



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Σπουδές στα Μαθηματικά»

Μεταπτυχιακή εργασία

Οριακά σύνολα δυναμικών συστημάτων

Νάκα Χρυσούλα

Εξεταστική επιτροπή

Καραχάλιος Νικόλαος (επιβλέπων)

Χατζηνικήτας Αγαπητός

Κουκουλογιάννης Βασίλειος

Σάμος 2020

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας καθώς και η συμπεριφορά των λύσεων γύρω από αυτά, αλλά και γενικότερες έννοιες ευστάθειας. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στα γραμμικά συστήματα και στη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Στη συνέχεια μέσα από διάφορα παραδείγματα γίνεται μελέτη μη γραμμικών συστημάτων, των σημείων ισορροπίας καθώς και της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. Μέρος της εργασίας αφορά την μέθοδο Lyapunov και την αρχή αναλλοίωτου του Lassaie. Αναφερόμαστε επίσης στις έννοιες της τροχιακής ευστάθειας καθώς και σε βασικά χαρακτηριστικά των δυναμικών συστημάτων κλίσης.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Γραμμικά και σχεδόν γραμμικά συστήματα.....	4
1.2 Γραμμικοποίηση.....	5

Κεφάλαιο 2

2.1 Μη γραμμικά προβλήματα και ισορροπία.....	6
2.2 Μη γραμμικοί ευσταθείς και ασταθής κόμβοι.....	16
2.3 Σαγματικά σημεία.....	18
2.4 Μελέτη της ευστάθειας.....	26

Κεφάλαιο 3

3.1 Ισοκλινής καμπύλες μηδενικής τάξης.....	27
3.2 Ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.....	36
3.3 Συστήματα κλίσης.....	59

Βιβλιογραφία.....	65
--------------------------	-----------

Κεφάλαιο 1

1.1 Γραμμικά και σχεδόν γραμμικά συστήματα

Έστω ότι έχουμε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα δεύτερης τάξης της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

όπου A είναι ένας 2×2 πίνακας και x ένα 2×1 διάνυσμα. Η γενική λύση δίνεται από

$$x = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 \xi_2 e^{r_2 t} \quad (1.1)$$

όπου r_1, r_2 οι ιδιοτιμές του συστήματος και ξ_1, ξ_2 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Το κρίσιμο σημείο είναι το $x=0$. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις για την ευστάθεια:

- Το κρίσιμο σημείο είναι **ευσταθές**, όταν οι ιδιοτιμές r_1, r_2 είναι φανταστικές.
- Το κρίσιμο σημείο είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν οι ιδιοτιμές r_1, r_2 είναι πραγματικές και αρνητικές ή με αρνητικό πραγματικό μέρος.
- Το κρίσιμο σημείο είναι **ασταθές** αν οι ιδιοτιμές r_1, r_2 είναι πραγματικές και θετικές ή μιγαδικές με θετικό πραγματικό μέρος.

Το κρίσιμο σημείο ονομάζεται

- **κόμβος** όταν οι ιδιοτιμές είναι ομόσημες και πραγματικές.
- **Σαγματικό σημείο** όταν οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες και πραγματικές.
- **Γνήσιος κόμβος ή άστρο** όταν οι ιδιοτιμές είναι ίσες.
- **Σπειροειδές σημείο** αν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές.
- **Κέντρο** αν οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές.

Έστω ότι έχουμε ένα σχεδόν γραμμικό σύστημα της μορφής,

$$x' = Ax + g(x) \quad (1.2)$$

όπου το g είναι μικρό, δηλαδή $\|g\| \ll \|x\|$. Το κρίσιμο σημείο $x = 0$ είναι *μεμονωμένο*, δηλαδή υπάρχει γύρω του ένας κύκλος που δεν περιέχει άλλα κρίσιμα σημεία. Ο μη γραμμικός όρος δεν μεταβάλλει την ευστάθεια και το είδος του κρίσιμου σημείου εκτός από τις περιπτώσεις όπου:

1. Οι ιδιοτιμές r_1, r_2 είναι φανταστικές.
2. Οι ιδιοτιμές r_1, r_2 είναι πραγματικές και ίσες.

