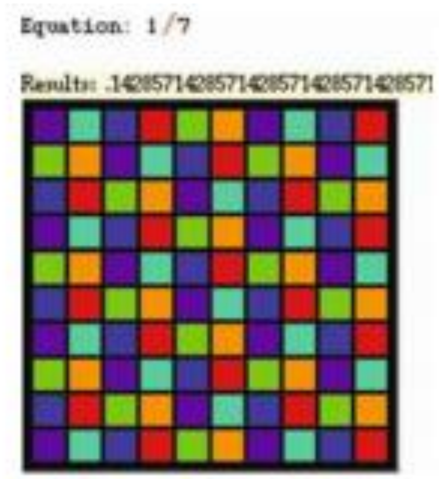
Διάγραμμα 2.32. Παράδειγμα από διαδραστική δραστηριότητα στο διαδίκτυο.

Μια άλλη έρευνα των Sinclair, Liljedahl και Zazkis (2006) διερεύνησε τις δυνατότητες χρήσης ενός διαδικτυακού υπολογιστή χρώματος (web-based colour calculator), από τους υποψήφιους δασκάλους αναφορικά με την κατανόηση πολλών ιδιοτήτων που σχετίζονται με τα κλάσματα και τις δεκαδικές αναπαραστάσεις τους. Ο υπολογιστής χρώματος (colour calculator) είναι ένας υπολογιστής με βάση το διαδίκτυο που παρέχει αριθμητικά αποτελέσματα, αλλά προσφέρει επίσης τα αποτελέσματά του σε πίνακα με έγχρωμη κωδικοποίηση, παρέχονται συμβατικές λειτουργίες, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2.33.



Διάγραμμα 2.33. Ο υπολογιστής χρωμάτων (The Colour Calculator).

Κάθε ψηφίο του αποτελέσματος αντιστοιχεί σε ένα από τα 10 ευδιάκριτα χρωματιστά δείγματα του πίνακα (Διάγραμμα 2.33). Η αριθμομηχανή λειτουργεί με ακρίβεια 100 δεκαδικών ψηφίων και έτσι κάθε αποτέλεσμα αντιπροσωπεύεται ταυτόχρονα από μια (μακρά) δεκαδική συμβολοσειρά και έναν πίνακα ή πλέγμα χρωμάτων. Είναι δυνατό να αλλαχθεί η διάσταση ή το πλάτος του πίνακα χρωμάτων σε τιμές μεταξύ 1 και 30. Το Διάγραμμα 2.34 δείχνει το αποτέλεσμα της πληκτρολόγησης 1/7 στην αριθμομηχανή με το πλάτος του πλέγματος να είναι 10, δημιουργώντας έτσι τον αντίστοιχο έγχρωμο πίνακα.

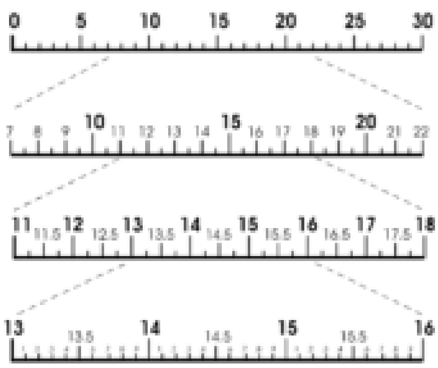


Διάγραμμα 2.34. Το 1/7 στον υπολογιστή χρωμάτων (The Colour Calculator).

Τα πορίσματα δείχνουν ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι αλληλεπιδρώντας με τον υπολογιστή χρωμάτων (web-based colour calculator) και εμπλούτισαν τις εμπειρίες του αναφορικά με τους ρητούς αριθμούς και βελτιώθηκε η κατανόησή τους σε σημαντικές ιδιότητες μετατροπής των κλασμάτων στη δεκαδική τους μορφή.

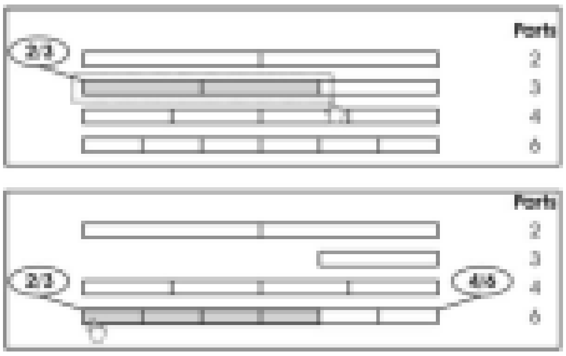
Επιπρόσθετα, οι Sedig και Sumner (2006) μίλησαν στην έρευνά τους για τη σημασία των οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων (visual mathematical representations-VMRs) με την αλληλεπίδραση του υπολογιστή. Στην περίπτωση των κλασμάτων αναφέρουν δύο τεχνικές αλληλεπίδρασης που η χρήση τους είναι δυνατόν να υποστηριχθεί από τις VMRs.

Μία από αυτές τις τεχνικές είναι η χρήση της εστίασης (zoom) στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 2.35). Η εστίαση αυξάνει ή μειώνει το επίπεδο των λεπτομερειών στην αριθμογραμμή επιτρέποντας στους μαθητές να οπτικοποιούν τη διαίρεση των αριθμών σε ίσα μέρη και να διευκολύνεται η μετάβαση στο χώρο των ρητών αριθμών.



Διάγραμμα 2.35. Διάφορα επίπεδα από την εστίαση της αριθμογραμμής.

Η δεύτερη τεχνική αλληλεπίδρασης είναι αυτής του τεμαχισμού (fragmenting-Διάγραμμα 2.36). Με την τεχνική του τεμαχισμού (fragmenting) οι χρήστες έχουν τη δυνατότητα να αναλύουν, αποσυνθέτουν, χωρίζουν, διαιρούν και ενοποιούν αλληλεπιδρώντας με τη βοήθεια των VMRs. Η τεχνική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν έννοιες όπως τα κλάσματα. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να εφαρμόσει την τεχνική αυτή σε ένα σύνολο ίσων τμημάτων μιας γραμμής για να διερευνήσει την ιδέα των ισοδύναμων κλασμάτων (Διάγραμμα 2.36).



Διάγραμμα 2.36. Η τεχνική του τεμαχισμού (fragmenting) στην ανακάλυψη της ισοδυναμίας κλασμάτων.

Αναπαραστάσεις Κλασμάτων και Πολιτισμικές Επιρροές

Κάποιοι ερευνητές μελέτησαν την επιρροή που έχουν οι πολιτισμικές καταβολές των εκπαιδευτικών στη χρήση των αναπαραστάσεων. Ενδιαφέρουσα είναι η έρευνα των Moseley, Okamoto και Ishida (2006), η οποία παρουσιάζει τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην Ιαπωνία και στις ΗΠΑ σε μια συγκριτική αντιπαράθεση προκειμένου να ερμηνευτούν και να συσχετιστούν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται με τις επιδόσεις των μαθητών αναφορικά με τα κλάσματα.

Η έρευνα ανέδειξε τρεις σημαντικές διαφορές μεταξύ των Ιαπώνων και Αμερικανών εκπαιδευτικών: 1) οι Ιάπωνες εκπαιδευτικοί ερμήνευαν την όλες τις αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών ως μετάδοση μαθηματικών εννοιών, ενώ οι Αμερικανοί εκπαιδευτικοί έδιναν την ίδια ερμηνεία μόνο σε μερικές αναπαραστάσεις. 2) Οι Αμερικάνοι εκπαιδευτικοί εστίαζαν περισσότερο στην αναπαράσταση του κλάσματος ως μέρος-όλου σε σχέση με του Ιάπωνες και 3) οι Ιάπωνες εκπαιδευτικοί έκαναν πιο εύκολα σύνδεση των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών με προχωρημένα περιεχόμενα των αναλυτικών προγραμμάτων σε σχέση με τους Αμερικάνους εκπαιδευτικούς.

Οι έντονες αυτές διαφορές μεταξύ των Ιαπώνων εκπαιδευτικών και των εκπαιδευτικών των ΗΠΑ αποδίδονται από τους ερευνητές σε τρεις πολιτιστικούς παράγοντες. Ο πρώτος έχει να κάνει με τα σχολικά εγχειρίδια, καθώς τα βιβλία των ΗΠΑ αφιερώνουν πολύ λίγο χώρο για τις μαθηματικές αναπαραστάσεις. Επίσης, τα βιβλία που δίδαξαν οι εκπαιδευτικοί των ΗΠΑ περιέχουν ξεχωριστό κεφάλαιο για τα γραφήματα και τις αναπαραστάσεις των αριθμών που αντιμετωπίζονται περισσότερο ως επιστημονική παρά ως μαθηματική πρακτική. Ως εκ τούτου, αυτό επηρεάζει τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών οι οποίοι ακολουθούν τη δομή του βιβλίου και των αναλυτικών προγραμμάτων, καθώς διαπιστώθηκε ότι οι απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί των ΗΠΑ ήταν παρόμοιες με την οργάνωση του βιβλίου.

Συνακόλουθα, αυτό επηρεάζει και τη γνώση των μαθητών πάνω στις αναπαραστάσεις και επιβεβαιώνεται η σημασία και ο ρόλος που διαδραματίζουν τα αναλυτικά προγράμματα πάνω στη γνώση των μαθηματικών εννοιών και για την περίπτωσή μας στην έννοια των κλασμάτων, όταν δουλεύουμε με πολλαπλές αναπαραστάσεις. Ένας δεύτερος λόγος αυτής της διαφοράς είναι διαφορετική κατάρτιση που έχουν δεχτεί οι εκπαιδευτικοί των ΗΠΑ στην προετοιμασία τους να γίνουν εκπαιδευτικοί, η οποία περιορίζεται σε ορισμένες βαθμίδες σε σχέση με τους Ιάπωνες εκπαιδευτικούς οι οποίοι προετοιμάζονται να διδάξουν και στις 6 βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Φαίνεται έτσι πως οι πολιτιστικές επιρροές αντανακλούν στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων, κάτι που έδειξε και η έρευνα των Cai και Wang (2006) η οποία εξετάζει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών των ΗΠΑ και της Κίνας για την κατασκευή αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της έννοιας του λόγου και της αναλογίας προκειμένου να ερμηνεύσει το γεγονός γιατί υπάρχει η τάση οι κινέζοι μαθητές να χρησιμοποιούν αφηρημένες στρατηγικές και συμβολικές αναπαραστάσεις ενώ οι μαθητές των ΗΠΑ συγκεκριμένες στρατηγικές και συμβολικές αναπαραστάσεις πάνω στις έννοιες αυτές.

Την απάντηση δίνουν τα διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ των δύο ομάδων εκπαιδευτικών αναφορικά με τις πεποιθήσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και τη χρήση των αναπαραστάσεων, (κάτι που αποδόθηκε και από αυτούς τους ερευνητές στις διαφορετικές πολιτισμικές πεποιθήσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και στις διαφορετικές πολιτισμικές αξίες των αναπαραστάσεων) δείχνοντας κι εδώ πόσο σημαντικό ρόλο παίζει το διαφορετικό πολιτιστικό υπόβαθρο.

Πιο συγκεκριμένα όλα τα σχέδια μαθήματος των Κινέζων εκπαιδευτικών παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιομορφία επειδή ακολουθούν το αναλυτικό πρόγραμμα, ενώ των εκπαιδευτικών των ΗΠΑ παρουσιάζουν ποικιλομορφία. Επίσης, οι Κινέζοι εκπαιδευτικοί εμβαθύνουν και εμμένουν πιο πολύ στη μαθηματική ανάλυση της έννοιας σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς των ΗΠΑ.

Σημαντικό εύρημα είναι επίσης το γεγονός ότι οι Κινέζικοι εκπαιδευτικοί σε αντίθεση με τους εκπαιδευτικούς των ΗΠΑ, προσδοκούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τους αριθμητικές αναπαραστάσεις για την επίλυση των προβλημάτων κάτι που αναδύεται μέσα από τα αναλυτικά τους προγράμματα. Χαρακτηριστικό της προτίμησης που δείχνουν οι Κινέζοι εκπαιδευτικοί στις συμβολικές αναπαραστάσεις είναι το γεγονός ότι όταν ζητήθηκε να αξιολογήσουν τους μαθητές τους σε κάποια προβλήματα (εικόνες) έδιναν χαμηλότερη βαθμολογία αν η απάντηση περιλάμβανε οπτικές αναπαραστάσεις ακόμη κι αν η στρατηγική αυτή θεωρούταν καταλληλότερη για την επίλυση του προβλήματος σε αντίθεση με τους εκπαιδευτικούς των ΗΠΑ οι οποίοι βαθμολογούσαν το ίδιο και τις συμβολικές και τις οπτικές αναπαραστάσεις.

Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι συγκεκριμένες μέθοδοι και οι οπτικές αναπαραστάσεις δημιουργούν εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές και είναι αναποτελεσματικές όπως έχουν δείξει και άλλες έρευνες (Cai & Hwang, 2002). Έτσι, προτείνεται από τους ερευνητές να ξεκινούν με συγκεκριμένες αναπαραστάσεις για να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τις στρατηγικές τους για την επίλυση προβλημάτων, αλλά περαιτέρω απαιτείται για την εννοιολογική ανάπτυξη της έννοιας γενικευμένες αναπαραστάσεις.

Σύνοψη

Από την ανάλυση των διάφορων ερευνών της διεθνούς βιβλιογραφίας φάνηκε ότι οι αναπαραστάσεις αν και φαίνεται να παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων και θεωρούνται απαραίτητες κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας των κλασμάτων για τη διαμόρφωση νοητικών εικόνων από τους μαθητές, ωστόσο υπάρχει κάποιο πλαίσιο μέσα από το οποίο πρέπει να ιδωθούν για να ερμηνευτούν σωστά.

Ομαδοποιώντας, λοιπόν, τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σύγκλιση ως προς την άποψη ότι η γραφική αναπαράσταση του κλάσματος ως μέρος όλου, ενώ φαίνεται από τη μια μεριά να διευκολύνει τους μαθητές σε απλούς χειρισμούς των κλασμάτων από την άλλη περιορίζει την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας και τους χειρισμούς πιο σύνθετων καταστάσεων, όπως των καταχρηστικών κλασμάτων. Αυτή η τάση των μαθητών να χειρίζονται καλύτερα αναπαραστάσεις που παρουσιάζουν την έννοια ως μέρος ενός συνόλου, πιθανώς να έγκειται στο γεγονός ότι αυτή η αναπαράσταση προσφέρεται στους μαθητές από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου ως αρχική επαφή με την έννοια των κλασμάτων, αλλά και ως μια αναπαράσταση που μπορεί να μεταφραστεί σε νοητικές εικόνες πιο εύκολα από τους μαθητές λόγω της απλότητάς της.

Ένα άλλο σημείο σύγκλισης των ερευνών είναι το γεγονός ότι η αποτελεσματικότητα μιας αναπαράστασης εξαρτάται και από την εξοικείωση που οι μαθητές έχουν με αυτή. Μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση, δηλαδή, ότι οι ίδιες οι αναπαραστάσεις από μόνες τους δεν μπορούν να ερμηνευτούν ορθά και πολύπλευρα αν δεν τις πλαισιώσουμε στο γνωστικό υπόβαθρο τις εκπαιδευτικής βαθμίδας και του εκπαιδευτικού συστήματος, δηλαδή, των αναλυτικών προγραμμάτων.

Αξιοσημείωτο είναι επίσης η συμφωνία που υπάρχει στην άποψη ότι η αποτελεσματικότητα μιας αναπαράστασης εξαρτάται και από την εύστοχη επιλογή που θα κάνει ο εκπαιδευτικός για να εξυπηρετήσει συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους. Προϋπόθεση βέβαια αποτελεί και η βαθιά γνώση και η σωστή χρήση των αναπαραστάσεων από τη μεριά του εκπαιδευτικού. Φάνηκε, επίσης πως η επιλογή των αναπαραστάσεων εξαρτάται και επηρεάζεται από το πολιτισμικό υπόβαθρο του εκπαιδευτικού. Επιπρόσθετα, υπάρχει η σύγκλιση ότι οι ψηφιακές αναπαραστάσεις επιφέρουν θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Γενικά, οι αναπαραστάσεις είναι ένα δυναμικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού, που αν το αξιοποιήσει κατάλληλα μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα μεθοδολογικά στοιχεία και τα ερευνητικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα-δράση. Η έρευνα-δράση είναι μια άμεση διαδικασία που σχεδιάζεται έτσι ώστε να αντιμετωπίσει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα (εδώ τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα) που εντοπίζεται σε μια άμεση κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι, στην ιδανική περίπτωση, η βήμα προς βήμα διαδικασία διερευνάται διαρκώς, κατά τη διάρκεια διάφορων χρονικών περιόδων (στην παρούσα διατριβή από το 2010 έως το 2016) και μέσω μιας ποικιλίας μηχανισμών (στην παρούσα διατριβή με ερωτηματολόγια, συνεντεύξεις, μελέτη περίπτωσης, βιντεοσκοπήσεις, διδασκαλίες, βιβλιογραφική μελέτη, συμμετοχική παρατήρηση) έτσι ώστε η ανάδραση που ακολουθεί να μεταφράζεται, ανάλογα με τις ανάγκες, σε τροποποιήσεις, προσαρμογές, αλλαγές κατεύθυνσης και αναπροσδιορισμούς, με στόχο να επέλθει κάποια μόνιμη ωφέλεια στην ίδια τη συνεχιζόμενη διαδικασία και όχι σε κάποια μελλοντική περίπτωση που είναι ο σκοπός της παραδοσιακής έρευνας (Cohen & Manion, 1997:266).

Έτσι, στο παρόν κεφάλαιο αναφέρεται ο σκοπός της έρευνας-δράσης (στο εξής έρευνα), τα ερευνητικά ερωτήματα και το δείγμα, όπως καθορίστηκε για τις ανάγκες του εκάστοτε ερευνητικού μέρους. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι μέθοδοι συλλογής δεδομένων και τα εργαλεία της παρέμβασης. Το κεφάλαιο τελειώνει με τη διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας με τις δομημένες φάσεις διεκπεραίωσής της και τις μεθόδους ανάλυσης των ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων, ενώ αναφέρονται και οι περιορισμοί της.

Σκοπός της Έρευνας

Παρά το γεγονός ότι τα αναλυτικά προγράμματα των χωρών αλλάζουν και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών προσαρμόζονται στις νέες εκπαιδευτικές ανάγκες, οι μαθητές, σε διεθνές επίπεδο, εξακολουθούν να δυσκολεύονται στα κλάσματα. Η παρούσα εργασία στόχο έχει να παρουσιάσει διδακτικές πρακτικές, οι οποίες εφαρμόστηκαν διαχρονικά από την ερευνήτρια, και να κάνει προτάσεις τέτοιες που θα βοηθήσουν στη μείωση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα.

Οι διδακτικές αυτές πρακτικές λαμβάνουν υπόψη τις δυσκολίες των μαθητών που αναδείχτηκαν τόσο από τη διεθνή βιβλιογραφία όσο και από πολυετείς έρευνες που έγιναν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας πάνω στους ρητούς αριθμούς. Δίνεται έμφαση στις πολλαπλές αναπαραστάσεις με την ενίσχυση των δέκα δομικών στοιχείων (Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Ιστορία των Μαθηματικών, Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Διεπιστημονικότητα, Κατασκευή Προβλήματος και ΤΠΕ) και γίνεται χρήση βιωματικών δραστηριοτήτων αλλά και δραστηριοτήτων σχεδιασμένων σε ηλεκτρονικά περιβάλλοντα. Επιπρόσθετα, οι προτάσεις στηρίζονται και στην ανάδειξη των αιτιών που προκαλούν αυτές τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα. Έτσι, δίνεται έμφαση στις αντιλήψεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών πάνω στους ρητούς αριθμούς, στη δομή και το περιεχόμενο των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού, καθώς και στις διδακτικές προτάσεις και προσεγγίσεις που διάφοροι ερευνητές έχουν προτείνει σε διεθνές επίπεδο.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να σχεδιάσει κατάλληλες διδασκαλίες που στηρίζονται στις πολλαπλές αναπαραστάσεις με την επικουρία των δέκα δομικών στοιχείων με τη χρήση ποικίλων μέσων, εργαλείων και πρακτικών προκειμένου να μειωθούν οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στα κλάσματα. Ωστόσο, για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων χρειάστηκε να ερευνηθούν άλλα ζητήματα. Δηλαδή, ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα; Γιατί οι μαθητές, παρά τον εκσυγχρονισμό των σχολικών εγχειριδίων, των αναλυτικών προγραμμάτων και της διδακτικής εξακολουθούν να δυσκολεύονται; Ποια είναι τα πιθανά αίτια αυτών των δυσκολιών; Μπορούν αυτές οι δυσκολίες να αντιμετωπιστούν και πώς;

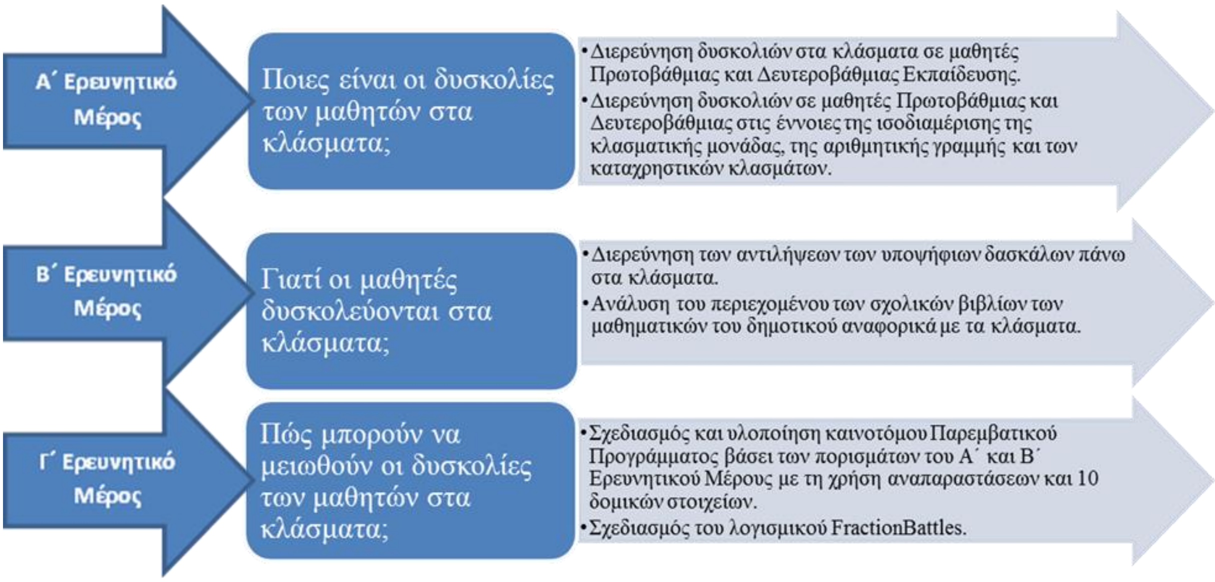
Για την απάντηση των παραπάνω ερευνητικών ερωτημάτων η έρευνα κινήθηκε σε τρία επίπεδα και η διατριβή χωρίζεται σε τρία ερευνητικά μέρη, ακολουθώντας το μοντέλο μιας μικτής έρευνας (mixed method research) (Cohen, Manion & Morrison, 2011).

Το πρώτο ερευνητικό μέρος, που απαντά στο πρώτο ερώτημα, (Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα;) στόχο έχει να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του Δημοτικού) και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Α΄, Β΄, Γ Γυμνασίου, καθώς και Α΄ Λυκείου) πάνω στους ρητούς αριθμούς γενικά. Στη συνέχεια η έρευνα εξειδικεύεται σε συγκεκριμένες έννοιες της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στην αριθμογραμμή, καθώς και στις έννοιες του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων.

Το δεύτερο ερευνητικό μέρος, που απαντά στο δεύτερο ερώτημα της έρευνας (Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα;) στόχο έχει να εντοπίσει τις αιτίες και τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές της ελληνικής εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν αυτές τις δυσκολίες και ποιοι παράγοντες επηρεάζουν την παρουσία ή την απουσία αυτών των δυσκολιών. Δίνεται έμφαση στις αντιλήψεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών πάνω στους ρητούς αριθμούς και στη δομή και το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού.

Το τρίτο και τελευταίο ερευνητικό μέρος που απαντά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα (Πώς μπορούν να μειωθούν οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα;) αποτελεί τον σχεδιασμό καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Το παρεμβατικό πρόγραμμα παρουσιάζεται με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων με χρήση βιωματικών δραστηριοτήτων και δραστηριοτήτων σε ηλεκτρονικά περιβάλλοντα. Επίσης, παρουσιάζεται το λογισμικό Fraction Battles, το οποίο δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια για να συμπληρώσει τις διδακτικές παρεμβάσεις για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Στο παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 3.1) παρουσιάζονται συνοπτικά τα ερευνητικά ερωτήματα και οι αντίστοιχες έρευνες που έγιναν προκειμένου να διερευνηθούν οι απαντήσεις.



Διάγραμμα 3.1. Τα ερευνητικά ερωτήματα και οι έρευνες που τα διερευνούν.

Το Δείγμα της Έρευνας

Για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής συμμετείχαν συνολικά 1621 υποκείμενα που διαμοιράζονται στα τρία ερευνητικά μέρη.

Α΄ Ερευνητικό Μέρος

Στο πρώτο ερευνητικό μέρος, που εξετάζει τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, συμμετείχαν συνολικά 643 μαθητές από τη Ρόδο και την Αθήνα. Η δειγματοληψία που ακολουθήθηκε ήταν βάσει κριτηρίων σε συνδυασμό με την ευκαιριακή δειγματοληψία, καθώς επιλέχθηκαν σχολεία που θέλησαν να συμμετέχουν στην έρευνα. Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για την επιλογή των σχολείων που επιλέχθηκαν είναι ο τύπος του σχολείου (δημόσιο, πειραματικό, ιδιωτικό) και η τοποθεσία του (πρωτεύουσα και επαρχία). Για την επιλογή των τάξεων χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο των βαθμίδων εκπαίδευσης (Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) και των τάξεων (Ε΄, Στ΄ Δημοτικού, Α΄-Β΄-Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου).

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια, ο πληθυσμός του Α΄ ερευνητικού μέρους αποτελείται από μαθητές Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Πιο αναλυτικά, από την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση συμμετείχαν μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού. Από τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση συμμετείχαν παιδιά και από τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου (Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου) και από την Α΄ Λυκείου. Τα σχολεία από τα οποία προέρχονταν οι μαθητές ήταν τριών τύπων, Δημόσια Πειραματικά, Δημόσια Κλασικά και Ιδιωτικά Σχολεία.

Β΄ Ερευνητικό Μέρος

Στο δεύτερο ερευνητικό μέρος, που εξετάζει τις δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων στα κλάσματα, συμμετείχαν συνολικά 900 υποψήφιοι δάσκαλοι από όλη την Ελλάδα. Η δειγματοληψία που ακολουθήθηκε ήταν βάσει κριτηρίων σε συνδυασμό με την ευκαιριακή δειγματοληψία, καθώς επιλέχθηκε Πανεπιστημιακό Ίδρυμα με το οποίο συνεργαζόταν η ερευνήτρια. Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για την επιλογή των υποψήφιων δασκάλων ήταν το έτος τους και τα μαθήματα που έδωσαν για να εισαχθούν στο Πανεπιστήμιο.

Έτσι, με βάση τα παραπάνω κριτήρια, ο πληθυσμός του Β΄ ερευνητικού μέρους αποτελείται από υποψήφιους δασκάλους και των τεσσάρων ετών φοίτησης, ενώ υπήρχαν και υποψήφιοι δάσκαλοι πέμπτου και έκτου έτους. Επιπλέον, αν και οι μαθητές μπορούσαν να έχουν πρόσβαση στα παιδαγωγικά τμήματα από όλες τις Δέσμες ή Κατευθύνσεις, ωστόσο, παρατηρήθηκε διαχρονικά ότι η εισαγωγή σε αυτά τα τμήματα προερχόταν κατά 90% από τις θεωρητικές κατευθύνσεις. Αυτό σημαίνει ότι 90% των εισακτέων στα παιδαγωγικά τμήματα δεν εξετάζονταν στο μάθημα των μαθηματικών και μόνο το 10% (που προέρχονταν από την Τεχνολογική και Θετική Κατεύθυνση) είχε ως εξεταστέο μάθημα τα μαθηματικά.

Γ΄ Ερευνητικό Μέρος

Στο τρίτο ερευνητικό μέρος, που υλοποιείται το καινοτόμο Παρεμβατικό Πρόγραμμα με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων συμμετείχαν συνολικά 78 μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού. Η δειγματοληψία που ακολουθήθηκε ήταν βάσει κριτηρίων σε συνδυασμό με την ευκαιριακή δειγματοληψία, καθώς επιλέχθηκαν τα Πειραματικά Σχολεία που συνεργάζονται με το Πανεπιστημιακό Ίδρυμα. Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για την επιλογή των τάξεων ήταν η βαθμίδα εκπαίδευσης (Πρωτοβάθμιας, Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) και το επίπεδο των τάξεων. Τα κριτήρια για την επιλογή των μαθητών εφαρμόστηκε μόνο για την ομάδα εστίασης που ήταν η βαθμολογική επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια, ο πληθυσμός του Γ΄ ερευνητικού μέρους αποτελείται από μαθητές Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού προερχόμενα από Δημόσια Πειραματικά Σχολεία. Συμμετείχαν δύο τμήματα της Ε΄ τάξης και δύο τμήματα της Στ΄ τάξης. Από αυτά τα 78 παιδιά των τεσσάρων τμημάτων που αποτέλεσαν τις τέσσερις ομάδες της έρευνας, επιλέχθηκαν 5 παιδιά από κάθε ομάδα (20 παιδιά συνολικά) βάσει την επίδοσή τους στα μαθηματικά, όπως αναγράφεται στους τίτλους προόδου, για να συγκροτήσουν την ομάδα εστίασης, πάνω στην οποία διεξήχθησαν οι συνεντεύξεις. Πιο συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν από κάθε τμήμα ένας μαθητής με υψηλή επίδοση, δύο με μέτρια επίδοση και δύο με χαμηλή επίδοση.

Μέθοδοι Συλλογής Δεδομένων

Για τη συλλογή των ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων της έρευνας-δράσης χρησιμοποιήθηκαν ποικίλα μέσα, μέθοδοι και εργαλεία, όπως:

1. Μελέτη περίπτωσης
2. Ημιδομημένες συνεντεύξεις
3. Διδασκαλίες
4. Παρατήρηση
5. Βιντεοσκοπήσεις/τεκμήρια/αρχεία
6. Ερωτηματολόγια
7. Βιβλιογραφική μελέτη.

Η παραπάνω επιλογή έγινε προκειμένου να σχηματιστεί μια τριγωνοποίηση μεθοδολογική (με τη χρήση διαφορετικών μεθόδων όπως παρατήρηση, ερωτηματολόγια κ.τ.λ.), χρονική (με τη χρήση διαχρονικών σχεδιασμών έρευνας από το 2010 έως το 2016) και θεωρητική (με την εφαρμογή της θεωρίας των αναπαραστάσεων σε συνδυασμό με τα 10 δομικά στοιχεία) που θα οδηγήσει στη σταθεροποίηση των πορισμάτων (Cohen & Manion, 1997· Cohen, Manion & Morrison, 2011). Τα παραπάνω αναλύονται στη συνέχεια.

Μελέτη Περίπτωσης

Ο ερευνητής της μελέτης περίπτωσης κατά κανόνα παρατηρεί τα χαρακτηριστικά μιας μονάδας – ενός παιδιού, μιας παρέας, μιας σχολικής τάξης, ενός σχολείου ή μιας κοινότητας. Ο σκοπός αυτής της παρατήρησης είναι να εξερευνήσει βαθιά και να αναλύσει συστηματικά τα πολυσχιδή φαινόμενα που συνθέτουν τον κύκλο ζωής της μονάδας, προκειμένου να κάνει γενικεύσεις σχετικά με τον ευρύτερο πληθυσμό στον οποίο ανήκει αυτή η ομάδα (Cohen & Manion, 1997:153).

Η μελέτη περίπτωσης αξιοποιήθηκε στον Γ΄ ερευνητικό μέρος της εργασίας, για τον σχηματισμό και την υλοποίηση του καινοτόμου Παρεμβατικού Προγράμματος, λαμβάνονται αποφάσεις που αφορούν στο τι θα διερευνηθεί, για ποιο σκοπό και με ποια κριτήρια θα κριθεί η επιτυχία της διερεύνησης. Έτσι, υλοποιήθηκαν οι διδακτικές παρεμβάσεις σε πραγματικές συνθήκες τάξης προκειμένου να διερευνηθεί αν ο τρόπος διδασκαλίας με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων μπορεί να μειώσει τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα. Τα κριτήρια για την επιτυχία της διερεύνησης ήταν η αξιοποίηση της πολυμεθοδολογικής μελέτης περίπτωσης (multi-method case study) (Anisimova & Thomson, 2012· Burton, 2013). Η συλλογή δεδομένων στην παρούσα μελέτη περίπτωσης έγινε με την αξιοποίηση ποικίλων μεθόδων και τεχνικών, όπως τη συμμετοχική παρατήρηση, τη συνέντευξη, την ομάδα εστίασης, τη χρήση φύλλων εργασιών και το ερωτηματολόγιο.

Εξίσου σημαντικό ρόλο για την επιτυχή έκβαση του αξιολογικού εγχειρήματος διαδραματίζουν η εξασφάλιση της άδειας πρόσβασης, η οργάνωση της πρώτης επίσκεψης στο πεδίο, η σύναψη σχέσεων με τους δρώντες, η διερεύνηση των προθέσεών τους αναφορικά με τη δημοσιοποίηση της μελέτης αλλά και τους όρους εμπιστευτικότητας (Crowe et al., 2011). Όλα τα παραπάνω διασφαλίστηκαν, καθώς τα Πειραματικά σχολεία στα οποία έγιναν οι διδακτικές παρεμβάσεις εντάσσονται στην εποπτεία του Πανεπιστημιακού ιδρύματος που συνεργάζεται η ερευνήτρια και προσφέρονται για έρευνα.

Ημιδομημένες Συνεντεύξεις

Στην παρούσα διατριβή γίνεται η χρήση της συνέντευξης ως ειδικού εργαλείου έρευνας. Η ερευνητική συνέντευξη, λοιπόν, είναι μια μέθοδος που περιλαμβάνει τη συλλογή στοιχείων μέσω της άμεσης λεκτικής συναλλαγής με σκοπό την οργάνωση μιας σχέσης προφορικής επικοινωνίας ανάμεσα σε δύο πρόσωπα, το συνεντευκτή και τον ερωτώμενο, έτσι ώστε να επιτρέψει στον πρώτο τη συλλογή ορισμένων πληροφοριών από το δεύτερο πάνω σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Η συζήτηση επικεντρώνεται από τον συνεντευκτή σε περιεχόμενο καθορισμένο από τους στόχους της έρευνας με συστηματική περιγραφή, πρόβλεψη ή ερμηνεία (Cannell & Kahn, 1986).

Στο Γ΄ ερευνητικό μέρος πραγματοποιήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις στην ομάδα εστίασης, προκειμένου να ελεγχθεί η γνωστική αλλαγή στην κατανόηση των κλασμάτων, αλλά και η πιθανή αλλαγή στις στάσεις και πεποιθήσεις των συμμετεχόντων στα Μαθηματικά. Στάσεις ορίζονται ως τα θετικά ή αρνητικά συναισθήματα, που εγείρονται σε εξειδικευμένο θεματικό πλαίσιο (De Martino, 2001), ενώ πεποιθήσεις ορίζονται ως οι προσωπικές αντιλήψεις του ατόμου, οι οποίες διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται και εμπλέκεται στη μαθηματική διαδικασία (Schoenfeld, 1985). Επιλέχθηκε η ημιδομημένη συνέντευξη, καθώς υπάρχει ένας σημαντικός βαθμός ευελιξίας τόσο του ερευνητή όσο και του υποκειμένου της έρευνας, ενώ το περιεχόμενο, η σειρά και ο λόγος των ερωτήσεων είναι ολοκληρωτικά υπό το έλεγχο του συνεντευκτή.

Η μέτρηση των στάσεων και των πεποιθήσεων δεν είναι εύκολη, γιατί εμπλέκονται ψυχολογικές παράμετροι, οπότε δεν μπορούν να μετρηθούν απευθείας αλλά θα πρέπει να συναχθούν από τον τρόπο συμπεριφοράς ή από τις απαντήσεις σε ειδικά σχεδιασμένα εργαλεία ή καταστάσεις. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκε έντυπο (Παράρτημα 5) που αποτελούταν από 22 αυτοσχέδιες ερωτήσεις με βάση την κατηγοριοποίηση της Schommer (1990) και των Trujillo & Hadfield (1999) και οι οποίες οφείλονται σε περιβαλλοντικούς, γνωστικούς και ατομικούς παράγοντες, και 6 έργα που σχεδιάστηκαν βάσει των πιλοτικών διαχρονικών ερευνών που έκανε η ερευνήτρια. Για τις μεταβλητές των 22 ερωτήσεων χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα τύπου Likert 4 σημείων, όπου 1=συμφωνώ απόλυτα και 4= διαφωνώ απόλυτα. Το ερωτηματολόγιο χρησιμοποιεί κλίμακα Likert 4 σημείων γιατί να απουσιάζει η ουδέτερη άποψη (ούτε συμφωνώ/ ούτε διαφωνώ), όπου μπορεί να θεωρηθεί πλεονέκτημα όσο αναφορά τη στατιστική ανάλυση, γιατί αναγκάζει τους ερωτηθέντες να πάρουν είτε θετική είτε αρνητική θέση. Επιπλέον, η κλιμακούμενη απάντηση συλλέγεται με τη μορφή ποσοτικών στοιχείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να αναλυθούν (Cohen & Manion, 1997).

Η συνέντευξη ακολούθησε τα παρακάτω βήματα: α) Η ημιδομημένη συνέντευξη ξεκίνησε με το θέμα των κλασμάτων και ακολούθησε τη δομή του έντυπου ερωτηματολογίου, αλλά στη συνέχεια, και σε κάποιο βαθμό, καθοδηγήθηκε από τις απαντήσεις του ερωτώμενου. β) Το έντυπο περιλαμβάνει ερωτήσεις κλειστού τύπου, αλλά ταυτόχρονα υποβλήθηκαν και ανοιχτές ερωτήσεις για πληρέστερη κατανόηση των απαντήσεων της ομάδας εστίασης. Δεν υπήρξε αριθμός προκαθορισμένων ερωτήσεων, καθώς αυτές άλλαζαν ανάλογα με τις απαντήσεις των μαθητών. γ) Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις και η διάρκειά τους ήταν 40 λεπτά περίπου. δ) Οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν με κατάλληλη συσκευή ηχογράφησης μετά από ενημέρωση και συμφωνία των μαθητών.

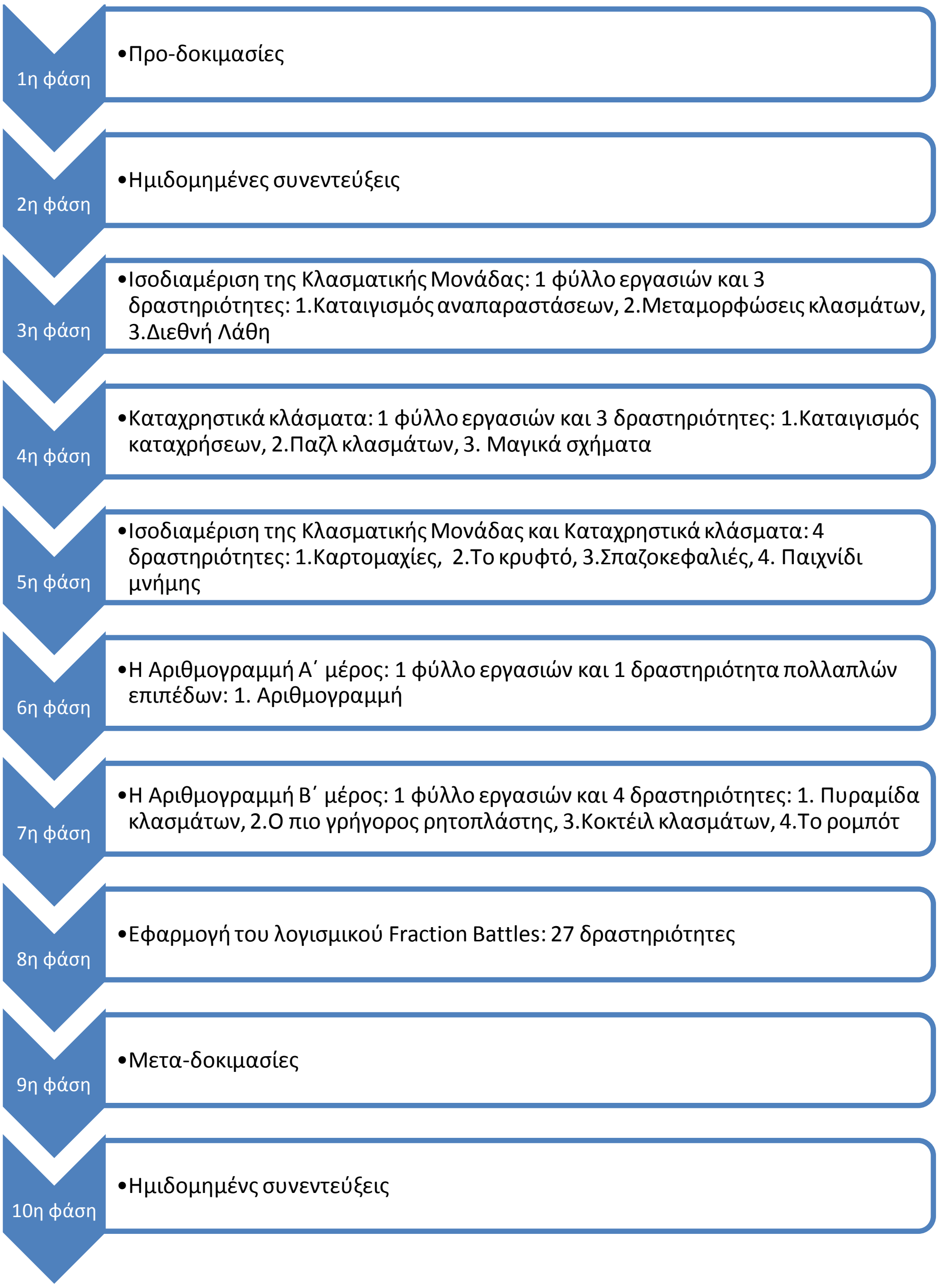
Διδασκαλίες

Το παρεμβατικό πρόγραμμα υλοποιήθηκε με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων, που εισάγει μια καινοτομία. Συνδυάζει τη θεωρία των πολλαπλών αναπαραστάσεων με μια πρωτότυπη θεωρία των 10 δομικών στοιχείων που είναι 1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ, για να ενισχύσει τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και να βελτιώσει τα διδακτικά αποτελέσματα.

Καινοτομία είναι η εισαγωγή κάτι καινούργιου, κάτι πρωτότυπου και διαφορετικού από εκείνο που προϋπάρχει. Αυτό προϋποθέτει την επιτυχή αξιοποίηση νέων ιδεών, νέας γνώσης. Όμως νέα γνώση δεν εννοείται αυτή που προκύπτει «εκ του μηδενός», καθώς αυτή κατά τον Schumpeter (1942) δεν υπάρχει, παρά μόνο νέοι συνδυασμοί προϋπάρχουσας γνώσης. Οι νέες ιδέες, δηλαδή, κατασκευάζονται μέσα από την ανασύνθεση ιδεών και εμπειριών που έχουν συσσωρευτεί στο πλαίσιο της μακρόχρονης ιστορικής εξέλιξης. Η ανασύνθεση αυτή έχει ένα δημιουργικό χαρακτήρα, που συνίσταται στη διασύνδεση και στον συνδυασμό δύο –τουλάχιστον- στοιχείων, κάτι που δεν έχει επιχειρηθεί στο παρελθόν. Η καινοτομία, λοιπόν, είναι αποτέλεσμα «δημιουργικών συνδυασμών» (novel combinations) (Schumpeter, 1934).

Ο συνδυασμός των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τα 10 δομικά στοιχεία αποτελεί έναν «δημιουργικό συνδυασμό» προϋπάρχουσας γνώσης, καθώς τα 10 αυτά στοιχεία των Μαθηματικών υπάρχουν μεμονωμένα στη διεθνή βιβλιογραφία, χωρίς ωστόσο να έχει γίνει μέχρι σήμερα η ανασύνθεσή τους. Στον παρόν παρεμβατικό πρόγραμμα τα σημεία αυτά συνδυάζονται με σκοπό τη δημιουργία πρωτότυπων διδακτικών πρακτικών και δυναμικών δραστηριοτήτων που προσδοκάται να μειώσουν τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα δημιουργώντας και μια θετικότερη στάση για τα Μαθηματικά.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις, που χωρίστηκαν σε 10 φάσεις, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 3.2, υλοποιήθηκαν από την ίδια την ερευνήτρια έτσι ώστε να μην επηρεαστούν τα αποτελέσματα από τα πιθανά διαφορετικά στιλ διδασκαλίας, απομονώνοντας αυτή τη μεταβλητή. Στη συνέχεια αναλύονται οι 10 αυτές φάσεις της παρέμβασης:



Διάγραμμα 3.2. Σχεδιάγραμμα των 10 φάσεων του Παρεμβατικού Προγράμματος.

1ηΦάση: Προ-δοκιμασίες. Στην 1η φάση των διδακτικών παρεμβάσεων δόθηκε γραπτό δοκίμιο αποτελούμενο από επτά έργα (Παράρτημα 2). Η συμπλήρωσή του διήρκησε μια διδακτική ώρα. Τα γραπτά δοκίμια συντάχθηκαν από την ερευνήτρια και κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές εφαρμογές. Τα γραπτά δοκίμια δόθηκαν και στις τέσσερις ομάδες από την ερευνήτρια, η οποία βρισκόταν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας καθ’ όλη τη διάρκεια συμπλήρωσής τους από τους μαθητές.

2η Φάση: Ημιδομημένες Συνεντεύξεις. Στη 2η φάση των παρεμβάσεων έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις σε πέντε μαθητές από κάθε μια από τις 4 ομάδες του δείγματος. Η επιλογή έγινε με βάση την επίδοση των προ-δοκιμασιών και τη σχολική βαθμολογία τους στα μαθηματικά.

3η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας. Στην 3η φάση υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση που αφορούσε στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Η διδασκαλία περιελάμβανε 3 δραστηριότητες οι οποίες κατασκευάστηκαν από την ερευνήτρια βάσει των πορισμάτων που αναδύθηκαν από τα προηγούμενα ερευνητικά μέρη της παρούσας εργασίας. Μετά τις δραστηριότητες δόθηκε ένα φύλλο εργασιών, για να ελεγχθεί άμεσα και σύντομα αν υπήρξε γνωστική αλλαγή για πιθανές βελτιώσεις του παρεμβατικού προγράμματος. Οι τρεις δραστηριότητες της 3ης φάσης είναι:

Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός αναπαραστάσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των ίσων μερών τις κλασματικής μονάδας. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους. Η παρουσίαση των αναπαραστάσεων αυτών έγινε με το λογισμικό Microsoft Power Point και περιελάμβανε συνολικά 50 αναπαραστάσεις (Παράρτημα 10).

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 2: Μεταμορφώσεις κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα διάρκειας 20 λεπτών, σχεδιασμένη σε περιβάλλον εννοιολογικής χαρτογράφησης

(Kidspiration) στοχεύει στην απόκτηση ευχέρειας από τους μαθητές να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τη δραστηριότητα αυτή ήταν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους (Παράρτημα 7).

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 3: Διεθνή λάθη. Η τρίτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο είχε να παρουσιάσει στους μαθητές λάθη που έχουν γίνει κατά τη διάρκεια διδασκαλιών από εκπαιδευτικούς και μαθητές σε διεθνές επίπεδο αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Για το σκοπό αυτό παρουσιάστηκαν στους μαθητές τα ευρήματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπως αναφέρονται στο κεφάλαιο 2 με τη βοήθεια του λογισμικού Power Point (Παράρτημα 11).

Δομικά Στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, ΤΠΕ, Ιστορία των Μαθηματικών, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Φύλλο εργασιών. Η 3η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών (Παράρτημα 6) που δίνεται στους μαθητές να συμπληρώσουν, το οποίο αποτελείται από τρία έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις.

4η Φάση: Καταχρηστικά Κλάσματα. Η 4η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, ασχολείται με την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Αυτή η φάση στοχεύει στην εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών σχετικά τη σωστή διαχείριση και ερμηνεία των καταχρηστικών κλασμάτων. Επιπλέον, στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ένα άλλο. Η διδασκαλία περιελάμβανε 3 δραστηριότητες οι οποίες κατασκευάστηκαν από την ερευνήτρια βάσει των πορισμάτων που αναδύθηκαν από τα προηγούμενα ερευνητικά μέρη της παρούσας εργασίας. Μετά τις δραστηριότητες δόθηκε ένα φύλλο εργασιών, για να ελεγχθεί άμεσα και σύντομα αν υπήρξε γνωστική αλλαγή για πιθανές βελτιώσεις του παρεμβατικού προγράμματος. Οι τρεις δραστηριότητες έχουν ως εξής:

Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός καταχρήσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους. Η παρουσίαση των αναπαραστάσεων αυτών έγινε με το λογισμικό Microsoft Power Point και περιελάμβανε συνολικά 50 αναπαραστάσεις (Παράρτημα 12).

Δομικά στοιχεία. Διεπιστημονικότητα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, ΤΠΕ.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 2: Παζλ κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και τις διάφορες αναπαραστάσεις του, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους (Παράρτημα 13).

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Κατασκευή Προβλήματος, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 3: Μαγικά σχήματα. Η τρίτη δραστηριότητα, διάρκειας 15 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει περισσότερο τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση χειραπτικών μοντέλων, όπως τα μπλοκ μοτίβου (pattern blocks). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και χειραπτικά υλικά και χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο εμβαδού (Παράρτημα 14 και 15).

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, ΤΠΕ.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Φύλλο εργασιών. Η 4η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών (Παράρτημα 16) που δίνεται στους μαθητές να συμπληρώσουν, το οποίο αποτελείται από τέσσερα έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε, αν διαπιστωθούν αδυναμίες, να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις.

5η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας και Καταχρηστικά Κλάσματα. Στη 5η φάση γίνονται μικρές προσαρμογές στις δραστηριότητες, βάσει των αποτελεσμάτων των φύλλων εργασιών της 3ης και 4ης φάσης. Η φάση αυτή, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, είναι επαναληπτικού χαρακτήρα και στόχο έχει οι μαθητές να εξοικειωθούν ακόμη περισσότερο με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και με τα καταχρηστικά κλάσματα μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια και βασίστηκαν στα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών της παρούσας εργασίας.

Η φάση αυτή αποτελείται από τέσσερις παιγνιώδεις δραστηριότητες. Η τάξη είναι χωρισμένη σε τέσσερις ομάδες, όσες και οι δραστηριότητες οι οποίες εκτελούνται ταυτόχρονα. Κάθε ομάδα έχει από μία δραστηριότητα, η διάρκεια της οποίας είναι 15 λεπτά. Μετά το τέλος των 15 λεπτών οι ομάδες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους. Αφού παρουσιάσουν και οι τέσσερις ομάδες, αλλάζουν κυκλικά δραστηριότητα. Αυτό γίνεται μέχρι οι ομάδες να κάνουν και τις τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1: Καρτομαχίες. Η πρώτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας με τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους (Παράρτημα 17).

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 2: Το κρυφτό. Η δεύτερη δραστηριότητα στόχο έχει να προκαλέσει τους μαθητές να κατασκευάσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις μέσω της αφής αναφορικά τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ομιλούμενη γλώσσα και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα εμβαδού και συνόλου.

Δομικό στοιχείο. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 3: Σπαζοκεφαλιές. Η τρίτη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο αναφορικά με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Κατασκευή Προβλήματος.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 4: Παιχνίδι μνήμης. Η τέταρτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας αναφορικά τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους (Παράρτημα 18).

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

6η Φάση: Η Αριθμογραμμή Α΄ μέρος. Η 6η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, περιλαμβάνει τις διδασκαλίες που αφορούσαν στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και στόχο έχει την ελεύθερη ανάδυση από τους μαθητές στρατηγικών σειροθέτησης κλασμάτων, αλλά και την εξοικείωση με αυτές τις στρατηγικές μέσα από μια ανταλλαγή συμπεριφορών και αναπαραστάσεων. Αυτή η φάση περιλαμβάνει 1 δραστηριότητα με πολλαπλές εναλλαγές και ένα φύλλο εργασιών.

Δραστηριότητα 1: Αριθμογραμμή. Η δραστηριότητα αυτή αφορά στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή με τη χρήση βιωματικής αναπαράστασης και αναπαράστασης σε ηλεκτρονικό περιβάλλον με τη χρήση του διαδικτυακού λογισμικού ConceptualMath (https://www.conceptuamath.com/app/tool/place-fractions-on-a-number-line). Αυτό το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να αναπαριστά ένα κλάσμα με ποικιλία παραστάσεων (π.χ. σύμβολο, διάγραμμα, δεκαδικά ψηφία, ποσοστό κ.λπ.). Σε αυτή τη φάση επιδιώκεται οι μαθητές να είναι σε θέση να τοποθετήσουν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή και αντίστροφα, να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ένα κλάσμα που αναπαρίσταται σε ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, στοχεύει στην ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κλασμάτων υπάρχει ένας άπειρος αριθμός κλασμάτων.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρεαλιστικά Μαθηματικά.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Φύλλο εργασιών. Στο τέλος της φάσης αυτής δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασιών (Παράρτημα 19), το οποίο αποτελείται από τέσσερα έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε, αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις.

7η Φάση: Η Αριθμογραμμή Β΄ μέρος. Η 7η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, συνεχίζει με την έννοια της αριθμογραμμής. Γίνονται μικρές αλλαγές στις αναπαραστάσεις των δραστηριοτήτων, βάσει των αποτελεσμάτων από τα φύλλα εργασιών της 6ης φάσης. Η φάση αυτή στόχο έχει οι μαθητές να εξοικειωθούν ακόμη περισσότερο με την σειροθέτηση των κλασμάτων μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια και βασίστηκαν στα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών της παρούσας εργασίας.

Η φάση αυτή αποτελείται από τέσσερις παιγνιώδεις δραστηριότητες. Η τάξη είναι χωρισμένη σε τέσσερις ομάδες, όσες και οι δραστηριότητες οι οποίες εκτελούνται ταυτόχρονα. Κάθε ομάδα έχει από μία δραστηριότητα, η διάρκεια της οποίας είναι 15 λεπτά. Μετά το τέλος των 15 λεπτών οι ομάδες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους. Αφού παρουσιάσουν και οι τέσσερις ομάδες, αλλάζουν κυκλικά δραστηριότητα. Αυτό γίνεται μέχρι οι ομάδες να κάνουν και τις τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1: Πυραμίδα κλασμάτων. Η πρώτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη σειροθέτηση των κλασμάτων μέσα από παιγνιώδεις διαδικασίες και να παγιώσει τις στρατηγικές σειροθέτησης που αναδύθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές στην προηγούμενη φάση. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, ομιλούμενη γλώσσα, γραπτά σύμβολα και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 2: Ο πιο γρήγορος ρητοπλάστης. Η δεύτερη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα και χειραπτικά υλικά, ενώ από τα μοντέλα κλασμάτων χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μήκους.

Δομικά στοιχεία. Διεπιστημονικότητα, Ανοιχτό Πρόβλημα, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 3: Κοκτέιλ κλασμάτων. Η τρίτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με την τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους (Παράρτημα 20).

Δομικά στοιχεία. Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Δραστηριότητα 4: Το ρομπότ. Η τέταρτη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων με τη μέθοδο της αυτόματης ανάκλησης των στρατηγικών που αναδύθηκαν ελεύθερα από τις προηγούμενες δραστηριότητες. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Κατασκευή προβλήματος, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 9.

Φύλλο εργασιών. Στο τέλος της φάσης αυτής δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασιών (Παράρτημα 8), διάρκειας 30 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε, αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις.

8η Φάση: Το λογισμικό Fraction Battles. Η φάση αυτή, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, έχει επαναληπτικό χαρακτήρα και στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές και με τις τρεις έννοιες του παρεμβατικού προγράμματος, τη σειροθέτηση των κλασμάτων, τα καταχρηστικά και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Στη 8η φάση εφαρμόστηκε το λογισμικό Fraction Battles (βλέπε κεφάλαιο 8), ένα εκπαιδευτικό ηλεκτρονικό παιχνίδι για τους ρητούς, που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια και αφορά στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Δημιουργήθηκε με τη βοήθεια διάφορων λογισμικών και γλωσσών προγραμματισμού. Σκοπός του ηλεκτρονικού παιχνιδιού είναι μέσα από μια πληθώρα δραστηριοτήτων ενός δυναμικού και διαδραστικού πολυμεσικού περιβάλλοντος να εξοικειώσει τους μαθητές με τα κλάσματα και να τους βοηθήσει να μειώσουν τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν σε αυτά με τη βοήθεια των 10 δομικών στοιχείων και των πολλαπλών αναπαραστάσεων πάνω στις οποίες στηρίζεται και η προστιθέμενη αξία του λογισμικού.

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτού του εκπαιδευτικού λογισμικού είναι ότι το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνει δεν επιλέχθηκαν και σχεδιάστηκαν αυθαίρετα, αλλά καθορίστηκαν με έναν αυστηρά επιλεκτικό τρόπο από τα πορίσματα διαχρονικών ερευνών που έγιναν και παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία. Έτσι, κάθε δραστηριότητα του παιχνιδιού στοχεύει στο να καλύψει συγκεκριμένη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες, εικονικά χειραπτικά υλικά και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Και τα 10 δομικά στοιχεία: ΤΠΕ, Κατασκευή Προβλήματος, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Αντιπαράδειγμα, Ιστορία των Μαθηματικών, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Ανοιχτό Πρόβλημα, Διεπιστημονικότητα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Δίνεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 8.

9η Φάση: Μετα-δοκιμασίες. Στην 9η φάση έγινε η συμπλήρωση των γραπτών δοκιμίων μετά τις διδασκαλίες. Τα δοκίμια περιελάμβαναν τις ίδιες δραστηριότητες με τα δοκίμια της πρώτης φάσης, αλλά είχε επιπλέον τρεις ασκήσεις για να γίνει έλεγχος μεταγνωστικών διεργασιών (Παράρτημα 3). Η συμπλήρωσή του διήρκησε μια διδακτική ώρα και δόθηκε και στις τέσσερις ομάδες από την ερευνήτρια, η οποία βρισκόταν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας καθ’ όλη τη διάρκεια συμπλήρωσής τους από τους μαθητές. Επειδή τα δοκίμια κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές εφαρμογές, δε χρειάστηκε και δε δόθηκε καμιά διευκρίνιση για τις ασκήσεις του δοκιμίου.

Σκοπός της φάσης αυτής ήταν να διερευνηθούν πιθανές γνωστικές αλλαγές στα κλάσματα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων.

10η Φάση: Ημιδομημένες Συνεντεύξεις. Στη 10η φάση των παρεμβάσεων έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις στους πέντε μαθητές από κάθε μια από τις 4 ομάδες του δείγματος που έγινε και στη 2η φάση. Οι συνεντεύξεις έγιναν πάνω σε δομημένο ερωτηματολόγιο που είχε να κάνει με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά το οποίο πρώτα συμπλήρωσαν οι μαθητές και στη συνέχεια τους γίνονταν ερωτήσεις πάνω στις απαντήσεις που έδωσαν (Παράρτημα 5). Η συνέντευξη συνέχισε και στο μέρος των ασκήσεων για να ερευνηθούν πιθανές αλλαγές στις στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές.

Παρατήρηση

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι παρατήρησης- συμμετοχική παρατήρηση και μη συμμετοχική παρατήρηση. Στη συμμετοχική παρατήρηση οι παρατηρητές εμπλέκονται στις ίδιες τις δραστηριότητες που επιχειρούν να παρατηρήσουν. Οι μη συμμετοχικοί παρατηρητές, από την άλλη πλευρά, δεν αναμειγνύονται στις δραστηριότητες της ομάδας που ερευνούν και αποφεύγουν την ιδιότητα του μέλους της (Cohen & Manion, 1997).

Στην παρούσα έρευνα ως ένα άλλο μέσο συλλογής δεδομένων που αξιοποιήθηκε ήταν η συμμετοχική παρατήρηση που εφαρμόστηκε στο Γ΄ ερευνητικό μέρος κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Επειδή οι διδακτικές παρεμβάσεις έγιναν από την ίδια την ερευνήτρια, η παρακολούθηση ήταν δυνατή σε όλες τις φάσεις του παρεμβατικού προγράμματος. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν ως βασικά κατά την κρίση της ερευνήτριας καταγράφονταν σε ημερολόγιο με τη μορφή μη δομημένων παρατηρήσεων. Η καταγραφή γινόταν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην επηρεάζει την πορεία της διδακτικής διαδικασίας.

Βασικά σημεία που καταγράφηκαν από την παρατήρηση ήταν στις ομαδικές δραστηριότητες, όπως συμπεριφορές, δυσκολίες που μπορεί να παρουσίαζε η δραστηριότητα, σχολιασμοί από τους μαθητές, αντιδράσεις, η διαχείριση της ομαδικότητας από κάθε άτομο.

Βιντεοσκοπήσεις/τεκμήρια/αρχεία

Στο Γ΄ ερευνητικό μέρος, για ορισμένες παρεμβάσεις έγιναν βιντεοσκοπήσεις, για να ενισχυθούν τα δεδομένα από την παρατήρηση. Επίσης, συγκεντρώθηκαν και κάποια αρχεία και τεκμήρια όπως α) τα φύλλα εργασιών που δόθηκαν στους μαθητές κατά την 3η, 4η, 6η και 7η φάση, β) οι αναδυόμενες στρατηγικές των μαθητών που εκμαιεύτηκαν κατά τις δραστηριότητες των διδακτικών παρεμβάσεων, γ) τα ευρήματα των ομάδων από τις δραστηριότητες κατά τη φάση της παρουσίασής τους στην ολομέλεια και δ) όλα το δοκίμια/ερωτηματολόγια που δόθηκαν και στα τρία ερευνητικά μέρη και που αναλυθούν αμέσως μετά.

Ερωτηματολόγια

Το ερωτηματολόγιο είναι ένα έντυπο, που περιλαμβάνει μια σειρά δομημένων ερωτήσεων, στις οποίες ο ερωτώμενος καλείται να απαντήσει γραπτά και με μία συγκεκριμένη σειρά. Με τα ερωτηματολόγια συλλέγονται δεδομένα ζητώντας από ανθρώπους να απαντήσουν στο ίδιο ακριβώς σύνολο ερωτήσεων. Χρησιμοποιούνται συνήθως στα πλαίσια μιας ερευνητικής στρατηγικής, προκειμένου να συλλεχθούν περιγραφικά και επεξηγηματικά δεδομένα για απόψεις, συμπεριφορές, χαρακτηριστικά, στάσεις κ.λπ. Μολονότι υπάρχουν διάφοροι ορισμοί, χρησιμοποιούμε το ερωτηματολόγιο ως ένα γενικό όρο που περιλαμβάνει τεχνικές συλλογής δεδομένων, όπου κάθε ερωτώμενος απαντά στο ίδιο σύνολο ερωτήσεων, με προκαθορισμένη σειρά (Τσιώλης, 2014).

Στην παρούσα διατριβή, για τη συλλογή των ποσοτικών και ένα μέρος των ποιοτικών δεδομένων αξιοποιήθηκε το ερωτηματολόγιο. Τα ερωτηματολόγια όλων των ερευνητικών μερών κατασκευάστηκαν από την ίδια την ερευνήτρια μετά από πιλοτικές έρευνες με γνώμονα τις τρεις κλασματικές έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα εργασία: Την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τα καταχρηστικά κλάσματα και την αναπαράσταση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Ερωτηματολόγια δόθηκαν και στα τρία ερευνητικά μέρη ως εξής:

Α΄ Ερευνητικό Μέρος. Στο πρώτο ερευνητικό μέρος, που εξετάζει τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα και συμμετείχαν συνολικά 643 μαθητές και των δύο βαθμίδων εκπαίδευσης (Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση) από τη Ρόδο και την Αθήνα, δόθηκαν δύο ερωτηματολόγια. Στους 303 δόθηκε ερωτηματολόγιο που εξέταζε τις αντιλήψεις των μαθητών γενικά για τα κλάσματα και στους υπόλοιπους 340 δόθηκε ερωτηματολόγιο που εξέταζε τις αντιλήψεις των μαθητών μόνο στις τρεις έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα εργασία, δηλαδή, στην έννοια της ισοδιαμέρισης της μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της τοποθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Για τη διαχρονικότητα της έρευνας προκειμένου να έχουμε σταθεροποίηση των πορισμάτων, το ερωτηματολόγιο δόθηκε τα έτη 2011, 2012 και 2013. Το πρώτο ερωτηματολόγιο που εξέταζε τις αντιλήψεις των μαθητών γενικά για τα κλάσματα (Παράρτημα 1) αποτελείται από δύο μέρη. Το Α΄ μέρος περιέχει 9 ασκήσεις και το Β΄ μέρος 3 προβλήματα. Όλες οι ασκήσεις και τα προβλήματα στοχεύουν στο αναδειχθεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών στις έννοιες που διαπραγματεύεται η άσκηση.

Έτσι, οι ασκήσεις 1 και 2 αφορούν στην ισοδυναμία κλασμάτων, οι ασκήσεις 3 και 4 αφορούν στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 5 διαπραγματεύεται την σειροθέτηση των κλασμάτων, η άσκηση 6 αφορά στις τέσσερις πράξεις στα κλάσματα, η άσκηση 7 αφορά στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, η άσκηση 8 διαπραγματεύεται τη μεταφορά του κλάσματος από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο και η άσκηση 9 αφορά στη διαγραμματική αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Τα τρία προβλήματα διαπραγματεύονται τον χειρισμό της έννοιας του κλάσματος σε προβληματικές καταστάσεις.

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο, που εξέταζε τις αντιλήψεις των μαθητών στις τρεις έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα εργασία, δηλαδή, στην έννοια της ισοδιαμέρισης της μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της τοποθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής αποτελείται από 6 ασκήσεις και 1 πρόβλημα (Παράρτημα 4). Οι ασκήσεις 1 και 2 αφορούν στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

η άσκηση 3 αφορά στη σειροθέτηση των κλασμάτων, η άσκηση 3 αναφέρεται στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων, οι ασκήσεις 5, 6α, 6β και 6ε αφορούν τη σειροθέτηση κλασμάτων και την αριθμογραμμή, ενώ οι ασκήσεις 6γ, 6δ και το πρόβλημα 7 αναφέρονται στα καταχρηστικά κλάσματα.

Β΄ Ερευνητικό Μέρος. Στο δεύτερο ερευνητικό μέρος, που εξετάζει τις δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων στα κλάσματα και συμμετείχαν συνολικά 900 υποψήφιοι δάσκαλοι από όλη την Ελλάδα δόθηκαν ερωτηματολόγιο που εξέταζε τις αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων στις τρεις έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα εργασία, δηλαδή, στην έννοια της ισοδιαμέρισης της μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της τοποθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Για τη διαχρονικότητα της έρευνας προκειμένου να έχουμε σταθεροποίηση των πορισμάτων, το ερωτηματολόγιο δόθηκε τα έτη 2011, 2012, 2013, 2014 και 2015. Το ερωτηματολόγιο εξέταζε τις αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων για τα κλάσματα στις προαναφερόμενες έννοιες (Παράρτημα 9) και αποτελείται 7 ασκήσεις που τελικά αξιοποιήθηκαν οι 4 από αυτές. Όλες οι ασκήσεις και τα προβλήματα στοχεύουν στο αναδειχθεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών στις έννοιες που διαπραγματεύεται η άσκηση.

Έτσι, η άσκηση 1 αφορά στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 3 στη διαγραμματική αναγνώριση κλασμάτων γνήσιων και καταχρηστικών, η άσκηση 4 αφορά στη σειροθέτηση των κλασμάτων, η άσκηση 6 στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, η άσκηση 7δ, 7ε και 7στ διαπραγματεύεται την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 7ζ και 7η αναφέρεται στην αριθμογραμμή και η άσκηση 7ιγ διαπραγματεύεται τα καταχρηστικά κλάσματα.

Γ΄ Ερευνητικό Μέρος. Στο τρίτο ερευνητικό μέρος, που υλοποιείται το Παρεμβατικό Πρόγραμμα με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων και συμμετείχαν συνολικά 78 μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο πριν τις διδασκαλίες (προ-δοκιμασία, Παράρτημα 2) κι ένα μετά τις διδασκαλίες (μετα-δοκιμασία, Παράρτημα 3). Όλες οι ασκήσεις και τα προβλήματα στοχεύουν στο αναδειχθεί ο βαθμός κατανόησης των μαθητών στις έννοιες που διαπραγματεύεται η άσκηση.

Τα ερωτηματολόγια των προ-δοκιμασιών αποτελούνται από 7 ασκήσεις. Πέρα από τα έργα που αφορούσαν στην κλασματική μονάδα, τη σειροθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή και τα καταχρηστικά κλάσματα, το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε και έργα άλλων εννοιών όπως πράξεις κλασμάτων και μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό και ποσοστό. Η παρουσία αυτών των έργων έγινε σκόπιμα για να διερευνηθεί αν θα παρουσιαστούν αλλαγές σε αυτές τις έννοιες μετά από τις διδασκαλίες. Αναμενόμενα, δε θα πρέπει να παρουσιαστούν σημαντικές αλλαγές σε αυτά τα έργα. Η παρουσία σημαντικών αλλαγών θα σημαίνει τυχαία συμπλήρωση από τους μαθητές. Οι ασκήσεις αυτές, δηλαδή, λειτουργούν ως ασκήσεις κλειδιά για τη διασφάλιση του αληθούς της συμπλήρωσης του δοκιμίου.

Έτσι, η άσκηση 1 αφορά στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 2 στην ισοδυναμία κλασμάτων, η άσκηση 3 στη διαγραμματική αναγνώριση κλασμάτων γνήσιων και καταχρηστικών, η άσκηση 4 αφορά στη σειροθέτηση των κλασμάτων, η άσκηση 5 στις τέσσερις πράξεις κλασμάτων, η άσκηση 6 στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, η άσκηση 7α, 7β, 7γ διαπραγματεύεται τον χειρισμό της έννοιας του κλάσματος σε προβληματικές καταστάσεις, η άσκηση 7δ, 7ε και 7στ διαπραγματεύεται την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 7ζ και 7η αναφέρεται στην αριθμογραμμή, η άσκηση 7θ, 7ι, 7ια, 7ιβ, αναφέρεται στη μεταφορά του κλάσματος από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη και η άσκηση 7ιγ διαπραγματεύεται τα καταχρηστικά κλάσματα.

Τα ερωτηματολόγια των μετα-δοκιμασιών αποτελούνται από τις 7 ασκήσεις των προ-δοκιμασιών και προστέθηκαν άλλες 3, για να γίνει έλεγχος μεταγνωστικών διεργασιών. Σκοπός των ασκήσεων αυτών ήταν να διερευνηθούν πιθανές γνωστικές αλλαγές στα κλάσματα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων (1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ).

Έτσι, η άσκηση 1 αφορά στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 2 στην ισοδυναμία κλασμάτων, η άσκηση 3 στη διαγραμματική αναγνώριση κλασμάτων γνήσιων και καταχρηστικών. Η άσκηση 4 αφορά στη σειροθέτηση των κλασμάτων, η άσκηση 5 στις τέσσερις πράξεις κλασμάτων, η άσκηση 6 και 7 στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, η άσκηση 8α, 8β, 8γ διαπραγματεύεται τον χειρισμό της έννοιας του κλάσματος σε προβληματικές καταστάσεις, η άσκηση 8δ, 8ε και 8στ διαπραγματεύεται την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, η άσκηση 8ζ, 8η, 8ιδ, 8ιε, 8ιστ αναφέρεται στην αριθμογραμμή, η άσκηση 8θ, 8ι, 8ια, 8ιβ, αναφέρεται στη μεταφορά του κλάσματος από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, η άσκηση 8ιγ διαπραγματεύεται τα καταχρηστικά κλάσματα, η άσκηση 9 αφορά στην αναγνώριση καταχρηστικών και γνήσιων κλασμάτων και η άσκηση 10 διαπραγματεύεται τον χειρισμό της έννοιας του κλάσματος σε προβληματικές καταστάσεις.

Βιβλιογραφική Μελέτη

Στην παρούσα εργασία διεξήχθη βιβλιογραφική μελέτη προκειμένου να ερευνηθούν βιβλιογραφικά οι τάσεις που υπάρχουν στον διεθνή χώρο για τη διδασκαλία των κλασμάτων. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Πιο συγκεκριμένα, ερευνήθηκαν τα κυριότερα επιστημονικά περιοδικά της διεθνούς βιβλιογραφίας από το 2006 έως 2016 προκειμένου να μελετηθούν και να καταγραφούν τα αποτελέσματα των ερευνών που έχουν δημοσιευθεί σε αυτό το διάστημα με θέμα τη διδασκαλία των κλασμάτων. Ποιες αναπαραστάσεις ή άλλες μέθοδοι, δηλαδή, έχουν αναδειχθεί μέσα από αυτές τις έρευνες ως οι πιο κατάλληλες ή ακατάλληλες για την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων από τους μαθητές. Ειδικότερα, μελετήθηκαν 20 διεθνή επιστημονικά περιοδικά και συλλέχθηκαν 190 άρθρα από τα οποία αξιοποιήθηκαν τα 59.

Μέθοδοι Ανάλυσης Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων των ερευνών χρησιμοποιήθηκε, πέρα από την περιγραφική ανάλυση και ανάλυση περιεχομένου και η ποσοτική και η ποιοτική ανάλυση.

Ποσοτικά και Ποιοτικά Δεδομένα

Για την ανάλυση των ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων των ερευνών χρησιμοποιήθηκε το Statistical Implicative Analysis του Gras με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996· Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997) και το πρόγραμμα Microsoft Excel.

Η έννοια της συνεπαγωγικής στατιστικής (implicative statistics) προήλθε ως αναγκαία απάντηση σε προβληματισμούς που έθετε η διδακτική των μαθηματικών. Ο Γάλλος καθηγητής Regis Gras του πανεπιστημίου της Nantes πρότεινε μια νέα μεθοδολογία που απαντούσε με διαφορετικό σκεπτικό στο εξής ερώτημα: αν μια ερώτηση είναι πιο σύνθετη από μια άλλη, τότε ο μαθητής που απαντά σωστά στη συνθετότερη ερώτηση, απαντά ορθά και στην απλούστερη;

Ο Gras αναφέρει ότι υπάρχει ανάγκη για χρήση μιας μεθόδου ανάλυσης δεδομένων, η οποία αποτελεί ένα ακριβή μηχανισμό συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων κατάλληλων να ενισχύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, να εξαγάγουν συμπεράσματα. Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (Gras et al. 1997) κρίνεται κατάλληλη στην περίπτωση όπου αναζητούνται: α) οι κύριοι παράγοντες διάκρισης σε ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών, β) ένας διαμερισμός των μεταβλητών, γ) μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση - ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων και δ) μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών- ένα δέντρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής κτλ.

Η συνεπαγωγική στατιστική αποκαλύπτει την προσανατολισμένη δυναμική ταξινόμηση των μεταβλητών με βάση δύο κριτήρια απόφασης για τον καθαρισμό της σημαντικότητας κάθε δημιουργούμενης τάξης: α) τη διάταξη συνεπαγωγής β) τη συνοχή των τάξεων. Η θεώρηση του Gras επιτρέπει να διαπιστώσει κανείς εκτός από την ένταση της συνεπαγωγής και την ύπαρξη της προσανατολισμένης εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Δίνεται ακόμη η δυνατότητα δημιουργίας Ιεραρχικής Ταξινόμησης των μεταβλητών, η οποία περιγράφει τις σχέσεις συνεπαγωγής των εμπλεκόμενων μεταβλητών.

Η στατιστική συνεπαγωγή (Implicative Statistic Analysis) μεταξύ των μεταβλητών X και Y λαμβάνει υπόψη τη σύγκριση των συχνοτήτων ή των συντελεστών συσχέτισης, τη θετική συσχέτιση, την ομοιογένεια και τη θετικά προσανατολισμένη στατιστική εξάρτηση.

Η μέθοδος αυτή με την ανάπτυξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών κατέληξε στην κατασκευή του προγράμματος CHIC, ενός έγκυρου και ακριβούς ψηφιακού μηχανισμού συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων για ενίσχυση ή διάψευση υποθέσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων, το οποίο δίνει τις παρακάτω αναλύσεις: α) Διάγραμμα Ομοιότητας β) Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, και γ) Δενδρόγραμμα Ιεράρχησης.

Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Οι οριζόντιες συνδέσεις με έντονο κόκκινο δηλώνουν την ύπαρξη ομοιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές είναι δυνατόν να ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% (κόκκινο βέλος) ή 95% (μπλε βέλος). Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

Το Δενδρόγραμμα Ιεράρχησης παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές, κατά σειρά προτεραιότητας. Οι συνεπαγωγές με έντονο κόκκινο ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

Στην παρούσα εργασία για την ανάλυση των ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα διαγράμματα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα.

Περιορισμοί της Έρευνας

Επειδή οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα μεγάλο κεφάλαιο στη μαθηματική εκπαίδευση, η παρούσα έρευνα εστιάζει σε τρεις έννοιες, αυτή της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, των καταχρηστικών κλάσματα και της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας.

Επιλέχθηκαν από τα κλάσματα αυτές οι τρεις έννοιες, καθώς αυτές οι έννοιες είναι βασικές για την κατανόηση άλλων κλασματικών εννοιών, όπως οι πράξεις κλασμάτων, μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό και ποσοστό, ισοδυναμία κλασμάτων. Ερευνητές επίσης ισχυρίζονται ότι η κατανόηση του χωρισμού μιας μονάδας σε ίσα μέρη είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της ορθολογικής σημασίας (Kieren, 1992· Mack, 2001· Steffe & Olive, 2010) και για την ανάπτυξη πλήρους κατανόησης των κλασμάτων (Boyce & Norton, 2016).

Άρα είναι βασικό οι μαθητές να έχουν ξεκαθαρίσει τις τρεις αυτές έννοιες για να μεταβούν ομαλά σε άλλες. Επίσης, οι τρεις αυτές έννοιες είναι βασικές και σχετίζονται με την κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων σχετίζεται με την ικανότητα τοποθέτησης των αριθμών στην αριθμογραμμή (Hackenberg, 2007) και την κατασκευή και λύση προβλημάτων (Lee & Shin, 2015· Αυγερινός & Βλάχου, 2013).

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τα μεθοδολογικά στοιχεία, τα ερωτήματα και τα ερευνητικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα. Συνοπτικά, το ερευνητικό πλαίσιο της εργασίας διήρκησε έξι χρόνια, έλαβε χώρα στην Ελλάδα και πήραν μέρος συνολικά 1.621 συμμετέχοντες. Η επιλογή του δείγματος ήταν απογραφική, στρωματοποιημένη και συμπτωματική, ανάλογα με τους σκοπούς και τις ανάγκες της εκάστοτε έρευνας.

Οι έρευνες ακολούθησαν μια ποιοτική και ποσοτική προσέγγιση. Επίσης, έγινε ανάλυση περιεχομένου και μελέτη περίπτωσης. Έτσι, σχηματίστηκε μια τριγωνοποίηση μεθοδολογική, χρονική και θεωρητική προκειμένου να επιτευχθεί σταθεροποίηση των πορισμάτων. Αναφορικά με τις μεθόδους συλλογής δεδομένων, χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας, ερωτηματολόγια και δοκίμια που συντάχθηκαν από την ίδια της ερευνήτρια και που κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές έρευνες. Επίσης, έγιναν διδακτικές παρεμβάσεις, ημιδομημένες συνεντεύξεις, βιντεοσκοπήσεις, παρατήρηση και βιβλιογραφική μελέτη.

Για την ανάλυση των δεδομένων των ερευνών χρησιμοποιήθηκε, πέρα από την περιγραφική ανάλυση, το Statistical Implicative Analysis του Gras με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996· Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997) και το πρόγραμμα Microsoft Excel. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων έγινε με τα διαγράμματα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα.

Α΄ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Το πρώτο ερευνητικό μέρος αποτελείται από τα κεφάλαια 4 και 5 και στόχο έχει να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του Δημοτικού) και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μαθητές της Α΄, Β΄, Γ Γυμνασίου, καθώς και Α΄ Λυκείου) πάνω στα κλάσματα. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που καλύπτουν όλο το φάσμα των εννοιών του κλάσματος, όπως ισοδυναμία κλασμάτων, πράξεις κλασμάτων κ.τ.λ.. Τα ερευνητικά αποτελέσματα στο κεφάλαιο 5 περιορίζονται στη μελέτη των εννοιών της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων, προκειμένου να επιτευχθεί σταθεροποίηση των πορισμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει τα αποτελέσματα της προπαρασκευαστικής έρευνας η οποία προσπαθεί να διερευνήσει τις αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές στην Α/θμιας και Β/θμιας Εκπαίδευσης πάνω στις έννοιες των κλασμάτων. Βασικός στόχος είναι η συγκριτική αντιπαράθεση αυτών των αντιλήψεων ανάμεσα και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης προκειμένου να διαπιστωθούν και να διατυπωθούν ποιες από τις λαθεμένες αντιλήψεις εξακολουθούν να εμμένουν στα γνωστικά σχήματα των μαθητών, έτσι ώστε στα πορίσματα αυτά να σχεδιαστεί το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας διατριβής.

Όπως φάνηκε από την βιβλιογραφική ανασκόπηση, η έννοια των κλασμάτων παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες κατανόησης από τους μαθητές όλων των βαθμίδων, δυσκολίες που έχουν την τάση να οικειοποιούνται και να διατηρούνται μέσα στα γνωστικά σχήματα των μαθητών για τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα, που μπορεί να φτάνει και την ενήλικη ζωή τους. Έτσι, κατασκευάζονται παρανοήσεις οι οποίες δυσκολεύουν όχι μόνο της εκπαιδευτική διαδικασία, αλλά και τους ίδιους του μαθητές κατά την εξελικτική μαθητική τους πορεία.

Μία από αυτές τις δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με τα κλάσματα είναι ο συμβολισμός των ρητών αριθμών που συχνά συμβάλλει στη δημιουργία παρανοήσεων. Συγκεκριμένα, αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ ως αριθμό γι' αυτό και τείνουν να το χειρίζονται ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς (Ni, 2001). Χαρακτηριστικό παράδειγμα του παραπάνω χειρισμού είναι η διαδικασία της πρόσθεσης των κλασμάτων. Πολλοί μαθητές, δηλαδή, όταν θέλουν να προσθέσουν κλάσματα, όπως για παράδειγμα $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$ προσθέτουν τους αριθμητές και τους παρονομαστές καταλήγοντας έτσι στο αποτέλεσμα $\frac{7}{9}$. Θεωρούν, δηλαδή, τον αριθμητή και τον παρονομαστή ανεξάρτητες και όχι συσχετισμένες οντότητες (Peck & Jencks, 1981).

Ένα άλλο παράδειγμα που σχετίζεται με το συμβολισμό των ρητών αριθμών και την αντιμετώπισή τους ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς είναι όταν οι μαθητές έχουν να συγκρίνουν κλάσματα με όμοιο αριθμητή, όπως το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{5}$. Σε αυτήν την περίπτωση, αρκετοί μαθητές επιλέγουν ως μεγαλύτερο κλάσμα το $\frac{1}{5}$, γιατί το 5 είναι μεγαλύτερο από το 3.

Συνακόλουθα, εξαιτίας της ακολουθίας των φυσικών αριθμών, βάσει της οποίας οι μαθητές γνωρίζουν πως μεταξύ δυο συνεχομένων φυσικών αριθμών δεν υπάρχει ένας τρίτος, υιοθετούν αυτή την ακολουθία και στους κλασματικούς αριθμούς υποθέτοντας πως μεταξύ δυο κλασμάτων δεν υπάρχει κάποιος άλλος. Αδυνατούν έτσι να κατανοήσουν την πυκνότητα των κλασμάτων και την ύπαρξη άπειρων αριθμών μεταξύ δυο κλασματικών αριθμών (Vamvakoussi &Vosniadou, 2004).

