ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζιούφας Ζ. Νικόλαος Α.Μ:4282017024

Τσαρούχας Α. Δημήτριος Α.Μ:4282017025

ΘΕΜΑ:

«Συγκριτική και πειραματική διερεύνηση της διεπιστημονικής εισαγωγής των πολυωνυμικών συναρτήσεων στα Μαθηματικά και στη Φυσική της Β' Λυκείου από τη σκοπιά της διδασκαλίας των Μαθηματικών και από τη σκοπιά της διδασκαλίας της Φυσικής»

ΜΕΛΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

Φραγκίσκος Καλαβάσης, Καθηγητής Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ**
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΜΕΛΟΣ**
Μιχαήλ Σκουμιός, Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστημίου Αιγαίου	**ΜΕΛΟΣ**

ΡΟΔΟΣ, 2019

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Τμήματος Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων των συγγραφέων.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Διδακτική Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε όλους τους διδάσκοντες για την εποικοδομητική και πολλαπλά ωφέλιμη συνεργασία μας. Οι γνώσεις και οι εμπειρίες που αποκομίσαμε, έχουν επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την οπτική με την οποία προσεγγίζουμε ζητήματα σχετικά με τη γνώση, τη μάθηση ή τη διδασκαλία.

Επιπλέον, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε επώνυμα ορισμένους διδάσκοντες με τους οποίους συνεργαστήκαμε για την εκπόνηση της διπλωματικής μας.

Αρχικά ευχαριστούμε θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής, κύριο *Φραγκίσκο Καλαβάση*, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την εμπιστοσύνη του να συνεργαστούμε σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, όπως αυτό της διδασκαλίας συναφών εννοιών, προσεγγίζοντάς το διεπιστημονικά. Ειδικότερα, τον ευχαριστούμε για τις έγκαιρες παρεμβάσεις, τις ουσιαστικές παρατηρήσεις, τις πολύτιμες συμβουλές και ταυτόχρονα για το ιδιαίτερα θετικό και εποικοδομητικό κλίμα που ενέπνεε στις συναντήσεις κατά την διάρκεια της συνεργασίας μας.

Ευχαριστούμε τους κύριους, *Ανδρέα Μούτσιο - Ρέντζο,* υποψήφιο μεταδιδάκτορα του Πανεπιστημίου Αιγαίου και *Γεώργιο Κρητικό,* επίσης υποψήφιο μεταδιδάκτορα του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για τις ουσιαστικές προτάσεις και τις υποδείξεις στην εξέλιξη της εργασίας μας και γενικότερα για το πολύ καλό κλίμα στη συνεργασία μας.

Επίσης, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον κύριο *Μιχαήλ Σκουμιό,* αναπληρωτή καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου, και την κύρια *Χρυσάνθη Σκουμπουρδή*, καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για την τιμή να είναι μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, όπως και για τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους, στις διορθώσεις της εργασίας μας.

Τέλος, ευχαριστούμε τις συζύγους μας και τα παιδιά μας για την παρότρυνση και υπομονή τους σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μας.

Περίληψη

Η επιστημονική και τεχνολογική επανάσταση που ακολούθησε τον διαφωτισμό, επέφερε πολυάριθμες νέες θεωρίες και εφαρμογές πλην όμως είχε χαρακτηριστικά μονοδιάστατης ανάπτυξης. Ο διαρκής επιμερισμός της γνώσης και η δημιουργία όλο και περισσότερων επιστημονικών πεδίων αποδείχτηκε πως δεν μπορούσε να ανταποκριθεί στις νέες καταστάσεις που διαμορφωνόταν με την παγκοσμιοποίηση και επιπλέον αυτή η πρακτική δεν λάμβανε υπόψη τις συνέπειες που η ίδια δημιουργούσε, λειτουργώντας μονοεπιστημονικά. Από τα μέσα του 20ου αιώνα, οι επιστήμονες έχοντας να αντιμετωπίσουν πολύπλοκα και δυσεπίλυτα προβλήματα αναθεωρώντας τον τρόπο προσέγγισής τους, στράφηκαν στην ολιστική θεώρηση και στην σύνδεση των επιστημών και της γνώσης. Η ανάγκη για αυξημένη χρηστικότητα, οδηγεί σε προσπάθειες για κοινή προσέγγιση με προοπτική την ενσωμάτωση της γνώσης από διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Εν μέσω αυτής της προοπτικής, στην εκπαίδευση έχει αναπτυχθεί ένα ευρύ πεδίο ερευνών, στην κατεύθυνση της διεπιστημονικής προσέγγισης της διδασκαλίας. Από τις πρώτες έρευνες, το ενδιαφέρον στράφηκε στους συναφείς κλάδους, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένα ποικίλο ερευνητικό υλικό που αναφέρεται στην συσχέτιση της διδασκαλίας της Φυσικής και των Μαθηματικών. Σύγχρονες έρευνες επιπλέον, προσεγγίζουν το θέμα συστημικά και δημιουργούν νέες προοπτικές στο χώρο της εκπαίδευσης. Σε αυτή την κατεύθυνση, κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε μαθητές της Β΄ τάξης Λυκείου με σκοπό να διερευνηθούν:

α. οι γενικές απόψεις των μαθητών για τη Φυσική, τα Μαθηματικά και τη μεταξύ τους σχέση μέσω αντίστοιχων ερωτήσεων

β. οι επιδόσεις των μαθητών στις συναφείς έννοιες των πολυωνυμικών συναρτήσεων στα Μαθηματικά και τις κινηματικές εξισώσεις στη Φυσική μέσω αντίστοιχων ισομορφικών ερωτήσεων

γ. η πιθανή αλληλεπίδραση των γενικών απόψεων των μαθητών για τα δύο μαθήματα με τις επιδόσεις τους στις συναφείς έννοιες των κινηματικών εξισώσεων και των αντίστοιχων μαθηματικών εξισώσεων

Τα ευρήματα που προκύπτουν από την ανάλυση των δεδομένων, συγκρίνονται με τις σχετικές αναφορές της ελληνικής και διεθνούς βιβλιογραφίας, των προγραμμάτων σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων. Τα νέα στοιχεία που προκύπτουν από αυτή την σύγκριση, ερμηνεύονται με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα για τα πιθανά οφέλη που μπορούν να αποκομίσουν οι

μαθητές μέσω μίας διεπιστημονικής προσέγγισης στη διδασκαλία των συναρτήσεων-εξισώσεων στα Μαθηματικά και στη Φυσική.

Λέξεις κλειδιά

Διεπιστημονική προσέγγιση, απόψεις μαθητών, συναφείς έννοιες, κινηματικές εξισώσεις, γραμμική συνάρτηση

Abstract

The scientific and technological revolution that followed the enlightenment led to numerous new theories and applications, but it had characteristics of one-dimensional development. The constant sharing of knowledge and the creation of more and more scientific fields has shown that it cannot respond to the new situations created by globalization and, thus, this practice has not taken into account the consequences it has created by operating under one and single scientific field. Since the mid-20th century, scientists who have experienced complex and inconspicuous problems by reviewing their approach have turned towards a more holistic view and association of science and knowledge. From the early researches, interest turned to the related disciplines, resulting to the creation of a diverse research material that refers to the association between teaching Physics and Mathematics. In addition, contemporary research approaches this issue holistically and systemically and creates new perspectives in the field of education. In this direction, a questionnaire was constructed and given to students of 2nd grade of High School, in order to explore:

a. the general opinions of students about Physics, Mathematics and their relationship through respective questions

b. the students’ performance on the relevant concepts of polynomial functions in Mathematics and the kinematical equations in Physics, through the corresponding equal-shaped questions

c. the possible interaction of the students’ general opinions on both courses with their performance on the relevant concepts of the kinematic equations and the corresponding mathematical equations.

The findings obtained from the data analysis, are being compared with the relative references of Greek and international literature, curricula and school textbooks. The new elements arising from this comparison are being interpreted in order to extract conclusions about the potential benefits that students may obtain, through an interdisciplinary approach in teaching of functions and equations in Mathematics and Physics.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Εισαγωγή

Η εργασία αποτελείται από τρία κύρια τμήματα, το Θεωρητικό Μέρος, το Ερευνητικό Μέρος και το Συμπεράσματα – Προτάσεις, το καθένα από τα οποία αποτελείται από κεφάλαια. Στο Θεωρητικό Μέρος, το πρώτο κεφάλαιο, αναφέρεται στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης αλλά και άλλων συναφών εννοιών των Μαθηματικών και της Φυσικής. Η αναφορά του ιστορικού πλαισίου έγινε με σκοπό να στοιχειοθετηθεί ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο η γλώσσα της Φυσικής (Redish, 2005) ούτε ότι η Φυσική είναι απλά ένα πεδίο εφαρμογής των αφηρημένων Μαθηματικών εννοιών (Tzanakis & Thomaidis 2000). Πολλές έννοιες όπως η έννοια της συνάρτησης, προέρχονται μέσα από την συνεξέλιξη της Φυσικής και των Μαθηματικών στην προσπάθεια να δοθούν βέλτιστες απαντήσεις σε ζητήματα, της ίδιας εποχής, είτε μαθηματικής είτε φυσικής υφής. Αυτό οδήγησε στην αλληλεπίδραση των δύο κλάδων και τη δημιουργία ισχυρών συνδέσεων μεταξύ τους. Σύμφωνα με τον Jacobs (στο Baker & Däumer, 2015), μια διεπιστημονική μελέτη για να είναι αποτελεσματική, πρέπει να πραγματοποιείται αυστηρή μελέτη των επιστημονικών κλάδων που συμμετέχουν. Σκοπός αυτής της βιβλιογραφικής μελέτης, στα δύο επόμενα κεφάλαια, είναι η εύρεση σημείων επαφής, διαφοροποιήσεων, προβληματισμών που απορρέουν από τα εσωτερικά ερευνητικά πορίσματα, ερευνών στους δύο κλάδους πάνω στις έννοιες που απασχολούν την παρούσα έρευνα. Στα Μαθηματικά για την συνάρτηση προσδιορίζονται, η σημαντικότητά της ως έννοια (Eisenberg, 1992), η εννοιολογική της κατανόηση (Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia & Philippou, 2017) και οι πτυχές της χρηστικότητάς της (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012). Η ίδια πρακτική ακολουθείται και για τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Δηλαδή, αναφέρεται η σημαντικότητά τους, προβληματικές, η χρηστικότητά τους και οι διαφορετικές πτυχές που πρέπει να αναπτύξει ένας μαθητής για να κατανοήσει την πολλαπλή εφαρμοστικότητά τους (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Τέλος, στα Μαθηματικά αναπτύσσεται η έννοια της γραμμικής συνάρτησης, με τις ίδιες κατευθυντήριες γραμμές που αναπτύχθηκαν και οι άλλες έννοιες του κλάδου. Η επιλογή του συγκεκριμένου πλαισίου, από τη θεωρητική άποψη, έγινε λόγω της ενοποιητικής δύναμης και της πολλαπλής εφαρμοστικότητας που μας παρέχει με τους άλλους κλάδους (Wawro, Sweeney, Rabin (2011).

Αντίστοιχα στη Φυσική αναφέρεται η εξέλιξη και η σημασία της χρήσης των Μαθηματικών στην περιγραφή και την ερμηνεία των φυσικών φαινομένων, ο τρόπος χρήσης και η εμφάνιση των εξισώσεων γενικότερα, οι τρόποι αναπαράστασης των εξισώσεων με έμφαση στην συμβολική και γραφική μορφή και τέλος, η χρήση των εξισώσεων και των γραφημάτων στην κινηματική. Από την μελέτη προκύπτει πως στην Φυσική υπάρχει δυσκολία κατανόησης της φυσικής σημασίας των μεταβλητών και των μονάδων μέτρησής τους, ιδιαίτερη δυσκολία κατανόησης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ως ρυθμοί μεταβολής, καθώς επίσης πως οι μαθητές, συχνά ερμηνεύουν τα γραφήματα εναλλακτικά, ως εικόνα της πραγματικής κατάστασης.

Στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο της διεπιστημονικότητας, στο οποίο βασίζεται και αναπτύσσεται η παρούσα έρευνα. Μέσα από μια ποικιλία ορισμών και προσεγγίσεων αυτής, θα παρατεθούν οι ορισμοί που υιοθετήθηκαν για την εκπόνηση αυτής της ερευνητικής εργασίας. Επιπρόσθετα, θα αναφερθούν οι βασικές αρχές και οι κατευθύνσεις που ακολουθήθηκαν. Στην συνέχεια, θα αναφερθεί από που πηγάζει η ανάγκη για την εφαρμογή αυτής της προσέγγισης. Ο βασικός προσανατολισμός αυτής της αναφοράς θα είναι τα νοητικά, εκπαιδευτικά και κοινωνικά οφέλη που μπορούν να προκύψουν από την εφαρμογή της. Στο κλείσιμο του θεωρητικού πλαισίου της διεπιστημονικότητας θα αναφερθεί από που πηγάζει η εκπαιδευτική ανάγκη εφαρμογής της στα Μαθηματικά και στη Φυσική.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στις συναφείς διεθνείς και Ελληνικές έρευνες που μελέτησαν:

- μηχανισμούς κατανόησης των μαθητών πάνω στις συναφείς έννοιες, όπως αυτή της συνάρτησης στα Μαθηματικά-Φυσική
- απόψεις των μαθητών για την αλληλεξάρτηση της Φυσικής και των Μαθηματικών
- καλές πρακτικές ή εναλλακτικές προτάσεις για την εφαρμογή της διεπιστημονικής προσέγγισης
- προβληματικές που πηγάζουν από τα Ελληνικά σχολικά εγχειρίδια και Α.Π.Σ για την εφαρμογή της

Στο τελευταίο κεφάλαιο του Θεωρητικού Μέρους αναπτύσσεται η προβληματική της έρευνας. Διαπιστώνεται πως οι υπάρχουσες έρευνες εστίασαν είτε στις απόψεις των μαθητών για τα Μαθηματικά και τη Φυσική, είτε στις επιδόσεις τους σε ισομορφικές ερωτήσεις σχετικά με τις συναρτήσεις/εξισώσεις. Πρωτογενείς έρευνες όμως που συσχετίζουν τις απόψεις/στάσεις των μαθητών με τις γνώσεις τους στις συναρτήσεις/εξισώσεις δεν υπάρχουν ή δεν έχουν εντοπιστεί από τους συγγραφείς της παρούσας έρευνας.

Στο ερευνητικό τμήμα της εργασίας, στην αρχή, παρουσιάζεται ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα. Το πρώτο ερώτημα αναφέρεται στις απόψεις, το δεύτερο στο γνωστικό και το τρίτο αναφέρεται στον βαθμό επίδρασης των απόψεων των μαθητών στις επιδόσεις του γνωστικού. Για την εξαγωγή των δεδομένων, θεωρήθηκε ότι το καταλληλότερο εργαλείο είναι η μέθοδος του ερωτηματολογίου που μας παρέχει αντικειμενικότητα (Solutes, 1990) αφαιρώντας τυχόν προκαταλήψεις των ερευνητών (Smith, 1983). Ειδικά η αφαίρεση των προκαταλήψεων των ερευνητών, θεωρήθηκε αρκετά σημαντική από τη στιγμή που ο σκοπός ήταν η εξαγωγή συμπερασμάτων για το πώς εκλαμβάνουν οι μαθητές αυτή τη συσχέτιση των δύο κλάδων, η οποία γίνεται με άδηλο τρόπο και όχι στα οργανωμένα πλαίσια της σχολικής κοινότητας. Η τάξη της επιλογής ήταν η Β΄ Τάξη Λυκείου, διότι σε αυτή τη τάξη έχει ολοκληρωθεί σε μεγάλο ποσοστό το γνωστικό μέρος, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Επιπλέον, σε αυτή την τάξη οι μαθητές έχουν σταθερές, παγιωμένες απόψεις για τα δύο μαθήματα, λόγω της μέγιστης πρότερης εμπειρίας και δεδομένου ότι η Γ΄ Τάξη είναι προπαρασκευαστική για την εισαγωγή στις σχολές. Το κύριο μέλημα για τη κατασκευή των ερωτηματολογίων ήταν οι ερωτήσεις να παρουσιάζουν μια ισομορφία. Οι κύριες πηγές άντλησης δεδομένων-απόψεων προήλθαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση συναφών ερευνών, την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων και αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών. Για τη συγγραφή των ερωτήσεων στο ερωτηματολόγιο η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε τρεις άξονες. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις προέκυψαν από την εύρεση:

- των σημείων σύγκλισης των δύο κλάδων ως προς τις συναφείς έννοιες
- των σημείων κοινών προβληματισμών
- των σημείων για τα οποία υπάρχει διαφοροποίηση ως προς την εννοιολογική προσέγγιση και ως προς τη χρήση τους

Τα κυριότερα ευρήματα αυτής της αναζήτησης ομαδοποιήθηκαν σε πίνακες για την ευκολότερη διαχείρισή τους. Οι ερωτήσεις που αναφερόταν στις απόψεις βασίστηκαν στο ερωτηματολόγιο RMPQ (Relationship between Mathematics and Physics Questionnaire) των Kapucu, Öçal & Simsek (2016). Οι ερωτήσεις προσαρμόστηκαν στα πλαίσια της συγκεκριμένης στοχοθεσίας της έρευνας, σε συνεργασία με εξειδικευμένους ερευνητές. Στο γνωστικό μέρος αποφεύχθηκε να υπάρχουν ασκήσεις υπολογιστικού χαρακτήρα, καθότι το κύριο ζητούμενο ήταν να εξαχθούν συμπεράσματα για την ικανότητα των μαθητών να απαντούν το ίδιο σε συναφείς έννοιες.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση των δεδομένων του ερωτηματολογίου και τα στοιχεία που προκύπτουν από αυτή. Η ανάλυση των δεδομένων κινήθηκε σε τρεις άξονες. Ο πρώτος ήταν η στατιστική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις απόψεις των μαθητών. Οι απόψεις των μαθητών μελετήθηκαν σε τρεις συνιστώσες. Την εικόνα που προσδίδουν στους δύο κλάδους, το βαθμό εξάρτησης του ενός κλάδου από τον άλλον και τη χρηστικότητα που αποδίδουν σε αυτούς τους κλάδους. Οι μαθητές, από τα κύρια αποτελέσματα που προέκυψαν, προσδίδουν και στους δύο κλάδους την ίδια εικόνα, θεωρούν υψηλότερη την εξάρτηση της Φυσικής από τα Μαθηματικά και προσδίδουν μεγαλύτερη χρηστικότητα στα Μαθηματικά σε σχέση με τη Φυσική.

Ο δεύτερος άξονας αναφέρεται στο γνωστικό το οποίο αναλύθηκε σε τρεις συνιστώσες:

- την ικανότητα αναγνώρισης, του είδους του γραφήματος από τον αντίστοιχο τύπο
- την ικανότητα εξαγωγής συμπερασμάτων, από τις διάφορες μορφές αναπαράστασης (π.χ. γραφική) σε κάθε κλάδο
- την εννοιολογική κατανόηση συναφών εννοιών από τους μαθητές στα Μαθηματικά-Φυσική

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως σε μεγάλο βαθμό οι μαθητές δεν μπορούν να συσχετίσουν τις συναφείς έννοιες. Αυτή η αρνητική διαπίστωση υποδεικνύει πως ένας σημαντικός στόχος της διδασκαλίας θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη μίας τέτοιας ικανότητας. Με την απόκτηση ευελιξίας χειρισμού συναφών εννοιών (ή ευελιξία μεταφοράς γνωστικού φορτίου), οι μαθητές θα αποκομίσουν πολλαπλά οφέλη. (National Research Council, 2013).

Ο τρίτος άξονας αναφέρεται στις επιδόσεις των μαθητών σε σχέση με τις απόψεις που έχουν στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Η κάθε ερώτηση των απόψεων συσχετίστηκε με τις γενικές επιδόσεις των μαθητών σε κάθε μάθημα και προέκυψαν μοτίβα προς συζήτηση και συμπεράσματα. Όσοι μαθητές είχαν υψηλότερες επιδόσεις δεν ήταν προσκολλημένοι με την κυρίαρχη εικόνα των δύο μαθημάτων (πράξεις και τύποι). Ακόμη ένα σημαντικό εύρημα ήταν ότι οι μαθητές με υψηλότερες επιδόσεις, είχαν την άποψη πως η γνώση από τους δύο κλάδους θα τους χρησιμεύσει επαγγελματικά ή στη καθημερινότητα τους, Ιδιαίτερα ανησυχητικό εύρημα ήταν πως οι μαθητές που είχαν υψηλότερες επιδόσεις, δεν θεωρούσαν ότι η κατανόηση σε βάθος του ενός κλάδου επιτυγχάνεται καλύτερα με τη καλή γνώση του άλλου κλάδου.

Τα στοιχεία αυτά ερμηνεύτηκαν σε συνδυασμό με τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης, τις αναφορές από τα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια. Στο τρίτο μέρος, στο ενδέκατο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα γενικά συμπεράσματα της παρούσας εργασίας. Διαπιστώνεται πως μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής υπάρχει ένα χάσμα στο σχολικό περιβάλλον. Οι κύριοι παράγοντες που έχουν δημιουργήσει αυτό το χάσμα, είναι η έλλειψη:

- εννοιολογικής εμβάθυνσης και σύνδεσης συναφών εννοιών
- συντονισμού των δύο κλάδων στα προγράμματα σπουδών και σχολικά εγχειρίδια
- κοινών στόχων και δραστηριοτήτων (μπορούν να ενισχυθούν και ιστορικά)
- πραγματικών καθημερινών προβλημάτων που εμπλέκουν τους δύο κλάδους

Στο ίδιο κεφάλαιο, ιδιαίτερη αναφορά γίνεται, στην εμπειρία των ερευνητών των δύο κλάδων κατά την μελέτη και συγγραφή της παρούσας έρευνας. Η αρχική αμφιβολία για εύρεση μιας κοινής γλώσσας ξεπεράστηκε μέσα από την μελέτη και τις συζητήσεις και σιγά-σιγά οι ερευνητές κατανόησαν τη φιλοσοφία, τη λογική και την πρακτική της διδασκαλίας του διαφορετικού μαθήματος σε σχέση με αυτό που διδάσκουν. Στη συνέχεια, αναφέρονται οι περιορισμοί της έρευνας και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Τέλος, δηλώνεται πως στην παρούσα εργασία προτιμήθηκε κυρίως η λέξη ΄΄απόψεις΄΄ αντί άλλων συνώνυμων όπως ΄΄θέσεις΄΄, ΄΄αντιλήψεις΄΄, ΄΄στάσεις΄΄ και ΄΄πεποιθήσεις΄΄ γιατί αποδίδει καλύτερα στους στόχους που τέθηκαν από τους ερευνητές.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1: Ιστορικό πλαίσιο

1.1 Ιστορική προσέγγιση

Στην αρχή δίνεται μία ιστορική διάσταση της σχέσης Μαθηματικών και Φυσικής. Η συγκεκριμένη πτυχή εμπεριέχει και αρκετά φιλοσοφικά ερωτήματα. Ο Dyson (1964) αναφέρει ότι είναι καθαρά φιλοσοφικό θέμα. Για τη σχέση αυτή ο Winger (1960) αναφέρει «*η τεράστια χρησιμότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες είναι κάτι που συνορεύει με το μυστήριο και ... δεν υπάρχει λογική εξήγηση γι' αυτό*». Ο Dyson (1964) δίνει μια διαφορετική πτυχή λέγοντας ότι δεν είναι δικιά τους ανησυχία από την στιγμή που είναι φυσικοί (σελ 76 βιβλίο). Ο Winger (1960) αναφέρει ότι η δημιουργία μαθηματικών εννοιών είναι κεντρική στην ανάπτυξη των Μαθηματικών. Θα γίνει προσπάθεια να αναδειχτεί ότι η ανάπτυξη αυτών των ιδεών καθορίζεται πολλές φορές και από ¨εξωγενείς¨ ως προς τα Μαθηματικά κλάδους. Στην προσέγγιση που θα γίνει, ο παράγοντας αυτός είναι η Φυσική. Ο σκοπός εδώ δεν είναι να αντιπαρατεθεί η άποψη του Ernest (2016) ο οποίος λέει ότι η μαθηματική εγγύηση είναι ισχυρότερη από οποιαδήποτε μορφή γνώσης, δεδομένου ότι δεν υπόκειται σε σφάλματα ή στις αβεβαιότητες που απορρέουν από τη χρήση της εμπειρικής παρατήρησης και δοκιμών του φυσικού κόσμου, αλλά με την οπτική ως μία σχέση που ξεπερνάει την χρησιμότητα που της αποδίδουν πολλοί φυσικοί. Δηλαδή ότι αποτελεί απλά ένα εργαλείο υπολογισμού ή ότι θεωρείται μάλλον η γλώσσα της φύσης (ή ακόμα και του Θεού σύμφωνα με τον James Jeans και τον Paul Dirac) (στο Uhden et al., 2012). Επιπλέον οι Karam & Krey (2015) αναφέρουν ότι στη Φυσική Επιστήμη οι εξισώσεις παίζουν συχνά έναν πολύ σημαντικότερο ρόλο που συνδέεται με τη διαμόρφωση θεωριών για την παροχή εξηγήσεων για τα φυσικά φαινόμενα. Σύμφωνα με Boniolo & Budinich, (2005) η Φυσική χωρίς τα Μαθηματικά είναι περισσότερο μια φιλοσοφία της φύσης με βάση την διαισθητική κοινή λογική, παρά μια ακριβής επιστήμη, όπως αυτή που θέλουμε τώρα. Σκοπός είναι η ανάπτυξη της κατανόησης ότι με την ενσωμάτωση των μαθηματικών εννοιών και θεωριών, μέσα σε ένα σαφώς ανακλαστικό πλαίσιο, σε ένα πλούσιο ιστορικό πλαίσιο που τονίζει την αλληλεπίδρασή του με άλλους κλάδους όπως η Φυσική (Kjeldsen & Lützen, 2015).

1.2 Πριν από την έννοια συνάρτηση στην αρχαιότητα

Το πρώτο στάδιο της έννοιας της συνάρτησης είναι στην αρχαιότητα. Το 2000 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν πίνακες υπολογισμού του χ^2, χ^3 της $\sqrt{\chi}$, $\sqrt[3]{\chi}$ και άλλων στοιχείων που η χρησιμότητα τους ήταν κυρίως στην αστρονομία π.χ για τον υπολογισμό εκλείψεων για τις κινήσεις των πλανητών, για την πανσέληνο κ.α (Neugebauer, 2012). Στην εποχή των Σελευκιδών (περίπου 300 π.Χ.) ανέφεραν ότι διάφορα αστρονομικά φαινόμενα είναι ¨συναρτήσεις¨ χρόνου. Μια άλλη προσέγγιση ήταν από τους Πυθαγόρειους οι οποίοι στην προσπάθεια τους να προσδιορίσουν τους απλούστερους νόμους της ακουστικής προσπαθούσαν να δουν την αλληλεξάρτηση των διάφορων φυσικών μεγεθών π.χ. το μήκος της χορδής με την ένταση του ήχου. Στην Αλεξανδρινή εποχή στο έργο Almagest από τον Πτολεμαίο (περίπου το 150 π.Χ.) βρίσκουμε πίνακες αστρονομικών αριθμών όπου οι χορδές σε ένα κύκλο δίνονται ως ¨συνάρτηση¨ των γωνιών. Βέβαια, δεν θεωρήθηκε ως μαθηματικό αντικείμενο, αλλά ως μια διαδικασία που συνέβαλλε στην επίλυση συγκεκριμένου προβλήματος. Στη κλασσική Ελλάδα αυτό που καλούμε Φυσικές Επιστήμες ήταν μέρος της φιλοσοφίας, αφού ασχολούταν με τις αιτίες των φυσικών φαινομένων. Ο Αριστοτέλης διαχώρισε αυτούς τους κλάδους και η άποψή του ήταν ότι τα Μαθηματικά αντιπροσώπευαν τη γνώση που είναι αιώνια και στατική και η Φυσική που αντιπροσώπευε τις δυναμικές και μεταβαλλόμενες διαδικασίες (Galili, 2018 σελ.3). Ο Youschkevitch (1976) αναφέρει ότι η ιδέα της αλλαγής και της μεταβλητής ποσότητας δεν ήταν ξένες στην ελληνική σκέψη. Ο Αριστοτέλης διέκρινε τρεις μορφές των παγκόσμιων διαδικασιών:

- Μεταβολή ή αλλαγή ποσότητας
- Αλλαγή μεγέθους ή ποσότητας
- Τοπική κίνηση η οποία ως χαμηλότερη μορφή κίνησης, αναγκαστικά συνόδευε τις άλλες δύο.

Η τοπική κίνηση ήταν υποδιαιρούμενη σε ομοιόμορφη κίνηση όπου ίσες αποστάσεις ταξιδεύονται σε ίσους χρόνους. Βέβαια ούτε η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας ούτε το πηλίκο s/t εισήχθη στην αρχαιότητα.

Μετά τη πτώση του αρχαιοελληνικού (ρωμαϊκού) πολιτισμού τη σκυτάλη παίρνουν οι Άραβες που δεν πρόσθεσαν νέες πτυχές στη μαθηματική σκέψη αλλά βελτίωσαν τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες. Μια εξαίρεση είναι η ανάλυση της επιταχυνόμενης κίνησης από τον AL-BiRfJN (1030).

1.3 Η αρχή σύνδεσης εννοιών Φυσικής-Μαθηματικών & εισαγωγή στα γραφήματα

Η αρχή για την ευρύτερη εισαγωγή των Μαθηματικών στη Φυσική έγινε τον $14^{ο}$ αιώνα, όπου οι ROBERT GROSSETESTE και ROGER BACON δήλωσαν ότι τα Μαθηματικά πρέπει να είναι το κύριο εργαλείο για τη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Ένα σημαντικό επίτευγμα αυτήν την εποχή είναι το θεώρημα Merton, που οφείλει την ονομασία του στο Merton κολέγιο της Οξφόρδης, όπου δούλευαν εκείνη την εποχή ταυτόχρονα και το παρουσίασαν στα έργα τους οι W.HEYTESBURY, R.SWINESHEAD, and J. DUMBLETON (το 1335;). Το θεώρημα αυτό αν το παρουσιάσουμε με την σημερινή ορολογία αναφέρει ότι αν ένα σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $υ_0$ και μετά από χρόνο t αποκτήσει τελική ταχύτητα υ, θα διανύσει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο με ένα κινητό που εκτελεί ομαλή κίνηση με ταχύτητα ίση με την μέση ταχύτητα των $υ_0$ και υ. Ενδιαφέρον είναι ότι ο Oresme τον $14^{ο}$ αιώνα στο πανεπιστήμιο του Παρισιού έκανε μία γεωμετρική απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Όπως αναφέρει ο Crombie (1961), τον 14ο αιώνα η ιδέα των λειτουργικών σχέσεων αναπτύχθηκε χωρίς πραγματικές μετρήσεις και μόνο ΄΄κατ΄ αρχήν΄΄. Παρόλα αυτά, δεν ήταν μία γενικευμένη προσέγγιση αυτή την εποχή παρά μεμονωμένες τεχνικές επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι στον $16^{ο}$ αιώνα είχαμε την εισαγωγή συμβόλων για τις μαθηματικές πράξεις και σχέσεις (κατά πρώτο λόγο της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και της ισότητας). Ο Viete το 1591 εισήγαγε τα γράμματα του λατινικού αλφαβήτου για να δηλώσει αγνώστους και παραμέτρους. Η σημασία αυτής της συμβολής ήταν ότι για πρώτη φορά, κατέστησε δυνατή την τοποθέτηση σε χαρτί, τη συμβολική μορφή των αλγεβρικών εξισώσεων και εκφράσεων που περιέχουν άγνωστες ποσότητες και αυθαίρετους συντελεστές (μια λέξη που επίσης προέρχεται από τον Viete). Ο Descartes (1596-1650) στην προσπάθεια να εισαγάγει τον ορθολογισμό, χρησιμοποίησε τη μέθοδο του συστήματος συντεταγμένων, ερμήνευσε τον «πραγματικό αριθμό» ως σχέση οποιουδήποτε τμήματος ευθείας απέναντι στο μοναδιαίο μήκος και ερμήνευσε τους αρνητικούς αριθμούς ως κατευθυνόμενες συντεταγμένες. Επιπλέον, χρησιμοποίησε τον συμβολισμό χ, ψ, ζ για τα μεταβλητά μεγέθη (ή αγνώστους), a, b, c για τις γνωστές τιμές και τις δυνάμεις ως χ4 , χ5 κ.ο.κ.. Με το έργο του άνοιξε νέους δρόμους για την επιστήμη των Μαθηματικών και της Φυσικής. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η θεωρία του (με τις συντεταγμένες) μοιάζει σε πολλά σημεία με τη θεωρία του Oresme's για τα γεωγραφικά πλάτη. Ωστόσο, δεν είναι γνωστό αν είχε διαβάσει αυτή τη θεωρία αλλά είναι βέβαιο ότι είχε συζητήσεις με τον I. Beckman ο οποίος είχε οικειότητα με την θεωρία του Oresme's και πιο συγκεκριμένα με το θεώρημα Merton. Ο Fermat και ο Descartes (περίπου στο 1630-1635), οι οποίοι δούλεψαν ανεξάρτητα, άρχισαν να εφαρμόζουν τη νέα Άλγεβρα στη Γεωμετρία παρουσιάζοντας μία αναλυτική μέθοδο, ανοίγοντας μια νέα εποχή στα Μαθηματικά. Στην αναπαράσταση δεν χρησιμοποιούσαν τον όρο συνάρτηση αλλά άγνωστες ποσότητες που σήμαιναν πραγματικό τμήμα γραμμών συνεχώς μεταβαλλόμενου μήκους. Ο Descartes εισήγαγε τις ¨συναρτήσεις¨ σε μορφή εξισώσεων. Αυτή η αναπαράσταση επέδρασε επαναστατικά στην ανάπτυξη των Μαθηματικών ανοίγοντας νέους ορίζοντες π.χ σύνδεση Άλγεβρας – Γεωμετρίας και τομέας απειροστών υπολογισμών. Σε αυτή την εποχή δομείται η πρώτη θεμελιώδης θεωρία της μοντέρνας επιστήμης. Ο Newton κυκλοφορεί το βιβλίο «The Mathematical Principles of the Natural Philosophy» για να ξεχωρίσει (to distinguish) από τον Descartes όπου είχε παρουσιάσει το Principles of Philosophy. Τα δύο κείμενα πραγματεύονται τη φυσική θεωρία του κόσμου. Η εξέλιξη από τον Newton ήταν να κάνει την θεωρία μαθηματική όταν ο Galileo χρησιμοποιούσε τα Μαθηματικά μόνο ως υπολογιστικά μοντέλα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις π.χ πτώση, βλήματα (Gallili 2018 pag.4-5)

1.4 Ιστορική ανάπτυξη της έννοιας «συνάρτηση»

Ο όρος «συνάρτηση» εισήχθη από τον Gottfried Leibniz δημοσιεύτηκε το 1673, για να περιγράψει μια ποσότητα που σχετιζόταν με μια καμπύλη, όπως η κλίση μιας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Ο Johann Bernoulli ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο λειτουργία συντονισμού (functions of ordinates) στα πλαίσια ενός γράμματος στις 5 Ιουλίου 1698, για την επίλυση ενός ισοπεριμετρικού προβλήματος που έθεσε ο αδελφός του Jakob (Youschkevitch, 1976). Ο Gottfried Leibniz στις 29 Ιουλίου το 1698, ευχαρίστησε τον J.Bernoulli (που έλεγε ότι έπρεπε να χρησιμοποιηθεί το γράμμα φ για το συμβολισμό της) για την χρήση του δικού του όρου και μετά από ανταλλαγή απόψεων κατέληξε να αναφέρει πως οποιαδήποτε ποσότητα που σχηματίζεται «με έναν αλγεβρικό και υπερβατικό τρόπο, μπορεί να ονομάζεται συνάρτηση του x». Ο Sriraman (2012) παραθέτει την απόσπασμα του Eves (1990) ότι από το 1718, θεωρήθηκε ως συνάρτηση οποιαδήποτε έκφραση που αποτελείται από μια μεταβλητή και κάποιες «σταθερές».

Ο πρώτος ευρέως χρησιμοποιούμενος ορισμός της συνάρτησης ήταν του Euler (1748) (μαθητής του Bernoulli) ο οποίος αναφέρει στο βιβλίο του In Chapter I of Volume I of his *Introductio in analysin infinitorum*, in 1748 (E.101) «Συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι μια αναλυτική έκφραση, που αποτελείται από οποιονδήποτε συνδυασμό της μεταβλητής με αριθμούς ή σταθερές» επίσης χρησιμοποίησε και τον όρο f(χ). Στην αρχή ο Euler μελετούσε μόνο αναλυτικές εκφράσεις. Ωστόσο, ήξερε ότι υπάρχουν συναρτήσεις διαφορετικού είδους και το δηλώνει αργότερα όπου μελετά plane curves (στα Μαθηματικά είναι καμπύλες γραμμές σε επίπεδο). Ο LEONHARD EULER στο Opera omnia διαχωρίζει τις συναρτήσεις σε:

- Συνεχής, όπου παραμένει αμετάβλητος ο νόμος (κανόνας) της εξίσωσης που καθορίζει τη συνάρτηση σε όλο το πεδίο τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών
- Ασυνεχείς ή μεικτές, όπου αλλάζουν αναλυτικό κανόνα. Δηλαδή συντίθενται από δύο ή περισσότερους νόμους (κανόνες) των συνεχών συναρτήσεων

Αυτός ο διαχωρισμός υπήρχε μέχρι την εποχή του Bolzano (1817) και Caushy (1821) όταν δόθηκε η σημερινή ορολογία στις εκφράσεις «συνεχής» και «ασυνεχής». Η κύρια όμως ώθηση για περαιτέρω ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης προήλθε από τη δουλειά του Euler στη μαθηματική Φυσική ξεκινώντας από ένα διάσημο πρόβλημα σχετικά με τις άπειρες μικρές δονήσεις ενός πεπερασμένου ομοιογενούς σχοινιού που έχει σταθεροποιηθεί και στα δύο άκρα. (Clagett, 1959). Πάνω στην επίλυση που παρουσίασε ο Euler αντιτάχθηκε ο D'Alambert. Η κόντρα τους κράτησε χρόνια και ήταν μία κλασσική διαμάχη ενός αυστηρού εσωτερικιστή (internalist) μαθηματικού και ενός εξωτερικιστή (externalist) για τον οποίο τα Μαθηματικά έπρεπε να διαμορφωθούν για να ταιριάζουν στη Φυσική. Έτσι ο Euler στη δημοσίευση του De usufunctionum discontinuarum in analysi Euler (1763), αναφέρει ότι συνεχής συνάρτηση είναι αυτή που περιγράφεται με την ίδια αναλυτική έκφραση παντού και ασυνεχής εάν δεν εκφράζονται από έναν αναλυτικό κανόνα και οι οποίες διαχωρίζονται:

Α) Σε συναρτήσεις που μπορούν να αντιστοιχούν σε μικτές καμπύλες, δηλαδή στις καμπύλες που περιγράφονται με διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις σε διαφορετικά διαστήματα.

Β) Σε συναρτήσεις που ανταποκρίνονται σε μία εντελώς αυθαίρετη καμπύλη (που έχει σχεδιαστεί με το χέρι) που δεν περιγράφεται με μία αναλυτική έκφραση σε μικρά διαστήματα. Δηλαδή οι νόμοι (κανόνες) μπορούν να αλλάξουν από σημείο σε σημείο.

Όπως αναφέρουν οι Kjeldsen & Lützen (2015) η Φυσική ανάγκασε τον Euler να επεκτείνει την έννοια της συνάρτησης και είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς ότι μια τέτοια επέκταση θα μπορούσε να είχε συμβεί από τα ίδια τα Μαθηματικά. Στην πραγματικότητα, όπως επισήμανε ο D' Alembert, ο φορμαλισμός της ανάλυσης δεν είχε νόημα για το νέο είδος συναρτήσεων. Η επέκταση αυτή έτεινε το θεμέλιο της μαθηματικής ανάλυσης και βελτιώθηκε με τη φυσική εφαρμογή. Αυτή την εποχή οι Euler (1736), d'Alambert (1743), Lagrange (1788) και άλλοι καθιέρωσαν στην αναλυτική μηχανική το χειρισμό των αφηρημένων μαθηματικών φορμών στους υπολογισμούς τους στη κίνηση. Χρησιμοποίησαν περισσότερα μαθηματικά εργαλεία και νέες έννοιες όπως η ενέργεια, η συνάρτηση Lagrange και η αρχή της μεταβολής (variation principle). Ο λογισμός (calculus) αντικατέστησε τη Γεωμετρία η οποία είχε θεωρηθεί από τον Galileo το καλύτερο εργαλείο για το χειρισμό (treat) της φυσικής γνώσης που θεωρούνταν ως κύριο εργαλείο ακόμα και με τον Newton στο Principia (Galili 2018, σελ. 5)

Στη συνέχεια θα αναφερθούν τα στάδια εξέλιξης της έννοιας από τους Kjeldsen & Lützen (2015):

- Ο πρώτος ευρέως χρησιμοποιούμενος ορισμός της έννοιας ΄΄συνάρτηση΄΄ ήταν η Eulerian μορφή ο οποίος είναι: ότι συνάρτηση του ψ ως προς χ είναι μια αναλυτική έκφραση [ο τύπος δηλώνεται με f(χ)] που εκφράζει το ψ σε όρους του χ.
- Η ιδέα Dirichlet: y είναι μια συνάρτηση του x εάν για κάθε x υπάρχει μια τιμή του y [που ονομάζεται f (x)].
- Η συνάρτηση Bourbaki: μια συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι ένα υποσύνολο C του καρτεσιανού επιπέδου A × B με την ιδιότητα που για κάθε x στο A υπάρχει ακριβώς ένα y στο B έτσι ώστε το (x , y) να είναι στο C.
- Διανομές ή γενικευμένες συναρτήσεις.

1.5 Ιστορική ανάπτυξη πέρα από την έννοια «συνάρτηση»

Η σχέση των δύο κλάδων στην από κοινού ανάπτυξη δεν είναι μόνο στην έννοια της συνάρτησης. Παραθέτουμε μία σύντομή αναφορά που έκαναν στην έρευνα τους οι Uhden et al (2012) σχετικά με μερικές έννοιες στα Μαθηματικά που οφείλουν την προέλευση τους στη Φυσική. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

- η προέλευση του λογισμικού είναι ουσιαστικά αδιαχώριστη από την περιγραφή της κίνησης (Boyer, 1949).
- οι διαφορικές εξισώσεις προήλθαν από τον πυρήνα της Φυσικής για την επίλυση των προβλημάτων της Φυσικής (Poincaré, 1958).
- η ανάλυση του φορέα επηρεάστηκε από τη μαθηματικοποίηση του ηλεκτρομαγνητισμού (Crowe, 1967).
- Η ανάλυση του Fourier οφείλεται στα προβλήματα των κυμάτων σε χορδές και στην διάδοση της θερμότητας (Davis & Hersh, 1981).
- η θεωρία της διανομής προέκυψε από την επιθυμία του Dirac να περιγράψει τις αιτιάσεις (Zemanian, 1987).

Ο Hestenes (1986) παρατηρώντας ότι υπάρχει έκρηξη πληροφοριών στα Μαθηματικά και στη Φυσική προτείνει τη δημιουργία μίας κοινής γλώσσας με τη χρήση της Άλγεβρας Clifford.για να αντιμετωπιστεί αυτό το φαινόμενο.

Κεφάλαιο 2: Προβληματική στα Μαθηματικά

2.1 Συνάρτηση

Η ιδέα της συνάρτησης έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές κατά τη διάρκεια της ιστορίας της που διήρκεσε 4 αιώνες. Οι συναρτήσεις διαμορφώθηκαν μετά την εφεύρεση μιας λειτουργίας που λειτουργεί σε ολόκληρη τη διαδικασία (λειτουργία) και όχι σε κάθε "τιμή λειτουργίας" χωριστά. Οι συναρτήσεις έχουν καίρια θέση στο πρόγραμμα Μαθηματικών, σε όλα τα επίπεδα σχολικής εκπαίδευσης. Θεμελιώδης για τη μελέτη των Μαθηματικών είναι η έννοια της συνάρτησης που έχει προσδιοριστεί ως η πιο σημαντική έννοια από το νηπιαγωγείο έως το μεταπτυχιακό επίπεδο (Sierpinska, 1992). Ο Eisenberg (1992) αναφέρει ότι η έννοια της συνάρτησης είναι πρωτεύουσας (fundamental) σημασίας στη μάθηση των Μαθηματικών. Η άποψη των Klein, Menghini & Schubring (2016) είναι ότι οι συναρτήσεις πρέπει να καταλαμβάνουν κυρίαρχο ρόλο στα Μαθηματικά του σχολείου και ειδικότερα διότι ξεκινάνε οι γραφικές αναπαραστάσεις των απλούστερων πολυωνυμικών συναρτήσεων και η ορθολογική λειτουργία των μεταβλητών. Επίσης, σηματοδοτεί το σημείο που πολλοί μαθητές αποφασίζουν ότι τα Μαθηματικά στερούνται νοήματος και είναι δύσκολα (Pierce, 2005). Ο Sajka (2003) δείχνει ότι οι ικανότητες των μαθητών στην επίλυση καθηκόντων που εμπλέκονται οι συναρτήσεις επηρεάζονται από τον τυπικό χαρακτήρα των σχολικών καθηκόντων, οδηγώντας στη χρήση τυποποιημένων μορφών. Οι Panaoura et al. (2017) σε μια ανάλυση επιβεβαιωτικού παράγοντα (Confirmatory factor analysis), επαλήθευσαν (ή επικύρωσαν verified) ότι οι διαστάσεις που περιλαμβάνουν την εννοιολογική κατανόηση των συναρτήσεων είναι οι εξής τέσσερεις:

i. ορισμός
ii. αναγνώριση
iii. ερμηνεία
iv. επίλυση προβλημάτων

Το ενδιαφέρον για τον ορισμό των μαθηματικών εννοιών προκύπτει από τις κοινές παρατηρούμενες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές που εισέρχονται σε προχωρημένα επίπεδα σπουδών (Morgan, 2005). Οι τρόποι με τους οποίους εμφανίζονται οι ορισμοί στα σχολικά Μαθηματικά διαφέρουν σημαντικά, ανάλογα με το είδος των Μαθηματικών που εμπλέκονται και την ηλικία του υποψήφιου μαθητή (Morgan, 2013), ξεκινώντας από ανεπίσημες καταστάσεις σε πιο επίσημες. Μια λανθάνουσα διανοητική εικόνα που έχουν σχηματίσει κάποιοι μαθητές, δηλαδή για να οριστεί μία συνάρτησή πρέπει να χρησιμοποιούνται αλγεβρικές εκφράσεις Vinner (1983). Οι Vinner & Dreyfus (1989) έδειξαν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να συνδέσουν έναν τυπικό ορισμό με τις νοητικές τους εικόνες και μπορούν να χρησιμοποιήσουν εν μέρει την έννοια της εικόνας με μια συνακόλουθη μη ικανοποιητική εννοιολογική κατανόηση. Για περισσότερα από 20 χρόνια, η έννοια της συνάρτησης θεωρείται διεθνώς ως ενοποιητικό θέμα στα μαθηματικά προγράμματα σπουδών (Steele , Hillen & Smith, 2013; Doorman et al., 2012) οι οποίοι πρότειναν ότι υπάρχουν «τρεις αλληλένδετες πτυχές της συνάρτησης»:

i. ως ανάθεση εισόδου-εξόδου (The function as an input–output assignment):
που βοηθάει στην οργάνωση και πραγματοποίηση μιας διαδικασίας υπολογισμού. Αυτή αρχικά είναι κάπως ασαφής και η επιχειρησιακή έννοια αποκτά περισσότερες αποχρώσεις (nuances). Πως το εξαγόμενο εξαρτάται από το εισαγόμενο και πως το εισαγόμενο καθορίζει το εξαγόμενο. Ποιο κανόνα (pattern) μπορεί να δει κανείς; Η παρουσίαση (representation) εισόδου-υπολογισμού-εξόδου ως αλυσίδα είναι η κατάλληλη για αυτήν την οπτική της συνάρτησης.

ii. ως δυναμική διαδικασία συν-διακύμανσης (The function as a dynamic process of co-variation):
Αυτή η πτυχή αφορά την αντίληψη ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή όσο διατρέχει το πεδίο ορισμού της προκαλεί στην εξαρτημένη μεταβλητή την διακύμανση της σε ένα σύνολο (σύνολο τιμών). Η εξαρτημένη συνδιαμορφώνεται (co-varies) με την ανεξάρτητη. Αρχικά, η συνδεδεμένη αλλαγή μπορεί να παρατηρηθεί με ένα φαινομενολογικό τρόπο. Στη συνέχεια, προκύπτει το ερώτημα πώς και γιατί λαμβάνει χώρα αυτή η διαδικασία κοινής δυναμικής. Βοηθητικό ρόλο για αυτή τη συνδιαμόρφωση των παραστάσεων αυτών έχουν οι πίνακες και γραφήματα, τα οποία μπορούν να μετακινηθούν ή να εντοπιστούν (scrolled through or traced).

iii. Η συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο:
Μια συνάρτηση είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικούς τρόπους, όπως ακολουθίες (arrow chains), πίνακες, γραφήματα, τύπους και φράσεις, καθένα από τα οποία παρέχει διαφορετική άποψη για το ίδιο αντικείμενο. Περισσότερη δομική άποψη των συναρτήσεων μπορεί να προωθηθεί από καθήκοντα που επικεντρώνονται σε ένα καθολικό (global) επίπεδο, για παράδειγμα, στις οικογένειες συναρτήσεων, στη συναρτησιακή σύγκριση και στη συνέχεια στις συναρτήσεις η διαφοροποίηση ή ολοκλήρωση. (π.χ η ψ=αχ+β εκφράζει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά αυτή η οικογένεια των συναρτήσεων)

Οι Doorman et al. (2012) ισχυρίζονται ότι οι συναρτήσεις έχουν διαφορετικό πρόσωπο και το να κάνεις τους μαθητές να το αντιλαμβάνονται ως πρόσωπο του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου, είναι παιδαγωγική και ερευνητική πρόκληση. Πολλοί ερευνητές στην εκπαίδευση των Μαθηματικών τονίζουν ότι η σύνδεση με πραγματικά προβλήματα θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ισχυρή κατανόηση στις συναρτήσεις (Arnold, 2006; Schorr, 2003).

