Τραχανα Ματινα

Εισαγωγη στη Θεωρια Τελεστων

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος, 12 Φεβρουαριου 2016

Εισηγητής: Ευάγγελος Φελουζής

Επιτροπή

Χρήστος Νικολόπουλος

Αγαπητός Χατζηνικήτας

Στην οικογένειά μου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα αναφέρουμε συνοπτικά κάποιες γενικές έννοιες και θεωρήματα από την συναρτησιακή ανάλυση τα οποία θα μας χρειαστούν στα επόμενα.

1.1 Τοπολογικοί Χώροι

1.1α΄ Ορισμός

- Ένας **τοπολογικός χώρος** είναι ένα σύνολο X στο οποίο έχει καθοριστεί μια οικογένεια $\mathcal{T}$ από υποσύνολα του X, τα οποία ονομάζονται *ανοιχτά* υποσύνολα του X ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

  (A1) Η ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

  (A2) Η πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

  (A3) Το $\varnothing$ είναι ανοιχτό σύνολο.

  (A4) Το X είναι ανοιχτό σύνολο.

- Το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των ανοιχτών συνόλων λέγεται η **τοπολογία** του X.

- Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό σύνολο. Οι ιδιότητες των κλειστών συνόλων είναι συμπληρωματικές των ανοιχτών συνόλων.

  (K1) Η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

  (K2) Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

  (K3) Ο X είναι κλειστό σύνολο.

  (K4) Το $\varnothing$ είναι κλειστό σύνολο.

1.1β΄ Δίκτυα

- Ένα **άνω διευθυνόμενο σύνολο** είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(I, \leq)$ το οποίο έχει την ιδιότητα για οποιαδήποτε δύο στοιχεία του να υπάρχει ένα τρίτο μεγαλύτερο από αυτά δηλαδή αν $i_1, i_2 \in I$ υπάρχει ένα $i_3 \in I$ με $i_1 \leq i_3$ και $i_2 \leq i_3$.

- Ένα **δίκτυο** σε ένα τοπολογικό χώρο X είναι μια απεικόνιση $\phi : I \to X$ όπου I είναι ένα άνω διευθυνόμενο σύνολο. Αν το $I = \mathbb{N}$ τότε το δίκτυο λέγεται **ακολουθία**. Ένα δίκτυο συμβολίζεται και με $(x_i)_{i\in I}$.

- Θα λέμε ότι ένα δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ **συγκλίνει** σε ένα σημείο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή U του x υπάρχει ένα $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x_i \in U$ για κάθε $i \geq i_0$. Γράφουμε και
$$x = \lim_{i\to+\infty} x_i$$

- Ένα υποσύνολο K ενός τοπολογικού χώρου X είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ από στοιχεία του K το οποίο συγκλίνει σε κάποιο x ισχύει ότι $x \in K$. Ο χαρακτηρισμός αυτός των κλειστών συνόλων δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε την έννοια του δικτύου με αυτήν της ακολουθίας. Ισχύει ωστόσο στην ειδική περίπτωση που η τοπολογία του X προκύπτει από μια μετρική ή από μια νόρμα.

- Αν $(I, \leq)$ και $(J, \leq)$ είναι δύο άνω διευθυνόμενα σύνολα μια απεικόνιση $x : I\times J \to X$ λέγεται ένα **διπλό δίκτυο**. και συμβολίζεται με $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$. Ένα διπλό δίκτυο $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ θα λέμε ότι συγκλίνει σε ένα στοιχείο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή U του x υπάρχουν $i_0 \in I$ και $j_0 \in J$ τέτοια ώστε $x_{ij} \in U$ για κάθε $i \geq i_0$ και κάθε $j \geq j_0$. Στην περίπτωση που το διπλό δίκτυο $(x_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο $x \in X$ γράφουμε και
$$x = \lim_{i,j\to+\infty} x_{ij}$$

- Ειδικά αν $(x_{mn})_{m.n=1}^{\infty}$ είναι μια διπλή ακολουθία τότε η $(x_{mn})_{m.n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο $x \in X$ αν για κάθε περιοχή U του x αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει $x_{mn} \in U$.

1.1γ΄ Κλειστή Θήκη ενός συνόλου. Διαχωρίσιμοι Χώροι

- Αν Y είναι ένα υποσύνολο του X ορίζουμε την **κλειστή θήκη** του Y να είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το Y. Η κλειστή θήκη του Y συμβολίζεται με $\overline{Y}$. Οι βασικές ιδιότητες της κλειστής θήκης:

  (i) $Y \subseteq \overline{Y}$.

  (ii) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$.

  (iii) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} Y_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{Y_i}$.

- Ένα υποσύνολο D ενός τοπολογικού χώρου λέγεται **πυκνό** στον X αν $\overline{D} = X$. Ένας τοπολογικός χώρος που έχει ένα πυκνό υποσύνολο θα λέγεται **διαχωρίσιμος**.

1.1δ΄ Υπόχωροι

- Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ θα θεωρείται σαν τοπολογικός χώρος ως προς την **σχετική τοπολογία**

$$\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$$

  με άλλα λόγια τα ανοιχτά υποσύνολα του Y είναι οι τομές των ανοιχτών υποσυνόλων του X με το Y. Το σύνολο Y εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία θα λέγεται **υπόχωρος** του X.

- Τα κλειστά υποσύνολα του Y ως προς τη τοπολογία του υπόχωρου είναι οι τομές των κλειστών υποσυνόλων του X με το Y,

- Η κλειστή θήκη ενός υποσυνόλου Z του Y ως προς την σχετική τοπολογία είναι ίση με την τομή της κλειστής θήκης του Z με το Y.

1.1ε΄ Βάσεις Περιοχών

- **Γειτονιά ενός σημείου** x ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ καλείται ένα σύνολο X για το οποίο υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $U \subseteq V$ με $x \in U$. Αν μια γειτονιά ενός σημείου x είναι ανοιχτό σύνολο θα ονομάζεται μια **ανοιχτή γειτονιά του** x.

- Μια **βάση περιοχών ενός σημείου** x ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι ένα σύνολο $\mathcal{U}$ από υποσύνολα του X τέτοιο ώστε

  (B1) Κάθε $U \in \mathcal{U}$ είναι γειτονιά του x.

  (B2) Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, τότε υπάρχει $U_3 \in \mathcal{U}$ με $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

  (B3) Αν X ανοιχτό που περιέχει το x τότε υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $U \subseteq V$.

- Ένας γενικός τρόπος κατασκευής τοπολογικών χώρων σε ένα σύνολο X είναι σε κάθε στοιχείο $x \in X$ να δοθεί μια οικογένεια $\mathcal{U}_x$ από υποσύνολα του X τα οποία να ικανοποιούν τα (B1) και (B2). Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε σα ανοιχτό σύνολο να είναι ένα υποσύνολο A του X το οποίο έχει την ιδιότητα για κάθε $x \in A$ να υπάρχει κάποιο $U_x \in \mathcal{U}_x$ με $U \subseteq A$. Με άλλα λόγια τα ανοιχτά σύνολα είναι ενώσεις περιοχών των στοιχείων του.

- Η μέθοδος αυτή θα χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή των τοπολογικών διανυσματικών χώρων ορίζοντας μια βάση περιοχών σε ένα μόνο στοιχείο, το 0. Χοντρικά, αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και θεωρήσουμε μια βάση περιοχών $\mathcal{U}_0$ του 0 που να έχει την επιπλέον ιδιότητα για κάθε $U \in \mathcal{U}_0$ να υπάρχει $V \in \mathcal{U}_0$ με $V + V \subseteq U$ τότε σε κάθε στοιχείο $x \in E$ θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0 = \{x + U : U \in \mathcal{U}_0\}$$

  σαν βάση περιοχών του x.

1.1ϛ´ Συνεχείς Απεικονίσεις - ομοιομορφισμοί

- Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι (με τοπολογίες $\mathcal{T}_X$ και $\mathcal{T}_Y$ αντίστοιχα) θα ονομάζουμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ **συνεχή σε ένα σημείο** x του X αν για κάθε περιοχή X του $f(x)$ υπάρχει μια περιοχή U του του x με $f(U) \subseteq V$ ή ισοδύναμα αν το $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x. Με άλλα λόγια οι συνεχείς απεικονίσεις στο x αντιστρέφουν τις περιοχές του $f(x)$ σε περιοχές του x.

- Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ ονομάζεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$. Οι συνεχείς απεικονίσεις χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα ότι αντιστρέφουν τα ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα (ή ισοδύναμα αν αντιστρέφουν τα κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα).

- Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ το οποίο συγκλίνει στο x το δίκτυο $(f(x_i))_{i\in I}$ συγκλίνει στο $f(x)$. Ο χαρακτηρισμός αυτός της συνέχειας (που αναφέρεται και σαν αρχή της μεταφοράς) δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα δίκτυα με ακολουθίες. Ισχύει στην περίπτωση που οι χώροι είναι μετρικοί χώροι.

- Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται ένας **ομοιομορφισμός** αν είναι 1-1, επί, συνεχής και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης συνεχής.

- Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : X \to Y$ θα λέμε ότι ο X είναι **ομοιομορφικός** με τον Y και θα γράφουμε $X \simeq Y$. Φανερά
  - $X \simeq X$.
  - Αν $X \simeq Y$ τότε $Y \simeq X$.
  - Αν $X \simeq Y$ και $Y \simeq Z$ τότε $X \simeq Z$.

1.1ζ´ Συμπάγεια - Τοπική συμπάγεια

- Μια οικογένεια από σύνολα λέγεται μια **κάλυψη** ενός συνόλου αν το X είναι υποσύνολο της ένωσης των στοιχείων της οικογένειας.

- Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **συμπαγής** αν για κάθε οικογένεια από ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν το X αρκεί πεπερασμένο πλήθος από στοιχεία της οικογένειας για να καλύψουν τον X.

- Ένα υποσύνολο K ενός τοπολογικού χώρου λέγεται **συμπαγές** αν αν για κάθε οικογένεια από ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν το K αρκεί πεπερασμένο πλήθος από στοιχεία της οικογένειας για να καλύψουν τον K. Είναι εύκολο να δούμε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι συμπαγής χώρος σαν υπόχωρος του X.

- Αν X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής τότε για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X ισχύει ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές. Με άλλα λόγια οι συνεχείς απεικονίσεις μεταφέρουν τα συμπαγή σε συμπαγή ενώ δεν μεταφέρουν γενικά τα κλειστά σε κλειστά.

- Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται τοπικά συμπαγής αν κάθε σημείο του έχει μια περιοχή που είναι συμπαγές σύνολο. Φανερά κάθε συμπαγής χώρος είναι τοπικά συμπαγής. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$ είναι όλοι τοπικά συμπαγείς αλλά όχι συμπαγείς.

- Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (και γενικά ενός χώρου Banach πεπερασμένης διάστασης) είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

- Σε ένα χώρο Banach η κλειστή μοναδιαία μπάλα του (και γενικά κάθε μπάλα του) είναι συμπαγές σύνολο αν και μόνο αν ο χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση.

  Συνεπώς, ένας χώρος Banach είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν έχει πεπερασμένη διάσταση. Συνεπώς τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα απειροδιάστατων χώρων Banach δεν είναι απαραίτητα συμπαγή.

- Η σημασία των τοπικά συμπαγών χώρων έγκειται στο ότι είναι η γενικότερη κατηγορία τοπολογικών χώρων στην οποία μπορούμε να έχουμε μια θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης ανάλογη με την θεωρία του Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

1.1η΄ Τοπολογία Γινόμενο

- Αν δοθούν δύο τοπολογικοί χώροι X_1 και X_2 είναι χρήσιμο θα ορίσουμε μια τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$. Έστω $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Ένα υποσύνολο U του $X_1 \times X_2$ θα ονομάζεται περιοχή (x_1, x_2) αν υπάρχουν περιοχές U_1 του x_1 και U_2 του x_2 με $U_1 \times U_2 \subseteq U$. Με άλλα λόγια ορίζουμε μια βάση περιοχών του (x_1, x_2) ως εξής: Επιλέγουμε μια βάση περιοχών $\mathcal{U}_1$ του x_1 και μια βάση περιοχών $\mathcal{U}_2$ του x_2 και θεωρούμε σαν βάση περιοχών του (x_1, x_2) να είναι η οικογένεια

$$\mathcal{U} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

- Ένας ισοδύναμος ορισμός της τοπολογίας αυτής είναι να ορίσουμε ότι ένα υποσύνολο A του είναι ανοιχτό αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο $(x_1, x_2) \in A$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A_1 στον X_1 με $x_1 \in A_1$ και υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο A_2 στον X_2 με $x_2 \in A_2$ ώστε $A_1 \times A_2 \subseteq A$.

- Η τοπολογία αυτή που ορίζουμε στο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ μέσω των αντίστοιχων τοπολογιών των X_1, X_2 λέγεται **τοπολογία γινόμενο** του $X_1 \times X_2$. Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται με προφανή τρόπο και σε καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους τοπολογικών χώρων.

- Αν $(X_i)_{i \in I}$ είναι μια άπειρη οικογένεια από σύνολα είναι το σύνολο

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in X_i \right\}$$

  Αν $(X_i)_{i \in I}$ είναι μια άπειρη οικογένεια από τοπολογικούς χώρους το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ γίνεται τοπολογικός χώρος ως εξής: Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $J \subseteq I$ και κάθε $f \in \prod_{i \in I} X_i$ θεωρούμε το

$$U(f,J) = \left\{ g \in \prod_{i \in I} X_i : g(i) = f(i) \text{ αν } i \in J \right\}$$

Θεωρούμε τα σύνολα $U(f,J)$ σαν βάση περιοχών της f. Τότε παράγεται μια τοπολογία στο $\prod_{i \in I} X_i$ η οποία λέγεται η τοπολογία γινόμενο στο $\prod_{i \in I} X_i$. Τα ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας είναι ενώσεις από σύνολα της μορφής

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in A_i \right\}$$

με το A_i ανοιχτό υποσύνολο του χώρου X_i και $A_i \neq X_i$ ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος δεικτών.

- Το παρακάτω Θεώρημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την συναρτησιακή ανάλυση:

  Θεώρημα 1.1.1 (Θεώρημα του Tychonoff). *Το γινόμενο συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.*

1.1θ΄ Διαχωριστικά Αξιώματα

- Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται ένας T_1-*τοπολογικός χώρος* αν τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.
- Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται ένας T_2-*τοπολογικός χώρος* ή ένας *Hausdorff χώρος* αν για δύο οποιαδήποτε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, V του X με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.
- Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται ένας T_3-*τοπολογικός χώρος* αν για δύο οποιαδήποτε $x \in X$ και K κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin K$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, V του X με $x \in U$, $K \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.
- Ένας τοπολογικός χώρος θα λέγεται ένας T_4-*τοπολογικός χώρος* (ή normal)αν για δύο οποιαδήποτε μη κενά κλειστά υποσύνολα K, L του X με $K \cap L = \emptyset$ υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U, V του X με $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

1.1ι΄ Ασθενείς Τοπολογίες

- Σε ένα σύνολο X μπορούν να οριστούν πολλές τοπολογίες. Δύο είναι οι ακραίες (και χωρίς ενδιαφέρον) περιπτώσεις:
  - Η χονδροειδής τοπολογία, στην οποία τα ανοιχτά είναι μόνο το X και το $\emptyset$.
  - Η διακριτή τοπολογία, στην οποία τα ανοιχτά είναι όλα τα υποσύνολα του X.

  Επίσης παρατηρείστε ότι η τομή τοπολογιών είναι επίσης τοπολογία.

- Ένας τρόπος να ορίζουμε τοπολογίες σε ένα σύνολο X είναι να θεωρήσουμε μια οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ από συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τον X και τιμές σε ένα τοπολογικό χώρο Y (συνήθως $Y = \mathbb{R}$ ή $Y = \mathbb{C}$). Υπάρχει τουλάχιστον μια τοπολογία στο X ως προς την οποία όλες οι f_i γίνονται συνεχείς συναρτήσεις. Αυτή είναι η διακριτή τοπολογία $\tau_d = \wp(X)$. Η διακριτή τοπολογία δεν είναι πρακτική, έχει πάρα πολλά ανοιχτά σύνολα (τα έχει όλα ανοιχτά). Ενδιαφερόμαστε για την ασθενέστερη.

1.2 Τοπολογικοί Γραμμικοί χώροι

Ένας γραμμικός χώρος X θα θεωρείται πάνω στο σώμα $\mathbb{K}$ όπου $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση το σώμα θα θεωρείται εφοδιασμένο με την συνήθη τοπολογική δομή του.

Ένα σύνολο X θα λέγεται ένας **τοπολογικός γραμμικός χώρος** αν

(i) Το X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{K}$.

(ii) Το X είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος ως προς μια τοπολογία $\mathcal{T}$.

(iii) Α απεικόνιση $(x, y) \mapsto x + y$ είναι συνεχής σαν απεικόνιση από τον $X \times X$ στον X, όπου ο $X \times X$ θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο.

(iv) Η απεικόνιση $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ είναι συνεχής σαν απεικόνιση από τον $\mathbb{K} \times X$ στον X, όπου ο X θεωρείται εφοδιασμένος με την τοπολογία του $\mathcal{T}$ και ο $\mathbb{K} \times X$ με την τοπολογία γινόμενο.

Ορισμός 1.2.1. Αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος, $\lambda \in \mathbb{K}$ και $a \in E$ οι απεικονίσεις $D_\lambda : E \to E$ και $T_a : E \to E$ που ορίζονται από

$$D_\lambda(x) = \lambda x, \quad D_a(x) = x + a$$

ονομάζονται η **διαστολή** (dilation) κατά λ και η **μεταφορά** (translation) κατά a αντίστοιχα.

Οι απεικονίσεις D_λ, T_a είναι γραμμικές 1-1 και επί απεικονίσεις με αντίστροφες απεικονίσεις τις $D_{\frac{1}{\lambda}}$ και T_{-a} αντίστοιχα.

Πρόταση 1.2.2. *Έστω X να είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Οι διαστολές και οι μεταφορές στον X είναι ομοιομορφισμοί του X.*

Η τοπολογική δομή ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου χαρακτηρίζεται πλήρως από την δομή των περιοχών του 0. Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε μια βάση περιοχών του 0 τότε γνωρίζουμε όλα τα ανοιχτά σύνολα του χώρου. Πιο συγκεκριμένα

Πρόταση 1.2.3. *Έστω X να είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Αν U είναι μια περιοχή του 0 τότε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $x + U$ είναι περιοχή του x. Επιπλέον αν $\mathcal{U}(0)$ είναι μια βάση περιοχών του 0 τότε το*

$$\mathcal{U}(x) = \{x + U : U \in \mathcal{U}(0)\}$$

είναι μια βάση περιοχών του x.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω X να είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος κσι $\mathcal{U}(0)$ είναι μια βάση περιοχών του 0. Ένα υποσύνολο A του X είναι ανοιχτό αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ με $x + U \subseteq A$.*

1.2α΄ Γεωμετρικές Έννοιες

- Σε ένα διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του **ευθυγράμμου τμήματος με άκρα δύο σημεία** x, y σαν το σύνολο
$$\overline{xy} = \{\lambda x + (1 - \lambda y) : \lambda \in [0, 1]\}$$
Ένα υποσύνολο M ενός διανυσματικού χώρου X καλείται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in M$ το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{xy}$ περιέχεται στο M δηλαδή $\lambda x + \mu y \in M$, όπου $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$.

- Οι τομές κυρτών συνόλων είναι κυρτά σύνολο. Συνεπώς αν δοθεί μια οικογένεια $\mathcal{F}$ από υποσύνολα του διανυσματικού χώρου X υπάρχει ένα ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{F}$ ο οποίος συμβολίζεται είτε $\mathrm{co}[\mathcal{F}]$' Συγκεκριμένα
$$\mathrm{co}[\mathcal{F}] = \bigcap \left\{K : K \text{κυρτό σύνολο και } \bigcup \mathcal{F} \subseteq Y\right\}$$
Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathrm{span}[\mathcal{F}]$ αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς από διανύσματα που ανήκουν σε κάποιο στοιχείο της $\mathcal{F}$ δηλαδή
$$\mathrm{co}[\mathcal{F}] = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in \bigcup \mathcal{F}\right\}$$

- Ένα υποσύνολο M ενός διανυσματικού χώρου X καλείται **ισορροπημένο**, αν $0 \in \mathbb{M}$ και για $\lambda \in \mathbb{K}$, με $|\lambda| \leq 1$, $x \in \mathbb{M}$ ισχύει ότι $\lambda x \in \mathbb{M}$. Αν ο διανυσματικός χώρος είναι επί του $\mathbb{R}$ τότε τα ισορροπημένα σώματα είναι αυτά που είναι συμμετρικά και για κάθε $x \in M$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $x, -x$ περιέχεται και αυτό στο M.

