ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ –ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΟΥΠΠΗ ΤΣΑΜΠΙΚΑΣ

Α.Μ.: 413/2005/024

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

«ΤΟ ΑΝΟΙΚΤΟ-ΚΛΕΙΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΚΑΙ ΝΕΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ»

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΧΙΟΝΙΔΟΥ – ΜΟΣΚΟΦΟΓΛΟΥ ΜΑΡΙΑ
ΕΠΙΚΟΥΡΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΠΑΝ/ΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΠΑΝ/ΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΒΑΝΔΟΥΛΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ	ΔΙΔΑΣΚΩΝ	ΠΑΝ/ΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΡΟΔΟΣ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2006

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας στηρίχθηκε στη συνεισφορά και την αλληλεπίδραση αρκετών ανθρώπων. Θα ήθελα να τους ευχαριστήσω όλους για τη βοήθεια και την υποστήριξή τους και ιδιαίτερα:

Την κα Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Επίκουρη Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου, που επέβλεψε επιστημονικά αυτή την πορεία μου και στάθηκε δίπλα μου συνεργατικά και διαλογικά προσφέροντάς μου πολύτιμη στήριξη, επιστημονική και συναισθηματική.

Τον κ. Ευγένιο Αυγερινό, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου και μέλος της Συμβουλευτικής Επιτροπής, για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον του και την ουσιαστική του συμπαράσταση στις επιστημονικές αναζητήσεις.

Τον κ. Ιωάννη Βανδουλάκη, διδάσκοντα του Πανεπιστημίου Αιγαίου και μέλος της Συμβουλευτικής Επιτροπής, για τη συνεισφορά του στην επιστημονική αναζήτηση αυτής της εργασίας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ο ρόλος των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της ζωής αυξήθηκε ραγδαία και θα αυξάνεται αναμφίβολα στο μέλλον, όμως, το χάσμα που δημιουργήθηκε μεταξύ των Μαθηματικών που διδάσκονται στην τάξη και αυτών της πράξης είναι τεράστιο και σίγουρα η γεφύρωση αυτών των δύο θέσεων των Μαθηματικών κρίνεται απαραίτητη.

Επιπλέον, τα μαθήματα των Μαθηματικών δεν δίνουν μια πειστική απάντηση στο ερώτημα των μαθητών: «Γιατί μου χρειάζονται όλα αυτά;» αλλά υποσχέσεις μελλοντικών αγαθών που ασφαλώς δεν συμβάλλουν στην αφομοίωση αφηρημένων εννοιών και είναι μία από τις αιτίες που οι μαθητές δεν ενδιαφέρονται έντονα για τις μαθηματικές γνώσεις (Καραγεώργος, 2000).

Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε πως ένας από τους βασικότερους σκοπούς της εκπαίδευσης είναι να καλλιεργήσει στους μαθητές την ικανότητα για σκέψη και πρωτοβουλία, να τους αναπτύξει την κρίση και να τους παρακινήσει την περιέργεια για εξερεύνηση νέων καταστάσεων (Π.Ι. 2003), αφού είναι βέβαιο πως στην πορεία τους οι σύγχρονοι άνθρωποι για να ικανοποιήσουν τις ανησυχίες τους και να λύσουν τα προβλήματά τους θα χρειαστεί να αναζητήσουν νέους τρόπους σκέψης και δράσης. Επίσης ένας από τους βασικότερους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αφού αυτή συμβάλλει στην επίτευξη του στόχου των Μαθηματικών που αναφέρεται στην οργάνωση της σκέψης και της πράξης στη ζωή (Π.Ι. 2003).

Όμως, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της τρίτης διεθνούς έρευνας για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες που πραγματοποιήθηκε από τη Διεθνή Ένωση για την Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Επίδοσης (TIMSS/EA) η Ελλάδα έλαβε την 33^{η} θέση μεταξύ 41 χωρών και ο μέσος όρος επίδοσης των 18.000 Ελλήνων μαθητών της Β΄ Γυμνασίου που πήραν μέρος στην έρευνα ήταν 484/800. Πρώτη χώρα ήταν η Σιγκαπούρη με μέση επίδοση 643/800 και τελευταία η Ν. Αφρική με 354/800 (Ελληνικό Συντονιστικό Κέντρο της ΙΕΑ, Πανεπιστήμιο Αθηνών, «Η Καθημερινή» 22/06/1997 & «Τα Νέα» 28/06/1997).

Πολλές ακόμη έρευνες στην Ελλάδα (Χαλάτσης κ.ά. 1989, Λιναρδάκης 1991, Μάκρας και Σαλίχος 1991, Αναστασίου & Οικονόμου 1992, Μπόλης & Τζανή 1993, Θωμαΐδης 1995, Θωμαΐδης 1997) έδειξαν ότι μεγάλο ποσοστό των Ελλήνων μαθητών εκτελεί απλά διαδικασίες που πιστεύει ότι είναι εκείνες που θα εξασφαλίσουν τελικά την εγκυρότητα της απάντησης και θα ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις του εκπαιδευτικού χωρίς να συνειδητοποιεί το μαθηματικό νόημα των εννοιών αλλά και το ευρύτερο νόημά τους. Συμβαίνει επομένως αυτό που πολύ σωστά επισημαίνουν οι Dreyfus et al. (1990) κάνοντας μια επισκόπηση των αποτελεσμάτων σχετικών ερευνών σε όλο τον κόσμο, δηλαδή ότι οι μαθητές θεωρούν σημαντικότερη τη μορφή από το περιεχόμενο και έχουν την πεποίθηση ότι κάνω μαθηματικά σημαίνει «εκτελώ βήματα» σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες και ότι όλα τα μαθηματικά προβλήματα λύνονται μέσα σε λίγα λεπτά ή δε λύνονται καθόλου.

Γιατί συμβαίνουν τα παραπάνω αφού οι μαθητές αφιερώνουν τόσες ώρες λύνοντας ασκήσεις, απλά ή συνθετότερα προβλήματα για τουλάχιστον εννιά ή δώδεκα χρόνια;

Ο G. Brousseau (1983) με τη φράση: *«Ένας μαθητής δεν μαθαίνει Μαθηματικά αν δεν του τεθούν και δεν λύσει κάποια προβλήματα. Όλοι συμφωνούμε σε αυτό. Οι δυσκολίες αρχίζουν από τη στιγμή που πρέπει να γνωρίζουμε τι είδους προβλήματα πρέπει να του θέσουμε, ποιος θα τα θέσει και πώς»* μας δίνει το έναυσμα να σκεφτούμε ότι ίσως αυτό που φταίει και οι μαθητές ενώ «διδάσκονται και διδάσκονται» Μαθηματικά τελικά αρκετοί από αυτούς δεν μαθαίνουν ή δεν μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν σε άλλα πλαίσια, είναι το είδος των προβλημάτων που καλούνται να λύσουν οι μαθητές.

Η ανωτέρω αναφερθείσα κατάσταση και η σπουδαιότητα απόκτησης της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων για τη ζωή μας γενικά υπήρξαν οι κινητήριες δυνάμεις αυτής της μελέτης. Η επικέντρωσή μας στα ανοικτά-κλειστά προβλήματα οφείλεται στη συσχέτιση αυτού του τύπου προβλημάτων με την πραγματική ζωή, όπου σε μια κατάσταση – πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε μπορούσε να δώσουμε πολλές και ποικίλες λύσεις αρκεί να διαθέτουμε φαντασία και δημιουργικότητα, ικανότητες που μπορούν να αναπτυχθούν σε μεγάλο βαθμό μέσω της διαδικασίας επίλυσης ανοικτών-κλειστών προβλημάτων στην τάξη.

Επομένως, σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη α) των διαφόρων τύπων προβλήματος και ειδικότερα του ανοικτού-κλειστού και β) της συχνότητας εμφάνισης αυτών στα προηγούμενα και νέα εγχειρίδια Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου.

Η πρόσφατη παρουσίαση των νέων εγχειριδίων και η χρήση τους από το τρέχον διδακτικό έτος στα σχολεία είναι ασφαλώς το γεγονός που καθιστά την παρούσα εργασία συγκριτικής παρουσίασης των προηγούμενων και νέων εγχειριδίων πρωτότυπη με δεδομένο ότι κανείς δεν έχει ακόμη επιχειρήσει κάτι σχετικό και επιπλέον χρήσιμη για την εκπαιδευτική κοινότητα, αφού μέσα από αυτή την παρουσίαση γίνεται εμφανής η αλλαγή που πραγματοποιήθηκε καθώς και οι στόχοι αυτής.

Η δομή της μεταπτυχιακής εργασίας έχει ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται μια μελέτη των Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών κατά τα τελευταία 25 περίπου χρόνια και πιο συγκεκριμένα εξετάζεται η θέση που κατέχει το πρόβλημα σε αυτά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται η μελέτη της έννοιας πρόβλημα, η συνοπτική παρουσίαση των τύπων προβλήματος και της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναλυτικότερη παρουσίαση του ανοικτού-κλειστού προβλήματος, το οποίο εξετάζεται στις διάφορες μορφές του και παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα αυτών των μορφών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επιχειρείται η συγκριτική μελέτη των προηγούμενων και νέων εγχειριδίων Μαθηματικών και γίνεται παρουσίαση του βαθμού και του τύπου των προβλημάτων που υπάρχουν σε αυτά και των συμπερασμάτων που εξάγονται από αυτή τη μελέτη.

«Η διατύπωση ενός προβλήματος
είναι συχνά σημαντικότερη από τη λύση του,
η οποία μπορεί να είναι μόνο θέμα
μαθηματικής ή πειραματικής ικανότητας.
Το να προβάλλεις νέα ερωτήματα, νέες πιθανότητες,
να κοιτάζεις τα προηγούμενα προβλήματα από μια νέα οπτική γωνία,
χρειάζεται φαντασία
και σημαίνει
πραγματική πρόοδο στην επιστήμη»
A. Einstein

Κεφάλαιο Ι

1 Από τα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)

1.1 Σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της Εκπαίδευσης και αφορά τη συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του, εφόσον τα Μαθηματικά:

Ασκούν τον μαθητή στη μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.

Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών (Π.Ι., 2003).

1.2 Η Εξέλιξη των Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών

Μια αναδρομή στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών της τελευταίας εικοσιπενταετίας μας πληροφορεί συνοπτικά για τα εξής:

1.2.1 Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών (Π.Δ.583/1982–ΦΕΚ 107Α΄)

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1982 σκοπός των Μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τη λογικομαθηματική σκέψη και να κατανοήσουν το περιβάλλον, κυρίως από την άποψη ποσοτικών μεγεθών και σχέσεων, ώστε να αντιμετωπίζουν με επιτυχία προβληματικές καταστάσεις.

Ειδικότερα, η διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκει να υποβοηθήσει τους μαθητές ανάλογα με τη βαθμίδα της νοητικής τους ανάπτυξης να καλλιεργήσουν μεταξύ άλλων την ικανότητα για τη λύση προβλημάτων και τη διάθεση για αναζήτηση περισσότερων λύσεων σε κάθε πρόβλημα, να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά ως μέσο για την καλλιέργεια και αξιοποίηση των δημιουργικών τους δυνάμεων, να εθισθούν στην κριτική σκέψη, να αποκτήσουν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά και να χαίρονται όταν ενασχολούνται με αυτά.

Αναλυτικότερα και σε σχέση με το θέμα της παρούσας εργασίας, μία από τις γενικές ενότητες των τάξεων Α΄ και Β΄ αναφέρεται στη λύση ανοιχτών αριθμητικών προτάσεων και προβλημάτων. Στη Γ΄ τάξη (Π.Δ. 449/18 – 11 – 83 – ΦΕΚ 168 Α΄) προτείνεται λύση προβλημάτων με περισσότερες από μία πράξεις. Στις Δ΄ και Ε΄ τάξεις (Π.Δ. 528/26 – 11 – 84 – ΦΕΚ 185 Α΄) επιδιώκεται οι μαθητές να επινοούν προβλήματα που σχετίζονται με τις εμπειρίες τους καθώς και ποικίλες διαδικασίες για τη λύση τους και να λύνουν σύνθετα αριθμητικά προβλήματα (προβλήματα που προσφέρονται για μετασχηματισμό και επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις). Στην ΣΤ΄ τάξη (Π.Δ. 398/1 – 8 – 85 – ΦΕΚ 140 Α΄) επιδιώκεται η επινόηση περισσότερων του ενός τρόπων οργάνωσης και επίλυσης προβληματικών καταστάσεων και αριθμητικών προβλημάτων.

Από το σχολικό έτος 1993-94 τα βιβλία Μαθηματικών των τάξεων Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ του Δημοτικού σχολείου κυκλοφορούν σε αναθεωρημένη έκδοση και μια από τις σημαντικότερες αλλαγές τους είναι η έμφαση που δίδεται στη λύση προβλημάτων και στους πρακτικούς τρόπους επίλυσής τους όπως είναι η αναγωγή στη μονάδα και οι 4 πράξεις και όχι στις λογικομαθηματικές διαδικασίες όπως είναι οι παραστάσεις και οι εξισώσεις. Η αναθεώρηση αυτή κρίθηκε αναγκαία για τους εξής κυρίως λόγους:

- Για να αρθούν ορισμένες δυσλειτουργίες που παρουσιάστηκαν κατά τη μακρόχρονη εφαρμογή τους στη σχολική πράξη.
- Για να αξιοποιηθεί η εμπειρία από τη μέχρι τότε χρήση τους.
- Για να υπάρχει ενιαία δομική ανάπτυξη και εσωτερική συνοχή ύλης σε όλα τα βιβλία Μαθηματικών της εννιάχρονης υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Δημοτικού – Γυμνασίου) καθώς και ενιαίος τρόπος προσέγγισης.

1.2.2 Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο με βάση το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.)

Με βάση το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών που διαμορφώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000) προκειμένου να εκσυγχρονιστεί η προσφερόμενη γνώση και να αναβαθμιστεί η διαδικασία της μάθησης, συντάχθηκε και το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών που διαρθρώνεται γύρω από πέντε βασικές περιοχές, οι οποίες είναι: 1. Επίλυση Προβλήματος, 2. Αριθμητική, 3. Γεωμετρία, 4. Μετρήσεις, 5. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων.

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος, που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, είναι από τους πιο βασικούς επιδιωκόμενους στόχους σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου αλλά και των άλλων βαθμίδων της εκπαίδευσης, δεδομένου ότι με την επίλυση προβλήματος δημιουργούνται κίνητρα μάθησης, ενισχύονται και παγιώνονται ήδη αποκτημένες γνώσεις και δεξιότητες, εισάγονται νέες έννοιες και τεχνικές, αναδεικνύεται η χρησιμότητα των Μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις και σε άλλες επιστημονικές περιοχές, ενισχύεται η ομαδο-συνεργατική και διερευνητική διδασκαλία (Π.Ι., 2000) και οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν την υπευθυνότητα και την αυτονομία τους (Βότσος, 1997).

Μελετώντας αναλυτικότερα το Πρόγραμμα Σπουδών όλων των τάξεων του Δημοτικού διαπιστώνουμε ότι η επίλυση προβλημάτων είναι πάντα πρώτη όσον αφορά στα περιεχόμενα. Οι επιδιωκόμενοι στόχοι ενισχύονται σταδιακά ούτως ώστε φτάνοντας στη ΣΤ΄ τάξη οι μαθητές να μπορούν να ενεργοποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις τους, να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του, να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση, να επιχειρηματολογούν ως προς την αλήθεια μιας λύσης, να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία θα πρέπει να περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα, να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μιας ή περισσότερων λύσεων και τέλος να θέτουν δικά τους ερωτήματα και προβλήματα. Όσον αφορά στις οδηγίες που δίδονται προς τους εκπαιδευτικούς, αυτές προτείνουν δραστηριότητες με δραματοποίηση με σκοπό τη δημιουργία ανοικτών ή κλειστών καταστάσεων προβληματισμού οι οποίες παρακινούν τους μαθητές να βιώνουν και να κατασκευάζουν τη νέα γνώση και ιδιαίτερα τονίζουν το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν τα ανοιχτά προβλήματα, τα οποία δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία να εργάζονται χωρίς να καθοδηγούνται προς μια στερεότυπη λύση, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις, να αναγνωρίζουν προβλήματα παρόμοια ή ανάλογα με ένα δοσμένο πρόβλημα, να ελέγχουν τη διαδικασία επίλυσης και να στοχάζονται πάνω στις δικές τους στρατηγικές σκέψης (Π.Ι., 2000).

1.2.3 Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.)

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών που διαμορφώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003), το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών διαρθρώνεται γύρω από επτά άξονες γνωστικού περιεχομένου, οι οποίοι είναι: 1. Επίλυση Προβλημάτων, 2. Αριθμοί και πράξεις, 3. Μετρήσεις, 4. Γεωμετρία, 5. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική, 6. Λόγοι και αναλογίες, 7. Εξισώσεις.

Και με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ., η επίλυση προβλημάτων κατέχει σημαντική θέση σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου και οι επιδιωκόμενοι στόχοι είναι να μπορούν οι μαθητές να εξερευνούν μια κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή, να αυτο-αξιολογούνται στις γνώσεις και ικανότητες που απέκτησαν ώστε να γίνεται ανατροφοδότηση στη μαθησιακή διαδικασία, να εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες και να τους δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιούν τον Η/Υ με ανάλογα προγράμματα (SketchPad, Cabri, Logo, Word, Paint κ.λ.π.) για την ευχερέστερη αντιμετώπιση των προβλημάτων.

Ως ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης προτείνονται η μεταβολή, η αλληλεπίδραση, το σύστημα, η οργάνωση, η επικοινωνία, το άτομο-σύνολο, η ομοιότητα-διαφορά, η συμμετρία, η πιθανότητα, ο χώρος και ο χρόνος, ο πολιτισμός και οι τέχνες μέσα από προτεινόμενες δραστηριότητες και διαθεματικά σχέδια εργασίας, π.χ. μέσα μεταφοράς, το περιεχόμενο της σχολικής μου τσάντας, το 24ωρό μου, η βιβλιοθήκη μας, ένα φαγητό ή ένα γλύκισμα, η συμμετρία στη ζωή μας, ένας γίγαντας στην τάξη, μοτίβα στη ζωή μας κ.ά. (Π.Ι., 2003).

1.2.3.1 Ευέλικτη Ζώνη Διαθεματικών και Δημιουργικών Δραστηριοτήτων

Μέσα στο πλαίσιο διαμόρφωσης του Δ.Ε.Π.Π.Σ. εντάσσεται και η «Ευέλικτη Ζώνη Διαθεματικών και Δημιουργικών Δραστηριοτήτων» για το Δημοτικό σχολείο που στοχεύει μεταξύ άλλων στην ενιαιοποίηση της γνώσης μέσω της διαθεματικής προσέγγισης, στην ανάδειξη των διεπιστημονικών συναρτήσεων της γνώσης, στη σύνδεση της σχολικής γνώσης με τα ενδιαφέροντα των μαθητών και τις πραγματικές καταστάσεις ζωής που ενεργοποιεί τα κίνητρά τους και προσδίδει νόημα στη σχολική γνώση, στην ενεργοποίηση της κριτικής σκέψης και της δημιουργικότητας των μαθητών και στην ένταξη στη μαθητική ομάδα όλων ανεξαιρέτως των μαθητών.

Η Ευέλικτη Ζώνη έχει «ανοιχτή» θεματική, που προτείνεται από τους μαθητές και διαμορφώνεται με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Προτείνονται όμως ενδεικτικά ορισμένες θεματικές περιοχές, μία εκ των οποίων είναι τα Μαθηματικά Παιχνίδια με θεματολογία την κατασκευή και χρήση επιτραπέζιων παιχνιδιών, μοτίβα αριθμητικής και γεωμετρίας, μακέτες, ταξίδι στην αγορά κ.ά. Οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις και τα μεθοδολογικά πλαίσια που προτείνονται είναι τα σχέδια εργασίας (projects), τα ανοικτά – κλειστά προβλήματα και οι ομαδο-συνεργατικές διαδικασίες (Π.Ι., 2001).

1.2.4 Σύνοψη Προγραμμάτων Σπουδών

Από τη μελέτη των ανωτέρω παρουσιασθέντων Προγραμμάτων Σπουδών συνοψίζουμε τα εξής, σχετικά με το θέμα που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία:

Στο αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών του 1982 το πρόβλημα βρίσκεται διάσπαρτο στις επιμέρους ενότητες. Δίνεται έμφαση στον εθισμό των μαθητών στις ευρετικές διαδικασίες για τη λύση ενός προβλήματος, γιατί οι διαδικασίες αυτές είναι εκείνες που βοηθούν στο να αυτενεργεί ο μαθητής και να συνηθίσει να αναλαμβάνει πρωτοβουλίες, όταν έχει να αντιμετωπίσει μια άγνωστη κατάσταση. Ιδιαίτερα η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα, ως μέθοδος λύσης ενός προβλήματος, είναι ο φυσικός και άμεσος τρόπος, με τον οποίο τείνει να εργαστεί το ανθρώπινο μυαλό όταν έχει να λύσει ένα αριθμητικό πρόβλημα (Αδαμόπουλος, 1993).

Στο Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών δίνεται έμφαση στη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω προβλημάτων και ο άξονας «επίλυση προβλημάτων» παίρνει την πρώτη θέση μεταξύ των άλλων αξόνων των Προγραμμάτων Σπουδών των τελευταίων χρόνων, αφού έχει γίνει αντιληπτό πλέον ότι «Μαθηματικά ξέρει εκείνος που έχει την ικανότητα να λύνει προβλήματα και μάλιστα, δύσκολα προβλήματα» (Κόθαλη-Κολοκούρη, 1990).

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι απαραίτητο όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από τις κλίσεις και τις ικανότητές τους, να ασκηθούν στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αφού σύμφωνα με τον Weir (1974) η τεχνική της επίλυσης αυτών έχει εφαρμογή στην αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής και στη λήψη αποφάσεων στο χώρο των επιστημών και των επιχειρήσεων. Άρα για την αντιμετώπιση των μελλοντικών προβλημάτων με επιτυχία, αναγκαία κρίνεται η εκπαίδευση και προετοιμασία ατόμων ικανών να τα αντιμετωπίζουν.

«Η δημιουργικότητα είναι ένα μυστήριο,
δώρο δοσμένο από το Θεό˙
το θαυμάσιο είναι ότι πολλοί από μας
το έχουν σε κάποιο βαθμό!
Το τραγικό είναι ότι λίγοι από μας
έχουν εκπαιδευτεί και εξασκηθεί σ’ αυτό
προκειμένου να το αξιοποιήσουν
σ’ όλο τους το δυναμικό».
J. Morgan

Κεφάλαιο ΙΙ

2 Πρόβλημα

2.1 Ορισμός της έννοιας «πρόβλημα»

Σύμφωνα με τον ορισμό που δίδεται στο λεξικό του Τριανταφυλλίδη, το πρόβλημα είναι ένα σύνθετο, πολύπλοκο ερώτημα, ζήτημα, στο οποίο επιζητείται και επιχειρείται να δοθεί απάντηση με επιστημονικό τρόπο, με επιστημονική μέθοδο, π.χ. φιλοσοφικό / ηθικό / ιστορικό / μεταφυσικό πρόβλημα.

Στη μαθηματική γλώσσα όμως, σύμφωνα με τον ορισμό του λεξικού «Θησαυρός της Ελληνικής γλώσσας» αλλά και αυτόν που χρησιμοποιεί ο Θ. Εξαρχάκος (1993), «πρόβλημα είναι κάθε πρόταση που δίνει ορισμένα στοιχεία και ζητά τον προσδιορισμό άλλων, άγνωστων στοιχείων, με μαθηματικές ή με άλλες επιστημονικές μεθόδους».

Ένας ορισμός του προβλήματος σύμφωνα με την M. Kantowski (1981) είναι ο εξής: «Ένα πρόβλημα είναι μια κατάσταση που διαφέρει από μια άσκηση στο ότι οι λύτες δεν έχουν μια μέθοδο ή έναν αλγόριθμο με τον οποίο θα οδηγηθούν με βεβαιότητα στη λύση».

Ένα πρόβλημα μπορεί να είναι μαθηματικό ή μαθηματικοποιήσιμο, δηλαδή να είναι διατυπωμένο ή να μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους. Η έννοια της μαθηματικοποίησης μπορεί να αποδοθεί από τον ακόλουθο σχηματισμό: προβλήματα υπαρκτού κόσμου $\rightarrow$ μαθηματική τυποποίηση $\rightarrow$ μαθηματική λύση $\rightarrow$ λύση προβλήματος υπαρκτού κόσμου (Χαλάτσης, 1993α).

Αυτό σημαίνει ότι πέρα από τα καθαρά μαθηματικά προβλήματα, πολλά άλλα προβλήματα του πραγματικού κόσμου μπορούν να επιλυθούν με τη βοήθεια των μαθηματικών, γεγονός που καθιστά πολύ σημαντική τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ιδιαίτερα των ανοικτών-κλειστών και των πραγματικών προβλημάτων και καθιστά επιτακτικότερη την εξάσκηση και την όσο το δυνατόν επιτυχέστερη εκμάθηση αυτής.

2.2 Ο ρόλος του προβλήματος στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών

Για τον περισσότερο κόσμο, ασχολούμαι με τα μαθηματικά, σημαίνει κυρίως «λύνω προβλήματα». Κατά συνέπεια, στα σχολικά μαθηματικά πρέπει το πρόβλημα να είναι στο κέντρο κάθε μαθησιακής διαδικασίας και να κατέχει κυρίαρχη θέση σε αυτές. Όμως και η θέση της λύσης του προβλήματος μέσα στις διαδικασίες αυτές είναι εξίσου σημαντική και βρίσκεται σε άμεση αλληλεξάρτηση με αυτές (Ευσταθόπουλος, 1987).

Θα πρέπει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο ότι ως προβλήματα δεν εννοούνται μόνο τα στερεότυπα προβλήματα των σχολικών βιβλίων, αλλά κάθε κατάσταση που μπορεί να αποτελέσει πρόκληση στο επίπεδο κατανόησης που μέχρι στιγμής έχει αναπτύξει ο μαθητής.

Ο ρόλος του προβλήματος στη σχολική τάξη και ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται κατά τη διδασκαλία, συνδέονται με το διδακτικό μοντέλο που υιοθετείται από το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σύστημα. Ο R. Charnay (1988, όπ. αναφ. στον Π. Οικονόμου, 1997) διακρίνει τρεις διαφορετικές χρήσεις του προβλήματος, που αντιστοιχούν σε τρία διαφορετικά διδακτικά μοντέλα. Πιο συγκεκριμένα:

«Στο «κανονιστικό» (normatif) μοντέλο, που είναι επικεντρωμένο στο περιεχόμενο της μάθησης, το πρόβλημα είναι κριτήριο επιτυχίας της μάθησης. Τα προβλήματα είναι «ασκήσεις» που στοχεύουν στην εξάσκηση του μαθητή, με τη χρήση συγκεκριμένων γνώσεων που απέκτησε και στον έλεγχο εκ μέρους του διδάσκοντα. Στο «παρακινητικό» (incitatif) μοντέλο, που είναι επικεντρωμένο στο μαθητή, το πρόβλημα αποτελεί κίνητρο για τη δραστηριοποίηση του μαθητή που «ψάχνει, οργανώνει, μελετάει, μαθαίνει». Το κέντρο βάρους της διδασκαλίας μετατοπίζεται από τη δομή της Μαθηματικής Επιστήμης προς τις ανάγκες της ανθρώπινης ζωής, ενώ υιοθετούνται «ενεργητικές» μέθοδοι διδασκαλίας. Στο «προσεγγιστικό» (approximatif) μοντέλο διδασκαλίας, όπου το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στην οικοδόμηση της γνώσης από το μαθητή, το πρόβλημα αποτελεί το μέσο της μάθησης, το μηχανισμό μέσα από τον οποίο θα αναδειχτεί μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία και θα αποκτήσει συγκεκριμένο περιεχόμενο για το μαθητή».

Η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης δεν μπορεί να είναι στατική και να καθορίζεται από κλειστές διαδικασίες όπως π.χ. ορισμός – παράδειγμα – θεώρημα – πόρισμα – ασκήσεις. Χρειάζεται άλλες δυναμικές που θα καταστήσουν τα μαθηματικά λειτουργικό εργαλείο για τη λύση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Μέσα από τα ίδια τα προβλήματα και τις διαδικασίες επίλυσής τους γίνονται γνωστές οι αντιλήψεις των μαθητών για τις διάφορες μαθηματικές έννοιες, κινητοποιούνται οι προηγούμενες γνώσεις και οδηγούνται οι μαθητές στη δημιουργία και απόκτηση νέων εννοιών και αντιλήψεων για αυτές.

Συνοψίζοντας, η δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων αποτελεί συστατικό στοιχείο της μαθηματικής επιστήμης και των περισσότερων μορφών διδασκαλίας της και οι λόγοι για τους οποίους η επίλυση προβλήματος κατέχει ιδιαίτερη θέση μέσα στο σύνολο των μαθηματικών δραστηριοτήτων είναι γιατί:

- ✓ Είναι δραστηριότητα της οποίας το αποτέλεσμα είναι εύκολα επικοινωνήσιμο και αξιολογήσιμο.
- ✓ Είναι η δραστηριότητα που καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο χώρο και χρόνο στους διδακτικούς σχεδιασμούς.
- ✓ Είναι δραστηριότητα εσωτερική και δύσκολα επικοινωνήσιμη έως ότου φτάσει σε ένα στάδιο που να ικανοποιεί σχετικά το υποκείμενο που προσπαθεί να επιλύσει το πρόβλημα.

- ✓ Είναι δραστηριότητα από την παρατήρηση της οποίας μπορούν να εντοπισθούν ευρύτερα στοιχεία για τον τρόπο συλλογισμού του υποκειμένου, συλλογής και επεξεργασίας πληροφοριών, αξιοποίησης προηγούμενων εμπειριών, λειτουργικής ενεργοποίησης αναπαραστάσεων εννοιών και συλλογιστικών μοντέλων του υποκειμένου. (Καλαβάσης, 1997)

2.3 Τύποι μαθηματικών προβλημάτων

Στην καθημερινή μας ζωή όλοι έχουμε να λύσουμε «προβλήματα» διαφόρων ειδών. Η κατάσταση περιπλέκεται εντούτοις από το γεγονός ότι αυτό που είναι «πρόβλημα» για ένα άτομο μπορεί να μην είναι «πρόβλημα» για ένα άλλο ή να είναι μια μηχανική εργασία ή μια απλή αντίδραση, σύμφωνα με την A. Bingham (1963).

Σύμφωνα με την Ε. Κόθαλη-Κολοκούρη (1990) τα προβλήματα χωρίζονται σε «καθαρά» μαθηματικά (pure) που ανήκουν αποκλειστικά στο μαθηματικό χώρο και σε «εφαρμοσμένα» (applied), αν αυτά χαρακτηρίζονται από καταστάσεις που ανήκουν σε κάποιο «εξω-μαθηματικό» πεδίο.

Στο λεξικό «Θησαυρός της Ελληνικής γλώσσας», τα προβλήματα διακρίνονται σε αόριστα (απειρία λύσεων), σε αδύνατα (καμιά λύση) και σε δυνατά (μία ή περισσότερες λύσεις).

Σύμφωνα με άλλες κατηγοριοποιήσεις τα προβλήματα διακρίνονται σε:

- Συνηθισμένα προβλήματα ή προβλήματα ρουτίνας (Routine Problems)
- Μη συνηθισμένα προβλήματα (Non-routine Problems)
- Σύνθετα και προβλήματα κριτικής σκέψης (Complex and critical Problems)
- Βασικά προβλήματα (Basic Problems)
- Προβλήματα με συνδυασμό περιορισμών (Problems with combination of constraints) (http://turing.une.edu.au)

Στο σχολείο προτείνεται στους μαθητές να λύνουν ασκήσεις ή προβλήματα που μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής (Κόθαλη-Κολοκούρη 1990, Κολέζα-Αδάμ & Σουρλάς 1990, Κόσυβας 1997, Καραγεώργος 2000):

- Ασκήσεις ή προβλήματα απλών εφαρμογών ή αλλιώς «διδακτικές ασκήσεις»: Πρόκειται για σχετικά απλές ασκήσεις ή προβλήματα άμεσης εφαρμογής μεθόδων, αλγορίθμων κ.λ.π. που μόλις διδάχτηκαν και δίνονται για άσκηση στην εφαρμογή μιας συγκεκριμένης γνώσης ή τεχνικής και για την απόκτηση ενός αυτοματισμού στη χρήση αυτών των μηχανισμών ή αλγορίθμων. Υπάρχουν συνήθως στο τέλος μιας ενότητας και βασικός τους στόχος είναι η κατανόηση του αντικειμένου μάθησης από το μαθητή. Και όταν λέμε κατανόηση εννοούμε την ανάπτυξη από το μαθητή εκείνων των δραστηριοτήτων που εξωτερικεύουν αυτή την κατάκτηση, με μετάφραση, ερμηνεία, επέκταση, διάκριση ή αναγνώριση. Π.χ. α) επεξηγηματικές ασκήσεις, που ακολουθούν αμέσως μετά την εκφώνηση ενός ορισμού, θεωρήματος ή κανόνα, β) ασκήσεις συνήθειας (drill and practice), που δίνονται για εξάσκηση και αποβλέπουν στο να αποκτήσει ο μαθητής άνεση, ταχύτητα και σιγουριά στο χειρισμό της γνώσης, επομένως έναν αυτοματισμό κ.ά.

- Ασκήσεις πιο «προχωρημένες» ή «ασκήσεις συμπλήρωσης»: Αυτές δίνουν συγκεκριμένες οδηγίες και ερωτήσεις με σκοπό την απόδειξη ενός «νέου», για το μαθητή, θεωρήματος που δεν θέλουμε να το παρουσιάσουμε με τη μορφή θεωρίας, μιας σύνθετης εφαρμογής ή μιας νέας μεθόδου εργασίας.
- Ασκήσεις «τεχνικής»:Πρόκειται για τη σωστή εκτέλεση και άψογη παρουσίαση μιας μαθηματικής διαδικασίας, όπως αριθμητικών πράξεων ή γεωμετρικού σχήματος με σκοπό να κινηθεί το ενδιαφέρον του μαθητή για τη λεπτομέρεια, την προσεγμένη και καλοφτιαγμένη δουλειά και απώτερο στόχο την πειθαρχία σε κάποιες αρχές, ιδέες κ.ά. Επίσης άσκηση τεχνικής θεωρείται κάθε μεγάλη υπολογιστική διδακτική άσκηση, δηλαδή κάθε διδακτική άσκηση που τραβάει σε μάκρος. Π.χ. α) επαληθεύσιμες ασκήσεις, δηλαδή ασκήσεις τεχνικής που αυτοελέγχονται, αφού συνοδεύονται με την παρατήρηση ότι πρέπει να γίνει επαλήθευση για την ορθότητα του αποτελέσματος, β) μη επαληθεύσιμες ασκήσεις που ζητάνε απλά την εκτέλεση πράξεων κ.ά.
- Ασκήσεις «χειρισμών» ή πρακτικές ασκήσεις: Αναφέρονται στις ασκήσεις που για να λυθούν χρειάζονται εποπτικά όργανα, χειροτεχνία, με μια λέξη μαστόρεμα και που είναι πολύ σημαντικές ιδιαίτερα στην πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και ως προπαρασκευή σε αυστηρές αποδείξεις.
- Ασκήσεις ελέγχου ή tests:Χρησιμοποιούνται στις διάφορες εξετάσεις και από άποψη περιεχομένου μοιάζουν με τις διδακτικές ή ασκήσεις τεχνικής αλλά ο ρόλος τους είναι τελείως διαφορετικός. Αποσκοπούν στην αποκάλυψη του βαθμού και του τρόπου κατάστασης των γνώσεων.
- Προβλήματα «κλασικά»: Προτείνονται με σαφήνεια, πληρότητα και ακρίβεια στους μαθητές δραστηριότητες και ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν από αυτούς χωρίς την ανάγκη έρευνας αφού η εκφώνηση περιέχει όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την επίλυση του προβλήματος. Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται και «πλήρη» ή «κλειστά» προβλήματα και η απάντηση σε αυτά είναι είτε σωστή είτε λάθος, η δε σωστή απάντηση είναι και μοναδική (Becker & Shimada, 1997).
- Προβλήματα σύνθεσης: Πρόκειται για πιο πολύπλοκα προβλήματα στα οποία οι μαθητές θα πρέπει να συνδυάσουν πολλές κατηγορίες γνώσεων.
- Προβλήματα ανακάλυψης: Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν νέες για αυτούς μαθηματικές γνώσεις ή έννοιες εξετάζοντας, χειριζόμενοι και εξερευνώντας ανάλογα με τη φύση του προβλήματος (Περδικάρης, 1984).
- Προβλήματα μοντελοποίησης: Με αυτά οι μαθητές καλούνται να μαθηματικοποιήσουν συγκεκριμένες μη μαθηματικές καταστάσεις, να μεταφράσουν επομένως το πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό μοντέλο, η μελέτη του οποίου μπορεί να δώσει σωστή απάντηση στο ερώτημα που έχει τεθεί (Κλαουδάτος 1989 & 1990, Μπαραλής 2001).

- Προβλήματα ή ασκήσεις «έρευνας»: Θέματα προς λύση που απαιτούν ιδιαίτερη προσπάθεια, επινοητικές ικανότητες, αναλυτική εξέταση των πιθανών διεξόδων, ερευνητική εργασία. Π.χ. ανοικτά προβλήματα, ανοικτά-κλειστά προβλήματα ή προβλήματα ανοικτής έρευνας, πραγματικά προβλήματα ή καταστάσεις – προβλήματα (real problems) κ.ά.

Οι δραστηριότητες που εμφανίζονται στα διάφορα είδη ασκήσεων και προβλημάτων είναι πολλές και ποικίλες, όπως: υπολογιστική, ευρετική, κριτική, λογική, προβλεπτική, μεταφοράς, ομαδοποίησης κ.ά. Άλλες ασκήσεις, οι πιο απλές, περιέχουν ένα μόνο είδος δραστηριότητας, π.χ. υπολογιστική, ενώ άλλες πιο σύνθετες ασκήσεις, όπως είναι οι ασκήσεις έρευνας, περιέχουν περισσότερα είδη δραστηριοτήτων, π.χ. ευρετική, υπολογιστική και λογική (Κολέζα-Αδάμ & Σουρλάς 1990).

Σύμφωνα με τον Χαλάτση (1993α) η διάκριση μεταξύ άσκησης και σχολικού προβλήματος δεν είναι αντικειμενική, γιατί δεν προκύπτει από το περιεχόμενό τους, αλλά εξαρτάται τόσο από την ένταξή τους στο πρόγραμμα διδασκαλίας όσο και από τη μαθηματική ηλικία του υποψήφιου λύτη. Μπορεί επομένως, αυτό που είναι πρόβλημα για έναν μαθητή να είναι μια εύκολη άσκηση για έναν άλλον πιο έμπειρο ή μεγαλύτερο μαθητή.

Είναι εμφανές ότι όλοι οι τύποι μαθηματικών προβλημάτων είναι χρήσιμοι στη διδασκαλία των μαθηματικών, αφού διαφορετικοί τύποι προβλημάτων επιτυγχάνουν και διαφορετικούς μαθησιακούς στόχους. Μερικά προβλήματα απαιτούν την ανάκληση γεγονότων και διαδικασιών, άλλα υποκινούν διαφορετικές στρατηγικές, ορισμένα εξαρτώνται από τη λογική και το συλλογισμό, κάποια έχουν πολλαπλές λύσεις και άλλα απαιτούν τη λήψη απόφασης και δημιουργικότητα.

2.4 Κριτήρια επιλογής των προβλημάτων από τον εκπαιδευτικό

Τα προβλήματα, ανεξάρτητα από τον τύπο τους, πρέπει να επιλέγονται από τον εκπαιδευτικό κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις που μπορεί να είναι οι εξής:

1. Να επιτρέπουν την κινητοποίηση όλων των μαθητών της τάξης.
2. Να έχουν ανάγκη ελάχιστων εξηγήσεων από την πλευρά του εκπαιδευτικού και οι οποίες θα πρέπει να δίδονται με φειδώ προς τους μαθητές.
3. Να επιτρέπουν τη χρήση των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών αλλά και τη δημιουργία και απόκτηση νέων.
4. Να δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να οδηγούνται σε εικασίες.
5. Να προωθούν την επανατροφοδότηση των δραστηριοτήτων των μαθητών, με σκοπό τον αυτοέλεγχο των αποφάσεών τους (Εξαρχάκος, 1993).

2.5 Βασικές θεωρίες για την επίλυση προβλήματος

Οι μαθητές στη διάρκεια της φοίτησής τους, τόσο στην Πρωτοβάθμια όσο και στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, αντιμετωπίζουν καθημερινά έναν ικανό αριθμό ασκήσεων-προβλημάτων που καλούνται να επιλύσουν. Δημιουργήθηκε, επομένως, ο όρος «επίλυση προβλήματος», παγκοσμίως γνωστός ως «problem solving» (Polya 1945, Halmos 1975, Krulik & Reys 1980, Schoenfeld 1983/1985/1992).

2.5.1 Ορισμός επίλυσης προβλήματος

Με τον όρο «επίλυση προβλήματος» (problem solving) περιγράφεται ένας ιδιαίτερος κλάδος της Διδακτικής των Μαθηματικών που ασχολείται με τη διαδικασία συντονισμού προηγούμενης εμπειρίας, γνώσης και προαισθήματος, σε μια προσπάθεια προσδιορισμού μιας μεθόδου ανάλυσης μιας κατάστασης, της οποίας τα αποτελέσματα είναι άγνωστα ή είναι γνωστά αλλά πρέπει να αποκαλυφθούν και με την οποία έρχονται αντιμέτωποι καθημερινά οι μαθητές στη σχολική πραγματικότητα αφού αποτελεί πλέον τον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας (Εξαρχάκος 1993, Καραγεώργος 2000).

2.5.2 Θεωρητική προσέγγιση της «επίλυσης προβλήματος»

Σύμφωνα με τον Θ. Εξαρχάκο (1994) η διαδικασία της λύσης ενός προβλήματος έχει τις ρίζες της στην αρχαία Ελλάδα και ξεκίνησε από την πρακτική διαδικασία, την παρατήρηση και τον πειραματισμό, πέρασε στην αποδεικτική διαδικασία με παραγωγικό συλλογισμό και έφθασε στη θεωρητική αντιμετώπισή της.

Η πατρότητα της θεωρίας «επίλυσης προβλήματος» αποδίδεται στον G. Polya (1945) ο οποίος στο βιβλίο του με τίτλο «How to solve it» περιγράφει και συστηματοποιεί τις στρατηγικές που κατά τη γνώμη του χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί, όταν λύνουν προβλήματα. Καταπιάνεται με τη λύση και ότι προηγείται αυτής, δηλαδή με την ευρετική πορεία.

Μια συμπυκνωμένη παρουσίαση της ευρετικής μεθόδου του Polya δίνεται στη συνέχεια σε τέσσερις φάσεις:

1. Κατανόηση του προβλήματος
    - Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι η συνθήκη;
    - Είναι δυνατό να ικανοποιηθεί η συνθήκη;
        i. Είναι η συνθήκη επαρκής για τον προσδιορισμό του ζητούμενου;
        ii. Μήπως είναι ανεπαρκής;
        iii. Μήπως είναι πλεοναστική;
        iv. Μήπως είναι αντιφατική;
    - Χάραξη ενός σχήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλο συμβολισμό.
    - Χωρισμός της συνθήκης σε διάφορα μέρη. Μπορούν αυτά τα μέρη να γραφούν;
2. Επινόηση ενός σχεδίου (λύσης)
    - Εύρεση της σχέσης μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου. Αν δεν μπορεί να βρεθεί άμεση συσχέτιση θα πρέπει να εξετάζονται βοηθητικά προβλήματα.
3. Εκτέλεση του σχεδίου
    - Εκτέλεση του σχεδίου, ελέγχοντας την ορθότητα κάθε βήματος.

4. Ανασκόπηση
   - Έλεγχος του αποτελέσματος και της αιτιολόγησης.
   - Εξέταση αν μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο.
   - Χρησιμοποίηση του αποτελέσματος ή της μεθόδου και για κάποιο άλλο πρόβλημα.

Ο Polya κάνει για πρώτη φορά λόγο για «προβλήματα ρουτίνας» στα οποία ο μαθητής καλείται να εφαρμόσει μια, εκ των προτέρων, γνωστή τεχνική και να ακολουθήσει κάποιο σχετικό παράδειγμα, χωρίς οποιοδήποτε ίχνος πρωτοτυπίας. Στα προβλήματα ρουτίνας ο δάσκαλος θέτοντας στους μαθητές την ερώτηση: «Ξέρετε ένα σχετικό πρόβλημα;» ουσιαστικά τους καλεί να δείξουν λίγη προσοχή και να ακολουθήσουν κάποιο προηγούμενο παράδειγμα, ενώ από την άλλη δεν έχουν καμιά ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν την κρίση τους ή τις εφευρετικές τους ικανότητες. Ο Polya θεωρεί βέβαια ότι ακόμη και αυτού του είδους τα προβλήματα μπορεί να είναι απαραίτητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά το να διδάσκονται μόνο αυτά είναι ασυγχώρητο αφού οι μαθηματικές συνταγές δεν αφήνουν περιθώρια στη φαντασία και την κρίση όπως συμβαίνει με τις συνταγές των βιβλίων μαγειρικής όπου ο μάγειρας καλείται να τις ακολουθήσει έχοντας όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει και τη φαντασία του. Σε αντιδιαστολή προς την επίλυση προβλημάτων «ρουτίνας» θέτει την επίλυση «μη συνηθισμένων» προβλημάτων, αφού όπως αναφέρει ο Polya, αν γεμίσουμε το χρόνο των μαθητών με συνηθισμένες και κουραστικές επαναλήψεις θα σκοτώσουμε το ενδιαφέρον τους.