Στο ίδιο άρθρο χρησιμοποιεί τη λέξη εικόνα με την ευρύτερη έννοια της λέξης όπου περιλαμβάνει οποιαδήποτε οπτική αναπαράσταση της έννοιας συνάρτηση. Επιπλέον, οι Doorman et al. (2012) για την εννοιολογική κατανόηση των συναρτήσεων, θεωρούν θεμελιώδης σημασίας, οι μαθητές να περάσουν από την υπολογιστική διαδικασία σε μία πιο γενικευμένη έννοια ως αντικείμενο, διότι η χρήση της βρίσκεται και στις παραγώγους και στα ολοκληρώματα.

2.2 Πολλαπλή αναπαράσταση- γραφική αναπαράσταση

Οι Van Dooren, De Bock & Verschaffel (2012) επικαλούμενοι την άποψη του Matteson (2006) ότι το να μαθαίνεις Μαθηματικά είναι σαν να μαθαίνεις ξένη γλώσσα αναφέρουν *ότι οι αναπαραστάσεις είναι το βασικό στοιχείο του λεξιλογίου αυτής της γλώσσας και οι μαθητές πρέπει να γίνουν άριστοι στη χρήση τους, εάν θέλουν να πετύχουν την έκφραση και κατανόηση των μαθηματικών ιδεών με ορθότητα και ακρίβεια*. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα πολλών ερευνών (π.χ. Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987), παρόλο που οι μαθητές μπορούν να παράγουν και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική αναπαράσταση κατόπιν ζήτησης, δεν έχουν τη τάση να στραφούν σε αυτά ως εργαλεία για να βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων. Η έλλειψη ικανότητας στον συντονισμό πολλαπλών παραστάσεων της ίδιας έννοιας μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη για την ύπαρξη διαχωρισμού, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε ασυνέπειες και καθυστέρηση στη μάθηση των Μαθηματικών στο σχολείο Panaoura et al. (2017). Οι δυσκολίες που εντοπίζονται στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων οφείλονται στο ότι περιέχουν πολλές πληροφορίες ταυτόχρονα. Οι Leinhardt, Zaslavsky & Stein (1990) δηλώνουν ότι το γράφημα έχει δύο διαστάσεις και αυτό απαιτεί δεξιότητες ταξινόμησης και πρόβλεψης , κλιμάκωση και μετασχηματισμούς.

Η μετάφραση των πολλαπλών αναπαραστάσεων όπου σύμφωνα με Gagatsis & Shiakalli (2004) είναι η ικανότητα να περάσει από μία αναπαράσταση σε μία άλλη. Σύμφωνα με τον Janvier, (1987) η μετάφραση περιλαμβάνει δύο είδη αναπαραστάσεων, την πηγή (αρχική αναπαράσταση) και τον στόχο (τελική αναπαράσταση). Για την εξίσωση και το γράφημα υπάρχουν δύο τρόποι μεταφράσης: από το γράφημα στην εξίσωση και από την εξίσωση στο γράφημα. Όπως επισημαίνει ο Janvier (1987), για να επιτευχθεί άμεσα και σωστά μια δεδομένη μετάφραση πρέπει να επιλέγονται και να χρησιμοποιούνται εκείνα τα στοιχεία της πηγής που είναι απαραίτητα για τον στόχο. Η έρευνα των Gagatsis & Shiakalli (2004) επικαλείται την άποψη του Janvier (1987) ότι η ικανότητα μετάφρασης αναπτύσσεται καλύτερα όταν οι μαθητές καλούνται να εκτελούν μεταφράσεις τόσο από την πηγή στο στόχο όσο και από τον στόχο στην πηγή. Οι Lesh, Behr & Post (1987) περιγράφουν επίσης κάποιες από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν συχνά οι μαθητές με διαφορετικά είδη αντιπροσωπευτικών μεταφράσεων. Διαπίστωσαν ότι:

i. οι μεταφράσεις σε εικόνες είναι ευκολότερες από τις μεταφράσεις από τις εικόνες.
ii. οι μεταφράσεις που περιλαμβάνουν γραπτή γλώσσα είναι ευκολότερες από τις μεταφράσεις με γραπτά σύμβολα
iii. οι ευκολότερες μεταφράσεις είναι εκείνες που απαιτούν μόνο έναν μαθητή να διαβάσει ένα κλάσμα ή αναλογία σε δύο διαφορετικές μορφές.

Ο Yerushalmy (1997) υποστηρίζει ότι οι περισσότερες διδακτικές προσεγγίσεις δεν λαμβάνουν υπόψη το πέρασμα από ένα τύπο αντιπροσώπευσης σε ένα άλλο, το οποίο είναι μια σύνθετη διαδικασία και σχετίζεται με τη γενίκευση της έννοιας. Ο Yerushalmy (1991) υποστήριξε πως η διδασκαλία των μαθητών να συντονίζουν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων στα σχολικά Μαθηματικά είναι μη τετριμμένη. Όπως μας υπενθυμίζουν οι Dreyfus & Halevi (1991): "*Μία από τις κεντρικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές στη διαδικασία κατασκευής της νοητικής εικόνας της συνάρτησης είναι η καθιέρωση της σχέσης μεταξύ του τύπου που ορίζει μία συνάρτηση αλγεβρικά και της γραφικής παράστασης*." Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων παρέχουν διαφορετικές οπτικές για τις συναρτήσεις Doorman et al. (2012) *Η απόκτηση μίας αντιπροσωπευτικής ευχέρειας*, που είναι η ικανότητα να εργάζεται μέσα και να μεταφράζει τις έννοιες μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η ικανότητα αυτή είναι κεντρική στο εγχείρημα (enterprise) της μαθηματικής δραστηριότητας και της κατασκευής γνώσης (Bieda & Nathan, 2009). Η ανακάλυψη της *γείωσης (grounding)*, που χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει τη χαρτογράφηση που κάνει ένα άτομο ανάμεσα σε μια άγνωστη ή αφηρημένη αναπαράσταση και μια πιο συγκεκριμένη ή οικεία αναφορά (Glenberg, De Vega & Graesser, 2008˙ Nathan, 2008˙ Bieda & Nathan, 2009). Η γείωση, ως διαδικασία, διευκολύνει τη δημιουργία νοήματος για κάτι που διαφορετικά θα μπορούσε να θεωρηθεί ως αφηρημένο και μη ονοματολογικό (π.χ., Glenberg & Robertson, 1999˙ Harnad, 1990˙ Lakoff & Nunez, 2000). Όπως αναφέρουν οι Bieda, & Nathan (2009) η εμπειρική εργασία έχει δείξει ότι είναι αρκετά ισχυρή για να ενισχύσει την κατανόηση των μαθηματικών αρχών, διαδικασιών και παραστάσεων, οδηγώντας σε κέρδη μάθησης σε περιοχές που κυμαίνονται από τον βασικό αριθμό και την πρώιμη αριθμητική (Griffin, Case & Siegler, 1994), κλάσματα (Saxe et al., 2005), αριθμητική και άλγεβρα ιστορία επίλυσης προβλημάτων (Nathan, Kintsch & Young, 1992; Glenberg et al., 2008) και πολύπλοκα προσαρμοστικά συστήματα (Goldstone & Son, 2005). Οι Kilpatrick et al. (2001) έχουν περιγράψει πέντε επιθυμητά σκέλη Μαθηματικής δράσης για τους μαθητές:

- εννοιολογική κατανόηση (conceptual understanding)
- διαδικαστική ευχέρεια (procedural fluency), είναι η ικανότητα να πραγματοποιήσει τους υπολογισμούς αποτελεσματικά και να έχει τεκμηριωμένες γνώσεις
- στρατηγική ικανότητα (strategic competence), είναι η ικανότητα να επινοούν, να εκπροσωπούν και να λύνουν μαθηματικά προβλήματα
- προσαρμοστική λογική (adaptive reasoning) περιλαμβάνει την ικανότητα για λογική σκέψη
- παραγωγική διάθεση (productive disposition) είναι παρούσα όταν οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι τα Μαθηματικά είναι κάτι που αξίζει τον κόπο να μπορούν λογικά να χρησιμοποιήσουν

2.3 Γραμμική συνάρτηση

Στην εισαγωγή των γραμμικών συναρτήσεων είναι το σημείο καμπής όπου πολλοί μαθητές αποφασίζουν εάν τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα ή όχι (Nolan & Herbert. 2015). Η γραμμική συνάρτηση είναι σίγουρα ένα βασικό κεφάλαιο στην Άλγεβρα. Επιπλέον είναι και θεμελιώδους σημασίας αυτή η άποψη συνάδει με την άποψη του Pierce (2005) όπου αναφέρει ότι η ανάγκη μελέτης των γραμμικών συναρτήσεων είναι σημαντική καθώς παρέχει στους μαθητές την πρώτη τους εμπειρία στον εντοπισμό και την ερμηνεία της σχέσης μεταξύ δύο εξαρτημένων μεταβλητών. Η κατανόηση των γραμμικών συναρτήσεων είναι το κλειδί για τους μαθητές να αναπτύξουν μία καλή βάση για τη στοιχειώδη άλγεβρα (Pierce, Stacey & Bardini, 2010). Η εκμάθηση της γραμμικής συνάρτησης είναι προβληματική Leinhardt (1990) οπότε σε αυτή τη κατεύθυνση έχουν δημιουργηθεί διαφορετικές προσεγγίσεις (Schoenfeld, Smith & Arcavi 1993; Moschkovich, 1998; Chiu, Kessel, Moschkovich, & Muñoz-Nuñez 2001; Pierce et al., 2010). Οι Wawro et al. (2011) αναφέρουν ότι είναι ένα από τα πιο χρήσιμα πεδία της μαθηματικής εκπαίδευσης διότι δημιουργεί μία ενοποιητική δύναμη με τους άλλους κλάδους και έχει εφαρμοστικότητα (applicability) έξω από τα καθαρά Μαθηματικά. Οι γραμμικές συναρτήσεις μπορούν να διδαχθούν μέσα σε ένα πλαίσιο εξερεύνησης παραδειγμάτων γραμμικής μοντελοποίησης Nolan & Herbert (2015) αλλά και σε αυτό το πλαίσιο αναφέρουν οι Bardini & Stacey (2006) οι μαθητές συνεχίζουν να αγωνίζονται με γραμμικές συναρτήσεις παρά τη χρήση αυτής της προσέγγισης. Αλγεβρικές προσδοκίες για το εφαρμοστικό πλαίσιο (frame applied) που έχουμε για τη γραμμική συνάρτηση ψ=αχ+β (στα Μαθηματικά) σύμφωνα με Pierce et al. (2010) είναι:

1) Αναγνώριση των συμβάσεων και των βασικών διαδικασιών

   Α) Το χ μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα τις τιμές που αντιπροσωπεύει.

   Β) Η επιλογή του γράμματος της αναπαριστανόμενης μεταβλητής είναι αυθαίρετη, αλλά η σύμβαση προτείνει τη χρήση ενός σχετικού με το περιεχόμενο γράμματος ή γενικά ενός γράμματος από το αλφάβητο.

   Γ) Τα γράμματα ψ,χ είναι οι μεταβλητές και τα α,β είναι οι παράμετροι

   Δ) Η μεταβλητή χ μπορεί να στέκεται για μία ποικιλία αριθμητικών τιμών, ενός άλλου αντικειμένου ή έκφρασης που μπορεί να αντικαθιστά το χ.

   Ε) Στη περίπτωση που περιγράφει μία σχέση, οι μονάδες μέτρησης δεν θα περιλαμβάνονται

   Στ) Στην αλγεβρική έκφραση το σύμβολο του πολλαπλασιασμού παραλείπεται.

2) Αναγνώριση της δομής

   Α) Οι δύο συσχετιζόμενες μεταβλητές όπου ψ ή f(χ) θα εξαρτάται από την τιμή του χ (η επιλογή της σημειογραφίας μπορεί να καθίσταται με μία εξάρτηση που να είναι περισσότερο ή λιγότερο σαφής).

   Β) Η σχέση μπορεί να δίνεται (expression may always be arranged as)

   Σταθερά συν σταθερές φορές η μεταβλητή ίσον με τη μεταβλητή.

3) Αναγνώριση των χαρακτηριστικών κλειδιών

   Α) Το χ και ψ είναι πρώτου βαθμού και κατά αυτόν τον τρόπο αναγνωρίζεται ότι είναι γραμμική συνάρτηση.

   Β) Το β ως σταθερά και ως σημείο τομής με τον άξονα των ψ του γραφήματος της συνάρτησης.

   Γ) Το α ως ρυθμός μεταβολής και ως κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Επίσης το γράφημα που συνδέει τις δύο μεταβλητές είναι ευθεία.

Ο κανόνας της γραμμικής συνάρτησης ψ=αχ+β αναγκάζει τους μαθητές να αναπτύξουν μία εννοιολογική κατανόηση όχι μόνο των μεταβλητών χ και ψ αλλά και των παραμέτρων α και β όπου απαιτεί από το μέρος των μαθητών να κατανοήσουν τους διαφορετικούς ρόλους που διαδραματίζουν οι δύο « κατηγορίες » γραμμάτων στον κανόνα. Σύμφωνα με την ίδια μελέτη τα α και β έχουν τέσσερις διαστάσεις που περιγράφονται στον πίνακα:

Πίνακας 2.1 Οι τέσσερις διαστάσεις των παραμέτρων της γραμμικής συνάρτησης ψ=α·χ+β

	Συμβολική (symbolic)	**Γραφική (graphical)**	**Αριθμητική (numerical)**	**Περιεχόμενο (context)- πραγματικές προοπτικές**
α	$α_σ$: ο συντελεστής του χ στην εξίσωση ψ=αχ+β . Μπορεί να είναι είτε συγκεκριμένος αριθμός είτε γράμμα	$α_γ$: η κλίση του γραφήματος ψ=αχ+β. Η κλίση της γραμμής.	$α_α$: είναι ο λόγος (ratio) $\frac{Δψ}{Δχ}$	$α_π$: εξαρτάται από το περιεχόμενο που έχει σε προβλήματα πραγματικά (π.χ. ταχύτητα, ωριαίος ρυθμός πληρωμής κ.α)
β	$β_σ$: ο σταθερός όρος της εξίσωσης. Μπορεί να είναι αριθμός ή γράμμα	$β_γ$:το σημείο τομής με το ψ (ψ-intercept). Είναι ένα σημείο της γραμμής.	$β_α$: είναι η τιμή του ψ όταν το χ=0	$β_π$:εξαρτάται από την σημασία του προβλήματος (π.χ αρχική θέση,32^o F σε μετατροπή θερμοκρασιών κ.α

Πηγή: Pierce et al., 2010

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας τους επιβεβαίωσαν ότι το β είναι απλούστερο στη κατανόηση από ότι το α.

Οι βασικές ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων:

A) Η έκφραση ψ=αχ δηλώνει αναλογία όπου το α είναι αμετάβλητος λόγος (Lobato & Ellis, 2010). Η αναλογία(proportional) είναι ένας όρος που υποδηλώνει σε ένα σύστημα δύο μεταβλητών ότι μεταξύ τους υπάρχει μία γραμμική σχέση (Karplus, Pulos & Stage, 1983). Όπως αναφέρει και ο Hohensee (2014) η κατανόηση αυτής της ιδιότητας περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός απείρου συνόλου αναλογιών που είναι όλες ισοδύναμες. Μία αναλογία (rate) υποδηλώνει μία ολιστική δομή όπου οι δύο ποσότητες μεταβάλλονται δυναμικά με μία σταθερή σχέση (ratio) (Kaput & Maxwell-West, 1994).

B) Η δεύτερη βασική ιδιότητα είναι ότι οι ποσότητες που αντιπροσωπεύονται από τη γενική γραμμική εξίσωση ψ=αχ+β β ≠0 δεν εμπλέκονται άμεσα σε μία αναλογική σχέση (Dooren et al., 2005; Pierce, Stacey & Bardini, 2010). Με άλλα λόγια, αν ένα ζεύγος συντεταγμένων ανήκει σε μία γραμμική εξίσωση η οποία δεν διέρχεται από την αρχή τον αξόνων, κανένα άλλο σημείο αυτής της γραμμικής εξίσωσης δεν θα έχει τον ίδιο λόγο, με μόνη εξαίρεση τη σταθερή συνάρτηση (Hohensee, 2014). Για να γίνει κατανοητό, το σημείο Α(2,6) ανήκει στην εξίσωση ψ=2χ+2 και κανένα άλλο σημείο της ευθείας αυτή δεν θα έχει λόγο ψ/χ ίσο με 3.

Γ) Η τρίτη βασική ιδιότητα είναι ότι η αλλαγή στις ποσότητες στη γενική γραμμική εξίσωση ψ=αχ+β , β≠0 σχετίζονται αναλογικά και περαιτέρω ο ρυθμός μεταβολής για οποιαδήποτε γραμμική εξίσωση είναι σταθερός (Stroup, 2002; Hollebrands, 2003). Με άλλα λόγια αναφέρουν ο Ellis (2007), ο Johnson (2012) και ο Hohensee (2014) ότι με δοσμένες δύο ποσότητες στην γραμμική συναρτησιακή σχέση, η πολλαπλασιαστική σύγκριση μεταξύ οποιασδήποτε αλλαγής της μίας ποσότητας και της αντίστοιχης αλλαγής στην άλλη ποσότητα θα είναι πάντα σταθερή. Για να γίνει κατανοητό στην ευθεία ψ=2χ+2 η αύξηση κατά μία μονάδα θα επιφέρει μία αύξηση 2 μονάδες δηλαδή αν η μία ποσότητα έχει χ=3 και ψ=8 αν αυξήσουμε το χ=5 το ψ θα αυξηθεί κατά 2 φορές το 5-3 άρα το ψ μας θα είναι 12.

Για κάθε γραμμική συνάρτηση οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να προσδιορίσουν τον σταθερό όρο και να ερμηνεύουν την ως την τιμή του y όταν το x είναι μηδέν ή μια «αρχική τιμή» (Pierce, 2005).

Ένας μαθητής πρέπει να επιδεικνύει την αλγεβρική προσδοκία προσδιορίζοντας τη δομή δύο σχετικών μεταβλητών, δηλαδή μέσω του βαθμού να αναγνωρίζει ότι είναι γραμμική συνάρτηση Pierce (2005).

Στην σημαντικότητα της εξάρτησης των τιμών του ψ και χ στη μορφή ψ=αχ+β μπορεί να αναφερθεί και ότι αν α>0 τότε αυτό συνεπάγεται ότι αύξηση του χ σημαίνει και αύξηση του ψ.

Κεφάλαιο 3: Προβληματική στη Φυσική

3.1 Χρήση των Μαθηματικών στη Φυσική

Ο Gingras (2001) για να υπερασπιστεί τον ισχυρισμό ότι «η Φυσική είναι μαθηματική στη διατύπωσή της», υιοθετεί μια ιστορική προοπτική. Αφού διαπιστώνει ότι κορυφαίοι διανοούμενοι του δέκατου έβδομου και του δέκατου όγδοου αιώνα (Newton, Euler, Lagrange, Fourier, Bernoulli) δύσκολα διακρίνονται με σαφήνεια σε μαθηματικούς και φυσικούς, συμπεραίνει τρεις διαστάσεις της μαθηματικής Φυσικής:

- *Κοινωνική: Η χρήση των Μαθηματικών συνέβαλε στη δημιουργία μιας ιδιωτικής Επιστήμης όπου είναι απλά δυνατή η συμμετοχή με επαρκή γνώση των Μαθηματικών.*
- *Επιστημολογική: Ο μαθηματισμός της Φυσικής άλλαξε την έννοια του όρου εξήγηση. Η έννοια της εξήγησης ενός φυσικού φαινομένου με έναν φυσικό μηχανισμό αντικαταστάθηκε σταδιακά από την ανάγκη να εκπροσωπείται από μαθηματικές συνθέσεις.*
- *Οντολογική: Ο μαθηματισμός οδήγησε στην «εξαφάνιση των ουσιών» όπως καρτεσιανές δίνες, ηλεκτρικά υγρά, ο αιθέρας ή η θερμιδική. Ο συμβολικός ή λειτουργικός τρόπος αναπαράστασης κατέστησε αυτές τις κατασκευές παρωχημένες.*

Πολλοί φυσικοί υποστηρίζουν πως είναι αδύνατο να εξεταστεί μια φυσική θεωρία χωρίς τα Μαθηματικά. Αν και συνήθως βλέπουμε τα Μαθηματικά ως ένα εξωτερικό χρήσιμο εργαλείο, θεωρούνται μάλλον η γλώσσα της φύσης. Με αυτή την οπτική διεισδύουν στον λόγο των φυσικών, αφού οι θεωρητικές εξηγήσεις στη Φυσική συχνά ενεργοποιούνται έμμεσα, μέσω του μαθηματικού φορμαλισμού. Συμβάλλουν, επίσης, στη δομή της φυσικής σκέψης, καθώς τα Μαθηματικά συχνά παρέχουν αναλογίες που επιτρέπουν στους φυσικούς να σκεφτούν για άγνωστα φαινόμενα και χρησιμεύουν ως οδηγός λογικής σκέψης στην πορεία προς την αφαίρεση (Uhden et al., 2012). Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί στην διδακτική της Φυσικής με την μοντελοποίηση της επίλυσης των προβλημάτων και στα διαδικαστικά βήματα, διαχωρίζουν το μαθηματικό από το φυσικό μοντέλο ίσως για παιδαγωγικούς σκοπούς. Στην πραγματικότητα, όμως, αυτή η διάκριση δεν φαίνεται να υποστηρίζεται από τα ιστορικά και φιλοσοφικά επιχειρήματα. Σύμφωνα με τον Kanderakis (2016) το όριο είναι δύσκολο να προσδιοριστεί γιατί ένα φυσικό μοντέλο ενσωματώνει πολλά μαθηματικά στοιχεία και δεν μπορεί να διαχωριστεί από το αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο. Αυτά τα στοιχεία, για παράδειγμα, μπορούν να είναι τα γεωμετρικά στοιχεία του μοντέλου σε μία σχηματική αναπαράσταση, αλλά και πολλές έννοιες της Φυσικής που ενσωματώνονται στο μοντέλο, όπως οι ρυθμοί μεταβολής, οι οποίες είναι ταυτόχρονα και μαθηματικές έννοιες. Οι Hendry & Psillos

(2007), αποφαίνονται στην έρευνά τους πως τα φυσικά μοντέλα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως αφηρημένα μαθηματικά συστήματα, αλλά κάτι μεταξύ των μαθηματικών οντοτήτων και των φυσικών συστημάτων. Ενώ τα Μαθηματικά είναι ένα βασικό στοιχείο της επίλυσης προβλημάτων Φυσικής, οι ειδικοί συχνά αποτυγχάνουν να εκτιμήσουν ακριβώς πώς το χρησιμοποιούν. Τα Μαθηματικά μπορεί να είναι η γλώσσα των Φυσικών επιστημών, αλλά η μαθηματική Φυσική είναι μια διαλεκτική διάσταση της γλώσσας αυτής. Οι φυσικοί τείνουν να συνδυάζουν την εννοιολογική Φυσική με τον μαθηματικό συμβολισμό με τρόπο που επηρεάζει βαθιά τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται οι εξισώσεις. Η έρευνα με φοιτητές Φυσικής πανεπιστημιακής εκπαίδευσης σε μαθήματα αλγεβρικής βασικής Φυσικής υποδηλώνει ότι το χάσμα ανάμεσα σε αυτό που οι μαθητές πιστεύουν ότι πρέπει να κάνουν και στο τι οι εκπαιδευτές τους περιμένουν να κάνουν, μπορεί να λειτουργήσει πολύ αρνητικά (Redish, 2006). Η «γλώσσα» των Μαθηματικών που χρησιμοποιείται στη Φυσική δεν είναι η ίδια με αυτή που διδάσκουν οι μαθηματικοί. Η «διάλεκτος» του μαθηματικού λόγου του μαθητή έχει συνάφεια ως γλώσσα «Μαθηματικών στα Μαθηματικά» και «Μαθηματικών στη Φυσική», αλλά αν συγκριθούν θα χρειαστεί να θεωρηθούν ξεχωριστές γλώσσες. Η βασική διαφορά είναι ότι τα σύμβολα φέρουν επιπλέον πληροφορίες και αυτό οδηγεί σε διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι φυσικοί και οι μαθηματικοί ερμηνεύουν τις εξισώσεις (Redish & Kuo, 2015). Η ήδη απαιτητική συμβολική γλώσσα της Άλγεβρας δυσκολεύει ακόμη περισσότερο τους μαθητές όταν μεταφέρεται και χρησιμοποιείται στη Φυσική, με αποτέλεσμα οι μαθητές αντί να εστιάζουν στο προς μελέτη φυσικό φαινόμενο, εστιάζουν στις αλγεβρικές σχέσεις (Βακαλόπουλος, Γεωργακόπουλος, Καλογερία & Ψάϊλα, 2017). Ο Michelsen (2005) θεωρεί το επίπεδο της γλώσσας των Μαθηματικών ως μόνιμο θέμα στην εκπαίδευση της Φυσικής:

΄΄Η μάθηση του μαθηματικού φορμαλισμού αποτελεί συχνά προϋπόθεση για την κατανόηση στη Φυσική και για πολλούς νεοεισερχόμενους στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο φορμαλισμός αυτός λειτουργεί ως φραγμός, πολύ υψηλός για να ξεπεραστεί. Μια πηγή του προβλήματος μπορεί να είναι πως συχνά από τους καθηγητές θεωρείται προφανές ότι τα βασικά μαθηματικά γεγονότα πρέπει να συλλαμβάνονται πριν μελετήσουν τη Φυσική. Κατά συνέπεια, είναι καθήκον των μαθητών να μεταφέρουν τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες σε νέο περιβάλλον, π.χ. στη Φυσική΄΄.

Οι μαθητές γενικά δυσκολεύονται με τα Μαθηματικά στη Φυσική γιατί απαιτούνται μαθηματικές δεξιότητες τις οποίες ακόμη και αν γνωρίζουν, δεν ξέρουν πώς να τις χρησιμοποιήσουν στα προβλήματα Φυσικής (Tuminaro, 2004). Οι φυσικοί διαβάζουν και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις διαφορετικά από τον τρόπο που κάνουν οι μαθηματικοί στο μάθημα των Μαθηματικών και επιπλέον έχουν διαφορετικό στόχο. Δεν θέλουν μόνο να διερευνήσουν τους μαθηματικούς φορμαλισμούς αλλά και να τους εκμεταλλευτούν για να περιγράψουν και να κατανοήσουν τα φυσικά συστήματα (Redish & Kuo, 2015).

3.2 Εξισώσεις στη Φυσική

Από σχετική ερευνητική μελέτη ο Redish (2006) συμπεραίνει σαφώς ότι η χρήση των εξισώσεων στη Φυσική είναι μια πολύ πιο περίπλοκη γνωσιακή διαδικασία από ό, τι οι μαθητές αντιλαμβάνονται από τα Μαθηματικά τους. Χρησιμοποιούνται σύμβολα που φέρουν επιπλέον, αθέατες, εκ πρώτης όψης, πληροφορίες που δεν υπάρχουν στον αντίστοιχο μαθηματικό φορμαλισμό της εξίσωσης. Στη Φυσική οι εξισώσεις ερμηνεύονται μέσω της γνώσης των φυσικών συστημάτων και προστίθεται επιπλέον πληροφόρηση. Η έρευνα των White & Mitchelmore (1996) δείχνει ότι μια σημαντική πηγή δυσκολιών των μαθητών στην εφαρμογή των συναρτήσεων είναι η μη αποσαφηνισμένη έννοια της μεταβλητής. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν τις μεταβλητές ως σύμβολα που πρέπει να χειραγωγούνται, και όχι ως ποσότητες που πρέπει να συσχετιστούν. Σύμφωνα με τον Sierpinska (1992) στο Michelsen (2005), οι συναρτήσεις θα πρέπει πρώτα να εμφανιστούν ως κατάλληλο εργαλείο για τη μαθηματικοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών μεγεθών. Η κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης για χρήση στη Φυσική προϋποθέτει την εννοιολογική κατανόηση αυτής της συνάρτησης ως σχέσης μεταβλητών. Οι Ellermeijer & Heck (2002) κατηγοριοποιούν την εμφάνιση των μεταβλητών σε 1. σύμβολο κράτησης θέσης, 2. πολυδύναμο όνομα και 3. μεταβλητό αντικείμενο και διαπιστώνουν ότι ενώ στα Μαθηματικά εμφανίζονται οι δύο πρώτες μορφές, στη Φυσική, το τρίτο είδος της μεταβλητής, δηλαδή το μεταβλητό αντικείμενο, χρησιμοποιείται συχνότερα.

Ο Sherin (2001) θέτει ζήτημα τι σημαίνει να καταλάβει κανείς μια εξίσωση Φυσικής και εξηγεί πως η χρήση επίσημων εκφράσεων στη Φυσική δεν είναι μόνο θέμα αυστηρής και τυπικής εφαρμογής των αρχών ακολουθούμενη από την επίσημη χειραγώγηση των εκφράσεων. Από την έρευνά του συμπεραίνει πως πιθανόν, οι επιτυχημένοι μαθητές μαθαίνουν να κατανοούν τις εξισώσεις με μια αίσθηση έκφρασης και αυτό είναι που τους καθοδηγεί. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές μαθαίνουν να κατανοούν τις εξισώσεις Φυσικής από την άποψη ενός λεξιλογίου στοιχείων που ονομάζει συμβολικές μορφές. Ένα παράδειγμα μίας συμβολικής μορφής είναι τα ΄΄μέρη ενός συνόλου΄΄. Ένα πρότυπο συμβόλου για ΄΄μέρη ενός συνόλου΄΄ μοιάζει με: □=□+□+□… . Ένα άλλο παράδειγμα συμβολικής μορφής είναι η ΄΄βάση + αλλαγή΄΄. Το πρότυπο συμβόλου για τη ΄΄βάση + αλλαγή΄΄ έχει μορφή □=□+Δ. Κάθε συμβολική μορφή συνδέει ένα απλό εννοιολογικό σχήμα με ένα πρότυπο συμβόλων σε μια εξίσωση. Αυτή η υπόθεση προϋποθέτει ευέλικτη και γενετική κατανόηση των εξισώσεων και ως εκ τούτου, η διδασκαλία της Φυσικής, πρέπει να βοηθάει τους μαθητές να αποκτήσουν αυτή την κατανόηση. Οι Redish & Kuo (2015) στην έρευνά τους πάνω στη διδασκαλία των αρχάριων φοιτητών στη Φυσική, υιοθετούν το πλαίσιο, που χρησιμοποιείται στο Physical Education Research (PER) για να κατανοηθεί η δυναμική του πώς οι μαθητές κατασκευάζουν νόημα στη Φυσική, το οποίο μοιράζεται πολλά από τα βασικά χαρακτηριστικά των πλαισίων που χρησιμοποιούνται για να κατανοήσουν τη δυναμική του τρόπου με τον οποίο τα άτομα κατασκευάζουν νόημα στη γλώσσα. Το πλαίσιο πόρων χρησιμοποιεί ορισμένες ίδιες βασικές ιδέες για να μας βοηθήσει να περιγραφούν οι πολλαπλοί τρόποι με τους οποίους οι μαθητές Φυσικής μπορούν να κάνουν νόημα με εξισώσεις καθώς και να κατανοήσουν τη δυναμική του τρόπου με τον οποίο μπορούν να μετατοπίζονται από το ένα νόημα στο άλλο. Οι εννοιολογικές, επιστημολογικές και συναισθηματικές αντιδράσεις μπορούν να αλληλεπιδρούν με σύνθετους τρόπους. Αυτές οι βασικές ιδέες είναι:

- *Η ενσωματωμένη γνώση: Τα φαινομενολογικά αρχέτυπα συνδέουν τη βασική λογική της Φυσικής με την ενσωματωμένη εμπειρία.*
- *Η εγκυκλοπαιδική γνώση: Οι πολλαπλοί παραγωγικοί πόροι χρησιμοποιούνται δυναμικά.*
- *Το περιεχόμενο: Η ενεργοποίηση εξαρτάται από εννοιολογικούς, επιστημολογικούς και συναισθηματικούς παράγοντες.*

Έτσι η θεώρηση των Redish & Kuo (2015) αν συνδυαστεί με αυτή του Sherin (2001), μία σχέση όπως παράδειγμα της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση $v = v_o + at$, μπορεί να αναγνωστεί ¨ως μέρη ενός συνόλου ή ως βάση + αλλαγή¨. Ποια από τις δύο μορφές πρόκειται να ενεργοποιηθεί στον μαθητή εξαρτάται πως θα αλληλεπιδράσουν στον ίδιο, οι παραπάνω παράγοντες.

3.3 Αναπαραστάσεις στη Φυσική

Ο Michelsen (2005) θεωρεί ότι η ικανότητα αναπαράστασης περιλαμβάνει το χειρισμό των παραστάσεων μιας ποικιλίας θεμάτων από τα Μαθηματικά και τη Φυσική, την κατανόηση και την εφαρμογή διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων, τη γνώση της δύναμης και της αδυναμίας μιας αναπαράστασης, καθώς και την επιλογή και τη μετάφραση μεταξύ των διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων. Παρόμοια ορίζει και ο «Lemke (1998) στο Karam,& Krey (2015) ότι η ικανότητα έκφρασης των φυσικών εννοιών σε διαφορετικές σημειωτικές μορφές και η διέλευση μεταξύ τους είναι πιθανό να είναι μια ουσιαστική ικανότητα για τη διδασκαλία της Φυσικής». Πολλές γνωσιακές μελέτες υποδεικνύουν τη σημασία της λογικής σκέψης και της χωρικής ικανότητας ως προαπαιτούμενων για την κατανόηση των κινηματικών γραφημάτων και μερικές επίσης υποδηλώνουν ότι η μελέτη διαγραμμάτων κινηματικής στη

Φυσική και των αντίστοιχων μορφών στα Μαθηματικά, μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων στους μαθητές (Planinic et al., 2012)

Σύμφωνα με τον Linder (2013), για να βελτιστοποιηθεί η διδασκαλία και η μάθηση της Φυσικής, το δυναμικό δημιουργίας νοήματος των αναπαραστάσεων πρέπει να γίνει καλά κατανοητό σε σχέση με την προοπτική ενός πειθαρχικού λόγου, ο οποίος απαιτεί να εξεταστεί η μάθηση της επιστήμης όσον αφορά την επίτευξη ευχέρειας σε έναν κρίσιμο σχηματισμό τρόπων αναπαράστασης. Οι μεμονωμένες αναπαραστάσεις μπορούν να παρέχουν πρόσβαση σε μοναδικούς ή συμπληρωματικούς πόρους (affordance), οι οποίοι από κοινού θα αποτελούσαν σε μία πειθαρχεία, το κρίσιμο σύνολο για το σχηματισμό όλων των αναπαραστάσεων. Ωστόσο, η αξιοποίηση ενός συγκεκριμένου συνόλου τρόπων αναπαράστασης στη διδασκαλία της Φυσικής δεν αρκεί από μόνη της. Απαιτείται η ικανότητα να είναι σε θέση να δει κανείς τι παρουσιάζεται, δηλαδή τι κρύβεται πίσω από τις αναπαραστάσεις και τους σχηματισμούς αυτών που επέτρεψαν την επιθυμητή μαθησιακή έκβαση. Πέρα από την παιδαγωγική συνάφεια ενός ευρέος ρεπερτορίου εξηγήσεων, λόγω του γεγονότος ότι τα άτομα έχουν διαφορετικά συναισθήματα όταν είναι εκτεθειμένα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, η γνώση του τρόπου αναπαράστασης και εξάσκησης μιας εξίσωσης με διάφορους τρόπους, σχετίζεται επίσης με μια ευρύτερη άποψη του τι σημαίνει, να καταλάβουν μια εξίσωση. Πολύ συχνά, οι διαφορετικές προσεγγίσεις περιλαμβάνουν την εκκίνηση από διαφορετικές φυσικές υποθέσεις, χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα και μαθηματικές δομές (Karam & Krey, 2015).

Όπως έδειξε η έρευνα του Krey (2012), οι γραφικές παραστάσεις θεωρούνται χρήσιμες από τους περισσότερους μαθητές, αν και πολλές έρευνες αποδεικνύουν μία ποικιλία δυσκολιών στη κατανόηση των γραφημάτων στη Φυσική. Στην έρευνα των Planinic et al. (2012), ενώ πολλοί καθηγητές Φυσικής πίστευαν ότι η έλλειψη μαθηματικών γνώσεων των μαθητών είναι ο κύριος λόγος για τον οποίο έχουν δυσκολίες στα γραφήματα, στη Φυσική, τα αποτελέσματα έδειξαν πως αυτή δεν αποτελούσε την κύρια αιτία. Στην ίδια κατεύθυνση, τα αποτελέσματα της μελέτης των McDermott et al. (1987) φαίνεται να υποστηρίζουν την πρόταση ότι η έλλειψη μαθηματικών δεξιοτήτων δεν είναι η κύρια αιτία των μαθησιακών δυσκολιών με γραφήματα στη Φυσική. Αρκετοί μαθητές στη μελέτη ήταν σε θέση να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα σχετικά με την κλίση, αλλά απέτυχαν σε ένα παράλληλο πρόβλημα Φυσικής. Ενώ είναι κοινά αποδεκτό πως ορισμένοι μαθητές ή σπουδαστές, πραγματικά δεν διαθέτουν μαθηματικές δεξιότητες, αλλά ακόμα κι αν διαθέτουν, οι μαθηματικές γνώσεις δεν αποτελούν εγγύηση για την επιτυχία τους σε ανάλογα προβλήματα Φυσικής.

Συχνά, οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν ότι τα προβλήματα είναι παρόμοια και χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές για την ανάλυση γραφημάτων στα Μαθηματικά και τη Φυσική. Η μεταφορά της γνώσης από τα Μαθηματικά στη Φυσική φαίνεται να είναι σχετικά αδύναμη, αλλά αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν βλέπουν την ομοιότητα μεταξύ ορισμένων προβλημάτων στα Μαθηματικά και στη Φυσική (Planinic et al., 2012). Η μελέτη του Woolnough (2000) αποκάλυψε την ύπαρξη αντίστασης των μαθητών στην εφαρμογή της μαθηματικής τους γνώσης στη Φυσική. Η μελέτη έδειξε επίσης ότι οι μαθητές της ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, λειτουργούσαν σε τρία ξεχωριστά πλαίσια: τον πραγματικό κόσμο, τον κόσμο της Φυσικής και τον μαθηματικό κόσμο, ο καθένας με διαφορετικά χαρακτηριστικά και συστήματα πεποιθήσεων. Μερικοί μαθητές πίστευαν ακόμη ότι δεν ήταν σκόπιμο να μεταφέρονται οι έννοιες από τα Μαθηματικά στη Φυσική. Για παράδειγμα, κατά τον υπολογισμό της κλίσης ενός γραφήματος γραμμής, κάποιοι μαθητές νόμιζαν ότι ήταν ακατάλληλο να αναθέτουν μονάδες στην κλίση λόγω της αντίληψής τους ότι η κλίση είναι μια μαθηματική έννοια. Η ίδια μελέτη διαπίστωσε επίσης ότι περίπου οι μισοί μαθητές Γυμνασίου που εισέρχονταν στη Φυσική του 11ου έτους δεν ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της κλίσης και δεν μπορούσαν να υπολογίσουν την κλίση μιας απλής ευθείας γραμμής.

Οι Ellermeijer & Heck (2002) αναφέρουν πως η διαφορετική χρήση των μαθηματικών οντοτήτων στα Μαθηματικά και τις επιστήμες Φυσικές Επιστήμες είναι σημαντική όταν πρόκειται για το σχεδιασμό ολοκληρωμένων μαθησιακών περιβαλλόντων. Στα Μαθηματικά, οι σπουδαστές σκέφτονται ένα γράφημα ως αναπαράσταση μιας συνάρτησης, δηλαδή ως αναπαράσταση ενός μόνο αντικειμένου, ώστε να αρκεί να δουλεύει με μία μεταβλητή. Στην Φυσική και τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά το γράφημα αντιπροσωπεύει μια σχέση μεταξύ των ποσοτήτων, και πρέπει να δουλεύουμε με τουλάχιστον δύο μεταβλητές. Τα γραφήματα κινηματικής έχουν θέση, ταχύτητα ή επιτάχυνση ως τεταγμένη και χρόνο ως τετμημένη. Τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν δουλεύουν με αυτά τα γραφήματα είναι ότι (1) βλέπουν το γράφημα ως μια κυριολεκτική εικόνα της κατάστασης και (2) συγχέουν την έννοια της κλίσης μιας γραμμής και το ύψος ενός σημείου στη γραμμή (Beichner, 1994). Οι Planinic et al. (2012) μάλιστα διαπιστώνουν ότι η σύγχυση κλίσης/ύψους, κυριαρχεί και στα δύο πλαίσια, αλλά είναι πολύ συχνότερη στο πλαίσιο της Φυσικής απ΄ ότι στο πλαίσιο των Μαθηματικών.

3.4 Κινηματικές εξισώσεις και γραφήματα στη Φυσική

Σύμφωνα με τους Angell et al. (2008) οι μαθητές, αν και στη Φυσική απαιτείται χρήση απλών αλγεβρικών εξισώσεων, δεν μπόρεσαν να εκτελέσουν απλούς χειρισμούς και ούτε να δουν την ομοιότητα μεταξύ της μαθηματικής γραμμικής συνάρτησης y=ax+b με τη συνάρτηση της ταχύτητας $v=v_0$ +at. Η τελευταία εξίσωση στο πλαίσιο της Φυσικής, συνδέεται με ένα ακόμη πιο πλούσιο δίκτυο ιδεών που περιλαμβάνει κίνηση, ταχύτητες και ρυθμούς μεταβολής. Για να κατανοήσουμε την εξίσωση v(t) πρέπει να κατανοήσουμε τη σχέση της με όλες τις γνωστικές έννοιες που συμπεριλαμβάνει. Με άλλα λόγια, η έννοια των εξισώσεων στη Φυσική είναι εγκυκλοπαιδική ακριβώς όπως η έννοια μιας λέξης όπως η "υποτείνουσα" είναι εγκυκλοπαιδική (Redish & Kuo, 2015). Παράλληλα, η μαθηματική γλώσσα στη Φυσική διαφέρει από τη χρήση της στα Μαθηματικά (Ellermeijer & Heck 2003; Redish 2005). Για παράδειγμα στα Μαθηματικά οι μεταβλητές δεν έχουν διαστάσεις, στη Φυσική έχουν μονάδες και η ονομασία τους συνήθως είναι συντομογραφία της έννοιας. Αποδίδονται διαφορετικά νοήματα στα σύμβολα και ερμηνεύονται με διαφορετικό τρόπο οι εξισώσεις. Στα Μαθηματικά η αρχή των αξόνων είναι πάντα το (0,0), στη Φυσική μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο και τα πεδία ορισμού και τιμών εξαρτώνται από τη φύση των αναπαριστώμενων μεγεθών. Η έννοια της κλίσης στα Μαθηματικά είναι αδιάστατος αριθμός με γεωμετρική ερμηνεία, ενώ στη Φυσική είναι μια ποσότητα με μονάδες που παριστάνει την αλλαγή μιας ποσότητας σε σχέση με άλλη (Βακαλόπουλος κ.α., 2017).