- Τα συμμετρικά και τα ισορροπημένα σύνολα δεν είναι απαραίτητα κυρτά.

- Ένα υποσύνολο M ενός διανυσματικού χώρου X καλείται **απόλυτα κυρτό** αν είναι κυρτό και ισορροπημένο, δηλαδή για κάθε $x, y \in M$ το $\lambda x + \mu y \in M$, όπου $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

- Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}$ και A, B υποσύνολα του X. Θα λέμε ότι *το A απορροφά το B* αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B \subseteq \lambda A$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \geq \delta$. Ένα υποσύνολο M ενός διανυσματικού χώρου X καλείται **απορροφούν** αν απορροφά κάθε σημείο $x \in E$, δηλαδή αν για κάθε x υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x \in \lambda M$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \geq \delta$.

1.2β΄ Τοπικά κυρτοί χώροι

- Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος καλείται **τοπικά κυρτός** αν υπάρχει μία βάση περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

- Κάθε κυρτός χώρος X έχει μία βάση $\mathcal{U}$ γειτονιών του 0 με τις εξής ιδιότητες:

(C1) Αν $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, τότε υπάρχει $V_3 \in \mathcal{U}$ με $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

(C2) Αν $V \in \mathcal{U}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\lambda V \in \mathcal{U}$.

(C3) Κάθε $V \in \mathcal{U}$ είναι απόλυτα κυρτό και απορροφούν.

Αντίστροφα: Αν X διανυσματικός χώρος και $\mathcal{U}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X που ικανοποιούν τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, τότε υπάρχει μία τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε ο X να γίνεται κυρτός και το $\mathcal{U}$ να είναι βάση περιοχών του 0.

1.2γ΄ Ημινόρμες

- Μια **ημινόρμα** σε ένα γραμμικό χώρο X είναι μια απεικόνιση $x \mapsto p(x)$ από τον X στο $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

  (i) Για κάθε $x \in X$, $p(x) \geq 0$.

  (ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$ ισχύει $\lambda x\| = |\lambda|\, p(x)$

  (iii) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $y \in X$ ισχύει $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

1.3 Χώροι με νόρμα

Μια **νόρμα** σε ένα γραμμικό χώρο X είναι μια απεικόνιση $x \mapsto \|x\|$ από τον X στο $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) Για κάθε $x \in X$, $\|x\| \geq 0$.

(ii) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

(iii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$ ισχύει $\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$

(iv) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $y \in X$ ισχύει$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του X η ακολουθία $(\|x_n - x_m\|)_{m,n=1}^{\infty}$ είναι μια διπλή ακολουθία. Η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ θα λέγεται **Cauchy** αν

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

Κάθε χώρος με νόρμα στον οποίο οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουν λέγεται πλήρης.

Ορισμός 1.3.1. Ένα **χώρος Banach** είναι ένας χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει η νόρμα του. Με άλλα λόγια ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του X που έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{m,n\to+\infty} \|x_n - x_m\| \to 0$ συγκλίνει.

1.3α΄ Σειρές, απόλυτη σύγκλιση και πληρότητα

- Αν δοθεί μια ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του X θεωρούμε την ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ με $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_n$ η οποία ονομάζεται και **σειρά** και συμβολίζεται με $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$.

- Αν $x = \lim_{n\to\infty} S_n$ θα λέμε ότι η σειρά συγκλίνει και θα γράφουμε $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
- Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$.
- Το ακόλουθο κριτήριο πληρότητας ενός χώρου με νόρμα παρά την απλή απόδειξή του είναι σημαντικό σε πολλές περιπτώσεις:

  Πρόταση 1.3.2. *Ένας χώρος με νόρμα είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.*

1.3β΄ Τελεστές μεταξύ χώρων με νόρμα

- Η παρακάτω πρόταση χαρακτηρίζει τις συνεχείς και γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ χώρων με νόρμα.

  Πρόταση 1.3.3. *Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

  (i) *Η T είναι συνεχής στο 0.*

  (ii) *Η T είναι συνεχής.*

  (iii) *Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

  (iv) *Η T είναι φραγμένη με την έννοια ότι η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του B (και κατά συνέπεια κάθε φραγμένου υποσυνόλου του H) είναι φραγμένο σύνολο.*

- Αν X, Y είναι δύο χώροι με νόρμα με $B(X, Y)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : X \to Y$. Αν $T \in B(X, Y)$ θέτουμε

  $$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

  Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα που λέγεται **νόρμα τελεστών** (operator norm).

- Ο γραμμικός χώρος $B(X, Y)$ είναι χώρος με νόρμα ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$ και για να είναι πλήρης (χώρος Banach) αρκεί ο Y να είναι χώρος Banach.
- Αν $X = Y$ θα γράφουμε $B(X)$ αντί του $B(X, X)$. Από τα προηγούμενα ο $B(X)$ είναι χώρος με νόρμα και είναι χώρος Banach αν ο X είναι χώρος Banach. Στον χώρο $B(X)$ ορίζεται και μια επιπλέον πράξη $(S, T) \mapsto ST$ που είναι η σύνθεση απεικονίσεων

  $$ST(x) = S(Tx)$$

  Αν $S, T, R \in B(X)$ ισχύουν τα εξής

  (i) $S(T + R) = ST + SR$

  (ii) $(T + R)S = TS + RS$

  (iii) $S(TR) = (ST)R$

  (iv) $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

Κεφάλαιο 2

Φασματική θεωρία και άλγεβρες Banach

2.1 Άλγεβρες τελεστών σε χώρους Hilbert και άλγεβρες Banach

Στην παράγραφο αυτή, θα θεωρήσουμε κάποιες βασικές έννοιες που σχετίζονται με την άλγεβρα των τελεστών ενός χώρου Hilbert. Θα συμβολίζουμε με H ένα μιγαδικό διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτερικό του γινόμενο.

Ένας **γραμμικός τελεστής** στον H είναι μια απεικόνιση $T : X \to H$ που είναι ορισμένη σε ένα γραμμικό υπόχωρο X του H και έχει την ιδιότητα

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

για οποιαδήποτε $x, y \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ο υπόχωρος X ονομάζεται το **πεδίο** (domain) του T και συμβολίζεται με $\mathrm{Dom}(T)$. Το σύνολο τιμών του T ονομάζεται η **έκταση** (range) του T και συμβολίζεται $\mathrm{Ran}(T)$.

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $T : H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) $T = 0$

(ii) *Για κάθε $x, y \in H$, $\langle Tx, y \rangle = 0$.*

(iii) *Για κάθε $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle = 0$.*

Απόδειξη. Φανερά το (1) συνεπάγεται το (2) και το (2) το (3).
Το ότι το (2) συνεπάγεται το (1) προκύπτει ως εξής: αν για κάθε $x, y \in H$, $\langle Tx, y \rangle = 0$ τότε για κάθε x, $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = 0$ και συνεπώς $Tx = 0$. Παρατηρείστε ότι δεν χρειάστηκε εδή η υπόθεση ότι ο T είναι γραμμικός.
Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ότι το (3) συνεπάγεται το (2). Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 = \langle T(x+y), x+y \rangle &= \langle T(x), x \rangle + \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle \\ &= \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.1.2. Με τον όρο **(μιγαδική) άλγεβρα** εννοούμε μια τριάδα $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, όπου το $(\mathcal{A}, +)$ είναι μιγαδικός γραμμικός χώρος και $(\cdot)$ μια επιπλέον πράξη $(x, y) \in \mathcal{A} \times A \mapsto xy \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) (Διγραμμικότητα): Για $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ και $x, y, z \in \mathcal{A}$ ισχύουν:

- $(\lambda x + \mu y)z = \lambda(xz) + \mu(yz)$
- $x(\lambda y + \mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz)$

(ii) (Προσεταιριστικότητα): $x(yz) = (xy)z$.

Σημειώνουμε ότι στο $B(H)$ η αντίστοιχη πράξη, είναι η **σύνθεση** γραμμικών τελεστών, όπως ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 2.1.3.

- Ένα στοιχείο $\mathbf{1} \in A$ λέγεται **μονάδα** αν για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a$.
- Εάν μια άλγεβρα $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$ τότε αυτή είναι μοναδικά ορισμένη και η άλγεβρα ονομάζεται **άλγεβρα με μονάδα**.
- Μια **μεταθετική άλγεβρα** είναι μια άλγεβρα στην οποία η πράξη $(\cdot)$ είναι μεταθετική δηλαδή για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $xy = yx$.

Ορισμός 2.1.4. *Μια **άλγεβρα με νόρμα** είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, όπου $\mathcal{A}$ άλγεβρα και $\|\cdot\|\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ η νόρμα που σχετίζεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού ως εξής:*

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$.

Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται το γεγονός ότι η πράξη

$$(x, y) \mapsto xy$$

είναι συνεχής σαν απεικόνιση από το $B(H) \times B(H)$ στον $B(H)$.

Ορισμός 2.1.5. *Αν ο χώρος $\mathcal{A}$ είναι χώρος Banach και άλγεβρα με νόρμα τοτε ονομάζεται **άλγεβρα Banach** .*

Παρατήρηση 2.1.6. *Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία στοιχείων $x_n \in E$ που ικανοποιεί $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$, υπάρχει στοιχείο $y \in E$ τέτοιο ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \|y - (x_1 + ... + x_n)\| = 0.$$

Παράδειγμα 2.1.7. *Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{A}$ η άλγεβρα $B(E)$. Έστω $x \cdot y$ το γινόμενο ορισμένο στην $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία άλγεβρα για την οποία ισχύει $\|\mathbf{1}\| = \mathbf{1}$ και είναι πλήρης χώρος γιατί ο X είναι πλήρης. Άρα, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach .*

Παράδειγμα 2.1.8. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(X)$ η μοναδιαία άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων επί του $\mathbb{C}$ ορισμένων στον X με τις πράξεις:*

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Με τη νόρμα $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ η $C(X)$ γίνεται μεταθετική μοναδιαία άλγεβρα Banach , αφού

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \sup\{|fg| : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} \cdot \sup\{|g(x)| : x \in X\} \\ &= \|f\| \cdot \|g\| \ \text{για} \ \ f, g \in C(X). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.9. *Έστω το σύνολο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος και έστω $\mathcal{A} \leq C(D)$ με*

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathbb{C} : f \in int(D), f \, \text{αναλυτική} \ \}$$

δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων που είναι συνεχείς σε όλο το D και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του.
Η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία υπάλγεβρα του $C(D), (\|1\| = 1)$. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστό σύνολο.
Αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων της $\mathcal{A}$ με $f_n \longrightarrow f$, τότε

$$f|_{int(D)} = \lim_{n\to\infty} f_n|_{int(D)}.$$

Συνεπώς, η f παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του D άρα και αναλυτική. Τελικά, η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach .

Παράδειγμα 2.1.10. *Έστω ο χώρος Banach*

$$l^1(\mathbb{Z}) = \{x = (x_n)_{n\in(-\infty,+\infty)} \in \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| = \|x\|\}.$$

Αν ο $l^1(\mathbb{Z})$ ορισθεί ως άλγεβρα $\mathcal{A}$ με την πράξη του πολλαπλασιασμού να είναι η συνέλιξη

$$(x * y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}, \quad x, y \in \mathcal{A}$$

τότε αυτή η άλγεβρα είναι μεταθετική μοναδιαία άλγεβρα Banach . Πράγματι, είναι μεταθετική διότι,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} &= (x_n) * (y_n) \\ &= (y_n) * (x_n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k x_{n-k}\end{aligned}$$

Επίσης, η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία αφού αν ορίσουμε ως μονάδα την ακολουθία

$$(e_n)_{n\in(-\infty,+\infty)} = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ...)$$

με $e_n = 1$ για $n = 0$, αλλιώς $e_n = 0$, τότε

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_{n-k}$$

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach :

$$\begin{aligned}\|(x*y)_n\| &= \sum_n |(x*y)_n| \\ &< \sum_n \sum_m |x_m| \cdot |y_{n-m}| \\ &= \sum_m |x_m| \cdot \sum_n |y_{n-m}| \\ &= \sum_m |x_m| \cdot \|y\| \\ &= \|x\| \cdot \|y\|\end{aligned}$$

Συνεπώς, $(x * y)_n \in l^1(\mathbb{Z})$, άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach .

Παράδειγμα 2.1.11. *Έστω ο χώρος Banach $L^1(\mathbb{R})$. Ως μετρική ορίζεται να είναι η*

$$d(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|dx.$$

Εδώ, η πράξη του πολλαπλασιασμού ορίζεται ως η συνέλιξη

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Από το Θεώρημα του Fubini έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\|f*g\| &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|dt\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|dx\ dt \\ &= \|f\| \cdot \|g\|.\end{aligned}$$

Άρα, ο $L^1(\mathbb{R})$ είναι άλγεβρα Banach .
Θα δείξουμε ότι είναι μεταθετική άλγεβρα Banach :

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= g * f. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο $L^1(\mathbb{R})$ δεν έχει μονάδα αλλά υπάρχει μια κατά προσέγγιση κανονικοποιημένη μονάδα υπό την έννοια ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $e_n \in L^1(\mathbb{R})$ που ικανοποιούν $\|e_n\| = 1$ για κάθε n με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n * f - f\| = \lim_{n\to\infty} \|f * e_n - f\| = 0$$

Μια τέτοια ακολουθία μπορεί να είναι κάθε μη αρνητική ακολουθία του $[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$ με ολοκλήρωμα ίσο με 1.

Παράδειγμα 2.1.12. *Έστω $M_n = M_n(\mathbb{C})$ η άλγεβρα όλων των τετραγωνικών πινάκων επί του $\mathbb{C}$. Η άλγεβρα αυτή έχει ως μονάδα τον μοναδιαίο πίνακα και μπορεί να γίνει πεπερασμένη άλγεβρα Banach με τη νόρμα*

$$\|(a_{ij})\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Τότε το ταυτοτικό στοιχείο έχει νόρμα n.

Επίσης, η M_n μπορεί να γίνει άλγεβρα Banach εάν τη θεωρήσουμε ως $B(E)$, όπου X n-διάστατος χώρος Banach . Τότε, το ταυτοτικό στοιχείο έχει νόρμα 1.

Ορισμός 2.1.13. *Έστω B η σ-άλγεβρα που δημιουργείται με την τοπολογία μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G.* ***Μέτρο Borel*** *ονομάζεται το $\mu : B \to [0, \infty]$.*

Ορισμός 2.1.14. ***Μέτρο Radon*** *είναι ένα μέτρο Borel που ικανοποιεί τις:*

- *Για κάθε K συμπαγές, το $\mu(K) < \infty$*
- *Για κάθε $E \in B$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K\, συμπαγές\}$*

Θεώρημα 2.1.15. *Για κάθε τοπικά συμπαγή ομάδα G υπάρχει μη- μηδενικό μέτρο Radon στην G που παραμένει αναλλοίωτο κατά τις αριστερές μεταφορές, δηλαδή*

$$\mu(x \cdot E) = \mu(E)$$

για κάθε E Borel σύνολο, για κάθε $x \in G$. Το μέτρο αυτό ονομάζεται ***μέτρο Haar.***

Παράδειγμα 2.1.16. *Έστω G τοπολογικός χώρος με την τοπικά συμπαγή τοπολογία Hausdorff. Τότε οι απεικονίσεις $(x, y) \in G \times G \mapsto xy \in G$ και $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχείς. Έστω μ το αριστερό μέτρο Haar σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα G. Η γραμμική ομάδα της G είναι ο χώρος $L^1(G)$ των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : G \to \mathbb{C}$ με τη νόρμα*

$$\|f\| = \int_G |f(x)| d\mu(x)$$

και την πράξη του πολλαπλασιασμού ως τη συνέλιξη

$$f * g = \int_G f(t) g(t^{-1}x) dt, \ \ x \in G$$

*Τότε, $f * g \in L^1(G)$ και $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, για κάθε $f, g \in L^1(G)$, άρα είναι άλγεβρα Banach . Επίσης, είναι μεταθετική αν και μόνο αν η G είναι μεταθετική ομάδα και έχει μονάδα αν και μόνο αν η G είναι **διακριτή ομάδα**. Διακριτή ομάδα ονομάζεται μια ομάδα με τη διακριτή τοπολογία, δηλαδή μια τοπολογία στην οποία κάθε υποσύνολό της είναι ανοικτό.*

Ένα παράδειγμα μη μεταθετικής group άλγεβρας είναι η $ax + b$ ομάδα που δημιουργείται από διαστολές και μεταφορές στους πραγματικούς αριθμούς. Μια διαστολή είναι μια απεικόνιση $x \mapsto ax$, για $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ και μια μεταφορά είναι μια απεικόνιση $x \mapsto b + x$, για $b \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των διαστολών το ονομάζουμε D_a και το σύνολο των μεταφορών T_b. Τα δύο αυτά σύνολα παράγουν την $ax + b$ ομάδα, έστω G, με απεικόνιση T, $x \mapsto ax + b$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και a, b στοιχεία της ομάδας. Η ομάδα G είναι άλγεβρα με πράξη τη σύνθεση πινάκων, δηλαδή εάν $T_1(x) = a_1 x + b_1$ και $T_2(x) = a_2 x + b_2$ τότε

$$T_1 T_2(x) = a_1(a_2 x + b_2) + b_1 = (a_1 a_2)x + (a_1 b_2 + b_1).$$

Σημειώνουμε ότι μονάδα της άλγεβρας είναι ο $T_0 = x + 0 = x$, δηλαδή ο μοναδιαίος πίνακας.

Θα δείξουμε ότι η G είναι ισομορφική με την ομάδα των 2×2 τετραγωνικών πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ με τη σχετική τοπολογία.

Αν θεωρήσουμε απεικόνιση

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο ισομορφισμός προκύπτει εφαρμόζοντας $a^2 x + b = a(ax + \frac{b}{a})$ στη σύνθεση των

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}$$

Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}(a_1^2x+b_1)\circ(a_2^2x+b_2) &= a_1^2(a_2^2x+b_2)+b_1\\ &= (a_1^2a_2^2)x+a_1^2b_2+b_1\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}a_1(a_1x+\frac{b_1}{a_1})\circ a_2(a_2x+\frac{b_2}{a_2}) &= a_1a_2(a_1x+\frac{b_1}{a_1a_2})\circ(a_2x+\frac{b_2}{a_2})\\ &= a_1a_2(a_1a_2x+\frac{a_1^2b_2+b_1}{a_1a_2})\\ &= (a_1^2a_2^2)x+a_1^2b_2+b_1\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $T_1T_2 \neq T_2T_1$ δηλαδή η άλγεβρα δεν είναι μεταθετική.

2.2 Κανονική Αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach . Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι από κοινού συνεχής συνάρτηση, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\|xy-x_0y_0\|=0,$$

για κάθε $x_0, y_0 \in \mathcal{A}$ το οποίο προκύπτει ως εξής:

$$\|xy-x_0y_0\| = \|xy-x_0y+x_0y-x_0y_0\| \leq \|x-x_0\|\|y\|+\|x_0\|\|y-y_0\| \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ άλγεβρα επί του $\mathbb{C}$ που είναι ταυτόχρονα χώρος Banach με κάποια νόρμα ώστε ο πολλαπλασιασμός να είναι χωριστά συνεχής συνάρτηση, δηλαδή αν για κάθε $x \in \mathcal{A}$ οι xx_0 και x_0x είναι συνεχείς. Γράφουμε

$$\|xx_0\| \leq M\cdot\|x\| \text{ και } \|x_0x\| \leq M\cdot\|x\|,$$

για κάποια σταθερά M που εξαρτάται από το x_0.