Δυσκολίες παρουσιάζονται επίσης στην ικανότητα να τοποθετούν οι μαθητές τα κλάσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και το αντίστροφο. Επίσης, και η ίδια η κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα κομμάτια δεν είναι τόσο εύκολη όσο φαίνεται ακόμη και μετά τη διδασκαλία των κλασμάτων στη δημοτικό σχολείο (Lamon, 1996· Yoshida & Sawano, 2002). Τέλος, σημαντική δυσκολία φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης των κλασμάτων στο άλλο, ικανότητα ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και γενικότερα για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Janvier, 1987).

Πέρα από τις δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών που αναφέρονται στη βιβλιογραφία, στην ανάλυση της έρευνας που ακολουθεί διατυπώνονται και άλλες παρανοήσεις που αναδείχθηκαν μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών στα δοκίμια που τους δόθηκαν.

Σκοπός της Έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει πιθανές λαθεμένες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για τα κλάσματα και το χρονικό διάστημα που αυτές τους συνοδεύουν, κατά την πορεία τους από την Α/θμια, στην Β/θμια εκπαίδευση, πορίσματα τα οποία θα βοηθήσουν στο σχεδιασμό του Γ΄ ερευνητικού μέρους που αφορά στο καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα.

Ειδικότερα, οι επιμέρους στόχοι της παρούσας έρευνας είναι οι ακόλουθοι:

- Να εντοπιστούν οι αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης για τα κλάσματα.
- Να συγκρίνει τα αποτελέσματα για να διερευνηθούν πιθανές λάθος αντιλήψεις των κλασμάτων που εμμένουν κατά τη διάρκεια και των δύο βαθμίδων εκπαίδευσης.

Το Δείγμα

Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν 153 μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης και 150 μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Οι μαθητές της Α/θμιας και Β/θμιας εκπαίδευσης είναι από σχολεία της πόλης της Ρόδου και της υπαίθρου.

Εργαλεία της Έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε δοκίμιο, το οποίο καταρτίστηκε από την ερευνήτρια (Παράρτημα 1), για την εξέταση των αντιλήψεων και των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Το δοκίμιο περιλάμβανε 9 ασκήσεις και 3 προβλήματα και δημιουργήθηκαν 30 διαφορετικές μεταβλητές. Για τη βαθμολόγηση των έργων του δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα 0-1. Τα έργα βαθμολογήθηκαν με 0 (μηδέν) αν ήταν λαθεμένα η δεν είχαν συμπληρωθεί καθόλου και με 1 (ένα) αν τα έργα ήταν σωστά.

Μεταβλητές της Έρευνας

Οι 30 μεταβλητές της έρευνας ορίστηκαν ως συνδυασμός γραμμάτων κι ενός αριθμού. Τα γράμματα δηλώνουν τα αρχικά της έννοιας που εξετάζεται. Για παράδειγμα, η μεταβλητή AdSi6a αποτελείται από τα αρχικά της πρότασης Addition of S**i**milar Fractions, γιατί εξετάζεται η πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων και ο αριθμός 6a δηλώνει το ερώτημα του δοκιμίου (πρόκειται για το υποερώτημα α του ερωτήματος 6).

Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του Gras (SIA-Statistical Implicative Analysis) με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996· Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997) και το πρόγραμμα Microsoft Excel. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων παρουσιάζεται με το διάγραμμα ομοιότητας (similarity tree), στο οποίο οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που παρουσιάζουν. Μεταβλητές κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρνονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Αποτελέσματα

Συζήτηση Αποτελεσμάτων στα Ποσοστά Επιτυχίας

Πίνακας 4.1.

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής για τις Αντιλήψεις των Μαθητών Α/θμιας και Β/θμιας Εκπαίδευσης

	Μεταβλητές	Ποσοστά επιτυχίας στην Α/θμια Εκπ/ση	Ποσοστά επιτυχίας στην Β/θμια Εκπ/ση
ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ	EqR1A	98	100
	EqR1B	77	90
	EqR1C	83	86
	EqS2b	63	74
	CoEq5e	71	60
	EqD3b	38	34
	NLiEq7cd	40	22
	EqQuD8z	60	72
ΠΡΑΞΕΙΣ	AdSi6a	63	92
	AdDi6c	48	68
	SuDi6d	33	54
	MiD4b	8	6
	MuDi6z	65	80
	diSi6h	38	52
	diDi6th	37	34
N. LINE	NLiSi7ac	48	42
	NLiFr7b	42	28
ΣΥΓΚΡΙΣΗ	CoSi5a	83	68
	CoSiNu5b	69	60
	CoPr5c	75	62
	CoImp5d	58	58
ΙΣΑ ΜΕΡΗ	FrD3c	8	6
	FrD3st	67	82
	FrD4a	81	68
ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ	EqS2d	65	68
	PerFr8d	44	42
	DeFr8c	75	78
	QuoFr8e	56	68
	PFrRa1c	71	62

Από τον πίνακα με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών (Πίνακας 4.1) στα δοκίμια που τους δόθηκαν, μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις.

Αναφορικά με την έννοια της ισοδυναμίας και την αναπαράστασή της με σχεδιάγραμμα παρατηρούμε ότι όταν το πλήθος των αντικειμένων συμπίπτει με τον παρονομαστή και πρέπει να σκιαστούν τόσα μέρη όσα αναφέρονται στον αριθμητή, καμιά βαθμίδα δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα, καθώς τα ποσοστά επιτυχίας αγγίζουν το 100%. Όταν όμως δίνονται ισοδύναμα κλάσματα για να αναπαρασταθούν σε σχεδιάγραμμα και το πλήθος των αντικειμένων δε συμπίπτει με τον παρονομαστή, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας μειώνονται και στις δύο βαθμίδες, με μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας στην Α/θμια Εκπ/ση (23%) (EqR1B, EqR1C).

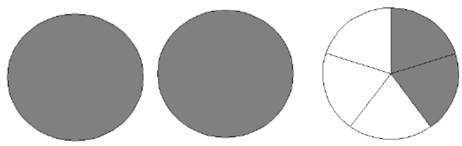
Τα ποσοστά επιτυχίας μειώνονται ακόμη περισσότερο όταν ζητείται από τους μαθητές να σχηματίσουν ισοδύναμα κλάσματα σε συμβολικό επίπεδο (EqS2b, $\frac{2}{5} = \frac{4}{\quad} = \frac{\quad}{20}$) ή να βάλουν το σύμβολο της ισότητας ανάμεσα σε δύο κλάσματα (CoEq5e, $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$**).** Αξιοσημείωτο σε αυτό το σημείο είναι ότι τα κλάσματα που τους δόθηκαν ήταν τα ίδια με αυτά που έπρεπε να παραστήσουν σε σχεδιάγραμμα.

Μείωση των ποσοστών επιτυχίας και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης παρατηρούμε στον εντοπισμό της ισοδυναμίας από σχεδιάγραμμα (EqD3b), καθώς μόνο το 38% της Α/θμιας και το 34% της Β/θμιας Εκπ/σης κατάφεραν να εντοπίσουν την ισοδυναμία από σχεδιάγραμμα. Ποσοστά πιο χαμηλά και από αυτά που παρατηρήθηκαν στην τοποθέτηση ισοδύναμων κλασμάτων στην αριθμογραμμή (NLiEq7cd), κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο, αφού βάσει της βιβλιογραφίας οι μαθητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στο να τοποθετούν κλάσματα στην αριθμογραμμή.

Τη δυσκολία, τέλος, που αντιμετωπίζουν και οι δύο βαθμίδες εκπαίδευσης στην ισοδυναμία κλασμάτων μπορούμε να παρατηρήσουμε και στο συνδυασμό εικονικής και συμβολικής αναπαράστασης (EqQuD8z) με ποσοστά επιτυχίας 60% και 72% αντίστοιχα. Η άσκηση αυτή μας δίνει ένα μέσο όρο του ποσοστού δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην ισοδυναμία των κλασμάτων.

Όσον αφορά στις τέσσερις πράξεις στα κλάσματα παρατηρούμε ότι στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε συμβολικό επίπεδο (AdSi6a) μόνο οι μαθητές της Α/θμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν πρόβλημα, αφού μόνο το 63% έδωσε σωστή απάντηση στο ερώτημα $\frac{5}{6} + \frac{25}{6} =$**,** ενισχύοντας έτσι το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ ως αριθμό γι' αυτό και τείνουν να το χειρίζονται ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς. Αυτό δε φαίνεται να ισχύει στην Β/θμια εκπαίδευση που τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 92%. Ωστόσο, στο ερώτημα πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων (AdDi6c) και οι δύο βαθμίδες φαίνεται να παρουσιάζουν δυσκολίες, αφού το ποσοστό επιτυχίας τους μειώθηκε κατά μέσο όρο στο 15% κάτι που επεκτείνεται και στην αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων (SuDi6d) που το ποσοστό επιτυχίας μειώθηκε κατά μέσο όρο στο 26%.

Αξιοσημείωτο όμως είναι το γεγονός ότι, ενώ στη συμβολική επίλυση της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων είχαμε ποσοστά επιτυχίας μέχρι και 100%, στη διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης (MiD4b) (Διάγραμμα 4.1) τα ποσοστά αυτά μειώθηκαν θεαματικά και στις δύο βαθμίδες (8%, 6% αντίστοιχα), καθώς έβαζαν ως παρονομαστή το 15, ενισχύοντας την πεποίθηση ότι οι πράξεις στα κλάσματα υπόκεινται σε μια μηχανιστική διαδικασία που έχει οικειοποιηθεί στους μαθητές, χωρίς να έχουν κατανοήσει ουσιαστικά την έννοια του κλάσματος.



Διάγραμμα 4.1. Διαγραμματική αναπαράσταση της πρόσθεσης κλασμάτων με τη βοήθεια καταχρηστικού κλάσματος.

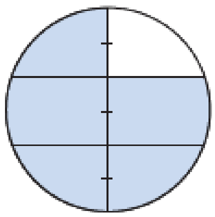
Το ποσοστό επιτυχίας αυξάνεται αισθητά στην Α/θμια και Β/θμια εκπαίδευση στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (MuDi6z), με ποσοστά επιτυχίας 65% και 80% αντίστοιχα, σε σχέση με τα ποσοστά επιτυχίας στην πρόσθεση και την αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές της Α/θμιας και Β/θμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν ως ξεχωριστές μονάδες τον αριθμητή και τον παρονομαστή και αυτό τους βοηθάει στην εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού.

Τέλος, και οι δύο βαθμίδες εκπαίδευσης φαίνεται να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη διαίρεση κλασμάτων και ιδιαίτερα στη διαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων όπου σημειώνουν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας (37% και 34% αντίστοιχα). Η δυσκολία αυτή ενισχύεται πέρα από την ίδια την πολυδιάστατη φύση των κλασμάτων και στον αλγόριθμο της διαίρεσης που δυσκολεύει τους μαθητές.

Όσον αφορά την τοποθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής (NLiSi7ac, NLiFr7b) παρατηρούμε ότι και οι δύο βαθμίδες παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στο να τοποθετήσουν κλάσματα στην αριθμογραμμή (ποσοστά επιτυχίας 42% και 28% αντίστοιχα), κάτι που δυσκολεύει ακόμη περισσότερο όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Αξιοσημείωτο στο σημείο αυτό είναι ότι το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας το παρουσιάζει η Β/θμια (28%) και όχι η Α/θμια εκπαίδευση (42%).

Αναφορικά με τη σύγκριση κλασμάτων παρατηρούμε ότι και οι δύο βαθμίδες παρουσιάζουν δυσκολίες (μέσος όρος επιτυχίας 71% και 62% αντίστοιχα) και κυρίως η Β/θμια εκπαίδευση που έχει τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Οι δυσκολίες αυτές αυξάνονται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα ή καταχρηστικά. Στη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας σημείωσαν οι μαθητές της Α/θμιας εκπαίδευσης (83%) έναντι 68% της Β/θμιας εκπαίδευσης.

Αναφορικά με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σημαντική δυσκολία στους μαθητές της Α/θμιας και Β/θμιας εκπαίδευσης, καθώς το 92% της Α/θμιας και 94% της Β/θμιας εκπαίδευσης απάντησαν θετικά στο ερώτημα ότι το σχήμα του Διαγράμματος 4.2 εκφράζει το κλάσμα $\frac{5}{6}$ (FrD3c)**.** Τα ποσοστά αυτά μειώθηκαν αισθητά (33%, 32% και 32% αντίστοιχα) όταν άλλαξε το σχήμα της μονάδας από κύκλο σε ορθογώνιο (FrD3st, FrD4a). Αυτό πιθανώς να οφείλεται σε γεωμετρικές παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το σχήμα του κύκλου και στην εξοικείωση που έχουν με το σχήμα του ορθογωνίου.



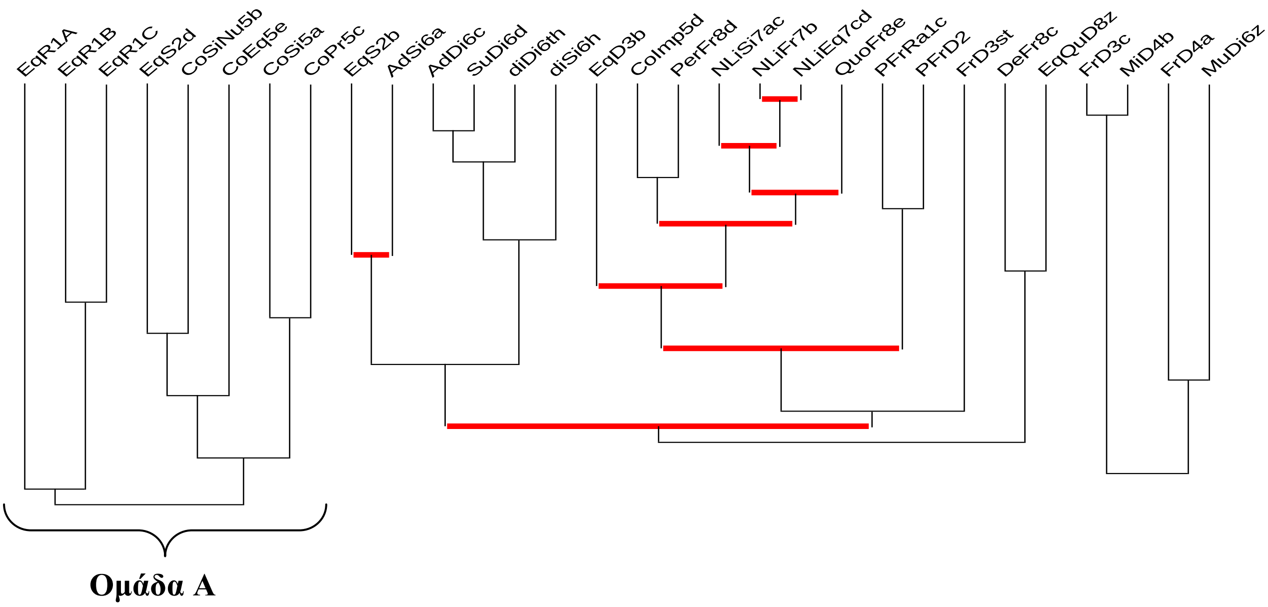
Διάγραμμα 4.2. Εκφράζει το σχήμα το κλάσμα 5/6;

Αναφορικά με την αναγνώριση της έννοιας των κλασμάτων όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία διαφορετικών ερμηνειών, παρατηρούμε ότι το μοντέλο του ποσοστού δυσκολεύει αρκετά και τις τρεις βαθμίδες, αφού στο ερώτημα αν είναι σωστή η ισότητα 70% $= \frac{7}{10}$ απάντησαν σωστά λιγότεροι από τους μισούς μαθητές (PerFr8d, EqS2d). Στο μοντέλο του κλάσματος ως δεκαδικός (DeFr8c) παρατηρούμε υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας κα στις δύο βαθμίδες (75% και 78% αντίστοιχα). Αυτή η έλλειψη διαφοροποίησης παρατηρείται και στο μοντέλο του κλάσματος ως λόγος. Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του κλάσματος ως πηλίκο οι μαθητές της Α/θμιας εκπαίδευσης δεν αναγνωρίζουν το μοντέλο αυτό σε ποσοστό 44%, κάτι που όμως φαίνεται να βελτιώνεται κατά το πέρασμά τους στη Β/θμια εκπαίδευση.

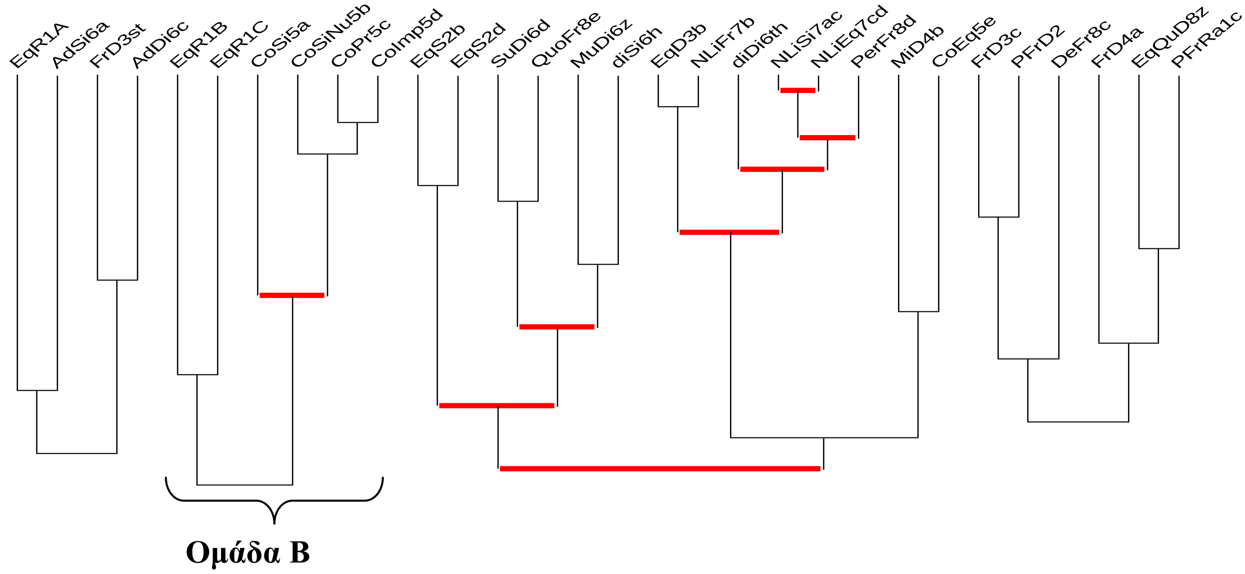
Συζήτηση Αποτελεσμάτων στα Διαγράμματα Ομοιότητας

Τα διαγράμματα ομοιότητας (Διάγραμμα 4.3 και Διάγραμμα 4.4) παρουσιάζουν τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους. Οι συνδέσεις με την κόκκινη γραμμή ισχύουν σε σημαντικότητα σχεδόν 100% επιτρέποντας ασφαλείς γενικεύσεις. Βάσει αυτών των διαγραμμάτων μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής.

Η πιο ισχυρή σχέση ομοιότητας που πλησιάζει το 1 παρατηρείται μεταξύ των μεταβλητών NLiFr7b και NLiEq7cd στην Α/θμια εκπαίδευση και μεταξύ των μεταβλητών NLiSi7ac και NLiEq7cd στην Β/θμια εκπαίδευση. Οι συνδέσεις αυτές ερμηνεύονται από το γεγονός ότι και οι τρεις αυτές μεταβλητές αφορούν στην τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή. Επιπρόσθετα, και οι τρεις αυτές μεταβλητές δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές όπως φαίνεται και από τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας που συγκέντρωσαν στον Πίνακα 4.1.



Διάγραμμα 4.3. Διάγραμμα ομοιότητας απαντήσεων μαθητών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης.



Διάγραμμα 4.4. Διάγραμμα ομοιότητας απαντήσεων μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Επίσης, παρατηρούμε σύνδεση αυτών των τριών μεταβλητών με τη QuoFr8e και όλων αυτών των μεταβλητών με την PerFr8d για την Α/θμια και με τη PerFr8d για τη Β/θμια εκπαίδευση, μεταβλητές που έχουν να κάνουν με την αναγνώριση του κλάσματος από άλλες ερμηνείες, όπως πηλίκο, δεκαδικό και ποσοστό. Η σύνδεση αυτή μπορεί να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι όλες αυτές οι μεταβλητές και αυτές που αφορούν στην τοποθέτηση κλάσματος στην αριθμογραμμή απαιτούν για την επίλυσή τους την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας των κλασμάτων σε διάφορα πεδία αναπαράστασης.

Μία άλλη ισχυρή σύνδεση ομοιότητας που πλησιάζει το 1 είναι αυτή μεταξύ των μεταβλητών FrD3c και MiD4b για την Α/θμια εκπαίδευση που έχει να κάνει με την αναγνώριση κλάσματος από σχεδιάγραμμα. Οι μαθητές του δημοτικού, δηλαδή, που είχαν ξεκάθαρη την έννοια των ίσων μερών της μονάδας μπόρεσαν να αναγνωρίσουν διαγραμματικά και το κλάσμα που είναι μεγαλύτερο της μονάδας, δηλαδή, το καταχρηστικό κλάσμα. Αυτό δείχνει ότι και οι δύο αυτές ασκήσεις απαιτούσαν ουσιαστική κατανόηση της γραφικής αναπαράστασης του κλάσματος και όχι μηχανιστική, που όπως φάνηκε, λίγοι μαθητές την κατείχαν βάσει των υπερβολικά χαμηλών ποσοστών επιτυχίας (τα πιο χαμηλά όλου του δοκιμίου) που συγκέντρωσαν αυτές οι ασκήσεις στον πίνακα ποσοστών επιτυχίας (Πίνακας 4.1). Για το λόγο αυτό και οι μεταβλητές αυτές δε συνδέονται μεταξύ τους στο διάγραμμα στη Β/θμια εκπαίδευση που συγκέντρωσε το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας από την Α/θμια εκπαίδευση.

Στο τρίτο επίπεδο του διαγράμματος της Α/θμιας εκπαίδευσης παρατηρούμε μια άλλη σύνδεση που πάλι πλησιάζει το 1 μεταξύ των μεταβλητών AdDi6c και SuDi6d, που αυτές συνδέονται με την diDi6th και όλες μαζί με την diSi6h. Το στοιχείο ομοιότητας που χαρακτηρίζει αυτή την ομάδα μεταβλητών είναι ότι όλες αναφέρονται σε πράξεις ετερώνυμων κλασμάτων που για τη λύση τους οι μαθητές έπρεπε να τα μετατρέψουν σε ομώνυμα, ενέργεια που τους δυσκόλεψε αρκετά, αφού τα ποσοστά επιτυχίας ήταν κάτω από τη βάση. Όλες οι ασκήσεις, δηλαδή, απαιτούσαν την ικανότητα μετατροπής των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα. Ωστόσο, οι αντίστοιχες μεταβλητές στο διάγραμμα της Β/θμιας δε συνδέονται μεταξύ τους. Αυτή η απόκλιση ομοιότητας που παρατηρείται στο διάγραμμα της Β/θμιας οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές της Β/θμιας αντιμετωπίζουν λιγότερες δυσκολίες στις πράξεις ετερώνυμων κλασμάτων, όπως έδειξαν τα ποσοστά επιτυχίας του Πίνακα 4.1.

Τέλος, μία μεγάλη ομάδα ομοιότητας και για τις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης αποτέλεσαν οι μεταβλητές EqR1A, EqR1B, EqR1C, CoSi5a, CoSiNu5b, CoPr5c, CoImp5d, CoEq5e που στο διάγραμμα της Α/θμιας είναι η ομάδα Α και στο διάγραμμα της Β/θμιας η ομάδα Β. Πρόκειται για μεταβλητές που αφορούν στη σύγκριση κλασμάτων. Για να μπορέσουν, δηλαδή, οι μαθητές να λύσουν αυτά τα έργα θα πρέπει να κατέχουν τις έννοιες της σειροθέτησης και του μεγέθους του κλάσματος, έννοιες που δε φαίνονται να αλλάζουν ιδιαίτερα στις αντιλήψεις των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από την Α/θμια στη Β/θμια εκπαίδευση.

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας και των ποσοστών επιτυχίας του δείγματός μας, φαίνεται ότι οι μαθητές και των δύο πρώτων βαθμίδων εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες στα κλάσματα, κάτι που ενισχύει και την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την ισοδυναμία κλασμάτων σε συμβολικό επίπεδο, κάτι που όμως βελτιώνεται κατά τη μετάβασή τους από την Α/θμιας στην Β/θμια εκπαίδευση. Ωστόσο, μεγαλύτερη δυσκολία φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον εντοπισμό της ισοδυναμίας μέσα από σχεδιάγραμμα, δυσκολία που εμμένει και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης, χωρίς να παρατηρείται κάποια αξιοσημείωτη βελτίωση στην κατανόηση της έννοιας από την Α/θμια στη Β/θμια εκπαίδευση.

Στην πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων σε συμβολικό επίπεδο η δυσκολία εντοπίζεται μόνο στην Α/θμιας εκπαίδευση, καθώς αυτή η δυσκολία εξαλείφεται σταδιακά και ικανοποιητικά στη Β/θμια εκπαίδευση. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων με σχεδιάγραμμα, όπου δυσκολίες αντιμετωπίζουν και οι δύο βαθμίδες εκπαίδευσης αποδεικνύοντας έτσι το μηχανιστικό τρόπο με τον οποίο οι μαθητές εκτελούν τις πράξεις των κλασμάτων.

Οι μαθητές της Α/θμιας και Β/θμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν λιγότερες δυσκολίες στην εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού σε συμβολικό επίπεδο σε σχέση με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι μαθητές της Α/θμιας και Β/θμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν το κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς αριθμούς και αυτό τους βοηθάει στην εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού.

Και οι δύο βαθμίδες εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στη διαίρεση κλασμάτων και ιδιαίτερα στη διαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων. Η δυσκολία αυτή ενισχύεται πέρα από την ίδια τη φύση των κλασμάτων και στον αλγόριθμο της διαίρεσης που δυσκολεύει τους μαθητές.

Και οι δύο βαθμίδες εκπαίδευσης παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στο να τοποθετήσουν κλάσματα στην αριθμογραμμή, δυσκολία που εντείνεται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα.

Αναφορικά με τη σύγκριση κλασμάτων παρατηρούμε ότι όλοι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες. Οι δυσκολίες αυτές αυξάνονται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα ή καταχρηστικά. Αξιοσημείωτο είναι ότι στη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων η δυσκολία όχι μόνο δε βελτιώνεται κατά το πέρασμα των μαθητών της Α/θμιας στην επόμενη βαθμίδες (Β/θμια), αλλά αντίθετα εντείνεται.

Οι μαθητές της Α/θμιας και της Β/θμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη. Αξιοσημείωτο είναι ότι η δυσκολία αυτή μειώνεται όταν αλλάζει το σχήμα της μονάδας από κύκλο σε ορθογώνιο λόγω γεωμετρικών δυσκολιών που έχουν οι μαθητές σε σχέση με το σχήμα του κύκλου και στην εξοικείωση που έχουν με το σχήμα του ορθογωνίου.

Αναφορικά με την αναγνώριση της έννοιας των κλασμάτων, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών ερμηνειών, το μοντέλο του ποσοστού, του δεκαδικού και το μοντέλο του κλάσματος ως λόγος δυσκολεύει αρκετά και τις δύο βαθμίδες. Αυτό δείχνει πως οι αντιλήψεις για αυτές τις ερμηνείες του κλάσματος παραμένουν σταθερά στα γνωστικά σχήματα των μαθητών από το δημοτικό μέχρι και το λύκειο. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο στην περίπτωση του κλάσματος ως πηλίκο όπου η δυσκολία εντοπίζεται στους μαθητές της Α/θμιας εκπαίδευσης κάτι που όμως βελτιώνεται σταδιακά κατά το πέρασμά τους από τις βαθμίδες της Β/θμιας.

Γενικά, οι δυσκολίες των μαθητών που εμμένουν μέχρι και την Β/θμια εκπαίδευση εντοπίζονται α) στην αναγνώριση της ισοδυναμίας από σχεδιάγραμμα, β) στη διαγραμματική απεικόνιση των πράξεων κλασμάτων, γ) στη διαίρεση κλασμάτων, δ) στην τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή, ε) στη σύγκριση κλασμάτων στ) στην κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, ζ) στην αναγνώριση των καταχρηστικών κλασμάτων και η) στην αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος ως ποσοστού, δεκαδικού και λόγου.

Εν κατακλείδι, οι δυσκολίες αυτές που αναδείχθηκαν τόσο μέσα από τη βιβλιογραφία όσο και μέσα από την έρευνά μας θα μελετηθούν ώστε να βρεθούν οι αιτίες που παραμένουν αυτές οι δυσκολίες τόσο πολύ στα γνωστικά σχήματα των μαθητών και να μειωθούν με τις κατάλληλες διδακτικές μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ, ΤΗΣ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα έρευνας που αφορούν στην ανάδειξη γνωστικών δικτύων πάνω στους ρητούς αριθμούς κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Η ανάδειξη των γνωστικών αυτών δικτύων στοχεύει στην καλύτερη αντιμετώπιση των δυσκολιών που οι μαθητές παρουσιάζουν στους ρητούς και στο σχεδιασμό του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος της παρούσας διατριβής. Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα έχει εστιάσει τα ευρήματά της πάνω στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, στη σειροθέτηση των κλασμάτων πάνω στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν μια κοινή λαθεμένη αντιμετώπιση των μαθητών στο χωρισμό της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη τόσο κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο όσο και από Γυμνάσιο στο Λύκειο. Επιπλέον, η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος φαίνεται να συνδέεται κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο με σύνθετες έννοιες όπως του άπειρου και της αριθμογραμμής κάτι που μειώνεται κατά τη μετάβασή των μαθητών από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Στη βιβλιογραφία υπάρχει μια πληθώρα ερευνών που έχουν γίνει με σκοπό να εντοπιστούν και να ομαδοποιηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές πάνω στους ρητούς. Ωστόσο, δεν έχουν γίνει έρευνες στην Ελλάδα για να διαπιστωθούν οι πιθανές συγκλίσεις και αποκλίσεις που παρουσιάζουν οι μαθητές πάνω σε βασικές έννοιες των ρητών κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, προκειμένου να εντοπιστούν οι αιτίες που δημιουργούν αυτές τις παρανοήσεις και να δημιουργηθούν κατάλληλες πρακτικές για την επίλυσή τους.

Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία, οι δυσκολίες των μαθητών στους ρητούς οφείλονται πιθανά στην ακατάλληλη μέθοδο της διδασκαλίας τους στην τάξη (Lo, 1993). Την ίδια άποψη υποστηρίζει και ο Streefland (1991) προσθέτοντας ότι η αποτυχία στη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος οφείλεται στην πολυπλοκότητα της έννοιας και στην παραδοσιακή προσέγγιση στα κλάσματα, η οποία είναι τυπική και μηχανική από την αρχή

(Sfard, 1991), ενώ ο Janvier (1987) αναφέρει τη σημαντικότητα των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπιση των δυσκολιών στους ρητούς, στη διεθνή βιβλιογραφία παρατηρήθηκε ότι υπάρχουν ελάχιστες διδακτικές προσεγγίσεις και προτάσεις που έχουν γίνει από τους ερευνητές για τον τρόπο που μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίσουν διδακτικά και όχι μόνο αυτές τις δυσκολίες (Avgerinos &Vlachou, 2012).

Πιο συγκεκριμένα, όσο αφορά την αριθμογραμμή οι Brousseau et. al. (2007) πραγματοποίησαν μια σειρά παρεμβάσεων με στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές μέρα με την ημέρα στο να εφεύρουν, να κατανοούν και να γίνουν πολύ καλοί με όλες τις πτυχές των δύο βασικών μαθηματικών δομών, των ρητών και των δεκαδικών αριθμών. Μια άλλη ερευνητική πρόταση για την αριθμογραμμή είναι αυτή των Sedig & Sumner (2006) οι οποίοι αναφέρονται στη σημαντικότητα των οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και στη χρήση ψηφιακών εργαλείων που τις διευκολύνουν όπως της εστίασης (zoom) στην αριθμογραμμή.

Αναφορικά με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, στην έρευνά τους οι Olive &Vomvoridi (2006) προτείνουν να αποφεύγονται λαθεμένες αναπαραστάσεις από τους εκπαιδευτικούς, όπου δεν τηρείται συχνά η διαίρεση της μονάδας σε ίσα μέρη κάτι που μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην πεποίθηση της μη αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Σχετικά με τα καταχρηστικά κλάσματα ο Hackenberg (2007) για την προσέγγιση της έννοιας χρησιμοποίησε το λογισμικό JavaBars, σημειώνοντας τη σημασία που έχει η ικανότητα κατασκευής καταχρηστικών κλασμάτων για την τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή, για την κατασκευή κλασματικών αριθμών που ανοίγουν το δρόμο για την ανάπτυξη μιας αίσθησης συνεκτικότητας και συνέχειας των αριθμών.

Επιπρόσθετα, οι Avgerinos και Vlachou (2012, 2018) παρουσίασαν στις έρευνές τους διδακτικές προσεγγίσεις για τις υπό εξέταση έννοιες με τη χρήση βιωματικών και εικονικών αναπαραστάσεων με σκοπό να δώσουν προτάσεις διδακτικές για την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών σε αυτές τις έννοιες. Τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών μετά από τις διδακτικές προσεγγίσεις, γεγονός που αφενός επιβεβαιώνει τις απόψεις των Janvier (1987), Lo (1993) και Streefland (1991) για τη σημασία που έχει ο τρόπος διδασκαλίας στην εμμονή των δυσκολιών στα κλάσματα και αφετέρου επιβάλλει την οργάνωση των γνωστικών δικτύων στους ρητούς για την εύρεση ουσιαστικών λύσεων στις δυσκολίες των μαθητών.

Σκοπός της Έρευνας

Η παρούσα έρευνα σκοπό έχει να αναδείξει την πορεία των αντιλήψεων που διαμορφώνουν οι μαθητές πάνω στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο υπό τη μορφή γνωστικών δικτύων. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι οι εξής:

- Να διερευνηθούν συγκριτικά οι συγκλίσεις και οι αποκλίσεις στις αντιλήψεις των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο για τις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.
- Να διερευνηθούν συγκριτικά οι συγκλίσεις και οι αποκλίσεις στις αντιλήψεις των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο για τις παραπάνω έννοιες.

Το Δείγμα

Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν 340 μαθητές του δημοτικού, του γυμνασίου και της Α΄ λυκείου από σχολεία της πρωτεύουσας και της επαρχίας, του δημόσιου και ιδιωτικού τομέα.

Εργαλεία της Έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε δοκίμιο (Παράρτημα 4), το οποίο καταρτίστηκε από την ερευνήτρια, για την εξέταση των αντιλήψεων και των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Το δοκίμιο περιλάμβανε 7 ασκήσεις και δημιουργήθηκαν 38 διαφορετικές μεταβλητές. Για τη βαθμολόγηση των έργων του δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα 0-1. Τα έργα βαθμολογήθηκαν με 0 (μηδέν) αν ήταν λαθεμένα η δεν είχαν συμπληρωθεί καθόλου και με 1 (ένα) αν τα έργα ήταν σωστά.

Μεταβλητές της Έρευνας

Οι 38 μεταβλητές της έρευνας ορίστηκαν ως συνδυασμός γραμμάτων κι ενός αριθμού. Τα γράμματα δηλώνουν τα αρχικά της έννοιας που εξετάζεται. Για παράδειγμα, η μεταβλητή FD2b αποτελείται από τα αρχικά της πρότασης Fraction Diagram, γιατί εξετάζεται η εύρεση κλάσματος από διάγραμμα και ο αριθμός 2b δηλώνει το ερώτημα του δοκιμίου (πρόκειται για το υποερώτημα b του ερωτήματος 2).

Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του Gras (SIA-Statistical Implicative Analysis) με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996) και το πρόγραμμα Microsoft Excel. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων παρουσιάζεται στην παρούσα έρευνα με το διάγραμμα ομοιότητας, στο οποίο οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που παρουσιάζουν. Μεταβλητές κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρνονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Αποτελέσματα

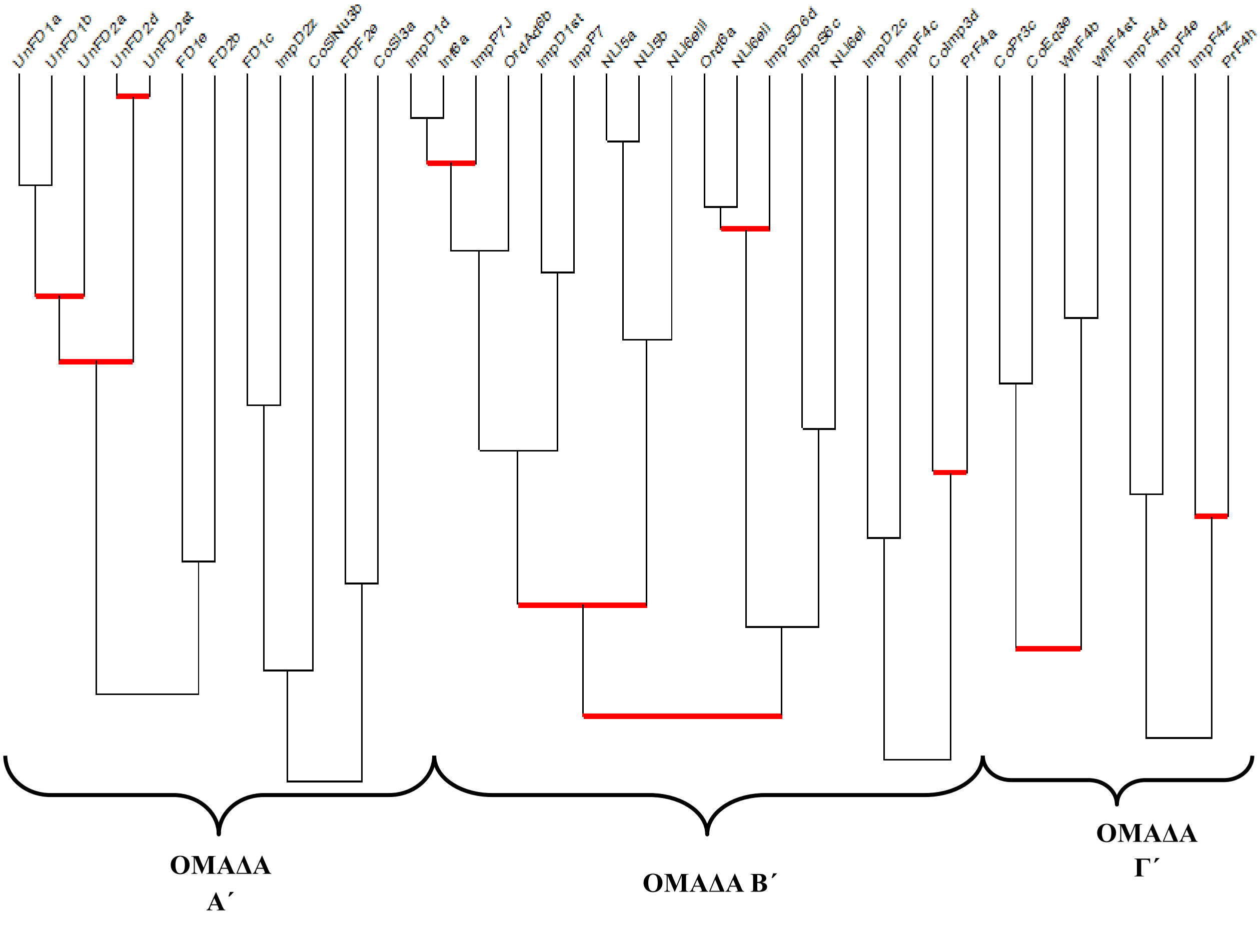
Παρατηρήσεις στα διαγράμματα ομοιότητας

Οι συγκριτική διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών στους ρητούς κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο έγινε με τη χρήση των διαγραμμάτων ομοιότητας. Τα διαγράμματα ομοιότητας (Διάγραμμα 5.1, Διάγραμμα 5.2 και Διάγραμμα 5.3) παρουσιάζουν τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους. Οι μεταβλητές που ενώνονται μεταξύ τους με κόκκινη γραμμή ισχύουν σε σημαντικότητα σχεδόν 100% επιτρέποντας ασφαλείς γενικεύσεις.

Στο Διάγραμμα 5.1, που απεικονίζονται οι σχέσεις ομοιότητας σε έργα που έλυσαν οι μαθητές του Δημοτικού, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται τρεις μεγάλες ομάδες, η ομάδα Α΄, η ομάδα Β΄ και η ομάδα Γ΄. Από την Α΄ ομάδα οι στατιστικά σημαντικές σχέσεις ομοιότητας είναι αυτές που αναφέρονται σε έργα στα οποία η κλασματική μονάδα παρουσιάζεται με διαγραμματική αναπαράσταση και δεν είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη. Όλες αυτές οι μεταβλητές σχηματίζουν μια υποομάδα ((((UnFD1aUnFD1b) UnFD2a) (UnFD2dUnFD2st)). Στα συγκεκριμένα έργα, δηλαδή, οι μαθητές δεν έλαβαν υπόψη τους το γεγονός ότι η κλασματική μονάδα θα πρέπει να είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη. Η συγκεκριμένη αντιμετώπιση από τους μαθητές σε αυτά τα έργα συνάδει και με τα βιβλιογραφικά ευρήματα σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται να καταλάβουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη.

Συγκρίνοντας το εύρημα αυτό με το Διάγραμμα 5.2, που αναφέρεται στους μαθητές του Γυμνασίου, παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω μεταβλητές, που αναπαριστούν κλασματικές μονάδες που δεν είναι χωρισμένες σε ίσα μέρη, σχηματίζουν και πάλι μια υποομάδα της ομάδας Α΄, στατιστικά σημαντική. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι αντιλήψεις των μαθητές αναφορικά με το χωρισμό της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο δεν αλλάζουν σημαντικά.

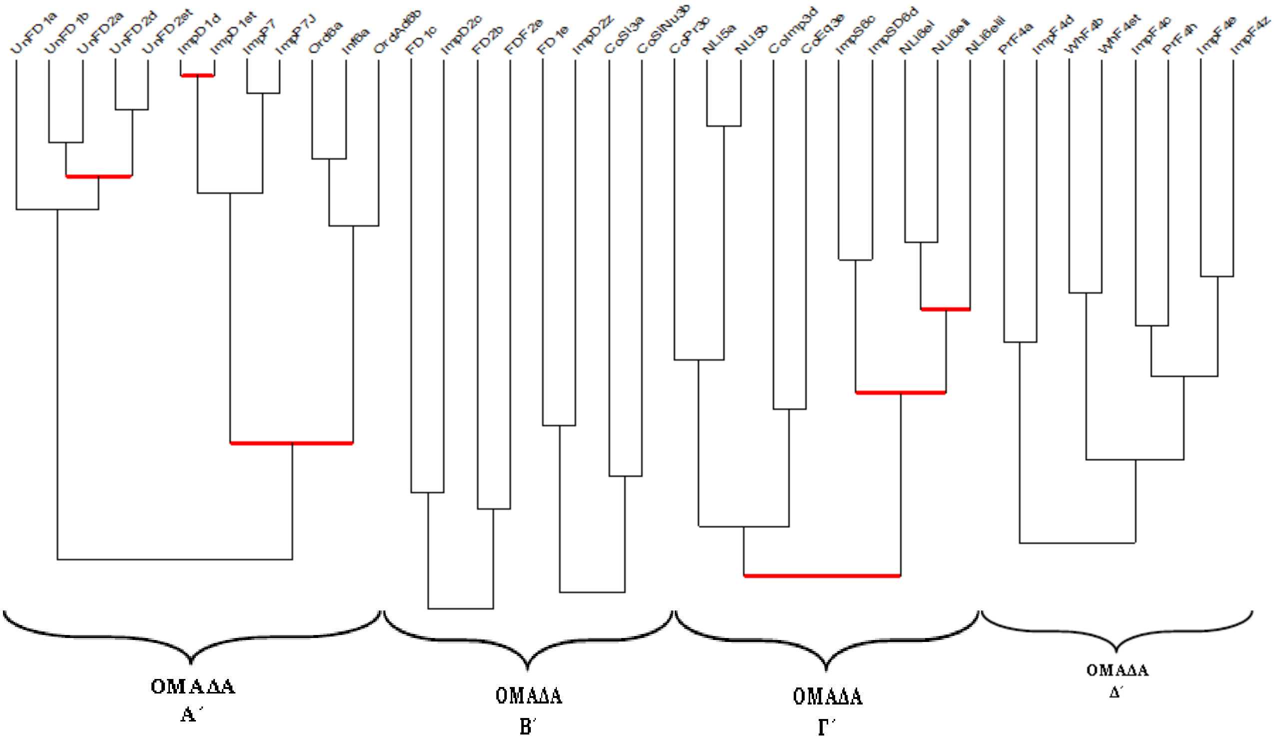
Επεκτείνοντας τη σύγκριση αυτή και στη μετάβαση των μαθητών από το Γυμνάσιο στο Λύκειο παρατηρούμε ότι για την ίδια έννοια και στο Διάγραμμα 5.3, το οποίο παρουσιάζει έργα που λύθηκαν από μαθητές Λυκείου, έχει σχηματιστεί μια υποομάδα με λιγότερο ισχυρή ομοιότητα όμως. Οι μαθητές, δηλαδή, και στο Λύκειο δεν έχουν εμπεδώσει την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη.



Διάγραμμα 5.1. Διάγραμμα ομοιότητας με τις απαντήσεις των μαθητών του Δημοτικού.

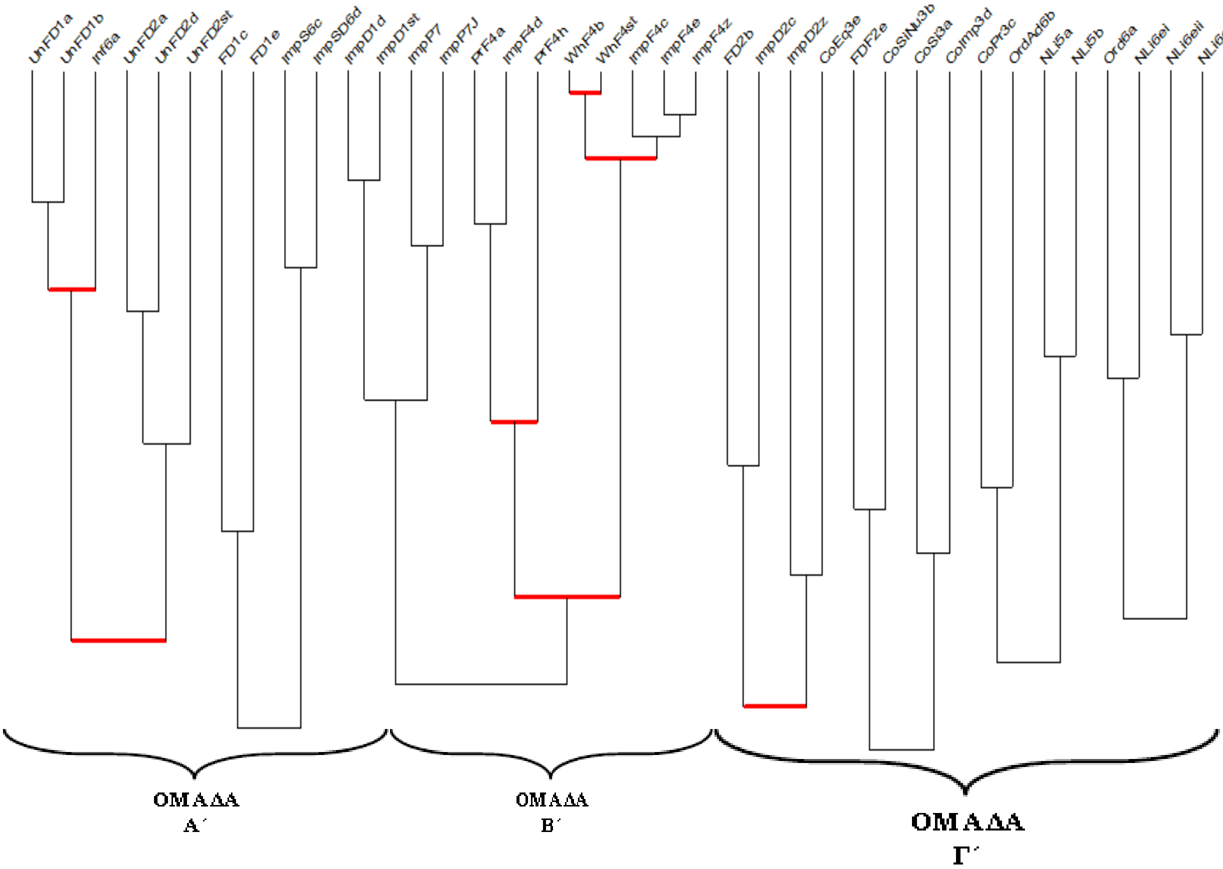
Ωστόσο, το ποσοστό των μαθητών του Λυκείου που έχει αυτή τη λάθος αντίληψη είναι συγκριτικά με το Γυμνάσιο μικρότερο.

Από την Β΄ ομάδα του Διαγράμματος 5.1, που αφορά στους μαθητές του Δημοτικού, οι στατιστικά σημαντικές σχέσεις ομοιότητας είναι αυτές που αναφέρονται στα καταχρηστικά κλάσματα και στην έννοια της ύπαρξης άπειρων κλασμάτων μεταξύ δύο κλασμάτων ((ImpD1d, Inf6a) ImpP7J). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που μπόρεσαν να εξηγήσουν σωστά τη διαγραμματική αναπαράσταση των καταχρηστικών κλασμάτων (ImpP7J) μπόρεσαν να αναγνωρίσουν και το καταχρηστικό κλάσμα από διάγραμμα (ImpD1d) και γνώριζαν ότι μεταξύ δύο κλασμάτων υπάρχουν άπειρα κλάσματα (Inf6a). Σημαντικό επίσης είναι ότι η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος συνδέεται πέρα από την έννοια του άπειρου και με τη σειροθέτηση των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή (((((ImpD1dInf6a) ImpP7J) OrdAd6b) (ImpD1stImpP7)) ((NLi5aNLi5b) NLi6eiii)), όπως φαίνεται σε όλη την έκταση της ομάδας Β΄ που περιλαμβάνει μεταβλητές που αφορούν καταχρηστικά κλάσματα και αριθμογραμμή.



Διάγραμμα 5.2. Διάγραμμα ομοιότητας με τις απαντήσεις των μαθητών του Γυμνασίου.

Παρατηρώντας το διάγραμμα ομοιότητας του Γυμνασίου (Διάγραμμα 5.2) διαπιστώνουμε ότι η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος συνδέεται και πάλι με την κατανόηση της ύπαρξης άπειρων κλασμάτων (((ImpD1dImpD1st) (ImpP7 ImpP7J)) ((Ord6aInf6a) OrdAd6b)), καθώς και με την έννοια της σειροθέτησης των κλασμάτων στην αριθμογραμμή ((ImpS6cImpSD6d) ((NLi6eiNLi6eii) NLi6eiii)), αλλά οι ομοιότητες αυτές παρουσιάζουν μικρότερη στατιστική σημαντικότητα από τις ομοιότητες του διαγράμματος του Δημοτικού. Η στατιστική σημαντικότητα μειώνεται ακόμη περισσότερο στο διάγραμμα του Λυκείου (Διάγραμμα 5.3) όπου οι μεταβλητές των καταχρηστικών κλασμάτων αποτελούν μια ομάδα μόνες τους (ομάδα Β΄) και οι μεταβλητές της σειροθέτησης της αριθμογραμμής επίσης μια ομάδα (ομάδα Γ΄), χωρίς να υπάρχει καμιά σύνδεση ομοιότητας μεταξύ τους.



Διάγραμμα 5.3. Διάγραμμα ομοιότητας με τις απαντήσεις των μαθητών του Λυκείου.

Οι μαθητές, δηλαδή, κατά τη μετάβασή τους στο Λύκειο αυξάνουν τις επιδόσεις τους στα έργα που αφορούν στα καταχρηστικά κλάσματα και στη σειροθέτηση κλασμάτων, αλλά δεν τα συνδέουν μεταξύ τους όπως συμβαίνει κατά τη μετάβαση στο Γυμνάσιο. Επιπλέον, παρατηρείται μια σταδιακή μείωση στο ποσοστό επιτυχίας στα έργα που αφορούν στον ορισμό του καταχρηστικού κλάσματος (((PrF4aImpF4d) PrF4h) ((WhF4bWhF4st) (ImpF4c (ImpF4eImpF4z)))), που από 95% που είναι στο Δημοτικό μειώνεται σταδιακά στο 82% στο Γυμνάσιο και στο 60% στο Λύκειο.

Συμπεράσματα

Στην έρευνα αυτή παρουσιάστηκαν συγκριτικά τα δίκτυα που σχηματίζονται στις αντιλήψεις των μαθητών για τα κλάσματα κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο

Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Οι αντιλήψεις αυτές αφορούσαν στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και στη σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν και αναδείχθηκαν μέσα από τις αναλύσεις των διαγραμμάτων ομοιότητας διαπιστώθηκε ότι η επίλυση έργων που σχετίζονται με την έννοια των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας αντιμετωπίζεται με τον ίδιο λαθεμένο τρόπο τόσο κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο όσο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.

Όσον αφορά την επίλυση έργων που σχετίζονται με την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων αυτή συνεπάγεται και την ικανότητα των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο να αντιλαμβάνονται την έννοια των άπειρων κλασμάτων μεταξύ δύο κλασμάτων, καθώς και την ικανότητα να σειροθετούν κλάσματα.

Το παραπάνω εύρημα δεν ισχύει κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, όπου η επίλυση έργων που σχετίζονται με καταχρηστικά κλάσματα και σειροθέτηση κλασμάτων δεν ενώνονται με σχέσεις ομοιότητας, ενώ η έννοια των άπειρων κλασμάτων συνδέεται με το χωρισμό της μονάδας σε ίσα μέρη ((UnFD1aUnFD1b) Inf6a).

Μέσα από αυτήν την έρευνα, λοιπόν, επιβεβαιώθηκαν κάποια ευρήματα από τη βιβλιογραφία, όπως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις υπό εξέταση έννοιες, αλλά βρέθηκαν και νέα ευρήματα όπως η συνεπαγωγή που διαμορφώθηκε ανάμεσα στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος και της έννοιας του απείρου και της αριθμογραμμής. Τα πορίσματα αυτά, όπως και τα πορίσματα του 4ου κεφαλαίου αποτελούν δύο από τους τέσσερις πυλώνες των ευρημάτων πάνω στους οποίους σχεδιάστηκε το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα.

Β΄ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΓΙΑΤΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Το δεύτερο ερευνητικό μέρος αποτελείται από τα κεφάλαια 6 και 7 και στόχο έχει να εντοπίσει τις αιτίες και τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές της ελληνικής εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες που αναδείχθηκαν στο Α΄ ερευνητικό μέρος της παρούσας διατριβής. Δίνεται έμφαση στις αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων πάνω στους ρητούς αριθμούς (κεφάλαιο 6) και στη δομή και το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού (κεφάλαιο 7). Κατά την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων αναλύεται το περιεχόμενο που αφορά στα καταχρηστικά κλάσματα, στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και στην αριθμογραμμή ως αναπαράσταση κλασματικών αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Το κεφάλαιο αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που έχουν αποδώσει κάποιοι ερευνητές μεταξύ των δυσκολιών στην κατανόηση των κλασμάτων και του τρόπου διδασκαλίας τους, παρουσιάζει τα αποτελέσματα έρευνας που έγινε σε υποψήφιους δασκάλους με σκοπό να διερευνηθούν οι αντιλήψεις που έχουν οι μελλοντικοί δάσκαλοι πάνω στις έννοιες της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καθώς και στις έννοιες του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες πάνω στις έννοιες αυτές.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Στη βιβλιογραφία υπάρχει μια πληθώρα ερευνών που έχουν γίνει με σκοπό να εντοπιστούν και να ομαδοποιηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές πάνω στην πολυσυζητημένη έννοια των κλασμάτων και πιο συγκεκριμένα στις έννοιες της τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή και στις έννοιες του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων.

Όλες αυτές δυσκολίες που έχουν αναδυθεί από διάφορες έρευνες έχουν αποδοθεί σε ποικίλους παράγοντες. Σύμφωνα με τον Janvier (1987), τα περισσότερα σχολικά βιβλία σήμερα περιλαμβάνουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων με σκοπό να προωθήσουν την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων. Ωστόσο, ο Lo (1993) σε έρευνά του αποδίδει τις δυσκολίες που υπάρχουν στην αντίληψη των κλασμάτων και των αναλογιών πιθανά στην ακατάλληλη μέθοδο της διδασκαλίας τους στην τάξη. Την ίδια άποψη υποστηρίζει και ο Streefland (1991) προσθέτοντας ότι η αποτυχία στη διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος οφείλεται στην πολυπλοκότητα της έννοιας και στην παραδοσιακή προσέγγιση στα κλάσματα, η οποία είναι τυπική και μηχανική από την αρχή (Sfard, 1991).

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι υπάρχει μια κοινή συνιστώσα στην άποψη ότι ο τρόπος διδασκαλίας είναι ένας βασικός παράγοντας που επηρεάζει την μετέπειτα εξέλιξη της κατανόησης του κλάσματος από τους μαθητές. Είναι πολύ σημαντικό, λοιπόν, να δούμε ποιες είναι οι αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων πάνω στις έννοιες των κλασμάτων, αφού δεν μπορεί να διδαχθεί μια έννοια σωστά εάν δεν την κατέχει κάποιος σε βάθος. Αν, δηλαδή, υπάρχουν στους υποψήφιους δασκάλους παρανοήσεις πάνω στα κλάσματα, αυτό θα επηρεάσει τη διδακτική διαδικασία και οι παρανοήσεις αυτές θα μεταδοθούν και στους μαθητές, όταν θα φτάσει ο καιρός να μπουν στην τάξη και να διδάξουν.

Σκοπός της Έρευνας

Η παρούσα έρευνα, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που έχουν αποδώσει οι διάφοροι ερευνητές στον τρόπο διδασκαλίας και στις δυσκολίες των μαθητών πάνω στην έννοια των κλασμάτων, σκοπό έχει να ελέγξει τις αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων πάνω σε διάφορες έννοιες των κλασμάτων, αφού αυτοί είναι που θα κληθούν να διδάξουν στους μαθητές τα κλάσματα και η επιτυχία ή αποτυχία της διδασκαλίας θα εξαρτηθεί και από τις αντιλήψεις που έχουν αυτοί για τα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι οι εξής:

- Να εντοπιστούν οι αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων στην έννοια της αριθμογραμμής.
- Να διερευνηθούν οι αντιλήψεις που έχουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι στην έννοια της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας.
- Να εντοπιστούν οι αντιλήψεις που έχουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος.

Το Δείγμα

Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν 900 υποψήφιοι δάσκαλοι/φοιτητές και από τα τέσσερα έτη σπουδών των Παιδαγωγικών Τμημάτων Δημοτικής Εκπαίδευσης από περιφερειακό Πανεπιστημιακό Ίδρυμα της Ελλάδας. Οι υποψήφιοι δάσκαλοι προέρχονται από διάφορα μέρη της Ελλάδας και μετά την αποφοίτησή τους θα κληθούν να διδάξουν σε οποιοδήποτε μέρος της Ελλάδας.

Εργαλεία της Έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε δοκίμιο, το οποίο καταρτίστηκε από την ερευνήτρια, για την εξέταση των αντιλήψεων και των δυσκολιών των υποψήφιων δασκάλων (Παράρτημα 9). Στο δοκίμιο δημιουργήθηκαν 20 διαφορετικές μεταβλητές. Για τη βαθμολόγηση των έργων του δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα 0-1. Τα έργα βαθμολογήθηκαν με 0 (μηδέν) αν ήταν λαθεμένα η δεν είχαν συμπληρωθεί καθόλου και με 1 (ένα) αν τα έργα ήταν σωστά. Το δοκίμιο δόθηκε τις χρονιές 2011, 2012, 2013, 2014 και 2015 προκειμένου να υπάρξει μια διαχρονικότητα στην έρευνα για την σταθεροποίηση των αποτελεσμάτων της.

Μεταβλητές της Έρευνας

Οι 20 μεταβλητές της έρευνας ορίστηκαν ως συνδυασμός γραμμάτων κι ενός αριθμού. Τα γράμματα δηλώνουν τα αρχικά της έννοιας που εξετάζεται. Για παράδειγμα η μεταβλητή NLi6i αποτελείται από τα αρχικά της πρότασης Number Line, γιατί εξετάζεται η τοποθέτηση του κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή και ο αριθμός 6i δηλώνει το ερώτημα του δοκιμίου (πρόκειται για το υποερώτημα i του ερωτήματος 6).

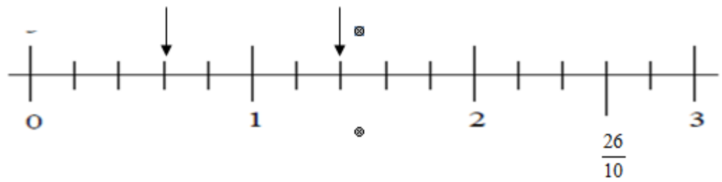
Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του Gras (SIA-Statistical Implicative Analysis) με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996) και το πρόγραμμα Microsoft Excel. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων παρουσιάζεται στην παρούσα έρευνα με το διάγραμμα ομοιότητας, στο οποίο οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που παρουσιάζουν. Μεταβλητές κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρνονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Αποτελέσματα

Παρατηρήσεις στα Ποσοστά Επιτυχίας

Βάσει του Πίνακα 6.1 παρατηρούμε ότι αναφορικά με τη σειροθέτηση των αριθμών, οι φοιτητές παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στο να βρίσκουν ένα κλάσμα μεταξύ δύο κλασμάτων όπως δείχνουν τα χαμηλά ποσοστά των αντίστοιχων μεταβλητών (Ord7z:36%, Ord7h:23%). Τα ποσοστά επιτυχίας αυξάνονται όταν ζητείται να βρεθούν τα κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 6.1), αλλά και αυτά τα ποσοστά (53% και 57%) δείχνουν τη δυσκολία που έχουν οι φοιτητές να τοποθετούν κλάσματα στην αριθμογραμμή, καθώς σχεδόν μόνο οι μισοί φοιτητές κατάφεραν να λύσουν σωστά την άσκηση.



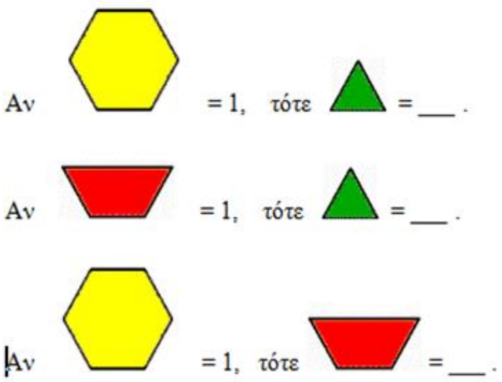
Διάγραμμα 6.1. Άσκηση εύρεσης κλασμάτων στην αριθμογραμμή που σημείωσε χαμηλά ποσοστά επιτυχίας.

Πίνακας 6.1

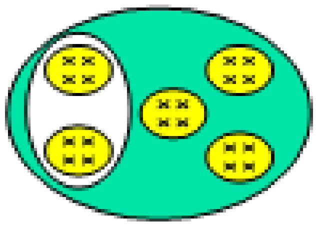
Πίνακας με Δεδομένα Περιγραφικής Στατιστικής των Μεταβλητών που Αφορούν στις Απαντήσεις των Υποψήφιων Δασκάλων

	Occurrences	Moyenne	Ecart types
EqD1a	64.00	0.80	0.40
EqD1b	58.00	0.72	0.45
FrD1c	77.00	0.96	0.19
FrD1d	80.00	1.00	0.00
FrD3a	70.00	0.88	0.33
EqPart3b	0.00	0.00	0.00
EqPart3c	59.00	0.74	0.44
EqPart3d	36.00	0.45	0.50
MxD3e	11.00	0.14	0.34
FrD3st	38.00	0.47	0.50
MxCom4d	50.00	0.63	0.48
NLi6i	42.00	0.53	0.50
NLi6ii	46.00	0.57	0.49
Comb7c	34.00	0.42	0.49
FrD7d	52.00	0.65	0.48
FrD7e	44.00	0.55	0.50
FrD7st	59.00	0.74	0.44
Ord7z	29.00	0.36	0.48
Ord7h	18.00	0.23	0.42
Mix7ic	19.00	0.24	0.43

Σχετικά με την έννοια του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη παρατηρούμε ότι οι φοιτητές δεν αντιμετωπίζουν κανένα πρόβλημα στο να βρουν το κλάσμα που αντιπροσωπεύει ένα σχήμα όταν η μονάδα είναι χωρισμένη σε τόσα ίσα μέρη όσα λέει ο παρονομαστής (FrD1c:96%, FrD1d100%). Κάποιοι φοιτητές αρχίζουν να δυσκολεύονται όταν τα μέρη που είναι χωρισμένη η μονάδα δεν ταυτίζεται με τον παρονομαστή του κλάσματος (EqD1a:80%, EqD1b:72%). Οι δυσκολίες γίνονται πιο εμφανείς όταν το πλαίσιο της ερώτησης φεύγει από τις συμβατικές διατυπώσεις του τύπου «Πόσα είναι σκιασμένα;». Για παράδειγμα, στις ασκήσεις του Διαγράμματος 6.2 τα ποσοστά επιτυχίας έπεσαν μέχρι 55% (FrD7e) και στην άσκηση του Διαγράμματος 6.3 τα ποσοστά μειώθηκαν στο 47% των απαντήσεων(FrD3st).

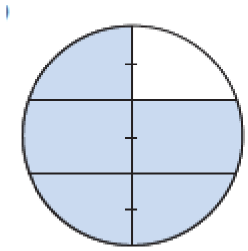


Διάγραμμα 6.2. Άσκηση με μπλοκ μοτίβων που σημείωσε 55% επιτυχία.



Διάγραμμα 6.3. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το σχήμα; Άσκηση που σημείωσε 47% επιτυχία.

Φαίνεται τελικά ότι οι φοιτητές δεν έχουν κατανοήσει τη σημαντικότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη, καθώς ελάχιστοι φοιτητές έδωσαν σωστή απάντηση σε άσκηση αναγνώρισης του κλάσματος από σχήματα που δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη (Διάγραμμα 6.4).

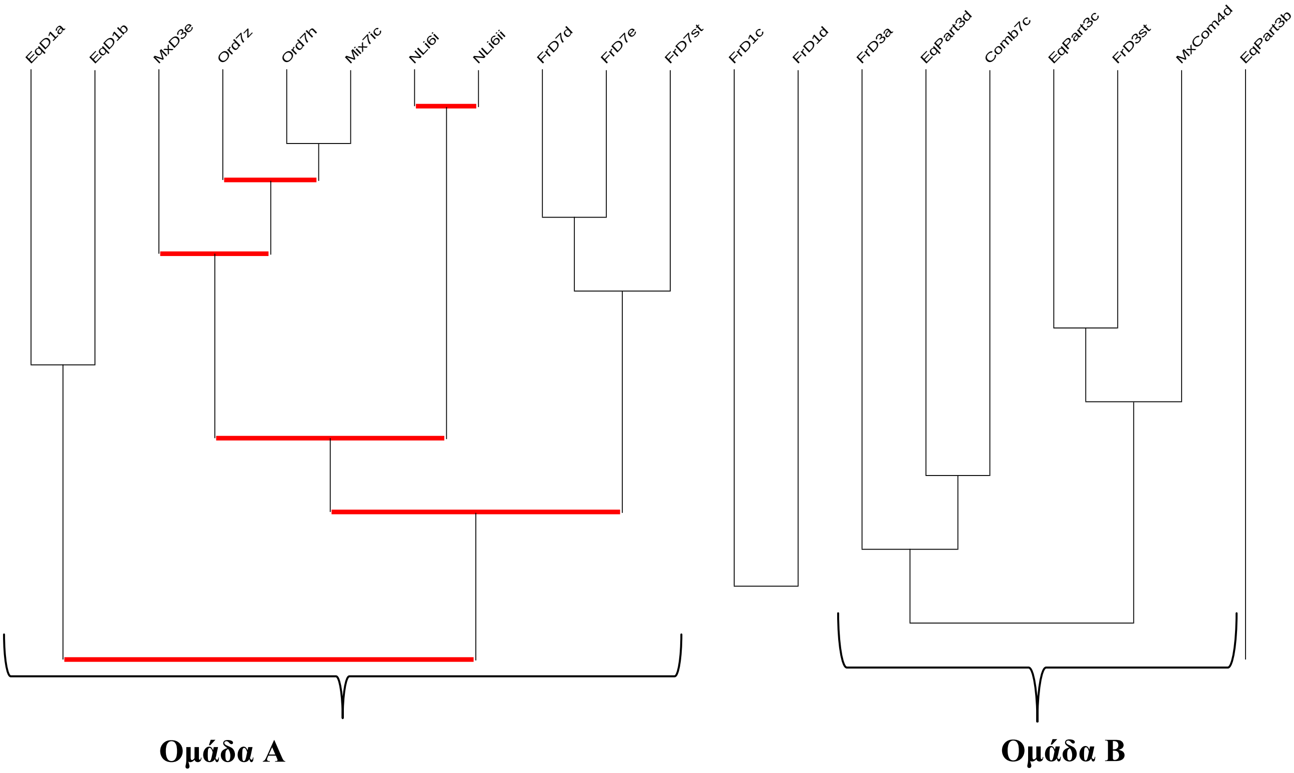


Διάγραμμα 6.4. Άσκηση που το μοντέλο δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη.

Όσον αφορά στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων κι εδώ παρατηρούμε σημαντικές δυσκολίες των φοιτητών στο να αναγνωρίσουν ή να αναπαραστήσουν σχηματικά ένα καταχρηστικό κλάσμα (MxD3e:14%, Mix7ic:24%).

Παρατηρήσεις στο Διάγραμμα Ομοιότητας

Το διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα 6.5) παρουσιάζει τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που ενδεχομένως να έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους. Στο Διάγραμμα 6.5 έχουν σχηματιστεί δύο μεγάλες ομάδες, η ομάδα Α, στην οποία έχουν σχηματιστεί και οι πιο ισχυρές σχέσεις του διαγράμματος και η ομάδα Β. Οι συνδέσεις των μεταβλητών με κόκκινη γραμμή ισχύουν σε σημαντικότητα σχεδόν 100% επιτρέποντας ασφαλείς γενικεύσεις. Βάσει αυτών των διαγραμμάτων μπορούμε να παρατηρήσουμε τα παρακάτω.



Διάγραμμα 6.5. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των υποψήφιων δασκάλων.

Αναφορικά με τις μεταβλητές που αφορούν στη σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, στο διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε ότι σχηματίζεται η πιο ισχυρή σχέση ομοιότητας μεταξύ τους που πλησιάζει το 1 (μεταξύ των μεταβλητών NLi6i και NLi6ii της ομάδας Α). Επίσης, στην ίδια ομάδα έχουμε άλλη μια ισχυρή σχέση που αγγίζει το 1 μεταξύ των μεταβλητών Ord7z, Ord7h οι οποίες αφορούν στην εύρεση κλάσματος μεταξύ δύο άλλων κλασμάτων και της Mix7ic που αφορά στο σχηματισμό αναπαράστασης ενός καταχρηστικού κλάσματος. Φαίνεται, λοιπόν, από τις συνδέσεις αυτές πως τόσο η εύρεση ενός κλάσματος μεταξύ δύο κλασμάτων όσο και ο σχεδιασμός μιας αναπαράστασης για την παρουσίαση ενός καταχρηστικού κλάσματος δυσκόλεψε στον ίδιο βαθμό τους φοιτητές. Αυτό αποδεικνύεται και από τα χαμηλά ποσοστά (36%, 24% και 23% αντίστοιχα, τα χαμηλότερα του δοκιμίου), που πέτυχαν οι φοιτητές σε αυτά τα έργα και από τη σύνδεσή τους με ισχυρή σχέση που αγγίζει το 1.

Όσον αφορά τις μεταβλητές που σχετίζονται με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος (MxD3e, Mx7ic), παρατηρούμε, όπως και παραπάνω, ότι αυτές συνδέονται άμεσα με τις μεταβλητές που αφορούν στην εύρεση ενός κλάσματος μεταξύ δύο άλλων κλασμάτων (Ord7z, Ord7h) και μάλιστα συνδέονται μεταξύ τους με μια σημαντική σχέση. Οι συνδέσεις αυτές δείχνουν στοιχεία ομοιότητας κατά την επίλυσή τους, γεγονός που δείχνει πόσο σημαντικές δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι φοιτητές σε αυτές τις δύο έννοιες (όπως αναφέραμε παραπάνω, πρόκειται για τις 4 μεταβλητές που συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στο δοκίμιο).

Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές που σχετίζονται με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας δε συνδέονται με άλλες μεταβλητές, αλλά μεταξύ τους. Στην ομάδα Α αποτελούν μια υποομάδα οι μεταβλητές FrD7d, FrD7e και FrD7st που αφορούν στην εύρεση του μέρους της μονάδας με μια διαφορετική διατύπωση (Διάγραμμα 6.2) και μια άλλη υποομάδα οι μεταβλητές EqD1a και EqD1b που αφορούν στην εύρεση κλάσματος από σχεδιάγραμμα που τα μέρη που είναι χωρισμένη η μονάδα δεν ταυτίζονται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Είναι αναμενόμενη αυτή η σύνδεση των μεταβλητών, αφού στην ουσία πρόκειται για τα ίδια έργα που παρουσιάζονται με διαφορετικά παραδείγματα, άρα και οι δυσκολίες που οι φοιτητές αντιμετώπισαν ήταν οι ίδιες. Τέλος, παρατηρούμε ότι σχεδόν όλες οι μεταβλητές της ομάδας Β έχουν να κάνουν με την έννοια του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη, με τη μεταβλητή EqPart3b, η οποία αφορά στον εντοπισμό κλάσματος από αναπαράσταση που η μονάδα δεν είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη (Διάγραμμα 6.4), να μη συνδέεται με καμιά άλλη μεταβλητή, αφού οι περισσότεροι φοιτητές απάντησαν λάθος σε αυτό το έργο, γεγονός που δείχνει ότι δεν έχει κατανοηθεί από τους φοιτητές η έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και η σημαντικότητα αυτής της παραμέτρου.

Συμπεράσματα

Στην κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι, όπως αυτές φάνηκαν από την ανάλυση των δοκιμίων, πάνω στις έννοιες της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στην αριθμογραμμή, καθώς και στις έννοιες του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα, τόσο από τις αναλύσεις του διαγράμματος ομοιότητας όσο και από την ανάλυση σε ποσοστά των απαντήσεων των φοιτητών, συνοψίζονται στα εξής σημεία.

Οι φοιτητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην εύρεση ενός κλάσματος μεταξύ δύο κλασμάτων και στην εύρεση κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή.

Εξίσου σημαντικές δυσκολίες φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι φοιτητές και στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος, καθώς τα έργα με τις σχετικές έννοιες σημείωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας.

Σχετικά με την έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη παρατηρούμε ότι οι φοιτητές δεν αντιμετωπίζουν κανένα πρόβλημα στο να βρουν το κλάσμα που αντιπροσωπεύει ένα σχήμα όταν η μονάδα είναι χωρισμένη σε τόσα ίσα μέρη όσα λέει ο παρονομαστής.

Οι φοιτητές αρχίζουν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν τα μέρη που είναι χωρισμένη η μονάδα δεν ταυτίζονται με τον παρονομαστή του κλάσματος. Οι δυσκολίες γίνονται πιο εμφανείς όταν το πλαίσιο της ερώτησης φεύγει από τις συμβατικές διατυπώσεις και αναπαραστάσεις.

Τελικά, φαίνεται ότι οι φοιτητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια των ίσων μερών της μονάδας, καθώς οι περισσότεροι φοιτητές δεν έδωσαν σωστή απάντηση σε άσκηση αναγνώρισης του κλάσματος από σχήματα που δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη.

Οι παραπάνω δυσκολίες και λαθεμένες αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων που αναδείχθηκαν από την παρούσα έρευνα πρέπει να θέσουν προβληματισμούς για το πως θα μπορέσουν οι μελλοντικοί δάσκαλοι να διδάξουν σωστά τα κλάσματα στους μαθητές εάν οι ίδιοι ακόμη έχουν σοβαρές παρανοήσεις και δυσκολίες πάνω σε αυτά και ταυτόχρονα να θέσουν σε εγρήγορση τους ερευνητές για την εύρεση μηχανισμών και μεθόδων που θα βοηθήσουν στην αντιμετώπιση αυτού του σοβαρού ζητήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την η έρευνα περιεχομένου που έγινε πάνω στα ελληνικά εγχειρίδια των μαθηματικών και των έξι τάξεων του δημοτικού. Η ομάδα των βιβλίων που μελετήθηκε περιλαμβάνει τα βιβλία του μαθητή, τα τετράδια εργασιών και τα βιβλία για το δάσκαλο. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ελεγχθεί η ποιότητα, η ποσότητα και η καταλληλότητα των αναπαραστάσεων πάνω στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Ταυτόχρονα, γίνεται σχολιασμός για την επάρκεια και το είδος των αναπαραστάσεων και τη συσχέτισή τους με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, βάσει ερευνών, πάνω σε αυτές τις έννοιες.

Οι Αναπαραστάσεις στην Έννοια των Ίσων Μερών της Μονάδας

Η παρούσα ενότητα παρουσιάζει τη μελέτη που έγινε πάνω στα ελληνικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού προκειμένου να ιδωθεί η δομή των βιβλίων πάνω στα κλάσματα και πιο συγκεκριμένα πάνω στην έννοια των ίσων μερών της μονάδας. Ποιες, δηλαδή, αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στα σχολικά βιβλία του δημοτικού για την παραπάνω έννοια και με ποια συχνότητα. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζει τα πεδία αναπαραστάσεων που αφορούν στην έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, καθώς και τη συχνότητα που εμφανίζονται στα βιβλία των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα δείχνουν μια περιορισμένη έκταση των κεφαλαίων των σχολικών βιβλίων που ασχολούνται με το χωρισμό της μονάδας σε ίσα μέρη, απουσία της έννοιας από τα βιβλία της Δ΄ τάξης του δημοτικού και μη χρήση αναπαραστάσεων με αντιπαραδείγματα για το χωρισμό της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη, που βάσει έρευνας έχει φανεί ότι η χρήση αντιπαραδειγμάτων βοηθάει σημαντικά στη συναίσθηση της αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη (Vlachou & Avgerinos, 2018).

Σκοπός της Έρευνας

Η παρούσα εργασία αφορά στην έρευνα της δομής των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού πάνω στα κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, σκοπεύει στη μελέτη των μορφών των αναπαραστάσεων καθώς και της συχνότητας που παρουσιάζονται στα βιβλία των μαθηματικών για την έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη καταγράφοντας ταυτόχρονα την εξελικτική πορεία αυτών των εννοιών κατά το πέρασμα των μαθητών από μια τάξη στην άλλη. Τα ευρήματα μελετήθηκαν για να αποφανθεί αν κάποιοι παράγοντες της δομής των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού συμβάλλουν στη δημιουργία των δυσκολιών των μαθητών στους ρητούς και εν συνεχεία να σχεδιαστούν οι δραστηριότητες του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι οι εξής:

- Να εντοπιστούν και να εξεταστούν οι αναπαραστάσεις στην έννοια της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας.
- Να γίνει πιθανή συσχέτιση των αναπαραστάσεων με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές πάνω στην έννοια αυτή.

Εργαλεία της Έρευνας

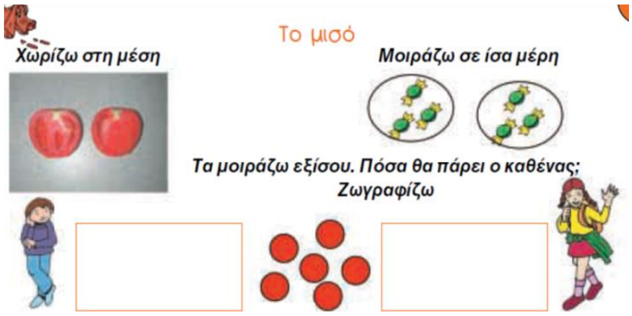
Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας μελετήθηκαν τα ελληνικά βιβλία των μαθηματικών και των έξι τάξεων του δημοτικού σχολείου (από την Α΄ τάξη δημοτικού έως και την Στ΄ τάξη του δημοτικού). Η ομάδα των βιβλίων περιλαμβάνει τα βιβλία του μαθητή, τα τετράδια εργασιών και τα βιβλία για το δάσκαλο.

Ανάλυση Δεδομένων

Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας ακολουθήθηκε η περιγραφική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια.

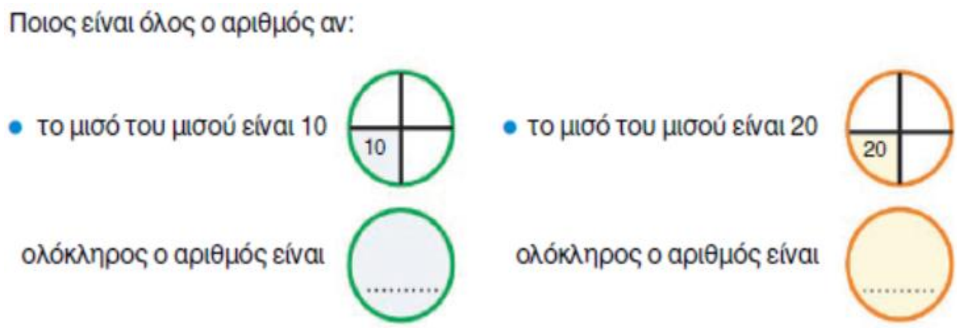
Αποτελέσματα

Βιβλία Μαθηματικών Α΄, Β΄, και Γ΄ δημοτικού. Η έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη αρχίζει άτυπα και ασυνείδητα στην ελληνική εκπαίδευση από την Α΄ δημοτικού με τη διαγραμματική αναπαράσταση ενός αντικειμένου, την παρουσίαση διακριτών μονάδων και τη χρήση της αριθμολέξης «το μισό» (Διάγραμμα 7.1). Η έννοια εισάγεται στο κεφάλαιο 19 και επαναλαμβάνεται στο κεφάλαιο 23, δίνοντας έμφαση στις διακριτές ποσότητες και δε ξαναγίνεται άλλη αναφορά κατά τη διάρκεια την Α΄ τάξης.



Διάγραμμα 7.1. Πολλαπλές αναπαραστάσεις του "μισού" στην Α΄ τάξη του δημοτικού.

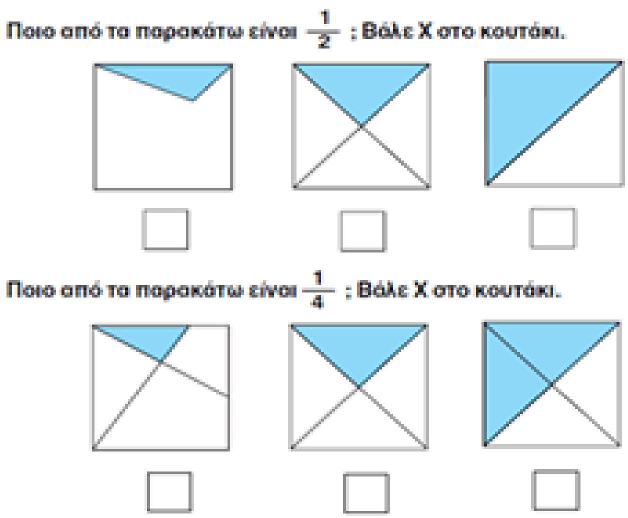
Η έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη επανέρχεται στη Β΄ τάξη με τη χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων (χρήση μοντέλων εμβαδού όπως ορθογώνιο, τετράγωνο, τρίγωνο και κύκλος), διακριτών μονάδων, αριθμολέξεων και της αριθμογραμμής. Η έννοια διδάσκεται κατά τη διάρκεια της Β΄ τάξης μόνο στο κεφάλαιο 7 και δε γίνεται ακόμη εισαγωγή της συμβολικής αναπαράστασης του κλάσματος. Επίσης στη Β΄ τάξη εισάγεται πέρα από την έννοια του «μισού» και η έννοια «το μισό του μισού» ως αριθμολέξη για το $\frac{1}{4}$ (Διάγραμμα 7.2).



Διάγραμμα 7.2. Μοντέλα εμβαδού και χρήση αριθμολέξεων για το 1/4 στη Β΄ τάξη του δημοτικού.

