Εισαγωγή στα Fractal κατά Mandelbrot και Taylor.

Διπλωματική εργασία του Κουρελά Γεώργιου.
Επιβλέπων Καθηγητής: Τσολομύτης Αντώνιος.
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ΠΜΣ Τμήμα Μαθηματικών.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.

Τι είναι τα Fractal;

Έχουν διατυπωθεί πάρα πολλοί ορισμοί τις έννοιας Fractal. Στην παρούσα διπλωματική θα μελετήσουμε τα Fractal κατά Mandelbrot και Taylor. Ο λόγος που υπάρχουν πολλοί ορισμοί για αυτήν την έννοια είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε την διάσταση ενός συνόλου με πάρα πολλούς τρόπους, κάθε τρόπος παράγει και έναν νέο ορισμό Fractal διαφορετικό μεταξύ τους, και άρα θα έχει και διαφορετικές ιδιότητες. Πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι η διάσταση περιέχει πολλές πληροφορίες για τις γεωμετρικές ιδιότητες του συνόλου. Φευγαλέα μιλώντας λέμε ότι η διάσταση μας παρέχει πληροφορίες για το πόσο χώρο καταλαμβάνει το σύνολο. Εμείς θα μελετήσουμε τις εξής: Τοπολογική, Hausdorff, Box και Packing διασταση.

Το 1975 ο Benoit Mandelbrot επινόησε αυτό τον ορισμό για σύνολα τα οποία δεν έχουν την ομαλή δομή των συνόλων που εξετάζει η κλασική γεωμετρία. Η λέξη Fractal προέρχεται από την λατινική Fractus, που σημαίνει σπασμένος, κομματιασμένος. Γρήγορα μιλώντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι σύνολα τα οποία όσο και να τα μεγεθύνουμε τόσο ποιο πολλές μικρές και μικρές ανωμαλίες θα παρατηρούμε.

Στο παρελθόν τα μαθηματικά ασχολούνταν σε μεγάλο βαθμό με σύνολα και συναρτήσεις στα οποία μπορούσε να εφαρμοστεί η κλασική γεωμετρία. Σύνολα ή συναρτήσεις που είχαν την παραπάνω ανωμαλία, όπως θα μπορούσαμε να πούμε φευγαλέα «ανώμαλα» σύνολα, απορρίπτονταν από την μελέτη ως «παθολογικά», δηλαδή ανάξια να μελετηθούν .

Πρόσφατα αυτή η λογική έχει αλλάξει. Έχει γίνει κατανοητό ότι μπορούμε να έχουμε αποτελέσματα από την μελέτη των μη-ομαλών συνόλων. Ακόμη περισσότερο τα ανώμαλα σύνολα μας δίνουν μια καλύτερη αναπαράσταση των φυσικών φαινομένων σε αντίθεση με μην κλασική γεωμετρία.

Στο βιβλίο *"The Fractal Geometry of Nature"* ο Benoit Mandelbrot γράφει *«Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτογραμμές δεν είναι κύκλοι, και το σκοτάδι δεν είναι ομαλό, ούτε καν ο κεραυνός δεν ταξιδεύει σε ευθείες γραμμές»* Η γεωμετρία αυτών των ανώμαλων συνόλων ονομάζεται πλέον Fractal Γεωμετρία και μας παρέχει μια γενική δομή για την μελέτη τέτοιων ανώμαλων συνόλων.

Στο βιβλίο *"Fractal Geometry"* ο Kenneth Falconer αναφέρει ότι *«Τα Fractal θα πρέπει να θεωρούνται με τον ίδιο τρόπο που οι βιολόγοι ορίζουν την ζωή»*. Με αυτό εννοεί ότι δεν μπορούμε να δώσουμε έναν ακριβή και γρήγορο ορισμό της έννοιας Fractal, αλλά μια λίστα από ιδιότητες και χαρακτηριστικά τα οποία όταν θα τα ικανοποιούν θα αναφερόμαστε σε ένα Fractal, όπως για παράδειγμα ένα ζωντανό ον, έχει τις ιδιότητες να αναπαράγεται,να κινείται, να ζει σε κάποιο βαθμό ανεξάρτητα από το περιβάλλον του, τα περισσότερα ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες, οπότε είναι ζωντανά όντα. Με τον ίδιο τρόπο θα αναφερθούμε και εμείς στα Fractal. Όταν ακούμε αυτή την έννοια θα έχουμε τα εξής στο μυαλό μας:

(i) Έχει λεπτή δομή δηλαδή, λεπτομέρειες σχετικά με τις αυθαίρετες μικρές κλίμακες.

(ii) Είναι τόσο ανώμαλο, ακανόνιστο που δεν μπορεί να μελετηθεί από την κλασική γεωμετρία,τοπικά και γενικά.

(iii) Συχνά έχει την ιδιότητα τις αυτό-ομοιότητας, ίσως κατά προσέγγιση ή στατιστικά.

(iv) Συχνά η διάσταση Fractal (ο ορισμός θα δοθεί στο κεφάλαιο 3), του συνόλου είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική.

(v) Στις περισσότερες περιπτώσεις το Fractal περιγράφεται πολύ απλά, ίσως και αναδρομικά.

Για να ορίσει ο Mandelbrot τα Fractal γράφει ότι *«Ένα σύνολο λέγεται Fractal αν η Hausdorff διάσταση του είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση».* Ενώ ο Taylor γράφει *«Ένα σύνολο λέγεται Fractal αν η διάσταση Hausdorff είναι ίση με την διάσταση Packing».* Αυτοί οι δύο ορισμοί θα είναι και το κεντρικό αντικείμενο της μελέτης σε αυτή την διπλωματική.

Για να φτάσουμε όμως εκεί πρέπει να αναφέρουμε πολλά πράγματα όπως την Τοπολογική διάσταση που θα την εξετάσουμε στο κεφάλαιο 4. Πρέπει να εξοικειωθούμε με την έννοια του μέτρου και ειδικότερα με το μέτρο Hausdorff. Αυτή η μελέτη θα γίνει στο κεφάλαιο 2 και 3, όπου θα ξεκινήσουμε με το μέτρο Lebesgue, ώστε να φτάσουμε στο μέτρο Hausdorff όπου εκεί θα δώσουμε τον ορισμό της διάστασης Hausdorff. Στην συνέχεια θα εισάγουμε τον ορισμό του Packing μέτρου και της διάστασης Packing. Αρχικά όμως ξεκινάμε με μερικά απλά παραδείγματα Fractal συνόλων.

Κεφάλαιο 1

1. Παραδείγματα **Fractal** συνόλων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα Fractal συνόλων, η ανάλυση τους και ο λόγος για τον οποίο αυτά είναι fractal θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Μια από τις εκπληκτικές ιδέες του θέματος είναι ότι η διάσταση ε-νός συνόλου είναι πραγματικός αριθμός και όχι αυστηρά ακέραιος. Για παράδειγμα αν πούμε ότι ένα σύνολο έχει διάσταση 1.7 τότε εννοούμε ότι οι ιδιότητες του είναι μεταξύ της ευθείας γραμμής (διάστασης 1) και του επιπέδου (διάστασης 2). Τέτοια παραδείγματα θα μελετηθούν στο κεφάλαιο 5.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των Fractal συνόλων είναι η διαφορά τους με τα σύνολα της κλασικής γεωμετρίας. Τυπικά τα Fractal είναι ανώμα-λα σύνολα, όπως αναφέραμε, όμως αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον ε-ίναι ότι αν τα μεγεθύνουμε παραμένουν ανώμαλα σύνολα. Παραδείγματα τέτοιων συνόλων θα παρουσιάσουμε τώρα.

1.1 Το σύνολο Cantor

Το σύνολο Cantor είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Και η κατασκευή του έχει ως εξής. Ξεκινάμε με το κλειστό διάστημα $C_0 = [0, 1]$. Τότε το σύνολο C_1 δημιουργείται αν αφαιρέσουμε το διάστημα $(1/3, 2/3)$ οπότε καταλήγουμε να έχουμε το $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Το επόμενο σύνολο C_2 δημιουργείται με την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω στο C_0 αλλά με την διαφορά ότι τώρα κάνουμε την ίδια διαδικασία και στα δυο σύνολα $[0, 1/3], [2/3, 1]$, δηλαδή αφαιρούμε το μεσαίο ένα τρίτο του διαστήματος και από τα δυο. Αυτό μας δίνει

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζοντας την ακολουθία C_n.

Τελικά το σύνολο Cantor ή όπως αλλιώς λέγεται, η σκόνη Cantor, είναι το «όριο» C της ακολουθίας συνόλων C_n, παρατηρούμε ότι αυτή η ακολουθία συνόλων είναι φθίνουσα δηλαδή $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ οπότε θα ορίσουμε το «όριο» να είναι η τομή αυτών τών συνόλων

$$C = \bigcap_{n \epsilon \mathbb{N}} C_n.$$

Τα κομμάτια που αφαιρέθηκαν για την κατασκευή του συνόλου Cantor ονομάζονται «tremas» (τα ονόμασε ο Mandelbrot από την λατινική λέξη τρύπα).

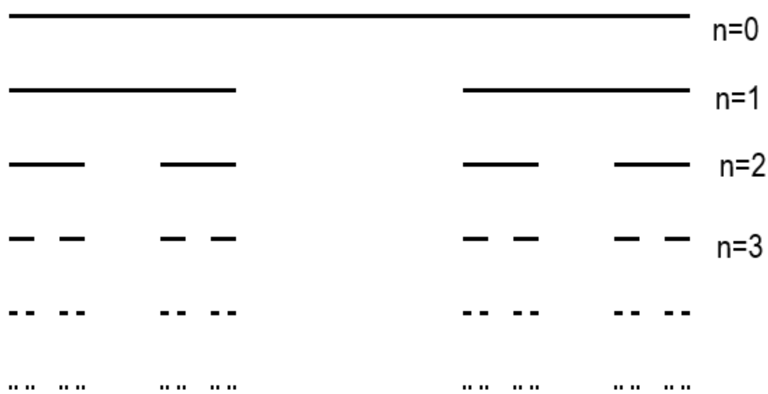
Η ακολουθία των συνόλων ορίστηκε αναδρομικά, αυτό σημαίνει ότι είναι εύκολο γενικά να κάνουμε υπολογισμούς σε αυτα τα σύνολα.

Για παράδειγμα, το σύνολο C_n περιέχει 2^n ξένα κλειστά διαστήματα που το καθένα έχει μήκος $(1/3)^n$. Οπότε το συνολικό μήκος του C_n θα είναι $2^n(1/3)^n = (2/3)^n$. Αν πάρουμε όμως όριο

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

Άρα το «συνολικό μήκος» του συνόλου Cantor είναι μηδέν. Η θεωρία που θα μας βοηθήσει να υπολογίζουμε το μήκος ενός συνόλου λέγεται θεωρία μέτρου και πιο ιδικά θα μελετήσουμε το μέτρο Lebesgue σε επόμενα κεφάλαια.

Η επόμενη εικόνα θα βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα το σύνολο Cantor.



Το σύνολο Cantor ή όπως αλλιώς λέγεται, η σκόνη Cantor, είναι το «όριο» C της ακολουθίας συνόλων C_n.

1.2 Το σύνολο Sierpiński

Ξεκινάμε με ένα ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές μήκους 1. Εδώ εννοούμε το τρίγωνο μαζί με το εσωτερικό του. Ας το ονομάσουμε S_0. Επιλέγουμε τα μέσα των κάθε πλευρών και τα ενώνουμε. Έχουμε πλέον χωρίσει το τρίγωνο μας S_0 σε τέσσερα ίσα τρίγωνα. Αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο από τα τέσσερα, όπου είναι ανεστραμμένο κατά 180 μοίρες σε σχέση με τα άλλα. Ονομάζουμε αυτό το σύνολο S_1, παρατηρούμε εδώ ότι το «τρεμα» είναι το μεσαίο τρίγωνο. Τα νέα «υπο-τρίγωνα» έχουν τώρα μήκος πλευράς 1/2. Παρατηρούμε επίσης ότι $S_0 \supseteq S_1$.

Τώρα κάθε ένα από τα τρία εναπομείναντα τρίγωνα του S_1 πρέπει να υποδιαιρεθεί με τον ίδιο τρόπο όπως πριν, με αποτέλεσμα κάθε τρίγωνο που θα απομείνει να έχει μήκος πλευράς 1/4. Το αποτέλεσμα το ονομάζουμε S_2 και παρατηρούμε ξανά ότι $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2$.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να πάρουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων S_n: $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \ldots$.

Ορίζουμε το σύνολο Sierpiński να είναι το σύνολο

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Η ακολουθία των συνόλων ορίστηκε αναδρομικά, όμοια με το σύνολο Cantor, άρα και εδώ μπορούμε να κάνουμε αντίστοιχες παρατηρήσεις όπως ότι το σύνολο S_n περιέχει 3^n ισόπλευρα τρίγωνα με μήκος πλευράς $(1/2)^n$. Άρα το συνολικό εμβαδόν που καταλαμβάνει το σύνολο είναι $\sqrt{3}/4 \cdot ((1/2)^n)^2 \cdot 3^n$. Επίσης

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{3}/4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^2 \cdot 3^n = 0.$$

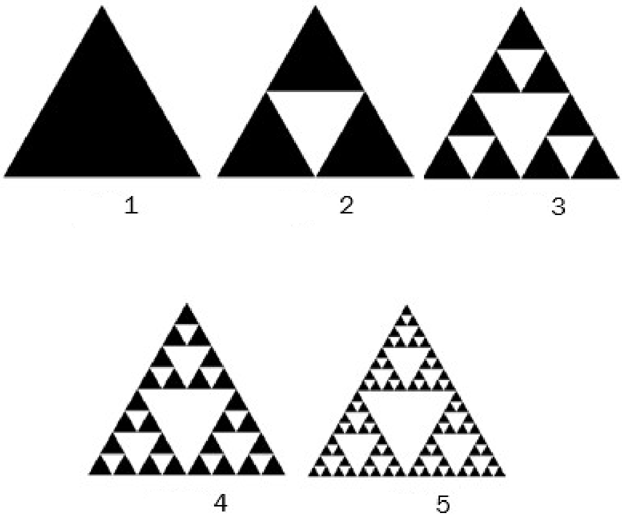
Οπότε βλέπουμε ότι το συνολικό εμβαδόν που καταλαμβάνει το σύνολο S είναι μηδέν. Παρόλ' αυτά, το συνολικό μήκος του συνόλου είναι άπειρο, καθώς οι ευθείες που δημιουργούν το σύνορο του ενός τριγώνου παραμένουν σε όλες τις μελλοντικές διαδικασίες S_λ με $\lambda \geq n$, οπότε το σύνολο περιέχει τουλάχιστον αυτές τις ευθείες. Σε ένα τρίγωνο του S_n υπάρχουν 3^n τρίγωνα που το κάθε ένα έχει τρεις πλευρές μήκους $(1/2)^n$, άρα το συνολικό μήκος είναι $3^n \cdot 3 \cdot (1/2)^n$ και

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty.$$

Οπότε έχει νόημα να λέμε ότι το συνολικό μήκος του συνόλου είναι άπειρο, άρα το μήκος δεν είναι και πολύ χρήσιμο για να μετρήσουμε το μέγεθος του S. Το μήκος όπως θα δούμε χρησιμεύει να μετρήσουμε μόνο σύνολα διάστασης 1, ένα τετράγωνο με το εσωτερικό του που έχει διάσταση 2, έχει άπειρο μήκος καθώς περιέχει άπειρα ευθύγραμμα τμήματα ξένα μεταξύ τους.

Όπως θα δούμε στην πορεία το σύνολο S έχει διάσταση μεγαλύτερη του 1 και μικρότερη του 2, αλλά δεν υπάρχει κανένας ακέραιος μεταξύ του 1 και 2. Οπότε ποια είναι η διάσταση του; Η απάντηση στο εμπόδιο αυτό ήρθε από τον Hausdorff το 1919, επιτρέποντας την διάσταση των συνόλων να είναι ένας αριθμός στο $\mathbb{R}$. Θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια πώς θα γίνει αυτό.

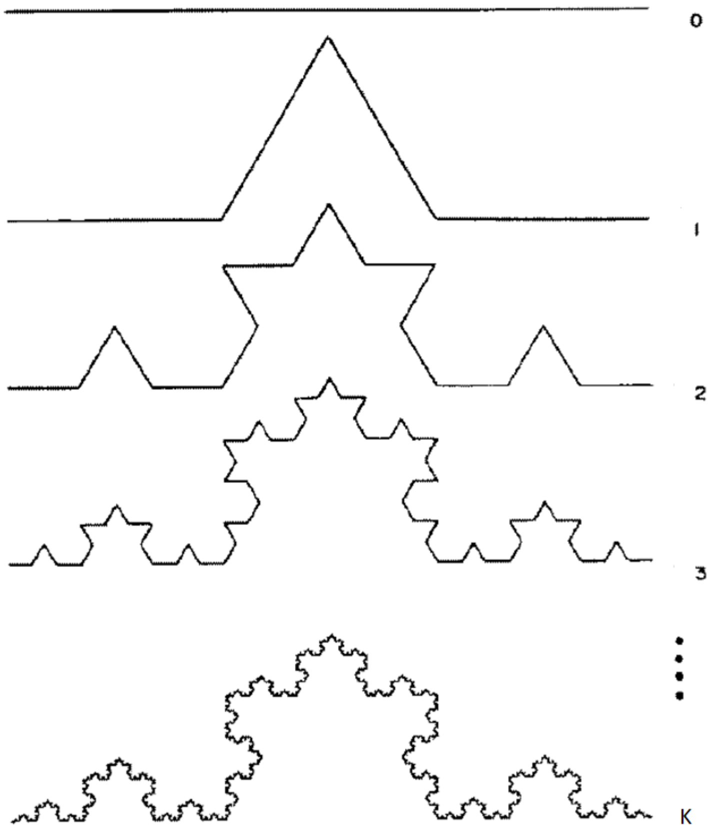
Η παρακάτω εικόνα δίνεται για να κατανοήσουμε καλύτερα το σύνολο S



Το σύνολο Sierpiński είναι $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

1.3 Το σύνολο von Koch

Άλλο ένα παράδειγμα ενός γνωστού fractal είναι το σύνολο von Koch. Ξεκινάμε με το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1] \subset \mathbb{R}$ το ονομάζουμε K_0, όπως και στο σύνολο Cantor έτσι και εδώ θα έχουμε τα αντίστοιχα τρεμας, τα οποία κατασκευάζονται ως εξής. Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$ στα τρία. Από αυτό αφαιρούμε το μεσαίο $[1/3,2/3]$, και στην θέση του κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, άρα η κάθε πλευρά έχει μήκος $1/3$. Ονομάζουμε αυτό το σύνολο K_1. Στην συνέχεια κάνουμε την ίδια διαδικασία για κάθε ένα από τα εναπομείναντα ευθύγραμμα τμήμα δηλαδή για το σύνολο K_{n-1} αφαιρούμε τα μέσα εν-τρίτα των εναπομείναντων ευθύγραμμων τμημάτων και καταλήγουμε τελικά να έχουμε κατασκευάσει το σύνολο K_n. Η παρακάτω εικόνα δίνετε για να κατανοήσουμε καλύτερα το σύνολο.



Το σύνολο von Koch ή καμπύλη von Koch.

Τελικά ονομάζουμε σύνολο von Koch ή καμπύλη von Koch το «όριο»

$$K = \lim_{n \to \infty} K_n.$$

Το παραπάνω όριο υπάρχει λόγω της απόστασης Hausdorff.

Οφείλουμε να κάνουμε κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις, το συνολο von Koch έχει σε γενικές γραμμές όμοια χαρακτηριστικά με το σύνολο

Cantor που προαναφέραμε. Κατασκευάστηκε από τέσσερα τέταρτα το κάθε ένα ίδιο με το αρχικό αλλά με κλίμακα 1/3.

Ας προσπαθήσουμε να μετρήσουμε το μήκος της καμπύλης, ξέρουμε ότι στο K_1 έχουμε 4 διαστήματα μήκους 1/3 το κάθε ένα άρα το K_1 έχει μήκος 4/3, το K_2 έχει 16 διαστήματα μήκους 1/9 αρα το μήκος για το K_2 είναι $16/9 = (4/3)^2$ με τον ίδιο τρόπο για το σύνολο K_n έχουμε 4^n ευθύγραμμα τμήματα μήκους $(1/3)^n$ αρα $(4/3)^n$, οπότε παίρνοντας όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

Δηλαδή το μήκος του συνόλου von Koch είναι άπειρο, επίσης ως καμπύλη στο επίπεδο ξέρουμε ότι έχει εμβαδόν μηδέν, άρα ούτε το μήκος ούτε το εμβαδόν είναι κατάλληλο για την μέτρηση του μεγέθους αυτού του συνόλου.

Κεφάλαιο 2

2. Θεωρία Μέτρου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε τα προαπαιτούμενα από την θεωρία μέτρου που απαιτούνται για την κατανόηση της διάστασης Hausdorff. Η θεωρία μέτρου θα είναι επίσης απαραίτητη σε πολλές αποδείξεις που θα σχετίζονται με την διάσταση Fractal.

Ο λόγος για τον οποίο ξεκινάμε με τη θεωρία μέτρου είναι γιατί θέλουμε να μετρήσουμε το μέγεθος των Fractal συνόλων. Η προσπάθεια που έγινε στο κεφάλαιο 1 όπως είδαμε ήταν άκαρπη καθώς με απλές μεθόδους δεν μπορέσαμε να πάρουμε κατανοητά αποτελέσματα για το μέγεθος αυτών των συνόλων. Για την αντιμετώπιση αυτής της αδυναμίας θα εισάγουμε το μέτρο Hausdorff

Για να γίνει όμως κατανοείτο το μέτρο Hausdorff πρέπει να ξεκινήσουμε αρχικά με το μέτρο Lebesgue.

2.1 Μέτρο Lebesgue.

Το μήκος ενός εκ των διαστημάτων

$$(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$$

είναι $b-a$ όπου $\{a,b\}\in\mathbb{R}$ και $a<b$. Το μήκος του εκφυλισμένου διαστήματος $[a,a]=a$ ειναι 0, το μήκος του κενού συνόλου $\varnothing$ είναι και αυτό 0. Το μήκος ενός μη-φραγμένου διαστήματος

$$(a,\infty),(-\infty,b],[a,\infty),(-\infty,\infty),(-\infty,b)$$

είναι ∞. Αυτό μας αναγκάζει να κάνουμε την σύμβαση ότι θα μπορούμε να κάνουμε πράξεις και με τα σύμβολα $\{-\infty,\infty\}$. Δεν είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά θα βοηθήσουν σε υπολογισμούς που θα γίνουν από πράξεις με πραγματικούς αριθμούς. Οι περισσότερες από τις συμβάσεις αυτές είναι λογικές.

Μερικά παραδείγματα παραθέτονται εδώ:

i Αν $a\in\mathbb{R}$ τότε $-\infty<a<\infty$.

ii Αν $a\in\mathbb{R}$ τοτε $a+\infty=\infty$ καί $a-\infty=-\infty$.Επίσης $\infty+\infty=\infty$ καί $-\infty-\infty=-\infty$, ώμος η πράξη $\infty-\infty$ δεν ορίζετε, είναι όπως λέμε απροσδιοριστία.

iii Αν $0<a\in\mathbb{R}$ τότε $a\cdot\infty=\infty$ καί $a\cdot(-\infty)=-\infty$. Αν $0>a\in\mathbb{R}$ τότε $a\cdot\infty=-\infty$ καί $a\cdot(-\infty)=\infty$.

2.1.1 Λήμμα. *Ας θεωρήσουμε το κλειστό διάστημα $[c, d]$ να καλύπτεται από μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών συνόλων (a_i, b_i):*

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i)$$

Τότε

$$|d - c| < \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$$

Απόδειξη. Αρχικά, λόγω του ότι το διάστημα $[c, d]$ είναι συμπαγές έχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη για κάθε ανοικτή κάλυψη του

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι όταν αυτό ισχύει τότε

$$|d - c| < \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

Αν το $n = 1$, τότε $[c, d] \subseteq (a_1, b_1)$, οπότε $a_1 < c$ καί $d < b_1$. Άρα $(d - c) < (b_1 - a_1)$.

Έστω τώρα $n \geq 2$, καί έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n - 1$ πλήθος ανοικτών καλύψεων .

Υποθέτουμε ότι:

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

Αν κάποια διαστήματα τις μορφής (a_i, b_i) είναι ξένα με το κλειστό διάστημα $[c, d]$, θα πρέπει να παραληφθούν από την κάλυψη, τότε έχουμε μια κάλυψη του $[c, d]$, ανοικτών συνόλων πλήθους $n - 1$ το πολύ, οπότε θα είχαμε τελειώσει με την διαδικασία της επαγωγής.

Για να αποφευχθεί αυτό υποθέτουμε ότι $(a_i, b_i) \bigcap [c, d] \neq \varnothing$ για κάθε i. Μεταξύ όλων τών αριστερών τελευταίων σημείων a_i, υπάρχει ένα που δεν είναι μεγαλύτερο από τα άλλα. Αναριθμώντας τα διαστήματα ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι το a_1. Καθώς το c καλύπτεται, πρέπει να έχουμε ότι $a_1 < c$.