Κομβικές έννοιες για την κατανόηση των εξισώσεων στην κινηματική των ευθύγραμμων κινήσεων έχουν οι έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Για παράδειγμα, στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου όπου παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη εικόνα της κινηματικής των ευθύγραμμων κινήσεων, όλες οι εξισώσεις παράγονται από τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης οι οποίοι δίνονται ως ρυθμοί μεταβολής ($u=\Delta x/\Delta t$ και $a=\Delta u/\Delta t$). Κατά τους Uhden et al. (2012) ένα σημαντικό σημείο με προφανή σημασία για την εκπαίδευση γίνεται εμφανές: η ταχύτητα και η επιτάχυνση δεν είναι μόνο φυσικές αλλά ήδη μαθηματικές έννοιες από μόνες τους. Απλώς δεν είναι δυνατόν να τα ξεχωρίσουμε από τη μαθηματική φύση της ύπαρξής τους. Για να διδαχθούν και να κατανοηθούν αυτές οι φυσικές έννοιες είναι απαραίτητο να συνδεθούν με την οικοδόμηση της μαθηματικής έννοιας του ρυθμού της μεταβολής. Ο Taşar (2010) ερεύνησε τις δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της επιτάχυνσης στο πλαίσιο αυτής της προοπτικής, και διαπίστωσε πως 1. η έννοια της επιτάχυνσης είναι εγκλωβισμένη στο δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα και δεν προωθείται η κατανόηση της έννοιας ως ρυθμός μεταβολής και 2. στην εκπαίδευση των Μαθηματικών δίνεται προτεραιότητα στην έννοια του ρυθμού αλλαγής από μαθηματική άποψη. Από την μελέτη περίπτωσης κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τόσο η ταχύτητα όσο και η επιτάχυνση είναι οι έννοιες τύπου ρυθμού αλλαγής, αλλά η δεύτερη προκαλεί πολλές εννοιολογικές δυσκολίες κάτι στο οποίο συμφωνεί και ο Hewitt (2006) και εξηγεί πως η φυσική έννοια της επιτάχυνσης είναι τόσο δύσκολο να κατανοηθεί επειδή είναι ένα ποσοστό ενός ρυθμού. Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, που είναι επίσης ρυθμός, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της θέσης. Οι Renkens & Henry (2014) διαπιστώνουν 1. δυσκολία στη μετάβαση από τις διανυσματικές οντότητες στις βαθμωτές/αλγεβρικές και στην κατανόηση των εξισώσεων, 2. δυσκολία στην κατανόηση των γραφικών παραστάσεων α. της τροχιάς και β. της θέσης σε σχέση με το χρόνο. Δυσκολία στην κατάλληλη επιλογή τους σε προβλήματα 3. σύγχυση στην κατανόηση και επιλογή του προσήμου της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στις διαφορετικές (2) κατευθύνσεις κίνησης. Στην γραφική παράσταση της τετραγωνικής εξίσωσης της συνάρτησης x(t), στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη Φυσική, οι Βακαλόπουλος κ.ά. (2017) διαπιστώνουν πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται την καμπύλη ως εικόνα τροχιάς και όχι ως παράσταση θέσης – χρόνου.

Κεφάλαιο 4: Θεωρητικό πλαίσιο

4.1 Τι είναι διεπιστημονικότητα

Η ιδέα της διεπιστημονικότητας είναι να συνδυάσουμε πολλαπλούς (ακαδημαϊκούς) κλάδους σε μία δραστηριότητα Roth, (2014). Να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει ένας ορισμός καθολικά αποδεκτός στη διεπιστημονικότητα. Προσπάθειες σε αυτή τη κατεύθυνση έκαναν Berger, (1972), Mayville, (1978), Kockelmans, (1979), Stember, (1991) κ.ά. Θα αναφέρουμε τους ορισμούς που έδωσαν:

- Ο Roth (2014) στην εγκυκλοπαίδεια της μαθηματικής εκπαίδευσης: Η διεπιστημονικότητα υποδηλώνει το γεγονός, την ποιότητα ή την κατάσταση που σχετίζεται με δύο ή περισσότερους ακαδημαϊκούς τομείς ή κλάδους της μάθησης. Τα διεπιστημονικά έργα τείνουν να διασχίζουν τα παραδοσιακά όρια μεταξύ ακαδημαϊκών κλάδων.

- Ο ΟΟΣΑ έδωσε έναν ευρύ ορισμό που αναφέρεται σε μία διαδικασία που περιλαμβάνει οποιαδήποτε αλληλεπίδραση που κυμαίνεται από "απλή επικοινωνία των ιδεών με την αμοιβαία ενσωμάτωση έως την οργάνωση των εννοιών, μεθοδολογία, διαδικασίες, επιστημολογία, ορολογία, δεδομένα και οργάνωση της έρευνας και της εκπαίδευσης" (στο Apostel 1972, σελ. 25).

Η απλή επικοινωνία, ωστόσο, δεν συνεπάγεται το βασικό χαρακτηριστικό για να αποτελέσει διεπιστημονικότητα όπως υποστηρίζουν οι Burns (1999) και Lattuca (2001).

Οι Stokols et al. (2003) αναφέρουν ότι η διεπιστημονικότητα ορίζεται ως μια διαδικασία στην οποία οι ερευνητές εργάζονται από κοινού, αλλά από κάθε μία από τις αντίστοιχες πειθαρχικές προοπτικές τους, για να αντιμετωπίσουν ένα κοινό πρόβλημα.

Η διεπιστημονικότητα αφορά αυτό που είναι ταυτόχρονα ανάμεσα στους κλάδους, σε διαφορετικούς κλάδους και πέρα από όλους τους κλάδους (Karlovčec et al., 2015). Επίσης αναφέρουν έναν όρο της διεπιστημονικότητας του Heckhausen, ότι μακροπρόθεσμος στόχος της είναι η εφαρμογή συμπληρωματικών δεξιοτήτων για να αντιμετωπίσουν σύνθετα προβλήματα ή να επιτύχουν έναν κοινό στόχο (Karlovčec & Mladenić, 2015).

Η διεπιστημονικότητα εφαρμόζεται (σύμφωνα με τον Nissani, 1997) συνήθως σε τέσσερις σφαίρες: τη γνώση, την έρευνα, την εκπαίδευση και τη θεωρία.

- Η διεπιστημονική γνώση περιλαμβάνει την εξοικείωση με τα συστατικά των δύο ή περισσότερων ακαδημαϊκών κλάδων

- Η διεπιστημονική έρευνα συνδυάζει συστατικά δύο ή περισσοτέρων επιστημονικών κλάδων στην αναζήτηση ή τη δημιουργία νέων γνώσεων, λειτουργιών ή καλλιτεχνικών εκφράσεων
- Η διεπιστημονική εκπαίδευση συγχωνεύει συστατικά δύο ή περισσοτέρων κλάδων σε ένα ενιαίο πρόγραμμα διδασκαλίας
- Η διεπιστημονική θεωρία λαμβάνει διεπιστημονική γνώση από την έρευνα ή την εκπαίδευση που είναι ο κύριος στόχος της μελέτης

4.2 Από πού πηγάζει η ανάγκη για διεπιστημονικότητα

Η σύγχρονη κοινωνία απαιτεί ολοένα και περισσότερες γνώσεις προσανατολισμένες στις εφαρμογές και η χρηστικότητα της επιστημονικής γνώσης απαιτεί γενικά συνδυασμό και ενσωμάτωση της γνώσης από διάφορους επιστημονικούς κλάδους (Besselaar & Heimeriks, 2001). Οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να βιώσουν τα Μαθηματικά ως κάτι περισσότερο από μια απλή σειρά «γεγονότων» και «τεχνικών» που πρέπει να απομνημονευθούν και στη συνέχεια να επαναληφθούν, συχνά με μικρή ή καθόλου κατανόηση (Schorr, 2003). Επιπλέον όσοι, σε έναν ακαδημαϊκό κλάδο, είναι πειθαρχημένοι στους τρόπους αντιμετώπισης των προβλημάτων τους, είναι επίσης πολύ περιορισμένοι στους τρόπους με τους οποίους μπορούν να δουν ένα πρόβλημα (Roth, 2014). Η διεπιστημονικότητα μας ωθεί να δούμε τα διάφορα στοιχεία της ανθρώπινης γνώσης για αυτά που είναι: κομμάτια σε ένα πανοραμικό πάζλ (Nissani, 1997). Η ομορφιά αυτού του πάζλ εκφράζεται από την άποψη του Plinny (1977) ότι «η δύναμη και η μεγαλοσύνη της φύσης σε όλες τις απόψεις της χάνεται από εκείνον που την μελετάει μόνο στην λεπτομέρεια των τμημάτων της και όχι στο σύνολό της». Αντίθετα, ο κατακερματισμός της γνώσης εντός και μεταξύ των επιστημών που προάγεται από τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα εμποδίζει τη σχεσιακή κατανόηση μονο/δια-επιστημονικών νοημάτων, οδηγώντας σε καταχρήσεις και συγχύσεις (Μούτσιος-Ρέντζος, Κρητικός & Καλαβάσης, 2017). Μια ανάλυση 17,9 εκατομμυρίων εγγράφων που καλύπτουν όλα τα επιστημονικά πεδία δείχνει τη σημασία της διεπιστημονικότητας για επιστημονικό αντίκτυπο (Uzzi et al., 2013). Η διεπιστημονική εργασία μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως κάπως βιολογική (organicist) επειδή μπορεί να ενσωματώσει ολιστικά. Η ριζική μεταφορά αυτής της κοσμοθεωρίας είναι ένας οργανισμός όπως ένα φυτό που εξελίσσεται σταδιακά προς ένα συγκεκριμένο τέλος. Κατά συνέπεια ο οργανισμός, μας κάνει να σκεφτόμαστε με ολιστικούς τρόπους. Οι βασικές αρχές περιλαμβάνουν την ιδέα ότι το σύνολο υπερβαίνει τα μέρη και ότι οι μακροπρόθεσμες, ολοκληρωμένες, αναπτυξιακές διαδικασίες είναι σημαντικές για τη γνώση από διάφορους κλάδους, όταν γίνονται καλά (Ambrose, 2017). Η διεπιστημονικότητα έχει γίνει μια εξέχουσα αντίληψη στην πολιτική της επιστήμης γιατί περικλείει μια ισχυρή υπόσχεση: «*Με την υπέρβαση των παραδοσιακών και αταβιστικών*[1] *ορίων που δημιουργούνται από την πειθαρχική οργάνωση της επιστήμης, η επιστημονική έρευνα μπορεί να συμβάλλει καλύτερα στις κοινωνικές προκλήσεις που αντιμετωπίζει η ανθρωπότητα*» (Koenig & Gorman, 2016):

(α) η κατανόηση του σημερινού κόσμου, του οποίου μια από τις επιταγές είναι η ενότητα της γνώσης

(β) η επίλυση μεγάλων και σύνθετων προβλημάτων με βάση και επιδιώκοντας την ενσωμάτωση των πειθαρχικών και εμπλεκομένων απόψεων με βάση από κάποια γενική θεωρία (Klein, 1996)

4.3 Από πού πηγάζει η ανάγκη για διεπιστημονικότητα Μαθηματικών - Φυσικής

Τα τελευταία χρόνια η επιστημονική έρευνα βρίσκεται σε μια σημαντική μετάβαση από τις μονο-επιστημονικές προσεγγίσεις στη διεπιστημονική εργασία. Τα Μαθηματικά είναι ένας πύργος σε πολλές κύριες σπουδές και σταδιοδρομίες, επομένως μια συγκεκριμένη διαφάνεια της μετάβασης στα Μαθηματικά πέρα από την ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι απαραίτητη εάν θέλουμε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη σημασία των Μαθηματικών (Michelsen, 2006). O Basson (2002) λέει πως θα χρησιμοποιήσει την κλισέ έκφραση ότι τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα της Φυσικής και ότι είναι ξεκάθαρο ότι η εκμάθηση προβλημάτων στα Μαθηματικά μεταφέρεται στο μαθησιακό περιβάλλον της Φυσικής. Επίσης αναφέρει ότι μαθησιακό περιβάλλον έχει πιο αποτελεσματική δομή όταν η Φυσική και τα Μαθηματικά θεωρούνται ως συσχετιζόμενα πεδία. Οι Kapucu et al. (2016) συνθέτουν σε αυτήν την κατεύθυνση την άποψη των Jitendra, Griffin & Xin, (2010) ότι τα καθημερινά προβλήματα είναι ένα αναπόφευκτο κομμάτι των Μαθηματικών εγχειριδίων και προγραμμάτων σπουδών, και των Munier & Merle, (2009) ότι η Φυσική ως κλάδος προσπαθεί να εξηγήσει τον φυσικό κόσμο. Σύμφωνα με τον Michelsen, (2006) τα μοντέλα βασίζονται σε δύο υποθέσεις:

(i) η διδασκαλία των Μαθηματικών σε σχέση με την Φυσική υποστηρίζει τη μάθηση των μαθητών παρέχοντας ουσιαστικά πλαίσια μέσα στα οποία οι μαθητές μπορούν να δουν την εφαρμογή αφηρημένων μαθηματικών εννοιών - και ως παρενέργεια, αυτό βοηθά τους μαθητές να ενσταλάξουν θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά

[1]Αταβισμός: η επανεμφάνιση ιδεών, συμπεριφορών, μεθόδων κλπ που είχαν ξεχαστεί και θεωρούσαμε ότι ανήκουν στο παρελθόν.

(ii) τα Μαθηματικά προσφέρουν στην Φυσική τα εργαλεία για την ποσοτικοποίηση, την αντιπροσώπευση και την ανάλυση των φαινομένων από την επιστήμη - και ως παρενέργεια ενθαρρύνει την αίσθηση της αντικειμενικότητας στην επιστήμη

Η επακόλουθη διεπιστημονική προσέγγιση εισάγει τον αναστοχασμό επί των κοινών σημείων που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια. Με τον τρόπο αυτό αναδύονται ποικίλες διαφορετικές, συνυπάρχουσες, συχνά αποκλίνουσες, γνωστικές διεργασίες, αποβλεπτικότητες και συμβάσεις της διδασκαλίας των δυο επιστημών (Μούτσιος-Ρέντζος, Κρητικός & Καλαβάσης, 2017). Επιπλέον, οι Βακαλόπουλος κ.ά. (2017) προτείνουν αλλαγές στη διδασκαλία της Φυσικής και των Μαθηματικών στο Λύκειο. Οι αλλαγές αυτές κρίνουν ότι είναι αναγκαίες διότι, στην μεν Φυσική υπάρχουν πρωθύστερα σε σχέση με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Η αναγκαιότητα σε αυτό το πλαίσιο πηγάζει και από το ότι οι μαθηματικές ικανότητες επηρεάζουν τις επιδόσεις των μαθητών στη Φυσική (Lawrenz et al, 2009). Η αναγκαιότητα αυτή συνάδει και με τις απόψεις των μαθητών όπου στο ερωτηματολόγιο RMPQ (Relationship between Mathematics and Physics Questionnaire) των Kapucu et al. (2016) η πλειοψηφία τους στη μελέτη αυτή συμφώνησε ή συμφωνούσε έντονα με την άποψη ότι "η επιτυχία στη Φυσική ουσιαστικά εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών" καθώς και με την επιλογή ότι "η βαθύτερη κατανόηση στη Φυσικής εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών". Ωστόσο, η έως τώρα έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται με τα Μαθηματικά στη Φυσική, διότι, είτε δεν διαθέτουν τις απαραίτητες μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων Φυσικής, είτε δεν ξέρουν πώς να τις εφαρμόσουν σε αυτά (Tuminaro, 2004). Οι Uhden et al. (2012) για να επικεντρωθούν στην ανάπτυξη και τη διάγνωση των δομικών δεξιοτήτων για την εννοιολογική την κατανόηση της Φυσικής μέσω των Μαθηματικών, μια πτυχή που έχει παραμεληθεί ως επί το πλείστον στην Φυσική, κρίνουν ότι πρέπει να προτείνουν ένα μοντέλο που να ενσωματώνει την εμπλοκή των Μαθηματικών και της Φυσικής ώστε να μας επιτρέπει να διακρίνουμε μεταξύ τεχνικών και δομικών δεξιοτήτων.

Κεφάλαιο 5: Ανασκόπηση συναφών ερευνών

5.1 Ανασκόπηση συναφών διεθνών ερευνών

Οι πρώτες προσπάθειες πάνω σε κατανόηση της κινηματικής και των γραμμικών συναρτήσεων, έγιναν μεμονωμένα, είτε στη Φυσική (Trowbridge & McDermott, 1980; Trowbridge & McDermott, 1981; Brasell, 1987; Beichner 1994) είτε στα Μαθηματικά (Schoenfeld, et al., 1993; Moschkovich, 1998; Pierce et al., 2010).

Αργότερα, σε έρευνες προσπαθούσαν να εντοπίσουν τις δυσκολίες των μαθητών στη σύνδεση των γραφημάτων με τη Φυσική. Οι McDermott et al. (1987) εντοπίζουν πως οι περισσότεροι μαθητές συγχέουν το ύψος με τη τιμή της ταχύτητας ενώ θεωρούν ότι η απάντηση με την κλίση είναι ευκολότερη. Ο Beichner (1994) κατασκεύασε τεστ που ανιχνεύει τις γνώσεις των μαθητών πάνω στα γραφήματα της κινηματικής και διεξήγαγε μελέτη, στην οποία αναλύθηκαν δεδομένα από 895 μαθητές γυμνασίου και κολλεγίου. Στις πιο συνηθισμένες εναλλακτικές ιδέες τους, οι μαθητές, αντιλαμβάνονται το γράφημα ως κυριολεκτική εικόνα της κατάστασης ή συγχέουν την έννοια της κλίσης μιας γραμμής με το ύψος ενός σημείου της.

Ο Woolnough (2000) στην προσπάθεια εύρεσης συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εξισώσεων και της Φυσικής, μέσω Labatory-based programs, διαπίστωσε πως οι μαθητές, ακόμα και αν αναπτύξουν τις εννοιολογικές συνδέσεις, έχουν μεγάλες αντιστάσεις στη χρήση των Μαθηματικών στη Φυσική. Ειδικότερα σε ερωτήσεις που έκανε προς τους μαθητές διαπίστωσε ότι οι μαθητές είχαν αντιστάσεις (ή αρνήσεις) να χρησιμοποιήσουν μονάδες στη κλίση και στην εξίσωση διότι τα θεωρούν μαθηματικά αντικείμενα. Επιπλέον υπήρχε και η άποψη από τη στιγμή που ήταν ερώτηση Φυσικής, ο υπολογισμός της κλίσης δεν ήταν πραγματικά μαθηματικό πρόβλημα. Στη συνέχεια υπάρχουν έρευνες που υποδηλώνουν ότι η μαθηματική γλώσσα στη Φυσική, διαφέρει από τη χρήση της στα Μαθηματικά (Ellermeijer & Heck 2002; Redish 2005). Ο Arons (1997) αναφέρει πως η αποτυχία πολλών μαθητών να έχουν γνώση (to be aware) οφείλεται στο ότι δεν κατανοούν το νόημα των λέξεων και φράσεων σε περιεχόμενο στο οποίο προκύπτουν έννοιες που αποτελούν βάση εγγραμματισμού (literacy). Ο Redish (2006) διαπιστώνει πως συνήθως η χρήση των Μαθηματικών στη Φυσική ικανοποιείται από το μοντέλο:

Γράφημα 5.1 Μοντέλο χρήσης των Μαθηματικών στη Φυσική (Redish, 2006)

σχεδιασμός (map]   *διεργασία*   *ερμηνεία*   *αξιολόγηση*

··············· ····> Μαθηματικά -------- > Μαθηματικά --------- > *φυσικό πρόβλημα* -----------> *λύση τον φυσικού προβλήματος*

Στο συγκεκριμένο κύκλο δίνει λίγη έμφαση στα ενδιάμεσα βήματα και περισσότερο με μία διαδικασία plug and chug (που δεν αντιμετωπίζουν πρόβλημα οι μαθητές) και εκτιμάει πως η χρήση των Μαθηματικών στη Φυσική θα προσδώσει νόημα, αν οι μαθητές μπουν στο ¨παιχνίδι¨ να εκτιμήσουν, γιατί η επιλεγμένη εξίσωση είναι κατάλληλη. Στο προηγούμενο πλαίσιο η έρευνα στο πεδίο της διδακτικής της Φυσικής έχει εστιάσει κυρίως στο πεδίο της εννοιολογικής αλλαγής και έχει μελετηθεί πολύ λιγότερο η διδακτική της σχέση με τα Μαθηματικά (Uhden et al., 2012). Στην προσπάθεια να απομακρύνουν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στη Φυσική πέρα από τη χρήση τους ως εργαλείο, οι Uhden et al. (2012) λένε ότι πρέπει να εστιάσουμε από τις τεχνικές, στις δομικές (structural) μαθηματικές ικανότητες.

Ο Karam (2014) στην προσπάθεια του να εξηγήσει τη δυσκολία των μαθητών στη χρήση της Φυσικής, στην πραγματικότητα (άρα και βαθύτερη κατανόησής της), επικεντρώνεται στο πώς προκύπτει το μαθηματικό μοντέλο στη Φυσική. Ο Karam (2014) θεωρεί ότι η παράλειψη ή η απαλοιφή της αιτιολόγησης του μαθηματικού μοντέλου στη Φυσική οδηγεί σε ένα εννοιολογικό κενό.

Σε μία ενδιαφέρουσα μελέτη οι Planinic et al. (2012) δημιούργησαν παράλληλα ερωτήματα στη Φυσική και στα Μαθηματικά, προσπαθώντας να εκτιμήσουν τόσο τις κατανοήσεις και τα συχνά λάθη των μαθητών (το δείγμα ήταν 114 μαθητές της Β΄ Λυκείου), όσο και τα πιστεύω των καθηγητών Φυσικής (το δείγμα ήταν 90 καθηγητές Φυσικής) πάνω σε ποιο κλάδο θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες οι μαθητές. Η άντληση των δεδομένων προήλθε από τη δημιουργία ερωτημάτων (κλειστού τύπου) για τη χρήση της κλίσης στα περιεχόμενα της Φυσικής (κινηματική και περισσότερο στη ταχύτητα) και στα Μαθηματικά (γραμμική συνάρτηση και περισσότερο στη κλίση). Η συγκεκριμένη έρευνα ήρθε σε αντιδιαστολή με την επικρατούσα άποψη των καθηγητών Φυσικής ότι θα δυσκολευτούν οι μαθητές περισσότερο στα ερωτήματα των Μαθηματικών από ότι στα ερωτήματα Φυσικής. Μη αναμενόμενα πήγαν καλύτερα στα Μαθηματικά αν και γενικά είχαν παρερμηνείες και στους δύο κλάδους (contexts). Μια επαναλαμβανόμενη δυσκολία που βρήκαν στις κατανοήσεις των μαθητών είναι ο μη διαχωρισμός της χρονικής στιγμής και του διαστήματος. Η ίδια δυσκολία εμφανίζεται και σε άλλες έρευνες όπως για παράδειγμα των Nguyen & Rebello (2011). Συμπεραίνουν ότι, όταν οι μαθητές απαντάνε στον ένα κλάδο και όχι στον άλλον, ειδικότερα, όταν πρόκειται για σχετικές έννοιες (relevant concepts). Αυτό είναι αποτέλεσμα της απουσίας συνδέσεων μεταξύ των κλάδων. Πιθανολογούν ότι μία αιτία που, ίσως, δημιουργεί το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι οι διαφορετικές γνωστικές απαιτήσεις (cognitive demands) που έχει η Φυσική σε σχέση με τα Μαθηματικά.

Μία πιο ρεαλιστική ερμηνεία εμπεριέχεται στην διδακτική πρόταση των Potgieter, Harding & Engelbrecht (2008) σύμφωνα με τους οποίους, οι θεωρίες της μεταφοράς γνώσης βασίζονται στην ιδέα ότι η γνώση μπορεί να μεταφερθεί σε μία άλλη κατάσταση, όταν συνδέεται με μία νέα κατάσταση.

Οι Wemyss & van Kampen (2013) προσπαθούν να εξερευνήσουν, χρησιμοποιώντας ποιοτική και ποσοτική ανάλυση, αν υπάρχουν συσχετισμοί στο συλλογισμό των φοιτητών κατά την ερμηνεία των γραφημάτων απόστασης-χρόνου, ανάλογα με το ζητούμενο (π.χ εξαγωγή συμπερασμάτων και υπολογισμός). Επίσης, προσπαθούν να διερευνήσουν αν υπάρχουν αγκυλώσεις (είτε θετικές είτε αρνητικές) από το πλαίσιο που πηγάζει η ερώτηση. Διεξάγουν μία σειρά εμπειρικών ερευνών και εξετάζουν, επιπλέον, αν είναι σε θέση να υπολογίζουν τη κλίση, ώστε να ελέγξουν αν υπάρχει εξάρτηση από το πλαίσιο των μαθημάτων. Διαπίστωσαν ότι, ανάλογα με το ερώτημα, οι φοιτητές χρησιμοποιούν διαφορετικά τα δεδομένα. Για παράδειγμα, για να εξάγουν το συμπέρασμα αν είναι σταθερή η ταχύτητα μετά τη παρέμβαση χρησιμοποιούσαν το γράφημα. Στον υπολογισμό, όμως, της ταχύτητας μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, θεωρούσαν το γράφημα ως πηγή άντλησης δεδομένων. Για να εξετάσουν αν το πλαίσιο παίζει ρόλο, δημιούργησαν σχεδόν ισομορφικά ερωτήματα (τα χαρακτηρίζουν επαρκώς παρόμοια sufficiently similar) ώστε να μπορούν να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

Οι De Bock, Van Dooren & Verschaffel (2015) ερευνούν το πως επηρεάζεται η κατανόηση των μαθητών στις αναλογίες (ψ=α·χ), τις αντίστροφες αναλογίες (ψ=$\frac{\alpha}{\chi}$) και τη δομή ψ=αχ+β με β≠0 (affine model) σε σχέση με την αναπαριστώμενη μορφή. Ο έλεγχος των κατανοήσεων επιτυγχάνεται με δύο μελέτες (studies). Η πρώτη είχε σαν σκοπό την επιτυχή μοντελοποίηση ενός περιγραφικού κειμένου (textual descriptions) με διαφορετικές αναπαραστάσεις των μορφών που προαναφέραμε και η δεύτερη μελέτη, την ικανότητα αντιστοίχισης των μορφών που αναφέραμε σε όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης. Τα αποτελέσματα από τη πρώτη τους μελέτη ήταν ότι τα ποσοστά που η απάντηση βασιζόταν σε αναλογίες ήταν στατιστικά (δεν το αναφέρει στη μελέτη πρέπει να το πω;) σημαντικότερα σε σχέση με τις άλλες εξεταζόμενες μορφές. Επίσης, τα αποτελέσματα στην αναλογική μορφή, όταν υπήρχε χρήση τύπου, ήταν χαμηλότερα σε σχέση με το γράφημα και τη πινακοειδή μορφή. Το αντίστροφο συμβαίνει στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όπου στη χρήση τύπου προκύπτουν καλύτερα ποσοστά σε σχέση με το γράφημα και την πινακοειδή μορφή. Στη μορφή ψ=αχ+β με β≠0 και α>0 το γράφημα έχει τις περισσότερες σωστές απαντήσεις. Τέλος, στη μορφή ψ=αχ+β με β≠0 και α<0 τις λιγότερες σωστές απαντήσεις τις παίρνει, όταν χρειάζεται ο τύπος. Τελικό συμπέρασμα της 1ης μελέτης είναι ότι το γράφημα είναι η καλύτερη αναπαράσταση, με εξαίρεση τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Από τη δεύτερη μελέτη προκύπτει πως οι περισσότερες σωστές απαντήσεις προήλθαν από την αναλογία, ακολούθως από τη μορφή ψ=αχ+β με β≠0 και α>0, στη συνέχεια τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και οι λιγότερες σωστές απαντήσεις από τη μορφή ψ=αχ+β, με β≠0 και α<0.

Η προηγούμενη μελέτη επηρέασε τους Ceuppens et al. (2018) στη δημιουργία ενός επικυρωμένου (validation) δομημένου τεστ 48 ερωτήσεων, για να μετράει την αναπαραστασιακή ευχέρεια των μαθητών στη γραμμική συνάρτηση σε προβλήματα Φυσικής και Μαθηματικών. Σε κάθε ερώτηση ελέγχεται αυτή η ευχέρεια μέσω 6 αναπαραστάσεων (είτε στα δεδομένα είτε στα ζητούμενα) της γραμμικής συνάρτησης (1ος άξονας αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, 2ος άξονας αν η κλίση είναι θετική ή αρνητική, 3ος άξονας αν το β είναι θετικό ή αρνητικό). Ο διδακτικός στόχος της δημιουργίας αυτού του τεστ ήταν να παρέχει το γνωστικό φορτίο στον εκπαιδευτικό να αντιληφθεί ποια αναπαράσταση χειρίζονται ευκολότερα (προέκυψε σε μορφή πίνακα ή γραφήματος) ώστε να χτίζουν πάνω σε αυτή και κατόπιν να αυξάνουν τη δυσκολία. Προτείνουν (ιδανικά) οι μεταβάσεις μεταξύ αναπαραστασιακών μοντέλων να γίνονται ταυτόχρονα (στη Φυσική και στα Μαθηματικά) ώστε οι μαθητές να αποκτούν μία ευρύτερη εικόνα, άρα και καλύτερη εννοιολογική κατανόηση.

Ο Taşar (2010) προσπαθεί να οριοθετήσει (delineated) τις διαισθητικές (intuitive) πηγές που προκαλούν τις δυσκολίες στους μαθητές πραγματοποιώντας μία ποιοτική έρευνα. Συγκεκριμένα, προσπαθεί να διερευνήσει γιατί οι μαθητές έχουν αυτές τις δυσκολίες με μελέτη περίπτωσης καλής φοιτήτριας. Μελετάει την έννοια της επιτάχυνσης, όπου διαπιστώνει ότι πολλά προβλήματα δημιουργούνται από τις εννοιολογικές συνδέσεις που έχει κάνει (π.χ μία τριπλή αναλογία δύναμης-επιτάχυνσης-ταχύτητας). Ένα πιθανό πρόβλημα σε αυτό είναι ότι η τριβή υπάρχει στην καθημερινότητά τους με την επαφή με το φαινόμενο της κίνησης και δεν μπορεί να εξαλειφθεί από το μυαλό των ανθρώπων. Ο Sokolowski (2017) προτείνει τη χρήση ρεαλιστικών γραφημάτων η οποία θα δώσει ένα κίνητρο μάθησης στους μαθητές, διότι με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουν να συνδέσουν την παρεχόμενη γνώση με τη πραγματικότητα. Σε αυτή την κατεύθυνση οι Tuminaro & Redish (2007) αναφέρουν ότι η προσπάθεια να παρέχεις γνώσεις που δεν συνάδουν με την επιστημονική γνώση, είναι σα να διδάσκεις παρανοήσεις. Μία λύση που προτείνει είναι να χρησιμοποιούντα παραδείγματα που δεν μπορούν να δυσχεραίνουν τη κατανόηση των εννοιών. Παράδειγμα, για την επιτάχυνση αναφέρει ότι ένα καλό παράδειγμα θα ήταν ο ρυθμός αύξησης του ύψους ενός βρέφους ή ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού.

Ο Sherin (2001) εισήγαγε τον όρο ΄΄συμβολικές φόρμες΄΄ (symbolic forms) όπου δηλώνει τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν τις εξισώσεις στη Φυσική, από την άποψη του λεξιλογίου των στοιχείων που έχει. Κάθε συμβολική μορφή συνδέει ένα απλό εννοιολογικό σχήμα σε ένα πρότυπο (pattern) συμβόλων σε μία εξίσωση. Στην έρευνά του προσπαθεί να μελετήσει πως κατανοούνται οι εξισώσεις στη Φυσική. Δηλαδή ποιες συμβολικές φόρμες δημιουργούν οι μαθητές. Πραγματοποίησε ποιοτική έρευνα (10 φοιτητές Γ΄ εξαμήνου του Φυσικού τμήματος που χωρίστηκαν σε 5 ζευγάρια). Από το δείγμα του διαπίστωσε ότι, όταν έχουν μία συγκεκριμένη διάταξη συμβόλων μπορούν να το συνδέσουν με μία έννοια. Κατά αυτόν τον τρόπο δεν περιορίζονται στο πρώτο βήμα της λύσης (απλή αντικατάσταση) αλλά μπορεί να τους οδηγήσει σε μία γενικότερη εικόνα που να δημιουργούν σχέσεις πέρα από αυτά που έχουν συναντήσει στα σχολικά εγχειρίδια.

Οι Ornek, Robinson & Haugan (2007) πραγματοποίησαν μία έρευνα για τα πιστεύω του τι κάνει τη Φυσική δύσκολη. Το δείγμα αποτελούνταν από μαθητές, βοηθούς καθηγητών και καθηγητές.

Τα κύρια αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν είναι στον πίνακα 5.1:

Πίνακας 5.1 Αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τις απόψεις των μελών του Πανεπιστημίου σχετικά με τη δυσκολία της Φυσικής

	Έλλειψη μαθηματικού υποβάθρου	Είναι πολύ αφηρημένη	Απαιτεί καλά Μαθηματικά	Πολύ θεωρία	Να μάθουν πολλούς τύπους	Πολλούς νόμους και κανόνες	Δεν μπορείς να τη μάθεις χωρίς Μαθηματικά
Μαθητές	12%	41%	33%	32%	29%	28%	23%
Βοηθοί	27%	24%	95%	43%	29%	19%	57%
Καθηγητές	50%	50%	100%	0%	0%	0%	100%

Πηγή: Ornek, et al,. 2007

Το ενδιαφέρον που προέκυψε από αυτή την έρευνα είναι ότι οι δυσκολίες που έχουν οι φοιτητές στη Φυσική είναι διαφορετικές από αυτές που πιστεύουν οι βοηθοί καθηγητών και οι καθηγητές. Η μόνη κοινή σύγκλιση των απόψεων των μαθητών και των βοηθών καθηγητών ήταν στην ικανότητα απομνημόνευσης τύπων. Ειδικότερα όσο αφορά τα Μαθηματικά με τη Φυσική, οι μαθητές δεν θεωρούσαν τόσο απαραίτητη την γνώση των Μαθηματικών, όσο οι βοηθοί καθηγητών και οι καθηγητές.

Οι Kapucu et al. (2016), βασισμένοι στη φαινομενογραφική (phenomenographic) προσέγγιση, ανέπτυξαν και διοχέτευσαν ένα ερωτηματολόγιο σε 718 μαθητές Γυμνασίων στην Τουρκία και επιπλέον, με μία ομαδική, ημιδομημένη (semi-structured) συνέντευξη σε 9 από αυτούς πάνω στα ίδια ερωτήματα, διερεύνησαν τις αντιλήψεις των μαθητών για τις σχέσεις, τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ Φυσικής και Μαθηματικών, μέσα από την δική τους μαθησιακή εμπειρία. Η έρευνά τους αποσκοπούσε στη δημιουργία ενός αξιόπιστου ερωτηματολογίου, του οποίου η ερμηνεία προσδοκούσε να αυξήσει την αποτελεσματικότητα των διδακτικών μεθόδων και στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί καθώς και την βελτίωση των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών, μέσα από την διεπιστημονική οπτική. Από αυτή την έρευνα προκύπτει πως οι μισοί μαθητές συμφωνούν ότι τα Μαθηματικά έπαιξαν ρόλο και τα θεωρούσαν απαραίτητα για την ερμηνεία κανόνων και τύπων καθώς και για την επίλυση προβλημάτων ώστε να πετύχουν στη Φυσική. Οι περισσότεροι πίστευαν πως τα Μαθηματικά συνδέονται περισσότερο με την καθημερινότητα και τα περισσότερα επαγγέλματα, ενώ η Φυσική συνδέεται περισσότερο με τα φυσικά φαινόμενα, άποψη που ερχόταν σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες, σύμφωνα με τις οποίες η Φυσική από τη φύση της, συσχετίζεται περισσότερο με τα καθημερινά προβλήματα. Αν και από τις προηγούμενες έρευνες προέκυπτε πως και τα δύο αντικείμενα απαιτούν απομνημόνευση τύπων και κανόνων, στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές θεωρούν πως η Φυσική είναι πιο πολύπλοκη από τα Μαθηματικά και περιέχει περισσότερους κανόνες.

5.2 Ανασκόπηση συναφών ελληνικών ερευνών

Η έλλειψη συντονισμού των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών στα Μαθηματικά και στη Φυσική αναφέρεται ως η κυρία δυσκολία στη διεπιστημονική προσέγγιση (Ζουλινάκη & Μπουλουξή, 2014; Μαλλιάκας & Ματζαβίνου, 2016; Βακαλόπουλος κ.ά, 2017). Ωστόσο, όλοι συγκλίνουν στην αναγκαιότητα εύρεσης κοινού τόπου των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών. Σε αυτή την κατεύθυνση οι Σκουμπουρδή & Σκουμιός (2016) διερευνούν μέσω μιας ανασκόπησης ερευνών για την εύρεση του βέλτιστου τρόπου αλληλεπιδράσεων με τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού. Οι Μούτσιος-Ρέντζος, Γεώργιος Κρητικός & Φραγκίσκος Καλαβάσης, (2017) προτείνουν ότι το κοινό μαθηματικό σημείο μπορεί να δημιουργήσει ένα κατάλληλο επικοινωνιακό χώρο και μέσω της αναζήτησης συνδέσεων ο τρόπος μάθησης να μετασχηματιστεί. Ο Ματσαγγούρας (2002) αναφέρει ότι πρέπει να υπάρχει μια συνεχής διαθεματική προσέγγιση μεταξύ των διακριτών κλάδων σε όλη τη μαθησιακή πορεία και στην ολοκλήρωση αυτής της πορείας, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, να καταργούνται οι διακριτές πορείες.

Οι Μαλλιάκας & Ματζαβίνου (2016) αναδεικνύουν τις ασυνέχειες και ασυμβατότητας του Α.Π.Σ Φυσικής και Μαθηματικών και προτείνουν ως λύση αυτού, τη δημιουργία κατάλληλων σχολικών εγχειριδίων και Α.Π.Σ που να μην εστιάζονται μόνο στην οριζόντια δομή του κάθε κλάδου αλλά και στην κατακόρυφη. Το παράδειγμα που χρησιμοποιούν για την ανάδειξη αυτών είναι το φαινόμενο της ευθύγραμμης κίνησης και της γραμμικής συνάρτησης. Οι αναντιστοιχίες ύλης που βρίσκουν είναι ότι στην Α΄ Γυμνασίου, στη Φυσική, σε κάποιες ενότητες του σχολικού εγχειριδίου, οι μαθητές κατασκευάζουν διαγράμματα ανάλογων ποσών και μη γραμμικών συναρτήσεων και ερμηνεύουν τα γραφήματα βγάζοντας συμπεράσματα από τη συμμεταβολή των μεγεθών. Αντίστοιχα, στα Μαθηματικά στη Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές εισάγονται στο σχεδιασμό της ψ=αχ και ψ=αχ+β και μόνο σε δύο ερωτήσεις κατανόησης ζητείται η εξαγωγή συμπερασμάτων από γράφημα που δίνεται. Επιπλέον, στη Β΄ Γυμνασίου στα Μαθηματικά, η επίλυση τύπων έχει βγει εκτός ύλης, που αποτελεί βασική προϋπόθεση στη Φυσική.

Κεφάλαιο 6: Προβληματική της έρευνας

6.1 Τι έχουν εξετάσει οι προηγούμενες έρευνες

Σε πρώτο επίπεδο, οι έρευνες είχαν εστιαστεί στην κατανόηση των κινηματικών εξισώσεων και γραφημάτων στη Φυσική ή αντίστοιχα στις συναρτήσεις και γραφήματα στα Μαθηματικά. Στην πορεία, πολλές έρευνες ασχολήθηκαν με τις δυσκολίες των μαθητών να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά στη Φυσική για να κατανοούν στην κινηματική, τις εξισώσεις κίνησης και τα αντίστοιχα γραφήματα. Σε αρκετές από αυτές χρησιμοποιήθηκε και εξελίχτηκε η μοντελοποίηση των προβλημάτων κινηματικής με την χρήση των Μαθηματικών και της Φυσικής σε διακριτά στάδια και οριοθετημένο το ρόλο τους, ώστε να δημιουργηθούν εννοιολογικές γέφυρες, με σκοπό την δημιουργία οργανωμένων και δομημένων τρόπων επίλυσής τους. Η ανάγκη για αντιμετώπιση των εναλλακτικών ιδεών που προκύπτουν μέσα από τις μονοεπιστημονικές προσεγγίσεις των εννοιών των συναρτήσεων και των κινηματικών εξισώσεων, οδήγησε σε ένα ακόμη κύκλο ερευνών με κοινές παραδοχές, πως τα Μαθηματικά και η Φυσική αποτελούν διαφορετικά γλωσσικά συστήματα και η μεταφορά της γνώσης από το ένα πλαίσιο στο άλλο δεν γίνεται εύκολα, ακόμη και σε κοινές έννοιες, όπως οι συναρτήσεις. Ως φυσική συνέχεια αυτής της παραδοχής, οι επόμενες έρευνες προσέγγισαν το θέμα διεπιστημονικά. Διεξήχθησαν επιπλέον έρευνες που προσεγγίζουν το ζήτημα των κινηματικών εξισώσεων και των αντίστοιχων μαθηματικών συναρτήσεων μελετώντας το βαθμό, στον οποίον οι μαθητές μπορούν να απαντούν πάνω σε κοινές έννοιες, μέσω ερωτηματολογίων με συμμετρικές ερωτήσεις στα δύο αντικείμενα. Σε ορισμένες από αυτές, μελετήθηκαν παράλληλα και ποιοτικά οι απαντήσεις των μαθητών με σκοπό να διερευνηθεί η παρουσία ή η απουσία των συνδέσεων αυτών των κοινών εννοιών στα δύο διδακτικά αντικείμενα, καθώς και ποιοι παράγοντες συντελούν στη δημιουργία αυτών των καταστάσεων. Επίσης, ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στις έρευνες που μελέτησαν τις αντιλήψεις των μαθητών και σε ορισμένες από αυτές και των διδασκόντων, για τις ομοιότητες, τις διαφορές και τη σχέση των δύο διδακτικών αντικειμένων ή τις δυσκολίες της μεταφοράς της γνώσης από το ένα πλαίσιο στο άλλο.

6.2 Τι νέο εξετάζει η δική μας έρευνα

Σε προηγούμενες ποσοτικές έρευνες διερευνήθηκαν είτε οι γνωστικές επιδόσεις των μαθητών για την κοινή μαθηματική/φυσική έννοια των συναρτήσεων/εξισώσεων, μέσα από τις διαφορετικές συμβάσεις που προκύπτουν από τις μονοεπιστημονικές διδασκαλίες (Planinic et al., 2012; Ceuppens et al., 2018), είτε οι γενικές πεποιθήσεις για τα Μαθηματικά και τη Φυσική και για την μεταξύ τους σχέση (Kapucu et al., 2016; Ornek, Robinson & Haugan, 2007). Ποιοτικές έρευνες διερεύνησαν πώς κατανοούνται συναφείς έννοιες στα διαφορετικά πλαίσια της Φυσικής και των Μαθηματικών και πρότειναν εναλλακτικές κοινές εννοιολογικές προσεγγίσεις (Taşar, 2010; Sherin, 2001). Μέχρι την παρούσα στιγμή δεν υπάρχει ή δεν έχει πέσει στην αντίληψη μας, μία ποσοτική μελέτη που να ερευνά τις αντιλήψεις που έχουν διαμορφώσει οι μαθητές για τη συσχέτιση των δύο αντικειμένων και πώς αυτές επηρεάζουν την ικανότητα κατανόησης συναφών εννοιών στους δύο κλάδους.

Στην παρούσα έρευνα, πραγματοποιείται μία μελέτη εκ των έσω, αποδίδοντας στους μαθητές τον κεντρικό ρόλο της εκπαιδευτικής διαδικασίας, ενός ανοικτού μανθάνοντα οργανισμού, όπως χαρακτηρίζεται το σχολείο στη συστημική θεωρία (systems theory). Με αυτή τη θεώρηση, ο μαθητής εισρέει στο σύστημα ως ένα είδος βασικού «πελάτη» που συμμετέχει σε όλα τα στάδια της διαδικασίας (εισροή, επεξεργασία, εκροή, ανατροφοδότηση), μεταφέροντας και όλα τα στοιχεία από το κοινωνικό, οικονομικό και πολιτισμικό περιβάλλον που, σε συνδυασμό με τις ικανότητες, τις κλίσεις, τα ενδιαφέροντά του, τις ανάγκες του, την προσωπικότητά του, την ψυχοσύνθεσή του, αποτελούν σημαντικά στοιχεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Κατσέλη, 2014).

Ειδικότερα, στον προσδιορισμό μιας μαθηματικής έννοιας στα Μαθηματικά ή στη Φυσική, «σύμφωνα με τους Καλαβάση & Μούτσιο-Ρέντζο, ρόλο παίζουν οι διαστάσεις των σχέσεών της με τις αναπαραστάσεις της, τα νοητικά σχήματα που την προσεγγίζουν, τα αντιληπτικά πεδία στα οποία αναφέρεται και το ανθρωπολογικό πλαίσιο που συγκροτούν τα υποκείμενα και οι δομές που την επισημοποιούν και την ονομάζουν (στο Μαλλιάκας & Ματζαβίνου, 2016)» και επιπλέον, προσεγγίζοντας το θέμα διεπιστημονικά, συγκρίνουμε τα κοινά στοιχεία που εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια ώστε να αναδειχτούν ποικίλες, διαφορετικές, συνυπάρχουσες, συχνά αποκλίνουσες, γνωστικές διεργασίες, αποβλεπτικότητες και συμβάσεις της διδασκαλίας των δυο επιστημών και ταυτόχρονα εξετάζεται κατά πόσο τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα, με τον κατακερματισμό της γνώσης, οδηγούν σε καταχρήσεις και συγχύσεις (Μούτσιος-Ρέντζος, Κρητικός & Καλαβάσης, 2017).

Οι πεποιθήσεις και η γνώση των μαθητών σχετικά με τις έννοιες της Φυσικής και των Μαθηματικών διαμορφώνονται στο μεγαλύτερο βαθμό από τα Γενικά και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και από τα σχολικά εγχειρίδια, όπου έχουν κυρίαρχο ρόλο στη εκπαιδευτική διαδικασία (Μούτσιος-Ρέντζος & Πιτσιλή-Χατζή, 2014). Υπό αυτή την προσέγγιση, μελετήθηκαν, το Γενικό Πρόγραμμα Σπουδών, τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των δύο αντικειμένων καθώς και τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου και του Λυκείου, έως το αρχικό τμήμα της Β΄ Τάξης, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Παράλληλα, μελετήθηκαν οι αντίστοιχες έρευνες που αναφέρονται στα προβλήματα και τις ασυμβατότητες στα Προγράμματα Σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια, σχετικά με τη διδασκαλία των κινηματικών εξισώσεων στη Φυσική και τις συναρτήσεις στα Μαθηματικά. Η επιλογή να δοθεί το ερωτηματολόγιο στη Β΄ τάξη του Λυκείου έγινε διότι οι μαθητές έχουν μελετήσει το θεωρητικό πλαίσιο των γραμμικών εξισώσεων και των αντίστοιχων κινηματικών εξισώσεων που χρησιμοποιήθηκαν στο ερωτηματολόγιο. Επιπλέον, θεωρήθηκε ότι οι μαθητές έχουν διαμορφώσει σε μεγάλο βαθμό παγιωμένες απόψεις και αντιλήψεις, μέσα από τη μαθησιακή τους εμπειρία, όλα τα προηγούμενα έτη σπουδών, σχετικά με τη Φυσική και τα Μαθηματικά. Με αυτές τις παραδοχές στην παρούσα έρευνα, διερευνάται σε ποιο βαθμό συσχετίζονται οι πεποιθήσεις των μαθητών με τις γνωστικές τους πεποιθήσεις στην κοινή έννοια της γραμμικής συνάρτησης/εξίσωσης και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης και ερμηνεύονται και μέσα από την σύγκριση των σχετικών αναφορών στα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια, στην ίδια ή στις διαφορετικές διδακτικές πειθαρχίες της Φυσικής και των Μαθηματικών.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 7: Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

7.1 Σκοπός της έρευνας

Η έρευνα μελετάει πώς συσχετίζονται οι στάσεις/αντιλήψεις των μαθητών για τα Μαθηματικά και τη Φυσική με τις γνωστικές αντιλήψεις των μαθητών πάνω σε συναφείς έννοιες των Μαθηματικών και της Φυσικής, μέσα στα πλαίσια που διαμορφώνονται από τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια. Σκοπός της έρευνας είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων, τα οποία θα μπορούσαν να ληφθούν υπόψη σε μία διεπιστημονική προοπτική προσέγγισης κοινών εννοιών στα Μαθηματικών και τη Φυσική.

