ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

UNIVERSITY OF THE AEGEAN

Συμμετρίες Lie με εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

Ελένη Θεοχάρη Παϊπούρογλου

Ιούνιος 2020

Περιεχόμενα

Περίληψη

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις είναι ένα από τα επιστημονικά πεδία έρευνας με πολλές εφαρμογές σε πολλούς κλάδους όπως η κβαντική μηχανική, η μελέτη βιολογικών συστημάτων κλπ. Η πιο πρόσφατη θεωρητική προσέγγιση όμως των Μ.Δ.Ε. φαίνεται να είναι προκαλεί το συνεχώς αυξανόμενο ενδαφέρον των μαθηματικών και ερευνητών σε αντικείμενα όπως τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, οι ασφαλίσεις κλπ.

Για τη μελέτη μίας Μ.Δ.Ε. καλούμαστε να απαντήσουμε σε δύο θεμελιώδη ερωτήματα: Αν υπάρχει, τουλάχιστον μία, λύση και αν είναι δυνατό να προσδιορίσουμε αυτή τη λύση (ή αυτές τις λύσεις) με σαφήνεια και να τις καταγράψουμε. Δυστυχώς δεν υπάρχει κάποια αλγοριθμική διαδικασία για την επίτευξη αυτών των στόχων. Ακόμα και αν υπάρχει η δυνατότητα να δείξουμε ότι ένα δοθέν διαφορικό πρόβλημα έχει λύσεις, συχνά δεν μπορούμε να τις δείξουμε αναλυτικά. Ο ακρογωνιαίος λίθος της μελέτης της θεωρίας των ΔΕ καθίσταται, λοιπόν, η παραγωγή λύσεων. Παρατηρούμε όμως ότι ενώ η αριθμητική ανάλυση αλματωδώς μας δίνει εκπληκτικά αποτελέσματα, ακόμη το ζήτημα της εύρεσης αναλυτικής λύσης παραμένει ο κύριος στόχος της μελέτης των Μ.Δ.Ε..

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να αναλύσουμε σε βάθος μια από τις πιο γόνιμες τεχνικές για την εύρεση λύσεων μια ΔΕ. Μια τέτοια μέθοδος, που πρώτα αναπτύχθηκε από τον σουηδό μαθηματικό Sophus Lie (1842-1899) στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, ενοποιεί και επεκτείνει επί τούτου τεχνικές έτσι ώστε να παράξει ακριβείς λύσεις για Μ.Δ.Ε. αξιοποιώντας το γεγονός ότι πολλά φαινόμενα στην φύση έχουν εσωτερικές συμμετρίες. Ο Lie ανέπτυξε μία συστηματική μέθοδο εύρεσης αναλυτικής λύσης για μία ποικιλία Μ.Δ.Ε. μέσω συνεχών ομάδων μετασχηματισμών. Οι παραπάνω ομάδες ονομάζονται συνήθως ομάδες Lie. Οι ομάδες αυτές είναι συγχρόνως μια ιδιαίτερη και εντυπωσιακή συγχώνευση μίας αλγεβρικής ομάδας, τοπολογικών κατασκευών και στοιχείων της ανάλυσης. Η κεντρική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τις εσωτερικές συμμετρίες μιας Μ.Δ.Ε. έτσι ώστε να μειώσουμε τον αριθμό των εξαρτημένων μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο η λύση μιας Μ.Δ.Ε. μπορεί να βρεθεί λύνοντας μια διαφορετική Δ.Ε. με λιγότερες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Ο Lie εμπνεύστηκε από τη θεωρία του Galois για πολυωνυμικές εξι-

σώσεις. Συγκεκριμένα, ο Lie προσπάθησε να δημιουργήσει μια ενοποιημένη θεωρία ολοκλήρωσης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις παρόμοιες με την αβελανή θεωρία αναπτύχθηκε για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Για περίπου 100 χρόνια κανείς δεν έχει μελετήσει περαιτέρω αυτή θεωρία μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1990 που ο Ovsiannikov, στην πρώην Σοβιετική Ένωση, και ο Bluman, στη Δύση, επανέφεραν αυτή τη θεωρία στο φως. Από τότε έχουν εμφανιστεί πολλά έργα σχετικά με το αντικείμενο. Αυτό οφείλεται κυρίως στην υψηλή αλγοριθμική πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τη διαδικασία που δίνει τις εσωτερικές συμμετρίες μίας δεδομένης Μ.Δ.Ε. και, επομένως, οι λύσεις της. Μια μεγάλη βελτίωση στις συγκεκριμένες εφαρμογές της προσέγγισης Lie οφείλονται στη χρήση συμβολικών υπολογισμών και γρήγορων αριθμομηχανών. Οι σύγχρονοι υπολογιστές μπορούν εύκολα να προγραμματιστούν για να βρεθούν οι επιθυμητές συμμετρίες, καθιστώντας τη θεωρία ακόμα πιο ελκυστική και αποτελεσματική.

Τα τελευταία χρόνια, ιδιαίτερα μετά την παγκόσμια οικονομική κρίση του 1987, ο τομέας των χρηματοοικονομικών μαθηματικών έχει τεράστια ανάπτυξη που οδήγησε στο να γίνει ένας από τους πιο μελετημένους τομείς στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε σε προβλήματα που σχετίζονται με τη διαδικασία δίκαιης τιμολόγησης για μια τεράστια πληθώρα δομημένων χρηματοοικονομικών μέσων, όπως στην περίπτωση των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα είναι συγκεκριμένοι τύποι συμβάσεων η αξία των οποίων εξαρτάται από ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Η χρονική συμπεριφορά της τιμής ενός τέτοιου συμβολαίου διαμορφώνεται συνήθως από μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες τελικά προκύπτουν από στοχαστικούς όρους. Σε ένα τέτοιο σενάριο είναι σαφώς ιδιαίτερης σημασίας η ύπαρξη, πιθανά, μοναδικής εύλογης τιμής. Επιπλέον, όταν αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια τέτοια δίκαιη τιμή, είναι πολύ σημαντικό να έχουμε τη δυνατότητα να καταγράφουμε τη λύση αυτή ρητά ως αναλυτική συνάρτηση των (τελικά στοχαστικών) παραμέτρων του. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο πολλοί μαθηματικοί έχουν εφαρμόσει τη θεωρία του Lie για να αποκτήσουν αποτελεσματικούς τρόπους στην τιμολόγηση μίας ευρείας κατηγορίας χρηματοοικονομικών μέσων. Θα δούμε περαιτέρω πώς αυτές οι τεχνικές μπορεί να αξιοποιηθούν για να αντλήσουμε όχι μόνο αναλυτικές λύσεις αλλά και θεμελιώδεις λύσεις και συναρτήσεις πυκνότητας μετάβασης που σχετίζονται με συγκεκριμένα χρηματοοικονομικά μοντέλα.

Δεδομένου του τεράστιου πεδίου εφαρμογών της προσέγγισης Lie, δυστυχώς δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε όλες τις δυνατές εφαρμογές και θα περιοριστούμε οικονομικές εφαρμογές. Συγκεκριμένα έχουμε επιλέξει να εστιάστε την προσοχή μας στα μοντέλα των Black-Scholes και Jacobs-Jonnes. Ιδιαίτερη προσοχή θα δοθει σε τοπικές συμμετρίες με έμφαση σε σημειακούς μετασχηματισμούς, δηλαδή συμμετρίες που καθορίζονται από απειροστούς μετασχηματισμούς των οποίων τα απειροστά στοιχεία εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, την εξαρτημένη μεταβλητή και τα παράγωγά της. Θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε ότι ένας από τους κύριους λόγους για την τεράστια επιτυχία που είχε η θεωρία Lie τα τελευταία χρόνια, βασίζεται στο γεγονός ότι παρέχει μια ενοποιημένη προσέγγιση για τη βασική αντιμετώπιση οποιουδήποτε είδους Μ.Δ.Ε.. Συνεπώς, σε αυτή την εργασία θα αποπειραθούμε να εμβαθύνουμε σε αυτή τη θεωρία.

Προσανατολιζόμαστε σε δύο βασικούς άξονες. Αφ΄ ενός την παρουσίαση βασικών εννοιών της Άλγεβρας Lie, των ομάδων Lie και των συμμετριών που επάγονται από αυτές σε ομάδες διαφορικών εξισώσεων και αφ΄ ετέρου την εφαρμογή τους στα προαναφερθέντα χρηματοοικονομικά προβλήματα.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μεταπτυχιακή διατριβή στα πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών με τίτλο ¨Αναλογιστικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικα¨, του τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών.

Τριμελής Επιτροπή:

Νικόλαος Χαλιδιάς, Καθηγητής στο Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Στυλιανός Ξανθόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής στο Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Νικόλαος Παπαλεξίου, Επίκουρος Καθηγητής στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Μαθηματικές Έννοιες

Για την καλύτερη κατανόηση των Αλγεβρών Lie παρατίθενται κάποιες θεμελιώδεις έννοιες στην Άλγεβρα, την Τοπολογία, τη Διαφορική Γεωμετρία. Υποτυπωδώς αναφέρουμε κάποιους ορισμούς από αυτές τις περιοχές των θεωρητικών μαθηματικών καθώς δε διδάσκονται σε προπτυχιακό ή μεταπτυχιακό επίπεδο στο τμήμα μας και συνεπώς η κατανόηση της εργασίας από τους φοιτητές του τμήματος θα ήταν αδύνατη χωρίς την εισαγωγή τους.

1.1 Θεμελειώδεις Αλγεβρικές Έννοιες

1.1.1 Ορισμός

Μία **(διμελής) πράξη** $*$ είναι μία απεικόνιση $* : G \times G \longrightarrow G$. Συμβολίζουμε συνήθως με $*(x, y) = z$ ή εναλλακτικά με $x * y = z$, όπου $x, y, z \in G$.

Παρατήρηση 1.1.1.1

Μία διμελής πράξη $* : G \times G \longrightarrow G$ θα ονομάζεται **μεταθετική** αν για κάθε $x, y \in G$ ισχύει ότι $x * y = y * x$.

Παρατήρηση 1.1.1.2

Μία διμελής πράξη $* : G \times G \longrightarrow G$ θα ονομάζεται **προσεταιριστική** αν για κάθε $x, y, z \in G$ ισχύει ότι $x * (y * z) = (x * y) * z$.

1.1.2 Ορισμός

Έστω G ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $* : G \times G \longrightarrow G$. Το ζεύγος $(G, *)$ θα ονομάζεται **ομάδα** αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

i) Η πράξη είναι προσεταιριστική.

ii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Δηλαδή υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$ τέτοιο ώστε $e * g = g * e = g$, για κάθε $g \in G$.

iii) Για κάθε στοιχείο $g \in G$, υπάρχει αντίστροφο στοιχείο, το οποίο συμβολίζω g^{-1} τέτοιο ώστε $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Παρατήρηση 1.1.2

Μία ομάδα εφοδιασμένη με μία μεταθετική πράξη θα ονομάζεται *μεταθετική* ή **αβελιανή**.

1.1.3 Ορισμός

Έστω $(G, *)$ μία ομάδα και $H \subseteq G$. Αν η H εφοδιασμένη με την πράξη $*$, είναι ομάδα, κλειστή ως προ την πράξη $*$, δηλαδή για κάθε $x, y \in H$ ισχύει $x * y = z$, με $z \in H$, τότε η H καλείται **υποομάδα**. Συμβολίζουμε με $H \leq G$.

1.1.4 Ορισμός

Έστω $(G, *)$ μία ομάδα και $K \subseteq G$. Η K εφοδιασμένη με την πράξη $*$ θα λέγεται **κανονική υποομάδα** της $(G, *)$ αν $g * k * g^{-1} \in K$, $\forall k \in K$, $\forall g \in G$. Συμβολίζουμε $K \triangleleft G$.

1.1.5 Ορισμός

Έστω $(G, *)$ μία ομάδα και $H \leq G$. Θα ονομάζουμε **αριστερό σύμπλοκο** της H στην G, $\forall g \in G$, το σύνολο $gH = \{gh \mid h \in H\}$.

Παρατήρηση 1.1.5

Όμοια ορίζεται και το **δεξί σύμπλοκο** της H στην G, ως το $Hg = \{hg \mid h \in H\}$.

1.1.6 Ορισμός

Έστω $(G, *)$ μία ομάδα και $H \leq G$. Το σύνολο των συμπλόκων της H στην G, δηλαδή το σύνολο $\{gH \mid g \in G\}$, αποτελεί ομάδα με πράξη την $(g_1H) * (g_2H) = (g_1 * g_2)H$ και ονομάζεται **ομάδα πηλίκο**. Συμβολίζουμε G/H.

1.1.7 Ορισμός

Έστω $(G_1, *_1)$ και $(G_2, *_2)$ ομάδες. Μία απεικόνιση $\varphi : G_1 \to G_2$ θα ονομάζεται **ομομορφισμός** αν $\forall a, b \in G_1$ ισχύει:

$$\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b)$$

Παρατήρηση 1.1.7.1

Ένας ομομορφισμός $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, όπου G_1 και G_2 ομάδες, θα ονομάζεται **μονομορφισμός** αν είναι επιπλέον ¨1-1¨.

Παρατήρηση 1.1.7.2

Ένας ομομορφισμός $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, όπου G_1 και G_2 ομάδες, θα ονομάζεται **επίμορφισμός** αν είναι επιπλέον ¨επί¨.

Παρατήρηση 1.1.7.3

Ένας ομομορφισμός $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, όπου G_1 και G_2 ομάδες, θα ονομάζεται **ισομορφισμός** αν είναι επιπλέον ¨1-1' και ¨επί¨.

1.2 Θεμελειώδεις Τοπολογικές Έννοιες

1.2.1 Ορισμός

Έστω ένα μή κενό σύνολο E και $\mathcal{J}$ μία συλλογή από υποσύνολα του E, δηλαδή $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Η συλλογή $\mathcal{J}$ είναι μία **τοπολογία** στον E αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\emptyset \in \mathcal{J}, E \in \mathcal{J}$

(ii) Αν $A \in \mathcal{J}$ και $B \in \mathcal{J}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{J}$

(iii) Αν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J}$, τότε $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{J}$, όπου $\mathcal{C}$ μία οικογένεια συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{J}$.

1.2.2 Ορισμός

Κάθε μη κενό σύνολο E στο οποίο ορίζεται μία τοπολογία $\mathcal{J}$ ονομάζεται **τοπολογικός χώρος**. Συμβολίζουμε $(E, \mathcal{J})$.

1.2.3 Ορισμός

Ανοικτά σύνολα στον τοπολογικό χώρο $(E, \mathcal{J})$, ονομάζονται αποκλειστικά τα μέλη της τοπολογίας.

1.2.4 Ορισμός

Κλειστά σύνολα στον τοπολογικό χώρο $(E, \mathcal{J})$, ονομάζονται αποκλειστικά τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων του.

1.2.5 Ορισμός

Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$ και $\alpha \in A$ ένα στοιχείο του. Το α θα ονομάζεται **εσωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $r > 0$

τέτοιο ώστε $B(\alpha, r) \subseteq A$.

1.2.6 Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του Α θα ονομάζεται **πυρήνας ή εσωτερικό** του συνόλου Α. Συμβολίζουμε A^o.

1.2.7 Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$ και $\alpha \in A$ ένα στοιχείο του. Το α θα ονομάζεται **εξωτερικό σημείο** του Α αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\alpha, r) \subseteq A^c$.

1.2.8 Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$. Το σύνολο των εξωτερικών σημείων του Α θα ονομάζεται **εξωτερικό** του συνόλου Α. Εναλλακτικά, ως εξωτερικό του Α, το οποίο συμβολίζουμε με $ext(A)$, είναι το $ext(A) = (A^c)^o$

1.2.9 Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$ και $\alpha \in A$ ένα στοιχείο του. Το α θα ονομάζεται **συνοριακό σημείο** του Α αν για κάθε $r > 0$ ισχύει ότι $B(\alpha, r) \cap A \neq 0$ και $B(\alpha, r) \cap A^c \neq 0$.

1.2.10 Ορισμός

Έστω Α ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$ και $\alpha \in A$ ένα στοιχείο του. Το α θα ονομάζεται **σημείο επαφής** του Α αν για κάθε $r > 0$

ισχύει $B(\alpha, r) \cap A \neq \emptyset$.

1.2.11 Ορισμός

Έστω A ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(E, \mathcal{J})$. Το σύνολο των σημείων επαφής του A θα ονομάζεται **κάλυμμα ή θήκη** του συνόλου A. Συμβολίζουμε $\overline{A}$.

Παρατήρηση 1.2.11

Έστω $(E, \mathcal{J})$ ένας τοπολογικός χώρος και A ένα υποσύνολό του. Ονομάζουμε **κάλυμμα ή θήκη** του A το σύνολο:

$$\overline{A} = \cap\{X : X \supseteq A, A^c \in \mathcal{J}\}$$

1.2.12 Ορισμός

Ως **σύνορο** του A, το οποίο συμβολίζουμε με ∂A, ορίζουμε το σύνολο:

$$\partial A = \overline{A} - A^o$$

1.2.13 Ορισμός

Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(E_1, \mathcal{J}_1)$ και $(E_2, \mathcal{J}_2)$ και έστω μία συνάρτηση $f : (E_1, \mathcal{J}_1) \longrightarrow (E_2, \mathcal{J}_2)$. Η συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** αν ισχύει:

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{J}_1, \forall A \in \mathcal{J}_2$$

1.2.14 Ορισμός

Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(E_1, \mathcal{J}_1)$ και $(E_2, \mathcal{J}_2)$ και έστω μία συνάρτηση $f : (E_1, \mathcal{J}_1) \longrightarrow (E_2, \mathcal{J}_2)$. Τη συνάρτηση f θα ονομάζουμε **ομοιομορφισμό** αν είναι ¨1-1¨, ¨επί¨, συνεχής και με συνεχή αντίστροφη συνάρτηση. Επιπλέον, αν μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων υπάρχει ομοιομορφισμός, τότε αυτοί θα ονομάζονται **ομοιομορφικοί**.

1.2.15 Ορισμός

Ένας τοπολογικός χώρος θα λέμε ότι είναι **συμπαγής** αν για κάθε ανοικτή κάλυψή του υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

1.2.16 Ορισμός

χυαδ Έστω $(E, \mathcal{J})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ο $(E, \mathcal{J})$ θα ονομάζεται **συνεκτικός** αν δεν υπάρχει ανοικτή ή κλειστή διαμέρισή του σε δύο υποσύνολά του.

1.2.17 Ορισμός

Έστω Ε ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος Κ και $\mathcal{J}$ μία τοπολογία επί του Ε. Θα λέμε ότι ο $(E, \mathcal{J})$ είναι ένας **τοπολογικός διανυσματικός χώρος** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(i) Η πράξη της πρόσθεσης $+ : E \times E \longrightarrow E$, με $+(x, y) = x + y$, είναι συνεχής.

(ii) Η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $* : K \times E \longrightarrow E$, με $*(\lambda, x) = \lambda x$, είναι συνεχής.

1.3 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

1.3.1 Ορισμός

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι A και E, Υ ένα ανοικτό υποσύνολο του A και $f : U \longrightarrow E$ μία απεικόνιση. Η f θα ονομάζεται **Gâteaux - ολόμορφη** αν για κάθε $(x, \alpha, \varphi) \in U \times A \times E'$ η απεικόνιση:

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mu\varepsilon \quad \lambda \mapsto F(\lambda) = (\varphi \circ f)(x + \lambda\alpha)$$

είναι ολόμορφη σε μία περιοχή $O \in \mathbb{C}$.

1.3.2 Ορισμός

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι A και E, Υ ένα ανοικτό υποσύνολο του A και $f : U \longrightarrow E$ μία απεικόνιση. Η f θα ονομάζεται **ολόμορφη** αν είναι συνεχής και G-ολόμορφη.

1.3.3 Ορισμός

Έστω Q ένα μη κενό σύνολο και A ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Ονομάζουμε **τοπικό χάρτη** του X το διατεταγμένο ζεύγος (U,φ) αν $U \subseteq X$ και η απεικόνιση:

$$\varphi : U \subseteq X \longrightarrow \varphi(U) \subseteq A$$

είναι αμφιμονοσήμαντη, επί του ανοικτού συνόλου $\varphi(U)$.

Παρατήρηση 1.3.3

Το σύνολο U ονομάζεται **πεδίο ορισμού** του χάρτη (U,φ) και η απεικόνιση φ ονομάζεται **απεικόνιση συντεταγμένων** του χάρτη.

1.3.4 Ορισμός

Έστω (U, φ) και (V, ψ) δύο χάρτες του X, με $U \cap V \neq \emptyset$. Οι χάρτες αυτοί ονομάζονται **ολόμορφα συμβιβαστοί** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(i) Τα σύνολα $\varphi(U \cap V)$ και $(\psi(U \cap V)$ ειναι ανοικτά υποσύνολο του A.

(ii) Οι απεικονίσεις:

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \varphi^{-1} & : & \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \\ \varphi \circ \psi^{-1} & : & \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V) \end{array}$$

είναι ολόμορφες μεταξύ των ανοικτών υποσυνόλων του τοπολογικού διανυσματικού χώρου A.

.

Παρατήρηση 1.3.4

Οι $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ και $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ ονομάζονται **συναρτήσεις μεταφοράς**.

1.3.5 Ορισμός

Έστω μία οικογένεια τοπικών χαρτών του X $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi) : i \in I\}$, τότε αυτή θα ονομάζεται **άτλας** του X αν ισχύει ότι:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

1.3.6 Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ ένας άτλαντας του X. Υποθέτουμε ότι το μοντέλο όλων των τοπολογικών χαρτών του $\mathcal{A}$ είναι ο ίδιος τοπολογικός διανυσματικός χώρος A. Τότε ο $\mathcal{A}$ ονομάζεται **ολόμορφος άτλας** του X αν όλοι οι χάρτες του είναι, ανά δύο, ολόμορφα συμβιβαστοί.

1.3.7 Ορισμός

Έστω δύο άτλαντες του X, $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Οι $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ θα ονομάζονται **ολόμορφα συμβιβαστοί** αν η οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$ είναι ολόμορφος άτλας του X. Εναλλακτικά διατυπώνοντας την ίδια πρόταση μπορούμε να πούμε ότι κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι ολόμορφα συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{B}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

1.3.8 Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ ένας ολόμορφος άτλαντας του X. Θα ονομάζουμε τον $\mathcal{A}$ **μέγιστο ολόμορφο άτλαντα** του X αν δεν είναι γνήσιο υποσύνολο κανενός άλλου ολόμορφου άτλαντα του X.

1.3.9 Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ ένας ολόμορφος άτλαντας του X. O $\mathcal{A}$ θα ονομάζεται **πλήρης ολόμορφος άτλας** του X, αν για κάθε, ολόμορφα συμβιβαστό με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$, χάρτη του X, έστω (U, φ), ισχύει ότι $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

1.3.10 Ορισμός

Έστω ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μία μετρήσιμη συλλογή υποσυνόλων $U_a \subset M$, που ονομάζονται χάρτες τοπικών συντεταγμένων και ένα προς ένα απεικονίσεις $\chi_a : U_a \to V_a$, όπου V_a είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$, που ονομάζονται απεικονίσεις τοπικών συντεταγμένων. Ονομάζουμε το M **m-διάστατη πολλαπλότητα** αν ικανοποιούνται τα εξής:

i) $\cup_a U_a = M$

ii) Η απεικόνιση $\chi_b \circ \chi_a^{-1} : \chi_a(U_a \cap U_b) \to \chi_b(U_a \cap U_b)$ είναι λεία απεικόνιση

iii) Έστω $x \in U_a$ και $x' \in U_b$ δύο διακριτά στοιχεία του συνόλου M. Τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα $A \subset U_a$ και $B \subset U_b$, ώστε $\chi_a(x) \in A$, $\chi_b(x') \in B$ και $\chi_a^{-1}(A) \cap \chi_b^{-1}(B) = \emptyset$

1.3.11 Ορισμός

Ονομάζουμε **αναλυτική πολλαπλότητα** ως προς έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο A το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$, όπου $\mathcal{A}$ ένας μέγιστος ολόμορφος χάρτης με μοντέλο τον τοπολογικό διανυσματικό χώρο A.

1.4 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Είναι γνωστή από την Άλγεβρα η έννοια της εξίσωσης ή του συστήματος εξισώσεων με αγνώστους στοιχεία από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Υπάρχουν όμως μαθηματικά προβλήματα που οι άγνωστοι αποτελούν διαφόρων τάξεων παραγώγους συναρτήσεων μίας ή περισσότερων μεταβλητών.

1.4.1 Ορισμός

Οι εξισώσεις με άγνωστους συναρτήσεις μίας ή πολλών μεταβλητών και των παραγώγων τους ονομάζονται **διαφορικές εξισώσεις**.

Παρατήρηση 1.4.1.1

Οι διαφορικές εξισώσεις ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

- Τις **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις**, στο εξής **Σ.Δ.Ε.**, όπου οι συναρτήσεις εξαρτώνται από μία μεταβλητή.
- Τις ***Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις***, στο εξής **Μ.Δ.Ε.**, όπου οι συναρτήσεις εξαρτώνται από περισσότερες από μία μεταβλητές.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις ΜΔΕ και για αυτό θα ορίσουμε βασικές έννοιες και θα σκιαγραφήσουμε τις πρωταρχικές διαδικασίες επίλυσης τους. Πάνω σε θα στηρίξουμε στη συνέχεια την εναλλακτική προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε.

Συμβολισμός Μερικών Παραγώγων

Θεωρούμε μια συνάρτηση n-μεταβλητών, έστω $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Τότε θα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς για τις μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης u:

- $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, ..., n$

- $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$ κ.ο.κ.

Παρατήρηση 1.4.1.2

Αν υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, τότε γνωρίσουμε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι ισχύει $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$.

Παρατήρηση 1.4.1.3

Παρακάτω θα δούμε τη γενική μορφή μίας ΜΔΕ ανάλογα με την τάξη της. Έχουμε:

- $1^{\eta\varsigma}$ Τάξης είναι: $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$
- $2^{\eta\varsigma}$ Τάξης είναι: $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ κ.ο.κ.

Παρατήρηση 1.4.1.4

Αν η συνάρτηση F είναι γραμμική συνάρτηση τότε και η αντίστοιχη ΜΔΕ θα λέγεται **γραμμική**.

Παρατήρηση 1.4.1.5

Μερικές "διάσημες" ΜΔΕ $1^{\eta\varsigma}$ και $2^{\eta\varsigma}$ τάξης είναι οι εξής:

- ***Εξίσωση Μεταφοράς:*** $u_x + u_y = 0 u_x + y u_y = 0$
- ***Εξίσωση Hopf:*** $u u_x + u_y = 0$
- ***Εξίσωση Laplace:*** $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- ***Εξίσωση Θερμότητας:*** $u_y - u_{xx} = 0$
- ***Κυματική Εξίσωση:*** $u_{yy} - u_{xx} = 0$

Παρατήρηση 1.4.1.6

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε κυρίως την **εξίσωση θερμότητας**. Η εξίσωση θερμότητας ονομάστηκε έτσι γιατί μπορεί να αξιοποιηθεί για την περιγραφή της διάδοσης της θερμότητας. Ωστόσο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περιγραφή της διάχυσης ορισμένων χημικών ουσιών γι΄ αυτό και λέγεται επίσης εξίσωση διάχυσης. Πολλές φορές γράφεται και τη μορφή: $u_t = ku_{xx}$.

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικές Διαδικασίες

2.1 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων

2.1.1 Ορισμός

Ονομάζουμε **σ-άλγεβρα** $\mathcal{F}$ επί ενός συνόλου Ω, μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) Αν $F \in \mathcal{F}$, τότε $F^c \in \mathcal{F}$

iii) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$

2.1.2 Ορισμός

Έστω ένα σύνολο A. Η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιμένει το A ονομάζεται **ελάχιστη σ-άλγεβρα** που ορίζεται από το A και συνήθως τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A})$.

2.1.3 Ορισμός

Η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα σύνολα (παραλληλόγραμμα) της μορφής $(a, b]$ ονομάζεται σ-άλγεβρα **Borel** και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2.1.4 Ορισμός

Έστω $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα επί ενός συνόλου Ω. Το ζεύγος $(\mathcal{F},\Omega)$ ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος**.

2.1.5 Ορισμός

Έστω $(\mathcal{F},\Omega)$ ένας μετρήσιμος χώρος. Ονομάζουμε **μέτρο πιθανότητας** μία απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(ii) $P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, όπου $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, με $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$.

2.1.6 Ορισμός

Έστω $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα επί ενός συνόλου Ω και P ένα μέτρο πιθανότητας. Τότε η διατεταγμένη τριάδα $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ονομάζεται **χώρος πιθανότητας**.

2.1.7 Ορισμός

Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα. Ένα υποσύνολα F του Ω, με $F \in \mathcal{F}$ θα ονομάζεται $\mathcal{F}$-**μετρήσιμο**.

2.1.8 Αξιωματική Θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ονομάζουμε **αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων** την ερμηνεία τυχαίων πειραμάτων με τη χρήση της τριάδας (Ω,$\mathcal{F}$,P). Θεμελιωτής αυτού του τρόπου ερμηνείας είναι ο Kolmogorov.

Κάθε στοιχείο θα ερμηνεύεται ως εξής:

- Το σύνολο $\boldsymbol{\Omega}$ είναι ο **δειγματικός χώρος**, το σύνολο δηλαδή που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος. Κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου, $\omega \in \Omega$, αποτελεί μία πιθανή έκβαση του πειράματος.

- Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ θα ονομάζεται **οικογένεια ενδεχομένων**. Κάθε στοιχείο της οικογένειας ενδεχομένων, $F \in \mathcal{F}$, ή με άλλα λόγια κάθε $\mathcal{F}$-μετρήσιμο υποσύνολο του Ω θα ονομάζεται **γεγονός**. Ένα γεγονός μπορεί να είναι πιο περίπλοκο από μία απλή έκβαση ενός τυχαίου πειράματος.

- Το μέτρο πιθανότητας P είναι αυτό που δείχνει πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα γεγονός. Για παράδειγμα αν $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, με $P(F_1) > P(F_2)$, τότε μπορούμε να πούμε ότι το F_1 είναι πιο πιθανό να συμβεί από το F_2.

2.2 Τυχαίες Μεταβλητές

2.2.1 Ορισμός

Έστω Ω ένα σύνολο. Μία συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ θα ονομάζεται $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα μέσω της Y κάθε ανοικτού υποσυνόλου U του $\mathbb{R}^d$ είναι στοιχείο στης σ-άλγεβρας $\mathcal{F}$, δηλαδή αν:

$$Y^{-1}(U) = \omega \in \Omega : Y(\omega) \in U \in \mathcal{F}$$

2.2.2 Ορισμός

Έστω $(\Omega$,$\mathcal{F}$,$P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων. Τότε μία $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ θα ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή**.

Παρατήρηση 2.2.2.1

Με άλλα λόγια η τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος.