Τώρα αν $b_1 > d$, έχουμε ότι $(d - c) < b_1 - a_1 \leq \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, άρα έχουμε τελειώσει. Οπότε υποθέτουμε $b_1 \leq d$. Καθώς (a_1, b_1) τέμνει το $[c, d]$, έχουμε ότι $b_1 > c$. Οπότε $b_1 \in [c, d]$. Όμως τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα (a_i, b_i) καλύπτουν το σημείο b_1. Αναριθμώντας τα διαστήματα θα υποθέσουμε ότι αυτό είναι το (a_2, b_2). Τελικά έχουμε μια κάλυψη του $[c, d]$ από $n - 1$ διαστήματα:

$$[c, d] \subseteq (a_1, b_1) \cup \bigcup_{i=3}^{n}(a_i, b_i).$$

Οπότε επαγωγικά καταλήγουμε,

$$(d - c) < (b_2 - a_1) + \sum_{i=3}^{n}(b_i - a_i) \leq (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) + \sum_{i=3}^{n}(b_i - a_i)$$

Και έτσι ολοκληρώσαμε επαγωγικά την απόδειξη.

□

Μια χρήσιμη γενίκευση της έννοιας του μήκους των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το μέτρο Lebesgue. Αυτό θα οριστεί κατά στάδια. Στον ορισμό θα χρησιμοποιήσουμε ήμι-ανοικτά σύνολα της μορφής $[a, b)$. Επίσης θα χρησιμοποιηθούν διαστήματα και των άλλων μορφών, αλλά αυτά θα χρησιμοποιηθούν λόγο της βολικής τους ιδιότητας:

2.1.2 Λήμμα. *Έστω $a < b$ με $a, b \in \mathbb{R}$, και $\varepsilon > 0$. Τότε $[a, b)$ μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένη ένωση ξένων διαστημάτων της μορφής:*

$$[a, b) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i),$$

με $(b - a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ και $(b_i - a_i) \leq \varepsilon, \forall i$ πεπερασμένο.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $(b-a)/n \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Έστω $b_i = a + i(b - a)/n$ για $0 \leq i \leq n$, και $a_i = b_{i-1}$

□

Άρα είδαμε εδώ ότι κάθε διάστημα της μορφής $[a, b)$ μπορούμε να το γράφουμε σαν ένωση οσοδήποτε μικρών διαστημάτων θέλουμε.

Τα εξωτερικά μέτρα επινοήθηκαν από τον Καραθεοδωρή και παρέχουν μια χρήσιμη μέθοδο κατασκευής μέτρων, την οποία και θα αναφέρουμε σε επόμενη ενότητα.

Είμαστε έτοιμοι τώρα να ορίσουμε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του A λαμβάνετε καλύπτοντας το σύνολο A με αριθμήσιμα ήμι-ανοικτά διαστήματα τέτοια ώστε να είναι όσο το δυνατών μικρότερα. Τότε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue είναι:*

$$\mu^*(A) = inf \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n).$$

Όπου το infimum είναι πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες οικογένειες ήμι-ανοικτών διαστημάτων $\{[a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιες ώστε: $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n)$ και $(b_n - a_n) \leq \varepsilon$.

Παρακάτω θα κάνουμε κάποιες εφαρμογές του ορισμού σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ για να δούμε ότι ο ορισμός δεν είναι τετριμμένος.

2.1.3 Θεώρημα. *Αν A είναι ένα διάστημα τότε το $\mu^*(A)$ είναι το μήκος του A.*

Απόδειξη. Έστω $A = [a, b]$, όπου $a < b$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Αρχικά, αν $\varepsilon > 0$, τότε το διάστημα $[a, b+\varepsilon)$ καλύπτει το σύνολο A οπότε $\mu^*(A) \leq (b - a + \varepsilon)$. Λόγω του ότι ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(A) \leq (b - a).$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i)$. Έστω $\varepsilon > 0$, συμβολίζουμε με $a'_i = a_i - \varepsilon/2^i$. Τότε $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a'_i, b_i)$. Από το λήμμα έχουμε οτι

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a'_i) - \varepsilon > (b - a) - \varepsilon.$$

Λόγω του ότι αυτό ισχύει $\forall\varepsilon > 0$ έχουμε $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \geq (b - a)$. Άρα

$$\mu^*(A) \geq (b - a)$$

και τελικά

$$\mu^*(A) = (b - a).$$

Στην συνέχεια θεωρούμε $A = (a, b)$. Τότε το

$$\mu^*(A) \leq \mu^*([a, b]) = b - a.$$

Από την άλλη μεριά

$$\mu^*(A) \geq \mu^*([a + \varepsilon, b - \varepsilon]) = b - a - 2\varepsilon$$

λόγω όμως του ότι αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mu^*(A) \geq b - a$ άρα τελικα

$$\mu^*((a, b)) = b - a.$$

Όμοια κάνουμε και για τα εξής δυο διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$. Αν $A = [a, \infty)$, τότε $[a, a+t] \subseteq A, \forall t > 0$ και τελικά $\mu^*(A) \geq t$, λόγω όμως του ότι ισχύει και για κάθε $t > 0$ άρα και για $t \to \infty$ τότε $\mu^*(A) \to \infty$. Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και για τα άλλα άπειρα διαστήματα.

$\square$

Παρακάτω παραθέτουμε μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue.

2.1.4 Θεώρημα. *(i)* $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \forall A_n \in \mathbb{R}$

Απόδειξη. Για το (i), ξέρουμε ότι $\varnothing \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, \varepsilon/2^n)$, οπότε και για το εξωτερικό μέτρο έχουμε

$$\mu^*(\varnothing) \leq \varepsilon$$

λόγω του ότι ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Για το (ii) παρατηρήστε ότι αν έχουμε μια κάλυψη για το B είναι επίσης και κάλυψη του A. Άρα αν $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_i$ κάλυψη του B τότε

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n)$$

Για το (ii), αν $\mu^*(A_n) = \infty$για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, η ανισότητα ισχύει προφανώς. Έστω τώρα ότι $\mu^*(A_n) \leq \infty, \forall n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n επιλέγουμε μια αριθμήσιμη κάλυψη D_n του A_n από ημι-ανοικτά διαστήματα ώστε:

$$\sum_{D\in D_n} \mu^*(D) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τώρα θέτουμε $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη της ένωσης $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Οπότε έχουμε:

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{D\in K} \mu^*(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{D\in D_n} \mu^*(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Καθώς το $\varepsilon > 0$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, παίρνουμε:

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

□

Γενικά η ανισότητα στην (iii) δεν γίνετε ισότητα, ακόμα και αν τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχουν σύνολα ξένα μεταξύ τους που για το εξωτερικό μέτρο Lebesgue αυτών δεν ισχύει η ισότητα. Παρόλο αυτά έχουμε ισότητα σε κάποιες περιπτώσεις. Η απλούστερη δίνεται παρακάτω.

2.1.5 Θεώρημα. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $d(A,B) > 0$.*

Τότε $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ όπου $d(A,B) = inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.4, (iii) ξέρουμε ότι

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

ισχύει γενικά, άρα την μια κατεύθυνση την έχουμε.

Θα δείξουμε ότι $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Έστω $\varepsilon = d(A,B)/2$ και $A \cup B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n)$, όπου $b_n - a_n \leq \varepsilon, \forall n$. Τότε κάθε διάστημα $[a_n, b_n)$ τέμνει το πολύ ένα από τα δυο σύνολα A, B

άρα η κάλυψη $K = \{[a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ μπορεί να γράφει σαν μια ένωση δυο ξένων οικογενειών $K = K_1 \cup K_2$ όπου K_1 καλύπτει το A και K_2 καλύπτει το B.

Άρα έχουμε

$$\mu^*(A) \leq \sum_{D \in K_1} \mu^*(D)$$

καί

$$\mu^*(B) \leq \sum_{D \in K_2} \mu^*(D)$$

Οπότε τελικά

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \sum_{D \in K_1} \mu^*(D) + \sum_{D \in K_2} \mu^*(D) = \sum_{D \in K} \mu^*(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$$

Άρα

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

οποτε ισχύει η ισότητα

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

□

2.1.1 Πρόταση. *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ξένα και συμπαγή τότε έχουμε*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Απόδειξη. Αν επιλέξουμε ένα κλειστό διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και εφαρμόσουμε το Θεώρημα (2.1.5) έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. □

2.1.6 Θεώρημα. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U\}$, όπου U ανοικτό.*

Απόδειξη. Γενικά ξέρουμε ότι $\mu^*(A) \leq inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U\}$. Άρα πρέπει να δείξουμε την αντίθετη ανισότητα.

Αν $\mu^*(A) = \infty$, ισχύει τετριμμένα. Έστω ότι $\mu^*(A) < \infty$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει κάλυψη $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n)$ του A με $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon/2^n$. Το σύνολο $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n - \varepsilon/2^{(n+1)}, b_n)$ είναι ανοικτό και $A \subseteq U$ επίσης

$$\mu^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + \varepsilon/2^n \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Άρα αφού ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(A) \geq inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U\}$$

τελικά

$$\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U\}.$$

□

Ήρθε η ώρα να αναφέρουμε για ποιο λόγο το $\mu^*(A)$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

Το $\mu^*(A)$ ενός $A \subseteq \mathbb{R}$, προσδιορίζετε προσεγγίζοντας το σύνολο A από έξω με ανοικτά σύνολα που τα ονομάσαμε καλύψεις, αυτός είναι ο λόγος που το $\mu^*(A)$ λέγετε εξωτερικό.

Υπάρχει όμως και έναν μέτρο που προσδιορίζετε προσεγγίζοντας το σύνολο A από μέσα. Αυτό είναι το εσωτερικό μέτρο, μόνο που τώρα θα χρησιμοποιούμε μόνο συμπαγή σύνολα. Ο ορισμός αυτού δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του A είναι :*

$$\mu_*(A) = sup\{\mu^*(K) : K \subseteq A\}$$

όπου K συμπαγή σύνολο.

Θέλουμε ένα επιχείρημα όμως για να δούμε ότι ο ορισμός έχει ενδιαφέρον.

2.1.7 Θεώρημα. *Αν A είναι ένα διάστημα, τότε το $\mu_*(A)$ είναι το μήκος του A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση ενός ανοικτού διαστήματος $A = (a, d)$. Όλα τα είδη διαστημάτων μπορούν να αποδειχθούν με όμοιο τρόπο με αυτό, όπως σε παλιότερη απόδειξη.

Αν $K \subseteq A$ συμπαγές, τότε το K για κάθε ανοικτή κάλυψή του έχει πεπερασμένο υποκάλυμα. Στην περίπτωση μας είναι το A οπότε, $\mu^*(K) \leq (b - a)$. Επομένως $\mu_*(A) \leq (b - a)$.

Από την άλλη μεριά, αν $\varepsilon > 0$, τότε το σύνολο $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ είναι συμπαγές, οπότε $\mu_*(A) \geq \mu^*([a + \varepsilon, b - \varepsilon]) = (b - a - 2\varepsilon)$. Λόγω οτι ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε $\mu_*(A) \geq (b - a)$.

Άρα
$$\mu_*(A) = (b - a).$$

□

2.1.2 Πρόταση. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, καί $K \subseteq A$ συμπαγές, τοτε απο το Θεώρημα $(2.1.4)(ii)$ ξέρουμε
$$\mu^*(K) \leq \mu^*(A).$$

Από τον ορισμό του εσωτερικού μέτρου ξέρουμε:

$$\mu_*(A) = sup\{\mu^*(K) : K \subseteq A\}$$

άρα

$$sup\{\mu^*(K) : K \subseteq A\} \leq \mu^*(A)$$

οπότε

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

□

Γενικά δεν ισχύει η ισότητα $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όταν ισχύει, λέμε ότι το σύνολο A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Ορισμός 2.1.3. *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu^*(A) < \infty$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο όταν*

$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$

Αν $\mu^*(A) = \infty$ τότε λέμε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν το $A \cap [-n, n]$ είναι Lebesgue μετρήσιμο $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, θα γράφουμε $\mu(A)$ για την κοινή τιμή των $\mu_*(A), \mu^*(A)$ και το λέμε απλά μέτρο Lebesgue του A. Θα λέμε απλά ότι το σύνολο A είναι μετρήσιμο, όταν εννοούμε ότι είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε και τον ισοδύναμο ορισμό του Καραθεοδωρή. Πρώτα όμως πρέπει να δούμε κάποιες ιδιότητες των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, ή όπως απλά θα λέμε μετρήσιμων σύνολων.

2.1.8 Θεώρημα. *Έστω $A_1, A_2, A_3...$ να είναι ξένα και μετρήσιμα σύνολα. Τότε το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο, και*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου έχουμε $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \infty$ καθώς στην γενική περίπτωση θα εφαρμόζαμε την σχέση $A_n \cap [-m, m], \forall m \in \mathbb{N}$. Απο το Θεώρημα (2.1.4) ξέρουμε $\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$, για κάθε n επιλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο $K_n \subseteq A_n$ με $\mu^*(K_n) \geq \mu_*(A_n) - \varepsilon/2^n$. Καθώς A_n μετρήσιμα,

$$\mu^*(K_n) \geq \mu^*(A_n) - \varepsilon/2^n.$$

Τώρα επειδή K_n είναι ξένα οπότε από την Πρόταση (1) για το συμπαγές σύνολο $L_m = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_m$ ισχύει $\mu^*(L_m) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) + ... + \mu^*(K_m)$. Επομένως $\mu_*(\bigcup_n A_n) \geq \sum_{n=1}^{m} \mu^*(K_n)$. Αυτό όμως ισχύει $\forall m$ άρα επιλέγω $m \longrightarrow \infty$ οπότε

$$\mu_*\left(\bigcup_n A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon$$

Λόγω του ότι ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ παίρνουμε:

$$\mu_*\left(\bigcup_n A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Άρα $\mu^*(\bigcup_n A_n) = \mu_*(\bigcup_n A_n)$, και $\bigcup_{n\mathbb{N}} A_n$ είναι μετρήσιμο και

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

□

2.1.9 Θεώρημα. *Τα συμπαγή, κλειστά, ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.*

Απόδειξη. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές. Τότε για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $K \subseteq [-n, n]$ οπότε $\mu^*(K) < \infty$. Ξέρουμε ότι $K \subseteq K$ και K συμπαγές τότε $\mu_*(K) \geq \mu^*(K)$. Ξέροντας και την τετριμμένη περίπτωση $\mu_*(K) \leq \mu^*(K)$ από προηγούμενη Πρόταση 2. Έχουμε τελικά

$$\mu_*(K) = \mu^*(K).$$

Έστω $F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τομή $F \cap [-n, n] = F$ είναι συμπαγές, και άρα μετρήσιμο.

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό. Είναι αρκετό να δείξουμε την περίπτωση $\mu^*(U) < \infty$. Για κάθε $x \in U$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I τέτοιο ώστε, $x \in I \subseteq U$. Από την ιδιότητα Lindelöf, το $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, δηλαδή το U απαρτίζεται από τέτοια αριθμήσιμα στο πλήθος διαστήματα I όπου $x \in I$. Τώρα κάθε σύνολο $I_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} I_j$ είναι μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων (ανοικτών, κλειστών, ήμι-ανοικτών) οπότε το U είναι μια αριθμήσιμη ξένη ένωση διαστημάτων. Άρα το U είναι μετρήσιμο. $\square$

2.1.10 Θεώρημα. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.*

Τότε A είναι μετρήσιμο αν και μόνον αν, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U και ένα κλειστό σύνολο F τέτοια ώστε $F \subseteq A \subseteq U$ και

$$\mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι A είναι μετρήσιμο. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση $\mu(A) < \infty$. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό U ώστε $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon/2$. Υπάρχει όμως και ένα κλειστό F ώστε $F \subseteq A$ και $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon/2$. Το $U \setminus F$ είναι ανοικτό, και άρα μετρήσιμο, και F συμπαγές, άρα μετρήσιμο.

Το $\mu(U) = \mu(U \setminus F) + \mu(F)$. Καθώς οι όροι είναι πεπερασμένοι έχουμε

$$\mu(U \setminus F) = \mu(U) - \mu(F) < \mu(A) + \varepsilon/2 - \mu(A) + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Τώρα θεωρούμε την περίπτωση όπου $\mu(A) = \infty$. Όλα τα σύνολα τις μορφής $A \cap [-n, n]$, είναι μετρήσιμα άρα υπάρχουν ανοικτά σύνολα U_n με, $A \cap [-n, n] \subseteq U_n$ και συμπαγή σύνολα F_n ώστε $F_n \subseteq A \cap [-n, n]$ με $\mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+2}$.

Ορίζουμε $U'_n = U_n \cap ((-\infty, -n+1+\varepsilon/2^{n+2}) \cup (n-1-\varepsilon/2^{n+2}, \infty))$ και $F'_n = F_n \cap ([-n, -n+1] \cup [n-1, n])$ οπότε U'_n ανοικτό F'_n και

$$U'_n \supseteq A \cap ([-n, -n+1] \cup [n-1, n]) \supseteq F'_n$$

και
$$\mu(U'_n \setminus F'_n) < 3\varepsilon/2^{\nu+2} < \varepsilon/2^n.$$
Τώρα το σύνολο $U = \cup U'_n$ είναι ανοικτό, και το $F = \cup F'_n$ είναι κλειστό. Έχουμε $U \supseteq A \supseteq F$, και $U \setminus F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U'_n \setminus F'_n)$ οπότε
$$\mu(U \setminus F) \leq \sum \mu(U'_n \setminus F'_n) < \varepsilon.$$

Αντιστρόφως, υποθέστε ότι τα U, F υπάρχουν. Τότε ξέρουμε ότι αυτά (ως ανοικτά και κλειστά) είναι μετρήσιμα. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\mu^*(A) < \infty$. Τότε $\mu(F) < \infty$, και $\mu(U) \leq \mu(U \setminus F) + \mu(F) < \varepsilon + \mu(F) < \infty$. Ξέρουμε ότι
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(U) = \mu(U) < \mu(F) + \varepsilon = \mu_*(F) + \varepsilon \leq \mu_*(A) + \varepsilon.$$
Αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα
$$\mu^*(A) = \mu_*(A).$$
Άρα το A είναι μετρήσιμο.

Για την περίπτωση $\mu^*(A) = \infty$, έχουμε $U \cap (-n - \varepsilon, n + \varepsilon) \supseteq A \cap [-n, n] \supseteq F \cap [-n, n]$, και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία σε αυτό το σύνολο, χρησιμοποιώντας 3ε στην θέση του ε. $\square$

Καθώς είδαμε κάποιες βασικές ιδιότητες για το μέτρο Lebesgue ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου Cantor.

2.1.3 Πρόταση. *Το μέτρο Lebesgue του συνόλου Cantor είναι* 0.

Απόδειξη. Το σύνολο $C_n \supseteq C$ περιέχει 2^n ξένα διαστήματα μήκους $1/3^n$. Άρα $\mu(C) \leq 2^n 1/3^n$. Αυτό έχει όριο 0 άρα και $\mu(C) = 0$. $\square$

Οπότε ούτε με την χρήση του μέτρου Lebesgue δεν είναι εφικτό να υπολογίσουμε το μέγεθος του συνόλου Cantor. Παρ'όλα αυτά μας είναι χρήσιμο για τον ορισμό του μέτρου Hausdorff που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Παρακάτω παραθέτουμε τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, επίσης θα ορίσουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων συνόλων και θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια αυτή είναι μια *άλγεβρα* συνόλων.

Θα δείξουμε ότι δεν ισχύει μόνο αυτό αλλά κάτι ποιο ισχυρό ότι η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων είναι μια *σ-άλγεβρα*. Αυτά όλα βέβαια αφού ορίσουμε αρχικά τις παραπάνω έννοιες.

Ορισμός 2.1.4. *Ορίζουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων συνόλων να είναι το* $\mathbb{M}$. *Δηλαδή* $A \subseteq \mathbb{R}, A \in \mathbb{M}$ *αν και μόνον αν* $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Ορισμός 2.1.5 (*Άλγεβρα*)**.** *Μια συλλογή συνόλων* $\mathcal{F}$ *υποσυνόλων του συνόλου* $\mathcal{X}$ *λέγετε άλγεβρα στο* $\mathcal{X}$ *αν και μόνο αν:*

(i) $\varnothing, \mathcal{X} \in \mathcal{F}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{F}$, *τότε* $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Υπενθυμίζουμε ότι $A \cap B = X \setminus (A^c \cup B^c)$ και $A \setminus B = A \cap B^c$.Οπότε μια άλγεβρα είναι κλειστή κάτω από αυτές τις πράξεις.

Ορισμός 2.1.6 (*σ-Άλγεβρα*)**.** *Μια συλλογή συνόλων* $\mathcal{F}$ *υποσυνόλων του συνόλου* $\mathcal{X}$ *λέγετε σ-άλγεβρα στο* $\mathcal{X}$ *αν και μόνο αν:*

(i) $\varnothing, \mathcal{X} \in \mathcal{F}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Αν $A_1, A_2, A_3 ... \in \mathcal{F}$, *τότε* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

2.1.11 Θεώρημα. *(i)* $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathbb{M}$.

(ii) *Αν* $A \in \mathbb{M}$, *τότε* $A^c \in \mathbb{M}$

(iii) *Αν* $A, B \in \mathbb{M}$, *τότε* $(A \cup B), (A \cap B), (A \setminus B) \in \mathbb{M}$.

(iv) *Αν* $A_n \in \mathbb{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *τότε* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{M}$ *και* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{M}$.

Απόδειξη. Για το (i) ξέρουμε ότι $\mu^*(\varnothing) = 0$ και $\mathbb{R} \cap [-n, n]$ είναι μετρήσιμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Για το (ii), αν υπάρχουν F, U ώστε $F \subseteq A \subseteq U$, τότε $U^c \subseteq A^c \subseteq F^c$ και $F^c \setminus U^c = U \setminus F$

Για την τομή στο (iii) αν $F_1 \subseteq A \subseteq U_1$ και $F_2 \subseteq B \subseteq U_2$ τότε $F_1 \cap F_2 \subseteq A \cap B \subseteq U_1 \cap U_2$ και $U_1 \cap U_2 \setminus F_1 \cap F_2 \subseteq (U_1 \setminus F_1) \cup (U_2 \setminus F_2)$. Αυτό είναι αρκετό για να δείξουμε ότι η τομή είναι μετρήσιμο σύνολο. Τώρα για την $A \cup B = \mathbb{R} \setminus (A^c \cap B^c)$, άρα $A \cup B$ είναι μετρήσιμο. Επίσης και το $A \setminus B = A \cap B^c$ είναι μετρήσιμο.

Τελικά για το (iv) σημειώστε ότι από το (iii) έχουμε βρει ξένα μετρήσιμα σύνολα B_n με την ίδια ένωση όπως τα A_n, οπότε από το Θεώρημα (2.1.8) ξέρουμε ότι είναι μετρήσιμα. Για την τομή απλά παίρνουμε συμπληρώματα. Υπενθυμίζουμε ότι στο 4 έχουμε μόνο αριθμήσιμες τομές και ενώσεις. □

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι και το σύνολο $\mathbb{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα.

Μετρησιμότητα Καραθεοδωρή

Ο Καραθεοδωρή εισήγαγε έναν εναλλακτικό ορισμό της μετρησιμότητας ώστε να αποφεύγονται όλες οι παραπάνω δυσκολίες. Το μειονέκτημα αυτού του ορισμού είναι ότι δεν είναι τόσο προφανής, παρ' όλα αυτά έχει πολλά πλεονεκτήματα που θα φανερωθούν στην συνέχεια. Ξεκινάμε με τον ορισμό.

Ορισμός 2.1.7. *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμο κατά Καραθεοδωρή αν και μόνο αν*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$.

2.1.4 Πρόταση. *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο κατά Καραθεοδωρή αν και μόνο αν είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο κατά Lebesgue, και $E \subseteq \mathbb{R}$ δοκιμαστικό σύνολο. Η ανισότητα $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ ισχύει πάντα απο την υποπροσθετικότητα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο U και κλειστό σύνολο F τέτοια ώστε $F \subseteq A \subseteq U$ και $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Έστω ότι $E \subseteq V$ ανοικτό σύνολο. Τότε

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu(V \setminus F) + \mu(V \cap U)$$

$$\leq \mu(V \setminus U) + \mu(U \setminus F) + \mu(V \cap U) < \mu(V) + \varepsilon$$

Τώρα παίρνουμε infimum πάνω στο V και άρα έχουμε $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) < \mu^*(E) + \varepsilon$ λόγω ότι ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ παίρνουμε:

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) < \mu^*(E)$$

και άρα $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E)$. Άρα αποδείξαμε ότι το A είναι μετρήσιμο κατά Καραθεοδωρή.

Από την άλλη μεριά τώρα υποθέτουμε ότι το A είναι μετρήσιμο κατά Καραθεοδωρή και θα δείξουμε ότι είναι και κατά Lebesgue.

Έστω ότι $\mu^*(A) < \infty$, και $\varepsilon > 0$. Έστω ότι $U \supseteq A$ ώστε $\mu(U) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$\mu^*(U) = \mu^*(U \cap A) + \mu^*(U \setminus A)$$

Άρα $\mu^*(U\backslash A) < \varepsilon$. Άρα υπάρχει ανοικτό σύνολο $V \supseteq U\backslash A$ με $\mu(V) < \varepsilon$. Τότε $U \setminus V$ είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue, και $\mu(U \setminus V) > \mu(U) - \varepsilon$. Άρα υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq U \setminus V \subseteq A$ με $\mu(F) > \mu(U) - \varepsilon$. Οπότε $F \subseteq A \subseteq U$ και $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Άρα το A είναι μετρήσιμο κατα Lebesgue. □

Ορισμός 2.1.8. *Μια συνάρτηση $h : S \longrightarrow T$ λέγεται ομοιότητα αν και μόνον αν υπάρχει πραγματικός αριθμός r ώστε:*

$$d\left(h(x), h(y)\right) = rd(x, y)$$

$\forall x, y \in S$. Ο αριθμός r λέγεται αναλογία ομοιότητας.