Θεώρημα 2.2.1. ***Θεώρημα Banach- Steinhaus***
Έστω X χώρος Banach , Y χώρος με νόρμα και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y ώστε να υπάρχει το όριο της ακολουθίας $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, για κάθε $x \in X$. Αν θέσουμε $T : X \to Y$ με

$$T(x)=\lim_n T_n(x),$$

τότε ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Λήμμα 2.2.2. *Υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε*

$$\|xy\| \leq c\|x\|\|y\|,\ \ x,y\in\mathcal{A}$$

με τον πολλαπλασιασμό να είναι χωριστά συνεχής συνάρτηση σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ επί του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό $L_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ως $L_x(z) = xz$. Επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά συνεχής συνάρτηση, πρέπει να υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε η νόρμα $\|L_x\|$ να είναι φραγμένη. Έστω η οικογένεια τελεστών $\{L_x : \|x\| \leq 1\}$. Η οικογένεια αυτή είναι ένα σύνολο φραγμένων τελεστών στην $\mathcal{A}$ και λόγω της σχέσης
$\|xx_0\| \leq M \cdot \|x\|,\ \ M$ σταθερά $, x_0 \in \mathcal{A}$, είναι τοπικά φραγμένη. Τότε,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|L_x\| < \infty,$$

για κάθε $z \in \mathcal{A}$. Από το Θεώρημα Banach- Steinhaus, προκύπτει ότι το σύνολο $\{L_x : \|x\| \leq 1\}$ είναι φραγμένο ομοιόμορφα και έτσι, η ζητούμενη σταθερά $c > 0$ υπάρχει. □

Ορισμός 2.2.3. Ένας **ομομορφισμός** μεταξύ δύο αλγεβρών A και B είναι μια απεικόνιση $f : A \to B$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in K$, για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$, όπου K διανυσματικός χώρος, να ισχύουν τα εξής:

- $f(kx) = kf(x)$.
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$'
- $f(xy) = f(x)f(y)$.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα επί του $\mathbb{C}$ με μονάδα e, η οποία είναι επίσης χώρος Banach , τέτοια ώστε ο πολλαπλασιασμός να είναι χωριστά συνεχής. Τότε η απεικόνιση $x \in \mathcal{A} \mapsto L_x \in B(A)$ ορίζει ισομορφισμό από την $\mathcal{A}$ σε μια κλειστή υπάλγεβρα του $B(A)$ έτσι ώστε:*

(i) $L_e = 1$

(ii) *Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, $\|e\|^{-1}\|x\| \leq \|L_x\| \leq c\|e\|\|x\|$, $c > 0$.*

Ειδικότερα, η νόρμα $\|x\|_1 = \|L_x\|$ ορίζει μια ισοδύναμη νόρμα στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ που γίνεται άλγεβρα Banach με $\|e\|_1 = 1$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $x \in \mathcal{A} \mapsto L_x$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών με
$L_e = 1$. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι,

$$\|L_x y\| = \|xy\| \leq c\|e\|\|x\|,$$

$c > 0$ και άρα, $\|L_x\| \leq c\|x\|$. Επίσης,

$$\|L_x\| \geq \|L_x(\frac{e}{\|e\|})\| = \frac{\|x\|}{\|e\|}.$$

Οπότε,

$$\|e\|^{-1}\|x\| \leq \|L_x\|.$$

Αφού από υπόθεση η νόρμα $\|x\|_1 = \|L_x\|$ ορίζει μια ισοδύναμη νόρμα στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ και επειδή ο χώρος $\mathcal{A}$ είναι Banach , το σύνολο $\{L_x : x \in \mathcal{A}\}$ είναι πλήρες, άρα και κλειστή υπάλγεβρα του $B(A)$. Συνεπώς, ο ομομορφισμός είναι επί του $B(A)$, δηλαδή είναι ισομορφισμός από την $\mathcal{A}$ σε μια κλειστή υπάλγεβρα του $B(A)$. □

Ορισμός 2.2.5. *Η απεικόνιση $x \in \mathcal{A} \mapsto L_x$ ονομάζεται **κανονική αναπαράσταση** της $\mathcal{A}$.*

2.3 Η γενική γραμμική ομάδα της άλγεβρας

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$ που ικανοποιεί $\|\mathbf{1}\| = \mathbf{1}$ με την κατάλληλη νόρμα.

Ορισμός 2.3.1. *Ένα στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμο** αν υπάρχει στοιχείο y τέτοιο ώστε $xy = yx = \mathbf{1}$.*

Παρατήρηση 2.3.2. *Αν στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμο, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$ με $xy_1 = y_2x = \mathbf{1}$, τότε το x είναι αντιστρέψιμο. Πράγματι παρατηρούμε ότι,*

$$y_2 = y_2 \cdot \mathbf{1} = y_2xy_1 = \mathbf{1} \cdot y_1 = y_1.$$

Ορισμός 2.3.3. *Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων στοιχείων της άλγεβρας $\mathcal{A}$ ορίζεται να είναι το $\mathcal{A}^{-1}$. Μπορεί να γραφεί και $GL(\mathcal{A})$.*

Σημειώνουμε ότι το $\mathcal{A}^{-1}$ έιναι ομάδα και ανοικτό σύνολο, όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.4. *Εάν x στοιχείο της $\mathcal{A}$ με $\|x\| < 1$, τότε το $\mathbf{1} - x$ είναι αντιστρέψιμο και ο αντίστροφος του δίνεται από την απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Neumann*

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \mathbf{1} + x + x^2 + \cdots$$

Επίσης, ισχύουν τα εξής:

- $\|(\mathbf{1} - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$
- $\|\mathbf{1} - (\mathbf{1} - x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να ορίσουμε στοιχείο της $\mathcal{A}$ έστω z ως τη σειρά $z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, η οποία συγκλίνει απόλυτα. Έχουμε ότι,

$$z(\mathbf{1} - x) = (\mathbf{1} - x)z = \lim_{N\to\infty} (\mathbf{1} - x) \sum_{k=1}^{N} x^k = \lim_{N\to\infty} (\mathbf{1} - x^{N+1}) = \mathbf{1}$$

Οπότε, το στοιχείο $\mathbf{1} - x$ είναι αντιστρέψιμο και ο αντίστροφός του είναι το z.
Οι ανισότητες προκύπτουν ως εξής:

$$\|z\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|}$$

άρα,

$$\|(\mathbf{1}-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$$

Αφού

$$\mathbf{1}-z=\mathbf{1}-\sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n = -xz,$$

ισχύει

$$\|\mathbf{1}-z\| \leq \|x\| \cdot \|z\| \leq \|x\| \cdot \frac{1}{1-\|x\|} = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}.$$

□

Πόρισμα 2.3.5. *Το σύνολο $\mathcal{A}^{-1}$ είναι ανοικτό στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ και η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής από το $\mathcal{A}^{-1}$ στο $\mathcal{A}^{-1}$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα αντιστρέψιμο στοιχείο, έστω x_0 και ένα αυθαίρετο στοιχείο της $\mathcal{A}$, έστω h. Έχουμε ότι $x_0+h = x_0(\mathbf{1}+x_0^{-1}h)$. Εάν $\|x_0^{-1}h\| < 1$, τότε από το προηγούμενο Θεώρημα το στοιχείο x_0+h είναι αντιστρέψιμο. Πράγματι, αν $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$, με $\|h\|$ πολύ μικρό, τότε

$$\|h\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|} \Rightarrow \|x_0^{-1}\| \cdot \|h\| < \frac{\|x_0^{-1}\|}{\|x_0^{-1}\|} = 1,$$

δηλαδή το x_0+h είναι αντιστρέψιμο και έτσι, το σύνολο $\mathcal{A}^{-1}$ είναι ανοικτό στην άλγεβρα $\mathcal{A}$. Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής από το $\mathcal{A}^{-1}$ στο $\mathcal{A}^{-1}$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$(x_0+h)^{-1} - x_0^{-1} = [x_0(\mathbf{1}+x_0^{-1}h)]^{-1} - x_0^{-1} = [(\mathbf{1}++x_0^{-1}h)^{-1} - \mathbf{1}] \cdot x_0^{-1}.$$

Συνεπώς για $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$,

$$\|(x_0+h)^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \|(\mathbf{1}+x_0^{-1}h)^{-1} - \mathbf{1}\| \cdot \|x_0^{-1}\| \leq \frac{\|x_0^{-1}h\| \cdot \|x_0^{-1}\|}{1-\|x_0^{-1}h\|} \longrightarrow 0,$$

όταν $\|h\| \to 0$, δηλαδή η απεικόνιση $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής.

□

Πόρισμα 2.3.6. *Το σύνολο $\mathcal{A}^{-1}$ είναι τοπολογική ομάδα με τη σχετική τοπολογία και ισχύουν τα εξής:*

- $(x,y) \in \mathcal{A}^{-1} \times \mathcal{A}^{-1} \mapsto xy \in \mathcal{A}^{-1}$ *είναι συνεχής,*
- $x \in \mathcal{A}^{-1} \mapsto x^{-1} \in \mathcal{A}^{-1}$ *είναι συνεχής.*

2.4 Το φάσμα ενός τελεστή

Το σύνολο όλων των φραγμένων τελεστών συμβολίζεται $B(H)$ και είναι χώρος Banach ως προς τη νόρμα του τελεστή .

Έστω $A, B \in B(H)$ με $AB \in B(H)$ και ικανοποιούν τους νόμους:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AB + BC$

Θεώρημα 2.4.1. *Για κάθε τελεστή $A \in B(H)$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Για καθε $y \in H$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ τέτοιο ώστε $Ax = y$

(ii) Υπάρχει τελεστής $B \in B(H)$ τέτοιο ώστε $AB = BA = \mathbf{1}$

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Από υπόθεση ο A είναι αντιστρέψιμος σαν γραμμικός μετασχηματισμός του διανυσματικού χώρου H. Θεωρούμε τον αντίστροφο του $A, B : H \to H$. Τα γραφήματα των A και B σχετίζονται μεταξύ τους ως εξής:

$$G(B) = \{(x, Bx), x \in H\} = \{(Ay, y), y \in H\} \subseteq H \oplus H$$

. Αφού το $\{(Ay, y), y \in H\}$ είναι κλειστό στο $H \oplus H$ λόγω της συνέχειας του A, προκύπτει ότι και το γράφημα του B είναι κλειστό. Συνεπώς, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος ο τελεστής B είναι φραγμένος, δηλαδή $B \in B(H)$. $\square$

Ορισμός 2.4.2. Έστω $A \in B(H)$.

- Ο A λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει τελεστής $B \in B(H)$ τέτοιος ώστε $AB = BA = \mathbf{1}$.
- Το **φάσμα του** A είναι το σύνολο $\sigma(A)$, όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $A - \lambda\mathbf{1}$ είναι μη-αντιστρέψιμος.
- Το συμπλήρωμα $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ του συνόλου $\sigma(A)$ θα συμβολίζεται με $\rho(A)$ θα ονομάζεται το **επιλύον σύνολο** του A.
- Έστω μη μηδενικό διάνυσμα $x \in H$ με $Tx = \lambda x$ για $T \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}$. Το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** με αντίστοιχο **ιδιοδιάνυσμα** x.
- Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του T θα συμβολίζεται με $\sigma_p(T)$, είναι υποσύνολο του $\sigma(T)$ και ονομάζεται το **σημειακό φάσμα** του T.

2.5 Το φάσμα ενός στοιχείου μιας άλγεβρας Banach

Θεωρούμε $\mathcal{A}$ την άλγεβρα $B(E)$ όλων των φραγμένων τελεστών ενός χώρου Banach X ως μοναδιαία άλγεβρα Banach με $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Ορισμός 2.5.1. *Για κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$, το **φάσμα** του x ορίζεται να είναι το σύνολο*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda\mathbf{1} \notin \mathcal{A}^{-1}\}$$

Πρόταση 2.5.2. *Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, το φάσμα $\sigma(x)$ είναι κλειστό υποσύνολο του δίσκου $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$.*

Απόδειξη. Το επιλύον σύνολο του $\sigma(x)$ είναι το

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda\mathbf{1} \in \mathcal{A}^{-1}\}.$$

Αφού το $\mathcal{A}^{-1}$ είναι ανοικτό και η απεικόνιση $\lambda \mapsto x - \lambda : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ είναι συνεχής, το $\sigma(x)$ πρέπει να είναι ανοικτό.
Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|x\|$, τότε $x - \lambda = (-\lambda)(\mathbf{1} - \lambda^{-1}x)$ και αφού $\|\lambda^{-1}x\| < 1$, το $x - \lambda$ είναι αντιστρέψιμο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|x\|$ και $\lambda \in \sigma(x)$, οπότε τελικά το το φάσμα είναι κλειστό υποσύνολο του δίσκου.

□

Ορισμός 2.5.3. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα **γραμμικό συναρτησοειδές** στο X είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $\rho : X \to \mathbb{R}$.*

Ορισμός 2.5.4.

- *Μια μιγαδική συνάρτηση λέγεται **ολόμορφη ή αναλυτική** σε ένα σύνολο D αν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο ανοικτό σύνολο A που περιέχει το D.*
- *Μια συνάρτηση λέγεται **ακέραια** εάν είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$.*

Θεώρημα 2.5.5. ***Θεώρημα Liouville*** *Αν μια ακέραια συνάρτηση είναι φραγμένη τότε είναι σταθερή.*

Θεώρημα 2.5.6. ***Θεώρημα Hahn- Banach***
Έστω X γραμμικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

για κάθε $x, y \in X, \lambda \geq 0$. Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X και $\phi : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση ώστε $\phi(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in Y$, τότε υπάρχει $\psi : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της ϕ, ώστε $\psi(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Πόρισμα 2.5.7. *Έστω $X^* = \{f : X \to \mathbb{C}$ γραμμικές και συνεχείς$\}$. Τότε για $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x) \neq f(y)$, δηλαδή ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του. Επίσης, αν $x \neq 0$ τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) \neq 0$, δηλαδή για κάθε f με $f(x) = 0$, $x = 0$.*

Θεώρημα 2.5.8. ***Θεώρημα του Gelfand***

$$\sigma(x) \neq \emptyset \text{ για κάθε } x \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $\sigma(x)=\emptyset$ τότε η συνάρτηση $f(\lambda)=(x-\lambda)^{-1}$ με στοιχεία από την άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια φραγμένη ακέραια συνάρτηση που τείνει στο 0 για $\lambda\to 0$.

Επειδή το $\sigma(x)$ είναι κλειστό, ορίζουμε, για κάθε $\lambda_0\notin\sigma(x)$, το $(x-\lambda)^{-1}$ με λ αρκούντως κοντά στο λ_0.
Ισχυρισμός: Στην τοπολογία της $\mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}[(x-\lambda)^{-1}-(x-\lambda_0)^{-1}]=(x-\lambda_0)^{-2}.$$

Απόδειξη ισχυρισμού:

$$\begin{aligned}(x-\lambda)^{-1}-(x-\lambda_0)^{-1} &= (x-\lambda)^{-1}(x-\lambda_0)(x-\lambda_0)^{-1}\\ &\quad -(x-\lambda)^{-1}(x-\lambda)(x-\lambda_0)^{-1}\\ &= (x-\lambda)^{-1}[(x-\lambda_0)-(x-\lambda)](x-\lambda_0)^{-1}\\ &= (\lambda-\lambda_0)(x-\lambda)^{-1}(x-\lambda_0)^{-1}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{(x-\lambda)^{-1}-(x-\lambda_0)^{-1}}{\lambda-\lambda_0}=(x-\lambda)^{-1}(x-\lambda_0)^{-1}.$$

Αλλά, αφού $(x-\lambda)^{-1}\longrightarrow(x-\lambda_0)^{-1}$ για $\lambda\to\lambda_0$,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}[(x-\lambda)^{-1}-(x-\lambda_0)^{-1}]=(x-\lambda_0)^{-1}(x-\lambda_0)^{-1}=(x-\lambda_0)^{-2}.$$

Έστω $\sigma(x)=\emptyset$. Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ρ στην $\mathcal{A}$. Η συνάρτηση $f(\lambda)=\rho((x-\lambda)^{-1})$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$ και παίρνει τιμές από το $\mathbb{C}$. Λόγω του ισχυρισμού, η f έχει παράγωγο στο $\mathbb{C}$ με $f'(\lambda)=\rho((x-\lambda)^{-2})$ και έτσι, είναι ολόμορφη συνάρτηση.
Θα δείξουμε ότι είναι και φραγμένη. Έχουμε ότι

$$\|(x-\lambda)^{-1}\|=\frac{1}{|\lambda|}\|(\mathbf{1}-\lambda^{-1}x)^{-1}\|,\ \text{ για } |\lambda|>\|x\|.$$

Από το Θεώρημα 1.4.4,

$$\|(x-\lambda)^{-1}\|\leq\frac{1}{|\lambda|(1-\frac{\|x\|}{|\lambda|})}=\frac{1}{|\lambda|-\|x\|}\longrightarrow 0,$$

όταν $|\lambda|\to\infty$. Συνεπώς, η f μηδενίζεται, $|f(\lambda)|\longrightarrow 0$ και άρα είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα του Liouville, αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\lambda\in\sigma(x)^c$ και φραγμένη, πρέπει να είναι σταθερή. Επειδή η τιμή της σταθεράς είναι 0 έχουμε

$$\rho((x-\lambda)^{-1})=0,$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$, για κάθε ρ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Από το Πόρισμα του Θεωρήματος Hahn- Banach προκύπτει ότι $(x-\lambda)^{-1}=0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$, το οποίο είναι άτοπο διότι το $(x-\lambda)^{-1}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο και $\mathbf{1}\neq 0$ στην $\mathcal{A}$.

□

Ορισμός 2.5.9. *Μια **διαιρετή άλγεβρα** επί του $\mathbb{C}$ είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα $\mathbf{1}$ τέτοια ώστε κάθε μη-μηδενικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ να είναι αντιστρέψιμο.*

Ορισμός 2.5.10. *Έστω οι άλγεβρες Banach $\mathcal{A}$ και B. **Ισομορφισμός** μεταξύ των Banach $\mathcal{A}$ και B είναι ένας ισομορφισμός $\theta : \mathcal{A} \to B$ που διατηρεί τις πράξεις των αλγεβρικών δομών και είναι ταυτόχρονα τοπολογικός ισομορφισμός. Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές a, b τέτοιες ώστε $a\|x\| \leq \|\theta(x)\| \leq b\|x\|$, για κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$.*

Πόρισμα 2.5.11. *Κάθε διαιρετή άλγεβρα Banach είναι ισομορφική με τη μονοδιάστατη άλγεβρα $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ με $\theta(\lambda) = \lambda\mathbf{1}$. Η θ είναι ισομορφισμός επί της υπάλγεβρας $\mathbb{C}\mathbf{1}$ της $\mathcal{A}$. Η $\mathbb{C}\mathbf{1}$ αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια της μονάδας. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση θ είναι επί της $\mathcal{A}$.
Από το Θεώρημα του Gelfand προκύπτει ότι για κάθε στοιχείο x της $\mathcal{A}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \in \sigma(x)$. Τότε το $x - \lambda$ είναι μη αντιστρέψιμο. Αφού όμως η $\mathcal{A}$ είναι διαιρετή άλγεβρα, το $x - \lambda$ πρέπει να είναι το 0 διότι κάθε μη- μηδενικό στοιχείο της πρέπει να είναι αντιστρέψιμο. Συνεπώς, $x = \lambda\mathbf{1} = \theta(\lambda)$ και ο ισομορφισμός είναι επί της $\mathcal{A}$.

□

2.6 Η φασματική ακτίνα

Έστω μοναδιαία άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Ορισμός 2.6.1. *Για κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ **φασματική ακτίνα** ορίζεται ως το σύνολο*

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Θεώρημα 2.6.2. *Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in \sigma(x)$ συνεπάγεται ότι $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ και έτσι,

$$|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq r(x^n) \leq \|x^n\|.$$

Άρα,

$$(r(x^n))^{\frac{1}{n}} \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

δηλαδή, $r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.
Τελικά, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$r(x) \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Άρα, $r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ και $r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$
Θα δείξουμε ότι $r(x) \geq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ δείχνοντας ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x) + \epsilon$$

για κάθε $n \geq k$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στην $\mathcal{A}$ με $\|x\| \leq r(x) + \frac{\epsilon}{2},\ \ \epsilon > 0$.
Επίσης, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τ.ώ.

$$\|x\| \leq c\|x\|$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.
Τότε,

$$\|x^n\| \leq c\|x^n\| \leq c\|x\|^n \leq c(r(x) + \frac{\epsilon}{2})^n$$

Οπότε, $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq c^{\frac{1}{n}}(r(x) + \frac{\epsilon}{2})$ το οποίο τείνει στην ποσότητα $r(x) + \frac{\epsilon}{2}$.
Συνεπώς, υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq k$

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x) + \epsilon.$$

Τέλος, $r(x) \geq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ από τον ορισμό της φασματικής ακτίνας.
Έτσι, ισχύει η ισότητα και

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x).$$

□

Ορισμός 2.6.3. *Ένα στοιχείο x μιας άλγεβρας Banach , μοναδιαίας ή μη, ονομάζεται* ***μηδενοδύναμη*** *εάν*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Πόρισμα 2.6.4. *Ένα στοιχείο x μιας μοναδιαίας άλγεβρας Banach είναι μηδενοδύναμο αν και μόνο αν $\sigma(x) = \{0\}$.*

Απόδειξη. Αν το x είναι μηδενοδύναμο, τότε και μόνο τότε $r(x) = 0$, δηλαδή $\sigma(x) = \{0\}$. □

2.7 Ιδεώδη και Πηλίκα

Θεωρούμε άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $\mathbb{C}$. Θα εξετάσουμε τα ιδεώδη αλγεβρών Banach και τα πηλίκα αλγεβρών τους.

