ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ACTUARIAL RISK MEASURES

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΠΟΡΙΧΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΑΜ: 333/2017017

Επιβλέπων: ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΠΕΤΡΟΣ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εννοιολογείται τι σημαίνει κίνδυνος για μια ασφαλιστική εταιρεία και αναφέρεται το πλαίσιο λειτουργίας και εποπτείας των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών επιχειρήσεων στην Ευρώπη (Solvency II). Στη συνέχεια ορίζονται τα μέτρα κινδύνου καθώς επίσης και οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Επιπλέον, αναλύονται εκτενέστερα τα μέτρα κινδύνου που έχουν συμπεριληφθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία, ενώ ταυτόχρονα γίνεται καταγραφή των σημαντικότερων από αυτά. Τέλος, παρουσιάζονται τα βασισμένα στην αρχή πριμοδότησης μέτρα κινδύνου και γίνονται κάποιες εφαρμογές, στις οποίες σχολιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Abstract

This thesis explains the risks to an insurance company and the framework for the operation and supervision of insurance and reinsurance companies in Europe (Solvency II). The risk measures are then defined as well as the insurance premium calculation principles. In addition, the risk measures included in this thesis are analyzed in more detail, while at the same time the most important of them are recorded.. Finally, the risk measures based on the premium principles are presented and some applications are made, in which the results obtained are commented.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΙΝΔΥΝΟΣ

Στην επιστήμη της Αναλογιστικής δίνονται διάφοροι ορισμοί της έννοιας «κίνδυνος». Οι σημαντικότεροι εξ αυτών είναι:

- Κίνδυνος ορίζεται ως ο συνδυασμός της πιθανότητας ενός γεγονότος και των συνεπειών του (ISO-IEC Guide 73).

- Η πιθανότητα ενός ανεπιθύμητου συμβάντος.
- Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός κινδύνου.
- Ο συνδυασμός της πιθανότητας ή της συχνότητας εμφάνισης ενός καθορισμένου κινδύνου και του μεγέθους των συνεπειών του συμβάντος.
- Ο κίνδυνος είναι επομένως ένα μέτρο της πιθανότητας ενός συγκεκριμένου ανεπιθύμητου συμβάντος και των ανεπιθύμητων συνεπειών ή απώλειας.

Στον τομέα της ασφάλειας, αναγνωρίζεται, γενικά, ότι οι συνέπειες είναι μόνο αρνητικές και γι' αυτό η διαχείριση του κινδύνου ασφάλειας εστιάζει στην πρόληψη και τον μετριασμό της ζημιάς.

Χρήσεις του μέτρου υπολογισμού κινδύνου

Η διαχείριση των κινδύνων είναι υψίστης σημασίας για τη λειτουργικότητα μιας επιχείρησης. Οι κίνδυνοι που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση μπορούν να χαρακτηριστούν σε γενικές γραμμές με βάση τον **κίνδυνο της αγοράς** (έκθεση με ενδεχόμενη απώλεια εξαιτίας αλλαγών στις τιμές της αγοράς και τις συνθήκες της αγοράς), τον **πιστωτικό κίνδυνο** (κίνδυνος πελατών με οφειλή), και τον **λειτουργικό κίνδυνο** (κάθε επιχειρηματικός κίνδυνος που δεν αποτελεί ούτε κίνδυνο αγοράς ούτε πιστωτικό). Η διαδικασία διαχείρισης κινδύνου θα πρέπει να είναι μια ολιστική διαδικασία που καλύπτει την ανάλυση των περιστατικών του κινδύνου, την αξιολόγηση του ελέγχου της διαχείρισης, των διαδικασιών υποβολής εκθέσεων και πρόβλεψης των τάσεων των κινδύνων. Επομένως, η μέτρηση του κινδύνου είναι το στοιχείο-πυρήνας της διαδικασίας.

Ένα σημαντικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική εταιρεία είναι η ζημία που προκύπτει από τα ασφαλιστικά συμβόλαια. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση αυτή, θα εστιάσουμε στο λειτουργικό κίνδυνο της επιχείρησης. Θα καθοριστούν διάφορα μέτρα βάσει των οποίων θα συνοψίσουμε τους πιθανούς κινδύνους που προκύπτουν από τις πιθανές αξιώσεις των ασφαλιστήριων συμβολαίων. Οπότε, τα μέτρα θα πρέπει να είναι βασισμένα στις τυχαίες μεταβλητές ζημίας(απώλειας). Κατά συνέπεια, οι τρόποι με τους οποίους μπορούν αυτά να χρησιμοποιηθούν από μια ασφαλιστική εταιρεία είναι οι ακόλουθοι:

Καθορισμός του οικονομικού κεφαλαίου

Οικονομικό κεφάλαιο είναι το κεφάλαιο που μια επιχείρηση υποχρεούται να κατέχει, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση. Είναι ρυθμιστικό έναντι απροσδόκητων ζημιών, και μπορεί να διαφέρει από το διαθέσιμο κεφάλαιο της επιχείρησης. Το μέγεθος του οικονομικού κεφαλαίου εξαρτάται από το επίπεδο της πιστοληπτικής ικανότητας που αναμένεται να επιτύχει η εταιρεία ή την πιθανότητα αφερεγγυότητας που η εταιρία είναι έτοιμη να δεχθεί. Το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό του οικονομικού κεφαλαίου συχνά περιλαμβάνει την ποσοτικοποίηση των πιθανών κινδύνων της επιχείρησης.

Καθορισμός των ασφαλίστρων

Ασφάλιστρα είναι η τιμή που ζητείται από την ασφαλιστική εταιρεία για την μετάβαση του κινδύνου ζημίας από τον ασφαλισμένο στον ασφαλιστή. Το «χρεωμένο ασφάλιστρο» θα πρέπει να μεταβάλλεται άμεσα με την πιθανή απώλεια. Συνεπώς, η κατάλληλη μέτρηση του κινδύνου είναι σημαντική για τον προσδιορισμό του ασφαλίστρου.

Θα πρέπει, επίσης, να σημειωθεί ότι στην πράξη ο προσδιορισμός του ασφαλίστρου συχνά εξαρτάται και από άλλους παράγοντες, όπως ο ανταγωνισμός στον κλάδο και οι στρατηγικές ανησυχίες μάρκετινγκ.

Η εσωτερική διαχείριση των κινδύνων

Τα μέτρα κινδύνου αποτελούν σημαντικές προσθήκες για την εσωτερική διαχείριση και ελέγχο των κινδύνων. Μια επιχείρηση μπορεί να θέσει στόχους σε διαφορετικά τμήματα της επιχείρησης με βάση ορισμένα μέτρα κινδύνου. Η εσωτερική αξιολόγηση γίνεται πολύ πιο εύκολη αν υπάρχουν σαφείς και καλά καθορισμένοι στόχοι για τα μέτρα του κινδύνου.

Εξωτερικές κανονιστικές αναφορές
Ανησυχώντας για τη φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιρειών, διάφοροι ρυθμιστικοί φορείς έχουν προσπαθήσει να θεσμοθετήσουν το κανονιστικό πλαίσιο αναφοράς, καθώς και να εντείνουν την εποπτεία των εν λόγω εκθέσεων. Τα μέτρα κινδύνου αποτελούν ένα κύριο μέρος του συστήματος υποβολής εκθέσεων αναφοράς.

Solvency II

Το νέο πλαίσιο λειτουργίας και εποπτείας των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών επιχειρήσεων στην Ευρώπη.

Το περιθώριο φερεγγυότητας - δηλαδή το κεφάλαιο που μια ασφαλιστική εταιρία οφείλει να διατηρεί προκειμένου να τηρεί τις δεσμεύσεις της – αποτελεί αντικείμενο κοινοτικών οδηγιών από τη δεκαετία του 1990. Το 2002 υιοθετήθηκε από το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο και το Ευρωπαϊκό Συμβούλιο μια πρώτη μεταρρύθμιση, το SOLVENCY I (Φερεγγυότητα I).

Με το SOLVENCY II (Φερεγγυότητα II), η Ευρωπαϊκή Ένωση επιθυμεί να κάνει ένα ακόμη βήμα, θέτοντας κανόνες αξιολόγησης, όχι μόνο ποσοτικών στοιχείων, αλλά και ποιοτικών παραγόντων που επηρεάζουν την έκθεση σε κινδύνους των ασφαλιστικών και αντασφαλιστικών επιχειρήσεων.

Το **SOLVENCY II** – δεύτερη μεταρρύθμιση που τέθηκε σε εφαρμογή το 2016 – στηρίζεται σε τρεις θεμελιώδεις πυλώνες: ποσοτικές απαιτήσεις, ποιοτικές απαιτήσεις και απαιτήσεις πληροφόρησης.

Πρώτος πυλώνας

Ποσοτικές υποχρεώσεις

Έχει σαν σκοπό τον ορισμό των ποσοτικών ορίων των κινδύνων, αλλά και των ιδίων κεφαλαίων. Ο σχηματισμός των τεχνικών αποθεματικών πρέπει να γίνεται έτσι ώστε η επιχείρηση να είναι σε θέση να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις ασφάλισης ή αντασφάλισης έναντι των ασφαλισμένων και των δικαιούχων, λαμβάνοντας υπόψη τις δαπάνες. Τα τεχνικά αποθεματικά θα πρέπει να χαρακτηρίζονται από σύνεση, αξιοπιστία και αντικειμενικότητα και να επιτρέπουν τις συγκρίσεις μεταξύ των ασφαλιστών ή των αντασφαλιστών. Σε αυτόν τον πυλώνα το νέο σύστημα φερεγγυότητας περιλαμβάνει δύο απαιτήσεις κεφαλαίου : Το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας (επίπεδο κεφαλαίου το οποίο επιτρέπει στην επιχείρηση να απορροφήσει σημαντικές απρόβλεπτες ζημιές και να παρέχει εύλογη κάλυψη στους ασφαλισμένους και τους δικαιούχους) και το ελάχιστο απαιτούμενο κεφάλαιο (ελάχιστο επίπεδο κεφαλαίου το οποίο αποτελεί το όριο ενεργοποίησης της ύστατης εποπτικής παρέμβασης).

Δεύτερος πυλώνας

Εποπτικές δραστηριότητες (ποιοτικές υποχρεώσεις)

Αποσκοπούν στον εντοπισμό των επιχειρήσεων οι οποίες παρουσιάζουν οικονομικά, οργανωτικά ή άλλα χαρακτηριστικά που θα ήταν επιδεκτικά να οδηγήσουν σε υψηλότερο προφίλ κινδύνου. Απαιτείται από τις επιχειρήσεις αυτές να τηρούν μεγαλύτερο κεφάλαιο φερεγγυότητας, και/ή να λαμβάνουν μέτρα για τη μείωση των κινδύνων τους οποίους αναλαμβάνουν. Σκοπός εδώ είναι για τις επιχειρήσεις να βεβαιωθούν ότι κατέχουν ένα κατάλληλο επίπεδο κεφαλαιοποίησης αλλά και ότι διαθέτουν ορθή διαχείριση που τους επιτρέπει να υπολογίζουν και να ελέγχουν τους κινδύνους τους οποίους αναλαμβάνουν. Οι εποπτικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν επίσης την αυξημένη συνεργασία μεταξύ των εποπτικών αρχών σε συνδυασμό με ελέγχους εμπειρογνωμόνων.

Τρίτος πυλώνας

Υποβολή στοιχείων στις εποπτικές αρχές και δημοσιοποίηση στοιχείων (υποχρέωση πληροφόρησης)

Η υποβολή στοιχείων στις εποπτικές αρχές προχωρεί πέρα από την έννοια των κανόνων χρηματοοικονομικής ενημέρωσης και περιλαμβάνει διάφορα είδη πληροφοριών που είναι απαραίτητες έτσι ώστε οι εποπτικές αρχές να εκτελέσουν τα καθήκοντά τους. Επιπλέον, η διαφάνεια και η δημοσιοποίηση πληροφοριών από τις επιχειρήσεις προς το κοινό συμβάλει στην ενίσχυση των μηχανισμών και της πειθαρχείας της αγοράς. Η πληροφόρηση αυτή αφορά στοιχεία όπως την οικονομική απόδοση ή ακόμα τα προφίλ κινδύνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ορισμός: Ένα μέτρο κινδύνου της τυχαίας ζημίας X, συμβολίζεται με p(X) και είναι μια συνάρτηση πραγματικών τιμών $p : X \rightarrow \mathbf{R}$, όπου **R** είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ως τυχαία μεταβλητή ζημίας, η X είναι μη αρνητική. Έτσι, το μέτρο του κινδύνου p(X) μπορεί να επιβληθεί ως μη αρνητικό για το σκοπό της μέτρησης ασφαλιστικών κινδύνων. Ωστόσο, εάν ο σκοπός είναι η μέτρηση των κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων, η X μπορεί να σημαίνει την αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου, η οποία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το μέτρο του κινδύνου p(X) μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό.

Η πρώτη χρήση μέτρων κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη ήταν με την δημιουργία των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων.

Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρων (Premium Calculation Principles)

Η τιμολόγηση των ασφαλίστρων έχει ορισμένους στόχους. Οι βασικότεροι εκ των οποίων είναι πως τα ασφάλιστρα πρέπει να είναι

- Επαρκή
- Δίκαια
- Όχι υπερβολικά
- Απλά
- Σχετικά σταθερά
- Προσαρμόσιμα
- Ενθαρρυντικά ως προς την πρόληψη

Κάποιοι τρόποι υπολογισμού ασφαλίστρων, σύμφωνα με τους Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit (2001), είναι οι εξής:

Συμβολίζουμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής ζημίας X ως $\boldsymbol{\mu}_X$ και $\boldsymbol{\sigma}_X^2$, αντίστοιχα.

- **Καθαρό ασφάλιστρο (Pure premium)** το οποίο ισούται με την αναμενόμενη τιμή ενός κινδύνου Χ.

$$p(X) = \mu_X$$

- **Αρχή Αναμενόμενης Αξίας (Expected value principle)**

$$p(X) = (1+\theta)\mu_X$$

Όπου το $\theta \geq 0$ είναι **ο** συντελεστής φόρτωσης ασφαλίστρου. Έτσι, η φόρτωση που υπερβαίνει την μέση απώλεια μ_X είναι $\theta\mu_X$. Στην ειδική περίπτωση όπου $\theta = 0$, $p(X)=\mu_X$ το μέτρο κινδύνου είναι το **καθαρό ασφάλιστρο**. Παρατηρούμε ότι στην αρχή αναμενόμενης αξίας , ο κίνδυνος εξαρτάται μόνο από τη μέση τιμή μ_X και τον παράγοντα φόρτωσης θ. Έτσι, δύο μεταβλητές ζημίας με την ίδια μέση τιμή και ίδια φόρτωση θα έχουν τον ίδιο κίνδυνο, ανεξάρτητα από τις υψηλότερων τάξεων ροπές, όπως η διακύμανση.

