ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

«ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ»

Του Βενέτη Νικόλαου

Επιβλέπων καθηγητής : κ. Ξανθόπουλος Στυλιανός

Φεβρουάριος 2021

Εγκρίθηκε από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή

κ.κ. Στυλιανό Ξανθόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή (επιβλέποντα),

Σταύρο Βακερούδη, Επίκουρο Καθηγητή,

Χρήστο Κουντζάκη, Επίκουρο Καθηγητή.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την διαχείριση χαρτοφυλακίου μέσω μιας συγκριτικής ανάλυσης διαφόρων τεχνικών βελτιστοποίησης. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη μη-γραμμική προσέγγιση των Newey & Powell (1987) για την ποσοτικοποίηση της αξίας σε κίνδυνο (expectiles VaR) ενώ παράλληλα υιοθετούνται και άλλες συμβατικές προσεγγίσεις αποτίμησης της αξίας σε κίνδυνο (VaR και CVaR). Χρησιμοποιώντας δεδομένα χρηματοοικονομικών δεικτών από τις σημαντικότερες διεθνείς χρηματαγορές τα εμπειρικά ευρήματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας τάσσονται υπέρ της αποτελεσματικότερης βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων μέσω μη γραμμικών τεχνικών όπως η ασύμμετρη αξία σε κίνδυνο των Newey & Powell (1987). Η βελτιστοποίηση βελτιώνεται περαιτέρω με την υιοθέτηση στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών στα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (MS-EGARCH).

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Η αποτελεσματική διαχείριση κινδύνου γίνεται ολοένα και πιο απαραίτητη για την εύρυθμη λειτουργία του χρηματοοικονομικού συστήματος. Η θεμελιώδης σχέση μεταξύ απόδοσης και κινδύνου αποτυπώνεται σε όλες τις εκφάνσεις οικονομικής και επενδυτικής δραστηριότητας των οικονομούντων ατόμων και αποτελεί τη βάση για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου άρα και την τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων. Κομβικό ρόλο στην διαμόρφωση της παραπάνω σχέσης και της τιμολόγησης των χρηματοοικονομικών προϊόντων διαδραματίζει η διάθεση και αφομοίωση της πληροφορίας αναφορικά με τα μακροοικονομικά και μικροοικονομικά δεδομένα. Αξίζει να σημειωθεί οτι η αποτελεσματική ροή της πληροφορίας δύναται να συμβάλει στην εύρυθμη λειτουργία των χρηματαγορών, και επομένως στην ανακατονομή του πλούτου μέσω επενδύσεων που σκοπό έχουν την οικονομική ανάπτυξη και την βελτίωση του βιοτικού επιπέδου του ευρύτερου κοινωνικού συνόλου.

Στη βάση των παραπάνω έχουν αναπτυχθεί αρκετές προσεγγίσεις για τον ποσοτικό προσδιορισμό και αξιολόγηση του κινδύνου μεμονωμένων χρηματοοικονομικών προϊόντων αλλά και του συνόλου των επενδυτικών επιλογών με την κατασκευή καλά διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων. Ωστόσο, η επιλογή του μέτρου κινδύνου είναι μείζονος σημασίας.

Ο αντικειμενικός σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η υιοθέτηση μη γραμμικών προσεγγίσεων στην κλασική διαχείριση χαρτοφυλακίου και η συγκριτική ανάλυση με συμβατικές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας δεδομένα από διάφορες χρηματαγορές. Προς αυτή τη κατεύθυνση δίνεται έμφαση στις ακραίες τιμές των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων με την υιοθέτηση της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Πιο συγκεκριμένα υιοθετείται το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο και κάποιες άλλες προεκτάσεις τους με έμφαση στη μη-γραμμική προσέγγιση, το expectiles VaR, σύμφωνα με τους Newey & Powell (1987).

Το ES, επίσης γνωστό ως «Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο» (Conditional Value at Risk) (CVaR) επιτρέπει μια καλύτερη προσέγγιση σε ακραίους κινδύνους (extreme risks). Σε αντίθεση με το VaR, το CVaR μετρά την πραγματική έκθεση σε κίνδυνο όταν οι συνθήκες δεν είναι ευνοϊκές για τον επενδυτή. Επιπλέον, οι μαθηματικές του ιδιότητες το καθιστούν συνεπές (coherent) μέτρο κινδύνου. Πρόσφατα δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στην έννοια της συνέπειας των μέτρων κινδύνου στην ποσοτική έρευνα χρηματοδότησης. Αν και το CVaR λέγεται ότι είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου, έχει επικριθεί για έλλειψη σε επιλεξιμότητα (elicitability), δηλαδή τη δυνατότητα εφαρμογής ενός backtest προκειμένου να συγκριθεί η απόδοση διαφορετικών επενδυτικών στρατηγικών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, δίνεται έμφαση στη μη γραμμικότητα του μέτρου αξία σε κίνδυνο υιοθετώντας το expectile VaR των Newey & Powell (1987). Τα expectiles συνδέονται στενά με τα quantiles και έχουν πολλές ιδιότητες που είναι ευνοϊκές για την εφαρμογή τους ως μέτρο για την ποσοτική διαχείριση του κινδύνου. Προκύπτει από την ελαχιστοποίηση των ασύμμετρων σταθμισμένων μέσων τετραγώνων σφαλμάτων (asymmetrically weighted mean squared errors) και, ως εκ τούτου, είναι πιο ευαίσθητα σε ακραίες τιμές της κατανομής. Κατά την εφαρμογή τους στη διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων, τα expectiles έχουν αποδειχθεί ότι είναι τα μόνα συνεπή και επιλέξιμα μέτρα κινδύνου. Το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι η διερεύνηση της αναγκαιότητας υιοθέτησης του expectile VaR έναντι του συμβατικού VaR και CVaR.

Από μαθηματικής απόψεως τα expectiles θα μπορούσαν να είναι καταλληλότερα για τον βέλτιστο ποσοτικό προσδιορισμό και εκτίμηση του κινδύνου ειδικά στις ακραίες τιμές σε σύγκριση με το VaR και το CVaR. Επιπλέον, στη παρούσα διατριβή υιοθετείται η προσέγγιση των στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών ώστε να αποτυπώσουν καλύτερα τις δομικές αλλαγές στην συμπεριφορά των επενδυτών (θεσμικών και μη) μέσα σε ένα καθεστώς έντονων μεταβολών. Για τη διενέργεια αυτής της σύγκρισης θα υιοθετηθεί η προσέγγιση διαχείρισης χαρτοφυλακίου όπως αναπτύχθηκε από τον Markowitz (1952) αλλά με χρήση διαφορετικών μέτρων κινδύνου, όπως το VaR, το CVAR, το expectiles VaR και το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (GARCH).

Τα εμπειρικά ευρήματα της διπλωματικής εργασίας τάσσονται υπέρ της σημαντικής συμβολής των μη γραμμικών υποδειγμάτων στην ανάλυση και διαχείριση χαρτοφυλακίου, ιδιαίτερα σε καθεστώς έντονων μεταβολών ή στη χρήση δεδομένων αναπτυσσόμενων αγορών.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται μια επισκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με το expectile VaR ενώ ακολουθεί η αναφορά στα διάφορα μέτρα κινδύνου στη χρηματοοικονομική. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα στοχαστικά υποδείγματα διαρθρωτικών μεταβολών για να ακολουθήσει η ενότητα της διαχείρισης του χαρτοφυλακίου, τα εμπειρικά ευρήματα και τα συμπεράσματα.

2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η αποτίμηση του κινδύνου των χρηματοοικονομικών προϊόντων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για την αποτίμηση τους ιδιαίτερα όταν εξετάζεται υπό το πρίσμα της διαχείρισης ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου όπου τα οικονομούντα άτομα αποζημιώνονται μόνο για το συστηματικό μέρος του κινδύνου στο οποίο εκτίθενται. Σύμφωνα με τη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου που θεμελιώθηκε από τον Markowitz (1952), και την εδραίωση των υποδειγμάτων αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων από τους Treynor (1961), Sharpe (1964), Litner (1965) και Mossin (1966), η έννοια του κινδύνου είναι δυναμική και έχει βαρύνουσα σημασία για τους επενδυτές. Ωστόσο, οι ιδιαιτερότητες των κατανομών των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων που αφορούν στη μη στασιμότητά τους, στην ασυμμετρία, στη λεπτοκύρτωση και στις διαρθωτικές μεταβολές καθιστούν την διερεύνηση του προσδιορισμού του κινδύνου επιτακτική.

2.1 Μέτρα Κινδύνου

Αν ανατρέξουμε στις ρίζες του μέτρου VaR, θα σταθούμε στην Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (BCBS) η οποία ιδρύθηκε με σκοπό να προτείνει ρυθμιστικά μέτρα στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα για την εύρυθμη λειτουργία τους. Αυτή η εποπτεία καθιστά δυνατή την προώθηση της διεθνούς συνεργασίας στον τομέα του προληπτικού ελέγχου και την αναμετάδοση βέλτιστων τραπεζικών πρακτικών όσον αφορά την κάλυψη κινδύνων. Η BCBS καθορίζει έναν αριθμό κατευθυντήριων γραμμών και ελάχιστων προτύπων προκειμένου να διασφαλίσει την οικονομική ευρωστία (financial soundness), ιδίως καθορίζοντας ένα συγκεκριμένο επίπεδο κεφαλαιακής απαίτησης για επενδύσεις. Για παράδειγμα σε απάντηση στην οικονομική κρίση του 2008, η Επιτροπή της Βασιλείας επαναπροσδιόρισε το ρυθμιστικό πλαίσιο για τον κίνδυνο αγοράς δημοσιεύοντας το 2012 και το 2013 μια σειρά εγγράφων με τίτλο Fundamental Review of The Trading Book. Αυτά τα συμβουλευτικά έγγραφα δημοσιεύθηκαν ως απάντηση στις αναθεωρήσεις του πλαισίου κινδύνου της Basel II, προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα υπόλοιπα διαρθρωτικά ελαττώματα που δεν είχαν ληφθεί υπόψη προηγουμένως. Αυτές οι δημοσιεύσεις αποτελούν μια σημαντική αλλαγή για το χρηματοπιστωτικό σύστημα όσον αφορά την εκτίμηση του κινδύνου αγοράς. Αποκαλύπτουν τον γενικό στόχο της Επιτροπής για τη μεταρρύθμιση του τραπεζικού τομέα με τη θέσπιση νέων προτύπων, ιδίως την ενίσχυση των κεφαλαιακών απαιτήσεων ενόψει του κινδύνου αγοράς. Μεταξύ των μεταρρυθμίσεων που προβλέπονται σε αυτά τα συμβουλευτικά έγγραφα είναι η σημαντική απόφαση να αντικατασταθεί το τυπικό ποσοτικό μέτρο κινδύνου, η Αξία στον κίνδυνο (Value at Risk) (VaR), από το Expected Shortfall (ES), προκειμένου να κατανοηθεί καλύτερα ο κίνδυνος ουράς (tail risk) σε περιόδους χρηματοοικονομικών δυσχερειών.

Η αναθεώρηση του συστήματος προληπτικής εποπτείας, που διέπει τον κίνδυνο αγοράς, αναπτύσσεται περαιτέρω στη δημοσίευση με τίτλο «Minimum Capital Requirements for Market Risk», που δημοσιεύθηκε τον Ιανουάριο του 2016, και τον Ιανουάριο του 2019 από το BCBS. Αυτό το τυποποιημένο έγγραφο στοχεύει στον επίσημο επαναπροσδιορισμό των προτύπων όσον αφορά τις κεφαλαιακές απαιτήσεις. Επιβεβαιώνει την αντικατάσταση του VaR από το ES, το οποίο χρησιμοποιούνταν ως σημείο αναφοράς για την εκτίμηση κινδύνου αγοράς μέχρι τότε. Αυτή η αναθεωρημένη προσέγγιση μέτρησης κινδύνων παρουσιάζεται ως βελτίωση του τρέχοντος εσωτερικού μοντέλου και οφείλεται στην ανάγκη να καταστεί το πλαίσιο κινδύνου αγοράς πιο ισχυρό. Αυτές οι μεταρρυθμίσεις ολοκληρώνονται στις τυποποιημένες δημοσιεύσεις της Βασιλείας III, το οποίο παγιώνει τις μεταρρυθμίσεις που αντιμετωπίζουν τις αδυναμίες της ρυθμιστικής δομής πριν από την κρίση. Η σύγχρονη θεωρία διαχείρισης κινδύνων αποκάλυψε ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μέτρα στην πράξη την αξία στον κίνδυνο (Value at Risk). Το VaR διαδόθηκε από την τράπεζα JP Morgan στη δεκαετία του 1990 με το μοντέλο Risk Metrics να εφαρμόζεται για αξιολογήσεις κινδύνου αγοράς. Παρά την ακραία δημοτικότητά του, το VaR δέχεται έντονη κριτική, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι η χρήση του δεν λαμβάνει υπόψη τις πιθανότητες ακραίων γεγονότων (extreme events).

Οι Albanese et al. (2004) δείχνουν ότι η χρήση του VaR σε χαρτοφυλάκια μπορεί να οδηγήσει σε αυξημένη συγκέντρωση κινδύνου. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου δεν υπακούει στην αρχή της υποπροσθετικότητας (principle of subadditivity), όπου είναι μία από τις σημαντικές ιδιότητες που αφορούν την εγκυρότητα των μέτρων κινδύνου, όπως φαίνεται από τους Artzner et al. (1999). Στην εργασία τους, οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα σύνολο ιδιοτήτων που καθορίζουν τα μέτρα κινδύνου που λέγονται «συνεπή» (coherent). Μέσα από διάφορους μαθηματικούς ορισμούς και προτάσεις, δείχνουν ποιες ιδιότητες είναι ζωτικής σημασίας για ένα μέτρο κινδύνου όταν χρησιμοποιείται στη βιομηχανία για την εκτίμηση του κινδύνου. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν τα αξιώματα που δίνουν βάση στον ορισμό ενός συνεπούς μέτρου κινδύνου. Το αξίωμα της υποπροσθετικότητας αντικατοπτρίζει την αρχή της διαφοροποίησης. Ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει πολλά χρηματοοικονομικά προϊόντα θα είναι λιγότερο επικίνδυνο από ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μικρότερος από το άθροισμα των κινδύνων των μέσων από τα οποία αποτελείται. Το αξίωμα της θετικής ομοιογένειας αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η κλίμακα της επένδυσης έχει άμεση συνέπεια στον κίνδυνο. Το ποσό του κινδύνου αυξάνεται αναλογικά με το ποσό των θέσεων. Το αξίωμα της μονοτονικότητας υπονοεί ότι όταν μια θέση δίνει καλύτερα αποτελέσματα από μια άλλη θέση, ο κίνδυνος που σχετίζεται με την πρώτη θέση θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο που σχετίζεται με τη δεύτερη θέση. Συγκεκριμένα, οι Artzner et al. (1999) δείχνουν ότι το πιο σύνηθες μέτρο κινδύνου, συγκεκριμένα το VaR, δεν ικανοποιεί το αξίωμα της υποπροσθετικότητας, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί να δημιουργήσει μια συσσώρευση κινδύνου και ότι, συνεπώς, δεν είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου. Η χρήση του VaR περιορίζει την έννοια της διαφοροποίησης (diversification), η οποία αποτελεί ουσιαστική ιδιότητα στα χρηματοοικονομικά, ειδικά στη διαχείριση κινδύνων. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν επίσης ένα πιθανό μέτρο κινδύνου, το Tail Conditional Expectation (TCE) που ορίζεται ως η αναμενόμενη ζημία δεδομένου ότι η απώλεια πέφτει σε επίπεδο κινδύνου (1 - α) στην κατανομή απωλειών, που καθορίζεται από τον επενδυτή. Αυτό το μέτρο κινδύνου σχετίζεται στενά με το αναμενόμενο έλλειμμα. Στην δημοσίευσή τους, οι Embrechts et. al (2014) συζητούν την απόφαση της Επιτροπής της Basel να αντικαταστήσει το VaR από το ES (ή CVaR). Αποδεικνύουν επίσης την υπο-πρόσθετη φύση του VaR, επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι παρουσιάζει πολλές ανεπάρκειες ως ρυθμιστικό μέτρο κινδύνου.

Το CVaR είναι ένα μέτρο που συνδέεται στενά με το VaR. Η χρήση του ως μέτρου κινδύνου μπορεί να θεωρηθεί βελτίωση σε σύγκριση με το VaR, καθώς επιτρέπει την μέτρηση της έκτασης των απωλειών σε περίπτωση ακραίων συμβάντων. Οι Acerbi και Tasche (2002) παρέχουν έναν διαισθητικό ορισμό του CVaR. Το ορίζουν ως το μέσο όρο του VaR, υπολογιζόμενο από ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν τη συνέπεια του CVaR ως μέτρο κινδύνου (όπως ορίζεται από τους Artzner et al., 1999). Ανασκοπούν τους διαφορετικούς μαθηματικούς ορισμούς και τις ιδιότητες των μέτρων κινδύνου που βασίζονται σε quantiles και μελετήθηκαν προηγουμένως στη βιβλιογραφία, όπως η Worst Conditional Expectation (WCE) και η Tail Conditional Expectation (TCE), που εισήχθησαν από τους Artzner et al. το 1999, ή που χρησιμοποιούνται επίσης στην πράξη, όπως το VaR. Αποδεικνύουν ότι το CVaR είναι εξ ορισμού συνεπές, ενώ επιβεβαιώνουν επίσης το γεγονός που παρουσιάστηκε προηγουμένως από τους Artzner et al. ότι το VaR δεν είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου και μπορεί, εξ ορισμού, να συσσωρεύσει τον κίνδυνο, καθώς δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας. Το έργο αυτών των συγγραφέων κατέστησε δυνατή την προώθηση της έννοιας των συνεπών μέτρων κινδύνου δίνοντας πρώτα έναν επίσημο ορισμό της μέτρησης κινδύνου στα χρηματοοικονομικά. Η έννοια της συνέπειας όσον αφορά τα μέτρα κινδύνου έχει προσελκύσει ιδιαίτερη προσοχή στον τομέα της ποσοτικής διαχείρισης κινδύνων. Το CVaR σέβεται αυτήν την ιδιότητα συνέπειας, κάτι που δεν ισχύει για το VaR. Η σύσταση της Επιτροπής της Βασιλείας για αντικατάσταση του VaR από το ES (ή CVaR) για μοντέλα κινδύνου εσωτερικής αγοράς αντικατοπτρίζει τη σημασία αυτής της ιδιότητας συνέπειας. Ωστόσο, το CVaR παρουσιάζει ορισμένα όρια όσον αφορά την εφαρμογή του στη διαχείριση κινδύνου. Ο Gneiting (2011) παρουσιάζει μια θεωρητική προσέγγιση της αξιολόγησης των σημείων-προβλέψεων με συναρτήσεις βαθμολόγησης (scoring functions) και δίνει έναν ορισμό της έννοιας της επιλεξιμότητας (elicitability). Δείχνει ότι παρά την ευρεία χρήση του στον χρηματοπιστωτικό κλάδο, το CVaR δεν είναι πρακτικά εύχρηστο. Αυτό δημιουργεί ένα πρόβλημα για δοκιμές και, συνεπώς, για τη σύγκριση των επιδόσεων μεταξύ διαφορετικών μέτρων κινδύνου.

2.2 Μη γραμμικό μέτρο αξίας σε κίνδυνο (expectiles)

Οι Newey και Powell (1987) εισάγουν τα expectiles στο πλαίσιο μιας στατιστικής μελέτης για την εκτίμηση των συντελεστών των μοντέλων γραμμικής παλινδρόμησης. Στην εργασία τους, οι συγγραφείς προτείνουν μια νέα κατηγορία παραμέτρων θέσης, που ορίζεται από μια συνάρτηση κριτηρίου που βασίζεται σε ασύμμετρα ελάχιστα τετράγωνα. Αυτοί οι εκτιμητές συμβάλλουν στην εμφάνιση της έννοιας των expectiles, που σχετίζονται στενά με τα quantiles. Αυτή είναι η σχέση που διευκολύνει τη χρήση τους ως μέτρο κινδύνου. Τα Expectiles αποτέλεσαν πρόσφατα αντικείμενο μελετών στη διαχείριση κινδύνων. Οι Bellini et al. (2014) δίνουν τον μαθηματικό ορισμό και τις ιδιότητες των γενικευμένων quantiles στη δημοσιευσή τους και επισημάνουν το γεγονός ότι τα γενικευμένα quantiles είναι ειδικές περιπτώσεις του zero-utility premium, μιας έννοιας που επικρατεί στην αναλογιστική επιστήμη. Οι συγγραφείς χαρακτηρίζουν τα γενικευμένα quantiles που είναι θετικά ομοιογενή και κυρτά και δείχνουν ότι τα μόνα γενικευμένα quantiles που είναι συνεπή σύμφωνα με τον ορισμό των Artzner et al. (1999) είναι τα expectiles για ένα επίπεδο $\tau \leq 1/2$. Επιπλέον, οι συγγραφείς παρουσιάζουν μια διπλή αναπαράσταση που οδηγεί σε προσδιορισμό ενός κατώτερου ορίου για τα expectiles. Στη συνέχεια συζητούν τις ιδιότητες της ανθεκτικότητας (robustness), εφαρμόζουν μια σύγκριση μεταξύ των expectiles και των quantiles και δείχνουν ότι, στην περίπτωση των κατανομών με βαριά ουρά, τα expectiles είναι ένα πιο συντηρητικό μέτρο κινδύνου από τα quantiles.

Σε μια άλλη δημοσίευση, οι Bellini et al. (2015) διερευνούν την ιδιοτητα της επιλεξιμότητας των αμετάβλητων μέτρων νομισματικού κινδύνου (law-invariant monetary risk measures) αφού επαναλαμβάνουν της έννοιας της επιλεξιμότητας όπως όρισε ο Gneiting (2011). Παρέχουν έναν ορισμό των μέτρων νομισματικού κινδύνου καθορίζοντας τις μαθηματικές τους ιδιότητες (δηλαδή μονοτονικότητα, invariance by translation, κυρτότητα και θετική ομοιογένεια). Το έργο των συγγραφέων καταδεικνύει ότι τα expectiles είναι τα μόνα μέτρα κινδύνου που ικανοποιούν τα τέσσερα αξιώματα συνέπειας που παρουσιάζονται από τους Artzner et al. (1999), καθώς και η ιδιότητα της επιλεξιμότητας, που ορίστηκε για ένα μονότιμο συναρτησιοειδές (single-valued functional) από τον Gneiting (2011). Αυτή η μελέτη δίνει το έδαφος στη δυνατότητα χρήσης των expectiles στην πράξη ως μέτρα κινδύνου, καθώς παρουσιάζουν πολλές πλεονεκτικές μαθηματικές ιδιότητες σε σύγκριση με το VaR και το CVaR. Παρόλο που το VaR είναι ένα επιλέξιμο μέτρο κινδύνου, δεν ικανοποιεί το αξίωμα της υποπροσθετικότητας, επομένως δεν χαρακτηρίζεται ως συνεπές μέτρο κινδύνου. Όσον αφορά το CVaR, είναι συνεπές σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο άρθρο από τους Artzner et al. (1999), αλλά δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της επιλεξιμότητας, όπως αποδεικνύεται από τον Gneiting (2011) στην δημοσιευσή του. Ο Ziegel (2016) δίνει μια άλλη απόδειξη της επιλεξιμότητας των expectiles στη μελέτη του. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι τα expectiles είναι τα μόνα law-invariant, συνεπή (όπως φαίνεται από τους Bellini et al., 2015) και επιλέξιμα μέτρα κινδύνου.

Ο Taylor (2008) παρουσιάζει μια μέθοδο που επιτρέπει την εκτίμηση του CVaR και του VaR χρησιμοποιώντας expectiles. Προτείνει ένα νέο univariate μοντέλο, το μοντέλο Conditional Autoregressive Expectile (CARE), το οποίο εμπνέεται από το μοντέλο Conditional Autoregressive Value-at-Risk (CAViaR) που αναπτύχθηκε από τους Engel και Manganelli (2004). Το δεύτερο είναι μια ποσοτική εκτίμηση του VaR που μετράει και για μειονεκτικό κίνδυνο (downside risk). Οι Kuan et al. (2009) συμβάλλουν επίσης στην εισαγωγή των expectiles στον τομέα της διαχείρισης κινδύνου. Στη μελέτη τους, οι συγγραφείς επανεξετάσαν πρώτα τον ορισμό των expectiles που παρουσίασαν οι Newey και Powell (1987) και προχώρησαν στον καθορισμό του VaR με βάση το EVaR μαζί με μια οικονομική ερμηνεία του μέτρου. Δηλώνουν ότι το θ-th EVaR είναι η μέγιστη δυνατή απώλεια εντός μιας δεδομένης περιόδου διακράτησης κάτω από το επίπεδο προληπτικής εποπτείας (1 - θ). Ορίζουν το δείκτη θ ως το σχετικό κόστος (relative cost) του αναμενόμενου οριακού ελλείμματος.

Επιπρόσθετα, οι συγγραφείς παρουσιάζουν μια κλάση του υπό συνθήκη expectiles μοντέλου (που διαφέρει από την Taylor το 2008) και συζητούν τις προδιαγραφές και τις εκτιμήσεις του μοντέλου. Ένα σημαντικό γεγονός που έφεραν οι συγγραφείς είναι ότι τα expectiles εξαρτώνται τόσο από την υλοποίηση της ουράς της κατανομής όσο και από τις πιθανότητές τους, σε αντίθεση με τα quantiles που εξαρτώνται μόνο από την πιθανότητα της ουράς. Το μέτρο κινδύνου βάσει των expectile που εισήχθη εδώ από τους συγγραφείς δείχνει ότι τα κοινά χρησιμοποιούμενα μέτρα στον κλάδο, όπως το VaR και το CVaR, μπορούν να εκτιμηθούν με τη χρήση expectiles προκειμένου να εκτιμηθεί ο κίνδυνος με πιο αποτελεσματικό τρόπο. Το μέτρο EVaR που εισήγαγαν οι Kuan et al. (2009) εφαρμόζεται στο πλαίσιο μιας μελέτης για τη διαχείριση κινδύνων από τους Bellini et al. (2015). Οι συγγραφείς παρέχουν μια εμπειρική ανάλυση χρησιμοποιώντας το μέτρο κινδύνου EVaR και δείχνουν ότι είναι δυνατόν να εκτιμηθεί ο κίνδυνος με τα expectiles το ίδιο όπως και με το VaR και το CVaR. Σε μια πιο πρόσφατη εργασία, οι Bellini et al. (2019) μελετούν τις σταθερές συναρτήσεις βαθμολόγησης σε σχέση με τα quantiles και τα expectiles, όπως ορίζονται από τον Gneiting (2011), και στη συνέχεια παρέχουν εμπειρικές εκδόσεις των αναμενόμενων βαθμολογιών και συναρτήσεων ταυτοποίησης (identification functions), για τις οποίες προχωρούν στη μελέτη των ασυμπτωτικών κατανομών των. Διαπιστώνουν ότι η realised συνάρτηση ταυτοποίησης του VaR αντιστοιχεί σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό του αριθμού των παραβιάσεων, πράγμα που σημαίνει ότι η παραδοσιακή δοκιμή (χρησιμοποιείται στην πράξη από ιδρύματα) μπορεί να εφαρμοστεί για τις πραγματοποιηθείσες λειτουργίες αναγνώρισης σε αυτήν την περίπτωση. Οι συγγραφείς παρέχουν ένα παράδειγμα δοκιμαστικών quantiles και expectiles με realised συναρτήσεις ταυτοποίησης και realised scores.

2.3 Μέτρα κινδύνου στη Χρηματοοικονομική

Η διαχείριση κινδύνου αποτελεί μείζων θέμα για του θεσμικούς επενδυτές, για τα οικονομούντα άτομα και για τις ρυθμιστικές αρχές. Σύμφωνα με την σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου, ο αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του κινδύνου για συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα αξιολόγησης του κινδύνου.

Αυτή η ενότητα έχει ως στόχο να καθορίσει λεπτομερώς την έννοια της μέτρησης κινδύνου (risk measurement). Το πρώτο μέρος παρουσιάζει διαφορετικούς ορισμούς και ιδιότητες που σχετίζονται με τις έννοιες του κινδύνου και του μέτρου κινδύνου στα χρηματοοικονομικά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένας ακριβής ορισμός της ιδιότητας της συνέπειας. Το δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου ορίζει τα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται πιο συχνά στην πράξη, δηλαδή το VaR και το CVaR. Το τελευταίο μέρος αυτής της ενότητας είναι αφιερωμένο στο κύριο ερευνητικό θέμα αυτής της διατριβής, τα expectiles.

Τα κυριώτερα είδη κινδύνου στη χρηματοοικονομική είναι τα παρακάτω:

- Κίνδυνος αγοράς (market risk): αναφέρεται στον κίνδυνο απώλειας που σχετίζεται με διακυμάνσεις στην αγορά και αφορά στο συστηματικό κίνδυνο που είναι μη διαφοροποιήσιμος.
- Πιστωτικός κίνδυνος (credit risk): προκύπτει από την αδυναμία εκπλήρωσης των υποχρεώσεων ενός εκ των δύο αντισυμβαλλομένων μελών μίας συναλλαγής (κίνδυνος αθέτησης) ή από πιθανή επιδείνωση της αξίας του χρέους (κίνδυνος υποβάθμισης).

- Λειτουργικός κίνδυνος (operational risk): πρόκειται για όλα τα περιστατικά που οφείλονται σε αστοχίες ή ελλείψεις που οφείλονται σε ανεπαρκείς διαδικασίες, προσωπικό, εσωτερικά συστήματα ή εξωτερικά συμβάντα.
- Κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk): αντιστοιχεί στην αδυναμία ενός οικονομικού εκπροσώπου να εκπληρώσει τις άμεσες δεσμεύσεις του, ή ακόμη και μια αγορά να απορροφήσει όγκους συναλλαγών χωρίς να επηρεάσει τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων

Η κύρια λειτουργία των μέτρων κινδύνου στα χρηματοοικονομικά είναι να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος που σχετίζεται με μια θέση που λαμβάνεται από έναν πράκτορα, σε σχέση με ένα χρηματοοικονομικό μέσο, κατά τη διάρκεια της περιόδου κατοχής μιας επένδυσης. Τα μέτρα κινδύνου επηρεάζουν τις αποφάσεις των επενδυτών σχετικά με την επένδυση σε ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, την αποτελεσματική κατανομή ενός χαρτοφυλακίου μέσων ή την εκτίμηση του ποσού της κεφαλαιακής απαίτησης που πρέπει να καθοριστεί προκειμένου να αντισταθμιστεί η έκθεση σε κινδύνους ενόψει πιθανών κρίσεων.

2.4 Ιδιότητες των μέτρων κινδύνου

Η έννοια της μέτρησης του κινδύνου είναι μια βασική ιδέα για τους διάφορους συμμετέχοντες στην αγορά που απαιτεί σαφή κατανόηση των χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων της. Ένας πρώτος επίσημος ορισμός της μέτρησης κινδύνου δίνεται παρακάτω:

Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο πιθανών καταστάσεων της φύσης. Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο των κινδύνων, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων πραγματικής αξίας $X \in \mathcal{X}$ που αντιστοιχεί στη μελλοντική αξία ενός χαρτοφυλακίου για κάθε στοιχείο του Ω. Ένα μέτρο κινδύνου είναι μια εφαρμογή ρ, έτσι ώστε:

$$\rho(X) : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Ο ορισμός του μέτρου κινδύνου που δίνεται από τους Artzner et al. (1999) δηλώνει μια στενή σχέση μεταξύ του μέτρου, που υποδηλώνεται με $\rho\ (X)$, και του συνόλου των αποδεκτών θέσεων, που επισημαίνεται ως $\mathcal{A}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το γεγονός ότι ο επενδυτής θα επιλέξει να αποδεχτεί ή να απορρίψει μια επικίνδυνη θέση λαμβάνοντας υπόψη τα σύνολα θέσεων καθαρών μελλοντικών αξιών. Ο ορισμός όλων των αποδεκτών θέσεων δίνεται παρακάτω:

Το σύνολο αποδεκτών θέσεων $\mathcal{A}_\rho$, που σχετίζεται με ένα μέτρο κινδύνου ρ, είναι η κατηγορία των τελικών καθαρών τιμών αποδεκτών από τον επενδυτή που ορίζεται από:

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\} \qquad (2)$$

Το μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με ένα σύνολο αποδεκτών θέσεων $\mathcal{A}$, για ένα συνολικό ποσοστό απόδοσης r ενός χαρτοφυλακίου, είναι μια εφαρμογή $\mathcal{X}$ in $\mathbb{R}$, με ένδειξη $\rho_{\mathcal{A},\,r}$, έτσι ώστε:

$$\rho_{\mathcal{A},r}(X) = \inf\{m \mid m \cdot r + X \in \mathcal{A}\} \qquad (3)$$

Το μέτρο κινδύνου εκφράζει την αβεβαιότητα που προκύπτει από την επένδυση σε πραγματικό αριθμό $\rho(X)$. Όσο πιο επικίνδυνη είναι η θέση του επενδυτή, τόσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο. Οι Artzner et αϊ. (1999) δίνουν μια ερμηνεία της σχέσης μεταξύ αυτής της ποσότητας $\rho(X)$ και του κινδύνου X:

- Όταν το ρ (X) είναι θετικό, τότε το ρ αντικατοπτρίζει το ποσό που ο επενδυτής πρέπει να προσθέσει στην επικίνδυνη θέση X για να το κάνει αποδεκτό.

- Όταν το ρ (X) είναι αρνητικό, η ποσότητα -ρ (X) μπορεί να αφαιρεθεί από την επένδυση και να επανεπενδυθεί πιο βέλτιστα

Στόχος είναι τώρα να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά που κάνουν ένα μέτρο αποτελεσματικό στη διαχείριση κινδύνων. Οι Artzner et αϊ. (1999) παρέχουν μια πρώτη λύση σε αυτό το ερώτημα εισάγοντας την έννοια της συνέπειας. Οι συγγραφείς προτείνουν μια σειρά από αξιώματα σύμφωνα με τα οποία ένα μέτρο κινδύνου θεωρείται συνεπές. Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνουν οι Artzner et al., ένα μέτρο κινδύνου που ικανοποιεί τα ακόλουθα τέσσερα αξιώματα διέπεται από συνέπεια.

Axiom 1.: Invariance by translation

Για κάθε $X \in \mathcal{X}$ και κάθε $m \in \mathbb{R}$:

$$\rho(X + m) = \rho(X) - m \qquad (4)$$

Το 1ο αξίωμα δείχνει ότι η προσθήκη πλούτου στο χαρτοφυλάκιο συνεπάγεται μείωση του κινδύνου ανάλογη με το ποσό που προστέθηκε

Axiom 2: Subadditivity

Για κάθε $X_1 \in \mathcal{X}$ and $X_2 \in \mathcal{X}$:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \qquad (5)$$

Το 2ο αξίωμα αντικατοπτρίζει την αρχή της διαφοροποίησης. ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από πολλά μέσα θα είναι λιγότερο επικίνδυνα από ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μικρότερος από το άθροισμα των κινδύνων των μέσων από τα οποία αποτελείται.

Axiom 3.: Positive homogeneity

Για κάθε $X \in \mathcal{X}$ και για κάθε $\tau > 0$:

$$\rho(\tau \cdot X) = \tau \cdot \rho(X) \qquad (6)$$

Το 3ο αξίωμα αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι η κλίμακα της επένδυσης έχει άμεση συνέπεια στον κίνδυνο: το ποσό του κινδύνου αυξάνεται αναλογικά με το ποσό των θέσεων.

Axiom 4.: Monotonicity

Για κάθε $X_1 \in \mathcal{X}$ και για κάθε $X_2 \in \mathcal{X}$, τέτοια ώστε $X_1 \leq X_2$:

$$\rho(X_2) \leq \rho(X_1) \qquad (7)$$

Το 4ο αξίωμα υπονοεί ότι, όταν μια οικονομική θέση X_1 επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα από μια θέση X_2, ο κίνδυνος που σχετίζεται με τη θέση X_1 θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο που σχετίζεται με τη θέση X_2.

Οι Acerbi και Tasche (2002) θεωρούν ότι ένα μέτρο που δεν ικανοποιεί τα προηγούμενα αξιώματα συνέπειας που ορίζονται παραπάνω δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο κινδύνου. Άλλες σημαντικές ιδιότητες για μέτρα κινδύνου παρουσιάζονται στη μελέτη από τους Artzner et al. (1999). Οι ορισμοί καθεμιάς από αυτές τις ιδιότητες παρουσιάζονται παρακάτω.

Η έννοια της κυρτότητας είναι μια επέκταση της ιδιότητας συνέπειας που προτείνεται από τους Artzner et al. Είναι πρώτα απαραίτητο να καθοριστεί τι είναι ένα μέτρο νομισματικού κινδύνου. Ο ορισμός του τελευταίου που εισήγαγαν οι Föllmer και Schied (2002) δίνεται παρακάτω:

Μία απεικόνιση $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται μέτρο νομισματικού κινδύνου εάν το ρ (0) υπάρχει και εάν για όλα τα $\mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{X}$, το ρ ικανοποιεί τις monotonicity και invariance in law ιδιότητες.

Ο ορισμός ενός κυρτού μέτρου κινδύνου έχει ως εξής:

Ένα μέτρο κινδύνου ρ ονομάζεται κυρτό μέτρο κινδύνου εάν αυτό ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (8)$$

Η έννοια της κυρτότητας έχει άμεση σχέση με την αρχή της διαφοροποίησης. Λαμβάνοντας το παράδειγμα ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από δύο περιουσιακά στοιχεία και υποθέτοντας ότι ένας επενδυτής κατανέμει τον πλούτο του σύμφωνα με τα λ και (1 - λ), μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων X και Y, τότε η κατανομή χαρτοφυλακίου προέρχεται από τη σχέση: $\lambda X + (1 - \lambda) Y$. Έτσι, η ανισότητα στο (3.8) δείχνει το γεγονός ότι ο κίνδυνος ενός διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον σταθμισμένο μέσο όρο των μεμονωμένων κινδύνων, ως $\lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

Η έννοια του Comonotonic μέτρου κινδύνου είναι συμπληρωματική του αξιώματος της υπο-προσθετικότητας που αναφέρθηκε προηγουμένως και μπορεί να είναι πολύ χρήσιμη στα χρηματοοικονομικά.

Δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 λέγεται ότι είναι Comonotonic εάν, για μια τρίτη τυχαία μεταβλητή Y, υπάρχουν δύο αύξουσες μονοτονικές συναρτήσεις, f_1 και f_2, έτσι ώστε:

$X_1 = f_1(Y)$ και $X_2 = f_2(Y)$

Έτσι, δύο επικίνδυνες θέσεις X_1 και X_2 εξαρτώνται πλήρως και θετικά από την ίδια πηγή κινδύνου Y. Ο ορισμός της μέτρησης additive comonotonic κινδύνου έχει ως εξής:

Ένα μέτρο κινδύνου ονομάζεται additive comonotonic εάν, για όλες τις comonotonic τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2,

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2) \quad (9)$$

Ένα τέτοιο μέτρο ενσωματώνει το γεγονός ότι δύο comonotonic κίνδυνοι δεν γίνονται «αμοιβαίοι». Αυτή η σημαντική ιδιότητα είναι διαισθητική και συνδέεται επίσης με την έννοια της διαφοροποίησης. Εάν δύο επικίνδυνες θέσεις εξαρτώνται από τον ίδιο παράγοντα κινδύνου, δεν θα πρέπει να επωφεληθούν από τις επιπτώσεις της διαφοροποίησης.

Μια άλλη ιδιότητα που πρέπει να λάβουμε υπόψη σχετικά με τα μέτρα κινδύνου είναι η ευστάθεια. Ένα μέτρο κινδύνου θεωρείται ευσταθές όταν δεν είναι σχετικά ευαίσθητο σε σφάλματα εκτίμησης. Πράγματι, τα σφάλματα μέτρησης στην κατανομή των ζημιών μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την εκτίμηση του μέτρου κινδύνου. Η ευστάθεια εκτιμάται από τη συνέχεια, γενικά ως προς την αδύναμη τοπολογία. Ωστόσο, τα περισσότερα μέτρα κινδύνου δεν ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα. Οι Stahl et αϊ. (2012) θεωρούν μια πιο κατάλληλη έννοια της ευστάθειας; προτείνουν ότι ο ορισμός της ευστάθειας για μέτρα κινδύνου θα πρέπει να εξεταστεί στο πλαίσιο της συνέχειας όσον αφορά την απόσταση Wasserstein.

Η απόσταση Wasserstein μεταξύ δύο μέτρων πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ καθορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$d_W(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = inf\{\, E(|X - Y|) : X \sim \mathbb{P}, Y \sim \mathbb{Q} \,\} \qquad (10)$$

Όταν ένα μέτρο κινδύνου εξαρτάται εξ ολοκλήρου από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής με την οποία σχετίζεται, είναι law invariant:

Λαμβάνοντας υπόψη δύο τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2, και τις λειτουργίες διανομής τους F_{X1} και F_{X2}, ένα μέτρο κινδύνου ρ είναι ένα law invariant εάν:

$$F_{X1} = F_{X2} \Longrightarrow \rho(X_1) = \rho(X_2) \qquad (11)$$

Στην περίπτωση που το μέτρο που δεν σέβεται την αρχή του invariant in law, δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί το επίπεδο κινδύνου μιας θέσης από τη διανομή των περιουσιακών στοιχείων. Ωστόσο, η εκτίμηση του επιπέδου κινδύνου μιας επένδυσης μπορεί να βασίζεται στην κατανομή ζημιών που εκτιμάται από εμπειρικά δεδομένα. Σε αυτήν την περίπτωση, απαιτείται για δύο θέσεις που αναγνωρίζουν την ίδια κατανομή, το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται πρέπει να επιστρέφει το ίδιο επίπεδο κινδύνου.

Η έννοια των επιλέξιμων μέτρων κινδύνου απαιτεί την ένταξη της συνάρτησης βαθμολόγησης. Οι Bellini et al. (2014) δίνουν τον ακόλουθο ορισμό μιας συνάρτησης βαθμολόγησης, ακολουθώντας τη μελέτη του Geniting (2011) σχετικά με το θέμα:

Μία συνάρτηση βαθμολόγησης $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ ικανοποιεί $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα:

- $S(x, y) \geq 0$ και $S(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$;
- $S(x, y)$ είναι αύξουσα στο x για $x > y$ and φθίνουσα για $x < y$
- $S(x, y)$ είναι συνεχής στο x

Στη συνέχεια, οι συγγραφείς ορίζουν την έννοια ενός επιλέξιμου μέτρου κινδύνου:

Μια στατιστική συνάρτηση T είναι επιλέξιμη στο $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{M}$ εάν υπάρχει μια συνάρτηση S έτσι ώστε για κάθε $F \in \mathcal{M}_T$. ισχύουν οι ακόλουθες ισοτιμίες:

- $h_F(x_1, x_2) \coloneqq \int [S\,(x_2, y) - S(x_1, y)]dF(y)$ είναι καλά ορισμένη για όλα τα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $h_F(T(F), x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq T(F)$

Έτσι, ένα επιλέξιμο μέτρο κινδύνου επιτρέπει την σύγκριση απόδοσης διαφορετικών μεθόδων πρόβλεψης. Αυτή η ιδιότητα είναι επομένως σημαντική στο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνων και της επιλογής μοντέλου.

Οι Engle και Manganelli (2004), ορίζουν το VR ως τη μέγιστη πιθανή απώλεια που επιτυγχάνεται για μια δεδομένη πιθανότητα και έναν καθορισμένο χρονικό ορίζοντα. Το VaR_α μπορεί να οριστεί εμπειρικά ως το α-quantile της κατανομής πιθανότητας των log-returns ενός περιουσιακού στοιχείου:

$$F(VaR\,(\alpha)) = \mathbb{P}(R_t < VaR\,(\alpha)) = \alpha \qquad (12)$$

Όπου το F δηλώνει τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας και το R_t τα log-returns της κατανομής. Το VaR μπορεί επίσης να οριστεί ως εξής:

Έστω α ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, έτσι ώστε $\alpha \in [0,1]$. Το VaR ενός χαρτοφυλακίου στο επίπεδο εμπιστοσύνης α δίνεται από τον μικρότερο αριθμό l έτσι ώστε η πιθανότητα απώλειας L που υπέρβαίνει του l να είναι μικρότερη από (1 - α):

$$VaR_\alpha\,(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) > \alpha\} \qquad (13)$$

όπου F_L είναι η κατανομή της συνάρτησης απώλειας

Υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι για τον υπολογισμό του VaR που μπορούν να διακριθούν σύμφωνα με τρεις κατηγορίες μοντέλων εκτίμησης σύμφωνα με τους Engle και Manganelli (2004):

- Μη παραμετρικά μοντέλα: βασισμένα σε εμπειρικές κατανομές, όπως η ιστορική μέθοδος.
- Ημι-παραμετρικά μοντέλα: συμπεριλαμβανομένης ιδίως της Θεωρίας Ακραίας Αξίας (EVT), το CAViaR, τη μέθοδο GARCH μέγιστης quasi-πιθανόφάνειας
- Παραμετρικά μοντέλα: συμπεριλαμβανομένου του μοντέλου μετρήσεων κινδύνου, της μεθόδου κινητού μέσου και τα μοντέλα GARCH

Το VaR είναι το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται πιο συχνά από τις τράπεζες επενδύσεων για τον προσδιορισμό της έκτασης και του ποσοστού εμφάνισης πιθανών ζημιών από τα θεσμικά χαρτοφυλάκια τους. Χρησιμοποιώντας το VaR ως μέτρο κινδύνου, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μπορούν να προσδιορίσουν εάν διαθέτουν επαρκή αποθέματα κεφαλαίου για την κάλυψη ζημιών. Ωστόσο, το VaR δεν πληροί το κριτήριο συνέπειας που καθορίστηκε από τους Artzner et al (1999) Συγκεκριμένα, δεν σέβεται το αξίωμα της υπο-προσθετικότητας το οποίο μπορεί να προκαλέσει συσσώρευση κινδύνων. Έτσι, η χρήση του VaR περιορίζει την έννοια της διαφοροποίησης. Ένας άλλος περιορισμός που αποδίδεται στο VaR είναι ότι δεν είναι κυρτό μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχει τοπικό ελάχιστο, το οποίο μπορεί να κάνει τις βελτιστοποιήσεις με το VaR ακόμη πιο δύσκολη.

Ένα εναλλακτικό μέτρο κινδύνου για το VaR είναι το CVaR (ή ES). Για μια τυχαία μεταβλητή X και για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in [0,1]$, το CVaR ορίζεται ως:

$$\mathrm{CVaR}(X) \coloneqq \mathbb{E}[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_{\alpha}(X)] \tag{14}$$

Στην περίπτωση διακριτών ή μη συνεχών κατανομών απώλειας, οι Rockafellar και Uryasev (2000) προτείνουν μια μέθοδο εκτίμησης σταθμισμένου μέσου για το CVaR. Από το VaR_{α} και από το $\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{+}$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, το CVaR_{α} ορίζεται ως:

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(X) = \lambda \mathrm{VaR}_{\alpha}(X) + (1-\lambda)\,\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{+}(X) \tag{15}$$

όπου:

- $\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{+}(X)$ είναι η μέση απώλεια, αυστηρά ανώτερη από το $\mathrm{VaR}_{\alpha}^{+}(X)$, έτσι ώστε:

  $\mathrm{CVaR}_{\alpha}^{+}(X) \coloneqq [X \mid X > \mathrm{VaR}_{\alpha}(X)]$

- $\lambda \coloneqq (\psi-\alpha)\,/\,(1-\alpha)$, με $\psi = F_X(\mathrm{VaR}_{\alpha}(X))$

Το CVaR, σε αντίθεση με το VaR, έχει την ιδιότητα να είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Αντιμετωπίζει ορισμένες από τις αδυναμίες του VaR, ιδίως το γεγονός ότι το CVaR μετρά την πραγματική έκθεση στον κίνδυνο όταν οι συνθήκες δεν είναι ευνοϊκές για τον επενδυτή, ενώ το

VaR δεν είναι ευαίσθητο στο μέγεθος ακραίων ζημιών. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί από τον Gneiting (2011) ότι το CVaR δεν είναι ένα επιλέξιμο μέτρο, το οποίο καθιστά τη διαδικασία δοκιμής πιο περίπλοκη στην εκτέλεση.

Ο στόχος αυτού του μέρους είναι να παρουσιάσει έναν λεπτομερή ορισμό των expectiles ως μέτρα κινδύνου και να περιγράψει τα χαρακτηριστικά τους.

Τα expectiles, που υποδηλώνονται ως e_τ εισήχθησαν από τους Newey & Powell (1987) ως εκτιμητές για την ελαχιστοποίηση μιας τετραγωνικής ασύμμετρης συνάρτησης απώλειας και ορίζονται ως εξής:

Δεδομένης μιας τυχαίας μεταβλητής X, έτσι ώστε $\mathbb{E}\,(X) < \infty$, και μιας παραμέτρου $\tau \in [0,1]$, το τ-expectile της X of ορίζεται από:

$$e_\tau(X) = \text{argmin}\ \mathbb{E}[\tau \max(X - x, 0)^2 + (1 - \tau) \max(x - X, 0)^2],\ x \in \mathbb{R} \qquad (16)$$

Τα expectiles μπορούν να θεωρηθούν ως ασύμμετρη γενίκευση του μέσου όρου για $\tau = 1/2$ (Bellini et al., 2015). Τα Expectiles είναι μετρήσεις της δεξιάς και της αριστερής ουράς της κατανομής απώλειας. Επιτρέπουν σε κάθε ουρά της κατανομής να αξιολογείται ταυτόχρονα με την ανάθεση διαφορετικών βαρών. Οι Bellini et al. (2015) δείχνουν ότι τα expectiles αναγνωρίζονται με μοναδικό τρόπο από την πρώτη τους κατάσταση:

$$\tau\, \mathbb{E}\,[(X - e_\tau(X))_+] = (1 - \tau)\, \mathbb{E}\,[(X - e_\tau(X))_-] \qquad (17)$$

Η εξίσωση (3.17) μπορεί επίσης να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\tau = \mathbb{E}[(X - e_\tau(X))_-] \,/\, \mathbb{E}[\,|X - e_\tau(X)|\,] \qquad (18)$$

Στην δημοσίευσή τους, οι Bellini et al. (2015) δίνουν τις ακόλουθες ιδιότητες των expectiles:

Έστω $X \in L^1$ και $e_\tau\,(X)$ είναι η μόνη λύση του (3.17). Τότε:

- $e_\tau\,(X)$ είναι αυστηρά μονοτονική στο τ, για $\tau \in [0,1]$
- $e_\tau\,(X)$ είναι αυστηρά μονοτονική στο X, έτσι ώστε:

$X > Y$ and $\mathbb{P}(X > Y) > 0 \Longrightarrow e_\tau(X) > e_\tau(Y)$

- $\mathrm{e}_\tau(-\mathrm{X}) = -\,\mathrm{e}_{1-\tau}(\mathrm{X})$
- Εάν η X είναι συμμετρική σε σχέση με το x_0, τότε: $\dfrac{\mathrm{e}_\tau(\mathrm{X}) - \mathrm{e}_{1-\tau}(\mathrm{X})}{2} = x_0$

- Εάν η X έχει πυκνότητα C^1, τότε η $e_\tau(X)$ είναι μια συνάρτηση C^1 τέτοια ώστε:
$$\frac{de_\tau(X)}{d\tau} = \frac{\mathbb{E}\,[|X - e_\tau(X)|]}{(1-\tau)F(e_\tau(X)) + \tau\bar{F}(e_\tau(X))}$$

Ένας ορισμός του α-quantile αριθμού μιας τυχαίας μεταβλητής Y, για ένα επίπεδο α ∈ [0,1], δίνεται από τους Barry et al. (2017):

$$q_\alpha(Y) = F_Y^{-1}(\alpha) = \inf\{y;\, F_Y(y) \geq \alpha\} \tag{19}$$

Όπου F_Y είναι η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y.

Το expectile μπορεί να οριστεί κατ 'αναλογία με το quantile: για κάθε τ- expectile, υπάρχει ένα αντίστοιχο α- quantile. Αυτό δεν σημαίνει, ωστόσο, ότι οι παράμετροι α και τ είναι ίσες. Οι Yao et Tong (1996) δείχνουν ότι για κάθε $\alpha \in [0,1]$ και για $\tau(\alpha)$ έτσι ώστε $e_Y(\tau(\alpha)) = q_Y(\alpha)$:

$$\tau(\alpha) = \frac{\alpha\, q_\alpha - \int_{-\infty}^{q(\alpha)} y dF(y)}{\mathbb{E}\,[y] - 2\int_{-\infty}^{q(\alpha)} y dF(y) - (1-2\alpha)q(\alpha)} \tag{20}$$

όπου το Y είναι η επιστροφή του περιουσιακού στοιχείου με τη συνάρτηση κατανομής F_Y

Αυτή η σχέση μεταξύ των quantiles και expectiles υπονοεί ότι, κάτω από ξεχωριστές κατανομές, ένα δεδομένο τ- expectile αντιστοιχεί σε quantiles με διαφορετικά α. Ένα expectile με ένα δεδομένο τ αντιπροσωπεύει συνεπώς διαφορετικά ανοίγματα κινδύνου (risk exposures) από την άποψη της πιθανότητας απώλειας ουράς (Kuan et al., 2009).

Το VaR με βάση το expectile, υποδηλώνεται ως EVaR, εισήχθη από τους Kuan et al. (2009) και ορίζεται ως εξής:

$$\text{EVaR}(X) = -e_\tau(X) \tag{21}$$

όπου X είναι μια τυχαία μεταβλητή, έτσι ώστε $X \in L^1$.

Οι συγγραφείς προτείνουν να εκτιμηθεί το EVaR_τ από μια προκαθορισμένη παράμετρο τ, δεδομένου ότι κάτω από διαφορετικές κατανομές, για ένα δεδομένο τ, το Expectile αντιστοιχεί σε διαφορετικά quantiles με διακριτό α. Το δεύτερο μέτρο κινδύνου βάσει του expectile είναι αυτό που εισήγαγε ο Taylor (2008). Με βάση τον ορισμό των Newey και Powell (1987), ο συγγραφέας παρουσιάζει έναν τύπο για την εκτίμηση του ES (ή CVaR) του επιπέδου α με το τ-expectile:

$$ES_\alpha = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\alpha}\right)e_\tau - \frac{\tau}{(1-2\tau)\alpha}E(X) \tag{22}$$

$$ES_a = e_\tau - \frac{\tau(e_\tau - E(X))}{(1-2\tau)\alpha} \quad (23)$$

Οι μαθηματικές ιδιότητες των expectiles, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο μέρος της ενότητας δείχνουν ότι μπορούν να θεωρηθούν ως μέτρο κινδύνου με τον ίδιο τρόπο όπως τα quantiles. Το $\text{EVaR}_\tau(X)$ μέτρο κινδύνου σχετίζεται με τα expectiles με τον ίδιο τρόπο που το $\text{VaR}_\alpha(X)$ σχετίζεται με τα quantiles. Για $\tau \leq 1/2$, οι Bellini et al (2015) δείχνουν ότι το μέτρο $\text{EVaR}_\tau(X)$, όπως ορίζεται στο (3.21), ικανοποιεί καθένα από τα τέσσερα αξιώματα που χαρακτηρίζουν ένα συνεπές μέτρο κινδύνου σύμφωνα με τους Artzner et al. (1999):

- Invariance by translation: $EVaR_\tau(X + h) = EVaR_\tau(X) - h$
- Subadditivity: $EVaR_\tau(X + Y) \leq EVaR_\tau(X) + EVaR_\tau(Y)$ για όλα τα $h \in \mathbb{R}$
- Positive homogeneity: $EVaR_\tau(\lambda X) \leq \lambda EVaR_\tau(X)$ για $\lambda \geq 0$
- Monotonicity: $X \leq Y \; a.s. \Longrightarrow EVaR_\tau(X) \geq EVaR_\tau(Y)$

Οι ιδιότητες των expectiles και η στενή τους σχέση με τα quantiles διευκολύνουν τη χρήση τους ως μέτρα κινδύνου στα χρηματοοικονομικά. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί από τους Bellini et al. (2015) και Ziegel (2016) ότι το EVaR είναι το μόνο αναλλοίωτο, συνεπές και επιλέξιμο μέτρο για $\tau \leq 1/2$. Παρόλο που η κατανόηση του μέτρου EVaR στα χρηματοοικονομικά δεν είναι τόσο διαισθητική όσο αυτή του VaR ή του CVaR, η ερμηνεία της παράμετρου του, τ , παραμένει συμβατή στο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνων. Οι Kuan et al. (2009) ορίζουν την παράμετρο τ ως δείκτη προληπτικότητας (index of prudentiality) και προτείνουν την ερμήνευση της ως σχετικό κόστος για το αναμενόμενο έλλειμμα περιθωρίου. Ορίζουν το μέτρο EVaR ως τη μέγιστη δυνατή απώλεια μιας επένδυσης κατά τη διάρκεια της περιόδου κατακράτησης. Οι Bellini et al. (2015) ερμηνεύουν το μέτρο EVaR ως το ποσό που πρέπει να προστεθεί σε μια θέση προκειμένου να επιτευχθεί ένας αρκετά υψηλός λόγος κέρδους-ζημίας. Έτσι, στην περίπτωση του EVaR_τ, μια θέση θεωρείται αποδεκτή όταν ο λόγος μεταξύ της αναμενόμενης αξίας των κερδών και της αναμενόμενης αξίας των ζημιών είναι αρκετά μεγάλος. Αυτή είναι η ίδια διαδικασία με το Omega-ratio, το οποίο είναι ένα δημοφιλές μέτρο απόδοσης στη διαχείριση χαρτοφυλακίου. Η παράμετρος τ μπορεί επομένως να χρησιμεύσει ως παράμετρος αποστροφής κινδύνου, με μικρές τιμές τ να αντικατοπτρίζουν την αποτροπή κινδύνου του επενδυτή.

2.5 Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας

Οι ιδιομορφίες που χαρακτηρίζουν τις αποδόσεις των χρηματοοικονομικών προϊόντων καθιστούν επιτακτική την ανάγκη για υιοθέτηση μη γραμμικών υποδειγμάτων και στη διασπορά επιτρέποντας για στοχαστικές διαρθρωτικές μεταβολές. Τα πιο δημοφιλή αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας είναι τα ARCH και GARCH, σύμφωνα με τους Engle (1982) και Bollerslev (1986), αντιστοιχα.

Ο συνδυασμός και η ενσωματώση των στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών στα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας αποτελεί αντικείμενο μελέτης στη παρούσα διατριβή με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Μια μονομεταβλητή προσέγγιση του υποδείγματος ARCH ορίζεται ώς:

$$\epsilon_t = h_t u_t \qquad (24)$$

όπου (u_t) είναι τυχαία μεταβλητή που οι τιμές της είναι ανεξάρτητες και παράγονται απο την ίδια κατανομή (iid), ανεξάρτητη από τις υστερημένες τιμές του ϵ_t και h_t είναι η διασπορά των υστερημένων τιμών του ϵ_t.

Το πεδίο σ που δημιουργήθηκε από τις προηγούμενες τιμές του ϵ_t συμβολίζεται με $\epsilon_{t-1} = (\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \ldots)$. Τα δύο πρώτα conditional moments του ϵ_t βγαίνουν από τον ορισμό:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\epsilon_t}{\epsilon_{t-1}}\right] = 0 \ \& \ \mathrm{Var}\left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_{t-2}}\right) = h_t^2 \qquad (25)$$

Επομένως, το ϵ_t είναι μια μη συσχετισμένη κεντρική διαδικασία (uncorrelated centered process), αλλά η διακύμανση υπό συνθήκη μπορεί να εξελίσσεται με το χρόνο και η οριακή διακύμανσή του μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Μια διαδικασία ARCH της τάξης q, με την ένδειξη ARCH (q), ορίζεται ως εκ τούτου από το (4.5) και μια παραμετροποίηση του h_t^2, συνάρτηση των προηγούμενων τιμών του τετραγώνου του ϵ_t:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \qquad (26)$$

με $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, q$, έτσι ώστε η υπό όρους διακύμανση να είναι θετική.

Μια διαδικασία GARCH (p, q) είναι μια γενίκευση των μοντέλων ARCH (q), όπου ο όρος σφάλματος ϵ_t καθορίζεται από:

$$\epsilon_t = h_t u_t \qquad (27)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_i h_{t-j}^2 \qquad (28)$$

Σε ένα μοντέλο GARCH (p, q), η εκτιμημένη διακύμανση h_t είναι μια σταθμισμένη συνάρτηση υστερημένων τιμών της διαδικασίας ε και της διασποράς, έτσι ώστε ο πρώτος όρος των υστερημένων τετραγωνισμένων ε να αποδίδει την ροή της πληροφορίας στη μεταβλητότητα και ο δεύτερος όρος να αφορά στην εμμονή του κινδύνου σε επικείμενες αυξήσεις..

Ο Nelson (1991) εισήγαγε το εκθετικό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας EGARCH (p, q) σύμφωνα με το οποίο λαμβάνεται υπόψη η ασυμμετρία στην απόκριση της μεταβλητότητας σε καλά και όχι καλά νέα (leverage effect):

$$\epsilon_t = h_t u_t \tag{29}$$

$$\ln(h_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ln(h_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{g}(u_{t-j}^2) \tag{30}$$

Όπου $\mathrm{g}\left(u_{t-j}\right) = \gamma_j\left(u_{t-j}\right) + \beta_j\left(|u_{t-j}| - \mathbb{E}[|u_{t-j}|]\right)$ με $\alpha_0, \alpha_i, \gamma_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, i =1,…,p και j=1,…,q

Δεν χρειάζεται να επιβληθούν περιορισμοί μη αρνητικότητας στις παραμέτρους του μοντέλου, καθώς η μεταβλητότητα θα παραμείνει θετική, ακόμη και όταν οι παράμετροι της εξίσωσης είναι αρνητικές. Ο όρος α_i αντιπροσωπεύει το autoregressive μέρος, ο όρος β_j είναι η επίδραση ενός choc στην επιστροφή και ο γ_j είναι το φαινόμενο ασυμμετρίας που αντιστοιχεί στην ειδική επίδραση ενός αρνητικού σοκ. Η επίδραση ενός θετικού σοκ μετράται με το (β + γ) και το αρνητικό σοκ από (−β + γ). Σε αυτήν την περίπτωση, το γ πρέπει να είναι αρνητικό έτσι ώστε το αποτέλεσμα ενός αρνητικού σοκ να είναι ισχυρότερο από αυτό ενός θετικού.

2.6 Υποδείγματα στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών

Τα οικονομικά δεδομένα και ιδιαίτερα οι χρηματοοικονομικές χρονοσειρές εμφανίζουν συχνά διαρθρωτικές μεταβολές που είτε λαμβάνουν χώρα ενδογενώς είτε εξωγενώς, καθιστώντας την υπόθεση της κανονικότητας μη βάσιμη. Ο Hamilton (1989) εισαγάγει υποδείγματα στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών - markov-switching regimes - στην ανάλυση των χρονοσειρών. Η ακολουθία των διαρθρωτικών μεταβολών αποτυπώνει καλύτερα τα δεδομένα και υπερτερεί της κλασσικής ανάλυσης συσχετισμών. Επιπλέον, οι Hamilton et al. (1994) υιοθετούν την προσέγγισή τους για να εκφράσουν το κίνδυνο των χρονοσειρών υπό καθεστώς έντονων μεταβολών, το switching ARCH, ενισχύοντας την αναγκαιότητά τους.

Τα υποδείγματα στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών υποθέτουν την ύπαρξη μιας μη παρατηρημένης στοχαστικής διαδικασίας που διέπει την κατανομή των επιστροφών. Αυτή η διαδικασία είναι γενικά μια διακριτού-χρόνου αλυσίδα Markov με πεπερασμένη κατάσταση-χώρο. Σε αυτήν την περίπτωση, το μοντέλο ονομάζεται Markov-switching μοντέλο ή (κρυφό μοντέλο Markov). Το μοντέλο αναφέρεται συνήθως ως state-space μοντέλο όταν η αλυσίδα Markov βρίσκεται σε χώρο συνεχούς κατάστασης. Η δημοτικότητα αυτών των μοντέλων με τις αλλαγές στα regimes στο μοντέλο οικονομετρικών χρονοσειρών ξεκίνησε με το επιδραστικό έργο του Hamilton (1989) στο οποίο προτείνει να αντικατοπτριστεί η επίδραση των οικονομικών επιχειρηματικών κύκλων στο πραγματικό ΑΕΠ στις ΗΠΑ. Κατά το χρόνο t, η αξία που λαμβάνεται από την αλυσίδα Markov ονομάζεται state ή regime και χρησιμοποιείται για την προσαρμογή των διαρθρωτικών αλλαγών που σχετίζονται με τη μελετημένη οικονομική μεταβλητή.

Μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, σε έναν διακριτό πεπερασμένο χώρο K, είναι μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου, που υποδηλώνεται με $\{S_t\}$, η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο {1,2, ..., K}, που ονομάζεται state-space. Έχει την ακόλουθη ιδιότητα Markov:

$$\mathbb{P}[S_t=s_t \mid S_t-1=s_t-1,S_t-2=s_t-2,\dots]=\mathbb{P}[S_t=s_t \mid S_t-1=s_t-1] \qquad (31)$$

Οι χρονικά ομοιογενείς αλυσίδες Markov εξετάζονται σε αυτήν τη μελέτη, όπου οι πιθανότητες μετάβασης p_{ij} από μια κατάσταση $S_{t-1} = i$ σε μια κατάσταση $S_t = j$ είναι χρονικά ομογενείς:

$$\forall t,\ \mathbb{P}[S_t= j \mid S_{t-1} =i] = p_{ij} \qquad (32)$$

όπου $i,j = 1 , \dots , K$.

Αυτές οι πιθανότητες μπορούν να συλλεχθούν σε $K \times K$ μήτρα P, που ονομάζεται μήτρα μετάβασης (transition matrix) της αλυσίδας Markov:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{K1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1K} & \cdots & p_{KK} \end{bmatrix}$$

όπου κάθε στήλη P αθροίζεται στο 1.

Λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστική διαδικασία $\{y_t\}$ που ορίζεται από την εξίσωση:

$$y_t= \mu_t+ \epsilon_t,\ t\in\mathbb{N}^+ \text{ και } \epsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2) \qquad (33)$$

ένα general regime-switching μοντέλο μπορεί να κατασκευαστεί ενσωματώνοντας μια αλυσίδα Markov ως εξής:

$$y_t= (S_t)+\epsilon_t(S_t) \qquad (34)$$

όπου μ_t (S_t) και $\epsilon_t(S_t)$ υποδηλώνουν μετρήσιμες συναρτήσεις σε σχέση με το σ-field που δημιουργείται από τον τυχαίο φορέα $(y_{1:\ t\ -\ 1},\ S_t)$. Ο υπό όρους μέσος και η διακύμανση εξαρτώνται πλέον από την μη παρατηρημένη αλυσίδα Markov, και ως εκ τούτου δεν είναι πλέον ντετερμινιστικά δεδομένης της πληροφορίας που μπορεί να παρατηρηθεί στην αγορά. Η εξίσωση έχει την ιδιαιτερότητα ότι η κατά συνθήκη κατανομή εξαρτάται από ολόκληρη την πορεία των state regimes από το 1 έως το t. Σε αυτό το μοντέλο, η κατά συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας (conditional probability density), εξαρτάται μόνο από το state τη στιγμή t και όχι από τις προηγούμενες τιμές q των states, δηλαδή:

$$f(y_t|S_t,S_{t-1},S_{t-2},\dots,S_{t-q},y_{t-1},y_{t-2},\dots y_0)= f(y_t|S_t,y_{t-1},y_{t-2},\dots y_0) \quad (35)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι υπάρχουσες τεχνικές επιτρέπουν την εκτίμηση αυτών των general regime switching μοντέλων μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο προσεγγίσεις, το φίλτρο Hamilton και τον αλγόριθμο EM. Οι δύο τεχνικές δεν συζητούνται σε αυτή τη μελέτη. Ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στα έγγραφα του Hamilton (1989 και 1990) για περισσότερες λεπτομέρειες.

Ακολουθώντας τον Hamilton (1994) που καθορίζει μοντέλα ARCH με στοχαστικές διαρθρωτικές μεταβολές, και τους Bauwens et al (2010), το MS-GARCH διαμορφώνεται ως εξής:

$$\epsilon_t= h_t u_t$$

$$h_t^2 = \alpha_{0,s_t} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,s_t}\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_{i,s_t} h_{t-j}^2 \quad (36)$$

όπου t=1,…,T, u_t ~ N(0,1) and $\{S_t\}$ είναι μια εργοδική (ergodic) ομοιογενής Markov αλυσίδα.

Στην περίπτωση ενός μοντέλου MS-EGARCH (p, q), η υπό συνθήκη διακύμανση της διαδικασίας EGARCH διαμορφώνεται ως εξής:

$$\epsilon_t= h_t u_t$$

$$h_t^2 = \alpha_{0,s_t} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,s_t}\ln(h_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{g}(u_{t-j}^2) \quad (37)$$

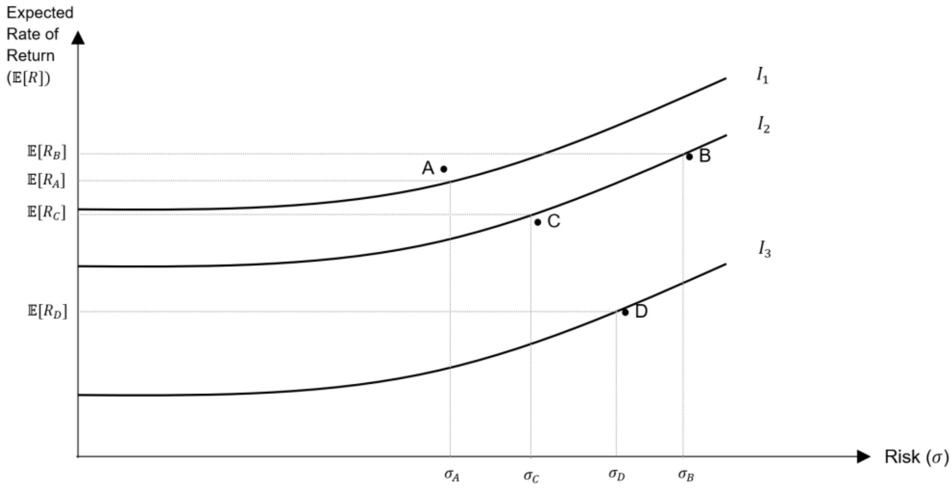
Όπου $\mathrm{g}(u_{t-j}) = \gamma_{j,s_t}(u_{t-j}) + \beta_{j,s_t}(|u_{t-j}| - \mathbb{E}[|u_{t-j}|])$ με $\alpha_0,\alpha_i,\gamma_j,\beta_j \in \mathbb{R}$, i =1,…,p και j=1,…,q

Η διαδικασία της απαντητικής μεταβλητής $\{y_t\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου που λαμβάνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και η οποία εξαρτάται από μια μη παρατηρημένη ομοιογενή αλυσίδα Markov χρονικού διακριτού χρόνου $\{S_t\}$ με ένα K-διάστασης διακριτό χώρο. Οι πιθανότητες μετάβασης $\{p_{ij} = \mathbb{P}\ (S_t = j,\ j = 1,\dots K\ |\ S_{t-1} = i,\ i = 1,\dots, K)\ \}$ ορίζουν τον πίνακα μετάβασης $K \times K$ που περιγράφει τις πιθανότητες των switches στο regime , για κάθε παράμετρο του μοντέλου. Τα states της αλυσίδας Markov $\{S_t\}_{t\geq 1}$ είναι εξ ορισμού ανεξάρτητα από το $\{u_t\}_{t\geq 1}$ αφού η αλυσίδα ξεκινά στο $t = 0$ και οι πιθανότητες μετάβασης καθορίζονται με την πάροδο του χρόνου.

2.7 Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Η βέλτιστη κατανομή περιουσιακών στοιχείων (Optimal asset allocation) είναι ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές οι οποίοι, όταν κάνουν μια επενδυτική επιλογή, πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τόσο τον κίνδυνο που ενέχουν όσο και τις αναμενόμενες αποδόσεις. Το 1952, ο Χάρι Μάρκοβιτς (Harry Markowitz) δημοσίευσε το σημαντικό έργο του για την επιλογή των βέλτιστων χαρτοφυλακίων, στο οποίο δημιούργησε ένα πλαίσιο για τη λήψη αποφάσεων όταν κάποιος επενδύει σε επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία. Στο μοντέλο μιας περιόδου, ο επενδυτής μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση ενώ ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο, δηλαδή μέτρα με τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου. Ο κύριος περιορισμός που αποδίδεται στο πλαίσιο του Markowitz είναι η χρήση της διακύμανσης ως μέτρο κινδύνου. Έπειτα από αυτή την ουσιαστική συνεισφορά του συγγραφέα, έχουν προταθεί αρκετά άλλα μοντέλα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, ιδίως στο σχέδιο μέσου κινδύνου (mean-*risk* plan), με βάση τις εργασία που παρουσιάστηκε από τον Markowitz. Αυτή η ενότητα θα δώσει πρώτα μια γενική επισκόπηση της θεωρίας του Markowitz στο πλαίσιο της επιλογής χαρτοφυλακίου, ακολουθούμενη από έναν ορισμό των προβλημάτων βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου στα mean-VaR, mean-CVaR και mean-EVaR σχέδια.

Πριν εισαχθεί η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου από τον Markowitz το 1952, οι επενδυτικές αποφάσεις βασίζονταν γενικά στις πεποιθήσεις των επενδυτών που δεν έλαβαν υπόψη τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου. Ο Markowitz παρουσιάζει μια νέα προσέγγιση για την κατανομή χαρτοφυλακίου, για μία μόνο περίοδο . Λαμβάνει υπόψη τον κίνδυνο ενός περιουσιακού στοιχείου, το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης καθώς και τη σχέση κινδύνου-απόδοσης, που μετράται από τη συσχέτιση. Η διαφοροποίηση παίζει καθοριστικό ρόλο στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου. Η βελτιστοποίηση στοχεύει στη μείωση του κινδύνου (τυπική απόκλιση) του χαρτοφυλακίου, υπό την προϋπόθεση ότι τα περιουσιακά στοιχεία που το περιλαμβάνουν συσχετίζονται αρνητικά. Η μέθοδος επιλογής ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου περιλαμβάνει τη χρήση καμπυλών αδιαφορίας (indifference curves). Το παρακάτω γράφημα αντιπροσωπεύει τις καμπύλες αδιαφορίας I_1, I_2 και I_3 για έναν επενδυτή που αποφεύγει τον κίνδυνο σύμφωνα με το σύνολο των χαρτοφυλακίων A, B, C και D. Οι καμπύλες αδιαφορίας αντικατοπτρίζουν τις προτιμήσεις του επενδυτή όσον αφορά τον κίνδυνο και την απόδοση.



Διάγραμμα καμπυλών αδιαφορίας επενδυτή που αποφεύγει τον κίνδυνο

Η θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις παραδοχές:

- Ο επενδυτής θα προτιμά πάντα, για το ίδιο επίπεδο κινδύνου, το χαρτοφυλάκιο με την υψηλότερη απόδοση.

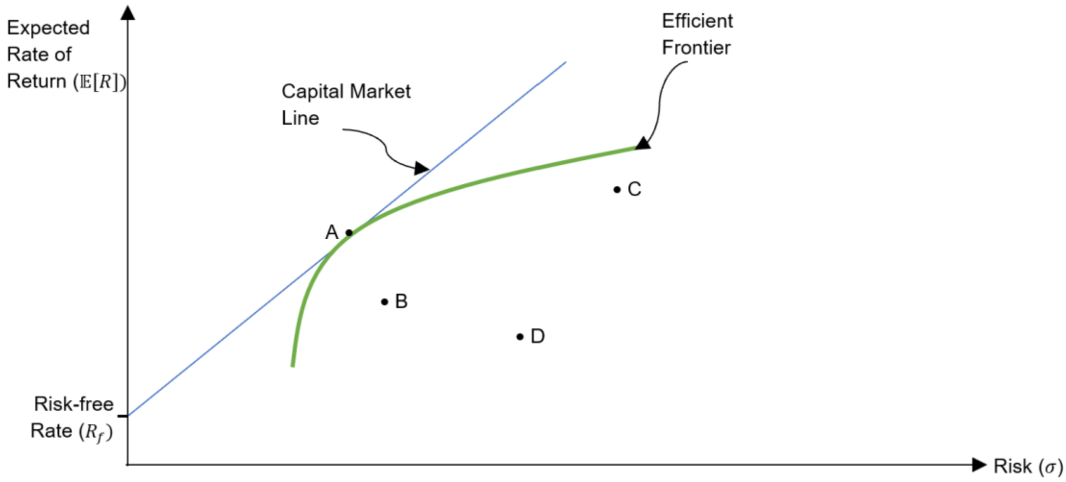
- Ο επενδυτής αποφεύγει τον κίνδυνο.

Στη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου του Markowitz, οι προτιμήσεις μεταξύ διαφορετικών χαρτοφυλακίων καθορίζονται αποκλειστικά βάσει της προσδοκίας και της διακύμανσης των αποδόσεών τους. Το αποτελεσματικό θεώρημα χαρτοφυλακίου της Markowitz δηλώνει ότι ένας επενδυτής θα επιλέξει, από ένα σύνολο χαρτοφυλακίων, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προσφέρει τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση για αρκετά επίπεδα κινδύνου ή προσφέρει τον ελάχιστο κίνδυνο για αρκετά επίπεδα αναμενόμενων αποδόσεων.