2.1.12 Θεώρημα. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, και μια ομοιότητα*

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με αναλογία r. Τότε $f(A)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και

$$\mu(f(A)) = r\mu(A).$$

Απόδειξη. Φευγαλέα μιλώντας η ομοιότητα δεν επιτρέπει $r = 0$, έστω όμως ότι $r = 0$ τότε η περιοχή της f είναι ένα σημείο οπότε είναι και μετρήσιμο και ακόμα καλύτερα $\mu(f(A)) = 0$

Έστω τώρα $r > 0$. Θεωρούμε αρχικά το διάστημα $I = [a, b)$. Η εικόνα αυτού είναι ένα διάστημα της μορφής $[f(a), f(b))$ ή $(f(b), f(a)]$, με μήκος $|f(b) - f(a)| = r|b - a|$. Οπότε

$$\mu^*(f(I)) = r|b - a|.$$

Τώρα έστω $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}}[a_j, b_j)$ τότε $f(A) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f([a_j, b_j))$, οπότε

$$\mu^*(f(A)) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(f([a_j, b_j))) = r\sum_{j\in\mathbb{N}}(|b_j - a_j|)$$

άρα έχουμε

$$\mu^*(f(A)) \leq r\mu^*(A).$$

Αν εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο στην αντίστροφη εικόνα f^{-1} όπου είναι ομοιότητα με αναλογία $1/r$ τότε $\mu^*(f(A)) \geq r\mu^*(A)$, και τελικά έχουμε

$$\mu^*(f(A)) = r\mu^*(A).$$

Για την f ξέρουμε ότι είναι ομοιομορφισμός, άρα αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε ένα ανοικτό σύνολο η εικόνα του μέσω της f θα είναι ανοικτό. Αν έχουμε ένα κλειστό αντίστοιχα θα είναι κλειστό. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U και ένα κλειστό σύνολο F τέτοια ώστε $F \subseteq A \subseteq U$ και $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ Άρα έχουμε $f(F) \subseteq f(A) \subseteq f(U)$ και

$$\mu(f(U) \setminus f(F)) = \mu(f(U \setminus F)) < r\varepsilon$$

άρα και $f(A)$ ειναι μετρήσιμο. □

2.2 Μέθοδος I

Όπως είδαμε στο προηγούμενο μέρος ορίσαμε το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας σιωπηλά την έννοια του μήκους. Τι γίνεται όμως αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μήκος του $\mathbb{R}$ άλλα μια οποιαδήποτε συνάρτηση $c : A \longrightarrow [0, \infty]$;

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε μέτρα και τρόπους κατασκευής μέτρων με βάση τα παραπάνω.

2.2.1 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{X}$ σύνολο, και $\mathcal{D}$ να είναι σύνολο υποσυνόλων του $\mathcal{X}$. Τότε υπάρχει σύνολο $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ ώστε.*

(i) $\mathcal{F}$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$

(ii) $D \subseteq \mathcal{F}$

(iii) Αν $\mathcal{G}$ είναι μια οποιαδήποτε σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ με $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Λέμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{D}$, ή την σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{D}$.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η τομή οποιασδήποτε οικογένειας σ-αλγεβρών του $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα. Έστω $\mathcal{K}$ μια συλλογή σ-αλγεβρών, και έστω $B = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{K}} \mathcal{A}$ να είναι η τομή. Τότε $\varnothing \in \mathcal{A}, \forall \mathcal{A} \in \mathcal{K}$ άρα $\varnothing \in \mathcal{B}$. Όμοια $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$.

Αν $A \in \mathcal{B}$, τότε $A \in \mathcal{A}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{K}$, άρα $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ και άρα $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{B}$.

Αν $A_1, A_2, A_3 ... \in \mathcal{B}$ τότε κάθε $A_n \in \mathcal{A}, \forall \mathcal{A} \in \mathcal{K}$, άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ και άρα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$. Έστω $\mathcal{K}$ η συλλογή όλων των σ-αλγεβρών $\mathcal{G}$ στο $\mathcal{X}$ με $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$. Τότε η τομή $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{G}\in\mathcal{K}} \mathcal{G}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ όπως είδαμε πριν. Πιο συγκεκριμένα αν $\mathcal{G}$ είναι μια οποιαδήποτε σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ με $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$ τότε $\mathcal{G} \in \mathcal{K}$ και άρα $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. □

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$. Ένα μέτρο στο $\mathcal{F}$ είναι μια συνολοσυνάρτηση $\mathcal{M} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ ώστε:*

1. $\mathcal{M}(\varnothing) = 0$
2. *Αν $A_n \in \mathcal{F}$ είναι ξένη ακολουθία συνόλων, τότε*

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}\left(A_n\right).$$

Η δεύτερη σχέση λέγετε αριθμήσιμη προσθετικότητα.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $\mathcal{X}$ ένα σύνολο. Ένα εξωτερικό μέτρο στον $\mathcal{X}$ είναι μια συνάρτηση πάνω σε όλα τα υποσύνολα του $\mathcal{X}$, και συμβολίζετε με $\mathcal{M}^*$ με τιμές στους μη-αρνητικούς επεκταμένους πραγματικούς αριθμούς $\mathcal{M}^* : \mathcal{X} \longrightarrow [0, \infty]$, και ικανοποιεί τα έξεις:*

1. $\mathcal{M}^*(\varnothing) = 0$

2. *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $\mathcal{M}^*(A) \leq \mathcal{M}^*(B)$

3. $$\mathcal{M}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^*\left(A_n\right)$$

Η τρίτη σχέση λέγετε αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα.

Ορισμός εξωτερικών μέτρων.

Έχουμε φτάσει στον στόχο αυτής της ενότητας, ο οποίος είναι η εύρεση μιας μεθόδου για να μπορούμε να κατασκευάζουμε εξωτερικά μέτρα, η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

2.2.2 Θεώρημα (Μέθοδος I). *Έστω $\mathcal{X}$ ένα σύνολο, και $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που καλύπτει το $\mathcal{X}$. Έστω $\mathbf{c} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό εξωτερικό μέτρο ώστε:*

(i) $\mathcal{M}^*(A) \leq \mathbf{c}(A)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{A}$

(ii) Αν υπάρχει ένα άλλο εξωτερικό μέτρο $\mathcal{N}^*$ στον $\mathcal{X}$ με $\mathcal{N}^*(A) \leq \mathbf{c}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{N}^*(B) \leq \mathcal{M}^*(B)$ για κάθε $B \subseteq \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Η μοναδικότητα είναι εύκολη, καθώς αν υπάρχουν δυο εξωτερικά μέτρα $\mathcal{M}_1^*, \mathcal{M}_2^*$ που να ικανοποιούν την (i) και (ii) τότε $\mathcal{M}_1^* \leq \mathcal{M}_2^*$ και $\mathcal{M}_1^* \geq \mathcal{M}_2^*$ άρα $\mathcal{M}_1^* = \mathcal{M}_2^*$.

Για κάθε υποσύνολο B του $\mathcal{X}$, ορίζουμε

$$\mathcal{M}^*(B) = inf \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A)$$

όπου το infimum ορίζεται πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις $\mathcal{D}$ του B από σύνολα του $\mathcal{A}$.

Υπενθυμίζουμε ότι $inf(\varnothing) = \infty$, άρα αν δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη του B από στοιχειά του $\mathcal{A}$ τότε $\mathcal{M}^*(B) = \infty$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι το $\mathcal{M}^*$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι ένα εξωτερικό μέτρο. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}^*(\varnothing) = 0$, καθώς το κενό σύνολο καλύπτεται από την κενή κάλυψη και το κενό άθροισμα έχει τιμή 0.

Αν τώρα $B \subseteq C$, τότε κάθε κάλυψη του C είναι επίσης κάλυψη του B, και άρα $\mathcal{M}^*(B) \leq \mathcal{M}^*(C)$.

Έστω $B_1, B_2, B_3...$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\mathcal{M}^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^* \left(B_n \right).$$

Αν $\mathcal{M}^*(B_n) = \infty$ για κάποιο n τότε η ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{M}^*(B_n) \leq \infty$ για κάθε n. Έστω ἐ0. Για κάθε n, επιλέγουμε μια αριθμήσιμη κάλυψη $\mathcal{D}_n$ των B_n από σύνολα του $\mathcal{A}$ με

$$\sum_{A \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}(A) \leq \mathcal{M}^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Έστω $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$ να είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη της ένωσης $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Οπότε

$$\mathcal{M}^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A \in \mathcal{D}_n} \mathbf{c}(A)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^*(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^*(B_n) + \varepsilon.$$

Καθώς ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ επιλέγω $\varepsilon \to 0$. Τότε:

$$\mathcal{M}^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^*(B_n).$$

Άρα το $\mathcal{M}^*$ είναι εξωτερικό μέτρο.

Τώρα θα ελέγξουμε τις δυο απαιτήσεις του θεωρήματος. Για την (i), για κάθε $A \in \mathcal{A}$, το $\{A\}$ είναι κάλυψη του A, αρα

$$\mathcal{M}^*(A) \leq \sum_{B \in \{A\}} \mathbf{c}(B) = \mathbf{c}(A)$$

Για το (ii).

Έστω ότι $\mathcal{N}^*$ είναι ένα άλλο εξωτερικό μέτρο στον $\mathcal{X}$ με $\mathcal{N}^*(A) \leq \mathbf{c}(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε αριθμήσιμη κάλυψη $\mathcal{D}$ του συνόλου B από στοιχεία του $\mathcal{A}$ έχουμε:

$$\mathcal{N}^*(B) \leq \mathcal{N}^* \left(\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A \right) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathcal{N}^*(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(A)$$

Άρα $\mathcal{N}^*(B) \leq \mathcal{M}^*(B)$.

$\square$

Κατηγορίες μειωμένων καλύψεων .

Όταν ένα μέτρο ορίζεται με την χρήση της Μεθόδου I, θα βοηθούσε αν ξέραμε ότι η κάλυψη $\mathcal{D}$ στο I μπορεί να επιλεχτεί από την μικρότερη «μειωμένη» κλάση συνόλων.

2.2.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{X}$ να είναι ένα σύνολο, και $\mathbf{c}$ μια συνολοσυνάρτηση. Για μια συλλογή συνόλων $\mathcal{A}$, έστω το $\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}$ να είναι το εξωτερικό μέτρο που κατασκευάστηκε με την χρίση της Μεθόδου I χρησιμοποιώντας την κλάση συνόλων $\mathcal{A}$ και τον περιορισμό της $\mathbf{c}$ στην $\mathcal{A}$. Τότε:*

(i) *Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, τότε $\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}$.*

(ii) *Υποθέτουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $\mathbf{c}(B) \leq \mathbf{c}(A) + \varepsilon$. Τότε $\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}} \geq \mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}$.*

(iii) *Έστω $C > 0$ μια σταθερά, και υποθέτουμε ότι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $A \subseteq B$ και $\mathbf{c}(B) \leq C\mathbf{c}(A)$. Τότε $C\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}} \geq \mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}$.*

Απόδειξη. (i). Το εξωτερικό μέτρο $\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}$ είναι το μεγαλύτερο εξωτερικό μέτρο ώστε $\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq \mathbf{c}(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{B}$. Ώμος και το $\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}$ ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, άρα

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}.$$

(ii). Έστω $\varepsilon > 0$, και $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, A_3 ...\} \subseteq \mathcal{A}$ μια αριθμήσιμη κάλυψη ενός συνόλου E. Για κάθε A_j επιλέγω $B_j \in \mathcal{B}$ με $A_j \subseteq B_j$ και

$$\mathbf{c}(B_j) \leq \mathbf{c}(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Τότε $\mathcal{D}' = \{B_1, B_2, B_3 ...\}$ είναι επίσης μια κάλυψη του E και

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{c}(B_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{c}(A_j) + \varepsilon.$$

Παίρνουμε infimum πάνω σε όλες τις αριθμήσιμης καλύψεις $D \subsetneq A$ που καλύπτουν το E και έχουμε:

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq \mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}(E) + \varepsilon$$

Λόγω του ότι ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ επιλέγω $\varepsilon \to 0$ τότε

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq \mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}.$$

(iii). Έστω $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, A_3 ...\} \subseteq \mathcal{A}$ να είναι μία αριθμήσιμη κάλυψη του συνόλου E. Για κάθε A_j επιλέγω $B_j \in \mathcal{B}$ με $A_j \subseteq B_j$ και

$$\mathbf{c}(B_j) \leq C\mathbf{c}(A_j).$$

Τότε $\mathcal{D}' = \{B_1, B_2, B_3 ...\}$ είναι επίσης μια κάλυψη του E και

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(B_j) \leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(A_j).$$

Παίρνουμε infimum πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις $D \subsetneq A$ που καλύπτουν το E και έχουμε:

$$\mathcal{M}^*_{\mathcal{B}}(E) \leq C\mathcal{M}^*_{\mathcal{A}}(E).$$

□

Όταν η συνθήκη (ii), ισχύει, λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι *κατηγορία μειωμένης καλύψεως* για το $\mathcal{M}^*$. Όταν ισχύει η συνθήκη (iii), λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι *κατηγορία μειωμένης καλύψεως*, με γεννήτορα C για το $\mathcal{M}^*$.

Εδώ παραθέτουμε ένα παράδειγμα του παραπάνω θεωρήματος. Το μέτρο Lebesgue ορίστηκε χρησιμοποιώντας διαστήματα της μορφής $[a, b)$. Εδώ θα δείξουμε ότι τα ημι-δυαδικά διαστήματα που έχουν την μορφή $[(k-1)/2^n, (k+1)/2^n)$, οπού $n, k \in \mathbb{Z}$, είναι μια μειωμένη κλάση καλύψεων με γεννήτορα 4 για το μέτρο Lebesgue.

Όντος αν $a < b$, και n να είναι ένας ακέραιος με $1/2^{n+1} < |b-a| < 1/2^n$ και k ο ακέραιος με $k-1 < a/2^n < k$, τότε $[a,b) \subseteq [(k-1)/2^n, (k+1)/2^n)$ και

$$|(k+1)/2^n - (k-1)/2^n| < 4|b-a|$$

Το δυαδικό δίκτυο είναι η κλάση διαστημάτων της μορφής $[k/2^n, (k+1)/2^n)$. Δεν είναι μειωμένη κλάση κάλυψης από μόνη της. Έστω $\mathcal{R}_n$ να είναι η πεπερασμένη ξένη ένωση διαστημάτων της μορφής $[k/2^n, (k+1)/2^n)$. Δηλαδή $\mathcal{R} = \bigcup_n \mathcal{R}_n$.

2.2.2 Πρόταση. *Χρησιμοποιώντας την συνολοσυνάρτηση* $\mathbf{c} : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ *που ορίζεται από* $\mathbf{c}(E) = \mu(E)$ *τοτε το* $\mathcal{R}$ *είναι μειωμένη κλάση κάλυψης για το μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$ και $\varepsilon > 0$. Έστω ένα $n \in \mathbb{N}$ να είναι τόσο μεγάλο ώστε $1/2^n < \varepsilon/2$. Έστω $j \in \mathbb{Z}$ ώστε $j \leq 2^n a < j+1$, και $m \geq j$ ώστε $m \leq 2^n b < m+1$. Τότε:

$$[a,b) \subseteq E := \bigcup_{k=j}^{m} [k/2^n, (k+1)/2^n)$$

και άρα

$$\mu(E) - |b-a| \leq \mu\left(\left[\frac{j}{2^n}, a\right)\right) + \mu\left(\left[b, \frac{m+1}{2^n}\right)\right) \leq \frac{2}{2^n} < \varepsilon.$$

□

Μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός 2.2.3. *Έστω* $\mathcal{M}^*$ *να είναι ένα εξωτερικό μέτρο σε ένα σύνολο* $\mathcal{X}$. *Αν* $A \subseteq \mathcal{X}$ *τότε το* A *λέγεται* $\mathcal{M}^*$*-μετρήσιμο αν και μόνο αν*

$$\mathcal{M}^*(E) = \mathcal{M}^*(E \cap A) + \mathcal{M}^*(E \setminus A)$$

για κάθε $E \subseteq \mathcal{X}$.

2.2.3 Θεώρημα. *Η συλλογή $\mathcal{F}$ των $\mathcal{M}^*$-μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$, και $\mathcal{M}^*$ ειναι αριθμήσιμα προσθετικό στην $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Αρχικά, $\varnothing \in \mathcal{F}$ καθώς για καθε $E \subseteq \mathcal{X}$, έχουμε

$$\mathcal{M}^*(E) = \mathcal{M}^*(E \cap \varnothing) + \mathcal{M}^*(E \setminus \varnothing) = \mathcal{M}^*(\varnothing) + \mathcal{M}^*(E) = \mathcal{M}^*(E)$$

Έστω $A \in \mathcal{F}$ τότε θα δείξουμε ότι $A^c \in \mathcal{F}$. Ξέρουμε ότι $A = (A^c)^c$. Οπότε

$$\mathcal{M}^*(E \cap A^c) + \mathcal{M}^*\left(E \cap (A^c)^c\right) = \mathcal{M}^*(E \cap A^c) + \mathcal{M}^*(E \cap A) = \mathcal{M}^*(E)$$

Υποθέτουμε ότι $A_j \in \mathcal{F}$ για $j = 1, 2, 3...$ και $E \subseteq \mathcal{X}$, τότε:

$$\begin{gathered} \mathcal{M}^*(E) = \mathcal{M}^*(E \cap A_1) + \mathcal{M}^*(E \setminus A_1) \\ = \mathcal{M}^*(E \cap A_1) + \mathcal{M}^*\left((E \setminus A_1) \cap A_2\right) + \mathcal{M}^*\left(E \setminus (A_1 \cup A_2)\right) \\ = ... \\ = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{M}^*\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mathcal{M}^*\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right). \end{gathered}$$

Άρα

$$\mathcal{M}^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \mathcal{M}^*\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mathcal{M}^*\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right),$$

έστω $k \to \infty$

$$\mathcal{M}^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \mathcal{M}^*\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mathcal{M}^*\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right).$$

Αλλά

$$E \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right) \cap A_j \right),$$

$$\mathcal{M}^*(E) \leq \mathcal{M}^* \left(E \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + \mathcal{M}^* \left(E \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}^* \left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right) \cap A_j \right) + \mathcal{M}^* \left(E \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) \leq \mathcal{M}^*(E).$$

Άρα η $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα.

Τώρα αν στον προηγούμενο υπολογισμό τα $A_j \in \mathcal{F}$ είναι ξένα θέτουμε $E = \cup A_j$ και έχουμε:

$$\mathcal{M}^* \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}^* \left(A_j \right).$$

Άρα το $\mathcal{M}^*$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό στο $\mathcal{F}$. □

Θα γράφουμε απλά $\mathcal{M}$ για τον περιορισμό του $\mathcal{M}^*$ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ των μετρήσιμων συνόλων.

2.3 Μετρικό Εξωτερικό Μέτρο.

Εδώ θα δούμε την εξάρτηση που έχει ένα οποιοδήποτε εξωτερικό μέτρο, όπως ορίστηκε από την Μέθοδο I, με την συνολοσυνάρτηση του που θα του έχουμε ορίσει. Δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις ένα σύνολο ως προς κάποιο μέτρο, με μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη, να είναι μετρήσιμο ενώ με κάποια άλλη συνολοσυνάρτηση να μην είναι.

Θεωρούμε το παρακάτω παράδειγμα ενός μέτρου που θα ορίσουμε με την Μέθοδο I στο $\mathbb{R}$. Έστω μια συλλογή $\mathcal{A} = \{[a,b) : a < b\}$ των ημι-ανοικτών διαστημάτων και την συνολοσυνάρτηση που την ορίζουμε να είναι $\mathbf{c} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ με $\mathbf{c}([a, b)) = \sqrt{b-a}$. Θα δείξουμε ότι το $A = [0, 1]$ δεν είναι μετρήσιμο ως προς το παραπάνω μέτρο.

Θεωρήστε το μέτρο του $[0, 1)$. Το διάστημα $\{[0, 1)\}$ καλύπτει το $[0, 1)$, άρα $\mathcal{M}^*([0, 1)) \leq \mathbf{c}([a, b)) = 1$. Αν $[0, 1) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i)$, τότε από αυτά που ξέρουμε από το μέτρο Lebesgue πρέπει να έχουμε $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \geq 1$. Όντως

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{(b_i - a_i)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{(b_i - a_i)} \right)^2 + 2 \sum_{i<j} \sqrt{(b_i - a_i)} \sqrt{(b_j - a_j)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \geq 1.$$

Άρα $\mathcal{M}^*([0, 1)) \geq 1$ τελικά $\mathcal{M}^*([0, 1)) = 1$. Όμοια $\mathcal{M}^*([-1, 0)) = 1$. Το διάστημα $\{[-1, 1)\}$ καλύπτει το $[-1, 1)$. Οπότε όπως πριν έχουμε

$$\mathcal{M}^*([-1, 1)) \leq \mathbf{c}([-1, 1)) = \sqrt{2}.$$

Άρα αν $A = [0, 1]$ και $E = [-1, 1)$, έχουμε

$$\mathcal{M}^*(E \cap A) + \mathcal{M}^*(E \setminus A) = 1 + 1 = 2 > \sqrt{2} \geq \mathcal{M}^*(E).$$

Άρα το $A = [0, 1]$ δεν είναι μετρήσιμο ως προς το παραπάνω μέτρο.

Είναι γενικά επιθυμητό τα σύνολα στα οποία δουλεύουμε να είναι μετρήσιμα. Όταν μιλάμε για υποσύνολα ενός μετρικού χώρου συχνά εννοούμε ανοικτά, κλειστά ή σύνολα τα οποία κατασκευάζονται απλά από ανοικτά ή κλειστά. Γενικά τα σύνολα αυτα είναι Borel σύνολα.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος και $\mathcal{O}$ η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων. Αν $\sigma(\mathcal{O})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που δημιουργείται από τα ανοικτά σύνολα τότε ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ λέγεται Borel αν $\mathcal{B} \in \sigma(\mathcal{O})$.*

Ορισμός 2.3.2. *Δυο σύνολα* $A, B \subseteq \mathcal{X}$ *είναι θετικά διαχωρισμένα αν και μόνον αν* $dist(A,B) > 0$. *Με* $dist(A,B) = inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$. *Έστω* $\mathcal{M}^*$ *ένα εξωτερικό μέτρο στο μετρικό χώρο* $(\mathcal{X}, d)$. *Λέμε ότι* $\mathcal{M}^*$ *είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο αν και μόνον αν*

$$\mathcal{M}^*(A \cup B) = \mathcal{M}^*(A) + \mathcal{M}^*(B)$$

για κάθε $A, B \subseteq \mathcal{X}$ *με θετική απόσταση. Αν έχουμε τον περιορισμό του* $\mathcal{M}^*$ *στα μετρήσιμα σύνολα τότε λέμε ότι το* $\mathcal{M}$ *είναι απλά μετρικό μέτρο.*

2.3.1 Λήμμα. *Έστω* $\mathcal{M}^*$ *είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο στον* $(\mathcal{X}, d)$. *Έστω* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ *και* $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. *Με* $dist(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ *για κάθε* j. *Τότε*

$$\mathcal{M}^*(A) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j).$$

Απόδειξη. Για κάθε j έχουμε $\mathcal{M}^*(A) \geq \mathcal{M}^*(A_j)$, άρα $\mathcal{M}^*(A) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j)$. Αν $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j) = \infty$ τότε η ισότητα είναι σωστή.

Έστω $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j) < \infty$. Με $B_1 = A_1$ και $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ για $j \geq 2$. Αν $i > j+2$, τότε $B_j \subseteq A_j$ και $B_i \subseteq A \setminus A_{i-1} \subseteq A \setminus A_{j+1}$, άρα B_i B_j έχουν θετική απόσταση. Άρα

$$\mathcal{M}^*(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{M}^*(B_{2k-1})$$

$$\mathcal{M}^*(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{M}^*(B_{2k}).$$

καθώς $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j) < \infty$, και τα δύο αθροίσματα συγκλίνουν για $m \to \infty$. Άρα

$$\mathcal{M}^*(A) = \mathcal{M}^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mathcal{M}^*\left(A_j \cup \bigcup_{k\geq j+1} B_k\right)$$

$$\leq \mathcal{M}^*(A_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{M}^*(B_k)$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{M}^*(B_k).$$

Τώρα αν επιλέξουμε $j \to \infty$ το άθροισμα τείνει στο μηδέν άρα

$$\mathcal{M}^*(A) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j).$$

□

Ο λόγος που τα μετρικά εξωτερικά μέτρα έχουν ενδιαφέρον είναι το παρακάτω θεώρημα.

