ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μία Μελέτη-Θεώρηση για την Αξιολόγηση της Γεωμετρικής Σκέψης των Φοιτητών -Μελλοντικών Δασκάλων- της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης σύμφωνα με τα Επίπεδα Van Hiele με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών.

A Study-Thesis for Assessing the Geometric Thinking of Students - Future Teachers - of Higher Education at Van Hiele Levels Using New Technologies.

ΜΑΛΚΟΤΣΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ

Επιβλέπων: Ευγένιος Αυγερινός Καθηγητής Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 25/01/2019

1. **Ευγένιος Αυγερινός Καθηγητής ΠΤΔΕ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου**

2. **Σκουμιός Μιχαήλ, Επίκ. Καθηγητής ΠΤΔΕ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου**

3. **Σοφός Αλιβίζος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Αιγαίου**

ΡΟΔΟΣ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2019

Δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της πρωτότυπης μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, ότι έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες και ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ.

Μαλκότσης Αριστείδης

Αφιερωμένη στα παιδιά μου,
Ιόλη και Δημήτρη-Θοδωρή

Ευχαριστήριο Σημείωμα

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Ευγένιο Αυγερινό και την διδακτορική φοιτήτρια Δήμητρα Ρεμούνδου για την πολύπλευρη συμπαράσταση και βοήθεια που μου παρείχαν.

Πρόλογος

Η Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που, εξαιτίας της φύσης της, έχουν διαπιστωθεί πολλά προβλήματα τόσο στην κατανόησή της, όσο και στη χρήση των κατάλληλων μοντέλων και μεθόδων στους μαθητές τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η εικοσαετής και πλέον διδακτική μου ενασχόληση στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση ως καθηγητής μαθηματικών με έφερε σε επαφή με τα συγκριτικά αυξημένα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τόσο του Γυμνασίου, όσο και του Λυκείου στον κλάδο της Γεωμετρίας. Την ίδια αυξημένη δυσκολία παρατήρησα και σε φοιτητές κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και στα πλαίσια έρευνας των Αυγερινός, Μαλκότσης, Ρεμούνδου, (2018) με θέμα "Η αντίληψη του κύβου σε σχέση με άλλες έννοιες των μαθηματικών από μελλοντικούς δασκάλους".

Το ενδιαφέρον μου για τη Γεωμετρία, οι πιθανοί τρόποι αντιμετώπισης των προβλημάτων που αναδύονται κατά τη διδασκαλία της καθώς και προτάσεις βελτίωσης της διδακτικής της με οδήγησαν στη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας που ακολουθεί.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ
Μέρος Α – Θεωρητικό πλαίσιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
Η Διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
Η θεωρία επιπέδων των van Hieles

Μέρος Β – Η Έρευνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
Σχεδιασμός της έρευνας – μεθοδολογία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
Αποτελέσματα για τα επίπεδα

ΜΕΡΟΣ Γ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
Συμπεράσματα, συζήτηση, μελλοντικές κατευθύνσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο
Βιβλιογραφία

ΜΕΡΟΣ Δ - ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Μέρος Α – Θεωρητικό πλαίσιο

Κεφάλαιο 1ο
Η Διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1.1 Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει εγείρει πολλούς και σοβαρούς προβληματισμούς σχετικά με την χρησιμότητα και αποτελεσματικότητά της περισσότερο από κάθε άλλο κλάδο των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πολλοί καθηγητές μαθηματικών και ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι υπάρχουν πολλά προβλήματα στην κατανόηση και στη χρήση αναλυτικών-συνθετικών και αποδεικτικών μοντέλων από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα προβλήματα αυτά έγκεινται στους εξής λόγους (Τζίφας, 2005):

1. Η συνθετική δομή ανάπτυξης του περιεχομένου της Γεωμετρίας απαιτεί μια αυστηρή λογική ιεραρχία και μια διανοητική πειθαρχία, που οι μαθητές δεν κατέχουν ή τουλάχιστον είναι δύσκολο να κατανοήσουν.

2. Η έννοια της απόδειξης είναι η κυριότερη δυσκολία που καλούνται οι μαθητές να αντιμετωπίσουν.

3. Η συσσωρευτική δομή του περιεχομένου, ιεραρχικά δοσμένου απαιτεί από το μαθητή να ανακαλεί ανά πάσα στιγμή τις προηγούμενες γνώσεις του και να τις εφαρμόζει στα νέα προβλήματα που καλείται να επιλύσει. Τέτοιου είδους γνώσεις αποτελούν τα αξιώματα, τα θεωρήματα, τα πορίσματα καθώς και κάποιες βασικές προτάσεις. Αυτή η ιδιαιτερότητα δε συναντάται σε άλλα μαθήματα.

4. Η έλλειψη κινήτρων μάθησης, λόγω της απομόνωσης του μαθήματος από τα άλλα μαθηματικά, της αυτονομίας του και της μη άμεσης εφαρμογής του στις δραστηριότητες των μαθητών.

5. Οι περισσότεροι μαθητές δεν είναι έτοιμοι για παραγωγική σκέψη στην πρώιμη ηλικία των 14 ετών, στην οποία εισάγεται ουσιαστικά το μάθημα της Γεωμετρίας. Έτσι δεν κατανοούν σαφώς τη διαδικασία σκέψης και παραγωγής αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων, με αποτέλεσμα να μιμούνται τις αποδείξεις των καθηγητών τους, φτάνοντας στο τέλος της χρονιάς με απουσία αντίληψης της διαφοράς ανάμεσα σε αξιώματα, θεωρήματα και ορισμούς. Συνεπώς δεν έχουμε κατάκτηση και αφομοίωση γνώσης αλλά μια επιφανειακή μεταφορά στείρας γνώσης από καθηγητή προς μαθητή.

6. Η απουσία οδηγιών προς τους μαθητές ολοκληρώνει τον παραπάνω ισχυρισμό. Από τα πρώτα ερωτήματα που θέτουν οι μαθητές είναι το εξής: «Πώς θα αρχίσω να σκέφτομαι για να λύσω αυτό το γεωμετρικό πρόβλημα;».

Το Νοέμβριο του 1959, στο σεμινάριο του Royaumont που είχε θέμα τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης και είχε οργανωθεί από τον Ο.Ο.Σ.Α., Ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne, είχε εναντιωθεί στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκφωνώντας το σύνθημα “Να φύγει ο Ευκλείδης”. Ήταν μια προσπάθεια να καταργηθεί η παραδοσιακή διδασκαλία της γεωμετρίας που είχε ξεκινήσει από το 1792 με τη διδασκαλία του βιβλίου “Στοιχεία Γεωμετρίας” του Γάλλου μαθηματικού A.M. Legendre. O Legendre με το βιβλίο του, βασισμένο στο βιβλίο “Στοιχεία” του Ευκλείδη, συνέβαλε αποφασιστικά στη διάδοση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παγκοσμίως.

Όπως αναφέρουν οι Πούλος & Θωμαΐδης (2000), ο Jean Dieudonne προσέγγισε το ζήτημα της μεταρρύθμισης των μαθηματικών με καθαρά τεχνοκρατικό τρόπο. Έτσι θεώρησε ότι, ο Ευκλείδειος χώρος δεν είναι παρά ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πού είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Όλη η παραδοσιακή ύλη της Γεωμετρίας είναι άχρηστη για τις μελλοντικές σπουδές των νέων και για αυτό ολόκληρη η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα έπρεπε να διδάσκεται σε δύο-τρεις ώρες έτσι ώστε να περιγράφεται το αξιωματικό της σύστημα, και οι χρήσιμες συνέπειές του και ίσως λίγες ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Η μεταρρύθμιση των “νέων μαθηματικών” είχε ως αποτέλεσμα τον εκτοπισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από αυτόνομο μάθημα στις περισσότερες χώρες του κόσμου και έπαψε να είναι μέρος των αναλυτικών τους προγραμμάτων διδασκαλίας. «Σήμερα, 40 χρόνια μετά, ενώ βασικές επιλογές εκείνης της μεταρρύθμισης έχουν αποτύχει (π.χ. η έμφαση στη διδασκαλία των συνόλων και των αλγεβρικών δομών) και κάποιες άλλες επιβιώνουν (π.χ. η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, του Διανυσματικού Λογισμού, της Γραμμικής Άλγεβρας), η κατάσταση στο χώρο της Γεωμετρίας παραμένει, διεθνώς, θολή. Ίσως, η καλύτερη περιγραφή αυτής της κατάστασης συνοψίζεται στην ακόλουθη φράση του Άγγλου μαθηματικού και παιδαγωγού Douglas Quadling: “ ο Ευκλείδης έχει φύγει, αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος” » (Πούλος & Θωμαΐδης, 2000).

Όπως αναφέρουν οι Πούλος & Θωμαΐδης (2000) οι λόγοι που διδάσκεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η καλλιέργεια και ανάπτυξη της συγκροτημένης σκέψης καθώς και η μύηση στην επιστημονική μέθοδο μελέτης του κόσμου. Οι σκοποί αυτοί, αν και είναι πολλοί γενικοί, συνδέονται με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

- Σαφήνεια στην έκθεση.
- Ολοκληρωτική απόδειξη κάθε υπόθεσης.
- Απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών.
- Τάξη και ομορφιά.

Ο Einstein αναφέρει “Σε ηλικία 12 ετών δοκίμασα μία δεύτερη, τελείως διαφορετική έκπληξη: σε ένα μικρό βιβλίο Ευκλείδειας Επίπεδης Γεωμετρίας… Εδώ υπήρχαν ισχυρισμοί, όπως για παράδειγμα ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, οι οποίοι - αν και καθόλου προφανείς - μπορούσαν ωστόσο να αποδειχτούν με τέτοια βεβαιότητα, ώστε να μη χωράει η παραμικρή αμφιβολία. Αυτή η σαφήνεια και βεβαιότητα μου προξένησαν μια εντύπωση που δεν μπορεί να περιγραφεί. Το γεγονός ότι, τα αξιώματα έπρεπε να γίνουν δεκτά χωρίς απόδειξη δεν με ενόχλησε. Σε κάθε περίπτωση, μου αρκούσε πλήρως το γεγονός ότι, μπορούσα να στηρίζω τις αποδείξεις σε προτάσεις, η εγκυρότητα των οποίων ήταν για μένα αναμφισβήτητη.” Schilpp, P. A. (1949)

Η αμφισβήτηση και ο πόλεμος κατά της γεωμετρίας πού ξεκίνησε το Νοέμβριο του 1959 με αρχηγό τον Jean Dieudonne, διαρκεί μέχρι το παρόν. Όπως αναφέρουν οι Πούλος & Θωμαΐδης (2000) σε μία ειδική Μελέτη της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICMI), έγινε προσπάθεια σύνθεσης των διαφόρων τάσεων και διατυπώθηκαν τρεις εναλλακτικές λύσεις για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας:

1. Απόρριψη της ιδέας ότι η γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχολείο ως ένα σύστημα γνώσεων. αντίθετα πρέπει να θεωρηθεί πηγή άντλησης εξαιρετικών θεμάτων για την οργάνωση πολλαπλών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα και με τη βοήθεια αλγεβρικών μεθόδων.
2. Συνέχιση της διδασκαλίας ενός αξιωματικού ή ψευδό-αξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας, το οποίο στηρίζεται στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη ή κάποια παραλλαγή τους.
3. Μέσα στα πλαίσια του γενικού αναλυτικού προγράμματος να παρουσιάζονται, τουλάχιστον για ορισμένες ομάδες μαθητών, κάποια κομμάτια της Γεωμετρίας.

Η ελληνική προσέγγιση σύμφωνα με τους Πούλος & Θωμαΐδης (2000) σε αυτή την διαμάχη, για ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους, πλησιάζει προς την δεύτερη από τις παραπάνω επιλογές:

- Διατηρήθηκε όλη η παραδοσιακή σχολική ύλη που αποτελούσε και μέρος της ύλης των εισαγωγικών εξετάσεων στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.
- Δόθηκε υπερβολική έμφαση στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας
- Εισήχθη καινούργια ύλη πάνω στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (γνωστή και ως “συμπλήρωμα” της Γεωμετρίας).

Στις αντιφατικές αυτές επιλογές εκείνης της περιόδου στηρίζεται η υποβάθμιση και η παρακμή του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σήμερα.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας και τα σχολικά εγχειρίδια προσανατολίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και αφηρημένες έννοιες. Τα αποτελέσματά τους φαίνονται από το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης το οποίο έχει κατακτήσει ο μαθητής σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων των Van Hieles που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

1.2.1 Ιστορική αναδρομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη του χώρου και των σχημάτων, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν.

Η Γεωμετρία υπήρξε ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη. Για πολλούς αιώνες ήταν ο μόνος επιστημονικός κλάδος. Από την αρχαιότητα έως και σήμερα ο χώρος και τα σχήματα αποτελούν ένα προσιτό, πλούσιο και πρόσφορο αντικείμενο για θεωρητική μελέτη και πρακτικές εφαρμογές, με πολλά πεδία εφαρμογής.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων συναντώνται μεταξύ τρίτης και δεύτερης χιλιετίας π.Χ. και προέρχονται από την αρχαία Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία. Ήταν γνώσεις κυρίως Πρακτικής Γεωμετρίας, με σκοπό τον υπολογισμό επιφανειών και όγκων.

Στην Αρχαία Ελλάδα η Γεωμετρία αρχίζει να γίνεται μία αφηρημένη και αποδεικτική επιστήμη καθώς εισέρχεται στη Γεωμετρία η έννοια της λογικής απόδειξης. Εμφανίζονται οι πρώτες γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου και τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη.

Κατά την ελληνιστική εποχή αναπτύσσονται καινούργιες μέθοδοι υπολογισμού των επιφανειών και των όγκων που στηρίζονται σε αφηρημένες προσεγγίσεις και βαθύτερες μαθηματικές θεωρίες. Ταυτόχρονα εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα (π.χ. κωνικές τομές). Περίπου στην ίδια εποχή ξεκινάνε οι προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση δημιουργεί καινούργια άνθηση στη Γεωμετρία. Είναι η εποχή που ο Καρτέσιος εισάγει τη μέθοδο των συντεταγμένων. Έτσι γεννιέται μία νέα Γεωμετρία που ονομάστηκε Αναλυτική Γεωμετρία και μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με μεθόδους της άλγεβρας.

Κατά τον 17ο αιώνα αναπτύσσεται η Προβολική Γεωμετρία που έχει ως αντικείμενο την απεικόνιση των σωμάτων πάνω στο επίπεδο.

Κατά το 18ο αιώνα η δημιουργία του διαφορικού λογισμού γεννάει τη Διαφορική Γεωμετρία που έχει ως αντικείμενο όλες τις λείες καμπύλες και επιφάνειες και τους μετασχηματισμούς τους.

Η θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους της γεωμετρίας οι θεμελιώδεις έννοιες και τα αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα ο Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και ο Γ. Μπόλυαϊ (1832) ανακαλύπτουν σχεδόν ταυτόχρονα την ύπαρξη μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Κατά την περίοδο αυτή έχουμε την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών. Το 1854 ο Ρήμαν διατυπώνει την νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου που οδηγεί στη γέννηση μιας νέας γεωμετρίας, της Ρημάνιας Γεωμετρίας.

1.2.2 Ιστορική αναδρομή της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα

Το 1830 είχαμε την ίδρυση του ελληνικού κράτους. Το 1836 είχαμε για πρώτη φορά την οργάνωση του εκπαιδευτικού συστήματος. Όπως αναφέρει ο Τζίφας (2006), η ιστορική αναδρομή ξεκινάει από το έτος 1836 και με **κριτήριο τα εκπαιδευτικά προγράμματα**, όπως προτείνεται από το Γαγάτση (1993).

Οι τρεις σχετικές περίοδοι είναι:

- Α Περίοδος: 1830-1884 κυριαρχούν απλά στοιχεία μαθηματικής παιδείας.
- Β Περίοδος: 1885-1968 είναι έντονη η ύπαρξη αποδείξεων και σχημάτων.
- Γ Περίοδος: 1968-παρόν η περίοδος αυτή είναι επηρεασμένη από τις παραμέτρους που εισήγαγαν τα νεότερα μαθηματικά.

Α Περίοδος: 1830-1884

Στην πρώτη διδακτέα ύλη του 1836 για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η διδασκαλία των μαθηματικών γίνεται χωρίς να υπάρχει διάκριση σε κλάδους.

Η ρύθμιση του υλικού στη διδακτέα ύλη του 1857 καθώς επίσης και το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο που χρησιμοποιήθηκε κατά την εποχή εκείνη, δείχνουν ότι το περιεχόμενό της Γεωμετρίας δεν αντιγράφηκε αυστηρά σύμφωνα με τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, όπως είχε γίνει π.χ. στην Αγγλία. (Τουμάσης, 1990)

Στην Ελλάδα μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα, το σχολικό εγχειρίδιο Γεωμετρίας που επικράτησε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ήταν η Γεωμετρία του Legendre σε διάφορες εκδόσεις:

- Ιωάννης Καρανδινός, το 1829 στην Κέρκυρα
- Γεώργιος Ζώχιος, το 1857 στην Αθήνα
- Χρήστος Βάφας, το 1860 στην Αθήνα
- Αντώνιος Δαμασκηνός, το 1862 στην Αθήνα
- Αντώνης Φατσέας, το 1870

Β Περίοδος: 1885-1968

Κατά την περίοδο αυτή το μάθημα των μαθηματικών καταλαμβάνει περισσότερο χρόνο και διαιρείται σε κλάδους: Αριθμητική, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία. Ο διαχωρισμός αυτός διήρκεσε μέχρι τη μεταρρύθμιση των "σύγχρονων" μαθηματικών κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960. Σε αυτό το διάστημα υπάρχουν διάφορες γεωμετρίες τύπου Legendre π.χ. του Χατζιδάκη, του Μπαρμπαστάθη και του Νικολάου.

Γ Περίοδος: 1968-παρόν

Στη συνέχεια εμφανίζονται παροδικά κάποιες γεωμετρίες που χρησιμοποιούν στοιχεία της αξιωματικής του Hilbert, π.χ. του Ιωαννίδη και των Παπαμιχαήλ/Σκιαδά όπου συμβιώνουν και εναλλάσσονται με αυτές της προηγούμενης κατηγορίας, π.χ. του Παπανικολάου.

Οι νέες προσπάθειες τείνουν να εξαλείψουν τις επιστημολογικές αποκλίσεις των γεωμετριών του Legendre από τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη.

Οι διαφορές των δύο τάσεων προσδιορίζονται από τον Καστάνη (1986) ως εξής:

- Γίνεται μία αναδόμηση του περιεχομένου.
- Η πρόσληψη των γεωμετρικών εννοιών γίνεται μόνο με εναλλακτικό τρόπο.
- Η αποδεικτική διαδικασία βασίζεται στη λογική συμπερασματολογία.
- Οι γεωμετρικές κατασκευές περιορίζονται μόνο σε ένα κεφάλαιο με τη μορφή εφαρμογών.
- Γίνεται προσπάθεια λογικής αυστηρότητας με τη βοήθεια της Αριθμητικής και της Άλγεβρας.

Ακολουθεί η μεταρρύθμιση του 1999 όπου εκδίδεται το πρώτο βιβλίο των Θωμαΐδη - Ξένου - Παντελίδη - Πούλου - Στάμου.
Ύστερα από δύο χρόνια αντικαθίσταται από το σημερινό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας των Αργυρόπουλου - Βλάμου - Κατσούλη - Μαρκάτη - Σίδερη, που υλοποιήθηκε με τη συμβολή της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που ισχύει από το 1997 και βελτιώθηκε το 2004, στην προσπάθειά του για μία σύγχρονη διδακτική και μαθησιακή πραγματικότητα, εισήγαγε πολλές καινοτομίες στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

- Υποβαθμίζει την αξιωματική θεμελίωση και δίνεται έμφαση στην έννοια της απόδειξης και ιδιαίτερα με την αναλυτική-συνθετική μέθοδο, η οποία αναδεικνύει την ευρετική πορεία μιας απόδειξης.
- Επαναφέρει τη διδασκαλία ενός πεδίου εφαρμογής των προτάσεων της ευκλείδειας γεωμετρίας όπως είναι τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.
- Εμπλουτίζεται η διδασκαλία με δραστηριότητες. Εισάγονται προβλήματα που υπερβαίνουν το επίπεδο των παραδοσιακών ασκήσεων και ενθαρρύνεται η ομαδική εργασία και έρευνα των μαθητών μέσα στην τάξη.
- Προτείνεται η υποστήριξη της διδασκαλίας από εφαρμογές ηλεκτρονικών υπολογιστών μέσω δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας, π.χ. Geometer's Sketchpad, Geogebra.

(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1997, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2004)

1.3 Το σημερινό Πλαίσιο διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (2000-2018)

Το σχολικό εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας διακρίνεται σε:

- Εξαετή Δημοτική εκπαίδευση,
- Τριετή Γυμνασιακή εκπαίδευση,
- Τριετή Λυκειακή εκπαίδευση

Η Δημοτική και Γυμνασιακή εκπαίδευση είναι υποχρεωτικές, ενώ η Λυκειακή εκπαίδευση είναι προαιρετική. Η Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση αφορά το δημοτικό. Η Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση αφορά το Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Η μαθηματική ύλη στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση προβλέπεται από την υπουργική απόφαση Υ.Α.115475/Γ2/21-8-2013 και είναι δημοσιευμένη στο Φ.Ε.Κ. 2121/τεύχος Β/28-8-2013. Μικρές αλλαγές έχουν επέλθει και με τις παρακάτω εγκυκλίους με αριθμό πρωτοκόλλου 139606/Γ2/01-10-2013 της Δ/σης Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης /Τμήμα Α, ΥΠΕΘ, της με αριθμό πρωτοκόλλου 159253/Δ2/09-10-2015 και με αρ.πρωτ. 159259/δ2/09-10-2015 της Δ/σης Σπουδών Προγραμμάτων και Οργάνωσης Δ/μιας Εκ/σης, τμήμα Α.

Σύμφωνα με αυτά προβλέπονται 4 ώρες εβδομαδιαίας Μαθηματικής διδασκαλίας σε κάθε μία από τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.
Στο Γενικό Λύκειο προβλέπονται 5 ώρες εβδομαδιαίας Μαθηματικής διδασκαλίας στις πρώτες 2 τάξεις του λυκείου και 2 ώρες εβδομαδιαίως στην Γ Λυκείου. Οι μαθητές που ακολουθούν θετική κατεύθυνση έχουν 2 επιπλέον ώρες Μαθηματικών στη Β Λυκείου και 5 επιπλέον ώρες μαθηματικών στη Γ Λυκείου.

Η ύλη του μαθήματος των Μαθηματικών στο γυμνάσιο που διδάσκεται ένα τάξη είναι:

- Α Γυμνασίου:
  φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί, εξισώσεις, ανάλογα ποσά, θετικοί/αρνητικοί αριθμοί, βασικές αρχές γεωμετρίας, συμμετρία, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα, τραπέζια.

- Β Γυμνασίου:
  εξισώσεις, συναρτήσεις, στατιστική, τριγωνομετρία, γεωμετρικά στερεά και μέτρηση στερεών.

- Γ Γυμνασίου:
  αλγεβρικές παραστάσεις, συναρτήσεις, πιθανότητες, γεωμετρία, τριγωνομετρία.

Η ύλη του μαθήματος των Μαθηματικών στο γενικό λύκειο είναι:

- Α Λυκείου:
  Άλγεβρα (πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις, συστήματα γραμμικών εξισώσεων, εξισώσεις-ανισώσεις δεύτερου βαθμού, τριγωνομετρία)
  Γεωμετρία (επίπεδο, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, είδη γωνιών, τρίγωνα, παράλληλες ευθείες, παραλληλόγραμμα, τραπέζια, εγγεγραμμένα σχήματα, αναλογίες, ομοιότητα)

- Β Λυκείου:
  Άλγεβρα (τριγωνομετρία, πολυώνυμα, πολυωνυμικές εξισώσεις, πρόοδοι, εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση)
  Γεωμετρία (μετρικές σχέσεις, εμβαδά, μέτρηση κύκλου, ευθείες και επίπεδα, στερεά σχήματα)
  Μαθηματικά κατεύθυνσης (διανύσματα, εξίσωση ευθείας, κωνικές τομές, θεωρία αριθμών)

- Γ Λυκείου:
  Γενικής Παιδείας (συναρτήσεις, έννοια της παραγωγού, εφαρμογές των παραγωγών, βασικά στοιχεία στατιστικής, μέτρα θέσης και διασποράς, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα, η έννοια της πιθανότητας)
  Κατεύθυνσης (Ανάλυση: όριο - συνέχεια συνάρτησης, διαφορικός λογισμός, ολοκληρωτικός λογισμός)

Στα επαγγελματικά Λύκεια (ΕΠΑΛ):

- Α Λυκείου:
  Προβλέπονται 5 ώρες εβδομαδιαίως μαθηματικής διδασκαλίας (άλγεβρα και γεωμετρία).
- Β Λυκείου:
  Προβλέπονται 2 ώρες εβδομαδιαίως άλγεβρα, 1 ώρα Γεωμετρία, 2 ώρες μαθηματικά τεχνολογικής κατεύθυνσης.
- Γ Λυκείου:
  Προβλέπονται 5 ώρες Μαθηματικής διδασκαλίας εβδομαδιαίως και η δυνατότητα επιλογής του μαθήματος "Ειδικά Κεφάλαια Στατιστικής" που διδάσκεται για 2 ώρες εβδομαδιαίως.

Βασικός στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η καλλιέργεια της Μαθηματικής σκέψης και η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της Μαθηματικής επιστήμης όπως η ακρίβεια, η συντομία, η γενίκευση, η αφαίρεση. Η διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκει τη βελτίωση των ικανοτήτων του ατόμου να ερμηνεύει, να αναλύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και τον κόσμο με τον βέλτιστο τρόπο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά ως πολύτιμο εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων με ορθή κρίση.

Παρά την οποία μεταρρυθμιστική πνοή, με βάση το Πρόγραμμα Σπουδών που ακολουθήθηκε από το 2000, οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών δεν αυξήθηκαν. Συγκεκριμένα στο γυμνάσιο οι ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών καλύπτουν μόνο το 11% του ωρολογίου προγράμματος, τη στιγμή που ο μέσος όρος της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι 13%, όπως συμβαίνει και στις χώρες του ΟΟΣΑ. Στο Λύκειο στην Ελλάδα στην Α και Β Λυκείου οι ώρες Μαθηματικών Γενικής Παιδείας είναι κάτω από 15% ωρών ανά έτος, όταν σε άλλες χώρες ξεπερνά το 20% (Θωμαΐδης & Καστάνης, 2003)

1.4 Θεωρίες για τη Διδασκαλία της Γεωμετρίας

1.4.1 Η Γνωστική Μαθητεία

Οι Δημάκος, Νικολουδάκης, (2008) αναφέρουν ότι η γνωστική μαθητεία αποτελεί ένα διδακτικό σχεδιαστικό μοντέλο που είναι βασισμένο στις σύγχρονες αντιλήψεις για το πώς μαθαίνουν τα άτομα (Bransford, Brown, & Cocking, 2000). Το φιλοσοφικό και θεωρητικό υπόβαθρό της οριοθετείτε από την Κοινωνικοπολιτισμική Θεωρία Μάθησης (sociocultural learning theory), τη Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης του Vygotsky (ZPD) (zone of proximal development), την Εγκαθιδρυμένη (ή Εγκατεστημένη) Γνώση (situated cognition) και την Παραδοσιακή Μαθητεία (traditional apprenticeship). Η προσέγγιση της εν λόγω μεθόδου, όπως διατυπώθηκε από τους Collins, Brown, & Newman, (1989) και Collins, Brown, & Holum, (1991) συνίσταται από τις έξι ακόλουθες διδακτικές μεθόδους:

• Επίδειξη μοντέλου (modelling): Οι μαθητές παρατηρούν ειδικό που εκτελεί συγκεκριμένο έργο, ώστε να σχηματίσουν κατάλληλο νοητικό μοντέλο.

• Καθοδήγηση (coaching): Συμβουλές και υποστήριξη από το δάσκαλο και από ανατροφοδότηση.

• Παροχή υποστηριγμάτων και Εξασθένηση (scaffolding and fading): Εκτέλεση ή υποστήριξη από το δάσκαλο αρχικών προβληματικών βημάτων με σταδιακή αποχώρησή του, γεγονός που αφήνει στο μαθητή την πρωτοβουλία κινήσεων.

• Σαφήνεια (articulation): Εξωτερίκευση γνώσεων και δραστηριοτήτων κατά τη λύση προβλημάτων.

• Αναστοχασμός (reflection): Ο μαθητής συγκρίνει τη δική του διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με των ειδικών και άλλων μαθητών.

• Εξερεύνηση (exploration): Έρευνα για λύση προβλημάτων με προσωπικό τρόπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο ρόλος της τεχνολογίας σύμφωνα με τους Collins (1991), De Corte (1990); De Bruijn (1993b); Wilson & Cole (1991) στη Γνωστική Μαθητεία είναι πολύ σημαντικός από την άποψη ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές παρέχουν σημαντική βοήθεια στις μεθόδους της εν λόγω μεθόδου καθώς οι Τ.Π.Ε. επιτρέπουν τη δημιουργία καταστάσεων μίμησης του πραγματικού κόσμου (Collins, 1991), που μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων για τη Γνωστική Μαθητεία (Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos, & Choustoulakis, 2007), η μάθηση λαμβάνει χώρα μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο (situated learning), πράγμα που επιτρέπει στο μαθητή να αντιλαμβάνεται το σκοπό της μάθησης και τη χρήση των δεξιοτήτων που αποκτά (Brown, Collins, & Duguid, 1989). Σημειώνουμε επίσης ότι ο ρόλος της τεχνολογίας στη διδασκαλία στις μέρες μας έχει υποστηριχθεί από πολλούς ερευνητές και δασκάλους (Hillel, 1993; Dorfler, 1993; Laborde, 1993). Σύμφωνα δε με τους Noss και Hoyles, (1992) ο υπολογιστής παίζει κεντρικό όσον αφορά την αλληλεπίδραση καθηγητή μαθητών και δραστηριοτήτων τις οποίες οι μαθητές καλούνται να φέρουν σε πέρας. Οι Clements και Battista (1990) θεωρούν ότι η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να βελτιώσουν τον τρόπο κατασκευής των γεωμετρικών εννοιών και την ικανότητά τους να αιτιολογούν και πρότειναν την εφαρμογή στα σχολεία ενός αναλυτικού προγράμματος Γεωμετρίας προσανατολισμένου γύρω από τη Logo. Σημειώνουμε ακόμη ότι με το δυναμικό λογισμικό The Geometer's Sketchpad μπορούμε να έχουμε κατασκευές που σύμφωνα με τον De Villiers (1999) βοηθούν στη μετάβαση από το δεύτερο επίπεδο van Hiele στο τρίτο, ενώ σύμφωνα με την

Mariotti (2003) με το «σύρσιμο» (dragging) δημιουργείται ένα «εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης» από την προοπτική του Vygotsky. Τέλος, ο Καλαβάσης (1997) σημειώνει ότι οι απαιτήσεις ικανοτήτων σε τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν κατ' απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας όπως αυτές συντίθενται από τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Οι Δημάκος, Νικολουδάκης, (2008) αναφέρουν ότι, προκειμένου να διερευνηθεί η επίδοση των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας, όταν διδαχθούν τη Γεωμετρία με τη μέθοδο διδασκαλίας που συνδυάζει το μοντέλο van Hiele με τις μεθόδους γνωστικής μαθητείας, μέσω ενός δομημένης μορφής φύλλο εργασίας, έκαναν έρευνα σε 250 μαθητές από 6 Λύκεια της Δυτικής Αθήνας. Τα αποτελέσματα της έρευνας δίνουν σημαντικές ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η ένταξη των φάσεων της θεωρίας van Hiele στις μεθόδους της γνωστικής μαθητείας μπορούν να συμβάλλουν στο να βελτιωθεί η απόδοση των μαθητών της Α Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας. Οι πιο αδύνατοι μαθητές φάνηκε να παρουσιάζουν μεγαλύτερη βελτίωση, γεγονός που υποδεικνύει ότι η συγκεκριμένη διδακτική μέθοδος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να περάσουν στο επόμενο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

1.4.2 Η θεωρία κατηγοριών

Ο Πρίντεζης (2006) αναφέρει ότι η δομή των επιπέδων van Hiele μπορεί να ερμηνευθεί και στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών. Η θεωρία αυτή ασχολείται ακριβώς με τη μελέτη της δομής κάποιων συνόλων. Μία κατηγορία συνίσταται από μία συλλογή στοιχειωδών αντικειμένων που καλούνται αντικείμενα και από μία συλλογή σχέσεων ανάμεσα στα αντικείμενα που καλούνται μορφισμοί και ικανοποιούν κάποια αξιώματα. Για παράδειγμα σε μία κατηγορία τα αντικείμενα μπορεί να είναι σύνολα και οι μορφισμοί να είναι συναρτήσεις ανάμεσα στα σύνολα. Σε μία άλλη κατηγορία τα αντικείμενα μπορεί να είναι ομάδες και οι μορφισμοί να είναι οι ομοιομορφισμοί μεταξύ των ομάδων.

Ο Πρίντεζης (2006) αναφέρει ότι:
"Θα μπορούσαμε να δούμε τα επίπεδα van Hiele σαν κατηγορίες και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη δομή αυτή και σε άλλες περιοχές εκτός της Γεωμετρίας. Τα αντικείμενα για κάθε ένα από τα επίπεδα μπορεί να είναι τα εξής :

- Επίπεδο 0 : Τα αντικείμενα είναι τα βασικά στοιχεία της περιοχής που μελετάμε.
- Επίπεδο 1 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναφέρονται στα βασικά στοιχεία.
- Επίπεδο 2 : Τα αντικείμενα είναι οι κανόνες που συνδέουν τις προηγούμενες ιδιότητες
- Επίπεδο 3 : Τα αντικείμενα είναι οι μερικές ταξινομήσεις των κανόνων.

- Επίπεδο 4 : Τα αντικείμενα είναι οι ιδιότητες που αναφέρονται στις μερικές ταξινομήσεις.

Είναι αξιοσημείωτη η ομοιότητα και η αναδρομικότητα του συστήματος στις περιγραφές των επιπέδων 1 και 4. Καθορίζοντας μόνο τα αντικείμενα και όχι τους μορφισμούς, δεν έχουμε καθορίσει πλήρως κάθε κατηγορία αλλά αυτό μπορούμε να το παραβλέψουμε προς το παρόν. Είναι γεγονός ότι τα επίπεδα επιβάλλουν ένα οργανωτικό σχήμα για το υλικό που πρέπει να μάθουν οι μαθητές. Οι στόχοι και οι μαθηματικές προσδοκίες για τη μάθηση ενυπάρχουν μέσα στην ίδια τη δομή των επιπέδων. Για παράδειγμα τα επίπεδα στη Γεωμετρία, έτσι όπως περιγράφηκαν νωρίτερα, στοχεύουν στην ανάπτυξη της σκέψης για τα σχήματα με απώτερο σκοπό την απόδειξη των προτάσεων που εμφανίζονται μέσα στα διάφορα αξιωματικά συστήματα. Αν και οι συλλογισμοί γίνονται όλο και πιο αφηρημένοι όσο ανεβαίνουμε στα επίπεδα, ακολουθούμε ένα συγκεκριμένο πρότυπο που υπαγορεύεται από την τρέχουσα αντίληψη που έχουμε για τα μαθηματικά ή για οποιαδήποτε άλλη επιστήμη."

Στην Ολλανδία τα επίπεδα χρησιμοποιήθηκαν για να υλοποιηθούν μαθήματα στη Χημεία και στα Οικονομικά (Hoffer 1983).

"Με τον τρόπο αυτό, έχοντας ορίσει καθαρά τους στόχους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω περιγραφές των επιπέδων, που είναι ανεξάρτητες από οποιαδήποτε επιστημονική περιοχή, για να οργανώσουμε τουλάχιστον τα αντικείμενα σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Υπενθυμίζουμε όμως και πάλι ότι για να καθορίσουμε πλήρως μία κατηγορία, πρέπει να ορίσουμε και τους κατάλληλους μορφισμούς. ", Πρίντεζης (2006).

1.4.3 Η ιεραρχική άποψη

Ο Πρίντεζης (2006) αναφέρει: "Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να εξετάσουμε τα επίπεδα Van Hiele είναι η ιεραρχική άποψη. Μια ιεραρχία είναι μια σειρά διαδοχικών καλύψεων ενός συνόλου X…. Κατασκευάζοντας μια ιεραρχία πετυχαίνουμε μια ιεραρχική ανάλυση του συνόλου που μας ενδιαφέρει. Κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας αλλά και πολλών άλλων μαθημάτων είναι λογικό να σκεφτόμαστε τα επίπεδα κατανόησης σαν μία ιεραρχία. Στο πρώτο επίπεδο θα βρίσκονται τα απλούστερα σχήματα και έννοιες και όσο ανεβαίνουμε προς τα πάνω θα συναντάμε πιο γενικά σχήματα και πιο πολύπλοκες έννοιες. Βέβαια από τη μια μεριά δεν είναι πάντα δυνατόν να κατασκευαστεί με μαθηματική ακρίβεια μια ιεραρχία που να καλύπτει το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων και εννοιών και ταυτόχρονα να εξυπηρετεί τις εκπαιδευτικές ανάγκες και να πληρεί όλες τις απαιτήσεις μιας θεωρίας μάθησης. Από την άλλη όμως σύμφωνα με την κονστρουκτιβιστική άποψη, ο κάθε μαθητής οικοδομεί σταδιακά τη γνώση ξεκινώντας από τις απλούστερες έννοιες και κατασκευάζοντας διαδοχικά τις πιο σύνθετες, ακολουθεί δηλαδή κάποια ιεραρχία. Η μάθηση δηλαδή θα διευκολυνθεί αν ακολουθήσουμε κατά τη διδασκαλία μία «φυσιολογική» ιεραρχία. Αντίθετα θα προκαλέσουμε σύγχυση στο μαθητή αν η ιεραρχία που θα του προτείνουμε αντίκειται στη λογική του ή αν ακολουθήσουμε μια χαοτική πορεία χωρίς εμφανή ιεραρχία.”

Σε άλλο σημείο της εργασίας του ο Πρίντεζης (2006) αναφέρει: “Η κατηγορική άποψη των επιπέδων van Hiele, η ιεραρχική άποψη, … υπάγονται στις Οικουμενικές Μεθόδους προσέγγισης των Μαθηματικών. Είναι δηλαδή μέθοδοι ελεύθερες αντικειμένου (topic free) δηλαδή ανεξάρτητες του θέματος. Μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και εκτός Μαθηματικών. Μπορούν να εφαρμοστούν σε αντικείμενα τόσο της δευτεροβάθμιας, όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού τελευταία γίνεται προσπάθεια να ανέβει το επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τη μετακύλιση ύλης από την τριτοβάθμια. και αποτελούν εργαλείο κοινό για την προετοιμασία των καθηγητών τόσο της Μέσης όσο και της Ανώτατης εκπαίδευσης. Η γνώση αυτών ή οποιωνδήποτε άλλων οικουμενικών μεθόδων για την προσέγγιση των μαθηματικών είναι πολύ σημαντική για το σχεδιασμό κατάλληλης διδασκαλίας που θα επιτύχει τους διδακτικούς στόχους σε οποιαδήποτε βαθμίδα της εκπαίδευσης. Αποτελούν συνεπώς ένα εργαλείο κοινό για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών τόσο της Κατώτερης όσο και της Μέσης αλλά και της Ανώτατης εκπαίδευσης. Το να διαθέτουμε εργαλεία οικουμενικής χρήσης είναι θείο δώρο…”.

1.5 Η τεχνολογία ως βοηθός στην ανάπτυξη της γεωμετρικής αντίληψης και σκέψης

Τα εργαλεία, οι ορισμοί, οι τεχνικές διερεύνησης και οι οπτικές αναπαραστάσεις που συνδέονται με τα Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας, βοηθούν στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος ριζικά διαφορετικού από την παραδοσιακή διδασκαλία της Γεωμετρίας με κανόνα και διαβήτη. Τα είδη των μέσων διαμεσολάβησης είναι στενά συνυφασμένα με τη γνώση που οικοδομούν οι μαθητές.

Τα Προγράμματα Δυναμικής Γεωμετρίας όπως το Geometer’s Sketchpad, Geogebra κ.α. παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο για πολλά παραδείγματα και διερεύνηση στην Γεωμετρία. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Τεχνολογία και μάλιστα από τις μικρές τάξεις της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, μπορεί να παρέχει στους μαθητές εξοικείωση με τα επαγωγικά εργαλεία που χρειάζονται για να ανεβάσουν το επίπεδο van Hiele πριν αντιμετωπίσουν τις παραγωγικές αποδείξεις.

Οι μαθητές μεγαλώνουν σήμερα με τους υπολογιστές και την τεχνολογία να τα αντιμετωπίζουν πολύ θετικά. Ενώ η Γεωμετρία και η απόδειξη μπορεί να φαίνονται απόμακρες από τη σκέψη τους, η χρησιμοποίηση ενός προγράμματος υπολογιστών στην διδασκαλία της Γεωμετρίας ίσως τους είναι μια ευχάριστη και θελκτική απασχόληση.

Ο Τζίφας (2006) αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Choi (1999), αν και πολυάριθμοι ερευνητές έχουν επικυρώσει τα επίπεδα van Hiele, λίγοι ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας των Υπολογιστών για να ερευνήσουν την ανάπτυξη των επιπέδων Γεωμετρικής σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Ο Choi (1999) ανακάλυψε ότι η χρήση του Δυναμικού Λογισμικού υπολογιστών Geometer's Sketchpad βοήθησε τη βελτίωση των μαθητών στην ανάπτυξη της Γεωμετρικής σκέψης όταν χρησιμοποιήθηκε από κοινού με τις οδηγίες που βασίστηκαν στα επίπεδα van Hiele. Εγκωμιάζει ιδιαίτερα τη χρήση του λογισμικού Geometer's Sketchpad, λέγοντας "Θα μπορούσε να καταστήσει τις οδηγίες για την διδασκαλία της Γεωμετρίας αποτελεσματικές, να διευκολύνει τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος των μαθητών, να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να βοηθήσει τους μαθητές στις μαθησιακές δυσκολίες τους και στην εξοικονόμηση χρόνου για τη μάθηση" (Choi, 1999). Επιπλέον, οι "διερευνητικές δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται στο λογισμικό που αναπτύχθηκε για τις Γεωμετρικές έρευνες θα μπορούσαν να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθητών της υπόθεσης στη διαδικασία θεωρήματος-απόδειξης".

Ο Yousef (1997) υποστηρίζει ότι, η απεριόριστη χρήση της τεχνολογίας βελτιώνει τα κίνητρα των μαθητών. Δέχεται επίσης την χρήση του λογισμικού υπολογιστών σε μικρότερες ηλικίες για το μάθημα της Γεωμετρίας.