Το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά σε σχέση με τα αποδοτικά σύνορα. Το αποτελεσματικό σύνορο (efficient frontier) περιγράφει τη σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης. Είναι η καμπύλη, στο χώρο απόδοσης-κινδύνου, που αντιπροσωπεύει το μέγιστο ποσοστό απόδοσης για κάθε επίπεδο κινδύνου.

Ένα χαρτοφυλάκιο λέγεται ότι είναι αποτελεσματικό εάν, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου, δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο με υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση. Αντιστρόφως, ένα χαρτοφυλάκιο θεωρείται αποτελεσματικό εάν, για ένα ορισμένο επίπεδο απόδοσης, δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο με χαμηλότερο κίνδυνο.

Συμπεριλαμβάνοντας μια επένδυση στο ποσοστό χωρίς κίνδυνο, το αποδοτικό σύνορο γίνεται εφαπτόμενο στη Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (Capital Market Line) και το χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται στο εφαπτομενικό σημείο A αντιπροσωπεύει το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.



Αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια και αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μετοχών και χωρίς κίνδυνο αξιογράφου

Όταν επιλέγει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, ο επενδυτής πρέπει πάντα να επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται στα αποτελεσματικά σύνορα Τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται στα αποδοτικά σύνορα προσφέρουν τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση που μπορεί να επιτευχθεί με τη βέλτιστη στάθμιση της επένδυσης που πραγματοποιείται στους διάφορους τίτλους.

Αυτό το μέρος της ενότητας καθορίζει τα προβλήματα βελτιστοποίησης που εφαρμόζονται χρησιμοποιώντας τα μέτρα κινδύνου που παρουσιάζονται στην ενότητα 3 στο πλαίσιο της βέλτιστης κατανομής χαρτοφυλακίου. Σε αυτό το πλαίσιο, λαμβάνονται υπόψη οι ακόλουθες παραδοχές:

- Ένας επενδυτής έχει ένα αρχικό κεφάλαιο V_0 τη στιγμή $t = 0$, το οποίο πρέπει να επενδύεται σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από N επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία.

- Ο στόχος είναι να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο για μια περίοδο $t = \{1,\ldots, T\}$, έτσι ώστε στο $T = 1$, ο επενδυτής να έχει αποκτήσει τουλάχιστον τόσο πλούτο σαν να είχε επενδύσει στο ποσοστό χωρίς κίνδυνο R_f .

- Προκειμένου να περιοριστεί ο κίνδυνος, ο επενδυτής θέτει ορισμένους περιορισμούς στο χαρτοφυλάκιο.

- Ο επενδυτής είναι ορθολογικός πράκτορας και αποφασίζει να διαθέσει όλο τον πλούτο του στα διάφορα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου μέχρι το τέλος της επενδυτικής περιόδου.

- Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής και δεν είναι δυνατή η πραγματοποίηση πωλήσεων για τον επενδυτή.

Ο στόχος ενός ορθολογικού επενδυτή είναι είτε να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του R_p είτε να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, που υποδηλώνεται με ρ. Το πρόβλημα συνεπώς συνίσταται στο να αποδώσει ένα συγκεκριμένο μέρος του πλούτου του, στα διάφορα περιουσιακά στοιχεία από τα οποία αποτελείται το χαρτοφυλάκιο. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της αναμενόμενης επιστροφής μπορεί να διατυπωθεί ως:

Maximise $\quad R_p = w^T R$

Subject to: $\quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, $\quad w_i \geq 0$

όπου:

• το R_p είναι η επιστροφή του χαρτοφυλακίου.

• το w είναι το διάνυσμα διάστασης $1 \times N$ των weights των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο.

• το w_i δηλώνει το βάρος που αποδίδεται στο περιουσιακό στοιχείο i.

• το R είναι το διάνυσμα διάστασης $1 \times N$ των αποδόσεων κάθε περιουσιακού στοιχείου i στο χαρτοφυλάκιο.

• Το N είναι ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο.

Η μεγιστοποίηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μπορεί να είναι δελεαστική για έναν επενδυτή, ωστόσο, το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν λαμβάνει υπόψη τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Ένας επιφυλακτικός στον κίνδυνο επενδυτής προτιμά να ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου παρά να μεγιστοποιεί την απόδοση του. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κινδύνου μπορεί να διατυπωθεί ως:

Minimise $\quad p(w^T R)$

Subject to: $\quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, $\quad w_i \geq 0$

όπου p είναι το μέτρο κινδύνου.

Η mean-variance βελτιστοποίηση είναι η παραδοσιακή προσέγγιση που εισήγαγε ο Markowitz. Προτείνει τη χρήση της διακύμανσης ως μέτρο κινδύνου. Παρά τις πολλές κριτικές για τη χρήση της διακύμανσης ως μέτρου κινδύνου, αυτή είναι η πρώτη προτεινόμενη λύση στο πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου.

Στη θεωρία που προτείνει ο Markowitz, το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\mathbb{E}[R_p] = \sum_{i=1}^{N} w_i \times \mathbb{E}[R_i] = \mathbb{E}[R_1] \times w_1 + \cdots + \mathbb{E}[R_N] \times w_N \tag{38}$$

όπου:

• το w_i δηλώνει το βάρος που αποδίδεται στο περιουσιακό στοιχείο i.

• το $\mathbb{E}[R_p]$ είναι η αναμενόμενη επιστροφή του χαρτοφυλακίου.

• το $\mathbb{E}[R_i]$ είναι η αναμενόμενη επιστροφή του περιουσιακού στοιχείου i.

• το N είναι ο αριθμός των περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνει το χαρτοφυλάκιο.

Το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου αντιστοιχεί στον σταθμισμένο μέσο όρο των αναμενόμενων αποδόσεων των τίτλων από τους οποίους το αποτελείται. Ο κίνδυνος (τυπική απόκλιση) που σχετίζεται με το χαρτοφυλάκιο εξαρτάται από τον ατομικό κίνδυνο καθενός από τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου και τη συνδιακύμανση μεταξύ τους.

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_i^N \sum_j^N w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{[w_1\, w_2 \ldots\, w_N] \times \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}} \tag{39}$$

όπου:

• το σ_p δηλώνει την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

• το σ_{ij} είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών i και j.

Ο επενδυτής μπορεί να θέλει να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο που σχετίζεται με το χαρτοφυλάκιο, μεγιστοποιώντας ταυτόχρονα την κερδοφορία του. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μεταφραστεί με την κλασική mean-variance βελτιστοποίηση που προέρχεται από τη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου που προτείνει ο Markowitz. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι ένα κυρτό τετραγωνικό πρόγραμμα, που διατυπώνεται ως:

Min $\quad p(w^T R)$

Subject to:
$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$
$$w_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{N} w_i \times \mathbb{E}[R_i] \geq \xi$$

Όπου το ξ είναι το ελάχιστο επίπεδο της αναμενόμενης απόδοσης που έχει ορίσει ο επενδυτής

Το προηγούμενο πρόβλημα θα επιτρέψει την απόκτηση βέλτιστης κατανομής, υπό τον περιορισμό της ελάχιστης απόδοσης ξ. Για ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου, το διπλό πρόβλημα διατυπώνεται από:

Max $p(w^T R)$

Subject to:
$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$
$$w_i \geq 0$$
$$\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \leq \varsigma$$

Όπου ξ είναι το ελάχιστο επίπεδο της αναμενόμενης απόδοσης που έχει ορίσει ο επενδυτής.

3. Δεδομένα

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν για την εμπειρική ανάλυση αποτελούνται από ημερήσιες τιμές πέντε δεικτών από ανεπτυγμένες χώρες και πέντε δεικτών από αναδυόμενες οικονομίες και αφορούν στην περίοδο της τελευταίας δεκαετίας, ήτοι 1/1/2010 – 30/12/2020 και είναι διαθέσιμα στο yahoo.finance.

Οι ανεπτυγμένες χώρες και οι δείκτες τους που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση είναι οι εξής:

Ευρώπη:

- Γαλλία: το CAC 40. Είναι ένας σταθμισμένος δείκτης κεφαλαιοποίησης ελεύθερης αγοράς που αντικατοπτρίζει την απόδοση των 40 μεγαλύτερων και ενεργά διαπραγματεύσιμων μετοχών που αναφέρονται στο Euronext Paris.
- Ηνωμένο Βασίλειο: το FTSE 100. Είναι ένας σταθμισμένος δείκτης κεφαλαιοποίησης των 100 πιο κεφαλαιοποιημένων εταιρειών που διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο του Λονδίνου.
- Γερμανία: το DAX 30. Είναι ένας συνολικός δείκτης απόδοσης 30 γερμανικών blue-chip μετοχών που διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης

Αμερική:

- Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής: το Dow Jones 30. Ο βιομηχανικός μέσος όρος Dow Jones είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος 30 blue-chip μετοχών, οι οποίες κατέχουν ηγετική θέση στον κλάδο τους.

Ασία:

- Ιαπωνία: το Nikkei 225. Είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος 225 κορυφαίων τιμών Ιαπωνικών εταιρειών που είναι εισηγμένες στο Χρηματιστήριο του Τόκιο.

Οι αναδυόμενες αγορές και οι δείκτες τους που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση είναι οι εξής:

- Ευρώπη:

- Ρωσία: το MOEX 45. Είναι ένας σύνθετος δείκτης σταθμισμένου ορίου που υπολογίζεται με βάση τις τιμές των πιο ρευστών ρωσικών μετοχών που παρουσιάζονται στο Χρηματιστήριο της Μόσχας.

- Αμερική:

- Βραζιλία: το IBOVESPA 75. Είναι ένας ακαθάριστος συνολικός δείκτης απόδοσης σταθμισμένος από μια κεφαλαιοποίηση ελεύθερης ρευστής αγοράς που αποτελείται από τις πιο ρευστές μετοχές που διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο του Σάο Πάολο.
- Μεξικό: το S & P / BMV INMEX 20. Έχει σχεδιαστεί για τη μέτρηση της απόδοσης των 20 μεγαλύτερων και πιο ρευστών αποθεμάτων του S&P/BMV IPC, που είναι ο κύριος δείκτης των Μεξικάνικων Αγορών.

- Ασία:

- Ινδία: το S&P BSE SENSEX 30. Μετρά την απόδοση των 30 μεγαλύτερων και πιο ρευστών μετοχών εταιρειών σε βασικούς τομείς της ινδικής οικονομίας που είναι εισηγμένες στην BSE Ltd.
- Κορέα: το KOSPI 50. Είναι ένας σταθμισμένος δείκτης κεφαλαιοποίησης της αγοράς των κορυφαίων 50 μετοχών όσον αφορά την κεφαλαιοποίηση της αγοράς μεταξύ των μελών του δείκτη Kospi2.

Εκτός από αυτούς τους δείκτες, το iShares MSCI ACWI ETF προστίθεται στην ανάλυση ως σημείο αναφοράς της αγοράς, προκειμένου να αποκτήσουμε πρόσβαση στο Morgan Stanley Capital International All Country World Index και να μετρήσουμε το συνολικό παγκόσμιο χρηματιστήριο. Τα δεδομένα λαμβάνονται από το Finance.yahoo.com. Το 3μηνο USD Interbank Offer Rate (LIBOR) περιλαμβάνεται επίσης στην ανάλυση ως για το ποσοστό χωρίς κίνδυνο που αντιπροσωπεύει το μερίδιο του κεφαλαίου που ο επενδυτής θέλει να προστατεύσει από τον κίνδυνο. Τα δεδομένα συλλέγονται από την Federal Reserve Economic Data (fred.stlouisfed.org).

Αρχικά τα δεδομένα εξετάζονται περιγραφικά ώστε να κατανοηθεί καλύτερα η συμπεριφορά τους. Το τεστ Fisher για εποχικότητα και η παρουσία μιας τάσης έχουν πραγματοποιηθεί για κάθε περιουσιακό στοιχείο του χαρτοφυλακίου. Ενώ κανένα από τα περιουσιακά στοιχεία δεν παρουσιάζει εποχικότητα, όλα επηρεάζονται από μια τάση, όπως φαίνεται στα διαγράμματα του Παραρτήματος. Οι αυτοσυσχετίσεις (ACF) των ημερήσιων αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου, καθώς και του MSCI απεικονίζονται στα διαγράμματα του Παραρτήματος. Το ACWI ETF και το 3 μηνών LIBOR USD παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β, μαζί με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Μερικής Αυτοσυσχέτισης (PACF). Το ACF κάθε χρονικής σειράς παραμένει επίπεδο σε ενότητα, πράγμα που υποδηλώνει ότι η σειρά είναι μη στάσιμη. Αυτό σημαίνει ότι τα σοκ στην ενδογενή μεταβλητή παραμένουν επ 'αόριστον στο σύστημα. Το ACF της σειράς επιβεβαιώνει επίσης ότι επηρεάζονται από μια τάση όπως δείχνει η αργή παρακμή των όρων τους.

Σε αυτήν την εμπειρική ανάλυση, οι ημερήσιες αποδόσεις όλων των περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο θα ληφθούν υπόψη για συνέπεια και για το γεγονός ότι ικανοποιούν την ιδιότητα της προσθετικότητας. Προκειμένου να προσδιοριστεί εάν η σειρά χαρακτηρίζεται από μια μονάδα ρίζας ή είναι στάσιμη, εφαρμόζεται ο έλεγχος Augmented Dickey-Fuller (ADF) (1981). Τα αποτελέσματα για κάθε στοιχείο είναι ότι η μηδενική υπόθεση μοναδιάιας ρίζας στη σειρά H_0: $\phi = 1$ γίνεται αποδεκτή σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, υπονοώντας ότι η σειρά δεν είναι στάσιμη. Οι δοκιμές σε joint hypothesis επιβεβαιώνουν ότι η σειρά είναι τύπου DS: η σταθερότητα της σειράς θα προκληθεί διαφοροποιώντας μία φορά. Με την πρώτη διαφορά των δεδομένων επιτυγχάνεται η στασιμότητά τους.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία των ημερήσιων log-αποδόσεων πρώτης διαφοράς των δεικτών των ανεπτυγμένων και των αναδυόμενων αγορών, του MSCI ACWI ETF tracker και του 3μηνου LIBOR:

Πίνακας 1: Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία των *daily log-returns* των δεικτών για τις ανεπτυγμένες και τις αναδυόμενες οικονομίες, τον ιχνηλάτη iShares MSCI ACWI ETF και το LIBOR USD 3 μηνών.

Market		Mean	Standard Deviation	Skewness	Kurtosis	Jarque-Bera	Ljung-Box
Developed Economies:							
France	CAC 40	0.00013	0.01282	-0.75114	8.25913	7734.1* **0.00000**	0.18842 **0.6642**
Germany	DAX	0.00028	0.01275	-0.60321	8.70578	8477.8* **0.00000**	1.6127 **0.2041**
UK	FTSE 100	0.00006	0.01021	-0.85750	11.87727	15805* **0.00000**	0.74508 **0.388**
USA	DJI	0.00035	0.01083	-1.01491	24.42392	65921* **0.00000**	60.552* **0.00000**
Japan	N225	0.00031	0.01313	-0.46928	6.18762	4298.6* **0.00000**	3.5349 **0.06009**
Average		**0.000226**	**0.011948**	**-0.73921**	**11.89074**		
Emerging Economies:							
Russia	MCX	0.00028	0.01222	-0.86248	8.40191	8074* **0.00000**	0.00261 **0.9592**
Brazil	BVSP	0.00016	0.01567	-0.90059	13.47822	20294* **0.00000**	23.241* **0.00000**
Mexico	MXX	0.00007	0.01010	-0.52151	4.80683	2655.2* **0.00000**	9.7645* **0.00178**
India	BSE	0.00029	0.01075	-1.08181	18.27681	37175* **0.00000**	0.02706 **0.8693**
Korea	KSPI50	0.00000	0.01093	-0.11446	6.56711	4738.9* **0.00000**	0.26089 **0.6095**
Average		**0.00016**	**0.011934**	**-0.69617**	**10.30618**		
iShares MSCI ACWI	ETF	0.00025	0.01204	-3.97553	73.23441	595558* **0.00000**	36.88* **0.00000**
3M USD LIBOR	Interest Rate	-0.00025	0.01351	-5.66351	119.13600	1571804* **0.00000**	238.31* **0.00000**

Ο μέσος όρος, η τυπική απόκλιση, η ασυμμετρία και η κύρτωση για κάθε συστατικό του χαρτοφυλακίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Τα τεστ για κανονικότητα των αποδόσεων και της αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων έχουν επίσης αναφερθεί στον πίνακα. Το στατιστικό Jarque-Bera (JB) ελέγχει για την κανονικότητα χρησιμοποιώντας συντελεστές στρέβλωσης και κύρτωσης Το JB ακολουθεί ένα χ^2 statistic με 2 βαθμούς ελευθερίας. Η κρίσιμη τιμή στο επίπεδο εμπιστοσύνης 5% είναι 5,991. Το στατιστικό Ljung-Box (LB) ελέγχει για αυτοσυσχέτιση και ακολουθεί χ^2 statistic πρώτης τάξης (1 βαθμός ελευθερίας). Η κρίσιμη τιμή στο επίπεδο εμπιστοσύνης 5% είναι 3,841. Τα p-values για τα τεστ αναφέρονται με έντονη γραφή στα στατιστικά στοιχεία του τεστ. Στην περίπτωση που η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, τα στατιστικά στοιχεία ακολουθούνται από έναν αστερίσκο. Τα αποτελέσματα των τεστ Jarque-Bera δείχνουν ότι η μηδενική υπόθεση των δεδομένων που κατανέμονται κανονικά απορρίπτεται για όλα τα στοιχεία του χαρτοφυλακίου. Όσον αφορά το Ljung-Box τεστ, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι μόνο για το Dow Jones 30, το Ibovespa, το INMEX, το MSCI ACWI ETF και το 3-μηνών USD LIBOR απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση της χρονικής σειράς που δεν αυτοσυσχετίζεται.

Ο περιγραφικός πίνακας ανάλυσης δείχνει ότι τα δεδομένα για τις ανεπτυγμένες και τις αναδυόμενες χώρες εμφανίζουν κατά μέσο όρο μια τυπική απόκλιση του ίδιου μεγέθους με τις ανεπτυγμένες οικονομίες, οι οποίες παρουσιάζουν κατά μέσο όρο μεγαλύτερη κύρτωση από τις αναδυόμενες οικονομίες. Η αριστερή ασυμμετρία και η υψηλότερη λεπτοκύρτωση των ανεπτυγμένων οικονομιών υπονοούν ότι αυτοί οι δείκτες παρουσιάζουν υψηλότερο κίνδυνο και αποζημιώνουν τους επενδυτές με μεγαλύτερες αποδόσεις.

4. Μεθοδολογία

Αυτή η ενότητα σχετίζεται με τη μεθοδολογία που υιοθετήθηκε για την σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Η διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση του κινδύνου, χρησιμοποιώντας τα τρία μέτρα κινδύνου αξίας σε κίνδυνο, ήτοι, το VaR, το CVaR και το EvaR, με τη βοήθεια του λογισμικού R.

Η αξία σε κίνδυνο μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$VaR_\alpha (L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) > \alpha\} \quad (40)$$

όπου F_L είναι η κατανομή της συνάρτησης απώλειας.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με το VaR ως μέτρο κινδύνου μπορεί διαισθητικά να εκφραστεί ως:

Minimise $\mathrm{VaR}_\alpha (w^T R)$

Subject to: $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, $w_i \geq 0$

Ακολουθώντας τους Gaivoronsky et al. (2005), το πρόβλημα mean-VaR βελτιστοποίησης μπορεί να οριστεί ως εξής. Ας υποδηλώσουμε το V(w) ως το εμπειρικό α qunatile του δείγματος ($w^T R_1$,…, $w^T R_N$) έτσι ώστε $V(w)$ = $\min^{\lfloor \alpha N \rfloor + 1}$ { $w^T R_1$,…, $w^T R_N$ }, όπου $\lfloor \alpha N \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το αN. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί το εμπειρικό VaR ως στόχο κινδύνου είναι επομένως:

Min $-\mathrm{V}(w)$

Subject to: $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, $w_i \geq 0$

Για τη βελτιστοποίηση στο mean-CVaR επίπεδο, η εξάρτηση από το Value at Risk που υπάρχει στον τύπο του Conditional Value at Risk αποτελεί εμπόδιο για τη διαμόρφωση του γραμμικού προβλήματος.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου mean-CVaR μπορεί να διατυπωθεί διαισθητικά από:

$$\textbf{Minimise} \quad \mathrm{CVaR}_\alpha\,(w^T R)$$

$$\textbf{Subject to:} \quad \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{array}$$

Καθώς ο ορισμός του CVaR περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα του VaR, είναι δύσκολο να εφαρμοστεί μια άμεση βελτιστοποίηση. Μια λύση σε αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης προτείνεται από τους Rockafellar και Uryasev (2000). Η προσέγγιση που προτείνουν αυτοί οι συγγραφείς καθιστά δυνατή τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είτε ελαχιστοποιώντας το CVaR, είτε επιβάλλοντας όρια κάτω από τα οποία μπορεί να βελτιστοποιηθεί το χαρτοφυλάκιο. Προτείνουν δύο θεωρήματα που επιτρέπουν την απλοποίηση του προηγούμενου προβλήματος βελτιστοποίησης.

Έστω R_w μια τυχαία μεταβλητή ανάλογα με το διάνυσμα αποφάσεων $w \in X$, όπου X αντιστοιχεί στο σύνολο των εφικτών θέσεων και $\alpha \in [0,1]$ το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Για επίπεδο εμπιστοσύνης α, το CVaR της τυχαίας μεταβλητής R_w συμβολίζεται με $\mathrm{CVaR}_\alpha(w)$.

Έστω F_α η συνάρτηση που ορίζεται ώς:

$$\mathrm{F}_\alpha(w, v) = \frac{1}{\alpha}\, E[-\mathrm{R}_w + v]^+ - v \qquad (41)$$

Όπου $[u]^+ = \max\{u,0\}$

Ως συνάρτηση του u, η F_α είναι πεπερασμένη και συνεχής (και επομένως κυρτή), και περαιτέρω ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\,(w) = \min_{v \in \mathbb{R}} \mathrm{F}_\alpha(w, v) \qquad (42)$$

Το σύνολο τιμών v, για το οποίο επιτυγχάνεται το ελάχιστο $A_\alpha(w)$, είναι ένα κλειστό, μη κενό και φραγμένο διάστημα, το οποίο περιέχει το $-VaR_\alpha(R_w)$. Μπορεί να μειωθεί σε ένα μόνο σημείο.

Η ελαχιστοποίηση του CVaR_α σχετικά με το $w \in X$ ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του F_α σχετικά με το ζευγάρι $(w, v) \in X \times \mathbb{R}$:

$$\min_{w \in \mathbb{R}} \mathrm{CVaR}_\alpha\,(w) = \min_{(w,v) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R}} \mathrm{F}_\alpha(w, v) \qquad (43)$$

Επιπλέον, το ζευγάρι (w^*, v^*) ελαχιστοποιεί τη δεξιά πλευρά εάν και μόνο εάν το w^* ελαχιστοποιεί την αριστερή πλευρά και το $v \in A_\alpha\,(w^*)$. Το CVaR_α είναι κυρτό σε σχέση με το w και η F_α είναι κυρτή σε σχέση με το (w, v). Εάν το σύνολο των εφικτών χαρτοφυλακίων είναι κυρτό, η ελαχιστοποίηση του CVaR είναι τότε ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Υπό την υπόθεση ότι η μεταβλητή R_w παραδέχεται m πιθανά αποτελέσματα $r_{1w},\ldots,r_{mw}$ πιθανοτήτων $p_1,\ldots, p_m$ με $r_{iw} = \sum_{j=1}^{n} w_i r_{ij}$, για όλα τα $i \in \{1,\ldots, m\}$, τότε:

$$\mathrm{F}_a(w,v) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m} p_i[v - r_{iw}]^+ - v = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m} p_i[v - \sum_{i=1}^{n} w_i r_{ij}]^+ - v \qquad (44)$$

Εισάγοντας την ακόλουθη βοηθητική μεταβλητή y_i έτσι ώστε:

$$y_i = \begin{cases} -v - \sum_{i=1}^{n} r_{ij} w_i \ si \ \sum_{i=1}^{n} r_{ij} w_i \leq -v \\ 0 \ otherwise \end{cases} \qquad (45)$$

το πρόβλημα βελτιστοποίησης προσεγγίζεται στη συνέχεια με την ακόλουθη διατύπωση γραμμικού προγραμματισμού (LP):

$$\min_{v\in\mathbb{R}, y_i \geq 0} \quad v + \frac{1}{am}\sum_{j=1}^{N} y_i$$

Subject to:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} -r_{ij} w_i - v + y_i \geq 0 \\ y_i \geq 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\ w_i \geq 0 \end{gathered}$$

Όπως παρουσιάστηκε νωρίτερα, το μέτρο VaR με βάση το Expectile, που υποδηλώνεται ως EVaR, ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$\mathrm{EVaR}_\tau\,(X)$ = $-\mathrm{e}_\tau\,(X)$

όπου το τ είναι ο δείκτης προληπτικότητας.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης mean-EVaR μπορεί να διατυπωθεί διαισθητικά ως:

Minimise $\quad \mathrm{EVaR}_\alpha\,(w^T R)$

Subject to:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{gathered}$$

O Jakobson (2016) βασίζετε στην συνεισφορά των Rockafellar και Uryasev (2000) με το CVaR και εισάγει το EVaR ως αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης ως εξής:

Minimise $\quad \mathrm{e}_\tau\,(-w^T R)$

Subject to:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{gathered}$$

Έστω $L = -w^T R$, $L \in L^1\,(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, απώλειες χαρτοφυλακίου, με $w \in \mathbb{R}^d$ το διάνυσμα των weights του χαρτοφυλακίου. Έστω R το διάνυσμα των αποδόσεων που ακολουθεί μια διακριτή κατανομή, έτσι ώστε $\mathbb{P}$ ($R = R_i$) = pi, $i \in \{1,\dots, N\}$. Η αναπαράσταση των expectiles, με $\tau \in [1/2,1]$, όσον αφορά τα παράγωγα Randon-Nikodym $\phi = d\mathrm{Q}/d\mathrm{P}$ θα είναι:

$$e_\tau = \sup_{\varphi \in M_\tau} \mathbb{E}[\varphi L] \tag{46}$$

Όπου $\mathcal{M}_\tau = \{\phi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}): \phi \geq 0, \mathbb{E}[\varphi] = 1, \exists\, m > 0; (1-\tau)m \leq \phi \leq \tau m\}$.

Στον πεπερασμένο και διακριτό χώρο πιθανότητας που υποδηλώνεται με Ω = $\{\omega\omega 1,\dots, \omega\omega NN\}$, η διατύπωση LP για το προσδοκώμενο $ee\tau\tau$ (LL), όπου LL είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $\mathbb{P}$ ($L = l_i$) = $\mathbb{P}$ (ω_i) = p_i, $i = \{1,\dots, N\}$ και $l_i = -w^T R_i$, δίνεται ως εξής:

Minimise $\quad \zeta \; over \; \zeta \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^N$

Subject to:

$$\begin{gathered} p_i w^T R_i + p_i \zeta - u_i + v_i \geq 0 \\ u_i \geq 0,\; v_i \geq 0, \quad i = \{1, \dots, N\} \\ w_i \in \mathcal{X}, (1-\tau) \textstyle\sum_{i=1}^N u_i - \tau \sum_{i=1}^N v_i \geq 0 \end{gathered}$$

όπου $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ είναι το σύνολο των αποδεκτών weights χαρτοφυλακίου.

Για το μέτρο κινδύνου EVaR, με $\tau \in [0 , 1/2]$, όπως ορίζεται από τους Kuan et al. (2009):

$\mathrm{EVaR}_\tau (X) = -\mathrm{e}_\tau (X)$

το πρόβλημα mean-EVaR βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου είναι επομένως:

$$\min_{u_i \geq 0,\, v_i \geq 0} \quad \zeta$$

Subject to:

$$\begin{gathered} p_i w^T R_i + p_i \zeta - u_i + v_i \geq 0 \\ u_i \geq 0,\; v_i \geq 0, \quad i = \{1, \dots, N\} \\ w_i \in \mathcal{X}, (1-\tau) \textstyle\sum_{i=1}^N u_i - \tau \sum_{i=1}^N v_i \geq 0 \\ \textstyle\sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{gathered}$$

Στις οικονομικές χρονοσειρές, το φαινόμενο των διαρθρωτικών μεταβολών προκύπτουν είτε απο μεταβολή της τάσης των δεδομένων είτε απο εναλλαγή της μεταβλητότητάς τους. Οι ιδιαιτερότητες των κατανομών των αποδόσεων και δη των ουρων τους, υπογραμμίζουν την αναγκαιότητα εφαρομγής μη γραμμικών υποδειγμάτων. Το τεστ ARCH του Engle (1982) έχει εφαρμοστεί στις χρονοσειρές του χαρτοφυλακίου προκειμένου να εκτιμηθεί εάν η διακύμανση των καταλοίπων είναι σταθερή ή όχι. Σε κάθε περίπτωση, η μηδενική υπόθεση της απουσίας ενός φαινομένου ARCH στη χρονική σειρά απορρίφθηκε σε επίπεδο εμπιστοσύνης α = 5% (βλ. Παράρτημα ΣΤ). Αυτό υπονοεί ότι το υποκείμενο μοντέλο περιέχει εξωγενείς παράγοντες των οποίων η επιρροή αλλάζει από τη μία περίοδο στην άλλη, υποδηλώνοντας την εφαρμογή μοντέλου τύπου ARCH.

Η εκτίμηση των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας ARCH, GARCH και EGARCH πραγματοποιήθηκε με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) ενώ ο αριθμός των υστερήσεων προέκυψε με χρήση του κριτηρίου Akaike (AIC). Η βέλτιση επιλογή είναι αυτή των εκθετικού υποδείγματος EGARCH για όλα τα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου, με εξαίρεση το 3-μηνών LIBOR για το οποίο επιλέγεται μια απλή προδιαγραφή GARCH.

Οι μη γραμμικότητες μπορούν επίσης να προκύψουν στην περίπτωση όπου η διαδικασία μιας χρονοσειράς υπόκειται σε διακριτές μεταβολές στα regimes. Η δυναμική των χρηματοοικονομικών σειρών μπορεί να διαφέρει δραστικά από μια περίοδο σε μια άλλη, μετά από μικρές ή μεγάλες καταστροφές, όπως οικονομικές κρίσεις. Αυτές οι αστάθειες έχουν άμεσο αντίκτυπο στην υποκείμενη αστάθεια της σειράς. Προκειμένου να μοντελοποιηθεί αποτελεσματικά η μεταβλητότητα των χρονοσειρών σε αυτήν τη μελέτη, ένα μοντέλο MS-GARCH προσαρμόζεται στη σειρά για να καταγράψει αυτές τις πιθανές δομικές αλλαγές στα δεδομένα. Ο αριθμός των διαρθρωτικών αλλαγών στις προδιαγραφές ορίζεται σε k = 2. Για κάθε χρονική σειρά που αναλύεται, το επιλεγμένο μοντέλο για τη διακύμανση είναι μια προδιαγραφή EGARCH, με εξαίρεση το 3-μηνών USD LIBOR για το οποίο υπάρχει μια προδιαγραφή GARCH.

Το μοντέλο MS-GARCH της διακύμανσης υπό όρους για τη σειρά 3 μηνών USD LIBOR καθορίζεται ως εξής:

$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$

$\epsilon_t = h_t u_t$

$$h_t^2 = a_{0,S_t} + \sum_{i=1}^{p} a_{0,S_t} \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_{i,S_t} h_{t-j}^2 \qquad (47)$$

όπου t = 1,…,T, u_t ~ N(0,1) και $\{S_t\}$ είναι μια εργονομική ομοιογενής αλυσίδα Markov.

Τα μοντέλα MS-EGARCH για την δεσμευμένη διακύμανση για το υπόλοιπο της σειράς των στοιχείων καθορίζονται ως εξής:

$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$

$\epsilon_t = h_t u_t$

$$h_t^2 = a_{0,S_t} + \sum_{i=1}^{p} a_{0,S_t} \ln(h_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{q} g(u_{t-j}) \qquad (48)$$

όπου $g(u_{t-j})$ $=\gamma_{j,St}\,(u_{t-j})$+$\beta_{j,St}(|u_{t-j}|-\mathbb{E}[|u_{t-j}|])$, με α_0,α_i,γ_j,$\beta_j \in \mathbb{R}$, i=1,…,p και j=1,…,q, and t=1,…,T , u_t ~ N(0,1) and $\{S_t\}$ είναι μια εργονομική ομοιογενής αλυσίδα Markov.

Ο πίνακας μετάβασης που περιγράφει τις πιθανότητες k-state (k = {1,2}) για κάθε στοιχείο παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2: Πίνακες μετάβασης των καθεστώτων που προκύπτουν από τις προδιαγραφές Markov-Switching για κάθε στοιχείο.

Asset	Transition Matrix		
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
CAC 40: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.8489**	**0.1511**
	$t \mid k=2$	**0.434**	**0.566**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
DAX: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9728**	**0.0272**
	$t \mid k=2$	**0.0343**	**0.9657**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
FTSE 100: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.6044**	**0.3956**
	$t \mid k=2$	**0.6127**	**0.3873**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
Dow Jones 30: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.4411**	**0.5589**
	$t \mid k=2$	**0.4972**	**0.5028**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
Nikkei 225: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.987**	**0.013**
	$t \mid k=2$	**0.0398**	**0.9602**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
IMOEX: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9863**	**0.0137**
	$t \mid k=2$	**0.1839**	**0.8161**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
INMEX: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.6969**	**0.3031**
	$t \mid k=2$	**0.7315**	**0.2685**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
IBOVESPA: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9938**	**0.0062**
	$t \mid k=2$	**0.0806**	**0.9194**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
BSE SENSEX: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9932**	**0.0068**
	$t \mid k=2$	**0.0634**	**0.9366**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
KOSPI 50: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9991**	**0.0009**
	$t \mid k=2$	**0.0009**	**0.9991**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
MSCI ACWI ETF: Markov Switching EGARCH	$t \mid k=1$	**0.9358**	**0.0642**
	$t \mid k=2$	**0.1494**	**0.8506**
		$t+1 \mid k=1$	$t+1 \mid k=2$
3-month USD LIBOR: Markov Switching GARCH	$t \mid k=1$	**0.7982**	**0.2018**
	$t \mid k=2$	**0.8124**	**0.1876**

Οι πίνακες μετάβασης για τις εργοδικές αλυσίδες Markov είναι στοχαστικοί πίνακες από τους οποίους οι καταχωρήσεις παρέχουν την πιθανότητα ότι, εάν τη στιγμή t, η κατάσταση είναι k = 1, η κατάσταση θα είναι k = 1 ή k = 2 τη στιγμή t + 1. Στην περίπτωση όλων των περιουσιακών στοιχείων, οι καταστάσεις είναι όλες παροδικές (δηλαδή: p_{ij} <1) Ωστόσο, μπορεί να παρατηρηθεί ότι για τις καθημερινές καταγραφές log του δείκτη KOSPI 50, η πιθανότητα αλλαγής του καθεστώτος από το κράτος k = 1 στο k = 2 και αντίστροφα, είναι πολύ κοντά στο μηδέν.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης συνίσταται στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου κάτω απο συγκεκριμένους περιορισμούς:

- Ο επενδυτής κατανέμει τον πλούτο του μεταξύ των δέκα περιουσιακών στοιχείων (δείκτες από ανεπτυγμένες και αναδυόμενες χώρες).
- Ο πλούτος του επενδυτή πρέπει να επενδυθεί πλήρως. το άθροισμα των weights που αποδίδονται στα στοιχεία του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με ένα.
- Το είδος της επιτρεπόμενης επένδυσης είναι μόνο μακρύ
- Δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγής.

Τα προβλήματα ελαχιστοποίησης για τη βελτιστοποίηση μπορούν να περιγραφούν μαθηματικά ως εξής:

Minimise $\mathrm{EVaR}_{\alpha}\ (w^T R)$

Subject to: $\sum_{i=1}^{N=10} w_i = 1$, $w_i \geq 0$

όπου:

- Το i δηλώνει το περιουσιακό στοιχείο i στο χαρτοφυλάκιο ·
- Το ρ ορίζει το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται για την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου.
- Το w είναι ένα διάνυσμα 1 × 10 που καθορίζει την κατανομή βαρών του χαρτοφυλακίου.
- Το R είναι ένα διάνυσμα 1 × 10 που καθορίζει τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Όπως φαίνεται στους Kuan et. al (2009), το προσδόκιμο με την παράμετρο τ συμπίπτει με ξεχωριστά quantiles ανάλογα με την υποκείμενη κατανομή της σειράς. Το EVaR_{τ} μετρά τη μέγιστη πιθανή απώλεια κάτω από το επίπεδο προληπτικής εποπτείας $(1 - \tau)$ εντός της περιόδου διακράτησης. Σύμφωνα με την υπόθεση των κανονικά κατανεμημένων αποδόσεων, το quantile που επιλέχθηκε για το VaR είναι α = 1%. Το αντίστοιχο επίπεδο εμπιστοσύνης για το CVaR που υιοθετήθηκε από την Επιτροπή Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (BCBS, 2013) για τη σύλληψη του κινδύνου ουράς είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ = 97,5%. Στην περίπτωση του μέτρου EVaR, για κανονικές κατανομές, οι Bellini et. al (2017) έχουν προτείνει τη ρύθμιση του τ-expectile στο τ = 0,00145 που αντιστοιχεί στο VaR_α στο α = 0,01

Για την αξιολόγηση των απόδεσων των χαρτοφυλακίων θα χρησιμοποιηθούν τα μέτρα Sharpe, Treynor και Jensen's alpha.

- Αναλογία Sharpe

Η αναλογία Sharpe είναι το πηλίκο του risk premium και του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου:

$$SR_p = \frac{R_p - R_f}{R_p} \quad (49)$$

όπου

το R_p δηλώνει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου p ·

το R_f είναι το ποσοστό χωρίς κίνδυνο ·

το σ_p είναι η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου p.

Ένας αρνητικός δείκτης Sharpe δείχνει ότι το χαρτοφυλάκιο έχει χαμηλή απόδοση σε μία επένδυση στο risk-free. Ο δείκτης Sharpe μεταξύ 0 και 1 υποδηλώνει ότι η υπερβολική απόδοση έναντι του ποσοστού χωρίς κίνδυνο είναι χαμηλότερη από τον κίνδυνο που έχει ληφθεί. Ένας δείκτης μεγαλύτερος από 1 σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο ξεπερνά μια επένδυση χωρίς κίνδυνο και συνεπώς δημιουργεί υψηλότερη κερδοφορία.