Ορισμός 2.7.1.
- ***Ιδεώδες*** *της $\mathcal{A}$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $I \subseteq \mathcal{A}$ που παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τον αριστερό και το δεξιό πολλαπλασιασμό, δηλαδή $\mathcal{A}I + I\mathcal{A} \subseteq I$.*
- *Τετριμμένα ιδεώδη είναι τα $I = \{0\}$ και $I = \mathcal{A}$.*
- *Εάν αυτά είναι τα μοναδικά το ιδεώδες $\mathcal{A}$ ονομάζεται* ***απλό ιδεώδες***.

- ***Γνήσιο*** *ονομάζεται το ιδεώδες που δεν είναι ολόκληρο το $\mathcal{A}$, δηλαδή $I \subseteq \mathcal{A}$ αλλά $I \neq \mathcal{A}$.*

Αν το I είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο πηλίκο $\mathcal{A}/I$, τότε δημιουργούμε τη γραμμική απεικόνιση $x \in \mathcal{A} \mapsto x + I \in \mathcal{A}/I$, δηλαδή τη φυσική απεικόνιση από την $\mathcal{A}$ επί του πηλίκου $\mathcal{A}/I$. Μπορούμε να ορίσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού ως $(x+I)(y+I) = xy+I$, με $x, y \in \mathcal{A}$. Τότε το πηλίκο $\mathcal{A}/I$ γίνεται άλγεβρα στο $\mathbb{C}$ και η φυσική απεικόνιση $x \in \mathcal{A} \mapsto x+I$ γίνεται επιμορφισμός αλγεβρών στο $\mathbb{C}$ με το ιδεώδες I να είναι ο πυρήνας της. Το γεγονός αυτό παρατηρείται στη μικρή ακριβή ακολουθία από μιγαδικές άλγεβρες

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I \longrightarrow 0,$$

με την απεικόνιση $I \longrightarrow \mathcal{A}$ να είναι η εμφύτευση. Σημειώνουμε ότι αφού έχουμε ακριβή ακολουθία, η εμφύτευση είναι μονομορφισμός και η φυσική απεικόνιση είναι επιμορφισμός.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τη διάσταση της άλγεβρας γνωρίζοντας τις διαστάσεις των I και $\mathcal{A}/I$. Για παράδειγμα, εάν η $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένος διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, τότε και το ιδεώδες I και το πηλίκο $\mathcal{A}/I$ είναι πεπερασμένοι διανυσματικοί χώροι. Επίσης, από την παραπάνω μικρή ακριβή ακολουθία προκύπτει ότι $\dim \mathcal{A} = \dim I + \dim \mathcal{A}/I$.

Πρόταση 2.7.2. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με κανονικοποιημένη μονάδα $\mathbf{1}$ και I γνήσιο ιδεώδες της άλγεβρας. Τότε, για κάθε $z \in I$ ισχύει $\|\mathbf{1} + z\| \geq 1$. Επιπλέον, η κλειστότητα του γνήσιου ιδεώδους είναι γνήσιο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $z \in I$ με $\|\mathbf{1} + z\| < 1$. Τότε από το Θεώρημα 1.4.4 το στοιχείο z πρέπει να είναι αντιστρέψιμο στην άλγεβρα και έτσι, $z^{-1}z = \mathbf{1}$ δηλαδή $z^{-1}z \in I$. Αλλά τότε $\mathbf{1} \in I$ και $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ το οποίο σημαίνει ότι το ιδεώδες I δεν είναι γνήσιο, γεγονός που είναι άτοπο. Τελικά, υπάρχει $z \in I$ με $\|\mathbf{1} + z\| \geq 1$.
Κλειστότητα: Εάν $\|\mathbf{1} + z\| \geq 1$ για κάθε $z \in I$, τότε $\|\mathbf{1} + z\| \geq 1$ για κάθε z στην κλειστότητα του I λόγω συνέχειας της νόρμας.
Δηλαδή, $\|\mathbf{1} + z\| \geq 1$, για κάθε $z \in \{x \in \mathcal{A} : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I,\ \ x_n \to x\}$. □

Παρατήρηση 2.7.3. *Εάν I γνήσιο ιδεώδες κλειστό μιας Banach άλγεβρας $\mathcal{A}$ με κανονικοποιημένη μονάδα, τότε η μονάδα του πηλίκου $\mathcal{A}/I$ ικανοποιεί τη σχέση $\|\mathbf{1} + I\| = \inf_{z\in I} \|\mathbf{1} + z\| = 1$ και έτσι, είναι και αυτή κανονικοποιημένη μονάδα. Συνεπώς, μια Banach άλγεβρα $\mathcal{A}$ με κανονικοποιημένη μονάδα είναι απλή αν και μόνο αν είναι τοπολογικά απλή, δηλαδή έχει μη τετριμμένα κλειστά ιδεώδη.*

Αν θεωρήσουμε I ένα κλειστό ιδεώδες μιας - μοναδιαίας ή μη- άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$, τότε το πηλίκο $\mathcal{A}/I$ είναι χώρος Banach και άλγεβρα στο $\mathbb{C}$ με τον πολλαπλασιασμό ορισμένο ως εξής: $(x + I)(y + I) = xy + I$, για $x, y \in \mathcal{A}$. Θα δείξουμε ότι είναι άλγεβρα Banach :

$$\begin{aligned} \|(x + I)(y + I)\| = \inf_{z\in I} \|xy + z\| &\leq \inf_{z_1,z_2\in I} \|xy + xz_2 + z_1y + z_1z_2\| \\ &= \inf_{z_1,z_2\in I} \|(x + z_1)y + (x + z_1)z_2\| \\ &= \inf_{z_1,z_2\in I} \|(x + z_1)(y + z_2)\| \\ &\leq \|x + I\|\|y + I\| \end{aligned}$$

για $x, y \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.7.4.

- *Η ακολουθία $0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I \longrightarrow 0$, γίνεται ακριβής ακολουθία από άλγεβρες Banach και συνεχείς ομομορφισμούς αν θεωρήσουμε την εμφύτευση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$, οπότε $\|\pi\| \leq 1$ ή $\|\pi\| = 1$ (για κανονικοποιημένη μονάδα).*
- *Έστω $\mathcal{A}, B$ άλγεβρες Banach και $\omega : \mathcal{A} \to B$ φραγμένος ομομορφισμός μεταξύ των αλγεβρικών δομών. Τότε ο πυρήνας $\ker \omega$ είναι κλειστό ιδεώδες στην $\mathcal{A}$ και υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\omega + I : \mathcal{A}/\ker \omega \to B$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε $\omega(x) = (\omega + I)(x + \ker \omega)$.*

Πρόταση 2.7.5. *Έστω $\mathcal{A}, B$ άλγεβρες Banach . Κάθε φραγμένος ομομορφισμός αλγεβρών $\omega : \mathcal{A} \to B$ έχει μοναδικό μετασχηματισμό $\omega = (\omega + I) \circ \pi$, όπου $\omega + I : \mathcal{A}/\ker \omega \to B$ μονομορφισμός και $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\ker \omega$ η φυσική προβολή. Επιπλέον, $\|\omega + I\| = \|\omega\|$.*

Απόδειξη. Αφού $\omega = (\omega + I) \circ \pi$ και $\|\pi\| \leq 1$, έχουμε $\|\omega\| \leq \|\omega + I\|$ (1) Επίσης, $\|(\omega + I)(x + I)\| = \|\omega(x)\| = \|\omega(x + z)\| \leq \|\omega\|\|x + z\|$ για $z \in \ker \omega$. Τότε, $\|(\omega + I)(x + I)\| \leq \inf_{z \in \ker \omega} \|\omega\|\|x + z\| \leq \|\omega\|$.
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. □

Στοιχεία από τη Θεωρία Συνόλων

- Ένα **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** είναι ένα ζεύγος $(S, \leq)$ όπου S σύνολο και $\leq$ μία μεταβατική($x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$)διμελής σχέση(υποσύνολο καρτεσιανού γινομένου) που ικανοποιεί $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$.
- Ένα στοιχείο $x \in S$ λέγεται **μεγιστικό** αν δεν υπάρχει στοιχείο $y \in S$ τέτοιο ώστε $x \leq y$ και $y \neq x$.
- Ένα **γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο** του S είναι ένα $L \subseteq S$ στο οποίο για τα στοιχεία $x, y \in L$ ισχύει $x \leq y$ ή $y \leq x$. Το σύνολο $\mathcal{L}$ όλων των γραμμικά διατεταγμένων υποσυνόλων του S είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.
- **The Hausdorff maximality principle**: Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathcal{L}$ έχει μεγιστικό στοιχείο.
- **Λήμμα του Zorn**: Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο του S που είναι επαγωγικό, δηλαδή κάθε γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο του S έχει άνω φράγμα στο S, περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Με βάση το Λήμμα του Zorn (ή ισοδύναμα την Hausdorff maximality principle) μπορούμε να μελετήσουμε τα μεγιστικά ιδεώδη.

Ορισμός 2.7.6. *Ένα ιδεώδες M σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ επί του $\mathbb{C}$ λέγεται **μεγιστικό ιδεώδες** αν είναι μεγιστικό στοιχείο του μερικώς διατεταγμένου συνόλου όλων των γνήσιων ιδεωδών της $\mathcal{A}$. Επομένως, μεγιστικό ιδεώδες είναι ένα γνήσιο ιδεώδες $M \subseteq \mathcal{A}$ για το οποίο ισχύει ότι:*

$$\text{για κάθε } N \subseteq \mathcal{A}, \ \text{ με } M \subseteq N \text{ τότε } M = N \text{ ή } N = \mathcal{A}.$$

Θεώρημα 2.7.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μοναδιαία άλγεβρα Banach . Τότε κάθε μεγιστικό ιδεώδες της άλγεβρας είναι κλειστό και κάθε γνήσιο ιδεώδες της περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες. Επιπλέον, κάθε ομομορφισμός αλγεβρών $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής με νόρμα ≤ 1.*

Απόδειξη. Έστω M μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $T \in M$, $AT \in M$. Αν $\mathbf{1} \in M$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$, $A \cdot \mathbf{1} = A \in M$. Οπότε, $M = A$ το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, η μονάδα δεν μπορεί να ανήκει στην κλειστότητα $\overline{M}$ του M. Έτσι, $\overline{M}$ είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και αφού $M \subseteq \overline{M}$ και το M είναι μεγιστικό, το $M = \overline{M}$ είναι κλειστό.

Έστω I γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και P το σύνολο όλων των γνησίων ιδεωδών της άλγεβρας που περιέχει το I. Η οικογένεια P είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο και μπορεί να θεωρηθεί επαγωγικό αν κάθε γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο $\mathcal{L} = \{J_a : a \in P\} \subseteq P$ έχει άνω φράγμα στο P. Πράγματι, η ένωση $\cup_a J_a$ είναι ιδεώδες της άλγεβρας ως ένωση ιδεωδών και δεν περιέχει τη μονάδα αφού αυτή δεν ανήκει στα J_a για κάθε $a \in P$. Άρα, η $\cup_a J_a$ είναι ένα άνω φράγμα του $\mathcal{L}$ άρα και του P. Από το Λήμμα του Zorn, το P έχει μεγιστικό στοιχείο M και αυτό είναι γνήσιο ιδεώδες που περιέχει το I. Αν N ιδεώδες που περιέχει το M, τότε περιέχει και το ιδεώδες I και επομένως, $N \in P$ και το M είναι μεγιστικό ιδεώδες. Τότε $M = N$.

Τέλος, θεωρούμε ομομορφισμό αλγεβρών $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Ο πυρήνας $\ker(\alpha)$ είναι μεγιστικό ιδεώδες άρα και κλειστό, οπότε ο ομομορφισμός είναι συνεχής. Αν $\|\alpha\| > 1$ τότε υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ με $\|a\| < 1$ και $\alpha(a) = 1$. Αλλά τότε $1 - a$ είναι αντιστρέψιμο οπότε $1 - \alpha(a)$ αντιστρέψιμο, άτοπο. Τελικά, $\|\alpha\| \leq 1$. □

Κεφάλαιο 3

Τελεστές σε Χώρους Hilbert

Ορισμός 3.0.8. *Έστω H μιγαδικός γραμμικός χώρος. Ένα **εσωτερικό γινόμενο** είναι μια απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ για την οποία ισχύουν:*

- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0$ *αν και μόνο αν* $x = 0$
- $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Η απεικόνιση $\| \cdot \| : H \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ είναι νόρμα στον H.

*Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Ορισμός 3.0.9. *Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$του H λέγεται **ορθοκανονική** αν $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ όταν $i = j$ και 0 διαφορετικά. Αν η κλειστή γραμμική θήκη $\overline{\{e_i : i \in I\}}$ είναι όλος ο χώρος H, τότε η οικογένεια αυτή λέγεται **ορθοκανονική βάση του** H.*

Ορισμός 3.0.10. *Δύο στοιχεία $x, y \in H$ λέγονται **κάθετα** αν $\langle x, y \rangle = 0$. Αν $A \subseteq H$, ορίζουμε το σύνολο $A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \text{για κάθε } y \in A\}$*

3.1 Γεωμετρία στους χώρους Hilbert

Ορισμός 3.1.1. *Έστω H χώρος Hilbert. Ορίζουμε ως **προβολή** την απεικόνιση $P : H \to H$ για την οποία ισχύει $P = P^2$.*

Παρατήρηση 3.1.2. *Έστω H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρός του. Τότε $M^{\perp} \neq \emptyset$ και*

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Έτσι, το x γράφεται μοναδικά ως το άθροισμα

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x)$$

όπου $P_M(x) \in M$ και $P_{M^\perp}(x) \in M^\perp$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $P_M : H \to H$ είναι προβολή επί του M και έχει νόρμα ίση με 1.
Πράγματι, αν ορίσουμε την προβολή ως

$$P_M(x) = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u,$$

όπου $u \in S$ και S ένα ορθοκανονικό σύνολο, τότε για $u, v \in S$ θα έχουμε ότι

$$P_M(P_M(x)) = \sum_{v \in S} (\sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u, v) v = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u = P_M(x).$$

Άρα, η P_M είναι προβολή. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \| \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u\|^2 = \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

λόγω της ανισότητας Bessel. Συνεπώς, $\|P_M\| \leq 1$. Αλλά κάθε προβολή είναι φραγμένη με $\|P_M\| \geq 1$. Τελικά, $\|P_M\| = 1$.

Θεώρημα 3.1.3. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρός του, τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $y \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Λήμμα 3.1.4. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρός του, τότε για κάθε $x \in H$, $(x - P_M(x)) \perp M$. Ισοδύναμα, $(x - P_M(x)) \in M^\perp$.*

Απόδειξη. Αφού $P_M(x) \in M$ και M υπόχωρος, έχουμε ότι $P_M(x) + ay \in M$ για $x \in H, y \in M, a \in \mathbb{C}$. Αν ορίσουμε $\delta = \|x - P_M(x)\|$, από το προηγούμενο Θεώρημα θα ισχύει

$$\delta^2 \leq \|x - (P_M(x) + ay)\|^2 = \|x - P_M(x)\|^2 + |a|^2\|y\|^2 - \overline{a}\langle x - P_M(x), y \rangle - a\langle y, x - P_M(x) \rangle.$$

Άρα,

$$0 \leq |a|^2\|y\|^2 - \overline{a}\langle x - P_M(x), y \rangle - a\langle y, x - P_M(x) \rangle$$

Θέτω $a = b\langle x - P_M(x), y \rangle$ με $b \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$0 \leq b^2|\langle x - P_M(x), y \rangle|^2\|y\|^2 - b\overline{\langle x - P_M(x), y \rangle}\langle x - P_M(x), y \rangle - b\langle x - P_M(x), y \rangle\langle y, x - P_M(x) \rangle$$

Δηλαδή,

$$0 \leq b^2|\langle x - P_M(x), y \rangle|^2\|y\|^2 - 2b|\langle x - P_M(x), y \rangle|^2.$$

Αλλά αφού $b \in \mathbb{R}$, το $|\langle x - P_M(x), y \rangle|^2 = 0$ και έτσι, $(x - P_M(x)) \perp y$. $\square$

Ιδιότητες προβολών

- $\langle P_M(x), y\rangle = \langle P_M(x), P_M(y)\rangle = \langle x, P_M(y)\rangle$, για $x, y \in H$
- $\langle P_M(P_M(x)), y\rangle = \langle P_M(x), y\rangle$, για $x, y \in H$
- $\langle P_M(x), x\rangle = \|P_M(x)\|^2$
- $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$
- $\|x\|^2 = \|x - P_M(x)\|^2 + \|P_M(x)\|^2$
- $M = \{x : P_M(x) = x\} = \{x : \|P_M(x)\| = \|x\|\}$
- $P_M(x) = 0$ ανν $x \perp M$
- $P_M(ax + by) = aP_M(x) + bP_M(y)$, για $x, y \in H$ και $a, b \in \mathbb{R}$
- $P_M(H) = M$

3.2 Κατηγορίες τελεστών σε χώρους Hilbert και C*- άλγεβρες

Ορισμός 3.2.1. *Έστω H, K χώροι Hilbert. Μια **sesquilinear μορφή** είναι μια απεικόνιση $f : H \times K \to \mathbb{C}$ που είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς τη δεύτερη.*
Αν ο αριθμός $\|f\|$ ισούται με $\sup\{|f(x,y)| : x \in H, y \in K, \|x\| = 1 = \|y\|\}$, τότε είναι πεπερασμένος.

Στην ενότητα αυτή θα θεωρούμε χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο $\langle \xi, \eta\rangle$ γραμμικό στο $\xi \in H$ και αντιγραμμικό στο $\eta \in H$.

Λήμμα 3.2.2 (Riesz). *Κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές f του χώρου H γράφεται μοναδικά ως το εσωτερικό γινόμενο $f(\xi) = \langle \xi, \eta\rangle$ για $\xi, \eta \in H$. Επίσης, $\|f\| = \|\eta\|$.*

Πρόταση 3.2.3. *Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $[\cdot,\cdot]$ στο $\mathbb{C}$ του H υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A \in H$ τέτοιος ώστε $[\xi, \eta] = \langle A\xi, \eta\rangle$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε γραμμικό συναρτησοειδές του H $f(\eta) = \overline{[\xi, \eta]}$. Από το Λήμμα του Riesz έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A\xi \in H$ τέτοιος ώστε $f(\eta) = \langle \eta, A\xi\rangle$. Όμως,
$$\overline{\langle \eta, A\xi\rangle} = \langle A\xi, \eta\rangle = [\xi, \eta].$$
Άρα, ο A ικανοποιεί την $[\xi, \eta] = \langle A\xi, \eta\rangle$ και είναι μοναδικός λόγω του Λήμματος Riesz.

Επίσης, ο A είναι γραμμικός και φραγμένος. Πράγματι,
$$\sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1} |[\xi, \eta]| < \infty$$
$\square$

Πόρισμα 3.2.4. *Έστω H, K χώροι Hilbert και τελεστής $A \in B(H, K)$ δηλαδή, $A : H \to K$ φραγμένος τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής A^* με $A^* : K \to H$ τέτοιος ώστε*

$$\langle A\xi, \eta\rangle_K = \langle \xi, A^*\eta\rangle_H$$

με $\xi \in H, \eta \in K$.