Ο Wertheimer (1990) αναφερόμενος στον Yousef, (1997) απαριθμεί έξι θετικά βήματα που έχουν σχέση με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη:

1. Η τεχνολογία παρακινεί τους μαθητές να ενδιαφερθούν στην έρευνα, την υπόθεση, τη δημιουργία, και την ανακάλυψη αρχών καθώς και την παραγωγή γενικεύσεων.
2. Η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.
3. Η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και τους δίνει την ευκαιρία να λύνουν προβλήματα στην πραγματικότητα της ίδιας της ζωής, και όχι προβλήματα ρουτίνας.
4. Η τεχνολογία ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών της Γεωμετρίας.
5. Η τεχνολογία ενθαρρύνει τους καθηγητές για να περιλάβουν τους μαθητές σε διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που διευκολύνουν τη διαδικασία εκμάθησης.
6. Η τεχνολογία επιτρέπει στους καθηγητές να δίνουν προσοχή στους μαθητές που έχουν ανάγκη πρόσθετης βοήθειας. °

Ο Metazarek (1996) χρησιμοποίησε το λογισμικό Geometer's Sketchpad για να ερευνήσει τη σχέση μεταξύ της τεχνολογίας υπολογιστών και της ετοιμότητας ενός μαθητή για την αυτόνομη μάθηση. Διαπίστωσε ότι υπήρξε ένας θετικός συσχετισμός ανάμεσα σε αυτές τις μεταβλητές που οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στη (θετική) στάση των μαθητών απέναντι στο λογισμικό υπολογιστών. °

Η Lester (1996) χρησιμοποίησε επίσης το λογισμικό Geometer's Sketchpad στις διδακτορικές μελέτες της για να δει εάν χρησιμοποιώντας μια επαγωγική παιδαγωγική μαζί με τον υπολογιστή θα βελτίωνε τα γεωμετρικά επιτεύγματα. Τα αποτελέσματα της μελέτης της δείχνουν ότι "οι δεξιότητες στα επίπεδα γεωμετρικής δυσκολίας σε μαθητές με μεγάλη απόδοση και κατανόηση σε γεωμετρικές έννοιες σε υψηλότερα επίπεδα είναι αποτέλεσμα της δημιουργίας και του χειρισμού της δυναμικής απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων στην οθόνη του υπολογιστή" (Lester, 1996). °

Ο Dixon (1997) επισημαίνει πόσο γρήγορα και εύκολα οι μαθητές μπορούν να χειριστούν σχήματα χρησιμοποιώντας το Geometer's Sketchpad και πόσο αργά και επίπονα και ίσως και ανέφικτα αυτοί οι ίδιοι στόχοι να επιτυνχάνονται όταν γίνονται με το μολύβι και το χαρτί. Αυτό ελευθερώνει τους μαθητές από πρακτικές των στερεότυπων υπολογισμών και τους επιτρέπει να εστιάζουν στις έννοιες και τα προβλήματα που τους ενδιαφέρουν περισσότερο . Κατά συνέπεια, η τεχνολογία μπορεί να προωθήσει μια υψηλότερου επιπέδου σκέψη επειδή οι μαθητές ξοδεύουν περισσότερο χρόνο για απεικόνιση και ανάλυση (Nicaise & Barnes, 1996). °

Ο Τζίφας (2006) αναφέρει ότι με το λογισμικό της Δυναμικής Γεωμετρίας Geometer's Sketchpad οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν σχήματα και μετά να τα μεταβάλλουν με το σύρσιμο μιας κορυφής ή μιας άκρης. Αυτό το είδος της κατασκευής βοηθά στη μετάβαση από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3 του μοντέλου των van Hiele επιπέδων (De Villiers, 1999) .Συνεχίζοντας λέει ότι "με δεδομένο χρόνο για πρακτική με το λογισμικό και την έγκαιρη εισαγωγή από το καθηγητή, οι μαθητές είναι σε θέση να δουν τη διαφορά μεταξύ των σχέσεων που έβαλαν στο σχήμα και τις σχέσεις που ήταν απλά μια φυσική συνέπεια των μεταβολών. Οι μαθητές έχουν έπειτα μια καλύτερη κατανόηση της διαφοράς μεταξύ της προϋπόθεσης και του συμπεράσματος μιας επίπτωσης, τα οποία είναι ζωτικής σημασίας για το επίπεδο 3 και τις υψηλότερες αφαιρέσεις".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}
Η θεωρία επιπέδων των van Hieles

2.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των van Hieles αποτελεί μία προσπάθεια κατανόησης και επίλυσης των προβλημάτων που παρουσιάζονται στη Διδακτική της Γεωμετρίας. Η θεωρία του Pierre van Hiele εστιάζεται κυρίως στο να εξηγήσει τα επίπεδα της Γεωμετρικής σκέψης και αποτελεί τμήμα της θεωρίας που διατυπώθηκε από τους Ολλανδούς ερευνητές P. M. van Hiele & D. van Hiele-Geldof.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1950, ο Pierre Marie van Hiele και η σύζυγός του Dina van Hiele - Geldof ήταν καθηγητές της μέσης εκπαίδευσης σε Γυμνάσια της Ολλανδίας. Ταυτόχρονα έκαναν τις διδακτορικές τους διατριβές στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης, μελετώντας τη δομή των επιπέδων κατανόησης και πειραματιζόμενοι με αυτά για να βελτιώσουν την διορατικότητα των μαθητών στη Γεωμετρία. Ο Pierre διαμόρφωσε το σχήμα και τις ψυχολογικές αρχές ενώ η Dina επικεντρώθηκε στα διδακτικά πειράματα για τη βελτίωση του επιπέδου κατανόησης των μαθητών.
Η Dina van Hiele - Geldof πέθανε σε λίγο χρόνο μετά την ολοκλήρωση της διατριβής της. Ο συνδυασμός των δύο αυτών διατριβών και η ερμηνεία τους που έγιναν από τον Pierre Marie van Hiele είναι αυτό που αποκαλούμε σήμερα ως **θεωρία των επιπέδων van Hiele**.

Ως ερευνητές ασχολήθηκαν με τις δυσκολίες των μαθητών τους στη Γεωμετρία, άντλησαν ιδέες από τη θεωρία των σταδίων σκέψης του Piaget και συμπέραναν ότι κατά τη διάρκεια μάθησης της Γεωμετρίας με τη χρήση κατάλληλων διδακτικών δραστηριοτήτων, η σκέψη των μαθητών εξελίσσεται περνώντας από διαδοχικά στάδια (τα επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης). Από την έρευνά τους προέκυψαν πέντε διακριτά, διατεταγμένα διαδοχικά επίπεδα, τα οποία μπορεί να κατακτήσει ο μαθητής που ασχολείται με τη Γεωμετρία.

Η ιδέα των σταδίων εμφανίζεται και στο έργο του σοβιετικού Vygotsky με τη **Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ΖΕΑ).** Η ΖΕΑ είναι η απόσταση ανάμεσα σε αυτά που ο μαθητής είναι ικανός να καταφέρει μόνος του χωρίς καμία εξωτερική βοήθεια, από αυτά που μπορεί να εκτελέσει με τη βοήθεια ενός ενηλίκου ή μιας ομάδας συνομηλίκων του. Ο δάσκαλος οφείλει να βοηθήσει το μαθητή να διασχίσει τη ΖΕΑ έτσι ώστε να είναι ικανός να καταφέρει μόνος του αυτά για τα οποία χρειαζόταν προηγουμένως βοήθεια. Έτσι διευρύνεται η κατακτημένη γνώση και γύρω από αυτή σχηματίζεται μία καινούργια ΖΕΑ που με τη σειρά της θα πρέπει να τη διασχίσει. Όταν η διδασκαλία γίνεται εκτός της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης, ο μαθητής δεν μπορεί να συμμετέχει σε αυτή και δυσκολεύεται να προοδεύσει.

Οι θεωρίες των van Hieles συνάντησαν θετική ανταπόκριση και επηρέασαν τη διδασκαλία της Γεωμετρίας αρχικά στη Σοβιετική Ένωση και κατόπιν στις Ηνωμένες Πολιτείες και τον υπόλοιπο κόσμο. Όπως αναφέρει ο Pierre van Hiele η εκπαιδευτική προσέγγιση που βασίζεται στα επίπεδα σκέψης και αποκαλούμε “Επίπεδα van Hiele” έγινε γνωστή στις Ηνωμένες Πολιτείες από μία διάλεξη του Izaak Wirzup, με τίτλο ‘Some breakthroughs in the psychology of teaching and learning Geometry’, στην τελική συνεδρίαση της εθνικής συνόδου δασκάλων των μαθηματικών το 1974.

Ο Usiskin (1982) αναφέρει ότι στις Ηνωμένες Πολιτείες, η Γεωμετρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συνήθως μελετάται σε ένα μόνο έτος, συνήθως στη δέκατη τάξη. Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή της είναι διαφορετική από αυτή που ακολουθείται σε άλλα μαθήματα μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς ο μαθητής εισάγεται σε διεργασίες ενός μαθηματικού συστήματος (μέσω εμπειριών με αξιώματα, θεωρήματα, ορισμούς και πρακτική με αποδείξεις), ενώ ταυτόχρονα μαθαίνει το περιεχόμενο του μαθήματος. Έτσι, αν και το μάθημα υποθέτει πολύ λίγη προηγούμενη γνώση περιεχομένου, διδάσκεται αρκετά αφηρημένα.

Η θεωρία επιπέδων van Hieles έχει εφαρμοστεί για να εξηγήσει γιατί πολλοί μαθητές δυσκολεύονται με τις ανώτερης τάξης γνωστικές διαδικασίες, ιδιαίτερα τις αποδείξεις, που απαιτούνται για την επιτυχία στη Γεωμετρία του γυμνασίου. Έχει θεωρηθεί ότι οι μαθητές που έχουν πρόβλημα στη Γεωμετρία, έχουν διδαχθεί ένα υψηλότερο επίπεδο van Hiele από ότι είναι ικανοί ή είναι έτοιμοι για να διδαχθούν. Η θεωρία υποστηρίζει, όπως παρατηρεί η Κολέζα, (2009) ότι είναι ακατάλληλη η διδαχή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε παιδιά, ακολουθώντας μία τυπική μαθηματική διαδικασία. Τα παιδιά δεν σκέφτονται σε ένα τυπικό παραγωγικό επίπεδο και έτσι, απλά απομνημονεύουν γεγονότα και κανόνες, χωρίς κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των ιδεών, κατά τη διδαχή τους μέσω της τυπικής προσέγγισης. Η θεωρία των van Hiele προσφέρει επίσης μια θεραπεία: Το πέρασμα από την ακολουθία των επιπέδων με ένα συγκεκριμένο τρόπο.

Όπως αναφέρει ο Usiskin (1982), στα τέλη της δεκαετίας του 1980, η Linda Sears, φοιτήτρια του Πανεπιστημίου του Σικάγου, παρατήρησε μια ομοιότητα μεταξύ των επιπέδων σκέψης των van Hieles και της προσέγγισης που η Maria Montessori έχει στη Γεωμετρία. Η διπλωματική της στο μεταπτυχιακό που έκανε είχε θέμα την σύγκριση των δύο θεωριών (1981). Κατά τη διάρκεια της συγγραφής της έμαθε από τη Dorothy Geddes ότι ο Pierre Marie van Hiele και η Dina van Hiele-Geldof ήταν καθηγητές Montissori (είναι ένα σύστημα εκπαίδευσης για μικρά παιδιά που επιδιώκει να αναπτύξουν φυσικά ενδιαφέροντα και δραστηριότητες παρά να χρησιμοποιεί τις επίσημες μεθόδους διδασκαλίας) για επτά χρόνια. Αυτή η σύνδεση δεν αναγνωρίζεται σε κανένα από τα γραπτά των van Hieles. Ωστόσο, οι επιρροές της θεωρίας Gestalt και Otto Selz αναγνωρίζονται από τους van Hieles (van Hiele, 1957, Geldof, 1957). Οι ιδέες των Mannoury και άλλων φιλοξενούνται επίσης στη θεωρία τους (Sears, 1981, βλέπε επίσης Geldof, 1957).

Σύμφωνα με τον van Hiele, η εργασία του δεν περιορίζεται στενά στην γεωμετρία αλλά μπορεί να επεκταθεί στα μαθηματικά και γενικότερα στα επίπεδα σκέψεις. Ο van Hiele (1986) αναφέρει: "Όταν ανέπτυξα τη θεωρία των επιπέδων μου, είχε ως σκοπό τη διδασκαλία και την εκμάθηση της Γεωμετρίας. Ωστόσο, αυτό είναι ένας περιττός περιορισμός, καθώς η διδασκαλία και η εκμάθηση και άλλων θεμάτων μπορούν εύκολα να βελτιωθούν με την ίδια προσέγγιση των επιπέδων".

Όπως αναφέρει ο Ζάχος (2000), η θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης δύναται να αποτελέσει από μόνη της μία **ταξινομία διδακτικών στόχων**, προσαρμοσμένη με λειτουργικό τρόπο στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Έχει την ιδιότητα να ερμηνεύει την εξέλιξη της ίδιας της σκέψης σε αντίθεση με την ταξινομία του Bloom που αποφεύγει κάτι τέτοιο.
Ο ίδιος αναφέρει ότι "Η θεωρία των van Hieles δίνει τη δυνατότητα στον διδάσκοντα να διαγνώσει, μέσα από τις απαντήσεις και τα σχήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές, τις γνωστικές δυσκολίες που συναντούν καθώς μαθαίνουν Γεωμετρία. Σε πολλές από τις περιπτώσεις αυτές διαφαίνεται ακόμη και το είδος των διδακτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση των μαθητών αυτών".

Η Crowley (1987) αναφέρει τις βασικές του ιδιότητες της θεωρίας των van Hieles:

- Οι μαθητές για να αλλάξουν επίπεδο Γεωμετρικής σκέψης απαιτείται οργανωμένη διδασκαλία.
- Δεν είναι θεμιτή η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ακολουθώντας μια τυπική μαθηματική προσέγγιση διότι με αυτό τον τρόπο οι μαθητές μπορούν μόνο να αποστηθίσουν γεγονότα και κανόνες, χωρίς τη βαθύτερη κατανόησή τους.
- Υπάρχουν πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης τα οποία είναι διαδοχικά και ιεραρχικά δομημένα.
- Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο αμέσως επόμενο επηρεάζεται κυρίως από τη διδασκαλία και όχι την ηλικία ή την ωριμότητα του μαθητή.
- Κάθε επίπεδο έχει τη δική του σχεσιακή δομή και γλώσσα και χαρακτηρίζεται από τον δικό του τρόπο σκέψης.
- Η μετάβαση από ένα επίπεδο σκέψης σε ανώτερο επίπεδο γίνεται διαδοχικά και χωρίς παράλειψη των ενδιάμεσων επιπέδων.

2.2.1 Περιγραφή της Θεωρίας των Επιπέδων van Hieles

Όπως αναφέρει ο Usiskin (1982) στη δημοσίευσή του με τίτλο "**Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry"**, η θεωρία των επιπέδων van Hiele αναπτύχθηκε από τη Dina van Hiele-Geldof και από τον σύζυγό της Pierre

Marie van Hiele με διακεκριμένες διδακτορικές διατριβές στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το 1957. Η Ντίνα πέθανε λίγο μετά την ολοκλήρωση της διατριβής της. Ο Pierre ήταν αυτός που εξήγησε τη θεωρία. Κατά τα έτη 1958-1959, έγραψε τρεις δημοσιεύσεις, δύο στα αγγλικά και μία στα ολλανδικά (αλλά μεταφρασμένη στα γαλλικά), οι οποίες δεν έλαβαν ιδιαίτερη προσοχή στο δυτικό κόσμο, αλλά εφαρμόστηκαν στην ανάπτυξη προγράμματος σπουδών από τον Σοβιετικό ακαδημαϊκό Pyshkalo (1968). Ο Freudenthal, μέντορας του van Hiele, δημοσίευσε τη θεωρία του στο αναγνωρισμένο βιβλίο “Mathematics as an Educational Task” (1973). Μέσω του Freudenthal και της Σοβιετικής Ένωσης, το έργο των van Hieles προσέλκυσε την προσοχή του Wirszup, ο οποίος ήταν ο πρώτος που μίλησε για τη θεωρία van Hiele στην άλλη πλευρά αυτή του Ατλαντικού το 1974 και αργότερα δημοσίευσε την ομιλία του το 1976. Η δημοσίευση του Wirszup είχε διάφορα αποτελέσματα. Ο Hoffer, ο οποίος είχε προετοιμάσει μία δημοσίευση με αντικείμενο τη Γεωμετρία για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση το 1979, επισκέφθηκε τον van Hiele στις Κάτω Χώρες. Μετά από τις συναντήσεις τους έγραψε για τη θεωρία των επιπέδων το 1981. Επίσης χρηματοδοτήθηκαν διάφορες έρευνες που ασχολήθηκαν με πτυχές της θεωρίας (Usiskin (1982), Burger (1981), Geddes (1981)).

Η θεωρία έχει τρεις πτυχές:

1. **την ύπαρξη επιπέδων,**
2. **τις ιδιότητες των επιπέδων**
3. **τη μετακίνηση από το ένα επίπεδο στο άλλο.**

2.2.2 Ύπαρξη επιπέδων.

Σύμφωνα με τη θεωρία, υπάρχουν πέντε επίπεδα κατανόησης στη Γεωμετρία. Αυτά τα επίπεδα περιγράφονται από τους van Hieles σε διάφορα μέρη των εργασιών τους, τόσο γενικά όσο και συμπεριφορικά.

Όπως αναφέρει η Mason (2009) στα αρχικά έργα τους, οι van Hieles αριθμούσαν τα επίπεδα σκέψης από το 0 έως το 4. Οι Αμερικανοί (Ηνωμένες Πολιτείες) άρχισαν να αριθμούν τα επίπεδα από 1 έως 5. Αυτή η αρίθμηση επιτρέπει το επίπεδο προ-αναγνώρισης να ονομάζεται επίπεδο 0. Ο Pierre van Hiele στα πρόσφατα έργα του περιγράφει τρία επίπεδα σκέψης αντί πέντε. Στην παρούσα έρευνα υιοθετήθηκε η αρίθμηση των επιπέδων από 1 έως 5 και ως 0 το επίπεδο προ-αναγνώρισης.

Ακολουθεί σύντομη περιγραφή του Usiskin (1982) των επιπέδων σκέψης van Hiele και παραδείγματα από τον Hoffer (1979, 1981). Τα ονόματα στις παρενθέσεις είναι του Hoffer.

Επίπεδο 1: (αναγνώριση) (recognition)

Ο μαθητής μπορεί να μάθει ονόματα σχημάτων και αναγνωρίζει ένα σχήμα ως ολότητα (Gestalt αναγνώριση). Σε αυτό το επίπεδο τα τετράγωνα και τα ορθογώνια φαίνεται να είναι διαφορετικά.

Επίπεδο 2: (ανάλυση) (analysis)

Ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει τις ιδιότητες των σχημάτων. Σε αυτό το επίπεδο τα ορθογώνια έχουν τέσσερις ορθές γωνίες.

Επίπεδο 3: (τάξη) (order)

Ο μαθητής μπορεί να διατάξει λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, αλλά δε λειτουργεί μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα. (απλός παραγωγικός συλλογισμός μπορεί να ακολουθηθεί, αλλά η διαδικασία της απόδειξης δεν είναι ακόμα κατανοητή.)

Επίπεδο 4: (αφαίρεση) (deduction)

Ο μαθητής κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και των αποδείξεων (τώρα οι αποδείξεις μπορούν να γράφονται με κατανόηση).

Επίπεδο 5: (αυστηρότητα) (rigor)

Ο μαθητής κατανοεί την αναγκαιότητα για αυστηρότητα και είναι ικανός να κάνει αφηρημένους παραγωγικούς συλλογισμούς (τώρα οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες δίνατε να γίνουν κατανοητές).

Η Dina ονομάζει:
Το επίπεδο 2 ως **η πτυχή της γεωμετρίας** (the aspect of Geometry).
Το επίπεδο 3 ως **η ουσία της γεωμετρίας** (the essence of Geometry).
Το επίπεδο 4 ως **η διορατικότητα στη θεωρία της γεωμετρίας** (insight into the theory of Geometry).
Το επίπεδο 5 ως **η επιστημονική διορατικότητα της γεωμετρίας** (scientific insight into Geometry)

(van Hiele-Geldof, 1957).

2.2.3 Ιδιότητες των επιπέδων.

Η θεωρία των van Hiele προσδίδει στα επίπεδα τις παρακάτω ιδιότητες, στις οποίες ο Usiskin έχει προσδώσει ονόματα (Usiskin, 1982):

Ιδιότητα 1: (σταθερή ακολουθία) (fixed sequence)

Ένας μαθητής δεν μπορεί να βρεθεί σε κάποιο van Hiele επίπεδο **n** χωρίς να έχει περάσει από το επίπεδο **n-1**.

Ιδιότητα 2: (γειτνίαση) (adjacency)

Σε κάθε επίπεδο σκέψης αυτό που ήταν σε λανθάνουσα κατάσταση στο προηγούμενο επίπεδο δηλώνεται στο επόμενο επίπεδο.

Ιδιότητα 3: (διάκριση) (distinction)

Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν αυτά τα σύμβολα.

Ιδιότητα 4: (διαχωρισμός) (separation)

Δύο άτομα που σκέφτονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να καταλάβουν ο ένας τον άλλον.

Για να εξηγήσουμε αυτές τις ιδιότητες, σκεφτείτε τον μαθητή που σχολιάζει σε έναν δάσκαλο Γεωμετρίας: "Μπορώ να ακολουθήσω μια απόδειξη όταν την κάνετε στην τάξη, αλλά δεν μπορώ να την κάνω μόνος μου στο σπίτι." Ο μαθητής αυτός μπορεί να βρίσκεται στο επίπεδο 3, Ενώ ο δάσκαλος στο επίπεδο 4. Η τέταρτη ιδιότητα υποδηλώνει ότι ο μαθητής δεν μπορεί να κατανοήσει τον δάσκαλο και η τρίτη ιδιότητα εξηγεί γιατί δεν υπάρχει κατανόηση, διότι ο δάσκαλος χρησιμοποιεί αντικείμενα (προτάσεις, στην περίπτωση των αποδείξεων) και ένα δίκτυο σχέσεων (απόδειξη) που ο μαθητής δεν έχει ακόμη καταλάβει ότι χρησιμοποιείται με αυτόν τον τρόπο. Αν ο μαθητής είναι στο επίπεδο 3, τότε το δίκτυο του μαθητή αποτελείται από μία απλή διάταξη των προτάσεων. Η ιδιότητα δύο υποδεικνύει ότι αυτές οι εντολές, πού είναι εγγενείς στο επίπεδο 3, γίνονται εξωγενείς στο επίπεδο 4.

2.2.4 Η μετάβαση από ένα επίπεδο στο επόμενο

Ο van Hiele (1959) πιστεύει ότι η γνωστική εξέλιξη στη Γεωμετρία μπορεί να επιταχυνθεί μέσω κατάλληλης διδασκαλίας. Οι van Hieles (van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958; van Hiele, 1959) έχουν δώσει με λεπτομέρεια εξηγήσεις για το πώς ο δάσκαλος πρέπει να λειτουργήσει για να οδηγηθούν οι μαθητές από το ένα επίπεδο στο άλλο. Ο Usiskin (1982) θεωρεί αυτή την προδιαγραφή ως την πέμπτη ιδιότητα των επιπέδων.

Ιδιότητα 5: (επίτευξη) (attainment)

Η διαδικασία της μάθησης που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση στο επόμενο ανώτερο επίπεδο έχει πέντε φάσεις, κατά προσέγγιση αλλά χωρίς αυστηρότητα διαδοχικές, με τίτλους:

Διερεύνηση (inquiry)
Κατευθυνόμενο προσανατολισμό (directed orientation)
Επεξήγηση (explanation)
Ελεύθερο προσανατολισμό (free orientation)
Ολοκλήρωση (integration)

Όπως αναφέρει ο Usiskin (1982), τα συγγράμματα των van Hieles χρησιμεύουν για να δείξουν ότι η διαδικασία της μετακίνησης από το ένα επίπεδο στο επόμενο διαρκεί πολύ περισσότερο χρόνο από ότι μπορεί να διαρκέσει μια διδακτική ώρα ή ακόμα και μια σύντομη μονάδα χρόνου διδασκαλίας. Για παράδειγμα, η van Hiele-Geldof (1957) αναφέρει 20 μαθήματα για να φτάσει από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2 και 50 μαθήματα για να φτάσει από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3, που εργάζεται με δωδεκάχρονους μαθητές. Πρόκειται για περίπου μισό χρόνο συνεχόμενης διδασκαλίας.

2.3 Χαρακτηριστικά της θεωρίας των van Hieles, σύμφωνα με τον Usiskin (1982)

Ο Usiskin (1982) αναφέρει ότι η θεωρία των van Hieles διαθέτει τρία ελκυστικά χαρακτηριστικά: την **κομψότητα**, την **πληρότητα** και την **ευρεία εφαρμογή**.

Κομψότητα: Η θεωρία περιλαμβάνει μια μάλλον απλή δομή που περιγράφεται με εύλογα συνοπτικές προτάσεις. Η κάθε μία έχει ευρεία επίδραση. Για παράδειγμα, οι ίδιες αρχές ισχύουν για τη μετάβαση από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2, από το επίπεδο 2 στο επίπεδο 3 και ούτω καθεξής, εμφανίζοντας μια κομψότητα στη μορφή.

Η απλότητα της δομής είναι εμφανής όταν κάποιος παρατηρεί ότι τα σχήματα του επιπέδου 1 είναι τα δομικά στοιχεία για τις ιδιότητες στο επίπεδο 2, τα οποία με τη σειρά τους διατάσσονται στο επίπεδο 3, όπου η διάταξη είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση ενός μαθηματικού συστήματος σε επίπεδο 4, ένα από εκείνα τα αντικείμενα που συγκρίνονται στο επίπεδο 5.

Πληρότητα: Οποιαδήποτε θεωρία που καλύπτει το σύνολο της μάθησης της Γεωμετρίας και που επιδιώκει να εξηγήσει όχι μόνο το γιατί οι μαθητές έχουν πρόβλημα στη μάθηση αλλά και τι θα μπορούσε να γίνει για να απομακρυνθούν αυτά τα εμπόδια, πρέπει να ονομάζεται πλήρης.

Ο Usiskin (1982) αναφέρει ότι ο van Hiele ισχυρίζεται στο βιβλίο του "Δομή και Διορατικότητα" ότι η θεωρία του ισχύει για όλη τη μαθηματική κατανόηση και δίνει παραδείγματα που περιλαμβάνουν την εκμάθηση λειτουργιών και άλλων μη γεωμετρικών εννοιών. Ωστόσο, η θεωρία δεν ήταν αρκετά λεπτομερής σε άλλους τομείς, ώστε να είναι τόσο περιεκτική (comprehensive). Η ερευνήτρια Mayberry αισθάνθηκε περιορισμένη λόγω της έλλειψης εύρους ακόμη και του γεωμετρικού περιεχομένου στα δημοσιευμένα άρθρα του van Hiele. Για τον ίδιο λόγο, η μελέτη των Burger et al. (1981) έχει περιορίσει το πεδίο της έρευνας μόνο σε τρίγωνα και τετράπλευρα. Παρόλα αυτά, η θεωρία φιλοδοξεί να καταστεί αρκετά περιεκτική.

Ευρεία εφαρμογή: Η θεωρία προφανώς θεωρείται ευρέως και εύκολα εφαρμόσιμη διότι έχουν γίνει προσπάθειες να εφαρμοστεί στα προγράμματα σπουδών Γεωμετρίας σε χώρες τόσο διαφορετικές όπως οι Κάτω Χώρες, η Σοβιετική Ένωση και οι Ηνωμένες Πολιτείες, .

Κατά τον Usiskin (1982), αυτού του είδους οι ιδιότητες (κομψότητα, πληρότητα και ευρεία εφαρμογή) μιας θεωρίας, δεν προσφέρονται για έλεγχο. Ωστόσο, είναι πιθανότατα οι κυριότεροι λόγοι που αιτιολογούν την ταχύτητα με την οποία η θεωρία van Hiele έχει γίνει παγκοσμίως γνωστή. Έτσι, πολλοί εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών αποδέχονται και χρησιμοποιούν αυτή τη θεωρία βάσει των χαρακτηριστικών της θεωρίας παρά της δοκιμής των επιμέρους στοιχείων της.

Η θεωρία του van Hiele περιλαμβάνει περιγραφές συμπεριφορών των μαθητών σε διάφορα επίπεδα και προβλέπει ορισμένες άλλες συμπεριφορές αυτών των μαθητών.
Η περιγραφική ακρίβεια και η προγνωστική ισχύς είναι σημαντικά χαρακτηριστικά των θεωριών που ισχυρίζονται ότι είναι επιστημονικές (σε αντιδιαστολή με τις θεωρίες που είναι μόνο υποθετικές).

2.4 Συμπεριφορές σε κάθε επίπεδο σύμφωνα με τον Usiskin (1982)

Μια θεωρία για να υποβληθεί σε αυστηρό έλεγχο, πρέπει να περιγραφεί με αρκετή λεπτομέρεια και σαφήνεια ώστε να επιτρέψει την επινόηση των εργαλείων ελέγχου της. Για τη θεωρία van Hiele, αυτό σημαίνει ότι τα επίπεδα πρέπει να προσδιορίζονται με μεγάλη ακρίβεια.
Κατά συνέπεια, στα τέλη του 1979 και στις αρχές του 1980, όλα τα γραπτά των van Hieles που ήταν διαθέσιμα στο προσωπικό του ερευνητικού προγράμματος CDASSG (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry/Γνωστική Ανάπτυξη και η Επίδοση στη Γυμνασιακή Γεωμετρία) που σχεδιάστηκε από τους Zalman Usiskin και Sharon Senk και που είχε αναλάβει να διευθύνει ο Zalman Usiskin από το πανεπιστήμιο του Illinois, εξετάστηκαν για τα χωρία που περιγράφουν τις συμπεριφορές των μαθητών σε ένα δεδομένο επίπεδο. Συνολικά εξετάστηκαν εννέα εργασίες, τέσσερις αρχικά γραμμένες στα αγγλικά, πέντε μεταφρασμένες στα αγγλικά από τα ολλανδικά, τα γερμανικά ή τα γαλλικά.

Ακολουθεί μια περιγραφή των συμπεριφορών, ταξινομημένων κατά επίπεδο (Usiskin, 1982).

Επίπεδο 1 (το κατά van Hieles βασικό επίπεδο, επίπεδο 0)

(van Hiele, 1958-1959)

1. "Τα σχήματα κρίνονται σύμφωνα με την εμφάνισή τους".
2. "Ένα παιδί αναγνωρίζει ένα ορθογώνιο από τη μορφή του, το σχήμα του."
3 ".... και το ορθογώνιο φαίνεται διαφορετικό από ένα τετράγωνο."
4. "Όταν κάποιος έχει δείξει σε ένα παιδί έξι ετών, ποιο σχήμα είναι ένας ρόμβος, ποιο είναι ένα ορθογώνιο, ποιο είναι ένα τετράγωνο, ποιο είναι ένα παραλληλόγραμμο, τότε αυτό είναι σε θέση να σχεδιάσει αυτά τα σχήματα χωρίς σφάλμα σε ένα γεωπίνακα (geoboard) του Gattegno, ακόμη και σε δύσκολες θέσεις ."
5. "Ένα παιδί δεν αναγνωρίζει ένα παραλληλόγραμμο σε ένα ρόμβο."
6. "Ο ρόμβος δεν είναι παραλληλόγραμμο. Ο ρόμβος εμφανίζεται ... ως κάτι τελείως διαφορετικό."

(van Hiele., 1968)

7. "Όταν κάποιος λέει ότι αποκαλεί ρόμβο ένα τετράπλευρο του οποίου οι τέσσερις πλευρές είναι ίσες, αυτή η δήλωση δεν θα είναι αρκετή για να πείσει

τον αρχάριο μαθητή (άρα βρίσκεται στο επίπεδο 0) ότι τα παραλληλόγραμμα που ονομάζει τετράγωνα, είναι μέρος του συνόλου των ρόμβων. "

(van Hiele, 1979)

8. (σε μια ερώτηση που αφορά την αναγνώριση ενός κεκλιμένου τετραγώνου ως τετράγωνο) "βασικό επίπεδο 0, γιατί μπορείτε να το δείτε!"

Επίπεδο 2 (το κατά van Hieles πρώτο επίπεδο, επίπεδο 1)

(van Hiele, 1957)

1. "Είναι σε θέση να συσχετίσει την ονομασία ' ισοσκελές τρίγωνο' με ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, γνωρίζοντας ότι δύο από τις πλευρές του είναι ίσες και να αντλήσει το συμπέρασμα ότι οι δύο αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες. "

(van Hiele-Geldof, 1957, van Hiele και van Hiele-Geldof, 1958)

2. "... ένας μαθητής που γνωρίζει τις ιδιότητες του ρόμβου και μπορεί να τις ονομάσει, θα έχει επίσης και μια βασική κατανόηση του ισοσκελούς τριγώνου που είναι ημι-ρόμβος".
3. "Τα σχήματα είναι τα στηρίγματα (supports) των ιδιοτήτων τους."
4. "Το ότι ένα σχήμα είναι ένα ορθογώνιο σημαίνει ότι έχει τέσσερις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο, ακόμα και αν το σχήμα δεν έχει σχεδιαστεί πολύ προσεκτικά. "
5. "Τα σχήματα αναγνωρίζονται από τις ιδιότητές τους (π.χ. αν κάποιος πει ότι το σχήμα που έχει σχεδιαστεί στον πίνακα και έχει τέσσερις ορθές γωνίες, τότε είναι ορθογώνιο, ακόμα και αν το σχήμα δεν έχει σχεδιαστεί πολύ προσεκτικά ".
6. "Οι ιδιότητες δεν είναι ακόμα οργανωμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε ένα τετράγωνο να αναγνωρίζεται ως ορθογώνιο".

(van Hiele, 1959)

7. «Το παιδί μαθαίνει να βλέπει τον ρόμβο ως ισόπλευρο τετράπλευρο σχήμα με πανομοιότυπες αντιτιθέμενες γωνίες και κάθετες διαγώνιους που διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες».
8. (Ένα μεσαίο στάδιο ανάμεσα σε αυτό το επίπεδο και το επόμενο): "Μόλις το παιδί φτάσει στο στάδιο όπου γνωρίζει το ρόμβο και αναγνωρίζει το ισοσκελές τρίγωνο ως ένα ημι-ρόμβο, θα είναι επίσης σε θέση να προσδιορίσει αυθόρμητα έναν ορισμένο αριθμό ιδιοτήτων του ισόπλευρου τριγώνου. "
9. “Αφού αποφασιστεί ότι μια δομή είναι ένα« ισοσκελές τρίγωνο », το παιδί θα γνωρίζει επίσης ότι πρέπει να υπάρχει ένας ορισμένος αριθμός προσδιοριστικών ιδιοτήτων, χωρίς να χρειάζεται να τις απομνημονεύει σε αυτή την ειδική περίπτωση”.

(van Hiele, 1976)

10. "Το αντίστροφο μιας συνάρτησης εξακολουθεί να ανήκει στο πρώτο επίπεδο σκέψης."
11. "Ομοιότητα, κανόνες πιθανοτήτων, εξισώσεις, συναρτήσεις, αποκαλύψεις, σύνολα - με αυτά μπορείτε να πάτε από το επίπεδο μηδέν μέχρι το πρώτο επίπεδο σκέψης".

Επίπεδο 3 (το κατά van Hieles δεύτερο επίπεδο, επίπεδο 2)

(van Hiele-Geldof, 1957)

1. «Οι μαθητές... μπορούν να κατανοήσουν τι σημαίνει «απόδειξη» στη Γεωμετρία. Έφτασαν στο δεύτερο επίπεδο σκέψης».

(van Hiele, 1957)

2. «Μπορεί να χειριστεί την αλληλεξάρτηση των χαρακτηριστικών των γεωμετρικών σχημάτων».
3. "π.χ., αν με βάση τα την ισχύ των γενικών θεωρημάτων ισότητας, ο ίδιος είναι σε θέση να συμπεράνει την ισότητα των γωνιών ή των ευθύγραμμων τμημάτων συγκεκριμένων σχημάτων."

(van Hiele, 1958-1959)

4. "Οι ιδιότητες είναι διατεταγμένες. Συνάγονται η μία από την άλλη: μία ιδιότητα προηγείται ή ακολουθεί άλλη ιδιότητα."
5. "Η εγγενής σημασία του παραγωγικού συλλογισμού δεν γίνεται κατανοητή από τον μαθητή".
6. "Το τετράγωνο αναγνωρίζεται ως ένα ορθογώνιο επειδή σε αυτό το επίπεδο οι ορισμοί των σχημάτων έχουν ενεργό ρόλο".

(van Hiele, 1959)

7. "το παιδί ... [θα] αναγνωρίσει τον ρόμβο με τη βοήθεια ορισμένων ιδιοτήτων του, ... επειδή, π.χ., είναι ένα τετράπλευρο, του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα".
8. "Το [παιδί] δεν μπορεί να μελετήσει τη Γεωμετρία με την αυστηρότερη έννοια του όρου".
9. «Το παιδί ξέρει πώς να συλλογιστεί σύμφωνα με ένα παραγωγικό λογικό σύστημα ... αυτό όμως δεν είναι το ίδιο με τη συλλογιστική σχετικά με την ισχύ της τυπικής λογικής».

(van Hiele, 1976)

10. "Το ερώτημα σχετικά με το αν το αντίστροφο μιας συνάρτησης είναι συνάρτηση, ανήκει στο δεύτερο επίπεδο σκέψης".
11. "Η κατανόηση της συνεπαγωγής, της ισοδυναμίας, της άρνησης μιας συνεπαγωγής, ανήκει στο δεύτερο επίπεδο της σκέψης".

(van Hiele, 1978)

12. “είναι σε θέση να κατανοήσουν μια πιο εξελιγμένη δομή σκέψης, όπως: «Ο παραλληλισμός των ευθειών συνεπάγεται (σύμφωνα με τον σημασιολογικό χαρακτήρα τους) την παρουσία ενός νόμου, και επομένως (σύμφωνα με τον συμβολικό χαρακτήρα τους) την ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών»".
13. «Εγώ [ο μαθητής] μπορώ να αποστηθίσω έναν ορισμό. Κανένα επίπεδο. μπορώ να καταλάβω ότι οι ορισμοί μπορεί να είναι απαραίτητοι. Δεύτερο επίπεδο.».
14. "... ξέρεις τι σημαίνει αυτό. Δεύτερο επίπεδο."

Επίπεδο 4 (το κατά van Hieles τρίτο επίπεδο, επίπεδο 3)

(van Hiele, 1957)

1. «Θα φτάσει στο τρίτο επίπεδο σκέψης όταν ξεκινά να χειρίζεται τα εγγενή χαρακτηριστικά των σχέσεων. Για παράδειγμα: αν μπορεί να κάνει διάκριση ανάμεσα σε μια πρόταση και την αντίστροφή της"

(van Hiele-Geldof, 1957)

2. "Μπορούμε να αρχίσουμε να μελετούμε ένα σύστημα παραγωγικού συλλογισμού προτάσεων,
δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η αλληλεξάρτηση των σχέσεων. Οι ορισμοί και οι προτάσεις εντάσσονται τώρα στο νοητικό ορίζοντα των μαθητών. "
3. "Η παραλία των ευθειών συνεπάγεται την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών και αντιστρόφως."

(van Hiele και van Hiele-Geldof, 1958)

4. "Ο μαθητής θα είναι σε θέση, π.χ., να κάνει διάκριση ανάμεσα σε μια πρόταση και το αντίστροφό της".
5. "…είναι δυνατό να αναπτύξει ένα αξιωματικό σύστημα της γεωμετρίας".

(van Hiele, 1958-59)

6. “Το μυαλό ασχολείται με τη σημασία της λογικής παραγωγής συμπερασμάτων, του αντιστρόφου ενός θεωρήματος, ενός αξιώματος, των αναγκαίων και ικανών συνθηκών ”.

(van Hiele, 1968)

7. "... θα μπορούσε κανείς να του πει (του μαθητή) ότι σε μια απόδειξη είναι πραγματικά ένα ζήτημα το να γνωρίζουμε αν αυτές οι θέσεις είναι αληθινές ή όχι, ή μάλλον τη σχέση μεταξύ της αλήθειας αυτών των θέσεων και κάποιων άλλων. Χωρίς την κατανόηση τέτοιων σχέσεων δεν μπορούμε να εξηγήσουμε στον μαθητή ότι πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να προσφύγουμε σε αξιώματα."

Επίπεδο 5 (το κατά van Hieles τέταρτο επίπεδο, επίπεδο 4)

(van Hiele-Geldof, 1957)

1. «Μια συγκριτική μελέτη των διαφόρων παραγωγικών συστημάτων στο πεδίο των γεωμετρικών σχέσεων είναι ... αποκλειστικά για εκείνους που έχουν φθάσει στο τέταρτο επίπεδο...».

(van Hiele και van Hiele-Geldof, 1958)

2. "Τελικά, στο τέταρτο επίπεδο (που δύσκολα μπορεί να επιτευχθεί στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) η ίδια η λογική σκέψη μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης."
3. «Τα αξιώματα καθαυτά ανήκουν στο τέταρτο επίπεδο».

(van Hiele, 1958-1959)

4. "Κάποιος δεν θέτει τέτοιες ερωτήσεις όπως: τι είναι τα σημεία, οι γραμμές, οι επιφάνειες κλπ. ... Τα σχήματα ορίζονται μόνο με σύμβολα που συνδέονται με σχέσεις. Για να βρεθεί η συγκεκριμένη σημασία των συμβόλων, πρέπει να στραφούμε σε χαμηλότερα επίπεδα όπου κάποιος μπορεί να δει κανείς το συγκεκριμένο νόημα αυτών των συμβόλων."

2.5 Περιγραφή των τυπικών γνωρισμάτων της Γεωμετρικής Σκέψης κάθε επιπέδου

Οι Burger & Shaughnessy (1986), Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988) περιγράφουν τα επίπεδα van Hiele και ταξινομούν τα γνωρίσματά τους:

Επίπεδο 1: Αναγνώρισης ή ολιστικό επίπεδο (recognition)

Τα σχήματα αντιμετωπίζονται σαν ολότητα και κρίνονται από την εμφάνισή τους. Δεν υπάρχει διάκριση στα επιμέρους στοιχεία τους. Δεν έχουν ακόμα την ικανότητα να κατανοήσουν ότι υπάρχουν ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μία ολόκληρη κλάση σχημάτων. Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα ονόματα των σχημάτων και τα συνδέουν με αντικείμενα του πραγματικού τους κόσμου. Για παράδειγμα, ένα σχήμα είναι τρίγωνο γιατί μοιάζει με πυραμίδα.

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές χρησιμοποιούν ανακριβείς και συχνά άσχετες ιδιότητες για να συγκρίνουν και να προσδιορίσουν τα σχήματα. Το λεξιλόγιο των μαθητών αυτού του επιπέδου είναι πολύ περιορισμένο και συναντούν δυσκολίες στην λεκτική περιγραφή των σχημάτων.

Επίπεδο 2: Ανάλυσης ή περιγραφικό (analysis)

Οι μαθητές έχουν την ικανότητα να αναγνωρίσουν τις ιδιότητες, τα συστατικά στοιχεία ενός σχήματος καθώς επίσης και τις σχέσεις μεταξύ των συστατικών μερών του. Για παράδειγμα ένα ορθογώνιο διακρίνεται από τα υπόλοιπα παραλληλόγραμμα εξαιτίας των γωνιών του και των αξόνων συμμετρίας του.

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές δεν έχουν αποκτήσει την λογική οργάνωση των ιδιοτήτων των σχημάτων. Χρησιμοποιούν υποκειμενικές κατηγοριοποιήσεις σχημάτων αντί των συμβατικών (για παράδειγμα δεν αποδέχονται εύκολα την ιδέα ότι ο ρόμβος είναι μία ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου). Επίσης, η απόδειξη μιας πρότασης δεν είναι αναγκαία, αλλά μπορεί να προκύψει αληθής μέσα από παραδείγματα. Το λεξιλόγιό του έχει αναπτυχθεί αρκετά για να περιγράψει τα διάφορα σχήματα. Είναι σε θέση να διαπιστώσει κοινές ιδιότητες μεταξύ διαφόρων σχημάτων. Δεν είναι ακόμα ικανός να ορίσει τον ελάχιστο αριθμό ιδιοτήτων που χρειάζονται για να οριστεί μία κατηγορία σχημάτων.

Επίπεδο 3: Διάταξης ή συσχετιστικό ή άτυπης αφαίρεσης (ordering)

Οι ιδιότητες των σχημάτων διατάσσονται λογικά. Οι μαθητές έχουν την ικανότητα να διακρίνουν μια ιδιότητα αν προηγείται ή προκύπτει από κάποια άλλη. Μπορούν να εξηγήσουν σχέσεις μεταξύ σχημάτων και να διατυπώσουν ορισμούς. Για παράδειγμα μπορούν να εξηγήσουν γιατί οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα. Οι μαθητές μπορούν να εκφράζουν μικρές και λογικές συνεπαγωγές της μορφής ''Αν … τότε ισχύει ότι ...''. Σε αυτό το επίπεδο παρατηρούμε στους μαθητές την ικανότητα για συμπερίληψη κλάσεων (class inclusion). Για παράδειγμα, ο ρόμβος είναι ειδική περίπτωση του παραλληλόγραμμου. Ο ρόλος και οι έννοιες των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και των πορισμάτων δεν είναι ακόμα κατανοητός σε αυτό το επίπεδο.

Επίπεδο 4: Παραγωγικό ή αφαίρεσης (deduction)

Σε αυτό το επίπεδο γίνεται κατανοητός ο ρόλος των αξιωμάτων, των ορισμών και των αποδείξεων. Αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της τυπικής απόδειξης. Οι μαθητές είναι σε θέση να δώσουν ολοκληρωμένες αποδείξεις και να χρησιμοποιήσουν λογικές αλυσίδες μέσα από ένα αξιωματικό σύστημα. Η γενική δομή της γεωμετρίας τους είναι ορατή. κατανοούν την ανάγκη χρήσης αξιωμάτων, έχουν την ικανότητα να ανακαλύψουν σχέσεις μεταξύ θεωρημάτων και μπορούν να κάνουν γενικεύσεις. Κάνουν διάκριση μεταξύ μιας αναγκαίας και ικανής συνθήκης όπως και των αποδεικτικών μεθόδων που μπορούν να ακολουθήσουν. Κατέχουν και χρησιμοποιούν την μέθοδο απόδειξης ενός θεωρήματος με τη χρήση της αντιθετοαντιστροφής ή της εις άτοπων απαγωγής. Τώρα οι μαθητές είναι ικανοί να κατανοήσουν και να διδαχθούν την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Επίπεδο 5: Αυστηρότητας (rigor)

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές κατανοούν τον τρόπο καθιέρωσης και σύγκρισης μαθηματικών συστημάτων, όπως η Ευκλείδεια και οι άλλες Γεωμετρίες. Οι μαθητές είναι ικανοί να διατυπώνουν ακριβείς συλλογισμούς και να συμμετέχουν στη μελέτη διαφορετικών αξιωματικών συστημάτων.

