ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2021

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρκοβιανές Αλυσίδες με απορροφητικές καταστάσεις και εφαρμογές τους

Κιοσκερίδου Αδαμαντίνη

Επιβλέπον: Χαλιδιάς Νικόλαος, Καθηγητής του Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών- Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Εξεταστές:

Δημητράκος Θεοδόσης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών.

Παπαλεξίου Νικόλαος, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της πτυχιακής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Χαλιδιά Νικόλαο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε εξ’ αρχής, αναθέτοντάς μου το συγκεκριμένο θέμα, την επιστημονική του καθοδήγηση, τις υποδείξεις του, την επιμονή του, το αμείωτο ενδιαφέρον του, τη συμπαράστασή του, τη συνεχή του υποστήριξη και το αμείωτο ενδιαφέρον που έδειξε από την αρχή μέχρι το τέλος.

Επίσης, ευχαριστώ τον καθηγητή, κύριο Δημητράκο Θεοδόση και τον επίκουρο καθηγητή, κύριο Παπαλεξίου Νικόλαο, για τις εποικοδομητικές τους υποδείξεις και την πολύτιμη συμβολή τους στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, ως μέλη της τριμελούς επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για όλη τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους, καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη και η κατανόηση της έννοιας των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε διακριτό χρόνο. Αναλύουμε την θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων, ξεκινώντας από μια αναδρομή στη γενική θεωρία των πιθανοτήτων . Έπειτα, βλέπουμε τις στοχαστικές ανελίξεις, κατηγορία των οποίων είναι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς και διακριτού χρόνου.Τέλος, θα αναλύσουμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου και τις εφαρμογές τους σήμερα. Η παρούσα πτυχιακή εργασία είναι οργανωμένη σε τέσσερα κεφάλαια :

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων που θα μας φανούν χρήσιμες στην πορεία της εργασίας για καλύτερη κατανόηση των εννοιών με τις οποίες ασχολούμαστε. Οι έννοιες της πιθανότητας, της δεσμευμένης πιθανότητας και της μέσης τιμής θα είναι εξαιρετικά σημαντικές. Θα ασχοληθούμε επίσης με την ένοια της τυχαίας μεταβλητής και θα δούμε κάποιες χρήσιμες κατανομές με τις ιδιότητές τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας. Δίνουμαι τον ορισμό τους και το πως αυτές ταξινομούνται. Παραθέτουμε σημαντικά θεωρήματα και προτάσεις που αφορούν τις στοχαστικές διαδικασίες και τους νόμους που τις διέπουν. Τέλος κάνουμε εκτενή αναφορά στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες και τις ιδιότητές τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ειδική ακτηγορία των απορροφητικών μαρκοβιανών αλυσίδων. Δίνουμε τον ορισμό τους, τις οριακές καταστάσεις τους καθώς και σχετικά θεωρήματα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε κάποιες εφαρμογές των απορροφητικών μαρκοβιανών αλυσίδων.

Λέξεις κλειδιά: Μαρκοβιανή, Διαδικασία, Κατάσταση, Αλυσίδα, Απορροφητική, Πιθανότητα, Στοχαστική, Τυχαία, Κατανομή, Ανεξάρτητα, Διακριτή.

ABSTRACT

The aim of this study is to understand the concept of Markov chains at a discrete time. We analyze the theory of Markov chains, starting from a throwback to the general theory of probabilities. In addition, we look at the stochastic developments, a category of which are the Markovian chains of continuous and discrete time. Finally, we will analyze the Markovian chains of discrete time and their applications today. This study is organized in four chapters:

The first chapter presents basic conept of probability theory that will help us for a better understanding of the meanings we are dealing with. The meanings of probability, bound probability, and average will be extremely important. We will also deal with the concept of the random variable and see some useful breakdowns with their properties.

In the second chapter we study the concept of the stochastic process. We are trying to give their definition and the way they are classified. We metion important theorems and propositions concerning the contemplative processes and the rules that covers them. Finally, we make an extensive report on the Markov Chains and their properties.

In the third chapter we deal with the special category of absorbent Markov chains. We give their definition, their limit states, and related theorems.

In the last chapter we will present and study some applications of absorbent Markov chains.

Keywords: Markovian, Process, Situation, Chain, Absorbent, Probability, Stochastic, Random, Distribution, Independent, Discrete.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η αλυσίδα Μαρκόφ ή Μαρκοβιανή αλυσίδα, πήρε το όνομα της από τον Andrey Andreyevich Markov (1856–1922), είναι ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε έναν πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές, δηλαδή, η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμιά περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν. Αυτό το συγκεκριμένο είδος "αμνησίας" ονομάζεται μαρκοβιανή ιδιότητα.

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μια στοχαστική διαδικασία με τη μαρκοβιανή ιδιότητα για ένα πεπερασμένο ή μετρήσιμο χώρο καταστάσεων. Ο όρος "Μαρκοβιανή αλυσίδα" αναφέρεται στην αλληλουχία (ή αλυσίδα) των καταστάσεων μέσω των οποίων κινείται μια τέτοια διαδικασία. Συνήθως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα ορίζεται για μια διακριτή συλλογή χρόνων (Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτών χρόνων), παρόλο που μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν την ίδια ορολογία για να αναφερθούν σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

Μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου περιλαμβάνει ένα σύστημα που βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση σε κάθε βήμα, με την κατάσταση να μεταβάλλεται τυχαία μεταξύ των βημάτων. Τα βήματα συχνά θεωρούνται ως στιγμές στο χρόνο αλλά μπορούν εξίσου να αναφέρονται σε φυσική απόσταση ή οποιαδήποτε άλλη διακριτή μέτρηση: τυπικά τα βήματα είναι οι ακέραιοι ή φυσικοί αριθμοί και η τυχαία διαδικασία είναι η χαρτογράφησή τους σε καταστάσεις. Η Μαρκοβιανή ιδιότητα δηλώνει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα κατανομής του συστήματος στο επόμενο βήμα (και κατά βάση, σε όλα τα μελλοντικά βήματα) εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση του συστήματος και όχι αθροιστικά από την κατάσταση του συστήματος σε προηγούμενα βήματα.

Καθώς το σύστημα μεταβάλλεται τυχαία, είναι γενικά αδύνατο να προβλεφθεί με βεβαιότητα η κατάσταση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε ένα δεδομένο μελλοντικό σημείο. Παρ' όλα αυτά, οι στατιστικές ιδιότητες του μέλλοντος του συστήματος μπορούν να προβλεφθούν. Σε πολλές εφαρμογές, είναι αυτές οι στατιστικές ιδιότητες που είναι σημαντικές.

Οι αλλαγές κατάστασης του συστήματος ονομάζονται μεταβάσεις και οι πιθανότητες που σχετίζονται με τις διάφορες μεταβατικές καταστάσεις ονομάζονται πιθανότητες μετάβασης. Η διαδικασία χαρακτηρίζεται από ένα χώρο καταστάσεων, ένας πίνακας μετάβασης που περιγράφει τις πιθανότητες μιας συγκεκριμένης μετάβασης και μια αρχική κατάσταση ή αρχική κατανομή στο χώρο καταστάσεων. Κατά συνθήκη, θεωρούμε ότι όλες οι δυνατές καταστάσεις και μεταβάσεις έχουν συμπεριληφθεί στον ορισμό των διαδικασιών, ώστε υπάρχει πάντα μια επόμενη κατάσταση και η διαδικασία συνεχίζεται για πάντα.

Μια γνωστή Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ο λεγόμενος "περίπατος του μεθυσμένου", μια τυχαία διαδρομή στην αριθμητική γραμμή όπου, σε κάθε βήμα, η θέση μπορεί να αλλάξει κατά +1 ή κατά -1 με ίση πιθανότητα. Από κάθε θέση υπάρχουν δύο δυνατές μεταβάσεις, στον επόμενο ή στον προηγούμενο ακέραιο. Οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται μόνο από την παρούσα θέση, όχι από τον τρόπο με τον οποίο η θέση επετεύχθη.

Μια σειρά ανεξάρτητων γεγονότων (για παράδειγμα, μια σειρά από στριψίματα νομίσματος) ικανοποιεί τον επίσημο ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Παρ' όλα αυτά, η θεωρία συνήθως εφαρμόζεται μόνο όταν η πιθανότητα κατανομής του επομένου βήματος εξαρτάται μη-αμελητέα από την παρούσα κατάσταση.

Υπάρχουν πολλά ακόμη παραδείγματα Μαρκοβιανών αλυσίδων.

- Στη **Φυσική** τα Μαρκοβιανά συστήματα εμφανίζονται εκτενώς στη θερμοδυναμική και στη στατική μηχανική, όποτε πιθανότητες χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν άγνωστες ή μη μοντελοποιημένες λεπτομέρειες του συστήματος, αν μπορεί να υποτεθεί ότι η δυναμική δεν μεταβάλλεται με το χρόνο και ότι καμία σχετική ιστορία που να μην περιλαμβάνεται ήδη στην περιγραφή κατάστασης δε χρειάζεται να θεωρηθεί.

- Η **Χημεία** είναι συχνά ένας τομέας όπου οι Μαρκοβιανές αλυσίδες και οι Μαρκοβιανές καταστάσεις συνεχούς χρόνου είναι ιδιαίτερα χρήσιμες επειδή αυτά τα απλά φυσικά συστήματα τείνουν να ικανοποιούν αρκετά καλά τη Μαρκοβιανή ιδιότητα.

  Επίσης, η ανάπτυξη (και σύνθεση) συμπολυμερών μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανές αλυσίδες. Με βάση το κλάσμα αντίδρασης των μονομερών που αποτελούν την αναπτυσσόμενη πολυμερική αλυσίδα, η σύνθεση της αλυσίδας μπορεί να υπολογισθεί (πχ αν τα μονομερή τείνουν να προστίθεται με εναλασσόμενο τρόπο ή με μακριές σειρές του ίδιου μονομερούς).

  Παρόμοια, έχει προταθεί ότι η κρυσταλλοποίηση και ανάπτυξη κάποιων επιταξιακών υπερπλεγμάτων οξειδίων μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια με Μαρκοβιανές αλυσίδες.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες χρησιμοποιούνται ευρέως στην **επεξεργασία πληροφοριών**. Τέτοια ιδανικά μοντέλα μπορούν να συλλάβουν πολλές από τις στατιστικές ανωμαλίες των συστημάτων. Ακόμη και χωρίς περιγραφή της πλήρης δομής του συστήματος, τέτοια μοντέλα σημάτων μπορούν να κάνουν δυνατή την πολύ αποτελεσματική συμπίεση δεδομένων μέσω τεχνικών κωδικοποίησης εντροπίας όπως η αριθμητική κωδικοποίηση. Επίσης επιτρέπουν αποτελεσματική εκτίμηση καταστάσεων και αναγνώριση προτύπων. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στην ενισχυτική μάθηση.

  Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι επιπλέον η βάση για Κρυμμένα Μαρκοβιανά μοντέλα, που αποτελούν σημαντικό εργαλείο σε ποικίλα πεδία όπως τηλεφωνικά δίκτυα, αναγνώριση λόγου και βιοπληροφορική.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι η βάση για την αναλυτική μεταχείριση σειρών (**θεωρία σειρών**).