Παρατήρηση 2.2.2.2

Για κάθε τυχαία μεταβλητή Χ επάγεται ένα μέτρο που ονομάζεται **κατανομή** της τυχαίας μεταβλητής ως εξής:

$$\mu_x := P(X^{-1}(\mathcal{B}))$$

όπου $\mathcal{B}$ ένα σύνολο *Borel* στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2.2.4 Ορισμός

Η **μέση τιμή** μίας τυχαίας μεταβλητής Χ, συμβολίζεται με $\mathbb{E}[X]$ και ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\mathbb{R}^d} x\mu_x dx.$$

2.2.5 Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή X λέγεται **ολοκληρώσιμη** αν ισχύει ότι $\mathbb{E}[X] < \infty$.

2.3 Στοχαστική Διαδικασία

2.3.1 Ορισμός

Μία συλλογή τυχαίων μεταβλητών με παράμετρο t που ανήκει σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T, $\{X_t\}_{t\in T}$, επί ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$, ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία**.

Παρατήρηση 2.3.1.1

Βλέπουμε ότι μία στοχαστική διαδικασία εξαρτάται από δύο μεταβλητές, τις t και ω.

Παρατήρηση 2.3.1.2

Αν θεωρήσουμε σταθερό το $t \in T$, τότε έχουμε μία τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως εξής:

$$\omega \mapsto X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

Παρατήρηση 2.3.1.3

Αν θεωρήσουμε σταθερό το $\omega \in \Omega$, τότε ονομάζουμε **τροχιά** της X_t τη συνάρτηση:

$$t \mapsto X_t(\omega), t \in T$$

Παρατήρηση 2.3.1.4

Η έννοια της στοχαστικής διαδικασίας ταυτίζεται με την έννοια του μέτρου πιθανότητας σε έναν κατάλληλα ορισμένο χώρο μέτρου.

Παρατήρηση 2.3.1.5

Σε πολλές περιπτώσεις με την παράμετρο t συμβολίζουμε το χρόνο, είτε αυτός είναι συνεχής, είναι δηλαδή οποιαδήποτε στιγμή σε μία χρονική περίοδο, είτε αυτός είναι διακριτός, για παράδειγμα αν μετράμε το χρόνο σε μήνες, έτη κτλ.

2.4 Διαδικασίες Martingale - Κίνηση Brown

2.4.1 Ορισμός

Θα λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει **σχεδόν βέβαια**, στο εξής θα αναφερόμαστε συντομογραφικά με σ.β., αν δεν ισχύει μόνο σε σύνολα με μέτρο το 0.

2.4.2 Ορισμός

Μία οικογένεια σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_t$, με την ιδιότητα $\forall s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, θα ονομάζεται **διήθηση**.

2.4.3 Ορισμός

Έστω μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$. Αν για κάθε $t \in T$ η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, τότε λέμε ότι η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

2.4.4 Ορισμός

Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων, $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και $\{X_t\}_{t\in T}$ μία προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$ συλλογή ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών. Η $\{X_t\}_{t\in T}$ θα λέμε ότι είναι **martingale** αν ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \sigma.\beta. s \leq t$$

2.4.5 Ορισμός

Ονομάζουμε **κίνηση Brown** μία πραγματική στοχαστική διαδικασία B_t με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Αν $t_0 < t_1 < ... < t_n$, τότε οι μεταβολές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

ii) Για κάθε $s, t \geq 0$ έχουμε ότι για κάποιο σύνολο *Borel*, έστω A, ισχύει:

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

Με άλλα λόγια όλες οι μεταβολές την κίνησης *Brown* ακολουθούν την κανονική κατανομή.

iii) Για κάθε $t \in T$, η συνάρτηση $t \to B_t$, δηλαδή όλες οι τροχιές της κίνησης *Brown* είναι συνεχείς με πιθανότητα 1.

2.5 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

2.5.1 Ορισμός

Έστω B_t μία κίνηση *Brown*, και u, v δύο συναρτήσεις που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- $\int_0^t v^2(s,\omega)ds < \infty$
- $\int_0^t u(s,\omega)ds < \infty$

Μία στοχαστική διαδικασία της μορφής:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s$$

θα ονομάζεται **διαδικασία** *Itô*.

Παρατήρηση 2.5.1

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως εξής:

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

2.5.2 Ορισμός

Έστω B_t μία m-διάστατη κίνηση *Brown*, $X_t \in \mathbb{R}^n$ και $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Ονομάζουμε **στοχαστική διαφορική εξίσωση** μία εξίσωση της μορφής:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Παρατήρηση 2.5.2.1

Μία στοχαστική διαφορική εξίσωση θα λέμε ότι έχει λύση αν υπάρχει μία διαδικασία *Itô* που την ικανοποιεί.

Παρατήρηση 2.5.2.2

Οι λύσεις που αναφέρονται στην *Παρατήρηση 2.5.2.1* θα ονομάζονται **τροχιακές λύσεις**.

Παρατήρηση 2.5.2.2

Συνήθως αναφερόμαστε στις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων ως **διαδικασίες διάχυσης**.

Κεφάλαιο 3

Ομάδες Lie και Διαφορικές Εξισώσεις

Στη συνέχεια ορίζονται τα βασικά στοιχεία των Αλγεβρών, Ομάδων και Συμμετριών Lie με εφαρμογές κυρίως στη Διαφορική Γεωμετρία.

3.1 Ομάδες και Άλγεβρες Lie

3.1.1 Ορισμός

Έστω $(G, \mathcal{J})$ ένας τοπολογικός χώρος, όπου G μία ομάδα. Ο χώρος αυτός καλείται **τοπολογική ομάδα** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- Η συνάρτηση $f : G \times G \longrightarrow G$, με $f(x, y) = x * y$ είναι συνεχής για κάθε $(x, y) \in G \times G$. Το σύνολο $G \times G$ θα είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.
- Η συνάρτηση $g : G \longrightarrow G$ με $g(x) = x^{-1}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in G$.

Παρατήρηση 3.1.1

Μία τοπολογική ομάδα είναι μία ομάδα που σέβεται τις ιδιότητες του τοπολογικού χώρου στον οποίο οι πράξεις της ομάδας είναι συνεχείς, διατηρώντας ιδιότητες όπως αυτές της συνέχειας, της συνεκτικότητας, της συμπάγειας.

3.1.2 Θεώρημα

Έστω G μία ομάδα εφοδιασμένη με μία τοπολογία. Η G θα είναι μία τοπολογική ομάδα αν και μόνο αν η $g : G \times G \longrightarrow G$, με $g(x, y) = x * y^{-1}$ είναι συνεχής απεικόνιση.

3.1.3 Ορισμός

Ορίζουμε ως **άλγεβρα Lie** και συμβολίζουμε με $\mathfrak{g}$, έναν διανυσματικό χώρο επί ενός σώματος K, επί του οποίου ορίζουμε το γινόμενο [,], που ονομάζεται αγκύλη του Lie και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Αν $X, Y \in \mathfrak{g}$, τότε $[X, Y] \in \mathfrak{g}$

(ii) $[X, \alpha\Upsilon + \beta Z] = \alpha[X, \Upsilon] + \beta[X, Z]$, $\forall \alpha, \beta \in K$ και $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

(iii) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

(iv) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

.

Παρατήρηση 3.1.3

Μία άλγεβρα Lie αποτελεί μία *τοπολογική ομάδα*, με την ιδιότητα του τοπολογικού χώρου, η οποία ταυτόχρονα αποτελεί μία *αναλυτική πολλαπλότητα*, όπου οι πράξεις της ομάδας είναι αναλυτικές απεικονίσεις.

3.1.4 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie. Ο υπόχωρος $\mathfrak{s}$ θα ονομάζεται **υποάλγεβρα** της $\mathfrak{g}$, αν ο $\mathfrak{s}$ είναι κλειστός ως προς τη μετάθεση, δηλαδή αν $\forall s_1, s_2 \in \mathfrak{s}, [s_1, s_2] \in \mathfrak{s}$. Για συντομία γράφουμε $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$.

3.1.5 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ δύο υποάλγεβρες. Θα λέμε ότι η $\mathfrak{g}$ είναι το **ευθύ άθροισμα** των $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{b}$, αν $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ως διανυσματικός χώρος και $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

3.1.6 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ δύο υποάλγεβρες. Θα λέμε ότι η $\mathfrak{g}$ είναι το **ημιευθύ άθροισμα** των $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{b}$, αν $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ως διανυσματικός χώρος και $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus_s \mathfrak{b}$.

Παρατήρηση 3.1.6

Η άλγεβρα της εξίσωσης θερμότητας είναι το ημιευθύ αθροισμα

$$\{X_1, X_3, X_5\} \oplus_s \{X_2, X_4 - \frac{1}{2}X_3, X_6\}.$$

3.1.7 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $\mathfrak{s}$ μία υποάλγεβρα. Θα ονομάζουμε το $\mathfrak{s}$ **ιδεώδες** της $\mathfrak{g}$ αν $[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{s}$, δηλαδή αν $\forall A \in \mathfrak{s}, B \in \mathfrak{g}$, το $[A, B] \in \mathfrak{s}$.

Παρατήρηση 3.1.7.1

Σε ένα ημιευθύ άθροισμα $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus_s \mathfrak{b}$, η $\mathfrak{a}$ αποτελεί ιδεώδες της $\mathfrak{g}$.

Παρατήρηση 3.1.7.2

Σε ένα ευθύ άθροισμα $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{a}_n$, κάθε $\mathfrak{a}_i$, όπου $i = 1, 2, ..., n$, αποτελεί ιδεώδες της $\mathfrak{g}$.

3.1.8 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie. Τότε **κέντρο** $\mathfrak{r}$ της $\mathfrak{g}$ θα ονομάζουμε το μέγιστο ιδεώδες που ικανοποιεί τη σχέση $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = 0$.

Παρατήρηση 3.1.8

Το κέντρο μίας άλγεβρας Lie είναι *μοναδικό*.

3.1.9 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $\mathfrak{s}$ ένα ιδεώδες της $\mathfrak{g}$. Τότε $\forall X \in \mathfrak{g}$, ορίζουμε το $Q + \mathfrak{s}$ ως κλάση ισοδυναμίας του X, που προκύπτει από τη σχέση $X \equiv Y (mod \mathfrak{s})$ αν και μόνο αν $X - Y \in \mathfrak{s}$. Ορίζουμε την αγκύλη Lie επί της κλάσης ως εξής:

$$[X + \mathfrak{s}, Y + \mathfrak{s}] = [X, Y] + \mathfrak{s}$$

η οποία είναι καλά ορισμένη εφόσον η $\mathfrak{s}$ είναι ιδεώδες. Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συνθέτει μία νέα άλγεβρα Lie, η οποία ονομάζεται **ομάδα πηλίκο** και συμβολίζεται με $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$.

Παρατήρηση 3.1.9

Τα ιδεώδη μίας άλγεβρας Lie, αντιστοιχούν πάντοτε σε *κανονικές υποομάδες* της αντίστοιχης ομάδας Lie.

3.1.10 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie. Η $\mathfrak{g}$ θα ονομάζεται **απλή** αν τα μοναδικά ιδεώδη της είναι η $\mathfrak{g}$ και το $\{0\}$.

3.1.11 Ορισμός

Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie. Η $\mathfrak{g}$ θα ονομάζεται **ημιαπλή** αν τα μοναδικά *αβελιανά* ιδεώδη της είναι η $\mathfrak{g}$ και το $\{0\}$.

3.2 Ομάδες Μετασχηματισμών Lie

3.2.1 Ορισμός

Έστω M μία m-διάστατη πολλαπλότητα. Συμβολίζουμε με $\tau(M)$ το σύνολο όλων των μετασχηματισμών του συνόλου M. Το $\tau(M)$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα η οποία καλείται **μετασχηματισμός της M**.

3.2.1 Ορισμός

Έστω $(G, *)$ μία ομάδα. Τότε ο ομομορφισμός ομάδων $\pi : G \to \tau(M)$ ονομάζεται **αναπαράσταση της ομάδας G στο τ(M)**. Εφόσον ο π είναι ομομορφισμός ομάδων ισχύει ότι:

Παρατήρηση 3.2.1.1

Το παραπάνω σημαίνει ότι $\forall g \in G$, η εικόνα $\pi(g)$ αποτελεί μετασχηματισμό του M.

Παρατήρηση 3.2.1.2

Εφόσον ο π είναι ομομορφισμός ομάδων ισχύει ότι:

$$\pi(g_1 * g_2)\pi(g_1) \circ \pi(g_2)$$

Παρατήρηση 3.2.1.3

Ονομάζουμε την απεικόνιση $M \times G \to M$, με $(x, g) \mapsto \pi(g)(x)$, **πράξη της ομάδας G στο M**.

Παρατήρηση 3.2.1.4

Έστω $T : G \to \tau(M)$ μία αναπαράσταση της της ομάδας G στο M. Για κάθε $x, x' \in \mathbb{R}^m$ ορίζουμε τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό T_g που ικανοποιεί τη σχέση:

$$x' = T(x, g) = T_g(x)$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο g_0 τέτοιο ώστε $x = T_{g_0}(x)$, δηλαδή που να μετατρέπει το μετασχηματισμό σε ταυτοτικό και θεωρούμε ότι είναι μοναδικό σε μία περιοχή γύρω από το g_0.

Με τον παραπάνω τρόπο ορίσαμε, δηλαδή, ένα μετασχηματισμό $T_g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, για κάθε $g \in U$, όπου U είναι ένα διάστημα, με $g_0 \in U$.

Αν ισχύουν τα παραπάνω λέμε ότι έχουμε μία **τοπική μονοπαραμετρική ομάδα**.

3.2.2 Ορισμός

Ονομάζουμε το σύνολο G των μετασχηματισμών T_g στο M **τοπική μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών** αν $\exists U_0 \subset U$, που να περιέχει το ουδέτερο στοιχείο, έστω e με τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Υπάρχει μοναδικό e τέτοιο ώστε $T_e = id \in G$, όπου id είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. (Ουδέτερο Στοιχείο)

ii) Για κάθε $g \in U$ υπάρχει $g^{-1} \in U$, τέτοιο ώστε $T_{g^{-1}} = T_g^{-1} \in G$. (Αντίστροφο Στοιχείο)

iii) Για κάθε $g_1, g_2 \in U$ ο $T_{g_1}T_{g_2} \in G$ (Κλειστότητα)

3.2.3 Ορισμός

Ονομάζουμε **σημειακό μετασχηματισμό σε μία πολλαπλότητα M** διάστασης μ, μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που ορίζεται ως εξής:

$$x' = T(x), \mu\varepsilon \quad x, x' \in \mathbb{R}^m$$

Παρατήρηση 3.2.3

Συμβολίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του T με T^{-1}.

3.2.4 Ορισμός

Λέμε ότι η ομάδα μετασχηματισμών G στο M είναι **συνεχής** αν για κάθε $g_1, g_2 \in G$ οι μετασχηματισμοί T_{g_1}, T_{g_2} συνδέονται μέσω ενός συνεχούς συνόλου στοιχείων της ομάδας, δηλαδή αν για η T_{g_1} μετατρέπεται με συνεχή τρόπο στην T_{g_2}.

3.2.5 Ορισμός

Ονομάζουμε **r-παραμετρική ομάδα Lie** μία ομάδα G με τη δομή μίας r-διάστατης πολλαπλότητας M, για την οποία ισχύει ότι η πράξη της ομάδας και η αντιστροφή, δηλαδή οι απεικονίσεις:

- $m : G \times G \to G$, με $m(\varepsilon, \delta) = \varepsilon \circ \delta$, όπου $\varepsilon, \delta \in G$
- $i : G \to G$, με $i(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$, όπου $\varepsilon \in G$

να είναι λείες απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Παρατήρηση 3.2.5

Η r-παραμετρική ομάδα Lie συμβολίζεται συνήθως με G_r.

3.2.6 Ορισμός

Έστω G_1, G_2 δύο ομάδες Lie. Μία λεία απεικόνιση $\varphi : G_1 \to G_2$ θα ονομάζεται **ομομορφισμός ομάδων Lie** αν $\forall \varepsilon, \delta \in G$ ισχύει ότι:

$$\varphi(\varepsilon, \delta) = \varphi(\varepsilon) \circ \varphi(\delta).$$

Παρατήρηση 3.2.6.1

Έστω φ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Αν η απεικόνιση φ^{-1} είναι λεία απεικόνιση τότε ο φ ονομάζεται **ισομορφισμός ομάδων Lie**.

Παρατήρηση 3.2.6.2

Στο εξής υποθέτουμε ότι όλες οι πολλαπλότητες είναι συνεκτικά σύνολα. Με αυτόν τον τρόπο εστιάζουμε στις συμμετρίες που είναι με συνεχή τρόπο συνδεδεμένες με το ουδέτερο στοιχείο.

Παρατήρηση 3.2.6.3

Σε μία άλγεβρα Lie κάθε σημείο είναι ¨όμοιο' με οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικά. Αλγεβρικά όμως ένα ξεχωρίζει, το ουδέτερο στοιχείο. Δημιουργείται, έτσι, η ανάγκη να μελετήσουμε την περιοχή γύρω από το ουδέτερο στοιχείο.

3.2.7 Ορισμός

Ονομάζουμε **τοπική** r**-παραμετρική ομάδα Lie** ένα συνεκτικό σύνολο $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ με την πράξη $m : V \times V \to \mathbb{R}^r$ και την αντιστροφή $i : V_0 \to V$, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

i) Για κάθε $x, y \in V$, $x \circ y \in V$ (Κλειστότητα)

ii) Για κάθε $x, y, z \in V$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Προσεταιρισμός)

iii) Υπάρχει $e \in V$, ώστε $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in V$ (Ουδέτερο Στοιχείο)

iv) Για κάθε $x \in V, \exists x^{-1} \in V$, ώστε $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ (Αντίστροφο Στοιχείο)

Παρατήρηση 3.2.7.1

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ίδιες με αυτές του ορισμού της ομάδας. Όμως στις ομάδες Lie έχουμε μία ιδιαιτερότητα: τα στοιχεία δεν ορίζονται κατ΄ ανάγκη παντού.

Παρατήρηση 3.2.7.2

Μπορούμε να πούμε ότι μία τοπική ομάδα Lie είναι τοπικά ισομορφική με μία περιοχή του ουδέτερου στοιχείου της ομάδας Lie.

Παρατήρηση 3.2.7.3

Είναι γνωστό ότι η μόνη συνεκτική μονοπαραμετρική ομάδα Lie είναι η $(\mathbb{R},+)$ και συνεπώς το ουδέτερο στοιχείο της θα είναι το 0. Τότε μία τοπική μονοπαραμετρική ομάδα Lie είναι ένας χάρτης που περιέχει το 0. Στο εξής θα υποθέτουμε ότι σε κάθε μονοπαραμετρική ομάδα Lie η πράξη της σύνθεσης είναι η πρόσθεση.

Παρατήρηση 3.2.7.4

Μπορούμε να κατασκευάζουμε μία τοπική ομάδα Lie ως μία περιοχή γύρω από το ουδέτερο στοιχείο μίας ομάδας Lie.

3.2.8 Θεώρημα

Έστω μία τοπική ομάδα Lie $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$, με πράξη τη σύνθεση $\circ$ και την αντιστροφή i. Τότε υπάρχει μία ομάδα Lie με ένα χάρτη $\chi : U^* \to V^*$, όπου $V^* \subset V_0$, $e \in U^*$ και η απεικόνιση χ έχει τις ιδιότητες του ομομορφισμού ομάδων Lie, δηλαδή:

- Για κάθε $\varepsilon, \delta \in V^*$, $\chi(\varepsilon \circ \delta) = \chi(\varepsilon) \circ \chi(\delta)$
- $\chi(e) = 0$

- $\chi(\varepsilon^{-1}) = (\chi(\varepsilon))^{-1}$

Παρατήρηση 3.2.8.1

Κάθε τέτοια ομάδα Lie είναι μοναδική. Οποιαδήποτε άλλη ομάδα Lie ικανοποιεί τα παραπάνω θα είναι τοπικά ισομορφική με την αρχική.

Παρατήρηση 3.2.8.2

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία αναπαραμετρικοποίηση για κάθε ομάδα Lie, η οποία καθιστά το 0 ως ουδέτερο στοιχείο και την πρόσθεση ως την πράξη της ομάδας. Αυτό πέρα από την απλοποίηση της δομής της ομάδας Lie και έτσι τη διευκόλυνση της μελέτης και της διεξαγωγής συμπερασμάτων, μας επιτρέπει να βλέπουμε κάθε μετασχηματισμό σαν μία ροή σε ένα διανυσματικό πεδίο.

3.2.9 Θεώρημα

Για κάθε ομάδα Lie G υπάρχει μία αναπαραμετρικοποίηση τέτοια ώστε η καινούρια παράμετρος να ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\varepsilon} = \int_e^{\varepsilon} \frac{ds}{w(s)},$$

$$\mu\varepsilon \quad w(s) = \left.\frac{\partial(s \circ b)}{\partial b}\right|_{b=\varepsilon}$$

Παρατήρηση 3.2.9

Η $\tilde{\varepsilon}$ αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως **κανονική παράμετρος**.

3.2.10 Ορισμός

Έστω G μία ομάδα Lie και M μία πολλαπλότητα. Ονομάζουμε **τοπική ομάδα μετασχηματισμών Lie** την ομάδα που επάγεται από μία ομάδα Lie τέτοια ώστε να συντίθεται από ένα ανοικτό υποσύνολο U τέτοιο ώστε $\{e\} times M \subset U \times M \subset G \times M$ και μία λεία απεικόνιση $\Psi : U \to M$ για την οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

i) $\Psi_\varepsilon(\Psi_\delta(x)) = \Psi_{\varepsilon\circ\delta}$, όπου $(x, \varepsilon) \in U$, $(\varepsilon, \Psi_\delta(x)) \in U$ και $(\varepsilon \circ \delta, x) \in U$

ii) Για κάθε $x \in M, \Psi_e(x) = x$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G

iii) $\Psi_{e^{-1}}(\Psi_\varepsilon(x)) = x$, όπου $(\varepsilon, x) \in U$ και $(\varepsilon^{-1}, \Psi_\varepsilon(x)) \in U$

Παρατήρηση 3.2.10

Οι μονοπαραμετρικές ομάδες μετασχηματισμών και οι μονοπαραμετρικές ομάδες μετασχηματισμών Lie διαφέρουν στο ότι οι δεύτερες έχουν κάποιες παραπάνω προϋποθέσεις. Πρώτον, η παράμετρος ε είναι συνεχής, γεγονός που μας δίνει τη δυνατότητα να αναπαραμετρικοποιήσουμε την ομάδα Lie έτσι ώστε το ουδέτερο στοιχείο να είναι $e = 0$. Δεύτερον, ο μετασχηματισμός οφείλει να είναι λείος και να σέβεται την πράξη της σύνθεσης.

3.2.11 Ορισμός

Έστω G μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών και M μία πολλαπλότητα. Ονομάζουμε *G-τροχιά* την ελάχιστη μη κενή ομάδα μεταβλητών που αποτελεί υποσύνολο του M. Ένα σύνολο $\mathcal{O} \subset M$ αποτελεί G-τροχιά αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

i) Αν $x \in \mathcal{O}$ και ορίζεται η $\exp \varepsilon\mathbf{v}(x)$, τότε το $x' = \exp \varepsilon\mathbf{v}(x) \in \mathcal{O}$

ii) Αν $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$, τότε είτε $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, είτε $\tilde{\mathcal{O}} = \emptyset$

3.3 Διανυσματικές Ροές

Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρούμε να κατανοήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τις *ομάδες μετασχηματισμών Lie* και κατ΄ προέκταση την αιτία της ευρείας αξιοποίησης τους.

Η μελέτη αυτή μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά αν με κάποιο τρόπο ο νόμος της σύνθεσης για την ομάδα Lie μπορεί να γίνει γραμμικός, έτσι ώστε να μην ¨χάνει' σημαντική πληροφορία από την αρχική ομάδα Lie. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την κατασκευή **αλγεβρών Lie**, η οποία προκύπτει από την μετατροπή Lie ομάδων σε γραμμικές.

Κάθε ομάδα Lie μπορεί να μετατραπεί σε γραμμική σε μία περιοχή γύρω από το ουδέτερο στοιχείο της. Η διαδικασία αυτή συντελείται με την προέκταση των σειρών $Taylor$ στις συντεταγμένες που οδηγεί στον ορισμό της πράξης της ομάδας. Η συνάρτηση σύνθεσης της ομάδας είναι αυτή η προέκταση των σειρών $Taylor$. Με αυτόν τον τρόπο επεκτείνουμε αυτή τη συνάρτηση στις περιοχές οποιασδήποτε πράξης της ομάδας.

Ας υποθέσουμε ότι M μία πολλαπλότητα και C μία λεία καμπύλη επί του M η οποία παραμετρικοποιείται μέσω της:

$$\varphi : I \to M, \pi o \upsilon I \subset M, \mu \varepsilon 0 \in I$$

Έτσι παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο $x \in C$, με $x = \varphi(\varepsilon)$ υπάρχει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\dot{\varphi}(\varepsilon) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = (\dot{\varphi}^1(\varepsilon), \dot{\varphi}^2(\varepsilon), ..., \dot{\varphi}^m(\varepsilon))$$

Το εφαπτόμενο στο σημείο x του C διάνυσμα θα συμβολίζεται με:

$$v|_x = \dot{\varphi}^1(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{\varphi}^2(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \dot{\varphi}^m(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_m}$$

3.3.1 Ορισμός

Ονομάζουμε **ολοκληρωτική καμπύλη ενός διανυσματικού πεδίου ν** μία λεία καμπύλη, έστω $\chi = \varphi(\varepsilon)$, το εφαπτόμενο διάνυσμα της οποίας συμπίπτει σε κάθε σημείο με την τιμή του v σε αυτό, μαθηματικά αυτό αποτυπώνεται ως εξής:

$$\varphi(\varepsilon) = \nu|_{\varphi(\varepsilon)}, \forall \varepsilon \in I$$

Για τις τοπικές συντεταγμένες, δηλαδή για κάθε $x = \varphi(\varepsilon) = (\varphi^1(\varepsilon), \varphi^2(\varepsilon), ..., \varphi^m(\varepsilon))$, υπάρχει μία λύση του αυτόνομου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, 2, ..., m \\ \\ \varphi(0) = x_0 \end{array} \right\}$$

Παρατήρηση 3.3.1

Για διαφορετικές ολοκληρωτικές καμπύλες που περνούν από ένα σημείο x, θα έχουμε διαφορετικά πεδία ορισμού I. Η ολοκληρωτική καμπύλη που ανταποκρίνεται στο μέγιστο πεδίο ορισμού θα ονομάζεται **μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη** που περνά από το σημείο x.

3.3.2 Ορισμός

Έστω v ένα διανυσματικό πεδίο. Ονομάζουμε **ροή που παράγεται από ένα διανυσματικό πεδίο ν** την παραμετρικοποιημένη μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη που περνά από το σημείο x και συμβολίζουμε με $\Psi(x;\varepsilon)$. Επιπλέον θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

$i)$ $\Psi(\Psi(x;\varepsilon);\delta) = \Psi(x;\varepsilon+\delta)$

$ii)$ $\Psi(x;0) = x$

$iii)$ $d\dfrac{d}{d\varepsilon}\Psi(x;\varepsilon) = v|_{\Psi(x;\varepsilon)}$

Παρατήρηση 3.3.2.1

Με την εξίσωση *iii)* του παραπάνω ορισμού δηλώνουμε ότι το ν είναι εφαπτόμενο στο $\Psi(x;\varepsilon)$, για σταθερό x.

Παρατήρηση 3.3.2.2

Θα ονομάζουμε το διανυσματικό πεδίο v **απειροστό γεννήτορα** της δράσης.

3.3.3 Ορισμός

Έστω μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών επί μίας πολλαπλότητας M σε ένα διανυσματικό πεδίο ν Lie, $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$

$$\nu = \xi(x)\nabla = \xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \xi^m\frac{\partial}{\partial x_m}$$

Θα ονομάζουμε το ξ^i, $i = 1, 2, ..., m$ **απειροστό** του x_i και το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο **απειροστό γεννήτορα** του $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$.

3.3.4 Θεώρημα

Θεωρούμε μία μονοπαραμετρική τοπική ομάδα μετασχηματισμών Lie G. Τότε η μονοπαραμετρική οικογένεια μετασχηματισμών $\tilde{x} = \Psi_\varepsilon(x)$ σε ένα αναλυτικό διανυσματικό πεδίο ν που ικανοποιεί την:

$$\nu = \xi(x)\nabla = \xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \xi^m\frac{\partial}{\partial x_m}$$

αποτελεί τη μοναδική λύση για το αυτόνομο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (γνωστές και ως εξισώσεις του Lie) που παρατίθεται παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \xi(x) \\ \\ \tilde{x}|_{\varepsilon=0} = x \end{array} \right\}$$

,όπου τα ξ^i είναι οι συντελεστές του διανυσματικού πεδίου ν στο σημείο x.

Παρατήρηση 3.3.4

Γενικά για μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών Lie θα συμβολίζουμε το παραπάνω σύστημα ως εξής:

$$\Psi_\varepsilon(x) = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x)$$

3.3.5 Θεώρημα

Έστω ν ένα διανυσματικό πεδίο. Οι λύσεις του συστήματος του θεωρήματος 3.3.3 παράγουν μία τοπική μονοπαραμετρική ομάδα Lie στην οποία το διανυσματικό πεδίο ν είναι εφαπτόμενο.

Παρατήρηση 3.3.5.1

Μπορούμε να φανταστούμε μία μονοπαραμετρική ομάδα Lie σε σχέση με τις συντεταγμένες της ως εξής:

$$(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, ..., \tilde{x_m}) = \tilde{x} = \Psi_\varepsilon(x) = (X_\varepsilon^1(x), X_\varepsilon^2(x), ..., X_\varepsilon^m(x)),$$

όπου για κάθε $i = 1, 2, ..., m$, οι X_ε^i είναι λείες απεικονίσεις.

Παρατήρηση 3.3.5.2

Αν υποθέσουμε ότι η μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie εφοδιάζεται με μία κανονική παράμετρο και αν επεκτείνουμε τις λείες απεικονίσεις X_ε^i σε σειρές *Taylor* σε μία περιοχή του $e = 0$, τότε έχουμε τον απειροστό μετασχηματισμό της ομάδας G:

$$\tilde{x_i} = x_i + \varepsilon\xi^i(x) + O(\varepsilon^2), \quad \text{με } i = 1, 2, ..., m \tag{3.1}$$

$$\text{όπου:} \quad \left.\frac{dX_\varepsilon^i(x)}{dX_\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \xi^i(x) \tag{3.2}$$

Παρατήρηση 3.3.5.3

Έστω G μία ομάδα Lie. Γεωμετρικά ο απειροστός μετασχηματισμός της G ορίζει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο x στην G-τροχιά ως εξής:

$$\xi(x) = (\xi^1(x), \xi^2(x), ..., \xi^m(x))$$

Η τροχιά της δράσης μίας μονοπαραμετρικής ομάδας είναι οι μεγιστικές ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίο ν. Θα ονομάζουμε το ξ **εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της ομάδας** G, το οποίο γράφεται συχνά ως προς τις συντεταγμένες του ως εξής:

$$\nu = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

3.3.6 Θεώρημα

Έστω $\tilde{x} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών και ν ένα διανυσματικό πεδίο με $\nu|_x = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x_m}$. Τότε $\tilde{x} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \Psi_\varepsilon(x) \\
&= \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x) \\
&= x + \varepsilon \nu x + \frac{\varepsilon^2}{2}\nu x + ... \\
&= (\,1 + \varepsilon \nu x + \frac{\varepsilon^2}{2} + ...)\, x \\
&= \sum_{k=0^\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \upsilon^k x
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.3.6.1

Για κάθε ε η απεικόνιση $\exp(\varepsilon \mathbf{v})(x) : M \to M$ ορίζει έναν μετασχηματισμό στο M. Για διαφορετικά ε προκύπτουν διαφορετικοί μετασχηματισμοί $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$. Το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών ονομάζεται **οικογένεια μονοπαραμετρικών μετασχηματισμών**.