- Για να διαφοροποιηθούν τέτοιες κατανομές ζημιών, μπορούμε να εξετάσουμε την **αρχή της Διακύμανσης (Variance principle)** που ορίζεται ως

$$p(X) = \mu_X + \alpha\sigma_X^2$$

- ή την **αρχή Τυπικής-Απόκλισης (Standard-Deviation premium)** που ορίζεται ως

$$p(X) = \mu_X + \alpha\sigma_X$$

όπου $\alpha \geq 0$ στις δύο παραπάνω εξισώσεις και είναι ο παράγοντας φόρτωσης. Σύμφωνα με τις αρχές διακύμανσης και Τυπικής-Απόκλισης, σε κατανομή ζημιών με μεγαλύτερη διασπορά θα έχουμε μεγαλύτερο κίνδυνο. Αυτό φαίνεται να είναι μια λογική ιδιότητα. Ωστόσο, τα δύο αυτά μέτρα κινδύνου έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες μεταξύ τους. Οπότε, η επιλογή ενός μέτρου κινδύνου δεν είναι ένα ασήμαντο έργο. Παρακάτω αναφέρονται κάποιες ιδιότητες των μέτρων κινδύνου που θεωρούνται επιθυμητές. Η επιλογή των μέτρων κινδύνου μπορεί στη συνέχεια να επικεντρωθεί στο σύνολο των μέτρων κινδύνου που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες.

ΣΥΝΕΠΗ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Artzner et al. (1999): Προτείνονται τέσσερα αξιώματα μετρήσεων κινδύνου. Υποστηρίζεται ότι αυτά τα αξιώματα: «Θα πρέπει να ισχύουν για κάθε μέτρο κινδύνου που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική ρύθμιση ή τη διαχείριση των κινδύνων». Ένα μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί αυτά τα τέσσερα αξιώματα λέγεται ότι είναι **συνεπές**.

Ορισμός: Ένα μέτρο κινδύνου $p : X \to \mathbf{R}$ καλείται **συνεπές** μέτρο κινδύνου εάν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα για κάθε δύο τυχαίες μεταβλητές ζημίας X και Y:

1. **Υποπροσθετικότητα (subadditivity):**
   $p(X+Y) \leq p(X) + p(Y)$.
   Το αξίωμα της Υποπροσθετικότητας υπονοεί ότι μια ασφαλιστική εταιρεία δεν μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο διαχωρίζοντας την επιχείρησή της σε μικρότερες εταιρείες. Λέει επίσης ότι η ενοποίηση των πολιτικών δεν καθιστά την εταιρεία πιο επικίνδυνη.

2. **Μονοτονία (Monotonicity):**
   Αν $X \leq Y$ για όλα τα πιθανά αποτελέσματα, τότε $p(X) \leq p(Y)$.
   Το Αξίωμα της Μονοτονίας δηλώνει ότι εάν η απώλεια ενός κινδύνου δεν είναι ποτέ μεγαλύτερη από εκείνη ενός άλλου κινδύνου κάτω από όλες τις καταστάσεις, το μέτρο κινδύνου του πρώτου κινδύνου δεν μπορεί να είναι περισσότερο από αυτό του τελευταίου.

3. **Θετική ομοιογένεια (positive homogeneity):**
   Για κάθε θετική σταθερά α, $p(\alpha X) = \alpha p(X)$.
   Αυτό το αξίωμα είναι λογικό καθώς διασφαλίζει ότι η αλλαγή των νομισματικών μονάδων των κινδύνων δεν μεταβάλλει το μέτρο κινδύνου.

4. **Μεταθετικό Αναλλοίωτο (translation invariance):**
   Για κάθε θετική σταθερά α, $\rho(X+\alpha) = \rho(X) + \alpha$.
   Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι εάν η απώλεια X αυξηθεί κατά ένα σταθερό ποσό α, τότε ο κίνδυνος αυξάνεται κατά το ίδιο ποσό.

Τα μέτρα κινδύνου που ικανοποιούν αυτά τα τέσσερα κριτήρια θεωρούνται συνεπή και τέτοια μέτρα υπάρχουν πολλά.

Στη συνέχεια παρατίθενται κάποια παραδείγματα, ώστε να εξετάσουμε την συνέπεια κάποιων από τα προαναφερθέντα μέτρα κινδύνου.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

Να δειχθεί ότι, δεδομένου του Αξιώματος της Θετικής Ομοιογένειας, $\rho(0) = 0$. Επομένως, να δειχθεί ότι σύμφωνα με το Αξίωμα της Μονοτονίας και της Θετικής Ομοιογένειας $\rho(X) \geq 0 \ \forall \ X \geq 0$.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ:</u>

Καταρχάς γνωρίζουμε ότι $\rho(0) = \rho(\alpha 0)$, $\forall$ α. Από το Αξίωμα της Θετικής Ομοιογένειας, έχουμε $\rho(\alpha 0) = \alpha\rho(0) \ \forall \ \alpha \geq 0$. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα: $\rho(0) = \alpha\rho(0) \ \forall \ \alpha \geq 0$ και συνεπώς $\rho(0) = 0$.
Για $X \geq 0$, σύμφωνα με το Αξίωμα της Μονοτονίας $\rho(X) \geq \rho(0)$ και άρα $\rho(X) \geq 0$.

□

Αν εφαρμόσουμε το Αξίωμα «Μεταθετικό Άναλλοίωτο» σε ένα συνεπές μέτρο κινδύνου και υποθέσουμε ότι X = 0, τότε για κάθε μη αρνητική σταθερά α έχουμε $\rho(\alpha) = \rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha = \rho(0) + \alpha = \alpha$. Το αποτέλεσμα αυτό λέει πως εάν σε ένα κίνδυνο προστεθεί μια σταθερά, ένα συνεπές μέτρο κινδύνου πρέπει να ισούται με τη σταθερά αυτή. Έτσι, για ένα συνεπές μέτρο κινδύνου βασισμένο στην Αρχή ασφαλίστρων, η φόρτωση για έναν σταθερό κίνδυνο πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Κατά συνέπεια, λέμε ότι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου δεν έχει αδικαιολόγητη φόρτωση.
Εάν η απώλεια X έχει μια πεπερασμένη υποστήριξη με μέγιστη τιμή x_U, τότε ορίζεται ο κίνδυνος $Y = x_U$ και ισχύει ότι $X \leq Y$. Σύμφωνα με το

Αξίωμα της Μονοτονίας, ένα συνεπές μέτρο κινδύνου πρέπει να ικανοποεί την σχέση:

$$p(X) \leq p(Y) = p(x_U) = x_U$$

Έτσι, ένας συνεπής κίνδυνος είναι άνω φραγμένος από την μέγιστη απώλεια. Ένα ασφάλιστρο που ικανοποιεί αυτήν την προϋπόθεση λέγεται ότι έχει την ιδιότητα «χωρίς διαρροή» (No ripoff).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δείξτε ότι το μέτρο κινδύνου ασφαλίστρου αναμενόμενης αξίας ικανοποιεί τα Αξιώματα της Θετικής Ομοιογένειας, της Μονοτονίας και της Υποπροσθετικότητας αλλά όχι το «Μεταθετικό Αναλλοίωτο».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για κάθε κίνδυνο X και Y έχουμε:

$$\begin{aligned} p(X+Y) &= (1+\theta)\, E(X+Y) \\ &= (1+\theta)\, E(X) + (1+\theta)\, E(Y) \\ &= p(X) + p(Y) \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει το Αξίωμα της Υποπροσθετικότητας.

Για $Y = \alpha X$, με $\alpha \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} p(Y) &= (1+\theta)\, E(Y) \\ &= (1+\theta)\, E(\alpha X) \\ &= \alpha(1+\theta)\, E(X) \\ &= \alpha p(X) \end{aligned}$$

Και συνεπώς ισχύει το Αξίωμα της Θετικής Ομοιογένειας.

Για δύο κινδύνους X και Y όπου $X \geq Y$ και άρα $\mu_X \geq \mu_Y$, έχουμε:

$$p(X) = (1+\theta)\mu_X \geq (1+\theta)\mu_Y = p(Y)$$

Άρα ισχύει το Αξίωμα της Μονοτονίας.

Για να εξετάσουμε το Αξίωμα «Μεταθετικό Αναλλοίωτο» θεωρούμε μια αυθαίρετη σταθερά $\alpha > 0$ και εάν $\theta > 0$

$$p(X+\alpha) = (1+\theta)\, E(X+\alpha) > (1+\theta)\, E(X) + \alpha = p(X) + \alpha$$

Επομένως, το Αξίωμα «Μεταθετικό Αναλλοίωτο» δεν ικανοποιείται εάν $\theta > 0$, γεγονός που σημαίνει ότι το μέτρο κινδύνου ασφαλίστρου

αναμενόμενης αξίας δεν είναι γενικά ένα συνεπές μέτρο κινδύνου.
Ωστόσο. όταν θ = 0 το Αξίωμα ισχύει.
Έτσι, το καθαρό ασφάλιστρο αποτελεί ένα συνεπές μέτρο κινδύνου.

□

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέτρο κινδύνου ασφαλίστρου διακύμανσης ικανοποιεί το Αξίωμα «Μεταθετικό Αναλλοίωτο» αλλά όχι αυτά της Μονοτονίας, της Υποπροσθετικότητας και της Θετικής Ομοιογένειας. Ενώ το μέτρο κινδύνου ασφαλίστρου τυπικής απόκλισης ικανοποιεί τα Αξιώματα της Υποπροσθετικότητας, της Θετικής Ομοιογένειας και το «Μεταθετικό Αναλλοίωτο» αλλά όχι εκείνο της Μονοτονίας.
Τα Αξιώματα που καθιστούν ένα μέτρο κινδύνου συνεπές, περιορίζουν το σύνολο των μέτρων κινδύνου που μπορούν να ληφθούν υπόψιν για τη διαχείριση και ρύθμιση. Ωστόσο, δεν καθορίζουν ένα μοναδικό μέτρο κινδύνου για χρήση στην πράξη. Ορισμένα μέτρα κινδύνου που είναι συνεπή (όπως το καθαρό ασφάλιστρο) ενδέχεται να μην είναι κατάλληλα για άλλους λόγους. Έτσι, η επιλογή του μέτρου κινδύνου που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται και από πρόσθετες παραμέτρους.

Β' ΜΕΡΟΣ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια από τα Μέτρα Κινδύνου που χρησιμοποιούνται από τις περισσότερες εταιρείες.

Αξία σε Κίνδυνο - Value-at-Risk (VaR)

- **Η Value-at-Risk (VaR)** είναι ίσως ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μέτρα κινδύνου. Αποτελεί μια προσπάθεια να εκτιμηθεί ο συνολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου και να αποδοθεί σε χρηματικούς όρους με έναν και μόνο αριθμό. Η *VaR* είναι το ***ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται για να***

διασφαλίσουμε, με υψηλό βαθμό βεβαιότητας, ότι η επιχείρηση δεν είναι τεχνικά αφερέγγυα. Η VaR μιας μεταβλητής ζημίας είναι η ελάχιστη τιμή της κατανομής έτσι ώστε η πιθανότητα ζημίας μεγαλύτερης από αυτή την τιμή να μην είναι μεγαλύτερη από μία δοσμένη πιθανότητα. Στατιστικά, η VaR είναι ένα ποσοστημόριο.

<u>Ορισμός:</u> Έστω X μια τυχαία μεταβλητή ζημίας με συνεχή και παραγωγίσιμη αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(\cdot)$ και δ το επίπεδο εμπιστοσύνης, 0 < δ < 1. Η αξία σε κίνδυνο με επίπεδο εμπιστοσύνης δ, είναι το δ-ποσοστημόριο του X και συμβολίζεται ως $\mathrm{VaR}_\delta(X)$.

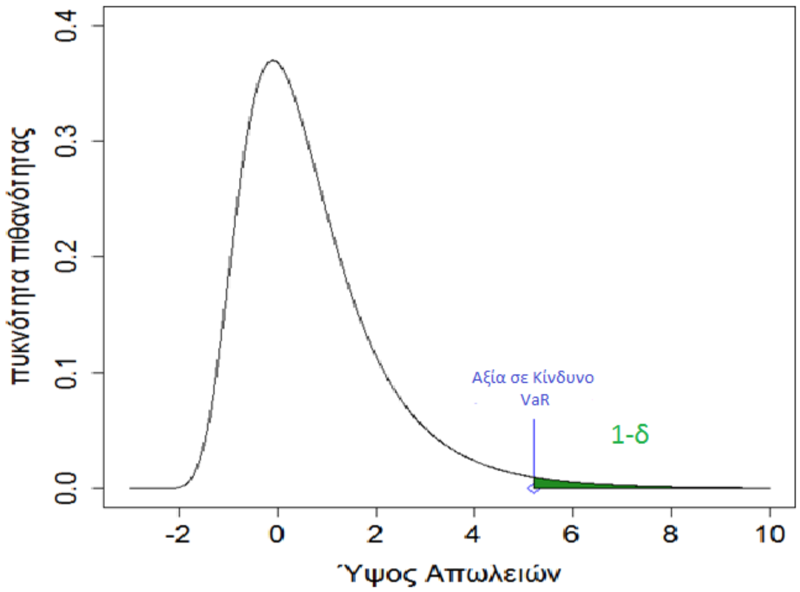
$$\mathrm{VaR}_\delta(\mathrm{X}) = F_x^{-1}(\delta) = \mathrm{X}_\delta \, .$$

Το επίπεδο εμπιστοσύνης δ επιλέγεται συνήθως κοντά στο 1 (0.95 ή 0.99), έτσι ώστε η πιθανότητα ζημίας X που υπερβαίνει την $\mathrm{VaR}_\delta(X)$ να μην είναι περισσότερη από 1 - δ και συνεπώς να είναι αρκετά μικρή.
Όταν το X δεν είναι συνεχής, μπορεί να υπάρχει κάποια ασάφεια στον ορισμό του $F^{-1}(\delta)$(αντίστροφη συνάρτηση της α.σ.κ.). Οπότε, ο γενικότερος ορισμός της $\mathrm{VaR}_\delta(X)$ είναι:

$$VaR_\delta(\mathrm{X}) = \inf\{x \in [0,\infty) : F_x(x) \geq \delta\}$$

Για συνεχείς κατανομές, μπορούμε να γράψουμε το $VaR_\delta(X)$ για την τυχαία μεταβλητή X ως την τιμή της VaR_δ που ικανοποιεί το

$$\Pr(X > VaR_\delta) = 1 - \delta$$



Σχήμα 1: Τιμή VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης p.

