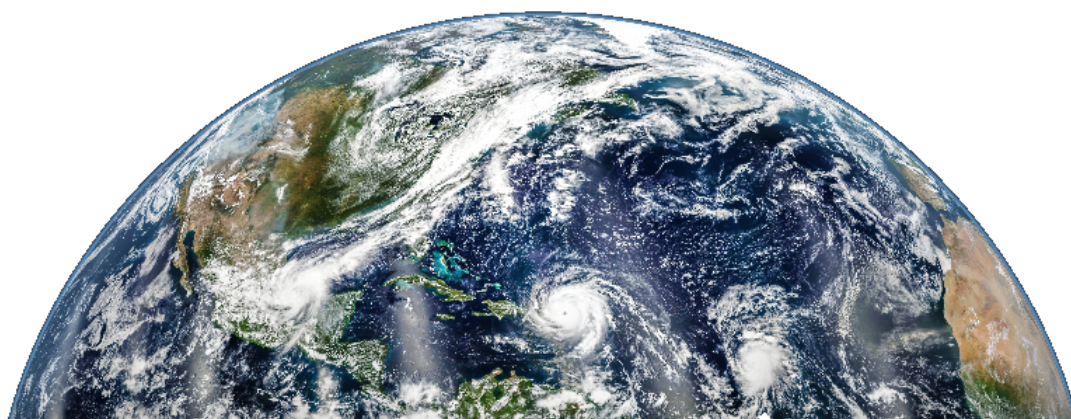




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Πτυχιακή εργασία

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑ



Ποντίκας Ηλίας

Επιβλέπων καθηγητής: Χατζηνικήτας Αγαπητός

Μέλη Τριμελούς
Επιτροπής:

Καθηγητής Καραχάλιος Νικόλαος
Καθηγητής Χουσιάδας Κωνσταντίνος
Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηνικήτας
Αγαπητός

Σάμος
Ιούνιος 2020

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ολοκλήρωσης των προπτυχιακών σπουδών μου στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου και αποτελεί μια εισαγωγή στη δυναμική μετεωρολογία.

Επιβλέπων ήταν ο καθηγητής Χατζηνικήτας Αγαπήτος για τον οποίο θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς μου ευχαριστίες για την καθοδήγηση και τις συμβουλές του για τη βελτίωση της πτυχιακής εργασίας χρησιμοποιώντας τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση λόγω της πρωτόγνωρης κατάστασης που προξένησε η πανδημία του κορονοϊού. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές που μέσω της διδασκαλίας τους απέκτησα τα εφόδια για να γράψω αυτή την πτυχιακή εργασία.

Τέλος, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου για την στήριξη της σε οποιαδήποτε απόφασή μου.

*Ἡ φύσις μηδὲν μήτε ατελὲς ποιεῖ μήτε μάτην
(Ἡ φύση δεν κάνει τίποτα ούτε ατελὲς ούτε μάταιο)*

Αριστοτέλης, 384-322 π.Χ
Αρχαῖος Ἑλληνας φιλόσοφος

Πρόλογος

Φτάνοντας στο πέρας των σπουδών μου στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου το ενδιαφέρον και η επαγγελματική ενασχόλησή μου με τη μετεωρολογία μου γέννησαν την επιθυμία να συντάξω αυτή την πτυχιακή εργασία με θέμα «Εισαγωγή στη Δυναμική Μετεωρολογία».

Η δυναμική μετεωρολογία μελετά τις κινήσεις του ατμοσφαιρικού αέρα της γης που σχετίζονται με τον καιρό και το κλίμα. Επίσης, εφαρμόζει με την προσέγγιση του συνεχούς μέσου, όπως αναφέρεται στο Κεφάλαιο 1, τρεις θεμελιώδεις αρχές διατήρησης. Αυτές είναι η διατήρηση της ορμής, η διατήρηση της μάζας και η διατήρηση της ενέργειας.

Στο κεφάλαιο 2 αναλύονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε μια αέρια μάζα. Η δύναμη της βαροβαθμίδας, της τριβής και της βαρύτητας είναι τέτοιες δυνάμεις και ονομάζονται πραγματικές. Ωστόσο, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εφαρμόζεται σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς ενώ οι ατμοσφαιρικές κινήσεις είναι λογικό να γίνονται με αναφορά τη γη η οποία αποτελεί ένα επιταχυνόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς. Για να μπορεί να εφαρμοστεί ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εισάγονται η φυγόκεντρος και η Coriolis δύναμη, οι οποίες ονομάζονται φαινόμενες. Στη συνέχεια, υποθέτοντας την απουσία των ατμοσφαιρικών κινήσεων, η ισορροπία της δύναμης της βαρύτητας και της κάθετης συνιστώσας της δύναμης βαροβαθμίδας δίνει την υδροστατική εξίσωση και αναλύεται η δομή της στατικής ατμόσφαιρας.

Στο κεφάλαιο 3 αποδεικνύεται η εξίσωση κίνησης μιας αέριας μάζας. Αρχικά, αποδεικνύεται μια σχέση μεταξύ της ολικής και της μερικής παραγωγού καθώς και μια σχέση μεταξύ της ολικής παραγωγού ενός διανύσματος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και της αντίστοιχης ολικής παραγωγού σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω εξάγεται η διανυσματική μορφή της εξίσωσης του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων και αναλύεται σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Στο κεφάλαιο 4, έχοντας αναλύσει τη διατήρηση της ορμής, αναλύουμε τη διατήρηση της μάζας και της ενέργειας. Αρχικά, αναπτύσσεται η εξίσωση συνέχειας, η οποία είναι η μαθηματική έκφραση της διατήρησης της μάζας, κατά Euler και κατά Lagrange. Έπειτα, αποδεικνύεται η εξίσωση της θερμοδυναμικής ενέργειας, η οποία είναι η μαθηματική έκφραση της διατήρησης της ενέργειας, χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής. Επιπλέον, παρατίθεται και η θερμοδυναμική της ξηρής ατμόσφαιρας.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 περιγράφονται οι θεμελιώδεις εφαρμογές των βασικών εξισώσεων. Η γεωστροφική προσέγγιση, ο γεωστροφικός άνεμος και οι προσεγγιστικές εξισώσεις πρόβλεψης είναι κάποιες από αυτές. Ακόμη, γίνεται η μετατροπή των βασικών εξισώσεων σε ισοβαρικές συντεταγμένες οι οποίες είναι πιο εύχρηστες. Έπειτα, περιγράφοντας τις φυσικές συντεταγμένες αναλύεται η γεωστροφική ροή, η αδρανειακή

ροή, η κυκλοστροφική ροή του ανέμου, προσεγγίζεται ο άνεμος βαθμίδας και εν τέλει αναλύεται ο θερμικός άνεμος.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	v
Κατάλογος Σχημάτων	viii
Κατάλογος Πινάκων	x
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγικές Έννοιες	1
1.2 Ανάλυση κλίμακας	3
1.3 Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες	4
2 Πραγματικές και Φαινόμενες Δυνάμεις	7
2.1 Η Δύναμη της Βαροβαθμίδας	7
2.2 Η Δύναμη της Τριβής	10
2.3 Η Δύναμη της Βαρύτητας	14
2.4 Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς και ‘φαινόμενες’ δυνάμεις	15
2.4.1 Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η φυγόκεντρος δύναμη	16
2.4.2 Ενεργός Βαρύτητα	17
2.4.3 Η δύναμη Coriolis	19
2.5 Η δομή της στατικής ατμόσφαιρας	23
2.5.1 Η υδροστατική εξίσωση	23
2.5.2 Η πίεση ως κάθετη συντεταγμένη	25
2.5.3 Μία γενικευμένη κάθετη συντεταγμένη	27
3 Η Εξίσωση Κίνησης	29
3.1 Ολική Παραγωγή	30
3.1.1 Ολική παραγωγή διανύσματος σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	31
3.2 Η διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	33
3.3 Οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες	35
3.4 Ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων κίνησης	38
3.4.1 Η υδροστατική προσέγγιση	39
4 Οι Εξισώσεις Συνέχειας και Θερμοδυναμικής	41
4.1 Η εξίσωση συνέχειας	41
4.1.1 Ανάπτυξη κατά Euler	41

4.1.2	Ανάπτυξη κατά Lagrange	43
4.1.3	Ανάλυση κλίμακας της εξίσωσης συνέχειας	43
4.2	Η εξίσωση της θερμοδυναμικής ενέργειας	44
4.3	Η θερμοδυναμική της ξηρής ατμόσφαιρας	48
4.3.1	Η δυνητική θερμοκρασία	48
4.3.2	Αδιαβατική θερμοβαθμίδα	49
4.3.3	Στατική ευστάθεια	50
5	Θεμελιώδεις Εφαρμογές των Βασικών Εξισώσεων	53
5.1	Η γεωστροφική προσέγγιση και ο γεωστροφικός άνεμος	53
5.2	Προσεγγιστικές εξισώσεις πρόβλεψης: Ο αριθμός Rossby	54
5.3	Οι βασικές εξισώσεις σε ισοβαρικές συντεταγμένες	55
5.3.1	Η εξίσωση της οριζόντιας κίνησης	55
5.3.2	Η εξίσωση συνέχειας	56
5.3.3	Η εξίσωση θερμοδυναμικής ενέργειας	57
5.4	Ισορροπημένη ροή	57
5.4.1	Φυσικές συντεταγμένες	58
5.4.2	Γεωστροφική ροή	59
5.4.3	Αδρανειακή ροή	60
5.4.4	Κυκλοστροφική ροή	61
5.4.5	Η προσέγγιση του ανέμου βαθμίδας	61
5.5	Ο θερμικός άνεμος	63
5.5.1	Βαροκλινικές και βαροτροπικές ατμόσφαιρες	66

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Σύμβολα σφαιρικών συντεταγμένων. R_T είναι η ακτίνα της γης, ϕ είναι το γεωγραφικό πλάτος, λ είναι το γεωγραφικό μήκος και $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στη διεύθυνση δύσης-ανατολής, στη διεύθυνση νότου-βορρά και στη κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα.	5
2.1	Δυνάμεις βαροβαθμίδας σχεδιασμένες (μπλε βέλη) στο χάρτη επιφανείας που είναι προϊόν του COSMO Model (πρόβλεψη μοντέλου που παρήχθηκε στις 26 Φεβρουαρίου 2020 και ώρα 12:00 UTC και έχει ισχύ για την Πέμπτη 27 Φεβρουαρίου 2020 και ώρα 06:00 UTC) (http://www.hnms.gr/emv/el/)	8
2.2	Η δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται σε ένα στοιχείο όγκου αέρα στη κατεύθυνση του x	9
2.3	Παράδειγμα διατμητικής τάσης κατά τη διεύθυνση του άξονα x σε κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα.	12
2.4	Η διατμητική τάση και στις τρεις διαστάσεις. Αντίθετες από τις εικονιζόμενες διατμητικές τάσεις ασκούνται στις αντίθετες πλευρές του στοιχειώδους κυβικού τμήματος.	14
2.5	Δύο σφαιρικές μάζες που τα κέντρα τους χωρίζονται από απόσταση $ \vec{r} $	14
2.6	Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας και έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής.	16
2.7	Οι συνιστώσες του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας της γης.	18
2.8	Η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας \vec{g} , η επιτάχυνση της πραγματικής βαρύτητας \vec{g}^* και η φυγόκεντρος δύναμη $\Omega^2 \vec{R}$ σε τόπο γεωγραφικού πλάτους ϕ . Τα \vec{k} και \vec{k}^* είναι τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στη γη (πεπλατυσμένο σφαιροειδές) και την τέλεια σφαίρα αντίστοιχα.	18
2.9	Κατά την κίνηση ενός τμήματος αέρα στο βόρειο ημισφαίριο με κατεύθυνση το βόρειο πόλο της γης η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής της μειώνεται κατά δR , γεγονός που συνεπάγεται αύξηση της ταχύτητας στη διεύθυνση της δύσης-ανατολής λόγω αρχής διατήρησης της στροφορμής.	20
2.10	Οι συνιστώσες της δύναμης Coriolis λόγω της κυκλικής κίνησης σε γεωγραφικό πλάτος ϕ	21
2.11	Ισορροπία δυνάμεων στην υδροστατική ισορροπία.	24
2.12	Η κλίση των επιφανειών πίεσης στο $x - z$ επίπεδο.	26
2.13	Μορφοποίηση της δύναμης βαροβαθμίδας σε s συντεταγμένες.	27

3.1	Μερική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος \vec{i} ως προς το λ (κατεύθυνση παραλλήλου).	33
3.2	Ανάλυση του διανύσματος $\delta\vec{i}$ του σχήματος (3.1) σε δύο συνιστώσες σε γεωγραφικό πλάτος ϕ : η μία έχει κατεύθυνση το βόρειο πόλο και η άλλη είναι κάθετη στην επιφάνεια της γης με φορά προς το κέντρο της.	33
3.3	Το διάνυσμα \vec{j} εξαρτάται από το μήκος.	36
3.4	Το διάνυσμα \vec{j} εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος.	36
4.1	Η ροή της μάζας σε ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου κατά Euler κατά την κίνηση αέριας μάζας και στις τρεις διαστάσεις.	41
4.2	Η μεταβολή στον όγκο ελέγχου (γκρι χρώμα) ως αποτέλεσμα της κίνησης του ρευστού παράλληλα με τον άξονα x .	43
4.3	Ο ρυθμός παραγωγής έργου στο στοιχείο ρευστού λόγω της δύναμης πίεσης στη x διεύθυνση.	46
5.1	Ρυθμός μεταβολής του μοναδιαίου διανύσματος \vec{T} ακολουθώντας την κίνηση σε ένα φυσικό σύστημα συντεταγμένων.	58
5.2	Η ισορροπία των δυνάμεων και το διάνυσμα της ταχύτητας στην επιφάνεια της γης (επιφανειακός άνεμος (β)) και πάνω από το οριακό στρώμα (γεωστροφικός άνεμος (α)).	60
5.3	Ισορροπία των δυνάμεων στην κυκλοστροφική ροή.	61
5.4	Η ισορροπία των δυνάμεων στο βόρειο ημισφαίριο για τους τέσσερις τύπους ροής βαθμίδας: (α) κανονικό χαμηλό, (β) κανονικό υψηλό, (γ) ανώμαλο χαμηλό, (δ) ανώμαλο υψηλό.	63
5.5	Η σχέση μεταξύ της κάθετης διάτμησης του γεωστροφικού ανέμου και των οριζόντιων βαθμίδων πάχους ατμοσφαιρικού στρώματος. Το $\delta\rho$ είναι αρνητικό.	64
5.6	Η σχέση μεταξύ της στρέψης του διανύσματος του γεωστροφικού ανέμου και της μεταφοράς θερμοκρασίας: (α) αντιστροφή του ανέμου με το ύψος, (β) στροφή του ανέμου με το ύψος.	66

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Βασικές Μονάδες Μέτρησης του SI	2
1.2	Παραγόμενες Μονάδες Μέτρησης του SI	2
1.3	Συμβολισμοί και μονάδες μέτρησης βασικών φυσικών ποσοτήτων	2
1.4	Κλίμακες των ατμοσφαιρικών κινήσεων	4
3.1	Χαρακτηριστικές κλίμακες φυσικών ποσοτήτων σε συνοπτικά συστήματα μεσαίου πλάτους	38
3.2	Ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων οριζόντιας κίνησης	39
3.3	Ανάλυση κλίμακας της εξίσωσης κάθετης κίνησης	40
4.1	Κριτήριο στατικής ευστάθειας για το ξηρό αέρα	51
5.1	Κατηγοριοποίηση των ριζών της εξίσωσης του ανέμου βαθμίδας στο βόρειο ημισφαίριο.	62

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Ένας από τους βασικότερους κλάδους της μετεωρολογίας είναι η **δυναμική μετεωρολογία** όπου μελετά τις κινήσεις του ατμοσφαιρικού αέρα που σχετίζονται με τον καιρό και το κλίμα. Αυτές οι κινήσεις επηρεάζουν την ανθρώπινη δραστηριότητα διαμέσου του ανέμου, της θερμοκρασίας, των νεφώσεων και των υδάτινων κατακρημνισμάτων. Το σύνολο, σχεδόν, των μετεωρολογικών φαινομένων και των μεταβολών καταστάσεων λαμβάνουν χώρα στην τροπόσφαιρα, η οποία είναι το τμήμα της ατμόσφαιρας που έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια της γης. Η τροπόσφαιρα αποτελεί το κύριο μέρος της μάζας του αέρα και περιέχει το σύνολο του ατμοσφαιρικού νερού και στις τρεις μορφές του. Επίσης, παρουσιάζει πτώση της θερμοκρασίας καθ' ύψος και εκτείνεται κάθετα περίπου 10 χιλιόμετρα κατά μέσο όρο από την επιφάνεια της γης, όπου συναντάται η τροπόπαυση¹. Μετά την τροπόπαυση ακολουθεί η στρατόσφαιρα, η οποία παρουσιάζει αύξηση της θερμοκρασίας καθ' ύψος λόγω της θέρμανσης του αέρα από την απορρόφηση της υπεριώδους ακτινοβολίας από το όζον. Τα περισσότερα θέματα που θα αναλυθούν σε αυτή την εργασία αφορούν τη δυναμική στην τροπόσφαιρα και στρατόσφαιρα.

Πρωτού, όμως, εξερευνήσουμε το τοπίο της δυναμικής μετεωρολογίας, κρίνεται αναγκαίο να εκθέσουμε ορισμένες βασικές έννοιες που θα αποτελέσουν οδηγό για την συνέχεια. Αρχικά, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι νόμοι που διέπουν τις ατμοσφαιρικές κινήσεις πρέπει να είναι **διαστατικά ομοιογενείς**. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να έχουν μια εσωτερική συνέπεια που δεν θα επιτρέπει στους όρους των εξισώσεων να συνδέονται με οποιοδήποτε τρόπο. Για να το θέσουμε απλά το ζήτημα, τα μέλα δεν γίνεται να είναι ίσα με τα πορτοκάλια. Όλα τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με τις κινήσεις της ατμόσφαιρας έχουν διαστάσεις που μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει τεσσάρων θεμελιωδών μεγεθών: το μήκος L , ο χρόνος T , η μάζα M και η θερμοδυναμική θερμοκρασία Θ .

Έστω $q_1, q_2, \dots, q_m, (m > 4)$ τα εν λόγω φυσικά μεγέθη, τότε αν συμβολίσουμε με $[q_i]$ τις διαστάσεις τους θα έχουμε:

$$[q_i] = L^{a_i} T^{b_i} M^{c_i} \Theta^{d_i}$$

¹Ως τροπόπαυση χαρακτηρίζεται το ανώτατο διαχωριστικό σύνορο όπου λήγει η τροπόσφαιρα και πριν ξεκινήσει η στρατόσφαιρα.

για κάποια κατάλληλη επιλογή των δεικτών ai, bi, ci, di . Για να μπορούμε, λοιπόν, να μετρήσουμε και να συγκρίνουμε τους όρους των νόμων κίνησης μιας αέριας μάζας πρέπει να ορίσουμε μονάδες μέτρησης για αυτά τα τέσσερα θεμελιώδη μεγέθη. Αυτές θα είναι από το διεθνές σύστημα μονάδων SI, το οποίο θα χρησιμοποιείται αποκλειστικά από εδώ και πέρα, και θα τις ονομάσουμε βασικές μονάδες μέτρησης του SI (Πίνακας 1.1). Τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη θα έχουν μονάδες μέτρησης που θα παράγονται από τις βασικές μονάδες μέτρησης. Στη δυναμική μετεωρολογία αυτές οι παραγόμενες μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται συνήθως φαίνονται στον πίνακα 1.2.

Πίνακας 1.1: Βασικές Μονάδες Μέτρησης του SI

Μέγεθος	Όνομα	Σύμβολο
Μήκος	Μέτρο	m
Μάζα	Κιλό	Kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	s
Θερμοκρασία	Κέλβιν	K

Πίνακας 1.2: Παραγόμενες Μονάδες Μέτρησης του SI

Μέγεθος	Όνομα	Σύμβολο
Συχνότητα	Hertz	Hz (s^{-1})
Δύναμη	Newton	N ($Kg \cdot m \cdot s^{-2}$)
Πίεση	Pascal	Pa ($N \cdot m^{-2}$)
Ενέργεια	Joule	J ($N \cdot m$)
Ισχύς	Watt	W ($J \cdot s^{-1}$)

Επίσης, ο παρακάτω πίνακας 1.3 περιέχει συμβολισμούς και μονάδες μέτρησης για κάποιες βασικές φυσικές ποσότητες που χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία. Να σημειώσουμε ότι το διάνυσμα τριών διαστάσεων της ταχύτητας \vec{U} σχετίζεται με το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας, $\vec{U} = (\vec{V}, w)$ και $\vec{U} = (\vec{V}, \omega)$ στις κάθετες συντεταγμένες ύψους και πίεσης αντίστοιχα. Για να αναφερθούμε στη διεύθυνση δύσης-ανατολής χρησιμοποιούμε τον όρο ‘κατά ζώνες’ και για να αναφερθούμε στη διεύθυνση βορρά-νότου χρησιμοποιούμε τον όρο ‘μεσημβρινό’.

Πίνακας 1.3: Συμβολισμοί και μονάδες μέτρησης βασικών φυσικών ποσοτήτων

Φυσική ποσότητα	Σύμβολο	Μονάδες
Τριών διαστάσεων διάνυσμα της ταχύτητας	\vec{U}	$m \cdot s^{-1}$
Διάνυσμα οριζόντιας ταχύτητας	\vec{V}	$m \cdot s^{-1}$
Ανατολική συνιστώσα της ταχύτητας	u	$m \cdot s^{-1}$
Βόρεια συνιστώσα της ταχύτητας	v	$m \cdot s^{-1}$
κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας	$w(\omega)$	$m \cdot s^{-1}(Pa \cdot s^{-1})$
Πίεση	p	$N \cdot m^2$
Πυκνότητα	ρ	$kg \cdot m^{-3}$
Θερμοκρασία	T	$K(ή \text{ } ^\circ C)$

Η δυναμική μετεωρολογία εφαρμόζει τους νόμους διατήρησης της κλασικής φυσικής για την ορμή (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα), τη μάζα και την ενέργεια (πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής) στην ατμόσφαιρα. Μία σημαντική πτυχή αυτής της εφαρμογής περιλαμβάνει την **προσέγγιση του συνεχούς μέσου** όπου οι ιδιότητες των διακριτών μορίων αγνοούνται για χάρη μιας συνεχής αναπαράστασης που εμπεριέχει μέσες τιμές μεγάλου αριθμού μορίων. Αυτή η προσέγγιση είναι συχνή σε όλα τα ρευστά, υγρά και αέρια και έτσι οι ατμοσφαιρικές ιδιότητες (όπως η πίεση, η πυκνότητα, η θερμοκρασία) αναπαριστάνονται με ομαλές συναρτήσεις που λαμβάνουν μοναδικές τιμές για τις ανεξάρτητες μεταβλητές του χώρου και του χρόνου. Ένα 'σημείο' εντός του συνεχούς θεωρείται ως στοιχείο όγκου το οποίο είναι πολύ μικρό συγκριτικά με τον όγκο της ατμόσφαιρας εν τούτοις περιέχει μεγάλο αριθμό μορίων. Οι εκφράσεις στοιχειώδες τμήμα αέρα ή στοιχείο όγκου αέρα που θα χρησιμοποιούνται παρακάτω εκφράζουν αυτό το 'σημείο'. Στα κεφάλαια 3 και 4 οι βασικοί νόμοι διατήρησης εφαρμόζονται σε στοιχείο όγκου αέρα που υπόκειται σε προσέγγιση συνεχούς έτσι ώστε να εξαχθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις. Ο σκοπός της εργασίας είναι να παρέχει μια ανάλυση των δυνάμεων που επηρεάζουν τις ατμοσφαιρικές κινήσεις.

1.2 Ανάλυση κλίμακας

Η ανάλυση κλίμακας ή κλιμάκωση αποτελεί μία τεχνική για να υπολογίσουμε το μέγεθος διάφορων όρων στις ισχύουσες εξισώσεις για ένα συγκεκριμένο είδος κίνησης. Στην ανάλυση κλίμακας προσδιορίζονται οι τυπικές αναμενόμενες τιμές των ακόλουθων ποσοτήτων:

1. τα μεγέθη των μεταβλητών που εκφράζουν τις φυσικές ποσότητες
2. το εύρος των διακυμάνσεων αυτών των μεταβλητών
3. οι χαρακτηριστικές κλίμακες του μήκους, του πλάτους και του χρόνου υπό τις οποίες συμβαίνουν οι διακυμάνσεις

Αυτές οι τυπικές τιμές χρησιμοποιούνται για να συγκρίνουμε τα μεγέθη των διάφορων όρων στις ισχύουσες εξισώσεις.

Παράδειγμα. Σε έναν τυπικό συνοπτικό κυκλώνα μεσαίου πλάτους η πίεση επιφανείας μπορεί να διακυμαίνεται κατά 10 hpa σε μία οριζόντια απόσταση των 1000 km. Αν συμβολίσουμε το εύρος αυτής της διακύμανσης με $\delta p = 10 \text{ hpa}$, τις οριζόντιες συντεταγμένες με x και y και την οριζόντια κλίμακα με $L = 1000 \text{ km}$ τότε το μέγεθος της οριζόντιας βαθμίδας της πίεσης μπορεί να υπολογιστεί διαιρώντας το δp με το L και έχουμε:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) \sim \frac{\delta p}{L} = 10 \text{ hpa} / 10^3 \text{ km}$$

Διακυμάνσεις πίεσης έχουμε και σε άλλα συστήματα πολύ διαφορετικής κλίμακας, όπως είναι οι τυφώνες και οι ανεμοστρόβιλοι, όπου η οριζόντια βαθμίδα πίεσης είναι αρκετά μεγάλη. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι οι οριζόντιες βαθμίδες πίεσης παίζουν σημαντικό ρόλο στη δυναμική μελέτη ενός φαινομένου μετεωρολογικού ενδιαφέροντος.

Γενικότερα, όλοι οι όροι των εξισώσεων είναι πλήρως εξαρτημένοι από την οριζόντια κλίμακα της κίνησης. Για παράδειγμα, κινήσεις με οριζόντια κλίμακα ελάχιστα χιλιόμετρα συνήθως έχουν μικρή κλίμακα χρόνου και άρα οι όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις λόγω της περιστροφής της γης θεωρούνται αμελητέοι, ενώ για μεγάλες οριζόντιες κλίμακες αυτοί οι όροι γίνονται πολύ σημαντικοί. Έτσι, ο χαρακτήρας των ατμοσφαιρικών κινήσεων είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την οριζόντια κλίμακα, γεγονός που μας οδηγεί να κατηγοριοποιήσουμε τα συστήματα κίνησης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω πίνακα 1.4.

Πίνακας 1.4: Κλίμακες των ατμοσφαιρικών κινήσεων

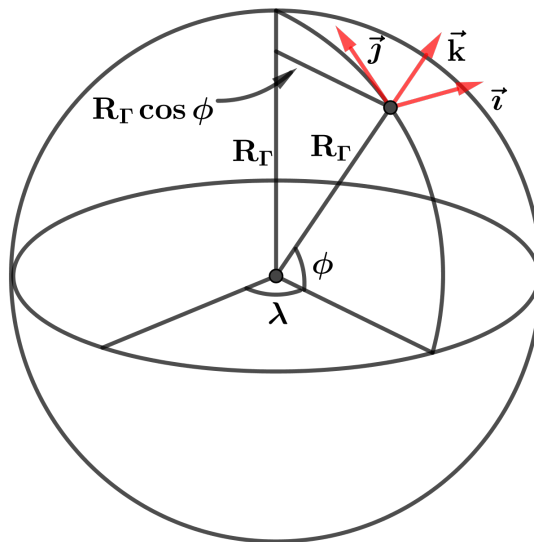
Όνομα Κλίμακας	Διαστάσεις Κλίμακας	Παραδείγματα
Μοριακή κλίμακα	$\ll 2 \text{ mm}$	Μοριακή διάχυση, Μοριακό ιξώδες
Μικροκλίμακα	$2 \text{ mm} - 2 \text{ km}$	Δίνες, σύννεφα Cumulus
Μεσοκλίμακα	$2 - 2000 \text{ km}$	Κύματα βαρύτητας, καταιγίδες, ανεμοστρόβιλοι, τοπικοί άνεμοι, ατμοσφαιρική ρύπανση στις πόλεις
Συνοπτική κλίμακα	$500 - 10.000 \text{ km}$	υψηλά και χαμηλά συστήματα πίεσης, μέτωπα, τροπικές καταιγίδες, τυφώνες, τρύπα του όζοντος
Πλανητική κλίμακα	$> 10.000 \text{ km}$	πλανητικά συστήματα ανέμων, κύματα (πλανητικά) Rossby, παγκόσμια θέρμανση

1.3 Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες

Στη μετεωρολογία πολλά ατμοσφαιρικά μοντέλα χρησιμοποιούν καρτεσιανές ή σφαιρικές συντεταγμένες. Οι καρτεσιανές (ορθογώνιες) συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της ροής του αέρα, για παράδειγμα στις πόλεις, στα σύννεφα, στις καταιγίδες. Για μικρές αποστάσεις ($< 500 \text{ km}$) η καμπυλότητα της γης είναι σχετικά μικρή και η επιφάνεια συχνά χωρίζεται σε ορθογώνια για μοντελοποίηση. Στις μεγάλες αποστάσεις η καμπυλότητα εμποδίζει τον ακριβή διαχωρισμό της επιφάνειας σε ένα συνεχές σύνολο ορθογωνίων. Παρ' όλα αυτά, σε τέτοιες αποστάσεις είναι δυνατόν η γη να περιβάλλεται από ένα σύνολο ορθογωνίων πλεγμάτων, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετική αρχή, μήκος και πλάτος και όπου κάθε πλέγμα επικαλύπτει μερικώς άλλα πλέγματα. Αυτή είναι η ιδέα πίσω από το διεθνές εγκάρσιο σύστημα συντεταγμένων Mercator (UTM), το οποίο είναι ένα είδος καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Έτσι, στο σύστημα συντεταγμένων UTM ξεχωριστά αλληλεπικαλυπτόμενα πλέγματα ορθογωνίων τοποθετούνται πάνω από τον πλανήτη.