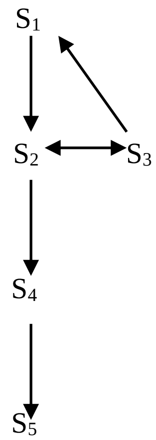
Ο βαθμός δυσκολίας ενός προβλήματος είναι επίσης πολύ σημαντικός, γιατί η επίλυση ενός πολύ εύκολου προβλήματος δεν παρέχει καμιά ικανοποίηση, αλλά και η προσπάθεια επίλυσης ενός δύσκολου προβλήματος μπορεί να απογοητεύσει και να οδηγήσει σε εγκατάλειψη κάθε προσπάθειας. Εκείνο που προκαλεί ικανοποίηση είναι η ανεκτή δυσκολία και η επακόλουθη επίλυση του προβλήματος (The Open University, 1985).

Ο Polya είναι από τους πρώτους που υπογράμμισαν την τεράστια σημασία της «προσωπικής έρευνας» στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών και έγινε φορέας μιας νέας ιδεολογίας σύμφωνα με την οποία στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν έναν επιστημονικό τρόπο σκέψης, που μπορεί να συνοψιστεί με το τετράπτυχο: υποθέτω – δοκιμάζω – συμπεραίνω – αποδεικνύω.

Ο A. Schoenfeld (1987a), κάνοντας μια κριτική στις στρατηγικές του Polya, θεωρεί αυτές πολύ γενικές και στην ουσία σύνθετες, αποτελούμενες δηλαδή από μερικότερες. Επομένως οι δυο-τρεις δεκάδες δυναμικών στρατηγικών που περιέχονται στο «How to solve it» αναλύονται σε δυο-τρεις εκατοντάδες στρατηγικές λιγότερο δυναμικές αλλά κατάλληλες να χρησιμοποιηθούν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να είναι αρκετά δύσκολο να μάθει κανείς όλες αυτές τις στρατηγικές αλλά και να μπορεί να επιλέξει κάθε φορά την καταλληλότερη.

Σύμφωνα με τον A. Schoenfeld (1980) κατά τη διαδικασία λύσης των προβλημάτων διακρίνουμε τα ακόλουθα στάδια: S_1=ανάλυση του προβλήματος, S_2=σχεδιασμός της λύσης,

S_3=εξερεύνηση, S_4=επεξεργασία-εκτέλεση και S_5=επαλήθευση. Το S_1 είναι πάντοτε το αρχικό στάδιο, ενώ το S_5 είναι το τελικό στάδιο, δεδομένου ότι, όταν η διαδικασία φθάσει σε αυτό, παραμένει εκεί, χωρίς να μπορεί πλέον να μεταβεί σε άλλο στάδιο. Πρέπει ακόμη να τονιστεί ότι, όταν στο S_2 συναντήσουμε κάποιες δυσκολίες, μεταφερόμαστε στο S_3. Αν οι δυσκολίες αυτές είναι μικρές, αφού τις ξεπεράσουμε με τη θεώρηση ενός ισοδύναμου ή ενός κατάλληλα τροποποιημένου προβλήματος, επανερχόμαστε στο S_2 και συνεχίζουμε την πορεία μας προς το S_4 και τελικά το S_5. Αντίθετα, αν οι δυσκολίες δεν μπορούν να ξεπεραστούν, πρέπει να επανέλθουμε από το S_3 στο S_1, αναζητώντας κάποιες πρόσθετες πληροφορίες από την εκφώνηση του προβλήματος, που ενδεχομένως αρχικά μας είχαν διαφύγει, ή την διαμόρφωση μιας περισσότερο προσιτής μορφής του προβλήματός μας. Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια πορεία καταλήγοντας στο στάδιο S_5, όπως αποδίδεται από το σχήμα:



Αυτή την όψη της πορείας προς τη λύση του προβλήματος ο A. Schoenfeld (1985) την αναφέρει με τον τίτλο Control. Γι’ αυτόν οι γνώσεις και η συμπεριφορά που αναγκαστικά χαρακτηρίζουν τη δραστηριότητα της λύσης μαθηματικών προβλημάτων ταξινομούνται κάτω από τους τέσσερις τίτλους:

- ✓ Πηγές: Το απαραίτητο σύνολο της μαθηματικής γνώσης που χρειάζεται για τη λύση του προβλήματος.
- ✓ Ευρετικές: Διάφορες στρατηγικές και τεχνικές για την αντιμετώπιση μη συνηθισμένων προβλημάτων (Περδικάρης,1985).
- ✓ Control: Σχεδιασμός, έλεγχος, εκτίμηση της πορείας.
- ✓ Απόψεις: Τα διάφορα «πιστεύω» του λύτη για τα μαθηματικά, για το αντικείμενο στο οποίο ανήκει το πρόβλημα κ.ά.

Η σημασία της ικανότητας του Control η οποία συνδέεται με την κριτική σκέψη αλλά και η ελλιπής προσοχή που έχει δοθεί σε αυτήν έχει τονιστεί από πολλούς ερευνητές (Schoenfeld 1987a, Lester 1985, Kilpatrick 1985 κ.ά.). Επιπλέον η αποτυχία στις περισσότερες από τις προσπάθειες να βελτιωθεί η επίδοση των μαθητών στη λύση προβλημάτων μπορεί σύμφωνα με τον Lester (1985) να οφείλεται στο γεγονός ότι δόθηκε μεγαλύτερη έμφαση στην ανάπτυξη των ευρετικών δεξιοτήτων και αγνοήθηκαν οι διαχειριστικές δεξιότητες (managerial skills) που είναι απαραίτητες για τη ρύθμιση της δραστηριότητας.

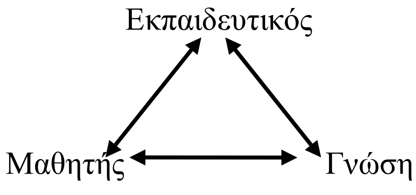
Εντούτοις, το ενδιαφέρον της Διδακτικής των Μαθηματικών για την «επίλυση προβλημάτων» περιορίζεται αισθητά στη διάρκεια της μεταρρύθμισης του ’60, γεγονός αναμενόμενο αφού η Μαθηματική Εκπαίδευση στρέφεται προς την επιστήμη των Μαθηματικών και την αυστηρότητά της. Το πρόβλημα λειτουργεί επικουρικά, σαν δείκτης κατανόησης της θεωρίας των Μαθηματικών.

Η «επίλυση προβλήματος» έρχεται ξανά στην επικαιρότητα στη διάρκεια της δεκαετίας του ’70, όταν η Μαθηματική Εκπαίδευση επαναπροσανατολίζεται προς την πραγματικότητα και τις ανάγκες της καθημερινής ζωής.

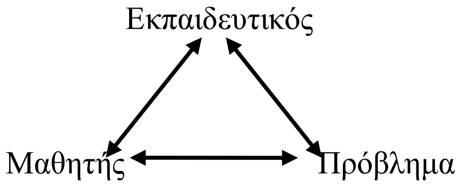
Στη δεκαετία του ’80 η «επίλυση προβλήματος» βρίσκεται στο κέντρο ενδιαφέροντος για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Φιλίππου, 1984). Ιδιαίτερα στις ΗΠΑ, το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών (N.C.T.M. 1980) τονίζει ότι «η επίλυση προβλημάτων πρέπει να είναι ο στόχος των σχολικών μαθηματικών για τη δεκαετία του ’80» και επιπλέον ο R. Skemp (1981) αποσαφηνίζει το περιεχόμενο της «επίλυσης προβλημάτων» με τον αποκλεισμό της εφαρμογής «τυποποιημένων μηχανισμών». Ο Δ. Χασάπης (1983) επισημαίνει τη διάκριση μεταξύ άσκησης, σαν εφαρμογή τυποποιημένου μηχανισμού και προβλήματος.

Στο 5^{ο} Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Adelaide 1984) αναγνωρίζεται ο ρόλος και η σημασία της «επίλυσης προβλημάτων» και επισημαίνονται τρεις σχετικές παράμετροι που αφορούν τη διδακτική πράξη: 1. Διδασκαλία με στόχο την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων που θεωρούνται ιδιαίτερης σημασίας. 2. Διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων, με στόχο την εκμάθηση εννοιών και δεξιοτήτων που αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα. 3. Διδασκαλία γύρω από την επίλυση προβλημάτων, με στόχο τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι S. Krulik και S. Rudnik (1987) διαπιστώνουν ότι μια μαθηματική έννοια αναδεικνύεται στην τάξη μέσα από τη λύση ενός προβλήματος και τονίζεται έτσι η σημασία της δεύτερης προαναφερθείσας παραμέτρου.

Στη νέα αυτή θεώρηση των πραγμάτων το κλασσικό τρίγωνο



δίνει τη θέση του σε μια νέα μορφή λειτουργίας



όπου η δραστηριότητα «πρόβλημα» προϋποθέτει την επίλυση ενός «ανοικτού - κλειστού» προβλήματος από την πλευρά των μαθητών, κινητοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους και δημιουργώντας τη νέα γνώση ενώ έχουν τη μικρότερη δυνατή παρέμβαση από την πλευρά του εκπαιδευτικού σύμφωνα με το γνωστό «διδακτικό συμβόλαιο» (Brousseau 1981, Ευσταθόπουλος 1987, Chevallard 1988) το οποίο προτάθηκε από τη Γαλλική σχολή της Διδακτικής των Μαθηματικών και το οποίο ρυθμίζει την αλληλεπίδραση δασκάλων και μαθητών με βάση τη γνώση που πρέπει να διδαχτεί.

Ο A. Schoenfeld (1987) στα πλαίσια της θεωρίας της επίλυσης προβλημάτων, προσέγγισε τον όρο «μεταγνωστικές παραστάσεις» στα μαθηματικά ή «μεταμαθηματικές παραστάσεις» αναφερόμενος σε τρεις διανοητικές συμπεριφορές που μπορεί να είναι σχετιζόμενες, είναι όμως ξέχωρες: α) Τη γνώση μας για τις δικές μας διαδικασίες σκέψης (Πόσο ακριβείς είμαστε στην περιγραφή της σκέψης μας;) β) τον έλεγχο ή αυτορρύθμιση, (Πόσο καλά κρατάμε στοιχεία για ότι κάνουμε όταν π.χ. λύνουμε προβλήματα και πως χρησιμοποιούμε αυτά τα στοιχεία για να οδηγήσουμε την ενέργειά μας στην επίλυση του προβλήματος;) γ) τα πιστεύω και τις διαισθητικές αντιλήψεις, (Ποιες ιδέες σχετικά με τα μαθηματικά φέρνουμε στη δουλειά μας στα μαθηματικά και πως αυτές πλαισιώνουν τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε μαθηματικά;) (Schoenfeld, 1987).

Στα πλαίσια του 6^{ου} Διεθνούς Συνεδρίου για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Budapest 1988) γίνονται γενικώς αποδεκτές οι ανωτέρω διαπιστώσεις και τονίζεται ότι: «Οι θεωρητικές έννοιες γίνονται αντιληπτές μέσω των προβλημάτων και της επίλυσής τους». Η «επίλυση προβλημάτων» εντάσσεται συστηματικά και ολοκληρωμένα στους σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Γίνεται λόγος και για τους υπολογιστές στη διδασκαλία των Μαθηματικών και παρουσιάζονται νέες μέθοδοι για το «problem solving» με και χωρίς τη χρήση υπολογιστή, π.χ. χρησιμοποίηση του ως εργαλείο για λύση προβλημάτων, όπως σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων, στατιστικές επεξεργασίες στοιχείων αλλά και ανάπτυξη αλγορίθμων από τους μαθητές και στη συνέχεια μετατροπή τους σε πρόγραμμα χρησιμοποιώντας μια γλώσσα προγραμματισμού (Logo, Basic κ.ά.), για κατανόηση εννοιών και λύση προβλημάτων σύμφωνα με τους Cornu n.d., Noel n.d., Hardg n.d., Vanhamue n.d., Grag n.d., Nishitani n.d., Kanaya n.d., Shaughnessy n.d. (Πόταρη, 1989). Δίδεται επιπλέον ιδιαίτερη έμφαση στη σημασία της χρήσης εργαλείων για την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές (Noss & Hoyles 1996, Ράπτης & Ράπτη 2001, Κορδάκη 2004). Επίσης από το ίδιο Συνέδριο υιοθετείται μια νέα ταξινόμηση των διάφορων κατηγοριών ασκήσεων-προβλημάτων, η οποία περιλαμβάνει και την κατηγορία «ανοιχτά προβλήματα». Στα πρακτικά του

Συνεδρίου αναφέρεται: «Ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι μια κατάσταση που εγείρει ορισμένες ανοιχτές ερωτήσεις, προκαλώντας νοητικά κάποιον ο οποίος δεν είναι άμεσα εφοδιασμένος με μεθόδους, διαδικασίες, αλγορίθμους που του επιτρέπουν την απάντηση των ερωτήσεων και τη λύση του προβλήματος. Τα προβλήματα είναι, επομένως, διαφορετικά από τις ασκήσεις».

Επομένως η ένταξη ενός προβλήματος στην κατηγορία «άσκηση» ή στην κατηγορία «πρόβλημα» εξαρτάται από το μαθητή που καλείται να το αντιμετωπίσει και τα μαθηματικά εφόδια που διαθέτει και όχι από το περιεχόμενό του. Αυτό σημαίνει ότι το ίδιο πράγμα μπορεί να χαρακτηριστεί πρόβλημα ή άσκηση ανάλογα με το λύτη (Blum & Niss, 1991). Επομένως η διάκριση άσκηση – πρόβλημα αποκτά νόημα μόνο στα πλαίσια συγκεκριμένου Αναλυτικού Προγράμματος, παίρνοντας υπόψη το σύνολο των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων συγκεκριμένων μαθητών.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι μαθητές που εκπαιδεύονται κυρίως στη λύση ασκήσεων τείνουν να αναπτύξουν ένα σοβαρό μειονέκτημα, κατά κάποιο τρόπο μια «αναπηρία». Βασίζονται σε μεγάλο βαθμό σε λύσεις που έχουν δει από πριν και επομένως δεν εργάζονται δημιουργικά. Κατά συνέπεια, ένα πρόβλημα σε ένα εντελώς νέο πλαίσιο μπορεί να παρουσιάζει μια τρομερή πρόκληση για αυτούς (Mourtos & DeJong Okamoto & Rhee, 2000).

Διεθνείς έρευνες αποκάλυψαν ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων είναι το ασθενέστερο σημείο επίδοσης των μαθητών σε όλο τον κόσμο (International Association Achievement in the Middle School Years, Mathematics Achievement in the Middle School Years, IEA Third International Mathematics and Sciense Study, Timss International Study Center, Boston College 1996).

Επιπλέον, ο A. Schoenfeld (1992) μελετώντας τον τρόπο σκέψης και συμπεριφοράς σπουδαστών κολεγίου και έμπειρων μαθηματικών κατά την επίλυση προβλημάτων, παρουσίασε τις τυπικές πεποιθήσεις των σπουδαστών σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών που είναι οι εξής:

- Τα μαθηματικά προβλήματα έχουν μία και μόνο μία σωστή απάντηση.
- Υπάρχει μόνο ένας ορθός τρόπος για να λύσεις κάποιο μαθηματικό πρόβλημα, που είναι συνήθως ο κανόνας που ο δάσκαλος έχει πρόσφατα παρουσιάσει στην τάξη.
- Οι μέσοι μαθητές δεν μπορούν να ελπίζουν ότι θα κατανοήσουν τα Μαθηματικά απλά ελπίζουν στην απομνημόνευση και στη μηχανική, χωρίς κατανόηση, εφαρμογή αυτών που έχουν μάθει.
- Τα Μαθηματικά είναι μια ατομική δραστηριότητα, που γίνεται από άτομα που βρίσκονται σε απομόνωση.
- Οι μαθητές οι οποίοι έχουν κατανοήσει τα Μαθηματικά που μελέτησαν θα μπορούν να λύσουν οποιοδήποτε πρόβλημα το πολύ σε πέντε λεπτά.
- Τα Μαθηματικά που μαθαίνουμε στο σχολείο έχουν ελάχιστη ή καμία σχέση με τον πραγματικό κόσμο.
- Η τυπική απόδειξη είναι άσχετη με τις διαδικασίες ανακάλυψης ή επινόησης.

Αυτές οι πεποιθήσεις, σύμφωνα με τον A. Schoenfeld (1992), προέρχονται από τις σχολικές εμπειρίες των μαθητών και έχουν ισχυρότατες αρνητικές συνέπειες σε ό,τι αφορά τη συμπεριφορά τους απέναντι στα μαθηματικά προβλήματα.

2.5.3 Γνωστική διαδικασία επίλυσης προβλήματος

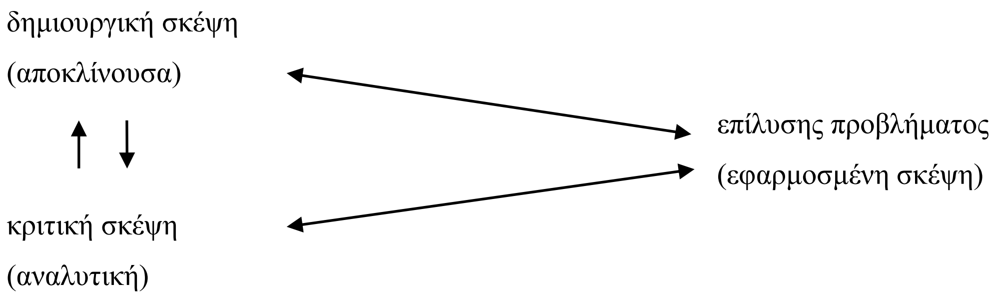
Ο R. Mayer (1995) ισχυρίζεται ότι για την επίλυση προβλημάτων χρειάζονται διάφορα είδη γνώσης, όπως: α) γλωσσική γνώση, β) πραγματολογική γνώση, γ) γνώση υποδειγμάτων προβλημάτων, δ) γνώση στρατηγικών κατάστρωσης σχεδίων και ε) αλγοριθμική γνώση.

Επομένως, αυτό που κρύβεται κάτω από τις προσπάθειες να λυθεί ένα πρόβλημα είναι κάποια μορφή γνωστικής διαδικασίας, με άλλα λόγια η σκέψη είναι ουσιαστική στην επίλυση προβλήματος. Στόχος της σκέψης είναι η συλλογή πληροφοριών και η χρήση τους στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Αυτός είναι ο παραδοσιακός τρόπος σκέψης, γνωστός ως κατακόρυφη σκέψη (συγκλίνουσα σκέψη) με τον οποίο αναπτύσσουμε έννοιες και εξετάζουμε την εγκυρότητά τους. Στόχος αυτού του τρόπου σκέψης είναι η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (reflective thinking) και η ανάπτυξη μοτίβων λύσης προβλήματος (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Το βασικό αλλά και εναρκτήριο βήμα της κριτικής σκέψης είναι η εμφάνιση ενός αισθήματος αμφιβολίας, αβεβαιότητας, ή η συνειδητοποίηση ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα, για να αρχίσουμε να σκεφτόμαστε μια δραστηριότητα ή ένα αντικείμενο μελέτης. Και καθώς υπάρχουν αναρίθμητες δραστηριότητες πάνω στις οποίες μπορούμε να σκεφτούμε κριτικά, όπως υποστηρίζει ο McPeck (1981, ό.α. στο: Χαλάτσης, 1993β) υπάρχουν και αναρίθμητοι τρόποι με τους οποίους εκδηλώνεται η κριτική σκέψη.

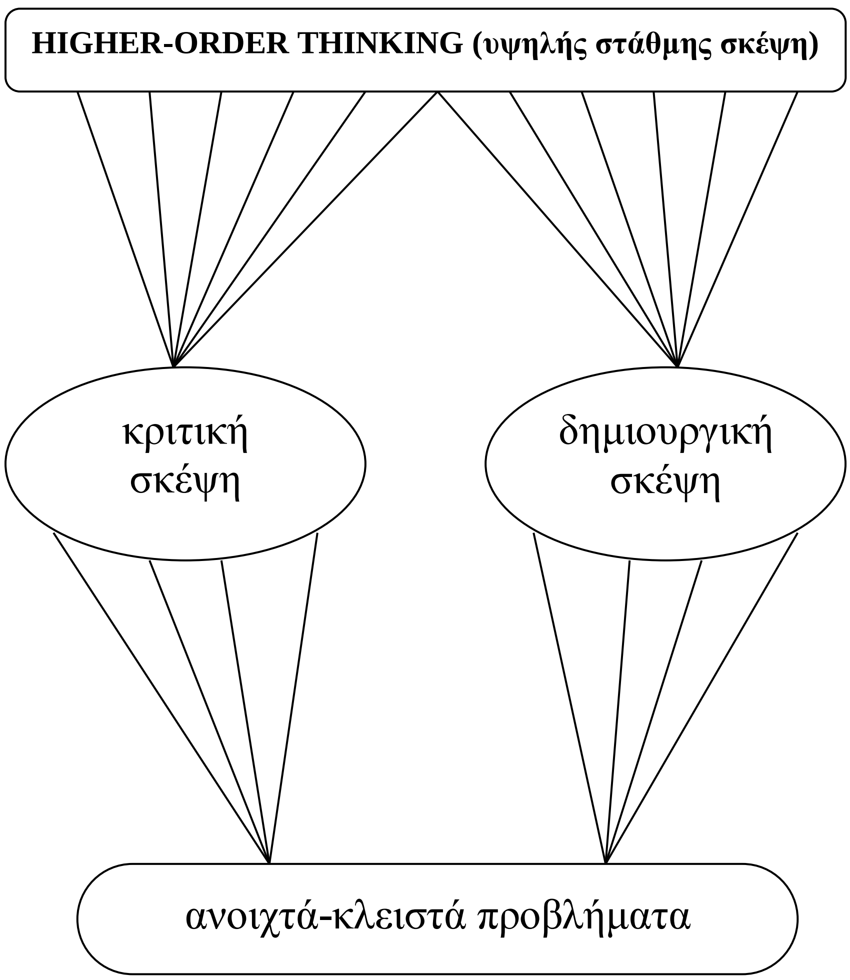
Προκειμένου να επιτευχθεί η μέγιστη αξιοποίηση των πληροφοριών που παίρνουμε με διάφορους τρόπους είναι απαραίτητη η αναδόμησή τους, έτσι ώστε να δημιουργηθούν από αυτές νέες έννοιες και να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα με νέους τρόπους. Πρόκειται εδώ για τον πιο σύγχρονο τρόπο σκέψης, την πλάγια (αποκλίνουσα σκέψη) που έχει ως στόχο την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης. Οι δύο μορφές σκέψης, κατακόρυφη και πλάγια, είναι αλληλοσυμπληρούμενες, επομένως είναι απαραίτητη η ανάπτυξη και των δύο στο σημερινό σχολείο (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Σύμφωνα με τον Fisher (1995) η επίλυση προβλήματος είναι εφαρμοσμένη σκέψη και μπορεί να αντιπαραβληθεί με τα δύο άλλα είδη σκέψης, τη δημιουργική (αποκλίνουσα) σκέψη και την κριτική (αναλυτική) σκέψη. Αυτά τα τρία είδη σκέψης συσχετίζονται πολύ. Η δημιουργική και κριτική σκέψη είναι βασικά μορφές ερευνητικής σκέψης, η οποία μπορεί να συνεπάγεται μορφές έρευνας για χάρη τους ή για εφαρμογή με σκοπό την επίλυση ενός προβλήματος, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1: Είδη σκέψης κατά τη διερεύνηση και επίλυση προβλήματος (Fisher, 1995)

Γενικά, οι ανοιχτοί-κλειστοί τύποι προβλημάτων και οι καταστάσεις προβληματισμού έχουν μεγαλύτερη δυνατότητα για υποκίνηση της υψηλόσταθμης μαθηματικής σκέψης (higher-order thinking) η οποία έρχεται ως αποτέλεσμα της συνδυασμένης εφαρμογής κριτικής (κατακόρυφης) και δημιουργικής (πλάγιας) σκέψης, όπως φαίνεται και από το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 2

Αυτό εν μέρει συμβαίνει επειδή συνήθως αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν αναζήτηση των μοτίβων και των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος.

2.5.3.1 Η μέθοδος της πλάγιας σκέψης

Από τα τέλη του 1950 άρχισαν προσπάθειες εξεύρεσης νέων τρόπων σκέψης και τεχνικών για να μπορούν έτσι να βρεθούν ιδέες και να λυθούν προβλήματα. Μεταξύ αυτών των τεχνικών είναι και η μέθοδος της πλάγιας σκέψης (Lateral Thinking) της οποίας δημιουργός είναι ο Edward De Bono. O De Bono παραδέχεται τέσσερις τρόπους σκέψης: 1. τη φυσική, 2. τη λογική, 3. τη μαθηματική και 4. την πλάγια σκέψη (De Bono, 1973).

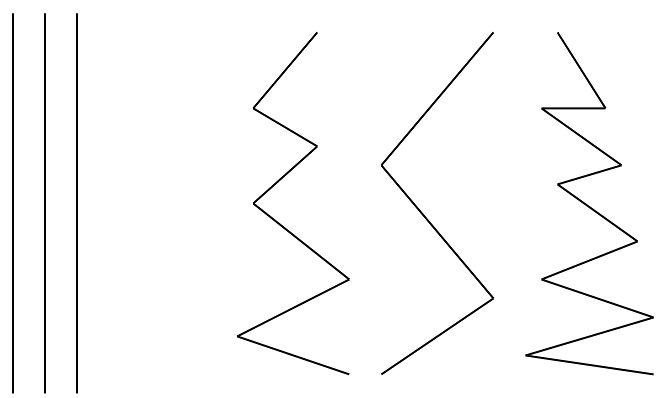
Η φυσική σκέψη ρέει προς τα καθιερωμένα και κινείται από στερεότυπο σε στερεότυπο. Η λογική σκέψη είναι το αποτέλεσμα της εκπαίδευσης, αποτελεί βελτίωση της φυσικής, αλλά έχει πολλούς περιορισμούς. Η μαθηματική χρησιμοποιεί τα μαθηματικά, δηλαδή σύμβολα και κανόνες. Είναι αποτελεσματική και σημαντικότατη για την πρόοδο της τεχνικής και της επιστήμης, αλλά έχει ορισμένους περιορισμούς σε άλλες χρήσεις και εφαρμογές.

Η πλάγια σκέψη είναι η μη ορθολογική σκέψη, είναι η απελευθερωμένη σκέψη που έχει σαν σκοπό την εκφυγή από τις παλιές ιδέες και τη γέννηση νέων ιδεών. Απαιτεί έναν καινούριο τρόπο παρατήρησης των πραγμάτων καθώς και μια αναδιοργάνωση των πληροφοριών –δεδομένων που έχουν ήδη διαμορφωθεί σε ένα σχήμα.

Συνήθως οι παλιές ιδέες αποτελούν εμπόδιο στη νέα σκέψη, γι’ αυτό και είναι καλύτερα να εγκαταλείπονται, να γίνεται προσπάθεια απελευθέρωσης από αυτές, να βρίσκονται διάφορες και ποικίλες οπτικές ενός προβλήματος και να υπάρχει μια εκπαίδευση ώστε το άτομο να συμπεριφέρεται έτσι συνεχώς (De Bono, 1978).

Ορισμένες από τις τεχνικές που βοηθούν στην παραπάνω επίτευξη είναι: 1. Η τεχνική της θέσης διαφόρων προσεγγίσεων σε ένα πρόβλημα. 2. Η τεχνική του κατακερματισμού ενός προβλήματος σε επιμέρους προβλήματα. 3. Η τεχνική της αντιστροφής του προβλήματος κ.λ.π.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση ο E. De Bono (1976) κάνει μια διάκριση μεταξύ της κάθετης σκέψης που είναι η παραδοσιακή λογική σκέψη και της πλάγιας σκέψης που είναι μια εκφυγή από τους κανόνες της κάθετης σκέψης.



Σχήμα 3: Συγκριτικό διάγραμμα κάθετης και πλάγιας σκέψης

Οι διαφορές μεταξύ της κάθετης και πλάγιας σκέψης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

κάθετη σκέψη	**πλάγια σκέψη**
1. Χρησιμοποιεί την επιλογή. 2. Χρησιμοποιεί το σύστημα ναι-όχι. 3. Είναι αναλυτική. 4. Χρησιμοποιεί την αλληλουχία. 5. Συγκεντρώνεται στα σχετικά δεδομένα. 6. Αναζητεί αποδείξεις. 7. Είναι μια κλειστή διαδικασία. 8. Τελειοποιεί μια ιδέα.	1. Χρησιμοποιεί την αλλαγή. 2. Δεν χρησιμοποιεί το σύστημα ναι-όχι. 3. Είναι προκλητική. 4. Εισάγει την διακοπτικότητα. 5. Αποδέχεται την παρείσδυση της τύχης. 6. Αποφεύγει το πασιφανές. 7. Είναι μια ανοικτή διαδικασία. 8. Ανακαλύπτει μια ιδέα.

Πίνακας 1: Διαφορές μεταξύ της κάθετης και της πλάγιας σκέψης (Μαγνήσαλης, 1996)

Αναλυτικότερα μπορούμε να πούμε ότι αυτό που ενδιαφέρει την κάθετη σκέψη είναι η επίλυση ενός προβλήματος επιλέγοντας ένα μόνο τρόπο λύσης και δημιουργώντας στους μαθητές την εντύπωση ότι αυτή είναι και η μόνη μέθοδος, η ορθότητα της απάντησης, ο εντοπισμός της κατάλληλης στρατηγικής κάθε φορά και η με σειρά τήρηση συγκεκριμένων σταδίων κατά την επίλυση.

Αντίθετα, αυτό που ενδιαφέρει την πλάγια σκέψη είναι η χάραξη νέων και ποικίλων τρόπων αντιμετώπισης και λύσης των προβλημάτων, η δημιουργία νέων διαδικασιών που μπορεί να οδηγήσουν ή όχι σε λύση, η έλευση στη λύση χωρίς το πέρασμα από όλα τα στάδια που ακολουθεί η κάθετη σκέψη, η εύρεση όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων και μάλιστα λύσεων που να ξεφεύγουν από τα συμβατικά πλαίσια σκέψης (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

«Αν θέλουμε το άτομο να είναι δημιουργικό
και όχι ένα απλό αυτόματο,
δεν θα πρέπει να πιέζεται να παραδεχτεί
συνταγές και συμπεράσματα.
Ακόμα και στη μελέτη της επιστήμης
θα 'πρεπε κανείς να συζητά μαζί του,
βοηθώντας το να δει το πρόβλημα στην ολότητά του
και να εξασκήσει τη δική του σκέψη»
Κρισναμούρτι[1]

[1] Ο Κρισναμούρτι, Ινδός φιλόσοφος και ποιητής είχε τον τίτλο «παγκόσμιος δάσκαλος». Ένα από τα έργα που έγραψε είναι «Στα πόδια του δασκάλου».

Κεφάλαιο III

3 Ανοικτά και ανοικτά-κλειστά προβλήματα

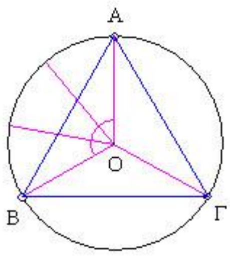
3.1 Ανοικτά προβλήματα

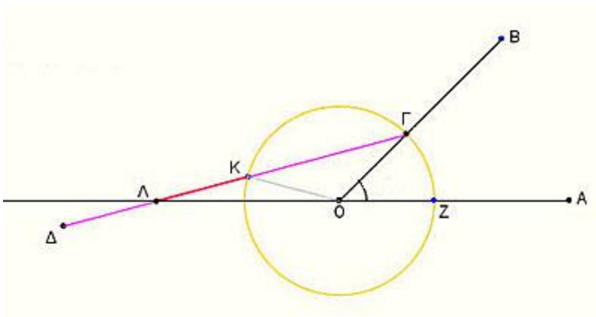
Στη Μαθηματική Επιστήμη η αναφορά σε «ανοικτά προβλήματα» παραπέμπει σε προβλήματα που για μεγάλα χρονικά διαστήματα παρέμειναν άλυτα όπως είναι:

- Το Δήλιο πρόβλημα ή ο διπλασιασμός του κύβου[2]: Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων οδήγησε σε έντονη ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Το πρόβλημα απόκτησε δημοσιότητα μέσω μιας τραγωδίας όπου ο βασιλιάς της Κρήτης Μίνωας, διαμαρτυρόμενος γιατί το κενοτάφιο που προοριζόταν για τον γιο του Γλαύκο ήταν πολύ μικρό για βασιλικό μνημείο, απαιτούσε το διπλασιασμό του όγκου του χωρίς να αλλάξει το κυβικό του σχήμα. Πανελλήνια γνωστό έγινε το πρόβλημα όταν μετά από ερώτηση προς το μαντείο του Δήλιου Απόλλωνα, τι πρέπει να κάνουν για να απαλλαγούν από το λοιμό που μάστιζε το νησί Δήλο περίπου το 430 π.Χ., δόθηκε η απάντηση ότι αυτό θα συμβεί αν διπλασιάσουν τον κυβικό βωμό του Απόλλωνα. Οι Δήλιοι ζήτησαν τη βοήθεια ακόμη και του Πλάτωνος για να λύσουν το πρόβλημα. Η αδυναμία των αρχαίων να το λύσουν οφείλεται στο ότι το πρόβλημα δεν λύνεται με κανόνα και διαβήτη, γεγονός που έγινε πλήρως κατανοητό τον 19ο αιώνα. Έτσι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου πέρασε στην ιστορία με το όνομα «Δήλιο πρόβλημα». Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα κατά την ελληνική αρχαιότητα σώθηκαν από τον Ευτόκιο (6ο αι. μ.Χ.). Με το πρόβλημα ασχολήθηκαν οι: Ιπποκράτης ο Χίος, Αρχύτας ο Ταραντίνος, Πλάτων, Μέναιχμος, Αρχιμήδης, Ερατοσθένης, Απολλώνιος, Νικομήδης, Ήρων ο Αλεξανδρινός, Διοκλής, Πάππος ο Αλεξανδρινός κ.ά. Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε, περίπου το έτος 460 π.Χ., ότι το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθούν δύο μέσοι ανάλογοι μεταξύ ενός ευθυγράμμου τμήματος και του διπλάσιου του, δηλαδή να βρεθούν x, y, τέτοιοι ώστε: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, (1) από την οποία προκύπτει $αy=x^2$, (2) και $xy=2α^2$, (3). Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3) με το α έχουμε: $αxy=2α^3$, που λόγω της (2) γίνεται $x^3=2α^3$, δηλαδή ένας κύβος διπλάσιος ενός δοσμένου κύβου. Έτσι αν κατασκευάσουμε έναν κύβο με ακμή το τμήμα x, τότε ο όγκος του, που είναι ίσος με x^3, θα είναι διπλάσιος του όγκου του κύβου με ακμή το τμήμα α. Από τους μεταγενέστερους λύση στον διπλασιασμό του κύβου έχει δώσει ο Καρτέσιος (Rene Descartes 1596-1650).

[2] Στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δίνεται ένας κύβος ακμής α και ζητείται να βρεθεί η ακμή x ενός άλλου κύβου με διπλάσιο όγκο.

- Η τριχοτόμηση γωνίας: Οι αρχαίοι είχαν κατορθώσει, από πολύ νωρίς, να διχοτομήσουν μια τυχαία γωνία, με χρήση του κανόνα και του διαβήτη και συνεχίζοντας μπορούσαν να διαιρέσουν μια γωνία σε 4, 8, 16 και γενικά σε 2^{ν} ίσα μέρη. Επίσης μπορούσαν να κατασκευάζουν, με κανόνα και διαβήτη, το ισοσκελές τρίγωνο, το τετράγωνο, το κανονικό πεντάγωνο, το κανονικό εξάγωνο, το κανονικό δεκάγωνο και το κανονικό δεκαπεντάγωνο. Από τον τρόπο κατασκευής των κανονικών πολυγώνων που αναπτύσσεται στα στοιχεία του Ευκλείδη, προκύπτει ότι μπορούσαν να κατασκευάζουν κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών: $2^{\nu}, \nu \geq 2$, $2^{\nu} \cdot 3$, $2^{\nu} \cdot 5$, $2^{\nu} \cdot 3 \cdot 5$, όπου ν = 0, 1, 2, … Στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν το κανονικό 9-γωνο ίσως να προσπάθησαν να τριχοτομήσουν την κεντρική γωνία ΑΟΒ ενός ισοπλεύρου τριγώνου και να προέκυψε έτσι το πρόβλημα *της τριχοτόμησης μιας γωνίας*. Ακριβώς κάτω από ποιες συνθήκες τέθηκε το πρόβλημα δεν γνωρίζουμε. Από την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων προκύπτει ότι μπορούσαν να τριχοτομούν τις γωνίες των 360^{o}, 180^{o} και 90^{o}, φυσικό ήταν όμως να προσπάθησαν να ανακαλύψουν μια γενική μέθοδο για την τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας. Όταν οι προσπάθειες τους να τριχοτομήσουν μια γωνία με κανόνα και διαβήτη απέτυχαν, στράφηκαν σε άλλες καμπύλες πιο πολύπλοκες από τον κύκλο, οι οποίες είναι δυνατόν να οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Ο Αρχιμήδης έδωσε δύο λύσεις στο πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας. Η μία παρουσιάζεται στη συνέχεια: Έστω ΑΟΒ η γωνία που θέλουμε να τριχοτομήσουμε. Γράφουμε ένα κύκλο με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας και έστω Γ το σημείο στο οποίο τέμνει την πλευρά της ΟΒ. Σχεδιάζουμε το τμήμα ΓΛ ώστε το τμήμα ΚΛ να είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου και τότε η γωνία ΚΛΟ είναι ίση με το ένα τρίτο της ΑΟΒ. Πράγματι, το τρίγωνο ΚΛΟ είναι ισοσκελές άρα, $\widehat{K\Lambda O} = \widehat{\Lambda OK}$ (1). Όμοια το τρίγωνο ΚΟΓ είναι ισοσκελές άρα, $\widehat{OK\Gamma} = \widehat{O\Gamma K}$ (2). Η γωνία ΟΚΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΚΛΟ άρα λόγω της σχέσης (1) είναι, $\widehat{OK\Gamma} = 2\widehat{K\Lambda O}$ (3). Η γωνία ΑΟΒ είναι εξωτερική του τριγώνου ΓΟΛ άρα λόγω της (2) και της (3) θα είναι, $\widehat{AOB} = 3\widehat{K\Lambda O}$. Το πρόβλημα είναι ότι, η ΓΛ δεν μπορεί να σχεδιαστεί με κανόνα και διαβήτη, ώστε το ΚΛ να είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.





- Ο τετραγωνισμός του κύκλου[3]: Η μέτρηση του εμβαδού που περικλείεται από κάποιο σχήμα ήταν από τις κυριότερες επιδιώξεις των γεωμετρών. Ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού διάλεξαν το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, έτσι τέθηκε το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων, δηλαδή της κατασκευής ενός τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με το δοσμένο σχήμα. Μετά τον τετραγωνισμό του ορθογωνίου, του τριγώνου, του παραλληλογράμμου και γενικά των πολυγώνων, στράφηκαν στον τετραγωνισμό σχημάτων που ορίζονται από καμπύλες γραμμές. Έτσι αρχικά, τέθηκε το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου: η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δοσμένου κύκλου. Στα τέλη του 5ου π.Χ. αιώνα το παραπάνω πρόβλημα ήταν πολύ δημοφιλές. Ακόμα και ο κωμικός ποιητής Αριστοφάνης έκανε ένα αστείο σχετικά με αυτό. Στις Όρνιθες, φέρνει στη σκηνή τον αστρονόμο Μέτωνα, ο οποίος λέει:

  «με το ορθό ραβδί αρχίζω να μετρώ
  ώστε να γίνει ο κύκλος τετράγωνος για χάρη σου˙
  και στο κέντρο του θα είναι η αγορά
  στην οποία θα οδηγούν όλοι οι δρόμοι
  συγκλίνοντας στο κέντρο, όπως σ' ένα αστέρι,
  που ενώ είναι κυκλοτερές
  στέλνει παντού ευθείες ακτίνες λαμπερές».
  «Αλήθεια, ο άνθρωπος είναι Θαλής!»,

  χλευάζει ο Πεισθέταιρος, ο αρχηγός των Ορνίθων και οδηγεί μακριά τον Μέτωνα κακήν κακώς. Είναι σαφές πώς τετραγωνίζεται εδώ ο κύκλος με τη βοήθεια δύο δρόμων, οι οποίοι συναντώνται σε ορθή γωνία στο κέντρο (Van der Waerden, 2003). Ο πρώτος που αναφέρεται ότι ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου είναι ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.), δάσκαλος και φίλος του Περικλή. Ο πρώτος που τετραγώνισε μεικτόγραμμα χωρία είναι ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.). Ο σοφιστής Αντιφών ο Αθηναίος (430 π.Χ.) σκέφτηκε πως, αν εγγράψει στον κύκλο κανονικά πολύγωνα με 4, 8, 16, 32, 64,… πλευρές και προχωρήσει μέχρι οι πλευρές του πολυγώνου «ταυτιστούν» με την περιφέρεια του κύκλου, τότε αφού τα πολύγωνα τετραγωνίζονται θα τετραγωνιστεί και ο κύκλος. Ο Βρύσων ο Ηρακλειώτης ασχολήθηκε επίσης με το πρόβλημα και διατύπωσε την άποψη ότι «το εμβαδόν του κύκλου είναι μέσο ανάλογο των εμβαδών του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου τετραγώνου» ή ότι

[3]Η απαίτηση του προβλήματος είναι να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο κύκλο. Αν δηλαδή είναι R η ακτίνα του κύκλου και x η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, πρέπει να αληθεύει η σχέση $x^2=\pi R^2$ ή $x=R\sqrt{\pi}$, όπου π ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς το μήκος της διαμέτρου του κύκλου. Παρόλο που εμπειρικά είχε διαπιστωθεί ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο διατηρείται σταθερός, ωστόσο η κατασκευή αυτού του λόγου και όταν ακόμη η Γεωμετρία εφοδιασμένη με την απόδειξη είχε γίνει επιστήμη, στάθηκε αδύνατη. Υπήρξαν κατασκευές του π μεγαλοφυείς κατά τη σύλληψη όχι όμως πραγματοποιημένες σύμφωνα με την απαίτηση του «χάρακα και του διαβήτη» που έθεταν τότε. Παράλληλα έγιναν μεγαλειώδεις προσπάθειες υπολογισμού της τιμής του π, οι οποίες με πρωτεργάτη τον Αρχιμήδη, έδωσαν ένδοξα αποτελέσματα.

«το εμβαδόν του κύκλου είναι το ημιάθροισμα των εμβαδών των εγγεγραμμένων και περιγραμμένων κανονικών πολυγώνων». Οι ιδέες αυτές των Αντιφώντα και Βρύσωνα χαρακτηρίστηκαν από τον Αριστοτέλη «ανάξιαι συζητήσεων ως αντικείμεναι προς τα αρχάς της Γεωμετρίας», χρησιμοποιήθηκαν όμως από τον Αρχιμήδη ως αφετηρία για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Οι Έλληνες γεωμέτρες μετά τις επανειλημμένες προσπάθειές τους να τετραγωνίσουν τον κύκλο με κανόνα και διαβήτη, στράφηκαν στη χρησιμοποίηση άλλων καμπύλων πολυπλοκότερων του κύκλου. Ο Πάππος (3ος αι. μ.Χ.) στο έργο του «Μαθηματική συναγωγή» αναφέρει ότι ο Δεινόστρατος και ο Νικομήδης χρησιμοποίησαν την τετραγωνίζουσα[4] για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ.) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν: ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με τη βοήθεια της έλικας, ο Νικομήδης (200 π.Χ.) με την τετραγωνίζουσα, ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ.) με μια καμπύλη που ονόμαζε ο ίδιος «αδελφή της κοχλιοειδούς» και ο Κάρπος με μια καμπύλη την οποία ονόμαζε απλά «εκ διπλής κινήσεως προερχομένη».

- Η εικασία του Γκόλντμπαχ: Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, έτσι ώστε για κάθε $n>2$, $2n=p+q$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.
- Η υπόθεση του Ρήμαν: Το πραγματικό μέρος κάθε μη τετριμμένης μηδενικής ρίζας της συνάρτησης ζ του Ρήμαν είναι ½.
- Το τελευταίο θεώρημα του Fermat[5]: Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y και z τέτοιοι ώστε $x^n+y^n=z^n$, όπου n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2.
- Η απειρία των τέλειων αριθμών[6].
- Η εικασία των δίδυμων πρώτων αριθμών[7].
- Η ακολουθία Φιμπονάτσι[8] περιέχει άπειρους πρώτους αριθμούς;
- Αν x είναι πρώτος ο 2^x-1 δεν θα διαιρείται από το τετράγωνο ενός πρώτου.

---

[4] Η τετραγωνίζουσα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το χωρισμό μιας γωνίας σε όσα ίσα μέρη θέλουμε και για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

[5] Το τελευταίο θεώρημα του Fermat αποδείχθηκε πρόσφατα από τους μαθηματικούς Andrew Wiles και Richard Taylor στο πανεπιστήμιο Princeton.