Η ύπαρξη του πέμπτου επιπέδου αμφισβητείται καθώς δεν υπάρχουν ικανοποιητικά ερευνητικά δεδομένα που να θεμελιώνουν την ύπαρξη του ως ξεχωριστό επίπεδο (Usiskin 1982).

Σύμφωνα με τον Ζάχο, (2000) “Οι περισσότεροι μαθητές φτάνουν μέχρι το τρίτο επίπεδο Γεωμετρικής Σκέψης, είναι δε πολύ σπάνιο να βρεθούν μαθητές στο πέμπτο επίπεδο. Ένα τέτοιο επίπεδο είναι πολύ απίθανο να κατακτηθεί από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, γιατί απαιτεί πολύ υψηλή αφαιρετική ικανότητα”.

2.6 Ενδείξεις ωρίμανσης της Γεωμετρικής Σκέψης - Η μετάβαση από ένα επίπεδο στο επόμενο

Σύμφωνα με την Κολέζα (2009), ανάμεσα στα πέντε επίπεδα της Γεωμετρικής Σκέψης υπάρχουν τέσσερα διαστήματα όπου οι μαθητές προετοιμάζονται για τη μετάβασή τους στο αμέσως επόμενο επίπεδο. Η ίδια αναφέρει πως σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα υπάρχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που μπορούμε να διακρίνουμε:

Α) Από το πρώτο στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές:

- Αρχίζουν να χρησιμοποιούν τους κατάλληλους γεωμετρικούς όρους για να περιγράψουν τις παρατηρήσεις τους
- Οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν ότι δύο σχήματα είναι ίσα χωρίς να έχουν τη δυνατότητα αιτιολόγησης της ισότητας

Β) Από το δεύτερο στο τρίτο επίπεδο οι μαθητές:

- Χρησιμοποιούν λογικές σχέσεις στην γλώσσα
- Μπορούν να εξηγούν και όχι μόνο να περιγράφουν
- Μπορούν να κατασκευάσουν σχήματα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητές τους
- Δεν έχουν αναπτύξει την ικανότητα της απόδειξης

Γ) Από το τρίτο στο τέταρτο επίπεδο οι μαθητές:

- Διατυπώνουν συλλογισμούς για τις λογικές σχέσεις μεταξύ προτάσεων και θεωρημάτων της γεωμετρίας
- Μπορούν να δώσουν λογική σειρά στα επιχειρήματά τους έτσι ώστε η κάθε δήλωση να είναι συνέπεια προηγούμενων

Δ) Από το τέταρτο στο πέμπτο επίπεδο οι μαθητές:

- Μπορούν να συγκρίνουν αξιωματικά συστήματα
- Μπορούν να ερευνούν τη φύση των λογικών νόμων

2.7 Φάσεις μάθησης

Η θεωρία των van Hieles περιέχει πέντε "φάσεις μάθησης" που ενεργοποιούνται μέσα από κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις. Το ζητούμενο αυτών είναι η προώθηση και η εξέλιξη της σκέψης των παιδιών έτσι ώστε να μεταβούν από το επίπεδο πού βρίσκονται στο επόμενο. Οι van Hieles ισχυρίζονται ότι η πρόοδος των μαθητών μέσω των επιπέδων εξαρτάται περισσότερο από την κατάλληλη διδασκαλία παρά από την ηλικία ή την ωρίμανση. Έτσι η μέθοδος και η οργάνωση της διδασκαλίας, καθώς και το περιεχόμενο και τα υλικά που χρησιμοποιούνται, είναι σημαντικοί τομείς παιδαγωγικού ενδιαφέροντος. Οι van Hieles υποστηρίζουν ότι οι οδηγίες που αναπτύχθηκαν σύμφωνα με αυτή την σειρά των φάσεων προωθούν στην απόκτηση ενός επιπέδου (van Hiele-Geldof 1984b).

Ακολουθεί περιγραφή των πέντε φάσεων μάθησης σύμφωνα με την Κολέζα (2009) και την Crowley, M. L. (1987):

1. **Πληροφόρηση-Διερεύνηση,**
2. **Καθοδηγούμενος προσανατολισμός,**
3. **Επεξήγηση-Ρητή έκφραση,**
4. **Ελεύθερος προσανατολισμός,**
5. **Ολοκλήρωση**

1. Πληροφόρηση-Διερεύνηση

Μέσα από διάλογο ή κατάλληλη δραστηριότητα ο δάσκαλος αντιλαμβάνεται τις υπαρκτές γνώσεις των μαθητών για το θέμα που θέλει να διαπραγματευτεί και τους καθοδηγεί προς αυτό.

Για παράδειγμα, ο καθηγητής ρωτά τους μαθητές: "Τι είναι ο ρόμβος; Ένα τετράγωνο; Ένα παραλληλόγραμμο; Είναι όμοια; Είναι διαφορετικά; Πιστεύετε ότι ένα τετράγωνο θα μπορούσε να είναι ρόμβος; Μπορεί ένας ρόμβος να είναι ένα τετράγωνο; Γιατί το λες αυτό;. . ."

Ο σκοπός αυτών των δραστηριοτήτων είναι διπλός:

(1) Ο καθηγητής μαθαίνει ποιες είναι οι προηγούμενες γνώσεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με το θέμα, και

(2) Οι μαθητές να πληροφορηθούν ποια κατεύθυνση θα ακολουθήσουν στη συνέχεια της μελέτης τους.

2. Καθοδηγούμενος προσανατολισμός

Μέσα από κατάλληλα οργανωμένες δραστηριότητες που ο δάσκαλος έχει επιλέξει προσεκτικά, οι μαθητές ερευνούν το επιλεγμένο αντικείμενο της διδασκαλίας. Οι δραστηριότητες είναι έτσι δομημένες ώστε οι μαθητές να οδηγούνται στο επόμενο επίπεδο. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία μάθησης και οδηγούνται μόνοι τους προς συγκεκριμένες απαντήσεις και το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα, ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ένα γεωπίνακα (geoboard) για να κατασκευάσουν ένα ρόμβο με ίσες διαγώνιες, μετά να κατασκευάσουν έναν άλλο μεγαλύτερο και κατόπιν να κατασκευάσουν έναν άλλο μικρότερο. Μια άλλη δραστηριότητα θα ήταν να οικοδομήσουμε ένα ρόμβο με τέσσερις ορθές γωνίες, μετά με τρεις ορθές γωνίες, μετά με δύο ορθές γωνίες, μετά με μία ορθή γωνία...

3. Επεξήγηση-Ρητή έκφραση

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το δικό τους λεξιλόγιο περιγράφουν και εξηγούν τις γνώσεις που απέκτησαν μέσα από την κατάλληλη δραστηριότητα. Ο δάσκαλος επαληθεύει αυτά που ειπώθηκαν ή διορθώνει τις πιθανές παρανοήσεις που έχουν γίνει. Επιπλέον βοηθά στη σωστή διατύπωση των γνώσεων που αποκτήθηκαν. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης αρχίζει να γίνεται εμφανές το σύστημα σχέσεων του επιπέδου. Συνεχίζοντας το παράδειγμα ρόμβου που αναφέρθηκε παραπάνω, οι μαθητές θα συζητήσουν μεταξύ τους και με τον δάσκαλο ποια στοιχεία και ιδιότητες προέκυψαν στις παραπάνω δραστηριότητες.

4. Ελεύθερος προσανατολισμός

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν λύνοντας προβλήματα και ερευνώντας ανοιχτές δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες σε αυτή τη φάση είναι πιο σύνθετες και απαιτούν γνώσεις και δεξιότητες που έχουν ήδη αποκτηθεί. “Αποκτούν εμπειρία με το δικό τους τρόπο ή κάνοντας εργασίες. Με προσανατολισμό προς τον τομέα της έρευνας, πολλές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων μελέτης γίνονται σαφείς στους μαθητές.” (Hoffer 1983). Για παράδειγμα, οι μαθητές θα ολοκληρώσουν μια δραστηριότητα όπως είναι οι εξής: "Διπλώστε ένα κομμάτι χαρτί στο μισό, στη συνέχεια στο μισό και πάλι όπως φαίνεται εδώ. Προσπαθήστε να φανταστείτε τι είδους σχήμα θα προκύψει αν κόψετε τη γωνία που γίνεται από τις πτυχές. Δικαιολογήστε την απάντησή σας πριν το κόψετε. Τι είδους σχήμα θα προκύψει αν κόψετε τη γωνία σε γωνία 30 μοιρών; Σε γωνία 45 μοιρών; Περιγράψτε τις γωνίες στο σημείο τομής των διαγώνιων. Το σημείο τομής είναι σε ποιο σημείο στις διαγώνιες; Γιατί η περιοχή ενός ρόμβου περιγράφεται από το μισό προϊόν των δύο διαγώνιων; "

5. Ολοκλήρωση

Οι μαθητές ενσωματώνουν τις καινούργιες γνώσεις που απέκτησαν στις ήδη υπάρχουσες. Έτσι αναπτύσσονται καινούργια δίκτυα σχέσεων στις γνώσεις τους. Σε αυτή τη φάση οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν το σύνολο των γνώσεων που απέκτησαν. Ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει σε αυτή τη σύνθεση για αυτά που έμαθαν οι μαθητές. Είναι σημαντικό αυτές οι περιλήψεις να μην παρουσιάζουν καμία καινούργια γνώση. Οι ιδιότητες του ρόμβου που προέκυψαν θα συνοψιστούν και θα αναθεωρηθεί η προέλευσή τους.

Στο τέλος της πέμπτης φάσης, οι μαθητές έχουν επιτύχει ένα νέο επίπεδο σκέψης. Ο νέος τομέας σκέψης αντικαθιστά τον παλιό και οι μαθητές είναι έτοιμοι να επαναλάβουν τις φάσεις της μάθησης για το επόμενο επίπεδο.

2.8 Η φάση της διορατικότητας

Οι van Hieles θεωρούσαν σημαντική την ανάπτυξη της διορατικότητας στους μαθητές τους. Το βασικό θέμα της διδακτορικής του διατριβής του Pierre van Hiele ήταν η διορατικότητα στη Γεωμετρία.

Οι ίδιοι οι van Hieles ορίζουν την **διορατικότητα (insight)** ως εξής:
Ένα άτομο δείχνει διορατικότητα αν:

1. Είναι ικανό να λειτουργήσει σε μια κατάσταση με την οποία δεν είναι εξοικειωμένο.
2. Εκτελεί ικανοποιητικά, δηλαδή σωστά και με ακρίβεια, τις ενέργειες που απαιτεί η κατάσταση αυτή.
3. Εκτελεί συνειδητά και μετά από σκέψη μια διαδικασία που επιλύει το πρόβλημα.

Ένας μαθητής **δείχνει διορατικότητα** αν:

1. Καταλαβαίνει τι ακριβώς κάνει.
2. Γιατί το κάνει.
3. Πότε το κάνει.
4. Μπορεί να εφαρμόσει τις γνώσεις του στην επίλυση προβλημάτων.

Όπως αναφέρει η Κολέζα, (2011) στον πρόλογο της Ελληνικής έκδοσης του βιβλίου “Δομή και Διορατικότητα” του van Hiele (2011), “Υπάρχει μία γενική τάση σε όλους τους πολιτισμούς και σε όλες τις ιστορικές περιόδους να γίνεται μία διαφοροποίηση μεταξύ των νοητικών διαδικασιών που είναι συνηθισμένες, επιφανειακές και ασήμαντες, και εκείνων που είναι ασυνήθιστες, βαθιές και σημαντικές. Η λέξη που χαρακτηρίζει καλύτερα το δεύτερο τύπο νοητικών διαδικασιών είναι η διορατικότητα (insight), που προέρχεται από το αντίστοιχο ολλανδικό inzicht-seeing inside” (Csikszentmihalyi & Sawyer, 1995).

Πρόκειται για μία διαδικασία οργάνωσης της διάνοιας, που επιτρέπει σε κάποιον να “βλέπει” τις καταστάσεις με μία μοναδική διεισδυτική και επεξηγηματική προοπτική. Διορατικότητα είναι η ικανότητα αντίληψης σχέσεων και νοημάτων. Η διορατικότητα ενοποιεί και οργανώνει.

Συχνά, η διορατικότητα ταυτίζεται με τη διαίσθηση. Στην πραγματικότητα, η διορατικότητα στηρίζεται και στη διαίσθηση, αλλά αντίθετα με αυτή είναι μία συνειδητή διαδικασία. “Διορατικότητα είναι η ικανότητα να βλέπεις και να κατανοείς την εσωτερική φύση των πραγμάτων, ιδιαίτερα μέσω διαίσθησης” (Webster’s new world dictionary,1984).

Η αναγνώριση, συμπλήρωση, αναδιάταξη μιας δομής, οπτικής ή νοητικής, είναι ένδειξη διορατικότητας. Σύμφωνα με την Κολέζα (2011), ο van Hiele ενδιαφέρεται να ταυτίσει πλήρως την αντίληψη του περί διορατικότητας με εκείνη της σχολής

Gestalt, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στη συνειδητότητα της διορατικότητας και στη σύνδεσή της με την ύπαρξη μιας αντικειμενικής δομής. Στο μοντέλο του van Hiele, η αντίληψη της δομής από την πλευρά των μαθητών αποτελεί ένδειξη διορατικότητας πού, με τη σειρά της, είναι απαραίτητη για την κατανόηση.

Ο van Hiele, στο βιβλίο του "Δομή και Διορατικότητα" αναφέρει ότι πρέπει να αναλογιστούμε τη σχέση μεταξύ μιας διαισθητικής απόφασης και μιας απόφασης που στηρίζεται σε μία οπτική δομή. Αναφέρει ότι ο Heymann θεωρεί πως η διαισθητική σκέψη λαμβάνει χώρα υποσυνείδητα και ότι στην υποσυνείδητη σκέψη πρέπει να έχει κάποιος περισσότερα δεδομένα στη διάθεσή του. Αυτό ταιριάζει απόλυτα στην ανάλυση της οπτικής δομής.

Ο van Hiele αναφέρει στο βιβλίο του ότι η απόφαση με βάση μία οπτική δομή μπορεί να είναι εξίσου αξιόπιστη με μία απόφαση στηριγμένη στη διαλεκτική σκέψη. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε ορθά συμπεράσματα. Αντίθετα, μία απόφαση με βάση προκαταλήψεις αποτελεί απλώς μία απόφαση για την οποία δεν υπάρχει στη διάθεσή του κρίνοντας κάποια δομή, αλλά μόνο η καθοδήγηση εσφαλμένων συμπαθειών και αντιπαθειών. Όποιος δρα με βάση κάποια "αλάθητη διορατικότητα" κατά πάσα πιθανότητα εξάγει συμπεράσματα με βάση οπτικές δομές. Επειδή είναι συχνά δύσκολο να εκφράσει τις δομές αυτές με λόγια, μερικές φορές τα συμπεράσματα φαίνονται ως τυχαίες επιλογές.

Ο van Hiele αναφέρει ότι μία απόφαση που στηρίζεται στη διορατικότητα, δηλαδή στην "προσεκτική παρατήρηση", χωρίς τη βοήθεια της διαλεκτικής σκέψης, μπορεί να είναι ορθή. Αν έχουμε πρόσβαση σε μία ισχυρή δομή, η βεβαιότητα της απόφασης μπορεί να δικαιολογείται απόλυτα. Στην περίπτωση αυτή, αυτός που θα κρίνει έχει δει μία πολύ ξεκάθαρη δομή από την οποία μπορεί να συναχθεί εύκολα η απάντηση του προβλήματος.

Σύμφωνα με τον van Hiele "Οι μέθοδοι διδασκαλίας, είτε αυτές που στηρίζονται στη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη, είτε στη συζήτηση στην τάξη, είτε σε διαλέξεις με χρόνο για ερωτήσεις, όλες εξαρτώνται από τη διαλεκτική σκέψη. Αυτό ισχύει ακόμα και στις μεθόδους όπου τα παιδιά πρέπει να επινοήσουν θεωρήματα. Μόνο στο νηπιαγωγείο βρίσκουμε ευκαιρίες για εξερεύνηση χωρίς εμπλοκή με την ύλη. Ακόμη και όταν γίνεται χρήση της ύλης, αυτή δεν χρησιμοποιείται για ελεύθερο παιχνίδι εξερεύνησης... Τα παιδιά, αλλά και οι ενήλικες, χρειάζονται την ευκαιρία να παίξουν με το υλικό, για να εξοικειωθούν με τη δομή του. Οι δάσκαλοι μπορούν βέβαια να κερδίσουν χρόνο εκπαίδευσης κατευθύνοντας το παιχνίδι των παιδιών για να τα καθοδηγήσουν στην εκμάθηση της δομής του. Πάντως, για να παρουσιαστεί η δομή του υλικού στα παιδιά, χρειάζεται κάποια ελευθερία."

Σε άλλο σημείο του βιβλίου του ο van Hiele αναφέρει " η διορατικότητα έχει μία κακή φήμη, συνυφασμένη με την έννοιά της. Εάν αυτό που βλέπω μπορεί να το δει ο καθένας, οι πράξεις μου δεν στηρίζονται στη διορατικότητα. Εάν κάποιος άλλος μπορεί να μάθει να βλέπει τη δομή πάνω στην οποία στήριξα την κρίση μου, τότε δεν έδρασαν με βάση την διορατικότητα. Αν όμως βλέπω άμεσα τη λύση σε κάποιο πρόβλημα, χωρίς να είμαι σε θέση να εξηγήσω πως ήταν οργανωμένη η δομή που είδα, τότε μπορούμε να μιλάμε για διορατικότητα. Αν μάλιστα η δομή είναι τόσο αδύνατη που δεν είμαι σε θέση να αναγνωρίσω τα συστατικά της, τότε σίγουρα πρέπει να είναι διορατικότητα. Η κακή σημασία της έννοιας ενδεχομένως πηγάζει και από ζήλια: "ο άνθρωπος αυτός έχει δίκιο, αλλά δεν μας έδωσε κάποια εξήγηση για την κρίση του. Εμείς, αντίθετα, είχαμε μία εξήγηση για την κρίση μας. Αν και, έπειτα από αυτά φαίνεται πως έχουμε άδικο, ωστόσο παραμένουμε πιο έξυπνοι από αυτόν". Και με τη δήλωση αυτή, εκείνος που αποφασίζει με βάση τη διορατικότητα ταξινομείται στην ίδια κατηγορία με τους τζογαδόρους, ακόμα και αν οι στατιστικές δείχνουν πως οι κρίσεις του δεν μπορούν να βασίζονται στην τύχη.

Σε άλλο σημείο του βιβλίου του ο van Hiele αναφέρει πως όταν μιλάμε για μία διαισθητική εισαγωγή στη Γεωμετρία, αναφερόμαστε σε ένα ξεκίνημα κατά το οποίο η παρατήρηση παίρνει τη θέση που δικαιωματικά της ανήκει. Δεν τίθεται ζήτημα κακής έννοιας. Η λέξη **διορατικότητα** χρησιμοποιείται απλώς σε σχέση με την **παρατήρηση**."

Σε άλλο σημείο του βιβλίου του ο van Hiele μας δίνει τα **συμπεράσματα στα οποία κατέληξε αναρωτώμενος αν μπορούμε να ελέγξουμε τη διορατικότητα**:

- Μία συνθήκη για την ύπαρξη διορατικότητας είναι να υπάρχει η ικανότητα επαρκούς δράσης σε μία νέα κατάσταση.
- Η εξέταση της διορατικότητας απαιτεί τη συνεργασία δασκάλου και μαθητή.
- Είναι εξίσου σημαντικό για τον μαθητή, όσο και για το δάσκαλο, να γνωρίζει αν έχει αποκτήσει τη διορατικότητα.
- Στις εξετάσεις, συνήθως η μόνη διορατικότητα που εκδηλώνεται είναι αυτή που ο εξεταζόμενος έχει κατακτήσει νωρίτερα. Μπορούμε μόνο να εικάσουμε αν πρόκειται για μία αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της σκέψης του εξεταζόμενου ή της σκέψης άλλων ανθρώπων.
- Το να δρα κάποιος επαρκώς σε μία νέα κατάσταση υποδηλώνει την ύπαρξη διορατικότητας μόνο αν η επαρκής πράξη προέρχεται από την πρόθεση του μαθητή.

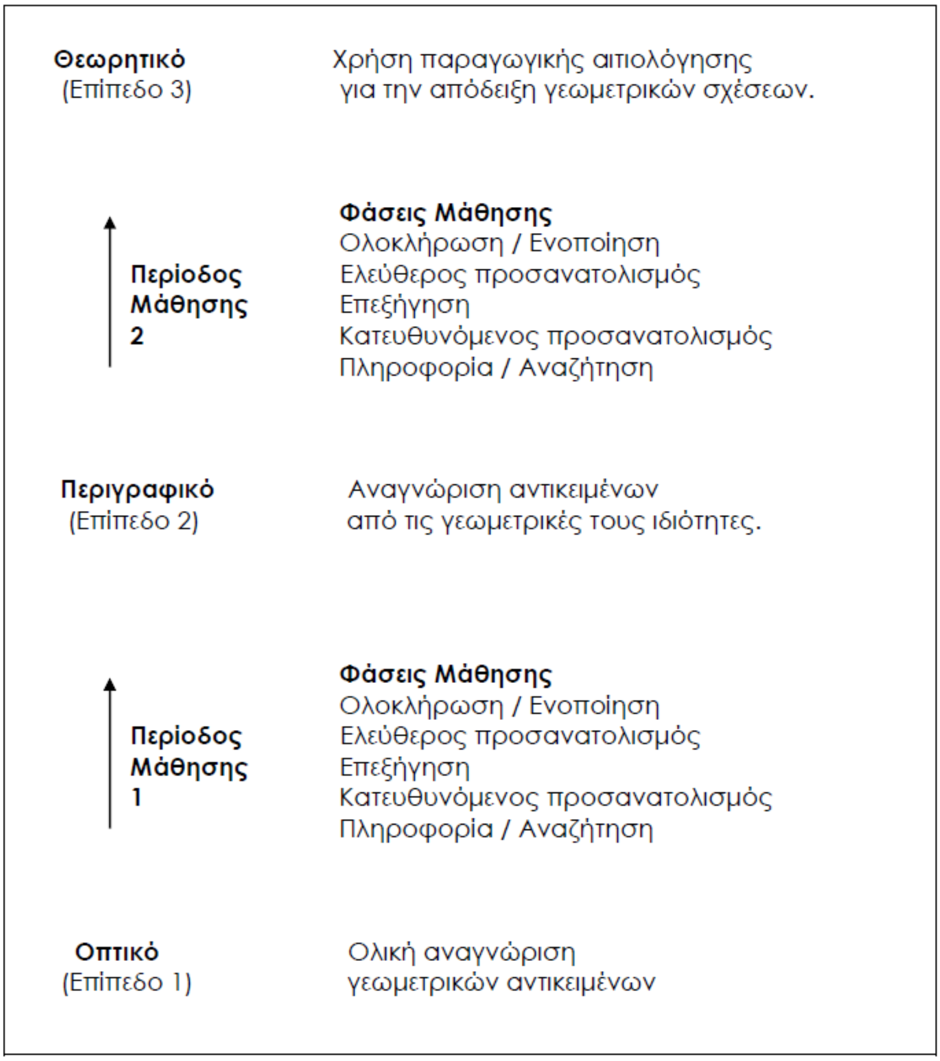
Ο δάσκαλος πρέπει να προσπαθεί να διευρύνει την ενόραση των μαθητών του. Πώς όμως μπορεί να το πετύχει αυτό; Το ερώτημα απαντήθηκε εν μέρει από τους van Hieles με την εισαγωγή των φάσεων της μάθησης. Εξακολουθεί όμως να είναι το κύριο ζητούμενο σε όλες τις έρευνες γύρω από τη διδακτική είτε αυτές αφορούν τα Μαθηματικά είτε όχι (Hoffer, 1983).

2.9.1 Η επικαιροποίηση των Επιπέδων της Γεωμετρικής Σκέψης van Hiele, όπως την περιγράφει η Teppo, (1991)

Ο Van Hiele συνοψίζει επί του παρόντος το μοντέλο του σε τρία αντί για τα πέντε επίπεδα σκέψης, τα οποία χαρακτηρίζει ως **οπτικό (επίπεδο 1), περιγραφικό (επίπεδο 2) και θεωρητικό (επίπεδο 3)** (Fuys, Geddes και Tischler 1988, Geddes 1987 , 1988, van Hiele 1986).

Στο παρόν μοντέλο, αυτά τα επίπεδα επιτυγχάνονται περνώντας από διαφορετικές περιόδους μάθησης. Κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου, οι μαθητές διερευνούν τα κατάλληλα αντικείμενα μελέτης, αναπτύσσουν συγκεκριμένη γλώσσα σχετική με αυτά τα αντικείμενα και συμμετέχουν σε δραστηριότητες διαδραστικής μάθησης σχεδιασμένες ώστε να μπορούν να προχωρήσουν στο επόμενο υψηλότερο επίπεδο σκέψης.

"Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο δεν είναι μια φυσική διαδικασία, πραγματοποιείται υπό την επίδραση ενός προγράμματος διδασκαλίας-μάθησης" (van Hiele, 1986).
"Τα οπτικά, περιγραφικά και θεωρητικά επίπεδα σκέψης και οι περίοδοι μάθησης που οδηγούν σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα περιγράφονται εδώ και συνοψίζονται στο σχήμα 1" (van Hiele 1986).



Σχήμα:

Το αναθεωρημένο μοντέλο διδασκαλίας van Hiele. Κάθε επίπεδο σκέψης χωρίζεται από μια περίοδο μάθησης, χρησιμοποιώντας τις 5 φάσεις μάθησης που καθιστά ικανούς τους μαθητές να ανεβαίνουν στο επόμενο επίπεδο σκέψης. Teppo, A. (1991)

Επίπεδο 1 (Οπτικό)

Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως ολότητες. Είναι δυνατόν να δούμε παρόμοια τρίγωνα, αλλά είναι άσκοπο να ρωτάμε γιατί είναι παρόμοια: Δεν υπάρχει λόγος, κάποιος το βλέπει.

Περίοδος Μάθησης 1

Οι μαθητές κινούνται από το επίπεδο-1 στο επίπεδο-2 της γεωμετρικής σκέψης. Τα αντικείμενα μελέτης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου αποτελούνται από ιδιότητες μεμονωμένων σχημάτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν ότι ένα τετράγωνο περιέχει τέσσερις ίσες πλευρές και έχει ίσες διαγώνιες που είναι κάθετες και διχοτομούνται.

Επίπεδο 2 (Περιγραφικό)

Οι μαθητές διακρίνουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους.

Περίοδος Μάθησης 2

Οι μαθητές κινούνται από το επίπεδο 2 στο επίπεδο-3 της γεωμετρικής σκέψης. Τα αντικείμενα της μελέτης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είναι τα δίκτυα των σχέσεων και η σειρά των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Οι μαθητές διερευνούν τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να διατάξουν σχετικές ιδιότητες, έτσι ώστε κάθε ιδιότητα να είναι το αποτέλεσμα μιας προηγούμενης ιδιότητας. Χρησιμοποιώντας άτυπη παραγωγική συλλογιστική, οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν τις σχέσεις.

Επίπεδο 3 (Θεωρητικό)

Οι μαθητές είναι σε θέση να επινοήσουν μια τυπική γεωμετρική απόδειξη και να κατανοήσουν τη χρησιμοποιούμενη διαδικασία.

2.9.2 Οι επικαιροποιημένες Φάσεις Μάθησης, όπως τις περιγράφει η Teppo, (1991)

Στο μοντέλο του van Hiele οι μαθητές προχωρούν από το ένα επίπεδο στο άλλο ως αποτέλεσμα της σκόπιμης διδασκαλίας που οργανώνεται σε πέντε διαδοχικές φάσεις δραστηριοτήτων που υπογραμμίζουν την εξερεύνηση, τη συζήτηση και την ολοκλήρωση. Το μοντέλο van Hiele αξιώνει ότι αυτές οι πέντε φάσεις διδασκαλίας είναι απαραίτητες για να επιτρέψουν στους μαθητές σε κάθε περίοδο μάθησης να αναπτύξουν ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικών σκέψεων (van Hiele 1986).

Πρώτη φάση: (Αναζήτηση/Πληροφορία)

Πληροφοριακό υλικό που σχετίζεται με το τρέχον επίπεδο μελέτης παρουσιάζεται στους μαθητές.

Δεύτερη φάση: (Κατευθυνόμενος προσανατολισμός)

Ο μαθητής διερευνά το πεδίο έρευνας μέσα από προσεκτικά καθοδηγούμενες και δομημένες δραστηριότητες.

Τρίτη φάση: (Επεξήγηση)

Οι μαθητές και ο δάσκαλος συζητούν σχετικά με τα αντικείμενα της μελέτης. Σε αυτή τη φάση και με τη βοήθεια του δασκάλου, οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν συγκεκριμένη και κατάλληλη γλώσσα.

Τέταρτη φάση: (Ελεύθερος προσανατολισμός)

Οι μαθητές συμμετέχουν σε πιο ανοιχτού τύπου δραστηριότητες, οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με διάφορους τρόπους λύσεων.

Πέμπτη φάση: (Ολοκλήρωση)

Ο δάσκαλος βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν μια επισκόπηση του πεδίου που μελέτησαν και να ενσωματώσουν το αντικείμενο που ερευνήθηκε. Σε αυτό το στάδιο οι κανόνες μπορούν να συντίθενται και να απομνημονεύονται.

2.10 Η παιδαγωγική αξία του μοντέλου van Hiele

Μελετώντας το μοντέλο των van Hieles μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μεθοδική και κατάλληλη διδασκαλία των μαθητών μπορεί να επιταχύνει τη βελτίωση της Γεωμετρικής Σκέψης αυτών.

Ο Τουμάσης, (2000) προτείνει:

α) **Για τους μαθητές:**

- Οι μαθητές των πρώτων βαθμίδων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης να μαθαίνουν Σχεδιαστική Γεωμετρία μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων που θα τους επιτρέπουν τον πειραματισμό και την εξαγωγή συμπερασμάτων, χωρίς αυστηρές τυπικές αποδείξεις. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να περιλαμβάνουν τη διερεύνηση κάποιον προτύπων, ιδιότητες πολυγώνων και πολυέδρων, μετρήσεις, συγκρίσεις, ομοιότητα, κατασκευές, συμμετρίες κ.λ.π.
- Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν την αναγκαιότητα των Γεωμετρικών Οργάνων καθώς και τον τρόπο χρήσης τους. Σχήματα κατασκευασμένα χωρίς τη χρήση τους δεν θα πρέπει να γίνονται αποδεκτά από τον καθηγητή.
- Οι δραστηριότητες που τους ανατίθενται θα πρέπει να βοηθούν τους μαθητές να οδηγηθούν στο επόμενο επίπεδο Γεωμετρικής Σκέψης.

Ο Τουμάσης, (2000) προτείνει:

β) **Για τους δασκάλους - καθηγητές:**

- Να αντιληφθούν ότι το δικό τους επίπεδο σκέψης είναι διαφορετικό από των μαθητών και να προσαρμόσουν ανάλογα τη διδασκαλία τους στο επίπεδο των μαθητών έτσι ώστε να γίνονται κατανοητοί από αυτούς.

- Να αξιοποιήσουν το μοντέλο γεωμετρικής σκέψης των van Hieles και να το εφαρμόσουν στη σχολική τάξη, τροποποιώντας κατάλληλα τη διδασκαλία τους.

2.11 Οι επιδράσεις της θεωρίας van Hiele στον κόσμο

2.11.1 Η επίδραση της θεωρίας van Hiele στη Σοβιετική Ένωση.

Όπως αναφέρει ο Πρίντεζης (2006) στην πρώην Σοβιετική Ένωση οι ψυχολόγοι και οι εκπαιδευτικοί ασχολήθηκαν πολύ με τη βελτίωση των σχολικών προγραμμάτων και των μεθόδων διδασκαλίας. Υιοθέτησαν γρήγορα τις ιδέες των van Hiele γιατί οι δυσκολίες των μαθητών με τη Γεωμετρία ήταν ίδιες στη Σοβιετική Ένωση όπως και στον υπόλοιπο κόσμο.

Ο σοβιετικός A. M. Pyshkalo αναρωτιέται το 1968 "Γιατί τόσο πολλά παιδιά, που τα καταφέρνουν καλά σε άλλα σχολικά μαθήματα, δεν μπορούν να προχωρήσουν στη μελέτη της Γεωμετρίας;". Ο Pyshkalo προσπαθεί να δώσει μια απάντηση στο θέμα αυτό. "Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στα σχολεία αρχίζει αργά και ασχολείται σχεδόν αμέσως με μετρήσεις προσπερνώντας την ποιοτική φάση του μετασχηματισμού των χωροταξικών λειτουργιών σε λογικές. Είναι όμως γνωστό ότι η ανάπτυξη των γεωμετρικών χειρισμών στα παιδιά γίνεται ανάποδα, δηλαδή οι πρώτες τους γεωμετρικές πράξεις είναι ποιοτικές και όχι ποσοτικές. Για αυτό, στο σύστημα που προτείνουμε, η εξοικείωση των μαθητών με τα γεωμετρικά αντικείμενα αρχίζει με το σχηματισμό των ποιοτικών εννοιών όπως τη μελέτη των σχημάτων, των σχετικών θέσεων και των συσχετισμών μεταξύ τους. Αργότερα εισάγονται σταδιακά οι ποσοτικές σχέσεις όπως οι μετρήσεις. Μια τέτοια προσέγγιση επιτρέπει να ξεκινήσει νωρίτερα η μελέτη της Γεωμετρίας".

Ο Pyshkalo χρησιμοποιεί με μικρές τροποποιήσεις τα επίπεδα van Hiele (για παράδειγμα τα αριθμεί από 1 μέχρι 5 αντί για 0-4) για να διαμορφώσει το σχολικό πρόγραμμα της Γεωμετρίας για παιδιά από 7 μέχρι 15 ετών.

Οι έρευνές του κατά τη δεκαετία του 60 έδειξαν τα εξής :

1. Μέχρι την ηλικία των 12 ετών ένας σημαντικός αριθμός παιδιών βλέπουν τα σχήματα σαν «ολότητες».
2. Οι μαθητές παραμένουν στο πρώτο επίπεδο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην ηλικία των 12 ετών μόνο ένα 10-15% έχουν περάσει στο δεύτερο επίπεδο (το επίπεδο 1 κατά van Hiele) που είναι απαραίτητο για την παραπέρα μελέτη της Γεωμετρίας.
3. Όσον αφορά τα στερεά σχήματα η καθυστέρηση είναι ακόμα μεγαλύτερη, δηλαδή φτάνει μέχρι και τα 14 χρόνια.

4. Η ανάπτυξη των παιδιών μπορεί να επηρεαστεί με τη μελέτη κατάλληλου γεωμετρικού υλικού. Μαθητές 8 ετών που έχουν εξοικειωθεί με τα στερεά μπορούν να φτάσουν στο δεύτερο επίπεδο προσπερνώντας παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας.

Σαν αποτέλεσμα αυτών των ερευνών οι σοβιετικοί σχεδίασαν γεωμετρικό υλικό που επέτρεπε στους μαθητές να περάσουν στο δεύτερο επίπεδο στην ηλικία των 9 ετών έχοντας κατακτήσει ένα σημαντικό αριθμό γεωμετρικών εννοιών. Ο Pyshkalo αναφέρει "Δείξαμε ότι η ικανότητα των μαθητών του Δημοτικού για συγκεκριμένους συλλογισμούς είναι μεγαλύτερη από ότι πιστεύαμε μέχρι τώρα και πάνω από το επίπεδο που αρχίζει συνήθως η παραδοσιακή διδασκαλία".

2.11.2 Η επίδραση της θεωρίας van Hiele στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Όπως αναφέρει ο Πρίντεζης (2006) οι ιδέες των van Hiele έφτασαν στην Αμερική στα μέσα της δεκαετίας του 1970 με τα έργα των Freudental (1973) και Wirszup (1976).

Ο Freudental (1973) έδωσε ένα παράδειγμα των επιπέδων κατανόησης στην περίπτωση της μαθηματικής επαγωγής και επιβεβαίωσε ότι αυτή πράγματι αναπτύσσεται ακολουθώντας τα.

Ο Wirszup (1976) παρουσίασε τις πρωτότυπες έρευνες των van Hieles και ανέφερε τα αποτελέσματα των σοβιετικών που είχαν προηγηθεί. Έτσι τράβηξε την προσοχή των Αμερικανών Εκπαιδευτικών και πολλοί από αυτούς ενθουσιάστηκαν με την απλότητα των ιδεών αυτών.
Είναι συνηθισμένο το φαινόμενο, όταν δουλεύει κανείς με τη δομή των επιπέδων, να φτιάχνει μια συλλογή ερωτήσεων και 20 προβλημάτων και να προσπαθεί να προσδιορίσει το ελάχιστο επίπεδο που απαιτείται για να απαντήσει κάποιος μία ερώτηση ή να λύσει ένα πρόβλημα. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι απογοητευτικό πόσο συχνά υπερεκτιμά κανείς το επίπεδο αυτό. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές βρίσκονται σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτό που αναμένει ο καθηγητής. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλοί μαθητές γυμνασίου βρίσκονται ακόμα στο πρώτο επίπεδο, αντίθετα με ότι περιμένει κανείς ανάλογα με την ηλικία τους. Πόσες φορές δεν έχουμε ακούσει την ερώτηση "το τετράγωνο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;". Λίγοι μαθητές σ΄ αυτή την ηλικία καταλαβαίνουν τη διαφορά ανάμεσα σε έναν ορισμό, ένα αξίωμα και ένα θεώρημα. Δυστυχώς δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι και οι διδάσκοντες κατανοούν τις έννοιες αυτές. Επιβάλλεται όμως να τις γνωρίζουν για να τις μεταδώσουν σωστά στους μαθητές τους.

Αν εξετάσει κανείς τα σχολικά βιβλία θα διαπιστώσει την ασυνέπεια ανάμεσα στα επίπεδα κατανόησης των ερωτήσεων και των μαθητών στους οποίους απευθύνονται. Υπάρχουν δηλαδή ερωτήσεις πολύ χαμηλότερου επιπέδου από αυτό που υποτίθεται ότι βρίσκεται η πλειοψηφία των μαθητών της τάξης ή σπανιότερα ερωτήσεις υψηλότερου επιπέδου.

Μετά τη δημοσίευση του έργου του Wirszup στην Αμερική έγινε μια προσπάθεια συγγραφής βιβλίων Γεωμετρίας που θα λάμβαναν υπόψη τα επίπεδα van Hiele αλλά χωρίς να απομακρύνονται δραστικά από το υπάρχον σχολικό πρόγραμμα. Για παράδειγμα το βιβλίο του A.Hoffer «Geometry, a model of the universe» (1979) αφιέρωνε το πρώτο μισό του χρόνου σε δραστηριότητες και εξερευνητικές εργασίες που προετοίμαζαν τους μαθητές να δουλέψουν σε αφαιρετικό επίπεδο. Οι τυπικές αποδείξεις εμφανίζονται στο δεύτερο μισό του βιβλίου. Το υλικό διδάχτηκε πειραματικά και στο τέλος του χρόνου ένα ειδικό τεστ δόθηκε στους μαθητές των πειραματικών τμημάτων και παράλληλα σε μαθητές που είχαν ακολουθήσει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές στα πειραματικά τμήματα μπορούσαν να διατυπώσουν αποδείξεις τουλάχιστον το ίδιο καλά με αυτούς των παραδοσιακών αλλά οι καθηγητές των πρώτων πίστευαν ότι οι μαθητές τους ήξεραν "περισσότερη Γεωμετρία" ιδιαίτερα όσον αφορά τα εμβαδά, τους όγκους και τους μετασχηματισμούς (Hoffer 1983). Κάποιοι καθηγητές, που αρχικά ήταν διστακτικοί, έγιναν ενθουσιώδεις υποστηρικτές. Την επόμενη χρονιά υπήρξαν μαρτυρίες ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν το καινούργιο βιβλίο ήταν πιο ικανοί στη λύση προβλημάτων από τους υπόλοιπους.

Ένα πλήθος άλλων ερευνών έγιναν στην Αμερική με βάση τα επίπεδα Van Hiele. Τα αποτελέσματά τους σήμερα είναι πάρα πολύ γνωστά:

- Το σχέδιο Oregon είχε στόχο **να διερευνήσει κατά πόσο τα επίπεδα van Hiele μπορούν να χρησιμεύσουν σαν μοντέλο για να προσεγγίσει κανείς την κατανόηση της Γεωμετρίας.** Αποτελείτο από δύο σειρές δραστηριοτήτων και ερωτήσεων που δόθηκαν σε 70 μαθητές από 6 μέχρι 12 ετών. Οι ερευνητές πήραν προφορική συνέντευξη από κάθε μαθητή μαγνητοφωνώντας τις απαντήσεις. Ακολουθούσαν τη σειρά των ερωτήσεων όσο ο μαθητής μπορούσε να ανταποκριθεί. Οι αρχικές ερωτήσεις κάθε σειράς ήταν ανοικτής και διερευνητικής φύσης ενώ οι τελικές ήταν πιο εξειδικευμένες και απαιτούσαν υψηλότερο επίπεδο σκέψης. Για παράδειγμα στη σειρά του τετράπλευρου ζητήθηκε αρχικά από τους μαθητές να σχεδιάσουν μερικά τετράπλευρα που να διαφέρουν σε κάτι μεταξύ τους. Προς το τέλος της σειράς τους ζητήθηκε να εξηγήσουν (να αποδείξουν) γιατί οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες και αν μπορούν να εξηγήσουν τη διαφορά ανάμεσα σε έναν ορισμό, ένα αξίωμα και ένα θεώρημα. Υπήρχε μία ανάλογη σειρά για τα τρίγωνα. Οι ερευνητές προσπάθησαν να κατανοήσουν τις αντιλήψεις των υποκειμένων της έρευνας όπως επίσης και να τοποθετήσουν τις απαντήσεις τους στο κατάλληλο επίπεδο κατανόησης.

- Το σχέδιο Brooklyn είχε σαν στόχο να διερευνήσει **αν το μοντέλο van Hiele περιγράφει τον τρόπο που οι μαθητές μαθαίνουν Γεωμετρία.** Επικεντρώθηκε στην επίδραση του αστικού και ιδιαίτερα του μειονοτικού περιβάλλοντος. Το σχέδιο αξιολόγησε τα σχολικά βιβλία ανάλογα με το επίπεδο των δραστηριοτήτων κατά van Hiele. Περιελάμβανε ατομικές συνεντεύξεις που βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν με σκοπό να διαπιστωθεί κατά πόσο συγκεκριμένα βοηθήματα βελτίωναν το επίπεδο των μαθητών.

- Ο στόχος του σχεδίου Chicago που έγινε από τον καθηγητή Usiskin την τριετία 1979-1982 ήταν **να διαπιστώσει την επίδραση του γνωστικού και λειτουργικού επιπέδου των μαθητών σε ένα τεστ προαπαιτούμενων για την επιτυχία στις τυπικές γεωμετρικές έννοιες και αποδείξεις.** Δόθηκε σε 2900 μαθητές Λυκείου και αποτελείτο από τέσσερα τεστ:
  - ✓ Το πρώτο ήταν ένα τεστ πολλαπλών απαντήσεων (P) πάνω στις προαπαιτούμενες γνώσεις για τη μελέτη της Γεωμετρίας στο Λύκειο.
  - ✓ Το δεύτερο, επίσης πολλαπλών απαντήσεων (V), συνέδεε κατευθείαν κάθε ερώτηση με το αντίστοιχο ελάχιστο επίπεδο van Hiele που ήταν απαραίτητο για να απαντηθεί.
  - ✓ Το τρίτο τεστ (Pr) είχε να κάνει με την ικανότητα απόδειξης. Κάθε μαθητής έπρεπε να λύσει δύο προβλήματα που απαιτούσαν να συμπληρώσει μέρη αποδείξεων και τέσσερις τυπικές αποδείξεις.
  - ✓ Το τέταρτο ήταν ένα συνηθισμένο τεστ (A) που αξιολογούσε την επίδοση των μαθητών στη Γεωμετρία.