Παρατήρηση 3.3.6.2

Για μία διανυσματική ροή έχουμε ότι διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε ορίζονται διαφορετικοί μετασχηματισμοί $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$. Το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών ονομάζεται **μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών**.

Παρατήρηση 3.3.6.3

Οι μοναδικότητα των λύσεων των εξισώσεων του Lie (όπως ορίζονται στο Θεώρημα 3.3.4) μας εξασφαλίζει ότι η ροή που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο ν συμπίπτει με την τοπική δράση της $G = \mathbb{R}$ στο M. Αναφερόμαστε συνήθως στο μετασχηματισμό $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ ως την εκθετικοποίηση του διανυσματικού πεδίου ν και συμβολίζεται με:

$$\tilde{x} = \exp(\varepsilon\mathbf{v})(x) = \Psi_\varepsilon(x)$$

Παρατήρηση 3.3.6.4

Συνοψίζοντας για την σχέση μεταξύ ροών διανυσματικών πεδίων και μονοπαραμετρικών τοπικών ομάδων Lie μπορούμε να πούμε ότι το διανυσματικό πεδίο ν είναι ο απειροστός γεννήτορας του μετασχηματισμού και οι τροχιές της μονοπαραμετρικής ομάδας δράσης είναι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου ν. Αν $\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x)$ είναι μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών επί μίας πολλαπλότητας M, τότε ο απειροστός γεννήτοράς του προκύπτει από τον υποβιβασμό της εξίσωσης:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(x;\varepsilon) = v|_{\Psi(x;\varepsilon)}$$

για $\varepsilon = 0$ που διαμορφώνεται ως εξής:

$$v|_x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\mathbf{v})(x)$$

Παρατήρηση 3.3.6.5

Υπάρχουν δύο τρόποι να βρίσκουμε με ακρίβεια μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών:

i) Μπορούμε να εκφράζουμε την ομάδα με όρους της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=0^{\infty}} \frac{\varepsilon^k}{k!} v^k x$$

που αναπτύσσεται από τον απειροστό γεννήτορα.

ii) Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών αναδιατυπώνοντας τη σχέση

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(x;\varepsilon) = v|_{\Psi(x;\varepsilon)}$$

ως εξής:

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\exp c(\varepsilon \mathbf{v})x] = v|_{\exp(\varepsilon \mathbf{v})x}$$

Και λύνουμε την παραπάνω σχέση για $\varepsilon = 0$.

3.3.7 Ορισμός

Μία αλλαγή συντεταγμένων $y = \psi(x)$ ορίζει ένα **σύνολο κανονικών συντεταγμένων** για τη μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie:

$$\tilde{x} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x)$$

αν η ομάδα με όρους τέτοιες συντεταγμένες γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y_i} = y_i, & \text{όπου } i = 1, 2, ..., n-1 \\ \tilde{y_n} = y_n + \varepsilon & \end{array} \right\}$$

3.3.8 Θεώρημα

Για κάθε τοπική ομάδα μετασχηματισμών Lie υπάρχει ένα σύνολο κανονικών συντεταγμένων τέτοιο ώστε οι μετασχηματισμοί:

$$\tilde{x} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x)$$

είναι ισοδύναμοι με:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y_i} = y_i, & \text{όπου } i = 1, 2, ..., n-1 \\ \tilde{y_n} = y_n + \varepsilon & \end{array} \right\}$$

3.3.9 Πρόταση

Έστω ν ένα διανυσματικό πεδίο τέτοιο ώστε να μην ¨αφανίζεται' στο σημείο $x_0 \in M$. Υπό αυτήν την προϋπόθεση, υπάρχει χάρτης τοπικών συντεταγμένων στο x_0, έστω $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, τέτοιο ώστε, σε όρους των συντεταγμένων του, το διανυσματικό πεδίο ν μπορεί να γραφεί ως:

$$v = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Παρατήρηση 3.3.9

Είναι κρίσιμο να κατανοήσουμε τη διαφορά μεταξύ των κανονικών παραμέτρων και των κανονικών συντεταγμένων.

- Τόσο οι κανονικές παράμετροι όσο και οι κανονικές συντεταγμένες προκύπτουν από μία αλλαγή χάρτη συντεταγμένων.
- Οι κανονικές παράμετροι είναι μία αλλαγή των συντεταγμένων των παραμέτρων ε ώστε η πράξη να είναι η πρόσθεση. Επιπλέον, είναι απαραίτητες αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε τοπική ομάδα Lie ως ροή ενός διανυσματικού πεδίου.
- Οι κανονικές συντεταγμένες είναι μία αλλαγή χαρτών συντεταγμένων σε μία πολλαπλότητα M. Αποτελούν μία βασική μέθοδο επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων με γνωστές συμμετρίες.

3.4 Ομάδα Μετασχηματισμών Lie για Μ.Δ.Ε.

Οι συμμετρίες Lie μίας Μ.Δ.Ε. με φυσικό τρόπο ορίζουν μία ομάδα. Όπως έχου δει, μία τέτοια ομάδα θα ονομάζεται ομάδα Lie και είναι αντιστρέψιμοι σημειακοί μετασχηματισμοί τόσο των εξαρτημένων όσο και των ανεξάρτητων μεταβλητών της Μ.Δ.Ε.. Για να μπορέσουμε στην πράξη να χρησιμοποιήσουμε την ομάδα συμμετρίας θα πρέπει πρώτα να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης.

Αρχικά, η σκέψη ήταν να αλλάξουμε όλες τις μεταβλητές έτσι ώστε να ικανοποιούν την αρχική εξίσωση. Αυτή η διαδικασία αποτέλεσε την πρώτη μέθοδο, όμως κατέληγε σε πολύπλοκες μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και έτσι δεν εξυπηρετούσε τη βασική μας επιδίωξη: την απλοποίηση, δηλαδή, της λύσης τους. Ο Sophus Lie απέδειξε πως μία τέτοια προσέγγιση δεν είναι αναγκαία. Αντ' αυτού κατάφερε να αναπτύξει μία επαρκή μέθοδο χρησιμοποιώντας την απειροστή μοντελοποίηση του προβλήματος, απλοποιώντας την με αυτόν τον τρόπο στη λύση ενός γραμμικού συστήματος Μ.Δ.Ε.. Η λύση αυτών των καθορισμένων εξισώσεων αποτελεί τον μετασχηματισμό συμμετρίας.
Πρώτα θα παρουσιάσουμε τη λύση του συστήματος για αλγεβρικές εξισώσεις και στη συνέχεια για την πιο περίπλοκη περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων. Θα συμβολίζουμε τη γενική περίπτωση Μ.Δ.Ε. με:

$$F(x, \{D^a\}_{|a|\leq m}) = \sum_{|a|\leq m} a_a(x) D^a,$$

όπου:

- $x \in \mathbb{R}^N$
- $a = (a_1, a_2, ..., a_N)$, με $a_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall i = 1, 2, ..., N$
- $|a| = a_1 + a_2 + ... + a_N$ το μήκος του α
- $D^a = \partial_{x_1}^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} ... \partial_{x_N}^{a_N}$

Για την απλοποίηση της παραπάνω μορφής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$F = (x, u^{(m)}),$$

όπου $u^{(m)}$ συμβολίζει την ανεξάρτητη μεταβλητή και μέχρι τάξης m παράγωγά της.

Σε αυτήν την ενότητα θα θεωρούμε ότι οι πολλαπλότητες M έχουν διάσταση N.

3.4.1 Ορισμός

Έστω M μία πολλαπλότητα και G μία ομάδα που δρα πάνω στην M. Τότε θα λέμε ότι κάθε υποσύνολο του M, έστω S, με την ιδιότητα να μένει αμετάβλητο από τους μετασχηματισμού της ομάδας, δηλαδή για $x \in S$ και $\varepsilon \in G$:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x) \in S,$$

θα ονομάζεται G-**αναλλοίωτο**.

Παρατήρηση 3.4.1.1

Οι σημαντικότερες κλάσεις αναλλοίωτων υποσυνόλων είναι αυτές που ορίζονται από την ¨εξαφάνιση' μίας ή περισσότερων συναρτήσεων.

Παρατήρηση 3.4.1.2

Μία αναλλοίωτη της ομάδας μετασχηματισμών θα είναι μία συνάρτηση πραγματικών μεταβλητών που παραμένει αμετάβλητη υπό τους μετασχηματισμούς της ομάδας.

Παρατήρηση 3.4.1.3

Η εύρεση ενός ολοκληρωμένου συνόλου αναλλοίωτων στην πράξη της ομάδας είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα για τη μελέτη των ισοδύναμων και κανονικών μορφών. Συνήθως, οι τροχιές και κατ΄ προέκταση οι κανονικές μορφές για την πράξη της ομάδας χαρακτηρίζονται απόλυτα από αναλλοίωτες.

3.4.2 Ορισμός

Έστω M μία πολλαπλότητα και G μία τοπική μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών που δρα στη M. Θα ονομάζουμε ένα υποσύνολο $S \in M$ G-**αναλλοίωτο** και την ομάδα G **ομάδα συμμετρίας** αν για κάθε $x \in S$ και $\varepsilon \in G$ ισχύει ότι:

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})(x) \in S.$$

3.4.3 Ορισμός

Έστω M μία πολλαπλότητα και G μία ομάδα Lie που δρα στην M. Τότε μία **αναλλοίωτη** θα είναι μία πραγματική συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$, με:

$$f(\tilde{x}) = f(\exp(\varepsilon \mathbf{v})(x)) = f(x), \quad \forall \varepsilon \in G.$$

3.4.4 Πρόταση

Έστω M μία πολλαπλότητα και $f : M \to \mathbb{R}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Η f αποτελεί μία G-αναλλοίωτη συνάρτηση

ii) Η f αποτελεί σταθερά στην τροχιά της ομάδας G

iii) Όλα τα (επίπεδα) σύνολα της μορφής $\left\{_{f(x)=c\}}\right\}$ είναι G-αναλλοίωτα υποσύνολα της M.

3.4.5 Θεώρημα

Έστω M μία m-διάστατη πολλαπλότητα και G μία ομάδα Lie που δρα στην M με s-διάστατες τροχιές. Τότε για κάθε $x \in M$ υπάρχουν $m - s$ το πλήθος αναλλοίωτες, έστω $f^1, f^2, ..., f^{m-s}$, που ορίζονται σε μία περιοχή, έστω U, του x με την ιδιότητα κάθε αναλλοίωτη f να γράφεται σαν συνάρτηση των θεμελιωδών αναλλοίωτων, με άλλα λόγια:

$$f = H(f^1, f^2, ..., f^{m-s})$$

Παρατήρηση 3.4.5.1

Δύο σημεία $x, y \in G$ ανήκουν στην ίδια G-τροχιά αν και μόνο αν:

$$f^i(x) = f^i(y), \quad \forall \quad i = 1, 2, ..., m - s,$$

δηλαδή αν οι αναλλοίωτες για τα x και y παίρνουν για κάθε i τις ίδιες τιμές.

Παρατήρηση 3.4.5.2

Το Θεώρημα 3.4.5 μας δίνει μία επαρκή απάντηση στο ερώτημα της εύρεσης τοπικών αναλλοίωτων στη δράση της ομάδας.

3.4.6 Πρόταση

Έστω M μία πολλαπλότητα και G μία ομάδα μετασχηματισμών Lie που δρα στην M, με απειροστό γεννήτορα ν. Τότε η συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ θα είναι αναλλοίωτη υπό την G αν και μόνο αν για κάθε $x \in M$ και κάθε απειροστό γεννήτορα $\nu \in \}$ ισχύει ότι:

$$\mathbf{v}[f] = 0.$$

Παρατήρηση 3.4.6

Επομένως για μία μονοπαραμετρική ομάδα με απειροστό γεννήτορα:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

οι αναλλοίωτες $u = f(x)$ θα πρέπει να ικανοποιούν την ομογενή Μ.Δ.Ε.:

$$\sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$$

Για να βρούμε της λύσεις της παραπάνω Μ.Δ.Ε. θα χρησιμοποιήσουμε της μέθοδο των χαρακτηριστικών, δηλαδή θα αντικαταστήσουμε τη Μ.Δ.Ε. με

Σ.Δ.Ε. που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{dx_1}{d\xi^1(x)} = \frac{dx_2}{d\xi^2(x)} = ... = \frac{dx_N}{d\xi^N(x)}$$

Μπορούμε να γράφουμε τη γενική λύση στη μορφή:

$$f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \ldots, f_N(x) = c_N,$$

όπου c_i, είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_N$ που προκύπτουν αποτελούν ένα πλήρες σύνολο συναρτησιακά ανεξάρτητων αναλλοίωτων της μονοπαραμετρικής ομάδας που παράγεται από το $\mathbf{v}$.

Μπορούμε αυτό τη διαδικασία να την επεκτείνουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής:

$$F_v = 0, \quad v = 1, 2, ..., l$$

όπου οι απεικονίσεις F είναι λείες και ορίζονται στο σημείο x σε κάποια πολλαπλότητα. Συνεπώς μία λύση είναι ένα σημείο $x \in M$ για το οποίο ισχύει ότι $F_v(x) = 0, \quad \forall v = 1, 2, ..., l$. Το σύνολο των λύσεων συμβολίζεται ως εξής:

$$\mathcal{S}_F = \{x \in M \quad | \quad F_v(x) = 0, \quad v = 1, 2, ..., l\} \subset M$$

3.4.7 Ορισμός

Ονομάζουμε **συμμετρία** ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής $F_v(x) = 0, \quad \forall v = 1, 2, ..., l$, ένα μετασχηματισμό $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ που απεικονίζει κάθε λύση του συστήματος σε μία άλλη, δηλαδή:

$$\exp(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_F$$

Παρατήρηση 3.4.7.1

Έτσι μία ομάδα G θα ονομάζεται **ομάδα συμμετρίας** του συστήματος αν και μόνο αν η συλλογή $\mathfrak{S}_F$ αποτελεί ένα G-αναλλοίωτο υποσύνολο του M.

Παρατήρηση 3.4.7.2

Η ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος εξισώσεων απεικονίζει μία λύση του συστήματος σε κάποια άλλη. Πιο αναλυτικά, αν κάποιο $x \in M$ αποτελεί λύση του συστήματος, τότε το $\tilde{x} = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x)$ είναι επίσης λύση. Με άλλα λόγια αν ξέρουμε την ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος εξισώσεων και έχουμε κάποιες λύσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούριες.

Παρατήρηση 3.4.7.3

Στη ουσία η θεωρία ομάδων Lie παρέχει τη δυνατότητα μελέτης αξιοποιώντας μόνο τον απειροστό γεννήτορα της δράσης της ομάδας. Αυτό είναι και το κομβικό σημείο στην εύρεση ομάδων συμμετρίας σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

3.4.8 Πρόταση

Έστω M μία πολλαπλότητα, G μία ομάδα που δρα στο M και $F : M \to \mathbb{R}^l$ μία λεία απεικόνιση. Η F θα είναι G-αναλλοίωτη απεικόνιση αν και μόνο αν κάθε επίπεδο σύνολο $\{F(x) = c\}$, όπου $c \in \mathbb{R}^l$, είναι G-αναλλοίωτο υποσύνολο της πολλαπλότητας M.

3.4.9 Θεώρημα

Έστω M μία N-διάστατη πολλαπλότητα και G μία ομάδα μετασχηματισμών Lie που δρα στην M. Έστω μία απεικόνιση $F : M \to \mathbb{R}^l$, η οποία ορίζει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$F_v(x) = 0, \, \forall v = 1, 2, ..., l$$

υποθέτοντας ότι το σύστημα έχει μεγιστική τάξη τέτοια ώστε ο Ιακωβιανός πίνακας είναι τάξης l για κάθε σημείο $x \in M$ που αποτελεί λύση του. Τότε η ομάδα G είναι η ομάδα συμμετρίας του συστήματος αν και μόνο αν

$$\mathbf{v}[F_v(x)] = 0, \forall v = 1, 2, ..., l \text{ όταν } F(x) = 0$$

για κάθε απειροστό γεννήτορα $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$.

3.5 Ομάδες και Διαφορικές Εξισώσεις

Σε αυτήν την ενότητα επιχειρούμε να αποσαφηνίσουμε την έννοιά της ομάδας συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Για λόγους απλότητας, θα αποφύγουμε την περίπτωση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων με q εξαρτημένες μεταβλητές και αντ΄ αυτού θα μελετήσουμε την απλούστερη περίπτωση της μία διαφορικής εξίσωσης με N ανεξάρτητες μεταβλητές, τις οποίες θα συμβολίζουμε με $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ και μπορούμε να δούμε ως συντεταγμένες στον Ευκλείδειο χώρο $X \approx \mathbb{R}^N$ και μία εξαρτημένη μεταβλητή την οποία θα συμβολίζουμε με u και μπορούμε να δούμε ως συντεταγμένη του χώρου $U = \mathbb{R}$. Θα αναφερθούμε στον Olver [Ολ93] για τη γενική περίπτωση των q εξαρτημένων μεταβλητών. Τότε ο ολικός χώρος θα είναι ο Ευκλείδειος χώρος $E = X \times U \approx \mathbb{R}^{N+1}$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι οι ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές. Οι συμμετρίες στις οποίες θα εστιάσουμε είναι ισομορφισμοί μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων σε ένα χώρο ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών. Συμβολίζουμε:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, y) = (X_\varepsilon(x, u), U_\varepsilon(x, u)),$$

όπου οι X_ε, U_ε είναι λείες απεικονίσεις.

Οι παραπάνω απεικονίσεις συχνά αναφέρονται ως *σημειακοί μετασχηματισμοί* επειδή δρουν σημειακά στον ολικό χώρο E. Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως είναι πιο χρήσιμο να καταφεύγουμε σε ειδικές κατηγορίες μετασχηματισμών. Για παράδειγμα, αν δούμε τους μετασχηματισμούς βάσης, θα διαπιστώσουμε ότι επιτρέπεται να δρουν μόνο στις ανεξάρτητες μεταβλητές και έτσι να έχουν τη μορφή:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, y) = (X_\varepsilon(x), u)$$

Αν υποθέσουμε ότι η ομάδα είναι συνεκτική, τότε η δράση της ομάδας μπορεί να προσδιοριστεί από αυτή των *απειροστών γεννητόρων* της. Τότε, γενικά ένα διανυσματικό πεδίο:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u) d\partial_{x_i} + \varphi(x, u)\partial u$$

σε ένα χώρο εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών παράγει μία ροή $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$, η οποία αποτελεί τοπική μονοπαραμετρική ομάδα σημειακών μετασχηματισμών στο χώρο E.

Γενικότερα, η ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων μπορεί να οριστεί είτε σε σχέση με τις λύσεις του συστήματος είτε με το πλαίσιό του.

Σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό η ομάδα συμμετρίας μίας διαφορικής εξίσωσης ως ομάδα μετασχηματισμών απεικονίζει κάθε λύση του συστήματος σε κάποια άλλη. Αυτός ο ορισμός όμως, ασχολείται με την ολότητα των λύσεων, αλλά δεν έχει δίνει κάποια πρακτική λύση στο πρόβλημα της εύρεσης όλων των συμμετριών μιας εξίσωσης.

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το δεύτερο ορισμό η ομάδα συμμετρίας μίας διαφορικής εξίσωσης είναι μία ομάδα μετασχηματισμών της οποίας η προέκταση στα παράγωγα που περιέχει η διαφορική εξίσωση, αφήνει αναλλοίωτο το πλαίσιο της διαφορικής εξίσωσης. Για αυτόν τον ορισμό δεν προϋποτίθεται η γνώση κάποιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι είναι κρίσιμη για την απειροστή μορφοποίηση του αναλλοίωτου της διαφορικής εξίσωσης αλλά και την εύρεση μίας μεθόδου κατασκευαστικού χαρακτήρα για τον υπολογισμό των συμμετριών, η λύση των αποκαλούμενων **προσδιοριστικών εξισώσεων**.

3.5.1 Ορισμός

Ονομάζουμε **ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων** την μέγιστη τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές του συστήματος, έχοντας, παράλληλα, την ιδιότητα να απεικονίζει κάθε λύση του συστήματος σε μία άλλη.

3.5.2 Ορισμός

Μία **σημειακή συμμετρία Lie** χαρακτηρίζεται από έναν απειροστό γεννήτορα, ο οποίος αφήνει τη δεδομένη διαφορική εξίσωση αναλλοίωτη υπό το μετασχηματισμό όλων των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών.

Πρώτα από όλα, θα εξηγήσουμε πως ένας μετασχηματισμός $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ σε μία ομάδα Lie δρα σε μία συνάρτηση $u = f(x)$. Ως λύση μίας διαφορικής εξίσωσης θα θεωρούμε μία λεία απεικόνιση $u = f(x)$. Συμβολίζουμε το γράφημα μίας συνάρτησης f που ορίζει μία N-διάστατη υποπολλαπλότητα του ολικού χώρου $E = X \times U$ ως εξής:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U$$

όπου με Ω συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού της f.

Ο μετασχηματισμός της Γ_f ως προς την $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ λειτουργεί ως εξής:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})(\Gamma_f) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) = \exp(\varepsilon\mathbf{v})(x, y) : (x, y) \in \Gamma_f\}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\exp(\varepsilon\mathbf{v})(\Gamma_f)$, δεν είναι απαραίτητα ότι αναπαριστά το γράφημα κάποιας καινούριας συνάρτησης, έστω $\tilde{f}(\tilde{x})$. Όμως, μπορούμε να πούμε ότι από τη στιγμή που η G δρα με λείο τρόπο και η ταυτοτική απεικόνιση αφήνει αμετάβλητο το σύνολο Γ_f, σε μία περιοχή γύρω από την ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή γύρω από το ουδέτερο στοιχείο, υπάρχει κάποια λεία συνάρτηση $u = \tilde{f}(\tilde{x})$ τέτοια ο μετασχηματισμός $\exp(\varepsilon\mathbf{v})(\Gamma_f) = \Gamma_{\tilde{f}}$. Παρακάτω θα δούμε την διαδικασία που θα ακολουθήσουμε αν θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που προκύπτει από το μετασχηματισμό $\tilde{f} = \exp(\varepsilon\mathbf{v})(f)$.

Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός δίνεται σε συντεταγμένες με τον παρακάτω τρόπο:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \Psi_\varepsilon(x, u) = (X_\varepsilon(x, u), U_\varepsilon(x, u))$$

όπου οι $X_\varepsilon, U_\varepsilon$ είναι λείες απεικονίσεις.

Το γράφημα που προκύπτει από αυτόν το μετασχηματισμό με βάση τις συντεταγμένες είναι το σύνολο:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x} = X_\varepsilon(x, f(x)) = X_\varepsilon(1 \times f)(x) \\ \tilde{u} = U_\varepsilon(x, f(x)) = U_\varepsilon(1 \times f)(x) \end{Bmatrix}$$

Για να καταφέρουμε να βρούμε το $\tilde{f}$ θα πρέπει να απαλείψουμε το x του προηγούμενου συστήματος. Γνωρίζουμε ότι για κάποιο ε που βρίσκεται αρκετά κοντά στο ταυτικό στοιχείο, ο Ιακωβιανός πίνακας δεν είναι ο μοναδιαίος και συνεπώς μπορούμε να αντιστρέψουμε κάθε στοιχείο παίρνοντας:

$$x = (X_\varepsilon(1 \times f))^{-1}(\tilde{x})$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι:

$$exp(\varepsilon\mathbf{v})(f) = (U_\varepsilon(1 \times f))(X_\varepsilon(1 \times f))^{-1} \tag{3.3}$$

Όμως ο υπολογισμός του παραπάνω είναι κάθε άλλο παρά εύκολος, ενώ παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός δρα αποκλειστικά επί των ανεξάρτητων μεταβλητών ο προηγούμενος τύπος απλοποιείται σημαντικά. Για την ακρίβεια ο μετασχηματισμός σε αυτήν την περίπτωση έχει τη μορφή:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, u) = (X_\varepsilon(x, u), u)$$

Έτσι μπορούμε βρούμε το:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(X_\varepsilon^{-1}(\tilde{x})) = f(X_{-\varepsilon}(\tilde{x}))$$

3.5.3 Ορισμός

Θα ονομάζουμε μία συνάρτηση f **αναλλοίωτη** υπό το μετασχηματισμό της ομάδας G αν το γράφημά του Γ_f είναι αναλλοίωτο υποσύνολο.

3.5.4 Ορισμός

Έστω μία διαφορική εξίσωση $F(x, u^{(m)}$. Μία ομάδα συμμετρίας της Μ.Δ.Ε. $F(x, u^{(m)}$ είναι μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών G που δρα σε ένα ανοικτό σύνολο M του χώρου των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών της Μ.Δ.Ε. με την ιδιότητα ότι όταν η συνάρτηση $u = f(x)$ είναι μία λύση της $F(x, u^{(m)}$ και ο μετασχηματισμός $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ ορίζεται για κάποιο $\varepsilon \in G$, τότε η μετασχηματισμένη συνάρτηση, δηλαδή η $u = \exp(\varepsilon \mathbf{v})(f(x))$, αποτελεί επίσης λύση της Μ.Δ.Ε..

3.6 Ο τύπος της προέκτασης

Σε αυτό το σημείο έχουμε σκοπό να ορίσουμε επαρκώς την έννοια των διαφορικών εξισώσεων με ένα συμπαγές γεωμετρικό αντικείμενο. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού θα πρέπει να ¨επεκτείνουμε' τον βασικό χώρο $X \times U$ που αναπαριστά των χώρο των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών σε ένα χώρο που μπορεί να αναπαραστήσει επιπλέον τα παράγωγα. Για να είμαστε ακριβείς, από τη στιγμή που θέλουμε να μελετήσουμε τις συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε όχι μόνο τον τρόπο δράσης των ομάδων μετασχηματισμών στις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές αλλά και την επίδραση που έχουν στις παραγώγους των εξαρτημένων μεταβλητών. Οι σύγχρονοι γεωμέτρες έχουν τυποποιήσει αυτή τη γεωμετρική κατασκευή μέσω του γενικού ορισμού του *χώρου jet* που σχετίζεται με τον ολικό χώρο των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών. Οι συντεταγμένες του χώρου αυτού θα αναπαριστούν τις παραγώγους των εξαρτημένων μεταβλητών.

Με αυτόν τον τρόπο εισάγουμε τον ολικό χώρο $X \times U^{(m)}$, με $U^{(m)} := U \times U_1 \times ... \times U_m$, όπου με U_n συμβολίζουμε τον χώρο των παραγώγων τάξης n των οποίων οι συντεταγμένες αναπαριστούν τις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές καθώς και τα παράγωγά των εξαρτημένων μεταβλητών με τάξη το πολύ m. Θα ονομάζουμε τον ολικό χώρο $X \times U^{(m)}$ **χώρο jet τάξης m** του υποκείμενου χώρου $X \times U$.

Δεδομένης μίας λείας απεικόνισης $u = f(x)$, όπου $f : X \to U$ υπάρχει μία επαγόμενη συνάρτηση $u^{(m)} = pr^{(m)}f(x)$, την οποία θα ονομάζουμε **m-οστή προέκταση της f**, η οποία ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$u^\alpha = D^\alpha f(x)$$

Έτσι, $pr^{(m)}f$ είναι μία συνάρτηση από το Q στον χώρο $U^{(m)}$ και για κάθε $x \in X$ το $pr^{(m)}f(x)$ είναι ένα διάνυσμα, οι συντεταγμένες του οποίου αναπαριστούν τις τιμές της f και όλες τις παραγώγους της τάξης το πολύ m στο σημείο x.

Για παράδειγμα στην περίπτωση που η διάσταση του χώρου είναι $p = 2$, με $f(x, y)$ έχουμε:

$$pr^{(2)}f(x,y) = (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = \left(f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Έστω G μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα επί ενός ανοικτού υποσυνόλου $M \subset X \times U$. Υπάρχει μία επαγόμενη τοπική δράση της G στον m-οστό χώρο jet $M^{(n)}$ την οποία θα ονομάζουμε **m-οστή προέκταση της** G και συμβολίζουμε με $pr^{(m)}G$. Ορίζουμε αυτήν την προέκταση έτσι ώστε να μετασχηματίζει τις παραγώγους των συναρτήσεων $u = f(x)$ στις αντίστοιχες παραγώγους των μετασχηματισμένων συναρτήσεων $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Πιο αυστηρά, έστω (x_0, u_0^m) ένα σημείο στο $M^{(m)}$. Στην πορεία επιλέγουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $u = f(x)$ που ορίζεται σε μία περιοχή του x_0, της οποίας το γράφημα βρίσκεται στο M και έχει παράγωγα στο x_0 όπως φαίνονται παρακάτω:

$$u_0^{(m)} = pr^{(m)} f(x_0)$$

Έστω $\varepsilon \in G$ και $exp(\varepsilon \mathbf{v})f$ η μετασχηματισμένη συνάρτηση που ορίζεται στην περιοχή:

$$(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = exp(\varepsilon \mathbf{v})(x_0, u_0)$$

Με αυτόν τον τρόπο καθορίζουμε τη δράση της επεκταμένης ομάδας μετασχηματισμών $pr^{(m)}\varepsilon$ στο σημείο $(x_0, u_0^{(m)})$ εκτιμώντας τις παραγώγους της μετασχηματισμένης συνάρτησης $exp(\varepsilon \mathbf{v})f$ στο σημείο $\tilde{x}_0$, δηλαδή:

$$pr^{(m)} exp(\varepsilon \mathbf{v})(x_0, u_0^{(m)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(m)})$$

όπου:

$$\tilde{u}_0 = pr^{(m)}(exp(\varepsilon \mathbf{v})f)(\tilde{x}_0)$$

Έστω η διαφορική εξίσωση $F = (x, u^{(m)}) = 0$ με N ανεξάρτητες μεταβλητές και μία εξαρτημένη. Υποθέτουμε ότι η $F = (x, u^{(m)})$ είναι λεία απεικόνιση από τον χώρο jet, με $F : X \times U^{(m)} \to \mathbb{R}$.

Αυτή η διαφορική εξίσωση ορίζει μία υποκατηγορία του ολικού χώρου jet ως εξής:

$$\mathcal{S}_F = \{(x, u^{(m)}) : F(x, u^{(m)}) = 0\}$$

Επομένως μία λεία λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι μία λεία απεικόνιση, έστω $u = f(x)$ τέτοια ώστε:

$$F(x, pr^{(m)} f(x)) = 0,$$

όπου το x βρίσκεται σε μία περιοχή της f.