Για προσομοιώσεις μοντέλων σε μικρές και μεγάλες κλίμακες η χρήση σφαιρικών συντεταγμένων είναι πιο φυσική από τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων. Το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων διαιρεί τη γη σε μήκη (μεσημβρινούς), τα οποία εκτείνονται από το νότιο μέχρι το βόρειο πόλο και γεωγραφικά πλάτη (παράλληλοι) που είναι παράλληλα τόξα που εκτείνονται δυτικά και ανατολικά σε όλη την υδρόγειο.

Ο πρώτος μεσημβρινός, ο οποίος διέρχεται από το Greenwich του Ηνωμένου Βασιλείου έχει οριστεί ότι έχει μήκος 0° . Οι μεσημβρινοί εκτείνονται προς τα δυτικά μέχρι το γεωγραφικό μήκος -180° ($180W$) και προς τα ανατολικά μέχρι το γεωγραφικό μήκος $+180^\circ$ ($180E$). Ο ισημερινός ορίζεται ότι έχει γεωγραφικό πλάτος 0° . Οι παράλληλοι εκτείνονται από γεωγραφικό πλάτος -90° ($90S$) έως γεωγραφικό πλάτος $+90^\circ$ ($90N$). Στο πλέγμα των σφαιρικών συντεταγμένων η απόσταση των μεσημβρινών κατά ζώνες είναι μέγιστη στον ισημερινό και συγκλίνει στο 0 στους δύο πόλους. Πιο συγκεκριμένα, όλοι οι μεσημβρινοί καταλήγουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο στους πόλους. Έτσι οι πόλοι θεωρούνται σημειακοί. Η παρουσία αυτής της ιδιαιτερότητας δημιουργεί ένα πρόβλημα οριακής κατάστασης όταν το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για παγκόσμια ατμοσφαιρική ή ωκεανική (στην περίπτωση του βόρειου πόλου εφόσον δεν υπάρχει ωκεανός στο νότιο πόλο) προσομοίωση. Το κύριο πλεονέκτημα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων είναι ότι λαμβάνει υπόψη την καμπυλότητα της γης δεδομένου ότι η γη δεν απέχει πολύ από το σχήμα της σφαίρας.



Σχήμα 1.1: Σύμβολα σφαιρικών συντεταγμένων. R_Γ είναι η ακτίνα της γης, ϕ είναι το γεωγραφικό πλάτος, λ είναι το γεωγραφικό μήκος και \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} είναι τα μοναδιαία διανύσματα στη διεύθυνση δύσης-ανατολής, στη διεύθυνση νότου-βορρά και στη κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικές και Φαινόμενες Δυνάμεις

Όλες οι ατμοσφαιρικές κινήσεις διέπονται από βασικούς νόμους της ρευστομηχανικής και θερμοδυναμικής, οι οποίοι είναι: οι νόμοι κίνησης του Νεύτωνα, οι νόμοι διατήρησης της μάζας, της ορμής, της στροφορμής και της ενέργειας. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, ο οποίος εφαρμόζεται σε αδρανειακά συστήματα, αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με το άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό. Από άποψη μετεωρολογικού ενδιαφέροντος, οι δυνάμεις που ασκούνται σε μία αέρια μάζα κατά την κίνησή της είναι η δύναμη βαροβαθμίδας, η δύναμη τριβής και η δύναμη βαρύτητας. Αυτές οι δυνάμεις αναφέρονται ως **πραγματικές δυνάμεις**. Οι κινήσεις των αέριων μαζών, όμως, γίνονται με αναφορά τη γη, η οποία λόγω της περιστροφής της αποτελεί ένα επιταχυνόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί, πέρα των προαναφερόμενων πραγματικών δυνάμεων, στην εισαγωγή αδρανειακών δυνάμεων. Αυτές είναι οι λεγόμενες **φαινόμενες δυνάμεις** και είναι η *φυγόκεντρος* και η *Coriolis δύναμη*.

2.1 Η Δύναμη της Βαροβαθμίδας

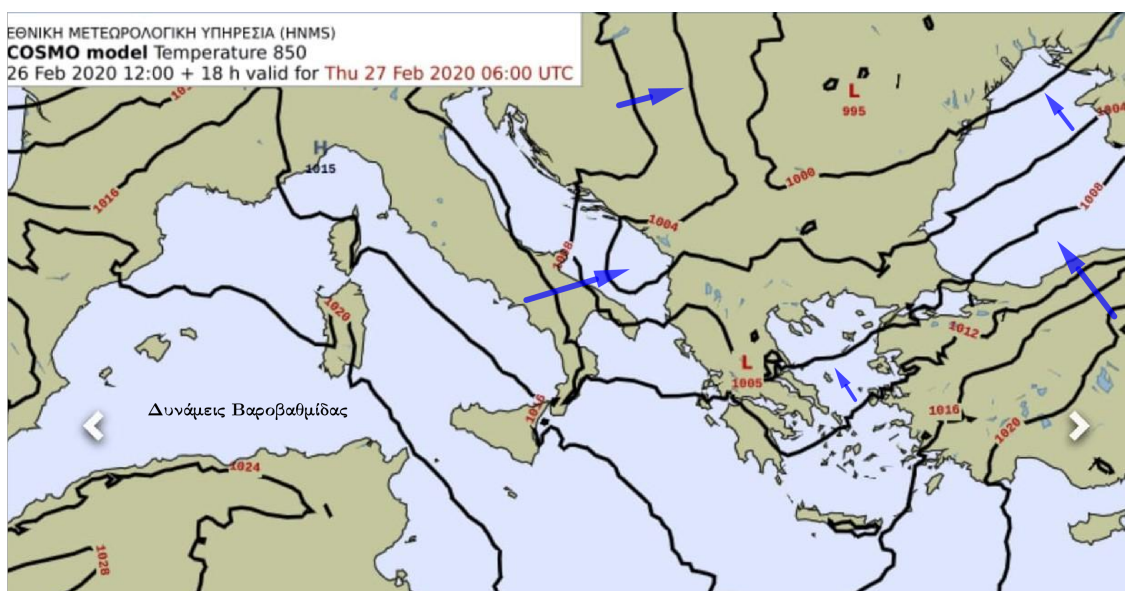
Ορισμός 1. Πίεση είναι η δύναμη που εφαρμόζεται κάθετα σε μία επιφάνεια ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας αυτής.

Έτσι, η πίεση που ασκείται σε μία επιφάνεια στην ατμόσφαιρα είναι το μέτρο της κάθετης συνιστώσας των δυνάμεων που οφείλονται στις κρούσεις των μορίων του περιβάλλοντος πάνω στην επιφάνεια δια το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Σε ένα μίγμα αερίων, όπως είναι η ατμόσφαιρα, η πίεση σε ένα σημείο ασκείται προς όλες τις κατευθύνσεις λόγω της τυχαίας μοριακής κίνησης. Ωστόσο, το μέτρο της δύναμης λόγω πίεσης σε μία επιφάνεια είναι ανεξάρτητο από το προσανατολισμό της επιφάνειας ενώ η διεύθυνση της δύναμης μεταβάλλεται για κάθε αλλαγή προσανατολισμού της επιφάνειας. Στους μετεωρολογικούς χάρτες οι περιοχές της γης που έχουν την ίδια ατμοσφαιρική πίεση ενώνονται με καμπύλες γραμμές οι οποίες ονομάζονται **ισοβαρείς**. Όταν, όμως, δύο περιοχές της γης έχουν διαφορετική ατμοσφαιρική πίεση, τότε εμφανίζεται βαροβαθμίδα.

Ορισμός 2. *Βαροβαθμίδα ονομάζεται η μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης σε διεύθυνση κάθετη επί των ισοβαρών στη μονάδα της γεωγραφικής απόστασης.*

Η δύναμη, λοιπόν, που οφείλεται στη μεταβολή της πίεσης στο χώρο ονομάζεται **δύναμη βαροβαθμίδας**. Στην ατμόσφαιρα η δύναμη αυτή είναι υπεύθυνη για την έναρξη της κίνησης μίας αέριας μάζας. Επίσης, η δύναμη βαροβαθμίδας επιδρά στις αέριες μάζες για να τις μετακινήσει από περιοχές υψηλών σε περιοχές χαμηλών πιέσεων. Συνεπώς, η δύναμη βαροβαθμίδας έχει διεύθυνση κάθετη στις ισοβαρείς, φορά από τις υψηλότερες στις χαμηλότερες πιέσεις και μέτρο ανάλογο της απόστασης των ισοβαρών (Σχήμα 2.1).

Παράδειγμα. *Εάν σε ένα αέριο τοποθετήσουμε ένα τοίχο με την πίεση στη μία πλευρά του να είναι διαφορετική από την πίεση στην άλλη, τότε θα εμφανιστεί μία δύναμη που θα επιταχύνει τον τοίχο προς την πλευρά με την χαμηλότερη πίεση. Αυτή η δύναμη που σχετίζεται με τη διαφορά πιέσεων είναι η ουσία της δύναμης βαροβαθμίδας.*



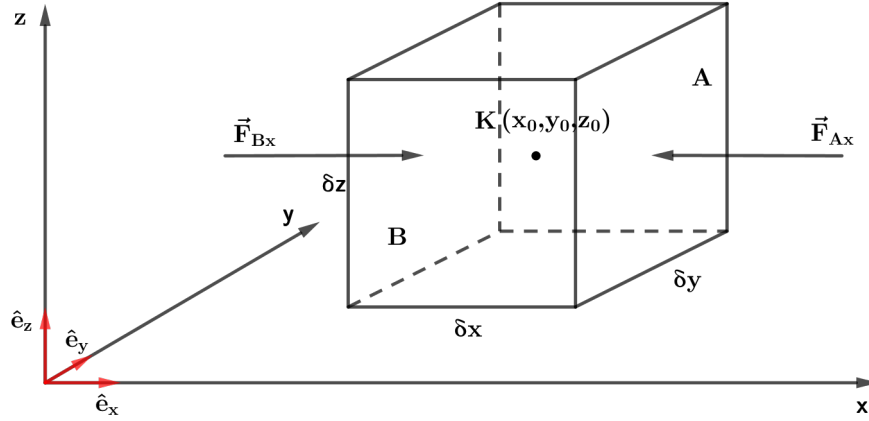
Σχήμα 2.1: Δυνάμεις βαροβαθμίδας σχεδιασμένες (μπλε βέλη) στο χάρτη επιφανείας που είναι προϊόν του COSMO Model (πρόβλεψη μοντέλου που παρήχθηκε στις 26 Φεβρουαρίου 2020 και ώρα 12:00 UTC και έχει ισχύ για την Πέμπτη 27 Φεβρουαρίου 2020 και ώρα 06:00 UTC) (<http://www.hnms.gr/emv/el/>)

Αμέσως παρακάτω θα αποδειχθεί η μαθηματική έκφραση για την δύναμη βαροβαθμίδας σύμφωνα με τη μέθοδο του Holton.

Θεωρούμε ένα στοιχείο όγκου αέρα $dV = dx dy dz$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0, z_0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.2. Εξαιτίας της τυχαίας μοριακής κίνησης η ορμή του περιβάλλοντος αέρα συνεχώς κατανέμεται στα τοιχώματα του στοιχειώδους όγκου αέρα. Αυτή η μεταφορά ορμής ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφάνειας είναι ακριβώς η πίεση που ασκείται στα τοιχώματα του στοιχειώδους όγκου αέρα.

Το μέτρο της πίεσης που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής, $p = p(x)$. Έτσι, αν το μέτρο της πίεσης κατά τη

διεύθυνση του άξονα x στο κέντρο K είναι $p_0 = p(x_0)$, τότε το μέτρο της πίεσης που ασκείται στο τοίχο B κατά τη διεύθυνση του άξονα x θα είναι $p(x_0 + \delta x/2)$ και θα μπορεί να εκφραστεί με ανάπτυγμα Taylor ως εξής:



Σχήμα 2.2: Η δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται σε ένα στοιχείο όγκου αέρα στη κατεύθυνση του x .

$$\begin{aligned}
 p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right) &= p(x_0) + \frac{1}{1!} \left(x_0 + \frac{\delta x}{2} - x_0\right) \frac{\partial p}{\partial x}(x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(x_0 + \frac{\delta x}{2} - x_0\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0) + \dots \\
 \Rightarrow p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right) &= p(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0) + \dots \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης του δύο, από τον ορισμό 1 η δύναμη λόγω πίεσης που ασκείται στον τοίχο A κατά τη διεύθυνση του άξονα x είναι:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{Ax} &= -p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z \hat{e}_x = \left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}(x_0)\right) \delta y \delta z \hat{e}_x \\
 \Rightarrow \vec{F}_{Ax} &= -\left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \delta y \delta z \hat{e}_x
 \end{aligned}$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η δύναμη λόγω πίεσης που ασκείται στο τοίχο B είναι:

$$\vec{F}_{Bx} = +\left(p_0 - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \delta y \delta z \hat{e}_x$$

Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη που επιδρά πάνω στο στοιχειώδες όγκο αέρα κατά τον άξονα x είναι:

$$\begin{aligned}\vec{F}_x &= \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Bx} = - \left(p_0 + \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x + \left(p_0 - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta y \delta z \hat{e}_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{F}_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \hat{e}_x\end{aligned}$$

Όμως, από τον τύπο της πυκνότητας έχουμε ότι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

Άρα, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\vec{F}_x}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x$$

Κάνοντας την αντίστοιχη εργασία για την δύναμη βαροβαθμίδας στους άξονες y και z εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\vec{F}_y}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y \quad \text{και} \quad \frac{\vec{F}_z}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z$$

Οπότε η συνολική δύναμη βαροβαθμίδας που ασκείται ανά μονάδα μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.2)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι:

- Η δύναμη βαροβαθμίδας είναι αντίθετη με το διάνυσμα της βαθμίδας της πίεσης, δηλαδή κατευθύνεται από τις υψηλότερες στις χαμηλότερες πιέσεις.
- Όσο ισχυρότερη είναι η βαθμίδα πίεσης τόσο ισχυρότερη είναι και η δύναμη βαροβαθμίδας.
- Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι:

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{F}_p}{m}$$

2.2 Η Δύναμη της Τριβής

Κάθε πραγματικό ρευστό υπόκειται σε εσωτερική τριβή, που ονομάζεται **ιξώδες**, η οποία προβάλλει αντίσταση κατά τη ροή του και εμφανίζεται όταν η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται χωρικά. Όσον αφορά στον ατμοσφαιρικό αέρα, οι τυχαίες μοριακές κρούσεις επιτυγχάνουν μεταφορά ορμής από μόρια που βρίσκονται σε ταχύτερα κινούμενα στοιχεία όγκου αέρα σε μόρια που βρίσκονται σε κοντινά και βραδύτερα κινούμενα στοιχεία όγκου αέρα. Αυτή η ανταλλαγή ορμής μπορεί να εκφραστεί και ως **δύναμη ιξώδους** \vec{F} . Επίσης, η αύξηση της θερμοκρασίας έπεται την αύξηση του

ιζώδους του αέρα καθώς οι υψηλές θερμοκρασίες αυξάνουν την κινητική ενέργεια των μορίων και άρα αυξάνεται η πιθανότητα κρούσης και μεταφορά ορμής από ένα μόριο του αέρα σε ένα άλλο.

Στη περίπτωση που τα μόρια του αέρα συγκρούονται με μία στάσιμη επιφάνεια μεταδίδουν ορμή σε αυτή με αποτέλεσμα την συνολική απώλεια ενέργειας των μορίων αυτών. Με αυτό τον τρόπο έχουμε διάχυση της κινητικής ενέργειας των μορίων του αέρα στο έδαφος λόγω του ιζώδους, η οποία συνεπάγεται μηδενική ταχύτητα ανέμου στο έδαφος. Πάνω από αυτό έχουμε λογαριθμική αύξηση της ταχύτητας του ανέμου. Στη περίπτωση απουσίας του ιζώδους η ταχύτητα του ανέμου αμέσως πάνω από το έδαφος θα ήταν μεγάλη.

Το ιζώδες του αέρα μπορεί να ποσοτικοποιηθεί από το **συντελεστή δυναμικού ιζώδους** μ . Πιο συγκεκριμένα, το 1893 ο Αυστραλός φυσικός, Sutherland, εξήγαγε μια σχέση μεταξύ του δυναμικού ιζώδους μ και της απόλυτης θερμοκρασίας T ενός ιδανικού αερίου. Αυτή η σχέση, που συχνά αναφέρεται και ως νόμος του Sutherland, βασίζεται στην κινητική θεωρία των ιδανικών αερίων και δίνει ακριβή αποτελέσματα με αμελητέο σφάλμα για μεγάλο εύρος θερμοκρασιών. Η μαθηματική έκφραση είναι η εξής:

$$\mu = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S}, \quad (2.3)$$

όπου T_{ref} είναι μια θερμοκρασία αναφοράς, μ_{ref} είναι το ιζώδες για την θερμοκρασία T_{ref} και S είναι η θερμοκρασία Sutherland.

Συχνά χρησιμοποιούμε, επίσης, και μια άλλη σχετική παράμετρο, το **κινηματικό ιζώδες** του αέρα, ν , το οποίο είναι ο λόγος του ιζώδους του αέρα μ προς την πυκνότητα του ρ .

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.4)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η μεταφορά ορμής από μόρια που βρίσκονται σε ταχύτερα στοιχειώδεις τμήματα αέρα σε κοντινά και βραδύτερα στοιχειώδεις τμήματα αέρα μπορεί να εκφραστεί και ως **δύναμη ιζώδους**, \vec{F} , η οποία ενεργεί κατά μήκος¹ της επιφάνειας του τμήματος αέρα. Η μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου με το ύψος ονομάζεται διάτμηση του ανέμου (wind shear). Καθώς τα στρώματα αέρα που ‘γλιστρούν’ το ένα πάνω στο άλλο με διαφορετικές ταχύτητες λόγω της διάτμησης του ανέμου, το κάθε στρώμα θα ασκεί στο άλλο μια διατμητική τάση, παράλληλη στη διεύθυνση της κίνησης. **Διατμητική τάση** $\vec{\tau}$ είναι η δύναμη ιζώδους ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή

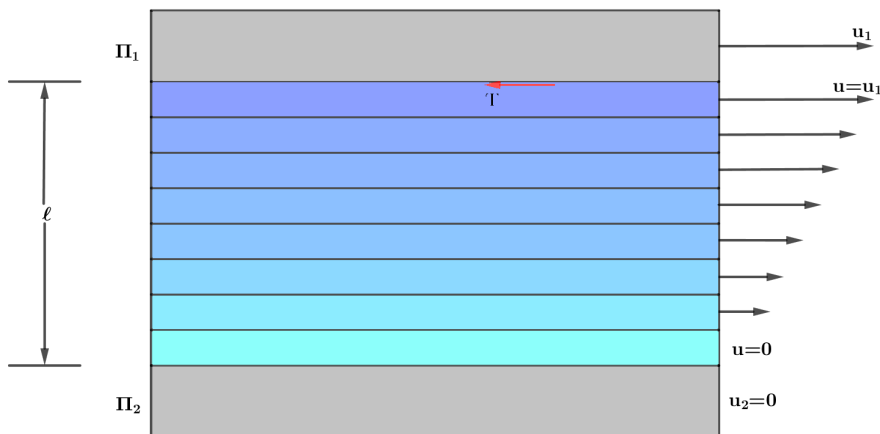
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A} \quad (2.5)$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι η δύναμη ιζώδους δίνεται από τη σχέση $\vec{F} = \vec{\tau}A$.

Παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε ένα ρευστό που περιορίζεται ανάμεσα σε δύο πλάκες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κάτω πλάκα Π_2 , που μπορεί να αντιπροσωπεύει το έδαφος, είναι ακίνητη ενώ η πάνω πλάκα Π_1 , που μπορεί να αντιπροσωπεύει μια αέρια μάζα, κινείται με ταχύτητα u_1 παράλληλα με την κάτω πλάκα. Η μεταξύ τους απόσταση είναι l . Τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε επαφή με την κινούμενη πλάκα Π_1 θα κινούνται

¹Σε αντίθεση με την πίεση που ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια.

με την ταχύτητα της πλάκας, δηλαδή σε ύψος $z = \ell$ ο αέρας θα κινείται με ταχύτητα $u(\ell) = u_1$. Ενώ τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε επαφή με την κάτω πλάκα θα έχουν μηδενική ταχύτητα, δηλαδή σε ύψος $z = 0$ ο αέρας θα κινείται με ταχύτητα $u(0) = 0$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η μεταβολή της ταχύτητας με το ύψος θέτει σε ισχύ



μία διατμητική τάση που ενεργεί στην επιφάνεια της άνω πλάκας ώστε να δημιουργεί μια δύναμη τριβής που αντιστέκεται στην κίνησή της.

Στα Νευτώνια ρευστά υποθέτουμε ότι η διατμητική τάση εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα του ρευστού (δηλ. $\partial u / \partial z$), το οποίο είναι μια καλή προσέγγιση για τον ατμοσφαιρικό αέρα. Εάν, η διάτμηση του ανέμου, για παράδειγμα, στον κάθετο άξονα z θέτει σε ισχύ μια δύναμη F στη διεύθυνση του άξονα x ανά μονάδα επιφάνειας του xy επιπέδου, τότε θα έχουμε διατμητική τάση

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.6)$$

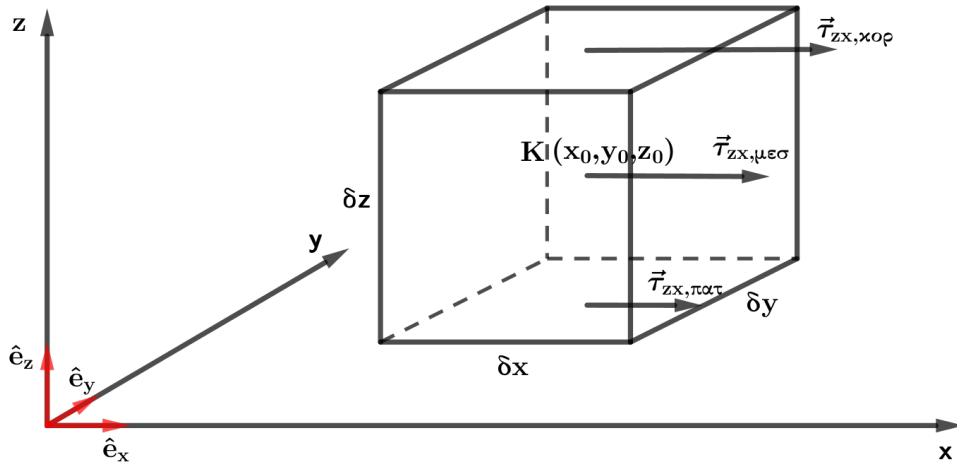
όπου μ είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους του αέρα 2.3.

Έστω ότι έχουμε ένα κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα στο οποίο ασκείται διατμητική τάση στη κορυφή του και στο πάτο του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.3

Εάν $\tau_{zx, \mu\epsilon\sigma} = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0)$ είναι η διατμητική τάση στο μέσο του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα, τότε η διατμητική τάση $\tau_{zx, \kappa\omicron\rho\rho} = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \delta z/2)$ στην κορυφή του τμήματος μπορεί να εκφραστεί με ανάπτυγμα Taylor ως εξής:

$$\begin{aligned} \tau_{zx, \kappa\omicron\rho\rho} &= \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{(z_0 + \frac{\delta z}{2} - z_0)}{1!} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \\ &+ \frac{(z_0 + \frac{\delta z}{2} - z_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + \dots \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) = \tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \frac{(\frac{\delta z}{2})^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) + \dots$$



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα διατμητικής τάσης κατά τη διεύθυνση του άξονα x σε κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα.

Αγνοώντας τους όρους μεγαλύτερης τάξης του δύο, η διατμητική τάση στη κορυφή του κυβικού στοιχειώδους τμήματος είναι:

$$\vec{\tau}_{zx,κορ} = \vec{\tau}_{zx}(x_0, y_0, z_0 + \frac{\delta z}{2}) = \left(\tau_{zx}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \hat{e}_x \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{zx,κορ} = + \left(\tau_{zx,μεσ} + \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{e}_x$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι η διατμητική τάση στο πάτο του κυβικού στοιχειώδους τμήματος είναι:

$$\vec{\tau}_{zx,πατ} = + \left(\tau_{zx,μεσ} - \frac{\delta z}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{e}_x$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη ιξώδους $\vec{F}_{T,zx}$ που ασκείται στο κυβικό στοιχειώδες τμήμα αέρα ισούται με τη διαφορά της διατμητικής τάσης στην κορυφή από τη διατμητική τάση στο πάτο πολλαπλασιαζόμενη με την επιφάνεια στην οποία ασκείται η διατμητική τάση. Δηλαδή από την (2.5) είναι

$$\vec{F}_{T,zx} = (\tau_{zx,κορ} - \tau_{zx,πατ}) \delta x \delta y \hat{e}_x \quad (1)$$

Η μάζα του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα είναι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \delta x \delta y \delta z$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (1) με m έχουμε ότι η συνολική δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας είναι:

$$\frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{(\tau_{zx,κορ} - \tau_{zx,πατ}) \delta x \delta y}{\delta x \delta y \delta z} \hat{e}_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \frac{\delta x \delta y}{\delta x \delta y \delta z} \hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \hat{e}_x \quad (2.7)$$

Υποθέτοντας ότι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους μ είναι σταθερός με το ύψος, η παραπάνω σχέση (2.7) από τη (2.6) συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{e}_x = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \hat{e}_x \Rightarrow \frac{\vec{F}_{T,zx}}{m} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \hat{e}_x \quad (2.8)$$

αφού $\nu = \mu/\rho$ το κινηματικό ιξώδες του στοιχειώδους όγκου.

Η ερμηνεία της εξίσωσης (2.8) είναι ότι αν η ταχύτητα του ανέμου δεν μεταβάλλεται ή μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος και το ν είναι σταθερό, τότε η δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας στη διεύθυνση του άξονα x λόγω διάτμησης ανέμου στη διεύθυνση του άξονα z είναι μηδενική. Στην αντίθετη περίπτωση όπου η ταχύτητα του ανέμου μεταβάλλεται μη γραμμικά, η διατμητική τάση στην κορυφή του κυβικού στοιχειώδους τμήματος αέρα διαφέρει από αυτή στο πάτο του και άρα η συνολική δύναμη ιξώδους είναι μη μηδενική. Να σημειωθεί ότι η (2.8) αναπαριστά την δύναμη ιξώδους ανά μονάδα μάζας στη διεύθυνση του x λόγω διάτμησης του ανέμου στη κάθετη διεύθυνση z και ότι η συνολική δύναμη ιξώδους στην διεύθυνση του x περιλαμβάνει και τη συμβολή από τη διάτμηση του ανέμου στις x και y διευθύνσεις, τ_{xx} και τ_{yx} αντίστοιχα. Άρα, οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης ιξώδους ανά μονάδα μάζας στις τρεις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι:

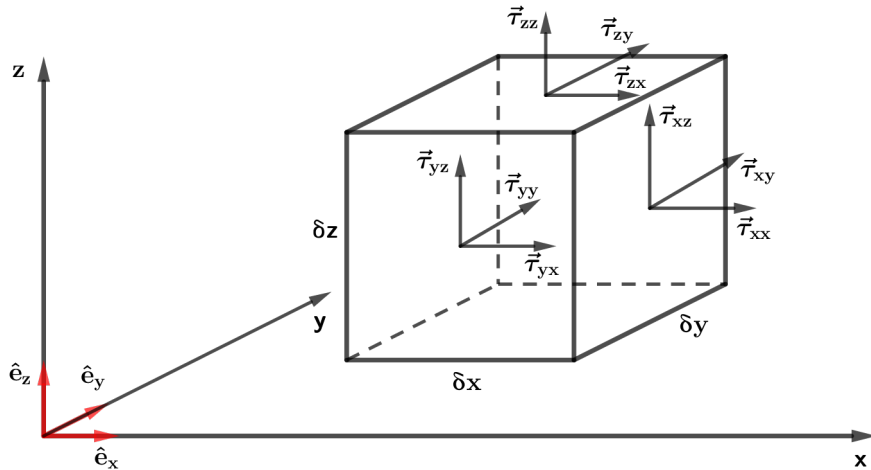
$$\begin{aligned} F_{Tx} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ F_{Ty} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ F_{Tz} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Επεκτείνοντας την (2.8) και στις άλλες διαστάσεις έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_T}{m} &= F_{Tx} \hat{e}_x + F_{Ty} \hat{e}_y + F_{Tz} \hat{e}_z \\ &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \hat{e}_x + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \hat{e}_y \\ &\quad + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \hat{e}_z \\ &= \nu \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} \\ &= \nu \vec{\nabla}^2 \vec{V} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ισχύει ότι:

$$\vec{a}_T = \frac{\vec{F}_T}{m} \Rightarrow \vec{a}_T = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{V}$$



Σχήμα 2.4: Η διατμητική τάση και στις τρεις διαστάσεις. Αντίθετες από τις εικονιζόμενες διατμητικές τάσεις ασκούνται στις αντίθετες πλευρές του στοιχειώδους κυβικού τμήματος.