2.3.2 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{M}^*$ μετρικό εξωτερικό μέτρο στό μετρικό χώρο $(\mathcal{X}, d)$. Τότε κάθε Borel υποσύνολο του $(\mathcal{X}, d)$ είναι $\mathcal{M}^*$-μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Καθώς η σ-άλγεβρα των Borel συνόλων είναι η σ-άλγεβρα που δημιουργείται από τα κλειστά σύνολα, και καθώς η συλλογή $\mathcal{F}$ των $\mathcal{M}^*$-μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο F, είναι $\mathcal{M}^*$-μετρήσιμο. Έστω $A \subseteq (\mathcal{X}, d)$ θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}^*(A) \geq \mathcal{M}^*(A \cap F) + \mathcal{M}^*(A \setminus F)$, καθώς η αντίστροφη ανισότητα ισχύει. Έστω $A_j = \{x \in A : d(x, F) \geq 1/j\}$. Τότε $d(A_j, F \cap A) \geq 1/j$ άρα

$$\mathcal{M}^*(A \cap F) + \mathcal{M}^*(A_j) = \mathcal{M}^*\left((A \cap F) \cup A_j\right) \leq \mathcal{M}^*(A).$$

Καθώς το F είναι κλειστό περιέχει όλα τα σημεία με απόσταση μηδέν από το F, άρα $A \setminus F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Ελέγχουμε τις συνθήκες του προηγούμενου λήμματος: Αν $x \in (A \setminus (F \cup A_{j+1}))$, τότε υπάρχει $z \in F$ με $d(x, z) < 1/(j+1)$. Αν $y \in A_j$, τότε

$$d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z) > \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}.$$

Άρα
$$d\,(A \setminus (F \cup A_{j+1}), A_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0.$$
Άρα έχουμε θετική απόσταση. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα έχουμε:
$$\mathcal{M}^*(A \setminus F) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^*(A_j).$$
Παίρνοντας τα όρια, τελικά έχουμε:
$$\mathcal{M}^*(A) \geq \mathcal{M}^*(A \cap F) + \mathcal{M}^*(A \setminus F).$$
□

2.3.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ να είναι ένα πεπερασμένο μετρικό μέτρο σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο $(\mathcal{X}, d)$. Έστω $E \subseteq \mathcal{X}$ Borel σύνολο. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathcal{X}$ και συμπαγές $K \subseteq \mathcal{X}$ ώστε $U \supseteq E \supseteq K$ και $\mathcal{M}(U \setminus K) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ να είναι η συλλογή όλων τον συνόλων $E \subseteq (\mathcal{X}, d)$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathcal{X}$ και συμπαγές $K \subseteq \mathcal{X}$ ώστε $U \supseteq E \supseteq K$ και $\mathcal{M}(U \setminus K) < \varepsilon$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι όλα τα κλειστά ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Έστω $F \subseteq (\mathcal{X}, d)$ κλειστό και $\varepsilon > 0$. Τότε τα
$$U_n = \{x \in \mathcal{X} : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$$
ορίζουν ανοικτά σύνολα ώστε $U_1 \supseteq U_2 \supseteq ...$ ισχύει $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = F$. Άρα έχουμε $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}(U_n) = \mathcal{M}(F)$. Υπάρχει n τόσο μεγάλο ώστε
$$\mathcal{M}(U_n) - \mathcal{M}(F) < \varepsilon.$$
Τότε $U_n \supseteq F$, όπου U_n είναι ανοικτό, και F συμπαγές με
$$\mathcal{M}(U_n \setminus F) < \varepsilon.$$

Άρα $F \in \mathcal{A}$. Ξεκάθαρα $\varnothing \in \mathcal{A}$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό κάτω από την πράξη του συμπληρώματος ενός συνόλου. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Θεωρήστε το $E' = \mathcal{X} \setminus E$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathcal{X}$ και συμπαγές $K \subseteq \mathcal{X}$ ώστε $U \supseteq E \supseteq K$ και $\mathcal{M}(U \setminus K) < \varepsilon$. Αλλά $U' = \mathcal{X} \setminus U$ είναι συμπαγές, $K' = \mathcal{X} \setminus K$ είναι ανοικτό, και $U' \subseteq E' \subseteq K'$ με

$$\mathcal{M}(K' \setminus U') = \mathcal{M}(U \setminus K) < \varepsilon.$$

Τώρα θα δούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή κάτω από τις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $E_n \in \mathcal{A}$ για $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει ανοικτό $U_n \subseteq \mathcal{X}$ και συμπαγές $K_n \subseteq \mathcal{X}$ ώστε $U_n \supseteq E_n \supseteq K_n$ και

$$\mathcal{M}(U_n \setminus K_n) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Το $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ είναι ανοικτό. Συμβολίζουμε με $L_m = \bigcup_{n=1}^{m} K_n$ και είναι συμπαγές, αυξανόμενο με το m, και $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Υπάρχει m τόσο μεγάλο ώστε

$$\mathcal{M}(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m) - \mathcal{M}(L_m) < \varepsilon/2.$$

Άρα έχουμε $U \supseteq E \supseteq L_m$ και

$$\mathcal{M}(U \setminus L_m) \leq \mathcal{M}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U_n \setminus K_n)\right) + \mathcal{M}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) - \mathcal{M}(L_m)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $\mathcal{A}$ περιέχει τουλάχιστον τα Borel σύνολα.

□

Ορισμός 2.3.3. *Ορίζουμε ως διάμετρο ενός συνόλου $A \subseteq \mathcal{X}$ τη μεγαλύτερη απόσταση που έχουν δυο σημεία x, y σε αυτό το σύνολο και γράφουμε*

$$\delta(A) = sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Μέθοδος II.

Φτάσαμε λοιπόν στο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Μέχρι τώρα είδαμε πώς ορίζεται το μέτρο Lebesgue, και γενικά αναφέραμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα εξωτερικό μέτρο με οποιαδήποτε συνολοσυνάρτηση θέλουμε. Αυτή η ελευθερία όμως δημιούργησε όπως είδαμε αργότερα κάποια παράδοξα, για παράδειγμα όπως αναφέραμε ένα σύνολο είναι μετρήσιμο ως προς ένα μέτρο της Μεθόδου I ενώ το ίδιο σύνολο δεν είναι μετρήσιμο ως προς ένα άλλο μέτρο με διαφορετική συνολοσυνάρτηση. Για να αντιμετωπίσουμε αυτή την δυσκολία εισάγουμε την Μέθοδο II με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.3.4 (Μέθοδος II)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $(\mathcal{X}, d)$, και υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A$ και $\delta(A) \leq \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνολοσυνάρτηση $\mathbf{c} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την οικογένεια*

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{A} : \delta(A) \leq \varepsilon\}$$

Τώρα από την Μέθοδο I, κατασκευάζουμε ένα εξωτερικό μέτρο $\mathcal{M}^*_\varepsilon$ με την δοσμένη συνάρτηση $\mathbf{c}$ χρησιμοποιώντας την οικογένεια $\mathcal{A}_\varepsilon$.

Από την Πρόταση 5, για κάποιο σύνολο E όταν το ε μικραίνει ξέρουμε ότι το $\mathcal{M}^*_\varepsilon$ μεγαλώνει.

Ορίζουμε:

$$\mathcal{M}^*(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{M}^*_\varepsilon(E) = sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{M}^*_\varepsilon(E)$$

Η οικογένεια $\mathcal{A}_\varepsilon$ ονομάζεται ε-κάλυψη, όταν περιορίζουμε το $\mathcal{M}^*_\varepsilon$ στα μετρήσιμα σύνολα γράφουμε απλά $\mathcal{M}$. Αυτή η κατασκευή ενός εξωτερικού μέτρου $\mathcal{M}^*_\varepsilon$ από μια συνολοσυνάρτηση $\mathbf{c}$ λέγεται Μέθοδος ΙΙ.

Είναι πιο περίπλοκη από την Μέθοδο Ι, άλλα σε αντίθεση με αυτή η Μέθοδος ΙΙ μας εξασφαλίζει ότι κάθε Borel σύνολο είναι μετρήσιμο.

2.3.3 Θεώρημα. *Το εξωτερικό μέτρο $\mathcal{M}^*$ που ορίζεται από την Μέθοδο ΙΙ είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ με $d(A, B) > 0$. Καθώς $\mathcal{M}^*$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο, έχουμε $\mathcal{M}^*(A \cup B) \leq \mathcal{M}^*(A) + \mathcal{M}^*(B)$. Θα δείξουμε την αντίθετη ανισότητα. Έστω $\varepsilon > 0$ τόσο μικρό ώστε $\varepsilon < d(A, B)$. Έστω $\mathcal{D}$ να είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη του $A \cup B$ με σύνολα της μορφής $\mathcal{A}_\varepsilon$. Για τα σύνολα $D \in \mathcal{D}$ ισχύει $\delta(D) < d(A, B)$, άρα τα συνολα $D \in \mathcal{D}$ τέμνουν μόνο ένα από τα σύνολα A, B. Άρα η κάλυψη $\mathcal{D}$ χωρίζεται σε δυο ξένες συλλογές $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ όπου $\mathcal{D}_1$ καλύπτει το A και $\mathcal{D}_2$ καλύπτει το B.

Τότε

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} \mathbf{c}(D) = \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \mathbf{c}(D) + \sum_{D \in \mathcal{D}_2} \mathbf{c}(D) \geq \mathcal{M}^*_\varepsilon(A) + \mathcal{M}^*_\varepsilon(B).$$

Τώρα παίρνουμε infimum πάνω σε όλες τις καλύψεις και έχουμε $\mathcal{M}^*_\varepsilon(A \cup B) \geq \mathcal{M}^*_\varepsilon(A) + \mathcal{M}^*_\varepsilon(B)$. Επιλέγω $\varepsilon \to 0$ καθώς ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ τότε

$$\mathcal{M}^*(A \cup B) \leq \mathcal{M}^*(A) + \mathcal{M}^*(B).$$

□

Κεφάλαιο 3

3. Διάσταση Fractal.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε την προσπάθεια να υπολογίσουμε το «μέγεθος» των Fractal συνόλων. Κάτι που όπως αποδείχτηκε δεν μας έδινε επιθυμητά αποτελέσματα. Το πρόβλημα αυτό έρχεται να λύσει το μέτρο Hausdorff, και πιο ειδικά η διάσταση Hausdorff που προέρχεται από αυτό. Στον ορισμό των Fractal συνόλων ο James Taylor αναφέρει, ότι ένα σύνολο λέγεται Fractal, αν η Hausdorff διάσταση είναι ίση με την Packing διάσταση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στις διαστάσεις Hausdorff και Packing. Ξεκινάμε με τον ορισμό του μέτρου Hausdorff.

Ορισμός 3.0.1. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος. Θεωρούμε ένα πραγματικό θετικό αριθμό s, υποψήφιος για την διάσταση. Το s-διάστατο εξωτερικό μέτρο Hausdorff είναι ένα μέτρο της Μεθόδου II με συνολοσυνάρτηση $\mathbf{c}_s(A) = \delta(A)^s$. Ορίζουμε το μέτρο Hausdorff να είναι:*

$$\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F) = inf \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^s.$$

οπου $\mathcal{A}$ είναι μια αριθμήσιμη ε-κάλυψη του F από υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\delta(A) < \varepsilon$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Το infimum είναι πάνω σε όλες τις ε-καλύψεις $\mathcal{A}$ του F.

Ο περιορισμός στα μετρήσιμα σύνολα λέγεται s-διάστατο μέτρο Hausdorff και γράφουμε $\mathcal{H}$.

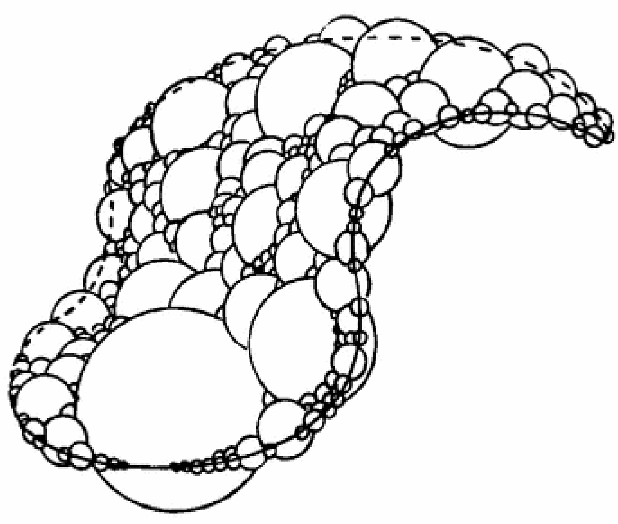
Καθώς το $\mathcal{H}^*$ είναι ένα μέτρο της Μεθόδου II είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο. Άρα όλα τα Borel σύνολα είναι μετρήσιμα, συγκεκριμένα όλα τα κλειστά, ανοικτά και συμπαγή.

Από ένα γρήγορο υπολογισμό παρατηρούμε ότι όταν το ε γίνεται μικρό τότε το $\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$ γίνεται μεγάλο.

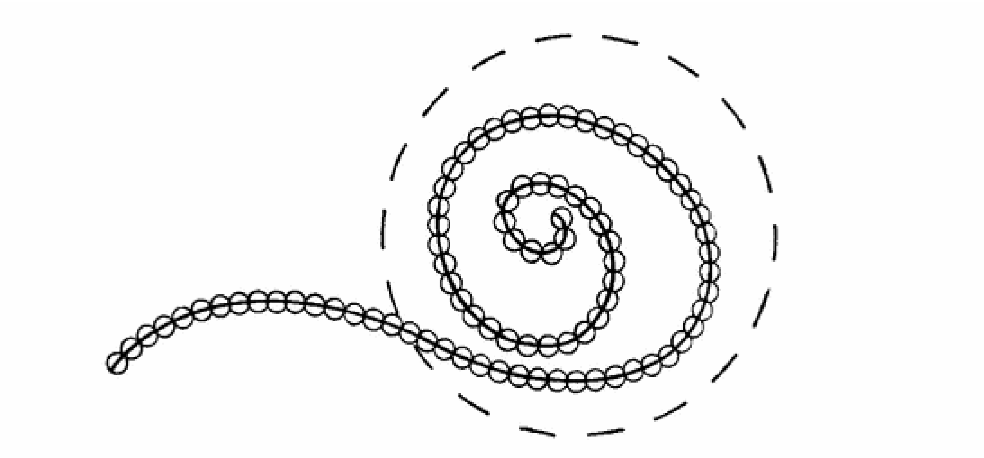
Τελικά:

$$\mathcal{H}_s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F) = sup_{\varepsilon>0}\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$$

είναι το s-διάστατο μέτρο Hausdorff.



Το μέτρο Hausdorf «εμβαδόν» της επιφάνειας υπολογίζεται καλύπτοντας την επιφάνεια με μια ε-κάλυψη όπως απεικονίζεται.



Το μέτρο Hausdorf «μήκος» της καμπύλης υπολογίζεται καλύπτοντας την καμπύλη με μια ε-κάλυψη όπως απεικονίζεται.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για το μέτρο Hausdorff.

i) Καθώς η κλειστή θήκη έχει την ίδια διάμετρο με το σύνολο θα χρησιμοποιήσουμε μόνο κλειστά σύνολα στις ε-καλύψεις $\mathcal{A}$. Η οικογένεια των κλειστών συνόλων είναι μια «reduced» κλάση καλύψεων της Μεθόδου II για το $\mathcal{H}_s$

ii) Αν A είναι ένα σύνολο τότε περιέχεται σε ένα ανοικτό σύνολο με διάμετρο όσο κοντά θέλουμε στην διάμετρο του A. Η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων είναι μια «reduced» κλάση καλύψεων για το $\mathcal{H}_s$

iii) Ένα σύνολο με διάμετρο r, περιέχεται σε μια κλειστή μπάλα με ακτίνα r, δηλαδή διάμετρο $2r$. Η οικογένεια όλων των ανοικτών μπαλών είναι «reduced» κλάση καλύψεων με γεννήτορα 2^s για το $\mathcal{H}_s$.

iv) Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$, η κυρτή θήκη κάθε συνόλου έχει την ίδια διάμετρο με το σύνολο. Η συλλογή όλων των κυρτών συνόλων είναι «reduced» κλάση καλύψεων για το $\mathcal{H}_s$.

v) Αν ένα σύνολο K είναι συμπαγές, τότε κάθε ανοικτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα για να υπολογίσουμε το μέτρο Hausdorff για ένα συμπαγές K χρειαζόμαστε μόνο πεπερασμένο σε πλήθος στοιχεία της κάλυψης $\mathcal{A}$.

vi) Αν αντικαθιστούσαμε ένα στοιχείο της κάλυψης $\mathcal{A}$ του συνόλου F, από ένα υποσύνολο του εαυτού του, έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι πάλι κάλυψη του F, τότε το άθροισμα $\sum_{A\in\mathcal{A}} \delta(A)^s$ γίνεται μικρότερο. Άρα αν $F \subseteq T \subseteq S$ η τιμή του $\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}$ όταν το F θεωρείται υποσύνολο του T είναι ίδια με όταν θεωρούμε το F υποσύνολο του S. Συγκεκριμένα θα θεωρούμε ότι τα στοιχεία της ε-κάλυψης $\mathcal{A}$, του F που θα επιλέγουμε, θα είναι υποσύνολα του F.

3.0.1 Πρόταση. *Αν F είναι πεπερασμένο, τότε $\mathcal{H}_s(F) = 0$, για κάθε $s > 0$.*

Απόδειξη. Έστω F πεπερασμένο, τότε $F = \{f_1, f_2 ... f_n\}$ με $n \in \mathbb{N}$. Έστω $s > 0$. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{[f_1, f_1 + \varepsilon/2^j) : f_1 \in F\}$, αυτή είναι μια ε-κάλυψη του F. Τότε

$$\mathcal{H}_s(F) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} inf \sum_{A\in\mathcal{A}} \delta(A)^s$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} inf \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^s}{2^{js}} = 0$$

□

3.0.1 Θεώρημα. *Στον μετρικό χώρο* $\mathbb{R}$, *το μονοδιάστατο μέτρο Hausdorff,* $\mathcal{H}_1$ *είναι ισοδύναμο με το μέτρο Lebesgue,* μ.

Απόδειξη. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένη διάμετρο, τότε $|sup(A) - inf(A)| = r$, άρα το A περιέχεται σε ένα διάστημα I με μήκος r και $\mu^*(A) \leq \mu^*(I) = r$. Αλλά από την Μέθοδο I το $\mathcal{H}^*_{\varepsilon,1}$ είναι το μεγαλύτερο εξωτερικό μέτρο ώστε $\mathcal{H}^*_{\varepsilon,1} \leq \delta(A)$ για κάθε A με διάμετρο μικρότερη του ε. Άρα

$$\mathcal{H}^*_1(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^*_{\varepsilon,1}(F) \geq \mu^*(F).$$

Αν $[a, b)$ ημιανοικτό διάστημα και $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε σημεία $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ με $x_j - x_{j-1} < \varepsilon$ για κάθε j. Τότε το $[a, b)$ καλύπτεται από την αριθμήσιμη κάλυψη $\{[x_{j-1}, x_j] : 1 \leq j \leq n\}$ και

$$\sum_{j=1}^{n} \delta([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Άρα $\mathcal{H}^*_{\varepsilon,1}([a, b)) \leq b - a$. Αλλά από την Μέθοδο I το μ^* είναι το μεγαλύτερο εξωτερικό ώστε $\mu^*([a, b)) \leq b - a$ για καθε ημιανοικτό διάστημα $[a, b)$. Άρα

$$\mu^*(F) \geq \mathcal{H}^*_1(F).$$

Για κάθε F. Άρα

$$\mu^*(F) = \mathcal{H}^*_1(F).$$

Τα μετρήσιμα σύνολα σε κάθε περίπτωση δίνονται απο το κριτήριο του Καραθεοδωρή άρα

$$\mu(F) = \mathcal{H}_1(F).$$

□

Για το «μηδενοδιάστατο» μέτρο Hausdorff, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνολοσυνάρτηση $\mathbf{c}_0(A) = 1$ για κάθε $A \neq \varnothing$ και $\mathbf{c}_0(\varnothing) = 0$.

3.0.2 Πρόταση. *Με την παραπάνω συνολοσυνάρτηση, το* $\mathcal{H}_0 = n$*, αν* A *έχει πεπερασμένα* n *στο πλήθος στοιχεία και* $\mathcal{H}_0 = \infty$*, αν* A *έχει άπειρα στοιχεία.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A έχει n στοιχεία. Τότε:

$$\mathcal{H}_0(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^*_{\varepsilon,0}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} inf \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Έστω ότι το A έχει άπειρα στοιχεία. Τότε:

$$\mathcal{H}_0(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^*_{\varepsilon,0}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} inf \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

□

Διάσταση Hausdorff.

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο F. Πώς συμπεριφέρεται το μέτρο $\mathcal{H}_s(F)$ ως συνάρτηση του s; Δηλαδή καθώς μεταβάλλεται το s; Ένας εύκολος υπολογισμός μάς δείχνει ότι καθώς το s αυξάνει το $\mathcal{H}_s(F)$ μειώνεται. Αλλά στην πραγματικότητα ισχύουν ακόμα περισσότερα. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό της διάστασης Hausdorff για ένα οποιοδήποτε σύνολο F.

3.0.2 Θεώρημα. *Έστω* F *ένα Borel σύνολο. Επίσης έστω* $0 < s < t$*. Τότε:*

i) Αν $\mathcal{H}_s(F) < \infty$*, τότε* $\mathcal{H}_t(F) = 0$*.*

ii) Αν $\mathcal{H}_t(F) > 0$ *τότε* $\mathcal{H}_s(F) = \infty$*.*

Απόδειξη. Αν $\delta(A) \leq \varepsilon$, τότε:

$$\mathcal{H}^*_{\varepsilon,t}(A) \leq \delta(A)^t \leq \varepsilon^{t-s}\delta(A)^s,$$

με A να ανήκει σε μια ε-κάλυψη $\mathcal{A}$ του F. Τότε από την Μέθοδο Ι:

$$\mathcal{H}^*_{\varepsilon,t}(F) \leq \varepsilon^{t-s}\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F),$$

για κάθε F. Αν $\mathcal{H}_s(F) < \infty$, τότε

$$\mathcal{H}_t(F) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{t-s}\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F) = 0 \cdot \mathcal{H}_s(F) = 0.$$

Αν $\mathcal{H}_t(F) > 0$, τότε

$$\mathcal{H}^*_{\varepsilon,t}(F) \leq \varepsilon^{t-s}\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$$

άρα

$$\frac{\mathcal{H}^*_{\varepsilon,t}(F)}{\varepsilon^{t-s}} \leq \mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathcal{H}^*_{\varepsilon,t}(F)}{\varepsilon^{t-s}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$$
$$\mathcal{H}_s(F) = \infty$$

αφού $\mathcal{H}_t(F) > 0$. □

Ορισμός 3.0.2. *Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι για κάθε σύνολο F υπάρχει μια μοναδική κρίσιμη τιμή $s_0 \in [0,\infty]$ ώστε:*

$$\mathcal{H}_s(F) = \begin{cases} \infty, & \forall s < s_0. \\ 0, & \forall s > s_0. \end{cases}$$

Η κρίσιμη αυτή τιμή ονομάζεται διάσταση Hausdorff του συνόλου F. Θα γράφουμε $s_0 = dim(F)$.

Είναι πιθανό να ισχύει $\mathcal{H}_s(F) = 0$ για κάθε $s > 0$ οπότε $dim(F) = 0$. Όμοια αν $\mathcal{H}_s(F) = \infty$ για κάθε $s > 0$ τότε $dim(F) = \infty$.

Η ιδέα της διάστασης, στην περίπτωση μας, είναι μια γενίκευση από ό,τι ξέρουμε από την στοιχειώδη γεωμετρία. Αν A είναι μια λεία καμπύλη, τότε η μέτρηση του μήκους της είναι ο καλύτερος τρόπος για να έχουμε πληροφορία για το μέγεθος της, αλλά το εμβαδόν της και ο όγκος της είναι μηδέν, καθώς οι διαστάσεις 2 και 3 είναι πολύ μεγάλες για να μετρήσουμε το μήκος της καμπύλης.

Αν B είναι η επιφάνεια από μια σφαίρα, τότε το εμβαδόν της είναι ένας θετικός και πεπερασμένος αριθμός. Μπορούμε να πούμε ότι το μήκος της είναι άπειρο, καθώς περιέχει άπειρες καμπύλες όσο μήκους θέλουμε. Όμοια και ο όγκος της είναι μηδέν. Άρα για την επιφάνεια B η διάσταση 1 είναι πολύ μικρή για να υπολογίσουμε το μέγεθος της, επίσης η διάσταση 3 είναι πολύ μεγάλη όμως η διάσταση 2 είναι ακριβός αυτό που χρειαζόμαστε. Το s-διάστατο μέτρο Hausdorff μας δίνει ένα τρόπο για να μετράμε το μέγεθος ενός συνόλου που η διάσταση του δεν είναι αναγκαστικά ακέραιος αριθμός, αλλά ένας θετικός πραγματικός.

3.0.3 Θεώρημα. *Έστω A, B Borel σύνολα.*

i) Αν $A \subseteq B$ τότε $dim(A) \leq dim(B)$.

ii) $dim(A \cup B) = max\{dim(A), dim(B)\}$.

Απόδειξη. (i). Έστω $A \subseteq B$. Αν $s > dim(B)$, τότε $\mathcal{H}_s(A) \leq \mathcal{H}_s(B) = 0$. Άρα $dim(A) \leq s$. Αυτό ισχύει για κάθε $s > dim(B)$, οπότε $dim(A) \leq dim(B)$.