Είναι γνωστό ότι το VaR δεν ικανοποιεί ένα από τα τέσσερα κριτήρια της συνέπειας, το Αξίωμα της υποπροσθετικότητας. Η αποτυχία του VaR να είναι υποπροσθετικό, μπορεί να δειχθεί από ένα απλό, αλλά ακραίο παράδειγμα εμπνευσμένο από ένα πιο περίπλοκο του Wirch.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

(Ασυνέχεια του VaR) Ας συμβολίσουμε με Z μια τυχαία μεταβλητή ζημίας με τις ακόλουθες cdf[1] τιμές:

$$F_z(1) = 0.91$$
$$F_z(90) = 0.95$$
$$F_z(100) = 0.96$$

Το 95% ποσοστημόριο, το $VaR_{95\%}(Z)$ είναι 90 επειδή υπάρχει μία 5% πιθανότητα να υπερβεί το 90. Ας υποθέσουμε ότι διαχωρίζουμε τον κίνδυνο Z σε δύο ξεχωριστούς (αλλά εξαρτημένους) κινδύνους X και Y έτσι ώστε οι δύο ξεχωριστοί κίνδυνοι συνολικά να είναι ίσοι με τον κίνδυνο Z, δηλαδή, X+Y=Z.

Ένας τρόπος να τους ορίσουμε είναι:

[1] Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$X = \begin{cases} Z, & Z \le 100 \\ 0, & Z > 100 \end{cases}$$

Και

$$Y = \begin{cases} 0, & Z \le 100 \\ Z, & Z > 100 \end{cases}$$

Η cdf για τον κίνδυνο X ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} F_X(1) &= 0.95 \\ F_X(90) &= 0.99 \\ F_X(100) &= 1, \end{aligned}$$

που υποδηλώνει ότι το $VaR_{95\%}(X)=1$.

Παρόμοια, η cdf για τον κίνδυνο Y ικανοποιεί την $F_Y(0) = 0.96$, το οποίο υποδηλώνει ότι υπάρχει μια 96% ευκαιρία χωρίς καθόλου ζημία. Γι' αυτό ένα 95% ποσοστημόριο δεν μπορεί να υπερβεί το 0, κι έτσι $VaR_{95\%}(Y) \le 0$. Συνεπώς, το άθροισμα των 95% ποσοστημορίων για το X και το Y είναι λιγότερο από το $VaR_{95\%}(\mathrm{Z})$, το οποίο παραβιάζει την υποπροσθετικότητα.

Παρόλο που αυτό το παράδειγμα μπορεί να φαίνεται πως είναι κάτι τεχνητό, η ύπαρξη τέτοιων πιθανοτήτων δημιουργεί ευκαιρίες για παράξενη και μη-παραγωγική διαχείριση. Γι' αυτό στρεφόμαστε σε ένα μέτρο κινδύνου που είναι συνεχές.

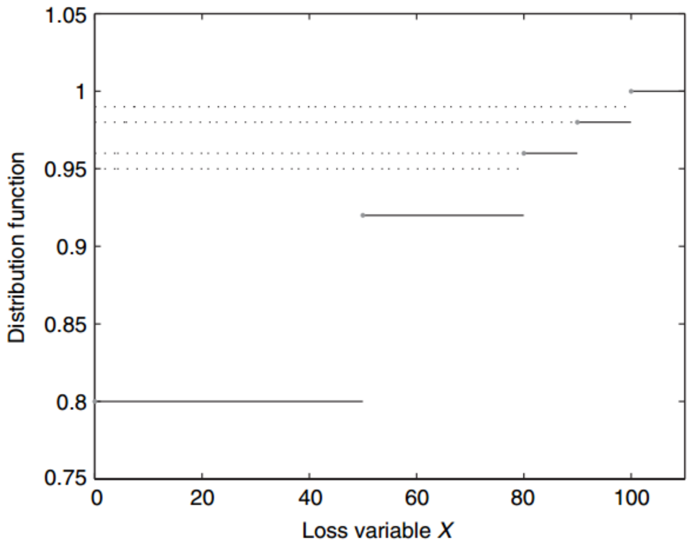
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί η VaR_δ, για δ = 0.95, 0.96, 0.98, και 0.99, για την ακόλουθη διακριτή κατανομή ζημίας

$$\mathrm{X} = \begin{cases} 100 & prob -> 0.02 \\ 90 & prob -> 0.02 \\ 80 & prob -> 0,04 \\ 50 & prob -> 0.12 \\ 0 & prob -> 0,80 \end{cases}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Δεδομένου ότι η X είναι διακριτή, χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο ορισμό της VaR. Η df του X σχεδιάζεται στο Σχήμα 1. Οι διακεκομμένες οριζόντιες γραμμές αντιστοιχούν στα επίπεδα πιθανοτήτων 0,95, 0,96, 0,98 και 0,99. Σημειώνεται ότι η df του X είναι step function. Για VaR_δ χρειαζόμαστε την τιμή του X που αντιστοιχεί στην πιθανότητα ίσου επιπέδου ή το επόμενο υψηλότερο βήμα από ό, τι είναι το δ. Έτσι, VaR_δ για δ = 0.95, 0.96, 0.98,και 0,99, είναι, αντιστοίχως, 80, 80, 90, και 100.



Σχήμα 2: Συνάρτηση κατανομής της απώλειας και VaR.

☐

Χρησιμοποιώντας το VaR είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το όφελος διαφοροποίησης. Όταν υπάρχουν περισσότεροι από ένας κίνδυνοι, βοηθάει στον υπολογισμό των χρημάτων που μπορούν να κερδηθούν ή να χαθούν εάν διαφοροποιηθεί ο συνολικός κίνδυνος X σε επιμέρους κινδύνους X_i.

$$\text{Όφελος διαφοροποίησης} = \sum_{i=1}^{n} VaR_{X_i} - VaR_X$$

Αξία σε Κίνδυνο Ουράς (Tail-Value-at-Risk)

Ως μέτρο κινδύνου, το VaR χρησιμοποιείται εκτενώς στην διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου, του κινδύνου των συναλλαγών σε μία σταθερή (συνήθως σχετικά μικρή) χρονική περίοδο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η κανονική κατανομή συχνά χρησιμοποιείται για την περιγραφή κερδών ή ζημιών. Εάν οι κατανομές κερδών ή ζημιών περιορίζονται από την κανονική κατανομή, το VaR ικανοποιεί όλα τα Αξιώματα της συνέπειας. Ωστόσο, η κανονική κατανομή γενικά δεν χρησιμοποιείται για την περιγραφή ζημιών ασφάλισης, η οποία είναι συνήθως ασύμμετρη. Κατά συνέπεια, η χρήση της VaR είναι προβληματική λόγω της έλλειψης υποπροσθετικότητας.

<u>Ορισμός</u>

Έστω με X συμβολίζουμε μια τυχαία μεταβλητή ζημίας. Το **Tail-Value-at-Risk** του X στο 100p επίπεδο ασφαλείας, που συμβολίζεται με $TVaR_p(X)$, είναι η αναμενόμενη ζημία δοθέντος ότι η ζημία υπερβαίνει το 100p εκατοστημόριο (ή ποσοστημόριο) της κατανομής του X.

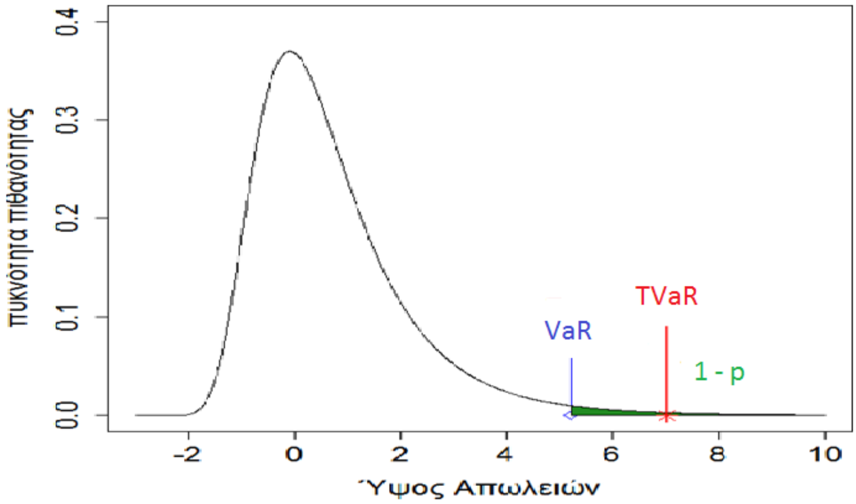
Για λόγους ευκολίας συμβολισμού, περιορίζουμε την εξέταση σε συνεχείς κατανομές για να αποφευχθεί η ασάφεια σχετικά με τον ορισμό της TVaR. Σε γενικές γραμμές, μπορούμε να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα σε διακριτές κατανομές ή κατανομές του μεικτού τύπου τροποποιώντας κατάλληλα τους ορισμούς. Για πιο πρακτικούς σκοπούς, είναι αρκετό να σκεφτούμε με όρους των συνεχών κατανομών.

Μπορούμε να γράψουμε την $TVaR_p(X)$ ως

$$TVaR_p(X) = E\left(X \mid X > \pi_p\right) = \frac{\int_{\pi_p}^{\infty} x f(x)\,dx}{1 - F\left(\pi_p\right)}$$

Επιπλέον, εάν η ποσότητα αυτή είναι πεπερασμένη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα κατά μέρη και την αντικατάσταση για να γράψουμε:

$$TVaR_p(X) = \frac{\int_p^1 VaR_u(X)\,du}{1-p}$$



Σχήμα 3: Τιμές VaR και TVaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης p.

Έτσι, το TVaR μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο μέσος όρος όλων των τιμών VaR πάνω από το επίπεδο ασφαλείας p. Αυτό σημαίνει ότι το TVaR μας λέει πολλά περισσότερα σχετικά με την ουρά της κατανομής απ' ότι το VaR από μόνο του.

Τελικά το TVaR μπορεί ακόμα να γραφτεί ως:

$$TVaR_p(X) = E(X|X > \pi_p)$$

$$= \pi_{p+\frac{\int_{x_p}^{\infty}(x-\pi_p)f(x)dx}{1-p}}$$

$$= VaR_p(X) + e(VaR_p)$$

Όπου το $e(\pi_p)$ είναι η μέση συνάρτηση υπερβάλλουσας ζημίας που εκτιμάται στο 100p εκατοστημόριο. Έτσι, το TVaR είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο VaR, εξαιτίας της μέσης υπερβολής όλων των ζημιών που υπερβαίνουν το VaR. Επιπλέον, επειδή $\pi_p = Var_p(X)$, το $TVaR_p(X)$ εκφράζεται ως μια συνάρτηση του $VaR_p(X)$.

Το TVaR έχει αναπτυχθεί ανεξάρτητα στον τομέα των ασφαλίσεων και ονομάζεται **Υπό όρους Προσδοκία Ουράς (Conditional Tail Expectation)**(CTE) από τον Wirch και είναι ευρέως γνωστό με αυτόν τον όρο στη Βόρεια Αμερική. Έχει επίσης ονομαστεί Προσδοκία Ουράς Υπό όρους **(Tail Conditional Expectation)** (TCE). Στην Ευρώπη, έχει ακόμα ονομαστεί Αναμενόμενη Απόκλιση **(Expected Shortfall)** (ES). (Tasche και Acerbi.)

Ο Overbeck συζητά επίσης το VaR και το TVaR ως μέτρα κινδύνου. Διαφωνεί ότι το VaR είναι ένα "όλα ή τίποτα" μέτρο του κινδύνου, διότι αν συμβεί ένα ακραίο γεγονός που υπερβαίνει το όριο του VaR, δεν υπάρχει κεφάλαιο για να αμβλύνει τις ζημίες. Διαφωνεί επίσης ότι το ποσοστημόριο του VaR στο TVaR παρέχει έναν ορισμό «κακών στιγμών», οι οποίες είναι εκείνες όπου οι ζημίες υπερβαίνουν το όριο του VaR, κι έτσι δεν χρησιμοποιείται όλο το διαθέσιμο κεφαλαίο, όταν το TVaR χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του κεφαλαίου. Στη συνέχεια το CTE παρέχει τη μέση υπερβολική ζημία σε "κακές στιγμές», δηλαδή, όταν οι "κακές στιγμές" του VaR έχουν υπερβεί το όριο.

$$CTE_\delta(X) = E[X \mid X > x_\delta]$$

Όταν η X είναι συνεχής, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$CTE_\delta(X) = E[X \mid X > VaR_\delta(X)]$$

Η τελευταία σχέση θα χρησιμοποιηθεί ως ορισμός της CTE ως μέτρο κινδύνου, ο οποίος εφαρμόζεται και για διακριτές μεταβλητές ζημίας.