2.3 Η Δύναμη της Βαρύτητας

Η ύπαρξη της ατμόσφαιρας οφείλεται στη δύναμη βαρύτητας, η οποία την συγκρατεί κοντά στην επιφάνεια της γης και δεν επιτρέπει τη διαφυγή της προς το διάστημα. Η γη ασκεί σε κάθε συστατικό της ατμόσφαιρας ελκτική δύναμη που υπακούει στο νόμο της παγκόσμιας έλξης, ένα θεμελιώδη νόμο της φυσικής που ανακαλύφθηκε από τον Νεύτωνα.

Ορισμός 3. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, δύο στοιχειώδεις μάζες στο σύμπαν έλκουν η μία την άλλη με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

Έστω m, M οι στοιχειώδεις μάζες, r η μεταξύ τους απόσταση και ότι το διάνυσμα \vec{r} έχει κατεύθυνση προς το m όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5 Τότε η δύναμη που ασκείται στη μάζα m από τη μάζα M δίνεται από τη μαθηματική έκφραση

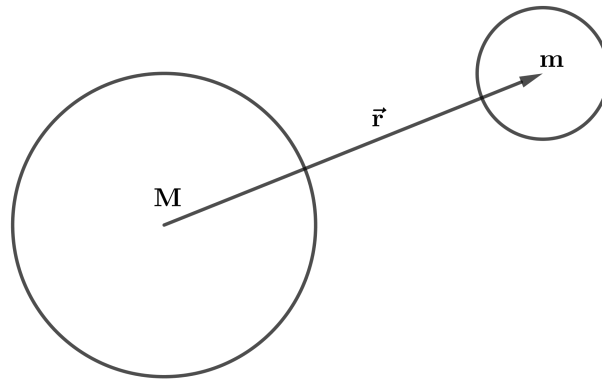
$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{e}_r \quad (2.11)$$

όπου $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ η παγκόσμια βαρυτική σταθερά.

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, όπως εκφράζεται με την μαθηματική έκφραση (2.11), ισχύει για υποθετικές σημειακές μάζες. Επίσης, η σχέση (2.11) ισχύει και στην περίπτωση όπου έχουμε ομοιόμορφη κατανομή μάζας σε δύο σφαίρες των οποίων τα κέντρα μάζας τους απέχουν απόσταση $|\vec{r}|$.

Έτσι, λοιπόν, αν θεωρήσουμε ότι η μάζα της γης είναι M_Γ , τότε η δύναμη της βαρυτικής έλξης ανά μονάδα μάζας στην ατμόσφαιρα της γης είναι:

$$\vec{g}^* = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM_\Gamma}{r^2}\hat{e}_r \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.5: Δύο σφαιρικές μάζες που τα κέντρα τους χωρίζονται από απόσταση $|\vec{r}|$.

Η σχέση αυτή ορίζει το γήινο βαρυτικό πεδίο και ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Στη δυναμική μετεωρολογία είθισται να χρησιμοποιούμε το ύψος πάνω από την μέση στάθμη θάλασσας ως κατακόρυφη συντεταγμένη. Οπότε, εάν θεωρήσουμε ότι η μέση ακτίνα της γης είναι R_{Γ} , τότε, αγνοώντας την μικρή απόκλιση του σχήματος της γης από αυτό της σφαίρας, θα έχουμε ότι $|\vec{r}| = R_{\Gamma} + z$. Άρα η εξίσωση (2.12) ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$\vec{g}^* = -\frac{GM_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + z)^2} \hat{e}_r = -\frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2 \left(1 + \frac{z}{R_{\Gamma}}\right)^2} \hat{e}_r \Rightarrow \vec{g}^* = -\frac{\vec{g}_o^*}{\left(1 + \frac{z}{R_{\Gamma}}\right)^2} \hat{e}_r, \quad (2.13)$$

όπου $\vec{g}_o^* = -GM_{\Gamma}/R_{\Gamma}^2 \cdot \hat{e}_r$ η ένταση βαρυτικής έλξης στη μέση στάθμη θάλασσας. Για μετεωρολογικές εφαρμογές, $z \ll R_{\Gamma}$, έτσι ώστε με αμελητέο σφάλμα υποθέτουμε ότι $\vec{g}^* = \vec{g}_o$ και θεωρούμε τη δύναμη της βαρύτητας σταθερή. Η θεώρηση της δύναμης της βαρύτητας θα συνεχιστεί στην υποενότητα 2.4.2 όπου λαμβάνεται υπόψη και η κεντρομόλος δύναμη εξαιτίας της περιστροφής της γης. 1

2.4 Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς και ‘φαινόμενες’ δυνάμεις

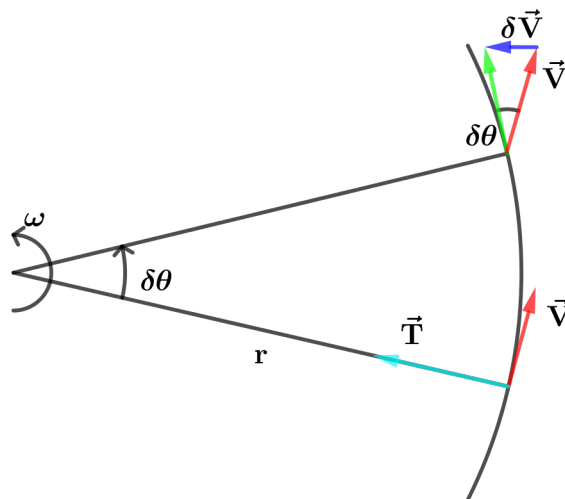
Εφαρμόζοντας τους νόμους της δυναμικής της ατμόσφαιρας είναι φυσικό να χρησιμοποιούμε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς. Αυτό το σύστημα αναφοράς είναι ακίνητο σχετικά με την περιστρεφόμενη γη. Επίσης, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, μία μάζα που εκτελεί ομαλή κίνηση σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς στο διάστημα θα συνεχίσει να εκτελεί ομαλή κίνηση αν σε αυτό δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Μια τέτοια κίνηση ονομάζεται **αδρανειακή κίνηση** και το σύστημα αναφοράς ονομάζεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**. Είναι φανερό, ωστόσο, ότι ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ηρεμία ή εκτελεί ομαλή κίνηση σχετικά με την περιστρεφόμενη γη, στην πραγματικότητα δεν βρίσκεται σε ηρεμία ή δεν εκτελεί ομαλή κίνηση αντίστοιχα σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς στο διάστημα.

Μια κίνηση η οποία φαίνεται να είναι αδρανειακή κίνηση σε ένα παρατηρητή σε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς στην πραγματικότητα είναι επιταχυνόμενη κίνηση. Έτσι, ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς είναι ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι νόμοι κίνησης του Νεύτωνα μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς αν η επιτάχυνση των συντεταγμένων λαμβάνεται υπόψη. Ο πιο ικανοποιητικός τρόπος να συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις αυτής της επιτάχυνσης είναι να εισάγουμε τις λεγόμενες 'φαινόμενες' δυνάμεις στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Αυτές οι φαινόμενες δυνάμεις είναι όροι αδρανειακής αντίδρασης που εμφανίζονται λόγω της επιτάχυνσης των συντεταγμένων. Για ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται ομαλά δύο είναι οι φαινόμενες δυνάμεις που απαιτούνται: η φυγόκεντρος δύναμη και η δύναμη Coriolis.

2.4.1 Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η φυγόκεντρος δύναμη

Για να παρουσιάσουμε τις ουσιαστικές πτυχές των μη αδρανειακών συστημάτων, θεωρούμε μια σφαίρα μάζας m προσκολλημένη στο ένα άκρο ενός τεντωμένου νήματος μήκους r , το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό. Η μάζα διαγράφει κύκλο ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Ως προς ένα παρατηρητή σε ένα αδρανειακό περιβάλλον το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας είναι σταθερό, αλλά η διεύθυνση της συνεχώς μεταβάλλεται με αποτέλεσμα το διάνυσμα της ταχύτητας της σφαίρας να μην είναι σταθερό.

Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση θεωρούμε $\delta\vec{V}$ τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα δt κατά το οποίο η σφαίρα περιστρέφεται κατά γωνία $\delta\theta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας και έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής.

Αφού $\delta\theta$ είναι και η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα \vec{V} και $\vec{V} + \delta\vec{V}$, έχουμε ότι το

μέτρο του διάνυσματος $\delta\vec{V}$ είναι $|\delta\vec{V}| = |\vec{V}|\delta\theta$ ²

Διαιρώντας με δt κατά μέλη και σημειώνοντας ότι όταν το $\delta t \rightarrow 0$ το $\delta\vec{V}$ έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$\vec{\alpha}_\kappa = \frac{d\vec{V}}{dt} = |\vec{V}|\frac{d\theta}{dt} \left(-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

Όμως, $|\vec{V}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}|$ και $\left| \frac{d\theta}{dt} \right| = |\vec{\omega}|$, οπότε

$$\vec{\alpha}_\kappa = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\omega}^2 \vec{r} \quad (2.14)$$

Είδαμε, λοιπόν, ότι ως προς ένα παρατηρητή σε αδρανειακό περιβάλλον η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη όπου η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής και μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας επί την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Αύτη η επιτάχυνση είναι η λεγόμενη **κεντρομόλος επιτάχυνση** και προκαλείται από την τάση του νήματος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι παρατηρούμε την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται μαζί με τη σφαίρα. Σε αυτό το περιστρεφόμενο σύστημα η σφαίρα είναι στάσιμη, αλλά η τάση του νήματος εξακολουθεί να υφίσταται. Ωστόσο, για να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα που περιγράφει την κίνηση αναφορικά με το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και μια πρόσθετη φαινόμενη δύναμη, που ονομάζεται **φυγόκεντρος δύναμη**, η οποία εξισορροπεί την τάση του νήματος. Έτσι, η φυγόκεντρος δύναμη είναι η αδρανειακή αντίδραση της σφαίρας στην τάση του νήματος και είναι ίση και αντίθετη με την κεντρομόλο επιτάχυνση, δηλαδή

$$\vec{F}_{\text{φυγ}} = \omega^2 \vec{r}$$

Συνοψίζοντας, παρατηρώντας την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα αδρανειακό χώρο, η κινούμενη σφαίρα εμφανίζει ομαλή κεντρομόλο επιτάχυνση εξαιτίας της τάσης του νήματος. Συνεπώς, και τα κινούμενα αντικείμενα στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης εμφανίζουν κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση τον άξονα περιστροφής της. Παρατηρώντας την κίνηση σε ένα σύστημα συντεταγμένων που κινείται μαζί με τη σφαίρα, η σφαίρα μένει στάσιμη ως προς αυτό και η τάση του νήματος εξισορροπείται από την φυγόκεντρο δύναμη. Οπότε και τα κινούμενα αντικείμενα στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης "αισθάνονται", έχουν την τάση να τραβιούνται προς τα έξω λόγω της φαινόμενης φυγόκεντρο δύναμης

2.4.2 Ενεργός Βαρύτητα

Η βαρύτητα που ενεργεί σε ένα τμήμα αέρα είναι μια πραγματική δύναμη, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3. Η βαρύτητα που βιώνουμε, όμως, στην πραγματικότητα είναι ένας συνδυασμός της πραγματικής δύναμης της βαρύτητας και της φαινόμενης φυγόκεντρος δύναμης. Η **πραγματική δύναμη βαρύτητας** ενεργεί με κατεύθυνση

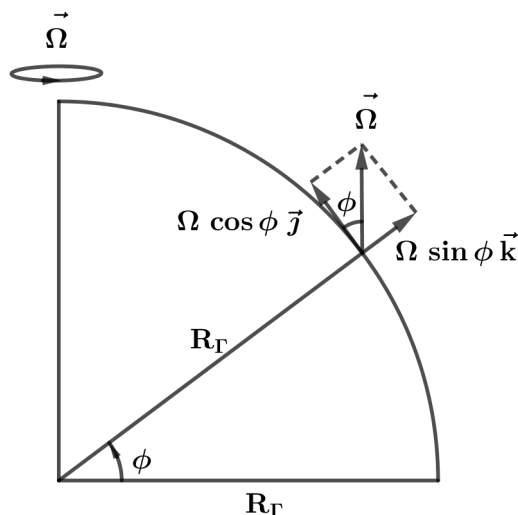
²Επειδή θεωρούμε το $|\delta\vec{V}|$ αρκετά μικρό μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μήκος τόξου και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $s = \ell \cdot \delta\theta$, όπου s το μήκος τόξου, ℓ η ακτίνα και $\delta\theta$ η γωνία.

προς το κέντρο της γης. Η φαινόμενη φυγόκεντρος δύναμη, η οποία ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής της γης, μετατοπίζει ελαφρώς τη διεύθυνση και αλλάζει το μέτρο της πραγματικής δύναμης βαρύτητας. Το άθροισμα της πραγματικής δύναμης της βαρύτητας και της φαινόμενης φυγόκεντρος δύναμης μας δίνει το διάνυσμα της ενεργούς βαρύτητας, το οποίο ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια της γης αλλά όχι προς το κέντρο της. Αυτό συμβαίνει διότι η γη έχει διαφορετικό σχήμα από αυτό της τέλει σφαίρας, όπως θα εξηγήσουμε αμέσως παρακάτω.

Η φυγόκεντρος δύναμη που ασκείται στα σώματα που βρίσκονται στην περιστρεφόμενη γη δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F}_{\text{φυγ}} = \Omega^2 \vec{R} \quad (2.15)$$

όπου \vec{R} το διάνυσμα θέσης με αρχή τον άξονα περιστροφής και τέλος το σώμα στην ατμόσφαιρα της γης και $\vec{\Omega} = \Omega \cos \phi \vec{j} + \Omega \sin \phi \vec{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης με μέτρο $\Omega = 2\pi/86164 \text{ sec} = 7,292 \text{ rad sec}^{-1}$. 86164 είναι ο αριθμός των δευτερολέπτων που χρειάζεται η γη να κάνει μια περιστροφή γύρω από τον εαυτό της (23 h 56 m 4 sec). Η φυγόκεντρος δύναμη είναι μέγιστη στον ισημερινό, όπου η



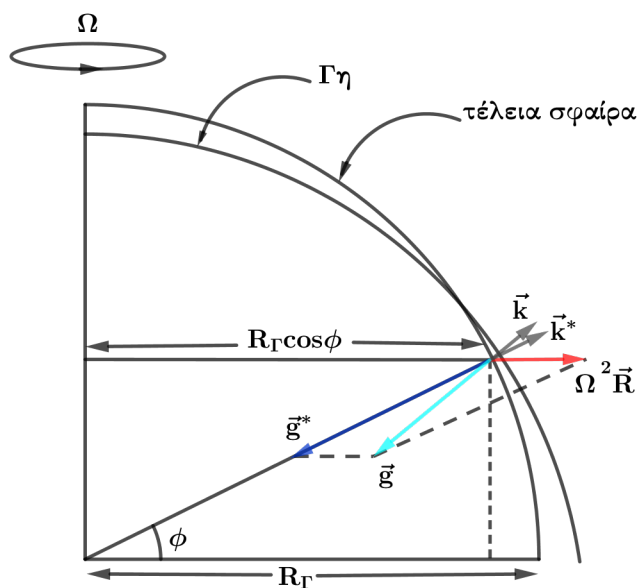
Σχήμα 2.7: Οι συνιστώσες του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας της γης.

συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας της γης που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής της είναι μέγιστη, και μηδενική στους πόλους, όπου η κάθετη συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας της γης είναι μηδενική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η γη να διογκώνεται στον ισημερινό και να συμπιέζεται στους πόλους. Η ακτίνα της γης στον ισημερινό είναι αυτή τη στιγμή μεγαλύτερη κατά 21Km από ότι είναι στους πόλους, δίνοντας στη γη σχήμα ενός πεπλατυσμένου σφαιροειδούς.

Η μαθηματική σχέση, λοιπόν, που συνδέει την ενεργό βαρύτητα με την πραγματική βαρύτητα και τη φυγόκεντρο δύναμη είναι η εξής:

$$\vec{g} = -g\vec{k} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R} \quad (2.16)$$

όπου \vec{k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη κάθετη όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8. Η ενεργός βαρύτητα ορισμένες φορές αναφέρεται και ως 'φαινόμενη βαρύτητα' και την θεωρούμε σταθερή ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).



Σχήμα 2.8: Η ενεργός επιτάχυνση της βαρύτητας \vec{g} , η επιτάχυνση της πραγματικής βαρύτητας \vec{g}^* και η φυγόκεντρος δύναμη $\Omega^2 \vec{R}$ σε τόπο γεωγραφικού πλάτους ϕ . Τα \vec{k} και \vec{k}^* είναι τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στη γη (πεπλατυσμένο σφαιροειδές) και την τέλεια σφαίρα αντίστοιχα.

2.4.3 Η δύναμη Coriolis

Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εκφρασμένος σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται με τη γη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουμε την ισορροπία των δυνάμεων για ένα σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία στην επιφάνεια της γης δεδομένου ότι συμπεριλαμβάνεται και η φαινόμενη φυγόκεντρος δύναμη. Εάν, ωστόσο, το σώμα βρίσκεται σε κίνηση σχετικά με την επιφάνεια της γης, μια πρόσθετη φαινόμενη δύναμη απαιτείται στην έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, **η δύναμη Coriolis**. Σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς η δύναμη Coriolis φαίνεται να 'σπρώχνει' τα σώματα προς τα δεξιά στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο της γης. Δηλαδή, στο βόρειο ημισφαίριο ενεργεί σε διεύθυνση στραμμένη κατά 90° προς τα δεξιά της διεύθυνσης της κίνησης και στο νότιο ημισφαίριο ενεργεί σε διεύθυνση στραμμένη κατά 90° προς τα αριστερά της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος. Η δύναμη Coriolis είναι μόνο φαινόμενη και στην πραγματικότητα καμία δύναμη δεν ασκείται στο σώμα. Αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η περιστροφή της γης κάνει ένα κινούμενο σώμα στην επιφάνεια της να επιταχύνεται προς τα δεξιά στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο όταν παρατηρείται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως είναι το διάστημα. Αυτή η επιτάχυνση είναι μηδέν στον ισημερινό, μέγιστη κοντά στους πόλους και μηδέν για σώματα που βρίσκονται σε ηρεμία στην επιφάνεια της γης. Τα κινούμενα σώματα μπορεί να είναι π.χ οι άνεμοι, τα ωκεάνια ρεύματα και τα αεροπλάνα. Μια πιο μαθηματικά αυστηρή περιγραφή της δύναμης Coriolis θα γίνει στο Κεφάλαιο 3 και στην παρούσα υποενότητα θα περιοριστούμε στην επίδραση της δύναμης αυτής συνεχίζοντας την περιγραφή των φαινόμενων δυνάμεων.

Η στροφορμή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ και μας παρέχει μία μέτρηση της περιστροφής γνωρίζοντας το διάνυσμα της ορμής \vec{p} σχετικά με ένα σύστημα συντεταγμένων, η αρχή του οποίου καθορίζει το διάνυσμα θέσης \vec{r} . Να σημειώσουμε ότι από άποψη δυναμικής η πιο σημαντική συνιστώσα της στροφορμής είναι αυτή που είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής της γης, $\vec{L} = \vec{L} \cos \phi$. Αν υποθέσουμε ότι ένα τμήμα αέρα (ή οποιουδήποτε ρευστού) κινείται στο βόρειο ημισφαίριο της γης με κατεύθυνση το βόρειο πόλο (ή στο νότιο ημισφαίριο με κατεύθυνση το νότιο πόλο), τότε η απόστασή του $\vec{R} = \vec{r} \cos \phi$ από τον άξονα περιστροφής της γης μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.9. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής, θα πρέπει η ορμή και άρα η ταχύτητα u στη διεύθυνση δύσης-ανατολής να αυξάνεται καθώς μειώνεται η απόσταση, δηλαδή το τμήμα αέρα θα πρέπει να περιστρέφεται γρηγορότερα. Σε αυτό το σημείο, θα κάνουμε την υπόθεση ότι το διάνυσμα της ορμής στην ανατολική κατεύθυνση είναι αποτέλεσμα της ανατολικής κίνησης του αέρα με ταχύτητα u και της πλανητικής περιστροφής με ταχύτητα ΩR . Άρα, αν δεν υπάρχει ροπή στη διεύθυνση δύσης-ανατολής (δηλαδή δεν υπάρχει δύναμη βαροβαθμίδας ή δύναμη ιξώδους) από αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε: $\frac{dL}{dt} = 0$.

Αν $m = 1$ τότε η στροφορμή δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L} = \vec{R} \times (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{R} \times \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ έχουμε ότι:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{u} + R^2 \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{R}) \vec{R}$$

αλλά $\vec{\Omega} \perp \vec{R} \Rightarrow \vec{\Omega} \cdot \vec{R} = 0$, οπότε

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{u} + R^2 \vec{\Omega}$$

Άρα,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{u} + \vec{R} \frac{d\vec{u}}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \vec{\Omega} + R^2 \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

και αφού $\vec{\Omega} = \text{σταθερό}$

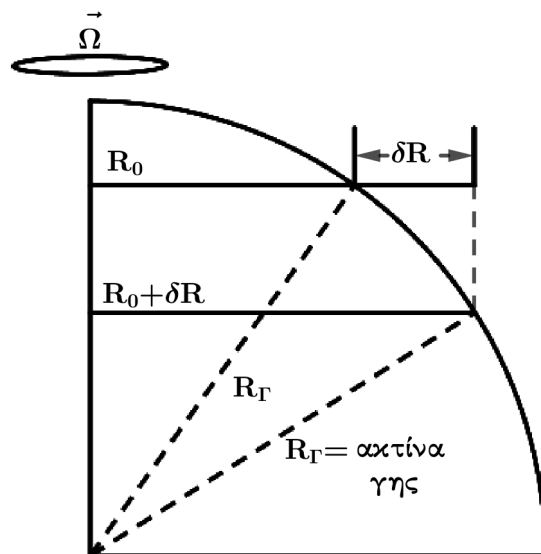
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{u} + \vec{R} \frac{d\vec{u}}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \vec{\Omega} \quad (2.17)$$

και αφού $dL/dt = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} u + R \frac{du}{dt} + 2R \frac{dR}{dt} \Omega &= 0 \\ \Rightarrow R \frac{du}{dt} + (u + 2R\Omega) \frac{dR}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Και άρα η (2.18) έπεται ότι:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{(u + 2\Omega R)}{R} \frac{dR}{dt} \quad (2.19)$$



Σχήμα 2.9: Κατά την κίνηση ενός τμήματος αέρα στο βόρειο ημισφαίριο με κατεύθυνση το βόρειο πόλο της γης η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής της μειώνεται κατά δR , γεγονός που συνεπάγεται αύξηση της ταχύτητας στη διεύθυνση της δύσης-ανατολής λόγω αρχής διατήρησης της στροφορμής.

Επίσης, να σημειώσουμε ότι:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \phi) = \frac{dr}{dt} \cdot \cos \phi + r \cdot \frac{d \cos \phi}{dt} = w \cos \phi - v \sin \phi \quad (2.20)$$

όπου v και w είναι η βόρεια και η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, αντίστοιχα.

Με αυτή τη σχέση η (2.19) γράφεται:

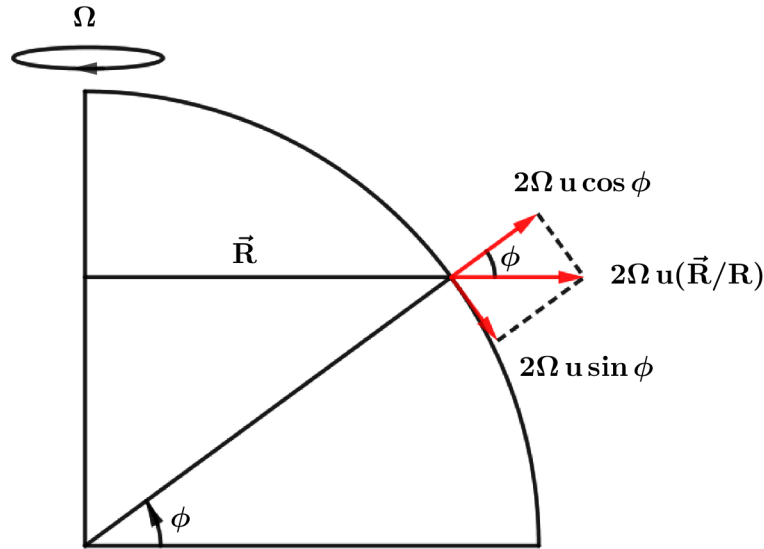
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{(2\Omega r \cos \phi + u)}{r \cos \phi} \cdot (w \cos \phi - v \sin \phi) = \left(-2\Omega - \frac{u}{r \cos \phi}\right) (w \cos \phi - v \sin \phi) \\ &= -(2\Omega \cos \phi)w + (2\Omega \sin \phi)v - \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r} \tan \phi \end{aligned} \quad (2.21)$$

Οι δύο πρώτοι όροι στο δεξί μέλος της (2.21) αποτελούν τη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση δύσης-ανατολής λόγω της κάθετης κίνησης και της κίνησης στη διεύθυνση βορρά-νότου, αντίστοιχα. Οι δύο τελευταίοι όροι εμφανίζονται λόγω της καμπυλότητας της γης. Επειδή, όμως, το r είναι πολύ μεγάλο αυτοί οι όροι είναι αρκετά μικροί ώστε να θεωρούνται αμελητέοι εκτός από την περίπτωση που το u παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα σώμα τίθεται σε κίνηση από μία προωθητική δύναμη στην ανατολική κατεύθυνση. Σε αυτή την περίπτωση η στροφορμή δεν διατηρείται, αλλά η κεντρομόλος δύναμη που εμφανίζεται θα μας βοηθήσει να εξάγουμε τη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση βορρά-νότου. Επειδή το σώμα περιστρέφεται γρηγορότερα από τη γη, η κεντρομόλος δύναμη θα είναι μεγαλύτερη από ότι θα ήταν σε ένα σώμα που βρισκόταν σε ηρεμία σχετικά με τη γη. Αυτή η αύξηση της κεντρομόλου δύναμης είναι:

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} - \Omega^2 \vec{R} = 2\Omega u \left(\frac{\vec{R}}{R}\right) + \frac{u^2}{R} \left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \quad (2.22)$$

όπου $u/R = \omega$ η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου σώματος σχετικά με τη γη. Οι όροι στο δεξί μέλος αναπαριστούν απωθητικές δυνάμεις που ενεργούν προς τα έξω και κατά μήκος του διανύσματος \vec{R} (δηλαδή κάθετα στον άξονα περιστροφής). Οι συνιστώσες αυτών των δυνάμεων στη διεύθυνση βορρά-νότου και στη κάθετη διεύθυνση μπορούν να εξαχθούν αναλύοντας το διάνυσμα \vec{R} στις αντίστοιχες διευθύνσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (2.10) και έτσι έχουμε:



Σχήμα 2.10: Οι συνιστώσες της δύναμης Coriolis λόγω της κυκλικής κίνησης σε γεωγραφικό πλάτος ϕ .

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{R_{\Gamma} \cos \phi} \sin \phi = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{R_{\Gamma}} \tan \phi \quad (2.23)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2}{R_{\Gamma} \cos \phi} \cos \phi = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2}{R_{\Gamma}} \quad (2.24)$$

Οι δύο πρώτοι όροι στα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων εκφράζουν τις συνιστώσες της δύναμης Coriolis στη διεύθυνση βορρά-νότου και στη κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα για κίνηση στη διεύθυνση δύσης-ανατολής. Οι δεύτεροι όροι στα δεξιά μέλη εκφράζουν την επίδραση που έχει η καμπυλότητα της γης.

Για κινήσεις μεγαλύτερης κλίμακας οι όροι που εμφανίζονται λόγω καμπυλότητας προσεγγιστικά μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι. Ως εκ τούτου, από τις σχέσεις (2.21) και (2.23) έπεται ότι μία οριζόντια κίνηση (χωρίς κάθετη συνιστώσα) παράγει επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση της κίνησης που δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi = f v \quad (2.25)$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi = -f u \quad (2.26)$$

όπου $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ η παράμετρος Coriolis.

Έτσι, αποδείξαμε και μαθηματικά ότι η δύναμη Coriolis εκτρέπει τα κινούμενα σώματα προς τα δεξιά της διεύθυνσης της κίνησης στο βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο νότιο ημισφαίριο της γης. Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης Coriolis στην (2.24) είναι πολύ μικρότερη από τη δύναμη της βαρύτητας και η μόνη επίδραση που έχει είναι μία ελάχιστη μεταβολή στο φαινόμενο βάρος που εξαρτάται από το αν το σώμα κινείται δυτικά ή ανατολικά.

Η δύναμη Coriolis θεωρείται αμελητέα για κινήσεις με κλίμακα χρόνου πολύ μικρότερη από την περίοδο περιστροφής της γης. Έτσι, η δύναμη Coriolis δεν είναι σημαντική για τη δυναμική, για παράδειγμα, των μεμονομένων συννέφων cumulus αλλά είναι απαραίτητη για να καταλάβουμε φαινόμενα μεγαλύτερης κλίμακας χρόνου, όπως είναι τα συνοπτικής κλίμακας συστήματα. Επίσης, η δύναμη Coriolis λαμβάνεται υπόψη και στον υπολογισμό των τροχιών βλημάτων μεγάλου βεληνεκούς.

Παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι ένα βалиστικό βλήμα πυροδοτείται προς τα ανατολικά από περιοχή που έχει γεωγραφικό πλάτος $43^\circ N$ όπου η παράμετρος Coriolis είναι $f = 10^{-4} s^{-1}$. Αν το βλήμα ταξιδέψει $x = 1000 km$ με οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 1000 m \cdot s^{-1} = 1 km \cdot s^{-1}$, κατά πόσο το βλήμα εκτρέπεται από την ανατολική του πορεία λόγω της δύναμης Coriolis;

Ολοκληρώνοντας την (2.26) (όπου $u = u_0$) ως προς το χρόνο έχουμε:

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int -f u_0 dt \Rightarrow v = -f u_0 t$$

όπου υποθέτουμε ότι η εκτροπή είναι ικανοποιητικά μικρή ώστε να θεωρήσουμε ότι τα f και u_0 είναι σταθερές. Για να βρούμε τη συνολική μετατόπιση ολοκληρώνουμε πάλι ως προς το χρόνο και έχουμε:

$$\int_0^t v dt = \int_{y_0}^{y_0+\delta y} dy = -f u_0 \int_0^t t dt \Rightarrow \delta y = -\frac{1}{2} f u_0 t^2$$

Όμως, αφού η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα ο χρόνος κίνησης θα είναι:

$$t = \frac{x}{u_0} = \frac{1000 km}{1 km \cdot s^{-1}} = 10^3 s$$

Άρα, η συνολική μετατόπιση είναι:

$$\delta y = -10^{-4} s^{-1} \cdot 1 km \cdot s^{-1} \cdot \frac{(10^3)^2 s^2}{2} = -\frac{10^2}{2} km \Rightarrow \delta y = -50 km$$

Οπότε, δείξαμε ότι το βλήμα εκτρέπεται προς τα νότια κατά $50 km$ λόγω της δύναμης Coriolis.

Οι x και y συνιστώσες που δίνονται από τις σχέσεις (2.25) και (2.26) σε διανυσματική μορφή γράφονται

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{C_0} = -f \vec{k} \times \vec{V} \quad (2.27)$$

όπου $\vec{V} \equiv (u, v)$ είναι η οριζόντια ταχύτητα, \vec{k} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα και ο δείκτης C_0 δείχνει ότι η επιτάχυνση οφείλεται αποκλειστικά στη δύναμη Coriolis. Αφού το $-\vec{k} \times \vec{V}$ είναι ένα διάνυσμα στραμμένο κατά 90° προς τα δεξιά του \vec{V} , η (2.27) δείχνει ξεκάθαρα το είδος της εκτροπής λόγω της δύναμης Coriolis. Να σημειώσουμε ότι η δύναμη Coriolis αλλάζει μόνο τη διεύθυνση της κίνησης και όχι το μέτρο της ταχύτητας.

2.5 Η δομή της στατικής ατμόσφαιρας

Η θερμοδυναμική κατάσταση της ατμόσφαιρας σε κάθε σημείο καθορίζεται από τις τιμές της πίεσης, της θερμοκρασίας και της πυκνότητας (ή του ειδικού όγκου) σε αυτό το σημείο. Αυτές οι φυσικές ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους με την **καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων**. Αν συμβολίσουμε με p , T , ρ , και $\alpha (\equiv \rho^{-1})$ την πίεση, τη θερμοκρασία, την πυκνότητα και τον ειδικό όγκο αντίστοιχα μπορούμε να εκφράσουμε την καταστατική εξίσωση για ξηρό αέρα ως εξής:

$$p\alpha = RT \quad \text{ή} \quad p = \rho RT \quad (2.28)$$

όπου για τον ξηρό αέρα η σταθερά R παίρνει την τιμή $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

2.5.1 Η υδροστατική εξίσωση

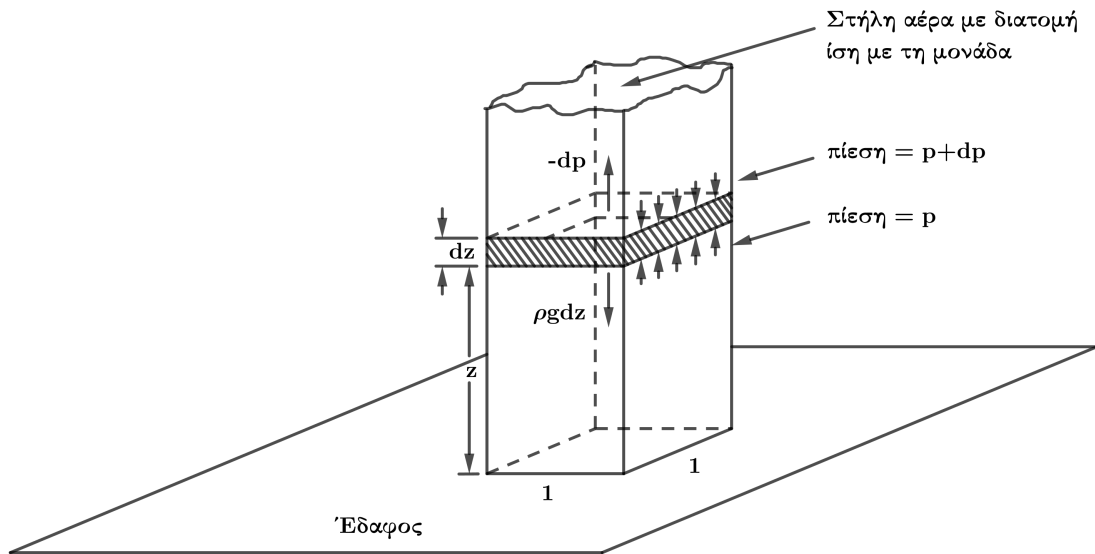
Υπό την απουσία ατμοσφαιρικών κινήσεων κάθε μόριο αέρα έλκεται από τη γη με αποτέλεσμα την κίνηση τους προς τα κάτω η οποία, όμως, εμποδίζεται λόγω των κρούσεων με τα μόρια του αέρα που βρίσκονται σε κατώτερα ύψη. Με άλλα λόγια, η **δύναμη βαρύτητας πρέπει να εξισορροπείται από την κάθετη συνιστώσα της δύναμης βαροβαθμίδας**.

Όπως έχουμε ήδη ορίσει, πίεση είναι η δύναμη που εφαρμόζεται κάθετα σε μία επιφάνεια ανά μονάδα εμβαδού της επιφάνειας αυτής. Στο παρακάτω σχήμα 2.11 τα μικρά βέλη με φορά προς τα πάνω και προς τα κάτω συμβολίζουν τις δυνάμεις που ασκούνται από την πίεση του αέρα στην αέρια μάζα του γραμμοσκιασμένου χωρίου. Η δύναμη που ακείται προς τα κάτω λόγω βαρύτητας στο γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι $dm g = (dm/dV) \cdot g dV = \rho g dz$, αφού το εμβαδό της βάσης είναι $dxdy = 1$ και άρα ο όγκος είναι $dV = dxdydz \Rightarrow dV = dz$. Η συνολική δύναμη πίεσης δίνεται από τη διαφορά μεταξύ των δυνάμεων με φορά προς τα πάνω που ασκούνται κατά μήκος της κάτω επιφάνειας του χωρίου και των δυνάμεων με φορά προς τα κάτω που ασκούνται κατά μήκος της άνω επιφάνειας του χωρίου, και ισούται με $-dp$. Να σημειώσουμε ότι το πρόσημο (-) εκφράζει ότι η πίεση μειώνεται με το ύψος.

Έτσι, είναι φανερό ότι:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (2.29)$$

Αυτή η συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας αποτελεί μία πολύ καλή προσέγγιση για την κάθετη συνιστώσα της πίεσης στην πραγματική ατμόσφαιρα. Μόνο για έντονα φαινόμενα μικρής κλίμακας, όπως γραμμές καταιγίδας και ανεμοστρόβιλους, είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε αποκλίσεις από την υδροστατική ισορροπία. Ολοκληρώνοντας



Σχήμα 2.11: Ισορροπία δυνάμεων στην υδροστατική ισορροπία.

την (2.29) από ένα ύψος z έως την κορυφή της ατμόσφαιρας έχουμε:

$$p(z) = \int_z^{\infty} \rho g d\tilde{z} \quad (2.30)$$

και άρα προκύπτει ότι η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο ισούται με το βάρος της στήλης του αέρα με διατομή ίση με τη μονάδα που βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό. Έτσι, η πίεση της μέσης στάθμης θάλασσας $p(0) = 1013.25 \text{ hpa}$ είναι απλά το μέσο βάρος ανά τετραγωνικό μέτρο της στήλης ολόκληρης της ατμόσφαιρας³.

Επίσης, συχνά εκφράζουμε την υδροστατική εξίσωση σε όρους γεωδυναμικού αντί να χρησιμοποιούμε το γεωμετρικό ύψος.

Ορισμός 4. Γεωδυναμικό $\Phi(z)$ σε ένα ύψος z της ατμόσφαιρας είναι το έργο ανά μονάδα μάζας που παράγεται ενάντια στη δύναμη της βαρύτητας όταν μάζα υψώνεται από την επιφάνεια της γης στο ύψος z .

Από τον ορισμό του έργου $dW = \vec{F} \cdot dz\hat{e}_z$ έπεται ότι το γεωδυναμικό είναι:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{|W|}{m} = \frac{1}{m} \int_0^z m\vec{g} \cdot d\vec{z} = \frac{1}{m} \int_0^z |mg(-\hat{e}_z) \cdot \hat{e}_z| dz \\ &\Rightarrow \Phi(z) = \int_0^z g dz \end{aligned} \quad (2.31)$$

με το γεωδυναμικό $\Phi(0)$ στην επιφάνεια της γης να είναι μηδέν. Από την παραπάνω σχέση (2.31) συνεπάγεται ότι $d\Phi(z) = g dz$ και από την καταστατική εξίσωση (2.28)

³Για ευκολία των υπολογισμών συχνά υποθέτουμε ότι η πίεση μέσης στάθμης θάλασσας ισούται με 1000 hpa .

έχουμε ότι: $\alpha = RT/p$. Οπότε, μπορούμε να εκφράσουμε την υδροστατική εξίσωση στη μορφή:

$$\begin{aligned} d\Phi = g dz &= -\frac{dp}{\rho} = -\alpha dp = -\frac{RT}{p} dp = -RT \cdot d(\ln p) \\ \Rightarrow d\Phi &= -RT \cdot d(\ln p) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του γεωδυναμικού ως προς την πίεση εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Ολοκληρώνοντας την (2.32) ως προς την κάθετο παίρνουμε μία μορφή της υψομετρικής εξίσωσης:

$$\int_{z_1}^{z_2} d\Phi = - \int_{p_1}^{p_2} RT d(\ln p) \Rightarrow \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = g_0 (Z_2 - Z_1) = R \int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p) \quad (2.33)$$

Εδώ το $Z \equiv \Phi(z)/g_0$, όπου $g_0 = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$ η παγκόσμια μέση επιτάχυνση της βαρύτητας στη μέση στάθμη θάλασσας, είναι το γεωδυναμικό ύψος. Έτσι, στην τροπόσφαιρα και στη κατώτερη στρατόσφαιρα το Z είναι αριθμητικά σχεδόν ταυτόσημο με το γεωμετρικό ύψος z .

Οπότε, σε όρους γεωδυναμικού ύψους Z η υψομετρική εξίσωση γράφεται:

$$Z_T \equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R}{g_0} \int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p) \quad (2.34)$$

όπου Z_T είναι το πάχος του ατμοσφαιρικού στρώματος ανάμεσα στις επιφάνειες πίεσης p_2 και p_1 . Ορίζοντας τη μέση θερμοκρασία ενός στρώματος ατμοσφαιρικού αέρα ως:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T d(\ln p)}{\int_{p_2}^{p_1} d(\ln p)} \quad (2.35)$$

και τη μέση κλίμακα ύψους ενός στρώματος ατμοσφαιρικού αέρα ως $H \equiv R\langle T \rangle/g_0$ από την εξίσωση (2.34) έχουμε:

$$Z_T = H \ln(p_1/p_2) \quad (2.36)$$

Άρα, το πάχος ενός στρώματος αέρα που οριοθετείται από ισοβαρικές επιφάνειες είναι ανάλογο της μέσης θερμοκρασίας του στρώματος. Από την (2.36) έπεται ότι η πίεση μειώνεται με το ύψος πιο γρήγορα σε ένα ψυχρό στρώμα από ότι σε ένα θερμό στρώμα διότι για σταθερό Z_T τα H και $\ln(p_1/p_2)$ είναι αντιστρόφως ανάλογα και άρα για μικρότερες θερμοκρασίες, και άρα μικρότερα H , θα έχουμε μεγαλύτερο $\ln(p_1/p_2)$, και άρα $p_1 > p_2$. Αυτό που προκύπτει, επίσης, από την (2.36) είναι ότι σε μία ισόθερμη ατμόσφαιρα θερμοκρασίας T το γεωδυναμικό ύψος είναι ανάλογο του φυσικού λογαρίθμου της πίεσης κανονικοποιημένος από την πίεση επιφανείας, δηλαδή

$$Z = H \ln(p_0/p) \quad (2.37)$$

όπου p_0 είναι η πίεση για $Z = 0$. Άρα, σε μία ισόθερμη ατμόσφαιρα η πίεση μειώνεται εκθετικά με το γεωδυναμικό ύψος:

$$e^{Z/H} = e^{\ln(p_0/p)} \Rightarrow p(Z) = p(0)e^{-Z/H} \quad (2.38)$$

2.5.2 Η πίεση ως κάθετη συντεταγμένη

Από την υδροστατική εξίσωση (2.29) είναι προφανές ότι υπάρχει μία '1-1' μονότονη σχέση ανάμεσα στην πίεση και το ύψος σε κάθε κάθετη στήλη ατμοσφαιρικού αέρα. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πίεση ως ανεξάρτητη κάθετη συντεταγμένη και το ύψος (ή το γεωδυναμικό) ως εξαρτημένη μεταβλητή. Η θερμοδυναμική κατάσταση της ατμόσφαιρας, τότε, θα καθορίζεται από τα $\Phi(x, y, p, t)$ και $T(x, y, p, t)$.

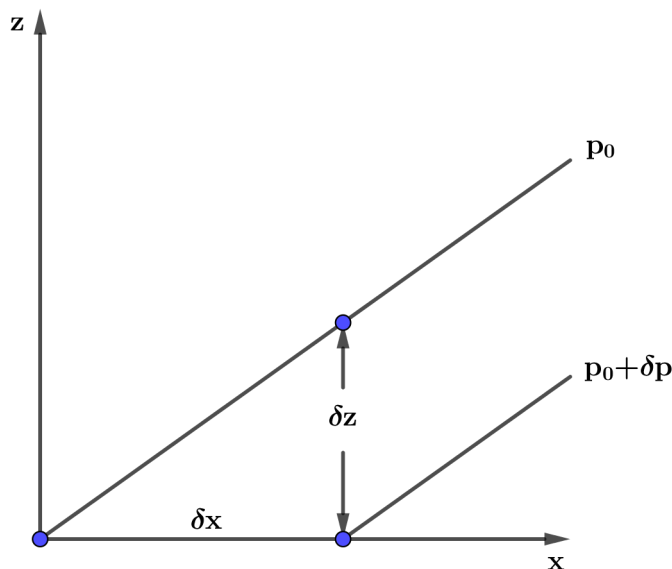
Τώρα, οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης βαροβαθμίδας, που δίνονται από την (2.2), υπολογίζονται από μερική παραγωγή κρατώντας το z σταθερό. Ωστόσο, όταν η πίεση χρησιμοποιείται ως κάθετη συντεταγμένη οι μερικοί παράγωγοι πρέπει να υπολογίζονται κρατώντας σταθερό το p . Η μετατροπή της οριζόντιας δύναμης βαροβαθμίδας από συντεταγμένες ύψους σε συντεταγμένες πίεσης μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος 2.12. Θεωρώντας μόνο το $x - z$ επίπεδο βλέπουμε από το σχήμα 2.12 ότι:

$$\left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta x} \right]_z = \left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p \quad (2.39)$$

όπου οι δείκτες z, x, p χρησιμοποιούνται για να δείξουμε ποιες μεταβλητές κρατάμε σταθερές στον υπολογισμό των παραγώγων. Για παράδειγμα, όταν $\delta z \rightarrow 0$

$$\left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta z} \right]_x \rightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x$$

όπου βάζουμε το πρόσημο (-) διότι $\delta z < 0$ για $\delta p > 0$, δηλαδή η πίεση αυξάνεται όταν το ύψος μειώνεται. Παίρνοντας τα όρια για $\delta z \rightarrow 0$ και $\delta x \rightarrow 0$ έχουμε τη σχέση



Σχήμα 2.12: Η κλίση των επιφανειών πίεσης στο $x - z$ επίπεδο.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p \quad (2.40)$$

η οποία μετά από πολλαπλασιασμό και στα δύο μέλη με το $-\frac{1}{\rho}$ και αντικατάσταση από την υδροστατική εξίσωση (2.29) γράφεται ως εξής:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \quad (2.41)$$

Ομοίως, είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \quad (2.42)$$

Έτσι, στο **ισοβαρικό σύστημα συντεταγμένων** η οριζόντια δύναμη βαροβαθμίδας υπολογίζεται από τη βαθμίδα του γεωδυναμικού για σταθερή πίεση. Οπότε, η πυκνότητα δεν εμφανίζεται στον τύπο της δύναμης βαροβαθμίδας και αυτό αποτελεί ένα σημαντικό πλεονέκτημα του ισοβαρικού συστήματος.

2.5.3 Μία γενικευμένη κάθετη συντεταγμένη

Κάθε '1-1' μονότονη συνάρτηση της πίεσης ή του ύψους μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ανεξάρτητη κάθετη συντεταγμένη. Για παράδειγμα, σε πολλά μοντέλα αριθμητικής πρόβλεψης του καιρού η πίεση κανονικοποιημένη από την πίεση επιφανείας, $\sigma = p(x, y, z, t)/p_s(x, y, t)$, χρησιμοποιείται ως κάθετη συντεταγμένη. Αυτή η επιλογή εγγυάται ότι το έδαφος είναι μία επιφάνεια συντεταγμένων ($\sigma \equiv 1$) ακόμα και εάν υπάρχουν χωρικές και χρονικές μεταβολές στην πίεση επιφανείας. Αυτό το σύστημα συντεταγμένων είναι χρήσιμο σε περιοχές με έντονες τοπογραφικές μεταβολές και ως το ονομάσουμε σ σύστημα συντεταγμένων.

Σε αυτό το σημείο, θα αναπτύξουμε μια γενική έκφραση της οριζόντιας δύναμης βαροβαθμίδας η οποία εφαρμόζεται **για οποιαδήποτε κάθετη συντεταγμένη** $s = s(x, y, z, t)$ που είναι '1-1' μονότονη συνάρτηση του ύψους. Στο παρακάτω σχήμα 2.13 βλέπουμε ότι για μία οριζόντια απόσταση δx η διαφορά πίεσης κατά μήκος της επιφανείας σταθερού s σχετίζεται με αυτή για σταθερό z από τη σχέση

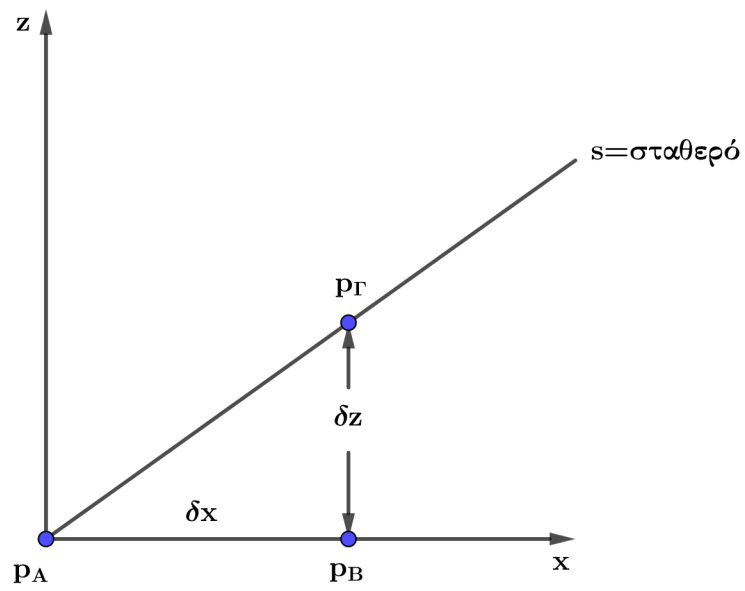
$$\begin{aligned} \frac{p_\Gamma - p_A}{\delta x} &= \frac{p_\Gamma - p_B}{\delta x} + \frac{p_B - p_A}{\delta x} \\ \Rightarrow \frac{p_\Gamma - p_A}{\delta x} &= \frac{p_\Gamma - p_B}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{p_B - p_A}{\delta x} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Παίρνοντας τα όρια για $\delta x, \delta z \rightarrow 0$ έχουμε

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_s = \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \quad (2.44)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\partial p / \partial z = (\partial s / \partial z)(\partial p / \partial s)$ παίρνουμε και μία άλλη μορφή της (2.44):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) \quad (2.45)$$



Σχήμα 2.13: Μορφοποίηση της δύναμης βαροβαθμίδας σε s συντεταγμένες.

Κεφάλαιο 3

Η Εξίσωση Κίνησης

Οι ατμοσφαιρικές κινήσεις διέπονται από τρεις θεμελιώδεις φυσικές αρχές: τη διατήρηση της μάζας, τη διατήρηση της ορμής και τη διατήρηση της ενέργειας. Οι μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν αυτές τις φυσικές αρχές μπορούν να παραχθούν θεωρώντας τις ποσότητες της μάζας, της ορμής και της ενέργειας σε δύο συστήματα αναφοράς, είτε στο σύστημα αναφοράς κατά Euler είτε στο σύστημα αναφοράς κατά Lagrange.

Στο σύστημα αναφοράς κατά Euler ένα στοιχείο όγκου του ρευστού αποτελείται από ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές dx, dy, dz των οποίων η θέση είναι καθορισμένη σύμφωνα με ένα σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς μελετάμε φυσικές ποσότητες όπως η μάζα, η ορμή, η ενέργεια, οι οποίες είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων του ρευστού στο χώρο και του χρόνου (αυτός ο τύπος στοιχείου όγκου χρησιμοποιήθηκε στην ενότητα (2.1)). Το σύστημα αναφοράς κατά Euler είναι πιο εύχρηστο στην επίλυση των περισσότερων προβλημάτων διότι σε αυτό το σύστημα οι μεταβλητές των φυσικών ποσοτήτων σχετίζονται μέσα από ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων στις οποίες οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι συντεταγμένες x, y, z και t .

Στο σύστημα αναφοράς κατά Lagrange θεωρούμε ότι ένα σύνολο στοιχείων μάζας, των οποίων οι θέσεις μια αρχική στιγμή t_0 είναι γνωστές, απαρτίζουν την αέρια μάζα (ή τη μάζα οποιουδήποτε άλλου ρευστού). Είναι απαραίτητο να ακολουθήσουμε τη χρονική εξέλιξη της κίνησης κάθε στοιχείου μάζας. Τότε η κίνηση του στοιχείου μάζας περιγράφεται μέσω των συναρτήσεων $x(x_0, y_0, z_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t)$ καθορίζουν τη θέση (x, y, z) του στοιχείου την χρονική στιγμή t όταν το στοιχείο τη χρονική στιγμή t_0 βρισκόταν στη (x_0, y_0, z_0) . Δηλαδή, οι ανεξάρτητες μεταβλητές x_0, y_0, z_0, t_0 προσδιορίζουν τη θέση του μετά από χρονικό διάστημα t . Στο σύστημα αναφοράς κατά Lagrange κάθε στοιχείο μάζας υπακούει στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μέσω του οποίου καταλήγουμε σε μία διαφορική εξίσωση που μας δίνει την τροχιά του στοιχείου μάζας συναρτήσει του χρόνου και της αρχικής του θέσης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Αυτό το σύστημα αναφοράς είναι χρήσιμο στην απλούστερη έκφραση των νόμων διατήρησης για ένα συγκεκριμένο στοιχείο μάζας του ρευστού.

3.1 Ολική Παραγωγή

Οι νόμοι διατήρησης που θα παραχθούν στο κεφάλαιο αυτό καθώς και στο κεφάλαιο 4 θα περιέχουν εκφράσεις όπως οι ρυθμοί μεταβολής της πυκνότητας, της ορμής, της θερμοδυναμικής ενέργειας που σχετίζονται με την κίνηση συγκεκριμένων τμημάτων ρευστού. Προκειμένου να εφαρμοστούν αυτοί οι νόμοι σε ένα σύστημα αναφοράς κατά Euler, είναι απαραίτητο να εξαχθεί μία σχέση μεταξύ του ρυθμού μεταβολής μιας φυσικής ποσότητας που εκφράζει μία ιδιότητα του ρευστού, όπως αυτή καταγράφεται από έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση και το ρυθμό μεταβολής σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή, απαιτείται μία σχέση μεταξύ της ολικής παραγωγού, που θα συμβολίζεται με d/dt , και της μερικής παραγωγού ως προς το χρόνο.

Για να εξάγουμε μία σχέση μεταξύ της ολικής και της μερικής παραγωγού, είναι βολικό να αναφερθούμε σε μία συγκεκριμένη φυσική ποσότητα, όπως η θερμοκρασία T . Έστω ότι έχουμε ένα τμήμα αέρα στην τοποθεσία (x, y, z) , όπου $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο. Ακολουθώντας την κίνηση του τμήματος αέρα, μπορούμε να θεωρήσουμε την θερμοκρασία T ως συνάρτηση μόνο του χρόνου και τότε ο ρυθμός μεταβολής της θα είναι η ολική παράγωγος dT/dt . Έτσι, για να συσχετίσουμε την ολική παράγωγο με το ρυθμό μεταβολής σε ένα συγκεκριμένο σημείο θεωρούμε ότι η θερμοκρασία μετράται σε ένα μπαλόνι που κινείται με την βοήθεια του ανέμου. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 στο σημείο (x_0, y_0, z_0) η θερμοκρασία είναι T_0 . Εάν το μπαλόνι κινηθεί από το σημείο (x_0, y_0, z_0) έως το σημείο $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ σε χρονικό διάστημα δt , τότε η καταγραφόμενη μεταβολή της θερμοκρασίας δT μπορεί να εκφραστεί ως σειρά Taylor ως εξής:

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta z + \dots \quad (3.1)$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{dT}{dt}$$

Οπότε, αν διαιρέσουμε κατά μέλη την εξίσωση (3.1) με δt , τότε για $\delta t \rightarrow 0$ η (3.1) θα δίνει το ρυθμό μεταβολής του T ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση και θα γράφεται ως εξής:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{dz}{dt} \quad (3.2)$$

Όμως, έχουμε ότι:

$$\frac{dx}{dt} \equiv u, \quad \frac{dy}{dt} \equiv v, \quad \frac{dz}{dt} \equiv w,$$

όπου u, v, w είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις x, y, z κατευθύνσεις αντίστοιχα. Και άρα η εξίσωση (3.2) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.4)$$

όπου $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ το διάνυσμα της ταχύτητας και $\vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ η βαθμίδα της θερμοκρασίας T . Ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ καλείται μεταφορά θερμότητας και εκφράζει την αλλαγή της τοπικής θερμοκρασίας λόγω της κίνησης του αέρα. Για παράδειγμα, εάν ο αέρας φυσάει από μία ψυχρότερη σε μία θερμότερη περιοχή, τότε η βαθμίδα της θερμοκρασίας είναι θετική και ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ είναι αρνητικός. Το αρνητικό πρόσημο (-) δηλώνει ότι έχουμε ψυχρή μεταφορά και μείωση της τοπικής θερμοκρασίας. Αντίθετα, εάν ο αέρας φυσάει από μία θερμότερη σε μία ψυχρότερη περιοχή, τότε η βαθμίδα της θερμοκρασίας είναι αρνητική και ο όρος $-\vec{U} \cdot \vec{\nabla}T$ είναι θετικός. Το θετικό πρόσημο (+) δηλώνει ότι έχουμε θερμή μεταφορά και αύξηση της τοπικής θερμοκρασίας. Η ερμηνεία της εξίσωσης (3.4) είναι ότι ο τοπικός ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση συν το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας λόγω μεταφοράς.

Σημειωτέον ότι η σχέση μεταξύ ολικής και μερικής παραγώγου χρησιμοποιώντας τη θερμοκρασία (εξίσωση 3.3) ευσταθεί και για οποιαδήποτε άλλη φυσική ποσότητα.

