

ΟΥΡΑΝΙΑ Β. ΔΡΟΣΙΝΟΥ

ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΣΥΝΟΡΟ
ΠΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΔΥΟ
ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθη-
ματικών

Σάμος, 9 Φεβρουαρίου 2016

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ : Χρήστος Νικολόπουλος

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Βαγγέλης Φελουζής

Αγαπητός Χατζηνικήτας

Στην οικογένειά μου !

Περιεχόμενα

1	ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	1
2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
3	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	5
3.1	<i>Fisher – Kolmogorov</i>	5
3.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑ <i>Stefan</i>	20
	3.2α' ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΙΑΣ ΦΑΣΗΣ	20
	3.2β' ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ	22
3.3	ΣΥΝΘΗΚΗ <i>Stefan</i>	22
3.4	ΛΥΣΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ	23
3.5	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΕΙΔΩΝ	27
4	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	33
5	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ	43
5.1	ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΙΑΣ ΦΑΣΗΣ	43
5.2	ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ	47
	Βιβλιογραφία	59

Κεφάλαιο 1

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς αλληλεπιδράσεων με διάφορα άτομα, καθένα από τα οποία έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην εξέλιξή της. Αξίζει, λοιπόν, να αφιερώσω την παρούσα σελίδα για να ευχαριστήσω ειλικρινά τα άτομα αυτά για τη βοήθειά που μου προσέφεραν. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Χρήστο Νικολόπουλο, που μου εμπιστεύτηκε την παρούσα διπλωματική εργασία και μου προσέφερε βοήθεια όποτε τη χρειαζόμουν. Ένα μεγάλο «ευχαριστώ» στα αγαπημένα μου πρόσωπα, στους γονείς μου και στα αδέρφια μου Νίκο και Κωνσταντίνα, που αποδέχθηκαν όλες τις επιλογές μου και μου παρείχαν στήριξη όλο αυτό το διάστημα, χωρίς την οποία τίποτα από όσα έχω καταφέρει μέχρι σήμερα δε θα ήταν πραγματικότητα.

Κεφάλαιο 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή, ασχολούμαστε με το μοντέλο ανταγωνισμού δύο ειδών και με την θεωρητική ανάλυση του. Συγκεκριμένα εκτός άλλων παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εργασίας *paper Travelling wave solutions of a free boundary problem for a two – species competitive model* (βλ. [3]). Αρχικά μελετάμε την εξίσωση *Fisher – Kolmogorov* και την εξίσωση του *Stefan* διότι παρατηρούμε στην παραγωγή του μοντέλου ότι υπάρχουν κοινά στοιχεία με τις δύο αυτές εξισώσεις. Μέσα από την εξίσωση *Fisher* μελετάμε και βλέπουμε την εξίσωση διάχυσης και εφαρμόζοντας στοιχεία από την θεωρία των δυναμικών συστημάτων διερευνούμε κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Στο πρόβλημα *Stefan* βλέπουμε στοιχεία για το μοντέλο μίας φάσης και το μοντέλο δύο φάσεων και εισάγουμε την έννοια του κινούμενου ορίου. Το κινούμενο σύνορο προσδιορίζεται ως συνάρτηση του χρόνου και του χώρου. Έπειτα στο κύριο κομμάτι της εργασίας παρουσιάζουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά την ύπαρξη λύσεων οδεύοντος κύματος κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες του προβλήματος. Το μοντέλο μίας ή δύο φάσεων το λύνουμε αριθμητικά. Για τον σκοπό αυτό, δεδομένου ότι έχουμε πρόβλημα με κινούμενο σύνορο εφαρμόζουμε κατάλληλο μετασχηματισμό για να φέρουμε το πρόβλημα σε σταθερό χωρίο.

Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

3.1 Fisher – Kolmogorov

Υπάρχει ένα πολύ μεγάλος αριθμός φαινομένων στην βιολογία που στην διαδικασία ανάπτυξης τους πρωταρχικό ρόλο έχει η εμφάνιση του οδεύοντος κύματος, όπως στις χημικές συγκεντρώσεις και στις μηχανικές παραμορφώσεις. Εξετάζοντας μερικά φιλμ από την ανάπτυξη ενός εμβρύου παρατηρείται η εμφάνιση ενός μεγάλου αριθμού από οδεύοντα κύματα, δηλαδή απο μοτίβα που επαναλαμβάνονται στο χρόνο. Υπάρχουν για παράδειγμα χημικά και μηχανικά κύματα τα οποία αναπαράγονται πάνω στην επιφάνεια των αυγών των σπονδυλωτών. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των αυγών των ψαριών *Medaka* το ασβεστιακό κύμα διατρέχει πάνω στην επιφάνεια το οποίο απορρέει από το σημείο διάχυσης των αυγών.

Επίσης από την ανάλυση της διασποράς των εντόμων αναμένουμε την ύπαρξη οδεύοντος κύματος. Άλλο παράδειγμα είναι το παραγόμενο κύμα σε μια επιδημία. Η κίνηση των μικροοργανισμών γίνεται μέσω των τροφίμων με χημειοταξική κατεύθυνση.

Τι είναι όμως ένα οδεύον κύμα;

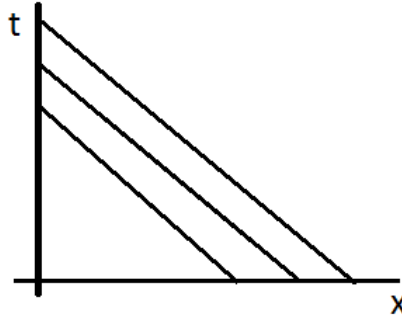
Είναι ένα κύμα που ταξιδεύει χωρίς να αλλάζει σχήμα. Έτσι εάν $u(x, t)$ είναι μία λύση η οποία αναπαριστά ένα οδεύον κύμα η μορφή της λύσης θα είναι η ίδια για όλο το χρονικό διάστημα και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι σταθερή και παριστάνεται με το c . Εάν εξετάσουμε το κύμα σε μία κίνηση του με ταχύτητα c θα εμφανίζεται με σταθερή μορφή.

Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$u(x, t) = u(x - ct) = u(z), z = x - ct, c \in \mathbf{R}$$

Εάν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες τότε η $u(x, t)$ είναι ένα οδεύον κύμα. Εάν το οδεύον κύμα ταξιδεύει κατά την αρνητική κατεύθυνση του x τότε έχει την μορφή $u(x + ct)$. Η μεταβλητή z ονομάζεται μεταβλητή κύματος. Μια περίπτωση στην οποία εμφανίζονται λύσεις αυτής της μορφής είναι η εξίσωση

Fisher.



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση των ευθειών $x + ct = \text{σταθερά}$

Η κλασική και πιο απλή περίπτωση μη γραμμικής εξίσωσης αντίδρασης διάχυσης στη μαθηματική Βιολογία είναι η εξίσωση *Fisher*. Προτάθηκε από τον *Fisher* το 1937 ως μία ντετερμινιστική εκδοχή σε ένα στοχαστικό μοντέλο για την χωρική διάδοση ενός αναπτυσσόμενου πληθυσμού που διασκορπίζεται με μία γραμμική διάχυση. Για την επίλυση της εξίσωσης έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές όπως επίσης και για την ανάλυση αυτού του μοντέλου που περιγράφει την εξέλιξη ενός είδους με διάχυση.

Εάν στην εξίσωση αντίδρασης διάχυσης αντικαταστήσουμε την συνάρτηση αντίδρασης με το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης και κάνουμε αδιαστατοκοπή προκύπτει η εξίσωση *Fisher*. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku(1 - u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Θέτουμε όπου $t^* = kt$ και $x^* = x(\frac{k}{D})^{1/2}$ και προκύπτει η εξίσωση σε κανονικοποιημένη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

όπου εδώ παραλείπουμε το t^* και x^* και γράφουμε t και x αντίστοιχα.

Σε χωρική ομοιογενή κατάσταση οι στάσιμες καταστάσεις είναι οι $u = 0$ και $u = 1$, οι οποίες είναι αντίστοιχα ασταθείς και ευσταθείς καταστάσεις. Αυτό μας οδηγεί στο να αναζητούμε λύσεις οδούοντος κύματος για τις οποίες ισχύει $0 \leq u \leq 1$. Με άλλα λόγια περιμένουμε ότι αν ξεκινήσουμε με αρχικά δεδομένα κοντά στο μηδέν το σύστημα θα εξελιχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση να τείνει κοντά στην $u = 1$.

Θεωρούμε λύσεις της μορφής

$$u(x, t) = U(z), z = x - ct$$

όπου η σταθερά c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $U(z)$ είναι φραγμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} τέτοια ώστε $U(z) > 0$ για κάθε $z \in \mathbf{R}$ αφού είναι η λύση της εξίσωσης και παριστάνει πληθυσμό καθώς και ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 1 \quad (3.1)$$

ή το αντίστροφο. Εφόσον οι $U = 0$ και $U = 1$ είναι δύο σταθερές καταστάσεις.

Η $U(z)$ ικανοποιεί την εξίσωση : $U'' + cU' + U(1 - U) = 0$ ή ισοδύναμα το σύστημα

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - U(1 - U) \end{cases} \quad (3.2)$$

Όλη η ανάλυση της ευστάθειας στην (3.2) γίνεται για να δούμε αν υπάρχει λύση του (3.1) και (3.2) δηλαδή αν υπάρχει οδεύον κύμα στην εξίσωση Fisher. Μια εισαγωγική μελέτη του συστήματος μπορεί να γίνει με την θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Πριν συνεχίσουμε με τη μελέτη του συγκεκριμένου συστήματος θα πρέπει να αναφέρουμε τα βασικά σημεία- εργαλεία που χρειαζόμαστε από τη Θεωρία δυναμικών συστημάτων.

Βασικά στοιχεία από τη Θεωρία Δυναμικών συστημάτων

Βασικά βήματα μελέτης ενός γραμμικού συστήματος

Αρχικά θα παρουσιάσουμε τα βασικά βήματα για τη μελέτη της ευστάθειας ενός γραμμικού συστήματος του επιπέδου.

Έστω

$$(\Gamma) \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \text{ με } \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Η βαθμωτή εξίσωση $\dot{\bar{x}} = \alpha\bar{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει γενική λύση $x(t) = ce^{\alpha t}$. Με βάση το κίνητρο της βαθμωτής εξίσωσης, θα αναζητήσουμε τη λύση του (Γ) στη μορφή $\bar{x}(t) = \bar{\xi}e^{\lambda t}$ όπου $\bar{\xi}$ = αυθαίρετο διάνυσμα που παίζει το ρόλο της c στη βαθμωτή εξίσωση και η παράμετρος λ παίζει το ρόλο της α . Το διάνυσμα $\bar{\xi}$ και η παράμετρος λ θα προσδιοριστούν αφού εισάγουμε την λύση στο (Γ). Παρατηρούμε ότι: $\dot{\bar{x}}(t) = \frac{d}{dt}[\bar{\xi}e^{\lambda t}] = \lambda\bar{\xi}e^{\lambda t}$ Αφού $\bar{x}(t) = \bar{\xi}e^{\lambda t}$ είναι λύσεις της (Γ).

$$\dot{\bar{x}}(t) = \lambda\bar{\xi}e^{\lambda t} = A\bar{\xi}e^{\lambda t}$$

$$\lambda\bar{\xi}e^{\lambda t} = A\bar{\xi}e^{\lambda t}$$

$$\lambda\bar{\xi} = A\bar{\xi}$$

Προκύπτει ότι:

$$(A - \lambda I)\bar{\xi} = 0$$

Αναζητούμε λύσεις που δεν είναι τετριμμένες, δηλαδή $\bar{\xi} \neq 0$. Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$ ή μετά από πράξεις $\lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - cb = 0$.

Υποθέτουμε επίσης για το σύστημα (Γ) ότι $\det A \neq 0$. Τα σημεία ισορροπίας του (Γ) είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

με $\det A \neq 0$. Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας για το (Γ) είναι η αρχή των αξόνων $\bar{x}^* = (0, 0)$.

Πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (i) Διακεκριμένες ομόσημες, αρνητικές $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ή θετικές ιδιοτιμές $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$,
- (ii) Διακεκριμένες ετερόσημες ιδιοτιμές $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- (iii) Διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 \leq 0$,
- (iv) Μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θα αναλύσουμε την περίπτωση των διακεκριμένων ριζών λ_1, λ_2 του $\varphi(\lambda)$ με $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, όμοια προκύπτουν και τα υπόλοιπα. Απο τη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας ξέρουμε ότι καθώς οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες προκύπτουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\bar{\xi}$ και $\bar{\eta}$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει το ζεύγος λύσεων $\bar{x}_1(t) = \bar{\xi}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$ και $\bar{x}_2(t) = \bar{\eta}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$. Η γενική λύση του (Γ) δίνεται από τη σχέση

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{x}_1(t) + c_2 \bar{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Η γενική λύση ορίζει κατά μοναδικό τρόπο την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για το (Γ) με αρχικές συνθήκες $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ για $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

Για $t \rightarrow +\infty$ όλες οι τροχιές προσεγγίζουν την αρχή των αξόνων $\bar{x}^* = (0, 0)$ το οποίο είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Αν πάρουμε τις παραγώγους έχουμε

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \lambda_1 c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t},$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \lambda_1 c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t},$$

και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t}}.$$

Καθώς έχουμε υποθέσει ότι ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$) παρατηρούμε για την μεταβολή της $\frac{dy}{dx}$ τα ακόλουθα : καθώς $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \lambda_2 c_2 \eta_2}{\lambda_1 c_1 \xi_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \lambda_2 c_2 \eta_1}$$

και $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy}{dx}(t) = \frac{\lambda_2 c_2 \eta_2}{\lambda_2 c_2 \eta_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$
Με όμοιο τρόπο, καθώς $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2 + \lambda_2 c_2 \eta_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_1 c_1 \xi_1} + \lambda_2 c_2 \eta_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Παρατηρούμε ότι για $t \rightarrow -\infty$ τότε $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx}(t) = \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2}{\lambda_1 c_1 \xi_1} = \frac{\xi_2}{\xi_1}$.
Αν επιλέξουμε x_0, y_0 τέτοιες ώστε $c_1(x_0, y_0) = 0$ τότε

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} = c_2 \bar{\eta} e^{\lambda_2 t},$$

με

$$\lambda_2 < 0.$$

Σε αυτή τη περίπτωση η $(x(t), y(t))$ είναι τροχιά διάνυσμα συγγραμικό του $\bar{\eta}$ που το μέτρο του μειώνεται εκθετικά με ρυθμό $e^{\lambda_2 t}$. Αν επιλέξουμε x_0, y_0 τέτοια ώστε $c_2(x_0, y_0) = 0$ έχουμε, εάν ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = c_1 \bar{\xi} e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 < 0$. Σε αυτή τη περίπτωση η $(x(t), y(t))$ είναι τροχιά διάνυσμα συγγραμικό του $\bar{\xi}$ που το μέτρο του μειώνεται εκθετικά με ρυθμό $e^{\lambda_1 t}$. Επομένως με αυτό τον τρόπο προσδιορίζουμε με ποιό τρόπο οι τροχιές προσεγγίζουν την αρχή. Η ανάλυση είναι παρόμοια και στις άλλες περιπτώσεις (βλ. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Γ.Παντελίδη, [6].)

Θεώρημα Γραμμικοποίησης

Στη συνέχεια για την περίπτωση που έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα το Θεώρημα γραμμικοποίησης μας λέει ότι κοντά σε ένα στάσιμο σημείο το διάγραμμα φάσης του μοιάζει με το γραμμικοποιημένο.

Θεωρούμε το σύστημα :

$$(\Sigma) \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

με f, g συναρτήσεις ικανοποιητικά ομαλές και $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$ σημείο ισορροπίας.

- Αν ο ιακωβιανός πίνακας $A = DF(x^*, y^*)$ έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε το \bar{x}^* είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.
- Αν οι ιδιοτιμές του $A = DF(x^*, y^*)$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος, τότε το \bar{x}^* είναι **ασταθές**.
- Αν ο $A = DF(x^*, y^*)$ έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$ ή οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές (μηδενικό πραγματικό μέρος) το θεώρημα **δεν δίνει συμπέρασμα**.

Στην περίπτωση που το Θεώρημα γραμμικοποίησης δεν δίνει συμπέρασμα εφαρμόζουμε το Θεώρημα *Lyapunov*, εάν αυτό είναι δυνατό.

Θεώρημα ευστάθειας *Lyapunov* :

Μια συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση *Lyapunov* με $z = V(x, y)$ εφόσον ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- $V(x, y)$ να είναι συνεχής και με συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια ανοικτή γειτονιά u του $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$.
- $V(\bar{x}^*) = V(x^*, y^*) = 0$ και $V(x, y) > 0$ για κάθε $\bar{x} = (x, y) \in u$.
- $\dot{V}(x(t), y(t)) \leq 0$ για κάθε $t \geq 0$ όπου $(x(t), y(t))$ σημεία της τροχιάς του (Σ) .

Εφόσον ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις και υπάρχει συνάρτηση *Lyapunov* τότε το \bar{x}^* είναι:

- ευσταθές αν $\dot{V}(x(t), y(t)) \leq 0$.
- ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\dot{V}(x(t), y(t)) < 0$.