[6] Τέλειος λέγεται ένας ακέραιος αριθμός όταν το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του μας δίνει τον ίδιο τον αριθμό π.χ. οι διαιρέτες του 6 είναι οι 1,2,3 και το άθροισμα αυτών είναι ίσο με 6 (1+2+3=6). Ο αριθμός 6 είναι και ο μικρότερος τέλειος αριθμός. Άλλοι τέλειοι αριθμοί είναι οι 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 και ο 8128. Αυτοί ήταν και οι μόνοι γνωστοί τέλειοι κατά την αρχαιότητα. Ο επόμενος τέλειος είναι ο 33.550.336. (http://el.wikipedia.org/wiki / 23/08/2006)

[7] Δίδυμοι πρώτοι ονομάζονται οι πρώτοι αριθμοί που η διαφορά τους είναι 2, π.χ. 11 και 13, 17 και 19, 1.000.037 και 1.000.039. Ένα γνωστό άλυτο πρόβλημα είναι η εικασία των διδύμων πρώτων στην οποία πρέπει να αποδειχτεί πως υπάρχουν άπειροι πρώτοι p τέτοιοι ώστε και ο αριθμός p + 2 να είναι πρώτος. Σημειώνεται ότι 2 είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο πρώτων, καθώς αν ο p είναι πρώτος τότε θα είναι περιττός (με μοναδική εξαίρεση τον αριθμό 2) και άρα ο p+1 θα είναι άρτιος και άρα σύνθετος αριθμός. Το 1849 ο de Polignac διατύπωσε την πιο γενική εικασία ότι για κάθε φυσικό αριθμό κ, υπάρχουν άπειρα ζευγάρια πρώτων p και p′ τέτοια ώστε p - p′ = 2κ. Η περίπτωση όπου k = 1 είναι η εικασία των διδύμων πρώτων. (http://el.wikipedia.org/wiki/ 23/08/2006)

[8] Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Φιμπονάτσι είναι: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…

- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής n^2+1;
- Τα Αιγυπτιακά κλάσματα: προσδιορίστε αν κάθε κλάσμα της μορφής 4/n με n›1 μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα τριών θετικών ρητών αριθμών με αριθμητή 1, π.χ. 4/n=1/i+1/j+1/k.
- Η εικασία του Πουανκαρέ: Διατυπώθηκε το 1904 από το Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο Ζιλ – Ανρί Πουανκαρέ, αφορά στη γεωμετρία των πολυδιάστατων χώρων και προβλέπει ότι σε έναν τρισδιάστατο χώρο ένα σώμα σχήματος ντόνατ δεν μπορεί να μετατραπεί σε σφαίρα χωρίς να σπάσει. Αντιθέτως, ένα οποιοδήποτε σχήμα που δεν έχει τρύπα μπορεί να τεντωθεί ή να μετατραπεί σε σφαίρα[9] (εφημερίδα «Πρώτο Θέμα», 27/08/2006).

3.2 Ανοικτά-κλειστά προβλήματα

Ανοικτά-κλειστά καλούνται τα προβλήματα που αναφέρονται σε καταστάσεις πολύ γενικές και οι ερωτήσεις που ζητούνται να απαντηθούν είναι επίσης γενικές και αόριστες (ICME 6, 1988), που δεν έχουν μόνο μία απάντηση ή έναν τρόπο προσέγγισης για την εύρεση μιας απάντησης η οποία είναι είτε σωστή είτε λάθος, αλλά αρκετές ή πολλές σωστές απαντήσεις και διάφορους τρόπους εύρεσης της απάντησης ή των απαντήσεων (Pehkonen, 1997).

Οι Perez & Torregrossa (1983) εκφράζουν την άποψη ότι η κοινωνική πρακτική με την οποία θα πρέπει να συνδεθούν οι ατέλειωτες ώρες επίλυσης προβλημάτων στο σχολείο είναι αυτή του επιστήμονα-ερευνητή ο οποίος όταν βρίσκεται μπροστά σε πραγματικά προβλήματα που συχνά δεν έχουν συγκεκριμένα δεδομένα, οφείλει να κάνει υποθέσεις, να σχεδιάσει πειραματισμούς για να ελέγξει τις υποθέσεις, να τους διεξάγει, να συγκρίνει αποτελέσματα και υποθέσεις. Προτείνουν λοιπόν οι ίδιοι ερευνητές, την κατάργηση των δεδομένων στα προβλήματα του σχολείου ώστε αυτά να μοιάζουν περισσότερο με αυτά που αντιμετωπίζει ο επιστήμονας-ερευνητής ούτως ώστε να μη γίνεται πρόωρα το πέρασμα στη μαθηματική αναπαράσταση του προβλήματος αλλά οι μαθητές να εξοικειώνονται μέσα από τη διαδικασία επίλυσης τέτοιων προβλημάτων με την επιστημονική μεθοδολογία, ξεπερνώντας τους αυθόρμητους τρόπους σκέψης, δηλαδή τη μεθοδολογία του επιφανειακού.

Σύμφωνα επίσης με τους Γάλλους ερευνητές της Λυών, Arsac et al. (1985), ανοικτά-κλειστά προβλήματα αλλά και καταστάσεις – προβλήματα είναι αυτά που οδηγούν σε περισσότερες από μια (ή και καμιά) αληθείς ή αληθοφανείς προτάσεις λύσεων και επισημαίνουν ότι η διδασκαλία των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων δεν έχει σκοπό την εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας ούτε τη μύηση στη διαδικασία της μοντελοποίησης, αλλά να βάλει τους μαθητές σε μια κατάσταση έρευνας παρόμοια με αυτήν που αντιμετωπίζει ένας μαθηματικός-ερευνητής.

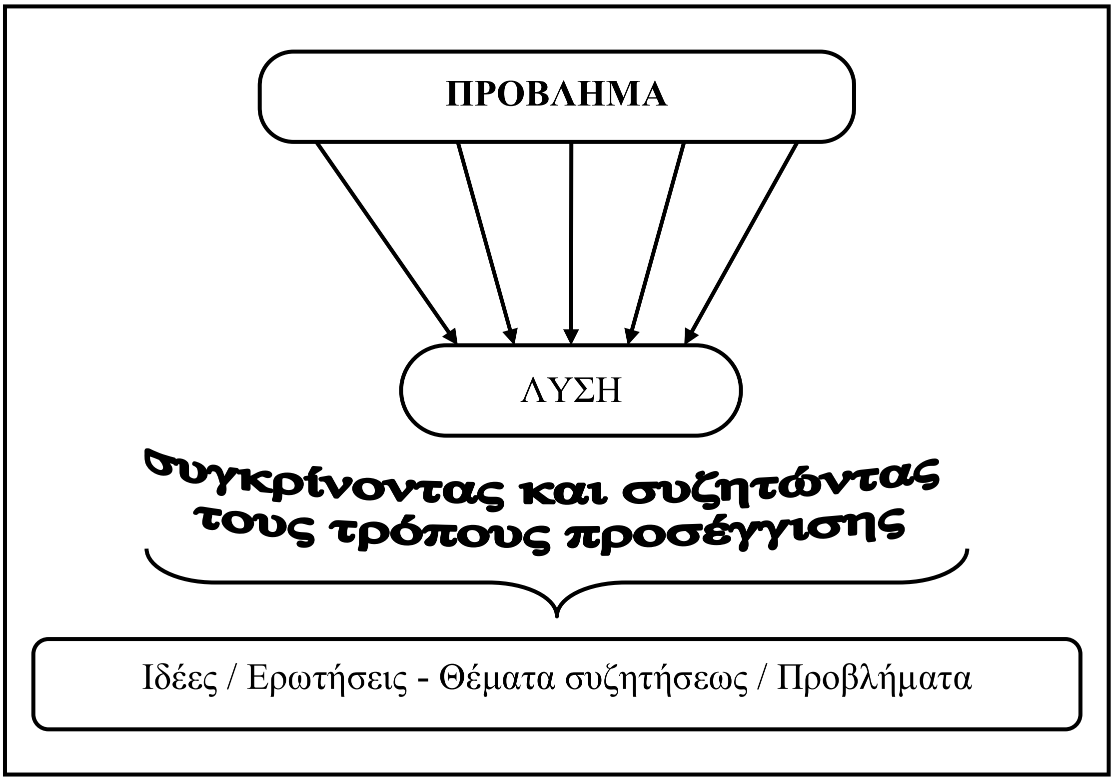
[9] Το πρόβλημα αυτό που πονοκεφάλιαζε τους μαθηματικούς για έναν αιώνα και αποτελεί μία από τις επτά υποθέσεις «γρίφους» της χιλιετίας, λύθηκε πρόσφατα (2002) από τον ιδιοφυή Ρώσο μαθηματικό Γκριγκόρι ή «Γκρίσα» Πέρελμαν (εφημερίδα «Πρώτο Θέμα», 27/08/2006).

Η μέθοδος χρήσης των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων «open-ended problems» στην τάξη αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία στη δεκαετία του ’70, η ονομασία διατυπώθηκε από την ερευνητική ομάδα του S. Shimada το 1971 και στη συνέχεια ακολούθησαν και άλλες χώρες (Nobuhico 1984, Pehkonen 1997). Στο ιαπωνικό μοντέλο, δινόταν στους μαθητές ένα πρόβλημα για να το λύσουν και οι λύσεις και οι μέθοδοί τους συγκρίνονταν και συζητούνταν (Becker & Selter, 1996).

Και στην ελληνική πραγματικότητα, πολύ γρήγορα έγιναν γνωστές οι εξελίξεις σχετικά με τη διδασκαλία ανοικτών-κλειστών προβλημάτων, αφού η σχετική δραστηριότητα ξένων και Ελλήνων ερευνητών έχει καταγραφεί σε διάφορα βιβλία και περιοδικά (Brousseau 1988, Γαγάτσης 1988, Κόθαλη-Κολοκούρη 1990, Κόθαλη-Κολοκούρη & Γεωργακάκος 1992, Κόσυβας 1995 & 1996, Κλαουδάτος 1997, Χιονίδου 1993 & 1999).

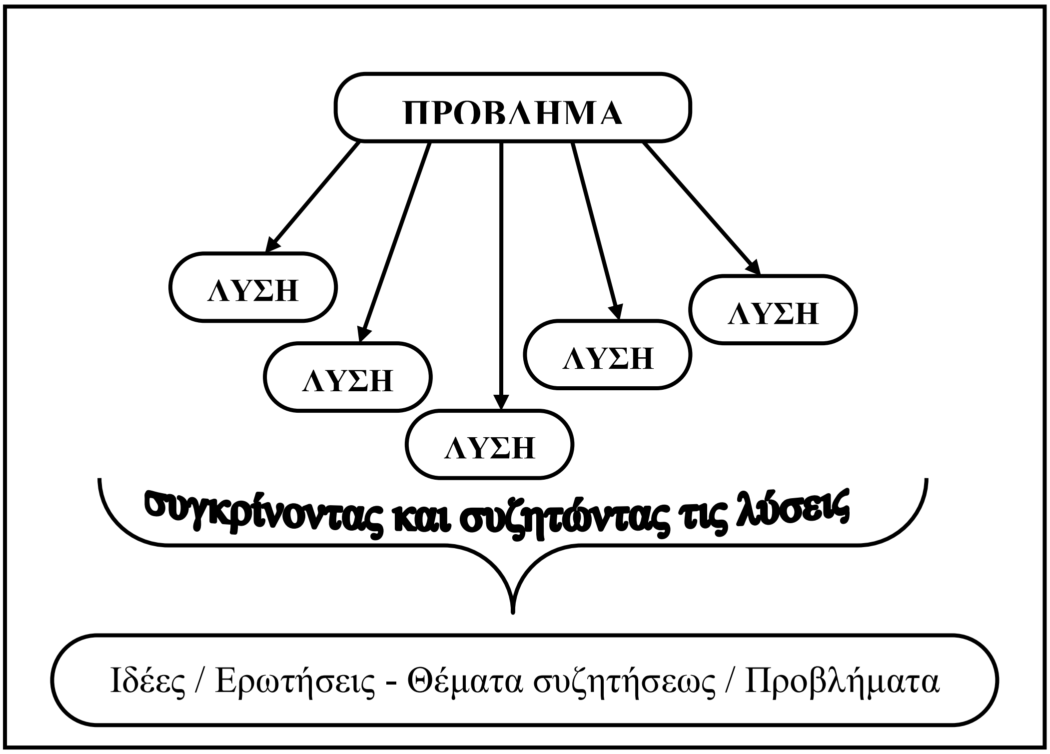
Ο ορισμός της ανοικτότητας των προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

- Οι τρόποι διατύπωσης των προβλημάτων είναι ανοικτοί, που σημαίνει ότι οι ίδιοι κάνετε την ερώτηση και τους στόχους.
- Η διαδικασία είναι ανοικτή, που σημαίνει ότι μπορείτε να επιλέξετε διαφορετικές στρατηγικές για να επιτύχετε το στόχο.



Σχήμα 4: Πρόβλημα με πολλούς τρόπους προσέγγισης της μιας λύσης του

- Τα τελικά προϊόντα είναι ανοικτά, που σημαίνει ότι έχετε αρκετά αποτελέσματα μεταξύ των οποίων μπορείτε να επιλέξετε.



Σχήμα 5: Πρόβλημα με πολλές διαφορετικές λύσεις

Ο Pehkonen (1997) εξηγεί την έννοια των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων χρησιμοποιώντας την αντίθετη: Ένα πρόβλημα είναι κλειστό, εάν η αρχική του θέση (υποθέσεις) και η θέση στόχου (συμπεράσματα) είναι κλειστές, δηλαδή εξηγήθηκαν ακριβώς. Εάν η αρχική θέση και/ή η τελική θέση είναι ανοικτές, τότε έχουμε ένα ανοικτό-κλειστό πρόβλημα. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, υπάρχουν τρεις τύποι ανοικτών προβλημάτων όπου μόνο ο ένας από αυτούς είναι «ανοικτός» τύπος, δηλαδή αυτός όπου και η αρχική και η τελική θέση είναι ανοικτές. Οι άλλοι δύο τύποι έχουν μια μόνο θέση ανοικτή, δηλαδή είτε μια ανοικτή αρχική θέση είτε μια ανοικτή τελική θέση.

	Κλειστά Συμπεράσματα	**Ανοικτά Συμπεράσματα**
Κλειστές Υποθέσεις	**Κλειστά Προβλήματα**	**Ανοικτά-Κλειστά Προβλήματα** ➢ Ζωντανές - Πραγματικές καταστάσεις ➢ Έρευνες ➢ Προβλήματα ποικιλίας (Problem Variation)
Ανοικτές Υποθέσεις	**Ανοικτά-Κλειστά Προβλήματα** ➢ Ζωντανές - Πραγματικές καταστάσεις ➢ Προβλήματα ποικιλίας (Problem Variation)	**Ανοικτά Προβλήματα** ➢ Πραγματικές καταστάσεις ➢ Προβλήματα ποικιλίας (Problem Variation) ➢ Problem Posing ➢ Συνθετικές εργασίες (Projects)

Πίνακας 2:Ανοικτά-κλειστά προβλήματα (open-ended problems) (Penkohen 1995)

Με τον όρο Problem Posing ονομάζουμε τη διαδικασία κατά την οποία το υποκείμενο (ο μαθητής, ο δάσκαλος, ο μαθηματικός) θέτει προβλήματα και ερωτήματα όταν εργάζεται με βάση μια «κατάσταση-πλαίσιο» (task-environment). Π.χ. τους δίδεται το πρόβλημα: Διατυπώστε όσα προβλήματα και ερωτήματα μπορείτε σχετικά με δύο ή περισσότερους κύκλους. Η διαδικασία αυτή είναι πολύ σημαντική για τον μαθητή από γνωστικής σκοπιάς, αφού καλλιεργείται ανώτερη συλλογιστική η οποία εμπεριέχει δημιουργία, αβεβαιότητα, αυτορρύθμιση της σκέψης (Μαμωνά-Downs, 1993).

Επομένως η διαφορά μεταξύ ανοικτού-κλειστού προβλήματος και Problem posing είναι ότι στο πρώτο οι μαθητές εστιάζουν τις προσπάθειές τους στην επίλυσή του, ενώ στο δεύτερο οι μαθητές εισάγονται σε μια ανοικτή διαδικασία, στη διαδικασία διερεύνησης και δημιουργίας προβλημάτων με βάση την «κατάσταση-πλαίσιο». Λέγοντας «κατάσταση-πλαίσιο» εννοούμε ένα αρχικό πεδίο αναφοράς με βάση το οποίο θα ενθαρρυνθούν οι μαθητές να θέσουν ερωτήματα και προβλήματα που –ιδεατά – θα επιδέχονται μια μαθηματική λύση. Αυτά τα προβλήματα μπορεί να μην σχετίζονται άμεσα με το πλαίσιο που δόθηκε και ενθαρρύνεται απόλυτα η ελευθερία κίνησης, ώστε να ασκείται η φαντασία των μαθητών (Μαμωνά-Downs, 1993). Τέλος ο Kilpatrick (1987) υποστηρίζει πόσο σπουδαίο για τη διαδικασία αυτή είναι να λαμβάνεται υπόψη η γνώμη του άλλου, υπογραμμίζοντας τη σημασία της συνεργασίας στα μαθηματικά.

Τα ανοιχτά-κλειστά προβλήματα έχουν γίνει ένα δημοφιλές εκπαιδευτικό εργαλείο στην εκπαίδευση των Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια. Η εισαγωγή αυτού του τύπου προβλημάτων στην τάξη φέρνει τη μαθηματική εκπαίδευση ένα βήμα πιο κοντά στα πραγματικά μαθηματικά (Wu, 1994). Η αυθεντικότητα και η ανοικτότητα είναι δύο σημαντικοί παράγοντες που υπογραμμίζονται πολύ στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών σήμερα. Για το λόγο αυτό οι Zhu Yan και Tan-Foo Kum Fong (2004) ερεύνησαν το «πώς» περισσότεροι από 300 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη Σιγκαπούρη έλυσαν ένα ανοικτό-κλειστό μαθηματικό πρόβλημα, συγκεκριμένα το «κρουαζιέρα στο ποτάμι», που τέθηκε σε ένα αυθεντικό πλαίσιο. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι: α) η πλειοψηφία των μαθητών λαμβάνει υπόψη μόνο έναν όρο για να βρει τη λύση του προβλήματος, όταν αυτό περιλαμβάνει περισσότερους από έναν πιθανούς όρους, β) οι περισσότεροι μαθητές παρουσιάζουν μόνο μια σωστή απάντηση, όταν υπάρχουν περισσότερες σωστές απαντήσεις, γ) η πλειοψηφία των μαθητών δεν υιοθετεί μια συστηματική προσέγγιση στην επίλυση του προβλήματος και οι λύσεις που παρουσιάζονται δεν οργανώνονται καλά. Εντούτοις, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές απόλαυσαν το πρόβλημα. Τα αποτελέσματα προτείνουν ότι οι μαθητές χρειάζονται μεγαλύτερη έκθεση σε αυθεντικά και ανοικτά-κλειστά προβλήματα για τη μάθηση των Μαθηματικών. Η έκθεση αυτή όχι μόνο θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν τη δυνατότητα επίλυσης προβλήματος και τη μαθηματική σκέψη τους αλλά και θα τους ενθαρρύνει να κάνουν συνδέσεις των Μαθηματικών και του κόσμου γύρω μας, δημιουργώντας τις λύσεις από την εμπειρία τους.

Η χρήση των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων οργανώθηκε χρησιμοποιώντας πέντε σημεία: 1) Παρουσίαση του προβλήματος. 2) Κατανόηση του προβλήματος. 3) Επίλυση του προβλήματος ατομικά ή σε ομάδες με χρήση της γλώσσας και των μεθόδων τους. 4) Σύγκριση και συζήτηση των λύσεων, των μεθόδων και του διατυπωμένου προβλήματος. 5) Σύνοψη και αξιολόγηση από το δάσκαλο.

3.2.1 Η φύση των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Πολλά από τα προβλήματα που παραδοσιακά τίθενται στους μαθητές ζητούν από αυτούς να βρουν έναν αριθμό, ένα σχήμα, ή ένα μαθηματικό αντικείμενο. Για παράδειγμα όταν ένα πρόβλημα ζητάει τους πρώτους αριθμούς μεταξύ του 10 και 20 απαιτεί οι μαθητές να προσδιορίσουν συγκεκριμένους αριθμούς. Παρομοίως, ρωτώντας τους μαθητές ποια τρίγωνα είναι συμπίπτοντα σε ένα σύνολο τριγώνων, απαιτεί από αυτούς να προσδιορίσουν συγκεκριμένα αντικείμενα. Αυτά τα είδη προβλημάτων είναι κλειστά (closed ended) διότι οι αναμενόμενες απαντήσεις είναι προκαθορισμένες και συγκεκριμένες.

Αντίθετα, τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα επιτρέπουν ποικιλία σωστών απαντήσεων και εκμαιεύουν ένα διαφορετικό είδος σκέψης από το μαθητή, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα προβλήματα:

1. Υποθέστε ότι ξεχάσατε πόσο κάνει 8 Χ 6, αλλά θυμάστε ότι 5 Χ 6 = 30. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτό για να υπολογίσετε πόσο κάνει 8 Χ 6; Ακολουθούν πιθανές απαντήσεις μαθητών που δείχνουν σαφώς ότι οι δύο μαθητές προσέγγισαν το πρόβλημα διαφορετικά αλλά το ίδιο σωστά.

απάντηση 1ου μαθητή	απάντηση 2ου μαθητή
Απλά προσθέτω ακόμη 3 εξάρια 30 + 18 48 οπότε, 8 Χ 6 = 48	Εάν ξέρω ότι 5 Χ 6 = 30 μπορώ να μετρήσω μέχρι το 6 Χ 8, έτσι: 5 Χ 6 = 30, 6 Χ 6 = 36, 7 Χ 6 = 42, 8 Χ 6 = … Δεν το ξέρω. Χρησιμοποιώ τα δάχτυλά μου, 43, 44, 45, 46, 47, 48. Βλέπω ότι χρησιμοποίησα 6 αριθμούς για να φτάσω από το 42 στο 48 άρα τώρα γνωρίζω ότι 8 Χ 6 = 48.

Και οι δύο απαντήσεις καταδεικνύουν την ικανότητα να αναλυθεί το αρχικό πρόβλημα πολλαπλασιασμού σε υποπροβλήματα. Η ανοικτή-κλειστή φύση των προβλημάτων επιτρέπει στους μαθητές να παρουσιάζουν τους δικούς τους τρόπους επίλυσης του προβλήματος.

2. Χωρίστε και χαρακτηρίστε με ταμπέλες το κομμάτι του κήπου που ακολουθεί έτσι ώστε το 50% αυτού να είναι φυτεμένο με πατάτες, το 25% με φασόλια, το 15% με καλαμπόκι και το 10% με καρότα.

Δύο απαντήσεις που μπορεί να δοθούν από μαθητές στο πρόβλημα αυτό είναι:

Απάντηση $1^{ου}$ μαθητή:

Πατάτες 50%	Φασόλια 25%	Καλα-μπόκι 15%	Κα-ρότα 10%

Απάντηση $2^{ου}$ μαθητή:

<table>
<tr><td colspan="3">Πατάτες 50%</td></tr>
<tr><td>Φασόλια 25%</td><td>Καλαμπόκι 15%</td><td>Καρότα10%</td></tr>
</table>

Αν και οι δύο απαντήσεις είναι σωστές, παρατηρούμε ότι ο κάθε μαθητής έλαβε διαφορετική απόφαση για το πώς να υποδιαιρέσει το ορθογώνιο.

Και τα κλειστά και τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Ένα τεστ αποτελούμενο αποκλειστικά από ανοικτά-κλειστά προβλήματα θα μπορούσε να πάρει ένα υπέρμετρο χρονικό διάστημα για να βαθμολογηθεί και ίσως να μην κάλυπτε επαρκώς το αναλυτικό πρόγραμμα. Τα κλειστά προβλήματα είναι ένας λογικός τρόπος προκειμένου να πάρουμε μια ιδέα για το βαθμό κατανόησης των μαθητών σε ένα ευρύ φάσμα θεμάτων. Αλλά τα κλειστά προβλήματα δεν επιτρέπουν στους μαθητές να αποκαλύψουν τις διαδικασίες της σκέψης τους τόσο καλά όσο τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα.

3.2.2 Χαρακτηριστικά των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα απαιτούν οι μαθητές να μεταδίδουν τη μαθηματική τους σκέψη και με αυτόν τον τρόπο να παρέχουν στους δασκάλους τις πολύτιμες πληροφορίες με τις οποίες μπορούν να ενημερώνουν τη διδασκαλία τους.

Ένα ανοικτό-κλειστό πρόβλημα πρέπει:

1. Να περιλαμβάνει σημαντικά μαθηματικά: Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα συχνά έχουν αρκετούς στόχους και με αυτό τον τρόπο δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να αποδείξουν την κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών θεμάτων και πώς τα μαθηματικά μπορούν να διαμορφώσουν τα πραγματικά παγκόσμια φαινόμενα.
2. Να έχει σύντομη εκφώνηση που να μην προδίδει τη λύση: Με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής κατανοεί αυτόματα και γρήγορα το πρόβλημα και επιπλέον του δίνεται η εντύπωση ότι το πρόβλημα είναι εύκολο με συνέπεια να παρακινείται στο να προσπαθήσει να βρει τη λύση του. Η εκφώνηση δεν πρέπει να περιέχει νύξεις για τη λύση ή για τη μέθοδο που πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής, ούτε ερωτήσεις της μορφής: «αποδείξτε ότι …». Επίσης δεν πρέπει να απαιτείται απλή εφαρμογή αυτών που διδάχτηκαν προηγουμένως γιατί τότε θα έχουμε πρόβλημα εφαρμογής και όχι ανοικτό-κλειστό πρόβλημα. Όμως, σύμφωνα με τους Κολέζα-Αδάμ και Σουρλά (1990) η εκφώνηση δεν είναι απαραίτητο να είναι σύντομη, γιατί μια πιο αναλυτική εκφώνηση κάνει πολλές φορές το πρόβλημα πιο προσιτό σε νεαρότερους μαθητές.
3. Να αναφέρεται σε οικείες καταστάσεις του μαθητή: Η διατύπωση του προβλήματος, το λεξιλόγιο και οι καταστάσεις στις οποίες αναφέρεται, πρέπει να είναι οικείες στο μαθητή, να ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντά του, για να προκαλούν τη φυσιολογική του περιέργεια που αποτελεί το κίνητρο που θα συμβάλει αποφασιστικά στην επίλυσή του. Έτσι οι μαθητές μπορούν εύκολα να «κατακτήσουν» την κατάσταση και να καταπιαστούν με δοκιμαστικές απόπειρες, εικασίες και σχέδια επίλυσης.
4. Να εκμαιεύει σειρά απαντήσεων: Δυστυχώς, όταν η απάντηση σε ένα πρόβλημα είναι ένας μοναδικός αριθμός, οι μαθητές συχνά συμπεραίνουν ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος να λυθεί το πρόβλημα. Όταν τα στοιχεία του προβλήματος απαιτούν από τους μαθητές να εξηγήσουν τη σκέψη τους είναι πιθανότερο να ενθαρρύνουν ένα ευρύ φάσμα απαντήσεων διότι όλοι οι μαθητές δεν σκέφτονται με τον ίδιο τρόπο. Σκεφτείτε την ερώτηση: «Μπορεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο να έχει μια ορθή γωνία; Γιατί ναι ή γιατί όχι;» Χαρακτηριστικά, οι μαθητές εστιάζουν στις γωνίες και συμπεραίνουν ότι *αυτό δεν είναι δυνατό, διότι όλες οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο και ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει 270 μοίρες*. Αλλά ένας μαθητής μπορεί να επικεντρωθεί στα μήκη των πλευρών και να απαντήσει ότι *αυτό δεν μπορεί να συμβεί γιατί αν είχαμε μια ορθή γωνία τότε θα είχαμε και μια υποτείνουσα, δηλαδή μια πλευρά μεγαλύτερη από τις κάθετες πλευρές. Αλλά όλες οι πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες. Επομένως αυτό δεν μπορεί να συμβεί.* Φανταστείτε τη χαρά αυτού του μαθητή όταν ο δάσκαλος τονίσει στους άλλους μαθητές αυτό το μοναδικό τρόπο σκέψης σχετικά με το πρόβλημα.
5. Να απαιτεί επικοινωνία: Μία από τις πραγματικές δυνάμεις της χρήσης ανοικτών-κλειστών προβλημάτων είναι ότι δίνουν στους μαθητές ευκαιρίες να μεταδίδουν τις σκέψεις τους. Σύμφωνα με τους Doise και Mungny (1978) η ενεργοποίηση των μαθητών σε μια διαλεκτική δια-

δικασία οδηγεί σε αντιθέσεις γνωστικού χαρακτήρα μεταξύ των διαλεγομένων, συμβάλλοντας σημαντικά στην απόκτηση των υπό μελέτη γνώσεων (Mungny, 1978).

6. Να εκτίθεται σαφώς: Το γεγονός ότι ένα πρόβλημα είναι ανοικτό-κλειστό δεν πρέπει να θολώνει τους σκοπούς του. Το πρόβλημα πρέπει να έχει ένα σαφή σκοπό ακόμα κι αν υπάρχουν πολλές πιθανές απαντήσεις. Επιπλέον, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τι αναμένεται από αυτούς και τι αναμένει ο δάσκαλος ως καλή και πλήρη απάντηση. Πολλοί δάσκαλοι διαπιστώνουν ότι το μοίρασμα ποικίλων απαντήσεων με τους μαθητές τους και ζητώντας από αυτούς να αξιολογούν τις απαντήσεις τους, βοηθάει τους μαθητές να καθορίζουν τι αποτελεί μια καλή απάντηση. Επειδή οι μαθητές συχνά δεν συνηθίζουν να εξηγούν τη σκέψη τους στο γράψιμο των μαθηματικών, είναι σημαντικό να ενισχυθούν να αναπτύξουν τις επικοινωνιακές τους δεξιότητες και τις ικανότητές τους να αναλύουν πόσο καλά τα γραπτά τους μεταβιβάζουν τους συλλογισμούς τους.
7. Να έχει τον απαραίτητο χρόνο για την επίλυσή του: Επειδή τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα απαιτούν αρκετό χρόνο πρέπει να δίνονται όταν υπάρχει χρονικό περιθώριο να λυθούν ώστε να μην καταλήγουμε στη βιαστική επίλυση και παρουσίαση από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, χωρίς δηλαδή τη συμμετοχή των μαθητών που πρέπει να έχουν την ευκαιρία να εργαστούν ομαδικά, να κάνουν δοκιμές, εικασίες και να προτείνουν λύσεις. Άλλωστε αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο δεν είναι τόσο η λύση, όσο η διαδικασία της έρευνας για τη διατύπωση μιας λύσης. Στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος δεν υπάρχουν λάθη, υπάρχουν μόνο «ατυχείς» εμπνεύσεις.
8. Να προσφέρεται για αξιολόγηση: Κάθε αξιολογούμενο στοιχείο προσφέρεται με τουλάχιστον δύο θέσεις σε μια κλίμακα αξιολόγησης: σωστό ή λάθος. Αλλά σκοπός των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων είναι να εφοδιάσουν τους μαθητές με την ευκαιρία να μεταβιβάζουν την κατανόησή τους παρά ένα σωστό εναντίον ενός λανθασμένου σεναρίου. Το ζήτημα επομένως είναι κατά πόσον είναι δυνατόν να «συλλάβει» (conceive) εκείνες τις απαντήσεις που έχουν κάποια αξία (μπορούν να αξιολογηθούν καλύτερα από 0) αλλά δεν είναι και άξιες για άριστη βαθμολογία. Το να δίνεται στους μαθητές «μερική» βαθμολογία είναι ήδη γνωστό και η χρησιμοποίηση μιας κλίμακας τυποποιεί τη διαδικασία και βοηθάει στην εξασφάλιση αμεροληψίας. Ένα κριτήριο για να θεωρηθεί «καλό» ένα ανοικτό-κλειστό πρόβλημα είναι να εκμαιεύει απαντήσεις που να είναι υποκείμενες σε «μερική» βαθμολόγηση σύμφωνα με κάποια καθιερωμένη κλίμακα αξιολόγησης. Μια ερώτηση όπως: «Μπορεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο να έχει μια ορθή γωνία;» δεν επιτρέπει μια αξιολόγηση που να περιλαμβάνει «μερική» βαθμολόγηση. Αλλά η ακόλουθη ερώτηση, ως συνέχεια της προηγούμενης: «Γιατί ναι ή γιατί όχι;» επιτρέπει ποικίλες προσεγγίσεις.

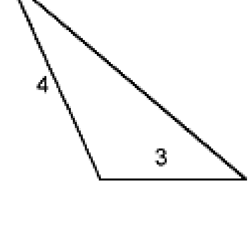
3.2.3 Γιατί χρησιμοποιούμε ανοικτά-κλειστά προβλήματα;

Όλοι οι μαθητές δεν είναι ίδιοι. Άλλος εμφανίζεται κάθε φορά να προσεγγίζει ένα πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο από τους υπόλοιπους μαθητές και να απολαμβάνει ιδιαίτερα την εύρεση κομψών ή ασυνήθιστων προσεγγίσεων. Άλλος προτιμά να μένει «μέσα στο κουτί» όπου αισθάνεται άνετα, να αντιγράφει παραδείγματα από τον πίνακα, να εξασκείται πάνω σε αυτά και να αναπαράγει διαδικασίες. Δεν του αρέσουν οι εκπλήξεις. Από τη στιγμή που έχει μάθει τέλεια μια διαδικασία, δεν θέλει να μπερδεύει το μυαλό με μια άλλη προσέγγιση. Άλλος, εάν δεν του δοθούν σαφείς και βήμα προς βήμα οδηγίες, θα σκοντάψει. Άλλος, με έλλειψη εμπιστοσύνης στον εαυτό του και στις γνώσεις του, μπορεί εντούτοις να μας καταπλήξει με τον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος. Οι μαθητές μαθαίνουν με ποικίλους τρόπους και οι τρόποι με τους οποίους δείχνουν τις γνώσεις τους ποικίλουν επίσης. Ένας τρόπος για να μπορέσουμε να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες όλων αυτών των, διαφορετικού τύπου, μαθητών είναι η χρήση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων.

Η φύση των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων επιτρέπει στους μαθητές να προσεγγίζουν την επίλυση προβλήματος με όποιον τρόπο αυτοί επιλέγουν. Οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας, από αυτές που προαναφέραμε, πραγματικά λάμπουν όταν έρχονται αντιμέτωποι με ένα ανοικτό-κλειστό πρόβλημα. Αλλά και αυτοί της δεύτερης κατηγορίας που φοβούνται το άγνωστο και αντιδρούν στην αρχή στα ανοικτά-κλειστά προβλήματα, γίνονται πιο άνετοι με αυτά μετά από αρκετή εξάσκηση και καθοδήγηση για ποιοτικές απαντήσεις. Για τους μαθητές που θέλουν σαφείς οδηγίες και βήμα προς βήμα καθοδήγηση και δεν μπορούν να απολαύσουν τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα καλό είναι να γίνεται αυτή εξατομικευμένα και με φθίνουσα πορεία, γιατί εάν δίνουμε προβλήματα «φιλικά» προς αυτούς τότε θα χάσουν ευκαιρίες οι άλλοι μαθητές για ενασχόληση με συναρπαστικά μαθηματικά. Τέλος, λύνοντας ένα πρόβλημα, του οποίου η λύση δεν είναι αμέσως φανερή, μπορεί να δώσει σε κάποιους «άτολμους» μαθητές αίσθημα εμπιστοσύνης για τις μαθηματικές τους γνώσεις.

Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα μας βοηθούν επίσης να καλύψουμε μια άλλη ανάγκη. Συχνά δίνουμε πολύ μεγαλύτερη προσοχή στο «πώς» κάνουμε μαθηματικές διαδικασίες παρά στο «πότε» τις κάνουμε. Οι μαθητές μαθαίνουν μια διαδικασία και γρήγορα την ξεχνούν. Το πλαίσιο που περιβάλλει τις διαδικασίες χάνεται κατά την πραγματοποίηση των διαδικασιών. Για παράδειγμα, μελετώντας το πρόβλημα:

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να υπολογίσετε το μήκος της άγνωστης πλευράς στο ακόλουθο τρίγωνο; Γιατί ναι ή γιατί όχι;



Ένας μαθητής απάντησε: Ναι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να υπολογίσουμε το μήκος της άγνωστης πλευράς, γιατί μας δίνονται οι 2 από τις 3 πλευρές και επομένως το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε στον τύπο και να εκτελέσουμε τη διαδικασία:

$x^2 = 4^2 + 3^2$

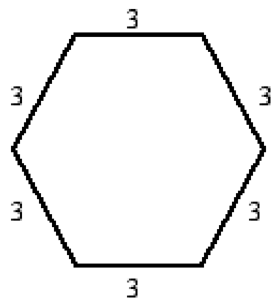
$x^2 = 16 + 9$

$x = \sqrt{25}$

$x = 5$

Αυτός ο μαθητής απέτυχε να επισημάνει ότι το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο και επομένως το Πυθαγόρειο Θεώρημα δεν είναι εφαρμόσιμο. Οι εκπαιδευτικοί συχνά ζητούν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα μόνο σε σχέση με ορθογώνια τρίγωνα, οπότε αυτοί ποτέ δεν πρέπει να αποφασίσουν «πότε» το θεώρημα είναι κατάλληλο. Ξέρουν «πώς» να χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα αλλά δεν ξέρουν «πότε» να το χρησιμοποιήσουν. Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα με την ερώτηση που θέτουν δεν επιβάλλουν μια λύση. Όταν οι μαθητές καλούνται να πάρουν αποφάσεις, ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης απαιτείται παρά όταν καλούνται να παρουσιάσουν διαδικασίες. Όπως οι Moon και Schulman εξηγούν: «Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα απαιτούν συχνά από τους μαθητές να εξηγήσουν τη σκέψη τους και έτσι επιτρέπουν στους δασκάλους να σχηματίσουν αντίληψη των μαθησιακών τους τύπων, των «κενών» στην κατανόησή τους, της γλώσσας που χρησιμοποιούν για να περιγράψουν τις μαθηματικές ιδέες και των ερμηνειών τους στις μαθηματικές καταστάσεις. Όταν καμιά συγκεκριμένη τεχνική δεν προσδιορίζεται στην προβληματική κατάσταση, … οι δάσκαλοι μαθαίνουν ποιες τεχνικές οι μαθητές επιλέγουν ως χρήσιμες και σχηματίζουν καλύτερη εικόνα για τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών τους».

Οι απαντήσεις σε ανοικτά-κλειστά προβλήματα σχηματίζουν στους εκπαιδευτικούς αντίληψη για το πώς οι μαθητές τους σκέφτονται και τι ξέρουν για τα μαθηματικά. Οι μαθητές αναπτύσσουν τις μεθόδους τους για να πάρουν σωστές απαντήσεις. Μερικές φορές οι μέθοδοί τους είναι από μαθηματική άποψη ορθές, άλλες φορές δεν είναι. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν τον εκπαιδευτικό να πιστέψει ότι καταλαβαίνουν κάτι ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Πρέπει επομένως οι εκπαιδευτικοί να προσέχουν ώστε οι ερωτήσεις τους να μην ενθαρρύνουν αυτήν την εξαπάτηση. Παραδείγματος χάριν, όταν βλέπουν οι μαθητές μια εικόνα όπως αυτή που ακολουθεί, μόλις που χρειάζεται να διαβάσουν την ερώτηση: «Βρείτε την περίμετρο του σχήματος». Ξέρουν ότι όταν όλες οι πλευρές ενός σχήματος έχουν έναν αριθμό δίπλα τους, πρέπει να προσθέσουν τους αριθμούς. Αυτή η ερώτηση δεν επιτρέπει πραγματικά στον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει εάν οι μαθητές ξέρουν οτιδήποτε σχετικά με την περίμετρο. Αν όμως αντί αυτού ζητηθεί από τους μαθη-



τές να σχεδιάσουν ένα εξάπλευρο σχήμα με περίμετρο 18, τότε οι απαντήσεις σε αυτήν την ερώτηση δίνουν περισσότερες πληροφορίες για την κατανόηση των μαθητών σχετικά με την περίμετρο.

Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα που ζητούν από τους μαθητές να παραγάγουν παραδείγματα σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια επιτρέπουν το σχηματισμό καλύτερου οπτικού πεδίου για τον έλεγχο της κατανόησης των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά θέματα.

Τα ανοικτά-κλειστά μαθηματικά προβλήματα μπορούν να γίνουν εξατομικευμένα στις ζωές των μαθητών με την ενθάρρυνση των μαθητών να δημιουργήσουν τις λύσεις τους από την εμπειρία τους.

Οι απαντήσεις στα ανοικτά-κλειστά προβλήματα ενημερώνουν επίσης τους δασκάλους για το πώς σκέφτονται οι μαθητές και πώς προσεγγίζουν τα προβλήματα και αυτές οι πληροφορίες μπορούν στη συνέχεια να επηρεάσουν τις οδηγίες που δίνονται προς τους μαθητές. Παραδείγματος χάριν, ένας δάσκαλος χρησιμοποιεί μια μέθοδο για να διδάξει τα προβλήματα ποσοστών που συνεπάγεται την οργάνωση της αναλογίας $\frac{\text{είνα}}{\text{από}} = \frac{\%}{10(}$. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο το πρόβλημα: «Τι ποσοστό του 60 είναι το 30;» θα μπορούσε να λυθεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη αναλογία: $\frac{30}{60} = \frac{x}{10(}$. Υποβάλλοντας ένα ανοικτό-κλειστό πρόβλημα ποσοστών κάποιος από τους μαθητές δείχνει μια εναλλακτική μέθοδο για να απαντήσει την ερώτηση που συνεπάγεται συσχετισμό του προβλήματος με το 1%. Ο δάσκαλος συνειδητοποιεί ότι η μέθοδος του μαθητή έχει περισσότερο νόημα εννοιολογικά από τη μέθοδο της αναλογίας. Η μέθοδος της αναλογίας μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δίνουν σωστές απαντήσεις στα προβλήματα ποσοστών, αλλά δίνει στους μαθητές μια εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών; Αποφασίζει λοιπόν να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο του μαθητή όταν διδάξει ξανά τα ποσοστά. Οι μέθοδοι που δημιουργούνται από τους μαθητές βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να καταλαβαίνουν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών περισσότερο από το να τους δείχνουν πόσο καλά μπορούν να εκθέσουν τι τους έχουν πει. Μπορούν στη συνέχεια οι εκπαιδευτικοί να σχεδιάσουν τις οδηγίες ξεκινώντας με βάση αυτά που ήδη γνωρίζουν και μπορούν να κάνουν οι μαθητές.

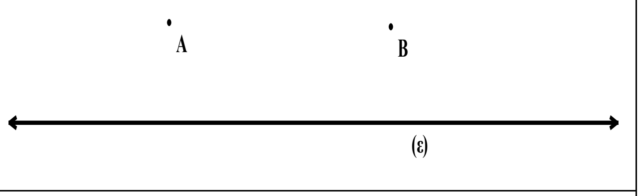
Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα, που συνδέονται με τη συζήτηση των λύσεων στην τάξη, μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν εμπιστοσύνη στη δυνατότητά τους να λύνουν μαθηματικά προβλήματα και μπορούν να παρουσιάσουν στους μαθητές την ομορφιά και τη δημιουργικότητα που ενυπάρχουν στα μαθηματικά.

3.2.4 Δημιουργία ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Το 1984 στο Rochester των Η.Π.Α., ο J. Kilpatrick σε μια διάλεξη ρώτησε: «Από πού έρχονται τα καλά προβλήματα;» (“Where do good problems come from?”) Τα καλά προβλήματα και ειδικότερα τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα ή τα πραγματικά προβλήματα μπορεί να έρχονται από τον εκπαιδευτικό, το σχολικό βιβλίο αλλά και από τον ίδιο το μαθητή.

Οι δάσκαλοι μπορούν να αλλάζουν τις ερωτήσεις τους με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε εκεί που πριν υπήρχε μια μόνο σωστή απάντηση τώρα να υπάρχουν πολλές πιθανές σωστές απαντήσεις. Για παράδειγμα, ένα παραδοσιακό μαθηματικό πρόβλημα, όπως «ποιο ποσοστό των καρεκλών που βρίσκονται στο δωμάτιο έχουν μπλε χρώμα;» έχει μια σωστή απάντηση. Αντίθετα, ένα πρόβλημα που δηλώνει «βρείτε παραδείγματα αντικειμένων από τη ζωή σας που αποτελούν το 20% του συνόλου» έχει πολλές απαντήσεις.

Συχνότερα, πηγή άντλησης ανοικτών-κλειστών προβλημάτων μπορεί να είναι το σχολικό βιβλίο. Ο εκπαιδευτικός ανάλογα με τους στόχους που έχει θέσει μπορεί να μετατρέψει σε ανοικτό-κλειστό πρόβλημα μια άσκηση του βιβλίου και να την χρησιμοποιήσει είτε στην αρχή της ενότητας σαν εισαγωγή, είτε στο τέλος του μαθήματος. Σύμφωνα με τους Γάλλους ερευνητές της Λυών, Arsac et al. (1985), η διαφορά ενός ανοικτού-κλειστού προβλήματος ή μιας κατάστασης προβληματισμού από ένα κλασσικό, κλειστό πρόβλημα μπορεί να οφείλεται πολλές φορές μόνο στη διατύπωσή του. Επομένως ένας τρόπος δημιουργίας ανοικτών-κλειστών προβλημάτων ή καταστάσεων προβληματισμού είναι να αλλαχθούν τα κλειστά προβλήματα σε ανοικτά-κλειστά. Στα ακόλουθα παραδείγματα φαίνεται πώς τα κλειστά προβλήματα αναθεωρημένα γίνονται περισσότερο εννοιολογικά προσανατολισμένα και απαιτούν από τους μαθητές να μεταδίδουν τις διαδικασίες της σκέψης τους.