Το παραπάνω ισοδυναμεί ουσιαστικά με το αίτημα το γράφημα της m-οστής προέκτασης της f

$$\Gamma_f^{(m)} = \{(x, r^{(m)} f(x))\}$$

να περιέχεται ολοκληρωτικά στην κατηγορία που ορίζει η εξίσωση

$$\Gamma_f^{(m)} \subset \mathcal{S}_F.$$

3.6.1 Ορισμός

Ένας σημειακός μετασχηματισμός, έστω $g : M \to M$, που δρα επί ενός χώρου $M = X \times U$ των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών ονομάζεται **συμμετρία του συστήματος Μ.Δ.Ε.** $F(x, u^{(m)}) = 0$ αν, στην περίπτωση που η $u = f(x)$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης και η μετασχηματισμένη συνάρτηση $\tilde{f} = exp(\varepsilon\mathbf{v})f$ είναι καλά ορισμένη, ισχύει ότι η $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης.

3.6.2 Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι M είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του χώρου $X \times U$ και έστω $F(x, u^{(m)}) = 0$ μία διαφορική εξίσωση που ορίζεται επί του Μ με την αντίστοιχη υποκατηγορία $\mathcal{S}_F \subset M^{(m)}$. Επιπλέον, έστω G μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα επί του M, της οποίας η προέκταση αφήνει αμετάβλητο το σύνολο $\mathcal{S}_F \subset M^{(m)}$ έτσι ώστε όταν το $(x, u^{(m)}) \in \mathcal{S}_F$ έχουμε ότι $pr^{(m)}exp(\varepsilon\mathbf{v})((x, u^{(m)})) \in \mathcal{S}_F$, για κάθε $\varepsilon \in G$ τέτοιο ώστε να ορίζεται. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η G είναι ομάδα συμμετρίας τις διαφορικής εξίσωσης που δίνεται από τον ορισμό 3.5.4.

3.6.3 Ορισμός

Έστω $M \subset X \times U$ ένα ανοικτό σύνολο και v ένα διανυσματικό πεδίο επί του M, με την αντίστοιχη μονοπαραμετρική ομάδα $exp(\varepsilon\mathbf{v})$. Τότε η m-οστή προέκταση του v, η οποία συμβολίζεται με $pr^{(m)}\mathbf{v}$, ορίζεται ως ο **απειροστός γεννήτορας της αντίστοιχης προεκταμένης μονοπαραμετρικής ομάδας** $pr^{(m)}\mathbf{v}[exp(\varepsilon\mathbf{v})]$.

Παρατήρηση 3.6.3.1

Για κάθε $(x, u^{(m)}) \in M^{(m)}$ έχουμε ότι:

$$pr^{(m)}\mathbf{v}\big|_{(x,u^{(m)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} pr^{(m)}[exp(\varepsilon\mathbf{v})](x, u^{(m)}) \tag{3.4}$$

Παρατήρηση 3.6.3.2

Ένα διανυσματικό πεδίο επί του M, θα παρουσιάζεται με τη γενική μορφή:

$$pr^{(m)}\mathbf{v} = \mathbf{v}* = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u^{(m)})\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\alpha|\leq m} \varphi^\alpha(x, u^{(m)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{3.5}$$

όπου για το α ισχύει ότι $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Παρατήρηση 3.6.3.3

Στην περίπτωση που το $\mathbf{v}*$ αποτελεί προέκταση ενός διανυσματικού πεδίου, έστω $pr^{(m)}\mathbf{v}$, όπου:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

θα πρέπει οι συντελεστές της προέκτασης να είναι ίδιοι με τους συντελεστές του $\mathbf{v}$.

Παρατήρηση 3.6.3.4

Προκύπτει φυσικά ότι αν περιορίσουμε την προεκταμένη ομάδα στις μεταβλητές μηδενικής τάξης τότε ταυτίζεται με τη δράση της ομάδας επί του M.

Παρατήρηση 3.6.3.5

Για την προέκταση πρώτης τάξης ισχύει ότι:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u^2)\frac{\partial}{\partial u_x} \tag{3.6}$$

3.6.4 Θεώρημα (Lie)

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$F(x, u^{(m)}) = 0. \tag{3.7}$$

Μία ομάδα μετασχηματισμών G είναι μία ομάδα συμμετρίας μίας μη εκφυλισμένης διαφορικής εξίσωσης της παραπάνω μορφής αν και μόνο αν για κάθε απειροστό γεννήτορα v της G ισχύει:

$$pr^{(m)}\mathbf{v}[F(x, u^{(m)})] = 0, \quad \gamma\iota\alpha \quad F(x, u^{(m)}) = 0. \tag{3.8}$$

Παρατήρηση 3.6.4

Με τον όρο μη εκφυλισμένη διαφορική εξίσωση εννοούμε τη Μ.Δ.Ε. *μεγιστικού βαθμού* και *τοπικά επιλύσιμης* με την έννοια που περιγράφεται στους παρακάτω ορισμούς.

3.6.5 Ορισμός (Προϋπόθεση Μεγιστικής Τάξης)

Έστω μία διαφορική εξίσωση

$$F(x, u^{(m)}) = 0 \tag{3.9}$$

Το σύστημα θα ονομάζεται **μεγιστικού βαθμού** ο διάστασης $1\times(N+N^{(m)})$ *Ιακωβιανός πίνακας* της F:

$$J_F(x, u^{(m)}) = \{..., \frac{\partial F}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial F}{\partial u^\alpha}, ...\}$$

που σέβεται της μεταβλητές τάξης 1 $(x, u^{(m)})$ όταν:

$$F(x, u^{(m)}) = 0. \tag{3.10}$$

3.6.6 Ορισμός (Τοπική Επιλυσιμότητα)

Έστω μία διαφορική εξίσωση

$$F(x, u^{(m)}) = 0.$$

Για κάθε σημείο (x_0, u_0^m) για το οποίο ισχύει:

$$F(x_0, u_0^{(m)}) = 0$$

υπάρχει μία λύση $u = f(x)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$u_0^{(m)} = pr^{(m)} f(x_0)$$

3.6.7 Θεώρημα (Lie)

Έστω η Μ.Δ.Ε. που ορίζεται επί μίας πολλαπλότητας M:

$$F(x, u^{(m)}) = 0.$$

Το σύνολο όλων των απειροστών συμμετριών μίας άλγεβρας Lie διανυσματικών πεδίων επί του M. Αν επιπλέον αυτή η άλγεβρα Lie είναι πεπερασμένης διάστασης τότε η ομάδα συμμετρίας του συστήματος είναι τοπική ομάδα μετασχηματισμών Lie που δρα επί του M.

Παρατήρηση 3.6.7

Οι εξισώσεις του θεωρήματος 3.6.4 είναι γνωστές ως προσδιοριστικές εξισώσεις της ομάδας συμμετρίας της διαφορικής εξίσωσης. Σημειώνεται ότι ικανοποιούνται συγκεκριμένα από τα σημεία $(x, u^{(m)}) \in \mathcal{S}_F$. Αν αντικαταστήσουμε τον τύπο του ορισμού 3.6.3 τότε για τους συντελεστές της προέκτασης $pr^{(m)}\mathbf{v}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι προσδιοριστικές εξισώσεις είναι δημιουργούν ένα γραμμικό σύστημα υπερ-καθορισμένων Μ.Δ.Ε. για του συντελεστές ξ^i και φ του υ. Στα συνήθη παραδείγματα, μπορούμε να πούμε ότι οι προσδιοριστικές εξισώσεις είναι στοιχειώδεις και επιλύσιμες και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε ολόκληρη την ομάδα συμμετρίας της εξίσωσης.

Το θεώρημα 3.6.4 αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο από τη στιγμή που συνδέει την ομάδα συμμετρίας μίας διαφορικής εξίσωσης με το απειροστό κριτήριο για το αν η Μ.Δ.Ε. είναι αναλλοίωτη υπό τον προεκταμένο απειροστό γεννήτορα της ομάδας. Μένει λοιπόν να βρούμε με ακρίβεια έναν τύπο για την προέκταση ενός διανυσματικού πεδίου.

Θα ξεκινήσουμε με μελετώντας μία σχετικά απλή περίπτωση και στη συνέχεια θα επεκταθούμε στη γενική περίπτωση. Όπως έχουμε διαπιστώσει νωρίτερα στην παρούσα εργασία η δράση μίας ομάδας αποκλειστικά επί των ανεξάρτητων μεταβλητών κάνει σημαντικά απλούστερη την εύρεση αντιστρόφου από ότι συμβαίνει στη γενική περίπτωση. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο επί ενός χώρου $M = Q \times U$ ως εξής:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Τότε οι μετασχηματισμοί της ομάδας $exp(\varepsilon \mathbf{v})$ θα είναι της μορφής:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = exp(\varepsilon \mathbf{v})(x, u) = (X_\varepsilon(x), u)$$

όπου το $\tilde{x}_i = X^i_\varepsilon(x)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left. \frac{dX^i_\varepsilon(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi^i \tag{3.11}$$

Θα χρησιμοποιούμε τον συνήθη βιβλιογραφικά συμβολισμό $u_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$.

Όπως φαίνεται από στη σχέση (3.1) έχουμε:

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = f(X^{-1}_\varepsilon(\tilde{x})) = f(X_{-\varepsilon}(\tilde{x}))$$

Επομένως, καταλήγουμε στο:

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_{-\varepsilon}(\tilde{x})) \frac{\partial X^{-\varepsilon}_k}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x})$$

Όμως από τη στιγμή που έχουμε ότι $X_{-\varepsilon}(\tilde{x}) = x$ συμπεραίνουμε ότι ο:

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial X^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_j}(X_\varepsilon(x)) u_k$$

είναι ο ακριβείς τύπος για την προεκταμένη δράση της ομάδας στα παράγωγα πρώτου βαθμού.

Για να βρούμε τον απειροστό γεννήτορα του $pr^{1)}\mathbf{v}$ πρέπει να παραγωγίσουμε σεβόμενοι το ε και να το εκτιμήσουμε στο σημείο $\varepsilon = 0$. Τότε:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{N} \varphi^j(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_j}$$

Επιπλέον από τη σχέση (3.2) έχουμε:

$$\varphi^j(x, u^{(1)}) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial X^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_j}(X_\varepsilon(x))u_k.$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι λείες έτσι ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να εναλλάσσουμε την τάξη της παραγώγισης παίρνοντας την σχέση (3.9) μαζί με το γεγονός ότι $\varepsilon = 0$ και η $Q_0(x) = x$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\left[\frac{dX^k_{-\varepsilon}}{d\varepsilon}\right](X_\varepsilon(x))\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left.\frac{dX^k_{-\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right](x) = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}(x)$$

Επιπλέον έχουμε τη σχέση:

$$\left.\sum_{l} \frac{\partial^2 X^k_{-\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^l}(X^k_{-\varepsilon}(x))\frac{X^l_\varepsilon}{d\varepsilon}(x)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Δηλαδή, το παραπάνω εξαφανίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι, όπως έχουμε προ ειπεί το $Q_0(x) = x$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και έτσι στο $\varepsilon = 0$ όλα το x-παράγωγα δεύτερης τάξης του Q_ε μηδενίζονται.

Έχοντας λάβει υπόψιν τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο βασικός τύπος της προέκτασης για την $pr^{(1)}\mathbf{v}$ προκύπτει από την:

$$\varphi^j(x, u^{(1)}) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}u_k$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι συντελεστές των ξ^i συμπίπτουν με τους συντελεστές του v.

Θα πρέπει τώρα νο δώσουμε τον ορισμό του ολικού παραγώγου. Όμως πριν από αυτό θα εξηγήσουμε για ποιο λόγο δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ¨κλασικό' ορισμό του παραγώγου.

Έστω μία συνάρτηση F που εξαρτάται από ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταβλητών, έστω $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, και μία εξαρτημένη μεταβλητή u μαζί με όλα της τα παράγωγα τάξης το πολύ m, δηλαδή $(u^1, u^2, ..., u^m)$. Για την ακρίβεια μας ενδιαφέρουν τα παράγωγα αυτών των συναρτήσεων ως προς όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αν υποθέσουμε ότι η u εξαρτάται από το x, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν όλα τα παράγωγα της F ως προς τα x και $u^{(m)}$, ουσιαστικά να αντιμετωπίσουμε την u και τα παράγωγά της ως συνάρτηση του x.

3.6.8 Ορισμός

Έστω $F(x, u^{(m)})$ μία λεία συνάρτηση των x, u και των παραγώγων της u τάξης το πολύ m, που ορίζεται επί ενός ανοικτού συνόλου $M^{(m)} \subset XtimesU^{(m)}$. Στο εξής θα υποθέτουμε ότι το m αποτελεί τη μεγιστική τάξη των παραγώγων. Θα ονομάζουμε **ολικό παράγωγο** της F ως προς τα x^i την μοναδική λεία συνάρτηση $D_iF(x, u^{m+1})$ που ορίζεται επί του $M^{(m+1)}$ και εξαρτάται τα παράγωγα της u τάξης το πολύ $m+1$ με την ιδιότητα αν $u = f(x)$ είναι λεία συνάρτηση να ισχύει:

$$D_iF(x, pr^{(m+1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\{F(x, pr^{(m)}f(x))\}$$

Επομένως, η D_iF προκύπτει από την P διαφορίζοντας την F ως προς τα x^i αν αντιμετωπίζουμε όλα τα u και τα παράγωγά τους ως συναρτήσεις του x.

3.6.9 Πρόταση

Δεδομένης μίας συνάρτησης $F(x, u^{(m)})$, το i-οστό παράγωγο της F έχει τη γενική μορφή:

$$D_iF = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}} \tag{3.12}$$

όπου αν $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ έχουμε:

$$u_i^{\alpha} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^{\alpha}}{\partial x^i, \partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} ... \partial x^{\alpha_k}}$$

Παρατήρηση 3.6.9

Το σύνολο της σχέσης (3.10) περιλαμβάνεις όλα το στοιχεία με πολλαπλούς δείκτες τάξης $|\alpha| \leq m$, όπου m είναι τα παράγωγα μέγιστης τάξης που εμφανίζονται στο P.

3.6.10 Θεώρημα

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

που ορίζεται επί ενός ανοικτού συνόλου $M \subset X \times U$. Τότε η m-οστή προέκταση του v είναι το διανυσματικό πεδίο:

$$pr^{(m)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha} \varphi^{\alpha}(x, u^{(m)})\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \tag{3.13}$$

που ορίζεται επί του αντίστοιχου χώρου $M^{(m)} \subset X \times U^{(m)}$ και το δεύτερο άθροισμα επί του α που έχει πολλαπλούς δείκτες και για την τάξη του θέλουμε να ισχύει $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Η παρακάτω σχέση μας δίνει της συναρτήσεις των συντελεστών φ^{α} της προέκτασης $pr^{m)}\mathbf{v}$:

$$\varphi^{\alpha}(x, u^{(m)}) = D_{\alpha}\left(\varphi - \sum_{i=1}^{N}\xi^i u_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\xi^i u_i^{\alpha} \tag{3.14}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ και $u_i^{\alpha}\dfrac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_i}$.

Έτσι αν μας δοθεί ένα απειροστός γεννήτορας της μορφής:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

καλούμαστε να λύσουμε το παρακάτω σύστημα Σ.Δ.Ε.:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\tilde{x}_i}{d\varepsilon} = \xi_i(\tilde{x},\tilde{u}), & \tilde{x}_i(0) = x_i \\ \\ \dfrac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} = \varphi(\tilde{x},\tilde{u}), & \tilde{u}(0) = u \end{array} \right\}$$

3.6.11 Αλγόριθμος του Lie

Αξιοποιώντας όλα τα ¨εργαλεία' που έχουμε παρουσιάσει σε αυτήν την ενότητα μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αλληλουχία βημάτων, που ονομάζεται **αλγόριθμος του Lie** για την εύρεση των συμμετριών μίας Μ.Δ.Ε. m-οστής τάξης, η οποία υποθέτουμε ότι είναι επιλύσιμη και μεγιστικής τάξης. Ο αλγόριθμος αυτός απαρτίζεται από τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Δεδομένης μία Μ.Δ.Ε. τάξης m, έστω $F(x, u^{(m)})$ υπολογίζουμε την προέκταση $pr^{(m)}\mathbf{v}[f(x, u^{(m)})]$.

Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την Μ.Δ.Ε. με την έκφραση του βήματος 1 απαλείφοντας την περιττή πληροφορία θέτοντας $pr^{(m)}\mathbf{v}[F((x, u^{(m)})]\big|_{F(x,u^{(m)})=0}$

Βήμα 3: Εξάγουμε τις προσδιοριστικές εξισώσεις από την προέκταση θέτοντας το συντελεστή των παραγώγων των εξαρτημένων μεταβλητών να είναι ίσος με 0.

Βήμα 4: Τέλος, λύνουμε τις προσδιοριστικές εξισώσεις που προκύπτουν.

Παρατήρηση 3.6.11

Ο αλγόριθμος του Lie θα μας γίνει πολύ περισσότερο κατανοητός μόλις ολοκληρωμένα η μέθοδος εφαρμοστεί στη Εξίσωση της Θερμότητας.

3.7 Αναλλοιότητα της Μ.Δ.Ε.

Έχουμε δει στις προηγούμενες ενότητες πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τις εσωτερικές συμμετρίες που επάγει η δοθείσα διαφορική εξίσωση με έναν συστηματικό τρόπο. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή *απειροστών μετασχηματισμών* στην κατασκευή λύσεων της Μ.Δ.Ε..

Η επιφάνεια των αναλλοίωτων που αντιστοιχούν στην ομάδα Lieτων σημειακών μετασχηματισμών οδηγεί στις αναλλοίωτες λύσεις. Αυτές οι λύσεις βρίσκονται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με λιγότερες, από την αρχική, ανεξάρτητες μεταβλητές.

Αν μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie που επάγεται από τη Μ.Δ.Ε. αφήνει αναλλοίωτα το πεδίο και την οριακή συνθήκη ενός BVP, όπου BVP (Boundary Value Problem) είναι ένα Πρόβλημα Οριακής Τιμής, τότε η λύση του BVP είναι μία αναλλοίωτη λύση και έτσι το δοθέν BVP υποβιβάζεται σε ένα BVP με μία λιγότερη από το αρχικό ανεξάρτητη μεταβλητή.

3.7.1 Υπενθύμιση στην έννοια των αναλλοίωτων

Θυμίζουμε, προσπαθώντας παράλληλα να δώσουμε έναν καλύτερο χαρακτηρισμό, την έννοια των αναλλοίωτων των προηγούμενων ενοτήτων.

Θεωρούμε τη μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie:

$$\tilde{x} = exp(\varepsilon \mathbf{v})(x) \tag{3.15}$$

με απειροστό γεννήτορα:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.16}$$

3.7.1.1 Ορισμός

Μία επιφάνεια $F(x)=0$ είναι μία **αναλλοίωτη επιφάνεια** για μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie (3.13) με απειροστό γεννήτορα (3.14) αν και μόνο αν:

$$F(\tilde{x})=0, \text{ όταν } F(x)=0.$$

3.7.1.2 Ορισμός

Μία καμπύλη $F(x,y)=0$ είναι μία **αναλλοίωτη καμπύλη** για μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie:

$$\left\{\begin{array}{c} \tilde{x}=X_\varepsilon(x,y) \\ \tilde{y}=Y_\varepsilon(x,y) \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

με απειροστό γεννήτορα:

$$\mathbf{v}=\xi^x(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\xi^y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

αν και μόνο αν:

$$F(\tilde{x},\tilde{y})=0, \text{ όταν } F(x,y)=0.$$

3.7.1.3 Ορισμός

Έστω x ένα σημείο. Το x θα ονομάζεται **αναλλοίωτο σημείο** μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie (3.13) αν και μόνο αν ισχύει ότι $\tilde{x}\equiv x$ υπό την (3.13).

3.7.1.4 Θεώρημα

(i) Έστω μία επιφάνεια που γράφεται στη μορφή $F(x)=x_n-f(x_1,x_2,...,x_{n-1})=0$. Τότε αυτή θα είναι αναλλοίωτη επιφάνεια για την (3.13) αν και μόνο αν:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \text{ όταν } F(x) = 0.$$

(ii) Έστω μία καμπύλη που γράφεται στη μορφή $F(x, y) = y - f(x) = 0$. Τότε αυτή θα είναι μία αναλλοίωτη καμπύλη για την (3.15) αν και μόνο αν:

$$\mathbf{v}[F(x, y)] = \xi^y(x, y) - \xi^x(x, y)f'(x) = 0$$

όταν:

$$F(x, y) = y - f(x) = 0,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν:

$$\xi^y(x, y) - \xi^x(x, y)f'(x) = 0$$

Το θεώρημα 3.7.1.4 μας δίνει έναν τρόπο εύρεσης της αναλλοίωτης επιφάνειας μάς δεδομένης ομάδας μετασχηματισμών Lie. Παρακάτω θα δούμε μία εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος.

3.7.1.5 Ορισμός

Μία οικογένεια επιφανειών της μορφής:

$$\omega(x) = c,$$

όπου c σταθερά, είναι μία οικογένεια αναλλοίωτων επιφανειών για την (3.13) αν και μόνο αν:

$$\omega(\tilde{x}) = \tilde{c} \text{ όταν } \omega(x) = c$$

όπου $\tilde{c}$ σταθερά.

3.7.1.6 Ορισμός

Μία οικογένεια καμπυλών της μορφής:

$$\omega(x, y) = c,$$

όπου c σταθερά, είναι μία οικογένεια αναλλοίωτων καμπυλών της (3.15) αν και μόνο αν:

$$\omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{c} \text{ όταν } \omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = c,$$

όπου $\tilde{c}$ σταθερά.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει άμεσα ότι:

$$\tilde{c} = exp(\varepsilon \mathbf{v})^c(c)$$

για κάποια συνάρτηση $exp(\varepsilon \mathbf{v})^c$ του c και ε η παράμετρος της ομάδας.

3.7.1.7 Θεώρημα

(*i*) Μία οικογένεια επιφανειών $\omega(x) = c$, όπου c σταθερά, είναι αναλλοίωτη οικογένεια επιφανειών αν και μόνο αν:

$$\mathbf{v}[\omega] = F_\omega(\omega)$$

για κάποια συνάρτηση $F_\omega(\omega)$ που είναι άπειρα διαφορίσιμη.

(*ii*) Μία οικογένεια επιφανειών $\omega(x, y) = c$, όπου c σταθερά, είναι μία αναλλοίωτη οικογένεια καμπυλών της (3.15) αν και μόνο αν:

$$\mathbf{v}[\omega] = \xi^x(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \xi^y(x, y)\frac{\partial \omega}{\partial y} = F_\omega(\omega)$$

για κάποια συνάρτηση $F_\omega(\omega)$ που είναι άπειρα διαφορίσιμη.

Για να βρούμε την αναλλοίωτη οικογένεια επιφανειών για μία ομάδα μετασχηματισμών Lie μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θέσουμε $F_\omega(\omega) \equiv 1$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν η $\omega(x) = c$ είναι μία αναλλοίωτη οικογένεια επιφανειών τότε και η $F(\omega(x)) = F(c)$, για οποιαδήποτε συνάρτηση F, θα είναι επίσης αναλλοίωτη οικογένεια επιφανειών. Επιπλέον η $\mathbf{v}[F(\omega(x))] = F'(\omega)v(\omega) = F'(\omega)F_\omega(\omega)$, τέτοια ώστε θέτοντας $F'(\omega) = \dfrac{1}{F_\omega(\omega)}$, θα έχουμε $v[F(\omega)] \equiv 1$.

Θεωρούμε σε αυτό το σημείο τη Μ.Δ.Ε. :

$$F(x, u^{(m)}) = 0 \tag{3.18}$$

Ο συμβολισμός είναι ο ίδιος όπως και προηγουμένως.

3.7.1.8 Ορισμός

Η μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x} = X_\varepsilon(x,u) \\ \tilde{u} = U_\varepsilon(x,u) \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

αφήνει την (3.16) αναλλοίωτη αν και μόνο αν η m-οστή προέκταση αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια (3.16).

Η αναλλοιότητα της επιφάνειας (3.16) υπό τη m-οστή επέκταση της (3.17), μας δίνει την πληροφορία ότι η λύση της $u = f(x)$ απεικονίζεται σε κάποια άλλη λύση $u = \varphi(x;\varepsilon)$ της (3.16) υπό τη δράση της ομάδας (3.17).

Κατά συνέπεια η οικογένεια όλων των λύσεων της Μ.Δ.Ε. (3.16) είναι αναλλοίωτη υπό την (3.17) αν και μόνο αν η (3.16) επάγει την (3.17).

Ανακαλούμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα στις *προσδιοριστικές συναρτήσεις* όπως αναφέρονται στα θεωρήματα 3.6.4 και 3.6.7.

3.7.1.9 Ορισμός (Απειροστό κριτήριο για την αναλλοιότητα μίας Μ.Δ.Ε.)

Έστω ο απειροστός γεννήτορας της (3.17):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u^{(m)}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(x,u) \frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.20}$$

και η m-οστή προέκταση του απειροστού γεννήτορα της (3.18):

$$pr^{(m)}[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u^{(m)}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha} \varphi^\alpha(x, y^{(m)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Τότε η (3.17) επάγεται από τη Μ.Δ.Ε. (3.16) αν και μόνο αν:

$$pr^{(m)}\mathbf{v}[F(x,u^{(m)})] = 0 \text{ όταν } F(x,u^{(m)}) = 0.$$

3.7.2 Αναλλοίωτες λύσεις και υποβιβασμός ομοιότητας

Σε αυτό το σημείο, έχοντας υπενθυμίσει κάποιες βασικές έννοιες, θα συζητήσουμε τη συνθήκη αναλλοιότητας μίας Μ.Δ.Ε. με σκοπό να υποβιβάσουμε την εξίσωση αυτή σε Σ.Δ.Ε. ή σε μία Μ.Δ.Ε. με λιγότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε έχει πολλά κοινά στοιχεία, για την ακρίβεια αποτελεί γενίκευση, με τη διαστατική ανάλυση. Για μία μικρή εισαγωγή στο συγκεκριμένο θέμα να αναφερθούμε στο πρώτο κεφάλαιο του Bluman και Kumei [7].

Η διαδικασίας υποβιβασμού παράγει μία αναπαράσταση ομοιότητας , η οποία αποτελεί φυσική απόδοση μίας λύσης ομοιότητας ως μία ροή που της "μοιάζει" είτε σε κάθε χρόνο είτε σε κάθε κλίμακα μήκους, της αρχικής εξίσωσης. Επομένως, ένας υποβιβασμός ομοιότητας μας οδηγεί σε μία αναπαράσταση που έχει κάποιο πλεονέκτημα σε σχέση με την αρχική.

Θεωρούμε και πάλι τη Μ.Δ.Ε. της μορφής (3.16) που επάγει μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie με απειροστό γεννήτορα τον (3.18).

3.7.2.1 Ορισμός

Μία λύση $u = f(x)$ αποτελεί μία αναλλοίωτη λύση της (3.16) που αντιστοιχεί στο (3.18) που επάγεται από την (3.16) αν και μόνο αν:

(i) η $u = f(x)$ είναι μία αναλλοίωτη επιφάνεια της (3.18),

(ii) η $u = f(x)$ επιλύει την (3.16).

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η $u = f(x)$ είναι μία αναλλοίωτη λύση της (3.16) αν και μόνο αν η u ικανοποιεί τα εξής:

(i) $v[u - f(x)] = 0$ όταν $u = f(x)$, δηλαδή:

$$\xi^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi(x,y) \tag{3.21}$$

(ii) $F(x, u^{(m)}) = 0.$

Η εξίσωση (3.19) ονομάζεται συνθήκη αναλλοίωτης επιφάνειας για αμετάβλητες λύσεις.

Μπορούμε να προσδιορίζουμε τις αμετάβλητες λύσεις με τους εξής τρόπους:

Μέθοδος Αναλλοίωτης Μορφής

3.7.2.2 Θεώρημα

Μία μονοπαραμετρική τοπική ομάδα μετασχηματισμών, έστω G, στον $\mathbb{R}^N$ έχει ακριβώς $N-1$ το πλήθος συναρτησιακά ανεξάρτητες αναλλοίωτες. Οποιοδήποτε σύνολο ανεξάρτητων αναλλοίωτων της μορφής:

$$(\psi_1(x) = C_1, \psi_2(x) = C_2, ..., \psi_{N-1}(x) = C_{N-1})$$

ορίζει μία βάση αναλλοίωτων της G. Η βάση αυτή δεν είναι μοναδική. Μία αυθαίρετη αναλλοίωτη, έστω $F(x)$, της G δίνεται από τον τύπο:

$$F = \Phi(\psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_{N-1}(x))$$

Με αυτή τη μέθοδο λύνουμε την πρώτη εξίσωση (3.19) λύνοντας της αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση για την $u = f(x)$:

$$\frac{dx_1}{d\xi^1(x,u)} = \frac{dx_2}{d\xi^2(x,u)} = ... = \frac{dx_N}{d\xi^N(x,u)} = \frac{du}{d\varphi(x,u)}. \tag{3.22}$$

Αν

$$(\psi_1(x,u), \psi_2(x,u), ..., \psi_{N-1}(x,u)), F(x,u)$$

είναι N ανεξάρτητες αναλλοίωτες της (3.20) τότε η λύση $u = f(x)$ δίνεται έμμεσα από την αναλλοίωτη μορφή:

$$F(x,u) = \Phi(\psi_1(x,u), \psi_2(x,u), ..., \psi_{N-1}(x,u)), \tag{3.23}$$

όπου Φ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του $(\psi_1(x,u), \psi_2(x,u), ..., \psi_{N-1}(x,u))$.

Αυτή η μικρότερης τάξης Μ.Δ.Ε. βρίσκεται αν αντικαταστήσουμε την (3.21) στην (3.16). Παρατηρούμε ότι αν $N = 2$ τότε η υποβιβασμένη Μ.Δ.Ε. είναι μία Σ.Δ.Ε..

3.7.2.3 Θεώρημα

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε την αλλαγή συντεταγμένων $(x_1', x_2', ..., x_N')$ για την ομάδα μετασχηματισμών G που ορίζεται από τις:

$$x_1' = \varphi(x),\, x_2' = \psi_1(x),\, x_3' = \psi_2(x)\ ,\ \dots\ ,\ x_N' = \psi_{N-1}(x),$$

όπου φ είναι μία λύση της εξίσωσης:

$$v[\varphi] = 1$$

και $(\psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_N(x))$ είναι μία βάση αναλλοίωτων της ομάδας G, τότε $(x_1', x_2', ..., x_N')$ είναι ένα σύνολο κανονικών συντεταγμένων.

3.7.2.4 Θεώρημα

Κανονικές συντεταγμένες είναι μία αλλαγή συντεταγμένων τέτοια ώστε υπό το σύστημα των νέων συντεταγμένων ο μετασχηματισμός να είναι η ομάδα μετάφρασης.