Σύμφωνα με την θεωρία των δυναμικών συστημάτων, σε ένα μη γραμμικό σύστημα, καθώς οι λύσεις του (Σ) είναι συνεχείς και οι παραγώγοι τους είναι συνεχείς μας επιτρέπεται να θεωρήσουμε ότι οι E^s και E^u είναι τμήματα ευρύτερων τροχιών-καμπυλών που ονομάζονται ευσταθή και ασταθή πληρότητα. Όπου E^u και E^s καλούνται ασταθής ($u = unstable$) και ευσταθής ($s = stable$) υπόχωρος του στάσιμου σημείου αντίστοιχα και είναι γραμμικοί υπόχωροι οι οποίοι ορίζονται παρακάτω:

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda \xi_s\}$$

όπου ξ_s ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή $\lambda_s < 0$

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda \xi_u\}$$

όπου ξ_u ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή $\lambda_u > 0$.

Κατα αναλογία σε ένα μη γραμμικό σύστημα ορίζουμε την ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα ως εξής:

- $W_s(\bar{x}^*) = \{A \subset \mathbf{R}^2 \text{ με την ιδιότητα : } \text{An } x_0 \in A \quad x(t, \bar{x}_0) \rightarrow x^* \text{ καθώς } t \rightarrow +\infty\}$
- $W_u(\bar{x}^*) = \{B \subset \mathbf{R}^2 \text{ με την ιδιότητα : } \text{An } x_0 \in B \quad x(t, \bar{x}_0) \rightarrow x^* \text{ καθώς } t \rightarrow -\infty\}$

Επίσης α-οριακό σύνολο καλούμε το σύνολο $\alpha(x_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x_0)$, αν η $\gamma^-(x_0)$ έχει αρνητική φορά με $\gamma^-(x_0) = \varphi(t, x_0)$, $t \leq 0$. Όμοια ω-οριακό σύνολο καλούμε $\omega(x_0) = \lim_{t \rightarrow \omega^- x_0} \varphi(t, x_0)$, αν η $\gamma^+(x_0)$ έχει θετική φορά με $\gamma^+(x_0) = \varphi(t, x_0)$, $t \geq 0$.

Ανάλυση του δυναμικού συστήματος που προκύπτει από την εξίσωση Fisher

Συνεχίζουμε την επίλυση του συστήματος. Τα στάσιμα σημεία του συστήματος είναι

$$(U_1, V_1) = (0, 0) \quad \text{και} \quad (U_1, V_1) = (1, 0)$$

Θέτουμε

$$P := (0, 0) \quad \text{και} \quad Q := (1, 0)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος στην περιοχή ενός στάσιμου σημείου (U_1, V_1) είναι

$$DF(U_1, V_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U_1 - 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Ιδιοτιμές για το στάσιμο σημείο $Q(1, 0)$

Ο πίνακας γραμμικοποίησης στο σημείο αυτό είναι

$$DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix},$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0,$$

όπου έχουμε δύο πραγματικές και ετερόσημες ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} > 0.$$

Συνεπώς το σημείο $Q(1, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ και } \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Άρα ο ευσταθής υπόχωρος του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι :

$$E^s = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}\right\} = \{(\chi, \psi) \in \mathbf{R}^2 : \psi = \lambda_1 \chi\},$$

και ο ασταθής υπόχωρος του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι :

$$E^u = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right\} = \{(\chi, \psi) \in \mathbf{R}^2 : \psi = \lambda_2 \chi\}$$

Ιδιοτιμές για το στάσιμο σημείο $P(0, 0)$

Ο πίνακας γραμμικοποίησης στο σημείο αυτό είναι ο

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix},$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0,$$

όπου έχουμε τις ιδιοτιμές :

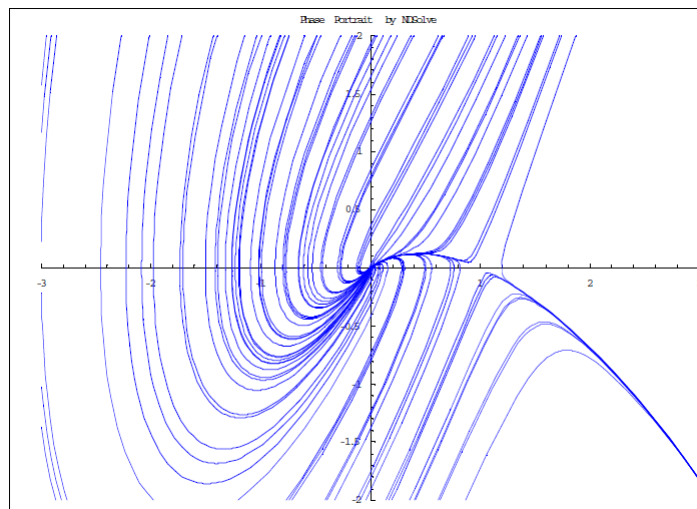
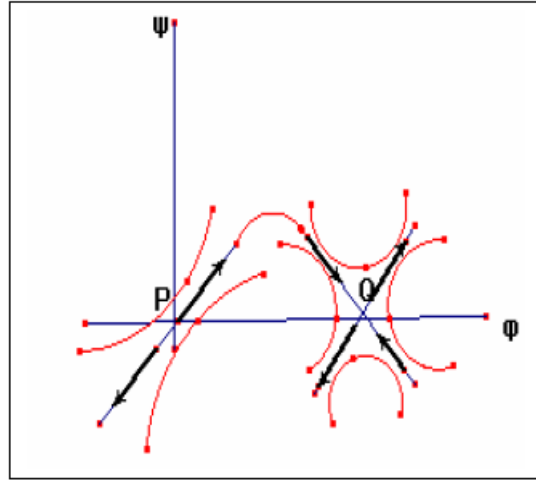
$$\lambda'_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}$$

Στη συνέχεια διερευνούμε την ευστάθεια του στάσιμου σημείου P για τις διάφορες τιμές του c .

(i) Αν $c^2 > 4$ τότε $\lambda'_{1,2} \in \mathbf{R}$.

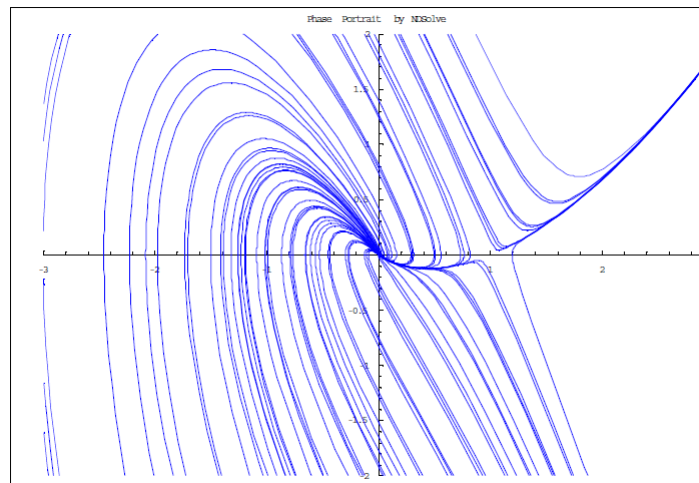
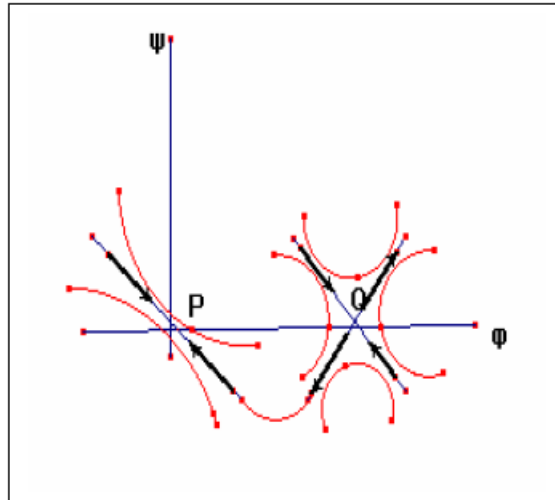
Επιπλέον

- Εάν $c < -2$ τότε $\lambda'_{1,2} > 0$ και το σημείο P είναι **ασταθής κόμβος**.



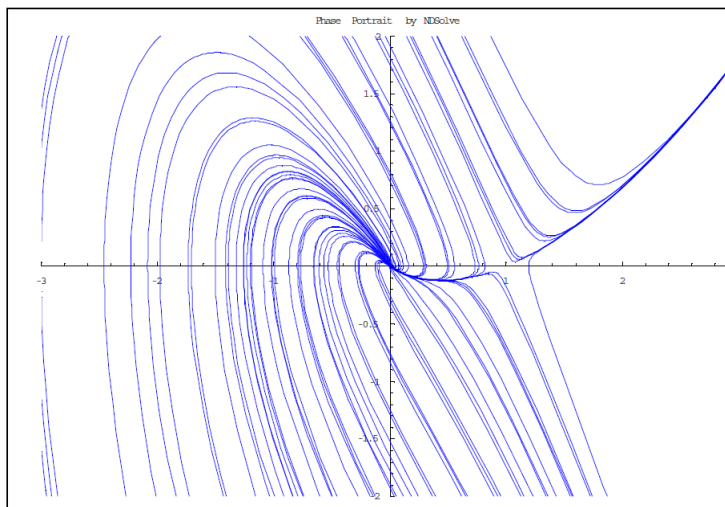
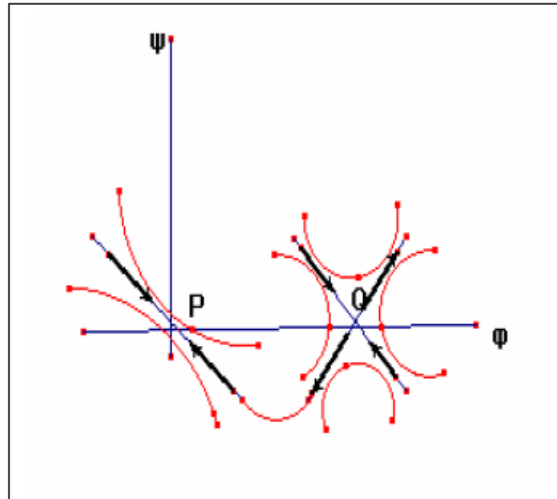
Σχήμα 3.2: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c < -2$

- Εάν $c > 2$ τότε $\lambda'_{1,2} < 0$ και το σημείο P είναι **ευσταθής κόμβος**.



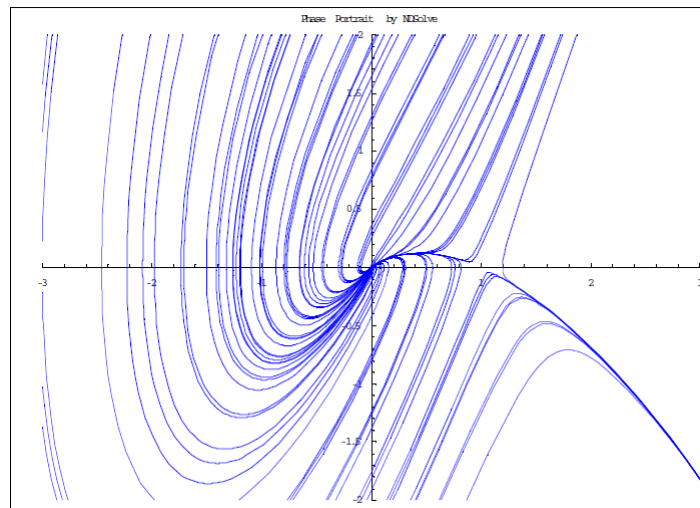
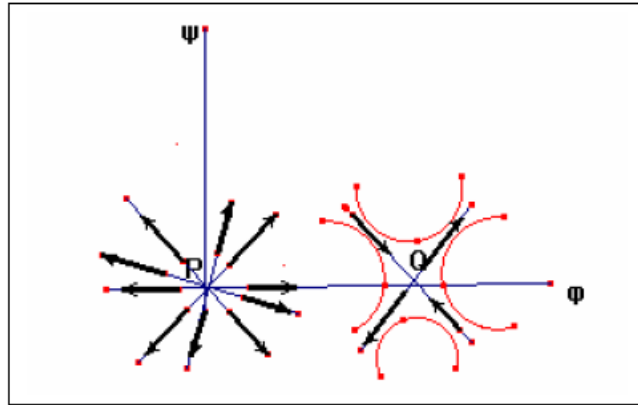
Σχήμα 3.3: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c > 2$

(ii) Εάν $c = 2$ τότε $\lambda'_1 = \lambda'_2 < 0$ και το σημείο P είναι **ευσταθές αστεροειδές κόμβος**.



Σχήμα 3.4: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c = 2$

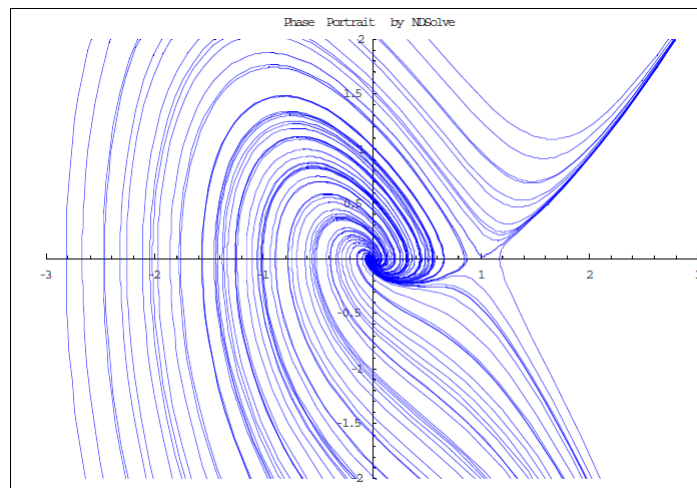
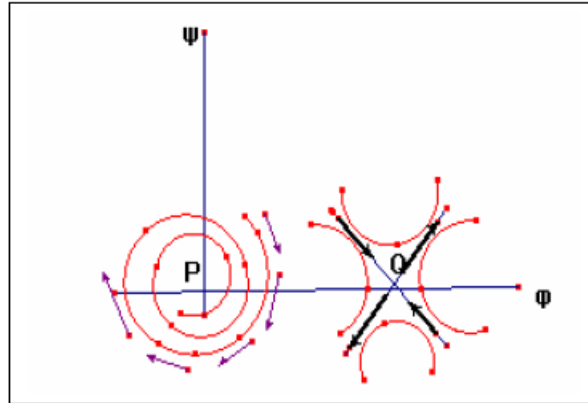
- (iii) Εάν $c = -2$ τότε $\lambda'_1 = \lambda'_2 > 0$ και το σημείο P είναι **ασταθές αστεροειδές κόμβος**.



Σχήμα 3.5: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c = -2$

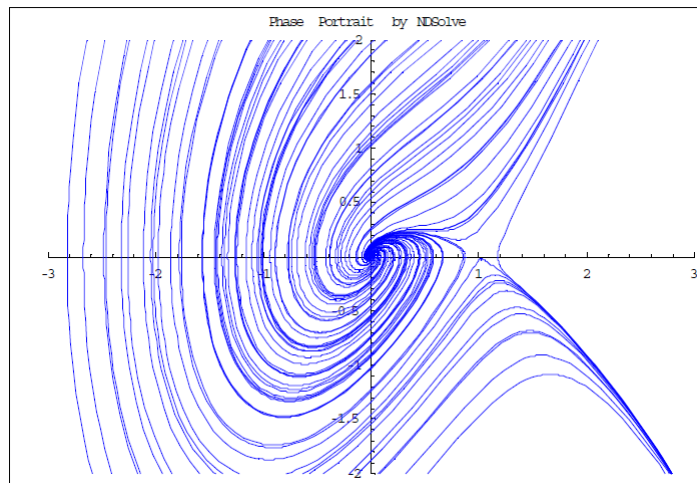
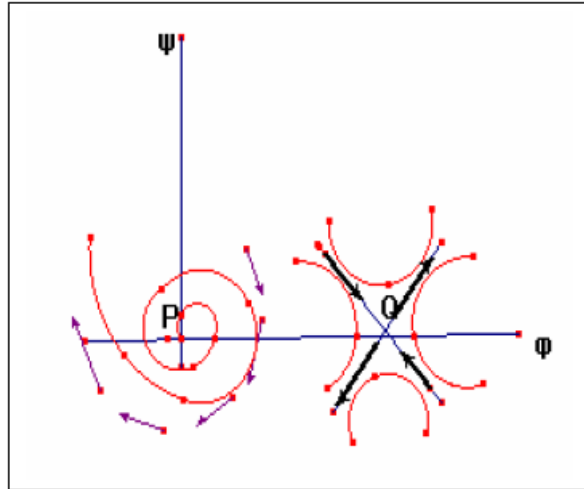
(iv) Εάν $c^2 < 4$ τότε $Im\{\lambda'_{1,2}\} \neq 0$. Επιπλέον

- Εάν $c > 0$ τότε $Re\{\lambda'_{1,2}\} < 0$ και το P είναι **ευσταθής σπείρα**.