Παράδειγμα. Έστω ότι ένα πλοίο πλέει ανατολικά στο Αιγαίο πέλαγος κατά την κατεύθυνση του x . Γνωρίζουμε ότι η πίεση επιφανείας στην κατεύθυνση του x μειώνεται 3 hpa ανά 180 km. Το πλοίο κινείται με ταχύτητα μέτρου $u = 10 \text{ km/h}$ και η ένδειξη του βαρομέτρου του δείχνει πτώση της πίεσης 1 hpa ανά 3 ώρες. Ποια είναι η μεταβολή της πίεσης σε ένα συγκεκριμένο νησί από το οποίο διέρχεται το πλοίο;

Από την εξίσωση (3.3) έχουμε ότι η μεταβολή της πίεσης σε ένα συγκεκριμένο νησί είναι:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{dt} - u \frac{\partial P}{\partial x} = \left(-\frac{1 \text{ hpa}}{3 \text{ h}} \right) - 10 \text{ km/h} \cdot \left(-\frac{3 \text{ hpa}}{180 \text{ km}} \right) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \text{ hpa/h}$$

$$\text{και άρα } \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{6} \text{ hpa/h}$$

3.1.1 Ολική παραγωγή διανύσματος σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Ο νόμος διατήρησης της ορμής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) συσχετίζει το ρυθμό μεταβολής της ορμής ως προς έναν παρατηρητή που ακολουθεί την κίνηση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό. Στις περισσότερες εφαρμογές στη μετεωρολογία χρησιμοποιείται ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται μαζί με τη γη. Έτσι, η μεταροπή της εξίσωσης της ορμής απαιτεί μία σχέση μεταξύ της ολικής παραγώγου ενός διανύσματος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και της αντίστοιχης ολικής παραγώγου σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Για να εξαχθεί αυτή η σχέση, θεωρούμε ένα αυθαίρετο διάνυσμα \vec{A} του οποίου οι συνιστώσες σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι:

$$\vec{A} = \vec{i}'A'_x + \vec{j}'A'_y + \vec{k}'A'_z$$

και οι συνιστώσες σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με γωνιακή ταχύτητα Ω είναι:

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

Αν συμβολίσουμε με d_α/dt το ολικό διαφορικό του \vec{A} σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} &= \vec{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \vec{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \vec{k}' \frac{dA'_z}{dt} \\ &= \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} + \frac{d_\alpha \vec{i}}{dt} A_x + \frac{d_\alpha \vec{j}}{dt} A_y + \frac{d_\alpha \vec{k}}{dt} A_z\end{aligned}\quad (3.5)$$

Όπου, $\frac{d\vec{A}}{dt} \equiv \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt}$ το ολικό διαφορικό του \vec{A} όπως παρατηρείται από ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του \vec{A} όπως παρατηρείται ακολουθώντας την σχετική κίνηση). Ουσιαστικά, η πρώτη ισότητα εκφράζει την ταχύτητα συναρτήσεως των συντεταγμένων της ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η δεύτερη ισότητα προκύπτει εάν τώρα αντικαταστήσουμε το \vec{A} συναρτήσεως των συντεταγμένων του ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

Οι τρεις τελευταίοι όροι της εξίσωσης (3.5) εμφανίζονται διότι οι διευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ αλλάζουν συνεχώς προσανατολισμό καθώς η γη περιστρέφεται. Αυτοί οι όροι έχουν απλή μορφή σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Για παράδειγμα, θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της δύσης-ανατολής:

$$\delta \vec{i} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial \vec{i}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \vec{i}}{\partial z} \delta z \quad (3.6)$$

Για την περιστροφή ενός στερεού σώματος έχουμε ότι: $\delta \lambda = \Omega \cdot \delta t$, $\delta \phi = 0$, $\delta z = 0$ και άρα διαιρώντας κατά μέλη την εξίσωση (3.6) έχουμε:

$$\frac{\delta \vec{i}}{\delta t} = \left(\frac{\partial \vec{i}}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\delta \lambda}{\delta t} \right) \quad \text{και για } \delta t \rightarrow 0 \text{ θα ισχύει } \frac{d_\alpha \vec{i}}{dt} = \Omega \frac{\partial \vec{i}}{\partial \lambda} \quad (3.7)$$

Όπως φαίνεται, όμως, από τα παρακάτω σχήματα (3.1) και (3.2) η μερική παράγωγος του \vec{i} ως προς το λ (ως προς την κατεύθυνση της παραλλήλου) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{\partial \vec{i}}{\partial \lambda} = \vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi \quad (3.8)$$

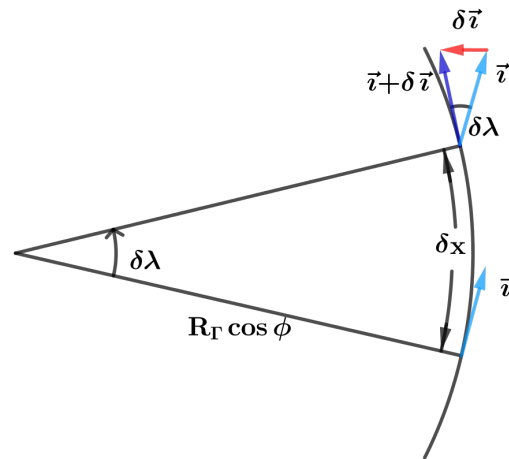
Ωστόσο, $\vec{\Omega} = (0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi)$ και άρα

$$\frac{d_\alpha \vec{i}}{dt} = \Omega (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) = \vec{\Omega} \times \vec{i} \quad (3.9)$$

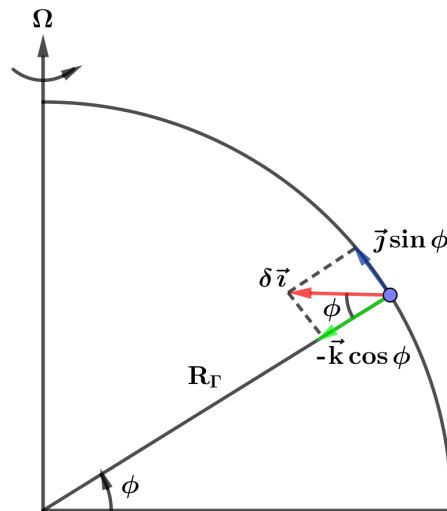
Με όμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι: $d_\alpha \vec{j}/dt = \vec{\Omega} \times \vec{j}$, $d_\alpha \vec{k}/dt = \vec{\Omega} \times \vec{k}$. Επομένως, η ολική παράγωγος για ένα διάνυσμα σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς σχετίζεται με αυτή σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς από την έκφραση:

$$\frac{d_\alpha \vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (3.10)$$

3.2. Η ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ



Σχήμα 3.1: Μερική παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος \vec{i} ως προς το λ (κατεύθυνση παραλλήλου).



Σχήμα 3.2: Ανάλυση του διανύσματος $\delta\vec{i}$ του σχήματος (3.1) σε δύο συνιστώσες σε γεωγραφικό πλάτος ϕ : η μία έχει κατεύθυνση το βόρειο πόλο και η άλλη είναι κάθετη στην επιφάνεια της γης με φορά προς το κέντρο της.

3.2 Η διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί συμβολικά ως εξής:

$$\frac{d_a \vec{U}}{dt} = \sum_{n=1} \vec{F} \quad (3.11)$$

Το αριστερό μέλος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της απόλυτης ταχύτητας, όπως παρατηρείται ακολουθώντας την κίνηση σε ένα αδρανειακό σύστημα. Το δεξί μέλος αναπαριστά το άθροισμα των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται ανά μονάδα μάζας αέρα. Στην ενότητα 2.4 αιτιολογήσαμε με φυσική ερμηνεία ότι όταν η κίνηση παρατηρείται από ένα περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα συντεταγμένων, συγκεκριμένες επιπρόσθετες φαινόμενες δυνάμεις πρέπει να συμπεριληφθούν έτσι ώστε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα να είναι έγκυρος. Στα ίδια αποτελέσματα θα καταλήξουμε κάνοντας μετατροπή της (3.11) σε περιστρεφόμενες συντεταγμένες.

Για να μετατρέψουμε τη μαθηματική έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα (3.11) σε περιστρεφόμενες συντεταγμένες, θα πρέπει πρώτα να βρούμε μία σχέση μεταξύ της απόλυτης ταχύτητας \vec{U}_α και της ταχύτητας \vec{U} ως προς ένα σύστημα περιστρεφόμενων συντεταγμένων. Τη σχέση αυτή θα την εξάγουμε εφαρμόζοντας την (3.10) για το διάνυσμα θέσης \vec{r} ενός τμήματος αέρα στην περιστρεφόμενη γη:

$$\frac{d_\alpha \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.12)$$

Όμως, $d_\alpha \vec{r}/dt \equiv \vec{U}_\alpha$ και $d\vec{r}/dt \equiv \vec{U}$ και άρα η (3.12) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\vec{U}_\alpha = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.13)$$

που σημαίνει ότι η απόλυτη ταχύτητα ενός αντικειμένου στην περιστρεφόμενη γη ισούται με την ταχύτητα του σχετικά με τη γη συν την ταχύτητα λόγω περιστροφής της γης.

Τώρα, εφαρμόζοντας πάλι την (3.10) για το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{U}_α έχουμε:

$$\frac{d_\alpha \vec{U}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{U}_\alpha}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U}_\alpha \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας την (3.13) στο δεξί μέλος της (3.14) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha \vec{U}_\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{U}}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \Omega^2 \vec{R} \end{aligned} \quad (3.15)$$

όπου το $\vec{\Omega}$ υποθέτουμε ότι είναι σταθερό. Το \vec{R} είναι διάνυσμα κάθετο στον άξονα περιστροφής της γης με μέτρο ίσο με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να αναλύσουμε το \vec{r} σε δύο συνιστώσες: μια κάθετη στον άξονα περιστροφής $r_\perp = R$ και μία παράλληλη r_\parallel . Σε αντίθεση με την κάθετη, η παράλληλη συνιστώσα δεν συνεισφέρει στο εξωτερικό γινόμενο. Έτσι,

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 \vec{R}$$

Η εξίσωση (3.15) εκφράζει ότι η επιτάχυνση όπως παρατηρείται η κίνηση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισούται με το ρυθμό μεταβολής της σχετικής με τη γη

ταχύτητας ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς συν την Coriolis επιτάχυνση εξαιτίας της κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς συν την κεντρομόλο επιτάχυνση λόγω της περιστροφής των συντεταγμένων.

Εάν υποθέσουμε ότι οι μόνες πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται στην ατμόσφαιρα είναι η δύναμη της βαροβαθμίδας, της βαρύτητας και της τριβής, μπορούμε να ξαναγράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (3.11) με τη βοήθεια της (3.15) ως εξής:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \vec{F}_T \quad (3.16)$$

όπου \vec{F}_T η δύναμη τριβής (βλ. ενότητα 2.2) και ο όρος \vec{g} εκφράζει την ενεργό βαρύτητα που είναι συνδυασμός της βαρύτητας και της φυγόκεντρου δύναμης (βλ. υποενότητα 2.4.2). Η εξίσωση (3.16) αποτελεί την έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σχετικά με ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η ερμηνεία της είναι ότι η επιτάχυνση ακολουθώντας την κίνηση σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς ισούται με το άθροισμα της δύναμης Coriolis, της δύναμης βαροβαθμίδας, της ενεργής βαρύτητας και της δύναμης της τριβής. Αυτή η μορφή της εξίσωσης κίνησης είναι βασική στη δυναμική μετεωρολογία.

3.3 Οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Για σκοπούς θεωρητικής ανάλυσης και αριθμητικής πρόγνωσης, είναι απαραίτητο να αναλύσουμε τη διανυσματική μορφή της εξίσωσης κίνησης (3.16) στις συνιστώσες της (που είναι βαθμωτά μεγέθη). Καθώς η απόκλιση του σχήματος της γης από αυτό της σφαίρας είναι αμελητέο, είναι εύλογο να μορφοποιήσουμε την (3.16) σε σφαιρικές συντεταγμένες, έτσι ώστε το επίπεδο της επιφάνειας της γης να αντιστοιχεί σε μία επιφάνεια συντεταγμένων. Οι άξονες θα είναι τότε οι λ , ϕ , z , όπου λ είναι το μήκος, ϕ είναι το πλάτος και z είναι η κάθετη απόσταση από την επιφάνεια της γης (βλ ενότητα 1.3). Τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i} , \vec{j} και \vec{k} με κατεύθυνση την ανατολή, με κατεύθυνση το βορρά και με κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια της γης, αντίστοιχα (Σχήμα 1.1). Τότε η ταχύτητα γράφεται:

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

όπου οι συνιστώσες u , v και w προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$u = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (3.17)$$

Εδώ r είναι η απόσταση από το κέντρο της γης που σχετίζεται με το z από τη σχέση: $r = R_{\Gamma} + z$, όπου R_{Γ} είναι η ακτίνα της γης. Είθισται η μεταβλητή r στην (3.17) να αντικαθιστάται από τη σταθερά R_{Γ} . Αυτό είναι μία πολύ καλή προσέγγιση αφού $z \ll R_{\Gamma}$ για περιοχές της γης που απασχολούν τους μετεωρολόγους.

Προς απλότητα των συμβολισμών, συμβολίζουμε με x και y την ανατολική και βόρεια απόσταση αντίστοιχα έτσι ώστε $dx = R_{\Gamma} \cos \phi d\lambda$ και $dy = R_{\Gamma} d\phi$. Έτσι, οι συνιστώσες της οριζόντιας ταχύτητας είναι $u = dx/dt$ και $v = dy/dt$ στην ανατολική

και βόρεια διεύθυνση αντίστοιχα. Να σημειωθεί, ωστόσο, ότι το (x, y, z) σύστημα συντεταγμένων που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο δεν είναι ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων επειδή οι διευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων \vec{i} , \vec{j} και \vec{k} δεν είναι σταθερές αλλά συναρτήσεις της θέσης πάνω στη σφαιρική γη. Αυτή η εξάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων από τη θέση θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην ανάλυση του διανύσματος της επιτάχυνσης σε συνιστώσες πάνω στη σφαίρα. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} + w \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (3.18)$$

Επομένως, είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής των μοναδιαίων διανυσμάτων που ακολουθούν την κίνηση. Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το $d\vec{i}/dt$. Αφού το \vec{i} είναι συνάρτηση μόνο του x (ένα διάνυσμα με ανατολική κατεύθυνση δεν μεταβάλλεται ως προς τον προσανατολισμό του αν η κίνηση έχει βόρεια, νότια ή κάθετη διεύθυνση), τότε από τη σχέση (3.3) έχουμε:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$$

Από το παραπάνω σχήμα (3.1) βλέπουμε ότι από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \vec{i}|}{\delta x} = \left| \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \right| = \frac{1}{R_{\Gamma} \cos \phi}$$

με το διάνυσμα $\partial \vec{i} / \partial x$ να έχει κατεύθυνση προς τον άξονα περιστροφής. Επίσης, όπως απεικονίζεται στο σχήμα (3.2):

$$\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \frac{1}{R_{\Gamma} \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi)$$

Άρα,

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{u}{R_{\Gamma} \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) \quad (3.19)$$

Θεωρούμε τώρα το $d\vec{j}/dt$. Το διάνυσμα \vec{j} είναι συνάρτηση μόνο του x και του y . Έτσι, με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος (3.3) βλέπουμε ότι για μία ανατολική κίνηση ισχύει ότι $|\delta \vec{j}| = \delta x / (R_{\Gamma} / \tan \phi)$. Επειδή το διάνυσμα $\frac{\partial \vec{j}}{\partial x}$ έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά x έχουμε:

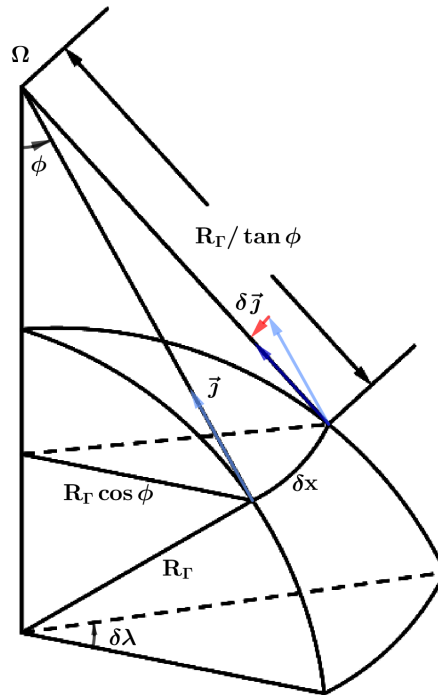
$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = -\frac{\tan \phi}{R_{\Gamma}} \vec{i}$$

Από το παρακάτω σχήμα (3.4) είναι φανερό ότι για μία κίνηση προς το βορρά ισχύει $|\delta \vec{j}| = \delta y$, αλλά $\delta y = R_{\Gamma} \delta \phi$ και το $\delta \vec{j}$ κατευθύνεται προς τα κάτω έτσι ώστε:

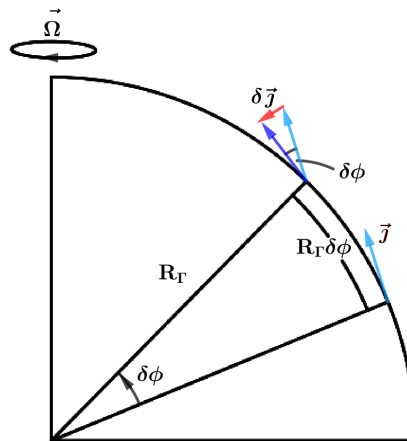
$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial y} = -\frac{\vec{k}}{R_{\Gamma}}$$

Έτσι,

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\frac{u \tan \phi}{R_{\Gamma}} \vec{i} - \frac{v}{R_{\Gamma}} \vec{k} \quad (3.20)$$



Σχήμα 3.3: Το διάνυσμα \vec{j} εξαρτάται από το μήκος.



Σχήμα 3.4: Το διάνυσμα \vec{j} εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος

Τελικά, με όμοια επιχειρήματα μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i} \frac{u}{R_\Gamma} + \vec{j} \frac{u}{R_\Gamma} \quad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.19), (3.20), (3.21) στην εξίσωση (3.18) παίρνουμε την επι-

τάχυνση (ακολουθώντας την κίνηση) σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= \vec{i} \cdot \frac{du}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dv}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dw}{dt} + u \cdot \left(\frac{u}{R_\Gamma \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) \right) \\ &+ v \cdot \left(-\frac{u \tan \phi}{R_\Gamma} \vec{i} - \frac{v}{R_\Gamma} \vec{k} \right) + w \cdot \left(\vec{i} \frac{u}{R_\Gamma} + \vec{j} \frac{v}{R_\Gamma} \right) \\ \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt} &= \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{uw}{R_\Gamma} \right) \vec{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{vw}{R_\Gamma} \right) \vec{j} \\ &+ \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_\Gamma} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τις συνιστώσες των δυνάμεων που εκφράζονται με τους όρους στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.16). Θα αναλύσουμε τη δύναμη Coriolis αφού πρώτα σημειώσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της γης $\vec{\Omega}$ δεν έχει συνιστώσα παράλληλη στο \vec{i} και οι συνιστώσες που είναι παράλληλες στο \vec{j} και στο \vec{k} είναι $2\vec{\Omega} \cos \phi$ και $2\vec{\Omega} \sin \phi$, αντίστοιχα.

Τότε, από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων έχουμε ότι η δύναμη Coriolis ανά μονάδα μάζας σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned} -2\vec{\Omega} \times \vec{U} &= -2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= (-2\Omega w \cos \phi + 2\Omega v \sin \phi) \vec{i} - 2\Omega u \sin \phi \vec{j} + 2\Omega u \cos \phi \vec{k} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Η δύναμη βαροβαθμίδας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \quad (3.24)$$

Η δύναμη βαρύτητας μπορεί, προφανώς, να εκφραστεί από την:

$$\vec{g} = -g\vec{k} \quad (3.25)$$

όπου g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας ($g \cong 9,8 \text{ ms}^{-2}$ στην επιφάνεια της γης)

Από τις εξισώσεις (2.10) της ενότητας της δύναμης τριβής (2.2) έπεται ότι η δύναμη ιξώδους γράφεται:

$$\vec{F}_T = F_{Tx} \vec{i} + F_{Ty} \vec{j} + F_{Tz} \vec{k} \quad (3.26)$$

Από τις εξισώσεις (3.22), (3.26) και την εξίσωση κίνησης (3.16) εξισώνοντας όλους τους όρους στις διευθύνσεις των \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{uw}{R_\Gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega w \cos \phi + 2\Omega v \sin \phi + F_{Tx} \quad (3.27)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma} + \frac{vw}{R_\Gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + F_{Ty} \quad (3.28)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_\Gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi + F_{Tz} \quad (3.29)$$

όπου η (3.27) είναι η ανατολική, η (3.28) είναι η βόρεια και η (3.29) είναι η κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης.

3.4 Ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων κίνησης

Στην ενότητα 1.2 μιλήσαμε για τη βασική έννοια της ανάλυσης κλίμακας με σκοπό να καθορίσουμε ποιοι όροι των εξισώσεων μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι για κινήσεις μετεωρολογικού ενδιαφέροντος. Κάθε ατμοσφαιρική κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως επιμέρους λύσης των εξισώσεων κίνησης (3.27), (3.28), (3.29) οι οποίες είναι μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις η λύση των οποίων είναι δύσκολη έως και αδύνατη. Έτσι, για να βρεθεί μία λύση απλοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης θεωρώντας αμελητέους και παραβλέπωντας κάποιους όρους που είναι μικροί σε σύγκριση με άλλους και η συνεισφορά τους στην προσδόκιμη λύση έχει μικρή σημασία. Με αυτό τον τρόπο ουσιαστικά απαλείφουμε κάποια ανεπιθύμητα είδη κινήσεων. Για παράδειγμα, τα ηχητικά κύματα περιγράφονται επακριβώς από τις λύσεις των εξισώσεων (3.27), (3.28), (3.29), ωστόσο, τα ηχητικά κύματα είναι αμελητέας σημασίας για τη δυναμική μετεωρολογία. Συνεπώς θα ήταν μεγάλο πλεονέκτημα εάν μπορούσαμε να απαλείψουμε όρους που οδηγούν στην παραγωγή των ηχητικών κυμάτων και άρα να απαλείψουμε αυτό το ανεπιθύμητο είδος κίνησης.

Για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης για κινήσεις συνοπτικής κλίμακας μεσαίου πλάτους, προσδιορίζουμε τις ακόλουθες χαρακτηριστικές κλίμακες των μεταβλητών που εκφράζουν φυσικές ποσότητες βάσει των τιμών που έχουν παρατηρηθεί σε συνοπτικά συστήματα μεσαίου πλάτους.

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικές κλίμακες φυσικών ποσοτήτων σε συνοπτικά συστήματα μεσαίου πλάτους

$U \sim 10$	ms^{-1}	κλίμακα οριζόντιας ταχύτητας
$W \sim 1$	cms^{-1}	κλίμακα κάθετης ταχύτητας
$L \sim 10^6$	m	κλίμακα μήκους [$1/(2\pi)$ μήκος κύματος]
$H \sim 10^4$	m	κλίμακα βάρους
$\delta P/\rho \sim 10^3$	m^2s^{-2}	οριζόντια κλίμακα διακύμανσης της πίεσης
$L/U \sim 10^5$	s	χρονική κλίμακα

Η οριζόντια διακύμανση της πίεσης δP κανονικοποιείται από την πυκνότητα ρ με σκοπό να παραχθεί μία εκτίμηση της κλίμακας που είναι έγκυρη σε όλα τα ύψη της τροπόσφαιρας, παρά την κατά προσέγγιση εκθετική μείωση με το ύψος του δP και ρ . Να σημειώσουμε ότι το $\delta P/\rho$ έχει μονάδες γεωδυναμικού. Πηγαίνοντας πίσω στη σχέση βλέπουμε ότι πράγματι το μέτρο της διακύμανσης του $\delta P/\rho$ σε μία επιφάνεια σταθερού γεωδυναμικού πρέπει να ισούται με το μέτρο της διακύμανσης του γεωδυναμικού σε μία ισοβαρική επιφάνεια. Η χρονική κλίμακα εδώ είναι κατάλληλη για συστήματα πίεσης που κινούνται κατά προσέγγιση με την ταχύτητα του οριζόντιου ανέμου, όπως παρατηρείται σε κινήσεις συνοπτικής κλίμακας. Έτσι, L/U είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ταξιδέψει απόσταση L με ταχύτητα U .

Πρέπει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι η συνοπτικής κλίμακας κάθετη ταχύτητα δεν είναι μία απευθείας μετρήσιμη ποσότητα. Αντίθετα, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5 μπορούμε να βρούμε το μέτρο της w αν γνωρίζουμε την οριζόντια ταχύτητα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα το μέγεθος κάθε όρου των (3.27), (3.28) για συνοπτικής κλίμακας κινήσεις για δοσμένο γεωγραφικό πλάτος. Ας θεωρήσουμε μία διαταραχή με κέντρο στο γεωγραφικό πλάτος των 45° . Τότε, η παράμετρος Coriolis

είναι:

$$f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 = 2\Omega \cos \phi_0 \cong 10^{-4} s^{-1}$$

Πίνακας 3.2: Ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων οριζόντιας κίνησης

	A	B	Γ	Δ	E	Z	Θ
Εξ.-x	du/dt	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{R_\Gamma}$	$-\frac{uv \tan \phi}{R_\Gamma}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{Tx}$
Εξ.-y	dv/dt	$-2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{R_\Gamma}$	$-\frac{u^2 \tan \phi}{R_\Gamma}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{Ty}$
κλίμακες	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{R_\Gamma}$	$\frac{U^2}{R_\Gamma}$	$\delta P/\rho L$	$\frac{\nu U}{H^2}$
ms^{-2}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

Ο πίνακας 3.2 δείχνει τα χαρακτηριστικά μεγέθη κάθε όρου στις (3.27), (3.28) βάσει όσων έχουν αναφερθεί για την ανάλυση κλίμακας. Ο όρος της μοριακής τριβής είναι τόσο μικρός που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος για όλες τις κινήσεις εκτός από τις πιο μικρές κλίμακας τυρβώδεις κινήσεις κοντά στο έδαφος, όπου η κάθετη διάτμηση του ανέμου μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη και όρος της μοριακής τριβής πρέπει να διατηρηθεί.

3.4.1 Η υδροστατική προσέγγιση

Μία παρόμοια ανάλυση κλίμακας μπορεί να εφαρμοστεί και στη κάθετη συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης (3.29). Επειδή η πίεση μειώνεται κατά μία τάξη μεγέθους από το έδαφος έως την τροπόπαυση, η κάθετη βαθμίδα πίεσης μπορεί να κλιμακωθεί από το P_0/H , όπου P_0 είναι η πίεση επιφανείας και H είναι το ύψος της τροπόσφαιρας. Έτσι, οι όροι στην (3.29) μπορούν να εκτιμηθούν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 3.3. Όπως και στις εξισώσεις οριζόντιας κίνησης, θεωρούμε κινήσεις που το κέντρο τους βρίσκεται σε γεωγραφικός πλάτος 45° και η τριβή είναι αμελητέα. Η κλιμάκωση δείχνει ότι κατά ένα μεγάλο ποσοστό ακρίβειας η πίεση είναι σε υδροστατική ισορροπία, δηλαδή η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο ισούται με το βάρος της στήλης αέρα με μοναδιαία διατομή που βρίσκεται πάνω από το σημείο.

Η προηγούμενη ανάλυση της εξίσωσης κάθετης κίνησης είναι, ωστόσο, παραπλανητική. Δεν αρκεί να δείξουμε απλώς ότι η κάθετη επιτάχυνση είναι μικρή σε σχέση με το g . Επειδή μόνο η συνιστώσα της πίεσης που μεταβάλλεται οριζόντια συνδέεται άμεσα με την οριζόντια ταχύτητα, είναι απαραίτητο να αποδειχθεί ότι η οριζόντια μεταβαλλόμενη συνιστώσα της πίεσης είναι και αυτή σε υδροστατική ισορροπία με την οριζόντια μεταβαλλόμενη πυκνότητα. Για να το δείξουμε αυτό θεωρούμε αρχικά μία τυπική πίεση $p_0(z)$, η οποία είναι η οριζόντια μέση πίεση σε κάθε ύψος, και την αντιστοιχη τυπική πυκνότητα $\rho_0(z)$, έτσι ώστε $p_0(z)$ και $\rho_0(z)$ να είναι σε υδροστατική

ισορροπία:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} \equiv -g \quad (3.30)$$

Έπειτα, γράφουμε τη συνολική πίεση και πυκνότητα ως εξής:

Πίνακας 3.3: Ανάλυση κλίμακας της εξίσωσης κάθετης κίνησης

Εξ.-z	dw/dt	$-2\Omega u \cos \phi$	$-(u^2 + v^2)/R_\Gamma$	$= -\rho^{-1} \partial p / \partial z$	$-g$	$+F_{Tz}$
κλίμακας	UW/L	$f_0 U$	U^2/R_Γ	$P_0/\rho H$	g	$\nu W H^{-2}$
$m s^{-2}$	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10	10	10^{-15}

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t) \quad (3.31)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

όπου p' και ρ' είναι οι αποκλίσεις από τις τυπικές τιμές της πίεσης και της πυκνότητας, αντίστοιχα. Έτσι, για μια ατμόσφαιρα σε ηρεμία τα p' και ρ' θα ήταν μηδέν. Χρησιμοποιώντας τις (3.30) και (3.32) και υποθέτωντας ότι $\rho'/\rho_0 \ll 1$ έτσι ώστε $\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \cong \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right)$, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= -\frac{1}{(\rho_0 + \rho')} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \approx -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{dp_0}{dz} - \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial p_0}{\partial z} - \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial p'}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\rho'}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \left[\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Για κινήσεις συνοπτικής κλίμακας, οι όροι στη (3.32) έχουν μέγεθος:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \sim \left[\frac{\delta P}{\rho_0 H} \right] \sim 10^{-1} m s^{-2}, \quad \frac{\rho' g}{\rho_0} \sim 10^{-1} m s^{-2}$$

Συγκρίνοντας αυτά τα μεγέθη με αυτά των άλλων όρων στην εξίσωση κάθετης κίνησης (πίνακας 3.3), βλέπουμε ότι κατά μία καλή προσέγγιση η αποκλίνουσα πίεση είναι σε υδροστατική ισορροπία με την αποκλίνουσα πυκνότητα, δηλαδή

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0 \quad (3.33)$$

Ωστόσο, για κινήσεις συνοπτικής κλίμακας οι κάθετες επιταχύνσεις είναι αμελητέες και έτσι η κάθετη ταχύτητα δεν μπορεί να καθοριστεί από την εξίσωση κάθετης κίνησης. Εν τούτοις, θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5 ότι είναι δυνατό να συναχθεί έμμεσα η κάθετη κίνηση.