- Στην **Στατιστική** οι μέθοδοι Μαρκοβιανών αλυσίδων έχουν επίσης γίνει πολύ σημαντικές για την παραγωγή ακολουθιών τυχαίων αριθμών για να αποδώσουν με ακρίβεια πολύ περίπλοκες επιθυμητές κατανομές πιθανοτήτων, μέσω μιας διαδικασίας που λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα Μόντε Κάρλο. Πρόσφατα, αυτό έχει οδηγήσει σε επανάσταση όσον αφορά στην πρακτικότητα μεθόδων Μπευζιανών συμπερασμάτων, επιτρέποντας ένα ευρύ φάσμα μεταγένεστερων κατανομών να προσομοιωθούν και οι παράμετροί τους να βρεθούν αριθμητικά.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες χρησιμοποιούνται στα **Χρηματοοικονομικά** για να μοντελοποιήσουν μια ποικιλία διαφορετικών φαινομένων, συμπεριλαμβανομένων τιμών κεφαλαίων και πτώσεις αγορών. Η δυναμική μακροοικονομία ευρέως χρησιμοποιεί Μαρκοβιανές αλυσίδες.

- Στις **Κοινωνικές επιστήμες** οι Μαρκοβιανές αλυσίδες χρησιμοποιούνται γενικά στην περιγραφή επιχειρημάτων που εξαρτώνται από τη διαδρομή, όπου οι παρούσες δομικές διαμορφώσεις διέπουν τα μελλοντικά αποτελέσματα. Ένα παράδειγμα είναι η αναδιατύπωση της ιδέας, αρχικά λόγω του "Κεφαλαίου" του Καρλ Μαρξ, συνδέοντας την οικονομική ανάπτυξη με την άνοδο του καπιταλισμού.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες έχουν επίσης πολλές εφαρμογές σε **βιολογικά μοντέλα**, κυρίως πληθυσμικές διαδικασίες, με χρησιμότητα στη μοντελοποίηση διαδικασιών που είναι (τουλάχιστον) ανάλογες με βιολογικούς πληθυσμούς. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες χρησιμοποιούνται επίσης σε προσωμοιώσεις εγκεφαλικής λειτουργίας, όπως η προσομοίωση του νεοφλοιού των θηλαστικών.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες έχουν χρησιμοποιηθεί στην πληθυσμιακή text**γενετική** για να περιγράψουν την αλλαγή στις συχνότητες των γονιδίων σε μικρούς πληθυσμούς υπό την επιρροή γενετικής παρέκκλισης, για παράδειγμα στη μέθοδο εξίσωσης διάχυσης που περιγράφηκε από τον Motoo Kimura.

- Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν πολλά τυχερά **παιχνίδια**. Τα παιδικά παιχνίδια "Φιδάκι" και "Γκρινιάρης", για παράδειγμα, αντιπροσωπεύονται με ακρίβεια από Μαρκοβιανές αλυσίδες. Σε κάθε γύρο, ο παίκτης ξεκινά σε μια δεδομένη κατάσταση (σε ένα δεδομένο τετράγωνο) και από εκεί έχει καθορισμένες πιθανότητες να μετακινηθεί σε συγκεκριμένες άλλες καταστάσεις (τετράγωνα).

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενη Γνώση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε βασικές έννοιες και θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων τα οποία χρησιμοποιούνται στις Στοχαστικές Διαδικασίες, και ειδικότερα στη μελέτη των Μαρκοβιανών Αλυσίδων. Επιπλέον θα θυμίσουμε την έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής, συναρτήσεις που τις χαρακτηρίζουν και μέτρα θέσης και διασποράς.

2.1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός Πιθανότητας

Η Θεωρία Πιθανοτήτων μελετά τους νόμους που διέπουν τα τυχαία φαινόμενα. Αυτά τα φαινόμενα μπορούμε να τα ανάγουμε σε πειράματα τα οποία καλούνται πειράματα τύχης.

Ως πείραμα χαρακτηρίζεται μια διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες συνθήκες και στο τέλος μπορούμε να εξάγουμε οριμένα αποτελέσματα. Τα πειράματα μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, τα αιτιοκρατικά (deterministic) και τα πειράματα τύχης. Αιτιοκρατικό λέγεται ένα πείραμα το οποίο έχει ένα και μόνο αποτέλεσμα και είναι το μόνο που μπορεί να συμβεί κατά την εκτέλεσή του. Προφανώς αυτά τα πειράματα δεν παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον. Τα πειράματα τύχης από την άλλη είναι πειράματα στα οποία το αποτέλεσμά τους δεν μπορεί να είναι γνωστό πριν εκτελεστεί το πείραμα. Αυτό που είναι γνωστό είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

Ορισμός 2.1.1. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης καλείται Δειγματικός Χώρος ή Δειγματοχώρος. Συνήθως το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με Ω.

Οι δειγματικοί χώροι χωρίζονται σε δύο είδη, τους διακριτούς και τους συνεχείς. Διακριτοί λέγονται οι δειγματοχώροι στους οποίους το Ω είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο και συνεχείς οι δειγματοχώροι για τους οποίους το Ω είναι συνεχές σύνολο.

Ορισμός 2.1.2. Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου καλείται ενδεχόμενο. Το σύνολο όλων των ενδεχομένων θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$.

Ορισμός 2.1.3Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Ας θεωρήσουμε ότι σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$. Αν η $P(\cdot)$ ικανοποιεί τα ακόλουθα τρία αξιώματα, θα ονομάζεται μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα και ο αριθμός $P(A)$ θα λέγεται πιθανότητα του ενδεχομένου A.
Αξιώματα:

1. (μη αρνητικότητα) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
2. (κανονικότητα) $P(\Omega) = 1$
3. (προσθετικότητα) Αν $A_j, j = 1,2,3, \dots$ ξένα ενδεχόμενα ανά δύο, τότε

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(A_j\right).$$

Στην παρακάτω πρόταση θα αναφέρουμε βασικές ιδιότητες του μέτρου πιθανότητας.

Πρόταση 2.1.1. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, $\mathcal{A}$ το σύνολο των ενδεχομένων και P το μέτρο πιθανότητας στον χώρο Ω. Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$ (όπου A^c το συμπλήρωμα του συνόλου A).
3. (μονοτονία) Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.
4. (Πιθανότητα ένωσης) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Ορίζουμε το γεγονός $B - A = \{x \in B, x \notin A\}$. Ισχύει $P(B - A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
6. (υποπροσθετικότητα) Αν $A_i, i = 1,2,3 \dots$ ενδεχόμενα όχι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους, τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Υποθέτουμε δύο ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος τύχης και έστω ότι η πιθανότητα να συμβεί το B δεν είναι μηδενική (δηλαδή $P(B) > 0$). Κατά την εκτέλεση του πειράματος τύχης η πληροφορία που έχουμε από την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B μπορεί να μας δώσει την δυνατότητα επαναπροσδιορισμού της πιθανότητας του ενδεχομένου A.

Η νέα πιθανότητα που παίρνουμε για το ενδεχόμενο A καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθέντος του ενδεχομένου B. Συμβολικά γράφουμε $P(A|B)$.

Η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας δίνει τη δυνατότητα να συμπεριλάβουμε τις διαθέσιμες πληροφορίες που έχουμε καθώς υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος.

Ορισμός 2.1.4. Η δεσμευμένη πιθανότητα (conditional probability) του ενδεχομένου A δοθέντος του ενδεχομένου B ορίζεται από τη σχέση:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) > 0.$$

Η $P(A)$ ονομάζεται εκ των προτέρων πιθανότητα, ενώ η $P(A|B)$ ονομάζεται εκ των υστέρων πιθανότητα.

Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι επίσης ένα μέτρο πιθανότητας και ικανοποιεί τα αξιώματα της απλής πιθανότητας, δηλαδή

1. $P(A|B) \geq 0 \quad , \quad \forall A \in \mathcal{A}$,
2. $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$,
3. Για $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ με $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ έχουμε
$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B).$$

Επιπλέον αφού η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μέτρο πιθανότητας, ισχύουν και εδώ οι ιδιότητες που παρουσιάζονται στην Πρόταση 3.1.1.

Αρκετές φορές ο υπολογισμός της πιθανότητας της τομής δύο ή παραπάνω ενδεχομένων είναι αρκετά δύσκολος. Ο υπολογισμός της όμως απλουστεύεται αν κάνουμε χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας. Αυτό γίνεται μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1.1. (Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα)

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τ.ω. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Τότε ισχύει

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots \cap A_1)$$

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω, δηλαδή

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad , \quad \forall i \neq j \quad , \quad i, j = 1,2, \dots, n.$

Θεώρημα 2.1.2. (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας ΘΟΠ)

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω και B ένα ενδεχόμενο του Ω. Τότε

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\,(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P\,(B|A_i)P(A_i)$$

Το ΘΟΠ μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου B μέσω των δεσμευμένων πιθανοντήτων $P(B|A_i), i = 1,2, \dots, n$, οι οποίες συχνά είναι ευκολότερο να υπολογιστούν.

Την αντίστροφη διαδικασία ακολουθεί το επόμενο θεώρημα. Το Θεώρημα Bayes που δίνεται παρακάτω μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την πιθανότητα $P(A_i|B)$.

Θεώρημα 2.1.3. (Θεώρημα Bayes)

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω και B ένα ενδεχόμενο του Ω με $P(B) > 0$, τότε

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \overset{ΘΟΠ}{=} \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P\,(B|A_k)P(A_k)}$$

Σχόλιο 2.1.1. *Αν με A συμβολίζουμε την αιτία μιας ενέργειας και με B το αποτέλεσμα, συνήθως είναι ευκολότερος ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας P (B|A). Το θεώρημα Bayes μας βοηθάει να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα P (B|A).*

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Μπορεί να συμβεί ένα από τα παρακάτω.

- $P(A|B) < P(A)$
- $P(A|B) > P(A)$
- $P(A|B) = P(A)$

Στην τρίτη περίπτωση έχουμε πως η πιθανότητα δεν άλλαξε, παρά την πληροφορία που έχουμε για το ενδεχόμενο B.

Ορισμός 2.1.5. Δύο ενδεχόμενα A, B του ίδιου πειράματος τύχης ονομάζονται στοχαστικά ανεξάρτητα (independent), εάν

- (διαισθητικά) η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.
- (αυστηρά μαθηματικά) ικανοποιείται μια από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

Σχόλιο 2.1.2. *Θα πρέπει να τονίσουμε γεγονότα ΔΕΝ είναι ξένα μεταξύ τους. Αν δύο ενδεχόμενα (με θετική πιθανότητα πραγματοποίησης) είναι ξένα, δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για ανεξαρτησία μεταξύ τους.*

2.2 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Συνήθως σε ένα πείραμα τύχης δεν μας αφορά τόσο ο δειγματικός χώρος αλλά ένα χαρακτηριστικό των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Ορισμός 2.2.1. Μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X (random variable), είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματικό χώρο Ω και πεδίο τιμών ένα σύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$).

Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται πάντα με κεφαλαία γράμματα X, Y, κ.α..

Ορισμός 2.2.2. Έστω μία τ.μ. ορισμένη σε έναν δειγματικό χώρο Ω. Τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $F_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F_X(x) = P(X \leq x)\,, x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση F_X καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) (distribution function) της τ.μ. X.
Αν F_X είναι η σ.κ. της τ.μ. X τότε:

$$P\{a < X \leq \beta\} = F_X(\beta) - F_X(a), \quad a \leq \beta.$$

Διακριτές τ.μ.

Μια τ.μ. X καλείται διακριτή (discrete) εάν το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο και κάθε μια από αυτές τις τιμές έχει θετική πιθανότητα. Δηλαδή το πεδίο τιμών της είναι της μορφής $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Ορισμός 2.2.3. Εάν η X είναι μια διακριτή τ.μ. με τιμές $x_1, x_2, x_3, \ldots$, τότε η συνάρτηση $f_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x_k) = P\{X = x_k\} \quad , \quad k = 1,2, \ldots$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X (probability density function). Η f_X ικανοποιεί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

1. $f_X(x) \geq 0$ και
2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_X\,(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\,(\{X = x_n\}) = 1$

Συνεχείς τ.μ.

Μία τ.μ. X καλείται συνεχής αν το πεδίο τιμών της είναι μη-αριθμήσιμο. Δηλαδή είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο S, τέτοιο ώστε $P\{X = x\} = 0\,, \forall x \in S = X(\Omega)$.

Η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τ.μ. είναι μια συνεχής συνάρτηση. Αν για μια τυχαία μεταβλητή X έχουμε την F_X τότε πολλές φορές μπορούμε να βρούμε μια μη αρνητική συνάρτηση f_X τέτοια ώστε:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X\,(t)dt.$$

Η $f_X(x)$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.) της τ.μ. X. Προφανώς αν για μία τυχαία μεταβλητή X έχουμε την F_X τότε για να βρούμε την f_X το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να παραγωγίσουμε, δηλαδή $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$.

Η f_X ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $f_X(x) \geq 0$ και
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,(x)dx = 1$

Ροπές τ.μ.

Ορισμός 2.2.4. Μέση τιμή (mean) μιας τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (στην διακριτή περίπτωση) ή συνάρτηση πυκνότητας (στην συνεχή περίπτωση) $f_X(x)$ ορίζεται (αν υπάρχει) η ποσότητα

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x_n} x_n\, f_X(x_n) \quad \text{αν } X \text{ διακριτή}$$

ή

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) \quad \text{αν } X \text{ συνεχής}$$

Πρόταση 2.2.1. Ιδιότητες Μέσης Τιμής

Εάν X, Y είναι δύο τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
2. $E(cX) = cE(X)$, όπου c σταθερά
3. $E(c) = c$, όπου c σταθερά
4. Αν $X \leq Y$ τότε $E(X) \leq E(Y)$.

Εάν g είναι μια πραγματική συνάρτηση και X μια τ.μ., τότε η συνάρτηση $Y = g(X)$ είναι επίσης τ.μ.. Εάν η $g(x)$ είναι μη-γραμμική συνάρτηση τότε συνήθως έχουμε ότι $E\big(g(X)\big) \neq g\big(E(X)\big)$.

Πρόταση 2.2.2. Η μέση τιμή της τ.μ. $Y = g(X)$ (αν υπάρχει) δίνεται από την σχέση

$$E[g(X)] = \sum_{x_n} g\,(x_n) f_X(x_n) \quad \text{αν } X \text{ διακριτή}$$

ή

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(x) f_X(x) \quad \text{αν } X \text{ συνεχής}$$

Ορισμός 2.2.5. Ροπή k-τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής X καλείται η ποσότητα $\mu'_k = E(X^k)$.

Ορισμός 2.2.6. Παραγοντική ροπή k-τάξης μιας τ.μ. X καλείται η ποσότητα $\mu_{(k)} = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-k-1)]$.

Ορισμός 2.2.7. Διασπορά (variance) ή διακύμανση μιας τ.μ. ορίζεται η ποσότητα

$$\sigma^2(X) = \sigma_X^2 = V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

Πρόταση 2.2.3. Ιδιότητες Διασποράς

Εάν X τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, τότε

1. $V(X) \geq 0$
2. $V(aX+\beta) = a^2V(X)$, όπου a, β σταθερές
3. $V(a) = 0$, όπου a σταθερά

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς μιας τ.μ. X καλείται **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με σ_X.

Στοχαστική Ανεξαρτησία τ.μ.

Ορισμός 2.2.8. Δύο τ.μ. X_1, X_2 καλούνται (στοχαστικά) ανεξάρτητες εάν:

$$P[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2] = P[X_1 \in B_1]P[X_2 \in B_2]$$

για οποιαδήποτε υποσύνολα B_1, B_2 των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 2.2.1. Ισοδύναμες προτάσεις
Οι τ.μ. X_1, X_2 με σ.κ. F_X, F_Y αντίστοιχα και σ.π. f_X, f_Y αντίστοιχα, είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες αν και μόνο αν ισχύει μια από τις παρακάτω σχέσεις:

1. $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$
2. $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

Πιθανογεννήτρια τ.μ.

Για τις τυχαίες μεταβλητές υπάρχουν ορισμένες συναρτήσεις οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την περιγραφή τους. Μια από αυτές είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση χαρακτηρίζει την κατανομή που ακολουθεί η τ.μ..

Ορισμός 2.2.9. Έστω X μια μη-αρνητική διακριτή τ.μ. με $P(X=n)=p_n$, $n=1,2,\ldots$. Τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της X (probability generating function) $P_X(z)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$P_X(z)=E(z^X)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\,z^n.$$

Τονίζουμε ότι $|P_X(z)|\leq 1$ για όλα τα $|z|\leq 1$. Ακόμη

$$P_X(0)=P(X=0)=p_0,\quad P_X(1)=1,\quad P'_X(1)=E(X),$$

και πιο γενικά,

$$P_X^{(k)}(1)=E[X(X-1)\ldots(X-k-1)],$$

όπου ο εκθέτης (k) δηλώνει την k-οστή παράγωγο. Για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος $Z=X+Y$ δύο ανεξάρτητων τ.μ. X και Y, ισχύει ότι $P_Z(z)=P_X(z)\cdot P_Y(z)$.

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα η Πιθανογεννήτρια Συνάρτηση χαρακτηρίζει την κατανομή μιας τ.μ.. Επιπλέον η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τ.μ. ορίζεται μονοσήμαντα. Κατά συνέπεια αν X,Y είναι δύο τ.μ. με μη-αρνητικές τιμές και $P_X=P_Y$, τότε οι τ.μ. X και Y έχουν την ίδια κατανομή με τις ίδιες παραμέτρους.

2.3 ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με κάποιες κατανομές οι οποίες είναι χρήσιμες στην συνέχεια της παρούσας εργασίας. Θα παρουσιάσουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας, την μέση τιμή, τη διασπορά τους καθώς και την πιθανόγεννήτρια συνάρτηση για όσες από αυτές είναι διακριτές.

Γεωμετρική Κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p\in(0,1)$ έχει σ.π.

$$P(X=n)=(1-p)p^n,\ n=0,1,2,\ldots$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, η μέση τιμή και η διασπορά δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$P_X(z) = \frac{1-p}{1-p^z}, \quad E(X) = \frac{p}{1-p}, \quad \sigma_X^2 = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

Κατανομή Poisson

Μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ έχει σ.π.

$$P(X = n) = e^{\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, n = 0,1,2, \dots$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, η μέση τιμή και η διασπορά δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}, \quad E(X) = \lambda, \quad \sigma_X^2 = \lambda$$

Η κατανομή Poisson αφορά τυχαία διακριτά γεγονότα που συμβαίνουν σπάνια ή εμφανίζονται με πολύ μικρή συχνότητα σε έναν πληθυσμό. Χαρακτηριστικά της κατανομής αυτής είναι ότι το κάθε γεγονός συμβαίνει εντελώς τυχαία και ανεξάρτητα από τα άλλα γεγονότα και ότι η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα γεγονότα ταυτόχρονα ή σχεδόν ταυτόχρονα είναι πάρα πολύ μικρή που θεωρείται μηδενική. Τέτοια γεγονότα είναι

- ο αριθμός των ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια διασταύρωση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα,
- το πλήθος των γεννήσεων που γίνονται σε ένα νοσοκομείο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα,
- το πλήθος των θανάτων σε έναν συγκεκριμένο πληθυσμό σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα,
- ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε έναν σταθμό εξυπηρέτησης,
- το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που φτάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο,
- το πλήθος των φυτών (ενός συγκεκριμένου είδους) σε μια περιοχή,

Διαδικασία Poisson

Έστω $N(t)$ ο αριθμός των αφίξεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και έστω ότι

- αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα χρόνου και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους,
- η πιθανότητα να συμβεί ένας αριθμός γεγονότων σ'ένα χρονικό διάστημα είναι ίδια για όλα τα χρονικά διαστήματα ίσου μήκους,
- σε πολύ μικρά διαστήματα μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός,
- η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h είναι ίση με λh, για κάποιο λ.

Τότε η $N(t)$ καλείται διαδικασία Poisson ρυθμού λ.

Η $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, και έτσι

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0,1,2, \ldots.$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της $N(t)$ είναι ίση με

$$E\big(N(t)\big) = \lambda t, \quad \sigma^2\big(N(t)\big) = \lambda t$$

Η διαδικασία Poisson είναι μια εξαιρετικά χρήσιμη διαδικασία για τη μοντελοποίηση πολλών πρακτικών εφαρμογών, όπως, π.χ. να μοντελοποιήσει διαδικασίες άφιξης για τα μοντέλα ουρών ή διαδικασίες ζήτησης για συστήματα απογραφής. Έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι σε πολλές περιπτώσεις οι στοχαστικές διαδικασίες που προκύπτουν μπορούν να προσεγγίζονται καλά με μια διαδικασία Poisson.

Εκθετική Κατανομή

Η συνάρτηση πυκνότητας μίας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu > 0$ δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \, x > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της ισούται με

$$F_X(x) = 1 - e^{-\mu x}, \, x \geq 0.$$

Για αυτή τη κατανομή έχουμε

$$E(X) = \frac{1}{\mu} \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

Μία σημαντική ιδιότητα της εκθετικής κατανομής είναι η ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή ιδιότητα του αμνήμονος. Αυτή η ιδιότητα λέει ότι για όλα τα $x \geq 0$ και $t \geq 0$ ισχύει

$$P(X > x + t | X > t) = P(X > x)$$

Έτσι ο υπολειπόμενος χρόνος της X, δεδομένου ότι ο X είναι ακόμα ζωντανός τον χρόνο t, είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένος με την ίδια μέση τιμή $\frac{1}{\mu}$.

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικές Διαδικασίες

3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μοντελοποίηση και η ανάλυση φαινομένων τα οποία εξελίσσονται στον χρόνο με τρόπο που εμφανίζει τυχαιότητα. Η μελέτη αυτών των φαινομένων είναι δυνατόν να γίνει με τη βοήθεια της θεωρίας πιθανοτήτων και την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων με τη χρήση οικογενειών τυχαίων μεταβλητών. Το μαθηματικό αντικείμενο που μοντελοποιεί τέτοια φαινόμενα είναι οι Στοχαστικές Διαδικασίες (stochastic processes).