Θεωρούμε ότι η απώλεια που υπερβαίνει το VaR εξαρτάται από την ύπαρξη υπέρβασης, δηλαδή

$$X - VaR_\delta(X) | \, X > VaR_\delta(X)$$

Ο μέσος αυτής ονομάζεται **υπό όρους Αξία σε Κίνδυνο (Conditional VaR)**, συμβολίζεται με **$CVaR_\delta(X)$** και ορίζεται ως:

$$CVaR_\delta(X) = E[X - VaR_\delta(X) | X > VaR_\delta(X)]$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται επίσης ως:

$$CVaR_\delta(X) = E[X \, | X > VaR_\delta(X)] - E[VaR_\delta(X) | X > VaR_\delta(X)]$$

$$CVaR_\delta = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X) \qquad (1)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το VaR_δ ως οικονομικό κεφάλαιο, τότε το έλλειμα θα είναι

$$(X - VaR_\delta)_+$$

Όταν η X είναι συνεχής, έστω $VaR_\delta = x_\delta$ και το μέσο έλλειμα είναι

$$E[(X - x_\delta)+] = E[X - x_\delta | X > x_\delta] \, Pr(X > x_\delta)$$

$$= (1-\delta) CVaR_\delta, \qquad (2)$$

και από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε

$$CTE_\delta = x_\delta + CVaR_\delta$$

$$= x_\delta + \frac{1}{1-\delta} E[(X - x_\delta)_+]$$

το οποίο συνδέει το CTE_δ με το μέσο έλλειμα. Για να αξιολογήσουμε το CTE_δ, θεωρούμε

$$CTE_\delta = E\,[\,X \mid X > x_\delta]$$

$$= \frac{1}{1-\delta} \int_{x_\delta}^{\infty} x \, f_X(x) dx \qquad (3)$$

Θέτοντας $\xi = F_x(x)$ το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{x_\delta}^{\infty} x \, f_X(x) dx = \int_{x_\delta}^{\infty} x \, dF_X(x) = \int_{\delta}^{1} x_\xi \, d\xi$$

Άρα

$$CTE_\delta = \frac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 x_\xi \, d\xi \tag{4}$$

Επομένως, η CTE_δ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο μέσος όρος των ποσοστιμορίων που υπερβαίνουν το x_δ. Όταν η X δεν είναι συνεχής, η εξίσωση (3) αντικαθίσταται από το ολοκλήρωμα του Stieltjes.

$$CTE_\delta = E(X \mid X > VaR_\delta) = \frac{1}{1-\bar{\delta}} \int_{x \in (VaR_\delta, \infty)} x dF_X(x) \tag{5}$$

Όπου $\bar{\delta} = \Pr(X \leq VaR_\delta)$

Ωστόσο. καθώς $\bar{\delta} \geq \delta$ η εξίσωση (5) υπονοεί ότι ενδέχεται να χρησιμοποιούμε λιγότερο από το χειρότερο 1 - δ τμήμα της κατανομής απώλειας στον υπολογισμό CTE_δ. Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος (Hardy, 2003, σελ. 164)

$$CTE_\delta = \frac{(\bar{\delta} - \delta) VaR_\delta + (1 - \bar{\delta}) E(X \mid X > VaR_\delta)}{1 - \delta} \tag{6}$$

που είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος των VaR_δ και $E(X \mid X > VaR_\delta)$.
Όταν $\bar{\delta} = \delta$ (όταν η X είναι συνεχής) ελαττώνεται σε
$CTE_\delta = E(X \mid X > VaR_\delta)$
Μια έκφραση ανάλογη με τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (4) είναι:

$$\frac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 VaR_\xi \, d\xi \tag{7}$$

Η οποία μερικές φορές ονομάζεται **Αξίας σε Κίνδυνο ουράς (Tail Value at Risk**, που υποδηλώνεται με $TVaR_\delta$ (X). Η έκφραση (7) είναι ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής εξίσωσης (6), ανεξάρτητα από το εάν η X είναι συνεχής ή όχι. Ως εκ τούτου, τα $TVaR_\delta$ και CTE_δ (όπως ορίζονται από την εξίσωση (6)) είναι ισοδύναμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να υπολογιστεί το CTE_δ για την κατανομή ζημιάς του **παραδείγματος 4**, για δ = 0.95, 0.96, 0.98, και 0.99. Επίσης να υπολογιστεί το TVaR για τις ίδιες τιμές του δ.

Απάντηση:

Καθώς η X δεν είναι συνεχής, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (6) για τον υπολογισμό του CTE_{δ}. Υπενθυμίζουμε ότι $VaR_{0.95} = VaR_{0.96} = 80$. Για δ = 0,95 έχουμε $\bar{\delta}$ = 0,96. Οπότε,

$E(X \mid X > VaR_{0,95} = 80) = \frac{90(0.02)+100(0,02)}{0,04} = 95$ και συνεπώς από την (6) έχουμε:

$CTE_{0,95} = \frac{(0,96-0,95)80+(1-0,96)95}{1-0,95} = 92$

Για δ = 0,96, έχουμε $\bar{\delta}$ = 0,96 ούτως ώστε

$CTE_{0,96} = E(X \mid X > VaR_{0,96} = 80) = 95$

Για το $TVaR_{\delta}$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση (7)

$$TVaR_{0,95} = \frac{1}{1-0,95} \int_{0,95}^{1} VaR_{\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{0,05} [(80)(0.01)+(90)(0.02)+(100)(0.02)]=92$$

και

$$TVaR_{0,96} = \frac{1}{1-0,96} \int_{0,96}^{1} VaR_{\xi}\, d\xi = \frac{1}{0,04} [(90)(0.02)+(100)(0.02)]=95$$

Για δ = 0,98, έχουμε $\bar{\delta}$ = 0,98 ούτως ώστε

$CTE_{0,98} = E(X \mid X > VaR_{0,98} = 90) = 100$

η οποία είναι επίσης και η τιμή της $TVaR_{0.98}$.

Για δ = 0,99, έχουμε $\bar{\delta}$ = 1 και $VaR_{0.99}$ = 100 έτσι ώστε

$CTE_{0,99} = VaR_{0,99} = 100$.

Επίσης,

$$TVaR_{0,99} = \frac{1}{1-0,99} \int_{0,99}^{1} VaR_{\xi}\, d\xi = \frac{100*0,01}{0,01} = 100$$

□

Όταν η X είναι συνεχής, η CTE ικανοποιεί τα αξιώματα της Μονοτονίας, Υποπροσθετικότητας, θετικής Ομοιογένειας και Μεταθετικό Αναλλοίωτο και άρα είναι συνεπής. Έστω α μια θετική σταθερά, έχουμε:

$$CTE_\delta(X+\alpha) = E[X+\alpha \mid X+\alpha > VaR_\delta(X+\alpha)]$$

$$= E[X+\alpha \mid X > VaR_\delta(X)]$$

$$= \alpha + E[X \mid X > VaR_\delta(X)]$$

$$= \alpha + CTE_\delta(X)$$

Πράγματι, ισχύει το Μεταθετικό Αναλλοίωτο.

$$CTE_\delta(\alpha X) = E[\alpha X \mid \alpha X > VaR_\delta(\alpha X)]$$

$$= E[\alpha X \mid X > VaR_\delta(X)]$$

$$= \alpha E[X \mid X > VaR_\delta(X)]$$

$$= \alpha CTE_\delta(X)$$

Είναι Θετικά Ομογενής.

Έστω δύο μεταβλητές απώλειας X και Y, με $X \leq Y$ και $x_\delta \leq y_\delta$, για $\delta \in (0,1)$. Έτσι, από την εξίσωση (4) έχουμε:

$$CTE_\delta = \frac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 x_\xi \, d\xi \;\leq\; CTE_\delta = \frac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 y_\xi \, d\xi \;=\; CTE_\delta(Y)$$

Ικανοποιεί το Αξίωμα της Μονοτονίας.

Η απόδειξη της Υποπροσθετικότητας μπορεί να βρεθεί στο Denuit et al. (2005).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΠΡΙΜΟΔΟΤΗΣΗΣ

Αναλογικός μετασχηματισμός κινδύνου και ασφάλιστρο προσαρμοσμένο στον κίνδυνο

Τα μέτρα κινδύνου βάσει των ασφαλίστρων που αναφέρθηκαν νωρίτερα, προσδιορίζουν τον κίνδυνο με βάση τη φόρτωση της αναμενόμενης ζημίας. Η αναμενόμενη απώλεια μ_X μιας μη αρνητικής συνεχούς τυχαίας απώλειας X μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mu_X = \int_0^{\infty}[1 - F_X(x)]dx = \int_0^{\infty} S_X(x)dx$$

Όπου, S_X είναι η σωρευτική συνάρτηση κατανομής (συνάρτηση επιβίωσης). Έτσι, αντί να προσθέσουμε μια φόρτωση στο μ_X για να λάβουμε ένα ασφάλιστρο, μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε την κατανομή των απωλειών μετατοπίζοντας μεγαλύτερη πιθανότητα στάθμισης στις υψηλές απώλειες. Έστω ότι η X' κατανέμεται με $S_{X'}(x) = [S_X(x)]^{\frac{1}{p}}$, όπου $p \geq 1$. Τότε ο μέσος της X' είναι:

$$E(X') = \mu_{X'} = \int_0^{\infty} S_{X'}(x)dx = \int_0^{\infty} [S_X(x)]^{\frac{1}{p}} dx$$

Η παράμετρος p ονομάζεται "δείκτης αποστροφής κινδύνου". Επίσης,

$$\frac{dE(X')}{d\,p} = - \frac{1}{p^2} \int_0^{\infty} [S_X(x)]^{\frac{1}{p}} \log[S_X(x)]\, dx > 0$$

(Όταν $\log[S_X(x)] < 0$), έτσι ώστε το ασφάλιστρο να αυξάνεται κατά ρ, δικαιολογώντας την ερμηνεία του δείκτη αποστροφής κινδύνου του ρ.

Η κατανομή X' καλείται **Μετασχηματισμός Αναλογικού Κινδύνου (proportional hazard (PH) transform)** της X κατανομής με παράμετρο p. Έστω $h_X(x)$ και $h_{X'}(x)$ οι συναρτήσεις κινδύνου των X και X', αντίστοιχα. Τότε,

$$h_{X'}(x) = -\frac{1}{S_{X'}(x)}\left(\frac{d\,S_{X'}(x)}{d\,x}\right)$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\frac{[S_X(x)]^{\frac{1}{p}-1}\,S'_X(x)}{[S_X(x)]^{\frac{1}{p}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\frac{S_{X'}(x)}{S_X(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\,h_X(x)$$

έτσι ώστε η συνάρτηση κινδύνου του X' να είναι ανάλογη με εκείνη του X. Καθώς ρ ≥ 1, η συνάρτηση κινδύνου του X' είναι μικρότερη από αυτή του X, υπονοώντας ότι το X' έχει παχύτερη ουρά από εκείνη του X. Επίσης, $S_{X'}(x) = [S_X(x)]^{\frac{1}{p}}$ μειώνεται πιο αργά από $S_X(x)$, έτσι ώστε $\mu_{X'} > \mu_X$, η διαφορά του οποίου αντιπροσωπεύει τη φόρτωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Εάν $X \sim E(\lambda)$, βρείτε το μετασχηματισμό αναλογικού κινδύνου του X με παράμετρο p και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η sf του X είναι

$$S_X(x) = e^{-\lambda x}$$

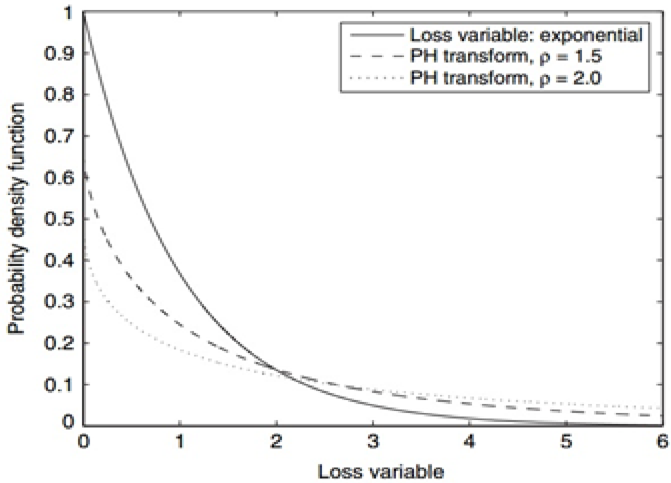
οπότε Η sf του μετασχηματισμού αναλογικού κινδύνου είναι

$$S_{X'}(x) = (e^{-\lambda x})^{\frac{1}{p}} = e^{-\frac{\lambda}{p}x}$$

που υποδεικνύει ότι $X' \sim E\left(\frac{\lambda}{p}\right)$. Συνεπώς, το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι

$$E(X') = \frac{p}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda} = E(X).$$

Το Σχήμα 2 απεικονίζει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) του $X \sim E(1)$ και τους μετασχηματισμούς αναλογικού κινδύνου για p = 1.5 και 2. Φαίνεται ότι οι μετασχηματισμοί αναλογικού κινδύνου έχουν παχύτερες ουρές από την αρχική κατανομή ζημίας.



Σχήμα 4: Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της E(1) και οι μετασχηματισμοί της αναλογικού κινδύνου.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Εάν $X \sim \mathrm{P}(\alpha, \gamma)$ με $\alpha > 1$, βρείτε το μετασχηματισμό αναλογικού κινδύνου του X με παράμετρο $p \in [1, \alpha)$ και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η sf της X είναι

$$S_X(x) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+x}\right)^{\alpha}$$

με μέσο

$$\mu_X = \frac{\gamma}{\alpha-1}$$

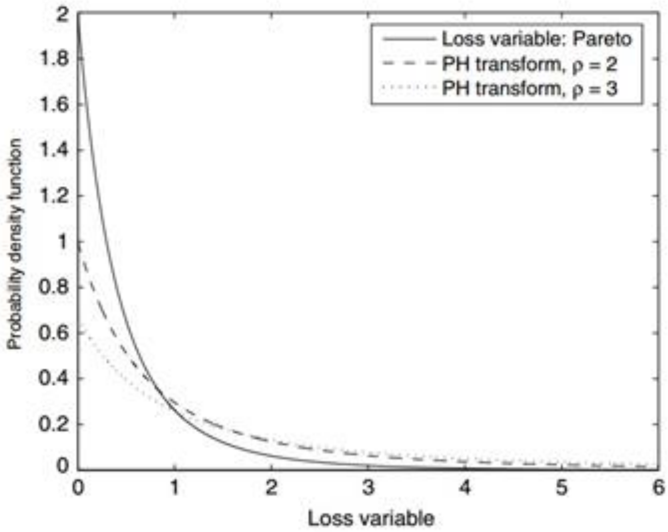
Η sf της X' είναι

$$S_{X'}(x) = [S_X(x)]^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\gamma}{\gamma+x}\right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

Οπότε X' $\sim \mathrm{P}(\frac{\alpha}{p}, \gamma)$. Άρα ο μέσος του X' (προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο) είναι

$$\mu_{X'} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha}{p} - 1} = \frac{p\gamma}{\alpha - p} > \frac{\gamma}{\alpha - 1} = \mu_X$$

Το σχήμα 3 απεικονίζει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) του X $\sim \mathrm{P}(4, 2)$ και τους μετασχηματισμούς αναλογικού κινδύνου για p = 2 και 3. Φαίνεται ότι οι μετασχηματισμοί αναλογικού κινδύνου έχουν παχύτερες ουρές από την αρχική κατανομή ζημίας.