Απόδειξη. Ορίζουμε φραγμένη sesquilinear μορφή του $H \times K$ ως

$$[\eta, \xi] = \langle \eta, A\xi\rangle.$$

Τότε, από την προηγούμενη Πρόταση θα υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής από τον K στον H ώστε να ισχύει

$$\langle A^*\eta, \xi\rangle_H = \langle \eta, A\xi\rangle_K.$$

Συνεπώς, παίρνοντας συζυγείς,

$$\overline{\langle A^*\eta, \xi\rangle}_H = \overline{\langle \eta, A\xi\rangle}_K$$

έχουμε ότι

$$\langle \xi, A^*\eta\rangle_H = \langle A\xi, \eta\rangle_K$$

□

Σημειώνουμε ότι αν $H = K$ δηλαδή $A \in B(H)$, τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* \in B(H)$ τέτοιος ώστε $\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A^*\eta\rangle$.

Παρατήρηση 3.2.5. *Για την απεικόνιση $A \mapsto A^*$ ισχύουν τα εξής:*

- $A^{**} = A$
- $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$
- $(AB)^* = B^* A^*$
- $\|A^* A\| = \|A\|^2$

*Οι τρεις πρώτες ιδιότητες ορίζουν μια **ενέλιξη** και η τέταρτη προκύπτει ως εξής:*

$$\sup_{\|\xi\|\leq 1, \|\eta\|\leq 1} |\langle A^*A\xi, \eta\rangle = \sup_{\|\xi\|\leq 1, \|\eta\|\leq 1} |\langle A\xi, A\eta\rangle \leq \sup_{\|\xi\|\leq 1, \|\eta\|\leq 1} \|A\xi\|\|A\eta\| = \|A\|^2$$

Επίσης,

$$\|A\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \langle A\xi, A\xi\rangle \ = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \langle A^*A\xi, \xi\rangle \leq \|A^*A\|$$

Παρατήρηση 3.2.6. *Σημειώνουμε ότι πλέον μπορούμε να ορίσουμε ως **προβολή** ενός χώρου Hilbert H την απεικόνιση $P : H \to H$ για την οποία ισχύει*

$$P = P^2 = P^*.$$

Ορισμός 3.2.7. *Μια* ***C*- άλγεβρα τελεστών*** *είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη που η νόρμα της ικανοποιεί την C*-ιδιότητα:*

$$\|A * A\| = \|A\|^2$$

Σημειώνουμε ότι αν H χώρος Hilbert, η άλγεβρα $B(H)$ όλων των φραγμένων τελεστών του H είναι C*- άλγεβρα.

Ορισμός 3.2.8. *Μια C*- άλγεβρα τελεστών είναι μια υπάλγεβρα $A \in B(H)$ που είναι επίσης κλειστή με τον αυτοσυζυγή τελεστή, δηλαδή $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Ισοδύναμα, είναι C*- άλγεβρα αν ικανοποιεί ότι $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}^*$.*

Παράδειγμα 3.2.9. *Αν S μη κενό υποσύνολο της $B(H)$, τότε η παραγόμενη από το S C*- άλγεβρα είναι η τομή όλων των C*- αλγεβρών της $B(H)$ που περιέχει το S και συμβολίζεται $C^*(S)$.*
Πράγματι, αν

$$P = \{T_1 T_2 \cdots T_n, n = 1, 2, ... \text{ με } T_k \in S \cup S^*\},$$

τότε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του P είναι η μικρότερη αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει το S. Επομένως, η κλειστότητα αυτού του νέου συνόλου είναι μια C- άλγεβρα που παράγεται από το S.*

Ορισμός 3.2.10. *Έστω τελεστής A.*

- *Ο A λέγεται* ***φυσιολογικός*** *αν μετατίθεται με τον συζυγή του δηλαδή, $A^*A = AA^*$.*
- *Ο $A \in H$ λέγεται* ***ισομετρία*** *αν και μόνο αν $\langle A\xi, A\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$ για κάθε $\xi \in H$.*
- *Αν ο A είναι αντιστρέψιμη ισομετρία δηλαδή $A^*A = AA^* = \mathbf{1}$, τότε ο τελεστής ονομάζεται* ***unitary.***
- *Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A με μη αρνητικό φάσμα $\sigma(A)$ ονομάζεται* ***θετικός****. Επίσης, είναι θετικός αν $\langle A\xi, \xi\rangle \geq 0$. Γενικότερα, αν A, B αυτοσυζυγείς τελεστές έχουμε ότι $A \leq B$ αν $B - A$ θετικός.*

3.3 Τοπολογίες στον B(H)

Έστω H χώρος Hilbert.

3.3α΄ Η τοπολογία της νόρμας τελεστή (norm topology)

Η τοπολογία της νόρμας τελεστή ορίζεται από μια οικογένεια νορμών $\|\cdot\|$ του τελεστή. Έχουμε ότι $T_n \to T$ με την τοπολογία της νόρμας αν και μόνο αν $\|T - T_n\| \to 0$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\|T - T_n\| \leq \epsilon$.Όμως, η συγκεκριμένη τοπολογία του $B(H)$ δεν αρκεί για τη μελέτη της δράσης του $B(H)$ στον H και γι αυτό χρειαζόμαστε ασθενέστερες τοπολογίες από αυτή που τον εφοδιάζουν.

3.3β΄ Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (SOT)

Ορισμός 3.3.1. *Η **ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology)** στον $B(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στο χώρο H. Δηλαδή, ένα δίκτυο από φραγμένους τελεστές (T_i) συγκλίνει στο φραγμένο τελεστή T ως προς τη SOT αν και μόνο αν*

$$\|T_i x - Tx\| \to 0$$

για κάθε $x \in H$.

Παρατηρούμε ότι η SOT είναι αυστηρά ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας. Πράγματι, αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία και

$$T_n x = \langle x, e_n\rangle e_n \ , \ x \in H,$$

τότε $\|T_n x\| = |\langle x, e_n\rangle| \to 0$ για κάθε x. Οπότε, T_n συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT αλλά όχι ως προς την τοπολογία της νόρμας, αφού

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n x\| = 1$$

για κάθε n.

3.3γ΄ Η ασθενής τοπολογία τελεστών (WOT)

Ορισμός 3.3.2. *Η **ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology)** είναι η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει τις απεικονίσεις από το $B(H)$ στο $\mathbb{C}$ με $T \to \langle T\xi, \eta\rangle$, $\xi, \eta \in H$ συνεχείς. Δηλαδή, ένα δίκτυο από φραγμένους τελεστές (T_i) συγκλίνει στο φραγμένο τελεστή T ως προς τη WOT αν και μόνο αν*

$$\langle T_n\xi, T_n\eta\rangle \to \langle T\xi, T\eta\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η WOT είναι αυστηρά ασθενέστερη από την SOT. Πράγματι, αν θεωρήσουμε (e_n) ορθοκανονική βάση του H και

$$T_n e_k = \begin{cases} 0 & ,\text{για} \quad k \leq n \\ e_{(k-n)} & ,\text{για} \quad k > n \end{cases}$$

τότε $T_n \overset{SOT}{\longrightarrow} 0$, $T_n^* \overset{SOT}{\nrightarrow} 0$ και $T_n^* \overset{WOT}{\longrightarrow} 0$.

Πράγματι, αν $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle e_k$, τότε

$$T_n x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle T_n e_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_{k-n}$$

άρα

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

και $\|T_n x\| \to 0$.

Επίσης, επειδή $T_n^* e_k = e_{k+n}$, τότε $\|T_n^* e_1\| = 1$ για κάθε n και έτσι,

$$T_n^* \overset{SOT}{\nrightarrow} 0.$$

Για την WOT ,

$$\langle T_n^* x, y\rangle = \langle x, T_n y\rangle \le \|x\|\|T_n y\| \to 0,$$

αφού $T_n y \overset{SOT}{\to} 0$.

3.3δ΄ Η ασθενής* τοπολογία τελεστών

Ορισμός 3.3.3. *Ο **προδυϊκός** $B_*(H)$ του $B(H)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών της μορφής*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_{x_n, y_n}$$

για $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *και* $\sum_n |\lambda_n| < \infty$.

Ορισμός 3.3.4. *Η **ασθενής*- τοπολογία τελεστών** (weak*- topology) στην άλγεβρα $B(H)$ όλων των φραγμένων τελεστών ενός χώρου Hilbert είναι η τοπολογία που προκύπτει από τον προδυϊκό $B_*(H)$ του $B(H)$. Δηλαδή, είναι η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του προδυϊκού συνεχή. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται και **υπερασθενής** (ultraweak).*

Πρόταση 3.3.5. *Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $B(H)$ είναι weak*- συμπαγής.*

Πρόταση 3.3.6. *Η weak* και η WOT συμπίπτουν στα φραγμένα υποσύνολα του $B(H)$. Επομένως, η μοναδιαία μπάλα του $B(H)$ είναι WOT- συμπαγής.*

Απόδειξη. Θα δείξω ότι αν ένα φραγμένο δίκτυο τελεστών (T_i) συγκλίνει στο 0 ως προς τη WOT τότε $T_i \overset{w*}{\to} 0$. Έστω $f \in B_*(H)$ τυχαίος τελεστής και $\epsilon > 0$. Θεωρώ τον χώρο $\overline{B}(H)$ των WOT-συνεχών γραμμικών μορφών στον $B(H)$ εφοδιασμένο με τη νόρμα του δυϊκού χώρου του $B(H)$.
Τότε υπάρχει $f_1 \in \overline{B}(H)$ ώστε $\|f - f_1\| < \epsilon$.
Αφού $T_i \overset{(WOT)}{\to} 0$, υπάρχει i_0 τέτοιο ώστε $|f_1(T_i)| < \epsilon$ για κάθε $i \ge i_0$. Αν $M = \sup \|T_i\|$ τότε

$$|f(T_i)| \le |(f - f_1)(T_1)| + |f_1(T_1)| < M\epsilon + \epsilon$$

για κάθε $i \ge i_0$. Άρα, $\lim f(T_i) = 0$ οπότε $T_i \overset{w*}{\to} 0$.

□

3.4 Συμπαγείς τελεστές

Ορισμός 3.4.1. *Ένας τελεστής $T \in B(H)$ ονομάζεται **συμπαγής** αν η εικόνα της μοναδιαίας μπάλας $\{T\xi : \|\xi\| \le 1, \ \xi \in H\}$ είναι ολικά φραγμένη ή ισοδύναμα, η κλειστότητα της εικόνας είναι συμπαγής.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο S ενός χώρου Banach A είναι **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $x_1, ..., x_n$ στο S τέτοια ώστε αν για κάποιο δείκτη n_0 ισχύει $\|x - x_{n_0}\| < \epsilon$ τότε $x \in S$.

Θεώρημα 3.4.2. *Αν ένας τελεστής $T \in B(H)$ είναι συμπαγής, αυτοσυζυγής και μη-μηδενικός, τότε μία από τις νόρμες $\|T\|, -\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή. Επίσης, υπάρχει $x \in H$ με $\|x\| = 1$ ώστε $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία $(x_n) \in H$ με $\|x\| = 1$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = a \in \mathbb{R}$$

και $|a| = \|T\|$. Έχουμε ότι,

$$0 \leq \|Tx_n - ax_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2a\langle Tx_n, x_n\rangle + a^2\|x\|^2 \leq 2a^2 - 2a\langle Tx_n, x_n\rangle.$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty}(Tx_n - ax_n) = 0.$$

Αφού όμως η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και ο τελεστής είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία της (x_n), (x_{n_k}) τέτοια ώστε η (Tx_{n_k}) να συγκλίνει. Αλλά τότε η υπακολουθία είναι συγκλίνουσα λόγω του $\lim_{n\to\infty}(Tx_n - ax_n) = 0$. Αν θέσω x το όριο της υπακολουθίας, τότε $\|x\| = 1$ και

$$\lim_{n\to\infty}(Tx_{n_k}) = Tx,$$

λόγω συνέχειας. Οπότε $Tx = ax$ και $|a| = \|T\|$. Τότε, μία από τις νόρμες $\|T\|, -\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή αφού $a \in \mathbb{R}$.
Επιπλέον,

$$|\langle Tx, x\rangle| = |\langle ax, x\rangle| = |a\langle x, x\rangle| = \|T\|.$$

□

Σημείωση: Θα συμβολίζουμε τους συμπαγείς τελεστές του H ως $K(H)$.

Ορισμός 3.4.3. *Ένας τελεστής $T \in B(H)$ είναι **πεπερασμένης τάξης** αν το εύρος του, $R(T) = \{Tx : x \in H\}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Θεώρημα 3.4.4. *Ένας τελεστής $T \in K(H)$ αν και μόνο αν υπάρχουν πεπερασμένης τάξης τελεστές A_n ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \|T - A_n\| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι οι A_n υπάρχουν. Έστω $\epsilon > 0$ και φραγμένη ακολουθία $(x_n) \in H$. Τότε υπάρχει δείκτης N τέτοιο ώστε $\|T - A_n\| < \frac{\epsilon}{4M}$ για $n \geq N$, όπου

M το φράγμα της ακολουθίας. Αφού οι A_n συμπαγείς, υπάρχει υπακολουθία x_{n_k} της (x_n) με $A_n(x_{n_k})$ να είναι συγκλίνουσα οπότε και Cauchy. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T(x_{n_m}) - T(x_{n_k})\| &\leq \|(T - A_n)(x_{n_m})\| + \\ &+ \|A_n(x_{n_m}) - A_n(x_{m_k})\| + \|(A_n - T)(x_{m_k})\| \\ &\leq 2\|T - A_n\|M + \|A_n(x_{n_m}) - A_n(x_{n_k})\| \\ &< 2\frac{\epsilon}{4M}M + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η $T(x_{n_m})$ είναι Cauchy και ο τελεστής T συμπαγής. Αν $T \in K(H)$ και $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$, τότε η εικόνα $\overline{T(B)}$ είναι συμπαγής. Αν θεωρήσουμε (u_i) πλήρες ορθοκανονικό σύνολο του H, τότε το $x \in H$ γράφεται ως

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Τότε

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tx, u_i \rangle u_i.$$

Αν P_n η προβολή $P_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, u_i \rangle u_i$ θέτουμε $A_n = P_n T$. Τότε,

$$\|T - A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T - P_n T)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle Tx, u_i \rangle u_i \|$$

□

3.5 Τετραγωνική ρίζα τελεστή

Ορισμός 3.5.1. *Έστω $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής και $T \geq 0$. Αν υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής A του $B(H)$ με $A^2 = T$, τότε ο A λέγεται **τετραγωνική ρίζα του** T. Αν $A \geq 0$, ο A λέγεται **θετική τετραγωνική ρίζα του** T και $A = T^{\frac{1}{2}}$.*

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι κάθε θετικός αυτοσυζυγής τελεστής του $B(H)$ έχει **μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα.**

Θεώρημα 3.5.2. *Αν $S, T \in B(H)$ θετικοί και αυτοσυζυγείς τελεστές τότε ο ST είναι θετικός αν και μόνο αν $ST = TS$.*

Απόδειξη. Αφού ST θετικός και αυτοσυζυγής, ισχύει ότι $ST = (ST)^* = T^* S^* = TS$.
Αντίστροφα, έστω $ST = TS$. Τότε,

$$S^{\frac{1}{2}} T = T S^{\frac{1}{2}}$$

άρα,

$$ST = S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} T = S^{\frac{1}{2}} T S^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως, για $x \in H$,

$$\langle STx, x \rangle = \langle S^{\frac{1}{2}} T S^{\frac{1}{2}} x, x \rangle = \langle T S^{\frac{1}{2}} x, S^{\frac{1}{2}} x \rangle \geq 0,$$

επειδή $B \geq 0$. □

Θεώρημα 3.5.3. *Αν $S, T_n \in B(H)$ αυτοσυζυγείς τελεστές με $T_1 \leq \cdots \leq T_n \leq S$ για κάθε n, και $ST_n = T_nS$. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής του $B(H)$ με*

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

για $x \in H$.

Θεώρημα 3.5.4. *Κάθε θετικός αυτοσυζυγής τελεστής $T \in B(H)$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα.*

Απόδειξη. Για $T = 0$ έχω $A = T^{\frac{1}{2}} = 0$.
Αν $T \neq 0$ θέτουμε $\frac{T}{\|T\|} = T_0$ και έχουμε ότι $T_0 \leq I$.
Αν $A^2 = T_0$, τότε $(\|T\|^{\frac{1}{2}} A)^2 = T$. Θα δείξουμε ότι $T \leq I$.
Έστω $A_0 = 0$ και $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)$, για $n \geq 0$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} I - A_{n+1} = I - A_n + \tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}A_n^2 \quad &= \tfrac{1}{2}(I - 2A_n + A_n^2 + I - T) \\ &= \tfrac{1}{2}(I - A_n)^2 + (I - T) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Οπότε, $A_{n+1} \leq I$ και έτσι, $A_n \leq I$ για $n \geq 1$.
Επομένως, $A_1 \geq A_0$ και

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n \quad &= A_n - \tfrac{1}{2}(T - A_n^2) - A_{n-1} - \tfrac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) \\ &= A_n - A_{n-1} - I - \tfrac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

δηλαδή, $A_n \leq A_{n+1}$.

Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in B(H)$ με

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

για $x \in H$.
Είναι $A_{n+1}x - A_nx = \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x)$ άρα,

$$\lim_{n\to\infty} (T - A_n^2)(x) = 0.$$

Συνεπώς, $A^2 x = Tx$. Ο A είναι θετικός και θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του T.
Πράγματι, αν $B \in B(H)$ άλλος θετικός αυτοσυζυγής τελεστής με

$$B^2 = A^2 = T,$$

τότε

$$BT = BB^2 = B^2B = TB.$$

Δηλαδή, ο B μετατίθεται με τους A_n και έτσι, $AB = BA$.
Αν θέσουμε $y = (A - B)x$ για $x \in H$, τότε

$$\langle (A^2 - B^2)x, y\rangle = \langle (A + B)(A - B)x, y\rangle = \langle (A + B)y, y\rangle \geq 0.$$

Οπότε, $\langle Ay, y\rangle = 0$ και $\langle By, y\rangle = 0$. Τότε, υπάρχει θετικός αυτοσυζυγής τελεστής $C \in B(H)$ με $C^2 = B$ και έτσι,

$$0 = \langle By, y\rangle = \langle C^2 y, y\rangle = \|Cy\|^2.$$

Δηλαδή, $C^2 y = 0$ και $By = 0$. Παρόμοια, $Ay = 0$.
Τελικά,

$$\|(A-B)x\|^2 = \langle (A-B)y, x\rangle = 0$$

και $A = B$, δηλαδή ο A είναι η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του T.