7.2 Τα ερευνητικά ερωτήματα:

α. Ποια είναι η άποψη των μαθητών για τα Μαθηματικά και την Φυσική όσο αφορά την γενική τους εικόνα, την μεταξύ τους σχέση και τη χρησιμότητά τους;

β. Ποια συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε από τις απαντήσεις των μαθητών σε κοινές εννοιολογικά και συμμετρικές μορφολογικά ερωτήσεις/ασκήσεις μαθηματικών συναρτήσεων-κινηματικών εξισώσεων;

γ. Πως σχετίζονται οι επιδόσεις των μαθητών στις κοινές εννοιολογικά ερωτήσεις συναρτήσεων/εξισώσεων με τις απόψεις που έχουν για την Φυσική και τα Μαθηματικά;

Κεφάλαιο 8: Δείγμα έρευνας

Το δυνητικό δείγμα της έρευνας, ως προς τις απόψεις, ήταν όλοι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ως προς τις γνώσεις, όλοι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου. Η επιλογή του δείγματος βασίστηκε στη δειγματοληψία ευκολίας (Convenience Sampling), οπότε δεν βασίστηκε η δειγματοληψία στη θεωρία πιθανοτήτων (Non-probability Sampling). Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε καθότι ο ένας εκ των ερευνητών είναι διδάσκων στο συγκεκριμένο σχολείο και ο έτερος ερευνητής ήταν διδάσκων στη πλειοψηφία των μαθητών, σε προγενέστερη τάξη. Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 73 μαθητές της Β΄ Λυκείου του Γενικού Λυκείου Ιαλυσού, εκ των οποίων τα 42 ήταν αγόρια (26 θετική και 16 θεωρητική) και 31 κορίτσια (12 θετική και 19 θεωρητική). Το δείγμα κατανέμεται σε 4 τμήματα: το Β1 αποτελείται από 19 μαθητές και η σύνθεση του τμήματος είναι 8 αγόρια (6 θετική και 2 θεωρητική) και 11 κορίτσια (6 θετική και 5 θεωρητική), το Β2 αποτελείται από 17 μαθητές και η σύνθεση του τμήματος είναι 8 αγόρια (5 θετική και 3 θεωρητική) και 9 κορίτσια (2 θετική και 7 θεωρητική), το Β3 αποτελείται από 19 μαθητές και η σύνθεση του τμήματος είναι 13 αγόρια (8 θετική και 5 θεωρητική) και 6 κορίτσια (3 θετική και 3 θεωρητική), το Β4 αποτελείται από 18 μαθητές και η σύνθεση του τμήματος είναι 13 αγόρια (7 θετική και 6 θεωρητική) και 5 κορίτσια (1 θετική και 4 θεωρητική). Από τους 73 μαθητές ανταποκρίθηκαν οι 72 μαθητές (ένας μαθητής άλλαξε σχολείο). Επιπλέον, ένας μαθητής θεωρητικής κατεύθυνσης δεν απάντησε στο ερωτηματολόγιο Φυσικής και μία μαθήτρια θεωρητικής κατεύθυνσης δεν απάντησε στο ερωτηματολόγιο Μαθηματικών. Το Λύκειο βρίσκεται στην Ιαλυσό η οποία ανήκει στον δήμο Ρόδου, είναι στο βορειοδυτικό άκρο του νησιού, 9 χλμ. νοτιοδυτικά από την πόλη της Ρόδου. Η Ιαλυσός παρουσιάζει μια εξαιρετικά αλματώδη ανάπτυξη. Κατά την απογραφή του 1971 αριθμούσε 3.485 κατοίκους και το 2011 είχε 11.331 κατοίκους. Το οικονομικό επίπεδο των γονέων είναι υψηλότερο από τον μέσο όρο και η κύρια ασχολία των κατοίκων είναι στον τουριστικό τομέα. Τα επίπεδα ανεργίας των γονέων είναι χαμηλά.

Κεφάλαιο 9: Στοιχεία έρευνας

9.1 Είδος έρευνας

Η έρευνα που διεξήχθη ήταν πρωτογενής ποσοτική έρευνα. Η επιλογή της συγκεκριμένης μεθόδου προέκυψε λόγω της αντικειμενικότητας που μας παρέχει (Carr & Kemmis, 1986; Solutes, 1990) αφαιρώντας τυχόν προκαταλήψεις των ερευνητών (Smith, 1983) καθώς και της ευχέρειας που μας παρέχει για σύνδεση μεγάλου αριθμού περιπτώσεων, με σκοπό την ανεύρεση γενικών τάσεων (Hara, 1995).

Η συγκεκριμένη μέθοδος αποφασίστηκε διότι ο σκοπός της έρευνας ήταν να μετρήσει τις απόψεις των μαθητών για την χρησιμότητα των Μαθηματικών στη Φυσική, καθώς και το αντίστροφο. Επιπλέον, υπήρχαν ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου σε κάθε κλάδο. Οι ερωτήσεις αυτές ήταν απαλλαγμένες από τα αριθμητικά αποτελέσματα και εστιαζόταν στο εννοιολογικό πλαίσιο αυτών. Η επιλογή αυτή έγινε για να εξαχθούν συμπεράσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να συσχετίζουν συναφείς έννοιες. Επιπλέον, παρέχει την δυνατότητα για ανεύρεση γενικών τάσεων συσχετισμού των απόψεων με την απόδοση στο γνωστικό και την ικανότητα σύνδεσης των συναφών εννοιών.

9.2 Ερωτηματολόγιο - διαδικασία κατασκευής του

Από την στιγμή που δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο πλαίσιο σύνδεσης της Φυσικής με τα Μαθηματικά, η σύνδεση προκύπτει μέσω της αυτενέργειας του μαθητή. Με την οπτική της φαινομενογραφίας θα κατανοηθεί το πώς οι μαθητές εκλαμβάνουν αυτή τη διάδραση (Walker, 1998). Η φαινομενογραφία είναι έρευνα που χρησιμοποιεί ως εργαλείο κυρίως τις συνεντεύξεις (Ornek, 2008; González, 2011) και αναλύει ποιοτικά χαρακτηριστικά (Marton & Pong, 2005). Οι Kapucu et al. (2016) για τη κατασκευή του ερευνητικού τους εργαλείου που ήταν το ερωτηματολόγιο: RMPQ (Relationship between Mathematics and Physics Questionnaire) χρησιμοποίησαν τη φαινομενογραφική προσέγγιση. Σκοπός του ερωτηματολογίου ήταν να προσδιορίσει τις αντιλήψεις των μαθητών για τη σχέση των Μαθηματικών με τη Φυσική. Σκοπός της φαινομενολογικής προσέγγισης είναι να μας παρέχει ικανές πληροφορίες για το πως οι μαθητές εκλαμβάνουν αυτή τη σύνδεση μέσω των διαφορετικών πτυχών (Åkerlind, 2008) ώστε η διδασκαλία να επικεντρωθεί στις κρίσιμες πτυχές αυτών (Ornek, 2008). Η επιλογή των ερωτήσεων που αφορούσαν τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την σχέση της Φυσικής με τα Μαθηματικά, προήλθε από το ερωτηματολόγιο των Kapucu et al. (2016) όπου επικεντρώνεται στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την χρήση των Μαθηματικών στη

Φυσική. Το κύριο χαρακτηριστικό που επιδιώξαμε στη δημιουργία του ερωτηματολογίου, είναι οι ερωτήσεις να παρουσιάζουν μία ισομορφία σχετικά με το περιεχόμενο, ώστε να αντλήσουμε όσο δυνατών περισσότερα στοιχεία για το πώς οι μαθητές εκλαμβάνουν την σύνδεση των δύο κλάδων. Σε αυτή την κατεύθυνση, συνεπικουρούμενοι από την άποψη των Βακαλόπουλος κ.ά (2017) ότι η Φυσική μπορεί να γίνει εργαλείο κατανόησης για τα Μαθηματικά, ειδικότερα από την στιγμή που συναφείς έννοιες έχουν διδαχθεί πρώτα στη Φυσική, καθώς και ότι μπορεί να δημιουργήσει εννοιολογικές συνδέσεις η χρήση της Φυσικής στα Μαθηματικά, άρα και βαθύτερη κατανόηση που αλλιώς θα ήταν δύσκολο (Τζιούφας & Τσαρούχας, 2018). Κατευθυνόμενοι από τις παραπάνω αναφορές αντιστρέψαμε τις ερωτήσεις που αφορούσαν την εξάρτηση (ή επιτυχία) της Φυσικής από τα Μαθηματικά. Επιπλέον, οι ερωτήσεις επιλέχτηκαν μετά από την ενδελεχή αναζήτηση της σχετικής βιβλιογραφίας, των σχολικών εγχειριδίων και την διά δράση με την βοήθεια εξειδικευμένων ερευνητών.

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο, σκοπός ήταν πάλι οι ερωτήσεις να έχουν μία ισομορφία. Κύρια εργαλεία για την επιλογή των γνωστικών ερωτήσεων ήταν η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας όπου τα κύρια σημεία προβληματισμού αναφέρθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο των Μαθηματικών (σελ. 20), της Φυσικής (σελ. 28) καθώς και στην υπάρχουσα κατάσταση (σελ. 40). Στη συνέχεια αναζητήσαμε τις διαφορετικές προσεγγίσεις που αποδίδουν οι δύο κλάδοι σε συναφείς έννοιες. Τα κύρια ευρήματα που προέκυψαν από τη σχετική αναζήτηση στη βιβλιογραφία συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 9.1 Διαφορετικές προσεγγίσεις που αποδίδουν οι δύο κλάδοι σε συναφείς έννοιες (από τη βιβλιογραφία)

Έννοια	Μαθηματικά	Φυσική	Σχόλια	Βιβλιογραφία
Μεταβλητή 1	Στα Μαθηματικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή	Στη Φυσική απαγορεύεται αυτή η αλλαγή	Π.χ η χψ=1 δηλώνει το ίδιο με το αβ=1	Heck (2001)
Μεταβλητή 2 (ο ρόλος στην εξίσωση)	Υποδηλώνει τον κανόνα σύνδεσης ποσοτήτων	Υποδηλώνει την εννοιολογική σύνδεση		Heck (2001)
Μεταβλητή 3	Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ελεύθερα στα Μαθηματικά χωρίς να αλλάζει η εννοιολογική σύνδεση αυτών π.χ $f(\chi)=\chi^2$ & $f(\psi)=\psi^2$	Στη Φυσική υπόκεινται σε εννοιολογικές συνδέσεις	Π.χ στο λόγο μεταβολής στα Μαθηματικά μπορούμε να το κάνουμε ως προς οποιοδήποτε μέγεθος ενώ στη Φυσική όχι	Heck. (2001).
Αριθμητικές ποσότητες 1	Είναι κυρίως πραγματικοί αριθμοί	Είναι κυρίως ακέραιοι (ή φυσικοί)	Π.χ το$\sqrt{2}$ ή το π	Heck, (2001).
Αριθμητικές ποσότητες 2	Κάθε αριθμός είναι διαφορετικός	Μπορεί διαφορετικοί αριθμοί να υποδηλώνουν το ίδιο	Π.χ 1000gr=1kgr	Heck (2001)
Αριθμητικές ποσότητες 3		Έχει 3 μέρη: 1) τιμή, 2) ακρίβεια3) μονάδες μέτρησης		Heck (2001)
Σύμβολα		Το + και – έχει την έννοια πάνω κάτω, δεξιά -αριστερά		Kapucu, Öçal & Simsek, (2016)
Συνάρτηση 1	Σύνδεση δύο μη κενών συνόλων	Εδώ η μεταβλητή ως μεταβλητό αντικείμενο		Heck (2001)
Συνάρτηση 2	Αντιστοίχιση μεταβλητών	Αντιστοίχιση αλλά και ως συμμεταβολή		Καφετζόπουλος (2014)
Συνάρτηση 3	Τα πεδία ορισμού εξαρτώνται από τον κανόνα σύνδεσης ή από την υπόθεση	Τα πεδία ορισμού και τιμών εξαρτώνται από τη φύση των αναπαριστώμενων μεγεθών		Βακαλόπουλος κ.ά. (2017)
Συνάρτηση 4 τρόπος γραφής	Κατά φθίνουσες δυνάμεις	Κατά αύξουσες δυνάμεις		Βακαλόπουλος, κ.ά. (2017)
Καρτεσιανό επίπεδο	Χρησιμοποιούνται όλα τα τεταρτημόρια	Χρησιμοποιείται το 1^o και 4^o διότι t>0		Βακαλόπουλος κ.ά (2017), Ceuppens at al., (2018)
Ρυθμός μεταβολής	Ελεύθερη επιλογή ως προς το τι μεταβάλλεται	Υπόκεινται σε κανόνες ανάλογα την ποσοτική συνθήκη (reflect the ‘formula’ of the compound quantity involved)		Wijers, et al (2000)
Κλίση-ρυθμός μεταβολής	Είναι αδιάστατος αριθμός με γεωμετρική ερμηνεία	Είναι μια ποσότητα με μονάδες που παριστάνει την αλλαγή μιας ποσότητας σε σχέση με άλλη		Βακαλόπουλος, κ.ά. (2017)
Γραφήματα	Η αρχή των αξόνων είναι πάντα το (0,0)	Μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο		Βακαλόπουλος, κ.ά. (2017)
Γραφήματα	Μπορούμε να βάλουμε στο ίδιο επίπεδο π.χ f,f’, f’’	Δεν μπορούν να μπουν στο ίδιο γράφημα	Οπότε δεν μπορούν στη Φυσική την άμεση γραφική συσχέτιση	Τζιούφας & Τσαρούχας (2018)

Επιπλέον, η αντίστοιχη αναζήτηση με την προαναφερθείσα πραγματοποιήθηκε στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής. Τα κύρια ευρήματα τίθενται στον πίνακα 9.2:

Πίνακας 9.2 Διαφορετικές προσεγγίσεις που αποδίδουν οι δύο κλάδοι σε συναφείς έννοιες (από τα σχολικά εγχειρίδια)

Έννοια	**Μαθηματικά**	**Φυσική**	**Σύγκριση**
Εκφώνηση άσκησης	Υπόθεση	Συμβάν ή γεγονός	
Κλίση	Την εφαπτομένη της ε γωνίας με τον χ΄χ	Το πηλίκο Δψ/Δχ	Είναι η ίδια σχέση διαφορετικά διατυπωμένη & είναι εκτός ύλης στα Μαθηματικά σαν $(\psi_2-\psi_1)$ / $(\chi_2-\chi_1)$
Σταθερός όρος στη γραμμική	Σημείο τομής με τον άξονα ψ΄ψ (0,β)	Δεν υπάρχει αναφορά	
ψ=κ	Ευθεία παράλληλη ή συμπίπτει με χ΄χ	Δεν υπάρχει αναφορά	
Γραμμική συνάρτηση	Μπορεί να είναι 1ου βαθμού, μηδενικού, να μην ορίζεται βαθμός	Είναι η ψ=αχ+β χωρίς αναφορά αν α=0 και για το β	
Λογική	Από ψευδή πρόταση καταλήγουμε σε αληθές συμπέρασμα	Τη λάθος σχέση ή θεωρία την ελέγχουμε και μπορεί να δημιουργήσει θεωρία ή να απορριφτεί	Αντίστροφη λογική
Ονοματολογία σχέσεων που συνδέει τις μεταβλητές	Συναρτήσεις (μέχρι την Α΄ λυκείου)	Σχέσεις-εξισώσεις-συναρτήσεις	Ονοματολογία
Τρόπος γραφής των σχέσεων	Φθίνουσες δυνάμεις των μεταβλητών	Αύξουσες δυνάμεις των μεταβλητών	Τρόπος αναπαράστασης της σχέσης
	π.χ. $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$	π.χ. $x=x_o+v_ot+(1/2)at^2$	
Σύγκριση όμοιων μεγεθών σε μορφή λόγου	Εύρεση Ε.Κ.Π	Αναγωγή στη μονάδα (συνήθως)	Ο τρόπος σύγκρισης
Παραβολή $\psi=\alpha\chi^2$	Θεωρείται διδαχθείσα έννοια στην Α΄ Λυκείου		Δημιουργείται κενό στο γνωστικό περιεχόμενο
$\psi=\alpha\chi^2$	Διδάσκεται στο τέλος της Α΄ Λυκείου	Χρειάζεται από την αρχή	Μη συντονισμένο αναλυτικό πρόγραμμα
Μεταβλητές στο καρτεσιανό επίπεδο	ψ,χ	Π.χ στον ψ΄ψ: u, s, x)… Στον χ΄χ: t	
Τρόπος αναπαραστάσεων	• Συναρτησιακή σχέση • Γράφημα • Πίνακας τιμών	• Συνάρτηση ή σχέση • Γράφημα • Πίνακας τιμών • Φωτογραφία	Η φωτογραφία (ευκολότερη κατανόηση κάποιων εννοιών, π.χ πείραμα σελ. 35 Φυσική Α΄ Λυκείου)
Σύστημα αναφοράς	Προκαθορισμένη η αρχή Ο	Προσαρμόζεται στο πρόβλημα	
Διανύσματα	Διδάσκονται στη Β΄ Λυκείου	Χρειάζονται από την Α΄ Λυκείου	Έλλειψη θεωρητικού υπόβαθρου
Ανάλογα ποσά	Μόνο για ίδια μεγέθη (και αναφέρεται ως ισότητα λόγων)	Όχι απαραίτητα ίδια μεγέθη π.χ ποσότητες: μετατόπιση και χρονικό διάστημα είναι ανάλογα ποσά ($u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$) στην ομαλή κίνηση	
Εξίσωση	Συνήθως είναι: βρείτε το χ που ικανοποιεί μία σχέση π.χ : $\chi=\chi^2-2$	Συνήθως είναι: βρες τη σύνδεση των ποσοτήτων	Διαφοροποίηση ως προς την ίδια έννοια

9.3 Ερευνητικά εργαλεία συλλογής δεδομένων

Τα εργαλεία συλλογής δεδομένων ήταν δύο δομημένα ερωτηματολόγια, ένα στα Μαθηματικά και ένα στη Φυσική. Το κάθε ερωτηματολόγιο είχε δύο κύριους άξονες. Ο πρώτος άξονας είχε σκοπό να διερευνήσει τις απόψεις των μαθητών σχετικά με τις συνδέσεις των δύο κλάδων. Τα ερωτήματα είχαν ισομορφία ως προς το περιεχόμενο και την δομή. Οι κύριες συνιστώσες των απόψεων που θέλαμε να διερευνήσουμε ήταν, ανά κλάδο, αυτοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 9.3 Οι κύριες συνιστώσες διερεύνησής των απόψεων

Μαθηματικά	**Φυσική**
Γνωστική εξάρτηση Μαθηματικών με Φυσική	Γνωστική εξάρτηση Φυσικής με Μαθηματικά
Εννοιολογική εξάρτηση Μαθηματικών με Φυσική	Εννοιολογική εξάρτηση Φυσικής με Μαθηματικά
Γενική εικόνα-εξάρτηση των δύο από τους αριθμούς και τύπους.	
Γενική εικόνα για τη χρησιμότητά τους.	

Η τελική επιλογή των ερωτήσεων προήλθε μέσα από τη συνέργεια των ερευνητών με τον επιβλέποντα της συγκεκριμένης εργασίας. Ο κύριος γνώμονας της επιλογής των καταλληλότερων ερωτήσεων ήταν η εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων.

Τα ερωτήματα που περιείχαν τα ερωτηματολόγια κωδικοποιήθηκαν για την ανάλυση ως ΜΑ για τις απόψεις των Μαθηματικών και ΦΑ για τις απόψεις της Φυσικής. Οι ερωτήσεις που περιείχαν ανά κλάδο παραθέτονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 9.4 Οι ερωτήσεις των απόψεων ανά κλάδο

Μαθηματικά	**Φυσική**
ΜΑ1. Τα Μαθηματικά έχουν συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.	ΦΑ1. Η Φυσική έχει συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.
ΜΑ2. Τα προβλήματα των Μαθηματικών λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής.	ΦΑ2. Τα προβλήματα Φυσικής δεν λύνονται χωρίς γνώση Μαθηματικών.
ΜΑ3. Η κατανόηση σε βάθος των Μαθηματικών συνδέεται με τη γνώση της Φυσικής.	ΦΑ3. Η Φυσική δεν κατανοείται σε βάθος χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών.
ΜΑ4. Η επιτυχία στο μάθημα των Μαθηματικών εξαρτάται από τη γνώση της Φυσικής.	ΦΑ4. Η επιτυχία στο μάθημα της Φυσικής εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών.
ΜΑ5. Στα Μαθηματικά πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.	ΦΑ5. Στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.
ΜΑ6. Οι γνώσεις των Μαθηματικών είναι χρήσιμες για μια επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία.	ΦΑ6. Η γνώση της Φυσικής είναι χρήσιμη για επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία μου.
ΜΑ7. Οι γνώσεις των Μαθηματικών βοηθούν να αντιμετωπίζουμε καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής μας ζωής.	ΦΑ7. Η γνώση της Φυσικής βοηθάει να αντιμετωπίσω καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής ζωής μου.

Οι δυνατές επιλογές που είχαν οι μαθητές σε κάθε ερώτημα ήταν σε πεντάβαθμη κλίμακα τύπου Likert. Η κάθε επιλογή της κάθε ερώτησης βαθμολογήθηκε για τη διευκόλυνση της στατιστικής ανάλυσης με τον εξής τρόπο 1=διαφωνώ πλήρως, 2=διαφωνώ, 3=δεν διαφωνώ ούτε συμφωνώ, 4=συμφωνώ, 5=συμφωνώ πλήρως.

Ο δεύτερος άξονας είχε σαν σκοπό να διερευνήσει τις γνώσεις των μαθητών στους αντίστοιχους κλάδους. Το κύριο μέλημα δεν ήταν η εξέταση ως προς το γνωστικό αντικείμενο αλλά, μέσω των ισομορφικών ερωτήσεων, να αντλήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία στο κατά πόσο οι μαθητές έχουν την ικανότητα να απαντούν με το ίδιο σκεπτικό σε άμεσα συσχετιζόμενες έννοιες. Η επιλογή του τρόπου βαθμολόγησης που θα αναλύσουμε παρακάτω έγινε προς διευκόλυνση της εξαγωγής συμπερασμάτων τόσο για πιθανά οφέλη που μπορεί να έχουν οι μαθητές δημιουργώντας συνδέσεις των δύο αντικειμένων όσο και για την μετέπειτα σύνδεση απόψεων με γνωστικό. Οι ερωτήσεις περιείχαν υποερωτήματα με δυνατές επιλογές σε κάθε απάντηση το ΝΑΙ και ΟΧΙ. Η κάθε σωστή απάντηση στα επιμέρους υποερωτήματα βαθμολογήθηκε με το βαθμό ένα και η λάθος με μηδέν.

Η πρώτη ερώτηση αφορούσε την αναγνώριση αν μια εξίσωση παριστάνεται με ευθεία γραμμή. Σε κάθε κλάδο η ερώτηση περιείχε έξι υποερωτήματα όπου οι δυνατές επιλογές που είχαν στην απάντηση ήταν ΝΑΙ (αν ήταν ευθεία) ή ΟΧΙ (αν δεν ήταν ευθεία). Οι ερωτήσεις ήταν:

Πίνακας 9.5 Η πρώτη ερώτηση γνωστικού ανά κλάδο.

ΦΓ_1. Από τις παρακάτω χρονικές εξισώσεις ποιες παριστάνονται γραφικά με ευθεία;	ΜΓ_1. Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμών, ποιες αντιστοιχούν σε ευθείες;
i. $x = 2t^2$	$\psi=2\chi^2$
ii. $\upsilon = 8+4t$	$\psi=3\chi+2$
iii. $\upsilon = 5t$	$\psi=2\chi$
iv. $x = 12t + t^2$	$\psi=2\chi^2+3\chi$
v. $\upsilon \cdot t = 40$	$\chi\psi=3$
vi. $\upsilon = 6$	$\chi=2$

Η δεύτερη και η τρίτη ερώτηση είχε ως σκοπό να ελέγξει την ευχέρεια αναγνώρισης της κλίσης (Μαθηματικά) και της ταχύτητας (Φυσική) σε πολλαπλές αναπαραστάσεις καθώς και την σημασία τους. Σε κάθε κλάδο η ερώτηση περιείχε πέντε υποερωτήματα. Οι ερωτήσεις ήταν:

Πίνακας 9.6 Η δεύτερη ερώτηση γνωστικού ανά κλάδο.

ΦΓ_2. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με εξίσωση θέσης-χρόνου: x=23+8t. **Τότε**:	ΜΓ_2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση μιας ευθείας ε_1: $\psi = 2\chi + 3$. **Τότε:**
i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται	η κλίση της αυξάνεται
ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται	η κλίση της μειώνεται
iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό	η κλίση της είναι σταθερή
iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται	η κλίση της είναι κυμαινόμενη
v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν	η κλίση της είναι μηδέν

Πίνακας 9.7 Η τρίτη ερώτηση γνωστικού ανά κλάδο.

ΦΓ_3. Από τις αντίστοιχες μετρήσεις θέσης (x) και χρόνου (t) ενός αντικείμενου που κινείται ευθύγραμμα, παίρνουμε τα παρακάτω δεδομένα:

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	3	6	9	12

Από την ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία συμπεραίνουμε πως:

ΜΓ_3.Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών, δύο μεταβλητών χ και ψ

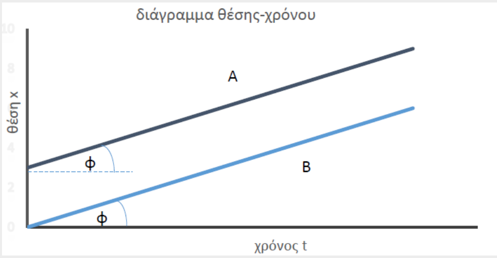
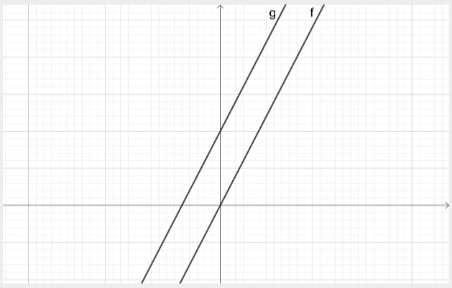
χ	0	1	2	3	4	5
ψ	0	2	4	6	8	10

Η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία:

ΦΓ_3	ΜΓ_3
i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται	η κλίση της αυξάνεται
ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται	η κλίση της μειώνεται
iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό	η κλίση της είναι σταθερή
iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται	η κλίση της είναι κυμαινόμενη
v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν	η κλίση της είναι μηδέν

Η τέταρτη ερώτηση είχε ως σκοπό την αναγνώριση της συνάφειας των παραμέτρων δύο παράλληλων ευθειών στη γραμμική εξίσωση, στα Μαθηματικά και σε διάγραμμα θέσης χρόνου, στη Φυσική. Σε κάθε κλάδο είχε τέσσερις ερωτήσεις και ήταν η μοναδική ερώτηση που είχε δύο σωστές απαντήσεις. Οι ερωτήσεις ήταν:

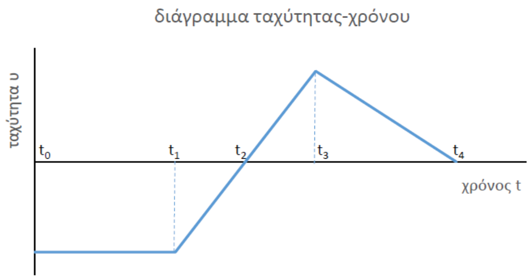
Πίνακας 9.8 Η τέταρτη ερώτηση γνωστικού

ΦΓ_4. Δύο δρομείς κινούνται στην ίδια ευθεία. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η θέση τους x σε σχέση με το χρόνο t.  **<u>Με ποιες</u>** από τις παρακάτω **προτάσεις συμφωνείς**;	ΜΓ_4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα δύο ευθειών της f και g.  **<u>Με ποιες</u>** από τις παρακάτω **προτάσεις συμφωνείς**;
i. Η μεταξύ τους απόσταση κάθε χρονική στιγμή διατηρείται σταθερή	Οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλίση.
ii. Κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στην ίδια θέση	Η ευθεία που παριστάνει η g έχει μεγαλύτερη κλίση από την ευθεία που παριστάνει η f.
iii. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα	Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι σταθερή.
iv. Η ταχύτητα του A είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του B.	Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι μηδενική.

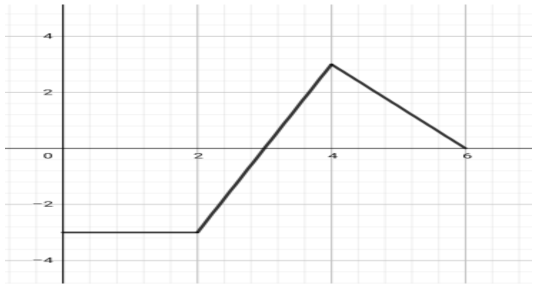
Η πέμπτη ερώτηση είχε ως σκοπό να ελεγχθεί η ικανότητα ταιριάσματος πληροφοριών που μπορούν να εξαχθούν από το γράφημα και ζητουμένου της άσκησης. Ήταν η μόνη ερώτηση που δεν είχε πλήρη ισομορφία. Η αιτία αυτού είναι οι διαφορετικές συμβάσεις που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια και ο διαφορετικός συμβολισμός που χρησιμοποιούν. Σε κάθε κλάδο είχε τέσσερις απαντήσεις. Οι ερωτήσεις ήταν:

Πίνακας 9.9 Η Πέμπτη ερώτηση γνωστικού ανά κλάδο.

<table>
<tr>
<td>ΦΓ_5. Για ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου υ(t):



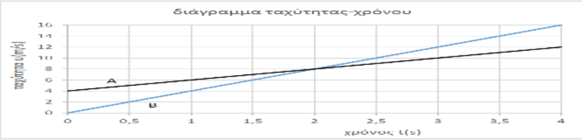
Σε ποιο ή σε ποια χρονικά διαστήματα η επιτάχυνση του σώματος είναι αρνητική;</td>
<td>ΜΓ_5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μία συνάρτησης f.



Σε ποιο ή ποια διαστήματα η f είναι γνησίως φθίνουσα</td>
</tr>
<tr><td>i. $t_0 - t_1$</td><td>[0,2]</td></tr>
<tr><td>ii. $t_1 - t_2$</td><td>[2,4]</td></tr>
<tr><td>iii. $t_2 - t_3$</td><td>[4,6]</td></tr>
<tr><td>iv. $t_3 - t_4$</td><td>[2,6]</td></tr>
</table>

Η έκτη ερώτηση είχε ως σκοπό την κατανόηση της κλίσης-επιτάχυνσης σε ένα διάστημα και κατά πόσο μπορούν να τη διαχωρίσουν από το ύψος. Σε κάθε κλάδο είχε τέσσερις απαντήσεις. Οι ερωτήσεις ήταν:

Πίνακας 9.10 Η έκτη ερώτηση γνωστικού ανά κλάδο.

ΦΓ_6. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η γραφική σχέση ταχύτητας – χρόνου για δύο αντικείμενα Α και Β τα οποία κινούνται σε ευθεία γραμμή.  **Στο χρονικό διάστημα t_1=1s έως t_2=2s :**	ΜΓ_6. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα δύο ευθειών της (ε) και (η)  **Στο διάστημα [1,2) :**
i. η επιτάχυνση του Α είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του Β	η κλίση της (ε) είναι μεγαλύτερη από την κλίση της (η)
ii. η επιτάχυνση του Β είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του Α	η κλίση της (ε) είναι μικρότερη από την κλίση της (η)
iii. η επιτάχυνση του Α είναι ίση με την επιτάχυνση του Β	η κλίση της (ε) είναι ίση με την κλίση της (η)
iv. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποιου η επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη	δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποια κλίση είναι μεγαλύτερη

9.4 Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα ερωτηματολόγια, τα οποία περιγράφηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η διάρκεια της συλλογής δεδομένων διήρκησε 3 εβδομάδες. Το πρώτο βήμα ήταν να πάρουμε την έγκριση του διευθυντή για την πραγματοποίηση της έρευνας. Μετά από τον έλεγχο που πραγματοποίησε στα ερωτηματολόγια για την αποφυγή διαρροής προσωπικών δεδομένων, μας έδωσε την έγκρισή του. Σε δεύτερη φάση, δώσαμε το ερωτηματολόγιο σε 1 μαθηματικό του σχολείου, 1 φυσικό και 2 φιλολόγους. Η συγκεκριμένη διαδικασία πραγματοποιήθηκε τόσο για λόγους δεοντολογίας, δηλαδή ότι η μαθηματικός και ο φυσικός διδάσκουν τα μαθήματα που ελέγχει το ερωτηματολόγιο στο δείγμα μας, όσο και για τυχόν αστοχία ερώτησης. Επιπλέον, οι φιλόλογοι για την εκφραστική συνέπεια των ερωτήσεων, μας έκαναν μία παρατήρηση πιθανής αλλαγής σε μία ερώτηση, την οποία, όμως, δεν την εκλάβαμε στα υπόψιν μας, διότι αλλοιωνόταν το νόημα της ερώτησης. Στη συνέχεια, την πρώτη εβδομάδα δώσαμε τα ερωτηματολόγια στα τμήματα για την συμπλήρωσή τους στο φυσικό χώρο της τάξης τους. Για την αποφυγή πιθανής επίδρασης της σειράς των περιεχομένων, επιλέξαμε να δώσουμε στα δύο τμήματα πρώτα τη Φυσική (Β1 και Β2) και στα άλλα δύο πρώτα τα Μαθηματικά (Β3 και Β4). Ακόμη, λόγω των συμμετρικών ερωτήσεων για την αποφυγή απομνημόνευσης των ερωτήσεων – απαντήσεων επιλέξαμε να μην δοθούν συνεχόμενα τα ερωτηματολόγια αλλά να υπάρχει ένα χρονικό κενό ανάμεσα στη συμπλήρωση και των δύο ερωτηματολογίων. Τη δεύτερη εβδομάδα αντιστράφηκε το μοίρασμα των ερωτηματολογίων, δηλαδή στο B1 και B2 δώσαμε τα Μαθηματικά και στο B3 και B4 δώσαμε τη Φυσική. Τη τρίτη εβδομάδα δώσαμε τα ερωτηματολόγια σε μαθητές που απουσίαζαν σε κάποια διεξαγωγή.

9.5 Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Στη διαδικασία συμπλήρωσης των ερωτηματολογίων την 1η εβδομάδα δεν προβήκαμε σε καμία ενέργεια καταχώρησης δεδομένων, για την αποφυγή να δοθούν περαιτέρω διευκρινήσεις που θα αλλοίωναν το αποτέλεσμα. Έγινε, όμως, από μέρους μας μία προπαρασκευαστική ανάλυση των μεταβλητών για το πώς μπορούσαμε να εξάγουμε συμπεράσματα. Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων, έγινε καταχώρηση των δεδομένων στο SPSS version 21.0. Η καταχώρηση των απαντήσεων έγινε σε τέσσερα αρχεία του SPSS, ένα αρχείο για τις απόψεις (και για τα δύο μαθήματα), ένα αρχείο για τον έλεγχο των γνώσεων γενικής παιδείας (και για τα δύο μαθήματα), ένα αρχείο για τον έλεγχο των γνώσεων θετικής κατεύθυνσης και ένα συνολικό αρχείο που περιείχε όλες τις απαντήσεις των μαθητών. Στις απόψεις εισαγάγαμε τις μεταβλητές (1 μεταβλητή ήταν η κατεύθυνση, 7 για τις ερωτήσεις των Μαθηματικών και 7 για τις ερωτήσεις τις Φυσικής) και κωδικοποιήσαμε τις απαντήσεις, με τον τρόπο που προαναφέραμε. Κάθε στήλη (column) περιείχε τις απαντήσεις σε μία μεταβλητή και κάθε γραμμή (row) περιείχε τις απαντήσεις του ίδιου ατόμου και στα δύο ερωτηματολόγια. Στις γνώσεις εισαγάγαμε τις μεταβλητές, όπου μία ήταν για την κατεύθυνση. Το κάθε θέμα κωδικοποιήθηκε ανά ερώτημα, οπότε προέκυψαν 28 μεταβλητές για κάθε κλάδο, η συνολική βαθμολόγηση των επιμέρους ερωτημάτων μας έδωσε 6 μεταβλητές για κάθε κλάδο και 2 για τη συνολική βαθμολογία. Τέλος, εισαγάγαμε τις μεταβλητές που ελέγχουν κατά πόσο οι μαθητές απάντησαν σωστά σε κάθε ερώτημα στους δύο κλάδους, σε έναν ή σε κανέναν. Η κωδικοποίηση των μεταβλητών ήταν 1, αν η απάντηση ήταν σωστή απάντηση και 0 για το αν η απάντηση ήταν λάθος.

9.6 Περιορισμός της έρευνας

Βασικός περιορισμός της συγκεκριμένης έρευνας είναι το μικρό δείγμα και ο τρόπος επιλογής του δείγματος.

Κεφάλαιο 10: Στατιστικά - ανάλυση δεδομένων

10.1 Στατιστικά - ανάλυση δεδομένων - συζήτηση στις ΄΄απόψεις΄΄ (α΄ μέρος ερωτηματολογίου)

Πίνακας 10.1 Περιγραφικά στατιστικά των απόψεων ανά κλάδο και ερώτηση

		Median	Mean	διαφωνώ πλήρως	διαφωνώ	ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	συμφωνώ	συμφωνώ πλήρως	Total	missing	total
κωδ.	ερωτήσεις	Frequency /Percent									
ΜΑ_1	Τα μαθηματικά έχουν συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.	4,00	3,91	1/1,4	5/6,9	10/13,9	36/50	19/26,4	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ1	Η Φυσική έχει συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.	4,00	3,79	0 / 0	5/6,9	12/16,7	44/61,1	8/11,1	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_2	Τα προβλήματα των Μαθηματικών λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής.	3,00	2,54	6/8,3	27/37,5	31/43,1	6/8,3	1/1,4	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_2	Τα προβλήματα Φυσικής δεν λύνονται χωρίς γνώση Μαθηματικών.	4,00	3,75	2/2,8	2/2,8	16/22,2	39/54,2	10/13,9	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_3	Η κατανόηση σε βάθος των Μαθηματικών συνδέεται με τη γνώση της Φυσικής.	3,00	3,06	5/6,9	11/15,3	32/44,4	22/30,6	1/1,4	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_3	Η Φυσική δεν κατανοείται σε βάθος χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών.	4,00	3,47	0/0	10/13,9	22/30,6	31/43,1	6/8,3	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_4	Η επιτυχία στο μάθημα των Μαθηματικών εξαρτάται από τη γνώση της Φυσικής.	2,00	2,21	13/18,1	36/50	18/25	3/4,2	1/1,4	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_4	Η επιτυχία στο μάθημα της Φυσικής εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών.	3,00	3,22	1/1,4	14/19,4	26/31,6	24/33,3	4/5,6	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_5	Στα Μαθηματικά πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.	4,00	3,74	0/0	5/6,9	22/30,6	32/44,4	12/16,7	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_5	Στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.	4,00	3,91	1/1,4	5/6,9	11/15,3	33/45,8	19/26,4	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_6	Οι γνώσεις των Μαθηματικών είναι χρήσιμες για μια επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία.	4,00	3,44	3/4,2	10/13,9	21/29,2	26/36,1	11/15,3	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_6	Η γνώση της Φυσικής είναι χρήσιμη για επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία μου.	3,00	2,78	9/12,5	21/29,2	23/31,9	9/12,5	7/9,7	69/95,8	3/4,2	72/100
ΜΑ_7	Οι γνώσεις των Μαθηματικών βοηθούν να αντιμετωπίζουμε καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής μας ζωής.	3,00	3,12	6/8,3	8/11,1	33/45,8	18/25	6/8,3	71/98,6	1/1,4	72/100
ΦΑ_7	Η γνώση της Φυσικής βοηθάει να αντιμετωπίσω καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής ζωής μου.	3,00	2,79	10/13,9	14/19,4	30/41,7	11/15,3	4/5,6	69/95,8	3/4,2	72/100

Στην 1η ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,94). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,80). Οι απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι η κυρίαρχη μορφή αναπαράστασης των ασκήσεων και των προβλημάτων και στους δύο κλάδους είναι η αριθμητική. Ειδικότερα, στα Μαθηματικά 76,4% προς το συμφωνούν έναντι μόλις 8,3% προς το διαφωνούν και στη Φυσική 72,2% προς το συμφωνούν και 6,9% προς το διαφωνούν.
Είναι ένα αποτέλεσμα που συνάδει ως προς τα ποσοστά συμφωνίας με την έρευνα των Kapucu et al. (2016), όπου στην αντίστοιχη ερώτηση ήταν 74,9% και στο δικό μας δείγμα ήταν 76,4% στα Μαθηματικά και 72,2% στη Φυσική. Η διαφοροποίηση ήταν ως προς το είδος συμφωνίας. Συγκεκριμένα, στο δείγμα μας η κατεύθυνση ήταν περισσότερο προς το συμφωνώ ΜΑ_1:50% και ΦΑ_1:61,1% έναντι προς το συμφωνώ απόλυτα ΜΑ_1:26,4% και ΦΑ_1:11,1% ενώ στο αντίστοιχο ερωτηματολόγιο ήταν 23,1% για το συμφωνώ και 51,8% για το συμφωνώ απόλυτα.
Για τη δημιουργία αυτής της άποψης σημαντικό ρόλο έχουν τα σχολικά εγχειρίδια. Ειδικότερα στα Μαθηματικά, οι ασκήσεις στις αντίστοιχες παραγράφους, που απευθύνθηκαν οι ερωτήσεις γνωστικού (Α΄ Λυκείου: 6.1-6.3), οι οποίες έχουν αριθμητικές τιμές ως ζητούμενο είναι 17/23, δηλαδή το ποσοστό αυτής της μορφής είναι 74% χωρίς την προσμέτρηση των ασκήσεων της Β΄ ομάδας**.** Σημαντικό στοιχείο σε αυτές ασκήσεις είναι ότι δεν μπορούν να απαντηθούν χωρίς τη γνώση του εννοιολογικού πλαισίου. Ως συνέπεια αυτού μπορεί να αιτιολογηθεί η κυρίαρχη απάντηση στο ¨συμφωνώ¨ αντί στο ¨συμφωνώ απολύτως¨.
Είναι μία εικόνα που έχει δημιουργηθεί από τη χρήση των αριθμών και τον χειρισμό τους που ξεκινά από τη πρώιμη ηλικία και ενισχύεται με τη κοινωνικοποίηση του ατόμου (Ernest, 2016). Αυτό ίσως δημιουργεί ένα εμπόδιο για την δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων των δύο κλάδων.
Στην 2η ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=3 (Μ.Ο=2,56). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,77).
Η συγκεκριμένη άποψη δείχνει ότι οι μαθητές, για την επίλυση προβλημάτων, εκλαμβάνουν την εξάρτηση της Φυσικής από τα Μαθηματικά ως πιο ισχυρή από την αντίστοιχη εξάρτηση των Μαθηματικών από τη Φυσικής.
Η άποψη των μαθητών βρίσκεται σε αντιστοιχία με την άποψη ερευνητών (Basson, 2002; Kapucu 2016 & 2014) ότι η χρήση των Μαθηματικών έχει σαφή επιρροή στη κατανόηση των προβλημάτων στη Φυσική. Το σχολικό βιβλίο Φυσικής ενισχύει αυτή την άποψη από τη στιγμή που κάνει αναφορές σε Μαθηματικές έννοιες και τις χρησιμοποιεί στη Φυσική (εικόνα 1).

Εικόνα 10.1. Σελίδα 30 σχολικό βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου

Για να κατασκευάσουμε μια γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας χρειάζεται ένας πίνακας τιμών. Ο πίνακας αυτός μπορεί να προέλθει είτε από πειραματικές μετρήσεις φυσικών μεγεθών, είτε από αυθαίρετες τιμές που δίνουμε στην ανεξάρτητη μεταβολή μέσα στο πεδίο ορισμού της, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα α, β και γ. Μετά τη δημιουργία του πίνακα τιμών προχωρούμε στην κατασκευή και βαθμολόγηση των αξόνων x, y, σύμφωνα με τις τιμές που έχουν τα φυσικά μεγέθη.

Αν η συνάρτηση ή η σχέση είναι πρώτου βαθμού, η γραφική παράσταση θα είναι ευθεία γραμμή και αρκούν δύο σημεία για τον προσδιορισμό της.

Αν η συνάρτηση είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού τότε η γραφική παράσταση είναι παραβολή.

Για παράδειγμα αναφέρουμε τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

Η αντίστοιχη άποψη των μαθητών για την ευκολία της επίλυσης προβλημάτων στα Μαθηματικά με τη χρήση της Φυσικής βρίσκεται σε χαμηλότερο ποσοστό εξάρτησης. Άποψη που ενισχύεται από το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών, στο οποίο οι λιγοστές ασκήσεις που αφορούν θέματα Φυσικής αντιμετωπίζονται καθαρά υπολογιστικά, χωρίς εννοιολογικές αναφορές (εικόνες 2, 3, 4 και 5).

Εικόνα 10.2. Άσκηση 4 Β΄ Ομάδας Σχολικού εγχειριδίου Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων (Ανδεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταιρίδης, Πολύζος, Σβέρκος, Αδαμόπουλος & Δαμιανός, 1998, σελ.85).

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;

Εικόνα 10.3. Λύση άσκησης 4 Β΄ Ομάδας, Βιβλίο λύσεων του σχολικού εγχειριδίου Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων (Ανδεαδάκης κ.ά, 1998, σελ.35).

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι 100x ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι 120x. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$120x - 100x = 1 \Leftrightarrow 20x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20} \text{ ώρες, οπότε } x = \frac{1}{20}\cdot 60 = 3 \text{ λεπτά.}$$

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

Εικόνα 10.4. Εφαρμογή 2, σχολικού βιβλίου Α΄ Λυκείου Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων (Ανδεαδάκης κ.ά, 1998, σελ. 91)

2. Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i. πέσει από την κορυφή;

ii. εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec;

Δίδεται ότι $g \simeq 10 m/sec^2$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$.

Επειδή S = 300m και $g \simeq 10$ m/sec^2, έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \simeq \pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \simeq 7,75$ sec.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Επειδή $v_0 = 50\frac{m}{sec}$ και $t > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10 + \sqrt{100 + 4 \cdot 60}}{2} \simeq \frac{-10 + 18,43}{2} = 4,22 \text{ sec.}$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22 sec.

Εικόνα 10.5. Σχολικό εγχειρίδιο Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, & Σβέρκος, 2012, σελ. 27) (Θεώρημα Merton):

3. Από τους τύπους $S = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ και $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$, να δείξετε ότι $S = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} \cdot t$.

Στην 3η ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=3 (Μ.Ο=3,04). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,48).

Η άποψη των μαθητών στα Μαθηματικά, αν και δείχνει μία τάση προς το συμφωνώ (32%) έναντι του διαφωνώ (22,2%), έχει σαφή διαφοροποίηση με τη Φυσική, στην οποία 51,4% συμφωνούν ότι η κατανόηση σε βάθος στη Φυσική εξαρτάται από τα Μαθηματικά, ενώ μόλις το 13,9% διαφωνεί με αυτή την άποψη.