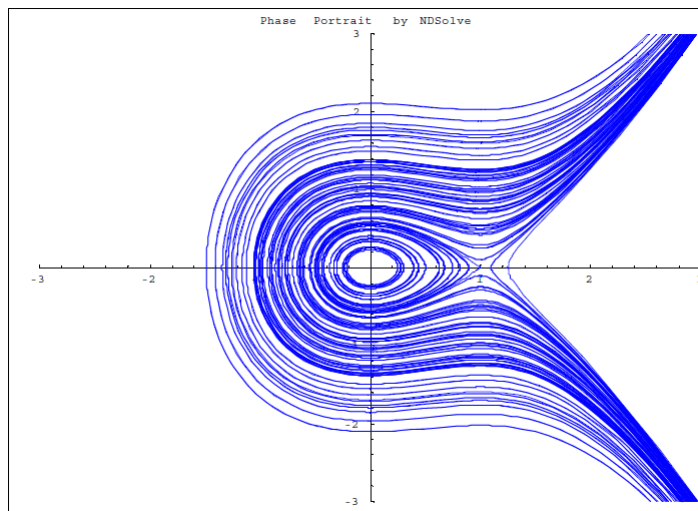
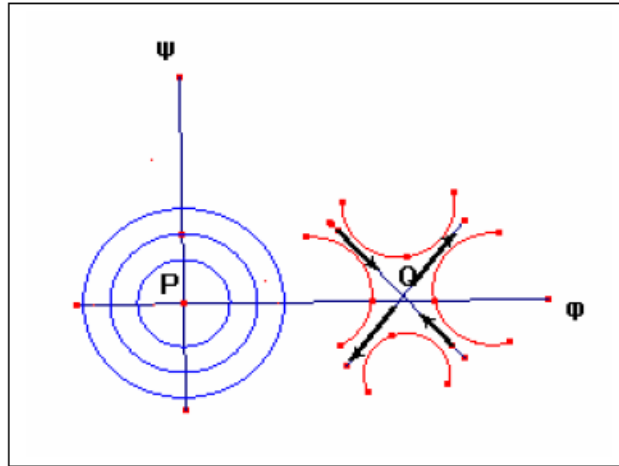
Σχήμα 3.6: Πορταίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c > 0$

- Εάν $c < 0$ τότε $Re\{\lambda'_{1,2}\} > 0$ και το P είναι **ασταθής σπείρα**.



Σχήμα 3.7: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c < 0$

(v) Εάν $c = 0$ τότε $Re\{\lambda'_{1,2}\} = 0$ τότε το P είναι **κέντρο**.



Σχήμα 3.8: Πορτραίτο φάσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος με $c = 0$

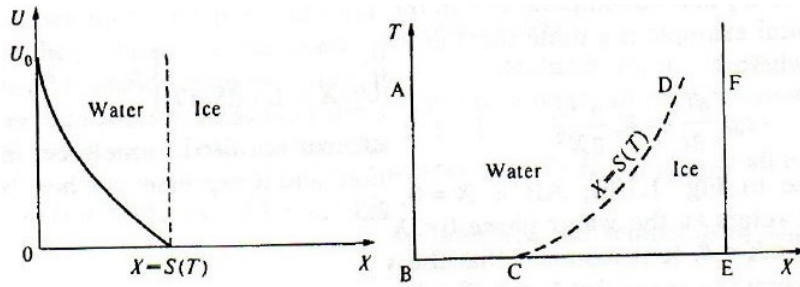
Συνοψίζοντας βλέπουμε ότι έχουμε περιπτώσεις για $c < -2$, $c = -2$, $c < 0$ όπου μπορούμε να έχουμε μια θετική (εφόσον μιλάμε για πληθυσμό η μεταβλητή μας πρέπει να είναι θετική) τροχιά όπου ξεκινάει από το σημείο P και καταλήγει στο Q εξασφαλίζοντας ύπαρξη οδεύοντος κύματος για την εξίσωση Fisher.

3.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ *Stefan*

Στην συνέχεια για την περιγραφή του μοντέλου που θα μελετήσουμε χρειαζόμαστε να εστιάσουμε σε προβλήματα στα οποία η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιεί μερικές επιπλέον συνθήκες σχετικά με το σύνορο του χωρίου στο οποίο ορίζεται. Σε πολλές σημαντικές περιπτώσεις, ωστόσο, ο ίδιος ο προσδιορισμός του συνόρου του χωρίου αποτελεί μέρος του προβλήματος. Ο όρος “ελεύθερο συνοριακό πρόβλημα” χρησιμοποιείται συνήθως όταν το πρόβλημα είναι στάσιμο και περιγράφει μια κατάσταση ανεξάρτητη του χρόνου. Κινούμενα σύνορα, από την άλλη πλευρά, συνδέονται με την εξάρτηση από το χρόνο και την θέση του συνόρου που πρέπει να προσδιορίζεται ως συνάρτηση του χρόνου και του χώρου. Σε όλες τις περιπτώσεις οι δύο συνθήκες είναι απαραίτητες για το ελεύθερο ή το κινούμενο σύνορο, το ένα για να καθορίσει το ίδιο το σύνορο και το άλλο για να ολοκληρώσει την καλή τοποθέτηση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Το πρόβλημα του ελεύθερου συνόρου απαιτεί την λύση μιας ελλειπτικής διαφορικής εξίσωσης. Για το πρόβλημα του κινούμενου ορίου η εξίσωση συνήθως είναι παραβολικού τύπου. Οι πρακτικές εφαρμογές είναι κυρίως, αλλά όχι αποκλειστικά, σχετικές με την ροή του υγρού σε πορώδη μέσα και με διάχυση και ροή θερμότητας που ενσωματώνουν μετασχηματισμούς φάσης αλλά και χημικών αντιδράσεων. Τα προβλήματα του κινούμενου ορίου καλούνται συχνά προβλήματα *Stefan*, με αναφορά στο πρώτο έργο του *J.Stefan* ο οποίος γύρω στο 1890, ασχολήθηκε με το λιώσιμο των πολικών πάγων.

3.2α' ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΙΑΣ ΦΑΣΗΣ

Η απλή περίπτωση του προβλήματος *Stefan* είναι η τήξη ενός ημιάπειρου φύλλου πάγου το οποίο βρίσκεται αρχικά στην θερμοκρασία τήξης η οποία, θεωρείται ότι είναι μηδέν. Η θερμοκρασία της επιφάνειας αυξάνεται στο χρόνο $T > 0$ σε θερμοκρασία πάνω από το μηδέν. Μια οριακή επιφάνεια ή διεπιφάνεια μετακινείται μέσα στο υλικό και χωρίζει μια περιοχή νερού από μια περιοχή πάγου σε θερμοκρασία μηδέν όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1 (a). Η διαδρομή της διεπαφής τήξης, $S(T)$, στο $X - T$ επίπεδο παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1 (b), όπου $S(T)$ υποδηλώνει το πάχος της υδατικής φάσης κατά το χρόνο T και το X είναι η συντεταγμένη του χώρου που μετρείται από την εξωτερική επιφάνεια του φύλλου, $X = 0$.

Σχήμα 3.9: Μοντέλο *Stefan*

Εάν $U(X, T)$ υποδηλώνει την κατανομή της θερμοκρασίας στο νερό σε χρόνο T , το πρόβλημα είναι να βρεθεί το ζεύγος των αγνώστων $U(X, T)$ και $S(T)$ λύνοντας την εξίσωση θερμότητας

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial T} = k \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \quad 0 < X < S(T), \quad T > 0, \quad (3.3)$$

με συνοριακή συνθήκη

$$U = U_0, \quad X = 0, \quad T > 0, \quad (3.4)$$

όπου U_0 είναι η σταθερή θερμοκρασία επιφάνειας και αρχικές συνθήκες

$$U = 0, \quad X > 0, \quad T = 0, \quad (3.5)$$

$$S(0) = 0. \quad (3.6)$$

Στην εξίσωση (3.3) η σταθερά c είναι η ειδική θερμότητα, ρ η πυκνότητα και k η θερμική αγωγιμότητα οι οποίες υποθέτουμε ότι είναι οι σταθερές σε αυτό το απλό παράδειγμα. Οι άλλες προϋποθέσεις που απαιτούνται για το προσδιορισμό της κίνησης του κινούμενου ορίου είναι δύο, η πρώτη για την παροχή της δεύτερης αναγκαίας οριακής συνθήκης για την επίλυση της εξίσωσης δεύτερης τάξης (3.3) και η δεύτερη για να καθορίσει τη θέση της ίδιας της διεπαφής. Σε αυτό το πρόβλημα συγκεκριμένα είναι οι εξής :

$$\begin{cases} U = 0 \\ -k \frac{\partial U}{\partial X} = L\rho \frac{dS}{dT} \end{cases} \quad (3.7)$$

στο $X = S(T)$, $T > 0$, όπου L είναι η λανθάνουσα θερμότητα που απαιτείται για τη τήξη του πάγου, όπου μετριέται σε *joule* και είναι μια το ποσό ενέργειας που μεταφέρεται από τη μια φάση στην άλλη. Η 2η εξίσωση από την (3.7) είναι γνωστή ως "συνθήκη του *Stefan*" και εκφράζει την θερμική ισορροπία στην διεπαφή.

3.26' ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Αν ο πάγος είναι αρχικά σε θερμοκρασία κάτω από την θερμοκρασία τήξης, όχι απαραίτητα ομοιόμορφη, η ροή θερμότητας λαμβάνει χώρα τόσο στις φάσεις του νερού τόσο και του πάγου. Σε αυτό το πρόβλημα δύο φάσεων θέλουμε να βρούμε το $\{U_1(X, T), U_2(X, T), S(T)\}$, όπου U_1 και U_2 δηλώνει τη θερμοκρασία στο νερό και στο πάγο αντίστοιχα. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι η περίπτωση ενός πεπερασμένου φύλλου πάγου που εμφανίζεται στο χώρο $0 \leq S(T) \leq X \leq l$ όπου

$$c_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial X^2}, i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Αν κοιτάξουμε το σχήμα 1.1 (b) έχουμε ότι, το AB (το αριστερό όριο του νερού) είναι πάνω στην $X = 0$, το EF (το δεξιό όριο του πάγου) είναι πάνω στην $X = L$, το CD (η κινούμενη διεπιφάνεια) είναι πάνω στην $X = S(T)$ και ο δείκτης $i = 1$ παραπέμπει στη φάση του νερού $0 < X < S(T)$ ενώ ο δείκτης $i = 2$ στη φάση του πάγου $S(T) < X < l$. Υποτίθεται ότι οι φάσεις του νερού και του πάγου μαζί καταλαμβάνουν πάντοτε το χώρο $0 \leq X \leq l$. Οι συνθήκες *Stefan* είναι :

$$U_1 = U_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$k_2 \frac{\partial U_2}{\partial X} - k_1 \frac{\partial U_1}{\partial X} = L\rho \frac{dS}{dT}. \quad (3.10)$$

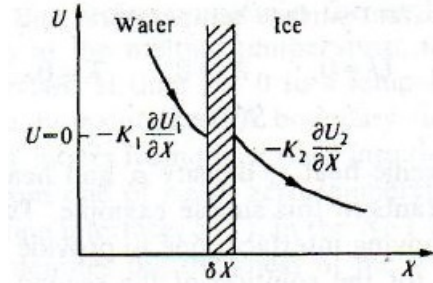
Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι αλλαγές του όγκου κατά την εξέλιξη του φαινομένου θεωρούνται αμελητέες δηλαδή πάγος και νερό έχουν ίδια πυκνότητα ρ , έτσι ώστε $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

3.3 ΣΥΝΘΗΚΗ *Stefan*

Η συνθήκη του *Stefan* (3.10) είναι εύκολο να προκύψει από την αναφορά στο σχήμα (1.2) το οποίο δείχνει το κινούμενο όριο στην απόσταση δX στο χρόνο δT . Προκειμένου να λιώσει ο πάγος που περιέχεται ανα μονάδα επιφάνειας κάθετα του X στην σκιασμένη περιοχή, μια ποσότητα θερμότητας $L\rho\delta Q$ είναι απαιτούμενη. Όμοια μια ποσότητα θερμότητας $-k_1\delta T \frac{\partial U_1}{\partial X}$ εισέρχεται στο σκιασμένο χωρίο από τη φάση του νερού και αντίστοιχα μια ποσότητα θερμότητας $-k_2\delta T \frac{\partial U_2}{\partial X}$ δραπετεύει μέσα στον πάγο. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν πηγές θερμότητας στο περιβάλλον (ή διεπαφή) η θερμική ισορροπία του σκιασμένου χωρίου, δX απαιτεί ότι

$$-k_1 \frac{\partial U_1}{\partial X} + k_2 \frac{\partial U_2}{\partial X} = L\rho \frac{dS}{dT} \quad (3.11)$$

το οποίο είναι η (3.10).



Σχήμα 3.10: Σχηματική περιγραφή της συνθήκης *Stefan*

3.4 ΛΥΣΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Το πρόβλημα *Stefan* είναι μη γραμμικό πρόβλημα και γενικά δεν έχει αναλυτική λύση. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις για κατάλληλες συνοριακές συνθήκες μπορεί να επιδέχεται λύση ομοιότητας.

Λύση ομοιότητας επιδέχονται πολλά προβλήματα στα οποία δεν μπορεί να προσδιοριστεί συγκεκριμένη χωρική κλίμακα προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα το θέμα αυτό στη συνέχεια πριν πάμε στο πρόβλημα *Stefan* θα παρουσιάσουμε για παράδειγμα ένα απλό πρόβλημα διάχυσης (σε ένα σταθερό χωρίο $[0, +\infty)$) που επιδέχεται λύση ομοιότητας. Αναζητούμε λοιπόν μια λύση ομοιότητας σε ένα πρόβλημα το οποίο αναπαριστά διάχυση μιας χημικής ουσίας συγκέντρωσης C σε ένα μονοδιάστατο μέσο με ημίπειρο μήκος. Επιπλέον v είναι ο συντελεστής διάχυσης και C_0 η αρχική συγκέντρωση. Για το ακόλουθο πρόβλημα :

$$C_t(x, t) = vC_{xx}(x, t),$$

$$C(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) = 0,$$

$$C(x, 0) = C_0.$$

Όπως προαναφέραμε μια τέτοια λύση είναι συχνά χρήσιμη γιατί μας δίνει μια έκφραση της άγνωστης συνάρτησης σε κλειστή μορφή όταν δεν προσδιορίζονται από το πρόβλημα συγκεκριμένες χωρικές ή χρονικές κλίμακες. Αυτές θα μπορούσαν να μας δώσουν εν δυνάμει κάποια μικρή παράμετρο έτσι ώστε να πάρουμε κάποιο ανάπτυγμα διαταραχής. Επίσης μία τέτοια λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για δοκιμή σε αριθμητικές μεθόδους επειδή συχνά μπορούν να δώσει τη τοπική συμπεριφορά μίας λύσης όπως για παράδειγμα για μικρούς χρόνους και αποστάσεις σε σχέση με τα μεγέθη του προβλήματος.

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή $C = t^b f(x)$ όπου $\xi = \frac{x}{t^a}$ είναι η μεταβλητή ομοιότητας. Η εξίσωση διάχυσης γίνεται

$$bt^{b-1}f(\xi) + t^b(-axt^{-a-1})f'(\xi) = t^{b-1}(bf(\xi) - a\xi f'(\xi)) = vt^{b-2a}f''(\xi),$$

ή

$$t^{2a-1}(bf(\xi) - a\xi f'(\xi)) = vf''(\xi).$$

Για να απαλείψουμε τον χρόνο χρειαζόμαστε $a = \frac{1}{2}$. Επομένως $C = t^b f(\frac{x}{\sqrt{t}})$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$vf''(\xi) + \frac{1}{2}\xi f'(\xi) - bf(\xi) = 0.$$

Ο προσδιορισμός του b μπορεί να γίνει από την αρχική συνθήκη. Αυτή υποδεικνύει ότι για $t \rightarrow 0$ πρέπει να έχουμε $C \rightarrow C_0$ ή εναλλακτικά ότι η συνάρτηση $f(\xi)$ πρέπει να έχει τη μορφή κάποιας δύναμης του ξ καθώς $t \rightarrow 0$ για να αποφύγουμε την εξάρτηση από τα x και t . Επομένως θεωρούμε ότι $f(\xi) \sim c\xi^\gamma$ για κάποια σταθερά c . Τότε

$$C = t^b c x^\gamma t^{\frac{\gamma}{2}} = cx^\gamma t^{b-\frac{\gamma}{2}}.$$

Επομένως για να αποφύγουμε τα όρια $C \rightarrow 0$ και $C \rightarrow \infty$ για $t \rightarrow 0$ πρέπει να έχουμε $b = \frac{\gamma}{2}$. Άρα $C(x, 0) = C_0 = cx^\gamma$ και αυτή η σχέση ισχύει μόνο για $\gamma = 0$ άρα τελικά και $b = 0$. Η εξίσωση τώρα έχει τη μορφή

$$vf''(\xi) + \frac{1}{2}\xi f'(\xi) = 0.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$f'(\xi) = Ae^{-\frac{\xi^2}{4v}},$$

και

$$f(\xi) = A \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{s^2}{4v}} ds + B.$$

Χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ για να προσδιορίσουμε το B και έχουμε ότι για $x = 0$ πρέπει $C(0, t) = 0 = B$. Επομένως

$$C = 2\sqrt{v}A \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{vt}}} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{v\pi}A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{vt}}\right).$$

Η συνάρτηση erf , (*error function*) ορίζεται από τη σχέση

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta,$$

και έχει τις ιδιότητες $erf(0) = 0$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} erf(z) = 1$. Από την αρχική συνθήκη $C(x, 0) = C_0 = \sqrt{v\pi}A$ παίρνουμε $A = \frac{C_0}{\sqrt{v\pi}}$, επομένως η μορφή της λύσης γίνεται

$$C(x, t) = C_0 erf\left(\frac{x}{2\sqrt{v\pi t}}\right).$$

Για $\frac{x}{\sqrt{vt}} \gg 1$ έχουμε $C \simeq C_0$ ενώ $C_x \ll 1$. Δηλαδή για μικρό χρονικό διάστημα δεν βλέπουμε την επίδραση της συνοριακής συνθήκη για $x \gg 1$ και το μοντέλο δίνει μια επαρκή προσέγγιση για $t \ll \frac{L^2}{v}$ όπου L μια αρκετά μεγάλη απόσταση από το σημείο $x = 0$.