Παρατήρηση 3.7.2.4

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μονοπαραμετρική ομάδα υπάρχουν κανονικές συντεταγμένες.

3.7.2.5 Ορισμός

Μία **μετάφραση** είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός χωρίς σταθερά σημεία.

Παρατήρηση 3.7.2.5.1

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων έχει πάντοτε την αρχή των αξόνων σαν σταθερό σημείο. Όμως, υπάρχει μία συνήθης μεθοδολογία, που αξιοποιεί ομογενείς συντεταγμένες για την αναπαράσταση μίας μετάφρασης ενός διανυσματικού πεδίου με πολλαπλασιασμό πινάκων ως εξής:

Ας πάρουμε για παράδειγμα ένα 3-διάστατο διάνυσμα, το οποίο γράφουμε χρησιμοποιώντας 4 ομογενείς συντεταγμένες ως $u = (u_x, u_y, u_z, 1)$.

Για να μεταφράσουμε ένα αντικείμενο ως προς το διάνυσμα v, κάθε ομογενές διάνυσμα p, το οποίο έχουμε γράψει σε ομογενείς συντεταγμένες, μπορεί να πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα μετάφρασης, που είναι της μορφής:

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε ο παρακάτω πολλαπλασιασμός θα δώσει το αναμενόμενο αποτέλεσμα:

$$T_v p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & 0 & u_y \\ 0 & 0 & 1 & u_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + u_x \\ p_y + u_y \\ p_z + u_z \\ 1 \end{bmatrix} = p + v$$

Ο αντίστροφος του πίνακα μετάφρασης δίνεται από τον τύπο:

$$T_v^{-1} = T_{-v}$$

Με παρόμοιο τρόπο, το γινόμενο πινάκων μετάφραση προκύπτει ως εξής:

$$T_u T_v = T_{u+v}$$

Επιπλέον, επειδή η πρόσθεση διανυσμάτων είναι προσεταιριστική, θα είναι επίσης προσεταιριστικός και ο πολλαπλασιασμός πινάκων μετάφρασης, σε αντίθεση με τους πίνακες γενικά.

Παρατήρηση 3.7.2.5.2

Στη φυσική για παράδειγμα, η μετάφραση ή αλλιώς η κίνηση μετάφρασης είναι η κίνηση που αλλάζει τη θέση ενός αντικειμένου, σε αντίθεση με την περιστροφή. Σύμφωνα με τον Whittaker:

¨Αν ένα σώμα μετακινείται από μία θέση σε μία άλλη, και αν οι γραμμές που ενώνουν τα αρχικά και τελικά σημεία για κάθε ένα από τα σημεία του σώματος είναι ένα σύνολο από παράλληλες ευθείες γραμμές μήκους l. έτσι ώστε ο προσανατολισμός του σώματος να παραμένει αμετάβλητος, η μετατόπιση ονομάζεται μετάφραση παράλληλη στην κατεύθυνση των γραμμών, ακολουθώντας μία απόσταση l.'

3.7.2.6 Ορισμός

Ένας **αφινικός μετασχηματισμός** είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που συνοδεύεται από μία μετατόπιση. Σε μορφή πινάκων στις 3 διαστάσεις θα είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

Μέθοδος Ευθείας Αντικατάστασης

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν είναι αδύνατο να επιλύσουμε τη συνθήκη αναλλοίωτης επιφάνειας (3.19).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\xi^n(x,u) \neq 0$ και έτσι η (3.19) γίνεται:

$$u_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi^i(x,u)}{\xi^n(x,u)} u_i + \frac{\varphi(x,y)}{\xi^n(x,u)} \tag{3.24}$$

3.7.3 Τυποποίηση της αναλλοιότητας ενός BVP για μία Μ.Δ.Ε.

Η εφαρμογή των απειροστών μετασχηματισμών σε BVP για Μ.Δ.Ε. είναι πολύ πιο περιοριστικό από ότι για τις Σ.Δ.Ε.. Για την ακρίβεια για μία Σ.Δ.Ε. οποιοδήποτε BVP αυτομάτως υποβιβάζεται σε ένα BVP για τη Σ.Δ.Ε. που προκύπτει από τον υποβιβασμό. Αυτό, όμως, γενικά για τις Μ.Δ.Ε. δε συμβαίνει. Στην περίπτωση που έχουμε μία Μ.Δ.Ε. μία αναλλοίωτη λύση που προκύπτει από τον επαγόμενο απειροστό γεννήτορα λύνει ένα BVP αν ο απειροστός γεννήτορας αφήνει όλες τις συνοριακές συνθήκες αναλλοίωτες. Από την άλλη μεριά αν η Μ.Δ.Ε. είναι γραμμική η κατάσταση αυτή είναι λιγότερο περιοριστική.

Θεωρούμε, ως συνήθως, μια Μ.Δ.Ε. της μορφής:

$$f(x, u^{(m)}) = 0 \tag{3.25}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το Ω και συνοριακές συνθήκες:

$$B_J(x, u^{m-1}) = 0 \tag{3.26}$$

που ορίζονται στις συνοριακές επιφάνειες:

$$\omega_J = 0, \quad J = 1, 2, ..., s \tag{3.27}$$

Επιπλέον θα υποθέσουμε ότι το BVP θα έχει μία μοναδική λύση. Θα θεωρήσουμε σε αυτό το σημείο έναν απειροστό γεννήτορα της μορφής:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \varphi(x, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.28}$$

που ορίζει μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie σε έναν x-χώρο, όπως επίσης και σε έναν (x, u)-χώρο.

3.7.3.1 Ορισμός

Ο απειροστός γεννήτορας $\mathbf{v}$ επάγεται από ένα BVP αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$(i) \quad pr^{(m)}\mathbf{v}\left[F(x, u^{(m)})\right] = 0, \quad \text{αν } F(x, u^{(m)}) = 0 \tag{3.29}$$

$$(ii) \quad \mathbf{v}[\omega_J(x)] = 0, \quad \text{αν } F(x, u^{(m)}) = 0 \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad & pr^{(m-1)}\mathbf{v}\left[B_J(x, u^{(m-1)})\right] = 0, \\ & \text{αν } B_J(x, u^{(m-1)}) = 0, \text{ στα } \omega_J(x) = 0,\ J = 1, 2, ..., s \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.7.3.2 Θεώρημα

Έστω ότι το BVP επάγει τον απειροστό γεννήτορα (3.26),

$$(\psi_1(x, u), \psi_2(x, u), ..., \psi_{N-1}(x, u))$$

μία $N-1$-ανεξάρτητη ομάδα αναλλοίωτων της (3.26) που εξαρτάται μόνο από το x και $F(x, u)$ μία ομάδα αναλλοίωτων της (3.26). Τότε το BVP υποβιβάζεται στο:

$$G(X, F^{(m)}) = 0$$

με πεδίο ορισμού το Ω_X σε έναν X-χώρο με συνοριακές συνθήκες:

$$G_J(X, F^{(m-1)}) = 0$$

που ορίζεται στις συνοριακές επιφάνειες:

$$v_J(X) = 0$$

Η συνθήκη (3.28) ουσιαστικά σημαίνει ότι κάθε συνοριακή επιφάνεια $\omega_J(x) = 0$ είναι μία αναλλοίωτη επιφάνεια $v_J(X) = 0$ του παρακάτω απειροστού γεννήτορα:

$$\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

ο οποίος αποτελεί τον περιορισμό του X στον X-χώρο.

Η λύση της (3.23) μαζί με το BVP αποτελεί μία αναλλοίωτη λύση:

$$F = \Phi(\psi_1(x, u), \psi_2(x, u), ..., \psi_{N-1}(x, u))$$

Η αναλλοίωτη λύση $u = f(x)$ που ορίζεται από την (3.23) θα ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{v}[u - f(x)] = 0, \quad αν \quad u = f(x),$$

ή με άλλα λόγια:

$$\xi^i\frac{\partial}{\partial x_i} = \varphi(x, u)$$

3.7.3.3 Θεώρημα

Έστω ότι ο απειροστός γεννήτορας v είναι της μορφής:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + h(x)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Τότε η F θα είναι της μορφής:

$$F = \frac{u}{g(x)},$$

για κάποια γνωστή συνάρτηση $g(x)$ και έτσι μία αναλλοίωτη λύση που προκύπτει από τον απειροστό γεννήτορα v θα έχει τη ¨διαχωρισμένη' μορφή:

$$u = g(x)\Phi(X),$$

για κάποια αυθαίρετη συνάρτηση $\Phi(X)$ του:

$$(\psi_1(x,u), \psi_2(x,u), ..., \psi_{N-1}(x,u))$$

Από την άλλη μεριά, αν η Μ.Δ.Ε. (3.23), και πάλι μαζί με το BVP, επάγει μία r-παραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie με απειροστούς γεννήτορες της μορφής:

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \xi^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} + \varphi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1,2,...,r \tag{3.32}$$

τότε η μοναδική λύση $u = f(x)$ είναι μία αναλλοίωτη λύση που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{v}_i(u - f(x)) = 0, \quad i = 1,2,...,r$$

3.7.3.4 Θεώρημα

Υποθέτω ότι το BVP επάγει μία r-παραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie με απειροστό γεννήτορα:

$$\mathbf{v}_i = \sum_j \xi^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} + h_i(x)u\frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1,2,...,r \tag{3.33}$$

Έστω R η τάξη του παρακάτω πίνακα:

$$T = \begin{bmatrix} \xi^{11} & \xi^{12} & ... & \xi^{1n} \\ \xi^{21} & \xi^{22} & ... & \xi^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^{r1} & \xi^{r2} & ... & \xi^{rn} \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Επιπλέον, έστω $q = n - R$ και $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_q(x)$ ένας πλήρες σύνολο συναρτησιακά ανεξάρτητων αναλλοίωτων της (3.31) ικανοποιούν τη σχέση:

$$\xi^{ij}(x)\frac{\partial Y_l(x)}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, ..., r. \quad l = 1, 2, ..., q$$

Έστω:

$$F = \frac{u}{g(x)}, \tag{3.35}$$

όπου g μία γνωστή συνάρτηση που είναι αναλλοίωτη της (3.31) και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{v}_i[\omega] = 0, \quad i = 1, 2, ..., r$$

Τότε το BVP υποβιβάζεται σε ένα BVP με $q = N - r$ ανεξάρτητες μεταβλητές $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_q)$ και την εξαρτημένη μεταβλητή (3.33). Η λύση του BVP είναι μία αναλλοίωτη λύση της ¨διαχωρισμένης' μορφής:

$$u = g(x)\Phi(X),$$

όπου η συνάρτηση $\Phi(X)$ δεν έχει προσδιοριστεί.

3.8 Κατασκευή απεικόνισης που συσχετίζει διαφορικές εξισώσεις

Στην προηγούμενη ενότητα θεωρήσαμε την κατασκευή της λύσης μίας δεδομένης Μ.Δ.Ε. $F(x, u^{(x)}) = 0$ από άλλες γνωστές λύσεις της Μ.Δ.Ε. ή ως αναλλοίωτες λύσεις.

Σε αυτήν την ενότητα θα εξερευνήσουμε μία διαφορετική προσέγγιση. Για την ακρίβεια θα χρησιμοποιήσουμε τον απειροστό μετασχηματισμό, και πιο συγκεκριμένα την άλγεβρα Lie, για να κατασκευάσουμε ένα μετασχηματισμό που απεικονίζει μία δεδομένη Μ.Δ.Ε. σε κάποια άλλη Δ.Ε., την επιδιωκόμενη Δ.Ε., με την έννοια ότι κάθε λύση δοθείσης Δ.Ε. απεικονίζεται σε μία λύση της επιδιωκόμενης Δ.Ε..

Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ΄1-1΄ απεικονίσεις. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να καθορίσουμε μία ΄1-1΄ αντιστοιχία μεταξύ των απειροστών γεννητόρων της δεδομένης και επιδιωκόμενης Μ.Δ.Ε.. Για μα είμαστε πιο σαφής, είναι απαραίτητο κάθε άλγεβρα τεξτλατινΛιε των απειροστών γεννητόρων της δεδομένης Μ.Δ.Ε. να είναι ισομορφική με μία άλγεβρα Lie των απειροστών γεννητόρων της επιδιωκόμενης Μ.Δ.Ε.. Μία τέτοια απεικόνιση θα είναι αντιστρέψιμη, είναι όμως δυνατό να κατασκευαστεί επίσης μία μη αντιστρέψιμη απεικόνιση.

3.8.1 Απεικόνιση απειροστών γεννητόρων

Θεωρούμε τη Μ.Δ.Ε. της μορφής:

$$F(x, u^{(m)}) = 0, \tag{3.36}$$

με N ανεξάρτητες μεταβλητές $x = (x_1, x_2, ...x_N)$ και μία εξαρτημένη μεταβλητή u. Όπως και προηγουμένως η όλη διαδικασία μπορεί να επεκταθεί στη γενική περίπτωση ενός συστήματος Δ.Ε. με N ανεξάρτητες μεταβλητές και q εξαρτημένες μεταβλητές. Για αυτό το πρόβλημα αναφερόμαστε στους ([7],[5]).

Συμβολισμός

G_x: Η ομάδα όλων των επαγόμενων συνεχών μετασχηματισμών

$\mathfrak{g}_x$: Η άλγεβρα Lie του G_x

H_x: Μία υποομάδα συνεχών μετασχηματισμών $H_x \subset G_x$

$\mathfrak{h}_x$: Η άλγεβρα Lie της H_x, με $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{g}_x$

$exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)}$: Ένας μονοπαραμετρικός μετασχηματισμός $exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)} \in H_x$

$\mathbf{v}$: Ο απειροστός γεννήτορας του $exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{h}_x$ της μορφής:

$$\mathbf{v} = \sum_i \xi_i^x \partial_{x_i} + v^x \partial_u$$

Θεωρούμε την επιδιωκόμενη Μ.Δ.Ε. ως εξής:

$$P(y, u^{(m)}) = 0 \tag{3.37}$$

και πάλι με N ανεξάρτητες μεταβλητές $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ και μία εξαρτημένη μεταβλητή u. Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

G_y: Η ομάδα όλων των επαγόμενων συνεχών μετασχηματισμών

$\mathfrak{g}_y$: Η άλγεβρα Lie του G_y

H_y: Μία υποομάδα συνεχών μετασχηματισμών $H_y \subset G_y$

$\mathfrak{h}_y$: Η άλγεβρα Lie της H_y, με $\mathfrak{h}_y \subset \mathfrak{g}_y$

$exp(\varepsilon\mathbf{w})^{(y)}$: Ένας μονοπαραμετρικός μετασχηματισμός $exp(\varepsilon\mathbf{w})^{(y)} \in H_y$

$\mathbf{w}$: Ο απειροστός γεννήτορας του $exp(\varepsilon\mathbf{w})^{(y)}$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{h}_y$ της μορφής:

$$\mathbf{w} = \sum_i \xi_i^y \partial_{x_i} + v^y \partial_u$$

Έστω μ μία απεικόνιση που μετασχηματίζει κάθε λύση $u = U(x)$ της εξίσωσης (3.34)σε μία λύση $v = V(y)$ της εξίσωσης (3.35). Φυσικά αυτός ο μετασχηματισμός δεν χρειάζεται να υπάρχει εκ των προτέρων, ενώ ακόμα και αν υπάρχει δεν είναι γνωστός. Ο στόχος μας, σε αυτή τη φάση, είναι να προσδιορίσουμε μία μέθοδο που μας επιτρέπει να ανακτούμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό. Θα πρέπει να περιορίσουμε την απεικόνιση μ σε μία συγκεκριμένη απεικόνιση της μορφής:

$$\left\{ \begin{matrix} y = \varphi(x, u, ..., u^{(l)}) \\ u = \psi(x, u, ..., u^{(l)}) \end{matrix} \right\}. \tag{3.38}$$

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_l$ τη κλάση απεικονίσεων της μορφής (3.36) που εξαρτάται το πολύ από το l-οστό παράγωγο της u. Πιο συγκεκριμένα κάθε απεικόνιση $\mu \in \mathcal{M}_m$ επάγει μία δράση όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F(x, u^{(m)}) \arrow[r, "exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)}"] \arrow[d, "\mu"'] & F(\tilde{x}, \tilde{u}^{(m)}) \arrow[d, "\mu"] \\ P(y, v^{(m)}) \arrow[r, "exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(y)}"'] & P(\tilde{y}, \tilde{v}^{(m)}) \end{tikzcd} \tag{3.39}$$

Η μ θα πρέπει να απεικονίζει οποιαδήποτε συμμετρία $exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)}$ σε μία συμμετρία $exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(y)(y)}$ έτσι ώστε η σύνθεση των παρακάτω μετασχηματισμών:

$$\mu \circ exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)}(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(y)}(y) \circ \mu \tag{3.40}$$

παράγει την ίδια δράση επί του (x, u)-χώρου.

Συγκεκριμένα η σχέση:

$$\mu \circ exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(x)} = \mu(\tilde{x}, \tilde{u}) \left(\varphi(\tilde{x}, \tilde{u}, \ldots, \tilde{u}^{(m)}), \psi(\tilde{x}, \tilde{u}, \ldots, \tilde{u}^{(m)})\right) \tag{3.41}$$

με την:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = x + \varepsilon\xi^x(x, u, \ldots, u^{(m)}) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u} = u + \varepsilon v^x(x, u, \ldots, u^{(m)}) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u}^{(j)} = u^{(j)} + \varepsilon v^{x(j)}(x, u, \ldots, u^{(m+j)}) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \ldots, l \end{array} \right\} \tag{3.42}$$

Από τη μία μεριά έχουμε:

$$\begin{array}{rcl} \exp(\varepsilon\mathbf{v})^{(y)}(y) & = & \exp(\varepsilon\mathbf{v})^y(y)(y, v) \\ & = & (\tilde{y}, \tilde{v}) \\ & = & \left(\varphi(\tilde{x}, \tilde{u}, \ldots, \tilde{u}^{(m)}), \psi(\tilde{x}, \tilde{u}, \ldots, \tilde{u}^{(m)})\right) \end{array} \tag{3.43}$$

με:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{y} = y + \varepsilon\xi^y(y, v, \ldots, v^{(m)}) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{v} = v + \varepsilon v^y(x, v, \ldots, v^{(m)}) + O(\varepsilon^2) \end{Bmatrix} \tag{3.44}$$

τέτοια ώστε:

$$\begin{Bmatrix} \xi^y(y, v, \ldots, v^{(m)}) = \xi^v(\varphi, \psi, \ldots, \psi^{(m)}) \\ \mathbf{v}^y(y, v, \ldots, v^{(m)}) = \mathbf{v}^v(\varphi, \psi, \ldots, \psi^{(m)}) \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

με:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi(x, u, \ldots, u^{(l)}) \\ \psi = \psi(x, u, \ldots, u^{(l)}) \\ \psi^{(j)} = \psi^{(j)}(x, u, \ldots, u^{(l+j)}), \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{array} \right\} \tag{3.46}$$

Εξισώνοντας τους όρους $O(\varepsilon^2)$ στις εξισώσεις (3.49) και (3.51),μπορούμε να γράφουμε σε συμπαγή μορφή, τις απαραίτητες συνθήκες που η απεικόνιση μ θα πρέπει να ικανοποιεί:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{(m)}\varphi = \mathbf{w}y \\ \mathbf{v}^{(m)}\psi = \mathbf{w}u \end{Bmatrix} \tag{3.47}$$

Οι συνθήκες (3.45) έχουν ιδιάζοντα ρόλο σε ολόκληρο τον αλγόριθμο που αναπτύσουμε στην παρούσα παράγραφο. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό από την δοθείσα ΜΔΕ ώστε η ζητούμενη ΜΔΕ να υπάρχει, θα πρέπει κάθε απειροστός γεννήτορας $\nu \in \mathfrak{h}_x$ να αντιστοιχεί σε κάποιον απειροστό γεννήτορα $\mathbf{w} \in \mathfrak{h}_y$. Επιπλέον οι συνιστώσες$(\varphi, \psi)$ του μετασχηματισμού μ πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες (3.45). Αυτές οι συνθήκες χρησιμεύουν, κατά κάποιο τρόπο, όπως οι προσδιοριστικές εξισώσεις, δηλαδή χρησιμεύουν στις συμμετρίες μιας δοσμένης ΜΔΕ. Για την ακρίβεια υποβιβάζουν τη φύση των μεταβλητών της απεικόνισης μ. Χωρίς τέτοιου τύπου συνθήκες θα είναι αδύνατο, και εν γένει «ανιαρό», να προσδιορίζουμε εάν θα υπάρχει μια απεικόνιση $\mu \in \mathcal{M}_t$.

3.8.2 Θεωρήματα σχετικά με τις αντιστρέψιμες απεικονίσεις

3.8.2.1 Θεώρημα

Έστω G_i να είναι ομάδες Lie και $\mathfrak{g}_i$ οι αντίστοιχες άλγεβρες Lie, για $i = 1, 2$. Τότε οι $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ θα είναι ισομορφικές αν και μόνο αν οι G_1, G_2 είναι τοπικά αναλυτικά ισομορφικές.

Παρατήρηση 3.8.2.1

Στην ειδική περίπτωση της 1-1 (αντιστρέψιμης) απεικόνισης από τη δοθείσα Μ.Δ.Ε. στη ζητούμενη Μ.Δ.Ε. η κλάση των πιθανών απεικονίσεων $\mathcal{M}_t$ είναι προκαθορισμένη. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που έχουμε μία εξαρτώμενη μεταβλητή, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα, θα έχουμε ότι $l = 1$ δηλαδή $\mu \in \mathcal{M}_t$.

3.8.2.2 Θεώρημα (Backlund 1876)

Θεωρούμε μια Μ.Δ.Ε. με μία εξαρτημένη μεταβλητή u. Τότε μια απεικόνιση μ ορίζει μια αντιστρέψιμη απεικόνιση από τον $x, u, \ldots, u^{(p)}$- χώρο στον $y, v, \ldots, v^{(p)}$-χώρο για κάθε σταθερά p, αν και μόνο αν η μ είναι ένας 1-1 μετασχηματισμός επαφής της μορφής:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & \varphi(x, u, u^{(1)}) \\ v & = & \psi(x, u, u^{(1)}) \\ v^{(1)} & = & \psi^{(1)}(x, u, u^{(1)}). \end{array} \right\} \tag{3.48}$$

Παρατήρηση 3.8.2.2

Αν επιπλέον οι φ και ψ είναι ανεξάρτητες της $u^{(1)}$ τότε ορίζεται ένας σημειακός μετασχηματισμός. Μπορούμε να βρούμε αποτέλεσμα για μετασχηματισμούς περισσοτέρων μεταβλητών όμως δε θα μελετήσουμε αυτήν την περίπτωση σε αυτήν την εργασία. Ωστόσο μπορούμε να ανατρέξουμε στους [7], [5].

3.8.3 Κλασικά αποτελέσματα του Lie

Θα ανακαλέσουμε σε αυτό το σημείο τα κλασικά αποτελέσματα του Lie στην κατηγοριοποίηση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

3.8.3.1 Θεώρημα

Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια γραμμικών παραβολικών εξισώσεων:

$$P(x,t)u_t + Q(x,t)u_x + R(x,t)u_{xx} + S(x,t)u = 0, \quad P \neq 0, \quad R \neq 0. \tag{3.49}$$

Η πρωταρχική άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ της εξίσωσης (3.47) παράγεται από τους γεννήτορες των τετριμμένων συμμετριών, που παρατίθενται παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 & = & u\partial_u \\ \mathbf{v}_\alpha & = & \alpha(x,t)\partial_u \end{array} \right\} \tag{3.50}$$

Έτσι κάθε εξίσωσης της μορφής (3.47) μπορεί να υποβιβαστεί σε μια εξίσωση της μορφής:

$$v_\tau = v_{yy} + Z(y,\tau)v \tag{3.51}$$

από τον ισοδύναμο μετασχηματισμό Lie:

$$\begin{array}{lcll} y & = & \alpha(x,t), & \alpha_x \neq 0 \\ \tau & = & \beta(t), & \beta_t \neq 0 \\ v & = & \gamma(x,t)v & \end{array} \tag{3.52}$$

Η ομάδα των διαστολών που παράγεται από τον τελεστή $\mathbf{v}_1$ αντανακλά την ομοιογένεια της εξίσωσης (3.47), ενώ η άπειρη ομάδα με τον τελεστή $\mathbf{v}_\alpha$ αναπαριστά την γραμμική αρχή της υπέρθεση για την εξίσωση (3.47).

Αν η εξίσωση (3.47) επάγει μία επέκταση της πρωταρχικής άλγεβρας Lie με έναν επιπρόσθετο τελεστή, ονομαστικά θέτουμε τον:

$$\mathbf{v}_2 = \partial_t,$$

τότε η αρχική εξίσωση υποβιβάζεται στη μορφή:

$$v_\tau = v_{yy} + Z(y)v \tag{3.53}$$

Αν επιπλέον η άλγεβρα Lie επάγει μία επέκταση τριών επιπλέον τελεστών, ας πούμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_t \\ \mathbf{v}_2 &= 2\tau\partial_\tau + y\partial_y \\ \mathbf{v}_3 &= \tau^2\partial_\tau + \tau y\partial_y - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\tau\right)v\partial_v \end{aligned} \tag{3.54}$$

τότε η εξίσωση (3.47) υποβιβάζεται στη μορφή:

$$v_t = v_{yy} + \frac{A}{y^2}u \tag{3.55}$$

Από την άλλη μεριά, η $\mathfrak{g}$ επάγει πέντε επιπλέον τελεστές, έστω:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_t \\ \mathbf{v}_2 &= 2\tau\partial_\tau + y\partial_y \\ \mathbf{v}_3 &= \tau^2\partial_\tau + \tau y\partial_y - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\tau\right)v\partial_v \\ \mathbf{v}_4 &= \partial_y \\ \mathbf{v}_5 &= 2\tau\partial_y - yv\partial_v \end{aligned} \tag{3.56}$$

η εξίσωση (3.47) μπορεί να απεικονιστεί στην εξίσωση θερμότητας, δηλαδή:

$$v_t = v_{yy} \tag{3.57}$$

Οι εξισώσεις (3.51), (3.53) και (3.55) μας δίνουν τις κανονικές μορφές όλων των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων δεύτερης τάξης της μορφής (3.47) που επάγουν μη τετριμμένες συμμετρίες.

3.9 Η εξίσωση της θερμότητας

Σε αυτήν την ενότητα θα εφαρμόσουμε τη θεωρία που περιλαμβάνει τη μονοδιάστατη (χωρικά) εξίσωση θερμότητας. Το θεώρημα 3.6.7, σε συνδυασμό με τους τύπους προέκτασης (3.11) και (3.12) δίνουν μία πιο αυστηρή μεθοδολογία για την εύρεση μίας ομάδας συμμετρίας, σε μία δοσμένη μερική διαφορική εξίσωση.

Θα δώσουμε στο σημείο αυτό ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα για το πώς μία ομάδα Lie και ο τοπικός μετασχηματισμός που οδηγεί στην εξίσωση θερμότητας μπορεί να αξιολογηθεί.

Ας δούμε την μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας:

$$u_t = u_{yy} \tag{3.58}$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την εξίσωση θερμότητας με την γραμμική υποκατηγορία $X \times U^{(2)}$ που προσδιορίζεται από την απαλοιφή του $P(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx}$. Έστω ένα διανυσματικό πεδίο στο $X \times U$

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.59}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα ξ, τ, φ με τέτοιο τρόπο ώστε η αντίστοιχη μονοπαραμετρική ομάδα $exp(\varepsilon\mathbf{v})$ να είναι ομάδα συμμετρίας της εξίσωσης θερμότητας.
Από το θεώρημα 3.6.4, χρησιμοποιώντας την δεύτερη προέκταση, έχουμε:

$$\begin{aligned} pr^{(2)}\mathbf{v} &= \mathbf{v} + \varphi^x(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u_t} + \\ &\quad +\varphi^{xx}(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \end{aligned} \tag{3.60}$$

Επομένως αντικαθιστώντας το $pr^{(2)}\mathbf{v}$ στην (3.62) έχουμε:

$$\varphi^t = \varphi^{xx} \tag{3.61}$$

Από την σχέση (3.11) μπορούμε να εκτιμήσουμε τις:

$$\begin{aligned}\varphi^t &= D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}\\ &= D_t\varphi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau\\ &= \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2\end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= D_x^2(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} =\\ &= D_x^2\varphi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau =\\ &= \varphi_x x + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t -\\ &-\xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx}\\ &-\tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}\end{aligned} \tag{3.62}$$

Αντικαθιστώντας της δύο εξισώσεις στην (3.59) και εξισώνοντας $u_t = u_{xx}$ βρίσκουμε την εξίσωση προσδιορισμού της ομάδας συμμετρίας της εξίσωσης θερμότητας ως εξής:

$$u_{xt}u_x(-2\tau_t) \tag{3.63}$$
$$u_{xt}(-2\tau_x) \tag{3.64}$$
$$u_{xx}^2(\tau_u - \tau_x) \tag{3.65}$$
$$u_{xx}u_x^2(-\tau_{uu}) \tag{3.66}$$
$$u_{xx}u_x(\xi_u - 2\tau_{xu} - 2\xi_u) \tag{3.67}$$
$$u_{xx}(\tau_t - \varphi_u - \tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x) \tag{3.68}$$
$$u_{xx}^3(-\xi_{uu}) \tag{3.69}$$
$$u_x^2(-2\xi_{xu} + \varphi_{uu}) \tag{3.70}$$
$$u_x(\xi_t + 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) \tag{3.71}$$
$$1(-\varphi_t + \varphi_{xx}) = 0 \tag{3.72}$$

Πρέπει τώρα εξισώσουμε κάθε μονώνυμο με το 0. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

- Τα (3.61 και 3.62) απαιτούν το τ να εξαρτάται μόνο από το t.

- Επιπλέον στο (3.65) συνεπάγεται ότι το ξ δεν εξαρτάται από το u
- Από την (3.66) συμπεραίνουμε ότι $\xi(x,\tau) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$.
- Επιπρόσθετα από την (3.68) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το φ είναι γραμμικό στο u δηλαδή $\varphi(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t)$ για κάποιες συναρτήσεις α και β.
- Όσων αφορά το (3.69) έχουμε ότι $\xi_t = -2\beta_x$ έτσι ώστε $\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t)$.
- Τέλος από το (3.70) μπορούμε να πούμε ότι τα α και β είναι λύσεις της εξίσωσης θερμότητας δηλαδή $\alpha_t = \alpha_{xx}$, $\beta_t = \beta_{xx}$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau_{ttt} &= 0 \\ \sigma_{tt} &= 0 \\ \rho_t &= \frac{1}{4}\tau_{tt} \end{aligned}$$

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πιο γενική μορφή των συντελεστών των απειροστων συμμετριών της εξίσωσης θερμότητας είναι:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt \\ \tau &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2 \\ \varphi &= (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t) \end{aligned}$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η άλγεβρα Lie των απειροστών συμμετριών της εξίσωσης θερμότητας επεκτείνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_x \\ \mathbf{v}_2 &= \partial_t \\ \mathbf{v}_3 &= x\partial_x + 2t\partial_t \\ \mathbf{v}_4 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u \\ \mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u \\ \mathbf{v}_6 &= u\partial_u \end{aligned}$$

μαζί με την άπειρης διάστασης υποάλγεβρα:

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t,x)\partial_u,$$

όπου α είναι μία αυθαίρετη λύση της εξίσωσης θερμότητας.