Η άποψη των μαθητών στη Φυσική, αν πλαισιωθεί κατάλληλα, μπορεί να προσδώσει πολλαπλά οφέλη. Όπως τονίζεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, η βαθύτερη κατανόηση των Μαθηματικών μπορεί να καλύψει το αντιληπτικό χάσμα (proceptual dividekk) των μαθητών που χρησιμοποιούν τις διαδικασίες ερμηνείες (interpret processes) μόνο ως διαδικασίες (procedures) και εκείνους που τις βλέπουν ως ευέλικτες εντολές (flexible procepts) (Gray & Tall, 1991). Επιπλέον, τα Μαθηματικά, σύμφωνα με τους Doorman et al. (2012), πρέπει να δώσουν την ευρύτερη εικόνα μίας έννοιας. Σε διαφορετική περίπτωση, οι μαθητές, σύμφωνα με τον Romer (1993), θα ξέρουν μόνο τον κανόνα, χωρίς να ¨διαβάζουν¨ την εξίσωση και έτσι αποκτούν δηλαδή απλώς μία συλλογή τύπων. Με την νοηματοδότηση των τύπων και των συμβόλων μέσω της σχέσης που τα συνδέει, θα επανακαθορίσουν το ¨χαμένο κείμενο¨ που δεν φαίνεται.

Στα Μαθηματικά πρέπει να αναδειχθεί η χρησιμότητα της Φυσικής στην κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών. Η ανάδειξη αυτή μάλιστα μπορεί να απορρέει από ιστορικές πτυχές, όπως για παράδειγμα η έννοια της συνέχειας που έχει αναφερθεί στο ιστορικό πλαίσιο (σελ. 14). Κύρια, πρέπει να αναδειχθεί η νοηματοδότηση των θεωρητικών μοντέλων της Γεωμετρίας μέσω εικόνων (απόδειξη Merton), όπως και η δημιουργία εικόνων στις νοητικές κατασκευές των συναρτήσεων (Τζιούφας & Τσαρούχας, 2018). Μια άποψη, που αν ενισχυθεί, θα δημιουργήσει ένα ενοποιητικό πλαίσιο το οποίο θα προσδώσει μια διαφορετική δυναμική στην επιλογή κατάλληλης αναπαράστασης. Επιπλέον, θα είναι σε σύμπνοια με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών, σύμφωνα με το οποίο: *Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών (*Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕΛ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2016 – 2017 σελ. 10).

Στην 4η ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=2 (Μ.Ο=2,2). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=3 (Μ.Ο=3,23).

Στις απόψεις των μαθητών κυριαρχεί το ότι η επιτυχία στο μάθημα των Μαθηματικών δεν εξαρτάται από τη Φυσική (68,1% προς διαφωνώ έναντι μόλις 5,6% ότι συμφωνούν). Αντίθετα στη Φυσική υπάρχει μια τάση προς συμφωνούν με την εξάρτηση από τα Μαθηματικά (38,9% προς συμφωνούν έναντι 20,8% διαφωνούν).

Η άποψη στα Μαθηματικά, συνάδει με τις απόψεις πολλών ερευνητών (Arnold, 2006; Schorr, 2003; Taşar, 2010), οι οποίοι υποστηρίζουν πως οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν αυτή την εξάρτηση παρά μόνο αν δραστηριοποιηθούν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων (όχι μόνο με τη Φυσική) και μέσω αυτών να αναπτύξουν μια πιο ισχυρή κατανόηση στα Μαθηματικά (π.χ στις συναρτήσεις). Η παραπάνω προσέγγιση έρχεται επίσης σε σύμπνοια με την άποψη και των Vinner & Dreyfus (1989), ότι δηλαδή οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τον μαθηματικό ορισμό με την εννοιολογική προσέγγιση αλλά με τις διανοητικές εικόνες και τις συναφείς ιδιότητες που έχουν αναπτύξει. Μέσω αυτής της προσέγγισης, θα μπορούσαν να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η επιτυχία στο μάθημα των Μαθηματικών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη Φυσική σύμφωνα και με την ερευνητική πρόκληση των Doorman et al., (2012). Ειδικότερα, θα μπορούσε να επιτευχθεί το να αντιλαμβάνονται τα διαφορετικά πρόσωπα συναφών εννοιών ως πρόσωπο του ίδιου αντικειμένου. Επιπλέον, η χρήση εννοιών της Φυσικής στα Μαθηματικά μπορούν να προστεθούν και να δημιουργήσουν νέες δομές (Redish & Gupta, 2009).

Οι απόψεις των μαθητών στη 2η, 3η και 4η ερώτηση καθιστούν αναγκαία τη δημιουργία μιας πιο αποτελεσματικής δομής μαθησιακού περιβάλλοντος που να προάγει τη συσχέτιση Μαθηματικών και Φυσικής (Basson, 2002).

Στην 5η ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,72). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,93).

Η συγκεκριμένη ερώτηση αφορούσε την άποψη για το αν στα Μαθηματικά και στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύονται κανόνες. Στα Μαθηματικά γενικά συμφωνεί το 61,1% ενώ στη Φυσική γενικά συμφωνεί το 72,2% έναντι μόλις 6,9% στα Μαθηματικά και 8,3% στη Φυσική που γενικά διαφωνούν με αυτή την άποψη.

Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τους Ivanjek, Susac, Planinic, Andrasevic & Milin-Sipus (2016) που διαπίστωσαν πως οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων στη Φυσική χρησιμοποιούν τύπους, είτε σωστά είτε λανθασμένα. Επιπλέον, συμφωνεί και με την άποψη των Sikorski & Hammer (2017) που υποστηρίζουν ότι οι μαθητές βλέπουν τις επιστήμες ως κλάδους που βασίζονται στην απομνημόνευση κανόνων. Η απομνημόνευση τύπων δεν αποτελεί πηγή δυσκολίας (Ornek, Robinson & Haugan, 2007) ωστόσο η υπερβολική χρήση αυτών συντελεί στο μπλοκάρισμα των μαθητών (Ivanjek et al., 2016).

Η άποψη αυτή στα Μαθηματικά οφείλεται σε μεγάλο βαθμό από τα σχολικά εγχειρίδια. Χαρακτηριστικά, η γραμμική εξίσωση μόνο στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου παρουσιάζεται με μια ποικιλία μορφών που προβάλλονται ως κανόνες σε πλαίσια.(παραθέτουμε μόνο από το βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου):

Εικόνα 10.6 Σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2012, σελ. 68).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx, τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση y = αx ή απλώς η ευθεία y = αx. Ο άξονας x′x είναι η ευθεία με εξίσωση y = 0x, δηλαδή y = 0.

Εικόνα 10.7 Σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, κ.ά, 2012, σελ. 73)

Σημεία τομής της ευθείας αx + βy = γ με τους άξονες

- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας x′x έχει εξίσωση y = 0.
  Επομένως, για να βρούμε το σημείο Α στο οποίο η ευθεία αx + βy = γ, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα x′x, θέτουμε y = 0 και υπολογίζουμε την τετμημένη του x.
- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας y′y έχει εξίσωση x = 0. Επομένως, για να βρούμε το σημείο Β στο οποίο η ευθεία αx + βy = γ, με $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ τέμνει τον άξονα y′y, θέτουμε x = 0 και υπολογίζουμε την τεταγμένη του y.

Εικόνα 10.8 Σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, κ.ά, 2012, σελ 68).

Η κλίση της ευθείας y = αx

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία y = αx ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με α, δηλαδή:

$\frac{y}{x} = \alpha$, για $x \neq 0$. Ο λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας y = αx.**

Για παράδειγμα, η ευθεία y = –2x έχει κλίση –2.

Εικόνα 10.9 Σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, κ.ά, 2012, σελ 74).

Μια εξίσωση της μορφής αx + βy = γ, με $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ παριστάνει ευθεία.

Εικόνα 10.10 Σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, κ.ά, 2012, σελ 73).

> **Η γραφική παράσταση της $y = αx + β$, $β \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = αx$, που διέρχεται από το σημείο (0, β) του άξονα y′y.**

Στην 6^{η} ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=4 (Μ.Ο=3,45). Στη Φυσική, η διάμεσος είναι Δμ=3 (Μ.Ο=2,77).

Η άποψη των μαθητών είναι ότι τα Μαθηματικά έχουν σημαντικότερο ρόλο (51,4% συμφωνούν απλώς ή πλήρως και 18,1% διαφωνούν απλώς ή πλήρως) στην επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία από ότι η Φυσική (22,2% συμφωνούν απλώς ή πλήρως και 41,7% διαφωνούν απλώς ή πλήρως).

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των Μαθηματικών σε άλλους κλάδους, από τους οποίους μπορούμε να αποκομίσουμε οφέλη. Αρκεί να κατανοήσουν ότι τα Μαθηματικά αποτελούν πυλώνα σε πολλούς κλάδους και μέσω αυτού να συνειδητοποιήσουν τη σημασία των Μαθηματικών (Michelsen, 2006). Η ανάγκη να ενισχύσουμε αυτή την άποψη των μαθητών απορρέει από τη παγκόσμια ανταγωνιστική αγορά, όπου συνεχώς οι επαγγελματίες καθοδηγούνται στη δημιουργία συνδέσεων των κλάδων (Wang, 2005)

Στην 7^{η} ερώτηση: η διάμεσος στα Μαθηματικά είναι Δμ=3 (Μ.Ο=3,14). Στη Φυσική η διάμεσος είναι Δμ=3 (Μ.Ο=2,78).

Σχετικά με το πόσο βοηθούν οι δύο κλάδοι στην αντιμετώπιση προβλημάτων στη καθημερινή ζωή οι μαθητές βρίσκουν περισσότερο χρήσιμα τα Μαθηματικά (33,3% συμφωνούν απλώς ή πλήρως και 19,4% διαφωνούν απλώς ή πλήρως) έναντι της Φυσικής (20,9% συμφωνούν απλώς ή πλήρως και 33,3% διαφωνούν απλώς ή πλήρως).

Στις απαντήσεις των μαθητών, στην 7^{η} ερώτηση, δημιουργήθηκε ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα. Σύμφωνα με την άποψη του Duval (2006), η μόνη πρόσβαση στα Μαθηματικά γίνεται με σημάδια (signs) και σημειωτικές αναπαραστάσεις και δεν υπάρχει η πρόσβαση μέσω αντίληψης ή παρατήρησης με όργανα, όπως στα διάφορα φαινόμενα με τις φυσικές επιστήμες. Παρόλο αυτά, οι μαθητές είχαν την άποψη πως τα Μαθηματικά βοηθούν καλύτερα στην αντιμετώπιση των καθημερινών προβλημάτων έναντι της Φυσικής. Η ίδια άποψη όμως εκφράστηκε και στο ερωτηματολόγιο του Kapucu (2016). Αυτή η άποψη ίσως συνδέεται με το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων, καθώς επίσης ίσως και με το γεγονός πως οι μαθητές θεωρούν ότι τα εργαστηριακά μαθήματα δεν ανταποκρίνονται στη καθημερινή τους ζωή (Korsunsky, 2002). Αν και είναι κοινά αποδεκτός ο ρόλος της Φυσικής στην ερμηνεία πολλών φαινομένων, η θετική στάση για το ρόλο των Μαθηματικών ίσως εξηγείται από την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών τα οποία αναπτύχθηκαν, για να υπηρετούν συγκεκριμένες ανάγκες και αυτή η άποψη έχει εμποτιστεί στις αντιλήψεις των ανθρώπων (Ernest, 2016).

10.2 Στατιστικά - ανάλυση δεδομένων στις ΄΄γνώσεις΄΄ (β΄ μέρος ερωτηματολογίου)

Το ερωτηματολόγιο, όπως προαναφέρθηκε, δόθηκε στα τμήματα γενικής παιδείας σε μαθητές της Β Λυκείου. Θεωρήθηκε όμως σκόπιμο να μελετηθούν τα δεδομένα και στο σύνολό τους αλλά και χωριστά για τους μαθητές που έχουν επιλέξει την θετική κατεύθυνση.

1η ερώτηση: Η πρώτη ερώτηση είχε σαν σκοπό να διερευνήσει:

- κατά πόσο οι μαθητές έχουν την ικανότητα, από τη δομή και τον συμβολισμό των μεταβλητών, να αναγνωρίζουν το αντίστοιχο γράφημα στα Μαθηματικά ή στη Φυσική.
- τι προκύπτει από την σύγκριση των αντίστοιχων επιδόσεων στα Μαθηματικά και τη Φυσική

Πίνακας 10.2 Η μέση τιμή (των μαθητών γενικής παιδείας) στην 1η ερώτηση ανά υποερώτημα και κλάδο

	Μ1_Α	Φ1_Α	Μ1_Β	Φ1_Β	Μ1_Γ	Φ1_Γ	Μ1_Δ	Φ1_Δ	Μ1_Ε	Φ1_Ε	Μ1_ΣΤ	Φ1_ΣΤ
Mean	0.56	0.61	0.80	0.75	0.56	0.70	0.57	0.55	0.77	0.57	0.33	0.49

Πίνακας 10.3 Η μέση τιμή (των μαθητών θετικής κατεύθυνσης) στην 1η ερώτηση ανά υποερώτημα και κλάδο

	Μ1_Α	Φ1_Α	Μ1_Β	Φ1_Β	Μ1_Γ	Φ1_Γ	Μ1_Δ	Φ1_Δ	Μ1_Ε	Φ1_Ε	Μ1_ΣΤ	Φ1_ΣΤ
Mean	0.58	0.75	0.83	0.81	0.62	0.78	0.65	0.69	0.83	0.50	0.38	0.6

Στατιστικά:

Η μέση τιμή στα Μαθηματικά ήταν 3,54 (7 απάντησαν σε όλες σωστά και 13 απάντησαν σε 5 από τις 6) και στη Φυσική ήταν 3,67 (5 απάντησαν σωστά σε όλες και 17 απάντησαν σε 5 από τις 6).

1_Α Η ερώτηση αφορούσε τη δομή $ψ=αχ^2$ με $α\neq0$. Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν 0,56 (απάντησαν 40/71 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,61 (απάντησαν 42/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην ερώτηση 1_Α τα αποτελέσματα τους ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,58 (απάντησαν 21/36 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική 0,75 (απάντησαν 27/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που δεν απάντησαν σε καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), σε μία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.4 & Πίνακας 10.5 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_A

Συσχέτιση Γενικής:1_A		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	14	20%
1	31	44,3%
2	25	35,7
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_A		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	5	13,5%
1	16	43,2%
2	16	43,2%
Σύνολο	37	100%

1_B Η ερώτηση αφορούσε τη δομή ψ=αχ+β με β≠0. Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,8 (απάντησαν 57/71 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,75 (απάντησαν 52/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση στην ερώτηση 1_B ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,83 (απάντησαν 30/36 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,81 (απάντησαν 29/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακές παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που δεν απάντησαν σε καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), σε μία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.6 &Πίνακας 10.7 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_B

Συσχέτιση Γενικής:1_B		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	6	8,6%
1	20	28,6%
2	44	62,9%
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_B		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	2	5,4%
1	11	29,7%
2	24	64,9%
Σύνολο	37	100%

1_Γ Η ερώτηση αφορούσε τη ψ=αχ. Η μέση τιμή ήταν Μ.Ο=0,56 για τα Μαθηματικά (απάντησαν 40/72 σωστά) και Μ.Ο=0,70 στη Φυσική (απάντησαν 48/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην ερώτηση 1_Γ ήταν: η μέση τιμή ήταν Μ.Ο=0,62 για τα Μαθηματικά (απάντησαν 23/37 σωστά) και Μ.Ο=0,78 για τη Φυσική (απάντησαν 28/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που δεν απάντησαν σε καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), σε μία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.8 & Πίνακας 10.9 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_Γ

Συσχέτιση Γενικής:1_Γ		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	15	21,4%
1	23	32,9%
2	32	45,7%
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_Γ		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	6	16,2%
1	11	29,7%
2	20	54,1%
Σύνολο	37	100%

Πίνακας 10.10 Paired Samples Statics στην ερώτηση 1_Γ (Γενικής παιδείας)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ1_Γ	0,55	69	0,501	0,060
Φ1_Γ	0,70	69	0,464	0,056

Πίνακας 10.11 Paired Samples Correlations στην ερώτηση 1_Γ (Γενικής παιδείας)

	N	Correlation	Sig.
Pair: ΜΙ_Γ & ΦΙ_Γ	69	0,352	0.003

Πίνακας 10.12 Paired Samples Test στην ερώτηση 1_Γ (Γενικής παιδείας)

	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: ΜΙ_Γ & ΦΙ_Γ	-0,145	0,550	0,066	-0,277	-0,013	-2,190	68	0,032

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_1_Γ (mean=0,55 και St.dev=0.501) και στην ερώτηση ΦΓ_1_Γ (M=0,70 και St.dev=0.464) διαφέρει στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (t=-2.190 , df=68 , 2-tailed=0.032)

1_Δ Η ερώτηση αφορούσε τη δομή $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi$, με $\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$. Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,57 (απάντησαν 41/72 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,55 (απάντησαν 38/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση στην ερώτηση 1_Δ ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν 0,65 (απάντησαν 24/37 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική 0,69 (απάντησαν 25/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακές παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που δεν απάντησαν σε καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), σε μια ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.13 & Πίνακας 10.14 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_Δ

Συσχέτιση Γενικής:1_Δ		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	18	25,7%
1	25	35,7%
2	27	38,6%
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_Δ		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	6	16,2%
1	13	35,1%
2	18	48,6%
Σύνολο	37	100%

1_Ε Η ερώτηση αφορούσε τη δομή χψ=σταθερά. Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,77 (απάντησαν 55/71 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,57 (απάντησαν 39/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση στην ερώτηση 1_Ε ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,83 (απάντησαν 30/36 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,5 (απάντησαν 18/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που απάντησαν καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), μία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.15 & Πίνακας 10.16 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_Ε

Συσχέτιση Γενικής:1_Ε		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	8	11,4%
1	32	45,7%
2	30	42,9%
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_Ε		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	4	10,8%
1	18	48,6%
2	15	40,5%
Σύνολο	37	100%

Πίνακας 10.17 Paired Samples Statics στην ερώτηση 1_Ε (Γενικής παιδείας)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ1_Ε	0,76	68	0,427	0,052
Φ1_Ε	0,57	68	0,498	0,060

Πίνακας 10.18 Paired Samples Correlations στην ερώτηση 1_Ε (Γενικής παιδείας)

	N	Correlation	Sig.
Pair: MI_E & ΦI_E	68	0,012	0.920

Πίνακας 10.19 Paired Samples Test στην ερώτηση 1_Ε (Γενικής παιδείας).

	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: MI_E & ΦI_E	0,191	0,652	0,079	0,033	0,349	2,417	67	0,018

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_1_Ε (M=0,76 και St.dev=0.427) και στην ερώτηση ΦΓ_1_Ε (M=0,57 και St.dev=0.498) διαφέρουν στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητα 0,05 (t=2.417 , df=67 , 2-tailed=0.018)

Παρατηρούμε μεγάλη διαφορά στη Φυσική σε σχέση με τα Μαθηματικά. Επιπλέον, είναι η μόνη ερώτηση που οι μαθητές θετικής κατεύθυνσης εμφανίζουν χαμηλότερα αποτελέσματα από το γενικό σύνολο στη Φυσική.

1_ΣΤ Η ερώτηση αφορούσε τη δομή χ=σταθερά ή u=σταθερή. Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,33 (απάντησαν 24/72 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,49 (απάντησαν 34/69 σωστά).

Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση στην ερώτηση 1_ΣΤ ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=0,38 (απάντησαν 14/37 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=0,61 (απάντησαν 22/36 σωστά).

Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν το πλήθος των ατόμων γενικής και θετικής κατεύθυνσης που δεν απάντησαν σε καμία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή ,00), σε μία ερώτηση σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 1,00) και στις δύο ερωτήσεις σωστά (αντιστοιχεί στη τιμή 2,00).

Πίνακας 10.20 &Πίνακας 10.21 Συχνότητα και Ποσοστό μαθητών που απάντησαν κοινά στην 1_Ε

Συσχέτιση Γενικής:1_ΣΤ		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	30	42,9%
1	22	31,4%
2	18	25,7%
Σύνολο	70	100%

Συσχέτιση Θετικής: 1_Ε		
Τιμή	Συχνότητα	Ποσοστό
0	13	35,1%
1	12	32,4%
2	12	32,4%
Σύνολο	37	100%

Πίνακας 10.22 Paired Samples Statics στην ερώτηση 1_ΣΤ (Γενικής παιδείας)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ1_ΣΤ	0,35	69	0,480	0,058
Φ1_ΣΤ	0,49	69	0,504	0,061

Πίνακας 10.23 Paired Samples Correlations στην ερώτηση 1_ΣΤ (Γενικής παιδείας)

	N	Correlation	Sig.
Pair: MI_ΣΤ & ΦΙ_ΣΤ	69	0,376	0.001

Πίνακας 10.24 Paired Samples Test στην ερώτηση 1_ΣΤ (Γενικής παιδείας)

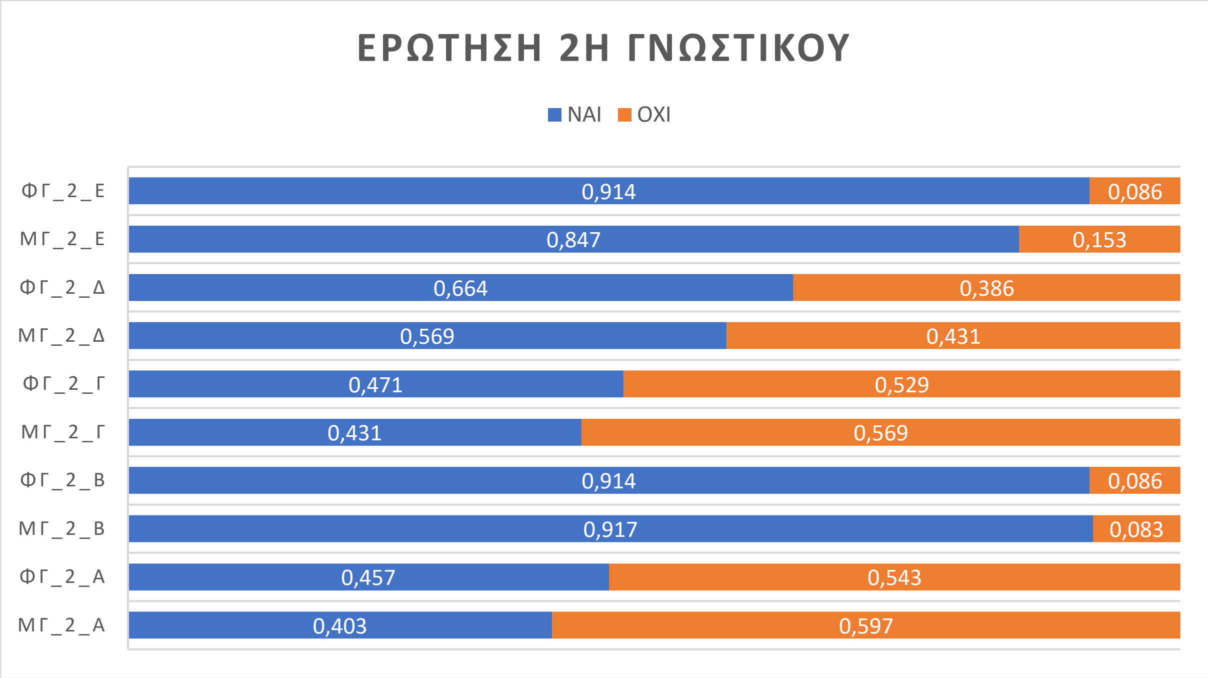
	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: MI_ΣΤ & ΦΙ_ΣΤ	-0,145	0,550	0,066	-0,277	-0,013	-2,190	68	0,032

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_1_ΣΤ (M=0,35 και St.dev=0.480) και στην ερώτηση ΦΓ_1_ΣΤ (M=0,49 και St.dev=0.504) διαφέρει στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (t=-2,190 , df=68 , 2-tailed=0.032)

2η ερώτηση: Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,17 (απάντησαν 16/72 σε όλες σωστά και 10/72 σε 4 από τις 5 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=3,37 (απάντησαν 21/70 σε όλες σωστά και 8/70 σε 4 από τις 5 σωστά).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα επιμέρους ερωτήματα τόσο στα Μαθηματικά όσο στη Φυσική.

Γράφημα 10.1 Μέση τιμή ανά υποερώτημα και κλάδο στη $2^η$ ερώτηση γνωστικού



Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση στη $2^η$ ερώτηση ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,35 (απάντησαν 10/37 σε όλες σωστά και 6/37 σε 4 από τις 5 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική ήταν Μ.Ο=3,61 (απάντησαν 15/36 σε όλες σωστά και 2/36 σε 4 από τις 5 σωστά).

Κοινές απαντήσεις: στη γενική παιδεία 9 άτομα απάντησαν σε όλες σωστά (11 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις στη $2^η$ ερώτηση) 6 από τους μαθητές που ήταν στη θετική κατεύθυνση απάντησαν σε όλες σωστά (3 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις). Ανά ερώτημα το σύνολο των κοινών απαντήσεων είναι:

Πίνακας 10.25 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Γενικής παιδείας) ανά υποερώτημα στη $2^η$ ερώτηση γνωστικού

Γενική παιδεία Ν=70	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	18	28	24
Β	59	1	10
Γ	19	26	25
Δ	26	13	31
Ε	59	5	6

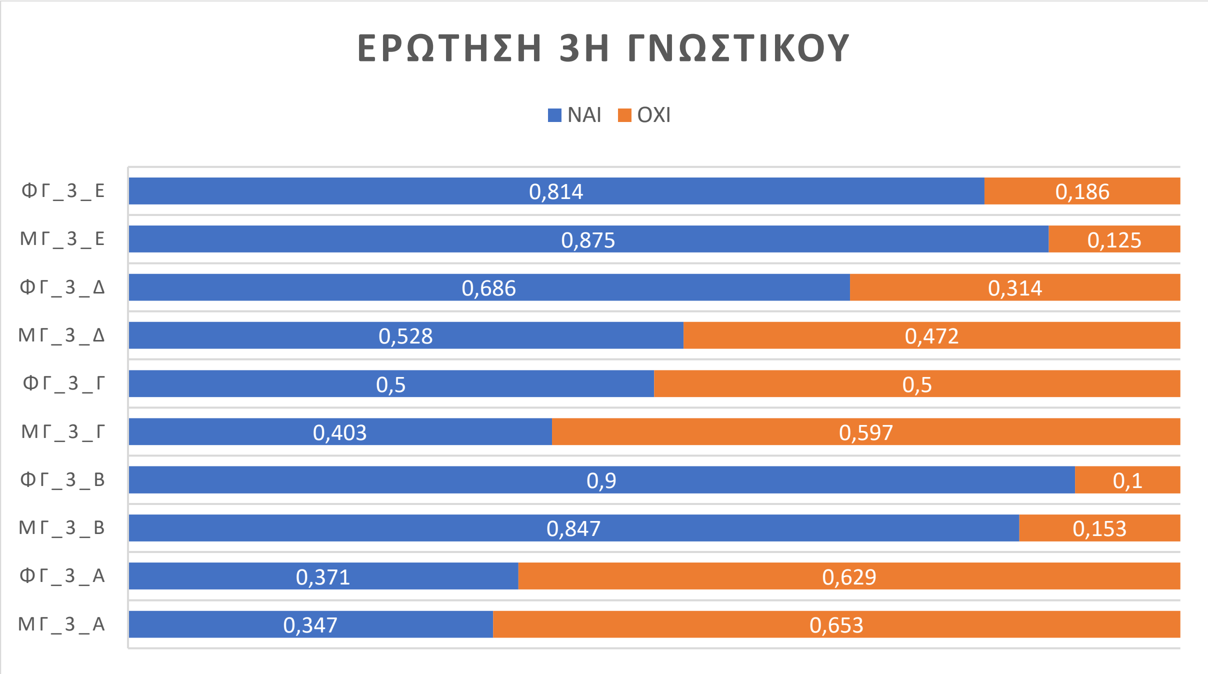
Πίνακας 10.26 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Θετικής κατεύθυνσης) ανά υποερώτημα στη $2^η$ ερώτηση γνωστικού

Θετική κατεύθυνση Ν=36	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	12	12	12
Β	30	0	6
Γ	11	10	15
Δ	15	4	17
Ε	32	1	3

3η ερώτηση: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,00 (απάντησαν 11/72 σε όλες σωστά και 12/72 σε 4 από τις 5 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=3,27 (απάντησαν 18/70 σε όλες σωστά και 5/70 σε 4 από τις 5 σωστά).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα επιμέρους ερωτήματα τόσο στα Μαθηματικά όσο στη Φυσική.

Γράφημα 10.2 Μέση τιμή ανά υποερώτημα και κλάδο στη 3η ερώτηση γνωστικού



Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην 3η ερώτηση ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,30 (απάντησαν 8/37 σε όλες σωστά και 7/37 σε 4 από τις 5 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική ήταν Μ.Ο=3,58 (απάντησαν 13/36 σε όλες σωστά και 2/36 σε 4 από τις 5 σωστά).

Κοινές απαντήσεις: στη γενική παιδεία 9 άτομα απάντησαν σε όλες σωστά (10 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις στη 3η ερώτηση) 7 από τους μαθητές που ήταν στη θετική κατεύθυνση απάντησαν σε όλες σωστά (6 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις). Ανά ερώτημα το σύνολο των κοινών απαντήσεων είναι:

Πίνακας 10.27 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Γενικής παιδείας) ανά υποερώτημα στη 3η ερώτηση γνωστικού

Γενική παιδεία N=70	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
A	15	35	20
B	56		11
Γ	17	24	29
Δ	30	15	25
E	54	6	10

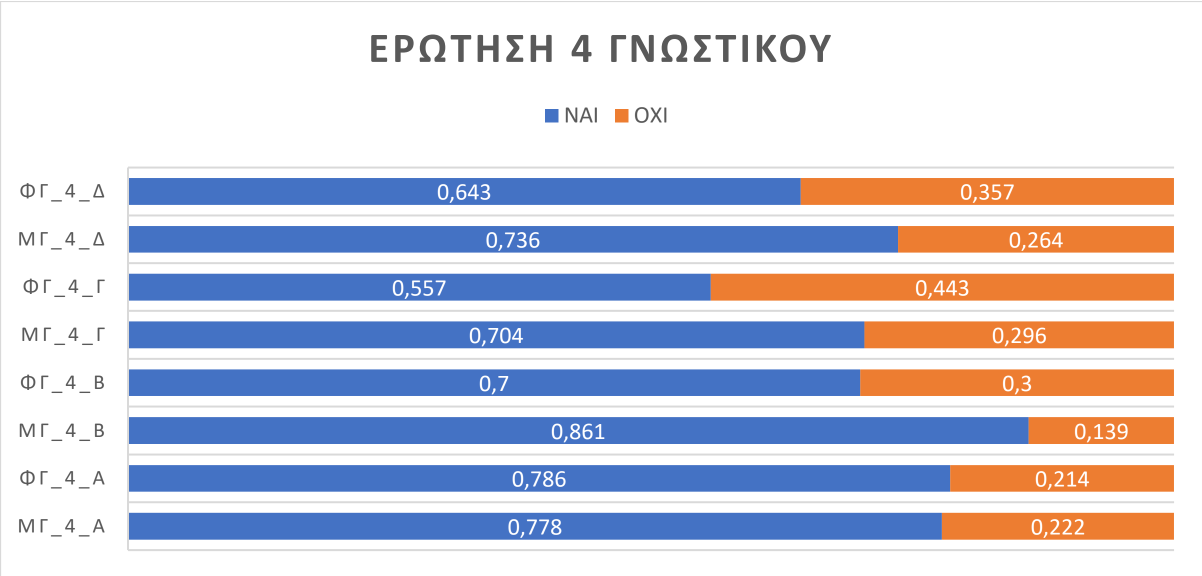
Πίνακας 10.28 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Θετικής κατεύθυνσης) ανά υποερώτημα στη 3η ερώτηση γνωστικού

Θετική κατεύθυνση N=36	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	9	17	10
Β	30	0	6
Γ	11	11	14
Δ	21	5	10
Ε	31	1	4

4η ερώτηση: Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,08 (απάντησαν 35/71 σε όλες σωστά και 14/71 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=2,69 (απάντησαν 18/70 σε όλες σωστά και 5/70 σε 3 από τις 4 σωστά).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα επιμέρους ερωτήματα τόσο στα Μαθηματικά όσο στη Φυσική.

Γράφημα 10.3 Μέση τιμή ανά υποερώτημα και κλάδο στην 4η ερώτηση γνωστικού



Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην 4η ερώτηση ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=2,89 (απάντησαν 14/37 σε όλες σωστά και 9/37 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική ήταν Μ.Ο=2,83 (απάντησαν 14/36 σε όλες σωστά και 9/36 σε 3 από τις 4 σωστά).

Παρατηρούμε πως η μέση τιμή στα Μαθηματικά στη θετική κατεύθυνση μειώθηκε.

Κοινές απαντήσεις: στη γενική παιδεία 16 άτομα απάντησαν σε όλες σωστά (30 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις στη 4η ερώτηση) 9 από τους μαθητές που ήταν στη θετική κατεύθυνση απάντησαν σε όλες σωστά (2 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις). Ανά ερώτημα το σύνολο των κοινών απαντήσεων είναι:

Πίνακας 10.29 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Γ.Π.) ανά υποερώτημα στη 4η ερώτηση γνωστικού

Γενική παιδεία N=70	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	43	3	24
Β	43	4	23
Γ	29	11	29
Δ	34	7	29

Πίνακας 10.30 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Θετικής κατεύθυνσης) ανά υποερώτημα στη 4η ερώτηση γνωστικού

Θετική κατεύθυνση N=36	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	22	3	11
Β	23	3	10
Γ	16	7	13
Δ	19	4	13

Πίνακας 10.31 Paired Samples Statics στη 4η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ4	3,1014	69	1,05920	0,12751
Φ4	2,6812	69	1,13102	0,13616

Πίνακας 10.32 Paired Samples Correlations στη 4η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

	N	Correlation	Sig.
Pair: Μ4 & Φ4	69	0,113	0.354

Πίνακας 10.33 Paired Samples Test στη 4η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

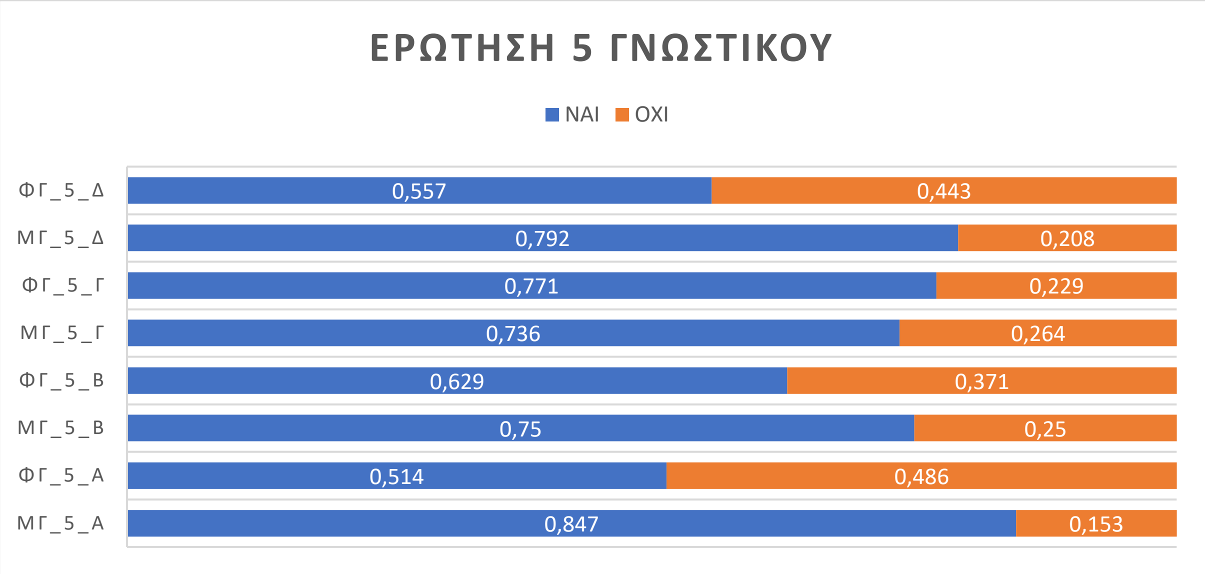
	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: Μ4 & Φ4	0,42029	1,45931	0,17568	0,06973	0,77085	2,392	68	0,020

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_2 (M=3,10 και St.dev=1,06) και στην ερώτηση ΦΓ_2 (M=2,68 και St.dev=1,13) διαφέρει στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (t=2,392, df=68, 2-tailed=0.020)

5η ερώτηση: Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,13 (απάντησαν 38/72 σε όλες σωστά και 11/71 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=2,47 (απάντησαν 19/70 σε όλες σωστά και 11/70 σε 3 από τις 4 σωστά).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα επιμέρους ερωτήματα τόσο στα Μαθηματικά όσο στη Φυσική.

Γράφημα 10.4 Μέση τιμή ανά υποερώτημα και κλάδο στη 5η ερώτηση γνωστικού



Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην 5η ερώτηση ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=3,35 (απάντησαν 24/37 σε όλες σωστά και 5/37 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική ήταν Μ.Ο=2,83 (απάντησαν 15/36 σε όλες σωστά και 4/36 σε 3 από τις 4 σωστά).

Πίνακας 10.34 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Γ. Π.) ανά υποερώτημα στη 5η ερώτηση γνωστικού

Γενική παιδεία Ν=70	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	33	7	30
Β	32	6	32
Γ	43	7	20
Δ	30	5	35

Πίνακας 10.35 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Θετική κατεύθυνση) ανά υποερώτημα στη 5η ερώτηση γνωστικού

Θετική κατεύθυνση Ν=3	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	21	2	13
Β	21	1	14
Γ	25	3	8
Δ	19	1	16

Πίνακας 10.36 Paired Samples Statics στη 5η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ5	3,1429	70	1,05344	0,12591
Φ5	2,4714	70	1,12574	0,13455

Πίνακας 10.37 Paired Samples Correlations στην 5η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

	N	Correlation	Sig.
Pair: Μ5 & Φ5	70	0,199	0.099

Πίνακας 10.38 Paired Samples Test στην 5η ερώτηση (Γενικής παιδείας)

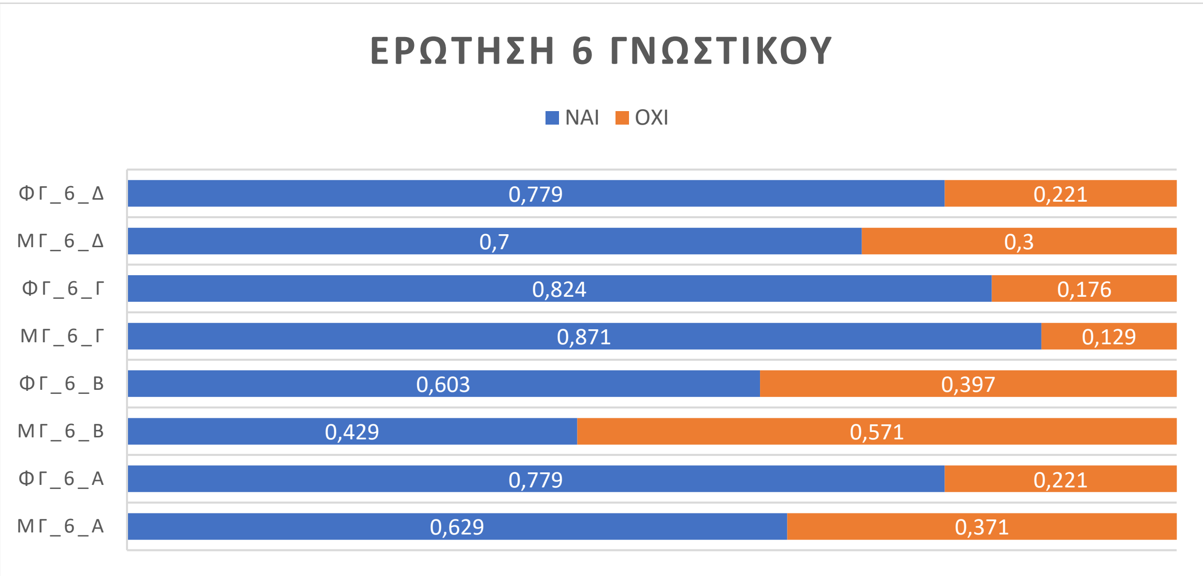
	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: Μ5 & Φ5	0,67143	1,38021	0,16497	0,34233	1,00053	4,070	69	0,000

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_5 (M=3,14 και St.dev=1,05) και στην ερώτηση ΦΓ_5 (M=2,47 και St.dev=1,13) διαφέρει στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (t=4,070, df=69, 2-tailed=0.000)

$6^{η}$ ερώτηση: Η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=2,63 (απάντησαν 22/70 σε όλες σωστά και 8/70 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική Μ.Ο=2,99 (απάντησαν 37/68 σε όλες σωστά και 2/68 σε 3 από τις 4 σωστά).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα επιμέρους ερωτήματα τόσο στα Μαθηματικά όσο στη Φυσική.

Γράφημα 10.5 Μέση τιμή ανά υποερώτημα και κλάδο στην $6^{η}$ ερώτηση γνωστικού



Αν απομονωθούν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν θετική κατεύθυνση, στην $6^{η}$ ερώτηση ήταν: η μέση τιμή για τα Μαθηματικά ήταν Μ.Ο=2,56 (απάντησαν 10/36 σε όλες σωστά και 6/36 σε 3 από τις 4 σωστά) και η μέση τιμή για την Φυσική ήταν Μ.Ο=3.19 (απάντησαν 23/36 σε όλες σωστά και δεν υπήρχαν μαθητές που απάντησαν σε 3 από τις 4 σωστά).

Κοινές απαντήσεις: στη γενική παιδεία 18 άτομα απάντησαν σε όλες σωστά (7 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις στην $6^{η}$ ερώτηση), 9 από τους μαθητές που ήταν στη θετική κατεύθυνση απάντησαν σε όλες σωστά (3 μαθητές είχαν ίδιες απαντήσεις).

Πίνακας 10.39 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Γενικής παιδείας) ανά υποερώτημα στην $6^{η}$ ερώτηση γνωστικού

Γενική παιδεία N=66	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	37	9	20
Β	23	19	24
Γ	51	4	11
Δ	39	6	21

Πίνακας 10.40 Κοινές απαντήσεις των μαθητών (Θετικής κατεύθυνσης) ανά υποερώτημα στη 5η ερώτηση γνωστικού

Θετική κατεύθυνση N=35	Σε όλα σωστά	Σε όλα λάθος	Σε 1 από τα 2 σωστά
Α	22	3	10
Β	11	9	15
Γ	27	3	5
Δ	22	2	11

Πίνακας 10.41 Paired Samples Statics στην 6η ερώτηση (Θετικής κατεύθυνσης)

Ερώτηση	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Μ6	2,6286	35	1,05957	0,17910
Φ6	3,2286	35	1,13981	0,19266

Πίνακας 10.42 Paired Samples Correlations στην 6η ερώτηση (Θετικής κατεύθυνσης)

	N	Correlation	Sig.
Pair: M6 & Φ6	35	0,365	0.031

Πίνακας 10.43 Paired Samples Test στην 6η ερώτηση(Θετικής κατεύθυνσης)

	Paired Differences							
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper	t	df	Sig (2-tailed)
Pair: Μ6 & Φ6	-0,600	1,24144	0,20984	-1,026	-0,1736	-2,859	34	0,007

Η μέση τιμή στην ερώτηση ΜΓ_6 (Μ=2,63 και St.dev=1,06) και στην ερώτηση ΦΓ_6 (Μ=3,23 και St.dev=1,14) διαφέρει στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (t=-2,859, df=34, 2-tailed=0.007)

Πίνακας 10.44 Συνολικά στατιστικά ανά μάθημα (Γενική παιδεία)

Γενική παιδεία	Σύνολο Μαθηματικά	Σύνολο Φυσική
N Valid	67	68
N Missing	8	7
Mean	18,6567	18,5735
Std. Error of Mean	0,51374	0,50733
Std. Deviation	4,20516	4,18354
Range	18	18
Minimum	10	10
Maximum	28	28

Πίνακας 10.45 Συνολικά στατιστικά ανά μάθημα (Θετική κατεύθυνση).

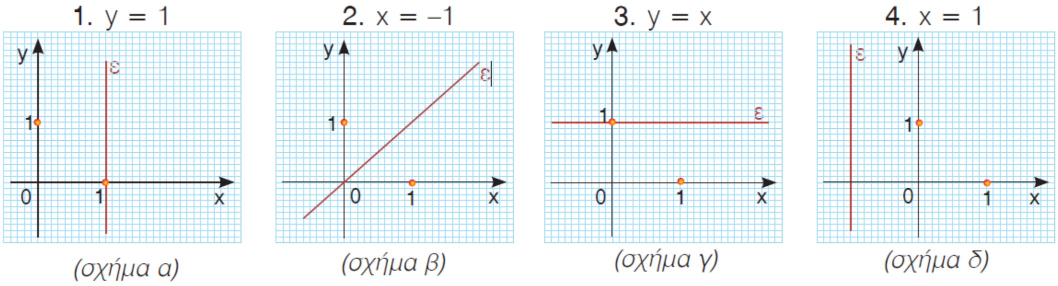
Θετική κατεύθυνση	Σύνολο Μαθηματικά	Σύνολο Φυσική
N Valid	34	36
N Missing	3	1
Mean	19,4706	20,1944
Std. Error of Mean	0,70044	0,65686
Std. Deviation	4,08423	3,94113
Range	18	15
Minimum	10	13
Maximum	28	28

10.3 Συζήτηση στις ΄΄γνώσεις΄΄ (β΄ μέρος ερωτηματολογίου)

Για την 1^{η} ερώτηση: Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας βρίσκονται σε συμφωνία με τα ευρήματα των Bell & Janvier, (1981) σχετικά με τη δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ ευθείας γραμμής και εξίσωσης, όπου μόλις το 5-30% κατανόησε αυτή τη συσχέτιση στο δείγμα τους (το ποσοστό αυξανόταν όσο μεγάλωνε ηλικιακά το δείγμα το οποίο ήταν από Β΄ Γυμνασίου έως Δ΄ Γυμνασίου). Είναι μία δυσκολία που ίσως οφείλεται τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών όσο και στα σχολικά εγχειρίδια. Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και στο σχολικό βιβλίο του Λυκείου, μέχρι τη στιγμή που ερευνήσαμε το δείγμα, δεν υπάρχει στόχος συσχέτισης εξίσωσης με αντίστοιχο γράφημα. Στο Γυμνάσιο είναι περιορισμένες οι φορές που γίνεται αυτό. Ενδεικτικά παραθέτουμε μία άσκηση από το βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου:

Εικόνα 10.11 Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργανάς, Τσικοπούλου & Χρυσοβέργης, 2013, σελ. 126)

3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:



α	β	γ	δ

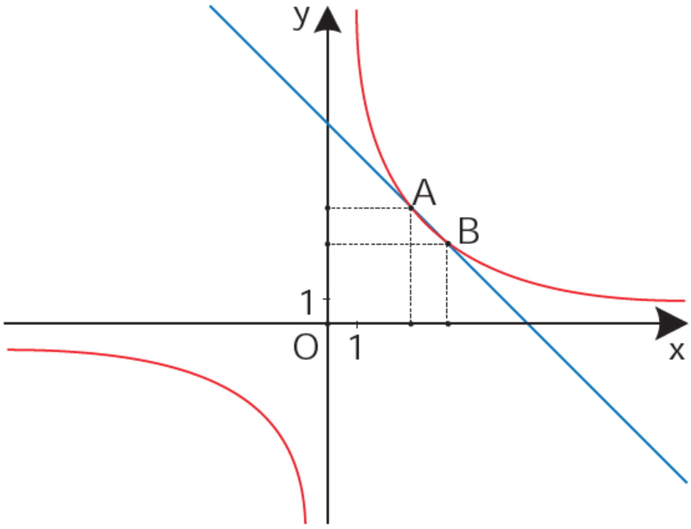
Στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών, συχνά τα γραφήματα είναι απομονωμένα από τη μελέτη των αντίστοιχων συμβολικών μορφών. Στα επιμέρους ερωτήματα προκαλεί έκπληξη η χαμηλή επίδοση στην ερώτηση ΜΓ_1_Γ (δομή ψ=αχ) σε σχέση με την ερώτηση ΜΓ_1_Β (δομή ψ=αχ+β). Εύρημα που αντικρούει σε πολλές προϋπάρχουσες έρευνες και απόψεις, όπου θεωρούν πρωταρχική έννοια την ψ=αχ και χτίζουν πάνω σε αυτή την κατανόηση της ψ=αχ+β (Moschkovich, 1998; Chiu et al., 2001). Επιπλέον έρευνες (Beichner, 1993; Wemyss & Kampen, 2013) δείχνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν περισσότερες δυσκολίες στη γραμμική εξίσωση όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων παρά όταν διέρχεται. Μία πιθανή αιτία αυτού του απρόσμενου αποτελέσματος ίσως είναι ότι σύμφωνα με τους Pierce et al. (2010) το β παραλείπεται πολλές φορές από τις λεκτικές και συμβολικές περιγραφές των μαθητών. Στο σχολικό εγχειρίδιο, το οποίο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο για τις εννοιολογικές εικόνες (concept images) που έχουν αναπτύξει οι μαθητές στη τάξη (Vinner, 1983), δεν αναφέρεται καθόλου η δομή ψ=αχ (στη Β΄ Λυκείου γενικής παιδείας), ενώ τονίζεται σε αρκετές περιπτώσεις η αχ+βχ=γ (σε όλες τις περιπτώσεις εκτός όταν γ=0).