  Τα τεστ P και V δόθηκαν στην αρχή της χρονιάς και στο τέλος της ξαναδόθηκαν μαζί με τα τεστ Pr και A.

  Η έρευνα προσπάθησε να απαντήσει σε ερωτήματα όπως:
  - ✓ **Πώς κατανέμονται οι μαθητές που ξεκινούν το μάθημα της Γεωμετρίας σε σχέση με τα επίπεδα στο σχήμα van Hiele;**
  - ✓ **Ποιες αλλαγές λαμβάνουν χώρα στα επίπεδα van Hiele μετά από ένα σχολικό έτος σπουδής της Γεωμετρίας;**
  - ✓ **Σε ποια έκταση σχετίζονται τα επίπεδα van Hiele με την τρέχουσα επίδοση στη Γεωμετρία;**
  - ✓ **Σε ποια έκταση προβλέπουν τα επίπεδα van Hiele την επίδοση στη Γεωμετρία μετά από μαθήματα ενός έτους;**
  - ✓ **Σε ποια έκταση είναι η Γεωμετρία που διδάσκεται στους μαθητές κατάλληλη για το δικό τους επίπεδο van Hiele;**
  - ✓ **Σε ποια έκταση διαφέρουν οι τάξεις της Γεωμετρίας σε διαφορετικά σχολεία και κοινωνικο-οικονομικά περιβάλλοντα ως προς την καταλληλότητα της ύλης του μαθήματος στο επίπεδο van Hiele του μαθητή;**

2.11.3 Η επίδραση της θεωρίας van Hiele στην Ελλάδα.

Όπως αναφέρει ο Πρίντεζης (2006) η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ελλάδα, για ιστορικούς κυρίως λόγους, ήταν πάντα στενά συνδεδεμένη με το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη. Στη χώρα μας κατά τη δεκαετία του 80 έγινε μια προσπάθεια εισαγωγής των Νέων Μαθηματικών της σχολής των Bourbaki αλλά η μεταρρύθμιση αυτή δεν επηρέασε ποτέ τη διδασκαλία της Γεωμετρίας δηλαδή δεν εφαρμόστηκε ποτέ η περίφημη ρήση του J. Dieudonne "Καταργήστε τον Ευκλείδη". Αντίθετα υπερίσχυσε η άποψη που διατυπώθηκε ρητά από τον Βαρουχάκη, συμβούλο του Π.Ι., ότι "Δεν θα γίνουμε ποτέ εθνικοί μειοδότες καταργώντας την Ευκλείδεια Γεωμετρία". Ανεξάρτητα όμως από το περιεχόμενο της διδακτέας ύλης, ο καθηγητής πρέπει να γνωρίζει την ύπαρξη και το περιεχόμενο και άλλων αξιωματικών θεμελιώσεων. Για παράδειγμα η Γαλλία απαιτεί από τους καθηγητές, που θα διδάξουν Γεωμετρία, να γνωρίζουν τουλάχιστον δύο αξιωματικές θεμελιώσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στη χώρα μας η διδασκαλία παρέμεινε παραδοσιακή και δεν έλαβε ποτέ υπόψη τα επίπεδα van Hiele. Το αποτέλεσμα είναι να παρουσιάζονται και στη χώρα μας οι ίδιες δυσκολίες στην κατανόηση της Γεωμετρίας που εμφανίζονται και διεθνώς. Το πρόβλημα εμφανίζεται αρχικά στην Γ΄ Γυμνασίου όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις αυστηρές αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ιδιαίτερα έντονο στην Α΄ Λυκείου όπου η Γεωμετρία είναι ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Πολλοί μαθητές προτιμούν να ασχοληθούν με μια αρκετά δύσκολη άσκηση Άλγεβρας παρά με μια σχετικά απλούστερη άσκηση Γεωμετρίας. Φυσικό επακόλουθο είναι να αναπτύσσεται μια σχετική απέχθεια για το μάθημα αυτό και οι επιδόσεις των μαθητών να είναι χαμηλότερες. Η πίεση της κοινής γνώμης έχει αναγκάσει τους υπευθύνους να μειώσουν τη έκταση τις διδακτέας ύλης της Γεωμετρίας και τη γενικότερη σπουδαιότητά της μέσα στο σύστημα. Εδώ και αρκετά χρόνια δεν εξετάζεται στις εισαγωγικές εξετάσεις των Ανωτέρων και Ανωτάτων Σχολών.

Το αναλυτικό πρόγραμμα υποχρεώνει τους διδάσκοντες να λειτουργήσουν σε ένα επίπεδο διαφορετικό από αυτό των μαθητών. Οι περισσότεροι περιορίζουν αυτόβουλα τις απαιτήσεις τους σε χαμηλότερο επίπεδο για να μπορέσουν να επικοινωνήσουν με τους μαθητές τους. Υπάρχουν όμως και ορισμένοι που για να δείξουν ότι παράγουν έργο ή για να αυξήσουν τη "φήμη" τους επιβάλουν συνειδητά στους μαθητές τους ασκήσεις που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο κατανόησης των τελευταίων. Επιβάλλεται λοιπόν μία έρευνα για το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές και ενδεχομένως μία προσαρμογή του αναλυτικού προγράμματος (Πρίντεζης, 2006).

Μέρος Β - Η Έρευνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
Σχεδιασμός της έρευνας-Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή

Με τη μεταρρύθμιση των Μαθηματικών που έγινε τη δεκαετία του 1960 δόθηκε τέλος στην παραδοσιακή διδασκαλία της Γεωμετρίας, χωρίς να δοθεί μία επαρκής λύση για το πώς θα πρέπει να διδάσκεται η Γεωμετρία. Το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα έχει μεγάλη παράδοση στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατηρείται ανεξάρτητο στις πρώτες δύο τάξεις του Λυκείου. Για περίπου μία πενταετία (στη δεκαετία του 2000) υπήρξε και μάθημα πανελλαδικώς εξεταζόμενο στη Β Λυκείου, επηρεάζοντας τον βαθμό πρόσβασης των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σύμφωνα με τους Θωμαΐδης, Πούλος, (2000), τα τελευταία χρόνια φαίνεται να έχει εδραιωθεί η ιδέα ότι το πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ανάγεται στην αναζήτηση της ιδανικής αξιωματικής θεμελίωσης και του ιδανικού διδακτικού βιβλίου με αποτέλεσμα οι σχετικές συζητήσεις να περιστρέφονται γύρω από το ζήτημα πολιτικής της διδασκαλίας και όχι γύρω από το πολλά προβλήματα μάθησης. Σύμφωνα με την τρέχουσα διδακτική πρακτική, οι μαθητές στην Α Λυκείου είναι ώριμοι να κατανοήσουν την ανάπτυξη του μαθηματικού συστήματος της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Με άλλα λόγια, η διδασκαλία θεωρεί δεδομένη την κατάκτηση των τριών πρώτων επιπέδων van Hiele και θέτει ως στόχο την κατάκτηση του τέταρτου επιπέδου.

Οι Θωμαΐδης Γ., Πούλος Α., (2000), αναφέρουν μία από τις λίγες έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας όπου καταγράφηκαν οι απαντήσεις 66 μαθητών της Β Λυκείου και 60 μαθητών της Α Λυκείου σε τρεις κλασικές ασκήσεις της Γεωμετρίας . Κατά την έρευνα αυτή οι ερευνητές κατέληξαν στα παρακάτω συμπεράσματα:

1. **Οι μαθητές αρκούνται στην οπτική αντίληψη (δηλαδή στηρίζονται στο σχήμα και όχι σε γεωμετρικές προτάσεις που συνδέονται με τα δεδομένα και ζητούμενα της άσκησης).**
2. **Οι δυνατότητες δράσης τους (μεθοδολογία) είναι σχετικά χαμηλές.**
3. **Οι δυνατότητες σωστής διατύπωσης και επικύρωσης αφορούν μικρό σχετικά μέρος από το σύνολο των μαθητών.**
4. **Οι μαθητές συγχέουν έννοιες κατάλληλες για άλλο τύπο προβλημάτων που δεν λειτουργούν στη συγκεκριμένη περίπτωση και τις χρησιμοποιούν απλά και μόνο για να δώσουν μία απάντηση.**

Ο Ζάχος (2000) έθεσε δύο ερευνητικά ερωτήματα που είχαν θεωρητικό, αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον. **Βρίσκονται τα τέσσερα επίπεδα van Hiele σε γραμμική διάταξη μεταξύ τους;** Δηλαδή το πρώτο επίπεδο κατακτάται πριν από το δεύτερο, το δεύτερο πριν από το τρίτο, κ.λ.π. **Ποια είναι η κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα;** Με βάση τη θεωρία van Hiele, είναι σε θέση οι μαθητές να παρακολουθήσουν μαθήματα θεωρητικής Γεωμετρίας; Το δείγμα του αποτέλεσαν 458 μαθητές της δευτέρας Λυκείου τεσσάρων Γενικών Λυκείων της Αθήνας. Το πειραματικό του υλικό ήταν ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών βασισμένο στο ερωτηματολόγιο του καθηγητή Usiskin.

Οι Ντζιαχρήστος και Ζαράνης το 2001 προσπάθησαν να διερευνήσουν αν **η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού σε Η/Υ βοηθάει τη μετάβαση στο επόμενο επίπεδο van Hiele περισσότερο από ότι η παραδοσιακή διδασκαλία**. Το δείγμα της έρευνας τους αποτέλεσαν μαθητές στης Α΄ τάξης του 5ου Γυμνασίου Αμαρουσίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν θετικά.

Έρευνα για τα επίπεδα van Hiele έγινε και από τον Τζίφα το 2005 στα πλαίσια της διπλωματικής του εργασίας για το μεταπτυχιακό δίπλωμα στη "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών". Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 1838 μαθητές που φοιτούσαν στις τάξεις Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ και Β΄ Λυκείου 45 Γυμνασίων και Λυκείων από διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Στην έρευνά του χρησιμοποίησε ένα τροποποιημένο ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών του τεστ van Hiele. Το ερωτηματολόγιο αυτό δημιουργήθηκε από τον καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο των ΗΠΑ Usiskin (1982) και μεταφράστηκε στα ελληνικά από τον ερευνητή. Στην έρευνα **έγινε προσπάθεια κατάταξης των μαθητών στα 4α πρώτα επίπεδα van Hiele** γιατί η κατάκτηση του πέμπτου επιπέδου είναι δύσκολο να ελεγχθεί και σε κάθε περίπτωση δεν αφορά τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εξετάστηκαν ακόμα τα ερωτήματα:

- ✓ **αν υπάρχουν διαφορές λόγω φύλου**
- ✓ **αν υπάρχει βελτίωση των επιπέδων van Hiele στις μεταβάσεις από τάξη σε τάξη**
- ✓ **αν υπάρχει διαφορά μεταξύ δημοσίων και ιδιωτικών σχολείων.**

Σύμφωνα με τον Ολλανδό μαθηματικό και παιδαγωγό Freudenthal (1973) , η αποτυχία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι ο παραγωγικός χαρακτήρας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν είναι δυνατόν να επινοηθεί εκ νέου από το μαθητή, αλλά μόνο να επιβληθεί σ' αυτόν. Με άλλα λόγια η παραδοσιακή διδασκαλία δεν αφήνει τον μαθητή να οδηγηθεί στην ανακάλυψη αλλά του παρέχει κατευθείαν το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης .

Οι παραπάνω εύστοχες παρατηρήσεις φαίνεται πως επιβεβαιώνονται από διάφορες εμπειρικές έρευνες που διεξάγονται σε διάφορες χώρες. Θα μπορούσαμε να πούμε συμπερασματικά ότι, η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τον τρόπο που διδάσκεται σήμερα, αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στην κατάκτηση των ανώτερων επιπέδων της γεωμετρικής σκέψης.

3.2 Χαρακτηριστικά του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 147 φοιτητές από το Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης. Η έρευνα έλαβε χώρα στη Ρόδο από τις 25 Νοεμβρίου έως και τις 5 Δεκεμβρίου του 2018. Το μέγεθος του δείγματος δεν επιτρέπει από τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν να γίνουν γενικεύσεις για ολόκληρο τον πληθυσμό.

3.3 Οριοθέτηση κριτηρίων

3.3.1 Συλλογή δεδομένων

Για την κατάταξη του επιπέδου της Γεωμετρικής Σκέψης κάθε φοιτητή χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών το οποίο μεταφράστηκε στην Ελλάδα από τον Τζίφα (2006), με βάση το τεστ van Hiele του καθηγητή του πανεπιστημίου του Σικάγο Usiskin (1982) (Το Πρωτότυπο τεστ στα Αγγλικά καθώς και αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα παρατίθενται στο Παράρτημα Β της εργασίας).

Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Usiskin (1982): “Το τεστ van Hiele σχεδιάστηκε για να προσδιοριστεί, αν ένας τέτοιος προσδιορισμός θα ήταν εφικτός, το επίπεδο van Hiele του κάθε μαθητή. Από χωρία των ίδιων των van Hieles που αφορούν τις συμπεριφορές των μαθητών που πρέπει να αναμένονται σε κάθε επίπεδο, γράφτηκαν για κάθε επίπεδο ερωτήσεις οι οποίες θα έλεγχαν το αν ένας μαθητής βρίσκονταν στο συγκεκριμένο επίπεδο. Η κατασκευή του τεστ και η προκαταρκτική έρευνα δίνονται με λεπτομέρεια από τον Porter (1980).

Σε μια πρώτη προκαταρκτική έρευνα, τα ερωτήματα δόθηκαν μεμονωμένα σε μαθητές σε προφορικές συνεντεύξεις από τρεις ομάδες του project σε τρεις διαφορετικές πολιτείες. Με την αξιοποίηση των αποκρίσεων των μαθητών, κατασκευάστηκε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής με 25 ερωτήσεις, 5 για κάθε επίπεδο. Αυτό το τεστ δοκιμάστηκε προκαταρκτικά με ολόκληρες τάξεις σε τέσσερα σχολεία για να διασφαλιστεί ότι δε θα ήταν υπερβολικά μεγάλο για ένα χρονικό περιθώριο 35 λεπτών.

Οι ερωτήσεις απορρίπτονταν ή τροποποιούνταν μόνο αν οι αποκρίσεις των μαθητών δεν έδειχναν να αντικατοπτρίζουν το κατάλληλο επίπεδο van Hiele. Η ευκολία ή δυσκολία ενός ερωτήματος δεν αποτέλεσε ποτέ κριτήριο, αν και ο σκοπός ήταν να έχουμε εύκολα ερωτήματα σε κάθε επίπεδο van Hiele. Οι ερωτήσεις του τεστ για το επίπεδο van Hiele είναι εν γένει περισσότερο εννοιολογικές σε σχέση με εκείνες που συναντώνται σε τυπικά διαγωνίσματα και ακόμη και οι ερωτήσεις χαμηλού επιπέδου απαιτούν κάποιο είδος ανάλυσης.

- ✓ Στο επίπεδο 1, αναρωτιέται κάποιος αν ένα σχήμα ταιριάζει με την αντίληψή του για ένα μέλος μιας κλάσης σχημάτων.
- ✓ Στο επίπεδο 2, αναρωτιέται αν μια ιδιότητα είναι πάντοτε αληθής, και όχι απλώς για ένα μοναδικό σχήμα.
- ✓ Στο επίπεδο 3, διατάσσει τις ιδιότητες, καθώς χρειάζεται να γνωρίζει αν μια πρόταση έπεται πάντοτε από μια άλλη".

Το τεστ van Hiele του Usiskin (1982) έχει αμφισβητηθεί για τις δυνατότητες αξιολόγησης που μπορεί να παρέχει. Παρόλα αυτά, το τεστ van Hiele έχει σαν κύριο πλεονέκτημά του τον εύκολο και γρήγορο τρόπο που μπορεί να κατατάξει κάποιος πολλά άτομα σε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε το τροποποιημένο τεστ (μόνο για τα επίπεδα 1-4), το οποίο περιελάβανε είκοσι ερωτήσεις (5 ερωτήσεις/επίπεδο Χ 4 επίπεδα) .

- Οι 5 πρώτες ερωτήσεις (1-5) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 1ου επιπέδου,
- Οι επόμενες 5 ερωτήσεις (6-10) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 2ου επιπέδου,
- Οι επόμενες 5 ερωτήσεις (11-15) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 3ου επιπέδου,
- Οι επόμενες 5 ερωτήσεις (16-20) ελέγχουν τη γεωμετρική σκέψη του 4ου επιπέδου.

Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- το **3 σωστά στα 5**, δηλαδή 3 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές και
- το **4 σωστά στα 5**, δηλαδή 4 από τις 5 ερωτήσεις κάθε επιπέδου σωστές .

Ο Usiskin(1982) αποκαλεί το δεύτερο κριτήριο (4 στα 5) ως το αυστηρότερο και σχολιάζει τα κριτήρια αυτά ως εξής: "Η επιλογή του κριτηρίου, δοθείσης της φύσης αυτού του τεστ, βασίζεται στο αν κάποιος επιθυμεί να μειώσει το σφάλμα Τύπου Ι ή το σφάλμα Τύπου ΙΙ".

Το σφάλμα Τύπου Ι είναι:

- **όταν ένας μαθητής δεν έχει κυριαρχήσει ακόμα το επίπεδο n αλλά το τεστ δείχνει ότι ο μαθητής έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n.**

Το σφάλμα τύπου ΙΙ είναι:

- **όταν ένας μαθητής έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n, αλλά το τεστ δείχνει ότι δεν έχει κυριαρχήσει το επίπεδο n.**

P(3 σωστά στα 5 με τυχαία επιλογή) = .05792

P(4 σωστά στα 5 με τυχαία επιλογή) = .00672

Οι Usiskin (1982), Senk (1989) χρησιμοποίησαν το κριτήριο 4 από τις 5 με αιτιολόγηση “προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο τύπος I λαθών, το κριτήριο για την κυριότητα ενός δεδομένου επιπέδου εξετάστηκε για να είναι τέσσερις ή περισσότερες σωστές απαντήσεις από πιθανές πέντε. Η παρούσα απόφαση οδηγεί σε μια υψηλότερη πιθανότητα του τύπου II λαθών, αλλά για αυτήν την μελέτη, ο τύπος I λάθους θεωρήθηκε ο σοβαρότερος των δύο”.

Όπως αναφέρει ο Τζίφας (2006), για τον προσδιορισμό του επιπέδου Γεωμετρικής Σκέψης ενός μαθητή σύμφωνα με τη θεωρία van Hieles απαιτείται να εισάγουμε δύο λειτουργικούς ορισμούς:
α) της κυριάρχησης ενός επιπέδου και
β) της κατάταξης σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης (Johnson C, 2002).

Ο μαθητής θα λέμε ότι κυριαρχεί στο επίπεδο n εφόσον απαντά σωστά τουλάχιστον στο πλήθος των ερωτήσεων που απαιτούνται από το είδος του κριτηρίου.
Το επίπεδο κατάταξης van Hiele του μαθητή, για αυτήν την έρευνα, ήταν το πιο υψηλό επίπεδο κυριάρχησης του μαθητή με την προϋπόθεση ότι όλα τα προηγούμενα επίπεδα κυριαρχήθηκαν και υπό τον όρο ότι κανένα πιο υψηλό επίπεδο δεν κυριαρχήθηκε.

Κατ' αυτό τον τρόπο, σε έναν μαθητή που κυριάρχησε στα επίπεδα 1 και 2 ορίστηκε ένα επίπεδο van Hiele 2, αλλά ένας μαθητής που κυριάρχησε στα επίπεδα 1,2 και 4 δεν κατατάσσεται σύμφωνα με το πρότυπο van Hiele σε κανένα επίπεδο και αποκλείστηκε από την ανάλυση.
Ο παρακάτω πίνακας 1 επεξηγεί αυτήν την συμφωνία:

van Hiele Επίπεδο Κατάταξης	Επίπεδα που κυριάρχησε
0	κανένα
1	1 μόνο
2	1 και 2
3	1, 2 και 3
4	1, 2, 3 και 4
κανένα επίπεδο	2 μόνο
κανένα επίπεδο	3 μόνο
κανένα επίπεδο	4 μόνο
κανένα επίπεδο	1 και 3
κανένα επίπεδο	1 και 4
κανένα επίπεδο	2 και 3
κανένα επίπεδο	2 και 4
κανένα επίπεδο	3 και 4

κανένα επίπεδο	1, 2 και 4
κανένα επίπεδο	1, 3 και 4
κανένα επίπεδο	2, 3 και 4

Πίνακας 1: Κριτήρια Κατάταξης

3.3.2 Βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας

Η βαθμολόγηση των ερωτήσεων της δοκιμασίας έγινε από τον ερευνητή σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια (το **3 σωστά στα 5** και το **4 σωστά στα 5**). Η διπλή ή τριπλή κ.λπ. απάντηση σε μια ερώτηση λογίστηκε σαν λανθασμένη και συμπεριλήφθηκε στο ποσοστό των φοιτητών που δεν έδωσαν καμία απάντηση.

3.4 Στατιστικές τεχνικές

Όλες οι απαντήσεις των φοιτητών καταχωρήθηκαν, αναλύθηκαν και παρουσιάστηκαν με το λογισμικό Microsoft Excel for Office 365. Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με το Λογισμικό Συνεπαγωγικής Στατιστικής Ανάλυσης CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification – Συνεκτική Ιεραρχική Συνεπαγωγική Ταξινόμηση).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
Αποτελέσματα για τα επίπεδα

4.1 Γενικά

Στα πλαίσια της έρευνας επιδιώχθηκε να ερευνηθούν :

•Πώς κατανέμονται οι φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου σε Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης σύμφωνα με τη Θεωρία Επιπέδων Σκέψης των van Hieles;

•Οι περισσότεροι φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου κατανέμονται στα επίπεδα 1 και 2 της θεωρίας Van Hiele;

Για την ανάλυση και παρουσίαση των δεδομένων έγινε χρήση Πινάκων, Διαγραμμάτων, Περιγραφικής Στατιστικής και Συνεπαγωγικής Στατιστικής Ανάλυσης.

Σε όλα τα παρακάτω αποτελέσματα γίνεται σαφής ο διαχωρισμός των δύο κριτηρίων:

(α) ελαστικό, σωστές απαντήσεις 3 από τις 5.

(β) αυστηρό, σωστές απαντήσεις 4 από τις 5.

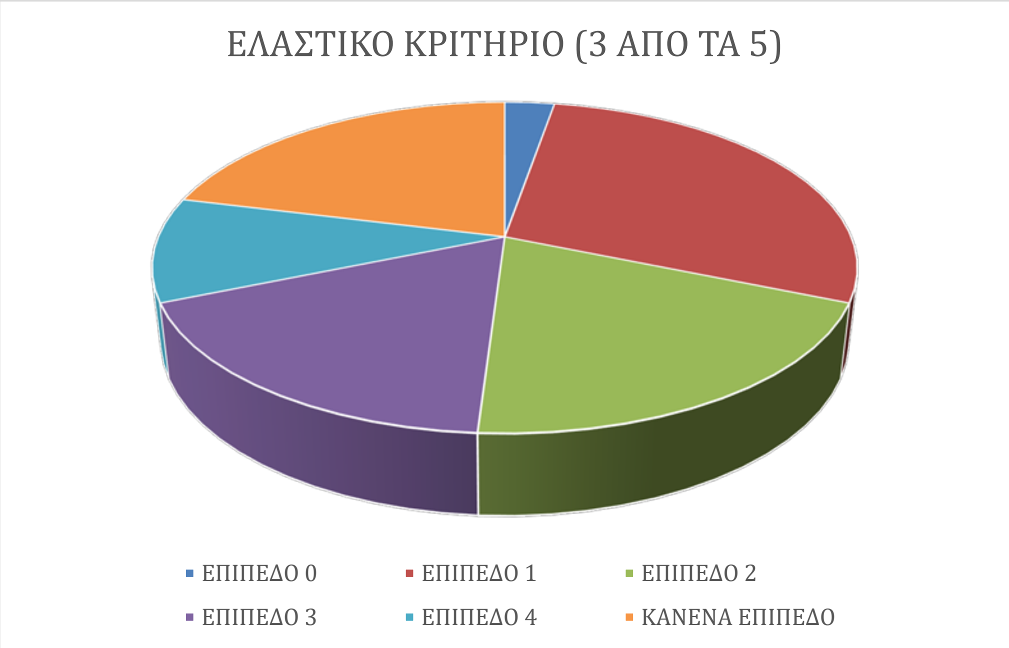
Σε όλες τις περιπτώσεις γίνεται συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τα δύο αυτά κριτήρια. Σκοπός της σύγκρισης είναι να γίνει αντιληπτό ότι η κατάταξη ενός φοιτητή δεν γίνεται με μοναδικό και απόλυτο τρόπο. Οι πίνακες παρουσιάζονται με τη σειρά που ακολουθήθηκε κατά την ανάλυση των δεδομένων.

4.2.1 Αποτελέσματα, κριτική αποτελεσμάτων

Οι παρακάτω πίνακες 1 και 2 καθώς και τα αντίστοιχα κυκλικά διαγράμματα παρουσιάζουν τις συχνότητες και τα ποσοστά των φοιτητών σε επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης, σύμφωνα με τη θεωρία των van Hieles, με τη χρήση των δύο κριτηρίων που έχουν αναφερθεί (αυστηρού-ελαστικού).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (3 ΑΠΟ ΤΑ 5)

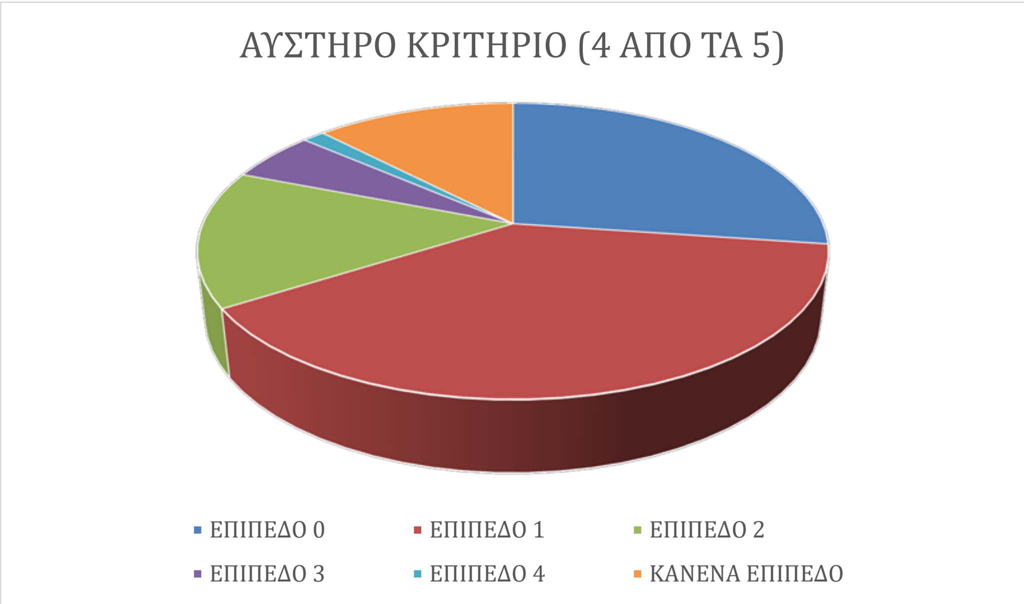
ΕΠΙΠΕΔΟ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ %	Σχ. Αθρ. Συχν.%
ΕΠΙΠΕΔΟ 0	4	2.72	2.72
ΕΠΙΠΕΔΟ 1	42	28.57	31.29
ΕΠΙΠΕΔΟ 2	29	19.73	51.02
ΕΠΙΠΕΔΟ 3	26	17.69	68.71
ΕΠΙΠΕΔΟ 4	15	10.20	78.91
ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	31	21.09	100.00
ΣΥΝΟΛΟ	147	100	



Διάγραμμα 1: Κατάταξη μαθητών σε επίπεδα βάσει του ελαστικού κριτηρίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (4 ΑΠΟ ΤΑ 5)

ΕΠΙΠΕΔΟ	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**	**ΠΟΣΟΣΤΟ %**	**Σχ. Αθρ. Συχν.%**
ΕΠΙΠΕΔΟ 0	40	27.21	27.21
ΕΠΙΠΕΔΟ 1	57	38.78	65.99
ΕΠΙΠΕΔΟ 2	22	14.97	80.95
ΕΠΙΠΕΔΟ 3	8	5.44	86.39
ΕΠΙΠΕΔΟ 4	2	1.36	87.76
ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	18	12.24	100.00
ΣΥΝΟΛΟ	147	100.00	



Διάγραμμα 2: Κατάταξη μαθητών σε επίπεδα βάσει του αυστηρού κριτηρίου.

4.2.2 Παρατηρήσεις από τη μελέτη των πινάκων

- Το 78,91% των φοιτητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο στο ελαστικό κριτήριο

- Το 87,76 % των φοιτητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο στο αυστηρό κριτήριο.

- Δεδομένου ότι κάποιος φοιτητής πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο σε όλα τα επίπεδα από το 1 ως το n και σε κανένα άλλο επίπεδο για να καταταχθεί στο επίπεδο n, και δεδομένου ότι το ελαστικό κριτήριο μπορεί να ικανοποιείται σε οποιοδήποτε επίπεδο από το 6% των φοιτητών από καθαρή τυχαιότητα, οι διαφορές στα ποσοστά μπορούν να αποδοθούν σχεδόν εξ ολοκλήρου σε σφάλμα Τύπου Ι.

- Η επιλογή του κριτηρίου επηρεάζει σημαντικά το επίπεδο van Hiele που αντιστοιχίζεται σε έναν φοιτητή.

  Όταν η κατανομή των φοιτητών γίνεται με το ελαστικό κριτήριο, τότε το 2,72% από εκείνους που μπορούν να ταξινομηθούν βρίσκονται στο επίπεδο 0. Αντίστοιχα στην κατανομή με το αυστηρό κριτήριο το οποίο είναι δυσκολότερο να ικανοποιηθεί, το 27,21% εκείνων που μπορούν να ταξινομηθούν βρίσκονται στο επίπεδο 0.

  Η ίδια τάση εμφανίζεται και στα ποσοστά του επιπέδου 1 όπου 28,57% των φοιτητών κατατάσσονται με το ελαστικό και 38,78% με το αυστηρό κριτήριο.

  Για το επίπεδο 2 τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 19,73% και 14,97%.

- Στα επίπεδα 3 και 4, τα ποσοστά των φοιτητών που κατατάσσονται με βάση το αυστηρό κριτήριο είναι μικρά.

- Οι φοιτητές που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το ελαστικό κριτήριο, ποσοστό 17,69% είναι τριπλάσιοι από εκείνους που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το αυστηρό κριτήριο, ποσοστό 5,44%.

- Οι φοιτητές που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο επίπεδο 4 είναι στο ελαστικό κριτήριο επταπλάσιοι (10,2%) από εκείνους στο αυστηρό κριτήριο (1,36%).

➢ Η καίρια σημασία της επιλογής του κριτηρίου για την κατάταξη του φοιτητή φαίνεται καθαρά στον Πίνακα 3, ένα πίνακα διπλής εισόδου όπου γίνεται ανάλυση του κάθε επιπέδου από το ένα κριτήριο, στα επίπεδα του άλλου κριτηρίου. Φαίνεται λοιπόν η αντιστοιχία των επιπέδων των δύο κριτηρίων σε πλήθος και ποσοστά για τους μαθητές του δείγματος. Συγκεκριμένα κάθε οριζόντια γραμμή αναλύει τα ποσοστά του ελαστικού κριτηρίου στα επιμέρους ποσοστά των επιπέδων του αυστηρού κριτηρίου, και κάθε στήλη το αντίστροφο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

		ΚΡΙΤΗΡΙΟ 4/5													
	ΕΠΙΠΕΔΑ	ΚΑΝΕΝΑ		0		1		2		3		4		ΣΥΝΟΛΟ	
		v	%	v	%	v	%	v	%	v	%	v	%	v	%
ΚΡΙΤΗΡΙΟ 3/5	ΚΑΝΕΝΑ	**6**	**4.08**	13	8.84	10	6.80	2	1.36	0	0.00	0	0.00	31	21.09
	0	0	0.00	**4**	**2.72**	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	4	2.72
	1	0	0.00	17	11.56	**25**	**17.01**	0	0.00	0	0.00	0	0.00	42	28.57
	2	2	1.36	3	2.04	15	10.20	**9**	**6.12**	0	0.00	0	0.00	29	19.73
	3	5	3.40	2	1.36	4	2.72	10	6.80	**5**	**3.40**	0	0.00	26	17.69
	4	5	3.40	1	0.68	3	2.04	1	0.68	3	2.04	**2**	**1.36**	15	10.20
	ΣΥΝΟΛΟ	18	12.24	40	27.21	57	38.78	22	14.97	8	5.44	2	1.36	147	100.00

➢ Η κύρια διαγώνιος του πίνακα μετρά εκείνους τους φοιτητές των οποίων τα επίπεδα van Hiele είναι τα ίδια σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια. Από τους 147 φοιτητές στους οποίους αντιστοιχίζονται τροποποιημένα επίπεδα van Hiele και με τα δύο κριτήρια, μόνο 51 (34,69%) έχουν το ίδιο επίπεδο σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το επίπεδο van Hiele δεν είναι κάτι τόσο σταθερό όσο υποδηλώνεται από τη θεωρία. Η σταθερότητά του εξαρτάται από το πλήθος των σωστών απαντήσεων και ίσως από τη μορφή των ερωτήσεων.

➢ Στα 147 δοκίμια βρέθηκαν:

- 5 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο δεν κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές σε κανένα επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 4 επίπεδο.
- 5 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο δεν κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές σε κανένα επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3 επίπεδο.
- 2 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές στο 2 επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε σε κανένα επίπεδο.
- 1 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές στο 0 επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 4 επίπεδο.
- 2 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές στο 0 επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3 επίπεδο.

- 3 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές στο 1 επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 4 επίπεδο.
- 4 δοκίμια όπου το αυστηρό κριτήριο κατέτασσε τους αντίστοιχους φοιτητές στο 0 επίπεδο ενώ το ελαστικό κριτήριο τους κατέτασσε στο 3 επίπεδο.

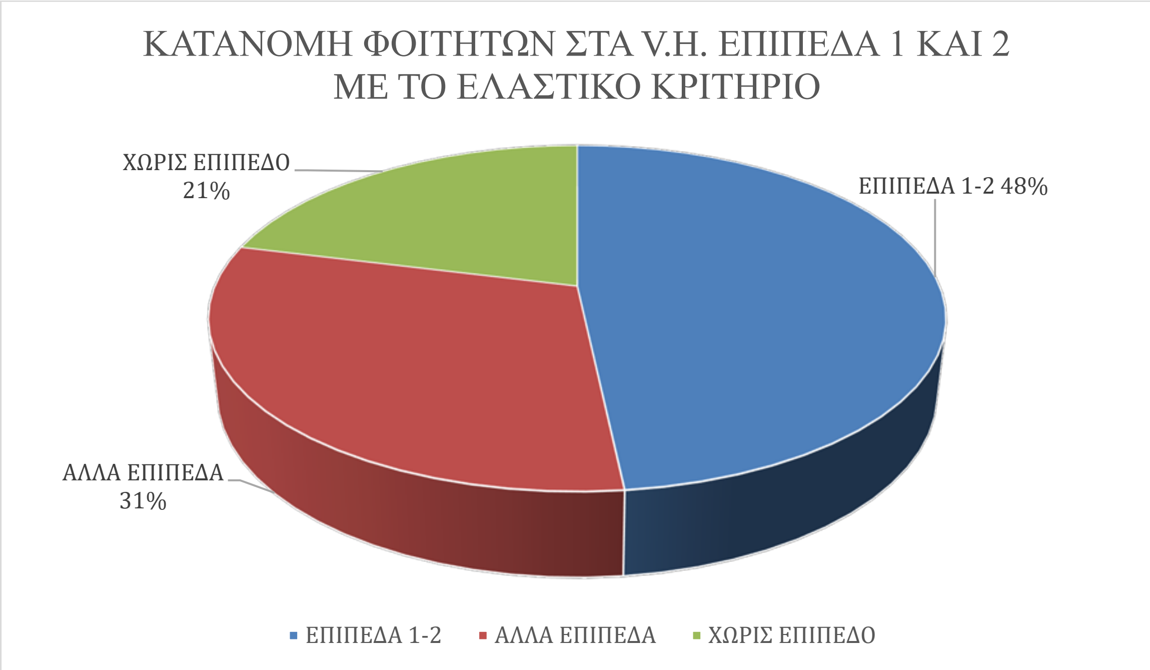
Οι απαντήσεις στα δοκίμια, που δείχνουν όσα προαναφέραμε, παρατίθενται συγκεντρωτικά στην επόμενη σελίδα σε ένα γενικό πίνακα, όπου:

- Α/Α είναι ο αυξανόμενος αριθμός που είναι αριθμημένα τα δοκίμια.
- GENDER είναι το φύλο του κάθε φοιτητή.
- Q1, Q2, Q3, … είναι Ερώτηση 1, Ερώτηση 2, Ερώτηση 3, … αντίστοιχα.
- A, B, C, D, E είναι τα γράμματα που συμβολίζουν τις αντίστοιχες απαντήσεις του κάθε φοιτητή
- NO έχει συμπληρωθεί όπου ο κάθε φοιτητής δεν απάντησε ή έδωσε ταυτόχρονα περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις στην ίδια ερώτηση.

A/A	GENDER	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
1	F	B	D	C	A	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	D	D	D
2	F	B	D	C	B	E	C	D	D	D	NO	A	A	A	E	E	B	E	A	A	D
3	F	B	D	C	B	B	D	D	A	C	NO	E	NO	A	C	B	C	B	A	D	D
4	F	D	D	C	E	E	C	E	A	NO	NO	E	B	A	B	E	C	B	E	E	D
5	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	C	D	B	A	D
6	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	C	D	B	A	D
7	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	A	D	B	A	D
8	F	B	D	C	B	E	C	E	NO	NO	D	C	E	A	C	A	E	C	A	A	D
9	F	B	D	C	B	D	C	E	C	C	D	C	A	A	C	C	A	E	C	C	C
10	F	B	C	C	B	B	C	A	C	B	B	C	A	A	E	C	A	D	C	B	B
11	F	B	D	C	B	B	C	E	C	C	C	C	A	A	E	C	A	C	C	C	A
12	F	B	D	C	B	C	A	E	A	C	D	NO	B	NO	B	B	A	D	A	B	B
13	F	B	D	C	B	E	B	E	B	A	E	C	C	B	A	D	B	C	E	C	A
14	B	D	C	B	E	A	E	A	NO	D	D	C	C	A	E	B	C	B	C	B	A
15	F	D	D	C	B	D	C	E	A	E	NO	B	B	NO	E	D	A	D	B	C	E
16	F	B	D	D	B	E	C	B	NO	C	A	C	E	A	C	E	A	E	C	D	B
17	F	B	D	D	B	E	C	E	B	A	A	C	E	A	C	E	A	A	C	C	C
18	F	E	D	D	E	E	D	D	C	C	E	NO	B	A	B	B	E	E	B	A	B
19	F	E	D	C	E	E	D	D	C	C	E	NO	B	A	B	B	E	E	B	A	D
20	F	B	D	E	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	A	D	E	C	C	A	D
21	F	B	D	E	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	A	D	E	C	B	B	D
22	F	B	D	C	A	B	D	E	A	E	E	C	E	D	E	E	B	A	D	E	E
23	M	B	C	A	A	B	C	NO	NO	NO	D	B	NO	C	D	D	C	C	D	A	D
24	F	B	D	C	B	E	B	NO	D	NO	NO	C	NO	E	NO	B	E	B	D	C	A
25	F	B	D	C	B	E	A	E	A	C	C	C	C	A	A	E	C	C	D	B	D
26	F	C	D	E	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	A	B	C	A	D	A	A
27	F	B	D	C	B	E	B	E	A	E	B	C	B	A	A	E	C	B	D	D	D
28	F	B	D	C	B	C	B	E	A	E	B	E	E	D	E	E	A	A	E	A	C
29	M	D	E	C	D	D	C	E	A	C	E	C	E	A	A	A	C	E	D	A	D
30	F	B	D	C	B	E	B	E	A	E	C	E	E	A	A	B	C	C	D	A	A
31	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	E	C	B	A	A	B	E	C	D	A	D
32	F	D	D	C	E	E	B	E	NO	C	NO	E	B	A	D	B	D	B	D	D	A
33	F	B	D	C	B	E	B	D	A	E	D	E	B	A	NO	E	C	A	D	E	D
34	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	E	E	B	A	A	E	D	E	E	C	D
35	M	B	D	E	A	E	C	E	E	E	NO	E	E	A	D	E	E	C	D	E	A
36	F	B	D	C	B	E	B	E	NO	C	D	E	B	A	E	D	C	NO	D	NO	D
37	F	B	D	C	B	E	C	E	C	C	E	C	B	A	B	E	C	C	D	A	A
38	F	D	D	C	E	E	NO	E	A	C	NO	NO	NO	A	B	B	C	NO	E	NO	D
39	F	B	D	C	B	D	B	E	E	C	A	D	E	A	E	B	E	C	D	A	D
40	F	D	D	C	E	E	C	A	A	C	D	E	B	A	C	E	A	D	D	C	D
41	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	C	E	B	A	E	B	B	C	A	A	D
42	F	B	D	A	E	E	B	E	E	C	NO	D	B	A	A	D	C	D	C	A	E
43	F	B	C	A	B	C	B	E	A	C	E	C	B	A	B	E	C	C	A	D	A
44	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	A	A	D	E	C	C	D	C	D
45	M	B	D	C	B	E	C	E	NO	C	NO	C	NO	A	C	D	C	E	A	A	D
46	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	C	NO	C	NO	A	E	B	C	C	D	B	B
47	M	D	D	C	E	E	B	E	A	C	NO	E	B	A	E	B	A	D	D	A	D
48	F	B	D	C	B	E	E	B	NO	C	NO	NO	NO	A	E	E	E	NO	NO	A	D
49	F	B	D	C	B	E	D	E	NO	D	A	D	A	A	E	D	C	E	A	A	C
50	M	B	D	C	B	E	B	E	E	C	NO	C	B	A	B	B	C	C	D	A	A
51	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	B	C	B	A	A	E	C	C	E	A	D
52	F	B	D	A	B	E	B	E	A	C	E	E	A	A	B	E	C	C	D	A	D
53	F	B	C	C	B	E	C	B	E	C	B	E	C	A	E	D	E	B	E	B	A
54	F	B	E	C	B	B	C	NO	NO	C	A	A	A	C	C	C	E	D	B	B	E
55	F	B	D	C	B	E	NO	E	NO	C	C	NO	A	C	C	A	C	D	B	A	D
56	F	B	D	C	E	E	B	E	A	C	E	E	E	A	E	D	D	D	D	A	D
57	F	B	D	C	B	E	B	E	NO	C	NO	C	B	A	A	D	C	C	C	B	D
58	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
59	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	A	A	A	B	C	A	D	B	A
60	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	NO	B	A	A	B	C	B	D	D	D
61	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	E	E	C	E	D	D	A
62	F	B	A	A	A	E	B	E	A	E	A	A	A	C	A	E	C	E	A	A	D
63	F	B	C	C	B	E	B	E	A	C	E	E	A	A	B	D	C	C	A	A	E
64	F	B	D	A	B	E	C	E	NO	C	NO	NO	A	A	NO	NO	C	NO	NO	A	D
65	F	B	D	C	B	E	D	C	A	C	NO	C	B	C	C	B	E	C	D	A	E
66	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
67	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	NO	NO	NO	A	C	E	C	A	D	E	B	D
68	F	B	D	D	E	E	A	E	A	NO	B	A	B	A	E	B	D	E	C	E	D
69	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	A	E	A	A	E	E	C	C	D	B	A
70	F	B	D	C	B	E	NO	E	NO	C	C	NO	NO	C	C	E	A	NO	E	A	E
71	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	C	E	E	C	A	E	NO	A	D	NO	A	C
72	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
73	M	B	D	E	B	E	C	E	E	C	C	E	B	A	A	E	C	C	D	A	D
74	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
75	F	B	D	A	B	E	B	E	A	C	D	D	B	A	B	D	D	B	B	E	D
76	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	B	E	E	C	A	E	C	C	C	A	A
77	F	B	D	C	B	E	D	E	NO	C	C	D	NO	A	E	NO	NO	C	B	A	D
78	F	D	D	C	D	E	A	E	D	E	C	C	A	C	B	A	C	B	C	B	D
79	F	E	E	E	D	D	C	D	C	B	D	D	C	D	D	E	D	D	A	E	C
80	F	B	D	C	B	C	D	E	E	E	E	E	B	A	E	E	C	D	D	D	C
81	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	B	B	D	C	D	A	D
82	F	B	D	E	B	C	C	E	A	C	D	B	B	A	C	E	D	E	D	B	A
83	F	B	D	E	B	E	C	E	A	C	NO	E	B	A	C	E	D	C	D	A	E
84	F	B	D	C	B	E	C	E	B	C	D	C	B	A	NO	E	C	C	B	A	D
85	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	E	C	B	A	A	D	E	E	D	C	A
86	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	NO	NO	NO	A	A	B	C	D	NO	D	A
87	F	B	D	C	B	E	B	E	C	C	C	B	E	A	A	B	NO	D	D	B	E
88	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	B	B	D	C	D	A	D
89	F	D	C	C	D	B	B	D	E	NO	NO	C	NO	A	E	D	C	D	C	B	A
90	F	B	D	C	B	D	C	E	E	E	C	NO	B	A	A	E	NO	C	D	A	B
91	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	A	E	B	A	B	B	D	B	D	D	E
92	F	B	D	C	B	E	A	E	E	C	E	C	A	A	C	E	E	E	A	C	D
93	F	B	D	C	B	E	D	A	E	D	D	E	B	A	E	B	A	A	D	D	A
94	F	B	D	C	B	E	A	A	E	C	A	E	C	A	A	B	D	E	D	B	A
95	F	B	D	E	B	E	D	E	NO	E	NO	E	A	A	B	E	D	E	B	A	B
96	F	B	D	C	B	E	D	E	A	E	NO	C	E	A	E	E	B	D	D	C	D
97	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	C	E	D	C	D	A	A
98	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	E	A	A	D	A	A
99	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	D	E	B	A	A	B	D	C	A	A	A
100	F	B	D	C	B	E	B	B	A	C	D	E	D	A	C	D	C	C	D	A	D
101	F	B	C	C	B	D	NO	E	B	C	B	C	C	D	D	E	E	C	C	A	A
102	F	D	D	C	E	E	A	E	E	C	E	E	B	A	E	E	D	A	A	D	D
103	F	D	D	C	E	E	C	E	A	E	B	E	C	A	A	E	C	E	C	A	D
104	F	D	D	C	E	E	B	A	A	C	D	E	C	A	A	A	C	D	D	A	B
105	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	E	B	A	A	NO	A	C	C	A	A	D
106	M	B	D	C	A	E	NO	E	A	C	NO	C	NO	A	A	D	C	C	D	A	D
107	F	B	D	C	B	E	B	C	A	C	E	NO	NO	A	C	E	A	B	A	A	NO
108	F	B	D	E	D	A	A	E	C	D	A	C	B	D	B	B	A	B	A	C	E
109	F	B	D	NO	B	E	C	NO	A	C	D	NO	NO	A	E	D	B	A	D	E	E
110	F	B	D	C	B	E	C	E	E	C	D	E	E	A	C	E	D	A	E	B	D
111	F	D	D	C	D	C	D	A	C	D	C	A	B	D	B	D	E	C	B	A	D
112	F	B	C	A	A	C	NO	E	C	NO	E	B	E	A	D	C	E	E	E	C	D
113	F	D	C	C	B	E	C	E	A	E	NO	D	D	A	C	B	C	E	E	A	A
114	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	E	E	D	C	D	A	D
115	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	C	A	B	B	C	B	A	B	D
116	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	E	NO	B	A	NO	B	NO	NO	NO	B	B
117	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	B	D	A	A
118	F	B	D	C	B	B	B	E	D	B	A	E	A	A	E	B	D	NO	C	A	B
119	F	B	C	C	B	E	C	E	D	C	C	B	B	A	E	E	C	D	B	A	D
120	F	D	D	C	E	E	C	E	E	E	NO	A	NO	A	NO	E	C	B	C	E	A
121	F	D	D	C	E	E	B	E	A	C	D	C	B	A	C	D	C	B	D	B	E
122	F	B	D	E	B	E	D	E	A	C	NO	C	B	A	A	B	C	C	C	E	D
123	F	D	D	E	E	E	C	D	D	A	C	B	B	A	A	C	D	E	D	A	D
124	F	B	D	C	A	B	C	B	D	C	D	NO	B	C	E	B	A	A	A	A	D
125	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	D	A	A
126	M	B	D	A	A	E	C	E	A	E	E	E	D	A	C	A	C	C	C	E	D
127	F	B	D	C	B	E	D	E	A	B	A	C	B	A	A	B	A	C	B	A	E
128	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	D	E	D	A	C	C	D	B	C	E	D
129	F	C	D	C	B	E	D	E	A	C	C	E	B	A	E	B	C	E	B	A	C
130	F	D	C	C	B	E	C	E	A	E	A	C	E	C	E	NO	A	E	D	E	E
131	F	D	D	C	E	E	C	E	A	NO	D	D	B	A	D	D	C	E	B	A	D
132	F	D	D	C	E	E	C	E	A	B	NO	NO	NO	A	NO	D	NO	A	D	NO	NO
133	F	B	D	C	B	E	A	E	E	C	C	B	B	A	B	B	E	C	A	A	D
134	M	B	D	C	B	E	C	E	A	E	D	B	B	A	E	D	C	C	C	B	A
135	M	B	D	E	B	E	C	E	E	E	E	E	E	A	C	E	C	C	C	B	D
136	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	A	E	A	A	A	E	E	E	D	B	D
137	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	NO	NO	B	A	E	E	D	B	A	B	B
138	F	D	D	C	E	D	B	E	A	E	C	A	A	A	B	C	C	A	D	E	D
139	F	B	D	E	A	E	C	E	A	C	B	C	B	A	B	D	E	B	D	D	C
140	F	B	D	C	B	E	C	E	D	A	C	A	B	A	A	B	C	D	E	B	A
141	F	D	D	C	E	E	C	E	D	A	E	B	A	A	C	B	C	E	B	B	D
142	F	B	E	C	D	E	C	E	E	C	E	C	C	E	A	D	A	E	C	A	E
143	F	D	D	C	B	D	C	E	A	E	B	A	B	A	C	B	B	E	E	E	D
144	M	B	C	C	B	A	C	E	C	C	B	C	A	A	C	A	C	B	D	D	E
145	M	D	D	C	E	E	B	E	C	C	D	A	B	A	E	B	C	C	D	A	D
146	F	B	D	C	B	C	C	E	A	C	B	E	E	B	E	B	NO	NO	NO	NO	NO
147	F	B	D	C	B	E	C	E	NO	E	E	E	E	A	E	E	C	D	E	A	A

