Ευσταθία-Αναστασία Κατσιούρη

Martingales σε διατεταγμένους χώρους Banach και Εφαρμογές

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Επιβλέπων:
Επ. Καθ. Κουντζάκης Χρήστος

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Ευχαριστίες
Θα ήθελα να ευχαριστήστω τον επιβλέποντά μου Κουντζάκη Χρήστο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών, για την επιλογή του θέματος της παρούσας διατριβής, αλλά και για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την συγγραφή της.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή: Martingales σε χώρους Banach

Η παρούσα διατριβή παρουσιάζει μια προσέγγιση στην θεωρία Martingales η οποία βασίζεται στην όσο το δυνατόν μικρότερη επαφή με τις κλασσικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Η προσέγγιση αυτή έχει (μεταξύ άλλων) διατυπωθεί καθαρά στο έργο ερευνητών όπως D. Williams, ο οποίος παρουσίασε και επέκτεινε τα βασικά στοιχεία της, κατευθύνοντας και την κατοπινή έρευνα, στο [W91].

Κεντρική θέση σε αυτή την προσέγγιση έχει η Συναρτησιακή Ανάλυση, και ειδικότερη η Θεωρία χώρων Banach. Σε αδρές γραμμές, θεωρούμε έναν διατεταγμένο χώρο Banach F, και μια ακολουθία τελεστών $E_n : F \to F, n \in \mathbb{N}$, για την οποία:
(α) Για κάθε n, ο E_n είναι συσταλτικός επί του F.
(β) Για κάθε n, ο E_n είναι θετικός επί του F.
(γ) Για κάθε n, ο E_n είναι τελεστής προβολής επί του F.
Τότε η ακολουθία (E_n) θα λέγεται φιλτράρισμα αν

$$E_n E_m = E_{n \wedge m} = E_{max(n,m)},\ \ n, m \in \mathbb{N}$$

Σταθεροποιώντας ένα φιλτράρισμα $E_n, n \in \mathbb{N}$ στον χώρο F, μπορούμε να εισάγουμε την έννοια ενός Martingale, ως μια ακολουθία (x_n) του F για την οποία

$$E_n x_m = x_n,\ \forall n \leq m,\ \ n, m \in \mathbb{N}$$

Το σύνολο των ομοιόμορφα φραγμένων ως προς τη νόρμα Martingales ορίζουν έναν χώρο $M = M(F, (E_n))$, ο οποίος και μελετάται στα πλαίσια της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι, αν το διανυσματικός σύνδεσμος Banach F δεν περιέχει ένα αντίγραφο του c_0 ή αν κάθε E_n είναι τελεστής πεπερασμένης βαθμίδας, τότε το M είναι και το ίδιο ένα διανυσματικός σύνδεσμος Banach.

Επίσης, ερευνάται η ασθενής σύγκλιση των Martingales, και θα αποδειχθούν αποτελέσματα σχετικα με τις τοπολογικές ιδιότητες του χώρου M των φραγμένων (ως προς τη νόρμα) Martingales, τα οποία οφείλονται στον V.G. Troitsky [Tro05]. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι υπό ορισμένες συνθήκες, υπάρχουν ισομετρικές εμβαπτίσεις $F \hookrightarrow M \hookrightarrow F^{**}$.

Με βάση τα προηγούμενα, είναι εμφανές το ότι ορίζοντας την έννοια του Martingale σε όρους της θεωρίας χώρων Banach, θα μπορούσε να διατυπωθεί η άποψη ότι τα Martingales δεν είναι αυστηρά έννοια που ανήκει στο πεδίο της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Η άποψη αυτή (όπως και η αντίθετη της, ότι η Θεωρία Martingales είναι ένα αντικείμενο το οποίο αφορά αυστηρά τη Θεωρία Πιθανοτήτων), δεν είναι ακριβείς. Η προσέγγιση των Martingales σε όρους της θεωρίας χώρων Banach, παρέχεται μόνο για να συμπληρώσει, να οργανώσει και να επεκτείνει την Κλασσική Θεωρία των Martingales την οποία παρέχει η Θεωρία Πιθανοτήτων.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Συναρτησιακής ανάλυσης

1.1 Διατεταγμένοι χώροι Banach

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, θα παρουσιαστούν τα βασικά στοιχεία περί μιας εκδοχής της θεωρίας Martingales, η οποία μπορεί να δοθεί σε όρους της θεωρίας διατεταγμένων χώρων Banach. Θα δώσουμε στη συνέχεια μερικούς ορισμούς, απαραίτητους για τα επόμενα.

Έστω F ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με μια νόρμα δηλαδή μία (ομοιόμορφα) συνεχή συνάρτηση $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ικανοποιεί ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές της απόλυτης τιμής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.1 *Μια νόρμα επί ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου F είναι μία συνάρτηση $||\cdot|| : F \times F \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:*
(1) $||x|| \geq 0, \forall x \in F$ και $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $||cx|| = |c|||x||, \forall c \in \mathbb{R}, x \in F$
(3) $||x-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y||, \forall x, y, z \in F$.

Ο X καλείται πεπερασμένης διάστασης αν, ως διανυσματικός χώρος, έχει πεπερασμένη αλγεβρική διάσταση. Στην εργασία μας, όλοι οι θεωρούμενοι χώροι Banach θα υποτίθενται άπειρης διάστασης. Στις επόμενες σελίδες θα παρουσιάσουμε με περιεκτικό τρόπο βασικά αποτελέσματα από την περιοχή των χώρων Banach, δηλαδή σε χώρους με νόρμα οι οποίοι είναι και τοπολογικά πλήρεις ως προς τη νόρμα.

Ορισμός 1.1.2 *Ένας χώρος με νόρμα $(F, ||\cdot||)$ θα λέγεται χώρος Banach, αν κάθε βασική ακολουθία του F είναι συγκλίνουσα, δηλαδή αν $(x_n) \subset F$ ακολουθία τέτοια ώστε*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})n, m \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - x_m|| < \epsilon$$

τότε υπάρχει $x \in F$ τέτοιο ώστε $x_n \stackrel{||||}{\to} x$.

Αν F είναι χώρος με νόρμα, τότε οι πράξεις του διανυσματικού χώρου

$$+ : F \times F \to F, \ \cdot : \mathbb{R} \times F \to F$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έπεται ότι ο F είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Για κάθε νορμικό χώρο X υπάρχει η πλήρωσή του, δηλαδή ένας χώρος Banach με την ίδια νόρμα στον οποίο ο F εμφυτεύεται πυκνά και ισομετρικά.

Αν $(F, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach και G κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του F,τότε ο G είναι ένας χώρος Banach με νόρμα τον περιορισμό της $||\cdot||$ σε αυτόν. Ένας χώρος με νόρμα καλείται διαχωρίσιμος αν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο.

Παράδειγμα 1.1.3 *(i) Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ με πράξεις κατά συντεταγμένες για $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε για $1 \leq p < +\infty$ και $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:*

$$||z||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \right)^{1/p}$$

Το ζεύγος $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach. Επίσης για $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ θέτουμε

$$||z||_\infty = \max\{|z_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Το ζεύγος $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_\infty)$ είναι χώρος Banach.
(ii) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ πεπερασμένος πλήθος νορμαρισμένων χώρων και $X = \prod_{k=1}^n X_k$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Το σύνολο X με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Θέτουμε για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$:

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n} ||x_k||)^{1/p} \ (1 \leq p < +\infty)$$

και

$$||x||_\infty = \max\{||x_k|| : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

ορίζοντας νόρμες στο X. Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι χώροι Banach, τότε τα ζεύγη $(X, ||\cdot||_p)$ και $(X, ||\cdot||_\infty)$ς είναι χώροι Banach.
(iii) Έστω $1 \leq p < +\infty$. Το σύνολο

$$\ell^p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Για $x = (x_n) \in \ell^p$ θέτουμε

$$||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$$

και, μέσω της ανισότητας Minkowski, επιβεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση $||\cdot||_p$ είναι μια νόρμα ως προς την οποία ο ℓ^p καθίσταται χώρος Banach.
(iv) Το σύνολο

$$c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένες είναι διανυσματικός χώρος. Θέτουμε για $x = (x_n) \in c_0$

$$||x||_\infty = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}$$

και αποκτούμε μια νόρμα ως προς την οποία ο c_0 *είναι χώρος Banach.*
(v) Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος. Θέτουμε* $\tilde{C}(X)$ *για το σύνολο των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στον* X. *Το σύνολο* $\tilde{C}(X)$ *με πράξεις κατά σημείο είναι διανυσματικός χώρος. Για* $f \in \tilde{C}(X)$ *ο τύπος*

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

ορίζει μια νόρμα ως προς την οποία ο $\tilde{C}(X)$ *αποτελεί χώρο Banach. Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $a < b$. *Κάθε συνεχής συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *είναι φραγμένη και, άρα, το σύνολο* $C[a, b]$ *των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του* $[a, b]$ *ταυτίζεται με το χώρο* $\tilde{C}[a, b]$. *Έπεται ότι το ζεύγος* $(C[a, b], || \cdot ||_\infty)$ *είναι χώρος Banach. Για* $f \in C[a, b]$ *θέτουμε*

$$||f||_1 = \int_a^b |f|$$

και, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann, αποδεικνύουμε ότι η $|| \cdot ||_1$ *είναι μια νόρμα στον* $C[a, b]$. *Ωστόσο ο* $C[a, b]$ *δεν είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγεται από την* $|| \cdot ||_1$ *και, κατά συνέπεια, δεν αποτελεί χώρο Banach ως προς την συγκεκριμένη νόρμα. Η πλήρωση του* $C[a, b]$ *ως προς την* $|| \cdot ||_1$ *είναι ο χώρος* $L^1[a, b]$ *όλων των ισοδύναμων κλάσεων Lebesgue ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων επί του* $[a, b]$.

Πολύ συχνά προκύπτουν στις εφαρμογές χώροι Banach εφοδιασμένοι με κάποιου είδους διάταξη. Ως διατεταγμένος διανυσματικός χώρος ορίζεται να είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια σχέση διάταξης, η οποία είναι συμβατή με τη γραμμική δομή. Προς αυτό, χρειαζόμαστε την συνάρτηση

$$|x| = x \vee (-x), \forall x \in F$$

Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.4 *Έστω χώρος Banach* $(F, || \cdot ||)$ *και διάταξη* $\preceq$. *Ο* F *θα λέγεται διατεταγμένος χώρος Banach, αν για κάθε* $x, y \in F$ *ισχύει* $x \preceq y \Rightarrow ||x|| \leq ||y||$ *και* $|||x||| = ||x||$.

Ο ορισμός 1.1.4 αναφέρει ότι ο $(F, || \cdot ||)$ είναι ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος, όπου η νόρμα είναι μονότονη συνάρτηση και διατηρεί την τιμή του $|x|$, για κάθε $x \in F$.

Ας θεωρήσουμε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο E εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης $\geq$, δηλαδή μια αυτοπαθή, αντισυμμετρική και μεταβατική διμελή σχέση επί του E με το συγκεκριμένο σύμβολο. Θα λέμε ότι το ζεύγος $(E, \geq)$ αποτελεί έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο αν η σχέση $\geq$ είναι συμβιβαστή με την αλγεβρική δομή του E, υπό

την έννοια της ικανοποίησης των ακόλουθων δύο αξιωμάτων:
(i) αν $x \geq y$ τότε $x+z \geq y+z$ για κάθε $z \in E$
(ii) αν $x \geq y$ τότε $\lambda x \geq \lambda y$ για κάθε $\lambda \geq 0$ ς Εναλλακτικά σημειώνουμε $y \leq x$ αντί για $x \geq y$. Ένα στοιχείο x σε έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο E καλείται θετικό αν ισχύει $x \geq 0$. Το σύνολο όλων των θετικών στοιχείων του E συμβολίζεται με E^+ και ονομάζεται θετικός κώνος του E.

Ορισμός 1.1.5 *Έστω $T : E \to F$ γραμμικός τελεστής μεταξύ δύο διατεταγμένων διανυσματικών χώρων. Λέμε ότι ο T είναι θετικός ή ότι διατηρεί την θετικότητα αν ισχύει $Tx \geq 0$ για κάθε $x \in E$ με $x \geq 0$. Συμβολίζουμε $T \geq 0$ ή $0 \leq T$.*

Ένας γραμμικός τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ δύο διατεταγμένων διανυσματικών χώρων είναι θετικός αν και μόνο αν ισχύει $T(E^+) \subseteq F^+$ ή ακόμη αν και μόνο αν από την σχέση $x \leq y$, για $x, y \in E$, έπεται ότι $Tx \leq Ty$.

Στις εφαρμογές της εργασίας θα χρειαστούμε την έννοια του τελεστή πεπερασμένης τάξης.

Ιδιαίτερη θέση ανάμεσα στους φραγμένους γραμμικούς τελεστές μεταξύ χώρων Banach κατέχουν οι συμπαγείς τελεστές. Πριν δώσουμε το σχετικό Ορισμό, παραθέτουμε αυτόν του συμπαγούς συνόλου.

Ορισμός 1.1.6 *Έστω X χώρος με νόρμα και $F \subset X$. Το F καλείται συμπαγές αν οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του διαθέτει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού. Το F καλείται σχετικά συμπαγές αν το $\overline{F}$ είναι συμπαγές.*

Ορισμός 1.1.7 *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ο T καλείται συμπαγής αν το σύνολο $T(\hat{B}_X)$ είναι σχετικά συμπαγές στον Y, όπου με $\hat{B}_X$ συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλα του χώρου X. Ισοδύναμα, ο T είναι συμπαγής τελεστής αν, δοθείσης υποιασδήποτε ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $||x_n|| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Y διαθέτει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού.*

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}(X,Y)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών $T : X \to Y$. Αποδεικνύεται ότι, αν ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(X)$ είναι συμπαγής, τότε ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Στην επόμενη πρόταση συνοψίζουμε βασικές ιδιότητες των συμπαγών τελεστών.

Πρόταση 1.1.8 *Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ισχύουν τα εξής:*
(i) Αν ο T είναι συμπαγής τότε, για κάθε $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, οι τελεστές $T+S$ και λS είναι συμπαγείς.
(ii) Αν ο T είναι συμπαγής τότε, για κάθε $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, ο τελεστής $ST : X \to Z$ είναι

συμπαγής και, για κάθε $S \in \mathcal{L}(Z, X)$, ο τελεστής $TS : Z \to Y$ είναι επίσης συμπαγής.
(iii) Αν ο T είναι φραγμένος και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{K}(X, Y)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$, τότε ο T είναι συμπαγής τελεστής.
(iv) Αν ο T είναι συμπαγής και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}, B$, στοιχεία του $\mathcal{L}(Y, Z)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} ||B_n y - By|| = 0$ για κάθε $y \in Y$ (δηλαδή η ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον B ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών), τότε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} ||B_n T - BT|| = 0$$

(v) Ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι συμπαγής.

Αν $X = Y = Z$ οι ισχυρισμοί (i),(ii), και (iii) της προηγούμενης πρότασης υποδηλώνουν ότι το σύνολο $\mathcal{K}(X)$ είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{L}(X)$ κλειστό ως προς την τοπολογία της νόρμας.

Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμβολίζουμε με $Ran(T)$ το σύνολο τιμών αυτού. Ο T καλείται πεπερασμένης τάξης αν το σύνολο $Ran(T)$ έχει πεπερασμένη αλγεβρική διάσταση. Αν X, Y είναι χώροι Banach, κάθε $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγής. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, το σύνολο $Ran(T)$ είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα και, άρα, γραμμικά ισόμορφος με τον $\mathbb{C}^n$. Επομένως διαθέτει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass. Αυτό σημαίνει ότι, δοθείσης οποιασδήποτε ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $||x_n|| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η φραγμένη ακολουθία $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $Ran(T)$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα εντός αυτού. Δηλαδή ο T είναι, πράγματι, συμπαγής τελεστής.

Αν ο X είναι χώρος Banach και κάθε τελεστής $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι όριο, στην τοπολογία της νόρμας, μίας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης, λέμε ότι ο X διαθέτει την ιδιότητα της προσέγγισης. Όλοι οι κλασσικοί χώροι Banach διαθέτουν την ιδιότητα της προσέγγισης, ωστόσο υπάρχουν ορισμένοι χωρίς αυτήν. Το πιο χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε από τον Enflo (1973).

Θεώρημα 1.1.9 *Έστω ότι σε έναν χώρο Banach X υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελεστών πεπερασμένης τάξης η οποία συγκλίνει στον I ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών. Τότε ο $T \in \mathcal{L}(X)$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν αποτελεί όριο, ως προς την τοπολογία της νόρμας, μιας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Ένας διανυσματικός σύνδεσμος (ή αλλιώς χώρος Riesz, ή διανυσματικό διανυσματικός σύνδεσμος) είναι ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος E με την επιπρόσθετη ιδιότητα ότι, για κάθε δύο στοιχεία του x, y έχουμε ότι $\sup\{x, y\} \in E$ και $\inf\{x, y\} \in E$. Γράφουμε

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ και } x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

Για κάθε στοιχείο x σε έναν διανυσματικό σύνδεσμο E ορίζουμε

$$x^+ := x \vee 0 (\text{θετικό μέρος του } x)$$

$$x^- := (-x) \vee 0 \text{ (αρνητικό μέρος του } x)$$
$$|x| := x \vee (-x) \text{ (απόλυτη τιμή του} x)$$

Έστω τώρα ένας διανυσματικός σύνδεσμος E. Μία νόρμα $||\cdot||$ επί του E καλείται νόρμα συνδέσμου αν από την σχέση $|x| \leq |y|$, όπου x και y τυχόντα στοιχεία του E, συνεπάγεται ότι $||x|| \leq ||y||$. Ένας διανυσματικός σύνδεσμος εφοδιασμένος με μια νόρμα συνδέσμου ονομάζεται νορμαρισμένος διανυσματικός σύνδεσμος. Αν ένας νορμαρισμένος διανυσματικός σύνδεσμος είναι πλήρης ως προς την συγκεκριμένη νόρμα αναφέρεται ως σύνδεσμος Banach.

Στο ακόλουθο θεώρημα συνοψίζονται ορισμένες από τις βασικές σχέσεις που ικανοποιούν τα στοιχεία ενός διανυσματικού συνδέσμου.

Θεώρημα 1.1.10 *Έστω x, y, z τυχόντα στοιχεία σε έναν διανυσματικό σύνδεσμο E. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) $x = x^+ - x^-$
(ii) $|x| = x^+ + x^-$
(iii) $x^+ \wedge x^- = 0$
(iv) $x \vee y = (1/2)(x + y + |x - y|)$ *και* $x \wedge y = (1/2)(x + y - |x - y|)$
(v) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(τριγωνική ανισότητα)*
(vi) $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ *και* $|x^- - y^-| \leq |x - y|$
(vii) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ *και* $|x \wedge y - y \wedge z| \leq |x - y|$ *(ανισότητες Birkhoff)*

Θα κάνουμε συχνή χρήση της επόμενης Πρότασης.

Πρόταση 1.1.11 *Αν $T : E \to F$ είναι ένας θετικός τελεστής μεταξύ δυο διανυσματικών συνδέσμων, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε*

$$|Tx| \leq T|x|$$

Απόδειξη. Αν $x \in E$ ισχύουν $x \leq |x|$ και $-x \leq |x|$ και, από την θετικότητα του τελεστή T, προκύπτουν οι σχέσεις $Tx \leq T|x|$ και $-Tx \leq T|x|$, οι οποίες συνδιαζόμενες δίνουν $|Tx| \leq T|x|$.

Αν x και y είναι τυχόντα στοιχεία ενός συνδέσμου Banach E, ισχύουν οι σχέσεις

$$||x|| = ||\ |x|\ ||,\ ||x^+ - y^+|| = ||x - y||$$

και

$$||\ |x| - |y|\ || \leq ||x - y||$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα συνδέσμων Banach (αν και με κάποιες διαφορές μεταξύ τους) αποτελούν ο $C(X)$, όπου X συμπαγής μετρικός χώρος, καθώς και οι χώροι L^p στους οποίους θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο.

1.2 Τελεστές και η Ασθενής τοπολογία τελεστών

Πρόταση 1.2.1 *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*
(α) Ο T ειναι φραγμένος.
(β) Ο T είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(γ) Ο T είναι συνεχής.
(δ) Ο T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$.

Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα θέτουμε

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ φραγμένος γραμμικός τελεστής}\}$$

Ο $\mathcal{L}(X, Y)$ με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x),\ x \in X$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x), x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$$

είναι διανυσματικός χώρος ο οποίος, εφοδιασμένος με τη νόρμα τελεστή που ορίσαμε προηγουμένως, καθίσταται νορμαρισμένος. Αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathcal{L}(X, Y)$ είναι χώρος Banach.

Αν X, Y, Z είναι χώροι με νόρμα και $T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ τότε ορίζεται το γινόμενο $ST : X \to Z$ (ή αλλιώς η σύνθεση $S \circ T$) από τον τύπο $(ST)(x) = S(T(x)), x \in X$ και αποτελεί φραγμένο γραμμικό τελεστή. Μάλιστα ισχύει

$$||S \circ T|| \leq ||S|| ||T|| \tag{1.2.1}$$

Αν $X = Y$, ο χώρος $\mathcal{L}(X)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to X$ είναι μια άλγεβρα Banach, καθώς αποτελεί άλγεβρα με τις πράξεις της πρόσθεσης, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του γινομένου τελεστών,ενώ ισχύει για την νόρμα τελεστή και η αντίστοιχη της (1.1.1) σχέση. Μοναδιαίο στοιχείο της $\mathcal{L}(X)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ με $I(x) = x$ για κάθε $x \in X$. Προφανώς $||I|| = 1$.

Έστω X διανυσματικός χώρος. Δύο υπόχωροι E και F του X λέγονται συμπληρωματικοί αν $X = E + F$ και $E \cap F = \emptyset$. Τότε κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = y + z$ με $y \in E$ και $z \in F$. Επομένως η απεικόνιση $P : X \to X$ με $Px = y$ είναι καλά ορισμένη και, όπως άμεσα ελέγχεται, γραμμική. Επίσης $P^2 = P \circ P = P$, $ImP = E$ και $KerP = F$. Η P καλείται προβολή του X επί του E παράλληλα προς τον F. Αντίστροφα, έστω $P : X \to X$ μία γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει $P^2 = P$. Θέτοντας $E = ImP$ και $F = KerP$ βρίσκουμε ότι οι E και F είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του X και η P είναι η προβολή του X επί του E παράλληλα προς τον

F. Αν X είναι χώρος με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ με την ιδιότητα $P^2 = P$ ονομάζεται ταυτοδύναμος.

Έστω X χώρος με νόρμα. Συμβολίζουμε με X^* το σύνολο $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και το ονομάζουμε συζυγή ή τοπολογικό δυικό χώρο του X. Τα στοιχεία του X^* καλούνται φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή. Η τιμή ενός $x^* \in X^*$ σε κάποιο $x \in X$ σημειώνεται με $x^*(x)$, αλλά στην πράξη αποδεικνύεται περισσότερο εύχρηστος ο συμβολισμός $\langle x, x^* \rangle$. Το σύμβολο $\langle , \rangle$ ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο ως προς την δυϊκότητα ή δυϊκό ζεύγος των X, X^*. Ο X εφοδιάζεται με την δυϊκή νόρμα $|| \cdot ||_{X^*}$, όπου

$$||x^*||_{X^*} = \sup\{|x^*(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$$

Για τη δυϊκή νόρμα του $x^* \in X^*$ θα γράφουμε $||x^*||$ προς απλούστευση των συμβολισμών. Καλούμε δεύτερο συζυγή ή δεύτερο τοπολογικό δυϊκό χώρο του X τον $X^{**} = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, όπου πάλι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Επαγωγικά ορίζουμε τον $n + 1$-οστό συζυγή του X από την σχέση $X^{(n+1)} = \mathcal{L}(X^{(n)}, \mathbb{K})$. Επειδή $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι χώροι Banach, καθίσταται φανερό ότι οι $X^*, X^{**}, \ldots, X^{(n)}, \ldots$ είναι επίσης χώροι Banach. Ισχύει $(\ell^p)^* = \ell^q$ για $1 < p < +\infty$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι το Θεώρημα Hahn-Banach. Το διατυπώνουμε ευθύς αμέσως μαζί με ορισμένες βασικές συνέπειές του.

Θεώρημα 1.2.2 *(Hahn-Banach) Έστω X διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και M είναι ένας υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι p είναι μια πραγματική συνάρτηση επί του X με τις εξής ιδιότητες:*
(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.
Αν $f : M \to K$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές έτσι ώστε να ισχύει $|f(m)| \leq p(m)$ για κάθε $m \in M$, τότε υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{K}$ που επεκτείνει το f (δηλαδή $F|_M = f$) και ισχύει $F(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Πόρισμα 1.2.3 *Έστω X χώρος με νόρμα και M διανυσματικός υπόχωρος του X. Αν $y^* : M \to \mathbb{K}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (δηλαδή $y^* \in M^*$) τότε υπάρχει $x^* : M \to \mathbb{K}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (δηλαδή $x^* \in X^*$) που επεκτείνει το y^* (δηλαδή $x^*|_M = y^*$) και μάλιστα ισχύει $||x^*|| = ||y^*||$.*

Πόρισμα 1.2.4 *Έστω M διανυσματικός υπόχωρος ενός νορμαρισμένου χώρου X. Δοθέντος $x \in X$ με $d = dist(x, M) > 0$, υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε να ισχύουν $||x^*|| = 1, x^*|_M = 0$ και $x^*(x) = d$.*

Πόρισμα 1.2.5 *Έστω X χώρος με νόρμα. Δοθέντος $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε να ισχύουν $||x^*|| = 1$ και $x^*(x) = ||x||$. Ιδιαιτέρως αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι ώστε $0 \neq ||x - y|| = x^*(x) - x^*(y)$. Λέμε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.*

Πόρισμα 1.2.6 *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει $||x^*|| = ||x||$ και $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle = ||x||^2$.*

Πόρισμα 1.2.7 *Για κάθε $x \in X$ σε έναν χώρο με νόρμα X έχουμε*

$$||x|| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, ||x^*|| = 1\}$$

Πόρισμα 1.2.8 *Έστω X χώρος με νόρμα και M διανυσματικός υπόχωρος του X. Ο M είναι πυκνός στον X αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$, με $x^*(m) = 0$ για κάθε $m \in M$, ισχύει $x^* = 0$.*

Θεωρούμε δύο χώρους με νόρμα X και Y και έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : X \to Y$. Συζυγής ή δυϊκός τελεστής του T ονομάζεται ο τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Προφανώς ο T^* είναι γραμμικός και φραγμένος ως σύνθεση τέτοιων τελεστών. Μάλιστα ισχύει $||T^*|| = ||T||$. Πράγματι, λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
||T^*|| &= \sup_{||y^*|| \leq 1} ||T^*(y^*)|| \\
&= \sup_{||y^*|| \leq 1} (sup_{||x|| \leq 1} |y^*(T(x))|) \\
&= \sup_{||x|| \leq 1} \sup_{||y^*|| \leq 1} (|y^*(T(x))|) \\
&= \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)|| = ||T||
\end{aligned}$$

Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα και T,S στοιχεία του $\mathcal{L}(X, Y), \lambda \in \mathbb{C}$ τότε ορίζονται οι τελεστές $(T + S)^*$,$(\lambda T)^*$ και ανήκουν στον $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$(T + S)^* = T^* + S^*, \ (\lambda T)^* = \lambda T^*$$

Αν Z είναι χώρος με νόρμα, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, τότε ορίζεται ο τελεστής $(ST)^* \in \mathcal{L}(Z^*, Y^*)$ και ισχύει

$$(ST)^* = T^* S^*$$

Έστω X χώρος με νόρμα. Καλούμε κανονική εμφύτευση το γραμμικό τελεστή $\phi : X \to X^{**}$ με

$$\phi(x)(x^*) = x^*(x) = \langle x, x^* \rangle, \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } x^* \in X^*$$

Η ϕ είναι ισομετρία, καθώς από το Πόρισμα 1.2.7 προκύπτει για $x \in X$:

$$||\phi(x)|| = \sup_{||x^*||=1} |\phi(x)(x^*)| = \sup_{||x^*||=1} |x^*(x)| = ||x||$$

Ορισμός 1.2.9 *Ένας χώρος με νόρμα X ονομάζεται αυτοπαθής (reflexive) αν η κανονική εμφύτευση ϕ είναι επί του X^{**}.*

Πρέπει να τονιστεί ότι ένας νορμαρισμένος χώρος X χαρακτηρίζεται αυτοπαθής μόνον αν η κανονική εμφύτευσή του στον X^{**} είναι 'επί'. Ο R.C. James (1950) έδωσε ένα παράδειγμα απειροδιάστατου χώρου με νόρμα X ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, αλλά ισχύει ότι $dim(X^{**}/\phi(X)) = 1$, όπου με $dim(F)$ συμβολίζουμε την αλγεβρική διάσταση του χώρου F. Κάθε αυτοπαθής χώρος με νόρμα είναι χώρος Banach, αφού είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δεύτερο συζυγή του που διαθέτει αυτή την ιδιότητα. Οι χώροι ℓ^p, για $1 < p < +\infty$, είναι αυτοπαθείς, ενώ ο ℓ^1 δεν είναι.

Θεμελιώδους σημασίας στα πλαίσια νορμαρισμένων χώρων είναι οι ασθενείς τοπολογίες. Αν X είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, μία συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}$ καλείται ημινόρμα αν
(i) $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.
(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Η ασθενής τοπολογία στον X είναι η μικρότερη τοπικά κυρτή τοπολογία που καθιστά συνεχείς τις ημινόρμες p_{x^*} $(x^* \in X^*)$ όπου $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ για $x \in X$. Μια βάση περιοχών του $0 \in X$, για την ασθενή τοπολογία, είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{W(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \epsilon) : n = 1, 2, \ldots, x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*, \epsilon > 0\}$$

όπου

$$W(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \epsilon) = \{x \in X : |x_k^*(x)| < \epsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ένα δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στον X συγκλίνει στο $x \in X$, ως προς την ασθενή τοπολογία, αν και μόνο αν $x^*(x_\delta) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Η ασθενής τοπολογία στον X συμβολίζεται με τ_W ή $\sigma(X, X^*)$ και είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη της νόρμας του X.