- Treynor Ratio

Αυτή η αναλογία είναι το πηλίκο του ασφαλίστρου κινδύνου και του beta του χαρτοφυλακίου:

$$TR_p = \frac{R_p - R_f}{\beta_p} \quad (50)$$

Όπου το β_p είναι το beta του χαρτοφυλακίου (συστηματικός κίνδυνος).

Η αναλογία Treynor αξιολογεί την κερδοφορία ενός χαρτοφυλακίου σε σχέση με τον συστηματικό κίνδυνο. Όσο υψηλότερη είναι η αναλογία, τόσο υψηλότερη είναι η αποδοτικότητα του χαρτοφυλακίου σε σύγκριση με τον κίνδυνο. Αυτός ο λόγος αναλύει τη σχετική μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου σε σχέση με το σημείο αναφοράς και όχι μόνο την αστάθεια του χαρτοφυλακίου. Επομένως, είναι κατάλληλο στην περίπτωση ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου σε σύγκριση με το σημείο αναφοράς του.

- Jensen's Alpha

Αυτό το μέτρο βασίζεται στη θεωρία CAPM. Εκφράζει το ποσό με το οποίο η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου αποκλίνει από τη θεωρητική αναμενόμενη απόδοση CAPM. Ας δηλώσουμε με α_p το μέτρο Jensen's Alpha:

$$\alpha_p = (\mathrm{R}_p - \mathrm{R}_f) - \beta_p(\mathrm{R}_M - \mathrm{R}_f) \qquad (51)$$

όπου το R_M προσδιορίζει τις αναμενόμενες αποδόσεις του δείκτη αναφοράς. Ένα θετικό Jensen's Alpha δείχνει ότι το χαρτοφυλάκιο έχει κερδίσει υπερβάλλουσες αποδόσεις.

5. Εμπειρικά Ευρήματα

Πρώτα εφαρμόζεται μια παθητική επενδυτική στρατηγική στα περιουσιακά στοιχεία του χαρτοφυλακίου. Η επένδυση πραγματοποιείται στην αρχή της περιόδου διακράτησης, από την 1η Ιανουαρίου 2010 έως την 30η Δεκεμβρίου 2020, με στόχο την ελαχιστοποίηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Τα βάρη δεν εξισορροπούνται κατά τη διάρκεια της δεκαετούς περιόδου επένδυσης.

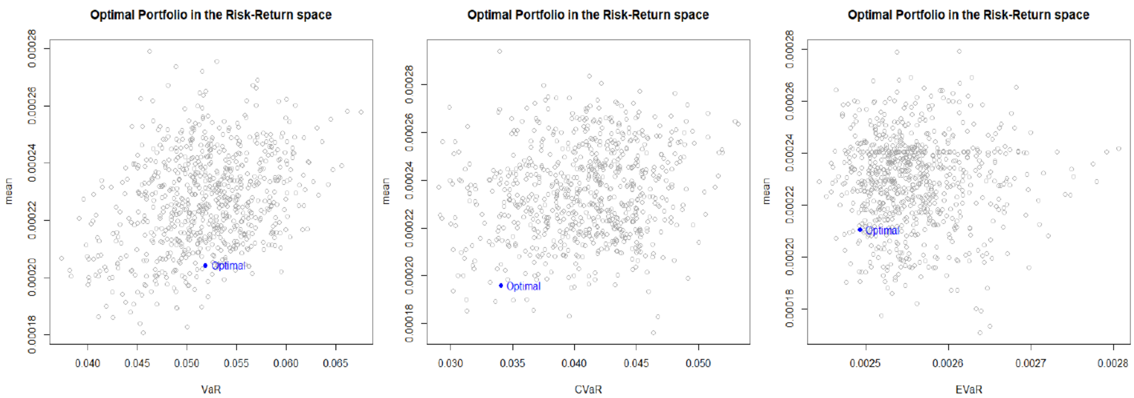
Οι βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου εφαρμόζονται για πρώτη φορά στα αρχικά δεδομένα, δηλαδή στις ημερήσιες καταγραφές των δέκα δεικτών για τους οποίους η διακύμανση δεν έχει μοντελοποιηθεί από μια προδιαγραφή MS-EGARCH. Τα αποτελέσματα για τη βελτιστοποίηση παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Η ημερήσια τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου δηλώνεται με σ_p και η αναμενόμενη ημερήσια απόδοση με R_p. Το επίπεδο κινδύνου του VaR στο α = 1%, του CVaR στο α = 2,5% και του EVaR στο τ = 0,45% συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3: Σύνοψη της στρατηγικής παθητικής βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου στα αρχικά δεδομένα.

Risk objectives	Risk Level	σ_p	R_p	Sharpe Ratio	Treynor Ratio	Jensen's Alpha
$VaR_{\alpha=1\%}$	5.182%	0.00732%	0.02042%	6.24019	0.00059	0.00007
$CVaR_{\alpha=2.5\%}$	3.404%	0.00693%	0.01958%	6.46118	0.00057	0.00006
$EVaR_{\tau=0.145\%}$	0.2493%	0.00659%	0.02103%	7.02	0.00060	0.00008

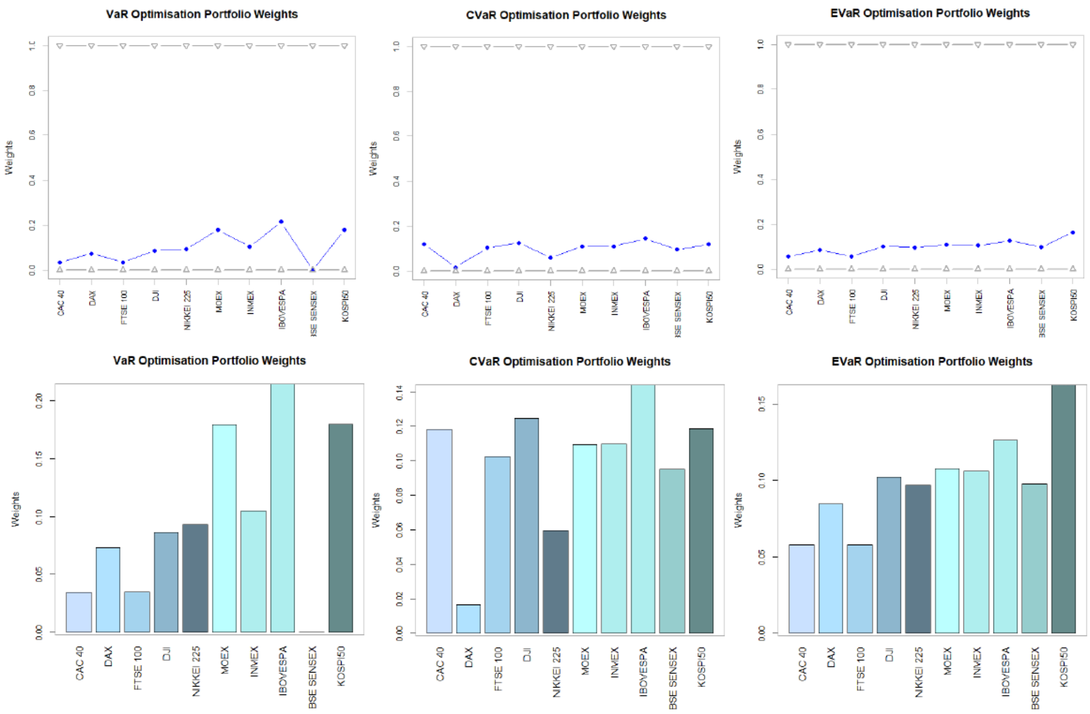
Από αυτήν την πρώτη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το μέτρο EVaR είναι πιο συντηρητικό σε σύγκριση με τα κλασικά μέτρα. Η απώλεια που σχετίζεται με το μέτρο κινδύνου EVaR (0,25%) είναι σημαντικά χαμηλότερη από εκείνη του VaR στο 99%, με απώλεια 5,18%, και αυτή του CVaR στο επίπεδο εμπιστοσύνης 97,5%, το οποίο παρουσιάζει απώλεια μεγέθους 3,40% .

Επιπλέον, η βελτιστοποίηση EVaR δίνει τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου με 0,0066% και δημιουργεί την υψηλότερη ημερήσια αναμενόμενη απόδοση 0,021%. Η βελτιστοποίηση VaR παράγει μια αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου 0,020% και αποδίδει την υψηλότερη τυπική απόκλιση (0,0073%). Η βελτιστοποίηση CVaR παράγει ημερήσια αναμενόμενη απόδοση 0,0195%, αλλά έχει ως αποτέλεσμα μια τυπική απόκλιση 0,0069%, η οποία είναι υψηλότερη από αυτήν του EVaR.

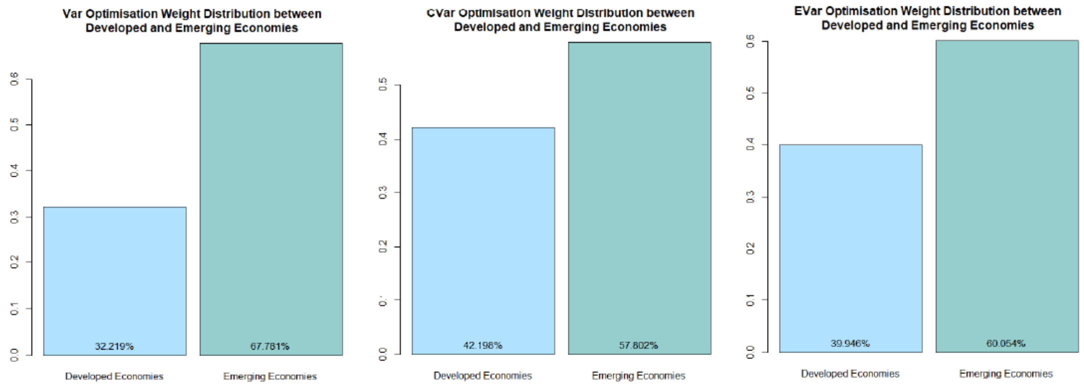


Βέλτιστα χαρτοφυλάκια στο χώρο απόδοσης κινδύνου που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα αρχικά δεδομένα.

Οι αναλογίες για την αξιολόγηση απόδοσης των χαρτοφυλακίων (η αναλογία Sharpe, η αναλογία Treynor και η Jensen's Alpha) δείχνουν ότι η βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου EVaR αποδίδει καλύτερα από τις άλλες. Πράγματι, δεδομένου ότι καταλήγει στο χαρτοφυλάκιο με τον ελάχιστο κίνδυνο (χαμηλότερη τυπική απόκλιση), η αναλογία Sharpe της βελτιστοποίησης EVaR είναι η υψηλότερη με αναλογία 7,02 έναντι αναλογίας 6,46 και 6,24 για τις βελτιστοποιήσεις CVaR και VaR, αντίστοιχα. Η περίπτωση είναι η ίδια με την αναλογία Treynor, που είναι 0,00060 για τη βελτιστοποίηση EVaR, 0,00057 για το CVaR και 0,00059 για τη βελτιστοποίηση VaR. Οι τιμές του Jensen's Alpha σε κάθε περίπτωση είναι όλες θετικές, πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα χαρτοφυλάκια δημιουργούν υπερβολικές αποδόσεις σε σύγκριση με το σημείο αναφοράς.



Η κατανομή weights χαρτοφυλακίων μεταξύ των στοιχείων που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα αρχικά δεδομένα.



Κατανομή weights χαρτοφυλακίων μεταξύ ανεπτυγμένων και αναδυόμενων οικονομιών που προκύπτει από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα αρχικά δεδομένα.

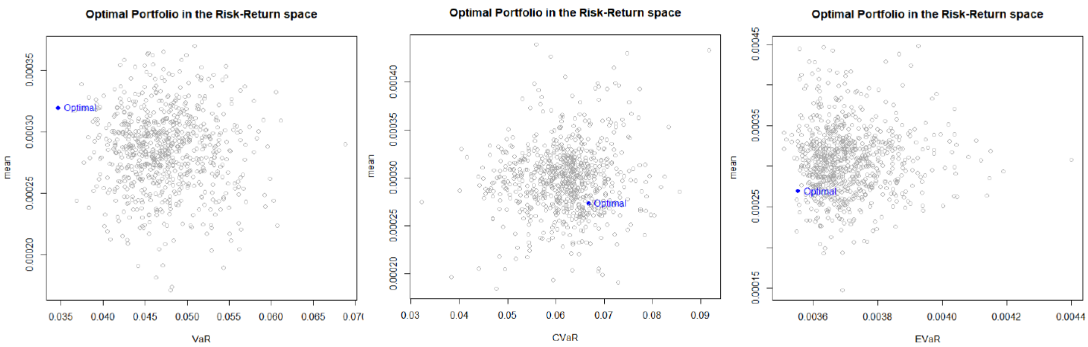
Από τα παραπάνω διαγράμματα, μπορεί κανείς να δει ότι η παθητική στρατηγική οδηγεί σε χαρτοφυλάκια που δίνουν μεγαλύτερο βάρος στις αναδυόμενες οικονομίες συνολικά για την περίοδο διατήρησης. Καθώς οι ανεπτυγμένες οικονομίες εμφανίζουν υψηλότερες αποδόσεις μαζί με υψηλότερο επίπεδο κινδύνου, οι βελτιστοποιήσεις δίνουν μεγαλύτερο βάρος στους δείκτες από τις αναδυόμενες χώρες προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το επίπεδο κινδύνου για τα χαρτοφυλάκια.

Τα αποτελέσματα των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που μοντελοποιούνται από τις προδιαγραφές MS-EGARCH αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα:

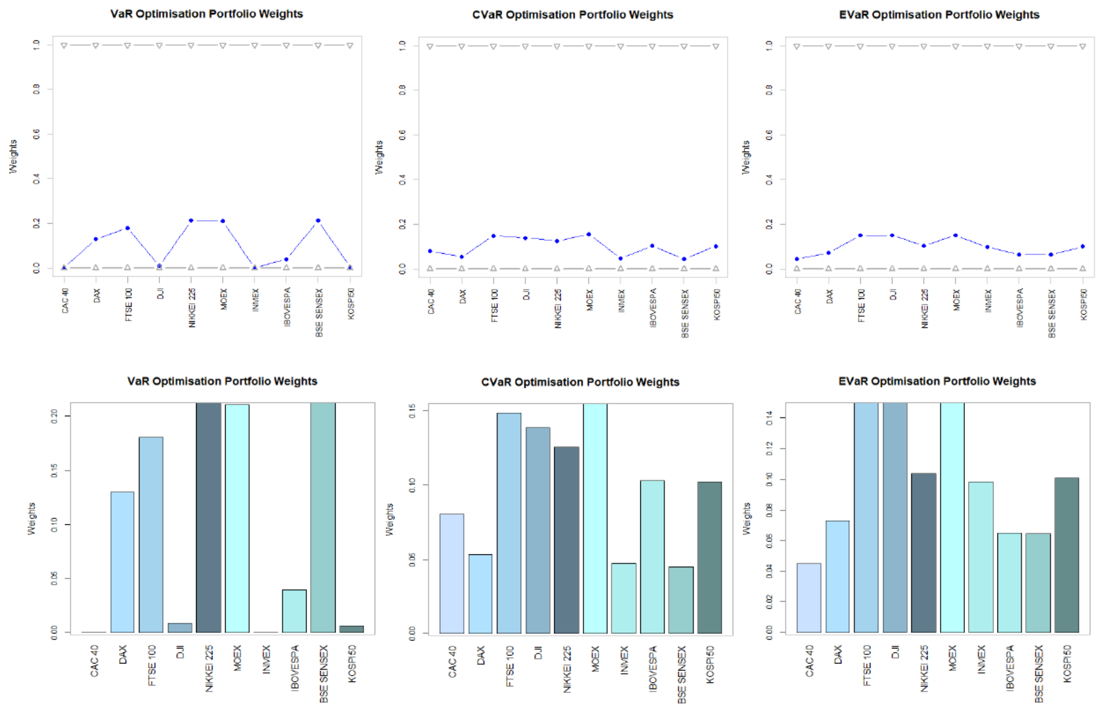
Risk objectives	Risk Level	σ_p	R_p	Sharpe Ratio	Treynor Ratio	Jensen's Alpha
$VaR_{\alpha=1\%}$	3.463%	0.00927%	0.03196%	0.80181	0.00055	0.00023
$CVaR_{\alpha=2.5\%}$	6.677%	0.00867%	0.02734%	0.32513	0.00020	0.00019
$EVaR_{\tau=0.145\%}$	0.3552 %	0.00815%	0.02691%	0.29243	0.00017	0.00019

Πίνακας 4: Σύνοψη της παθητικής βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου σε δεδομένα MS-EGARCH.

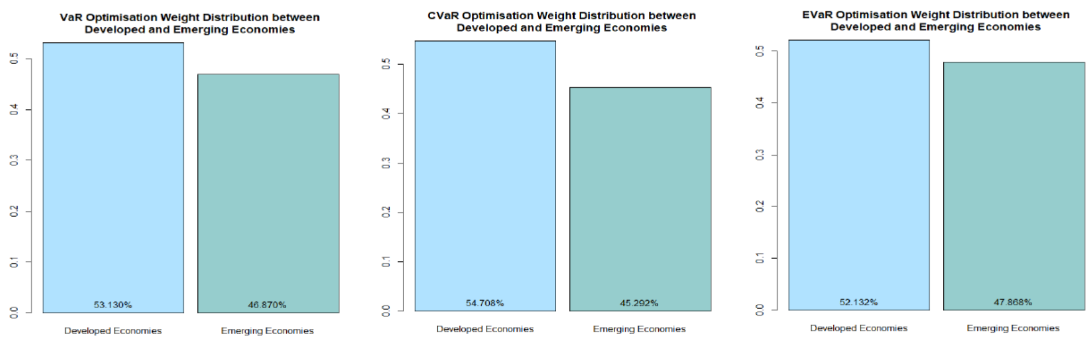
Οι βελτιστοποιήσεις στα δεδομένα που καθορίζονται με ένα MS-EGARCH παράγουν όλα χαρτοφυλάκια με υψηλότερες αποδόσεις και τυπική απόκλιση σε σύγκριση με τις βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τα αρχικά δεδομένα. Το επίπεδο κινδύνου που σχετίζεται με το μέτρο κινδύνου EVaR (0,035%) παραμένει το χαμηλότερο σε σύγκριση με το VaR (3,463%) και το CVaR (6,667%). Η βελτιστοποίηση EVaR δημιουργεί το χαρτοφυλάκιο με τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση (0,00815%) και ημερήσιες αποδόσεις (0,02691%), ακολουθούμενη από τη βελτιστοποίηση CVaR, με τυπική απόκλιση 0,00867% και απόδοση χαρτοφυλακίου 0,02734%. Η βελτιστοποίηση VaR παράγει την υψηλότερη τυπική απόκλιση (0,00927%), κοντά στην τιμή VaR και CVaR, αλλά παράγει την υψηλότερη απόδοση (0,03196%). Οι αναλογίες Sharpe για τις τρεις βελτιστοποιήσεις είναι κάτω από 1, γεγονός που υποδηλώνει ότι τα χαρτοφυλάκια έχουν χαμηλότερη απόδοση από μια επένδυση στο ποσοστό χωρίς κίνδυνο. Ωστόσο, όλες οι βελτιστοποιήσεις δημιουργούν υπερβολικές αποδόσεις, όπως υποδεικνύεται από το Jensen's Alphas που είναι θετικά σε κάθε περίπτωση.



Βέλτιστα χαρτοφυλάκια στο χώρο απόδοσης κινδύνου που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που έχουν διαμορφωθεί με προδιαγραφές MS-EGARCH.



Κατανομή βαρών χαρτοφυλακίων που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μοντελοποιημένα με προδιαγραφές MS-EGARCH.



Σχήμα 8: Κατανομή βάρους Χαρτοφυλακίων μεταξύ αναπτυγμένων και αναδυόμενων οικονομιών που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR χρησιμοποιώντας τις προδιαγραφές MS-EGARCH των δεικτών.

Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν ότι η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου μέσω του MS-EGARCH δίνει μεγαλύτερο βάρος στις ανεπτυγμένες οικονομίες, σε αντίθεση με τις προηγούμενες βελτιστοποιήσεις οι οποίες ευνόησαν τους δείκτες των αναδυόμενων οικονομιών.

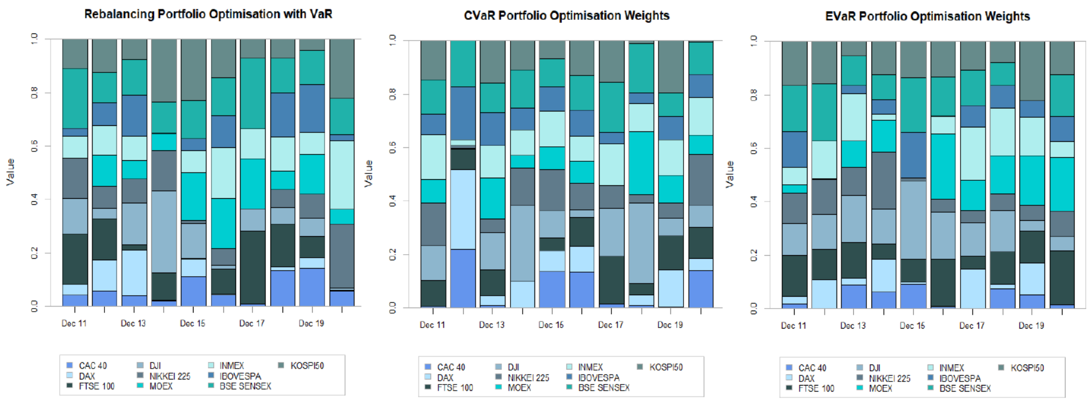
Η ενεργός επενδυτική συμπεριφορά, πραγματοποιείται με αναδιάρθρωση των σταθμίσεων των περιουσιακών στοιχείων των χαρτοφυλακίων ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Η ενεργή αυτή συμπεριφορά, χρησιμεύει ως μια δοκιμή για την εξέταση της απόδοσης των χαρτοφυλακίων. Μια περίοδος 1 έτους (240 ημερήσιες επιστροφές) χρησιμοποιείται ως περίοδος αρχικής βελτιστοποίησης και το κυλιόμενο παράθυρο δεδομένων ορίζεται σε 2 χρόνια (480 ημερήσιες αποδόσεις). Τα $\sigma_p{}^A$ και $R_p{}^A$ στον Πίνακα 5 και στον Πίνακα 6 ορίζουν αντίστοιχα την ετήσια απόδοση χαρτοφυλακίου και την τυπική απόκλιση. Το επίπεδο κινδύνου αναφέρεται στις τιμές των VaR, CVaR και EVaR που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις του χαρτοφυλακίου, κατά την περίοδο διατήρησης (από 01/01/2010 έως 30/12/2020). Ο 10ετής μέσος όρος του επιπέδου κινδύνου κάθε μέτρου υπάρχει στους πίνακες, καθώς και οι δείκτες αξιολόγησης απόδοσης χαρτοφυλακίου

Τα αποτελέσματα των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου στα αρχικά δεδομένα, με την ετήσια εξισορρόπηση των βαρών συνοψίζονται παρακάτω:

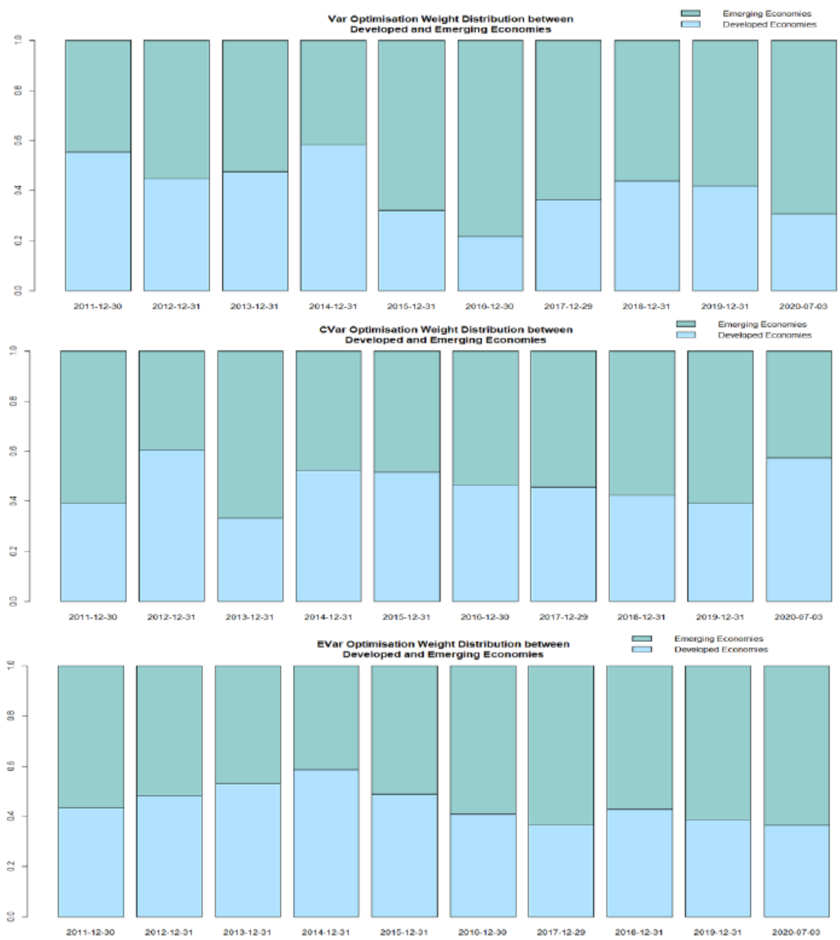
	VaR	***CVaR***	***EVaR***
Rebalancing Dates		***Risk Level***	
30/12/2011	2.71868%	3.56792%	0.05558%
31/12/2012	3.10090%	4.17635%	0.04070%
31/12/2013	1.75049%	1.71180%	0.33961%
31/12/2014	1.58406%	1.69497%	0.27852%
31/12/2015	2.15456%	2.90958%	0.17133%
30/12/2016	2.20250%	3.54428%	0.13551%
29/12/2017	1.46689%	2.67280%	0.69038%
31/12/2018	1.50402%	1.77974%	0.10091%
31/12/2019	1.54437%	1.73365%	0.20764%
03/07/2020	5.17834%	4.24216%	0.03471%
Average	**2.32%**	**2.80%**	**0.21%**
Annualised Summary Statistics and Performance Ratios			
σ_p^A	12.25138%	12.31325%	12.01621%
R_p^A	5.1639%	4.517441%	6.00882%
Sharpe Ratio	0.423555	0.3689257	0.5021594
Treynor Ratio	0.0682665	0.05882405	0.07881112
Jensen's Alpha	0.05151347	0.04504286	0.05995994

Πίνακας 5: Σύνοψη της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου στα αρχικά δεδομένα με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών κατά την περίοδο διατήρησης.

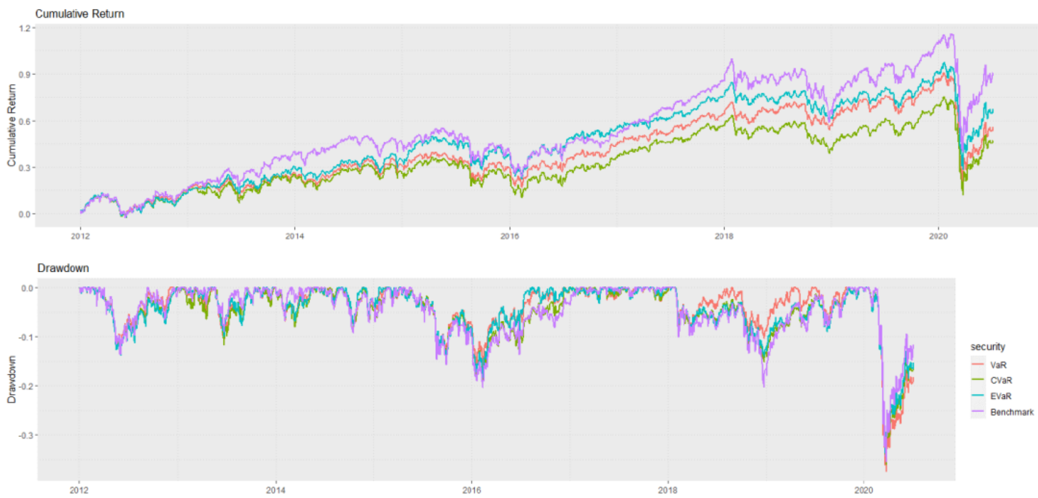
Σε αυτήν τη βελτιστοποίηση, το EVaR, με μέσο επίπεδο κινδύνου 0,21%, είναι και πάλι το πιο συντηρητικό μέτρο από τα τρία. Το ισορροπημένο χαρτοφυλάκιο βελτιστοποιημένο με το EVaR αποδίδει την υψηλότερη ετήσια απόδοση (6,00882%) και τη μικρότερη τυπική απόκλιση (12,01621%) Το μέτρο CVaR έχει ως αποτέλεσμα το υψηλότερο επίπεδο κινδύνου (2,80%), την υψηλότερη τυπική απόκλιση (12,31325%) και τη μικρότερη ετήσια απόδοση (4,517441%). Οι λόγοι απόδοσης δείχνουν ότι το μέτρο EVaR αποδίδει τα καλύτερα στη βελτιστοποίηση. Οι δείκτες Sharpe κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1, πράγμα που σημαίνει ότι τα τρία χαρτοφυλάκια έχουν χαμηλότερη απόδοση από την επένδυση χωρίς κίνδυνο.



Κατανομή βάρους χαρτοφυλακίων καθ 'όλη την περίοδο διατήρησης που προκύπτει από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα αρχικά δεδομένα.



Κατανομή βάρους χαρτοφυλακίων καθ 'όλη τη διάρκεια διατήρησης μεταξύ των ανεπτυγμένων και των αναδυόμενων οικονομιών που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα αρχικά δεδομένα.



Αποδόσεις εκτός δείγματος των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου στα αρχικά δεδομένα, με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών από 02/02/2012 έως 03/07/2020.

Οι επιδόσεις εκτός δείγματος των χαρτοφυλακίων που πραγματοποιήθηκαν στα αρχικά δεδομένα δεν υπερβαίνουν συνολικά την απόδοση του δείκτη αναφοράς (το MSCI ACWI ETF), όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμ. Το μέτρο EVaR υπερτερεί των ομολόγων του: αποδίδει τις υψηλότερες αθροιστικές αποδόσεις κατά την περίοδο, ακολουθούμενο από το μέτρο VaR και στη συνέχεια από το CVaR, το οποίο έχει τη χειρότερη απόδοση σε αυτήν τη βελτιστοποίηση. Το EVaR είναι επίσης το μέτρο που έχει την καλύτερη προσαρμογή σε ξαφνικά σοκ στις διανομές των αποδόσεων, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα με τη μείωση που παρατηρήθηκε στις αγορές από το 2020 και μετά.

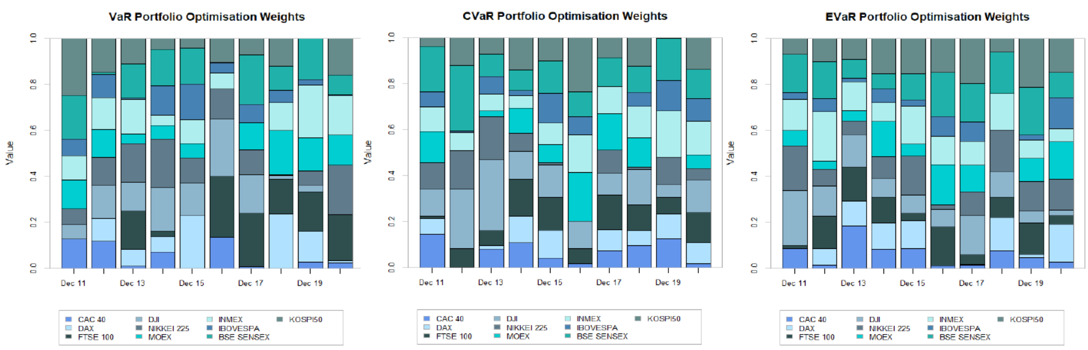
Οι βελτιστοποιήσεις του χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιούν το VaR, το CVaR και το EVaR ως στόχους κινδύνου εφαρμόζονται τώρα στα δεδομένα που καθορίζονται στο μοντέλο MS-EGARCH. Τα αποτελέσματα από τις βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου με την ετήσια εξισορρόπηση των βαρών συνοψίζονται παρακάτω.

	VaR	***CVaR***	***EVaR***
Rebalancing Dates		***Risk Level***	
30/12/2011	3.29367%	3.58123%	0.09979%
31/12/2012	3.35486%	3.16594%	0.02327%
31/12/2013	1.72493%	1.89306%	0.44555%
31/12/2014	1.84432%	1.95037%	0.50784%
31/12/2015	2.32267%	2.34488%	0.38848%
30/12/2016	2.52599%	1.87890%	0.40360%
29/12/2017	1.48389%	2.14288%	0.84573%
31/12/2018	1.86250%	2.43805%	0.11657%
31/12/2019	1.91814%	2.40538%	0.08254%
03/07/2020	5.70196%	5.97963%	0.03028%
Average	**2.60%**	**2.78%**	**0.29%**
Annualised Summary Statistics and Performance Ratios			
σ_p^A	14.2961%	14.88851%	13.819%
R_p^A	7.68098%	7.94078%	7.24481%
Sharpe Ratio	0.53556	0.53170	0.52249
Treynor Ratio	0.54669	0.56084	0.51689
Jensen's Alpha	0.07673	0.07932	0.07236

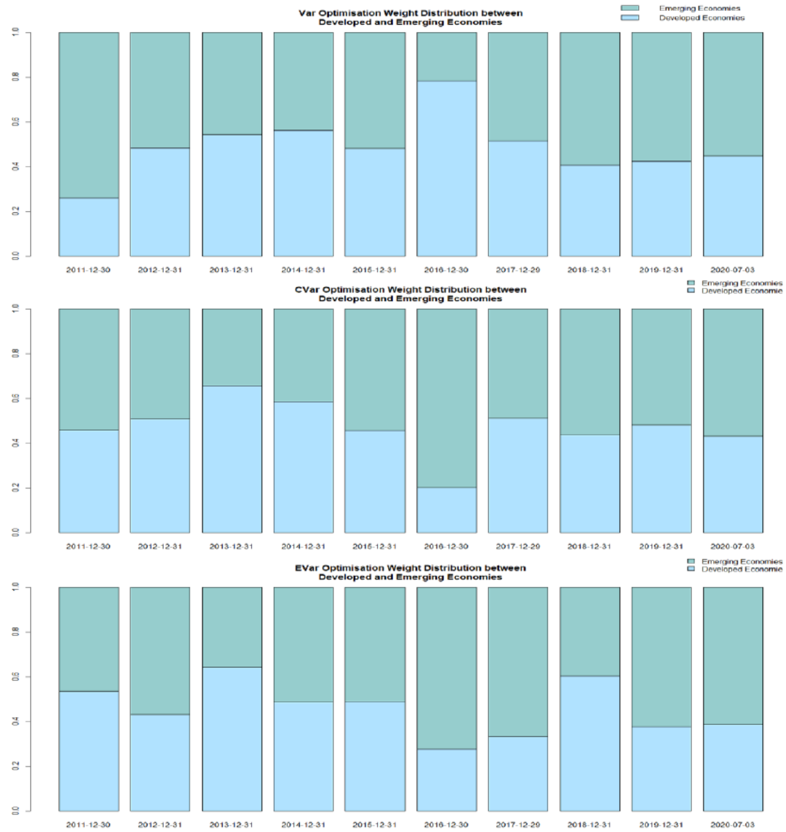
Πίνακας 6: Σύνοψη της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου στα δεδομένα MS-EGARCH με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών κατά την περίοδο διατήρησης.

Οι βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου στα δεδομένα MS-EGARCH με το EVaR εξακολουθούν να οδηγούν στο χαρτοφυλάκιο με το χαμηλότερο μέσο επίπεδο κινδύνου (0,29%), τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση (13,819%) αλλά αποδίδουν τη μικρότερη ετήσια απόδοση (7,24481%). Η βελτιστοποίηση CVaR παράγει την υψηλότερη απόδοση (7,94078%) και την τυπική απόκλιση (14,88851%), ακολουθούμενη από τη βελτιστοποίηση VaR, η οποία αποδίδει απόδοση 7,68098% και τυπική απόκλιση 14,2961%.

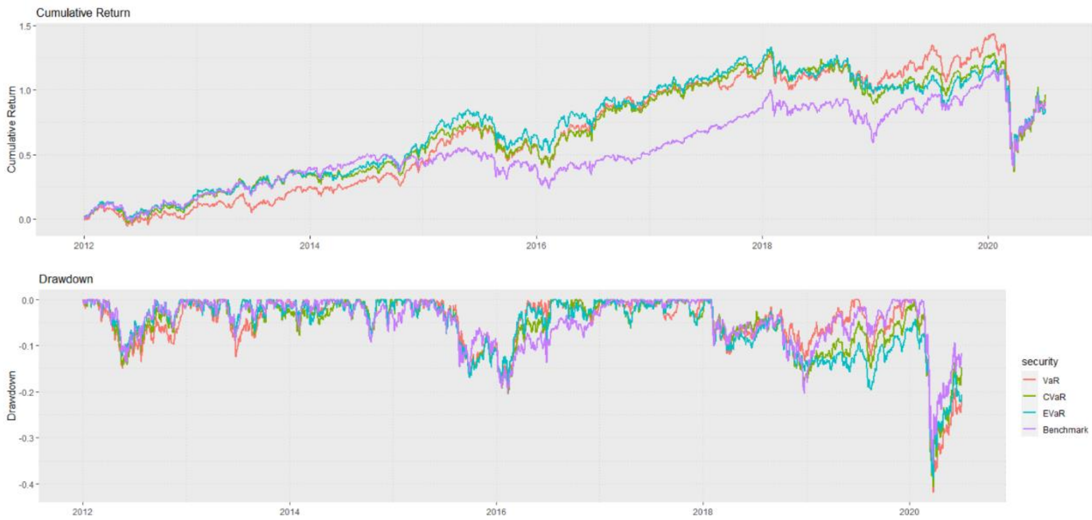
Η βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου με το μέτρο CVaR είναι η πιο αποτελεσματική όπως φαίνεται από τους λόγους απόδοσης (Treynor Ratio και Jensen's Alpha), καθώς παράγει την υψηλότερη ετήσια απόδοση και μια τυπική απόκλιση που είναι μόνο 0,26 μονάδες υψηλότερη από αυτήν του VaR και 0,70 σημεία πάνω από την τυπική απόκλιση του EVaR. Σε σύγκριση με τη βελτιστοποίηση που πραγματοποιήθηκε στα αρχικά δεδομένα. το επίπεδο κινδύνου που σχετίζεται με το VaR και το EVaR είναι υψηλότερο, ενώ είναι χαμηλότερο για το CVaR. Οι βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου στα δεδομένα MS-EGARCH παράγουν καλύτερα αποτελέσματα από τις βελτιστοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν στα αρχικά δεδομένα. Ο δείκτης Sharpe και στις τρεις βελτιστοποιήσεις κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, υποδεικνύοντας ότι η υπερβολική απόδοση έναντι του risk-free ποσοστού σε κάθε μία από τις βελτιστοποιήσεις είναι μικρότερη από το επίπεδο κινδύνου.