<u>Σχήμα 5:</u> Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της $\mathrm{P}(4, 2)$ και οι μετασχηματισμοί της αναλογικού κινδύνου.

□

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το $\mu_{X'}$ σαν μέτρο κινδύνου ικανοποιεί τα Αξιώματα της Μονοτονίας, της Θετικής Ομοιογένειας και το μεταθετικό Αναλλοίωτο. Έχει επίσης την ιδιότητα no ripoff. Βάσει του Θεωρήματος 1 που παρουσιάζεται αργότερα, ικανοποιεί και το Αξίωμα της Υποπροσθετικότητας και επομένως θεωρείται Συνεπές Μέτρο Κινδύνου.

Μετασχηματισμός Esscher και προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο

Ο μετασχηματισμός Αναλογικού κινδύνου τοποθετεί περισσότερα βάρη στη δεξιά ουρά της κατανομής απώλειας μέσω του μετασχηματισμένου sf. Μια εναλλακτική μέθοδος για να μετατοπιστούν τα βάρη προς τα δεξιά είναι να μετατραπεί απευθείας η pdf. Έτσι, εάν το X έχει pdf: $f_X(x)$, ενδέχεται να καθορίσουμε μια κατανομή ζημίας X' με pdf:

$$f_{X'}(x) = w(x) f_X(x) \qquad [8]$$

Για να τοποθετηθούν περισσότερα βάρη στη δεξιά ουρά της κατανομής απώλειας, απαιτούμε το w (x) να είναι θετικό και, επιπλέον, το $f_{X'}(x)$ πρέπει να είναι ένα καλά καθορισμένο pdf. Έτσι, θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση στάθμισης

$$w(x) = \frac{e^{px}}{M_X(p)} = \frac{e^{px}}{\int_0^\infty e^{px} f_X(x)dx}, \qquad p > 0$$

όπου

$$M_X(p) = \int_0^\infty e^{px} f_X(x)dx = E(e^{px})$$

η συνάρτηση δημιουργίας στιγμής (Mgf - Moment generating function) μιας τυχαίας μεταβλητής πραγματικής αξίας είναι μια εναλλακτική προδιαγραφή της κατανομής πιθανότητας.

Παρατηρούμε ότι:

$$w'(x) = \frac{pe^{px}}{M_X(p)} > 0, \qquad p > 0$$

Επίσης,

$$\int_0^\infty f_{X'}(x)dx = \int_0^\infty w(x) f_X(x)dx = \int_0^\infty \left[\frac{e^{px}}{\int_0^\infty e^{px} f_X(x)dx}\right] f_X(x)dx = 1$$

Οπότε,

$$f_{X'}(x) = \frac{e^{px}}{\int_0^{\infty} e^{px} f_X(x)dx} = \frac{e^{px} f_X(x)}{M_X(p)} \quad , \qquad p > 0$$

Η οποία είναι μια καλά ορισμένη pdf. Η κατανομή του X' που ορίζεται από την τελευταία εξίσωση ονομάζεται Μετασχηματισμός Esscher της X με παράμετρο p. Βάσει της Αρχής Πριμοδότησης ένα μέτρο κινδύνου κατασκευάζεται ως η αναμενόμενη τιμή του μετασχηματισμού Esscher, δηλαδή το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο. Ορίζεται το ασφάλιστρο Esscher (Esscher premium) ως

$$p(X) = E(X') = \mu_{X'} = \int_0^{\infty} x f_{X'}(x)dx = \frac{\int_0^{\infty} e^{px} f_X(x)dx}{M_X(p)} = \frac{E(Xe^{pX})}{E(e^{pX})}$$

Αποδεικνύεται ότι $\frac{d\,p(X)}{d\,p} \geq 0$ (βλ. Denuit et al., 2005, Ενότητα 2.5.5), έτσι ώστε το p να μπορεί να ερμηνευτεί ως ο δείκτης αποστροφής κινδύνου. Για να προσδιορίσουμε την κατανομή του X', μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το mgf του, το οποίο δίνεται από

$$M_{X'}(t) = E(e^{tX'}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f_{X'}(x)dx = \frac{\int_0^{\infty} e^{tx} e^{px} f_X(x)dx}{M_X(p)} = \frac{M_X(p+t)}{M_X(p)}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8</u>

Εάν $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Esscher της X με παράμετρο $p \in (0, \lambda)$ και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Για την εκθετική κατανομή, γνωρίζουμε ότι:

$$M_X(p) = \frac{\lambda}{\lambda - p}$$

Και ο μετασχηματισμός Esscher της X' με παράμετρο p θα είναι:

$$M_{X'}(t) = \frac{M_X(p+t)}{M_X(p)} = \frac{\lambda - p}{\lambda - p - t}$$

Επομένως, $X' \sim \mathrm{E}(\lambda\text{-}p)$.

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:

$$p(X) = \mu_{X'} = \frac{1}{\lambda - p} > \frac{1}{\lambda} = \mu_X$$

□

Σημειώνουμε ότι το ασφάλιστρο Esscher σαν μέτρο κινδύνου δεν είναι συνεπές καθώς ικανοποιεί το Αξίωμα Μεταθετικό Αναλλοίωτο και είναι no ripoff. Ωστόσο δεν είναι θετικά ομογενές και δεν ικανοποιεί, επίσης, το Αξίωμα της Μονοτονίας.

Συνάρτηση Παραμόρφωσης

Η συνάρτηση παραμόρφωσης χρησιμοποιείται για την κατασκευή μέτρων κινδύνου. Θεωρείται, επίσης, ως μια κατηγορία μέτρων κινδύνου και μάλιστα κάποια από τα μέτρα κινδύνου που αναφέρθηκαν νωρίτερα ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

Ορισμός

Η συνάρτηση παραμόρφωσης είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση $g(\cdot)$ για την οποία ισχύει $g(1) = 1$ και $g(0) = 0$.

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή ζημίας. Εφόσον η συνάρτηση παραμόρφωσης $g(\cdot)$ είναι μη φθίνουσα και η συνάρτηση επιβίωσης S_X είναι μη αύξουσα, η $g(S_X(x))$ είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση. Πράγματι, εάν υποθέσουμε ότι η $g(\cdot)$ είναι παραγωγίσιμη

$$\frac{dg(S_X(x))}{dx} = g'(S_X(x))\, S'_X(x) \leq 0$$

Γνωρίζουμε ότι για την συνάρτηση επιβίωσης ισχύει η εξής ιδιότητα: $S_X(0) = 1$ και $S_X(\infty) = 0$. Συνεπώς, έχουμε $g(S_X(0)) = g(1) = 1$ και $g(S_X(\infty)) = g(0) = 0$ και η $g(S_X(x))$ είναι καλά ορισμένη στο $[0, \infty)$. Ας υποθέσουμε ότι X' είναι η τυχαία μεταβλητή για αυτή την sf η οποία μπορεί να ερμηνευθεί ως τυχαία μεταβλητή προσαρμοσμένη στον κίνδυνο και $g(S_X(x))$ ως η προσαρμοσμένη στον κίνδυνο sf. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι η $g(\cdot)$ έχει τα κοίλα προς τα κάτω ($g''(x) \leq 0$ εάν υπάρχει). Έτσι η pdf της X' θα είναι:

$$f_{X'}(x) = \frac{dg(S_X(x))}{d\,x} = g'(S_X(x))f_X(x) \qquad [9]$$

Ενώ

$$\frac{dg\prime(S_X(x))}{d\,x} = g''(S_X(x))\, S_{X'}(X)$$

Και η $g'(S_X(x))$ είναι μη φθίνουσα. Συγκρίνοντας την εξίσωση [8] με την [9] μπορούμε να ερμηνεύσουμε το $g'(S_X(x))$ ως συνάρτηση στάθμισης για να κλιμακώσουμε την pdf της απώλειας στην δεξιά ουρά.

<u>Ορισμός</u>

Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή ζημίας. Το **μέτρο κινδύνου παραμόρφωσης**, που βασίζεται στην συνάρτηση παραμόρφωσης g(·), συμβολίζεται με p(X) και ορίζεται ως:

$$p(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx \qquad [10]$$

Το μέτρο κινδύνου παραμόρφωσης p(X) είναι ο μέσος όρος της προσαρμοσμένης στον κίνδυνο απώλειας X'. Η τάξη των μέτρων κινδύνου παραμόρφωσης περιλαμβάνει τα ακόλουθα μέτρα κινδύνου.

Μέτρο κινδύνου καθαρού ασφαλίστρου

Θέτοντας

$$g(u) = u$$

ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις g(0) = 0, g(1) = 1 και η g(·) είναι μη φθίνουσα.

Οπότε

$$p(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx = \int_0^\infty S_X(x)dx = \mu_X$$

το οποίο είναι το μέτρο κινδύνου καθαρού ασφαλίστρου.

Μέτρο κινδύνου VaR

Για το VaR_δ ορίζουμε την συνάρτηση παραμόρφωσης ως:

$$g(S_X(x)) = \begin{Bmatrix} 0\,, \gamma\iota\alpha\ 0 \le S_X(x) < 1-\delta \\ 1\ ,\ \gamma\iota\alpha\ 1-\delta \le S_X(x) \le 1 \end{Bmatrix}$$

που είναι ισοδύναμο με

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} 0 \ , \gamma\iota\alpha\ x > VaR_\delta \\ 1, \ \gamma\iota\alpha\ 0 \le x \le VaR_\delta \end{cases}$$

Επομένως

$$p(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx = \int_0^{VaR_\delta} dx = VaR_\delta$$

Μέτρο κινδύνου CTE

Για το CTE_δ ορίζουμε την συνάρτηση παραμόρφωσης (με την προϋπόθεση ότι η X είναι συνεχής) ως:

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} \frac{S_X(x)}{1-\delta} \ , \gamma\iota\alpha\ 0 \le S_X(x) \le 1-\delta \\ 1 \ , \gamma\iota\alpha\ 1-\delta \le S_X(x) \le 1 \end{cases}$$

που είναι ισοδύναμο με

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} \frac{S_X(x)}{1-\delta} \ , \gamma\iota\alpha\ x > x_\delta \\ 1 \ , \gamma\iota\alpha\ 0 \le x \le x_\delta \end{cases}$$

Επομένως

$$p(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx = \int_0^{x_\delta} dx + \int_{x_\delta}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\delta}dx = x_\delta + \int_{x_\delta}^\infty \frac{S_X(x)}{1-\delta}dx \quad [11]$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε

$$\int_{x_\delta}^\infty S_X(x)dx = xS_X(x)\Big|_{x_\delta}^{\infty} + \int_{x_\delta}^\infty x f_X(x)dx = -x_\delta(1-\delta) + \int_{x_\delta}^\infty x f_X(x)dx$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην εξίσωση [11] έχουμε

$$p(X) = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^\infty x f_X(x)dx$$

το οποίο είναι το CTE_δ (εξίσωση [3]).

Τα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε συναρτήσεις παραμόρφωσης αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία. Το σημαντικότερο είναι ότι αυτή η κατηγορία μέτρων κινδύνου έχει πολύ επιθυμητές ιδιότητες, όπως συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω g(·) μια συνάρτηση παραμόρφωσης με τα κοίλα προς τα κάτω. Το μέτρο κινδύνου της ζημίας X, όπως ορίζεται στην εξίσωση [10], είναι Μεταθετικά Αναλλοίωτο, Μονότονο, Θετικά Ομογενές και υποπροσθετικό. Επομένως είναι συνεπές.

(βλ. Denuit et al. (2005, Ενότητα 2.6.2.2).

Μετασχηματισμός Wang

O Wang (2000) πρότεινε την ακόλουθη συνάρτηση παραμόρφωσης

$$g(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) + p]$$

όπου Φ(·) είναι η συνάρτηση πυκνότητας (df) της κανονικής κατανομής και p είναι η παράμετρος κινδύνου που λαμβάνει μόνο θετικές τιμές. Σημειώνεται ότι η Φ(·) χρησιμοποιείται μόνο για τον καθορισμό του μετασχηματισμού και δεν γίνεται παραδοχή κανονικότητας για την κατανομή ζημίας. Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή ως Μετασχηματισμός Wang(Wang Transform).

Εύκολα δείχνεται ότι g(0) = 0 και g(1) = 1. Δηλώνοντας φ(·) ως την pdf της τυπικής κανονικής και $x = \Phi^{-1}(u)$, έχουμε

$$\frac{dg(u)}{du} = \frac{\varphi(x+p)}{\varphi(x)} = \exp\left(-px - \frac{p^2}{2}\right) > 0$$

και

$$\frac{d^2g(u)}{du^2} = -\frac{p\varphi(x+p)}{[\varphi(x)]^2} < 0$$

Συνεπώς, ο Μετασχηματισμός Wang είναι μια συνάρτηση αύξουσα και έχει τα κοίλα προς τα κάτω. Ας δηλώσουμε με X' την Wang-μετασχηματισμένη μεταβλητή της κατανομής ζημίας X. Το μέτρο κινδύνου της X σύμφωνα με τον Μετασχηματισμό Wang ορίζεται ως το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο:

$$\boldsymbol{p}(x) = E(X') = \int_0^\infty \Phi\left[\Phi^{-1}\left(S_X(x)\right) + p\right]dx$$

και

$$\frac{d\boldsymbol{p}(x)}{dp} = \int_0^\infty \varphi\left[\Phi^{-1}\left(S_X(x)\right) + p\right]dx > 0$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το μέτρο κινδύνου $\boldsymbol{p}(x)$ αυξάνεται κατά p, το οποίο αντιπροσωπεύει την αποστροφή στον κίνδυνο.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9</u>

Εάν X ~ $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ να βρεθεί η κατανομή ζημίας σύμφωνα με τον Μετασχηματισμό Wang και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

H sf της X είναι

$$S_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

H sf από τον Wang Μετασχηματισμό της X' είναι

$$\begin{aligned} S_{X'}(x) &= g\left(S_X(x)\right) \\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(S_X(x)\right) + p\right] \\ &= \Phi[\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + p] \\ &= \Phi[\left(-\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right) + p] \\ &= \Phi\left[-\tfrac{x-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \\ &= 1 - \Phi\left[\tfrac{x-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \end{aligned}$$

Επομένως, X'~$\mathrm{N}(\mu+p\sigma, \sigma^2)$

Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:
$\mathbf{p}(x) = \mathrm{E}(X') = \mu+p\sigma$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Εάν Χ $\sim \mathrm{L}(\mu, \sigma^2)$ να βρεθεί η κατανομή ζημίας σύμφωνα με τον Μετασχηματισμό Wang και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η sf της Χ είναι

$$S_X(x) = 1 - \Phi\left[\frac{logx - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left[-\frac{logx - \mu}{\sigma}\right]$$

Η sf από τον Wang Μετασχηματισμό της Χ' είναι

$$\begin{aligned} S_{X'}(x) &= g\big(S_X(x)\big) \\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\Phi\left[-\tfrac{logx-\mu}{\sigma}\right]\right) + p\right] \\ &= \Phi\left[-\tfrac{logx-\mu}{\sigma} + p\right] \\ &= 1 - \Phi\left[\tfrac{logx-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \end{aligned}$$

Επομένως, $X' \sim \mathrm{L}(\mu+p\sigma, \sigma^2)$

Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:

$$\mathbf{p}(\mathrm{x}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}') = \exp\left(\mu + p\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

□

Από τα δύο τελευταία παραδείγματα παρατηρούμε ότι η Wang μετασχηματισμένη ζημία παραμένει στην ίδια οικογένεια κατανομής της αρχικής κατανομής ζημίας, για την περίπτωση της κανονικής και λογαριθμοκανονικής ζημίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1.