Αν X είναι χώρος με νόρμα, η ασθενής*-τοπολογία στον X^* συμβολιζόμενη με τ_{W^*} ή $\sigma(X^*, X)$ καλείται η μικρότερη τοπικά κυρτή τοπολογία που καθιστά συνεχείς τις ημινόρμες p_x $(x \in X)$ όπου $p_x(x^*) = |x^*(x)|$ για $x^* \in X^*$. Μια βάση περιοχών του $0 \in X^*$, για την ασθενή $^*-$τοπολογία, είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{W(x_1, x_2, \ldots, x_n, \epsilon) : n = 1, 2, \ldots, x_1, \ldots, x_n \in X, \epsilon > 0\}$$

όπου

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, \epsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_k)| < \epsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ένα δίκτυο $(x_\delta^*)_{\delta \in \Delta}$ στον X^* συγκλίνει στο $x^* \in X^*$ ως προς την ασθενή $^*-$τοπολογία, αν και μόνον αν $x_\delta^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$. Η ασθενής *-τοπολογία είναι ασθενέστερη από την αντίστοιχη της νόρμας του X^*. Αν X είναι χώρος με νόρμα, το θεώρημα του Αλάογλου αναφέρει πως η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\}$ του X^* είναι συμπαγές σύνολο ως προς την ασθενή*-τοπολογία.

Έστω X χώρος και $\mathcal{L}(X)$ η άλγεβρα Banach όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του X. Στην $\mathcal{L}(X)$, εκτός από την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα τελεστή ή αλλιώς ομοιόμορφη τοπολογία τελεστών, ορίζονται και δύο άλλες τοπολογίες: η ισχυρή τοπολογία τελεστών που δεν είναι διαφορετική από την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον $(X, ||\cdot||)$ και η ασθενής τοπολογία τελεστών που είναι η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον (X, τ_W). Ένα δίκτυο $(T_\delta)_{\delta\in\Delta}$ στην $\mathcal{L}(X)$ (αντίστοιχα μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{L}(X)$) συγκλίνει στον $T \in \mathcal{L}(X)$.
(i) ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία του $\mathcal{L}(X)$, αν $||T_\delta - T|| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty} ||T_n - T|| = 0$)
(ii) ως προς την ισχυρή τοπολογία του X, αν $||T_\delta(x) - T(x)|| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty} ||T_n(x) - T(x)|| = 0$) για κάθε $x \in X$
(iii) ως προς την ασθενή τοπολογία του X, αν $|\langle T_\delta(x) - T(x), x^*\rangle| \to 0$ (αντίστοιχα αν $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n(x), x^*\rangle = \langle T(x), x^*\rangle$) για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$.

Δοθέντων δύο νορμαρισμένων χώρων $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ το σύνολο $X \cap Y$ καθίσταται χώρος με νόρμα αν ορίσουμε για $z \in X \cap Y$:

$$||z||_{X\cap Y} = ||z||_X + ||z||_Y$$

Ορισμός 1.2.10 *(i) Έστω $(X_1, ||\cdot||_1)$ και $(X_2, ||\cdot||_2)$ δύο χώροι Banach. Οι X_1 και X_2 καλούνται συμβατοί αν το σύνολο $X = X_1 \cap X_2$ είναι πυκνό σε καθέναν από αυτούς (δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $\overline{X_1 \cap X_2} = X_1$ και $\overline{X_1 \cap X_2} = X_2$) και, δοθείσης ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X για την οποία έχουμε $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x_1||_1 = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x_2||_2 = 0$, έπεται ότι $x_1 = x_2 \in X$. Ισοδύναμα, αν ο X είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζεται από την σχέση*

$$||x||_{X_1\cap X_2} = ||x||_1 + ||x||_2,\ x \in X$$

(ii) Έστω X_i, Y_i $(i = 1, 2)$ χώροι Banach με τους X_1 και X_2 συμβατούς. Δυο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $T_i : X_i \to Y_i$ λέγονται συνεπείς (consistent) εάν ισχύει $T_1(x) = T_2(x)$ για κάθε $x \in X_1 \cap X_2$.

Το θεώρημα κατηγορίας του Baire αναφέρει ότι, αν (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το σύνολο $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Το πλήθος των εφαρμογών αυτού του σχετικά απλού, αλλά εξαιρετικά γόνιμου, θεωρήματος στη Μαθηματική Ανάλυση είναι απέραντο και η σημασία του τεράστια. Μεταξύ των εφαρμογών είναι ορισμένα αποτελέσματα, πραγματικοί πυλώνες της Συναρτησιακής Ανάλυσης (μαζί με το θεώρημα Hahn-Banach), που θα παραθέσουμε στις επόμενες γραμμές.

Θεώρημα 1.2.11 *(ανοικτής απεικόνισης, Banach) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του Y. Τότε ο T είναι ανοικτός, δηλαδή αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X έπεται ότι η εικόνα του $T(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.*

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της πληρότητας των χώρων και στο Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης είναι αναγκαία, ενώ για την απόδειξη του Θεωρήματος επιβεβαιώνουμε, αρχικά, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $B(0,\delta) \subset T(B(0,\epsilon))$.

Είδαμε, στο Παράδειγμα 1.1.3 (ii) ότι, αν X, Y είναι χώροι με νόρμα, τότε το καρτεσιανό τους γινόμενο $X \times Y$ γίνεται νορμικος χώρος αν ορίσουμε $||(x,y)|| = ||x|| + ||y||$ για κάθε $(x,y) \in X \times Y$. Μάλιστα, αν οι X και Y είναι χώροι Banach τότε το ίδιο συμβαίνει με τον $X \times Y$. Αν $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, ορίζεται το γράφημά του, δηλαδή το σύνολο

$$Gr(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

Θεώρημα 1.2.12 *(κλειστού γραφήματος) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε το γράφημα του $Gr(T)$ να είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Τότε ο T είναι φραγμένος τελεστής.*

Θεώρημα 1.2.13 *(αρχή ομοιομόρφου φράγματος) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y, ώστε $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < +\infty$ για κάθε*

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 1.2.13 λαμβάνουμε το

Θεώρημα 1.2.14 *(Banach-Steinhaus) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία $T : X \to Y$ με $T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$. Τότε ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Αν X, Y είναι χώροι Banach, $\lambda \in \mathbb{C}$ και $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ τελεστές '1-1' και 'επί', τότε ορίζονται και είναι φραγμένοι οι τελεστές $(T+S)^{-1}, (\lambda T)^{-1} : Y \to X$. Επίσης, αν Z είναι χώρος Banach και οι $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ τελεστές '1-1' και 'επί', τότε ορίζεται και είναι φραγμένος ο $(ST)^{-1} : Z \to X$. Μάλιστα ισχύει $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Θα ολοκληρώσουμε την Παράγραφο με μια αναφορά στους χώρους Hilbert.

Έστω λοιπόν E διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product,scalar product) επί του E είναι μια απεικόνιση

$$(,) : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε
(i) $(x,x) \geq 0$
(ii) $(x,x) = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$
(iii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
(iv) $(x_1 + \lambda x_2, y) = (x_1, y) + \lambda(x_2, y)$
για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι
(iv') $(x, y_1 + \lambda y_2) = (x, y_1) + \bar{\lambda}(x, y_2)$, για κάθε $x, y_1, y_2 \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} \tag{1.2.2}$$

για κάθε $x, y \in E$. Ισότητα στην σχέση (1.2.2) έχουμε αν και μόνον αν τα διανύσματα x και y είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Επίσης, η απεικόνιση

$$||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+, \text{ με } ||x|| = (x, x)^{1/2}$$

για κάθε $x, y \in E$ ορίζει μια νόρμα επί του E, ενώ η απεικόνιση εσωτερικού γινομένου είναι συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ για τα οποία ισχύει $(x, y) = 0$ καλούνται ορθογώνια ή κάθετα.

Πρόταση 1.2.15 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ισχύουν τα εξής:*
(i) (κανόνας παραλληλογράμμου)

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

για κάθε $x, y \in E$
(ii) (πυθαγόρειο θεώρημα) Αν $x, y \in E$ με $(x, y) = 0$ τότε $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Πρόταση 1.2.16 *Αν $||\cdot||$ είναι μια νόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο E η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο $(,)$ στον E, τέτοιο ώστε $||x|| = (x, x)^{1/2}$ για κάθε $x \in E$. Επομένως ο κανόνας του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινομένου μεταξύ αυτών με νόρμα.*

Ορισμός 1.2.17 *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο καλείται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Ένας χώρος Hilbert θα συμβολίζεται με $\mathcal{H}$.*

Παράδειγμα χώρου Hilbert αποτελεί ο ℓ^2 με εσωτερικό γινόμενο οριζόμενο από την σχέση

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y}_k$$

για κάθε $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$. Ωστόσο οι χώροι ℓ^p, για $p \neq 2$ δεν είναι Hilbert καθώς οι νόρμες τους δεν ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ορισμός 1.2.18 *Καλούμε ορθοκανονική βάση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο E μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ στοιχείων του E τέτοια ώστε*
(i) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$, δηλαδή $||e_i|| = 1$ για κάθε $i \in I$ και $(e_i, e_j) = 0$ για $i \neq j$.
(ii) η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλαδή $\overline{\{e_i : i \in I\}} = E$.

Αποδεικνύεται ότι, αν ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο διαθέτει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, τότε είναι διαχωρίσιμος. Επίσης, αποδεικνύεται ότι μια ορθοκανονική βάση σε έναν διαχωρίσιμο χώρο εσωτερικού γινομένου συμπεριφέρεται όπως η συνηθισμένη βάση του ℓ^2, δηλαδή η οικογένεια $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ με $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$, όπου η μονάδα βρίσκεται στην $k-$θέση.

Ακριβέστερα, αν $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σε εναν διαχωρίσιμο χώρο εσωτερικού γινομένου E, τότε για κάθε $x \in E$
(i) $x = \sum_{k=1}^{+\infty}(x, e_k)e_k$
(ii) $||x||^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|(x, e_k)|^2$

Τέλος, κάθε απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.

Χρήσιμες πληροφορίες για τον συζυγή ενός χώρου Hilbert παρέχονται από τα επόμενα αποτελέσματα.

Λήμμα 1.2.19 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} \text{ με } f_x(y) = (y, x)$$

για κάθε $y \in E$. Η f_X είναι γραμμική και συνεχής. Μάλιστα ισχύει $f_x = ||x||$.

Πρόταση 1.2.20 *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Η απεικόνιση*

$$T : E \to E^* \text{ με } T(x) = f_x$$

για κάθε $x \in E$ είναι αντιγραμμική αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (δηλαδή ισχύει $T(x+\lambda y) = T(x)+\bar{\lambda}T(y)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$) και γραμμική αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Είναι επίσης ισομετρική, δηλαδή $||T(x)|| = ||x||$ για κάθε $x \in E$.

Αν ο E δεν είναι πλήρης, η απεικόνιση T δεν είναι 'επί'. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο συζυγής ενός νορμαρισμένου χώρου είναι πλήρης. Επειδή η T είναι ισομετρία, αν ήταν και 'επί' του E^*, τότε οι χώροι E και E^* θα συνδέονταν μέσω ενός ισομετρικού ισομορφισμού, γεγονός που θα καθιστούσε τον E πλήρη, δηλαδή χώρο Hilbert. Αν ο E είναι πλήρης, τότε η T είναι 'επί', όπως βεβαιώνει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.2.21 *(αναπαράστασης, Riesz) Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε $f \in \mathcal{H}^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{H}$ ώστε να ισχύει*

$$f(y) = (y, x), \ \forall y \in \mathcal{H}$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.2.21 και την Πρόταση 1.2.20 λαμβάνουμε το εξής:

Θεώρημα 1.2.22 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ με $T(x) = f_x$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$ εiναι αντιγραμμική (αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ή γραμμική (αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ισομετρία επί του $\mathcal{H}^*$.*

Ουσιαστικά κάθε χώρος Hilbert είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach. Προκειμένου να ορίσουμε τον συζυγή ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή T επί ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ (δηλαδή ενός στοιχείου της $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) θα χρειαστούμε το επόμενο

Θεώρημα 1.2.23 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ώστε να ισχύει*

$$(T^*(x), y) = (x, T(y)) \tag{1.2.3}$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$

Ορισμός 1.2.24 *Ο συζυγής T^* ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή T σε έναν χώρο Hilbert H είναι ο μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής στον ίδιο χώρο που ορίζεται από την σχέση (1.2.3)*

Ορισμός 1.2.25 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ο τελεστής καλείται*
(i) αυτοσυζυγής αν $T = T^*$
(ii) φυσιολογικός αν $T^*T = TT^*$
(iii) ορθομοναδιαίος αν $T^*T = I = TT^*$
(iv) θετικός ή μη αρνητικός αν ισχύει $(Tx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$

1.3 Ιδεώδη ενός Δακτυλίου

Θα χρειαστούμε την έννοια του ιδεώδους ενός αλγεβρικού δακτυλίου στη μελέτη των Martingales σε χώρους Banach. Δίνουμε αρχικά την έννοια του δακτυλίου.

Ορισμός 1.3.1 *Ένας αλγεβρικός δακτύλιος αποτελείται από ένα σύνολο R το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο διμελείς πράξεις*

$$+ : R \times R \to R, \cdot : R \times R \to R$$

τις οποίες θα αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:
α) Η $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα: Για κάθε $a, b, c \in R$ έχουμε
1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $(\exists 0 \in R)a + 0 = 0$
4. $(\exists d \in R)a + d = 0$
β) Η $(R, \cdot)$ αποτελεί μονοειδές: Για κάθε $a, b, c \in R$ έχουμε
1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. $(\exists 1 \in R)a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$
γ) Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός ως προς την πρόσθεση:Για κάθε $a, b, c \in R$ έχουμε
1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + a \cdot c$
2. $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

Θεωρούμε έναν αλγεβρικό δακτύλιο $(R, +, \cdot)$. Τότε, η $(R, +)$ είναι προσθετική ομάδα. Ενδιαφέρον έχει η μελέτη των υποσυνόλων της R τα οποία είναι κλειστά ως προς τον (δίπλευρο) πολλαπλασιασμό. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.3.2 *Ένα υποσύνολο της θα καλείται (δίπλευρο) ιδεώδες αν*
α) Η $(I, +)$ είναι υποομάδα της $(R, +)$.
β) Ισχύουν οι σχέσεις

$$(\forall a \in I, \forall r \in R) a \cdot r, r \cdot a \in I$$

1.4 Στοιχεία από τη θεωρία των χώρων L^p

Οι χώροι L^p είναι από τους πλέον σημαντικούς χώρους στα Μαθηματικά, με πολλές εφαρμογές στις Επιστήμες, ενώ αποτελούν παράδειγμα σε πολλά απο τα θέματα που αντιμετωπίζει η παρούσα εργασία. Κρίνεται σκόπιμη, επομένως, μια σύντομη εισαγωγή και μία παράθεση από βασικά αποτελέσματα τα οποία θα χρειαστούν στα επόμενα.