Στο ερώτημα Ε υπάρχει σαφής διαφοροποίηση και το πιθανότερο είναι να προκύπτει από τα σχολικά βιβλία. Στα Μαθηματικά, η αντιστρόφως ανάλογη σχέση εμφανίζεται στην Άλγεβρα Β΄ Λυκείου σε δύο λυμένα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου με επίλυση τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά στη σελίδα 25 (εικόνα 10.12) και στη σελίδα 26-27. Ακόμα, υπάρχει και σαν άσκηση (εικόνα 10.13) που επίσης ζητά γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος. Στη Φυσική η γραφική παράσταση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών δεν εμπεριέχεται σε κανένα παράδειγμα, παρόλο που είναι ένα θέμα που χρησιμοποιούν καθημερινά οι μαθητές (π.χ θέλω να διανύσω 10km πώς εξαρτάται ο χρόνος που απαιτείται σε σχέση με τη ταχύτητα;). Επίσης στην έρευνα των De Bock, Van Dooren & Verschaffel (2015) στην αντιστοίχιση του γραφήματος με δοσμένο τύπο, σε αυτή την περίπτωση πήραν το χαμηλότερο ποσοστό (43%) σε σχέση με όλες τις άλλες μορφές (ψ=αχ & ψ=αχ+β).

Εικόνα 10.12 Σχολικό εγχειρίδιο Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Παπασταυρίδης, Πολύζος, & Σβέρκος, 2012, σελ. 25)

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος x+y=5 παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση xy = 6 παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Εικόνα 10.13 Σχολικό εγχειρίδιο Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2012, σελ. 27)

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

Στο ερώτημα ΣΤ η βαθμολογία των μαθητών ήταν και στους δύο κλάδους χαμηλή. Ένα αποτέλεσμα που είναι σε συμφωνία με την έρευνα των Tall & Bakar (1992), σύμφωνα με την οποία σχεδόν οι μισοί μαθητές (53%) και η πλειοψηφία των φοιτητών (69%) δεν αναγνώρισαν την ψ=4 ως συνάρτηση. Το σκεπτικό της επιλογής τους ήταν ότι το ψ δεν εξαρτάται από το χ. Στην ερώτηση βέβαια που τέθηκε, η χ=4 δεν είναι συνάρτηση αλλά μία γραμμή και η ερώτηση αφορούσε το είδος του γραφήματος.

Στη Φυσική είδαμε ότι στατιστικώς έχουν καλύτερα αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα αυτό δεν ήταν αναμενόμενο αλλά όταν εξετάστηκαν τα σχολικά εγχειρίδια, διαπιστώθηκε ότι δεν αποτελεί έκπληξη. Η εξίσωση της ευθείας που εξετάσαμε είναι η αχ+βψ=γ, με β=0 και α≠0. Η ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου αυτής, βρίσκεται τόσο στο σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών στη Γ΄ Γυμνασίου όσο και σε αυτό της Β΄ Λυκείου. Οι ασκήσεις που αναφέρονται σε αυτή (χ=κ) είναι σε παραδείγματα και ασκήσεις μόνο στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου. Παραθέτουμε μία άσκηση αναγνώρισης (εικόνα 10.14)

Εικόνα 10.14 Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.ά., 2013, σελ. 126)

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –3) και είναι παράλληλη στον άξονα x′x έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (4, –2) και είναι παράλληλη στον άξονα y′y έχει εξίσωση:

α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

Από τις δύο ασκήσεις που βρίσκονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Γυμνασίου (εικόνα 10.15), η μία αναφέρεται στη σχεδίαση και η άλλη στην εξαγωγή αποτελεσμάτων που βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της παραγράφου.

Εικόνα 10.15 Σχολικό εγχειρίδιο Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.ά., 2013, σελ. 127)

5 α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:

$x = -1$, $x = 5$, $y = -2$ και $y = 3$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται.

6 Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y = 6$ να παριστάνει ευθεία που είναι:

α) παράλληλη στον άξονα x′x β) παράλληλη στον άξονα y′y.

Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση.

Στη συνέχεια της σχολικής τους διαδρομής, η μορφή χ=κ δεν αναφέρεται σε καμία άσκηση των σχολικών εγχειριδίων (γενικής παιδείας) παρά μόνο στο θεωρητικό πλαίσιο της γραμμικής εξίσωσης στη σελίδα 10 του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου.

Από τα προαναφερθέντα μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα, το οποίο συμφωνεί με τους Pierce et al. (2010), πως η επιλεγόμενη σημειογραφία προσέδωσε μία εξάρτηση η οποία για τους μαθητές ήταν ασαφής.

Γενικά συμπεράσματα για την 1η: Η ερώτηση 1η έρχεται σε συμφωνία με τους Bock et al. (2015) οι οποίοι διαπιστώνουν ότι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες στην ικανότητα διαχωρισμού συναφών συναρτήσεων. Επίσης διαπιστώσαμε την δυσκολία των μαθητών να ομαδοποιούν τις μορφές (π.χ για να γίνει κατανοητό ότι η ψ=χ+3 και η ψ=2-χ προκύπτουν από τη γραμμική συνάρτηση), η οποία σύμφωνα με Ellermeijer & Heck (2002) δημιουργεί ένα από τα μεγαλύτερα εμπόδια για τον χειρισμό των παραμέτρων. Το πώς παρουσιάζονται τα γραφήματα στα σχολικά εγχειρίδια τόσο σε παραγράφους του ίδιου μαθήματος όσο και σε άλλου μαθήματος προκαλεί μια δυσχέρεια στις ομαδοποιήσεις και την δημιουργία ενός ξεχωριστού σιλό της γνώσης (τόσο μεταξύ του ίδιου κλάδου όσο και μεταξύ διαφορετικών κλάδων) και προκαλεί δυσκολία στην εύρεση κοινού πεδίου (Pearson, 2015).

Για τη 2η και 3η ερώτηση: Το αποτέλεσμα συνάδει με την άποψη που παρατίθεται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών όπου αναφέρει:

Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή (συνάρτηση), με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση).

Ένα αποτέλεσμα που ενισχύει την ανάγκη να προστεθούν και οι άλλες μορφές στο σχολικό βιβλίο, καθώς οι υπάρχουσες ή είναι λίγες (με γραφική παράσταση) ή απουσιάζουν τελείως (σε μορφή πινάκων τιμών).

Για τη 4η ερώτηση: Στην 4η ερώτηση υπήρχε σαφής διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων αφού στα Μαθηματικά υπήρχαν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη Φυσική. Αυτό είναι σε συμφωνία με την άποψη ότι οι μαθητές ερμηνεύουν το γράφημα ως εικόνα της υποκειμενικής κατάστασης (Clement, 1985; Beichner, 1994; Bektasli, 2006; Wemyss & van Kampen, 2013). Είναι επίσης ένα αποτέλεσμα που έρχεται σε συμφωνία με τις δυσκολίες των μαθητών το οποίο χαρακτηρίζεται ως "χαρακτηριστικό σφάλμα αντιστοιχίας" ή " καθολικό σφάλμα αντιστοιχίας" (Clement, 1985). Επαληθεύεται η δυσκολία των μαθητών να εξαγάγουν δεδομένα από το γράφημα στη κινηματική (Adams & Shrum, 1990; Beichner, 1994). Επιπλέον οι Ivanjek et al. (2016) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που εκλαμβάνουν τα γραφήματα ως εικόνα της κίνησης αδυνατούν να τα δουν ως σχέση των μεταβλητών. Τα Μαθηματικά είναι απαλλαγμένα από αυτή την εικόνα της υποκειμενικής κατάστασης (Ernest, 2016; Duval, 2006). Η έλλειψη της υποκειμενικότητας οφείλεται εν μέρει και στην ίδια τη φύση των Μαθηματικών, που είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα (Βακαλόπουλος κ.α, 2017) και αυτό προσδίδει και μία βεβαιότητα στα Μαθηματικά (Ernest, 2016). Συνέπεια όλων αυτών είναι οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν το γράφημα ως πεδίο πληροφοριών.

Η κατανόηση της κινηματικής βρίκσεται σε άμεση εξάρτηση από την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν πληροφορίες του γραφήματος (Bektasli, 2006). Κατά αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα αποκτήσουν μία αντιπροσωπευτική ευχέρεια, δηλαδή την ικανότητα να εργάζονται μέσα και να μεταφράζουν τις έννοιες μεταξύ των αναπαραστάσεων, η οποία είναι κεντρική στο εγχείρημα (enterprise) της μαθηματικής δραστηριότητας και της κατασκευής γνώσης (Bieda & Nathan, 2009).

Πιθανόν, αν αποκτήσουν την ικανότητα σύνδεσης των εννοιών, θα μπορούν να χρησιμοποιούν το γράφημα ως πεδίο άντλησης των δεδομένων και όχι να το εκλαμβάνουν ως εικόνα της υποκειμενικής κατάστασης.

Για τη 5η ερώτηση: Στην 5η ερώτηση υπήρχε η μεγαλύτερη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο κλάδων. Στα Μαθηματικά υπήρχαν σαφώς καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με η Φυσική. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνεται από τους McDermott et al, (1987), οι οποίοι αναφέρουν πως οι μαθητές συχνά δεν εξάγουν την επιθυμητή πληροφορία από τα γραφήματα στη Φυσική. Επίσης άλλες έρευνες διαπίστωσαν ότι οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων στην Φυσική επικεντρώνονται στο σημείο και όχι στο διάστημα (Planinic et al., 2013; Ivanjek et al., 2016). Η δυσκολία αυτή έγκειται από τους Evans & Green (2006) στο γεγονός πως η ερμηνεία στη Φυσική εμπλουτίζεται τόσο από τη γνώση του εννοιολογικού πλαισίου όσο και από τη δημιουργία στρατηγικών επίλυσης. Αντίθετα, τα Μαθηματικά είναι απαλλαγμένα από το βαρύ εννοιολογικό φορτίο. Για αυτό το λόγο οι Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά (2017) συμπεραίνουν ότι η αλλαγή του μαθηματικού συμβολισμού μπορεί να προσδώσει θετικά αποτελέσματα στην ερμηνεία των φυσικών εννοιών.

Για την 6η ερώτηση: Ο διαχωρισμός ανάμεσα στη κλίση και το ύψος του γραφήματος είναι μία δυσκολία που διαπιστώνεται και στα δύο πλαίσια από την ποσοτική έρευνα των (Planinic et al., 2012). Πολλές έρευνες αναφέρουν τη δυσκολία των μαθητών να διαχωρίσουν το ψηλότερο σημείο και τη μεγαλύτερη κλίση (Bell & Janvier, 1981; Clement, 1985; Hadjidemetriou & Williams, 2002; Beichner, 1994; Wemyss, & van Kampen, 2013). Η δυσκολία αυτή διαπιστώνεται συχνότερα στη Φυσική από ότι στα Μαθηματικά (Planinic et al., 2012). Εντούτοις στο δείγμα μας, όπου υπήρχε σύγκριση σε σχέση με άλλη συνάρτηση, διαπιστώθηκε μεγαλύτερη δυσκολία στα Μαθηματικά. Η δυσκολία στα Μαθηματικά οφείλεται τόσο στη σύγκριση δύο νοητικών κατασκευών όσο και στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών στα οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν λίγες ασκήσεις που ζητούν σύγκριση τιμών δύο συναρτήσεων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι οι ασκήσεις αυτές στο σχολικό εγχειρίδιο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου είναι η άσκηση 10 σελίδα 158 η οποία όμως δεν χρειάζεται το γράφημα, άσκηση 7 σελίδα 165 στην οποία δίνεται το γράφημα, άσκηση 8 σελίδα 165 και άσκηση 4 σελίδα 192 στις οποίες ζητείται να επιλυθούν τόσο αλγεβρικά όσο και γραφικά και τέλος η άσκηση 3 (εικόνα 10.16)

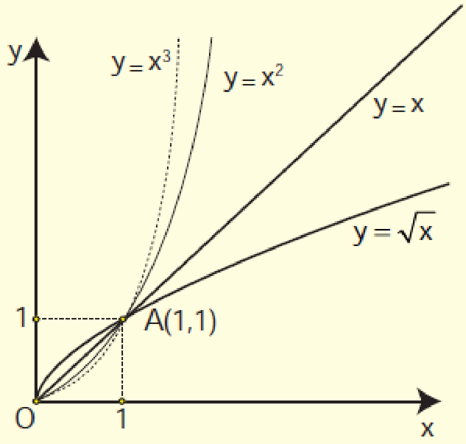
Εικόνα 10.16 Σχολικό εγχειρίδιο Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων (Ανδρεαδάκης κ.ά, 1998, σελ.193)

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x) = x$, $\quad g(x) = x^2$,

$h(x) = x^3$ και $\varphi(x) = \sqrt{x}$

στο διάστημα $[0, +\infty)$, τις οποίες χαράξαμε με τη βοήθεια Η/Υ.



i) Να διατάξετε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τις τιμές x, x^2, x^3 και $\sqrt{x}$ των συναρτήσεων f, g, h και φ:

α) για $0 < x < 1$ και β) για $x > 1$.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε προηγουμένως.

10.4 Στατιστικά – ανάλυση δεδομένων από την συσχέτιση ΄΄απόψεων΄΄ και ΄΄γνώσεων΄΄

Πίνακας 10.46 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην πρώτη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	1,4	22,0	25,0	0,0	0,0	0,0
διαφωνώ	6,9	17,2	16,8	6,9	22,0	21,0
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	13,9	21,2	19,7	16,7	19,5	20,3
συμφωνώ	50,0	18,5	18,6	61,1	18,3	18,0
συμφωνώ πλήρως	26,4	18,0	17,8	11,1	18,0	17,6
total	100,0	18,7	18,6	100,0	18,8	18,6

1η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι τόσο τα Μαθηματικά όσο και η Φυσική έχουν συνήθως ασκήσεις και προβλήματα με αριθμούς. Οι επιδόσεις όμως αυτών των μαθητών στο γνωστικό (με κριτήριο τον συνολικό μέσο όρο) ήταν χαμηλότερες ή ίσες από την συνολική επίδοση (συνολικό μέσο όρο). Την υψηλότερη επίδοση στα Μαθηματικά την είχαν οι μαθητές που είχαν ουδέτερη στάση στην ερώτηση αν τα Μαθηματικά έχουν συνήθως προβλήματα-ασκήσεις με αριθμούς. Αντίστοιχα στη Φυσική, τις καλύτερες επιδόσεις είχαν οι μαθητές οι οποίοι απάντησαν είτε ουδέτερα (τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική) είτε διαφωνούν στην αντίστοιχη ερώτηση της Φυσικής.

Ειδική μνεία αξίζει η παρατήρηση πως οι μαθητές που επέλεξαν την άποψη ΄΄διαφωνώ΄΄ στην ερώτηση πως τα Μαθηματικά έχουν ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς είχαν μέσο όρο στα Μαθηματικά 17,2, ενώ οι μαθητές που είχαν την αντίστοιχή άποψη για τη Φυσική είχαν μέσο όρο στα Μαθηματικά 22, επίδοση η οποία ήταν υψηλότερη στις περιπτώσεις της πρώτης ερώτησης.

Πρόκειται για ένα αποτέλεσμα που πρέπει να μας προβληματίσει, διότι από τις υπάρχουσες προαναφερθείσες έρευνες, οι μαθητές, ειδικά αυτοί που θέλουν να έχουν υψηλές επιδόσεις στη Φυσική και στα Μαθηματικά, δεν πρέπει να επικεντρώνονται τόσο στο υπολογιστικό όσο στο εννοιολογικό περιεχόμενο του κάθε κλάδου. Στη Φυσική φαίνεται να υπάρχει αυτή η αντιστοιχία βιβλιογραφίας και επιδόσεων, όμως στα Μαθηματικά συμβαίνει το αντίθετο.

Δεν λαμβάνουμε υπόψη το ΄΄διαφωνώ πλήρως΄΄ στα Μαθηματικά, διότι επιλέχθηκε μόνο από ένα άτομο.

Πίνακας 10.47 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην δεύτερη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	8,3	16,8	15,7	2,8	22,5	22,0
διαφωνώ	37,5	19,5	19,4	2,8	20,0	17,5
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	43,1	18,0	18,6	22,2	18,2	16,9
συμφωνώ	8,3	20,6	16,8	54,2	19,0	18,8
συμφωνώ πλήρως	1,4	22,0	25,0	13,9	18,1	20,0
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

2η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ουδέτερα ή πως διαφωνούν στην άποψη ότι τα Μαθηματικά λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής. Στην αντίστοιχη άποψη στη Φυσική, ότι τα προβλήματα Φυσικής δεν λύνονται χωρίς γνώση Μαθηματικών, η πλειοψηφία των μαθητών συμφωνούσε ή συμφωνούσε πλήρως, ενώ υπήρχε και μία ισχυρή τάση στην ουδέτερη άποψη. Την υψηλότερη επίδοση στο γνωστικό των Μαθηματικών σημείωσαν οι μαθητές που συμφωνούν ή διαφωνούν ότι τα Μαθηματικά λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής (οι μέσοι όροι αντίστοιχα ήταν 20,6 και 19,5). Η υψηλότερη επίδοση στη Φυσική σημειώθηκε από τους μαθητές που συμφωνούν πλήρως με την άποψη πως οι ασκήσεις Φυσικής δεν λύνονται χωρίς γνώσεις Μαθηματικών. Υψηλή επίδοση είχαν και όσοι μαθητές διαφωνούν με την άποψη ότι τα Μαθηματικά λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής.

Πρόκειται για ένα γενικό συμπέρασμα που συμφωνεί με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, στην οποία κυρίαρχη άποψη των μαθητών είναι ότι τα Μαθηματικά είναι ένα απαραίτητο εργαλείο στη Φυσική.

Πίνακας 10.48 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην τρίτη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	6,9	17,2	17,0	0,0	0,0	0,0
διαφωνώ	15,3	19,2	18,8	13,9	18,0	19,1
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	44,4	19,6	18,3	30,6	20,7	19,0
συμφωνώ	30,6	17,4	18,9	43,1	18,0	18,8
συμφωνώ πλήρως	1,4	22,0	25,0	8,3	17,7	15,3
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

3η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε στην ερώτηση είτε ουδέτερα είτε πως συμφωνούν τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Υψηλότερη επίδοση στα Μαθηματικά είχαν όσοι έχουν ουδέτερη στάση σχετικά με την άποψη πως η κατανόηση της Φυσικής σε βάθος, εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών. Υψηλότερες επιδόσεις στα Μαθηματικά (σε σχέση με το μέσο όρο) είχαν και οι μαθητές που απάντησαν είτε ουδέτερα είτε ότι διαφωνούν σχετικά με την άποψη πως η κατανόηση σε βάθος των Μαθηματικών συνδέεται με τη γνώση της Φυσικής. Οι υψηλότερες επιδόσεις στη Φυσική σημειώθηκαν από τους μαθητές που είχαν ουδέτερη άποψη ή διαφωνούν στην ερώτηση ΄΄η Φυσική δεν κατανοείται σε βάθος χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών΄΄.

Πρόκειται για ένα συμπέρασμα που αντικρούει στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, σύμφωνα με την οποία η κατανόηση σε βάθος επιτυγχάνεται, όταν ο μαθητής μπορεί να συνδέει συναφείς έννοιες σε διαφορετικούς κλάδους. Πιθανή αιτία αυτού του αποτελέσματος είναι η έλλειψη κοινής στρατηγικής στα αντίστοιχα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Χαρακτηριστικά, η έννοια της τετραγωνικής συνάρτησης στο σχολικό εγχειρίδιο της Φυσικής Α΄ Λυκείου αναφέρεται στην αρχή και θεωρείται ότι έχει διδαχθεί στα Μαθηματικά. Η τετραγωνική συνάρτηση όμως στα Μαθηματικά διδάσκεται στο τέλος της Α΄ Λυκείου. Μία άλλη ασυμβατότητα είναι πως στη Φυσική γίνεται διευρυμένη χρήση διανυσμάτων στην Α΄ Λυκείου ενώ τα διανύσματα στα Μαθηματικά διδάσκονται στη Β΄ Λυκείου και μόνο στους μαθητές θετικής κατεύθυνσης. Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα αναντιστοιχίας, όπως π,χ. στη λογαριθμική συνάρτηση, στις τριγωνομετρικές ταυτότητες κ.α.

Πίνακας 10.49 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην τέταρτη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	18,1	16,7	15,7	1,4	23,0	23,0
διαφωνώ	50,0	19,0	19,2	19,4	18,3	18,0
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	25,0	19,3	19,1	31,6	19,6	18,8
συμφωνώ	4,2	20,3	18,0	33,3	18,4	18,9
συμφωνώ πλήρως	1,4	22,0	25,0	5,6	16,5	16,5
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

4η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών στην ερώτηση των Μαθηματικών αν η επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τη γνώση της Φυσικής απάντησε ότι διαφωνεί και ως δεύτερη επιλογή ήταν η ουδέτερη στάση. Στο αντίστοιχο ερώτημα της Φυσικής η κυρίαρχη επιλογή ήταν ότι συμφωνούν και ως δεύτερη επιλογή, η ουδέτερη στάση. Την καλύτερη επίδοση (Μ.Ο=20,3) στα Μαθηματικά την είχαν όσοι μαθητές συμφωνούν πως η επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τη Φυσική (αν και μικρό το ποσοστό που έδωσε αυτή την απάντηση). Υψηλότερη επίδοση σε σχέση με το μέσο όρο στα Μαθηματικά σημείωσαν οι μαθητές οι οποίοι είχαν ουδέτερη στάση για στην εξάρτηση της επιτυχίας στη Φυσική από τα Μαθηματικά (Μ.Ο=19,6), καθώς και οι μαθητές που είχαν ουδέτερη στάση στην εξάρτηση της επιτυχίας στα Μαθηματικά από τη Φυσική (Μ.Ο=19,3). Τέλος, καλή επίδοση (μ.ό.=19) είχαν όσοι μαθητές διαφωνούν με αυτή την εξάρτηση. Από τους μαθητές που είχαν την άποψη σχετικά με την εξάρτηση της επιτυχίας στα Μαθηματικά από τη Φυσική, την υψηλότερη επίδοση στη Φυσική σημείωσαν αυτοί που διαφωνούν (Μ.Ο=19,2) ή αυτοί που είχαν ουδέτερη στάση (Μ.Ο=19,1).

Παρατηρούμε επιπλέον ότι οι μαθητές που διαφωνούν πλήρως με την άποψη πως η επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τη γνώση της Φυσικής σημείωσαν τη χαμηλότερη επίδοση τόσο στα Μαθηματικά (Μ.Ο=16,7) όσο και στη Φυσική (Μ.Ο=15,7).

Είδαμε ότι μικρό ποσοστό (4,2%+1,4%) κατανοεί ότι η επιτυχία στα Μαθηματικά έχει εξάρτηση από τη γνώση της Φυσικής, όμως ο μέσος όρος τους (20,725) είναι αρκετά υψηλότερος από τις υπόλοιπες κατηγορίες. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές αγνοούν τα οφέλη που μπορούν να αποκομίσουν από αυτή τη σύνδεση. Η κύρια αιτία αυτού υποστηρίζουμε ότι είναι τόσο τα σχολικά εγχειρίδια όσο και το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Στα σχολικά εγχειρίδια δεν αναφέρεται σε κανένα σημείο το πως η Φυσική βοήθησε (ιστορικά) να εξελιχθούν τα Μαθηματικά. Επίσης, κανένα σχολικό εγχειρίδιο δεν αναφέρεται σε έννοιες που έχουν πάρει τα Μαθηματικά από άλλες επιστήμες (π.χ. όπως έχουμε αναφέρει στο ιστορικό πλαίσιο τις συντεταγμένες) ή και από τη Φυσική (π.χ. τη χρήση γεωμετρικής απόδειξης του Oresme). Η πλειονότητα των μαθητών πιστεύει ότι οι άλλες επιστήμες δανείζονται από τα Μαθηματικά εργαλεία για να ενισχύσουν το θεωρητικό τους πλαίσιο.

Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών δεν αναφέρεται πουθενά μέχρι τη Β΄ Λυκείου η χρήση εννοιών και γνώσεων που έχουν πάρει τα Μαθηματικά από τις Φυσικές επιστήμες όπως για παράδειγμα τη μέθοδο των τριών που ανάγεται στην αναλογία.

Ως εκ τούτου η πλειονότητα των μαθητών αδυνατεί να κατανοήσει πόσο μπορεί να τους ωφελήσει η Φυσική στο να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση των αφηρημένων Μαθηματικών εννοιών. Είδαμε ότι οι μαθητές που κατανοούν ότι η επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τις γνώσεις της Φυσικής είχαν υψηλές επιδόσεις.

Αντίθετα στη ερώτηση της Φυσικής οι περισσότεροι θεωρούν πως η επιτυχία στη Φυσική εξαρτάται από τις γνώσεις των Μαθηματικών. Από το συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και από τα σχολικά εγχειρίδια στα οποία η αναφορά στα Μαθηματικά είναι συνεχόμενη. Είδαμε ότι οι μαθητές που κατανοούν ότι η επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τις γνώσεις της Φυσικής δεν έχουν καλή επίδοση στο γνωστικό.

Πίνακας 10.50 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην πέμπτη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	0,0	0,0	0,0	1,4	23,0	27,0
διαφωνώ	6,9	18,6	18,0	6,9	21,3	19,2
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	30,6	19,6	19,0	15,3	20,3	20,6
συμφωνώ	44,4	18,3	18,5	45,8	18,1	17,5
συμφωνώ πλήρως	16,7	18,1	18,0	26,4	18,3	18,7
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

5η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι τουλάχιστον συμφωνούν πως τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύεις κανόνες. Ωστόσο την καλύτερη επίδοση στα Μαθηματικά (Μ.Ο=21,3) την είχαν οι μαθητές που διαφωνούν με την άποψη πως στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύεις κανόνες. Δεύτερη καλύτερη επίδοση (Μ.Ο=20,3) σημείωσαν οι μαθητές που είχαν ουδέτερη άποψη στην ίδια ερώτηση. Καλύτερη επίδοση από το μέσο όρο - με υψηλό όμως ποσοστό επιλογής - στα Μαθηματικά είχαν και όσοι μαθητές είχαν ουδέτερη άποψη πως στα Μαθηματικά πρέπει να απομνημονεύονται κανόνες (Μ.Ο=19,6). Στη Φυσική υπήρξε ίδια τάση ως προς τις απαντήσεις με την καλύτερη επίδοση. Η καλύτερη επίδοση σημειώθηκε από τους μαθητές που είχαν ουδέτερη άποψη ότι στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύονται κανόνες (Μ.Ο=20,6). Δεύτερη καλύτερη επίδοση όμως είχαν οι μαθητές που διαφωνούσαν με την άποψη πως στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύονται κανόνες (Μ.Ο=19,2). Επίσης, καλύτερη επίδοση από το μέσο όρο είχαν και όσοι είχαν ουδέτερη στάση με την άποψη ότι στα Μαθηματικά πρέπει να απομνημονεύονται κανόνες.

Τα αποτελέσματα αυτά συμπορεύονται με την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Το κύριο δεν είναι η απομνημόνευση αλλά η κατανόηση του τι αντιπροσωπεύουν οι τύποι και οι μεταβλητές αυτών στα Μαθηματικά ή στη Φυσική. Επίσης σημαντικό ρόλο έχει και ο κατάλληλος χειρισμός των τύπων.

Επιπλέον, για τη στάση αυτή μπορεί να ευθύνεται το σχολικό εγχειρίδιο της Φυσικής, καθώς στην Α΄ Λυκείου αναφέρει:

εικόνα 10.17 Σχολικό εγχειρίδιο Φυσικής Α΄ Λυκείου (σελ. 32)

> Η δυσκολία στη λύση των προβλημάτων της Φυσικής δε βρίσκεται μόνο στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Η σημαντικότερη δυσκολία είναι η **αντίληψη** του προβλήματος, δηλαδή ο σχηματισμός νοερών αναπαραστάσεων, η διάκριση των σημαντικών στοιχείων ή δεδομένων από τα επουσιώδη και η προσέγγιση της "καρδιάς" του προβλήματος με την υποβολή των κατάλληλων ερωτημάτων. Πολλοί επιφανείς Φυσικοί έχουν τονίσει ότι **κατανοείς** πραγματικά ένα πρόβλημα όταν μπορείς **διαισθητικά** να μαντεύεις την απάντηση πριν κάνεις υπολογισμούς. Αυτό μπορείτε να το κατορθώσετε αν αναπτύξετε τη φυσική σας διαίσθηση με εξάσκηση.

Επίσης, η στοχοθεσία στη διδασκαλία της Φυσικής είναι πέρα από τους τύπους.

Στην παρακάτω εικόνα από το βιβλίο του καθηγητή της Α΄ Λυκείου (η πρώτη πρακτική διδασκαλίας στη Φυσική, εικόνα 10.18) αναφέρεται:

Εικόνα 10.18 Βιβλίο καθηγητή Φυσικής (σελ. 20)

1. Η διδασκαλία των Φ.Ε. πρέπει να είναι περισσότερο ερευνητικές δραστηριότητες των μαθητών παρά παρουσίαση θεωρίας στον πίνακα. Βοήθησε τους μαθητές σου να σκεφτούν κριτικά. Δείχτους πως να αναζητούν την απόδειξη πριν πηδήσουν στο συμπέρασμα.

Πίνακας 10.51. Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην έκτη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	4,2	18,7	21,3	12,5	17,4	16,1
διαφωνώ	13,9	18,7	17,4	29,2	19,0	18,0
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	29,2	18,1	17,9	31,9	18,8	17,8
συμφωνώ	36,1	18,4	19,3	12,5	20,4	21,8
συμφωνώ πλήρως	15,3	20,6	18,4	9,7	17,5	23,2
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

6η ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών στα Μαθηματικά απάντησε ότι τουλάχιστον συμφωνούν (ποσοστό 50,4%) πως οι γνώσεις των Μαθηματικών είναι χρήσιμες για μία επαγγελματική σταδιοδρομία. Αντίθετα, στη Φυσική ήταν χαμηλό το αντίστοιχο ποσοστό (22,2%). Η καλύτερη επίδοση (Μ.Ο=20,6) στα Μαθηματικά επιτεύχθηκε από τους μαθητές που είχαν την άποψη ότι συμφωνούν πλήρως. Επίσης καλή επίδοση στα Μαθηματικά είχαν όσοι μαθητές συμφωνούσαν ότι η Φυσική είναι χρήσιμη σε μια επαγγελματική επιτυχία με μέσο όρο 20,4. Την καλύτερη επίδοση στη Φυσική (Μ.Ο=23,2) είχαν όσοι συμφωνούσαν πλήρως με την άποψη πως η Φυσική είναι χρήσιμη για μία επιτυχημένη σταδιοδρομία. Αξιοσημείωτο είναι ότι αυτή ήταν καλύτερη επίδοση σε όλα τα ερωτήματα.

Πιστεύουμε πως στη συγκεκριμένη ερώτηση σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε η επιλογή κατεύθυνσης των μαθητών. Όσοι μαθητές θα επιλέξουν θετική κατεύθυνση στη Γ΄ Λυκείου η Φυσική θα έχει κύριο λόγο. Τα Μαθηματικά διδάσκονται σε δύο κατευθύνσεις από τις οποίες η μία (Οικονομίας) είναι πολυπληθέστερη και κατά συνέπεια είναι λογικό ο κύριος όγκος των μαθητών να θεωρεί ότι οι γνώσεις Μαθηματικών είναι χρήσιμες για μια επιτυχημένη σταδιοδρομία. Αξίζει να αναφέρουμε ότι στην ερώτηση της Φυσικής υπήρχε μεγάλη διαφοροποίηση του μέσου όρου αυτών που υποστηρίζουν ότι οι γνώσεις στη Φυσική (Μ.Ο=22,41) θα διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην επαγγελματική σταδιοδρομία έναντι των μαθητών που διαφωνούν με αυτή την άποψη (Μ.Ο=17,43)

Πίνακας 10.52 Οι επιδόσεις (Μ.Ο) των μαθητών στα Μαθηματικά και τη Φυσική σε σχέση με την άποψή τους στην έβδομη ερώτηση ΄΄ΑΠΟΨΕΙΣ΄΄ του ερωτηματολογίου

	Απόψεις Μ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο	Απόψεις Φ ποσοστά	Μ.Τ.- Μαθ Γνωστικο	Μ.Τ.- Φυσ Γνωστικο
διαφωνώ πλήρως	8,3	17,5	19,0	13,9	17,1	15,6
διαφωνώ	11,1	18,4	18,8	19,4	18,3	17,4
ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	45,8	19,3	18,7	41,7	18,7	18,5
συμφωνώ	25,0	17,9	18,6	15,3	20,6	21,9
συμφωνώ πλήρως	8,3	20,0	17,2	5,6	22,0	21,5
total	98,6	18,7	18,6	95,8	18,8	18,6

7^{η} ερώτηση: Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ουδέτερα στο ότι οι γνώσεις του κάθε κλάδου βοηθούν να αντιμετωπίζονται καλύτερα τα προβλήματα τις καθημερινότητας. Οι καλύτερες επιδόσεις στα Μαθηματικά και στη Φυσική επιτεύχθηκαν από τους μαθητές που συμφωνούσαν πλήρως (Μ.Ο=22 στα Μαθηματικά και 21,5 στη Φυσική) ή που συμφωνούσαν (Μ.Ο=20,6 στα Μαθηματικά και 21,9 στη Φυσική) πως η Φυσική βοηθάει να αντιμετωπίζονται καλύτερα τα καθημερινά προβλήματα. Επίσης, καλύτερη επίδοση στα Μαθηματικά από το μέσο όρο πέτυχαν και όσοι συμφωνούσαν πλήρως ότι τα Μαθηματικά βοηθούν να αντιμετωπίζεις καλύτερα τα καθημερινά προβλήματα.

Τα αποτελέσματα αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι, όταν οι μαθητές κατανοούν τη χρήση των συγκεκριμένων κλάδων στη καθημερινότητα, αποκτούν καλύτερη εννοιολογική κατανόηση και ως εκ τούτου καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό είναι ένα συμπέρασμα που βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με τη βιβλιογραφία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

κεφάλαιο 11: Συμπεράσματα

11.1 Γενικά συμπεράσματα από την έρευνα

Είδαμε ότι οι μαθητές προσδίδουν τα ίδια χαρακτηριστικά και στους δύο κλάδους τόσο στη μορφή των ασκήσεων, όπου κυριαρχεί η άποψη ότι και οι δύο έχουν ασκήσεις με αριθμούς, όσο και στο ότι απαιτούν κανόνες απομνημόνευσης. Προσδίδουν μια εξάρτηση της Φυσικής από τα Μαθηματικά που εν μέρει δικαιολογείται, διότι στα σχολικά εγχειρίδια της Φυσικής επικαλείται συχνά η γνώση των Μαθηματικών, ενώ στα αντίστοιχα των Μαθηματικών απουσιάζει η αντίστοιχη αναφορά για το μάθημα της Φυσικής, τουλάχιστον έως την Β΄ Λυκείου. Επιπλέον, ανησυχία στην έλλειψη εννοιολογικών συνδέσεων των δύο αντικειμένων μπορεί να προσδώσει η παρατήρηση ότι οι επιδόσεις των μαθητών που είχαν την άποψη πως δεν εξαρτάται το ένα μάθημα από το άλλο, ως επί το πλείστον, ήταν υψηλότερες. Αυτό μπορεί να ενισχύσει την αντίληψη των μαθητών για μη αναγκαία σύνδεση των δύο αντικειμένων. Ωστόσο, στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την σύγκριση του γνωστικού, είδαμε ότι οι μαθητές έχουν να κερδίσουν τόσο στη Φυσική από τα Μαθηματικά όσο και στα Μαθηματικά από τη Φυσική. Επίσης, η δημιουργία συνδέσεων μπορεί να ενισχύσει την πολλαπλή αναπαράσταση, που σύμφωνα με τις υπάρχουσες έρευνες θα δώσει θετικά αποτελέσματα. Ειδικότερα στη 2η ερώτηση στα Μαθηματικά, 16 μαθητές και στη Φυσική 21 μαθητές απάντησαν σε όλες σωστά. Είδαμε, όμως, ότι μόνο 9 απάντησαν και στα δύο αντικείμενα σε όλα σωστά. Από αυτό προκύπτει συμπέρασμα ότι 19 μαθητές δεν έχουν κάνει τις κατάλληλες συσχετίσεις, οπότε υπάρχει πεδίο να αποκομίσουν οφέλη δημιουργώντας τις κατάλληλες συνδέσεις. Στη 3η ερώτηση οι μαθητές που απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις ήταν 11 στα Μαθηματικά και 18 στη Φυσική, άρα στην αντίστοιχη ερώτηση οι μαθητές που έχουν να αποκομίσουν όφελος είναι 11.

Γενικά, οι μαθητές πήγαν καλύτερα στη σύνδεση του τύπου με το γράφημα της ευθείας στη Φυσική από ό,τι στα Μαθηματικά. Πρόκειται για ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα από τη στιγμή που στο βιβλίο της Φυσικής συναντάμε την εξίσωση και το γράφημα μαζί. Στο μόνο αποτέλεσμα που πήγαν στα Μαθηματικά καλύτερα ήταν στην αναγνώριση ότι τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά δε συνδέονται γραφικά με ευθεία. Το αποτέλεσμα αυτό πιθανόν να προήλθε από την έλλειψη τέτοιας συμβολικής μορφής ($u \cdot t$=σταθερό) στο κεφάλαιο κινηματικής στη

Φυσική. Στα Μαθηματικά της Β΄ Λυκείου υπάρχει ερώτηση γεωμετρικής ερμηνείας ενός συστήματος που περιέχει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Βλέπουμε ότι τα σχολικά εγχειρίδια και οι αναφορές αυτών προσδίδουν μια δυναμική σε κάθε μορφή και οι μαθητές δημιουργούν τα αντίστοιχα νοητικά μοντέλα. Εγείρεται το ερώτημα αν μπορούμε αυτό να το εκμεταλλευτούμε. Από τη στιγμή που η ικανότητα αναγνώρισης συναφών δομών επιτευχθεί, θα προσφέρει στους μαθητές το πρώτο βήμα για την ικανότητα χειρισμού συναφών εννοιών.

Στις ερωτήσεις του γνωστικού που αφορούσαν άντληση συγκεκριμένων πληροφοριών από το γράφημα (ερωτήσεις 4 και 5) είδαμε ότι στα Μαθηματικά είχαν καλύτερα αποτελέσματα από ότι στη Φυσική. Διάφορες έρευνες, όπως έχουμε δει, υποδεικνύουν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτές τις ερωτήσεις στη Φυσική οφείλονται στο γεγονός πως εκλαμβάνουν το γράφημα ως μετάφραση της υποκειμενικής κατάστασης. Επίσης οι μαθητές παρουσιάζουν μία αδυναμία ταιριάσματος των πληροφοριών που εκλαμβάνουν από το γράφημα στο ζητούμενο (Clement, 1985). Στα Μαθηματικά, τα οποία είναι απαλλαγμένα από την υποκειμενική κατάσταση, τα πήγαν καλύτερα. Άρα, δε θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τις φυσικές έννοιες πρώτα σαν υποκειμενικές και γενικές και μετά να τους προσδώσουμε την ειδική μορφή που απαιτούν. Ένας παράγοντας αποτρεπτικός προς αυτή τη προσέγγιση είναι η κατανομή της ύλης στους επιμέρους κλάδους, καθώς οι έννοιες στη Φυσική διδάσκονται στην αρχή της Α΄ Λυκείου ενώ στα Μαθηματικά οι έννοιες οι συγκεκριμένες διδάσκονται στην ερώτηση 4 προς το τέλος της Α΄ Λυκείου και στην ερώτηση 5 στις αρχές της Β΄ Λυκείου.

Στην ερώτηση 6η στα Μαθηματικά υπάρχει εννοιολογικό κενό (πρόβλημα) στην σύγκριση συσχετιζόμενων αντικειμένων, καθότι είναι μια καθαρά θεωρητική προσέγγιση. Στη Φυσική αυτό είναι συνηθισμένο, οπότε τα πήγαν καλύτερα.

Όπως είδαμε, σε άλλες μορφές οι μαθητές τα πήγαν καλύτερα στα Μαθηματικά και σε άλλες στη Φυσική. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντιστοιχία και με άλλες έρευνες στις οποίες διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει σχέσεις μεταξύ αυτών που μαθαίνουν στα Μαθηματικά και στη Φυσική (Kapucu et al., 2016; Planinic et al., 2012;). Θα ήταν προς όφελος του μαθητή να αποκτήσει μία ευελιξία χρήσης συναφών εννοιών.

Είδαμε ότι οι μαθητές προσδίδουν τα ίδια χαρακτηριστικά με υψηλό ποσοστό συμφωνίας (αριθμητικά και κανόνες απομνημόνευσης). Ωστόσο, και στα δύο μαθήματα είχαν καλύτερες επιδόσεις όσοι μαθητές είχαν ουδέτερη στάση ως προς αυτή την εικόνα. Όλες οι έρευνες στα Μαθηματικά, στη Φυσική όπως και στις κοινές, υποδεικνύουν ότι δεν πρέπει να βασιζόμαστε σε έτοιμες φόρμες και να εμμένουμε στα αποτελέσματα. Κινούμενοι στη κατεύθυνση των ερευνών και του ευρήματος μας, μια κοινή προσέγγιση, για να έχει τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα, υποστηρίζουμε ότι πρέπει να βασίζεται σε εννοιολογικό πλαίσιο συνδέσεων και όχι σε φορμαλιστικές πρακτικές.

Οι υψηλότερες επιδόσεις στο γνωστικό επιτευχθήκαν από τους μαθητές που συμφωνούσαν πλήρως με τη χρησιμότητα των Μαθηματικών και της Φυσικής στη καθημερινότητα και στην επιτυχή επαγγελματική σταδιοδρομία της καθώς και από τους μαθητές που συμφωνούσαν μόνο με τη χρησιμότητα της Φυσικής. Αυτό μας δίνει μια βάση για να υποστηρίξουμε ότι η διεπιστημονική προσέγγιση δεν πρέπει να βασίζεται μόνο στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των κλάδων αλλά και στη πολλαπλή χρησιμότητα και εφαρμοστικότητα των εννοιών αυτών. Για την επίτευξη αυτού του στόχου πρέπει να πλαισιωθεί κατάλληλα αυτή η προσέγγιση. Τα Μαθηματικά και η Φυσική πρέπει να αποκτήσουν μια ευελιξία (flexibly) και την ικανότητα να μεταφέρονται γνώσεις σε αυτά μέσω διαφορετικών περιεχομένων (Basson, 2002). Τα προβλήματα που περιγράφουν οι πραγματικές συνθήκες θα δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ της παρεχόμενης γνώσης και της χρησιμότητας. Ως εκ τούτου, θα αποφύγουμε τη σύγκρουση που δημιουργούν οι ιδανικές συνθήκες μεταξύ της παρεχόμενης γνώσης και της νοητικής εικόνας που έχουν κατασκευάσει οι μαθητές.

Ένας βασικός μας στόχος ήταν να διαπιστώσουμε – χαρτογραφήσουμε κατά πόσο οι μαθητές μεταφέρουν τις γνώσεις, που σύμφωνα με τους Greeno, Moore & Smith, (1993) είναι η ικανότητα να χρησιμοποιούν μια γνώση που έχουν μάθει σε μία κατάσταση σε μία άλλη κατάσταση. Όμως, η μάθηση δεν επιτυγχάνεται μόνο με την απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων (Lave & Wenger, 1991). Η πραγματική μάθηση επιτυγχάνεται με τη δημιουργία συνδέσεων (Michelsen, 2006; Furner & Kumar, 2007). Επιπλέον, διάφορες έρευνες έδειξαν ότι δεν μπορεί να διαχωριστεί το τι έμαθαν από το πώς το έμαθαν (Beach, 1999; Boaler, 1997). Από τη στιγμή που στην υπάρχουσα έρευνα, όπως και σε άλλες, είδαμε ότι η εικόνα που έχουν για τα δύο μαθήματα είναι κοινή, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια σύνδεση στις αντιλήψεις των μαθητών. Συνθέτοντας τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι δεν έχει σημασία μόνο το τι συνδέσεις θα κάνουν αλλά και πώς θα τις κάνουν.

Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από αυτήν την εργασία είναι πως μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής έχει δημιουργηθεί ένα χάσμα στο σχολικό περιβάλλον. Οι κύριοι παράγοντες που έχουν δημιουργήσει αυτό το χάσμα είναι η έλλειψη:

- διδασκαλίας των πτυχών συμπόρευσης και συνεξέλιξης των δύο κλάδων
- κοινών μαθησιακών δραστηριοτήτων
- συντονισμού των δύο κλάδων
- εννοιολογικής σύνδεσης συναφών εννοιών.

Το γεφύρωμα αυτού του χάσματος μπορεί να επιτευχθεί αναπτύσσοντας ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ αυτών των κλάδων. Η επικοινωνία που πρέπει να αναπτυχθεί δεν πρέπει να βασίζεται απλά στη τεχνητή κατασκευή συνδέσεων. Για να επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση των συναφών εννοιών, θα πρέπει οι ίδιοι οι μαθητές να ωθούνται στη δημιουργία των εννοιολογικών συνδέσεων. Η κύρια κατεύθυνση, που προτείνουν οι ερευνητές, προς την ανάπτυξη δίαυλου επικοινωνίας είναι η χρήση προβλημάτων που να απορρέουν τόσο από την εμπειρία στην καθημερινότητά τους όσο και από τη χρήση δεξιοτήτων που έχουν ήδη αναπτύξει. Με αυτό τον τρόπο θα προαχθεί η σύνδεση των δύο κλάδων και θα αναπτυχθεί μια πιο σφαιρική αντίληψη. Απώτερος σκοπός είναι η διαμόρφωση μιας νέας σχολικής κουλτούρα, τέτοιας ώστε στην εναλλαγή των κλάδων εντός του σχολικού προγράμματος να γίνεται και η κατάλληλη μεταφορά του εννοιολογικού πλαισίου που έχουν αναπτύξει.

Μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση και την έρευνα που πραγματοποιήθηκε, προτείνεται:

- Οι κοινές δραστηριότητες να ξεκινούν από τα πρώτα σχολικά χρόνια
- Οι κοινές δραστηριότητες να είναι ελκυστικές με τη χρήση κατάλληλων προβλημάτων που να δραστηριοποιούν τους μαθητές
- Οι κοινές δραστηριότητες να είναι ενταγμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα
- Να υπάρχει ομαλή μετάβαση στη διδασκαλία των κοινών εννοιών με συγχρονισμένες διεπιστημονικές αναφορές στους δύο κλάδους
- Συγγραφή νέων προγραμμάτων σπουδών και σχολικών εγχειριδίων και επιμόρφωση εκπαιδευτικών στα πλαίσια της διεπιστημονικότητας

11.2 Συμπεράσματα από τη συνεργασία των ερευνητών των δύο κλάδων

Η αναγκαιότητα της διεπιστημονικής προσέγγισης και η σημασία της εφαρμογής της, έχουν προαναφερθεί. Κυρίως στοχεύει στο πώς οι μαθητές θα αποκομίσουν περισσότερες προσλαμβάνουσες, ώστε να αποκτήσουν ευελιξία μεταφοράς γνωστικού φορτίου από τον ένα κλάδο στον άλλο. Οι κύριοι καθοδηγητές σε αυτή την προσπάθεια είναι το εκπαιδευτικό προσωπικό. Θα ήταν παράβλεψη να μην αναφερθεί το πώς αυτή η συνεχής διάδραση μεταξύ των εκπαιδευτικών που εκπόνησαν αυτήν την εργασία επηρέασε τον δικό τους τρόπο σκέψης και προσέγγισης όσο αφορά την συνεργασία και τις διδακτικές πρακτικές τους, τουλάχιστον στο εκπαιδευτικό περιβάλλον.

Στην αρχή της εκπόνησης της εργασίας, υπήρχε προσκόλληση στις επιταγές του κλάδου του καθενός και οι αρχικοί διάλογοι ήταν πολύπλοκοι, χρονοβόροι και ατελέσφοροι.

Όταν επιλέχθηκε από κοινού το εννοιολογικό πλαίσιο της εργασίας και ξεκίνησε η ανάλυσή του, ο διάλογος προσέδωσε μια συνεχή αλληλεπίδραση. Σε πολλά σημεία ακολουθήθηκε η διαδικασία που εφαρμόστηκε από τους Paulus et al. (2010), κατά την οποία ο ένας ερευνητής εξηγούσε την προσέγγιση που του αποδίδει ο κλάδος του ενώ ο έτερος ερευνητής, έπαιρνε τον ρόλο του μαθητή και όχι του εμπειρογνώμονα. Στο άρθρο των Paulus et al. (2010) αναφέρεται ότι κάθε αρχική υπόθεση πρέπει να ελεγχθεί μέσω τριών οργανωμένων κατηγοριών: ΄΄θέση΄΄ (positioning), ΄΄κάνοντας νόημα΄΄ (meaning making) και ΄΄παραγωγή΄΄ (producing). Χρησιμοποιούν τον όρο ΄΄θέση΄΄, ενστερνιζόμενοι την άποψη των Davies & Harre, οι οποίοι θεωρούν ότι είναι η καταλληλότερη για να αποδώσει τη δυναμική πλευρά των συναντήσεων και αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ανθρώπων. Η διαδικασία αυτή, υποστηρίζουν, μετατρέπει σε ορατό αυτό που πολλές φορές είναι αόρατο από την πλευρά του εμπειρογνώμονα. Οι κανόνες που ακολουθήθηκαν στις συζητήσεις ήταν αυτοί που αναφέρει ο Mitchell (στο Baker & Däumer, 2015), σύμφωνα με τον οποίο οι κανόνες που καθιστούν επιτυχημένη τη συνεργασία στη μάθηση είναι να βλέπουμε, να ακούμε, να ρωτάμε και να διαπραγματευόμαστε. Ήταν μια διαδικασία η οποία ήταν εν μέρει οικεία στους ερευνητές-εκπαιδευτικούς, καθότι παρόμοια διαδικασία είχε ακολουθηθεί στα πλαίσια του μαθήματος ΄΄ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ:ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ΄΄ του χειμερινού εξαμήνου του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών, τα στοιχεία του οποίου αναφέρονται στο εξώφυλλο αυτής της εργασίας. Οι αρχικές αγκυλώσεις άρχισαν να κάμπτονται, όταν αναδύθηκαν πτυχές που αγνοούνταν. Δυσκολίες κατανόησης εννοιών που θεωρούνταν ανυπέρβλητες (π.χ οπτικοποίηση των θεωρητικών εννοιών στα Μαθηματικά) στα πλαίσια του ενός κλάδου διαπιστώθηκε ότι σε συναφείς έννοιες του άλλου κλάδου υπερβαίνονται ευκολότερα. Διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν κοινά προβλήματα. Η αρχική μας άποψη ότι για τη μη επιτυχή κατανόηση ευθυνόταν ο άλλος κλάδος, μέσω της αλληλεπίδρασης, αποδείχθηκε ότι ήταν εσφαλμένη. Στην διαδικασία εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εξετάστηκε ένας μεγάλος αριθμός ερευνητικών άρθρων και μελετήθηκαν σχολαστικά πολλές αναφορές των σχολικών εγχειριδίων και των προγραμμάτων σπουδών. Αυτό όμως που αξίζει ιδιαίτερη αναφορά είναι οι πάρα πολλές συζητήσεις μεταξύ των ερευνητών, λόγω και της φύσης της εργασίας, που κάποιες φορές προσέγγιζαν τα όρια της διαπραγμάτευσης. Σίγουρα σε μία εργασία ενέχεται ο παράγοντας της υποκειμενικότητας των προσωπικών επιλογών των συγγραφέων. Για παράδειγμα, από τον εκπαιδευτικό-δάσκαλο της Φυσικής, η γνώση των Μαθηματικών θεωρείται απαραίτητη στην κατανόηση της Φυσικής, άποψη στην οποία αρκετοί ερευνητές αντιτίθενται. Παραταύτα, η παρούσα έρευνα ίσως δημιουργήσει στους αναγνώστες επιπλέον προβληματισμούς και διάθεση για περαιτέρω έρευνα.

11.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Λόγω του περιορισμού της επιλογής του δείγματος, από ένα μόνο Λύκειο, μια έρευνα σε περισσότερα Λύκεια, συμπεριλαμβανομένων και των Επαγγελματικών Λυκείων (ΕΠΑ.Λ.), θα οδηγούσε σε πιο ασφαλή συμπεράσματα. Ειδικότερα, στην ανάλυση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου, σε ορισμένες περιπτώσεις το ποσοστό των επιλογών των μαθητών ήταν μικρό, με αποτέλεσμα να έχουν αναφερθεί από τους ερευνητές οι αντίστοιχες επιφυλάξεις για μια γενίκευση.

Μια αντίστοιχη έρευνα, θα μπορούσε να περιλαμβάνει και τους μαθητές του Γυμνασίου, ώστε να μελετηθούν τα αντίστοιχα δεδομένα, καθώς και ο ρόλος των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών εγχειριδίων. Ήδη, από τη μελέτη στην παρούσα έρευνα προέκυψαν στοιχεία, τα οποία υποδεικνύουν, πως οι γενικότερες απόψεις για τα δύο μαθήματα αλλά και οι ειδικότερες για την έννοια της συνάρτησης, προ-διαμορφώνονται ήδη στο Γυμνάσιο. Στο Γυμνάσιο μία αντίστοιχη έρευνα, θα μπορούσε να αναφέρεται στη σχέση των γενικών απόψεων των μαθητών, για τη Φυσική και τα Μαθηματικά, με τις γνωστικές τους ικανότητες στις συναρτήσεις των ανάλογων και των αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Κυρίως, λόγω της πληθώρας των αντίστοιχων εφαρμογών στα δύο μαθήματα και της μεγάλης χρηστικότητας στην καθημερινότητα. Τα συμπεράσματα από μία τέτοια έρευνα θα ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθούν στην κατεύθυνση μίας διεπιστημονικής εκπαιδευτικής πρακτικής, νωρίτερα στο Γυμνάσιο, ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατανοήσουν τις πιο αναπτυγμένες συναφείς έννοιες των συναρτήσεων στο Λύκειο.

Ποσοτικές έρευνες, με εφαρμογές πειραματικών διδασκαλιών που παρακάμπτουν τις ασυμβατότητες στη διδασκαλία των συναφών εννοιών σε διεπιστημονικό πλαίσιο που προκύπτει από την συνεργασία κατάλληλου εκπαιδευτικού προσωπικού. Μία τέτοια έρευνα, θα μπορούσε να οδηγήσει σε σημαντικές αλλαγές στον τρόπο αντιμετώπισης των συναφών εννοιών, είτε μέσω αλλαγών στα Π.Σ. και στα σχολικά εγχειρίδια, είτε μέσω μίας επικείμενης θεσμοθετημένης συνεργασίας των εκπαιδευτικών των δύο κλάδων.

κεφάλαιο 12: Διδακτικό σενάριο

12.1 Συνοπτική αιτιολόγηση του σεναρίου

Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε παρατηρήθηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών αδυνατούν να εξάγουν συμπεράσματα, τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική, για τις ιδιότητες της κλίσης όταν τα δεδομένα τις άσκησης δίνονται σε μορφή πίνακα. Η ίδια αδυναμία παρατηρήθηκε και όταν τα δεδομένα της άσκησης είναι σε μορφή τύπου. Επίσης, διαπιστώθηκε πως σε συναφείς έννοιες, η γνώση του ενός πλαισίου (π.χ. Μαθηματικών) από τους μαθητές δεν συνεπάγεται και τη γνώση του άλλου πλαισίου (π.χ. Φυσικής). Τέλος, είδαμε ότι ενώ οι μαθητές προσδίδουν τα ίδια χαρακτηριστικά στους δύο κλάδους, ωστόσο δεν κατανοούν πως συνδέονται εννοιολογικά.

Σύμφωνα με πολλές έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, οι μαθητές κατά τη μετάβαση της γνώσης από το ένα πλαίσιο στο άλλο, μεταφέρουν και τις εναλλακτικές ιδέες που έχουν αποκτήσει. Για την αποφυγή αυτής της μεταφοράς, υπάρχουν έρευνες που προτείνουν τη χρήση εξωτερικού πλαισίου. Ειδικότερα διαπιστώνουν, πως όταν το εξωτερικό πλαίσιο έχει άμεση σχέση με τη καθημερινότητα των μαθητών, τότε μπορεί να προσδώσει πολλαπλά οφέλη (NRC, 2013). Κατευθυνόμενοι από τα ευρήματα της έρευνας και τις ερευνητικές προτάσεις, οι ερευνητές αποφάνθηκαν πως όταν η επιλογή κοινού εξωτερικού πλαισίου, απορρέει από τα ενδιαφέροντα και τις δυνατότητες των παιδιών, κάνει πιο ομαλή και πιο ισχυρή τη μετάβαση των γνώσεων από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Απώτερος σκοπός αυτής της προσέγγισης είναι οι μαθητές να αποκτήσουν "βαθύτερη μάθηση" ("deeper learning") που ορίζεται από το NRC ως" *η διαδικασία όπου ένα άτομο γίνεται ικανό να πάρει ότι μαθαίνει σε μία κατάσταση και να την εφαρμόζει σε νέες καταστάσεις (δηλαδή μεταφορά).*" (NRC, 2013, σελ. 5). Επιπροσθέτως, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν ικανότητες ανακαλυπτικές, σύνθεσης, σύγκρισης, γενίκευσης.

12.2 Τίτλος διδακτικού σεναρίου

Γραμμικότητα στην καθημερινότητα, στη Φυσική και στα Μαθηματικά

12.3 Τάξη που απευθύνεται & γνωστικό αντικείμενο

Το κοινό είναι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου. Τα γνωστικό αντικείμενα με τα οποία συνδέεται το σενάριο είναι τα Μαθηματικά και η Φυσική.

12.4 Εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές & ενότητες

Το διδακτικό σενάριο αφορά στην εξαγωγή δεξιοτήτων που κατέχουν οι μαθητές και την ενσωμάτωση τους σε γνωστικές περιοχές που αποτελούν στοχοθεσία του ΥΠΕΠΘ. Εντάσσεται στη γνωστική περιοχή των συναρτήσεων στα Μαθηματικά και της κινηματικής στη Φυσική. Το σενάριο συνδέεται με την ενότητα της γραμμικής συνάρτησης στα Μαθηματικά και της κινηματικής στη Φυσική.

12.5 Συμβατότητα με Δ.Ε.Π.Π.Σ.

Είναι μέσα στα προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας. Ειδικότερα το Δ.Ε.Π.Π.Σ έχει ως προτεινόμενο θέμα:

Η αισθητοποίηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων: *Αποτύπωση φαινομένων, γεγονότων, καταστάσεων με διάφορους τρόπους(πίνακες, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα κλπ.) και συγκριτική μελέτη αυτών.* ***Θεμελιώδεις Διαθεματικές Έννοιες:*** *Ομοιότητα-διαφορά, χώρος, χρόνος, μεταβολή, εξέλιξη.* ***Προεκτάσεις:*** *στη Φυσική, Βιολογία, Γεωγραφία, Ιστορία.* (ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, σελ. 303)

Όσον αφορά τη διδακτική μεθοδολογία στη του Δ.Ε.Π.Π.Σ των μαθηματικών αναφέρει:

Αν δεχτούμε, επομένως, ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αφορά μόνο γνώσεις και κατάκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων, αλλά περιλαμβάνει διαδικασίες μάθησης που καλύπτουν τις διαστάσεις που έχουμε ήδη περιγράψει, οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διατύπωσή τους επιτρέπει την εμπλοκή, εφόσον είναι δυνατόν, του συνόλου των μαθητών της τάξης.

Για τους μαθητές αυτό σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν και να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους. (ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, σελ. 303)

Για τη τάξη στην οποία απευθύνεται η δραστηριότητα έχει πλήρη συμβατότητα με το Α.Π.Σ το οποίο προτείνει μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων να μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης. Επιπλέον να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών.

Επιπλέον, σύμφωνα με το ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΗΜΕΙΑΣ (σελ. 16):

Κατά το σχεδιασμό των διδακτικών δραστηριοτήτων θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι η κατανόηση των εννοιών και η απόκτηση ουσιαστικής γνώσης επιτυγχάνονται, όταν βασίζονται σε προηγούμενες γνώσεις, εμπειρίες και βιώματα των μαθητών. Η διδασκαλία θα πρέπει να βοηθά τους μαθητές να ανακαλύπτουν και οι ίδιοι τη γνώση, όπου αυτό είναι εφικτό, μέσα από μια ενιαία και συνεχή δημιουργική διαδικασία, προτρέποντας και εθίζοντάς τους να αναπτύσσουν πρωτοβουλίες. Αυτό προϋποθέτει τη χρήση μεθόδων που να προωθούν, να ενισχύουν και να ενθαρρύνουν την ενεργοποίηση του μαθητή, τη δημιουργική δράση και τον πειραματισμό, την εμπλοκή του σε διαδικασίες μέσα από τις οποίες θα κατακτά ο ίδιος τη γνώση, τη συνεργατική και ανακαλυπτική μάθηση, την ανάπτυξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων μεθοδολογικού χαρακτήρα, την απόκτηση της ικανότητας για συζήτηση, τον προβληματισμό και την καλλιέργεια κριτικής σκέψης, την καλλιέργεια ελεύθερης σκέψης και έκφρασης, τη μάθηση του «πώς μαθαίνουμε».

12.6 Απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή & οργάνωση της διδασκαλίας

Για την πραγματοποίηση του σεναρίου απαιτείται αίθουσα με υπολογιστές, βιντεοπροβολέα και διαδίκτυο. Προτείνεται οι μαθητές/τριες να χωριστούν σε ομάδες των 3-4 ατόμων, ανάλογα και με τον αριθμό Η/Υ οι οποίοι θα πρέπει να έχουν εγκαταστημένες τις εφαρμογές «geogebra» και «Teamviewer». Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα πρόγραμμα λογιστικών φύλλων (excel ή κάποιο ελεύθερο όπως π.χ. του libre office). Τα προαπαιτούμενα ως προς το γνωστικό είναι οι μαθητές να μπορούν, μέσω λεκτικών δεδομένων, να συμπληρώνουν πίνακα τιμών και να κάνουν το γράφημα που αντιστοιχεί στα δεδομένα. Τα προαπαιτούμενα ως προς τη χρήση της εφαρμογής «geogebra» είναι οι μαθητές να μπορούν να τοποθετούν σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο, να κάνουν ευθύγραμμο τμήμα και ευθεία που διέρχεται από δύο συγκεκριμένα σημεία.

Σε κάθε ομάδα θα διανεμηθεί ένα ομαδικό φύλλο εργασίας. Ένα μέρος του, θα πραγματοποιηθεί στα Μαθηματικά και το άλλο στη Φυσική. Επίσης, σε κάθε μέλος της ομάδας θα δοθεί ένα επιπλέον ατομικό φύλλο εργασίας που περιέχει δύο δραστηριότητες αξιολόγησης-αναστοχασμού. Το ομαδικό φύλλο εργασίας θα συμπληρώνεται στην ηλεκτρονική μορφή, το οποίο επίσης, κατέχει η κάθε ομάδα. Όταν όλες οι ομάδες ολοκληρώνουν κάποιες δραστηριότητες, τότε η κάθε ομάδα θα τις παρουσιάζει στην ολομέλεια της τάξης. Συνολικά θα γίνουν δύο παρουσιάσεις. Μία για τις δραστηριότητες του εξωτερικού πλαισίου και μία για τις δραστηριότητες που αναφέρονται στο διδακτικό αντικείμενο της Φυσικής ή των

Μαθηματικών. Η παρουσίαση των ηλεκτρονικών φύλλων εργασίας θα γίνει μέσω της σύνδεσης του υπολογιστή τους με τον υπολογιστή που είναι συνδεδεμένος ο βιντεοπροβολέας. Η σύνδεση αυτή θα πραγματοποιηθεί μέσω της εφαρμογής «Teamviewer». Τέλος ο εκπαιδευτικός θα έχει ένα δείκτη λέιζερ, τον οποίο θα δίνει σε κάθε ομάδα που παρουσιάζει, για να εστιάσει η ομάδα σε σημεία που κρίνει απαραίτητα. Όσο διαρκεί η παρουσίαση στην 3η δραστηριότητα, οι μαθητές των άλλων ομάδων θα εργάζονται στο ατομικό φύλλο, το οποίο θα περιλαμβάνει ερωτήσεις, παρατηρήσεις, σχόλια σχετικά με τις ομοιότητες (ή διαφοροποιήσεις) σε σχέση με τη δική τους εργασία. Τέλος με την ολοκλήρωση των παρουσιάσεων θα δοθεί η δυνατότητα σε κάθε ομάδα να επανατοποθετηθεί ως προς την αρχική της προσέγγιση.
Κρίνεται απαραίτητο να αναφερθεί ότι δεν πρέπει να υπάρχει μεγάλη χρονική απόσταση μεταξύ των δραστηριοτήτων.

12.7 Διδακτική προσέγγιση

Η διδακτική προσέγγιση του σεναρίου θα αποτελεί μια προσαρμοσμένη μικροεφαρμογή του εκπαιδευτικού μοντέλου 5E (Bybee et al., 2006). Το διδακτικό μοντέλο 5E, αναφέρεται στα βήματα: Engagement (Ενεργοποίηση-Εμπλοκή), Exploration (Εξερεύνηση), Explanation (Επεξήγηση), Elaboration (Επεξεργασία), Evaluation (Εκτίμηση). Παρακάτω παρουσιάζονται οι φάσεις του μοντέλου 5E.

- Ενεργοποίηση-Εμπλοκή: η αρχική δραστηριότητα έχει ως σκοπό ο εκπαιδευτικός να αποκτήσει πρόσβαση σε πρότερες γνώσεις και να οργανώσει τη σκέψη των μαθητών προς την επίτευξη των προσδοκώμενων αποτελεσμάτων. Οι αρχικές δραστηριότητες έχουν ως στόχο να ενεργοποιήσουν τους μαθητές σε ατομικό επίπεδο, σε επίπεδο ομάδας και σε επίπεδο τάξης.
- Εξερεύνηση: οι μαθητές στην αρχική φάση έχουν χρησιμοποιήσει τις πρότερες γνώσεις. Βασιζόμενοι σε αυτή θα κάνουν μία προκαταρκτική διατύπωση της άποψης τους.
- Επεξήγηση: οι μαθητές θα εστιαστούν σε συγκεκριμένη διάσταση και θα έχουν την ευκαιρία να παρουσιάσουν την εννοιολογική τους κατανόηση. Ο έλεγχος της ορθότητας, από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (λεκτική, πίνακας, γραφική) θα τους οδηγήσει σε βαθύτερες κατανοήσεις.
- Επεξεργασία: οι μαθητές μέσω των παρουσιάσεων των άλλων εργασιών, επικουρούμενοι από το κατάλληλο φύλλο, θα έχουν την ευκαιρία να επεκτείνουν την εννοιολογική τους κατανόηση. Η επίτευξη, της απόκτησης βαθύτερης και ευρύτερης κατανόησης θα γίνει μέσω της απόκτησης περισσότερων πληροφοριών.

- Εκτίμηση: οι μαθητές ενθαρρύνονται να αξιολογήσουν τις κατανοήσεις και τις ικανότητες που απέκτησαν. Η εξαγωγή του κατάλληλου γενικού κανόνα, θα δώσει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό, να αξιολογήσει αν έχουν επιτευχθεί οι προσδιορισμένοι στόχοι.

Η προβολή με τον τρόπο που προαναφέρθηκε θα βοηθήσει τους μαθητές να επικεντρωθούν στη κατανόηση των εννοιών (Galligan, Loch, McDonald & Taylor, 2010). Μέσω αυτού θα δημιουργηθεί ένα περιβάλλον που είναι πιο φιλικό και ελκυστικό για τους μαθητές, το οποίο σύμφωνα με τους Gikas & Grant (2013), οδηγεί σε μεγαλύτερη συμμετοχή και προσοχή. Επιπλέον η προτεινόμενη διαδικασία ελέγχου των κατανοήσεων των μαθητών μέσω της προβολής τους στην ολομέλεια και την δυνατότητα αναθεωρήσεων/διορθώσεων, κεντρίζει το ενδιαφέρον και δεν προκαλεί εκφοβισμό (Τζιούφας & Τσαρούχας, 2018).

Η επιλογή του προβλήματος έγινε με κριτήριο να περιγράφεται όσο το δυνατό καλύτερα μια πραγματική κατάσταση που βιώνουν ή ενδέχεται να βιώσουν οι μαθητές. Με την πρακτική αυτή συμφωνούν οι Grossman & Salas (2011) που δηλώνουν πως η προσομοίωση σε χαμηλό ή υψηλό ποσοστό πιστότητας, διευκολύνει με τον καλύτερο τρόπο τη μεταφορά της γνώσης αλλά και το National Council of Teachers of Mathematics (1991), το οποίο αποφάνθηκε πως η μάθηση των μαθητών, εξαρτάται από τον βαθμό εμπλοκής των ενδιαφερόντων τους με τις νοητικές τους διεργασίες.

Μέσω του σεναρίου, οι μαθητές, μπορούν να αναπτύξουν δεξιότητες, οι οποίες συμβαδίζουν με τις απαιτήσεις του 21ου αιώνα. Όπως αναφέρει το NCR (2013), αυτές οι απαιτήσεις συνδέονται με το να κατανοούν οι μαθητές τι μαθαίνουν, πώς εφαρμόζουν τις γνώσεις που αποκτούν και να αναπτύσσουν την ικανότητα να μεταβιβάζουν γνώσεις και δεξιότητες.

12.8 Διδακτικοί στόχοι ενότητας

Στα Μαθηματικά, η γνωστική ενότητα του σεναρίου είναι η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\cdot\chi+\beta$. Οι διδακτικοί στόχοι της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha\cdot\chi+\beta$, που καθορίζονται από τις αναλυτικές οδηγίες διδασκαλίας της Α΄ Λυκείου του 2016 (σελ. 11), είναι:

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας $\psi=\alpha x+\beta$ στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x+\beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα y'y στο ίδιο σημείο). Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε

γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν τη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν τον ρόλο της παραμέτρου α, σε σχέση με αυτά.
Στη Φυσική, η γνωστική ενότητα που μελετάται στο σενάριο, είναι η αντίστοιχη του σχολικού βιβλίου Φυσική Α΄ Λυκείου με τίτλο «Η έννοια της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση». Κύριοι διδακτικοί στόχοι στην ενότητα αυτή είναι η αναγνώριση της ταχύτητας από τη σταθερή κλίση του διαγράμματος θέσης-χρόνου και η ευχέρεια στην μετάβαση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης (λεκτική περιγραφή, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, εξισώσεις κίνησης).

12.9 προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές αναγνωρίζουν στη Φυσική, έννοιες όπως ύλης και κίνησης, χρονικής στιγμής, χρονικού διαστήματος (χρονικής διάρκειας), θέσης του σωματίου και μετατόπισης σε άξονα. Επίσης διακρίνουν βασικές έννοιες για τα διανύσματα όπως μέτρο και κατεύθυνση, σύνθεση συγγραμμικών διανυσμάτων και αντιστοίχιση διανυσματικής σχέσης με την αλγεβρική.
Στα Μαθηματικά, οι μαθητές να γνωρίζουν να τοποθετούν σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο, να μετατρέπουν τα δεδομένα του πίνακα σε γράφημα, να ελέγχουν αν ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και ποιον κανόνα έχουν τα σημεία που ανήκουν σε μία συνάρτηση.

12.10 Διδακτικοί-παιδαγωγικοί στόχοι των δραστηριοτήτων

Α. Φυσική:

Στην 4η Δραστηριότητα, ο μαθητής να μπορεί:

1. με γνωστό τον σταθερό λόγο, μέτρα ανά δευτερόλεπτο (ταχύτητα), να βρίσκει ζεύγη θέσης-χρόνου στα όρια που θέτει η άσκηση και να αντιλαμβάνεται τη σημασία της κλίμακας.
2. να αντιστοιχεί τα ζεύγη σε σημεία και από αυτά να κατασκευάζει το γράφημα.
3. να μεταβαίνει από μία αναπαράσταση σε άλλη και να δημιουργεί εννοιολογικές συνδέσεις.
4. να κατανοήσει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
5. να αναπτύξει δεξιότητες κατασκευής και ερμηνείας γραφικής αναπαράστασης.
6. να αναπτύξει ικανότητες χειρισμού ενός λογισμικού στον μικρο-υπολογιστή.

Στην 5η Δραστηριότητα, ο μαθητής να μπορεί:

1. με γνωστό τον σταθερό λόγο, μέτρα ανά δευτερόλεπτο (ταχύτητα), να βρίσκει ζεύγη θέσης-χρόνου στα όρια που θέτει η άσκηση.
2. να κατανοεί τη σημασία του συστήματος αναφοράς και των σχετικών συμβάσεων που υιοθετούνται στην ταυτόχρονη περιγραφή δύο κινήσεων.
3. να μεταβαίνει από μία αναπαράσταση σε άλλη και να δημιουργεί εννοιολογικές συνδέσεις.
4. να κατανοήσει τις διαφορετικές ανεξάρτητες κινήσεις (ευθύγραμμες ομαλές) δύο σωμάτων.
5. να αναπτύξει δεξιότητες ερμηνείας διαφορετικού γραφήματος (δεν περνάει από την αρχή των αξόνων και έχει διαφορετική κλίση) που περιγράφει ίδιου είδους κίνηση.
6. να αναπτύξει δεξιότητες ερμηνείας σύνθετου γραφήματος (ταυτόχρονη ερμηνεία, σημεία τομής).

Στην 6η Δραστηριότητα, ο μαθητής να μπορεί:

1. με γνωστό τον σταθερό λόγο, μέτρα ανά δευτερόλεπτο (ταχύτητα), να βρίσκει ζεύγη θέσης-χρόνου στα όρια και τις συνθήκες που θέτει η άσκηση
2. να κατανοεί τη σημασία του συστήματος αναφοράς και των σχετικών συμβάσεων που υιοθετούνται στην ταυτόχρονη περιγραφή περισσότερων και διαφορετικών κινήσεων
3. να μεταβαίνει από μία αναπαράσταση σε άλλη και να δημιουργεί εννοιολογικές συνδέσεις
4. να κατανοήσει τις διαφορετικές ανεξάρτητες κινήσεις (ευθύγραμμες ομαλές) των σωμάτων
5. να αναπτύξει δεξιότητες ερμηνείας διαφορετικού γραφήματος (αρνητική κλίση) κίνησης ίδιου είδους
6. να αναπτύξει δεξιότητες ερμηνείας σύνθετου γραφήματος (ταυτόχρονη ερμηνεία, σημεία τομής)
7. να αναπτύξει δεξιότητες εννοιολογικών συνδέσεων μεταξύ των γραφικών και λεκτικών περιγραφών-αναπαραστάσεων

Β. Στα μαθηματικά:

Ο διδακτικός στόχος της 8ης δραστηριότητας στα Μαθηματικά, θα είναι ο μαθητής

- με δεδομένο τη λεκτική περιγραφή, να διατυπώνει κανόνες που συνδέουν τις ποσότητες του προβλήματος

- να ελέγχει την ορθότητα του αρχικού του ισχυρισμού, με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων
- να αναθεωρεί ή να επαληθεύει την αρχική του διατύπωση και να την προσαρμόζει κατάλληλα
- να γενικεύει τον κανόνα
- να κατανοεί πότε ένας κανόνας είναι συνάρτηση

Ο διδακτικός στόχος της $9^{ης}$ δραστηριότητας στα Μαθηματικά, θα είναι ο μαθητής να υπολογίζει τις παραμέτρους α και β, της γραμμικής συνάρτησης όταν τα δεδομένα είναι σε λεκτική μορφή, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση (Πίνακας 12.1).

Πίνακας 12.1 Διδακτική στόχοι, υπολογισμού των παραμέτρων α και β, ανάλογα τη μορφή των δεδομένων, της συνάρτησης f(χ)=α·χ+β

	Λεκτική	**Πίνακας**	**Γραφική**
α	Εκφράζει τον ρυθμό που μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή.	$α=\frac{Δψ}{Δχ}$	α=εφω $(=\frac{Δψ}{Δχ})$
β	Εξαρτάται από την αρχική θέση.	Όταν το χ=0 ή β=ψ-α·χ	Το σημείο τομής με τους άξονες.

Ο διδακτικός στόχος της $9^{ης}$ δραστηριότητας στα Μαθηματικά, θα είναι ο μαθητής να μπορεί

1. να ερμηνεύει τον ρόλο των παραμέτρων α και β, της γραμμικής συνάρτησης, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να :
   - διέρχονται από την αρχή των αξόνων
   - να είναι παράλληλες
   - να ταυτίζονται
   - να τέμνουν τον άξονα ψ΄ψ στο ίδιο σημείο
   - να τέμνονται
2. να κατανοούν, πως επηρεάζεται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής σε σχέση με την εξαρτημένη μεταβλητή στη γραμμική συνάρτηση, ανάλογα με τη μορφή αναπαράστασης αυτής (πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, κανόνας).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Β. ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γ. ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Δ. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
ΠΜΣ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

Ρόδος, …/…/18

Αριθμός Ερωτηματολογίου …

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Α ΜΕΡΟΣ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αγαπητές μαθήτριες, αγαπητοί μαθητές, το παρόν **ερωτηματολόγιο** διανέμεται στο πλαίσιο εκπόνησης διπλωματικής εργασίας στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ» του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Η ανταπόκρισή σας είναι εθελοντική αλλά πολύτιμη. Τα ερωτηματολόγια είναι **ανώνυμα** και δεν αποτελούν μέρος διαδικασιών αξιολόγησης. Σας παρακαλούμε μόνο να σημειώσετε τον αριθμό του ερωτηματολογίου του Α' Μέρους, ώστε να αντιστοιχηθεί με τον αριθμό του Β' Μέρους.

Οι απαντήσεις σας θα αξιοποιηθούν αποκλειστικά για τους σκοπούς της διερεύνησης απόψεων και γνώσεων που παράγονται στη σχολική πραγματικότητα για τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Ο χρόνος συμπλήρωσης των απαντήσεών σας είναι **τριάντα λεπτά (30΄).**

Σας ευχαριστούμε πολύ για τη συνεργασία σας,

Τζιούφας Νικόλαος, εκπαιδευτικός μαθηματικός

Τσαρούχας Δημήτριος, εκπαιδευτικός φυσικός

Ερωτήσεις

Από την εμπειρία σου στο σχολείο με τη Φυσική και τα Μαθηματικά, σημείωσε κατά πόσο συμφωνείς ή διαφωνείς με τις παρακάτω απόψεις. (Σημείωσε Χ σε μία από τις πέντε επιλογές)

	διαφωνώ πλήρως	διαφωνώ	ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ	συμφωνώ	συμφωνώ πλήρως
1. Τα μαθηματικά έχουν συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.					
2. Τα προβλήματα των Μαθηματικών λύνονται ευκολότερα με γνώσεις Φυσικής.					
3. Η κατανόηση σε βάθος των Μαθηματικών συνδέεται με τη γνώση της Φυσικής.					
4. Η επιτυχία στο μάθημα των Μαθηματικών εξαρτάται από τη γνώση της Φυσικής.					
5. Στα Μαθηματικά πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.					
6. Οι γνώσεις των Μαθηματικών είναι χρήσιμες για μια επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία.					
7. Οι γνώσεις των Μαθηματικών βοηθούν να αντιμετωπίζουμε καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής μας ζωής.					

Διάβασε προσεκτικά τις εκφωνήσεις των παρακάτω θεμάτων (ή ασκήσεων) και απάντησε στα αντίστοιχα ερωτήματα

1. Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμών, ποιες αντιστοιχούν σε ευθείες;	Απάντηση Αντιστοιχεί σε ευθεία (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. $\psi=2\chi^2$	Ναι	Όχι
ii. $\psi=3\chi+2$	Ναι	Όχι
iii. $\psi=2\chi$	Ναι	Όχι
iv. $\psi=2\chi^2+3\chi$	Ναι	Όχι
v. $\chi\psi=3$	Ναι	Όχι
vi. $\chi=2$	Ναι	Όχι

2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση μιας ευθείας ε_1: $\psi = 2\chi + 3$. **Τότε:**	Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
	i. η κλίση της αυξάνεται	Ναι	Όχι
	ii. η κλίση της μειώνεται	Ναι	Όχι
	iii. η κλίση της είναι σταθερή	Ναι	Όχι
	iv. η κλίση της είναι κυμαινόμενη	Ναι	Όχι
	v. η κλίση της είναι μηδέν	Ναι	Όχι

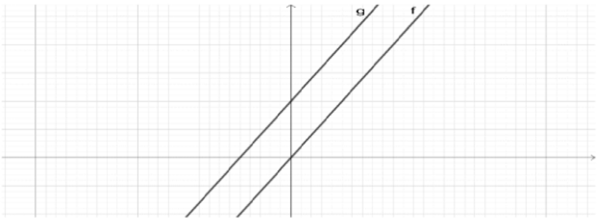
3.Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών, δύο μεταβλητών χ και ψ:

χ	0	1	2	3	4	5
ψ	0	2	4	6	8	10

Η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία:

Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. η κλίση της αυξάνεται	Ναι	Όχι
ii. η κλίση της μειώνεται	Ναι	Όχι
iii. η κλίση της είναι σταθερή	Ναι	Όχι
iv. η κλίση της είναι κυμαινόμενη	Ναι	Όχι
v. η κλίση της είναι μηδέν	Ναι	Όχι

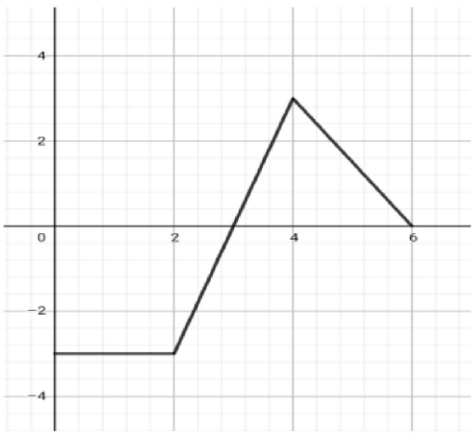
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα δύο ευθειών της f και g.



<u>Με ποιες</u> από τις παρακάτω **προτάσεις συμφωνείς;**

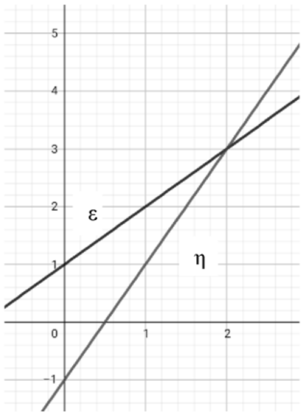
Επιλογές		Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i.	Οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλίση.	Ναι	Όχι
ii.	Η ευθεία που παριστάνει η g έχει μεγαλύτερη κλίση από την ευθεία που παριστάνει η f.	Ναι	Όχι
iii.	Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι σταθερή.	Ναι	Όχι
iv.	Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι μηδενική.	Ναι	Όχι

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μία συνάρτησης f.



Σε ποιο ή ποια διαστήματα η f είναι γνησίως φθίνουσα;

Επιλογές	Απάντηση Αντιστοιχεί στο διάστημα που είναι γνησίως φθίνουσα (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. [0,2]	Ναι	Όχι
ii. [2,4]	Ναι	Όχι
iii. [4,6]	Ναι	Όχι
iv. [2,6]	Ναι	Όχι

<table>
<tr>
<td rowspan="5">6. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα δύο ευθειών της (ε) και (η)


Στο διάστημα [1,2) :</td>
<td>Επιλογές</td>
<td colspan="2">Απάντηση
(κύκλωσε την απάντησή σου)</td>
</tr>
<tr><td>i. η κλίση της (ε) είναι μεγαλύτερη από την κλίση της (η)</td><td>Ναι</td><td>Όχι</td></tr>
<tr><td>ii. η κλίση της (ε) είναι μικρότερη από την κλίση της (η)</td><td>Ναι</td><td>Όχι</td></tr>
<tr><td>iii. η κλίση της (ε) είναι ίση με την κλίση της (η)</td><td>Ναι</td><td>Όχι</td></tr>
<tr><td>iv. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποια κλίση είναι μεγαλύτερη</td><td>Ναι</td><td>Όχι</td></tr>
</table>

Ε. ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
ΠΜΣ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΠΕ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ»

Ρόδος, …/…/18

Αριθμός Ερωτηματολογίου …

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Α ΜΕΡΟΣ – ΦΥΣΙΚΗ

Αγαπητές μαθήτριες, αγαπητοί μαθητές, το παρόν **ερωτηματολόγιο** διανέμεται στο πλαίσιο εκπόνησης διπλωματικής εργασίας στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Διδακτική Θετικών Επιστημών και ΤΠΕ στην Εκπαίδευση: Διεπιστημονική Προσέγγιση» του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Η ανταπόκρισή σας είναι εθελοντική αλλά πολύτιμη. Τα ερωτηματολόγια είναι **ανώνυμα** και δεν αποτελούν μέρος διαδικασιών αξιολόγησης. Σας παρακαλούμε μόνο να σημειώσετε τον αριθμό του ερωτηματολογίου του Α' Μέρους, ώστε να αντιστοιχηθεί με τον αριθμό του Β' Μέρους.

Οι απαντήσεις σας θα αξιοποιηθούν αποκλειστικά για τους σκοπούς της διερεύνησης απόψεων και γνώσεων που παράγονται στη σχολική πραγματικότητα για τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Ο χρόνος συμπλήρωσης των απαντήσεών σας είναι **τριάντα λεπτά (30΄)**.

Σας ευχαριστούμε πολύ για τη συνεργασία σας,

Τζιούφας Νικόλαος, εκπαιδευτικός μαθηματικός

Τσαρούχας Δημήτριος, εκπαιδευτικός φυσικός

Ερωτήσεις

Από την εμπειρία σου στο σχολείο με τα Μαθηματικά και τη Φυσική, σημείωσε κατά πόσο συμφωνείς ή διαφωνείς με τις παρακάτω απόψεις. (Σημείωσε Χ σε μία από τις πέντε επιλογές)

	διαφωνώ πλήρως	διαφωνώ	δεν διαφωνώ ούτε συμφωνώ	συμφωνώ	συμφωνώ πλήρως
1. Η Φυσική έχει συνήθως ασκήσεις-προβλήματα με αριθμούς.					
2. Τα προβλήματα Φυσικής δεν λύνονται χωρίς γνώση Μαθηματικών.					
3. Η Φυσική δεν κατανοείται σε βάθος χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών.					
4. Η επιτυχία στο μάθημα της Φυσικής εξαρτάται από τη γνώση των Μαθηματικών.					
5. Στη Φυσική πρέπει να απομνημονεύσεις κανόνες.					
6. Η γνώση της Φυσικής είναι χρήσιμη για επιτυχημένη επαγγελματική σταδιοδρομία μου.					
7. Η γνώση της Φυσικής βοηθάει να αντιμετωπίσω καλύτερα τα προβλήματα της καθημερινής ζωής μου.					

Διάβασε προσεκτικά τις εκφωνήσεις των παρακάτω θεμάτων (ή ασκήσεων) και απάντησε στα αντίστοιχα ερωτήματα

1. Από τις παρακάτω **χρονικές εξισώσεις** ποιες **παριστάνονται** γραφικά **με ευθεία:**	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. $x = 2t^2$	Ναι	Όχι
ii. $\upsilon = 8+4t$	Ναι	Όχι
iii. $\upsilon = 5t$	Ναι	Όχι
iv. $x = 12t + t^2$	Ναι	Όχι
v. $\upsilon \cdot t = 40$	Ναι	Όχι
vi. $\upsilon = 6$	Ναι	Όχι

2. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με εξίσωση θέσης-χρόνου: x=23+8t. **Τότε**:	Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
	i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται	Ναι	Όχι
	ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται	Ναι	Όχι
	iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό	Ναι	Όχι
	iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται	Ναι	Όχι
	v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν	Ναι	Όχι

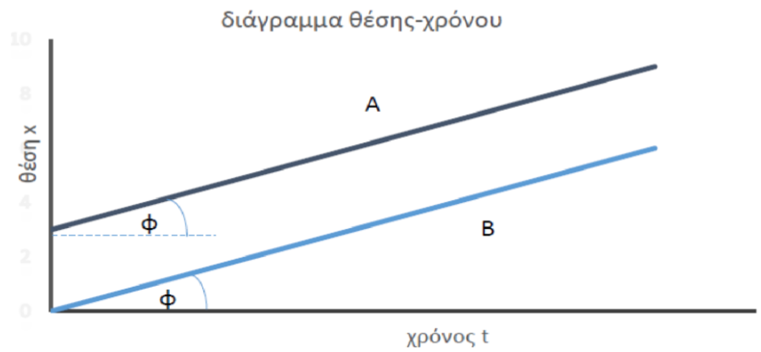
3. Από τις αντίστοιχες μετρήσεις θέσης (x) και χρόνου (t) ενός αντικείμενου που κινείται ευθύγραμμα, παίρνουμε τα παρακάτω δεδομένα:

t(s)	0	1	2	3	4	5
x(m)	0	3	6	9	12	15

Από την ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία συμπεραίνουμε πως:

Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται	Ναι	Όχι
ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται	Ναι	Όχι
iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό	Ναι	Όχι
iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται	Ναι	Όχι
v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν	Ναι	Όχι

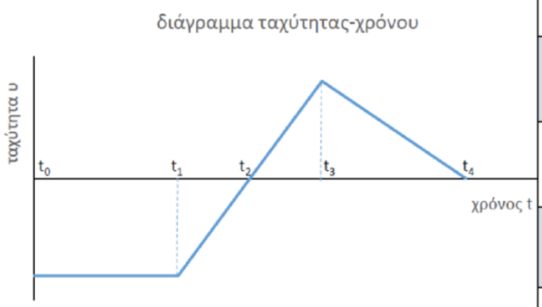
4. Δύο δρομείς κινούνται στην ίδια ευθεία. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η θέση τους x σε σχέση με το χρόνο t.



<u>Με ποιες</u> από τις παρακάτω **προτάσεις συμφωνείς**;

Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. Η μεταξύ τους απόσταση κάθε χρονική στιγμή διατηρείται σταθερή	Ναι	Όχι
ii. Κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στην ίδια θέση	Ναι	Όχι
iii. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα	Ναι	Όχι
iv. Η ταχύτητα του Α είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Β.	Ναι	Όχι

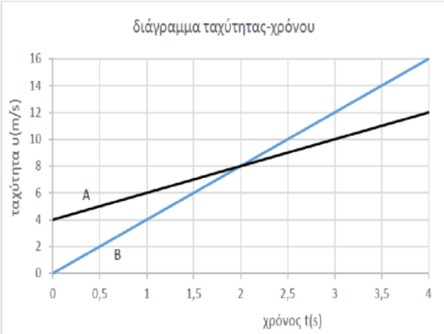
5. Για ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου υ(t):



Σε ποιο ή σε ποια χρονικό διάστημα η επιτάχυνση του σώματος είναι αρνητική;

Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
$t_0 - t_1$	Ναι	Όχι
$t_1 - t_2$	Ναι	Όχι
$t_2 - t_3$	Ναι	Όχι
$t_3 - t_4$	Ναι	Όχι

6. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η γραφική σχέση ταχύτητας – χρόνου για δύο αντικείμενα A και B τα οποία κινούνται σε ευθεία γραμμή.



Στο χρονικό διάστημα t_1=1s έως t_2=2s :

Επιλογές	Απάντηση (κύκλωσε την απάντησή σου)	
i. η επιτάχυνση του A είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του B	Ναι	Όχι
ii. η επιτάχυνση του B είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του A	Ναι	Όχι
iii. η επιτάχυνση του A είναι ίση με την επιτάχυνση του B	Ναι	Όχι
iv. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποιου η επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη	Ναι	Όχι

ΣΤ. ΟΜΑΔΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μέρος Α: γραμμική σχέση στην καθημερινότητα

1η Δραστηριότητα

Το καλοκαίρι σου προσφέρθηκε μια εργασία. Το οικονομικός σκέλος της πρότασης όσο αφορά τις αποδοχές σου ήταν 40 ευρώ (8 ώρες επί 5 ευρώ) καθαρά ανά ημέρα εργασίας ενώ η εταιρία θα επιβαρύνεται επιπλέον με τις ασφαλιστικές εισφορές. Η πληρωμή γινόταν ανά ημέρα, όταν ολοκλήρωνες την εργασία σου. Για να ενισχύσεις το οικονομικό σου εισόδημα δέχτηκες την εργασία. Πριν αρχίσεις την εργασία σου είχες στο κουμπαρά σου, στο σπίτι, 200€.