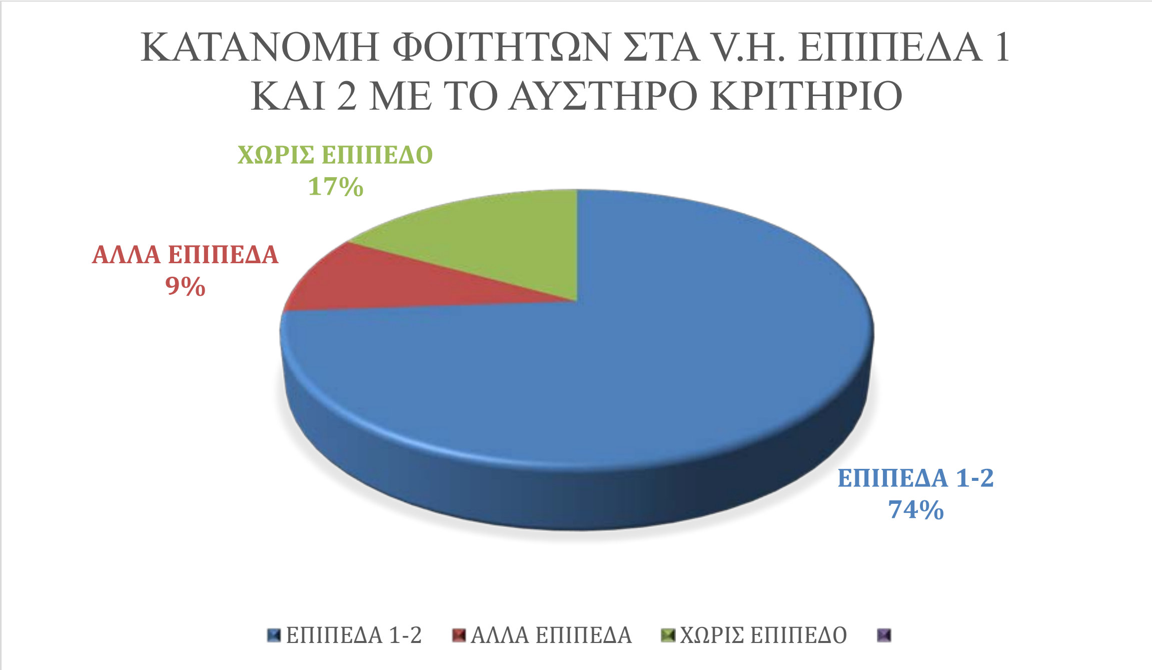
Τα κυκλικά διαγράμματα 3 και 4 δείχνουν την κατανομή όλων των φοιτητών που συμμετείχαν στο τεστ van Hiele στα επίπεδα 1 και 2 σύμφωνα με τα δύο κριτήρια.

Με το ελαστικό κριτήριο, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 3, το 48,30% των φοιτητών, δηλαδή 71 φοιτητές, βρίσκονται σε αυτά τα δύο επίπεδα, ενώ ένα μεγάλο ποσοστό 27,89%, κατατάσσεται σε μεγαλύτερο επίπεδο.



Διάγραμμα 3: Κατανομή φοιτητών σε επίπεδα βάση του ελαστικού κριτηρίου

Αντίστοιχα κάνοντας την κατανομή με το αυστηρό κριτήριο, το ποσοστό των φοιτητών για τα δύο αυτά επίπεδα ανεβαίνει στο 53,75% των φοιτητών, δηλαδή 79 φοιτητές βρίσκονται σε αυτά τα δύο επίπεδα, ενώ μόνο το 6,80% των φοιτητών κατατάσσεται σε μεγαλύτερα επίπεδα.



Διάγραμμα 4: Κατανομή μαθητών σε επίπεδα βάση του αυστηρού κριτηρίου.

Όπως φαίνεται από τους πίνακες 1 και 2, το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών κατανέμεται στα δύο αυτά επίπεδα,. Συγκεκριμένα, αν αφαιρέσουμε το ποσοστό των φοιτητών, οι οποίοι δεν κατηγοριοποιούνται, τότε το ποσοστό των φοιτητών οι οποίοι κατατάσσονται στα υπόλοιπα επίπεδα είναι 61,20% και 61,24% με το ελαστικό και το αυστηρό κριτήριο αντίστοιχα.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται συχνότητες και ποσοστά των φοιτητών που κατατάσσονται στα επίπεδα 1 και 2. Είναι φανερό ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών βρίσκεται στα επίπεδα αυτά ανεξάρτητα από την χρήση ελαστικού ή αυστηρού κριτηρίου.

	1ο και 2ο επίπεδο		Άλλα επίπεδα		Χωρίς επίπεδο		Σύνολο	
	v	%	v	%	v	%	v	%
Ελαστικό κριτήριο	71	48	45	31	31	21	147	100
Αυστηρό κριτήριο	79	54	50	34	18	12	147	100

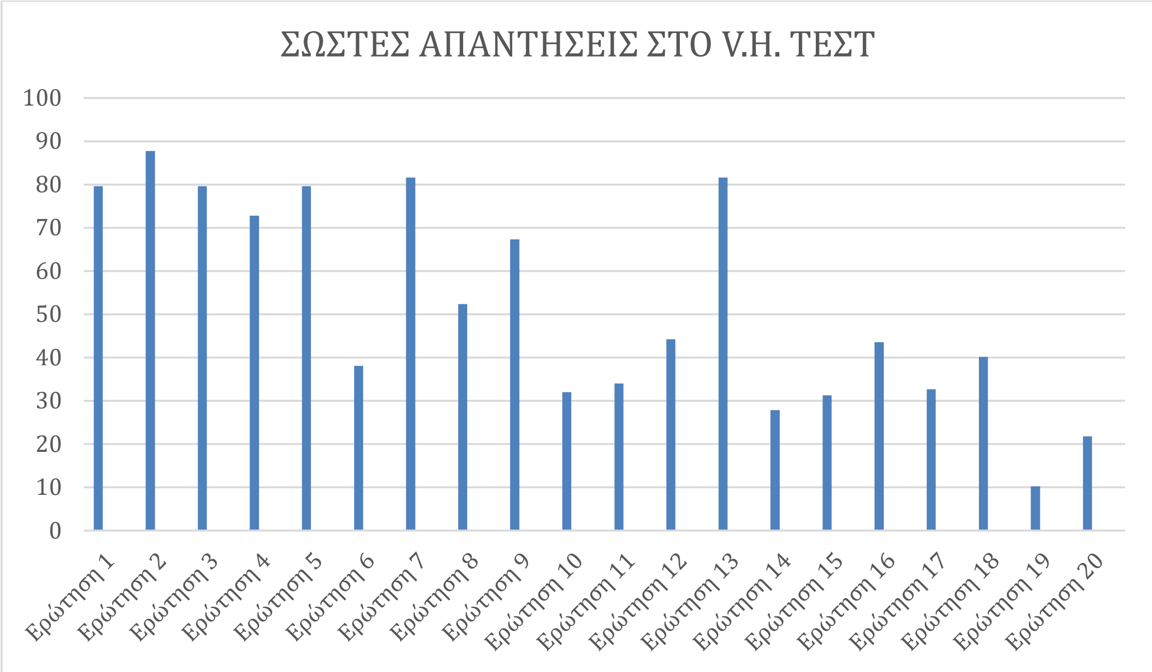
Πίνακας 4:Συχνότητες και ποσοστά φοιτητών συνολικά για τα επίπεδα 1 και 2 με το ελαστικό και με το αυστηρό κριτήριο.

4.3 Αποτελέσματα για τις ερωτήσεις των επιπέδων

Ένα άλλο θέμα που επιδιώχθηκε στα πλαίσια της έρευνας ήταν η απόδοση των φοιτητών στα θέματα του τεστ van Hiele. Εδώ θα αναλύσουμε την απόδοση σε όλες τις ερωτήσεις του τεστ. Στον πίνακα 5 και στο αντίστοιχο διάγραμμα 5 δίνονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων σε κάθε ερώτηση.

ΕΡΩΤΗΣΗ	ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v	ΠΟΣΟΣΤΟ %
1	b	116	79.59
2	d	128	87.76
3	c	117	79.59
4	b	107	72.79
5	e	117	79.59
6	b	56	38.10
7	e	120	81.63
8	a	77	52.38
9	c	99	67.35
10	d	47	31.97
11	c	50	34.01
12	b	65	44.22
13	a	120	81.63
14	a	41	27.89
15	b	46	31.29
16	c	64	43.54
17	c	48	32.65
18	d	59	40.14
19	d	15	10.20
20	a	32	21.77

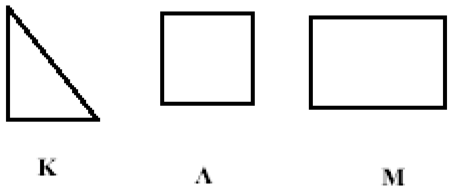
Πίνακας 5: Πίνακας συχνοτήτων και σωστών απαντήσεων του τεστ van Hiele.



Διάγραμμα 5: Ποσοστά σωστών απαντήσεων.

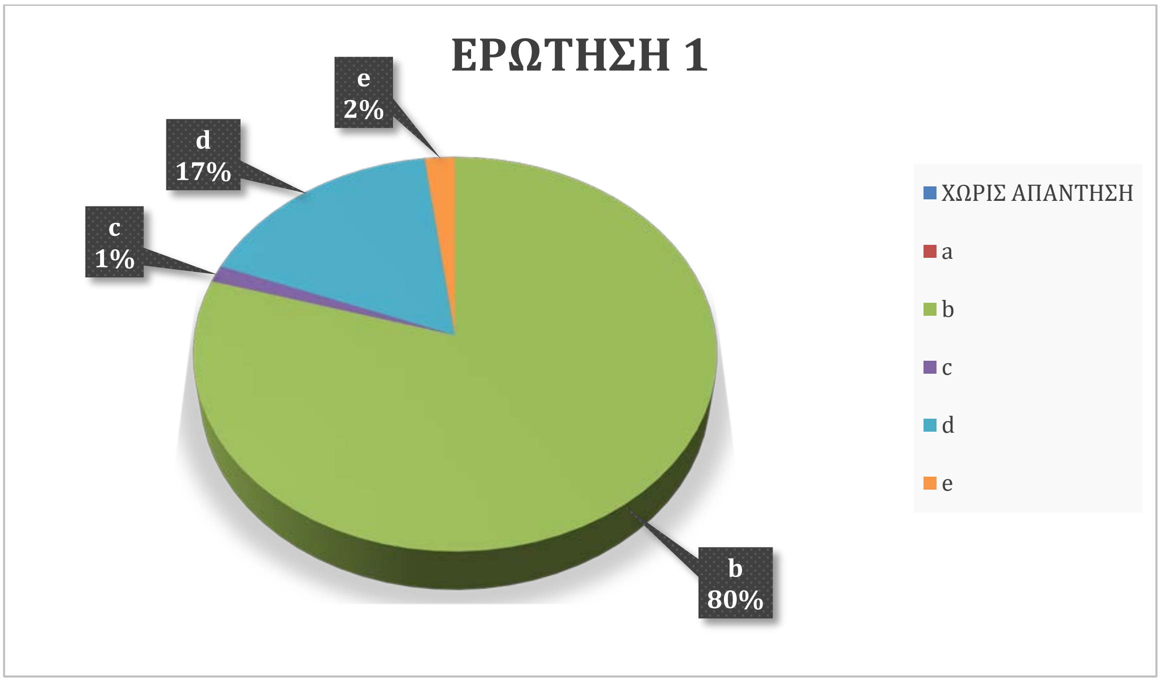
4.4.1 Αποτελέσματα ερωτήσεων επιπέδου 1

1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;



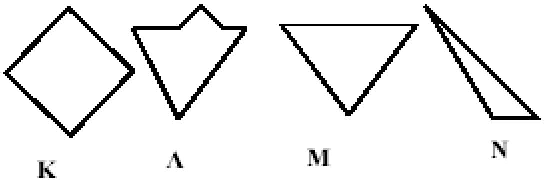
a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Λ και το Μ
e. Όλα είναι τετράγωνα

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 6, ένα συντριπτικό ποσοστό των φοιτητών (80%) απάντησε σωστά στην 1^{η} ερώτηση του τεστ. Υπάρχει όμως ένα ποσοστό 17% των φοιτητών, που θεωρεί ότι ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Το ποσοστό αυτό των φοιτητών μάλλον ανήκει στο επίπεδο 1 ή 0.



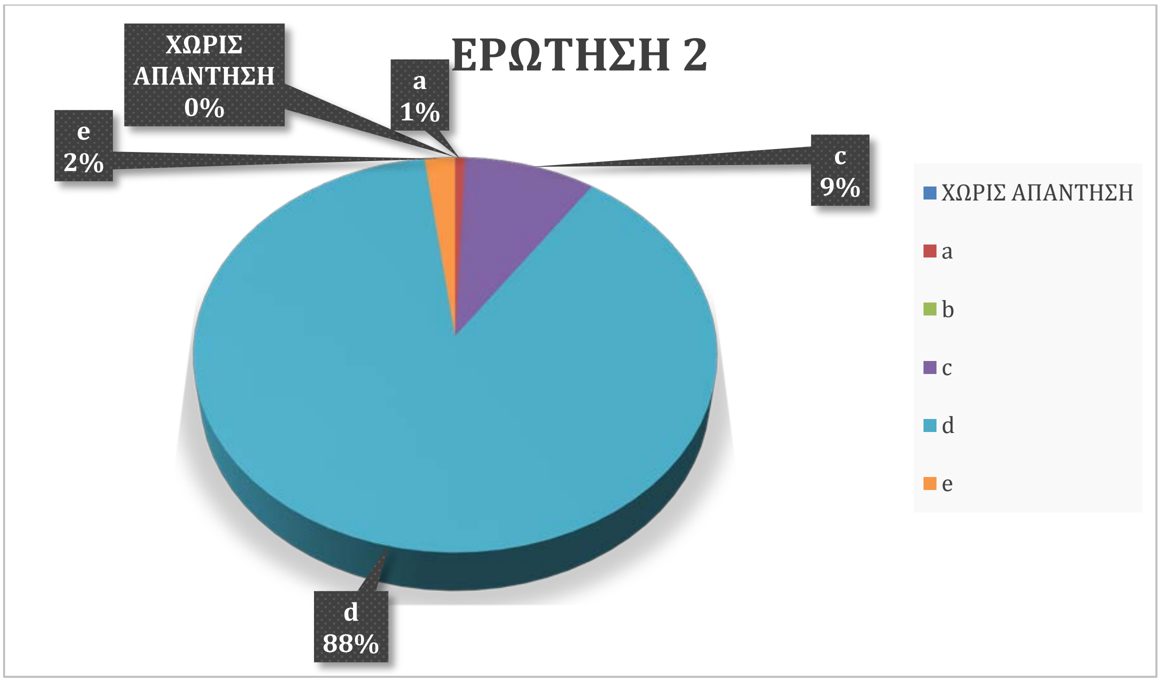
Διάγραμμα 6: Η σωστή απάντηση είναι το b.

2. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνα;



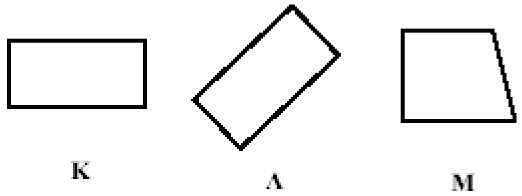
a. Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Μ και το Ν
e. Το Λ και το Μ

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 7, η 2η ερώτηση του τεστ παίρνει ποσοστό σωστών απαντήσεων 88%. Αυτό αποτελεί και το μεγαλύτερο ποσοστό σωστής απάντησης που υπήρξε στο σύνολο των 20 ερωτήσεων του τεστ. Όμως ένα ποσοστό 9% των φοιτητών, οι οποίοι θεωρούν ότι ένα αμβλυγώνιο και λεπτό τρίγωνο δεν είναι τρίγωνο. Το ποσοστό αυτό των φοιτητών μάλλον ανήκει στο επίπεδο 1 ή 0.



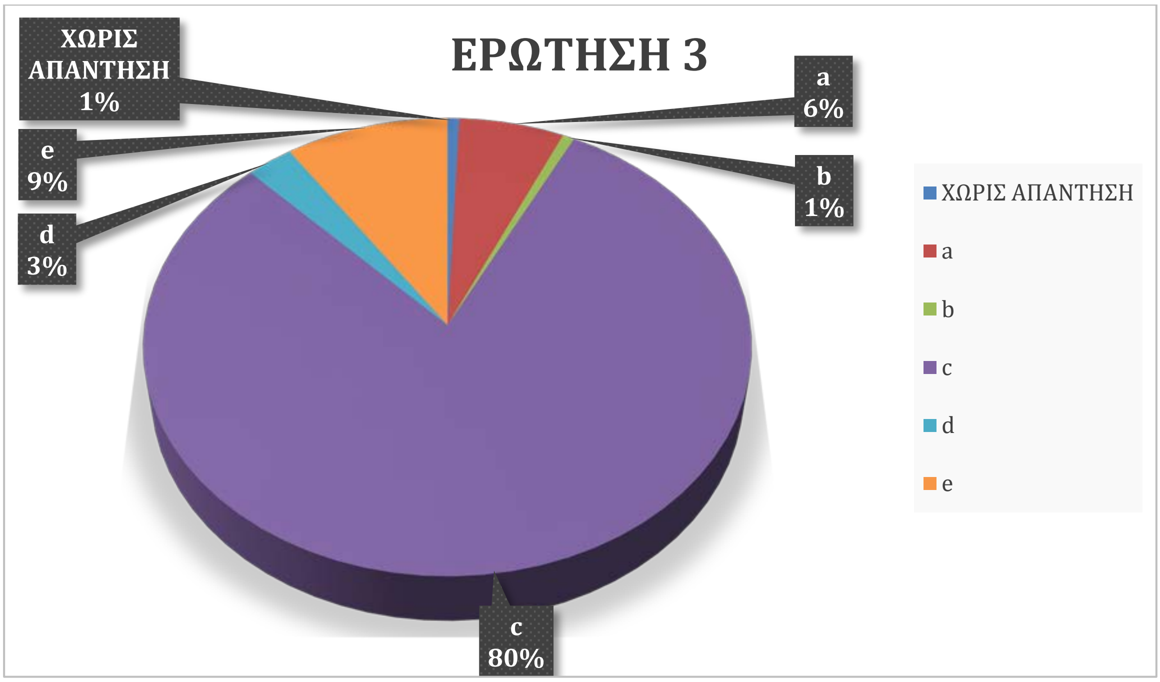
Διάγραμμα 7: Η σωστή απάντηση είναι το d.

3. **Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια;**



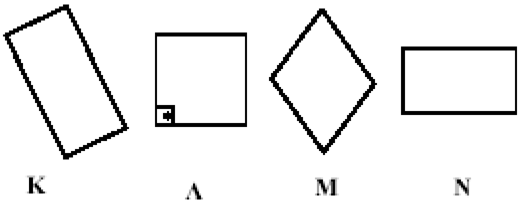
a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και το Λ
d. Το Κ και το Μ
e. Όλα είναι ορθογώνια.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 8, η 3η ερώτηση του τεστ είχε ποσοστό σωστών απαντήσεων 80%, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι δεν μπορούν όλοι οι φοιτητές να αναγνωρίσουν τα ορθογώνια. Ένα ποσοστό 9% θεωρεί το τραπέζιο του σχήματος ως ορθογώνιο. Το ποσοστό αυτό των φοιτητών μάλλον ανήκει στο επίπεδο 1 ή 0.



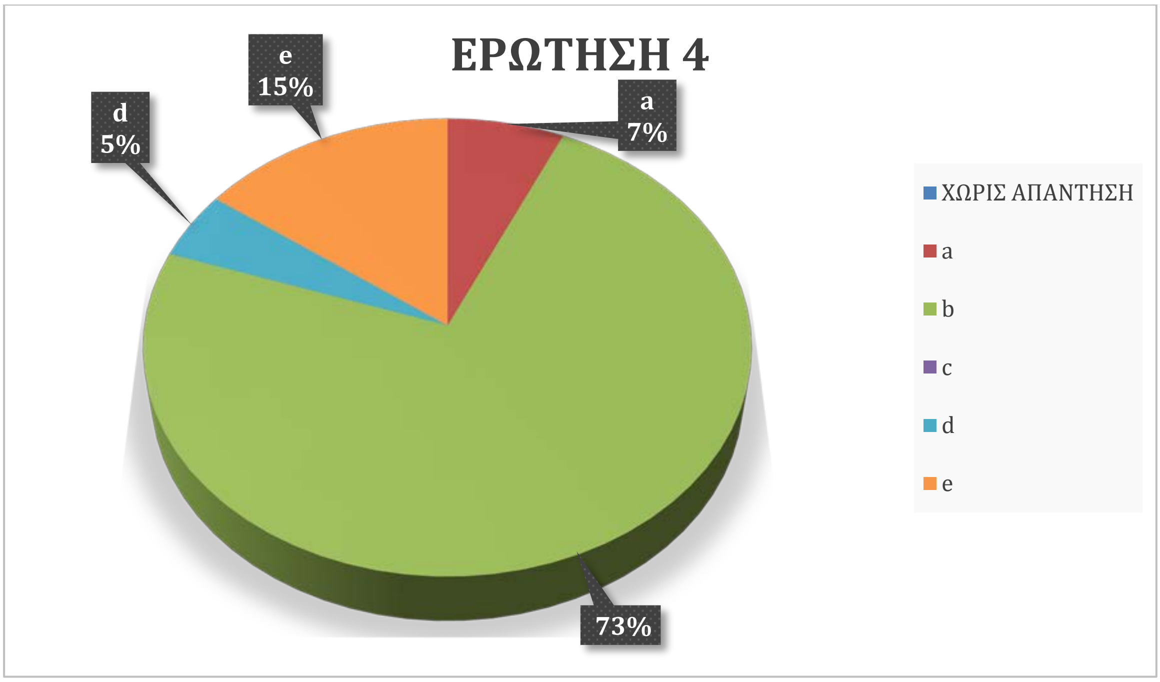
Διάγραμμα 8: Η σωστή απάντηση είναι το c.

4. **Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;**



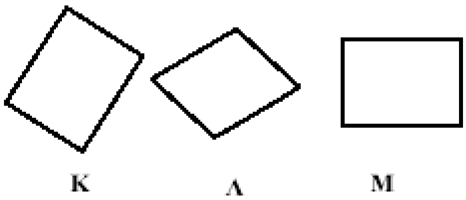
a. Κανένα από αυτά δεν είναι τετράγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Το Λ και το Ν
e. Όλα είναι τετράγωνα.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 9, έχουμε μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων (73%) στην 4η ερώτηση του τεστ. Αποτελεί το χαμηλότερο ποσοστό σωστής απάντησης από όλες τις ερωτήσεις του 1ου επιπέδου. Υπάρχει και εδώ ένα ποσοστό των φοιτητών (που απάντησαν το c και το d) (20%) που θεωρεί ότι και άλλα τετράπλευρα είναι τετράγωνα. Ένα ποσοστό 7% των φοιτητών δεν αναγνώρισαν κανένα τετράγωνο στα σχήματα της ερώτησης.



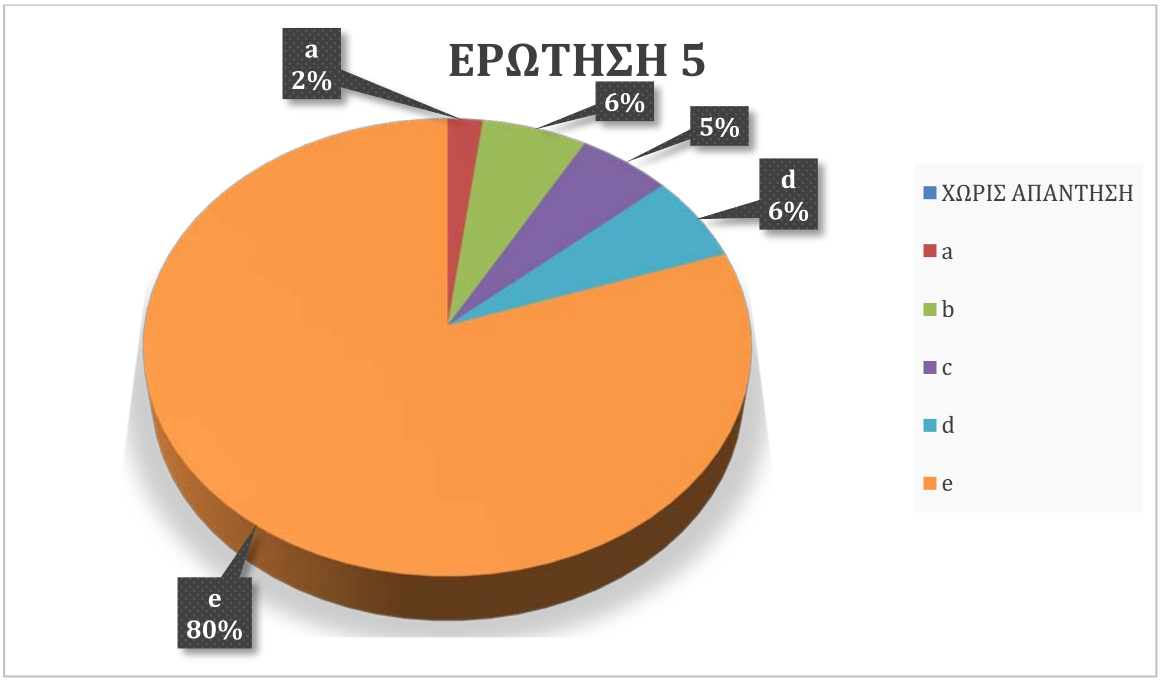
Διάγραμμα 9: Η σωστή απάντηση είναι το b.

5. **Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι παραλληλόγραμμα;**



a. Το Κ μόνο
b. Το Μ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Κανένα από αυτά δεν είναι παραλληλόγραμμο.
e. Όλα είναι παραλληλόγραμμα.

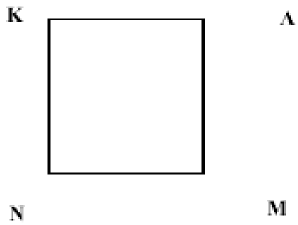
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 10, έχουμε μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων (80%) και στην 5η ερώτηση του τεστ. Το υπόλοιπο ποσοστό (20%) είναι σχεδόν ισόποσα μοιρασμένο στις υπόλοιπες πιθανές απαντήσεις.



Διάγραμμα 10: Η σωστή απάντηση είναι το e.

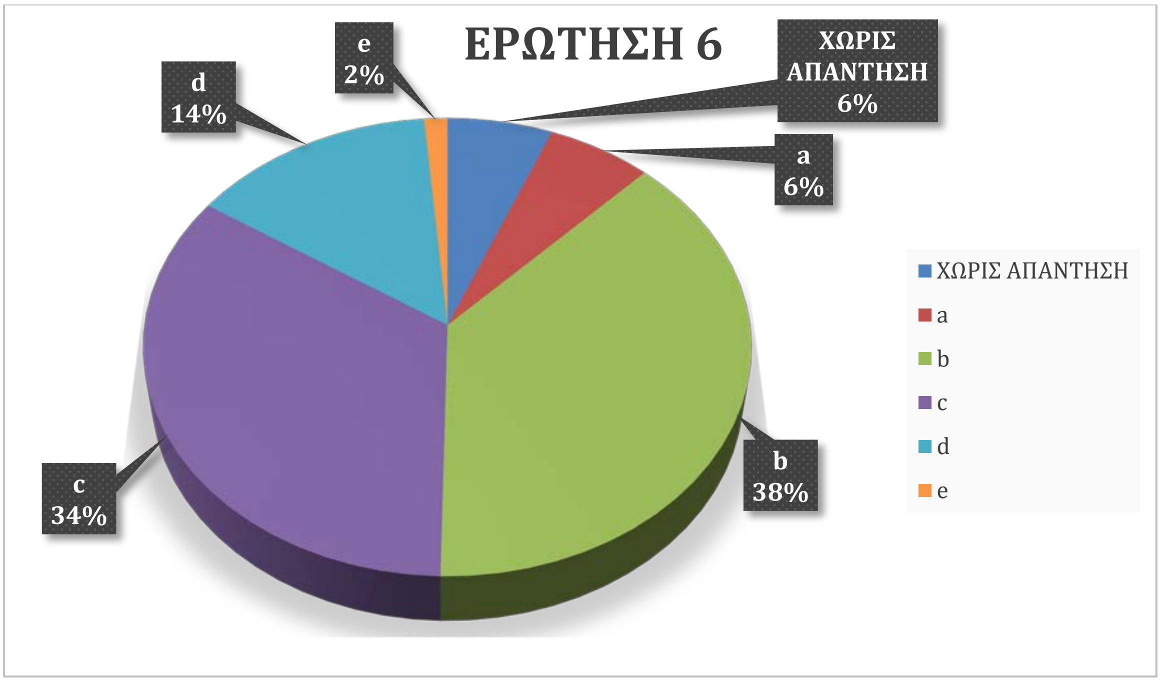
4.4.2 Αποτελέσματα ερωτήσεων επιπέδου 2

6. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής για όλα τα τετράγωνα.



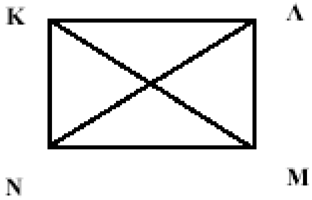
a. Το ΚΜ και το ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος.
b. Το ΚΜ και το ΛΝ είναι κάθετα.
c. Το ΚΝ και το ΛΜ είναι κάθετα.
d. Το ΚΝ και το ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος.
e. Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 11, στην 6η ερώτηση έχουμε πτώση των μεγάλων ποσοστών των σωστών απαντήσεων (38%). Το 34% των φοιτητών θεωρούν ότι δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου είναι κάθετες. Ένα ποσοστό (14%) των φοιτητών θεωρούν ότι η διαγώνιος και η πλευρά του τετραγώνου έχουν το ίδιο μήκος.



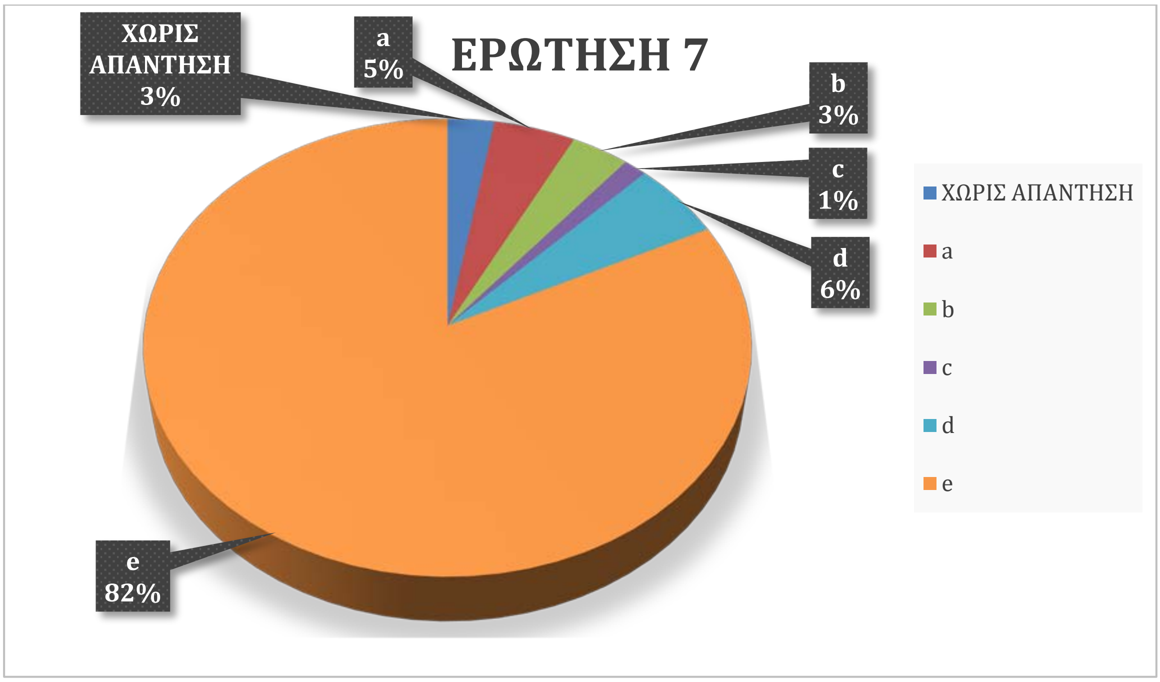
Διάγραμμα 11: Η σωστή απάντηση είναι το b.

7. Στο ορθογώνιο ΚΛΜΝ οι ΚΜ και ΛΝ είναι διαγώνιες.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο;



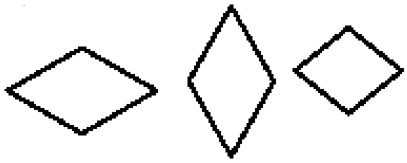
a. Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες.
b. Υπάρχουν 4 πλευρές.
c. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
d. Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 12, η 7η ερώτηση είναι η ευκολότερη ερώτηση του επιπέδου 2. Έχουμε ποσοστό 82% σωστών απαντήσεων των φοιτητών.



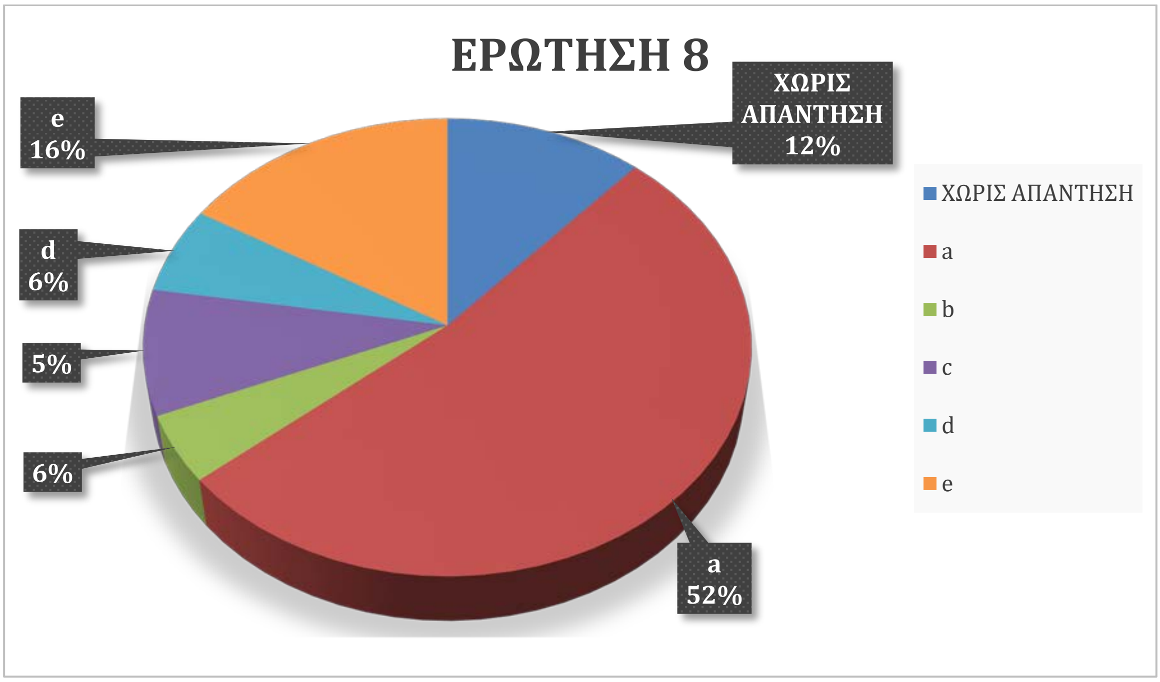
Διάγραμμα 12: Η σωστή απάντηση είναι το e.

8. Ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ρόμβο;



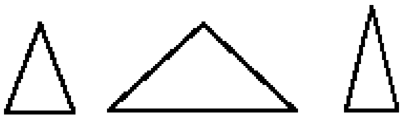
a. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
b. Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δύο από τις γωνίες του ρόμβου.
c. Οι δύο διαγώνιες είναι κάθετες.
d. Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 13, στην 8η ερώτηση το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των φοιτητών επανέρχεται σε χαμηλά επίπεδα (52%). Εδώ φαίνεται ότι αρκετοί φοιτητές ίσως δεν διάβασαν προσεκτικά την ερώτηση (ποια από τα (a) έως (b) **δεν** είναι αληθή). Ίσως να είχαμε πολύ διαφορετικά και καλύτερα αποτελέσματα αν γινόταν μια διαφορετική διατύπωση της ερώτησης.



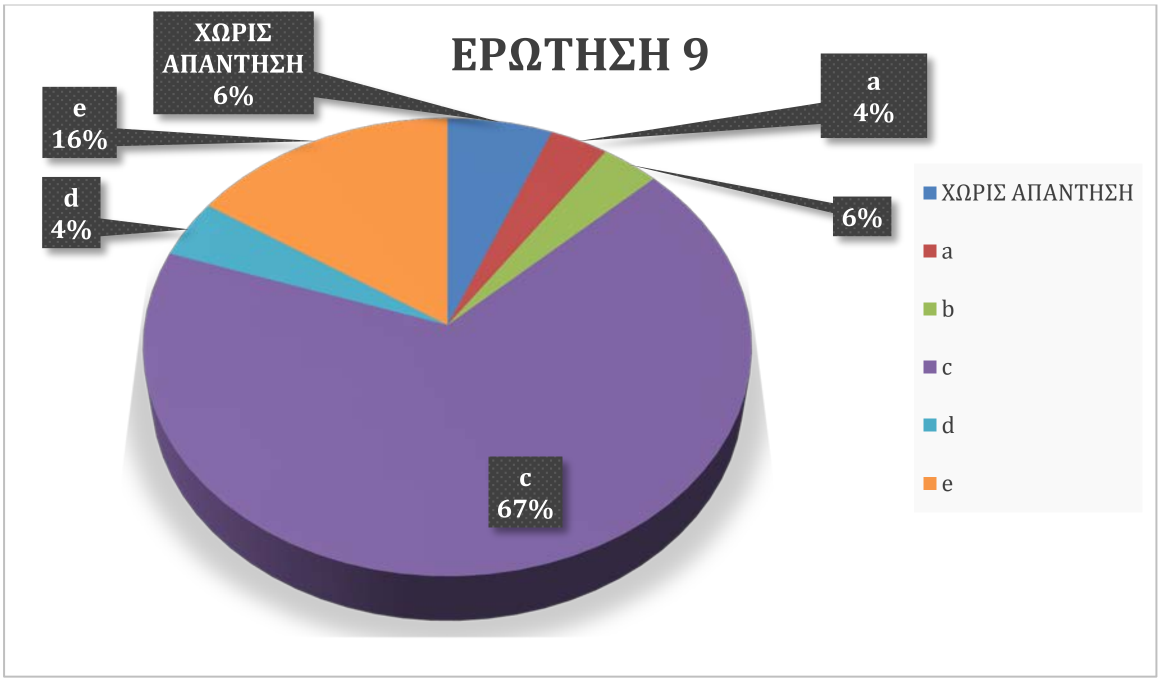
Διάγραμμα 13: Η σωστή απάντηση είναι το a.