Κεφάλαιο 4

Οι Εξισώσεις Συνέχειας και Θερμοδυναμικής

4.1 Η εξίσωση συνέχειας

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τη δεύτερη από τις τρεις θεμελιώδεις αρχές διατήρησης: την διατήρηση της μάζας. Η μαθηματική σχέση που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας για ένα ρευστό καλείται **εξίσωση συνέχειας**. Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε την εξίσωση συνέχειας χρησιμοποιώντας δύο μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται σε έναν όγκο ελέγχου κατά Euler και η δεύτερη μέθοδος βασίζεται σε έναν όγκο ελέγχου κατά Lagrange.

4.1.1 Ανάπτυξη κατά Euler

Θεωρούμε ένα όγκο ελέγχου τοποθετημένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Σε ένα τέτοιο όγκο ελέγχου ο ρυθμός καθαρής εισροής της μάζας διαμέσου των πλευρών ισούται με το ρυθμό συσσώρευσης της μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου. Η καθαρή εισροή της μάζας ισούται με το ρυθμό εισροής μείον το ρυθμό εκροής της μάζας από τον όγκο ελέγχου.

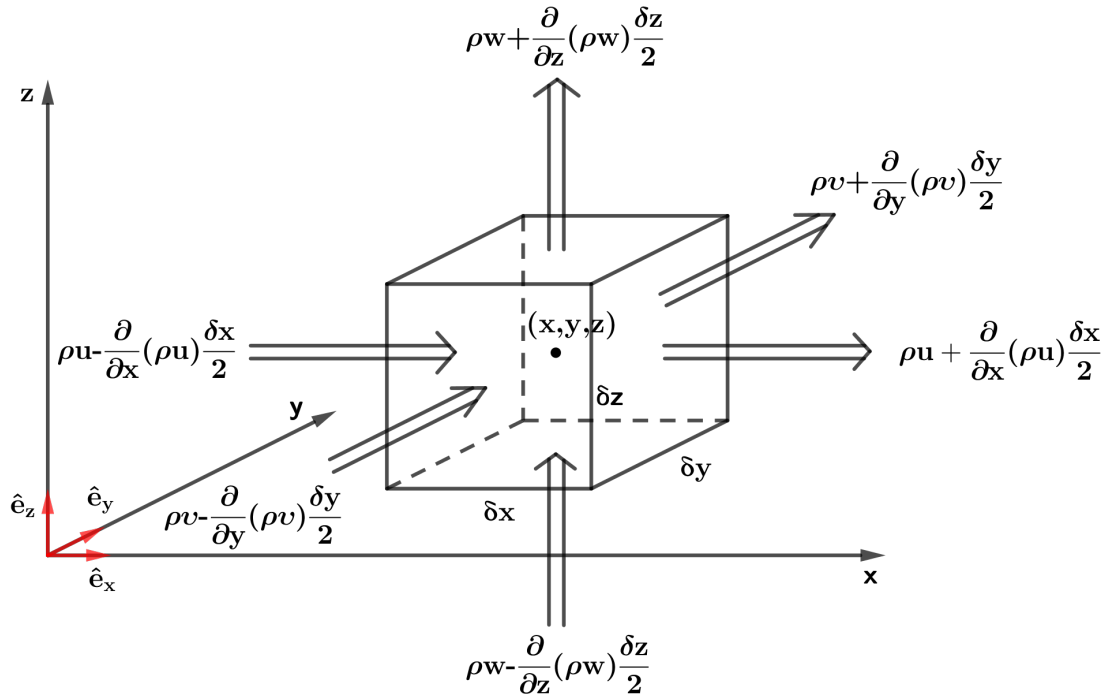
Ο ρυθμός εισροής της μάζας στον όγκο διαμέσου της αριστερής, της μπροστινής και της κάτω πλευράς στην κατεύθυνση του x , y και z αντιστοίχως ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] + \left[\rho v - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} \right] + \left[\rho w - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} \right] \quad (4.1)$$

αντίστοιχα. Ο ρυθμός εκροής της μάζας από τον όγκο ελέγχου διαμέσου των της δεξιάς, της πίσω και της πάνω πλευράς στην κατεύθυνση του x , y και z αντίστοιχα ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] + \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \frac{\delta y}{2} \right] + \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \frac{\delta z}{2} \right] \quad (4.2)$$

Και αφού οι πλευρές στην κατεύθυνση του x , y και z είναι $\delta y \delta z$, $\delta x \delta z$ και $\delta x \delta y$ αντίστοιχα, αφαιρώντας την έκφραση (4.1) από την (4.2) έχουμε ότι ο ρυθμός καθαρής



Σχήμα 4.1: Η ροή της μάζας σε ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου κατά Euler κατά την κίνηση αέριας μάζας και στις τρεις διαστάσεις.

εισροής της μάζας στον όγκο ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned}
 & + \left(-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z + \left(-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \frac{\delta y}{2} - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z \\
 & + \left(-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \frac{\delta z}{2} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \frac{\delta z}{2} \right) \delta x \delta y \\
 & = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \right) \delta x \delta y \delta z - \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right) \delta x \delta y \delta z - \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) \delta x \delta y \delta z \\
 & = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

και άρα η καθαρή εισροή μάζας ανά μονάδα όγκου είναι $-\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U})$, η οποία πρέπει να ισούται με το ρυθμό αύξησης της μάζας ανά μονάδα όγκου. Όμως, ο ρυθμός αύξησης της μάζας ανά μονάδα όγκου είναι η μερική παράγωγος της πυκνότητας $\partial \rho / \partial t$. Οπότε, προκύπτει η εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (4.4)$$

Η εξίσωση (4.4) αποτελεί τη μορφή της εξίσωσης συνέχειας της διανυσματικής απόκλισης της μάζας. Μία άλλη μορφή της εξίσωσης της συνέχειας λαμβάνουμε εάν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των διανυσμάτων:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (4.5)$$

και τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \quad (4.6)$$

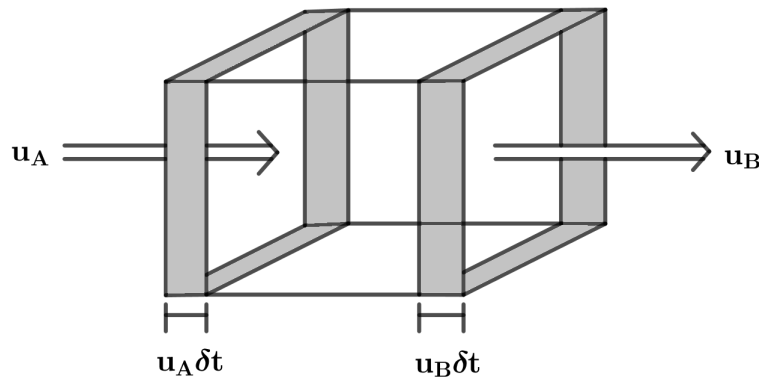
Από την τελευταία σχέση (4.6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\rho \stackrel{(4.4)}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla}(\rho\vec{U}) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\rho \\ \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\rho + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}\rho \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης της συνέχειας εκφράζει ότι η μεταβολή της πυκνότητας όπως ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται όταν ακολουθεί την κίνηση ενός τμήματος αέρα ισούται με μείον την διανυσματική απόκλιση της ταχύτητας. Αυτό διακρίνεται προφανώς και από την (4.4) όπου εκφράζει ότι ο τοπικός ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας ισούται με μείον την απόκλιση της μάζας.

4.1.2 Ανάπτυξη κατά Lagrange

Η φυσική σημασία της απόκλισης μπορεί να αναπαρασταθεί από την ακόλουθη ανάπτυξη της (4.7).



Σχήμα 4.2: Η μεταβολή στον όγκο ελέγχου (γκρι χρώμα) ως αποτέλεσμα της κίνησης του ρευστού παράλληλα με τον άξονα x .

Θεωρούμε ένα όγκο ελέγχου σταθερής μάζας δM που κινείται με το ρευστό. Έστω $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ ο όγκος. Επειδή $\delta M = \rho \delta V = \rho \delta x \delta y \delta z$ διατηρείται ακολουθώντας την κίνηση μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta M} \frac{d}{dt} (\delta M) &= \frac{1}{\rho \delta V} \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = \frac{1}{\rho \delta V} \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot \delta V + \rho \cdot \frac{d}{dt} (\delta V) \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Όμως,

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt}(\delta z) \quad (4.9)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2 οι πλευρές A και B του όγκου ελέγχου στο επίπεδο yz μεταφέρονται μαζί με τη ροή στην κατεύθυνση του x με ταχύτητες $u_A = dx/dt$ και $u_B = d(x + \delta x)/dt$, αντίστοιχα. Έτσι, η διαφορά ταχύτητας των δύο πλευρών είναι $\delta u = u_B - u_A = d(x + \delta x)/dt - dx/dt$ ή $\delta u = d(\delta x)/dt$. Όμοια έχουμε ότι $\delta v = d(\delta y)/dt$ και $\delta w = d(\delta z)/dt$. Οπότε,

$$\lim_{\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt}(\delta V) \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (4.10)$$

Άρα, δείξαμε ότι η διανυσματική απόκλιση της ταχύτητας τριών διαστάσεων ισούται με το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός τμήμα ρευστού όταν $\delta V \rightarrow 0$ και ότι το όριο όταν $\delta V \rightarrow 0$ της (4.8) μας δίνει την εξίσωση συνέχειας (4.7).

4.1.3 Ανάλυση κλίμακας της εξίσωσης συνέχειας

Ακολουθώντας την τεχνική (υδροστατική προσέγγιση) που ακολουθήσαμε στην ενότητα 3.4.1 και υποθέτωντας ξανά ότι $|\rho'/\rho_0| \ll 1$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξίσωση συνέχειας (4.7) ως εξής:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right)}_A + \underbrace{\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}_B + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{U}}_C \approx 0 \quad (4.11)$$

όπου το ρ' αναπαριστά την τοπική απόκλιση της πυκνότητας από την οριζόντια μέση τιμή της $\rho_0(z)$. Για συνοπτικής κλίμακας κινήσεις, $\rho'/\rho_0 \sim 10^{-2}$ έτσι ώστε χρησιμοποιώντας τις χαρακτηριστικές κλίμακες στην ενότητα 3.4 βρίσκουμε ότι ο όρος A έχει μέτρο:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right) \sim \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{U}{L} \approx 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

Για κινήσεις για τις οποίες ισχύει $d \ln \rho_0 \sim H^{-1}$ ο όρος B κλιμακώνεται ως εξής:

$$\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \sim \frac{W}{H} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Μορφοποιώντας τον όρο B σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Για συνοπτικής κλίμακας κινήσεις, οι όροι $\partial u/\partial x$ και $\partial v/\partial y$ τείνουν να έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο. Έτσι, τείνουν να βρισκόνται σε ισορροπία έτσι ώστε:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-1} \frac{U}{L} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{H} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Έτσι, οι όροι B και Γ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και μεγαλύτεροι από τον όρο A κα κατά μία πρώτη προσέγγιση είναι ισορροπούν στην εξίσωση συνέχειας. Κατά μία πιο καλή προσέγγιση έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{d}{dz} (\ln \rho_0) = 0$$

ή στη διανυσματική μορφή

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{U}) = 0 \quad (4.12)$$

4.2 Η εξίσωση της θερμοδυναμικής ενέργειας

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε την τρίτη θεμελιώδη αρχή διατήρησης: **την αρχή διατήρησης της ενέργειας** όπως εφαρμόζεται σε ένα κινούμενο στοιχείο ρευστού και σύμφωνα με την οποία η ενέργεια ενός απομωνομένου συστήματος ούτε καταστρέφεται ούτε παράγεται εκ του μηδενός, αλλά μετατρέπεται από τη μία μορφή στην άλλη. Στην ανάλυση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής, ο οποίος συνήθως αναπτύσσεται θεωρώντας ένα σύστημα σε θερμοδυναμική ισορροπία. Ένα τέτοιο σύστημα είναι εκείνο το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και αφού ανταλλάξει θερμότητα με το περιβάλλον του και παράξει έργο σε αυτό, βρίσκεται και πάλι σε ηρεμία.

Ορισμός 5 (Πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής). Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός θερμοδυναμικού συστήματος (ΔU) ισούται με την αλγεβρική διαφορά ανάμεσα στο ποσό της θερμότητας που απορροφά (Q) και του έργου που δαπανά στο περιβάλλον του (W). Η μαθηματική διατύπωση του είναι η εξής:

$$\Delta U = Q - W$$

Ένα όγκος ελέγχου κατά Lagrange που αποτελείται από συγκεκριμένη μάζα ρευστού θεωρείται ένα θερμοδυναμικό σύστημα. Ωστόσο, αν το ρευστό δεν βρίσκεται σε ηρεμία, τότε δεν θα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Η συνολική θερμοδυναμική ενέργεια ενός όγκου ελέγχου θεωρούμε ότι αποτελείται από το άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας, που οφείλεται ουσιαστικά στην κινητική ενέργεια των μορίων, και της κινητικής ενέργειας λόγω της μακροσκοπικής κίνησης του ρευστού. Αν συμβολίσουμε με E_{cs} την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας ενός στοιχείου ρευστού κατά Lagrange πυκνότητας ρ και όγκου δV , τότε η συνολική θερμοδυναμική ενέργεια που περιέχεται σε αυτό είναι :

$$\rho \left[E_{cs} + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right] \delta V$$

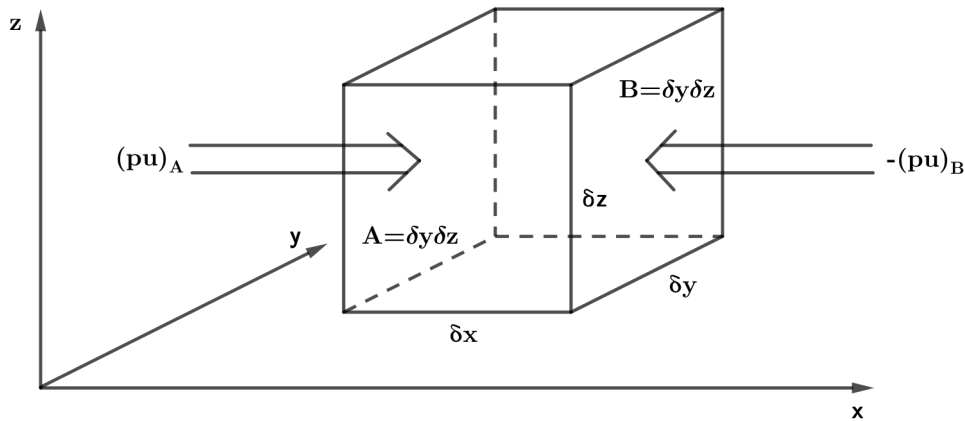
Ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής θερμοδυναμικής ενέργειας ισούται με το ρυθμό της διαβατικής θέρμανσης (ενέργεια που μεταφέρεται ανάμεσα στο τμήμα ρευστού και στο περιβάλλον του) συν το

ρυθμό παραγωγής έργου των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο τμήμα ρευστού.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο τμήμα ρευστού μπορούν να χωριστούν σε επιφανειακές δυνάμεις, όπως είναι η πίεση και το ιξώδες, και τις δυνάμεις σώματος, όπως είναι η βαρύτητα και η δύναμη Coriolis. Ο ρυθμός με τον οποίο το έργο της συνιστώσας της δύναμης πίεσης στη x διεύθυνση που ασκείται στο στοιχείο ρευστού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Ας θυμηθούμε ότι πίεση ορίζεται ως δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας ($p = F/A$) και ότι το έργο δύναμης ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της δύναμης και της ταχύτητας ($W = \vec{F} \cdot \vec{U}$). Τότε, παρατηρούμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο το περιβάλλον του στοιχείου ρευστού παράγει έργο πάνω στο στοιχείο εξαιτίας της δύναμης της πίεσης που ασκείται στις δύο συνοριακές επιφάνειες A και B στο yz επίπεδο είναι:

$$\begin{aligned} W_A - W_B &= F_A u_A - F_B u_B = \frac{F_A}{\delta y \delta z} u_A \delta y \delta z - \frac{F_B}{\delta y \delta z} u_B \delta y \delta z \\ &= (pu)_A \delta y \delta z - (pu)_B \delta y \delta z \end{aligned} \quad (4.13)$$

Επεκτείνοντας τώρα σε σειρά Taylor έχουμε ότι:



Σχήμα 4.3: Ο ρυθμός παραγωγής έργου στο στοιχείο ρευστού λόγω της δύναμης πίεσης στη x διεύθυνση.

$$(pu)_B = (pu)_A + \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) \right]_A \delta x + \dots \quad (4.14)$$

Άρα, από (4.13) και (4.14) βρίσκουμε το συνολικό ρυθμό παραγωγής έργου της συνιστώσας της δύναμης πίεσης στη x διεύθυνση της κίνησης:

$$[(pu)_A - (pu)_B] \delta y \delta z = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) \right]_A \delta V \quad (4.15)$$

όπου $\delta V = \delta x \delta y \delta z$

Ομοίως, οι συνολικοί ρυθμοί παραγωγής έργου των συνιστωσών της δύναμης πίεσης στις y και z διευθύνσεις της κίνησης είναι

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y}(pv) \right] \delta V \quad \text{και} \quad - \left[\frac{\partial}{\partial z}(pw) \right] \delta V \quad (4.16)$$

αντίστοιχα.

Οπότε, ο συνολικός ρυθμός παραγωγής έργου της δύναμης πίεσης είναι:

$$- \vec{\nabla} \cdot (p\vec{U}) \delta V \quad (4.17)$$

Οι μόνες σημαντικές δυνάμεις σώματος από άποψη μετεωρολογικού ενδιαφέροντος είναι η δύναμη της βαρύτητας και η δύναμη Coriolis. Ωστόσο, επειδή η δύναμη Coriolis $2\vec{\Omega} \times \vec{U}$ είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας \vec{U} δεν παράγει έργο. Επομένως, ο συνολικός ρυθμός παραγωγής έργου των δυνάμεων σώματος που ασκούνται στο στοιχείο μάζας είναι:

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V \quad (4.18)$$

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, την αρχή διατήρησης της ενέργειας στον όγκο ελέγχου κατά Lagrange και αγνοώντας τις επιδράσεις που έχει το μοριακό ιζώδες έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(E_{cs} + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \delta V \right] = \rho J \delta V - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{U}) \delta V + \rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V \quad (4.19)$$

όπου, J είναι ο ρυθμός διαβατικής θέρμανσης ανά μονάδα μάζας λόγω ακτινοβολίας, μεταφοράς και απελευθέρωσης λανθάνουσας θερμότητας.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας στην παραγωγή μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (4.19) στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(E_{cs} + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \rho \delta V + \left(E_{cs} + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \frac{d}{dt} (\rho \delta V) \\ = \rho J \delta V - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \delta V - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} p \delta V - \rho g w \delta V \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $\vec{g} = -g\vec{k}$ ($\rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V = -\rho g w \delta V$). Από την σχέση (4.8), όμως, βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος της (4.20) μηδενίζεται. Οπότε, διαιρώντας κατά μέλη με δV προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\rho \frac{dE_{cs}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = \rho J - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - \rho g w \quad (4.21)$$

Από την (3.16) αγνοώντας την επίδραση της τριβής έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \stackrel{(\vec{U})}{\Rightarrow} \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{U} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{g} \cdot \vec{U} \\ \stackrel{(\rho)}{\Rightarrow} \rho \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - \rho g w \Rightarrow \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - \rho g w \end{aligned} \quad (4.22)$$

Άρα, αφαιρώντας την εξίσωση (4.22) από την εξίσωση (4.21) παίρνουμε ότι:

$$\rho \frac{dE_{cs}}{dt} = \rho J - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \quad (4.23)$$

Οι όροι της (4.21) που απαλείφθηκαν από την αφαίρεση αναπαριστούν την ισορροπία της μηχανικής ενέργειας λόγω της κίνησης του στοιχείου ρευστού. Οι όροι που απέμειναν αναπαριστούν την ισορροπία της θερμικής ενέργειας.

Από τον ορισμό του γεωδυναμικού (Ορισμός 4) έχουμε ότι:

$$gw = g \frac{dz}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

και άρα η (4.22) γράφεται και ως εξής:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} + \Phi \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p \quad (4.24)$$

η οποία καλείται **εξίσωση της μηχανικής ενέργειας**. Το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας ονομάζεται **μηχανική ενέργεια**. Έτσι, η (4.24) εκράζει ότι ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας ακολουθώντας την κίνηση ανά μονάδα όγκου ισούται με το ρυθμό που η δύναμη βαροβαθμίδας παράγει έργο

Επίσης, η (4.23) ονομάζεται **εξίσωση της θερμικής ενέργειας**. Όμως, η εξίσωση συνέχειας (4.7) πολλαπλασιασμένη με το $1/\rho$ γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

και η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας για το ξηρό αέρα δίνεται από την $E_{cs} = c_v T$, όπου $c_v = 717 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ η ειδική θερμότητα για σταθερό όγκο. Οπότε, η η (4.23) συνεπάγεται:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \rho J - \rho p \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = J \quad (4.25)$$

η οποία είναι η **συνήθης μορφή της εξίσωσης της θερμοδυναμικής ενέργειας**. Έτσι, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμική, πράγματι, εφαρμόζεται στην κίνηση ενός ρευστού. Ο δεύτερος όρος στο αριστερο μέλος της εξίσωσης της θερμοδυναμικής ενέργειας προσδιορίζει μια μετατροπή ανάμεσα στην θερμική και μηχανική ενέργεια. Αυτή η διαδικασία μετατροπής δίνει τη δυνατότητα στην ηλιακή θερμική ενέργεια να καθορίζει τις κινήσεις της ατμόσφαιρας.

4.3 Η θερμοδυναμική της ξηρής ατμόσφαιρας

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την καταστατική εξίσωση $p\alpha = RT$ (2.28) παίρνουμε:

$$p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt} \Rightarrow p \frac{d\alpha}{dt} = R \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad (4.26)$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε την εξίσωση θερμοδυναμικής ενέργειας σύμφωνα με την οποία

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = J \stackrel{(4.26)}{\Rightarrow} c_v \frac{dT}{dt} + R \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = J \Rightarrow (c_v + R) \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = J \quad (4.27)$$

Αφού $c_p = c_v + R = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ είναι η ειδική θερμότητα για σταθερή πίεση, διαιώνοντας κατά μέλη με T προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} c_p \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha}{T} \frac{dp}{dt} &= \frac{J}{T} \stackrel{(2.28)}{\Rightarrow} c_p \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{J}{T} \\ \Rightarrow c_p \frac{d(\ln T)}{dt} - R \frac{d(\ln p)}{dt} &= \frac{J}{T} \equiv \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad (4.28)$$

η οποία είναι η μορφή εντροπίας του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής. Η εξίσωση (4.28) δίνει το ρυθμό μεταβολής της εντροπίας ανά μονάδα μάζας ακολουθώντας την κίνηση για μια αντιστρέψιμη θερμοδυναμική διαδικασία. Μια τέτοια διαδικασία είναι αυτή κατά την οποία ένα σύστημα υπόκειται σε μεταβολή της θερμοδυναμικής του κατάστασης και επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση χωρίς να επηρεάσει το περιβάλλον του. Για μια τέτοια διαδικασία η εντροπία s προδιορίζεται από την (4.28) και εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του ρευστού. Το ds/dt είναι η ολική παράγωγος του s ως προς το χρόνο, ωστόσο, ο ρυθμός θέρμανσης J δεν αποτελεί ολική παράγωγο.

4.3.1 Η δυνητική θερμοκρασία

Ορισμός 6. Στη θερμοδυναμική η **αδιαβατική μεταβολή** στην οποία υπόκειται ένα ιδανικό αέριο είναι μια αντιστρέψιμη μεταβολή κατά την οποία δεν ανταλλάσσεται θερμότητα με το περιβάλλον.

Για ένα αέριο που υπόκειται σε αδιαβατική μεταβολή ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής μπορεί να γραφεί στη διαφορική μορφή ως εξής

$$c_p d(\ln T) - R d(\ln p) = d(c_p \ln T - R \ln p) = 0$$

Ολοκληρώνοντας από μία κατάσταση με πίεση p και θερμοκρασία T σε μία κατάσταση με πίεση p_s και θερμοκρασία θ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} (c_p \ln \theta - R \ln p_s) - (c_p \ln T - R \ln p) &= 0 \Rightarrow c_p \ln \frac{\theta}{T} - R \ln \frac{p_s}{p} = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\theta}{T} \right)^{c_p} &= \left(\frac{p_s}{p} \right)^R \Rightarrow \theta^{c_p} = T^{c_p} \left(\frac{p_s}{p} \right)^R \\ \Rightarrow \theta &= T (p_s/p)^{R/c_p} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Η εξίσωση (4.29) καλείται **εξίσωση του Poisson** και η θερμοκρασία θ καλείται **δυνητική θερμοκρασία**. Το θ είναι απλώς η θερμοκρασία που θα είχε ένα τμήμα

ξηρού αέρα σε πίεση p και θερμοκρασία T εαν εκτονώνονταν ή συμπιέζονταν αδιαβατικά σε σταθερή πίεση p_s (συνήθως θεωρούμε τα 1000 hpa). Άρα, κάθε τμήμα αέρα έχει μοναδική τιμή δυνητικής θερμοκρασίας και αυτή η τιμή διατηρείται για αδιαβατική κίνηση ξηρού αέρα. Επειδή οι συνοπτικές κλίμακας κινήσεις είναι κατά προσέγγιση αδιαβατικές εκτός από περιοχές όπου επικρατεί υδάτινη κατακρήμνιση, η δυνητική θερμοκρασία θ σχεδόν διατηρείται για τέτοιες κινήσεις. Λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας την (4.29) βρίσκουμε ότι

$$c_p \frac{d(\ln\theta)}{dt} = c_p \frac{d(\ln T)}{dt} - R \frac{d(\ln p)}{dt} \quad (4.30)$$

Συγκρίνοντας την (4.30) με την (4.28) παρατηρούμε ότι

$$c_p \frac{d(\ln\theta)}{dt} = \frac{J}{T} = \frac{ds}{dt} \quad (4.31)$$

Οπότε, για αντιστρέψιμες μεταβολές, οι μεταβολές της δυνητικής θερμοκρασίας είναι πράγματι ανάλογες των μεταβολών της εντροπίας. Επίσης, για ένα τμήμα αέρα που διατηρεί την εντροπία ακολουθώντας την κίνηση θα πρέπει να κινείται κατά μήκος μιας ισεντροπικής (σταθερό θ) επιφάνειας.

4.3.2 Αδιαβατική θερμοβαθμίδα

Τώρα θα αποδείξουμε μία σχέση μεταξύ της θερμοβαθμίδας (ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας με το ύψος) και του ρυθμού μεταβολής της δυνητικής θερμοκρασίας με το ύψος. Αρχικά, θα λογαριθμίσουμε την εξίσωση Poisson (4.29) και θα παραγωγίσουμε ως προς το ύψος. Πιο συγκεκριμένα, λογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\ln \frac{\theta}{T} = \frac{R}{c_p} \ln \frac{p_s}{p} \Rightarrow \ln \theta - \ln T = \frac{R}{c_p} (\ln p_s - \ln p)$$

και αφού όπως ανέφεραμε παραπάνω το p_s είναι σταθερό, παραγωγίζοντας ως προς το ύψος έχουμε

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{p c_p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Από την υδροστατική εξίσωση (2.29) ισχύει ότι $\partial p / \partial z = -\rho g$ και από την καταστατική εξίσωση (2.28) $p = \rho RT \Rightarrow RT/p = 1/\rho$. Άρα,

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\rho c_p} \rho g \Rightarrow \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \quad (4.32)$$

Άρα, για μια ατμόσφαιρα στην οποία η δυνητική θερμοκρασία είναι σταθερή με το ύψος, η θερμοβαθμίδα είναι

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \equiv \Gamma_d \quad (4.33)$$

Έτσι, η ξηρή αδιαβατική θερμοβαθμίδα είναι κατά προσέγγιση σταθερή στην κατώτερη ατμόσφαιρα.

4.3.3 Στατική ευστάθεια

Αν η δυνητική θερμοκρασία είναι μια συνάρτηση του ύψους, τότε η ατμοσφαιρική θερμοβαθμίδα $\Gamma \equiv -\partial T/\partial z$ θα διαφέρει από την αδιαβατική θερμοβαθμίδα Γ_d και

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma \quad (4.34)$$

Αν $\Gamma < \Gamma_d$ έτσι ώστε το θ να αυξάνεται με το ύψος, τότε ένα τμήμα αέρα που υπόκειται σε αδιαβατική μετατόπιση από το επίπεδο ισορροπίας του θα έχει ανοδική τάση αν μετατοπιστεί προς τα κάτω και καθοδική τάση αν μετατοπιστεί προς τα πάνω. Έχει, δηλαδή, την τάση να επιστρέφει στο επίπεδο ισορροπίας και τότε λέμε ότι η ατμόσφαιρα είναι σε στατική ισορροπία ή είναι στατικά ευσταθής.