Α) Να συμπληρώσεις τους παρακάτω πίνακες (ή δημιουργείστε τους κατ΄ ευθείαν στο λογιστικό φύλλο1, στο αρχείο με το όνομα ΄΄σενάριο΄΄, έναν κοινό πίνακα) οι οποίοι αναφέρονται στα:

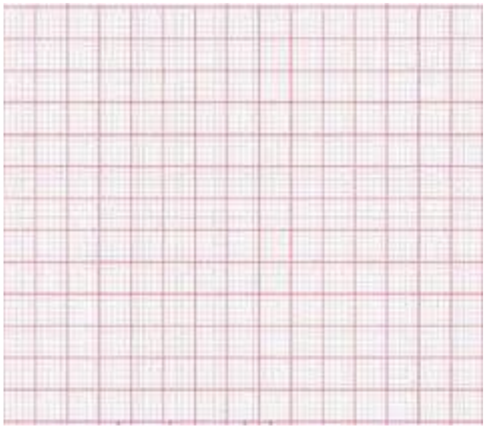
i. χρήματα που λάμβανες από την εργασία σου για τις πρώτες έξι μέρες, σε σχέση με τον αριθμό ημερών που εργαζόσουν.

Αριθμός ημερών						
Χρήματα εργασίας						

ii. συνολικά χρήματα που συγκεντρωνόταν στον κουμπαρά σου, για τις πρώτες έξι μέρες, σε σχέση με τον αριθμό ημερών που εργαζόσουν.

Αριθμός ημερών						
Χρήματα κουμπαρά						

Β) i.Να παραστήσεις τα παραπάνω δεδομένα των δύο πινάκων σε κοινό διάγραμμα στο παρακάτω πλαίσιο (ή μετατρέψτε τα δεδομένα του λογιστικού φύλλου 1, σε γράφημα γραμμής):



ii. Μπορείς να χαρακτηρίσεις το είδος του γραφήματος που προέκυψε; (μπορείς να αιτιολογήσεις γιατί προέκυψε το συγκεκριμένο γράφημα;):

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

iii. Μπορείς να εντοπίσεις τις ομοιότητες και διαφορές των διαγραμμάτων που προέκυψαν;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Γ) Να υπολογίσεις το καθαρό ημερομίσθιο σου από τα δεδομένα:

i. του πρώτου πίνακα του πρώτου υποερωτήματος (i) της ερώτησης Α.

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

ii. του δευτέρου πίνακα του δευτέρου υποερωτήματος (ii) της ερώτησης Α.

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

iii. του διαγράμματος του πρώτου υποερωτήματος (i) της ερώτησης Β (και από τις δύο γραμμές).

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

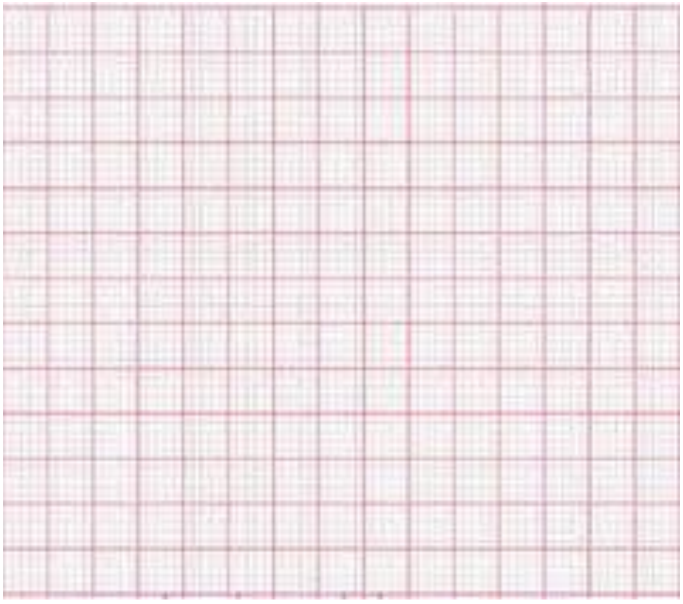
$2^{η}$ δραστηριότητα

Πριν ξεκινήσεις την εργασία, ο υπεύθυνος της εταιρίας είχε εξασφαλίσει στο ταμείο του 500€ για να πληρώνει καθημερινά τις δικές σου καθαρές αποδοχές.

Α) Να συμπληρώσεις τον πίνακα (ή δημιουργείστε τους κατ΄ ευθείαν στο λογιστικό φύλλο2, στο αρχείο με το όνομα ΄΄σενάριο΄΄, έναν αντίστοιχο πίνακα) στον οποίο εμφανίζονται τα χρήματα που υπάρχουν στο ταμείο του υπευθύνου σε σχέση με τον αριθμό ημερών εργασίας σου, για τις πρώτες έξι μέρες.

Χρήματα ταμείου						
Μέρες που δούλεψες						

Β) Να παραστήσεις τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα σε διάγραμμα στο παρακάτω πλαίσιο (ή μετατρέψτε τα δεδομένα του λογιστικού φύλλου 2, σε γράφημα γραμμής):



Μπορείς να χαρακτηρίσεις το είδος του γραφήματος που προέκυψε (μπορείς να αιτιολογήσεις γιατί προέκυψε το συγκεκριμένο γράφημα).

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Γ) Να βρεις το καθαρό ημερομίσθιο που λάμβανες καθημερινά από τα δεδομένα
i. τον πίνακα του ερωτήματος Α και ii) από το γράφημα του ερωτήματος Β.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

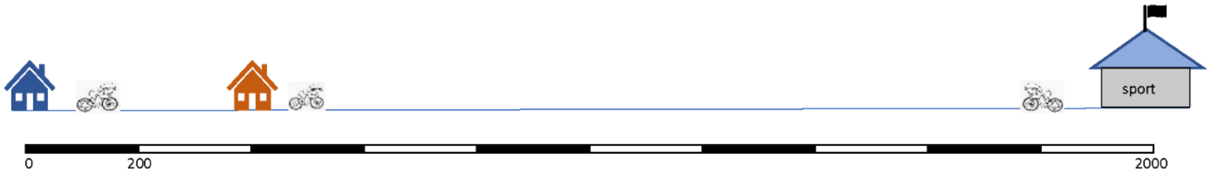
………………………………………………………………………………………………

3η δραστηριότητα

Προβάλλετε την εκφώνηση των δραστηριοτήτων 1 και 2 καθώς και τους πίνακες με τα αντίστοιχα γραφήματα και όταν προβάλει μία άλλη ομάδα τα δικά της, απαντήστε στην ΄΄ερώτηση αναστοχασμού΄΄ στο ατομικό φύλλο εργασίας.

Μέρος Β: Φυσική – κίνηση με σταθερή ταχύτητα

Σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα, η Ντίνα και ο Λέο ξεκινούν από σπίτι τους (μπλε και καφέ αντίστοιχα) για το κλειστό γυμναστήριο (sport), ενώ ο αδελφός της Ντίνας, ο Ιάσονας επιστρέφει από αυτό, στο σπίτι του.



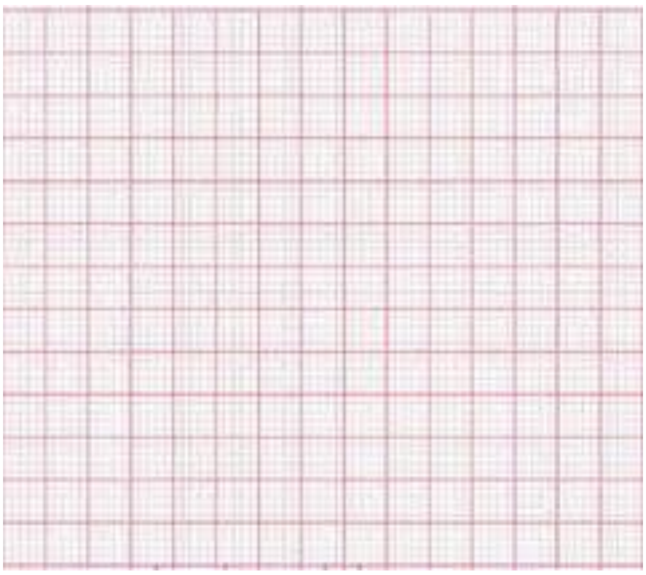
4η Δραστηριότητα

Α. Η Ντίνα ξεκινά με το ποδήλατό της, από το σπίτι της για το κλειστό και κινείται σε ευθεία διαδρομή με ταχύτητα σταθερού μέτρου, ίσο με 5 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Α1. Διαμορφώστε τον παρακάτω πίνακα όπως σας βολεύει (ή δημιουργείστε τον απ΄ ευθείας στο λογιστικό φύλλο 3, στο αρχείο με όνομα ΄΄σενάριο΄΄) και συμπληρώστε τη θέση της, σε σχέση με το χρόνο που περνάει, από το σπίτι της έως το γυμναστήριο.

θέση (μέτρα)	
χρόνος (δευτερόλεπτα)	

Α2. Να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση στο παρακάτω πλαίσιο (ή στο λογιστικό φύλλο 3 με την αξιοποίηση του αντίστοιχου πίνακα):



Α3. Ποια συμβολική σχέση (τύπος ή μαθηματική σχέση ή εξίσωση), η οποία συνδέει τη θέση με το χρόνο θα μπορούσε να περιγράφει την κίνηση της Ντίνας;

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Α4. Πως μπορείτε να προσδιορίσετε την ταχύτητα της Ντίνας από:

i. τον πίνακα.

ii. το γράφημα.

iii. την συμβολική σχέση (εξίσωση).

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

5η Δραστηριότητα:

Β. Ο Λέο ξεκινά με το ποδήλατό του, ταυτόχρονα με τη Ντίνα, από το σπίτι του για το κλειστό και κινείται στο ίδιο ευθύ δρόμο με ταχύτητα σταθερού μέτρου ίσο με 4 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Β1. Διαμορφώστε τον παρακάτω πίνακα όπως σας βολεύει (ή προσαρμόστε τον στο ήδη υπάρχοντα στο λογιστικό φύλλο 3) και συμπληρώστε τη θέση του σε σχέση με το χρόνο που περνάει από το σπίτι του έως το γυμναστήριο.

θέση (μέτρα)	
χρόνος (δευτερόλεπτα)	

Β2. Να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων με την προηγούμενη δραστηριότητα στην ΄΄κίνηση Ντίνας΄΄ (ή μετατρέψτε τα επιπλέον δεδομένα στο πίνακα του λογιστικού φύλλου 3, σε επιπλέον γράφημα). Ελέγξτε αν το διπλό γράφημα περιγράφει σωστά την κίνηση των δύο παιδιών. Αν όχι, προσαρμόστε τα δεδομένα στον πίνακα Β1 και το γράφημα.

Β3. Από τις απαντήσεις στα Β1 και Β2, βρείτε τη συμβολική σχέση (τύπος ή μαθηματική σχέση ή εξίσωση), η οποία περιγράφει την κίνηση του Λέο.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

B4. Πως μπορείτε να προσδιορίσετε την ταχύτητα του Λέο από:

i. τον πίνακα.

ii. το γράφημα.

iii. την συμβολική σχέση (εξίσωση).

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

B5. Συγκρίνετε τα δύο γραφήματα και γράψτε τις παρατηρήσεις σας (σημεία τομής με τους άξονες ή και μεταξύ τους, κλίση)

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

6η Δραστηριότητα:

Γ. Ο Ιάσονας ξεκινά με το ποδήλατό του, ταυτόχρονα με τη Ντίνα, από το κλειστό για το σπίτι του και κινείται στο ίδιο δρόμο με ταχύτητα σταθερού μέτρου 5 μέτρα το δευτερόλεπτο.

Γ1. Διαμορφώστε τον παρακάτω πίνακα όπως σας βολεύει (ή προσαρμόστε τον στο ήδη υπάρχοντα στο λογιστικό φύλλο 3) και συμπληρώστε τη θέση του σε σχέση με το χρόνο που περνάει από το γυμναστήριο έως το σπίτι του.

Θέση (μέτρα)	
χρόνος (δευτερόλεπτα)	

Γ2. Να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων με την προηγούμενες δραστηριότητες 4 και 5 (ή μετατρέψτε τα επιπλέον δεδομένα στο πίνακα του λογιστικού φύλλου 3, σε επιπλέον γράφημα). Ελέγξτε αν το τριπλό γράφημα περιγράφει σωστά την κίνηση των παιδιών. Αν όχι, προσαρμόστε τα δεδομένα στον πίνακα στο Γ1 και το γράφημα.

Γ3. Συγκρίνετε το γράφημα με τα δύο προηγούμενα και γράψτε τις παρατηρήσεις σας (σημεία τομής με τους άξονες ή και μεταξύ τους, κλίση).

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

7η Δραστηριότητα (προβολή απαντήσεων)

Προβάλλετε την εκφώνηση των δραστηριοτήτων 4, 5 και 6 καθώς και τους πίνακες με τα αντίστοιχα γραφήματα. Το ίδιο θα κάνουν και οι υπόλοιπες ομάδες. Σε όλη αυτή τη διαδικασία μπορείτε να προβείτε σε αλλαγές στις απαντήσεις σας.

Μέρος Γ: Μαθηματικά – Γραμμική συνάρτηση

8η Δραστηριότητα

Α. Από τη 1η δραστηριότητα που είχατε:

Να υπολογίσετε τον κανόνα που συνδέει:

i. τα χρήματα που λαμβάνατε από την εργασία σας για τις πρώτες έξι μέρες, σε σχέση με τον αριθμό ημερών που εργαζόσασταν………..……………………………………………….

ii. τα συνολικά χρήματα που συγκεντρωνόταν στον κουμπαρά σας, για τις πρώτες έξι μέρες, σε σχέση με τον αριθμό ημερών που εργαζόσασταν………………………………………

Β. Από τη 2η δραστηριότητα που είχατε:

Να υπολογίσετε τον κανόνα που συνδέει:

τα χρήματα που υπάρχουν στο ταμείο του υπευθύνου σε σχέση με τον αριθμό ημερών εργασίας σου, για τις πρώτες έξι μέρες…………………………………………………………

Γ. Ελέγξτε αν οι κανόνες του Α και Β ερωτήματος επαληθεύουν τα δεδομένα που δώσατε στους αντίστοιχους πίνακες. Αν όχι, να προσαρμοστούν κατάλληλα ώστε να επαληθεύονται ταυτόχρονα.

Δ. Ελέγξτε αν οι κανόνες του Α και Β ερωτήματος αντιστοιχούν στα γραφήματα που σχεδιάσατε. Αν όχι, να προσαρμοστούν κατάλληλα ώστε να επαληθεύονται ταυτόχρονα.

Ε. Ποιος είναι ο γενικός κανόνας που επαληθεύει όλες τις σχέσεις; Μπορείτε να χαρακτηρίσετε τους κανόνες που διατυπώσατε, στο ερώτημα Α, Β, Ε της 8ης δραστηριότητας, ως συναρτήσεις;

9η Δραστηριότητα

Από τους κανόνες που διατυπώσατε, στο Α (i)., Α (ii)και Β της 8ης δραστηριότητας,
να υπολογίσετε τις παραμέτρους των κανόνων με δεδομένο:

Α. την περιγραφή των αντίστοιχων δραστηριοτήτων (αιτιολογώντας την απάντηση σας).

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Β. τους πίνακες των αντίστοιχων δραστηριοτήτων (αιτιολογώντας την απάντηση σας).

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Γ. τα γραφήματα των αντίστοιχων δραστηριοτήτων (αιτιολογώντας την απάντηση σας).

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…..………………………………………………..………………………………………

$10^{η}$ Δραστηριότητα

Α. Σχεδιάστε, στο ίδιο επίπεδο τα γραφήματα τις $1^{ης}$ και $2^{ης}$ δραστηριότητας. Στα γραφήματα, που σχεδιάσατε, να ερμηνεύσετε τον ρόλο των παραμέτρων, των γραμμικών συναρτήσεων, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις:

i. να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ii. να είναι μεταξύ τους παράλληλα

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

iii. να τέμνονται

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Β. Να ανοίξετε το αρχείο του geogebra, που σας δόθηκε. Το αρχείο περιλαμβάνει τα γραφήματα, της $1^{ης}$ και $2^{ης}$ δραστηριότητας, όλων των ομάδων.

Να ερμηνεύσετε τον ρόλο των παραμέτρων, των γραμμικών συναρτήσεων που υπάρχουν στο αρχείο, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις:

i. να διέρχονται από την αρχή των αξόνων

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ii. να είναι μεταξύ τους παράλληλα

……………………………………………………………………….………………

…………………………………………………………………………………….…

iii. να τέμνονται

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

iv. να ταυτίζονται

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

v. να τέμνουν τον άξονα ψ΄ψ στο ίδιο σημείο

…………………………………………………………………………..……………

……………………………………………………………………………………..

Γ. Στα γραφήματα του παραπάνω ερωτήματός να ερμηνεύσετε τον ρόλο των παραμέτρων, των γραμμικών συναρτήσεων που υπάρχουν στο αρχείο, ώστε όταν αυξάνει η τιμή του χ να αυξάνει και η αντίστοιχη τιμή του ψ (και αντίστροφα)

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Δ. Με δεδομένο τους πίνακες της 1ης και 2ης δραστηριότητας. Πως πρέπει να μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης ώστε:

i. όταν σχεδιαστούν, να διέρχονται από την αρχή των αξόνων

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

ii. όταν σχεδιαστούν, να είναι μεταξύ τους παράλληλα

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

iii. όταν αυξάνει η τιμή του χ, να αυξάνει και η τιμή του ψ (και αντίστροφα)

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

11η Δραστηριότητα (προβολή απαντήσεων)

Προβάλλετε την εκφώνηση των δραστηριοτήτων 4, 5 και 6 καθώς και τους πίνακες με τα αντίστοιχα γραφήματα. Το ίδιο θα κάνουν και οι υπόλοιπες ομάδες. Σε όλη αυτή τη διαδικασία μπορείτε να προβείτε σε αλλαγές στις απαντήσεις σας.

12η Δραστηριότητα (εφόσον έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι προηγούμενες δραστηριότητες)

Β. Μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία των παρουσιάσεων και των διορθώσεων μπορείτε να μεταβείτε στο ατομικό φύλλο και να απαντήσετε στις ΄΄ερωτήσεις αξιολόγησης΄΄

Ζ. ΑΤΟΜΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Α. ερώτηση αναστοχασμού

Κατά την προβολή των απαντήσεων στις δραστηριότητες 1 και 2 των άλλων ομάδων κρατείστε σημειώσεις και αναφέρετε τις παρατηρήσεις που προκύπτουν από την σύγκριση των απαντήσεων:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

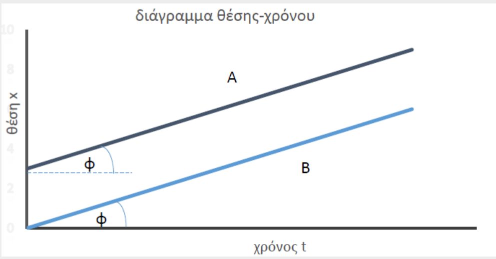
Β. ερωτήσεις αξιολόγησης (εφόσον έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι δραστηριότητες του σεναρίου)

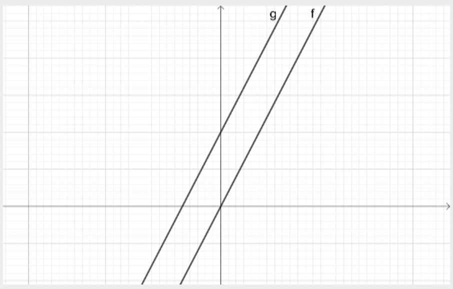
Διαβάστε προσεκτικά τις εκφωνήσεις και απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις της Φυσικής και των Μαθηματικών:

Φ_1. Από τις παρακάτω χρονικές εξισώσεις ποιες παριστάνονται γραφικά με ευθεία;	Μ_1. Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμών, ποιες αντιστοιχούν σε ευθείες;
i. $x = 2t^2$	i. $ψ=2χ^2$
ii. $υ = 8+4t$	ii. $ψ=3χ+2$
iii. $υ = 5t$	iii. $ψ=2χ$
iv. $x = 12t + t^2$	iv. $ψ=2χ^2+3χ$
v. $υ \cdot t = 40$	v. $χψ=3$
vi. $υ = 6$	vi. $χ=2$

Φ_2. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με εξίσωση θέσης-χρόνου: x=23+8t. **Τότε**:	Μ_2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση μιας ευθείας $ε_1$: $ψ = 2χ + 3$. **Τότε:**
i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται	i. η κλίση της αυξάνεται
ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται	ii. η κλίση της μειώνεται
iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό	ii. η κλίση της είναι σταθερή
iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται	iv. η κλίση της είναι κυμαινόμενη
v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν	v. η κλίση της είναι μηδέν

<table>
<tr>
<td>Φ_3. Από τις αντίστοιχες μετρήσεις θέσης (x) και χρόνου (t) ενός αντικείμενου που κινείται ευθύγραμμα, παίρνουμε τα παρακάτω δεδομένα:
<table>
<tr><td>t(s)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x(m)</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr>
</table>
Από την ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία συμπεραίνουμε πως:</td>
<td>Μ_3.Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών, δύο μεταβλητών χ και ψ
<table>
<tr><td>χ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>ψ</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
</table>
Η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα σημεία:</td>
</tr>
<tr><td>i. το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται</td><td>i. η κλίση της αυξάνεται</td></tr>
<tr><td>ii. το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται</td><td>ii. η κλίση της μειώνεται</td></tr>
<tr><td>iii. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι σταθερό</td><td>iii. η κλίση της είναι σταθερή</td></tr>
<tr><td>iv. το μέτρο της ταχύτητάς του κυμαίνεται</td><td>iv. η κλίση της είναι κυμαινόμενη</td></tr>
<tr><td>v. το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μηδέν</td><td>v. η κλίση της είναι μηδέν</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Φ_4. Δύο δρομείς κινούνται στην ίδια ευθεία. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η θέση τους x σε σχέση με το χρόνο t.


<u>Με ποιες</u> από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείς;</td>
<td>Μ_4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα δύο ευθειών της f και g.


<u>Με ποιες</u> από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείς;</td>
</tr>
<tr><td>i. Η μεταξύ τους απόσταση κάθε χρονική στιγμή διατηρείται σταθερή</td><td>i. Οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλίση.</td></tr>
<tr><td>ii. Κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στην ίδια θέση</td><td>ii. Η ευθεία που παριστάνει η g έχει μεγαλύτερη κλίση από την ευθεία που παριστάνει η f.</td></tr>
<tr><td>iii. Οι δύο δρομείς κινούνται με την ίδια ταχύτητα</td><td>iii. Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι σταθερή.</td></tr>
<tr><td>iv. Η ταχύτητα του Α είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Β.</td><td>iv. Η διαφορά των τεταγμένων των δύο ευθειών με την ίδια τετμημένη θα είναι μηδενική.</td></tr>
</table>

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Διεθνής Βιβλιογραφία

Adams, D. D., & Shrum, J. W. (1990). The effects of microcomputer-based laboratory exercises on the acquisition of line graph construction and interpretation skills by high school biology students. *Journal of research in science teaching*, *27*(8), 777-787.

Åkerlind, G. S. (2008). A phenomenographic approach to developing academics' understanding of the nature of teaching and learning. *Teaching in higher education*, *13*(6), 633-644

Ambrose, D. (2017). Large-Scale Interdisciplinary Design Thinking for Dealing with Twenty-First Century Problems and Opportunities. In *Creativity, Design Thinking and Interdisciplinarity* (pp. 35-52). Springer, Singapore.

Angell, C., Kind, P. M., Henriksen, E. K., & Guttersrud, Ø. (2008). An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. *Physics Education*, *43*(3), 256

Apostel, L. (1972). Interdisciplinarity Problems of Teaching and Research in Universities.

Arnold, S. (2006). Investigating functions using real-world data. *Australian Senior Mathematics Journal, 20*(1), 44–47

Arons, A. B. (1997). Teaching introductory physics. New York, NY: Wiley

Bagno, E., Berger, H., & Eylon, B. S. (2008). Meeting the challenge of students' understanding of formulae in high-school physics: a learning tool. *Physics Education, 43*(1), 75.

Baker, W. D., & Däumer, E. (2015). Designing interdisciplinary instruction: Exploring disciplinary and conceptual differences as a resource. *Pedagogies: An International Journal*, *10*(1), 38-53.

Bardini, C., & Stacey, K. (2006, July). Students' conceptions of m and c: How to tune a linear function. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120).

Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(5), 679-690.

Beach, K. (1999). Consequential transitions: A sociocultural expedition beyond transfer in education. *Review of Research in Education, 24,* 101–140

Beichner, R. J. (1993). Technology competencies for new teachers: Issues and suggestions. *Journal of Computing in Teacher Education*, *9*(3), 17-20.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of Physics, 62*(8), 750-762.

Bektasli, B. (2006). *The relationships between spatial ability, logical thinking, mathematics performance and kinematics graph interpretation skills of 12th grade physics students* (Doctoral dissertation, The Ohio State University).

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematics*, *2*(1), 34-42.

Berger, G. (1972). Opinions and Facts. In Centre for Educational *Research and Innovation*, *Interdisciplinarity* (pp. 21-74). Nice, France: OECD.

Bieda, K. N., & Nathan, M. J. (2009). Representational disfluency in algebra: Evidence from student gestures and speech. *ZDM*, *41*(5), 637-650.

Boaler, J. (1997). Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex, and setting. Philadelphia: Open University Press.

Boniolo, G., & Budinich, P. (2005). The role of mathematics in physical sciences and Dirac's methodological revolution. In *The role of mathematics in physical sciences* (pp. 75-96). Springer, Dordrecht.

Brasell, H. (1987). The effect of real-time laboratory graphing on learning graphic representations of distance and velocity. *Journal of research in science teaching*, *24*(4), 385-395.

Burns, R. C. (1999). *Dissolving the boundaries: Planning for curriculum integration in among college and university faculty*. Nashville: Vanderbilt University Press.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. *Colorado Springs, Co: BSCS*, *5*, 88-98.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986). Becoming Critical: Education, Knowledge, and Action Research. London; Philadelphia: The Falmer Press.

Celik, A. O., & Guzel, E. B. (2017). Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 122-134.

Ceuppens, S., Deprez, J., Dehaene, W., & De Cock, M. (2018). Design and validation of a test for representational fluency of 9th grade students in physics and mathematics: The case of linear functions. *Physical Review Physics Education Research*, *14*(2), 020105.

Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction*, *19*(2), 215-252.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 369-375). Utrecht, The Netherlands: Utrecht University.

Crombie, A. C. (1961). *Medieval and Early Modern Science: Science in the later Middle Ages and early modern times: XIII-XVII centuries* (Vol. 2). Harvard University Press.

De Bock, D., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2015). STUDENTS'UNDERSTANDING OF PROPORTIONAL, INVERSE PROPORTIONAL, AND AFFINE FUNCTIONS: TWO STUDIES ON THE ROLE OF EXTERNAL REPRESENTATIONS. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 47-69.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidenbce from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and instruction*, *13*(4), 441-463.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267.

Dreyfus, T., & Halevi, T. (1991). QuadFun: A case study of pupil computer interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 10*(2), 43–48

Dubinsky, E. (2000). Mathematical literacy and abstraction in the 21st century. *School Science and Mathematics*, *100*(6), 289–297.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 109-122.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Dyson, F. J. (1964). Mathematics in the physical sciences. *Scientific American*, *211*(3), 128-147.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 153-174.

Ellermeijer, T., & Heck, A. (2002). Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment. *Developing Formal Thinking in Physics*, 52-72.

Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction, 25*(4), 439–478

Ernest, P. (2016). The problem of certainty in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(3), 379-393.

Furner, J. M., & Kumar, D. D. (2007). The mathematics and science integration argument: a stand for teacher education. *Eurasia journal of mathematics, science & technology education*, *3*(3).

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology*, *24*(5), 645-657.

Galili, I. (2018). Physics and Mathematics as Interwoven Disciplines in Science Education. *Science & Education*, *27*(1-2), 7-37.

Galligan, L., Loch, B., McDonald, C., & Taylor, J. A. (2010). The use of tablet and related technologies in mathematics teaching. *Australian Senior Mathematics Journal*, *24*(1), 38-51.

Gikas, J., & Grant, M. M. (2013). Mobile computing devices in higher education: Student perspectives on learning with cellphones, smartphones & social media. *The Internet and Higher Education*, *19*, 18-26.

Gingras, Y. (2001). What did mathematics do to physics?. *History of science*, *39*(4), 383-416.

Glenberg, A. M., & Robertson, D. A. (2000). Symbol grounding and meaning: A comparison of high-dimensional and embodied theories of meaning. *Journal of memory and language*, *43*(3), 379-401.

Glenberg, A. M., De Vega, M., & Graesser, A. C. (2008). Framing the debate. In M. DeVega, A. M. Glenberg, & A. C. Graesser (Eds.), *Symbols, Embodiment and Meaning* (pp. 1–10). Cambridge: Oxford University Press.

González, C. (2011). Extending research on 'conceptions of teaching': commonalities and differences in recent investigations. *Teaching in Higher Education*, *16*(1), 65-80.

Gray, E., & Tall, D. (1991, June). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 72-79). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.

Greeno, J. G., Moore, J. L., & Smith, D. R. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 99–167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Company.

Grossman, R., & Salas, E. (2011). The transfer of training: what really matters. *International Journal of Training and Development*, *15*(2), 103-120.

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 69-87.

Hara, K. (1995). Quantitative and qualitative research approaches in education. *Education*, *115*(3), 351-356.

Harnad, S. (1990). The symbol grounding problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *42*(1-3), 335-346.

Heck, A. (2001). Variables in computer algebra, mathematics and science. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *8*(3), 195-222.

Hestenes, D. (1986). A unified language for mathematics and physics. In *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* (pp. 1-23). Springer, Dordrecht.

Hohensee, C. (2014). Backward transfer: An investigation of the influence of quadratic functions instruction on students' prior ways of reasoning about linear functions. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(2), 135-174.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 55-72.

Ivanjek, L., Susac, A., Planinic, M., Andrasevic, A., & Milin-Sipus, Z. (2016). Student reasoning about graphs in different contexts. *Physical Review Physics Education Research*, *12*(1), 010106.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., & Xin, Y. P. (2010). An evaluation of the intended and implemented curricula's adherence to the NCTM standards on the mathematics achievement of third grade students: A case study. *Journal of Curriculum and Instruction*, *4*(2), 33.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 313–330.

Kanderakis, N. (2016). The Mathematics of High School Physics. *Science & Education*, *25*(7-8), 837-868.

Kapucu, S. (2014). Salient Beliefs of Pre-Service Primary School Teachers Underlying an Attitude" Liking or Disliking Physics". *Science Education International*, *25*(4), 437-458.

Kapucu, S., Öçal, M. F., & Simsek, M. (2016). Evaluating High School Students' Conceptions of the Relationship between Mathematics and Physics: Development of A Questionnaire. *Science Education International*, *27*(2), 253-276.

Kaput, J., & Maxwell-West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). Albany, NY: State University of New York Press

Karam, R. (2014). Framing the structural role of mathematics in physics lectures: A case study on electromagnetism. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *10*(1), 010119.

Karam, R. (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science & Education, 24*(5-6), 487-494.

Karam, R., & Krey, O. (2015). Quod erat demonstrandum: Understanding and explaining equations in physics teacher education. *Science & Education, 24*(5-6), 661-698.

Karlovčec, M., & Mladenić, D. (2015). Interdisciplinarity of scientific fields and its evolution based on graph of project collaboration and co-authoring *Scientometrics*, *102*(1), 433-454.(τμήμα του Frodeman, R., Klein, J. T., & Pacheco, R. C. D. S. (Eds.). (2017). *The Oxford handbook of interdisciplinarity*. Oxford University Press.)

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219–233.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). The strands of mathematical proficiency. *Adding it up: Helping children learn mathematics*, 115-118.

Kjeldsen, T. H., & Lützen, J. (2015). Interactions Between Mathematics and Physics: The History of the Concept of Function—Teaching with and About Nature of Mathematics. *Science & Education, 24*(5-6), 543-559

Klein, F., Menghini, M., & Schubring, G. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint*. Berlin/Heidelberg: Springer.

Klein, T. (1996). Crossing boundaries: Knowledge, disciplines, and interdisciplinarities. Chralottesville: University of Virginia Press.

Kockelmans, J. J. (1979). Why Interdisciplinarity? In J. J. Kockelmans (Ed.), *lnterdisciplinarity and Higher Education*, pp. 123-160. University Park: Pennsylvania State University Press.

Koenig, T., & Gorman, M. E. (2016). The challenge of funding interdisciplinary research: A look inside public research funding agencies.

Koklu, O., & Topcu, A. (2012). Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students' misconceptions about graphs of quadratic functions. *International journal of mathematical education in science and technology, 43*(8), 999-1011.

Korsunsky, B. (2002). Improper use of physics-related context in high school mathematics problems: Implications for learning and teaching. *School Science and Mathematics, 102*(3), 107-113.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. *AMC*, *10*(12), 720-733.

Lattuca, L. (2001). *Creating interdisciplinarity: Interdisciplinary research and teaching*

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. New York: Cambridge University Press.

Lawrenz, F., Wood, N. B., Kirchhoff, A., Kim, N. K., & Eisenkraft, A. (2009). Variables affecting physics achievement. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *46*(9), 961-976.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

LEONHARDI EULERI Opera omnia~ ser. I, vol. IX, ed. A.SPEISER, 1945.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 41-58.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987a). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Linder, C. (2013). Disciplinary Discourse, Representation, and Appresentation in the Teaching and Learning of Science. *European Journal of Science and Mathematics Education, 1*(2), 43-49.

Lloyd, M. E. R. (2013). Transfer of practices and conceptions of teaching and learning mathematics. *Action in Teacher Education*, *35*(2), 103-124.

Lobato, J., & Ellis A. B. (2010). Essential understandings: Ratios, proportions and proportional reasoning. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(2), 85–119.

Clagett, M. (1959). The Science of Mechanics in the Middle Ages (Madison: University of Wis.

Martinez-Torregrosa, J., Lopez-Gay, R., & Gras-Marti, A. (2006). Mathematics in physics education: Scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science & Education, 15*(5), 447-462.

Marton, F., & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher education research & development*, *24*(4), 335-348.

Matteson, S. M. (2006). Mathematical literacy and standardized mathematical assessments. Reading Psychology, 27, 205–233.

Mayville, W. V. (1978). lnterdisciplinarity: The Mutable Paradigm. Washington, DC: American Association for Higher Education.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503-513.

Michelsen, C. (2005). Expanding the domain: Variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. In *Proceedings of the 1st International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*(pp. 201-214).

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM, 38*(3), 269-280.

Mochon, D., & Sloman, S. A. (2004). Causal models frame interpretation of mathematical equations. *Psychonomic bulletin & review*, *11*(6), 1099-1104.

Morgan, C. (2005). What is a definition in school mathematics? In M. Bosch (Ed.), European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the *4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 861-871). Saint Feliu de Guizols, Spain: CERME.

Morgan, C. (2013). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education, 19*(2), 102–116.

Moschkovich, J. N. (1998). Resources for refining mathematical conceptions: Case studies in learning about linear functions. *The Journal of the Learning Sciences*, *7*(2), 209-237.

Moschkovich, J. N. (1998). Students' use of the x-intercept as an instance of a transitional conception. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(2), 169-197.

Movshovitzs-Hadar, N. (1993). A constructive transition from linear to quadratic functions. *School Science and Mathematics, 93*(6), 288-298

Munier, V., & Merle, H. (2009). Interdisciplinary mathematics–physics approaches to teaching the concept of angle in elementary school. *International journal of science education*, *31*(14), 1857-1895.

Nathan, M. J. (2008). An embodied cognition perspective on symbols, gesture and grounding instruction. In M. DeVega, A. M. Glenberg, & A. C. Graesser (Eds.), *Symbols, embodiment and meaning: a debate* (pp. 375–396). Cambridge: Oxford University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Teaching Standards for School Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Natl Council of Teachers of.

National Research Council. (2013). *Education for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. National Academies Press.

Neugebauer, O. (2012). *A history of ancient mathematical astronomy* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Nguyen, D. H., & Rebello, N. S. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *7*(1), 010112.

Nissani, M. (1997). Ten cheers for interdisciplinarity: The case for interdisciplinary knowledge and research. *The social science journal*, *34*(2), 201-216.

Nolan, C., & Herbert, S. (2015). Introducing linear functions: an alternative statistical approach. *Mathematics education research journal*, *27*(4), 401-421.

Ornek, F. (2008, December). An overview of a theoretical framework of phenomenography in qualitative education research: An example from physics education research. In *Asia-Pacific Forum on Science learning and teaching* (Vol. 9, No. 2, pp. 1-14). The Education University of Hong Kong, Department of Science and Environmental Studies.

Ornek, F., Robinson, W. R., & Haugan, M. R. (2007). What Makes Physics Difficult?. *Science Education International*, *18*(3), 165-172.

Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., Elia, I., & Philippou, A. (2017). A structural model related to the understanding of the concept of function: definition and problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 723-740.

Paulus, T. M., Woodside, M., & Ziegler, M. F. (2010). "I tell you, it's a journey, isn't it?" Understanding collaborative meaning making in qualitative research. *Qualitative Inquiry*, *16*(10), 852-862.

Pearson, D. (2015). CTE and the Common Core can address the problem of silos. *Phi Delta Kappan*, *96*(6), 12-16.

Phage, I. B., Lemmer, M., & Hitge, M. (2017). Probing factors influencing students' graph comprehension regarding four operations in kinematics graphs. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 200-210.

Pierce, R. (2005). LINEAR FUNCTIONS AND A TRIPLE INFLUENCE OF TEACHING ON THE DEVELOPMENT OF STUDENTS' ALGEBRAIC EXPECTATION. . In H. L.

Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the *29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Melbourne, Australia: PME.

Pierce, R., Stacey, K., & Bardini, C. (2010). Linear functions: teaching strategies and students' conceptions associated with y= mx+ c. Pedagogies: *An International Journal, 5*(3), 202-215.

Planinic, M., Ivanjek, L., Susac, A., & Milin-Sipus, Z. (2013). Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts. *Physical review special topics-Physics education research*, *9*(2), 020103.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., & Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International journal of science and mathematics education*, *10*(6), 1393-1414..

Redish, E. F. (2005). Changing student ways of knowing: What should our students learn in a physics class. *Proceedings of World View on Physics Education 2005: Focusing on Change*, *New Delhi*, 1-13.

Redish, E. F. (2006). Problem solving and the use of math in physics courses. *arXiv preprint physics/0608268*.

Redish, E. F., & Gupta, A. (2009). Making meaning with math in physics: A semantic analysis. *GIREP-EPEC & PHEC 2009*, 244.

Redish, EP, & Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *Science & Education, 24* (5-6), 561-590.

Renkens C. & Henry V. (2014). Mathematics used by the graphic register within the physics class. In B. Di Paola and C. Fazio (Eds), proceedings from *CIEAEM 66: Quaderni di Ricerca in didattica* (p.p. 345-353). Lyon: Université de Namur

Romer, R. H. (1993). Reading the equations and confronting the phenomena—The delights and dilemmas of physics teaching. *American Journal of Physics*, *61*(2), 128-142.

Roth, W. M. (2014). Interdisciplinary approaches in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 317-320). Springer, Dordrecht.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational studies in mathematics, 53*(3), 229-254.

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55–175). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc

Schorr, R. Y. (2003). Motion, speed, and other ideas that "should be put in books". *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 465-477.

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and instruction*, *19*(4), 479-541.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 23-58.

Sikorski, T. R., & Hammer, D. (2017). Looking for coherence in science curriculum. *Science Education*, *101*(6), 929-943.

Slotta, J., & Chi, M. T. H. (2006). Helping students understand challenging topics in science through ontology training. *Cognition and Instruction, 24,* 261–289.

Smith, J.K. (1983). Quantitative Versus Qualitative Research: An Attempt to Clarify the Issue. *Educational Researcher, 12*(3), 6-13.

Sokolowski, A. (2017). Graphs in kinematics—a need for adherence to principles of algebraic functions. *Physics Education*, *52*(6), 065017.

Solutes, J.F. (1990). The Ethics of Qualitative Research. In E.W. Eisner & A. Peshkin (Eds.) Qualitative Inquiry in Education (pp. 247-257). New York: Teachers College, Columbia University

Sriraman, B. (Ed.). (2012). Crossroads in the history of mathematics and mathematics education. IAP.

Steele, M. D., Hillen, A. F., & Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(6), 451-482.

Stember, M. (1991). Advancing the Social Sciences through the Interdisciplinary Enterprise. *The Social Science Journal, 28*: 1-14.

Stokols, D., Juliana, F., Jennifer, G., Richard, H., Kimari, P., Baezconde-Garbanati, L., Jennifer, U., Paula, P., Melissa, A. C., Suzanne, M. C., Glen, M., & William, T. (2003). Evaluating transdisciplinary science. Nicotine & Tobacco Research, 21–39.

Stroup, W. M. (2002). Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 167–215.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39-50.

Taşar, M. F. (2010). What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, the physics, or both?. *ZDM*, *42*(5), 469-482.

Trowbridge, D. E., & McDermott, L. C. (1980). Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension. *American journal of Physics*, *48*(12), 1020-1028.

Trowbridge, D. E., & McDermott, L. C. (1981). Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension. *American journal of Physics*, *49*(3), 242-253.

Tuminaro, J. (2004). *A cognitive framework for analyzing and describing introductory students' use and understanding of mathematics in physics* (Doctoral dissertation).

Tuminaro, J., & Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *3*(2), 020101.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44-55.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science & Education*, *21*(4), 485-506.

Uzzi, B., Mukherjee, S., Stringer, M., & Jones, B. (2013). A typical combinations and scientific impact. *Science, 342*, 468–472.

van den Besselaar, P., & Heimeriks, G. (2001). Disciplinary, Multidisciplinary, Interdisciplinary: Concepts and Indicators. Paper for the *8th conference on Scientometrics and Informetrics*—ISSI2001. Sydney. Australia

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). How students understand aspects of linearity: Searching for obstacles in representational flexibility. In *Proceedings of the 36th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 179-186).

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356–366.

Wang, J. (2005). Relationship Between Mathematics and Science Achievement at the 8th Grade. *Online Submission, 5*, 1-17.

Wawro M, Sweeney GF, Rabin MJ (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with formal definition. *Educational Studies in Mathematics, 78*: 1-19.

Wemyss, T., & van Kampen, P. (2013). Categorization of first-year university students' interpretations of numerical linear distance-time graphs. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *9*(1), 010107.

Wemyss, T., & van Kampen, P. (2013). Categorization of first-year university students' interpretations of numerical linear distance-time graphs. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *9*(1), 010107.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 79-95.

Wigner, E. P. (1990). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In *Mathematics and Science* (pp. 291-306).

Wijers, M. et al (2000). Using ratio tables from mathematics in secondary school science. Paper presented at the *25 th annual ATEE conference*

Woolnough, J. (2000). How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics?. *Research in Science Education*, *30*(3), 259-267.

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning*, *7*(1), 42-57.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 431.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19 th century. *Archive for History of exact Sciences, 16*(1), 37-85.

Ελληνική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ.,Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (2017). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2012). *Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Αργυράκης, Δ., Βουργανάς, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Χ. (2013). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος

Βακαλόπουλος, Κ., Γεωργακόπουλος, Κ., Καλογερία, Ε., & Ψάϊλα, Α.(2017).Προβληματισμοί και προτάσεις για την διδασκαλία των Μαθηματικών και Φυσικής: Το φαινόμενο «κίνηση».Στο Ι. Εμμανουήλ & Σ. Λαμπροπούλου (Επ.). Πρακτικά του 34ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας«Πάντα κατ΄ αριθμόν γίγνονται» (σελ.95-105). Λευκάδα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Βλαμός, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2012). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμοθέου, Γ. (2014). *Φυσική Γενικής Παιδείας Α΄ Γενικού Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Περιστερόπουλος, Β., & Τιμοθέου, Γ. (2014). *Φυσική Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Γεωργόπουλος Κ., Μπέλλου Ι. & Μικρόπουλος Τ. (2013). Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών κλίσης και εμβαδού στις γραφικές παραστάσεις κινηματικών φαινομένων. Στο Βαβουγιυός Δ. & Παρασκευόπουλος Σ. (επ), Πρακτικά από το 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση, (σελ. 487-495). Βόλος: Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΦΕΚ 303Β/13-03-2003, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003, Ανακτήθηκε Δεκέμβριος 9, 2015, από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/).

Ζουλινάκη, Φ, Μπουλουξή, Α. (2014). Αξιοποίηση της ιστορικά στενής κι αμφίδρομης σχέσης μαθηματικών και φυσικής κατά το σχεδιασμό και την υλοποίηση ομίλου δημιουργικότητας και αριστείας. *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στα Πρότυπα Πειραματικά*

Κατσέλη Χ,. (2014). Το σχολείο ως ανοικτό κοινωνικό σύστημα. Διπλωματική εργασία. Παιδαγωγικό τμήμα ΕΚΠΑ.

Καφετζόπουλος, Γ., (2014). Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη βοήθεια του ψηφιακού εργαλείου Casyopée. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου. Ανακτήθηκε Ιούνιος 20, 2016, από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl

Μαλλιάκας Κ., & Ματζαβίνου Θ. (2016). Η γραμμική συνάρτηση στα Μαθηματικά και στη Φυσική από το Γυμνάσιο μέχρι την Άλγεβρα και την Κινηματική της Α΄ Λυκείου. Στο

Σκουμιός Μ. & Σκουμπουρδή Χ. (επ), Πρακτικά από το 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;,(σελ. 246-257). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων.* Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ

Μούτσιος-Ρέντζος, Α & Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2014). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Στο Σκουμιός Μ. & Σκουμπουρδή Χ. (επ), *Πρακτικά από το 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»*,(σελ.561-578). Ρόδος 17-19 Οκτωβρίου 2014: Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Μούτσιος-Ρέντζος, Α.,Κρητικός, Γ.& Καλαβάσης, Φ. (2017). Διεπιστημονικές αναστοχαστικές διαδρομές ανάμεσα στα μαθηματικά και τη φυσική: σημεία, αντικείμενα, ερμηνευτές και νοήματα. Στο Ι. Εμμανουήλ & Σ. Λαμπροπούλου (Επ.). *Πρακτικά του 34ου Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας «Πάντα κατ΄ αριθμόν γίγνονται»* (σελ.643-653).Λευκάδα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία *Πανελληνίου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στα Πρότυπα Πειραματικά* την υλοποίηση ομίλου δημιουργικότητας και αριστείας. *Πρακτικά 1ου*

Οδηγίες για τη Διδασκαλία των Θετικών Μαθημάτων του Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το Σχ. έτος 2015 – 2016. Ανακτήθηκε Ιούνιος 29, 2016 από http://edu.klimaka.gr/arxeio/leitourgia-sxoleio/gymnasio-odhgies-didaskalias-mathimatwn-a2.pdf

Οδηγίες για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου Γ.ΕΛ & Α΄, Β΄,Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το Σχ. έτος 2018 – 2019. Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 26, 2018 http://www.pe03.gr/abc/arxeia-trexonta/2018-09-26---[eg-160253-d2]---yli-kai-odigies-didaskalias-math-a-b-gel-2018-2019.html

Σκουμπουρδή Χ & Σκουμιός Μ. (2016). Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις; Στο Σκουμιός Μ. & Σκουμπουρδή Χ. (επ), *Πρακτικά από το 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;*,(σελ.15-52). Ρόδος 14-16 Οκτωβρίου 2016: Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Τζιούφας, Ν & Τσαρούχας, Δ. (2018). Χρήση έξυπνων κινητών συσκευών στη διδασκαλία των ευθύγραμμων κινήσεων. Στο Σκουμιός Μ. & Σκουμπουρδή Χ. (επ), *Πρακτικά από το 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»*, (σελ.561-578). Ρόδος 9-11 Νοεμβρίου 2018: Πανεπιστήμιο Αιγαίου