Στην Γ΄ τάξη του δημοτικού οι μαθητές μέσα από βιωματικές δραστηριότητες οι οποίες αναφέρονται σε τέταρτα της ώρας, σε συνταγές ζαχαροπλαστικής, σε σχήματα με άξονες συμμετρίας, σε τέταρτα του κιλού και σε διακριτές μονάδες εισάγονται στην ενσυνείδητη διδασκαλία του κλάσματος. Τα κεφάλαια που αναφέρονται στην έννοια των ίσων μερών της μονάδας είναι τα 22, 23 και 24. Σε αυτά τα κεφάλαια γίνεται αναφορά στη λέξεις «ίσα» και «εξίσου» για να οριστεί ότι η μονάδα που πρέπει να χωρίζεται σε ίσα μέρη. Οι λέξεις αυτές δεν έχουν καμιά ιδιαίτερη σήμανση όπως για παράδειγμα να είναι έντονα γραμμένες ή υπογραμμισμένες. Μάλιστα, υπάρχουν ασκήσεις που ζητούν από τους μαθητές να χωρίσουν την μονάδα χωρίς να αναφέρεται ή λέξη «ίσα» ή κάποια άλλη λέξη που να εκφράζει την πρόθεση του μαθητή να χωρίσει την κλασματική μονάδα σε ίσα μέρη. Αυτό ενδεχομένως να ενισχύει την εντύπωση των μαθητών ότι δε χρειάζεται η κλασματική μονάδα να είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη.

Η σπουδαιότητα των παραπάνω ενισχύεται από το γεγονός ότι τα τρία αυτά κεφάλαια της Γ΄ τάξης αποτελούν τα πρώτα μαθήματα με τα οποία έρχονται οι μαθητές στην ενσυνείδητη μάθηση του κλάσματος και είναι σημαντικό η έννοια να εμπεδωθεί από τους μαθητές σωστά, καθώς οποιαδήποτε παρανόηση θα σταθεί εμπόδιο στα επόμενα κεφάλαια και στις επόμενες τάξεις όπου οι μαθητές εισάγονται σε πιο αφηρημένες μορφές του κλάσματος με αρκετά γρήγορες διαδικασίες. Επομένως, θα ήταν αρκετά αποδοτικό να δίνεται περισσότερη έμφαση στην έννοια «ίσα» με επισήμανση της λέξης και με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων όπως αυτό του Διαγράμματος 7.3. Πρέπει να αναφερθεί πως το παράδειγμα άσκησης του Διαγράμματος 7.3 αποτελεί το μοναδικό παράδειγμα το οποίο καλούνται οι μαθητές να λύσουν κατά τη διάρκεια των 6 χρόνων φοίτησής τους στο δημοτικό, καθώς δεν υπάρχει παρόμοια άσκηση σε καμιά άλλη τάξη μόνο η συγκεκριμένη, στην Γ΄ τάξη.



Διάγραμμα 7.3. Άσκηση που η κλασματική μονάδα δεν είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη.

Συνεπώς, οι σημαντικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη-κομμάτια (σε έρευνα των Avgerinos, Vlachou και Kantas, 2012 μόνο το 8% των μαθητών της Α/θμιας και το 6% των μαθητών της Β/θμιας εκπαίδευσης απάντησαν σωστά σε ερώτημα που η μονάδα δεν ήταν χωρισμένη σε ίσα μέρη) οφείλονται και στον τρόπο που αυτή η έννοια αναπαρίσταται στα σχολικά βιβλία.

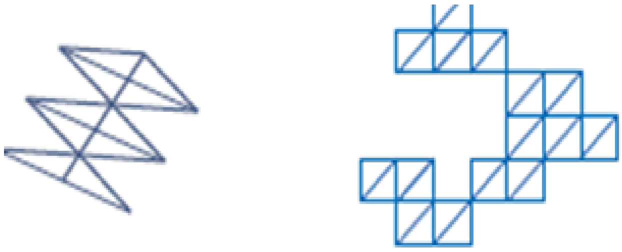
Αυτό αποδεικνύεται και από την έρευνα των Αυγερινού και Βλάχου (2012) η οποία περιελάμβανε δύο δίωρες διδασκαλίες στην Ε΄ και Στ΄ τάξη του δημοτικού (μία δίωρη διδασκαλία για κάθε τάξη) που ως στόχο είχαν να εκθέσουν τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που παρίσταναν διαγράμματα διάφορων σχημάτων και αφορούσαν την έννοια των ίσων μερών της μονάδας. Η παρουσίαση των αναπαραστάσεων έγινε με το λογισμικό Microsoft Power Point και περιελάμβανε συνολικά 46 αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν αύξηση των ποσοστών επιτυχίας, καθώς σε άσκηση αναγνώρισης του κλάσματος από σχήματα που δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη, τα ποσοστά από 0% που ήταν στις προ-δοκιμασίες αυξήθηκαν στο 52% στις μετά-δοκιμασίες. Ο καταιγισμός, δηλαδή, των πολλών αναπαραστάσεων και των αντιπαραδειγμάτων που προβλήθηκε βοήθησε σημαντικά τους μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Εξάλλου και άλλες έρευνες έχουν δείξει ότι όσο πιο συχνά έρχεται σε επαφή ο μαθητής με μια μορφή αναπαράστασης τόσο πιο οικεία του γίνεται και τόσο καλύτερα τη μαθαίνει. Παράδειγμα μιας τέτοιας έρευνας αποτελεί η έρευνα των Hodgen et al. (2010) οι οποίοι χρησιμοποίησαν για την έρευνά τους το 2008 τα δοκίμια μιας παλιότερης έρευνας του 1977 για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων στη δεκαδική τους μορφή σε περίπου 3000 μαθητές ηλικίας 11-14 ετών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών στην τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή βελτιώθηκαν, καθώς το 1977 τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 50% και το 2008 ήταν 83%. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η ίδια αναπαράσταση είχε διαφορετικά αποτελέσματα στις επιδόσεις των μαθητών σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Η εξήγηση που έδωσαν οι ερευνητές σε αυτή τη διαφορά των ποσοστών επιτυχίας ήταν το γεγονός ότι η αναπαράσταση της αριθμογραμμής τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται ευρέως στα αναλυτικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, κάτι που δε συνέβαινε πριν 30 χρόνια.

Στο ίδιο συμπέρασμα, για τη συσχέτιση της επιτυχίας των μαθητών σε μια αναπαράσταση με την εξοικείωση των μαθητών με αυτή, καταλήγει και η έρευνα των Jiang & Chua (2010). Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές σύγκριναν τις επιδόσεις μαθητών της έκτης τάξης του δημοτικού (1.070 μαθητών από την Κίνα και 1.002 μαθητών από τη Σιγκαπούρη) στην επίλυση τριών προβλημάτων σχετικά με τα κλάσματα. Οι μαθητές από την Κίνα ακολούθησαν συμβολικές αναπαραστάσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων, ενώ οι μαθητές από τη Σιγκαπούρη γραφικές αναπαραστάσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στα δύο από τα τρία προβλήματα οι μαθητές από την Κίνα είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της Σιγκαπούρης, αν και θα περίμενε κανείς το αντίθετο λόγω της χρήσης των γραφικών αναπαραστάσεων που έκανα οι μαθητές από τη Σιγκαπούρη. Μια από τις εξηγήσεις που δόθηκε και εδώ από τους ερευνητές είναι το γεγονός ότι τα βιβλία της Κίνας περιλαμβάνουν περισσότερα προβλήματα παρόμοια με αυτά του δοκιμίου σε σχέση με τα βιβλία της Σιγκαπούρης. Έτσι, οι μαθητές από την Κίνα, αν και χρησιμοποίησαν παραδοσιακές μεθόδους συμβολικής αναπαράστασης για την επίλυση των προβλημάτων, ωστόσο σημείωσαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας λόγω της εξοικείωσης που είχαν αποκτήσει.

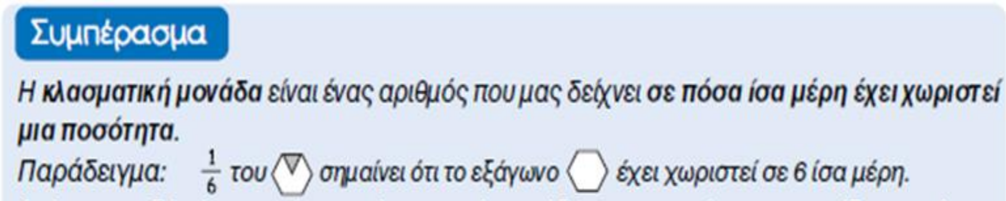
Βιβλία Μαθηματικών Δ΄, Ε΄, και Στ΄ δημοτικού. Τα σχολικά εγχειρίδια της Δ΄ τάξεις δεν περιλαμβάνουν στην ύλη τους κανένα κεφάλαιο που να αναφέρεται στο χωρισμό της μονάδας σε ίσα μέρη και γενικά στα κλάσματα. Μεγάλη έμφαση δίνεται στη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών που καταλαμβάνει το 34% των κεφαλαίων και μέσα σε αυτά συμπεριλαμβάνεται και η έννοια του δεκαδικού κλάσματος ως υποβοήθηση για την εκμάθηση των δεκαδικών αριθμών. Η έννοια μάλιστα του κλάσματος θεωρείται ότι έχει εμπεδωθεί από τους μαθητές, καθώς στα κεφάλαια για την εκμάθηση του χρόνου, της χωρητικότητας, του βάρους και της επιφάνειας χρησιμοποιούνται το $\frac{1}{60}$ ως έκφραση της ώρας και το $\frac{1}{4}$ ως έκφραση του λίτρου, του κιλού και της επιφάνειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω κλάσματα είναι τα μοναδικά που εμφανίζονται (με εξαίρεση τα δεκαδικά κλάσματα) και με τη συχνότητα που αναφέρονται (4 φορές) σε όλη την ύλη των σχολικών εγχειριδίων της Δ΄ τάξης. Οι μαθητές, λοιπόν, σε αυτή την τάξη δεν ασχολούνται καθόλου με την κλασματική μονάδα για να μεταβούν στη συνέχεια στην Ε΄ τάξη που εκεί έχουν να αντιμετωπίσουν πιο σύνθετες μορφές κλασμάτων.

Έτσι, στο κεφάλαιο 16 της Ε΄ τάξης επανέρχεται για πρώτη φορά μετά από τη Γ΄ τάξη η έννοια της κλασματικής μονάδας και των ίσων μερών της με τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων όπως εξάγωνα, τρίγωνα, τετράγωνα, παραλληλόγραμμα και γίνεται χρήση και πιο σύνθετων σχημάτων (Διάγραμμα 7.4). Στο κεφάλαιο αυτό παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα που ορίζει την κλασματική μονάδα, η αναγκαιότητα του χωρισμού της σε ίσα μέρη επισημαίνεται με έντονη γραφή (Διάγραμμα 7.5).



Διάγραμμα 7.4. Σύνθετη αναπαράσταση της κλασματικής μονάδας στην Ε΄ τάξη του δημοτικού.

Μετά από αυτό το κεφάλαιο η χρήση των κλασματικών αριθμών γίνεται ευρεία και χρησιμοποιείται ως δεδομένη έννοια σε προβλήματα και ασκήσεις σε όλη την έκταση του βιβλίου. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το κενό που αφήνουν τα βιβλία της Δ΄ τάξης πάνω στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, δημιουργεί μια απότομη μετάβαση από την Γ΄ τάξη στην Ε΄.


Συμπέρασμα

*Η **κλασματική μονάδα** είναι ένας αριθμός που μας δείχνει **σε πόσα ίσα μέρη έχει χωριστεί μια ποσότητα.***

Παράδειγμα: $\frac{1}{6}$ του σημαίνει ότι το εξάγωνο έχει χωριστεί σε 6 ίσα μέρη.

*Διάγραμμα 7.5.*Ορισμός της κλασματικής μονάδας στην Ε΄ τάξη του δημοτικού.

Στην Στ΄ τάξη η έννοια της κλασματικής μονάδας και των ίσων μερών της αναφέρονται στο κεφάλαιο 19 χρησιμοποιώντας ως κλασματική μονάδα το έτος, την ώρα, το ευρώ, το κιλό. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η εισαγωγή της έννοιας με ελάχιστη χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων και διακριτών μονάδων. Η έννοια, δηλαδή, αναπαρίσταται κυρίως με τη συμβολική της μορφή. Αυτή η μετάβαση σε αφηρημένες μορφές αναπαραστάσεων της έννοιας δείχνει πόσο σημαντικό είναι να δοθεί στις πιο μικρές τάξεις μεγαλύτερη έμφαση στην αναγκαιότητα του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων έτσι ώστε η έννοια να εμπεδωθεί σωστά για να μπορέσουν οι μαθητές να περάσουν πιο ομαλά σε πιο αφηρημένες μορφές αναπαραστάσεων.

Από την ανάλυση των σχολικών βιβλίων φάνηκε ότι τα κεφάλαια που ασχολούνται με την κλασματική μονάδα και το χωρισμό της σε ίσα μέρη αποτελούν μόνο το 3% των κεφαλαίων στην Α΄ τάξη, το 2% στη Β΄ τάξη, το 5% στην Γ΄ τάξη, στη Δ΄ τάξη δεν υπάρχει κεφάλαιο σχετικό, στην Ε΄ τάξη αποτελεί το 2% και στην Στ΄ τάξη το 1,5%. Θα ήταν, λοιπόν, καλό να εισαχθεί πιο δυναμικά η έννοια στις μικρές τάξεις ακόμη και στη Δ΄ τάξη και να γίνει πιο ευρεία χρήση αναπαραστάσεων με αντιπαραδείγματα και με προσοχή και από τη μεριά των εκπαιδευτικών στο σχηματισμό της μονάδας καθώς σε έρευνά τους οι Olive & Vomvoridi (2006) προτείνουν να αποφεύγονται λαθεμένες αναπαραστάσεις από τους εκπαιδευτικούς που μπορεί να οδηγήσουν τους μαθητές στην πεποίθηση της μη αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Σύνοψη

Συνοψίζοντας, στην υποενότητα αυτή παρουσιάστηκαν όλα τα κεφάλαια των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού που αναφέρονταν στην έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, ο τρόπος που αυτή η έννοια εξελίσσεται μέσα στα σχολικά εγχειρίδια και των έξι τάξεων του δημοτικού, οι αναπαραστάσεις με τις οποίες εισάγεται η έννοια, καθώς και η συχνότητά τους.

Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, οι μαθητές έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη από την Α΄ δημοτικού με ασυνείδητη χρήση της κλασματικής μονάδας μέσα από διαγραμματικές αναπαραστάσεις, διακριτές μονάδες και αριθμολέξεις. Το ίδιο συμβαίνει και στη Β΄ τάξη του δημοτικού μόνο που στην τάξη αυτή αυξάνονται οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις με τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων όπως ορθογώνιο, τετράγωνο, τρίγωνο και κύκλο και προστίθεται και η αναπαράσταση της αριθμογραμμής. Η ενσυνείδητη εισαγωγή των μαθητών σε αυτήν την έννοια γίνεται στη Γ΄ δημοτικού. Στην Δ΄ δημοτικού οι μαθητές δε διδάσκονται καθόλου την έννοια για να επανέρθει πάλι στην Ε΄ και Στ΄ τάξη με τη χρήση πιο αφηρημένων αναπαραστάσεων.

Συμπερασματικά, στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού αφιερώνονται λίγα κεφάλαια για τη διδασκαλία της μονάδας σε ίσα μέρη, τρία κεφάλαιο στην Γ΄ δημοτικού, ένα στην Ε΄ και ένα στη Στ΄. Επίσης, είναι εμφανής η έλλειψη αντιπαραδειγμάτων που ερευνητικά έχει αποδειχθεί ότι συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη. Συνεπώς, μπορούν να αποφανθούν πιθανές συσχετίσεις ανάμεσα στη δομή των βιβλίων και στις δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη όπως φαίνεται και από διάφορες έρευνες.

Οι Αναπαραστάσεις στην Έννοια των Καταχρηστικών Κλασμάτων

Η υποενότητα αυτή παρουσιάζει τη μελέτη που έγινε πάνω στα ελληνικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού προκειμένου να ιδωθεί η δομή των βιβλίων πάνω στα κλάσματα και πιο συγκεκριμένα πάνω στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Ποιες, δηλαδή, αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στα σχολικά βιβλία του δημοτικού για την παραπάνω έννοια και με ποια συχνότητα. Ταυτόχρονα γίνεται σχολιασμός για την επάρκεια και το είδος των αναπαραστάσεων και τη συσχέτισή τους με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, βάσει ερευνών, πάνω στην έννοια. Τα αποτελέσματα δείχνουν μια περιορισμένη έκταση των δραστηριοτήτων των σχολικών βιβλίων του δημοτικού που ασχολούνται με τα καταχρηστικά κλάσματα, απουσία του ορισμού της έννοιας και ελλιπής παρουσία πολλαπλών αναπαραστάσεων με επικράτηση της συμβολικής αναπαράστασης.

Σκοπός της Έρευνας

Η παρούσα εργασία αφορά στην έρευνα της δομής των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού πάνω στους ρητούς. Πιο συγκεκριμένα, σκοπεύει στη μελέτη των μορφών των αναπαραστάσεων καθώς και της συχνότητας που παρουσιάζονται στα βιβλία των μαθηματικών για την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων, καταγράφοντας ταυτόχρονα την εξελικτική πορεία αυτών των εννοιών κατά την σπειροειδή της ανάπτυξη. Τα ευρήματα θα μελετηθούν για να αποφανθεί αν κάποιοι παράγοντες της δομής των σχολικών εγχειριδίων του δημοτικού συμβάλλουν στη δημιουργία των δυσκολιών των μαθητών στους ρητούς και θα βοηθήσουν στο σχεδιασμό του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι οι εξής:

- Να εντοπιστούν και να εξεταστούν οι αναπαραστάσεις στις έννοιες των καταχρηστικών κλασμάτων.
- Να γίνει πιθανή συσχέτιση των αναπαραστάσεων με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές πάνω στις έννοιες αυτές.
- Να προταθούν τρόποι για τη βελτίωση της διδασκαλίας των εννοιών αυτών σε περίπτωση που παρουσιαστεί συσχέτιση της δομής των βιβλίων και των δυσκολιών των μαθητών.

Εργαλεία της έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας μελετήθηκαν τα ελληνικά βιβλία των μαθηματικών και των έξι τάξεων του δημοτικού σχολείου (από την Α΄ τάξη δημοτικού έως και την Στ΄ τάξη του δημοτικού). Η ομάδα των 38 συνολικά βιβλίων που μελετήθηκαν περιλαμβάνει τα βιβλία του μαθητή, τα τετράδια εργασιών και τα βιβλία για το δάσκαλο.

Ανάλυση δεδομένων

Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας ακολουθήθηκε η περιγραφική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια.

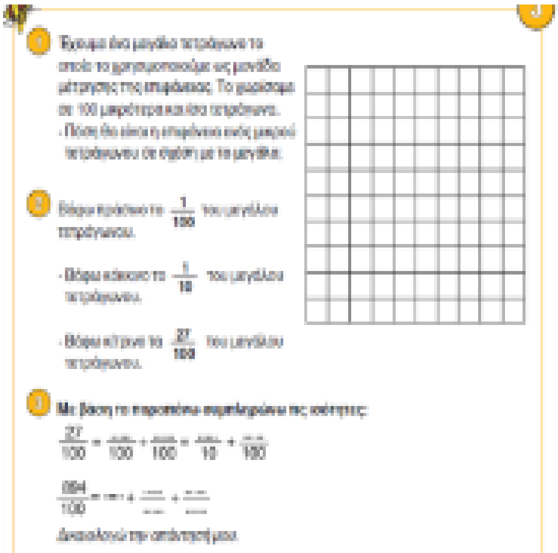
Αποτελέσματα

Βιβλία Μαθηματικών Α΄, Β΄, και Γ΄ δημοτικού. Η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος, αν και δεν αναφέρεται με το όρο «καταχρηστικά» στα σχολικά βιβλία του δημοτικού, ωστόσο παρουσιάζεται και ορίζεται ως το κλάσμα που είναι μεγαλύτερο της κλασματικής μονάδας ή ως το κλάσμα που ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή του.

Τα πρώτα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται στην Γ΄ τάξη του δημοτικού με τη συμβολική τους μορφή στο κεφάλαιο 34, σελ. 86 του βιβλίου του μαθητή στο πλαίσιο της διδασκαλίας των δεκαδικών κλασμάτων (Διάγραμμα 7.6). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν μήκη με κλάσματα. Στόχος των δραστηριοτήτων αυτών, σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου, είναι οι μαθητές να βρίσκουν και να γράφουν ένα δεκαδικό κλάσμα ως άθροισμα ενός ακεραίου κι ενός δεκαδικού κλάσματος μικρότερο της μονάδας. Ωστόσο, η εμφάνιση των καταχρηστικών κλασμάτων γίνεται χωρίς καμιά αναφορά στο γεγονός ότι πρόκειται για κλάσματα που είναι μεγαλύτερα της κλασματικής μονάδας. Επαφίεται, λοιπόν, στην επιλογή του δασκάλου αν θα διευκρινίσει ή όχι και με ποιον τρόπο την παρουσία των καταχρηστικών κλασμάτων.

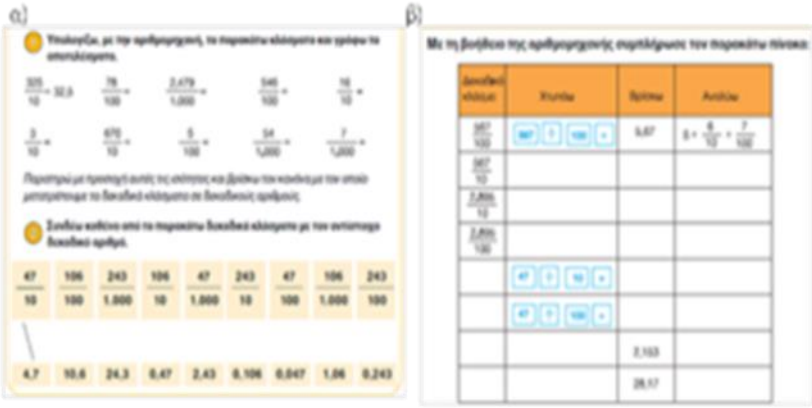
Διάγραμμα 7.6. Η πρώτη εμφάνιση καταχρηστικού κλάσματος με συμβολική αναπαράσταση στη Γ΄ τάξη του δημοτικού.

Στο ίδιο κεφάλαιο, κεφάλαιο 34 σελ. 87, δίνεται στους μαθητές ένα μεγάλο τετράγωνο που χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης της επιφάνειας. Στη δραστηριότητα αυτή τα δεκαδικά κλάσματα παρουσιάζονται ως υποδιαιρέσεις της επιφάνειας του μεγάλου μοναδιαίου τετραγώνου. Μέσα από μια σειρά διαδοχικών βημάτων η δραστηριότητα αυτή καταλήγει στο καταχρηστικό κλάσμα $\frac{894}{100}$ το οποίο οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν τα δεκαδικά κλάσματα με τα τετραγωνάκια και να πραγματοποιήσουν τις μετατροπές και τους υπολογισμούς μόνο σε συμβολικό επίπεδο, χωρίς να υπάρχει η αντίστοιχη διαγραμματική αναπαράσταση (Διάγραμμα 7.7).



Διάγραμμα 7.7. Έλλειψη διαγραμματικής αναπαράστασης για το κλάσμα 894/100 στη Γ΄ τάξη του δημοτικού.

Η έλλειψη αυτή της διαγραμματικής αναπαράστασης είναι δυνατόν αν οδηγήσει τους μαθητές σε μηχανιστικές διαδικασίες, χωρίς να τους δίνεται η δυνατότητα να αποκτήσουν τη συναίσθηση του καταχρηστικού κλάσματος και του τρόπου που αυτό αναπαρίσταται σε διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Παρόμοιες ασκήσεις με τις παραπάνω δίνονται στο τετράδιο εργασιών Γ΄ τεύχος, σελ. 24 και 25 του ίδιου κεφαλαίου (Διάγραμμα 7.8).

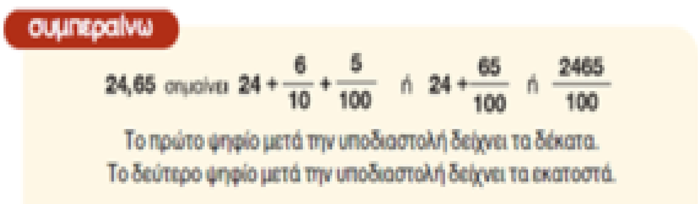


Διάγραμμα 7.8. α) Άσκηση μετατροπής κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς στο βιβλίο του μαθητή. β) Άσκηση μετατροπής κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς στο τετράδιο εργασιών.

Στην ίδια τάξη, στο κεφάλαιο 35 που αφορά στα δεκαδικά κλάσματα και στους δεκαδικούς αριθμούς, εμφανίζονται πάλι καταχρηστικά κλάσματα με τη συμβολική τους μορφή τα οποία οι μαθητές καλούνται να τα μετατρέψουν σε δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια της αριθμομηχανής.

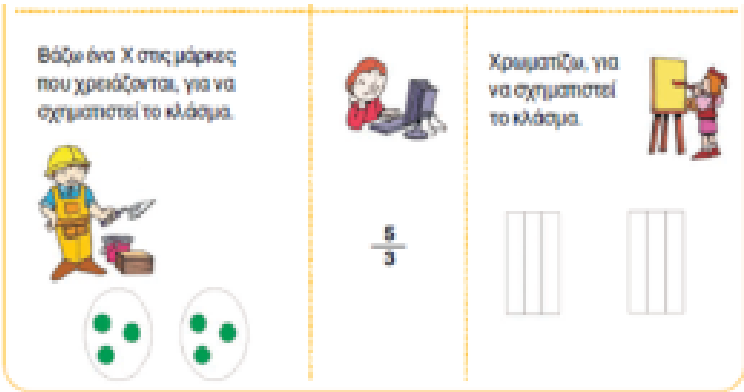
Και στο σημείο αυτό δε γίνεται συνειδητή παρουσίαση των καταχρηστικών κλασμάτων. Επίσης, δε σχολιάζεται το αποτέλεσμα που αν πρόκειται για κλάσματα μικρότερης της μονάδας το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού είναι το μηδέν, ενώ αν είναι καταχρηστικό το κλάσμα το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού είναι διάφορο του μηδενός. Αν και στόχος του κεφαλαίου δεν είναι ο παραπάνω διαχωρισμός, ωστόσο, ο σχολιασμός αυτός θα έδινε ένα πρώτο έναυσμα στους μαθητές να παρατηρούν σε βάθος τα κλάσματα και να ξεκινούν να τα διακρίνουν σε μεγαλύτερα και μικρότερα της μονάδας. Αυτός ο τρόπος σκέψης είναι δυνατόν να απομακρύνει τους μαθητές από τις μηχανιστικές διαδικασίες, ενώ ταυτόχρονα τους προετοιμάζει για την εισαγωγή της έννοιας σε διάφορα πεδία αναπαράστασης.

Στο τέλος του ίδιου κεφαλαίου παρατίθεται το συμπέρασμα του Διαγράμματος 7.9, που δίνει έμφαση στο δεκαδικό μέρος του δεκαδικού αριθμού και παρουσιάζει το καταχρηστικό κλάσμα ως μια μορφή αναπαράστασης του δεκαδικού αριθμού.



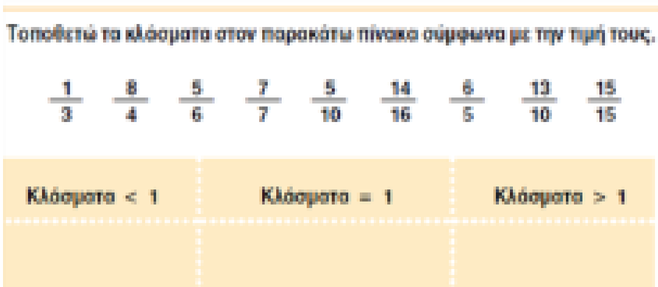
Διάγραμμα 7.9. Συμπέρασμα κεφαλαίου 35 στη Γ΄ τάξη του δημοτικού.

Μετά τα κεφάλαια 34 και 35, τα καταχρηστικά κλάσματα επανέρχονται στο κεφάλαιο 57«Κλάσματα και δεκαδικοί», σελ.136 του βιβλίου του μαθητή για να παρουσιαστούν για πρώτη φορά με διάφορες μορφές αναπαράστασης, όπως τη συμβολική, τη διαγραμματική και τις διακριτές ποσότητες (Διάγραμμα 7.10).



Διάγραμμα 7.10. Αναπαράσταση με διακριτές ποσότητες, σύμβολα και διάγραμμα στα καταχρηστικά κλάσματα.

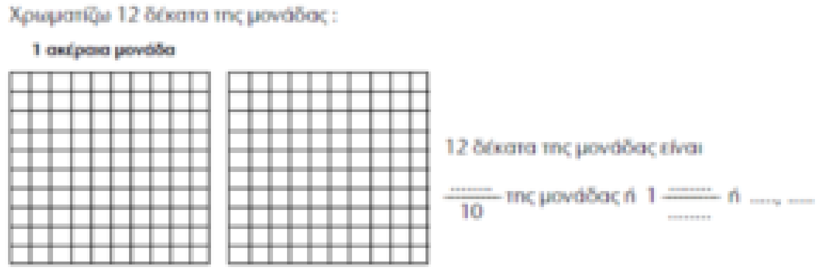
Επίσης, σε άσκηση στο τετράδιο εργασιών του ίδιου κεφαλαίου ζητείται από τους μαθητές να χωρίσουν τα δοσμένα κλάσματα συγκρίνοντάς τα με τη μονάδα (Διάγραμμα 7.11), χωρίς να έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο η νόρμα του διαχωρισμού αυτού. Πιο συγκεκριμένα, το βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης στη σελ. 152 για την άσκηση της εικόνας 6 αναφέρει: «Η περίπτωση με το 5/3 που είναι μεγαλύτερο της μονάδας ίσως δυσκολέψει τους μαθητές, γιατί έχουν συνηθίσει να σχηματίζουν κλάσματα μικρότερα της μονάδας».



Διάγραμμα 7.11. Έμμεσος ορισμός των καταχρηστικών κλασμάτων σε άσκηση του τετραδίου εργασιών.

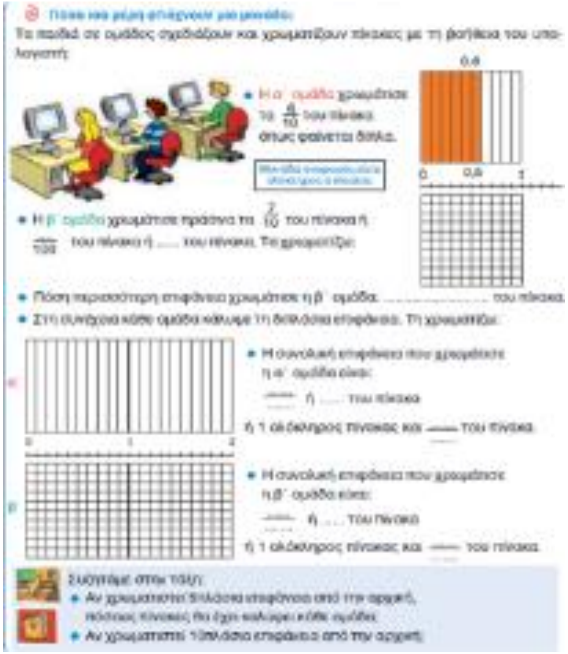
Συνοψίζοντας τα ευρήματα από τα εγχειρίδια της Γ΄ τάξης, παρατηρούμε ότι η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων και οι αναπαραστάσεις της δε συμπεριλαμβάνονται στους στόχους του βιβλίου και υπάρχει σε όλα συνολικά τα βιβλία της τάξης αυτής μόνο μία άσκηση με τις διάφορες μορφές αναπαράστασης των καταχρηστικών κλασμάτων (Διάγραμμα 7.10).

Βιβλία Μαθηματικών Δ΄, Ε΄, και Στ΄ δημοτικού. Στην Δ΄ τάξη του δημοτικού δίνεται έμφαση στους δεκαδικούς αριθμούς που καταλαμβάνει το 34% των κεφαλαίων των μαθηματικών και στο πλαίσιο αυτό εμφανίζονται κάποια καταχρηστικά κλάσματα με τη συμβολική τους μορφή, χωρίς καμία μνεία, απλά προς εξυπηρέτηση της διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών και των δεκαδικών κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, καταχρηστικά κλάσματα υπό τις συνθήκες που αναφέρθηκαν πριν, εμφανίζονται στις σελίδες 63, 68 του βιβλίου του μαθητή και στις σελίδες 7, 18, 28, 35 του Β΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών. Ωστόσο, στη σελίδα 18 του ίδιου τεύχους που είναι επαναληπτικό κεφάλαιο υπάρχει μία μόνο άσκηση που δίνει τη λεκτική αναπαράσταση του 12 δέκατα και ζητά από τους μαθητές να το αναπαραστήσουν διαγραμματικά και συμβολικά (Διάγραμμα 7.12). Στόχος της άσκησης, σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου, είναι η σύνδεση δεκαδικών, δεκαδικών κλασμάτων και μεικτών αριθμών με μια εικονική αναπαράσταση.



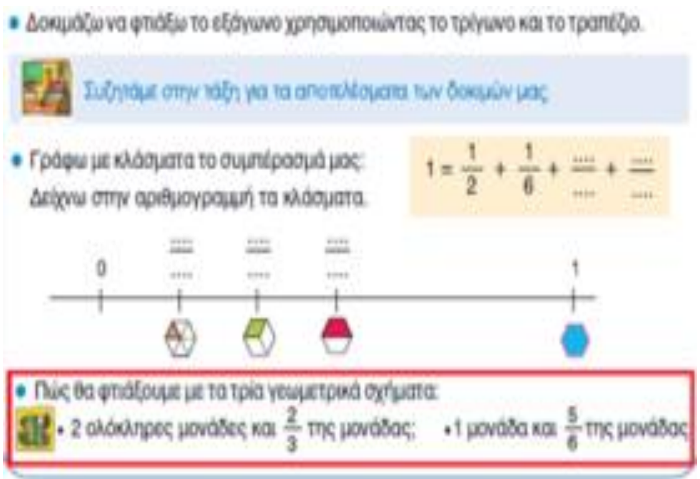
Διάγραμμα 7.12. Σύνδεση δεκαδικών αριθμών, δεκαδικών κλασμάτων και μεικτών αριθμών με μια εικονική αναπαράσταση.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα από τα εγχειρίδια της Δ΄ τάξης, παρατηρούμε ότι η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων και οι αναπαραστάσεις της δε συμπεριλαμβάνονται στους στόχους του βιβλίου και υπάρχει σε όλα συνολικά τα βιβλία της τάξης αυτής μόνο μία άσκηση με τις διάφορες μορφές αναπαράστασης των καταχρηστικών κλασμάτων (Διάγραμμα 7.12).



Διάγραμμα 7.13. Πολλαπλή αναπαράσταση καταχρηστικών κλασμάτων.

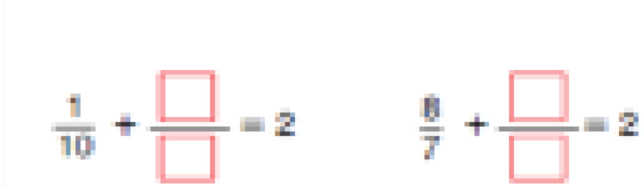
Στην Ε΄ τάξη του δημοτικού τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται στο κεφάλαιο 7, σελ. 26 του βιβλίου του μαθητή ως άσκηση επέκτασης των δεκαδικών αριθμών και των δεκαδικών κλασμάτων. Στη συγκεκριμένη άσκηση (Διάγραμμα 7.13) οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν το 12/10 και το 140/100 διαγραμματικά, συμβολικά και ως κλάσμα πάνω στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου δεν υπάρχει κάποιος στόχος για τα καταχρηστικά κλάσματα.



Διάγραμμα 7.14. Καταχρηστικά κλάσματα με διαγραμματική και συμβολική αναπαράσταση.

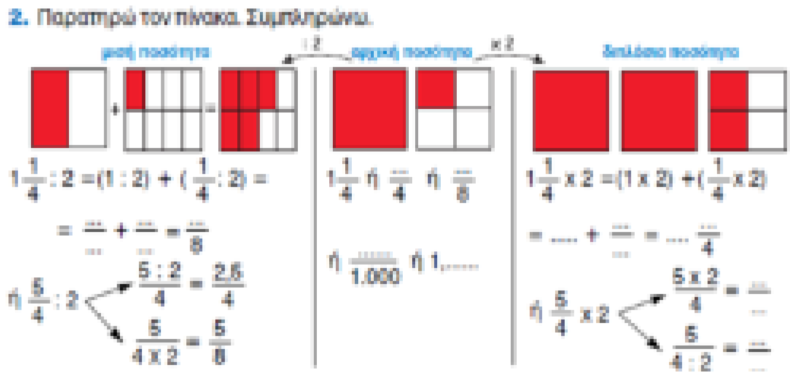
Στο κεφάλαιο 16 Κλασματικές μονάδες» σελ. 47 παρουσιάζεται στην εισαγωγική δραστηριότητα η άσκηση του Διαγράμματος 7.14. Οι μαθητές καλούνται να σχηματίσουν το

8/3 και το 11/6 με τη βοήθεια των δοσμένων σχημάτων. Ωστόσο, δεν υπάρχει σχετικός στόχος στο βιβλίο του δασκάλου.



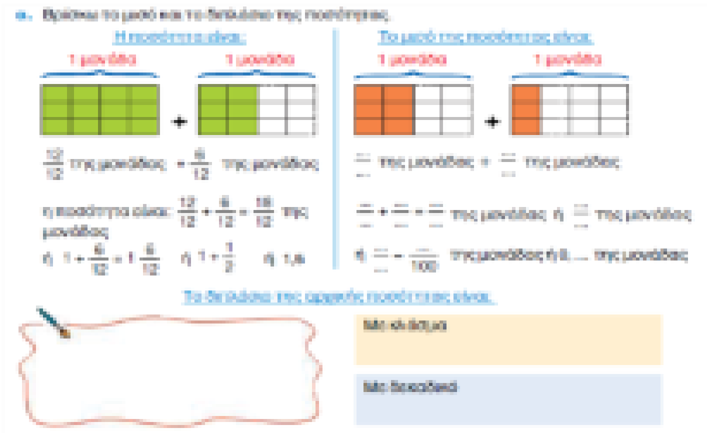
Διάγραμμα 7.15. Καταχρηστικά κλάσματα με συμβολική αναπαράσταση.

Επιπρόσθετα, στο τετράδιο εργασιών του ίδιου κεφαλαίου σελ. 11 (α΄ τεύχος) δίνεται μια άσκηση (Διάγραμμα 7.15) στην οποία καλούνται οι μαθητές να συμπληρώσουν το καταχρηστικό κλάσμα που λείπει στην πρώτη περίπτωση και το κλάσμα στη δεύτερη περίπτωση για να σχηματιστούν δύο ακέραιες μονάδες.



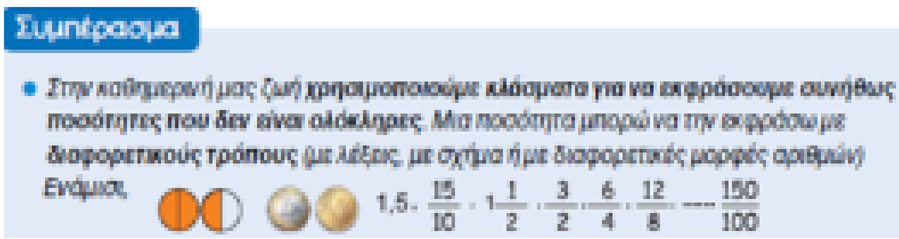
Διάγραμμα 7.16. Καταχρηστικά κλάσματα με διαγραμματική και συμβολική αναπαράσταση.

Επίσης, στο κεφάλαιο 19 «Στρατηγικές διαχείρισης αριθμών» σελ. 53 του βιβλίου του μαθητή δίνεται στους μαθητές η διαγραμματική αναπαράσταση του καταχρηστικού κλάσματος 5/4 και τους ζητείται να γράψουν τη συμβολική του μορφή στη μισή και στη διπλάσια ποσότητα (Διάγραμμα 7.16). Σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου ο κύριος διδακτικός στόχος του κεφαλαίου είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν αριθμούς με διαφορετικές συμβολικές μορφές και να τους διαχειρίζονται, κατανοώντας την ποσότητα που οι αριθμοί αυτοί εκφράζουν κάθε φορά, χωρίς τη χρήση τεχνικών, ενώ οι ειδικότεροι στόχοι μεταξύ άλλων είναι οι μαθητές να μετατρέπουν ένα μικτό κλάσμα σε απλό και να μπορούν να κάνουν υπολογισμούς με μικτά κλάσματα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πράξεων. Δίνεται, δηλαδή, έμφαση στο μορφή του μικτού αριθμού και όχι στη μορφή του καταχρηστικού κλάσματος. Ωστόσο, για τη συγκεκριμένη άσκηση του Διαγράμματος 7.16, το βιβλίο του δασκάλου αναφέρει τα εξής: «Τα παιδιά μπορούν να βρουν κι άλλες συνταγές και να δουλέψουν με τις δικές τους (παραλλαγή). Εξηγούν πώς εργάστηκαν: με ζωγραφική, με κλάσματα (καταχρηστικά), με εκτίμηση». Είναι η πρώτη φορά που εμφανίζεται η λέξη «καταχρηστικά», αλλά δε δίνονται και περισσότερες οδηγίες για τη διαχείριση του όρου «καταχρηστικά» από τους δασκάλους και από τους μαθητές.



Διάγραμμα 7.17. Καταχρηστικά κλάσματα με διαγραμματική και συμβολική αναπαράσταση.

Παρόμοια άσκηση με αυτή του Διαγράμματος 7.16 υπάρχει στο κεφάλαιο 20 «Διαχείριση αριθμών» του τετραδίου εργασιών σελ. 18 του β΄ τεύχους (Διάγραμμα 7.17), με τη διαφορά ότι το διπλάσιο της ποσότητας οι μαθητές πρέπει να το αναπαραστήσουν διαγραμματικά οι ίδιοι, καθώς δεν τους είναι δοσμένο, όπως στα άλλα παραδείγματα. Είναι η πρώτη άσκηση και η μοναδική στα ελληνικά βιβλία των μαθηματικών στην οποία οι μαθητές καλούνται να αναπαραστήσουν διαγραμματικά ένα καταχρηστικό κλάσμα.



Διάγραμμα 7.18. Συμπέρασμα για τη χρήση των κλασμάτων με παράδειγμα το 1,5.

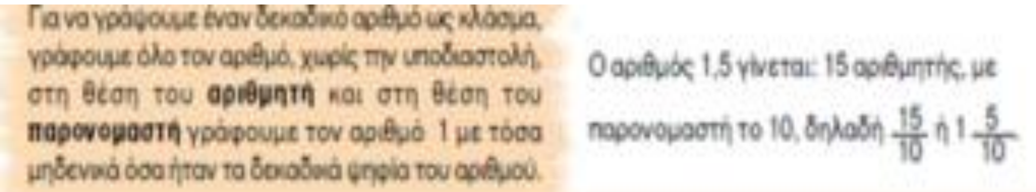
Στο κεφάλαιο αυτό (κεφάλαιο 20) ως προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών, το βιβλίο του δασκάλου στη σελίδα 104 αναφέρει «[οι μαθητές] να μετατρέπουν καταχρηστικά κλάσματα σε μεικτούς αριθμούς και το αντίστροφο» που αποτελεί στόχο του προηγούμενου κεφαλαίου (κεφάλαιο 19).

Το κεφάλαιο 19 «Στρατηγικές διαχείρισης αριθμών» τελειώνει με το συμπέρασμα του Διαγράμματος 7.18, σύμφωνα με το οποίο μια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους και δίνεται το παράδειγμα της αριθμολέξεις «ενάμισι» και ακολουθεί η διαγραμματική και η συμβολική αναπαράστασή της.

Πέρα από τα παραπάνω παραδείγματα, στις σελίδες 27, 40, 58, 59, 74, 75, 79, 89 του βιβλίου του μαθητή και στις σελίδες 21, 23, 27 του Α΄ τεύχους του τετραδίου εργασιών, στις σελίδες 22, 35 του Β΄ τεύχους του τετραδίου εργασιών και στις σελίδες 15, 18 του Γ΄ τεύχους του τετραδίου εργασιών εμφανίζονται ελάχιστα καταχρηστικά κλάσματα με τη συμβολική τους μορφή, χωρίς καμία μνεία, απλά προς εξυπηρέτηση της διδασκαλίας της εκάστοτε μαθηματικής έννοιας.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα από τα εγχειρίδια της Ε΄ τάξης, παρατηρούμε ότι η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων εμφανίζεται για πρώτη φορά ορισμένη ως «καταχρηστικά» μόνο όμως στο βιβλίο του δασκάλου, χωρίς και πάλι να αποτελεί αυτόνομο κεφάλαιο. Συνολικά υπάρχουν τέσσερις ασκήσεις στα βιβλία της τάξης αυτής που παρουσιάζουν τα καταχρηστικά κλάσματα σε διάφορα πεδία αναπαράστασης.

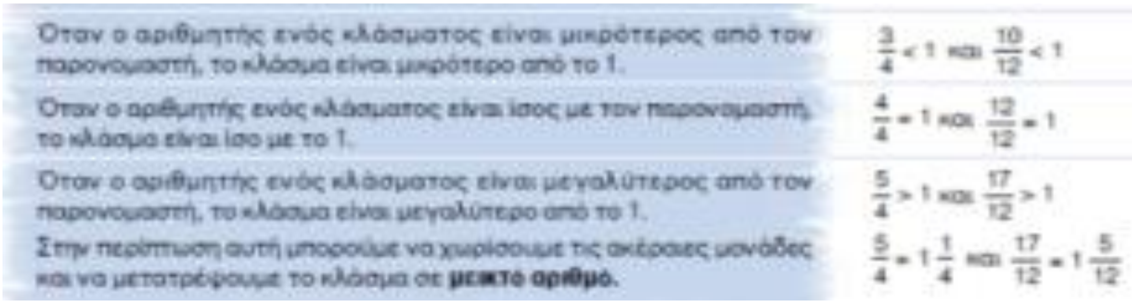
Στη Στ΄ τάξη του δημοτικού στο 3ο κεφάλαιο δίνεται έμφαση στους δεκαδικούς αριθμούς και στο πλαίσιο αυτό εμφανίζονται κάποια καταχρηστικά κλάσματα με τη συμβολική τους μορφή, χωρίς καμία μνεία, απλά προς εξυπηρέτηση της διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών και των δεκαδικών κλασμάτων (Διάγραμμα 7.19).


Για να γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως κλάσμα, γράφουμε όλο τον αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του **αριθμητή** και στη θέση του **παρονομαστή** γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά όσα ήταν τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Ο αριθμός 1,5 γίνεται: 15 αριθμητής, με παρονομαστή το 10, δηλαδή $\frac{15}{10}$ ή $1\frac{5}{10}$

Διάγραμμα 7.19. Θεωρία για την μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα με παράδειγμα το 1,5.

Στο κεφάλαιο 19 «κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα» σελ. 45 του βιβλίου του μαθητή έχουμε τον πρώτο ορισμό των καταχρηστικών κλασμάτων που ορίζεται ως κλάσμα που ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή του (Διάγραμμα 7.20). Στο ίδιο κεφάλαιο στο τετράδιο εργασιών σελ. 7 (β΄ τεύχος) δίνεται μια άσκηση στην οποία πρέπει οι μαθητές από τη διαγραμματική αναπαράσταση να βρουν τη συμβολική αναπαράσταση (Διάγραμμα 7.21), ενώ τα καταχρηστικά κλάσματα δίνονται και μέσα σε προβλήματα.



Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.	$\frac{3}{4} < 1$ και $\frac{10}{12} < 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.	$\frac{4}{4} = 1$ και $\frac{12}{12} = 1$
Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.	$\frac{5}{4} > 1$ και $\frac{17}{12} > 1$
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό**.	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ και $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

Διάγραμμα 7.20. Ο πρώτος ορισμός στο δημοτικό για τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζεται στην Στ΄ τάξη.

Διάγραμμα 7.21. Άσκηση μεταφοράς καταχρηστικών κλασμάτων από τη διαγραμματική αναπαράσταση στη συμβολική.

Στο κεφάλαιο 20 «Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης» σελ. 47 του βιβλίου μαθητή δίνεται δραστηριότητα που ζητά να τοποθετηθούν καταχρηστικά κλάσματα στην αριθμογραμμή κάνοντάς τα δεκαδικούς αριθμού (Διάγραμμα 7.22α), καθώς ένας από τους στόχους του κεφαλαίου αυτού είναι η σημείωση της θέσης του κλάσματος στην αριθμογραμμή βάσει της δεκαδικής του αξίας. Παρόμοια δραστηριότητα δίνεται και στο τετράδιο εργασιών του ίδιου κεφαλαίου σελ. 9 (Διάγραμμα 7.22β).

Πέρα από τα παραπάνω παραδείγματα, στις σελίδες 51, 56, 120 του βιβλίου του μαθητή, στη σελίδα 11 του Α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών και στις σελίδες 10, 11 του Β΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών, τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται σε διάφορες δραστηριότητες, αφού διδάχθηκαν και ορίστηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια αλλά μόνο με τη συμβολική τους μορφή.

Διάγραμμα 7.22. Τοποθέτηση καταχρηστικών κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα από τα εγχειρίδια της Στ΄ τάξης, παρατηρούμε ότι η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων εμφανίζεται για πρώτη φορά ορισμένη ως κλάσμα, που ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή του. Συνολικά υπάρχουν τέσσερις ασκήσεις στα βιβλία της τάξης αυτής στις οποίες γίνεται χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την υπό εξέταση έννοια.

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται στην πλειοψηφία τους στα σχολικά βιβλία του δημοτικού με τη συμβολική τους μορφή, ενώ μόνο εννιά δραστηριότητες υπάρχουν και στα 38 βιβλία του δημοτικού οι οποίες παρουσιάζουν τα καταχρηστικά κλάσματα σε άλλα πεδία αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα, οι διακριτές μονάδες εμφανίζονται μόνο σε μια δραστηριότητα στη Γ΄ τάξη, η θέση των καταχρηστικών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής εμφανίζεται σε τρεις δραστηριότητες στη Στ΄ τάξη και οι υπόλοιπες δραστηριότητες παρουσιάζουν το πεδίο της διαγραμματικής αναπαράστασης.

Οι σημαντικές δυσκολίες, λοιπόν, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αναφορικά με την κατανόηση των καταχρηστικών κλασμάτων μπορούμε να πούμε ότι οφείλονται και στον τρόπο που αυτή η έννοια αναπαρίσταται στα σχολικά βιβλία, καθώς και στα ελλιπή πεδία αναπαράστασης που έχουν τα εγχειρίδια, καθώς έρευνες έχουν δείξει ότι όσο πιο συχνά έρχεται σε επαφή ο μαθητής με μια μορφή αναπαράστασης τόσο πιο οικεία του γίνεται και τόσο καλύτερα τη μαθαίνει (Hodgen et al., 2010· Jiang & Chua, 2010· Vlachou & Avgerinos, 2018). Θα ήταν, λοιπόν, καλό να εισαχθεί πιο δυναμικά η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού και να γίνει πιο ευρεία χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, καθώς η έννοια αυτή σχετίζεται με την ικανότητα τοποθέτησης των αριθμών στην αριθμογραμμή, με την κατασκευή κλασματικών αριθμών που ανοίγουν το δρόμο για την ανάπτυξη μιας αίσθησης συνεκτικότητας και συνέχειας των αριθμών (Hackenberg, 2007), καθώς και με την ικανότητα κατασκευής και επίλυσης προβλήματος έργου (Αυγερινός και Βλάχου, 2013).

Σύνοψη

Συνοψίζοντας, στην παρούσα έρευνα παρουσιάστηκαν όλα τα κεφάλαια των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού που αναφέρονταν στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος. Επίσης, παρουσιάστηκε ο τρόπος που αυτή η έννοια εξελίσσεται μέσα στα σχολικά εγχειρίδια και των έξι τάξεων του δημοτικού, οι αναπαραστάσεις με τις οποίες εισάγεται η έννοια, καθώς και η συχνότητά τους.

Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, οι μαθητές έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος στη Γ΄ δημοτικού μέσα από μια δραστηριότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων (διακριτές μονάδες, διάγραμμα και συμβολική μορφή) η οποία είναι και η μοναδική στα βιβλία της Γ΄ τάξης. Το ίδιο συμβαίνει και στην Δ΄ τάξη. Γενικά, παρατηρούμε ότι η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων και οι αναπαραστάσεις της δε συμπεριλαμβάνονται στους στόχους αυτών των δύο τάξεων και ως εκ τούτου δεν υπάρχει και αυτόνομο κεφάλαιο για την έννοια αυτή.

Στην Ε΄ τάξη οι δραστηριότητες που παρουσιάζουν τα καταχρηστικά κλάσματα μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων αυξάνονται στις τέσσερις με το βιβλίο του δασκάλου να αναφέρει τη λέξη «καταχρηστικά», χωρίς όμως να δίνονται περισσότερες οδηγίες. Η ενσυνείδητη εισαγωγή των μαθητών σε αυτήν την έννοια γίνεται στη Στ΄ δημοτικού με την ύπαρξη ορισμού και την παρουσία τεσσάρων δραστηριοτήτων που διαχειρίζονται διάφορα πεδία αναπαράστασης και συγκεκριμένα τη διαγραμματική, τη συμβολική και την αριθμογραμμή.

Πέρα από τις παραπάνω δραστηριότητες, τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται στη συμβολική τους μορφή σε κάποιες ασκήσεις του βιβλίου μαθητή και του τετραδίου εργασιών από την Γ΄ τάξη έως και την Στ΄, κυρίως στα κεφάλαια που διδάσκονται οι δεκαδικοί αριθμοί.

Συμπερασματικά, στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού δεν αφιερώνεται κανένα κεφάλαιο για τη διδασκαλία του καταχρηστικού κλάσματος. Μόνο στη Στ΄ τάξη η έννοια αυτή διδάσκεται ως μέρος του κεφαλαίου των ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων. Συνεπώς, μπορούν να αναδειχτούν πιθανές συσχετίσεις ανάμεσα στη δομή και το περιεχόμενο των βιβλίων και στις δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της έννοιας των καταχρηστικών κλασμάτων, όπως φαίνεται από τις διάφορες έρευνες.

Οι Αναπαραστάσεις στην Έννοια της Σειροθέτησης των Κλασμάτων στο Γεωμετρικό Μοντέλο της Αριθμητικής Γραμμής

Το παρόν υποκεφάλαιο παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μελέτη που έγινε πάνω στα ελληνικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού, προκειμένου να ιδωθεί η δομή και το περιεχόμενο των βιβλίων πάνω στα κλάσματα και πιο συγκεκριμένα πάνω στην έννοια της σειροθέτησης των κλασμάτων πάνω στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Ποιες, δηλαδή, αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στα σχολικά βιβλία του δημοτικού για την παραπάνω έννοια και με ποια συχνότητα. Ταυτόχρονα, γίνεται σχολιασμός για την επάρκεια και το είδος των αναπαραστάσεων και τη συσχέτισή τους με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, βάσει ερευνών, πάνω στην έννοια.

Σκοπός της έρευνας

Η παρούσα εργασία αφορά στην έρευνα της δομής των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού πάνω στους ρητούς. Πιο συγκεκριμένα, σκοπεύει στη μελέτη των μορφών των αναπαραστάσεων καθώς και της συχνότητας που παρουσιάζονται στα βιβλία των μαθηματικών για την έννοια της σειροθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής καταγράφοντας ταυτόχρονα την εξελικτική πορεία αυτών των εννοιών κατά το πέρασμα των μαθητών από μια τάξη στην άλλη. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι οι εξής:

- Να εντοπιστούν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα σχολικά βιβλία του δημοτικού στην έννοια της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.
- Να εξεταστούν οι αναπαραστάσεις στην έννοια της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής ως προς την καταλληλότητά τους.
- Να γίνει πιθανή συσχέτιση των αναπαραστάσεων αυτών με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές πάνω στην έννοια αυτή.

Εργαλεία της έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας μελετήθηκαν τα ελληνικά βιβλία των Μαθηματικών και των έξι τάξεων του δημοτικού σχολείου (από την Α΄ τάξη δημοτικού έως και την Στ΄ τάξη του δημοτικού). Η ομάδα των 38 συνολικά βιβλίων που μελετήθηκαν περιλαμβάνει τα βιβλία του μαθητή, τα τετράδια εργασιών και τα βιβλία για το δάσκαλο.

Ανάλυση δεδομένων

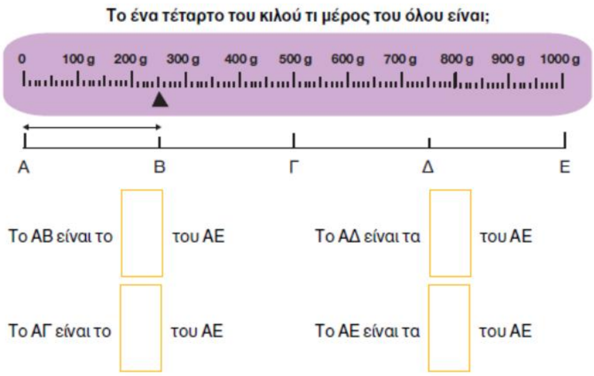
Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας ακολουθήθηκε η περιγραφική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια.

Αποτελέσματα

Βιβλία Μαθηματικών Α΄, Β΄, και Γ΄ δημοτικού. Η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης γενικά, είτε πρόκειται για φυσικούς είτε για ρητούς αριθμούς, απουσιάζει πλήρως από τα σχολικά βιβλία της Α΄ τάξης του δημοτικού. Η χρήση της αριθμογραμμής ως αναπαράσταση γενικά ξεκινάει από τη Β΄ τάξη για την εύρεση του μισού στο κεφάλαιο 7 «Βρίσκω το μισό και το ολόκληρο», σελ. 25, βιβλίο μαθητή (Διάγραμμα 7.23). Είναι η μοναδική δραστηριότητα που συναντούν οι μαθητές μέχρι τη Β΄ τάξη του δημοτικού στην οποία αναπαρίσταται το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής υπό τη μορφή χάρακα. Στην τάξη αυτή, βέβαια, δε διδάσκονται οι κλασματική αριθμοί. Το παράδειγμα του Διαγράμματος 7.23 χρησιμοποιείται για την εύρεση του «μισού» που αναπαρίσταται με αριθμολέξη και όχι με συμβολική μορφή, δηλαδή 1/2.

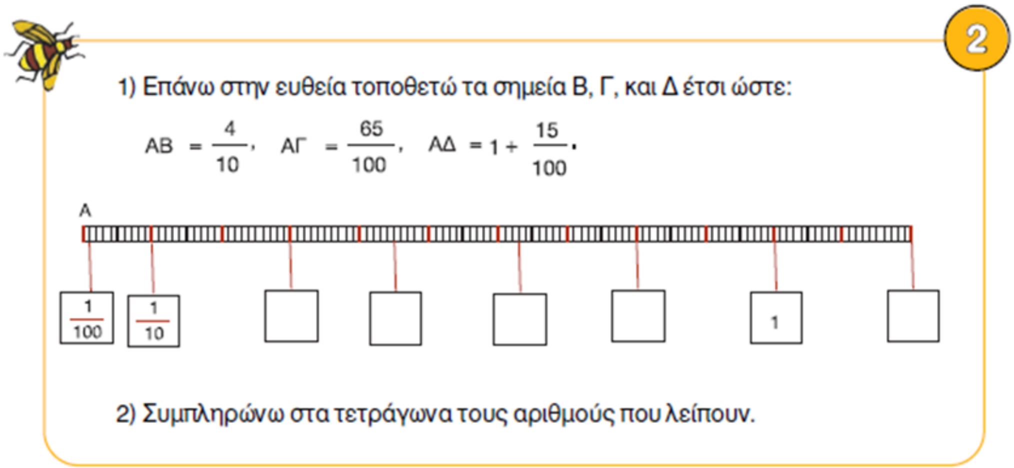
Διάγραμμα 7.23. Η πρώτη εμφάνιση μοντέλου μήκους για την εύρεση του μισού στη Β΄ τάξη του δημοτικού.

Η τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη Γ΄ τάξη του δημοτικού, στο κεφάλαιο 24 «Κλασματικές μονάδες και οι απλοί κλασματικοί αριθμοί», σελ. 63 του βιβλίου του μαθητή (Διάγραμμα 7.24). Στόχος του κεφαλαίου είναι μεταξύ άλλων «να εφαρμοστούν οι κλασματικές μονάδες και τα κλάσματα πάνω σε ευθύγραμμα τμήματα» (Λεμονίδης κ.α., 2006, σ. 75). Πιο συγκεκριμένα, στην άσκηση του Διαγράμματος 7.23 ζητείται από του μαθητές με βάση τέταρτο του κιλού «να προσδιορίσουν πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα χωρισμένο σε τέσσερα κομμάτια το 1/2, τα 2/4 ή 1/2, τα 3/4 και τα 4/4 ή 1. Γίνεται συζήτηση για τα 4/4 που είναι ίσα με τη μονάδα» (Λεμονίδης κ.α., 2006, σ. 77). Παρατηρούμε ότι οι κατευθύνσεις που δίνει το βιβλίο δασκάλου αναφέρουν ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι χωρισμένο σε τέσσερα κομμάτια και όχι σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς έρευνες έχουν αναδείξει τη δυσκολία που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση της αναγκαιότητας της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας (Avgerinos et al., 2012).



Διάγραμμα 7.24. Η πρώτη αριθμογραμμή ως αναπαράσταση κλασμάτων στη Γ΄ τάξη, Κ.34, ΒΜ.

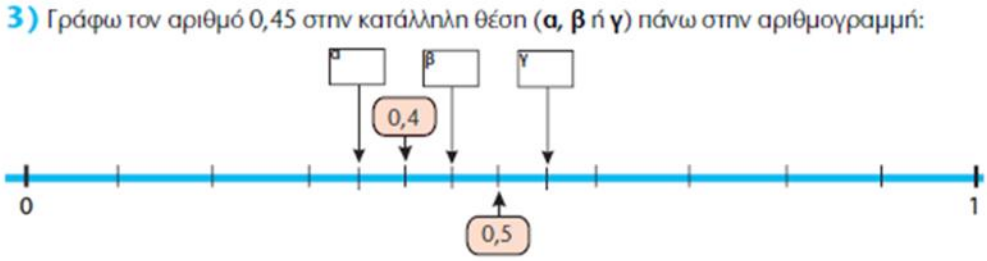
Η επόμενη αναπαράσταση της αριθμογραμμής για τα κλάσματα παρουσιάζεται στη Γ΄ δημοτικού στο κεφάλαιο 34 «Δεκαδικά κλάσματα» του τετραδίου εργασιών, σελ. 24 (Διάγραμμα 7.25). Η εκφώνηση της άσκησης ονομάζει την αναπαράσταση ευθεία και στο βιβλίο του δασκάλου δεν υπάρχει σχετικός στόχος για την τοποθέτηση δεκαδικών κλασμάτων στην αριθμογραμμή. Σε αυτό το σημείο μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα σημεία της αριθμογραμμής είναι αρκετά πυκνοσχεδιασμένα, κάτι που δυσκολεύει τους μαθητές αυτής της ηλικίας, οι οποίοι δεν είναι αρκετά εξοικειωμένοι με το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.



Διάγραμμα 7.25. Τοποθέτηση δεκαδικών κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Γ΄ τάξη, κεφάλαιο 34, τετραδίου εργασιών.

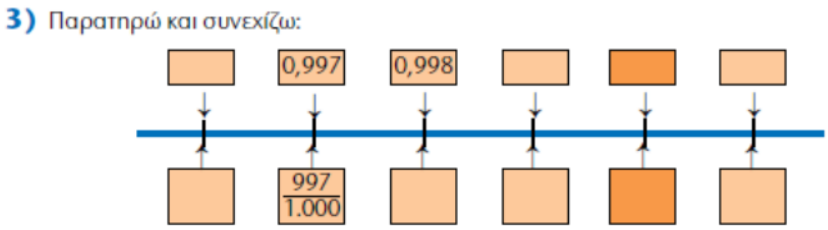
Συνοψίζοντας τα ευρήματα από τα εγχειρίδια της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης του δημοτικού, παρατηρούμε ότι η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Γ΄ τάξη του δημοτικού και συνολικά υπάρχουν μόνο δύο ασκήσεις στα βιβλία της τάξης αυτής, στις οποίες γίνεται χρήση της.

Βιβλία Μαθηματικών Δ΄, Ε΄, και Στ΄ δημοτικού. Συνεχίζοντας την ανάλυση για την αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων και στις υπόλοιπες τάξεις, η έννοια της αριθμητικής γραμμής εμφανίζεται στην Δ΄ τάξη του δημοτικού στο κεφάλαιο 19 «Προσθέτω και αφαιρώ δεκαδικούς αριθμούς» στο βιβλίο του δασκάλου σελ. 71. Μάλιστα, η τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών στην αριθμογραμμή αποτελεί και διδακτικό στόχο του κεφαλαίου. Από το κεφάλαιο αυτό και εξής γίνεται χρήση της αριθμογραμμής σε 7 κεφάλαια και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 19, σελ. 49 βιβλίο μαθητή, κεφάλαιο 20, σελ. 50,51 βιβλίο του μαθητή, στο οποίο εμφανίζεται για πρώτη φορά και η λέξη «αριθμογραμμή» σε άσκηση (Διάγραμμα 7.26), κεφάλαιο 26, σελ. 67 βιβλίο του μαθητή, κεφάλαιο 15, σελ. 7 τετράδιο εργασιών Β΄ τεύχος, κεφάλαιο 20, σελ. 16 του τετραδίου εργασιών Β΄ τεύχος και κεφάλαιο 25, σελ.31 του τετραδίου εργασιών Β' τεύχος.

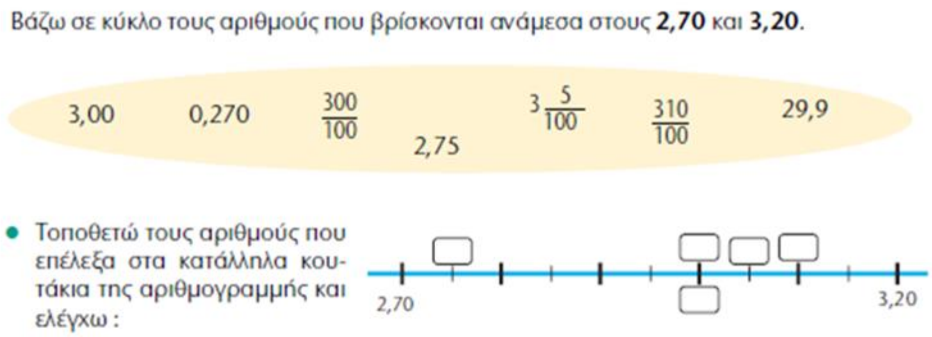


Διάγραμμα 7.26. Η πρώτη εμφάνιση της λέξης «αριθμογραμμή» σε άσκηση της Δ΄ τάξης στο βιβλίο του μαθητή.

Ωστόσο, η χρήση της αριθμογραμμής ως αναπαράσταση στα παραπάνω κεφάλαια γίνεται όχι για την τοποθέτηση κλασμάτων, αλλά για την τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών. Μόνο δύο παράδειγμα με τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή συναντάμε στην Δ΄ τάξη, στο κεφάλαιο 21«Γνωρίζω καλύτερα τους δεκαδικούς» σελ. 22 και στην «4η επανάληψη» σελ. 35 του Β΄ τεύχους του τετραδίου εργασιών κι αυτό σε συνδυασμό με τους δεκαδικούς αριθμούς (Διάγραμμα 7.27 και 7.28).



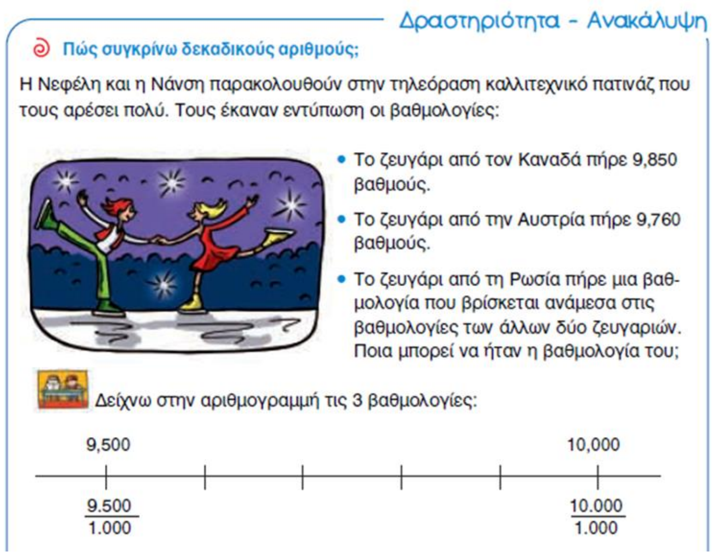
Διάγραμμα 7.27. Ορισμός δεκαδικών κλασμάτων στην αριθμογραμμή.



Διάγραμμα 7.28. Τοποθέτηση δεκαδικών κλασμάτων στην αριθμογραμμή.

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι μέχρι την Δ΄ τάξη του δημοτικού οι μαθητές στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα συναντούν μόνο τρεις ασκήσεις τοποθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής (μία στη Γ΄ τάξη και δύο στην Δ΄ τάξη). Και τα τρία παραδείγματα διαχειρίζονται δεκαδικά κλάσματα και οι δραστηριότητες γίνονται στο πλαίσιο της διδασκαλίας των δεκαδικών αριθμών.

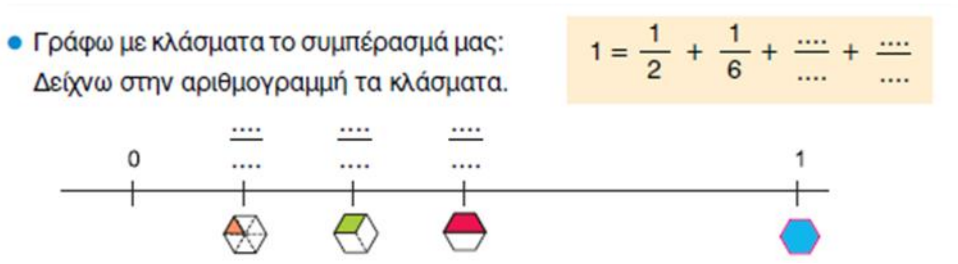
Όσον αφορά στην Ε΄ τάξη, η αριθμογραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων εμφανίζεται στο κεφάλαιο 9 «Αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς αριθμούς» του βιβλίου του μαθητή, σελ. 30 (Διάγραμμα 7.29). Εδώ οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν δεκαδικούς αριθμούς, αλλά υπάρχουν στην αριθμογραμμή και τα αντίστοιχα δεκαδικά κλάσματα ως βοηθητικά στοιχεία. Το κεφάλαιο δεν έχει στόχο να εξοικειώσει τους μαθητές με την τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή.



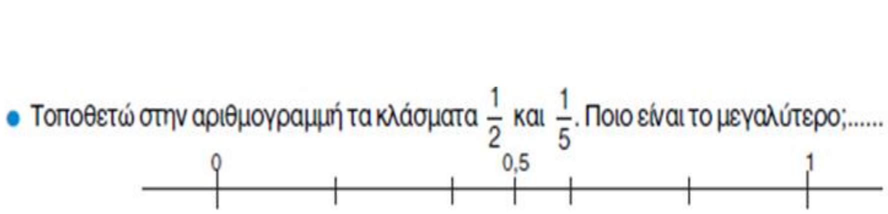
Διάγραμμα 7.29. Τοποθέτηση δεκαδικών κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Ε΄ τάξη, Κ.9, ΒΜ.

Η επόμενη αναπαράσταση της αριθμογραμμής στην Ε΄ τάξη εμφανίζεται στο κεφάλαιο16 «Κλασματικές μονάδες» του βιβλίου του μαθητή, σελ. 47 (Διάγραμμα 7.30). Οι μαθητές καλούνται να δείξουν στην αριθμογραμμή τις κλασματικές μονάδες που αντιστοιχούν στα γεωμετρικά σχήματα. Στο ίδιο κεφάλαιο, στο τετράδιο εργασιών, σελ. 10 και 11 υπάρχουν δύο αμιγώς ασκήσεις, που ζητούν από τους μαθητές να τοποθετήσουν κλάσματα στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 7.31 και 7.32). Στη δραστηριότητα του Διαγράμματος 7.31 οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν τα κλάσματα με τη στρατηγική της διαίρεσης, δηλαδή, να μετατρέψουν τα κλάσματα σε δεκαδικούς με τη βοήθεια της αριθμομηχανής τσέπης.

Πέρα από αυτή τη στρατηγική, στο βιβλίο του δασκάλου παρουσιάζεται άλλη μία στρατηγική σειροθέτησης κλασμάτων, αυτής της συμπλήρωσης της μονάδας (πόσο χρειαζόμαστε ακόμη για να φτιάξουμε τη μονάδα) και παρατίθεται ως παράδειγμα: «1/4 και 1/5. Τα 3/4 είναι λιγότερα από τα 4/5, άρα το 1/4>1/5» (Κακαδιάρης κ.α., 2006, σ. 93). Όμως, ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να καταλήξουν ότι τα 3/4 είναι λιγότερα από τα 4/5; Μήπως το να συγκρίνουν απευθείας τις κλασματικές μονάδες (που μεγαλύτερο είναι το κλάσματα με τον μικρότερο παρονομαστή) είναι πιο απλή στρατηγική, για το συγκεκριμένο παράδειγμα που διαχειρίζεται κλασματικές μονάδες;



Διάγραμμα 7.30. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Ε΄ τάξη, Κ.16, ΒΜ.

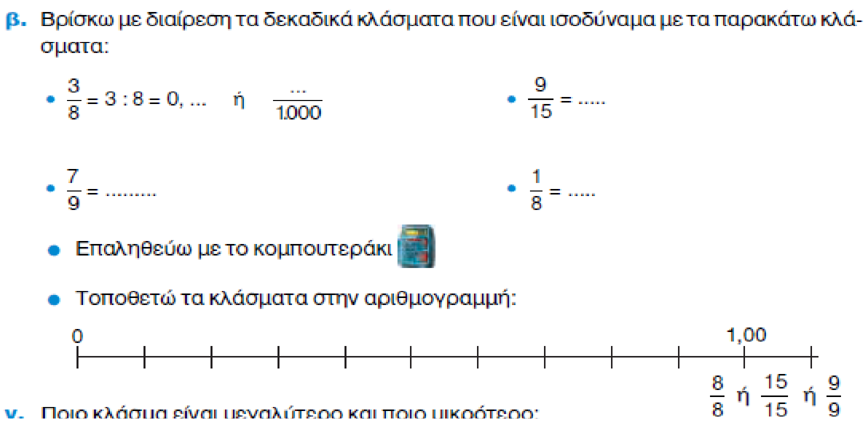


*Διάγραμμα 7.31.*Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Ε΄ τάξη, Κ.16, ΤΕ.

Η αναπαράσταση του Διαγράμματος 7.32 αποτελεί μια πολύ καλή δραστηριότητα εφαρμογής στρατηγικών για τη σειροθέτηση των κλασμάτων χρησιμοποιώντας στοιχεία ανοιχτού προβλήματος και δυνατότητας επιλογής ατομικών επιλογών. Οι μαθητές, δηλαδή, μπορούν να κατασκευάσουν διαφορετικά κλάσματα και να τα διατάξουν με βάση τη στρατηγική ή τις στρατηγικές που ταιριάζουν περισσότερο σε εκείνους. Αν και τα παραπάνω δεν αναφέρονται ρητά στο βιβλίο του δασκάλου, ωστόσο είναι δραστηριότητα με πολλές δυνατότητες, αν αξιοποιηθεί σωστά από τον εκπαιδευτικό. Σημειώνουμε ότι και στις τρεις παραπάνω αναπαραστάσεις η διδασκαλία της αριθμογραμμής δεν αποτελεί καταγεγραμμένο στόχο του κεφαλαίου.

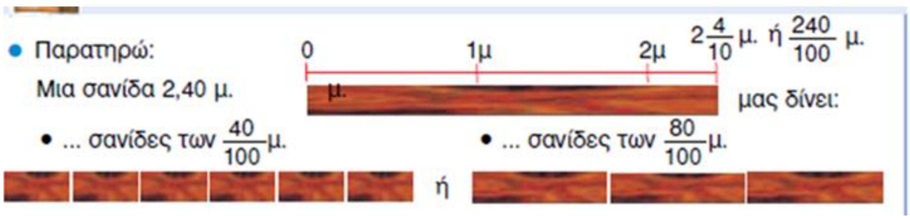
Διάγραμμα 7.32. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Ε΄ τάξη, Κ.16, ΤΕ.

Συνεχίζοντας με τα ευρήματα των βιβλίων της Ε΄ τάξης, στο κεφάλαιο18 «Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό» του τετραδίου εργασιών, σελ. 14 παρουσιάζεται η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων (Διάγραμμα 7.33). Η στρατηγική που συνίσταται εδώ στο βιβλίο του δασκάλου είναι η μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό. Ούτε το κεφάλαιο αυτό έχει καταγεγραμμένο στο βιβλίο του δασκάλου ως στόχο την εξοικείωση των μαθητών με την τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή.



Διάγραμμα 7.33. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Ε΄ τάξη, Κ.18, ΤΕ.

Η τελευταία αναπαράσταση της αριθμητικής γραμμής που σχετίζεται με τα κλάσματα είναι αυτή του κεφαλαίου 28 «διαίρεση μέτρησης σε ομώνυμα κλάσματα», σελ. 74. Στην εισαγωγική δραστηριότητα/ανακάλυψη του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής για να αναπαρασταθεί μια σανίδα 2,40μ. (Διάγραμμα 7.34). Η δραστηριότητα καλύπτει το στόχο του κεφαλαίου που αναφέρεται στο βιβλίο του δασκάλου σελ. 126 «οι μαθητές να διαχειρίζονται γεωμετρικές απεικονίσεις προκειμένου να δείχνουν με μοντέλο τη διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων».



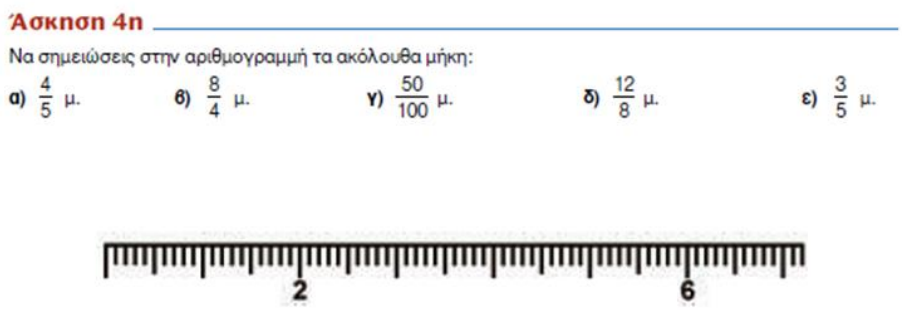
Διάγραμμα 7.34.Γεωμετρική απεικόνιση της διαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων.

Όσον αφορά στα βιβλία των Μαθηματικών της Στ΄ τάξης του δημοτικού, η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 «Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα» του βιβλίου του μαθητή, σελ. 13 (Διάγραμμα 7.35). Η δραστηριότητα αυτή στόχο έχει οι μαθητές να κατανοήσουν την ανάγκη μετατροπής των κλασμάτων σε δεκαδικό αριθμό και όχι να διαχειρίζονται κλάσματα πάνω στην αριθμητική γραμμή.

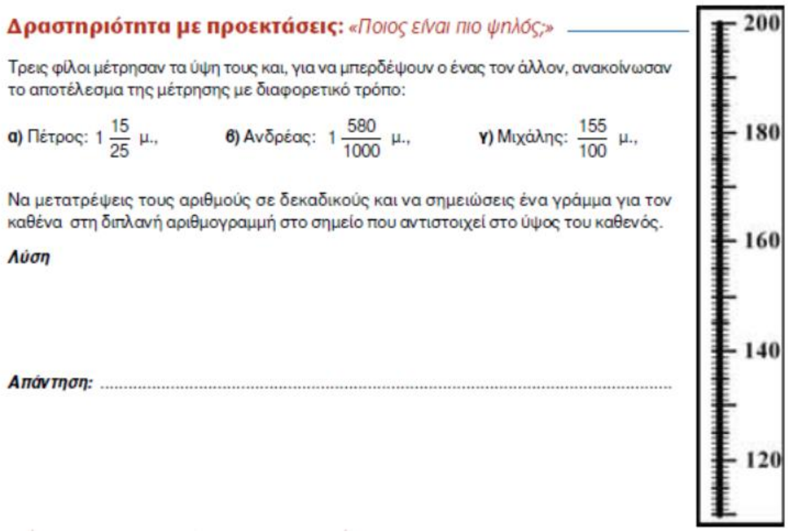
Διάγραμμα 7.35. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.3, ΒΜ.

Στο κεφάλαιο 20 «Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης» του βιβλίου του μαθητή, σελ. 47 εμφανίζεται για πρώτη φορά στα βιβλία του δημοτικού ένα κεφάλαιο που έχει ως στόχο οι μαθητές να σημειώνουν τη θέση του κλάσματος στην αριθμογραμμή (από τη δεκαδική του αξία). Πιο συγκεκριμένα, μέσα από τις δραστηριότητες των Διαγραμμάτων 7.36, 7.37 και 7.38 οι μαθητές εξοικειώνονται με τη στρατηγική μετατροπής του κλάσματος σε δεκαδικό προκειμένου να διακρίνουν σε ποιο σημείο στην αριθμογραμμή αντιστοιχεί ο αριθμός που εκφράζεται με ένα κλάσμα.

Διάγραμμα 7.36. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.20, ΒΜ.



Διάγραμμα 7.37. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.20, ΤΕ.



Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Ποιος είναι πιο ψηλός;»*

Τρεις φίλοι μέτρησαν τα ύψη τους και, για να μπερδέψουν ο ένας τον άλλον, ανακοίνωσαν το αποτέλεσμα της μέτρησης με διαφορετικό τρόπο:

α) Πέτρος: $1\frac{15}{25}$ μ., **β)** Ανδρέας: $1\frac{580}{1000}$ μ., **γ)** Μιχάλης: $\frac{155}{100}$ μ.,

Να μετατρέψεις τους αριθμούς σε δεκαδικούς και να σημειώσεις ένα γράμμα για τον καθένα στη διπλανή αριθμογραμμή στο σημείο που αντιστοιχεί στο ύψος του καθενός.

Λύση

Απάντηση: ....

*Διάγραμμα 7.38.*Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.20, ΤΕ.

Στο κεφάλαιο 22 «Σύγκριση- Διάταξη κλασμάτων», του βιβλίου του μαθητή, σελ.51 συνεχίζεται η προσπάθεια του σχολικού βιβλίου να εξοικειώσει τους μαθητές με στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή μέσα από συγκεκριμένο στόχο που θέτει το βιβλίο του δασκάλου: «Στόχος του κεφαλαίου είναι ο μαθητής να τοποθετεί κλάσματα στην αριθμογραμμή» (Κασσώτη, 2006, σ. 61). Η επίτευξη του στόχου πραγματοποιείται με τη δραστηριότητα του Διαγράμματος 7.39, όπου οι μαθητές διατάσσουν κλάσματα με τη στρατηγική των ομώνυμων κλασμάτων και μαθαίνουν ότι μπορούν να βρουν ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα, αν συγκρίνουν τους αριθμητές τους.

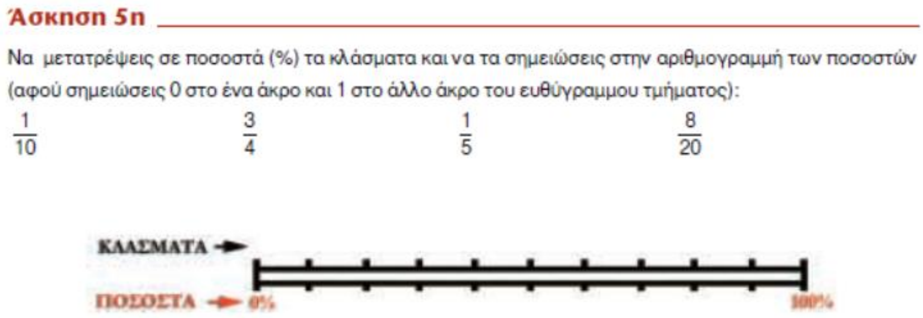
Δραστηριότητα 2η

- Αφού πρώτα διατάξεις τα κλάσματα $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{1}{12}$ και $\frac{11}{12}$ κατά αύξουσα σειρά, τοποθέτησε αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β στην παρακάτω αριθμογραμμή: ....

- Ποια διαδικασία μας επιτρέπει να βρούμε ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα;

Διάγραμμα 7.39. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.22, ΒΜ.

Η παραπάνω στρατηγική χρησιμοποιείται και στη δραστηριότητα 5 του Διαγράμματος 7.40 του κεφάλαιο 40 «Εκτιμώ το ποσοστό» του τετραδίου εργασιών, σελ. 14.