(ii). Έστω $s > max\{dim(A), dim(B)\}$. Τότε $s > dim(A)$, άρα $\mathcal{H}_s(A) = 0$. Όμοια $\mathcal{H}_s(B) = 0$. Τότε:

$$\mathcal{H}_s(A \cup B) \leq \mathcal{H}_s(A) + \mathcal{H}_s(B) = 0$$

Άρα

$$dim(A \cup B) \leq s.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $s > max\{dim(A), dim(B)\}$, οπότε έχουμε

$$dim(A \cup B) \leq max\{dim(A), dim(B)\}.$$

Από το (i) έχουμε $A \cup B \supseteq A$ και $A \cup B \supseteq B$ άρα

$$dim(A \cup B) \geq max\{dim(A), dim(B)\}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

$$dim(A \cup B) = max\{dim(A), dim(B)\}.$$

□

3.0.3 Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι $A_1, A_2, \ldots$ είναι Borel σύνολα. Τότε*

$$dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n)$$

Απόδειξη. Περίπτωση 1 : Έστω ότι $sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n) < \infty$. Τότε αν $s > sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n)$ έχουμε $\mathcal{H}_s(A) = 0$ για κάθε n. Ξέρουμε όμως ότι:

$$\mathcal{H}_s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_s(A_n) = 0.$$

Άρα

$$dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq s$$

για κάθε $s > sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n)$ τότε

$$dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n).$$

Ξέρουμε όμως ότι $A_n \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$dim(A_n) \leq dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

οπότε

$$sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n) \leq dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

και τελικά

$$sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n) = dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Περίπτωση 2 : Έστω $sup_{n\in\mathbb{N}} dim(A_n) = \infty$. Τότε η ισότητα είναι προφανή καθώς ξέρουμε από τα παραπάνω ότι

$$dim(A_n) \leq dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

άρα

$$dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \infty.$$

□

3.0.4 Θεώρημα. *Έστω $f : S \to T$ ομοιότητα με αναλογία $r > 0$, έστω s να είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και $F \subseteq S$ σύνολο. Τότε*

$$dim\left(f(F)\right) = dim(F).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $T = f(S)$. Τότε η f έχει αντίστροφη f^{-1}. Έστω $A \subseteq S$ από την ομοιότητα παρατηρούμε ότι $\delta\left(f(A)\right) = r\delta(A)$. Άρα $\delta\left(f(A)\right)^s = r^s\delta(A)^s$. Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff ξέρουμε ότι $\mathcal{H}^*_{r\varepsilon,s}\left(f(F)\right) = r^s\mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F)$. Παίρνοντας τα όρια καθώς $\varepsilon \to 0$ έχουμε $\mathcal{H}^*_s\left(f(F)\right) = r^s\mathcal{H}^*_s(F)$. Άρα

$$dim\left(f(F)\right) = dim(F).$$

□

Το παραπάνω θεώρημα μας αποδεικνύει ότι η διάσταση Hausdorff δεν μεταβάλεται κάτω από οποιαδήποτε ομοιότητα.

Ορισμός 3.0.3. *Μια συνάρτηση $f : S \to T$ λέγεται Lipschitz αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά C με*

$$d_T\left(f(x), f(y)\right) \leq C d_S(x, y)$$

για κάθε $x, y \in S$.

Μια συνάρτηση $f : S \to T$ λέγεται αντίστροφη Lipschitz αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά c με

$$d_T\left(f(x), f(y)\right) \geq c d_S(x, y)$$

για κάθε $x, y \in S$.

3.0.4 Πρόταση. *Έστω $f : S \to T$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq S$ Borel σύνολο τότε:*

i) Αν f Lipschitz, τότε

$$dim\left(f(A)\right) \leq dim(A).$$

ii) Αν f αντίστροφη Lipschitz τότε

$$dim\left(f(A)\right) \geq dim(A).$$

Απόδειξη. Έστω $f : S \to T$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq S$ Borel σύνολο τότε αν f Lipschitz έχουμε οτι υπάρχει σταθερά r ώστε

$$d_T\left(f(x), f(y)\right) \leq r d_S(x, y)$$

για κάθε $x, y \in S$. Έστω $s > 0$ τότε

$$\delta\left(f(A)\right)^s \leq r^s \delta(A)^s.$$

Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff ξέρουμε ότι

$$\mathcal{H}^*_{r\varepsilon,s}\left(f(F)\right) \leq r^s \mathcal{H}^*_{\varepsilon,s}(F).$$

Παίρνοντας τα όρια καθώς $\varepsilon \to 0$ έχουμε $\mathcal{H}^*_s\left(f(F)\right) \leq r^s \mathcal{H}^*_s(F)$. Άρα

$$dim\left(f(F)\right) \leq dim(F).$$

Όμοια για το ii). $\square$

Η παραπάνω πρόταση μας αποδεικνύει ότι η διάσταση Hausdorff μεταβάλετε κάτω από οποιαδήποτε Lipschitz συνάρτηση. Με απλά λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι η διάσταση Hausdorff μεταβάλετε αν «μεγεθύνουμε» η αν «μικρύνουμε» ένα σύνολο. Αυτό είναι λογικό άμα αναλογιστεί κάποιος ότι η διάσταση ενός συνόλου είναι το μέγεθος που καταλαμβάνει από τον μετρικό χώρο $\mathcal{X}$, και άρα όσο μικραίνει το σύνολο τόσο λιγότερο χώρο καταλαμβάνει.

3.1 Μέτρο Packing.

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε το μέτρο Packing ή αλλιώς και ως μέτρο Tricot καθώς το μέτρο αυτό διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Claude Tricot.

Πριν διατυπώσουμε τον ορισμό για το μέτρο Tricot ας εξετάσουμε τους λόγους για τούς οποίους θα ορισθεί και γιατί έχει την μορφή που θα δούμε.

Το μέτρο Hausdorff ορίστηκε καλύπτοντας το σύνολο που θέλουμε να μελετήσουμε με κάποιας ειδικής μορφής σύνολα, την λεγόμενη ε-κάλυψη. Επιχειρούμε να κάνουμε την κάλυψη αποτελεσματική ελαχιστοποιώντας το

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{c}(A_i)$$

υπό την επιφύλαξη του περιορισμού οτι τα σύνολα A_i καλύπτουν το E. Όταν το άθροισμα ελαχιστοποιείται τότε λέμε ότι η κάλυψη είναι αποτελεσματική.

Ένας άλλος τρόπος να μετράμε το μέγεθος συνόλων για παράδειγμα του E, είναι να «γεμίζουμε» το σύνολο προς μελέτη πάρα να το καλύπτουμε όπως αναφέραμε πριν. Θέλουμε να «βάλουμε» ξένα σύνολα A_i μέσα στο σύνολο μας E. Επιχειρούμε να κάνουμε αποτελεσματικό αυτό το πακετάρισμα μεγιστοποιώντας τώρα, σε αντίθεση με πριν, το

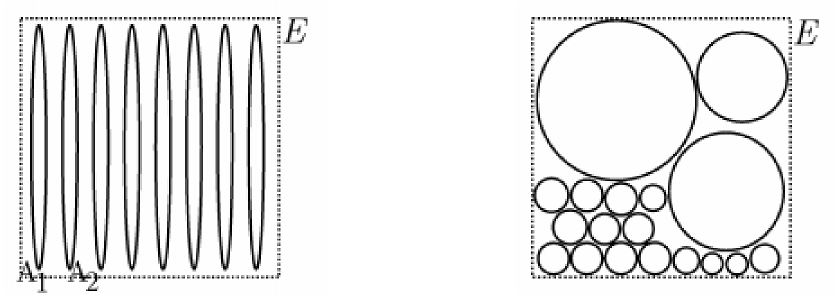
$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(A_i)$$

υπό την επιφύλαξη του περιορισμού οτι τα σύνολα A_i είναι ξένα υποσύνολα του E. Όταν το άθροισμα αυτό μεγιστοποιείται τότε λέμε ότι η οικογένεια συνόλων $\{A_i\}$ είναι αποτελεσματική.

Για να μπορούμε να μετρήσουμε fractal σύνολα, λογικό θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε σαν συνάρτηση την $\mathbf{c}(A_i) = \delta(A_i)^s$. Όπου s θα ήταν και η διάσταση που μας ενδιαφέρει. Αυτό βέβαια θα μας οδηγούσε σε ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Για παράδειγμα τι θα γινόταν αν γεμίζαμε το σύνολο μας, για παράδειγμα το επίπεδο, με σύνολα όπως στην εικόνα; Τότε θα μπορούσαμε το άθροισμα

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \delta(A_i)^s$$

να το κάνουμε όσο μεγάλο θέλουμε.



Τρόποι με τους οποίους μπορούμε να γεμίσουμε ένα σύνολο με ξένα μεταξύ τους σύνολα χωρίς να είναι κάλυψη του.

Για να αποφύγουμε λοιπόν αυτή την κατάσταση πρέπει να πακετάρουμε το σύνολο μας με σύνολα ιδικού τύπου. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ τα διαστήματα είναι η καλύτερη επιλογή. Στον Ευκλείδειο χώρο πακετάρουμε συνήθως με κύβους. Για να πάρουμε ώμος ένα ορισμό σε γενικούς μετρικούς χώρους θα πακετάρουμε με μπάλες.

Πακετάροντας ένα σύνολο E με μπάλες $A_i \subseteq E$ είναι εφικτό όταν το σύνολο είναι ανοικτό, αλλά υπάρχουν και σύνολα που δεν περιέχουν καν μπάλες. Άρα πρέπει να απορρίψουμε την ιδέα ότι κάθε σύνολο πρέπει να έχει μπάλες. Αντί για αυτό όμως, για να μπορεί να ισχύει το Packing μέτρο απαιτούμε τα κέντρα των μπαλών να ανήκουν στο σύνολο.

Έστω $\mathcal{X}$ μετρικός χώρος, $x \in \mathcal{X}$ και $r > 0$ υπενθυμίζουμε της έννοιες της ανοικτής και κλειστής μπάλας.

Ανοικτή μπάλα λέμε το σύνολο

$$B(x,r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x,y) < r\}$$

κλειστή μπάλα λέμε το σύνολο

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x,y) \leq r\}$$

Θα πακετάρουμε με κλειστές μπάλες, αλλά και οι ανοικτές θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν όμοια.

Για δυο μπάλες $B(x,r), B(x,s)$ στον Ευκλείδειο χώρο ξέρουμε ότι είναι ξένες $B(x,r) \cap B(x,s) = \varnothing$ αν και μόνον αν $d(x,y) > r+s$. Εμείς θα χρησιμοποιούμε στον ορισμό του Packing μέτρου ότι $d(x,y) > r+s$.

Στον Ευκλείδειο χώρο ξέρουμε ότι δυο μπάλες $B(x,r), B(x,s)$ είναι ίσες αν $x = y$ και $r = s$. Η ισοδυναμία αυτή εύκολα καταρρίπτεται. Για παράδειγμα στον διακριτό μετρικό χώρο κάθε «μπάλα,» είναι σημείο, που είναι και το κέντρο της μπάλας, ή και ολόκληρος ο χώρος αν επιλέξουμε $r \geq 1$. Αυτός είναι και ο λόγος που θα ορίσουμε την έννοια του «συστατικού μέρους» αντί για τις μπάλες στον ορισμό.

Στον Ευκλείδειο χώρο η $\delta\left(B(x,r)\right) = 2r$. Το ίδιο δεν ισχύει και για κάθε μετρικό χώρο για παράδειγμα στον διακριτό μετρικό χώρο έχουμε ότι $\delta(B(x,r)) \leq r$ καθώς $B(x,r) = \{x\}$ για $r < 1$.

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε «ακτίνες» αντί για «διαμέτρους» με συνάρτηση $(2r)^s$, για το Packing μέτρο.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος.* ***Συστατικό*** *μέρος του $\mathcal{X}$ είναι το διατεταγμένο ζεύγος (x,r) όπου $x \in \mathcal{X}$ και $r > 0$ πραγματικός αριθμός.*

Θα σκεφτόμαστε το συστατικό μέρος (x,r) σαν αντικαταστάτη της κλειστής μπάλας. Θα λέμε «σιωπηλά» ότι το x είναι το «κέντρο» και r η «ακτίνα». Προσοχή όμως, δεν αναφέραμε πουθενά ότι x είναι το κέντρο της μπάλας και r η ακτίνα της αντίστοιχα.

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $E \subseteq \mathcal{X}$. Ένα γέμισμα-πακετάρισμα του E είναι μια αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{Q} = \{(x,r) : x \in \mathcal{X}, r > 0\}$ από συστατικά μέρη ώστε:*

i) Για κάθε $(x,r) \in \mathcal{Q}$, το $x \in E$.

ii) Για κάθε δυάδα συστατικών $(x,r), (y,s) \in \mathcal{Q}$, με $(x,r) \neq (y,s)$, έχουμε $d(x,y) > r+s$.

Για $\delta > 0$ λέμε ότι το πακετάρισμα $\mathcal{Q}$ είναι δ-λεπτό αν και μόνον αν για κάθε $(x,r) \in \mathcal{Q}$ έχουμε ότι $r \leq \delta$.

Ορισμός 3.1.3 (Μέτρο Packing). *Έστω $F \subseteq \mathcal{X}$, και έστω $\delta, s > 0$. Ορίζουμε το Μέτρο Packing να είναι:*

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(F) = sup \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2r)^s,$$

όπου το supremum είναι πάνω σε όλα τα δ-λεπτά πακεταρίσματα $\mathcal{Q}$ του F.

Προσοχή: λόγω του ότι εμπλέκεται το supremum θα περιοριστούμε μόνο σε πεπερασμένα πακεταρίσματα $\mathcal{Q}$. Όταν το $\delta \to 0$ τότε παρατηρούμε ότι $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(F) \to 0$. Άρα ορίζουμε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(F) = \lim_{\delta\to 0} \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(F) = inf_{\delta>0}\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(F)$$

Όταν έχουμε κάνει αυτό έχουμε μια οικογένεια συνολοσυναρτήσεων εξαρτώμενες από το s. Όπως πριν έχουμε μια κρίσιμη τιμή.

3.1.1 Θεώρημα. *Για κάθε σύνολο F υπάρχει μια μοναδική κρίσιμη τιμή $s_0 \in [0, \infty]$ ώστε:*

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(F) = \begin{cases} \infty, & \forall s < s_0. \\ 0, & \forall s > s_0. \end{cases}$$

Η κρίσιμη αυτή τιμή ονομάζεται σταθερά πακεταρίσματος του συνόλου F.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(F) = sup \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2r)^s,$$

έστω $r > 0$ και $0 < s_0 < t$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^t_\delta(F) = sup \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2r)^t \leq= sup \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} \delta^{t-s_0}(2r)^{s_0}.$$

Άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s(F) \leq \delta^{t-s_0} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^{s_0}(F).$$

Έστω $\widetilde{\mathcal{P}}_0^{s_0}(F) < \infty$. Τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^t(F) \leq \lim_{\delta \to 0} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^t(F) \leq \lim_{\delta \to 0} \delta^{t-s_0} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^{s_0}(F).$$

Άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^t(F) = 0$$

Δηλαδή για κάθε $t > s_0$ έχουμε $\widetilde{\mathcal{P}}_0^t(F) = 0$. Αντίστοιχα αν $\widetilde{\mathcal{P}}_0^t(F) > 0$ τότε για κάθε $s < t$ θα δείξουμε ότι $\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(F) = \infty$. Έχουμε

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s(F) \geq \delta^{s-t} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^t(F)$$

Τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s(F) \geq \lim_{\delta \to 0} \delta^{s-t} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^t(F)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^{t-s}} \widetilde{\mathcal{P}}_0^t(F) = \infty$$

□

Προσοχή: παραπάνω δεν αναφέραμε πουθενά ότι η s_0 είναι η διάσταση του συνόλου F. Τον λόγο για τον οποίο αυτό δεν συνιστά διάσταση τον αναφέρουμε παρακάτω.

Παρ'όλαυτά οι συνολοσυναρτήσεις $\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(F)$ δεν είναι αυτές ακριβώς που θέλουμε, καθώς δεν είναι εξωτερικά μέτρα.

Αυτό δεν ήταν απρόσμενο καθώς η διαδικασία που ακολουθήσαμε για την κατασκευή τους δεν είναι η Μέθοδος ΙΙ.

Στην επόμενη πρόταση θα δούμε ένα παράδειγμα όπου οι συνολοσυναρτήσεις $\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(F)$ αποτυχαίνουν να είναι εξωτερικά μέτρα.

3.1.1 Πρόταση. *Έστω $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, συμπαγές. Τότε $\widetilde{\mathcal{P}}_0^{1/2}(K) > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $\varepsilon = 1/2^k$, και $n = 2^{(k-1)/2}$. Τότε

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} = 2\varepsilon$$

Άρα τα συστατικά με ακτίνα ε και με κέντρα $1/n : n \in \mathbb{N}$ δημιουργούν ένα πακετάρισμα. Άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^{1/2}(K) \geq n(2\varepsilon)^{1/2} = 1$$

και άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^{1/2}(K) \geq 1$$

□

Όπου όπως ξέρουμε είναι ανώφελο να θεωρήσουμε ότι αυτό το αριθμήσιμο σύνολο έχει θετική διάσταση. Όμως ξέρουμε ένα πολύ καλό τρόπο να ορίζουμε εξωτερικά μέτρα από μια δοσμένη συνολοσυνάρτηση (Μέθοδος I).

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $E \subseteq \mathcal{X}$. Εφαρμόζουμε την Μέθοδο I στις συνολοσυναρτήσεις $\widetilde{\mathcal{P}}_0^s$ και έχουμε*

$$\mathcal{P}_s^*(E) = inf \sum_{C \in \mathcal{C}} \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(C).$$

Όπου το infimum είναι πανό σε όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις $\mathcal{C}$ του συνόλου E.

3.1.2 Θεώρημα (Θεώρημα κλειστότητας)**.** *Έστω C σύνολο και $\overline{C}$ η κλειστή θήκη του, τότε*

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(C) = \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(\overline{C})$$

Απόδειξη. Κάθε πακετάρισμα του C είναι αυτομάτως και πακετάρισμα του $\overline{C}$. Άρα τότε $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(C) \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(\overline{C})$ επιλέγω $\delta \to 0$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(C) \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(\overline{C}).$$

Από την άλλη, έστω $\delta > 0$ και έστω $\mathcal{Q} = \{(x_i, r_i) : i = 1, 2, 3, ...n\}$ να είναι ένα πεπερασμένο δ-λεπτό πακετάρισμα του $\overline{C}$. Για κάθε $i \neq j$, έχουμε $d(x_i, x_j) > r_i + r_j$ και υπάρχουν μόνο πεπερασμένο στο πλήθος δυάδων i, j, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $d(x_i, x_j) > r_i + r_j + \varepsilon$. Τώρα για κάθε i, το σημείο $x_i \in \overline{C}$, άρα υπάρχει $y_i \in C$ με $d(x_i, y_i) < \varepsilon/2$. Αλλά τότε $\mathcal{Q}' = \{(y_i, r_i) : i = 1, 2, 3, ...n\}$ είναι πεπερασμένο δ-λεπτό πακετάρισμα του C, και έχει την ίδια τιμή $\sum(2r_i)^s$ όπως το πακετάρισμα $\mathcal{Q}$. Άρα έχουμε $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(C) \geq \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(\overline{C})$ επιλέγω $\delta \to 0$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(C) \geq \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(\overline{C})$$

και τέλος από τα παραπάνω

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(C) = \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(\overline{C}).$$

□

3.1.3 Λήμμα. *Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$. Τότε*

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A \cup B) \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(B).$$

Αν τώρα $d(A, B) > 0$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A \cup B) = \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(B).$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ γνωστό. Έστω $\mathcal{Q}$ να είναι πεπερασμένο δ-λεπτό πακετάρισμα του. Τότε $\mathcal{Q}$ είναι ένωση ξένων πακεταρισμάτων $\mathcal{Q}_1 = \{(x, r) \in \mathcal{Q} : x \in A\}$ και $\mathcal{Q}_2 = \{(x, r) \in \mathcal{Q} : x \notin A\}$. Όμως το $\mathcal{Q}_1$ και $\mathcal{Q}_2$ είναι πεπερασμένα πακεταρίσματα των A, B αντίστοιχα. Άρα

$$\sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2r)^s = \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}_1} (2r)^s + \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}_2} (2r)^s \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(B).$$

Παίρνοντας supremum πάνω σε όλα τα δ-λεπτά πακεταρίσματα έχουμε.

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A \cup B) \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(B).$$

Επιλέγουμε $\delta \to 0$ και

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A \cup B) \leq \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(B).$$

Για το δεύτερο, έστω $d(A, B) = \varepsilon > 0$ τότε αν $\delta = \varepsilon/2$, κάθε δ-λεπτό πακετάρισμα του $A \cup B$ είναι και πακετάρισμα του A και του B. Όμοια και κάθε δ-λεπτό πακετάρισμα του A και του B είναι και της ένωσης $A \cup B$. Έτσι

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A \cup B) = \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(B).$$

Για $\delta \to 0$ παίρνουμε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A \cup B) = \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(A) + \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(B).$$

$\square$

3.1.4 Θεώρημα. *Η συνολοσυνάρτηση $\mathcal{P}^*_s$ είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο.*

Απόδειξη. Το μόνο πακετάρισμα που μπορούμε να φτιάξουμε για το κενό σύνολο είναι το ίδιο το κενό και ένα κενό αθροίσμα έχει τιμή 0, άρα $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(\varnothing) = 0$ για κάθε $\delta > 0$ οπότε $\widetilde{\mathcal{P}}^s_0(\varnothing) = 0$. Το κενό σύνολο μπορεί να καλυφθεί ως εξής $\varnothing \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ όπου $E_n = \varnothing$ για κάθε n άρα

$$\mathcal{P}^*_s(\varnothing) = 0.$$

Έστω $A \subseteq B$ και $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ και άρα

$$\mathcal{P}^*_s(A) \leq \mathcal{P}^*_s(B).$$

Υποθέτουμε ότι $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{P}_s^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_s^*(A_i)$. Αν το $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_s^*(A_i)$ αποκλίνει τότε δεν έχουμε τίποτα να κάνουμε.

Υποθέτουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_s^*(A_i) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε i υπάρχουν σύνολα $E_{n,i}$ (δηλαδή για κάθε A_i υπάρχει μια ν-άδα καλύψεων $E_{n,i}$), ώστε $A_i \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,i}$ και $\sum_n \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(E_{n,i}) < \mathcal{P}_s^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Τότε $A \subseteq \bigcup_i \bigcup_n E_{n,i}$ είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη του A, άρα

$$\mathcal{P}_s^*(A) \leq \sum_i \sum_n \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(E_{n,i}) < \sum_i \left(\mathcal{P}_s^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) =$$

$$= \sum_i \mathcal{P}_s^*(A_i) + \varepsilon,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ αρα

$$\mathcal{P}_s^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_s^*(A_i).$$

τέλος απο το Λήμμα 3.1.3 έχουμε ότι είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο. $\square$

Ο περιορισμός του $\mathcal{P}_s^*$ στα μετρήσιμα σύνολα είναι ένα μέτρο και λέγεται το s-διάστατο Packing μέτρο και γράφουμε $\mathcal{P}_s$. Ξανά εδώ έχουμε μια κρίσιμη τιμή s για κάθε σύνολο.

3.1.5 Θεώρημα. *Για κάθε σύνολο F υπάρχει μια μοναδική κρίσιμη τιμή $s_0 \in [0, \infty]$ ώστε:*

$$\mathcal{P}_s(F) = \begin{cases} \infty, & \forall s < s_0. \\ 0, & \forall s > s_0. \end{cases}$$

Η κρίσιμη αυτή τιμή ονομάζεται διάσταση Packing του συνόλου F. Θα γράφουμε ότι $s_0 = Dim(F)$.

Οι λόγοι που επιλέξαμε να λέμε αυτή την σταθερά, διάσταση Packing και όχι αυτή που ξεκινήσαμε, προαναφέρθηκαν νωρίτερα. Η διάσταση Packing έχει πολλές ιδιότητες ίδιες με την διάσταση Hausdorf στα επόμενα αναφέρουμε μερικές.

3.1.6 Θεώρημα. *Έστω A, B Borel σύνολα τότε*

i) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $Dim(A) \leq Dim(B)$

ii) $Dim(A \cup B) = max\{Dim(A), Dim(B)\}$

Απόδειξη. $i)$. Έστω $A \subseteq B$, και $s > Dim(B)$ τότε $\mathcal{P}_s^*(B) = 0$. Άρα $\mathcal{P}_s^*(A) = 0$. Αυτό μας λέει ότι $Dim(A) \leq s$, και ισχύει για κάθε $s > Dim(B)$ άρα

$$Dim(A) \leq Dim(B).$$

$ii)$. Καθώς $A \cup B \supseteq A$ και $A \cup B \supseteq B$ από το $i)$ έχουμε $Dim(A \cup B) \geq Dim(B)$ και $Dim(A \cup B) \geq Dim(A)$ και άρα

$$Dim(A \cup B) \geq max\{Dim(A), Dim(B)\}.$$

Αν $s > max\{Dim(A), Dim(B)\}$ τότε $\mathcal{P}_s^*(A) = 0$ και $\mathcal{P}_s^*(B) = 0$. Άρα από την υποπροσθετικότιτα $\mathcal{P}_s^*(A \cup B) = 0$. Αυτό μας λέει ότι $Dim(A \cup B) \leq s$ και ισχύει για κάθε

$$s > max\{Dim(A), Dim(B)\},$$

άρα

$$Dim(A \cup B) \leq max\{Dim(A), Dim(B)\}.$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$Dim(A \cup B) = max\{Dim(A), Dim(B)\}.$$

□

3.1.2 Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι $A_1, A_2, ...$ είναι Borel σύνολα. Τότε*

$$Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n)$$

Απόδειξη. Περίπτωση 1). Έστω οτι $sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n) < \infty$. Τότε αν $s > sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n)$ έχουμε $\mathcal{P}_s(A) = 0$ για κάθε n. Ξέρουμε όμως ότι:

$$\mathcal{P}_s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_s(A_n) = 0.$$

Άρα

$$Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq s$$

για κάθε $s > sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n)$ άρα

$$Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n).$$

Επίσης $A_n \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$Dim(A_n) \leq Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right),$$

οπότε

$$sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n) \leq Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

και τελικά

$$sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n) = Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Περίπτωση 2). Έστω $sup_{n\in\mathbb{N}} Dim(A_n) = \infty$. Τότε η ισότητα είναι προφανής καθώς ξέρουμε από τα παραπάνω ότι

$$Dim(A_n) \leq Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

άρα

$$Dim\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \infty.$$

$\square$

3.1.7 Θεώρημα. *Έστω $f : S \to T$ ομοιότητα με αναλογία $r > 0$, έστω s να είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και $E \subseteq S$ σύνολο. Τότε*

$$Dim\,(f(F)) = Dim(F).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Q}$ ένα δ-λεπτό πακετάρισμα του F. Τότε $\{(f(x), rt) : (x,t) \in \mathcal{Q}\}$ είναι ένα $r\delta$-λεπτό πακετάρισμα του $f(F)$. Άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_{r\delta}\,(f(F)) \geq \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2rt)^s = r^s \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2t)^s.$$

Αυτό ισχύει για όλα τα δ-λεπτά πακεταρίσματα του F. Άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_{r\delta}\,(f(F)) \geq r^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_{\delta}\,(F)\,,$$

για κάθε $\delta \to 0$, άρα

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_{0}\,(f(F)) \geq r^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_{0}\,(F)\,.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $F \subseteq S$. Καθώς $r > 0$, η f είναι ένα προς ένα, και απεικονίζει το F επί του $f(F)$. Κάθε $r\delta$-λεπτό πακετάρισμα του $f(F)$ είναι της μορφής:

$$\{(f(x), rt) : (x,t) \in \mathcal{Q}\}$$

για κάποια δ-λεπτά πακεταρίσματα του F. Άρα τα ίδια ισχύουν και στην αντίστροφη εικόνα της f οπότε καταλήγουμε στην

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^s\left(f(F)\right) = r^s \widetilde{\mathcal{P}}_0^s\left(F\right).$$

Τώρα αν $E \subseteq \bigcup_i A_i$ είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη ενός συνόλου E, τότε $f(E) \subseteq \bigcup_i f(A_i)$. Άρα

$$\sum_i \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(A_i) = r^s \sum_i \widetilde{\mathcal{P}}_0^s\left(f(A_i)\right) \geq r^s \mathcal{P}_s^*\left(f(E)\right).$$

Αυτό ισχύει για κάθε κάλυψη του E άρα $\mathcal{P}_s^*\left(E\right) \geq r^s \mathcal{P}_s^*\left(f(E)\right)$. Αν $f(E) \subseteq \bigcup B_i$ είναι μια αριθμήσιμη κάλυψη του $f(E)$, έστω $A_i = f^{-1}(B_i)$, ώστε $E \subseteq \bigcup A_i$ κάλυψη του E. Επίσης $f(A_i) \subseteq B_i$.