Αφορμή για την ανάπτυξη των στοχαστικών διαδικασιών ήταν ένα φαινόμενο από τον χώρο της φυσικής το 1827. Ο Brown παρατήρησε άτακτη (τυχαία) κίνηση σε σωματίδιο όταν αυτό βρίσκεται σε υγρό ή αέριο. Το 1905 ο Einstein μελέτησε το φαινόμενο και το 1923 ο Wiener τελειοποίησε το μοντέλο με χρήση του ΚΟΘ. Το παραπάνω φαινόμενο αναφέρεται ως κίνηση Brown ή κίνηση Wiener.

Για να ορίσουμε μια στοχαστική διαδικασία χρειαζόμαστε

- ένα σύνολο S, το οποίο καλείται **χώρος καταστάσεων** (state space) και είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τιμές της στοχαστικής διαδικασίας.
- ένα σύνολο T, το οποίο καλείται **παραμετρικός χώρος** (index set) και το οποίο συνήθως είναι ένα σύνολο χρόνων, συνεχές ή διακριτό ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε κάθε φορά.

Ορισμός 3.1.1. Στοχαστική Διαδικασία, ορισμένη στο T και με τιμές στος S καλείται μια συλλογή (οικογένεια) από τυχαίες μεταβλητές $\{X_t\}_{t\in T}$, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, με τιμές στο S.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για κάθε $t \in T$, η τ.μ. $X_t \colon \Omega \ni \omega \mapsto X_t(\omega) \in S$ περιγράφει την κατάσταση του συστήματος ή του φαινομένου που μελετάμε την χρονική στιγμή t.

Ταξινόμηση Στοχαστικών Διαδικασιών

Θα ταξινομήσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες βάσει του παραμετρικού χώρου και του χώρου καταστάσεων των τ.μ. X_t.

- Αν $T = [0, \infty), (0, a)$ τότε έχουμε συνεχή παραμετρικό χώρο.
- Αν $T = \{0,1,2, \dots\}$ τότε έχουμε διακριτό παραμετρικό χώρο και η σ.δ. ονομάζεται αλυσίδα.
- Αν $S \subset (-\infty, +\infty)$ τότε έχουμε συνεχή χώρο καταστάσεων.
- Αν $S \subset \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ τότε έχουμε διακριτό χώρο καταστάσεων.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις Μαρκοβιανές Αλυσίδες (οπότε έχουμε διακριτό παραμετρικό χώρο) με διακριτό χώρο καταστάσεων.

3.2 ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

3.2.1 Ορισμός

Όταν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε πραγματικά συστήματα είναι πολύ συνηθισμένο ο κανόνας που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος να εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος και όχι από το πώς το σύστημα βρέθηκε εκεί. Τα στοχαστικά συστήματα που έχουν αυτή την ιδιότητα χαρακτηρίζονται ως μαρκοβιανά.

Ορισμός 3.2.1. Μια σ.δ. $\{X_n, n \geq 0\}$ με πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο χώρο καταστάσεων S λέγεται Μαρκοβιανή Διαδικασία Διακριτού Χρόνου (DTMC) αν ισχύει η σχέση

$$P\left(\underbrace{X_{n+1} = j}_{\text{μέλλον}} \middle| \underbrace{X_n = i}_{\text{παρόν}} \underbrace{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0}_{\text{παρελθόν}} \right) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n),$$

$$\forall n, \quad \forall j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$$

Ερμηνεία: Βλέπουμε τη χρονική στιγμή n σαν το παρόν, την $n+1$ σαν μέλλον και τις $0,1,\ldots,n-1$ σαν παρελθόν. Η μαρκοβιανή ιδιότητα λέει ότι το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν.
Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας που έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα είναι ο ελεύθερος τυχαίος περίπατος.

Παράδειγμα 3.2.1. Ελεύθερος Τυχαίος Περίπατος

Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση X_0 και από κει και πέρα για κάθε ακέραια χρονική μονάδα κάνει ένα βήμα προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά.

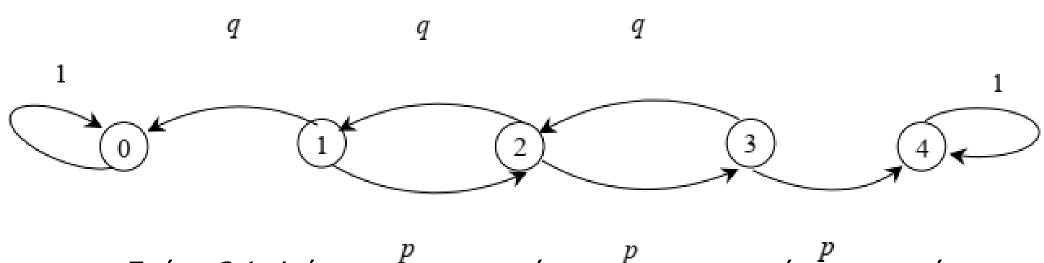
Ορίζουμε X_n =θέση μετά από n βήματα, $n=0,1,2,\ldots$. Ισχύει ότι

$$X_{n+1}=X_n+1 \qquad \text{ή} \qquad X_{n+1}=X_n-1$$

Κατά συνέπεια οι $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ δεν επηρεάζουν την X_{n+1} και άρα η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τη θέση του σωματιδίου είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

Παράδειγμα 3.2.1. Η καταστροφή του χαρτοπαίκτη

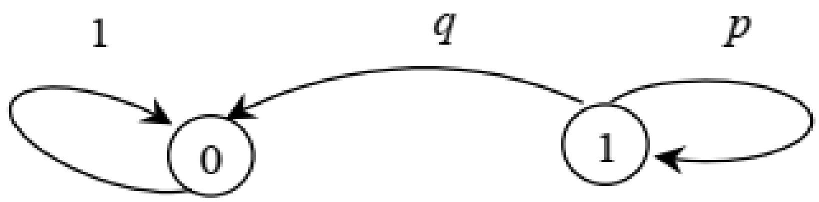
Υπάρχουν δύο χαρτοπαίκτες με δύο μάρκες στο χέρι ο καθένας. Ο παίκτης A κερδίζει με πιθανότητα p ενώ ο B με πιθανότητα $q=1-p$. Ο κάθε παίκτης βρίσκεται σε μια από τις ακόλουθες πιθανές καταστάσεις 0,1,2,3,4, ανάλογα με το πόσες μάρκες έχει σε κάποια χρονική στιγμή. Σχεδιάζουμε το ακόλουθο διάγραμμα καταστάσεων:



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα καταστάσεων καταστροφής χαρτοπαίκτη

Παράδειγμα 3.2.3.Μια μηχανή

Έστω μια μηχανή που παράγει ένα προϊόν με πιθανότητα p σ' ένα κύκλο παραγωγής ή χαλάσει με πιθανότητα $q = 1 - p$. Έστω 1 η κατάσταση «καλή» και 0 η κατάσταση «χαλασμένη». Τότε το διάγραμμα καταστάσεων είναι:



Σχήμα 3.2:Διάγραμμα καταστάσεων μιας μηχανής

Παρατήρηση 3.2.1.

1. Για την εφαρμογή της μαρκοβιανής ιδιότητας δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν όλες οι παρελθοντικές χρονικές στιγμές.
2. Ως παρόν δεν είναι απαραίτητο να ληφθεί η αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή από το μέλλον αλλά μπορεί να είναι η πλησιέστερη στο μέλλον.

Πρόταση 3.2.1. Σε κάθε μαρκοβιανή αλυσίδα ισχύει η σχέση

$$P\left(X_{n+m} = j \middle| X_n = i, X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k\right) = P(X_{n+m} = j | X_n = i),$$
$$\forall j, i, i_1, i_2, \dots, i_k \in S \quad , \quad \forall k \quad , \quad \forall n + m > n > n_1 > n_2 > \cdots > n_k$$

Συμβολίζουμε ως $p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i$ την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε ένα βήμα κατά τη χρονική στιγμή n.

Στις περισσότερες μαρκοβιανές αλυσίδες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, η σχέση $P(X_{n+1} =\cdot\, |X_n =\cdot)$ που περιγράφει την εξέλιξη της αλυσίδας, δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή n.

Ορισμός 3.2.2. Μια DTMC $\{X_n\}_{n\in T}$ καλείται στάσιμη ή χρονικά ομογενής (stationary or time-homogeneous) αν ισχύει η σχέση:

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}, \quad \forall n, \forall i, j \in S$$

δηλαδή η πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη δεν εξαρτάται από το n.

Από όλα τα p_{ij} δημιουργείται ένας πίνακας $\mathbb{P}$ ο οποίος καλείται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος. Η μορφή αυτού του πίνακα είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathbb{P}$ είναι τετραγωνικός και επιπλέον είναι στοχαστικός, δηλαδή ισχύει ότι

- $p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in S$
- $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$, $\forall i \in S$

Οι ποσότητες $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_0 = i) = P(X_{n+m} = j|X_m = i)$ καλούνται πιθανότητες μετάβασης n-οστού βήματος. Τα $p_{ij}^{(n)}$ κατασκευάζουν τους αντίστοιχους πίνακες $\mathbb{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$ οι οποίοι καλούνται πίνακες μετάβασης n −οστού βήματος. Ο πίνακας μετάβασης έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Είναι τετραγωνικός και έχει διάσταση $|S|$
2. $p_{ij}^{(n)} \geq 0$
3. Ο $P^{(n)}$ είναι στοχαστικός πίνακας, δηλαδή $\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1 \forall i \in S$

Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

- $P^{(1)} = \left(p_{ij}^{(1)}\right)$, όπου $p_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}$ = γενικό στοιχείο του P.
- $P^{(0)} = \left(p_{ij}^{(0)}\right)$, όπου $p_{ij}^{(0)} = P(X_0 = j|X_0 = i) = \begin{cases}1, & i = j \\ 0, & i \neq j\end{cases}$. Άρα $\Pi^{(0)} = I$

Η αρχική κατανομή της DTMC είναι οι ποσότητες $p_j = P(X_0 = j)$, $\forall j \in S$. Επιπλέον συμβολίζουμε με $p_j^{(n)}$ την πιθανότητα $P(X_n = j)$.

Ο πίνακας $\mathbb{P}^{(n)}$ και τα $p_j^{(n)}$ υπολογίζονται μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.1. Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια DTMC. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $\forall n, m \geq 0$, $i, j \in S$ έχουμε

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{n} \, p_{kj}^{(m)}$$

ή αντίστοιχα

$$\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{(n)} \mathbb{P}^{(m)}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις καλούνται εξισώσεις των Chapman-Kolmogorov. Πόρισμα: $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{n}$.

2. $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbb{P}^{(n)}$, όπου $\mathbf{p}^{(n)} = \left(p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots\right)$, $\mathbf{p}^{(0)} = (p_0, p_1, \dots)$

Η αρχική κατανομή της DTMC, p_j και ο πίνακας πιαθνοτήτων μετάβασης ενός βήματος καθορίζουν πλήρως τις στατιστικές ιδιότητες της μαρκοβιανής αλυσίδας.