Στη συνέχεια επανερχομαστε στο πρόβλημα *Stefan* και παρουσιάζουμε την λύση ομοιότητας που επιδέχεται το πρόβλημα για κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Το πρόβλημα διατυπώνεται στη μορφή του συστήματος :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad x > s(t), \quad (3.13)$$

$$-K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x} = Lp \frac{ds}{dt}, \quad x = s(t), \quad (3.14)$$

$$u_1 = U_1, x = 0, t \geq 0, \quad (3.15)$$

$$u_2 = U_2, x \rightarrow \infty, t \geq 0, \quad (3.16)$$

$$u_1 = u_2 = 0, x = s(t), t \geq 0, \quad (3.17)$$

όπου $k_i = K_i/\rho c_i, i = 1, 2$.

Οι εξισώσεις (3.12) και (3.15) ικανοποιούνται από

$$u_1 = U_1 + A erf \frac{x}{2(k_1 t)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.18)$$

$$u_2 = U_2 + B erf \frac{x}{2(k_2 t)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

όπου A και B είναι καθορισμένες σταθερές.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις λεπτομέρειες για το πως προκύπτουν οι εκφράσεις για τις u_1, u_2 , (3.18 και (3.19). Έχουμε την εξίσωση (3.12):

$$u_{1t} = k_1 u_{1xx}, 0 < x < s$$

$$u_1 = t^\beta f\left(\frac{x}{\sqrt{k_1 t}}\right).$$

$$u_{1t} = \beta t^{\beta-1} f(\eta) + t^\beta f'(\eta) \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{t^{3/2} \sqrt{k_1}}\right)$$

$$u_{1x} = t^\beta f'(\eta) \frac{1}{\sqrt{k_1 t}}$$

$$u_{1xx} = t^\beta f''(\eta) \frac{1}{\sqrt{k_1 t}}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.12) έχουμε

$$\beta t^{\beta-1} f(\eta) + t^\beta f'(\eta) \left(-\frac{1}{2} \frac{x}{t^{3/2} \sqrt{k_1}}\right) = k_1 t^\beta f''(\eta) \frac{1}{\sqrt{k_1 t}}$$

$$f''(\eta) + \frac{1}{2} \eta f'(\eta) - \beta f(\eta) = 0$$

Για $x = 0$ και $\eta = 0$ άρα $u(t, x)|_{\eta=0} = t^\beta f(0) = U_1$. Άρα πρέπει $\beta = 0$ και $f(0) = U_1$. Για $x \rightarrow \infty$ τότε και $\eta \rightarrow \infty$ και $f(\eta) \rightarrow U_2$ Επομένως έχουμε

$$f''(\eta) + \frac{K_i}{2} \eta f'(\eta) = 0$$

Για $k = K_1$ $f(0) = U_1$ και για $k = K_2$ $f(\eta) \rightarrow U_2$

$$f''(\eta) + \frac{\eta}{2} f'(\eta) = 0,$$

$$f'(\eta) = A e^{-\frac{\eta^2}{4}},$$

ή τελικά

$$f(\eta) = A \int_0^\eta e^{-\frac{s^2}{4}} ds + C_A$$

Επιπλέον για

$$f(0) = U_1 \Rightarrow C_A = U_1.$$

απο την οποία προκύπτει η (3.18). Όμοια και για την (3.19) έχουμε για

$$\eta \rightarrow \infty \quad B \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds + C_B = -U_2.$$

$$C_B = -U_2 - B \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds.$$

Η προϋπόθεση (3.17) απαιτεί

$$Aerf \frac{x}{2(k_1 t)^{\frac{1}{2}}} = -U_1, \quad Berf \frac{x}{2(k_2 t)^{\frac{1}{2}}} = U_2, \quad (3.20)$$

Οι δύο σχέσεις της (3.20) μπορούν να ικανοποιούνται για όλα τα t εαν

$$s = \alpha t^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

όπου α είναι σταθερά. Με την διαφοροποίηση των (3.18) και (3.19) και χρησιμοποιώντας την (3.14) και (3.20) η σταθερά α δίνεται απο την ρίζα

$$\frac{U_1 k_1 e^{-\alpha^{\frac{2}{4k_1}}}}{(\pi k_1)^{\frac{1}{2}} erf(\alpha/2k_1^{\frac{1}{2}})} - \frac{U_2 k_2 e^{-\alpha^{\frac{2}{4k_2}}}}{(\pi k_2)^{\frac{1}{2}} erf(\alpha/2k_2^{\frac{1}{2}})} = \frac{Lp\alpha}{2}, \quad (3.22)$$

όπου p είναι η πυκνότητα του πάγου και του νερού υπονοώντας οτι δεν θα υπάρξει μεταβολή του όγκου κατα την τήξη. Η (3.19) δίνει την τιμή $\lambda = \alpha/(2k_1^{\frac{1}{2}})$. Εφόσον το α έχει βρεθεί από την (3.22), η u_1 και u_2 μπορούν να υπολογιστούν απο τις εξισώσεις (3.18), (3.19) και (3.20). Αυτές είναι

$$u_1 = U_1 - \frac{U_1}{erf(\alpha/2k_1^{\frac{1}{2}})} erf \frac{x}{2(k_1^{\frac{1}{2}})}, \quad (3.23)$$

$$u_2 = U_2 - \frac{U_2}{erf(\alpha/2k_2^{\frac{1}{2}})} erf \frac{x}{2(k_2^{\frac{1}{2}})}. \quad (3.24)$$

Για $t = 0$ η (3.21) και η (3.24) μας δίνουν $s = 0$ και $u_2 = -U_2$ δηλαδή όλη η περιοχή $x > 0$ είναι στερεή σε ομοιόμορφη θερμοκρασία $-U_2$. Η ειδική περίπτωση στην οποία το στερεό είναι αρχικά στη θερμοκρασία τήξης του, έτσι ώστε $U_2 = 0$, είναι το πρόβλημα μιας φάσης και η (3.22) μετατρέπεται στην σχέση

$$\lambda e^{\lambda^2} erf \lambda = U_1 c_1 / (L \pi^{\frac{1}{2}}), \quad (3.25)$$

όπου $\lambda = \alpha / (2k_1^{\frac{1}{2}})$.

3.5 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΕΙΔΩΝ

Συνδιάζοντας την εξίσωση *Fisher – Kolmogorou* και το πρόβλημα *Stefan* μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη ενός ή δύο ανταγωνιστικών πληθυσμών στο χρόνο (βλ. εξίσωση *Fisher*) σε ένα χωρίο του οποίου το όριο μεταβάλλεται (βλ. πρόβλημα *Stefan*). Στην οικολογία

είναι σημαντικό να κατανοήσουμε πως εξαπλώνονται τα χωροκατακτητικά είδη. Σε ένα μονοδιάστατο χωρίο κινείται ένα είδος με πληθυσμιακή πυκνότητα U σε χρόνο $t > 0$ και θεωρούμε ότι καταλαμβάνει χώρο $0 < x < h(t)$. Το $h(t)$ είναι το κινούμενο σύνορο το οποίο έχει ταχύτητα $h'(t) = -\mu U_x(t, h(t))$ και αρχική συνθήκη $h(0) = h_0$. Το ακόλουθο πρόβλημα ελεύθερου συνόρου χρησιμοποιήθηκε για να μοντελοποιηθεί αυτό το φαινόμενο της βιολογίας (*Du&Lin*, [3]):

$$\begin{cases} U_t - dU_{xx} = U(a - bU), & t > 0, 0 < x < h(t) \\ U_x(t, 0) = 0, U(t, h(t)) = 0, & t > 0 \\ h'(t) = -\mu U_x(t, h(t)), & t > 0 \\ h(0) = h_0, U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leq x \leq h_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Θεωρούμε στο $x = 0$ ότι το χωρίο είναι μονωμένο και παρατηρούμε ότι ο πρώτος κλάδος της εξίσωσης είναι ουσιαστικά η εξίσωση Fisher - Kolmogorov ενώ για $x = h(t)$ έχουμε κινούμενο σύνορο το οποίο περιγράφει την εξέλιξη του χωρού που καταλαμβάνει το είδος. Έτσι έχουμε ουσιαστικά την εξίσωση Fisher - Kolmogorov σε μεταβαλλόμενο χωρίο. Η $h(t)$ καθορίζεται από το h_0 , μ , d , a και b τα οποία είναι θετικές σταθερές (βλ. *Du and Lin*, [3]). Το $U_0(x)$ είναι αρχική συνθήκη που ικανοποιεί το εξής :

$$U_0 \in C^2([0, h_0]), U_0'(0) = U_0(h_0) = 0 \text{ και } U_0 > 0 \text{ στο } [0, h_0].$$

Έστω ότι $d=a=b=1$ τότε έχουμε ότι η (3.26) έχει μια αξιοσημείωτη συμπεριφορά κατά την οποία είτε η λύση επεκτείνεται (*spreading*) είτε φθίνει στο μηδέν (*vanishing*). Τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία συμβαίνει αυτό είναι τα εξής :

- Εάν $h_0 \geq \pi/2$ η διάδοση πάντα συμβαίνει ανεξάρτητα από το αρχικό μέγεθος του πληθυσμού.
- Εάν $h_0 < \pi/2$ τότε κατά πόσο συμβαίνει διάδοση ή εξαφάνιση προσδιορίζεται από το αρχικό μέγεθος του πληθυσμού U_0 και ο συντελεστής μ στην συνοριακή συνθήκη του *Stefan*.

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι όταν η διάδοση εμφανίζεται (*Du and Lin*, [3]), το $h(t)$ κινείται ασυμπτωτικά με σταθερή ταχύτητα δηλαδή:

$$h(t) = (c + o(1))t + O(1) \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \quad (3.27)$$

Η ταχύτητα c ονομάζεται ασυμπτωτική ταχύτητα εξάπλωσης. Εάν θέσουμε $U(x, t) = u(z)$, όπου $z = x - ct$ η ταχύτητα ορίζεται από το ακόλουθο πρόβλημα :

$$\begin{cases} u'' + cu' + u(1 - u) = 0, & z \in (-\infty, 0) \\ u(-\infty) = 1, u(0) = 0 \\ u'(0) = -c/\mu \end{cases} \quad (3.28)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση της (3.27) μπορεί να θεωρηθεί σαν λύση του οδεύοντος κύματος της (3.11) με ταχύτητα c και με ελεύθερο όριο στο $x = ct$ δηλαδή $z = 0$. Για δοσμένο $\mu > 0$ υπάρχει μοναδική σταθερά $c = c_\mu$ τέτοιο ώστε η (3.27) να έχει μοναδική κλασσική λύση $u_c(z)$ (*Du & Lin, [3]*). Το φαινόμενο στη περίπτωση που εξετάζουμε είναι διαφορετικό από τη κλασσική περίπτωση του οδεύοντος κύματος σε όλο το \mathbf{R} . Στο οδεύον κύμα στο \mathbf{R} η ταχύτητα c δεν είναι μοναδική και υπάρχει ελάχιστη ταχύτητα c για την οποία έχουμε οδεύον κύμα. Ωστόσο στο συγκεκριμένο πρόβλημα (3.27) η ταχύτητα c_μ είναι μοναδικά καθορισμένη για κάθε $\mu > 0$. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι και σε περισσότερες διαστάσεις στο χώρο ισχύουν παρόμοια αποτελέσματα.

Το οικολογικό σύστημα συχνά αποτελείται από περισσότερα από ένα είδη. Ως εκτούτου είναι σημαντικό να μελετήσουμε τον τρόπο εξάπλωσης σε δύο διαφορετικά είδη. Μια απλή υπόθεση είναι να θεωρήσουμε το πρόβλημα σε μια διάσταση. Έστω ότι οι συναρτήσεις $P(x, t)$ και $Q(x, t)$ δηλώνουν τις πυκνότητες των δύο ειδών, όπου καταλαμβάνουν τις περιοχές $[0, s(t)]$ και $[s(t), l]$ αντίστοιχα σε ένα διάστημα $[0, l]$, όπου το $s(t)$ δηλώνει τον συννοριακό διαχωρισμό των δύο ειδών. Μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο μοντέλο (*Mimura, Yamada, Yotsutani, [3]*):

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_t - d_1 P_{xx} = P(a_1 - b_1 P), & t > 0, 0 < x < s(t), \\ Q_t - d_2 Q_{xx} = Q(a_2 - b_2 Q), & t > 0, s(t) < x < l, \\ P = Q = 0, s'(t) = -\alpha_1 \partial_x P - \alpha_2 \partial_x Q, & x = s(t), \\ P(0, t) = M_1, Q(l, t) = M_2, & t > 0, \\ s(0) = s_0, (0 < s_0 < l), & \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq s_0, \\ Q(x, 0) = Q_0(x) \geq 0, & s_0 \leq x \leq l, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

όπου $d_i, a_i, b_i, \alpha_i, M_i$ ($i = 1, 2$) είναι θετικές σταθερές. Σε αυτή τη περίπτωση αποδुकνείται ότι το ω -όριο από την (3.28) είναι κενό για τα δοσμένα αρχικά δεδομένα $(P_0(x), Q_0(x), s_0)$ και το ελεύθερο όριο $s(t)$ συγκλίνει σε μια σταθερά s_α καθώς το t τείνει στο άπειρο. Μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου ένα είδος είναι ένα αρπακτικό το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή $[0, s(t)]$ και το άλλο είδος είναι θύραμα το οποίο καταλαμβάνει όλο τον τομέα $[0, l]$ [1]. Γενικεύσεις αυτού του μοντέλου μπορούμε να έχουμε θεωρώντας ένα περισσότερο γενικό μοντέλο ανταγωνισμού από την (3.28) με οριακή συνθήκη στο $x = s(t)$ μαζί με το άπειρο διάστημα $(-\infty, s(t))$ και

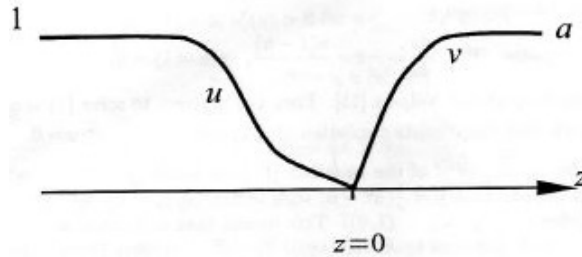
$(-\infty, \infty)$ από το $P(x, t)$ και $Q(x, t)$ αντίστοιχα (Ling, [3]). Ένα κρίσιμο ερώτημα στη μελέτη προβλημάτων τέτοιου τύπου είναι το εξής: Έαν η (3.28) θεωρείται σε ολόκληρο το \mathbf{R} , ασυμπτωτικά η $s(t)$ τείνει να κινείται με σταθερή ταχύτητα, η οποία είναι :

$$s(t) = (c + o(1))t + O(1) \quad \text{καθώς το } t \rightarrow \infty? \quad (3.30)$$

Τα όρια των περιοχών που ζούν πολλά είδη εξαπλώνονται σχεδόν σαν μια γραμμική συνάρτηση χρόνου. Ως εκ τούτου, φαίνεται πολύ λογικό να θεωρήσουμε τις συνθήκες (3.27) ή (3.30). Δεδομένου ότι στο πρόβλημα η ταχύτητα c του προβλήματος (3.27) για μοντέλο ενός είδους καθορίζεται από τη λύση του οδεύοντος κύματος του προβλήματος (3.28), είναι κατ' αναλογία σημαντικό να μελετήσουμε για το πρόβλημα (3.29) το αντίστοιχο πρόβλημα οδεύοντος κύματος. Θέτουμε $s(t) = ct$, $P(t, x) = u(z)$, $Q(t, x) = v(z)$ με $z = x - ct$ και θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα στο \mathbf{R} :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + cu' + u(1 - u) = 0, \quad z \in (-\infty, 0) \\ d_v v'' + cv' + v(a - v) = 0, \quad z \in (0, \infty) \\ u(0) = 0, v(0) = 0, u(-\infty) = 1, v(\infty) = a \\ c = -\alpha_1 u'(0) - \alpha_2 v'(0) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Πιστεύουμε ότι η γνώση της λύσης του (3.31) (βλέπε σχήμα 1) είναι πολύ σημαντική για να καταλάβουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος (3.29) σε μεγάλες περιοχές.