Έστω ότι ένας κίνδυνος X ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu_X = 150$, $\sigma^2[X] = 400$ και $\theta = 40\%$. Βρείτε το ρ(X) χρησιμοποιώντας:

(α) το καθαρό ασφάλιστρο,
(β) την αρχή αναμενόμενης αξίας,
(γ) την αρχή της διακύμανσης,
(δ) την αρχή της τυπικής απόκλισης

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ:</u>

(α) Για το καθαρό ασφάλιστρο έχουμε:

$$p(X) = \mu_X$$
$$p(X) = 150$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει στον ασφαλιστή το ασφάλιστρο των 150€.

(β) Για την αρχή αναμενόμενης αξίας έχουμε:

$$p(X) = (1+\theta)\mu_X$$
$$p(X) = (1+0{,}4)*150$$
$$p(X) = 210$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει στον ασφαλιστή το ασφάλιστρο των 210€.

(γ) Για την αρχή διακύμανσης έχουμε:

$$p(X) = \mu_X + \theta\sigma_X^2$$

$$p(X) = 150+0,4*400$$

$$p(X) = 310$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει στον ασφαλιστή το ασφάλιστρο των 310€.

(δ) Για την αρχή της τυπικής απόκλισης έχουμε:

$$p(X) = \mu_X + \theta\sigma_X$$

$$p(X) = 150+0,4*\sqrt{400}$$

$$p(X) = 158$$

Άρα ο ασφαλισμένος θα πρέπει να πληρώσει στον ασφαλιστή το ασφάλιστρο των 158€.

□

2.

Έστω κίνδυνος X, όπου X ~ N(42, 120^2). Να βρεθεί το $VaR_{95\%}(X)$ και το $VaR_{99\%}(X)$.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

$$\Pr(X > VaR_{95\%}) = 0{,}95$$

$$\Phi\left(\frac{VaR_{95\%} - 42}{120}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{VaR_{95\%} - 42}{120} = 1{,}65$$

$$VaR_{95\%}(X) = 240€$$

Παρομοίως,

$$\Pr(X > VaR_{99\%}) = 0{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{VaR_{99\%} - 42}{120}\right) = 0{,}99$$

$$\frac{VaR_{99\%} - 42}{120} = 2{,}33$$

$$VaR_{99\%}(X) = 321{,}6€$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα σημαίνουν, πρακτικά, πως η εταιρεία κινδυνεύει να έχει ζημιές το πολύ 240€ με πιθανότητα 95% και το πολύ 321,6€ με πιθανότητα 99%.

Τα ποσοστιαία σημεία αντλήθηκαν από τον πίνακα στο παράρτημα ο οποίος παραθέτει τα ποσοστιαία σημεία της Τυπικής Κανονικής Κατανομής.

$\square$

3.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή ζημίας και επίσης έστω ότι $X \sim E(\lambda)$ και δ το επίπεδο εμπιστοσύνης.

α) Να βρεθούν, με φόρτωση θ, το καθαρό ασφάλιστρο και το ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Αναμενόμενης Αξίας.

β) Να βρεθούν, με φόρτωση θ, τα ασφάλιστρα σύμφωνα με την αρχή Διακύμανσης και την αρχή Τυπικής Απόκλισης.

γ) Να υπολογιστεί η Αξία σε Κίνδυνο ($\mathrm{VaR}_{\delta}(X)$) και η Υπό Όρους Προσδοκία Ούρας ($\mathrm{CTE}_{\delta}(X)$).

δ)Να υπολογιστεί η Υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο ($\mathrm{CVaR}_{\delta}(X)$) και η Αξία σε Κίνδυνο Ουράς ($\mathrm{TVaR}_{\delta}(X)$).

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Για την Εκθετική κατανομή Ε(λ), γνωρίζουμε ότι έχει:

pdf: $f_X(x) = \lambda * e^{-\lambda x}$ x ≥ 0

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ και } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{cdf: } F_X(x) = \begin{Bmatrix} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{Bmatrix}$$

Και η αντίστροφή της είναι:

$$F^{-1}(\delta) = \frac{-\log(1-\delta)}{\lambda}$$

α)

Καθαρό ασφάλιστρο:

$$p(X) = E[X] = \frac{1}{\lambda} =$$

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας:

$$p(X) = (1+\theta)E[X] = (1+\theta)\frac{1}{\lambda} =$$

β)

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Διακύμανσης:

$$p(X) = E[X] + \theta\sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda} + \frac{\theta}{\lambda^2}$$

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

$$p(X) = E[X] + \theta\sigma_x = \frac{1+\theta}{\lambda}$$

γ)

Αξία σε Κίνδυνο:

$$VaR_\delta(X) = F_x^{-1}(\delta) = -\frac{\log(1-\delta)}{\lambda}$$

Υπό Όρους Προσδοκία Ουράς:

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4):

$\mathrm{CTE}_\delta = \frac{1}{1-\delta}\int_\delta^1 x_\xi \, d\xi = \frac{1-log(1-\delta)}{\lambda}$, όπου $\xi = F_x(x)$

Ας χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση (3):

$$\mathrm{CTE}_\delta = E[X \mid X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x\, f_X(x)dx = \frac{1-log(1-\delta)}{\lambda}$$

δ)

Υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο:

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (1):

$$\mathrm{CVaR}_\delta(\mathrm{X}) = \mathrm{CTE}_\delta(\mathrm{X}) - \mathrm{VaR}_\delta(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}$$

Αξία σε Κίνδυνο Ουράς:

Θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση (7):

$$TVaR_\delta(X) = \frac{1}{1-\delta}\int_\delta^1 VaR_\xi \, d\xi = \frac{1-log(1-\delta)}{\lambda}$$

□

4.

Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή ζημίας και επίσης έστω ότι $X \sim U(O, 1000)$ και δ το επίπεδο εμπιστοσύνης.
Χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο R, με την εντολή: `> runif(100, min = 0, max = 1000)`

έχουμε ένα τυχαίο δείγμα 100 παρατηρήσεων.

989	140	668	343	218
842	714	877	337	18
169	890	324	143	599
335	743	173	654	550
499	312	330	962	192
219	898	417	147	542
307	717	974	865	882
98	662	872	581	540
949	734	897	247	483
808	971	892	26	567
241	881	522	206	94
680	848	803	78	111
303	671	893	834	960
781	69	978	123	146
82	653	700	50	584
795	931	990	1	174
838	413	93	113	500
563	304	325	899	320
658	272	136	630	723
720	588	744	853	540

α) Να βρεθούν, με φόρτωση 20%, το καθαρό ασφάλιστρο και το ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Αναμενόμενης Αξίας.

β) Να βρεθούν, με φόρτωση 20%, τα ασφάλιστρα σύμφωνα με την αρχή Διακύμανσης και την αρχή Τυπικής Απόκλισης.

γ) Να υπολογιστεί η Αξία σε Κίνδυνο ($VaR_δ(X)$) και η Υπό Όρους Προσδοκία Ουράς ($CTE_δ(X)$). (Για δ=0,95 και 0,99)

δ)Να υπολογιστεί η Υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο ($CVaR_δ(X)$) και η Αξία σε Κίνδυνο Ουράς ($TVaR_δ(X)$). (Για δ=0,95 και 0,99)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Για την Ομοιόμορφη κατανομή U(α,b), γνωρίζουμε ότι έχει:

$$\text{pdf: } f_X(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{Bmatrix}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \text{ και } Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{cdf: } F_X(x) = \begin{Bmatrix} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{Bmatrix}$$

Και η αντίστροφή της είναι:

$$F^{-1}(\delta) = a + \delta(b-a)$$

α)

Καθαρό ασφάλιστρο:

$$p(X) = E[X] = \frac{b}{2} = \frac{1.000}{2} = 500$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 500€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας:

$$p(X) = (1+\theta)E[X] = (1+\theta)\frac{b}{2} = (1+0{,}2)500 = 600$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 600€.

β)

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Διακύμανσης:

$$p(X) = E[X] + \alpha\sigma_x^2 = \frac{b}{2} + \frac{ab^2}{12} = 500 + \frac{0{,}2 * 1.000.000}{12} = 16.666{,}66$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 16.666,66€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

$$p(X) = E[X] + a\sigma_x = \frac{b}{2} + \frac{ab}{\sqrt{12}} = 500 + \frac{0{,}2 * 1.000}{3{,}46} = 557{,}8$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 557,8€.

γ)

- δ = 0,95

Αξία σε Κίνδυνο:

$$VaR_\delta(X) = F_x^{-1}(\delta) = b\delta = 1.000 * 0{,}95 = 950$$

Με την εντολή: qunif(0.95, 0, 1000)

$$VaR_\delta(X) = 950$$

Με πιθανότητα 95%, η αξία που βρίσκεται σε κίνδυνο είναι 950€.

Υπό Όρους Προσδοκία Ουράς:

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4):

$$\mathrm{CTE}_{\delta} = \frac{1}{1-\delta} \int_{\delta}^{1} x_{\xi}\, d\xi = \frac{b(1+0{,}95)}{2} = 975 \qquad \text{, όπου } \xi = F_{x}(x)$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 95ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 975€.

Ας χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση (3):

$$\mathrm{CTE}_{\delta} = E\,[\,X \mid X > x_{\delta}] = \frac{1}{1-\delta} \int_{x_{\delta}}^{\infty} x\, f_X(x)dx = \frac{b(1+95\%)}{2} = 975$$

- δ = 0,99

Αξία σε Κίνδυνο:

$$VaR_{\delta}(X) = F_x^{-1}(\delta) = b\delta = 1.000 * 0{,}99 = 990$$

Με την εντολή: qunif(0.99, 0, 1000)

$$VaR_{\delta}(X) = 990$$

Με πιθανότητα 99%, η αξία που βρίσκεται σε κίνδυνο είναι 990€.

Υπό Όρους Προσδοκία Ουράς:

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4):

$$\mathrm{CTE}_{\delta} = \frac{1}{1-\delta} \int_{\delta}^{1} x_{\xi}\, d\xi = \frac{b(1+0{,}99)}{2} = 995 \qquad \text{, όπου } \xi = F_{x}(x)$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 99ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 995€.

Ας χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση (3):

$$\mathrm{CTE}_\delta = \mathrm{E}\,[\,\mathrm{X} \mid \mathrm{X} > \mathrm{x}_\delta] = \frac{1}{1-\delta} \int_{x_\delta}^{\infty} x\, f_X(x)dx = \frac{b(1+99\%)}{2} = 995$$

δ)

Υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο:

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (1):

- δ = 0,95

$$\mathrm{CVaR}_\delta(\mathrm{X}) = \mathrm{CTE}_\delta(\mathrm{X}) - \mathrm{VaR}_\delta(\mathrm{X}) = \frac{b(1-0{,}95)}{2} = 25$$

Πράγματι, η αναμενόμενη αξία ζημίας εάν ξεπεραστεί το 95ο ποσοστημόριο, θα είναι 25€.

- δ = 0,99

$$\mathrm{CVaR}_\delta(\mathrm{X}) = \mathrm{CTE}_\delta(\mathrm{X}) - \mathrm{VaR}_\delta(\mathrm{X}) = \frac{b(1-0{,}99)}{2} = 5$$

Πράγματι, η αναμενόμενη αξία ζημίας εάν ξεπεραστεί το 95ο ποσοστημόριο, θα είναι 5€.

Αξία σε Κίνδυνο Ουράς:

Θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση (7):

$$TVaR_\delta(X) = \frac{1}{1-\delta} \int_\delta^1 VaR_\xi \, d\xi = \frac{b(1+\delta)}{2} = 975$$

□

***5.* <u>(ΚΑΤΑΝΟΜΗ PARETO)</u>**

Έστω X η τυχαία μεταβλητή ζημίας, όπου X ~ Pareto(7, 110).

α) Να υπολογιστεί το καθαρό ασφάλιστρο και επίσης, με φορτώσεις α=θ=20%, να υπολογιστούν τα ασφάλιστρα σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας, την αρχή Διακύμανσης και την αρχή Τυπικής Απόκλισης.

β) Να υπολογιστεί η Αξία σε Κίνδυνο ($VaR_\delta(X)$) και η Υπό Όρους Προσδοκία Ουράς ($CTE_\delta(X)$). (Για δ=0,95 και 0,99)

γ) Να υπολογιστεί η Υπό Όρους Αξία σε Κίνδυνο ($CVaR_\delta(X)$).