3.2.2 Επικοινωνία, επαναληπτικές και μεταβατικές καταστάσεις

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δούμε πως μπορούμε να οργανώσουμε τις καταστάσεις του χώρου μιας μαρκοβιανής αλυσίδας έτσι ώστε να διευκολύνουμε την κατανόηση της συμπεριφοράς της. Θα δούμε ότι ο χώρος διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας εντός των οποίων η αλυσίδα είναι πιο εύκολο να αναλυθεί. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in N_0}$ στον χώρο καταστάσεων S με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P}$.

Ορισμός 3.2.3. Θα λέμε ότι η κατάσταση $i \in S$ είναι επαναληπτική αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n θα επιστρέφει τελικά στην i δεδομένου ότι κάποια στιγμή βρίσκεται στην i, δηλαδή,

$$P(X_n = i \quad \text{για κάποιο} \quad n > k | X_k = i) = 1.$$

Στην περίπτωση που το παραπάνω δεν ισχύει τότε λέμε ότι η κατάσταση i είναι μεταβατική.

Ορισμός 3.2.4. Θα λέμε ότι η κατάσταση $i \in S$ επικοινωνεί με την κατάσταση $j \in S$ εάν με θετική πιθανότητα η αλυσίδα θα επισκεφτεί την κατάσταση j ξεκινώντας από την i, δηλαδή,

$$P(X_n = j \quad \text{για κάποιο} \quad n \geq k | X_k = i) > 0.$$

Αν η i επικοινωνεί με την j τότε γράφουμε $i \to j$. Αν επιπλέον $j \to i$, τότε γράφουμε $i \leftrightarrow j$ και λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν.

Παρατήρηση 3.2.2. Η σχέση της επικοινωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Το ότι η σχέση επικοινωνίας είναι σχέση ισοδυναμίας, έχει σαν συνέπεια η σχέση $\leftrightarrow$ νε διαμερίζει τον S σε κλάσεις, οι οποίες ονομάζονται κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας. Κάθε κατάσταση στην κλάση επικοινωνεί με κάθε κατάσταση στην ίδια κλάση και όχι άλλη κατάσταση.

Μια επικοινωνούσα κλάση λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχει καμιά απολύτως μετάβαση σε άλλη κατάσταση έξω από την κλάση. Αυστηρά μαθηματικά λοιπόν έχουμε ότι αν η X_n είναι μαρκοβιανή αλυσίδα ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S, τότε το $C \subseteq S$ ονομάζεται κλειστό στην περίπτωση που η αλυσίδα παίρνει τιμές στο C, και μόνο στο C, από τη στιγμή που για πρώτη φορά θα πάρει κάποια τιμή του συνόλου αυτού, ή αλλιώς

$$P(X_k \in S \setminus C \quad \text{για κάποιο} \quad k \geq n | X_n \in C) = 0.$$

Επομένως άπαξ και μπούμε σε μια κλειστή κλάση ποτέ δεν βγαίνουμε απ’ αυτήν.

Μια επικοινωνούσα κλάση λέγεται μεταβατική αν από αυτήν μπορούμε να φθάσουμε σε κάποια κατάσταση έξω από αυτήν και από εκεί δεν μπορούμα να επιστρέψουμε στην αρχική κλάση. Οι επικοινωνούσες κλάσεις καταλήγουν πάντα σε μια κλειστή κλάση και άρα κάθε μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τουλάχιστον μια κλειστή κλάση. Οι κλειστές κλάσεις λέγονται και απορροφητικές.

Ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ καλείται αδιαχώριστο αν οποιεσδήποτε δύο καταστάσεις $i, j \in C$ επικοινωνούν μεταξύ τους, δηλαδή για κάθε $i, j \in C$ έχουμε $i \leftrightarrow j$. Επίσης, μια κατάσταση $j \in S$ θα καλείται απορροφητική αν $P_{jj} = 1$.

Έστω

- $f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, \forall k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i) \quad , \quad n = 1,2, \dots$
- $f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij}$

Για $i \neq j$ η παραπάνω πιθανότητα λέγεται πιθανότητα πρώτης μετάβασης, ενώ για $i = j$ λέγεται πιθανότητα επιστροφής στην i μετά από n βήματα και συμβολίζεται με $f_{ii}^{(n)}$.

Πρόταση 3.2.2. Ισχύει ότι $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \, p_{ij}^{(n-k)} \quad , \quad n = 1,2, \dots$

Απόδειξη

Ορίζουμε

- $B_k =$ πρώτη επίσκεψη στην j να γίνει τη χρονική στιγμή k, $k = 1,2, \dots, n$
- $B_{>n} =$ πρώτη επίσκεψη στην j να γίνει μετά τη χρονική στιγμή n.
- $B_{\infty} =$ να μην μεταβεί στην j ποτέ το σύστημα.

Τα $B_k, B_{>n}, B_{\infty}, k = 1,2, \dots, n$ αποτελούν διαμέριση. Με τη βοήθεια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | \underbrace{X_0 = i}_{\Gamma}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j|B_k, \Gamma)P(B_k|\Gamma) + P(X_n = j|B_{>n}, \Gamma)P(B_{>n}|\Gamma) + P(X_n = j|B_\infty, \Gamma)P(B_\infty|\Gamma) \\
&= \sum_k f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)} + 0 + 0 = \sum_k f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε ως f_{ij} τις πιθανότητες πρώτης μετάβασης (ή επίσκεψης) ανεξαρτήτως αριθμού βημάτων.

Πρόταση 3.2.3. $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

Απόδειξη

Η μετάβαση από την i sthn j για πρώτη φορά θα γίνει ή για $n = 1$, ή για $n = 2$ ή … . Επομένως λόγω ανεξαρτησίας των $f_{ij}^{(n)}$ έχουμε

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Για $i = j$ η f_{ii} είναι η πιθανότητα πρώτης επιστρφής στην κατάσταση i ανεξαρτήτως αριθμού βημάτων.

3.2.3 Χρονική στιγμή πρώτης μετάβασης από την i στην j

Ορίζουμε ως $T_{ij} = \min\{n: X_n = j, X_k \neq j, \forall k = 1,2,\dots,n-1 | X_0 = i\}$ την χρονική στιγμή πρώτης μετάβασης από την i στην j. Για $i = j$, η T_{ii} είναι η χρονική στιγμή πρώτης επιστροφής στην κατάσταση i.

Πρόταση 3.2.4. Ισχύουν

1. $P(T_{ij} = n) = f_{ij}^{(n)}$
2. $P(T_{ij} < \infty) = f_{ij}$

Απόδειξη

1. Από τον ορισμό του T_{ij} έχουμε ότι $P(T_{ij} = n) = f_{ij}^{(n)}$

2. $P(T_{ij} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(T_{ij} = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}$

Ορισμός 3.2.5. Η κατάσταση i λέγεται επαναλαμβανόμενη αν $f_{ii} = 1$, ενώ αν $f_{ii} < 1$ η κατάσταση λέγεται μεταβατική.

Ερμηνεία: Έστω N_{ii} ο αριθμός των επιστροφών στην κατάσταση i δεδομένου ότι $X_0 = i$ και T_{ii} η χρονική στιγμή πρώτης επιστροφής στην κατάσταση i δεδομένου ότι $X_0 = i$. Ορίζουμε $T_{ii} = \infty$ αν δεν είναι δυνατή η επιστροφή στην κατάσταση i δεδομένου ότι $X_0 = i$.

Αν έχουμε $f_{ii} = 1$, επειδή έχουμε στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα, έχουμε άπειρες επιστροφές στην κατάσταση i δεδομένου ότι $X_0 = i$. Άρα αν η κατάσταση i είναι επαναλαμβανόμενη έχουμε $N_{ii} = \infty$. Αν επιπλέον η i είναι επαναλαμβανόμενη και για αυτήν ισχύει ότι $E(T_{ii}) = \infty$ τότε η επιστροφή στην κατάσταση i είναι βέβαιη αλλά καθυστερεί. Σε αυτή την περίπτωση η κατάσταση i λέγεται μηδενικά επαναλαμβανόμενη. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν $E(T_{ii}) < \infty$ τότε η επιστροφή γίνεται σε κατά μέσο όρο πεπερασμένο χρόνο και η i λέγεται θετικά επαναλαμβανόμενη.

Παρατήρηση 3.2.3. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) θα έχει τουλάχιστον μια επαναληπτική κατάσταση. Πράγματι, έστω ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ για κάθε $i.k \in S$. Όμως, $1 = \sum_{k=0}^{m} p_{ij}^{(n)}$ αφού ο πίνακας $\mathbb{P}^{(n)}$ είναι στοχαστικός και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ φτάνουμε σε άτοπο.

Πρόταση 3.2.5. Αν η κατάσταση i είναι μεταβατική και N_{ii} είναι το πλήθος επιστροφών στην κατάσταση i δεδομένου ότι $X_0 = i$ τότε

1. $P(N_{ii} = k) = f_{ii}^{(k)}(1 - f_{ii}) \quad , \quad k = 0,1,2, \dots$

2. $P(N_{ii} < \infty) = 1$

3. $E(N_{ii}) = \frac{f_{ii}}{1-f_{ii}}$

Κεφάλαιο 4

Απορροφητικές Μαρκοβιανές Αλυσίδες

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορισμός 4.1.1. Η κατάσταση i καλείται απορροφητική αν $p_{ii} = 1$.

Πρόταση 4.1.1. (Κριτήριο Μεταβατικότητας)

1. Η κατάσταση i είναι μεταβατική αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.
2. Η κατάσταση i είναι επαναλαμβανόμενη αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω μια μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ είναι κλειστό ανν $P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C$ και $j \in S \setminus C$.

Απόδειξη

Αν είναι κλειστό το υποσύνολο τότε είναι προφανές ότι $P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C, j \in S \setminus S$. Θα αποδείξουμε το αντίστροφο. Θα αποδείξουμε ότι όταν $P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C, j \in S \setminus C$ τότε και

$$P(X_k \in S \setminus C | X_n \in C) = 0,$$

για κάθε $k \geq n$. Με επαγωγή επί του $k \geq n + 1$ έχουμε:
Για $k = n + 1$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = m$ και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται και για $k = m + 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C) &= P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C, X_m \in C) P(X_m \in C | X_n \in C) \\ &\quad + P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C, X_m \in S \setminus C) P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C) \\ &= P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in C) P(X_m \in C | X_n \in C) \\ &\quad + P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in S \setminus C) P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C). \end{aligned}$$

Όμως, $P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in C) = 0$ αφού $P(X_{n+1} \in S \setminus C | X_n \in C) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C) = 0$ από την υπόθεση της επαγωγής.

Πρόταση 4.1.2. Αν $i \leftrightarrow j$ τότε δεν μπορεί η μία να είναι επαναληπτική και η άλλη μεταβατική. Είτε και οι δύο θα είναι επαναληπτικές είτε μεταβατικές. Επομένως, σε ένα αδιαχώριστο σύνολο όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Αν το σύνολο είναι αδιαχώριστο και πεπερασμένο τότε αναγκαστικά όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές.