Ορίζουμε έναν χώρο μέτρου ως μια τριάδα (X, Σ, μ) αποτελούμενη από ένα σύνολο X, μια $\sigma-$άλγεβρα Σ μετρήσιμων υποσυνόλων του X και ένα μη αρνητικό αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο μ επί της Σ. Θα συμβολίζουμε, συνήθως, το μέτρο με dx. Όταν $X = \mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, \ldots$ με dx εννοούμε το μέτρο Lebesgue. Κάποιες κεντρικές υποθέσεις που πραγματοποιούμε είναι οι ακόλουθες:
(i) Το μέτρο μ είναι $\sigma-$πεπερασμένο υπό την έννοια ύπαρξης μιας αύξουσας ακολουθίας από μετρήσιμα υποσύνολα X_n του X με πεπερασμένο μέτρο και ένωση ίση με X.
(ii) Κάθε σύνολο X_n είναι εφοδιασμένο με μια πεπερασμένη διαμέριση E_n, δηλαδή μια ακολουθία ξένων μετρήσιμων υποσυνόλων $\{E_1, E_2, \ldots, E_{m(n)}\}$ του X καθένα εκ των οποίων έχει θετικό μέτρο $|E_r| = \mu(E_r)$. Η ένωση των υποσυνόλων E_r για $r = 1, 2, \ldots, m(n)$ ισούται με X_n.
(iii) Για κάθε n η διαμέριση E_{n+1} είναι λεπτότερη από την E_n υπό την έννοια ότι κάθε υποσύνολο που ανήκει στην E_n είναι ένωση στοιχείων της E_{n+1}.
(iv) Ορίζουμε $\mathcal{L}_n$ να είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων $f = \sum_{r=1}^{m(n)} a_r \chi_r$, όπου με χ_r σημειώνουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου E_r της E_n. Από τη συνθήκη (iii) συμπεραίνουμε πως $\mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{L}_{n+1}$ για κάθε n.
(v) Η $\sigma-$άλγεβρα Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Συγκεκριμένα παράγεται από την ολότητα των συνόλων που ανήκουν στις διάφορες δυνατές διαμερίσεις E_n του X.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, αν $1 \leq p < +\infty$, η έκφραση $L^p(X, dx)$ ή συντομότερα $L^p(X)$ συμβολίζει το χώρο όλων των ισοδύναμων κλάσεων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_X |f(x)|^p dx < +\infty$$

Δύο στοιχεία του $L^p(X)$ ταυτίζονται αν είναι ίσα σχεδόν παντού, δηλαδή εάν διαφέρουν κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Αν $f, g \in L^p(X)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, η κατά σημείο ανισότητα

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)|^p \leq 2^p|\lambda|^p|f(x)|^p + 2^p|\mu|^p|g(x)|^p$$

υποδηλώνει ότι ο $L^p(X)$ είναι διανυσματικός χώρος. Θέτοντας

$$||f||_p := (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}$$

για κάθε $f \in L^p(X)$, αποκτούμε μια νόρμα στον $L^p(X)$. Η συνθήκη (v) είναι ισοδύναμη με την πυκνότητα του $\cup_{n\geq 1}\mathcal{L}_n$ στον $L^p(X)$ για $1 \leq p < +\infty$. Έπεται ότι ο $L^p(X)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, εννοώντας πως περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο. Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $fg \in L^1(X)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)g(x)dx$$

Λέμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentialy bounded) αν το σύνολο $\{x \in X : |f(x)| > c\}$ έχει μέτρο μηδέν για κάποια σταθερά c. Ο χώρος $L^\infty(X)$ (δηλαδή $p = +\infty$) ορίζεται ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων επί του X. Πάλι ταυτίζουμε δύο στοιχεία του $L^\infty(X)$ αν συμπίπτουν με εξαίρεση ένα σύνολο μηδενικού μέτρου. Ο $L^\infty(X)$ είναι διανυσματικός χώρος. Αν $f \in L^\infty(X)$ θέτουμε

$$||f||_\infty = \inf\{c : \mu[x \in X : |f(x)| > c] = 0\}$$

και λαμβάνουμε μια νόρμα στον $L^\infty(X)$ αποκαλούμενη ουσιώδες supremum (essential supremum). Ισοδύναμα, αν $f \in L^\infty(X)$

$$||f||_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ σχεδόν παντού στο } X\}$$

Αποδεικνύεται ότι, αν $f \in L^\infty(X)$ τότε ισχύει

$$|f(x)| \leq ||f||_\infty \text{ σχεδόν παντού στο } X$$

Τέλος, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το σύνολο X είναι φραγμένο ή έχει πεπερασμένο μέτρο, λαμβάνουν χώρα οι εξής εγκλεισμοί (μέσω συνεχών εμφυτεύσεων)

$$L^\infty(X) \subseteq \ldots \subseteq L^p(X) \subseteq L^{p-1}(X) \subseteq \ldots \subseteq L^2(X) \subseteq L^1(X)$$

Η παραπάνω ακολουθία εγκλεισμών δεν ισχύει εν γένει.

Έστω $1 < p < +\infty$. Καλούμε συζυγή εκθέτη του p τον αριθμό q για τον οποίο έχουμε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Προφανώς $1 < q < +\infty$. Οι αριθμοί $p = 1$ και $q = +\infty$ θεωρούνται συζυγείς εκθέτες. Ιδιαίτερα εύχρηστο είναι το αποτέλεσμα που περιγράφει η επόμενη.

Πρόταση 1.4.1 *(ανισότητα Hölder) Αν $1 \leq p \leq +\infty$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε $fg \in L^1(X)$ για κάθε $f \in L^p(X)$ και κάθε $g \in L^q(X)$. Επιπλέον ισχύει*

$$|\langle f, g\rangle| = \int_X |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p||g||_q$$

Ακολουθούν δύο ακόμη σημαντικά αποτελέσματα στα πλαίσια των L^p-χώρων .

Θεώρημα 1.4.2 *(ανισότητα παρεμβολής) Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$, $0 < \lambda < 1$ και .*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{q}$$

Αν $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$, τότε $f \in L^r(X)$ και

$$||f||_r \leq ||f||_p^{1-\lambda} ||f||_q^{\lambda}$$

Θεώρημα 1.4.3 *Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$ και $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$. Υποθέτουμε ότι*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Τότε $fg \in L^r(X)$ και ισχύει $||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q$.

Παραθέτουμε, στο σημείο αυτό, δύο κλασσικά θεωρήματα από τη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 1.4.4 *(μονότονης σύγκλισης, Beppo Levi) Θεωρούμε μιαν αύξουσα ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^1(X)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\sup_n \int_X f_n < +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο X σε ένα πεπερασμένο όριο, έστω $f(x)$. Επιπλέον $f \in L^1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.*

Θεώρημα 1.4.5 *(κυριαρχημένης σύγκλισης, Lebesgue) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του $L^1(X)$. Υποθέτουμε ότι:*
(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο X.
(ii) Υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(X)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο X. Τότε $f \in L^1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.

Είμαστε, πλέον, σε θέση να αποδείξουμε ότι κάθε χώρος L^p είναι Banach.

Θεώρημα 1.4.6 *(Riesz-Fischer) Για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$ ο $L^p(X)$ εφοδιασμένος με την ορισθείσα νόρμα είναι πλήρης και, άρα, χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω αρχικά $p = +\infty$. θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^\infty(X)$. Για δεδομένο $k \geq 1$ υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $||f_n - f_m|| \leq 1/k$ για κάθε $n, m \geq n_k$. Κατά συνέπεια υπάρχει σύνολο M_k μηδενικού μέτρου ώστε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq 1/k \tag{1.4.4}$$

για κάθε $x \in X - M_k$ και για κάθε $n, m \geq n_k$. Θέτουμε $M = \cap_k M_k$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο M έχει μηδενικό μέτρο, με την ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$, για κάθε $x \in X - M$. Επομένως συγκλίνει σε όριο $f(x)$ για κάθε $x \in X - M$. Λαμβάνοντας όρια καθώς $m \to \infty$ στη σχέση 1.4.4 παίρνουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k \tag{1.4.5}$$

για κάθε $x \in X/M$ και για κάθε $n \geq n_k$. Επειδή η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα, η σχέση (1.2.4) υποδηλώνει ότι $f \in L^\infty(X)$ και $||f_n - f||_\infty \leq 1/k$ για κάθε $n \geq n_k$. Καταλήγουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0$, κάτι που αποδεικνύει την πληρότητα του χώρου $L^\infty(X)$. Άρα ο $L^\infty(X)$ είναι χώρος Banach.

Υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι $1 \leq p < +\infty$. Θεωρούμε μια ακολουθία Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $L^p(X)$ και κατασκευάζουμε υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ αυτής τέτοια ώστε να ισχύει

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1$$

Η διαδικασία έχει ως εξής: Εφόσον η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^p(X)$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $||f_n - f_m||_p \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $n, m \geq n_1$. Επιλέγουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $||f_n - f_m||_p \leq \frac{1}{2^2}$ για κάθε $n, m \geq n_2$ κ.ο.κ. Προς απλούστευση των συμβολισμών γράφουμε f_k αντί f_{n_k}, οπότε έχουμε

$$||f_{k+1} - f_k||_p \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1$$

Θέτοντας $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ βρίσκουμε ότι $||g_n||_p \leq 1$. Συνεπώς $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(X)$ και, βέβαια, είναι αύξουσα ακολουθία με $\sup_n \int_X g_n < +\infty$. Από το Θεώρημα 1.2.4 συμπεραίνουμε ότι η $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο $g(x)$ με $g \in L^p(X)$. Εξάλλου για $n \geq m \geq 2$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_{n-1}(x)| + \ldots + |f_{m+1}(x) - f_m(x)| \\ &= g_n(x) - g_{m-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{m-1}(x) \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ και, κατά συνέπεια, συγκλίνουσα με όριο $f(x)$. Προφανώς

$$|f_n(x) - f_m(x)| < g(x) \text{ για κάθε } n \geq m \geq 2 \tag{1.4.6}$$

Λαμβάνοντας όρια καθώς $m \to +\infty$, η σχέση (1.4.6) δίνει

$$|f_n(x) - f(x)| < g(x)$$

σχεδόν παντού στο X και για κάθε $n \geq 2$. Επομένως $f \in L^p(X)$. Επίσης $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|^p = 0$ σχεδόν παντού στο X και $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p$ με $g \in L^1(X)$. Από το Θεώρημα 1.2.5 τεκμαίρεται ότι $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p^p = 0$ και τελικά $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Άρα ο $L^p(X)$ είναι πλήρης για $1 \leq p < +\infty$ και ο επιθυμητός ισχυρισμός επιβεβαιώνεται.

Θεώρημα 1.4.7 *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $L^p(X)$ για $1 \leq p \leq +\infty$ και $f \in L^p(X)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Υπάρχει, τότε, υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο X
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και σχεδόν παντού στο X, με $h \in L^p(X)$.

Για $f, g \in L^2(X)$ θέτουμε

$$(f,g) := \int_X f(x)\overline{g(x)}dx$$

ορίζοντας στον $L^2(X)$ ένα εσωτερικό γινόμενο. Η νόρμα του $L^2(X)$ προέρχεται από το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο καθώς, όπως αποδεικνύεται, ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Από το Θεώρημα 1.2.6 προκύπτει ότι ο $L^2(X)$ είναι χώρος Hilbert, κάτι που δεν συμβαίνει για τους χώρους $L^p(X)$ με $p \neq 2$.

Θεώρημα 1.4.8 *Αν $1 \leq p < +\infty$ τότε ο συζυγής χώρος του $L^p(X)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(X)$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (δηλαδή οι p, q είναι συζυγείς εκθέτες). Το φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\phi \in L^p(X)^*$ αντιστοιχεί στην συνάρτηση $g \in L^q(X)$ σύμφωνα με τον τύπο*

$$\phi(f) = \int_X f(x)g(x)dx, \ \forall f \in L^p(X)$$

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να γράψουμε, για $1 < p < +\infty$, ότι

$$L^p(X)^* = L^q(X), \ \text{όπου}\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

και, για $p = 1$, ότι $L^1(X)^* = L^\infty(X)$. Ωστόσο ο $L^\infty(X)^*$ περιέχει γνησίως τον $L^1(X)$, καθώς μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $\phi \in L^\infty(X)^*$ τα οποία δεν είναι της μορφής

$$\phi(f) = \int f(x)g(x)dx$$

για κάθε $f \in L^\infty(X)$ και για κάποιο $g \in L^1(X)$.

Όπως επιβεβαιώνεται, οι χώροι $L^p(X)$ είναι αυτοπαθείς όταν $1 < p < +\infty$. Οι $L^1(X)$ και $L^\infty(X)$ δεν είναι αυτοπαθείς. Μάλιστα ο χώρος $L^\infty(X)$ δεν ειναι και διαχωρίσιμος.

Ιδιαίτερα εποικοδομητική είναι η μελέτη φραγμένων γραμμικών τελεστών που δρουν μεταξύ L^p-χώρων. Σπεύδουμε να επισημάνουμε ότι οι χώροι L^p είναι συμβατοί καθώς το p μεταβάλλεται στο διάστημα $[1, +\infty]$. Έτσι, δύο τελεστές $T \in \mathcal{L}(L^p(X))$ και $S \in \mathcal{L}(L^q(X))$ είναι συνεπείς, εαν ισχύει

$$Tf = Sf, \ \forall f \in L^p(X) \cap L^q(X)$$

Παράδειγμα 1.4.9 *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $C(K)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{R}$ αποτελεί διατεταγμένο χώρο Banach, όταν εφοδιαστεί με την νόρμα*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Πραγματικά, ο $C(K)$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $|| \cdot ||_\infty$. Θεωρούμε $f, g : K \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $f \leq g$. Τότε θα ισχύουν

$$||f||_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq \sup_{x \in K} |g(x)| = ||g||_\infty$$

και

$$|||f|||_\infty = \sup_{x \in K} ||f|(x)| = \sup_{x \in K} |max\{f(x), -f(x)|\}| = \sup_{x \in K} |f(x)| = ||f||_\infty$$

Συνεπώς ο χώρος $C(K)$ είναι διατεταγμένος χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.4.10 *Έστω φραγμένο U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $p \geq 1$. Ορίζουμε το χώρο*

$$L^p(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : ||f||_p < +\infty\}$$

όπου

$$||f||_p = \left(\int_U |f(x)| dx \right)^p$$

Δηλαδή, ο χώρος $L^p(U)$ περιέχει πραγματικές συναρτήσεις f επί του U των οποίων η δύναμη $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue. Είναι γνωστό ότι η $|| \cdot ||_p$ αποτελεί νόρμα επί του $L^p(U)$ ([Βρεζις]). Θα αποδείξουμε ότι ο χώρος $L^p(U)$ αποτελεί διατεταγμένο χώρο Banach ως προς τη νόρμα $|| \cdot ||_p$. Προς αυτό, θα αποδείξουμε τα ακόλουθα:
Ο $L^p(U)$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $|| \cdot ||_p$. *Πραγματικά, έστω $(f_n) \subseteq L^p(U)$ βασική ακολουθία. Τότε,*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)||f_n - f_m||_p < \epsilon$$

Επιλέγουμε $\epsilon = 2^{-1}$. Τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$||f_n - f_{n_1}||_p < 2^{-1}, \forall n \geq n_1$$

Επιλέγουμε στη συνέχεια $\epsilon = 2^{-2}$. Τότε υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$, τέτοιο ώστε

$$||f_n - f_{n_2}||_p < 2^{-2}, \forall n \geq n_2$$

Επαγωγικά, επιλέγοντας $\epsilon = 2^{-k}, k \in \mathbb{N}$, θα υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}, n_k > n_{k-1}$, τέτοιο ώστε

$$||f_n - f_{n_k}||_p < 2^{-k}, \forall n \geq n_k$$

. Συνεπώς ορίστηκε μία υπακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$||f_{n_k} - f_{n_{k+1}}||_p < 2^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Θα αποδειχθεί ότι η (f_{n_k}) *είναι συγκλίνουσα. Για* $x \in U$, *θεωρούμε τις σειρές*

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x))$$

και

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$$

για τις οποίες ορίζονται τα μερικά αθροίσματα

$$s_K(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)), K \in \mathbb{N}$$

και

$$m_K(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{K}|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|, K \in \mathbb{N}$$

Από την τριγωνική ανισότητα της νόρμας, θα ισχύει

$$|m_K(x)| \leq ||f_{n_1}(x)||_p + \sum_{k=1}^{K}||f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)||_p \leq ||f_{n_1}(x)||_p + \sum_{k=1}^{K}2^{-K}$$

Αν τώρα $K \to \infty$, *από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης θα είναι*

$$\int |g|^p dx < +\infty$$

και συνεπώς, η σειρά $g(x)$ *θα συγκλίνει σχεδόν παντού* $x \in U$. *Αυτό συνεπάγεται ότι και η σειρά* $f(x)$ *συγκλίνει σχεδόν παντού* $x \in U$, *και* $f \in L^p(U)$. *Έχουμε ότι η* (f_n) *θα συγκλίνει επίσης στην* f. *Προς αυτό, παρατηρούμε ότι*

$$s_{K-1}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K-1}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) = f_{n_k}(x)$$

δηλαδή $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *σχεδόν παντού* $x \in U$. *Από την ανισότητα*

$$|a-b|^p \leq 2^p|\max a, b|^p, a, b \in \mathbb{R}$$

προκύπτει ότι

$$|f(x) - s_K(x)|^p \leq 2^p \max|f(x)|, s_K(x)|^p \leq 2^p|g(x)|^p$$

και άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, θα είναι

$$||f_{n_k} - f||_p \to 0, k \to \infty$$

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το ότι η (f_n) *είναι βασική για να έχουμε την σύγκλισή της στην* f. *Έστω τυχαίο* $\epsilon > 0$. *Τότε θα υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *με* $||f_n - f_{n_0}||_p < \epsilon/2$ *για* $n \geq n_0$, *καθώς η (f_n) είναι βασική. Από την σύγκλιση της (f_{n_k}), θα υπάρχει $m_0 \in mathbbN$ τέτοιο ώστε $||f - f_{m_0}||_p < \epsilon/2$. Επιλέγοντας $n \geq k_0 = \max\{n_0, m_0\}$ θα είναι*

$$||f - f_n||_p \leq ||f_n - f_{k_0}||_p + ||f_{k_0} - f||_p < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

δηλαδή $f_n \to f$ στον $L^p(U)$.