Διάγραμμα 7.40. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Κ.40, ΒΜ.

Με την αναπαράσταση του Διαγράμματος 7.41 του επαναληπτικού κεφαλαίου «Αριθμοί και πράξεις» του βιβλίου του μαθητή, σελ. 58 κλείνει η ενότητα με τα κλάσματα η οποία είναι η μοναδική ενότητα που εισάγει τους μαθητές σε στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι οι δραστηριότητες αυτές είναι σε όλο το βιβλίο επτά και περιορίζονται σε τέσσερα κεφάλαια (Κ. 3, 20, 22 και 40), ίσως όχι αρκετά για τις αντίστοιχες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή.

Διάγραμμα 7.41. Τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, Στ΄ τάξη, Ανακεφαλαίωση, ΒΜ.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Ελλάδας, παρατηρούμε ότι η αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων δεν υπάρχει στην Α΄ και Β΄ τάξη του δημοτικού, καθώς τα κλάσματα δε διδάσκονται σε αυτές τις τάξεις. Έτσι, εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Γ΄ δημοτικού και συνολικά υπάρχουν δύο αναπαραστάσεις στα βιβλία της τάξης αυτής, μια στο κεφάλαιο 24 και μια στο κεφάλαιο 34.

Αναφορικά με την Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού, παρατηρούμε ότι η αριθμογραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων απουσιάζει πλήρως από τα βιβλία της Δ΄ τάξης, ενώ στην Ε΄ τάξη υπάρχουν πέντε αναπαραστάσεις σε τρία κεφάλαια (Κ. 9, 16 και 18) που όμως ως στόχο έχουν να εξοικειώσουν τους μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς. Ωστόσο, παρουσιάζονται στρατηγικές σειροθέτησης των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή όπως η σύγκριση σε σχέση με το μισό, το συμπλήρωμα της μονάδας, οι κοινοί αριθμητές. Όμως, δεν υπάρχουν αρκετές και εμφανείς δραστηριότητες για να στηρίξουν αυτές τις στρατηγικές.

Έτσι, η συστηματική και ενσυνείδητη μάθηση της αριθμογραμμής για την τοποθέτηση των κλασμάτων γίνεται για πρώτη φορά στη Στ΄ τάξη του δημοτικού μέσα σε ένα πιο οργανωμένο πλαίσιο, με συγκεκριμένους τιθέμενους στόχους και εφαρμογή συγκεκριμένων στρατηγικών για την επίτευξή τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται στη Στ΄ τάξη δύο στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή, για τις οποίες υπάρχουν συγκεκριμένες δραστηριότητες (συνολικά επτά σε τέσσερα κεφάλαια) για την εφαρμογή τους και παρουσιάζονται με συγκεκριμένους στόχους τόσο στο βιβλίο του μαθητή όσο και στο βιβλίο δασκάλου. Οι στρατηγικές αυτές είναι η μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και τα ομώνυμα κλάσματα. Αν και στο βιβλίο της Στ΄ τάξης υπάρχουν οι πρώτες οργανωμένες ενότητες για τη διδασκαλία της τοποθέτησης των κλασμάτων στην αριθμογραμμή, ωστόσο, τόσο η έκταση των κεφαλαίων όσο και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται (μόνο δύο στρατηγικές) δεν μπορούν να θεωρηθούν επαρκείς για μια τόσο σημαντική, αλλά και δύσκολη έννοια.

Επιπρόσθετα, για κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών που αναφέρει η βιβλιογραφία, αναφορικά με την τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, όπως είναι το να ορίζουν σωστά σε πόσα ίσα μέρη-διαστήματα είναι χωρισμένη η αριθμογραμμή και η δυσκολία κατανόησης της έννοιας της πυκνότητας, δηλαδή, της ύπαρξης άπειρων ρητών αριθμών μεταξύ δύο διαδοχικών κλασμάτων, δε φαίνεται να υπάρχουν σχετικές δραστηριότητες στα σχολικά βιβλία. Έτσι, οι δυσκολίες αυτές των μαθητών παραμένουν σε όλο το δημοτικό.

Οι σημαντικές δυσκολίες, λοιπόν, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή μπορούμε να πούμε ότι οφείλονται και στα ελλιπή πεδία αναπαράστασης που έχουν τα εγχειρίδια, καθώς έρευνες έχουν δείξει ότι όσο πιο συχνά έρχεται σε επαφή ο μαθητής με μια μορφή αναπαράστασης τόσο πιο οικεία του γίνεται και τόσο καλύτερα τη μαθαίνει (Hodgen et al., 2010· Jiang & Chua, 2010).

Θα ήταν, λοιπόν, καλό να εισαχθεί πιο δυναμικά η έννοια της αριθμογραμμής αναφορικά με τα κλάσματα στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού και να γίνει πιο ευρεία χρήση της, καθώς η έννοια αυτή σχετίζεται με την κατασκευή κλασματικών αριθμών που ανοίγουν το δρόμο για την ανάπτυξη μιας αίσθησης συνεκτικότητας και συνέχειας των αριθμών (Hackenberg, 2007).

Σύνοψη

Στην παρούσα έρευνα παρουσιάστηκαν όλα τα κεφάλαια των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού που παρουσιάζουν την αριθμητική γραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων, τη ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και τα καταχρηστικά κλάσματα. Επίσης, παρουσιάστηκε ο τρόπος που αυτές οι έννοιες εξελίσσονται μέσα στα σχολικά εγχειρίδια και των έξι τάξεων του δημοτικού, οι αναπαραστάσεις με τις οποίες εισάγονται οι έννοιες, καθώς και η συχνότητά τους.

Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, η αναπαράσταση της αριθμογραμμής για τη σειροθέτηση των κλασμάτων εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Γ΄ δημοτικού μέσα από δύο δραστηριότητες, οι οποίες είναι και οι μοναδικές, ενώ στη Δ΄ τάξη δεν υπάρχει καθόλου σχετική αναπαράσταση. Στην Ε΄ τάξη οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο αναπαράστασης των κλασμάτων αυξάνονται από δύο που ήταν στη Γ΄ τάξη σε πέντε. Η ενσυνείδητη εισαγωγή των μαθητών σε αυτήν την έννοια γίνεται στη Στ΄ δημοτικού με την παρουσία επτά αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή για τη σειροθέτηση κλασμάτων.

Αναφορικά με το χωρισμό της μονάδας σε ίσα μέρη, στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού αφιερώνονται λίγα κεφάλαια για τη διδασκαλία της, τρία κεφάλαιο στην Γ΄ δημοτικού, ένα στην Ε΄ και ένα στη Στ΄. Επίσης, είναι εμφανής η έλλειψη αντιπαραδειγμάτων που ερευνητικά έχει αποδειχθεί ότι συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Αναφορικά με τα καταχρηστικά κλάσματα εμφανίζονται στην πλειοψηφία τους στα σχολικά βιβλία του δημοτικού με τη συμβολική τους μορφή, ενώ μόνο εννιά δραστηριότητες υπάρχουν και στα 38 βιβλία του δημοτικού οι οποίες παρουσιάζουν τα καταχρηστικά κλάσματα σε άλλα πεδία αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα, οι διακριτές μονάδες εμφανίζονται μόνο σε μια δραστηριότητα στη Γ΄ τάξη, η θέση των καταχρηστικών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής εμφανίζεται σε τρεις δραστηριότητες στη Στ΄ τάξη και οι υπόλοιπες δραστηριότητες παρουσιάζουν το πεδίο της διαγραμματικής αναπαράστασης. Γενικά, στα ελληνικά σχολικά βιβλία του δημοτικού δεν αφιερώνεται κανένα κεφάλαιο για τη διδασκαλία του καταχρηστικού κλάσματος. Μόνο στη Στ΄ τάξη η έννοια αυτή διδάσκεται ως μέρος της του κεφαλαίου των ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων.

Η ελλιπής αυτή παρουσία των αναπαραστάσεων και για τις τρεις έννοιες πιθανόν να συσχετίζεται σε ένα βαθμό με τις δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, όπως υποστηρίζουν οι έρευνες. Βέβαια, οι αναπαραστάσεις στα βιβλία δεν είναι ο μοναδικός παράγοντας που ευθύνεται για τις δυσκολίες αυτές, καθώς και ο τρόπος διδασκαλίας και οι γνώσεις των εκπαιδευτικών ενέχουν ένα σημαντικό λόγο για τις δυσκολίες των μαθητών στα Μαθηματικά. Ο αρμονικός, λοιπόν, συγκερασμός αυτών των τριών στοιχείων βιβλία, διδασκαλία, εκπαιδευτικός, θα πρέπει να αποτελέσει τον πυλώνα που θα στηρίξει την προσπάθεια μείωσης των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Γ΄ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Το τρίτο και τελευταίο ερευνητικό μέρος αποτελείται από την ομάδα των ερευνών που δίνουν απάντηση στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα της εργασίας «Πώς μπορούν να μειωθούν οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα;». Αποτελείται από δύο κεφάλαια, το κεφάλαιο 8 και 9. Συμπεριλαμβάνει την παρουσίαση προτάσεων για την αντιμετώπιση των αιτιών που προκαλούν τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα υπό τη μορφή εφαρμοσμένων πρακτικών και διδακτικών παρεμβάσεων. Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζεται το εκπαιδευτικό λογισμικό «Fraction Battles» που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια για να συμπληρώσει και να ολοκληρώσει τις διδακτικές παρεμβάσεις και προτάσεις του κεφαλαίου 9. Στο κεφάλαιο 9 παρουσιάζεται το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα με δομείται πάνω στις πολλαπλές αναπαραστάσεις και στα 10 δομικά στοιχεία των μαθηματικών ως ενίσχυση των αναπαραστάσεων. Οι διδακτικές παρεμβάσεις ήταν διάρκειας δεκαέξι εβδομάδων και συμμετείχαν συνολικά 78 μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
«FRACTION BATTLES» ΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Στον παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα λογισμικό που αφορά στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Σκοπός του λογισμικού είναι μέσα από μια πληθώρα δραστηριοτήτων ενός δυναμικού πολυμεσικού περιβάλλοντος να εξοικειώσει τους μαθητές με τους ρητούς και να τους βοηθήσει να μειώσουν τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν στα κλάσματα με τη βοήθεια των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των 10 δομικών μαθηματικών στοιχείων πάνω στα οποία στηρίζεται και η προστιθέμενη αξία του λογισμικού. Το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες του λογισμικού καθορίστηκαν από τα πορίσματα των διαχρονικών ερευνών που παρουσιάζονται στα Α΄ και Β΄ ερευνητικό μέρος της παρούσας εργασίας. Το ηλεκτρονικό παιχνίδι αυτό, λοιπόν, έρχεται να συμπληρώσει το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα και να βοηθήσει τους μαθητές να μειώσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στις προαναφερόμενες έννοιες του κλάσματος.

Εισαγωγή στο Λογισμικό

Το Fraction Battles (Διάγραμμα 8.1) είναι ένα εκπαιδευτικό ηλεκτρονικό παιχνίδι που σχεδιάστηκε από την ίδια την ερευνήτρια και αφορά στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Δημιουργήθηκε με τη βοήθεια διάφορων λογισμικών και γλωσσών προγραμματισμού όπως Scratch, PowerPoint, Kidspiration, Pinnacle Studio, SmoothBoard, Hotpotatoes κ.α.. Σκοπός του ηλεκτρονικού παιχνιδιού είναι να εξοικειώσει τους μαθητές με τους ρητούς αριθμούς και να τους βοηθήσει να μειώσουν τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν στα κλάσματα με τη βοήθεια των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των 10 δομικών μαθηματικών στοιχείων πάνω στα οποία στηρίζεται και η προστιθέμενη αξία του λογισμικού. Αποτελεί συνοδευτικό υλικό των διδακτικών παρεμβάσεων του κεφαλαίου 9. Ωστόσο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ανεξάρτητα από τους εκπαιδευτικούς για να συμπληρώσει τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτού του εκπαιδευτικού λογισμικού είναι ότι το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνει δεν επιλέχθηκαν και σχεδιάστηκαν αυθαίρετα, αλλά καθορίστηκαν με έναν αυστηρά επιλεκτικό τρόπο από τα πορίσματα των δύο προηγούμενων ερευνητικών μερών της παρούσας εργασίας. Έτσι, κάθε δραστηριότητα του ηλεκτρονικού παιχνιδιού στοχεύει στο να καλύψει συγκεκριμένη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα. Η γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε για τη διατύπωση των δραστηριοτήτων οριστικοποιήθηκε μετά από πιλοτικές έρευνες. Απευθύνεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού (Ε΄ και Στ΄ τάξης) και σε μαθητές των πρώτων τάξεων του γυμνασίου (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου). Στην παρούσα έρευνα εφαρμόστηκε σε μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού.

Διάγραμμα 8.1. Η αρχική σελίδα του λογισμικού Fraction Battles.

Επιχειρηματολογία

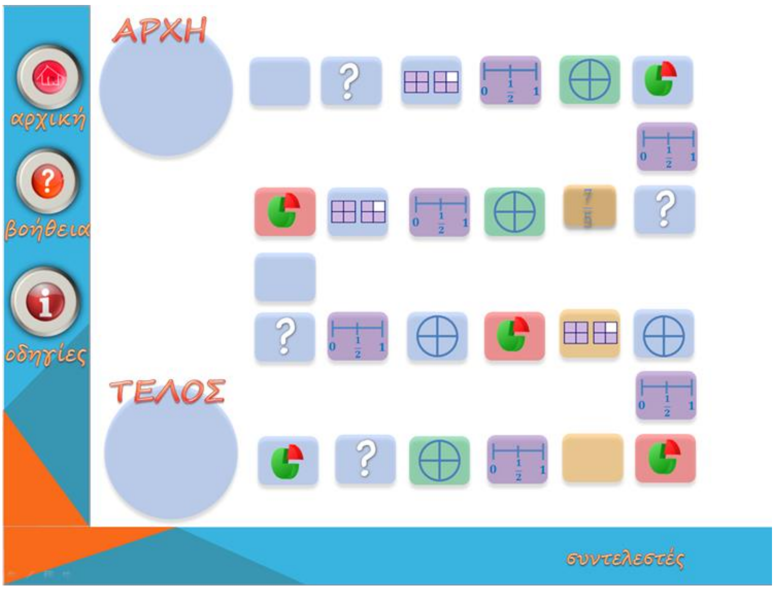
Ο Bruner (1960) επισημαίνει το ρόλο που διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και σε πόσο μεγάλο βαθμό αυτές έχουν επηρεάσει τους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών, καθώς συνιστούν έναν τρόπο αντιμετώπισης των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα. Μια μαθηματική ιδέα-έννοια μπορεί να αναπαρασταθεί με τρεις τρόπους: με χειριστικά μοντέλα/αντικείμενα, εικονικά (εικονογραφημένη αναπαράσταση) και συμβολικά (γραπτό σύμβολο). Αυτή η ιδέα της πολλαπλής αναπαράστασης στηρίζεται στο γεγονός ότι η εννοιολογική ανάπτυξη των παιδιών εξελίσσεται από συγκεκριμένες εμπειρίες σε πιο αφηρημένες και το σημείο αναφοράς για τις αναπαραστάσεις είναι πώς αυτές μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν καλύτερα μαθηματικά.

Στηριζόμενοι σε αυτό το σημείο αναφοράς, το σχεδιασθέν λογισμικό/παιχνίδι αξιοποιεί την τεχνολογία για να προβάλλει και να συνδυάσει και τους τρεις τρόπους αναπαράστασης κατά Bruner, προκειμένου να επιτύχει καλύτερα αποτελέσματα στις επιδόσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς. Η προστιθέμενη αξία του λογισμικού έγκειται στο γεγονός ότι βοηθάει στην εμφάνιση μεγάλου αριθμού εικονικών αναπαραστάσεων και μετάφρασής τους από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, κάτι που χωρίς τη χρήση του κατάλληλου λογισμικού δεν είναι εφικτό, ενώ ταυτόχρονα εμπλέκει και τα 10 δομικά στοιχεία των μαθηματικών που είναι:

1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά
2. Η Ιστορία των Μαθηματικών
3. Το Ανοιχτό Πρόβλημα
4. Η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου
5. Το Αντιπαράδειγμα
6. Οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί
7. Οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί
8. Η Διεπιστημονικότητα
9. Η Κατασκευή Προβλήματος και
10. Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών (ΤΠΕ)

Οι Κανόνες του Λογισμικού

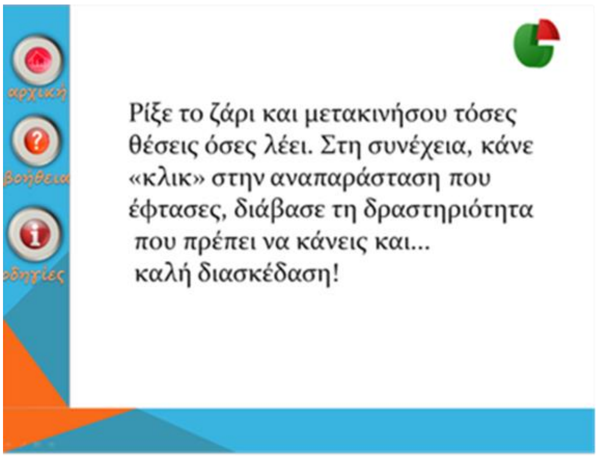
Το ηλεκτρονικό παιχνίδι Fraction Battles παίζεται ομαδικά αλλά και ατομικά ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών στην τάξη. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε σε ομαδικό σχήμα. Για τις ανάγκες του παιχνιδιού χρειάζεται ένας μαγνητικός ασπροπίνακας, ένας βιντεοπροβολέας, μαγνητικά πιόνια και ένα ζάρι. Οι μαθητές/παίχτες βάζουν τα πιόνια τους στην εκκίνηση/αρχή του ψηφιακού ταμπλό (Διάγραμμα 8.2).



Διάγραμμα 8.2. Το ψηφιακό ταμπλό του Λογισμικού Fraction Battles.

Για να κερδίσουν πρέπει να φτάσουν στον τερματισμό ρίχνοντας το ζάρι τους και ακολουθώντας τη διαδρομή που φαίνεται στο Διάγραμμα 8.2. Η διαδρομή περιλαμβάνει 27 θέσεις. Κάθε φορά που ένας μαθητής σταματάει σε κάποιες από αυτές τις θέσεις, καλείται να απαντήσει στην ερώτηση/δραστηριότητα κάνοντας «κλικ» στην αντίστοιχη θέση. Αν απαντήσει σωστά συνεχίζει, διαφορετικά περιμένει πάλι τη σειρά του. Οι θέσεις που αναπαριστούν καταχρηστικό κλάσμα περιέχουν δραστηριότητες της ίδιας έννοιας. Οι θέσεις που αναπαριστούν την κλασματική μονάδα ή την αριθμογραμμή περιέχουν αντίστοιχες δραστηριότητες. Οι θέσεις που παριστάνουν το σύμβολο του λογισμικού είναι συνδυαστικού χαρακτήρα και περιέχουν τις δύο ή και τις τρεις έννοιες, οι θέσεις με το σύμβολο του ερωτηματικού (?) περιέχουν οδηγίες για τους παίχτες, ενώ οι θέσεις που δεν έχουν κάποιο σύμβολο δεν περιέχουν κάποια δραστηριότητα και είναι θέσεις αναστοχασμού.

Το λογισμικό έχει βοήθεια για τους μαθητές (Διάγραμμα 8.3) και οδηγίες για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές . Η βοήθεια και οι οδηγίες δίνονται και ηχογραφημένες και είναι διαθέσιμες για κάθε δραστηριότητα.



Διάγραμμα 8.3. Πλάνο με τη βοήθεια που δίνει το λογισμικό.

Κάθε δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη για να αντικρούσει κάποια από τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, όπως αυτές αναδείχθηκαν από τις προηγούμενες έρευνες της παρούσας εργασίας. Έτσι, κάθε δραστηριότητα αναφέρεται σε συγκεκριμένη έννοια, έχει συγκεκριμένο στόχο και καλείται να καλύψει συγκεκριμένα κενά. Επιπρόσθετα, οι δραστηριότητες είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Στην παρουσίασή τους, που ακολουθεί, αναφέρεται ο γνωστικός άξονας στην περιοχή των κλασμάτων στην οποία απευθύνονται, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτή την περιοχή, όπως αυτές προέκυψαν από τα πορίσματα των ερευνών, ο στόχος και η περιγραφή των δραστηριοτήτων.

Οι Δραστηριότητες του Λογισμικού

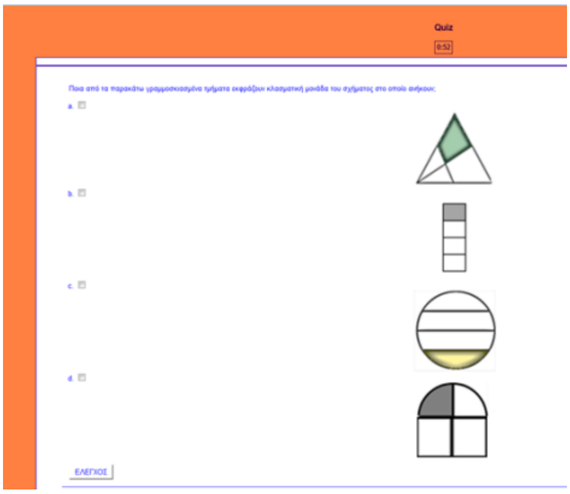
Δραστηριότητα 1

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δε γνωρίζουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη.

Στόχος. Συναίσθηση της αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα έχει δημιουργηθεί με το λογισμικό ηλεκτρονικής αξιολόγησης Hotpotatoes και συγκεκριμένα με το πρόγραμμα JQui, λόγω της δυνατότητας που διαθέτει το λογισμικό για ανατροφοδότηση (feedback) και αξιολόγηση. Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τα γραμμοσκιασμένα τμήματα της άσκησης που εκφράζουν κλασματική μονάδα. Η άσκηση περιλαμβάνει και αντιπαραδείγματα για ρήξη του διδακτικού συμβολαίου που υπάρχει σε όλα τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του δημοτικού που οι κλασματικές μονάδες είναι δεδομένο ότι είναι χωρισμένες σε ίσα μέρη. Η άσκηση έχει τη δυνατότητα ελέγχου της απάντησης, ενώ η διαθέτει και χρονικό περιορισμό πέραν του οποίου σταματά η δυνατότητα συμπλήρωσής της, δίνοντας και το ποσοστό επιτυχίας που επιτεύχθηκε (Διάγραμμα 8.4).



Διάγραμμα 8.4. Δραστηριότητα για την εξοικείωση με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

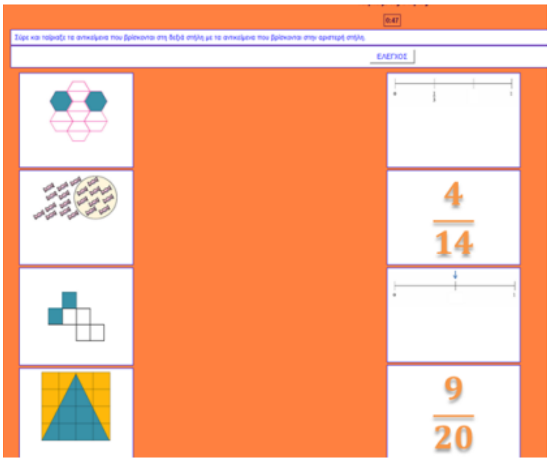
Δραστηριότητα 2

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να μεταφερθούν από μια μορφή αναπαράστασης της κλασματικής μονάδας σε μια άλλη.

Στόχος. Συναίσθηση της αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή, η οποία είναι πιο σύνθετη από την προηγούμενη, οι μαθητές καλούνται να αντιστοιχίσουν τις αναπαραστάσεις της δεξιάς στήλης με τις αναπαραστάσεις της αριστερής στήλης σέρνοντας με το ποντίκι τους την κατάλληλη αναπαράσταση (Διάγραμμα 8.5). Τα πεδία αναπαράστασης που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη άσκηση είναι οι συνεχόμενες και διακριτές ποσότητες, το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και η συμβολική μορφή του κλάσματος. Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας αξιοποιήθηκε το λογισμικό ηλεκτρονικής αξιολόγησης Hotpotatoes και συγκεκριμένα το πρόγραμμα JMatch. Οι παίχτες έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την απάντησή τους, ενώ διατίθεται και χρονικός περιορισμός πέραν του οποίου σταματά η δυνατότητα συμπλήρωσης της άσκησης, δίνοντας ταυτόχρονα και το ποσοστό επιτυχίας που επιτεύχθηκε.



Διάγραμμα 8.5. Δραστηριότητα μεταφοράς από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Δραστηριότητα 3

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν σχηματικά καταχρηστικά κλάσματα και να τα αναγνωρίσουν σε διαφορετικές μορφές αναπαράστασης.

Στόχος. Κατανόηση της έννοιας των καταχρηστικών κλασμάτων και η διαχείρισή τους από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη.

Περιγραφή. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα σχεδιάστηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον του λογισμικού Scratch, που είναι βασισμένο και υλοποιημένο στην ανοιχτού κώδικα γλώσσα προγραμματισμού Squeak. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/παίχτες πρέπει να κατευθύνουν την κλασματική μονάδα με τη βοήθεια του ποντικιού προς τις αναπαραστάσεις αυτές που εκφράζουν καταχρηστικά κλάσματα. Όταν η σωστή αναπαράσταση αγγίξει την κλασματική μονάδα, τότε την τρώει και ακούγεται ένα μήνυμα επιβράβευσης και ανατροφοδότησης, ενώ αν πάει να φάει κάποια αναπαράσταση που δεν αντιπροσωπεύει καταχρηστικό κλάσμα τότε ακούγεται ένας χαρακτηριστικός ήχος λάθους. Τα πεδία αναπαράστασης που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη άσκηση είναι οι διαγραμματικές και συμβολικές αναπαραστάσεις (Διάγραμμα 8.6).

Διάγραμμα 8.6. Δραστηριότητα μεταφοράς από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη αναφορικά με τα καταχρηστικά κλάσματα.

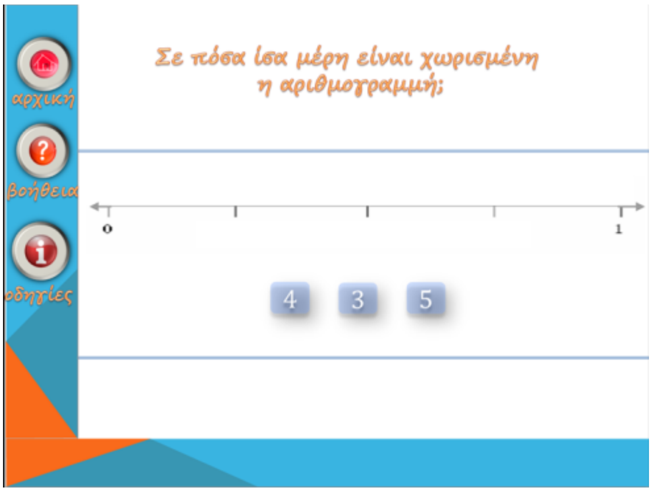
Δραστηριότητα 4

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές συχνά για να βρουν σε πόσα μέρη είναι χωρισμένη η αριθμογραμμή που τους δίνεται μετράνε όλα τα δοσμένα σημεία συμπεριλαμβανομένου και του σημείου που ορίζει το μηδέν.

Στόχος. Εξάσκηση στην εύρεση του αριθμού των τμημάτων σε μια δοθείσα αριθμογραμμή.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/παίχτες πρέπει να βρουν σε πόσα ίσα μέρη είναι χωρισμένη η αριθμητική γραμμή. Τους δίνονται τρεις επιλογές από τις οποίες πρέπει να επιλέξουν τη μία (Διάγραμμα 8.7). Κάθε επιλογή συνοδεύεται από ηχογραφημένο μήνυμα. Οι λάθος επιλογές προτρέπουν στους μαθητές/παίχτες να προσπαθήσουν ξανά, ενώ η σωστή απάντηση προτρέπει τους μαθητές/παίχτες να αιτιολογήσουν την επιλογή τους στην ολομέλεια. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη στο ίδιο το περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού.



Διάγραμμα 8.7. Δραστηριότητα που αφορά στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

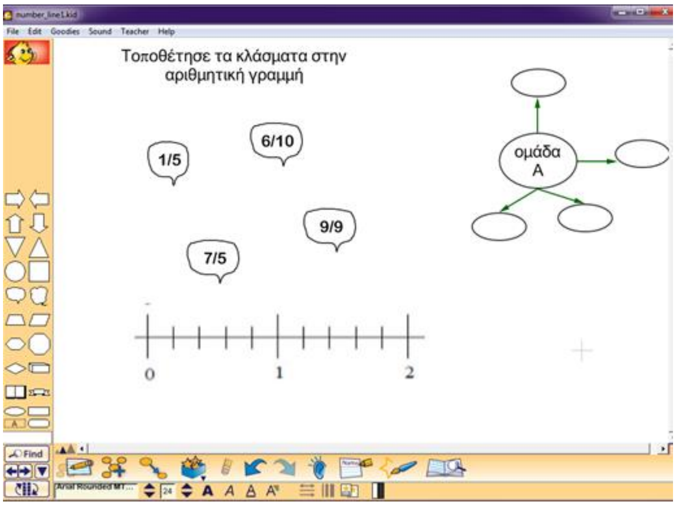
Δραστηριότητα 5

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στο να σειροθετούν κλάσματα στην αριθμογραμμή, ειδικά όταν τα δοθέντα κλάσματα είναι ετερώνυμα.

Στόχος. Κατανόηση του τρόπου σειροθέτησης των ρητών αριθμών.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα αυτή σχεδιάστηκε σε λογισμικό εννοιολογικής χαρτογράφησης (Kidspiration).Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/παίχτες καλούνται να τοποθετήσουν τα δοθέντα κλάσματα στην αριθμητική γραμμή σέρνοντάς τα με το ποντίκι τους. Κάθε επιλογή πρέπει να αιτιολογείται και να καταγράφεται στο περιβάλλον που παίζεται το παιχνίδι. Οι υπόλοιποι μαθητές/παίχτες έχουν το δικαίωμα να επέμβουν και να τροποποιήσουν τα δεδομένα σε περίπτωση που διαφωνούν και αποδεδειγμένα θεωρείται λάθος η επιλογή της ομάδας που διαχειρίζεται τη δραστηριότητα (Διάγραμμα 8.8). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές εξωτερικεύουν τις πρότερες γνώσεις τους, τις διορθώνουν και τις επεκτείνουν μέσα από τη διαδικασία της γνωστικής σύγκρουσης που επιτυγχάνεται με τρόπο διαλογικό και συνεργατικό. Οι ίδιοι οι μαθητές κατασκευάζουν τη γνώση.



Διάγραμμα 8.8. Δραστηριότητα σειροθέτησης κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

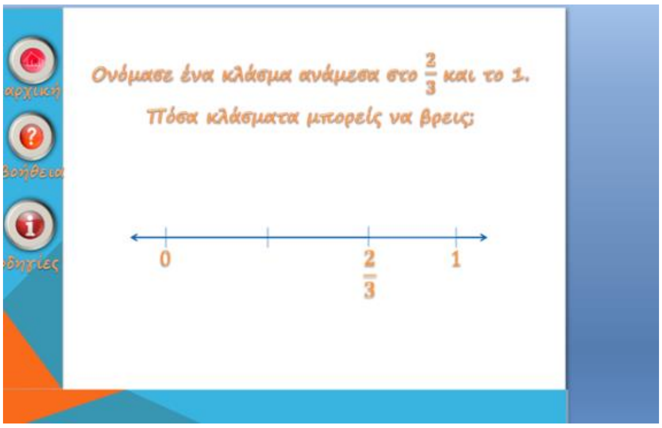
Δραστηριότητα 6

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

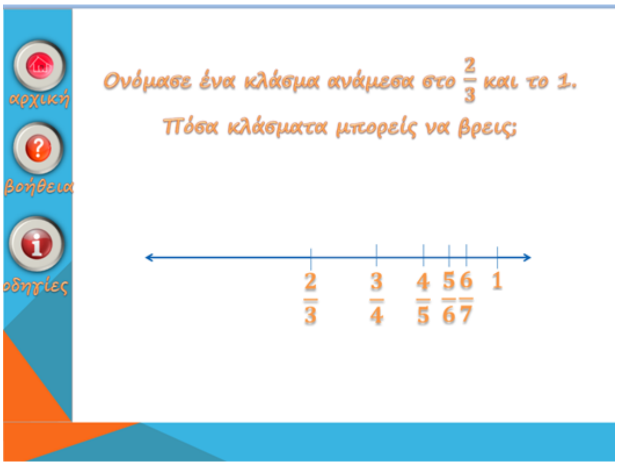
Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές πιστεύουν ότι μεταξύ δύο κλασμάτων στην αριθμογραμμή δεν υπάρχει άλλο κλάσμα.

Στόχος. Συναίσθηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές/παίχτες καλούνται να βρουν και να ονομάσουν, αν υπάρχει, ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο άλλα ή ανάμεσα σε ένα κλάσμα και έναν ακέραιο. Για παράδειγμα, αν υπάρχει κάποιο κλάσμα ανάμεσα στα 2/3 και το 1 (Διάγραμμα 8.9). Τους τίθεται επίσης το ερώτημα πόσα κλάσματα μπορούν να βρουν. Οι περισσότεροι μαθητές απαντούν ότι δεν υπάρχει κανένα κλάσμα μεταξύ του δοθέντος διαστήματος ή ότι υπάρχει μόνο ένα το οποίο ονομάζουν τις περισσότερες φορές λάθος. Συχνή περίπτωση λάθους είναι να γράψουν ένα ισοδύναμο κλάσμα του 2/3. Για την άρση αυτών των αντιλήψεων, αλλά και για επαλήθευση των σωστών απαντήσεων, οι μαθητές μπορούν να κάνουν «κλικ» στο δοθέν διάστημα για να δουν αν υπάρχουν άλλα κλάσματα. Κάθε φορά που οι μαθητές πατάνε στο δοθέν διάστημα εμφανίζεται ένα νέο κλάσμα (Διάγραμμα 8.10). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αποκτούν τη συναίσθηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών διαπιστώνοντας ότι, όχι μόνο υπάρχει κάποιο κλάσμα ανάμεσα σε δύο άλλα, αλλά ότι αυτά που υπάρχουν είναι άπειρα.



Διάγραμμα 8.9. Δραστηριότητα για την πυκνότητα των ρητών αριθμών.



Διάγραμμα 8.10. Εμφάνιση κλασμάτων μετά από την επιλογή του δοθέντος διαστήματος.

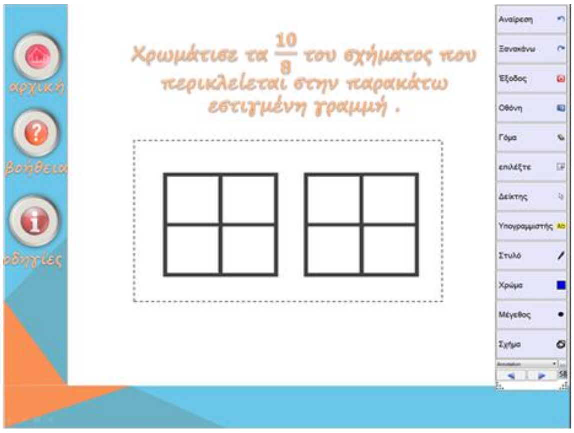
Δραστηριότητα 7

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναπαραστήσουν σχηματικά ένα καταχρηστικό κλάσμα.

Στόχος. Κατανόηση της έννοιας των καταχρηστικών κλασμάτων μέσα από διαγραμματικές αναπαραστάσεις.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη στο περιβάλλον του λογισμικού με τη βοήθεια των εργαλείων του Smoothboard 2. Οι μαθητές καλούνται να σκιάσουν στα δοσμένα διαγράμματα το καταχρηστικό κλάσμα 10/8. Για να σκιάσουν τα μέρη που αντιπροσωπεύει το δοσμένο κλάσμα οι μαθητές πρέπει να πάρουν το κατάλληλο εργαλείο από την εργαλειοθήκη που βρίσκεται δεξιά της οθόνης (Διάγραμμα 8.11). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να διορθώσουν και να αλλάξουν την αρχική τους σκίαση με τη γόμα που είναι διαθέσιμη στην εργαλειοθήκη τους.



Διάγραμμα 8.11. Δραστηριότητα για την εξοικείωση με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος.

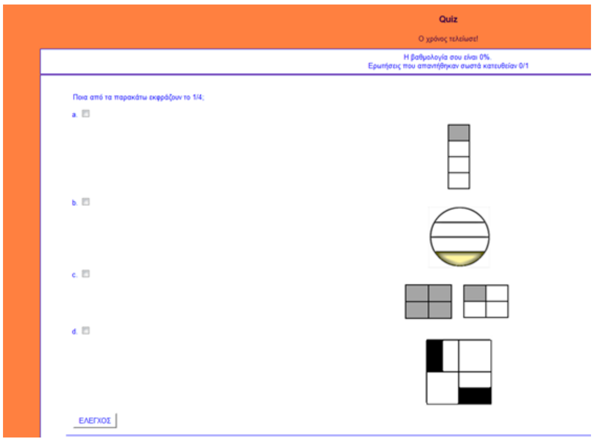
Δραστηριότητα 8

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. α) Οι μαθητές δε γνωρίζουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη, β) οι μαθητές δυσκολεύονται στην αναγνώριση των καταχρηστικών κλασμάτων.

Στόχος. Συναίσθηση της αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και αναγνώριση των καταχρηστικών κλασμάτων.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα έχει δημιουργηθεί με το λογισμικό ηλεκτρονικής αξιολόγησης Hotpotatoes και συγκεκριμένα με το πρόγραμμα JQui, λόγω της δυνατότητας που διαθέτει το λογισμικό για ανατροφοδότηση (feedback) και αξιολόγηση. Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τα γραμμοσκιασμένα τμήματα της άσκησης που εκφράζουν το 1/4. Η άσκηση περιλαμβάνει αντιπαραδείγματα, διαγραμματικές αναπαραστάσεις που τα σκιασμένα μέρη είναι περισσότερα από αυτό που ορίζει ο παρονομαστής των δοσμένων κλασμάτων και καταχρηστικά κλάσματα. Η άσκηση έχει τη δυνατότητα ελέγχου της απάντησης, ενώ διαθέτει και χρονικό περιορισμό πέραν του οποίου σταματά η δυνατότητα συμπλήρωσής της, δίνοντας και το ποσοστό επιτυχίας που επιτεύχθηκε (Διάγραμμα 8.12).



Διάγραμμα 8.12. Δραστηριότητα για την ισοδιαμέριση και την αναγνώριση της κλασματικής μονάδας και των καταχρηστικών κλασμάτων.

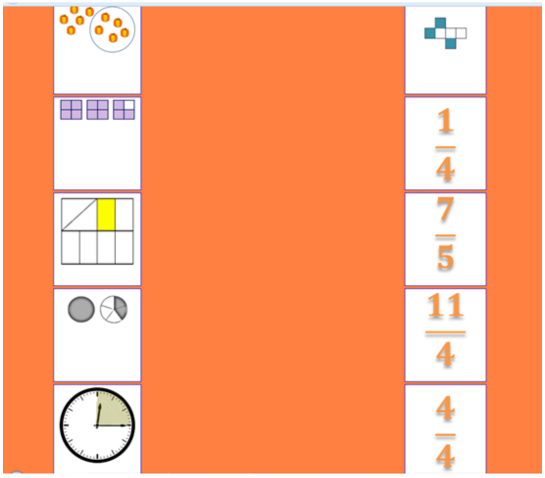
Δραστηριότητα 9

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα και ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν σχηματικά τα καταχρηστικά κλάσματα και δε γνωρίζουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη.

Στόχος. Εξοικείωση με τα καταχρηστικά κλάσματα και συναίσθηση της αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή, η οποία συνδυάζει τις έννοιες της κλασματικής μονάδας και των καταχρηστικών κλασμάτων, οι μαθητές καλούνται να αντιστοιχίσουν τις αναπαραστάσεις της δεξιάς στήλης με τις αναπαραστάσεις της αριστερής στήλης σέρνοντας με το ποντίκι τους την κατάλληλη αναπαράσταση (Διάγραμμα 8.13). Παρουσιάζονται διάφορα πεδία αναπαράστασης, όπως συνεχής και διακριτές ποσότητες, διαγραμματικές και συμβολικές αναπαραστάσεις. Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας αξιοποιήθηκε το λογισμικό ηλεκτρονικής αξιολόγησης Hotpotatoes και συγκεκριμένα το πρόγραμμα JMatch. Οι παίχτες έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την απάντησή τους, ενώ διατίθεται και χρονικός περιορισμός πέραν του οποίου σταματά η δυνατότητα συμπλήρωσης της άσκησης, δίνοντας ταυτόχρονα και το ποσοστό επιτυχίας που επιτεύχθηκε.



Διάγραμμα 8.13. Δραστηριότητα για εξοικείωση με τα καταχρηστικά κλάσματα και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Δραστηριότητα 10

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να μεταφέρονται από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη αναφορικά με τις έννοιες της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας, του καταχρηστικού κλάσματος και της σειροθέτησης των κλασμάτων στην αριθμογραμμή.

Στόχος. Κατανόηση των εννοιών της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας, του καταχρηστικού κλάσματος και της σειροθέτησης των κλασμάτων στην αριθμογραμμή και εξοικείωση των μαθητών με τα διάφορα πεδία αναπαράστασής τους.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές πρέπει να συμπληρώσουν τον πίνακα με τη βοήθεια των εργαλείων που τους δίνονται δεξιά της οθόνης (Διάγραμμα 8.14). Τα πεδία αναπαράστασης που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις, οι συμβολικές, οι αριθμολέξεις, το γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, η δεκαδική μορφή του κλάσματος και το ποσοστό. Οι υπόλοιπες ομάδες έχουν το δικαίωμα να επέμβουν και να τροποποιήσουν τα δεδομένα σε περίπτωση που διαφωνούν και αποδεδειγμένα θεωρείται λάθος η επιλογή της ομάδας, που διαχειρίζεται τη δραστηριότητα.

*Διάγραμμα 8.14.*Συνδυαστική δραστηριότητα μεταφοράς από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο.

Δραστηριότητα 11

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να τοποθετούν κλάσματα στην αριθμογραμμή.

Στόχος. Ανάδυση τεχνικών και κανόνων τοποθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές πρέπει να βρουν το κλάσμα που εκφράσει το σημείο με το βέλος στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 8.15). Δίνονται τρεις πιθανές απαντήσεις από τις οποίες μόνο η μία είναι σωστή. Αν οι μαθητές επιλέξουν κάποια από τις λάθος απαντήσεις, ένα ηχογραφημένο μήνυμα τους προτρέπει να προσπαθήσουν ξανά, ενώ αν επιλέξουν τη σωστή απάντηση ένα ηχογραφημένο μήνυμα τους προτρέπει να αιτιολογήσουν την επιλογή τους στην ολομέλεια. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές εξωτερικεύουν τις ιδέες τους και αναδύονται διάφοροι κανόνες και τεχνικές για την τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή. Οι αναδυόμενες τεχνικές σειροθέτησης των κλασμάτων καταγράφονται στον πίνακα, για να ομαδοποιηθούν και να αποτελέσουν σημείο αναφοράς. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη στο ίδιο το περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού.

Διάγραμμα 8.15. Δραστηριότητα αναγνώρισης κλάσματος στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

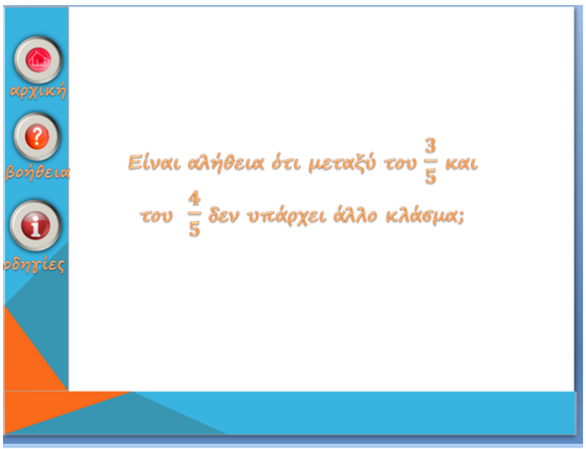
Δραστηριότητα 12

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να σειροθετούν κλάσματα, ειδικά αν αυτά είναι ετερώνυμα. Επίσης, πιστεύουν πως μεταξύ δύο διαδοχικών κλασμάτων δεν υπάρχει άλλο.

Στόχος. Ανάδυση τεχνικών και κανόνων σειροθέτησης κλασμάτων.

Περιγραφή. Δίνεται στους μαθητές μια σειρά από ισχυρισμούς (Διάγραμμα 8.16) και πρέπει αυτοί να πουν αν ισχύουν ή όχι χρησιμοποιώντας αντιπαραδείγματα, όπου χρειάζεται. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη στο ίδιο το περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού.



Διάγραμμα 8.16. Μια ενδεικτική ερώτηση της δραστηριότητας 12.

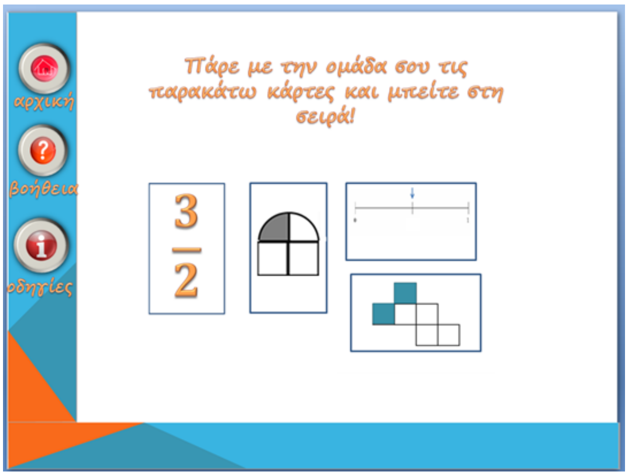
Δραστηριότητα 13

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καταχρηστικά κλάσματα, Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να σειροθετούν κλάσματα, ειδικά αν αυτά είναι ετερώνυμα και με διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Στόχος. Εξοικείωση μαθητών με τη σειροθέτηση των κλασμάτων και τη μετάβαση από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο.

Περιγραφή. Κάθε μαθητής της ομάδας έχει και από μία κάρτα που αναπαριστά ένα κλάσμα, όπως του υποδεικνύει το λογισμικό (Διάγραμμα 8.17). Κάθε κάρτα αναγράφει ένα κλάσμα με διαφορετική αναπαράσταση κάθε φορά. Οι μαθητές της ομάδας είναι όρθιοι κρατώντας τις κάρτες που τους παρουσιάζονται στο λογισμικό, οι οποίες υπάρχουν και σε εκτυπωμένη μορφή, και προσπαθούν να μπουν σε αύξουσα σειρά με βάση το κλάσμα που αναγράφεται στην κάρτα τους. Σε κάποιες κάρτες υπάρχουν και σχήματα που δεν εκφράζουν κλάσμα (Διάγραμμα 8.17).



Διάγραμμα 8.17. Παράδειγμα καρτών που υποδεικνύει το λογισμικό.

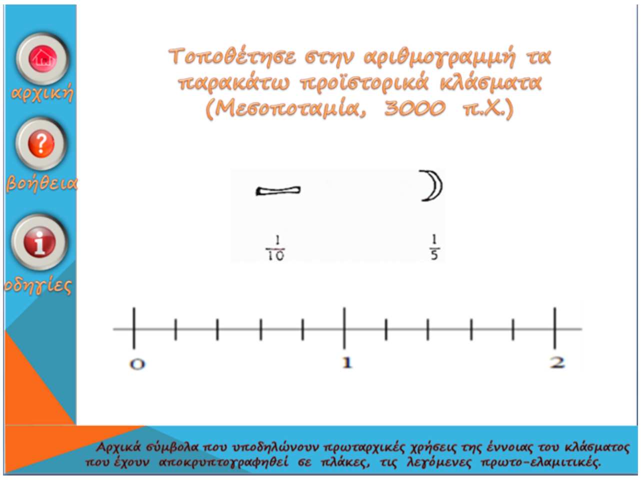
Δραστηριότητα 14

Γνωστικός άξονας. Σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να σειροθετούν κλάσματα, ειδικά αν αυτά είναι ετερώνυμα.

Στόχος. Ανάπτυξη ικανότητας τοποθέτησης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή μέσα από την ιστορική πορεία της έννοιας.

Περιγραφή. Οι μαθητές προσπαθούν να τοποθετήσουν τα δοσμένα προϊστορικά κλάσματα στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 8.18). Μαζί με τα προϊστορικά σύμβολα δίνεται και το κλάσμα που αντιπροσωπεύει το κάθε σύμβολο με τη σημερινή του μορφή. Μέσα από τη χρήση αυθεντικών κειμένων της ιστορίας των Μαθηματικών (Guillemot, 1992) οι μαθητές κατασκευάζουν μια σύγχρονη αριθμογραμμή με αναπαραστάσεις του παρελθόντος.



Διάγραμμα 8.18. Προϊστορικά σύμβολα κλασμάτων για σειροθέτηση στην αριθμογραμμή.

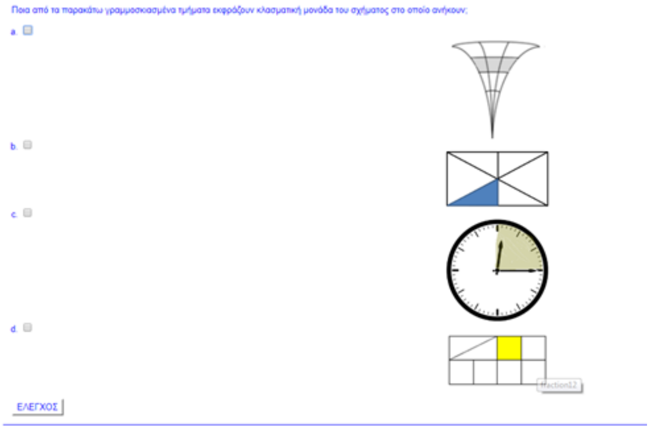
Δραστηριότητα 15

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν το «όλο».

Στόχος. Εξοικείωση μαθητών με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και το «όλο».

Περιγραφή. Η δραστηριότητα έχει δημιουργηθεί με το λογισμικό ηλεκτρονικής αξιολόγησης Hotpotatoes και συγκεκριμένα με το πρόγραμμα JQui, λόγω της δυνατότητας που διαθέτει το λογισμικό για ανατροφοδότηση (feedback) και αξιολόγηση. Οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τα γραμμοσκιασμένα τμήματα της άσκησης που εκφράζουν κλασματική μονάδα. Η άσκηση έχει τη δυνατότητα ελέγχου της απάντησης, ενώ διαθέτει και χρονικό περιορισμό πέραν του οποίου σταματά η δυνατότητα συμπλήρωσής της, δίνοντας και το ποσοστό επιτυχίας που επιτεύχθηκε (Διάγραμμα 8.19).



Διάγραμμα 8.19. Άσκηση αναγνώρισης της κλασματικής μονάδας.

Δραστηριότητα 16 και 17

Γνωστικός άξονας. Ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία στο πέρασμα από ένα κλάσμα στη μονάδα που το έχει δημιουργήσει (Fandiño Pinilla , 2007).

Στόχος. Ανάπτυξη ικανότητας σχηματισμού του «όλου» με πολλαπλές αναπαραστάσεις.

Περιγραφή. Οι μαθητές προσπαθούν να αναπαραστήσουν με διάφορες αναπαραστάσεις τα αρχαϊκά κλάσματα που τους δίνονται (Διάγραμμα 8.20). Μαζί με τα αρχαϊκά σύμβολα δίνεται και το κλάσμα που αντιπροσωπεύει το κάθε σύμβολο με τη σημερινή του μορφή. Μέσα από τη χρήση αυθεντικών κειμένων της ιστορίας των Μαθηματικών (Guillemot, 1992) οι μαθητές κατασκευάζουν αναπαραστάσεις συγκρίνοντάς τες με αναπαραστάσεις του παρελθόντος.

Διάγραμμα 8.20. Δραστηριότητα με αρχαϊκές αναπαραστάσεις κλασμάτων.

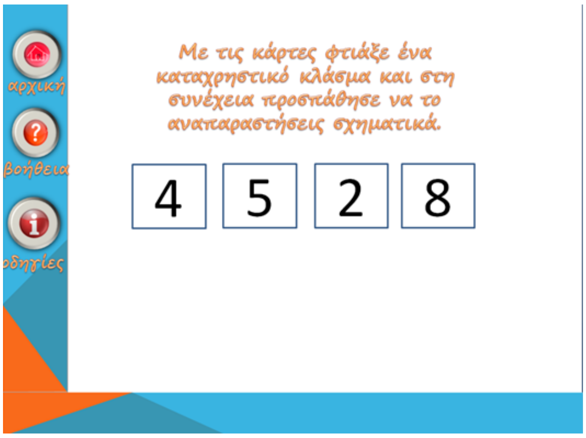
Δραστηριότητα 18

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίζουν και να σχηματίζουν καταχρηστικά κλάσματα.

Στόχος. Εξοικείωση μαθητών με την κατασκευή καταχρηστικών κλασμάτων.

Περιγραφή. Στους μαθητές εμφανίζονται 4 κάρτες με τις οποίες πρέπει να σχηματίσουν ένα καταχρηστικό κλάσμα δικής τους επιλογής (Διάγραμμα 8.21). Στη συνέχεια, πρέπει να αναπαραστήσουν σχηματικά, με όποιο τρόπο θέλουν, το καταχρηστικό κλάσμα που έφτιαξαν.



Διάγραμμα 8.21. Οι ψηφιακές κάρτες για το σχηματισμό και σχεδιασμό καταχρηστικού κλάσματος.

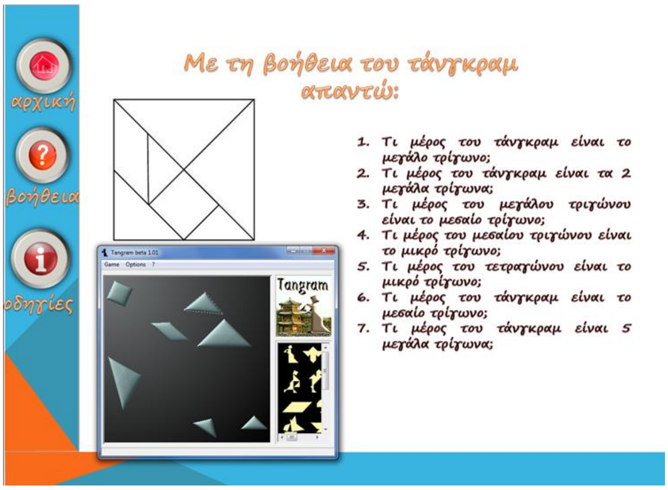
Δραστηριότητα 19

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα και ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να ορίσουν το «όλο» και να αναγνωρίσουν τα καταχρηστικά κλάσματα από σχεδιάγραμμα.

Στόχος. Εξοικείωση των μαθητών με την εύρεση του «όλου» και τα καταχρηστικά κλάσματα.

Περιγραφή. Οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν στις ερωτήσεις που τους δίνονται με τη βοήθεια του κινέζικου τετραγώνου (Διάγραμμα 8.22). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετακινήσουν στο ψηφιακό τάνγκραμ του λογισμικού τα σχήματα, για να βοηθηθούν στις απαντήσεις τους.



Διάγραμμα 8.22. Το ψηφιακό περιβάλλον της δραστηριότητας 19.

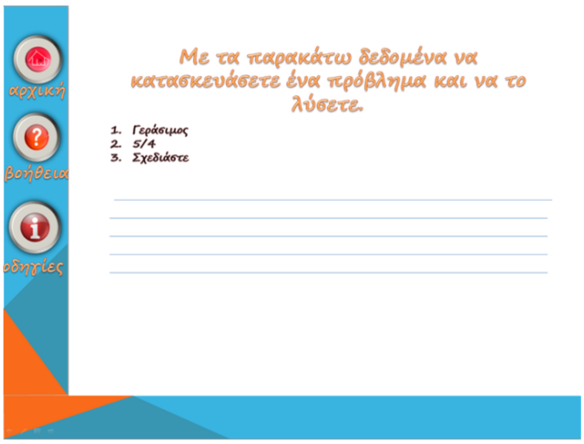
Δραστηριότητα 20

Γνωστικός άξονας. Καταχρηστικά κλάσματα.

Ανιχνεύσιμη δυσκολία. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν καταχρηστικά κλάσματα.

Στόχος. Εξοικείωση μαθητών με τον σχηματισμό καταχρηστικών κλασμάτων.

Περιγραφή. Στους μαθητές δίνονται τρία στοιχεία τα οποία πρέπει να κατασκευάσουν σύντομο πρόβλημα και στη συνέχεια να το λύσουν στον οργανωμένο χώρο που τους δίνεται στο εκπαιδευτικό λογισμικό (Διάγραμμα 8.23). Ένα πρόβλημα που κατασκευάστηκε ήταν: «Ο Γεράσιμος πεινούσε πολύ και έφαγε τα 5/4 της πίτσας που αγόρασαν. Σχεδιάστε τα κομμάτια της πίτσας που έφαγε ο Γεράσιμος».



Διάγραμμα 8.23. Τα δεδομένα που δίνονται στους μαθητές για την κατασκευή προβλήματος.

Πέρα από τις δραστηριότητες που αναφέρονται στις τρεις υπό εξέταση έννοιες, δηλαδή, στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τη σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και τα καταχρηστικά κλάσματα, στο ταμπλό του λογισμικού υπάρχουν και τέσσερις θέσεις με το σύμβολο «?». Αν ένας παίχτης βρεθεί σε κάποια θέση με αυτό το σύμβολο πρέπει να ακολουθήσει την εντολή που του δίνεται. Η διατύπωση αυτών των εντολών γίνεται μέσα στο πλαίσιο των ρητών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, όταν ένα παίχτης πρέπει να προχωρήσει κάποιες θέσεις πίσω, η διατύπωση της εντολής είναι η εξής: «Πήγαινε πίσω τόσες θέσεις όσες αντιστοιχούν στο 1/9 των 27 τετραγώνων του ταμπλό». Επίσης, όταν ένας παίχτης χάνει ένα γύρο, η διατύπωση της εντολής είναι: «χάνεις τα 3/3 του γύρου». Επιπρόσθετα, υπάρχουν και τρεις θέσεις, χωρίς να αναπαριστούν κάποιο σύμβολο. Πρόκειται για τις θέσεις αναστοχασμού. Πιο συγκεκριμένα, όταν κάποια ομάδα βρεθεί σε ένα τέτοιο σημείο μπορεί να ζητήσει επεξηγήσεις, βοήθεια και ό,τι άλλο πιστεύει η ομάδα ότι θα τη βοηθήσει να έχει μια επιτυχημένη πορεία στο παιχνίδι.

Αξιολόγηση Λογισμικού

Τα κριτήρια αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν για την αποτίμηση του ηλεκτρονικού παιχνιδιού «Fraction Battles»στηρίχθηκαν στις εξής δύο ομάδες κριτηρίων των Squires&McDougall (1994).

Α΄ Ομάδα

Σε αυτήν ανήκουν τα γενικά κριτήρια παιδαγωγικού περιεχομένου κι έχουν σχέση με τα παρακάτω ερωτήματα:

Καλύπτεται η διδακτέα ύλη επαρκώς; Στο συγκεκριμένο ηλεκτρονικό παιχνίδι η ύλη καλύπτεται επαρκώς, όπως αυτή έχει οριστεί μέσα από την παρούσα έρευνα. Καλύπτει και τους τρεις θεματικούς άξονες της έρευνας, δηλαδή, την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τα καταχρηστικά κλάσματα και το μοντέλο της αριθμογραμμής για τη σειροθέτηση των κλασμάτων. Επίσης, το λογισμικό καλύπτει στους στόχους του και στις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, όπως αυτές αναδύθηκαν από τα δύο προηγούμενα ερευνητικά μέρη της παρούσας εργασίας.

Ο χρόνος που απαιτείται είναι διαθέσιμος; Για το συγκεκριμένο ηλεκτρονικό παιχνίδι απαιτείται μία διδακτική παρέμβαση δύο διδακτικών ωρών, η οποία προβλέπεται από το σχεδιασμό των συνολικών διδακτικών παρεμβάσεων της παρούσας έρευνας.

Ανταποκρίνεται το διδακτικό υλικό στο επίπεδο των μαθητών; Όλες οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν βάσει ερωτηματολογίων που δόθηκαν σε μαθητές της Ε΄, Στ΄ τάξης και της Α΄ Γυμνασίου, για να ελεγχθεί ο βαθμός δυσκολίας των ασκήσεων αυτών.

Είναι οι δραστηριότητες ενδιαφέρουσες; Από την εφαρμογή των δραστηριοτήτων φάνηκε ότι οι μαθητές τις βρίσκουν ενδιαφέρουσες και ελκυστικές.

Είναι προσεγμένο από παιδαγωγική άποψη, χωρίς ανεπιθύμητες παρενέργειες; Έγινε προσπάθεια να αποφευχθούν τυχόν ανεπιθύμητες παρενέργειες. Κατά την εφαρμογή τού λογισμικού δε φάνηκε να παρουσιάζονται ανεπιθύμητες καταστάσεις.

Προσφέρεται για συνεργατικές/σύνθετες δραστηριότητες; Το συγκεκριμένο ηλεκτρονικό παιχνίδι σχεδιάστηκε για να παίζεται κατά κύριο λόγο σε ομάδες.

Τι είδους δεξιότητες, στάσεις και αξίες καλλιεργεί; Η χρήση του λογισμικού έχει σχεδιαστεί για να μειώσει τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, όπως αυτές αναδείχθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Από την εφαρμογή του μέσα στο σχεδιασμένο πλαίσιο των διδακτικών παρεμβάσεων, φάνηκε από τα ευρήματα ότι οι μαθητές απέκτησαν μια θετική στάση όχι μόνο για τα κλάσματα αλλά και για τα Μαθηματικά γενικότερα.

Συνοδεύεται από επαρκείς οδηγίες και υλικό στήριξης του δασκάλου; Υπάρχουν οδηγίες και υλικό στήριξης για το δάσκαλο, αλλά δεν έχει ελεγχθεί ακόμα η επάρκειά τους, αφού το λογισμικό χρησιμοποιήθηκε μόνο για τις ανάγκες τις παρούσας έρευνας και δεν έχει δοθεί σε εκπαιδευτικούς να το εφαρμόσουν προσαρμοσμένο στο δικό τους διδακτικό πλαίσιο.

Β΄ Ομάδα

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τεχνολογικά θέματα που έχουν σχέση περισσότερο με τον υπολογιστή και τη χρήση του ως εκπαιδευτικού εργαλείου και απαντούν στα παρακάτω ερωτήματα:

Έχουν αξιοποιηθεί σε ικανοποιητικό βαθμό οι αλληλεπιδραστικές δυνατότητες του υπολογιστή; Αρκετές από τις δραστηριότητες του λογισμικού χρησιμοποιούν διαδραστικά εργαλεία.

Αφήνει το λογισμικό περιθώρια για έλεγχο της μαθησιακής διαδικασίας από μέρους του μαθητή και του εκπαιδευτικού; Το ηλεκτρονικό παιχνίδι έχει χαρακτηριστικά λογισμικού ανοιχτού τύπου για να επιτρέπεται ο έλεγχος και τροποποίηση από μέρους του εκπαιδευτικού.

Είναι σε θέση το πρόγραμμα να χειριστεί σωστά τα εισερχόμενα που εισάγονται από τους μαθητές, ώστε να αποφεύγονται δυσάρεστα διαδικαστικά φαινόμενα, από τεχνική άποψη; Η εφαρμογή του ηλεκτρονικού παιχνιδιού δεν έχει δείξει δυσλειτουργία.

Προσφέρονται ορισμένα χαρακτηριστικά του λογισμικού (όπως είναι τα γραφικά, ο ήχος, η κίνηση κ.α.) για εποικοδομητική μάθηση ή λειτουργούν απλώς για εντυπωσιασμό; Έχει γίνει προσπάθεια να συνδυαστεί η καλαισθησία του λογισμικού και η εποικοδομητική του διάσταση, ώστε να μην παραμένει μόνο σε εντυπωσιασμούς.

Η διόρθωση των λαθών γίνεται με παιδαγωγικά προσεγμένο τρόπο ή βασίζεται σε παραδοσιακές νοοτροπίες; Για τη διόρθωση των λαθών χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι, ορισμένες από τις οποίες είναι συμπεριφοριστικού τύπου, αλλά παρέχεται δυνατότητα διόρθωσης των λαθών από τους ίδιους τους μαθητές, τις ομάδες και από τον εκπαιδευτικό.

Η ενίσχυση των αντιδράσεων και της απόδοσης του μαθητή είναι αποτελεσματική και γίνεται με κατάλληλο τρόπο; Κύριο ρόλο στο συγκεκριμένο τομέα έχει περισσότερο ο εκπαιδευτικός και λιγότερο το λογισμικό.

Είναι το πρόγραμμα φιλικό και εύκολο στη χρήση του; Από την εφαρμογή του δε φάνηκε να παρουσιάζει δυσκολίες στη χρήση του από τους μαθητές.

Κάνει χρήση το λογισμικό των νέων τεχνολογικών εξελίξεων; Έχει γίνει προσπάθεια το λογισμικό να συνάδει, όσο αυτό είναι δυνατόν, με τις απαιτήσεις των τεχνολογικών εξελίξεων. Ωστόσο, ο κυριότερος στόχος σχεδίασής του ήταν η μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα και λιγότερο ο τεχνολογικός εκσυγχρονισμός ο οποίος όμως λήφθηκε υπόψη.

Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε το λογισμικό Fraction Battles, το οποίο σχεδιάστηκε από την ίδια την ερευνήτρια με σκοπό τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Το λογισμικό διαπραγματεύεται τρεις γνωστικές περιοχές των κλασμάτων:

- Την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.
- Τα καταχρηστικά κλάσματα.
- Τη σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Το λογισμικό αποτελεί συμπληρωματικό υλικό του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος και για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων του χρησιμοποιήθηκαν τα 10 δομικά στοιχεία των μαθηματικών και λήφθηκαν υπόψη τα πορίσματα των Α΄ και Β΄

ερευνητικών μερών της διατριβής και στοχεύει με παιγνιώδη τρόπο να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν βασικές έννοιες των κλασμάτων, δημιουργώντας γνωστικά δίπολα που συνδυάζουν τις Νέες Τεχνολογίες με τη βιωματικότητα, την κριτική σκέψη με τη δημιουργικότητα, τη γνώση με το παιχνίδι, το σχολείο με την ευχαρίστηση.

Το λογισμικό αποτελείται από 27 δραστηριότητες:

- 5 δραστηριότητες για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.
- 4 δραστηριότητες για τα καταχρηστικά κλάσματα.
- 6 δραστηριότητες για τη σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.
- 5 δραστηριότητες που συνδυάζουν και τις τρεις έννοιες του κλάσματος που διαπραγματεύεται το λογισμικό (ισοδιαμέριση, καταχρηστικά, αριθμογραμμή).
- 4 δραστηριότητες υπό τη μορφή οδηγιών.
- 3 θέσεις αναστοχασμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
ΤΟ ΚΑΙΝΟΤΟΜΟ ΠΑΡΕΜΒΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει το παρεμβατικό πρόγραμμα που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε με διδασκαλίες που έγιναν πάνω στην έννοια των κλασμάτων, ως αντιστάθμιση για τη μείωση των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές πάνω στην έννοια αυτή. Πιο συγκεκριμένα, οι διδασκαλίες έγιναν σε δύο ομάδες μαθητών Ε΄ τάξης και σε δύο ομάδες μαθητών Στ΄ τάξης του δημοτικού από την ίδια την ερευνήτρια με σκοπό να προσεγγιστεί η έννοια της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καθώς και οι έννοιες του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων υπό το πρίσμα των 10 μαθηματικών πρακτικών: 1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών (ΤΠΕ).

Για τις ανάγκες της έρευνας έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις, δόθηκαν δοκίμια πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις η διάρκεια των οποίων ήταν τέσσερις εβδομάδες για κάθε ομάδα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και τα 10 δομικά στοιχεία σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στις ασκήσεις του δοκιμίου που αφορούσαν στην αριθμογραμμή, στα ίσα μέρη της κλασματικής μονάδας και στα καταχρηστικά κλάσματα σε σχέση με τις επιδόσεις που σημείωσαν στις ασκήσεις του δοκιμίου πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις. Επιπλέον, παρατηρήθηκε μια θετική αλλαγή στη στάση των μαθητών για τα Μαθηματικά γενικότερα.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Στη βιβλιογραφία βρίσκει κανείς αρκετές έρευνες οι οποίες έχουν ασχοληθεί με το θέμα των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν τόσο στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή όσο και στις έννοιες του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνα των Avgerinos, Vlachou και Kantas (2012) που έγινε για τον εντοπισμό των δυσκολιών των παραπάνω εννοιών σε μαθητές και των τριών βαθμίδων εκπαίδευσης (Α/θμιας, Β/θμιας και Γ/θμιας εκπαίδευσης) φάνηκε ότι και οι τρεις βαθμίδες παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στο να τοποθετήσουν κλάσματα στην αριθμογραμμή, δυσκολίες που εντείνονται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα. Επίσης, αναφορικά με τη σύγκριση κλασμάτων παρατηρήθηκε ότι όλοι οι μαθητές και των τριών βαθμίδων παρουσιάζουν δυσκολίες που αυξάνονται όταν τα κλάσματα είναι ετερώνυμα ή καταχρηστικά. Αξιοσημείωτο είναι ότι στη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων η δυσκολία όχι μόνο δε βελτιώνεται κατά το πέρασμα των μαθητών στις επόμενες δύο βαθμίδες (Β/θμια και Γ/θμια εκπαίδευση), αλλά αντίθετα εντείνεται. Αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας οι μαθητές της Α/θμιας και της Β/θμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, δυσκολία που παραμένει και στην Γ/θμια εκπαίδευση. Παρόμοιες δυσκολίες υπάρχουν και για τα καταχρηστικά κλάσματα.

Ωστόσο, σε ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που έγινε σε 20 διεθνή επιστημονικά περιοδικά για έρευνες που αφορούσαν στα κλάσματα και στις αναπαραστάσεις τους (Avgerinos & Vlachou, 2012) παρατηρήθηκε ότι δεν είναι επαρκείς οι διδακτικές προσεγγίσεις και προτάσεις που έχουν γίνει από τους ερευνητές για τον τρόπο που μπορούν οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίσουν διδακτικά και όχι μόνο αυτές τις δυσκολίες. Οι διδακτικές αυτές προτάσεις αναφέρονται αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Εν τούτοις, στο σημείο αυτό θα συνοψίσουμε περιληπτικά τις έρευνες αυτές που αφορούν στην αριθμογραμμή, στα ίσα μέρη της κλασματικής μονάδας και στα καταχρηστικά κλάσματα.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την αριθμογραμμή οι Brousseau, Brousseau και Warfield (2007) πραγματοποίησαν μια σειρά παρεμβάσεων που περιελάμβαναν συνολικά 65 μαθήματα σε 15 κύκλους και πραγματοποιήθηκαν στην τέταρτη τάξη του σχολείου Michelet, με στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές μέρα με την ημέρα στο να εφεύρουν, να κατανοήσουν και να γίνουν πολύ καλοί με όλες τις πτυχές δύο βασικών μαθηματικών δομών, των ρητών και των δεκαδικών αριθμών. Τα μαθήματα επανελήφθησαν σε δύο παράλληλες τάξεις με διαφορετικούς δασκάλους σε μια περίοδο άνω των 15 ετών, πράγμα που σημαίνει ότι έλαβαν μέρος σε αυτά τα μαθήματα περισσότεροι από 750 μαθητές. Στο τρίτο μάθημα του πέμπτου κύκλου γίνεται χρήση της αναπαράστασης των κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή. Με μία σειρά από διαδικασίες παιγνιώδους κατάστασης και διδακτικής μεθοδολογίας καταφέρνουν οι περισσότεροι μαθητές να μπορούν γρήγορα και σίγουρα να τοποθετούν δεκαδικά κλάσματα στην αριθμογραμμή, ενώ όλοι οι μαθητές μπορούν να αναλύουν ένα δεκαδικό κλάσμα σε μονάδες, δέκατα, εκατοστά κ.ο.κ..

Μια άλλη ερευνητική πρόταση για την αριθμογραμμή είναι αυτή των Sedig & Sumner (2006) οι οποίοι αναφέρονται στη σημαντικότητα των οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και στη χρήση ψηφιακών εργαλείων που τις διευκολύνουν. Ένα από αυτά τα εργαλεία είναι η χρήση της εστίασης (zoom) στην αριθμογραμμή. Η εστίαση αυξάνει ή μειώνει το επίπεδο των λεπτομερειών στην αριθμογραμμή επιτρέποντας στους μαθητές να οπτικοποιούν τη διαίρεση των αριθμών σε ίσα μέρη και τη μετάβαση στο χώρο των ρητών αριθμών.

Αναφορικά με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, στην έρευνά τους οι Olive & Vomvoridi (2006) προτείνουν να αποφεύγονται λαθεμένες αναπαραστάσεις από τους εκπαιδευτικούς , όπως ο άνισος διαχωρισμός ενός κύκλου. Αυτό, σύμφωνα με τους ερευνητές, μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην πεποίθηση τής μη αναγκαιότητας του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη.

Τέλος, σχετικά με τα καταχρηστικά κλάσματα ο Hackenberg (2007) για την προσέγγιση της έννοιας χρησιμοποίησε το λογισμικό JavaBars το οποίο επιτρέπει στους μαθητές να σχεδιάσουν παραλληλόγραμμα σε ποικιλία διαστάσεων. Στην έρευνά του, σημειώνει τη σημασία που έχει η ικανότητα κατασκευής καταχρηστικών κλασμάτων για την τοποθέτηση των αριθμών στην αριθμογραμμή και την κατασκευή κλασματικών αριθμών που ανοίγουν το δρόμο για την ανάπτυξη μιας αίσθησης συνεκτικότητας και συνέχειας των αριθμών. Επιπλέον, υποστηρίζει ότι για τη δημιουργία καταχρηστικών κλασμάτων απαιτείται η εσωτερίκευση από τους μαθητές και των τριών επιπέδων γραφικής αναπαράστασης της μονάδας κάτι που μπορεί να επιτευχθεί με το λογισμικό JavaBars.

Η Καινοτομία του Παρεμβατικού Προγράμματος

Από την ανάλυση της διεθνούς βιβλιογραφίας παρατηρήθηκε ότι οι περισσότερες έρευνες που αφορούν στα κλάσματα εστιάζουν στον εντοπισμό των δυσκολιών αυτών και λιγότερο στον τρόπο μείωσης και αντιμετώπισής τους. Επιπρόσθετα, τα περισσότερα παρεμβατικά προγράμματα που προτείνονται έχουν εφαρμοστεί σε φοιτητές και πολύ λιγότερα σε μαθητές οι οποίοι βρίσκονται σε πραγματικές συνθήκες τάξης. Με γνώμονα τα παραπάνω, σχεδιάστηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας έρευνας, το οποίο εφαρμόστηκε με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων σε πραγματικές συνθήκες τάξης για τέσσερις εβδομάδες ανά ομάδα δείγματος (συνολικά τέσσερις εβδομάδες), εισάγοντας και μια καινοτομία στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Πέρα, δηλαδή, από τις αναπαραστάσεις και τα πολλαπλά είδη της που χρησιμοποιούνται στα ερευνητικά παρεμβατικά προγράμματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, στις παρούσες διδακτικές παρεμβάσεις προστέθηκαν και κάποιες άλλες μαθηματικές πρακτικές ως μαθηματικά εργαλεία, τα οποία ενισχύουν επικουρικά τη διδασκαλία δίνοντας ταυτόχρονα μια παιγνιώδη διάσταση στις δραστηριότητες. Αυτά τα μαθηματικά εργαλεία είναι 1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ.

Αν και οι παραπάνω μαθηματικές πρακτικές υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρονται ως μεμονωμένες έννοιες της διδακτικής των μαθηματικών. Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας οι μαθηματικές αυτές πρακτικές, ενοποιήθηκαν, εντοπίστηκαν οι μεταξύ τους έντονες και ουσιαστικές συσχετίσεις και διαχύθηκαν στη διδασκαλία των κλασμάτων με επίκεντρο τις αναπαραστάσεις. Η εφαρμογή των παραπάνω υλοποιήθηκε μέσα από διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση πρωτότυπων μέσων, υλικών, εργαλείων και αναπαραστάσεων-ψηφιακών και βιωματικών, που δίνουν μια παιγνιώδη διάσταση στις σχεδιασθείσες διδασκαλίες έτσι ώστε να επιτευχθεί μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Ταυτόχρονα, η παιγνιώδης διάσταση των παρεμβατικών προγραμμάτων τείνει να διεγείρει την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά ώστε να διακρίνουν τη δύναμη και την ομορφιά τους και να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον και την επιθυμίας τους να ασχοληθούν με αυτά.

Σκοπός της Έρευνας

Η παρούσα έρευνα, λαμβάνοντας υπόψη τα κενά αυτά της διεθνούς βιβλιογραφίας, αποτελεί μία προσπάθεια διδακτικής προσέγγισης της έννοιας της σειροθέτησης των κλασμάτων ως αναπαράσταση στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καθώς και των εννοιών του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και με την επικουρία των 10 μαθηματικών πρακτικών (1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ) με σκοπό να δώσει προτάσεις διδακτικές για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών σε αυτές τις έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, οι επιμέρους στόχοι είναι να διερευνηθεί:

- Αν το παρεμβατικό πρόγραμμα με τον συνδυασμό των αναπαραστάσεων και των 10 μαθηματικών πρακτικών, που σχετίζονται με την έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, θα βοηθήσει τους μαθητές στη μείωση των παρανοήσεών τους πάνω στην έννοια αυτή.

- Αν το παρεμβατικό πρόγραμμα με τον συνδυασμό των αναπαραστάσεων και των 10 μαθηματικών πρακτικών, που σχετίζονται με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος, θα βοηθήσει τους μαθητές στη μείωση των παρανοήσεών τους πάνω στην έννοια αυτή.
- Αν το παρεμβατικό πρόγραμμα με τον συνδυασμό των αναπαραστάσεων και των 10 μαθηματικών πρακτικών, που σχετίζονται με τη σειροθέτηση των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, θα βοηθήσει τους μαθητές στη μείωση των παρανοήσεών τους πάνω στην έννοια αυτή.
- Αν το παρεμβατικό πρόγραμμα με τον συνδυασμό των αναπαραστάσεων και των 10 μαθηματικών πρακτικών, θα επηρεάσει τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά.

Το Δείγμα

Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν 78 μαθητές της Ε’ και Στ’ τάξης του δημοτικού από δύο σχολεία της πόλης της Ρόδου, οι οποίοι ήταν χωρισμένοι σε τέσσερις ομάδες (δύο ομάδες μαθητών της Ε΄ τάξης και δύο ομάδες μαθητών της Στ΄τάξης). Οι διδακτικές παρεμβάσεις διήρκησαν τέσσερις εβδομάδες για κάθε ομάδα. Από κάθε ομάδα επιλέχθηκαν 5 μαθητές ως ομάδα εστίασης για τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων.

Εργαλεία της Έρευνας

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας πραγματοποιήθηκαν διδακτικές παρεμβάσεις, οι οποίες έγιναν από την ίδια την ερευνήτρια. Οι διδακτικές αυτές παρεμβάσεις για κάθε ομάδα διήρκησαν 20διδακτικές ώρες σε διάστημα τεσσάρων εβδομάδων. Οι παρεμβάσεις αυτές επαναλήφθηκαν για κάθε μία από τις τέσσερις ομάδες του πειράματος. Συνολικά, δηλαδή, οι διδακτικές παρεμβάσεις διήρκησαν 80 ώρες διαμερισμένες σε δεκαέξι εβδομάδες. Για τις ανάγκες των διδακτικών παρεμβάσεων κατασκευάστηκε υλικό πρωτότυπο από την ερευνήτρια τέτοιο που να προωθεί τα 10 δομικά στοιχεία διαχέοντάς τα στις αναπαραστάσεις των κλασμάτων.

Για τις ανάγκες τις έρευνας έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις σε ένα μέρος από το δείγμα των μαθητών πριν και μετά τις διδασκαλίες (ομάδα εστίασης). Επιπλέον, έγιναν βιντεοσκοπήσεις κάποιων διδακτικών παρεμβάσεων και παρατήρηση.

Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν γραπτά δοκίμια (τα οποία δημιουργήθηκαν από την ερευνήτρια) πριν και μετά τις παρεμβάσεις για να ελεγχθεί ο βαθμός της διδακτικής παρεμβατικότητας. Οι προ-δοκιμασίες (τα γραπτά δοκίμια πριν από τις διδασκαλίες-Παράρτημα 2) περιελάμβαναν 7 ασκήσεις, ενώ οι μετά-δοκιμασίες (τα γραπτά δοκίμια μετά από τις διδασκαλίες-Παράρτημα 3) περιελάμβαναν 10 ασκήσεις και δημιουργήθηκαν 40 διαφορετικές μεταβλητές.

Για τη βαθμολόγηση των έργων των δοκιμίων χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα 0-1. Τα έργα βαθμολογήθηκαν με 0 (μηδέν) αν ήταν λαθεμένα ή δεν είχαν συμπληρωθεί καθόλου και με 1 (ένα) αν τα έργα ήταν σωστά. Οι προ-δοκιμασίες δόθηκαν δύο μέρες πριν την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων και οι μετα-δοκιμασίες δόθηκαν τέσσερις ημέρες μετά τη λήξη των διδασκαλιών.

Μεταβλητές της Έρευνας

Οι 40 μεταβλητές της έρευνας ορίστηκαν ως συνδυασμός γραμμάτων κι ενός αριθμού. Τα γράμματα δηλώνουν τα αρχικά της έννοιας που εξετάζεται. Για παράδειγμα, η μεταβλητή NLi6i αποτελείται από τα αρχικά της πρότασης Number Line, γιατί εξετάζεται η τοποθέτηση του κλάσματος πάνω στην αριθμογραμμή και ο αριθμός 6i δηλώνει το ερώτημα του δοκιμίου (πρόκειται για το υποερώτημα i του ερωτήματος 6).

Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του Gras (SIA-Statistical Implicative Analysis) με τη χρήση του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996· Gras, Peter, Briand &Philippe, 1997) και το πρόγραμμα Microsoft Excel. Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων παρουσιάζεται στην παρούσα έρευνα με το διάγραμμα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα. Στο διάγραμμα ομοιότητας οι μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους ανάλογα με την ομοιότητα ή μη που παρουσιάζουν. Μεταβλητές κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρνονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές που παρουσιάζονται στην παρούσα έρευνα ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99% . Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

Οι Διδακτικές Παρεμβάσεις

Οι διδακτικές παρεμβάσεις για κάθε ομάδα, διήρκησαν 20 διδακτικές ώρες, χωρίστηκαν σε 10 φάσεις και χρειάστηκαν τέσσερις εβδομάδες για την υλοποίησή τους. Το παραπάνω σχήμα παρεμβάσεων επαναλήφθηκε τέσσερις φορές, μια φορά για κάθε μία από τις τέσσερις ομάδες του δείγματος (Διαγράμματα 9.1, 9.2, 9.3 και 9.4). Κάθε φάση παρεμβάσεων αποτελείται από δραστηριότητες οι οποίες σχεδιάστηκαν πάνω στη φιλοσοφία των αναπαραστάσεων με τη βοήθεια των 10 μαθηματικών πρακτικών, που εδώ αναφέρονται ως δομικά στοιχεία της διδασκαλίας. Έτσι, κατά την παρουσίαση των δραστηριοτήτων αναφέρεται το όνομα της δραστηριότητας, το δομικό στοιχείο που εφαρμόζεται και η περιγραφή της.

Διάγραμμα 9.1. Συνοπτική απεικόνιση χρονοδιαγράμματος των διδακτικών παρεμβάσεων για την 1η ομάδα του δείγματος.

Διάγραμμα 9.2. Συνοπτική απεικόνιση χρονοδιαγράμματος των διδακτικών παρεμβάσεων για τη 2η ομάδα του δείγματος.

Διάγραμμα 9.3. Συνοπτική απεικόνιση χρονοδιαγράμματος των διδακτικών παρεμβάσεων για την 3η ομάδα του δείγματος.

Διάγραμμα 9.4. Συνοπτική απεικόνιση χρονοδιαγράμματος των διδακτικών παρεμβάσεων για την 4η ομάδα του δείγματος.

1ηΦάση: Προ-δοκιμασίες

Στην 1η φάση των διδακτικών παρεμβάσεων δόθηκε γραπτό δοκίμιο αποτελούμενο από επτά έργα (Παράρτημα 2). Η συμπλήρωσή του διήρκησε μια διδακτική ώρα. Τα γραπτά δοκίμια συντάχθηκαν από την ερευνήτρια και κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές εφαρμογές. Τα γραπτά δοκίμια δόθηκαν και στις τέσσερις ομάδες από την ερευνήτρια, η οποία βρισκόταν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας καθ' όλη τη διάρκεια συμπλήρωσής τους από τους μαθητές. Επειδή τα δοκίμια κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές εφαρμογές, δε χρειάστηκε και δε δόθηκε καμιά διευκρίνιση για τις ασκήσεις του δοκιμίου.