Απόδειξη

Έστω ότι $i \leftrightarrow j$ και η i είναι επαναλαμβανόμενη θα δείξουμε ότι και η j είναι επαναλαμβανόμενη.

$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists r \geq 0, m \geq 0$ τ.ω. $p_{ij}^{(r)} > 0$ και $p_{ij}^{(m)} > 0$

Θεωρούμε ότι για $n = 1,2, \dots$ έχουμε $p_{jj}^{(m+n+r)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)}$.

Οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+r)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)} = \underbrace{p_{ji}^{(m)}}_{>0} \underbrace{p_{ij}^{(r)}}_{>0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}_{=\infty}$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+r)} = \infty$

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+r)}$ (καθώς έχει $m + r$ περισσότερους όρους)

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

Έστω τώρα ότι $i \leftrightarrow j$ και η i είναι μεταβατική, θα δείξουμε ότι η j είναι μεταβατική. Αν η j δεν ήταν μεταβατική τότε θα ήταν επαναλαμβανόμενη. Τότε και η i θα ήταν επαναλαμβανόμενη. Άτοπο γιατί η i είναι μεταβατική.

Βάσει των παραπάνω έχουμε ότι αν μια στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μη διαχωρίσιμη τότε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες είναι επαναλαμβανόμενες. Επιπλέον αν μια στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα έχει πεπερασμένο χώρο καταστάσεων (πεπερασμένο S) τότε υπάρχει τουλάχιστον μια επαναλαμβανόμενη κατάσταση. Σε μια πεπερασμένη και μη διαχωρίσιμη στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα όλες οι καταστάσεις είναι επαναλαμβανόμενες.

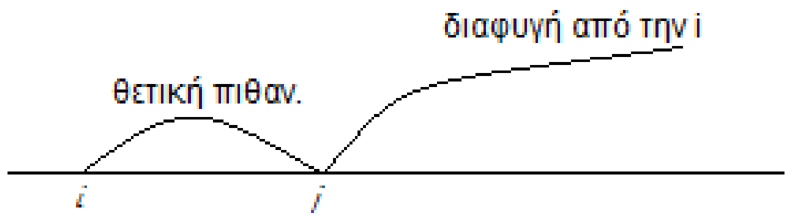
Πρόταση 4.1.3. Αν η i είναι επαναλαμβανόμενη και $i \to j$, τότε η j είναι επαναλαμβανόμενη.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $j \to i$.

Έστω ότι $j \nrightarrow i$ (δηλαδή δεν είναι δυνατή η μετάβαση από την j στην i).

Τότε, ξεκινώντας από την i, υπάρχει θετική πιθανότητα διαφυγής από την i ως εξής:



Σχήμα 4.1

Δηλαδή, $1 - f_{ii} > 0 \Rightarrow f_{ii} < 1$, άτοπο γιατί η i είναι επαναλαμβανόμενη, δηλαδή $f_{ii} = 1$. Άρα $j \to i$ και $i \to j$ οπότε $i \leftrightarrow j$ και κατά συνέπεια οι i, j είναι του ίδιου τύπου.

Άρα αφού η i είναι επαναλαμβανόμενη και η j είναι επαναλαμβανόμενη.

Πρόταση 4.1.4. Αν η i είναι επαναλαμβανόμενη και η j είναι μεταβατική, τότε $i \nrightarrow j$.

Απόδειξη

Έστω $i \to j$. Λόγω της πρότασης [prop1] έχουμε ότι η j είναι επαναλαμβανόμενη.

Άτοπο καθώς η j είναι μεταβατική.

Συμπέρασμα: Η αλυσίδα από μια επαναλαμβανόμενη κατάσταση μπορεί να μεταβεί μόνο σε μια επαναλαμβανόμενη.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο C του S λέγεται κλειστό αν και μόνο αν $\forall i \in C, \forall j \in S \setminus C$ ισχύει $i \nrightarrow j$. Με πιο απλά λόγια, το ότι το C είναι κλειστό σημαίνει ότι αν το σύστημα βρεθεί στο C τότε παραμένει στο C.

Ορισμός 4.1.2. Το $C \subset S, C \neq \varnothing$ λέγεται κλειστό και ανάγωγο αν:

1. Το C είναι κλειστό.
2. Δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του C το οποίο να είναι επίσης κλειστό.

Το ότι ένα υποσύνολο είναι ανάγωγο δίνει κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες στο σύνολο αυτό. Αρχικά αν το C είναι κλειστό και ανάγωγο, τότε οι καταστάσεις του είναι όλες επαναλαμβανόμενες ή όλες μεταβατικές. Επιπλέον αν το C είναι κλειστό, ανάγωγο και πεπερασμένο τότε όλες οι καταστάσεις του είναι επαναλαμβανόμενες.

Δομή του πίνακα $\mathbb{P} = \left(\boldsymbol{p_{ij}}\right)$

Αναδιατάσσοντας τις γραμμές του πίνακα μετάβασης ενός βήματος $\mathbb{P}$, μπορούμε να τον γράψουμε στην μορφή

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline M & M \end{array}\right)$$

όπου E είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης από επαναλαμβανόμενες καταστάσεις σε επαναλαμβανόμενες, ο M είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης από μεταβατικές σε μεταβατικές ή επαναλαμβανόμενες και ο 0 είναι ο μηδενικός πίνακας.

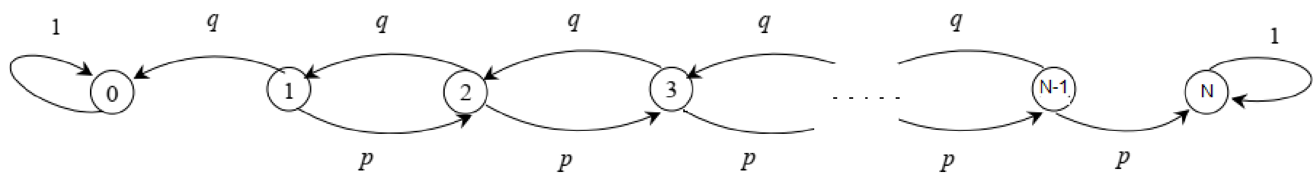
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{επαν.} & \text{μετ.} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{επαν.} \\ \text{μετ.} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline M & M \end{array}\right) \end{array}$$

Γενικότερα διατάσσοντας τις επαναλαμβανόμενες καταστάσεις, έτσι ώστε επαναλαμβανόμενες καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους να αντιστοιχούν σε διαδοχικές (γειτονικές) γραμμές, έχουμε τον πίνακα να παίρνει την μορφή:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} E_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & E_a & 0 \\ \hline M & M & M & M & M \end{array}\right)$$

Η παραπάνω μορφή θα λέγεται κανονική μορφή του πίνακα.

Παράδειγμα 4.1.1. Τυχαίος περίπατος με απορροφητικά φράγματα.



Σχήμα 4.3

Οι καταστάσεις $0, N$ είναι απορροφητικές καθώς $p_{00} = 1, p_{NN} = 1$. Οπότε οι κλάσεις επικοινωνούντων καταστάσεων που υπάρχουν είναι οι

- $\{0\}$
- $\{N\}$
- $\{1,2, \dots, N-1\}$

Οι καταστάσεις $\{0\}$,$\{N\}$ είναι επαναλαμβανόμενες ως απορροφητικές. Η κατάσταση 1 είναι μεταβατική καθώς αν η αλυσίδα πάει στην 0 τότε δεν μπορεί να επιστρέψει, άρα οι καταστάσεις $\{1,2, \dots, N-1\}$ είναι μεταβατικές.

Περιοδικότητα καταστάσεων

Έστω μια μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στον χώρο καταστάσεων S. Θα λέμε ότι η κατάσταση i είναι περιοδική αν και μόνο αν ο ΜΚΔ των $\left\{n \in \mathbb{N}: p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Αλλιώς η κατάσταση ονομάζεται απεριοδική. Ο ΜΚΔ συμβολίζεται με $d(i)$ και ονομάζεται περίοδος της κατάστασης i. Οπότε η κατάσταση i είναι περιοδική αν και μόνο αν $d(i) \geq 2$. Μια κατάσταση i η οποία είναι ταυτόχρονα θετικά επαναληπτική και απεριοδική θα ονομάζεται εργοδική. Μια στάσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα θα λέγεται εργοδική αν κάθε κατάστασή της είναι εργοδική.

Έστω κάποιος ακέραιος αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $p_{ii}^{(n_0)} > 0$ για κάποια κατάσταση i. Τότε προφανώς ισχύει ότι $p_{ii}^{(k \cdot n_0)} > 0$ για κάθε $k = 1,2, \dots$ και επίσης ο $d(i)$ θα διαιρεί τον n_0. Αν ο n_0 είναι πρώτος αριθμός τότε $d(i) = 1$ ή n_0. Επιπλέον η μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να επιστρέφει στην κατάσταση i μόνο σε χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσια της περιόδου της.

Πρόταση 4.1.5. αν $i \leftrightarrow j$, τότε οι i και j έχουν την ίδια περίοδο.

Απόδειξη

Έστω $d =$ περίοδος της $i = ΜΚΔ\left\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ και $d' =$ περίοδος της $j =$
$ΜΚΔ\left\{n \geq 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\right\}$.
Θα δείξουμε ότι $d \leq d'$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{d}{k}, \forall k$ τ.ω. $p_{jj}^{(k)} > 0$.
$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists n \geq 1, m \geq 1$ τ.ω. $p_{ij}^{(n)} > 0$ και $p_{ji}^{(m)} > 0$.
Τότε $p_{ii}^{n+m} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0 \Rightarrow p_{ii}^{(n+m)} > 0 \Rightarrow \frac{d}{n} + m$
Επίσης για k τ.ω. $p_{jj}^{(k)} > 0$ έχουμε:

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)} > 0 \Rightarrow p_{ii}^{(n+k+m)} > 0 \Rightarrow \frac{d}{n} + k + m$$

Επομένως $\forall k$ τ.ω. $p_{jj}^{(k)} > 0 \Rightarrow \frac{d}{n} + m$ και $\frac{d}{n} + k + m \Rightarrow \frac{d}{k}$
Δηλαδή: $\forall k$ τ.ω. $p_{jj}^{(k)} > 0$ ισχύει ότι $\frac{d}{k}$, όμως $d' = ΜΚΔ\left\{k \geq 1 : p_{jj}^{(k)} > 0\right\}$.
Επομένως $d \leq d'$.
Ανάλογα αντιστρέφοντας τους ρόλους των i, j έχουμε $d' \leq d$.
Άρα $d = d'$.

4.2. ΟΡΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα και έχει συγχρόνως και θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Με την ορολογία ασυμπτωτική αναφερόμαστε στην εύρεση του ορίου $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. Υπάρχουν για τον σκοπό αυτό δύο προσεγγίσεις.

Η πρώτη είναι η πιθανοθεωρητική προσέγγιση. Σε αυτή την περίπτωση το βασικό εργαλείο για την εύρεση του $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{(n)}$ στο οποίο τελικά ανάγεται το πρόβλημα της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς είναι η θεωρία πιθανοτήτων. Δηλαδή ουσιαστικά επιλέγεται το μονοπάτι της αξιοποίησης του γεγονότος ότι τα στοιχεία του πίνακα $\mathbb{P}$ είναι πιθανότητες και κάθε θετικό στοιχείο στον πίνακα έχει συγκεκριμένο φυσικό νόημα.