αρχικό κλειστό πρόβλημα	αναθεωρημένο ανοικτό-κλειστό πρόβλημα
Ποιοι από τους ακόλουθους αριθμούς είναι πρώτοι; 7, 57, 67, 117	Ο Γιάννης σκέφτεται ότι οι αριθμοί 57 και 67 είναι πρώτοι γιατί και οι δύο τελειώνουν σε 7, που είναι πρώτος. Η Μαρία λέει ότι αυτό είναι λάθος. Ποιο είναι το σωστό και γιατί;
Ποιοι είναι οι επόμενοι τρεις αριθμοί στην ακόλουθη σειρά; 1, 4, 7, 10, 13, ____, ____, ____	Εξετάστε την ακόλουθη σειρά: 1, 4, 7, 10, 13, ………… Είναι ο αριθμός 100 μέλος αυτής της σειράς; Εξηγήστε το συλλογισμό σας.
Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Αποδείξτε ότι το μήκος της τεθλασμένης ΑΓΒ είναι ελάχιστο όταν το Γ είναι η τομή της ευθείας (ε) και της Α΄Β όπου Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).	Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Υπάρχει σημείο Γ πάνω στην (ε), τέτοιο ώστε, το μήκος της ΑΓΒ να είναι το μικρότερο δυνατό; 
Βρείτε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 18 και 24.	Γιατί δεν μπορεί ο αριθμός 48 να είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 18 και 24;

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εφαρμόσουν διάφορα «ευρήματα» προκειμένου να δημιουργηθούν ανοικτά-κλειστά προβλήματα μέσα στην τάξη, όπως:

1. Να ζητήσουν από τους μαθητές να δημιουργήσουν μία κατάσταση ή ένα παράδειγμα που να ικανοποιεί ορισμένες προϋποθέσεις. Ερωτήσεις αυτού του τύπου απαιτούν οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα καθορισμένα χαρακτηριστικά της βαθύτερης έννοιας. Οι μαθητές πρέπει να πάρουν αυτό που γνωρίζουν σχετικά με μια έννοια και να το εφαρμόσουν για να δημιουργήσουν ένα παράδειγμα. Στα παραδείγματα που ακολουθούν ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν έναν αριθμό ή κάποιο είδος μαθηματικού αντικειμένου που να ικανοποιεί ορισμένα κριτήρια.

- Γράψτε έναν τετραψήφιο ζυγό αριθμό χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα ψηφία, 3, 6, 7, 1, 5. Εξηγήστε γιατί ο αριθμός σας είναι ζυγός.
- Προσδιορίστε τρεις αριθμούς των οποίων ο Μ.Κ.Δ. είναι 5 και το Ε.Κ.Π. 180. Περιγράψτε πώς βρήκατε τους αριθμούς.

2. Να ζητήσουν από τους μαθητές να εξηγήσουν ποιο είναι το σωστό και γιατί. Αυτοί οι τύποι προβλημάτων παρουσιάζουν δύο ή περισσότερες όψεις κάποιας μαθηματικής έννοιας ή αρχής και ο μαθητής πρέπει να αποφασίσει ποια από τις θέσεις είναι σωστή και γιατί. Π.χ.

- Η Μαρία και ο Γιάννης προσπαθούν να αποφασίσουν πώς να γράψουν τα 5 λεπτά του € ως δεκαδικό. Η Μαρία προτείνει 0.5€ και ο Γιάννης 0.05€. Ποιο είναι το σωστό και γιατί;
- Οι ακόλουθες απαντήσεις δόθηκαν από μαθητές που τους ζήτησαν να υπολογίσουν το 2^8:

  Γιώργος: $2^8 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$

  Κατερίνα: $2^8 = 2^2 \bullet 2^2 \bullet 2^2 \bullet 2^2 = 256$

  Μιχάλης: $2^8 = 2^2 \bullet 2^2 \bullet 2^2 = 64$

  Ποιος μαθητής απάντησε σωστά; Εξηγήστε γιατί είναι σωστή η απάντησή του.

3. Να ζητήσουν από τους μαθητές να λύσουν ή να εξηγήσουν το πρόβλημα / λύση με δύο ή περισσότερους τρόπους. Η δυσκολία βρίσκεται στο γεγονός ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να καθορίσεις τι συνιστά μια εναλλακτική μέθοδο. Επίσης μπορεί να είναι δύσκολο για τους μαθητές να σκεφτούν ένα διαφορετικό τρόπο λύσης ενός προβλήματος από τη στιγμή που έχουν λύσει αυτό με έναν τρόπο. Συνήθως λένε: «Γιατί να βρω μια δεύτερη μέθοδο όταν έχω ήδη μια που δουλεύει»;

3.2.5 Διαδικασία για την επίλυση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Στη διδακτική των Μαθηματικών έχει γίνει στροφή από το περιεχόμενο της διδασκαλίας στις διαδικασίες για την επίλυση. Πιο συγκεκριμένα η διαδικασία για την επίλυση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων περιλαμβάνει δραστηριότητες εκ μέρους των μαθητών που απαιτούν από αυτούς προσπάθειες, διατύπωση προτάσεων δηλαδή πιθανών λύσεων, δοκιμή για την επαλήθευση των παραπάνω προτάσεων και απόδειξη αυτών. Οι μαθητές επομένως ερευνούν – δοκιμάζουν – εικάζουν – ανακαλύπτουν – αποδεικνύουν με καθαρά δικές τους πρωτοβουλίες (Arsac et al. 1985).

Παρεμβάσεις του τύπου «αυτό θα πρέπει να κάνεις…» δεν έχουν θέση σε αυτές τις διαδικασίες. Αυτό που απαιτείται είναι δημιουργία προβλημάτων που θα επιτρέψουν στους μαθητές να επιστρατέψουν την προηγούμενα γνώση, να συνειδητοποιήσουν τη δυνατότητα ή όχι επίλυσης του προβλήματος με τη χρήση αυτής και αν είναι αναγκαίο να δημιουργήσουν νέα γνώση.

Η ενασχόληση με την επίλυση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων στην τάξη μπορεί σε γενικές γραμμές να ακολουθήσει τις παρακάτω φάσεις:

1. Χωρισμός των μαθητών σε ομάδες των τεσσάρων περίπου ατόμων και επιλογή ή ορισμός ενός συντονιστή της ομάδας.
2. Ανακοίνωση του προβλήματος, είτε γράφοντας αυτό στον πίνακα είτε δίνοντάς το φωτοτυπημένο σε όλους τους μαθητές για να το κατανοήσουν καλύτερα. Αποφεύγονται οι οδηγίες και τυχόν επεξηγήσεις που θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος και απαντώνται μόνο οι απαραίτητες ερωτήσεις των μαθητών.
3. Οι μαθητές παρακινούνται να εργαστούν στην αρχή ατομικά και στη συνέχεια ομαδικά για τη διατύπωση μιας ή και περισσοτέρων λύσεων, υποβάλλοντας τις προτάσεις και τις σκέψεις τους και εξασκώντας τη δημιουργική τους ικανότητα και φαντασία. Η ομαδική εργασία συμβάλλει ώστε να δημιουργηθούν αντιπαραθέσεις, συγκρούσεις μεταξύ των μαθητών της ίδιας ομάδας, γεγονός που ενισχύει τη διαδικασία της μάθησης (Bouvier, 1988).
4. Ο συντονιστής της ομάδας γράφει είτε στον πίνακα είτε σε ένα χαρτί την πρόταση λύση ή λύσεις της ομάδας του. Το γράψιμο είναι ένας πολύτιμος τρόπος για τους μαθητές να αναστοχαστούν τις μαθηματικές αρχές και να παγιώσουν τις αντιλήψεις τους για αυτές. (NCTM, 2000). Σε περίπτωση διαφωνίας μεταξύ των μελών της ομάδας, ο διαφωνών μαθητής πρέπει να βρει επιχειρήματα για να πείσει τους συμμαθητές του για την ορθότητα της λύσης του. Διαφορετικά ο συντονιστής προτείνει τη λύση που δέχονται τα περισσότερα παιδιά της ομάδας.
5. Μετά το γράψιμο των προτάσεων όλων των ομάδων, αρχίζει η συζήτηση χωριστά για κάθε πρόταση και ελέγχεται ως προς την ορθότητά της. Πρέπει οι μαθητές να κάνουν εδώ γνωστά τα μονοπάτια της δημιουργίας τους, τους λοξούς δρόμους που πήραν ή τα αδιέξοδα που αντιμετώπισαν και ο ρόλος τους είναι να υποστηρίξουν με επιχειρήματα την προτεινόμενη λύση της ομάδας τους και με τη συμμετοχή όλων των μαθητών αποδεικνύεται η ορθότητα ή όχι της κάθε λύσης. Πρόκειται για μια πολύ σημαντική φάση κατά την οποία οι μαθητές που πρότειναν κάποια λάθος λύση πρέπει να αντιληφθούν και να πειστούν για το λάθος της πρότασής τους ώστε να μην το επαναλάβουν στο μέλλον και επομένως να μάθουν από αυτό. Ο Aebli περιγράφει τη σημαντικότητα αυτής της διαδικασίας (όπως αναφέρεται στον Π. Οικονόμου 1984) ως εξής: *«Οι λαθεμένες δραστηριότητες των μαθητών που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της λύσης ενός προβλήματος, πρέπει να μελετηθούν επιμελώς στην τάξη, έτσι ώστε οι μαθητές να καταλάβουν ποιοι είναι οι λόγοι για τους οποίους η λύση που έδωσαν δεν είναι σωστή και να δουν τις ακριβείς διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στη σωστή λύση και στη δική*

τους». Αυτό που τονίζεται ιδιαίτερα είναι να μην δημιουργείται στους μαθητές ο φόβος του λάθους αλλά η αντίληψη ότι από αυτό μαθαίνουμε, γιατί αν ο φόβος μήπως κάνουμε λάθος λειτουργεί αποτρεπτικά τότε ένας μαθητής που δεν κάνει λάθη δεν κάνει και τίποτα άλλο (Kline, 1993). Επίσης ο Wittgenstain (Χαλάτσης, 1993β) υποστηρίζει ότι πρέπει να ξεσκεπάζεται η πηγή του λάθους και να οδηγείται ο μαθητής από το λάθος προς το σωστό, γιατί ακούγοντας απλώς την σωστή απάντηση δεν βοηθιέται.

6. Το ανοικτό-κλειστό πρόβλημα πρέπει να κλείσει οπωσδήποτε οδηγώντας τους μαθητές στις τελικές σωστές απαντήσεις. Ποτέ δεν μένει άλυτο ένα πρόβλημα, εκτός εάν αυτό δεν έχει λύση. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί η σωστή λύση ή οι σωστές λύσεις. Εάν είναι απαραίτητο μπορούμε να αφήσουμε τους μαθητές να ξανασκεφτούν το πρόβλημα στο σπίτι τους και να ολοκληρωθεί η διαδικασία επίλυσης την επόμενη ημέρα.

3.2.6 Οι απόψεις των μαθητών/τριών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών με χρήση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Μετά από πειραματική εφαρμογή διδασκαλίας ανοικτών-κλειστών προβλημάτων από ομάδα μετεκπαιδευόμενων μαθηματικών στη ΣΕΛΜΕ Τρίπολης το 1988-89 (Κόθαλη-Κολοκούρη, 1990) ζητήθηκε η γνώμη των 190 μαθητών που συμμετείχαν στην πειραματική εφαρμογή και προέρχονταν από σχολεία της Τρίπολης και της Αττικής. Μέσα από προφορικές ερωτήσεις και μια έκθεση ιδεών που έγραψαν οι μαθητές μετά την πειραματική εφαρμογή εξήχθησαν οι παρακάτω παρατηρήσεις που έχουν σχέση αφενός με το περιεχόμενο των προβλημάτων και αφετέρου με τη μέθοδο εργασίας με ομάδες. Όσον αφορά το περιεχόμενο, οι μαθητές έδειξαν μεγάλη ικανοποίηση, αντιδρούσαν αυθόρμητα και πολλοί από τους μαθητές ανέφεραν ότι με τα προβλήματα αυτά μαθαίνουν πράγματα χρήσιμα για την καθημερινή ζωή τους. Επίσης σε ένα από τα σχολεία, κάποιοι μαθητές πρότειναν να ασχοληθούν ομαδικά για να φτιάξουν δικά τους προβλήματα, τα οποία θα πρότειναν για λύση στην τάξη τους, πρόταση που δείχνει την ανάγκη για δημιουργία που λείπει από τις σχολικές δραστηριότητες. Όσον αφορά τη μέθοδο εργασίας με ομάδες άλλοι μαθητές έδειξαν ικανοποίηση, άλλοι παρατήρησαν ότι με αυτόν τον τρόπο κάποιοι μαθητές εργάζονται περισσότερο από άλλους που εργάζονται λίγο ή καθόλου, κάποιοι «καλοί» μαθητές αντέδρασαν γιατί η πλειοψηφία της ομάδας τους πρότεινε άλλη, «λανθασμένη» λύση και όχι τη δική τους που τελικά ήταν η σωστή, καθώς επίσης και σχετικά με το δίκαιο της αξιολόγησης, δηλαδή να παίρνει όλη η ομάδα τον ίδιο βαθμό. Σε γενικές γραμμές οι μαθητές συμφώνησαν ότι είναι πολύ καλό να εργάζονται πότε-πότε ομαδικά στην τάξη για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων.

3.2.7 Πλεονεκτήματα επίλυσης ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Υπάρχουν αρκετά πλεονεκτήματα που μπορούν να συνοψιστούν ως εξής: (Becker & Shimada, 1997)

1) Οι μαθητές συμμετέχουν πιο ενεργητικά στα μαθήματα και εκφράζουν τις ιδέες τους συχνότερα. Η επίλυση ανοιχτών-κλειστών προβλημάτων παρέχει ελεύθερο, θετικό σε απαντήσεις και ενθαρρυντικό μαθησιακό περιβάλλον επειδή υπάρχουν πολλές διαφορετικές σωστές λύσεις, έτσι ώστε κάθε μαθητής έχει ευκαιρίες να δώσει μοναδική/μοναδικές απάντηση/απαντήσεις. Επομένως, οι μαθητές είναι περίεργοι για τις άλλες λύσεις και μπορούν να συγκρίνουν τις λύσεις τους και να συζητούν για αυτές μεταξύ τους. Δεδομένου ότι οι μαθητές είναι πολύ ενεργητικοί, προκαλείται ενδιαφέρουσα συζήτηση στην τάξη.

2) Οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν ευρεία χρήση των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων τους. Δεδομένου ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές λύσεις, οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τους αγαπημένους τους τρόπους προς την/τις απάντηση/απαντήσεις και να δημιουργήσουν τη/τις μοναδική/μοναδικές λύση/λύσεις τους.

3) Κάθε μαθητής μπορεί να ανταποκριθεί στο πρόβλημα με μερικούς σημαντικούς, δικούς του, τρόπους. Υπάρχουν διάφορα είδη μαθητών σε μια τάξη, επομένως, είναι πολύ σημαντικό για κάθε μαθητή να περιληφθεί στις δραστηριότητες της τάξης και τα μαθήματα πρέπει να είναι κατανοητά για κάθε μαθητή. Τα ανοιχτά-κλειστά προβλήματα προσφέρουν σε κάθε μαθητή ευκαιρίες να βρει την/τις απάντηση/απαντήσεις του.

4) Το μάθημα μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μια εμπειρία συλλογισμού. Μέσω της σύγκρισης και της συζήτησης στην τάξη, οι μαθητές ουσιαστικά παρακινούνται να δώσουν τους συλλογισμούς των λύσεών τους στους άλλους μαθητές. Είναι μια μεγάλη ευκαιρία για τους μαθητές να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη.

5) Υπάρχουν πλούσιες εμπειρίες για τους μαθητές και ευκαιρίες να έχουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης και να λάβουν την επιδοκιμασία των συμμαθητών τους. Με δεδομένο ότι η λύση του κάθε μαθητή βασίζεται στη μοναδική του σκέψη, οι μαθητές ενδιαφέρονται και για τις λύσεις των άλλων μαθητών.

Όμως πλεονεκτήματα από την χρήση των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων μέσα στην τάξη υπάρχουν και από την πλευρά των εκπαιδευτικών σύμφωνα με τους Γάλλους ερευνητές της Λυών, Arsac et al. (1985), γιατί η διαδικασία αυτή επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να παρατηρούν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές τους μπορούν να χρησιμοποιούν και να αξιοποιούν μαθηματικές γνώσεις που διδάχτηκαν πολύ καιρό πριν και να διαπιστώνουν ποιες από αυτές τις γνώσεις μπορούν να τις χρησιμοποιούν σωστά και ποιες λανθασμένα. Επιπλέον από την παρατήρηση των μαθητών κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με την επίλυση του προβλήματος μπορούν να πάρουν πληροφορίες που θα τους βοηθήσουν να προσαρμόσουν τη διδασκαλία τους σε διδακτικές δραστηριότητες και καταστάσεις προσαρμοσμένες στις πραγματικές ανάγκες των μαθητών τους, με αποτέλεσμα οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να γίνονται καλύτεροι και αποδοτικότεροι.

Υπάρχουν όμως και μερικές δυσχέρειες –μειονεκτήματα, όπως:

1) Η δυσκολία ανάπτυξης σημαντικών προβληματικών καταστάσεων από την πλευρά του εκπαιδευτικού.

2) Η δυσκολία δημιουργίας προβλημάτων με επιτυχή τρόπο.
3) Η δυσκολία κατανόησης αυτών των προβλημάτων από τους μαθητές, με αποτέλεσμα να δίνουν απαντήσεις που είναι άνευ σημασίας από μαθηματική άποψη.
4) Η αίσθηση από τους μαθητές ότι η μάθησή τους δεν είναι ικανοποιητική λόγω της δυσκολίας που έχουν να συνοψίσουν με σαφήνεια τα αποτελέσματά τους (Becker & Shimada, 1997).
5) Ο περιορισμένος χρόνος που έχουν στη διάθεσή τους εκπαιδευτικοί και μαθητές.

3.2.8 Μεθοδολογία επίλυσης ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Το πρώτο βήμα στην αντιμετώπιση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων πρέπει να είναι η υιοθέτηση μιας κατάλληλης μεθοδολογίας. Υπάρχουν πολλές τέτοιες προσεγγίσεις διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (Placek, http://www.eng.auburn.edu, 2006).

Η μεθοδολογία του Wood (1997) που παρουσιάζεται στη συνέχεια, μπορεί να έχει σχεδιαστεί ειδικότερα για τους μηχανικούς, όμως μπορεί να είναι το ίδιο αποδοτική και στη σχολική πραγματικότητα. Τα βήματα αυτής της μεθοδολογίας καταγράφονται λεπτομερώς παρακάτω:

1. Συμπλοκή στο πρόβλημα (κίνητρο)

- Μπορώ να το κάνω!
- Θέλω να το κάνω!

Η συμπλοκή εμπεριέχει προσοχή, η οποία έρχεται αρχικά ως αποτέλεσμα μιας αντιλαμβανόμενης ανάγκης ή ενός σκοπού. Σύμφωνα με τον Cambourne (1988), η συμπλοκή είναι ένας από τους όρους που πρέπει να ικανοποιηθούν για οποιασδήποτε μορφής μάθηση. Οι μαθητές θα συμπλακούν εάν είναι πεπεισμένοι ότι μπορούν να λύσουν το πρόβλημα και εάν δουν πως αυτό έχει ή θα έχει κάποια εφαρμογή στη ζωή τους.

2. Καθορισμός του προβλήματος

- Καθορίζω τι δηλώνει το πρόβλημα
- Κάνω ένα σχέδιο του προβλήματος (εάν θεωρείται απαραίτητο)
- Προσδιορίζω τις δοσμένες πληροφορίες
- Προσδιορίζω τους πιθανούς περιορισμούς
- Καθορίζω ένα κριτήριο για την εκτίμηση του τελικού προϊόντος

3. Εξέταση του προβλήματος

- Καθορίζω τον πραγματικό στόχο του προβλήματος
- Εξετάζω τα εμπλεκόμενα θέματα
- Κάνω λογικές υποθέσεις
- Εκτιμώ (Guestimate) την απάντηση

4. Σχεδιασμός της λύσης

- Αναπτύσσω ένα σχέδιο για να λύσω το πρόβλημα

- Καθορίζω τα υποπροβλήματα
- Επιλέγω την κατάλληλη θεωρία, αρχές και την προσέγγιση
- Προσδιορίζω τις πληροφορίες που χρειάζεται να βρεθούν

5. Εκτέλεση του σχεδίου
6. Έλεγχος της λύσης

- Ελέγχω την ορθότητα των υπολογισμών (ξανακάνω)
- Ελέγχω τις μονάδες των υπολογισμένων παραμέτρων

7. Αποτίμηση/Απεικόνιση (reflect)

- Είναι η απάντηση λογική; Έχει νόημα;
- Κάνω σύγκριση με την εκτίμηση

3.2.9 Παρακολούθηση και «έλεγχος» της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος από τον εκπαιδευτικό

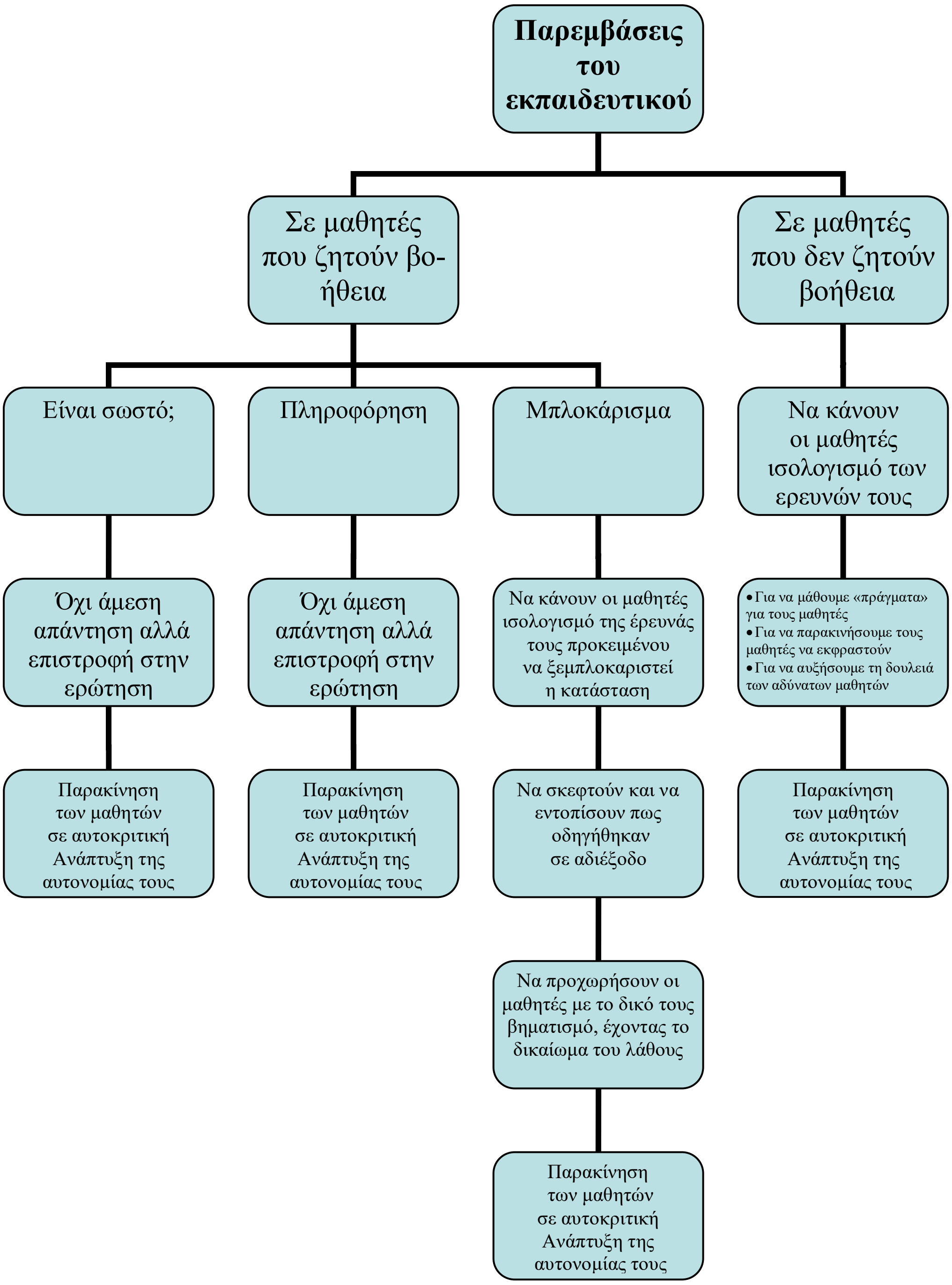
«Έλεγχος» κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος ονομάζεται κάθε ενέργεια ή σειρά ενεργειών, κατά τη διάρκεια ή στο τέλος της λύσης, που μαρτυρεί αποστασιοποίηση από την απλή διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Ο «έλεγχος» αναφέρεται είτε στο αποτέλεσμα ή αποτελέσματα που δίδονται είτε στις μεθόδους ή στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν.

Κατά τη διάρκεια της επίλυσης, καταστάσεις που μπορεί να προκαλέσουν ενέργειες ελέγχου έχουμε:

- όταν υπάρχουν διαφορετικές επιλογές, άρα πρέπει να παρθούν αποφάσεις για τις ενέργειες που θα γίνουν,
- όταν έχουμε την αναγνώριση μιας αντίφασης,
- όταν υπάρχει μπλοκάρισμα (αδιέξοδο).

Στο τέλος της λύσης έχουμε «έλεγχο» διαφορετικό από αυτόν που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της λύσης, είτε γιατί υπεισέρχονται καινούριες γνώσεις είτε επειδή χρησιμοποιείται τουλάχιστον μια διαφορετική διατύπωση των γνώσεων που ήδη χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος (Καργιωτάκης, 1993).

Σε όλη αυτή τη διαδικασία – έρευνα του ανοικτού-κλειστού προβλήματος από τους μαθητές, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι τελείως διαφορετικός από τον παραδοσιακό. Πηγαίνει από ομάδα σε ομάδα να πληροφορηθεί για την κατάσταση των ερευνών και παρακινεί τους μαθητές να κάνουν την καταγραφή της έρευνάς τους. Στις μπλοκαρισμένες ομάδες προτείνει ένα πεδίο ερευνών σε συνάρτηση με τις έρευνες που έχει κάνει η ομάδα. Αυτά τα πεδία που προτείνει δεν οδηγούν κατ' ανάγκη στη λύση, μπορεί να προτρέπουν τους μαθητές να πάνε πιο μακριά στον αρχικό δρόμο στον οποίο βαδίζουν. Δεν είναι εκεί μόνο για να κρίνει την εργασία που γίνεται, αλλά για να βοηθήσει τους μαθητές να ξετυλίξουν τις ιδέες τους, τις εικασίες τους, τα αποτελέσματά τους.



Σχήμα 6: Παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός ανοικτού-κλειστού προβλήματος (Καργιωτάκης, 1993)

Συνοψίζοντας λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι ο δάσκαλος στις διάφορες ανοικτές καταστάσεις που προκύπτουν ερευνά μαζί με τους μαθητές, κάνει κι αυτός υποθέσεις, δεν είναι ο κάτοχος της αλήθειας με βάση το ρόλο του, αλλά ο συντονιστής ενός συλλογικού ερευνητικού έργου. Επιπλέον η τροποποίηση των παιδαγωγικών χειρισμών προκύπτει από την ανάγκη πραγματοποίησης ανοικτής συζήτησης επί των διαφορετικών απόψεων και επιλογών καθώς και από την ανάγκη να εργαστούν οι μαθητές κατά ομάδες (Γομάτος, 1993).

3.2.10 Αξιολόγηση απαντήσεων ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που συχνά γίνονται από τους εκπαιδευτικούς που αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα στη διδασκαλία των Μαθηματικών αφορά το πώς θα βαθμολογούν τις απαντήσεις των μαθητών. Αυτό όμως μπορεί να γίνει αρκετά εύκολα με τη χρήση μιας κλίμακας αξιολόγησης, δηλαδή ένα σύστημα βαθμολόγησης που χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς και αποτελείται από μία λίστα κριτηρίων για την αξιολόγηση της εργασίας των μαθητών. Επιτρέπει την τυποποιημένη αξιολόγηση σύμφωνα με τα λεπτομερώς καθορισμένα κριτήρια, καθιστώντας τη βαθμολόγηση απλούστερη και με μεγαλύτερη διαφάνεια.

Άλλοτε χρησιμοποιείται μια πολύ απλή κλίμακα αξιολόγησης που έχει μόνο δύο δείκτες, δηλαδή, σωστό ή λάθος, πλήρης ή μη πλήρης απάντηση. Άλλοτε οι κλίμακες είναι πιο σύνθετες, σωστό, λάθος ή κατά κάποιο τρόπο. Πολλοί εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα σύστημα σημειώσεων. Όταν βαθμολογούν ένα σύνολο από tests και βλέπουν ένα λάθος που είχαν αντιμετωπίσει και πριν, σκέφτονται: «Πόσο το είχα μετρήσει αυτό;», κοιτάζουν πίσω και κάνουν μία σημείωση που λέει «μείον 2 για το x λάθος» για να διατηρήσουν τη βαθμολόγησή τους συνεπή.

Με άλλα λόγια, μια κλίμακα αξιολόγησης είναι ένας κατάλογος δεικτών που βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να κατατάσσουν τις απαντήσεις βασιζόμενοι σε μερικά κριτήρια και μπορεί να είναι αναλυτική ή ολιστική. Μια αναλυτική κλίμακα διαιρείται σε διάφορες διαστάσεις. Εάν ο εκπαιδευτικός θέλει να βαθμολογήσει έναν μαθητή στις διαστάσεις της επικοινωνίας, της μαθηματικής ορθότητας και της πληρότητας θα χρησιμοποιήσει μια αναλυτική κλίμακα με δείκτες για κάθε μία από τις τρεις αυτές διαστάσεις. Η ολιστική κλίμακα βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να αξιολογούν την όλη δουλειά με μια κλίμακα. Για τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα, η ολιστική είναι πιο αποτελεσματική και φιλική προς το χρήστη.

Μια κλίμακα βαθμολόγησης είναι χρήσιμη με διάφορους τρόπους:

Πρώτον, βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να εστιάσουν στο τι οι μαθητές γνωρίζουν και μπορούν να κάνουν παρά στο τι δεν γνωρίζουν και δεν μπορούν να κάνουν. Υποθέστε ότι ζητάτε από τους μαθητές να γράψουν δύο μικτούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα να είναι $5\frac{1}{2}$ και να εξηγήσουν πώς ξέρουν ότι οι δύο αριθμοί τους ικανοποιούν αυτή την προϋπόθεση. Τώρα υποθέστε ότι ένας μαθητής ορίζει δύο μικτούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα δεν είναι $5\frac{1}{2}$ και ένας άλλος μαθητής ορίζει δύο εσφαλμένα κλάσματα των οποίων το άθροισμα δεν είναι $5\frac{1}{2}$. Αν και των δύο μαθητών οι απαντήσεις δεν είναι σωστές, ο πρώτος μαθητής ξέρει κάτι που ο δεύτερος δεν ξέρει, δηλαδή, τι είναι οι μικτοί αριθμοί. Μια κλίμακα μπορεί να βοηθήσει την εστίαση της προσοχής μας στο ποια μαθηματική γνώση είναι προφανής από την απάντηση.

Δεύτερον, μια κλίμακα βοηθάει τους εκπαιδευτικούς να διατηρήσουν μια βαθμολογική συνέπεια. Υποθέστε ότι ένας δάσκαλος ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν γιατί ο πολλαπλασιασμός είναι η κατάλληλη πράξη για να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο μαθητής Α απαντάει, «για να βρω τη σωστή απάντηση». Ο μαθητής Β απαντάει, «εάν δεν πολλαπλασιάσουμε, θα είναι λάθος». Ο μαθητής Γ απαντάει, «αυτό είναι που πρέπει να κάνουμε προκειμένου να πάρουμε τη σωστή απάντηση». Ο δάσκαλος που βαθμολόγησε αυτές τις απαντήσεις έδωσε 0 βαθμούς στον Α μαθητή, 2 στον Β και 3 στον Γ (κλίμακα: 0-3), ένα ευρύ φάσμα βαθμολογιών για απαντήσεις που είναι ουσιαστικά οι ίδιες. Χρησιμοποιώντας μια κλίμακα βαθμολόγησης μπορεί αυτή να βοηθήσει στο να αποτρέψει από τέτοιου είδους βαθμολογικές ασυνέπειες.

Τέλος, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ζητούν από τους μαθητές να αξιολογούν τις απαντήσεις των προηγούμενων μαθητών σε μια ερώτηση, κάνοντας χρήση της ίδιας βαθμολογικής κλίμακας που και οι ίδιοι χρησιμοποιούν. Αυτό βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν καλύτερα τις προσδοκίες των δασκάλων τους και να μάθουν τι διαφοροποιεί τις υψηλού επιπέδου απαντήσεις από τις χαμηλότερου επιπέδου. Η αξιολόγηση γίνεται με αυτό τον τρόπο λιγότερο μυστηριώδης.

Η ακόλουθη κλίμακα είναι χρήσιμη για τη βαθμολόγηση απαντήσεων ανοικτών-κλειστών προβλημάτων:

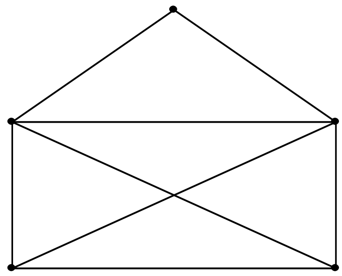
Κλίμακα βαθμολόγησης	
0	Η απάντηση δείχνει όχι κατάλληλο μαθηματικό συλλογισμό.
1	Η απάντηση δείχνει κάποιο μαθηματικό συλλογισμό αλλά αποτυγχάνει να εξετάσει τις ουσιώδεις μαθηματικές ιδέες του προβλήματος.
2	Η απάντηση δείχνει ουσιαστικό και κατάλληλο μαθηματικό συλλογισμό αλλά στερείται κάποιου δευτερεύοντα τρόπου(ων).
3	Η απάντηση είναι σωστή και η βαθύτερη συλλογιστική διαδικασία είναι κατάλληλη και σαφώς μεταδιδόμενη.

3.2.11 Παραδείγματα ανοικτών-κλειστών προβλημάτων

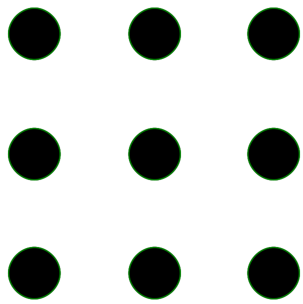
3.2.11.1 Παραδείγματα ανοικτών-κλειστών προβλημάτων, καταστάσεων προβληματισμού, γρίφων και προβλημάτων πολλαπλών επιλογών

1. Έχουμε ένα απέραντο λιβάδι και θέλουμε από αυτό να περιφράξουμε μια όσο το δυνατόν μεγαλύτερη περιοχή, αλλά τα υλικά που διαθέτουμε αρκούν για περίφραξη μήκους ακριβώς εκατό μέτρων. Ποιες λύσεις προτείνετε; Ποια είναι η προτιμότερη, σύμφωνα με τις ανάγκες μας;

2. Με οκτώ συνεχείς ευθείες γραμμές (μονοκοντυλιά) να σχεδιάσετε το παρακάτω σχέδιο. Μπορεί να γίνει αυτό και με άλλο τρόπο;



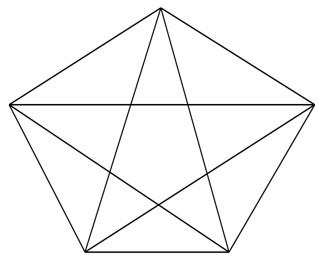
3. Ενώστε τις παρακάτω εννέα τελείες με τέσσερις ευθείες γραμμές χωρίς να σηκώσετε το μολύβι από το χαρτί (μονοκοντυλιά).



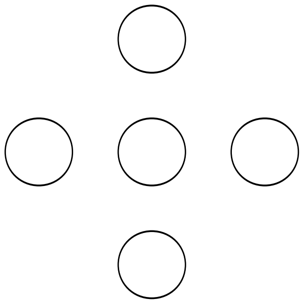
4. Να συμπληρώσετε το «μαγικό τετράγωνο» που ακολουθεί χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1-9 έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί οριζόντια, κάθετα και διαγώνια να δίνουν άθροισμα 15.

		4
1		

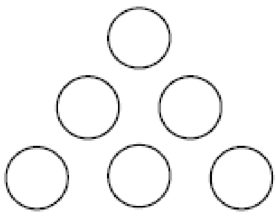
5. Πόσα τρίγωνα υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα; Ποια είναι αυτά;



6. Τοποθετείστε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 σε αυτούς τους κύκλους έτσι ώστε τα αθροίσματα οριζόντια και κάθετα να είναι τα ίδια. Περιγράψετε τη στρατηγική που χρησιμοποιήσατε για να βρείτε τη λύση ή τις λύσεις σας.

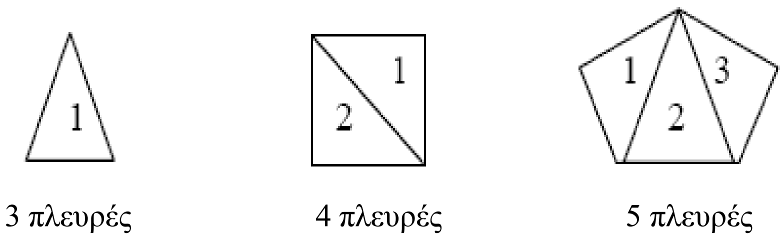


7. Χρησιμοποιώντας καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6 μία και μόνη φορά, γεμίστε τους κύκλους έτσι ώστε τα αθροίσματα των αριθμών σε κάθε μία από τις τρεις πλευρές του τριγώνου να είναι ίσα. Τι κοινό έχουν η στρατηγική που χρησιμοποιήσατε στο προηγούμενο πρόβλημα (6) με αυτήν που χρησιμοποιήσατε για να λύσετε αυτό το πρόβλημα;

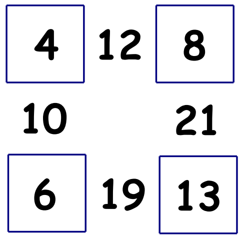


8. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 120 cm^2. Το μήκος και το πλάτος του είναι φυσικοί αριθμοί. α) Ποια είναι τα ενδεχόμενα για τους δύο αυτούς αριθμούς; β) Ποιο ενδεχόμενο δίνει τη μικρότερη περίμετρο;

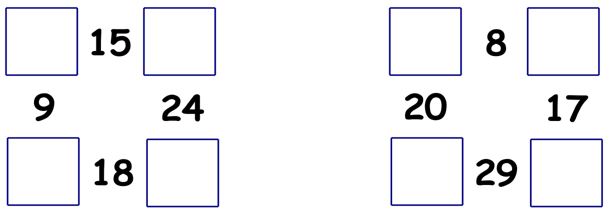
9. α) Σχεδιάστε τα επόμενα τρία σχήματα στο παρακάτω μοτίβο. β) Πόσα τρίγωνα υπάρχουν σε ένα σχήμα με δέκα πλευρές;



10. Μελετήστε προσεκτικά το παρακάτω συμπληρωμένο διάγραμμα:



Συμπληρώστε τώρα τα διαγράμματα που ακολουθούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Υπάρχει μόνο μία λύση για το καθένα ή και περισσότερες; Προσπαθήστε να βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερες.



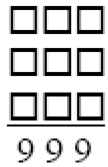
11. Στο εργαστήρι χειροτεχνίας, 4 μαθητές μπορούν να καθίσουν μαζί σε 1 τραπέζι, όπως δείχνει και το σχέδιο που ακολουθεί. Εάν 2 τραπέζια τοποθετηθούν μαζί, το ένα δίπλα στο άλλο, τότε 6 μαθητές μπορούν να καθίσουν μαζί. Α) Πόσα τραπέζια πρέπει να τοποθετηθούν σε σειρά για να καθίσουν 10 μαθητές και πόσα για 20 μαθητές; Β) Πόσοι μαθητές μπορούν να καθίσουν σε 10 τραπέζια και πόσοι σε 15;

12. Ένα ρολόι χάνει 2 λεπτά κάθε 8 ώρες. Η μητέρα του Γιάννη σχεδιάζει να βάλει το ξυπνητήρι στις 11μ.μ., το βράδυ της Κυριακής, για να ξυπνάει τον Γιάννη κάθε πρωί. Ο Γιάννης πρέπει να σηκώνεται κάθε μέρα όχι αργότερα από τις 7π.μ.. Τι ώρα πρέπει να βάλει το ξυπνητήρι η μητέρα του για να είναι σίγουρη ότι ο Γιάννης δεν θα πάει αργοπορημένος στο σχολείο καμιά μέρα, από τη Δευτέρα έως και την Παρασκευή;
13. «Είναι το παράθυρο αρκετά μεγάλο;» (http://nrich.maths.org/) Έχουμε τέσσερα ορθογώνια κομμάτια λεπτής σανιδόπλακας των οποίων οι διαστάσεις (σε εκατοστά) είναι 55 Χ 85, 65 Χ 75, 65 Χ 85, 90 Χ 105. Χωρίς να κάμψουμε τις πλάκες, πόσες από αυτές μπορούμε να περάσουμε μέσω ενός ανοικτού ορθογωνίου παραθύρου που μετρά 60 εκατ. Χ 80 εκατ.;

14. Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τις πρώτες πέντε σειρές του τριγώνου Pascal. α) Υπολογίστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε μιας από τις πρώτες πέντε σειρές. β) Κοιτάξτε για ένα μοτίβο στα αποτελέσματα και αναπτύξτε έναν γενικό κανόνα. γ) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα που φτιάξατε για να προβλέψετε τις επόμενες τρεις σειρές του τριγώνου Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

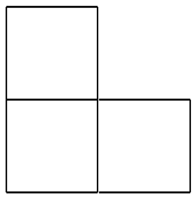
15. α) Χρησιμοποιώντας καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 μία και μόνη φορά γεμίστε τα κενά στο παρακάτω διάγραμμα έτσι ώστε το άθροισμα των τριψήφιων αριθμών να είναι 999. β) Υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις σε αυτό το πρόβλημα; γ) Υπάρχει λύση στο πρόβλημα χωρίς το ψηφίο 1 στη στήλη των εκατοντάδων; Εξηγήστε τα (β) και (γ) σε συντομία.



16. Στην υπολογιστική μου μηχανή το πλήκτρο με το ψηφίο 3 έχει χαλάσει. Πώς μπορώ να χρησιμοποιήσω τον υπολογιστή για να κάνω την παρακάτω πράξη;

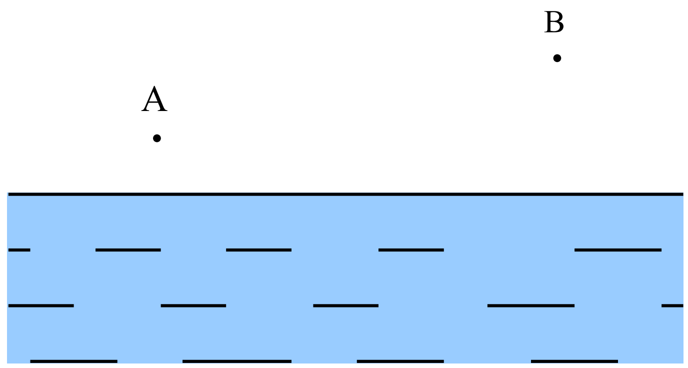
$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{\text{x}\quad 45} \end{array}$$

17. Να χωρίσετε το παρακάτω σχήμα σε 4 ίσα μέρη.



18. Πώς μπορείτε να χωρίσετε ένα τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη; (Να βρείτε τουλάχιστον 5 διαφορετικούς τρόπους)
19. Το 100 νικά! Χρησιμοποιήστε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, οποιαδήποτε από τις πράξεις (+, -, x, ÷), παρενθέσεις και αγκύλες αν χρειάζεται, για να φτάσετε στο 100. Δεν μπορείτε να αλλάξετε τη διάταξη των αριθμών ή να τους χρησιμοποιήσετε περισσότερο από μια φορά τον καθένα. Βρείτε όσες λύσεις μπορείτε!