Σχήμα 3.11: Μια σχηματική αναπαράσταση της λύσης του συστήματος (3.29)

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την λύση της (3.28) για το πρόβλημα μίας φάσης αλλά και με τη λύση της (3.31) για το αντίστοιχο πρόβλημα δύο φάσεων. Θα δούμε ότι αυτή η εξίσωση (3.31) είναι στενά συνδεδεμένη με τις λύσεις των οδεύοντων κυμάτων στο u και στο v στο \mathbf{R} . Έστω ότι το $c_{min,u}$ υποδηλώνει την ελάχιστη ταχύτητα στη λύση του οδεύον κύματος της :

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty), \quad u(-\infty) = 1, \quad u(\infty) = 0,$$

και $c_{min,v}$ υποδηλώνει την ελάχιστη ταχύτητα στη λύση του οδεύον κύματος της εξίσωσης :

$$d_v v'' + cv' + v(a - v) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty), \quad v(-\infty) = 0, \quad v(\infty) = a.$$

Η $c_{min,v}$ ικανοποιεί την παρακάτω σχέση : $|c_{min,v}| = \min |c|$ για όλες τις δυνατές τιμές για την ταχύτητα c του οδεύον κύματος της παραπάνω εξίσωσης του v . Τέλος έχουμε $c_{min,u} = 2 > 0$, $c_{min,v} = -2\sqrt{ad_v} < 0$ (βλ.[3]).

Κεφάλαιο 4

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Θα παρουσιάσουμε αρχικά τη θεωρητική μελέτη για το μοντέλο μίας φάσης :

$$(3.26) \begin{cases} U_t - dU_{xx} = U(a - bU), & t > 0, 0 < x < h(t) \\ U_x(t, 0) = 0, U(t, h(t)) = 0, & t > 0 \\ h'(t) = -\mu U_x(t, h(t)), & t > 0 \\ h(0) = h_0, U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leq x \leq h_0 \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος για ένα είδος με βάση την εξίσωση (3.28):

Θεώρημα 4.0.1. Για κάθε $\mu > 0$ υπάρχει μοναδικό $c_\mu > 0$ τέτοιο ώστε η (3.28) να έχει μοναδική λύση για $c = c_\mu \in (0, c_{\min, u})$.

Το $\mu > 0$ είναι σταθερό και θετικό και γράφουμε την (3.28) ως εξής :

$$\begin{cases} u' = p, p' = -cp - u(1 - u), z \in (-\infty, 0), \\ (u, p)(-\infty) = (1, 0), (u, p)(0) = \left(0, -\frac{c}{\mu}\right) \end{cases} \quad (4.1)$$

Εάν θέσουμε στην (3.28) $u' = p$ προκύπτει $p' = -cp - u(1 - u)$. Την (4.1) μπορούμε να την γράψουμε σαν :

$$(P_c) \begin{cases} \frac{dp}{du} = -c - \frac{u(1-u)}{p}, \\ p(u=1) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

τότε η λύση του προβλήματος είναι ισοδύναμη με το να βρούμε το c έτσι ώστε να υπάρχει μια λύση του προβλήματος (P_c) που πηγαίνει στο $-\frac{c}{\mu}$ στο $u = 0$.

Θέτουμε $(\Gamma_c) = \{u, p : -c - \frac{u(1-u)}{p}\}$ να είναι ο μηδενικός κλάδος της εξίσωσης (P_c) έτσι ώστε $\frac{dp}{du} = 0$ για κάθε $c \neq 0$. Η (Γ_c) είναι παραβολή δηλαδή $p = \frac{1}{c}(u^2 - u)$ με κορυφή την $(u, p) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{4c})$. Η λύση της (3.1) ικανοποιεί το $(u, p)(-\infty) = (1, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι ανήκει στην ασταθή πολλαπλότητα του

$(1,0)$ (συμβολίζεται $W^u((1,0))$). Ως εκ τούτου για την επίλυση της (4.1) είναι αναγκαίο να βρεθεί το c τέτοιο ώστε το $W^u((1,0))$ να φθάνει στο $(0, -\frac{c}{\mu})$ για $z = 0$.

Λήμμα 4.0.2. Θέτουμε την $(u, p_c(u))$ να είναι μια τροχιά ξεκινώντας από το $(1,0)$ όπου $p_c(u)$ ικανοποιεί την (4.2). Υποθέτουμε ότι το πεδίο ορισμού της $p_c(u)$ περιέχεται στο σύνολο $\{u | 0 < u < 1\}$. Έχουμε την ακόλουθες προϋποθέσεις:

- (i) $p_c(u) < 0$ για $0 < u < 1$ και $c \in \mathbf{R}$. Επιπλέον για $c > 0$, η $(u, p_c(u))$ συναντάει την (Γ_c) ακριβώς μια φορά σε κάποιο $u = u^* \in (0, \frac{1}{2}]$, $\frac{dp_c}{du} > 0$ για $u^* < u < 1$ και $\frac{dp_c}{du} < 0$ για $0 < u < u^*$.
- (ii) $p_c(0)$ είναι αύξουσα στο c για $c \in \mathbf{R}$.
- (iii) Υπάρχει $c_0 > 0$ καθώς $-\frac{c_0}{\mu} - p_{c_0}(0) < 0$.
- (iv) Για $c = 0$,

$$p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}} < 0 \text{ για } 0 < u < 1. \quad (4.3)$$

Απόδειξη :

Θα αποδείξουμε πρώτα την (1). Από τη γραμμικοποίηση της (4.1) γύρω από το σημείο ισορροπίας $(1,0)$, εξασφαλίσαμε ότι η κλίση της $W^u((1,0))$ στο $z = -\infty$ ισούται με

$$m_c := \frac{2}{c + \sqrt{4 + c^2}} \quad (4.4)$$

Υποθέτουμε ότι $c > 0$. Η κλίση της (Γ_c) στο $(1,0)$ είναι $\frac{1}{c}$. Έτσι η $p_c(u)$ βρίσκεται ανάμεσα στην (Γ_c) και στον άξονα της που ξεκινάει από το $(1,0)$. Στην γειτονία του $(1,0)$, η $W^u((1,0))$ έχει δύο κλάδους: ο ένας ορίζεται για $u > 1$ και ο άλλος για $u < 1$. Θεωρούμε τον κλάδο έπου ξεκινάει από την περιοχή $u > 1$ πρώτα. Από τον ορισμό της Γ_c , η $p_c(u)$ δεν μπορεί να συναντήσει την Γ_c . Αντίθετα στο σημείο τομής ισχύει:

$$0 = \frac{dp_c}{du} \geq \text{κλίση της } \Gamma_c > 0,$$

το οποίο είναι αντίφαση. Έτσι η p_c πάντα βρίσκεται κάτω από την Γ_c , $\frac{dp_c}{du} > 0$ και η p_c ορίζεται μόνο για $u \geq 1$. Ως εκ τούτου σε αυτό το κλάδο δεν μπορούμε να ορίσουμε το $p_c(0)$. Αυτό υποδηλώνει ότι για την επίλυση του προβλήματος με $p_c(0) = -\frac{c}{\mu}$, θα πρέπει να εξετάσουμε μόνο τον κλάδο που ξεκινάει από την

περιοχή $u \leq 1$ κοντά στο $(1,0)$. Για αυτό τον κλάδο, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{dp_c}{du} > 0, p_c(u) < 0$ και η $p_c(u)$ παραμένει πάνω από τη Γ_c για $u \in (1 - \varepsilon, 1)$.

Υποθέτουμε για αυτό το κλάδο, ότι η $p_c(u)$ δεν μπορεί να παραμείνει πάνω από την Γ_c για $u \in (0, 1)$. Έπειτα $p'_c(u) > 0$ για $u \in (0, 1), p_c(0) < 0$ και η $p_c(u)$ δεν μπορεί να βρίσκεται πάνω από τη Γ_c πράγμα το οποίο είναι αντίφαση. Ως εκ τούτου πρέπει να υπάρχει $u^* \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η $p_c(u)$ να συναντάει την Γ_c στο u^* . Συγκεκριμένα έχουμε

$$p'_c(u^*) = 0, \quad p'_c(u) > 0 \quad \text{ή} \quad u \in (u^*, 1) \text{ από (8)} \quad (4.5)$$

και

$$p_c(u) < 0 \quad \text{ή} \quad u \in [u^*, 1). \quad (4.6)$$

Επιπλέον,

$$0 = p'_c(u^*) \geq \text{κλίση της } \Gamma_c \text{ στο } u^* = \frac{2u^* - 1}{c}$$

και

$$u^* \leq \frac{1}{2}. \quad (4.7)$$

Θέτουμε $p_\Gamma(u) = \frac{u(u-1)}{c}$. Συγκεκριμένα, το σύνολο $(u, p_\Gamma(u))$ καθορίζει τα σημεία της Γ_c . Θα δείξουμε ότι $p_c(u) \leq p_\Gamma(u)$ για $0 < u < u^*$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει u_1 τέτοιο ώστε $0 < u_1 < u^*$ και $p_c(u_1) > p_\Gamma(u_1)$. Τότε υπάρχει u_2 τέτοιο ώστε $u_1 < u_2 \leq u^*$, $p_c(u_2) = p_\Gamma(u_2)$ και $p_c(u) \geq p_\Gamma(u)$ για $u_1 \leq u \leq u_2$. Από το Θεώρημα Μέσης τιμής για κάποιο $\bar{u} \in (u_1, u_2)$ έχουμε,

$$p'_c(\bar{u}) = \frac{p_c(u_2) - p_c(u_1)}{u_2 - u_1} < 0.$$

Από την άληθη πλευρά, αφού $p_c(\bar{u}) \geq p_\Gamma(\bar{u})$, έχουμε από την (4.2) ότι $p'_c(\bar{u}) \geq 0$, το οποίο είναι αντίφαση. Ως εκ τούτου $p_c(u) \leq p_\Gamma(u)$ για $0 < u < u^*$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $u_3 \in (0, u^*)$ τέτοιο ώστε η $p_c(u)$ να συναντάει την Γ_c ξανά στο $u = u_3$. Έτσι

$$0 = p'_c(u_3) \leq \text{κλίση της } \Gamma_c \text{ στο } u_3 = \frac{2u_3 - 1}{c}$$

πρέπει να ισχύει ότι $\frac{1}{2} \leq u_3 < u^*$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την (4.7). Άρα η $p_c(u)$ δεν θα ξανασυναντήσει στην Γ_c για $u \in (0, u^*)$. Άρα από την (4.2)

$$p'_c(u) < 0 \text{ για } u \in (0, u^*) \quad (4.8)$$

και η p_c βρίσκεται κάτω από την Γ_c , το οποίο συνεπάγεται ότι $p_c < 0$ για $0 < u < u^*$. Αυτά μαζί με την (4.6) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$p_c(u) < 0 \text{ για } u \in (0, 1).$$

Έχουμε αποδείξει τον πρώτο ισχυρισμό για τη περίπτωση που $c > 0$ (βλέπε σχήμα 2 (α)).

Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι αν $u^* < \frac{1}{2}$ τότε η παραπάνω απόδειξη γίνεται ευκολότερη. Πράγματι στην περίπτωση αυτή η κλίση της Γ_c στο u^* είναι μικρότερη από την $p'_c(u^*) = 0$. Ως εκ τούτου $p_c(u) < p_\Gamma(u)$ όταν η u είναι κοντά στο u^* και $u < u^*$. Εάν η p_c ξανασυναντήσει την Γ_c μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $u_3 = \sup\{u \in (0, u^*) \mid p_c(u) = p_\Gamma(u)\}$ για να συμπληρώσουμε την απόδειξη.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η $p_c(u) < 0$ για $c \leq 0$. Σημειώνουμε ότι η Γ_c δεν ορίζεται για $c = 0$. Χρησιμοποιούμε όμοια επιχειρήματα όπως παραπάνω. Η πολλαπλότητα $W^u((1, 0))$ έχει πάλι δύο κλάδους. Στον κλάδο που έχει αφετηρία από την περιοχή $u > 1$ κοντά στο $(1, 0)$ με $\frac{dp_c}{du} > 0$ πάντα ισχύει η σχέση $p_c(u) < 0$ για $c \leq 0$. Δεν μπορεί να είναι αυτή η λύση που ψάχνουμε. Ως εκ τούτου θεωρούμε τον κλάδο με αφετηρία την περιοχή $u < 1$, με $\frac{dp_c}{du} > 0$ για $0 < u < 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι $p_c < 0$ για $0 < u < 1$. Η απόδειξη για την περίπτωση $c = 0$ ολοκληρώθηκε.

Όταν $c = 0$, η P_0 γίνεται

$$\frac{dp}{du} = -\frac{u(1-u)}{p}, p(u=1) = 0,$$

$$\int p dp = -\int u(1-u) du,$$

$$\frac{p^2}{2} = -\int (u - u^2) du,$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + c,$$

$$p^2 = -u^2 + \frac{2}{3}u^3 + 2c,$$

Εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη για $u = 1$ στο $p = 0$ και έχουμε

$$0 = -1 + \frac{2}{3} + 2c,$$

$$1 - \frac{2}{3} = 2c,$$

$$\frac{1}{3} = 2c \implies c = \frac{1}{6},$$

και άρα

$$p^2 = -u^2 + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{3},$$

$$p^2 = \frac{(1-u)^2(1+2u)}{3}. \quad (4.9)$$

Επομένως

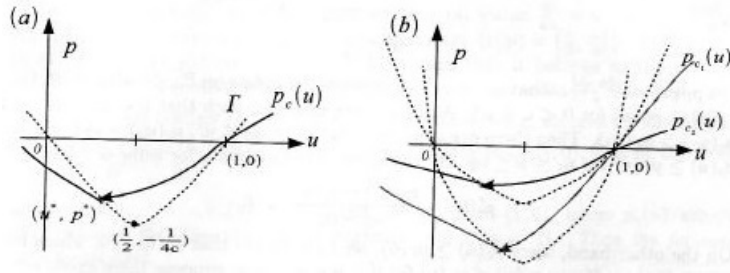
$$p = \pm(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}}. \quad (4.10)$$

Απο τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε

$$p_0(u) \leq 0.$$

Άρα λαμβάνουμε το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω ταυτότητα (4.10) και παίρνουμε

$$p_0(u) = -(1-u)\sqrt{\frac{1+2u}{3}} < 0 \text{ για } 0 < u < 1.$$



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση των τροχιών

Η απόδειξη για το τέταρτο ισχυρισμό ολοκληρώθηκε.

Θα αποδείξουμε τώρα τον δεύτερο ισχυρισμό. Αυτό προκύπτει απο το γεγονός ότι $p_{c_2}(0) \geq p_{c_1}(0)$ για $c_2 \geq c_1$. Απο την (4.4) έχουμε ότι $m_{c_1} > m_{c_2}$. Έτσι η $p_{c_2}(u)$ βρίσκεται πάνω στην $p_{c_1}(u)$ όταν οι αντίστοιχες τροχιές τείνουν στο $(u, p) = (1, 0)$. Έστω $p_{c_2}(0) < p_{c_1}(0)$. Τότε υπάρχει ένα σημείο (u_4, p_4) με $p_4 \neq 0$ και $u_4 = \inf\{u \in (0, 1) \mid p_{c_2}(w) \geq p_{c_1}(w) \text{ για } u \leq w < 1\}$ τέτοιο ώστε $p_{c_2}(u_4) = p_{c_1}(u_4) = p_4$ και

$$\frac{dp_{c_2}}{du} \Big|_{u=u_4} \geq \frac{dp_{c_1}}{du} \Big|_{u=u_4},$$

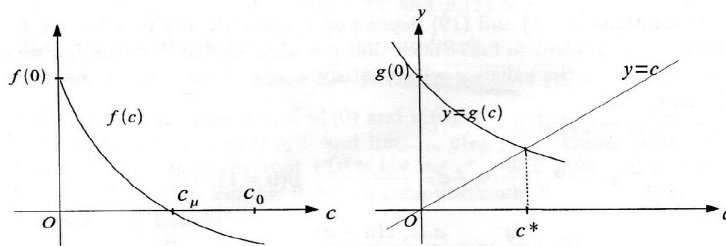
(βλέπε σχήμα 2b), αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι

$$\frac{dp_{c_2}}{du} \Big|_{u=u_4} = -c_2 - \frac{u_4(1-u_4)}{p_4} < -c_1 - \frac{u_4(1-u_4)}{p_4} = \frac{dp_{c_1}}{du} \Big|_{u=u_4}.$$

Έτσι πρέπει να ισχύει η σχέση $p_{c_2}(0) \geq p_{c_1}(0)$. Επιπλέον το παραπάνω επιχειρήματα συνεπάγεται ότι $p_{c_2}(0) > p_{c_1}(0)$ εαν $c_1 < c_{\min, u}$.

Τέλος αποδεικνύουμε τον τρίτο ισχυρισμό. Απο τον πρώτο ισχυρισμό για $c > 0$, η $W^u((1, 0))$ συναντάει σημείο (u^*, p^*) στην Γ_c με $p^* \geq -\frac{1}{4c}$ (το p είναι συντεταγμένη της κορυφής της Γ) και $u^* \leq \frac{1}{2}$. Επιπλέον μετά τη συνάντηση της με τη Γ_c , η $W^u((1, 0))$ πρέπει να πάει προς τα πάνω και η p_c μειώνεται ως προς την u . Προκύπτει ότι $p_c(0) > -\frac{1}{4c}$ για όλα τα $c > 0$. Με την επιλογή του c_0 τέτοιο ώστε $-\frac{c_0}{\mu} \leq -\frac{1}{4c_0}$, (π.χ $c_0 \geq \frac{\sqrt{\mu}}{2}$) παίρνουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. \square

Παρατήρηση 4.0.3. Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι $-\frac{c_{\min, u}}{\mu} - p_{c_{\min, u}}(0) = -\frac{c_{\min, u}}{\mu} < 0$, μπορούμε να διαλέξουμε το c_0 να είναι τέτοιο ώστε $c_0 = c_{\min, u}$.