Το γραπτό δοκίμιο, πέρα από τα έργα που αφορούσαν στην κλασματική μονάδα, τη σειροθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή και τα καταχρηστικά κλάσματα, περιελάμβανε και έργα άλλων εννοιών όπως πράξεις κλασμάτων και μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό και ποσοστό. Η παρουσία αυτών των έργων έγινε σκόπιμα για να διερευνηθεί αν θα παρουσιαστούν αλλαγές σε αυτές τις έννοιες μετά από τις διδασκαλίες. Αναμενόμενα, δεν θα πρέπει να παρουσιαστούν σημαντικές αλλαγές σε αυτά τα έργα. Η παρουσία σημαντικών αλλαγών θα σημαίνει τυχαία συμπλήρωση από τους μαθητές. Οι ασκήσεις αυτές, δηλαδή, λειτουργούν ως ασκήσεις κλειδιά για τη διασφάλιση του αληθούς της συμπλήρωσης του δοκιμίου.

2η Φάση: Ημιδομημένες Συνεντεύξεις

Στη 2η φάση των παρεμβάσεων έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις σε πέντε μαθητές από κάθε ομάδα του δείγματος. Η επιλογή έγινε με βάση την επίδοση των προ-δοκιμασιών και τη σχολική βαθμολογία τους στα μαθηματικά. Επιλέχθηκαν, δηλαδή, από κάθε ομάδα ένας μαθητής με υψηλή επίδοση, δύο με μέτρια επίδοση και δύο με χαμηλή επίδοση. Οι συνεντεύξεις έγιναν πάνω σε ερωτηματολόγιο που είχε να κάνει με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά το οποίο πρώτα συμπλήρωσαν οι μαθητές και στη συνέχεια τους γίνονταν ερωτήσεις πάνω στις απαντήσεις που έδωσαν (Παράρτημα 5). Η συνέντευξη συνέχισε και στο μέρος των ασκήσεων για να εκμαιευτεί από τους μαθητές ο τρόπος σκέψης και οι στρατηγικές που ακολούθησαν για την επίλυση των ασκήσεων.

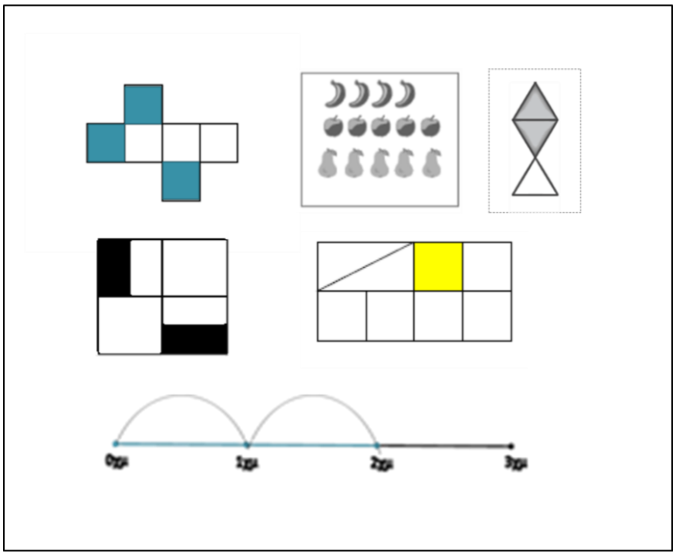
3η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας

Στην 3η φάση υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση που αφορούσε στην ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Η διδασκαλία περιελάμβανε 3 δραστηριότητες οι οποίες κατασκευάστηκαν από την ερευνήτρια βάσει των πορισμάτων που αναδύθηκαν από τα προηγούμενα ερευνητικά μέρη της παρούσας εργασίας. Μετά τις δραστηριότητες δόθηκε ένα φύλλο εργασιών, για να ελεγχθεί άμεσα και σύντομα αν υπήρξε γνωστική αλλαγή για πιθανές βελτιώσεις του παρεμβατικού προγράμματος.

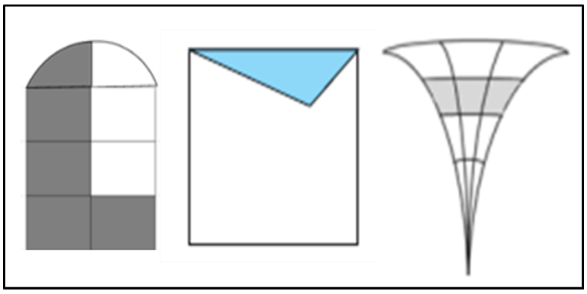
Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός αναπαραστάσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των ίσων μερών τις κλασματικής μονάδας. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους. Η παρουσίαση των αναπαραστάσεων αυτών έγινε με το λογισμικό Microsoft Power Point και περιελάμβανε συνολικά 50 αναπαραστάσεις (Παράρτημα 10) (Διάγραμμα 9.5).

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Στη διάρκεια της δραστηριότητας αυτής οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν ποιες από τις αναπαριστάμενες ποσότητες αποτελούν κλάσμα. Στις αναπαραστάσεις υπήρχαν και μοντέλα τα οποία δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη (ρήξη διδακτικού συμβολαίου) και ως εκ τούτου δεν εξέφραζαν κάποιο κλάσμα (Διάγραμμα 9.6), καθώς φάνηκε μέσα από τις πιλοτικές παρεμβάσεις ότι οι οπτικοποιήσεις αυτές βοήθησαν πολύ τους μαθητές να καταλάβουν την αναγκαιότητα της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας, πετυχαίνοντας μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα σχετικά έργα. Οι μαθητές, όταν έδιναν μια απάντηση για την αναπαράσταση που τους παρουσιαζόταν, έπρεπε να δικαιολογούν και την απάντησή τους.



Διάγραμμα 9.5. Αναπαραστάσεις της πρώτης δραστηριότητας για τη διδασκαλία της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας με το λογισμικό Power Point.

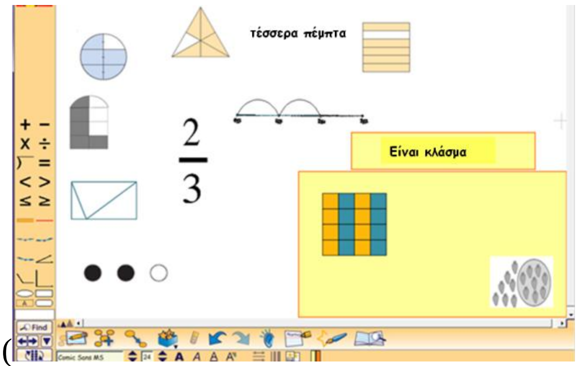


Διάγραμμα 9.6. Μοντέλα εμβαδού που δεν εκφράζουν κλάσμα.

Δραστηριότητα 2: Μεταμορφώσεις κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα διάρκειας 20 λεπτών, σχεδιασμένη σε περιβάλλον εννοιολογικής χαρτογράφησης (Kidspiration) στοχεύει στην απόκτηση ευχέρειας από τους μαθητές να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν για τη δραστηριότητα αυτή ήταν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Για την υλοποίηση της δραστηριότητας οι μαθητές εργάζονται ανά δύο σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στόχος τους είναι να μεταφέρουν στο πλαίσιο που τους δίνεται (Διάγραμμα 9.7) όλα τα μοντέλα που εκφράζουν κλάσμα. Μετά το τέλος της δραστηριότητας, οι μαθητές ανά δύο ανακοινώνουν τα αποτελέσματά τους στην ολομέλεια και γίνονται όπου είναι απαραίτητο οι ανάλογες διορθώσεις, εξωτερικεύοντας κάθε φορά τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν. Για την υλοποίηση της δραστηριότητας δε χρειάστηκε να μεταφερθούμε στην αίθουσα υπολογιστών. Τα σχολεία διέθεταν φορητό σταθμό με laptops στα οποία δούλεψαν οι μαθητές. Είχε προηγηθεί συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς και τους διευθυντές των σχολείων για τη χρήση τους.

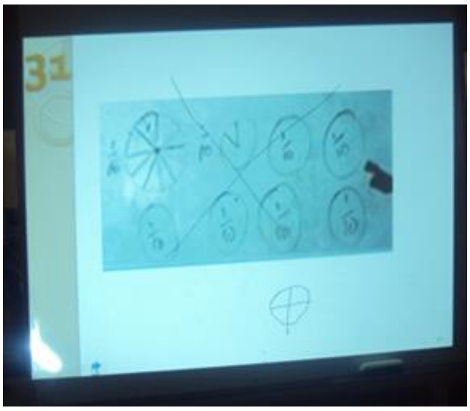


Διάγραμμα 9.7. Δραστηριότητα για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων σε ψηφιακό περιβάλλον.

Δραστηριότητα 3: Διεθνή λάθη. Η τρίτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο είχε να παρουσιάσει στους μαθητές λάθη που έχουν γίνει κατά τη διάρκεια διδασκαλιών από εκπαιδευτικούς και μαθητές σε διεθνές επίπεδο αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Για το σκοπό αυτό παρουσιάστηκαν στους μαθητές τα ευρήματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπως αναφέρονται στο κεφάλαιο 2 με τη βοήθεια του λογισμικού Power Point (Παράρτημα 11). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά Στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, ΤΠΕ, Ιστορία των Μαθηματικών, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

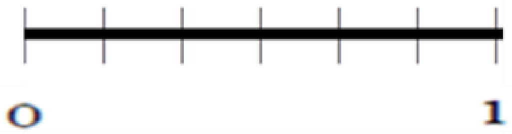
Περιγραφή. Στους μαθητές παρουσιαζόταν μια λάθος αναπαράσταση (Διάγραμμα 9.8), όπως ακριβώς παρουσιάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία, και αυτοί έπρεπε να βρουν το λάθος της αναπαράστασης και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Πρόκειται για ένα πολύ εποικοδομητικό στάδιο συζήτησης, καθώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα λάθη που έκαναν αυτοί τα κάνουν και άλλοι μαθητές από άλλα μέρη του κόσμου.



Διάγραμμα 9.8. Λάθος αναπαράσταση για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Φύλλο εργασιών. Η 3η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών (Παράρτημα 6) που δίνεται στους μαθητές να συμπληρώσουν, το οποίο αποτελείται από τρία έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις. Οι μαθητές συμπληρώνουν ατομικά το φύλλο εργασιών. Μετά τη συμπλήρωσή τους, τα έργα του φυλλαδίου παρουσιάζονται με projector στον πίνακα και λύνονται στην ολομέλεια μέσα από συζήτηση. Οι λάθος λύσεις καταγράφονται και αναλύονται ώστε να λυθούν πιθανές απορίες. Στη φάση αυτή έγιναν πολύ λιγότερα λάθη για την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας σε σχέση με τις προ-δοκιμασίες. Τα λάθη αυτά αφορούσαν κυρίως στα μοντέλα που η μονάδα ήταν ένα ημικύκλιο και μία αριθμογραμμή (Διάγραμμα 9.9 και 9.10 αντίστοιχα).

Διάγραμμα 9.9. Μοντέλο από τα έργα του φύλλου εργασιών που δυσκόλεψε τους μαθητές.



Διάγραμμα 9.10. Η αναπαράσταση της αριθμογραμμής ως μονάδα, που δυσκόλεψε τους μαθητές στο φύλλο εργασιών.

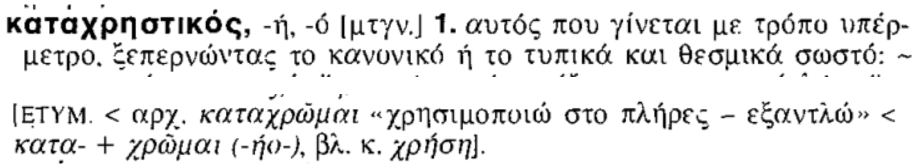
4η Φάση: Καταχρηστικά Κλάσματα

Η 4η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, ασχολείται με την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Αυτή η φάση στοχεύει στην εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών σχετικά τη σωστή διαχείριση και ερμηνεία των καταχρηστικών κλασμάτων. Επιπλέον, στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης της έννοιας του κλάσματος σε ένα άλλο. Η διδασκαλία περιελάμβανε 3 δραστηριότητες οι οποίες κατασκευάστηκαν από την ερευνήτρια βάσει των πορισμάτων που αναδύθηκαν από τα προηγούμενα ερευνητικά μέρη της παρούσας εργασίας. Μετά τις δραστηριότητες δόθηκε ένα φύλλο εργασιών, για να ελεγχθεί άμεσα και σύντομα αν υπήρξε γνωστική αλλαγή για πιθανές βελτιώσεις του παρεμβατικού προγράμματος.

Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός καταχρήσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και εικονικά χειραπτικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους. Η παρουσίαση των αναπαραστάσεων αυτών έγινε με το λογισμικό Microsoft Power Point και περιελάμβανε συνολικά 50 αναπαραστάσεις (Παράρτημα 12).

Δομικά στοιχεία. Διεπιστημονικότητα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, ΤΠΕ.

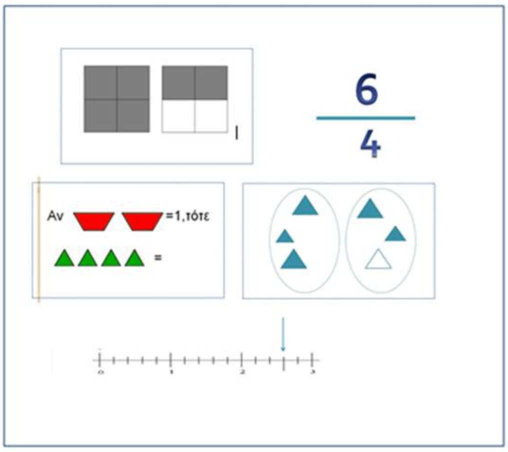
Περιγραφή. Ο τίτλος της δραστηριότητας «Καταιγισμός καταχρήσεων» έδωσε την αφορμή για να συζητηθεί η έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Αρχικά ρωτήθηκαν οι μαθητές τι σημαίνει η λέξη «καταχρήσεις» κι αν οι ίδιοι κάνουν στη ζωή τους. Μετά έγινε παραλληλισμός με την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων, γιατί ονομάστηκαν καταχρηστικά και έγινε ετυμολογία της λέξης με τη βοήθεια λεξικού (Διάγραμμα 9.11).


καταχρηστικός, -ή, -ό [μτγν.] **1.** αυτός που γίνεται με τρόπο υπέρμετρο, ξεπερνώντας το κανονικό ή το τυπικά και θεσμικά σωστό: ~

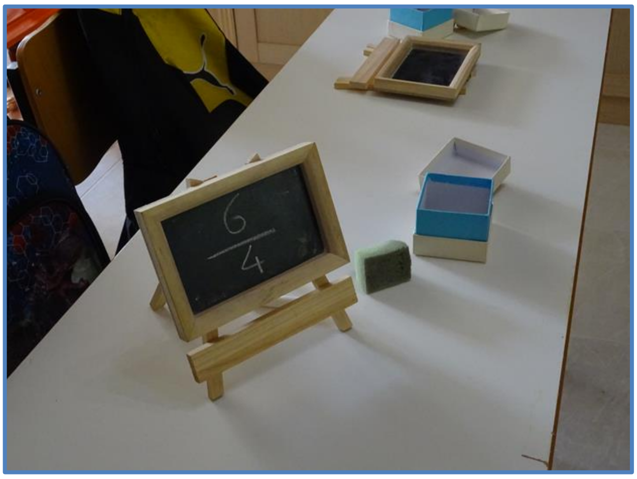
[ΕΤΥΜ. < αρχ. *καταχρῶμαι* «χρησιμοποιώ στο πλήρες – εξαντλώ» < *κατα-* + *χρῶμαι* (-ήο-), βλ. κ. *χρήση*].

Διάγραμμα 9.11. Ορισμός του επιθέτου "καταχρηστικός" από το λεξικό του Μπαμπινιώτη, Γ., 2002, σ. 866.

Στη συνέχεια προβλήθηκε στους μαθητές η παρουσίαση των αναπαραστάσεων με το λογισμικό Microsoft Power Point (Παράρτημα 12) που εκτός από καταχρηστικά κλάσματα αναπαριστάνονταν και γνήσια κλάσματα (Διάγραμμα 9.12). Σε πρώτη φάση οι μαθητές απαντούν προφορικά αν η αναπαράσταση αντιπροσωπεύει κλάσμα και αν ναι, το ονοματίζουν καταχρηστικό ή γνήσιο. Στη συνέχεια, σε πινακάκια που έχουν δοθεί σε κάθε μαθητή, γράφουν τη συμβολική μορφή του κλάσματος (Διάγραμμα 9.13) και σηκώνουν ψηλά τα πινακάκια τους για έλεγχο. Οι μαθητές όταν έδιναν μια απάντηση για την αναπαράσταση που τους παρουσιαζόταν, έπρεπε να δικαιολογούν και την απάντησή τους.



Διάγραμμα 9.12. Αναπαραστάσεις καταχρηστικών κλασμάτων με ποικίλα μοντέλα και δομικά στοιχεία.

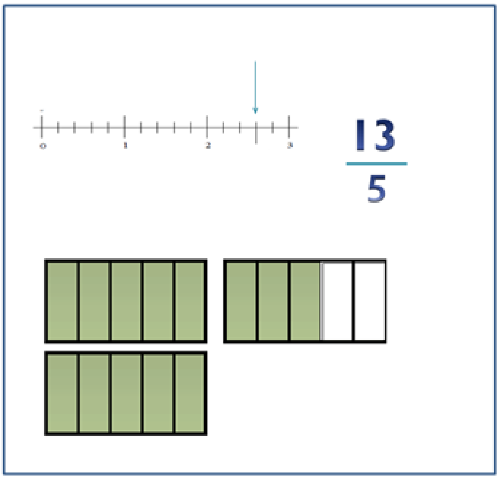


Διάγραμμα 9.13. Τα πινακάκια γραφής της συμβολικής μορφής των κλασμάτων της δραστηριότητας "Καταιγισμός Καταχρήσεων".

Δραστηριότητα 2: Παζλ κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και τις διάφορες αναπαραστάσεις του, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Κατασκευή Προβλήματος, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα αυτή είναι βιωματική και έχει τη μορφή παιχνιδιού. Στους μαθητές δίνονται 24 πλαστικοποιημένες κάρτες μεγέθους 7x7 cm με διάφορες αναπαραστάσεις κλασμάτων (Παράρτημα 13). Σε πρώτη φάση, οι μαθητές, δουλεύοντας ατομικά, πρέπει να φτιάξουν με αυτές όσα περισσότερα καταχρηστικά κλάσματα μπορούν και να τα αντιστοιχίσουν μεταξύ τους σε περίπτωση που το ίδιο καταχρηστικό κλάσμα αναπαρίσταται σε άλλο πεδίο (Διάγραμμα 9.14). Μόλις τελειώσει αυτό το παιχνίδι, με τις ίδιες κάρτες, οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα με τη βοήθεια των καρτών που δεν είναι γραμμοσκιασμένες, τα οποία πρέπει να λύσει ο διπλανός τους.

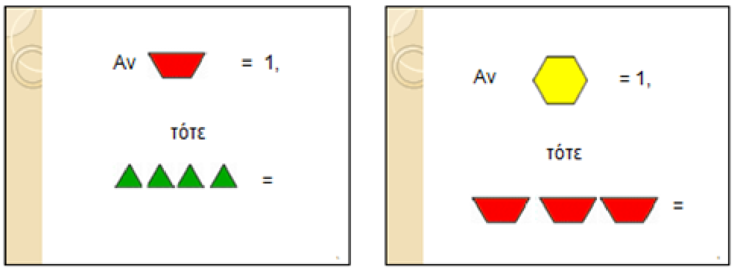


Διάγραμμα 9.14. Σχηματισμός τριών πεδίων αναπαράστασης στη δραστηριότητα "Παζλ Κλασμάτων".

Δραστηριότητα 3: Μαγικά σχήματα. Η τρίτη δραστηριότητα, διάρκειας 15 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει περισσότερο τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση χειριστικών μοντέλων, όπως τα μπλοκ μοτίβου (pattern blocks). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και χειραπτικά υλικά και χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο εμβαδού.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, ΤΠΕ.

Περιγραφή. Για τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές δουλεύουν ατομικά. Τους δίνονται κομμάτια από μπλοκ μοτίβου και συγκεκριμένα 8 τρίγωνα, 3 εξάγωνα και 5 τραπέζια (Παράρτημα 14). Στους μαθητές προβάλλονται στον ασπροπίνακα με τη βοήθεια projector διάφορα προβλήματα (Παράρτημα 15 και Διάγραμμα 9.15). Στην αρχή οι μαθητές απαντούν νοερά και στη συνέχεια επαληθεύουν με τα μοντέλα που τους δόθηκαν.



Διάγραμμα 9.15. Προβλήματα με μπλοκ μοτίβων στη δραστηριότητα "Μαγικά Σχήματα".

Φύλλο εργασιών. Η 4η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών (Παράρτημα 16) που δίνεται στους μαθητές να συμπληρώσουν, το οποίο αποτελείται από τέσσερα έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις. Οι μαθητές συμπληρώνουν ατομικά το φύλλο εργασιών. Μετά τη συμπλήρωσή τους τα έργα του φυλλαδίου παρουσιάζονται με projector στον πίνακα και λύνονται στην ολομέλεια μέσα από συζήτηση. Οι λάθος λύσεις καταγράφονται και αναλύονται ώστε να λυθούν πιθανές απορίες. Τα λάθη που παρουσιάστηκαν ήταν περιορισμένα σε σχέση με τις προ-δοκιμασίες.

5η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας και Καταχρηστικά Κλάσματα

Στη 5η φάση γίνονται μικρές προσαρμογές στις δραστηριότητες, βάσει των αποτελεσμάτων των φύλλων εργασιών της 3ης και 4ης φάσης. Η φάση αυτή, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, είναι επαναληπτικού χαρακτήρα και στόχο έχει οι μαθητές να εξοικειωθούν ακόμη περισσότερο με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και με τα καταχρηστικά κλάσματα μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια και βασίστηκαν στα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών της παρούσας εργασίας.

Η φάση αυτή αποτελείται από τέσσερις παιγνιώδεις δραστηριότητες. Η τάξη είναι χωρισμένη σε τέσσερις ομάδες, όσες και οι δραστηριότητες οι οποίες εκτελούνται ταυτόχρονα. Κάθε ομάδα έχει από μία δραστηριότητα, η διάρκεια της οποίας είναι 15 λεπτά. Μετά το τέλος των 15 λεπτών οι ομάδες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους. Αφού παρουσιάσουν και οι τέσσερις ομάδες, αλλάζουν κυκλικά δραστηριότητα. Αυτό γίνεται μέχρι οι ομάδες να κάνουν και τις τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1: Καρτομαχίες. Η πρώτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας με τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Η πρώτη δραστηριότητα περιλαμβάνει μοντέλα της μονάδας σε κάρτες και τρεις πίνακες. Οι μαθητές πρέπει να χωρίσουν τις 30 κάρτες τους στους τρεις πίνακες (Παράρτημα 17). Στον πρώτο πίνακα τοποθετούν τις κάρτες των γνήσιων κλασμάτων, στο δεύτερο πίνακα τις κάρτες των καταχρηστικών κλασμάτων και στον τρίτο πίνακα τις κάρτες που το σχήμα δεν αναπαριστά κλάσμα (Διάγραμμα 9.16).

Διάγραμμα 9.16. Ένα παράδειγμα από το παιχνίδι «Καρτομαχίες».

Δραστηριότητα 2: Το κρυφτό. Η δεύτερη δραστηριότητα στόχο έχει να προκαλέσει τους μαθητές να κατασκευάσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις μέσω της αφής αναφορικά τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν προφορική γλώσσα και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα εμβαδού και συνόλου.

Δομικό στοιχείο. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Η δεύτερη δραστηριότητα περιλαμβάνει χειριστικά αντικείμενα τα οποία οι μαθητές πρέπει με κλειστά τα μάτια να αναγνωρίσουν αν το μοντέλο που τους δίνεται είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη ή όχι και αν πρόκειται για γνήσιο ή καταχρηστικό κλάσμα (Διάγραμμα 9.17). Η απτική αυτή δραστηριότητα στηρίζεται στην ανάλυση και τη σύνθεση του δοσμένου μοντέλου βάσει των ιδιοτήτων του, που γίνονται αντιληπτές από τους μαθητές μέσω της αφής. Με τον τρόπο αυτό, επειδή οι μαθητές δεν μπορούν να δουν την εξωτερική αναπαράσταση του μοντέλου, προσπαθούν να κατασκευάσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις βάσει των εμπειριών και των κανόνων που γνωρίζουν.

Διάγραμμα 9.17. Η δραστηριότητα "Το κρυφτό" με μοντέλο εμβαδού και συνόλου.

Δραστηριότητα 3: Σπαζοκεφαλιές. Η τρίτη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο αναφορικά με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Κατασκευή Προβλήματος.

Περιγραφή. Στη δραστηριότητα αυτή υπάρχουν 30 κάρτες που αναπαριστούν γνήσια και καταχρηστικά κλάσματα και με τα τρία μοντέλα κλασμάτων (εμβαδού, συνόλου, μήκους). Ένας μαθητής από την ομάδα διαλέγει τυχαία μία από τις 30 κάρτες του παιχνιδιού, χωρίς να βλέπει την αναπαράσταση, και την τοποθετεί στο στεφάνι που φοράει στο κεφάλι του (Διάγραμμα 9.18) Με ερωτήσεις που κάνει στην ομάδα του πρέπει να βρει πιο κλάσμα είναι αυτό. Η ομάδα μπορεί να απαντήσει μόνο με ένα «ναι» ή ένα «όχι», καμιά άλλη πληροφορία δεν μπορεί να δώσει. Ο μαθητής πρέπει να βρει το κλάσμα μέχρι να τελειώσει η κλεψύδρα των 1,5 λεπτών.

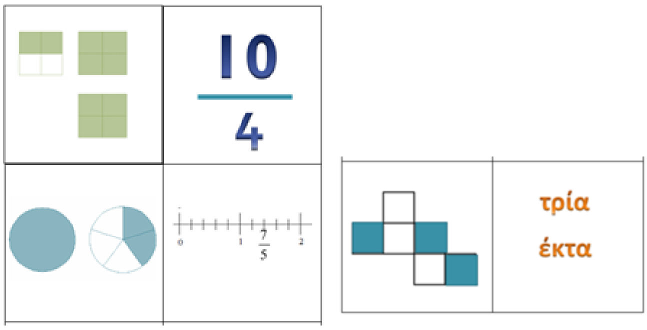
Είναι ένα παιχνίδι που εξωτερικεύει τις στρατηγικές των μαθητών και τον τρόπο που σκέφτονται για να βρουν αν το κλάσμα είναι καταχρηστικό ή γνήσιο και πιο είναι αυτό. Επιπλέον, οι ερωτήσεις που υποβάλλουν παγιώνονται σε κανόνες. Έτσι, για τα να μάθουν οι μαθητές αν το κλάσμα τους είναι καταχρηστικό ή όχι ρωτούν: «Το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας;» ή «το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας;». Για να μάθουν το μοντέλο που αναπαρίσταται ρωτούν: «Είναι μοντέλο εμβαδού;», «Είναι μοντέλο συνόλου;», «Είναι μοντέλο μήκους;». Για να μάθουν ποιο κλάσμα είναι ρωτούν: «Η μονάδα μου είναι χωρισμένη σε λιγότερα από 5 κομμάτια ή 6ή 4 κ.τ.λ.;». Όταν βρουν τον παρονομαστή, ρωτούν με παρόμοιο τρόπο για τον αριθμητή. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μοντέλα της δραστηριότητας είναι χωρισμένα μέχρι και σε οχτώ ίσα μέρη, όχι παραπάνω. Επίσης, υπάρχουν μοντέλα που δεν ισχύει η ισοδιαμέριση. Επιπλέον, υπάρχουν μοντέλα χωρίς γραμμοσκίαση έτσι ώστε οι μαθητές να δημιουργούν το δικό τους πρόβλημα, καθώς οι κάρτες είναι flash card.

Διάγραμμα 9.18. Κάρτες με μοντέλα κλασμάτων, η κλεψύδρα και το στεφάνι του κεφαλιού της δραστηριότητας «Σπαζοκεφαλιές».

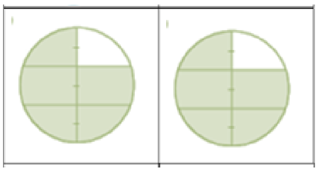
Δραστηριότητα 4: Παιχνίδι μνήμης. Η τέταρτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας αναφορικά τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Η δραστηριότητα αυτή περιλαμβάνει 12 ζεύγη αναπαραστάσεων, δηλαδή 24 κάρτες (Παράρτημα 18). Οι μαθητές τοποθετούν τις κάρτες στο θρανίο τους με τέτοιον τρόπο ώστε να μη φαίνονται οι αναπαραστάσεις. Κάθε μαθητής γυρίζει δυο κάρτες προσπαθώντας να βρει τα ζευγάρια των κλασμάτων που εκφράζουν την ίδια ποσότητα, αλλά είναι σε διαφορετικό πεδίο αναπαράστασης (Διάγραμμα 9.19). Αν δεν βρουν κάποιο ζευγάρι, ξαναγυρίζουν τις κάρτες και παίζει ο επόμενος παίχτης. Το παιχνίδι τελειώνει, αφού βρεθούν όλα τα ζευγάρια κλασμάτων. Στις κάρτες αναπαρίστανται και μοντέλα που δεν εκφράζουν κλάσμα. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές πρέπει να βρουν την όμοια κάρτα (Διάγραμμα 9.20).



Διάγραμμα 9.19. «Παιχνίδι μνήμης»- Κλάσματα που εκφράζουν την ίδια ποσότητα σε διαφορετικά πεδία αναπαράστασης.

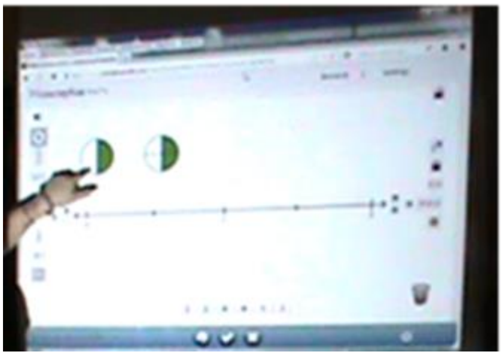


Διάγραμμα 9.20. Μοντέλα που δεν εκφράζουν κλάσμα στη δραστηριότητα «Παιχνίδι μνήμης».

6η Φάση: Η Αριθμογραμμή Α΄ μέρος

Η 6η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, περιλαμβάνει τις διδασκαλίες που αφορούσαν στην τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και στόχο έχει την ελεύθερη ανάδυση από τους μαθητές στρατηγικών σειροθέτησης κλασμάτων, αλλά και την εξοικείωση με αυτές τις στρατηγικές μέσα από μια ανταλλαγή συμπεριφορών και αναπαραστάσεων. Αυτή η φάση περιλαμβάνει 1 δραστηριότητα με πολλαπλές εναλλαγές και ένα φύλλο εργασιών.

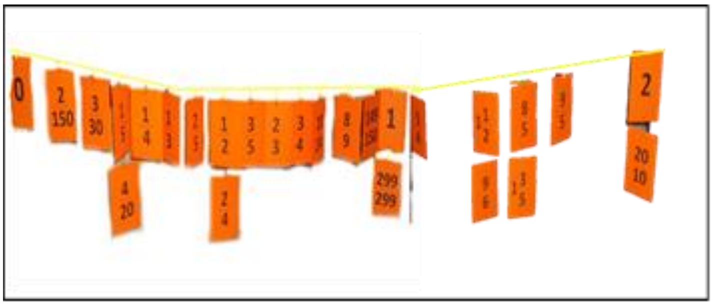
Δραστηριότητα 1: Αριθμογραμμή. Η δραστηριότητα αυτή, διάρκειας 55 λεπτών, αφορά στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή με τη χρήση βιωματικής αναπαράστασης και αναπαράστασης σε ηλεκτρονικό περιβάλλον με τη χρήση του διαδικτυακού λογισμικού ConceptualMath (https://www.conceptuamath.com/app/tool/place-fractions-on-a-number-line, Διάγραμμα 9.21). Αυτό το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να αναπαριστά ένα κλάσμα με ποικιλία παραστάσεων (π.χ. σύμβολο, διάγραμμα, δεκαδικά ψηφία, ποσοστό κ.λπ.). Σε αυτή τη φάση επιδιώκεται οι μαθητές να είναι σε θέση να τοποθετήσουν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή και αντίστροφα να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ένα κλάσμα που αναπαρίσταται σε ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, στοχεύει στην ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κλασμάτων υπάρχει άπειρος αριθμός κλασμάτων. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, εικόνες και χειραπτικά υλικά, εικονικά χειραπτικά και προφορική γλώσσα. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.



Διάγραμμα 9.21. Πολλαπλή αναπαράσταση της τοποθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής στο ConceptualMath.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ΄ εκτίμηση Υπολογισμοί.

Περιγραφή. Για την πρώτη δραστηριότητα, είχε τοποθετηθεί στον πίνακα ένας σχοινί που αναπαρίστανε την αριθμογραμμή (Διάγραμμα 9.22) πάνω στην οποία είχαν οριστεί τα σημεία 0, 1 και 2. Στους μαθητές είχαν μοιραστεί 25 καρτέλες συνολικά, που αναγράφονταν διάφορα κλάσματα, καταχρηστικά, γνήσια, ισοδύναμα της μονάδας κ.λπ. και κάθε μαθητής έβγαινε στον πίνακα με σκοπό να τοποθετήσει σωστά την καρτέλα του στην αριθμογραμμή, έχοντας ως σημείο αναφοράς τα ήδη υπάρχοντα σημεία, στην αρχή δηλαδή μόνο το 0,1 και 2 και στη συνέχεια τις καρτέλες των μαθητών που τις τοποθετούν στην αριθμογραμμή. Πριν ο μαθητής τοποθετήσει την καρτέλα του στην αριθμογραμμή, έπρεπε να αναφέρει στους συμμαθητές του, εξωτερικεύοντας τις σκέψεις του, το λόγο για τον οποίο έχει σκοπό να τοποθετήσει την καρτέλα του στο συγκεκριμένο σημείο της αριθμογραμμής. Δηλαδή, να αναφέρει τη στρατηγική που ακολούθησε. Σε κάθε εξήγηση που δίνουν οι μαθητές για την επιλογή τους αναπτύσσεται διάλογος για τον αν είναι σωστή ή όχι η επιλογή του κάθε μαθητή. Η επιβεβαίωση, οι απορίες και τα λάθη διορθώνονται από τους ίδιους τους μαθητές με τη χρήση του λογισμικού Conceptual Math→ Place Fractions on a Number Line (Διάγραμμα 9.21), το οποίο προβάλλεται με τη βοήθεια διαδραστικού projector στον ασπροπίνακα της τάξης.



Διάγραμμα 9.22. Βιωματική προσέγγιση της τοποθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Κάποιες από τις επιχειρηματολογίες των μαθητών ήταν οι εξής:

- Για το 3/4: Ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, άρα το κλάσμα μου είναι μικρότερο της μονάδας, άρα θα το τοποθετήσω πριν από το 1.
- Για το 299/299: Ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή, άρα είναι ίσο με τη μονάδα, άρα θα το τοποθετήσω κάτω από το 1.
- Για το 2/150: Το 2 είναι πολύ μακριά από το 150 που είναι η μονάδα μου, άρα το κλάσμα μου είναι κοντά στο 0.
- Για το 1/4 (οι μαθητές έχουν τοποθετήσει στην αριθμογραμμή ήδη το 1/5 και το 1/3): Το κλάσμα μου έχει τον ίδιο αριθμητή με το 1/5 και 1/3 άρα θα πάει ανάμεσά τους, αφού στα κλάσματα με ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι αυτό με το μικρότερο παρονομαστή.
- Για το 149/150: Το κλάσμα μου είναι πολύ κοντά στη μονάδα άρα θα το τοποθετήσω δίπλα στο 1.
- Για το 8/9: Το κλάσμα μου είναι πολύ κοντά στη μονάδα, θέλει μόνο 1 κομμάτι για να γίνει 9/9 όμως το κομμάτι αυτό είναι πιο μεγάλο από το κομμάτι του 149/150 που κι αυτό θέλει ένα κομμάτι για να γίνει 150/150 άρα θα το βάλω δίπλα στο 1 και πριν από το 149/150.
- Για το 5/4: Στο κλάσμα μου ο αριθμητής είναι πιο μεγάλος από τον παρονομαστή, άρα το κλάσμα μου είναι πιο μεγάλο από τη μονάδα άρα θα το τοποθετήσω μετά το 1.

Η δραστηριότητα τελειώνει αφού τοποθετούν όλες οι κάρτες στην αριθμογραμμή. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν καταγράφονται σε πίνακα και μένουν στην τάξη ως σημείο αναφοράς και για χρήση στις επόμενες δραστηριότητες.

Φύλλο εργασιών. Στο τέλος της φάσης αυτής δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασιών (Παράρτημα 19), το οποίο αποτελείται από τέσσερα έργα και είναι διάρκειας 35 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις. Οι μαθητές συμπληρώνουν ατομικά το φύλλο εργασιών. Μετά τη συμπλήρωσή τους τα έργα του φυλλαδίου παρουσιάζονται με projector στον πίνακα και λύνονται στην ολομέλεια μέσα από συζήτηση. Οι λάθος λύσεις καταγράφονται και αναλύονται ώστε να λυθούν πιθανές απορίες. Τα λάθη που παρουσιάστηκαν ήταν περιορισμένα σε σχέση με τις προ-δοκιμασίες.

7η Φάση: Η Αριθμογραμμή Β΄ μέρος

Η 7η φάση, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, συνεχίζει με την έννοια της αριθμογραμμής. Γίνονται μικρές αλλαγές στις αναπαραστάσεις των δραστηριοτήτων, βάσει των αποτελεσμάτων από τα φύλλα εργασιών της 6ης φάσης. Η φάση αυτή στόχο έχει οι μαθητές να εξοικειωθούν ακόμη περισσότερο με την σειροθέτηση των κλασμάτων μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια και βασίστηκαν στα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών της παρούσας εργασίας.

Η φάση αυτή αποτελείται από τέσσερις παιγνιώδεις δραστηριότητες. Η τάξη είναι χωρισμένη σε τέσσερις ομάδες, όσες και οι δραστηριότητες οι οποίες εκτελούνται ταυτόχρονα. Κάθε ομάδα έχει από μία δραστηριότητα, η διάρκεια της οποίας είναι 15 λεπτά. Μετά το τέλος των 15 λεπτών οι ομάδες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους. Αφού παρουσιάσουν και οι τέσσερις ομάδες, αλλάζουν κυκλικά δραστηριότητα. Αυτό γίνεται μέχρι οι ομάδες να κάνουν και τις τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1: Πυραμίδα κλασμάτων. Η πρώτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη σειροθέτηση των κλασμάτων μέσα από παιγνιώδεις διαδικασίες και να παγιώσει τις στρατηγικές σειροθέτησης που αναδύθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές στην προηγούμενη φάση. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, προφορική γλώσσα, γραπτά σύμβολα και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

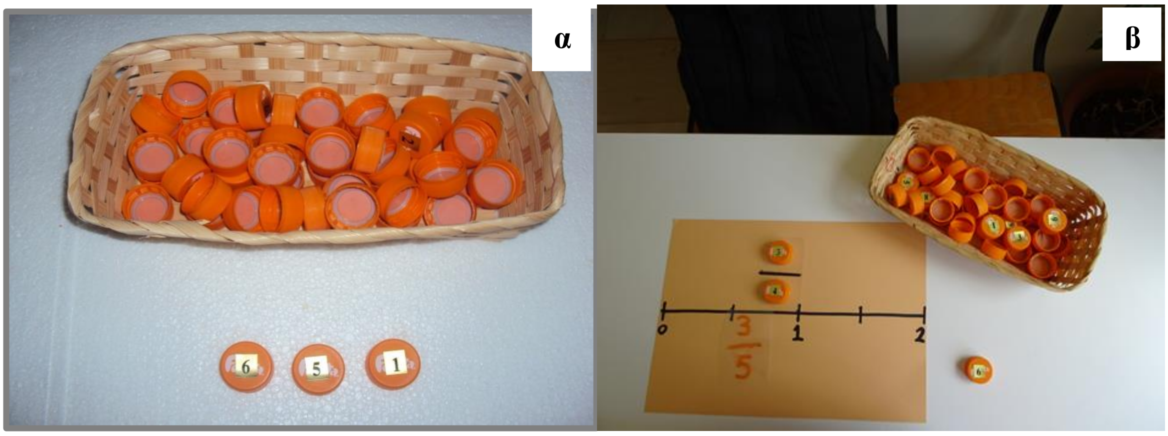
Περιγραφή. Στην ομάδα δίνεται μια πυραμίδα από μεταλλικά κουτιά που αναπαρίσταται η κλασματική γραμμή και μαγνητικοί αριθμοί (Διάγραμμα 9.23α). Με τους μαγνητικούς αριθμούς προσπαθούν να σχηματίσουν κλάσματα με τέτοιο τρόπο ώστε τα κλάσματα της κάτω σειράς να είναι μεγαλύτερα των κλασμάτων που είναι στην πάνω σειρά. Επίσης, κάθε σειρά πρέπει να είναι σε αύξουσα διάταξη. Για βοήθεια και επαλήθευση οι μαθητές έχουν την καρτέλα με τις στρατηγικές της προηγούμενης φάσης. Σε περίπτωση που οι μαθητές, παρατηρώντας την πυραμίδα που έφτιαξαν, διαπιστώσουν κάποια νέα στρατηγική σειροθέτησης, την συμπληρώνουν στην καρτέλα στρατηγικών. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Διάγραμμα 9.23β. Η πυραμίδα μπορεί να έχει λιγότερα ή και περισσότερα επίπεδα, ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας που θέλουμε να επιτύχουμε.

Διάγραμμα 9.23. α) Η πυραμίδα όπως δίνεται στους μαθητές. β) Συμπληρωμένη πυραμίδα κλασμάτων.

Δραστηριότητα 2: Ο πιο γρήγορος ρητοπλάστης. Η δεύτερη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα και χειραπτικά υλικά, ενώ από τα μοντέλα κλασμάτων χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Διεπιστημονικότητα, Ανοιχτό Πρόβλημα, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα.

Περιγραφή. Η ομάδα έχει ένα καλαθάκι με καπάκια από πλαστικά μπουκάλια πάνω στα οποία αναγράφονται διάφοροι αριθμοί από το 0-9 και ένα μοντέλο αριθμογραμμής με τα σημεία 0, 1/2, 1, 1,5 και 2. Κάθε μαθητής έχει μία κάρτα με την κλασματική γραμμή. Δίνεται από τον εκπαιδευτικό στην ομάδα ένα κλάσμα γραμμένο σε μια flash card, το οποίο πρέπει οι μαθητές να τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή. Κάθε μαθητής τραβάει από τρία καπάκια, τυχαία (Διάγραμμα 9.24α), και προσπαθεί με αυτά να φτιάξει ένα κλάσμα μεγαλύτερο του δοσμένου, όσο πιο γρήγορα μπορεί. Υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιήσει δύο ή και τρία καπάκια για να φτιάξει το κλάσμα του. Ο μαθητής που θα καταφέρει να φτιάξει πιο γρήγορα το μεγαλύτερο κλάσμα και να το τοποθετήσει στην αριθμογραμμή, φωνάζοντας «είναι ρητοπλάστης», κερδίζει (Διάγραμμα 9.24β). Στον δεύτερο γύρο σκοπός είναι οι μαθητές να φτιάξουν μικρότερο κλάσμα από το δοσμένο.

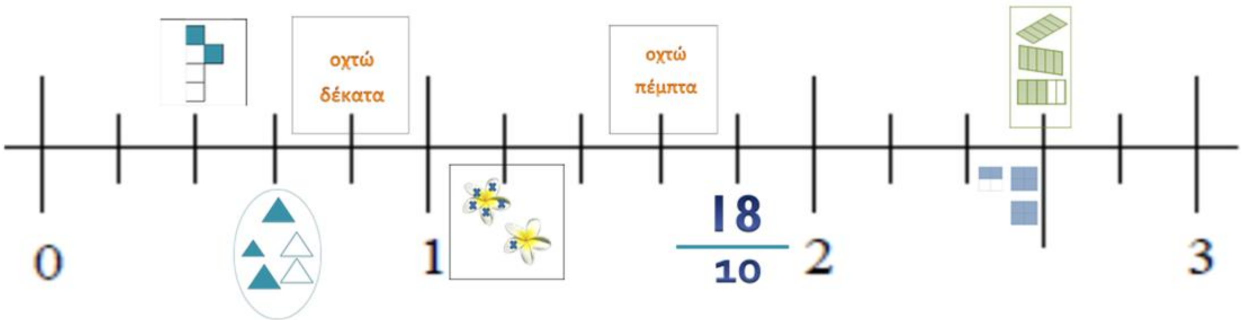


Διάγραμμα 9.24. α) Τα καπάκια της δραστηριότητας "Ο πιο γρήγορος ρητοπλάστης". β) Συμπληρωμένη η αριθμογραμμή με το δοσμένο κλάσμα και μια λύση από τον πιο γρήγορο παίχτη.

Δραστηριότητα 3: Κοκτέιλ κλασμάτων. Η τρίτη δραστηριότητα στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με την τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο). Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν πραγματικές καταστάσεις, γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα κλασμάτων, δηλαδή, μοντέλα εμβαδού, συνόλου και μήκους.

Δομικά στοιχεία. Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ιστορία των Μαθηματικών.

Περιγραφή. Στην ομάδα δίνεται ένα μοντέλο αριθμογραμμής με τα σημεία 0, 1, 2 και 3, ισοδιαμερισμένο σε 5 διαστήματα. Επίσης δίνονται 18 κάρτες κλασμάτων που αναπαρίστανται με ποικιλία αναπαραστάσεων (σύμβολα, μοντέλα εμβαδού, εικόνες, αριθμολέξεις, μοντέλα συνόλου, προϊστορικές αναπαραστάσεις κλασμάτων από τη Μεσοποταμία-3000π.Χ. και τη Βαβυλώνα-2000π.Χ.) (Παράρτημα 20). Στις κάρτες υπάρχουν και μοντέλα που δεν εκφράζουν κλάσμα. Σκοπός του παιχνιδιού είναι οι μαθητές, ομαδικά, να τοποθετήσουν τις κάρτες με τις αναπαραστάσεις κλασμάτων στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 9.25), ανακαλώντας στρατηγικές, σκέψεις, πεποιθήσεις και προκαλώντας διάλογο και αντιπαραθέσεις.



Διάγραμμα 9.25. Κάρτες τοποθετημένες στο μοντέλο της αριθμογραμμής στη δραστηριότητα «Κοκτέιλ Κλασμάτων».

Δραστηριότητα 4: Το ρομπότ. Η τέταρτη δραστηριότητα στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων με τη μέθοδο της αυτόματης ανάκλησης των στρατηγικών που αναδύθηκαν ελεύθερα από τις προηγούμενες δραστηριότητες. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν γραπτά σύμβολα, προφορική γλώσσα, εικόνες και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Κατασκευή προβλήματος, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά.

Περιγραφή. Στην ομάδα δίνεται ένα ρομπότ με χρονοδιακόπτη που το σώμα του αποτελείται από 6 αποσπώμενα κομμάτια. Σε κάθε κομμάτι ένας μαθητής γράφει ένα κλάσμα σύμφωνα με τις στρατηγικές που έχουν αναδυθεί από τους ίδιους στις προηγούμενες δραστηριότητες (Διάγραμμα 9.26). Στρατηγικές που επέλεξαν οι μαθητές για να κατασκευάσουν το πρόβλημα/ρομπότ για παράδειγμα, είναι οι κοινοί αριθμητές, τα ομώνυμα κλάσματα, σύγκριση σε σχέση με το μισό, αριθμητής μεγαλύτερος του παρονομαστή, η συμπλήρωση της μονάδας (πόσο χρειαζόμαστε ακόμη για να φτιάξουμε τη μονάδα) κ.τ.λ..

Διάγραμμα 9.26. Τα κομμάτια του ρομπότ που αναγράφονται κλάσματα από τους μαθητές και ο χρονοδιακόπτης.

Ένας άλλος μαθητής της ομάδας προσπαθεί να βάλει τα κομμάτια του ρομπότ που αναπαριστούν κλάσματα στη σειρά από το μεγαλύτερο στο μικρότερο ή από το μικρότερο στο μεγαλύτερο (ανάλογα τη συμφωνία που έχει κάνει η ομάδα) μέσα σε δοσμένο χρόνο (Διάγραμμα 9.27). Οι χρονικές επιλογές που έχει το ρομπότ είναι τριες, 20, 40 και 60 δευτερόλεπτα. Αν στον επιλεγμένο χρόνο ο μαθητής δεν καταφέρει να σειροθετήσει τα κλάσματα τότε το ρομπότ εκτινάσσει τα κομμάτια και συνεχίζει ο επόμενος μαθητής. Στην αρχή οι μαθητές ξεκινάνε με τα 60 δευτερόλεπτα και μόλις πετύχουν το στόχο τους δοκιμάζουν στον επόμενο γύρο τα 40 δευτερόλεπτα και αν τα καταφέρουν δοκιμάζουν και με τα 20 δευτερόλεπτα. Ο χρονικός περιορισμός στόχο έχει να προκαλέσει στους μαθητές την αυτόματη ανάκληση των στρατηγικών που έχουν αναδυθεί από τους ίδιους στις προηγούμενες δραστηριότητες. Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλοι οι μαθητές της ομάδας να κατασκευάσουν πρόβλημα και να σειροθετήσουν τα κομμάτια του ρομπότ ή να τελειώσει ο χρόνος των 15΄ λεπτών που αντιστοιχεί σε αυτή τη δραστηριότητα.

Διάγραμμα 9.27. Σειροθέτηση των κομματιών του ρομπότ με τη στρατηγική της συμπλήρωσης της μονάδας.

Φύλλο εργασιών. Στο τέλος της φάσης αυτής δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασιών (Παράρτημα 8), διάρκειας 30 λεπτών. Σκοπός του φύλλου εργασίας είναι η διαμορφωτική αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων και ο έλεγχος του παρεμβατικού προγράμματος σε κάθε φάση έτσι ώστε, αν διαπιστωθούν αδυναμίες να λυθούν άμεσα με διορθωτικές αλλαγές στις διδακτικές παρεμβάσεις.

8η Φάση: Το λογισμικό Fraction Battles

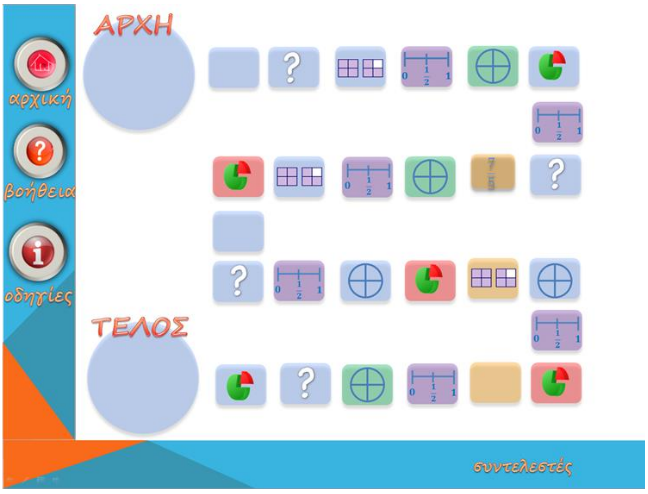
Στη 8η φάση εφαρμόστηκε το λογισμικό Fraction Battles (Διάγραμμα 9.28), ένα εκπαιδευτικό ηλεκτρονικό παιχνίδι για τους ρητούς, που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια και αφορά στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των ρητών στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Δημιουργήθηκε με τη βοήθεια διάφορων λογισμικών και γλωσσών προγραμματισμού. Σκοπός του ηλεκτρονικού παιχνιδιού, που έχει επαναληπτικό χαρακτήρα, είναι μέσα από μια πληθώρα δραστηριοτήτων ενός δυναμικού και διαδραστικού πολυμεσικού περιβάλλοντος να εξοικειώσει τους μαθητές με τα κλάσματα και να τους βοηθήσει να μειώσουν τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν σε αυτά με τη βοήθεια των 10 δομικών στοιχείων και των πολλαπλών αναπαραστάσεων πάνω στις οποίες στηρίζεται και η προστιθέμενη αξία του λογισμικού.

Διάγραμμα 9.28. Η αρχική σελίδα του λογισμικού Fraction Battles.

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτού του εκπαιδευτικού λογισμικού είναι ότι το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνει δεν επιλέχθηκαν και σχεδιάστηκαν αυθαίρετα, αλλά καθορίστηκαν με έναν αυστηρά επιλεκτικό τρόπο από τα πορίσματα διαχρονικών ερευνών που έγιναν και παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία (Α΄ και Β΄ ερευνητικό μέρος). Έτσι, κάθε δραστηριότητα του παιχνιδιού στοχεύει στο να καλύψει συγκεκριμένη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα. Τα είδη των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν καταστάσεις πραγματικού κόσμου, γραπτά σύμβολα, ομιλούμενη γλώσσα, εικόνες, εικονικά χειραπτικά υλικά και χειραπτικά υλικά.

Δομικά στοιχεία. Και τα 10 δομικά στοιχεία: ΤΠΕ, Κατασκευή Προβλήματος, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Αντιπαράδειγμα, Ιστορία των Μαθηματικών, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Ανοιχτό Πρόβλημα, Διεπιστημονικότητα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Περιγραφή. Το ταμπλό του λογισμικού προβάλλεται στον μαγνητικό ασπροπίνακα μέσω projector. Κάθε ομάδα έχει ένα μαγνητικό πιόνι που τοποθετεί στην αρχή του ταμπλό του παιχνιδιού στον μαγνητικό ασπροπίνακα (Διάγραμμα 9.29). Για να κερδίσει κάποια ομάδα πρέπει να φτάσει στον τερματισμό ρίχνοντας το ζάρι του και ακολουθώντας τη διαδρομή που φαίνεται στο Διάγραμμα 9.29. Η διαδρομή περιλαμβάνει 27 θέσεις. Κάθε φορά που μια ομάδα σταματάει σε κάποιες από αυτές τις θέσεις, καλείται να απαντήσει την ερώτηση/δραστηριότητα κάνοντας «κλικ» στην αντίστοιχη θέση. Αν απαντήσει σωστά συνεχίζει, διαφορετικά περιμένει πάλι τη σειρά της. Οι δραστηριότητες του λογισμικού παρουσιάζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 8 της παρούσας εργασίας. Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποια ομάδα καταφέρει να φτάσει στον τερματισμό.



Διάγραμμα 9.29. Η διαδρομή του Fraction Battles.

9η Φάση: Μετα-δοκιμασίες

Στην 9η φάση έγινε η συμπλήρωση των γραπτών δοκιμίων μετά τις διδασκαλίες. Τα δοκίμια περιελάμβαναν τις ίδιες δραστηριότητες με τα δοκίμια της πρώτης φάσης, αλλά είχε επιπλέον τρεις ασκήσεις για να γίνει έλεγχος μεταγνωστικών διεργασιών (Παράρτημα 3). Η συμπλήρωσή του διήρκησε μια διδακτική ώρα και δόθηκε και στις τέσσερις ομάδες από την ερευνήτρια, η οποία βρισκόταν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας καθ' όλη τη διάρκεια συμπλήρωσής τους από τους μαθητές. Επειδή τα δοκίμια κατέληξαν στην τελική τους μορφή μετά από πιλοτικές εφαρμογές, δε χρειάστηκε και δε δόθηκε καμιά διευκρίνιση για τις ασκήσεις του δοκιμίου.

Σκοπός της φάσης αυτής ήταν να διερευνηθούν πιθανές γνωστικές αλλαγές στα κλάσματα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων (1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ).

10η Φάση: Ημιδομημένες Συνεντεύξεις

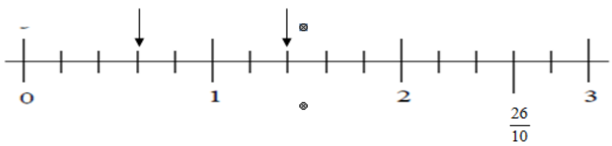
Στη 10η φάση των παρεμβάσεων έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις στους πέντε μαθητές από κάθε ομάδα του δείγματος που έγινε και στη 2η φάση. Οι συνεντεύξεις έγιναν πάνω σε δομημένο ερωτηματολόγιο που είχε να κάνει με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά, το οποίο πρώτα συμπλήρωσαν οι μαθητές και στη συνέχεια τους γίνονταν ερωτήσεις πάνω στις απαντήσεις που έδωσαν (Παράρτημα 5). Η συνέντευξη συνέχισε και στο μέρος των ασκήσεων για να ερευνηθούν πιθανές αλλαγές στις στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές.

Αποτελέσματα

Η στατιστική ανάλυση των δεδομένων της έρευνας έγινε με τη χρήση των διαγραμμάτων ομοιότητας (Διάγραμμα 9.31 και 9.32) και με περιγραφική ανάλυση βάσει πινάκων ποσοστών και τυπικών αποκλίσεων. Τα διαγράμματα ομοιότητας παρουσιάζουν τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους.

Αποτελέσματα στα Ποσοστά Επιτυχίας

Στον Πίνακα 9.1 παρουσιάζονται τα δεδομένα της περιγραφικής στατιστικής σε ποσοστά. Σύμφωνα με αυτά και αναφορικά με την έννοια της αριθμογραμμής, παρατηρούμε ότι στις ασκήσεις που αφορούσαν στην έννοια αυτή υπάρχει μια μεγάλη αύξηση στα ποσοστά επιτυχίας στις μετά-δοκιμασίες σε σχέση με τις προ-δοκιμασίες. Πιο συγκεκριμένα, στην εύρεση κλασμάτων στην αριθμογραμμή (Διάγραμμα 9.30) τα ποσοστά επιτυχίας ήταν αρχικά 24% και 15% (NLi6i και NLi6ii) και στις μετά-δοκιμασίες τα ποσοστά αυξήθηκαν σε 64% και 61% αντίστοιχα.



Διάγραμμα 9.30. Έργο δοκιμίου για την εύρεση κλασμάτων στην αριθμογραμμή.

Αύξηση παρατηρήθηκε και στην άσκηση που ζητούσε από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα μεταξύ του 1/2 και του 1 με ποσοστό που αυξήθηκε από 12% στο 30% (Ord7z). Επίσης, στην άσκηση που υπήρχε μόνο στις μετά-δοκιμασίες για να ελεγχθεί το βάθος κατανόησης της αριθμογραμμής και που ζητούσε από τους μαθητές να τοποθετήσουν τέσσερα κλάσματα στην αριθμογραμμή, τα ποσοστά ήταν ικανοποιητικά για τα ομώνυμα κλάσματα, με 67% (NLi6a) αλλά ήταν χαμηλά με 33%, 30% και 39% για τα ετερώνυμα κλάσματα (NLi6b, NLi6c, NLi6d). Ωστόσο, κι αυτά τα ποσοστά είναι υψηλότερα από αυτά που σημείωσαν οι μαθητές στις προ-δοκιμασίες σε παρόμοιες ασκήσεις. Επίσης, μεγάλα ποσοστά επιτυχίας σημείωσαν οι μαθητές στην άσκηση χωρισμού των κλασμάτων σε καταχρηστικά, γνήσια και ίσα της μονάδας με ποσοστό που άγγιξαν και το 91% (Com8b).

Σχετικά με την έννοια του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε αύξηση των ποσοστών επιτυχίας, καθώς σε άσκηση αναγνώρισης του κλάσματος σε μοντέλα που δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη τα ποσοστά από 0% που ήταν στις προ-δοκιμασίες αυξήθηκαν στο 52% στις μετά-δοκιμασίες.

Τέλος, και στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων είχαμε αύξηση των ποσοστών επιτυχίας, καθώς αυτά αυξήθηκαν από 18% στο 64% (MxD3e) στην αναγνώριση του καταχρηστικού κλάσματος από σχεδιάγραμμα. Εντυπωσιακή ήταν και η αύξηση των ποσοστών επιτυχίας μετά τις διδασκαλίες στην άσκηση που ζητούσε από τους μαθητές να αναπαραστήσουν σχηματικά το κλάσμα 10/4 (Mix7ic). Τα ποσοστά επιτυχίας αυξήθηκαν από 15% που ήταν στις προ-δοκιμασίες σε 55% στις μετά-δοκιμασίες. Υψηλά ποσοστά επιτυχίας σημείωσαν και οι μαθητές σε έργα των μετά-δοκιμασιών που αφορούσαν στην αναγνώριση του καταχρηστικού κλάσματος από σχεδιάγραμμα, ασκήσεις που υπήρχαν μόνο στις μετά-δοκιμασίες, προκειμένου να ελεγχθεί βαθύτερα η κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, τα ποσοστά επιτυχίας σε αυτές τις ασκήσεις ήταν κατά μέσο όρο 70%.

Στις υπόλοιπες έννοιες που διαπραγματεύονταν τα δοκίμια, όπως οι πράξεις κλασμάτων, ισοδυναμία, το κλάσμα ως λόγος, ποσοστό και δεκαδικός, οι οποίες έννοιες δεν αποτέλεσαν αντικείμενο των διδασκαλιών, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά μεταξύ των δύο δοκιμίων παρέμειναν σταθερά στις περισσότερες περιπτώσεις ή αυξομειώθηκαν ελάχιστα.

Πίνακας 9.1.

Στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής σε Ποσοστά των Μεταβλητών της Έρευνας πριν και μετά τις Διδασκαλίες

Αποτελέσματα στα Διαγράμματα Ομοιότητας

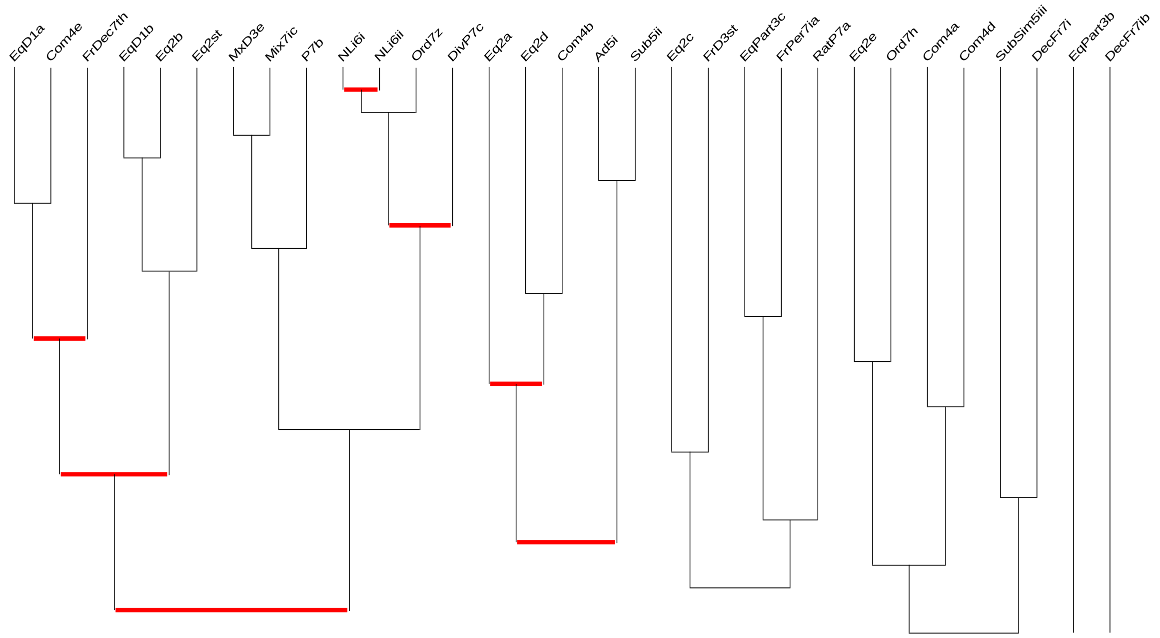
Μεταβλητές	Αποτελέσματα δοκιμίου πριν τις διδασκαλίες	Αποτελέσματα δοκιμίου μετά τις διδασκαλίες	Μεταβλητές	Αποτελέσματα δοκιμίου πριν τις διδασκαλίες	Αποτελέσματα δοκιμίου μετά τις διδασκαλίες
EqD1a	0.55	0.61	RatP7a	0.82	0.82
EqD1b	0.61	0.61	P7b	0.52	0.61
MxD1e		0.82	DivP7c	0.45	0.36
Eq2a	0.70	0.82	Ord7z	0.12	0.30
Eq2b	0.30	0.45	Ord7h	0.12	0.18
Eq2c	0.70	0.73	FrDec7th	0.48	0.55
Eq2d	0.73	0.79	DecFr7i	0.88	0.88
Eq2e	0.76	0.70	FrPer7ia	0.61	0.61
Eq2st	0.64	0.70	DecFr7ib	0.00	0.03
EqPart3b	0.00	0.52	Mix7ic	0.15	0.55
EqPart3c	0.67	0.67	Com8a		0.79
MxD3e	0.18	0.64	Com8b		0.91
FrD3st	0.82	0.91	Com8c		0.82
MxD3z		0.58	NLi6i	0.24	0.64
Com4a	0.79	0.82	NLi6ii	0.15	0.61
Com4b	0.64	0.82	NLi6a		0.67
Com4d	0.64	0.64	NLi6b		0.33
Com4e	0.48	0.64	NLi6c		0.30
Ad5i	0.58	0.55	NLi6d		0.39
Sub5ii	0.58	0.52			
SubSim5iii	0.97	0.97			

Τα διαγράμματα ομοιότητας (Διάγραμμα 9.31 και Διάγραμμα 9.32) παρουσιάζουν τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους. Οι μεταβλητές που συνδέονται μεταξύ τους με κόκκινη γραμμή ισχύουν σε ποσοστό σχεδόν 100% δημιουργώντας ασφαλείς γενικεύσεις στον πληθυσμό.

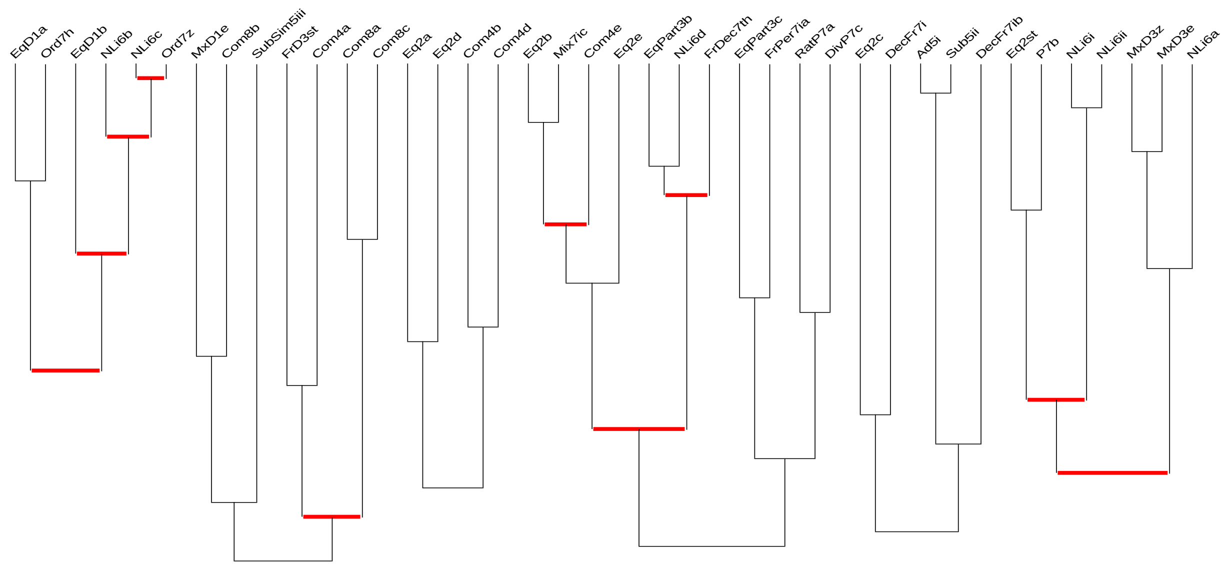
Βάσει αυτών των διαγραμμάτων και αναφορικά με τις μεταβλητές που αφορούν στην αριθμογραμμή, στο διάγραμμα της προ-δοκιμασίας παρατηρούμε ότι σχηματίζεται η πιο ισχυρή σχέση ομοιότητας που πλησιάζει το 1 (μεταξύ των μεταβλητών NLi6i και NLi6ii), οι οποίες με τη σειρά τους συνδέονται με μια ισχυρή σχέση που αγγίζει κι αυτή το 1 με την μεταβλητή Ord7z η οποία αφορά στην εύρεση κλάσματος μεταξύ δύο άλλων κλασμάτων. Φαίνεται, λοιπόν, από τις συνδέσεις αυτές ότι η ικανότητα των μαθητών να βρίσκουν κλάσματα στην αριθμογραμμή σχετίζεται με την ικανότητά τους να βρίσκουν κλάσματα μεταξύ δύο άλλων κλασμάτων. Αυτό αποδεικνύεται και από τα χαμηλά ποσοστά (24%, 15% και 12% αντίστοιχα) που σημείωσαν οι μαθητές σε αυτά τα έργα και από τη σύνδεσή τους με ισχυρή σχέση που αγγίζει το 1 και στο διάγραμμα της μετά-δοκιμασίας, αλλά και από την αύξηση των ποσοστών που σημείωσαν αυτές οι μεταβλητές μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

Όσον αφορά τις μεταβλητές που σχετίζονται με την κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη, παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα ομοιότητας των προ-δοκιμασιών η μεταβλητή αυτή (EqPart3b) δε συνδέεται με καμία άλλη, καθώς κανένας μαθητής δεν την απάντησε σωστά. Αντίθετα, στο διάγραμμα ομοιότητας των μετά-δοκιμασιών συνδέεται με τη μεταβλητή που αφορά την τοποθέτηση κλάσματος στην αριθμογραμμή (NLi6d) που δείχνει τη συσχέτιση της έννοιας της αριθμογραμμής και του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη που προέκυψε μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές που σχετίζονται με την έννοια του καταχρηστικού κλάσματος συνδέονται μόνο μεταξύ τους στο διάγραμμα ομοιότητας της προ-δοκιμασίας (mxD3e, Mx7ic), ενώ μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις συνδέονται και με τη μεταβλητή που αφορά στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή (NLi6a), γεγονός που δείχνει ότι μετά τις διδασκαλίες οι μαθητές δεν έβλεπαν τις έννοιες της αριθμογραμμής και του καταχρηστικού κλάσματος μεμονωμένα, όπως πριν, αλλά τις συσχέτισαν μεταξύ τους, καθώς οι συνδέσεις αυτές δείχνουν στοιχεία ομοιότητας κατά την επίλυσή τους.



Διάγραμμα 9.31. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στις προ-δοκιμασίες.



Διάγραμμα 9.32. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στις μετα-δοκιμασίες.

Αποτελέσματα στα Δοκίμια της Ομάδας Εστίασης

Οι συγκριτική διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών στους ρητούς έγινε με τη χρήση των διαγραμμάτων ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα. Τα διαγράμματα ομοιότητας (Διάγραμμα 9.34 και Διάγραμμα 9.35) παρουσιάζουν τις ομαδοποιήσεις των μεταβλητών με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους και εκφράζουν τις σχέσεις ομοιότητας που έχουν αυτές οι μεταβλητές μεταξύ τους. Στα συνεπαγωγικά διαγράμματα (Διάγραμμα 9.36) φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1 → Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

Αποτελέσματα στα ποσοστά επιτυχίας. Με βάση τα δεδομένα της ανάλυσης, μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων διαχυμένες στα 10 δομικά στοιχεία παρατηρήθηκαν αξιοσημείωτες αλλαγές στις επιδόσεις των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, το ποσοστό επιτυχίας πριν από τις διδασκαλίες στα αντίστοιχα έργα ήταν 25% (NLi5a, NLi5b, NLi6ei) ποσοστό το οποίο αυξήθηκε στο 84% μετά τις διδασκαλίες. Αύξηση παρατηρήθηκε και στην άσκηση που ζητούσε από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα μεταξύ του 1/2 και του 1 με ποσοστό που αυξήθηκε από 12% στο 72%.

Όσον αφορά την έννοια της ισοδιαμέρισης της κλασματικής μονάδας, παρατηρήθηκε επίσης αύξηση στα ποσοστά επιτυχίας, καθώς σε έργα σχετικά με την αναγνώριση κλάσματος από σχήματα που δεν ήταν χωρισμένα σε ίσα μέρη (UnFD1a, UnFD1b, UnFD2a, UnFD2d, UnFD2st), τα ποσοστά από 5% - πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις- ανήλθαν σε 89% μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές δήλωσαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, πριν από τις διδασκαλίες, ότι δεν είναι απαραίτητο η κλασματική μονάδα να χωρίζεται σε ίσα μέρη (Πίνακας 9.2). Την απάντηση αυτή έδωσαν τόσο οι μαθητές με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά όσο και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά (βάσει σχολικής βαθμολογίας).

Πίνακας 9.2.

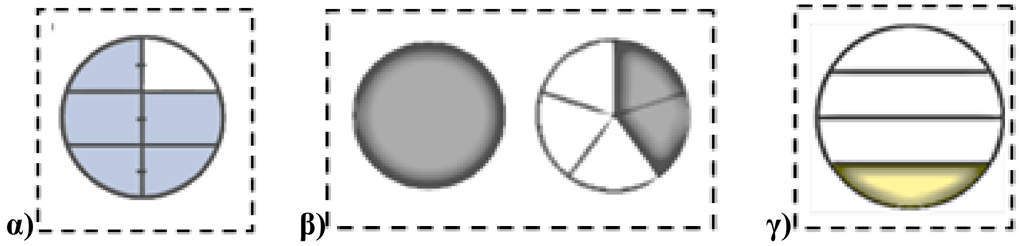
Αποσπάσματα συνεντεύξεων αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Πρόσωπα	Μεταγραφή	Σχολική επίδοση μαθητή στα μαθηματικά
Ερευνήτρια	Πώς σκέφτηκες σε αυτό το σχήμα (Διάγραμμα 9.33α) και έγραψες ότι εκφράζει τα 5/6;	
Άννα	Τα μέτρησα και ήταν σε 6 χωρισμένο και πήραμε τα 5.	Υψηλή
Ερευνήτρια	Δε σε προβλημάτισε κάτι στο σχήμα;	
Άννα	Όχι... τίποτα.	Υψηλή
Ερευνήτρια	Το σχήμα αυτό (Διάγραμμα 9.33γ) δείχνει το κλάσμα 1/4;	
Μιχάλης	Ναι, γιατί βλέπουμε ότι είναι χωρισμένο σε 4 και έχει πάρει το 1.	Χαμηλή
Ερευνήτρια	Το γεγονός ότι το σχήμα δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη (Διάγραμμα 9.33α,γ) δεν έχει κάποια σημασία;	
Μιχάλης	Όχι, δεν παίζει κάποιο ρόλο αυτό.	Χαμηλή
Άννα	Είναι δεν είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη το σχήμα, είναι το ίδιο.	Υψηλή
Ευγενία	Εξαρτάται από το σχήμα... νομίζω.	Χαμηλή
Βαγγέλης	Σημασία δεν έχει να είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη, απλά να είναι χωρισμένο το σχήμα.	Μέτρια
Φιλίτσα	Εεεε... σημασία έχει το ότι είναι χωρισμένα.	Υψηλή

Χαρακτηριστικό των απαντήσεων των μαθητών από τις συνεντεύξεις ήταν ότι οι μαθητές στα έργα για τον διαχωρισμό της κλασματικής μονάδας δε χρησιμοποιούσαν καθόλου τη λέξη «ίσα»:

> ...βλέπουμε ότι είναι χωρισμένο στα 4 και πήραμε το 1.
> ...τα μετρήσαμε και είδαμε ότι είναι στα 6 χωρισμένο (το σχήμα).
> ...έχει χωρίσει στα 4 και έχει πάρει το 1.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε αύξηση στα ποσοστά επιτυχίας στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων, καθώς αυξήθηκαν από 10% σε 75% (ImpP7, ImpD2z, ImpD1d) στην αναγνώριση καταχρηστικού κλάσματος από διάγραμμα (Διάγραμμα 9.33β). Μεγάλη ήταν και η αύξηση των ποσοστών επιτυχίας μετά τις διδασκαλίες στην άσκηση που ζητούσε από τους μαθητές να αναπαραστήσουν σχηματικά το κλάσμα 10/4. Τα ποσοστά επιτυχίας αυξήθηκαν από 15% που ήταν στις προ-δοκιμασίες σε 55% στις μετά-δοκιμασίες. Και σε αυτό το σημείο βλέπουμε τη θετική επίδραση του παρεμβατικού προγράμματος για την έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων. Σημειώνεται ότι κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων πριν από τις διδασκαλίες, πολλοί μαθητές δήλωσαν ότι δεν ήξεραν τι σημαίνει «καταχρηστικό κλάσμα» (Πίνακας 9.3). Την απάντηση αυτή έδωσαν τόσο οι μαθητές με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά όσο και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά (βάσει σχολικής βαθμολογίας).



Διάγραμμα 9.33. α, γ) Άσκηση δοκιμίου που υπήρξαν σημαντικές παρανοήσεις αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας και που αυξήθηκαν τα ποσοστά επιτυχίας μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα β) Άσκηση δοκιμίου που υπήρξαν σημαντικές παρανοήσεις αναφορικά με τα καταχρηστικά κλάσματα και που αυξήθηκαν τα ποσοστά επιτυχίας μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα.

Πίνακας 9.3.

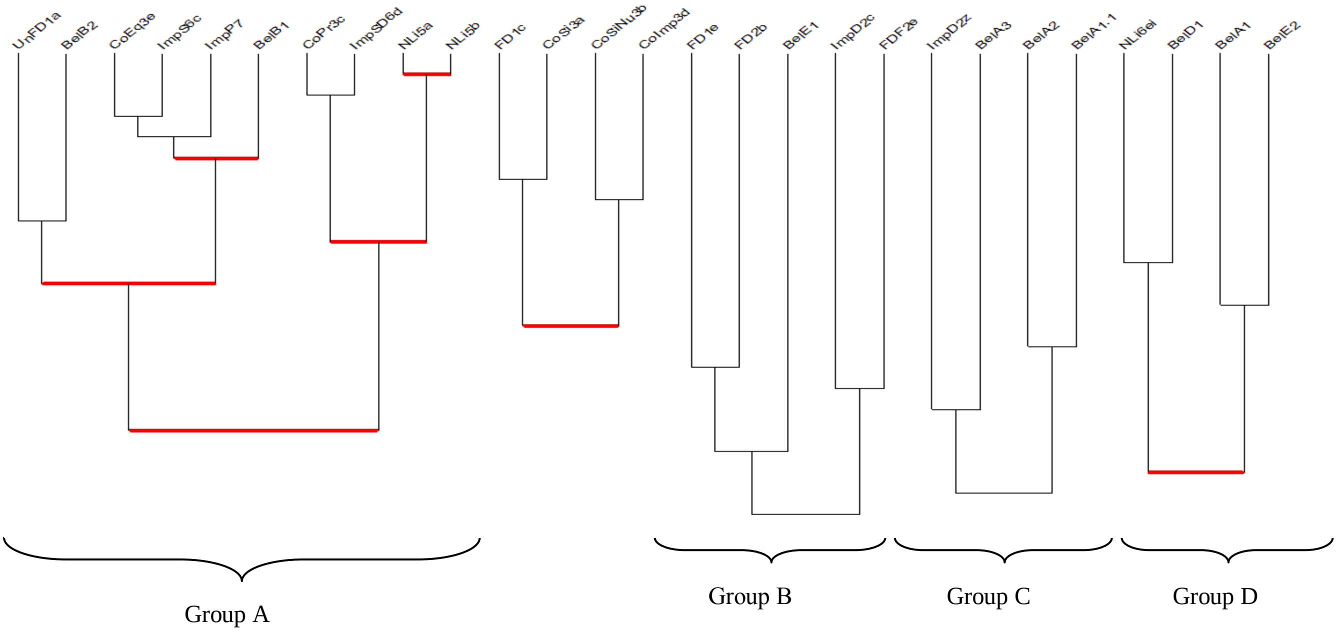
Αποσπάσματα συνεντεύξεων αναφορικά με τα καταχρηστικά κλάσματα πριν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Πρόσωπα	Μεταγραφή	Σχολική επίδοση μαθητή στα μαθηματικά
Ερευνήτρια	Πώς σκέφτηκες εδώ (Διάγραμμα 9.33β) και έγραψες ότι εκφράζει το κλάσμα 7/10;	
Άννα	Είδα τις γραμμές που χωρίζει το σχήμα, τις μέτρησα κανονικά και στα δύο σχήματα, 5 και 5 ίσον 10, δηλαδή, και πήραμε τα 7.	Υψηλή
Πόπη	Μμμ... μέτρησα πόσα είναι όλα και μετά είδα πόσα είναι τα χρωματισμένα, για να δω πόσα πήρα.	Υψηλή
Ερευνήτρια	Το γεγονός ότι έχουμε δύο σχήματα, σε προβλημάτισε καθόλου;	
Πόπη	Όχι... όχι.	Υψηλή
Ερευνήτρια	Κύκλωσε όσα από τα παρακάτω κλάσματα είναι καταχρηστικά (Έργο 4, Παράρτημα 5)	
Σωτήρης	Δε γνωρίζω.	Μέτρια
Παναγιώτης	Δεν έχουμε μάθει ακόμα τα καταχρηστικά κλάσματα.	Υψηλή
Άγγελος	Δε γνωρίζω τι είναι τα καταχρηστικά.	Χαμηλή

Αποτελέσματα στα διαγράμματα ομοιότητας. Πώς μπορεί τώρα η θετική αυτή αλλαγή στις επιδόσεις των μαθητών στους ρητούς αριθμούς λόγω των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τη διάχυσή τους στα δέκα δομικά στοιχεία να επηρεάσει την αλλαγή στις στάσεις και τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά; Από το διάγραμμα ομοιότητας που παρουσιάζει τα έργα πριν από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος (Διάγραμμα 9.34) παρατηρούμε ότι η ομάδα Α ((UnFD1a BelB2) (((CoEq3e ImpS6c) ImpP7) BelB1)) που αφορά τόσο στα έργα για το χωρισμό της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη όσο και τα έργα με τα καταχρηστικά κλάσματα, συνδέονται με τις μεταβλητές BelB2 και BelB1οι οποίες αφορούν την πεποίθηση των μαθητών ότι θα τους άρεσαν περισσότερο τα μαθηματικά αν δεν ήταν τόσο δύσκολα.

Παρατηρούμε επίσης στην ομάδα C (Διάγραμμα 9.34) ότι η κατανόηση των καταχρηστικών κλασμάτων συνδέεται στενά με τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά ((ImpD2z BelA3) (BelA2 BelA1.1)). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που δήλωσαν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά και ότι αυτά είναι σημαντικά στη ζωή του ανθρώπου, σημείωσαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα με τα καταχρηστικά κλάσματα.

Από την άλλη μεριά, παρατηρούμε στην ομάδα D (Διάγραμμα 9.34) ότι η ικανότητα της σειροθέτησης κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή συνδέεται με τις μεταβλητές BelA1, BelD1, BelE2 που αφορούν τρεις κατηγορίες δηλώσεων. Η πρώτη δήλωση είναι ότι στους μαθητές αρέσει να μαθαίνουν μαθηματικά (BelA1), η δεύτερη στον τρόπο διδασκαλίας (BelD1) και η τρίτη από το βαθμό ικανοποίησης των μαθητών από την επίδοσή τους στα μαθηματικά (BelE2). Οι μαθητές, δηλαδή, που δήλωσαν και ότι τους αρέσει να μαθαίνουν μαθηματικά και ότι στη διδασκαλία χρησιμοποιούσε ο δάσκαλος πράγματα από την καθημερινή ζωή, για να λύσουν προβλήματα και δήλωναν και ικανοποιημένοι από την επίδοσή τους στα μαθηματικά, είχαν καλύτερες επιδόσεις στα έργα με τη σειροθέτηση κλασμάτων στην αριθμητική γραμμή.



Διάγραμμα 9.34. Διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών των προ-δοκιμασιών της ομάδας εστίασης.

Βασιζόμενοι στα ευρήματα του Διαγράμματος Ομοιότητας των μεταβλητών των προ-δοκιμασιών (Διάγραμμα 9.34) και συγκρίνοντάς τα με αυτά του του Διαγράμματος Ομοιότητας τωνμεταβλητών των μετα-δοκιμασιών (Διάγραμμα 9.35) παρατηρούμε ότι η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα κλάσματα μετά από τις διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων ενίσχυσε θετικά τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά (Πίνακας 9.4).