9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο με δύο ίσες πλευρές.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;



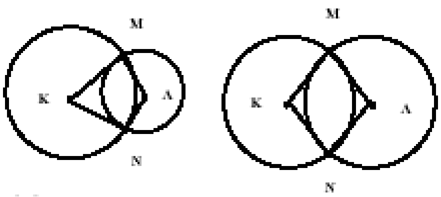
a. Οι τρεις πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.
b. Μια πλευρά να είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.
c. Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο.
d. Οι τρεις γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Κανένα από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθές για κάθε ισοσκελές τρίγωνο.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 14, στην 9η ερώτηση το 67% των φοιτητών απαντά σωστά. Ένα ποσοστό 16% των φοιτητών δεν αναγνωρίζει καμία ιδιότητα στο ισοσκελές τρίγωνο. Το 33% των φοιτητών δεν γνωρίζει ότι τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες.



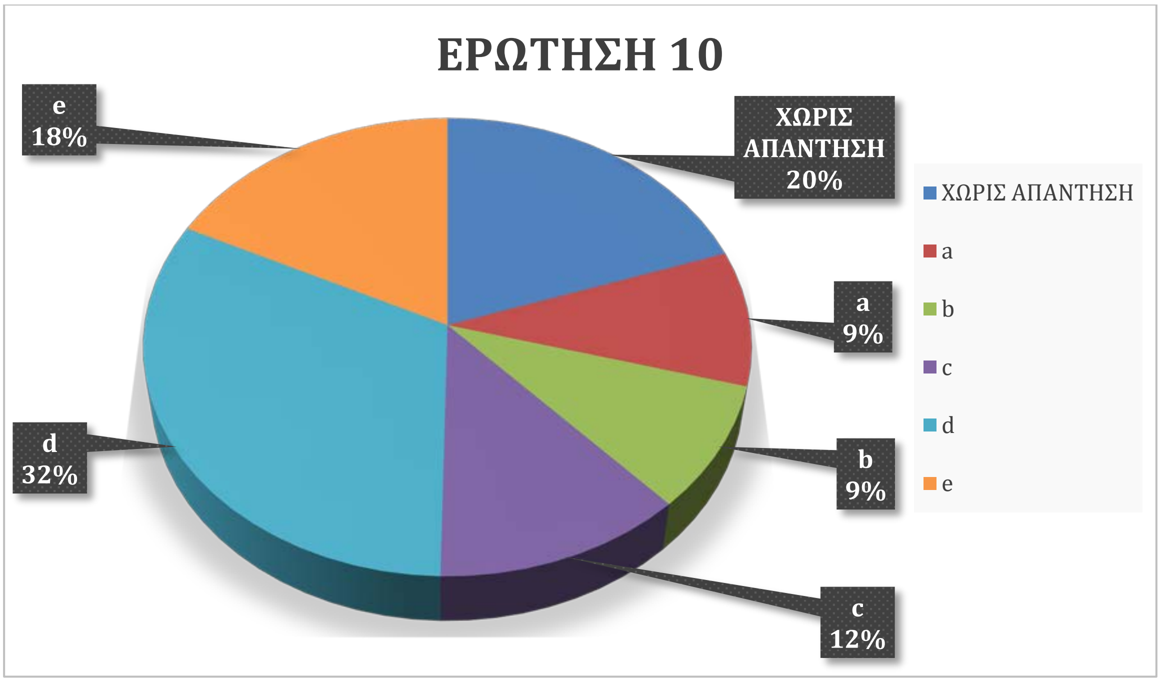
Διάγραμμα 14: Η σωστή απάντηση είναι το c.

10. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Μ και Ν σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΚΜΛΝ.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι πάντα αληθή;



a. Το ΚΜΛΝ θα έχει δύο ζευγάρια πλευρών ίσου μήκους.
b. Το ΚΜΛΝ θα έχει τουλάχιστον δύο γωνίες ίσου μέτρου.
c. Οι ευθείες ΚΛ και ΜΝ θα είναι κάθετες.
d. Οι γωνίες Κ και Λ θα έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 15, η 10^{η} ερώτηση είναι η δύσκολη ερώτηση του επιπέδου 2 με ποσοστό των σωστών απαντήσεων μόλις 32%. Εδώ, η σχετική ισοκατανομή των λανθασμένων απαντήσεων δείχνει τυχαιότητα, η οποία μπορεί να προήλθε από την απροσεξία των φοιτητών στην ανάγνωση της εκφώνησης της ερώτησης (**δεν** είναι πάντα αληθή) ή και από ελλιπή παρατήρηση του σχήματος.



Διάγραμμα 15: Η σωστή απάντηση είναι το d.

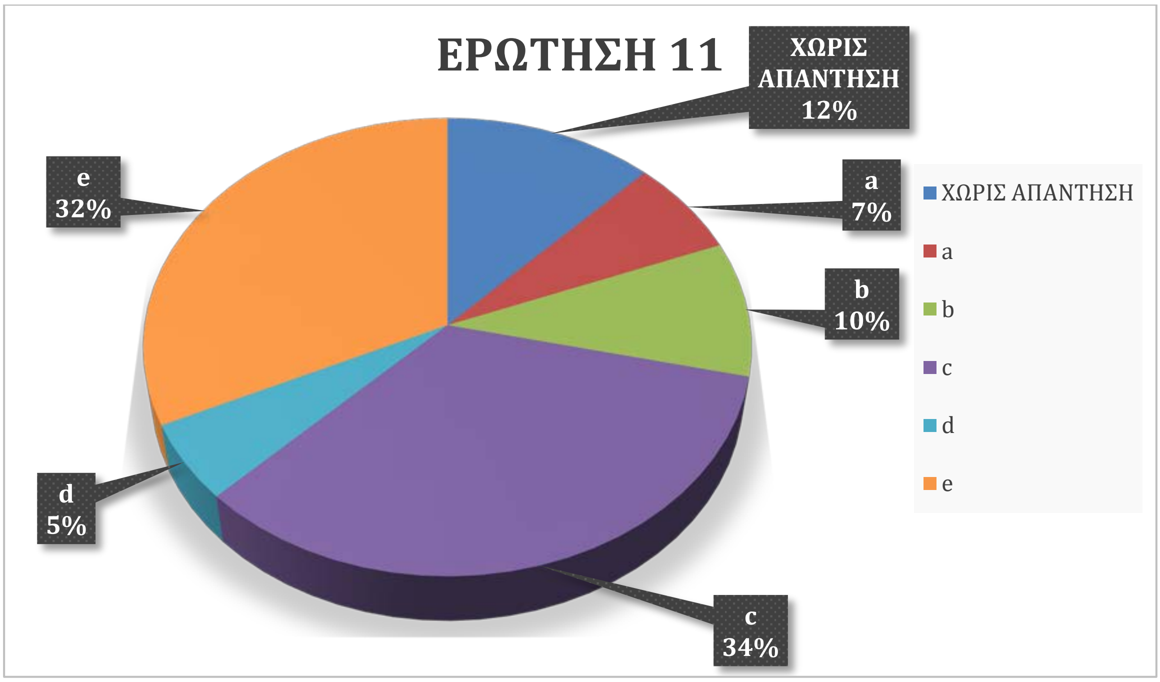
4.4.3 Αποτελέσματα ερωτήσεων επιπέδου 3

11. Υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;

Υπόθεση Ι : Το σχήμα Φ είναι ένα ορθογώνιο.
Υπόθεση ΙΙ: Το σχήμα Φ είναι ένα τρίγωνο.

a. Αν η Ι είναι αληθής, τότε και η ΙΙ είναι αληθής.
b. Αν η Ι είναι λάθος, τότε η ΙΙ είναι αληθής.
c. Οι Ι και ΙΙ δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
d. Οι Ι και ΙΙ δεν μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 16, η 11η ερώτηση είναι η πρώτη ερώτηση που αφορά συλλογισμό που οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμά και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το ποσοστό των φοιτητών που απαντά σωστά να πέφτει στο 34%.Παρατηρούμε ότι συμβαίνει το ίδιο σε όλες τις ερωτήσεις αυτού του είδους (λογικής) του τεστ που είναι οι 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20.

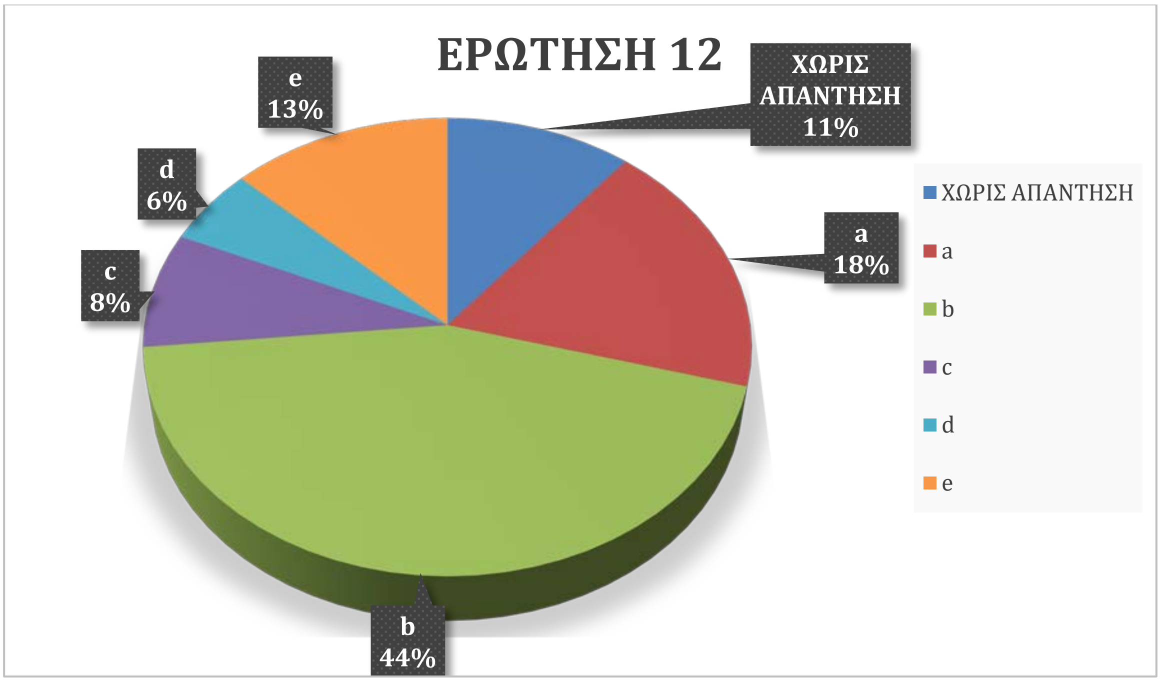


Διάγραμμα 16: Η σωστή απάντηση είναι το c.

12. Υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;
Υπόθεση I : Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις πλευρές με το ίδιο μήκος.
Υπόθεση II: Στο τρίγωνο ΑΒΓ, οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο.

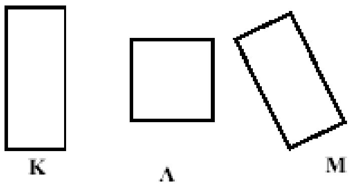
a. Οι υποθέσεις I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
b. Αν η I είναι αληθής, τότε και η II είναι αληθής.
c. Αν η II είναι αληθής, τότε και η I είναι αληθής.
d. Αν η I είναι ψευδής, τότε και η II είναι ψευδής.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 17, στην 12η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε και στην 11η ερώτηση. Εδώ παρατηρούμε επιπλέον ότι ένα μεγάλο ποσοστό των φοιτητών 18% θεωρεί ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο ίσες γωνίες, δηλαδή να είναι ισοσκελές. Αυτό το γεγονός που δείχνει πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης.



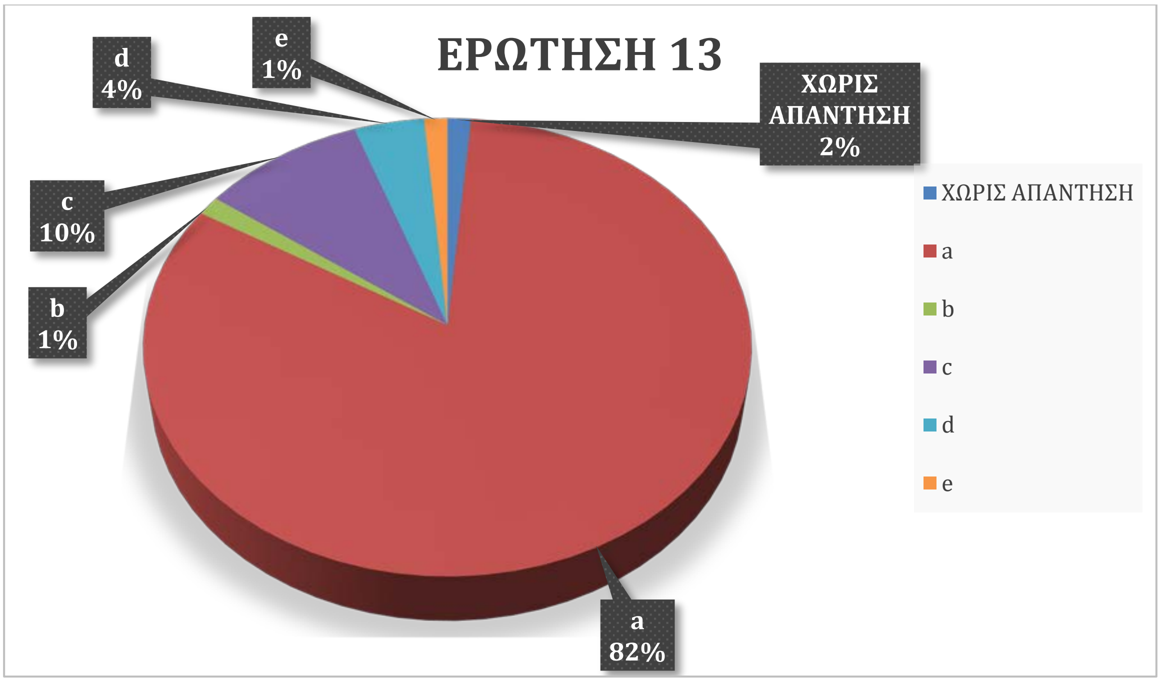
Διάγραμμα 17: Η σωστή απάντηση είναι το b.

13. Ποια από τα παρακάτω σχήματα μπορούμε να τα ονομάσουμε ορθογώνια;



a. Όλα μπορούν.
b. Μόνο το Λ.
c. Μόνο το Μ.
d. Τα Κ και Λ μόνο.
e. Τα Λ και Μ μόνο

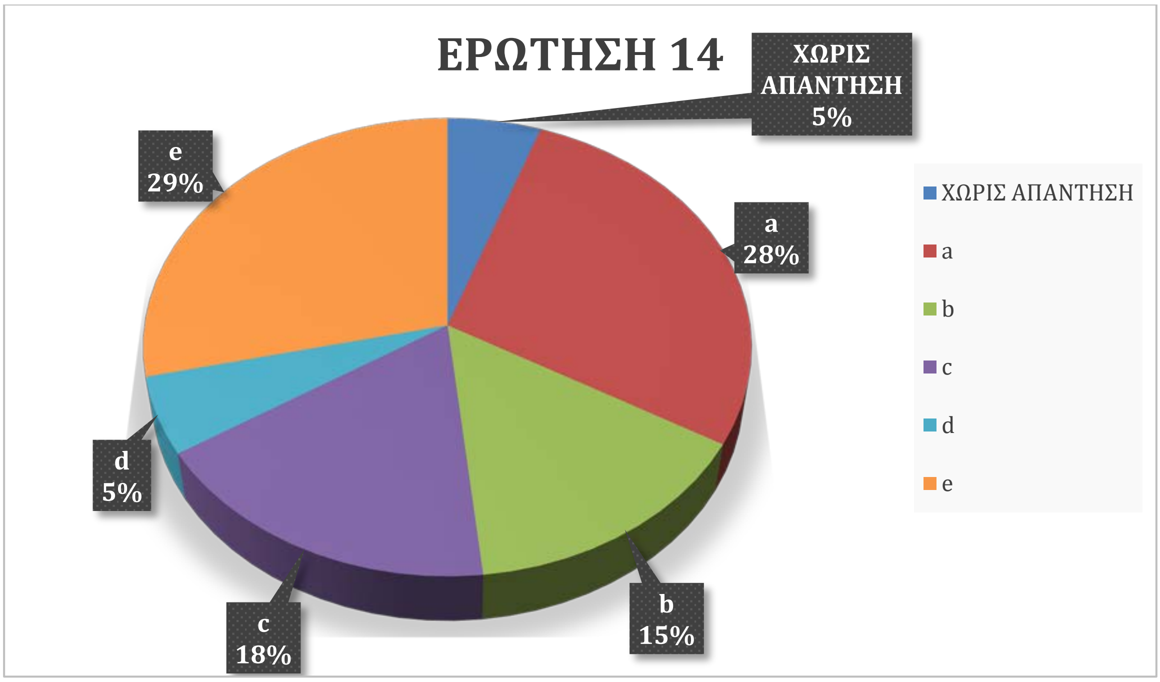
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 18, η 13η ερώτηση είναι η εύκολη ερώτηση του επιπέδου 3 και απαντήθηκε σωστά από το 82% των φοιτητών. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κατά την διάρκεια της καταχώρησης των γραπτών της έρευνας παρατηρήθηκε σε αρκετά γραπτά φοιτητών ως απάντηση “Το Κ και το Μ μόνο”. Επομένως ένα ποσοστό των φοιτητών θεωρούν ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο (συμπερίληψη κλάσης).



Διάγραμμα 18: Η σωστή απάντηση είναι το a.

14. Ποια πρόταση είναι αληθής;
a. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.
b. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογωνίων.
c. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
d. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 19, για τη 14η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Εδώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι μόλις 28% και αποτελεί το χαμηλότερο ποσοστό σωστής απάντησης στο επίπεδο 3. Αξιοσημείωτο είναι το ποσοστό των φοιτητών, της τάξης του 29%, που θεωρεί ότι καμία από τις προτάσεις (a) έως (d) δεν είναι σωστή (πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης).

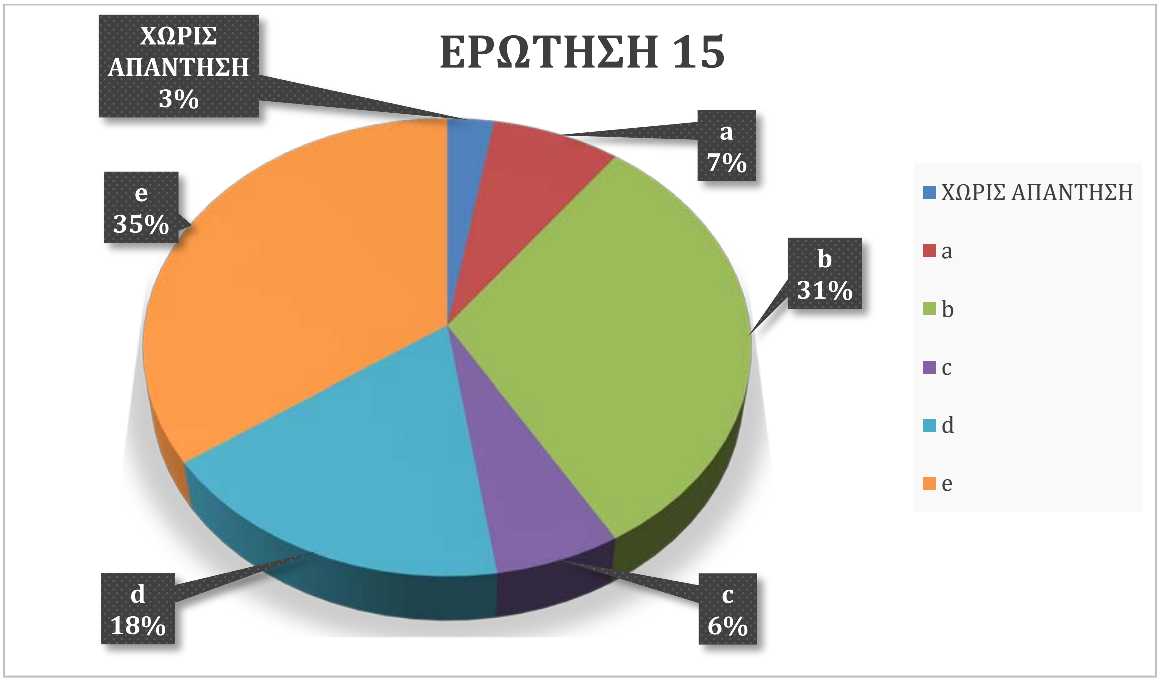


Διάγραμμα 19: Η σωστή απάντηση είναι το a.

15. Τι έχουν όλα τα ορθογώνια που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν;

a. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
b. Οι διαγώνιες είναι ίσες.
c. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.
d. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.
e. Κανένα από τα (a) έως (d).

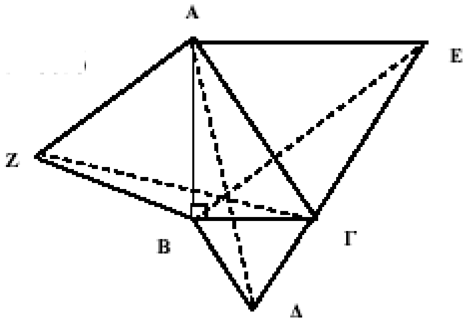
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 20, για τη 15η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Οι φοιτητές στο επίπεδο αυτό υποτίθεται ότι ξέρουν τι σημαίνει «μερικό» και «όλο» (Usiskin, 1982). Ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των φοιτητών (35%) που ξεπερνάει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (31%), θεωρεί ότι οι ιδιότητες που αναφέρονται στις απαντήσεις a, b, c, d είναι όλες και ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Ένα σημαντικό ποσοστό (18%) των φοιτητών δεν γνωρίζει ότι οι απέναντι γωνίες των παραλληλογράμμων είναι ίσες.



Διάγραμμα 20: Η σωστή απάντηση είναι το b.

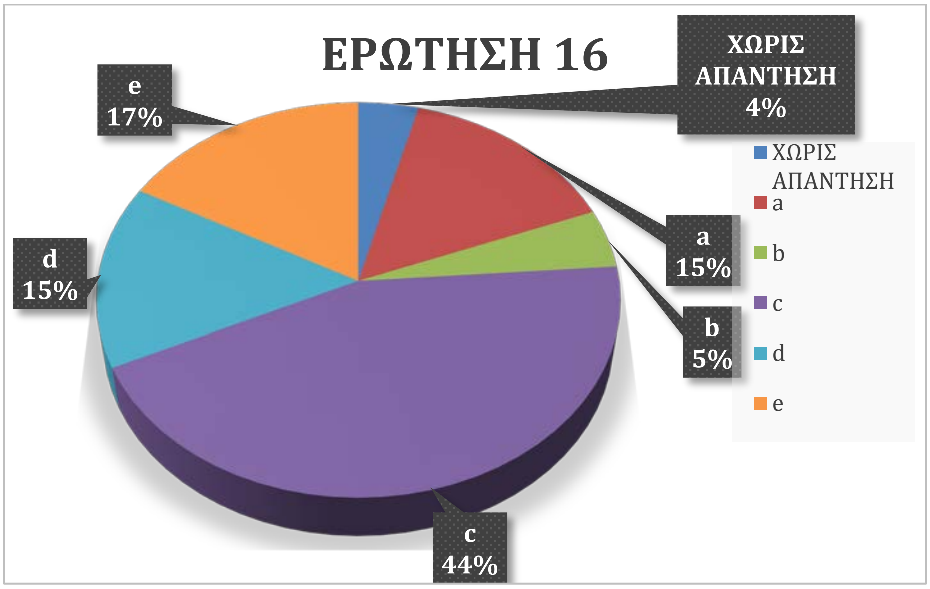
4.4.4 Αποτελέσματα ερωτήσεων επιπέδου 4

16. Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΒΖ και ΒΓΔ σχηματίζονται στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ. Από αυτή την πληροφορία κάποιος μπορεί να αποδείξει ότι: οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο. Τι σας λέει αυτή η απόδειξη;



a. Μόνο σε αυτό το τρίγωνο είναι σίγουρο ότι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.
b. Σε μερικά και όχι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.
c. Σε οποιαδήποτε ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.
d. Σε οποιαδήποτε τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.
e. Σε οποιαδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 21, για τη 16^{η} ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Απαιτείται σωστά από το 44% των φοιτητών και είναι το μεγαλύτερο ποσοστό σωστής απάντησης που βρέθηκε στο επίπεδο 4.



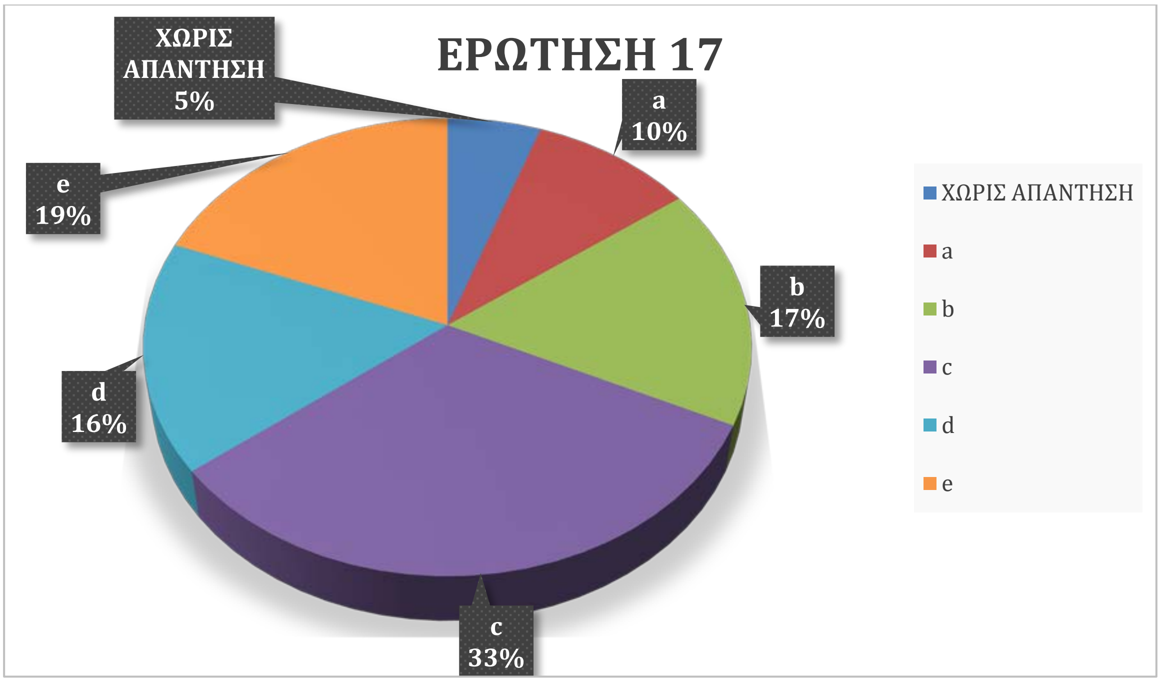
Διάγραμμα 21: Η σωστή απάντηση είναι το c.

17. Παρακάτω υπάρχουν τρεις ιδιότητες ενός σχήματος. Ποια είναι αληθής;

Ιδιότητα I : Το σχήμα έχει διαγώνιες με ίσα μήκη.
Ιδιότητα II : Το σχήμα είναι ένα τετράγωνο.
Ιδιότητα III: Το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.

a. Η I συνεπάγεται την II η οποία συνεπάγεται την III.
b. Η I συνεπάγεται την III η οποία συνεπάγεται την II.
c. Η II συνεπάγεται την III η οποία συνεπάγεται την I.
d. Η III συνεπάγεται την I η οποία συνεπάγεται την II.
e. Η III συνεπάγεται την II η οποία συνεπάγεται την I.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 22, στην 17η ερώτηση μόνο το 33% των φοιτητών μπορούν να διατάξουν σωστά απλές προτάσεις. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 22, για τη 17η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής.



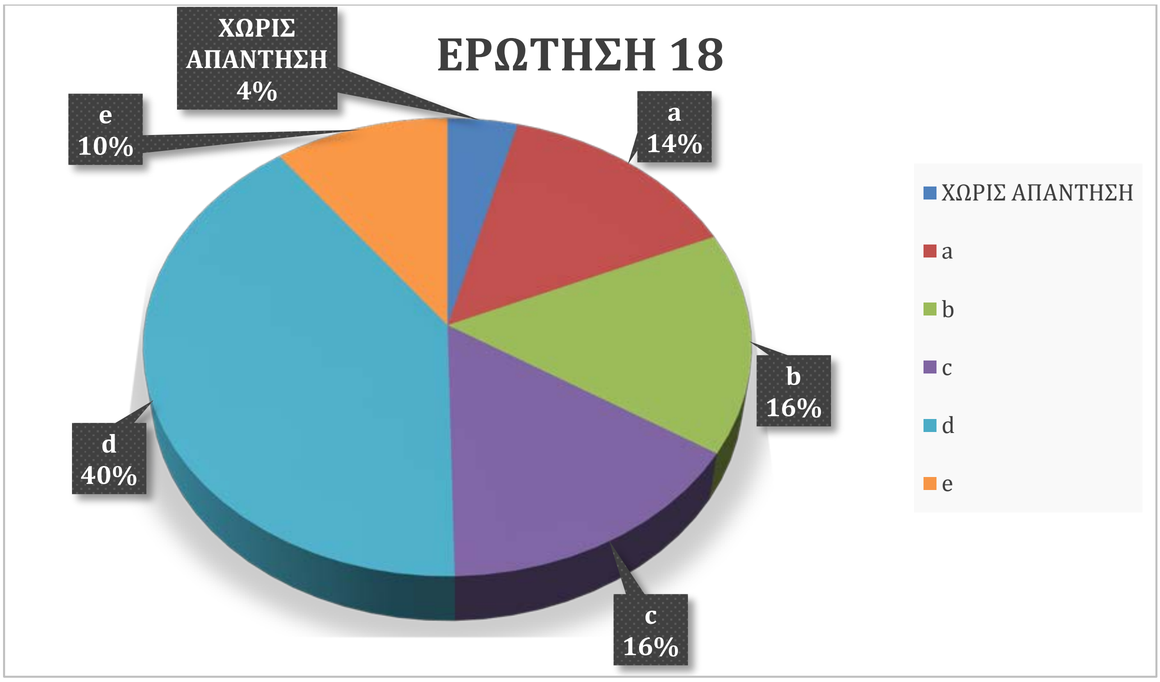
Διάγραμμα 22: Η σωστή απάντηση είναι το c.

18. Παρακάτω υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;

Υπόθεση Ι: Εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Υπόθεση ΙΙ: Εάν οι διαγώνιοι ενός σχήματος διχοτομούνται, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

a. Για να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή.
b. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή.
c. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
d. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι λάθος, είναι αρκετό να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 23, στη 18η ερώτηση το 40% των φοιτητών απαντά σωστά. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 23, για τη 18η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής.



Διάγραμμα 23: Η σωστή απάντηση είναι το d.

19. Στη Γεωμετρία:

a. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί.

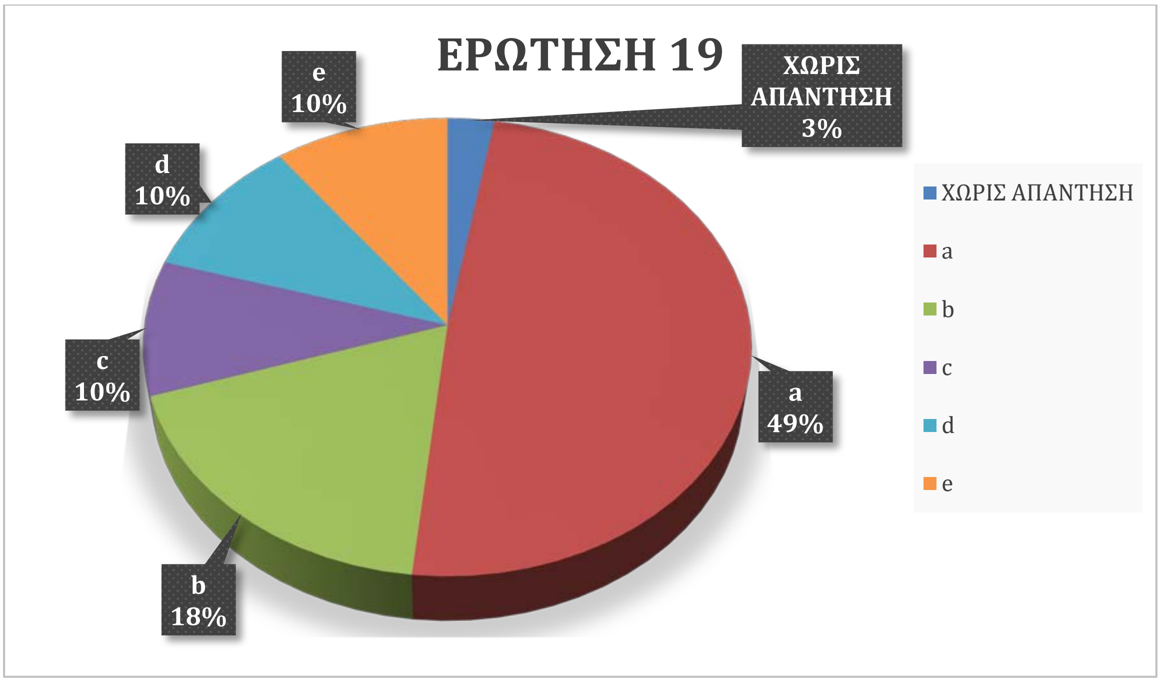
b. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι ορισμένες εικασίες είναι αληθείς.

c. Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί αληθής.

d. Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά είναι αναγκαίο να έχουμε μερικές εικασίες οι οποίες υποτίθεται αληθείς.

e. Τίποτε από τα (a) έως (d) δεν είναι σωστό.

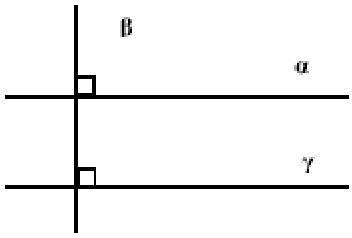
Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 24, η 19η ερώτηση του τεστ είναι και η δυσκολότερη και απαντήθηκε σωστά από μόλις το 10% των φοιτητών. Το εντυπωσιακό ποσοστό 49% των φοιτητών θεωρεί ότι στη Γεωμετρία, κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί. Αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι οι φοιτητές, αν και δε γνώριζαν τη σωστή απάντηση, προσπάθησαν να διαλέξουν την απάντηση με το μεγαλύτερο κύρος. Άλλωστε, οι γνώσεις που έχουνε συνηθίσει να λαμβάνουν από την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση περιέχουν συνήθως την μορφή καθολικών αληθειών χωρίς αμφισβητήσεις και περιορισμούς.



Διάγραμμα 24: Η σωστή απάντηση είναι το d.

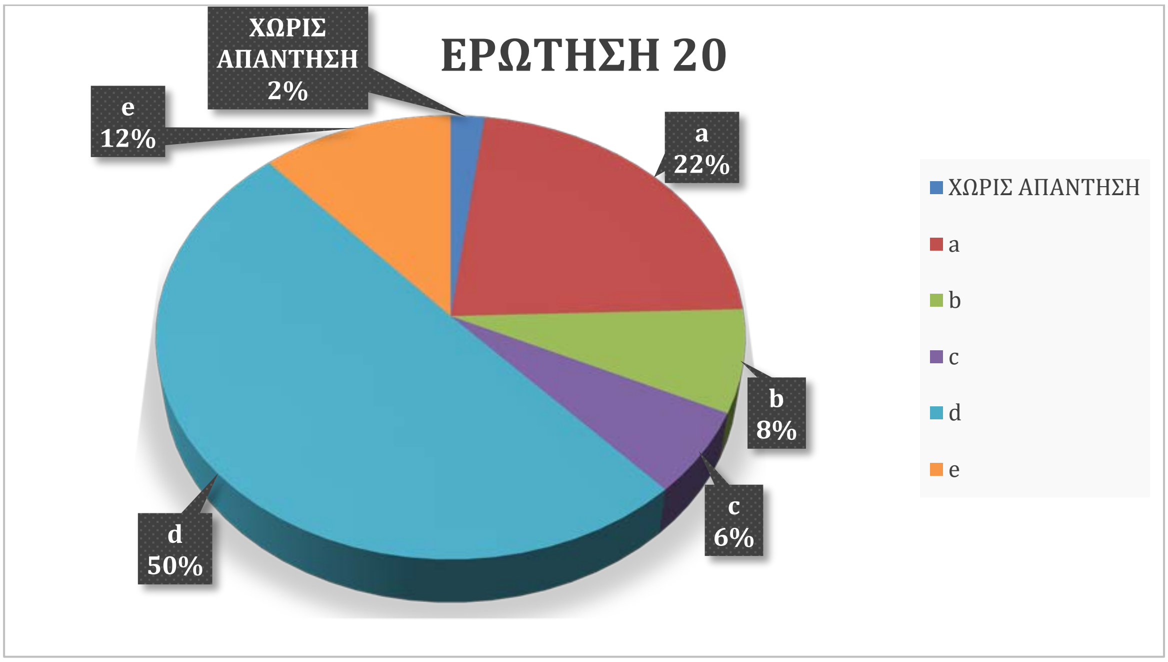
20. Εξετάστε αυτές τις τρεις υποθέσεις.
Υπόθεση Ι : Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
Υπόθεση ΙΙ : Μια ευθεία που είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες είναι κάθετη και στην άλλη.
Υπόθεση ΙΙΙ: Εάν δύο ευθείες ισαπέχουν, τότε είναι παράλληλες.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ότι οι ευθείες α και β είναι κάθετες και οι ευθείες β και γ είναι κάθετες. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις μπορεί να είναι ο λόγος που η ευθεία α είναι παράλληλη στην ευθεία γ ;



a. Η Ι μόνο.
b. Η ΙΙ μόνο.
c. Η ΙΙΙ μόνο.
d. Είτε η Ι είτε η ΙΙ.
e. Είτε η ΙΙ είτε η ΙΙΙ.

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 25, στην 20η ερώτηση το 22% των φοιτητών απάντησε σωστά. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 25, για τη 20η ερώτηση ισχύουν αυτά που αναφέραμε παραπάνω για τις ερωτήσεις λογικής. Αξιοπρόσεκτο το ποσοστό 50% των φοιτητών που απάντησε λανθασμένα την (d) δείχνει και εδώ ότι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό φοιτητών αποτυγχάνουν σε θέματα λογικής . Usiskin, (1982)

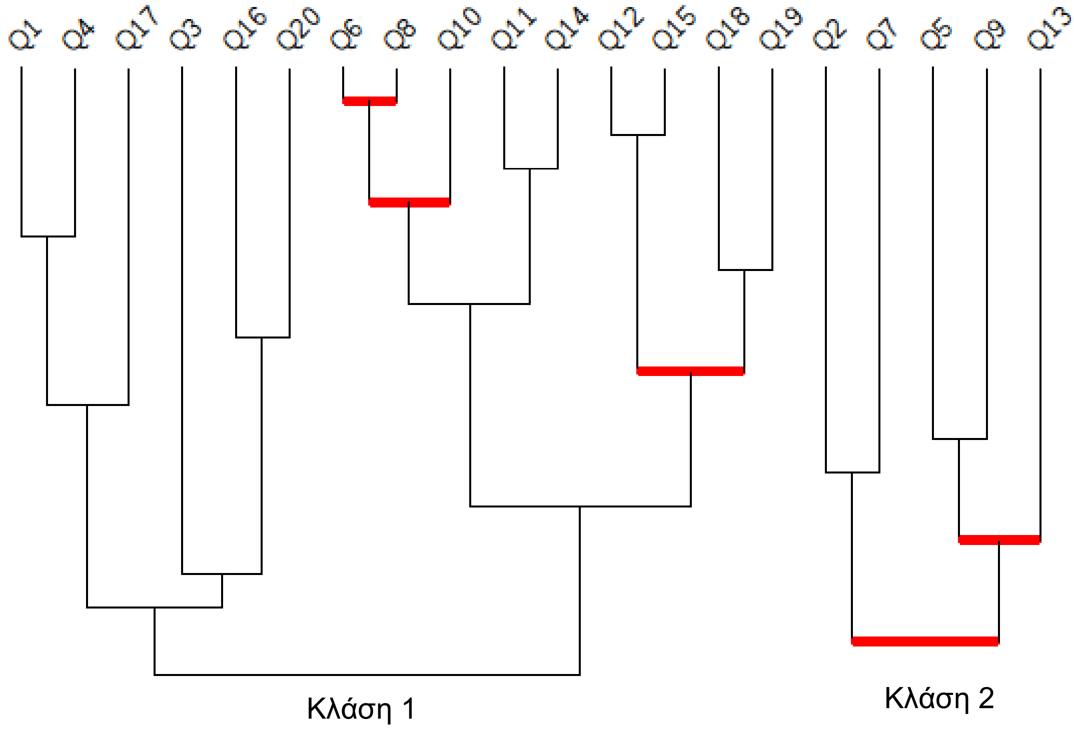


Διάγραμμα 25: Η σωστή απάντηση είναι το a.

4.5 Συνεπαγωγική Στατιστική Ανάλυση

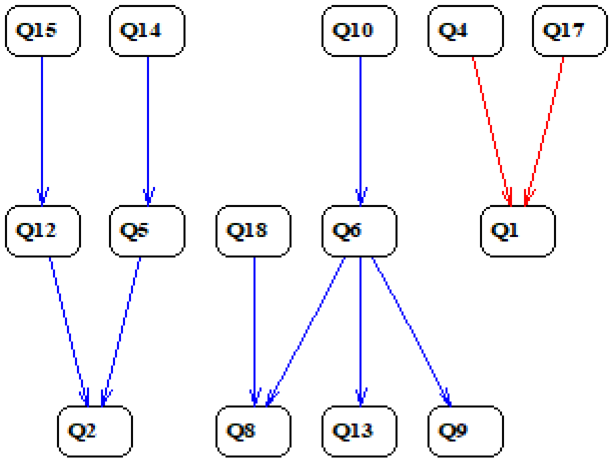
Στο διάγραμμα ομοιότητας που προέκυψε από το CHIC εμφανίζονται δύο κλάσεις ομοιότητας. Οι κόκκινες γραμμές αντιστοιχούν στις πιο σημαντικές σχέσεις ομοιότητας (Διάγραμμα 26). Η πρώτη κλάση ομοιότητας περιλαμβάνει τις περισσότερες ερωτήσεις (15 από τις 20) από όλα τα επίπεδα. Η κλάση αυτή χωρίζεται σε δύο υποκλάσεις με πιο σημαντική τη δεύτερη η οποία περιλαμβάνει τις ερωτήσεις 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 18 και 19.

Από τα πιο σημαντικά επίπεδα ομοιότητας είναι το 1ο το οποίο αφορά στις ερωτήσεις 6 και 8. Η ερώτηση 6 αντιστοιχεί στο δεύτερο επίπεδο Van Hiele και αποσκοπεί να εξετάσει την κατανόηση των ιδιοτήτων του τετραγώνου, ενώ το 8 του ρόμβου. Και στις δύο ερωτήσεις η σωστή απάντηση έχει σχέση με τις ιδιότητες των διαγώνιων των σχημάτων.



Διάγραμμα 26. Διάγραμμα ομοιότητας (Similarity tree)

Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει τις ερωτήσεις 2, 7, 5, 9 και 13. Η ερώτηση 2 αναφέρεται σε τρίγωνα, η 7 σε ορθογώνια, η 5 σε παραλληλόγραμμα, η 9 σε ισοσκελή τρίγωνα και η 13 σε ορθογώνια. Από τον τρόπο που είναι διατυπωμένες οι ερωτήσεις υπάρχουν κάποιες ασθενής ενδείξεις ότι η έννοια του ορθογωνίου τονίζεται σε αυτή την κλάση. Παρόλα αυτά οι ιδιότητες των ορθογωνίων αλλά και των τριγώνων εξετάζονται και σε άλλες ερωτήσεις.