(Για δ=0,95 και 0,99)

δ) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός αναλογικού κινδύνου του X με παράμετρο p ∈ [1, α) και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αρχικά, για την κατανομή Pareto τύπου II Lomax, γνωρίζουμε ότι, εάν $X \sim P(k, s)$ τότε:

pdf: $f_X(x) = \frac{k * s^k}{(s+x)^{k+1}}$

$$E(X) = \frac{s}{k-1}, \quad k > 1$$

και

$$Var(X) = \frac{k * s^2}{(k-1)^2 * (k-2)} \quad , k > 2$$

cdf: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{s}{s+x}\right)^k$

α)

Καθαρό ασφάλιστρο:

$$p(X) = E(X) = \frac{s}{k-1} = \frac{110}{7-1} = 18{,}33$$

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας:

$$p(X) = (1+\theta)E(X) = (1+0.2) * 18.3 = 21.99$$

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Διακύμανσης:

$$p(X) = E(X) + a * Var(X) = 18{,}33 + 0.2 * 470{,}5 = 112{,}43$$

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

$$p(X) = E(X) + a * \sqrt{Var(X)} = 18{,}33 + 0.2 * 21.7 = 22{,}67$$

β)

$$VaR_{95\%}(X) = \frac{s}{(1-95\%)^{\frac{1}{7}}} - s = \frac{110}{(0.05)^{\frac{1}{7}}} - 110 = 56{,}6$$

Με πιθανότητα 95%, η αξία που βρίσκεται σε κίνδυνο είναι 56,6€.

$$VaR_{99\%}(X) = \frac{s}{(1-99\%)^{\frac{1}{7}}} - s = \frac{110}{(0.01)^{\frac{1}{7}}} - 110 = 101{,}5$$

Με πιθανότητα 99%, η αξία που βρίσκεται σε κίνδυνο είναι 101,5€.

$$CTE_{95\%} = VaR_{95\%} + \frac{s + VaR_{95\%}}{k-1} = 56.6 + \frac{110 + 56{,}6}{6} = 84{,}4$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 95ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 84,4€.

$$CTE_{99\%} = VaR_{99\%} + \frac{s+VaR_{99\%}}{k-1} = 101.5 + \frac{110 + 101{,}5}{6} = 136{,}75$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 99ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 136,75€.

γ)

$$CVaR_{95\%} = CTE_{95\%} - VaR_{95\%} = 84.4 - 56{,}6 = 27{,}8$$

Πράγματι, η αναμενόμενη αξία ζημίας εάν ξεπεραστεί το 95ο ποσοστημόριο, θα είναι 27,8€.

$$CVaR_{99\%} = CTE_{99\%} - VaR_{99\%} = 136.75 - 101.5 = 35{,}25$$

Πράγματι, η αναμενόμενη αξία ζημίας εάν ξεπεραστεί το 99ο ποσοστημόριο, θα είναι 35,25€.

δ) Μετασχηματισμός Αναλογικού Κινδύνου

Η sf της X είναι

$$S_X(x) = \left(\frac{s}{s+x}\right)^k$$

με μέσο

$$\mu_X = \frac{s}{k-1}$$

Η sf της X' είναι

$$S_{X'}(x) = [S_X(x)]^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{s}{s+x}\right)^{\frac{k}{p}}$$

Οπότε X' $\sim \mathrm{P}(\frac{k}{p}, s)$. Άρα ο μέσος του X' (προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο) είναι

$$\mu_{X'} = \frac{s}{\frac{k}{p} - 1} = \frac{ps}{k-p} > \frac{s}{k-1} = \mu_X$$

- p=1

$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 1}{6} = 18{,}33$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 18,33€.

- p=2

$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 2}{6} = 36{,}6$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 36,6€.

- p=3

$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 3}{6} = 55$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 55€.

- p=4

$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 4}{6} = 73{,}3$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 73,3€.

- p=5

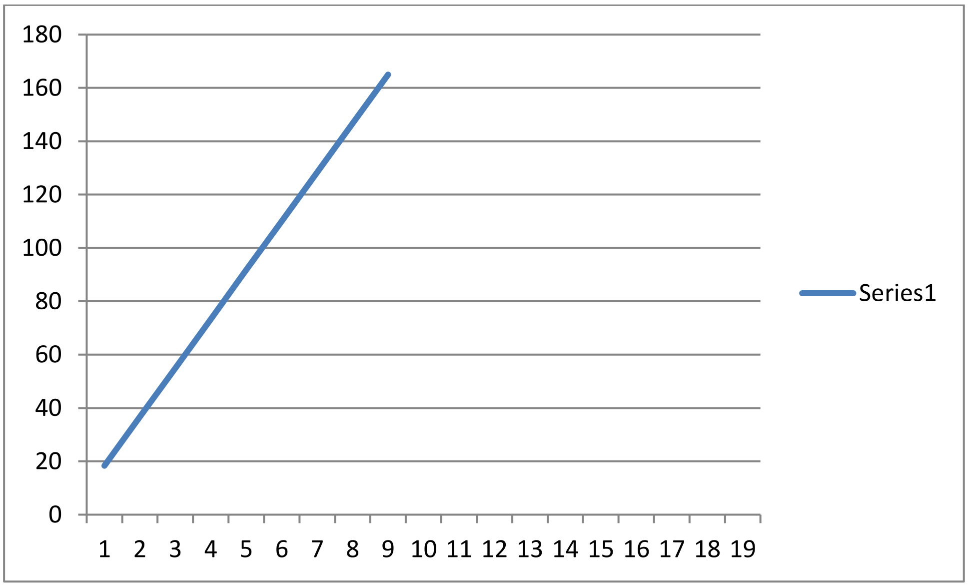
$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 5}{6} = 91{,}6$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 91,6€.

- p=6

$$\mu_x = \frac{s * p}{k - p} = \frac{110 * 6}{6} = 110$$

Το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο θα είναι 110€.



Παρατηρούμε πως όσο μεγαλώνει ο δείκτης αποστροφής κινδύνου, αυξάνεται το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

6)

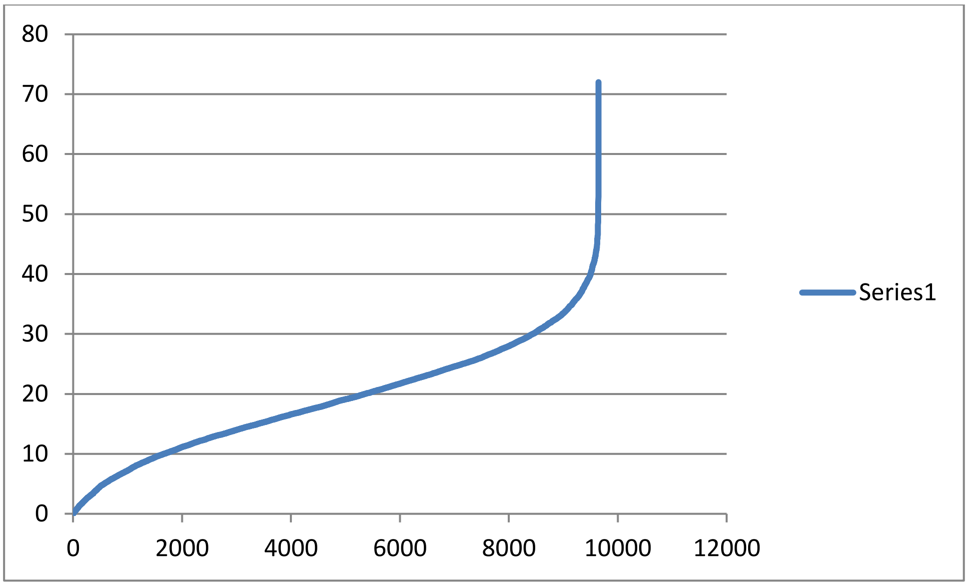
2,163823	27,22509	10,07038	21,7439	17,25505
23,80993	21,4309	20,05398	21,45418	29,15844
19,14216	11,97311	18,8217	23,49263	21,60959
17,27274	23,47342	11,78946	21,06449	19,93918
23,15983	8,278583	21,22126	9,758626	-2,23495
30,81468	18,10852	13,6552	26,97338	16,45285
15,35488	27,64896	32,47653	14,49125	23,79393
23,74604	29,60214	12,91573	20,63488	15,92445
17,45028	34,93846	7,242214	24,91798	2,84849
10,3764	17,95852	25,98381	22,72164	10,41205
25,62672	24,93796	24,94557	9,809331	26,63164
20,48587	12,97764	17,58153	27,82999	10,03483
19,86715	15,848	32,69847	16,70919	8,8899
10,99029	2,049727	22,06766	9,046401	11,33447
11,98622	39,31859	27,87935	20,01362	37,02257
0,111912	23,86512	33,10315	8,684854	30,12735
21,97757	45,20339	4,253864	24,14822	22,64595

43,96029	7,791253	19,6824	18,29978	28,43862
4,20009	31,92604	1,959823	29,1777	31,76774
30,5055	24,74504	11,27573	8,114965	27,14018

Παραπάνω δίνεται ένα δείγμα 100 τιμών κινδύνου που διατρέχει η εταιρεία. Συνολικά οι τιμές είναι 9.647. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το είδος της κατανομής που ακολουθούν οι δοθείσες τιμές και τα πιθανά μέτρα κινδύνου. Έστω φόρτωση θ =20%.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αρχικά, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Microsoft excel, δημιουργούμε το γράφημα διασποράς.



Λόγω του ανωτέρω γραφήματος, πιθανολογούμε ότι οι τιμές ακολουθούν την Κανονική κατανομή.

Στη συνέχεια δημιουργούμε τον πίνακα περιγραφικής στατιστικής:

Στήλη1	
Μέσος	18,23820142
Τυπικό σφάλμα	0,100237787
Διάμεσος	18,1483057
Επικρατούσα τιμή	9,825815266
Μέση απόκλιση τετραγώνου	10,0237787
Διακύμανση	100,4761395
Κύρτωση	0,026907158
Ασυμμετρία	- 0,002613097
Εύρος	92,0612365
Ελάχιστο	-20,0870562
Μέγιστο	71,9741803
Άθροισμα	182382,0142
Πλήθος	9647

Καθώς η κύρτωση και η ασσυμετρία έχουν τιμές πολύ κοντά στο μηδέν, συμπεραίνουμε πως οι τιμές ακολουθούν την Κανονική κατανομή με μέσο 18,33 και διακύμανση 100.

Συμβολίζουμε τον κίνδυνο που μπορεί να πάρει τις τιμές παραπάνω με X.

Συνεπώς, $X \sim N(18{,}33,\ 100)$

Καθαρό ασφάλιστρο:

$$p(X) = E(X) = 18{,}33$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 18,33€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας:

$$p(X) = (1+\theta)E[X] = 21{,}99$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 21,99€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Διακύμανσης:

$$p(X) = E[X] + \theta\sigma_x^2 = 38{,}33$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 38,33€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

$$p(X) = E[X] + a\sigma_x = 20{,}33$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 20,33€.

Αξία σε Κίνδυνο(VaR):

$$\Pr(X > VaR_{95\%}) = 0{,}95$$

$$\Phi\left(\frac{VaR_{95\%} - 18{,}33}{10}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{VaR_{95\%} - 18{,}33}{10} = 1{,}65$$

$$VaR_{95\%}(X) = 34{,}83€$$

Παρομοίως,

$$\Pr(X > VaR_{99\%}) = 0{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{VaR_{99\%} - 18{,}33}{10}\right) = 0{,}99$$

$$\frac{VaR_{99\%} - 18{,}33}{10} = 2{,}33$$

$$VaR_{99\%}(X) = 41{,}63€$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα σημαίνουν, πρακτικά, πως η εταιρεία κινδυνεύει να έχει ζημιές το πολύ 599€ με πιθανότητα 95% και το πολύ 41,63€ με πιθανότητα 99%.

Υπό όρους προσδοκία ουράς(CTE):

Για το $CTE_{95\%}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή του 5% του συνολικού πλήθους των μεγαλύτερων τιμών. Ταξινομούμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$CTE_{95\%} = E[\,X \mid X > x_{95\%}] = 39$$

$$CTE_{99\%} = E[\,X \mid X > x_{99\%}] = 44,5$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 95ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 39€.

Ενώ εάν ξεπεράσει το 99ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 44,5€.

$$CVaR_{95\%} = CTE_{95\%} - VaR_{95\%} = 39 - 34{,}83 = 4{,}17$$

$$CVaR_{99\%} = CTE_{99\%} - VaR_{99\%} = 44{,}5 - 41{,}63 = 2{,}87$$

Μετασχηματισμός Esscher και προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο.