Ο πίνακας μετατροπής δίνεται παρακάτω:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	0	0	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_5$	$-\frac{1}{2}\mathbf{v}_6$	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	$2\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3-\frac{1}{2}\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_1$	0
$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_1$	$-2\mathbf{v}_2$	0	$2\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	0
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_3+\frac{1}{2}\mathbf{v}_6$	$-2\mathbf{v}_4$	0	0	0
$\mathbf{v}_5$	$\frac{1}{2}\mathbf{v}_6$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_1$	0	0	0
$\mathbf{v}_6$	0	0	0	0	0	0

Η μονοπαραμετρική ομάδα G_i που παράγεται από το $\mathbf{v}_i$ δίνει εκθετικά τον απειροστό γεννήτορα, δηλαδή τα μετασχηματισμένα σημεία είναι της μορφής $exp(\varepsilon\mathbf{v}_i)(x,t,u)=(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u})$. Εφαρμόζοντας στο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\tilde{x}_i}{d\varepsilon} & = & \xi_i(\tilde{x},\tilde{u}) \quad \tilde{x}_i(0)=x_i \\ \\ \dfrac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} & = & \varphi(\tilde{x},\tilde{u}), \quad \tilde{u}(0)=u \end{array}\right\}$$

βρίσκουμε:

$$\begin{array}{ll} G_1: & (x+\varepsilon,t,u) \\ G_2: & (x,t+\varepsilon,u) \\ G_3: & (x,t,e^{\varepsilon}u) \\ G_4: & (e^{\varepsilon}x,e^{2\varepsilon}t,u) \\ G_5: & (x+2\varepsilon t,t,u\exp(-\varepsilon x-\varepsilon t^2)) \\ G_6: & \left(\dfrac{x}{1-4\varepsilon t},\dfrac{t}{1-4\varepsilon t},u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left(\dfrac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right)\right) \\ G_\alpha: & (x,t,u)+\varepsilon\alpha(x,t)) \end{array}$$

Τώρα από την (3.3) και με βάση το γεγονός ότι κάθε G_i είναι μία συμμετρική ομάδα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν η $u=f(x,t)$ είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας τότε θα αποτελούν επίσης λύσεις και οι συναρτήσεις:

$$\begin{array}{rl} u^{(1)}= & f(x-\varepsilon,t) \\ u^{(2)}= & f(x,t-\varepsilon) \\ u^{(3)}= & e^{\varepsilon}f(x,t) \\ u^{(4)}= & f(e^{-\varepsilon}x,e^{-2\varepsilon}t) \\ u^{(5)}= & e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t}f(x-2\varepsilon t,t) \\ u^{(6)}= & \dfrac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon t}}\exp\left(\dfrac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right)f\left(\dfrac{x}{1+4\varepsilon t},\dfrac{t}{1+4\varepsilon t}\right) \\ u^{(\alpha)}= & f(x,t)+\varepsilon\alpha(x,t)). \end{array}$$

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να βρούμε μια λύση χρησιμοποιώντας την άλγεβρα που μόλις βρήκαμε.

Οι αναλλοίωτες λύσεις $u = f(x,t)$ της εξίσωσης θερμότητας που αντιστοιχούν στο $_6$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$4xt\frac{\partial f}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial f}{\partial t} = -(x^2+2t)f \tag{3.73}$$

Μπορούμε, τώρα, να βρούμε μία λύση λύνοντας τις χαρακτηριστικές εξισώσεις:

$$\frac{dx}{4xt} = \frac{dt}{4t^2} = \frac{du}{-(x^2+2t)} \tag{3.74}$$

Έτσι προκύπτουν δύο αναλλοίωτες:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{x}{t} \\ u &= \sqrt{t}e^{\frac{x^2}{4t}}u. \end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της (3.73) ορίζονται από την αναλλοίωτη μορφή

$$\sqrt{t}e^{\frac{x^2}{4t}}u = \varphi(\frac{x}{t}) \tag{3.75}$$

ή λύνοντας ως προς υ:

$$u = f(x,t) = \frac{1}{t}e^{\frac{-x^2}{4t}}\varphi(\zeta) \tag{3.76}$$

όπου η μεταβλητή ομοιότητας είναι η:

$$\zeta = \frac{x}{t} \tag{3.77}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την εξίσωση (3.76) με την εξίσωση θερμότητας παίρνουμε την:

$$\varphi''(\zeta) = 0 \tag{3.78}$$

και με αυτόν τον τρόπο οι αναλλοίωτες λύσεις από τον $\mathbf{v}_6$ είναι:

$$u = f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}C_1 + C_2\frac{x}{t}\left(\right), \tag{3.79}$$

1.116 όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Έχουμε βρει ήδη ότι μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων $u = f(x, t; \varepsilon)$ που παράγεται από τον $\mathbf{v}_6$ είναι της μορφής:

$$G_6 : \left(\frac{x}{1 - 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 - 4\varepsilon t}, u\sqrt{1 - 4\varepsilon t} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1 - 4\varepsilon t} \right) \right) \tag{3.80}$$

Τότε έχουμε:

$$u = f(x, t; \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\varepsilon t}} \exp\left(\frac{\varepsilon x^2}{1 - 4\varepsilon t} \right) f\left(\frac{x}{1 - \varepsilon t}, \frac{t}{1 - \varepsilon t} \right) \tag{3.81}$$

Θέλουμε, τώρα, να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που έχουμε αναφέρει για την εύρεση θεμελιωδών λύσεων της εξίσωσης θερμότητας μέαω της μεθόδου αναλλοιώτητας για πεπερασένα και άπειρα πεδία.

Θα θεωρήσουμε και πάλι τη μονοδιάσταση εξίσωση της θερμότητας:

$$u_t = u_{xx} \tag{3.82}$$

που έχει πεδίο ορισμού το:

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ a < x < b \end{array} \right\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι προσδιοριστικές εξισώσεις για την 6-παραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie είναι οι παρακάτω:

$$\begin{array}{l} \xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 x t \\ \tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2 \\ \varphi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + a(x, t) \end{array} \tag{3.83}$$

Από την αναλλοιώτητα του $t = 0$ έχουμε ότι $\tau(0) = 0$ και έτσι:

$$c_2 = 0$$

Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι άπειρο, δηλαδή αν $a = -\infty$ και $b = \infty$, δεν μπορεί να υπάρξει επιπλέον μείωση των παραμέτρων από την αναλλοιώτητα των συνοριακών επιφανειών. Όμως, εάν το $a \neq \infty$ τότε η αναλλοιώτητα της επιφάνειας $x = a$ οδηγεί στο $\xi(a,t) = 0$, για κάθε t και επομένως καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & -c_4 a \\ 2c_5 & = & -4c_6 a \end{array} \right\}$$

Από την άλλη μεριά, αν $b \neq \infty$ η αναλλοιώτητα της επιφάνειας $x = b$, μας δίνει:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & -c_4 b \\ 2c_5 & = & -4c_6 b \end{array} \right\}$$

Συνεπώς, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν $a, b \neq \infty$, τότε $c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Επομένως, δεν υπάρχει μη τετριμμένη ομάδα που επάγεται από το BVP για την εξίσωση θερμότητας.

Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει συνοπτικά και προηγουμένως, από τη στιγμή που ασχολούμαστε με μία γραμμική Μ.Δ.Ε., δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ότι η ομάδα μετασχηματισμών Lie αφήνει όλα τα BVP αναλλοίωτα.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) *Άπειρο πεδίο ορισμού* $((a,b) = (-\infty, \infty))$
Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$u_t = u_{xx}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(\pm\infty, t), \quad t > 0; \quad u(x,0) = \delta(x),$$

όπου δ είναι η μάζα Dirac.
Ο απειροστός (3.83), με $c_2 = 0$ επάγεται από το BVP δεδομένου ότι:

$$\varphi(x,0)u(x,0) = \xi(x,0)\delta'(x),$$

όπου $u(x,0) = \delta(x)$, δηλαδή:

$$\varphi(x,0)\delta(x) = \xi(x,0)\delta'(x)$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται όταν:

$$\xi(0,0) \quad \text{και} \quad \varphi(0,0) = -\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,0)$$

το οποίο υπονοεί ότι:

$$c_1 = 0 \quad c_3 = -c_4$$

Με αυτόν τον τρόπο διαπιστώνουμε ότι μία ομάδα μετασχηματισμών Lie τριών παραμέτρων αφήνει το BVP αναλλοίωτο.
Οι απειροστοί γεννήτορες αυτής της ομάδας είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_2 &= t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_3 &= xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left[\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2}\right]u\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Ο πίνακας (3.34) παίρνει πλέον τη μορφή:

$$T = \begin{bmatrix} x & 2t \\ t & 0 \\ xt & t^2 \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

Ο πίνακας T έχει $rank(T) = 2$, έτσι ώστε το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών να φτάσει το 0. Επιπλέον σημειώνουμε ότι:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Επομένως, μία αναλλοίωτη λύση που αντιστοιχεί στα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ είναι επίσης λύση του $\mathbf{v}_3$.

Έστω $u = f(x_1)$ μία αναλλοίωτη λύση που αντιστοιχεί στα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$. Τότε, από τη σχέση:

$$\mathbf{v}_1[u - f(x_1)] = 0$$

προκύπτει η αναλλοίωτη της μορφής:

$$u = f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{t}}F_1(\zeta_1) \tag{3.85}$$

με μεταβλητή ομοιότητας $\zeta_1 = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$.

Η παρακάτω εξίσωση:

$$\mathbf{v}_2[u - f(x_1)] = 0$$

μας δίνει αναλλοίωτη της μορφής:

$$u = f(x_1) = e^{-\frac{x^2}{4t}} F_2(\zeta_2)$$

με μεταβλητή ομοιότητας την $\zeta_2 = t$.

Από τη μοναδικότητα της λύσης του BVP έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} F_1(\zeta_1) = e^{-\frac{x^2}{4t}} F_2(\zeta_2)$$

και έτσι:

$$\sqrt{\zeta_2} F_2(\zeta_2) = e^{\frac{\zeta_1^2}{4}} F_1(\zeta_1) = c,$$

όπου c σταθερά.

Συνεπώς, η λύση του BVP είναι:

$$u = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Η αρχική συνθήκη μας δίνει ότι:

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

Έπεται, λοιπόν, ότι:

$$\mathbf{v}_3 \left[u - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] = 0$$

(*ii*) *Ημί-άπειρο πεδίο ορισμού* $((a, b) = (0, \infty))$
Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα:

$$u_t = u_{xx} \tag{3.86}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \delta(x - \hat{x}) \ ,$$

όπου δ είναι η μάζα Dirac.

Μία ομάδα μετασχηματισμών Lie με τρείς παραμέτρους επάγει ένα BVP. Η αναλλοιότητα της δεύτερης επιφάνειας μας δίνει ότι:

$$\varphi(x,0)u(x,0) = \xi(x,0)\delta'(x-\hat{x}),$$

όπου $u(x,0) = \delta(x-\hat{x})$, δηλαδή:

$$\varphi(x,0)\delta(x-\hat{x}) = \xi(x,0)\delta'(x-\hat{x}).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\xi(\hat{x},0) = 0 \quad \text{και} \quad \varphi(\hat{x},0) = -\frac{\partial \xi}{\partial x}(\hat{x},0)$$

Τότε θα πρέπει να έχουμε:

$$c_4 = 0, \quad c_3 = \frac{c_6 \hat{x}^2}{4}.$$

Έτσι το BVP επάγει τον απειροστό γεννήτορα:

$$\mathbf{v}_1 = xt\frac{\partial}{partialx} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{x^2}{4} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Η αντίστοιχη αναλλοίωτη λύση έχει την αναλλοίωτη μορφή:

$$u = f(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2 + \hat{x}^2}{4t}\right) F(\zeta),$$

όπου $F(\zeta)$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής ομοιότητας $\zeta = \dfrac{x}{t}$. Αντικαθιστώντας τη λύση που έχουμε βρεί από την εξίσωση θερμότητας (3.82), διαπιστώνουμε ότι η Φ(ζ) ικανοποιεί την παρακάτω Σ.Δ.Ε.:

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} = \frac{\hat{x}^2}{4} F(\zeta)$$

και έτσι έχουμε:

$$u = f(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(C \exp\left(-\frac{(x-\hat{x})^2}{4t}\right) + D \exp\left(-\frac{(x-\hat{x})^2}{4t}\right)\right).$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αρχικά δεδομένα, καταλήγουμε στο:

$$C = -D = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

που οδηγεί στην πολύ γνωστή λύση της εξίσωσης θερμότητας.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή στα Χρηματοοικονομικά

4.1 Εισαγωγή

Οι εργασίες των Black, Merton και Scholes οδήγησαν σε μία νέα εποχή για τη μαθηματική μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών προβλημάτων. Τα μοντέλα τους κατασκευάζονται με όρους στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και υπό συγκεκριμένους περιορισμούς, τα μοντέλα αυτά γράφονται ως γραμμικές εξελικτικές διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές.

Το ευρέως χρησιμοποιούμενο μονοδιάστατο μοντέλο, γνωστό ως μοντέλο των **Black-S.choles** περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0 \tag{4.1}$$

όπου A, B, C είναι σταθεροί συντελεστές. Οι Black και Scholes περιόρισαν την παραπάνω εξίσωση στην εξίσωση θερμότητας και την αξιοποίησαν για τη λύση του προβλήματος του Cauchy με ειδικά αρχικά δεδομένα.

Μαζί με την εξίσωση (4.1), πιο περίπλοκα μοντέλα που στοχεύουν στην εξήγηση πιο σύνθετων προβλημάτων παρουσιάζονται στη σύγχρονη βιβλιογραφία. Σε αυτό το σημείο θα λάβουμε υπόψιν και το μοντέλο με δύο μεταβλητές καταστάσεων που υποδεικνύεται από τους **Jacobs** και **Jones** και περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + ABCxyu_{xy} + \frac{1}{2}B^2y^2u_{yy} + \\ &+ (Dxln\frac{x}{y} - Ex^{\frac{3}{2}})u_x + (Fxln\frac{G}{y} - Hyx^{\frac{1}{2}})u_y - xu \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου A, B, C, D, E, F, G, H είναι αυθαίρετοι σταθεροί συντελεστές.

Οι Jacobs και Jones ερεύνησαν το μοντέλο αριθμητικά. Μία αναλυτική μελέτη των λύσεων αυτής της εξίσωσης, όπως επίσης και άλλων περίπλοκων χρηματοοικονομικών μαθηματικών μοντέλων, παρουσιάζουν μία πρόκληση για τους μαθηματικούς. Αυτό έγκειται στο γεγονός ότι κατά κανόνα αυτά τα μοντέλα με την εξίσωση Black-Scholes, δεν μπορούν να υποβιβαστούν σε απλές εξισώσεις με γνωστές λύσεις. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε το γεγονός αυτό για την εξίσωση Jacobs-Jones (4.2) χρησιμοποιώντας μεθόδους από την ανάλυση ομάδων Lie.

Η ανάλυση ομάδων Lie είναι μία μαθηματική θεωρία που συνθέτει τη συμμετρία των διαφορικών εξισώσεων. Ο θεμελιωτής αυτής της θεωρίας, ο Sophus Lie ήταν ο πρώτος που κατηγοριοποίησε διαφορικές εξισώσεις με βάση τις ομάδες συμμετρίας τους και με αυτόν τον τρόπο αναγνώρισε το σύνολο των εξισώσεων που μπορούν να υποβιβαστούν σε εξισώσεις χαμηλότερης τάξης με ομαδοθεωρητικούς αλγορίθμους.

Πιο συγκεκριμένα, ο Lie όρισε την κατηγοριοποίηση ομάδων των γραμμικών $2^{ης}$ τάξης μερικών διαφορικών εξισώσεων με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και ανέπτυξε μεθόδους για τη συνένωσή τους. Σύμφωνα με αυτήν την κατηγοριοποίηση, όλες οι παραβολικές εξισώσεις εισάγοντας την ομάδα συμμετρίας για την υψηλότερη τάξη υποβιβάζονται στην εξίσωση θερμότητας. Αυτό και πολλά άλλα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση ομάδων διαφορικών εξισώσεων θα συζητηθούν.

Αυτή η εργασία στοχεύει στην ανάλυση ομάδων Lie, επικεντρώνοντας στις συμμετρίες, την κατηγοριοποίηση και τις αμετάβλητες λύσεις, των μοντέλων Black-Scholes και Jacobs-Jones.

4.2 Γενική Περιγραφή Μεθόδων της Ανάλυσης Ομάδων

Αυτή η ενότητα είναι σχεδιασμένη για την εισαγωγή μερικών μεθόδων της Ανάλυσης Ομάδων Lie.

4.2.1 Υπολογισμός Απειροελάχιστων Συμμετριών

4.2.1.1 Ορισμός

Θεωρούμε τις **εξελικτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις** $2^{ης}$ **τάξης**:

$$u_t - F(t, x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) = 0 \tag{4.3}$$

όπου:

- u: συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών t
- $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$
- $u_{(1)}, u_{(2)}$: τα σύνολα των μερικών διαφορικών πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα, με $u_1 = (u_{x^1}, u_{x^2}, ..., u_{x^n})$ και $u_2 = (u_{x^1x^1}, u_{x^1x^2}, ..., u_{x^nx^n})$

.

Παρατήρηση 4.2.1.1.1

Υπενθυμίζουμε ότι οι *αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί* των μεταβλητών x, u, t, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= f(t, x, u, a) \\ \tilde{x}^i &= g^i(t, x, u, a) \\ \tilde{u} &= h(t, x, u, a) \end{aligned} \tag{4.4}$$

εξαρτώνται από τη συνεχή παράμετρο α και λέγονται **μετασχηματισμοί συμμετρίας της Εξίσωσης (4.3)**, αν η Εξίσωση (4.3) έχει την ίδια μορφή στις νέες μεταβλητές $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}$.

Παρατήρηση 4.2.1.1.2

Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών αυτής της μορφής, έστω G, αποτελεί μία **συνεχή ομάδα**, η οποία περιέχει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή:

i) Τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή:

- $\tilde{t} = t$
- $\tilde{x}^i = x^i$
- $\tilde{u} = u$

ii) Τον αντίστροφο κάθε μετασχηματισμού από το G και

iii) Τη σύνθεση οποιωνδήποτε δύο μετασχηματισμών

Η ομάδα συμμετρίας G είναι, επίσης, γνωστή και ως *ομάδα συμμετρίας που επάγεται από την εξίσωση (4.3).*

Παρατήρηση 4.2.1.1.3

Σύμφωνα με τη θεωρία Lie, η κατασκευή της ομάδας συμμετρίας G είναι ισοδύναμη με τον προσδιορισμό των *απειροστών γεννητόρων* της, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &\approx t + \alpha\xi^0(t,x,u) \\ \tilde{x}^i &\approx x^i + \alpha\xi^i(t,x,u) \\ \tilde{u} &\approx u + \alpha\eta(t,x,u) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Για αυτόν ακριβώς το σκοπό θα ήταν βολικό να εισάγουμε το *σύμβολο* για τους απειροστούς μετασχηματισμούς (4.5), με τέτοιο τρόπο ώστε να περιγράφονται από τον τελεστή:

$$X = \xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.6}$$

Ο τελεστής (4.6) εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία ως *απειροστός τελεστής* ή *γεννήτορας* της ομάδας G.

Οι μετασχηματισμοί της ομάδας G όπως φαίνονται στην (6.4) που αντιστοιχούν στους απειροστούς μετασχηματισμούς με το σύμβολο (4.6) μπορούν να βρεθούν με τη λύση των παρακάτω Lie εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{t}}{d\alpha} &= \xi^0(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u})\\ \frac{d\tilde{x}^i}{d\alpha} &= \xi^i(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u})\\ \frac{d\tilde{u}}{d\alpha} &= \eta(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u})\end{aligned} \tag{4.7}$$

με τις εξής αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned}\tilde{t}\big|_{a=0} &= t\\ \tilde{x}^i\big|_{a=0} &= x^i\\ \tilde{u}\big|_{a=0} &= u\end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.2.1.1.3

Με βάση τον ορισμό, οι μετασχηματισμοί (4.6) δημιουργούν μία ομάδα συμμετρίας G της εξίσωσης (4.3) αν η συνάρτηση $\tilde{u}=\tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x})$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - F(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u}_{(1)},\tilde{u}_{(2)}) = 0 \tag{4.8}$$

όταν η συνάρτηση $u=u(t,x)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.3).

Βρίσκουμε τις $\tilde{u}_i, \tilde{u}_{(1)}, \tilde{u}_{(2)}$ από την εξίσωση (4.4) σύμφωνα με τύπους αλλαγής μεταβλητών στα παράγωγα. Τότε η απειροστή μορφή αυτων των τύπων γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &\approx u_t + \alpha\zeta_0(t,x,u,u_t,u_{(1)})\\ \tilde{u}_{\tilde{x}^i} &\approx u_{x^i} + \alpha\zeta_i(t,x,u,u_t,u_{(1)})\\ \tilde{u}_{\tilde{x}^i\tilde{x}^j} &\approx u_{x^ix^j} + \alpha\zeta_{ij}(t,x,u,u_t,u_{(1)},u_{tx^k},u_{(2)}\end{aligned} \tag{4.9}$$

όπου οι συναρτήσεις $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_{ij}$ προκύπτουν από τη διαφόριση των συναρτήσεων ξ^0, ξ^i, η και δίνονται από τους *τύπους της προέκτασης*:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\xi^0) - u_{x^i} D_t(\xi^i)\\ \zeta_i &= D_i(\eta) - u_t D_i(\xi^0) - u_{x^j} D_i(\xi^j)\\ \zeta_{ij} &= D_j(\zeta_i) - u_{x^ix^k} D_{\xi^k} - u_{tx^i} D_j(\xi^0)\end{aligned} \tag{4.10}$$

Στις παραπάνω σχέσεις αξιοποιούμε το συμβολισμό:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx^k} \frac{\partial}{\partial u_{x^k}} + ...$$
$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_{x^i} \frac{\partial}{\partial u} + u_{tx^i} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{x^i x^k} \frac{\partial}{\partial u_{x^k}} + ...$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.8) προκύπτει:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - F(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{(1)}, \tilde{u}_{(2)}) \approx u_t - F(t, x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) +$$
$$+\alpha \left(\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{x^i x^j}} \zeta_{ij} - \frac{\partial F}{\partial u_{x^i}} \zeta_i - \frac{\partial F}{\partial u} \eta - \frac{\partial F}{\partial x^i} \xi^i - \frac{\partial F}{\partial t} \xi^0 \right)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψην την σχέση (4.3), αν αντικαταστίσουμε το u_t με το $F(t, x, u, u_{,()1}), u_{(2)})$ στα $\zeta_0, \zeta_i, \zeta_{ij}$ η εξίσωση (4.8) γίνεται:

$$\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{x^i x^j}} \zeta_{ij} - \frac{\partial F}{\partial u_{x^i}} \zeta_i - \frac{\partial F}{\partial u} \eta - \frac{\partial F}{\partial x^i} \xi^i - \frac{\partial F}{\partial t} \xi^0 = 0 \qquad (4.11)$$

Η εξίσωση (4.11) ορίζει όλες τις απειροστές συμμετρίες της εξίσωσης (4.3) και, συνεπώς, ονομάζεται **προσδιοριστική εξίσωση**. Συμβατικά, γράφουμε την προσδιοριστική εξίσωση στη συμπαγή μορφή:

$$X(u_t - F(t, x, u, u_{(1)}, u_{(2)}))\big|_{(4.3)} = 0 \qquad (4.12)$$

Στην προκειμένη περίπτωση το X δηλώνει την *προέκταση* του τελεστή (4.6) στα παράγωγα πρώτης και δεύτερης τάξης:

$$X = \xi^0(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial u_{x^i}} + \zeta_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{x^i x^j}}.$$

Με το συμβολισμό $|_{(4.3)}$ συμβολίζουμε τον υπολογισμό στην εξίσωση (4.3).

Παρατήρηση 4.2.1.1.4

Η προσδιοριστική εξίσωση (4.11) ή, εναλλακτικά, η ισοδύναμη εξίσωση (4.12) είναι μία γραμμική ομογενής Μ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης με άγνωστες συναρτήσεις $\xi^0(t, x, u)$, $\xi^i(t, x, u)$, $\eta(t, x, u)$ των ¨ανεξάρτητων' μεταβλητών t, x, u. Με την πρώτη ματιά, αυτή η εξίσωση φαίνεται να είναι πιο περίπλοκη από την αρχική

Διαφορική Εξίσωση (4.3). Ωστόσο, αυτό αποτελεί μία προφανή πολυπλοκότητα. Πράγματι, το αριστερό μέλος της προσδιοριστικής εξίσωσης περιλαμβάνει τα παράγωγα u_{x^i}, $u_{x^i x^j}$, μαζί με της μεταβλητές t, x, u και τις συναρτήσεις αυτών των μεταβλητών ξ^0,ξ^i, η. Δεδομένου ότι η εξίσωση (4.11) έγκυρη ταυτοτικά σε σχέση με όλες τις μεταβλητές που περιέχει, οι μεταβλητές $t, x, u, u_{x^i}, u_{x^i x^j}$ αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητες. Είναι, συνεπώς, επόμενο ότι η προσδιοριστική εξίσωση αποσυντίθεται σε ένα σύστημα διαφόρων εξισώσεων. Κατά κανόνα αυτό είναι ένα υπερπροσδιοριζόμενο σύστημα, δηλαδή περιέχει περισσότερες από $n+2$, πού είναι ο ριθμός των αγνώστων συναρτήσεων (ξ^0, ξ^i, η), εξισώσεις. Επομένως, στις πρακτικές εφαρμογές η προσδιοριστική εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά, σε αντίθεση με την αρχική διαφορική εξίσωση (4.3). Η λύση της προσδιοριοριστικής εξίσωσης μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε ¨με το χέρι' ή σε αποκλειστικά σε απλές περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας σύγχρονα προγράμματα. Η καλύτερη παρουσίαση του τρόπου υπολογισμού συμμετριών με το χέρι σε περίπλοκες καταστάσεις αναφέρεται στο κλασικό βιβλίο στον τομέα αυτό από τον Ovsyannikov.

4.2.2 Ακριβείς λύσεις που δίνονται από τις ομάδες συμμετρίας

Η ανάλυση ομάδων περιέχει δύο βασικούς τρόπους κατασκευής ακριβών λύσεων:

i) Μετασχηματισμούς ομάδων των γνωστών λύσεων

ii) Κατασκευή αναλλοίωτων λύσεων

Ομάδες Μετασχηματισμών Γνωστών Λύσεων

Ο πρώτος τρόπος βασίζεται στο γεγονός ότι μια ομάδα συμμετρίας μετατρέπει οποιεσδήποτε λύσεις της εν λόγω εξίσωσης σε λύση της ίδιας εξίσωσης. Δηλαδή, έστω (4.4) είναι μια ομάδα μετασχηματισμού συμμετρίας της εξίσωσης (4.3), και έστω μια συνάρτηση:

$$u = \varphi(t, x) \tag{4.13}$$

που αποτελεί λύση της εξίσωσης (4.3). Δεδομένου ότι (4.4) είναι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας, η λύση (4.13) μπορεί επίσης να γραφτεί με τη χρήση των νέων μεταβλητών ως εξής:

$$\tilde{u} = \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}) \tag{4.14}$$

Αντικαθιστώντας εδώ, τις $\tilde{u}$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$ από τις εξισώσεις (4.4) έχουμε:

$$h(t, x, u, a) = \varphi(f(t, x, u, a), g(t, x, u, a)).$$

Έχοντας λύσει αυτή την εξίσωση σε σχέση με το υ, φτάνουμε στην ακόλουθη μονοπαραμετρική οικογένεια (με την παράμετρο α) νέων λύσεων της εξίσωσης (4.3):

$$u = \psi_a(t, x). \tag{4.15}$$

Κατά συνέπεια, κάθε γνωστή λύση αποτελεί πηγή μιας πολλαπλών παραμέτρων κατηγορίας νέων λύσεων, υπό την προϋπόθεση ότι η εν λόγω διαφορική εξίσωση εισάγει μια ομάδα συμμετρίας πολλαπλών παραμέτρων.

Αναλλοίωτες Λύσεις

Εάν μία ομάδα μετασχηματισμών απεικονίζει μια λύση στον εαυτό της, φτάνουμε σε αυτό που ονομάζεται μια λύση αναλλοίωτη ως προς την ομάδα. Η αναζήτηση αυτού του τύπου λύσεων μειώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών της εν λόγω εξίσωσης. Δηλαδή, η αμετάβλητη σχέση με μια ομάδα παραμέτρων μειώνει τον αριθμό των μεταβλητών κατά ένα. Η περαιτέρω μείωση μπορεί να επιτευχθεί αν θεωρήσουμε αναλλοίωτες υπό τις ομάδες συμμετρίας με δύο ή περισσότερες παραμέτρους.

Για παράδειγμα, η κατασκευή αυτών των συγκεκριμένων λύσεων απλοποιείται, στην περίπτωση της εξίσωσης (4.1), είτε σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, εάν η λύση είναι αναλλοίωτη υπό μια ομάδα μίας παραμέτρου, ή σε αλγεβρική σχέση, εάν η λύση είναι αναλλοίωτη με σε μια ομάδα πολλαπλών παραμέτρων.

Η κατασκευή λύσεων αναλλοίωτων υπό μονοπαραμετρικές ομάδες είναι ευρέως γνωστή στη βιβλιογραφία. Ως εκ τούτου, σκιαγραφήσαμε εν συντομία τη διαδικασία στην ενότητα , εξετάζοντας μόνο ένα απλό παράδειγμα.

Ωστόσο, δεδομένου ότι η εξίσωση Jacobs – Jones περιλαμβάνει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, η "μείωσή" της σε, π.χ., συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις απαιτεί μια αναλλοίωτη υπό δισδιάστατες ομάδες. Έτσι, αναλύουμε κάποιες λεπτομέρειες της διαδικασίας στην ενότητα για την εξίσωση Jacobs – Jones.