Έχουμε:

$$r^s \sum_i \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(B_i) \geq r^s \sum_i \widetilde{\mathcal{P}}_0^s\left(f(A_i)\right) = \sum_i \widetilde{\mathcal{P}}_0^s\left(A_i\right) \geq \mathcal{P}_s^*(E).$$

Αυτό ισχύει για κάθε κάλυψη του $f(E)$, άρα $r^s \mathcal{P}_s^*\left(f(E)\right) \geq \mathcal{P}_s^*\left(E\right)$. Άρα τελικά $r^s \mathcal{P}_s^*\left(f(E)\right) = \mathcal{P}_s^*\left(E\right)$. Οπότε

$$Dim\left(f(E)\right) = Dim(E).$$

$\square$

3.1.3 Πρόταση. *Έστω $f : S \to T$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq S$ Borel σύνολο τότε:*

i) Αν f Lipschitz, τότε

$$Dim\left(f(A)\right) \leq Dim(A).$$

ii) Αν f αντίστροφη Lipschitz τότε

$$Dim\left(f(A)\right) \geq Dim(A).$$

Απόδειξη. Έστω $f : S \to T$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq S$ Borel σύνολο τότε αν f Lipschitz έχουμε οτι υπάρχει σταθερά r ώστε

$$d_T\left(f(x), f(y)\right) \leq r d_S(x, y)$$

για κάθε $x, y \in S$. Έστω $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ μια αριθμήσιμη κάλυψη του A και $\mathcal{Q} = \{(x_i, r_i) : i \in \mathbb{N}\}$ ένα πακετάρισμα για κάθε C_i. Από τον ορισμό του μέτρου Packing ξέρουμε ότι

$$\mathcal{P}_s^*(A) = inf \sum_{C \in \mathcal{C}} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s(C_i)$$

$$r inf \sum_{C \in \mathcal{C}} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s(C_i) \geq inf \sum_{C \in \mathcal{C}} \widetilde{\mathcal{P}}_\delta^s\left(f(C_i)\right).$$

$$\mathcal{P}_{r\delta,s}^*\left(f(F)\right) \leq r^s \mathcal{P}_{\delta,s}^*(F).$$

Παίρνοντας τα όρια καθώς $\delta \to 0$ έχουμε $\mathcal{P}_s^*\left(f(F)\right) \leq r^s \mathcal{P}_s^*(F)$. Άρα

$$Dim\left(f(F)\right) \leq Dim(F).$$

Όμοια για το ii). □

3.1.4 Πρόταση. *Στον μετρικό χώρο $\mathbb{R}$, το μονοδιάστατο μέτρο Packing $\mathcal{P}_1$ ισοδυναμεί με το μέτρο Lebesgue, μ.*

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε τα ημιανοικτά διαστήματα $[a, b)$. Αν $\mathcal{Q} = \{(x_i, r_i) : 1 < i < n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα πεπερασμένο πακετάρισμα του $[a, b)$, με $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Τότε οι μπάλες $\overline{B}(x_i, r_i)$ περιέχονται στα διαστήματα $[a - r_1, b + r_n]$ και είναι ξένες. Από την προσθετικότητα του μέτρου Lebesgue και από το γεγονός ότι τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} 2r_i \leq b - a + r_1 + r_n.$$

Αν $\mathcal{Q}$ είναι δ-λεπτό τότε

$$\sum_{i=1}^{n} 2r_i \leq b - a + 2\delta.$$

Παίρνουμε supermum πάνω σε όλα τα δ-λεπτά πακεταρίσματα του $[a, b)$ και καταλήγουμε $\widetilde{\mathcal{P}}_\delta^1([a, b)) \leq b - a + 2\delta$. Επιλέγουμε $\delta \to 0$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^1([a, b)) \leq b - a.$$

Από την άλλη μεριά έστω $\delta > 0$, επιλέγουμε n με $(b-a)/n < \delta$, τότε μπορούμε να πακετάρουμε το $[a, b)$ με n μπάλες ακτίνας $r_i = (b-a)/2n$. Άρα $\widetilde{\mathcal{P}}_\delta^1([a, b)) \geq b - a$. Επιλέγουμε $\delta \to 0$ τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^1([a, b)) \geq b - a.$$

Τέλος από τα παραπάνω

$$\widetilde{\mathcal{P}}_\delta^1([a, b)) = b - a.$$

□

Ο λόγος που αναφέραμε αυτά τα δυο μέτρα και στην συνέχεια τις διαστάσεις τους δεν είναι τυχαίος. Στόχος μας είναι να αναφέρουμε έναν από τους δυο ορισμούς των fractal συνόλων και συγκεκριμένα τον ορισμό του Taylor. Αρχικά όμως ας δούμε την σχέση που έχουν οι δύο διαστάσεις που είδαμε.

3.1.5 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας μετρικός χώρος. Αν $F \subseteq \mathcal{X}$ ένα Borel σύνολο, τότε $\mathcal{H}_s(F) \leq 2^s \mathcal{P}_s(F)$ και*

$$dim(F) \leq Dim(F).$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{H}^*_{4\varepsilon,s}(F) \leq 2^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F)$. Αν $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F) = \infty$, τότε είναι τετριμμένο. Ας υποθέσουμε ότι $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F) \leq \infty$, αν υπήρχε ένα άπειρο πακετάρισμα του F με $r_i = \varepsilon$ τότε $\widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F) = \infty$. Άρα υπάρχει ένα μέγιστο πεπερασμένο πακετάρισμα $\mathcal{Q} = \{(x_1, \varepsilon), (x_2, \varepsilon), ..., (x_n, \varepsilon)\}$ του F. Τότε

$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F) \geq n(2\varepsilon)^s.$$

Λόγω του ότι το πακετάρισμα που έχουμε είναι μέγιστο, για κάθε $x \in F$ υπάρχουν κάποια i μεταξύ του 1 και n, με $d(x, x_i) \leq 2\varepsilon$. Άρα η συλλογή $\{\overline{B}_{2\varepsilon}(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$ καλύπτει το F, οπότε

$$\mathcal{H}^*_{4\varepsilon,s}(F) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\delta(\overline{B}_{2\varepsilon}(x_i))\right)^s \leq n(4\varepsilon)^s = 2^s n(2\varepsilon)^s \leq 2^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F).$$

Άρα $\mathcal{H}^*_{4\varepsilon,s}(F) \leq 2^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_\varepsilon(F)$. Τώρα αν επιλέξουμε $\varepsilon \to 0$ έχουμε $\mathcal{H}_s(F) \leq 2^s \widetilde{\mathcal{P}}^s_0(F)$, και άρα απο την Μέθοδο I

$$\mathcal{H}_s(F) \leq 2^s \mathcal{P}_s(F).$$

Αν τώρα $s < dim(F)$ τότε $\mathcal{H}_s(F) = \infty$, άρα $\mathcal{P}_s(F) = \infty$ οπότε $s \leq Dim(F)$. Οπότε τελικά καταλήγουμε ότι

$$dim(F) \leq Dim(F).$$

□

Ορισμός 3.1.5 (Fractal κατά Taylor.). *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι fractal αν και μόνον αν $dim(F) = Dim(F)$.*

Άρα ένα σύνολο που θα ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό θα λέγεται fractal κατά Taylor, σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι αυτός ο ορισμός δεν έχει μόνο τοπολογίες ιδιότητες, (με την έννοια ότι αν δυο χώροι S, T είναι ομοιομορφικοί τότε και η διάσταση τους είναι ίδια.)

Δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί και σε χώρους μη τοπολογικούς, αν και αυτό δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την διπλωματική.

Παρ' ολα αυτά στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μια διάσταση με αυστηρή τοπολογική εφαρμογή. Αυτή δεν είναι άλλη από την Τοπολογική διάσταση.

Πριν όμως περάσουμε στην Τοπολογική διάσταση, πρέπει να αναφέρουμε μια νέα διάσταση, η οποία θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό fractal διαστάσεων, αυτή είναι η διάσταση Box. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5 είναι πάρα πολύ δύσκολος και χρονοβόρος ο υπολογισμός διαστάσεων Hausdorff και Packing στα περισσότερα σύνολα και σε ακόμα περισσότερα αδύνατο. Παρ' όλα αυτά η διάσταση Box μας δίνει μια πολύ εύχρηστη σχέση για αυτές τις διαστάσεις.

3.2 Διάσταση Box.

Ο λόγος που εισάγουμε αυτή την νέα διάσταση είναι ότι θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό διαστάσεων όπως αναφέραμε και πριν. Για απλότητα και για να γίνει ποιο κατανοητή αυτή η διάσταση θα αναφερόμαστε στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $r > 0$, το τετραγωνικό δίκτυο πλευράς r αποτελείται από όλα τα τετράγωνα της μορφής*

$$\mathcal{S}_r = \{[(m-1)r, mr) \times [(n-1)r, nr) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Άρα το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση αριθμήσιμων στοιχείων του $\mathcal{S}_r$. Για $s > 0$ θεωρούμε το εξωτερικό μέτρο που δημιουργείται από την Μέθοδο ΙΙ, με χρήση της συνολοσυνάρτησης $\mathbf{c} : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ με $\mathbf{c}(A) = r^s$ για $A \in \mathcal{S}_r$ οπου $\mathcal{S} = \bigcup_{r>0} \mathcal{S}_r$. Συμβολίζουμε αυτό το εξωτερικό μέτρο με $\overline{\mathcal{M}}^s$.

Έστω τώρα $B \subseteq \mathbb{R}^2$ με $\delta(B) = r$ περιέχεται στην ένωση τεσσάρων το πολύ συνόλων του $\mathcal{S}_r$. Από την άλλη μεριά ένα στοιχείο του $\mathcal{S}_r$ με πλευρά r έχει διάμετρο $\sqrt{2}r$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$2^{-s/2}\mathcal{H}_s^*(F) \leq \overline{\mathcal{M}}^s(F) \leq 4\mathcal{H}_s^*(F)$$

Οπότε και για το εξωτερικό μέτρο $\overline{\mathcal{M}}^s$, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή και μάλιστα από τα παραπάνω είναι $s_0 = dim(F)$ όπου:

$$\overline{\mathcal{M}}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \forall s < s_0. \\ 0, & \forall s > s_0. \end{cases}$$

Ας δούμε τώρα μια παραλλαγή του παραπάνω. Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^2$, σταθεροποιούμε έναν αριθμό $r > 0$ και καλύπτουμε το σύνολο F με στοιχεία του $\mathcal{S}_r$, και στην συνέχεια απαιτούμε $r \to 0$. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι αυτό το μέτρο δεν προέρχεται από την Μέθοδο II. Καθώς τώρα έχουμε κατασκευάσει μια κάλυψη του F, έστω $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S}_r : F \subseteq \cup A\}$ τότε

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} r^s = N r^s$$

όπου N είναι το πλήθος των στοιχειών του $\mathcal{A}$. Οπότε ορίζουμε το εξής μέτρο.

Ορισμός 3.2.2. *Έστω $N_r(F)$ να είναι ο αριθμός των συνόλων του $\mathcal{S}_r$ όπου τέμνουν το F. Ορίζουμε*

$$\widetilde{\mathcal{K}}_r^s(F) = N_r(F) r^s$$

και αν $r \to 0$ θέτουμε

$$\widetilde{\mathcal{K}}^s(F) = \lim_{r \to 0} inf\{N_r(F) r^s\}.$$

Όπως και πρίν υπάρχει μια κρίσιμη τιμή για την παράμετρο s. Έστω E ένα τυχαίο σύνολο. Για να το καλύψουμε με στοιχεία από το $\mathcal{S}_r$ θα χρειαστούμε

$$N_r(E) \simeq c(\frac{1}{r})^s$$

στοιχεία πλευράς r για κάποιο $s \geq 0$. Λύνοντας ως προς s έχουμε:

$$\log(N_r(E)) \simeq \log(c) - s\log(r)$$

Άρα

$$s_0 = \lim_{r \to 0^+} \frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

Ορισμός 3.2.3. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο, ορίζουμε σαν διάσταση Box τον αριθμό*

$$dim_B(E) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

Τότε και εδώ έχουμε για αυτή την κρίσιμη τιμή:

$$\widetilde{\mathcal{K}}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \forall s < s_0. \\ 0, & \forall s > s_0. \end{cases}$$

3.2.1 Πρόταση. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε*

$$dim(E) \leq dim_B(E),$$

και γενικά δεν ισχύει η ισότητα.

Απόδειξη. Έστω $s = dim(E) = sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}_t(E) = \infty\}$. Αν $s = 0$ τότε ισχύει $dim(E) \leq dim_B(E)$.

Έστω $s > 0$ και $t < s$. Τότε $\mathcal{H}_t(E) = \infty = \lim_{r \to 0^+} \mathcal{H}_{t,r}(E)$ και $\mathcal{H}_{t,r}(E) > 1$. Έστω $N_r(E)$ να είναι ο ελάχιστος αριθμός των συνόλων του $\mathcal{S}_r$ όπου τέμνουν το E. Τότε θα έχουμε

$$\mathcal{H}_{t,r}(E) \leq N_r(E)r^t$$

και άρα

$$1 < N_r(E)r^t$$

επομένως

$$t \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}$$

και άρα

$$dim(E) \leq dim_B(E).$$

□

3.2.2 Πρόταση. *Αν* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *τότε* $\widetilde{\mathcal{K}}_0^s(E) \leq N_0(E)\mathcal{P}_s(E)$ *και*

$$dim_B(E) \leq Dim(E)$$

Απόδειξη. Έστω οτι $\widetilde{\mathcal{P}}_r^s(E) < \infty$, καθώς για $\widetilde{\mathcal{P}}_r^s(E) = \infty$ είναι προφανές. Τότε έχουμε

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{2r}^s(E) = N_{2r}(E)(2r)^s \leq N_{2r}(E)\widetilde{\mathcal{P}}_r^s(E).$$

Καθώς ισχύει για κάθε $r > 0$ επιλέγω $r \to 0$ και από την Μέθοδο I έχουμε:

$$\widetilde{\mathcal{K}}_0^s(E) \leq N_0(E)\mathcal{P}_s(E).$$

Όπου $N_0(E)$ κάποιος σταθερός αριθμός.

Αν $s < dim_B(E)$ τότε $\widetilde{\mathcal{K}}_0^s(E) = \infty$ και άρα $\mathcal{P}_s(E) = \infty$ και ως εκ τούτου $s < Dim(E)$, άρα

$$dim_B(E) \leq Dim(E).$$

□

Παρατηρούμε τελικά την εξής σχέση μεταξύ των διαστάσεων

$$dim(E) \leq dim_B(E) \leq Dim(E).$$

Αυτή η σχέση θα μας φανεί χρήσιμη, καθώς ο υπολογισμός της Box διάστασης είναι πάρα πολύ πιο εύκολος από των υπολοίπων.

Ορισμός 3.2.4. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε ορίζουμε την κάτω Box διάσταση να είναι ο αριθμός*

$$\underline{dim}_B(E) = \lim_{r\to 0^+} inf\frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

Ορισμός 3.2.5. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε ορίζουμε την πάνω Box διάσταση να είναι ο αριθμός*

$$\overline{dim}_B(E) = \lim_{r\to 0^+} sup\frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε τις εξής δυο σχέσεις

$$dim(E) = \underline{dim}_B(E) = \lim_{r\to 0^+} inf\frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

$$Dim(E) = \overline{dim}_B(E) = \lim_{r\to 0^+} sup\frac{\log(N_r(E))}{-\log(r)}.$$

Θα μας φανούν χρήσιμες στους υπολογισμούς διαστάσεων. Πριν όμως φτάσουμε να υπολογίζουμε διαστάσεις ας δούμε την επόμενη διάσταση που δεν είναι άλλη από την Τοπολογική.

Κεφάλαιο 4

4. Τοπολογική Διάσταση.

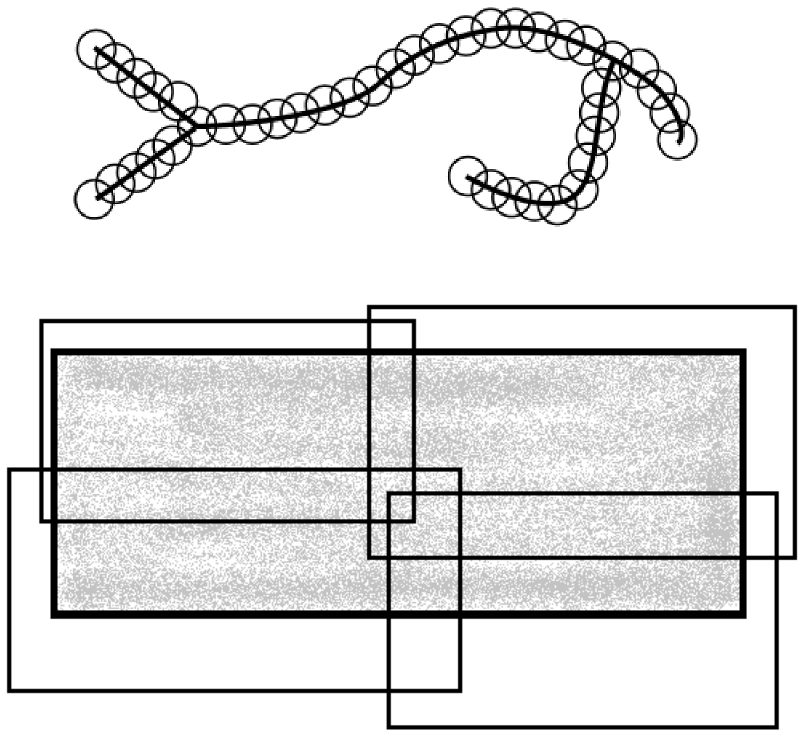
Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε την Τοπολογική ή ακόμα πιο γνωστή ως «Καλυπτική» διάσταση, με στόχο να δώσουμε τον δεύτερο ορισμό που θα ασχοληθούμε σε αυτή την διπλωματική. Αυτός είναι ο ορισμός των fractal κατά Mandelbrot.

4.1 Μηδενοδιάστατοι Χώροι.

Στις παρακάτω εικόνες παραθέτουμε την ιδέα γύρω από την διάσταση Κάλυψης. Ένα σύνολο θεωρείται μηδενοδιάστατο, αν μπορεί να καλυφθεί από μικρά ανοικτά σύνολα που είναι ξένα μεταξύ τους.

Ένα σύνολο θεωρείται μονοδιάστατο αν έχει την ιδιότητα να μπορούμε να καλύψουμε αυτό με μικρά ανοικτά σύνολα που τέμνονται μόνο δυο την φορά. Δηλαδή κάθε τρία από τα σύνολα έχουν κενή τομή ή ακόμα καλύτερα κάθε σημείο του συνόλου ανήκει το πολύ σε δυο από τα σύνολα κάλυψης.

Ένα σύνολο θεωρείται δισδιάστατο αν έχει την ιδιότητα να μπορούμε να καλύψουμε αυτό με μικρά ανοικτά σύνολα που τέμνονται μόνο τρία την φορά.



Στην εικόνα βλέπουμε τις καλύψεις για την καμπύλη και για το παραλληλόγραμμο.

Για να τα κατανοήσουμε καλύτερα ας ξεκινήσουμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο συλλογές συνόλων. Λέμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι* ***λεπτότερη*** *της $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν για καθε $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$.*

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος και $\mathcal{A}$ ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$.*

Μια ***εκλέπτυνση*** *της $\mathcal{A}$ είναι μια* ***ανοικτή κάλυψη*** *$\mathcal{B}$ του $\mathcal{X}$ που είναι* ***λεπτότερη*** *της $\mathcal{A}$.*

Ορισμός 4.1.3. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος. Ένα σύνολο A λέγεται ανοικτόκλειστο, «clopen», αν και μόνον αν είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο ταυτόχρονα.*

Για παράδειγμα το $\varnothing$ και το $\mathcal{X}$ είναι ανοικτόκλειστα σύνολα. Αν δυο σύνολα A, B είναι ανοικτόκλειστα τότε και $A \cup B, A \cap B$ είναι ανοικτόκλειστα και $A \setminus B$ είναι ανοικτόκλειστο. Επίσης η συλλογή όλων των ανοικτόκλειστων συνόλων ενός μετρικού χώρου είναι μια άλγεβρα.

Ορισμός 4.1.4. *Μια **ανοικτόκλειστη διαμέριση** του $(\mathcal{X}, d)$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ από ξένα μεταξύ τους ανοικτόκλειστα σύνολα.*

Ορισμός 4.1.5. *Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι **μηδενοδιάστατος**, αν και μόνον αν, κάθε πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ...A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ του $\mathcal{X}$, έχει **πεπερασμένη εκλέπτυνση** $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...B_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι ο $\mathcal{X}$ είναι **ανοικτόκλειστα- διαχωρίσιμος**.*

4.1.1 Πρόταση. *Αν $\mathcal{X}$ ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος τότε είναι μηδενοδιάστατος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, ...x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος τότε κάθε ένα απο τα μονοσύνολα $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$ είναι ανοικτά, άρα ανοικτόκλειστα σύνολα. Κάθε ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ έχει λέπτυνση τα μονοσύνολα $\{x_i\}$, τα οποία είναι πεπερασμένα, και άρα έχουμε μια εκλέπτυνση απο ανοικτόκλειστα. Αρα ο $\mathcal{X}$ είναι ανοικτόκλειστα-διαχωρίσιμος, άρα έχει διάσταση μηδέν. $\square$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε κάτι. Η παραπάνω διάσταση «Κάλυψης», (θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό παρακάτω), του πεπερασμένου συνόλου είναι 0. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε συμφωνία με την διάσταση Hausdorff καθώς και με την διάσταση Packing όπως έχουμε άλλωστε δει. Αυτή η παρατήρηση δεν πρέπει να μας αφήνει αδιάφορους, καθώς όπως θα δούμε παρακάτω, θα κάνει την διαφορά μεταξύ των δυο ορισμών των fractal συνόλων.

4.1.2 Πρόταση. *Το σύνολο Cantor είναι μηδενοδιάστατο. (Ως προς την διάσταση Κάλυψης)*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια ανοικτή κάλυψη του C. Για κάθε $x \in C$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A$, και άρα ένας θετικός αριθμός r με $B(x,r) \cap C \subseteq A$. Αλλά τότε υπάρχει ένας ακέραιος n με $3^{-n} < r$, άρα το διάστημα I του C_n που περιέχει το x έχει μήκος 3^{-n} και $I \cap C \subseteq A$. Το συμπλήρωμα στο C του I είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων, άρα $I \cap C$ είναι ανοικτόκλειστο στο C. Για κάθε $x \in C$ επιλέγουμε το διάστημα I_x με $I_x \cap C$ ανοικτόκλειστο στο C και $I_x \subseteq A$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Έστω

$$\mathcal{A}_1 = \{I_x : x \in C\}$$

είναι μια ανοικτή κάλυψη του C. Καθώς το C είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη του $\mathcal{A}_1$, έστω $\mathcal{A}_2 = \{I_1, I_2, ...I_k\}$. Κατασκευάζουμε τα εξής σύνολα, $J_1 = I_1, J_2 = I_2 \setminus J_1, J_3 = I_3 \setminus J_2, \ldots, J_k = I_k \setminus J_{k-1}$, και τελικά έχουμε μια πεπερασμένη κάλυψη

$$\mathcal{A}_3 = \{J_1, J_2, ...J_k\}$$

του C από ανοικτόκλειστα σύνολα του C, που παραμένει λέπτυνση του $\mathcal{A}$. Τα σύνολα $J_i, i = 1, 2, 3...$ είναι ξένα. Άρα η κάλυψη $\mathcal{A}_3$ είναι μια ανοικτόκλειστη διαχώριση του C. Άρα το σύνολο Cantor είναι μηδενοδιάστατο. □

Και αυτό είναι ένα εξίσου καλό παράδειγμα που δεν πρέπει να το προσπεράσουμε άπλα. Σε επόμενο κεφάλαιο θα κάνουμε υπολογισμούς διαστάσεων για κάθε ένα από αυτά τα σύνολα και εκεί θα δούμε την βαρύτητα των δυο ορισμών. Πριν προχωρήσουμε σε κάποιες βασικές ιδιότητες για τους μηδενοδιάστατους χώρους ας δούμε ένα παράδειγμα χώρου που δεν είναι μηδενοδιάστατος.