Η δεύτερη αποτελεί την αλγεβρική προσέγγιση. Σε αυτή την περίπτωση το βασικό εργαλείο είναι η θεωρία πινάκων. Από πρακτική άποψη ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση που η σύγκλιση του παραπάνω ορίου είναι γρήγορη. Αυτό συμβαίνει γιατί στις πραγματικές εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων δεν είναι ρεαλιστικό να προβαίνει κάποιος σε προβλέψεις που ξεπερνούν το χρονικό ορίζοντα των 5 ή 6 χρονικών βημάτων. Το γεγονός αυτό καθιστά ιδιαίτερα σημαντική την εύρεση των συνθηκών αν υπάρχουν, κάτω από τις οποίες η ταχύτητα σύγκλισης είναι γεωμετρική.

Επαναλαμβάνουμε ότι η j είναι μηδενικά ή θετικά επαναλαμβανόμενη αν και μόνο αν $f_{jj} = 1$. Η j είναι θετικά επαναλαμβανόμενη αν και μόνο αν η j είναι επαναλαμβανόμενη και $E\left[T_{jj}\right] < \infty$. Αντιθέτως η j είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενη αν και μόνο αν η j είναι επαναλαμβανόμενη και $E\left[T_{jj}\right] = \infty$ όπου $T_{jj} = \min\{n \geq 1 : X_n = j | X_0 = j\}$ η χρονική διάρκεια μέχρι την πρώτη επιστροφή. Έχουμε επίσης ότι $E\left[T_{jj}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}^{(n)} = \mu_{jj}$.

Ορισμός 4.2.1. Η j είναι εργοδική αν η j είναι θετικά επαλαμβανόμενη και απεριοδική.

Ορισμός 4.2.2. Η ΣΜΑ λέγεται εργοδική αν κάθε κατάσταση της είναι εργοδική.

Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι

1. Υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$;
2. Αν υπάρχει τότε αυτό εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος ή όχι;

Αν $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_{ij} \Rightarrow p_{ij}^{(n)} \approx \pi_{ij}$ για χρονικές στιγμές $n \geq n_0$, δηλαδή οι πιθανότητες μετάβασης χρονικά είναι (περίπου) σταθερές. Άρα το ότι το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ σημαίνει ότι το σύστημα περιέρχεται σε κατάσταση ισορροπίας. Αν επιπλέον $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ (δηλαδή ανεξάρτητη της κατάστασης i) η ισορροπία χαρακτηρίζεται ως ευσταθής (αφού είναι ανεξάρτητη της i).

Θεώρημα 4.2.1. (Erdos, Feller, Pollard (EFP)

- Αν η j είναι επαναλαμβανόμενη και απεριοδική (εργοδική) τότε:

$$p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_{jj}} = \begin{cases} < \infty & \text{, αν } j \text{ θετικά επαναλαμβανόμενη} \\ 0 & \text{, αν } j \text{ μηδενικά επαναλαμβανόμενη} \end{cases}$$

- Αν η j είναι επαναλαμβανόμενη και περιοδική με περίοδο $d > 1$ τότε:

$$p_{jj}^{(nd)} \to \frac{d}{\mu_{jj}} = \begin{cases} < \infty & \text{, αν } j \text{ θετικά επαναλαμβανόμενη} \\ 0 & \text{, αν } j \text{ μηδενικά επαναλαμβανόμενη} \end{cases}$$

  και $p_{jj}(m) = 0 \quad m \neq kd$

Θεώρημα 4.2.2.

1. Αν η j είναι μεταβατική ή μηδενικά επαναλαμβανόμενη, τότε $p_{ij}^{(n)} \to 0, \forall i \in S$
2. Αν η j εργοδική (θετικά επαναλαμβανόμενη και απεριοδική) τότε $\lim_n p_{ij}^{(n)} = f_{ij} \frac{1}{\mu_{jj}}$
3. Αν η j είναι θετικά επαναλαμβανόμενη και περιοδική με περίοδο $d > 1$ τότε $\nexists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \forall i$ τ.ω. $i \leftrightarrow j$.

Θεώρημα 4.2.3 Εργοδικό Θεώρημα

Αν έχουμε ΣΜΑ μη διαχωρίσιμη και εργοδική τότε:

1. $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j \quad \forall i \in S$

2. Τα π_j είναι η μοναδική λύση του συστήματος:
$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k \, p_{kj} \\ \sum_{j\in S} \pi_j = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Απόδειξη

1. Όλες οι καταστάσεις είναι εργοδικές (θετικά επαναληπτικές και απεριοδικές). Άρα από προηγούμενο θεώρημα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij} \frac{1}{\mu_{jj}}$.

   Αρκεί να δείξουμε ότι $f_{ij} = 1, \forall i, \forall j$

   i. Για $i = j \Rightarrow f_{jj} = 1$ επειδή η j επαναλαμβανόμενη.

   ii. Για $i \neq j$. Αν $f_{ij} < 1$, τότε $1 - f_{ij} > 0 \Rightarrow$ πιθανότητα να μην επισκευτεί το σύστημα την j ξεκινώντας από την i $\Rightarrow$ υπάρχει θετική πιθανότητα ξεκινώντας από την j, να μην επιστρέψει το σύστημα στην j ($j \to i \to$ διαφυγή), άτοπο αφού η j είναι επαναλαμβανόμενη.

   Επομένως $f_{ij} = 1$. Άρα $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1 \frac{1}{\mu_{jj}} = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j$

2. Αν υποθέσουμε ότι το S είναι πεπερασμένο

   $P(X_n = j) \underset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{i\in S} P\,(X_0 = i) \lim_{n\to} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S} P\,(X_0 = i)\pi_j = \pi_j \sum_{i\in S} P\,(X_0 = i) = \pi_j$

   Άρα $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$

   $P(X_{n+1} = j) \underset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{i\in S} P\,(X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i) \sum_{i\in S} P\,(X_n = i) p_{ij}$

   Για $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = j) = \sum_{i\in S} \lim_{n\to\infty} P(X_n = i) p_{ij} \Rightarrow \pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i \, p_{ij} = \sum_{k\in S} \pi_k \, p_{kj}$

Άρα $\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k \, p_{kj}$, οπότε έχουμε την πρώτη εξίσωση.

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$\sum_{j\in S} P\,(X_n = j) = 1 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{j\in S} \pi_j = 1$

Μοναδικότητα της λύσης του συστήματος (*)

(Για S πεπερασμένο)

Έστω $x_j \geq 0, j \in S$ μια άλλη λύση. Άρα $x_j = \sum_{k\in S} x_k \, p_{kj}, \sum_{k\in S} x_k = 1, S = \{0,1, \dots , l\}$

$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots , x_l)$

Τότε $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbb{P}, \mathbb{P} = \left(p_{kj}\right)$ επειδή

$$(x_0, x_1, \dots , x_l) = (x_0, x_1, \dots , x_l) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1l} \\ & & & p_{2j} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & p_{kj} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & p_{lj} & & \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbb{P} = (\mathbf{x}\mathbb{P})\mathbb{P} = \mathbf{x}\mathbb{P}^2 = \cdots = \mathbf{x}\mathbb{P}^n \quad n$

Δηλαδή $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbb{P} = \mathbf{x}\mathbb{P}^{(n)} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbb{P}^{(n)} \Rightarrow x_j = \sum_k x_k \, p_{kj}^{(n)} \quad \forall n$

Παίρνω όρια ως προς n και έχουμε:

$x_j = \sum_k x_k \, \pi_j = (\sum_k x_k)\pi_j = 1\pi_j = \pi_j \Rightarrow x_j = \pi_j \quad \forall j$

Άρα έχουμε μοναδική λύση.

Για S απειροσύνολο, αλλά αριθμήσιμο ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \sum_k \lim_{n\to\infty} a_{nk}$ υπό τις συνθήκες:

i.$|a_{nk}| \leq b_k$

ii.$\sum_k b_k < \infty$

Πρόταση 4.2.1. Αν έχουμε ΣΜΑ μη διαχωρίσιμη, εργοδική, πεπερασμένη (S: πεπερασμένο) και ο πίνακας $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικός τότε: $\pi_j = \frac{1}{|S|}, \quad \forall i \in S$, όπου $|S|$ ο πληθάριθμος του S.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_j = \frac{1}{|S|}, j \in S$ ικανοποιούν το σύστημα (*).

$$\sum_{j \in S} \lambda_j = 1 \Leftrightarrow \sum_{j \in S} \frac{1}{|S|} \Leftrightarrow \frac{1}{|S|}|S| = 1$$

Πρέπει $\frac{1}{|S|} = \sum_{k \in S} \frac{1}{|S|} p_{kj} \Leftrightarrow \frac{1}{|S|} = \frac{1}{|S|} \sum_{k \in S} p_{kj} = \frac{1}{|S|}$ που ισχύει αφού από υπόθεση έχουμε ότι ο $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικός.

Ορισμός 4.2.3. Κάθε μη αρνητική λύση $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ του συστήματος (*) λέγεται στάσιμη κατανομή της ΣΜΑ.

Πρόταση 4.2.2. Αν υπάρχει η οριακή κατανομή τότε υπάρχει και η στάσιμη κατανομή και συμπίπτουν.

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει από το εργοδικό θεώρημα. Σημειώνιυμε ότι υπάρχει περίπτωση για μια ΣΜΑ να υπάρχει η στάσιμη κατανομή αλλά η οριακή κατανομή να μην υπάρχει.

Ορισμός 4.2.4. Διαφορετική γραφή στάσιμης κατανομής

$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$ στάσιμη κατανομή αν $x_j \geq 0$ με $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbb{P}$ και $\sum_j x_j = 1$

Πρόταση 4.2.3.

1. Αν όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή.
2. Αν η ΣΜΑ είναι μη διαχωρίσιμη με θετικά επαναλαμβανόμενες καταστάσεις τότε υπάρχει στάσιμη κατανομή και είναι μοναδική.