Κατανομή βάρους χαρτοφυλακίων καθ 'όλη τη διάρκεια της περιόδου αναμονής που προκύπτει από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα δεδομένα MS-EGARCH.



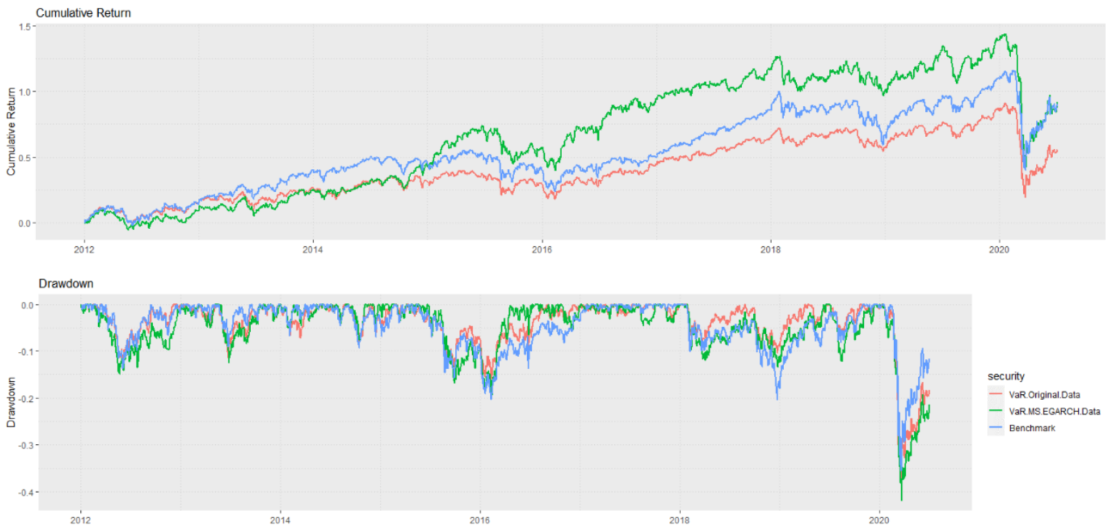
Κατανομή βάρους χαρτοφυλακίων καθ 'όλη την περίοδο διατήρησης μεταξύ των ανεπτυγμένων και των αναδυόμενων οικονομιών που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR, CVaR και EVaR στα δεδομένα MS-EGARCH.



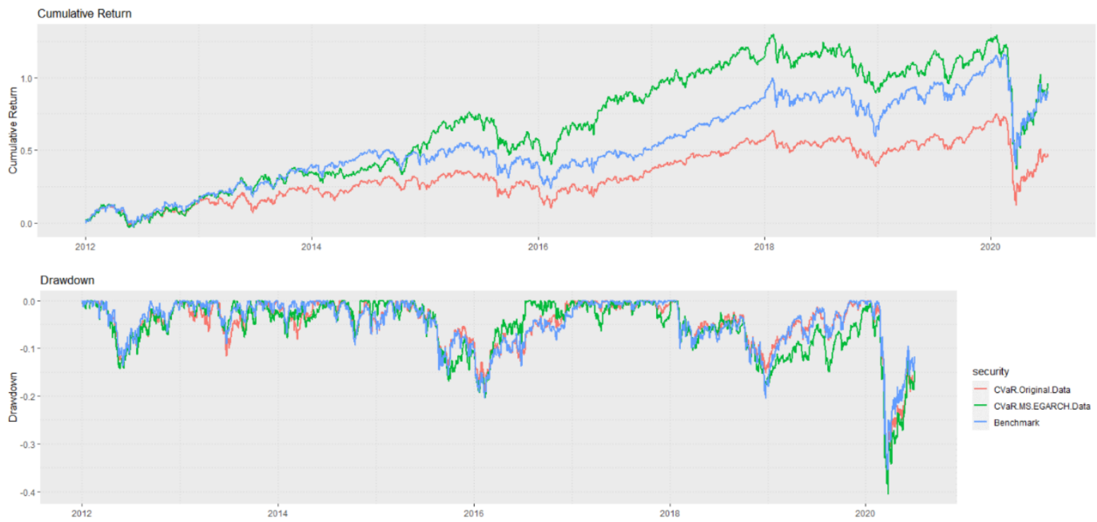
Επιδόσεις εκτός δείγματος των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου στα δεδομένα MS-EGARCH, με ετήσια εξισορρόπηση των weights από 02/02/2012 έως 03/07/2020.

Το παραπάνω διάγραμμα υπογραμμίζει ότι οι προβλέψεις των αποδόσεων εκτός δείγματος ξεπέρασαν συνολικά το σημείο αναφοράς (το MSCI ACWI ETF). Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα του Πίνακα 6, οι βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιούν τα δεδομένα που καθορίζονται με ένα MS-EGARCH παράγουν καλύτερα αποτελέσματα από τις βελτιστοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν στα αρχικά δεδομένα. Το μέτρο EVaR αποδίδει συνολικά τις υψηλότερες αθροιστικές αποδόσεις από το 2015 έως το τέλος του 2018 και ως εκ τούτου ξεπερνά το σημείο αναφοράς και τόσο το VaR όσο και το CVaR. Από την αρχή της περιόδου εκτός δείγματος έως το 2015, το μέτρο VaR έχει χαμηλότερη απόδοση από το σημείο αναφοράς και αποδίδει τις χαμηλότερες σωρευτικές αποδόσεις από τα τρία μέτρα κινδύνου και από το τέλος του 2018, δίνει την καλύτερη απόδοση εκτός δείγματος.

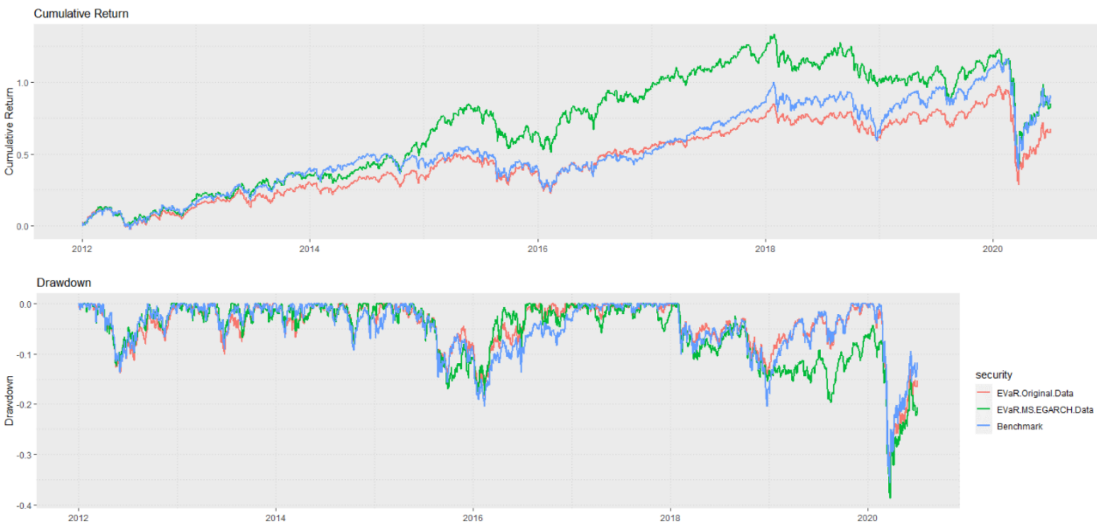
Τα ακόλουθα στοιχεία παρέχουν μια σύγκριση των επιδόσεων εκτός δείγματος των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου μεταξύ των αρχικών δεδομένων και των δεδομένων που καθορίζονται με ένα MS-EGARCH, για κάθε μέτρο κινδύνου.



Επιδόσεις χαρτοφυλακίου εκτός δείγματος που προκύπτουν από τις βελτιστοποιήσεις VaR σε πρωτότυπα και MS-EGARCH δεδομένα, με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών.



Επιδόσεις χαρτοφυλακίου εκτός δείγματος που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση CVaR σε πρωτότυπα και δεδομένα MS-EGARCH, με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών.



Επιδόσεις χαρτοφυλακίου εκτός δείγματος που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση EVaR σε πρωτότυπα και δεδομένα MS-EGARCH, με ετήσια εξισορρόπηση των βαρών.

Για κάθε μέτρο κινδύνου, οι βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου που εφαρμόζονται στις καθημερινές καταγραφές του στοιχείου που καθορίζονται με ένα MS-EGARCH ξεπερνούν τις βελτιστοποιήσεις που εφαρμόστηκαν στα αρχικά δεδομένα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι προδιαγραφές MS-EGARCH της υπό συνθήκη διακύμανσης των δεδομένων επιτρέπουν καλύτερη μοντελοποίηση της κατανομής επιστροφών καθώς επιτρέπει να ληφθούν υπόψη τα στυλιζαρισμένα γεγονότα που υπάρχουν γενικά σε οικονομικές χρονοσειρές, όπως βαριές ουρές και ομαδοποίηση μεταβλητότητας. Επιπλέον, μπορεί κανείς να παρατηρήσει στα παραπάνω διαγράμματα ότι τα δεδομένα MS-EGARCH προσαρμόζονται καλύτερα στο οικονομικό σοκ που σημειώθηκε στις αγορές στις αρχές του 2020 από τα αρχικά δεδομένα. Είναι επίσης ενδιαφέρον να επισημάνουμε ξανά το γεγονός ότι, από τα τρία μέτρα κινδύνου, το EVaR παρέχει την καλύτερη απόδοση εκτός δείγματος για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου στα αρχικά δεδομένα, καθώς οι σωρευτικές αποδόσεις του κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι η πλησιέστερη αυτό του δείκτη αναφοράς, σε σύγκριση με τα δύο άλλα μέτρα. Επιπλέον, παρόλο που τα αποτελέσματα των βελτιστοποιήσεων στα δεδομένα MS-EGARCH που φαίνονται στον Πίνακα 6 υποδηλώνουν ότι το CVaR έχει την καλύτερη απόδοση (σύμφωνα με το Treynor Ratio και το Jensen's Alpha), το EVaR παραμένει το μέτρο κινδύνου που αποδίδει το χαμηλότερο επίπεδο κινδύνου καθώς και τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση.

6. Συμπεράσματα

Όπως είναι ευρέως γνωστό η διαχείριση του κινδύνου και η τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων αποτελεί θεμελιώδη ζητήματα στη χρηματοοικονομική απο τον περασμένο αιώνα. Οι πρώτες προσπάθειες ξεκίνησαν με την χρήση υπολογιστών και την εξέταση της αυτοσυσχέτισης των χρονοσειρών ενώ η θεωρία της αποτελεσματικότητας υπογράμμισε τη σημασία της ροής της πληροφορίας και της ενσωμάτωσής της άμεσα στις τιμές των χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως υπαγορεύουν οι δυνάμεις προσφοράς και ζήτησης.

Σε αυτό το πλαίσιο η διαχείριση του χαρτοφυλακίου επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση του κινδύνου για συγκεκριμένη επιθυμητή απόδοση. Ωστόσο, είναι πλέον γνωστό, ότι οι εμπειρικές κατανομές των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων αποκλίνουν σημαντικά απο την κανονική κατανομή, και πολλές φορές παρουσιάζουν ασυμμετρία, λεπτοκύρτωση και διαρθρωτικές μεταβολές ποσοτικά και ποιοτικά. Στα πλαίσια ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου, οι επενδυτές θα πρέπει να αποζημιώνονται μόνο για το συστηματικό μέρος του κινδύνου που διακρατούν, υπονοώντας ότι η βέλτιστη στάθμιση αποτελεί παρακαταθήκη ενός εξασφαλισμοένου αποτελέσματος αν και εφόσον ο συστηματικός παράγοντας της αγοράς ευνοείται.

Ενώ η συμβολή του Markowitz (1952) βασίζεται στο μέτρο μεταβλητότητας της διασποράς, στη παρούσα διατριβή επιγχηρείται μία γενικευμένη προσέγγιση με έμφαση στις ουρές των κατανομών των αποδόσεων των χρηματαγορών. Για το σκοπό αυτό υιοθετείται η αξία σε κίνδυνο και μερικές παραλλαγές της με ιδιαίτερη έμφαση στο expectiles VaR. Η επιλογή του μέτρου κινδύνου είναι ένα σημαντικό βήμα στη διαχείριση κινδύνου. Το κύριο επίκεντρο ήταν τα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε κατανομές ζημιών, όπως το VaR και το CVaR. Έχει αποδειχθεί ότι το VaR δεν αποτελεί μέρος της κατηγορίας συνεπών μέτρων κινδύνου. Το CVaR έχει γίνει ευρέως αποδεκτό ως σχετικά ανώτερο μέτρο κινδύνου σε σύγκριση με το VaR. Είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου. Ωστόσο, δεν είναι επιλέξιμο. Τα τελευταία χρόνια, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στις ιδιότητες των μέτρων κινδύνου, ιδίως στην ιδιότητα της συνέπειας, που εισήγαγαν οι Artzner et al το 1999. Τα expectiles, λόγω των αξιοσημείωτων μαθηματικών τους ιδιοτήτων, παρουσιάστηκαν πρόσφατα ως καλύτερη εναλλακτική λύση το VaR και το CVaR.

Τα Expectiles έχουν κάποια δυναμική ως μέτρο κινδύνου καθώς ικανοποιούν πολλές επιθυμητές ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένης της αρχής της συνέπειας, που ορίζεται από τα αξιώματα της invariance by translation, της υπο-προσθετικότητας, της θετικής ομοιογένειας και της μονοτονίας. Το EVaR έχει αποδειχθεί ότι είναι το μόνο συνεπές, αναλλοίωτο και νόμιμο μέτρο κινδύνου, για μια παράμετρο $\tau \in [0,1/2]$. Εκτός από την αναγνώριση ενδιαφερόντων χαρακτηριστικών, η στενή σχέση μεταξύ των expectiles και των quantiles, τους επιτρέπει να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του VaR και του CVaR όπως φαίνεται από τον Taylor (2008).

Η μοντελοποίηση της δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας των δεδομένων επιτρέπει την καταγραφή της μη γραμμικότητας των χρονοσειρών, ενώ οι διαρθρωτικές μεταβολές λαμβάνονται υπόψη στοχαστικά. Τα μοντέλα MS-GARCH δίνουν μια καλύτερη εκτίμηση των οικονομικών χρονοσειρών αντικατοπτρίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια τη δυναμική της κατανομής τους.

Σύμφωνα με τα εμπειρικά ευρήματα της διπλωματικής, από τα τρία μέτρα κινδύνου στις ουρές των κατανομών ήτοι, VaR, CVAR και EVaR, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις υπέρ της μη γραμμικής και ασυμμετρης προσέγγισης του EVaR. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα που προέκυψαν με την υιοθέτηση παθητικής επενδυτική στρατηγικής με χρήση του MS-EGARCH υποδείγματος, έδειξαν ότι το EVaR είναι το πιο συντηρητικό μέτρο κινδύνου μεταξύ των τριών. Και στις δύο βελτιστοποιήσεις, το EVaR αποδίδει επίπεδο κινδύνου σημαντικά χαμηλότερο από αυτό του VaR και του CVaR και δημιουργεί το χαρτοφυλάκιο με τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση. Στην περίπτωση της ενεργού επενδυτικής στρατηγικής, το μέτρο EVaR είναι και πάλι το πιο συντηρητικό όσον αφορά το επίπεδο κινδύνου για τις βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου που εφαρμόζονται τόσο στα αρχικά όσο και στα δεδομένα MS-EGARCH. Και στις δύο περιπτώσεις, το EVaR παράγει το χαρτοφυλάκιο με τη χαμηλότερη τυπική απόκλιση. Κατά τη σύγκριση των βελτιστοποιήσεων χαρτοφυλακίου που πραγματοποιήθηκαν στα αρχικά δεδομένα και στα δεδομένα MS-EGARCH, ιδίως στις επιδόσεις εκτός δείγματος κάθε βελτιστοποίησης, είναι σαφές ότι τα δεδομένα που μοντελοποιήθηκαν με τις προδιαγραφές MS-EGARCH αποδίδουν καλύτερα αποτελέσματα. Στην ενεργητική επενδυτική στρατηγική για τις βελτιστοποιήσεις στα αρχικά δεδομένα, κανένα από τα χαρτοφυλάκια που αποκτήθηκαν αποδίδει καλύτερα από το σημείο αναφοράς κατά την περίοδο εκτός δείγματος. Ωστόσο, κατά την εφαρμογή της στρατηγικής στοχαστικών διαρθρωτικών μεταβολών στην αυτοπαλίνδρομη δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα, παρατηρείται ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυαλκίου ενισχύονται. Η expectiles VaR προσέγγιση αποδίδει πιο αποτελεσματικά τις ουρές των κατανομών των δεδομένων και ανιχνεύει μη γραμμικότητες και ασυμμετρίες κυρίως στις αναδυώμενες αγορές. Επιπλέον, η εφαρμογή του μέτρου κινδύνου ES βάσει expectile, που εισήγαγε η Taylor το 2008, στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου αντιπροσωπεύει επίσης μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση της ανάλυσης της απόδοσης των expectiles στο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνου.

Αρθρογραφία

Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). "On the coherence of Expected Shortfall", Journal of Banking and Finance, Volume 26(7), pp. 1487-1503.

Albanese, C.and Lawi, S. (2004). "Spectral Risk Measures for Credit Portfolios"

Ardia, D., Bluteau, K., Boudt, K., Catania, L. and Trottier, D-A. (2019). "Markov-Switching GARCH Models in R:The MSGARCH Package", Journal of Statistical Software, Volume 91(4)

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M. and Heath, D. (1999). "Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance, Volume 9(3), pp. 203-228.

Barry, A., Charpentier, A. and Oualkacha, K. (2017). "Quantile and Expectile Regression for random effects model"

Basel Committee Banking Supervision. (2011). “Revisions to the Basel II Market Risk Framework ”

Basel Committee Banking Supervision. (2012). “Fundamental Review of the Trading Book”

Basel Committee Banking Supervision. (2013). “Fundamental Review of the Trading Book: outstanding issues”

Basel Committee Banking Supervision. (2016). “Minimum Capital Requirements for Market Risk”

Basel Committee Banking Supervision. (2017). “Basel III: Finalising post-crisis reforms”,

Basel Committee Banking Supervision. (2019). “Minimum Capital Requirements for Market Risk”

Bauwens, L., Preminger, A. and Rombouts, J.V.K. (2010). "Theory and inference for a Markov switching GARCH model", The Econometrics Journal, Volume 13(2), pp. 218-244.

Bellini, F. and Bignozzi, V. (2015). "On Elicitable Risk Measures", Quantitative Finance, Volume 15(5), pp. 725-733.

Bellini, F. and Di Bernardino, E. (2015). "Risk Management with Expectiles", European Journal of Finance, Volume 23(6), pp. 487-506.

Bellini, F., Klar, B., Müller, A. and Gianin, E.R. (2014). "Generalized Quantiles as Risk Measures", Insurance: Mathematics and Economics, Volume 54, pp. 41-48.

Bellini, F., Mercuri, L. and Rroji, E. (2018). "Implicit expectiles and measures of implied volatility", Quantitative Finance, Volume 18(11), pp. 1851-1864.

Bellini, F., Negri, I. and Pyatkova, M. (2019). "Backtesting VaR and Expectiles with Realized Scores", Statistical Methods and Applications, Volume 28(1), pp. 119-142.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", Journal of Econometrics, Volume 31(3), pp. 307-327.

Costa, G. and Kwon, R.H. (2019). "Risk Parity Portfolio Optimization Under a Markov Regime-Switching Framework", Quantitative Finance, Volume 19(3), pp. 453-471.

Daouia, A., Girard, S. and Stufler, G. (2018). "Estimation of Tail Risk Based on Extreme Expectiles", Journal of the Royal Statistical Society, Volume 80(2), pp. 263-292.

De Rossi, G.and Harvey, A. (2009). "Quantiles, Expectiles and Splines", Journal of Econometrics, Volume 152(2), pp. 179-185.

Delbaen, F. Bellini, F., Bignozzi, V. and Ziegel, J. (2014). "Risk measures with the CxLS property", Finance and Stochastics, Volume 20(2), pp. 433-453.

Ehm, W., Gneiting, T., Jordan, A. and Krüger, F. (2016). "Of Quantiles and Expectiles: Consistent Scoring Functions, Choquet Representations and Forecast Rankings", Journal of the Royal Statistical Society: Series B, Volume 78(3), pp. 505-562.

Elliott, R.J. and Siu, T.K. (2008). "Robust Optimal Portfolio Choice Under Markovian Regime-Switching Model", Methodology and Computing in Applied Probability, Volume 11(2), pp. 145-157.

Embrechts, P., Puccetti, G., Rüschendorf, L., Wang, R. and Beleraj, A. (2014). "An Academic Response to Basel 3.5", Risks, Volume 2(1), pp. 25-48.

Engle, R.F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, Volume 50(4), pp. 987-1007.

Engle, R-F. and Manganelli, S. (2004). "CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles", Journal of Business & Economic Statistics, Volume 22(4), pp. 367-381.

Föllmer, H. and Schied, A. (2002). "Convex measures of risk and trading constraints", Finance and Stochastics, Volume 6(4), pp. 429-447.

Gaivoronski, A. and Pflug, G. (2005). "Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach", The Journal of Risk, Volume 7(2), pp. 1-31.

Gneiting, T. (2011). "Making and Evaluating Point Forecasts", Journal of the American Statistical Association, Volume 106(494), pp. 746-762.

Hamilton, J.D. (1989). "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", Econometrica, Volume 57(2), pp. 357-384.

Hamilton, J.D. (1990). "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime", Journal of Econometrics, Volume 45(1), pp. 39-70.

Hamilton, J.D. and Susmel, R. (1994). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime", Journal of Econometrics, Volume 64(1), pp. 307-333.

Jakobsons, E. (2016). "Scenario aggregation method for portfolio expectile optimization", Statistics & Risk Modeling, Volume 33(1-2), pp. 51-65.

JP Morgan. (1996). "RiskMetrics™ - Technical Document"

Kourtis, A. (2015). "A Stability Approach to Mean-Variance Optimization", Financial Review, Volume 50(3), pp. 301-330.

Krokhmal, P., Uryasev, t. and Palmquist, J. (2001). "Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints", The Journal of Risk, Volume 4(2), pp. 43-68.

Kuan, C-M., Yeh, J-H. and Hsu, Y-C. (2009). "Assessing Value at Risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models", Journal of Econometrics, Volume 150(2), pp. 261-270.

Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection", The Journal of Finance, Volume 7(1), pp. 77-91.

Nelson, D.B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", Econometrica, Volume 59(2), pp. 347-370.

Neslihanoglu, S., Sogiakas, V., McColl, J.H. and Lee, D. (2017). "Nonlinearities in the CAPM: Evidence from Developed and Emerging Markets", Journal of Forecasting, Volume 36(8), pp. 867-897.

Newey, W.J.and Powell J.L. (1987). "Asymmetric Least Squares Estimation and Testing", Econometrica, Volume 55(4), pp. 819-847.

Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2000). "Optimization of Conditional Value-At-Risk", Journal of risk, Volume 2(3), pp. 21-42.

Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2002). "Conditional value-at-risk for general loss distributions", Journal of Banking & Finance, Volume 26(7), pp. 1443-1471.

Stahl, G., Zheng, J., Kiesel, R. and Rühlicke, R. (2012). "Conceptualizing Robustness in Risk Management", SSRN Electronic Journal

Taamouti, A. (2009). "Analytical Value-at-Risk and Expected Shortfall under Regime-Switching", Finance Research Letters, Volume 6(3), pp. 138-151.

Taylor, JW. (2008). "Estimating Value at Risk and Expected Shortfall using Expectiles", Journal of Financial Econometrics, Volume 6(2), pp. 231-252.

Taylor, S. and ProQuest (Firm) (2008). Modelling financial time series, 2nd edn, World Scientific, New Jersey.

Wang, R. and Ziegel, J. (2015). "Elicitable distortion risk measures: A concise proof", Statistics & Probability Letters, Volume 100, pp. 172-175.

Yao, Q. and Tong, H. (1996). "Asymmetric least squares regression estimation: a nonparametric approach", Journal of nonparametric statistics, Volume 6 (2-3). pp. 273-292.

Ziegel, J.F. (2016). "Coherence and Elicitability", Mathematical Finance, Volume 26(4), pp. 901-918.

Παράρτημα Α

Διάγραμμα 1

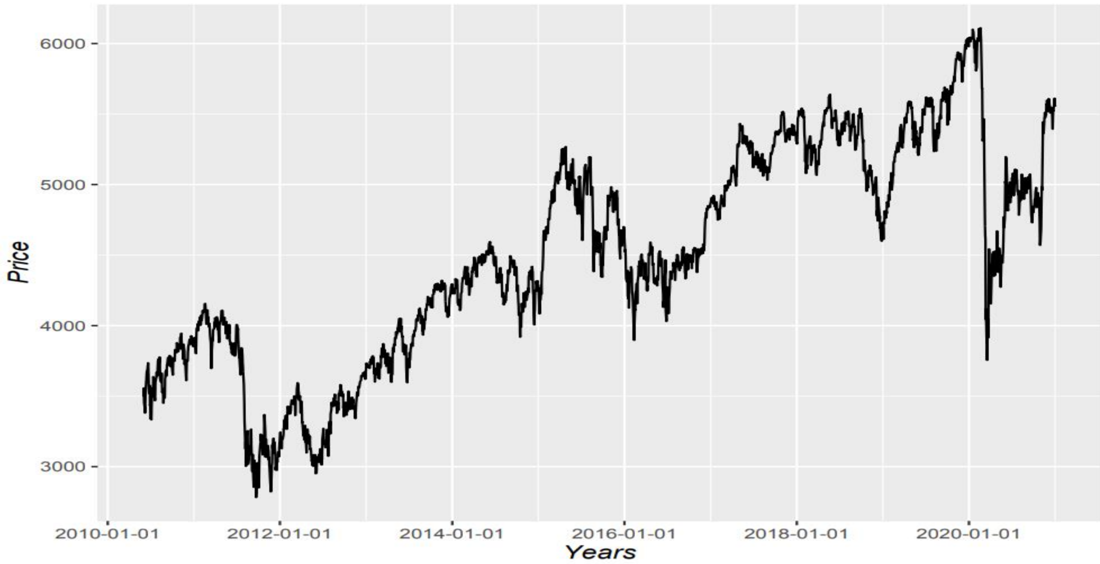


Figure 1 - Adjusted Closing Price of the CAC40 Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 2

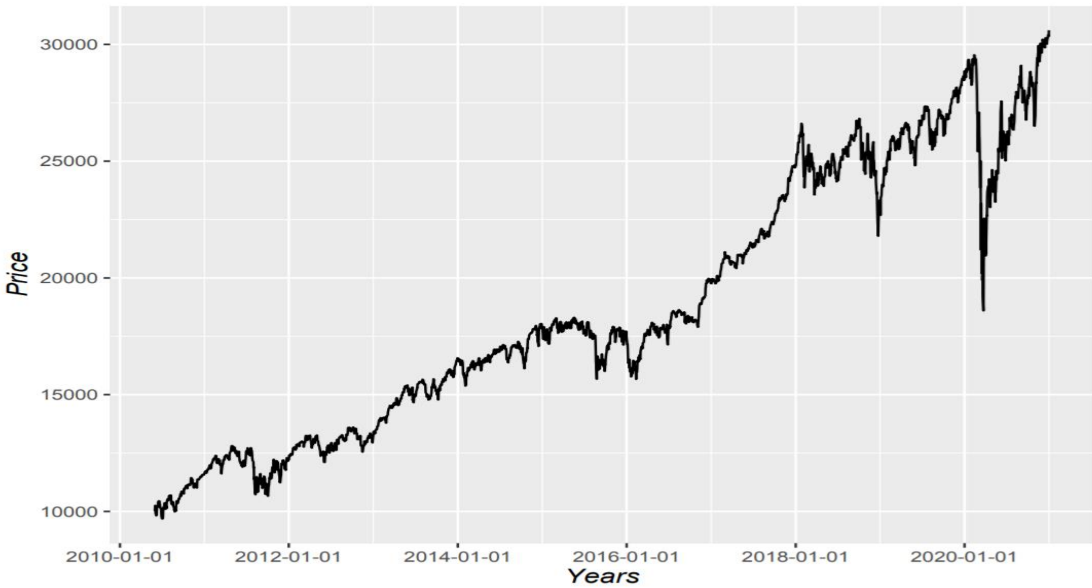


Figure 2 - Adjusted Closing Price of the Dow Jones 30 Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 3

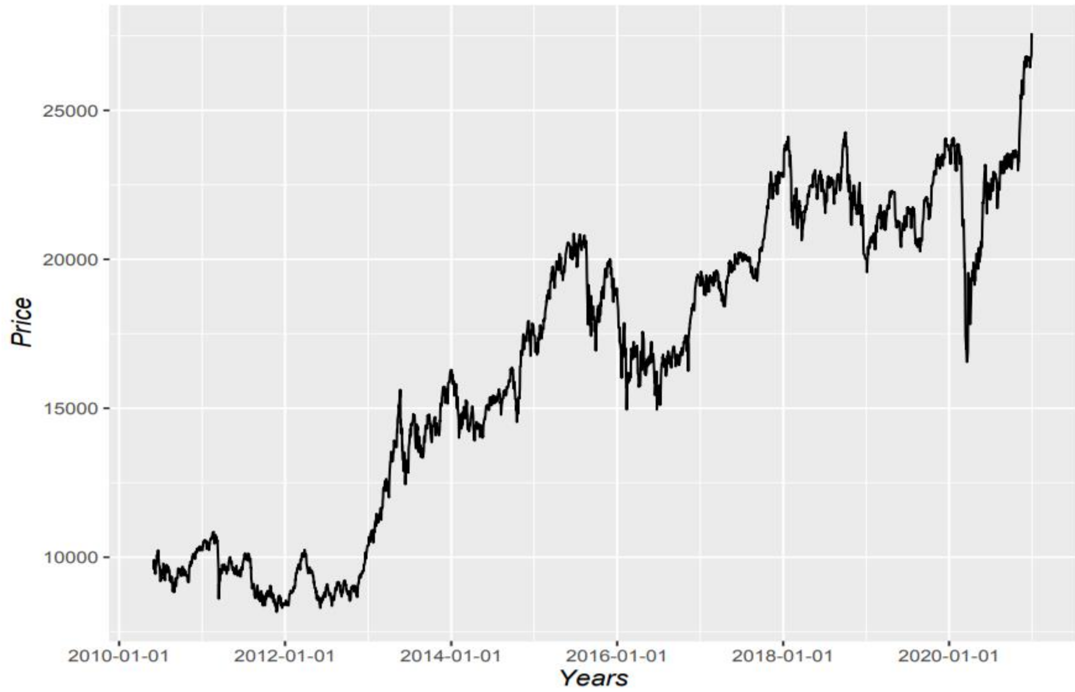


Figure 3 - Adjusted Closing Price of the NIKKEI 225 Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 4

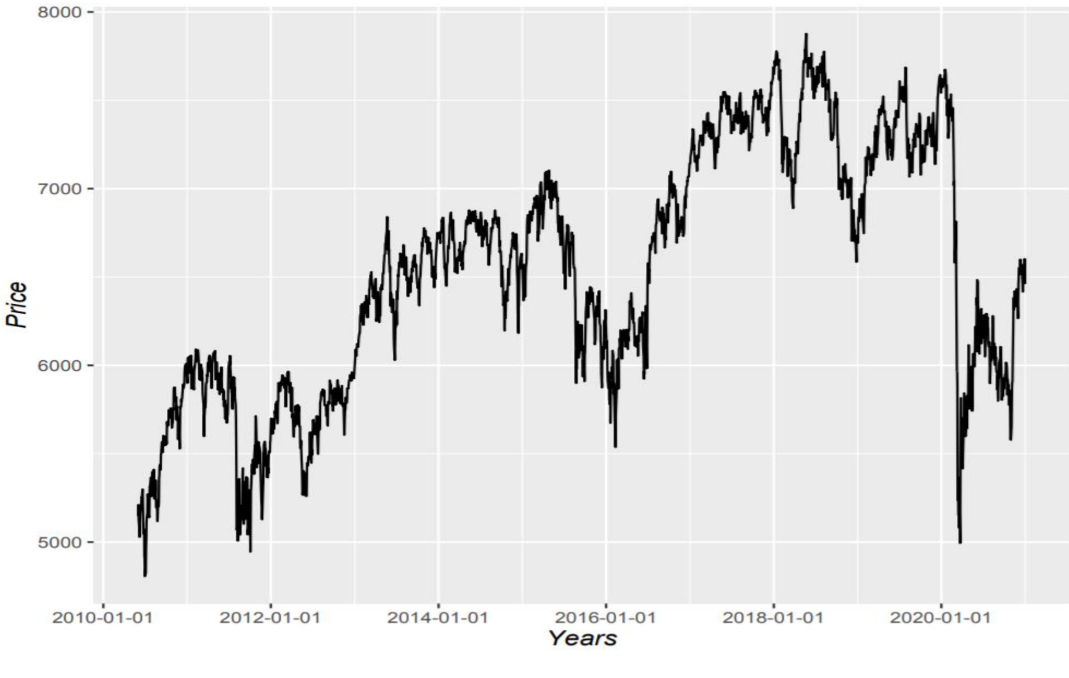


Figure 4 - Adjusted Closing Price of the FTSE 100 Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 5

Figure 5 - Adjusted Closing Price of the KOSPI 50 Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 6

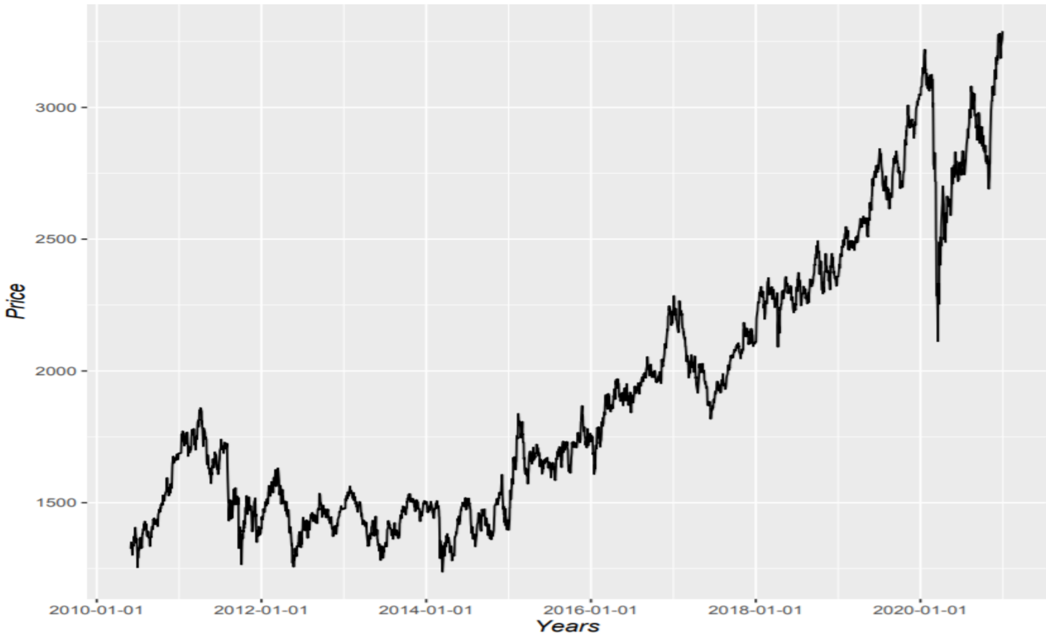


Figure 6 - Adjusted Closing Price of the MOEX Index from 1/06/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 7

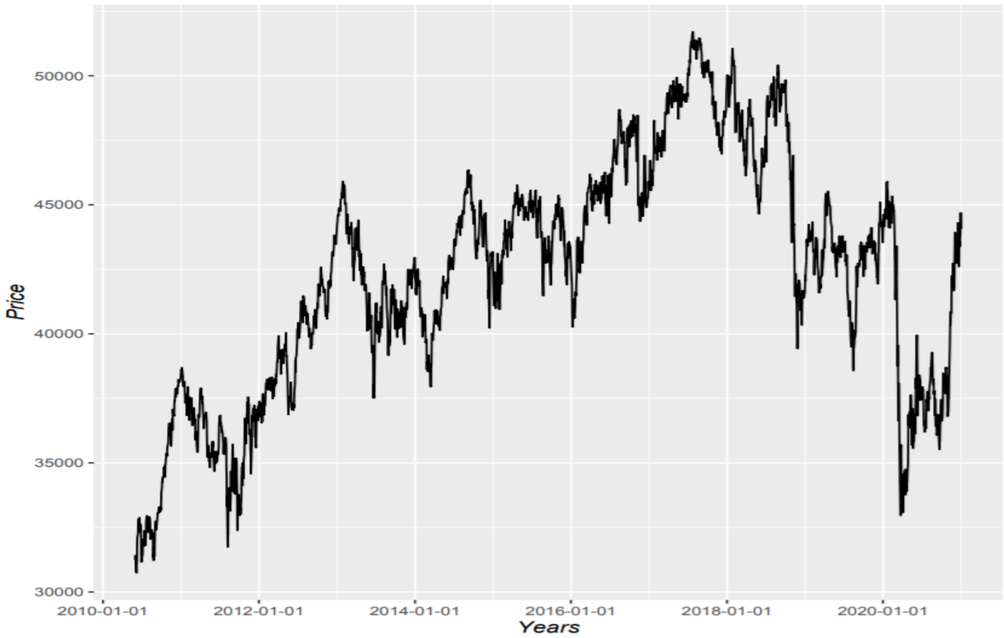


Figure 7 - Adjusted Closing Price of the S&P BMV INMEX Index from 1/6/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 8