4.1.1 Θεώρημα. *Τα μόνα ανοικτόκλειστα σύνολα στον μετρικό χώρο* $(\mathbb{R}, d)$ *είναι το* $\varnothing$ *και το* $\mathbb{R}$. *Άρα το* $\mathbb{R}$ ***δεν*** *ειναι μηδενοδιάστατο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, και έστω $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξω ότι το A δεν είναι ανοικτόκλειστο σύνολο, ή καλύτερα ότι έχει κάποιο σύνορο ∂A.

Ορίζουμε δυο ακολουθίες x_n, y_n με $x_n \in A$ καθώς $A \neq \varnothing$ και $y_n \notin A$ καθώς $A \neq \mathbb{R}$. Για τον ίδιο λόγο επιλέγουμε δυο στοιχεία $x_0 \in A$ και $y_0 \notin A$, θέλουμε να ορίσουμε τα x_{n+1} και y_{n+1}. Θεωρούμε το μεσαίο στοιχείο $z_n = (x_n + y_n)/2$.

Αν το $z_n \in A$ τότε ορίζουμε το $x_{n+1} = z_n$ και $y_{n+1} = y_n$. Αν το $z_n \notin A$ τότε ορίζουμε το $x_{n+1} = x_n$ και $y_{n+1} = z_n$. Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $x_{n+1} \in A$ και $y_{n+1} \notin A$ με

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_n - y_n|}{2}.$$

Άρα έχουμε ότι $|x_n - y_n| = |x_0 - y_0|/2^n$. Έτσι $|x_n - y_n| \to_{n\to\infty} 0$. Επίσης $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_n - y_n| = |x_0 - y_0|/2^n$, άρα x_n είναι Cauchy. Έστω $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Λόγω του ότι $|x_n - y_n| \to 0$, επίσης $y_n \to x$. Άρα $x \in \partial A$. Οπότε το A δεν είναι ανοικτόκλειστο.

Τώρα η κάλυψη $(-\infty, 1) \cup (-1, \infty)$ του $\mathbb{R}$, δεν έχει ανοικτόκλειστη εκλέπτυνση. Άρα το $\mathbb{R}$, δεν ειναι μηδενοδιάστατο.

□

Ιδιότητες μηδενοδιάσταων χώρων.

4.1.2 Θεώρημα. *Έστω* $\mathcal{X}$ *μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

i) Ο μετρικός χώρος $\mathcal{X}$ *είναι μηδενοδιάστατος.*

ii) Αν $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ *είναι πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του* $\mathcal{X}$ *τότε υπάρχουν σύνολα* $B_1 \subseteq U_1, B_2 \subseteq U_2, ..., B_k \subseteq U_k$ *ώστε* $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ *να είναι ανοικτόκλειστη διαμέριση του* $\mathcal{X}$.

iii) *Αν* $\{U, V\}$ *είναι ανοικτή κάλυψη του* $\mathcal{X}$, *τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα* $A \subseteq U$ *και* $B \subseteq V$ *ώστε* $A \cup B = \mathcal{X}$ *και* $A \cap B = \varnothing$.

iv) *Αν* $\{U, V\}$ *είναι ανοικτή κάλυψη του* $\mathcal{X}$, *τότε υπάρχουν κλειστά σύνολα* $A \subseteq U$ *και* $B \subseteq V$ *ώστε* $A \cup B = \mathcal{X}$ *και* $A \cap B = \varnothing$.

Απόδειξη. Από το $ii) \implies iii)$ και από $ii) \implies i)$ είναι προφανείς. Από το $iii) \iff iv)$ είναι προφανείς καθώς και στις δυο περιπτώσεις τα σύνολα A, B είναι ανοικτόκλειστα.

$i) \implies ii)$. Έστω ότι ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος. Τότε η ανοικτή κάλυψη $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ έχει εκλέπτυνση, έστω $\mathcal{W}$, όπου είναι ανοικτόκλειστη διαμέριση του $\mathcal{X}$. Για κάθε $W \in \mathcal{W}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα i ώστε $W \subseteq U_i$ επιλέγουμε ένα από αυτά, και το ονομάζουμε $i(W)$. Τώρα για καθε i ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$B_i = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) = i\}.$$

Τα σύνολα B_i είναι ανοικτά, και $\bigcup_i B_i = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = \mathcal{X}$. Το συμπλήρωμα του B_j είναι το

$$(B_i)^c = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) \neq i\},$$

το οποίο είναι ανοικτό . Άρα το B_i είναι ανοικτόκλειστο.

Έστω $x \in \mathcal{X}$. Λόγο του ότι το $\mathcal{W}$ ανοικτόκλειστη διαμέριση του $\mathcal{X}$, τότε το x ανήκει σε τουλάχιστον ένα W σύνολο. Αλλά το $x \in B_i$ μόνο αν $x \in W$ για κάποια W ώστε $i(W) = i$. Άρα το x ανήκει σε ένα μόνο B_i σύνολο. Και άρα τα σύνολα B_i είναι ξένα.

$iii) \implies ii)$. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{X}$ έχει την ιδιότητα $iii)$. Έστω $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$.

Αν $k = 1$ τότε αυτή η κάλυψη είναι αυτομάτως και ανοικτόκλειστη διαμέριση του $\mathcal{X}$, καθώς $U_1 = \mathcal{X}$ και $\mathcal{X}$ ανοικτόκλειστος. Έστω $k \geq 2$, τότε θέτουμε $U = U_1, V = \bigcup_{i=2}^{k} U_i$. Αυτά τα σύνολα καλύπτουν τον $\mathcal{X}$, άρα από το $iii)$ υπάρχουν ανοικτόκλειστα σύνολα $A \subseteq U, B \subseteq V$

με $A \cup B = \mathcal{X}$ και $A \cap B = \varnothing$. Έστω $B_1 = A$ και $B_i = B \cap U_i$ με $i \geq 2$. Τότε $B_i \subseteq U_i$ για κάθε i, και $\bigcup_{i=2}^{k} B_i = \mathcal{X}$, επίσης $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για πεπερασμένο αριθμό φορών, και για κάθε δυο στοιχεία καταλήγουμε στο ζητούμενο.

□

4.1.3 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

i) Ο μετρικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος.

ii) Για κάθε $A, B \subseteq \mathcal{X}$ κλειστά και ξένα, υπάρχει ανοικτόκλειστο σύνολο U με $A \subseteq U$ και $B \subseteq U^c$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος. Και $A, B \subseteq \mathcal{X}$ κλειστά και ξένα. Τότε τα συμπλήρωματα τους A^c, B^c είναι ανοικτά. Καθώς $A \cap B = \varnothing$ για την ένωση των συμπληρωμάτων έχουμε $A^c \cup B^c = \mathcal{X}$. Από το προηγούμενο θεώρημα $iii)$, έχουμε οτι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V με $U \subseteq B^c$ και $V \subseteq A^c$, με την ιδιότητα, $U \cup V = \mathcal{X}, U \cap V = \varnothing$. Άρα τα U, V είναι ανοικτόκλειστα και $A \subseteq U, B \subseteq V$.

Απο την άλλη, έστω οτι ισχύει το $ii)$. Έστω οτι $\{U_1, U_2\}$ ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Τότε τα συμπληρώματα $U_1^c \cap U_2^c = \varnothing$ και είναι κλειστά. Οπότε υπάρχει ανοικτόκλειστο σύνολο V με $U_1^c \subseteq V, U_2^c \subseteq V^c$. Άρα $V \subseteq U_2$ και $V^c \subseteq U_1$, και απο το προηγούμενο θεώρημα $iii)$, ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος. □

Οι μηδενοδιάστατοι χώροι, σχετίζονται με την ύπαρξη ανοικτόκλειστης βάσης για την τοπολογία, όπως θα δούμε στην παρακάτω πρόταση.

4.1.4 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μηδενοδιάστατος μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει μια βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$, που αποτελείται από ανοικτόκλειστα σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq \mathcal{X}$ ανοικτό σύνολο και $x_0 \in \mathcal{X}$.

Η απόσταση $r := d(x_0, U^c) > 0$. Άρα ο $\mathcal{X}$ καλύπτεται από δυο ανοικτά σύνολα U και $V = \{x \in \mathcal{X} : d(x, x_0) > r/2\}$. Αυτή η κάλυψη έχει εκλέπτυνση μια ανοικόκλειστη διαμέριση $\mathcal{A}$. □

4.1.5 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{X} \neq \varnothing, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω ότι υπάρχει μια βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$, που αποτελείται από ανοικτόκλειστα σύνολα. Τότε ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ από ανοικτόκλειστα σύνολα. Έστω $\mathcal{A}$ μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A$, και ως εκ τούτου υπάρχει κάποιο $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subseteq A$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ επιλέγουμε όλα τα $B_x \in \mathcal{B}$. Τότε

$$A_1 = \{B_x : x \in \mathcal{X}\}$$

είναι μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Λόγω της συμπάγειας, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη του $\mathcal{X}$ έστω

$$\mathcal{A}_2 = \{B_1, B_2, ..., B_k\}.$$

Αν γράψουμε $J_1 = B_1, J_2 = B_2 \setminus J_1, \ldots, J_k = B_k \setminus J_{k-1}$ έχουμε μια πεπερασμένη κάλυψη

$$\mathcal{A}_3 = \{J_1, J_2, ..., J_k\}$$

του $\mathcal{X}$ από ανοικτόκλειστα σύνολα που παραμένει λεπτότερη του $\mathcal{A}$. Τα σύνολα $J_i, i = 1, 2, \ldots, k$ είναι ξένα, και άρα η κάλυψη $\mathcal{A}_3$ είναι ανοικτόκλειστη διαμέριση του $\mathcal{X}$. □

4.1.6 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος αν και μόνον αν υπάρχει βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ αποτελούμενη από ανοικτόκλειστα σύνολα.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση έχει ήδη γίνει στην Πρόταση 20. Για την αντίθετη έχουμε: Έστω ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ που αποτελείται από ανοικτόκλειστα σύνολα. Έστω $\{U, V\}$ μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Υπάρχει συλλογή $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{B}$ με $\bigcup \mathcal{U}_1 = U$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή (ιδιότητα Lindelöf) με $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ και $\bigcup \mathcal{U}_2 = U$.

Όμοια υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{B}$ με $\bigcup \mathcal{V}_2 = V$. Αριθμούμε την ένωση:

$$\mathcal{U}_2 \cup \mathcal{V}_2 = \{G_1, G_2, G_3 ...\}.$$

Τα σύνολα G_m είναι ανοικτόκλειστα, και $\bigcup G_m = \mathcal{X}$. Ορίζουμε τα εξής σύνολα, $H_1 = G_1, H_2 = G_2 \setminus G_1$ και γενικά

$$H_m = G_m \setminus (\bigcup_{i=1}^{m-1} G_i).$$

Τα σύνολα H_m είναι ανοικτόκλειστα, ξένα, και $\bigcup H_m = \mathcal{X}$. Έστω τώρα

$$E = \bigcup \{H_m : H_m \subseteq U\}, F = \bigcup \{H_m : H_m \nsubseteq U\}.$$

Τότε τα U, V είναι ανοικτά, $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = \mathcal{X}$, άρα U, V είναι ανοικτόκλειστα. Επιπλέον $E \subseteq U$ και $F \subseteq V$. Άρα $\mathcal{X}$ μηδενοδιάστατος. □

4.1.3 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{X}$ μετρικός χώρος. Έστω F_1, F_2 κλειστά σύνολα στον $\mathcal{X}$. Αν F_1, F_2 και τα δυο μηδενοδιάστατα τότε η $F_1 \cup F_2$ είναι μηδενοδιάστατο.*

Απόδειξη. Έστω F_1, F_2 μηδενοδιάστατα και κλειστά σύνολα. Υπενθυμίζουμε ότι καθώς το F_1 είναι κλειστό τότε ένα υποσύνολο $E \subseteq F_1$ είναι κλειστό στο F_1 αν και μόνον αν E είναι κλειστό στον $\mathcal{X}$. Πρέπει να δείξουμε ότι, η $F_1 \cup F_2$ είναι μηδενοδιάστατο σύνολο.

Έστω A, B ξένα σύνολα στην $F_1 \cup F_2$. Τότε $A \cap F_1$ και $B \cap F_1$ είναι κλειστά σύνολα, άρα είναι κλειστά και στο F_1, επιπλέον είναι ξένα μεταξύ τους. Καθώς το F_1 είναι μηδενοδιάστατο υπάρχει σύνολο K ανοικτόκλειστο στο F_1 με συμπλήρωμα $L = F_1 \setminus K$ ώστε $A \cap F_1 \subseteq K$ και $B \cap F_1 \subseteq L$. Τα K, L είναι κλειστά στον $\mathcal{X}$. Τα σύνολα $(K \cup A) \cap F_2$ και $(L \cup B) \cap F_2$ είναι ξένα και κλειστά στο F_2. Καθώς το F_2 είναι μηδενοδιάστατο υπάρχει σύνολο P ανοικτόκλειστο στο F_2 με συμπλήρωμα $Q = F_2 \setminus P$ ώστε $(K \cup A) \cap F_2 \subseteq P$ και $(L \cup B) \cap F_2 \subseteq Q$. Έστω τώρα $U = K \cup P, V = L \cup Q$.

Τότε τα σύνολα U, V είναι κλειστά, ξένα και $U \cup V = F_1 \cup F_2$. Άρα τα σύνολα U, V είναι ανοικτόκλειστα στην $F_1 \cup F_2$, και $A \subseteq U, B \subseteq V$. Άρα η $F_1 \cup F_2$ είναι μηδενοδιάστατο σύνολο.

□

4.2 Διάσταση Κάλυψης.

Σε αυτή την ενότητα, θα δώσουμε τον ακριβή ορισμό της διάστασης Κάλυψης. Όπως θα δούμε, οι μηδενοδιάστατοι χώροι θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τις μεγαλύτερες διαστάσης Κάλυψης πολύ πιο εύκολα. Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς, και στην συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό της διάστασης Κάλυψης.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω $n \geq -1, n \in \mathbb{Z}$. Η τάξη (ord) μιας οικογένειας $\mathcal{A}$ συνόλων λέμε οτι είναι $ord(\mathcal{A}) \leq n$ αν και μόνον αν κάθε $n+2$ σύνολα έχουν κενή τομή.*

Αν $n \geq 0$ τότε λέμε ότι $ord(\mathcal{A}) = n$ αν και μόνον αν έχει $ord(\mathcal{A}) \leq n$ και όχι $ord(\mathcal{A}) \leq n-1$.

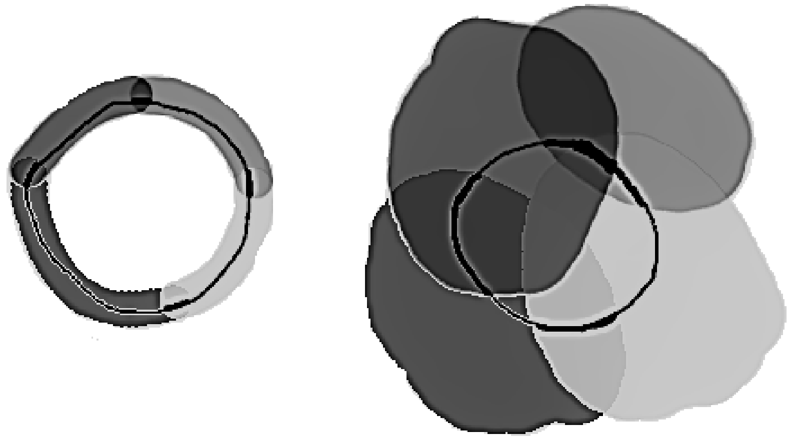
Για παράδειγμα μια οικογένεια $\mathcal{A}$ μη κενών συνόλων είναι ξένη μεταξύ τους $(A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j)$, αν και μόνον αν $ord(\mathcal{A}) = 0$.

Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{A}$ έχει $ord(\mathcal{A}) = -1$ αν και μόνον αν είναι το κενό ή το μονοσύνολο $\{\varnothing\}$.

Ορισμός 4.2.2 (Διάσταση Κάλυψης)**.** *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος.*

Έστω $n \geq -1, n \in \mathbb{Z}$. Η διάστασης Κάλυψης συμβολίζεται με Cov από την αγγλική λέξη «Covering». Λέμε ότι ο $\mathcal{X}$ έχει $Cov(\mathcal{X}) \leq n$ αν και μόνον αν κάθε πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ έχει εκλέπτυνση $\mathcal{A}$ με $ord(\mathcal{A}) \leq n$.

Η $Cov(\mathcal{X}) = n$ αν και μόνον αν $Cov(\mathcal{X}) \leq n$ και όχι $Cov(\mathcal{X}) \leq n-1$. Αν δεν υπάρχει κανένας $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $Cov(\mathcal{X}) \leq n$, τοτε $Cov(\mathcal{X}) = \infty$.



Στην πρώτη εικόνα «δεξιά» βλέπουμε μια κάλυψη του κύκλου, και «αριστερά» μια εκλεπτότητα της καλύψης.

4.2.1 Θεώρημα. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ ένας μετρικός χώρος, και $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Cov(\mathcal{X}) \leq n$.

(ii) *Αν $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ είναι πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα $B_1 \subseteq U_1, B_2 \subseteq U_2, ..., B_k \subseteq U_k$ ώστε $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ να είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ με $ord(\mathcal{B}) \leq n$.*

(iii) *Αν $\{U_1, U_2, ...U_{n+2}\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$, τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα $B_1 \subseteq U_1, B_2 \subseteq U_2, ..., B_{n+2} \subseteq U_{n+2}$ ώστε, $\bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = \mathcal{X}$ και $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \varnothing$.*

(iv) *Αν $\{U_1, U_2, ...U_{n+2}\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$, τότε υπάρχουν κλειστά σύνολα $F_1 \subseteq U_1, F_2 \subseteq U_2, ..., F_{n+2} \subseteq U_{n+2}$ ώστε, $\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = \mathcal{X}$ και $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \varnothing$.*

Απόδειξη. Από το $(ii) \Longrightarrow (iii)$ και $(ii) \Longrightarrow (i)$ είναι προφανή.

Από το $(i) \Longrightarrow (ii)$. Έστω ότι $Cov(\mathcal{X}) \leq n$. Η ανοικτή κάλυψη $\{U_1, U_2, ...U_k\}$ επάγει μια πεπερασμένη εκλέπτυνση $\mathcal{W}$ με $ord(\mathcal{W}) \leq n$. Για κάθε $W \in \mathcal{W}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα i ώστε $W \subseteq U_i$. Επιλέγουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε $i(W)$. Τώρα, για κάθε i ορίζουμε το σύνολο

$$B_i = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : i(W) = i\}.$$

Τα σύνολα B_i είναι ανοικτά, και $\bigcup_i B_i = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W = \mathcal{X}$. Αν $x \in \mathcal{X}$, τότε καθώς $ord(\mathcal{W}) \leq n$, το x ανήκει το πολύ σε $n+1$ σε πλήθος σύνολα του $\mathcal{W}$. Αλλά $x \in B_i$ μόνον εάν $x \in W$ για κάποιο W με $i(W) = i$. Άρα το x ανήκει το πολύ σε $n+1$ σε πλήθος σύνολα του B_i.

Από το $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Έστω ότι ισχύει η ιδιότητα (iii). Έστω ότι $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ...U_k\}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Αν το $k \leq n+1$, τότε αυτή η κάλυψη έχει $ord(\mathcal{U}) \leq n$.

Υποθέτουμε ότι $k \geq n+2$ και γράφουμε

$$W_1 = U_1, W_2 = U_2, \ldots, W_{n+1} = U_{n+1}$$

και $W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^{k} U_i$.

Τότε αυτά τα σύνολα καλύπτουν τον $\mathcal{X}$ άρα από την υπόθεση (iii) υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_i \subseteq W_i$ με

$$\bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = \mathcal{X}, \bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \varnothing.$$

Έστω $B_i = V_i$ για $i \leq n+1$ και $B_i = V_{n+2} \cap U_i$ για $i \geq n+2$. Τότε $B_i \subseteq U_i, \forall i$ έχουμε

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \mathcal{X}, \bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \varnothing.$$

Επαναλαμβάνουμε τον ίδιο συλλογισμό πεπερασμένο αριθμό φορών, μια για κάθε υποσύνολο των $\{1, 2, 3 ... \kappa\}$ με $n+2$ στοιχεία έχοντας το ίδιο αποτέλεσμα για όλες τις τομές μεγέθους $n+2$ να είναι το κενό.

Από το $(iii) \implies (iv)$. Υπάρχουν ανοικτά σύνολα ώστε $B_i \subseteq U_i$ με $\bigcup B_i = \mathcal{X}$ και $\bigcap B_i = \varnothing$. Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus B_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$, άρα υπάρχει ανοικτό σύνολο V_1 με $\mathcal{X} \setminus B_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i$. Έστω $F_1 = \mathcal{X} \setminus V_1$. Άρα έχουμε $F_1 \subseteq B_1$ και $F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} B_i = \mathcal{X}$.

Όμοια έχουμε ανοικτό σύνολο V_2 με $\mathcal{X} \setminus B_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq (\mathcal{X} \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i$. Έστω $F_2 = \mathcal{X} \setminus V_2$. Άρα έχουμε $F_2 \subseteq B_2$ και $F_1 \cup F_2 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i = \mathcal{X}$. Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο.

Από το $(iv) \implies (iii)$. Έστω ότι έχουμε κλειστά σύνολα F_i όπως την υπόθεση (iv). Το κλειστό σύνολο F_1 είναι υποσύνολο του ανοικτού συνόλου $U_1 \cap (\mathcal{X} \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)$, άρα υπάρχει ανοικτό σύνολο B_1 με

$$F_2 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U_1 \cap (\mathcal{X} \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i).$$

Άρα $\overline{B_1} \subseteq U_1$ και $\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i = \varnothing$. Συνεχίζοντας υπάρχει ανοικτό σύνολο B_2 με

$$F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq U_2 \cap (\mathcal{X} \setminus (\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i))$$

άρα $\overline{B_2} \subseteq U_2$ και $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i = \varnothing$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Η διάσταση Κάλυψης ορίζεται πιο απλά για συμπαγείς μετρικούς χώρους.

Ορισμός 4.2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια κάλυψη του $\mathcal{X}$. Ορίζουμε το mesh της κάλυψης $\mathcal{A}$ να είναι $sup_{A\in\mathcal{A}}\delta(A)$. Όπου $\delta(A) = sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$. Γράφουμε*

$$mesh(\mathcal{A}) = sup_{A\in\mathcal{A}}\delta(A).$$

4.2.2 Θεώρημα. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ συμπαγής μετρικός χώρος.*

Έστω $n \geq -1, n \in \mathbb{Z}$. Τότε $Cov(\mathcal{X}) \leq n$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή κάλυψη $\mathcal{U}$ του $\mathcal{X}$, με $ord(\mathcal{U}) \leq n$ και $mesh(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $Cov(\mathcal{X}) \leq n$, και $\varepsilon > 0$. Η συλλογή $\mathcal{U}$ όλων των ανοικτών συνόλων με $\delta(U) \leq \varepsilon$ είναι κάλυψη του $\mathcal{X}$. Άρα έχει λέπτυνση $\mathcal{B}$ με $ord(\mathcal{B}) \leq n$, και $mesh(\mathcal{B}) \leq \varepsilon$. $\square$

Η διαχωρισιμότητα στους μονοδιάστατους χώρους έχει ως εξής

4.2.1 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος, με $Cov(\mathcal{X}) \leq 1$. Έστω A, B, C κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $A \cap B \cap C = \varnothing$. Τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V, W ώστε $A \subseteq U, B \subseteq V, C \subseteq W$ με $U \cup V \cup W = \mathcal{X}$ και $U \cap V \cap W = \varnothing$.*

Απόδειξη. Έστω A, B, C κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Τότε A^c, B^c, C^c είναι ανοικτά και $A^c \cup B^c \cup C^c = \mathcal{X}$. Απο το Θεώρημα 4.2.1 υπάρχουν κλειστά σύνολα F, G, H με $F \subseteq A^c, G \subseteq B^c, H \subseteq C^c$ όπου $F \cup G \cup H = \mathcal{X}$ και $F \cap G \cap H = \varnothing$. Ορίζουμε $U = \mathcal{X} \setminus F, V = \mathcal{X} \setminus G, W = \mathcal{X} \setminus H$. Τότε U, V, W είναι ανοικτά σύνολα όπου $A \subseteq U, B \subseteq V, C \subseteq W$ με $U \cup V \cup W = \mathcal{X}$ και $U \cap V \cap W = \varnothing$. □

4.2.3 Θεώρημα. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος, και F_1, F_2 κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Αν $Cov(F_1) \leq 1, Cov(F_2) \leq 1$ τότε $Cov(F_1 \cup F_2) \leq 1$.*

Απόδειξη. Έστω A, B, C κλειστά υποσύνολα του $F_1 \cup F_2$, με $A \cap B \cap C = \varnothing$. Τα σύνολα $A \cap F_1, B \cap F_1, C \cap F_1$ είναι κλειστά υποσύνολα του F_1 και $(A \cap F_1) \cap (B \cap F_1) \cap (C \cap F_1) = \varnothing$. Τότε υπάρχουν κλειστά σύνολα $K, L, M \subseteq F_1$ ώστε $(A \cap F_1) \subseteq K, (B \cap F_1) \subseteq L, (C \cap F_1) \subseteq M$ με $K \cap L \cap M = \varnothing$ και $K \cup L \cup M = F_1$. Τα σύνολα $(K \cup A) \cap F_2, (L \cup B) \cap F_2, (M \cup C) \cap F_2$, είναι κλειστά στο F_2 και η τομή τους είναι το κενό. Άρα υπάρχουν κλειστά σύνολα $P, Q, R \subseteq F_2$ ώστε $(K \cup A) \cap F_2 \subseteq P, (L \cup B) \cap F_2 \subseteq Q, (M \cup C) \cap F_2 \subseteq R$ με $P \cap Q \cap R = \varnothing$ και $P \cup Q \cup R = F_2$. Ορίζουμε $E = K \cup P, F = L \cup Q, G = M \cup R$. Τότε τα E, F, G είναι κλειστά στο $F_1 \cup F_2$ με $A \subseteq E, B \subseteq F, C \subseteq G$ όπου $E \cap F \cap G = \varnothing$ και $E \cup F \cup G = F_1 \cup F_2$. Άρα $Cov(F_1 \cup F_2) \leq 1$. □

4.2.4 Θεώρημα (Υποσυνόλων)**.** *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος, και $T \subseteq \mathcal{X}$. Τότε $Cov(T) \leq Cov(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη. Αν $Cov(\mathcal{X}) = \varnothing$, είναι τετριμμένη. Έστω ότι $Cov(\mathcal{X}) = n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Θα δείξουμε ότι $Cov(T) \leq n$. Αυτό θα επιτευχθεί σε τρία βήματα.