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση των τροχιών

Απόδειξη Πρότασης 4.0.1 :

Θεωρούμε την εξίσωση

$$f(c) := -\frac{c_{\min, u}}{\mu} - p_c(0)$$

τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό c_μ τέτοιο ώστε $f(c_\mu) = 0$. Απο τη συνεχή εξάρτηση των παραμέτρων των λύσεων της (P_c) , εμείς έχουμε $f \in C([0, \infty))$. Απο την (4.3) προκύπτει ότι

$$f(0) = 0 - p_0(0) = 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0. \quad (4.11)$$

Επιπλέον από τον τρίτο ισχυρισμό του λήμματος (3.31), έχουμε

$$f(c_0) = -\frac{c_0}{\mu} - p_{c_0}(0) < 0. \quad (4.12)$$

Από (4.11) και (4.12) λάβαμε την ύπαρξη της $c_\mu \in (0, c_0)$ τέτοιο ώστε $f(c_\mu) = 0$. Απο δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος (4.0.2) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο c έτσι η μοναδικότητα της c_μ ισχύει (βλέπε σχήμα 3). Η συνθήκη $c_\mu < c_{\min, u}$ μπορεί να ληφθεί απο την επιλογή $c_0 = c_{\min, u}$. \square

Τα παραπάνω ισχύουν για το πρόβλημα μίας φάσης (3.26) και συγκεκριμένα διευκρινίζουν τι συμβαίνει όσον αφορά τις λύσεις οδεύοντος κύματος του προβλήματος (3.28). Στην συνέχεια θα διερενησουμε το ανάλογο αποτέλεσμα

για το πρόβλημα δύο φάσεων (3.29) δηλαδή την ύπαρξη λύσεων οδούντος κύματος της αντίστοιχης εξίσωσης (3.31). Αυτό εκφράζεται από το Θεώρημα(4.0.4) που διατυπώνεται παρακάτω. Θα παρουσιάσουμε τη θεωρητική μελέτη για το μοντέλο δύο φάσεων :

$$(3.29) \left\{ \begin{array}{l} P_t - d_1 P_{xx} = P(a_1 - b_1 P), \quad t > 0, 0 < x < s(t), \\ Q_t - d_2 Q_{xx} = Q(a_2 - b_2 Q), \quad t > 0, s(t) < x < l, \\ P = Q = 0, s'(t) = -\alpha_1 \partial_x P - \alpha_2 \partial_x Q, \quad x = s(t), \\ P(0, t) = M_1, Q(l, t) = M_2, \quad t > 0, \\ s(0) = s_0, (0 < s_0 < l), \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq s_0, \\ Q(x, 0) = Q_0(x) \geq 0, \quad s_0 \leq x \leq l, \end{array} \right.$$

Για το παραπάνω πρόβλημα θα παρουσιάσουμε το ακόλουθο κύριο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.0.4. Για $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha > 0$ και $d_v > 0$ που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, υπάρχει μοναδικό c^* εξαρτώμενο από τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ και d_v έτσι ώστε το πρόβλημα (3.31) έχει μοναδική λύση για $c = c^*$. Επιπλέον ισχύουν οι εκτιμήσεις, $\min\{2, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_v \alpha_1}{d_v + \alpha_2}}\} > c^* > 0$ αν $\alpha_1 > \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha^3}{d_v}}, c^* = 0$ αν $\alpha_1 = \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha^3}{d_v}}$ και $\max\{-2\sqrt{d_v \alpha}, \frac{-\alpha}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1}}\} < c^* < 0$ αν $\alpha_1 < \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha^3}{d_v}}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους πάνω και κάτω λύσεων και την αρχή του μεγίστου για να χαρακτηρίσουμε την ταχύτητα c στην εξίσωση (3.28). Αυτή η μέθοδος ακολουθήθηκε στην εργασία (Du&Lin, [3]). Στην προκειμένη περίπτωση όμως θα χρησιμοποιηθεί ανάλυση επιπέδου φάσεων για να αποδειχθεί το Θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα στην επόμενη ενότητα θα εργαστούμε με την ανάλυση του επιπέδου φάσεων για να μελετήσουμε τις ιδιότητες της ταχύτητας c και να δώσουμε μια άληθη απόδειξη για το αποτέλεσμα που αφορούν αυτές τις ιδιότητες. Έτσι θα αποδείξουμε το θεώρημα 4.0.4.

Απόδειξη Θεωρήματος (4.0.4) :

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ και d_v είναι δοσμένα. Μπορούμε να γράψουμε την (3.31) χρησιμοποιώντας την συνθήκη

$$c = -\alpha_1 u'(0) - \alpha_2 v'(0) \quad (4.13)$$

και τις ακόλουθες δυο διαφορικές εξισώσεις για $c \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} u' = p, p' = -cp - u(1 - u), z \in (-\infty, 0), \\ (u, p)(-\infty) = (1, 0), u(0) = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} v' = q, q' = -\frac{1}{d_v}(cq + v(\alpha - v)), z \in (0, \infty,) \\ (v, q)(+\infty) = (\alpha, 0), v(0) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Για να δείξουμε την εξάρτηση από το c , θα συμβολίζουμε της $u'(0)$ και $v'(0)$ ως $u'_c(0) = u'_c(0)$ και $v'_c(0) = v'_c(0)$. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Αποδύκνεται ([3]) ότι:

$$\begin{aligned} u'_c(0) &\longrightarrow 0 \text{ καθώς } c \longrightarrow c^{-\min,u}, u'_c(0) < 0 \text{ για } c < c_{\min,u} \\ v'_c(0) &\longrightarrow 0 \text{ καθώς } c \longrightarrow c^{+\min,v}, v'_c(0) > 0 \text{ για } c > c_{\min,v} \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$g(c) := -\alpha_1 u'_c(0) - \alpha_2 v'_c(0) \quad (4.16)$$

Δεδομένου ότι οι λύσεις (4.14) και (4.15) εξαρτώνται ομαλά από το c η συνάρτηση $g \in C(\mathbf{R})$. Το να λύσουμε την (3.31) είναι ισοδύναμο με το να βρούμε το c τέτοιο ώστε $c = g(c)$. Χρειαζόμαστε όμως στην (3.28) να έχουμε $u'(0) = -\frac{c}{\mu}$ και οι τιμές του c οι οποίες ικανοποιούν την $c = g(c)$ δεν είναι απαραίτητα θετικές.

Ξαναγράφουμε την (4.14) και την (4.15) στη μορφή:

$$(P_c) \quad \frac{dp}{du} = -c - \frac{u(1-u)}{p}, p(u=1) = 0,$$

$$(Q_c) \quad \frac{dq}{dv} = -\frac{c}{d_v} - \frac{v(\alpha-v)}{qd_v}, q(v=\alpha) = 0.$$

Έστω $p_c(u)$ και $q_c(v)$ οι λύσεις της (P_c) και (Q_c) αντίστοιχα για $c \in \mathbf{R}$. Τότε το $p_c(u)$ ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις τους λήμματος (4.2). Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $q_c(v)$ ικανοποιεί το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.0.5. Η κλίση της $q_c(v)$ είναι μικρότερη από $-\frac{c}{d_v}$ για $0 < v < \alpha$. Επιπλέον η $q_c(v) > 0$ για $0 < v < \alpha$ και $c \in \mathbf{R}$, και $q_c(0) = v'_c(0)$ άρα η $q_c(v)$ είναι αύξουσα στο c .

Απόδειξη :

Στην (4.15), η σταθερή πολυπλοκότητα $(\alpha, 0)$ έχει 2 κλάδους. Για να είναι η $q_c(0)$ καλά ορισμένη, χρειάζεται να θεωρήσουμε τον κλάδο του οποίο διέρχεται από την περιοχή $v < \alpha$ κοντά στο σημείο $(\alpha, 0)$. Από την απόδειξη του λήμματος (4.2) έχουμε ότι μπορούμε να δείξουμε ότι $q_c(v) > 0$ για $0 < v < \alpha$. Από την εξίσωση (Q_c) έχουμε

$$\frac{dq}{dv} = -\frac{c}{d_v} - \frac{v(\alpha-v)}{qd_v} \leq \frac{c}{d_v}.$$

Οι προηγούμενοι ισχυρισμοί μπορούν να δείχθούν όμοια με τα επιχειρήματα της απόδειξης του λήμματος (4.0.2) και μπορούμε να παραλείψουμε τις λεπτομέρειες. Στην πραγματικότητα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το c και το z με $-c$ και $-z$ αντίστοιχα στην (4.15). Έτσι αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο ότι οι ιδιότητες του λήμματος (4.0.2) ισχύουν επίσης για την q_c . \square

Λήμμα 4.0.6. Έστω $g(c)$ η οποία ορίζεται από τη σχέση (4.16) για $c \in \mathbf{R}$, α_1, α_2 όπως στο Θεώρημα (4.0.4). Τότε

$$g(c) < \alpha_1 \frac{1}{4c} - \alpha_2 \frac{ca}{d_v} \text{ για } c > 0 \quad (4.17)$$

$$g(c) > -\alpha_1 c + \alpha_2 \frac{a^2}{4c} \text{ για } c < 0 \quad (4.18)$$

Επιπλέον έχουμε:

- (i) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0$: $g(c) > 0$ για $c \in \mathbf{R}$, $g(c) \rightarrow \infty$ καθώς $c \rightarrow -\infty$, $g(c) \rightarrow 0$ καθώς $c \rightarrow \infty$.
- (ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0$: $g(c) < 0$ για $c \in \mathbf{R}$, $g(c) \rightarrow 0$ καθώς $c \rightarrow -\infty$, $g(c) \rightarrow -\infty$ καθώς $c \rightarrow \infty$.
- (iii) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$: $g(c) \rightarrow \infty$ καθώς $c \rightarrow -\infty$, $g(c) \rightarrow -\infty$ καθώς $c \rightarrow \infty$.

Απόδειξη :

Οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές καθώς η σταθερά $c \rightarrow \pm\infty$ λαμβάνονται από την (4.17) και (4.18) οπότε χρειάζεται να αποδείξουμε μόνο τις δύο ανισότητες. Για $c > 0$, αφού $\frac{dq_c}{dv} < -\frac{c}{d_v}$ από λήμμα 4.0.4 και $q_c(a) = 0$, έχουμε $q_c(0) > \frac{ca}{d_v}$. Έτσι από απόδειξη λήμματος 4.0.3 θα δείξουμε ότι $p_c(0) > -\frac{1}{4c}$. Τότε

$$g(c) = -\alpha_1 p_c(0) - \alpha_2 q_c(0) < \alpha_1 \frac{1}{4c} - \alpha_2 \frac{ca}{d_v}.$$

Για $c < 0$, δεδομένου ότι $\frac{dp_c}{du} > -c$ από το λήμμα 4.0.3 και $p_c(1) = 0$, έχουμε ότι $p_c(0) < c$. Από την άλλη πλευρά, θεωρώντας το μηδενικό κλάδο $q = \frac{v(v-a)}{c}$ και επιχειρηματολογώντας όμοια όπως στην απόδειξη του λήμματος 4.0.3 έχουμε ότι $q_c(0) < -\frac{a^2}{4c}$. Ως εκ τούτου έχουμε την (4.17). \square

Συνεχίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος (4.0.4). Από την ιδιότητα του ότι είναι αύξουσες συναρτήσεις οι $u'_c(0)$ και $v'_c(0)$ στο c , έχουμε ότι η $g(c)$ είναι φθίνουσα στο c . Έτσι από το λήμμα 4.0.6 $\lim_{c \rightarrow -\infty} g(c) \geq 0$ και $\lim_{c \rightarrow +\infty} g(c) \leq 0$. Ως εκ τούτου η εξίσωση $c - g(c) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την c^* . Επιπλέον $c^* \geq 0$ εαν $g(0) \geq 0$ και $c^* < 0$ εαν $g(0) < 0$ (βλέπε σχήμα 3). Για $c = 0$ όμοια όπως για τον υπολογισμό της p , στην απόδειξη του λήμματος 4.0.3, έχουμε $p_0(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, και :

$$q_0(0) = \sqrt{\frac{a^3}{3d_v}}.$$

Επομένως

$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}).$$

Έτσι εαν $\alpha_1 > \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}$, έχουμε $g(0) > 0$, το οποίο συνεπάγεται οτι $c^* > 0$.
Εάν $\alpha_1 = \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}$, έχουμε $g(0) = 0$ και $c^* = 0$ και εαν επιπλέον $\alpha_1 < \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}$ έχουμε $g(0) < 0$ και $c^* < 0$. Από τα προαναφερέντα αυτό συνεπάγεται οτι η (3.31) έχει λύση με ταχύτητα $c = c^*$.

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις (4.17) και (4.18) έχουμε οτι εαν $\alpha_1 > \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}$,

$$c^* = g(c^*) = -\alpha_1 p_{c^*}(0) - \alpha_2 q_{c^*}(0) < \alpha_1 \frac{1}{4c^*} - \alpha_2 \frac{c^* a}{d_v}.$$

Ως εκ τούτου

$$(1 + \frac{a\alpha_2}{d_v})c^* < \frac{\alpha_1}{4c^*}$$

και

$$c^* < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_v\alpha_1}{d_v + a\alpha_2}}.$$

Απο την άλλη πλευρά, για $c \geq c_{min,u} p_c(0) = 0$ και $c - g(c) = c + \alpha_2 q_c(0) > 0$. Αυτό συνεπάγεται οτι η c^* ικανοποιεί τη σχέση $c^* < c_{min,u}$.

Για την περίπτωση $\alpha_1 < \alpha_2\sqrt{\frac{a^3}{d_v}}$,

$$c^* = g(c^*) > -\alpha_1 c^* + \alpha_2 \frac{a^2}{4c^*}.$$

Έτσι $(1 + \alpha_1)c^* > \frac{\alpha_2 a^2}{4c^*}$ και

$$-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1}} < c^*.$$

Για $c \leq c_{min,v}$, $q_c(0) = 0$ και $c - g(c) = c + \alpha_1 p_c(0) < 0$. Αυτό συνεπάγεται οτι η c^* ικανοποιεί τη σχέση $c^* > c_{min,v}$. Άρα τελικά έχουμε τις εκτιμήσεις που χρειαζόμαστε για το c^* . Η απόδειξη του Θεωρήματος ολοκληρώθηκε. \square

Κεφάλαιο 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών θα επιλύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις (3.26) και (3.29).