4.2.3 Κατηγοριοποίηση Ομάδων Διαφορικών Εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις που εμφανίζονται στις επιστήμες ως μαθηματικά μοντέλα, συχνά περιλαμβάνουν υποπροσδιορισμένες παραμέτρους και/ή αυθαίρετες συναρτήσεις ορισμένων μεταβλητών. Συνήθως, αυτά τα αυθαίρετα στοιχεία (παράμετροι ή συναρτήσεις) εντοπίζονται πειραματικά ή επιλέγονται με βάση το "κριτήριο της απλότητας". Η θεωρία ομάδων Lie παρέχει μια απλή διαδικασία για τον προσδιορισμό αυθαίρετων στοιχείων από άποψη συμμετρίας. Αυτή η κατεύθυνση της μελέτης συχνά αναφέρεται ως κατάταξη των ομάδων Lie των διαφορικών εξισώσεων. Για λεπτομερείς παρουσιάσεις των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην κατηγοριοποίηση των διαφορικών εξισώσεων, ο αναγνώστης να ανατρέξει στην πρώτη δημοσίευση σχετικά με αυτό το θέμα [] που ασχολείται με την κατάταξη της γραμμικής δεύτερης τάξης Μ.Δ.Ε. με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Η κατηγοριοποίηση ομάδων Lie των διαφορικών εξισώσεων μας δίνει το μαθηματικό υπόβαθρο την λεγόμενη *θεωρητική μοντελοποίηση ομάδων* (βλ. [46], τόμος 3, κεφάλαιο 6). Αν λάβουμε υπόψιν αυτήν την προσέγγιση, τότε θεωρούμε προτιμότερες τις διαφορικές εξισώσεις που επάγουν περισσότερες συμμετρίες. Με αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε συχνά σε εξισώσεις που εμφανίζουν αξιοσημείωτες φυσικές ιδιότητες.

Δεδομένης μίας οικογένειας διαφορικών εξισώσεων, η διαδικασία της κατηγοριοποίησης ομάδων Lie ξεκινά με τον καθορισμό της λεγόμενης *πρωταρχικής ομάδας Lie* αυτής της ομάδας διαφορικών εξισώσεων. Αντίστοιχα, η άλγεβρα Lie της πρωταρχικής ομάδας Lie ονομάζεται *πρωταρχική άλγεβρα Lie* αυτών των εξισώσεων και συμβολίζεται με $L_{\mathcal{P}}$ (βλ. για παράδειγμα *σεενπαπερ*). Επιπλέον, είναι πιθανό μία ορισμένη επιλογή για τα αυθαίρετα στοιχεία της ομάδας των αντίστοιχων επαγόμενων εξισώσεων, μαζί με την πρωταρχική ομάδα Lie, να οδηγήσει σε επιπρόσθετους μετασχηματισμούς συμμετρίας. Το πρόβλημα της κατηγοριοποίησης ομάδων είναι ο καθορισμός όλων των αυστηρά διαφορετικών μεμονωμένων περιπτώσεων όταν έχουμε κάποια επέκταση της $L_{\mathcal{P}}$.

4.3 Το μοντέλο Black - Scholes

4.3.1 Η βασική εξίσωση

Οι Black και Scholes πρότειναν για τη μαθηματική μοντελοποίηση της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών πρότειναν την παρακάτω Μ.Δ.Ε.:

$$u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0 \tag{4.16}$$

με σταθερούς τους συντελεστές A, B, C, δηλαδή τις παραμέτρους του μοντέλου. Όπως φαίνεται στην [3] η εξίσωση (4.16) μπορεί να μετατραπεί στην κλασσική εξίσωση θερμότητας, δηλαδή στη μορφή:

$$u_t = u_{yy} \tag{4.17}$$

ενώ προϋποτίθεται ότι $A \neq 0$, $\mathfrak{D} \equiv B - \dfrac{A^2}{2} \neq 0$. Αξιοποιώντας τη σύνδεση μεταξύ των εξισώσεων (4.16) και (4.17), παίρνουμε έναν ακριβή τύπο για τη λύση, η οποία ορίζεται στο διάστημα $-\infty < t < t^*$, του προβλήματος Cauchy με ειδικές αρχικές πληροφορίες στο $t = t^*$.

4.3.2 Συμμετρίες

Στο μοντέλο $Black - Scholes$ όπως φαίνεται στην (4.16), παρατηρούμε ότι για $n = 1$, $x^1 = x$. Επιπλέον, το σύμβολο των απειροστών συμμετριών έχει τη μορφή:

$$Q = \xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η προσδιοριστική εξίσωση (4.11) γίνεται:

$$\zeta_0 + \frac{1}{2}A^2x^2\zeta_{11} + Bx\zeta_1 - C\eta + A^2xu_{xx}\xi^1 + Bu_x\xi^1 = 0 \qquad (4.18)$$

όπου σύμφωνα με τους τύπου της προέκτασης όπως φαίνονται στην (4.10), οι εξισώσεις ζ_0, ζ_1, ζ_{ij} δίνονται από τις:

- $\zeta_0 = \eta_1 + u_t\eta_u - u_t^2\xi_u^0 - u_x\xi_t^1 - u_tu_x\xi_u^1$
- $\zeta_1 = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\xi_x^0 - u_tu_x\xi_x^0 - u_x\xi_x^1 - u_x^2\xi_u^1$
- $\zeta_{11} = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + u_x^2\eta_{uu} - 2u_{tx}\xi_x^0 - u_t\xi_{xx}^0 - 2u_tu_x\xi_{xu}^0 -$
  $- (u_tu_{xx} + 2u_xu_{tx})\xi_u^0 - u_tu_x^2\xi_{uu}^0 - 2u_{xx}\xi_x^1 - 2u_x^2\xi_{xu}^1 - 3u_xu_{xx}\xi_u^1 - u_x^3\xi_{uu}^1$

Η λύση της προσδιοριστικής εξίσωσης (4.18) μας δίνει τον διανυσματικό χώρο άπειρης διάστασης των απειροστών συμμετριών της εξίσωσης (4.16) που περιλαμβάνει τους τελεστές:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\ln x + \mathfrak{D}t)x\frac{\partial}{\partial x} + 2Ctu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_4 = A^2tx\frac{\partial}{\partial x} + (\ln x - \mathfrak{D}t)u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_5 = 2A^2t^2\frac{\partial}{\partial t} + 2A^2tx\ln x\frac{\partial}{\partial x} + [(\ln x - \mathfrak{D}t)^2 + 2A^2Ct^2 - A^2t]u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_\varphi = \varphi(t,x)\frac{\partial}{\partial u}$$

όπου:

- $\mathfrak{D} = B - \dfrac{A^2}{2}$,
- $\varphi(t,x)$ είναι μία αυθαίρετη λύση της εξίσωσης (4.16)

Οι μετασχηματισμοί άπειρης συμμετρίας όπως φαίνονται στην (4.4), δηλαδή οι:

- $\tilde{t} = f(t,x,u,\alpha)$
- $\tilde{x} = g(t,x,u,\alpha)$
- $\tilde{u} = h(t,x,u,\alpha)$

που αντιστοιχούν στους γεννήτορες των σχέσεων για τα Q_5, Q_6, Q_φ παραπάνω βρίσκονται λύνοντας τις εξισώσεις Lie (4.7) και το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned}
X_1\colon\ & \tilde{t} = t + \alpha_1,\\
& \tilde{x} = x,\\
& \tilde{u} = u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2\colon\ & \tilde{t} = t,\\
& \tilde{x} = x\alpha_2,\\
& \tilde{u} = u,\\
& \alpha_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_3\colon\ & \tilde{t} = t\alpha^3,\\
& \tilde{x} = x^{\alpha_3} e^{\mathfrak{D}\left(\alpha_3^2 - \alpha_3\right)t},\\
& \tilde{u} = u e^{C\left(\alpha_3^2 - 1\right)t},\\
& \alpha_3 \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4\colon\ & \tilde{t} = t,\\
& \tilde{x} = x e^{A^2 t \alpha_4},\\
& \tilde{u} = u x^{\alpha_4} e^{\left(\frac{1}{2}A^2\alpha_4^2 - \mathfrak{D}\alpha_4\right)t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_5\colon\ \tilde{t} &= \frac{t}{1+2A^2\alpha_5 t},\\
\tilde{x} &= x^{t/(1-2A^2\alpha_5 t)},\\
\tilde{u} &= u\sqrt{1-2A^2\alpha_5 t}\exp\left(\frac{[(\ln x-\mathfrak{D}t)^2+2A^2Ct^2]\alpha_5}{1-2A^2\alpha_5 t}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_6\colon\ \tilde{t} &= t,\\
\tilde{x} &= x,\\
\tilde{u} &= u\alpha_6,\\
\alpha_6 &\neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_\varphi\colon\ \tilde{t} &= t,\\
\tilde{x} &= x,\\
\tilde{u} &= u+\varphi(t,x).
\end{aligned}$$

Εδώ τα α_1, α_2,..., α_6 αποτελούν παραμέτρους των μονοπαραμετρικών ομάδων που παράγονται από τα X_1, X_2,..., X_6 αντίστοιχα και η $\varphi(t,x)$ είναι μία αυθαίρετη λύση της εξίσωσης (4.16). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι τελεστές X_1, X_2,..., X_6 παράγουν μία ομάδα 6 παραμέτρων και το X_φ μία άπειρη ομάδα. Η γενική ομάδα συμμετρίας προκύπτει από τη σύνθεση των παραπάνω μετασχηματισμών.

Παρατήρηση 3.4.6

Η ομάδα διαστολών που παράγεται από τον τελεστή X_6 ανταναχλά τον ομοιογένεια της εξίσωσης (4.16), ενώ οι άπειρη ομάδα με τον τελεστή X_φ αναπαριστά την *αρχή υπέρθεσης* που χαρακτηρίζει τα γραμμικά συστήματα, στην ίδια εξίσωση. Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι συνηθισμένη για όλες τις γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις. Έτσι, οι συγκεκριμένες, μη τετριμμένες, συμμετρίες της εξίσωσης (4.16) δίνονται από τους τελεστές X_1, X_2,..., X_5 που επεκτείνονται σε άλγεβρα Lie διάστασης 5.

4.3.3 Μετασχηματισμός της Εξίσωσης Θερμότητας

Ας θυμηθούμε το αποτέλεσμα του Lie για την κατηγοριοποίηση ομάδων γραμμικών δεύτερης τάξης Μ.Δ.Ε. με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση των εξελικτικών παραβολικών εξισώσεων αυτό το αποτέλεσμα τυποποιείται ως εξής [54]:

Θεωρούμε την οικογένεια γραμμικών παραβολικών εξισώσεων:

$$P(t,x)u_t + Q(t,x)u_x + R(t,x)u_{xx} + S(t,x)u = 0, \quad P \neq 0, \quad R \neq 0 \tag{4.19}$$

Η πρωταρχική άλγεβρα Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, δηλαδή η άλγεβρα Lie των τελεστών που επάγονται από την εξίσωση (4.19) με αυθαίρετους συντελεστές τις $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $R(t,x)$ και $S(t,x)$ που επεκτείνεται από τους γεννήτορες X_6, X_φ των τετριμμένων συμμετριών. Κάθε εξίσωση της μορφής (4.19) μπορεί να υποβιβαστεί μέσω κάποιου μετασχηματισμού στη μορφή:

$$v_\tau = v_{yy} + Z(\tau, y)v. \tag{4.20}$$

Ο ισοδύναμος Lie μετασχηματισμός:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(t,x), \\ \tau &= \beta(t), \\ v &= \gamma(\tau,x)u, \\ \alpha_x &\neq 0, \\ \beta_t &\neq 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

τα οποία παίρνουμε με τη βοήθεια δύο τετραγωνισμών.

Αν η εξίσωση (4.19) επάγει μια επέκταση της πρωταρχικής άλγεβρας Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ με έναν επιπλέον τελεστή συμμετρίας τότε υποβιβάζεται στη μορφή:

$$v_\tau = v_{yy} + Z(y)v \tag{4.22}$$

για την οποία ο επιπρόσθετος τελεστής θα είναι:

$$X = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Αν η $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ επεκτείνεται κατά 3 επιπρόσθετους τελεστές, τότε η εξίσωση (4.19) γίνεται:

$$v_\tau = v_{yy} + \frac{A}{y^2}v \tag{4.23}$$

αν οι 3 επιπρόσθετοι τελεστές είναι οι:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$Q_2 = 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3 = \tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau y\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\tau\right)v\frac{\partial}{\partial v}$$

Επιπλέον, αν η $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ επεκταθεί κατά 5 επιπρόσθετους τελεστές τότε η εξίσωση (4.19) υποβιβάζεται στην εξίσωση θερμότητας:

$$v_\tau = v_{yy} \tag{4.24}$$

αν οι 5 επιπρόσθετοι τελεστές είναι:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$X_3 = 2\tau\frac{\partial}{\partial y} - yv\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_4 = 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5 = \tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau y\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\tau\right)v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Οι εξισώσεις (4.22) και (4.24) δείχνουν την κανονική μορφή όλων των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων $2^{ης}$ τάξης (4.19) που επάγει μη τετριμμένες συμμετρίες, δηλαδή επεκτάσεις της πρωταρχικής άλγεβρας Lie $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$.

Έτσι, η εξίσωση Black-Scholes (4.16) ανήκει στην τελευταία περίπτωση και έτσι υποβιβάζεται στην εξίσωση θερμότητας όπως φαίνεται στην (4.24) με τον ισοδύναμο μετασχηματισμό Lie. Παρακάτω θα βρούμε αυτόν τον μετασχηματισμό αλλάζοντας τις μεταβλητές της εξίσωσης θερμότητας (4.16) ως εξής:

$$u_{xx}+\left(\frac{2\gamma_x}{\gamma}+\frac{\alpha_x\alpha_t}{\beta'}-\frac{\alpha_{xx}}{\alpha_x}\right)u_x-\frac{\alpha_x^2}{\beta'}u_t+\left(\frac{\gamma_{xx}}{\gamma}+\frac{\alpha_x\alpha_t\gamma_x}{\beta'\gamma}-\frac{\alpha_x^2\gamma_t}{\beta'\gamma}-\frac{\alpha_{xx}\gamma_x}{\alpha_x\gamma}\right)u=0,$$

όπου με $'$ συμβολίζουμε την παράγωγο ως προς t. Συγκρίνοντας αυτήν εξίσωση με την Black-Scholes (4.16) στη μορφή:

$$u_{xx} + \frac{B}{A^2 x} u_x + \frac{2}{A^2 x^2} u_t - \frac{2Cu}{A^2 x^2} = 0$$

εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές, καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\frac{\alpha_x^2}{\beta'} = -\frac{2}{A^2 x^2} \tag{4.25}$$

$$\frac{2\gamma_x}{\gamma} + \frac{\alpha_x \alpha_t}{\beta'} - \frac{\alpha_{xx}}{\alpha_x} = \frac{2B}{A^2 x} \tag{4.26}$$

$$\frac{\gamma_{xx}}{\gamma} + \frac{\alpha_x \alpha_t \gamma_x}{\beta' \gamma} - \frac{\alpha_x^2 \gamma_t}{\beta' \gamma} - \frac{\alpha_{xx} \gamma_x}{\alpha_x \gamma} = -\frac{2C}{A^2 x^2} \tag{4.27}$$

Από την εξίσωση (4.25) έπεται ότι:

$$\alpha(t,x) = \frac{\varphi(t)}{A} \ln x + \psi(x)$$

$$\beta'(t) = -\frac{1}{2} \varphi^2(t)$$

όπου οι συναρτήσεις $\varphi(t)$ και $\psi(t)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις. Αν εφαρμόσουμε αυτούς στους τύπους στην εξίσωση (4.26) έχουμε:

$$\gamma(t,x) = v(t) x^{\frac{B}{A^2} - \frac{1}{2} + \frac{\psi'}{A\varphi} + \frac{\varphi'}{2A^2\varphi} \ln x}$$

με μία αυθαίρετη συνάρτηση $v(t)$. Μετά την αντικατάσταση των παραπάνω εκφράσεων στην εξίσωση (4.27), τότε καταλήγουμε σε δύο πιθανά σενάρια:

1η Περίπτωση
Έχουμε:

$$\varphi = \frac{1}{L-Kt}$$

$$\psi = \frac{M}{L-Kt} + N$$

όπου $K \neq 0$ και η συνάρτηση $v(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{v'}{v} = \frac{M^2K^2}{2(L-Kt)^2} - \frac{K}{2(L-Kt)} - \\ -\frac{A^2}{8} + \frac{B}{2} - \frac{B^2}{2A^2} - C$$

.

2η Περίπτωση
Έχουμε:

$$\varphi = L$$

$$\psi = Mt + N$$

$$L \neq 0$$

όπου K, L, M και N είναι αυθαίρετες σταθερές και η συνάρτηση $v(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{v'}{v} = \frac{M^2}{2L^2} - \frac{A^2}{8} + \frac{B}{2} - \frac{B^2}{2A^2} - C$$

Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στους δύο διαφορετικούς μετασχηματισμούς που συνδέουν τις εξισώσεις (4.16) και (4.24) και παρατίθενται παρακάτω:

1ος Μετασχηματισμός
Έχουμε:

$$y = \frac{\ln x}{A(L-Kt)} + \frac{M}{L-Kt} + N$$

$$\tau = -\frac{1}{2K(L-Kt)} + P$$

$$u = E\sqrt{L-Kt} \times \\ \times e^{\frac{M^2K}{2(L-Kt) - \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}-\frac{A}{2}\right)^2 t - Ct}} \\ \times x^{\frac{B}{A^2} - \frac{1}{2} + \frac{MK}{A(L-Kt)} + \frac{K \ln x}{2A^2(L-Kt)}} u$$

όπου $K \neq 0$.

2ος Μετασχηματισμός
Έχουμε:

$$y = \frac{L}{A} \ln x + Mt + N$$

$$\tau = -\frac{L^2}{2} t + P$$

$$u = Ee^{\left[\frac{M^2}{2L^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}-\frac{A}{2}\right)^2 - C\right]t} \times \\ \times x^{\frac{B}{A^2} - \frac{1}{2} + \frac{M}{AL}} \times \\ \times u$$

όπου $K \neq 0$.

Ο μετασχηματισμός Black-Scholes (βλέπε [3], τύπος (9» ανήκει στην περίπτωση του δεύτερου μετασχηματισμού με:

$$
\begin{aligned}
&L = \frac{2}{A}\mathfrak{D}\\
&M = -\frac{2}{A^2}\mathfrak{D}^2\\
&N = \frac{2}{A^2}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}t^* - \ln c)\\
&P = \frac{2}{A^2}\mathfrak{D}^2 t^*\\
&E = e^{Ct^*}
\end{aligned}
$$

όπου οι t^*, c είναι σταθερές που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα αρχικών τιμών (4.8) της [3]. Ο πρώτος μετασχηματισμός είναι καινούριος και μας επιτρέπει να λύσουμε με διαφορετικό τρόπο ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

4.3.4 Μετασχηματισμοί των Λύσεων

Έστω $u = f(t, x)$ μία γνωστή λύση της εξίσωσης (4.16). Λαμβάνοντας υπόψιν την υποενότητα 4.2.2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη λύση για να παράξουμε οικογένειες νέων λύσεων που περιλαμβάνουν τις παραμέτρους της ομάδας. Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε της διαδικασία στους μετασχηματισμούς που παράγονται από τους βασικούς τελεστές X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 και X_6, X_φ όπως περιγράφονται στην υποενότητα 4.3.2. Η εφαρμογή των τύπων (4.13) στα (4.15) μας δίνει:

$$X_1 :\ u = F(t - \alpha_1, x)$$

$$X_2 :\ u = F(t, x, \alpha_2^{-1}),\ \text{όπου } \alpha_2 \neq 0$$

$$X_3 :\ u = e^{C(1-\alpha_3^{-2})t} F\left(t, \alpha_3^{-2}, x^{\alpha_3^{-1}}, e^{\mathfrak{D}(\alpha_3^{-2}-\alpha_3^{-1})t}\right),\ \text{όπου } \alpha_3 \neq 0$$

$$X_4 :\ u = x^{\alpha_4} e^{-\left(\frac{A^2\alpha_4^2}{2}+\mathfrak{D}\alpha_4\right)t} F\left(t, xe^{-A^2 t\alpha_4}\right)$$

$$X_5 :\ u = \frac{\exp\left(\frac{[(\ln x-\mathfrak{D}t)^2+2A^2Ct^2]\alpha_5}{1+2A^2\alpha_5 t}\right)}{\sqrt{1+2A^2\alpha_5 t}} F\left(\frac{t}{1+2A^2\alpha_5 t}, x^{\frac{t}{1+2A^2\alpha_5 t}}\right)$$

$$X_6 :\ u = \alpha_6 F(t, x),\ \text{όπου } \alpha_6 \neq 0$$

$$X_\varphi :\ u = F(t, x) + \varphi(t, x)$$

.

Παράδειγμα 4.3.4

Ξεκινάμε θεωρώντας την απλή λύση της εξίσωσης (4.16) που εξαρτάται αποκλειστικά από το t:

$$u = e^{Ct} \tag{4.28}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό που παράγει η X_4 βρίσκουμε μία λύση που εξαρτάται από την παράμετρο α_4:

$$u = x^{\alpha_4} e^{-\left(\frac{A^2\alpha_4^2}{2}+\mathfrak{D}\alpha_4 - C\right)t}$$

Για λόγους απλότητας, θα υποθέσουμε σε αυτό το σημείο ότι ισχύει $\alpha_4 = 1$ και έτσι:

$$u = e^{(C-B)t}$$

Αν, τώρα εφαρμόσουμε σε αυτήν τη λύση το μετασχηματισμό που παράγει ο τελεστής X_5, καταλήγουμε στην παρακάτω λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.16):

$$u = \frac{\exp\left(\frac{[(\ln x - \mathfrak{D}t)^2 + 2A^2Ct^2]\alpha_5 + (C-B)t}{1+2A^2\alpha_5 t}\right)}{\sqrt{1+2A^2\alpha_5 t}} x^{\frac{t}{1+2A^2\alpha_5 t}} \tag{4.29}$$

Έχοντας, λοιπόν ξεκινήσει με την απλούστερη λύση (4.28) της εξίσωσης (4.16) μπορούμε να βρούμε την, αρκετά πολυπλοκότερη, λύση (4.29). Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία παράγουμε επιπλέον περίπλοκες λύσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση (4.28) παραμένει αμετάβλητη υπό τον μετασχηματισμό που παράγει ο τελεστής X_2 και έτσι αποτελεί παράδειγμα των λεγόμενων *αναλλοίωτων λύσεων* που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη υποενότητα.

4.3.5 Αναλλοίωτες Λύσεις

Μία αναλλοίωτη λύση ως προς μία υποομάδα της ομάδας συμμετρίας είναι μία λύση η οποία παραμένει αμετάβλητη υπό τη δράση των μετασχηματισμών της υποομάδας. Οι αναλλοίωτες λύσεις μπορούν να εκφραστούν μέσω των αναλλοίωτων της δοθείσης υποομάδας (βλέπε π.χ. [46]). Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε του υπολογισμούς των αναλλοίωτων λύσεων λαμβάνοντας υπόψιν την μονοπαραμετρική υποομάδα με τον γεννήτορα:

$$X = X_1 + X_2 + X_6 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

Για να βρούμε αναλλοίωτες αυτής της ομάδας, έστω $I(t,x,u)$, θα αξιοποιήσουμε την εξίσωση:

$$XI = 0$$

και δίνονται από την:

$$I = J(I_1, I_2)$$

όπου:

- $I_1 = t - \ln x$
- $I_2 = \dfrac{U}{X}$

είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες αναλλοίωτες και συνεπώς δημιουργούν μία βάση αναλλοίωτων. Επομένως, μπούμε να βρούμε μία αναλλοίωτη λύση στη μορφή:

$I_2 = \varphi(I_1)$

ή

$u = x\varphi(z)$, όπου $z = t - \ln x$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.16) καταλήγουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης·

$$\frac{A^2}{2}\varphi'' + \left(1 - b - \frac{A^2}{2}\right)\varphi' + (B - C)\varphi = 0$$

όπου $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dz}$. Η παραπάνω εξίσωση με σταθερούς συντελεστές μπορεί με άνεση να λυθεί.

Η διαδικασία που έχουμε περιγράψει μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα γραμμικό συνδυασμό, με σταθερούς συντελεστές, των βασικών γεννητόρων X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 και X_φ. Εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία στους βασικούς τελεστές:

$X_1:\ u = \varphi(x)$,

$$\frac{1}{2}A^2x^2\varphi'' + Bx\varphi' - C\varphi = 0$$

Αυτή η εξίσωση υποβιβάζεται με σταθερούς συντελεστές στην νέα ανεξάρτητη μεταβλητή $z = \ln x$.

$X_2:\ u = \varphi(t)$,

$$\varphi' - C\varphi = 0.$$

Τότε $u = Ke^{Ct}$.

$X_3:\ u = e^{Ct}\varphi\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{t}} - \mathfrak{D}\sqrt{t}\right)$,

$$A^2\varphi'' - z\varphi' = 0,$$

$$z = \frac{\ln x}{\sqrt{t}} - \mathfrak{D}\sqrt{t}.$$

Τότε $\varphi(z) = K_1 \int_0^z e^{\frac{\mu^2}{2A^2}} d\mu + K_2$.

$X_4:\ u = \exp\left(\dfrac{(\ln x - \mathfrak{D})^2}{2A^2t}\right)\varphi(t)$,

$$\varphi' + \left(\frac{1}{2t} - C\right)\varphi = 0.$$

Τότε $\varphi = \dfrac{K}{\sqrt{t}} e^{Ct}$ και έτσι:

$$u = \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{(\ln x - \mathfrak{D})^2 + Ct}{2A^2 t}\right).$$

$$X_5 : \ u = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{(\ln x - \mathfrak{D})^2 + Ct}{2A^2 t}\right) \varphi\left(\frac{\ln x}{t}\right),$$

$$\varphi'' = 0.$$

Τότε $u = \left(K_1 \dfrac{\ln x}{t^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{K_2}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(\dfrac{(\ln x - \mathfrak{D})^2 + Ct}{2A^2 t} + Ct\right).$

όπου $\mathfrak{D} = B - \dfrac{A^2}{2}$ και K, K_1, K_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

Από την άλλη πλευρά, οι τελεστές X_6, X_φ δεν παρέχουν αναλλοίωτες λύσεις.

4.3.6 Η Θεμελειώδης Λύση

Η μελέτη των προβλημάτων αρχικών τιμών για υπερβολικές και παραβολικές γραμμικές Μ.Δ.Ε. μπορούν να περιοριστούν στην κατασκευή μίας ορισμένης λύσης με συγκεκριμένες ιδιαιτερότητες που είναι βιβλιογραφικά γνωστές ως **στοιχειώδεις ή θεμελιώδεις λύσεις** (βλέπε π.χ. [9-11]). Έχει αποδειχθεί ότι [47] για συγκεκριμένες κλάσεις εξισώσεων, με σταθερούς και μεταβλητούς συντελεστές, που επάγουν επαρκώς ευρείες ομάδες συμμετρίας, η θεμελιώδης λύση είναι μία αναλλοίωτη λύση και μπορεί να κατασκευαστεί αξιοποιώντας τη λεγόμενη **αρχή των αναλλοίωτων**.

Έχουμε , εδώ, τη δυνατότητα να βρίσκουμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης (4.16) χρησιμοποιώντας την προσέγγιση από τη θεωρία ομάδων όπως παρουσιάζεται στο [48].

Μπορούμε να περικόψουμε αυτή τη διαδικασία θεωρώντας τη θεμελιώδη λύση $u = u(t, x; t_0, x_0)$ του προβλήματος Cauchy που ορίζεται ως εξής:

$$u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0 \tag{4.30}$$

όπου $t < t_0$.
Και

$$u|_{t\to t_0} = \delta(x - x_0) \tag{4.31}$$

Σύμφωνα με την αρχή των αναλλοίωτων, πρώτα θα πρέπει να να βρούμε μία υποάλγεβρα της άλγεβρας Lie επεκτείνεται από του τελεστές X_i, όπου $i = 1, 2, ..., 5$, και $X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}$, είναι δε επαρκές για την επίτευξη του σκοπού μας, να υποθέσουμε ότι αυτή η πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα μπορεί να βρεθεί παραλείποντας το X_φ, τέτοια ώστε αυτή η υποάλγεβρα να αφήνει αναλλοίωτη την *αρχική πολλαπλότητα* (π.χ την ευθεία $t = t_0$) και ο περιορισμός της στο $t = t_0$ διατηρεί την *αρχική συνθήκη* (4.31). Αυτή, λοιπόν, η υποάλγεβρα είναι μία τρισδιάστατη άλγεβρα που επεκτείνεται με τη χρήση των:

$$\begin{aligned}
Y_1 =&\ 2(t-t_0)\frac{\partial}{\partial t} + (\ln x - \ln x_0 + \mathfrak{D}(t-t_0))x\frac{\partial}{\partial x} + [2C(t-t_0) - 1]u\frac{\partial}{\partial u}, \\
Y_2 =&\ A^2(t-t_0)x\frac{\partial}{\partial x} + [\ln x - \ln x_0 - \mathfrak{D}(t-t_0)]u\frac{\partial}{\partial u}, \\
Y_3 =&\ 2A^2(t-t_0)^2\frac{\partial}{\partial t} + 2A^2(t-t_0)x\ln x\frac{\partial}{\partial x} +
\end{aligned}$$

$$+[(\ln x - \mathfrak{D}(t-t_0))^2 - \ln^2 x_0 + 2A^2C(t-t_0)^2 - A^2(t-t_0)]u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Οι αναλλοίωτες ορίζονται από το παρακάτω σύστημα:

$$Y_1 I = 0,$$
$$Y_2 I = 0,$$
$$Y_3 I = 0.$$

Εφόσον:

$$Y_3 = A^2(t-t_0)Y_1 + \left(\frac{1}{2}A^2(t-t_0) - B(t-t_0) + \ln x + \ln x_0\right)$$

αρκεί να λύσουμε μόνο τις πρώτες δύο εξισώσεις. Η λύση του είναι η παρακάτω:

$$I = ux^{\sigma(t)}\sqrt{t_0 - t}\,e^{\omega(t,x)}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{\mathfrak{D}}{A^2} - \frac{\ln x_0}{A^2(t_0-t)}, \\ \omega(t,x) &= \frac{\ln^2 x + \ln^2 x_0}{2A^2(t_0-t)} + \left(\frac{\mathfrak{D}^2}{2A^2} + C\right)(t_0 - t), \end{aligned} \tag{4.32}$$

.

Οι αναλλοίωτες λύσεις που δίνονται από την εξίσωση $I = K = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho$, και έτσι αποκτά τη μορφή:

$$u = K\frac{x^{-\sigma(t)}}{\sqrt{t_0 - t}}e^{-\omega(t,x)} \tag{4.33}$$

όπου $t < t_0$ και οι $\sigma(t)$, $\omega(t,x)$ ορίζονται από τις εξισώσεις (4.32). Με σχετική άνεση μπορούμε να εξακριβώσουμε ότι η συνάρτηση (4.33) ικανοποιεί την εξίσωση (4.30). Μπορούμε να υπολογίσουμε το σταθερό συντελεστή K από την αρχική συνθήκη (4.31).