□

Πόρισμα 3.5.5. *Αν $T \in B(H)$ τότε T^*T έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα $A = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.*
Επίσης, $\|Ax\| = \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$ και

$$\{x : Ax = 0\} = \{x : Tx = 0\}.$$

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος Ύπαρξης της τετραγωνικής ρίζας ο τελεστής $A = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ υπάρχει.
Επίσης,

$$\|A^2 x\| = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2$$

αλλά ο A είναι επιπλέον αυτοσυζυγής οπότε, $\|A^2x\| = \|Ax\|^2$. □

Ορισμός 3.5.6. *Αν $T \in B(H)$ τότε η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή T^*T συμβολίζεται $|T|$ και ονομάζεται* ***απόλυτη τιμή τελεστή****.*

Θεώρημα 3.5.7. ***Polar decomposition theorem*** *Έστω τελεστής $T \in B(H)$. Τότε υπάρχει $U \in B(H)$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί:*

(i) *$T = UA$ όπου $A = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$*

(ii) *$\|Ux\| = \|x\|$ για $x \in \overline{R(A)}$*

(iii) *$Ux = 0$ για $x \in \overline{R(A)}^{\perp}$*

Σημειώνουμε ότι αν ικανοποιούνται οι (2), (3), ο τελεστής λέγεται ***μερική ισομετρία****, δηλαδή, είναι μια ισομετρία επί του ορθογώνιου συμπληρώματος του πυρήνα της.*

Απόδειξη. Ορίζουμε γραμμική και 1-1 απεικόνιση $V : R(A) \to R(T)$ με $V(Ax) = Tx$ για κάθε $x \in H$. Αν θέσουμε $y = Ax$ τότε

$$\|Vy\| = \|VAx\| = \|Tx\| = \|Ax\|$$

και έτσι η V είναι ισομετρία πάνω στο $R(A)$.
Θεωρούμε επέκταση της V, V' με πεδίο ορισμού την κλειστότητα του $R(A)$ και πεδίο τιμών την κλειστότητα του $R(T)$ και

$$V'y = \lim_{n\to\infty} V(Ax_n)$$

με

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

Έστω P ορθογώνια προβολή του χώρου H επί του $\overline{R(A)}$ και $U = V'P$. Τότε

$$UAx = V'PAx = Tx$$

για $x \in H$ άρα, $UA = T$.
Επίσης, αν $x \in \overline{R(A)}$ υπάρχει ακολουθία $x_n \in H$ με $\lim_{n\to\infty} Ax_n = x$ οπότε,

$$\|Ux\| = \lim_{n\to\infty} \|UAx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|x\|.$$

Τέλος, η προβολή είναι 0 στο $\overline{R(A)}^{\perp}$ συνεπώς και $U = 0$. □

3.6 Ίχνος τελεστή

Έστω $(x_1, x_2, ...x_n)$ βάση μιγαδικού χώρου Hilbert H διάστασης n και έστω τελεστής $A \in B(H)$ τέτοιος ώστε

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

δηλαδή καθορίζεται από τις τιμές στα x_i. Θεωρούμε πίνακα που αντιστοιχεί στον A τον $\overline{A} = (a_{ij})$. Τότε το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του $\overline{A}$ ονομάζεται ίχνος του πίνακα A (**trace**) και συμβολίζεται ως

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παρατήρηση 3.6.1. *Το ίχνος είναι ανεξάρτητο της βάσης. Πράγματι, αν $(y_1, y_2, ...y_n)$ μια άλλη βάση του χώρου H και C η αλλαγή βάσης $Cx_i = y_i$ τότε οι απεικονίσεις C, C^{-1} ανήκουν στο $B(H)$ και $CAC^{-1}y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j$. Άρα,*

$$trA_{(y_i)} = tr(C^{-1}CA) = tr(CAC^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA_{(x_i)}.$$

Παρατήρηση 3.6.2. *Σημειώνουμε ότι το ίχνος έχει την εξής σχέση με τις ιδιοτιμές του A :*
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A $\det(\lambda I - \overline{A})$, όπου $I \in H$, είναι της μορφής

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + ...$$

και οι ρίζες είναι ιδιοτιμές του A.
Τότε αν $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *αυτές οι ιδιοτιμές, έχουμε ότι* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = c_1$. *Αλλά από την ορίζουσα έχουμε ότι*

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

Συνεπώς,

$$trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Αφού $a_{ij} = \langle Tx_i, x_j \rangle$ *προκύπτει ότι*

$$trA = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, x_j \rangle.$$

Ορισμός 3.6.3. *Ένας τελεστής* $T \in B(H)$ *ονομάζεται* ***trace class operator*** *αν η ποσότητα*

$$|\sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, x_i \rangle| < \infty$$

όπου (x_i) *ορθοκανονική βάση. Ισοδύναμα, αν*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n,$$

όπου $\sum_n \|x_n\| \|y_n\| < \infty, \;\; n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Gleason

4.1 Απλοποίηση σε τρισδιάστατο χώρο

Θεώρημα 4.1.1. ***Θεώρημα Gleason*** *Έστω H χώρος Hilbert με διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3. Τότε κάθε φραγμένο πλήρως προσθετικό μέτρο μ στο δικτυωτό προβολών $P(H)$ επεκτείνεται μοναδικά σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές της άλγεβρας $B(H)$ όλων των φραγμένων τελεστών του χώρου H.*

Παρατήρηση 4.1.2. *Σημειώνουμε ότι το $\mu : P(H) \to [0,1]$ ονομάζεται* ***πλήρως προσθετικό μέτρο*** *αν για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{p_1, \cdots p_n\} \in P(H)$ από κάθετες ανά δύο προβολές έχουμε ότι*

$$\mu(\sum_{i=1}^{n} p_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(p_i).$$

Επίσης, ***δικτυωτό*** *ονομάζεται ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο L για το οποίο για κάθε $a, b \in L$ τα $a \wedge b$ και $a \vee b$ ανήκουν στο L, όπου $a \wedge b$ συμβολίζεται το infimum του συνόλου $\{a, b\}$ και $a \vee b$ το supremum του συνόλου $\{a, b\}$.*

Παρατήρηση 4.1.3. *Η υπόθεση του Θεωρήματος ότι $dim(H) \geq 3$ είναι απαραίτητη:*
Έστω $P(H_2)$ το σύνολο των προβολών πάνω στον δισδιάστατο χώρο H_2 και έστω μέτρο πιθανότητας $\mu : P(H_2) \to [0,1]$ με

$$\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$$

και

$$\mu(p) + \mu(q) = 1,$$

όπου p, q ορθογώνιες προβολές του $P(H_2)$. Αν e, f μη ορθογώνιες προβολές του $P(H_2)$, τότε το σύστημα $\{e, 1-e, f\}$ είναι βάση του πραγματικού χώρου G όλων των αυτοσυζυγών τελεστών του $B(H_2)$. Όμως, μπορούμε να επιλέξουμε μέτρο μ ώστε να ικανοποιεί την $\mu(p) + \mu(q) = 1$ αλλά να μην είναι περιορισμός κάποιου γραμμικού συναρτησοειδούς του G. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει συνάρτηση $g \in [0, \frac{\pi}{2})$ με $0 \leq g(\theta) \leq 1$ και αν ορίσουμε μέτρο πιθανότητας στο δικτυωτό προβολών ως

$$f(p) = \begin{cases} g(\theta) & ,\text{για} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - g(\theta - \frac{\pi}{2}) & ,\text{για} \quad \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi \\ f(-p) & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η f είναι μη φραγμένη και έτσι δεν μπορεί να επεκταθεί σε γραμμικό συναρτησοειδές.

Ορισμός 4.1.4. *Έστω S_1 η μοναδιαία σφαίρα σε ένα χώρο Hilbert. Μια συνάρτηση $f : S_1 \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **frame συνάρτηση** στον H αν υπάρχει αριθμός $w(f)$ (βάρος της f) τέτοιος ώστε*

$$\sum_a f(x_a) = w,$$

όπου (x_a) ορθοκανονική βάση. Δηλαδή, σε κάθε ορθοκανονική βάση η συνάρτηση f παίρνει την ίδια τιμή.
*Αν ο περιορισμός της f σε κάθε πεπερασμένο υπόχωρο του H είναι frame συνάρτηση, τότε η f ονομάζεται **ασθενής frame συνάρτηση**.*

Παρατήρηση 4.1.5. *Οι frame συναρτήσεις και τα πλήρως προσθετικά μέτρα αντιστοιχίζονται 1-1. Πράγματι, αν G κλειστός υπόχωρος του χώρου H και $(u_a), (v_a)$ ορθοκανονικές βάσεις του G, τότε αν τις επεκτείνουμε με την προσθήκη μιας βάσης του $G^{\perp}$ θα έχουμε ότι*

$$\sum_a f(u_a) = \sum_a f(v_a).$$

Οπότε, $f(x) = f(ax)$ για κάθε x μοναδιαίο διάνυσμα και $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$.
Αν μ ένα πλήρως προσθετικό μέτρο του $P(H)$, τότε η συνάρτηση $f : S_1 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(p_x)$ όπου $p_x \in P(H)$ και $x \in S_1$ είναι frame. Συνεπώς,

$$\mu(p) = \sum_a f(e_a),$$

όπου $p \in P(H)$ και (e_a) ορθοκανονική βάση, δηλαδή υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ των frame συναρτήσεων και των πλήρως προσθετικών μέτρων.

Ορισμός 4.1.6. *Μια ασθενής frame συνάρτηση στον H ονομάζεται **κανονική** αν υπάρχει φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής $T \in H$ τέτοιος ώστε*

$$f(x) = \langle Tx, x \rangle$$

για κάθε μοναδιαίο $x \in H$.

Πρόταση 4.1.7. *Αν $A \in B(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής και*

$$\sum_i \langle Ae_i, e_i \rangle < \infty$$

για κάθε ορθοκανονική βάση $(e_i) \in H$, τότε ο A είναι trace class τελεστής.

Ορισμός 4.1.8.

- *Μια **συζυγής διγραμμική μορφή** είναι μια μιγαδική συνάρτηση B επί του $H \times H$ που είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική στη δεύτερη.*
- *Μια συνάρτηση B είναι **φραγμένη** αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|B\langle x, y\rangle| \leq C$, για κάθε $x, y \in H$ μοναδιαία.*
- *Μια συνάρτηση B ονομάζεται **ερμιτιανή συζυγής διγραμμική μορφή** αν $B\langle x, y\rangle = \overline{B\langle y, x\rangle}$ για κάθε $x, y \in H$.*
- *Μια συνάρτηση B ονομάζεται **τετραγωνική μορφή** στον H αν υπάρχει $f : H \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = B\langle x, x\rangle$.*

Με βάση τους Ορισμούς (4.1.4),(4.1.6) και (4.1.8), το Θεώρημα Gleason μπορεί να γραφεί ως εξής:

Θεώρημα 4.1.9. *Έστω H χώρος Hilbert με $\dim H \geq 3$. Τότε κάθε φραγμένη ασθενής frame συνάρτηση του H είναι κανονική.*

Πρόταση 4.1.10. *Έστω f weak frame συνάρτηση σε ένα χώρο Hilbert H με διάσταση ίση με 2. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι κανονική.*

(ii) *Υπάρχει ερμιτιανή συζυγής διγραμμική μορφή $B \in H$ ώστε $f(x) = B\langle x, x\rangle$ για κάθε μοναδιαίο $x \in H$.*

(iii) *Υπάρχει φραγμένη τετραγωνική μορφή $F \in H$ ώστε $f(x) = F(x)$.*

(iv) *Η f είναι φραγμένη και κανονική όταν περιορίζεται σε κάθε δισδιάστατο υπόχωρο του H.*

Η απλοποίηση του προβλήματος σε πεπερασμένους υποχώρους μας επιτρέπει να επεκτείνουμε το Θεώρημα (4.1.9) σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, όπως φαίνεται στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.11. *Έστω f φραγμένη ασθενής frame συνάρτηση σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο S με διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3. Τότε υπάρχει φραγμένος αυτοσυζυγής T που ανήκει στην πλήρωση H του S τέτοιος ώστε*

$$f(x) = \langle Tx, x\rangle,$$

για κάθε μοναδιαίο $x \in S$.

Απόδειξη. Υπάρχει φραγμένη συζυγής διγραμμική μορφή $B : S \times S \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x) = B\langle x, x\rangle$. Λόγω συνέχειας της B η ερμιτιανή επεκτείνεται σε ερμιτιανή συζυγή διγραμμική μορφή πάνω στο χώρο $H \times H$.
Αν $T \in H$ φραγμένος αυτοσυζυγής τέτοιος ώστε $B\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ για κάθε $x, y \in S$, τότε ο T είναι ο ζητούμενος τελεστής. $\square$

Πρόταση 4.1.12. *Έστω H πραγματικός χώρος Hilbert με διάσταση ίση με 3. Αν κάθε φραγμένη frame συνάρτηση στο χώρο H είναι κανονική, τότε κάθε φραγμένη ασθενής frame συνάρτηση σε ένα χώρο Hilbert με διάσταση τουλάχιστον ίση με 3 είναι κανονική.*

4.2 Κανονικότητα των frame συναρτήσεων

Στοιχεία Σφαιρικής Γεωμετρίας

- Ορίζουμε S τη μοναδιαία σφαίρα σε πραγματικό χώρο Hilbert με διάσταση ίση με 3 και $\theta(s, t)$ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $s, t \in S$.

- **Βόρειο ημισφαίριο** ορίζουμε να είναι το σύνολο
$$N_p = \{s \in S / \theta(p, s) \leq \frac{\pi}{2}\}$$
και **ισημερινός** το
$$E_p = \{s \in S / s \perp p\}$$
όπου p διάνυσμα στο S.

- **Γεωγραφικό πλάτος** του $s \in N_p$ ορίζεται να είναι η ποσότητα
$$\frac{\pi}{2} - \theta(s, p)$$
και **συνάρτηση γεωγραφικού πλάτους** η συνάρτηση
$$l_p(s) = \cos^2 \theta(p, s) = \langle p, s \rangle^2.$$

- **Frame** ονομάζεται ένα διατεταγμένο σύνολο (r, s, t) από κάθετα ανά δύο διανύσματα του N_p.

- **Μέγιστος κύκλος** της σφαίρας S είναι η τομή της S με το επίπεδο που περιέχει το κέντρο της S.

- Ορίζουμε $C(s)$, όπου $s \in N_p \setminus \{p\}$ με $l(s) > 0$, τον μοναδικό μέγιστο κύκλο που περιέχει το s σαν βορειότερο σημείο. Ο $C(s)$ τέμνει τον ισημερινό E_p σε κάθετα σημεία στο s.

- Ορίζουμε την **κάθοδο** μέσω του s (descent through s) ως την τομή
$$D(s) = C(s) \cap N_p$$
δηλαδή το μέγιστο ημικύκλιο που περιέχει το σημείο s.

- **Μεσημβρινοί** ονομάζονται τα ημικύκλια που ενώνουν το βόρειο με το νότιο πόλο.

Λήμμα 4.2.1. *Αν $f : S \to \mathbb{R}$ frame συνάρτηση, τότε:*

- *$f(s) = f(-s)$ για κάθε $s \in S$*
- *$f(s) + f(t) = f(s') + f(t')$ όταν s, t, s', t' ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο και $s \perp t$, $s' \perp t'$.*

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ φραγμένη frame συνάρτηση με $\sup_{s \in S} f(s) = M$ και $\inf_{s \in S} f(s) = m$. Αν $f(s) > M - \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $t \in S$ με $t \perp s$ τέτοιο ώστε $f(t) < m + \epsilon$.*

Απόδειξη. Αν $f(s) > M - \epsilon$ μπορώ να βρω $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(s) > M - \epsilon + \delta$. Επιλέγω $u \in S$ με $f(u) < m + \delta$. Τότε αν τα διανύσματα $t, v \in S$ ανήκουν στο μέγιστο κύκλο που περνά από τα s, u με $t \perp s$ και $u \perp v$, τότε έχουμε ότι $f(t) + f(s) = f(u) + f(v)$.
Οπότε,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(u) + f(v) - f(s) \\ &< M + m + \delta - (M - \epsilon + \delta) \\ &= m + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 4.2.3. *Αν $U \subset S$, μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει* ***διακύμανση*** *$\delta > 0$ στο U αν*

$$\sup_{s \in U} f(s) - \inf_{s \in U} f(s) < \delta.$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι μια frame συνάρτηση είναι συνεχής αν έχει μια αυθαίρετα μικρή διακύμανση σε κάποιο ανοιχτό σύνολο.

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη frame συνάρτηση. Αν υπάρχει $U(p)$ περιοχή του σημείου $p \in S$ τέτοια ώστε η διακύμανση της f στην $U(p)$ να είναι μικρότερη από $\delta > 0$, τότε κάθε σημείο $q \in S$ έχει μια περιοχή $U(q)$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει διακύμανση μικρότερη από 4δ στην περιοχή $U(q)$.*

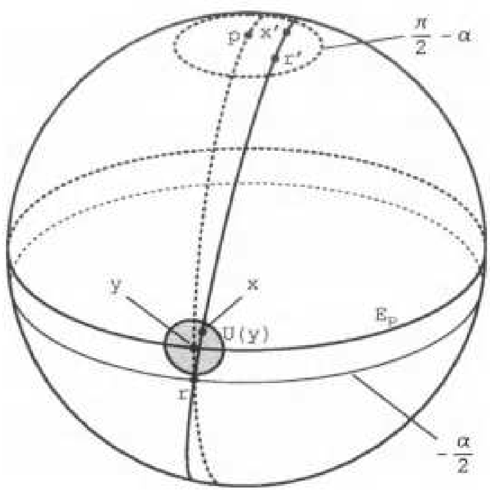
Απόδειξη. Έστω βόρειος πόλος το σημείο $p \in S$ και έστω $U(p)$ περιοχή όλων των σημείων με γεωγραφικό πλάτος αυστηρά μεγαλύτερο από $\frac{\pi}{2} - a$, όπου $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Έστω $y \in E_p$ και r ανήκει στο νότιο ημισφαίριο με r και y να βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό και γεωγραφικό πλάτος του ; να είναι ίσο με $-\frac{a}{2}$.
Αν $x \in U(y)$, υπάρχουν $r', x' \in U(p)$ που είναι πάνω στο μέγιστο κύκλο που δημιουργούν τα r, x, με $r' \perp r$ και $x' \perp x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Τότε,

$$f(r) + f(r') = f(x) + f(x').$$

Αν $x_1, x_2 \in U(y)$, τότε υπάρχουν διανύσματα $x'_1, x'_2, r'_1, r'_2 \in U(p)$ τέτοια ώστε

$$f(r) + f(r'_1) = f(x_1) + f(x'_1) \tag{4.1}$$

$$f(r) + f(r'_2) = f(x_2) + f(x'_2) \tag{4.2}$$



Σχήμα 4.1: Η σφαίρα S

Από τις εξισώσεις (4.1), (4.2) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= f(r) + f(r_1') - f(x_1') - f(r) - f(r_2') + f(x_2') \\ &= f(r_1') - f(r_2') - (f(x_1') - f(x_2')) \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &< |f(r_1') - f(r_2')| + |(f(x_1') - f(x_2')| \\ &< \delta + \delta \\ &= 2\delta \end{aligned}$$

Συνεπώς, η διακύμανση της συνάρτησης f είναι μικρότερη από 2δ.

Για να δείξουμε ότι κάθε σημείο $q \in S$ έχει μια περιοχή $U(q)$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει διακύμανση μικρότερη από 4δ στην περιοχή $U(q)$, εργαζόμαστε ως εξής:

Αν $x_3, x_4 \in U(p)$, τότε υπάρχουν διανύσματα $x_3', x_4', r_3', r_4' \in U(q)$ έτσι ώστε με την ανάλογη διαδικασία να προκύπτει ότι

$$|f(x_3) - f(x_4)| < 4\delta.$$

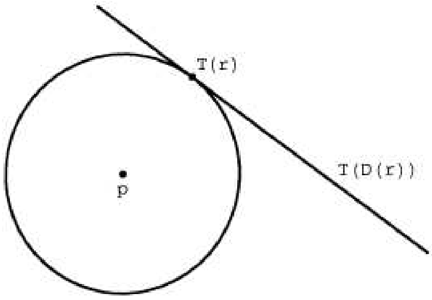
□

Ορισμός 4.2.5. *Αν υπάρχει ακολουθία $x_1, \cdots, x_{n-1}$ τέτοια ώστε $x_1 \in D(r)$ και $x_i \in D(x_{i-1})$ με $i = 2, \cdots, n-1$, ($n \in \mathbb{N}$) και $s \in D(x_{n-1})$, τότε λέμε ότι* ***το σημείο*** *s* ***είναι προσβάσιμο από το*** *r (s is reachable from r).*

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρική ιδέα που βρίσκεται πίσω από το Θεώρημα του Gleason μέσω του Γεωμετρικού Λήμματος του Piron και ειδικότερα, του Ασθενούς Γεωμετρικού Λήμματος του Piron.