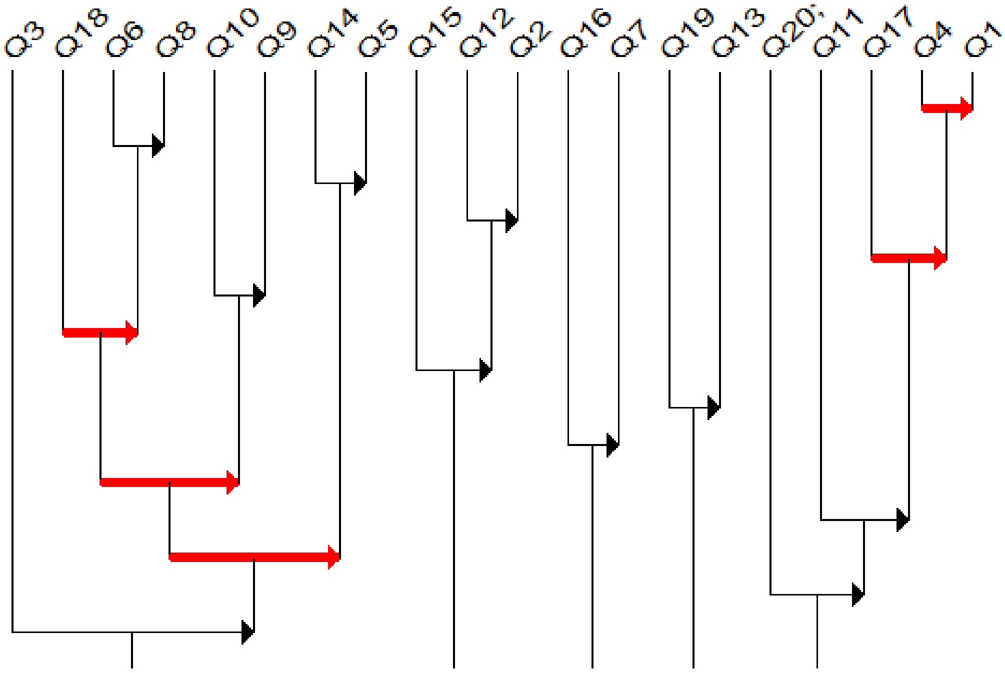
Διάγραμμα 27. Συνεπαγωγικό γράφημα (Implicative graph)

Οι πιο σημαντικές συνεπαγωγές που προκύπτουν από το συνεπαγωγικό γράφημα με επίπεδο σημαντικότητας 99% (κόκκινες γραμμές) είναι μεταξύ των ερωτήσεων 4, 17 και 1 (Διάγραμμα 27). Συγκεκριμένα, σωστή απάντηση τόσο στην ερώτηση 4 όσο και στην ερώτηση 17 συνεπάγεται σωστή απάντηση στην ερώτηση 1. Η 1 και η 4 σχετίζονται με την αναγνώριση τετραγώνων στο επίπεδο 1, ενώ και στη 17 εξετάζονται ιδιότητες του τετραγώνου σε πιο υψηλό επίπεδο. Το τετράγωνο φαίνεται ότι είναι ένα από τα βασικά σχήματα στην αντίληψη των φοιτητών. Είναι αναγνωρίσιμο και καθώς έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου, πιο εύκολα διαχειρίσιμο. Η μόνη ερώτηση που αναφερόταν σε κύβους και δεν εμφανίζεται στην συνεπαγωγή αυτή είναι η 6, στην οποία μεγάλο ποσοστό των φοιτητών φαίνεται να απάντησε λάθος μπερδεύοντας τις ονομασίες των ευθυγράμμων τμημάτων.

Επεκτείνοντας το συνεπαγωγικό γράφημα σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (μπλε γραμμές), προκύπτουν περισσότερες σχέσεις συνεπαγωγής. Όπως ήταν αναμενόμενο, σε αρκετά σημεία φαίνεται ότι σωστές απαντήσεις σε ερωτήσεις που αντιστοιχούν σε υψηλότερα επίπεδα συνεπάγονται σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις των χαμηλότερων επιπέδων. Η ερώτηση 13 που αποτελεί εξαίρεση ήταν ιδιαίτερα εύκολη για το 3^{ο} επίπεδο στο οποίο αντιστοιχεί και όπως φάνηκε από την ποσοτική ανάλυση έχει απαντηθεί σωστά από το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών (82%). Αποτελεί ένα ερώτημα γιατί επιλέχτηκε αυτή η ερώτηση σε αυτό το επίπεδο και αν θα έπρεπε να αλλάξει η ερμηνεία του test ως προς αυτή.

Παρόλο που υπάρχουν ενδείξεις ότι σωστές απαντήσεις σε ερωτήσεις που αντιστοιχούν σε υψηλότερα επίπεδα συνεπάγονται σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις των χαμηλότερων επιπέδων, οι ερωτήσεις που συνδέονται διαφέρουν τόσο ως προς τα σχήματα όσο και ως προς τον τρόπο που είναι διατυπωμένες. Κάποιες συνεπαγωγές που εμφανίζονται στις ερωτήσεις του πρώτου κλάδου, όπως η 12 και η 2 αναφέρονται σε τρίγωνα, αλλά η 15 που ανήκει στον ίδιο κλάδο σε παραλληλόγραμμα.

Η ασυνέπεια αυτή στις απαντήσεις θα πρέπει να μας προβληματίσει είτε ως προς τη διαβάθμιση του test, είτε ως προς την κατάκτηση ενός επιπέδου για τη μετάβαση στο επόμενο από τους φοιτητές. Η δεύτερη άποψη ενισχύεται και από το υψηλό ποσοστό των φοιτητών (21%) που δεν κατατάχτηκε σε κανένα επίπεδο. Ο περιορισμένος αριθμός συνεπαγωγών που προέκυψαν αποτελεί ένδειξη ότι ο βαθμός στον οποίο οι ερωτώμενοι έχουν κατακτήσει κάποιο επίπεδο και έχουν μεταβεί σε επόμενο είναι ασθενής.



Διάγραμμα 28. Συνεπαγωγικό δέντρο (Implicative tree)

ΜΕΡΟΣ Γ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
Συμπεράσματα, συζήτηση, μελλοντικές κατευθύνσεις

5.1 Συμπεράσματα

Στην ερευνά χρησιμοποιήθηκε το τεστ van Hiele, Usiskin (1982) για να ερευνηθεί η κατάταξη των φοιτητών/τριων σε ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Η έρευνα έλαβε χώρα από τις 25 Νοεμβρίου έως και τις 5 Δεκεμβρίου του 2018. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 147 φοιτητές που φοιτούσαν στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.. Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα, εξετάστηκαν σε ένα τεστ van Hiele σχεδιασμένο για να προσδιορίσει το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης van Hiele κάθε φοιτητή. Ένας φοιτητής θεωρήθηκε ότι βρίσκεται σε ένα van Hiele επίπεδο n αν ο φοιτητής είχε απαντήσει σωστά σε ένα σταθερό ποσοστό ερωτήσεων στο επίπεδο n και σε όλα τα κατώτερα επίπεδα.

Ένα <u>πρώτο συμπέρασμα</u> της έρευνας είναι ότι:

- **το 78,9% των φοιτητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το ελαστικό κριτήριο.**
- **το 87,8 % των φοιτητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το αυστηρότερο κριτήριο.**

Περισσότερο από τα δύο τρίτα των φοιτητών απάντησαν στις ερωτήσεις του τεστ με τρόπους που καθιστούν εύκολη την αντιστοίχιση κάποιου επιπέδου van Hiele σ΄ αυτούς.

Ο Τζίφας (2006) στην έρευνα που πραγματοποίησε το 2005 σε δείγμα 1838 μαθητών στις τάξεις Γ Γυμνασίου, Α και Β Λυκείου, βρήκε αντίστοιχα ότι:

- το **84,3%** των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το ελαστικό κριτήριο.
- το **88,2%** των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το αυστηρότερο κριτήριο.

Ο Τζίφας (2006) αναφέρει ότι "Ο Usiskin (1982) ύστερα από έρευνα του σε σχολεία της Αμερικής ισχυρίζεται ότι:
"Παρά το γεγονός ότι το τεστ van Hiele είναι μάλλον "χονδροειδές" μέσο για την ταξινόμηση των μαθητών,

- το **85%** των μαθητών μπόρεσαν να ταξινομηθούν σε κάποιο επίπεδο με το ελαστικό κριτήριο και
- το **92 %** με το αυστηρότερο κριτήριο.

Δηλαδή πάνω από τα δύο τρίτα των μαθητών μπόρεσαν να καταταχθούν σε κάποιο επιπέδου van Hiele".
Συνεπώς υπάρχει επιβεβαίωση του αντιστοίχου συμπεράσματος της έρευνας του Usiskin (1982) και στην Ελλάδα.

Τα παραπάνω ποσοστά θα μπορούσαν να ήταν μεγαλύτερα, δηλαδή να είχαμε μεγαλύτερο αριθμό μαθητών ταξινομημένων σε κάποιο επίπεδο van Hiele, αν το ερωτηματολόγιο του Usiskin μπορούσε να βελτιωθεί περαιτέρω. Μια τέτοια προσπάθεια έχει καταβληθεί το τελευταίο καιρό από τους Fuys, Geddes, Tischler (2005) οι οποίοι σε άρθρο τους κάνουν συγκεκριμένες προτάσεις σχετικά. Επίσης, προτάσεις έχει κάνει για το σκοπό αυτό και ο Mark Wilson (2000) -ένας εκ των επικριτών του- σε θέματα διαδοχής των ερωτήσεων στο τεστ. Η δική μας πρόταση είναι ότι μια έρευνα με συνεντεύξεις με την χρησιμοποίηση του τεστ του Usiskin(1982) θα μπορούσε να έχει καλύτερα αποτελέσματα, δηλαδή να κατατάξει περισσότερους μαθητές και χωρίς λάθη σε κάποιο επίπεδο van Hiele.”

Τα ποσοστά της παρούσας έρευνας, αν και το δείγμα της είναι πολύ μικρότερο, είναι συγκρίσιμα των ερευνών που αναφέρθηκαν. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται στο ελαστικό κριτήριο είναι στα πλαίσια του 6%, δηλαδή εντός των ορίων που αποδέχεται το ελαστικό κριτήριο εξαιτίας της τυχαιότητα στις απαντήσεις του τεστ.

Ένα <u>δεύτερο συμπέρασμα</u> της έρευνας είναι ότι:
Η επιλογή του κριτηρίου επηρεάζει σημαντικά το επίπεδο van Hiele που αντιστοιχεί σε ένα φοιτητή. Αυτό φαίνεται από τα διαφορετικά ποσοστά στην κατάταξη των φοιτητών με το ελαστικό και το αυστηρό κριτήριο. Από τους 147 φοιτητές στους οποίους αντιστοιχίζονται τροποποιημένα επίπεδα van Hiele και με τα δύο κριτήρια, μόνο 51 **(34,69%) έχουν το ίδιο επίπεδο σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια**. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι το επίπεδο van Hiele δεν είναι κάτι τόσο σταθερό όσο υποδηλώνεται από τη θεωρία. Η σταθερότητά του εξαρτάται από το πλήθος των σωστών απαντήσεων και ίσως από τη μορφή των ερωτήσεων.
Ο Τζίφας (2006) στην έρευνα που πραγματοποίησε το 2005 βρήκε ότι από τους 1838 μαθητές στους οποίους αντιστοιχίζονται τροποποιημένα επίπεδα van Hiele και με τα δύο κριτήρια, μόνο 838 μαθητές δηλαδή **το 45,6%, έχουν το ίδιο επίπεδο σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια.** Ο Usiskin (1982) στην έρευνά του ισχυρίζεται ότι: **Το 52% των μαθητών αντιστοιχίζεται στο ίδιο τροποποιημένο επίπεδο van Hiele σύμφωνα και με τα δύο κριτήρια.** Συνεπώς το επίπεδο van Hiele δεν είναι τόσο σταθερό , όσο υποδηλώνεται στη θεωρία. Η ευκολία κατάταξης του εξεταζόμενου σε κάποιο επίπεδο είναι ένα θετικό στοιχείο για τη θεωρία van Hiele. Το γεγονός ότι ο μαθητής μπορεί να έχει διαφορετικά επίπεδα που εξαρτώνται από την επιλογή του κριτηρίου που πρέπει να ικανοποιείται, είναι αρνητικό διότι υποδηλώνει ότι τα επίπεδα είναι απλώς στάνταρ δεξιότητας που χαρακτηρίζονται από αυξανόμενη δυσκολία. Αν υποθέσουμε ότι ένας εξεταζόμενος θα πρέπει να βρίσκεται σε ένα και μόνο επίπεδο, χρειάζεται προσπάθεια και έρευνα για την εύρεση κάποιων πιθανών τρόπων ώστε να ικανοποιείται. Για παράδειγμα, οι εξεταζόμενοι που το επίπεδό τους δεν ταυτίζεται και με τα δύο κριτήρια θα μπορούσαν να εξετάζονται και με προφορική συνέντευξη έτσι ώστε να καταταχθούν σε κάποιο επίπεδο με περισσότερη ακρίβεια. Μία άλλη πρόταση θα ήταν η αύξηση του πλήθους των ερωτήσεων σε κάθε επίπεδο. Αυτό θα μείωνε την πιθανότητα της τυχαίας απάντησης και της κατάταξης σε λάθος επίπεδο.

Ένα <u>τρίτο συμπέρασμα</u> της έρευνας είναι ότι:
Οι περισσότεροι φοιτητές βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 της θεωρίας Van Hiele.
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας:

- το 53,75% των φοιτητών, δηλαδή 79 από τους 147 φοιτητές, βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με το αυστηρό κριτήριο και
- το 48,30% των φοιτητών, δηλαδή 71 από τους 147 φοιτητές βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με το ελαστικό κριτήριο.

Ο Τζίφας (2006) στην έρευνα που πραγματοποίησε το 2005 σε δείγμα 1838 μαθητών βρήκε ότι:

- το 60,6% των φοιτητών, δηλαδή 1114 από τους 1838 μαθητές, βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με το αυστηρό κριτήριο και
- το 48,6% των φοιτητών, δηλαδή 893 από τους 1838 μαθητές βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 με το ελαστικό κριτήριο.

Οι Usiskin (1982), Wirszup (1976) και Hoffer (1986) από τις έρευνες που έκαναν στις Ηνωμένες πολιτείες της Αμερικής, είχαν ισχυριστεί ότι "Η πλειονότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο van Hiele". Usiskin(1982).

Σύμφωνα με την θεωρία των van Hieles, αυτό ερμηνεύει τα προβλήματα που συναντώνται σήμερα στην διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα. Για να γίνει κατανοητή η Ευκλείδεια Γεωμετρία που διδάσκεται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου, οι φοιτητές έπρεπε να κατέχουν το 4^{ο} το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης της θεωρίας των van Hieles. Μία πιθανή ερμηνεία αυτού του φαινομένου ίσως είναι ότι πολλοί μαθητές δε μαθαίνουν ούτε τις απλούστερες γεωμετρικές έννοιες στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουν τις έννοιες αυτές όταν αποφοιτούν από το Γυμνάσιο.

Όσον αφορά την κατάταξη των φοιτητών που έλαβαν μέρος στο τεστ για τα επίπεδα van Hiele:

- **Στα επίπεδα 3 και 4, τα ποσοστά των φοιτητών που κατατάσσονται με βάση το αυστηρό κριτήριο** είναι μικρά. Πιο αναλυτικά, το 5,44% των φοιτητών κατατάσσεται στο επίπεδο 3 και μόλις το 1,36% στο επίπεδο 4.
- **Οι φοιτητές που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το ελαστικό κριτήριο** λαμβάνουν ποσοστό 17,69% και είναι τριπλάσιοι από εκείνους που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο 3^{ο} επίπεδο με βάση το αυστηρό κριτήριο και λαμβάνουν ποσοστό 5,44%.
- **Οι φοιτητές που μπορούν να ταξινομηθούν και βρίσκονται στο επίπεδο 4 στο ελαστικό κριτήριο** είναι επταπλάσιοι (10,2%) από εκείνους στο αυστηρό κριτήριο (1,36%).

Όσον αφορά τις ερωτήσεις του τεστ για τα επίπεδα van Hiele:

• Υπάρχει ένα ποσοστό των φοιτητών (**17%**) που θεωρεί, ότι **ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο.** Στην έρευνα του Usiskin (1982) το ποσοστό αυτό των μαθητών, δηλαδή αυτών που θεωρούν ότι ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο είναι **10%** (Usiskin (1982). Στην έρευνα του Τζίφα (2005) το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών είναι (**11,6%**)

• Το **33%** των φοιτητών **δεν γνωρίζει ότι τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες**. Ο Usiskin (1982) και Τζίφας (2006) στην έρευνά τους ισχυρίζονται το ίδιο.

• Στις ερωτήσεις που αφορούν συλλογισμούς που οδηγούν σε κάποιο συμπέρασμα (λογικής) το ποσοστό των φοιτητών που δεν απάντησε σωστά είναι πάνω από **50%**, δηλαδή περισσότεροι από τους μισούς. Ο Usiskin (1982) και ο Τζίφας (2006) αναφέρουν και αυτοί ότι στην έρευνά τους περισσότεροι από τους μισούς μαθητές δεν απάντησαν σωστά σε αυτές τις ερωτήσεις (λογικής).

• Ένα μεγάλο ποσοστό των φοιτητών (**18%**) θεωρεί ότι **ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ισοσκελές.** Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης. Στην έρευνά του ο Τζίφας (2006) αναφέρει ανάλογο ποσοστό (**21,2%**).

5.2 Συζήτηση - Προτάσεις

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, το 51% των φοιτητών κατά το ελαστικό κριτήριο ή το 81% κατά το αυστηρό κριτήριο των φοιτητών -μελλοντικών δασκάλων- βρίσκονται στο πρώτο ή το δεύτερο επίπεδο Γεωμετρικής Σκέψης των van Hieles. Παρόμοια αποτελέσματα έχουν βρεθεί σε άλλες έρευνες που έχουν γίνει τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το γεγονός ότι η παρούσα έρευνα αναφέρεται σε φοιτητές μου δημιουργεί τον προβληματισμό για την επαρκή εκπαίδευση και ικανότητα των φοιτητών στα μελλοντικά τους καθήκοντα, όπως είναι η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό. Με δεδομένο ότι στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση έχει γίνει φιλτράρισμα των μαθητών που έχουν πρόσβαση σε αυτή, θα περίμενα να έχουν μεγαλύτερα ποσοστά κατάταξης των φοιτητών σε ανώτερα επίπεδα Γεωμετρική Σκέψης και όχι συγκρίσιμα με αυτά των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Εντύπωση μου προκαλεί το γεγονός ότι, σύμφωνα με το αυστηρό κριτήριο, το 27% των φοιτητών βρίσκεται στο επίπεδο 0 και το 39% στο επίπεδο 1.

Η εκμάθηση Λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας και η χρήση του από φοιτητές ίσως να αποτελεί μία πρόταση βελτίωσης του επιπέδου της Γεωμετρικής Σκέψης τους. Λογισμικά όπως το Geometer's Sketchpad, Geogebra κ.α. παρέχουν ένα ισχυρό εργαλείο για πολλά παραδείγματα και εφαρμογές στη Γεωμετρία. Αυτού του είδους τα λογισμικά δύνανται να παρέχουν στους φοιτητές τα επαγωγικά εργαλεία που χρειάζονται για να ανεβάσουν το επίπεδο της Γεωμετρικής τους Σκέψης μέχρι και το τρίτο επίπεδο της θεωρίας των van Hieles. Οι φοιτητές, όπως και οι μαθητές αντιμετωπίζουν τους υπολογιστές και τη χρήση των Τ.Π.Ε. με πολύ θετικό τρόπο. Τα λογισμικά αυτά είναι πολύ πιο ευχάριστα, εύχρηστα και θελκτικά από τη χρήση κανόνα και διαβήτη. Ο πειραματισμός με αυτά τα λογισμικά, καθοδηγούμενος ή μη, πιθανόν να βοηθούσε σε σχετικά γρήγορη μετάβασή τους σε ανώτερα επίπεδα. Ίσως θα ήταν χρήσιμη μια νέα έρευνα που να περιλαμβάνει τη δημιουργία μιας σειράς μαθημάτων Γεωμετρίας σύμφωνα με τη θεωρία των van Hieles με τη χρήση λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας και η εφαρμογή της σε φοιτητές - μελλοντικούς δασκάλους – ώστε να αποκτήσουμε γνώση για την επίδραση των νέων τεχνολογιών ως καταλύτη τόσο στην πρόοδο της Γεωμετρικής Σκέψης των φοιτητών όσο και στην πιθανή αλλαγή των στάσεων και απόψεών τους για την Γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

6.1 ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

Αυγερινός, Ε., Μαλκότσης, Α., Ρεμούνδου, Δ. (2018). Η αντίληψη του κύβου σε σχέση με της έννοιες των μαθηματικών από μελλοντικούς δασκάλους. *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνέδριου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και της Φυσικές Επιστήμες: «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»*, 377-388, Ρόδος, 9-11 Νοεμβρίου 2018.

Γαγάτσης, Α., Καρύδας, Χ., Δημητριάδης, Κ., Συρίμη-Σκίτσα, Χ., Τιμοθέου, Σ. (2004). Μερικά στοιχεία γεωμετρίας στην Ελλάδα και την Κύπρο του 19ου αιώνα. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, (21), 622-636.

Δημάκος, Γ., Νικολουδάκης, Εμμ. (2008). Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Θεωρίας των Επίπεδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele και τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. στα πλαίσια της Συνεργατικής Μάθησης. *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών* τομ. Ι, 179-194, επιμέλεια έκδοσης Μ., Κούρκουλος, Κ., Τζανάκης, Ρέθυμνο.

Ζάχος, Ι. Β. (2000). Αξιολόγηση του Επιπέδου Γεωμετρικής Σκέψης van Hiele των Μαθητών της Β΄ Τάξης του Λυκείου. Στο *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV. Αξιολόγηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 161-179. Αθήνα: Gutenberg.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. Ένα πλαίσιο προβληματισμού [1ο Μέρος]. *Σύγχρονη Εκπαίδευση* 130, 78-92.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. (2003). Οι αναμορφώσεις της ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα. Ένα πλαίσιο προβληματισμού [2ο Μέρος]. *Σύγχρονη Εκπαίδευση* 131, 127-136.

Καλαβάσης, Φ. (1997). *Η Επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος της Στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών – ΙΙΙ.* Επιμέλεια Καλαβάσης Φ. – Μεϊμάρης Μ., 21-38. Αθήνα: Gutenberg.

Καστάνης, Ν., (1986). *«Να φύγει ο Ευκλείδης», «Δεν θα γίνουμε εθνικοί Μειοδότες» Μια ιστορικο-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία.* Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 31, 3 -8.

Κολέζα, Ε. (2000) : *«Γνωσιολογική και διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών».* Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2009). *ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.* Αθήνα: Εκδόσεις ΤΟΠΟΣ.

Ντζιαχρήστος, Β., Ζαράνης, Ν. (2001) : *«Η αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με την βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού»*, Μαθηματική Επιθεώρηση, τεύχος 56(2001), σελ.55.

Πούλος, Α., Θωμαΐδης, Γ. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδιας Γεωμετρίας.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Πρίντεζης, Ι. Ι. (2006). *Η κατηγορική άποψη των επιπέδων van Hiele και της οικουμενικές μέθοδοι προσέγγισης των μαθηματικών.* Αθήνα: Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών.

Τζίφας, Ν. Β (2006) : «*Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού*», διπλωματική εργασία στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών.

ΤΟΥΜΑΣΗΣ, Χ. (1990). *ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β/ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΗ ΝΕΩΤΕΡΗ ΕΛΛΑΔΑ, ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΑΛΛΑΓΕΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ.* (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Πατρών. Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Τουμάσης, Μ. (2000). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

HIELE, P. (1986). *Δομή και Διορατικότητα: Μια Θεωρία για τη Μαθηματική Εκπαίδευση.* Αθήνα: Εκδόσεις Liberal Books, 2011.

6.2 ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

Bransford, J. D., Brown, A. L., Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Brown S.J., Collins, A., Duguid, P. (1989). *Situated cognition and the culture of learning.* Educational Researcher, 18, 1, 32-42.

Burger, W. F., Shaughnessy, J. M. (1986). *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*. Journal for research in mathematics education, 31-48.

Clements, D. H. (1998). *Geometric and Spatial Thinking in Young Children*.

Choi-Koh, S. S. (1999). *A student's learning of geometry using the computer*. The Journal of Educational Research, *92*(5), 301-311.

Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning.* Handbook of research on mathematics teaching and learning, 420-464.

Clements, D., Battista, M. (1990). *The effects of logo on children's conceptualizations of angle and polygons.* Journal for Research in Mathematics Education, 21(5), 356-371.

Collins, A., (1991). *Cognitive apprenticeship and instructional technology*. In Jones, B., Idol, L. (Eds) Educational values and cognitive instruction: implications for reform. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 121-138.

Collins, A., Brown, J. S., Holum, A. (1991). *Cognitive apprenticeship: Making thinking visible.* American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers, 15(3), 6-11, 38-46.

Collins, A., Brown, J. S., Newman, S.E. (1989). *Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics.* In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, Learning and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser, 453-494, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Crowley, M. L. (1987). *The van Hiele model of the development of geometric thought*. Learning and teaching geometry, *K-12*, 1-16.

Csikszentmihalyi, M., Sawyer, K. (1995). *In the Nature of Insight.* Sternberg, RJ, Davidson, JE, eds.

De Bruijn, H. F. M. (1993). *Situated cognition in a computerized learning environment for adult basic education students*. Doctoral Dissertation: University of Twente, Nederlands.

De Corte, E. (1990). *Learning with new information technologies in schools: perspectives from the psychology of learning and instruction.* Journal of Computer Assisted Learning, 6, 2, 69-87.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with Sketchpad.* Key Curriculum Press. Retrieved, 2, 13.

Dixon, J. K. (1997). *Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts.* School Science and Mathematics, 97(7), 352-358.

Dorfler, W. (1993). *Computer use and views of the mind*. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), Learning from computers: Mathematics Education and Technology, 159-186, Berlin: Springer - Verlag.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holland, Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (2005). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.*

Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Journal for Research in Mathematics Education, Monograph, *3*, i-196.

Hillel, J. (1993). Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies*: Implication for the Practice of Mathematics Education.* In C. Keitel and K. Ruthven (Eds), Learning from computers: Mathematics Education and Technology, 18-47. Berlin: Springer-Verlag.

Hoffer, A. (1986). *Geometry and visual thinking.* In T. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods, 233-261. Newton, MA: Allyn and Bacon.

Hoffer, A. (1983). *Van Hiele based research*. In R. Lesh & M. Laudan “Acquisition of mathematics concepts and processes”, 205-227. New York: Academic Press.

Hoffer, A. (1979). *Geometry, a model of the universe.* Menlo Park: Adisson-Wesley.

Howson, G., Wilson, B. (1986). *School Mathematics in the 1990s.* Kuwait: Cambridge University Press (ICMI Study Series).

Laborde, C. (1993). *The computer as part of the learning environment: the case of geometry*. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), Learning from computers: Mathematics Education and Technology, 48-67. Berlin: Springer – Verlag.

Lester, M. (1996). *The effects of the Geometer's Sketchpad software on achievement of geometric knowledge of high school geometry students*, (online). Abstract from: UMI Pro Quest File: Dissertation Abstracts Item: 9633545.

Mariotti, M. A. (2003). *Geometry: dynamic intuition and theory*.
http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf

Mason, M. (2009). *The van Hiele levels of geometric understanding*. Colección Digital Eudoxus, 1(2).

Metazarek, R. (1996). *The effects of problem-solving activities using geometry computer software on readiness for self-directed learning*, (on-line). Abstract from: UMI ProQuest FHe: Dissertation Abstracts Item: 9800159

Nicaise, M., Barnes, 0. (1996). *The union of technology, constructivism, and teacher education*. Journal of Teacher Education, 47(3), 205 - 212.

Noss, R., Hoyles, C. (1992). *Looking Back and Looking Forward*. In C. Hoyles and R. Noss (eds), Learning Mathematics and Logo, 431-470. Cambridge, Ma: MIT Press.

Teppo, A. (1991). *Van Hiele levels of geometric thought revisited*. The Mathematics Teacher, 84(3), 210-221.

Pyshkalo, A. M. (1968). *Geometry in grades 1-4 (problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades).*

Senk, S. L. (1989). *Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs.* Journal for research in mathematics education, 309-321.

Schilpp, P. A. (1949). *Albert Einstein: Philosopher-Scientist.* Library of Living Philosophers. Evanston, Illinois.

Van Hiele, P. (1986*). Structure and insight: A theory of mathematics education.* New York: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1959). English summary by Pierre Marie Van Hiele of “*The problem of insight in connection with school children’s insight into the subject matter of geometry*.”. English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele, 237-242.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. CDASSG Project.

Wertheimer, R. (1990*). The geometry proof tutors an intelligent computer-based tutor in the classroom*. Mathematics Teacher, vol. April, 308-317.

Wilson, B., Cole P. (1991). *A review of cognitive teaching models*. Educational Technology Research and Development, 39, 4, 47-64.

Wirszup, I. (1976). *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry*. In J.L. Martin "Space and Geometry: Papers from a research workshop". Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Yousef, A. (1997). *The effect of the Geometer's Sketchpad on the attitude toward geometry of high school students*, (on-line). Abstract from: UMI ProQuest File: Dissertation Abstracts Item: 9732652.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Πίνακες δεδομένων και επεξεργασίας

A/A	GENDER	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
1	F	B	D	C	A	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	D	D	D
2	F	B	D	C	B	E	C	D	D	D	NO	A	A	A	E	E	B	E	A	A	D
3	F	B	D	C	B	B	D	D	A	C	NO	E	NO	A	C	B	C	B	A	D	D
4	F	D	D	C	E	E	C	E	A	NO	NO	E	B	A	B	E	C	B	E	E	D
5	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	C	D	B	A	D
6	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	C	D	B	A	D
7	F	B	D	C	B	E	D	E	B	C	D	E	A	C	E	A	A	D	B	A	D
8	F	B	D	C	B	E	C	E	NO	NO	D	C	E	A	C	A	E	C	A	A	D
9	F	B	D	C	B	D	C	E	C	C	D	C	A	A	C	C	A	E	C	C	C
10	F	B	C	C	B	B	C	A	C	B	B	C	A	A	E	C	A	D	C	B	B
11	F	B	D	C	B	B	C	E	C	C	C	C	A	A	E	C	A	C	C	C	A
12	F	B	D	C	B	C	A	E	A	C	D	NO	B	NO	B	B	A	D	A	B	B
13	F	B	D	C	B	E	B	E	B	A	E	C	C	B	A	D	B	C	E	C	A
14	B	D	C	B	E	A	E	A	NO	D	D	C	C	A	E	B	C	B	C	B	A
15	F	D	D	C	B	D	C	E	A	E	NO	B	B	NO	E	D	A	D	B	C	E
16	F	B	D	D	B	E	C	B	NO	C	A	C	E	A	C	E	A	E	C	D	B
17	F	B	D	D	B	E	C	E	B	A	A	C	E	A	C	E	A	A	C	C	C
18	F	E	D	D	E	E	D	D	C	C	E	NO	B	A	B	B	E	E	B	A	B
19	F	E	D	C	E	E	D	D	C	C	E	NO	B	A	B	B	E	E	B	A	D
20	F	B	D	E	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	A	D	E	C	C	A	D
21	F	B	D	E	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	A	D	E	C	B	B	D
22	F	B	D	C	A	B	D	E	A	E	E	C	E	D	E	E	B	A	D	E	E
23	M	B	C	A	A	B	C	NO	NO	NO	D	B	NO	C	D	D	C	C	D	A	D
24	F	B	D	C	B	E	B	NO	D	NO	NO	C	NO	E	NO	B	E	B	D	C	A
25	F	B	D	C	B	E	A	E	A	C	C	C	C	A	A	E	C	C	D	B	D
26	F	C	D	E	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	A	B	C	A	D	A	A
27	F	B	D	C	B	E	B	E	A	E	B	C	B	A	A	E	C	B	D	D	D
28	F	B	D	C	B	C	B	E	A	E	B	E	E	D	E	E	A	A	E	A	C
29	M	D	E	C	D	D	C	E	A	C	E	C	E	A	A	A	C	E	D	A	D
30	F	B	D	C	B	E	B	E	A	E	C	E	E	A	A	B	C	C	D	A	A
31	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	E	C	B	A	A	B	E	C	D	A	D
32	F	D	D	C	E	E	B	E	NO	C	NO	E	B	A	D	B	D	B	D	D	A
33	F	B	D	C	B	E	B	D	A	E	D	E	B	A	NO	E	C	A	D	E	D
34	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	E	E	B	A	A	E	D	E	E	C	D
35	M	B	D	E	A	E	C	E	E	E	NO	E	E	A	D	E	E	C	D	E	A
36	F	B	D	C	B	E	B	E	NO	C	D	E	B	A	E	D	C	NO	D	NO	D
37	F	B	D	C	B	E	C	E	C	C	E	C	B	A	B	E	C	C	D	A	A
38	F	D	D	C	E	E	NO	E	A	C	NO	NO	NO	A	B	B	C	NO	E	NO	D
39	F	B	D	C	B	D	B	E	E	C	A	D	E	A	E	B	E	C	D	A	D
40	F	D	D	C	E	E	C	A	A	C	D	E	B	A	C	E	A	D	D	C	D
41	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	C	E	B	A	E	B	B	C	A	A	D
42	F	B	D	A	E	E	B	E	E	C	NO	D	B	A	A	D	C	D	C	A	E
43	F	B	C	A	B	C	B	E	A	C	E	C	B	A	B	E	C	C	A	D	A
44	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	A	A	D	E	C	C	D	C	D
45	M	B	D	C	B	E	C	E	NO	C	NO	C	NO	A	C	D	C	E	A	A	D
46	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	C	NO	C	NO	A	E	B	C	C	D	B	B
47	M	D	D	C	E	E	B	E	A	C	NO	E	B	A	E	B	A	D	D	A	D
48	F	B	D	C	B	E	E	B	NO	C	NO	NO	NO	A	E	E	E	NO	NO	A	D
49	F	B	D	C	B	E	D	E	NO	D	A	D	A	A	E	D	C	E	A	A	C
50	M	B	D	C	B	E	B	E	E	C	NO	C	B	A	B	B	C	C	D	A	A
51	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	B	C	B	A	A	E	C	C	E	A	D
52	F	B	D	A	B	E	B	E	A	C	E	E	A	A	B	E	C	C	D	A	D
53	F	B	C	C	B	E	C	B	E	C	B	E	C	A	E	D	E	B	E	B	A
54	F	B	E	C	B	B	C	NO	NO	C	A	A	A	C	C	C	E	D	B	B	E
55	F	B	D	C	B	E	NO	E	NO	C	C	NO	A	C	C	A	C	D	B	A	D
56	F	B	D	C	E	E	B	E	A	C	E	E	E	A	E	D	D	D	D	A	D
57	F	B	D	C	B	E	B	E	NO	C	NO	C	B	A	A	D	C	C	C	B	D
58	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
59	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	A	A	A	B	C	A	D	B	A
60	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	NO	B	A	A	B	C	B	D	D	D
61	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	B	B	A	E	E	C	E	D	D	A
62	F	B	A	A	A	E	B	E	A	E	A	A	A	C	A	E	C	E	A	A	D
63	F	B	C	C	B	E	B	E	A	C	E	E	A	A	B	D	C	C	A	A	E
64	F	B	D	A	B	E	C	E	NO	C	NO	NO	A	A	NO	NO	C	NO	NO	A	D
65	F	B	D	C	B	E	D	C	A	C	NO	C	B	C	C	B	E	C	D	A	E
66	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
67	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	NO	NO	NO	A	C	E	C	A	D	E	B	D
68	F	B	D	D	E	E	A	E	A	NO	B	A	B	A	E	B	D	E	C	E	D
69	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	A	E	A	A	E	E	C	C	D	B	A
70	F	B	D	C	B	E	NO	E	NO	C	C	NO	NO	C	C	E	A	NO	E	A	E
71	F	B	D	C	B	E	NO	E	A	C	E	E	C	A	E	NO	A	D	NO	A	C
72	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
73	M	B	D	E	B	E	C	E	E	C	C	E	B	A	A	E	C	C	D	A	D
74	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	D	A	A	E	E	B	B	A	D
75	F	B	D	A	B	E	B	E	A	C	D	D	B	A	B	D	D	B	B	E	D
76	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	B	E	E	C	A	E	C	C	C	A	A
77	F	B	D	C	B	E	D	E	NO	C	C	D	NO	A	E	NO	NO	C	B	A	D
78	F	D	D	C	D	E	A	E	D	E	C	C	A	C	B	A	C	B	C	B	D
79	F	E	E	E	D	D	C	D	C	B	D	D	C	D	D	E	D	D	A	E	C
80	F	B	D	C	B	C	D	E	E	E	E	E	B	A	E	E	C	D	D	D	C
81	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	B	B	D	C	D	A	D
82	F	B	D	E	B	C	C	E	A	C	D	B	B	A	C	E	D	E	D	B	A
83	F	B	D	E	B	E	C	E	A	C	NO	E	B	A	C	E	D	C	D	A	E
84	F	B	D	C	B	E	C	E	B	C	D	C	B	A	NO	E	C	C	B	A	D
85	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	E	C	B	A	A	D	E	E	D	C	A
86	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	NO	NO	NO	A	A	B	C	D	NO	D	A
87	F	B	D	C	B	E	B	E	C	C	C	B	E	A	A	B	NO	D	D	B	E
88	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	B	B	D	C	D	A	D
89	F	D	C	C	D	B	B	D	E	NO	NO	C	NO	A	E	D	C	D	C	B	A
90	F	B	D	C	B	D	C	E	E	E	C	NO	B	A	A	E	NO	C	D	A	B
91	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	A	E	B	A	B	B	D	B	D	D	E
92	F	B	D	C	B	E	A	E	E	C	E	C	A	A	C	E	E	E	A	C	D
93	F	B	D	C	B	E	D	A	E	D	D	E	B	A	E	B	A	A	D	D	A
94	F	B	D	C	B	E	A	A	E	C	A	E	C	A	A	B	D	E	D	B	A
95	F	B	D	E	B	E	D	E	NO	E	NO	E	A	A	B	E	D	E	B	A	B
96	F	B	D	C	B	E	D	E	A	E	NO	C	E	A	E	E	B	D	D	C	D
97	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	C	E	D	C	D	A	A
98	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	E	A	A	D	A	A
99	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	D	E	B	A	A	B	D	C	A	A	A
100	F	B	D	C	B	E	B	B	A	C	D	E	D	A	C	D	C	C	D	A	D
101	F	B	C	C	B	D	NO	E	B	C	B	C	C	D	D	E	E	C	C	A	A
102	F	D	D	C	E	E	A	E	E	C	E	E	B	A	E	E	D	A	A	D	D
103	F	D	D	C	E	E	C	E	A	E	B	E	C	A	A	E	C	E	C	A	D
104	F	D	D	C	E	E	B	A	A	C	D	E	C	A	A	A	C	D	D	A	B
105	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	E	B	A	A	NO	A	C	C	A	A	D
106	M	B	D	C	A	E	NO	E	A	C	NO	C	NO	A	A	D	C	C	D	A	D
107	F	B	D	C	B	E	B	C	A	C	E	NO	NO	A	C	E	A	B	A	A	NO
108	F	B	D	E	D	A	A	E	C	D	A	C	B	D	B	B	A	B	A	C	E
109	F	B	D	NO	B	E	C	NO	A	C	D	NO	NO	A	E	D	B	A	D	E	E
110	F	B	D	C	B	E	C	E	E	C	D	E	E	A	C	E	D	A	E	B	D
111	F	D	D	C	D	C	D	A	C	D	C	A	B	D	B	D	E	C	B	A	D
112	F	B	C	A	A	C	NO	E	C	NO	E	B	E	A	D	C	E	E	E	C	D
113	F	D	C	C	B	E	C	E	A	E	NO	D	D	A	C	B	C	E	E	A	A
114	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	B	A	E	E	D	C	D	A	D
115	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	E	C	A	B	B	C	B	A	B	D
116	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	E	NO	B	A	NO	B	NO	NO	NO	B	B
117	M	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	B	D	A	A
118	F	B	D	C	B	B	B	E	D	B	A	E	A	A	E	B	D	NO	C	A	B
119	F	B	C	C	B	E	C	E	D	C	C	B	B	A	E	E	C	D	B	A	D
120	F	D	D	C	E	E	C	E	E	E	NO	A	NO	A	NO	E	C	B	C	E	A
121	F	D	D	C	E	E	B	E	A	C	D	C	B	A	C	D	C	B	D	B	E
122	F	B	D	E	B	E	D	E	A	C	NO	C	B	A	A	B	C	C	C	E	D
123	F	D	D	E	E	E	C	D	D	A	C	B	B	A	A	C	D	E	D	A	D
124	F	B	D	C	A	B	C	B	D	C	D	NO	B	C	E	B	A	A	A	A	D
125	F	B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	D	A	A
126	M	B	D	A	A	E	C	E	A	E	E	E	D	A	C	A	C	C	C	E	D
127	F	B	D	C	B	E	D	E	A	B	A	C	B	A	A	B	A	C	B	A	E
128	F	B	D	C	B	E	C	E	A	C	D	E	D	A	C	C	D	B	C	E	D
129	F	C	D	C	B	E	D	E	A	C	C	E	B	A	E	B	C	E	B	A	C
130	F	D	C	C	B	E	C	E	A	E	A	C	E	C	E	NO	A	E	D	E	E
131	F	D	D	C	E	E	C	E	A	NO	D	D	B	A	D	D	C	E	B	A	D
132	F	D	D	C	E	E	C	E	A	B	NO	NO	NO	A	NO	D	NO	A	D	NO	NO
133	F	B	D	C	B	E	A	E	E	C	C	B	B	A	B	B	E	C	A	A	D
134	M	B	D	C	B	E	C	E	A	E	D	B	B	A	E	D	C	C	C	B	A
135	M	B	D	E	B	E	C	E	E	E	E	E	E	A	C	E	C	C	C	B	D
136	F	B	D	C	B	E	D	E	E	C	A	E	A	A	A	E	E	E	D	B	D
137	F	B	D	C	B	E	B	E	E	C	NO	NO	B	A	E	E	D	B	A	B	B
138	F	D	D	C	E	D	B	E	A	E	C	A	A	A	B	C	C	A	D	E	D
139	F	B	D	E	A	E	C	E	A	C	B	C	B	A	B	D	E	B	D	D	C
140	F	B	D	C	B	E	C	E	D	A	C	A	B	A	A	B	C	D	E	B	A
141	F	D	D	C	E	E	C	E	D	A	E	B	A	A	C	B	C	E	B	B	D
142	F	B	E	C	D	E	C	E	E	C	E	C	C	E	A	D	A	E	C	A	E
143	F	D	D	C	B	D	C	E	A	E	B	A	B	A	C	B	B	E	E	E	D
144	M	B	C	C	B	A	C	E	C	C	B	C	A	A	C	A	C	B	D	D	E
145	M	D	D	C	E	E	B	E	C	C	D	A	B	A	E	B	C	C	D	A	D
146	F	B	D	C	B	C	C	E	A	C	B	E	E	B	E	B	NO	NO	NO	NO	NO
147	F	B	D	C	B	E	C	E	NO	E	E	E	E	A	E	E	C	D	E	A	A

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (3 ΑΠΟ ΤΑ 5)

ΕΠΙΠΕΔΟ	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**	**ΠΟΣΟΣΤΟ %**	**Σχ. Αθρ. Συχν.%**
ΕΠΙΠΕΔΟ 0	4	2.72	2.72
ΕΠΙΠΕΔΟ 1	42	28.57	31.29
ΕΠΙΠΕΔΟ 2	29	19.73	51.02
ΕΠΙΠΕΔΟ 3	26	17.69	68.71
ΕΠΙΠΕΔΟ 4	15	10.20	78.91
ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	31	21.09	100.00
ΣΥΝΟΛΟ	147	100	

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
ΑΥΣΤΗΡΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ (4 ΑΠΟ ΤΑ 5)

ΕΠΙΠΕΔΟ	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**	**ΠΟΣΟΣΤΟ %**	**Σχ. Αθρ. Συχν.%**
ΕΠΙΠΕΔΟ 0	40	27.21	27.21
ΕΠΙΠΕΔΟ 1	57	38.78	65.99
ΕΠΙΠΕΔΟ 2	22	14.97	80.95
ΕΠΙΠΕΔΟ 3	8	5.44	86.39
ΕΠΙΠΕΔΟ 4	2	1.36	87.76
ΚΑΝΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ	18	12.24	100.00
ΣΥΝΟΛΟ	147	100.00	

		ΚΡΙΤΗΡΙΟ 4/5													
	ΕΠΙΠΕΔΑ	ΚΑΝΕΝΑ		0		1		2		3		4		ΣΥΝΟΛΟ	
		ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%	ν	%
ΚΡΙΤΗΡΙΟ 3/5	ΚΑΝΕΝΑ	**6**	**4.08**	13	8.84	10	6.80	2	1.36	0	0.00	0	0.00	31	21.09
	0	0	0.00	**4**	**2.72**	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00	4	2.72
	1	0	0.00	17	11.56	**25**	**17.01**	0	0.00	0	0.00	0	0.00	42	28.57
	2	2	1.36	3	2.04	15	10.20	**9**	**6.12**	0	0.00	0	0.00	29	19.73
	3	5	3.40	2	1.36	4	2.72	10	6.80	**5**	**3.40**	0	0.00	26	17.69
	4	5	3.40	1	0.68	3	2.04	1	0.68	3	2.04	**2**	**1.36**	15	10.20
	ΣΥΝΟΛΟ	18	12.24	40	27.21	57	38.78	22	14.97	8	5.44	2	1.36	147	100.00

ΕΡΩΤΗΣΗ	ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v	ΠΟΣΟΣΤΟ %
1	b	116	79.59
2	d	128	87.76
3	c	117	79.59
4	b	107	72.79
5	e	117	79.59
6	b	56	38.10
7	e	120	81.63
8	a	77	52.38
9	c	99	67.35
10	d	47	31.97
11	c	50	34.01
12	b	65	44.22
13	a	120	81.63
14	a	41	27.89
15	b	46	31.29
16	c	64	43.54
17	c	48	32.65
18	d	59	40.14
19	d	15	10.20
20	a	32	21.77

Πίνακας 2: Πίνακας συχνοτήτων και σωστών απαντήσεων του τεστ van Hiele.