5.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΙΑΣ ΦΑΣΗΣ

Για την (3.26) έχουμε :

$$\begin{cases} U_t - dU_{xx} = U(a - bU), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ U_x(t, 0) = 0, U(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu U_x(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, U(x, 0) = U_0(x), & 0 \leq x \leq h_0, \end{cases}$$

Το πρόβλημα μίας φάσης (3.26) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα πρόβλημα σε σταθερό χωρίο. Εφόσον πάρουμε την εξίσωση θερμότητας $u_t = u_{xx}$ και θέσουμε $y = \frac{x}{s(t)}$ θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{s(t)} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Άρα

$$u_x = \frac{1}{s(t)} u_y$$

και

$$u_{xx} = \frac{1}{s^2(t)} u_{yy}.$$

Για την παράγωγο ως προς t παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\xi = -\frac{x}{s^2(t)} \frac{ds}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\xi.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση διάχυσης $u_t = u_{xx}$ και προκύπτει

$$\frac{1}{s^2(t)} u_{yy} = -\frac{x}{s^2(t)} \frac{ds}{dt} u_y + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_{yy} = -sy \frac{ds}{dt} u_y + s^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Για τη συνθήκη Stefan έχουμε

$$\dot{s}(t) = -u_x|_s$$

ή

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{cases} s^2(t)u_t = u_{yy} + ys\dot{s}u_y \\ u_y(0) = u_1, u(1) = 0 \\ s\dot{s} = -u_y(1; t) \\ s(0) = s_a, u(x, 0) = U_0(x) \end{cases}$$

Διαφορούμε το $x-t$ επίπεδο χρησιμοποιώντας ορθογώνιο πλέγμα με διαμέριση πλάτους 1 στον άξονα x και πλάτους 1 στον άξονα t . Το χωρίο μας είναι $[0, 1] \times [0, T]$ όπου ισχύει :

- Για $x_{m+1} = x_m + dx$
- Για $t_{m+1} = t_m + dt$

Έχουμε $u(x_m, t_n) \simeq u_m^n$

Χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο πεπερασμένων διαφορών παίρνουμε :

- Για τη παράγωγο του s

$$\dot{s}(t_n) \simeq \frac{s^{n+1} - s^n}{dt}$$

- Για τις παραγώγους του $u(x, t)$

$$u_t(x_m, t_n) \simeq \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{dt}$$

$$u_x(x_m, t_n) \simeq \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{2dx}$$

$$u_{xx}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(dx)^2}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στις εξισώσεις έχουμε για τη συνθήκη Stefan

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{dt} = -\frac{1}{s^n} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx} \right).$$

Άρα η εξίσωση για το s παίρνει τη μορφή :

$$s^{n+1} = s^n - \frac{dt}{s^n} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx} \right).$$

Επίσης για την εξίσωση της διάχυσης έχουμε :

$$u_t = \frac{1}{s^2} u_{yy} + y \frac{\dot{s}}{s} u_y,$$

απο την οποία προκύπτει :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{dt} = \frac{1}{(s^n)^2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(dx)^2} + y_m \frac{s^n - s^{n+1}}{s^n} dt \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx} \right).$$

Άρα τελικά

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{dt}{(s^n)^2 (dx)^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \frac{dt}{2} (m-1) \frac{(s^n - s^{n+1})}{s^n} dt (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n).$$

Η συνοριακή συνθήκη είναι ομογενή Neumann στο σημείο $y = 0$. Άρα :

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{dx} = 0$$

$$u_1^n = u_0^n$$

και για $m = 1$ έχουμε

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \frac{dt}{(s^n)^2 dx^2} (2u_2^n - 2u_1^n)$$

Ενώ στο άλλο άκρο η συνθήκη είναι ομογενής Dirichlet με

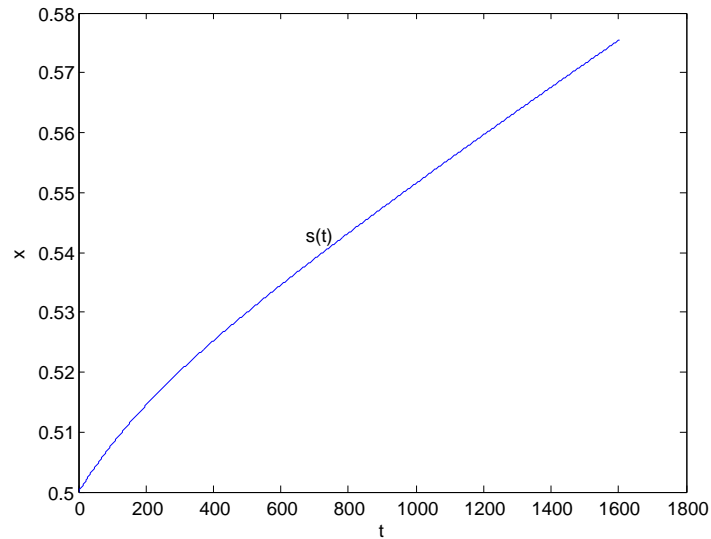
$$u_M^n = 0.$$

Η αρχική συνθήκη είναι

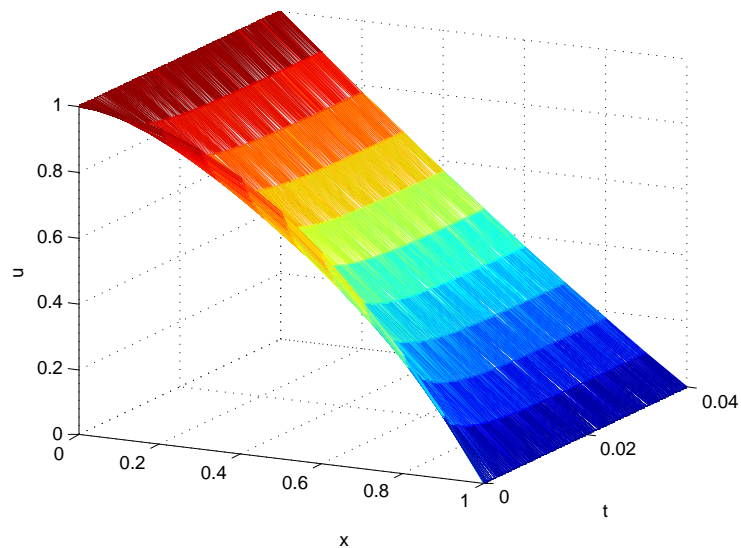
$$u_m^1 = c, m = 1 \dots M.$$

Εαν για παράδειγμα θεωρήσουμε $u(x, 0) = c$ για c σταθερά. Υλοποιώντας αυτή τη μέθοδο στο προγραμματιστικό πακέτο matlab μπορούμε να προσομοιώσουμε το μοντέλο για διάφορες περιπτώσεις. Παίρνουμε το x να είναι τέτοιο ώστε

$0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.01$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.01$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι προκύπτουν τα αποτελέσματα που φαίνονται στα σχήματα (5.1) και (5.2) :



Σχήμα 5.1: Μοντέλο μιας φάσης



Σχήμα 5.2: Μοντέλο μιας φάσης

Απο τα σχήματα παρατηρούμε ότι το ένα είδος του προβλήματος κινείται καθώς αυξάνεται ο χρόνος. Παρατηρούμε ότι το σύνορο αυξάνεται συνεχώς γραμμικά.

5.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

$$\text{Το πρόβλημα (3.29): } \left\{ \begin{array}{l} P_t - d_1 P_{xx} = P(a_1 - b_1 P), \quad t > 0, 0 < x < s(t), \\ Q_t - d_2 Q_{xx} = Q(a_2 - b_2 Q), \quad t > 0, s(t) < x < l, \\ P = Q = 0, s'(t) = -\alpha_1 \partial_x P - \alpha_2 \partial_x Q, \quad x = s(t), \\ P(0, t) = M_1, Q(l, t) = M_2, \quad t > 0, \\ s(0) = s_0, (0 < s_0 < l), \\ P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq s_0, \\ Q(x, 0) = Q_0(x) \geq 0, \quad s_0 \leq x \leq l, \end{array} \right.$$

Όμοια με πριν μπορούμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα δύο φάσεων σε ένα πρόβλημα σταθερού χωρίου. Συγκεκριμένα έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - d_1 u_{xx} = u(\alpha_1 - b_1 P), u(0) = u_1, \\ v_t - d_2 v_{xx} = v(\alpha_2 - b_2 Q), v(0) = 0, \\ \dot{s} = -(u_x - v_x)|_s. \end{array} \right.$$

Θέτουμε $y = \frac{1-x}{1-s(t)}$, προκύπτει ότι $\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{1-s} \frac{\partial v}{\partial x}$. Όμοια $v_{xx} = \frac{1}{(1-s)^2} v_{yy}$. Η παράγωγος ως προς t γίνεται:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_\xi = -\frac{(1-x)\dot{s}}{(1-s)^2} v_y + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_\xi,$$

$$\frac{1}{(1-s)^2} v_{yy} = -\frac{(1-x)}{(1-s)^2} \frac{ds}{dt} v_y + \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{1}{(1-s)^2} v_{yy} = \frac{y}{(1-s)} \frac{ds}{dt} v_y + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Όμοια για το u έχουμε:

$$u_t = \frac{1}{s^2} u_{yy} + \frac{y}{s} \dot{s} u_y$$

Άρα θα είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 u_t = u_{yy} + \frac{y}{s} \dot{s} u_y \\ u(1) = 0, u(0) = M_1 \\ \dot{s} = -\left[\frac{1}{s} u_y + \frac{1}{1-s} v_y \right] \Big|_{y=s} \end{array} \right.$$

Για την εξίσωση (3.29) παρατηρούμε ότι όμοια με πριν θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία. Διαιρούμε το $x - t$ επίπεδο χρησιμοποιώντας ορθογώνιο

πλέγμα με διαμέριση πλάτους dx στον άξονα x και πλάτους dt στον άξονα t . Το χωρίο μας είναι $[0, 1] \times [0, T]$ όπου ισχύει :

- Για $x_{m+1} = x_m + dx$

- Για $t_{m+1} = t_m + dt$

Έχουμε $u(x_m, t_n) = u_m^n$ και $v(x_m, t_n) = v_m^n$

Χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο πεπερασμένων διαφορών όπως πριν :

- Για $s(t)$

$$\dot{s}(t_n) = \frac{s^{n+1} - s^n}{dt}$$

- Για $u(x, t)$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{dt},$$

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{2dx},$$

$$u_{xx}(x_m, t_n) = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(dx)^2},$$

$$v_t(x_m, t_n) = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{dt},$$

$$v_x(x_m, t_n) = \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{2dx},$$

$$v_{xx}(x_m, t_n) = \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{(dx)^2}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στις εξισώσεις έχουμε :

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{dt} = -\left(\frac{1}{s^n} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx}\right) - \frac{1}{1 - s^n} \left(\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{dx}\right)\right).$$

Άρα η εξίσωση για το s γίνεται της μορφής :

$$s^{n+1} = s^n - dt \left(\frac{1}{s^n} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx}\right) - \frac{1}{1 - s^n} \left(\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{dx}\right)\right).$$

Επίσης αντικαθιστούμε στην :

$$u_t = \frac{1}{s^2} u_{yy} + y \frac{\dot{s}}{s} u_y$$

απο την οποία προκύπτει :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{dt} = \frac{1}{(s^n)^2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{(dx)^2} + y_m \frac{s^n - s^{n+1}}{s^n} \left(\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{dx} \right).$$

Άρα

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{dt}{(s^n)^2(dx)^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \frac{dt}{2} (m-1) \frac{(s^n - s^{n-1})}{s^n} (u_{m+1}^n - u_m^n).$$

Όμοια αντικαθιστούμε στην εξίσωση πεδίου για $s < y < 1$

$$\frac{1}{(1-s)^2} v_{yy} = \frac{y}{(1-s)} \frac{ds}{dt} v_y + \frac{\partial v}{\partial t}$$

από την οποία προκύπτει :

$$v_m^{n+1} = v_m^n + \frac{1}{(1-(s^n))^2} r (v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n) - dt (m-1) \frac{(s^n - s^{n-1})}{(1-s^{n-1})} (v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) / (2)$$

Η συνοριακή συνθήκη για $x = 1$ στο v -χωρίο είναι *Dirichlet*. Άρα :

$$v_1^n = M_2$$

Ενώ στο άλλο άκρο έχουμε

$$v_M^n = 0.$$

Όμοια για το u έχουμε

$$u_1^n = M_1$$

και

$$u_M^n = 0.$$

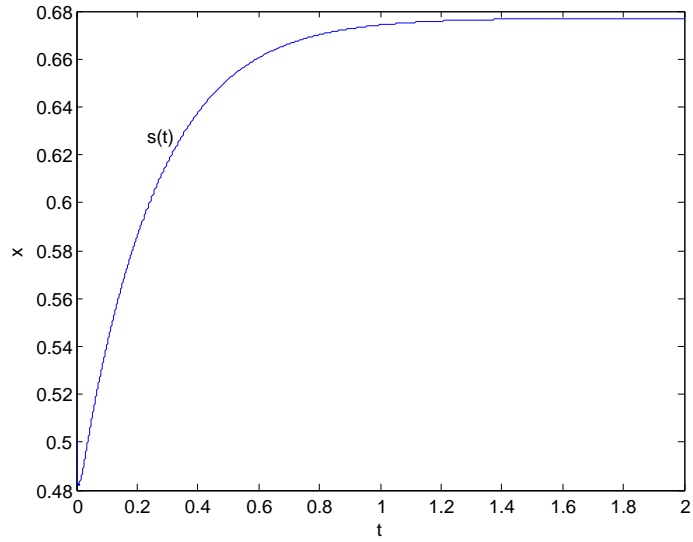
Η αρχική συνθήκη είναι

$$u_m^1 = P_0(x_m)$$

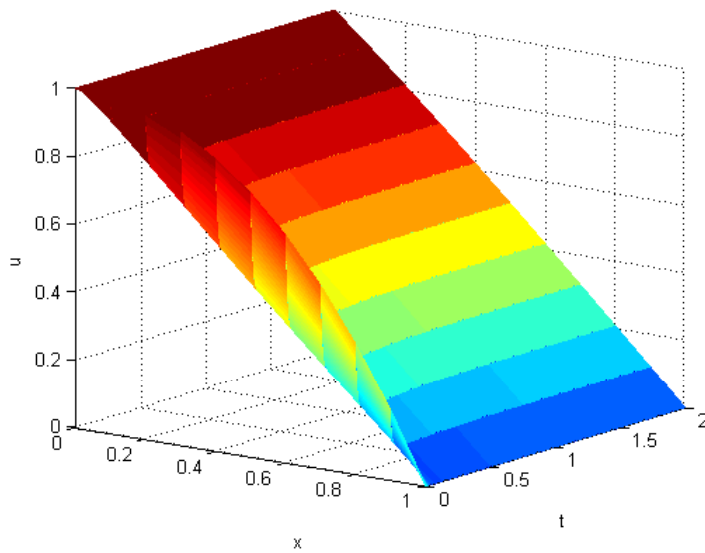
και

$$v_m^1 = Q_0(x_m).$$

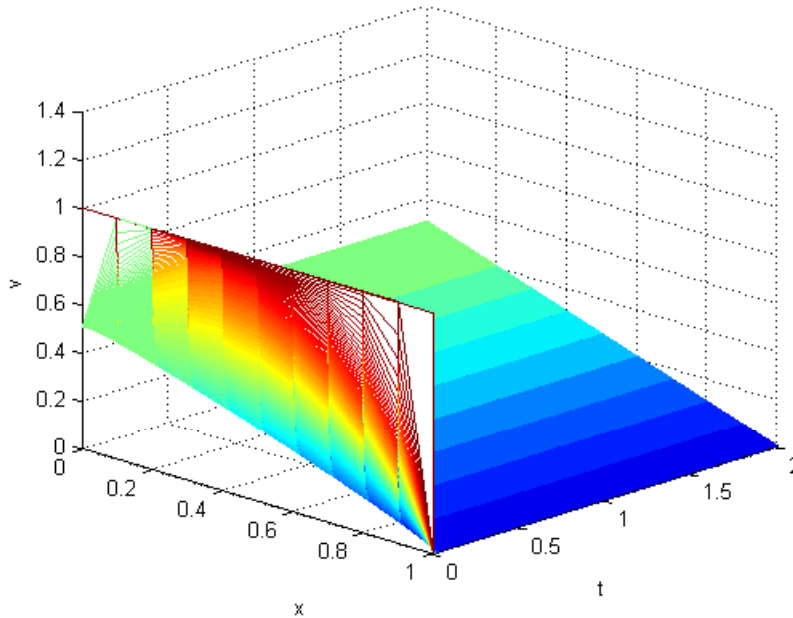
Παίρνουμε το x να είναι από $0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.01$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.05$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται στα σχήματα (5.3), (5.4) και (5.5) :



Σχήμα 5.3: Μοντέλο δύο φάσεων με το κινούμενο σύνορο τείνει στη στάσιμη λύση



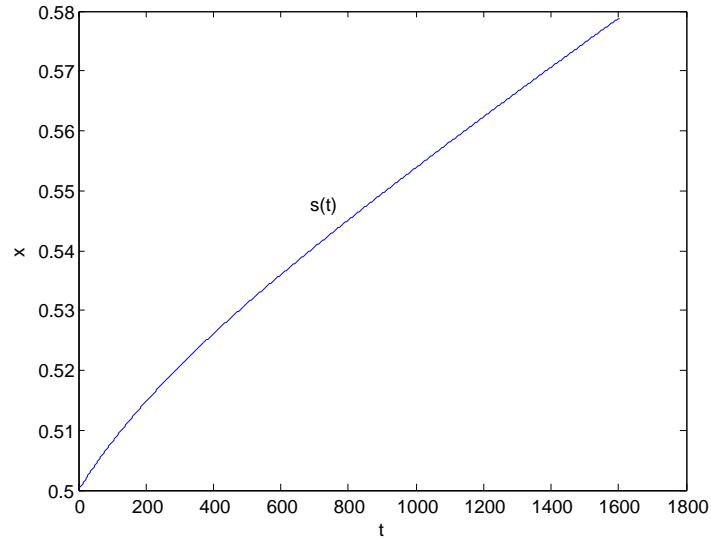
Σχήμα 5.4: Μοντέλο δύο φάσεων



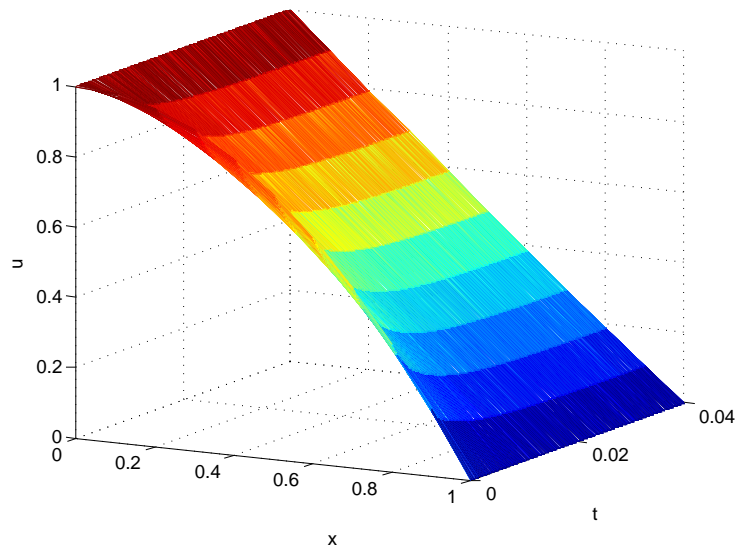
Σχήμα 5.5: Μοντέλο δύο φάσεων

Από τα σχήματα παρατηρούμε ότι το μοντέλο δύο φάσεων - ειδών κινείται ενώ αυξάνεται ο χρόνος. Παρατηρούμε ότι το u αυξάνεται και πάει στην στάσιμη λύση, όμοια το v αυξάνεται και αυτό και καταλήγει στην στάσιμη λύση. Βλέπουμε ότι το σύνορο αυξάνεται συνεχώς και μετά το χρόνο $t = 0.68$ τείνει να σταθεροποιηθεί σε μια στάσιμη κατάσταση.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες επιπλέον προσομοιώσεις για τα προβλήματα μίας και δύο φάσεων. Στην εξίσωση (3.26) βάζουμε μια πολύ μικρή τιμή στο $b = 0.001$ και διατηρούμε το $a = 1$. Παίρνουμε το x να είναι από $0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.01$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.01$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται στα σχήματα (5.6), (5.7).