Πρόταση 4.2.6. ***Γεωμετρικό Λήμμα του Piron*** *Έστω s και r σημεία του βόρειου ημισφαιρίου N_p, με $p \in S$, τέτοια ώστε το s να είναι πιο νότια από το r. Τότε το s είναι προσβάσιμο από το r με πεπερασμένα πολλές καθόδους. Επιπλέον, αν το s βρίσκεται μεταξύ του μέγιστου ημικυκλίου $D(r)$ και του ισημερινού E_p, τότε το s είναι προσβάσιμο από το r με δύο καθόδους.*

Απόδειξη. Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα μεταφέροντάς το στο επίπεδο. Αρχικά, θα αποδείξουμε το δεύτερο μέρος της διατύπωσης του Λήμματος.
Θεωρούμε T απεικόνιση που προβάλλει κάθε σημείο του βόρειου ημισφαιρίου N_p από το κέντρο της σφαίρας S στο επίπεδο, έστω P, το οποίο είναι εφαπτόμενο σε αυτή και περνά από τον βόρειο πόλο p. Σημεία του ίδιου γεωγραφικό πλάτους έχουν προβολή σε κύκλους κέντρου p.
Το ημικύκλιο που περνά από το $r \in N_p$ απεικονίζεται ως ευθεία γραμμή που περνά από το $T(r)$, δηλαδή εφάπτεται σε κύκλο κέντρου p.(Σχήμα 4.2)



Σχήμα 4.2: Το ημικύκλιο ως εφαπτομένη κύκλου

Θα δείξουμε ότι το s είναι προσβάσιμο από το r όταν ισχύει ότι:

$$\langle (T(r) - p), (T(s) - T(r)) \rangle > 0.$$

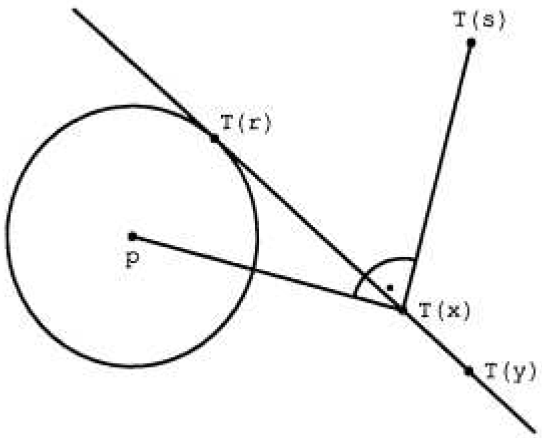
Θεωρούμε σημείο $y \in N_p$ τέτοιο ώστε $T(y) \in T(D(r))$(Σχήμα 4.3) και

$$\langle (T(y) - p), (T(s) - T(y)) \rangle < 0.$$

Υπάρχει σημείο $T(x) \in T(D(r))$ ώστε

$$\langle (T(x) - p), (T(s) - T(x)) \rangle = 0$$

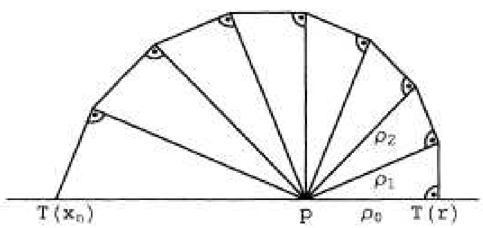
αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση.
Συνεπώς, το s ανήκει στο ημικύκλιο που περνά από το σημείο x και μπορούμε να μετακινηθούμε από το r στο s με δύο καθόδους.
Το σύνολο των σημείων του N_p που βρίσκονται αυστηρά μεταξύ του $D(r)$ και του E_p προβάλλεται πάνω στη γραμμή που δημιουργείται από το σύνορο $T(D(r))$ και δν περιέχει το p. Κάθε σημείο $T(s)$ του ημιεπιπέδου ικανοποιεί τη σχέση $\langle (T(r) - p), (T(s) - T(r)) \rangle > 0$. Οπότε, με δύο καθόδους μπορούμε να μετακινηθούμε από το s στο r.



Σχήμα 4.3: Το ημιεπίπεδο που δημιουργεί η $T(D(r))$

Για το πρώτο μέρος της διατύπωσης του Λήμματος:

Κατασκευάζουμε ακολουθία σημείων $x_0 = r, x_1, \cdots, x_n = s$ που ανήκει στην S τέτοια ώστε τα x_i να ανήκουν στις καθόδους που δημιουργούνται μέσω των x_{i-1} και η γωνία μεταξύ των $T(x_i) - p$ και $T(x_{i+1}) - p$ να είναι ίση με $\frac{\pi}{n}$.



Σχήμα 4.4: Οι αποστάσεις των $T(x_i)$ από το p

Έχουμε ότι
$$\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}$$
όπου ρ_i οι αποστάσεις των σημείων $T(x_i)$ από το p. (Σχήμα 4.4)
Άρα, $\rho_i = \rho_{i+1}\cos(\dfrac{\pi}{n})$ και $\rho_0 = \rho_1 \cos(\dfrac{\pi}{n})$.
Επομένως,
$$\rho_0 = \rho_n \cos^n(\frac{\pi}{n})$$
δηλαδή, $\rho_n = \dfrac{\rho_0}{\cos^n(\frac{\pi}{n})}$ και αφού η ποσότητα $\dfrac{1}{\cos^n(\frac{\pi}{n})}$ τείνει στο 1, η απόσταση ρ_n πλησιάζει την απόσταση ρ_0.

Έτσι, με πεπερασμένα πολλές καθόδους μετακινούμαστε από το σημείο r σε άλλο σημείο του οποίου η προβολή πάνω στο επίπεδο είναι αυθαίρετα κοντά σε σημείο του επιπέδου συμμετρικό ως προς το $T(x)$. Τώρα, αν θεωρήσουμε σημείο $s \in S$ με συνάρτηση γεωγραφικού πλάτους $l(s) < l(r)$, τότε από το r μετακινούμαστε σε σημείο του οποίου η προβολή βρίσκεται στην ημιευθεία στην οποία ανήκουν τα $T(s)$ και p, με πεπερασμένα πολλές καθόδους. Στη συνέχεια, το r προσεγγίζει το s με τις δύο καθόδους που δημιουργήσαμε στην αρχή της απόδειξής.

□

Λήμμα 4.2.7. ***Ασθενές Γεωμετρικό Λήμμα του Piron*** *Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη frame συνάρτηση σταθερή στον ισημερινό E_p.*
Αν $f(p) > \sup_{s \in S} f(s) - \epsilon$ για $\epsilon > 0$, τότε

$$f(r) \geq f(s) - \epsilon,$$

όταν $s \in D(r)$. Επιπλέον, αν $f(p) = \sup_{s \in S} f(s)$, τότε

$$f(r) \geq f(s),$$

όταν $l(r) > l(s) \geq 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $M = \sup_{s \in S} f(s)$ και $m = \inf_{s \in S} f(s)$. Από το Λήμμα (4.2.2), υπάρχει σημείο $x \in E_p$ τέτοιο ώστε $f(x) < m + \epsilon$. Άρα, για όλα τα σημεία $e \in E_p$ ισχύει ότι

$$f(e) \leq m + \epsilon.$$

Έστω $s \in D(r)$ και $r' \in C(r)$ κάθετο διάνυσμα στο r. Τότε το r' ανήκει στον ισημερινό και έτσι,

$$f(r') \leq m + \epsilon.$$

Αν $s' \in C(r)$ διάνυσμα κάθετο στο s, έχουμε ότι

$$f(r) + f(r') = f(s) + f(s')$$

δηλαδή,

$$f(r) - f(s) = f(s') - f(r') \geq m - (m + \epsilon) = -\epsilon.$$

Τελικά, $f(r) \geq f(s) - \epsilon$. Οπότε για μικρό ϵ, αν $f(p) = \sup_{s \in S} f(s) = M$, τότε $f(r) \geq f(s)$, λόγω του Λήμματος του Piron για $l(r) > l(s) \geq 0$. □

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη σημαντικότητα της συνέχειας των frame συναρτήσεων για την πορεία της απόδειξης του Θεωρήματος Gleason.

Πρόταση 4.2.8. *Κάθε φραγμένη frame συνάρτηση στη σφαίρα S είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω f φραγμένη frame συνάρτηση στη σφαίρα S. Έστω $\epsilon > 0$ και σημείο $p \in S$ με $f(p) < \epsilon$. Έστω η frame συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + f(\hat{p}x)$$

όπου p θα θεωρούμε τον βόρειο πόλο, $x \in S$ και $\hat{p}x$ τη δεξιά περιστροφή του x κατά $\frac{\pi}{2}$ πάνω στη γραμμή που ενώνει τον πόλο με το $(0,0,0)$. Αφού $\hat{p}x$ και $(0,0,0)$ βρίσκονται στον ίδιο μέγιστο κύκλο, η συνάρτηση g είναι σταθερή στον ισημερινό γιατί παίρνει την ίδια τιμή. Επίσης,

$$g(p) = f(p) + f(\hat{p}p) = f(p) + f(p) = 2f(p) < 2\epsilon.$$

Όμως, η g είναι μη αρνητική συνάρτηση και έτσι,

$$g(p) < \inf_{s \in S} g(s) + 2\epsilon. \tag{4.3}$$

Αν υπάρχει σημείο $s \in N_p \setminus \{s\}$ με

$$g(s) < \inf_{s \in S} g(x) + \epsilon \tag{4.4}$$

τότε από το προηγούμενο Λήμμα για $f = -g$, παίρνουμε από την (4.8)

$$g(p) < \inf_{s \in S} f(s) + \epsilon$$

οπότε,

$$g(r) \leq g(s) + \epsilon \leq g(s) + 2\epsilon \tag{4.5}$$

για $s \in D(r)$.
Αν G το σύνολο όλων των σημείων x του βορείου ημισφαιρίου τέτοιο ώστε το s να είναι προσβάσιμο από το x με δύο καθόδους. Τα x για τα οποία η προβολή $T(x)$ βρίσκεται στο δίσκο που περιέχει τον πόλο p και το σημείο $T(s)$ ως αντιποδικά σημεία της διαμέτρου του δίσκο, είναι μέσα στο G. Άρα, το εσωτερικό του G είναι μη κενό και υπάρχει υποσύνολο H του G. Από την (4.9), για κάθε $x \in H$,

$$g(x) < g(s) + 4\epsilon,$$

αφού $g(x) < g(r) + 2\epsilon$ και άρα, $g(x) < g(s) + 2\epsilon + 2\epsilon$.
Τότε,

$$0 \leq \inf_{y \in S} g(y) \leq g(x) < \inf_{y \in S} g(y) + 5\epsilon,$$

οπότε η g έχει διακύμανση μικρότερη από 5ϵ στο υποσύνολο H. Από το Λήμμα (4.2.4) υπάρχει περιοχή του p στην οποία η g να έχει διακύμανση μικρότερη του $4 \cdot 5\epsilon = 20\epsilon$. Έστω O αυτή η περιοχή και $x \in O$. Έχουμε ότι

$$0 \leq g(x) \leq g(p) + 20\epsilon < \inf_{s \in S} g(s) + 2\epsilon + 20\epsilon \leq 2\epsilon + 20\epsilon = 22\epsilon.$$

Επομένως,

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq 22\epsilon$$

δηλαδή, η f έχει διακύμανση μικρότερη από 22ϵ στην περιοχή O. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι για $\delta > 0$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο της S έστω A, τέτοιο ώστε η διακύμανση σε αυτό το σύνολο είναι μικρότερη από δ.
Αν δεν υπάρχει σημείο $s \in N_p \setminus \{p\}$ ώστε $g(s) < inf_{x \in S} g(x) + \epsilon$, τότε

$$g(p) = \inf_{s \in S} g(s).$$

Από το Ασθενές Γεωμετρικό Λήμμα του Piron παρατηρούμε ότι η g δεν αυξάνει σε σχέση με το γεωγραφικό πλάτος, οπότε αφού η g είναι φραγμένη, θα υπάρχουν σημεία $a, b \in N_p \setminus \{p\}$ με $l(a) > l(b)$ και

$$g(b) - g(a) < \epsilon.$$

Για κάθε σημείο $c \in S$ με γεωγραφικό πλάτος αυστηρά μεταξύ των $l(a)$ και $l(b)$, έχουμε ότι $g(c) \in [g(a), g(b)]$.
Συνεπώς, στο ανοιχτό σύνολο $\{t \in S$ ώστε $l(a) > l(t) > l(b)\}$ η διακύμανση της συνάρτησης g είναι μικρότερη από ϵ.
Από το Λήμμα (4.2.4), υπάρχει περιοχή του πόλου p ώστε η διακύμανση της συνάρτησης g να είναι μικρότερη από 4ϵ. Επομένως, η f έχει διακύμανση μικρότερη από 4ϵ στην περιοχή αυτή και η f είναι συνεχής, όπως θέλαμε.

□

Ορισμός 4.2.9. *Μια φραγμένη frame συνάρτηση f λέγεται **απλή** αν έχει supremum σε ένα σημείο p και ταυτόχρονα είναι σταθερή στον ισημερινό E_p.*

Πρόταση 4.2.10. *Έστω μια απλή frame συνάρτηση f με maximum σε σημείο $p \in S$ και σταθερή στον ισημερινό. Τότε*

$$f(s) = m + (M - m)\cos^2\theta(s, p)$$

για κάθε $s \in S$, όπου $M = \sup_{s\in S} f(s)$ και $m = \inf_{s\in S} f(s)$.

Απόδειξη. Αν $m = M$, τότε η $f(s) = M$ είναι απλή και σταθερή στον ισημερινό οπότε, το ζητούμενο.
Αν $m \neq M$, τότε υποθέτουμε $m = 0$ και $M = 1$. Από το Ασθενές Γεωμετρικό Λήμμα του Piron, όταν $l(r) > l(s) \geq 0$ έχουμε

$$f(r) \geq f(s).$$

Έστω παράλληλη $L_h = \{s \in S : l(s) = h\}$ με $0 \leq h \leq 1$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε κάθε τέτοια παράλληλη.
Έστω το αντίθετο και

$$\underline{f}(h_0) = \inf\{f(s) : s \in L_{h_0}\} < \overline{f}(h_0) = \sup\{f(s) : s \in L_{h_0}\}$$

για $0 \leq h_0 \leq 1$. Τότε,

$$\underline{f}(h) < \overline{f}(h)$$

λόγω συνέχειας για κάθε h σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο I του $[0, 1]$. Όμως, το σύνολο $C = \{h \in I : \overline{f}(h) > \underline{f}(h)\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο λογω του $\sum_{h\in C}(\overline{f}(h) - \underline{f}(h)) \leq 1$.
Έστω αύξουσα συνάρτηση $g : [0, 1] \to [0, 1]$ τέτοια ώστε

$$f(s) = g(l(s))$$

για κάθε s στο βόρειο ημισφαίριο.

Αν $a, b, c \in [0,1]$ με $a+b+c=1$ τότε υπάρχει frame (r,s,t) όπου $r,s,t \in N_p$ ώστε
$$l(r)=a, l(s)=b, l(t)=c.$$
Οπότε, $f(l(r))+f(l(s))+f(l(t))=1$ και έτσι,
$$g(a)+g(b)+g(c)=1.$$
Για κάθε $a \in [0,1]$ από την $g(a)+g(b)+g(c)=1$ συνεπάγεται ότι
$$g(a)+g(1-a)=1.$$
Άρα,
$$g(a)+g(b)=1-g(1-(a+b))=g(a+b)$$
για $a \geq 0, b \leq a+b \leq 1$.
Οπότε, $g(a)=a$ για $a \in [0,1]$ και $g(l(s))=l(s)$.
Συνεπώς,
$$f(s)=g(l(s))=l(s)=\cos^2\theta(p,s)=\langle p,s\rangle^2$$
για κάθε $s \in S$.

□

Το κύριο αποτέλεσμα στην μελέτη των frame συναρτήσεων είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.2.11. *Κάθε φραγμένη frame συνάρτηση στην S είναι κανονική.*

Απόδειξη. Έστω f φραγμένη frame συνάρτηση στην S. Λόγω συνέχειας της f και του Λήμματος (4.0.15), υπάρχουν κάθετα διανύσματα $p, r \in S$ ώστε
$$f(p)=\sup_{s\in S} f(s)=M$$
και
$$f(r)=\inf_{s\in S} f(s)=m.$$
Έστω $q \in S$ με $q \perp p$ και $q \in r$. Θέτουμε $f(q)=a$.
Αν $m \geq a \geq M$ τότε η f (ή $-f$) είναι απλή frame συνάρτηση και από την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει το ζητούμενο.

Θεωρούμε ότι $m < a < M$ και θέτουμε $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ τις δεξιές στροφές κατά $\frac{\pi}{2}$ πάνω τις ευθείες που ενώνουν το $(0,0,0)$ με τα p, q, r.

Η συνάρτηση $f(s)+f(\hat{p}s)$ είναι σταθερή στον ισημερινό E_p με τιμή $m+a$ και $\sup_{s\in S}(f(s)+f(\hat{p}s))=2M$ στο σημείο p.
Αν εφαρμόσουμε την $f(s)=m+(M-m)\cos^2\theta(s,p)$ για την $f(s)+f(\hat{p}s)$ θα έχουμε ότι
$$\begin{aligned} f(s)+f(\hat{p}s) &= m+a+(2M-m-a)\cos^2\theta(s,p) \\ &= 2M\cos^2\theta(s,p)+(m+a)(1-\cos^2\theta(s,p)) \end{aligned}$$
Αν
$$g(s)=M\cos^2\theta(s,p)+m\cos^2\theta(s,r)+a\cos^2\theta(s,q)$$

τότε,

$$f(s) + f(\hat{p}s) = g(s) + g(\hat{p}s)$$

για κάθε $s \in S$. Επίσης, για την $-f$ προκύπτει η

$$f(s) + f(\hat{r}s) = g(s) + g(\hat{r}s),$$

αφού $\sup(-f(s)) = -m$.

Αν (p, q, r) frame, θεωρούμε τις συντεταγμένες (x, y, z) και θα δείξουμε ότι οι frame συναρτήσεις f, g συμπίπτουν στους μέγιστους κύκλους $x = y, x = z, y = z$, δηλαδή $f(s) = g(s)$. Έχουμε ότι

$$\hat{r}(x, y, z) = (-y, x, z)$$

και

$$\hat{p}(x, y, z) = (x, -z, y)$$

και υπολογίζουμε τα

$$\hat{p}\hat{p}\hat{r}(x, x, z) = \hat{p}\hat{p}(-x, x, z) = \hat{p}(-x, -z, x) = (-x, -x, -z) \tag{4.6}$$

$$\hat{p}\hat{r}\hat{r}(x, z, z) = \hat{p}\hat{r}(-z, x, z) = \hat{p}(-x, -z, z) = (-x, -z, -z) \tag{4.7}$$

$$\hat{r}\hat{p}\hat{p}\hat{p}\hat{r}(x, y, x) = (-x, -y, -x) \tag{4.8}$$

καθώς

$$\hat{r}(x, y, x) = (-y, x, x), \quad \hat{p}(-y, x, x) = (-y, -x, x),$$

$$\hat{p}(-y, -x, x) = (-y, -x, -x), \quad \hat{p}(-y, -x, -x) = (-y, x, -x),$$

$$\hat{r}(-y, x, -x) = (-x, -y, -x).$$

Τότε,

$$f(s) + f(\hat{r}s) = g(s) + g(\hat{r}s) \tag{4.9}$$

$$f(\hat{r}s) + f(\hat{p}\hat{r}s) = g(\hat{r}s) + g(\hat{p}\hat{r}s) \tag{4.10}$$

$$f(\hat{p}\hat{r}s) + f(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) = g(\hat{p}\hat{r}s) + g(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) \tag{4.11}$$

Έστω $x = y$. Αφού $f(s) = f(-s)$ και $g(s) = g(-s)$ για $s = (x, x, z)$ έχουμε προσθέτοντας τις (4.13) και (4.15) ότι

$$f(s) + f(\hat{r}s) + f(\hat{p}\hat{r}s) + f(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) = g(s) + g(\hat{r}s) + g(\hat{p}\hat{r}s) + g(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) \tag{4.12}$$

Στη συνέχεια, αφαιρούμε την (4.14) από την (4.16) και έχουμε

$$\begin{array}{ll} f(s) + f(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) = g(s) + g(\hat{p}\hat{p}\hat{r}s) & \Rightarrow \\ f(s) + f(-x, -x, -z) = g(s) + g(-x, -x, -z) & \Rightarrow \\ f(s) + f(-s) = g(s) + g(-s) & \Rightarrow \\ f(s) + f(s) = g(s) + g(s) & \Rightarrow \\ f(s) = g(s). & \end{array}$$

Όμοια για $y = z$ και $x = z$.
Τώρα, θα δείξουμε ότι $f(s) = g(s)$ και στους μέγιστους κύκλους

$$x = -y, x = -z, y = -z.$$

Πράγματι, για $s = (x, -x, z)$ είναι $\hat{r}(x, -x, z) = (x, x, z)$ και $f(\hat{r}s) = g(\hat{r}s)$ από την $f(s) + f(\hat{r}s) = g(s) + g(\hat{r}s)$. Όμοια, για $x = -z, y = -z$.