Αυτές οι ταλαντώσεις ενός τμήματος ρευστού γύρω από το επίπεδο ισορροπίας σε μια στατικά ευσταθής ατμόσφαιρα έχουν χαρακτηριστική συχνότητα την οποία μπορούμε να βρούμε αν θεωρήσουμε τμήμα που μετατοπίζεται κάθετα σε μικρή απόσταση δz χωρίς να επηρεάζει το περιβάλλον του. Αν το περιβάλλον βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, $\rho_0 g = -dp_0/dz$, όπου ρ_0 και p_0 είναι η πυκνότητα και η πίεση του περιβάλλοντος αντίστοιχα. Η κάθετη επιτάχυνση του τμήματος είναι

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.35)$$

όπου ρ και p η πυκνότητα και η πίεση του τμήματος αντίστοιχα. Σε αυτή τη μέθοδο υποθέτουμε ότι η πίεση του τμήματος προσαρμόζεται αμέσως στην πίεση του περιβάλλοντος κατά την μετατόπιση: $p = p_0$. Αυτή η συνθήκη πρέπει να ισχύει εφόσον το τμήμα δεν επηρεάζει το περιβάλλον του. Έτσι, με τη βοήθεια της υδροστατικής εξίσωσης, η πίεση στην (4.35) μπορεί να εξαλειφθεί και να έχουμε ότι

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = g \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) = g \frac{\theta}{\theta_0} \quad (4.36)$$

όπου η εξίσωση poisson και ο νόμος των ιδανικών αερίων χρησιμοποιήθηκαν για να εκφράσουμε τις δυνάμεις πλευστότητας σε όρους δυνητικής θερμοκρασίας. Εδώ το θ_0 αναπαριστά την απόκλιση της δυνητικής θερμοκρασίας του τμήματος από αυτή στη βασική του κατάσταση (του περιβάλλοντος) $\theta_0(z)$. Αν το τμήμα ήταν αρχικά στο επίπεδο $z = 0$ όπου η δυνητική θερμοκρασία είναι θ_0 , τότε για μια μικρή μετατόπιση δz μπορούμε να αναπαριστήσουμε τη δυνητική θερμοκρασία του περιβάλλοντος ως

$$\theta_0(\delta z) \approx \theta_0(0) + (d\theta_0/dz) \delta z$$

Αν η μετατόπιση του τμήματος είναι αδιαβατική, τότε η δυνητική θερμοκρασία του τμήματος διατηρείται. Έτσι, $\theta(\delta z) = \theta_0(0) - \theta_0(\delta z) = -(d\theta_0/dz) \delta z$ και η (4.36) γίνεται

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -N^2 \delta z \quad (4.37)$$

όπου

$$N^2 = g \frac{d(\ln \theta_0)}{dz}$$

είναι μια μέτρηση της στατικής ευστάθειας του περιβάλλοντος. Η εξίσωση (4.37) έχει γενική λύση της μορφής $\delta z = A \exp(iNt)$. Ωστόσο, αν $N^2 > 0$, τότε το τμήμα θα ταλαντώνεται γύρω από το αρχικό επίπεδο με περίοδο $\tau = 2\pi/N$. Η αντίστοιχη συχνότητα N ονομάζεται συχνότητα πλευστότητας. Για μέσες τροποσφαιρικές συνθήκες $N \approx 1,2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ και έτσι η περίοδος ταλάντωσης είναι περίπου 8 min.

Στην περίπτωση που $N = 0$ η εξέταση της (4.37) μας υποδεικνύει ότι δεν υπάρχει καμία δύναμη που προκαλεί επιτάχυνση και το τμήμα θα είναι σε ουδέτερη ισορροπία στο νέο επίπεδο του. Αν, ωστόσο, $N^2 < 0$ (η δυναμική θερμοκρασία μειώνεται με το ύψος), η μετατόπιση θα αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο. Έχουμε φτάσει, λοιπόν, στο γνωστό κριτήριο βαρυτικής ή στατικής ευστάθειας για το ξηρό αέρα, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1

Πίνακας 4.1: Κριτήριο στατικής ευστάθειας για το ξηρό αέρα

$$\underline{d\theta_0/dz > 0 \quad \text{στατικά ευσταθής}}$$

$$d\theta_0/dz = 0 \quad \text{στατικά ουδέτερη}$$

$$\underline{d\theta_0/dz < 0 \quad \text{στατικά ασταθής}}$$

Στη συνοπτική κλίμακα η ατμόσφαιρα είναι πάντα στατικά ευσταθής διότι οποιαδήποτε ασταθής περιοχή σταθεροποιείται γρήγορα λόγω μεταφοράς.

Κεφάλαιο 5

Θεμελιώδεις Εφαρμογές των Βασικών Εξισώσεων

5.1 Η γεωστροφική προσέγγιση και ο γεωστροφικός άνεμος

Η εξίσωση της κίνησης μπορεί να απλοποιηθεί απομονώνοντας κινήσεις του αέρα, όπως είναι ο γεωστροφικός άνεμος. Ο γεωστροφικός άνεμος εμφανίζεται όταν η δύναμη Coriolis εξισορροπεί τη δύναμη βαροβαθμίδας. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 3.2 της ενότητας 3.4 όπου κάναμε την ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων κίνησης, για συνοπτικής κλίμακας μεσαίου γεωγραφικού πλάτους διαταραχές η δύναμη Coriolis (όρος B) και η δύναμη βαροβαθμίδας (όρος Z) είναι σε ισορροπία. Πολλές κινήσεις στην ελεύθερη τροπόσφαιρα τείνουν να γίνουν γεωστροφικές διότι στην ελεύθερη τροπόσφαιρα η δύναμη Coriolis και η δύναμη βαροβαθμίδας είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερες των υπολοίπων όρων των εξισώσεων κίνησης. Απομονώνοντας αυτούς τους δύο όρους στις εξισώσεις (3.27) και (3.28) έχουμε μία πρώτη προσέγγιση της γεωστροφικής σχέσης:

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.1)$$

όπου $f = 2\Omega \sin \phi$ είναι παράμετρος Coriolis. Η γεωστροφική ισορροπία είναι μια διαγνωστική έκφραση που δίνει μία προσεγγιστική σχέση ανάμεσα στην πίεση και την οριζόντια ταχύτητα σε μεγάλης κλίμακας εξωτροπικά συστήματα. Η προσέγγιση (5.1) δεν περιέχει το χρόνο και προφανώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουμε τη μεταβολή της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Αυτός είναι και ο λόγος που η γεωστροφική σχέση καλείται **διαγνωστική**.

Κατά αναλογία με την προσέγγιση (5.1), μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας $\vec{V}_g \equiv u_g \vec{i} + v_g \vec{j}$, που ονομάζεται **γεωστροφικός άνεμος**. Στη διανυσματική μορφή η γεωστροφική ταχύτητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες με

κάθετη συντεταγμένη το ύψος γράφεται:

$$\vec{V}_g = u_g \vec{i} + v_g \vec{j} = \frac{1}{f\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} \right) = \frac{1}{f\rho} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{f\rho} \vec{k} \times \vec{\nabla}_z p \quad (5.2)$$

όπου

$$\vec{\nabla}_z = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)_z + \left(\vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right)_z = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

είναι η οριζόντια βαθμίδα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο δείκτης z υποδεικνύει ότι η μερική παράγωγος υπολογίζεται για μία επιφάνεια σταθερού ύψους και άρα $\partial/\partial z \vec{k} = 0$. Η εξίσωση (5.2) φανερώνει ότι ο **γεωστροφικός άνεμος πνέει παράλληλα με τις ισοβαρείς**. Επίσης, παρατηρούμε ότι γνωρίζοντας τη βαθμίδα της πίεσης βρίσκουμε το γεωστροφικό άνεμο. Πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η (5.2) προσδιορίζει πάντα το γεωστροφικό άνεμο, ωστόσο, μόνο για κινήσεις μεγάλης κλίμακας μακριά από τον ισημερινό. Για κλίμακες που χρησιμοποιούνται στον πίνακα 3.2 ο γεωστροφικός άνεμος προσεγγίζει την πραγματική οριζόντια ταχύτητα κατά 10 με 15% σε μεσαία γεωγραφικά πλάτη.

5.2 Προσεγγιστικές εξισώσεις πρόβλεψης: Ο αριθμός Rossby

Στην προηγούμενη ενότητα απομονώσαμε τη δύναμη Coriolis (όρος B) και τη δύναμη βαροβαθμίδας (όρος Z) για να εξάγουμε το γεωστροφικό άνεμο. Για να εξάγουμε τώρα εξισώσεις πρόβλεψης είναι απαραίτητο να απομονώσουμε και την επιτάχυνση (όρος A) στις εξισώσεις (3.27) και (3.28). Τότε, οι προσεγγιστικές εξισώσεις οριζόντιας κίνησης που θα προκύψουν είναι:

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g) = f v_\alpha \quad (5.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - u_g) = -f u_\alpha \quad (5.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (5.2) για να μορφοποιήσουμε τη δύναμη βαροβαθμίδας σε όρους γεωστροφικού ανέμου. Επειδή οι επιταχύνσεις στις εξισώσεις (5.3) και (5.4) είναι ανάλογες με τη διαφορά ανάμεσα στο γεωστροφικό και τον πραγματικό άνεμο, θα είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερες από τη δύναμη Coriolis και τη δύναμη βαροβαθμίδας σύμφωνα με την ανάλυση κλίμακας που έχουμε κάνει. Στις τελευταίες ισότητες των (5.3) και (5.4) προσδιορίζουμε τη διαφορά ανάμεσα στο γεωστροφικό και πραγματικό άνεμο ως *αγεωστροφικό άνεμο*.

Το γεγονός ότι η οριζόντια ροή είναι σε κατά προσέγγιση γεωστροφική ισορροπία είναι χρήσιμο για τη διαγνωστική ανάλυση. Ωστόσο, η εφαρμογή αυτών των εξισώσεων στην πρόγνωση του καιρού είναι δύσκολη διότι η επιτάχυνση (η οποία πρέπει να υπολογίζεται με ακρίβεια) δίνεται από τη μικρή διαφορά δύο πολύ μεγάλων όρων. Έτσι,

ένα μικρό σφάλμα στη μέτρηση είτε της ταχύτητας είτε της βαθμίδας της πίεσης θα οδηγήσει σε πολύ μεγάλα σφάλματα στον υπολογισμό της επιτάχυνσης.

Μια βολική μέτρηση του μεγέθους της επιτάχυνσης σχετικά με τη δύναμη Coriolis μπορούμε να έχουμε αν εφαρμόσουμε την αναλογία χαρακτηριστικών κλιμάκων για τους όρους της επιτάχυνσης και της δύναμης Coriolis, δηλαδή, $(U^2/L) / (f_0U)$. Αυτή η αναλογία είναι ένας αριθμός χωρίς διαστάσεις που ονομάζεται **αριθμός Rossby** χάρη στο Σουηδό μετεωρολόγο C.G.Rossby (1898-1957) και συμβολίζεται με

$$R_0 \equiv U/f_0L$$

Έτσι, όσο πιο μικρός είναι ο αριθμός Rossby τόσο καλύτερη είναι η γεωστροφική προσέγγιση.

5.3 Οι βασικές εξισώσεις σε ισοβαρικές συντεταγμένες

Η ανάλυση των θεμάτων που θα συζητήσουμε παρακάτω είναι πιο εύκολη όταν χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η κάθετη συντεταγμένη είναι η πίεση. Έτσι, πρώτου ξεκινήσουμε να μιλάμε για τις θεμελιώδεις εφαρμογές θα ήταν χρήσιμο να παρουσιάσουμε τις βασικές εξισώσεις σε ισοβαρικές συντεταγμένες.

5.3.1 Η εξίσωση της οριζόντιας κίνησης

Οι προσεγγιστικές εξισώσεις της οριζόντιας κίνησης (5.3) και (5.4) μπορούν να γραφούν στη διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad (5.5)$$

όπου $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας. Για να εκφράσουμε την (5.5) σε μια μορφή σύμφωνα με τις ισοβαρικές συντεταγμένες, θα μετατρέψουμε τη δύναμη βαροβαθμίδας με τη βοήθεια των (2.41) και (2.42) της υποενότητας 2.5.2 όπου αναλύσαμε την πίεση ως κάθετη συντεταγμένη και τότε θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} = -\vec{\nabla}_p\Phi \quad (5.6)$$

όπου $\vec{\nabla}_p$ είναι η οριζόντια βαθμίδα κρατώντας σταθερό το p .

Επειδή, όμως, το p είναι η ανεξάρτητη κάθετη μεταβλητή, θα πρέπει να υπολογίσουμε και σε αυτή την περίπτωση το ολικό διαφορικό:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p} \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Εδώ $\omega \equiv dp/dt$, που συνήθως καλείται ‘ ω κάθετη κίνηση’, είναι η μεταβολή της πίεσης ακολουθώντας την κίνηση η οποία παίζει τον ίδιο ρόλο στις ισοβαρικές συντεταγμένες με αυτό που παίζει το $w \equiv dz/dt$ σε σύστημα συντεταγμένων με κάθετη μεταβλητή το ύψος. Να σημειώσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y υπολογίζονται κρατώντας την πίεση σταθερή (δηλαδή στις ισοβαρείς επιφάνειες).

Από την (5.6) παρατηρούμε ότι η μορφή της γεωστροφικής σχέσης (5.2) στις ισοβαρικές συντεταγμένες είναι

$$f\vec{V}_g = \vec{k} \times \vec{\nabla}_p \Phi \quad (5.8)$$

Συγκρίνοντας την (5.2) με την (5.8) εύκολα βλέπουμε ότι ένα πλεονέκτημα των ισοβαρικών συντεταγμένων είναι ότι η πυκνότητα στην τελευταία δεν εμφανίζεται. Δηλαδή, από την (5.8) έπεται ότι για μία δεδομένη βαθμίδα γεωδυναμικού έχουμε τον ίδιο γεωστροφικό άνεμο για οποιοδήποτε ύψος, ενώ από την (5.2) για δεδομένη βαθμίδα οριζόντιας πίεσης θα είχαμε διαφορετικές τιμές του γεωστροφικού ανέμου ανάλογα με την πυκνότητα. Επίσης, αν θεωρήσουμε την παράμετρο Coriolis f σταθερή, η οριζόντια απόκλιση του γεωστροφικού ανέμου για σταθερή πίεση είναι μηδέν:

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = 0$$

5.3.2 Η εξίσωση συνέχειας

Είναι δυνατό να μετατρέψουμε την εξίσωση συνέχειας από συντεταγμένες ύψους σε συντεταγμένες πίεσης. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να αναπτύξουμε απευθείας την μορφή της εξίσωσης συνέχειας σε ισοβαρικές συντεταγμένες θεωρώντας ένα όγκο ελέγχου κατά Lagrange $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ και να εφαρμόσουμε την υδροστατική εξίσωση $\delta p = -\rho g \delta z$ ($\delta p < 0$). Τότε, ο όγκος ελέγχου θα είναι $\delta V = -\delta x \delta y \delta p / (\rho g)$. Όμως, η μάζα του στοιχείου ρευστού $\delta M = \rho \delta V = -\delta x \delta y \delta p / g$ διατηρείται ακολουθώντας την κίνηση και άρα

$$\frac{1}{\delta M} \frac{d}{dt} (\delta M) = \frac{g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \right) = 0$$

Αλλά, θεωρώντας το g σταθερό

$$\begin{aligned} \frac{g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \right) &= \frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta p) \\ &= \frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \left[\frac{d}{dt} (\delta x) \delta y \delta p + \delta x \frac{d}{dt} (\delta y \delta p) \right] \\ &= \frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \left[\frac{d}{dt} (\delta x) \delta y \delta p + \delta x \delta p \frac{d}{dt} (\delta y) + \delta x \delta y \frac{d}{dt} (\delta p) \right] \\ &= \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} (\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} (\delta y) + \frac{1}{\delta p} \frac{d}{dt} (\delta p) \end{aligned}$$

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{1}{\delta x} \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{\delta y} \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{\delta p} \delta \left(\frac{dp}{dt} \right) = 0$$

$$\acute{\eta} \quad \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = 0$$

Παίρνοντας τα όρια για $\delta x, \delta y, \delta p \rightarrow 0$ και παρατηρώντας ότι τα $\delta x, \delta y$ υπολογίζονται για σταθερή πίεση, καταλήγουμε στην εξίσωση συνέχειας σε ισοβαρικό σύστημα:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5.9)$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης συνέχειας δεν περιέχει ούτε την πυκνότητα ούτε μερικές παραγώγους ως προς το χρόνο. Η απλότητα της (5.9) είναι ένα ακόμα πλεονέκτημα του ισοβαρικού συστήματος συντεταγμένων.

5.3.3 Η εξίσωση θερμοδυναμικής ενέργειας

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής στη μορφή (4.27) μπορεί να εκφραστεί σε ισοβαρικό σύστημα συντεταγμένων αν θεωρήσουμε ότι $dp/dt = \omega$ και την ανάπτυξη του dT/dt σύμφωνα με την (5.8). Έτσι, προκύπτει ότι

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \alpha \omega = J \quad (5.10)$$

που μπορεί να γραφεί και ως

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - S_p \omega = \frac{J}{c_p} \quad (5.11)$$

όπου με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης και της εξίσωσης Poisson (4.29) έχουμε

$$S_p \equiv \frac{RT}{p c_p} - \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad (5.12)$$

όπου S_p είναι η παράμετρος στατικής ευστάθειας για το ισοβαρικό σύστημα. Χρησιμοποιώντας την (4.34) και την υδροστατική εξίσωση, η (5.12) γράφεται ως εξής:

$$S_p = (\Gamma_d - \Gamma) / \rho g \quad (5.13)$$

Άρα, το S_p είναι θετικό δεδομένου ότι η θερμοβαθμίδα είναι μικρότερη της ξηρής αδιαβατικής θερμοβαθμίδας. Ωστόσο, επειδή η πυκνότητα μειώνεται εκθετικά με το ύψος, το S_p αυξάνεται ραγδαία με το ύψος. Αυτή η μεγάλη εξάρτηση της παραμέτρου στατικής ευστάθειας S_p με το ύψος είναι σημαντικό μειονέκτημα του ισοβαρικού συστήματος.

5.4 Ισορροπημένη ροή

Παρά την πολυπλοκότητα των συστημάτων ατμοσφαιρικής κίνησης όπως απεικονίζονται στα συνοπτικά διαγράμματα καιρού, η πίεση (ή το γεωδυναμικό ύψος) και η κατανομή της ταχύτητας στις μετεωρολογικές μεταβολές σχετίζονται στην πραγματικότητα με απλές και προσεγγιστικές ισορροπίες κάποιων δυνάμεων. Για την καλύτερη

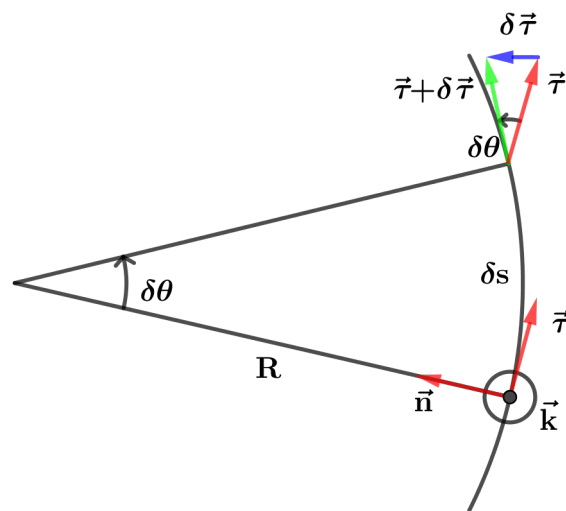
κατανόηση της οριζόντιας ισορροπίας δυνάμεων στις ατμοσφαιρικές κινήσεις θεωρούμε ότι οι ροές αέρα δεν έχουν κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας και ότι είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Επίσης, για να περιγράψουμε τη ροή είναι χρήσιμο να αναλύσουμε την ισοβαρική μορφή της εξίσωσης οριζόντιας κίνησης (5.6) σε συνιστώσες σε ένα, όπως ονομάζεται, φυσικό σύστημα συντεταγμένων.

5.4.1 Φυσικές συντεταγμένες

Το φυσικό σύστημα συντεταγμένων προοριζόμαστε από ένα ορθογώνιο σύνολο μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\tau}$, \vec{n} και \vec{k} . Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\tau}$ έχει κατεύθυνση παράλληλη στο διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας σε κάθε σημείο. Το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας και φορά τέτοια ώστε να είναι θετικό προς τα αριστερά της διεύθυνσης ροής. Το διάνυσμα \vec{k} έχει διεύθυνση κάθετη με φορά προς τα πάνω. Άρα, σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως $\vec{V} = V\vec{\tau}$, όπου V είναι το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας $V \equiv ds/dt$ με το $s = s(x, y, t)$ να είναι η απόσταση κατά μήκος της καμπύλης που ακολουθήσε ένα τμήμα αέρα στο οριζόντιο επίπεδο, δηλαδή η τροχιά. Επίσης, η επιτάχυνση ακολουθώντας την κίνηση θα είναι

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau} \frac{dV}{dt} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Με τη βοήθεια του σχήματος 5.1 και γεωμετρικών θεωρήσεων πάνω σε αυτό μπορούμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\tau}$:



Σχήμα 5.1: Ρυθμός μεταβολής του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\tau}$ ακολουθώντας την κίνηση σε ένα φυσικό σύστημα συντεταγμένων.

Αν R είναι η ακτίνα της καμπυλότητας ακολουθώντας την κίνηση του τμήματος αέρα, τότε αφού $|\vec{\tau}| = 1$ είναι

$$\delta\theta = \frac{ds}{|R|} = \frac{|\delta\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |\delta\vec{\tau}| \quad (5.14)$$

Θεωρούμε το R θετικό όταν το κέντρο της καμπυλότητας είναι στη θετική κατεύθυνση του \vec{n} . Άρα, για $R > 0$ τα τμήματα αέρα στρίβουν προς τα αριστερά ακολουθώντας την κίνηση και για $R < 0$ στρίβουν προς τα δεξιά ακολουθώντας την κίνηση.

Αφού όταν το $\delta s \rightarrow 0$ το $\delta \vec{\tau}$ έχει διεύθυνση παράλληλη με το \vec{n} καθώς και αφού λόγω της (5.14) είναι $|\delta \vec{\tau}|/ds = 1/|R|$ προκύπτει ότι $d\vec{\tau}/ds = \vec{n}/R$. Άρα,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} V$$

και αφού βρήκαμε το ρυθμό μεταβολής του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\tau}$, η επιτάχυνση ακολουθώντας την κίνηση δίνεται από την

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dV}{dt} + \vec{n} \frac{V^2}{R} \quad (5.15)$$

δηλαδή το άθροισμα του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του τμήματος ρευστού και της κεντρομόλου επιτάχυνσης εξαιτίας της καμπυλότητας της τροχιάς. Επειδή η δύναμη Coriolis είναι πάντα κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης, η μορφή της στις φυσικές συντεταγμένες είναι:

$$-f\vec{k} \times \vec{V} = -fV\vec{n} \quad (5.16)$$

ενώ η δύναμη βαροβαθμίδας μπορεί να εκφραστεί ως

$$-\vec{\nabla}_p \Phi = -\left(\vec{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \quad (5.17)$$

Έτσι, η προσεγγιστική εξίσωση οριζόντιας κίνησης (5.5) στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\vec{\tau} \frac{dV}{dt} + \vec{n} \frac{V^2}{R} + fV\vec{n} = -\left(\vec{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \quad (5.18)$$

από όπου έπεται ότι

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (5.19)$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (5.20)$$

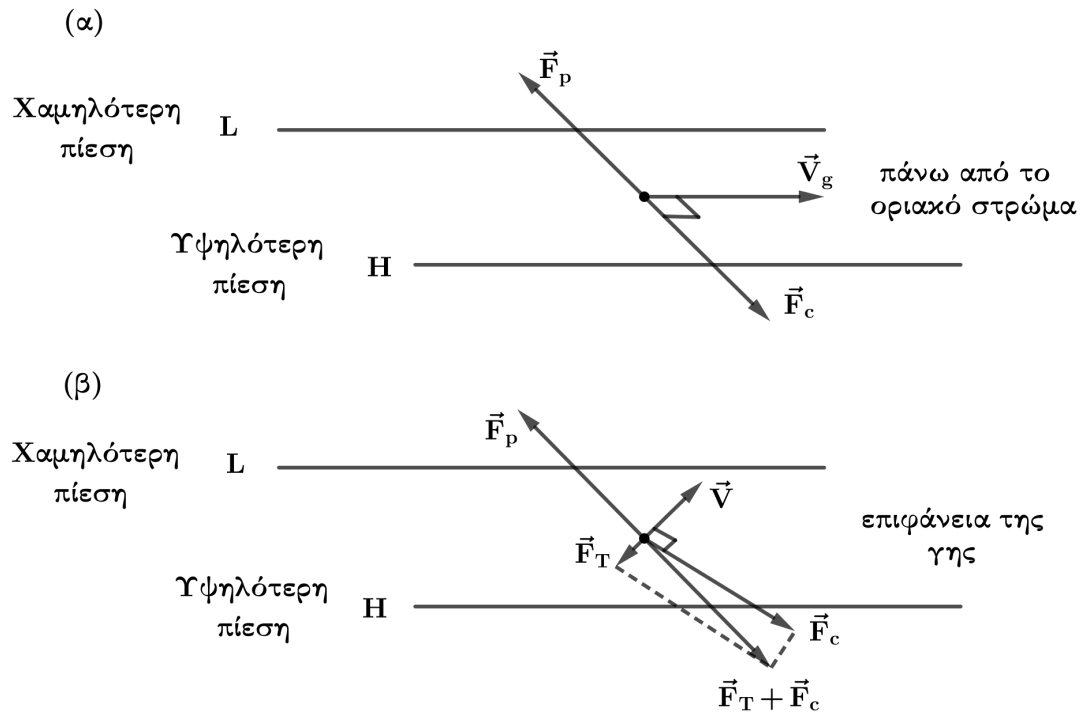
Οι εξισώσεις (5.19) και (5.20) εκφράζουν την ισορροπία των δυνάμεων σε διεύθυνση παράλληλη και κάθετη στη διεύθυνση ροής αντίστοιχα. Για κίνηση που γίνεται παράλληλα με τις γεωδυναμικές ισοϋψείς, $\partial \Phi / \partial s = 0$, η ταχύτητα παραμένει σταθερή ακολουθώντας την κίνηση. Αν επιπλέον ισχύει ότι η βαθμίδα γεωδυναμικού κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης είναι σταθερή κατά μήκος της τροχιάς, η (5.20) υποδεικνύει ότι η ακτίνα καμπυλότητας R της τροχιάς παραμένει επίσης σταθερή. Σε αυτή την περίπτωση η ροή μπορεί να ταξινομηθεί σε αρκετές κατηγορίες ανάλογα με την επίδραση που έχουν οι τρεις όροι της (5.20) στη συνολική ισορροπία των δυνάμεων.

5.4.2 Γεωστροφική ροή

Η ροή σε ευθεία γραμμή ($R \rightarrow +\infty$ ή $R \rightarrow -\infty$) παράλληλα στις ισοϋψείς αναφέρεται ως γεωστροφική κίνηση. Όπως είπαμε και στην ενότητα 5.1 οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης βαροβαθμίδας και της δύναμης Coriolis είναι σε απόλυτη ισορροπία έτσι ώστε $V = V_g$. Έτσι, από την (5.20) για $R \rightarrow +\infty$ ή $R \rightarrow -\infty$ έχουμε ότι ο γεωστροφικός άνεμος V_g προσδιορίζεται από την

$$fV_g = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad (5.21)$$

Δηλαδή η δύναμη βαροβαθμίδας είναι ίση ως προς το μέτρο και αντίθετη ως προς τη διεύθυνση με τη δύναμη Coriolis. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο γεωστροφικός άνεμος να πνέει 90° προς τα αριστερά της δύναμης Coriolis στο βόρειο ημισφαίριο όπως φαίνεται στο πάνω μέρος του σχήματος 5.2. Στο νότιο ημισφαίριο ο γεωστροφικός άνεμος πνέει 90° προς τα δεξιά της δύναμη Coriolis.



Σχήμα 5.2: Η ισορροπία των δυνάμεων και το διάνυσμα της ταχύτητας στην επιφάνεια της γης (επιφανειακός άνεμος (β)) και πάνω από το οριακό στρώμα (γεωστροφικός άνεμος (α)).

5.4.3 Αδρανειακή ροή

Αν το γεωδυναμικό είναι ομαλό πάνω σε μία ισοβαρική επιφάνεια έτσι ώστε η δύναμη βαροβαθμίδας να εξαφανίζεται, τότε η (5.20) εκφράζει μια ισορροπία μεταξύ της δύναμης Coriolis και της φυγόκεντρος δύναμης:

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0 \quad (5.22)$$

και λύνοντας ως προς την ακτίνα καμπυλότητας

$$R = -\frac{V}{f} \quad (5.23)$$

Επειδή, όπως φαίνεται από την (5.19) η ταχύτητα σε αυτή την περίπτωση είναι σταθερή, η ακτίνα καμπυλότητας θα είναι επίσης σταθερή λόγω της παραπάνω εξίσωσης (5.23) (αγνοώντας ότι το f εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος). Άρα, τα τμήματα αέρα ακολουθούν κυκλικές διαδρομές με αντικυκλωνική¹ περιστροφή. Η περίοδος αυτών των ταλαντώσεων είναι

$$P = \left| \frac{2\pi R}{V} \right| = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{1/2 \text{ μέρα}}{|\sin \phi|} \quad (5.24)$$

Το P ισοδυναμεί με το χρόνο που χρειάζεται ένα εκκρεμές του Φουκώ να κάνει στροφή γωνίας 180° . Έτσι, συχνά αναφέρεται και ως μισή μέρα εκκρεμούς.