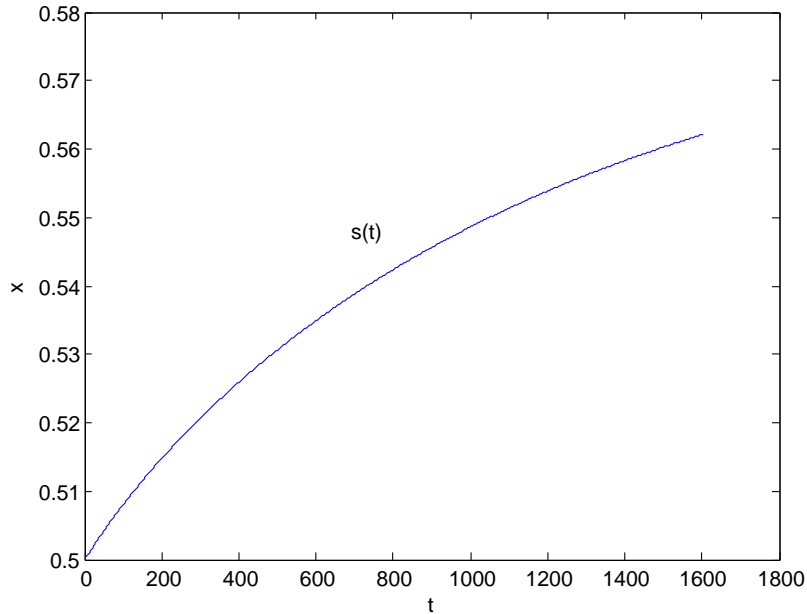
Σχήμα 5.6: Μοντέλο μίας φάσης για $b = 0.001$ το κινούμενο σύνορο κινείται γραμμικά



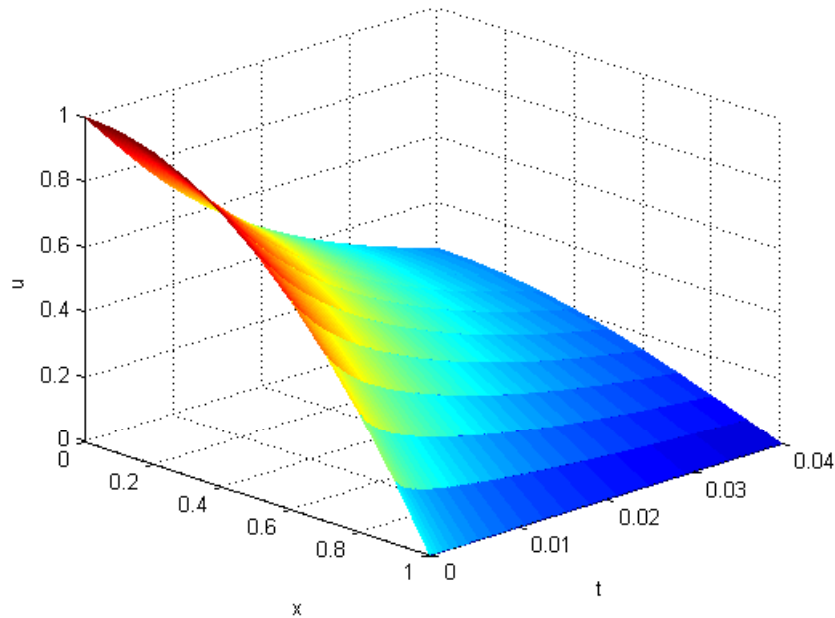
Σχήμα 5.7: Μοντέλο μίας φάσης για $b = 0.001$

Απο τα σχήματα παρατηρούμε ότι όμοια με πριν το ένα είδος του προβλήματος για $b = 0.001$ κινείται καθώς αυξάνεται ο χρόνος. Παρατηρούμε ότι το σύνορο αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο και συγκεκριμένα αυξάνεται γραμμικά.

Για το πρόβλημα (3.26) έχουμε ως συνοριακή συνθήκη *Neumann* για το σημείο $x = 0$. Παίρνουμε το x να είναι από $0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.01$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.01$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα σχήματα (5.8), (5.9).



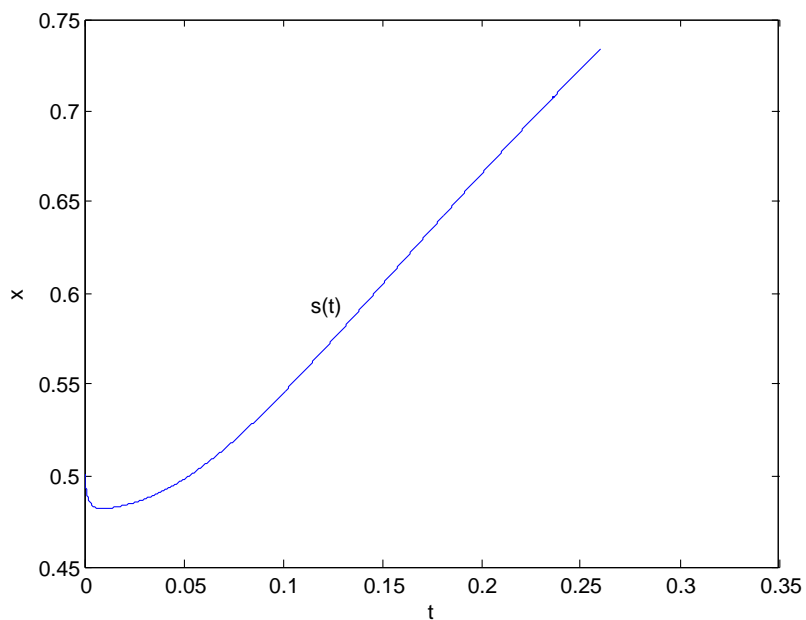
Σχήμα 5.8: Μοντέλο μίας φάσης για συνθήκη *Neumann*



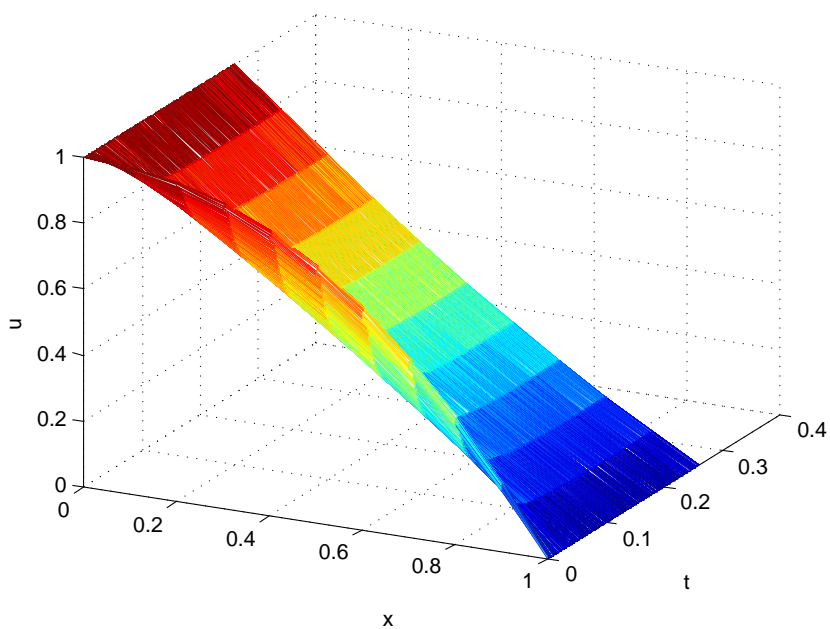
Σχήμα 5.9: Μοντέλο μίας φάσης για συνθήκη *Neumann*

Απο τα σχήματα παρατηρούμε ότι όμοια με πριν το ένα είδος του προβλήματος με τη συνθήκη *Neumann* κινείται καθώς αυξάνεται ο χρόνος. Παρατηρούμε ότι το σύνορο αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο, περίπου ανάλογα με το \sqrt{t} πράγμα που είναι χαρακτηριστικό για προβλήματα τέτοιου τύπου.

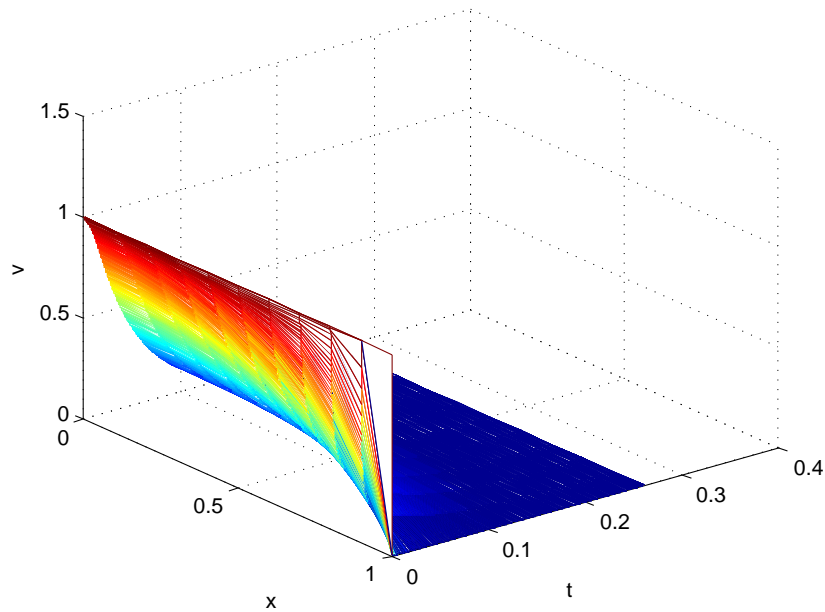
Για το πρόβλημα δύο φάσεων (3.29) εφαρμόζουμε την συνθήκη $v_x = 0$ για $x = 1$ και επιπλέον θέτουμε $u = M_1$ για $x = 0$. Παίρνουμε το x να είναι από $0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.1$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.05$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται στα σχήματα (5.10), (5.11) και (5.12) :



Σχήμα 5.10: Μοντέλο δύο φάσεων για συνθήκη *Neumann*



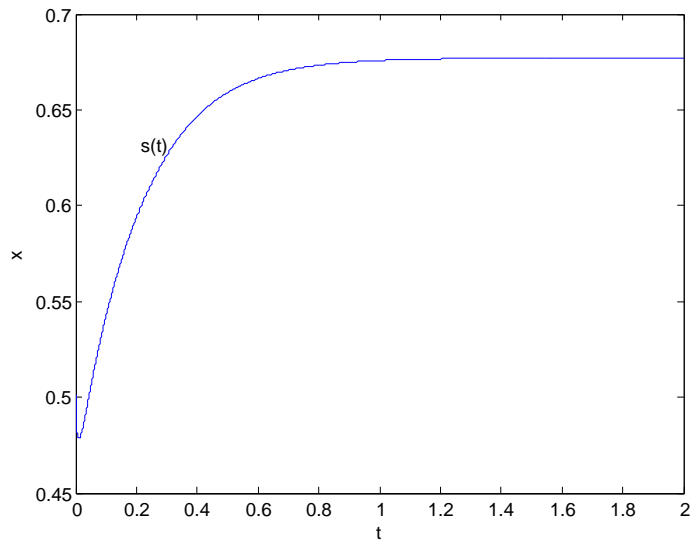
Σχήμα 5.11: Μοντέλο δύο φάσεων για συνθήκη *Neumann*



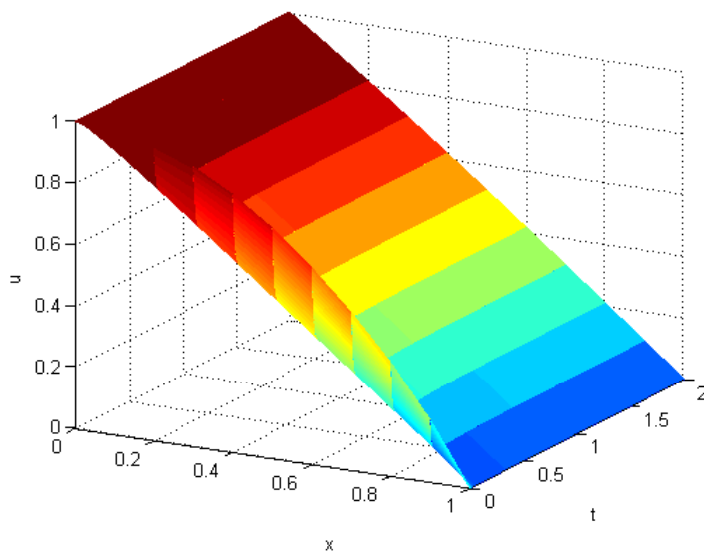
Σχήμα 5.12: Μοντέλο δύο φάσεων για συνθήκη *Neumann*

Από τα σχήματα παρατηρούμε ότι το κινούμενο σύνορο στο μοντέλο δύο φάσεων - ειδών συμπεριφέρεται, για ένα αρχικό χρονικό στάδιο, γραμμικά καθώς αυξάνεται ο χρόνος. Παρατηρούμε ότι το u αυξάνεται και πάει στην στάσιμη λύση, όμοια το v αυξάνεται και αυτό και καταλήγει στην στάσιμη λύση.

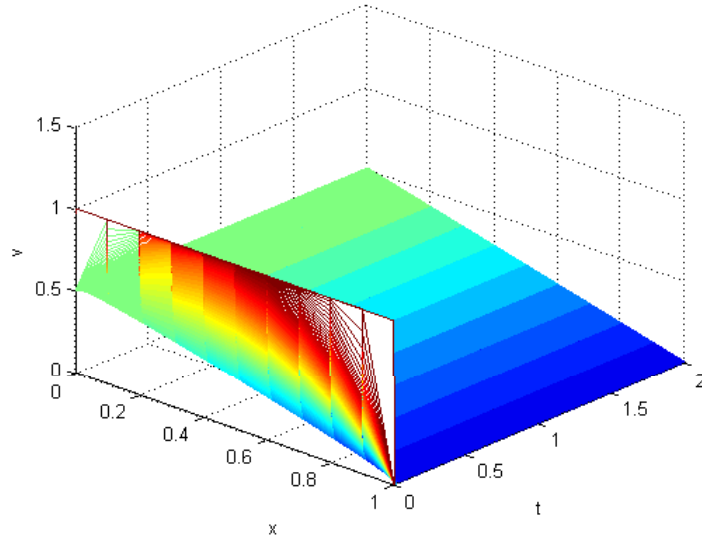
Για το πρόβλημα (3.29) τροποποιούμε τις σταθερές $a_1 = 1, a_2 = 0.001, d_1 = 0.4, d_2 = 0.6$. Παίρνουμε το x να είναι από $0 < x < 1$ με βήμα $dx = 0.1$ και το $0 < t < T$ με βήμα $dt = r * ((s(1))^2) * (dx^2)$ όπου $r = 0.05$ και $s(1) = \frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται στα σχήματα (5.13), (5.14) και (5.15) :



Σχήμα 5.13: Μοντέλο δύο φάσεων τροποποιημένες σταθερές



Σχήμα 5.14: Μοντέλο δύο φάσεων τροποποιημένες σταθερές



Σχήμα 5.15: Μοντέλο δύο φάσεων τροποποιημένες σταθερές

Από τα σχήματα παρατηρούμε ότι το μοντέλο δύο φάσεων - ειδών κινείται ενώ αυξάνεται ο χρόνος. Το u και το v αυξάνεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους ενώ το s περίπου μετά από χρόνο $t = 1$ σταθεροποιείται σε μια στάσιμη κατάσταση.

Βιβλιογραφία

- [1] *D.Murray, "Mathematical Biology", , Springer-Verlag, New-York, second edition, 1993.*
- [2] *J.Crank , "Free and moving boundary problems", Clarendon press.*
- [3] *Chueh-Hsin Chang and Chiun-Chuan Chen , "Travelling wave solutions of a free boundary problem for a two-species competitive model", communications on pure and applied analysis Volume 12 , Number 2 , March 2013.*
- [4] *Χρήστος Νικολόπουλος , "Σημειώσεις για το μάθημα αριθμητική ανάλυση επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων", Πανεπιστήμιο Αιγαίου.*
- [5] *Mihail Konstantinou , "Foundations of Numerical Analysis (with Matlab examples)", Second Edition, Volume 1, Sofia 2007.*
- [6] *Γ.Ν.Παντελίδης, Δ.Χ.Κραββαρίτη, Ν.Σ.Χατζησάββα, " Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις", Β'εκδοση, Εκδόσεις Ζήτη Αθήνα.*