Πιο συγκεκριμένα, στην ομάδα A του Διαγράμαμτος ομοιότητας των μεταβλητών μετά τις διδασκλαίες (Διάγραμμα 9.35) παρατηρούμε ότι η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα έργα στα οποία η κλασματική μονάδα παρουσιάζεται με διαγραμματική αναπαράσταση και δεν είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη ενθάρρυνε σημαντικά τους μαθητές οι οποίοι δήλωσαν περισσότερο ικανοποιημένοι από την επίδοσή τους στα Μαθηματικά ((UnFD1a UnFD1b) BelE2). Η αλλαγή στη στάση αυτή οδήγησε σε καλύτερη επίδοση των μαθητών στην τοποθέτηση καταχρηστικών κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή (((UnFD1a UnFD1b) BelE2) (NLiImp6eii NLiImp6eiii)).

Στην ομάδα B (Διάγραμμα 9.35) παρατηρούμε ότι η αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων βελτίωσε τις επιδόσεις των μαθητών στην έννοια του καταχρηστικού κλάσματος και στην εύρεση κλάσματος μεταξύ δύο κλασμάτων ((ImpD1d BelD1) (Ord6a BelD2)) και η βελτίωση αυτή της επίδοσης των μαθητών οδήγησε στην αλλαγή της πεποίθησής τους ότι τελικά τα μαθηματικά δεν είναι τόσο δύσκολα (((ImpD1d BelD1) (Ord6a BelD2)) (BelB1 BelB2)).

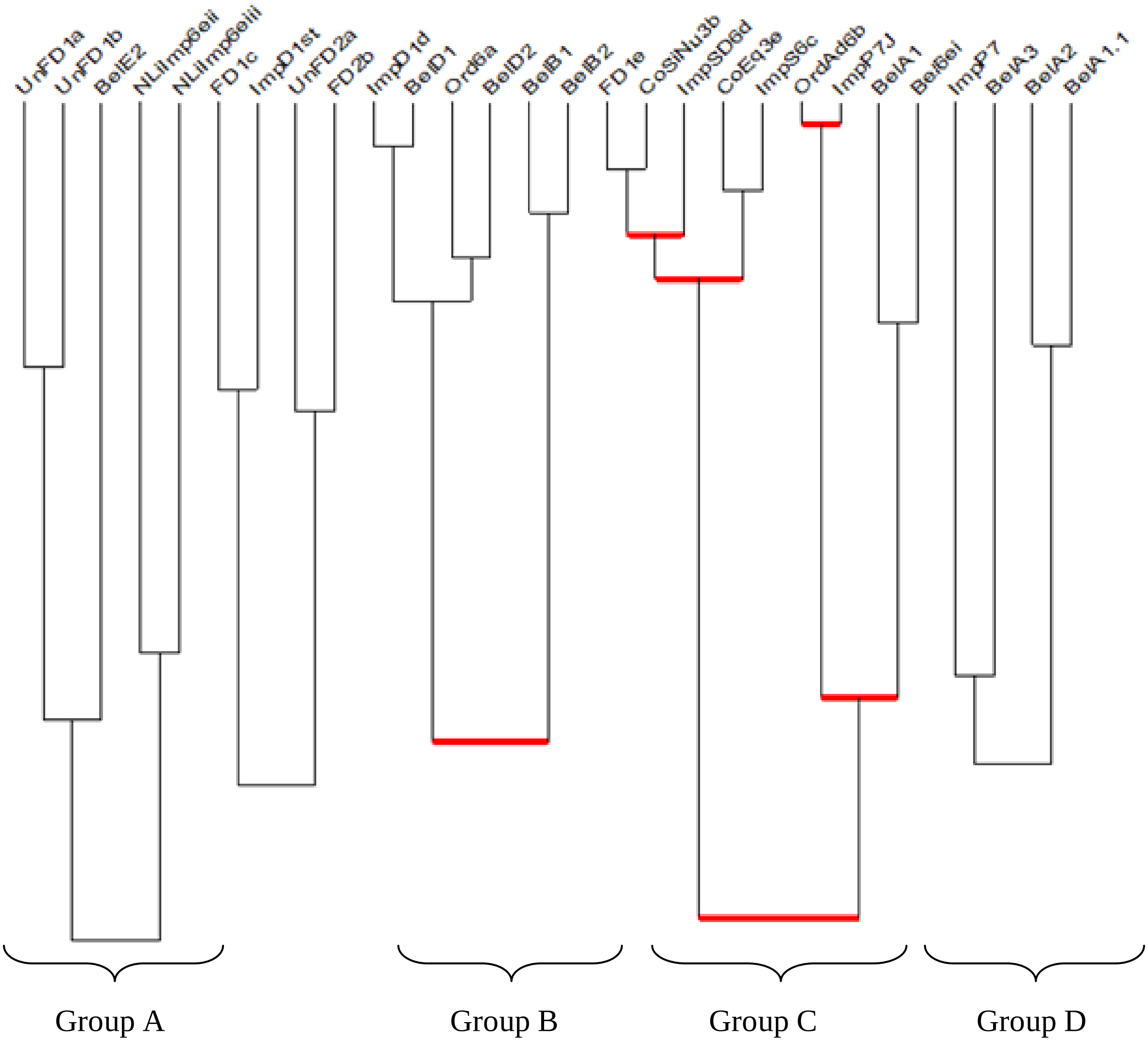
Επίσης, η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών σε πιο σύνθετα έργα (ομάδα C, Διάγραμμα 9.35) όπως στο να επεξηγούν τις επιλογές τους κατά την επίλυση προβλήματος με καταχρηστικά κλάσματα, άλλαξε τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και δήλωναν ότι τους αρέσει να μαθαίνουν μαθηματικά και ότι είναι σημαντικό για αυτούς να είναι καλοί στα Μαθηματικά ((OrdAd6b ImpP7J) (BelA1 BelE1)).

Παρόμοια παρατήρηση μπορούμε να κάνουμε και για την ομάδα D, (Διάγραμμα 9.35), όπου η βελτίωση των μαθητών σε επίλυση προβλημάτων με καταχρηστικά κλάσματα ενίσχυσε τη δήλωσή τους ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά και ότι αυτά είναι σημαντικά στη ζωή μας ((ImpP7 BelA3) (BelA2 BelA1.1)).

Πίνακας 9.4.

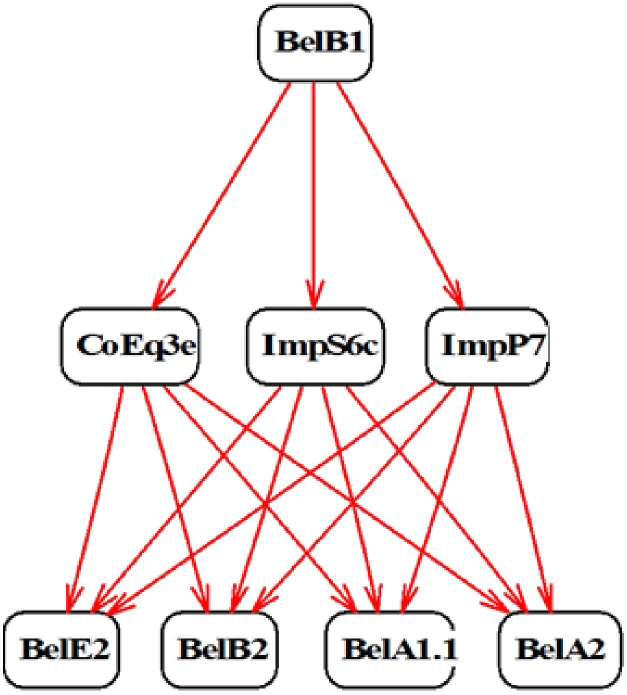
Αποσπάσματα συνεντεύξεων αναφορικά με τις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά πριν και μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος

Πρόσωπα	Μεταγραφή πριν το παρεμβατικό πρόγραμμα	Μεταγραφή μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα
Βασίλης- χαμηλή επίδοση	Τα θεωρώ πολύ δύσκολα τα μαθηματικά. Δεν μπορώ να καταλάβω τι θέλουν να πουν. Δυσκολεύομαι στη διαίρεση και να πω και την αλήθεια δεν ξέρω καν την προπαίδεια καλά. Από μικρός προσπαθούσα, αλλά δυσκολεύομαι.	Τελικά μου αρέσουν τα μαθηματικά, επειδή τώρα τα κατάλαβα πιο πολύ από πριν. [...] Τα καταλαβαίνω πιο πολύ από ότι νόμιζα και τώρα που τα έχω καταλάβει μπορώ να δώσω καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά.
Μανόλης- μέτρια επίδοση	Κάποιες φορές είναι λίγο δύσκολα τα μαθηματικά να τα καταλάβεις από την πρώτη ματιά. [...] Όταν δεν καταλαβαίνω, ρωτάω την κυρία μου, αλλά δεν τον ξανακαταλαβαίνω, ενώ κάποιο άλλοι το καταλαβαίνουν πιο γρήγορα.	Τελικά, και να μην καταλαβαίνω κάτι, θα το μάθω στα σίγουρα κάποια στιγμή. Θα μου το εξηγήσουν κάποιες φορές και μετά θα το καταλάβω. [...]. εδώ κατάλαβα τα περισσότερα και είμαι ικανοποιημένος από την επίδοσή μου στα μαθηματικά.
Γεωργία- υψηλή επίδοση	Μου αρέσουν τα Μαθηματικά... γενικά, δηλαδή, να τα ακούω, να κάνω πράξεις, αλλά να μαθαίνω πράγματα που με δυσκολεύουν έστω και λίγο, ε... Αν τα μάθεις όμως για μια φορά, θα τα έχεις για όλη σου τη ζωή. [...] Είναι από τη φύση τους δύσκολα λίγο (τα μαθηματικά).	Έμαθα κάποια πράγματα που δεν ήξερα πριν. Είχα κενά και δεν το ήξερα και τώρα τα συμπλήρωσα. Ε, δεν τα ξέρω και όλα.



Διάγραμμα 9.35. Διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών των μετα-δοκιμασιών της ομάδας εστίασης.

Αποτελέσματα συνεπαγωγικού διαγράμματος. Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύονται με το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Διάγραμμα 9.36) το οποίο παρουσιάζει συνεπαγωγικές σχέσεις με στατιστική σημαντικότητα 99%. Πιο συγκεκριμένα, μια θετική στάση στα Μαθηματικά (BelB1) βοηθάει τους μαθητές να επιλύουν έργα που αφορούν τόσο στη σειροθέτηση των κλασμάτων (CoEqe) όσο και την επίλυση προβλημάτων με καταχρηστικά κλάσματα (ImpS6c, ImpP7). Όμως η ικανότητα των μαθητών να λύνουν τα παραπάνω έργα συνεπάγεται θετική αλλαγή στις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά σε τρία επίπεδα, σε επίπεδο στάσεων (BelA1.1, BelA2), σε επίπεδο πεποιθήσεων (BelB2) και σε επίπεδο ενθάρρυνσης (BelE2). Οι μαθητές, δηλαδή, που βελτίωσαν τις επιδόσεις τους σε αυτά τα έργα δήλωσαν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά, ότι τελικά τα μαθηματικά δεν είναι και τόσο δύσκολα, όπως δήλωναν αρχικά, και δήλωναν πιο ικανοποιημένοι από την επίδοσή τους στα Μαθηματικά.



Διάγραμμα 9.36. Συνεπαγωγικό Διάγραμμα μεταβλητών των μετα-δοκιμασιών της ομάδας εστίασης.

Η γνωστική πορεία του παρεμβατικού προγράμματος, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου, θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με το Διάγραμμα 9.37. Το καινοτόμο, δηλαδή, παρεμβατικό πρόγραμμα βοήθησε στην κατανόηση του κλάσματος. Η κατανόηση της έννοιας βοήθησε τους μαθητές να λύσουν τα σχετικά έργα σωστά. Η σωστή λύση των έργων ενίσχυσε την αυτοπεποίθηση των μαθητών, αφού είδαν ότι μπορούν να τα καταφέρουν και να λύνουν σωστά ασκήσεις. Οι μαθητές, λοιπόν, αρχίζουν να εκδηλώνουν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, αφού δεν τους φαίνονται πια τόσο δύσκολα και αρχίζουν να τα καταλαβαίνουν. Το ενδιαφέρον αυτό για τα μαθηματικά τους κάνει πιο επιμελείς, κατανοούν περισσότερο τις έννοιες και βελτιώνουν ακόμη περισσότερο την επίδοσή τους κι έτσι μπορούν να επιλύουν και δυσκολότερα έργα.

Διάγραμμα 9.37. Η γνωστική πορεία του καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος.

Συμπεράσματα

Στην έρευνα αυτή παρουσιάστηκαν οι επιρροές που είχε στις αντιλήψεις των μαθητών το καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα, που σχεδιάστηκε πάνω στις έννοιες της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων και το οποίο στηρίχθηκε στη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων (1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, 2. η Ιστορία των Μαθηματικών, 3. το Ανοιχτό Πρόβλημα, 4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, 5. Το Αντιπαράδειγμα, 6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, 7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, 8. η Διεπιστημονικότητα, 9. η Κατασκευή Προβλήματος και 10. οι ΤΠΕ).

Οι διδακτικές παρεμβάσεις διήρκησαν συνολικά 20 διδακτικές ώρες για κάθε ομάδα του δείγματος (συνολικά 80 ώρες και για τις τέσσερις ομάδες) και για τον έλεγχο των αλλαγών στις στάσεις των μαθητών πάνω σε αυτές τις έννοιες δόθηκαν γραπτά δοκίμια πριν και μετά τις διδασκαλίες κι έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις.

Τα αποτελέσματα της έρευνας τόσο από τα διαγράμματα ομοιότητας όσο και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα έδειξαν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις διαχυμένες στα δέκα δομικά στοιχεία βοήθησαν αρκετά τους μαθητές να μειώσουν τις δυσκολίες τους πάνω στις έννοιες των ίσων μερών της κλασματικής μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της σειροθέτησης των κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις των διαγραμμάτων ομοιότητας δείχνουν ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις με την εφαρμογή των δέκα δομικών στοιχείων φάνηκε να βοήθησαν τους μαθητές να μειώσουν τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν στη σειροθέτηση των κλασμάτων πάνω στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμογραμμής. Επιπλέον, οι αναπαραστάσεις με την εφαρμογή αντιπαραδειγμάτων φάνηκαν να βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα του χωρισμού της κλασματικής μονάδας σε ίσα μέρη.

Γενικά, η ποσότητα και η ποιότητα των αναπαραστάσεων που προσφέρεται στους μαθητές παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση βασικών εννοιών του κλάσματος, όπως του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και του καταχρηστικού κλάσματος. Συγκεκριμένα, η έκθεση των μαθητών σε μια πληθώρα εικονικών αναπαραστάσεων με τη βοήθεια των 10 δομικών στοιχείων, που σχετίζονται με τις παραπάνω έννοιες, βοήθησε τους μαθητές στη μείωση των παρανοήσεών τους πάνω στις έννοιες του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων.

Συνακόλουθα, η βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών στις παραπάνω έννοιες είχε ως επακόλουθο τη θετική αλλαγή στις στάσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά, την ενίσχυση της πεποίθησή τους ότι τελικά τα Μαθηματικά δεν είναι και τόσο δύσκολα και στο να δηλώνουν πιο ικανοποιημένοι από την επίδοσή τους σε αυτά.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν οι επιρροές που είχαν στις αντιλήψεις των μαθητών οι διδακτικές παρεμβάσεις που έγιναν πάνω στις έννοιες της αριθμογραμμής, του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και των καταχρηστικών κλασμάτων. Οι διδακτικές παρεμβάσεις διήρκησαν συνολικά 80 ώρες και για τις τέσσερις ομάδες του δείγματος (78 μαθητές) και χωρίστηκαν σε 10 φάσεις. Στην 1η, η 2η, η 9η και η 10η φάση (4 φάσεις συνολικά) δόθηκαν οι προ-δοκιμασίες και οι μετα-δοκιμασίες κι έγιναν οι συνεντεύξεις. Οι φάσεις 3,4,5,6,7,8 (6 φάσεις συνολικά) αποτελούν την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος. Στις έξι αυτές φάσεις έγιναν συνολικά 15 δραστηριότητες συν 27 δραστηριότητες του λογισμικού fraction Battles με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων διαχυμένων στα 10 δομικά στοιχεία.

Για τον έλεγχο των αλλαγών στις στάσεις των μαθητών πάνω σε αυτές τις έννοιες δόθηκαν γραπτά δοκίμια πριν και μετά τις διδασκαλίες και διεξήχθησαν ημιδομημένες συνεντεύξεις σε ένα δείγμα από κάθε ομάδα. Επιπλέον, στις φάσεις κόμβους (φάση 3,4,6,7) δόθηκαν φύλλα εργασιών για να ελεγχθεί άμεσα το παρεμβατικό πρόγραμμα για πιθανές βελτιώσεις.

Τα αποτελέσματα έδειξαν μια αξιοσημείωτη βελτίωση των μαθητών στα έργα που αφορούσαν την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τα καταχρηστικά κλάσματα και τη σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καθώς και την ανάπτυξη μιας θετικής στάσης των μαθητών όχι μόνο για τα κλάσματα, αλλά και για τα Μαθηματικά γενικότερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Εισαγωγή

Η περιοχή των ρητών αριθμών είναι ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής παιδείας των μαθητών μας, καθώς η γνώση τους συμβάλλει στην κατανόηση άλλων μαθηματικών εννοιών (Empson, Levi & Carpenter, 2011· Hackenberg, 2013· Jordan et al., 2013· Lee και Hackenberg, 2014· Lee & Shin, 2015· Petit, Laird & Marsden, 2010· Αυγερινός & Βλάχου, 2013). Για το λόγο αυτό πολλοί ερευνητές κινούνται στο πεδίο αυτό ερευνώντας τις δυσκολίες των μαθητών πάνω στους ρητούς. Ωστόσο, ιδιαίτερη ανησυχία προκαλεί το γεγονός ότι αυτές οι δυσκολίες παρουσιάζουν μια διαχρονικότητα και μια δυσκαμψία στην αλλαγή τους παρά το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία στην Ελλάδα έχουν αλλάξει και ο διεθνής ερευνητικός χώρος προτάσσει τρόπους διδασκαλίας κυρίως με τη χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Η διεθνής βιβλιογραφία αποδίδει αυτές τις δυσκολίες σε διάφορες αιτίες και συγκεκριμένα αναφέρει τέσσερις εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση των κλασμάτων: 1. Τον τρόπο διδασκαλίας, 2. τη χρήση ή μη αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, 3. την ποιότητα και την ποσότητα των αναπαραστάσεων των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών και 4. τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και υποψήφιων εκπαιδευτικών στα κλάσματα.

Διάφορες έρευνες, λοιπόν, έχουν αποδώσει σε διαφορετικό παράγοντα τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα κλάσματα. Στην παρούσα έρευνα, πιστεύοντας ότι οι δυσκολίες αυτές των μαθητών οφείλονται σε έναν συνδυασμό παραγόντων που συμπεριλαμβάνει και τους τέσσερις αυτούς παράγοντες μαζί, επιχείρησε μέσα από μια μακρόχρονη έρευνα να αναδείξει αυτούς τους παράγοντες στον ελλαδικό χώρο με τελικό στόχο τη διατύπωση και πρόταξη λύσεων για τη μείωση αυτών των δυσκολιών των μαθητών.

Συγκεκριμένα, ερευνήθηκαν οι δυσκολίες των ελλήνων μαθητών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στα κλάσματα, στη συνέχεια ερευνήθηκαν οι δυσκολίες των υποψήφιων δασκάλων για τα κλάσματα, αναλύθηκαν τα περιεχόμενα όλων των σχολικών βιβλίων του δημοτικού για την ποσότητα, το είδος και τη συχνότητα των αναπαραστάσεων στα κλάσματα και τέλος από τα πορίσματα αυτών των ερευνών σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε πρωτότυπο καινοτόμο παρεμβατικό πρόγραμμα για τη μείωση αυτών των δυσκολιών.

Η καινοτομία που εισάγεται είναι ότι για το σχεδιασμό των παρεμβατικών προγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία για τις διδακτικές παρεμβάσεις όχι μόνο οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, άλλα και δέκα δομικά στοιχεία των Μαθηματικών (Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Ιστορία των Μαθηματικών, Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Διεπιστημονικότητα, Κατασκευή Προβλήματος και ΤΠΕ) για να ενισχύσουν την αποτελεσματικότητα των αναπαραστάσεων, που φαίνεται ότι τα τελευταία χρόνια, παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιούνται ευρέως και η θετική τους επιρροή έχει διερευνηθεί, δεν μπορούν αν επιφέρουν βέλτιστα αποτελέσματα, καθώς οι δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα παραμένουν διεθνώς.

Αν και οι παραπάνω μαθηματικές πρακτικές υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρονται ως μεμονωμένες έννοιες της διδακτικής των μαθηματικών. Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας οι μαθηματικές αυτές πρακτικές, ενοποιήθηκαν, εντοπίστηκαν οι μεταξύ τους έντονες και ουσιαστικές συσχετίσεις και διαχύθηκαν στη διδασκαλία των κλασμάτων με επίκεντρο τις αναπαραστάσεις.

Έτσι, η εργασία είναι η πρώτη που ενοποιεί όλους του αιτιώδεις παράγοντες της διεθνούς βιβλιογραφίας για τις δυσκολίες στα κλάσματα και τις διερευνά ταυτόχρονα όλους στον ελλαδικό χώρο και διαχρονικά, για να επιτευχθεί σταθεροποίηση των αποτελεσμάτων, και εν συνεχεία προτάσσει παρεμβατικό πρόγραμμα που εισάγει την καινοτομία της ενοποίησης των πολλαπλών αναπαραστάσεων με τα δέκα δομικά στοιχεία προκειμένου να επιτευχθούν καλύτερα αποτελέσματα αναφορικά με την κατανόηση των κλασμάτων, αλλά και να δημιουργήσει θετική στάση για τα Μαθηματικά.

Οι Δυσκολίες των Μαθητών και των Υποψήφιων Δασκάλων στα Κλάσματα: Ελλάδα και Διεθνές Γίγνεσθαι

Προκειμένου να ελεγχθεί ολιστικά η κατάσταση στον ελλαδικό χώρο σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών στα κλάσματα, η παρούσα έρευνα πήρε και τους τέσσερις παράγοντες που αναφέρει η διεθνής βιβλιογραφία ως αίτια των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα και τους διερεύνησε στην Ελλάδα δίνοντας ένα στίγμα στην επιστημονική κοινότητα για του που βρίσκεται η Ελλάδα σε αυτό τον τομέα.

Σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και των υποψήφιων δασκάλων στην Ελλάδα, μια συγκριτική μελέτη των ερευνών που πραγματοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δυσκολίες που εμμένουν μέχρι και την Γ/θμια εκπαίδευση εντοπίζονται α) στην αναγνώριση της ισοδυναμίας από σχεδιάγραμμα, β) στη διαγραμματική απεικόνιση των πράξεων κλασμάτων, γ) στη διαίρεση κλασμάτων, δ) στην τοποθέτηση των κλασμάτων στην αριθμογραμμή, ε) στη σύγκριση κλασμάτων, στ) στην κατανόηση του χωρισμού της μονάδας σε ίσα μέρη και ζ) στην αναγνώριση της έννοιας του κλάσματος ως ποσοστού, δεκαδικού και λόγου.

Λαμβάνοντας υπόψη από τη μια μεριά τις κοινές δυσκολίες που έχουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι με τους μαθητές και από την άλλη το γεγονός ότι η διεθνής βιβλιογραφία ενοχοποιεί ως παράγοντα που επηρεάζει την κατανόηση των κλασμάτων και τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και υποψήφιων δασκάλων (Dubinsky, Arnon & Weller, 2013· Lee & Sztajn, 2008· Lin, 2010· Şahin, Gökkurt & Soylu, 2016· Tobias, 2013· Thanheiseretal, 2016· Whitacre & Nickerson, 2016· Αυγερινός και Βλάχου, 2013), πρέπει να προβληματιστούμε. Η εστίαση, δηλαδή, σε αυτόν τον παράγοντα στηρίζεται στο γεγονός ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι είναι αυτοί που θα κληθούν να διδάξουν την έννοια του κλάσματος και θα πρέπει να κατέχουν την έννοια. Οι παραπάνω δυσκολίες και λαθεμένες αντιλήψεις των υποψήφιων δασκάλων που αναδείχθηκαν από την παρούσα έρευνα πρέπει να θέσουν προβληματισμούς για το πως θα μπορέσουν οι μελλοντικοί δάσκαλοι να διδάξουν σωστά τα κλάσματα στους μαθητές εάν οι ίδιοι ακόμη έχουν σοβαρές παρανοήσεις και δυσκολίες πάνω σε αυτά και ταυτόχρονα να θέσουν σε εγρήγορση τους ερευνητές για την εύρεση μηχανισμών και μεθόδων που θα βοηθήσουν στην αντιμετώπιση αυτού του σοβαρού ζητήματος.

Συνοπτική Περιγραφή του Καινοτόμου Παρεμβατικού Προγράμματος

Από την ανάλυση της διεθνούς βιβλιογραφίας παρατηρήθηκε ότι οι περισσότερες έρευνες που αφορούν στα κλάσματα εστιάζουν στον εντοπισμό των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές και λιγότερο στον τρόπο μείωσης και αντιμετώπισής τους. Επιπρόσθετα, τα περισσότερα παρεμβατικά προγράμματα που προτείνονται έχουν εφαρμοστεί σε φοιτητές και πολύ λιγότερα σε μαθητές οι οποίοι βρίσκονται σε πραγματικές συνθήκες τάξης. Με γνώμονα τα παραπάνω, σχεδιάστηκε το παρεμβατικό πρόγραμμα της παρούσας έρευνας, το οποίο εφαρμόστηκε με τη μορφή διδακτικών παρεμβάσεων σε πραγματικές συνθήκες τάξης για τέσσερις εβδομάδες ανά ομάδα δείγματος, εισάγοντας και μια καινοτομία στη διδασκαλία των κλασμάτων.

Πέρα, δηλαδή, από τις αναπαραστάσεις και τα πολλαπλά είδη της που χρησιμοποιούνται στα ερευνητικά παρεμβατικά προγράμματα της διεθνούς βιβλιογραφίας, στις παρούσες διδακτικές παρεμβάσεις προστέθηκαν και κάποιες άλλες μαθηματικές πρακτικές (δομικά στοιχεία) ως μαθηματικά εργαλεία, τα οποία ενισχύουν επικουρικά τη διδασκαλία δίνοντας ταυτόχρονα μια παιγνιώδη διάσταση στις δραστηριότητες. Αυτά τα δομικά στοιχεία είναι:

1. Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά,
2. η Ιστορία των Μαθηματικών,
3. το Ανοιχτό Πρόβλημα,
4. η Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου,
5. Το Αντιπαράδειγμα,
6. οι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί,
7. οι Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί,
8. η Διεπιστημονικότητα,
9. η Κατασκευή Προβλήματος και
10. οι ΤΠΕ.

Αν και οι παραπάνω μαθηματικές πρακτικές υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρονται ως μεμονωμένες έννοιες της διδακτικής των μαθηματικών. Μέσα από πιλοτική έρευνα που έγινε από την ερευνήτρια σε αυθεντικές συνθήκες τάξης αναδείχθηκαν οι έντονες συσχετίσεις και οι θετικές επιρροές των δέκα αυτών δομικών στοιχείων στη διδασκαλία των μαθηματικών και εν συνεχεία τολμήθηκε η ενοποίηση τους με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις για τη δημιουργία πρωτότυπου καινοτόμου παρεμβατικού προγράμματος για τη μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα.

Η εφαρμογή των παραπάνω υλοποιήθηκε μέσα από διδακτικές παρεμβάσεις με τη χρήση πρωτότυπων μέσων, υλικών, εργαλείων και αναπαραστάσεων-ψηφιακών και βιωματικών, που δίνουν μια παιγνιώδη διάσταση στις σχεδιασθείσες διδασκαλίες έτσι ώστε να επιτευχθεί μείωση των δυσκολιών των μαθητών στα κλάσματα. Ταυτόχρονα, η παιγνιώδης διάσταση των παρεμβατικών προγραμμάτων τείνει να διεγείρει την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά ώστε να διακρίνουν τη δύναμη και την ομορφιά τους και να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον και την επιθυμίας τους να ασχοληθούν με αυτά.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις διήρκησαν συνολικά 80 ώρες και για τις τέσσερις ομάδες του δείγματος (78 μαθητές) και χωρίστηκαν σε 10 φάσεις. Στην 1η, η 2η, η 9η και η 10η φάση (4 φάσεις συνολικά) δόθηκαν οι προ-δοκιμασίες και οι μετα-δοκιμασίες κι έγιναν οι συνεντεύξεις. Οι φάσεις 3,4,5,6,7,8 (6 φάσεις συνολικά) αποτελούν τις διδακτικές παρεμβάσεις. Στις έξι αυτές φάσεις έγιναν συνολικά 15 δραστηριότητες συν 27 δραστηριότητες του λογισμικού fraction Battles με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων διαχυμένων στα 10 δομικά στοιχεία. Συνοπτικά, οι φάσεις των διδακτικών παρεμβάσεων (3-8) έχουν ως εξής:

3η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας

Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός αναπαραστάσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των ίσων μερών τις κλασματικής μονάδας.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Δραστηριότητα 2: Μεταμορφώσεις κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα διάρκειας 20 λεπτών, στοχεύει στην απόκτηση ευχέρειας από τους μαθητές να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

Δραστηριότητα 3: Διεθνή λάθη. Η τρίτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο είχε να παρουσιάσει στους μαθητές λάθη που έχουν γίνει κατά τη διάρκεια διδασκαλιών από εκπαιδευτικούς και μαθητές σε διεθνές επίπεδο αναφορικά με την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Δομικά Στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, ΤΠΕ, Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου.

Φύλλο εργασιών. Η 3η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών για ενδιάμεσο και άμεσο έλεγχο των διδακτικών παρεμβάσεων και του παρεμβατικού προγράμματος.

4η Φάση: Καταχρηστικά Κλάσματα

Δραστηριότητα 1: Καταιγισμός καταχρήσεων. Η πρώτη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εκθέσει τους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις που αφορούσαν στην έννοια των καταχρηστικών κλασμάτων.

Δομικά στοιχεία. Διεπιστημονικότητα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, ΤΠΕ.

Δραστηριότητα 2: Παζλ κλασμάτων. Η δεύτερη δραστηριότητα, διάρκειας 20 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και τις διάφορες αναπαραστάσεις του, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Κατασκευή Προβλήματος, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Δραστηριότητα 3: Μαγικά σχήματα. Η τρίτη δραστηριότητα, διάρκειας 15 λεπτών, στόχο είχε να εξοικειώσει περισσότερο τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων με τη χρήση χειραπτικών μοντέλων, όπως τα μπλοκ μοτίβου (pattern blocks).

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, ΤΠΕ.

Φύλλο εργασιών. Η 4η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών για ενδιάμεσο και άμεσο έλεγχο των διδακτικών παρεμβάσεων και του παρεμβατικού προγράμματος.

5η Φάση: Ισοδιαμέριση της Κλασματικής Μονάδας και Καταχρηστικά Κλάσματα

Δραστηριότητα 1: Καρτομαχίες. Η πρώτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας με τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Δραστηριότητα 2: Το κρυφτό. Η δεύτερη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει να προκαλέσει τους μαθητές να κατασκευάσουν εσωτερικές αναπαραστάσεις μέσω της αφής αναφορικά τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας.

Δομικό στοιχείο. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Δραστηριότητα 3: Σπαζοκεφαλιές. Η τρίτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο αναφορικά με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο).

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Κατασκευή Προβλήματος.

Δραστηριότητα 4: Παιχνίδι μνήμης. Η τέταρτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη διαχείριση των καταχρηστικών κλασμάτων και την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας αναφορικά τις διάφορες αναπαραστάσεις τους, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο.

Δομικά στοιχεία. Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

6η Φάση: Η Αριθμογραμμή Α΄ μέρος

Δραστηριότητα 1: Αριθμογραμμή. Η δραστηριότητα αυτή αφορά στην τοποθέτηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή με τη χρήση βιωματικής αναπαράστασης και αναπαράστασης σε ηλεκτρονικό περιβάλλον με τη χρήση του λογισμικού ConceptualMath, ένα λογισμικό που έχει τη δυνατότητα να αναπαριστά ένα κλάσμα με ποικιλία παραστάσεων. Σε αυτή τη φάση επιδιώκεται οι μαθητές να είναι σε θέση να τοποθετήσουν ένα κλάσμα στην αριθμογραμμή και αντίστροφα να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ένα κλάσμα που αναπαρίσταται σε ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, στοχεύει στην ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών ότι μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κλασμάτων υπάρχει ένας άπειρος αριθμός κλασμάτων.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Ρεαλιστικά Μαθηματικά.

Φύλλο εργασιών. Η 6η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών για ενδιάμεσο και άμεσο έλεγχο των διδακτικών παρεμβάσεων και του παρεμβατικού προγράμματος.

7η Φάση: Η Αριθμογραμμή Β΄ μέρος

Δραστηριότητα 1: Πυραμίδα κλασμάτων. Η πρώτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με τη σειροθέτηση των κλασμάτων μέσα από παιγνιώδεις διαδικασίες και να παγιώσει τις στρατηγικές σειροθέτησης που αναδύθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές στην προηγούμενη φάση.

Δομικά στοιχεία. Ανοιχτό Πρόβλημα, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Δραστηριότητα 2: Ο πιο γρήγορος ρητοπλάστης. Η δεύτερη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής.

Δομικά στοιχεία. Διεπιστημονικότητα, Ανοιχτό Πρόβλημα, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα.

Δραστηριότητα 3: Κοκτέιλ κλασμάτων. Η Τρίτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει να εξοικειώσει τους μαθητές με την τοποθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής και να μπορούν να μεταφέρονται από ένα πεδίο αναπαράστασης σε ένα άλλο. Επίσης, στοχεύει να παγιώσει ορθές στρατηγικές και κανόνες και να τους εξοικειώσει με την ενσυνείδητη χρήση των τριών μοντέλων κλασμάτων (μήκος, εμβαδό και σύνολο).

Δομικά στοιχεία. Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Αντιπαράδειγμα, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί.

Δραστηριότητα 4: Το ρομπότ. Η τέταρτη δραστηριότητα διάρκειας 15 λεπτών στόχο έχει οι μαθητές να εξασκηθούν περαιτέρω με τις στρατηγικές σειροθέτησης κλασμάτων με τη μέθοδο της αυτόματης ανάκλησης των στρατηγικών που αναδύθηκαν ελεύθερα από τις προηγούμενες δραστηριότητες.

Δομικά στοιχεία. Κατασκευή προβλήματος, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί.

Φύλλο εργασιών. Η 7η φάση κλείνει με ένα φύλλο εργασιών για ενδιάμεσο και άμεσο έλεγχο των διδακτικών παρεμβάσεων και του παρεμβατικού προγράμματος.

8η Φάση: Εφαρμογή του λογισμικού Fraction Battles

Η φάση αυτή, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών έγινε εφαρμογή του λογισμικού Fraction Battles, ένα εκπαιδευτικό ηλεκτρονικό παιχνίδι για τους ρητούς, που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια. Σκοπός του ηλεκτρονικού παιχνιδιού είναι μέσα από μια πληθώρα δραστηριοτήτων ενός δυναμικού και διαδραστικού πολυμεσικού περιβάλλοντος να εξοικειώσει τους μαθητές με τα κλάσματα και να τους βοηθήσει να μειώσουν τις δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν σε αυτά με τη βοήθεια των 10 δομικών στοιχείων και των πολλαπλών αναπαραστάσεων πάνω στις οποίες στηρίζεται και η προστιθέμενη αξία του λογισμικού.

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά αυτού του εκπαιδευτικού λογισμικού είναι ότι το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνει δεν επιλέχθηκαν και σχεδιάστηκαν αυθαίρετα, αλλά καθορίστηκαν με έναν αυστηρά επιλεκτικό τρόπο από τα πορίσματα διαχρονικών ερευνών που έγιναν και παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία. Έτσι, κάθε δραστηριότητα του παιχνιδιού στοχεύει στο να καλύψει συγκεκριμένη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στα κλάσματα.

Δομικά στοιχεία. ΤΠΕ, Κατασκευή Προβλήματος, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Αντιπαράδειγμα, Ιστορία των Μαθηματικών, Νοεροί και Κατ' εκτίμηση Υπολογισμοί, Ανοιχτό Πρόβλημα, Διεπιστημονικότητα, Ρήξη Διδακτικού Συμβολαίου.

Για τον έλεγχο των αλλαγών στις στάσεις των μαθητών πάνω στα κλάσματα δόθηκαν γραπτά δοκίμια πριν και μετά τις διδασκαλίες και διεξήχθησαν ημιδομημένες συνεντεύξεις σε ένα δείγμα 5 μαθητών από κάθε ομάδα. Επιπλέον, στις φάσεις κόμβους (φάση 3,4,6,7) δόθηκαν φύλλα εργασιών για να ελεγχθεί άμεσα το παρεμβατικό πρόγραμμα για πιθανές βελτιώσεις.

Τα αποτελέσματα έδειξαν μια αξιοσημείωτη βελτίωση των μαθητών στα έργα που αφορούσαν την ισοδιαμέριση της κλασματικής μονάδας, τα καταχρηστικά κλάσματα και τη σειροθέτηση κλασμάτων στο γεωμετρικό μοντέλο της αριθμητικής γραμμής, καθώς και την ανάπτυξη μιας θετικής στάσης των μαθητών όχι μόνο για τα κλάσματα, αλλά και για τα Μαθηματικά γενικότερα.

Εκπαιδευτικές Εφαρμογές του Καινοτόμου Παρεμβατικού Προγράμματος

Η εκπαίδευση είναι ένα χώρος δυναμικός που δε μένει ανεπηρέαστος από τις εξελίξεις. Επηρεάζεται τόσο από τις εξωτερικές όσο και από τις εσωτερικές δυνάμεις του περιβάλλοντός της. Χρειάζεται ευελιξία, δυναμικές πρωτοβουλίες και οργανωμένες πρακτικές για να διατηρεί η εκπαίδευση το ανταγωνιστικό της πλεονέκτημα στο χώρο της γνώσης, της εφευρετικότητας και της αγάπης για μάθηση. Ένα σημαντικό όπλο για αυτό είναι η μαθηματική παιδεία των μαθητών μας. Γιατί τα Μαθηματικά είναι όλα, είναι Γλώσσα, είναι Ιστορία, είναι Περιβάλλον, είναι Μουσική, είναι ό,τι υπάρχει γύρο μας.

Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας και κυρίως από τα πορίσματα του Παρεμβατικού Προγράμματος φάνηκε ότι οι μαθητές μέσα από τη δημιουργική διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος όχι μόνο μείωσαν τις δυσκολίες τους στις υπό εξέταση έννοιες των ρητών, αλλά κυρίως παρουσίασαν μια θετική μεταστροφή στη στάση τους για τα Μαθηματικά. «Τελικά, είναι όμορφα τα Μαθηματικά!», ακούστηκε κάποια στιγμή στη συνέντευξη από μια μαθήτρια, που μάλιστα αντιμετώπιζε σοβαρές δυσκολίες στα μαθηματικά και οι βαθμοί της ήταν από τους πιο χαμηλούς της ομάδας εστίασης.

Από τα παραπάνω διαφαίνεται ότι στόχος των εκπαιδευτικών δε θα πρέπει να είναι μόνο η κατάκτηση μεμονωμένων μαθηματικών εννοιών. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να διασφαλίσει μέσα στην τάξη και κατά τη διδασκαλία ένα πλαίσιο τέτοιο που να εμπνέει τους μαθητές να αγαπήσουν τα Μαθηματικά, να διακρίνουν τη δύναμη και την ομορφιά τους δίνοντας ώθηση στην ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και της επιθυμίας τους να ασχοληθούν με αυτά. Για την επίτευξη των παραπάνω χρειάζονται διδασκαλίες που να στηρίζονται σε δραστηριότητες παιγνιώδεις, κοντά στα ενδιαφέροντα των μαθητών που θα συνδυάζονται με την κατάλληλη πνευματική, ψυχική και συναισθηματική ενίσχυση των μαθητών.

Σε πρόσφατο δημοσίευμά του ο διευθυντής του Ιδρύματος Οικονομικών και Βιομηχανικών Ερευνών (ΙΟΒΕ) Νίκος Βέττας μιλώντας για τους λόγους που οι έλληνες μαθητές έχουν συστηματικά τις χειρότερες επιδόσεις μεταξύ των χωρών του ΟΟΣΑ αναφέρει μεταξύ άλλων δύο βασικούς λόγους: 1. Τον σχεδιασμό και τη λειτουργία του εκπαιδευτικού συστήματος, όπως αυτή εξελίχθηκε τις τελευταίες δεκαετίες, που χαρακτηρίζονται από σοβαρές ανεπάρκειες που οδηγούν συνδυαστικά και σε μέτρια αποτελέσματα και 2. στα φτωχά σχεδιασμένο σύστημα κινήτρων (Παπαματθαίου, 2018).

Το καινοτόμο Παρεμβατικό Πρόγραμμα της παρούσας εργασίας διακατέχεται από τα στοιχεία της δημιουργικότητας, της ευελιξίας, της εστίασης στον στόχο και της ενίσχυσης των μαθητών και η εφαρμογή του στην τάξη μπορεί να δώσει εσωτερικά κίνητρα τόσο στους μαθητές όσο και στους εκπαιδευτικούς.

Επιπρόσθετα, στηριζόμενοι στις έντονες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι στα κλάσματα, το παρεμβατικό πρόγραμμα μπορεί να εφαρμοστεί και την Τριτοβάθμια εκπαίδευση, στα Παιδαγωγικά Τμήματα, τόσο ως τρόπος διδασκαλίας στο πλαίσιο των Πρακτικών τους Ασκήσεων όσο και ως αντικείμενο γνωστικό. Με τον τρόπο αυτό αναμένεται να ενισχυθεί και το γνωστικό τους υπόβαθρο ως προς τα κλάσματα, αλλά και να εμπλουτιστεί ο τρόπος που μπορεί να διδάξουν οι υποψήφιοι δάσκαλοι, υιοθετώντας ένα διαφορετικό στιλ διδασκαλίας και εμπλουτίζοντάς το.

Μελλοντική Κατεύθυνση της Έρευνας

Σύμφωνα με διεθνή προγράμματα αξιολόγησης (PISA, 2016) και τις εκθέσεις της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στο πλαίσιο της παρακολούθησης της εκπαίδευσης και της κατάρτισης των κρατών μελών, οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στα μαθηματικά είναι κάτω από το μέσο όρο των χωρών που συμμετέχουν σε αυτές τις αξιολογήσεις. Επιπρόσθετα, τα πορίσματα διεθνών ερευνών υποστηρίζουν ότι για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές σημαντικό ρόλο παίζει μεταξύ άλλων ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω σε συνδυασμό με τα πορίσματα της παρούσας έρευνας που φάνηκε ότι η βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών πάνω στους ρητούς ενίσχυσε την αυτοπεποίθηση των μαθητών για τα Μαθηματικά έδωσε μια μελλοντική κατεύθυνση στην έρευνά μας. Ο δυναμικός συνδυασμός, δηλαδή, των αναπαραστάσεων και των δέκα δομικών στοιχείων μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες έννοιες των Μαθηματικών.

Ήδη η ερευνητική μας ομάδα έχει ξεκινήσει να σχεδιάζει και να εφαρμόζει παρεμβατικά προγράμματα που στηρίζονται στη φιλοσοφία αυτού του συνδυασμού και σε άλλες μαθηματικές έννοιες με μεγάλη απήχηση στην εκπαιδευτική κοινότητα. Πιο συγκεκριμένα σχεδιάστηκε παρεμβατικό πρόγραμμα με την παραπάνω φιλοσοφία, διαχύθηκαν στους πέντε θεματικούς άξονες (αριθμοί και πράξεις, μέτρηση, γεωμετρία, άλγεβρα, στατιστική-πιθανότητες), όπως αυτοί αναφέρονται στις αρχές και τα πρότυπα που έχουν καθοριστεί από το NCTM και μετουσιώθηκαν σε σημεία ενός διδακτικού πλαισίου το οποίο εφαρμόστηκε πιλοτικά στην Α΄ τάξη του δημοτικού, στην Ελλάδα, για μια σχολική χρονιά από την ερευνήτρια με ενθαρρυντικά αποτελέσματα (Avgerinos, Vlachou & Remoundou, 2017).

Επιπλέον, έχουν ξεκινήσει από το 2016 προγράμματα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Δωδεκανήσου σε συνεργασία με τους Σχολικούς Συμβούλους της Περιφέρειας και το Εργαστήριο Μαθηματικών Διδακτικής και Πολυμέσων του Πανεπιστημίου Αιγαίου που αφορούν στην εφαρμογή του Παρεμβατικού Προγράμματος και σε άλλες έννοιες στις Α΄ και Β΄ τάξεις του δημοτικού με σκοπό να επεκταθεί και στις υπόλοιπες τάξεις του δημοτικού.

Εν κατακλείδι, θα ήθελα να καταθέσω ότι στα δεκαέξι χρόνια εκπαιδευτικής εμπειρίας ποτέ δε συνάντησα παιδί που δεν ήθελα να μάθει, πόσο μάλλον Μαθηματικά. Τα παιδιά έρχονται στο σχολείο γεμάτο απορίες, αγάπη, έτοιμα να ρουφήξουν γνώση, μάθηση. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να παίρνει την αγάπη αυτή για μάθηση και να τη δυναμώνει, να την ενισχύει και να την επιβεβαιώνει με το ίδιο του το είναι.

Κλείνοντας το παρόν πόνημα θα ήθελα με δύο φράσεις να αποδώσω το βαθύτερο νόημα όλης αυτής της προσπάθειας, που στηρίζεται σε δύο εκφραστικούς πυλώνες:

1. Δεν υπάρχει στον κόσμο παιδί που δε θέλει να μάθει, και δη μαθηματικά.
2. Τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος να ερμηνεύεις το ωραίο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αυγερινός, Ε., & Βλάχου, Ρ. (2012). Κλάσματα και αναπαραστάσεις: Μια διδακτική προσέγγιση στις έννοιες της αριθμογραμμής, των ίσων μερών της μονάδας και των καταχρηστικών κλασμάτων. Στα *Πρακτικά για το 29ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Μαθηματικά: Θεωρία – Πράξη – Προεκτάσεις* (σελ.135-147). Καλαμάτα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Αυγερινός, Ε., & Βλάχου, Ρ. (2013). Η συνοχή μεταξύ των εννοιών των ίσων μερών της μονάδας, των καταχρηστικών κλασμάτων και της επίλυσης προβλήματος έργου σε τελειόφοιτους φοιτητές των Παιδαγωγικών Τμημάτων. Στα *Πρακτικά του 30ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση στην Τεχνολογία και στην Κοινωνία* (σελ. 135-147). Καρδίτσα, Ελλάδα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Αυγερινός, Ε., & Βλάχου, Ρ. (2014). Γνωστικές συγκρούσεις στην κατανόηση των ρητών αριθμών κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Στο *31ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Προκλήσεις και Προοπτικές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και Έρευνας στη Διεθνοποιημένη Δικτυακή Εποχή.* Βέροια, Ελλάδα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: Continuum.

Anisimova, T., & Thomson, S.B. (2012). Using multi-method research methodologies for more informed decision making. *JOAAG*, *7*(1), 96-104.

Askew, M. (2000). What does it mean to learn? What is effective teaching? In J. Anghileri (Ed), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp.134-146). Buckingham: Open University Press.

Avgerinos, E., & Skoufi, A. (2007). Didactics of Mathematics via the Realistic Approach. In E. Avgerinos and A. Gagatsis (Eds.), *Proceedings of 5th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, (pp.485-504). Rhodes, Greece: University of the Aegean and Cyprus Mathematical Society.

Avgerinos, E., Vlachou, R., & Kantas, K. (2012). Comparing different age student abilities on the concept and manipulation of fractures. In E. Avgerinos and A. Gagatsis (Eds), *Research on Mathematical Education and Mathematics Application* (pp.159-168). Rhodes, Greece: University of the Aegean.

Avgerinos, E., & Vlachou, R. (2012). Current trend and studies on representation of fractions. In A. Gagatsis (Ed), *Proceedings of MEDCONF2012, 7th Mediterranean Conference* *on Mathematics Education* (pp.135-159).Cyprus: University of Cyprus, Cyprus Math Soc.

Avgerinos, E., & Vlachou, R. (2018). Towards reducing the difficulties of students in fractions: Instructional practices and theoretical context. *International Journal of Latest Research in Humanities and Social Science (IJLRHSS), 1*(12), 9-20.

Avgerinos, E., Vlachou, R., & Remoundou, D. (2017). Development and implementation of a didactical framework of 10+1 elements for the reinforcement of students' mathematical ability and attitude towards mathematics: Part I. In I. M. Katsillis (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Educational Research: Confronting Contemporary Educational Challenges through Research* (pp. 17-29). Patras, Greece: University of Patras.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.-Δ. & Σαΐτης, Α. (2006). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Bromme, R., Kienhues, D., & Stahl, E. (2008). Knowledge and epistemological beliefs: an intimate but complicate relationship. In M. S. Khine (Ed.), *Knowing, knowledge and beliefs: epistemological studies across diverse cultures* (pp. 423-441). New York, NY: Springer.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In Steiner et al. (Eds.), *Theory of mathematics education* (pp. 110-119). Bielefeld: IDM.

Brousseau, G., Brousseau, N.,& Warfield V.(2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26(*4), 281-300. doi:10.1016/j.jmathb.2007.09.001

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20* (4), 19-34.

Boyce, S., & Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 10-25. doi:10.1016/j.jmathb.2015.11.003

Buelens, H., Clement, M., & Clarebout, G. (2002).University assistants' conceptions of knowledge, learning and instruction. *Research in Education,* 67, 44-57.

Burton, F. (2013). The visibility of mathematics to educators in pre-school settings: Case study methodology with mixed methods. *Proceedings of the Contemporary Approaches to Research in Mathematics, Science, Health and Environmental Education*. Melbourne: Deakin University. Retrieved from https://blogs.deakin.edu.au/steme/wp-content/uploads/sites/39/2017/01/The-Visibility-of-Mathematics-to-Educators-in-Pre-school-Settings-Case-study-methodology-with-mixed-methods.pdf

Buxton, L. (1981). *Do you panic about mathematics?* London: Heinemann.

Γαγάτσης, Α., & Μάρκου, Α. (2004). Διδακτικό συμβόλαιο, εικόνες και επίλυση μη ρεαλιστικών προβλημάτων: Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση μη ρεαλιστικών προβλημάτων. Στον Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ.125-138). Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά – Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; Στο *9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου* (σελ. 99-110). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Cai, J., & Wang, T. (2006). U.S. and Chinese teachers’ conceptions and constructions of representations: a case of teaching ratio concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(1), 145-186. doi: 10.1007/s10763-005-9006-7

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421. doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6

Cannell, C.F., & Kahn, R.L. (1968). Interviewing. In G. Lindzey, & E. Aronson (Eds.), *The Handbook of Social Psychology, Research Methods.* New York: Addison-Welsey.

Card, S., MacKinlay, J., & Shneiderman, B. (1999). *Readings in Information Visualization: Using Vision to Think.* San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., & Gómez, P. (2016). Prospective teachers ’ understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 129-146. doi: 10.1007/s10649-015-9673-4

Chan, K. W., & Elliot, R. G. (2004). Relational analysis of personal epistemology and conception about teaching and learning. *Teaching and Teacher Education, 20,* 817 – 831.

Chen, X., & Li, Y.(2009). Instructional coherence in Chinese mathematics classroom—a case study of lessons on fraction division. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(4), 711-735.doi: 10.1007/s10763-009-9182-y

Cheng, P. (2002). Electrifying diagrams for learning: Principles for complex representational systems. *Cognitive Science 26*(6), 685–736. doi:10.1016/S0364-0213(02)00086-1

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM, 37*(3), 149-158.

Cohen, L., & Manion, L. (1997). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Έκφραση.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. UK: Routledge.

Cobb, P., Yackel, E. A., & Wood, T. (1989).Constructivist approach to second grade mathematics. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism in mathematics education.* Dordrecht, Holland: Reidel.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 226-257.

Crowe, S., Cresswell, K., Robertson, A., Huby, G., Avery, A, & Sheikh, A. (2011). The case study approach. *BMC Medical Research Methodology*, *11*, 100-109.doi: 10.1186/1471-2288-11-100

Coulombe, W. N, & Berenson, S. B. (2001). Representations of patterns and functions -tools for learning. In NCTM, *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 166-172). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Cuoco, A. A., & F.R., Curcio, (Eds.). (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(2), 397-417. doi: 10.1007/s10763-015-9625-6

De Martino, P., & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. In M. V. D. Heuvel – Panhuizen (Ed.), *Procceeding of the PME 25 vol. III* (pp. 351 – 360). The Netherlands: Freudenthal Institute.

Deneme, S., & Ada, S. (2012). On applying the interdisciplinary approach in primary schools. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46,* 885-889. doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.217

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers ’ professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89-114. doi:10.1007/s10649-014-9577-8

Dubinsky. E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers’ understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,13*(3), 232-258. doi: 10.1080/14926156.2013.816389

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers ’ professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,88*(1), 89-114. doi:10.1007/s10649-014-9577-8

Duval, P. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61(*1-2), 103-131. doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Empson, S. B., Levi, L. & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 409 – 428). Berlin, Germany: Springer.

Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H., & Turner, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children’s thinking. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 1–28.

English, L. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83.

Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*. *7*, 23-45.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, *10*(4), 391-408.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlet, C. L., & Powell, S. R. (2006).The effects of computer-assisted instruction on number combination skill in at-risk first graders. *Journal of Learning Disabilities, 39*, 467-475, (2006).

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645 – 657. doi:10.1080/0144341042000262953

Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number line in conducting arithmetic operations using structural equation modeling: A comparative study between Cyprus, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education, 5*(1), 85-101. doi: org/10.7459/wse/05.1.06

Goldin, A. G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), (137-165). doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Gras, R. (1996). Implicative statistical analysis. In A. Gagatsis (Ed), *Didactics and history of Mathematics* (pp. 119-122).Thessaloniki, Greece: University of Thessaloniki.

Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippe, J. (1997). Implicative statistical analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Guillemot, M. (1992). Les notations et les pratiques operatoires permettent-elles de parler de, fractions egyptiennes? In P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Hgg.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp.53-69). Basel u.a.

Hackenberg, A., J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 27-47.doi:org/10.1016/j.jmathb.2013.06.007

Hackenberg, J. A. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 538-563. doi:org/10.1016/j.jmathb.2013.06.007

Hackenberg, A., J., & Tillema, .E., S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28(*1), 1-18.

Hansen, A., Mavrikis, M., & Geraniou, E. (2016). Supporting teachers' technological pedagogical content knowledge of fractions through co-designing a virtual manipulative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), 205-226.doi: 10.1007/s10857-016-9344-0.

Hart, I. E., & Walker, J. (1993). The role of affect in teaching and learning Mathematics. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 22-40). New York: McMillan – NCTM.

Heirdsfield, A. (2002). Mental methods moving along. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *7*(1), 4.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2010). Lower secondary school students' knowledge of fractions. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 75-76.doi:10.1080/14794800903569980

Hofer, B., & Pintrich, P. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowing and their relation to learning. *Review of educational research,* 67, 88-140.

Howe, C., Luthman, S., Ruthven, K., Mercer, N., Hofmann, R., Ilie, S., & Guardia, P. (2015). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research in Mathematics Education,17*(1), 38-56. doi:10.1080/14794802.2015.1019914

Izsák, A. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching Fraction Multiplicatio. *Cognition and Instruction*, *26*(1), 95-143.

Jacobson, E., & Izsa΄k, A. (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: the case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(5), 467-488. doi: 10.1007/s10857-015-9320-0

Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(1), 67-101.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jiang, C., & Chua, B. L. (2010). Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: a Comparative study between Chinese and Singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(1), 73-96.doi: 10.1007/s10763-009-9163-1

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(1), 45 – 58. doi:10.1016/j.jecp.2013.02.001

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου, Γ. (2006). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος,* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Καλάργυρος, Π. (2018). *Στάσεις και πεποιθήσεις υποψήφιων δασκάλων για τα Μαθηματικά*. Μεταπτυχιακή εργασία, Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Kaput, J., Thompson, P. (1994). Technology in Mathematics Education Research: The First 25 Years in the JRME. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 676-684.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Β. (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού,* α΄ και β΄ τεύχος *και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου, Θ. (2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος,* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In R. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323 – 371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kleve, B. (2010). Contingent moments in a lesson on fractions. *Research in Mathematics Education*, *12*(2), 157-158.

Klymchuk, S. (2001). Counter examples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes. A case study. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology in Mathematics Education* (pp. 326). The Netherlands: Utrecht.

Klymchuk, S. (2012). Using counter-examples in teaching & learning of calculus: Students' attitudes and performance. *Mathematics Teaching-Research Journal Online, 5*(4). 1-99. Retrieved from http://www.hostos.cuny.edu/MTRJ/archives/volume5/volume5issue4full.pdf

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στη Τροχιά των ρητών*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ. (2006). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*, α΄και *β΄ τεύχος και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος*, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. &Σπανακά, Α. (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής και Τετράδια Εργασιών α΄, β΄, γ΄ και δ΄ τεύχος,* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Lamon, S. J.(1996). The development of unitizing: Its role in children's portioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 170-193.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research». In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lee, J. S., & Shin, J. (2015). Distributive partitioning operation in mathematical situations involving fractional quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 329-355. doi: 10.1007/s10763-013-9478-9

Lee, H., S. & Sztajn, P. (2008). Focusing on units to support prospective elementary teachers' understanding of division in fractional contexts. *School Science and Mathematics*, *108*(1), 20-27. doi: 10.1111/j.1949-8594.2008.tb17936.x

Lee, M., Y, & Hackenberg, A., J. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(4), 975-1000. doi:10.1007/s10763-013-9442-8

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lin, C., Y. (2010). Web-based instruction on preservice teachers' knowledge of fraction operations. *School Science and Mathematics, 110* (2), 59-70. doi: 10.1111/j.1949-8594.2009.00010.x

Lo, J-J. (1993). Conceptual bases of young children's solution strategies of missing value proportional tasks. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F-L. Lin (Eds.), *Proceedings of Seventeenth PME International Conference on Psychology of Mathematics Education* (pp.162-177). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, Διαθεματικότητα και Ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 7*, 19-36.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(3), 267 – 295. doi:10.2307/749828

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, *24*(2), 145-154. doi:10.1080/0140672010240205

Mandler, G. (1989). Affect and learning: causes and consequences of emotional interactions. In D.B. McLeod, & V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 3-19). New York: Springer – Verlag.

Mayer, R., (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving* (pp. 123-145). Erlbaum: Lawrence.

McLeod, R. & Newmarch, B. (2006). Fractions. London: NRDC.

Moseley, B. J., Okamoto, Y. & Ishida J. (2006). Comparing us and Japanese elementary school teachers' facility for linking rational number representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(1), 165-185. doi: 10.1007/s10763-006-9040-0

Μπαμπινιώτης, Γ. (2002). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*. Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας.

Muzheve, T., M., & Capraro, R., M. (2012). An exploration of the role natural language and idiosyncratic representations in teaching how to convert among fractions, decimals and percents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 1-14.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Norton, A., & Wilkinsb, L.M. J.(2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28* (2-3), 150-161.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational number and the acquisition of number Equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*, 400-417.

Nimier, J. (1988). *Les modes des relations aux mathematiques.* Paris: Klincsieck.

Olive, J., & Vomvoridi, E.(2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior 25*(1), 18–45. doi:10.1016/j.jmathb.2005.11.003

Παπαματθαίου, Μ. (2018, Ιαν. 5). Γιατί οι έλληνες μαθητές «δεν μαθαίνουν γράμματα. *Τα Νέα*. Ανακτήθηκε από http://www.tanea.gr/news/greece/article/5503185/giati-oi-ellhnes-mathhtes-den-mathainoyn-grammata/

Pagni, D. (2004). Fractions and decimals. *Australian Mathematics Teacher, 60*(4), 28–30.

Peck, D.M.,& Jencks, S.M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 339-348.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, *29*(3), 63-67. doi.org/10.1007/s11858-997-0001-z

Petit, M. M., Laird, R. E., Marsde, E. L., & Ebby, C. B. (2010). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom*. New York: Routledge.

PISA (2016). *Problem Solving for tomorrow's World*. Organization for economic cooperation and development.

Powers, R., & Blubaugh, W. (2005). Technology in mathematics education: Preparing teachers for the future. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education 5*(3-4). Retrieved from http://www.citejournal.org/volume-5/issue-3-05/mathematics/technology-in-mathematics-education-preparing-teachers-for-the-future

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R. Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Rønning, F. (2013). Making sense of fractions in different contexts. *Research in Mathematics Education,15*(2), 201-202. doi:10.1080/14794802.2013.797741.

Ross, A. J. & Bruce, D. C. (2011). Student achievement effects of technology-supported remediation of understanding of fractions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(6), 713-727.

Rott, B., & Leuders, T. (2016). Inductive and deductive justification of knowledge: Flexible judgments underneath stable beliefs in teacher education. *Mathematical thinking and learning*, *18* (4), 271-286.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003). Observing subject knowledge in primary mathematics teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23*(1), 37-42.

Ryken, A. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), 205-226. doi:10.1007/s10857-009-9107-2

Şahin, O., Gökkurt, B., &Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 531-551. doi: 10.1080/0020739X.2015.1092178

Satwicz, T., & Stevens, R. (2008). Playing with Representations: How Do Kids Make Use of Quantitative Representations in Video Games?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(3), 179-206.

Schatz, F. (2008). *Ancient Egyptian art--the fun way!* USA: Bloomington.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1982). Sex, grade level and the relationship between mathematics attitude and achievement in children. *Journal of educational Psychology*, *75*, (5), 280 – 284.

Schommer, M. (1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology, 82* (3), 498 – 504.

Schorr, R. Y., & Goldin, G. A. (2008). Students' expression of affect in an inner-city Sim Calc classroom, *Educational Studies in Mathematics, 68,* 131-148.

Schumpeter, J.A. (1934). *The Theory of Economic Development*, *2nd ed.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Schumpeter, J.A. (1942). *Capitalism, socialism and democracy*. New York: Harper & Row.

Sedig, K., & Sumner, M. (2006).Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 1–55.doi:10.1007/s10758-006-0001-z

Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Shahbari, A. J, & Peled, I. (2015). Resolving cognitive conflict in a realistic situation with modeling characteristics: coping with a changing reference in fractions. *International*

Journal of Science and Mathematics Education, *13*(4), 891-907.doi: 10.1007/s10763-014-9509-1

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15,* 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. For the learning of Mathematics, *14*(1), 19-28.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more It changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in Dynamic Geometry Environment. *International Journal of Educational Research*, *51-52*(3), 28–44.

Sinclair, N., Liljedahl P., & Zazkis, A. (2006). Coloured window on pre-service teachers' conceptions of rational numbers. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(1), 177–203.

Squires, D., & McDougall, A. (1994). *Choosing and using educational software: A teacher's guide.* London: The Falmer Press.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children ' s fractional knowledge*. New York: Springer.

Stewart, I. (2009). *Professor Stewart's hoard of mathematical treasures.* UK: Profile Books.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Sweeney, E. S., & Quinn, R. J. (2000). Concentration: Connecting fractions, decimals & percents. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *5*(5), 324–328.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobias, M. J., & Welder, M. R. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 123-148.doi: 10.1007/s10857-015-9334-7

Thompson, A. G. (1999). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis research . In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 127-145). New York: Macmillan.

Tobias, M. J. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 85-103. doi: 10.1007/s10857-012-9212-5

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1-2), 89-108. doi.org/10.1007/978-94-017-3377-9_6

Trujillo, K. M., & Hadfield, O. D. (1999).Tracing the roots of mathematics anxiety through in-depth interviews with pre-service elementary teachers. *College student journal*, *33* (2), 11.

Τσιώλης, Γ. (2014). *Μέθοδοι και τεχνικές ανάλυσης στην ποιοτική κοινωνική έρευνα*. Αθήνα: Κριτική.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M.,... & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. V. Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Dordrecht, Netherlands: Springer. doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

Yaglom, I. M. (1962). *Geometric Transformations I*. USA: The Mathematical Association of America.

Yaglom, I. M. (2009). *Geometric Transformations IV*. USA: The Mathematical Association of America.

Yoshida, H. & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, *44*, 183-195.

Vamvakoussi, X., &Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the “Rubber Line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14* (4), 265-284.

Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2012). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. UK: Pearson.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, B. Greer, (Eds), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 221-238). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Vlachou, R., & Avgerinos, E. (2016). Visualization and understanding in mathematics education: the case of fractions. *The Journal of the ISIS-The Logics of Image,* (accepted).

Vlachou, R., & Avgerinos, E. (2018). Multıple representatıons and development of students' self-confidence on rational number. *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology, 4,* 567-586.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Whitacre, I., & Nickerson, D. S. (2016). Investigating the improvement of prospective elementary teachers' number sense in reasoning about fraction magnitude. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(1), 57-77.doi: 10.1007/s10857-014-9295-2

Widjaja, W., Stacey, K. & Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of pre-service primary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 30* (1), 80–91.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών. Στο Μ. Καΐλα, G. Bergrer & Ε. Θεοδωροπούλου (Επ.), *Κείμενα παιδείας*, Αθήνα: Ατραπός.

Χασάπης, Δ. (2015). *Λογικο-μαθηματικές σχέσεις και αριθμητικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση*. Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. *Proceedings of PME 38 and PME-N, 36*(1), 21-34.

Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195-208. doi:10.1007/s10649-007-9110-4

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

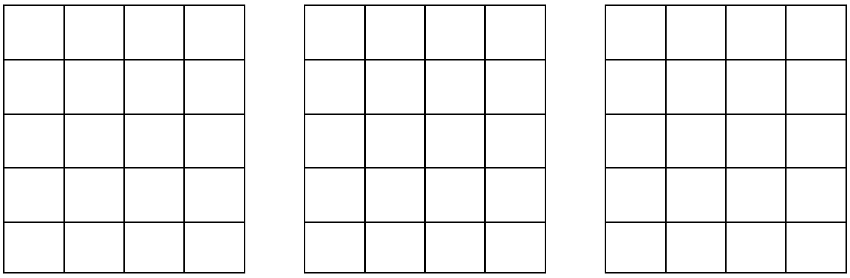
1.ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΕ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Α΄ΜΕΡΟΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στα παρακάτω τρία ίσα ορθογώνια Α, Β, Γ, να χρωματίσετε:

τα $\frac{8}{20}$ του Α, τα $\frac{2}{5}$ του Β και τα $\frac{4}{10}$ του Γ.

Α **Β** **Γ**

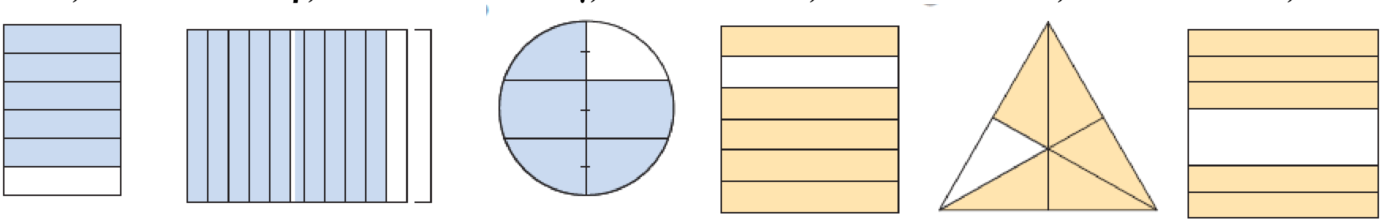


2. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν ώστε οι παρακάτω ισότητες να είναι σωστές:

α) $\frac{1}{4}=\frac{\_}{8}=\frac{\_}{12}$ **β)** $\frac{2}{5}=\frac{4}{\_}=\frac{\_}{20}$ **γ)** $\frac{6}{24}=\frac{1}{\_}=\frac{\_}{6}=\frac{\_}{48}$ **δ)** $\frac{1}{4}=\frac{\_}{100}$ **=___%**

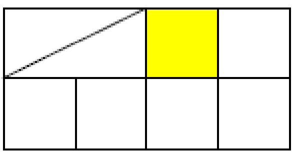
3. Κύκλωσε όσα από τα πιο κάτω δείχνουν το κλάσμα $\frac{5}{6}$.

α) **β)** **γ)** **δ)** **ε)** **στ)**

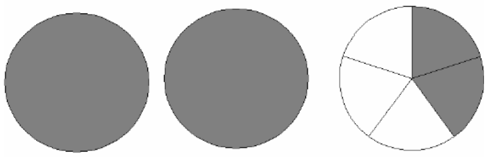


4. Τι μέρος του λόγου αντιπροσωπεύουν τα παρακάτω σκιασμένα μέρη;

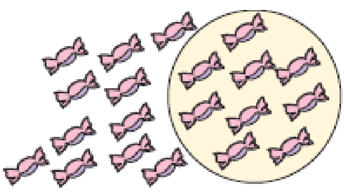
α)___



β) ___



γ) ___



5. Βάλε το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{1}{8}\ \frac{4}{7}$ **δ)** $\frac{29}{30}\ \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

---

6. Να λύσεις τις πιο κάτω ασκήσεις:

α) $\frac{5}{6} + \frac{25}{6} =$ **β)** $\frac{6}{12} + \frac{6}{4} =$ **γ)** $\frac{5}{8} + \frac{21}{40} =$

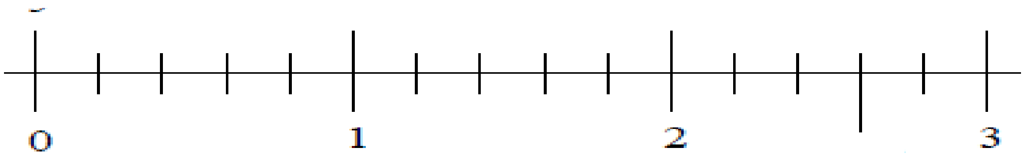
δ) $\frac{20}{7} - \frac{1}{3} =$ **ε)** $6 - 2\frac{4}{7} =$ **στ)** $\frac{9}{4} \text{x} \frac{11}{4} =$

ζ) $\frac{3}{4} \text{x} \frac{1}{2} =$ **η)** $\frac{125}{23} : \frac{25}{23} =$ **θ)** $\frac{36}{4} : \frac{25}{9} =$

---

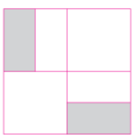
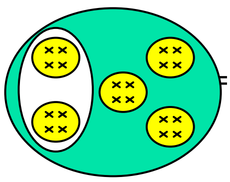
7. Τοποθέτησε τα παρακάτω κλάσματα στην αριθμογραμμή:

α) $\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{21}{15}$ **γ)** $\frac{2}{5}$ **δ)** $\frac{8}{20}$



8. Κύκλωσε μόνο όσα από τα παρακάτω είναι σωστά:

α) $3\frac{4}{7} = \frac{24}{7}$ **β)** $\frac{76}{8} = 9\frac{1}{2}$ **γ)** $0{,}375 = \frac{375}{1000}$ **δ)** $70\% = \frac{7}{10}$

ε) $3{:}45 = \frac{3}{45}$ **στ)**  $\frac{1}{4} =\ 0{,}25 = 25\%$ **ζ)**  $= \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

η) $2\frac{7}{8} + 3\frac{7}{8} + 4\frac{7}{8} =$ i) λιγότερο από 12
ii) περισσότερο από 12

θ) $\frac{7}{8} \text{x} \frac{9}{10} =$ i) λιγότερο από 1
ii) περισσότερο από 1

9. Χρησιμοποίησε το πιο κάτω μοντέλο για να αναπαραστήσεις την πράξη $\frac{1}{4}x\frac{2}{5}$

Β΄ ΜΕΡΟΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένας άνδρας που ζύγιζε 90 κιλά έκανε δίαιτα κι έχασε 10 κιλά. Ποια/Ποιες από τις παρακάτω απαντήσεις είναι σωστές; (Βάλε σε κύκλο τη/τις σωστές απαντήσεις)
Ο άνδρας έχασε:

α) τα $\frac{90}{10}$ του αρχικού του βάρους **β) το 11% του αρχικού του βάρους**

γ) τα $\frac{10}{90}$ του αρχικού του βάρους **δ) το 0,1111… του αρχικού του βάρους**

ε) καμιά απάντηση από τις παραπάνω δεν είναι σωστή

2. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει πως κατανέμονται οι 32 μαθητές της τάξης της Μαρίας. Πόσοι από αυτούς παρακολουθούν Αγγλικά, πόσοι Γερμανικά και πόσοι Γαλλικά;

3. Ένα αυτοκίνητο στα 100 χιλιόμετρα καταναλώνει 12 λίτρα βενζίνη και ένα άλλο αυτοκίνητο καταναλώνει 8 λίτρα βενζίνη. Ποια σχέση έχει η κατανάλωση του δεύτερου αυτοκίνητου με το πρώτο;

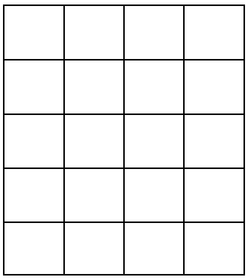
2. ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____ ΤΑΞΗ:________

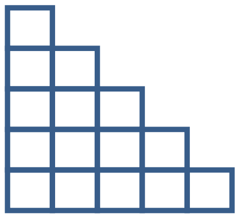
1. Στα παρακάτω τέσσερα σχήματα Α, Β, Γ, Δ να χρωματίσεις:

τα $\frac{4}{10}$ **του Α,** **τα** $\frac{2}{3}$ **του Β,** **το** $\frac{1}{2}$ **του Γ** **τα** $\frac{2}{4}$ **του Δ**

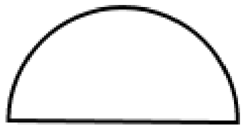
Α



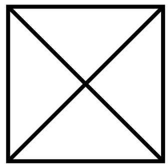
Β



Γ



Δ



2. Να συμπληρώσεις όλους τους αριθμούς που λείπουν στις παρακάτω ισότητες:

α) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\underline{\quad\quad}=\underline{\quad\quad}=\underline{\quad\quad}$

β) $\frac{2}{5}=\frac{4}{\quad}=\frac{\quad}{20}$

γ) $\frac{1}{4}=\frac{\quad}{8}=\frac{\quad}{12}$

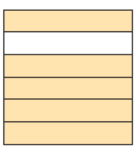
δ) $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\underline{\quad\quad}=\underline{\quad\quad}=\underline{\quad\quad}$

ε) $\frac{1}{13}=\frac{5}{\quad}$

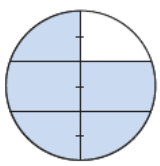
στ) $\frac{\quad}{13}=\frac{4}{52}$

3. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το κάθε σχήμα;

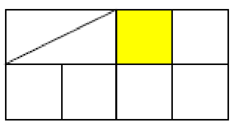
α) ___



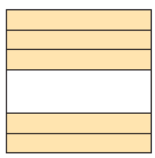
β) ___



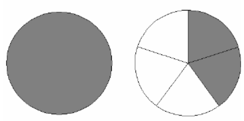
γ) ___



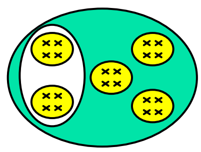
δ) ___



ε) ___



στ) ___



4. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{1}{8}\ \frac{4}{7}$ **δ)** $\frac{29}{30}\ \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

---

5. Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση για την κάθε περίπτωση:

i. $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$ (α) $\frac{3}{8}$ (β) $\frac{2}{15}$ (γ) $\frac{11}{15}$ (δ) $\frac{3}{15}$

ii. $\mathbf{\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=}$ (α) $\frac{4}{8}$ (β) $\frac{7}{24}$ (γ) $\frac{4}{5}$ (δ) $\frac{5}{24}$

iii. $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=$ (α) $\frac{401}{5}$ (β) $\frac{1}{4}$ (γ) $\frac{3}{5}$ (δ) $\frac{15}{4}$

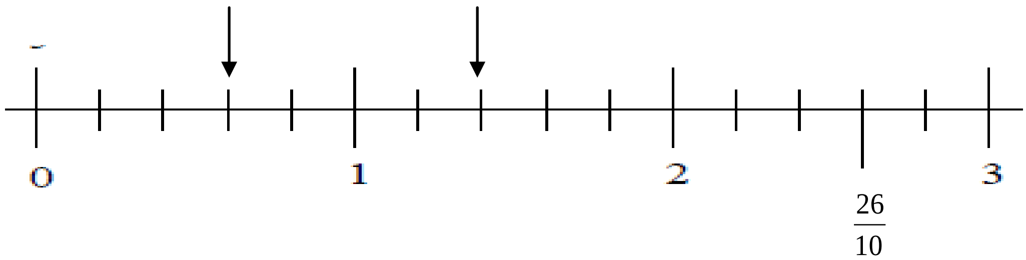
iv. $\frac{5}{2}\text{x}\frac{3}{4}=$ (α) $\frac{15}{8}$ (β) $\frac{30}{4}$ (γ) $\frac{8}{8}$ (δ) $\frac{20}{6}$

v. $\frac{9}{4}\text{x}\frac{11}{4}=$ (α) $\frac{99}{4}$ (β) $\frac{20}{8}$ (γ) $\frac{99}{16}$ (δ) $\frac{36}{44}$

vi. $\frac{36}{4}:\frac{6}{9}=$ (α) $\frac{216}{36}$ (β) $\frac{6}{0,44}$ (γ) $\frac{324}{24}$ (δ) $\frac{6}{36}$

---

6. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;



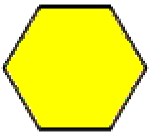
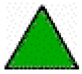
7. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

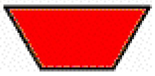
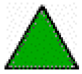
α) Η Μαρία έχει 18 φίλους. 4 από αυτούς πήγαν σινεμά, 9 από αυτούς πήγαν στη βιβλιοθήκη και 5 από αυτούς πήγαν στο πάρκο. Ποιο κλάσμα δείχνει τους φίλους που πήγαν σινεμά;____

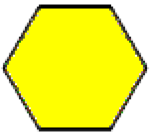
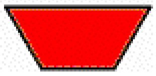
β) Η μέρα έχει 24 ώρες και οι επιστήμονες λένε ότι πρέπει να κοιμόμαστε τα $\frac{3}{8}$ της ημέρας.

Πόσες ώρες θα πρέπει να κοιμόμαστε;___________________

γ) Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα φάνε τέσσερα άτομα αν έχουν αγοράσει μόνο τρεις σοκολάτες;____

δ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ε) Αν  = 1, τότε  = ___ .

στ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ζ) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1: ____________

η) Να βρεις ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{4}$ και στο $\frac{3}{4}$ διαφορετικό από το $\frac{1}{2}$: ________

θ) Να μετατρέψεις το $\frac{3}{5}$ σε δεκαδικό:______________

ι) Να μετατρέψεις το 0,35 σε κλάσμα: ____________

ια) Να γράψεις το $\frac{7}{10}$ ως ποσοστό: _______________

ιβ) Ο αριθμός 2,666666… μπορεί να γραφεί ως κλάσμα; Αν ναι, ποιο είναι αυτό το κλάσμα;_________________

ιγ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: __________________________________

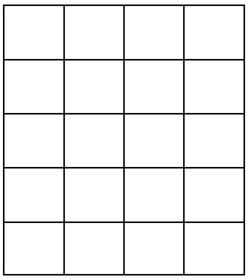
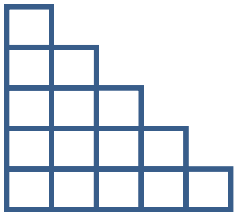
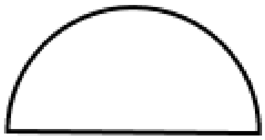
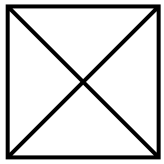
3. ΔΟΚΙΜΙΟ ΜΕΤΑ ΤΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____ ΤΑΞΗ:_________

1. Στα παρακάτω τέσσερα σχήματα Α, Β, Γ, Δ να χρωματίσεις:

τα $\frac{4}{10}$ **του Α,** **τα** $\frac{2}{3}$ **του Β,** **το** $\frac{1}{2}$ **του Γ** **τα** $\frac{2}{4}$ **του Δ**

Α **Β** **Γ** **Δ**

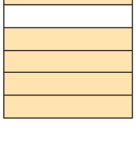
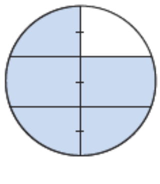
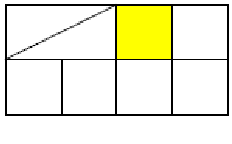
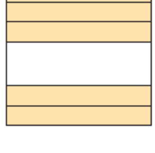
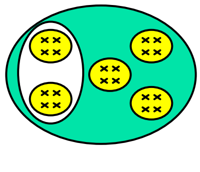
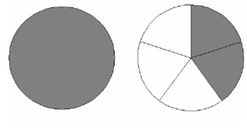





2. Να συμπληρώσεις όλους τους αριθμούς που λείπουν στις παρακάτω ισότητες:

α) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=$ ____ $=$ ____ $=$ ____	**β)** $\frac{2}{5}=\frac{4}{\_}=\frac{\_}{20}$	**γ)** $\frac{1}{13}=\frac{5}{\_}$
δ) $\frac{1}{4}=\frac{\_}{8}=\frac{\_}{12}$	**ε)** $\frac{\_}{13}=\frac{4}{52}$	**στ)** $\frac{1}{4}=\frac{_}{100}=$___**%**

3. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το κάθε σχήμα;

α) ___ **β)** ___ **γ)** ___ **δ)** ___ **ε)** ___ **στ)** ___

4. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{1}{8}\ \frac{4}{7}$ **δ)** $\frac{29}{30}\ \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

5. Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση για την κάθε περίπτωση:

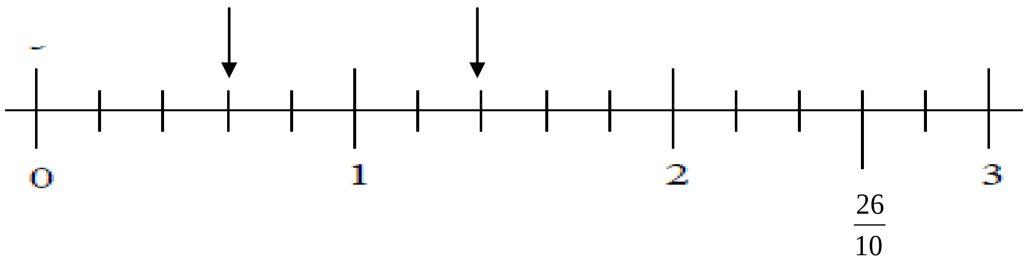
vii. $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$ (α) $\frac{3}{8}$ (β) $\frac{2}{15}$ (γ) $\frac{11}{15}$ (δ) $\frac{3}{15}$

viii. $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=$ (α) $\frac{401}{5}$ (β) $\frac{1}{4}$ (γ) $\frac{3}{5}$ (δ) $\frac{15}{4}$

ix. $\frac{5}{2}\mathrm{x}\frac{3}{4}=$ (α) $\frac{15}{8}$ (β) $\frac{30}{4}$ (γ) $\frac{8}{8}$ (δ) $\frac{20}{6}$

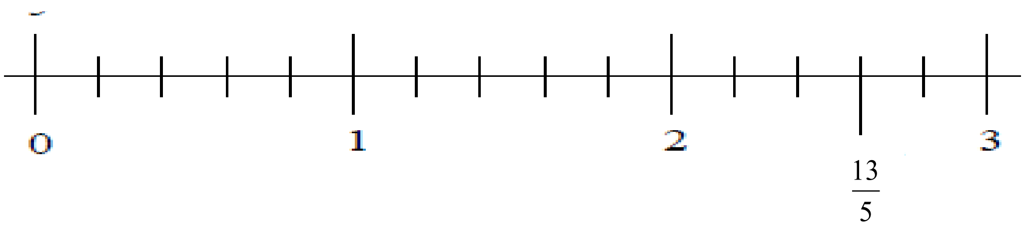
x. $\frac{36}{4}:\frac{6}{9}=$ (α) $\frac{216}{36}$ (β) $\frac{6}{0{,}44}$ (γ) $\frac{324}{24}$ (δ) $\frac{6}{36}$

6. Ποιους αριθμούς δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;



7. Να τοποθετήσεις τα παρακάτω κλάσματα στην αριθμογραμμή:

α) $\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{21}{15}$ **γ)** $\frac{8}{20}$



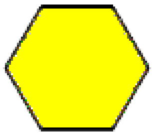
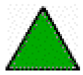
8. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

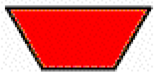
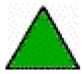
α) Η Μαρία έχει 18 φίλους. 4 από αυτούς πήγαν σινεμά, 9 από αυτούς πήγαν στη βιβλιοθήκη και 5 από αυτούς πήγαν στο πάρκο. Ποιο κλάσμα δείχνει τους φίλους που πήγαν σινεμά;____

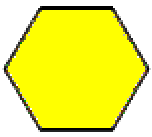
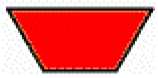
β) Η μέρα έχει 24 ώρες και οι επιστήμονες λένε ότι πρέπει να κοιμόμαστε τα $\frac{3}{8}$ της ημέρας.