A/A	GENDER	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20
SUM OF A=		0	1	9	10	3	9	7	77	5	14	10	27	121	41	11	22	14	21	72	33
SUM OF B=		117	0	1	108	9	56	5	7	5	13	14	65	2	22	46	7	25	23	27	11
SUM OF C=		2	13	118	0	8	50	2	13	99	18	50	12	14	26	9	65	48	23	14	9
SUM OF D=		25	129	4	7	9	21	8	9	6	47	8	8	6	8	26	22	24	59	15	74
SUM OF E=		3	4	14	22	118	2	121	24	23	26	47	19	2	42	51	25	28	15	15	17
SUM OF NO		0	0	1	0	0	9	4	17	9	29	18	16	2	8	4	6	8	6	4	3
TOTAL		147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147
Females=	125																				
Males=	20																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
CORRECT=		B	D	C	B	E	B	E	A	C	D	C	B	A	A	B	C	C	D	D	A
		0.795918	0.877551	0.802721	0.734694	0.802721	0.380952	0.823129	0.52381	0.673469	0.319728	0.340136	0.442177	0.823129	0.278912	0.312925	0.442177	0.326531	0.401361	0.102041	0.22449
	%	79.59	87.76	80.27	73.47	80.27	38.10	82.31	52.38	67.35	31.97	34.01	44.22	82.31	27.89	31.29	44.22	32.65	40.14	10.20	22.45

V.HIELE LVL	CRIT 3/5	CRIT 3/5 %	Σfi%
L0	4	2.72	2.72
L1	42	28.57	31.29
L2	29	19.73	51.02
L3	26	17.69	68.71
L4	15	10.20	78.91
NO LEVEL	31	21.09	100.00
SUM=	147	100	

V.HIELE LVL	CRIT 4/5	CRIT 4/5 %	Σfi%
L0	40	27.21	27.21
L1	57	38.78	65.99
L2	22	14.97	80.95
L3	8	5.44	86.39
L4	2	1.36	87.76
NO LEVEL	18	12.24	100.00
SUM=	147	100.00	

CORRECT ANS	L1	L2	L3	L4
FIVE	70	22	6	0
FOUR	30	18	12	8
THREE	34	39	42	23
TWO	7	37	42	40
ONE	4	27	35	39
ZERO	2	4	10	37
CORRECT ANS %	L1	L2	L3	L4
FIVE	44.9	14.3	3.4	0
FOUR	19	12.2	8.16	4.76
THREE	22.4	24.5	28.6	15.6
TWO	4.76	23.8	27.2	26.5
ONE	2.72	18.4	23.1	24.5
ZERO	2.94	5.88	14.7	54.4

A/A	L1	L2	L3	L4	A/A	CRIT 3/5	CRIT 4/5
	SCORE LVL					v.HIELE. LEVEL	v.HIELE. LEVEL
1	4	5	5	4	**1**	4	4
2	5	0	1	0	**2**	1	1
3	4	2	2	2	**3**	1	1
4	3	2	2	1	**4**	1	0
5	5	3	0	1	**5**	2	1
6	5	3	0	1	**6**	2	1
7	5	3	0	0	**7**	2	1
8	5	2	2	1	**8**	1	1
9	4	3	2	0	**9**	2	1
10	3	0	2	0	**10**	1	0
11	4	2	2	2	**11**	1	1
12	4	4	2	0	**12**	2	2
13	5	2	2	2	**13**	1	1
14	0	1	3	2	**14**		0
15	3	2	1	0	**15**	1	0
16	4	1	2	1	**16**	1	1
17	4	1	2	0	**17**	1	1
18	2	1	3	0	**18**		0
19	3	1	3	0	**19**		0
20	4	5	3	1	**20**	3	2
21	4	5	3	1	**21**	3	2
22	3	2	1	1	**22**	1	0
23	1	1	0	3	**23**		0
24	5	1	2	2	**24**	1	1
25	5	3	3	3	**25**	4	1
26	3	5	4	3	**26**	4	
27	5	3	4	3	**27**	4	
28	4	3	0	0	**28**	2	1
29	1	3	3	2	**29**		0
30	5	3	3	4	**30**	4	
31	5	4	5	2	**31**	3	3
32	3	3	3	3	**32**	4	0
33	5	3	2	2	**33**	2	1
34	5	3	3	0	**34**	3	1
35	3	1	1	3	**35**		0
36	5	4	2	2	**36**	2	2
37	5	2	3	4	**37**		
38	3	3	2	1	**38**	2	0
39	4	3	2	2	**39**	2	1

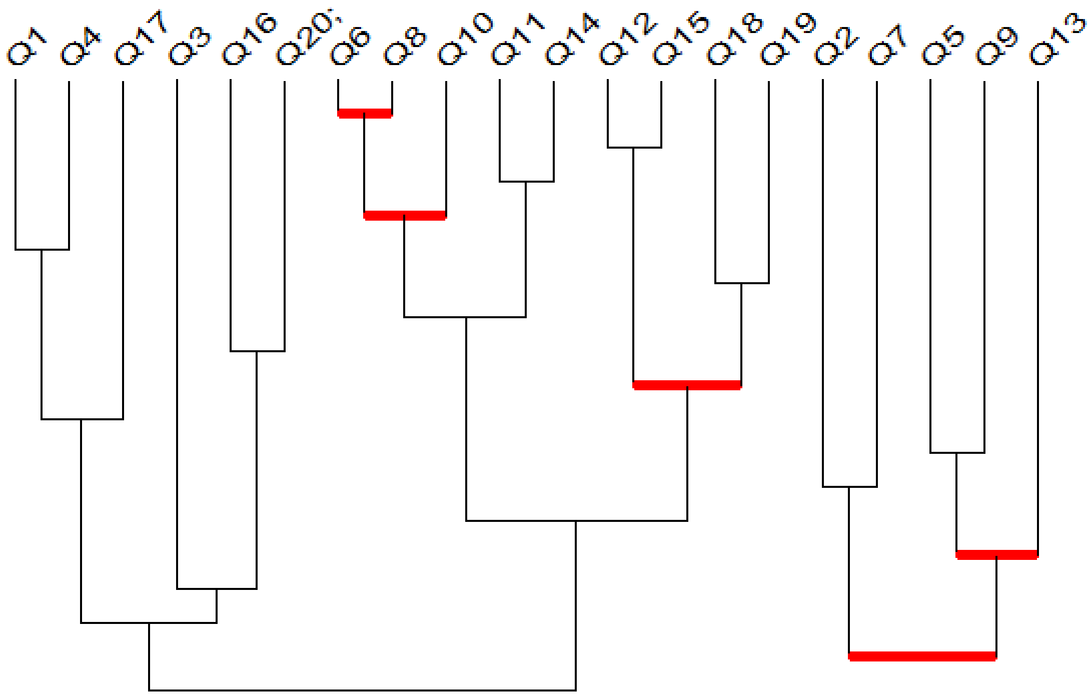
40	3	3	2	1	**40**	2	0
41	5	4	3	1	**41**	3	2
42	3	3	3	1	**42**	3	0
43	2	4	3	4	**43**		
44	5	5	2	3	**44**	2	2
45	5	2	2	1	**45**	1	1
46	5	3	3	3	**46**	4	1
47	3	4	3	1	**47**	3	
48	5	1	1	0	**48**	1	1
49	5	1	1	1	**49**	1	1
50	5	3	4	4	**50**	4	
51	5	4	4	2	**51**	3	3
52	4	4	1	3	**52**		2
53	4	1	1	1	**53**	1	1
54	3	1	0	0	**54**	1	0
55	5	2	0	1	**55**	1	1
56	4	4	1	1	**56**	2	2
57	5	3	4	2	**57**	3	
58	5	5	3	0	**58**	3	2
59	5	5	4	3	**59**	4	3
60	5	5	4	3	**60**	4	3
61	5	5	2	4	**61**		
62	2	3	1	1	**62**		0
63	4	4	1	2	**63**	2	2
64	4	2	1	1	**64**	1	1
65	5	2	3	2	**65**		1
66	5	5	3	0	**66**	3	2
67	5	2	0	0	**67**	1	1
68	3	2	3	0	**68**		0
69	5	2	1	4	**69**		
70	5	2	0	0	**70**	1	1
71	5	3	1	0	**71**	2	1
72	5	5	3	0	**72**	3	2
73	4	2	3	3	**73**		1
74	5	5	3	0	**74**	3	2
75	4	5	2	0	**75**	2	2
76	5	3	1	3	**76**		1
77	5	2	1	1	**77**	1	1
78	3	1	1	1	**78**	1	0
79	0	1	0	0	**79**	0	0
80	4	1	2	3	**80**		1
81	5	5	4	2	**81**	3	3

82	3	4	2	2	**82**	2	
83	4	3	2	2	**83**	2	1
84	5	3	3	2	**84**	3	1
85	5	3	4	2	**85**	3	
86	5	2	3	3	**86**		1
87	5	3	3	1	**87**	3	1
88	5	5	3	2	**88**	3	2
89	1	1	2	2	**89**	0	0
90	4	1	3	2	**90**		1
91	5	4	3	2	**91**	3	2
92	5	2	2	0	**92**	1	1
93	5	1	3	3	**93**		1
94	5	1	3	2	**94**		1
95	4	1	1	0	**95**	1	1
96	5	2	2	1	**96**	1	1
97	5	5	3	3	**97**	4	2
98	5	5	4	2	**98**	3	3
99	5	4	4	2	**99**	3	3
100	5	4	1	3	**100**		2
101	3	2	1	2	**101**	1	0
102	3	2	2	1	**102**	1	0
103	3	2	2	1	**103**	1	0
104	3	4	2	2	**104**	2	
105	5	3	1	2	**105**	2	1
106	4	3	3	3	**106**	4	1
107	5	3	1	0	**107**	2	1
108	2	1	3	0	**108**		0
109	4	3	1	1	**109**	2	1
110	5	3	1	0	**110**	2	1
111	2	0	1	1	**111**	0	0
112	1	1	1	0	**112**	0	0
113	3	2	2	2	**113**	1	0
114	5	5	2	2	**114**	2	2
115	5	5	2	1	**115**	2	2
116	5	4	3	0	**116**	3	2
117	5	5	5	3	**117**	4	3
118	4	2	2	0	**118**	1	1
119	4	2	2	1	**119**	1	1
120	3	1	1	2	**120**	1	0
121	3	5	3	2	**121**	3	
122	4	3	5	2	**122**	3	
123	2	0	3	1	**123**		0

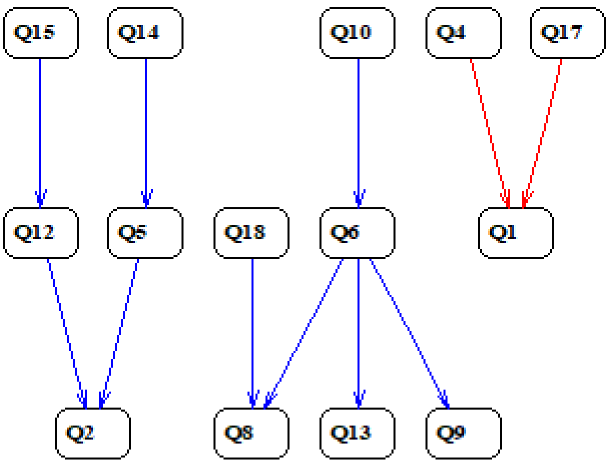
124	3	2	2	0	**124**	1	0
125	5	1	1	2	**125**	1	1
126	5	5	5	4	**126**	4	4
127	3	2	1	2	**127**	1	0
128	5	2	5	1	**128**		
129	5	4	1	0	**129**	2	2
130	4	3	3	1	**130**	3	1
131	3	2	1	1	**131**	1	0
132	3	3	2	1	**132**	2	0
133	3	2	1	1	**133**	1	0
134	5	2	3	1	**134**		1
135	5	3	2	3	**135**		1
136	4	1	1	2	**136**	1	1
137	5	2	2	1	**137**	1	1
138	5	3	2	0	**138**	2	1
139	2	3	1	2	**139**		0
140	3	3	3	2	**140**	3	0
141	5	1	4	2	**141**		
142	3	1	2	1	**142**	1	0
143	3	2	2	0	**143**	1	0
144	3	2	3	0	**144**		0
145	3	2	2	3	**145**		0
146	3	4	3	3	**146**	4	
147	4	3	1	0	**147**	2	1

Διαγράμματα λογισμικού συνεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης CHIC

Similarity tree

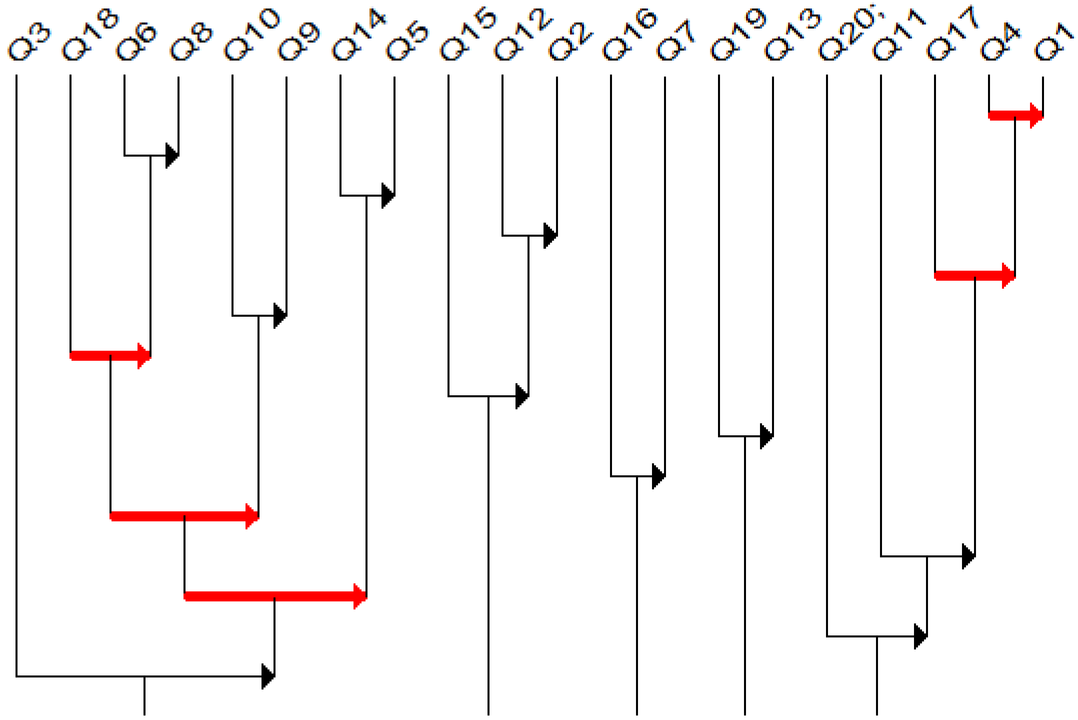


Implicative graph



Συνεπαγωγές. Οι κόκκινες είναι με επίπεδο σημαντικότητας 99%, οι μπλε 95%.

Implicative tree



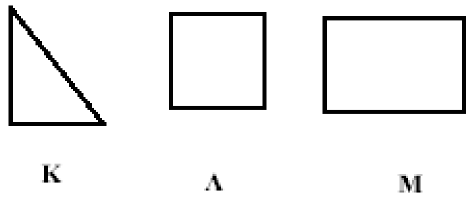
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΤΟ ΤΕΣΤ VAN HIELE

Van Hiele Test

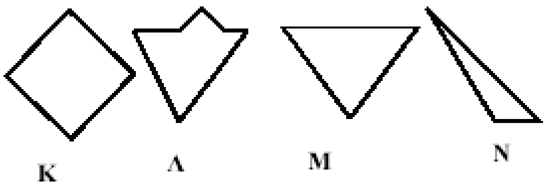
1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Λ και το Μ
e. Όλα είναι τετράγωνα



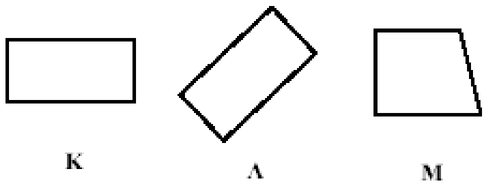
2. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνα;

a. Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Μ μόνο
d. Το Μ και το Ν
e. Το Λ και το Μ



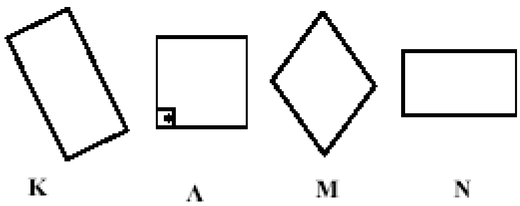
3. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ορθογώνια;

a. Το Κ μόνο
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και το Λ
d. Το Κ και το Μ
e. Όλα είναι ορθογώνια.



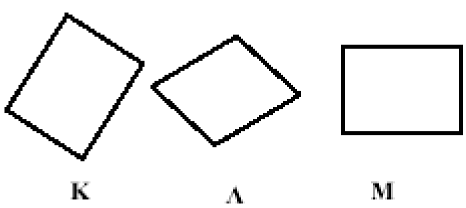
4. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

a. Κανένα από αυτά δεν είναι τετράγωνο.
b. Το Λ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Το Λ και το Ν
e. Όλα είναι τετράγωνα.

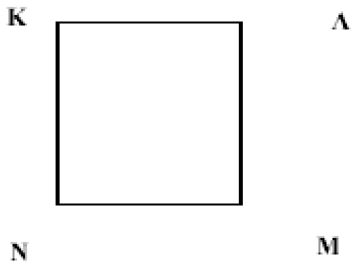


5. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι παραλληλόγραμμα;

a. Το Κ μόνο
b. Το Μ μόνο
c. Το Κ και Λ
d. Κανένα από αυτά δεν είναι παραλληλόγραμμο.
e. Όλα είναι παραλληλόγραμμα.

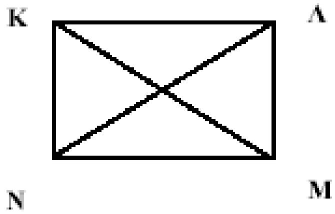


6. Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής για όλα τα τετράγωνα.



a. Το ΚΜ και το ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος.
b. Το ΚΜ και το ΛΝ είναι κάθετα.
c. Το ΚΝ και το ΛΜ είναι κάθετα.
d. Το ΚΝ και το ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος.
e. Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ.

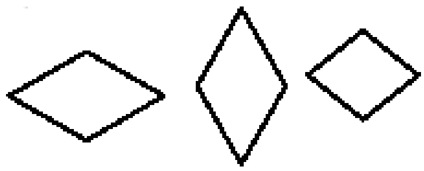
7. Στο ορθογώνιο ΚΛΜΝ οι ΚΜ και ΛΝ είναι διαγώνιες.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο;



a. Υπάρχουν 4 ορθές γωνίες.
b. Υπάρχουν 4 πλευρές.
c. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
d. Οι απέναντι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ορθογώνιο.

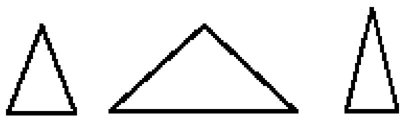
8. Ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθή σε κάθε ρόμβο;

a. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.
b. Κάθε διαγώνιος διχοτομεί δύο από τις γωνίες του ρόμβου.
c. Οι δύο διαγώνιες είναι κάθετες.
d. Οι απέναντι γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.



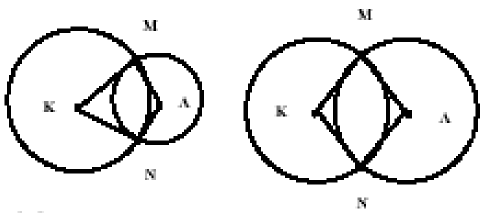
9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο με δύο ίσες πλευρές.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) είναι αληθή σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;

a. Οι τρεις πλευρές πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.
b. Μια πλευρά να είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.
c. Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο.
d. Οι τρεις γωνίες πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Κανένα από τα (a) έως (d) δεν είναι αληθές για κάθε ισοσκελές τρίγωνο.



10. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Μ και Ν σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΚΜΛΝ.
Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο παραδείγματα.
Ποια από τα (a) έως (d) δεν είναι πάντα αληθή;

a. Το ΚΜΛΝ θα έχει δύο ζευγάρια πλευρών ίσου μήκους.
b. Το ΚΜΛΝ θα έχει τουλάχιστον δύο γωνίες ίσου μέτρου.
c. Οι ευθείες ΚΛ και ΜΝ θα είναι κάθετες.
d. Οι γωνίες Κ και Λ θα έχουν το ίδιο μέτρο.
e. Όλα από (a) έως (d) είναι αληθή.

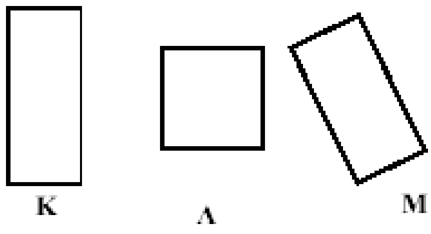


11. Υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;
Υπόθεση I : Το σχήμα Φ είναι ένα ορθογώνιο.
Υπόθεση II: Το σχήμα Φ είναι ένα τρίγωνο.
a. Αν η I είναι αληθής, τότε και η II είναι αληθής.
b. Αν η I είναι λάθος, τότε η II είναι αληθής.
c. Οι I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
d. Οι I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

12. Υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;
Υπόθεση I : Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις πλευρές με το ίδιο μήκος.
Υπόθεση II: Στο τρίγωνο ΑΒΓ, οι γωνίες Β και Γ έχουν το ίδιο μέτρο.
a. Οι υποθέσεις I και II δεν μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς.
b. Αν η I είναι αληθής, τότε και η II είναι αληθής.
c. Αν η II είναι αληθής, τότε και η I είναι αληθής.
d. Αν η I είναι ψευδής, τότε και η II είναι ψευδής.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

13. Ποια από τα παρακάτω σχήματα μπορούμε να τα ονομάσουμε ορθογώνια;

a. Όλα μπορούν.
b. Μόνο το Λ.
c. Μόνο το Μ.
d. Τα Κ και Λ μόνο.
e. Τα Λ και Μ μόνο



14. Ποια πρόταση είναι αληθής;

a. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.

b. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογωνίων.

c. Όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

d. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

15. Τι έχουν όλα τα ορθογώνια που μερικά παραλληλόγραμμα δεν έχουν;

a. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

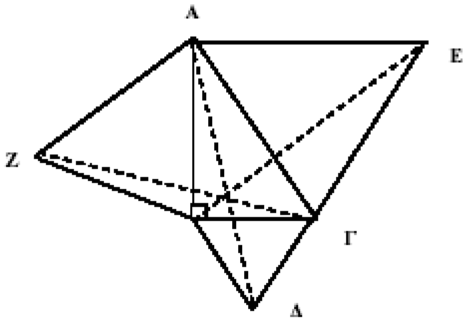
b. Οι διαγώνιες είναι ίσες.

c. Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

d. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

e. Κανένα από τα (a) έως (d).

16. Έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ, ΑΒΖ και ΒΓΔ σχηματίζονται στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ. Από αυτή την πληροφορία κάποιος μπορεί να αποδείξει ότι: οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο. Τι σας λέει αυτή η απόδειξη;



a. Μόνο σε αυτό το τρίγωνο είναι σίγουρο ότι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

b. Σε μερικά και όχι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

c. Σε οποιαδήποτε ορθογώνια τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

d. Σε οποιαδήποτε τρίγωνα οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

e. Σε οποιαδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ έχουν ένα κοινό σημείο.

17. Παρακάτω υπάρχουν τρεις ιδιότητες ενός σχήματος.
Ποια είναι αληθής;
Ιδιότητα Ι : Το σχήμα έχει διαγώνιες με ίσα μήκη.
Ιδιότητα ΙΙ : Το σχήμα είναι ένα τετράγωνο.
Ιδιότητα ΙΙΙ: Το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.

a. Η Ι συνεπάγεται την ΙΙ η οποία συνεπάγεται την ΙΙΙ.

b. Η Ι συνεπάγεται την ΙΙΙ η οποία συνεπάγεται την ΙΙ.

c. Η ΙΙ συνεπάγεται την ΙΙΙ η οποία συνεπάγεται την Ι.

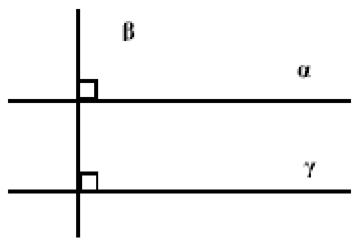
d. Η ΙΙΙ συνεπάγεται την Ι η οποία συνεπάγεται την ΙΙ.
e. Η ΙΙΙ συνεπάγεται την ΙΙ η οποία συνεπάγεται την Ι.

18. Παρακάτω υπάρχουν δύο υποθέσεις. Ποια είναι σωστή;
Υπόθεση Ι : Εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Υπόθεση ΙΙ: Εάν οι διαγώνιοι ενός σχήματος διχοτομούνται, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.
a. Για να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή.
b. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να αποδείξεις ότι η Ι είναι σωστή.
c. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι σωστή, είναι αρκετό να βρεις ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
d. Για να αποδείξεις ότι η ΙΙ είναι λάθος, είναι αρκετό να βρεις ένα μη ορθογώνιο του οποίου οι διαγώνιες να διχοτομούνται.
e. Καμία από τις (a) έως (d) δεν είναι σωστή.

19. Στη Γεωμετρία:
a. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί και κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί.
b. Κάθε όρος μπορεί να ορισθεί αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι ορισμένες εικασίες είναι αληθείς.
c. Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά κάθε αληθής εικασία μπορεί να αποδειχθεί αληθής.
d. Μερικοί όροι μπορεί να μην ορισθούν αλλά είναι αναγκαίο να έχουμε μερικές εικασίες οι οποίες υποτίθεται αληθείς.
e. Τίποτε από τα (a) έως (d) δεν είναι σωστό.

20. Εξετάστε αυτές τις τρεις υποθέσεις.
Υπόθεση Ι : Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
Υπόθεση ΙΙ : Μια ευθεία που είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες είναι κάθετη και στην άλλη.
Υπόθεση ΙΙΙ: Εάν δύο ευθείες ισαπέχουν, τότε είναι παράλληλες.
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται ότι οι ευθείες α και β είναι κάθετες και οι ευθείες β και γ είναι κάθετες. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις μπορεί να είναι ο λόγος που η ευθεία α είναι παράλληλη στην ευθεία γ ;

a. Η Ι μόνο.
b. Η ΙΙ μόνο.
c. Η ΙΙΙ μόνο.
d. Είτε η Ι είτε η ΙΙ.
e. Είτε η ΙΙ είτε η ΙΙΙ.



Φύλλο απαντήσεων του τεστ van Hiele

ΟΝΟΜΑ:……………..……………ΕΠΩΝΥΜΟ:……………………………….

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:….……………...ΥΠΟΓΡΑΦΗ:……………………...…….

Κύκλωσε την σωστή απάντηση για κάθε ερώτηση

1. a b c d e
2. a b c d e
3. a b c d e
4. a b c d e
5. a b c d e
6. a b c d e
7. a b c d e
8. a b c d e
9. a b c d e
10. a b c d e
11. a b c d e
12. a b c d e
13. a b c d e
14. a b c d e
15. a b c d e
16. a b c d e
17. a b c d e
18. a b c d e
19. a b c d e
20. a b c d e

Οι απαντήσεις του τεστ Van Hiele

1. b
2. d
3. c
4. b
5. e
6. b
7. e
8. a
9. c
10. d
11. c
12. b
13. a
14. a
15. b
16. c
17. c
18. d
19. d
20. a

APPENDIX B

Van Hiele Geometry Test

This test is reproduced in its entirety on the next twelve pages. In the actual administration, the twelve pages covered both sides of six sheets. Identical tests were used in spring and fall. The quotes employed in the construction of items, an answer sheet, and an item analysis follow the test.

Test Number ____________

VAN HIELE GEOMETRY TEST*

Directions

Do not open this test booklet until you are told to do so.

This test contains 25 questions. It is not expected that you know everything on this test.

There is a test number in the top right hand corner of this page. Write this number in the corresponding place on your answer sheet.

When you are told to begin:

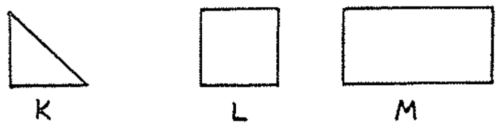
1. Read each question carefully.
2. Decide upon the answer you think is correct. There is only one correct answer to each question. Cross out the letter corresponding to your answer on the answer sheet.
3. Use the space provided on the answer sheet for figuring or drawing. Do not mark on this test booklet.
4. If you want to change an answer, completely erase the first answer.
5. If you need another pencil, raise your hand.
6. You will have 35 minutes for this test.

Wait until your teacher says that you may begin.

*This test is based on the work of P.M. van Hiele.

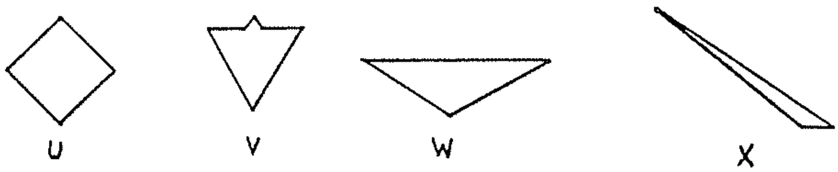
VAN HIELE GEOMETRY TEST

1. Which of these are squares?



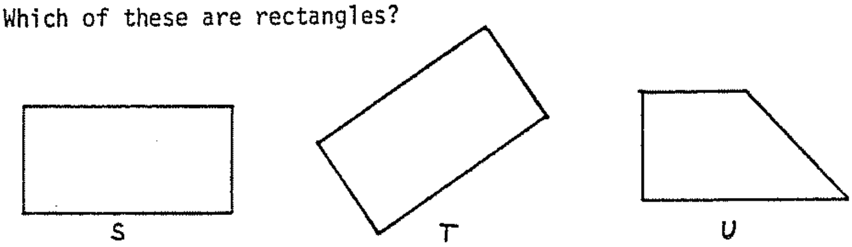
(A) K only
(B) L only
(C) M only
(D) L and M only
(E) All are squares.

2. Which of these are triangles?



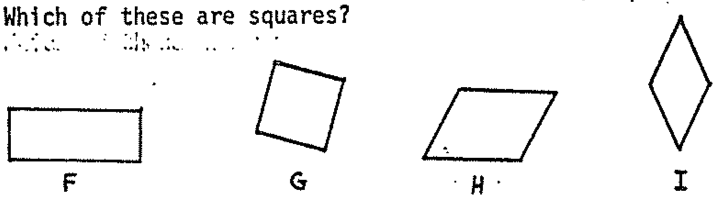
(A) None of these are triangles.
(B) V only
(C) W only
(D) W and X only
(E) V and W only

3. Which of these are rectangles?



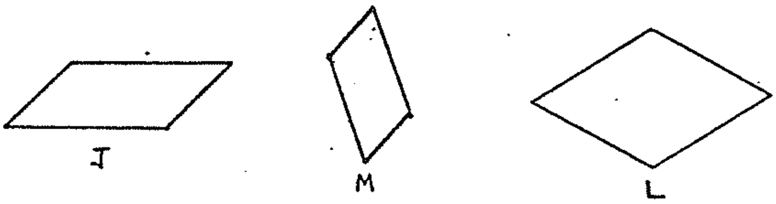
(A) S only
(B) T only
(C) S and T only
(D) S and U only
(E) All are rectangles.

4. Which of these are squares?



(A) None of these are squares.
(B) G only
(C) F and G only
(D) G and I only
(E) All are squares.

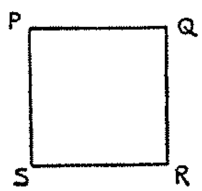
5. Which of these are parallelograms?



(A) J only
(B) L only
(C) J and M only
(D) None of these are parallelograms.
(E) All are parallelograms.

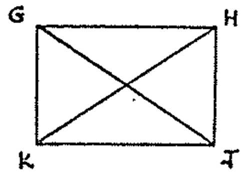
6. PQRS is a square.

Which relationship is true in all squares?



(A) $\overline{PR}$ and $\overline{RS}$ have the same length.
(B) $\overline{QS}$ and $\overline{PR}$ are perpendicular.
(C) $\overline{PS}$ and $\overline{QR}$ are perpendicular.
(D) $\overline{PS}$ and $\overline{QS}$ have the same length.
(E) Angle Q is larger than angle R.

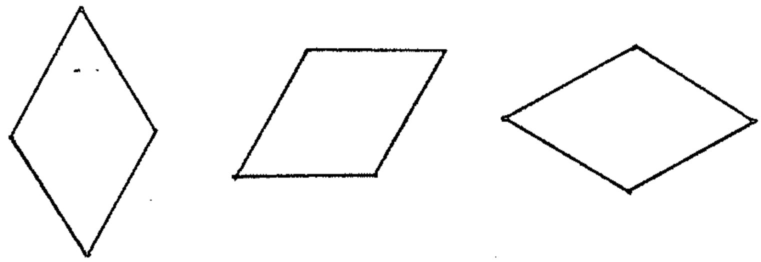
7. In a rectangle GHJK, $\overline{GJ}$ and $\overline{HK}$ are the diagonals.



Which of (A)-(D) is not true in every rectangle?
(A) There are four right angles.
(B) There are four sides.
(C) The diagonals have the same length.
(D) The opposite sides have the same length.
(E) All of (A)-(D) are true in every rectangle.

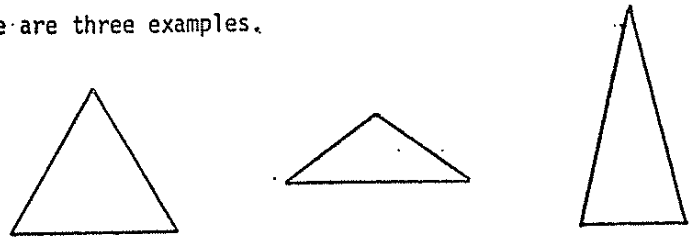
8. A rhombus is a 4-sided figure with all sides of the same length.

Here are three examples.



Which of (A)-(D) is not true in every rhombus?
(A) The two diagonals have the same length.
(B) Each diagonal bisects two angles of the rhombus.
(C) The two diagonals are perpendicular.
(D) The opposite angles have the same measure.
(E) All of (A)-(D) are true in every rhombus.

9. An isosceles triangle is a triangle with two sides of equal length. Here are three examples.



Which of (A)-(D) is true in every isosceles triangle?

(A) The three sides must have the same length.

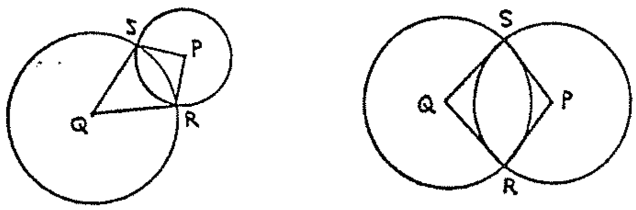
(B) One side must have twice the length of another side.

(C) There must be at least two angles with the same measure.

(D) The three angles must have the same measure.

(E) None of (A)-(D) is true in every isosceles triangle.

10. Two circles with centers P and Q intersect at R and S to form a 4-sided figure PRQS. Here are two examples.



Which of (A)-(D) is <u>not</u> always true?

(A) PRQS will have two pairs of sides of equal length.

(B) PRQS will have at least two angles of equal measure.

(C) The lines $\overline{PQ}$ and $\overline{RS}$ will be perpendicular.

(D) Angles P and Q will have the same measure.

(E) All of (A)-(D) are true.

11. Here are two statements.

Statement 1: Figure F is a rectangle.
Statement 2: Figure F is a triangle.

Which is correct?

(A) If 1 is true, then 2 is true.

(B) If 1 is false, then 2 is true.

(C) 1 and 2 cannot both be true.

(D) 1 and 2 cannot both be false.

(E) None of (A)-(D) is correct.

12. Here are two statements.

Statement S: $\triangle$ABC has three sides of the same length.
Statement T: In $\triangle$ABC, $\angle$B and $\angle$C have the same measure.

Which is correct?

(A) Statements S and T cannot both be true.

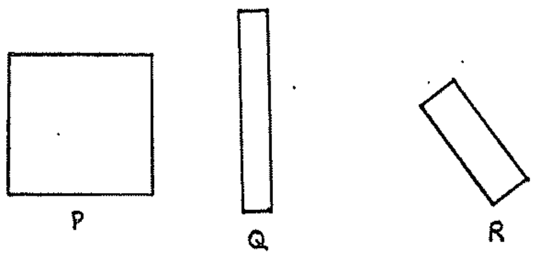
(B) If S is true, then T is true.

(C) If T is true, then S is true.

(D) If S is false, then T is false.

(E) None of (A)-(D) is correct.

13. Which of these can be called rectangles?

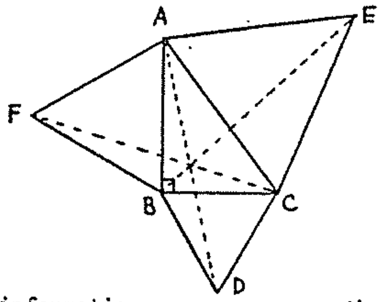


(A) All can.
(B) Q only
(C) R only
(D) P and Q only
(E) Q and R only

14. Which is true?
(A) All properties of rectangles are properties of all squares.
(B) All properties of squares are properties of all rectangles.
(C) All properties of rectangles are properties of all parallelograms.
(D) All properties of squares are properties of all parallelograms.
(E) None of (A)-(D) is true.

15. What do all rectangles have that some parallelograms do not have?
(A) opposite sides equal
(B) diagonals equal
(C) opposite sides parallel
(D) opposite angles equal
(E) none of (A)-(D)

16. Here is a right triangle ABC. Equilateral triangles ACE, ABF, and BCD have been constructed on the sides of ABC.



From this information, one can prove that $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, and $\overline{CF}$ have a point in common. What would this proof tell you?

(A) Only in this triangle drawn can we be sure that $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ have a point in common.

(B) In some but not all right triangles, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ have a point in common.

(C) In any right triangle, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ have a point in common.

(D) In any triangle, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ have a point in common.

(E) In any equilateral triangle, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ have a point in common.

17. Here are three properties of a figure.

Property D: It has diagonals of equal length.
Property S: It is a square.
Property R: It is a rectangle.

Which is true?

(A) D implies S which implies R.
(B) D implies R which implies S.
(C) S implies R which implies D.
(D) R implies D which implies S.
(E) R implies S which implies D.

18. Here are two statements.

I. If a figure is a rectangle, then its diagonals bisect each other.

II. If the diagonals of a figure bisect each other, the figure is a rectangle.

Which is correct?

(A) To prove I is true, it is enough to prove that II is true.

(B) To prove II is true, it is enough to prove that I is true.

(C) To prove II is true, it is enough to find one rectangle whose diagonals bisect each other.

(D) To prove II is false, it is enough to find one non-rectangle whose diagonals bisect each other.

(E) None of (A)-(D) is correct.

19. In geometry;

(A) Every term can be defined and every true statement can be proved true.

(B) Every term can be defined but it is necessary to assume that certain statements are true.

(C) Some terms must be left undefined but every true statement can be proved true.

(D) Some terms must be left undefined and it is necessary to have some statements which are assumed true.

(E) None of (A)-(D) is correct.

20. Examine these three sentences.

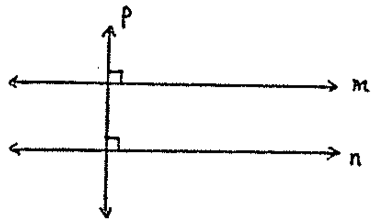
(1) Two lines perpendicular to the same line are parallel.

(2) A line that is perpendicular to one of two parallel lines is perpendicular to the other.

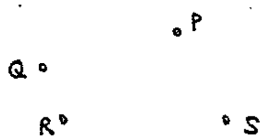
(3) If two lines are equidistant, then they are parallel.

In the figure below, it is given that lines m and p are perpendicular and lines n and p are perpendicular. Which of the above sentences could be the reason that line m is parallel to line n?

(A) (1) only
(B) (2) only
(C) (3) only
(D) Either (1) or (2)
(E) Either (2) or (3)



21. In F-geometry, one that is different from the one you are used to, there are exactly four points and six lines. Every line contains exactly two points. If the points are P, Q, R, and S, the lines are {P,Q} , {P,R} , {P,S} , {Q,R} , {Q,S} , and {R,S}



Here are how the words "intersect" and "parallel" are used in F-geometry. The lines {P,Q} and {P,R} intersect at P because {P,Q} and {P,R} have P in common.

The lines {P,Q} and {R,S} are parallel because they have no points in common.

From this information, which is correct?

(A) {P,R} and {Q,S} intersect.
(B) {P,R} and {Q,S} are parallel.
(C) {Q,R} and {R,S} are parallel.
(D) {P,S} and {Q,R} intersect.
(E) None of (A)-(D) is correct.

22. To <u>trisect</u> an angle means to divide it into three parts of equal measure. In 1847, P.L. Wantzel proved that, in general, it is <u>impossible</u> to trisect angles using only a compass and an unmarked ruler. From his proof, what can you conclude?

   (A) In general, it is impossible to <u>bisect</u> angles using only a compass and an unmarked ruler.

   (B) In general, it is impossible to trisect angles using only a compass and a <u>marked</u> ruler.

   (C) In general, it is impossible to trisect angles using any drawing instruments.

   (D) It is still possible that in the future someone may find a general way to trisect angles using only a compass and an unmarked ruler.

   (E) No one will ever be able to find a general method for trisecting angles using only a compass and an unmarked ruler.

23. There is a geometry invented by a mathematician J in which the following is true:

   The sum of the measures of the angles of a triangle is less than 180°.

   Which is correct?

   (A) J made a mistake in measuring the angles of the triangle.

   (B) J made a mistake in logical reasoning.

   (C) J has a wrong idea of what is meant by "true."

   (D) J started with different assumptions than those in the usual geometry.

   (E) None of (A)-(D) is correct.

24. Two geometry books define the word rectangle in different ways. Which is true?

(A) One of the books has an error.

(B) One of the definitions is wrong. There cannot be two different definitions for rectangle.

(C) The rectangles in one of the books must have different properties from those in the other book.

(D) The rectangles in one of the books must have the same properties as those in the other book.

(E) The properties of rectangles in the two books might be different.

25. Suppose you have proved statements I and II.

I. If p, then q.
II. If s, then not q.

Which statement follows from statements I and II?

(A) If p, then s.

(B) If not p, then not q.

(C) If p or q, then s.

(D) If s, then not p.

(E) If not s, then p.

Test Number ____________

VAN HIELE GEOMETRY TEST

Project Use Only J

ID ____________

ANSWER SHEET

Please print

Name ______________________________ Class period ________
Last First Middle

Math Teacher ____________ School ____________

Grade in School (circle): 8 9 10 11 12 Sex (circle): M F

Birth date ____ ____ ____
Month Day Year

Test date ____ ____ ____
Month Day Year

Cross out the correct answer

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E
21.	A	B	C	D	E
22.	A	B	C	D	E
23.	A	B	C	D	E
24.	A	B	C	D	E
25.	A	B	C	D	E

Space for drawing or figuring
(You may also use the other side)