Ο $L^p(U)$ είναι διατεταγμένος χώρος Banach ως προς τη νόρμα $||\cdot||_p$. *Πραγματικά, θεωρούμε $f, g \in L^p(U)$ με $|f| \leq |g|$. Τότε $|f|^p < |g|^p$ και άρα*

$$||f||_p = \int_U |f(x)|dx \leq \int_U |g(x)|dx = ||g||_1$$

όπως και

$$|||f|||_1 = \int_U ||f|(x)|dx = \int_U |max\{f(x), -f(x)\}|dx = \int_U |f(x)| = ||f||_1$$

Συνεπώς ο χώρος $L^p(U)$ είναι διατεταγμένος χώρος Banach.

Παρατήρηση 1.4.11 *Με αντίστοιχο συλλογισμό, το Παράδειγμα 1.4.10 εξακολουθεί να ισχύει εάν ο χώρος μέτρου $(U, \mathcal{L}, dx)$ αντικατασταθεί από οποιοδήποτε χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, d\mu)$, ειδικότερα και από έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{M}, P)$.*

Με τη βοήθεια της Παρατήρησης 1.4.11, μπορούν να ορισθούν αφηρημένοι χώροι L_1 επί ενός χώρου πιθανότητας. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.4.12 *Ένας διατεταγμένος χώρος Banach $(F, ||\cdot||$ όπου*

$$||x + y|| = ||x|| + ||y||$$

για κάθε μη αρνητικά στοιχεία x και y του F, θα αποκαλείται ένας αφηρημένος L_1-χώρος ή AL-χώρος.

Ορισμός 1.4.13 *Ένας διατεταγμένος χώρος Banach F καλείται Dedekind πλήρης εαν κάθε μη κενό υποσύνολο που είναι φραγμένο άνω έχει supremum.*

Ορισμός 1.4.14 *Έστω X και Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μια γραμμική συνάρτηση. Ισχύουν, δηλαδή, οι σχέσεις*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ και } T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Η καλείται φραγμένος γραμμικός τελεστής (bounded linear operator) αν, επιπλέον, υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$||T(x)|| \leq M||x|| \text{ για κάθε } x \in X.$$

Ισοδύναμα, ο γραμμικός τελεστής T είναι φραγμένος αν η εικόνα $T(\hat{B})$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y, όπου $\hat{B} = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X.

Αν ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, θέτουμε

$$||T|| = \{M > 0 : ||T(x)|| \leq M||x|| \text{ για } x \in X\}$$

Ο μη αρνητικός πεπερασμένος αριθμός $||T||$ είναι η νόρμα του τελεστή T (operator norm). Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{\frac{||T(x)||}{||x||} : x \in X, x \neq 0\} \\ &= \sup\{||T(x)|| : x \in X, ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{||T(x)|| : x \in X, ||x|| = 1\} \end{aligned}$$

Ακόμη $||T(x)|| \leq ||T||||x||$ για κάθε $x \in X$.

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται συστολή (contraction) εάν ισχύει $||T|| \leq 1$, ενώ ονομάζεται ισομετρία (isometry) αν $||T|| = 1$. Στην δεύτερη περίπτωση οι χώροι X και Y χαρακτηρίζονται γραμμικά ισομετρικοί. Ο T καλείται ισομετρική εμφύτευση εάν ειναι '1-1' και ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T καλείται γραμμικός ισομορφισμός αν είναι ισομορφική εμφύτευση και 'επί' του Y, με τους δύο χώρους να χαρακτηρίζονται γραμμικά ισομορφικοί. Αποδεικνύεται ότι, κάθε μιγαδικός (αντίστοιχα πραγματικός) χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι γραμμικά ισομορφικός με τον $\mathbb{C}^n$ (αντίστοιχα με τον $\mathbb{R}^n$) και, επομένως, χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.4.15 *Ο τελεστής $V : C[a, b] \to C[a, b]$ με*

$$(Vf)(x) = \int_a^x K(x, y)f(y)dy$$

όπου ο πυρήνας K είναι συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών επί του απλού χωρίου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$$

είναι καλά ορισμένος, γραμμικός και φραγμένος. Πράγματι υπάρχει το

$$sup_{(x,y)\in D}|K(x, y)| = \max_{(x,y)\in D} |K(x, y)| = M$$

και επιπλέον για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\begin{aligned} |Vf(x)| &= \left|\int_a^x K(x, y)f(y)dy\right| \\ &\leq \int_a^x |K(x, y)||f(y)|dy \\ &\leq M||f||_\infty \int_a^x dy \\ &= (x - a)M||f||_\infty \\ &\leq (b - a)M||f||_\infty \end{aligned}$$

Άρα $||Vf||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |(Vf)(x)| \leq (b - a)M||f||_\infty$.

Δηλαδή ο V, ο οποίος καλείται ολοκληρωτικός τελεστής Volterra με συνεχή πυρήνα K, είναι φραγμένος με νόρμα $||V||_\infty \leq (b - a)M$.

Κεφάλαιο 2

Martingales χωρίς πιθανότητα

2.1 Κύριοι Ορισμοί

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η θεωρία Martingales σε χώρους Banach, και θα αποδειχθούν τα βασικά θεωρήματα της Εργασίας. Στους επόμενους ορισμούς, θα εισαχθούν οι αντίστοιχες έννοιες του λογισμού (συνέχεια της νόρμας, σύγκλιση μονότονων ακολουθιών, κ.α.) στα πλαίσια των συνδέσμων Banach.

Υπενθυμίζουμε πως ένας σύνδεσμος Banach είναι ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος F έτσι ώστε

$$(\forall x, y \in F) \sup\{x, y\} \in E,\ \inf\{x, y\} \in E$$

όπου

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ και } x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

Συμβολίζουμε επίσης

$$x^+ := x \vee 0,\ x^- := (-x) \vee 0,\ ||x|| = x \vee (-x)$$

Μια από τις πλέον σημαντικές έννοιες στην Θεωρία Martingales είναι η έννοια της νόρμας συνεχούς διαταξης.

Ορισμός 2.1.1 *Θα λέμε ότι ένας σύνδεσμος Banach έχει νόρμα συνεχούς διάταξης αν* $||x_n|| \to 0$ *για κάθε φθίνον δίκτυο* (x_a) *τέτοιο ώστε* $\inf_a x_a = 0$.

Η νόρμα συνεχούς διάταξης μας επιτρέπει να θεωρούμε όρια δικτύων στον χώρο F. Ένας σύνδεσμος Banach με νόρμα συνεχούς διάταξης θα λέγεται πλήρης κατά Dedekind. Οι χώροι αυτοί έχουν μια περαιτέρω ιδιότητα την οποία θα εξετάσουμε αργότερα, συγκεκριμένα κάθε ταινιωτό ιδεώδες διάταξης είναι και ταινιωτό προβολής (Ορισμός 2.1.5).

Ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση έχουν οι χώροι KB και οι χώροι AL.

Ορισμός 2.1.2 *α) Ένας σύνδεσμος Banach καλείται χώρος Kantarovič-Banach ή KB-χώρος όταν κάθε αύξουσα φραγμένη κατά τη νόρμα ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα κατα τη νόρμα.*
β) Ένας σύνδεσμος Banach όπου $\forall x, y \in F$ ισχύει

$$x, y \geq 0 \Rightarrow ||x+y|| = ||x|| + ||y||$$

θα καλείται αφηρημένος L^1 χώρος ή χώρος AL.

Σε αυτή την περίπτωση, η συνέχεια της νόρμας ως προς τις πράξεις του διατεταγμένου χώρου, συνεπάγεται ότι για κάθε αύξουσα ακολουθία $(x_n) \subseteq F$ θα ισχύει

$$\lim x_n = \sup_n x_n$$

Όλοι οι χώροι Banach με διατακτικά συνεχή νόρμα ειναι KB-χώροι. Τέτοιοι χώροι είναι οι αυτοπαθείς σύνδεσμοι Banach, πχ οι χώροι L^p για $1 < p < \infty$. Επίσης, από το Θεώρημα Kakutani, κάθε αφηρημένος L^1 χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με έναν L^1 χώρο.

Κεντρικής σημασίας στις εφαρμογές είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, η απόδειξη του οποίου υπερβαίνει τους σκοπούς της εργασίας ([Sch74]).

Θεώρημα 2.1.3 *Ένας διατεταγμένος χώρος Banach F είναι ένας χώρος KB, αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*
α) Ο c_0 δεν είναι εμφυτεύσιμος στον F.
β)Ο F είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης.

Συγκεκριμένα, οι ανακλαστικοί διατεταγμένοι χώροι Banach και οι χώροι AL είναι και χώροι KB, όπως και η νόρμα ενός KB χώρου είναι και νόρμα συνεχούς διάταξης.

Η έννοια του αλγεβρικού ιδεώδους έχει ανάλογο στην περίπτωση διατεταγμένων διανυσματικών χώρων, την έννοια του ταινιωτού.

Ορισμός 2.1.4 *α) Ενας διατεταγμένος υπόχωρος E ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου F καλείται ιδεώδες (διάταξης) αν $y \in E$ και $|x| \leq |y|$ συνεπάγονται $x \in E$.*
Ένα ιδεώδες E καλείται ταινιωτό ιδεώδες αν $x = \sup_a x_a$ συνεπάγεται $x \in E$ για κάθε θετικό και αύξον δίκτυο (x_a) του E.
β) Ένα ιδεώδες E του χώρου F θα καλείται ταινιωτό αν για κάθε θετικό και αύξον δίκτυο του E ισχύει

$$x = \sup_a x \Rightarrow x_a \in E$$

Δύο στοιχεία x και y σε ένα διατεταγμένο διανυσματικό χώρο λέγονται ξένα (συμβολ. $x \perp y$) αν ισχύει $|x| \wedge |y| = 0$. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου, τότε το ξένο συμπλήρωμα A^d ορίζεται ως το σύνολο όλων των στοιχείων του διατεταγμένου χώρου, τα οποία είναι ξένα ως προς κάθε στοιχείο του A:

$$A^d = \{x \in F : x \perp y, \forall y \in A\}$$

Ορισμός 2.1.5 *Ενα ταινιωτό E σε έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο F το οποίο ικανοποιεί την $F = E \bigoplus E^d$ θα αποκαλείται ταινιωτό προβολής.*

Κάθε ταινιωτό σε έναν πλήρη κατα Dedekind διατεταγμένο διανυσματικό χώρο είναι ταινιωτό προβολής. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος υπερβαίνει τους σκοπούς της παρούσας διατριβής [Tro05].

Υπενθυμίζουμε πως ένας τελεστής $T : F \to F$ επί ενός διατεταγμένου χώρου Banach F είναι θετικός αν διατηρεί τον κώνο

$$F_+ = \{x \in F : x > 0\}$$

των θετικών στοιχείων του F. Ο κώνος F_+ έχει την προφανή ιδιότητα

$$(\forall x, y \in F_+, \forall c \in \mathbb{R}_+) x + y \in F_+, cx \in F$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι για τον τελεστή $T \in L(F)$ ισχύει

$$T \geq 0 \Leftrightarrow [x \leq y \Leftrightarrow Tx \leq Ty]$$

. Πράγματι, αν $x, y \in F$, με $x \leq y$ τότε

$$\begin{aligned} y - x \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad T(y - x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad T(y) - T(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad T(y) \geq T(x) \end{aligned}$$

και αντίστροφα. Επιπλέον, αν $T \geq 0$ τότε

$$T(x \vee y) \geq (Tx) \vee (Ty)$$

Πραγματικά, αρκεί να θεωρήσουμε $x, y \in F, z = x \vee y$ και να χρησιμοποιήσουμε την συνεπαγωγή

$$x \leq z, y \leq z \Rightarrow Tx \leq Tz, Ty \leq T(z)$$

άρα και

$$(Tx) \vee (Ty) \leq Tz = T(x \vee z)$$

Με αυτό τον τρόπο θα ισχύει ότι

$$|Tx| \leq T|x|, \forall\ x \in F$$

Παραπέμπουμε στα [AB85,MN91] για περισσότερες λεπτομέρειες επί των συνδέσμων Banach από αυτές που απαιτούνται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Για την συνέχεια, ο χώρος F θα είναι ένας σταθερός σύνδεσμος Banach.

2.2 Martingales και ο χώρος M

Θα εισάγουμε μια γενίκευση της έννοιας Martingale ακολουθώντας το άρθρο ([Tro05]). Ως Martingale θα εννοούμε μια ακολουθία στοιχείων σε έναν διατεταγμένο χώρο Banach η οποία ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες, οι οποίες προκύπτουν γενικεύοντας τις ιδιότητες των κατά συνθήκη αναμενόμενων τιμών ([AAB93]).

Όπως αποδεικνύεται ([Doug65]) οι κατά συνθήκη αναμενόμενες τιμές είναι οι μόνες συσταλτικές προβολές του $L^1(P)$ οι οποίες διατηρούν τις σταθερές συναρτήσεις. Εν όψει αυτού του αποτελέσματος φαίνεται φυσικό σε αυτό το πλαίσιο να αντικαταστήσουμε τις κατά συνθήκη αναμενόμενες τιμές με μια ακολουθία από θετικές συσταλτικές προβολές. Αυτό το επιχείρημα δικαιολογεί τον ακόλουθο συμβολισμό.

Ορισμός 2.2.1 *Μια ακολουθία θετικών συσταλτικών προβολών (E_n) επί ενός δικτυωτού πλέγματος Banach F καλείται διήθηση αν*

$$E_nE_m = E_{n\wedge m},\ n, m \in \mathbb{N}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πεδίο τιμών των E_n αποτελεί μια εγκιβωτισμένη αύξουσα ακολουθία, διότι οι προβολές είναι συσταλτικές. Παρατηρούμε πως το αντίστοιχο συμπέρασμα θα ίσχυε αν τα E_n είχαν το ρόλο κατά συνθήκη αναμενόμενων τιμών.

Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και μια διήθηση $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, δηλαδή μία αύξουσα ακολουθία από υπο-σίγμα άλγεβρες του $\mathcal{F}$. Είναι συχνά βολικό να υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{F} = \vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$$

διαφορετικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $\mathcal{F}$ με το $\vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$. Θα γράφουμε $L^p(P)$ για τον χώρο $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Μια διήθηση θα λέγεται πυκνή εάν $E_nx \to x$ ως προς τη νόρμα για κάθε $x \in F$, ή, ισοδύναμα, αν $\cup_{n=1}^{\infty}Range(E_n)$ είναι πυκνό στο F. Αυτή η συνθήκη είναι ανάλογη με τη συνθήκη

$$\mathcal{F} = \vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$$

για τις κλασσικές διηθήσεις. Αντίθετα όμως με την περίπτωση της κλασσικής διήθησης, εν γένει δεν μπορούμε να αντικασταστήσουμε τον F με το $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}Range(E_n)}$ καθώς το τελευταίο σύνολο δεν είναι κατά ανάγκη διατεταγμένος υπόχωρος του F.

Ας σημειωθεί ότι αν μια προβολή είναι αυστηρώς θετική, δηλαδή $Px > 0$ για κάθε $x > 0$, τότε $Range(P)$ είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του F. Γι΄ αυτό το αποτέλεσμα παραπέμπουμε στο [Sch74]. Κατά συνέπεια, αν E_m είναι αυστηρά θετική για κάποιο m τότε $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}Range(E_n)}$ είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος Banach του F. Πραγματικά, για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \geq m$ έχουμε $E_nx \neq 0$ καθώς $0 < E_mx = E_mE_nx$. Έπεται ότι E_n είναι αυστηρά θετική για κάθε $n \geq m$, έτσι ώστε το $Range(E_n)$ είναι διατεταγμένος υπόχωρος. Συνεπώς, όταν μια διήθηση περιέχει μία αυστηρώς θετική προβολή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι πυκνό αντικαθιστώντας τον F με το

$$S = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} Range(E_n)}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια την έννοια του Martingale ([Tro05]) ως ακολούθως.

Ορισμός 2.2.2 *Μια ακολουθία* $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ *συναρτήσεων του* $L^1(P)$ *θα καλείται Martingale ως προς τα* (F_n) *και* P *αν*

$$E(x_m|\mathcal{F}_n) = x_n, \ \forall m \geq n$$

Η ακολουθία θα λέγεται submartingale αν

$$E(x_m|\mathcal{F}_n) \geq x_n, \ \forall m \geq n$$

Ένα martingale X θα καλείται L^p-φραγμένο αν η L^p-Martingale νόρμα, η οποία ορίζεται από την σχέση

$$||X|| = \sup_n ||x_n||_p$$

είναι πεπερασμένη. Ο χώρος όλων των L^p-φραγμένων Martingales θα δηλώνεται ως $M_p = M_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$.

Σημειώνουμε ότι το M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} F)_{\infty}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το M είναι επίσης ένας χώρος Banach. Οι ιδιότητες του χώρου M θα μελετηθούν εκτενέστερα στα επόμενα.

Ένα Martingale X καλείται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν για κάθε θετικό ϵ υπαρχει αριθμός K έτσι ώστε

$$\int_{|x_n|>K} |x_n| dP < \epsilon$$

για κάθε n. Το θεώρημα σύγκλισης Doob [Doob53] εγγυάται ότι ένα Martingale X είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την L^1-νόρμα σε κάποιο στοιχείο $x \in L^1(P)$. Σε αυτή την περίπτωση, $x_n = E(x|\mathcal{F})$ και $||x||_1 = \lim_n ||x_n||_1 = ||X||$.

Στηριζόμενοι στην προηγούμενη παρατήρηση, έχουμε ότι το σύνολο U^1 όλων των ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων Martingales είναι ένας γνήσιος υπόχωρος του M^1, ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^1(P)$, για τον ισομορφισμό που απεικονίζει το $X \in M$ στο $x \in L^1$.

Παράδειγμα 2.2.3 *Θεωρούμε το αποκαλούμενο διπλά-ή-τίποτε Martingale*

$$x_n = 2^n \chi_{[0,2^{-n})}, n \in \mathbb{N}$$

ορίζεται στο μοναδιαίο διάστημα $(0,1)$ *εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue και δυαδική διήθηση. Παρατηρούμε ότι το* (x_n) *είναι* L^1*-φραγμένο, καθώς* $||x_n||_1 = 1$*, αλλά όχι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, καθώς*

$$\int_{|x_n|>K} |x_n| dP > 1,\ n \to \infty$$

Παρόλα αυτά, για κάθε $p > 1$ *κάθε* L^p*-φραγμένο Martingale είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, έτσι ώστε το* M^p *είναι ισομετρικά ισόμορφο με το* $L^p(P)$*.*

Στην συνέχεια, θα θεωρήσουμε σταθερή διήθηση (E_n) του F. Σύμφωνα με τον Ορισμό (2.2.2), μια ακολουθία $X = (x_n)$ στοιχείων του F καλείται Martingale ως προς τη διήθηση αν

$$E_n x_m = x_n,\ n \leq m$$

Έπεται, πιο συγκεκριμένα, ότι $x_n \in Range(E_n)$ για κάθε n. Σύμφωνα με τον ίδιο ορισμό, αν

$$E_n x_m \geq x_n,\ n \leq m$$

τότε η ακολουθία θα αποτελεί submartingale. Θα θεωρούμε στη συνέχεια ότι τα (sub)Martingales είναι φραγμένα, δηλαδή ότι είναι πεπερασμένη η νόρμα

$$||X|| = \sup_n ||x_n|| < +\infty$$

Η θετικότητα μας παρέχει τη δυνατότητα να εξετάσουμε την σύγκλιση ενός Martingale.

Πρόταση 2.2.4 *Αν* (x_n) *είναι martingale ή θετικό submartingale, τότε η ακολουθία* $(||x_n||)$ *είναι συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Θα ισχύει ότι

$$||x_n|| \leq ||E_n x_{n+1}|| \leq ||x_{n+1}||$$

Κατά συνέπεια, λόγω μονοτονίας θα υπάρχει το

$$||X|| = \lim_n ||x_n||$$

Κεφάλαιο 3

Βασικά αποτελέσματα

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, στην περίπτωση των κλασσικών Martingales έχουμε $F = L^1(P)$ και $E_n = E(\cdot|\mathcal{F}_n)$ είναι ακολουθία δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αναφέραμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε πως η διήθηση είναι πυκνή, αλλιώς μπορούμε να εργαστούμε σε έναν μικρότερο σύνδεσμο Banach.

Παρατηρούμε ότι η διήθηση ικανοποιεί μια ακόμα σημαντική ιδιότητα: Διατηρεί τις νόρμες των θετικών διανυσμάτων. Πράγματι, αν $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in F_+$, τότε θα ισχύει $||E_n x|| = ||x||$. Αυτή η παρατήρηση θα αξιοποιηθεί στην συνέχεια.

3.1 Submartingales κυριαρχούμενα από Martingales

Δείχνουμε στην συνέχεια ότι για κάθε φραγμένο Submartingale υπάρχει μοναδικό ελάχιστο Martingale το οποίο το φράσσει.

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω ότι ο F είναι KB-χώρος, και $X = (x_n)$ είναι ένα φραγμένο ως προς τη νόρμα Submartingale. Τότε υπάρχει μοναδικό ελάχιστο ως προς τη νόρμα Martingale Z τέτοιο ώστε $Z \leq X$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $(y_n) = (E_n x_m)_{m \geq n}$. Τότε η (y_n) είναι αύξουσα και φραγμένη άνω απο το $||X||$. Εφόσον ο F είναι χώρος KB, η ακολουθία (y_n) συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $(z_n) = Z$, το οποίο θα είναι και Martingale. Υπολογίζουμε ότι

$$||z_n|| = \lim_m ||E_n x_m|| \leq ||x_m|| = ||X||$$

άρα το $Z \in M$ με $||Z|| \leq ||X||$.

Η σχέση $||X|| = ||Z||$ στο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.1 δεν ισχύει γενικά. Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε το Martingale των σταθερών συναρτήσεων

$$x_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,1]}, n \in \mathbb{N},\ X = (x_n)$$

Τότε $||X|| > 0$ αλλά το ελάχιστο Martingale είναι $Z = 0$.

Πρόταση 3.1.2 *Αν η ακολουθία διηθήσεων (E_n) διατηρεί τη νόρμα των θετικών τελεστών και X είναι ένα θετικό Submartingale, τότε ισχύει η ισότητα στο Θεώρημα 3.1.1.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$||z_n|| = \lim_m ||E_n x_m|| = ||x_m|| = ||X||$$

άρα και $||Z|| = ||X||$.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι αποδείξεις των προηγούμενων αποτελεσμάτων δεν μεταβάλλονται αν η συνθήκη $||X|| < +\infty$ αντικατασταθεί από την $\sup_n ||x_n^+|| < +\infty$.

3.2 Τελεστές επί ενός Martingale

Αν F είναι ένας σύνδεσμος Banach, και (E_n) είναι διήθηση του F, θεωρούμε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : F \to F$.

Πρόταση 3.2.1 *Υποθέτουμε ότι το όριο (ως προς τη νόρμα)*

$$\lim_{n\to} E_m(Tx_n) = y_m, m \in \mathbb{N}$$

υπαρχει για κάθε φραγμένο Martingale $X = (x_n)$. Αν $(y_m) = Y$, τότε το Y είναι επίσης Martingale.

Απόδειξη. Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_k y_m &= \lim_{n\to\infty} E_k E_m T x_n \\ &= \lim E_k T x_n \\ &= y_k, \forall k \leq m \end{aligned}$$

Από την σχέση

$$||y_m|| \leq ||T|| ||X|| \Rightarrow ||Y|| \leq ||T|| ||X||$$

έπεται ότι το T επαγει έναν τελεστή $\hat{T} \in L(M)$, για τον οποίο $||\hat{T}|| \leq ||T||$.

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου (Ex_n) πυκνό στον F. Τότε ο F μπορεί να ταυτιστεί με τον υπόχωρο του M,

$$N = \{x \in M : (\exists y) E_n x \to y\}$$

Σε αυτή την περίπτωση, για τον τελεστή $\hat{T}$ στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.1, θα ισχύει αναγκαστικά $||T|| = ||\hat{T}||$. Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός ότι η επέκταση ενός τελεστή από τον $L(F)$ στον $L(M)$ δεν χρειάζεται να είναι μοναδική. Πραγματικά, όταν ο χώρος F είναι KB-χώρος, και (E_n) ειναι πυκνό, τότε $M = F \oplus F^d$ και οι τιμές στον F^d δεν ειναι μηδενικές, η επέκταση μπορεί να γίνει με τυχαίο τρόπο στον F^d.

Πρόταση 3.2.2 *Εάν ο T αντιμετατίθεται με το (E_n) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε ο τελεστής $\hat{T} \in L(M)$ ορίζεται.*

Απόδειξη. Αν $X = (x_n)$ είναι ένα φραγμένο Martingale, και $n \leq m$. Τότε

$$E_m T x_n = T E_m x_n = T x_m$$

άρα το (Tx_n) είναι Martingale. Θέτοντας $y_n = Tx_n, Y = (y_n)$ τότε

$$y_m = \lim_n E_m T x_n \ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow Y = \hat{T} X.$$

Πρόταση 3.2.3 *Αν ο F είναι KB-χώρος, και είτε:*
(α) $TE_n \geq E_n T, \forall n$
(β) $TE_n \leq E_n T, \forall n$.
Τότε ο τελεστής $\hat{T} \in L(M)$ ορίζεται.

Απόδειξη. Αν $X = (x_n)$ είναι ένα φραγμένο Martingale, αρκεί να αποδειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{n \to} E_m(Tx_n) = y_m, m \in \mathbb{N}$$

υπάρχει για κάθε n. Το X τότε είναι κανονικό, άρα μπορεί χωρίς βλάβη γενικότητας να αποδειχθεί ότι $X \geq 0$. Από τις υποθέσεις επίσης θα ισχύει

$$||E_m(Tx_n)|| \leq ||T|| ||X||$$

άρα η ακολουθία $E_m(Tx_n), n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα. Για κάθε $n \leq m$, από την περίπτωση (α) θα ισχύει

$$E_m(Tx_n) = E_m T E_n x_{n+1} \geq E_m E_n T x_{n+1} = E_m T x_{n+1}$$

ενώ στην περίπτωση (β) θα ισχύει

$$E_m(Tx_n) = E_m T E_n x_{n+1} \leq E_m E_n T x_{n+1} = E_m T x_{n+1}$$

Σε κάθε περίπτωση, θα έχουμε ότι η ακολουθία $E_m(Tx_n), n \in \mathbb{N}$ είναι μονότονη, άρα και συγκλίνουσα καθώς ο F είναι χώρος KB.

3.3 Σύγκλιση στον χώρο M

Αν F είναι ένας σύνδεσμος Banach, και (E_n) μια διήθηση του F, γράφουμε $M = M(F,(E_n))$. Τότε για κάθε $x \in F$ η ακολουθία $X = (E_n x)$ είναι ένα Martingale. Όταν η σχέση αυτή ισχύει για ένα Martingale X, τότε το X θα αποκαλείται σταθερό. Άμεσα λαμβάνουμε από την σχέση

$$||X|| \leq ||x||$$

ότι η απεικόνιση

$$x \mapsto (E_n x), \forall x \in F$$

είναι γραμμική συστολή του F στο M. Αποδεικνύουμε τώρα το ακόλουθα.

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω (E_n) διήθηση του F και $M = M(F,(E_n))$. Αν η ακολουθία (E_n) είναι πυκνή ($E_n x_n \to x, \forall x \in F$). Τότε κάθε φραγμένο Martingale (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι σταθερό, δηλαδή*

$$(\exists x \in F) x_n = E_n x, \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι κάθε Martingale που συγκλίνει, είναι σταθερό στο όριό του. Πράγματι,

$$\lim_m x_m = x \Rightarrow \lim_m E_n x_m = E_n x \Rightarrow Enx = x_n$$

και άρα

$$E_n x \to x, \forall x \in F$$

εφόσον η διήθηση είναι πλήρης. Άρα το (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι σταθερό.

Πρόταση 3.3.2 *Υποθέτουμε ότι κάθε σταθερό Martingale συγκλίνει. Τότε ο χώρος F είναι ισομετρικός με έναν υπόχωρο του M. Αν επιπλέον ο χώρος F είναι χώρος KB και η διήθηση είναι πύκνή, τότε το F είναι ένα ταινιωτό προβολής στον $M = M(F,(E_n))$.*

Απόδειξη. Αν ένα Martingale (x_n) συγκλίνει, τότε

$$||X|| = \lim_n ||x_n|| = \lim_n ||E_n x|| = ||x||$$

άρα έχουμε ότι η απεικόνιση

$$x \mapsto (E_n x)$$

είναι ισομετρία. Συνεπώς, το F εμφυτεύεται ισομετρικά στο M, και μπορούμε να θεωρούμε το F υπόχωρο του M. Αν επιπλέον ο F είναι χώρος KB, τότε κάθε αύξουσα ακολουθία $(x_n) \subseteq F_+$ φραγμένη ως προς τη διάταξη είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα, άρα θα υπάρχει το $\sup(x_n) \in F$. Το M είναι όμως πλήρες κατά Dedekind, άρα το F είναι ταινιωτό προβολής του M.