Επειδή η δύναμη Coriolis και η φυγόκεντρος δύναμη σχετίζονται με την αδράνεια του ρευστού, αυτός ο τύπος κίνησης είθισται να αναφέρεται ως αδρανειακή ταλάντωση, και ο κύκλος ακτίνας $|R|$ καλείται κύκλος της αδράνειας.

5.4.4 Κυκλοστροφική ροή

Αν η οριζόντια κλίμακα της διαταραχής είναι αρκετά μικρή, η δύναμη Coriolis στην (5.20) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε σχέση με τη δύναμη βαροβαθμίδας και τη φυγόκεντρο δύναμη. Τότε, η συνισταμένη δύναμη που είναι κάθετη στη διεύθυνση της ροής είναι

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

και λύνοντας ως προς V παίρνουμε την ταχύτητα του **κυκλοστροφικού ανέμου**

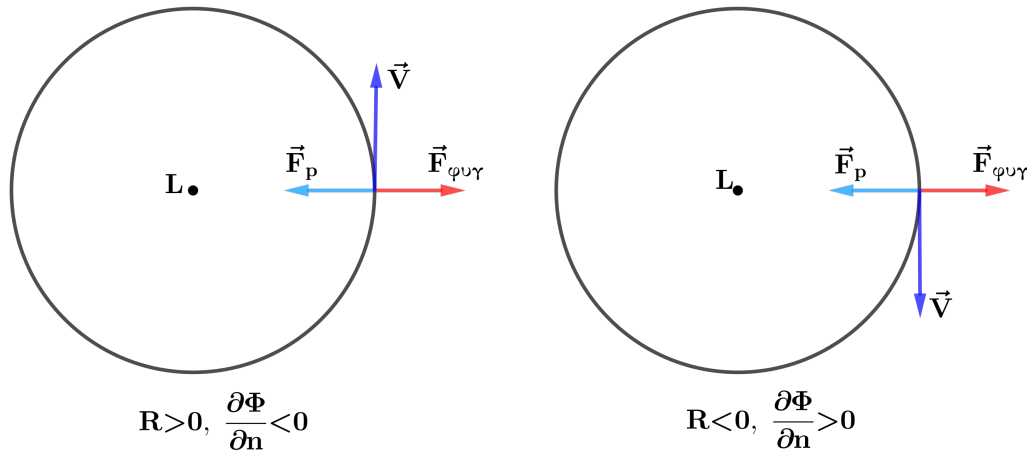
$$V = \left(-R \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 5.3 η κυκλοστροφική ροή μπορεί να είναι είτε αντικυκλωνική είτε κυκλωνική. Και στις δύο περιπτώσεις η δύναμη βαροβαθμίδας κατευθύνεται προς το κέντρο της καμπύλης και η φυγόκεντρος δύναμη μακριά από το κέντρο της καμπύλης.

Η προσέγγιση της κυκλοστροφικής ισορροπίας είναι σωστή δεδομένου ότι η αναλογία της φυγόκεντρος δύναμης προς τη δύναμη Coriolis είναι μεγάλη. Αυτή η αναλογία $(V^2/R)/(fV) = V/(fR)$ είναι ισοδύναμη με τον αριθμό Rossby που συζητήσαμε στην ενότητα 5.2. Ως παράδειγμα κίνησης κυκλοστροφικής κλίμακας μπορούμε να θεωρήσουμε έναν τυπικό ανεμοστρόβιλο. Υποθέτουμε ότι η εφαπτομενική ταχύτητα είναι 30 m/s σε απόσταση 300 m από το κέντρο της δίνης. Υποθέτοντας ότι $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, ο αριθμός Rossby είναι $R_0 = V/|fR| \approx 10^3$ και άρα η δύναμη Coriolis μπορεί να παραβλεφθεί στον υπολογισμό της ισορροπίας των δυνάμεων για ένα ανεμοστρόβιλο.

¹ Αντικυκλωνική ροή είναι η περιστροφή ενός τμήματος αέρα σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού στο βόρειο ημισφαίριο και αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού στο νότιο ημισφαίριο. Για την κυκλωνική ροή ισχύει το αντίθετο σε κάθε ημισφαίριο.

Ωστόσο, η πλειοψηφία των ανεμοστρόβιλων που παρατηρούνται στο βόρειο ημισφαίριο περιστρέφονται κυκλωνικά, δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού. Αυτό συμβαίνει διότι οι ανεμοστρόβιλοι βρίσκονται σε περιβάλλοντα που ευνοούν την κυκλωνική περιστροφή. Εν τούτοις μικρότερης κλίμακας στροβιλισμοί, όπως οι ανεμοθύελλες και οι υδροστρόβιλοι, μπορούν να περιστρέφονται είτε κυκλωνικά είτε αντικυκλωνικά και μάλιστα έχει παρατηρηθεί ότι όσο συχνά περιστρέφονται κυκλωνικά τόσο συχνά περιστρέφονται και αντικυκλωνικά.



Σχήμα 5.3: Ισορροπία των δυνάμεων στην κυκλοστροφική ροή

5.4.5 Η προσέγγιση του ανέμου βαθμίδας

Η οριζόντια ροή χωρίς τριβές που είναι παράλληλη στις ισοϋψείς έτσι ώστε η εφαπτομενική επιτάχυνση να είναι μηδενική ($dV/dt = 0$) καλείται **ροή βαθμίδας**. Η ροή βαθμίδας είναι η ισορροπία μεταξύ της δύναμης Coriolis, της οριζόντιας δύναμης βαροβαθμίδας και της φυγόκεντρου δύναμης. Όπως και η γεωστροφική ροή, έτσι και η ροή βαθμίδας υπάρχει υπό την παρουσία κάποιων προϋποθέσεων. Ωστόσο, μπορούμε πάντα να προσδιορίσουμε τον άνεμο βαθμίδας, ο οποίος είναι απλώς η παράλληλη στις ισοϋψείς συνιστώσα του ανέμου που ικανοποιεί την (5.20). Για αυτό το λόγο η (5.20) αναφέρεται συνήθως και ως **εξίσωση του ανέμου βαθμίδας**. Επίσης, επειδή η (5.20) λαμβάνει υπόψη τη φυγόκεντρο δύναμη εξαιτίας της καμπυλότητας της τροχιάς του τμήματος αέρα, ο άνεμος βαθμίδας συχνά είναι καλύτερη προσέγγιση του πραγματικού ανέμου συγκριτικά με το γεωστροφικό άνεμο.

Αν λύσουμε την (5.20), η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς V θα έχουμε την ταχύτητα του ανέμου βαθμίδας. Οπότε,

$$(5.20) \Rightarrow V = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4 \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n}}}{2/R} = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial \Phi}{\partial n}} \quad (5.26)$$

και γράφοντας το $\partial \Phi / \partial n$ συναρτήσει του γεωστροφικού ανέμου από τη σχέση $fV_g =$

$-\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (5.21) παίρνουμε:

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2 R^2}{4} + fRV_g \right)^{1/2} \quad (5.27)$$

Όλες οι μαθηματικές λύσεις της (5.27) δεν αντιστοιχούν σε δυνατές φυσικές λύσεις διότι έχουμε τον περιορισμό ότι το V πρέπει να είναι πραγματικός και μη αρνητικός αριθμός. Στον παρακάτω πίνακα 5.1 οι ρίζες της (5.26) \equiv (5.27) κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με το πρόσημο των R και $\partial\Phi/\partial n$ έτσι ώστε να απομονώσουμε τις αποδεκτές από φυσικής πλευράς λύσεις.

Πίνακας 5.1: Κατηγοριοποίηση των ριζών της εξίσωσης του ανέμου βαθμίδας στο βόρειο ημισφαίριο.

Πρόσημο $\partial\Phi/\partial n$	$R > 0$	$R < 0$
θετικό ($V_g < 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • θετική² ρίζα - μη φυσική • αρνητική ρίζα - μη φυσική 	θετική ρίζα: ανώμαλο χαμηλό αρνητική ρίζα - μη φυσική
αρνητικό ($V_g > 0$)	<ul style="list-style-type: none"> • θετική ρίζα - κυκλωνική ροή (κανονικό χαμηλό) • αρνητική ρίζα - μη φυσική 	θετική ρίζα: ($V > -fR/2$): αντικυκλωνική ροή (ανώμαλο υψηλό) αρνητική ρίζα: ($V < -fR/2$): αντικυκλωνική ροή (κανονικό υψηλό)

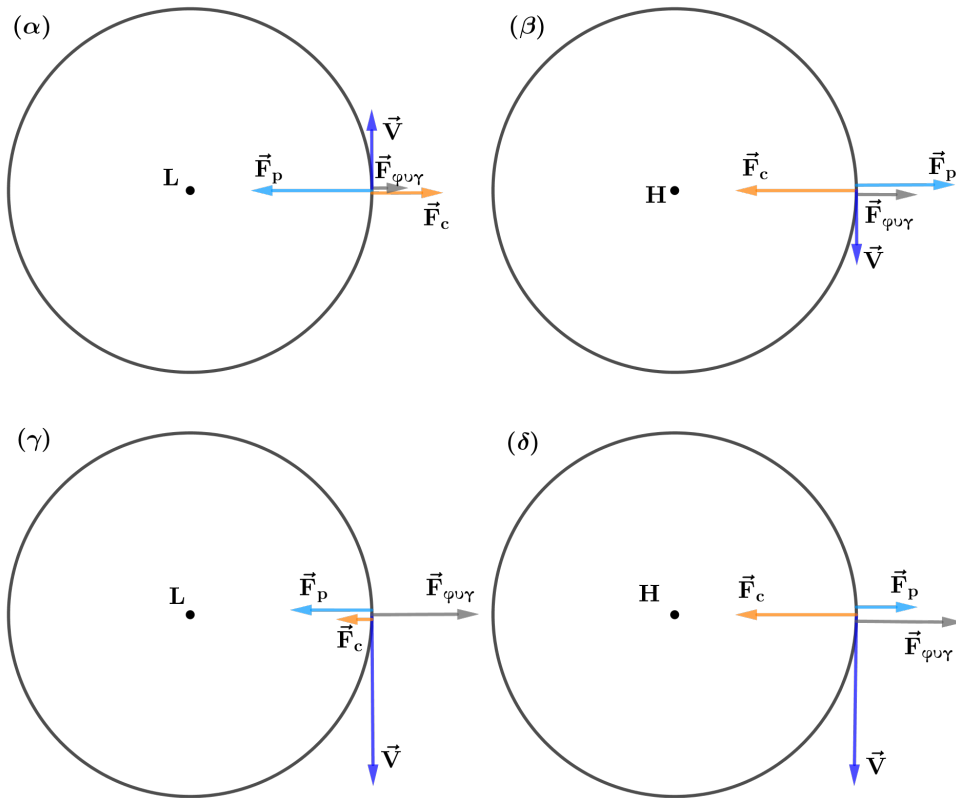
Η ισορροπία των δυνάμεων για τις τέσσερις επιτρεπτές λύσεις απεικονίζονται στο σχήμα. Η εξίσωση (5.27) υποδεικνύει ότι τόσο στην περίπτωση των κανονικών όσο και στην περίπτωση των ανώμαλων υψηλών, η βαθμίδα πίεσης περιορίζεται από το γεγονός ότι η υπόριζη ποσότητα είναι μη αρνητική:

$$|fV_g| = \left| \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right| < \frac{|R|f^2}{4} \quad (5.28)$$

Άρα, η βαθμίδα πίεσης σε ένα υψηλό πρέπει να προσεγγίζει το μηδέν καθώς το $|R| \rightarrow 0$.

Η στροφορμή γύρω από τον άξονα περιστροφής για τις κυκλικές κινήσεις που απεικονίζονται στο σχήμα 5.4 $VR + fR^2/2$. Από την (5.27) έπεται ότι στις κανονικές ισορροπίες του ανέμου βαθμίδας η στροφορμή είναι θετική στο βόρειο ημισφαίριο, ενώ στις ανώμαλες περιπτώσεις η στροφορμή είναι αρνητική. Επειδή, όμως, περιπτώσεις αρνητικής στροφορμής έχουμε στο νότιο ημισφαίριο, οι ανώμαλες περιπτώσεις είναι αδύνατο να συμβούν στο βόρειο, εκτός ίσως κοντά στον ισημερινό.

Σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από το ανώμαλο χαμηλό 5.4(γ) οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης Coriolis και της δύναμης βαροβαθμίδας έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Αυτή η ροή ονομάζεται **βαρική**. Το ανώμαλο χαμηλό είναι αντιβαρικό. Ο



Σχήμα 5.4: Η ισορροπία των δυνάμεων στο βόρειο ημισφαίριο για τους τέσσερις τύπους ροής βαθμίδας: (α) κανονικό χαμηλό, (β) κανονικό υψηλό, (γ) ανώμαλο χαμηλό, (δ) ανώμαλο υψηλό.

γεωστροφικός άνεμος V_g που προσδιορίζεται από την (5.21) είναι αρνητικός για ένα ανώμαλο χαμηλό και προφανώς δεν είναι χρήσιμη προσέγγιση του πραγματικού ανέμου. Επιπλέον, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.1 η ροή βαθμίδας είναι κυκλωνική μόνο όταν η φυγόκεντρος δύναμη και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης Coriolis έχουν την ίδια φορά ($Rf > 0$). Όταν αυτές οι δυνάμεις έχουν αντίθετη φορά ($Rf < 0$) τότε η ροή είναι αντικυκλωνική. Επειδή η διεύθυνση της αντικυκλωνικής και κυκλωνικής ροής αντιστρέφεται στο νότιο ημισφαίριο, η απαίτηση $Rf > 0$ για την κυκλωνική ροή ισχύει και για το νότιο ημισφαίριο.

Ο ορισμός του γεωστροφικού ανέμου (5.21) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ξαναγράψουμε την ισορροπία των δυνάμεων στην κάθετη διεύθυνση της ροής (5.20) στη μορφή

$$\frac{V^2}{R} + fV - fV_g = 0$$

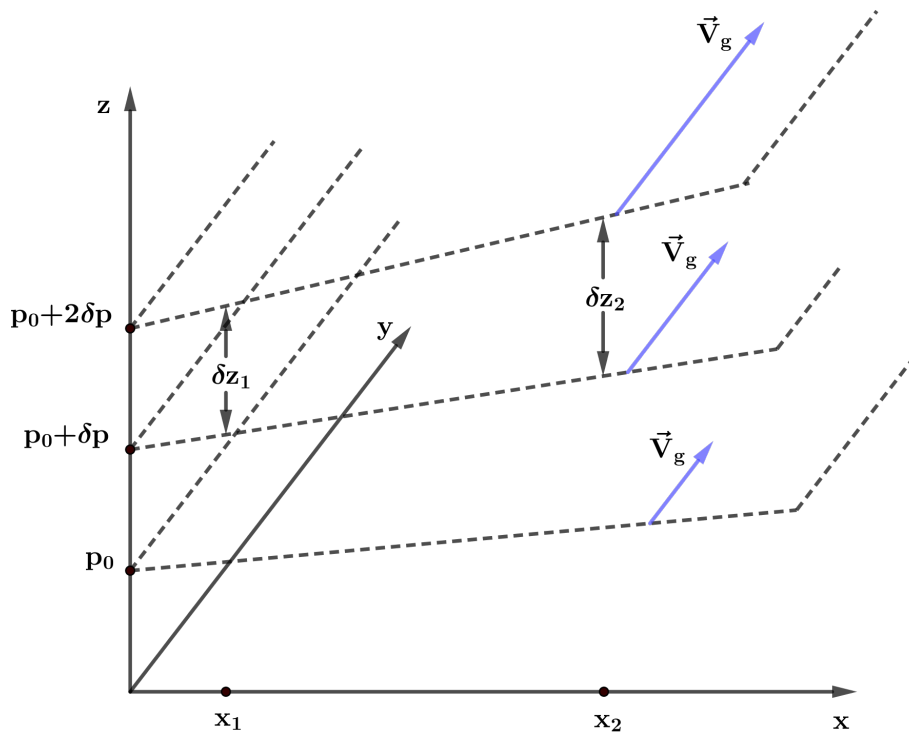
και διαιρώντας με fV έχουμε

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR} \tag{5.29}$$

δηλαδή βρίσκουμε το λόγο του γεωστροφικού ανέμου προς τον άνεμο βαθμίδας. Για κανονική κυκλωνική ροή ($fR > 0$) το V_g είναι μεγαλύτερο από το V , ενώ για αντικυκλωνική ροή ($fR < 0$) το V_g είναι μικρότερο από το V .

5.5 Ο θερμικός άνεμος

Υπό την παρουσία οριζόντιας θερμοκρασιακής βαθμίδας ο γεωστροφικός άνεμος πρέπει να έχει κάθετη διάτμηση, όπως μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας απλές φυσικές θεωρήσεις βασισμένες στην υδροστατική ισορροπία. Ο γεωστροφικός άνεμος (5.21) είναι ανάλογος της γεωδυναμικής βαθμίδας πάνω σε μια ισοβαρική επιφάνεια. Άρα, ένας γεωστροφικός άνεμος στη θετική κατεύθυνση του y που η έντασή του αυξάνει με το ύψος συνεπάγεται ότι η κλίση των ισοβαρικών επιφανειών ως προς τον άξονα x αυξάνει με το ύψος (βλέπε Σχήμα 5.5). Σύμφωνα με την υψομετρική εξίσωση (2.34)



Σχήμα 5.5: Η σχέση μεταξύ της κάθετης διάτμησης του γεωστροφικού ανέμου και των οριζόντιων βαθμίδων πάχους ατμοσφαιρικού στρώματος. Το δp είναι αρνητικό.

το πάχος δz που αντιστοιχεί σε μία (θετική) μεταβολή πίεσης δp είναι

$$\delta z \approx g^{-1} R T \delta(\ln p) \quad (5.30)$$

Έτσι, το πάχος του ατμοσφαιρικού αέρα μεταξύ δύο ισοβαρικών επιφανειών είναι ανάλογο της μέσης θερμοκρασίας T στο στρώμα. Στο σχήμα 5.5 η μέση θερμοκρασία T_1 της στήλης δz_1 πρέπει να είναι μικρότερη από τη μέση θερμοκρασία T_2 για τη στήλη δz_2 . Άρα, μια αύξηση με το ύψος της βαθμίδας πίεσης στην κατεύθυνση προς τα θετικά x πρέπει να σχετίζεται με τη βαθμίδα θερμοκρασίας στην κατεύθυνση προς τα θετικά x . Ο αέρας στην κάθετη στήλη x_2 επειδή είναι θερμότερος (και λιγότερο πυκνός) θα πρέπει να καταλαμβάνει μεγαλύτερο βάθος για συγκεκριμένη πτώση της πίεσης σε σχέση με τον αέρα στην κάθετη στήλη x_1 .

Χρησιμοποιώντας το ισοβαρικό σύστημα συντεταγμένων μπορούμε πιο εύκολα να δείξουμε τις εξισώσεις για το ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του γεωστροφικού

ανέμου ως προς το ύψος. Στο ισοβαρικό σύστημα συντεταγμένων ο γεωστροφικός άνεμος (5.8) έχει συνιστώσες που δίνονται από τις

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{και} \quad u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (5.31)$$

όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται για σταθερή πίεση. Επίσης, με τη βοήθεια του νόμου των ιδανικών αερίων, μπορούμε να ξαναγράψουμε την υδροστατική εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p} \quad (5.32)$$

παραγωγίζοντας την (5.31) ως προς την πίεση και εφαρμόζοντας την (5.32) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_g}{\partial p} &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \stackrel{(5.32)}{=} \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{RT}{p} \right) = -\frac{R}{fp} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \\ \Rightarrow p \frac{\partial v_g}{\partial p} &\equiv \frac{\partial v_g}{\partial(\ln p)} = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad \text{και ομοίως έχουμε} \\ p \frac{\partial u_g}{\partial p} &\equiv \frac{\partial u_g}{\partial(\ln p)} = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \end{aligned} \quad (5.33)$$

ή στη διανυσματική μορφή

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial(\ln p)} = -\frac{R}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla}_p T \quad (5.34)$$

Η εξίσωση (5.34) αναφέρεται ως **εξίσωση του θερμικού ανέμου**. Εν τούτοις, η (5.34) στην πραγματικότητα εκφράζει την κάθετη διάτμηση ανέμου (wind shear) (δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του γεωστροφικού ανέμου ως προς το $\ln p$). Με μεγαλύτερη αυστηρότητα θα λέγαμε ότι ο όρος ‘θερμικός άνεμος’ εκφράζει τη διανυσματική διαφορά του γεωστροφικού ανέμου σε δύο επίπεδα. Συμβολίζοντας το διάνυσμα του θερμικού ανέμου με \vec{V}_T , μπορούμε να ολοκληρώσουμε την (5.34) από το επίπεδο πίεσης p_0 έως το επίπεδο p_1 ($p_1 < p_0$) και τότε θα έχουμε

$$\vec{V}_T \equiv \vec{V}_g(p_1) - \vec{V}_g(p_0) = -\frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} \left(\vec{k} \times \vec{\nabla}_p T \right) d(\ln p) \quad (5.35)$$

Αν συμβολίσουμε με $\langle T \rangle$ τη μέση θερμοκρασία του στρώματος μεταξύ πίεσης p_0 και p_1 , οι x και y συνιστώσες του θερμικού ανέμου δίνονται από τις

$$u_T = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right)_p \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \quad \text{και} \quad v_T = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \right)_p \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \quad (5.36)$$

Επίσης, ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το θερμικό άνεμο για ένα δεδομένο στρώμα ατμοσφαιρικού αέρα είναι συναρτήσει της οριζόντιας βαθμίδας της διαφοράς γεωδυναμικού ανάμεσα στην κορυφή και τον πάτο του στρώματος. Πιο συγκεκριμένα, ολοκληρώνοντας την υδροστατική εξίσωση (5.32) κάθετα από p_0 έως p_1 αφού αντικαταστήσουμε την T με τη μέση θερμοκρασία $\langle T \rangle$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(1) - \Phi(0) &= -\int_{p_0}^{p_1} \frac{R \langle T \rangle}{p} dp = -R \langle T \rangle (\ln p_1 - \ln p_0) \\ \Rightarrow \Phi(1) - \Phi(0) &\equiv g Z_T = R \langle T \rangle \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

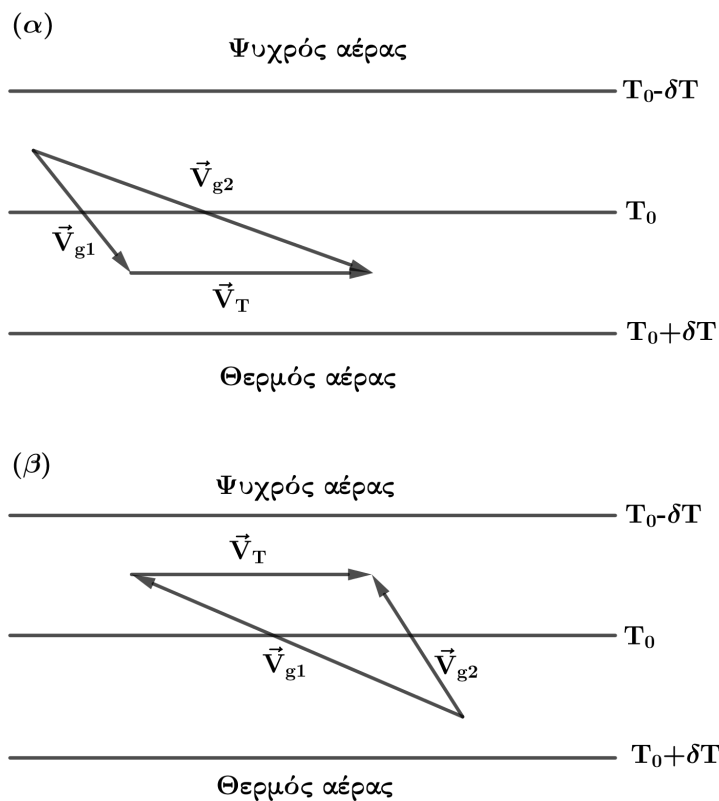
Οπότε, οι x και y συνιστώσες του θερμικού ανέμου (5.36) γράφονται:

$$u_T = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 - \Phi_0) \quad \text{και} \quad v_T = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 - \Phi_0) \quad (5.38)$$

Η (5.37) είναι η υψομετρική εξίσωση. Η ποσότητα Z_T είναι το πάχος σε μονάδες γεωδυναμικών μέτρων του στρώματος ανάμεσα στο p_0 και p_1 . Από αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι το πάχος είναι ανάλογο της μέσης θερμοκρασίας του στρώματος. Συνεπώς, οι ισοπαχείς (γραμμές που κάθε σημείο των οποίων έχει ίδιο Z_T) είναι ισοδύναμες με τις ισόθερμες της μέσης θερμοκρασίας του στρώματος. Επίσης, αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την οριζόντια μεταφορά θερμότητας στο στρώμα (Σχήμα 5.6). Προφανώς, η διανυσματική μορφή της εξίσωσης του θερμικού ανέμου γράφεται και

$$\vec{V}_T = \frac{1}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla} (\Phi_1 - \Phi_0) = \frac{g}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla} Z_T = \frac{R}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla} \langle T \rangle \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \quad (5.39)$$

από την οποία είναι φανερό ότι ο θερμικός άνεμος πνέει παράλληλα στις ισόθερμες (καμπύλες σταθερής θερμοκρασίας και συνεπώς σταθερού πάχους στρώματος) με το θερμότερο αέρα να βρίσκεται στα δεξιά της κίνησης στο βόρειο ημισφαίριο. Οπότε, όπως



Σχήμα 5.6: Η σχέση μεταξύ της στρέψης του διανύσματος του γεωστροφικού ανέμου και της μεταφοράς θερμοκρασίας:

(α) αντιστροφή του ανέμου με το υψός, (β) στροφή του ανέμου με το ύψος.

φαίνεται και στο σχήμα 5.6(α) όταν ο γεωστροφικός άνεμος αντιστρέφεται (αντίθετα

με τους δείκτες του ρολογιού) καθ' ύψος, τότε σχετίζεται με μεταφορά ψυχρού αέρα. Αντίθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6(β) όταν ο γεωστροφικός άνεμος στρέφεται (σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού) καθ' ύψος τότε σχετίζεται με μεταφορά θερμού αέρα.

Είναι δυνατό να υπολογίσουμε το γεωστροφικό άνεμο σε κάθε επίπεδο από τη μέση θερμοκρασία δεδομένου ότι γνωρίζουμε τη γεωστροφική ταχύτητα σε ένα επίπεδο. Για παράδειγμα, αν ο γεωστροφικός άνεμος στο επίπεδο των 850 hpa είναι γνωστός και η μέση οριζόντια θερμοκρασιακή βαθμίδα στο στρώμα από το επίπεδο των 850 hpa έως το επίπεδο των 500 hpa είναι γνωστό, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του θερμικού ανέμου για να βρούμε το γεωστροφικό άνεμο στο επίπεδο των 500 hpa.

5.5.1 Βαροκλιτικές και βαροτροπικές ατμόσφαιρες

Μια **βαροτροπική ατμόσφαιρα** είναι αυτή στην οποία η πυκνότητα εξαρτάται μόνο από την πίεση, δηλαδή $\rho = \rho(p)$, έτσι ώστε οι ισοβαρικές επιφάνειες να είναι και επιφάνειες σταθερής πυκνότητας. Στις βαροτροπικές ατμόσφαιρες, για ένα ιδανικό αέριο οι ισοβαρικές επιφάνειες θα είναι επίσης και ισοθερμικές. Άρα, σε μια βαροτροπική ατμόσφαιρα θα ισχύει $\vec{\nabla}_p T = \vec{0}$ και η εξίσωση του θερμικού ανέμου (5.34) θα γίνει $\partial \vec{V}_g / \partial \ln p = 0$ η οποία εκφράζει ότι ο γεωστροφικός άνεμος είναι ανεξάρτητος του ύψους. Έτσι, οι κινήσεις μεγάλης κλίμακας σε βαροτροπική ατμόσφαιρα εξαρτώνται μόνο από την οριζόντια θέση και το χρόνο και όχι από το ύψος.

Μια **βαροκλιτική ατμόσφαιρα** είναι αυτή στην οποία η πυκνότητα εξαρτάται από την πίεση αλλά και από τη θερμοκρασία. Σε μια βαροκλιτική ατμόσφαιρα ο γεωστροφικός άνεμος έχει γενικά κάθετη διάτμηση, και αυτή η διάτμηση σχετίζεται με την οριζόντια θερμοκρασιακή βαθμίδα της εξίσωσης του θερμικού ανέμου (5.34). Προφανώς η βαροκλιτική ατμόσφαιρα είναι πρωταρχικής σημασίας στη δυναμική μετεωρολογία.

Βιβλιογραφία

- [1] James R. Holton, Gregory J. Hakim *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Fifth Edition.
- [2] Mark Z. Jacobson, *Fundamentals of Atmospheric Modeling*, Second Edition.
- [3] Χρήστος Χαλδούπης, *Εισαγωγή στη Φυσική της Ατμόσφαιρας*.