20. Τρία καρπούζια και δύο πεπόνια ζυγίζουν 32 κιλά. Τέσσερα καρπούζια και τρία πεπόνια ζυγίζουν 44 κιλά. Όλα τα καρπούζια ζυγίζουν το ίδιο και όλα τα πεπόνια ζυγίζουν το ίδιο. Ποιο είναι το βάρος δύο καρπουζιών και ενός πεπονιού;
21. Εάν διπλώσετε ένα τετράγωνο χαρτί κάθετα, το νέο ορθογώνιο που δημιουργείται έχει περίμετρο 39 εκ.. Ποιο είναι το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου; Ποια είναι η περίμετρός του; Ποιο είναι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου; Σχηματίστε τους λόγους των εμβαδών και των περιμέτρων. Τι παρατηρείτε;
22. Ο κυρ- Παναγιώτης έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου. Θέλει να φυτέψει ένα δέντρο σε ένα συγκεκριμένο σημείο, ακριβώς στο κέντρο του κήπου. Με ποιο τρόπο θα μπορούσε να βρει το κέντρο χωρίς να κάνει οποιαδήποτε μέτρηση;
23. Ομάδες κατασκηνωτών πήγαιναν το καλοκαίρι σε ένα νησί. Την πρώτη ημέρα πήγαν 10 και επέστρεψαν 2. Τη δεύτερη μέρα πήγαν 12 και επέστρεψαν 3. Εάν συνεχίστηκε το ίδιο μοτίβο και τις επόμενες ημέρες, πόσοι βρίσκονταν στο νησί στο τέλος μιας εβδομάδας; Πόσοι είχαν φύγει;
24. Σε ένα αυτόματο μηχάνημα παγωτών υπάρχουν 9 διαφορετικές γεύσεις. Μια ομάδα παιδιών έρχεται στο μηχάνημα και καθένα από αυτά αγοράζει ένα διπλό κώνο 2 γεύσεων. Εάν κανένα από τα παιδιά δεν επιλέγει τον ίδιο συνδυασμό γεύσεων με κάποιο άλλο και όλοι οι συνδυασμοί γεύσεων επιλέγονται, πόσα είναι τα παιδιά;
25. Ένα καράβι που μεταφέρει ζώα, έχει μέσα συνολικά 11 αγελάδες και 22 πρόβατα. Πόσων χρόνων είναι ο καπετάνιος;
26. Μπορείτε να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς α και β διαφορετικούς μεταξύ τους ώστε να ισχύει: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}=1$; Μπορείτε να βρείτε τρεις φυσικούς αριθμούς α, β και γ διαφορετικούς μεταξύ τους ώστε να ισχύει: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$; Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τέσσερις φυσικούς ώστε: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1$; Συνεχίστε!!!
27. Ο μπαρμπα-Στρούμφ ξεκινάει από το σημείο Α, παίρνει νερό από το ποτάμι και πάει στο Β σημείο. Μπορείς να τον βοηθήσεις να μην κουραστεί πολύ, χαράζοντας τον πιο σύντομο δρόμο; (προσωπική διασκευή: Arsac et al. 1985)

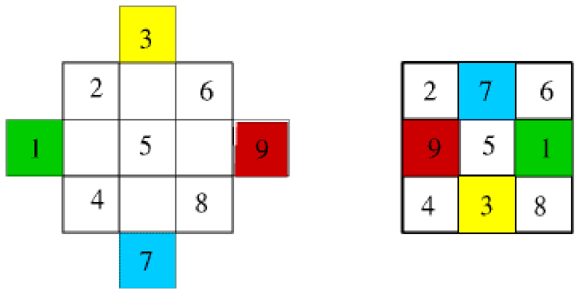


28. Τρεις φίλοι, ο Γιάννης, ο Κώστας και ο Πέτρος που πήγαν εκδρομή στο ποτάμι, αποφάσισαν να φάνε παρέα και να μοιραστούν εξίσου τα τρόφιμα που είχαν μαζί τους. Ο Γιάννης είχε 2 τσουρέκια, ο Κώστας 3 τσουρέκια και ο Πέτρος δεν είχε τίποτα μαζί του. Αφού φάγανε, ο Πέτρος τους ευχαρίστησε και έδωσε 5 κέρματα του 1€ να τα μοιραστούν δίκαια οι δυο φίλοι του. Πώς πρέπει να τα μοιραστούν;
29. Ο αριθμός 21 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, π.χ. 21=9+4+8. Βρείτε αυτούς που μας δίνουν το μεγαλύτερο γινόμενο.
30. Η κα Ανδρέου σκοπεύει να πάρει τους μαθητές της για βαρκάδα στον ποταμό. Υπάρχουν δύο μεγέθη βαρκών: μεγάλες και μικρές. Η μεγάλη βάρκα μπορεί να μεταφέρει 6 ανθρώπους και η τιμή είναι 10€ ανά βάρκα. Η μικρή βάρκα μπορεί να μεταφέρει 4 ανθρώπους και η τιμή είναι 8€ ανά βάρκα. Η τάξη της κας Ανδρέου αποτελείται από 50 μαθητές. Υποθέτοντας ότι είστε η κα Ανδρέου και θέλετε να οργανώσετε τη βαρκάδα στο ποτάμι για τους μαθητές σας, μπορείτε να πείτε όλα τα ενδεχόμενα ενοικίασης των βαρκών:
    1) με το ελάχιστο κόστος;
    2) με τον ελάχιστο αριθμό βαρκών;
    3) με τα λιγότερα κενά καθίσματα;
    4) Επιλέξτε το λογικότερο κατά τη γνώμη σας σχέδιο ενοικίασης και εξηγήστε σαφώς τους λόγους της επιλογής σας.
31. Η Ελένη αγόρασε δύο κοτόπουλα που ζύγιζαν μαζί 3,8 κιλά. Πόσο βάρος είχε το κάθε κοτόπουλο;
32. Αγόρασες ένα μεταχειρισμένο ποδήλατο με 80€ και το πούλησες αμέσως μετά 100€. Λίγες μέρες αργότερα ξαναγόρασες το ίδιο ποδήλατο 120€ και το πούλησες την επόμενη μέρα 140€. Κέρδισες ή έχασες και πόσα;

3.2.11.2 Τα μαγικά τετράγωνα

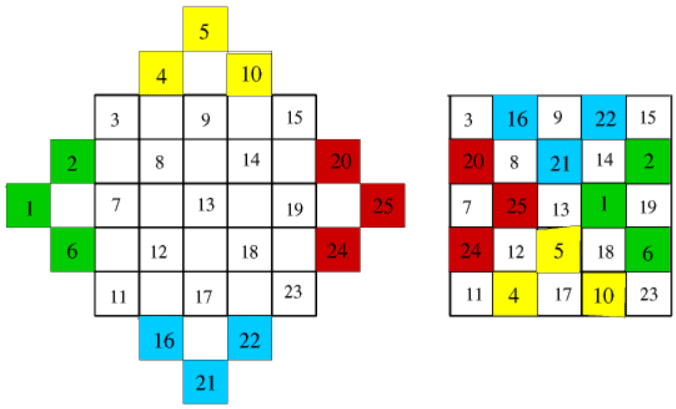
Τα «μαγικά τετράγωνα» είναι ανοικτά-κλειστά προβλήματα που έχουν διεγείρει την περιέργεια των ανθρώπων για χιλιάδες χρόνια και σήμερα ακόμη μπορούμε να τα θεωρούμε ως μαγικά, αφού το άθροισμα κάθε σειράς, στήλης και διαγωνίου είναι μια σταθερά, μια μαγική σταθερά. Η κατασκευή των «μαγικών τετραγώνων» δεν είναι εύκολη υπόθεση. Στα 3Χ3 «μαγικά τετράγωνα» μπορεί με δοκιμή και βελτίωση να είναι κάπως εύκολη, αλλά στα 4Χ4 ή στα μεγαλύτερα είναι απαραίτητη μια μέθοδος από τις πολλές που υπάρχουν, όπως είναι η «Siamese» γνωστή και ως «de la Loubere's» ή «Staircase», η «Lozenge», ή «de Meziriac's» κ.ά. Μια αρκετά εύκολη μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί σε τετράγωνα nxn, όπου n μονός αριθμός, είναι αυτή της «πυραμίδας» ή των διαγωνίων. Αυτή η μέθοδος έχει τρία στάδια:

1. Σχεδιάζουμε μία πυραμίδα στην κάθε πλευρά του τετραγώνου. Η πυραμίδα πρέπει να έχει σαν βάση δύο τετράγωνα λιγότερα από τον αριθμό των τετραγώνων της πλευράς του τετραγώνου και να τελειώνει σε μια κορυφή.
2. Διαδοχικά τοποθετούμε τους αριθμούς 1-n^2, όπου n ο αριθμός των τετραγώνων της πλευράς του τετραγώνου (nxn), στις διαγωνίους όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.
3. Μεταφέρουμε και τοποθετούμε κάθε αριθμό που προσθέσαμε στις πυραμίδες, στην αντίθετη θέση μέσα στο τετράγωνο.



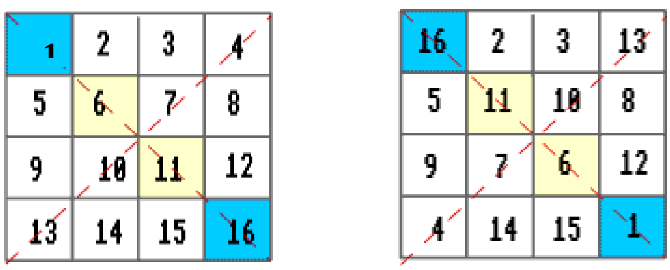
Σχήμα 7

Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε «μαγικό τετράγωνο», π.χ. 5Χ5, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 8

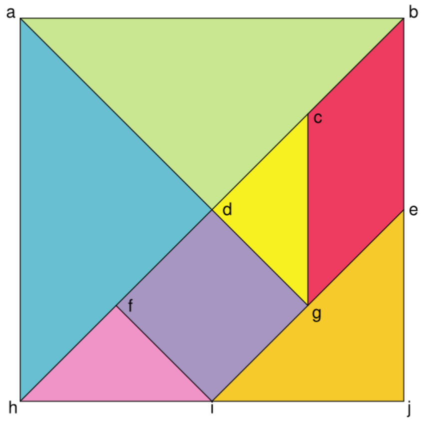
Όταν έχουμε τετράγωνα nxn, όπου n ζυγός αριθμός, τότε μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους αριθμούς με τη σειρά και στη συνέχεια να αντιμεταθέσουμε τους αριθμούς των διαγωνίων, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα οπότε δημιουργούμε ένα 4Χ4 «μαγικό τετράγωνο» (http://nrich.maths.org/).



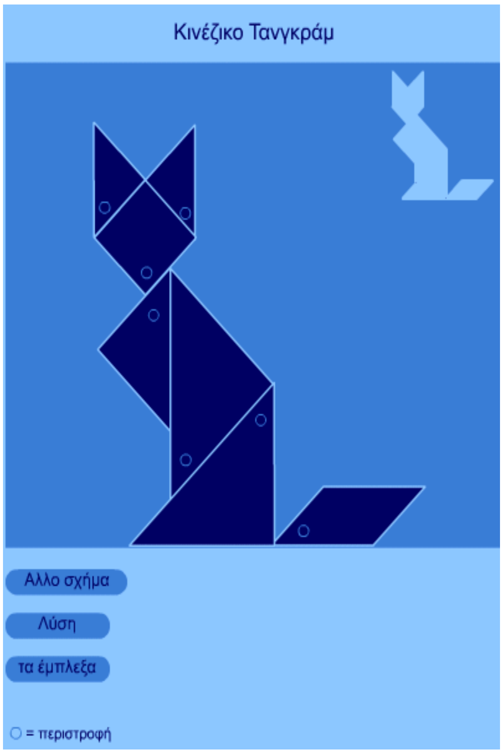
Σχήμα 9

3.2.11.3 Το Κινέζικο Τανγκράμ

Το κινέζικο Τανγκράμ είναι ένα παιχνίδι – παζλ που αποτελείται από επτά κομμάτια, τα οποία προέρχονται από την κατάλληλη διαίρεση ενός τετραγώνου. Τα 7 κομμάτια είναι: 5 ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα (2 μικρά, 1 μεσαίο και 2 μεγάλα), 1 τετράγωνο και 1 πλάγιο παραλληλόγραμμο, ό-πως φαίνονται και στη διπλανή εικόνα. Στόχος είναι να γίνει η σύνθεση μιας συγκεκριμένης μορφής χρησιμοποιώντας και τα επτά κομμάτια χωρίς να γίνονται επικαλύψεις.



Εικόνα 1: Τανγκράμ



Η εμφάνιση του Τανγκράμ έχει ελεγχθεί μέχρι το 1800 περίπου αλλά είναι βέβαιο ότι είναι πολύ αρ-χαιότερο (740-730 π.Χ.). Μεταφέρθηκε στην Αμερική με τα κινεζικά και αμερικανικά σκάφη στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα. Το ενδιαφέρον είναι ότι μπορούμε να συν-θέσουμε εκατοντάδες διαφορετικά σχήματα που παρι-στάνουν ανθρώπους, ζώα και άλλα αντικείμενα. Χρη-σιμοποιείται ως παιχνίδι και διδακτικό εργαλείο σε πολλές τάξεις σε ολόκληρο τον κόσμο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αφού βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση αρκετών μαθηματικών εννοιών.

Εικόνα 2: (http://www.otenet.gr/games/games_tangkram.htm ή http://www.gozakynthos.gr/gr/zakynthos.games.php#)

3.3 Πραγματικά προβλήματα ή καταστάσεις – προβλήματα (καταστάσεις προβληματισμού)

Μια κατάσταση-πρόβλημα (real problem) είναι μια κατάσταση του πραγματικού κόσμου που θέτει κάποιες ανοικτές ερωτήσεις. π.χ. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος ενός ψηλού κτιρίου π.χ. του Πύργου των Αθηνών; (Χωρίς φυσικά να μετρήσουμε το ίδιο το κτίριο!) Είναι προφανές ότι αν και μιλάμε για «κατάσταση-πρόβλημα», οι μαθητές δεν καλούνται να επεξεργα-σθούν μια αληθινά «πραγματική» κατάσταση, αλλά ένα μοντέλο της. Μια απλοποιημένη δηλαδή μορφή της, στην οποία φθάνουμε έπειτα από κατάλληλες αφαιρέσεις ώστε να είναι προσιτή για τη διδασκαλία στην τάξη (classroom model) (Kerr & Maki, 1979).

Η καθημερινή ζωή και πραγματικότητα σαν πηγή μαθηματικών ιδεών, εκπαιδευτικού υλι-κού και προβληματισμού για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου, έχει επανηλλειμένα προσελκύσει το ενδιαφέρον της έρευνας στο χώρο της μαθηματικής παιδείας. Στο 6^{ο} Παγκόσμιο Συνέδριο της Μαθηματικής Παιδείας παρουσιάστηκαν οι απόψεις αρκετών ερευνητών σχετικά με αυτό το θέμα. Ο χώρος της τέχνης (θέατρο, ζωγραφική, αρχιτεκτονική) αποτελεί πηγή και φορέα πολλών μαθηματικών ιδεών σύμφωνα με τον Ιάπωνα Kauaquchi. Στην Αυστραλία, στα πλαίσια της προετοιμασίας των εκπαιδευτικών, οι μελλοντικοί δάσκαλοι εκπαιδεύονται στο πως μπορούν να κάνουν τα μαθηματικά αντικείμενο διασκέδασης και ενδιαφέροντος μέσα από εργασίες που σχετίζονται με την καθημερινότητα π.χ. κυκλοφορία αυτοκινήτων, κανονίζοντας ραντεβού σε ένα οδοντιατρείο κ.λ.π. Ο Dormolen από την Ολλαδία τόνισε τη σημασία αλλά και τη θετική επίδραση στη στάση των μαθητών της χρήσης προβλημάτων από την καθημερινή ζωή με θέματα από το χώρο του ποδοσφαίρου, της οικολογίας κ.λ.π. (Σακονίδης, 1989).

Τα χαρακτηριστικά μιας κατάστασης προβληματισμού στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών πρέπει να είναι τα εξής:

- Οι μαθητές να μπορούν να ενταχθούν στη διαδικασία επίλυσης. (Να μπορούν να προβλέψουν τι θα μπορούσε να είναι λύση).
- Οι γνώσεις τους να είναι καταρχήν ανεπαρκείς για μια άμεση επίλυση.
- Η κατάσταση να επιτρέπει στους μαθητές να επαληθεύουν αν μια λύση είναι αποδεκτή ή όχι.
- Η γνώση που επιθυμούμε να κατακτηθεί πρέπει να είναι το πιο κατάλληλο εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος στο επίπεδο των μαθητών.
- Το πρόβλημα να μπορεί να διατυπωθεί σε διαφορετικά πλαίσια μεταξύ των οποίων να μπορούμε να βρούμε αντιστοιχίες (π.χ. φυσικό, γεωμετρικό, γραφικό, αριθμητικό πλαίσιο) (Καλαβάσης, 1997).

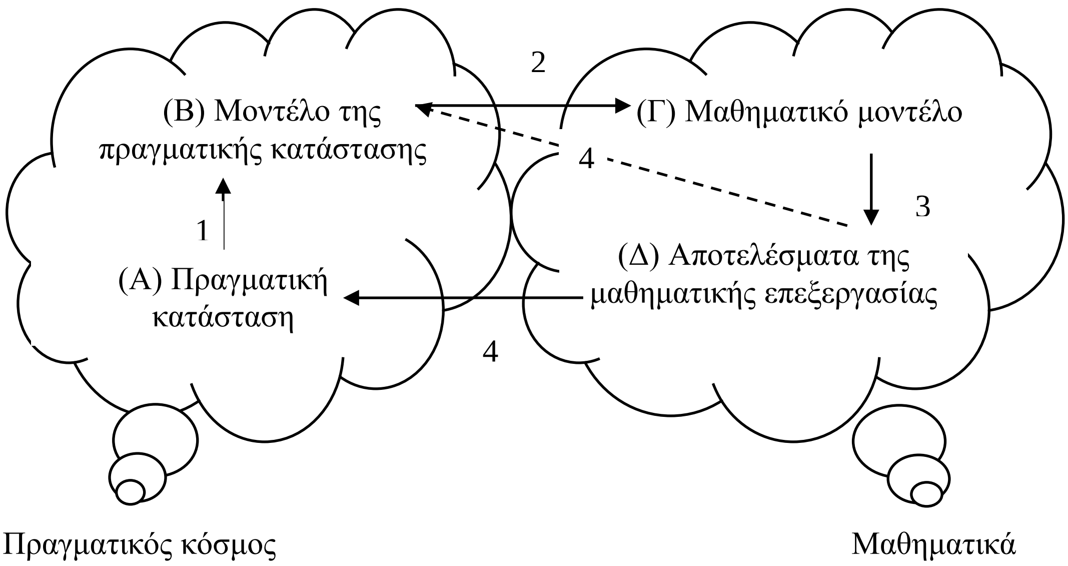
Το πρώτο βήμα για τη λύση ενός πραγματικού προβλήματος είναι ο προσδιορισμός των μεταβλητών και στη συνέχεια η έκφραση των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών αυτών, η δημιουργία δηλαδή ενός μαθηματικού μοντέλου.

Στη συνέχεια, με βάση τη μαθηματική τους εμπειρία οι μαθητές θα επεξεργασθούν αυτό το μοντέλο για να φθάσουν σε κάποια συμπεράσματα που θα αποτελούν και τη λύση του προβλήματος.

Ο έλεγχος της συμβατότητας αυτών των συμπερασμάτων με τα δεδομένα της πραγματικής κατάστασης, αποτελεί το τελευταίο βήμα της πορείας επίλυσης μιας «κατάστασης-πρόβλημα».

Το σύνολο των βημάτων που οδηγούν στην επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος ονομάζεται μοντελοποίηση.

Με τον όρο αυτό συμπεριλαμβάνουμε όλα τα στάδια αυτής της διαδικασίας, δηλαδή από τις αρχικές διερευνήσεις και τις απλοποιήσεις που επιβάλλουμε στην εξω-μαθηματική περιοχή, τη «μετάφραση» από την «πραγματικότητα» στα μαθηματικά, μέχρι την εξέταση της εγκυρότητας του μοντέλου που οδηγεί στην αποδοχή, στην τροποποίηση ή στην πλήρη απόρριψή του. Στην τελευταία περίπτωση μπορεί να κατασκευαστεί ένα νέο μοντέλο επαναλαμβάνοντας από την αρχή την όλη διαδικασία. Σχηματικά ο κύκλος της μοντελοποίησης θα μπορούσε να παρασταθεί όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα,



Σχήμα 10: Ο «κύκλος» της μοντελοποίησης (Κλαουδάτος, 1990)

όπου:

1. Η διαδικασία της ανάπτυξης του μοντέλου της πραγματικής κατάστασης (formulation process)
2. Μαθηματικοποίηση (mathematising)
3. Μαθηματική επεξεργασία
4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων, εφαρμογή (Κλαουδάτος, 1990).

Οι δύο πρώτες διαδικασίες είναι οι πιο δύσκολες της μοντελοποίησης (Rubin 1979, Treilibs 1979, Clement et al. 1981, Oke & Bajpai 1986) και η πρώτη (formulation process) είναι διαδικασία βαθειά «αφαιρετική» γιατί δεν απαιτεί από το μαθητή μια συγκεκριμένη απάντηση (Lesh, 1987).

Ο Δ. Καραγεώργος (1993) αναφέρει πως σε παρακολουθήσεις διδασκαλιών Μαθηματικών που έκανε σε σχολεία της Αγγλίας και της Ιρλανδίας ένιωσε έκπληξη από την παρατήρηση ότι οι εκεί μαθητές δεν είχαν τα ίδια ερωτήματα που έχουν οι Έλληνες μαθητές «γιατί μαθαίνουμε όλα αυτά τα Μαθηματικά;». Αυτό οφείλεται σύμφωνα με τον ίδιο στο γεγονός ότι εκείνοι οι μαθητές διδάσκονται τα Μαθηματικά με τη χρησιμοποίηση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή. Μόνο σε ελάχιστες περιπτώσεις πραγματοποιείται θεωρητική παρουσίαση μαθηματικών εννοιών αλλά και σε αυτή την περίπτωση γίνεται στο τέλος της διδασκαλίας και αφού οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη χρησιμότητά της. Οι μαθητές λοιπόν έχουν πετύχει να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά που διδάσκονται για να «μεταφράζουν» καθημερινά προβλήματα σε μαθηματικές σχέσεις, να επεξεργάζονται λογιστικά τις σχέσεις αυτές και να δίνουν απαντήσεις στο πρόβλημα.

Στην Ελλάδα, σύμφωνα με τους Κλαουδάτο και Παπασταυρίδη (1997), έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της Β΄ Λυκείου εξέτασε και τελικά διαπίστωσε την εξαιρετικά περιορισμένη δυνατότητά τους να χρησιμοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων και ορισμένα από τα συμπεράσματα των ερευνητών είναι τα εξής:

- Η επίλυση πραγματικών προβλημάτων απαιτεί δεξιότητες που δεν αναπτύσσονται από το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, δηλαδή πρώτα θεωρία και μετά προβλήματα και εφαρμογές.
- Οι μαθητές με καλή σχολική επίδοση αποδίδουν καλά στα «παραδοσιακά» μαθηματικά θέματα, ενώ μόνο λίγοι από αυτούς διαπραγματεύονται επιτυχώς τα πραγματικά προβλήματα, ενώ επεσήμαναν ότι υπάρχουν και μέτριοι μαθητές με την ικανότητα επίλυσης πραγματικών προβλημάτων.
- Προτείνεται, λοιπόν, ένα «άνοιγμα» προς πιο ενεργητικές μεθόδους μάθησης και διδασκαλίας και ένταξη των διαδικασιών λύσης πραγματικών προβλημάτων στην καθημερινή διδακτική πρακτική.

Κεφάλαιο IV

4 Ερευνητικό μέρος

4.1 Συγκριτική Μελέτη Προηγούμενων και Νέων Βιβλίων

Τα ανοικτά-κλειστά προβλήματα, σύμφωνα με τις σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις, είναι καλό να βρίσκονται στο προσκήνιο της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο.

Έτσι λοιπόν τίθενται ερωτήματα όπως:

1. Σε ποιο βαθμό οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την επίλυση προβλημάτων γενικά, με βάση τα προηγούμενα και τα νέα βιβλία;
2. Με ποια είδη προβλημάτων ασχολούνταν μέχρι τώρα και με ποια θα ασχολούνται στο μέλλον;
3. Πόσο συχνή ήταν η παρουσία των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση μέχρι σήμερα και πόση εμφάνιση έχουν αυτά στα νέα βιβλία;

4.1.1 Μελέτη των προηγούμενων βιβλίων

Στο βιβλίο του δασκάλου της Α΄ τάξης προτείνεται το πρόβλημα να παρουσιάζεται με τη μορφή κάποιου παιχνιδιού ή με τη μορφή κάποιας «ιστορίας» από τις εμπειρίες του παιδιού, να προηγείται η λύση του προβλήματος με συγκεκριμένα υλικά και συγκεκριμένες ενέργειες, μετά να ακολουθεί η αναπαράσταση του προβλήματος στον πίνακα με ιχνογράφημα και τέλος η συμβολική παρουσίαση της λύσης. Οι μαθητές καλούνται να ανακοινώνουν πώς λύνουν το πρόβλημα. Προτείνονται παραδείγματα προβλημάτων στα αντίστοιχα κεφάλαια που αναφέραμε και παραπάνω στο βιβλίο του μαθητή, ως εξής:

1. Προβλήματα με μορφή παιχνιδιού, όπως είναι τα παρακάτω:

- Παιχνίδι με κύβους: Στο χέρι κρατάει ο δάσκαλος πέντε κύβους. Άλλοι έχουν χρώμα κίτρινο και άλλοι πράσινο. Ζητάει από τα παιδιά να μαντέψουν πόσοι είναι οι κύβοι με το πράσινο και πόσοι με το κίτρινο. Τα παιδιά κάνουν με το νου τους διάφορους συνδυασμούς.
- Παιχνίδι με βόλους (ανοιχτό πρόβλημα): Στις δύο τσέπες μου έχω πέντε βόλους. Πόσους βόλους μπορώ να έχω στην καθεμιά; Οι μαθητές παρακινούνται να βρουν τέσσερις δυνατές απαντήσεις.
- Παιχνίδι με παιδιά (κλειστό πρόβλημα): Στο θρανίο κάθονται δύο παιδιά. Αν βάλουμε ακόμη ένα παιδί, πόσο παιδιά θα κάθονται στο θρανίο;

2. Προβλήματα με μορφή «ιστορίας», προτείνονται πέντε παραδείγματα στο βιβλίο του δασκάλου, ενδεικτικά αναφέρονται δύο από αυτά:

- Ο Κωστάκης έχει τρεις κάρτες. Παίζοντας με το φίλο του κέρδισε άλλες δύο. Πόσες κάρτες έχει τώρα; (ιχνογραφική αναπαράσταση κ.λ.π.).
- Η Αθηνά έπρεπε να αγοράσει 3 τετράδια. Αυτή όμως αγόρασε 2 τετράδια περισσότερο. Πόσα τετράδια αγόρασε;

3. Προβλήματα στα οποία αναζητείται ένα κοινό όνομα, μια κοινή ιδιότητα (πρόσθεση τάξεων) και στα οποία απαιτείται μεγαλύτερη αφαιρετική ικανότητα, προτείνονται ορισμένα παραδείγματα από τα οποία ένα είναι το παρακάτω:

- Το περιβόλι μας έχει 1 μηλιά και 3 αμυγδαλιές. Το περιβόλι μας έχει … (4 δέντρα).

4. Προβλήματα για τους τακτικούς αριθμούς, όπως:

- Πάνω σε μια κόλλα χαρτί οι μαθητές αποτυπώνουν την παλάμη τους με ανοικτά δάχτυλα και καλούνται ξεκινώντας από τον αντίχειρα να ζωγραφίσουν έναν κύκλο στο τρίτο δάκτυλο, ένα μεγάλο νύχι στο πέμπτο κ.λ.π.

5. Δημιουργία προβλημάτων από τους μαθητές με δεδομένη μια ισότητα, δημιουργία αντίστροφου προβλήματος, προβλήματος όπως το αρχικό με άλλους αριθμούς ή με τους ίδιους αριθμούς και άλλα αντικείμενα, π.χ.:

- Δίδεται η ισότητα $3 + 2 = 5$ ή $4 - 1 = 3$ και ζητείται η δημιουργία ενός προβλήματος.
- Δίδεται ένα πρόβλημα και οι μαθητές υποβοηθούνται να κατασκευάσουν το αντίστροφό του.
- Δίδεται πρόβλημα και οι μαθητές καλούνται να αλλάξουν τους αριθμούς κ.λ.π..

Στα προηγούμενα βιβλία του μαθητή της Α΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 320 σελίδες και 122 μαθήματα εκ των οποίων 10 είναι κριτήρια αξιολόγησης. Μόνο σε 6 από τα 122 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 4,9%, εμφανίζονται προβλήματα και 2 από αυτά είναι κριτήρια αξιολόγησης. Στα 6 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 31 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (26/31≅83,9%), σύνθετα (3/31≅9,7%) και πολλαπλών επιλογών (2/31≅6,5%). Επιπλέον σε 17 από τα 31 προβλήματα (17/31≅54,8%) δίνεται το σύμβολο της πράξης ή των πράξεων που χρειάζεται να γίνουν, ενώ στα υπόλοιπα 14 η επιλογή της πράξης γίνεται από τους μαθητές (14/31≅45,2%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Β΄ τάξης προτείνονται για την λύση ενός προβλήματος ακριβώς τα ίδια που προαναφέρθηκαν στην Α΄ τάξη, δηλαδή οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν, να διηγηθούν, να ρωτήσουν, να αναπαραστήσουν, να σχηματογραφήσουν, να λογαριάσουν, να απαντήσουν με μια σύντομη φράση. Οι μαθητές δηλαδή κατά τη λύση προβλημάτων εκτελούν πράξεις συγκεκριμένες (με αντικείμενα ή ομοιώματα), απεικονιστικές (με τη μορφή ιχνογραφήματος στον πίνακα), νοερές (λένε τι κάνουν και γιατί) και συμβολικές (με τη μορφή των αριθμητικών πράξεων). Οι πράξεις αυτές εκτελούνται α) με κατευθείαν φορά, λύνοντας το αρχικό πρόβλημα, β) με αντίστροφη φορά, δημιουργώντας αντίστροφο πρόβλημα, γ) με συνδυαστικές ενέργειες, ξαναγυρνώντας στο αρχικό και βρίσκοντας άλλο τρόπο λύσης του, δ) κατασκευάζοντας άλλο πρόβλημα με τα ίδια νούμερα και άλλα αντικείμενα και ε) λύνοντας το αρχικό με άλλα νούμερα. Προτείνεται η δημιουργία περιπτέρου με αναρτημένο τιμοκατάλογο όπου οι μαθητές θα βιώνουν πραγματικές καταστάσεις καλούμενοι να αγοράσουν διάφορα μικροαντικείμενα. Επιπλέον οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίζουν και προβληματικές καταστάσεις που απαιτούν περισσότερο λογική σκέψη, π.χ. «Το μολύβι που αγόρασε ο Κώστας την Πέμπτη, το έχασε τη μεθεπόμενη μέρα. Ποια μέρα το έχασε;», και οι οποίες πρέπει να αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο που ισχύει για τα αριθμητικά προβλήματα και τα οποία απαιτούν περισσότερο λογικομαθηματική σκέψη. Αυτό σημαίνει ότι και στις δύο περιπτώσεις πρέπει να βρεθούν τα γνωστά και άγνωστα στοιχεία, να γίνει σύλληψη του προγράμματος ενέργειας για τη λύση, να πραγματοποιηθεί έλεγχος κατά την εκτέλεση του προγράμματος και τελικός έλεγχος. Στα κεφάλαια που ασχολούνται με προβλήματα δίδεται συνήθως στο βιβλίο του δασκάλου ένα πρόβλημα για να χρησιμοποιηθεί ως εισαγωγική δραστηριότητα για την προετοιμασία των μαθητών πριν την επαφή τους με τα προβλήματα που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή.

Στα προηγούμενα βιβλία μαθητή της Β΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 302 σελίδες και 121 μαθήματα εκ των οποίων 6 είναι κριτήρια αξιολόγησης. Μόνο σε 20 από τα 121 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 16,5%, εμφανίζονται προβλήματα και 2 από αυτά είναι κριτήρια αξιολόγησης. Στα 20 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 92 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (70/92≅76,1%), σύνθετα (8/92≅8,7%), πολλαπλών επιλογών (6/92≅6,5%) και δημιουργίας προβλήματος (8/92≅8,7%). Επιπλέον σε 51 από τα 92 προβλήματα (51/92≅55,4%) δίνεται το σύμβολο της πράξης ή των πράξεων που χρειάζεται να γίνουν, ενώ στα υπόλοιπα 41 η επιλογή της πράξης γίνεται από τους μαθητές (41/92≅44,6%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης προτείνονται σε ορισμένες περιπτώσεις προβλήματα ως εισαγωγικές δραστηριότητες κάποιων κεφαλαίων, όμως αυτό δεν γίνεται απαραίτητα και για τα κεφάλαια εκείνα που αφορούν στη επίλυση προβλημάτων. Σε αρκετά κεφάλαια ζητείται η διατύπωση προβλημάτων από τους μαθητές και με τη βοήθεια του δασκάλου, σύμφωνα με κάποια δεδομένη μορφή, π.χ. τους δίδεται το γινόμενο (141 • 5) και καλούνται να πλέξουν μια μικρή ιστορία. Προτείνεται ακόμα η πινακοποίηση των δεδομένων σε κάποια προβλήματα καθώς και η εργασία όχι μόνο ατομικά αλλά και κατά ομάδες ή σε επίπεδο κοινής εργασίας.

Στα προηγούμενα βιβλία του μαθητή της Γ΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 227 σελίδες και 71 μαθήματα. Προτείνονται 6 κριτήρια αξιολόγησης τα οποία όμως βρίσκονται σε ανεξάρτητο φυλλάδιο. Σε 37 από τα 71 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 52,1%, εμφανίζονται προβλήματα. Στα 37 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 199 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (136/199≅68,3%), σύνθετα (43/199≅21,6%), πολλαπλών επιλογών (3/199≅1,5%) και δημιουργίας προβλήματος (17/199≅8,5%). Στην Γ΄ τάξη δεν δίδεται πλέον το σύμβολο της πράξης που πρέπει να εκτελέσουν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα, εκτός λίγων περιπτώσεων (25/199≅12,6%) όπου αυτό φαίνεται από το παράδειγμα που προηγείται. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως τους γνωστοποιείται εάν πρόκειται για πρόβλημα μιας ή περισσότερων πράξεων και μάλιστα ορισμένες φορές αυτές οι πράξεις αναφέρονται και στην επικεφαλίδα του μαθήματος, π.χ. Προβλήματα με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ή Προβλήματα με πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό κ.ά.. Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι σε 17 περιπτώσεις ζητείται μεν από τους μαθητές να δημιουργήσουν οι ίδιοι το πρόβλημα αφού όμως έχουν δοθεί σε αυτούς όχι μόνο οι αριθμοί που πρέπει να χρησιμοποιήσουν αλλά και η πράξη με την οποία θα λύνεται αυτό.

Στο βιβλίο του δασκάλου της Δ΄ τάξης προτείνεται οι μαθητές να «σκέφτονται» πώς θα λύσουν το πρόβλημα, να επισημαίνουν τα γνωστά και άγνωστα στοιχεία του προβλήματος, να βρίσκουν τις μεταξύ τους σχέσεις, να καταστρώνουν σχέδιο λύσης και να λύνουν το πρόβλημα. Καλούνται επομένως οι μαθητές να εργάζονται αναλυτικά, όταν αναλύουν το πρόβλημα στα στοιχεία του, συνθετικά, όταν εξετάζουν και συνδέουν κατάλληλα τις σχέσεις αυτών των στοιχείων, συνδυαστικά και επαγωγικά. Επιπλέον καλούνται να «σκέφτονται ακόμα», δηλαδή να εξετάζουν και άλλες πλευρές του προβλήματος και κατά περίπτωση, να λύνουν το πρόβλημα και με άλλο τρόπο, να μετασχηματίζουν το αρχικό σε αντίστροφο ή σε πρόβλημα με άλλους αριθμούς ή με διαφορετικό θέμα και τέλος να διατυπώνουν οι μαθητές δικά τους προβλήματα. Στα κεφάλαια που ασχολούνται με προβλήματα δίδεται στο βιβλίο του δασκάλου ένα πρόβλημα για να χρησιμοποιηθεί ως εισαγωγική δραστηριότητα για την κατάλληλη προετοιμασία των μαθητών πριν την επαφή τους με τα προβλήματα που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή.

Στα προηγούμενα βιβλία του μαθητή της Δ΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 257 σελίδες και 79 μαθήματα. Προτείνονται 11 κριτήρια αξιολόγησης τα οποία όμως βρίσκονται σε ανεξάρτητο φυλλάδιο. Σε 47 από τα 79 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 59,5%, εμφανίζονται προβλήματα. Στα 47 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 280 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (162/280≅57,9%), σύνθετα (86/280≅30,7%), πολλαπλών επιλογών (26/280≅9,3%) και δημιουργίας προβλήματος (6/280≅2,1%). Στην Δ΄ τάξη δεν δίδεται πλέον το σύμβολο της πράξης που πρέπει να εκτελέσουν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα, εκτός ελάχιστων περιπτώσεων (4/280≅1,4%). Όμως, σε πολύ μεγάλο αριθμό περιπτώσεων τους γνωστοποιείται εάν πρόκειται για πρόβλημα μιας ή περισσότερων πράξεων και επιπλέον αναφέρονται αυτές στην επικεφαλίδα του μαθήματος (133/280≅47,5%). Τέλος, στα υπόλοιπα προβλήματα, που βρίσκονται κυρίως σε μαθήματα ανακεφαλαίωσης – επέκτασης, δεν τους δίδεται καμία καθοδήγηση σχετικά με τις πράξεις που θα εκτελέσουν (143/280≅51,1%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Ε΄ τάξης προτείνεται ότι έχει ήδη αναφερθεί και για την Δ΄ τάξη. Επιπλέον εδώ οι μαθητές καλούνται να βρουν τον «κανόνα» που λύνει το πρόβλημα και να οδηγηθούν στο συμπέρασμα πως τόσο το συγκεκριμένο πρόβλημα όσο και όλα τα άλλα όμοια ή ανάλογα προβλήματα διέπονται από τον ίδιο κανόνα τον οποίο μπορούν στο εξής να χρησιμοποιούν για τη λύση τους και επιτυγχάνεται με αυτό τον τρόπο η γενίκευση. Μια σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις είναι πως στο βιβλίο δασκάλου της Ε΄ τάξης δεν δίδεται κανένα επιπλέον πρόβλημα ως εισαγωγική δραστηριότητα αλλά για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το πρόβλημα της αντίστοιχης ενότητας του βιβλίου του μαθητή ή προτείνεται να δημιουργηθεί ένα παρόμοιο και να ακολουθηθεί η προτεινόμενη στην ίδια σελίδα διδακτική διαδικασία.

Στα προηγούμενα βιβλία του μαθητή της Ε΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 255 σελίδες και 79 μαθήματα. Προτείνονται 11 κριτήρια αξιολόγησης τα οποία όμως βρίσκονται σε ανεξάρτητο φυλλάδιο. Σε 63 από τα 79 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 79,7%, εμφανίζονται προβλήματα. Στα 63 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 291 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (131/291≅45%), σύνθετα (135/291≅46,4%), πολλαπλών επιλογών (13/291≅4,5%) και δημιουργίας προβλήματος (12/291≅4,1%). Στην Ε΄ τάξη δεν δίδεται πλέον σε καμιά περίπτωση το σύμβολο της πράξης που πρέπει να εκτελέσουν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα, όμως, σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων ενημερώνονται για τις πράξεις από την επικεφαλίδα του μαθήματος (139/291≅47,8%). Στα υπόλοιπα προβλήματα δεν τους δίδεται καμία καθοδήγηση σχετικά με τις πράξεις που θα εκτελέσουν (152/291≅52,2%). Αυτά βρίσκονται κυρίως σε μαθήματα που προσφέρονται για περισσότερη άσκηση και επανάληψη.

Στο βιβλίο του δασκάλου της ΣΤ΄ τάξης προτείνεται ότι ακριβώς και στις δύο προηγούμενες τάξεις, Δ΄ και Ε΄. Αυτό γίνεται απόλυτα κατανοητό αφού όπως αναφέρθηκε στην παρουσίαση των αναλυτικών προγραμμάτων σε αυτές τις τρεις τάξεις εφαρμόσθηκε η αναθεώρηση του 1992 και επομένως έχουν την ίδια φιλοσοφία. Και στη ΣΤ΄ τάξη δεν δίδεται κανένα επιπλέον πρόβλημα ως εισαγωγική δραστηριότητα αλλά για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το πρόβλημα της αντίστοιχης ενότητας του βιβλίου του μαθητή ή προτείνεται να δημιουργηθεί ένα παρόμοιο και να ακολουθηθεί η προτεινόμενη στην ίδια σελίδα διδακτική διαδικασία.

Στα προηγούμενα βιβλία του μαθητή της ΣΤ΄ τάξης (2 τεύχη) έχουμε 290 σελίδες και 85 μαθήματα εκ των οποίων τα 14 είναι ανακεφαλαίωσης – επέκτασης. Προτείνονται 10 κριτήρια αξιολόγησης τα οποία βρίσκονται σε ανεξάρτητο φυλλάδιο. Σε 64 από τα 85 μαθήματα, δηλαδή σε ποσοστό 75,3%, εμφανίζονται προβλήματα. Στα 64 αυτά μαθήματα υπάρχουν συνολικά 371 προβλήματα που μπορούν να διακριθούν σε απλά (95/371≅25,6%), σύνθετα (261/371≅70,4%), πολλαπλών επιλογών (4/371≅1,1%) και δημιουργίας προβλήματος (11/371≅3%). Και στη ΣΤ΄ τάξη δεν δίδεται πλέον σε καμιά περίπτωση το σύμβολο της πράξης που πρέπει να εκτελέσουν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα, όμως, σε έναν σημαντικό αριθμό περιπτώσεων ενημερώνονται ακόμα για τις πράξεις από την επικεφαλίδα του μαθήματος (157/371≅42,3%). Στα υπόλοιπα προβλήματα δεν τους δίδεται καμία καθοδήγηση σχετικά με τις πράξεις που θα εκτελέσουν (214/371≅57,7%). Αυτά βρίσκονται κυρίως στα μαθήματα ανακεφαλαίωσης – επέκτασης.

Πίνακας 3

Ποσοστιαία εμφάνιση μαθημάτων που εμπεριέχουν προβλήματα στα προηγούμενα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου							
	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄	Σύν. Τάξεων
Αριθμός μαθημάτων	122	121	71	79	79	85	557
Μαθήματα με προβλήματα	6	20	37	47	63	64	237
Ποσοστό %	4,9%	16,5%	52,1%	59,5%	79,7%	75,3%	Μ.Ο: 42,5%

Πίνακας 4

Ποσοστιαία εμφάνιση ασκήσεων και προβλημάτων ανά τάξη στα προηγούμενα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου							
	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄	Σύν. Τάξεων
Ασκήσεις	372 92,3%	390 80,9%	377 65,5%	278 49,8%	355 55%	157 29,7%	1929 60,4%
Προβλήματα	31 7,7%	92 19,1%	199 34,5%	280 50,2%	291 45%	371 70,3%	1264 39,6%
Σύνολο	403	482	576	558	646	528	3193

Πίνακας 5

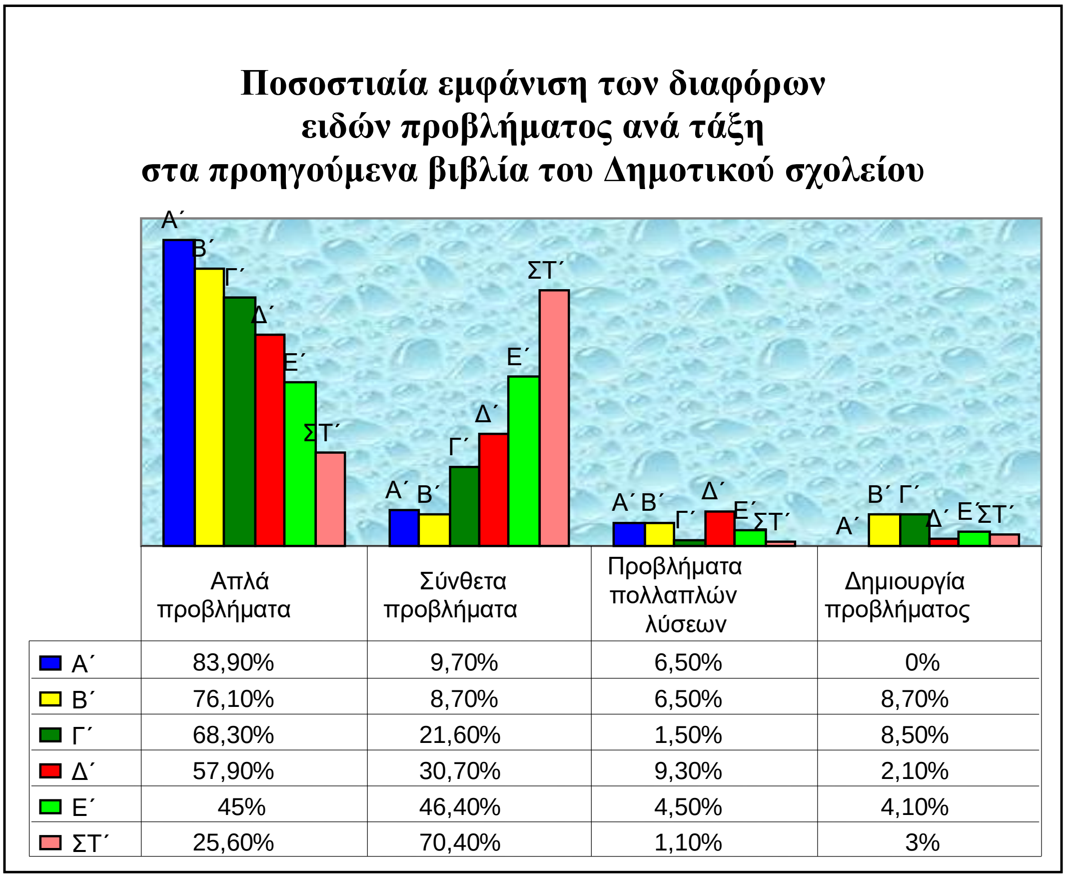
Ποσοστιαία εμφάνιση, σε αριθμό σελίδων, θεωρίας, ασκήσεων και προβλημάτων ανά τάξη στα προηγούμενα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου						
	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄
Σελίδες με θεωρία ή υποδείγματα	0[10] 0%	4[11] 1,3%	0[12] 0%	81 31,5%	89 34,9%	116 40%
Σελίδες με ασκήσεις	305 95,3%	262 86,8%	177 78%	98 38,1%	87 34,1%	66 22,8%
Σελίδες με προβλήματα	15 4,7%	36 11,9%	50 22%	78 30,4%	79 31%	108 37,2%
Σύνολο σελίδων και στα 2 τεύχη	320	302	227	257	255	290

[10] Στην Α΄ τάξη δεν υπάρχει καθόλου θεωρία. Δίδεται μόνο ένα υπόδειγμα στην αρχή κάθε νέου μαθήματος που καλύπτει περίπου το ¼ της σελίδας.
[11] Και στη Β΄ τάξη δεν υπάρχουν σελίδες με θεωρία. Υπάρχουν μόνο 4 σελίδες που καλύπτονται εξ ολοκλήρου από κάποιο μεγάλο υπόδειγμα και επιπλέον δίδεται ένα υπόδειγμα στην αρχή κάθε νέου μαθήματος που καλύπτει περίπου το ¼ της σελίδας.
[12] Ισχύει ότι αναφέρεται για τις δύο προηγούμενες τάξεις.