Θα χρησιμοποιήσουμε το πολύ γνωστό όριο:

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4s}\right) = 2\sqrt{\pi}\delta(x-x_0) \tag{4.34}$$

και ο τύπος αλλαγής μεταβλητών $z = z(x)$ στο μέτρο Dirac (βλέπε π.χ. [10,π.790]):

$$\delta(x-x_0) = \left|\frac{\partial z(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \delta(z-z_0). \tag{4.35}$$

Για τη συνάρτηση (4.33) έχουμε ότι:

$$\lim_{t\to t_0} u = \lim_{t\to t_0} \frac{K}{\sqrt{t_0-t}} e^{-\omega(t,x)-\sigma(t,x)\ln x} = \lim_{t\to t_0} \frac{K}{\sqrt{t_0-t}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln x_0)^2}{2A2(t_0-t)} - \frac{\mathfrak{D}\ln\mathfrak{x}}{A^2}\right)$$

ή, εναλλακτικά, θέτοντας $s = t_0 - t$, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{A}\ln x$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} u \quad &= K\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}}{A^2}\ln x\right)\lim\nolimits_{s\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{4s}\right)\\ &= 2\sqrt{\pi}K\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}}{A^2}\ln x\right)\delta(z-z_0)\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (4.35) έχουμε ότι:

$$\delta(z-z_0) = \frac{Ax_0}{\sqrt{2}}\delta(x-x_0)$$

και επομένως έχουμε ότι:

$$\lim_{t\to t_0} u = \sqrt{2\pi}AKx_0\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}}{A^2}\ln x_0\right)\delta(x-x_0).$$

Συνεπώς, η αρχική συνθήκη (4.31) μας δίνει:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Ax_0}\exp\left(\frac{\mathfrak{D}}{A^2}\ln x_0\right)$$

Με αυτόν τρόπο, καταλήγουμε στο ότι η θεμελιώδης λύση του προβλήματος Cauchy για την εξίσωση(4.16) είναι:

$$u = \frac{1}{Ax_0\sqrt{2\pi(t_0-t)}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\ln x_0)^2}{2A^2(t_0-t)} - \left(\frac{\mathfrak{D}^2}{2A^2}+C\right)(t_0-t) - \frac{\mathfrak{D}}{A^2}(\ln x - \ln x_0)\right].$$

Παράδειγμα 4.3.6

Η θεμελιώδης λύση μπορεί να βρεθεί επίσης από τη θεμελιώδη λύση:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau}\right) \tag{4.36}$$

της εξίσωσης θερμότητας (4.24) υπό το δεύτερο μετασχηματισμό που παρουσιάζεται στην υποενότητα (4.3.3) με:

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{L}{A}\mathfrak{D}, \\
N &= \frac{L}{A}\mathfrak{D}t_0 - \frac{L}{A}\ln x_0, \\
P &= \frac{L^2}{2}t_0, \\
E &= \frac{Ax_0}{L}e^{Ct_0},
\end{aligned}$$

έτσι ώστε με τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{L}{2}(t_0 - t), \\
y &= \frac{L}{A}\mathfrak{D}(t_0 - t) + \frac{L}{A}(\ln x - \ln x_0), \\
u &= \frac{Ax_0}{L}e^{C(t_0 - t)}u.
\end{aligned}$$

4.4 Μοντέλο Μεταβλητών Δύο Παραγόντων

Οι μέθοδοι της ανάλυσης ομάδων Lie μπορούν με επιτυχία να εφαρμοστούν στη μαθηματική μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών προβλημάτων. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον υπολογισμό των συμμετριών για ένα μοντέλο δύο μεταβλητών που δημιούργησαν οι Jacobs και Jones [50].

4.4.1 Η Εξίσωση Jacobs-Jones

Το μοντέλο Jacobs-Jones περιγράφεται από τη γραμμική Μ.Δ.Ε. παρακάτω:

$$\begin{aligned} u_t = \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + ABCxyu_{xy} + \frac{1}{2}B^2y^2u_{yy} + \\ \left(Dx\ln\frac{y}{x} - Ex^{\frac{3}{2}}\right)u_x + \left(Fy\ln\frac{G}{y} - Hyx^{\frac{1}{2}}\right)u_y - xu \end{aligned} \tag{4.37}$$

όπου οι A, B, C, D, E, F, G, H είναι σταθεροί συντελεστές.

4.4.2 Η Κατηγοριοποίηση Ομάδων

Η εξίσωση (4.37) περιέχει τις παραμέτρους A, B, C, D, E, F, G, H, οι οποίες αποτελούν τα ¨αυθαίρετα στοιχεία’ που αναφέραμε στην ενότητα 4.2.3. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει σε αυτήν την ενότητα μπορεί να προκύψει ότι η άλγεβρα Lie των τελεστών που επάγει η εξίσωση (4.37) με αυθαίρετους συντελεστές, δηλαδή την πρωταρχική άλγεβρα Lie, επεκτείνεται με συγκεκριμένες επιλογές για τους συντελεστές A, B, C, D, E, F, G, H. Βλέπουμε σε αυτό το σημείο ότι η διάσταση της ομάδας συμμετρίας Lie για το μοντέλο .(4.37), σε αντίθεση με το μοντέλο Black-Scholes, ουσιαστικά εξαρτάται από την επιλογή των συντελεστών A, B, C, D, E, F, G, H.

Το αποτέλεσμα της κατηγοριοποίησης ομάδων

Η πρωταρχική ομάδα Lie $L_{\mathcal{P}}$ είναι πεπερασμένης διάστασης και επεκτείνεται από τους τελεστές:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t},\\
X_2 &= u\frac{\partial}{\partial u},\\
X_\omega &= \omega(t,x,y)\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned}
$$

όπου η $\omega(t,x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.37).

Θεωρούμε όλες τις πιθανές επεκτάσεις της $L_{\mathcal{P}}$ για μη εκφυλισμένες εξισώσεις της μορφής (4.37), δηλαδή αυτές που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις:

$$
\begin{aligned}
AB &\neq 0\\
C &\neq \pm 1
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Επιπλέον για να απλοποιήσουμε του υπολογισμούς μας θα προσθέσουμε τον επιπρόσθετο περιορισμό:

$$C \neq 0. \tag{4.39}$$

Η επέκταση της πρωταρχικής άλγεβρας Lie $L_{\mathcal{P}}$

Η πρωταρχική άλγεβρα Lie $L_{\mathcal{P}}$ επεκτείνεται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- ***1η* Περίπτωση:**

  $D = 0$

  $X_3 = e^{Ft} y \dfrac{\partial}{\partial y}$

  Υποπερίπτωση: $AH - BCE = 0$ και $F = 0$.

  Υπάρχει μία επιπλέον επέκταση

  $X_4 = 2AB^2(1 - C^2) ty \dfrac{\partial}{\partial y} + (2BC \ln x - 2A \ln y + (B - AC)ABt) u \dfrac{\partial}{\partial u}$

- ***2ηΠερίπτωση:***

  $D \neq 0,$

  $F = -(\dfrac{BD}{2AC}),$

  $H = 0,$

  $X_3 = \exp\left(\dfrac{BD}{2AC} t\right) y \dfrac{\partial}{\partial y} + \left(\dfrac{D}{ABC} \ln \dfrac{G}{y} + 1\right) \exp\left(\dfrac{BD}{2AC} t\right) u \dfrac{\partial}{\partial u}$

- ***3η* Περίπτωση:**

  $D \neq 0,$

  Το F προσδιορίζεται από την εξίσωση:

  $A^2F^2 - A^2D^2 + 2ABCDF + B^2D^2 = 0.$

  Οι σταθερές E και H συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$BE(ACF+ACD+BD)=AH(AF+AD+BCD),$$

$$X_3=e^{-Dt}y\frac{\partial}{\partial y}-\left(\frac{ACF+ACD+BD}{A^2B(1-C^2)}\ln x-\frac{AF+AD+BCD}{AB^2(1-C^2)}\ln y+\right.$$

$$\left.+\frac{A^2CF+A^2CD-B^2CD-ABF}{2ABD(1-C^2)}+\frac{F\ln G(BCD+AF+AD)}{AB^2D(1-C^2)}\right)e^{-Dt}u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Παρατήρηση 4.4.2.1

Το πιθανότερο είναι ο περιορισμός (4.39) να μην επηρεάζει την κατηγοριοποίηση ομάδων. Για παράδειγμα, μία από της απλούστερες εξισώσεις της μορφής (4.38) είναι η:

$$u_t=x_2u_{xx}+y^2u_{yy}-xu$$

η οποία επάγει δύο επιπρόσθετους τελεστές στην $L_{\mathcal{P}}$ και περιέχεται στην υποπερίπτωση της περίπτωσης 1 της κατηγοριοποίησης.

Παρατήρηση 4.4.2.2

Το αποτέλεσμα της κατηγοριοποίησης μας δείχνει ότι η εξίσωση (4.37) δεν μπορεί να μετασχηματιστεί, σε καμία από της περιπτώσεις της κατηγοριοποίησης, στην εξίσωση θερμότητας·

$$v_t=v_{xx}=v_{zz}$$

Πράγματι, η εξίσωση θερμότητας επάγει μία επέκταση της $L_{\mathcal{P}}$ με επτά επιπλέον τελεστές (βλέπε π.χ. [τόμος 2, ενότητα 7.2]) ενώ η εξίσωση (4.37) μπορεί να επάγει μέγιστη επέκταση με δύο τελεστές.

4.4.3 Αναλλοίωτες Λύσεις

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να αξιοποιηθούν στην κατασκευή ακριβών (αναλλοίωτων λύσεων) της εξίσωσης (4.37). Θα λάβουμε υπόψιν σε αυτό το σημείο παραδείγματα λύσεων αναλλοίωτων υπό δισδιάστατες υποάλγεβρες της άλγεβρας συμμετρίας Lie. Στη συνέχεια μία λύση της εξίσωσης (4.37) βρίσκεται από μία γραμμική δεύτερης τάξης συνήθη διαφορική εξίσωση και με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα ανάγεται σε μία εξίσωση Riccati. Τα παραδείγματα αυτά θα θα μας είξουν τον γενικό αλγόριθμο που μπορεί με ευκολία να εφαρμοστεί και σε άλλες περιπτώσεις.

Για την κατασκευή μίας λύσεις αναλλοίωτης υπό μία δισδιάστατη άλγεβρα συμμετρίας απαιτείται η επιλογή δύο τελεστών:

$$Y_1 = \xi_1^0(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1^1(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_1^2(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_1(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

$$Y_1 = \xi_2^0(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi_2^1(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2^2(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_2(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

που επάγονται από την εξίσωση (4.37) σέβονται τη σχέση της άλγεβρας Lie, δηλαδή:

$$[Y_1, Y_2] = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$$

όπου λ_1, λ_2 σταθερές. Η δισδιάστατη υποάλγεβρα Lie που παράγεται από τους τελεστές Y_1, Y_2, θα συμβολίζεται με:

$$(Y_1, Y_2).$$

Αυτή η άλγεβρα έχει δύο συναρτησιακά ανεξάρτητες αναλλοίωτες $I_1(t,x,z,u)$, $I_2(t,x,z,u)$ αν έχουμε:

$$rank \begin{pmatrix} \xi_1^0 & \xi_1^1 & \xi_1^2 & \eta_1 \\ \xi_2^0 & \xi_2^1 & \xi_2^2 & \eta_2 \end{pmatrix} = 2$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις, οι αναλλοίωτες προσδιορίζονται από το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 I = 0 \\ Y_2 I = 0 \end{Bmatrix}$$

Για να υπάρχουν αναλλοίωτες λύσεις προϋποτίθεται ότι:

$$rank\left(\frac{\partial I_1}{\partial u}, \frac{\partial I_2}{\partial u}\right) = 1$$

Τότε οι αναλλοίωτες λύσεις θα έχουν τη μορφή:

$$I_2 = \varphi(I_1) \tag{4.40}$$

Αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (4.40) στην εξίσωση (4.37) καταλήγουμε σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση της συνάρτησης φ.

Παράδειγμα 4.4.3

Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση:

$$u_t = \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + ABCxyu_{xy} + \frac{1}{2}B^2y^2u_{yy} - Ex^{\frac{3}{2}}u_x - \frac{BCE}{A}yx^{\frac{1}{2}}u_y - xu \tag{4.41}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω κατηγοριοποίηση ομάδων, η εξίσωση (4.41) επάγει τους παρακάτω τελεστές:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial t},\\
X_2 &= u\frac{\partial}{\partial u},\\
X_3 &= y\frac{\partial}{\partial y},\\
X_4 &= 2AB^2(1-C^2)ty\frac{\partial}{\partial y} + [2BC\ln x - 2A\ln y + (B-AC)ABt]u\frac{\partial}{\partial u},\\
X_\omega &= \omega(t,x,y)\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

όπου η $\omega(t,x,y)$ αποτελεί λύση του της εξίσωσης (4.41).

Θα θεωρήσουμε, τώρα, αναλλοίωτες λύσεις ως προς τις τρεις διαφορετικές δισδιάστατες υποάλγεβρες της άλγεβρας (4.42).

1^{η}: Η υποάλγεβρα $\langle X_1, X_3\rangle$ έχει τις ανεξάρτητες αναλλοίωτες:

$$I_1 = x$$
$$I_2 = u$$

Έτσι, η αναλλοίωτη λύση παίρνει τη μορφή:

$$u = \varphi(x) \tag{4.43}$$

και προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$\frac{1}{2}A^2x^2\varphi'' - Ex^{\frac{3}{2}}\varphi' - x\varphi = 0 \tag{4.44}$$

Που ανάγεται στην εξίσωση Riccati:

$$\psi' + \psi - \frac{2E}{A^2\sqrt{x}}\psi - \frac{2}{A^2x} = 0$$

με τη συνήθη αντικατάσταση, δηλαδή:

$$\psi = \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{4.45}$$

2^{η}: Η υποάλγεβρα $\langle X_1 + X_2, X_3\rangle$ έχει τις ανεξάρτητες αναλλοίωτες:

$$I_1 = x$$
$$I_2 = ue^{-t}.$$

Επομένως, η αντίστοιχη αναλλοίωτη λύση θα έχει τη μορφή:

$$u = e^t\varphi(x) \tag{4.46}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.41) βρίσκουμε την:

$$\frac{1}{2}A^2x^2\varphi'' - Ex^{\frac{3}{2}}\varphi' - (x+1)\varphi = 0, \tag{4.47}$$

η οποία ανάγεται σε μία εξίσωση Riccati με την αντικατάσταση (4.45).

3^{η}: Η υποάλγεβρα $\langle X_1, X_2 + X_3\rangle$ έχει τις αναλλοίωτες:

$$I_1 = x$$
$$I_2 = \frac{u}{y}.$$

Οι αναλλοίωτες λύσεις θα έχουν τη μορφή:

$$u = y\varphi(x), \tag{4.48}$$

όπου η εξίσωση $\varphi(x)$ βρίσκεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{1}{2}A^2x^2\varphi'' + (ABCx - Ex^{\frac{3}{2}})\varphi' - \left(\frac{BCE}{A}X^{\frac{1}{2}} + x\right)\varphi = 0 \tag{4.49}$$

Και πάλι με την αντικατάσταση (4.45), η παραπάνω εξίσωση ανάγεται σε Riccati.

4.4.4 Άπειρο Ιδεώδες Ως Γεννήτορας Καινούριων Λύσεων

Θυμίζουμε ότι το άπειρο σύνολο τελεστών X_ω δεν παρέχει άπειρες λύσεις με την ευθεία μέθοδο, την οποία είδαμε στην υποενότητα 4.3.5. Ωστόσο, μπορούμε να παράξουμε νέες λύσεις από τις προηγούμενες, ήδη γνωστές, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Έστω $u = \omega(t, x, y)$ μία γνωστή λύση της εξίσωσης (4.37) τέτοια ώστε ο τελεστής X_ω να επάγεται από την ίδια εξίσωση. Τότε, αν ο X είναι οποιοσδήποτε τελεστής που επάγει η εξίσωση (4.37), έχουμε:

$$[X_\omega, X] = X_{\bar{\omega}}, \tag{4.50}$$

όπου $\bar{\omega}(t, x, y)$ είναι μία λύση της εξίσωσης (4.37), στη γενική περίπτωση διαφορετική από την $\omega(t, x, y)$. Η σχέση (4.50) μας δίνει ότι το σύνολο L_ω των τελεστών της μορφής X_ω αποτελούν ένα *ιδεώδες* της άλγεβρας συμμετρίας Lie. Επιπλέον, επειδή το σύνολο των λύσεων $\omega(t, x, y)$ είναι άπειρο, η L_ω θα ονομάζεται **άπειρο ιδεώδες**.

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι δεδομένης μίας λύσης $\omega(t, x, y)$, ο τύπος (4.50) μας δίνει μία καινούρια λύση $\bar{\omega}(t, x, y)$ της εξίσωσης (4.37). Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στις λύσεις του παραδείγματος της προηγούμενης υποενότητας θέτοντας $X = X_4$ από την (4.42).

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1$^\eta$: Ξεκινώντας από την εξίσωση (4.43), έχουμε $\omega(t, x, y) = \varphi(x)$, όπου $\varphi(x)$ είναι η εξίσωση που προσδιορίζεται από την διαφορική εξίσωση (4.44). Τότε:

$$[X_\omega, X_4] = (2BC \ln x 2A \ln y + (B - AC)ABt)\varphi(x)\frac{\partial}{\partial u}$$

Επομένως, η νέα λύση που προκύπτει, $u = \bar{\omega}(t, x, y)$, είναι:

$$\bar{\omega}(t, x, y) = \left[(2BC \ln x - 2A \ln y + (B - AC)ABt)^2\varphi(x) + 4A^2B^2(1 - C^2)t\varphi(x)\right]\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.51}$$

όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (4.44).
Μπορούμε, τώρα να επαναλάβουμε τη διαδικασία θεωρώντας την λύση (4.51) ως $\omega(t,x,y)$ στην εξίσωση (4.50). Τότε:

$$[X_\omega, X_4] = [(2BC\ln x - 2A\ln y + (B-AC)ABt)^2\varphi(x) + 4A^2B^2(1-C^2)t\varphi(x)]\frac{\partial}{\partial u}.$$

Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στη λύση:

$$u = [(2BC\ln x - 2A\ln y + (B-AC)ABt)^2 + 4A^2B^2(1-C^2)t]\varphi(x), \tag{4.52}$$

όπου η $\varphi(x)$ αποτελεί και πάλι μία λύση τη εξίσωσης (4.44).

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άπειρο σύνολο λύσεων της εξίσωσης (4.41). Μπορούμε να βρίσκουμε επιπρόσθετες νέες λύσεις αντικαθιστώντας τον τελεστή X_4 με οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των τελεστών (4.42).

$2^η$: Για τη λύση (4.46), $\omega(t,x,y) = e^t\varphi(x)$, όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (4.47). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$[X_\omega, X_4] = (2BC\ln x - 2A\ln y + (B-AC)ABt)e^t\varphi(x)\frac{\partial}{\partial u},$$

και η νέα λύση, έστω $u = \bar{\omega}(t,x,y)$, θα έχει τη μορφή:

$$\bar{\omega}(t,x,y) = (2BC\ln x - 2A\ln y + (B-AC)ABt)e^t\varphi(x), \tag{4.53}$$

όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (4.47). Στη συνέχεια μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία.

$3^η$: Για τη λύση(4.48), δηλαδή $\omega(t,x,y) = y\varphi(x)$, όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (4.49). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$[X_\omega, X_4] = (2BC\ln x - 2A\ln y + (2BC^2 - B - AC)ABt)y\varphi(x)\frac{\partial}{\partial u},$$

όπου η συνάρτηση $\varphi(x)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (4.49). Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία καταλήγουμε σε άπειρες σειρές λύσεων.

4.5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, η ανάλυση ομάδων Lie εφαρμόζεται στα μοντέλα των Black-Scholes-Merton και Jacobs-Jones. Η προσέγγιση αυτή μας δίνει μεγάλο εύρος αναλυτικών λύσεων των ζητούμενων εξισώσεων.

Για την εξίσωση Black-Schles, επάγεται ο μετασχηματισμός της στην εξίσωση τη θερμότητας. Ο οποίος μας επιτρέπει να λύσουμε προβλήματα αρχικών τιμών με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που δίνεται στην [3]. Επιπλέον, χρησιμοποιήσαμε την αρχή της αμεταβλητότητας για την κατασκευή θεμελιωδών λύσεων, οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική ανάλυση κάποιου αυθαίρετου προβλήματος αρχικών τιμών.

Για το μοντέλο των Jacobs-Jones, παρουσιάζουμε την κατηγοριοποίηση ομάδων, η οποία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διάσταση της άλγεβρας συμμετρίας Lie ουσιαστικά εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου. Ένα επιπλέον συμπέρασμα που προκύπτει από την κατηγοριοποίηση ομάδων είναι ότι η εξίσωση Jacobs-Jones δεν μπορεί να μετασχηματιστεί στην κλασική δισδιάστατη εξίσωση θερμότητας.

Βιβλιογραφία

[1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing.* ERIC, 1972.

[2] Gerd Baumann. *Symmetry analysis of differential equations with Mathematica* With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). Springer-Verlag–TELOS, New York, 2000.

[3] Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, 1973, 637-654.

[4] George W. Bluman and Stephen C. Anco. *Symmetry and integration methods for differential equations.* Vol. 154. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 2002.

[5] George W. Bluman, Alexei F. Cheviakov, and Stephen C. Anco. *Applications of symmetry methods to partial differential equations.* Vol. 168. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2010. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978- 0- 387- 68028-6.

[6] G. W. Bluman and J. D. Cole. *Similarity methods for differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 13. New York: Springer-Verlag, 1974.

[7] George W. Bluman and Sukeyuki Kumei. *Symmetries and differential equations.* Vol. 81. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1989.

[8] DR Brecher and AE Lindsay. “Results on the CEV process, past and present”. In: *preprint* (2010).

[9] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. New York: Springer, 2011.

[10] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models—theory and practice.* Second. Springer Finance. With smile, inflation and credit. Berlin: Springer-Verlag, 2006

[11] Nicolette C. Caister, John G. O'Hara, and Keshlan S. Govinder. "Solving the Asian option PDE using Lie symmetry methods". In: *Int. J. Theor. Appl. Finance* 13.8 (2010), pp. 1265–1277. URL: http://dx.doi.org/10.1142/S0219024910006194.

[12] Ren-Raw Chen and Cheng-Few Lee. "A Constant Elasticity of Variance (CEV) Family of Stock Price Distributions in Option Pricing, Review, and Integration". In: *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management.* Springer, 2010.

[13] Choquet-Bruhat, Y., "Sur la théorie des propagateurs", *Annales di Matematica*, sér. 4, 64, 1964.

[14] HW Chuang, YL Hsu, and CF Lee. "Application of the Characteristic Function in Financial Research". In: *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management.* Springer, 2010.

[15] Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.

[16] F.G. Cordoni and L. Di Persio. "Transition density for the CIR process by Lie symmetries and application to ZCB pricing". In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* (preprint).

[17] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr., and Stephen A. Ross. "A theory of the term structure of interest rates". In: Econometrica 53.2 (1985). URL: http://dx.doi. org/10.2307/1911242.

[18] M. J. Craddock and A. H. Dooley. "Symmetry group methods for heat kernels". In: *J. Math. Phys.* 42.1 (2001), pp. 390–418. URL: http://dx.doi.org/10.1063/1. 1316763.

[19] M. J. Craddock and A. H. Dooley. *"On the equivalence of Lie symmetries and group representations".* In: J. Differential Equations 249.3 (2010), pp. 621–653. URL: http: //dx.doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.003.

[20] Mark Craddock and Kelly A. Lennox. “Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions”. In: J. Differential Equations 232.2 (2007), pp. 652–674. ISSN: 0022-0396. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2006.07.011.

[21] Mark Craddock and Kelly A. Lennox. “Lie symmetry methods for multi-dimensional parabolic PDEs and diffusions”. In: J. *Differential Equations* 252.1 (2012), pp. 56–90. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2011.09.024.

[22] Mark Craddock and Kelly A. Lennox. “The calculation of expectations for classes of diffusion processes by Lie symmetry methods”. In: *Ann. Appl. Probab.* 19.1 (2009), pp. 127–157. URL: http://dx.doi.org/10.1214/08-AAP534.

[23] Mark Craddock and Eckhard Platen. *Symmetry group methods for fundamental solutions and characteristic functions.* School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, 2003.

[24] Mark Craddock and Eckhard Platen. “Symmetry group methods for fundamental solutions”. In: J. *Differential Equations* 207.2 (2004), pp. 285–302. URL: http://dx. doi.org/10.1016/j.jde.2004.07.026.

[25] Mark Craddock and Eckhard Platen. “On explicit probability laws for classes of scalar diffusions”. In: *Quantitative Finance Research Centre Research Paper* 246 (2009).

[26] Mark Craddock. “Fundamental solutions, transition densities and the integration of Lie symmetries”. In: J. *Differential Equations* 246.6 (2009), pp. 2538–2560. URL: http: //dx.doi.org/10.1016/j.jde.2008.10.017

[27] Mark Craddock. “Symmetry groups of partial differential equations, separation of variables, and direct integral theory”. In: *J. Funct. Anal.* 125.2 (1994), pp. 452–479. URL: http://dx.doi.org/10.1006/jfan.1994.1133

[28] Mark Craddock. “The symmetry groups of linear partial differential equations and representation theory. I”. In: *J. Differential Equations* 116.1 (1995), pp. 202–247. URL: http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1995.1034.

[29] Jakša Cvitanic and Fernando Zapatero. ´ *Introduction to the economics and mathematics of financial markets.*Cambridge, MA: MIT Press, 2004.

[30] Yu. V. Egorov and M. A. Shubin. *Foundations of the classical theory of partial differential equations.* Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[31] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Vol. 194. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2000.

[32] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* Second. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010

[33] William Feller. "Two singular diffusion problems". In: *Ann. of Math.* (2) 54 (1951), pp. 173–182.

[34] Avner Friedman. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1964.

[35] R. K. Gazizov and N. H. Ibragimov. "Lie symmetry analysis of differential equations in finance". In: *Nonlinear Dynam.* 17.4 (1998), pp. 387–407. ISSN: 0924-090X. DOI: 10.1023/A:1008304132308. URL: http://dx.doi.org/10.1023/A: 1008304132308

[36] Robert Gilmore. *Lie groups, physics, and geometry.* An introduction for physicists, engineers and chemists. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[37] Joanna Goard. "Fundamental solutions to Kolmogorov equations via reduction to canonical form". In: *J. Appl. Math. Decis. Sci.* (2006), Art. ID 19181, 24. URL: http : //dx.doi.org/10.1155/JAMDS/2006/19181.

[38] J. Goard. "New solutions to the bond-pricing equation via Lie's classical method". In: *Math. Comput. Modelling* 32.3-4 (2000), pp. 299–313. URL: http://dx.doi.org/ 10.1016/S0895-7177(00)00136-9.

[39] K. S. Govinder. "Lie subalgebras, reduction of order, and group-invariant solutions". In: *J. Math. Anal. Appl.* 258.2 (2001), pp. 720–732. URL: http://dx.doi.org/10. 1006/jmaa.2001.7513.

[40] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, 1923. (Reprinted by Dover Publications, New York, 1952.)

[41] Brian C. Hall. Lie groups, Lie algebras, and representations. Vol. 222. Graduate Texts in Mathematics. An elementary introduction. New York: Springer-Verlag, 2003.

[42] Steven L Heston. “A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”. In: *Review of financial studies* 6.2 (1993), pp. 327-343.

[43] Y. L. Hsu, T. I. Lin, and C. F. Lee. “Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: integration and detailed derivation”. In: *Math. Comput. Simulation* 79.1 (2008), pp. 60–71. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2007.09.012.

[44] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Vol. 9. Graduate Texts in Mathematics. Second printing, revised. New York: Springer-Verlag, 1978.

[45] Peter E. Hydon. *Symmetry methods for differential equations.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. A beginner’s guide. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

[46] Ibragimov, N. H. (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 1, 1994; Vol. 2, 1995; Vol. 3, 1996, CRC Press, Boca Raton, FL.

[47] Ibragimov, N. H., *Primer on Group Analysis*, Znanie, Moscow, 1989.

[48] Ibragimov, N. H., "Differential equations with distributions: Group theoretic treatment of fundamental solutions", in *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 3, N. H. Ibragimov (ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, pp. 69–90.

[49] N. H. Ibragimov. *Transformation groups and Lie algebras.* 2009. URL: http ://gammett.ugatu.su/images/docs/publ-ibr/tr-groups-nhi.pdf

[50] Jacobs, R. L. and Jones, R. A., "A two factor latent model of the term structure of interest rates", Economics Department, Simon Fraser University, Burnaby, B.C., Canada, 1986.

[51] M. S. Joshi. *The concepts and practice of mathematical finance.* Second. Mathematics, Finance and Risk. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[52] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Second. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

[53] Cheng-Few Lee, Alice C Lee, and John Lee. *Handbook of quantitative finance and risk management.* Springer, 2010. [Olv93] Peter J. Olver. Applications of Lie g

[54] Lie, S., "On integration of a class of linear partial differential equations bymeans of definite integrals", *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* VI(3), 1881, 328–368 [in German]. Reprinted in S. Lie, *Gesammelte Abhandlundgen*, Vol. 3, paper XXXV. (English translation published in N. H. Ibragimov (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 2, 1995, CRC Press, Boca Raton, FL.)

[55] Sophus Lie. "Theorie der transformationsgruppen I". In: *Mathematische Annalen* 16.4 (1880), pp. 441–528.

[56] Chi Fai LO, PH Yuen, and CH Hui. "Constant elasticity of variance option pricing model with time-dependent parameters". In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3.04 (2000), pp. 661–674

[57] Merton R. C., "Ootimum consumption and portfolio rules in a continuous time model", *Journal of Economic Theory* 3(4), 1971, 373-413.

[58] Merton R. C., "Theory of rational option pricing" *Bell Journal of Economic and Management Sciences* 4, 1973, 141-183.

[59] Peter J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations.* Second. Vol. 107. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1993. URL: http://dx. doi.org/10.1007/978-1-4612-4350-2.

[60] Ovsiannikov, L. V. *Group analysis of differential equations.* New York: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1982.

[61] Ovsyannikov, L. V., *Group Properties of Differential Equations*, USSR Academy of Sciences, Siberian Branch, Novosibirsk, 1962 [in Russian].

[62] di Elea Parmenide. *Περί Φύσεως*, Peri Physeos. 500 a.C

[63] Andrea Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing.* Vol. 2. Bocconi and Springer Series. Milan: Springer, 2011. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-1781-8.

[64] Andrea Pascucci. *PDE and martingale methods in option pricing.* Vol. 2. Bocconi and Springer Series. Milan: Springer, 2011. URL: http://dx.doi.org/10.1007/ 978-88-470-1781-8.

[65] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action.* Universitext. From modelling to theory. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.

[66] Sharp, K. P., "Stochastic differential equations in finance", *Applied Mathematics and Computation* 39, 1990, 207–224.

[67] W. Sinkala, P. G. L. Leach, and J. G. O'Hara. "Invariance properties of a general bondpricing equation". In: *J. Differential Equations* 244.11 (2008), pp. 2820–2835. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2008.02.044.

[68] W. Sinkala, P. G. L. Leach, and J. G. O'Hara. "Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: their computation as group-invariant solutions". In: Math. Methods Appl. Sci. 31.6 (2008), pp. 665–678. URL: http://dx.doi.org/10.1002/mma.935

[69] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. II. Springer Finance.* Continuous-time models. New York: Springer-Verlag, 2004.

[70] Hans Stephani. *Differential equations. Their solution using symmetries.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[71] V. S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations.* Vol. 102. Graduate Texts in Mathematics. Reprint of the 1974 edition. New York: Springer-Verlag, 1984.