Πόσες ώρες θα πρέπει να κοιμόμαστε;___________________

γ) Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα φάνε τέσσερα άτομα αν έχουν αγοράσει μόνο τρεις σοκολάτες;____

δ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ε) Αν  = 1, τότε  = ___ .

στ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ζ) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1: ____________

η) Να βρεις ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{4}$ και στο $\frac{3}{4}$ διαφορετικό από το $\frac{1}{2}$: ________

θ) Να μετατρέψεις το $\frac{3}{5}$ σε δεκαδικό:______________

ι) Να μετατρέψεις το 0,35 σε κλάσμα: ____________

ια) Να γράψεις το $\frac{7}{10}$ ως ποσοστό: _______________

ιβ) Ο αριθμός 2,666666… μπορεί να γραφεί ως κλάσμα; Αν ναι, ποιο είναι αυτό το κλάσμα;_________________

ιγ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: ___________________________________

ιδ) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στα $\frac{7}{8}$ και το 1. Πόσα κλάσματα μπορείς να βρεις;__________________________________

ιε) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο 0 και $\frac{1}{10}$ αλλά ο αριθμητής να μην είναι το 1:__

ιστ) Να γράψεις το κλάσμα $\frac{1}{4}$ ως άθροισμα δύο κλασμάτων:________________

---

9. Να χωρίσεις τα παρακάτω κλάσματα σε τρεις ομάδες:

$$\frac{8}{9} \quad \frac{20}{20} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{41}{5} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{50}{49} \quad \frac{916}{1000}$$

α) Κλάσματα μικρότερα από τη μονάδα:

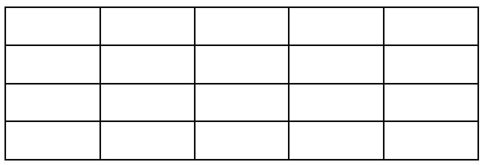
β) Κλάσματα ισοδύναμα με τη μονάδα:

γ) Κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας:

---

10. Αν σκιάσουμε τα $\frac{4}{5}$ των $\frac{3}{4}$ του πιο κάτω σχήματος, θα σκιάσουμε:

α. 4 κουτάκια
β. 20 κουτάκια
γ. 15 κουτάκια
δ.12κουτάκια
ε. 6 κουτάκια

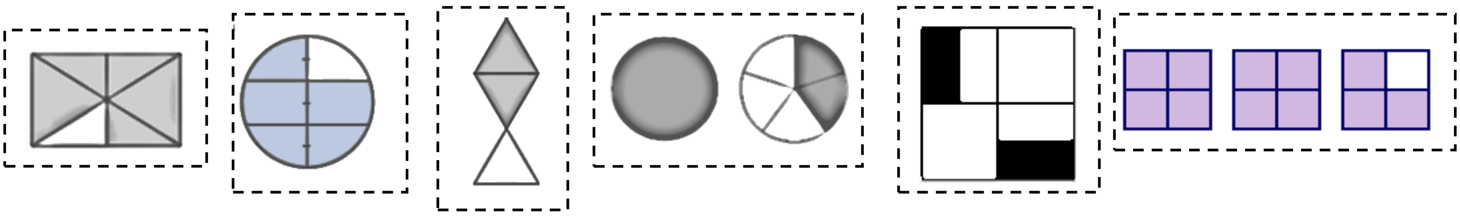


4. ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ, ΣΤΑ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:_________________________________ ΤΑΞΗ:________

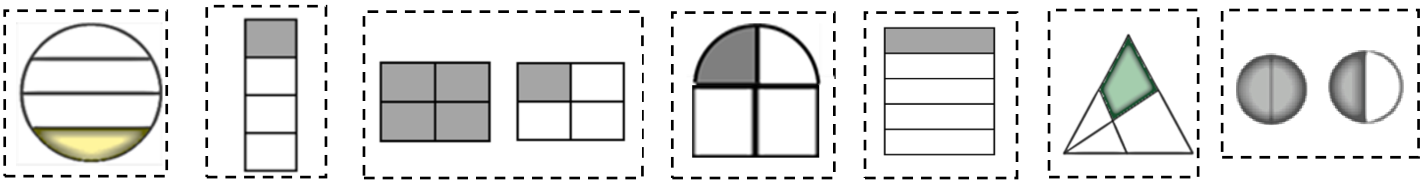
1. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το σκιασμένο μέρος κάθε σχήματος (απλού είτε πολλαπλού) που βρίσκεται μέσα στο διακεκομμένο παραλληλόγραμμο;

α) ___ **β)** ___ **γ)** ___ **δ)** ___ **ε)** ___ **στ)** ___



2. Κύκλωσε τα σχήματα (απλά είτε πολλαπλά) που βρίσκονται μέσα στο διακεκομμένο παραλληλόγραμμο και το σκιασμένο μέρος τους δείχνει το κλάσμα $\frac{1}{4}$:

α) **β)** **γ)** **δ)** **ε)** **στ)** **ζ)**



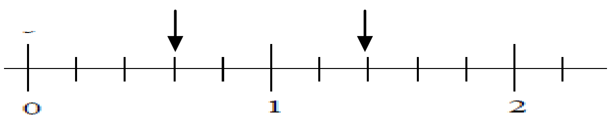
3. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{2}{3}\ \frac{8}{9}$ **δ)** $\frac{29}{30}\ \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

4. Κύκλωσε όσα από τα παρακάτω κλάσματα είναι καταχρηστικά:

α) $\frac{8}{9}$ **β)** $\frac{20}{20}$ **γ)** $\frac{7}{5}$ **δ)** $\frac{15}{10}$ **ε)** $\frac{41}{5}$ **στ)** $\frac{3}{3}$ **ζ)** $\frac{50}{49}$ **η)** $\frac{916}{1000}$

5. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;



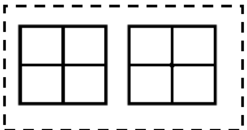
6. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στα $\frac{6}{7}$ και το 1_____. Πόσα κλάσματα μπορείς να βρεις;

________.

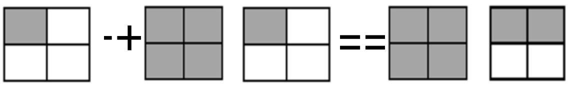
β) Να γράψεις το κλάσμα $\frac{1}{4}$ ως άθροισμα δύο κλασμάτων:_______________

γ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: ___________________________________

δ) Χρωμάτισε τα $\frac{10}{8}$ του σχήματος: 

ε) Τοποθέτησε τα κλάσματα **α)** $\frac{3}{4}$, **β)** $\frac{10}{8}$, **γ)** $\frac{7}{4}$ στην αριθμογραμμ 

7. Στα Μαθηματικά η δασκάλα της Ε΄ τάξης χρησιμοποίησε την παρακάτω αναπαράσταση και ζήτησε από τους μαθητές να τη γράψουν με αριθμητικά σύμβολα:



Ακολούθησε ο πιο κάτω διάλογος:

Αργυρώ: «Η παραπάνω αναπαράσταση δείχνει την πράξη $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$, αφού στο πρώτο σχήμα έχουμε χωρίσει τη μονάδα σε 4 ίσα μέρη και πήραμε το ένα άρα πήραμε το $\frac{1}{4}$, στο δεύτερο σχήμα χωρίσαμε σε 8 ίσα μέρη και πήραμε τα 5 άρα πήραμε τα $\frac{5}{8}$ και για το αποτέλεσμα χωρίσαμε πάλι σε 8 ίσα μέρη και πήραμε τα 6 άρα πήραμε τα $\frac{6}{8}$».

Γιάννης: «Εγώ νομίζω ότι παραπάνω αναπαράσταση δείχνει την πράξη $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$».

Αργυρώ: «Μα πώς γίνεται να χωρίζεις σε 8 ίσα μέρη αλλά στον παρονομαστή να γράφεις 4;»

Η υπόλοιπη τάξη προβληματίστηκε. Άλλοι μαθητές συμφώνησαν με την Αργυρώ και άλλοι με το Γιάννη. Ποιος από τους δύο μαθητές πιστεύεις ότι έχει δίκαιο; Εξήγησε την απάντησή σου.

5. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΗΜΙΔΟΜΗΜΕΝΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:_________________________________ ΤΑΞΗ:________

Α) Στάσεις των μαθητών στα μαθηματικά	**Διαφωνώ απόλυτα**	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
α. Μου αρέσει να μαθαίνω μαθηματικά.				
β. Τα μαθηματικά είναι ανιαρά.				
γ. Τα μαθηματικά είναι σημαντικά στη ζωή των ανθρώπων.				
δ. Μου αρέσουν τα μαθηματικά.				

Β) Πεποιθήσεις των μαθητών στα μαθηματικά	**Διαφωνώ απόλυτα**	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
α. Θα μου άρεσαν τα μαθηματικά περισσότερο αν δεν ήταν τόσο δύσκολα.				
β. Μολονότι βάζω τα δυνατά μου, τα μαθηματικά είναι πολύ δυσκολότερα για μένα από ό,τι για πολλούς από τους συμμαθητές μου.				
γ. Κανένας δεν μπορεί να είναι καλός σε όλα τα μαθήματα κι εγώ δεν έχω κλίση στα μαθηματικά.				
δ. Μερικές φορές, όταν από την αρχή δεν καταλάβω μια νέα θεματική ενότητα στα μαθηματικά, νομίζω ότι ουδέποτε θα την καταλάβω.				
ε. Τα μαθηματικά δεν ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός.				

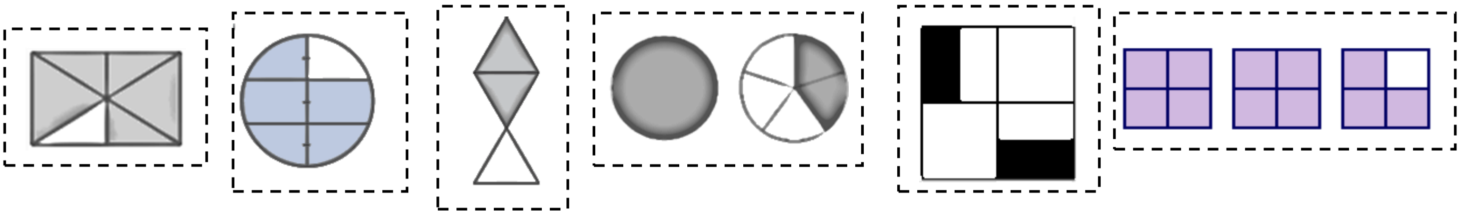
Γ) Επιρροή οικογένειας	**Διαφωνώ απόλυτα**	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
α. Στη μητέρα μου αρέσουν τα μαθηματικά.				
β. Στον πατέρα μου αρέσουν τα μαθηματικά.				
γ. Η μητέρα μου είναι πολύ καλή στα μαθηματικά.				
δ. Ο πατέρας μου είναι πολύ καλός στα μαθηματικά.				

Δ) Τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών	**Διαφωνώ απόλυτα**	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
α. Χρησιμοποιούμε πράγματα από την καθημερινή ζωή για να λύσουμε προβλήματα στα μαθηματικά.				
β. Ο δάσκαλος ελέγχει την κατ' οίκον εργασία.				
γ. Συζητούμε την κατ' οίκον εργασία που κάναμε.				
δ. Όταν ξεκινούμε ένα νέο θέμα στα μαθηματικά, αρχίζουμε με συζήτηση πάνω σε πρακτικά προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή.				
ε. Όταν ξεκινούμε ένα νέο θέμα στα μαθηματικά, ο δάσκαλος αρχίζει να μας ρωτά τι γνωρίζουμε σχετικά με το νέο θέμα.				

Ε) Ενθάρρυνση	**Διαφωνώ απόλυτα**	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
α. Η μητέρα μου πιστεύει ότι είναι σημαντικό για μένα να είμαι καλός στα μαθηματικά.				
β. Οι πιο πολλοί φίλοι μου πιστεύουν ότι είναι σημαντικό να είμαι καλός στα μαθηματικά.				
γ. Νομίζω ότι είναι σημαντικό να είμαι καλός στα μαθηματικά.				
δ. Είμαι ικανοποιημένος από την επίδοσή μου στα Μαθηματικά.				

1. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το σκιασμένο μέρος κάθε σχήματος που βρίσκεται μέσα στο διακεκομμένο παραλληλόγραμμο;

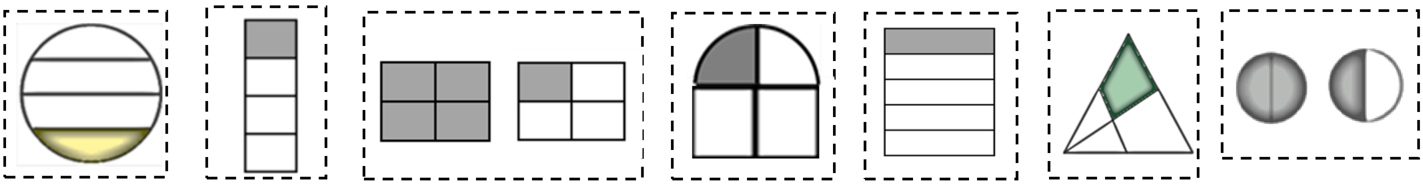
α) ___ **β)** ___ **γ)** ___ **δ)** ___ **ε)**___ **στ)**___



---

2. Κύκλωσε τα σχήματα που βρίσκονται μέσα στο διακεκομμένο παραλληλόγραμμο και το σκιασμένο μέρος τους δείχνει το κλάσμα $\frac{1}{4}$:

α) **β)** **γ)** **δ)** **ε)** **στ)** **ζ)**



---

3. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5} \quad \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3} \quad \frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{2}{3} \quad \frac{8}{9}$ **δ)** $\frac{29}{30} \quad \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5} \quad \frac{8}{20}$

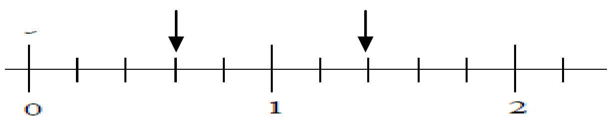
---

4. Κύκλωσε όσα από τα παρακάτω κλάσματα είναι καταχρηστικά:

α) $\frac{8}{9}$ **β)** $\frac{20}{20}$ **γ)** $\frac{7}{5}$ **δ)** $\frac{15}{10}$ **ε)** $\frac{41}{5}$ **στ)** $\frac{3}{3}$ **ζ)** $\frac{50}{49}$ **η)** $\frac{916}{1000}$

---

5. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;

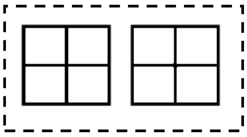


6. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Βρες ένα κλάσμα ανάμεσα στα $\frac{6}{7}$ και το 1_____. Πόσα κλάσματα μπορείς να βρεις; ________.

β) Να γράψεις το κλάσμα $\frac{1}{4}$ ως άθροισμα δύο κλασμάτων:_______________

γ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: __________________________________

δ) Χρωμάτισε τα $\frac{10}{8}$ του σχήματος: 

ε) Τοποθέτησε τα κλάσματα **α)** $\frac{3}{4}$, **β)** $\frac{10}{8}$, **γ)** $\frac{7}{4}$ στην αριθμογραμμή: 

6. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ 3ΗΣ ΦΑΣΗΣ

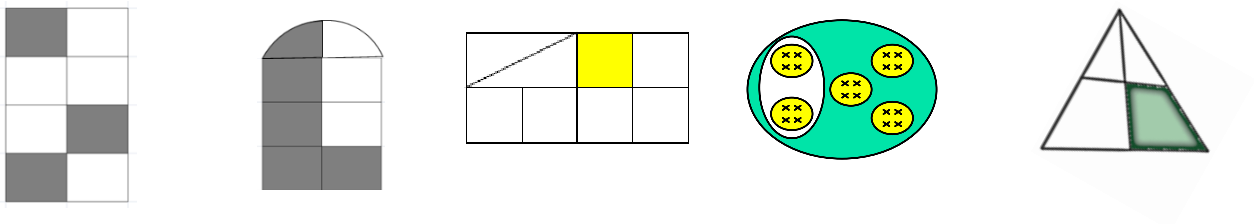
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:______________________________________ ΤΑΞΗ:________

1. Κύκλωσε όσα από τα πιο κάτω σχήματα δείχνουν το κλάσμα $\frac{5}{6}$.

α) **β)** **γ)** **δ)** **ε)**

2. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το κάθε σχήμα;

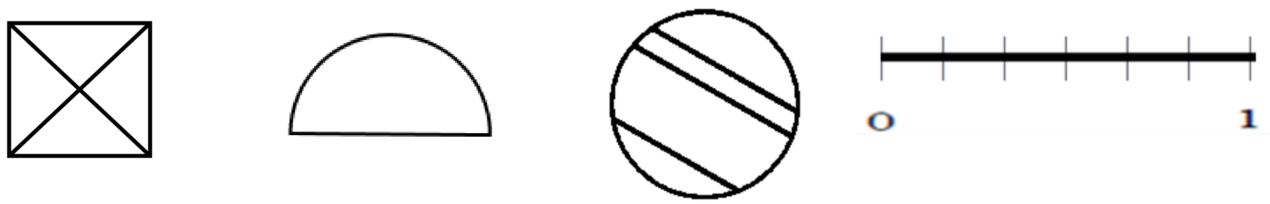
α) ___ **β)** ___ **γ)** ___ **δ)** ___ **ε)** ___



3. Στα παρακάτω σχήματα να χρωματίσεις:

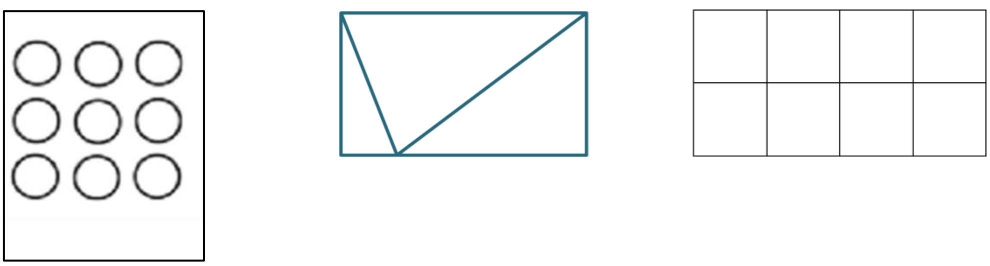
τα $\frac{1}{4}$ του Α, **το $\frac{1}{2}$ του Β** **τα $\frac{3}{4}$ του Γ** **τα $\frac{4}{6}$ του**

Α **Β** **Γ** **Δ**

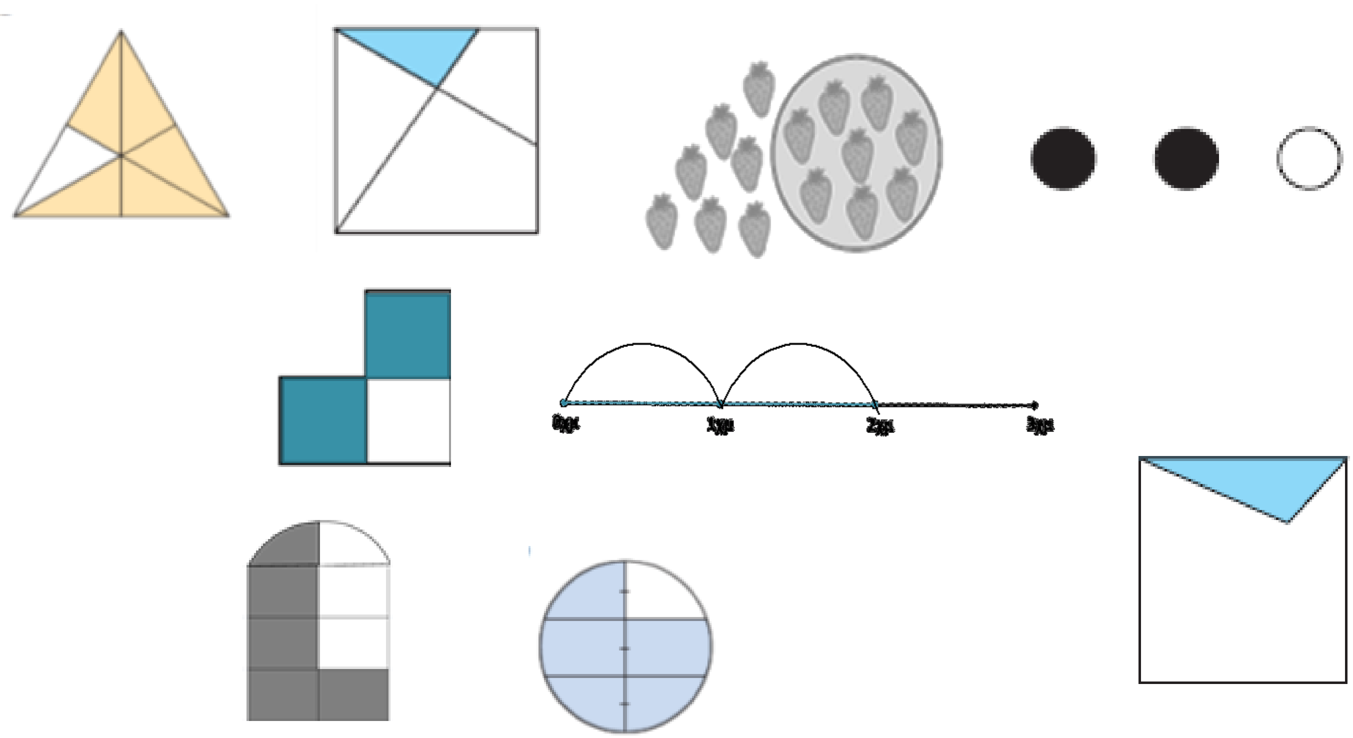


τα $\frac{5}{9}$ του Ε **τα $\frac{2}{3}$ του Στ** **τα $\frac{2}{8}$ του Ζ**

Ε **Στ** **Ζ**



7. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ 3ΗΣ ΦΑΣΗΣ



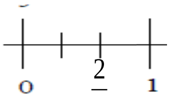
ΕΚΦΡΑΖΟΥΝ ΚΛΑΣΜΑ

8. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 7ΗΣ ΦΑΣΗΣ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

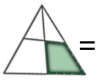
1. Κύκλωσε όσα από τα πιο κάτω είναι σωστά:

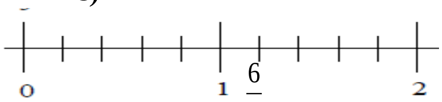
α)  $= \frac{1}{3}$

β)  $= \frac{1}{4}$

γ) 

$\frac{2}{3}$

δ)  $= \frac{1}{4}$

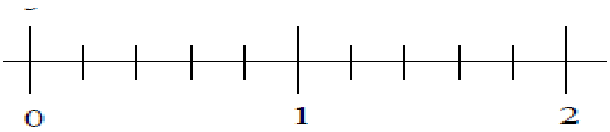
ε) 

$\frac{6}{5}$

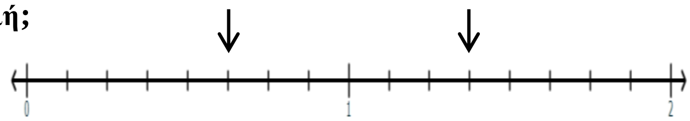
2. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{7}\ \frac{6}{7}$ **β)** $\frac{1}{3}\ \frac{1}{5}$ γ) $\frac{7}{8}\ \frac{4}{5}$ **δ)** $\frac{19}{32}\ \frac{12}{4}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

3. Τοποθέτησε τα διπλανά κλάσματα στην αριθμογραμμή: **α)** $\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{6}{10}$ γ) $\frac{7}{5}$ **δ)** $\frac{6}{5}$



4. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;

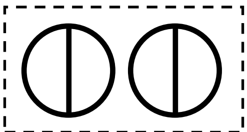


5. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1**:** ____________

β) Να βρεις ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{4}$ και στο $\frac{3}{4}$ διαφορετικό από το $\frac{1}{2}$: ________

γ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{3}{2}$: ________________________________

δ) Χρωμάτισε τα $\frac{6}{4}$ του σχήματος: 

ε) Τοποθέτησε τα κλάσματα **α)** $\frac{3}{4}$, **β)** $\frac{10}{8}$, **γ)** $\frac{7}{4}$ στην αριθμογραμμή: 

6. Να χωρίσεις τα διπλανά κλάσματα σε τρεις ομάδες: $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{41}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{50}{49}$, $\frac{916}{1000}$

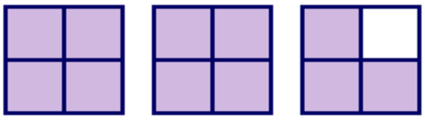
α) Κλάσματα μικρότερα από τη μονάδα:

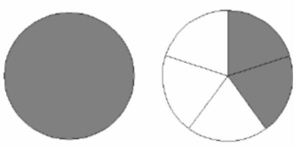
β) Κλάσματα ισοδύναμα με τη μονάδα:

γ) Κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας (καταχρηστικά):

---

7. Γράψε ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το κάθε σχήμα.





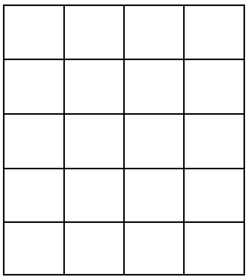
9. ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΣΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ, ΣΤΑ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____ ΕΤΟΣ:________

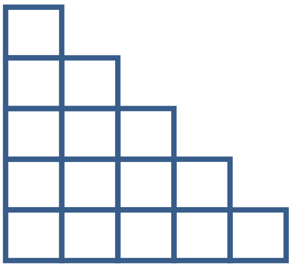
1. Στα παρακάτω τέσσερα σχήματα Α, Β, Γ, Δ να χρωματίσεις:

τα $\frac{4}{10}$ **του Α,** **τα** $\frac{2}{3}$ **του Β,** **το** $\frac{1}{2}$ **του Γ** **τα** $\frac{2}{4}$ **του Δ**

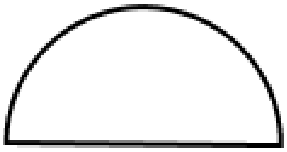
Α



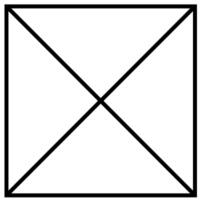
Β



Γ



Δ



2. Να συμπληρώσεις όλους τους αριθμούς που λείπουν στις παρακάτω ισότητες:

α) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

β) $\frac{2}{5} = \frac{4}{\_} = \frac{\_}{20}$

γ) $\frac{1}{4} = \frac{\_}{8} = \frac{\_}{12}$

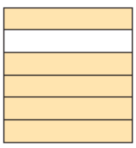
δ) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

ε) $\frac{1}{13} = \frac{5}{\_}$

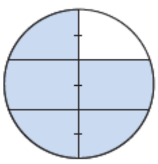
στ) $\frac{\_}{13} = \frac{4}{52}$

3. Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το κάθε σχήμα;

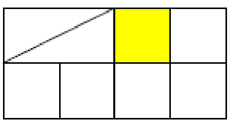
α) ___



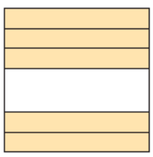
β) ___



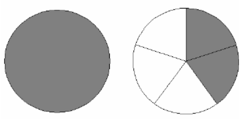
γ) ___



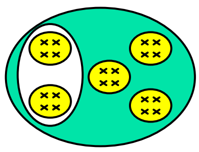
δ) ___



ε) ___



στ) ___



4. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}$ γ) $\frac{1}{8}\ \frac{4}{7}$ **δ)** $\frac{29}{30}\ \frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$

---

5. Να βάλεις σε κύκλο τη σωστή απάντηση για την κάθε περίπτωση:

xi. $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$ (α) $\frac{3}{8}$ (β) $\frac{2}{15}$ (γ) $\frac{11}{15}$ (δ) $\frac{3}{15}$

xii. $\mathbf{\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=}$ (α) $\frac{4}{8}$ (β) $\frac{7}{24}$ (γ) $\frac{4}{5}$ (δ) $\frac{5}{24}$

xiii. $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=$ (α) $\frac{401}{5}$ (β) $\frac{1}{4}$ (γ) $\frac{3}{5}$ (δ) $\frac{15}{4}$

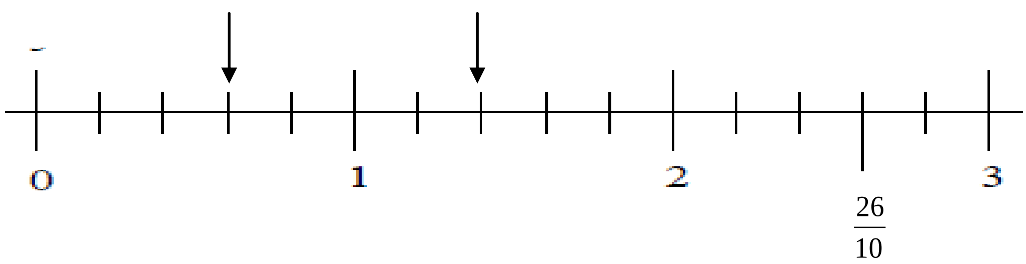
xiv. $\frac{5}{2}\text{x}\frac{3}{4}=$ (α) $\frac{15}{8}$ (β) $\frac{30}{4}$ (γ) $\frac{8}{8}$ (δ) $\frac{20}{6}$

xv. $\frac{9}{4}\text{x}\frac{11}{4}=$ (α) $\frac{99}{4}$ (β) $\frac{20}{8}$ (γ) $\frac{99}{16}$ (δ) $\frac{36}{44}$

xvi. $\frac{36}{4}:\frac{6}{9}=$ (α) $\frac{216}{36}$ (β) $\frac{6}{0{,}44}$ (γ) $\frac{324}{24}$ (δ) $\frac{6}{36}$

---

6. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;



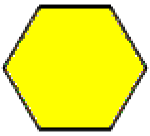
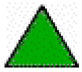
7. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

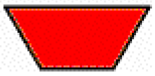
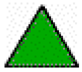
α) Η Μαρία έχει 18 φίλους. 4 από αυτούς πήγαν σινεμά, 9 από αυτούς πήγαν στη βιβλιοθήκη και 5 από αυτούς πήγαν στο πάρκο. Ποιο κλάσμα δείχνει τους φίλους που πήγαν σινεμά;____

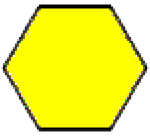
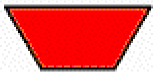
β) Η μέρα έχει 24 ώρες και οι επιστήμονες λένε ότι πρέπει να κοιμόμαστε τα $\frac{3}{8}$ της ημέρας.

Πόσες ώρες θα πρέπει να κοιμόμαστε;___________________

γ) Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα φάνε τέσσερα άτομα αν έχουν αγοράσει μόνο τρεις σοκολάτες;____

δ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ε) Αν  = 1, τότε  = ___ .

στ) Αν  = 1, τότε  = ___ .

ζ) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1: ____________

η) Να βρεις ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{4}$ και στο $\frac{3}{4}$ διαφορετικό από το $\frac{1}{2}$: ________

θ) Να μετατρέψεις το $\frac{3}{5}$ σε δεκαδικό:______________

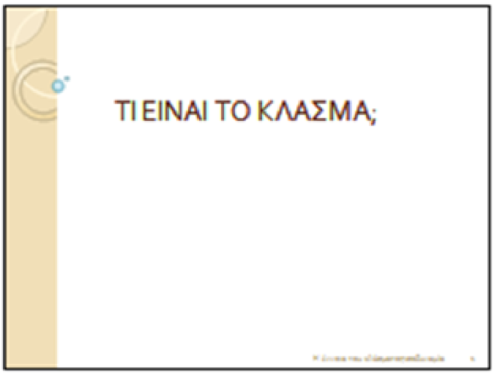
ι) Να μετατρέψεις το 0,35 σε κλάσμα: ____________

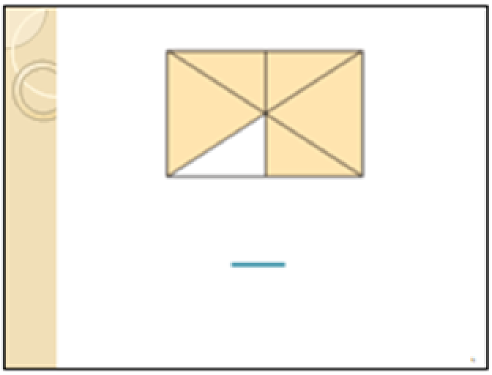
ια) Να γράψεις το $\frac{7}{10}$ ως ποσοστό: _______________

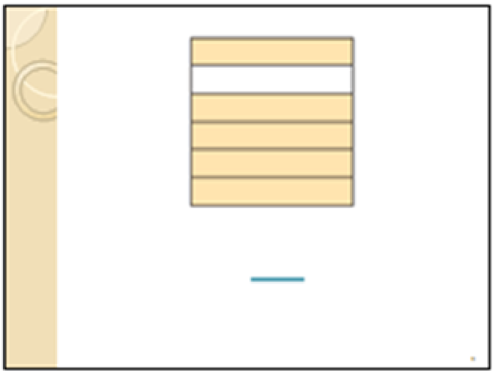
ιβ) Ο αριθμός 2,666666… μπορεί να γραφεί ως κλάσμα; Αν ναι, ποιο είναι αυτό το κλάσμα;_________________

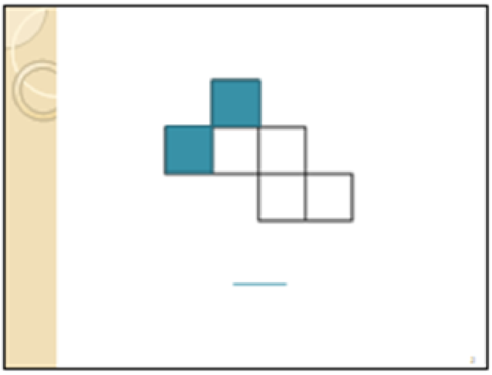
ιγ) Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: __________________________________

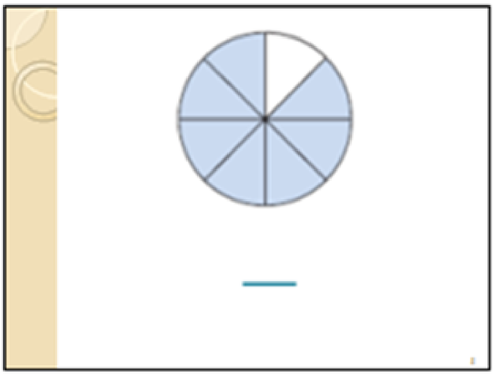
10. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ POWER POINT ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ 3Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

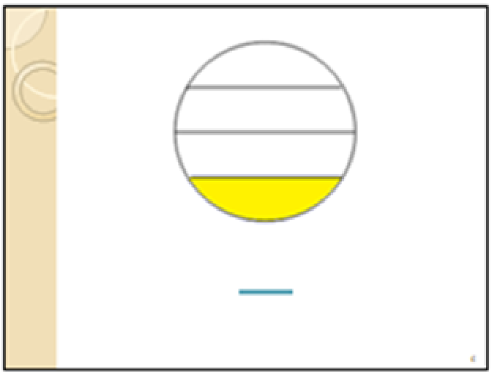




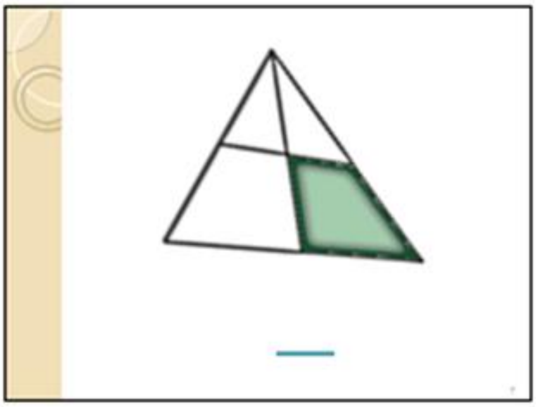


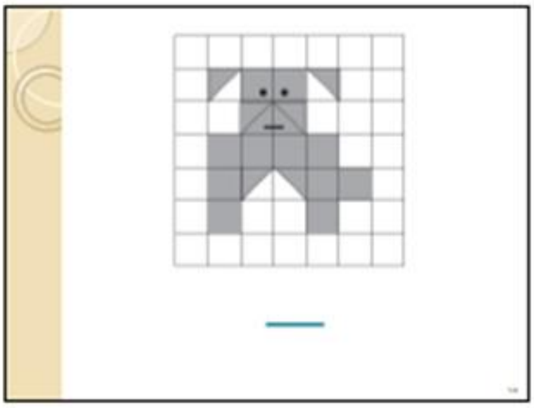


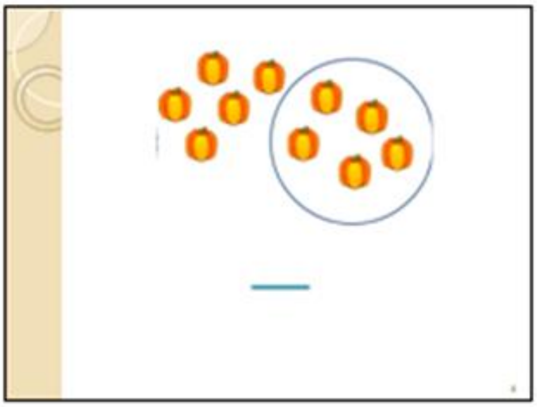


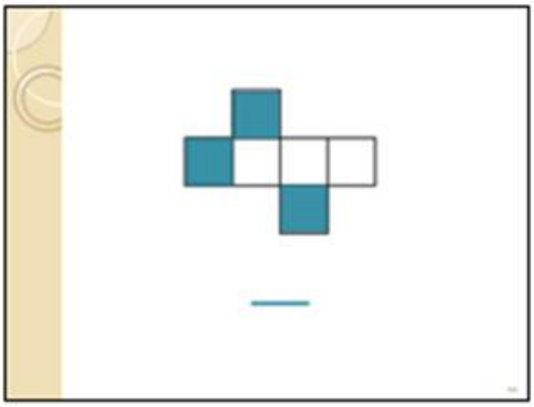


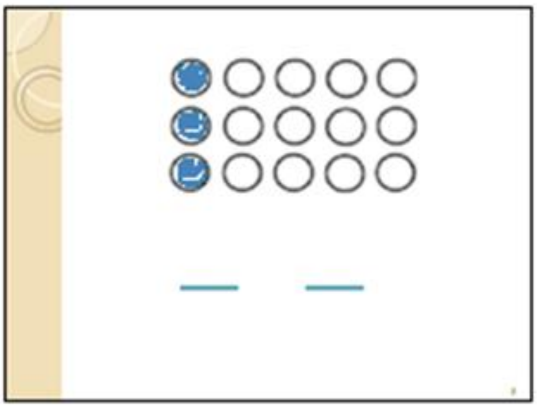
1

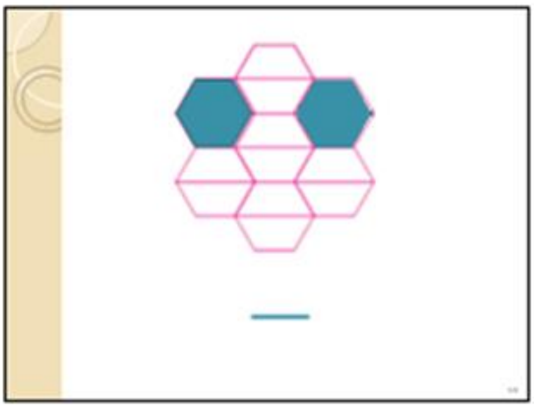




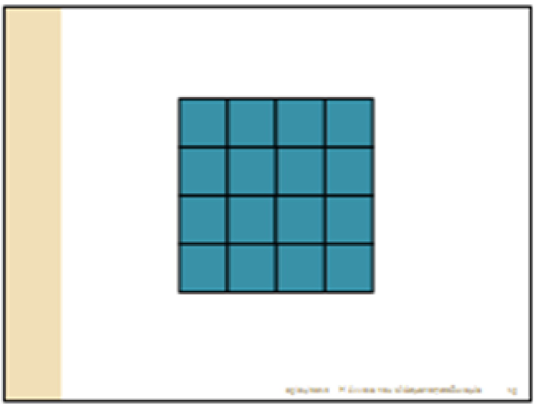


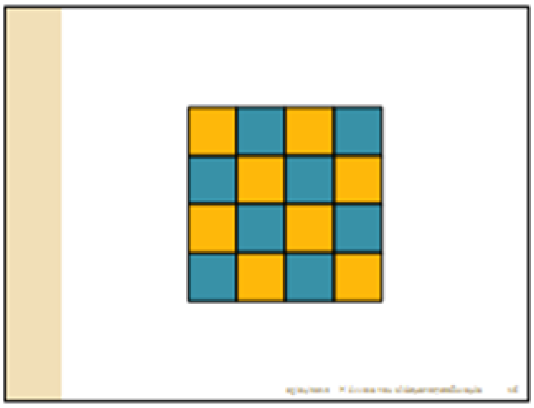


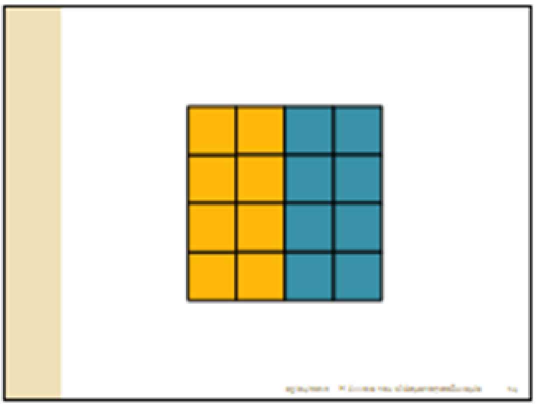


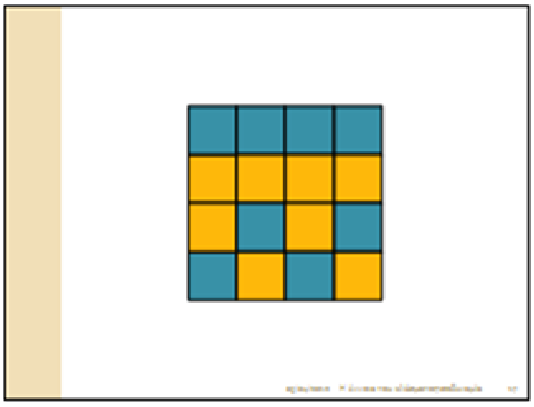


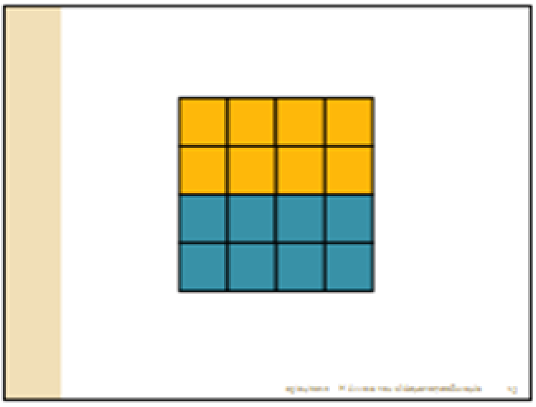
2

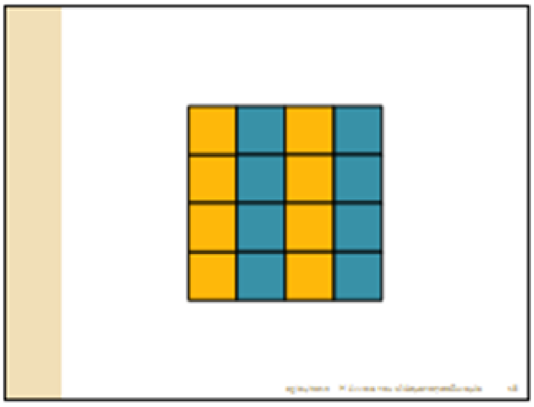


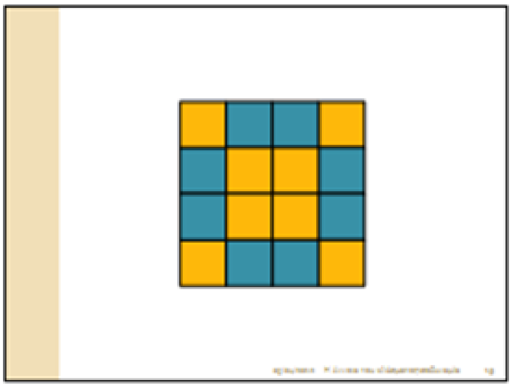


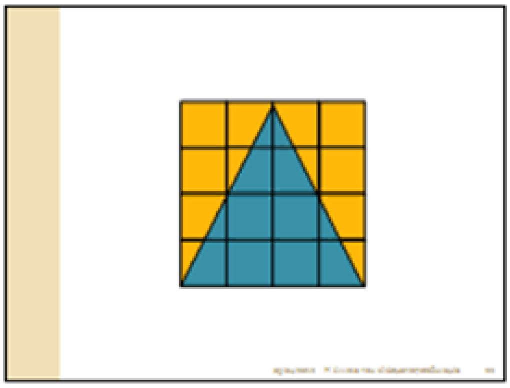


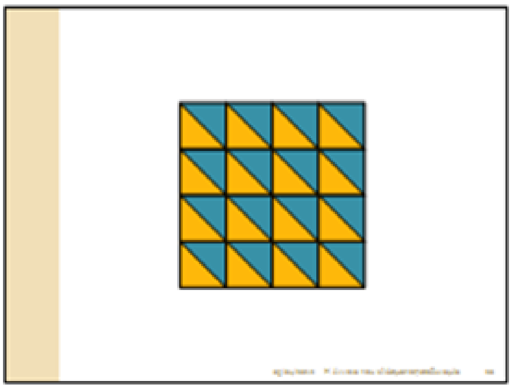


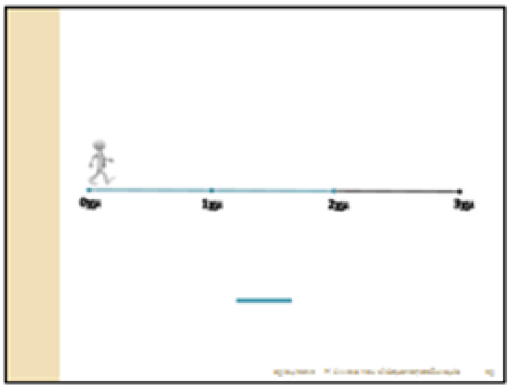


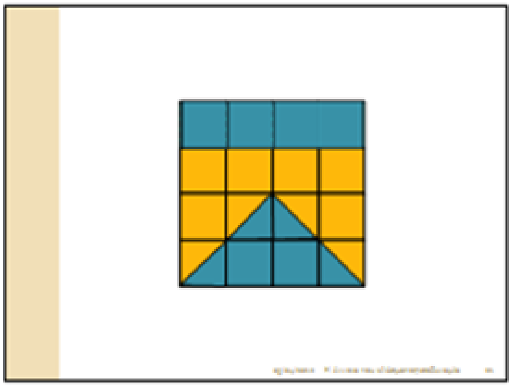


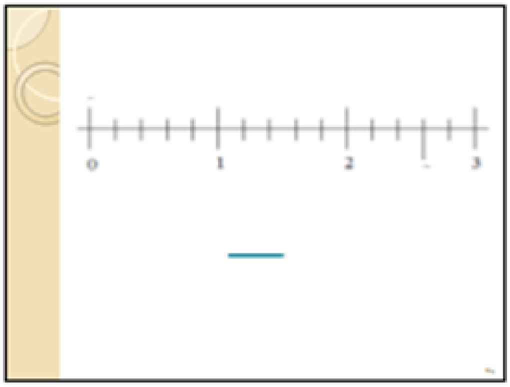




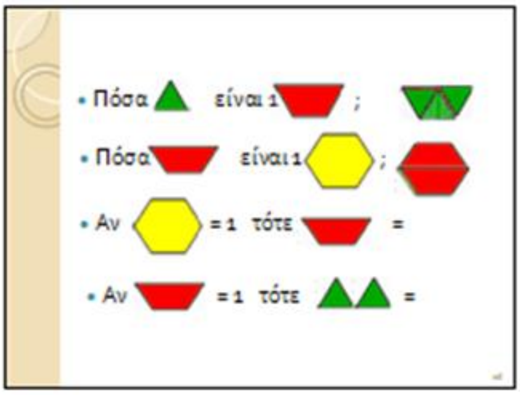


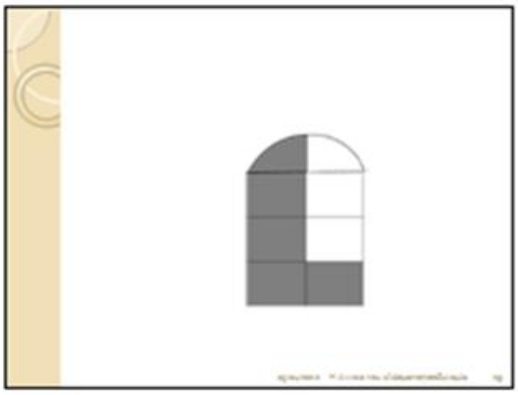


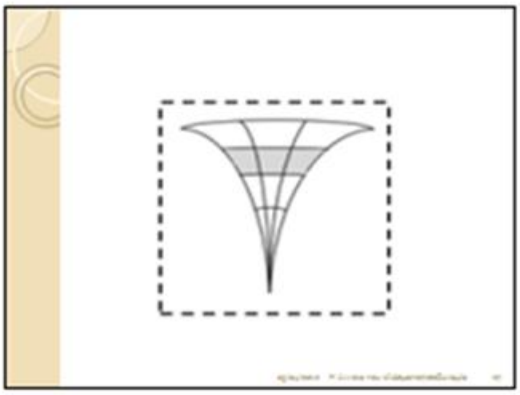


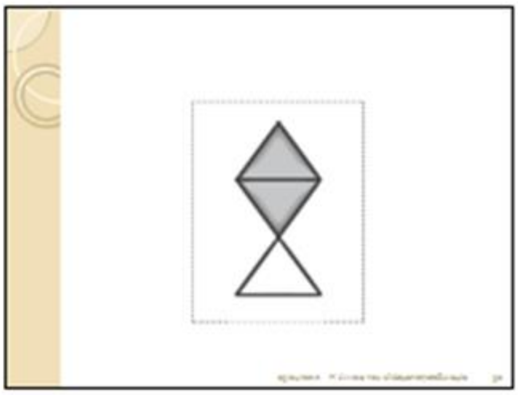


4

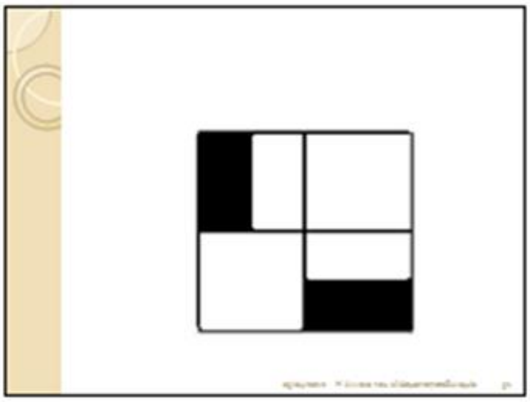


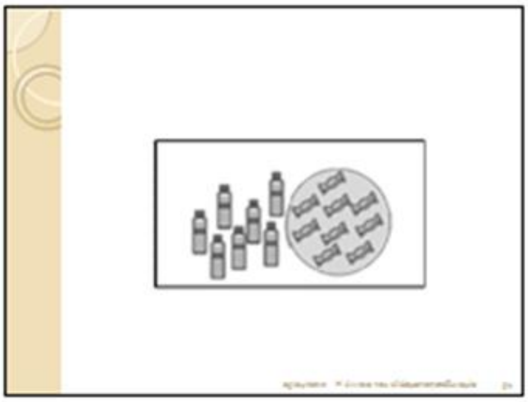


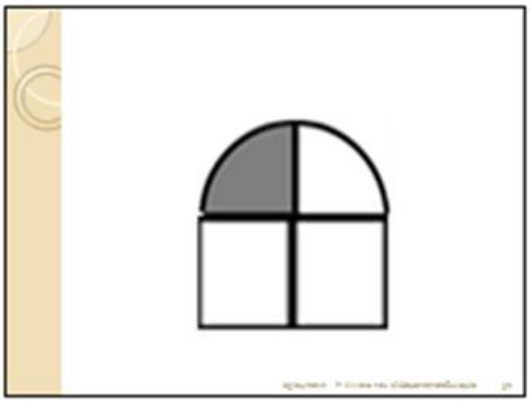


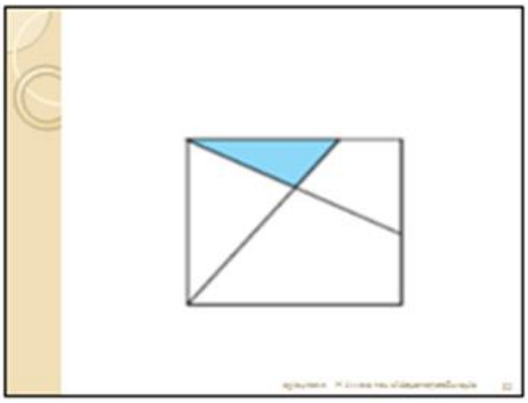


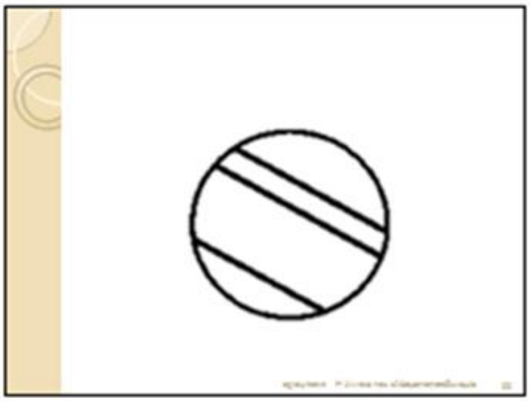
5

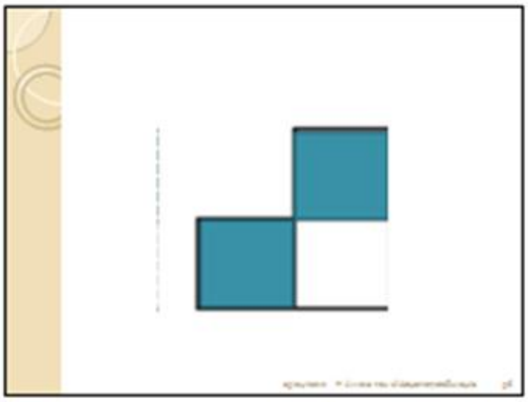




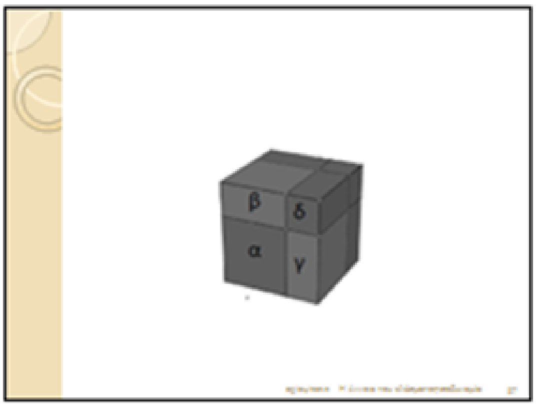


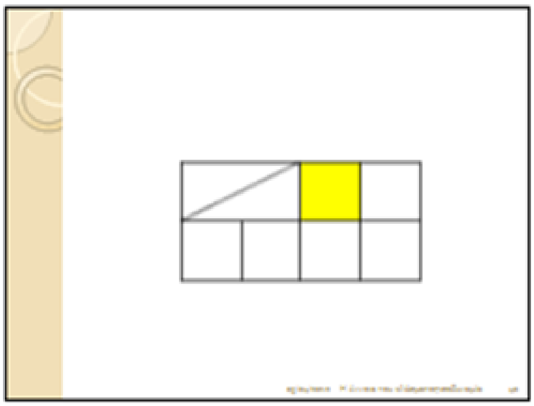


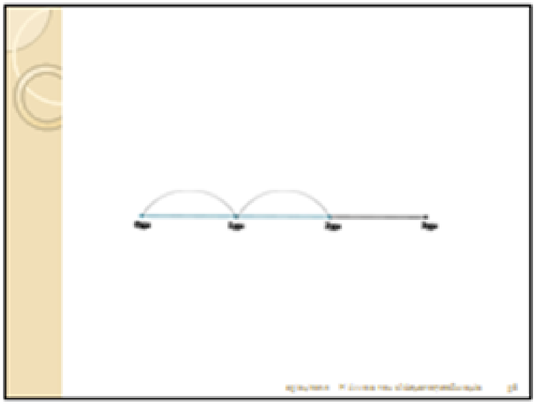


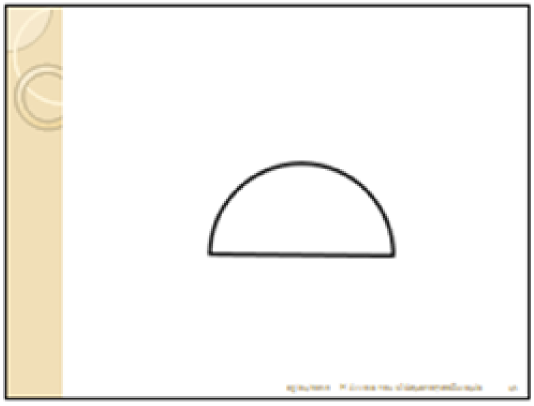


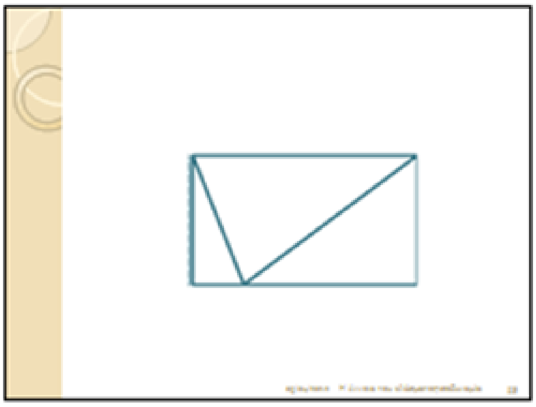
6

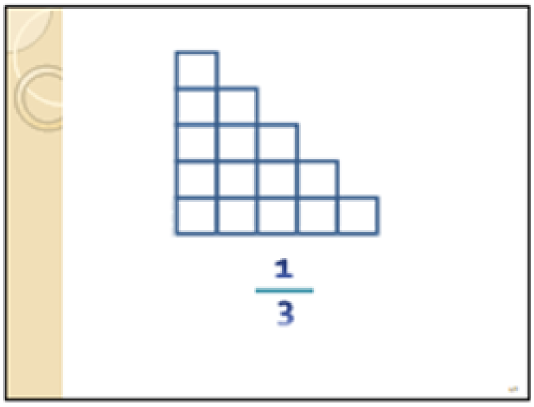




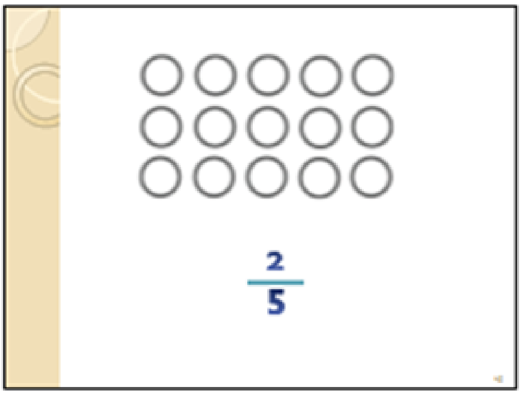


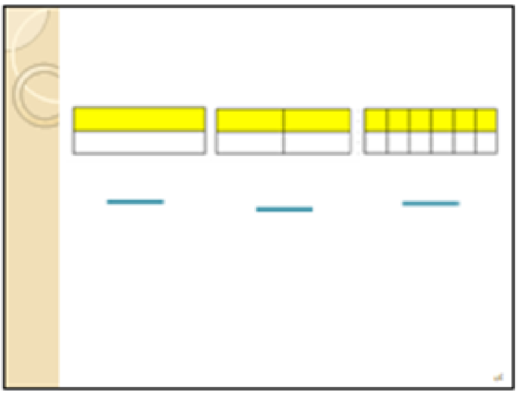


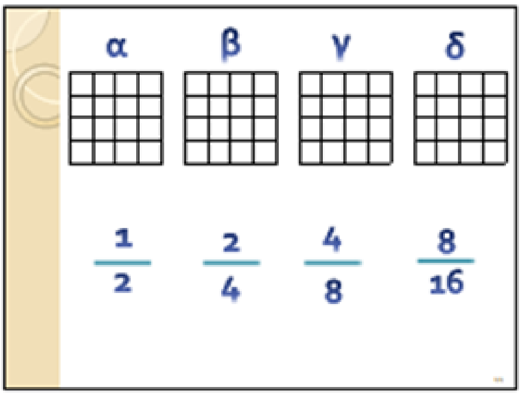


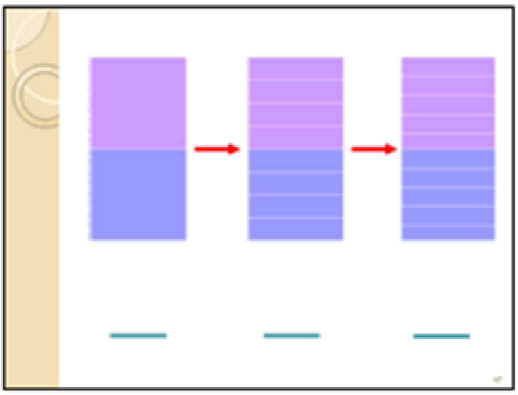


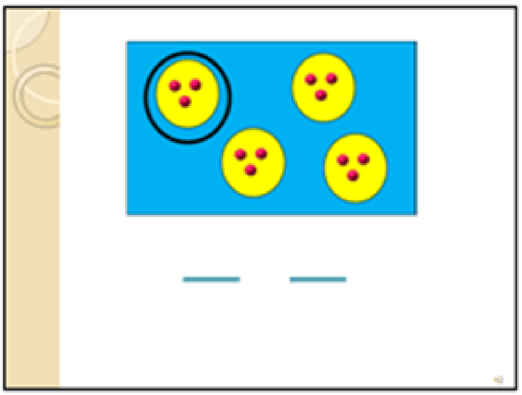
7

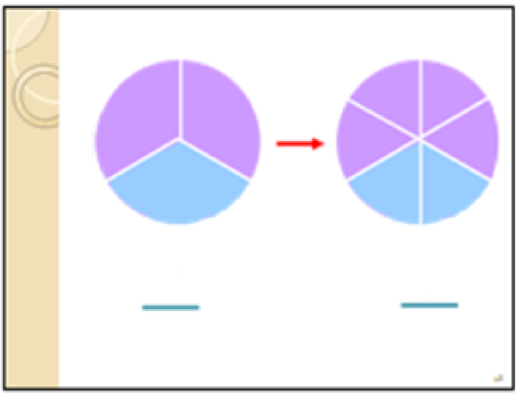




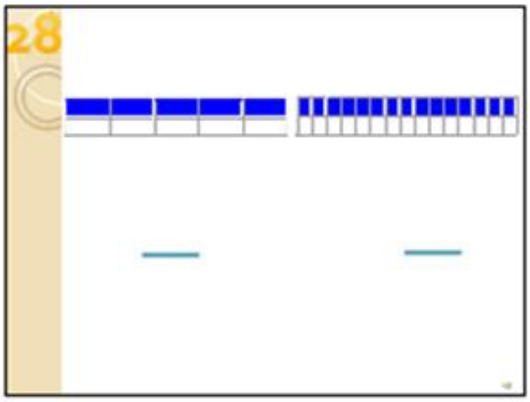


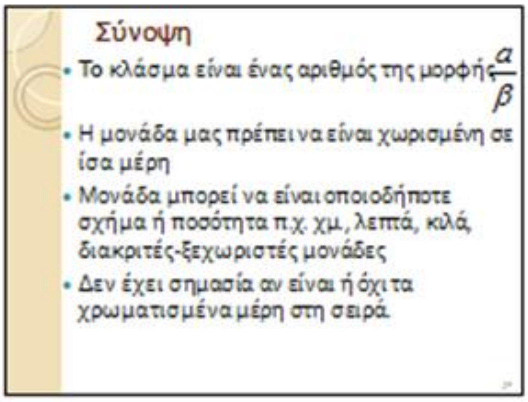


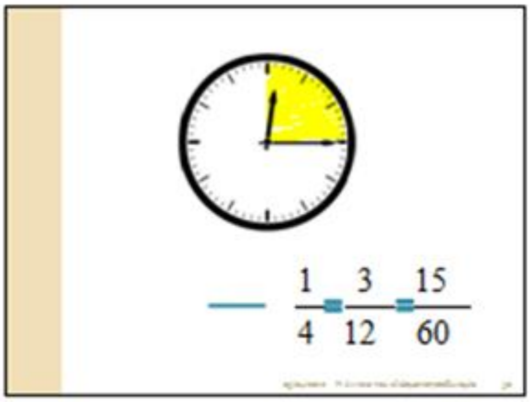


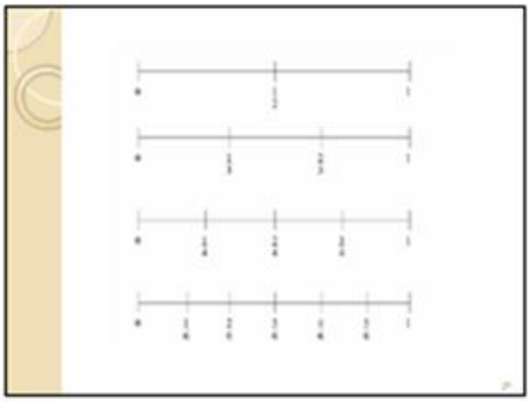


8


28

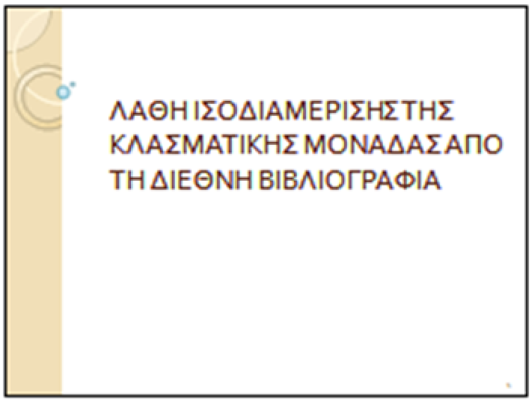

Σύνοψη
Το κλάσμα είναι ένας αριθμός της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$
Η μονάδα μας πρέπει να είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη
Μονάδα μπορεί να είναι οποιοδήποτε σχήμα ή ποσότητα π.χ. χμ., λεπτά, κιλά, διακριτές-ξεχωριστές μονάδες
Δεν έχει σημασία αν είναι ή όχι τα χρωματισμένα μέρη στη σειρά.

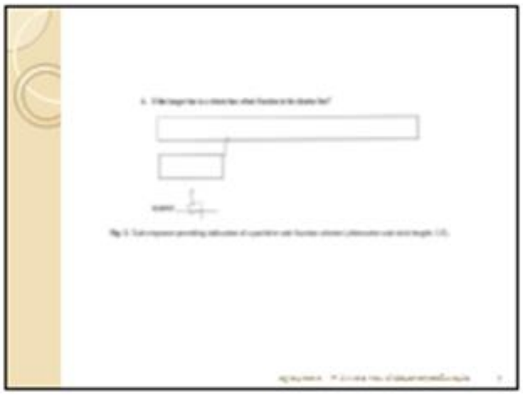

$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{15}{60}$

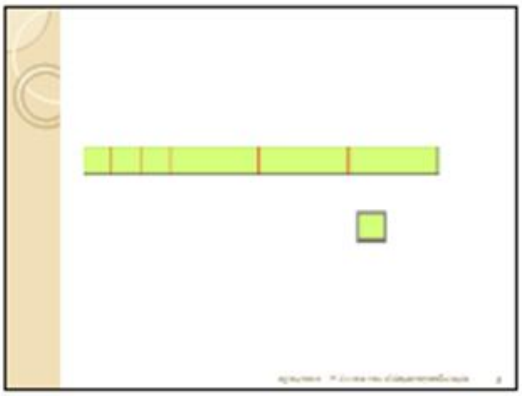


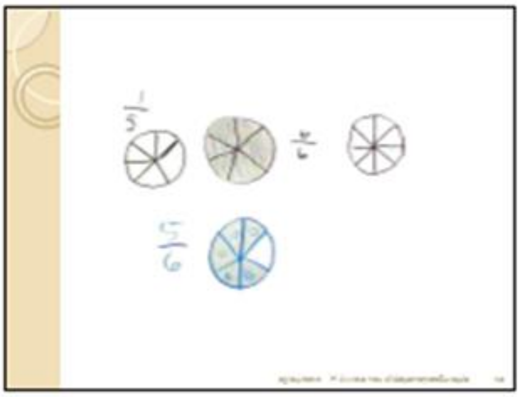
9

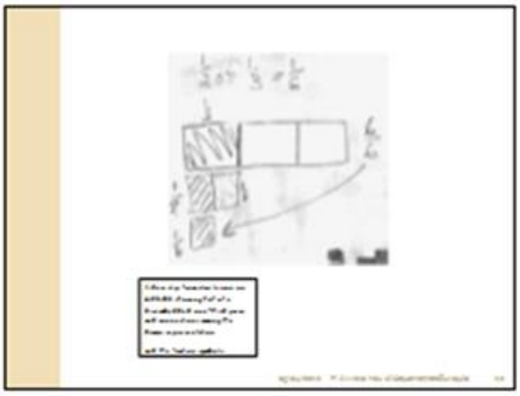
11. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΕΘΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ POWER POINT ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ 3Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ





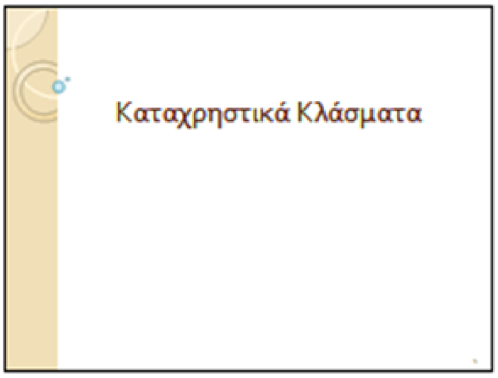


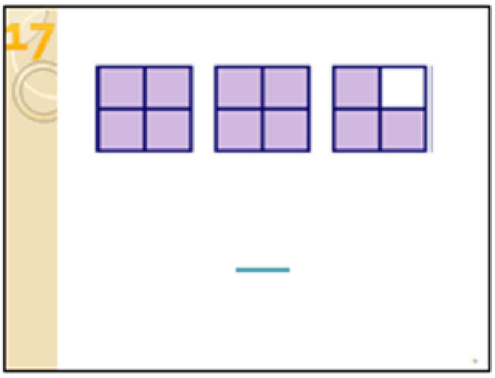


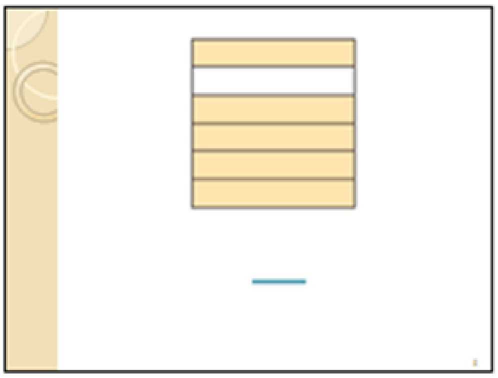


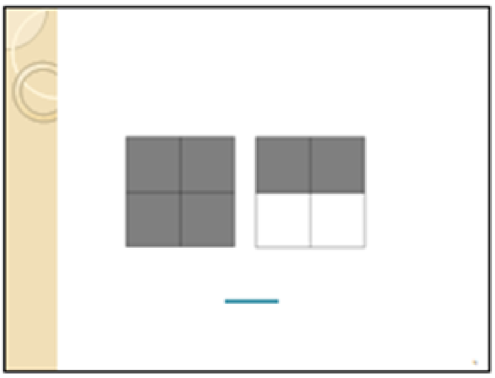
2

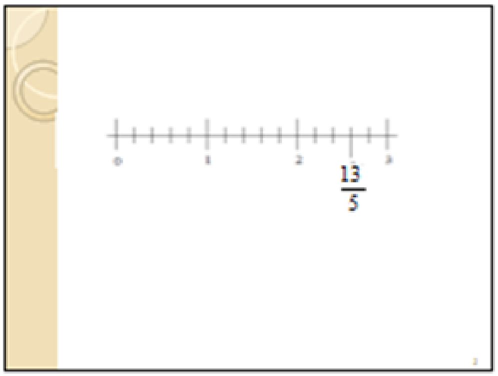
12. ΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ POWER POINT ΓΙΑ ΤΑ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ 4Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