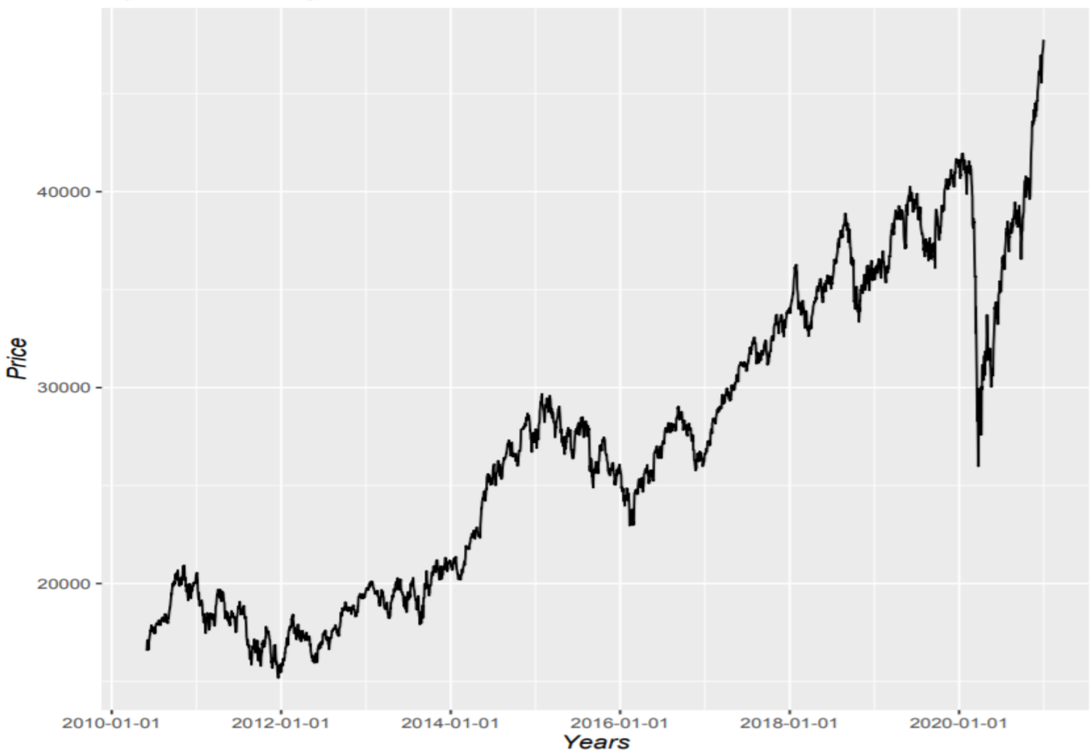


Figure 8 - Adjusted Closing Price of the S&P BSE Index from 1/6/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 9

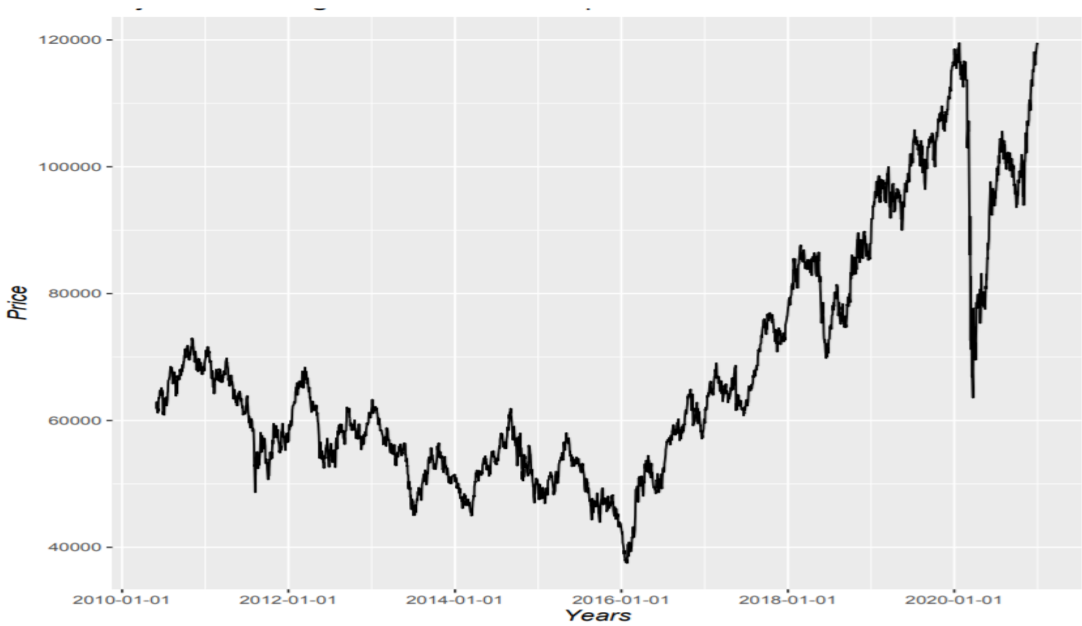


Figure 9 - Adjusted Closing Price of the Bovespa Index from 1/6/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 10

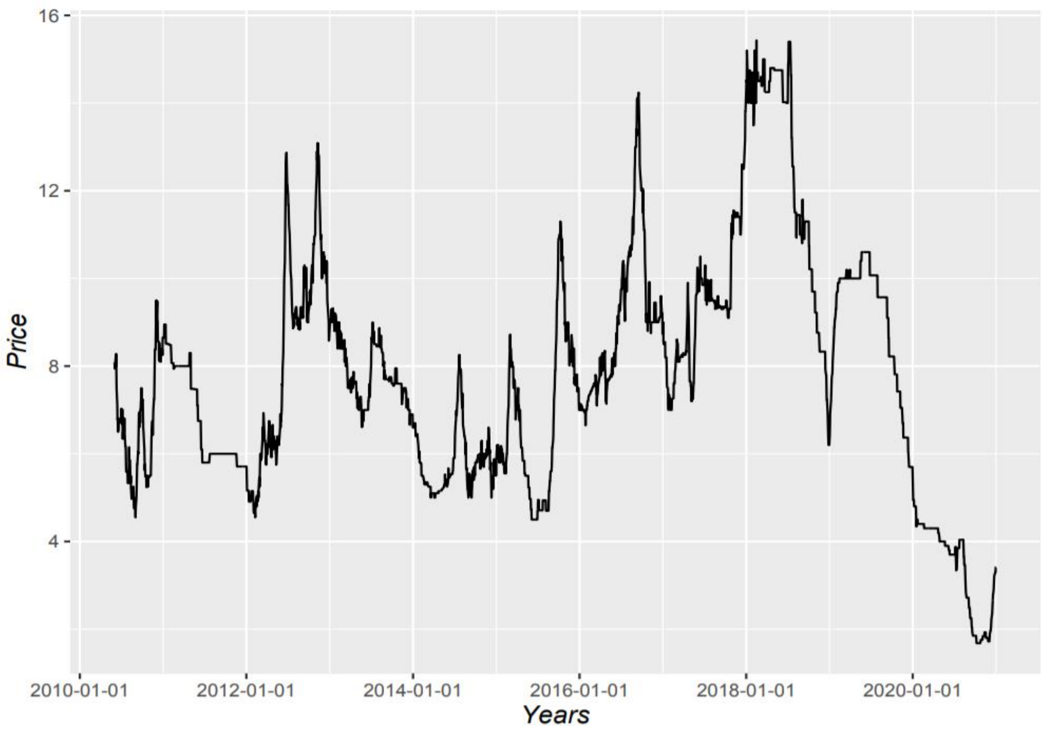


Figure 10 – 3-month LIBOR, based on the U.S. Dollar from 1/6/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 11

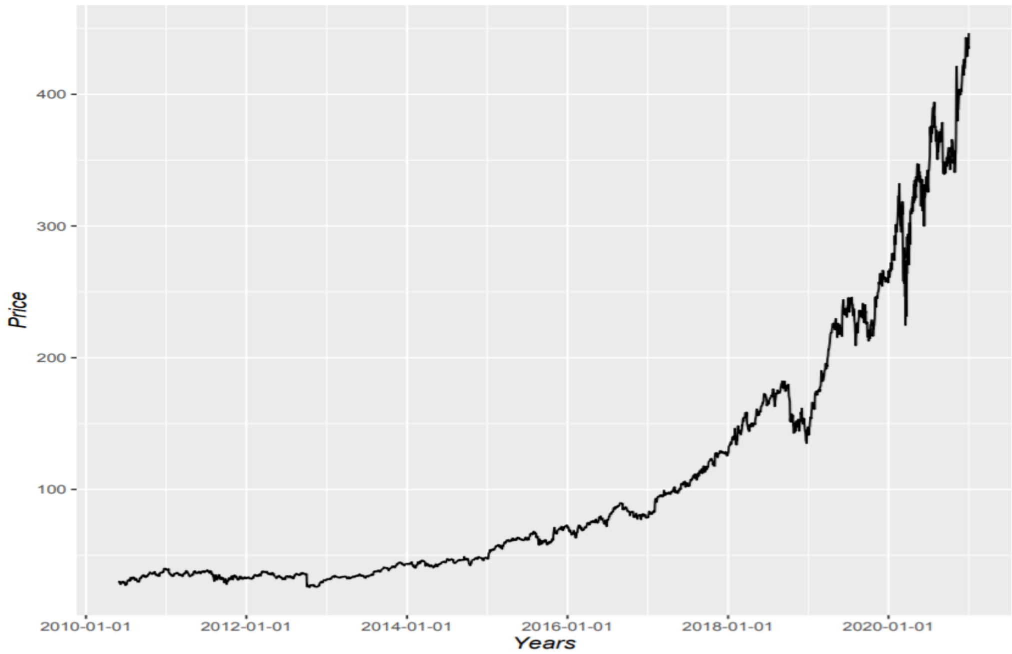


Figure 11 - Adjusted Closing Price of the iShares MSCI ACWI ETF from 1/6/2010 to 30/12/2020

Διάγραμμα 12 ACF των σειρών που αναλύθηκαν στην μελέτη

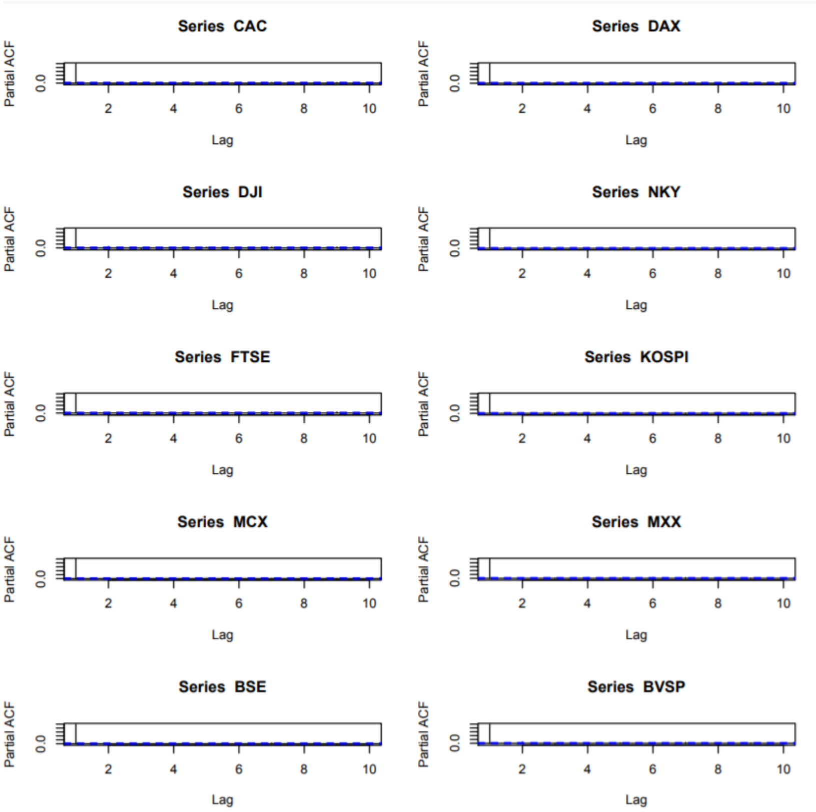


Figure 12 - ACF των δεικτών του χαρτοφυλακίου

Διάγραμμα 13

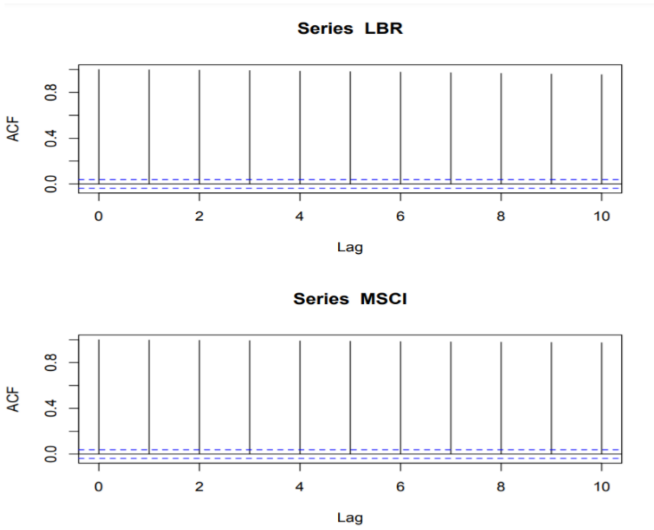


Figure 13 - ACF των 3-μηνων USD LIBOR και MSCI ACWI ETF.

Διάγραμμα 14 PACF των σειρών που αναλύθηκαν στην μελέτη

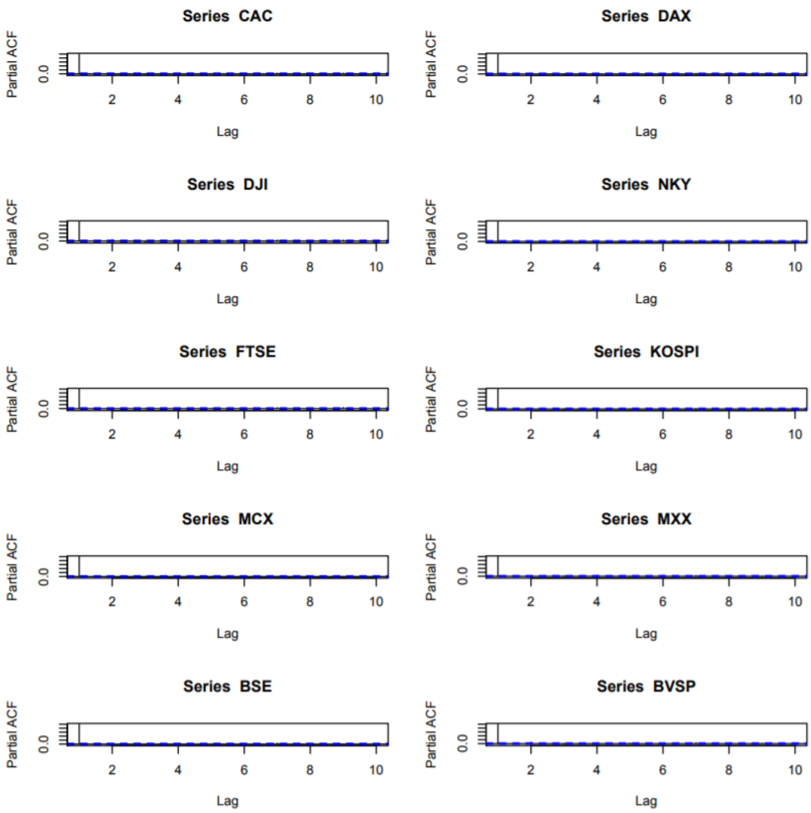


Figure 14 - PACF των δεικτών του χαρτοφυλακίου

Διάγραμμα 15

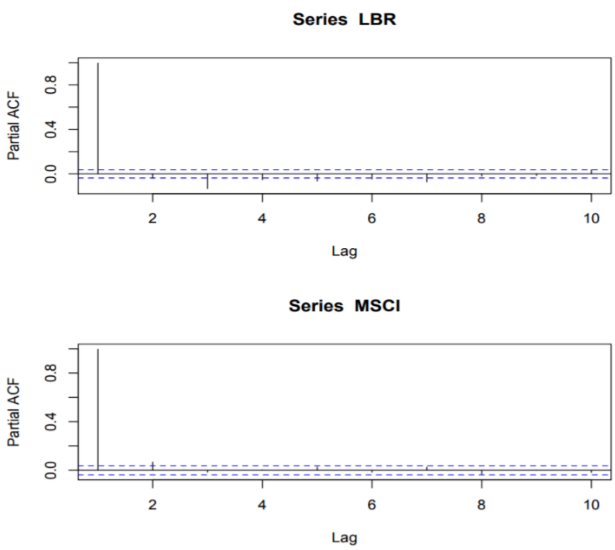


Figure 13 - PACF των 3-μηνων USD LIBOR και MSCI ACWI ETF.

Διάγραμμα 16

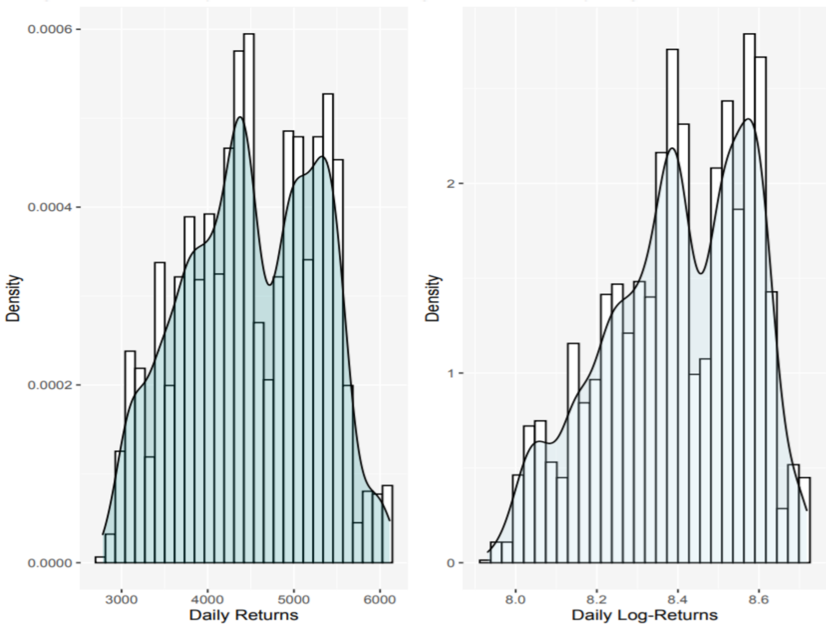


Figure 16 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των CAC40 index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 17

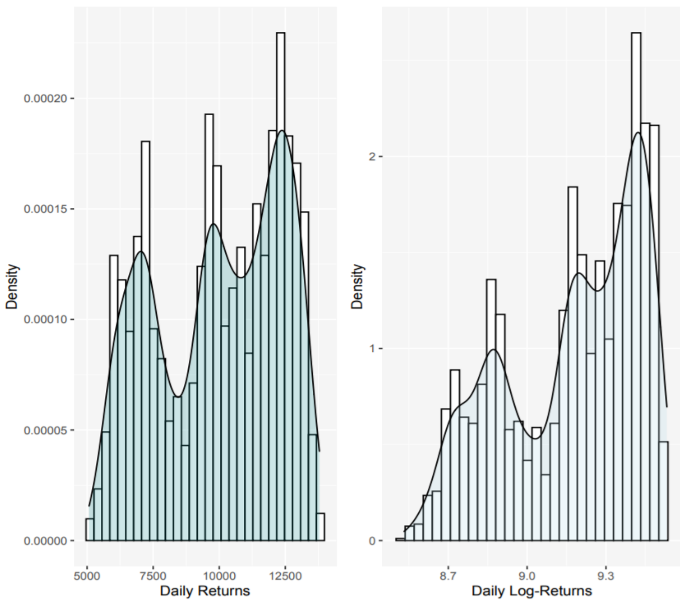


Figure 17 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των DAX index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 18

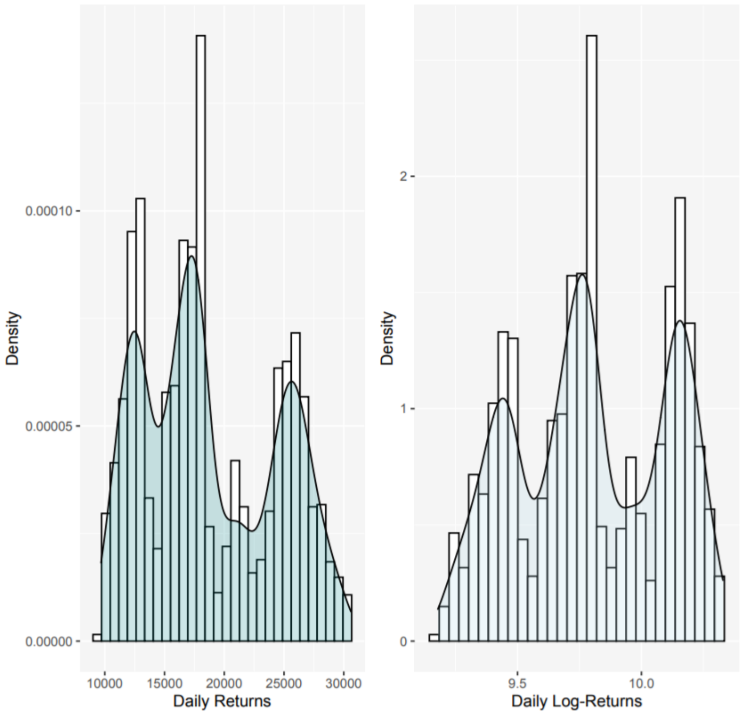


Figure 18 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των Dow Jones 30 index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 19

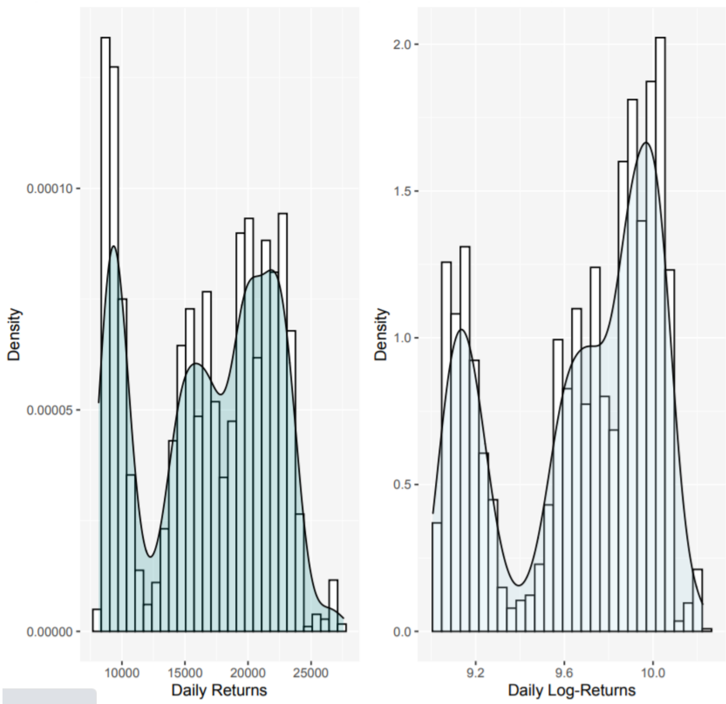


Figure 19 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των Nikkei 225 index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 20

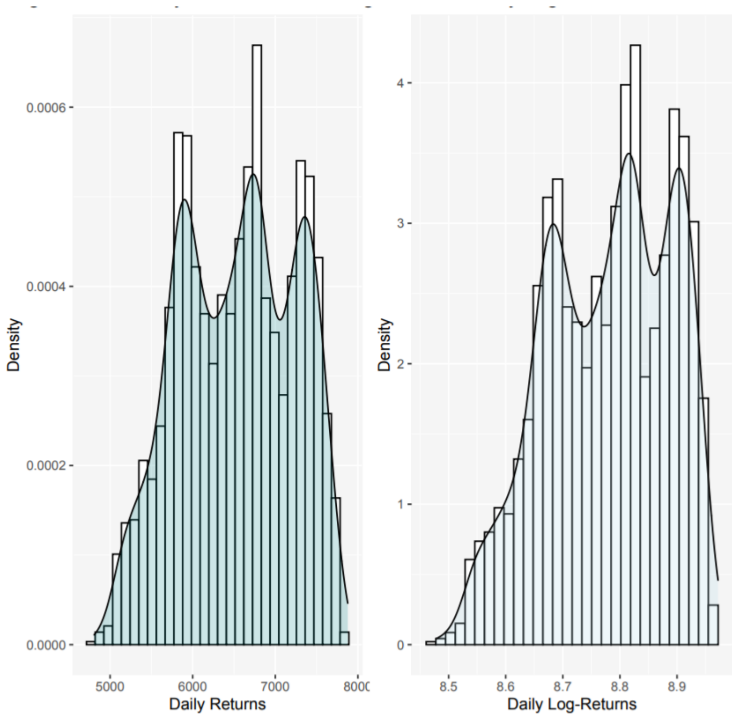


Figure 20 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των FTSE 100 index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 21

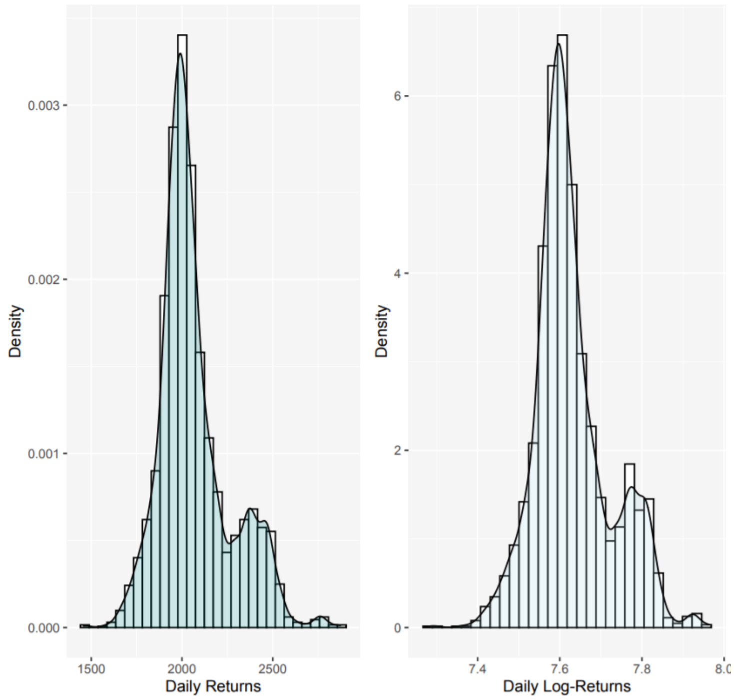


Figure 21 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των KOSPI 50 index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 22

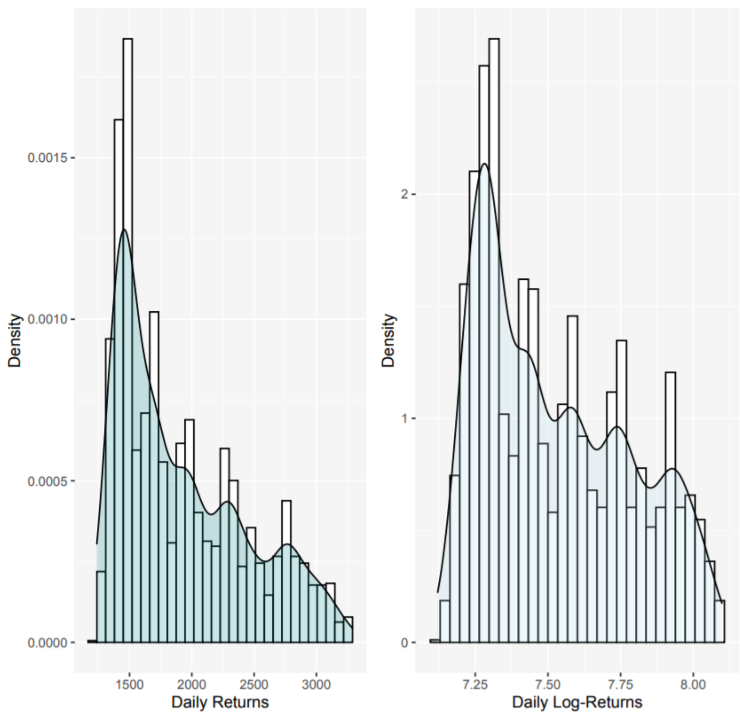


Figure 22 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των MOEX index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 23

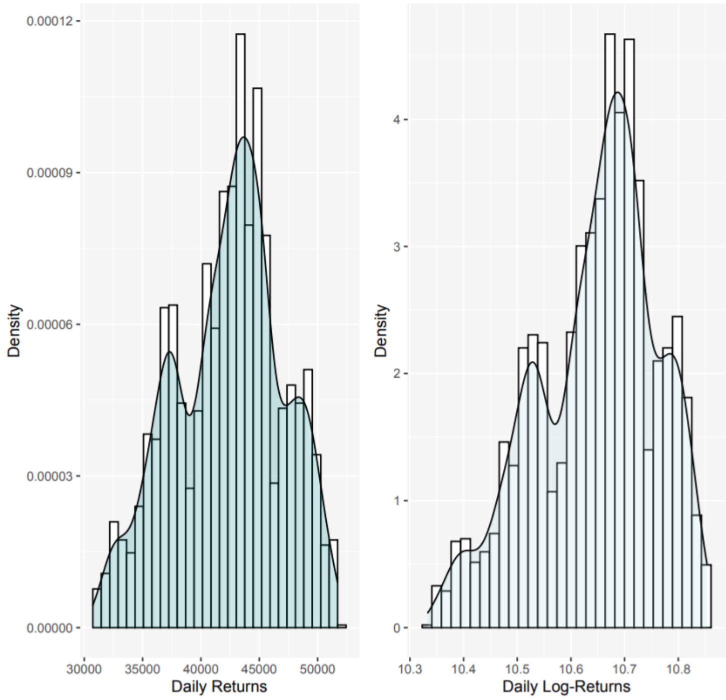


Figure 23 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των S&P BMV INMEX index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 24

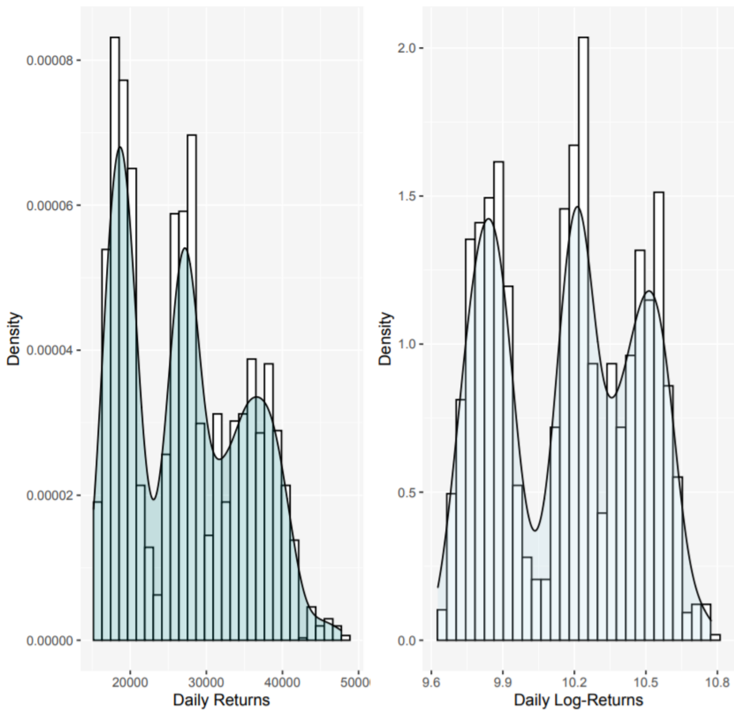


Figure 24 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των S&P BSE SENSEX index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 25

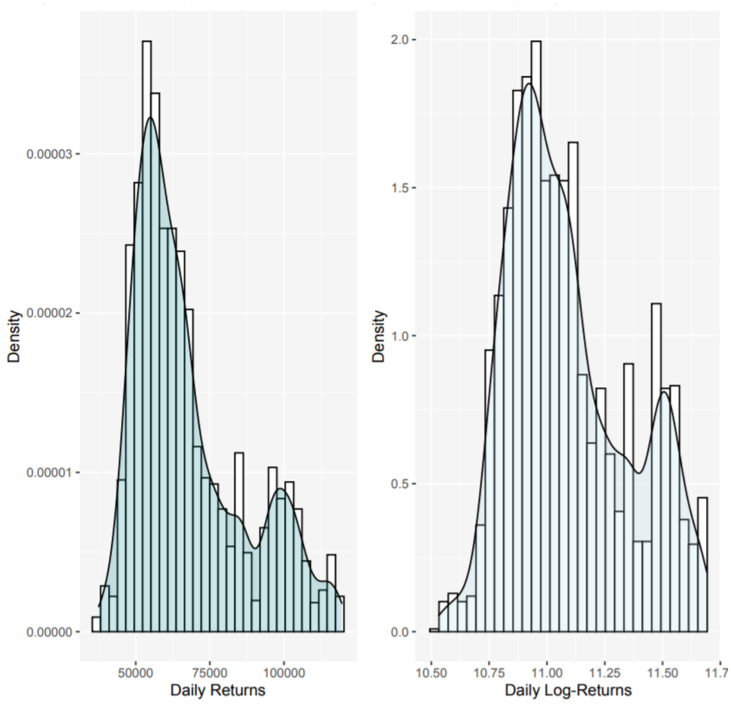


Figure 25 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των IBOVESPA index ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 26

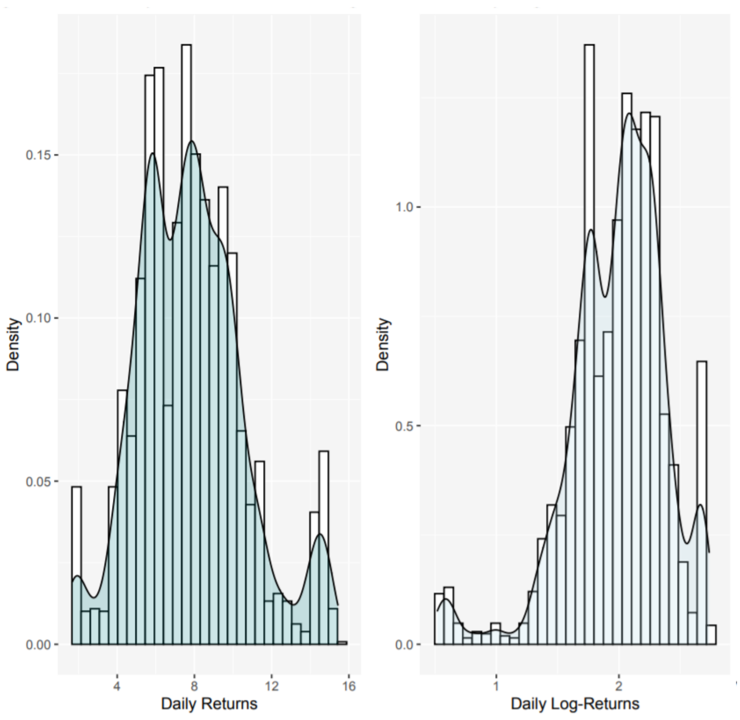


Figure 26 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των 3-μηνων USD LIBOR ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 27

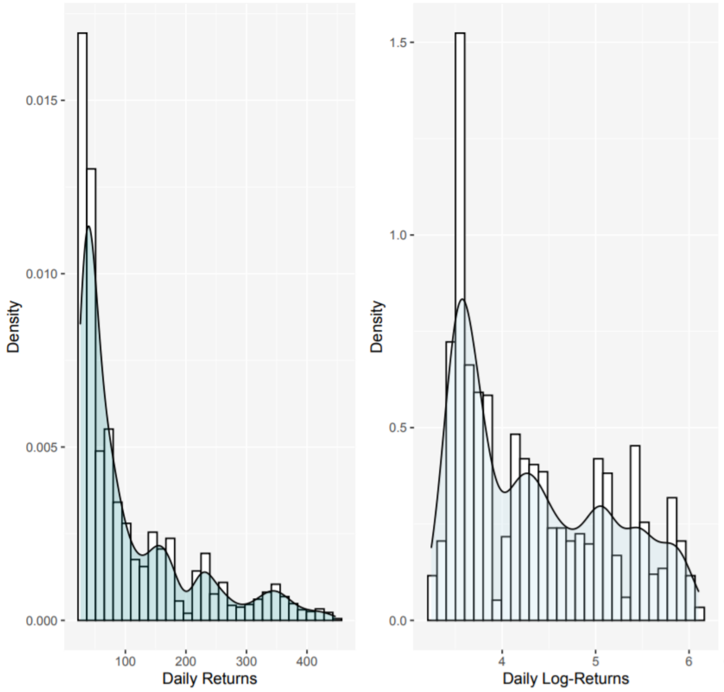


Figure 27 - Ιστόγραμμα και πυκνότητα των MSCI ACWI ETF ημερήσιων αποδόσεων και ημερήσιων log-αποδόσεων.