Για την κανονική κατανομή γνωρίζουμε ότι:

$$M_X(x) = e^{x\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$$

Και ο μετασχηματισμός Esscher της X' με παράμετρο p θα είναι:

$$M_{X'}(x) = \frac{M_X(p+x)}{M_X(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{\left((x-\mu-\sigma^2 p)\right)^2}{2\sigma^2}}$$

Επομένως, $X' \sim N(\mu+p\sigma^2, \sigma^2)$

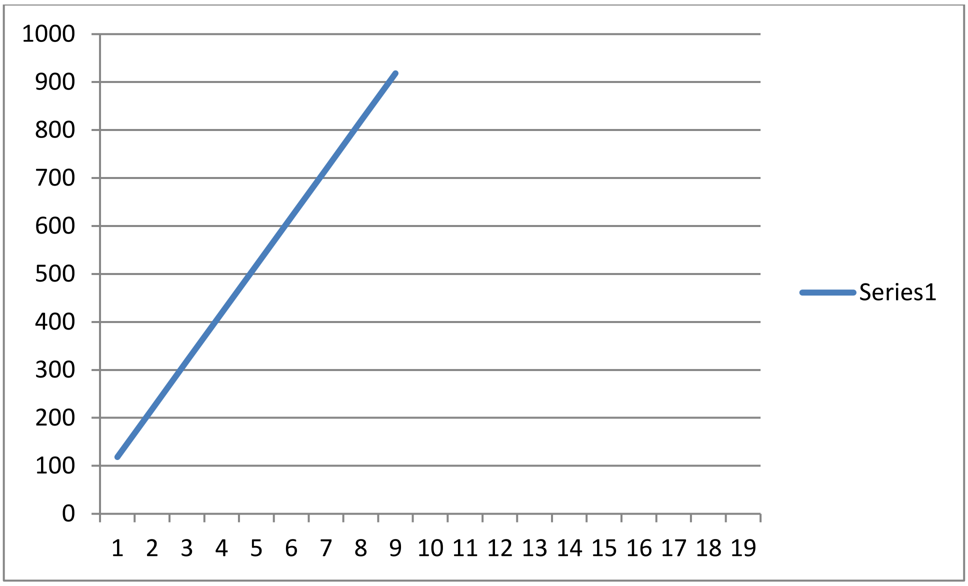
Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:
$\mathbf{p}(X) = E(X') = \mu+p\sigma^2 = 18{,}33+p*100$

- p=1

p(X)=118,33

- p=2

p(X)=218,33



Μετασχηματισμός Wang:

Η sf της X είναι

$$S_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Η sf από τον Wang Μετασχηματισμό της X' είναι

$$\begin{aligned} S_{X'}(x) &= g\big(S_X(x)\big) \\ &= \Phi\big[\Phi^{-1}\big(S_X(x)\big) + p\big] \\ &= \Phi[\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + p] \\ &= \Phi[\left(-\tfrac{x-\mu}{\sigma}\right) + p] \\ &= \Phi\left[-\tfrac{x-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \\ &= 1 - \Phi\left[\tfrac{x-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \end{aligned}$$

Επομένως, X'~N(μ+pσ, σ^2)

Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:
$\mathbf{p}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}') = \mu + p\sigma = 18.33 + p * 10$

- p=1

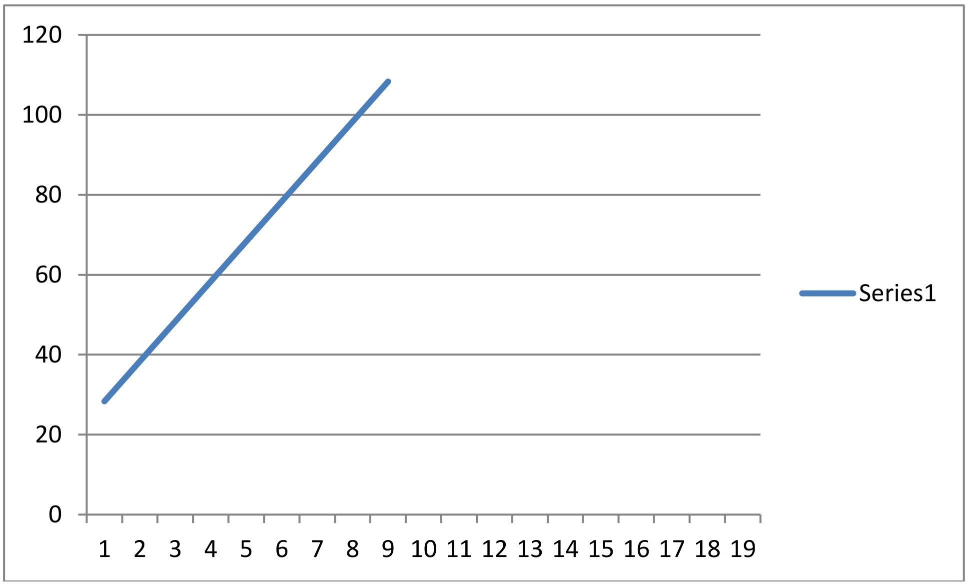
$$p(X)=28.33$$

- p=2

$$p(X)=38.33$$

- p=3

$$p(X)=48.33$$



7)

Έστω κίνδυνος X~Lognormal(0.91, 4)

Γνωρίζουμε ότι:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 18.33$$

Επίσης,

$$Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) * e^{2\mu+\sigma^2} = 18.061{,}6$$

Καθαρό ασφάλιστρο:

$$p(X) = E(X) = 18{,}33$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 18,33€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή Αναμενόμενης Αξίας:

$$p(X) = (1+\theta)E[X] = 21{,}99$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 21,99€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Διακύμανσης:

$$p(X) = E[X] + \theta\sigma_x^2 = 3.630{,}65$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 3.630,65€.

Ασφάλιστρο σύμφωνα με την αρχή της Τυπικής Απόκλισης:

$$p(X) = E[X] + a\sigma_x = 45{,}21$$

Το αντίτιμο του ασφαλίστρου θα είναι 45,21€.

Αξία σε Κίνδυνο(VaR):

$$VaR_{95\%}(X) = 35{,}03€$$

Παρομοίως,

$$VaR_{99\%}(X) = 37{,}3€$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα σημαίνουν, πρακτικά, πως η εταιρεία κινδυνεύει να έχει ζημιές το πολύ 35,03€ με πιθανότητα 95% και το πολύ 37,3€ με πιθανότητα 99%.

Υπό όρους προσδοκία ουράς(CTE):

Για το $CTE_{95\%}$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή του 5% του συνολικού πλήθους των μεγαλύτερων τιμών. Ταξινομούμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$CTE_{95\%} = E\left[\, X \mid X > x_{95\%} \right] = 39{,}05$$

$$CTE_{99\%} = E [X \mid X > x_{99\%}] = 40,9$$

Εάν η ζημία ξεπεράσει το 95ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 39,05€.

Ενώ εάν ξεπεράσει το 99ο ποσοστημόριο, η αναμενόμενη ζημία που θα υπάρξει θα είναι 40,9€.

$$CVaR_{95\%} = CTE_{95\%} - VaR_{95\%} = 39{,}05 - 35{,}03 = 4{,}02$$

$$CVaR_{99\%} = CTE_{99\%} - VaR_{99\%} = 40{,}9 - 37{,}3 = 3{,}6$$

Μετασχηματισμός Wang:

Η sf της X είναι

$$S_X(x) = 1 - \Phi\left[\frac{logx - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left[-\frac{logx - \mu}{\sigma}\right]$$

Η sf από τον Wang Μετασχηματισμό της X' είναι

$$\begin{aligned} S_{X'}(x) &= g\big(S_X(x)\big) \\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\Phi\left[-\tfrac{logx-\mu}{\sigma}\right]\right) + p\right] \\ &= \Phi\left[-\tfrac{logx-\mu}{\sigma} + p\right] \\ &= 1 - \Phi\left[\tfrac{logx-(\mu+p\sigma)}{\sigma}\right] \end{aligned}$$

Επομένως, $X' \sim L(\mu + p\sigma, \sigma^2)$

Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:

$$\mathbf{p}(x) = E(X') = \exp\left(\mu + p\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Και το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ασφάλιστρο είναι:
p(X) = E(X') = exp(0,91+p*2+4/2)

- p=1

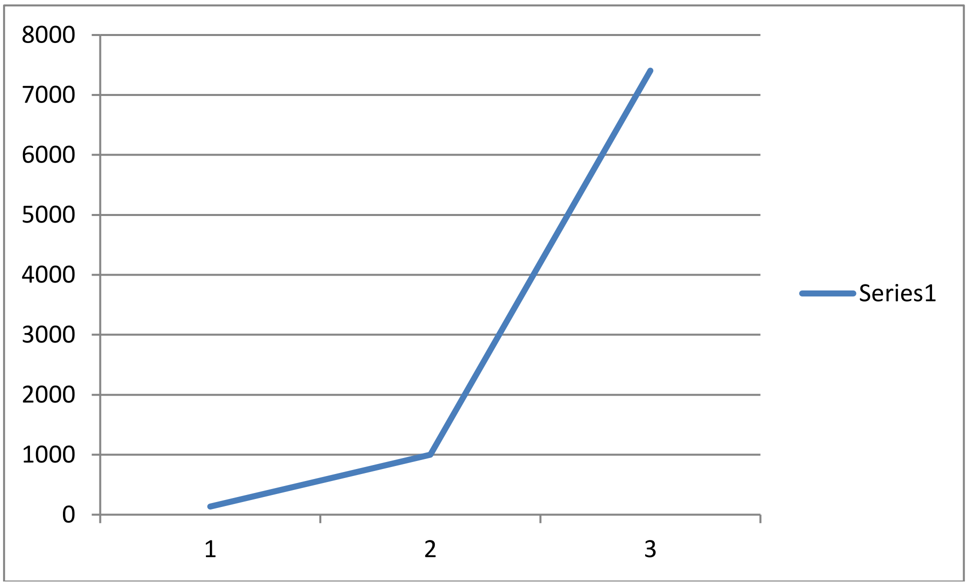
p(X)=135,64

- p=2

p(X)=1.002

- p=3

p(X)=7.405



<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>

Premium	Pareto(7,110)	N(18,33, 100)	Lognormal(0,91, 4)
P.P.	18,33	18,33	18,33
E.V.P.	21,99	21,99	21,99
V.P.	112,43	38,33	3.630,65
S.D.P.	22,67	20,33	45,21
VaR (95%)	56,6	34,83	35,03
VaR (99%)	101,5	41,63	37,3
CTE (95%)	84,4	39	39,05
CTE (99%)	136,75	41,63	40,9
CVaR (95%)	27,8	4,17	4,02
CVaR (99%)	35,25	2,87	3,6
PH-Transform	(s*p)/(k-p)	–	–
Esscher	–	μ+ρσ^2	–
Wang	–	μ+ρσ	exp(μ+ρσ+σ^2/2)

Εκπονώντας την παρούσα μελέτη και διεκπεραιώνοντας μία σειρά εφαρμογών, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, καταλήγουμε στα συμπεράσματα ότι οι κίνδυνοι που έχουν ίδια μέση τιμή αλλά είναι διαφορετικά κατανεμημένοι, έχουν ίδιο Καθαρό Ασφάλιστρο και ίδιο ασφάλιστρο σύμφωνα με την Αρχή Αναμενόμενης Αξίας. Ενώ αλλαγές υφίστανται στις τιμές εκείνων των μέτρων κινδύνου που παύουν να εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από την μέση τιμή. Στην κατανομή Pareto διαπιστώνουμε ότι ο κίνδυνος είναι μεγαλύτερος χρησιμοποιώντας την VaR και το CTE, επειδή σ' αυτήν υπάρχουν πιο ακραίες τιμές. Επίσης, από τα μέτρα κινδύνου που είναι βασισμένα στην Αρχή της Πριμοδότησης υπάρχει μόνο το PH-Transform, καθώς για την κατανομή αυτή δεν ορίζεται η Mgf. Παράλληλα, η κανονική και η Λογαριθμοκανονική δεν έχουν μεγάλες διαφορές στις τιμές των VaR και CTE αλλά, σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Wang, έχουν μεγάλη διαφορά και αυτό συμβαίνει, επειδή ο μέσος της μετασχηματισμένης κατανομής της Λογαριθμοκανονικής είναι εκθετική δύναμη, ενώ της κανονικής ένα άθροισμα. Τέλος, η μεγαλύτερη διαφορά που συναντάται και στις τρεις κατανομές είναι στην τιμή του ασφαλίστρου σύμφωνα με την Αρχή της Διακύμανσης. Όλα τα παραπάνω σημαίνουν ότι, όταν μια εταιρεία αναλάβει ένα κίνδυνο με χαμηλή, ίσως, μέση τιμή, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην κατανομή που ακολουθεί αυτός ο κίνδυνος. Γιατί, κατ' αυτόν τον τρόπο, η εταιρεία θα είναι σε θέση να ανταπεξέλθει-προφυλαχθεί από περιπτώσεις, όπου ο κίνδυνος μπορεί να είναι πολύ παραπάνω της μέσης τιμής του.

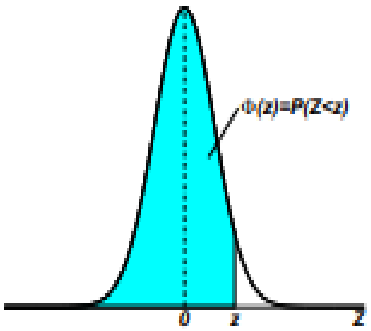
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<u>Τύποι VaR και TVaR για κάποιες κατανομές</u>

Κατανομή	**VaR**	**TVaR**
Κανονική	$\mu + \sigma * z_p$	$\mu + \sigma * \dfrac{\varphi(z_p)}{1-p}$
Λογαριθμοκανονική	$e^{\mu+\sigma z_p}$	$e^{\mu+0{,}5\sigma^2\frac{\varphi(\sigma-z_p)}{1-p}}$
Εκθετική	-θ*ln(1-p)	$VaR_p(X) + \theta$

Pareto τύπου II Lomax	$\frac{\theta}{(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}} - \theta$	$VaR_p(X) + \frac{\theta + VaR_p(X)}{\alpha - 1} \quad , \alpha > 1$ $VaR_p(X) + \frac{\alpha+\theta}{\alpha-1} \quad , \alpha > 1$ $\frac{\theta}{\alpha - 1} * \left(1 + \frac{\alpha}{\theta} VaR_p(X)\right) \quad , \alpha > 1$

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$z = 1.28 \iff \Phi(z) = 0.90$

$z = 1.65 \iff \Phi(z) = 0.95$

$z = 2.33 \iff \Phi(z) = 0.99$

$z = 3.08 \iff \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Για την εφαρμογή ***5)*** χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο R-studio με τις εξής εντολές:

```
rpareto2(10000, k = 7, s = 110)

qpareto2(0.95, k=7, s=110)

qpareto2(0.99, k=7, s=110)

CTE(Y, conf.level = c(0.95), names = TRUE)

CTE(Y, conf.level = c(0.99), names = TRUE)
```

Για τις εφαρμογές ***6), 7)*** χρησιμοποιήθηκε το πρόγαμμα Microsoft excel.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). *On the coherence of expected shortfall*. Journal of Banking and Finance.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., and Heath, D. (1997). *Thinking coherently*. RISK.

Artzner, P. (1999), "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance," North American Actuarial Journal, 3 (2), 11–25.

Buhlmann H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer-Verlag, New York.

Denuit M, Dhaene J., Goovaerts M.J., Kaas R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks, Measures, Orders and Models.* John Wiley & Sons, Ltd.

Goovaerts M.J., De Vijlder F., and Haezendonck J. (1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications.* North-Holland, Amsterdam.

Hardy, M. (2003), Investment Guarantees, John Wiley.

Κουτσόπουλος, Κ. Ι. (1999). *Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος Ι Θεωρία των Κινδύνων*. Αθήνα: Συμμετρία.

Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., and Denuit M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2004), Loss Models: From Data to Decisions, 2nd edition, John Wiley.

McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton Series in Finance

Wang, S. S. (2000), "A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks," The Journal of Risk and Insurance, 67, 15–36.

Wirch, J. and Hardy,M.R.(1999),"A synthesis of risk measures for capital adequacy," Insurance: Mathematics and Economics, 25, 337–347.

Yiu-Kuen Tse (2009). Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation. Cambridge University Press