Έστω η frame συνάρτηση $h = g - f$. Τότε, $h(p) = h(q) = h(r) = 0$ και έτσι, $w(h) = 0$ (βάρος της h). Επίσης, η h μηδενίζεται στους έξι μέγιστους κύκλους $x = y, x = -y, x = z, x = -z, y = z, y = -z$. Θα δείξουμε ότι $h = 0$ ταυτοτικά. Έστω το αντίθετο και έστω ότι υπάρχει frame (p', q', r') ώστε

$$M' = \sup_{s \in S} h(s) = h(p')$$

$$m' = \inf_{s \in S} h(s) = h(r')$$

$$a' = h(q') \text{ με } q' \perp r', q' \perp p'.$$

Αν $m' > -M'$, τότε αφού $M' + m' + a' = 0$ είναι $a' < 0$. Το a' είναι η μέγιστη τιμή της h στο μέγιστο κύκλο που είναι κάθετος στο p'. Αλλά αυτός ο μέγιστος κύκλος πρέπει να τέμνεται από τον $x = y$ σε τουλάχιστον δύο σημεία στα οποία να ισχύει ότι η h μηδενίζεται, το οποίο είναι άτοπο. Ανάλογα, για την $-h$ έχουμε άτοπο όταν $m' < -M'$. Τελικά, δείξαμε ότι $m' = -M'$ και $a' = 0$.
Εν συνεχεία, θεωρούμε frame (p', q', r') και συντεταγμένες (x', y', z') που αντιστοιχούν στο frame. Τότε,

$$h(x', y', z') = M(x'^2 - z'^2)$$

αν στην $f(s) = g(s)$ αλλάξουμε την f με την h και και τη g με την $M(x'^2 - z'^2)$.
Άρα, $h = 0$ στο μέγιστο κύκλο $x' = y'$ στα σημεία

$$(x', x', x'), (x', x', -x'), (-x', -x', x'), (-x', -x', -x').$$

Οι $x = y, x = z, y = z$ τέμνονται στα σημεία $(x, x, x), (-x, -x, -x)$ και ο $x' = y'$ πρέπει να περάσει από αυτά γιατί αλλιώς η h θα μηδενιζόταν σε έξι σημεία και όχι σε τέσσερα πάνω στον $x' = y'$. Ακριβώς ανάλογα, οι μέγιστοι κύκλοι $x = -y$ και $x = -z$ τέμνονται στα σημεία $(x, -x, -x), (-x, x, x)$ και αυτά ανήκουν στον

$x' = y'$ γιατί διαφορετικά, θα είχαμε και πάλι έξι σημεία μηδενισμού της h. Όπως βλέπουμε, ο $x' = y'$ περιέχει τα

$$(x, x, x), (-x, -x, -x), (x, -x, -x), (-x, x, x)$$

οπότε συμπίπτει με τον κύκλο $y = z$. Αλλά τότε η h παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία $x' = y'$ το οποίο είναι άτοπο, αφού η h μηδενίζεται σε τέσσερα σημεία όπως δείξαμε παραπάνω. Έτσι, η συνάρτηση h είναι 0 ταυτοτικά και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

□

4.3 Boundedness των frame συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε την αναγκαιότητα του φράγματος των frame συναρτήσεων ως υπόθεση του Θεωρήματος Gleason. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν προσθετικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $f(ab) = f(a) + f(b)$ τέτοιες ώστε να υπάρχουν θετικοί $a, b \in \mathbb{Z}$ που να είναι σχετικά πρώτοι, οι οποίες δεν είναι φραγμένες στο $[0, 1]$. Πράγματι, αν πάρουμε διάνυσμα $z \in P(H)$, όπου $dimH < \infty$ και f μια πραγματική προσθετική συνάρτηση, τότε η $f \circ z$ είναι ένα πλήρως προσθετικό μη φραγμένο μέτρο του $P(H)$, αλλά δεν μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι να δείξουμε ότι σε απειροδιάστατο χώρο Hilbert κάθε frame συνάρτηση είναι φραγμένη.

Ορισμός 4.3.1.
- *Έστω S χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $f : S_1 \to \mathbb{R}$, όπου S_1 η μοναδιαία σφαίρα, λέγεται* ***frame-type συνάρτηση*** *στον S αν ισχύουν:*
  - (i) *Ο περιορισμός της f σε κάθε πεπερασμένο υπόχωρο του S είναι frame συνάρτηση.*
  - (ii) *Το άθροισμα $\sum_i f(x_i)$ υπάρχει για όλα τα ορθοκανονικά σύνολα (x_i) στον S.*
- *Η f λέγεται frame συνάρτηση στον S αν υπάρχει σταθερά $w(f)$(βάρος της f) τέτοια ώστε $\sum_a f(x_a) = w(f)$ για όλα τα μεγιστικά ορθοκανονικά συστήματα (x_a) του S.*

Παρατήρηση 4.3.2. *Σε πεπερασμένο χώρο S οι frame συναρτήσεις και οι frame-type συναρτήσεις συμπίπτουν γιατί η συνθήκη (2) του Ορισμού (4.3.1) ικανοποιείται και για τις δύο περιπτώσεις. Αν η f είναι φραγμένη frame-type συνάρτηση σε χώρο Hilbert H τότε, από το Θεώρημα (4.1.9), μπορεί να γραφεί ως φραγμένος αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής T του H. Για κάθε ορθοκανονική βάση $(x_i) \in H$ έχουμε $\sum_i \langle Tx_i, x_i \rangle < \infty$ άρα, ο T είναι τελεστής ίχνους και έτσι, η f είναι frame συνάρτηση.*

Λήμμα 4.3.3. *Έστω V απειροδιάστατος χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω μια μη φραγμένη frame-type συνάρτηση με πεδίο ορισμού το V. Τότε υπάρχει απειροδιάστατος χώρος με εσωτερικό γινόμενο S με $f : S_1 \to \mathbb{R}$ frame-type συνάρτηση που ικανοποιεί:*

(i) *Αν* $x \in S_1$ *με* $|f(x)| > 1$, *τότε ο περιορισμός* $f|_{\{x\}^\perp}$ *είναι φραγμένος, όπου* $\{x\}^\perp$ *υπερεπίπεδο.*

(ii) *Υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα* $a \in S$ *τέτοιο ώστε* $|f(a)| \leq 1$ *και*

$$\sup\{|f(b)| \text{ με } b \in S_1, \langle b, a\rangle = 0\} \leq 1.$$

Απόδειξη. (1) Έστω το αντίθετο. Τότε για frame-type συνάρτηση του V υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα x_1 ώστε $|f(x_1)| > 1$ και f μη φραγμένη στο $\{x_1\}^\perp \cap S_1$. Η $f|_{\{x\}^\perp}$ είναι frame-type σε απειροδιάστατο χώρο οπότε υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $x_2 \in \{x_1\}^\perp$ τέτοιο ώστε $|f(x_2)| > 1$ και f μη φραγμένη frame-type συνάρτηση στο $\{x_1, x_2\}^\perp$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία, κατασκευάζουμε την ορθοκανονική ακολουθία $(x_n) \in V$ με $\sum_n |f(x_n)| = \infty$ το οποίο αντιβαίνει στον ορισμό της frame-type συνάρτησης.
(2) Έστω f και S όπως στη συνθήκη (1) και έστω διάνυσμα $a \in S$ με $|f(a)| > 1$. Αν πολλαπλασιάσουμε την f με μια μη-μηδενική σταθερά, προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.3.4. *Έστω f μη φραγμένη frame-type συνάρτηση σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο S που ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος (4.3.3). Τότε υπάρχουν e_1, e_2, e_3 κάθετα μοναδιαία διανύσματα τέτοια ώστε $|f(e_i)| > 1$ για $i = 1, 2, 3$.*

Απόδειξη. Αφού f μη φραγμένη υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $e_1 \in S$ με $|f(e_1)| > 6$. Για διάνυσμα a όπως στη συνθήκη (2) του Λήμματος (4.3.3) επιλέγουμε μοναδιαία διανύσματα g, b στη γραμμική θήκη $span\{e_1, a\}$ τέτοια ώστε $\langle g, e_1\rangle = 0$ και $\langle b, a\rangle = 0$. Τότε αφού $e_1 \perp g$ και $b \perp a$, έχουμε ότι

$$f(e_1) + f(g) = f(a) + f(b).$$

Αφού όμως $|f(a)| \leq 1$ και $|f(b)| \leq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(g)| &= |f(e_1) - f(a) - f(b)| \\ &\geq |f(e_1)| - |f(a)| - |f(b)| \\ &> 6 - 1 - 1 \\ &> 4. \end{aligned}$$

Έστω μοναδιαίο διάνυσμα $h \in \{e_1, a\}^\perp$. Αφού $\langle h, a\rangle = 0$ είναι $|f(h)| \leq 1$. Επίσης, αφού η f είναι frame συνάρτηση σε κάθε υπόχωρο του $\{e_1\}^\perp$ με διάσταση 3 που περιέχει τα g, h η f είναι συνεχής στη μοναδιαία σφαίρα της γραμμικής θήκης $span\{g, h\}$ τέτοια ώστε $|f(e_2)| = 2$.

Αν e_3 μοναδιαίο διάνυσμα στο $span\{g, h\}$ και $e_3 \perp e_2$ αφού η f είναι frame έχουμε λόγω της καθετότητας ότι:

$$f(e_2) + f(e_3) = f(g) + f(h)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(e_3)| &= |f(g) + f(h) - f(e_2)| \\ &\geq |f(g)| - |f(h)| - |f(e_2)| \\ &> 4 - 1 - 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.5. *Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ ορθοκανονικό σύνολο σε πραγματικό χώρο Hilbert με διάσταση ίση με 4, έστω H_4. Έστω e μοναδιαίο διάνυσμα του H_4 τέτοιο ώστε $\langle e, e_1\rangle \neq 0$. Τότε μπορούμε να διασπάσουμε το e ως*

$$e = x + y$$

με x, y μη-μηδενικά κάθετα διανύσματα που ικανοποιούν

$$\langle x, e_1\rangle = \langle y, e_2\rangle = \langle y - \|y\|^2 e, e_3\rangle = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ βάση του H_4 που επεκτείνει το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, e_2, e_3\}$. Έστω $e = (a, b, c, d)$ με $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Μπορούμε να βρούμε x, y με

$$x = (0, b, c - u, d - v)$$

$$y = (a, 0, u, v),$$

όπου u, v παράμετροι. Παρατηρούμε ότι $x, y \neq 0$ και

$$e = x + y = (0, b, c - u, d - v) + (a, 0, u, v) = (a, b, c, d).$$

Επίσης, $\langle x, e_1\rangle = 0$ και $\langle y, e_2\rangle = 0$. Αν $\langle x, y\rangle = \langle y - \|y\|^2 e, e_3\rangle = 0$ έχουμε το σύστημα από μη-γραμμικές εξισώσεις:

$$u(c - u) + v(d - v) = 0 \tag{4.13}$$

$$u - c(a^2 + u^2 + v^2) = 0 \tag{4.14}$$

Γράφουμε την (4.17) ως

$$uc - u^2 + vd - v^2 = 0$$

και την (4.18) ως

$$-u^2 c - cv^2 = -u + ca^2$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} uc - u^2 + vd - v^2 &= 0 \\ uc^2 - u^2 c + cvd - cv^2 &= 0 \\ uc^2 + cvd - u + ca^2 &= 0 \\ u(c^2 - 1) + ca^2 + cvd &= 0 \end{aligned}$$

Έτσι,

$$ca^2 + cvd = -u(c^2 - 1) = u(1 - c^2)$$

και

$$u = \frac{ca^2 + cvd}{1 - c^2}$$

δηλαδή, $u = \dfrac{c(a^2 + vd)}{1 - c^2}$, με $c < 1$ αφού $a \neq 0$ και $\|e\| = 1$. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην (4.17) και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{c(a^2+vd)}{1-c^2}c - \frac{c^2(a^2+vd)^2}{(1-c^2)^2} + cd - v^2 &= 0\\
\frac{c^2a^2 + c^2vd}{1-c^2} - \frac{c^2(a^4 + 2a^2vd + v^2d^2)}{(1-c^2)^2} + cd - v^2 &= 0\\
\frac{c^2a^2}{1-c^2} + \frac{c^2vd}{1-c^2} - \frac{c^2a^4}{(1-c^2)^2} - \frac{2c^2a^2vd}{(1-c^2)^2} - \frac{c^2v^2d^2}{(1-c^2)^2} + cd - v^2 &= 0\\
v^2\left(\tfrac{-c^2d^2}{(1-c^2)^2} - 1\right) + v\left(\tfrac{c^2d}{1-c^2} - \tfrac{2c^2a^2d}{(1-c^2)^2} + d\right) + \tfrac{c^2a^2}{1-c^2} - \tfrac{c^2a^4}{(1-c^2)^2} &= 0
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$A = \frac{-c^2d^2}{(1-c^2)^2} - 1,$$

$$B = \frac{c^2d}{1-c^2} - \frac{2c^2a^2d}{(1-c^2)^2} + d$$

$$C = \frac{c^2a^2}{1-c^2} - \frac{c^2a^4}{(1-c^2)^2}$$

και έχουμε την εξίσωση

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

η οποία έχει διακρίνουσα

$$\Delta = B^2 - 4AC = B^2 + 4\left(\frac{c^2d^2}{(1-c^2)^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{c^2a^2}{1-c^2} - \frac{c^2a^4}{(1-c^2)^2}\right).$$

Τότε,

$$\frac{c^2a^2}{1-c^2} - \frac{c^2a^4}{(1-c^2)^2} = \frac{c^2a^2}{1-c^2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{1-c^2}\right) \geq 0$$

αφού $a^2 + c^2 < 1$ για $b \neq 0$ και $\|e\| = 1$. Συνεπώς, αφού ο όρος $C \geq 0$, τότε και $\Delta \geq 0$ και έτσι, το σύστημα των (4.17), (4.18) έχει πραγματική λύση u, v, όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 4.3.6. ***Dorofeev- Sherstnev*** *Κάθε frame-type συνάρτηση σε έναν απειροδιάστατο χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μη φραγμένη frame-type συνάρτηση σε έναν απειροδιάστατο χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Από το Λήμμα (4.3.3) μπορούμε να βρούμε μια μη φραγμένη frame-type συνάρτηση σε έναν απειροδιάστατο χώρο S με εσωτερικό γινόμενο ικανοποιώντας τις συνθήκες:

- Αν $x \in S_1$ με $|f(x)| > 1$, τότε ο περιορισμός $f|_{\{x\}^\perp}$ είναι φραγμένος, όπου $\{x\}^\perp$ υπερεπίπεδο.
- Υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $a \in S$ τέτοιο ώστε $|f(a)| \leq 1$ και

$$\sup\{|f(b)| \text{ με } b \in S_1, \langle b, a\rangle = 0\} \leq 1.$$

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύνολο e_1, e_2, e_3 με $|f(e_i)| > 1$ για $i = 1, 2, 3$. Θέτουμε

$$C = \max_{i=1,2,3}\{|f(e_i)|, \sup\{|f(x)| : x \in \{e_i\}^\perp \cap S\}$$

Αφού f μη φραγμένη, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα h τέτοιο ώστε

$$|f(x)| > 3C.$$

Λόγω της δεύτερης από τις παραπάνω συνθήκες έχουμε ότι $\langle h, e_i\rangle \neq 0 \in \mathbb{R}$. Από το προηγούμενο Λήμμα (4.3.5) , $h = x+y$ για $x, y \neq 0$. Για $z = y - \|y\|^2 h$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \langle x, e_1\rangle = \langle y, e_2\rangle = \langle z, e_3\rangle = 0,$$

αφού $x \perp y$ και χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα (4.3.5). Επίσης,

$$\begin{aligned}
\langle h, z\rangle = \langle y - \|y\|^2 h, h\rangle \quad &= \langle y - \|y\|^2(x+y), x+y\rangle \\
&= \langle y, x\rangle + \|y\|^2 - \|y\|^2\langle x+y, x\rangle - \|y\|^2\langle x+y, y\rangle \\
&= \|y\|^2 - \|y\|^2\|x\|^2 - \|y\|^2\|y\|^2 \\
&= \|y\|^2 - \|y\|^2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\
&= \|y\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα x, y, z, h ανήκουν στον ίδιο υπόχωρο διάστασης δύο θα είναι $h \perp \frac{z}{\|z\|}$ και $\frac{x}{\|x\|} \perp \frac{y}{\|y\|}$ οπότε,

$$f(h) + f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

Αφού
$\langle x, y\rangle = \langle x, e_1\rangle = \langle y, e_2\rangle = \langle z, e_3\rangle = 0$ είναι

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq C$$

όπως και $\left|f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leq C$, $\left|f\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leq C$.

Άρα,

$$\left|f(h) + f\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leq 2C.$$

Αλλά,

$$\left|f(h) + f\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right| \geq |f(h)| - f\left|\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right|$$

και αφού έχουμε θεωρήσει την f μη φραγμένη με $|f(h)| > 3C$, θα είναι

$$\left| f(h) + f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right| \geq |f(h)| - f\left|\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right| > 3C - C = 2C$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, η frame-type συνάρτηση είναι φραγμένη, όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 4.3.7. ***Θεώρημα Gleason για απειροδιάστατο χώρο***

Έστω f frame-type συνάρτηση σε έναν απειροδιάστατο χώρο με εσωτερικό γινόμενο S. Τότε υπάρχει trace class τελεστής T στην πλήρωση H του S για τον οποίο ισχύει ότι

$$f(x) = \langle Tx, x\rangle$$

για κάθε $x \in S_1$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Dorofeev- Sherstnev και το Θεώρημα (4.1.11) υπάρχει φραγμένος αυτοσυζυγής τελεστής $T \in H$ ώστε $f(x) = \langle Tx, x\rangle$ για κάθε $x \in S_1$. Θα δείξουμε ότι ο T είναι trace class τελεστής.

Έστω το αντίθετο και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|T\| \leq 1$. Γνωρίζουμε ότι αν $T \in B(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής και $\sum\langle Tx, x\rangle$ συγκλίνει για κάθε ορθοκανονική βάση του H τότε ο T ανήκει στο σύνολο των trace class τελεστών. Συνεπώς, αφού ο T δεν είναι trace class, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $x_1, ..., x_n \in H$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle Tx_i, x_i\rangle| > 1.$$

Έστω $\epsilon > 0$ με $\sum_{i=1}^{n} |\langle Tx_i, x_i\rangle| > 1 + \epsilon$ και έστω ορθοκανονική ακολουθία $h_1, ..., h_n \in S$ τέτοια ώστε

$$\|h_i - x_i\| < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Έχουμε

$$|\langle Th_i, h_i\rangle - \langle Tx_i, x_i\rangle| \leq |\langle T(h_i - x_i), h_i\rangle| + |\langle Tx_i, h_i - x_i\rangle| \leq 2\frac{\epsilon}{2n} = \frac{\epsilon}{n}$$

άρα,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\langle Th_i, h_i\rangle| &\geq \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\langle Tx_i, x_i\rangle| - \sum_{i=1}^{n} |\langle Tx_i, x_i\rangle - \langle Th_i, h_i\rangle| \\ &\geq 1 + \epsilon - n\frac{\epsilon}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Αν $P \in H$ η ορθογώνια προβολή επί της γραμμικής θήκης $span\{h_1, ..., h_n\}$ γράφουμε $T = PT + (1 - P)T$ αλλά αφού PT είναι trace-class τελεστής, ο $(1 - P)T$ δεν είναι τέτοιος τελεστής.

Επειδή το H είναι πλήρωση του S, το $(1 - P)(S)$ είναι πυκνό στο $(1 - P)(H)$ και έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική ακολουθία $h_{n+1}, ..., h_{n+k}$ που ανήκει στο $(1 - P)(S) \subseteq S$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle Th_{n+i}, h_{n+i}\rangle| \geq 1.$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική ακολουθία

$$(h_n) \in S$$

ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(h_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Th_n, h_n \rangle| = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο και έτσι ο T είναι trace-class τελεστής.

□

Επομένως, δείξαμε ότι κάθε frame-type συνάρτηση σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert είναι frame συνάρτηση. Τέλος, θα διατυπώσουμε το παραπάνω Θεώρημα μετροθεωρητικά.

Θεώρημα 4.3.8. *Κάθε φραγμένο πλήρως προσθετικό μέτρο μ στο δικτυωτό προβολών της άλγεβρας $B(H)$ όλων των φραγμένων τελεστών ενός απειροδιάστατου χώρου Hilbert H επεκτείνεται μοναδικά σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές της άλγεβρας $B(H)$.*

Βιβλιογραφία

[1] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 209, Springer New York, (2001).

[2] A. Dvurecenskij, *Gleason's Theorem and It's Applications*, Mathematics and It's Applications, vol. 60, Springer Netherlands, (1993).

[3] J. Hamhalter, *Quantum Measure Theory*, Fundamental Theories of Physics, vol. 134, Springer Netherlands, (2003).

[4] J. R. Retherford, *Hilbert Space- Compact Operators and the Trace Theorem*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 27, Cambridge University Press, (1993).