3.4 Η δυϊκή διήθηση

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδειχθεί ότι υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση του $M = M(F,(E_n))$ εντός του διδυικού χώρου $F**$.

Πρόταση 3.4.1 *Έστω (E_n) διήθηση ενός συνδέσμου Banach F. Τότε η ακολουθία των δυικών τελεστών (E_n^*) είναι μια διήθηση επί του δυικού συνδέσμου Banach, F^*.*

Απόδειξη. Οι τελεστές (E_n^*) είναι συσταλτικοί και θετικοί για κάθε n. Έχουμε ότι

$$E_n^* E_m^* = (E_m E_n)^* = E_{n\wedge m}^*, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Πιο συγκεκριμένα, (E_n) είναι προβολή επί του χώρου F^*, καθώς $(E_n^*)^2 = E_n^*$.

Πρόταση 3.4.2 *Αν η διήθηση (E_n) είναι πυκνή τότε*

$$E_n^*(f) \stackrel{w^*}{\to} f,\ ||E_n^* f|| \to ||f||, \forall f \in F^*$$

Ειδικότερα, η απεικόνιση

$$f \mapsto (E_n^* f)$$

είναι μια ισομετρική εμβάπτιση του F^* στον $M(F^*,(E_n^*))$.

Απόδειξη. Αν η διήθηση (E_n) είναι πυκνή τότε

$$E_n(x) \to x, \forall x \in F$$

άρα και

$$(E_n^*)f(x) = f(E_n x) \to f(x), \forall f \in F^*$$

δηλαδή

$$E_n^*(f) \stackrel{w^*}{\to} f$$

Θα αποδειχθεί ότι επίσης $||E_n^*(f)|| \to ||f||$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $||f|| = 1$, διαφορετικά αντικαθιστούμε την f με την $f/||f||$. Τότε θα ισχύει

$$||E_n^* f|| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Θεωρούμε $x \in F$ με $f(x) > 1 - \epsilon$. Λόγω πυκνότητας, $E_n x \to x$, άρα υπάρχει n ώστε

$$||E_n x - x|| < \epsilon \Rightarrow |f(E_n x) - f(x)| < \epsilon$$

απ΄ όπου θα ισχύει

$$|E_n^* f(x) - 1| \leq |f(E_n x) - f(x)| + |f(x) - 1| < 2\epsilon, \forall f \in F^*$$

άρα

$$||E_n^* f|| > 1 - 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$$

και καθώς $\epsilon > 0$ τυχαίο, $||E_n^* f|| \to 1$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η δυική εκδοχή αυτής της πρότασης.

Πρόταση 3.4.3 *Αν η διήθηση (E_n^*) είναι πυκνή τότε*

$$E_n(x) \xrightarrow{w} x,\ ||E_n(x)|| \to ||x||, \forall x \in F$$

Ειδικότερα, η απεικόνιση

$$x \mapsto (E_n x), \forall x \in F$$

είναι μια ισομετρική εμβάπτιση του F στον $M(F,(E_n))$.

Απόδειξη. Αν η διήθηση (E_n^*) είναι πυκνή τότε

$$E_n^*(f) \to f, \forall f \in F^*$$

άρα και

$$f(E_n(x)) = (E_n^*) f(x) \to f(x), \forall x \in F$$

Αν στην τελευταία το $f \in F^{*}*$ είναι σταθερό, τότε

$$||E_n x|| = ||E_n^{**} x|| \to ||x||$$

Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης, έχουμε μια δυϊκή εκδοχή και του αποτελέσματος σχετικά με την σύγκλιση Martingales.

Πρόταση 3.4.4 *Κάθε ασθενώς*-συγκλίνον Martingale του F^* ως προς την (E_n^*) είναι και σταθερό.*

Απόδειξη. Αν (f_n) είναι ένα Martingale του F^* ως προς την διήθηση (E_n^*) με

$$f_n(x) \xrightarrow{w^*} f,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Εφόσον (E_m^*) αυτοσυζυγής, θα είναι και ασθενώς*-συνεχής για κάθε m, και άρα

$$E_m^* f_n \xrightarrow{w^*} E_m^* f$$

όπου $E_m^* f_n = f_m,\ n \geq m$, άρα και $f_m = E_m^* f,\ m \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.4.5 *Αν F σύνδεσμος Banach και (E_n) διήθηση με $M = M(F,(E_n), Y = \cup_n Range(E_n^*)$. Τότε:*
α) Η ακολουθία $(f(x_m))$ σταθεροποιείται για κάθε Martingale (x_m) και κάθε $f \in Y$, δηλαδή

$$(\forall f \in Range E_n^*) f(x_m) = f(x_n),\ \forall m \geq n$$

β) Κάθε Martingale του F είναι $\sigma(F,Y)$-Cauchy.
γ) Ο M εμβαπτίζεται ισομετρικά στον Y^* μέσω της απεικόνισης

$$X = (x_n) \mapsto \theta_X \in Y^*,\ \theta_X(f) = f(x_n),\ \forall f \in Range(E_n^*)$$

δ) Αν $X \in M$ τότε ο X σταθεροποιείται ως Martingale στον F^{**}.

Απόδειξη. α) Θεωρούμε ένα Martingale $x = (x_m)$ και $f \in RangeE_n^*, n \in \mathbb{N}$. Καθώς $E_n^* f = f$ για $m \geq n$ θα ισχύει

$$f(x_m) = (E_n^* f)(x_m) = f(x_m)$$

απο όπου το όριο $\lim_m f(x_m)$ θα υπάρχει και θα είναι ίσο με $f(x_n)$. Η σύγκλιση της $f(x_m)$ συνεπάγεται την ισχύ και του β).
γ) Θεωρούμε ένα φραγμένο Martingale $x = (x_m)$ και για κάθε $f \in RangeE_n^*, n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\theta_X(f) = f(x_n) = \lim_m f(x_m)$$

Η θ_X είναι γραμμική καθώς για κάθε $f, g \in RangeE_n^*$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\theta_X(af + bg) = af(x_n) + bg(x_n) = \lim_m (af(x_m) + bg(x_m))$$

Απο την σχέση

$$|f(x_m)| \leq ||f|| ||x_m|| \leq ||f|| ||X||, \forall\ m$$

έπεται πως $||\theta_X|| \leq ||X||$, άρα και $\theta_X \in Y^*$. Απομένει να αποδειχθεί ότι $\theta_X = ||X||$, και άρα η απεικόνιση $X \mapsto \theta_X$ θα είναι ισομετρία. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, θα υπάρχει $f \in F^*$ έτσι ώστε $||f|| = 1, f(x_n) = ||x_n||$. Καθώς $E_n f \in Range(E_n^*)$ ισχύει

$$\theta_X(E_n^* f) = E_n^* f(x_n) = f(E_n x_n) = f(x_n) = ||x_n|| \geq ||E_n^* f|| ||x_n||$$

Οπότε και

$$||\theta_X|| \geq ||x_n||, \forall n \Rightarrow ||\theta_X|| = ||X||$$

(δ) Με χρήση του Θεωρήματος Hahn-Banach, μπορούμε να επεκτείνουμε το θ_X σε ένα στοιχείο $x^{**} \in F^{**}$. Τότε για $f \in F^*, n \in \mathbb{N}$ θα είναι

$$\begin{aligned} \langle E_n^{**} x^{**}, f \rangle &= \langle x^{**}, E_n^* f \rangle \\ &= \theta_X(E_n^* f) \\ &= E_n^* f(x_n) \\ &= f(E_n x_n) \\ &= \langle f, x_n \rangle \end{aligned}$$

άρα

$$E_n^{**} x^{**} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Είναι άμεσο τώρα το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 3.4.6 *α) Αν $(E_n^*))$ είναι πυκνή διήθηση τότε ο $M(F, (E_n))$ εμβαπτίζεται ισομετρικά στον F^{**}.*
β) Κάθε Martingale $X = (x_n)$ του M είναι ασθενως*-συγκλίνον.
γ) Η απεικόνιση $\Phi : X \mapsto w^* - \lim_n x_n$ είναι αύξουσα ισομετρία του M στο F^{**}.

Απόδειξη. Εφόσον $(E_n^*))$ είναι πυκνή διήθηση, $Y^* = F^{**}$. Για κάθε φραγμένο Martingale $X = (x_n)$ του M, ορίζουμε την

$$\theta_X(f) = f(x_n) = \lim_m f(x_m)$$

Ο χώρος Y είναι πυκνός στον F^*, άρα από το Θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επεκτείνουμε το θ_X σε ένα στοιχείο $\theta_X \in F^{**}$. Τότε για $f \in F^*, m \in \mathbb{N}$ θα είναι

$$\theta_X(E_m^* f) = E_m^* f(x_m) = f(E_m x_m) = f(x_m)$$

άρα και

$$\begin{aligned} |\langle x_m, f\rangle - \langle \theta_X, f\rangle| &= |\langle \theta_X, E_m^* f\rangle - \langle \theta_X, f\rangle| \\ &\leq ||\theta_X|| ||E_m^* f - f|| \to 0 \end{aligned}$$

Το επόμενο Πόρισμα συνοψίζει το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου.

Πόρισμα 3.4.7 *Αν F είναι χώρος KB και η $(E_n^*))$ είναι πυκνή διήθηση, τότε ο $M(F, (E_n))$ και ο F είναι ισομετρικοί σύνδεσμοι Banach.*

Απόδειξη. Αν $X = (x_n)$ είναι φραγμένο Martingale, ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi : X \mapsto w^* - \lim_n x_n$, η οποία είναι αύξουσα ισομετρία του M στο F^{**}. Καθώς ο F είναι ασθενώς ακολουθιακά πλήρης, το $w^* - \lim_n x_n \in F$.

Κεφάλαιο 4

Παραδειγματα και Εφαρμογές

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε εφαρμογές των διηθήσεων και των σχετικών Martingales σε διάφορους χώρους Banach, ώστε να ξεκαθαριστεί ο τρόπος με τον οποίο εμφυτεύεται το σύνολο M των φραγμένων Martingales στον χώρο F.

4.1 Βάσεις και Martingales

Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα Martingales τα οποία σχετίζονται με βάσεις Schauder σε χώρους Banach.

Παράδειγμα 4.1.1 *Υποθέτουμε ότι* (e_i) *είναι μια 1-μη κατα συνθήκη βάση του* F, *έτσι ώστε* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \geq 0$ *αν και μόνο αν* $a_i \geq 0$ *για κάθε* $i \geq 1$. *Για κάθε* $n \geq 1$ *έστω* E_n *η* n*-οστή προβολή βάσης η οποία δίνεται από την σχέση*

$$E_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Τότε η (E_n) *είναι πυκνή διήθηση. Παρατηρούμε ότι η* (x_n) *είναι ένα martingale αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία αριθμών* (a_i) *έτσι ώστε*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \forall n \geq 1$$

Σε αυτό το πλαίσιο, ένα Martingale (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει $z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ έτσι ώστε

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Σε αυτή την περίπτωση x_n συγκλίνει στο z, και η βάση (e_i) θα είναι φραγμένα πλήρης αν και μόνο αν κάθε φραγμένο Martingale συγκλίνει.

Το προηγούμενο παράδειγμα παράγει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4.1.2 *Θεωρούμε την περίπτωση $F = c_0$. Τότε, το $X = (x_n)$ είναι ένα Martingale στον c_0 αν και μόνο αν υπάρχει πραγματική ακολουθία (a_i) έτσι ώστε*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, n \geq 1$$

Το X θα είναι φραγμένο αν και μόνο αν η (a_i) είναι φραγμένη, στην οποία περίπτωση

$$||X|| = \sup_i |a_i|$$

οπότε το M μπορεί να ταυτιστεί με το ℓ^∞. Έχουμε ότι το M δεν είναι διαχωρίσιμος χώρος, παρότι ο X είναι.

Με την βοήθεια του Πορίσματος 3.4.6, τα προηγούμενα δύο παραδείγματα συμπληρώνονται στο ακόλουθο Παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.3 *α) Έστω (E_n) διήθηση μέσω βάσης Schauder του F, όπως στο Παράδειγμα 4.1.1. Τότε η (e_i) θα φθίνει αν και μόνο αν (E_n^*) πυκνή διήθηση, και από το Πόρισμα 3.4.6, ο $M(F,(E_n))$ εμβαπτίζεται ισομετρικά στον F^{**}.*
β) Έστω F όπως στο Παράδειγμα 4.1.2. Τότε, από το Πόρισμα 3.4.6, $M = F^{**}$.

4.2 Ασθενή όρια φραγμένων Submartingales

Ξεκινούμε με δύο χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω $X = (x_n), Y = (y_n)$ δύο φραγμένα submartingales. Τότε:*
(α) Για n σταθερό, η ακολουθία $(E_n(x_m \vee y_m))_{m=n}^{\infty}$ είναι αύξουσα και φραγμένη άνω από την έκφραση $||X|| + ||Y||$, και φραγμένο κάτω $(x_m \vee y_m)$.
(β) Αν επιπλέον η ακολουθία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο (z_n), τότε $Z = (z_n)$ ορίζει ένα φραγμένο Martingale, το οποίο είναι ελάχιστο με την ιδιότητα $X \leq Z, Y \leq Z$.

Απόδειξη. (α) Αν $n \leq m$ τότε

$$E_n(x_m \vee y_m) \geq (E_n x_m) \vee (E_n y_m) = x_n \vee y_n$$

αλλά και

$$E_n(x_{m+1} \vee y_{m+1}) = E_n E_m(x_{m+1} \vee y_{m+1}) \geq E_n(E_m x_{m+1} \vee E_m y_{m+1}) = E_n(x_m \vee y_m)$$

απ΄ όπου έχουμε

$$||E_n(x_m \vee y_m)|| \geq ||x_m \vee y_m|| \leq |||x_m| + |y_m||| \leq ||X|| + ||Y||$$

(β) Έστω ότι $w - \lim_m E_n(x_m \vee y_m) = z_n$ και $Z = (z_n)$. Το Z είναι Martingale. Πραγματικά, $\forall k \leq n$ ισχύει

$$E_k z_n = E_k(w - \lim_m E_n(x_m \vee y_m)) - w - \lim_m E_k E_n(x_m \vee y_m) = w - \lim_m E_k(x_m \vee y_m) = z_k$$

Από τις ιδιότητες της ασθενούς σύγκλισης, θα ισχύει

$$||z_n|| \leq \liminf ||E_n(x_m \vee y_m|| \leq ||X|| + ||Y||$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα Z φραγμένο. Εφόσον

$$E_n(x_m \vee y_m) \geq x_n \vee y_n, \ \forall m \geq n$$

θα έχουμε $z_n \geq x_n \vee y_n$ για κάθε n. Συνεπώς $Z \geq X$ και $Z \geq Y$. Επίσης όμως αν $W = (w_n)$ είναι Martingale έτσι ώστε $W \geq X$ και $W \geq Y$, θα έχουμε ότι $w_m \geq x_m \vee y_m$ για κάθε m, άρα θα ισχύει

$$w_n = E_n w_m \geq E_n(x_m \vee y_m), \ \forall m \geq n$$

Καθώς $w - \lim_m E_n(x_m \vee y_m) = z_n, \forall n$, αυτό μας δίνει $w_n \geq z_n, \forall n$, οπότε και $W \geq Z$.