Πίνακας 6

Ποσοστιαία εμφάνιση των διαφόρων ειδών προβλημάτων[13] ανά τάξη στα προηγούμενα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου						
Τάξεις Είδη Προβλ/των	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄
Απλά	26/31 ≅83,9%	70/92 ≅76,1%	136/199 ≅68,3%	162/280 ≅57,9%	131/291 =45%	95/371 ≅25,6%
Σύνθετα	3/31 ≅9,7%	8/92 ≅8,7%	43/199 ≅21,6%	86/280 ≅30,7%	135/291 ≅46,4%	261/371 ≅70,4%
Πολλαπλών επιλογών	2/31 ≅6,5%	6/92 ≅6,5%	3/199 ≅1,5%	26/280 ≅9,3%	13/291 ≅4,5%	4/371 ≅1,1%
Δημιουργία[14] προβλήματος	0/31 =0%	8/92 ≅8,7%	17/199 ≅8,5%	6/280 ≅2,1%	12/291 ≅4,1%	11/371 =3%

Πίνακας 7



[13] Η κατηγοριοποίηση αυτή έχει βασιστεί εν μέρει σε αυτήν που προτείνεται από τον Δ. Καραγεώργο (2000).
[14] Δεν πρόκειται για ξεχωριστό είδος προβλημάτων αλλά ο διαχωρισμός αυτός έγινε αφού σε αυτή την περίπτωση δίδεται η δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα, επομένως η ένταξη αυτών σε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες δεν μπορεί να γίνει απόλυτα.

Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι στα προηγούμενα βιβλία υπάρχουν κυρίως ασκήσεις που λύνονται μηχανιστικά και απλά ή πιο σύνθετα προβλήματα εφαρμογής και μερικής επέκτασης που στις περισσότερες περιπτώσεις είναι παρόμοια με κάποια προβλήματα που έχουν ήδη λυθεί. Η πλειοψηφία των προβλημάτων που προτείνονται στην τάξη, έχουν «ετικέτες»: ανήκουν σε κάποιο συγκεκριμένο κεφάλαιο και η μοναδική έρευνα στην οποία επιδίδονται οι μαθητές είναι εκείνη της εύρεσης αυτού του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Η συνέχεια είναι εύκολη και η λύση βρίσκεται με την εφαρμογή κάποιων τύπων ή θεωρημάτων. Στα βιβλία των Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεων το 1/3 του αριθμού των σελίδων τους καλύπτεται από θεωρία. Τα μαθήματα που περιλαμβάνουν προβλήματα αυξάνονται προοδευτικά από την Α΄ προς τη ΣΤ΄ τάξη, ενώ αντίθετα οι ασκήσεις που καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου στην Α΄ τάξη μειώνονται σταδιακά από τάξη σε τάξη δίνοντας οριακό προβάδισμα στα προβλήματα στη Δ΄ τάξη και πολύ πιο σημαντικό στη ΣΤ΄ τάξη, ενώ στην Ε΄ έχουν και πάλι οι ασκήσεις μεγαλύτερο ποσοστό. Όσον αφορά το είδος των προβλημάτων που υπάρχουν σε αυτά, τα απλά κυριαρχούν στις μικρές τάξεις ενώ στις μεγαλύτερες αυξάνεται σταδιακά ο αριθμός των σύνθετων προβλημάτων. Μικρός παραμένει σε όλες τις τάξεις ο αριθμός των ανοικτών – κλειστών προβλημάτων ή πολλαπλών επιλογών καθώς και της δημιουργίας προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

4.1.2 Μελέτη των νέων βιβλίων

Με βάση το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρική θέση σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου και επομένως αναμενόμενη ήταν και η θέση του προβλήματος στα νέα βιβλία, έτσι ώστε να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ Προγράμματος Σπουδών και νέων βιβλίων.

Στα νέα βιβλία, που διδάσκονται από το Σεπτέμβριο του 2006 στα Δημοτικά σχολεία, έχουμε και στις έξι τάξεις αφενός το βιβλίο του μαθητή με δύο τεύχη για τις Α΄ και Β΄ τάξεις και ένα για τις υπόλοιπες και το τετράδιο εργασιών με τέσσερα τεύχη για κάθε τάξη και αφετέρου το βιβλίο του δασκάλου για κάθε τάξη. Επιπλέον συνοδεύονται με ένα εκπαιδευτικό λογισμικό (cd-rom) Μαθηματικών για κάθε δύο τάξεις.

Στο βιβλίο του δασκάλου της Α΄ τάξης αναφέρεται ότι στα «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής» της Α΄ τάξης δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα και αφιερώνεται μεγάλη έκταση στη λύση προβλήματος. Ενθαρρύνονται και αναδεικνύονται οι διαφορετικές στρατηγικές στην έρευνα και την κατανόηση των μαθηματικών περιεχομένων. Δίνεται έμφαση στην ερμηνεία της εικόνας και στη βιωματική προσέγγιση για τη συλλογή των δεδομένων του προβλήματος μέσα από πραγματικές καταστάσεις. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να διατυπώνουν δικά τους προβλήματα, να ερευνούν και να εφαρμόζουν μεθόδους έρευνας για τη λύση του προβλήματος, όπως είναι, για παράδειγμα η μέθοδος της δοκιμής – πλάνης. Εκτός από τα κεφάλαια που αναφέρονται αποκλειστικά στη «λύση προβλήματος» υπάρχουν πολλά προβλήματα και στα άλλα κεφάλαια. Χρησιμοποιούνται προβληματικές καταστάσεις ή διδακτικές καταστάσεις, όπως αναφέρονται από τον Brousseau (1986), για να γίνει εισαγωγή καινούριων εννοιών. Προτείνονται προβλήματα έρευνας και επιδιώκονται μακροπρόθεσμοι στόχοι μάθησης, οι οποίοι σχετίζονται με διάφορες πλευρές της μαθηματικής και γενικότερα της λογικής σκέψης. Τέτοιος στόχος είναι η παγίωση μαθηματικών συνηθειών και συμπεριφορών, όπως είναι, για παράδειγμα, η ικανότητα οργανωμένης και μεθοδικής έρευνας. Στα προβλήματα αυτά η λύση για το μαθητή δεν είναι άμεση, αφού απαιτείται χρόνος και έρευνα από την πλευρά του. Πρέπει να δοκιμάσει κάποιες λύσεις, να αναθεωρήσει αν είναι λανθασμένες (μέθοδος δοκιμής – πλάνης), να σκεφτεί, να οργανώσει εκ νέου τις λύσεις πηγαίνοντας εμπρός και πίσω. Υπάρχουν ακόμα αρκετά προβλήματα με πολλές λύσεις προκειμένου να ασκηθεί η ικανότητα των μαθητών στο να ερευνούν και να σκέφτονται για τη λύση του προβλήματος, αλλά και για να συνηθίσουν στο γεγονός ότι τα προβλήματα δεν έχουν πάντοτε μόνο μία λύση. Σε πολλές περιπτώσεις καλούνται οι μαθητές να αναπαραστήσουν ζωγραφίζοντας τα δεδομένα του προβλήματος και τις λύσεις που προτείνουν. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μαθαίνουν να αναπαριστούν με εικόνες τις σκέψεις τους. Σε άλλα προβλήματα η εκφώνηση δίδεται με κείμενο ή εικονογράφηση και σε ορισμένα από αυτά τίθενται και ερωτήματα που δεν μπορούν να απαντηθούν με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης. Με τα προβλήματα αυτού του είδους οι μαθητές ασκούνται στο να διαβάζουν με προσοχή και να επεξεργάζονται τα δεδομένα της εκφώνησης. Το περιεχόμενο των προβλημάτων και ο τρόπος παρουσίασης των δεδομένων έχουν μεγάλη σημασία στη διαδικασία λύσης του προβλήματος, για το λόγο αυτό τα προβλήματα αναφέρονται σε καταστάσεις της σύγχρονης καθημερινής ζωής των μαθητών προκειμένου να ενεργοποιείται το ενδιαφέρον τους για ενασχόληση με το πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται και η μείωση του χάσματος μεταξύ των σχολικών μαθηματικών και των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται έξω από το σχολείο, αφού η εκφώνηση των προβλημάτων παρουσιάζει σύνθετες εικόνες από την καθημερινή ζωή. Έτσι οι μαθητές ασκούνται στην αντιμετώπιση και τη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων της καθημερινότητας καθώς και στην ανάγνωση και ερμηνεία εικόνων από τις οποίες συλλέγουν και επεξεργάζονται δεδομένα ανάμεσα σε ένα πλήθος πληροφοριών που παρουσιάζονται σε αυτές.

Επιπλέον στο βιβλίο του δασκάλου υπάρχει πάντα στην αρχή ενός κεφαλαίου η εισαγωγική δραστηριότητα που σκοπό έχει να προετοιμάσει τους μαθητές για την επαφή τους με τις εργασίες του βιβλίου. Στην Α΄ τάξη οι περισσότερες από τις εισαγωγικές δραστηριότητες έχουν τη μορφή παιχνιδιού και αυτό γιατί τα παιχνίδια αποτελούν ένα ιδιαίτερο μέσο των παιδιών για την ανακάλυψη νέων γνώσεων αλλά και για την εμπέδωση και την εφαρμογή των ήδη αποκτημένων. Παιχνίδια μάλιστα προτείνονται και στους γονείς, μέσω των επιστολών που αποστέλλονται σε αυτούς από τον εκπαιδευτικό της τάξης, σύμφωνα με το υπόδειγμα που υπάρχει στο βιβλίο του δασκάλου και τα οποία μπορούν να παίζουν με τα παιδιά τους στο σπίτι.

Τα νέα βιβλία της Α΄ τάξης (2 τεύχη – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουν συνολικά 258 σελίδες (136 το βιβλίο και 122 τα τετράδια εργασιών) και περιλαμβάνουν 52 μαθήματα, 9 επαναληπτικά και 3 κριτήρια αξιολόγησης, ένα στο τέλος κάθε περιόδου, συνολικά δηλαδή 64 κεφάλαια. Από τα 52 μαθήματα τα 5 (5/52≅9,6%) έχουν βασικό διδακτικό στόχο την επίλυση προβλήματος και περιλαμβάνουν μόνο προβλήματα που αναλυτικότερα διακρίνονται ως εξής:

1. Ανάγνωση εικόνας. Συλλογή και επεξεργασία πληροφοριών. Κατασκευή προβλήματος. Πρόβλημα με πολλές λύσεις. (7 προβλήματα[15], κεφ. 15)
2. Ανάγνωση εικόνας. Παρουσίαση των δεδομένων του προβλήματος με διαφορετικούς σημειολογικούς τρόπους. (7 προβλήματα, κεφ. 22)
3. Επεξεργασία εικόνας. Πρόβλημα έρευνας με τη μέθοδο «δοκιμής και λάθους». Κατασκευή προβλήματος. (7 προβλήματα, κεφ. 37)
4. Προβλήματα έρευνας. Κατασκευή προβλημάτων. Προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με το συμπλήρωμα του 10. (8 προβλήματα, κεφ.50)
5. Προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Προβλήματα πολλαπλασιασμού με την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και διαίρεσης με μοιρασιά. (6 προβλήματα, κεφ. 62)

Εκτός όμως από αυτά τα 5 κεφάλαια που περιλαμβάνουν μόνο προβλήματα σχεδόν σε όλα τα κεφάλαια του βιβλίου του μαθητή υπάρχουν από ένα έως και τέσσερα προβλήματα ή δραστηριότητες ανακάλυψης σε συνδυασμό με ασκήσεις, επομένως συνολικά εμφανίζονται σε 51[16] από τα 61 κεφάλαια (51/61≅83,6%). Πιο συγκεκριμένα στα 2 τεύχη του βιβλίου του μαθητή έχουμε 240 εργασίες που διακρίνονται σε 116 ασκήσεις (188/240≅48,3%) και 124 προβλήματα (124/240≅51,7%). Στα 4 τεύχη των τετραδίων εργασιών έχουμε 300 εργασίες που διακρίνονται σε 237 ασκήσεις (237/300=79%) και 63 προβλήματα (63/300=21%), ενώ προβλήματα υπάρχουν στα 31 κεφάλαια (31/61≅50,8%). Συνολικά στα βιβλία του μαθητή και στα τετράδια εργασιών υπάρχουν 540 εργασίες εκ των οποίων 353 είναι ασκήσεις (353/540≅65,4%) και 187 προβλήματα (187/540≅34,6%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Β΄ τάξης αναφέρεται ότι οι μαθητές στην τάξη αυτή μαθαίνουν να λύνουν, να διορθώνουν, να συμπληρώνουν ή να κατασκευάζουν απλά και σύνθετα προβλήματα ή προβλήματα με προϋποθέσεις, καθώς και στρατηγικές επίλυσής τους και να λύνουν προβλήματα με μία ή πολλές λύσεις. Τα προβλήματα είναι μέσα από την καθημερινή ζωή και έχουν νόημα για τα παιδιά, έτσι ώστε να καταλαβαίνουν ότι η χρησιμότητα των μαθηματικών έγκειται στην επίλυση προβλημάτων. Πρόκειται για προβλήματα συνηθισμένα ή πιο πρωτότυπα που για

[15] Ο αριθμός αυτός δείχνει το σύνολο των προβλημάτων που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή και το τετράδιο εργασιών στα αντίστοιχα κεφάλαια.

[16] Οι αρχικές δραστηριότητες ανακάλυψης, δηλαδή οι προβληματικές καταστάσεις με τις οποίες έρχονται οι μαθητές αντιμέτωποι στην αρχή κάθε κεφαλαίου δεν λαμβάνονται υπόψη στην καταμέτρηση των κεφαλαίων που περιλαμβάνουν προβλήματα, γιατί τότε στο 100% των μαθημάτων υπάρχουν προβλήματα. Επειδή όμως ένα κεφάλαιο μπορεί να έχει τη δραστηριότητα ανακάλυψης και στο υπόλοιπο μέρος του να περιλαμβάνει μόνο ασκήσεις για το λόγο αυτό υπολογίζονται τα κεφάλαια εκείνα που έχουν προβλήματα και πέραν των δραστηριοτήτων ανακάλυψης.

την επίλυσή τους οι μαθητές χρειάζεται να στηριχτούν στη λογική τους και να αναπτύξουν την σκέψη τους, να συνδυάσουν πληροφορίες και να επιλέξουν στρατηγική, να επαληθεύσουν τη λύση που βρήκαν χρησιμοποιώντας μια άλλη στρατηγική, να κρίνουν αν λύνονται ή όχι, αν έχουν μία ή πολλές λύσεις. Τα προβλήματα που προτείνονται έχουν χαρακτηριστικά μοντέλου, δηλαδή είναι προβλήματα που μπορούν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα, ώστε σταδιακά οι μαθητές να δουλεύουν στο τυπικό επίπεδο. Οι μαθητές μπορούν να αναπτύσσουν διαφορετικές στρατηγικές και μοντέλα και ο εκπαιδευτικός μπορεί με καθοδήγηση και τη χρήση κατάλληλων προβλημάτων να τους οδηγήσει στην ανάπτυξη ανώτερου επιπέδου στρατηγικών και μοντέλων και στην καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων, αφού οι καλοί λύτες προβλημάτων χαρακτηρίζονται από τέτοιες δεξιότητες, όπως η επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών, η εύρεση του λάθους, η αυτοδιόρθωση, η αυτοαξιόλογηση και η ετεροαξιολόγηση.

Επιπλέον στο βιβλίο του δασκάλου της Β΄ τάξης και στην αρχή κάθε κεφαλαίου δίδεται μια πρόταση – ιδέα στον εκπαιδευτικό που μπορεί να χρησιμοποιήσει προκειμένου να κάνει τον έλεγχο των προαπαιτούμενων γνώσεων. Η πρόταση αυτή έχει τη μορφή ενός προβλήματος ή μιας ερώτησης σχετικής με προηγούμενες γνώσεις, ακόμη μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές η κατασκευή ενός σχήματος ή η μέτρηση ενός αντικειμένου με τον χάρακά τους.

Αναλυτικότερα τα βιβλία της Β΄ τάξης (2 τεύχη – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουν 256 σελίδες (130 το βιβλίο και 126 τα τετράδια εργασιών) και περιλαμβάνουν 54 μαθήματα και 9 επαναληπτικά, δηλαδή συνολικά 63 κεφάλαια. Στα 13 μαθήματα η επίλυση προβλήματος είναι ο βασικός διδακτικός στόχος (13/54≅24,1%) και σε αυτά υπάρχουν συνολικά 109 προβλήματα. Προβλήματα όμως υπάρχουν σχεδόν σε όλα τα άλλα κεφάλαια. Στα 2 τεύχη του βιβλίου του μαθητή υπάρχουν προβλήματα στα 46 κεφάλαια (46/63=73%) και πιο συγκεκριμένα έχουμε 53 δραστηριότητες ανακάλυψης και 137 εργασίες, δηλαδή 190 συνολικά, που διακρίνονται σε 61 ασκήσεις (61/190≅32,1%) και 129 προβλήματα (129/190≅67,9%). Στα 4 τεύχη των τετραδίων εργασιών έχουμε προβλήματα στα 58 κεφάλαια (58/63≅92,1%) και υπάρχουν σε αυτά 310 εργασίες που διακρίνονται σε 134 ασκήσεις (134/310≅43,2%) και 176 προβλήματα (176/310≅56,8%). Συνολικά στη Β΄ τάξη έχουμε προβλήματα στα 59 κεφάλαια[17] (59/63≅93,7%) και υπάρχουν 500 εργασίες εκ των οποίων 195 είναι ασκήσεις (195/500=39%) και 305 προβλήματα (305/500=61%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης αναφέρεται ότι με τα βιβλία της τάξης αυτής οι μαθητές ενεργοποιούνται σε καταστάσεις από τη φύση, τη ζωή και τον πολιτισμό και σε προβλήματα που τους είναι οικεία και προέρχονται από το βιωματικό τους περιβάλλον προκειμένου να έχουν

[17] Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από αυτούς που αναφέρονται ξεχωριστά για το βιβλίο του μαθητή και τα τετράδια εργασιών, διότι σε κάποια κεφάλαια υπάρχουν προβλήματα και στο βιβλίο και στο τετράδιο του μαθητή, ενώ σε άλλα κεφάλαια υπάρχουν προβλήματα μόνο στο ένα από τα δύο, γεγονός που αυξάνει τον αριθμό των κεφαλαίων που με τον ένα ή τον άλλο τρόπο εμπεριέχει προβλήματα.

περισσότερα κίνητρα γεγονός που συνεπάγεται και αποτελεσματικότερη μάθηση. Οι μαθητές ασκούνται επίσης στο να αντιμετωπίζουν και να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας. Και σε αυτή την τάξη ισχύουν τα όσα αναφέρθηκαν στην Α΄ τάξη σχετικά με τα είδη των προβλημάτων και τη λειτουργία τους.

Επιπλέον στο βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης και στην αρχή κάθε κεφαλαίου προτείνεται μια εισαγωγική δραστηριότητα με μορφή παιχνιδιού, συζήτησης ή μιας κατασκευής. Αυτό δεν συμβαίνει στα κεφάλαια εκείνα που ως βασικό διδακτικό στόχο έχουν την επίλυση προβλήματος και στα οποία γίνεται απευθείας εισαγωγή στο βιβλίο του μαθητή.

Αναλυτικότερα τα βιβλία της Γ΄ τάξης (1 τεύχος – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουν 244 σελίδες (130 το βιβλίο και 114 τα τετράδια εργασιών) και περιλαμβάνουν 57 κεφάλαια. Μέσα σε αυτό τον αριθμό βρίσκονται και 9 επαναληπτικά μαθήματα επομένως ο αριθμός των μαθημάτων είναι 48. Προβλέπονται ακόμη 3 κριτήρια αξιολόγησης που βρίσκονται στο βιβλίο του δασκάλου. Σε 6 από τα μαθήματα (6/48=12,5%) βασικός διδακτικός στόχος είναι η επίλυση προβλήματος και υπάρχουν συνολικά σε αυτά τα κεφάλαια 39 προβλήματα. Όμως προβλήματα υπάρχουν στα 53 κεφάλαια (53/57=93%). Πιο συγκεκριμένα έχουμε στο βιβλίο του μαθητή 202 δραστηριότητες που διακρίνονται σε 41 ασκήσεις (41/202≅20,3%) και 161 προβλήματα (161/202≅79,7%) και στα τετράδια εργασιών 294 εργασίες που διακρίνονται σε 215 ασκήσεις (215/294≅73,1%) και 79 προβλήματα (79/294≅26,9%). Συνολικά έχουμε 496 εργασίες εκ των οποίων 256 είναι ασκήσεις (256/496≅51,6%) και 240 προβλήματα (240/496≅48,4%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Δ΄ τάξης αναφέρεται ότι με τα βιβλία της τάξης αυτής οι μαθητές δεν περιορίζονται στα τυπικά λεκτικά προβλήματα αλλά καλούνται να αποκωδικοποιήσουν, να αξιολογήσουν και να αξιοποιήσουν πληροφορίες που δίνονται από διαφορετικές πηγές (εικόνα, κείμενο, πίνακα, διάγραμμα). Επίσης καλούνται να εφαρμόσουν στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως η οργάνωση των δεδομένων σε πρόχειρο σχεδιάγραμμα ή σε πίνακα, η διατύπωση ενδιάμεσων ερωτημάτων, η συστηματική διερεύνηση περιπτώσεων, η ανάλυση ενός προβλήματος σε επιμέρους απλούστερα προβλήματα, η επίλυση μιας πιο απλής περίπτωσης, η επίλυση προβλήματος από το τέλος προς την αρχή. Επιπλέον καλούνται να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα, είτε με δεδομένους αριθμούς είτε με δεδομένη απάντηση είτε συμπληρώνοντας ερωτήματα σε ένα κείμενο, να χρησιμοποιούν την εκτίμηση για να προβλέψουν τα αποτελέσματα, να χρησιμοποιούν εναλλακτικές στρατηγικές υπολογισμού και να επεξεργάζονται προβλήματα με περισσότερες από μία λύσεις ή προβλήματα χωρίς αριθμούς.

Επιπλέον στο βιβλίο του δασκάλου της Δ΄ τάξης και στην αρχή κάθε κεφαλαίου δίδεται μια πρόταση – ιδέα στον εκπαιδευτικό που μπορεί να χρησιμοποιήσει προκειμένου να κάνει τον έλεγχο των προαπαιτούμενων γνώσεων. Η πρόταση αυτή έχει τη μορφή ενός απλού προβλήματος ή μιας ερώτησης σχετικής με προηγούμενες γνώσεις, ενός παιχνιδιού ή ακόμη μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές η κατασκευή ενός σχήματος ή η μέτρηση ενός αντικειμένου με τον χάρακά τους.

Αναλυτικότερα στα βιβλία της Δ΄ τάξης (1 τεύχος – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουμε 272 σελίδες (136 στο βιβλίο και 136 στα τετράδια εργασιών) και σε αυτές εμπεριέχονται 56 μαθήματα, 9 επαναληπτικά μαθήματα και 3 συνοπτικές παρουσιάσεις που αντιστοιχούν μία για κάθε περίοδο[18]. Από τα 56 μαθήματα τα 10 (10/56≅17,9%) έχουν βασικό διδακτικό στόχο τη διαχείριση, τις στρατηγικές και την επίλυση προβλήματος. Σε αυτά υπάρχουν συνολικά 78 προβλήματα. Εκτός από αυτά τα 10 μαθήματα υπάρχουν προβλήματα σε 62 κεφάλαια, δηλαδή στα 53 από τα 56 μαθήματα και στα 9 επαναληπτικά (62/65≅95,4%). Πιο συγκεκριμένα έχουμε στο βιβλίο του μαθητή 55 δραστηριότητες ανακάλυψης και 155 εργασίες, συνολικά δηλαδή 210, που διακρίνονται σε 63 ασκήσεις (63/210=30%) και 147 προβλήματα (147/210=70%). Στα τετράδια εργασιών έχουμε 395 εργασίες εκ των οποίων 170 είναι ασκήσεις (170/395=43%) και 225 προβλήματα (225/395=57%). Συγκεντρωτικά στη Δ΄ τάξη έχουμε 605 εργασίες που διακρίνονται σε 233 ασκήσεις (233/605≅38,5%) και 372 προβλήματα (372/605≅61,5%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της Ε΄ τάξης αναφέρεται ότι με τα βιβλία της τάξης αυτής οι μαθητές μαθαίνουν να λύνουν προβλήματα που δεν απαιτούν μόνο γνώση των 4 πράξεων, αλλά συνδυαστική, κριτική και δημιουργική σκέψη, να χρησιμοποιούν την έννοια του μέσου όρου στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων και την εκτίμηση ως στρατηγική επίλυσης προβλήματος και να λύνουν σύνθετα προβλήματα γεωμετρίας. Κυρίως όμως οι μαθητές ασχολούνται με τα βήματα στην πορεία επίλυσης προβλήματος. Αξιολογώντας τα δεδομένα ενός προβλήματος, διορθώνοντας και συνδυάζοντας αυτά, αναπτύσσουν πολλές στρατηγικές επίλυσης, αποκτούν άνεση να λύνουν σύνθετα προβλήματα σε διαφορετικά πλαίσια, προβλήματα που μπορεί να έχουν πολλές λύσεις ή μοναδική λύση και να εκφράζουν με σαφήνεια τη σκέψη τους χρησιμοποιώντας κατάλληλο λεξιλόγιο. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναπτύξουν τα δικά τους μοντέλα στην επίλυση προβλημάτων και να τα μοιραστούν με τους συμμαθητές τους, να αναστοχάζονται και να παρακολουθούν τον τρόπο που σκέφτηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα, τις διαδικασίες που ακολούθησαν και την αναγνώριση και διαχείριση των λαθών που έκαναν στην όλη διαδικασία. Οι μαθητές καλούνται να μεταφράσουν πραγματικά προβλήματα σε μαθηματικά προβλήματα μέσω συγκεκριμένων ενεργειών – μοντέλων (π.χ. διατύπωση και αναπαράσταση του προβλήματος με διάφορους τρόπους, ανακάλυψη σχέσεων κ.τ.λ.), πραγματοποιώντας με αυτό τον τρόπο την πλαισιοποίηση της γνώσης και στη συνέχεια καλούνται να αντιμετωπίσουν το μαθηματικό πρόβλημα που προέκυψε από την προηγούμενη φάση, κάνοντας αυτό αντικείμενο επεξεργασίας με μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χρήση ήδη γνωστών μοντέλων, γενίκευση κ.τ.λ.) πετυχαίνοντας έτσι την αποπλαισιοποίηση της γνώσης που μαζί με την πλαισιοποίηση αποτελούν τους δύο τρόπους πραγματοποίησης της διαδικασίας της μαθηματικοποίησης η οποία επιτυγχάνεται μέσα από τις ενέργειες και τον αναστοχασμό του

[18] Η ύλη κάθε τάξης εξελίσσεται στο βιβλίο του μαθητή σε 3 περιόδους που δεν ταυτίζονται χρονικά με τα 3 τρίμηνα. Οι 3 αυτές περίοδοι παίζουν καθεμιά το δικό της ιδιαίτερο ρόλο στην εξέλιξη της ύλης. Κάθε περίοδος είναι χωρισμένη σε 3 επιμέρους ενότητες.

μαθητή μέσα στα πλαίσια μιας αλληλεπιδραστικής διδασκαλίας. Επιπλέον, τα προβλήματα που προτείνονται έχουν χαρακτηριστικά μοντέλου, δηλαδή μπορούν να λειτουργήσουν ως μοντέλα, ώστε σταδιακά οι μαθητές να δουλεύουν στο τυπικό επίπεδο και να εξελιχθούν σε καλούς λύτες προβλημάτων που σημαίνει να αναπτύξουν δεξιότητες όπως είναι η επιλογή κατάλληλων στρατηγικών, η εύρεση του λάθους, η αυτοδιόρθωση, η αυτοαξιολόγηση και η ετεροαξιολόγηση. Τέλος, αρκετά προβλήματα προτείνεται να λυθούν ομαδοσυνεργατικά.

Επιπλέον στο βιβλίο του δασκάλου της Ε΄ τάξης και στην αρχή κάθε κεφαλαίου δίδεται μια πρόταση – ιδέα στον εκπαιδευτικό που μπορεί να χρησιμοποιήσει προκειμένου να κάνει τον έλεγχο των προαπαιτούμενων γνώσεων. Η πρόταση αυτή έχει τη μορφή προβλήματος, δημιουργίας απλού προβλήματος από τους μαθητές με βάση κάποια στοιχεία, ερώτησης σχετικής με προηγούμενες γνώσεις που είναι απαραίτητες στο νέο μάθημα, παιχνιδιού, κατασκευής σχήματος ή μέτρησης ενός αντικειμένου με το χάρακα και σύγκρισης με κάποιο άλλο αντικείμενο.

Αναλυτικότερα στα βιβλία της Ε΄ τάξης (1 τεύχος – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουμε 260 σελίδες (132 στο βιβλίο και 128 στα τετράδια εργασιών). Σε κάθε μάθημα του βιβλίου του μαθητή υπάρχει μια δραστηριότητα – ανακάλυψη, άρα υπάρχουν συνολικά 55 δραστηριότητες από τις οποίες οι περισσότερες είναι ρεαλιστικές και στόχο έχουν να εισάγουν ομαλά τους μαθητές στο νέο κεφάλαιο και να τους δώσουν την ευκαιρία να συνδυάσουν μαθηματικές έννοιες με καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Τις περισσότερες φορές οι δραστηριότητες – ανακαλύψεις είναι βιωματικού χαρακτήρα, ομαδοσυνεργατικού τύπου, στις οποίες οι μαθητές αφού μελετήσουν τις οδηγίες ή το σενάριο πράττουν, δηλαδή, παρατηρούν, σχολιάζουν, κρίνουν, συγκρίνουν, μετρούν, υποθέτουν, υπολογίζουν, κατασκευάζουν, αναλύουν και συνθέτουν, λύνουν, επαληθεύουν, συμπεραίνουν, παρουσιάζουν, συνεργάζονται. Οικοδομούν με ενεργό τρόπο τη νέα γνώση. Στα 51 από τα 55 μαθήματα του βιβλίου του μαθητή μετά τη δραστηριότητα – ανακάλυψη ακολουθούν από μία έως και έξι εργασίες που είναι ανακαλυπτικές ή εφαρμογής, εμπέδωσης ή επέκτασης της νέας γνώσης. Εργασίες υπάρχουν και στα 9 επαναληπτικά μαθήματα. Συνολικά υπάρχουν 159 εργασίες, εκ των οποίων οι 46 στα επαναληπτικά, που διακρίνονται σε 69 ασκήσεις (69/159$\cong$43,4%) και 90 προβλήματα (90/159$\cong$56,6%). Κάθε κεφάλαιο κλείνει με το συμπέρασμα που με την προσεκτική μελέτη του δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να επισημοποιήσουν τη νέα γνώση και να αποσαφηνίσουν τυχόν αδιευκρίνιστα σημεία. Στα τετράδια εργασιών υπάρχουν συνολικά 360 εργασίες, εκ των οποίων οι 64 στα επαναληπτικά, που διακρίνονται σε 152 ασκήσεις (152/360$\cong$42,2%) και 208 προβλήματα (208/360$\cong$57,8%). Επομένως αθροιστικά στο βιβλίο του μαθητή και στα τετράδια εργασιών έχουμε 55 δραστηριότητες ανακάλυψης και 519 εργασίες, δηλαδή συνολικά 574, που διακρίνονται σε 221 ασκήσεις (221/574=38,5%) και 353 προβλήματα (353/574=61,5%). Στα 17 από τα 55 μαθήματα (17/55=30,9%) βασικός διδακτικός στόχος είναι η επίλυση προβλήματος, όμως στην τάξη αυτή εμφανίζονται προβλήματα στα 61 κεφάλαια (61/64$\cong$95,3%).

Στο βιβλίο του δασκάλου της ΣΤ΄ τάξης αναφέρεται ότι με τα βιβλία της τάξης αυτής οι μαθητές επαναλαμβάνουν, εμπεδώνουν και γενικεύουν γνώσεις που έχουν αποκτήσει από προηγούμενες τάξεις, τις συστηματοποιούν και τις διευρύνουν και πραγματοποιείται το πέρασμα από μια «πρακτική» σε μια περισσότερο μαθηματική αντίληψη των εννοιών. Επιπλέον οι μαθητές προετοιμάζονται για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών γνώσεων και καθώς τα Μαθηματικά αποκτούν μια περισσότερο θεωρητική υπόσταση επιχειρείται η σύνδεση του ρόλου τους τόσο με τις εμπειρίες των μαθητών όσο και με τις άλλες επιστήμες με σκοπό να αποδειχθεί και να τεκμηριωθεί η αναγκαιότητα, η σημασία και ο ρόλος των Μαθηματικών στη συνείδηση των μαθητών και να καλλιεργηθεί έτσι μια θετική στάση απέναντί τους που θα συμβάλει στην επιτυχή αντιμετώπισή τους τόσο σε αυτή την τάξη όσο και στις τάξεις του γυμνασίου. Τέλος, επιχειρείται, οι μαθητές να αναπτύξουν συγκροτημένη σκέψη και να καλλιεργήσουν κριτικό πνεύμα και δημιουργικότητα.

Στο βιβλίο του δασκάλου της ΣΤ΄ τάξης δεν προτείνονται εισαγωγικές δραστηριότητες ή ιδέες για τον έλεγχο των προαπαιτούμενων γνώσεων όπως συμβαίνει με τα βιβλία δασκάλου όλων των προηγούμενων τάξεων. Μόνο σε 3 από τα 71 κεφάλαια υπάρχει από μια δραστηριότητα – έκπληξη που είναι προαιρετική και προσφέρεται ως ευχάριστη δραστηριότητα – σπαζοκεφαλιά ή διασκεδαστική ιστοριούλα που προϊδεάζει τους μαθητές για το αντικείμενο με το οποίο θα ασχοληθούν στη συνέχεια.

Αναλυτικότερα στα βιβλία της ΣΤ΄ τάξης (1 τεύχος – βιβλίο μαθητή και 4 τεύχη – τετράδιο εργασιών) έχουμε 306 σελίδες (164 στο βιβλίο και 142 στα τετράδια εργασιών) στις οποίες περιέχονται 76 κεφάλαια (71 μαθήματα και 5 ανακεφαλαιώσεις). Τα 11 από τα 71 μαθήματα (11/71≅15,5%) έχουν βασικό διδακτικό στόχο την επίλυση προβλήματος, όμως και στα βιβλία της ΣΤ΄ τάξης υπάρχουν προβλήματα στα περισσότερα μαθήματα (61/71≅85,9%) και στις 5 ανακεφαλαιώσεις, συνολικά δηλαδή στα 66 κεφάλαια (66/76≅86,8%).

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει μια μικρή περιγραφή της δομής του βιβλίου του μαθητή και των τετραδίων εργασιών της ΣΤ΄ τάξης για να μελετηθεί στη συνέχεια ο αριθμός των ασκήσεων, προβλημάτων και άλλων δραστηριοτήτων που υπάρχουν σε αυτά. Στο βιβλίο του μαθητή υπάρχουν τα 71 μαθήματα και οι 5 ανακεφαλαιώσεις που προαναφέραμε και αντιστοιχούν σε ένα δισέλιδο το καθένα. Κάθε μάθημα ξεκινάει με τη στοχοθεσία του μαθησιακού περιεχομένου και συνεχίζει με 2 δραστηριότητες (σε 5 μαθήματα υπάρχει 1 μόνο δραστηριότητα) οι οποίες είναι μελέτη καταστάσεων από το περιβάλλον και τα ενδιαφέροντα των μαθητών αυτής της ηλικίας, ώστε μέσα από προβληματισμό να οδηγηθούν στην αναγκαιότητα της συγκεκριμένης γνώσης. Οι απαντήσεις στις δραστηριότητες αυτές είναι κρυμμένες πίσω από τα δεδομένα, έτσι ώστε οι μαθητές έπειτα από προσεκτική μελέτη να οδηγούνται εύκολα στη σωστή απάντηση. Οι δραστηριότητες αυτές καλύπτουν συνήθως τη μία από τις δύο σελίδες ή το ½ κάθε κεφαλαίου. Στα 71 μαθήματα υπάρχουν συνολικά 137 δραστηριότητες ανακαλυπτικής διαδικασίας, δηλαδή προβληματικές καταστάσεις στις οποίες οι μαθητές καλούνται να δράσουν ατομικά ή ομαδικά και να ανακαλύψουν τη νέα γνώση οικοδομώντας με ενεργητικό ρόλο τη γνώση. Μετά τις δραστηριότητες ακολουθούν σε κάθε μάθημα δύο πλαίσια. Το γαλάζιο πλαίσιο είναι ο «μαθηματικός πίνακας» για κανόνες και μαθηματικές έννοιες και βοηθάει στη συστηματοποίηση και έκφραση της μαθηματικής γνώσης που «αναδύεται» μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες. Η μαθηματική γνώση διατυπώνεται με ακρίβεια, σαφήνεια, αλλά ταυτόχρονα με απλά λόγια και δίνεται με τη μορφή κανόνα. Στο πορτοκαλί πλαίσιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα του κεφαλαίου καθώς και μέθοδοι εργασίας και τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων. Σε γενικές γραμμές για τα δύο αυτά πλαίσια αφιερώνεται μισή σελίδα ή αλλιώς το ¼ κάθε κεφαλαίου. Ακολουθούν 2 εφαρμογές των μαθηματικών εννοιών ή συναφών προβληματικών καταστάσεων ανά μάθημα (20 μαθήματα έχουν 1 μόνο εφαρμογή) που υποδεικνύουν στρατηγικές επίλυσης και εφαρμογής του κανόνα ή επίδειξη χρήσης με τεχνικές που δεν μπορεί να ανακαλύψει μόνος του ο μαθητής. Υπάρχουν επομένως στο βιβλίο του μαθητή της ΣΤ΄ τάξης 122 λυμένες εφαρμογές. Κάθε μάθημα τελειώνει με ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση που αποτελούν μια σύντομη περίληψη των εννοιών του κεφαλαίου με τη μορφή εκφράσεων του τύπου «σωστό – λάθος». Οι 5 ανακεφαλαιώσεις αφιερώνουν την πρώτη σελίδα του δισέλιδού τους στη συγκέντρωση της θεωρίας και των τύπων του κεφαλαίου και τη δεύτερη σε ασκήσεις και προβλήματα. Συνολικά έχουμε σε αυτές 18 εργασίες εκ των οποίων 4 είναι ασκήσεις και 14 προβλήματα. Στα τετράδια εργασιών υπάρχουν τα αντίστοιχα 71 μαθήματα, σε δισέλιδα, με ασκήσεις εμπέδωσης και προβλήματα για ατομική και ομαδική εργασία. Συνολικά έχουμε 175 ασκήσεις (175/398=44%) και 162 προβλήματα (162/398≅40,7%). Επιπλέον στα 61 κεφάλαια (61/71≅85,9%) υπάρχει από μια δραστηριότητα με προεκτάσεις (61/398≅15,3%), γίνεται δηλαδή εφαρμογή της νέας γνώσης σε πραγματικά προβλήματα (μη κατασκευασμένα) στα οποία, μέσα από ομαδική αντιμετώπιση και συνεργατικές δραστηριότητες, εξετάζονται θέματα, ζητήματα και προβλήματα που αντλούνται από διαφορετικούς τομείς των επιστημών και της καθημερινής ζωής. Οι δραστηριότητες αυτού του τύπου μπορούν να γίνουν αφορμή για διερεύνηση και περαιτέρω επέκταση της γνώσης, ώστε οι μαθητές να κατανοούν σε βάθος το θέμα που εξετάζουν και να προσεγγίζουν τη γνώση με βιωματικό τρόπο στα πλαίσια της πραγματικότητας που τους περιβάλλει (μέθοδος project). Έτσι, η γνώση αποκτά νόημα και ενδιαφέρον, επειδή εξετάζεται διαθεματικά στο πλαίσιο της μελέτης αυθεντικών καταστάσεων. Οι «δραστηριότητες με προεκτάσεις» περιλαμβάνουν θέματα ή ερωτήσεις για περαιτέρω διερεύνηση ή επέκταση σε άλλες γνωστικές περιοχές και συζήτηση (55/61≅90,2%) καθώς και θέματα για μικρή έρευνα (2/61≅3,3%) όπου δίνονται θέματα σχετικά με τη ζωή, τα ενδιαφέροντα των μαθητών και τις τοπικές συνθήκες που μπορούν να ερευνηθούν σε σύντομο χρονικό διάστημα (π.χ. ένα απόγευμα ή το Σαββατοκύριακο) ώστε να τα παρουσιάσουν στην τάξη στο επόμενο μάθημα. Επομένως στα τετράδια εργασιών υπάρχουν συνολικά 223 προβλήματα (223/398=56%). Συνολικά στο βιβλίο του μαθητή και στα τετράδια εργασιών έχουμε 553 εργασίες που διακρίνονται σε 179 ασκήσεις (179/553≅32,4%) και 374 προβλήματα (374/553≅67,6%).

Πίνακας 8

Ποσοστιαία εμφάνιση μαθημάτων που εμπεριέχουν προβλήματα στα νέα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου							
	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄	Σύν. Τάξεων
Αριθμός μαθημάτων	61	63	57	65	64	76	386
Μαθήματα με προβλήματα[19]	51	59	53	62	61	66	339
Ποσοστό %	83,6%	93,7%	93%	95,4%	95,3%	86,8%	Μ.Ο.: 87,8%

Πίνακας 9

Ποσοστιαία εμφάνιση ασκήσεων και προβλημάτων ανά τάξη στα νέα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου							
	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	ΣΤ΄	Σύν. Τάξεων
Ασκήσεις	353 65,4%	195 39%	256 51,6%	233 38,5%	221 38,5%	179 32,4%	1437 44%
Προβλήματα	187 34,6%	305 61%	240 48,4%	372 61,5%	353 61,5%	374 67,6%	1831 56%
Σύνολο	540	500	496	605	574	553	3268

4.1.2.1 Τα είδη προβλημάτων στα νέα βιβλία Μαθηματικών

Στα νέα βιβλία Μαθηματικών, όσον αφορά τα είδη προβλημάτων που υπάρχουν σε αυτά, έχουμε: α) προβλήματα ανάδειξης της πρότερης γνώσης αλλά και των προσωπικών αντιλήψεων των μαθητών, β) ανακαλυπτικής διαδικασίας, γ) εκτίμησης, δ) χωρίς αριθμούς, ε) εφαρμογής και εμπέδωσης σε όσο το δυνατόν περισσότερα και διαφορετικά πλαίσια (ενιαιοποίηση της γνώσης), στ) αντιστοίχησης και σωστού – λάθους, ζ) επέκτασης, η) προβλήματα στα οποία γίνεται χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, θ) ημιδομημένα προβλήματα, ι) προβλήματα – παιχνίδια, ια) πολλαπλών λύσεων, ιβ) ατομικής ή ομαδοσυνεργατικής προσέγγισης. Αναλυτικότερα αυτά τα είδη προβλημάτων παρουσιάζονται στη συνέχεια με ταυτόχρονη παράθεση παραδειγμάτων.

[19] Οι δραστηριότητες ανακάλυψης, δηλαδή οι προβληματικές καταστάσεις με τις οποίες έρχονται οι μαθητές αντιμέτωποι στην αρχή κάθε κεφαλαίου δεν λαμβάνονται υπόψη στην καταμέτρηση των κεφαλαίων που περιλαμβάνουν προβλήματα, γιατί τότε στο 100% των μαθημάτων υπάρχουν προβλήματα. Επειδή όμως ένα κεφάλαιο μπορεί να έχει τη δραστηριότητα ανακάλυψης και στο υπόλοιπο μέρος του να περιλαμβάνει μόνο ασκήσεις για το λόγο αυτό υπολογίζονται τα κεφάλαια εκείνα που έχουν προβλήματα και πέραν των δραστηριοτήτων ανακάλυψης.

1. **Προβλήματα ανάδειξης της πρότερης γνώσης αλλά και των προσωπικών αντιλήψεων των μαθητών:** Μέσω αυτών δίδονται πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να φέρουν στην επιφάνεια τις άτυπες και τυπικές γνώσεις τους, αλλά και στο δάσκαλο δίδεται η δυνατότητα σωστής και έγκυρης αξιολόγησης του γνωστικού και όχι μόνο επιπέδου των μαθητών. Πολλά από αυτά τα προβλήματα βρίσκονται στο βιβλίο του δασκάλου και συγκεκριμένα στη φάση «Έλεγχος πρότερων γνώσεων». Π.χ. στο βιβλίο του δασκάλου της Ε΄ τάξης στη σελίδα 177 και στο βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης στις σελίδες 42-43 έχουμε:

Έλεγχος: Ζητάμε από τα παιδιά να λύσουν το παρακάτω πρόβλημα σε κόλλες Α4:
«Ο κυρ Θανάσης πήγε με τον αδερφό του για να αγοράσουν λάστιχο ποτίσματος για τον κήπο. Ο κυρ Θανάσης αγόρασε 5 μ. λάστιχο. Ο αδερφός του αγόρασε από το ίδιο λάστιχο ένα κομμάτι κατά 50% πιο μακρύ. Πόσα μέτρα λάστιχο αγόρασε ο αδερφός του; Πόσο πλήρωσε ο καθένας αν το μέτρο κοστίζει 1,50 ευρώ;»
Εξηγούν πώς σκέφτηκαν.