(1) Έστω οτι το T είναι κλειστό και έστω $\mathcal{A}$ ανοικτή κάλυψη του T. Κάθε στοιχείο του $A \in \mathcal{A}$ έχει την μορφή $A = E \cap T$ όπου το E ανοικτό στον $\mathcal{X}$. Επίσης και το σύνολο $\mathcal{X} \setminus T$ είναι ανοικτό στον $\mathcal{X}$. Οπότε

$$\mathcal{A}_1 = \{E \subseteq \mathcal{X} : E = E^o, E \cap T \in \mathcal{A}\} \cup \{\mathcal{X} \setminus T\}$$

είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$. Άρα υπάρχει λέπτυνση $\mathcal{A}_2$ της $\mathcal{A}_1$ ώστε να είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathcal{X}$ με $ord(\mathcal{A}_2) \leq n$. Άρα η συλλογή

$$\mathcal{A}_3 = \{E \cap T : E \in \mathcal{A}_2\}$$

ειναι υφιστάμενος του $\mathcal{A}$ και ανοικτή κάλυψη του T με $ord(\mathcal{A}_3) \leq n$. Άρα

$$Cov(T) \leq n.$$

(2) Έστω τώρα οτι T είναι ανοικτό σύνολο. Ξέρουμε ότι ένα ανοικτό σύνολο γράφεται σαν πεπερασμένη ένωση κλειστών υποσυνόλων δηλαδή $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ όπου

$$F_i = \{x \in \mathcal{X} : d(x, \mathcal{X} \setminus T) \geq \frac{1}{i}\}.$$

Τώρα απο την (1) $Cov(F_i) \leq n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Άρα απο το Θεώρημα 4.2.3 έχουμε

$$Cov(T) \leq n.$$

(3) Τέλος θεωρούμε T οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Έστω $\{U_1, U_2, ...U_{n+2}\}$ ανοικτή κάλυψη του T. Για κάθε U_i, θεωρούμε ενα ανοικτό σύνολο V_i στον $\mathcal{X}$, με $U_i = V_i \cap T$. Το σύνολο $V = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i$ είναι ανοικτό, άρα απο το (2) έχουμε $Cov(V) \leq n$. Τότε η συλλογή $\{V_1, V_2, ...V_{n+2}\}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του V, άρα υπάρχουν ανοικτά σύνολα $W_i \subseteq V_i$ με $\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \varnothing$ και $\bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = V$. Τότε όμως $W_i \cap T$ είναι ανοικτά στο T και έχουν κενή τομή και ένωση το T. Άρα $Cov(T) \leq n$. $\square$

Το επόμενο λογικό βήμα που πρέπει να κάνουμε, αφού έχουμε αναφέρει πλέον τις διαστάσεις που χρειαζόμαστε, είναι να συγκρίνουμε την διάσταση Κάλυψης, με την διάσταση Hausdorff, όπως ήδη έχουμε κάνει με την διάσταση Packing.

4.2.5 Θεώρημα. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ μετρικός χώρος. Τότε $Cov(\mathcal{X}) \leq dim(\mathcal{X})$.*

Απόδειξη. Πλήρης απόδειξη παραθέτεται στο βιβλίο : Integral, Probability, and Fractal Measures, Gerald A Edgar . Καθώς χρησιμοποιεί ολοκλήρωμα Lebesque που δεν έχουμε αναφέρει εδώ. □

4.2.6 Θεώρημα. *Έστω $(\mathcal{X}, d)$ συμπαγείς μετρικός χώρος. Τότε*

$$Cov(\mathcal{X}) \leq dim(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Πλήρης απόδειξη παραθέτεται στο βιβλίο: Measure, Topology, and Fractal Geometry, Gerald Edgar. □

Ορισμός 4.2.4. *Ένα σύνολο $\mathcal{X}$ λέγεται fractal κατά Mandelbrot αν*

$$Cov(\mathcal{X}) < dim(\mathcal{X}).$$

Κεφάλαιο 5

5. Υπολογισμός Διαστάσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα υπολογίσουμε τις διαστάσεις μερικών συνόλων και θα τα κατηγοριοποιήσουμε, σύμφωνα με τούς ορισμούς των fractal συνόλων που έχουμε παραθέσει σε προηγούμενα κεφάλαια. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας τις διαστάσεις κάποιων συνόλων.

Ας ξεκινήσουμε αρχικά με το σύνολο Cantor. Όπως έχουμε προαναφέρει, στο Κεφάλαιο 4, το σύνολο Cantor έχει διάσταση Κάλυψης $Cov(C) = 0$. Τώρα θα υπολογίσουμε την διάσταση Hausdorf και Packing του συνόλου Cantor. Όπως έχουμε αναφέρει το σύνολο Cantor κατασκευάζεται από το διάστημα $[0, 1]$ αφού πρώτα έχουμε αφαιρέσει το μεσαίο διάστημα μήκους $1/3$, και συνεχίζουμε όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.

Άρα

$$\mathcal{H}_s^*(C) = 1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_s^*\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) + \mathcal{H}_s^*\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = 1 \Rightarrow \delta^s\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) + \delta^s\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = 1 \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

Λύνω ως προς s και έχω:

$$dim(C) = s = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Ο παραπάνω συλλογισμός είναι περιγραφίκος και δεν μπορεί να εφαρμοστεί γενικά για όλα τα σύνολα, παρά μόνο σε κάποια συγκεκριμένα που λέγονται self similar και δεν αποτελεί απόδειξη. Ας περάσουμε στην αυστηρή απόδειξη.

Το σύνολο Cantor αποτελείται από 2^n σύνολα, που το κάθε ένα έχει διάμετρο $1/3^n$. Ορίζουμε την εξής οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq [0,1] : \delta(A) = \frac{1}{3^n}, C_n \subseteq \bigcup_n A_n\}$$

Τότε για το μέτρο Hausdorff ξέρουμε ότι:

$$\mathcal{H}^*_{1/3^n,s}(C_n) = inf \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^s \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \left(\frac{2}{3^s}\right)^n.$$

Προκειμένου όμως το $\mathcal{H}^*_{1/3^n,s}(C_n) < \infty$, παρατηρούμε ότι πρέπει να ισχύει

$$\frac{2}{3^s} \leq 1$$

Λύνω ως προς s και έχω:

$$dim(C) = s \geq \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $dim(C) = s_0 = \dfrac{ln(2)}{ln(3)}$ έχουμε $\mathcal{H}_s(C) \leq 1$.

Η παραπάνω τιμή αποτελεί την υποψήφια διάσταση Hausdorff για το σύνολο Cantor, αυτό που απομένει είναι να το επαληθεύσουμε. Έστω μια τιμή $t \geq s_0$ τότε σύμφωνα με όσα έχουμε πει για την διάσταση Hausdorff έχουμε:

$$\mathcal{H}^*_{1/3^n,t}(C_n) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^{s_0}(1/3^n)^{t-s_0} =$$

$$= (1/3^n)^{t-s_0} \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^{s_0}$$

$$= (1/3^n)^{t-s_0} \mathcal{H}^*_{1/3^n,s_0}(C_n)$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε πριν όμως έχουμε :

$$\mathcal{H}^*_{1/3^n,t}(C_n) \leq \delta(A)^{t-s_0} = \left(\frac{1}{3^n}\right)^{t-s_0}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ και λόγο του ότι $t \geq s_0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^*_{1/3^n,t}(C_n) \leq \delta(A)^{t-s_0} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right)^{t-s_0}$$

$$\mathcal{H}_t(C) \leq 0.$$

Άρα όπως βλέπουμε για $t \geq s_0$ έχουμε $\mathcal{H}_t(C) \leq 0$.

Έστω τώρα $t \leq s_0$. Τότε

$$\mathcal{H}_t(C) \geq inf \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^{s_0} \delta(A)^{t-s_0}$$

$$\geq (1/3^n)^{t-s_0} \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^{s_0}$$

$$\geq (1/3^n)^{t-s_0} \mathcal{H}_{s_0}(C)$$

$$= \left(\frac{1}{3^n}\right)^{t-s_0}.$$

Άρα
$$\mathcal{H}_t(C) \geq \left(\frac{1}{3^n}\right)^{t-s_0}.$$
Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ και λόγω του ότι $t \leq s_0$ έχουμε
$$\mathcal{H}_t(C) = \infty.$$
Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι
$$dim(C) = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την διάσταση Packing του συνόλου Cantor.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει για κάθε κάλυμμα από τα 2^n να βρούμε το σύνολο των συστατικών μερών του.

Ένα γέμισμα-πακετάρισμα του C_n είναι μια αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{Q} = \{(x,r) : x \in C_n, r > 0\}$ από συστατικά μέρη. Ένα οποιοδήποτε κάλυμμα του C_n όπως είδαμε έχει διάμετρο $\delta(A) = 1/3^n$, διαιρούμε αυτό το στοιχείο της κάλυψης σε $k \in \mathbb{N}$ πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων, ώστε για κάθε δυο διαφορετικά συστατικά μέρη να ισχύει $d(x,y) > r + s$.

Τότε η διάμετρος κάθε συστατικού μέρους (x,r) θα είναι
$$\delta\left((x,r)\right) = \frac{1}{k3^n}.$$
Τότε ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση
$$\widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A) = sup \sum_{(x,r)\in\mathcal{Q}} (2r_i)^s \leq \left(\frac{1}{3^n} + \delta\right)^s,$$
τότε έχουμε
$$\lim_{\delta\to 0} \widetilde{\mathcal{P}}^s_\delta(A) \leq \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{1}{3^n} + \delta\right)^s \Rightarrow,$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}_0^s(A) = \left(\frac{1}{3^n}\right)^s.$$

Και τώρα παίρνουμε το εξωτερικό μέτρο Packing για αυτή την συνολοσυνάρτηση.

$$\mathcal{P}^*_{1/3^n,s}(C_n) = inf \sum_{A \in \mathcal{A}} \widetilde{\mathcal{P}}_0^s(A) \leq 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \left(\frac{2}{3^s}\right)^n.$$

Προκειμένου όμως το $\mathcal{P}^*_{1/3^n,s}(C_n) < \infty$, παρατηρούμε ότι πρέπει να ισχύει

$$\frac{2}{3^s} \leq 1$$

Λύνω ως προς s και έχω:

$$Dim(C) = s \geq \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $Dim(C) = s_0 = \dfrac{ln(2)}{ln(3)}$ έχουμε $\mathcal{P}_s(C) \leq 1$. Με ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό όπως πριν για το μέτρο Hausdorff, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$Dim(C) = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Άρα σύμφωνα με τους ορισμούς των fractal που είδαμε, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο Cantor είναι fractal κατά Mandelbrot καθώς $Cov(C) < dim(C)$ και παράλληλα είναι fractal κατά Taylor καθώς $dim(C) = Dim(C)$.

Άρα έχουμε ένα πρώτο παράδειγμα fractal που ικανοποιεί και τους δυο ορισμούς.

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα, που ικανοποιούν μόνο έναν, ή κανέναν από τους δυο ορισμούς.

Έχουμε καταλάβει ότι η διαδικασία για να υπολογίσουμε την διάσταση ενός συνόλου ειναι δύσκολη και χρονοβόρα. Παρόλα αυτά στο Κεφάλαιο 3 είδαμε την διάσταση Box, και κάποιες βοηθητικές προτάσεις με σκοπό την διευκόλυνση στον υπολογισμό διαστάσεων.

Τώρα θα υπολογίσουμε την διάσταση του συνόλου Cantor με χρήση αυτών, για να δούμε πόσο πιο εύκολη είναι η διαδικασία.

Το σύνολο Cantor αποτελείται από 2^n σύνολα, που το κάθε ένα έχει διάμετρο $1/3^n$. Τότε

$$dim(C) = \underline{dim}_B(C) = \lim_{r \to 0^+} inf \frac{\log(N_r(C))}{-\log(r)}.$$

$$= \lim_{n \to \infty} inf \frac{\log(2^n)}{-\log(\frac{1}{3^n})} = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Και

$$Dim(C) = \overline{dim}_B(C) = \lim_{r \to 0^+} sup \frac{\log(N_r(C))}{-\log(r)}.$$

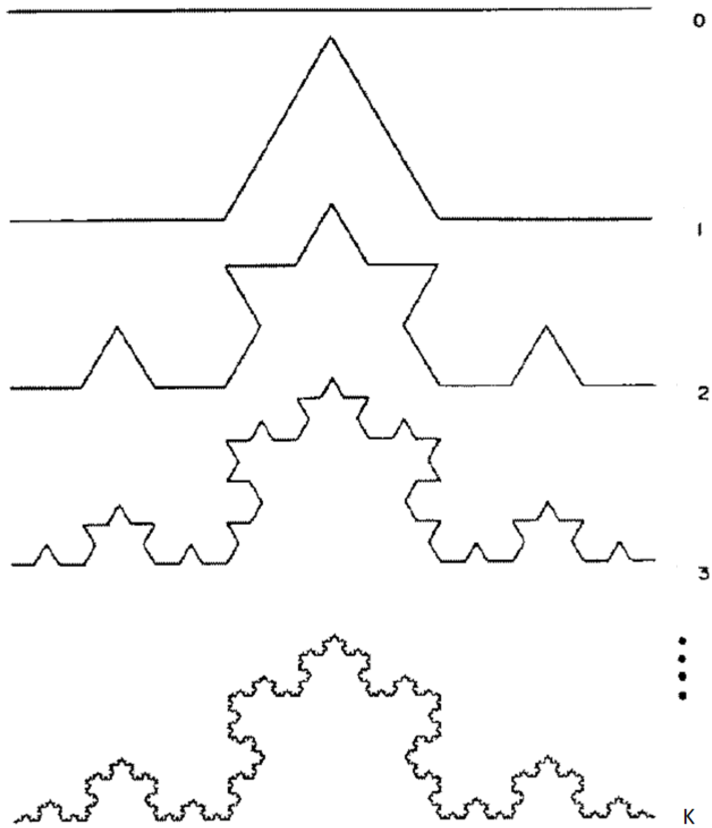
$$= \lim_{n \to \infty} sup \frac{\log(2^n)}{-\log(\frac{1}{3^n})} = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Άρα

$$dim(C) = Dim(C) = \frac{ln(2)}{ln(3)}.$$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε αυτά τα δύο όρια για κάθε υπολογισμό.

Το επόμενο σύνολο που θα δούμε είναι η καμπύλη von Koch.



Το σύνολο von Koch ή καμπύλη von Koch.

Όπως ξέρουμε αυτή αποτελείται από 4^n καλύψεις με διάμετρο $1/3^n$. Τότε όπως πρίν

$$dim(K) = \underline{dim}_B(K) = \lim_{r\to 0^+} inf \frac{\log(N_r(K))}{-\log(r)}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf \frac{\log(4^n)}{-\log(\frac{1}{3^n})} = \frac{ln(4)}{ln(3)}.$$

Και

$$Dim(K) = \overline{dim}_B(K) = \lim_{r\to 0^+} sup \frac{\log(N_r(K))}{-\log(r)}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup \frac{\log(4^n)}{-\log(\frac{1}{3^n})} = \frac{ln(4)}{ln(3)}.$$

Ο υπολογισμός της διάστασης Κάλυψης είναι πολύ απλός, και είναι προφανές ότι $Cov(K) = 1$, λόγω του ότι θέλουμε 3 στοιχεία της κάλυψης της για να έχουν κενή τομή. Άρα

$$Cov(K) = 1 < dim(C) = Dim(C) = \frac{ln(4)}{ln(3)}.$$

Το σύνολο von Koch είναι fractal κατά Mandelbrot καθώς $Cov(C) < dim(C)$ και παράλληλα είναι fractal κατά Taylor καθώς $dim(C) = Dim(C)$.

Στην συνέχεια παραθέτουμε ένα συνολο το οποίο δεν είναι fractal κατά Mandelbrot αλλά ούτε Taylor. Έστω η ακολουθία $x_n = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ τότε ορίζουμε

$$E = [0,1] \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

άρα

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$$

Για την διάσταση κάλυψης έχουμε ότι $Cov(E) = 0$. Ο υπολογισμός για την διάσταση Hausdorf θα γίνει με τον ορισμό, άρα έχουμε $\forall \varepsilon > o$, μια αριθμισημη κάλυψη για το E είναι η

$$\mathcal{A} = \left\{\left[x_i, x_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) : x_i \in E\right\}$$

τοτε
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[x_i, x_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$$
τότε

$$\mathcal{H}^*_{\frac{\varepsilon}{2^i},s}(E) = inf \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(A)^s = inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^s \leq inf\{\varepsilon^s\}$$

επιλέγω $\varepsilon \to 0$ τότε
$$\mathcal{H}_{\frac{\varepsilon}{2^i},s}(E) \leq 0, \forall s > 0$$
άρα έχουμε οτι $dim(E) = 0$

Για την διάσταση Box έχουμε: Έστω $0 < r < \frac{1}{2}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε
$$\frac{1}{n(n+1)} \leq r < \frac{1}{n(n-1)}$$
τότε για να καλύψουμε το σύνολο $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\frac{1}{n}\right\}$ θέλουμε $n+1$ διαστήματα μήκους r, και για το σύνολο $\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}...1\right\}$ θέλουμε $n-1$ διαστήματα μήκους r. Άρα $N_r(E) \leq 2n$.

Κάθε ένα διάστημα μηκους r μπορεί να καλύψει το πολύ ένα απο τα σημεία $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\frac{1}{n}\right\}$ άρα $N_r(E) \geq n$. Άρα
$$\frac{log(n)}{log(n(n+1))} \leq \frac{log(N_r(E))}{-log(r)} < \frac{log(2n)}{log(n(n-1))}$$

Άρα
$$dim_B(E) = \lim_{r \to 0^+} \frac{log(N_r(E))}{-log(r)} = \frac{1}{2}$$

ξέρουμε όμως οτι
$$dim(E) \leq dim_B(E) \leq Dim(E).$$

αρα $0 = Cov(E) = dim(E) < dim_B(E) \leq Dim(E)$ οπότε

$$Cov(E) = dim(E)$$

και

$$dim(E) < Dim(E)$$

και έπεται οτι δεν είναι fractal κατά Mandelbrot αλλά ούτε κατά Taylor.

Ένα παράδειγμα συνόλου που είναι fractal κατά Taylor αλλά όχι κατά Mandelbrot είναι το διάστημα $[0, 1]$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να υπολογίσουμε, όπως και πριν τις διαστάσεις.

Για να καλύψουμε το $[0, 1]$ χρειαζόμαστε $1/r$ διαστήματα μήκους $r > 0$ άρα $N_r([0, 1]) = 1/r$ τότε

$$dim([0,1]) = \underline{dim}_B([0,1]) = \lim_{r \to 0^+} inf \frac{\log(N_r([0,1]))}{-\log(r)} =$$

$$= \lim_{r \to 0^+} inf \frac{\log(1/r)}{-\log(r)} = \lim_{r \to 0^+} inf \frac{\log(r)}{\log(r)} = 1.$$

Καθώς η παραπάνω παράσταση συγκλίνει έχουμε ότι και $Dim([0, 1]) = 1$ άρα $dim([0, 1]) = Dim([0, 1]) = 1$.

Για την διάσταση κάλυψης είναι εύκολο να δούμε ότι τρία σύνολα της κάλυψης του $[0, 1]$ αρκούν για να έχουν κενή τομή άρα $Cov([0, 1]) + 2 = 3 \Rightarrow Cov([0, 1]) = 1$. Τότε $Cov([0, 1]) = dim([0, 1])$, οποτε δεν είναι fractal κατά Mandelbrot.

Το επόμενο παράδειγμα που θα δούμε παρουσιάστηκε από τον Claude Tricot στην εργασία του “Two definitions of fractional dimension” και είναι ένα fractal κατά Mandelbrot άλλα όχι κατά Taylor.

Αρχικά ορίζουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ όπου $p_0 = 0$ και R_n μια οικογένεια διαστημάτων με διάμετρο $\delta(R_n) = 2^{p_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, της μορφής

$$R_n = \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_n}}, \frac{\beta + 1}{2^{p_n}} \right] : \beta \in \mathbb{Z} \right\}$$

ώστε κάθε διάστημα του R_n να περιέχει δυο διαστήματα του R_{n+1}. Ουσιαστικά είναι μια κατασκευή συνόλου Cantor αλλά η διάμετρος εδώ ορίζεται από την ακολουθία $\delta(R_n) = 2^{p_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Τέλος ορίζουμε το σύνολο, να είναι όπως και στο σύνολο Cantor

$$E_p = \bigcap_n \{\cup R_n\}.$$

Από το παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $Cov(E_p) = 0$. Η ακολουθία ορίζεται από τις ιδιότητες

$$p_1 = 9, p_{K_n} = 4^n, p_{\beta+1} = 1 + p_\beta \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{Z} \cap [K_n, K_{n+1})$$

όπου $K_n = \dfrac{2}{3}(4^n - 4)$. Τότε

$$R_1 = \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_1}}, \frac{\beta+1}{2^{p_1}}\right] : \beta \in \mathbb{Z} \cap [K_1, K_2) \right\} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_1}}, \frac{\beta+1}{2^{p_1}}\right] : \beta \in \mathbb{Z} \cap [0, 8) \right\} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{\beta}{2^9}, \frac{\beta+1}{2^9}\right] : \beta \in \{0, 1, 2, 3...7\} \right\}.$$

$$R_2 = \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_2}}, \frac{\beta+1}{2^{p_2}}\right] : \beta \in \mathbb{Z} \cap [K_2, K_3) \right\} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_2}}, \frac{\beta+1}{2^{p_2}}\right] : \beta \in \mathbb{Z} \cap [8, 40) \right\} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{10}}, \frac{\beta+1}{2^{10}}\right] : \beta \in \{8, 9, 10, 11...39\} \right\}.$$

καθως $p_2 = 1 + p_1 = 10$. Συνεχίζοντας, για τα διαστήματα R_n έχουμε:

$$R_n = \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_n}}, \frac{\beta+1}{2^{p_n}} \right] : \beta \in \mathbb{Z} \cap [K_n, K_{n+1}) \right\} =$$

$$R_n = \left\{ \left[\frac{\beta}{2^{p_n}}, \frac{\beta+1}{2^{p_n}} \right] : \beta \in \{K_n, ...K_{n+1} - 1\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Τέλος ορίζουμε το σύνολο, να είναι

$$E_p = \bigcap_n \{\cup R_n\}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$dim(E_p) = \lim_{n\to\infty} inf \left\{ \frac{n}{p_n} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$Dim(E_p) = \lim_{n\to\infty} sup \left\{ \frac{n}{p_n} \right\} = \frac{2}{3}$$

άρα $Cov(E_p) < dim(E_p) < Dim(E_p)$.

Ελληνική Βιβλιογραφία.

[**1**]. Πραγματική Ανάλυση-Μ.Ανούσης Α.Τσολομύτης Β.Φελουζής.

[**2**]. Στοιχεία Farctal Γεωμετρίας-Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα.

[**3**]. Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση-Σ.Νεγρεπόντης Θ.Ζαχαριάδης Ν.Καλαμίδας Β.Φαρμάκη.

[**4**]. Θεωρία Μέτρου-Γ.Κουμούλλης Σ.Νεγρεπόντης

Αγγλική Βιβλιογραφία.

[**1**]. Measure,Topology,And Fractal Geometry- G.Edgar

[**2**]. Two definitions of fractional dimension- C.Tricot

[**3**]. Hausdorff Measures- C.A.Rogers

[**4**]. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications- K. Falconer