Λήμμα 4.2.2 *Έστω ότι το $w - \lim_m E_n|x_m|$ υπάρχει για κάθε Martingale (x_m). Τότε: Για κάθε $X = (x_n), Y = (y_n)$*

$$(X \vee Y)_n = w - \lim_m E_n(x_m \vee y_m)$$

$$|X|_n = w - \lim_m E_n|x_m|$$

Απόδειξη. Αν $X, Y \in M$, θέτουμε $Z = X - Y$, και τότε . Γράφοντας $X - (x_n), Y = (y_n), Z = (z_n)$. Τότε για κάθε είναι

$$E_n(x_m \vee y_m) = E_n(\frac{x_m + y_m}{2} + \frac{|x_m - y_m|}{2}) = E_n(\frac{x_m + y_m}{2})) + \frac{1}{2} E_n|z_m|$$

και το ασθενές όριο αυτής της έκφρασης υπάρχει. Συνεπώς, από το Λήμμα (4.2.1) το $X \vee Y$ είναι φραγμένο Martingale. Συνεπώς το M είναι σύνδεσμος Banach με τις πράξεις που αναφέρθηκαν.
Απομένει να αποδειχθεί ότι $||X|| = || \ |X| \ ||, \forall X \in M$. Γράφοντας $Z = |X|, X = (x_n), Z = (z_n)$ τότε θα ισχύει $w - \lim_m E_n|x_m| = z_n, \forall n$. Τότε ορίζοντας

$$U = \{f \in F_+^* : ||f|| \leq 1\}$$

την μοναδιαία μπάλα στον F_+^*, και

$$||z_n|| = \sup_{f \in U} f(z_n) = \sup_f \lim_m f(E_n|x_m|)$$

από όπου $||Z|| \leq ||X||$ καθώς

$$f(R_m|x_m|) \leq ||f||||E_n||||x_m|| \leq ||X||, \forall f \in U$$

Για $n \leq m$ θα ισχύει

$$|x_n| = |E_n x_m| \leq E_n|x_m| \Rightarrow f(E_n|x_m|) \geq f(|x_n|), \forall f \in U$$

Δηλαδή $||z_n|| \geq ||\ |x_n|\ || = ||x_n||$ άρα $||X|| \leq ||Z||$.

Η επόμενη πρόταση θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου.

Πρόταση 4.2.3 *Θεωρούμε το σύνολο* $M = (F, (E_n))$.
(α) Έστω ότι κάθε φραγμένη ακολουθία του χώρου F *συγκλίνει ασθενώς. Τότε το* M *είναι σύνδεσμος Banach και, αν* $X, Y \in M$ *με* $X = (x_n), Y = (y_n)$ *τότε* $(X \vee Y)_n = w - \lim_n E_n(x_m \vee y_m)$.
(β) Έστω ότι (E_n) *είναι ακολουθία ταινιωτών προβολής, τότε το* M *είναι σύνδεσμος Banach με πράξεις ανά συνιστώσα.*

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τα Λήμματα 4.2.1,4.2.2.
(β) Έστω $X = (x_n) \in M$. Τότε για $m \geq n$ έχουμε

$$E_n(x_m) = |E_n x_m| = |x_n|$$

και έχουμε το ζητούμενο από το Λήμμα 4.2.2.

Θεώρημα 4.2.4 *Αν το* F *είναι συνεχές ως προς τη διάταξη, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
(α) Το M *είναι σύνδεσμος Banach.*
(β) $\forall n$, *το* $(E_n|x_m|)_m$ *συγκλίνει ασθενώς* $\forall (x_n) \in M$.
(γ) $\forall n$, *το* $(E_n|x_m|)_m$ *συγκλίνει ισχυρώς (ως προς τη νόρμα),* $\forall (x_n) \in M$.

Απόδειξη. (α)⇔(β). Έστω ότι το M είναι σύνδεσμος Banach και έστω $X = (x_n) \in M$. Τότε από την σχέση $|x_m| \leq y_m$ θα ισχύει

$$0 \leq E|x_m| \leq E_n y_m = y_n, \forall n \leq m$$

Συνεπώς, η ακολουθία $(E_n|x_m|)_{m \geq n}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα από την συνέχεια του F ως προς τη διάταξη, τα διαστήματα της διάταξης εντός του F είναι ασθενώς συμπαγή.
Άρα η $(E_n|x_m|)_m$ έχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, και έπεται από το Λήμμα 4.2.1 ότι η $(E_n|x_m|)_m$ είναι αύξουσα, οπότε και η αρχική ακολουθία είναι ασθενώς συγκλίνουσα.

(β)⇔(γ). Από το Λήμμα 4.2.1, η ακολουθία $(E_n|x_m|)_m$ είναι αύξουσα, και κάθε αύξουσα ασθενώς συνεχής ακολουθία είναι ισχυρώς συγκλίνουσα.

(γ)⇔(α). Έπεται άμεσα από το Λήμμα 4.2.2.

4.3 Μια περίπτωση όπου το M δεν είναι σύνδεσμος Banach

Σε αυτή την παράγραφο, κατασκευάζουμε διήθηση (E_n) επί του χώρου

$$c_0 = \{(x_n) \subset F : x_n \to 0\}$$

έτσι ώστε το $M = M(c_0, (E_n))$ να μην είναι σύνδεσμος Banach.
Ως γνωστό, ένας τελεστής $T \in L(c_0)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας άπειρος πίνακας όπου στην στήλη j έχουμε το στοιχείο $Te_j = (0, 0, \ldots, 1, \ldots)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ έστω

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1/2 & 1/2 & & & \\ & & 1/2 & 1/2 & & & \\ & & & & 1/2 & 1/2 & \\ & & & & 1/2 & 1/2 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου υπάρχουν $2n$ μονάδες στην άνω αριστερή γωνία. Τότε θα έχουμε

$$E_n e_i = e_i, \ i \leq 2n$$

$$E_n e_{2k-1} = E_n e_{2k} = \frac{e_{2k-1} + e_{2k}}{2}, \ n < k$$

Ας σημειωθεί ότι ο E_0 δεν έχει μονάδες. Η (E_n) είναι πυκνή διήθηση, και θέτοντας

$$x_n = (-1, 1, \ldots, -1, 1, 0, \ldots), \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

με $2n$ μη μηδενικά στοιχεία, παρατηρούμε ότι το (x_n) είναι φραγμένο Martingale ως προς το (E_n). Αλλά από την κατασκευή του πίνακα ,

$$E_0|x_n| = (1, 1, \ldots, 1, 1, 0, \ldots), \ n \in \mathbb{N}$$

Η ακολουθία $(E_0|x_n|)$ αποκλίνει, άρα από αυτό το συμπέρασμα και το Θεώρημα 4.2.4, έπεται πως το $M = M(F, (E_n))$ δεν μπορεί να είναι σύνδεσμος Banach.

4.4 Το F ως κλειστός υπόχωρος του M

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.1, αν το F είναι σύνδεσμος Banach και (E_n) φιλτράρισμα του F τέτοιο ώστε το (E_n) είναι πυκνό (δηλαδή $E_n x \to x, \forall x \in F$) τότε, ένα φραγμένο Martingale (x_n) θα συγκλίνει αν και μόνο αν το (x_n) είναι σταθερό, δηλαδή $(\exists x \in F) x_n = E x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Για τα επόμενα, θεωρούμε σταθερό φιλτράρισμα (E_n) του F.

Λήμμα 4.4.1 *Έστω η απεικόνιση $\phi : F \to M$, $\phi(x) = (E_n x)_{n=1}^{\infty}$. Τότε:*
(α) Η ϕ είναι ομοιομορφισμός δικτυωτών πλεγμάτων και το F είναι πλεγματικά ισομετρικό με έναν κλειστό υπόχωρο του M.
(β) Αν η F είναι συνεχής ως προς τη διάταξη και το M είναι σύνδεσμος Banach, τότε το M είναι και πλήρες ως προς τη διάταξη. Αν επιπλέον το (E_n) είναι πυκνό, τότε το $\phi(F)$ είναι ιδεώδες του M.

Απόδειξη. (α) Από τον ορισμό της ϕ έχουμε ότι είναι ισομετρική. Τώρα για τυχαία $x, y \in F$ με $x_n = E_n x$ και $y_n = E_n y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς οι πράξεις της διάταξης είναι συνεχείς συναρτήσεις, ισχύει

$$x_n \vee y_n \to x \vee y$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$im_{m \to \inf} E_n(x_m \vee y_m) = E_n(\lim_{m \to} x_m \vee y_m) = E_n(x \vee y)$$

Από το Λήμμα 4.1.1, θα είναι $\phi(x) \vee \phi(y) = \phi(x \vee y)$, άρα και

$$\phi(x \wedge y) = -\phi((-x) \wedge (-y)) = -(\phi(-x) \vee \phi(-y)) = \phi(x)$$

(β) Αρχικά δείχνουμε οτι το M είναι πλήρες ως προς τη διάταξη. Έστω $0 \leq X^{(a)} \uparrow\leq X$. Θέτουμε $X = (x_n)$ και $X^{(a)} = (x_n^{(a)})$. Τότε $0 \leq x_n^{(a)} \uparrow\leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον το F είναι συνεχές ως προς τη διάταξη, για κάθε n υπάρχει έτσι y_n ώστε να έχουμε $x_n^{(a)} \to y_n$. Έστω $Y = (y_n)$. Τότε το Y είναι martingale, άρα $0 \leq Y \leq X$ και το Y είναι φραγμένο, άρα $Y \in M$.
Υποθέτουμε τώρα ότι το (E_n) είναι πυκνό, και έστω $M_0 = \phi(F)$. Τότε το F είναι συνδεσμικά ισομετρικό ως με το M_0, το οποίο είναι ιδεώδες του M. Πράγματι, υποθέτουμε $0 \leq Y \leq X$ για κάποιο $X \in M$ και για κάποιο $Y \in M_0$. Αν $X = (x_n)$ και $Y = (y_n)$, τότε $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n και άρα υπάρχει $y \in F$ έτσι ώστε $y_n = E_n y$ για κάθε n. Θεωρούμε σταθερό $\epsilon > 0$. Συνεπάγεται ότι $y_n \to y$ και άρα υπάρχει n_0 έτσι ώστε $||y_n - y|| < \epsilon$ όταν $n \geq n_0$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$|x_n - x_n \wedge y_n| = |x_n \wedge y_n - x_n \wedge y| \leq |y_n - y|$$

Από αυτό θα έχουμε

$$||x_n - x_n \wedge y|| < \epsilon, n \geq n_0$$

και άρα $x_n \wedge y \in [0, y]$, ή $x_n \in [0, y] + B_\epsilon, n \geq 0$. Συνεπώς, (x_n) είναι σχεδόν φραγμένο ως προς τη διάταξη, και άρα συγκλίνει στο M_0. Αν τώρα $Y \in M_0$ και $X \in M$ έτσι ώστε $|X| \leq Y$, θα ισχύει $0 \leq X^+, X^- \leq Y$, και άρα $X^+, X^- \in M_0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $X \in M_0$ και το M_0 είναι δίπλευρο ιδεώδες.

Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.2 *Αν F είναι ένας KB-χώρος και το (E_n) είναι πυκνό τότε το $\phi(F)$ είναι ταινιωτό προβολής επί του M.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.3.1, το M είναι ένα πλήρες ως προς τη διάταξη σύνδεσμος Banach. Συμβολίζουμε με $M_0 = \phi(F)$. Από το Λήμμα 4.3.1 επίσης, το M_0 είναι ιδεώδες του M. Απομένει να αποδειχθεί ότι το M_0 είναι ταινιωτό επειδή κάθε ταινιωτό είναι πλήρες ως προς τη διάταξη [AB85,Θεώρημα 3.8].
Για να αποδειχθεί ότι το M_0 είναι δικτυωτό, υποθέτουμε ότι $0 \le X^{(a)} \uparrow \le X$ για κάποιο δίκτυο $(X^{(a)})$ του M_0 και κάποιο $X \in M$. Θέτοντας $X = (x_n)$ και $X^{(a)} = (x_n^a)$, έστω $X^{(a)} = \phi(x^{(a)})$ για κάποιο $x^{(a)} \in F$. Τότε

$$||x^a|| = ||X^{(a)}|| \le ||X||, \forall a$$

άρα το δικτυωτό $(x_n^{(a)})$ είναι φραγμένο ως προς τη νόρμα. Εφόσον το F είναι KB-χώρος, το δίκτυο συγκλίνει ως προς τη νόρμα σε κάποιο $y \in F$, και ότι $x^{(a)} \uparrow y \in F$. Αν $Y = \phi(y), Y = (y_n)$, για κάθε a είναι

$$x^{(a)} \le y \Rightarrow X^{(a)} \le Y, \forall a$$

Από το γεγονός ότι $x^{(a)} \to y$, αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_a x_n^{(a)} = y_n, \forall n$ άρα

$$x_n^{(a)} \le x_n \Rightarrow y_n \le x_n \Rightarrow Y \le X$$

Οπότε, $X = Y$ και $X \in M_0$.

Βιβλιογραφία

[AA02] Y.A. Abramovich and C. D. Aliprantis, *An initation to operator theory.* vol 50 of *Graduate Studies in Mathematics,* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[AAB93] Y.A. Abramovich, C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *An elementary proof of Douglas' theorem on contractive projection on L_1 spaces.* J. Math. Anal. Appl. 177(2):641-644 1993.

[AB85] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Positive operators.* Academic Press Inc., Orlando, Fla., 1985.

[Brezis] H. Brezis,. *Συναρτησιακή Ανάλυση.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 1997.

[BDG72] D. L. Burkholder, B. J. Davis, and R. F. Gundy. *Integral inequalities for convex functions of operators on martingales.* In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley Calif., 1970/1971) Vol II: Probability theory, pages 223-240, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

[Bur81] D. L. Burkholder. *A geometrical charactirization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9(6):997-1011 1981.

[Bur84] D. L. Burkholder. *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms.* Ann. Probab. 12(3):647-702 1984.

[Bur01] D. L. Burkholder. *Martingales and singular integrals in Banach spaces.* In Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol I, pages 233-269. North-Holland, Amsterdam 2001.

[DeM66] R. DeMarr. *A martingale convergence theorem in vector lattices.* Canad. J. Math., 18:424-432, 1966.

[dJ82] E. de Jonge. *Bands, Riesz subspaces and projections.* Indag. Math., 44(2):201-214, 1982.

[DO75] L. E. Dor and E. Odell. *Monotone bases in L_p.* Pacific J. Math.60(2):51-61, 1975.

[DiO77] J. Diestel and J.J. Uhl, Jr. *Vector Measures.* American Mathematical Society, Providence R.I., 1977.

[Doob94] J. L. Doob *Measure Theory.* Springer-Verlag, New York 1994.

[Evans] Evans L., *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[dJ82] de Jonge, E., *Bands, Riesz subspaces and projections.* Indag. Math. 44(2):201-214, 1982.

[katab] Κατάβολος Α. *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών.* Συμμετρία, 2008.

[Kr56] Krickenberg K., *Convergence of martingales with a directed index set.* Trans. Am. Math. Soc., 83:313-337, 1956.

[M91] Meyer-Nieberg P., *Banach Lattices.* Springer-Verlag, Berlin 1991.

[Neg] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β., *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση.* Αίθρα, 1989.

[Sch74] Schaefer H.H., *Banach Lattices and Positive Operators.* Springer, 1974.

[Sch80] Schaefer H.H., *Topological Vector Spaces.* Springer, 1980.

[Tro05] V. G. Troitsky, *Martingales in Banach lattices.* Positivity, no 9(3), 437-456, 2005.

[W91] Williams, D., *Probability with Martingales.* C.U.P., Cambridge 1991.