Πρόταση 4.2.4

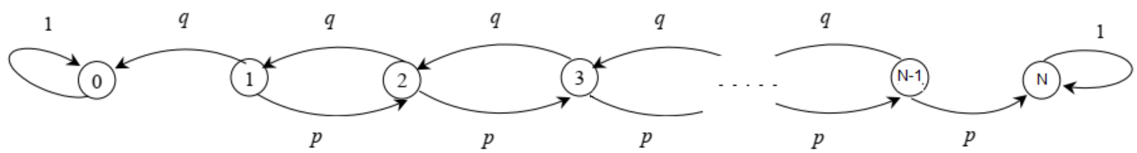
1. Αν i, j επαναλαμβανόμενες και $i \leftrightarrow j$ τότε $f_{ij} = 1$
2. Αν j επαναλαμβανόμενη και $p_{ij}^{(n)} \to 0$ τότε η j είναι μηδενικά επαναλαμβανόμενη.
3. Αν i μεταβατική και C: κλειστό και ανάγωγο υποσύνολο του S επαναλαμβανόμενων καταστάσεων που επικοινωνούν μεταξύ τους, τότε $f_{ij_1} = f_{ij_2}, \quad \forall j_1, j_2 \in C$.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές Απορροφητικών Μαρκοβιανών Αλυσίδων

Άσκηση 5.0.1. Τυχαίος περίπατος με δύο απορροφητικά φράγματα

$S = \{0,1,2,\dots,N\}$ και $p + q = 1$



Σχήμα 5.1

Θέλουμε να βρούμε το $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$

Λύση

Αρχικά θα θα πρέπει να γίνει ταξινόμηση των επικοινωνούντων καταστάσεων. Οι $\{0\},\{N\}$ είναι απορροφιτικές (εργοδικές). Οι $\{1,2,\dots,N-1\}$: μεταβατικές (υπάρχει θετική πιθανότητα διαφυγής προς την 0 ή προς την N η οποία αντίστοιχα είναι τουλάχιστον q και p). Τώρα για $j \in \{1,2,\dots,N-1\}, \forall i \in S$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ επειδή η j είναι μεταβατική.
Επίσης $p_{0j}^{(n)} = 0, \quad p_{0N}^{(n)} = 0, \quad j \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} p_{0j}^{(n)} = 0, \quad j = 1,2,\dots,N-1,N$.

Αντίστοιχα $p_{Nj}^{(n)} = 0 \quad \forall j \in \{0,1,\dots,N-1\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{Nj}^{(n)} = 0$.
Ακόμη $p_{00}^{(n)} = p_{NN}^{(n)} = 1$ άρα και οριακά ίσα με το 1.

Απομένει ο υπολογισμός των $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ για $i \in \{1,2,\dots,N-1\}$, $\quad j = \{0, N\}$.

Επειδή $j \in \{0, N\}$ είναι εργοδική, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij} \frac{1}{\mu_{jj}} = f_{ij}$ (γιατί $\mu_{jj} = 1$ για απορροφιτικές καταστάσεις).

Υπολογισμός των f_{ij}.

Για $j = 0$, από το ΘΟΠ έχουμε

$$f_{i0} = pf_{i+1,0} + qf_{i-1,0} \quad , \quad i = 1,2,\dots,N-1$$

και $f_{00} = 1, f_{N0} = 0$ οπότε έχουμε $N-1$ εξισώσεις με $N-1$ αγνώστους.
$x_0 = 1$
$x_N = 0$
Έχουμε εξίσωση διαφορών 2ης τάξης, γραμμική και ομογενή με σταθερούς συντελεστές. Η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι η $y' = py'' + q$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda = p\lambda^2 + q \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ή $\lambda_2 = \frac{q}{p}$ $\quad (q \neq p)$.

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

ή

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$

Ανάλογα η γενική λύση της εξίσωσής μας είναι

$$x_i = c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad q \neq p$$

ή

$$x_i = (c_1 + c_2 i)\lambda^i, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i = c_1 + c_2 i, \quad q = p$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $x_0 = 1, x_N = 0$

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{και} \quad c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \quad (q \neq p)$$
$$c_1 + c_2 0 = 1 \qquad \text{και} \quad c_1 + c_2 N = 0 \quad (q = p)$$

$\Rightarrow$

$$f_{i0} \quad = x_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad (q \neq p)$$

$$f_{i0} \quad = x_i = 1 - \frac{i}{N} = \frac{N-i}{N}, \quad (q = p)$$

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθούμε για την f_{iN} ή για τον υπολογισμό της λαμβάνουμε υπόψιν ότι $f_{i0} + f_{iN} = 1 \quad \forall i \in \{1,2,\dots,N-1\}$

Άσκηση 5.0.2. Δύο ομάδες (A και B) παίζουν διαδοχικά παιχνίδια ανεξάρτητα μεταξύ τους. Σε κάθε παιχνίδι η ομάδα A κερδίζει με πιθανότητα p και η B με πιθανότητα $1 - p$ (δεν υπάρχει ισοπαλία). Νικήτρια αναδεικνύεται η πρώτη ομάδα που θα κερδίσει δύο παιχνίδια στη σειρά.

1. Ορίστε μια κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων που περιγράφει την εξέλιξη του σκορ μεταξύ των δύο ομάδων.
2. Υπολογίστε την αναμενόμνη διάρκεια του αγώνα.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσει τελικά των αγώνα η ομάδα A.
4. Πότε μια ομάδα προτιμά το σύστημα δύο νικών σε σειρά από τον απλό κανόνα ενός μόνο παιχνιδιού, όταν είναι ισχυρότερη ή πιο αδύνατη από την αντίπαλη ομάδα;

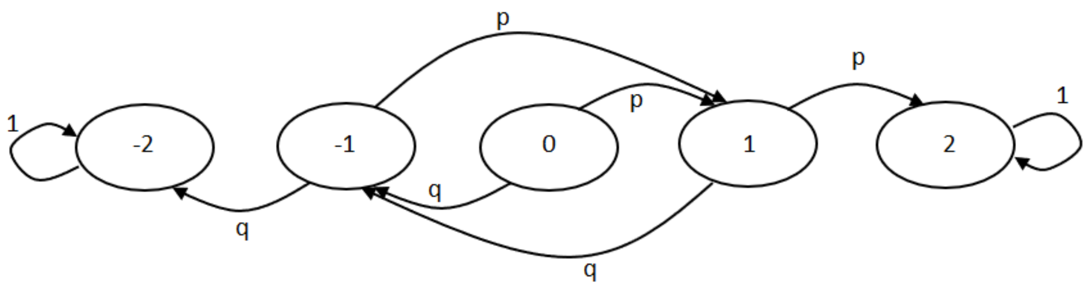
Λύση

Έστω X_n τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως εξής:

- $X_n = 0$: Αρχή του αγώνα
- $X_n = 1$: Το αμέσως προηγούμενο παιχνίδι το κέρδισε η A
- $X_n = -1$: Το αμέσως προηγούμενο παιχνίδι το κέρδισε η B
- $X_n = 2$: Τα δύο τελευταία παιχνίδια τα κέρδισε η A
- $X_n = -2$: Τα δύο τελευταία παιχνίδια τα κέρδισε η B

1. Η $\{X_n\}$ είναι μαρκοβιανή αλυσιδά με διάγραμμα μεταβάσεων ενός βήματος $(q = 1 - p)$

Η διαδικασία έχεις απορροφητικές καταστάσεις τις -2 και 2 και μεταβατικές τις 0,1,-1. Απορρόφηση στην -2 σημαίνει νίκη της Β και στην 2 νίκη της Α.



Σχήμα 5.2

2. Έστω f_i ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απορρόφηση από την i σε μια από τις -2, 2. Ο f_0 είναι η αναμενόμενη διάρκεια του αγώνα. Με ανάλυση πρώτου βήματος παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 + pf_1 + qf_{-1} \\ f_1 &= 1 + p0 + qf_{-1} \\ f_{-1} &= 1 + pf_1 + q0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \qquad f_0 = \frac{1+p+q+pq}{1-pq} \quad , \quad f_1 = \frac{1+q}{1-pq} \quad , \quad f_{-1} = \frac{1+p}{1-pq}$

Επομένως η αναμενόμενη διάρκεια του αγώνα είναι ίση με $f_0 = \frac{1+p+q+pq}{1-pq} = \frac{2+p(1-p)}{1-p(1-p)}$.
(Για $p = \frac{1}{2}$ προκύπτει $f_0 = 3$, δηλαδή με ισοδύναμους αντιπάλους κατά μέσο όρο χρειάζονται 3 παιχνίδια, ενώ προφανώς για $p = 0$ ή $p = 1 \quad \Rightarrow f_0 = 2$)

3. Η πιθανότητα να κερδίσει η Α είναι ίση με την πιθανότητα απορρόφισης στην κατάσταση 2. Έστω x_{i2} η πιθανότητα απορρόφισης από την i στην κατάσταση 2, για $i = -1,0,1$.

Με ανάλυση ενός βήματος προκύπτει

$$\begin{aligned} x_{02} &= px_{12} + qx_{-1,2} \\ x_{1,2} &= p1 + qx_{-1,2} \qquad \Rightarrow \\ x_{-1,2} &= px_{1,2} + q0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{0,2} &= \frac{p^2(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} \\
x_{1,2} &= \frac{p}{1-pq} = \frac{p}{1-p(1-p)} \\
x_{-1,2} &= \frac{p^2}{1-pq} = \frac{p^2}{1-p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Επομένως ξεκινώντας από την κατάσταση 0, η πιθανότητα να κερδίσει η Α και η Β είναι ίση με

$$p_A = x_{0,2} = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} \qquad\qquad p_B = 1 - p_A = \frac{1-p-p^2+p^3}{1-p(1-p)}$$

Για $p = 0$ έχουμε $p_A = 0, \quad p_B = 1$, για $p = 1 \Rightarrow p_A = 1, p_B = 0$ και για $p = \frac{1}{2} \Rightarrow p_A = p_B = \frac{1}{2}$.

Επομένως αν οι αντίπαλοι είναι ισοδύναμοι έχουν ίσες πιθανότητες να κερδίσουν δύο παιχνίδια στην σειρά, και κανένας δεν ευνοείται, όπως φυσικά αναμενόταν.

4. Η ομάδα Α κάτω από το σύστημα των δύο νικών στη σειρά έχει πιθανότητα να κερδίσει $p_A = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)}$ ενώ αν παιχτεί ένα μόνο παιχνίδι έχει πιθανότητα p. Προτιμά τον σύνθετο αγώνα ανν (θεωρώντας $p > 0$)

$$
\begin{aligned}
p_A > p \quad &\Rightarrow \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} > p \\
&\Rightarrow \frac{p(2-p)}{1-p(1-p)} > 1 \\
&\Rightarrow p(2-p) > 1 - p(1-p) \Rightarrow 2p - p^2 > 1 - p + p^2 \\
&\Rightarrow 2p^2 - 3p + 1 < 0.
\end{aligned}
$$

Το τριώνυμο έχει ρίζες $\frac{1}{2}, 1$ επομένως η ανισότητα ισχύει για $\frac{1}{2} < p < 1$, δηλαδή η Α προτιμάει τις δύο νίκες σε σειρά αν και μόνο αν είναι ισχυρότερη της Β, οπότε μειώνεται η πιθανότητα να χάσει “κατά τύχη”.

Κεφάλαιο 6

Βιβλιογραφία

1. Χαλιδιάς Ν. , Απειροστικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές.
2. Χρυσαφίνου Ο. , Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις.
3. Σταμούλης Γ. , Διακριτές Μαρκοβιανές Αλυσίδες.
4. Βασιλείου Π.-Χ. , Στοχαστικές Μέθοδοι στις Επιχειρησιακές Έρευνες.
5. Φακίνου Δ. , Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα.
6. wikipedia.org
7. Λουλάκης Μ. Στοχαστικές διαδικασίες.
8. Gordan Zitkovic, Introduction to Stochastic Processes - Lecture Notes.
9. Φίλης Γ. , Στοχαστικές Διαδικασίες.
10. Δάρας Τ. , Συψάς Π. , Στοχαστικές Ανελίξεις.