Διάγραμμα 28

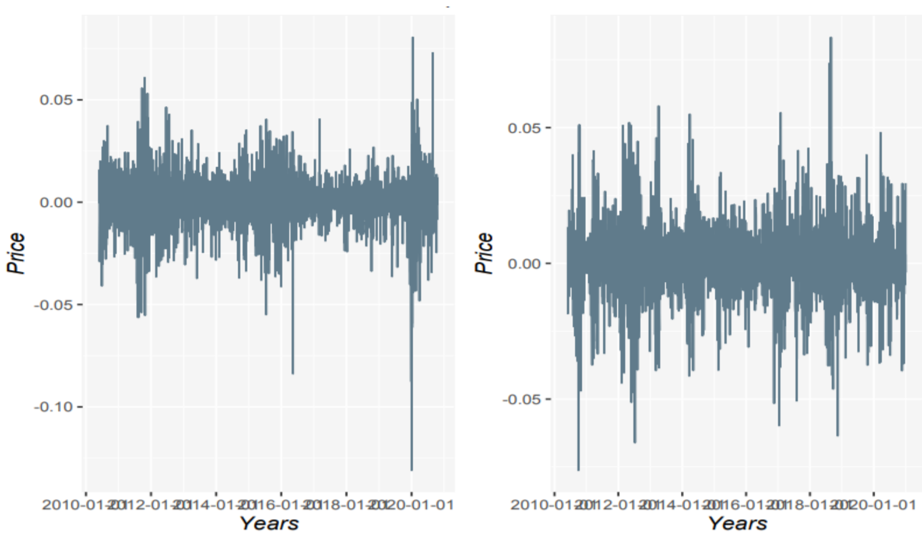


Figure 28 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του CAC 40 index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Διάγραμμα 29

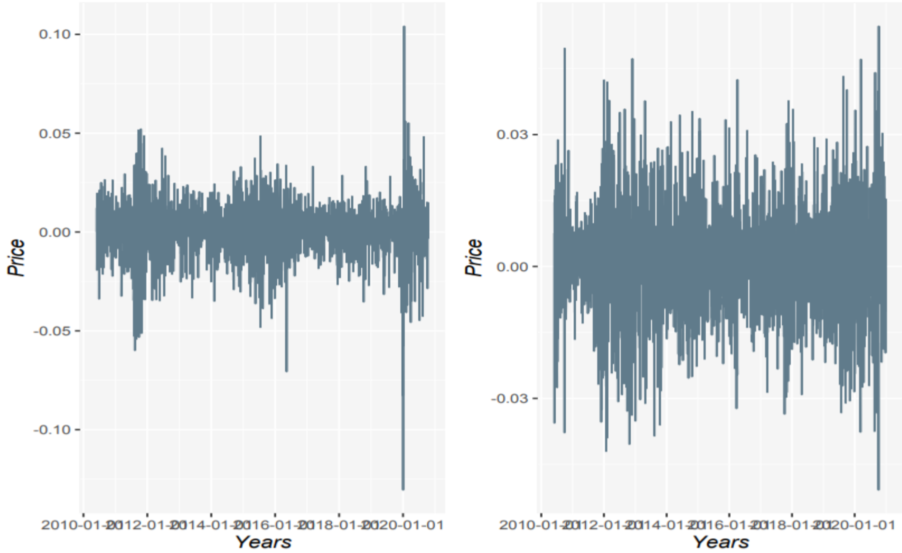


Figure 29 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του DAX index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Διάγραμμα 30

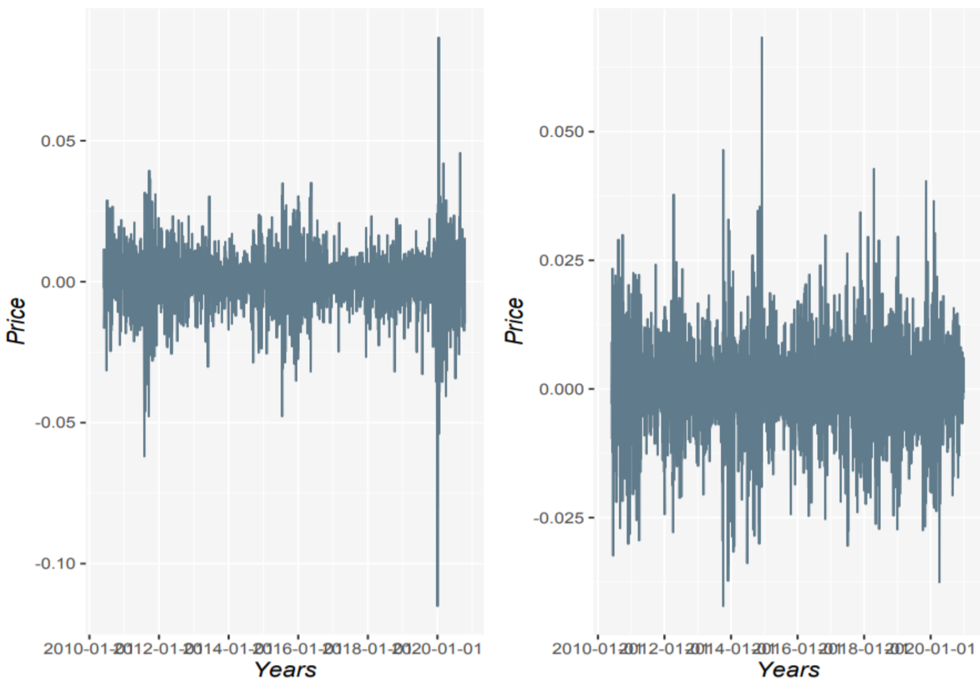


Figure 30 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του FTSE100 index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Διάγραμμα 31

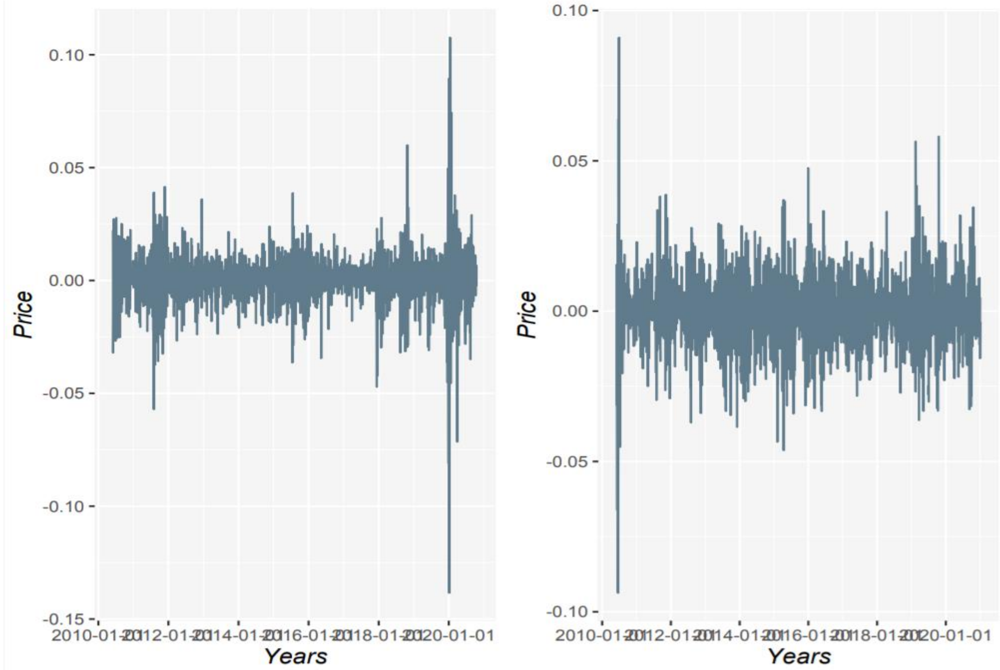


Figure 31 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του Dow Jones 30 index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Διάγραμμα 32

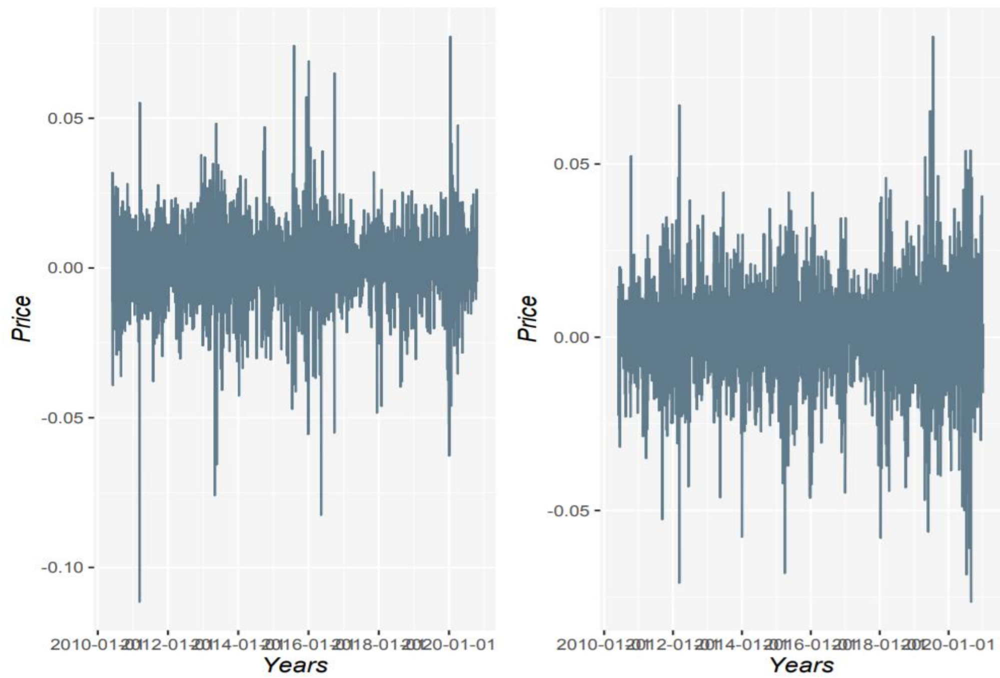


Figure 32 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του Nikkei 225 index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Διάγραμμα 33

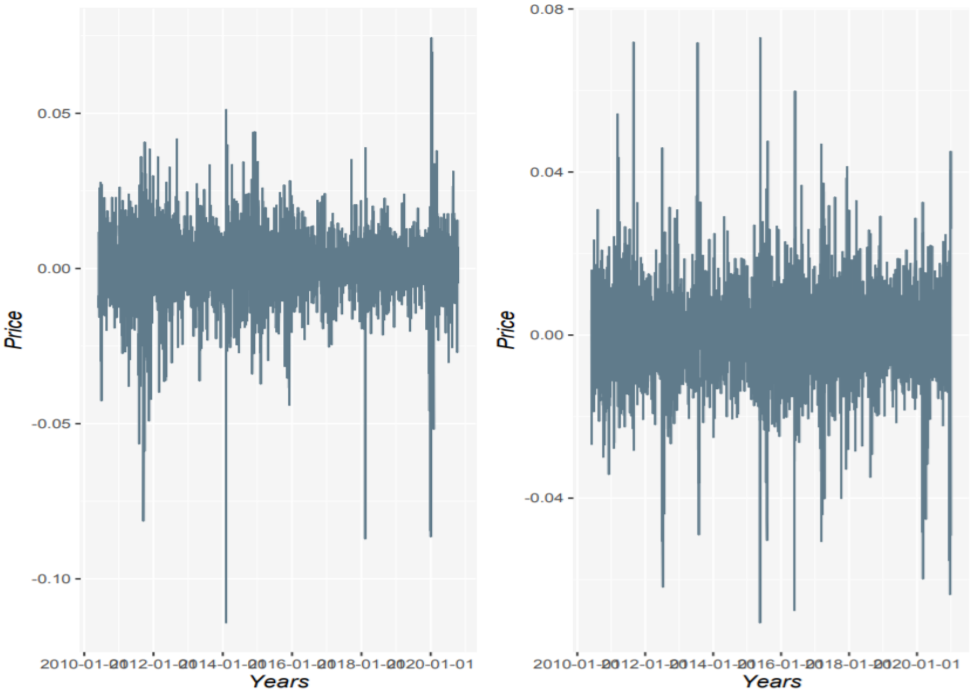


Figure 33 - Ημερήσιες log-επιστροφές των αρχικών χρονοσειρών και του Markov-Switching EGARCH specification του MOEX index για την περίοδο 01/06/2010 έως 30/12/2020.

Παράρτημα Β

```
install.packages("ggplot2",  repos = "http://cran.r-project.org",
            destdir = NULL,
            dependencies = TRUE)



install.packages("qgraph",  repos = "http://cran.r-project.org",
            destdir = NULL,
            dependencies = TRUE)

install.packages("spaa",  repos = "http://cran.r-project.org",
            destdir = NULL,
            dependencies = TRUE)



install.packages("graph",  repos = "http://cran.r-project.org",
            destdir = NULL,
            dependencies = TRUE)

install.packages("evolqg",  repos = "http://cran.r-project.org",
            destdir = NULL,
            dependencies = TRUE)


install.packages("xts",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("bizdays",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("AID",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("grid",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("gridExtra",  repos = "http://cran.r-
project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("urca",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)



install.packages("normtest",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)


install.packages("MTS",  repos = "http://cran.r-project.org",
destdir = NULL, dependencies = TRUE)
```

```r
install.packages("base",  repos = "http://cran.r-project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("fDMA",  repos = "http://cran.r-project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("MSGARCH",  repos = "http://cran.r-project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)

install.packages("lpSolveAPI",  repos = "http://cran.r-project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)


install.packages("PortfolioAnalytics",  repos = "http://cran.r-project.org", destdir = NULL, dependencies = TRUE)
```

```r
library(ggplot2)

library(tnet)
library(qgraph)
library(graph)
library(dplyr)
library (ggmap)
```

```r
library(xts)
library(bizdays)
library (AID)
library(grid)
library(gridExtra)
library(urca)
library(normtest)
library(MTS)
library(fDMA)
library (base)
library(zoo)
library(rugarch)
library(MSGARCH)
library(lpSolveAPI)
library(PortfolioAnalytics)
```

```
Dataset <- readXL("/Users/Desktop/benetis/book2.xlsx",
rownames=FALSE, header=TRUE,
  na="", sheet="Sheet5", stringsAsFactors=TRUE)



  #Changing Dataset type to xts object
xts(Dataset[, -1], order.by=as.Date(Dataset$Date))

#Creating a time series for each asset in the portfolio
CAC<-xts(Dataset[,2], order.by=as.Date(Dataset$Date))
DAX<-xts(Dataset[,3], order.by=as.Date(Dataset$Date))
DJI<-xts(Dataset[,4], order.by=as.Date(Dataset$Date))
NKY<-xts(Dataset[,5], order.by=as.Date(Dataset$Date))
FTSE<-xts(Dataset[,6], order.by=as.Date(Dataset$Date))
KOSPI<-xts(Dataset[,7], order.by=as.Date(Dataset$Date))
MCX<-xts(Dataset[,8], order.by=as.Date(Dataset$Date))
MXX<-xts(Dataset[,9], order.by=as.Date(Dataset$Date))
BSE<-xts(Dataset[,10], order.by=as.Date(Dataset$Date))
BVSP<-xts(Dataset[,11], order.by=as.Date(Dataset$Date))
LBR<-xts(Dataset[,12], order.by=as.Date(Dataset$Date))
MSCI<-xts(Dataset[,13], order.by=as.Date(Dataset$Date))

#Study of the Graphic representation of the data
# Creation of the Forex calendar (omitting weekends)
C<-create.calendar("Forex", integer(0), start.date="2010-06-01",
end.date="2020-12-30", weekdays=c("saturday", "sunday"))
M<-bizseq("2010-06-01", "2020-12-30", "Forex")
timeseq<-M

M<-as.matrix(M)
dim(M) #2762
dim(M[-1])
M[-1]

1   Plots of the time-series

#Plot of the time-series of each asset in the portfolio

#CAC 40

autoplot(CAC) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the CAC40 Index
from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))
```

```
#DAX


#DJI
autoplot(DJI) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the Dow Jones 30 
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color = 
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color = 
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


#NKY

autoplot(NKY) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the NIKKEI 225 
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color = 
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color = 
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


#FTSE

autoplot(FTSE) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the FTSE 100 
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color = 
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color = 
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))



#KOSPI 50

autoplot(KOSPI) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the KOSPI 50 
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color = 
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color = 
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
```

```
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))




#IMOEX

autoplot(MCX) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the MOEX Index
from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))



#INMEX

autoplot(MXX) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the S&P BMV
INMEX Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))



#SENSEX

autoplot(BSE) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the S&P BSE
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))




#IBOVESPA


autoplot(BVSP) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the Bovespa
Index from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
```

```
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))



#3M USD LIBOR

autoplot(LBR) +ggtitle("3-Month London Interbank Offered Rate,
based on the U.S. Dollar from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))



#MSCI ACWI ETF

autoplot(MSCI) +ggtitle("Adjusted Closing Price of the iShares
MSCI ACWI ETF from 1/6/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))
```

2 Plots of the ACF and PACF of the time-series

```
#Plots of the ACF of the time-series
par(mfrow=c(5,2))

acf (CAC, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (DAX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (DJI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (NKY, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (FTSE, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
```

```
acf (KOSPI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (MCX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (MXX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (BSE, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (BVSP, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)

par(mfrow=c(2,1))
acf (LBR, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
acf (MSCI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)

#Plots of the PACF of the time series
par(mfrow=c(5,2))
pacf (CAC, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (DAX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (DJI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (NKY, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (FTSE, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (KOSPI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (MCX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (MXX, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (BSE, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (BVSP, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)

par(mfrow=c(2,1))
pacf (LBR, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
pacf (MSCI, lag = 10, correlation = TRUE, pl = TRUE)
```

3 Box-Cox transformation (Plots + lambda estimations)

```
#Plots of the Box-Cox transformations



dim(CAC)
dim(M)
M<-M[-c(2710:2762)]
M<- as.matrix(M)
dim(M)

par(mfrow=c(5,2))
tcac<-boxcox(lm(CAC~M,data=CAC),xlab="Lambda CAC 40",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tdax<-boxcox(lm(DAX~M,data=DAX),xlab="Lambda DAX", lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tdji<-boxcox(lm(DJI~M,data=DJI),xlab="Lambda DJI",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tnky<-boxcox(lm(NKY~M,data=NKY),xlab="Lambda N225",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tftse<-boxcox(lm(FTSE~M,data=FTSE),xlab="Lambda FTSE
100",lambda=seq(-1,1,by=.1))
tks<-boxcox(lm(KOSPI~M,data=KOSPI),xlab="Lambda KOSPI
50",lambda=seq(-1,1,by=.1))
tmcx<-boxcox(lm(MCX~M,data=MCX),xlab="Lambda IMOEX",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tmxx<-boxcox(lm(MXX~M,data=MXX),xlab="Lambda INMEX",lambda=seq(-
```

```
1,1,by=.1))
tbse<-boxcox(lm(BSE~M,data=BSE),xlab="Lambda SENSEX",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tbvsp<-boxcox(lm(BVSP~M,data=BVSP),xlab="Lambda
IBOVESPA",lambda=seq(-1,1,by=.1))

par(mfrow=c(2,1))
tlbr<-boxcox(lm(LBR~M,data=LBR),xlab="Lambda LIBOR",lambda=seq(-
1,1,by=.1))
tmsci<-boxcox(lm(MSCI~M,data=MSCI),xlab="Lambda MSCI
ACWI",lambda=seq(-1,1,by=.1))


#Computation of the lambdas from Box-Cox transformation for each
asset

#CAC
transcac_df <- as.data.frame(tcac)
optimal_lambda_cac <- transcac_df[which.max(tcac$y),1]
lambda_cac<-transcac_df[which.max(tcac$y),1]
lambda_cac

#DAX
transdax_df <- as.data.frame(tdax)
optimal_lambda_dax <- transdax_df[which.max(tdax$y),1]
lambda_dax<-transdax_df[which.max(tdax$y),1]
lambda_dax

#DJI
transdji_df <- as.data.frame(tdji)
optimal_lambda_dji <- transdji_df[which.max(tdji$y),1]
lambda_dji<-transdji_df[which.max(tdji$y),1]
lambda_dji

#NIKKEI 225
transnky_df <- as.data.frame(tnky)
optimal_lambda_nky <- transnky_df[which.max(tnky$y),1]
lambda_nky<-transnky_df[which.max(tnky$y),1]
lambda_nky

#FTSE 100
transftse_df <- as.data.frame(tftse)
optimal_lambda_ftse <- transftse_df[which.max(tftse$y),1]
lambda_ftse<-transftse_df[which.max(tftse$y),1]
lambda_ftse

#KOSPI 50
transks_df <- as.data.frame(tks)
optimal_lambda_ks <- transks_df[which.max(tks$y),1]
lambda_ks<-transks_df[which.max(tks$y),1]
lambda_ks

#IMOEX
transmcx_df <- as.data.frame(tmcx)
optimal_lambda_mcx <- transmcx_df[which.max(tmcx$y),1]
lambda_mcx<-transmcx_df[which.max(tmcx$y),1]
```

```
lambda_mcx

#INMEX
transmxx_df <- as.data.frame(tmxx)
optimal_lambda_mxx <- transmxx_df[which.max(tmxx$y),1]
lambda_mxx<-transmxx_df[which.max(tmxx$y),1]
lambda_mxx

#BSE SENSEX
transbse_df <- as.data.frame(tbse)
optimal_lambda_bse <- transbse_df[which.max(tbse$y),1]
lambda_bse<-transbse_df[which.max(tbse$y),1]
lambda_bse

#IBOVESPA
transbvsp_df <- as.data.frame(tbvsp)
optimal_lambda_bvsp <- transbvsp_df[which.max(tbvsp$y),1]
lambda_bvsp<-transbvsp_df[which.max(tbvsp$y),1]
lambda_bvsp

#3-M USD LIBOR
translbr_df <- as.data.frame(tlbr)
optimal_lambda_lbr <- translbr_df[which.max(tlbr$y),1]
lambda_lbr<-translbr_df[which.max(tlbr$y),1]
lambda_lbr

#MSCI ACWI ETF
transmsci_df <- as.data.frame(tmsci)
optimal_lambda_msci <- transmsci_df[which.max(tmsci$y),1]
lambda_msci<-transmsci_df[which.max(tmsci$y),1]
lambda_msci
```

4 Log-returns of the time series

```
#Daily log-returns of the assets
lCAC<-log(CAC)
lDAX<-log(DAX)
lDJI<-log(DJI)
lNKY<-log(NKY)
lFTSE<-log(FTSE)
lKS<-log(KOSPI)
lMCX<-log(MCX)
lMXX<-log(MXX)
lBSE<-log(BSE)
lBVSP<-log(BVSP)
lLBR<-log(LBR)
lMSCI<-log(MSCI)
```

5 Plots of the histograms of the returns and the log-returns of the assets

```
#Histograms and densities of the daily returns and daily log-returns of the assets

#CAC 40
```

```
gcac<-ggplot(CAC, aes(x=CAC)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the CAC 40 Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.91",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.056",
hjust = 2.35, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glCAC<-ggplot(lCAC, aes(x=lCAC)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the CAC 40 Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.73",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.35",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gcac, glCAC, nrow = 1)


#DAX
gdax<-ggplot(DAX, aes(x=DAX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the DAX Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
```

```
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.22",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.22",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)
glDAX<-ggplot(lDAX, aes(x=lDAX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the DAX Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.99",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.50",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gdax, glDAX, nrow = 1)

#DJI
gdji<-ggplot(DJI, aes(x=DJI)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the Dow Jones 30
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.06",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.35",
hjust = 2.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glDJI<-ggplot(lDJI, aes(x=lDJI)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the Dow Jones 30
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
```

```
                                 colour = "whitesmoke",
                                 size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.09",
hjust = 2.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.03",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gdji, glDJI, nrow = 1)


#NIKKEI225
gnky<-ggplot(NKY, aes(x=NKY)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the Nikkei 225 Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                 colour = "whitesmoke",
                                 size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.31",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.25",
hjust = -1.55, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glNKY<-ggplot(lNKY, aes(x=lNKY)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the Nikkei 225
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                 colour = "whitesmoke",
                                 size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                 colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.17",
hjust = 2.8, vjust=-23),
```

```
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.53",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gnky, glNKY, nrow = 1)

#FTSE
gftse<-ggplot(FTSE, aes(x=FTSE)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the FTSE 100 Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.99",
hjust = 2.7, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.20",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glFTSE<-ggplot(lFTSE, aes(x=lFTSE)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the FTSE 100
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.82",
hjust = 2.7, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.36",
hjust = 2.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gftse, glFTSE, nrow = 1)

#KOSPI 50
gks<-ggplot(KOSPI, aes(x=KOSPI)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the KOSPI 50 Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
```

```
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = 0.006",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.75",
hjust = -1.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glKS<-ggplot(lKS, aes(x=lKS)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the KOSPI 50
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.27",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.51",
hjust = -1.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gks, glKS, nrow = 1)

#MOEX
gmcx<-ggplot(MCX, aes(x=MCX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the MOEX Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.31",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
```

```
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.84",
hjust = -1.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glMCX<-ggplot(lMCX, aes(x=lMCX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the MOEX Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.89",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.52",
hjust = -1.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gmcx, glMCX, nrow = 1)

#INMEX
gmxx<-ggplot(MXX, aes(x=MXX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the S&P BMV INMEX
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.62",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.25",
hjust = -1.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glMXX<-ggplot(lMXX, aes(x=lMXX)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the S&P BMV INMEX
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
```

```
                                    colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                    colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.43",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = - 0.51",
hjust = -1.5, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gmxx, glMXX, nrow = 1)


#SENSEX
gbse<-ggplot(BSE, aes(x=BSE)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the S&P BSE SENSEX
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                    colour = "whitesmoke",
                                    size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                    colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                    colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.10",
hjust = -1.8, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.32",
hjust = -1.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glBSE<-ggplot(lBSE, aes(x=lBSE)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the S&P BSE SENSEX
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                    colour = "whitesmoke",
                                    size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                    colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                    colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.29",
hjust = -1.9, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.004",
```

```
hjust = -1.65, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gbse, glBSE, nrow = 1)

#IBOVESPA
gbvsp<-ggplot(BVSP, aes(x=BVSP)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the Bovespa Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = 0.43",
hjust = 3, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 1.08",
hjust = 2.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)


glBVSP<-ggplot(lBVSP, aes(x=lBVSP)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the Bovespa
Index")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold")+
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.33",
hjust = 2.9, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.62",
hjust = 2.8, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gbvsp, glBVSP, nrow = 1)

#3MUSD LIBOR
glbr<-ggplot(LBR, aes(x=LBR)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the 3-Month USD
LIBOR")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
```

```
                              colour = "whitesmoke",
                              size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                              colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold") +
annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 0.32",
hjust = -2, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 1.07",
hjust = -1.9, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

glLBR<-ggplot(lLBR, aes(x=lLBR)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the 3-Month USD
LIBOR")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                              colour = "whitesmoke",
                              size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                              colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold") +
annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.29",
hjust = -2, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.49",
hjust = -1.9, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(glbr, glLBR, nrow = 1)


#MSCI ACWI ETF
gmsci<-ggplot(MSCI, aes(x=MSCI)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Returns of the MSCI ACWI ETF")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                              colour = "whitesmoke",
                              size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                              colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="turquoise4")+
 labs(x = "Daily Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.05",
hjust = 2.8, vjust=-23),
```

```
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = 0.20",
hjust = 2.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf +1, ymax = Inf+1)


glMSCI<-ggplot(lMSCI, aes(x=lMSCI)) +
ggtitle("Histogram of the Daily Log-Returns of the MSCI ACWI
ETF")+
theme(plot.title = element_text(hjust = 0.45, size=14),
  panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
 geom_histogram(aes(y=..density..), colour="black", fill="white")+
 geom_density(alpha=.2, fill="lightblue")+
 labs(x = "Daily Log-Returns", y = "Density", face = "bold") +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Kurtosis = - 1.055",
hjust = 2.7, vjust=-23),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf) +
 annotation_custom(grob = textGrob(label = "Skewness = -0.13",
hjust = 2.7, vjust=-21),
 xmin = -Inf, xmax = Inf, ymin = -Inf, ymax = Inf)

grid.arrange(gmsci, glMSCI, nrow = 1)
```

6 Unit-root tests on the log-returns of the assets

```
#ADF & PP Unit root Tests on daily log-returns
df<-ur.df(lCAC, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lCAC, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lCAC, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lCAC)

df<-ur.df(lDAX, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lDAX, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lDAX, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lDAX)



df<-ur.df(lDJI, type = "trend", selectlags = "AIC")
```

```
summary(df)
df<-ur.df(lDJI, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lDJI, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lDJI)

df<-ur.df(lNKY, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lNKY, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lNKY, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lNKY)

df<-ur.df(lFTSE, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lFTSE, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lFTSE, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lFTSE)

df<-ur.df(lMCX, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMCX, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMCX, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lMCX)

df<-ur.df(lMXX, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMXX, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMXX, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lMXX)

df<-ur.df(lKS, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lKS, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lKS, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lKS)

df<-ur.df(lBSE, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lBSE, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lBSE, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lBSE)

df<-ur.df(lBVSP, type = "trend", selectlags = "AIC")
```

```
summary(df)
df<-ur.df(lBVSP, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lBVSP, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lBVSP)

df<-ur.df(lMSCI, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMSCI, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lMSCI, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lMSCI)

df<-ur.df(lLBR, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lLBR, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(lLBR, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(lLBR)
```

7 First-difference of the daily log-returns

```
#The time-series are of type DS; the first-difference of the daily
log-returns is taken:
dcac<-diff(lCAC,difference=1)
ddax<-diff(lDAX,difference=1)
ddji<-diff(lDJI,difference=1)
dnky<-diff(lNKY,difference=1)
dftse<-diff(lFTSE,difference=1)
dks<-diff(lKS,difference=1)
dmcx<-diff(lMCX,difference=1)
dmxx<-diff(lMXX,difference=1)
dbse<-diff(lBSE,difference=1)
dbvsp<-diff(lBVSP,difference=1)
dmsci<-diff(lMSCI,difference=1)
dlbr<-diff(lLBR,difference=1)

#Adjusting the data to drop the NA values of the first date:
dcac<-dcac[-1,]
ddax<-ddax[-1,]
ddji<-ddji[-1,]
dnky<-dnky[-1,]
dftse<-dftse[-1,]
dmcx<-dmcx[-1,]
dmxx<-dmxx[-1,]
dks<-dks[-1,]
dbse<-dbse[-1,]
dbvsp<-dbvsp[-1,]
dmsci<-dmsci[-1,]
dlbr<-dlbr[-1,]
```

8 Unit-root test on the first-difference log-returns

```
#Unit-root tests on the first-difference log-returns of the assets
to make sure the series are stationary
#ADF & PP Unit root Tests

df<-ur.df(dcac, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dcac, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dcac, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dcac)

df<-ur.df(ddax, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(ddax, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(ddax, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(ddax)

df<-ur.df(ddji, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(ddji, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(ddji, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(ddji)

df<-ur.df(dnky, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dnky, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dnky, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dnky)

df<-ur.df(dftse, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dftse, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dftse, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dftse)

df<-ur.df(dmcx, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmcx, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmcx, type = "none", selectlags = "AIC")
```

```
summary(df)
PP.test(dmcx)

df<-ur.df(dmxx, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmxx, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmxx, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dmxx)

df<-ur.df(dks, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dks, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dks, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dks)

df<-ur.df(dbse, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dbse, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dbse, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dbse)

df<-ur.df(dbvsp, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dbvsp, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dbvsp, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dbvsp)

df<-ur.df(dmsci, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmsci, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dmsci, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dmsci)

df<-ur.df(dlbr, type = "trend", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dlbr, type = "drift", selectlags = "AIC")
summary(df)
df<-ur.df(dlbr, type = "none", selectlags = "AIC")
summary(df)
PP.test(dlbr)

9   Plots of the log-returns (first difference)

#Plots of the daily log-returns of the portfolio's assets
#dcac 40
ggplot(dcac, aes(x=M[-1], y=dcac))+
```

```
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the CAC40 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

dim(ddax)
#ddax
ggplot(ddax, aes(x=M[-1][1:2708], y=ddax))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the DAX Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#ddji
ggplot(ddji, aes(x=M[-1][1:2708], y=ddji))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the Dow Jones 30 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
```

```
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#dnky
ggplot(dnky, aes(x=M[-1][1:2708], y=dnky))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the NIKKEI 225 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#dftse
ggplot(dftse, aes(x=M[-1][1:2708], y=dftse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the FTSE 100 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#dks 50
ggplot(dks, aes(x=M[-1][1:2708], y=dks))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the KOSPI 50 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
```

```
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


#IMOEX
ggplot(dmcx, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmcx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the MOEX Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#INMEX
ggplot(dmxx, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmxx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the S&P BMV INMEX Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#SENSEX
ggplot(dbse, aes(x=M[-1][1:2708], y=dbse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
```

```
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the S&P BSE SENSEX Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

#IBOVESPA
ggplot(dbvsp, aes(x=M[-1][1:2708], y=dbvsp))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                              colour = "whitesmoke",
                              size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                              colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the Bovespa Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


#3M USD LIBOR
ggplot(dlbr, aes(x=M[-1][1:2708], y=dlbr))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                              colour = "whitesmoke",
                              size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                              colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                              colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the 3-Month London Interbank Offered Rate,
based on the U.S. Dollar from 01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


#dmsci ACWI ETF
ggplot(dmsci, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmsci))+
```

```
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Log-returns of the iShares MSCI ACWI ETF from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))
```

10 Computation of the statistics of the log-returns

```
#Computation of the mean, standard deviation, kurtosis and
skewness of the log-returns

summary(dcac)
skewness(dcac)
kurtosis(dcac)
sd(dcac)

summary(ddax)
skewness(ddax)
kurtosis(ddax)
sd(ddax)

summary(dftse)
skewness(dftse)
kurtosis(dftse)
sd(dftse)

summary(ddji)
skewness(ddji)
kurtosis(ddji)
sd(ddji)

summary(dnky)
skewness(dnky)
kurtosis(dnky)
sd(dnky)

summary(dmcx)
skewness(dmcx)
kurtosis(dmcx)
sd(dmcx)
```

```
summary(dmxx)
skewness(dmxx)
kurtosis(dmxx)
sd(dmxx)

summary(dbse)
skewness(dbse)
kurtosis(dbse)
sd(dbse)

summary(dbvsp)
skewness(dbvsp)
kurtosis(dbvsp)
sd(dbvsp)

summary(dks)
skewness(dks)
kurtosis(dks)
sd(dks)

summary(dlbr)
skewness(dlbr)
kurtosis(dlbr)
sd(dlbr)

summary(dmsci)
skewness(dmsci)
kurtosis(dmsci)
sd(dmsci)
```

11 Jarque-Bera and Ljung-Box tests on the log-returns

```
#Implementation of the Jarque-Bera (normality) and Ljung-Box
(autocorrelation) tests on the log-returns of the portfolio assets

jb.norm.test(dcac, nrepl=2000)
Box.test(dcac, lag = 30, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(ddax, nrepl=2000)
Box.test(ddax, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(ddji, nrepl=2000)
Box.test(ddji, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dnky, nrepl=2000)
Box.test(dnky, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dftse, nrepl=2000)
Box.test(dftse, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dks, nrepl=2000)
Box.test(dks, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))
```

```
jb.norm.test(dmcx, nrepl=2000)
Box.test(dmcx, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dmxx, nrepl=2000)
Box.test(dmxx, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dbse, nrepl=2000)
Box.test(dbse, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dbvsp, nrepl=2000)
Box.test(dbvsp, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dmsci, nrepl=2000)
Box.test(dmsci, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))

jb.norm.test(dlbr, nrepl=2000)
Box.test(dlbr, lag = 1, type = c("Ljung-Box"))
```

12 "Mean-test" on the log-returns

```
#Student test on the mean of the daily log-returns
t.test(dcac, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(ddax, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(ddji, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dnky, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dftse, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dmcx, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dmxx, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dbse, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dbvsp, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dks, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dmsci, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
t.test(dlbr, y = NULL, mu = 0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
```

13 Modelling volatility

```
#Test of ARCH effect in the log-returns for each asset


archtest (dcac,lag=12)
archtest(ddax,lag=12)
archtest (ddji,lag=12)
archtest (dnky,lag=12)
archtest (dftse,lag=12)
archtest (dmcx,lag=12)
archtest (dmxx,lag=12)
archtest (dks,lag=12)
archtest (dbvsp,lag=12)
archtest(dbse,lag=12)
archtest (dmsci,lag=12)
```

```
archtest (dlbr,lag=12)
```

14 ARCH-type specification on the data

```
#ARCH-type specification applied to the data
# The model specification is chosen by fitting a GARCH(p,q) or
EGARCH(p,q) model to the time-series (with parameters p2 and q2).
The specification which has all its coefficients significative and
which minimises the Information Criterium (AIC, Bayes, Shibata,
Hannan-Quinn) is selected.
# See "GarchModeling.xlsx" for the specification selection steps.


#CAC 40
garchcac<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitcac<-ugarchfit(garchcac, dcac, solver = "hybrid")
fitcac



#DAX
garchdax<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitdax<-ugarchfit(garchdax, ddax, solver = "hybrid")
fitdax

#DJI
garchdji<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 2)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitdji<-ugarchfit(garchdji, ddji, solver = "hybrid")
fitdji

#Nikkei 225
garchnky<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitnky<-ugarchfit(garchnky, dnky, solver = "hybrid")
fitnky

#FTSE 100
garchftse<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 2)),
```

```
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitftse<-ugarchfit(garchftse, dftse, solver = "hybrid")
fitftse

#IMOEX
garchmcx<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitmcx<-ugarchfit(garchmcx, dmcx, solver = "hybrid")
fitmcx

#INMEX
garchmxx<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitmxx<-ugarchfit(garchmxx, dmxx, solver = "hybrid")
fitmxx

#KOSPI 50
garchks<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(2, 2)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitks<-ugarchfit(garchks, dks, solver = "hybrid")
fitks

#BSE SENSEX
garchbse<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(1, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitbse<-ugarchfit(garchbse, dbse, solver = "hybrid")
fitbse

#IBOVESPA
garchbvsp<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
garchOrder = c(2, 2)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitbvsp<-ugarchfit(garchbvsp, dbvsp, solver = "hybrid")
fitbvsp


#3-MONTH USD LIBOR
garchdlbr<-ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH",
garchOrder = c(1, 2)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitdlbr<-ugarchfit(garchdlbr, dlbr, solver = "hybrid")
fitdlbr

#MSCI ACWI ETF
garchmsci<-ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH",
```

```
garchOrder = c(2, 1)),
 mean.model = list(armaOrder = c(0,0), include.mean = FALSE),
distribution.model = "norm")
fitmsci<-ugarchfit(garchmsci, dmsci, solver = "hybrid")
fitmsci
```

15 Markov Switching GARCH specification

```
#Specification of Markov Switching model with k=2 regimes for
EGARCH

specEK2<-CreateSpec(variance.spec = list(model = "eGARCH"),
distribution.spec = list(distribution=c("norm", "norm")),
switch.spec = list(do.mix = FALSE, K = 2))
specEK2

#Specification GARCH for the LIBOR

specK2<-CreateSpec(variance.spec = list(model = "sGARCH"),
distribution.spec = list(distribution=c("norm", "norm")),
switch.spec = list(do.mix = FALSE, K = 2))
specK2




#Fitting the MS model specified for the series:

#CAC40
MSfitcac<-FitML(specEK2, dcac, ctr = list())
MSfitcac

#DAX
MSfitdax<-FitML(specEK2, ddax, ctr = list())
MSfitdax

#FTSE
MSfitftse<-FitML(specEK2, dftse, ctr = list())
MSfitftse

#DJI
MSfitdji<-FitML(specEK2, ddji, ctr = list())
MSfitdji

#NIKKEI 225
MSfitnky<-FitML(specEK2, dnky, ctr = list())
MSfitnky

#IMOEX
MSfitmcx<-FitML(specEK2, dmcx, ctr = list())
MSfitmcx

#INMEX
MSfitmxx<-FitML(specEK2, dmxx, ctr = list())
```

```
MSfitmxx

#IBOVESPA
MSfitbvsp<-FitML(specEK2, dbvsp, ctr = list())
MSfitbvsp

#BSE SENSEX
MSfitbse<-FitML(specEK2, dbse, ctr = list())
MSfitbse

#KOSPI 50
MSfitks<-FitML(specEK2, dks, ctr = list())
MSfitks

#MSCI ACWI ETF
MSfitmsci<-FitML(specEK2, dmsci, ctr = list())
MSfitmsci




#Simulation of the fitted MS-GARCH models to the data

#CAC40
simcac <- simulate(object = MSfitcac, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MScac<-xts(simcac$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MScac



#antikatestisa to dateMS poy den htan orismeno me as.date(M[-1])
se ola kai ekana idies tis stiles 2761 se megethos

#DAX
simdax <- simulate(object = MSfitdax, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSdax<-xts(simdax$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSdax

#FTSE
simftse <- simulate(object = MSfitftse, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSftse<-xts(simftse$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSftse

#DJI
simdji <- simulate(object = MSfitdji, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSdji<-xts(simdji$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSdji
```

```
#NKY
simnky <- simulate(object = MSfitnky, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSnky<-xts(simnky$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSnky

#MCX
simmcx <- simulate(object = MSfitmcx, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSmcx<-xts(simmcx$draw[1:2761,1], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmcx




#MXX
simmxx <- simulate(object = MSfitmxx, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSmxx<-xts(simmxx$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmxx

#BVSP
simbvsp <- simulate(object = MSfitbvsp, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSbvsp<-xts(simbvsp$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSbvsp

#BSE
simbse <- simulate(object = MSfitbse, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSbse<-xts(simbse$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSbse

#KS
simks <- simulate(object = MSfitks, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSks<-xts(simks$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSks


#MSCI
simmsci <- simulate(object = MSfitmsci, nsim = 1L, nahead =
2762L,nburn = 1L)
MSmsci<-xts(simmsci$draw[1:2761,], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmsci
```