Στο πλαίσιο του σχεδίου εργασίας "το μαγαζί της τάξης" ζητούμε από τους μαθητές να βρουν φωτογραφίες από εφημερίδες και περιοδικά με διάφορα προϊόντα και τις τιμές τους που να είναι διψήφιοι αριθμοί σε ευρώ ή σε λεπτά. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των τριών.
1η φάση. Ένας μαθητής από κάθε ομάδα θα κάνει τον ταμία και οι άλλοι δύο τους πελάτες. Αναρτάται στον πίνακα ή διανέμεται μια φωτοτυπία με τιμές διάφορων προϊόντων με διψήφιους αριθμούς. Κάθε μαθητής διαθέτει 85 ευρώ και 85 λεπτά και πραγματοποιεί δύο ή τρεις αγορές Σχηματίζει την τιμή με τα χρήματα που έχει και υπολογίζει πόσα του μένουν κάθε φορά μετά την αγορά του προϊόντος. Ο ταμίας, από την πλευρά του, υπολογίζει και δίνει τα ρέστα. Οι μαθητές μετά από κάθε συναλλαγή γράφουν συμβολικά την πράξη που εκτέλεσαν.

2η φάση. Ο δάσκαλος δίνει σε όλη την τάξη διάφορα παραδείγματα με αγορά προϊόντος. Ένα από αυτά θα μπορούσε να είναι το εξής: "έχω 59 ευρώ και αγοράζω ένα βιβλίο που κοστίζει 14 ευρώ, πόσα ευρώ θα μου μείνουν μετά την αγορά;"

Σε κάθε ομάδα κάθε μαθητής θα εκτελεί την πράξη με διαφορετικό τρόπο. Ο πρώτος με το μυαλό (νοερά) χωρίς να χρησιμοποιεί χαρτί και μολύβι. Ο δεύτερος γραπτά και τοποθετώντας τους αριθμούς κάθετα, τον έναν κάτω από τον άλλο. Ο τρίτος θα εκτελεί και αυτός την πράξη γραπτά, αλλά θα τοποθετεί τους αριθμούς οριζόντια τον ένα δίπλα στον άλλο. Αφού εκτελέσει ο καθένας δύο ή τρεις πράξεις αφαίρεσης με το συγκεκριμένο τρόπο, μπορεί να ασκηθεί στους υπόλοιπους δύο τρόπους εκτέλεσης της αφαίρεσης.

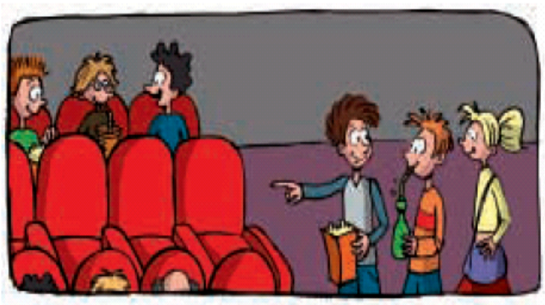
Κάθε μέλος της ομάδας προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα με τον τρόπο που του έχει οριστεί. Οι μαθητές, αφού βρουν τις λύσεις, τις συζητούν μεταξύ τους και ελέγχουν αν είναι σωστές. Στη συνέχεια γίνεται συζήτηση με όλη την τάξη, κατά την οποία, γράφονται στον πίνακα οι απαντήσεις των μαθητών και ανακοινώνονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους εκτέλεσαν τις πράξεις.

2. **Προβλήματα ανακαλυπτικής διαδικασίας:** Πρόκειται για τις προβληματικές καταστάσεις στις οποίες καλούνται οι μαθητές να δράσουν είτε ομαδικά είτε ατομικά και να ανακαλύψουν τη νέα γνώση, οικοδομώντας οι ίδιοι με ενεργητικό ρόλο τη γνώση (ενεργητική μάθηση). Βρίσκονται στην αρχή κάθε κεφαλαίου στο βιβλίο του μαθητή. Π.χ. στο βιβλίο του μαθητή της Ε΄ τάξης στη σελίδα 22 έχουμε:

ΣΤΟΝ ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Μπορούμε να βρούμε διαφορετικές στρατηγικές για να λύσουμε ένα πρόβλημα;



Ο Μίλτος, η Αθηνά και ο Χριστόφορος πήγαν να δουν ταινία.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σ' αυτές τις τρεις θέσεις;

Συζητάμε στην τάξη για τη στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

- Με ποιο παιδί συμφωνώ; Εξηγώ ποια στρατηγική μού φαίνεται πιο εύκολη.

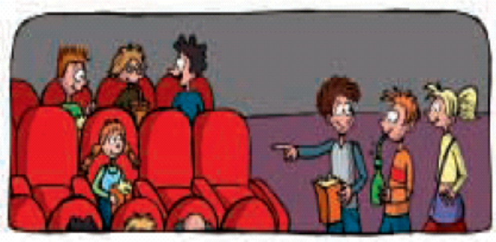
1ος τρόπος

- Μερικοί συνδυασμοί είναι: Μ Α Χ
  Μ Χ Α
- Συμπληρώνω τους υπόλοιπους:
  Α Χ Μ   Χ Μ Α
  ☐ ☐ ☐   ☐ ☐ ☐

2ος τρόπος

Σε κάθε περίπτωση, το παιδί που κάθεται στη μέση έχει τα δύο άλλα παιδιά δίπλα του. Άρα, το κάθε παιδί μπορεί να έχει με 2 διαφορετικούς τρόπους δίπλα του τα άλλα δύο παιδιά.
Αφού τα παιδιά είναι 3 και για καθένα υπάρχουν 2 διαφορετικοί τρόποι, έχουμε .... x .... = ... τρόπους.

- Την επόμενη φορά είχαν πάει στον κινηματογράφο με τη φίλη τους Γιάννα.
  Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσαν να καθίσουν τα παιδιά αν η Γιάννα δεν αλλάξει θέση;



3. **Προβλήματα εκτίμησης:** Σε αυτά οι μαθητές καλούνται να κάνουν εκτιμήσεις και έτσι διαπιστώνουν ότι η εκτίμηση είναι αναγκαία και πως συχνά στην καθημερινή ζωή καταφεύγουμε σε αυτήν. Οι μαθητές ασκούνται στο να εκτιμούν αρχικά και αργότερα να υπολογίζουν με ακρίβεια ελέγχοντας την εκτίμησή τους. Π.χ. στο δ΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Β΄ τάξης, στη σελίδα 24 έχουμε:

α. Στην ταβέρνα του χωριού

Ο κύριος Γιάννης διάλεξε από τον κατάλογο:
- Χωριάτικη σαλάτα 3 €
- Κοτόπουλο με χυλοπίτες 6 €
- Πατάτες 3 €

Η κυρία Ιωάννα διάλεξε:
- Σαλάτα λάχανο 3 €
- Γιουβαρλάκια 7 €
- Φέτα 3 €

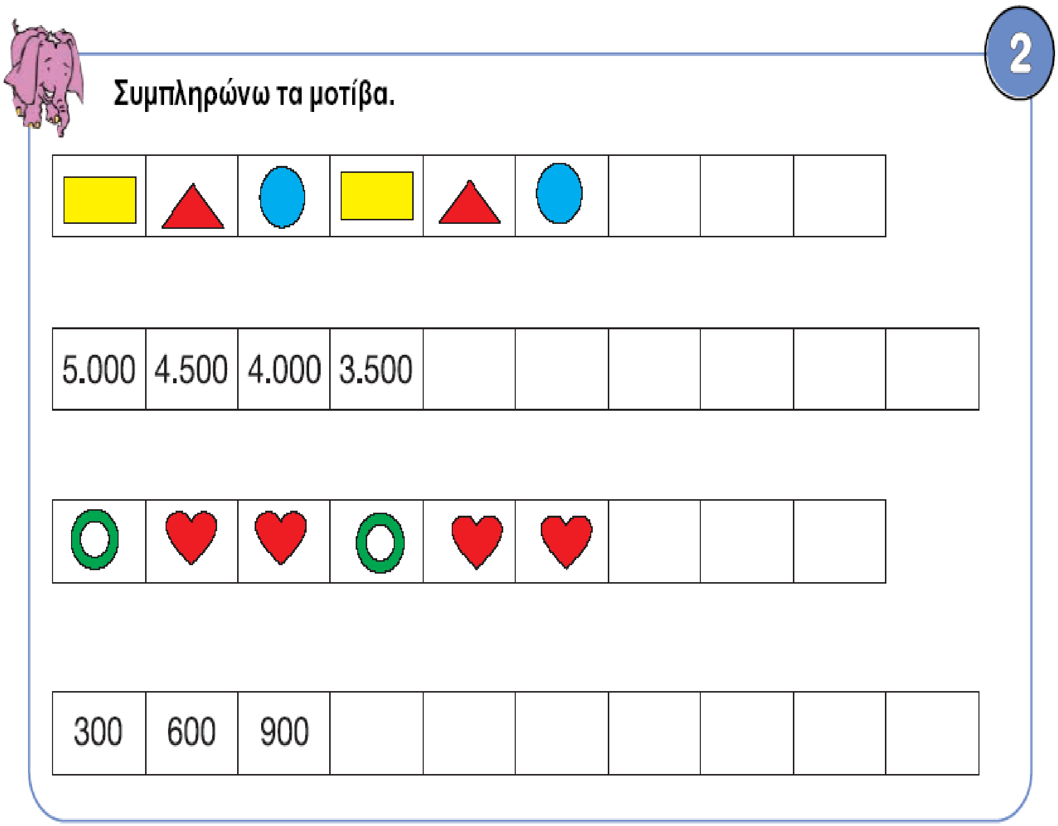
Ο Πέτρος διάλεξε:
- Κεφτεδάκια με ρύζι 6 €
- Πορτοκαλάδα 2 €

Πόσο κοστίζουν συνολικά όλα όσα παρήγγειλαν;

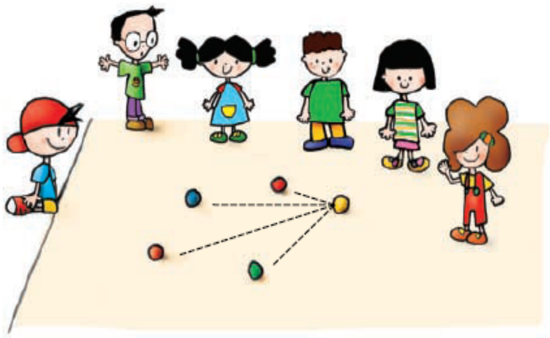
Εκτιμώ: Περίπου ....

Υπολογίζω με ακρίβεια:

4. **Προβλήματα χωρίς αριθμούς:** Πρόκειται για εικονοπροβλήματα, συνδυαστικής σκέψης, πιθανοτήτων, μοτίβων και αριθμητικών ακολουθιών κ.ά. Π.χ. στο α΄ τεύχος του βιβλίου μαθητή της Α΄ τάξης στη σελίδα 43 και στο γ΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Γ΄ τάξης στη σελίδα 44 έχουμε αντίστοιχα:



5. **Προβλήματα εφαρμογής και εμπέδωσης σε όσο το δυνατόν περισσότερα και διαφορετικά πλαίσια (ενιαιοποίηση της γνώσης):** Σε αυτά οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν την έννοια που διαχειρίστηκαν στο νέο κεφάλαιο και να τη διαχειριστούν σε πολλά επίπεδα καθιστώντας την πλέον προσωπική τους γνώση. Π.χ. στο δ΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Β΄ τάξης στη σελίδα 8 έχουμε:



α. Τα παιδιά παίζουν μπίλιες στην αυλή του σχολείου.
Η κίτρινη μπίλια είναι ο στόχος.
Ποιο παιδί έριξε την μπίλια πιο κοντά;

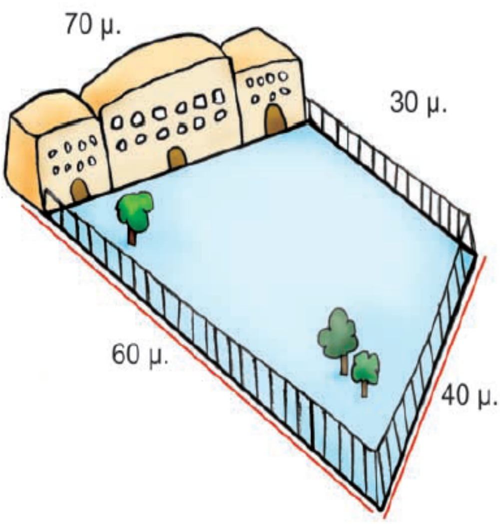
Εκτιμώ: ....

Ελέγχω με το χάρακα την εκτίμησή μου.

- Νικόλας: ....
- Ελένη: ....
- Χρήστος: ....
- Άννα: ....

β. Την ώρα της γυμναστικής τα παιδιά έτρεξαν δύο φορές γύρω από το προαύλιο του σχολείου. Πόσα μέτρα έτρεξαν συνολικά;

Εκτιμώ: Περίπου .... μέτρα.



Υπολογίζω με ακρίβεια:

Ελέγχω με κάθετες πράξεις:

6. **Προβλήματα αντιστοίχησης και σωστού – λάθους:** Οι μαθητές ασκούνται σε διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης, καλλιεργώντας την κριτική τους σκέψη και ικανότητα. Π.χ. στο α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Δ΄ τάξης στη σελίδα 13 και στο β΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Δ΄ τάξης στη σελίδα 9 έχουμε αντίστοιχα:

6) Αντιστοιχίζω τον αριθμό ή τους αριθμούς που έχουν :

- το ψηφίο των μονάδων τριπλάσιο απ' το ψηφίο των εκατοντάδων. •
- το ψηφίο των δεκάδων το μισό απ' το ψηφίο των χιλιάδων. •
- το ψηφίο των .... •

• 18.045

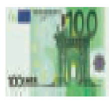
• 14.153

• 12.911

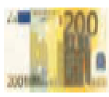
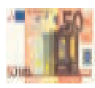
• 13.602

4) Σωστό ή λάθος; Σημειώνω Σ ή Λ.

Τα  είναι το δεκαπλάσιο του  . ...

Τα  είναι το διπλάσιο των  . ...

Τα  είναι το δεκαπλάσιο των  . ...

Τα  είναι το τετραπλάσιο των  . ...

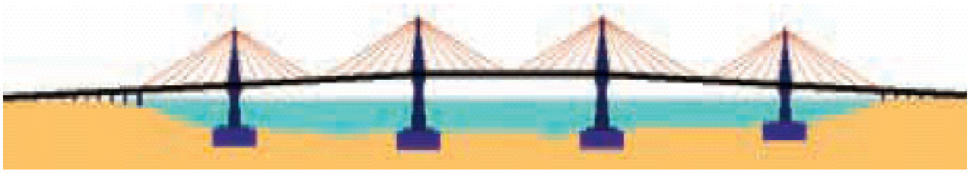
Τα  είναι 0,50 €. ......

7. **Προβλήματα επέκτασης:** Πρόκειται για προβλήματα διαφορετικών επιπέδων που ανατίθενται σε εξατομικευμένη βάση. Π.χ. στη σελίδα 24 του α΄ τεύχους του τετραδίου εργασιών της ΣΤ΄ τάξης έχουμε την παρακάτω δραστηριότητα :

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: *«Η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα του κόσμου»*

Από το τέλος του 2004 η χώρα μας έχει τη μεγαλύτερη σε μήκος κρεμαστή γέφυρα στον κόσμο. Πρόκειται για τη γέφυρα που συνδέει το Ρίο με το Αντίρριο. Πριν από την κατασκευή της γέφυρας 2 εκατομμύρια αυτοκίνητα το χρόνο που μετέφεραν 6 εκατομμύρια επιβάτες περνούσαν από την Πελοπόννησο στη Στερεά Ελλάδα με πλοία. Η διαδρομή διαρκούσε 45 λεπτά και πολλές φορές λόγω του κακού καιρού τα πλοία έμεναν δεμένα. Η γέφυρα άρχισε να κατασκευάζεται το 1998 και τελείωσε το 2004.

Η κυρίως γέφυρα είναι καλωδιωτή (κρέμεται σε συρματόσχοινα) και στηρίζεται σε 4 πυλώνες (κολόνες), το ύψος των οποίων επάνω από τη στάθμη της θάλασσας φθάνει τα 159 μ. και το βύθισμά τους από 44 έως 62 μ. κάτω από τη στάθμη της θάλασσας. Η γέφυρα έχει τρία κεντρικά ανοίγματα των 560 μ. και δύο ακραία των 305 μ. Για να συνδεθεί με το οδικό δίκτυο κατασκευάστηκαν στα δύο άκρα της γέφυρες πρόσβασης. Οι γέφυρες πρόσβασης έχουν μήκος 378 μ. στην πλευρά του Ρίου και 252 μ. στην πλευρά του Αντιρρίου.



α) Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της γέφυρας (μαζί με τις γέφυρες πρόσβασης).

β) Να υπολογίσετε το χρόνο (σε δευτερόλεπτα) που θα κάνει ένα αυτοκίνητο για να διασχίσει τη γέφυρα κινούμενο με ταχύτητα 36 χιλιομέτρων την ώρα.

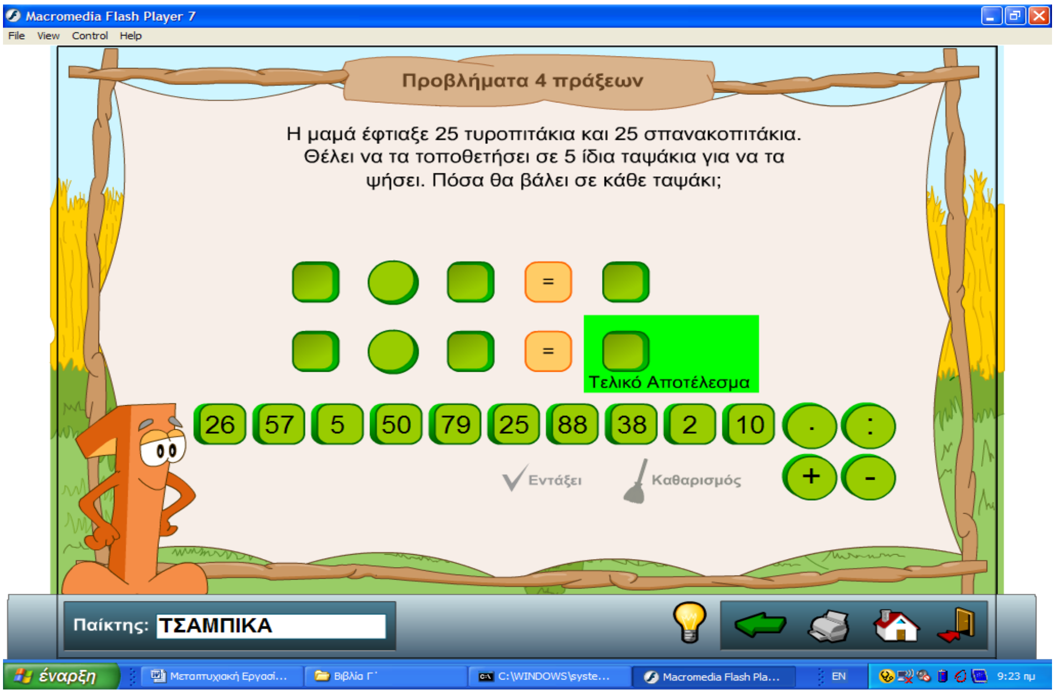
γ) Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να χρεώνεται για διόδια η διέλευση κάθε αυτοκινήτου από τη γέφυρα, αν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η συνολική δαπάνη του έργου ανέρχεται σε 588 εκατομμύρια €.
- Ο αριθμός των αυτοκινήτων που περνούν απέναντι με τη γέφυρα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με τον αριθμό των αυτοκινήτων που χρησιμοποιούσαν τα πλοία.
- Η απόσβεση του ποσού κατασκευής της γέφυρας έχει οριστεί να γίνει σε 20 χρόνια.

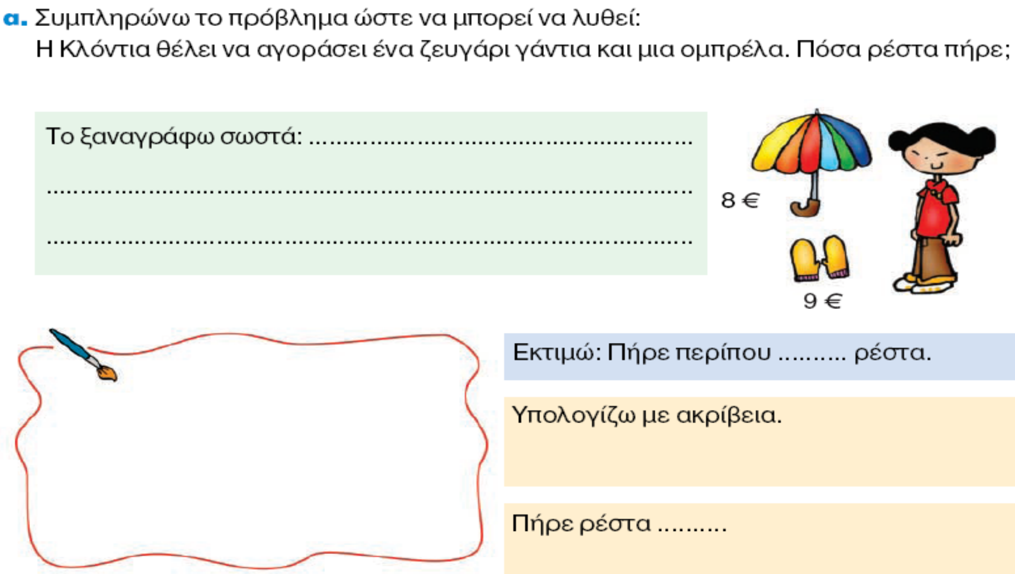
24 Θέμα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ωφέλησε η γέφυρα τις δύο περιοχές που συνδέει;

8. **Προβλήματα στα οποία γίνεται χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας:** Χρησιμοποιώντας τον ηλεκτρονικό υπολογιστή οι μαθητές αναπτύσσουν θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, γιατί παύουν να τα θεωρούν απλή ενασχόληση με αριθμούς. Π.χ. εκπαιδευτικό λογισμικό (cd-rom) Μαθηματικών Α΄και Β΄ τάξης:

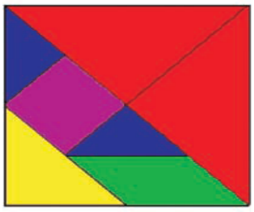


9. **Ημιδομημένα προβλήματα:** Σε αυτά οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ή να ολοκληρώσουν προβλήματα στα οποία λείπουν στοιχεία και να αναπτύξουν διαφορετικές στρατηγικές και προσεγγίσεις της μαθηματικής γνώσης. Π.χ. στο β΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Β΄ τάξης στη σελίδα 14 έχουμε:



10. **Προβλήματα – παιχνίδια:** Μέσα από το παιχνίδι οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν, να χρησιμοποιήσουν και να εμπεδώσουν πολλές μαθηματικές έννοιες. Π.χ. στο α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Β΄ τάξης στη σελίδα 32 και στο α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Ε΄ τάξης στη σελίδα 36 έχουμε αντίστοιχα:

β. Παιχνίδια με το τάγκραμ.



Από πόσα κομμάτια αποτελείται το παιχνίδι του τάγκραμ; ....

Πόσα κομμάτια είναι τρίγωνα; ....

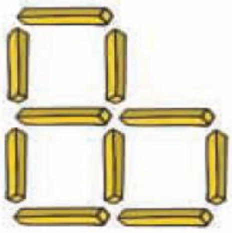
Πόσα κομμάτια είναι τετράγωνα; ....

Όλα μαζί τα κομμάτια κατασκεύασαν ένα ....

Τα κόκκινα τρίγωνα σχηματίζουν μαζί ένα μεγαλύτερο ....

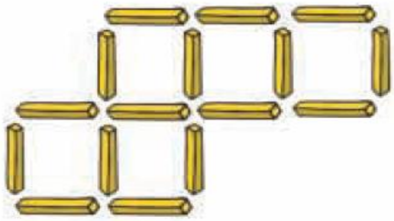
- Παίζω με τα κομμάτια του τάγκραμ και φτιάχνω τα διπλανά σχέδια:

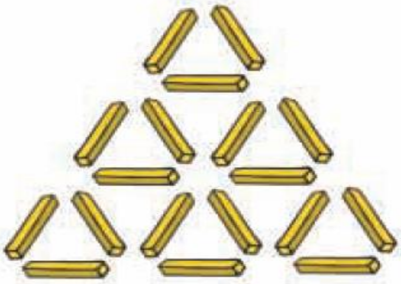
- Με τον διπλανό μου και με τα κομμάτια και από τα δύο τάγκραμ φτιάχνουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο:

- 

  Μετακινώντας μόνο δύο ραβδάκια, τα τρία ίσα τετράγωνα θα γίνουν τέσσερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

- Μετακινώντας μόνο δύο ραβδάκια, θα μείνουν μόνο τέσσερα τετράγωνα που κανένα δε θα είναι δίπλα στο άλλο.

- 

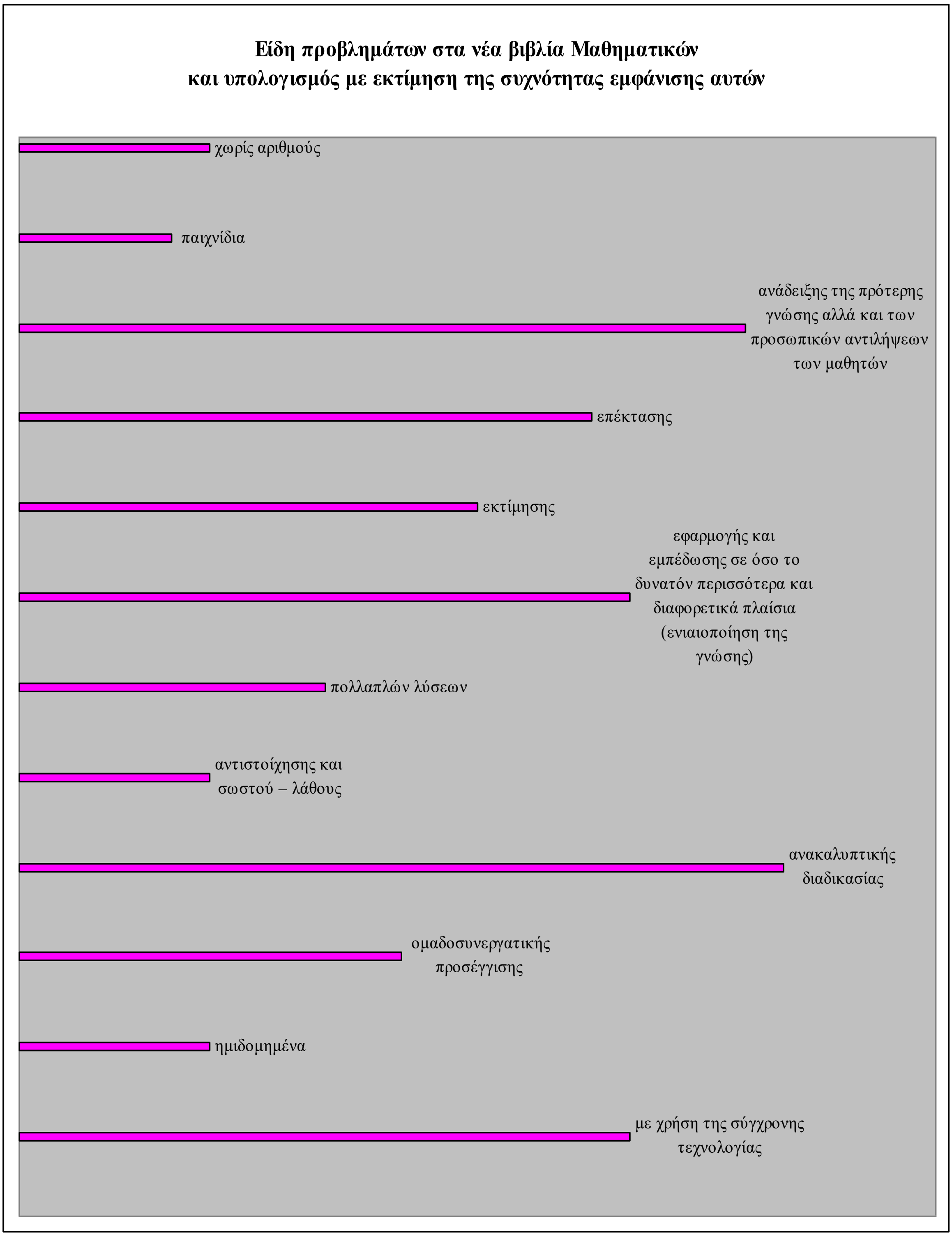
  Αφαιρώντας μόνο πέντε ραβδάκια, θα μείνουν μόνο πέντε τρίγωνα.

11. **Προβλήματα πολλαπλών λύσεων:** Πρόκειται για ανοικτά-κλειστά προβλήματα μέσω των οποίων επιχειρείται η ανατροπή της παγιωμένης άποψης των μαθητών ότι ένα μαθηματικό πρόβλημα έχει μόνο μια σωστή λύση (αποτέλεσμα) και ότι προσεγγίζεται κυρίως με ένα σωστό τρόπο. Αυτή η άποψη αποτελεί συχνά ανασταλτικό παράγοντα στη διαδικασία της μάθησης, αφού οι μαθητές αναλώνονται σε προσπάθειες μίμησης ή εφαρμογής του τρόπου επίλυσης που τους επιδεικνύεται από το βιβλίο ή το δάσκαλο και δεν αναπτύσσουν τις δικές τους στρατηγικές. Π.χ. στο α΄ τεύχος του τετραδίου εργασιών της Δ΄ τάξης στη σελίδα 35 έχουμε:

4) Ένα πολύγωνο έχει περίμετρο 60 εκ. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός. Πόσες πλευρές μπορεί να έχει και ποιο μπορεί να είναι το μήκος της καθεμιάς; Βρίσκουμε τρεις διαφορετικές λύσεις.

12. **Προβλήματα ατομικής ή ομαδοσυνεργατικής προσέγγισης.** Π.χ. στο α΄ τεύχος του βιβλίου του μαθητή της Α΄ τάξης στη σελίδα 61 έχουμε:

Πίνακας 10



Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι:

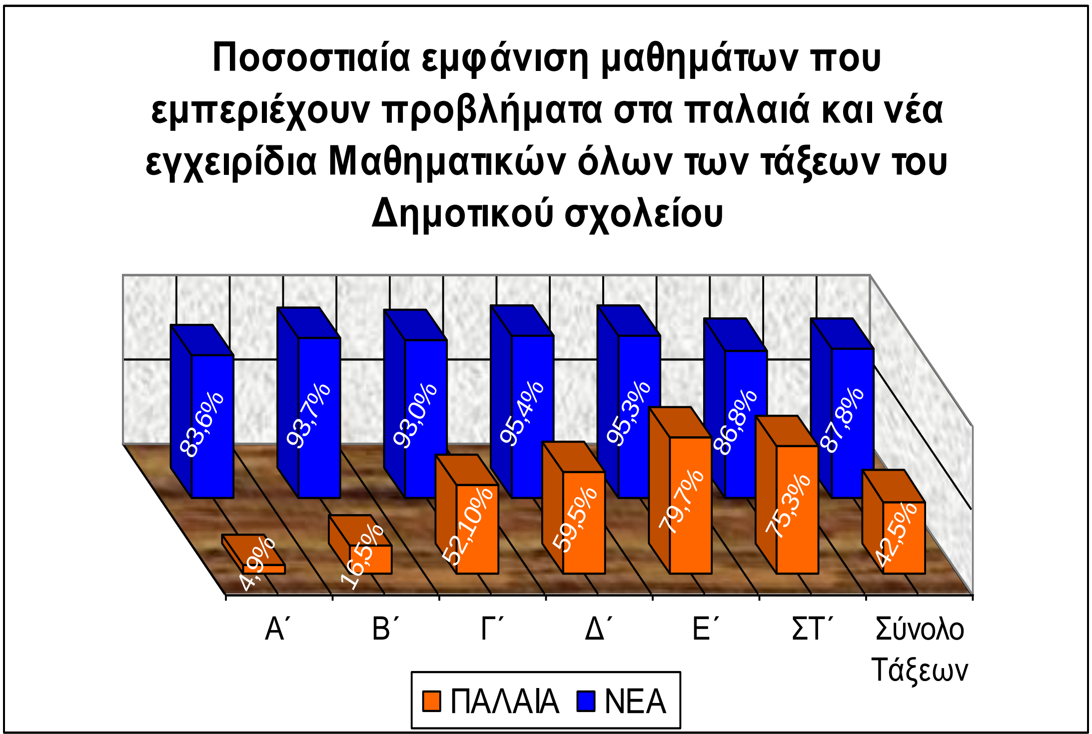
- Στα νέα βιβλία δεν υπάρχει σχεδόν καθόλου θεωρία και απλά κάθε κεφάλαιο καταλήγει σε ένα συμπέρασμα, μεγέθους τριών γραμμών περίπου, το οποίο λειτουργεί ως επισημοποίηση της νέας γνώσης, που μόνοι τους ανακαλύπτουν οι μαθητές.

- Ο αριθμός των κεφαλαίων που περιλαμβάνουν και προβλήματα φτάνει κατά μέσο όρο και στις έξι τάξεις στο 87,8% με μικρές διαφοροποιήσεις ανά τάξη (μικρότερο ποσοστό το 83,6% στην Α΄ και μεγαλύτερο το 95,4% στη Δ΄ τάξη).
- Περιορίζεται ο αριθμός των ασκήσεων που λύνονται μηχανιστικά και αυξάνεται σημαντικά ο αριθμός των προβλημάτων σε όλες τις τάξεις, που φτάνει στο 56% κατά μέσο όρο, με μεγαλύτερη εμφάνιση 67,6% στη ΣΤ΄ τάξη και μικρότερη στην Α΄ με ποσοστό 34,6%.
- Όσον αφορά τα είδη προβλημάτων που υπάρχουν στα νέα βιβλία και που παρουσιάστηκαν ενδεικτικά ανωτέρω, αυτά εμφανίζονται στον ίδιο περίπου βαθμό σε όλες τις τάξεις. Αυτή η διαπίστωση δεν είναι δυνατόν να παρουσιαστεί αναλυτικότερα στην παρούσα φάση καθώς δεν έχουν ακόμα κυκλοφορήσει όλα τα τεύχη των τετραδίων εργασιών, για το λόγο αυτό γίνεται μια εκτίμηση της συχνότητας εμφάνισης αυτών όπως φαίνεται και στον πίνακα 10.

4.1.3 Συγκριτική παρουσίαση προηγούμενων και νέων βιβλίων

4.1.3.1 Σύγκριση ως προς τον αριθμό μαθημάτων που εμπεριέχουν προβλήματα στα προηγούμενα και νέα βιβλία Μαθηματικών

Πίνακας 11



Στα προηγούμενα βιβλία ο αριθμός των μαθημάτων που εμπεριέχουν προβλήματα είναι ελάχιστος στην Α΄ τάξη και αυξάνεται σταδιακά, δημιουργώντας ένα μέσο όρο της τάξης του 42,5%. Στα νέα βιβλία έχουμε μεγάλο ποσοστό κεφαλαίων με προβλήματα σε όλες τις τάξεις, με μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ τους και με έναν μέσο όρο 87,8%. Έχουμε επομένως μια αύξηση της τάξης του 106,6%.

4.1.3.2 Σύγκριση ως προς το ποσοστό εμφάνισης ασκήσεων και προβλημάτων στα προηγούμενα και νέα βιβλία Μαθηματικών

Πίνακας 12

Οι ασκήσεις κυριαρχούν στα προηγούμενα βιβλία, ιδιαίτερα στις μικρότερες τάξεις (92,3% στην Α΄ τάξη) και μειώνονται σταδιακά στις επόμενες τάξεις, με μέσο όρο εμφάνισης 60,4%. Αντίστοιχα τα προβλήματα είναι ελάχιστα στην Α΄ τάξη και αυξάνονται σταδιακά, με μέσο όρο εμφάνισης 39,6%. Οι ασκήσεις υπερτερούν σε όλες τις τάξεις, πλην της Δ΄ και ΣΤ΄. Στα νέα βιβλία ασκήσεις και προβλήματα έχουν πιο ισόποση παρουσία σε όλες τις τάξεις με μέσους όρους 44% και 56% αντίστοιχα και με τα προβλήματα να προηγούνται σε όλες τις τάξεις, πλην της Α΄ και Γ΄.

4.1.4 Η παρουσία του προβλήματος στο εκπαιδευτικό λογισμικό Μαθηματικών – Ενδεικτικά στη Γ΄ τάξη

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το νέο διδακτικό πακέτο των Μαθηματικών περιλαμβάνει και ένα εκπαιδευτικό λογισμικό για κάθε δύο τάξεις, δηλαδή για τις Α΄- Β΄, Γ΄- Δ΄ και Ε΄ - ΣΤ΄, αφού οι Νέες Τεχνολογίες αποτελούν ένα δυναμικό και σύγχρονο μέσο το οποίο μπορεί να βοηθήσει αποτελεσματικά τις διαδικασίες της διδασκαλίας και της μάθησης και να βοηθήσει στην κατάκτηση από τους μαθητές αφηρημένων και δυσκολονόητων μαθηματικών εννοιών (Ράπτης & Ράπτη, 2001). Αυτό το λογισμικό θα βρίσκεται στα σχολεία από το σχολικό έτος 2007-08. Για το λόγο αυτό στην παρούσα εργασία θα γίνει μια περιορισμένη αναφορά σε αυτό και ενδεικτικά θα μελετηθούν τα είδη και η ποσότητα των προβλημάτων που υπάρχουν σε αυτό της Γ΄ τάξης.

Αναλυτικότερα, το εκπαιδευτικό λογισμικό της Γ΄ τάξης περιλαμβάνει 11 θεματικές, όπως φαίνεται και από την παραπάνω εικόνα:

Σε κάθε μία από αυτές αντιστοιχεί μια υποενότητα με τίτλο «Λύνω προβλήματα» και η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε μια λίστα προβλημάτων που έχουν τους παρακάτω τίτλους:

1. Γραφή των φυσικών αριθμών (8 προβλήματα)
    i. Πόσες μπίλιες χρειάζεστε;
    ii. Πώς ονομάζεται ο αριθμός που ακολουθεί;
    iii. Συμπληρώστε τον αριθμό.
    iv. Αριθμοί με 3 μπίλιες.
    v. Ποιο ψηφίο λείπει;
    vi. Πώς ονομάζεται ο αριθμός που ακολουθεί;

vii. Συμπληρώστε το κενό.

viii. Αριθμοί με 6 μπίλιες.

2. Σύγκριση αριθμών (4 προβλήματα)

   i. Σύγκριση των δεκαδικών αριθμών 1,4 και 1,8.

   ii. Σύγκριση των δεκαδικών αριθμών 1,4 και 2,4.

   iii. Σύγκριση των κλασματικών αριθμών 1/3 και 1/5.

   iv. Σύγκριση των αριθμών 0,6 και 1/2.

3. Πρόσθεση και αφαίρεση με φυσικούς αριθμούς (11 προβλήματα)

   i. Πόσο είναι το άθροισμα;

   ii. Ποιος αριθμός χρειάζεται;

   iii. Μαντέψτε τον τρίτο αριθμό.

   iv. Τι θα συμβεί αν προσθέσουμε 2 ακόμα μονάδες;

   v. Πρόσθεση δεκαδικών αριθμών.

   vi. Ένας γρίφος.

   vii. Συμπληρώστε τον πίνακα.

   viii. Μαντέψτε τον τρίτο αριθμό.

   ix. Τι θα συμβεί αν προσθέσουμε μία ακόμα μονάδα;

   x. Ένα παιχνίδι για 2 μαθητές.

   xi. Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

4. Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών (9 προβλήματα)

   i. Πολλαπλασιασμός με 10.

   ii. Πολλαπλασιασμός μονοψήφιου με διψήφιο αριθμό.

   iii. Πολλαπλασιασμός διψήφιου με διψήφιο αριθμό.

   iv. Συμπληρώστε τον αριθμό.

   v. Συμπληρώστε τα άδεια κουτάκια.

   vi. Πολλαπλασιασμός με 10, 20, 30, …

   vii. Συμπληρώστε τους αριθμούς.

   viii. Συμπληρώστε τον πολλαπλασιασμό.

   ix. Συμπληρώστε τα κενά.

5. Διαίρεση φυσικών αριθμών (9 προβλήματα)

   i. Τα 20 τετραγωνίδια.

   ii. Χωρισμός σε στήλες.

   iii. Ποιον αριθμό πρέπει να βάλετε στα κουτάκια;

   iv. Διαίρεση σχήματος.

   v. Τα 24 τετραγωνίδια.

   vi. Χωρισμός σε στήλες.

   vii. Ποιον αριθμό πρέπει να βάλετε στο κόκκινο κουτάκι;

viii. Διαίρεση με το 10.
ix. Διαίρεση σχήματος.

6. Δεκαδικοί αριθμοί (2 προβλήματα)
   i. Ο δεκαδικός αριθμός 3,2.
   ii. Δεκαδικοί αριθμοί ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 2.
7. Μετρήσεις (3 προβλήματα)
   i. Πόσα δεκάλεπτα κοστίζει;
   ii. Χαλάστε ευρώ.
   iii. Ισορροπήστε τη ζυγαριά.
8. Νομίσματα και δεκαδικοί αριθμοί (9 προβλήματα)
   i. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;
   ii. Ποιο δώρο είναι το φτηνότερο;
   iii. Πόσο στοιχίζει η καφέ μπάλα;
   iv. Μαθαίνω το ευρώ.
   v. Ποιοι αριθμοί λείπουν;
   vi. Αριθμοί ανάμεσα σε άλλους.
   vii. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;
   viii. Πόσα χρήματα κάνει η ακριβότερη μπάλα;
   ix. Ποιοι αριθμοί λείπουν;
9. Μοτίβα (7 προβλήματα)
   i. Ποιοι αριθμοί λείπουν;
   ii. Ποιοι αριθμοί λείπουν από τα κελιά;
   iii. Πώς πρέπει να συμπληρωθούν οι επόμενες σειρές;
   iv. Πόσα τετράγωνα από κάθε χρώμα χρειάζεστε ακόμα;
   v. Πώς πρέπει να συμπληρωθούν οι επόμενες σειρές;
   vi. Πόσα τρίγωνα από κάθε χρώμα χρειάζεστε ακόμα;
   vii. Συμπληρώστε τον πίνακα.
10. Γεωμετρία (9 προβλήματα)
   i. Παιχνίδι για δύο με τα πεντόμινα.
   ii. Τρίλιζα.
   iii. Το πλασματάκι.
   iv. Το χαλί.
   v. Ψάξτε για άξονες συμμετρίας 1.
   vi. Ψάξτε για άξονες συμμετρίας 2.
   vii. Τα προσωπάκια.
   viii. Κάλυψη επιφάνειας.
   ix. Το παζλ με τα πεντόμινα.

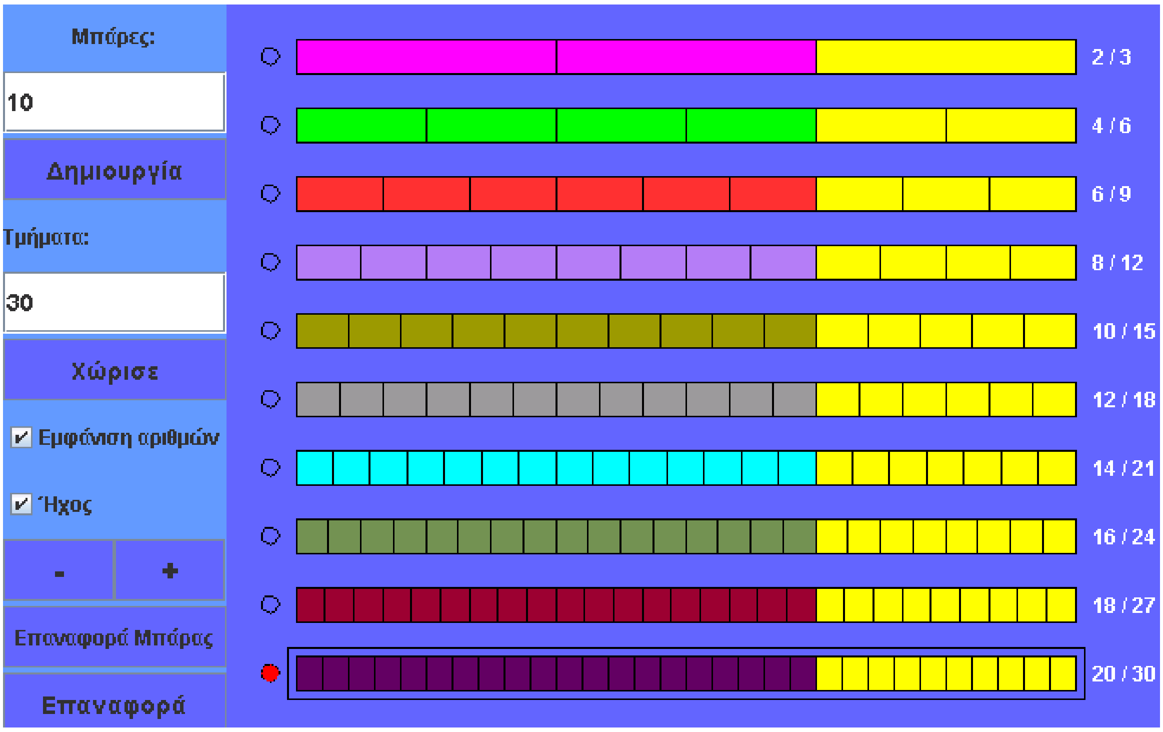
11. Κλάσματα (8 προβλήματα)
    i. Κόψτε ένα κομμάτι.
    ii. Κλάσματα με τις μπάρες.
    iii. Πόσα παιδιά έφαγαν την πίτσα;
    iv. Πόσα κομμάτια πίτσα έφαγαν;
    v. Κόψτε ένα κομμάτι;
    vi. Ίσα κλάσματα με τις μπάρες.
    vii. Πόσα παιδιά ήταν;
    viii. Μία πίτσα γίγας.