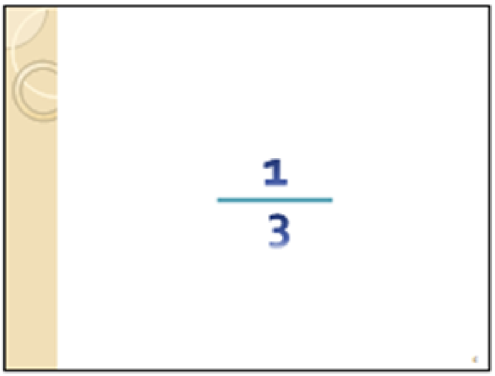




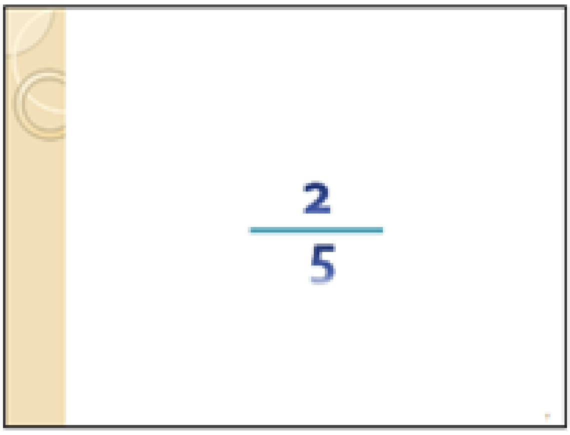


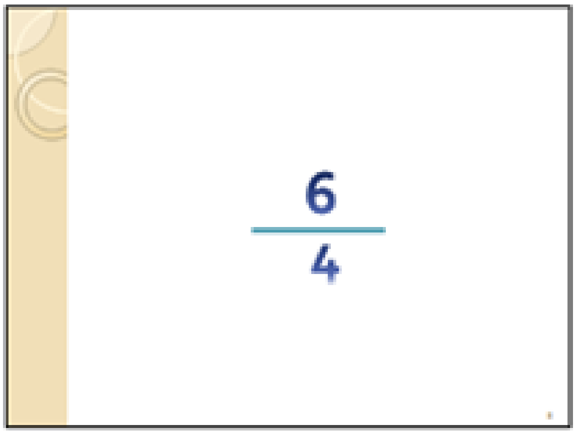


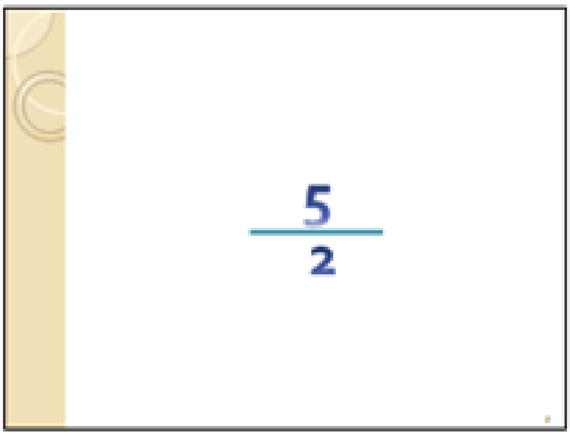


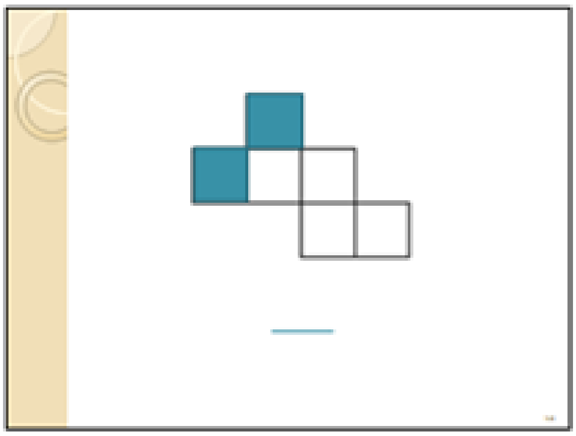


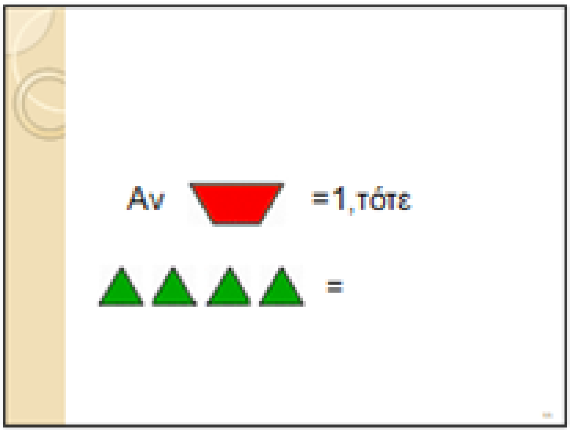
1

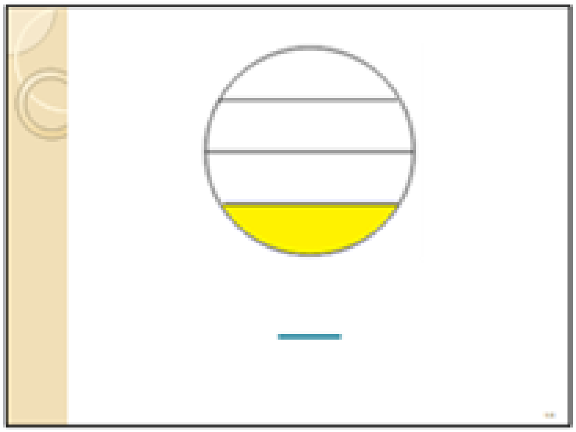

2
5

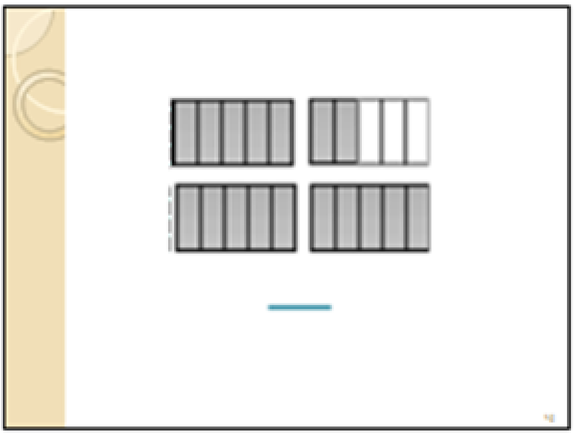

6
4

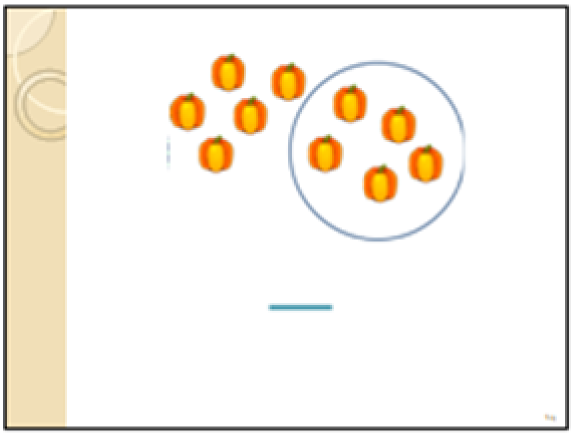

5
2

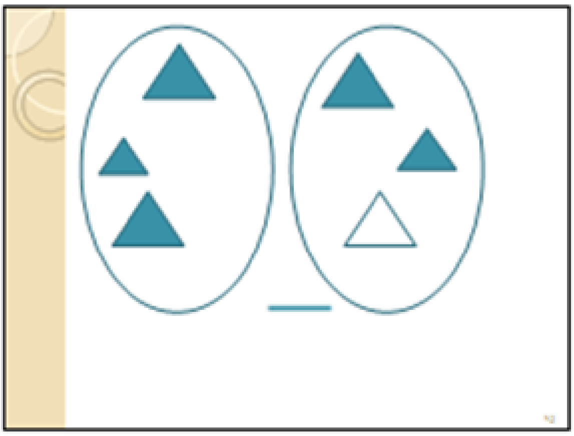


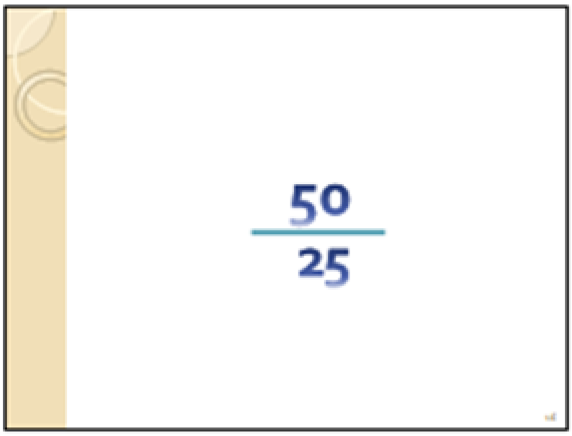

Αν
=1,τότε
=

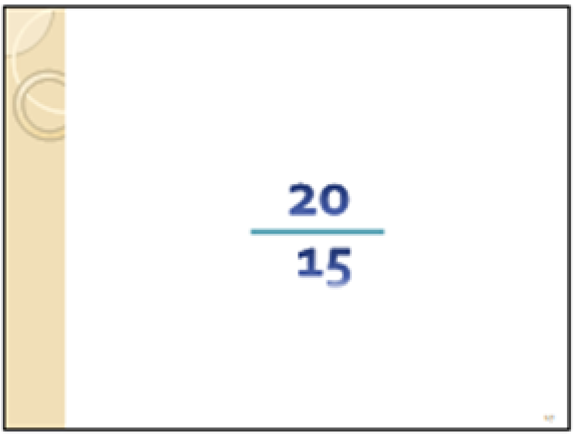


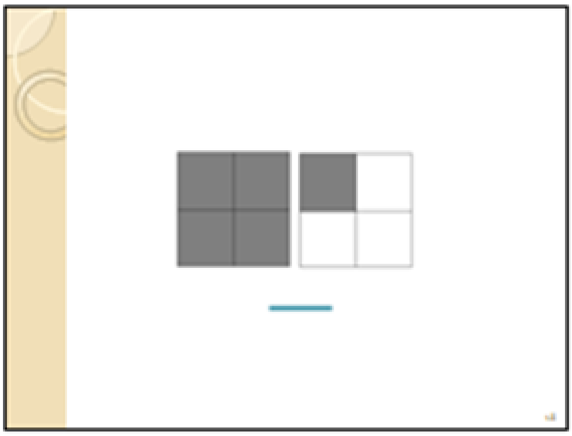




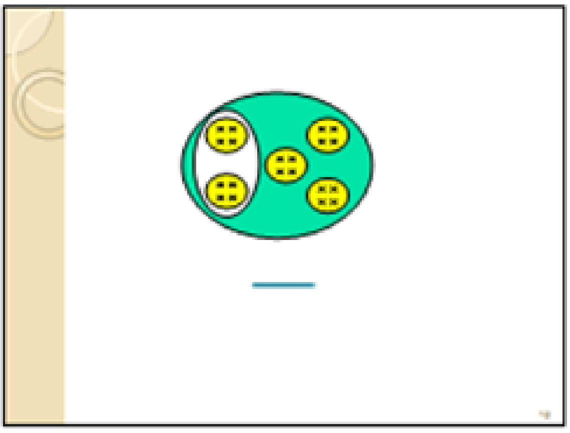


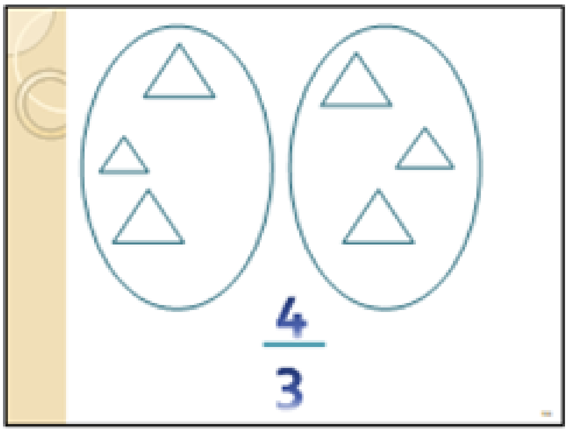


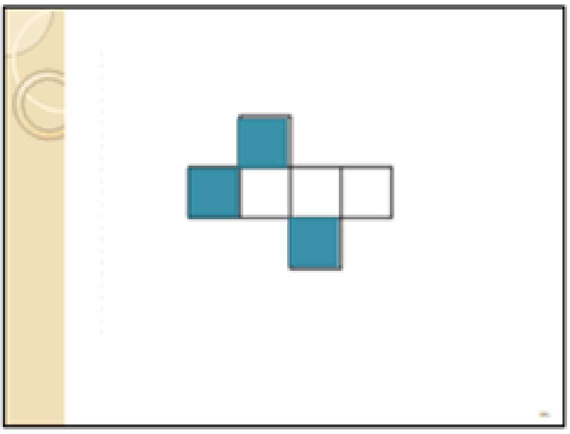


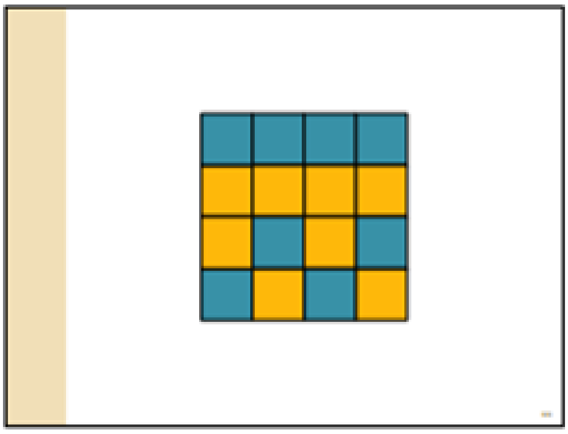


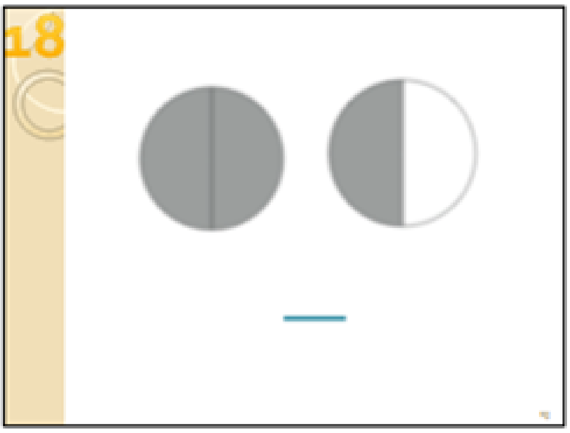
3

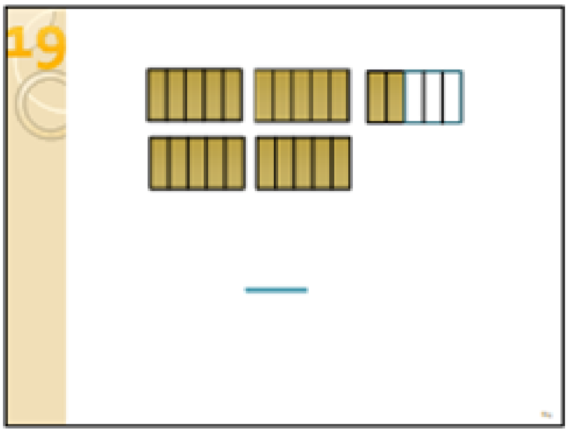




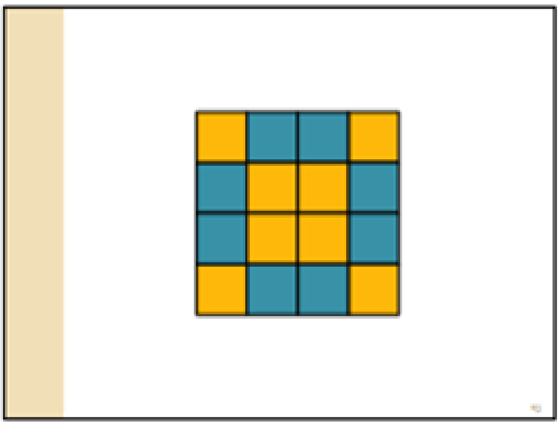


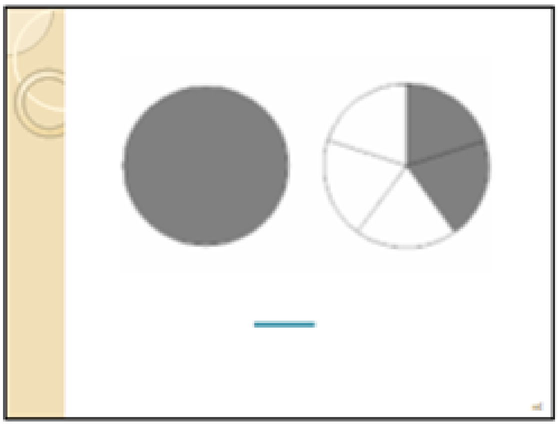


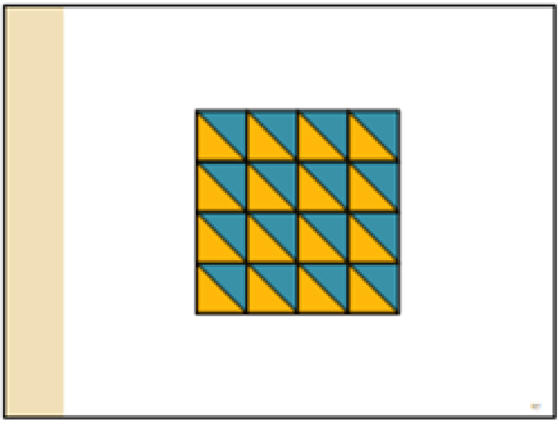


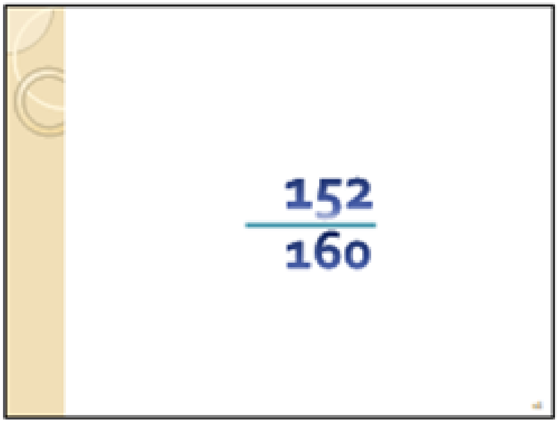


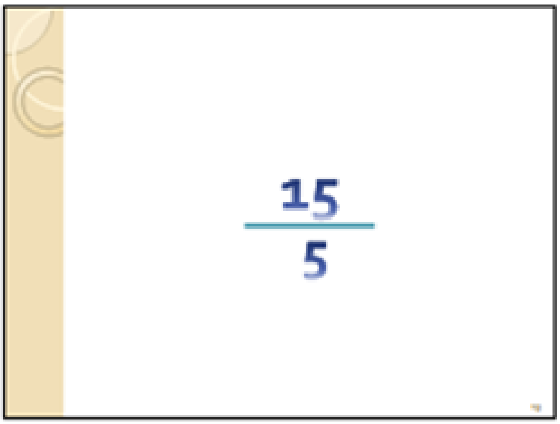
4

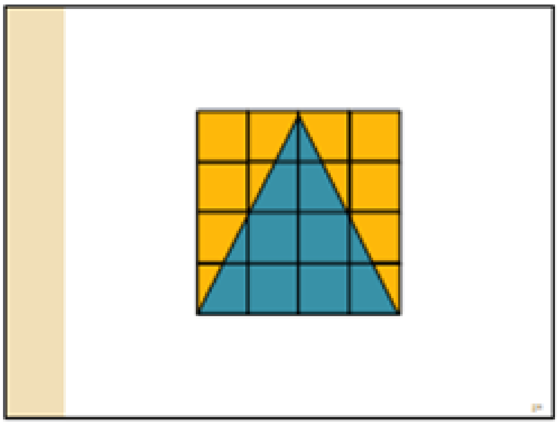




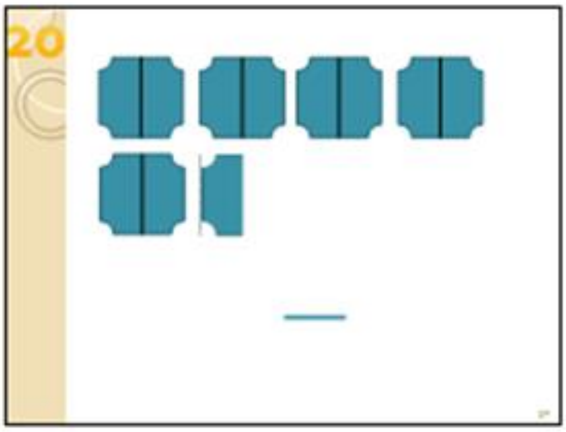


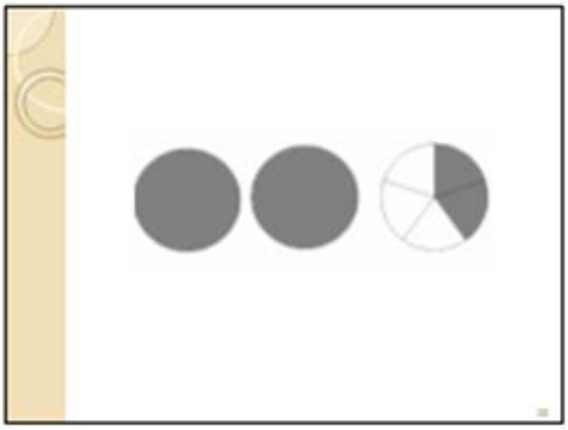


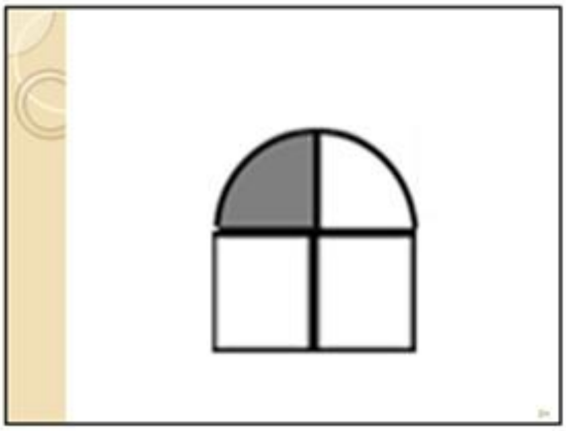


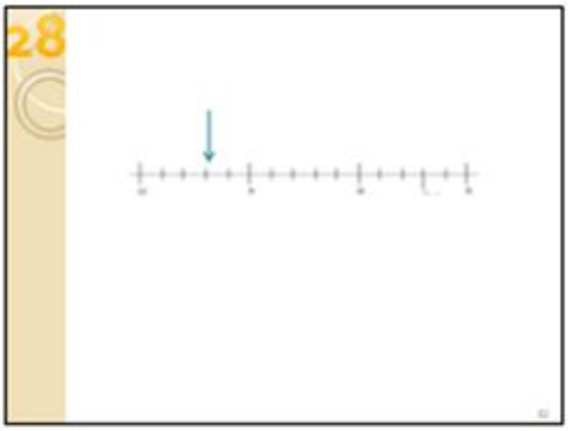


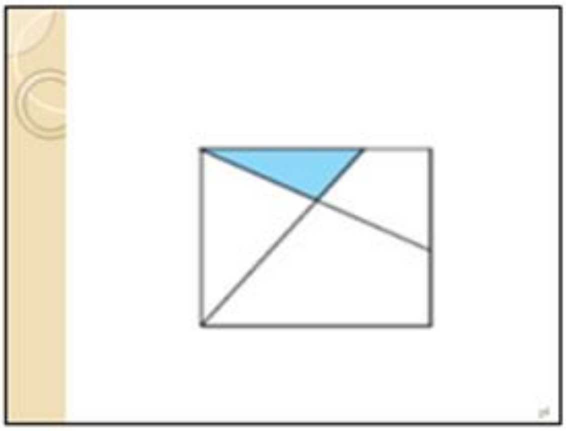
5



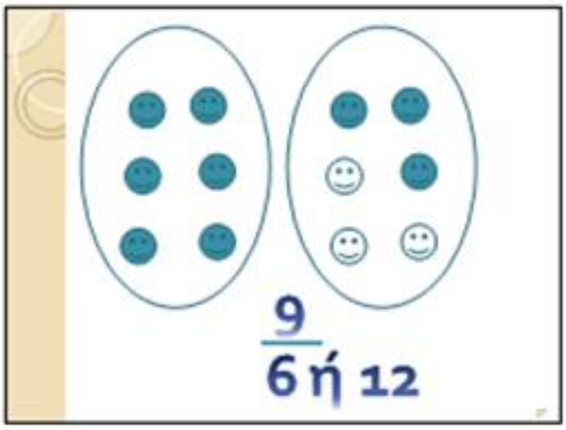


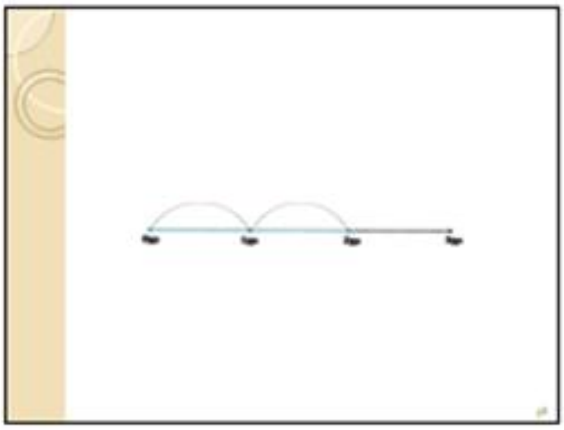


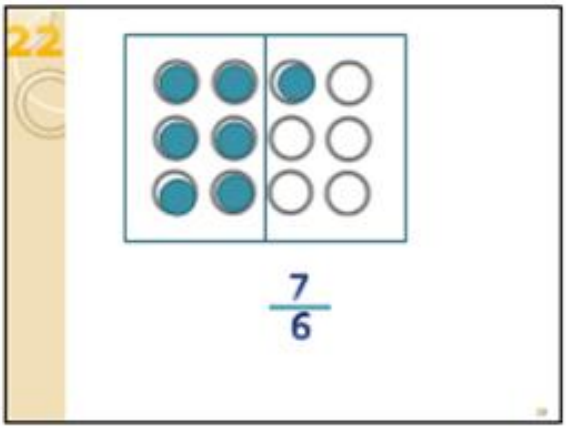


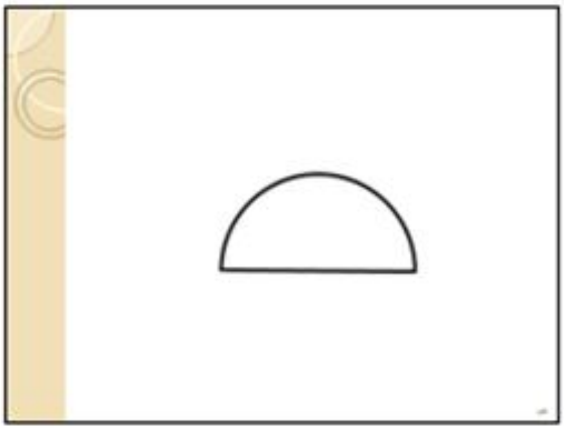


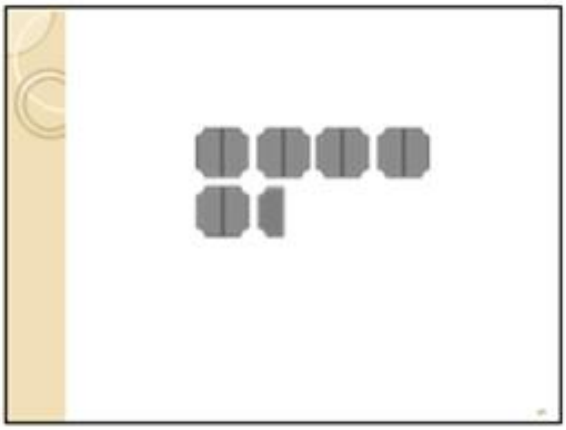
6

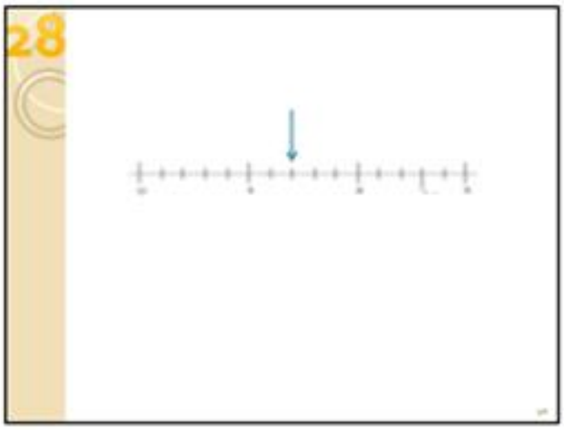




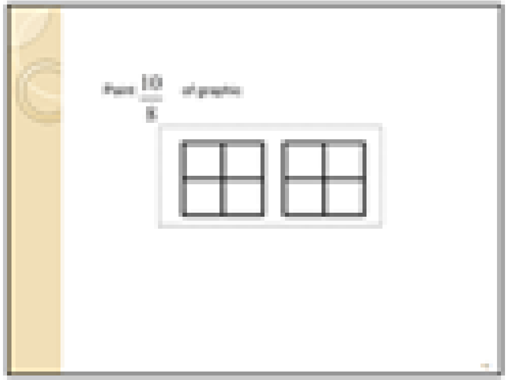


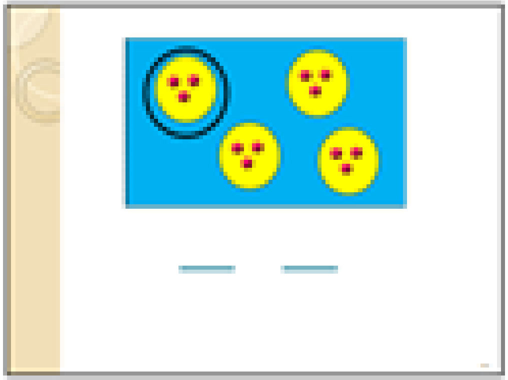


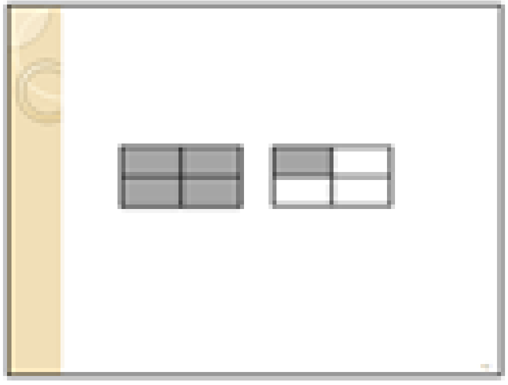


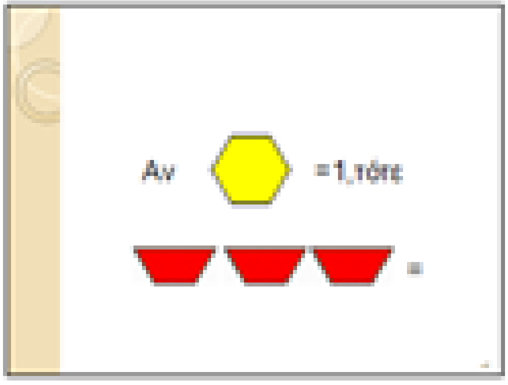


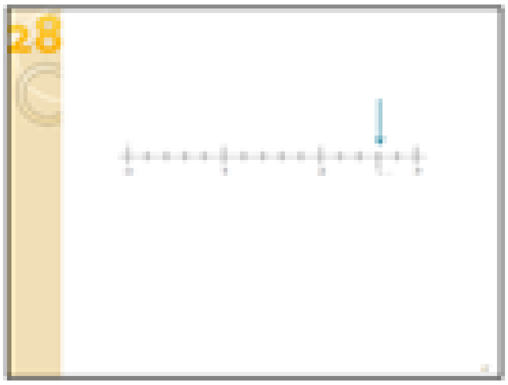
7

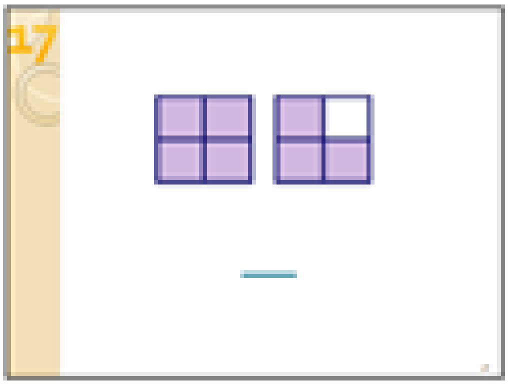




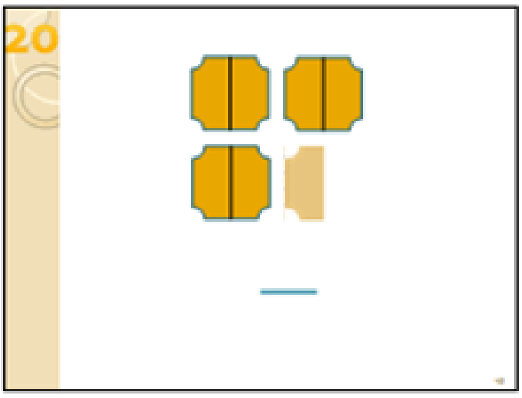


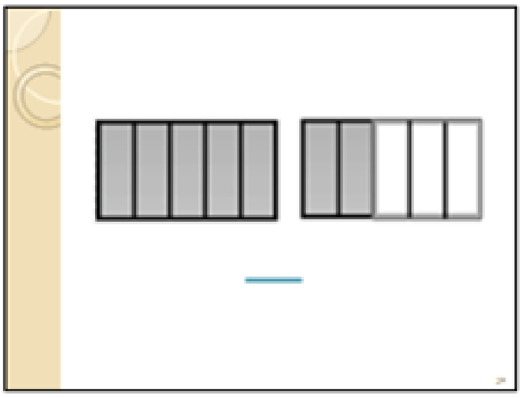






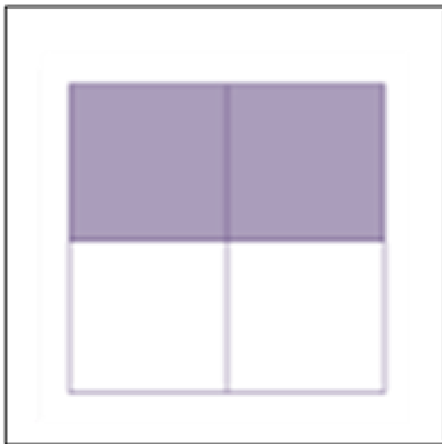
8

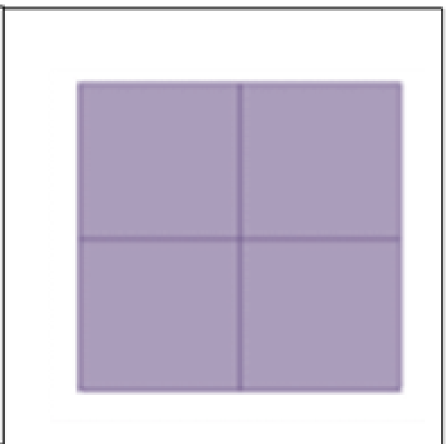




9

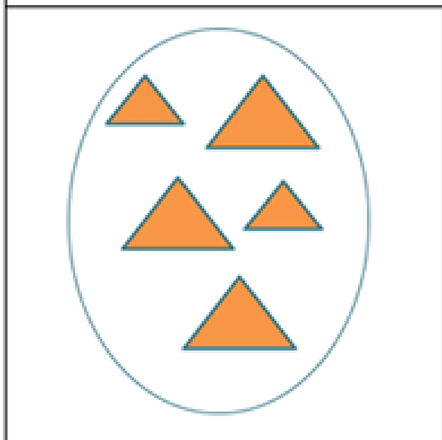
13. ΟΙ 24 ΚΑΡΤΕΣ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΠΑΖΛ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 4Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

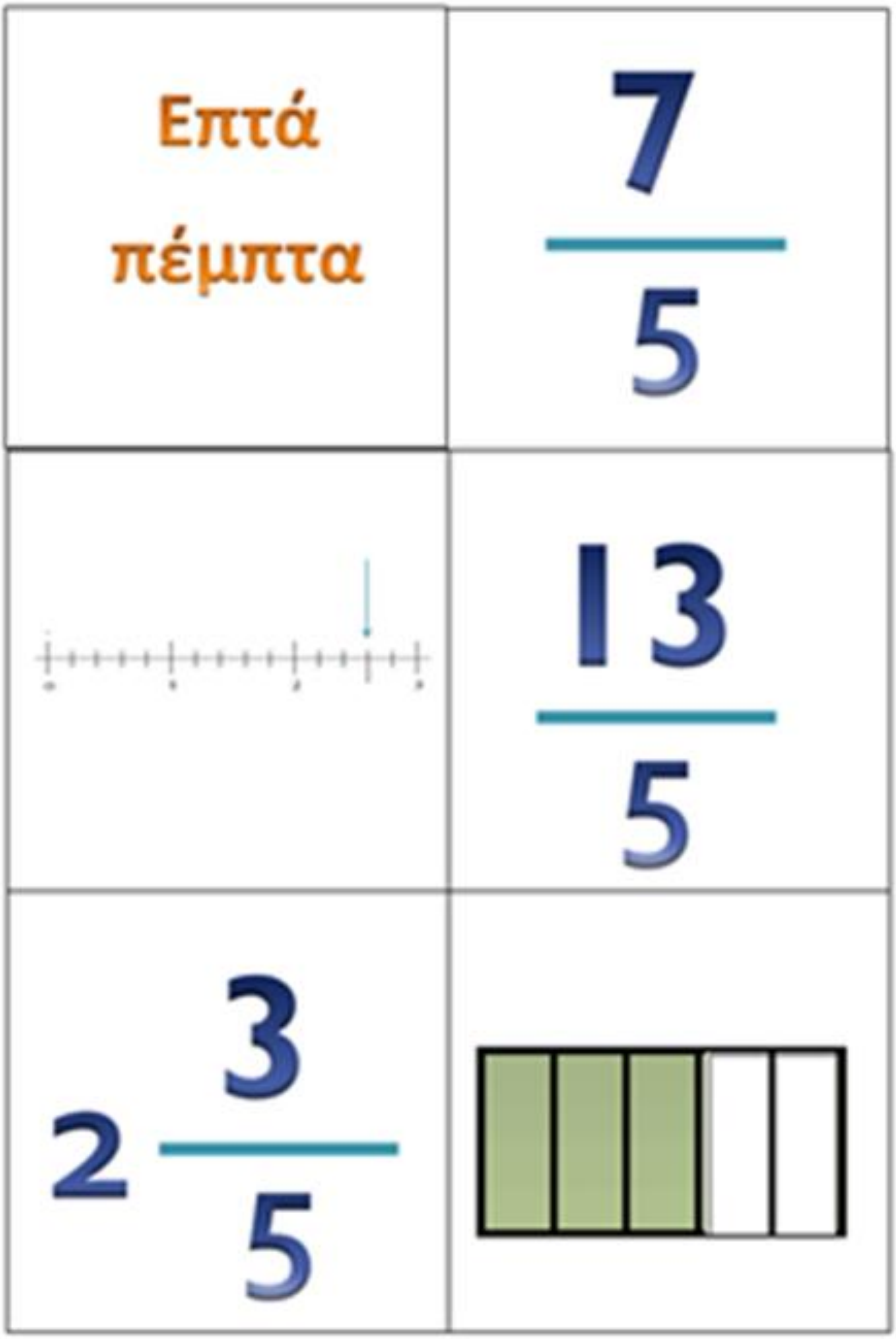


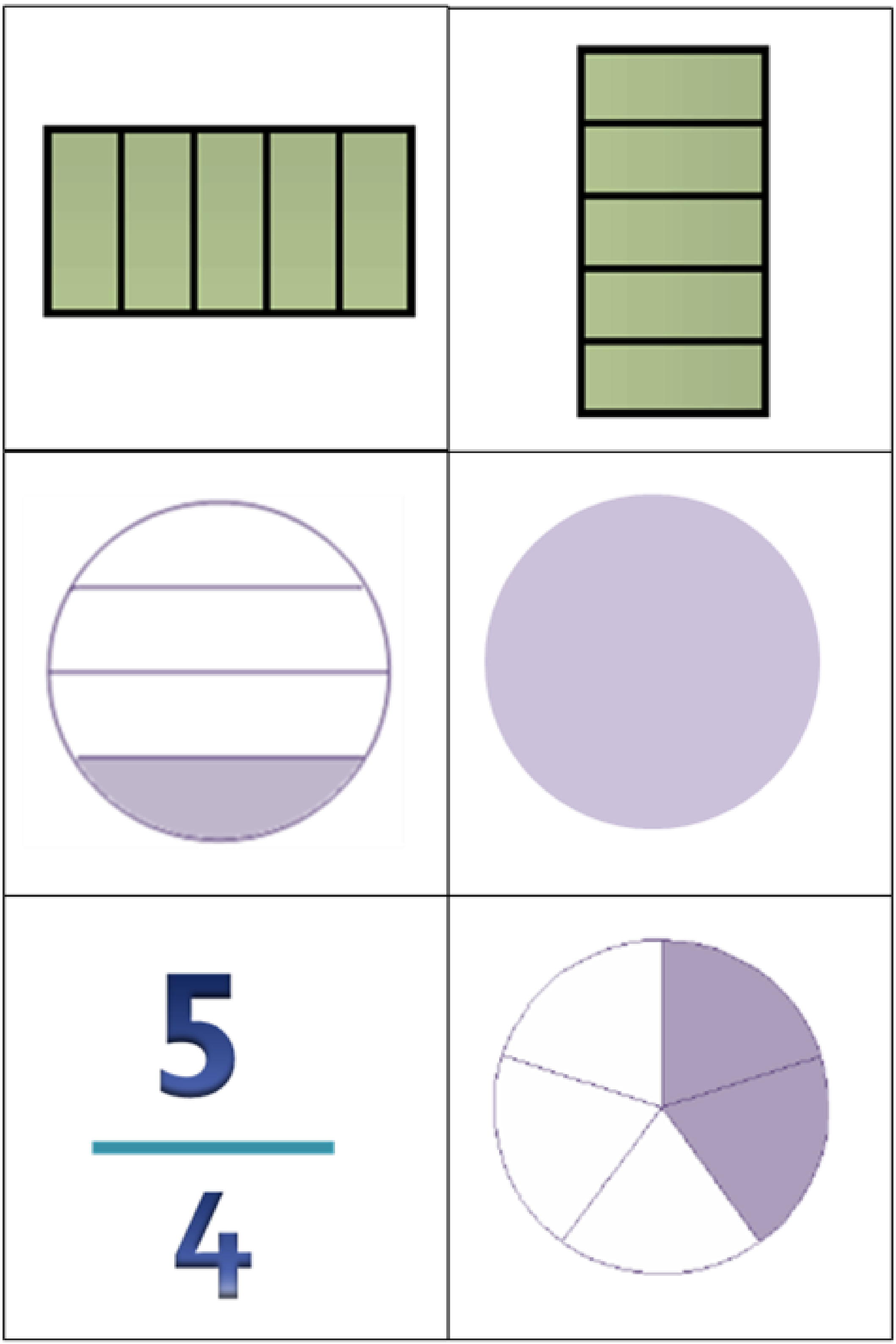


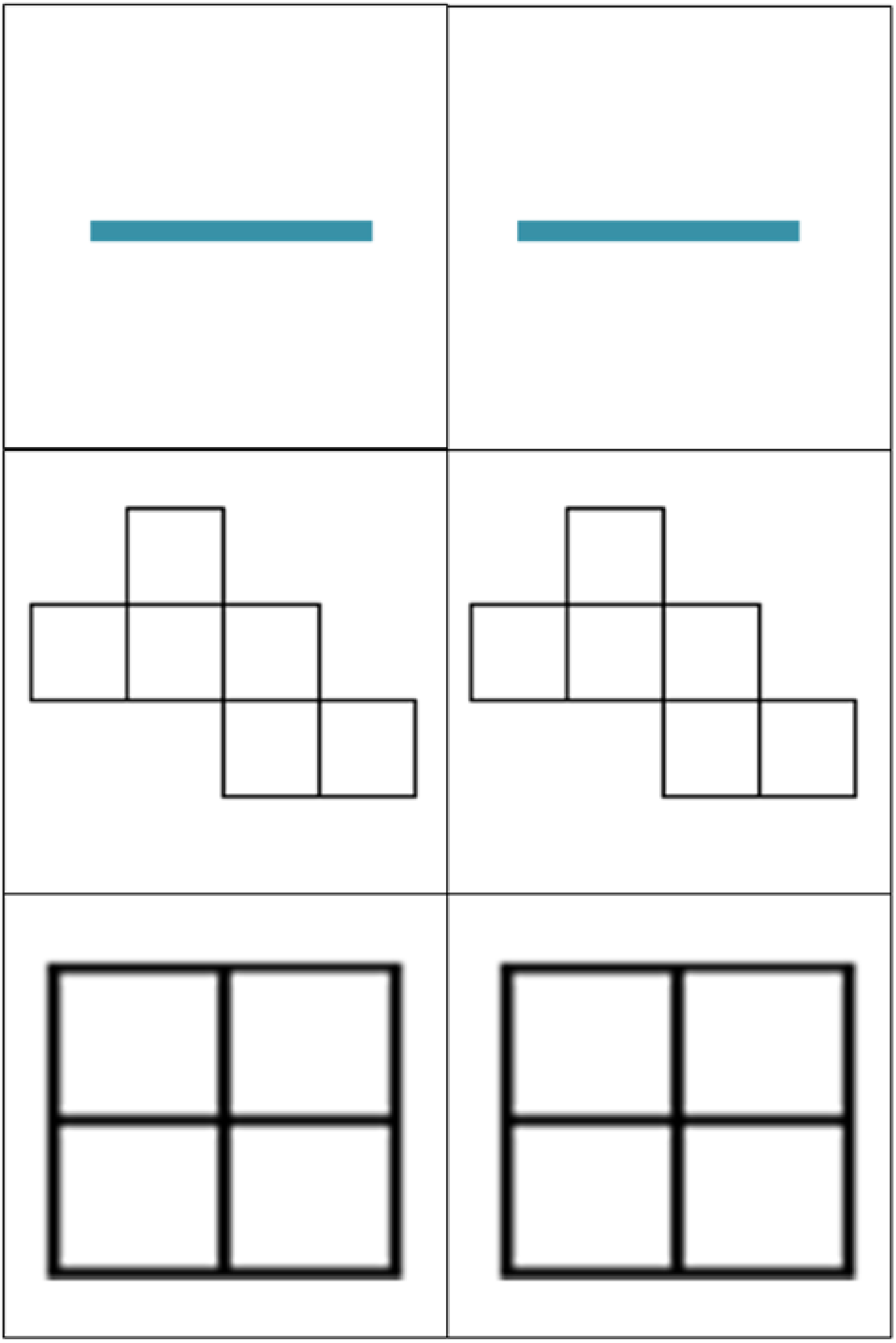
$$\frac{6}{4}$$

$$\frac{6}{8}$$

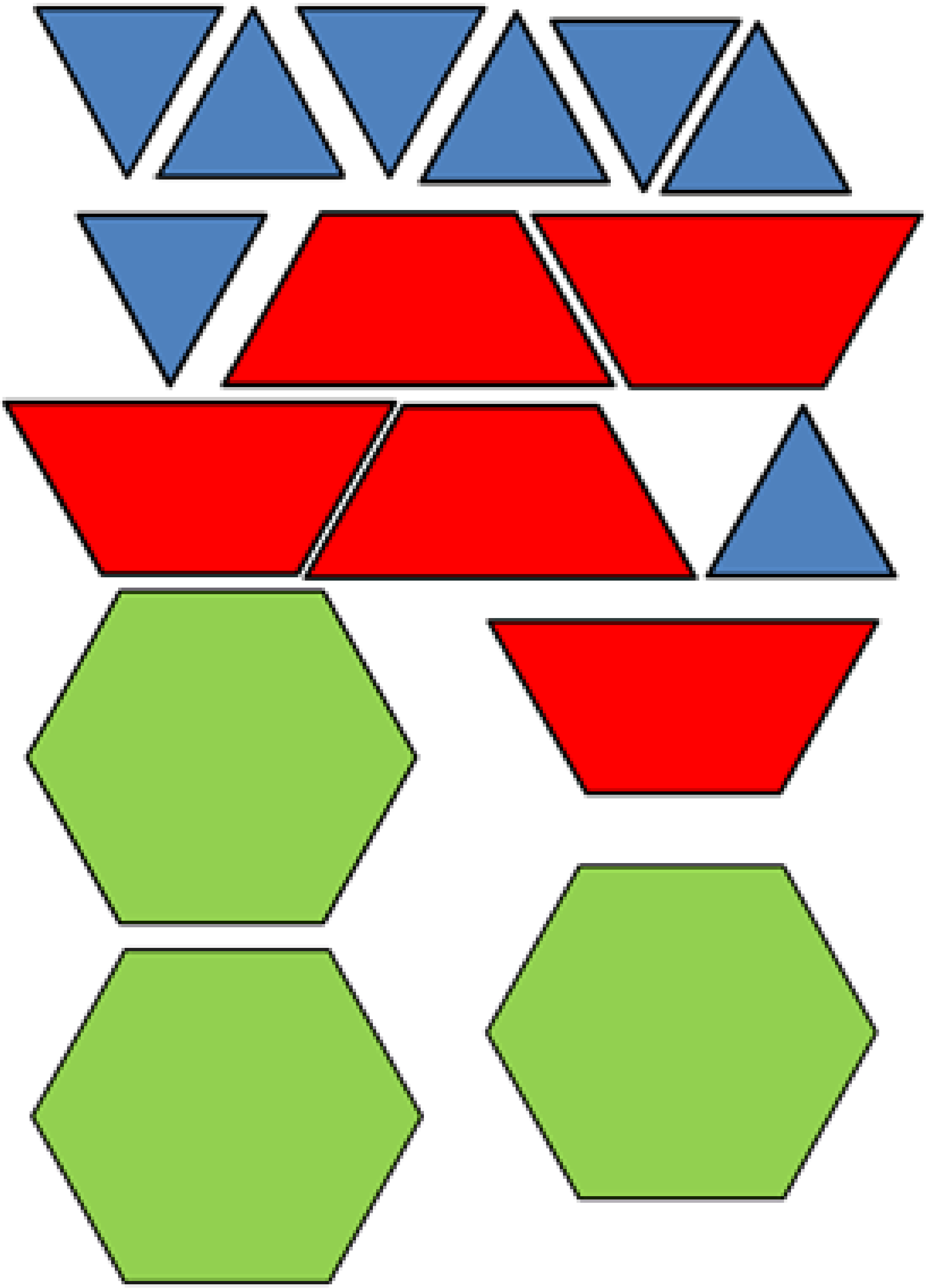



Επτά πέμπτα
7/5
13/5
2 3/5

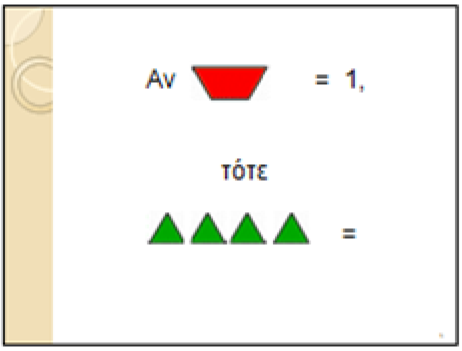

5
4

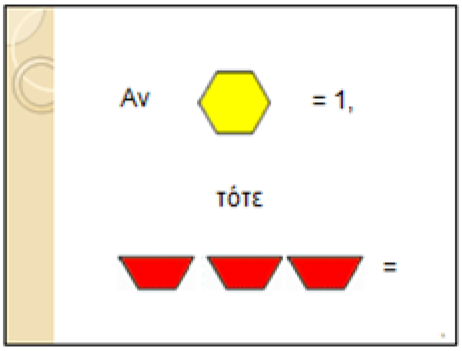


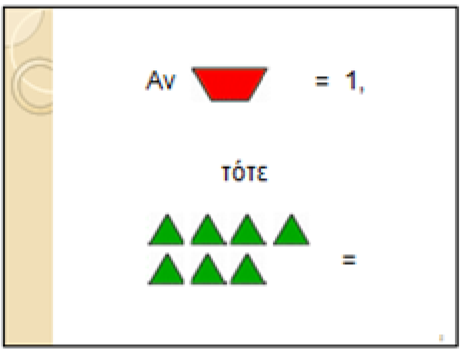
14. ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΜΑΓΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 4Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

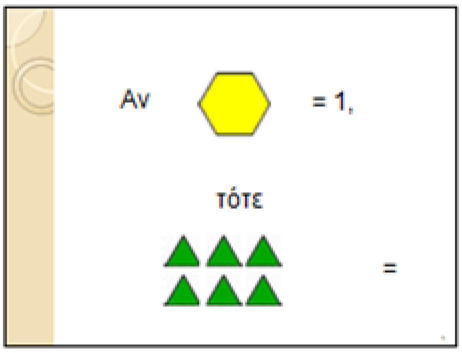


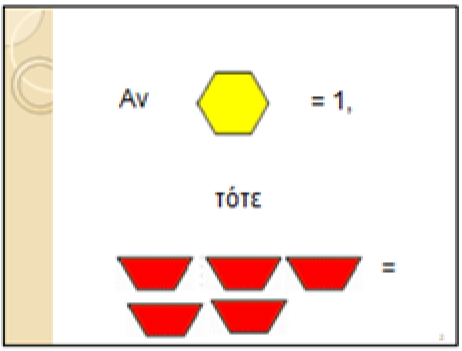
15. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΜΑΓΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 4Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

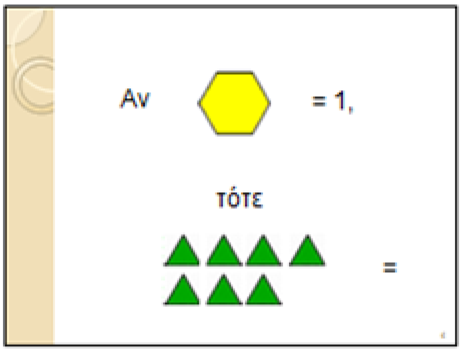




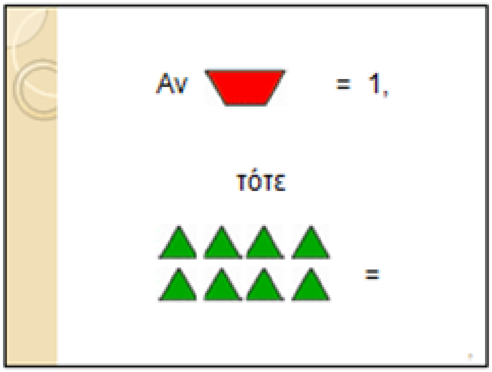


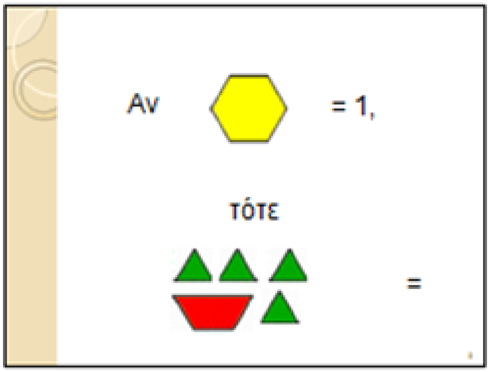






1



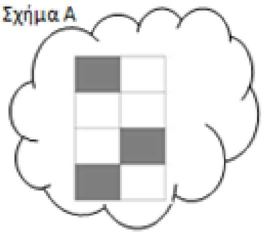


2

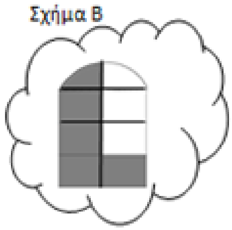
16. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΕ ΣΤΗΝ 4Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

1. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα σχήματα που βρίσκονται μέσα στα συννεφάκια αποτελούν τη μονάδα να απαντήσετε στο εξής ερώτημα:
Ποιο κλάσμα αντιπροσωπεύει το σκιασμένο μέρος κάθε σχήματος και γιατί;

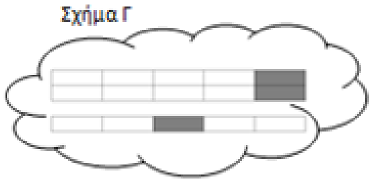
Σχήμα Α



Σχήμα Β



Σχήμα Γ

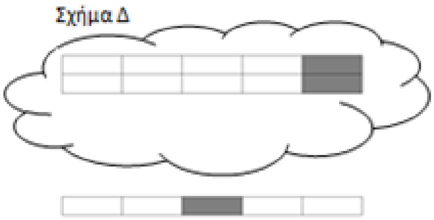


Απάντηση: ______________________

Απάντηση: ______________________

Απάντηση: ______________________

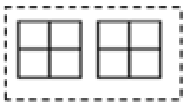
Σχήμα Δ



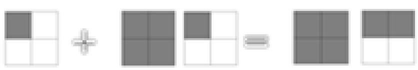
Απάντηση: ______________________

2. Να αναπαραστήσεις σχηματικά τα $\frac{10}{4}$: ______________________

3. Χρωμάτισε τα $\frac{10}{8}$ του σχήματος:



4. Στα Μαθηματικά η δασκάλα της Ε΄ τάξης χρησιμοποίησε την παρακάτω αναπαράσταση και ζήτησε από τους μαθητές να τη γράψουν με αριθμητικά σύμβολα:



Ακολούθησε ο πιο κάτω διάλογος:

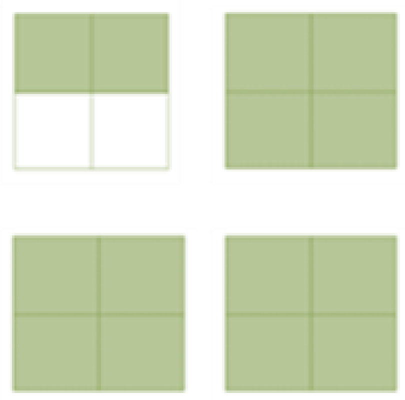

Αργυρώ: «Η παραπάνω αναπαράσταση δείχνει την πράξη $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$, αφού στο πρώτο σχήμα έχουμε χωρίσει τη μονάδα σε 4 ίσα μέρη και πήραμε το ένα άρα πήραμε το $\frac{1}{4}$, στο δεύτερο σχήμα χωρίσαμε σε 8 ίσα μέρη και πήραμε τα 5 άρα πήραμε τα $\frac{5}{8}$ και για το αποτέλεσμα χωρίσαμε πάλι σε 8 ίσα μέρη και πήραμε τα 6 άρα πήραμε τα $\frac{6}{8}$ ».

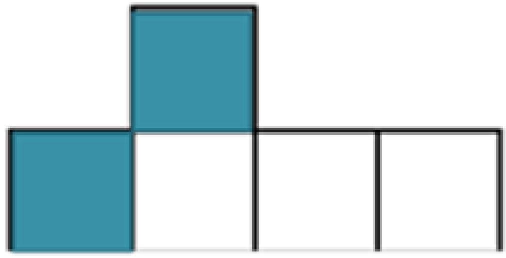

Γιάννης: «Εγώ νομίζω ότι παραπάνω αναπαράσταση δείχνει την πράξη $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}$».


Αργυρώ: «Μα πώς γίνεται να χωρίζεις σε 8 ίσα μέρη αλλά στον παρονομαστή να γράφεις 4;»

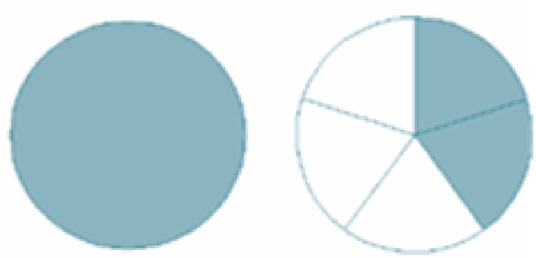
Η υπόλοιπη τάξη προβληματίστηκε. Άλλοι μαθητές συμφώνησαν με την Αργυρώ και άλλοι με το Γιάννη. Ποιος από τους δύο μαθητές πιστεύεις ότι έχει δίκαιο; Εξήγησε την απάντηση σου.

17. Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΙ ΟΙ 30 ΚΑΡΤΕΣ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΚΑΡΤΟΜΑΧΙΕΣ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 5Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

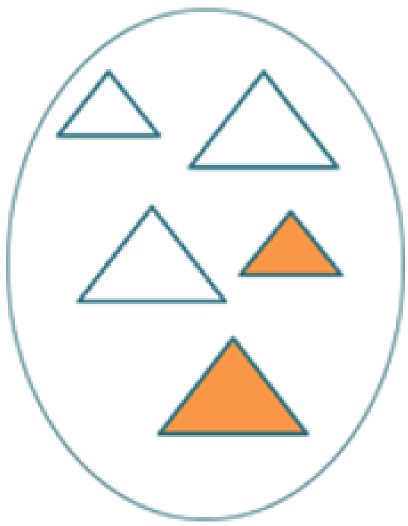


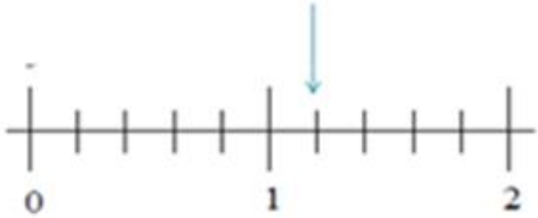


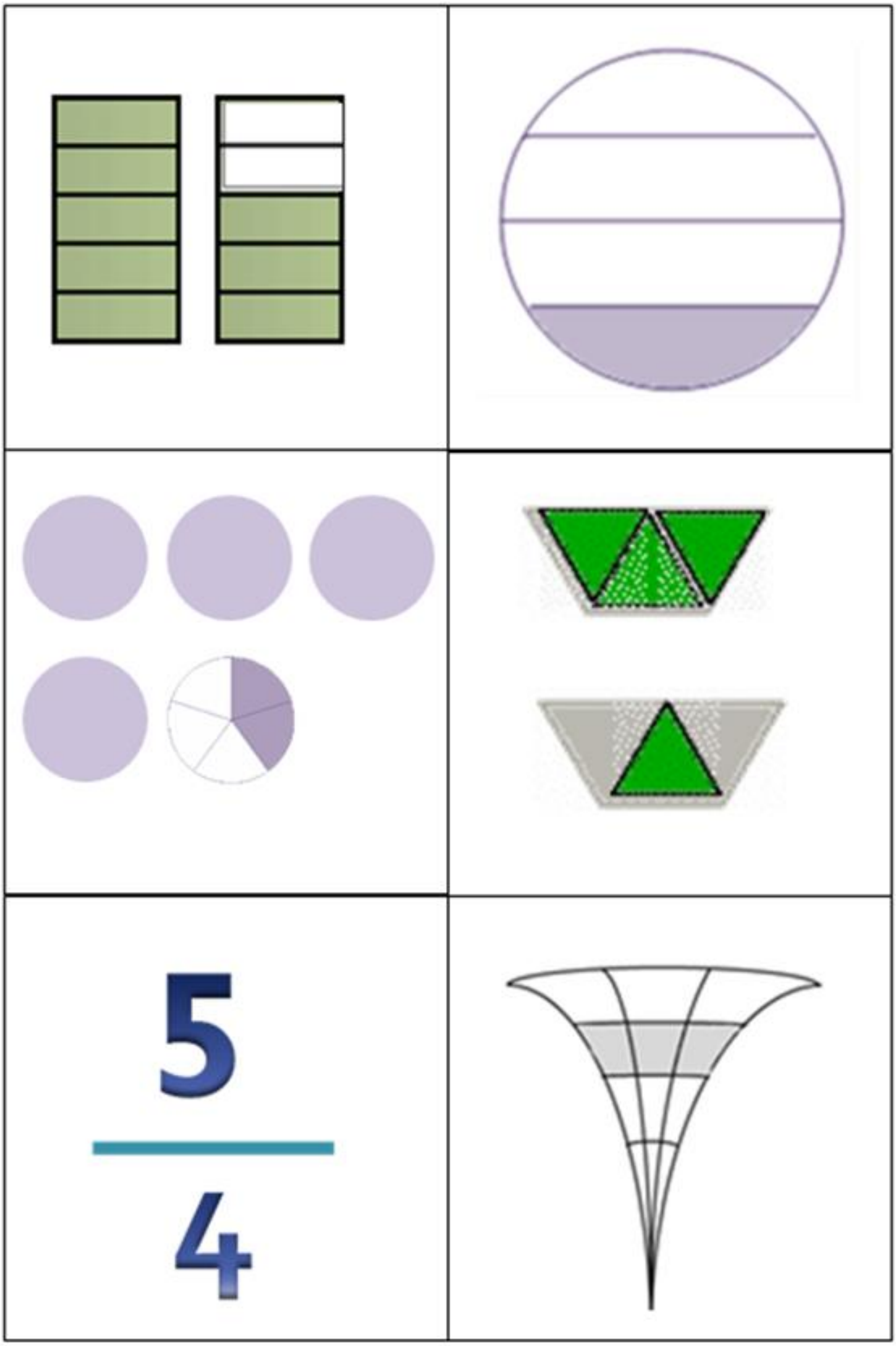
$$\frac{6}{4}$$

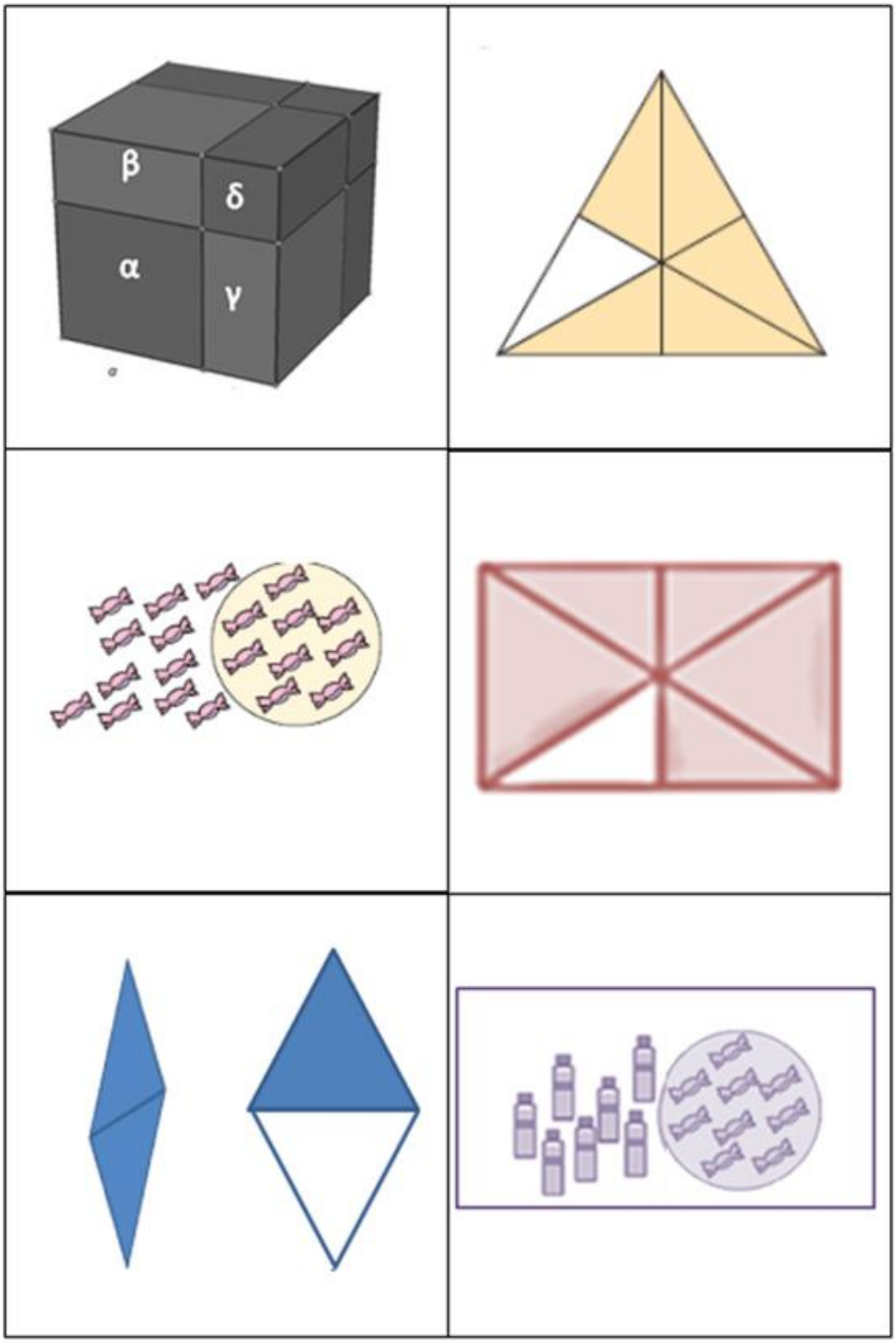


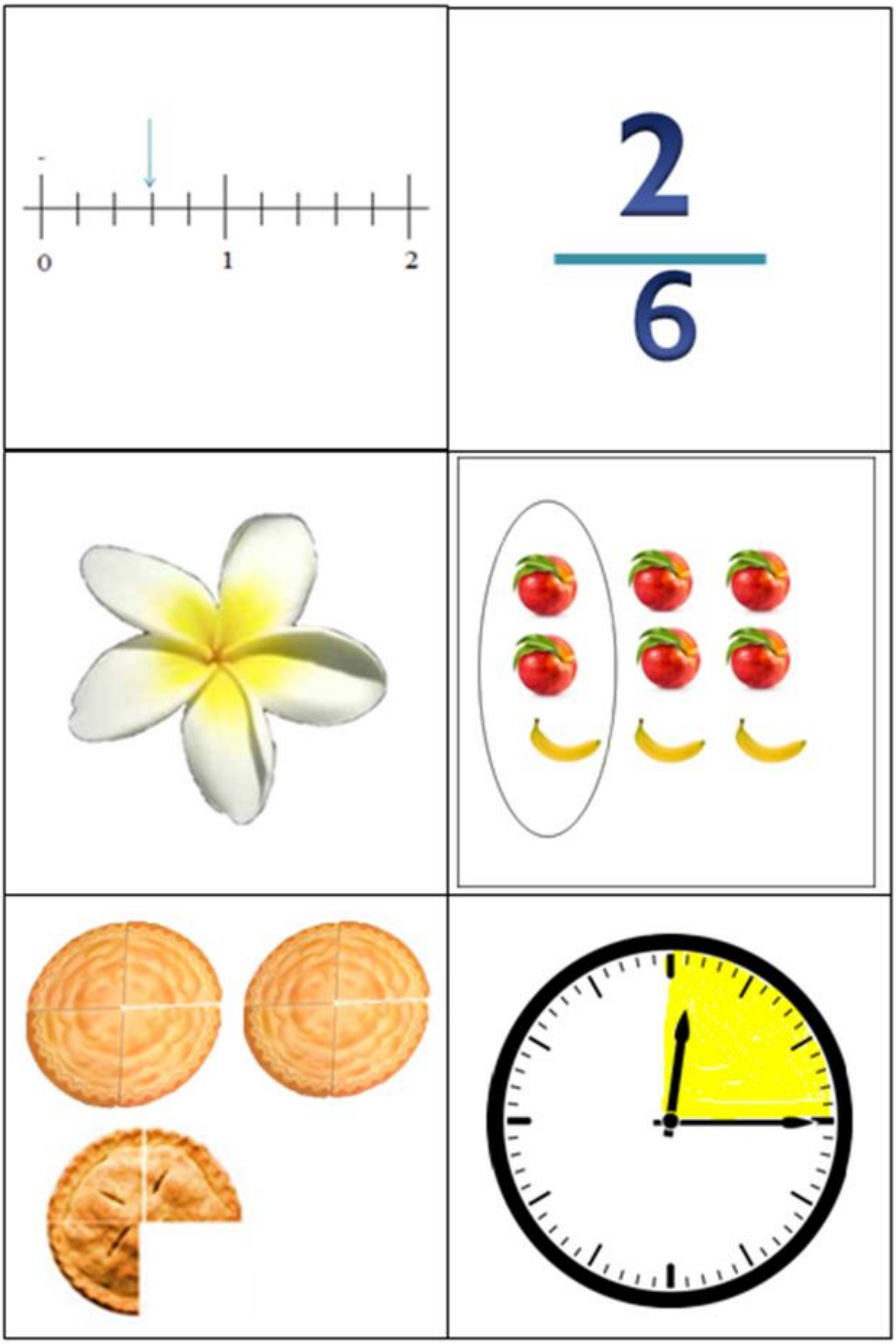
$$\frac{295}{100}$$



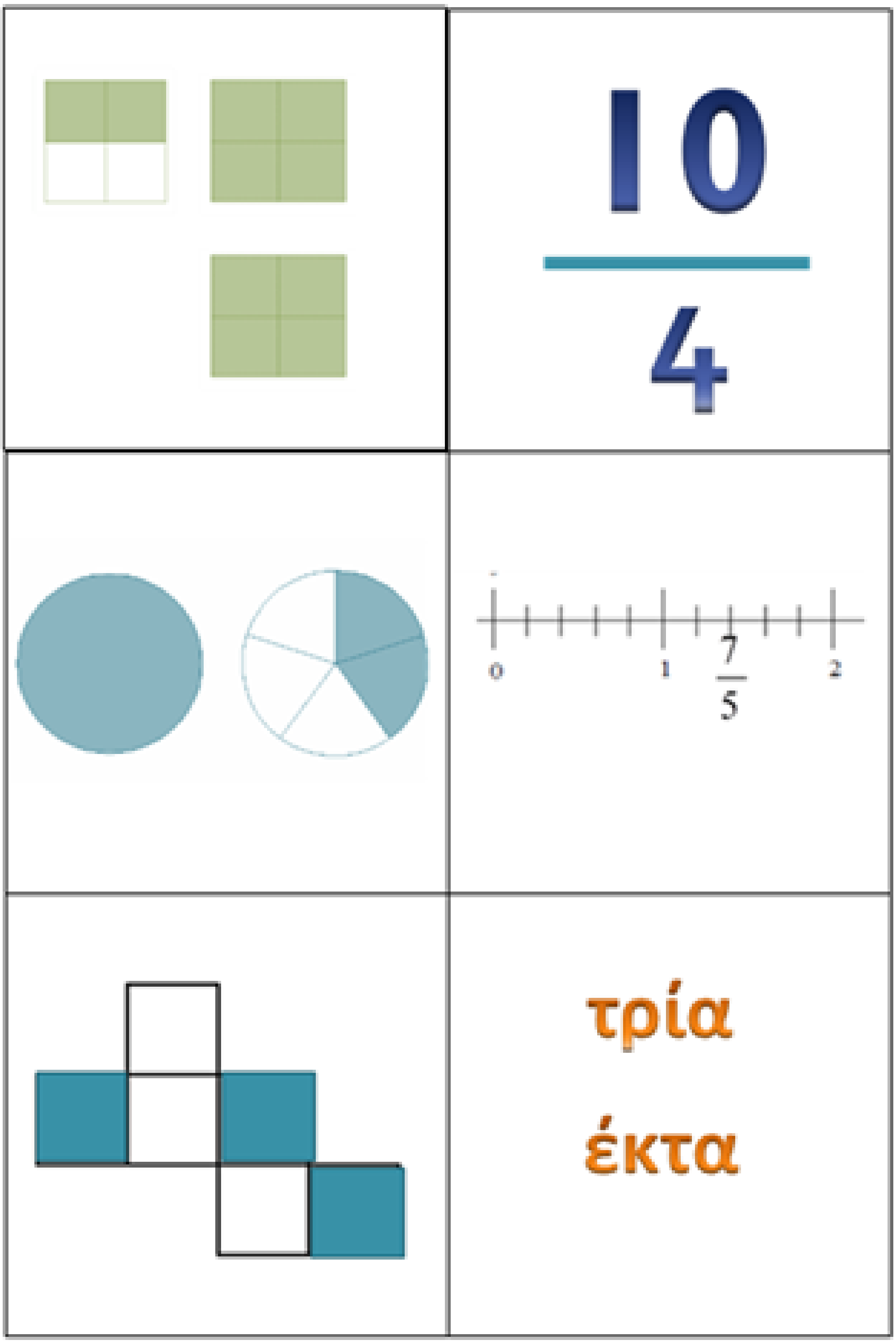
πέντε τρίτα	
	
οχτώ δέκατα	

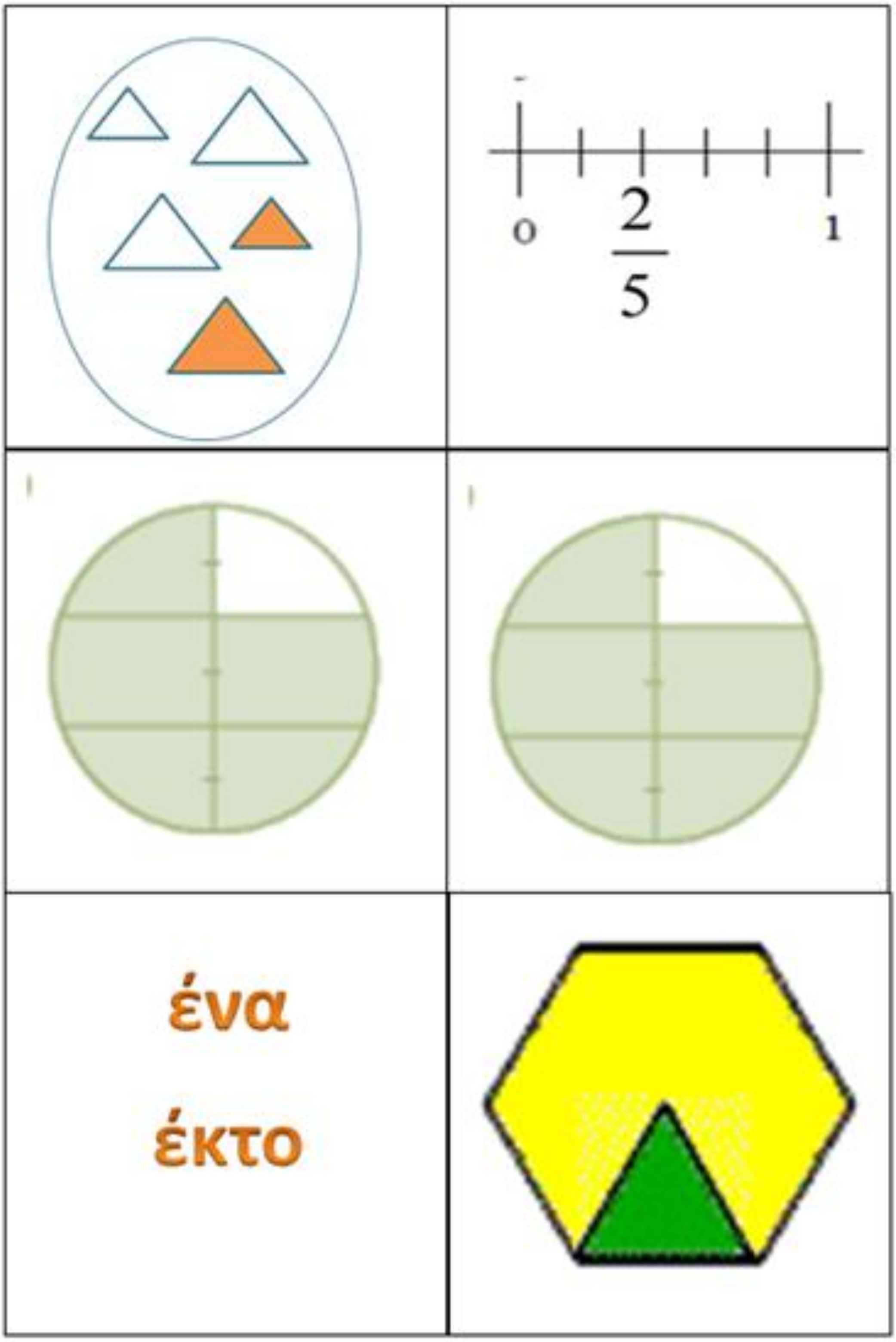

5
4

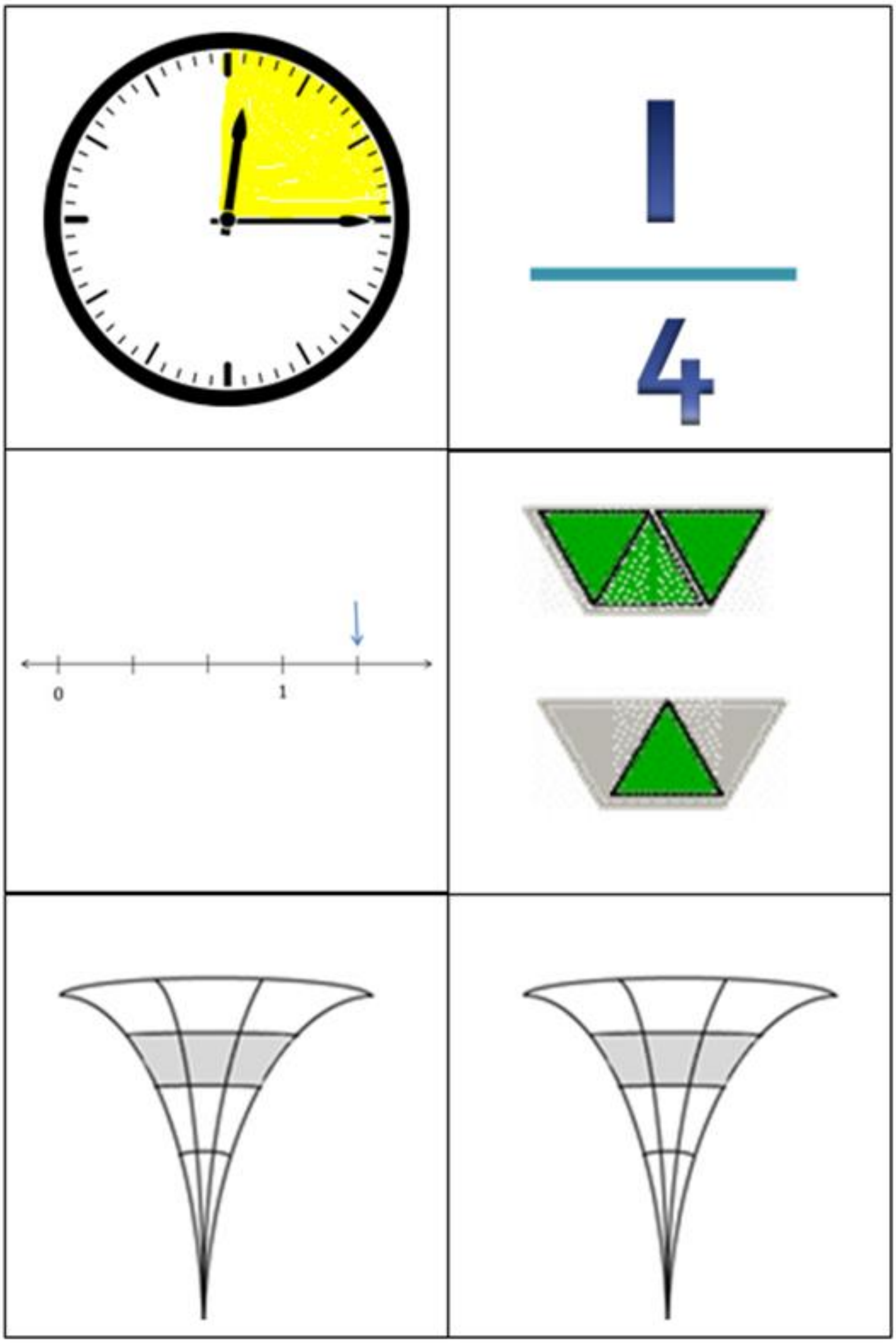

β
δ
α
γ

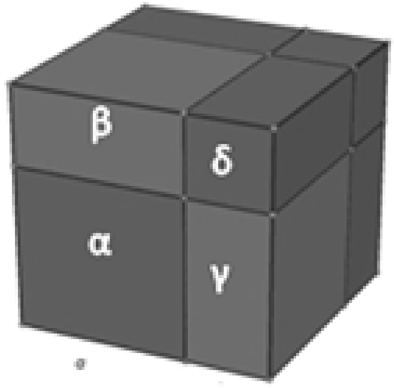
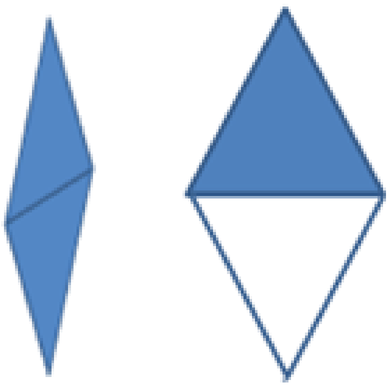
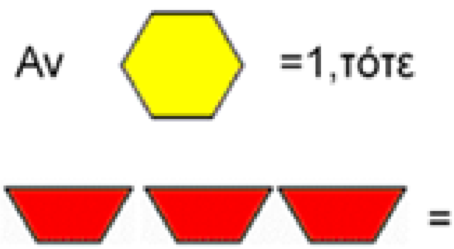

0
1
2
2
6

18. ΤΑ 12 ΖΕΥΓΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΜΝΗΜΗΣ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 5Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ



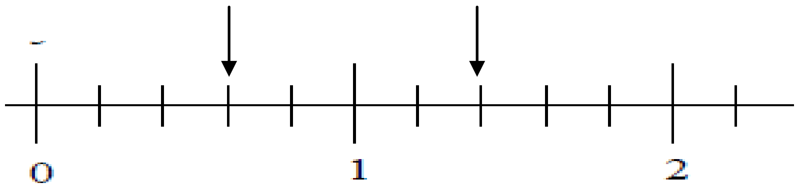

0
2/5
1
ένα
έκτο


1
4
0
1

	$\alpha = \frac{1}{8}$
	τρία δεύτερα
	$\frac{3}{2}$

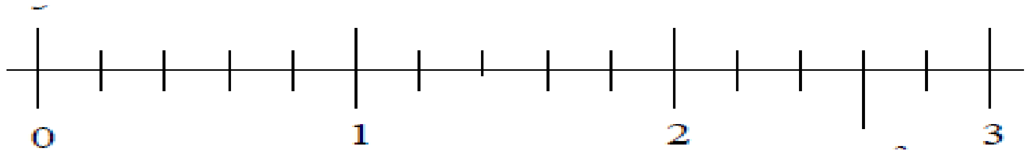
19. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ 6ΗΣ ΦΑΣΗΣ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

1. Ποια κλάσματα δείχνουν τα βέλη στην αριθμογραμμή;



2. Τοποθέτησε τα παρακάτω κλάσματα στην αριθμογραμμή:

α) $\frac{2}{5}$ **β)** $\frac{5}{5}$ *γ)* $\frac{12}{5}$ **δ)** $\frac{8}{20}$

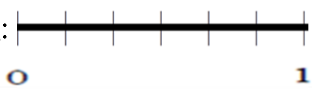


3. Να απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1: _________

β) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στα $\frac{7}{8}$ και το 1. Πόσα κλάσματα μπορείς να βρεις;________

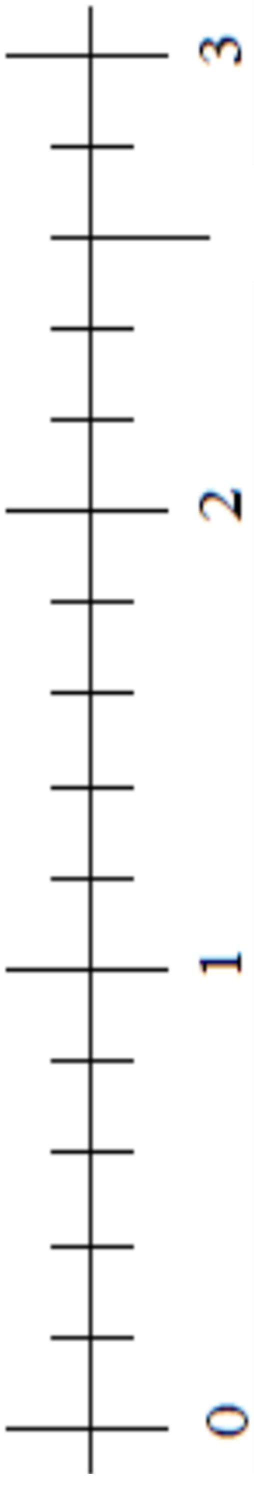
γ) Ονόμασε ένα κλάσμα ανάμεσα στο 0 και $\frac{1}{10}$ αλλά ο αριθμητής να μην είναι το1:_____

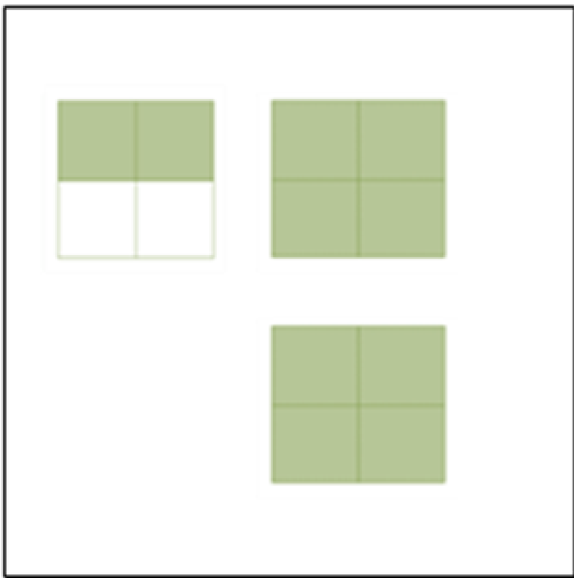
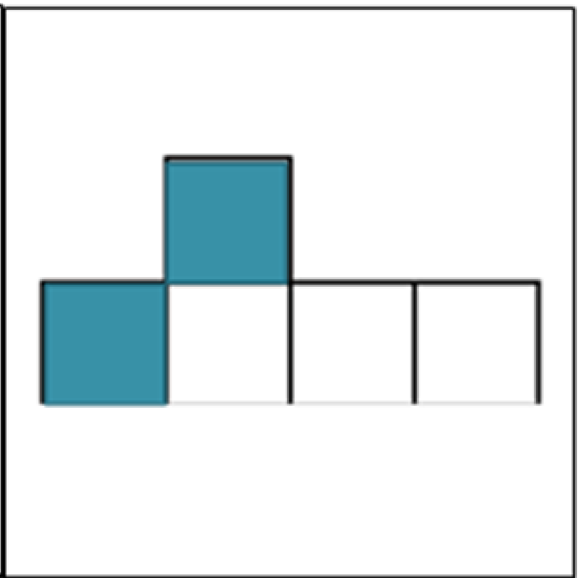
δ) Χρωμάτισε τα $\frac{4}{6}$ του σχήματος: 

4. Να βάλεις από τα ακόλουθα σύμβολα =, <, > αυτό που ταιριάζει ανάμεσα στα παρακάτω κλάσματα:

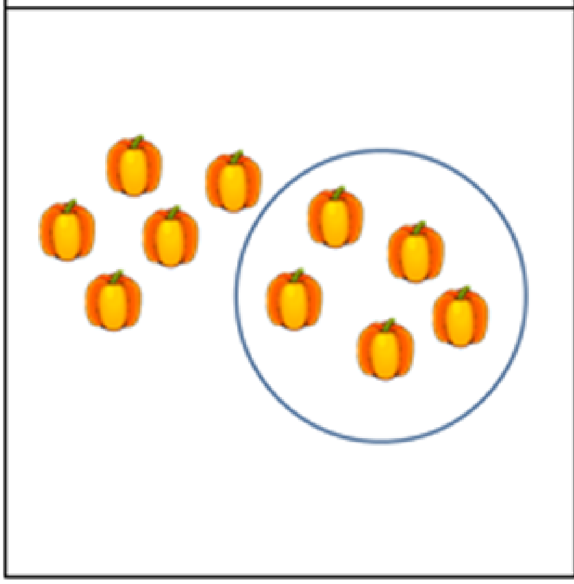
α) $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ **γ)** $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{9}$ **δ)** $\frac{29}{30}$ $\frac{14}{7}$ **ε)** $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{20}$

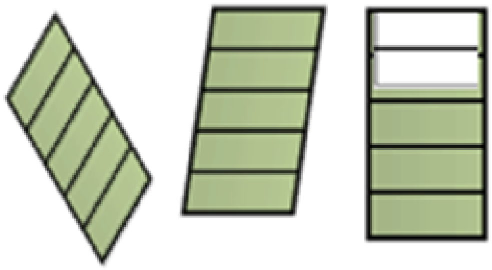
20. Η ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ ΚΑΙ ΟΙ 18 ΚΑΡΤΕΣ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «ΚΟΚΤΕΪΛ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ» ΚΑΤΑ ΤΗΝ 7Η ΦΑΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

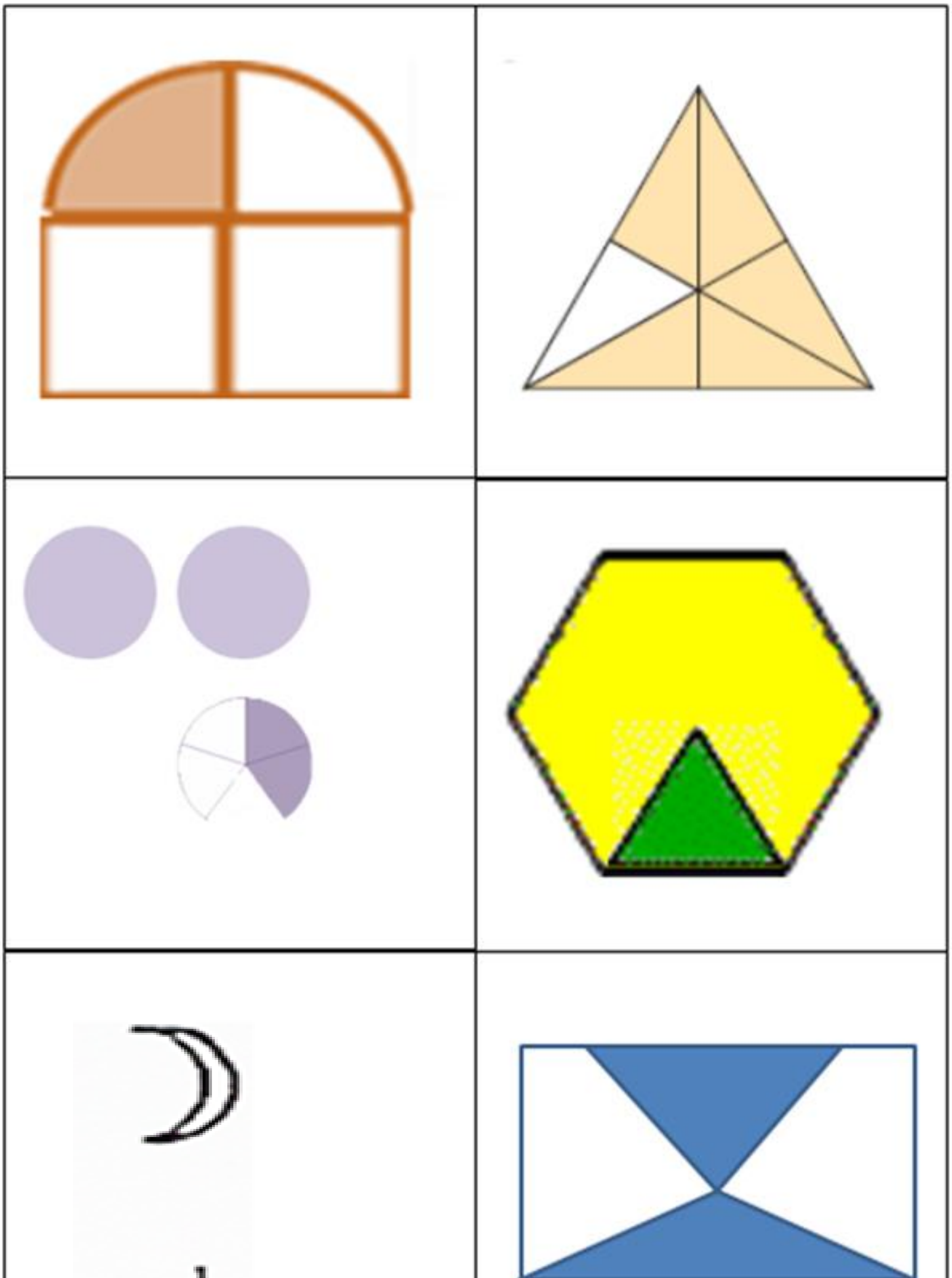


$\frac{1}{2}$




οχτώ πέμπτα	
	$\frac{18}{10}$
οχτώ δέκατα	


1/5