16 Importing the Markov Switching time-series specifications for each asset

```
MSDataset<- cbind(MScac,MSdax, MSftse, MSdji, MSnky, MSmcx, MSmxx,
MSbvsp,MSbse,MSks,MSmsci)
```

```
xts(MSDataset[, -1], order.by=as.Date(M[-1]))

#Creating a time series for each asset in the portfolio
MScac<-xts(MSDataset[,1], order.by=as.Date(M[-1]))
MSdax<-xts(MSDataset[,2], order.by=as.Date(M[-1]))
MSftse<-xts(MSDataset[,3], order.by=as.Date(M[-1]))
MSdji<-xts(MSDataset[,4], order.by=as.Date(M[-1]))
MSnky<-xts(MSDataset[,5], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmcx<-xts(MSDataset[,6], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmxx<-xts(MSDataset[,7], order.by=as.Date(M[-1]))
MSbvsp<-xts(MSDataset[,8], order.by=as.Date(M[-1]))
MSbse<-xts(MSDataset[,9], order.by=as.Date(M[-1]))
MSks<-xts(MSDataset[,10], order.by=as.Date(M[-1]))
MSmsci<-xts(MSDataset[,11], order.by=as.Date(M[-1]))
```

17 Plots of the Markov Switching specifications against the original data

```
#CAC 40
plotdcac<-ggplot(dcac, aes(x=M[-1][1:2708], y=dcac))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the CAC40 Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))
dim(MScac)

plotMScac<-ggplot(MScac, aes(x=M[-1][1:2761], y=MScac))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the CAC40 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
```

```
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdcac, plotMScac, nrow = 1)

dim(ddax) #2708
#DAX
plotddax<-ggplot(ddax, aes(x=M[-1][1:2707], y=ddax))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the DAX Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

dim(MSdax)
plotMSdax<-ggplot(MSdax, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSdax))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the DAX Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotddax, plotMSdax, nrow = 1)



#FTSE
plotdftse<-ggplot(dftse, aes(x=M[-1][1:2708], y=dftse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
```

```
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the FTSE 100 Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSftse<-ggplot(MSftse, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSftse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the FTSE 100 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdftse, plotMSftse, nrow = 1)


#DJI
plotddji<-ggplot(ddji, aes(x=M[-1][1:2708], y=ddji))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the Dow-Jones 30 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
```

```
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSdji<-ggplot(MSdji, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSdji))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the Dow-Jones 30 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotddji, plotMSdji, nrow = 1)


#NKY
plotdnky<-ggplot(dnky, aes(x=M[-1][1:2708], y=dnky))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the Nikkei 225 Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSnky<-ggplot(MSnky, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSnky))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
```

```
ggtitle("MS EGARCH specification for the Nikkei 225 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdnky, plotMSnky, nrow = 1)


#MOEX
plotdmcx<-ggplot(dmcx, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmcx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the MOEX Index from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSmcx<-ggplot(MSmcx, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSmcx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the MOEX Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdmcx, plotMSmcx, nrow = 1)
```

```
#INMEX
plotdmxx<-ggplot(dmxx, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmxx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the S&P/BMV INMEX Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSmxx<-ggplot(MSmxx, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSmxx))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the S&P/BMV INMEX Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdmxx, plotMSmxx, nrow = 1)


#IBOVESPA
plotdbvsp<-ggplot(dbvsp, aes(x=M[-1][1:2708], y=dbvsp))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the Ibovespa Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
```

```
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSbvsp<-ggplot(MSbvsp, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSbvsp))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the Ibovespa Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdbvsp, plotMSbvsp, nrow = 1)


#BSE SENSEX
plotdbse<-ggplot(dbse, aes(x=M[-1][1:2708], y=dbse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the S&P BSE SENSEX Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSbse<-ggplot(MSbse, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSbse))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
```

```
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the S&P BSE SENSEX Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdbse, plotMSbse, nrow = 1)


#KOSPI 50
plotdks<-ggplot(dks, aes(x=M[-1][1:2708], y=dks))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the KOSPI 50 Index from 01/06/2010
to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSks<-ggplot(MSks, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSks))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                  colour = "whitesmoke",
                                  size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                  colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the KOSPI 50 Index from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))
```

```
grid.arrange(plotdks, plotMSks, nrow = 1)


#MSCI ACWI ETF
plotdmsci<-ggplot(dmsci, aes(x=M[-1][1:2708], y=dmsci))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("Daily Log-Returns of the MSCI ACWI ETF from 01/06/2010 to
30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))


plotMSmsci<-ggplot(MSmsci, aes(x=M[-1][1:2761], y=MSmsci))+
geom_line(color="lightskyblue4") +
theme(panel.background = element_rect(fill = "whitesmoke",
                                colour = "whitesmoke",
                                size = 0.5, linetype = "solid"),
  panel.grid.major = element_line(size = 0.5, linetype = 'solid',
                                colour = "white"),
  panel.grid.minor = element_line(size = 0.25, linetype = 'solid',
                                colour = "white"))+
ggtitle("MS EGARCH specification for the MSCI ACWI ETF from
01/06/2010 to 30/12/2020") +
 theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size=14),
  axis.title = element_text(size = 12, face = "italic", color =
"black"),
  axis.title.y = element_text(size=12, face = "italic", color =
"black")) +
  labs(x = "Years", y = "Price", face = "bold")+
  scale_x_continuous(breaks= pretty(M,n = 5))

grid.arrange(plotdmsci, plotMSmsci, nrow = 1)
```

18 Definition of the expectile function and the EVaR risk measure

```
#Function computing the expectile of a distribution R with
parameter tau

expectile <- function (R, tau = seq(0, 1, 0.25), dec = 4)
{
if (!is.vector(R))
```

```
stop("observations are needed in vector form.")
if (min(tau) < 0 || max(tau) > 1)
stop("only asymmetries between 0 and 1 allowed.")
e = mean(R)
ee = 0 * tau
g = max(abs(R)) * 1e-06
for (k in 1:length(tau)) {
p = tau[k]
if (p == 0)
ee[k] = min(R, na.rm = TRUE)
else if (p == 1)
ee[k] = max(R, na.rm = TRUE)
else {
for (it in 1:20) {
w = ifelse(R < e, 1 - p, p)
enew = sum(w * R)/sum(w)
de = max(abs(enew - e))
e = enew
if (de < g)
break
}
ee[k] = e
}
}
names(ee) = tau
ee = round(ee, dec)
return(ee)
}

#User-defined function EVaR as risk-measure, which calls the
expectile function. The expectile based Value-at-Risk (EVaR) is
defined as .

EVaR<-function(R, tau=0.00145241,weights,sigma)
{
weights <- matrix(weights, ncol=1)
Ri<-apply(R,2,mean)
Ri<-matrix(Ri,ncol=1)
Rp<-sum(Ri%*%t(weights))
sp<-sqrt(t(weights)%*%sigma%*%weights)
out<- Rp+(-1*expectile(as.vector(R),tau=0.00145241))*sp
out
}

#Creation of customized moments for the risk measure EVaR
EVaR.moments <- function(R, ...){
out <- list()
out$mu<-colMeans(R)
out$sigma <- cov(R)
out
}
```

19 Portfolio Optimisation - Passive Investing Strategy

```
#Portfolio construction
dataPortf<-
cbind(dcac,ddax,dftse,ddji,dnky,dmcx,dmxx,dbvsp,dbse,dks)

portf<-portfolio.spec(assets = c("CAC40","DAX","FTSE
100","DJI","NIKKEI 225",
"MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE SENSEX","KOSPI 50"),
category_labels = c("Developed Economies","Developed Economies",
"Developed Economies","Developed Economies","Developed Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies","Emerging Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies"))
colnames(dataPortf)<-c("CAC 40","DAX","FTSE 100",
"DJI","NIKKEI 225","MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE
SENSEX","KOSPI50")
funds <- colnames(dataPortf)

#Construction of initial portfolio with basic constraints.
init.portf <- portfolio.spec(assets=funds)
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf, type='box', min
= 0, max=1 )
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="weight_sum",min_sum=0.99, max_sum=1.01)
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="long_only")
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="full_investment")

#Creation of portfolios with VaR and CVaR as objectives
#Note: VaR with confidence level  and the CVaR with the
corresponding confidence level
VaR.portf<-add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="VaR",arguments=list(p=0.99))
CVaR.portf <- add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="ES",arguments=list(p=0.975))

#Creation of portfolio with EVaR as an objective
#Note: EVaR with confidence level corresponding to that of the VaR
at 99% confidence level, i.e. .
EVaR.portf <- add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="EVaR",arguments=list(tau=0.00145241))


#Optimization of the portfolio using each risk measure as a risk
objective (minimisation):
opt.VaR <- optimize.portfolio(dataPortf, VaR.portf,
optimize_method="pso", trace=TRUE)
opt.CVaR <- optimize.portfolio(dataPortf, CVaR.portf,
optimize_method="pso", trace=TRUE)
opt.EVaR <- optimize.portfolio(dataPortf, EVaR.portf,
optimize_method="pso",momentFUN="EVaR.moments", trace=TRUE)

#Displaying the results of the four optimisations:
opt.VaR
opt.CVaR
opt.EVaR
```

```
#Computation of the Expected return for each portfolio:
Ri<-apply(dataPortf,2,mean)

WoptVaR<-extractWeights(opt.VaR)
Rp.VaR<-sum(Ri*t(WoptVaR))
Rp.VaR

WoptCVaR<-extractWeights(opt.CVaR)
Rp.CVaR<-sum(Ri*t(WoptCVaR))
Rp.CVaR

WoptEVaR<-extractWeights(opt.EVaR)
Rp.EVaR<-sum(Ri*t(WoptEVaR))
Rp.EVaR

#Computation of the portfolios' risk

sigp.VaR<-
(t(as.matrix(WoptVaR)))%*%as.matrix(cov(dataPortf))%*%as.matrix(Wo
ptVaR)
sigp.CVaR<-
(t(as.matrix(WoptCVaR)))%*%as.matrix(cov(dataPortf))%*%as.matrix(W
optCVaR)
sigp.EVaR<-
(t(as.matrix(WoptEVaR)))%*%as.matrix(cov(dataPortf))%*%as.matrix(W
optEVaR)

sigp.VaR
sigp.CVaR
sigp.EVaR


#Computation of the beta of each asset in the portfolio

Betacac<-CAPM.beta(dcac, dmsci, Rf = dlbr)
Betadax<-CAPM.beta(ddax, dmsci, Rf = dlbr)
Betaftse<-CAPM.beta(dftse, dmsci, Rf = dlbr)
Betadji<-CAPM.beta(ddji, dmsci, Rf = dlbr)
Betanky<-CAPM.beta(dnky, dmsci, Rf = dlbr)
Betamcx<-CAPM.beta(dmcx, dmsci, Rf = dlbr)
Betamxx<-CAPM.beta(dmxx, dmsci, Rf = dlbr)
Betabvsp<-CAPM.beta(dbvsp, dmsci, Rf = dlbr)
Betabse<-CAPM.beta(dbse, dmsci, Rf = dlbr)
Betaks<-CAPM.beta(dks, dmsci, Rf = dlbr)

Assets.Betas<-cbind(Betacac,Betadax, Betaftse, Betadji, Betanky,
Betamcx, Betamxx, Betabvsp, Betabse, Betaks)
Assets.Betas

# Computation of each portfolio’s Beta:
Beta.VaR<-WoptVaR%*%t(Assets.Betas)
Beta.CVaR<-WoptCVaR%*%t(Assets.Betas)
Beta.EVaR<-WoptEVaR%*%t(Assets.Betas)

#Computation of the Sharpe Ratio for each portfolio
```

```
ShR.VaR<-(Rp.VaR-mean(dlbr))/sigp.VaR
ShR.VaR

ShR.CVaR<-(Rp.CVaR-mean(dlbr))/sigp.CVaR
ShR.CVaR

ShR.EVaR<-(Rp.EVaR-mean(dlbr))/sigp.EVaR
ShR.EVaR


#Computation of the Treynor Ratio for each portfolio
Tr.VaR<-(Rp.VaR-mean(dlbr))/Beta.VaR
Tr.VaR

Tr.CVaR<-(Rp.CVaR-mean(dlbr))/Beta.CVaR
Tr.CVaR

Tr.EVaR<-(Rp.EVaR-mean(dlbr))/Beta.EVaR
Tr.EVaR


#Computation of the Jensen's Alpha for each portfolio
Rm=mean(dmsci)
Rm
JA.VaR<-(Rp.VaR-mean(dlbr))-Beta.VaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.VaR
JA.CVaR<-(Rp.CVaR-mean(dlbr))-Beta.CVaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.CVaR
JA.EVaR<-(Rp.EVaR-mean(dlbr))-Beta.EVaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.EVaR


#Plots Weights


#All Assets

chart.Weights(opt.VaR, neighbors = NULL,main = "VaR Optimisation
Portfolio Weights",
 las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "line")

chart.Weights(opt.CVaR, neighbors = NULL,main = "CVaR Optimisation
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "line")

chart.Weights(opt.EVaR, neighbors = NULL,main = "EVaR Optimisation
```

```
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "line")

chart.Weights(opt.VaR, neighbors = NULL,main = "VaR Optimisation
Portfolio Weights",
 las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

chart.Weights(opt.CVaR, neighbors = NULL,main = "CVaR Optimisation
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

chart.Weights(opt.EVaR, neighbors = NULL,main = "EVaR Optimisation
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

#By Category (Developed vs Emerging Countries)
#VaR
WVaR1<-as.matrix(extractWeights(opt.VaR))
WVaRDvp1<-WVaR1[1:5,]
VaRDevW1<-sum(WVaRDvp1)
WVaREme1<-WVaR1[6:10,]
VaREmW1<-sum(WVaREme1)
Wdeveme1<-as.matrix(cbind(VaRDevW1,VaREmW1))
colnames(Wdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")

par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WVaRbplot1<-barplot(t(Wdeveme1), names.arg=rownames(t(Wdeveme1)),
col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("Var Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WVaRbplot1,0,
labels=percent(Wdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)
```

```
#CVaR
WCVaR1<-as.matrix(extractWeights(opt.CVaR))
WCVaRDvp1<-WCVaR1[1:5,]
CVaRDevW1<-sum(WCVaRDvp1)
WCVaREme1<-WCVaR1[6:10,]
CVaREmW1<-sum(WCVaREme1)
WCVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(CVaRDevW1,CVaREmW1))

colnames(WCVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")


par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WCVaRbplot1<-barplot(t(WCVaRdeveme1),
names.arg=rownames(t(WCVaRdeveme1)),
                        col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("CVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WCVaRbplot1,0,
labels=percent(WCVaRdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)

#EVaR

WEVaR1<-as.matrix(extractWeights(opt.EVaR))
WEVaRDvp1<-WEVaR1[1:5,]
EVaRDevW1<-sum(WEVaRDvp1)
WEVaREme1<-WEVaR1[6:10,]
EVaREmW1<-sum(WEVaREme1)
WEVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(EVaRDevW1,EVaREmW1))

colnames(WEVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")


par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WEVaRbplot1<-barplot(t(WEVaRdeveme1),
names.arg=rownames(t(WEVaRdeveme1)),
                         col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("EVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WVaRbplot1,0,
labels=percent(WEVaRdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)
```

20 Portfolio Optimisation – Passive Investing Strategy – Markov Switching Data

```
#Portfolio construction
MSdataPortf<-
cbind(MScac,MSdax,MSftse,MSdji,MSnky,MSmcx,MSmxx,MSbvsp,MSbse,MSks
)
```

```
MSportf<-portfolio.spec(assets = c("CAC40","DAX","FTSE
100","DJI","NIKKEI 225",
"MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE SENSEX","KOSPI 50"),
category_labels = c("Developed Economies","Developed Economies",
"Developed Economies","Developed Economies","Developed Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies","Emerging Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies"))
colnames(MSdataPortf)<-c("CAC 40","DAX","FTSE 100",
"DJI","NIKKEI 225","MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE
SENSEX","KOSPI50")

MSfunds <- colnames(MSdataPortf)

#Construction of initial portfolio with basic constraints.
init.MSportf <- portfolio.spec(assets=MSfunds)
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf, type='box',
min = 0, max=1 )
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="weight_sum",min_sum=0.99, max_sum=1.01)
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="long_only")
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="full_investment")

#Creation of portfolios with VaR and CVaR as objectives
#Note: VaR with confidence level (1-?)=99% and the CVaR with the
corresponding confidence level (1-?)=97.5%
VaR.MSportf<-add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="VaR",arguments=list(p=0.99))
CVaR.MSportf <- add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="ES",arguments=list(p=0.975))

#Creation of portfolio with EVaR as an objective
#Note: EVaR with confidence level corresponding to that of the VaR
at 99% confidence level, i.e. ?=0.00145241.
EVaR.MSportf <- add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="EVaR",arguments=list(tau=0.00145241))

#Optimization of the portfolio using each risk measure as a risk
objective (minimisation):
MSopt.VaR <- optimize.portfolio(MSdataPortf, VaR.MSportf,
optimize_method="pso", trace=TRUE)
MSopt.CVaR <- optimize.portfolio(MSdataPortf, CVaR.MSportf,
optimize_method="pso", trace=TRUE)
MSopt.EVaR <- optimize.portfolio(MSdataPortf, EVaR.MSportf,
optimize_method="pso",momentFUN="EVaR.moments", trace=TRUE)

#Displaying the results of the four optimisations:
MSopt.VaR
MSopt.CVaR
MSopt.EVaR

MSRi<-apply(MSdataPortf,2,mean)
MSRi
```

```
WMSoptVaR<-extractWeights(MSopt.VaR)
Rp.MSVaR<-sum(MSRi*t(WMSoptVaR))
Rp.MSVaR

WMSoptCVaR<-extractWeights(MSopt.CVaR)
Rp.MSCVaR<-sum(MSRi*t(WMSoptCVaR))
Rp.MSCVaR

WMSoptEVaR<-extractWeights(MSopt.EVaR)
Rp.MSEVaR<-sum(MSRi*t(WMSoptEVaR))
Rp.MSEVaR

#Computation of the portfolios' risk

MSsigp.VaR<-
(t(as.matrix(WMSoptVaR)))%*%as.matrix(cov(MSdataPortf))%*%as.matri
x(WMSoptVaR)
MSsigp.CVaR<-
(t(as.matrix(WMSoptCVaR)))%*%as.matrix(cov(MSdataPortf))%*%as.matr
ix(WMSoptCVaR)
MSsigp.EVaR<-
(t(as.matrix(WMSoptEVaR)))%*%as.matrix(cov(MSdataPortf))%*%as.matr
ix(WMSoptEVaR)

MSsigp.VaR
MSsigp.CVaR
MSsigp.EVaR
```

```
#Plots Weights

chart.Weights(MSopt.VaR, neighbors = NULL,main = "VaR Optimisation
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
 "lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",

"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "line")

chart.Weights(MSopt.CVaR, neighbors = NULL,main = "CVaR
Optimisation Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
 cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
 "lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
```

```
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "line")

chart.Weights(MSopt.EVaR, neighbors = NULL,main = "EVaR
Optimisation Portfolio Weights",
 las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
 cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = "topright",cex.legend = 0.8, plot.type = "line")




chart.Weights(MSopt.VaR, neighbors = NULL,main = "VaR Optimisation
Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
 "lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",

"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

chart.Weights(MSopt.CVaR, neighbors = NULL,main = "CVaR
Optimisation Portfolio Weights",
las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
 cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
 "lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",

"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

chart.Weights(MSopt.EVaR, neighbors = NULL,main = "EVaR
Optimisation Portfolio Weights",
 las = 3, xlab = NULL, cex.lab = 1,element.color = "darkgray",
 cex.axis = 0.8, colorset = c("lightsteelblue1","lightskyblue1",
"lightskyblue2","lightskyblue3","lightskyblue4","paleturquoise1",
"paleturquoise","paleturquoise2","paleturquoise3","paleturquoise4"
),
legend.loc = NULL,cex.legend = 0.8, plot.type = "barplot")

#By category (Developed vs Emerging countries)

WMSVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSopt.VaR))
WMSVaRDvp1<-WMSVaR1[1:5,]
MSVaRDevW1<-sum(WMSVaRDvp1)
WMSVaREme1<-WMSVaR1[6:10,]
MSVaREmW1<-sum(WMSVaREme1)
WMSdeveme1<-as.matrix(cbind(MSVaRDevW1,MSVaREmW1))

colnames(WMSdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
```

```
WMSdeveme1

par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WMSVaRbplot1<-barplot(t(WMSdeveme1),
names.arg=rownames(t(WMSdeveme1)),
                        col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("VaR Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WMSVaRbplot1,0,
labels=percent(WMSdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)


WMSCVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSopt.CVaR))
WMSCVaRDvp1<-WMSCVaR1[1:5,]
MSCVaRDevW1<-sum(WMSCVaRDvp1)
WMSCVaREme1<-WMSCVaR1[6:10,]
MSCVaREmW1<-sum(WMSCVaREme1)
WMSCVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(MSCVaRDevW1,MSCVaREmW1))

colnames(WMSCVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")


par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WMSCVaRbplot1<-barplot(t(WMSCVaRdeveme1),
names.arg=rownames(t(WMSCVaRdeveme1)),
                         col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("CVaR Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WMSCVaRbplot1,0,
labels=percent(WMSCVaRdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)


WMSEVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSopt.EVaR))
WMSEVaRDvp1<-WMSEVaR1[1:5,]
MSEVaRDevW1<-sum(WMSEVaRDvp1)
WMSEVaREme1<-WMSEVaR1[6:10,]
MSEVaREmW1<-sum(WMSEVaREme1)
WMSEVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(MSEVaRDevW1,MSEVaREmW1))

colnames(WMSEVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")


par(mar = rep(3, 4))
coul <- c("lightskyblue1","paleturquoise3")
WMSEVaRbplot1<-barplot(t(WMSEVaRdeveme1),
names.arg=rownames(t(WMSEVaRdeveme1)),
                         col=coul,beside=TRUE,  space=0.1)
title("EVaR Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
text(WMSVaRbplot1,0,
labels=percent(WMSEVaRdeveme1,accuracy=0.001),cex=1,pos = 3)
```

21 Portfolio Optimisation – Active Investing Strategy

```
#Portfolio construction (same as for passive investing)
dataPortf<-
cbind(dcac,ddax,dftse,ddji,dnky,dmcx,dmxx,dbvsp,dbse,dks)

portf<-portfolio.spec(assets = c("CAC40","DAX","FTSE
100","DJI","NIKKEI 225",
"MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE SENSEX","KOSPI 50"),
category_labels = c("Developed Economies","Developed
Economies","Developed Economies","Developed Economies","Developed
Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies","Emerging
Economies","Emerging Economies","Emerging Economies"))
colnames(dataPortf)<-c("CAC 40","DAX","FTSE 100","DJI","NIKKEI
225","MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE SENSEX","KOSPI50")
funds <- colnames(dataPortf)

#Construction of initial portfolio with basic constraints.
init.portf <- portfolio.spec(assets=funds)
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf, type='box', min
= 0, max=1 )
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="weight_sum",min_sum=0.99, max_sum=1.01)
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="long_only")
init.portf <- add.constraint(portfolio=init.portf,
type="full_investment")

#Creation of portfolios with VaR and CVaR as objectives
#Note: VaR with confidence level (1-?)=99% and the CVaR with the
corresponding confidence level (1-?)=97.5%
VaR.portf<-add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="VaR",arguments=list(p=0.99))
CVaR.portf <- add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="ES",arguments=list(p=0.975))



#Creation of portfolio with EVaR as an objective
#Note: EVaR with confidence level corresponding to that of the VaR
at 99% confidence level, i.e. ?=0.00145241.
EVaR.portf <- add.objective(portfolio=init.portf, type="risk",
name="EVaR",arguments=list(tau=0.00145241))


#Optimisations with rebalancing periods

Ropt.VaR<-optimize.portfolio.rebalancing(dataPortf, VaR.portf,
optimize_method = "pso",rebalance_on = 'years',
training_period = 240, rolling_window = 480, trace=TRUE)

Ropt.CVaR<-optimize.portfolio.rebalancing(dataPortf,
CVaR.portf,optimize_method = "pso",rebalance_on = 'years',
```

```
training_period = 240, rolling_window = 480, trace=TRUE)


Ropt.EVaR<-optimize.portfolio.rebalancing(dataPortf,
EVaR.portf, momentFUN="EVaR.moments",optimize_method =
"pso",rebalance_on = 'years',
training_period = 240, rolling_window = 480, trace=TRUE)

Ropt.VaR
extractObjectiveMeasures(Ropt.VaR)

Ropt.CVaR
extractObjectiveMeasures(Ropt.CVaR)

Ropt.EVaR
extractObjectiveMeasures(Ropt.EVaR)


WRVaR<-extractWeights(Ropt.VaR)
WRVaR

WRCVaR<-extractWeights(Ropt.CVaR)
WRCVaR

WREVaR<-extractWeights(Ropt.EVaR)
WREVaR


#Extracting the portfolios annualised returns
ReturnVaR<-0.051639
ReturnCVaR<-0.04517441
ReturnEVaR<-0.0600882

#Extractting the portfolios annualised standard deviation
SDVaR<-0.1225138
SDCVaR<-0.1231325
SDEVaR<-0.1201621


#Computation of the beta of each asset in the portfolio at the end
period

RBetacac<-CAPM.beta(dcac, dmsci, Rf = dlbr)
RBetadax<-CAPM.beta(ddax, dmsci, Rf = dlbr)
RBetaftse<-CAPM.beta(dftse, dmsci, Rf = dlbr)
RBetadji<-CAPM.beta(ddji, dmsci, Rf = dlbr)
RBetanky<-CAPM.beta(dnky, dmsci, Rf = dlbr)
RBetamcx<-CAPM.beta(dmcx, dmsci, Rf = dlbr)
RBetamxx<-CAPM.beta(dmxx, dmsci, Rf = dlbr)
RBetabvsp<-CAPM.beta(dbvsp, dmsci, Rf = dlbr)
RBetabse<-CAPM.beta(dbse, dmsci, Rf = dlbr)
RBetaks<-CAPM.beta(dks, dmsci, Rf = dlbr)

RAssets.Betas<-cbind(RBetacac,RBetadax, RBetaftse, RBetadji,
RBetanky, RBetamcx, RBetamxx, RBetabvsp, RBetabse, RBetaks)
RAssets.Betas
```

```
# Computation of each portfolio's Beta:
Beta.RVaR<-WRVaR%*%t(RAssets.Betas)
Beta.RCVaR<-WRCVaR%*%t(RAssets.Betas)
Beta.REVaR<-WREVaR%*%t(RAssets.Betas)

Beta.RVaR
Beta.RCVaR
Beta.REVaR

MBeta.RVaR<-mean(as.numeric(Beta.RVaR))
MBeta.RCVaR<-mean(as.numeric(Beta.RCVaR))
MBeta.REVaR<-mean(as.numeric(Beta.REVaR))

MBeta.RVaR
MBeta.RCVaR
MBeta.REVaR

#Computation of the Sharpe Ratio for each portfolio
ShR.RVaR<-(ReturnVaR-mean(dlbr))/SDVaR
ShR.RVaR

ShR.RCVaR<-(ReturnCVaR-mean(dlbr))/SDCVaR
ShR.RCVaR

ShR.REVaR<-(ReturnEVaR-mean(dlbr))/SDEVaR
ShR.REVaR

#Computation of the Treynor Ratio for each portfolio
Tr.RVaR<-(ReturnVaR-mean(dlbr))/MBeta.RVaR
Tr.RVaR

Tr.RCVaR<-(ReturnCVaR-mean(dlbr))/MBeta.RCVaR
Tr.RCVaR

Tr.REVaR<-(ReturnEVaR-mean(dlbr))/MBeta.REVaR
Tr.REVaR


#Computation of the Jensen's Alpha for each portfolio
Rm=mean(dmsci)
Rm
JA.RVaR<-(ReturnVaR-mean(dlbr))-MBeta.RVaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.RVaR
JA.RCVaR<-(ReturnCVaR-mean(dlbr))-MBeta.RCVaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.RCVaR
JA.REVaR<-(ReturnEVaR-mean(dlbr))-MBeta.REVaR*(Rm-mean(dlbr))
JA.REVaR


ret.VaR <- summary(Ropt.VaR)$portfolio_returns
ret.VaR

ret.CVaR <- summary(Ropt.CVaR)$portfolio_returns
ret.CVaR
```

```
ret.EVaR <- summary(Ropt.EVaR)$portfolio_returns
ret.EVaR

#Plot rebalanced weights

chart.Weights(Ropt.VaR, main="VaR Portfolio Optimisation Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))

chart.Weights(Ropt.CVaR, main="CVaR Portfolio Optimisation
Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))

chart.Weights(Ropt.EVaR, main="EVaR Portfolio Optimisation
Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))


#Weights chart by category

#By Category (Developed vs Emerging Countries)
#VaR
WRVaR1<-as.matrix(extractWeights(Ropt.VaR))
WRVaR1
WRVaRDvp1<-WRVaR1[,1:5]
WRVaRDvp1
RVaRDevW1<-rowSums(WRVaRDvp1)
RVaRDevW1
WRVaREme1<-WRVaR1[,6:10]
RVaREmW1<-rowSums(WRVaREme1)
WRdeveme1<-as.matrix(cbind(RVaRDevW1,RVaREmW1))

t(WRdeveme1)

colnames(WRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(-0.15,-0.15)))
title("Var Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)




#CVaR
WRCVaR1<-as.matrix(extractWeights(Ropt.CVaR))
WRCVaR1
WRCVaRDvp1<-WRCVaR1[,1:5]
WRCVaRDvp1
RCVaRDevW1<-rowSums(WRCVaRDvp1)
```

```
RCVaRDevW1
WRCVaREme1<-WRCVaR1[,6:10]
RCVaREmW1<-rowSums(WRCVaREme1)
WRCVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(RCVaRDevW1,RCVaREmW1))

t(WRCVaRdeveme1)

colnames(WRCVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WRCVaRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(-0.10,-0.15)))
title("CVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)


#EVaR
WREVaR1<-as.matrix(extractWeights(Ropt.EVaR))
WREVaR1
WREVaRDvp1<-WREVaR1[,1:5]
WREVaRDvp1
REVaRDevW1<-rowSums(WREVaRDvp1)
REVaRDevW1
WREVaREme1<-WREVaR1[,6:10]
REVaREmW1<-rowSums(WREVaREme1)
WREVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(REVaRDevW1,REVaREmW1))

t(WREVaRdeveme1)

colnames(WREVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WREVaRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(-0.05,-0.15)))
title("EVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1, cex=1.5)



colnames(ret.VaR)<-"VaR"
colnames(ret.CVaR)<-"CVaR"
colnames(ret.EVaR)<-"EVaR"
colnames(dmsci)<-"Benchmark"


charts.PerformanceSummary(cbind(ret.VaR, ret.CVaR, ret.EVaR,
dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="ggplot2")

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.VaR, ret.CVaR, ret.EVaR,
dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="plot")
```

22 Portfolio Optimisation – Active Investing Strategy – MS Data

```
#Portfolio construction
MSdataPortf<-
cbind(MScac,MSdax,MSftse,MSdji,MSnky,MSmcx,MSmxx,MSbvsp,MSbse,MSks
)

MSportf<-portfolio.spec(assets = c("CAC40","DAX","FTSE
100","DJI","NIKKEI 225",
"MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE SENSEX","KOSPI 50"),
category_labels = c("Developed Economies","Developed Economies",
"Developed Economies","Developed Economies","Developed Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies","Emerging Economies",
"Emerging Economies","Emerging Economies"))
colnames(MSdataPortf)<-c("CAC 40","DAX","FTSE 100",
"DJI","NIKKEI 225","MOEX","INMEX","IBOVESPA","BSE
SENSEX","KOSPI50")

MSfunds <- colnames(MSdataPortf)

#Construction of initial portfolio with basic constraints.
init.MSportf <- portfolio.spec(assets=MSfunds)
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf, type='box',
min = 0, max=1 )
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="weight_sum",min_sum=0.99, max_sum=1.01)
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="long_only")
init.MSportf <- add.constraint(portfolio=init.MSportf,
type="full_investment")

#Creation of portfolios with VaR and CVaR as objectives
#Note: VaR with confidence level (1-?)=99% and the CVaR with the
corresponding confidence level (1-?)=97.5%
VaR.MSportf<-add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="VaR",arguments=list(p=0.99))
CVaR.MSportf <- add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="ES",arguments=list(p=0.975))

#Creation of portfolio with EVaR as an objective
#Note: EVaR with confidence level corresponding to that of the VaR
at 99% confidence level, i.e. ?=0.00145241.
EVaR.MSportf <- add.objective(portfolio=init.MSportf, type="risk",
name="EVaR",arguments=list(tau=0.00145241))

#Optimization of the portfolio using each risk measure as a risk
objective (minimisation):
MSRopt.VaR <- optimize.portfolio.rebalancing(MSdataPortf,
VaR.MSportf, optimize_method="pso",
rebalance_on="years", training_period = 240, rolling_window = 480,
trace=TRUE)

MSRopt.CVaR <- optimize.portfolio.rebalancing(MSdataPortf,
CVaR.MSportf, optimize_method="pso",
rebalance_on="years", training_period = 240, rolling_window = 480,
```

```
trace=TRUE)

MSRopt.EVaR <- optimize.portfolio.rebalancing(MSdataPortf,
EVaR.MSportf, momentFUN="EVaR.moments",
optimize_method = "pso",rebalance_on = 'years',
training_period = 240, rolling_window = 480, trace=TRUE)

#Displaying the results of the four optimisations:
MSRopt.VaR
extractObjectiveMeasures(MSRopt.VaR)
MSRopt.CVaR
extractObjectiveMeasures(MSRopt.CVaR)
MSRopt.EVaR
extractObjectiveMeasures(MSRopt.EVaR)

WMSRVaR<-extractWeights(MSRopt.VaR)
WMSRVaR

WMSRCVaR<-extractWeights(MSRopt.CVaR)
WMSRCVaR

WMSREVaR<-extractWeights(MSRopt.EVaR)
WMSREVaR


#Extracting the portfolios annualised returns
ReturnMSVaR<-0.07680973
ReturnMSCVaR<-0.07940777
ReturnMSEVaR<-0.07244808

#Extractting the portfolios annualised standard deviation
SDMSVaR<-0.142961
SDMSCVaR<-0.1488851
SDMSEVaR<-0.13819


#Plot rebalanced weights

chart.Weights(MSRopt.VaR, main="VaR Portfolio Optimisation
Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))


chart.Weights(MSRopt.CVaR, main="CVaR Portfolio Optimisation
Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))
```

```
chart.Weights(MSRopt.EVaR, main="EVaR Portfolio Optimisation
Weights",
c("cornflowerblue","lightskyblue1",
"darkslategray","lightskyblue3","lightskyblue4","darkturquoise",
"paleturquoise","steelblue","lightseagreen","paleturquoise4"))




#Weights chart by category

#By Category (Developed vs Emerging Countries)
#VaR
WMSRVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSRopt.VaR))
WMSRVaR1
WMSRVaRDvp1<-WMSRVaR1[,1:5]
WMSRVaRDvp1
MSRVaRDevW1<-rowSums(WMSRVaRDvp1)
MSRVaRDevW1
WMSRVaREme1<-WMSRVaR1[,6:10]
MSRVaREmW1<-rowSums(WMSRVaREme1)
WMSRdeveme1<-as.matrix(cbind(MSRVaRDevW1,MSRVaREmW1))

t(WMSRdeveme1)

colnames(WMSRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WMSRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(-0.15,-0.15)))
title("Var Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)


#CVaR
WMSRCVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSRopt.CVaR))
WMSRCVaR1
WMSRCVaRDvp1<-WMSRCVaR1[,1:5]
WMSRCVaRDvp1
MSRCVaRDevW1<-rowSums(WMSRCVaRDvp1)
RCVaRDevW1
WMSRCVaREme1<-WMSRCVaR1[,6:10]
MSRCVaREmW1<-rowSums(WMSRCVaREme1)
WMSRCVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(MSRCVaRDevW1,MSRCVaREmW1))

t(WMSRCVaRdeveme1)

colnames(WMSRCVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WMSRCVaRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(-0,-0.15)))
title("CVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1)
```

```
#EVaR
WMSREVaR1<-as.matrix(extractWeights(MSRopt.EVaR))
WMSREVaR1
WMSREVaRDvp1<-WMSREVaR1[,1:5]
WMSREVaRDvp1
MSREVaRDevW1<-rowSums(WMSREVaRDvp1)
MSREVaRDevW1
WMSREVaREme1<-WMSREVaR1[,6:10]
MSREVaREmW1<-rowSums(WMSREVaREme1)
WMSREVaRdeveme1<-as.matrix(cbind(MSREVaRDevW1,MSREVaREmW1))

t(WMSREVaRdeveme1)

colnames(WMSREVaRdeveme1) <- c("Developed Economies","Emerging
Economies")
barplot(t(WMSREVaRdeveme1), legend.text=TRUE,
col=c("lightskyblue1","paleturquoise3"),
args.legend=list(x="topright",bty = "n", inset=c(0,-0.15)))
title("EVar Optimisation Weight Distribution between
Developed and Emerging Economies", line=1, cex=1.5)


colnames(ret.MSVaR)<-"VaR"
colnames(ret.MSCVaR)<-"CVaR"
colnames(ret.MSEVaR)<-"EVaR"
colnames(dmsci)<-"Benchmark"


charts.PerformanceSummary(cbind(ret.MSVaR, ret.MSCVaR, ret.MSEVaR,
dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="ggplot2")

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.MSVaR, ret.MSCVaR, ret.MSEVaR,
dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="plot")
```

23 Comparision between original data and MS-EGARCH specification by risk measure

```
#VaR

colnames(ret.VaR)<-"VaR-Original Data"
colnames(ret.MSVaR)<-"VaR-MS-EGARCH Data"

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.VaR, ret.MSVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="ggplot2")

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.VaR, ret.MSVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
```

```
plot.engine="plot")


#CVaR

colnames(ret.CVaR)<-"CVaR-Original Data"
colnames(ret.MSCVaR)<-"CVaR-MS-EGARCH Data"

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.CVaR, ret.MSCVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="ggplot2")

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.CVaR, ret.MSCVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="plot")


#EVaR

colnames(ret.EVaR)<-"EVaR-Original Data"
colnames(ret.MSEVaR)<-"EVaR-MS-EGARCH Data"

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.EVaR, ret.MSEVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="ggplot2")

charts.PerformanceSummary(cbind(ret.EVaR, ret.MSEVaR, dmsci),
Rf=dlbr,main="Portfolio Optimisation Performances",
plot.engine="plot")
```