Δημιουργούνται επομένως με αυτό τον τρόπο τα 79 διαφορετικά προβλήματα που προαναφέρθηκαν και τα οποία καλύπτουν όλη την ύλη της Γ΄ Τάξης. Μέσω αυτών οι μαθητές καλούνται να εμπλακούν σε μαθησιακές καταστάσεις και να χρησιμοποιήσουν υπολογιστικά εργαλεία και λειτουργίες, να δράσουν διερευνητικά και να κάνουν δοκιμές και πειράματα.

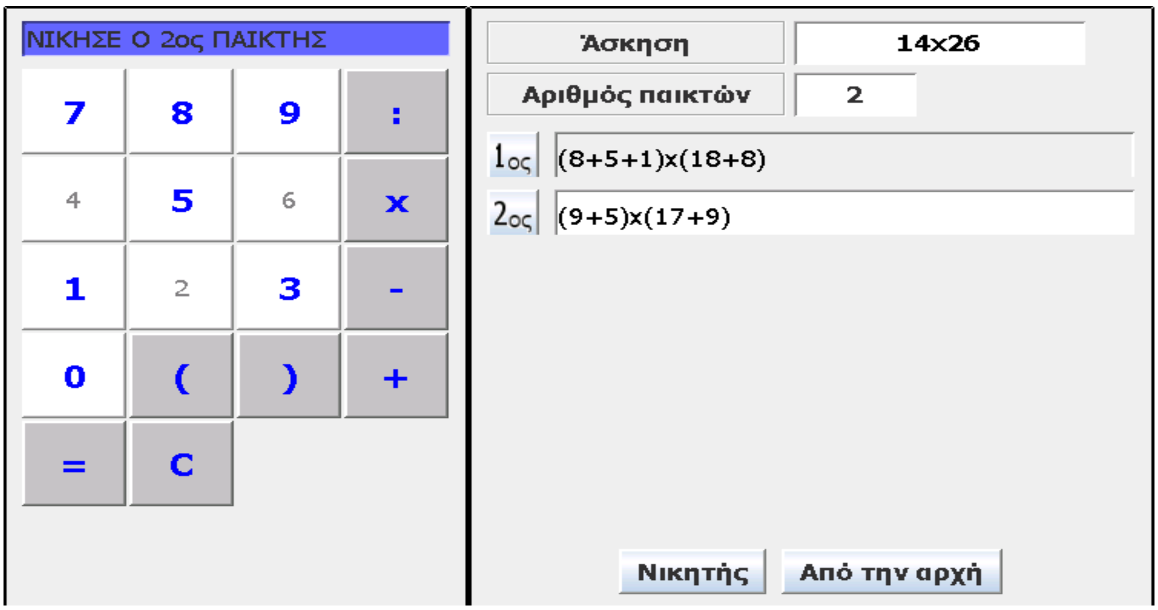
Σε όλη τη διαδικασία οι μαθητές έχουν ενεργητική συμμετοχή, αφού πρέπει οι ίδιοι να προετοιμάσουν τις κατάλληλες συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος και στη συνέχεια να επιχειρήσουν την επίλυσή του. Στα περισσότερα προβλήματα οι μαθητές καλούνται να βρουν τη λύση με τη μέθοδο της δοκιμής και πλάνης. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται στους μαθητές και ανατροφοδότηση, αφού μπορεί η διερεύνηση και εφαρμογή των υποθέσεών τους να οδηγήσει σε λάθος, το οποίο όμως μπορεί να γίνει αντικείμενο ερμηνείας και αναστοχασμού και επομένως αυτό να απενοχοποιηθεί. Ανατροφοδότηση δέχεται ο μαθητής και όταν ελέγχει τις ικανότητες και τις γνώσεις του και η οποία αφορά την απάντηση που έδωσε. Εμφανίζεται δηλαδή ένα μήνυμα σωστού ή λάθους και στη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν και οδηγίες προκειμένου να οδηγηθεί στο σωστό με την επόμενη προσπάθεια.

Σε σημαντικό αριθμό προβλημάτων, οι απαντήσεις που μπορούν να δώσουν οι μαθητές είναι περισσότερες από μία και αυτό δίνει την ευκαιρία σε αρκετούς μαθητές να έχουν μια επιτυχία. Πρόκειται δηλαδή για ανοικτά – κλειστά προβλήματα. Ορισμένα παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων παρουσιάζονται ενδεικτικά στη συνέχεια:

Στη θεματική ενότητα «Κλάσματα», το λογισμικό «Μπάρες» επιτρέπει στους μαθητές να σχηματίζουν κλασματικούς αριθμούς, να εμφανίζουν στο ίδιο περιβάλλον περισσότερα από ένα κλάσματα, να κάνουν τις συγκρίσεις που τους ζητάει το πρόβλημα και να καταλήγουν σε συμπεράσματα. Με αυτό τον τρόπο προβλήματα του τύπου: «Μπορείτε να βρείτε κλάσματα ισοδύναμα με το 2/3;» μπορούν να λυθούν με εύκολο και παραστατικό τρόπο αφού η πρώτη μπάρα μπορεί να χωριστεί σε τρία ίσα μέρη και να επιλεγούν τα δύο και στις επόμενες μπάρες οι μαθητές πειραματίζονται μέχρι να βρεθεί το πλήθος των μερών στα οποία πρέπει να χωριστούν, ώστε το επιλεγμένο μέρος τους να είναι ίσο με 2/3. Έτσι οι μαθητές δημιουργούν τα ισοδύναμα κλάσματα 2/3, 4/6, 6/9, 8/12, 10/15 κ.λ.π. και στη συνέχεια μπορούν παρατηρώντας αυτά τα ισοδύναμα κλάσματα που μόνοι τους δημιούργησαν να οδηγηθούν και στον κανόνα.



Το λογισμικό «Χαλασμένος υπολογιστής» είναι ένα παιχνίδι μεταξύ δύο και μέχρι επτά μαθητών οι οποίοι καλούνται να κάνουν έναν υπολογισμό, χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή στον οποίο όμως έχουν χαλάσει ορισμένα πλήκτρα. Αυτά επιλέγονται κάθε φορά ανάλογα με τον υπολογισμό που πρέπει να γίνει και σε κανονικές συνθήκες θα ήταν απαραίτητα. Οι μαθητές πρέπει να βρουν άλλο τρόπο παρουσίασης των αριθμών, δηλαδή να αναλύσουν και να εκφράσουν έναν αριθμό με τη βοήθεια άλλων που σχηματίζονται με τα διαθέσιμα πλήκτρα, για να φτάσουν στο αποτέλεσμα. Νικητής είναι αυτός που πετυχαίνει τον καλύτερο συνδυασμό κάνοντας χρήση λιγότερων πλήκτρων. Πρόκειται για ένα πολύ ενδιαφέρον ανοικτό – κλειστό πρόβλημα, που ο παιγνιώδης τρόπος με τον οποίο δίδεται το κάνει ακόμα πιο προκλητικό για τους μαθητές και πιθανόν συντελεί στην αυξημένη συμμετοχή τους στη διαδικασία.



Το λογισμικό «Ηλεκτρονικό κατάστημα» επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν εικονικές αγορές αντικειμένων (μπάλες) που βρίσκονται στα ράφια του καταστήματος. Το γεγονός ότι οι χρήστες μπορούν να αγοράσουν μια μπάλα, μόνο εφόσον σχηματίσουν το ακριβές αντίτιμο, καθιστά το πρόγραμμα κατάλληλο για να εισάγει τους μαθητές στους δεκαδικούς αριθμούς. Οι μαθητές στην περίπτωση που αγοράσουν δύο αντικείμενα πρέπει επιπλέον να κάνουν μια εκτίμηση του κόστους και να ζητήσουν από την τράπεζα όσα € χρειάζονται για την αγορά τους. Στη συνέχεια πρέπει εάν είναι απαραίτητο να μετατρέψουν 1€ σε 10 δεκάλεπτα και ίσως και 1 δεκάλεπτο σε 10 λεπτά προκειμένου να σχηματίσουν το ακριβές αντίτιμο. Αφού κρατήσουν στον κουμπαρά τους όσα κέρματα περισσεύουν τότε πληρώνουν και μπορούν τα αντικείμενα που αγόρασαν να μεταφερθούν από το ράφι στο καλάθι που είναι δίπλα στο ταμείο. Εάν έχει γίνει κάποιο λάθος, η ενέργεια της μεταφοράς δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί, οπότε ο μαθητής επανέρχεται στην αρχή.

Συνοψίζοντας την παρουσίαση του εκπαιδευτικού λογισμικού Μαθηματικών της Γ΄ τάξης μπορούμε να υποθέσουμε μόνο, αφού μόνο μετά τη χρήση του στην τάξη θα έχουμε τη δυνατότητα κριτικής, ότι οι μαθητές θα έχουν μια επιπλέον ευκαιρία, πέραν αυτής που τους δίδεται με τα βιβλία των Μαθηματικών, να έρθουν αντιμέτωποι με ανοικτά – κλειστά προβλήματα και πραγματικές προβληματικές καταστάσεις και θα κληθούν να βρουν εναλλακτικές προσεγγίσεις και λύσεις σε αυτά, γεγονός που, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο θεωρητικό μέρος της εργασίας αυτής, θα τους βοηθήσει να αναπτύξουν τις ανάλογες δεξιότητες στην καθημερινή τους ζωή και στο μέλλον.

4.2 Συμπεράσματα

Παρά το γεγονός ότι το ραγδαία μεταβαλλόμενο τεχνολογικό περιβάλλον που εξαρτάται όλο και περισσότερο από τη μαθηματική γνώση και κατανόηση, δημιουργεί την ανάγκη για μια άρτια μαθηματική εκπαίδευση στη σημερινή εποχή, εντούτοις οι μαθητές απορρίπτουν τα μαθηματικά, τα φοβούνται, τα αντιπαθούν, αλλά και όταν τα μελετούν καταφεύγουν σε μεθόδους οι οποίες αντιμετωπίζουν επιτυχώς ή μη εξεταστικές μόνο απαιτήσεις (Bishop 1988).

Η κυριαρχία αποστήθισης θεωρίας και κανόνων, ασκήσεων και τυποποιημένων μηχανισμών επίλυσης στη σχολική πρακτική, όπως αυτή φάνηκε ότι υπήρχε στα προηγούμενα βιβλία Μαθηματικών, συνέπεια του συστήματος επιλογής των ΑΕΙ, συνιστά εκτροπή από τους σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών. «Το σημαντικό, με τα προηγούμενα βιβλία, ήταν ο μαθητής να είναι καλός τεχνικά. Να μην κάνει λάθη. Να εφαρμόζει διαδικασίες αυτοματισμού», όπως λέει ο Γιώργος Καργιωτάκης (εφημερίδα «ΤΑ ΝΕΑ» 16-17 /09/2006). Αλλά και το καθιερωμένο σύστημα διδασκαλίας όχι μόνο αδυνατούσε να εξασφαλίσει τη μάθηση στοιχειωδών μαθηματικών γνώσεων στη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών, αλλά καλλιεργούσε μια στρεβλή αντίληψη για τα Μαθηματικά ακόμη και στους θεωρούμενους ως «επιτυχημένους» του συστήματος.

Αξιοσημείωτο να αναφερθεί εδώ είναι το γεγονός πως η Ελλάδα είναι το μοναδικό κράτος στον κόσμο που μοιράζει στους μαθητές τις λύσεις όλων των ασκήσεων των σχολικών βιβλίων, σε αντίθεση με άλλα κράτη που δίνουν κάποιες υποδείξεις ή τις απαντήσεις των ασκήσεων (Κόθαλη-Κολοκούρη, 1990). Αυτό βέβαια συμβαίνει ιδιαίτερα στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, όπου αρκετοί μαθητές δεν λύνουν μόνοι τους τις ασκήσεις και δεν ασκούνται στην επίλυση προβλημάτων αλλά απλά απομνημονεύουν λύσεις γνωστών ασκήσεων ή αντιγράφουν από το «λυσάρι» τις ασκήσεις που τους έχουν αναθέσει οι καθηγητές. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από τα αποτελέσματα της έρευνας των Πέτρου & Οικονόμου (1986) σχετικά με τη χρησιμοποίηση από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της μελέτης τους του διδακτικού βιβλίου και του βιβλίου των λύσεων των Μαθηματικών. Παρά το γεγονός ότι στην εισαγωγή των βιβλίων λύσεων, στις οδηγίες προς το μαθητή, σημειώνεται: «Στις ελάχιστες περιπτώσεις που έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας δεν βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης, τότε και μόνο τότε μπορείς να καταφύγεις σε αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος», οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα δηλώνουν σε ποσοστό 47,9%, ότι εφαρμόζουν κατά γράμμα αυτή την υπόδειξη, το 22,7% δηλώνει μερική εφαρμογή της υπόδειξης, δηλαδή όταν αποτύχουν στην προσπάθεια να λύσουν μια άσκηση την αντιγράφουν από το βιβλίο λύσεων, ενώ οι υπόλοιποι, δηλαδή το 29,4%, περιορίζονται στο να αντιγράψουν την άσκηση (και όχι πάντοτε) χωρίς καμιά προσπάθεια να τη λύσουν. Από τους τελευταίους οι μισοί περίπου δηλώνουν ότι μαθαίνουν την άσκηση απέξω ενώ οι άλλοι μισοί την μαθαίνουν μόνο όταν πρόκειται να εξεταστούν. Επομένως ένας στους τρεις μαθητές χρησιμοποιεί το βιβλίο των λύσεων με τρόπο επιζήμιο. Το σίγουρο πάντως είναι ότι δεν εξασκούν την ευελιξία της σκέψης τους και τη δημιουργική τους ικανότητα που είναι απαραίτητες στην επίλυση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων.

Σήμερα, «από την αποστήθιση κανόνων περνάμε στη δημιουργική προσωπική κατασκευή», όπως λέει η Μαρία Χιονίδου (εφημερίδα «ΤΑ ΝΕΑ» 16-17 /09/2006) και οι μαθητές «μαθαίνουν δρώντας και κατανοώντας» με προβλήματα από την καθημερινή ζωή που σε τραβάνε να τα λύσεις. Η «επίλυση προβλημάτων» τείνει να επαναφέρει τη διδασκαλία των Μαθηματικών στους πραγματικούς της σκοπούς, όπως αυτοί ορίζονται σήμερα, δεδομένου ότι επιτρέπει τη σύζευξη της πρότασης για «χρήσιμα» Μαθηματικά, όπου ο μαθητής ασκούμενος στη λύση προβλημάτων προετοιμάζεται για την επιβίωσή του σε ένα πολύπλοκο και διαρκώς μεταβαλλόμενο κοινωνικό περιβάλλον και της ανάγκης γνωριμίας της Μαθηματικής επιστήμης που είναι ένα από τα κορυφαία επιτεύγματα του ανθρώπινου πολιτισμού, αφού η μαθηματική γνώση οικοδομείται μέσα από προβλήματα που επιτρέπουν να αναδειχθεί ο ρόλος και η χρησιμότητά της.

Αυτό που πρέπει να γίνει συνείδηση στους μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με την επίλυση ανοικτών-κλειστών προβλημάτων είναι πως το «καλό αποτέλεσμα» και η «σωστή λύση» δεν είναι αναγκαστικά ο μοναδικός στόχος αλλά αυτά που έχουν μεγαλύτερη σημασία είναι η διαδικασία, οι προσπάθειες, οι εικασίες, η λύση βοηθητικών προβλημάτων, η πρωτότυπη έρευνα, η αυτοαξιολόγηση, η συνεργατικότητα. «Τώρα, καλός είναι αυτός που κάνει λάθη αλλά μαθαίνει από αυτά …Το ζήτημα είναι ο μαθητής να καταλάβει. …να καταλάβουν οι μαθητές ότι σε ένα πρόβλημα μπορεί να βρουν και δεκαπέντε λύσεις…», σύμφωνα με τον Γιώργο Καργιωτάκη (εφημερίδα «ΤΑ ΝΕΑ» 16-17 /09/2006).

Επιπλέον, αυτό που πρέπει να γίνει συνείδηση στους εκπαιδευτικούς είναι πως η διδασκαλία της λύσης προβλημάτων θα πρέπει να είναι ενσωματωμένη μέσα στη ροή της διδασκαλίας των μαθηματικών και αμοιβαία η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να γίνεται λύνοντας προβλήματα και ακόμη ότι η χρήση της Νέας Τεχνολογίας στα Μαθηματικά δεν θα καταργήσει τα Μαθηματικά αλλά με τη δομητιστική προσέγγισή τους θα τα διευρύνει και θα τα ζωντανεύσει κάνοντάς τα πιο ελκυστικά για τους μαθητές.

Τελειώνοντας, ευελπιστούμε ότι με τα νέα βιβλία των Μαθηματικών και με τις απαραίτητες επιμορφώσεις των εκπαιδευτικών θα έχουμε μια βελτίωση των μαθητών στα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο, η οποία θα επιδράσει θετικά και στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης.

Και αν όλη αυτή η διαδικασία φαίνεται υπερβολικά χρονοβόρα, αξίζει να αναλογιστούμε: Τι είναι προτιμότερο; Να καλύψουμε την ύλη και να μην μείνει σχεδόν τίποτα σε έναν μεγάλο αριθμό μαθητών ή να αποκτήσουν οι μαθητές λίγη και σταθερή γνώση σε κάθε σχολική χρονιά που θα μπορούν να την χρησιμοποιούν σε διάφορες καταστάσεις, αναπτύσσοντας δηλαδή παράλληλα και την κριτική και τη δημιουργική τους ικανότητα;

5 Βιβλιογραφία

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1985). *Probléme Ouvert et Situation-Probléme.* Lyon/France: IREM.

Becker, J. P. & Selter, C. (1996). Elementary School Practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C.Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp.511-564). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Becker, J. & Shimada, S. (1997). [eds.]. *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bingham, A. (1963). *Improving Children's Facility in problem solving.* New York: Columbia University Bureau of Publications.

Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation.* Kluwer Academic Publishers.

Blum, W. - Niss, M. (1991). Applied Mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects. *Educational Studies on Mathematics, 22.1, 37-68.* Netherland: Reidel Publishing Company.

Bouvier, A. (1988). Πρακτικά σεμιναρίου της ΕΜΕ, Δεκέμβριος 1988.

Brousseau, G. (1981). Problémes de didactique des decimaux. *RDM, vol 2.1.* Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques* 4, 2, 164-198.

Brousseau, G. (1988). Ένα πείραμα επιστημολογίας στη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών. *Διάσταση*, 2, 59-75.

Cambourne, B. (1988). *The Whole Story.* Sydney: Ashton Scholastic.

Chevallard, Y. (1988). Sur l' Analyse Didactique Deux; etudes sur les notions de Contrat et de Situation. *Publication de l' IREM d' Aix-Marseille.*

Clement, J., Lochhead, J., Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning Mathematics. *The American Mathematical Monthly, vol.88, No4.*

Coad, J. (2003). Problem-solving exercises. *Mathematics Teaching. 185, 39-40.*

De Bono, E. (1973). *The mechanism of mind.* Harmondsworth: Penguin.

De Bono, E. (1976). *Lateral thinking for management.* London: McGraw Hill.

De Bono, E. (1978). *Children solve problems.* London: Penguin.

Dreyfus, T. et al. (1990). Advanced mathematical thinking. In: P. Nesher & G. Kilpatrick (eds). *Mathematics and cognition, 113-134.* Cambridge: Cambridge University Press.

Fisher, R. (1995). *Teaching Children to Think.* United Kingdom: Stanley Thornes.

Halmos, P. (1975). The teaching of problem solving. *American Mathematical Monthly, 82, 5, 446-470.*

http://el.wikipedia.org (21/08/2006)

http://nrich.maths.org (16/04/2006)

http://turing.une.edu.au (23/08/2006)

http://www.fi.edu/school/math2/index.html (6/04/2006)

http://www.getsmarter.org/math/index.cfm?grade=elem (6/04/2006)

http://books.heinemann.com/math/reasons.cfm (10/04/2006)

ICME, (1988). Proceedings of the 6th International Congress on Mathematical Education (Edited by Ann & Keith Hirst).

Kantowski, M. (1981). Problem solving. In *Mathematics Education Research: Implications for the 80's.* (pp. 111-126). Reston Virginia: E. Fennema.

Kerr, D. & Maki, D. (1979). Mathematical models to provide applications in the classroom. In: *N.C.T.M. Applications in school Mathematics, yearbook.*

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E. (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In: A. Schoenfeld (ed). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates.

Kline, M. (1993). *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης.* Θεσσαλονίκη: Βάνιας.

Krulik, S. & Reys, R. (1980). (eds.). Problem solving in school mathematics. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. Yearbook.

Krulik, S. & Rudnick, S. (1987). *Problem solving*. Massachusetts USA: Allyn and Bacon In.

Lesh, R. (1987). The evolution of problems representations in the presence of Powerful Conceptuals amplifiers. In: Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Lawrence Erlbaum.

Lester, F. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem Solving Instruction. In: Silver, E. (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lipman, M. (1991). *Thinking in Education.* London: Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (1995). *Μαθηματική Ικανότητα.* Αθήνα: Gutenberg.

Morgan, J. (1968). *Improving your creativity on job.* Washington: AMA (American Management Association).

Mourtos, N. & DeJong Okamoto, N. & Rhee, J. (2000). Open-Ended Problem-Solving Skills in Thermal Fluids Engineering. *Global J. of Engineering Education.Vol.8, No.2.* Australia.

Mungny, G. (1978). *Psyhologie Social du development cognitive.* Lang.

N.C.T.M. (1980). *An Agenda for Action.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Nobuhico, N. (1984). *Problem Solving using "Open-Ended problem" in Mathematics Teaching, in Problem Solving – A World View,* in: 5th International Congress of Mathematical Education.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Oke, K.H. & Bajpai, A.C.(1986). The formulation – Solution Processes in Mathematical Modelling. In: Berry, J.S. et al. (eds). *Mathematical Modelling, methodology, Models and Micros*. Ellis Horwood.

Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problems in mathematics. In: *ZDM, 2, An*alyses: Using open-ended problems in mathematics.

Pehkonen, E. (1995). On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. Nordic Studies in Mathematics Education 3 , 43-57.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom.* Helsinki: Department of Teacher Education University and Helsinki.

Pehkonen, E. (2001). Open-ended problems: A method for an educational change. In: Proceedings of the 4th Panhellenic Conference in Crete , October 1999 (eds. P. Michaelides, A. Kollias & A. Margetousaki), 56-62. Rethymno: University of Crete.

Perez, G. & Torregrossa, M. (1983). A model of problem solving in accordance with scientific methodology. *European journal of science education, vol.5, no4,* pp 447-455.

Placek, D.T.,(n.d.) *Successful Problem Solving Methodologies.* http://www.eng.auburn.edu/~tplacek/courses/2100/problemsolvingmethology.html

Polya, G. (1990). *Πώς να το λύσω.* Μτφρ. Λ. Σιαδήμας. Αθήνα: Σπηλιώτη.

Rubin, R. (1979). Model formulation using intermediate systems. *The American Mathematical Monthly, vol.86,* p.p 299-303.

Scemp, R. (1981). What is a good environment for the intelligent learning of Mathematics? *R.D.M., 2.2,* 257-266. Paris: La pensée sauvage.

Schoenfeld, A. (1980). Teaching Problem Solving Skills. *American Math.Monthly,87,* 794-805.

Schoenfeld, A. (1983). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum.* The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A Brief and Biased History of Problem Solving. In: Curcio, F. (Ed), *Teaching and Learning: A Problem-Solving Focus.* National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about Metacognition. In: *Cognitive Science and Mathematics Education.* (Ed) A. H. Schoenfeld, Lawrence Erlbaum Ass. Publishers.

Schoenfeld, A. (1992).Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: D. Grouws (ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp.334-370. New York: Macmillan and National Council of Teachers of Mathematics.

The Open University, (1985). *Μάθηση και Εκπαίδευση*. Αθήνα: Π. Κουτσουμπός, ΑΕ.

Treilibs, V. (1979). *Formulation Processes in Mathematical Modelling*. Shell Centre for Mathematical Education.

Van der Waerden, B. L. (2003). *Η αφύπνιση της επιστήμης*. 2η έκδοση. (Απόδοση στα ελληνικά-επιστημονική επιμέλεια: Γιάννης Χριστιανίδης).Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Weir, J. (1974). Problem solving is everybody's Problem. *The Science Teacher,* April, 16-18.

Weisstein, E. *Unsolved Problems*. MathWorld – A Wolfram Web Resource.

Woods, D. R., Hrymak, A.N., Marshall, R.R.,Wood, P.E., Crowe, C.M., Hoffman, T.W., Wright, J.D., Taylor, P.A., Woodhouse, K.A. and Bouchard, C.G.K., (1997). Developing problem-solving skills: the McMaster problem-solving program. *ASEE J. of Engng. Educ*., 86, 2, 75-91.

Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* Vol.13, No.1, pp.115-128.

Αδαμόπουλος, Λ. (1993). Τα αναθεωρημένα βιβλία Μαθηματικών των Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεων του Δημοτικού Σχολείου. *Ευκλείδης Γ΄, 38,* 93-102. Αθήνα: ΕΜΕ.

Βότσος, Ι. (1997). *Τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο, Διδακτική προσέγγιση με σύγχρονα διδακτικά μοντέλα και δείγματα εφαρμογών.* Θεσσαλονίκη: Παρατηρητής.

Γαγάτσης, Α. (1988). Διδασκαλία των Μαθηματικών με Ανοιχτά Προβλήματα. *Τετράδια διδακτικής Μαθηματικών, 1,* 26-28. Θεσσαλονίκη.

Γομάτος, Λ. (1993). Δύο εναλλακτικές προτάσεις για το είδος και τη θέση του προβλήματος στα μαθήματα των θετικών επιστημών. *Ευκλείδης Γ΄, 38,* 14-25. Αθήνα: ΕΜΕ.

Εξαρχάκος, Θ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών.* (Γ΄ έκδοση). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Εξαρχάκος, Θ. (1994). Η φιλοσοφία λύσης προβλημάτων στην αρχαία Ελλάδα. *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Αθήνα: ΕΜΕ.

Ερευνητική ομάδα του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών. (1988). Προς μια «ανοιχτή» διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. *Διάσταση, 2,* 36-47. Θεσσαλονίκη.

Ευσταθόπουλος, Β. (1987). Η λύση των προβλημάτων και ο ρόλος της κατάστασης-πρόβλημα στις μαθησιακές διαδικασίες. *Ευκλείδης Γ΄, 16,* 3-10. Αθήνα: ΕΜΕ.

Θωμαΐδης, Γ. (1995). Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης - η περίπτωση της απόλυτης τιμής. Διδακτορική διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Θωμαΐδης, Γ. (1997). Είναι δυνατός ο «ιστορικός παραλληλισμός» στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών; Η περίπτωση της διάταξης στην αριθμητική ευθεία. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 2,* 3-38.

Καλαβάσης, Φ. (1997). Ρόλος των προβλημάτων στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 47,* 37-50. Αθήνα: ΕΜΕ.

Καραγεώργος, Δ. (1993). Εμπέδωση μαθηματικών εννοιών με προβλήματα της καθημερινής ζωής. *Ευκλείδης Γ΄, 38,* 7-13. Αθήνα: ΕΜΕ.

Καραγεώργος, Δ. (2000). *Το πρόβλημα και η επίλυσή του – Μια διδακτική προσέγγιση.* Αθήνα: Σαββάλας.

Καργιωτάκης, Γ. (1993). Η ικανότητα ελέγχου κατά τη διάρκεια λύσης προβλήματος. *Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Μαθηματικής Εταιρείας.*

Κλαουδάτος, Ν. (1989). Οι πρόσφατες εξελίξεις στη λύση προβλημάτων, στη μοντελοποίηση και στις εφαρμογές των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄, 23,* 78-93. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κλαουδάτος, Ν. (1990). Μοντελοποίηση: ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο. *Ευκλείδης Γ΄, 25,* 42-65. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κλαουδάτος, Ν. (1997). Η διδασκαλία των Μαθηματικών ως λύση προβλήματος: ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων. Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 2, 39-72.

Κλαουδάτος, Ν. & Παπασταυρίδης, Σ. (1997). Τα μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός κόσμος. Πώς θα συνδυάσουμε θεωρία και πράξη. Στο: Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης (επιμ.),*Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ, 207-245.* Αθήνα: Gutenberg.

Κόθαλη-Κολοκούρη, Ε. (1990). Τα ανοιχτά προβλήματα και η εφαρμογή τους στο Ελληνικό σχολείο. *Ευκλείδης Γ΄, 24,* 54-73. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόθαλη-Κολοκούρη, Ε. & Γεωργακάκος, Η. (1992). Το πρόβλημα και η επίλυσή του. Διδακτική προσέγγιση στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο. Στο: Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης (επιμ.), Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών, 281-309. Αθήνα: Προτάσεις.

Κολέζα-Αδάμ, Ε. & Σουρλάς, Κ.Β. (1990). Ασκήσεις και προβλήματα - μια λειτουργική ταξινόμηση. *Ευκλείδης Γ΄, 27,* 30-90. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κορδάκη, Μ. (2004). Δραστηριότητες για τη διδασκαλία των μαθηματικών Δημοτικού με τη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού. 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο της

ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ με θέμα :"*Παιδαγωγική αξιοποίηση των ΝΤ στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*". Διοργάνωση: ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ (Επιστημονική Ένωση Εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας για τη διάδοση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση) Οκτώβριος 2004.

Κόσυβας, Γ. (1995). Προσεγγίσεις της έννοιας και του ρόλου του ανοιχτού προβλήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄, 43,* 11-34. Αθήνα: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (1996). Η πρακτική του ανοικτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο, γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή των παγιωμένων αντιλήψεων. Αθήνα: Gutenberg.

Λεξικό του Τριανταφυλλίδη.

Λεξικό. *Θησαυρός της Ελληνικής γλώσσας.* Γιοβάνης.

Λιναρδάκης, Π. (1991). Σημαίνον και σημαινόμενο στα σχολικά μαθηματικά. *Ευκλείδης Γ΄, 29,* 95-101. Αθήνα: ΕΜΕ.

Μαγνήσαλης, Κ. (1996). *Δημιουργική: θεωρία & τεχνική για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας.* Αθήνα: Interbooks.

Μάκρας, Σ. & Σαλίχος, Μ. (1991). Αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών στα Μαθηματικά κατά την είσοδό τους στο Λύκειο. *Ευκλείδης Γ΄, 30-31,* 42-60. Αθήνα: ΕΜΕ.

Μαμωνά – Downs, Γ. (1993). Η σημασία του problem posing για τη μαθηματική παιδεία. *Ευκλείδης Γ΄, 36-37,* 5-13. Αθήνα: ΕΜΕ.

Μπαραλής, Γ. (2001). Η ικανότητα μαθηματικοποίησης και επίλυσης προβλήματος από τους μαθητές Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου. *Ευκλείδης Γ΄, 56,* 20-36. Αθήνα: ΕΜΕ.

Μπόλης, Ο. & Τζανή, Μ. (1993). Συσχέτιση της γλωσσικής και μαθηματικής ικανότητας των τελειοφοίτων Λυκείου και διαφυλικές διαφορές. Στο: Ε. Παπαδοπετράκης (επιμ.). *Γλώσσα και σκέψη στη μαθηματική παιδεία. 289-332.* Πρακτικά 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Πάτρα: Ε-ΜΕ.

Οικονόμου, Α. & Αναστασίου, Ν. (1992). Βασικές μαθηματικές γνώσεις των νεοεισαγόμενων στα Τ.Ε.Ι. Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. *Ευκλείδης Γ΄, 33-34-35,* 59-66. Αθήνα: ΕΜΕ.

Οικονόμου, Π. (1984). Η αντιμετώπιση του λάθους από τον καθηγητή των Μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 27,* 79-94. Αθήνα: ΕΜΕ.

Οικονόμου, Π. (1997). Η «επίλυση προβλήματος» στην ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση. Στο: Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης (Επιμ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ,* (σελ. 275-289). Αθήνα: Gutenberg.

Περδικάρης, Σ. (1984). Η μέθοδος ανακάλυψης στα στοιχειώδη Μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 27,* 73-78. Αθήνα: ΕΜΕ.

Περδικάρης, Σ. (1985). Οι ευρετικές (heuristics) στη διαδικασία πρόβλημα – λύση. *Ευκλείδης Γ΄, 6*,.Αθήνα: ΕΜΕ.

Πέτρου, Α. & Οικονόμου Ν. (1986). Η χρησιμοποίηση του διδακτικού βιβλίου και του βιβλίου λύσεων των Μαθηματικών - Έρευνα σε μαθητές Λυκείου. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 30, 55-94*. Αθήνα: ΕΜΕ.

Πόταρη, Δ. (1989). Οι υπολογιστές στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄, 23,* 67-77. Αθήνα: ΕΜΕ.

Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2001). *Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας - Ολική προσέγγιση.* τ. Α΄. Αθήνα: Ράπτης Α.

Σακονίδης, Χ. (1989). Μαθηματικά, Εκπαίδευση και Κοινωνία. *Ευκλείδης Γ΄, 23,* 35-41. Αθήνα: ΕΜΕ.

ΥΠΕΠΘ. (1987). *Αναλυτικά Προγράμματα Μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000). *Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης-Θετικές Επιστήμες.* Αθήνα: Π.Ι.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2001). *Οδηγός για την εφαρμογή της Ευέλικτης Ζώνης - Βιβλίο για το Δάσκαλο.* Αθήνα: Π.Ι.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Φ.Ε.Κ. τεύχος Β΄ αρ. φύλλου 303/13-03-03 Παράρτημα τόμος Α΄.*

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – Α΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – Β΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – Γ΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – Δ΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – Ε΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Τα μαθηματικά μου – ΣΤ΄ τάξη Δημοτικού* (πρώτο και δεύτερο μέρος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2001). *Τα μαθηματικά μου – Α΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000). *Τα μαθηματικά μου – Β΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). *Τα μαθηματικά μου – Γ΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000). *Τα μαθηματικά μου – Δ΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000). *Τα μαθηματικά μου – Ε΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2000). *Τα μαθηματικά μου – ΣΤ΄ τάξη Δημοτικού – βιβλίο για το δάσκαλο*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (α΄ και β΄ τεύχος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* – βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού* (α΄ και β΄ τεύχος). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Β΄ – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού* – βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής.* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού – Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* – βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Δ΄ – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού* – βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Ε΄ – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού* – βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά ΣΤ΄ – Τετράδιο Εργασιών* (α΄, β΄, γ΄, δ΄ τεύχη). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

ΥΠΕΠΘ-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2006). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού* – βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Φιλίππου, Α. (1984). Σύγχρονες κατευθύνσεις στα σχολικά Μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 26,* 117-121. Αθήνα: ΕΜΕ.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2004). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Τυπωθήτω.

Χαλάτσης, Α., Κουφός, Ο. & Μπαγιάτης, Κ. (1989). Η προετοιμασία για τα Μαθηματικά δέσμης. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 10,* 85-104. Αθήνα: ΕΜΕ.

Χαλάτσης, Αθ. (1993). Λύση προβλημάτων και μαθηματική εκπαίδευση. *Ευκλείδης Γ΄, 38,* 26-47. Αθήνα: ΕΜΕ.

Χαλάτσης, Αθ. (1993). Κριτική σκέψη και μαθηματικά. *Ευκλείδης Γ΄, 36-37,* 103-114. Αθήνα: ΕΜΕ.

Χασάπης, Δ. (1981). Η διδασκαλία των Μαθηματικών της πράξης. *Σύγχρονη Εκπαίδευση, 2,* 43-50. Αθήνα.

Χασάπης, Δ. (1983). Ασκήσεις και προβλήματα μαθηματικών: εννοιολογική επανατοποθέτηση και παιδαγωγική αξιολόγηση. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, *10,* 31-36. Αθήνα.

Χασάπης, Δ. (1992). Η συμβολή της διδασκαλίας των μαθηματικών στην ανάπτυξη ικανοτήτων χειρισμού μαθηματικών προβλημάτων. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 63, 42-50. Αθήνα.

Χασάπης, Δ. (1993). Η ικανότητα συμβολικής διατύπωσης ποσοτικών σχέσεων και αριθμητικών πράξεων στα πλαίσια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων: Ερευνητικές διαπιστώσεις και ερμηνευτικές εκδοχές, Πρακτικά 9ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας με θέμα "Γλώσσα και Σκέψη στη Μαθηματική Παιδεία", Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Πάτρα: 156-167.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1993). Μαθαίνουμε Ερευνώντας, Ανακαλύπτοντας. Ανοιχτό Πρόβλημα στα Μαθηματικά. *Ανοιχτό Σχολείο*. τ. 43, σελ. 12-16.

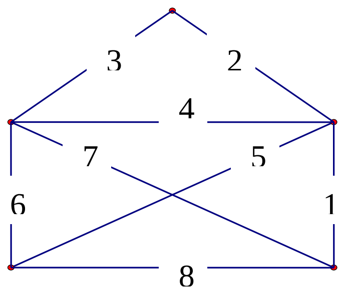
Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1999). Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στο Κονστρουκτιβιστικό Μοντέλο Διδασκαλίας και Μάθησης των Μαθηματικών με Χρήση Ανοιχτών Προβλημάτων (open-ended) και Ομαδο-συνεργατικής Διδασκαλίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών,* Τεύχος 3-4, σελ. 3-36.

6 Παράρτημα

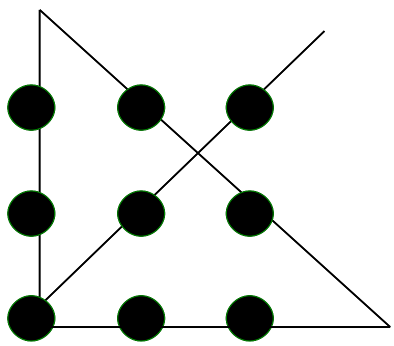
6.1 Υποδείξεις λύσεων ή απαντήσεις των ανοικτών-κλειστών προβλημάτων του υποκεφαλαίου 3.2.11.1

1. Το τετράγωνο σχήμα είναι η προτιμότερη λύση αφού έτσι περιφράσσεται η μεγαλύτερη έκταση γης.

2. Μια από τις πολλές λύσεις που υπάρχουν είναι η παρακάτω:



3.

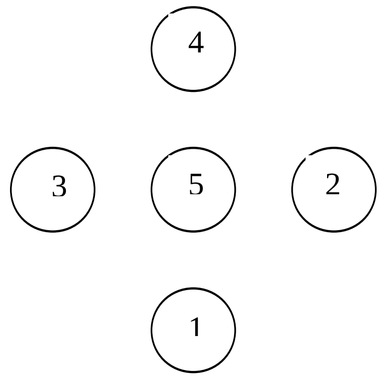


4.

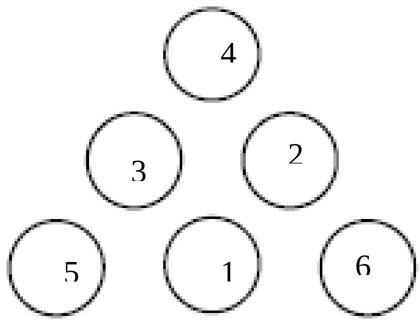
8	3	4
1	5	9
6	7	2

5. Υπάρχουν 33 τρίγωνα.

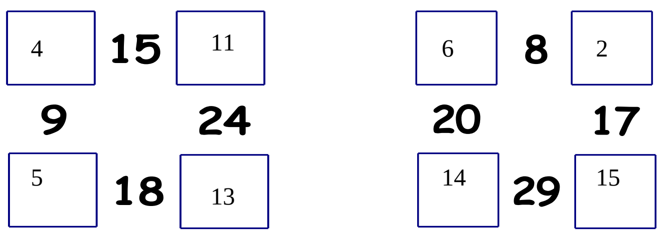
6. Μια από τις λύσεις είναι και η παρακάτω:



7. Μια από τις λύσεις είναι και η παρακάτω:



8. Υπάρχουν πολλές λύσεις. α) Π.χ. μπορεί να είναι 15 cm και 8 cm ή 20 cm και 6 cm.β) 12 cm και 10 cm.
9. Υπάρχουν 8 τρίγωνα.
10. Παρατηρούμε ότι 4+8=12, 8+13=21, 13+6=19, 6+4=10. Με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να συμπληρώσουμε τα κενά τετράγωνα με πολλούς τρόπους. Π.χ.



11. α) 4 και 9 τραπέζια αντίστοιχα. β) 22 και 32 μαθητές αντίστοιχα.
12. Η μητέρα πρέπει να βάλει το ρολόι στις 10.34 μ.μ. το βράδυ της Κυριακής.
13. Από το θεώρημα του Πυθαγόρα, η διαγώνιος του παραθύρου είναι 100 εκατ., που υπερβαίνει το μήκος ή το πλάτος όλων των φύλλων. Έτσι τα πρώτα τρία κομμάτια μπορούν να περάσουν από το παράθυρο με οποιονδήποτε τρόπο και το κομμάτι 90 X 105 εκατ. μπορεί επίσης να περάσει από το παράθυρο, υπό τον όρο ότι η πλευρά με τα 90 εκατ. πηγαίνει πρώτη.

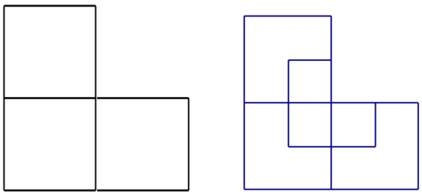
14. α) 1, 2, 4, 8, 16 β) $2^{\nu-1}$, όπου ν ο αριθμός της σειράς γ) 1 – 5 – 10 – 10 – 5 – 1, 1 – 6 – 15 – 20 – 15 – 6 – 1, 1 – 7 – 21 – 35 – 35 – 21 – 7 – 1

15.

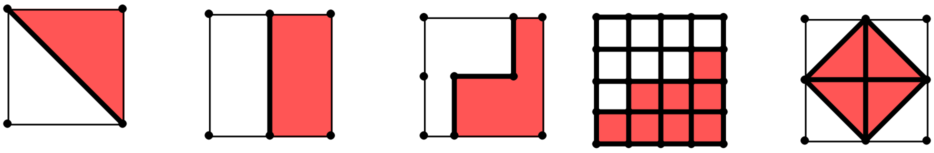
α) $\begin{array}{r} 139 \\ +\ 284 \\ 576 \\ \hline 999 \end{array}$ ή $\begin{array}{r} 238 \\ +\ 594 \\ 167 \\ \hline 999 \end{array}$ β) Υπάρχουν πολλές λύσεις. γ) Όχι.

16. (15X45) +(8X45) = 23X45

17.



18.



19. Δύο πιθανές απαντήσεις είναι: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 x 9) = 100, {1 x (2 + 3) x 4 x 5} + 6 - 7 - 8 + 9 = 100. Υπάρχουν περισσότερες!

20. Τα καρπούζια ζυγίζουν 8 κιλά και τα πεπόνια 4 κιλά. Άρα 2 καρπούζια και 1 πεπόνι ζυγίζουν 20 κιλά.

21. Εμβαδόν τετραγώνου =169 εκ., Περίμετρος τετραγώνου =52 εκ., Εμβαδόν νέου ορθογωνίου 84,5 εκ., Ο λόγος των εμβαδών είναι ½ και ο λόγος των περιμέτρων ¾.

22. Μπορεί να χρησιμοποιήσει σπάγγο για να σχηματίσει τις διαγωνίους. Εκεί όπου συναντιούνται είναι το κέντρο.

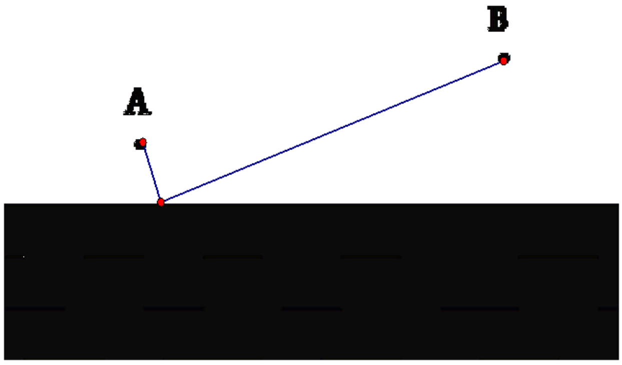
23. Στο τέλος της εβδομάδας 77 βρίσκονταν στο νησί και 35 είχαν φύγει.

24. Τα παιδιά ήταν 36.

25. Το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί από τα δεδομένα του προβλήματος.

26. α) Όχι, γιατί μόνο $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$=1, αλλά ισχύει $\alpha \neq \beta$. β) Ναι, π.χ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$=1. γ) Ναι, π.χ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$=1 δ) Για 5 φυσικούς αριθμούς έχουμε π.χ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$=1 και για 6 φυσικούς αριθμούς έχουμε π.χ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}$=1 κ.λ.π.

27.



28. Ο Γιάννης θα πάρει 1€ και ο Κώστας 4€.
29. Π.χ. 2+3+4+5+7=21 και 2Χ3Χ4Χ5Χ7=840 ενώ 10+11=21 αλλά 10Χ11=110.
30. α) Το ελάχιστο κόστος είναι 86€ που αντιστοιχεί σε 7 μεγάλες και 2 μικρές βάρκες. β) Ο ελάχιστος αριθμός βαρκών είναι 9. γ) Τα λιγότερα κενά καθίσματα, δηλαδή 0, είναι σε αρκετές περιπτώσεις, όπως αυτές των 11 μικρών και 1 μεγάλης βάρκας, των 8 μικρών και 3 μεγάλων, των 5 μικρών και 5 μεγάλων αλλά και των 2 μικρών και 7 μεγάλων, που είναι και η λογικότερη ενοικίαση.
31. 2κ. και 1,8κ. ή 1,9κ. και 1,9κ. ή 2,1κ. και 1,7κ. κ.ά.
32. Κέρδος 40€.