1.2 Γραμμικοποίηση

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

Έστω (x^*, y^*) ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος δηλαδή $f(x^*, y^*) = 0 = g(x^*, y^*)$. Έστω ότι οι f και g έχουν συνεχείς παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x^*, y^*) , οπότε με ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο ισορροπίας έχουμε,

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y^*) + \text{όροι ανωτ. τάξης}$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y^*) + \text{όροι ανωτ. τάξης}$$

Τότε θα έχουμε

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y^*) + o(\tau)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial g}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - y^*) + o(\tau) \quad (1.4)$$

Με την αλλαγή συντεταγμένων

$$\begin{cases} u_1 = x - x^* \\ u_2 = y - y^* \end{cases}$$

το σύστημα γίνεται

$$\dot{u}_1 = au_1 + bu_2 + o(\tau)$$

$$\dot{u}_2 = cu_1 + du_2 + o(\tau) \quad (1.5)$$

όπου a, b, c, d οι μερικές παράγωγοι υπολογισμένες στο (x^*, y^*) . Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = au_1 + bu_2 \\ \dot{u}_2 = cu_1 + du_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

είναι η τοπική γραμμικοποίηση του αρχικού συστήματος στο σημείο (x^*, y^*) . Διαφορετικά το γραμμικό σύστημα γράφεται ως $\dot{u} = Au$ με

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{[x^*, y^*]} \quad (1.7)$$

Κεφάλαιο 2

2.1 Μη γραμμικά προβλήματα και ισορροπία

Στην ειδική περίπτωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

τα σημεία ισορροπίας δίνονται από

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Έχουμε $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και για $\det A \neq 0$ το σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0)$. Τότε

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \\ \lambda^2 - (a + b)\lambda + (ad - cb) = 0 &\Leftrightarrow \\ \lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A = 0 & \end{aligned}$$

Για τις ιδιοτιμές λ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με $\lambda_1 < \lambda_2$ ομόσημες.

Η γενική λύση δίνεται από

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (2.1)$$

- Αν οι λ_1, λ_2 είναι αρνητικές τότε έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

Συνεπώς οι λύσεις συγκλίνουν στο $(0,0)$ το οποίο είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής** λύση.

- Αν οι λ_1, λ_2 είναι θετικές τότε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

και οι λύσεις αποκλίνουν από το σημείο ισορροπίας το οποίο ονομάζεται **ασταθές**.

Για την μεταβολή της κλίσης των τροχιών για διαφορετικά t υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t}} \\ &= \frac{\lambda_1 c_1 \xi_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \lambda_2 c_2 \eta_2}{\lambda_1 c_1 \xi_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \lambda_2 c_2 \eta_1} \end{aligned}$$

Στην πρώτη περίπτωση στην οποία οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

και οι τροχιές είναι εφαπτόμενες της ευθείας $y = \frac{\eta_2}{\eta_1} x$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

Και οι τροχιές είναι παράλληλες της ευθείας $y = \frac{\xi_2}{\xi_1} x$. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος**. Στην δεύτερη περίπτωση οι τροχιές και η κατεύθυνση απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων.

2. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$x(t) = c_1 \xi e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta e^{\lambda_2 t}$$

Με κατάλληλες αρχικές συνθήκες προκύπτει $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ ή $c_2 = 0, c_1 = 0$. Η αρχή σε αυτήν την περίπτωση είναι ασταθές σαγματικό σημείο.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Παρατηρούμε δύο υποπεριπτώσεις.

Στην πρώτη έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αυτό συμβαίνει όταν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα. Η ανάλυση γίνεται ακριβώς όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις. Για $\lambda < 0$ το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **ευσταθές άστρο**.

Στην δεύτερη υποπερίπτωση έχουμε ένα απλό και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (2.2)$$

όπου $x_1(t) = \xi e^{\lambda t}$, $x_2(t) = (\xi t + \eta) e^{\lambda t}$. Το σημείο ισορροπίας (για $\lambda < 0$) είναι ένας **ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος**. Παίρνοντας τα όρια όπως στην περίπτωση 1 παρατηρούμε ότι για $t \rightarrow +\infty$ οι τροχιές τείνουν προς το $(0,0)$ και εφάπτονται στον φορέα του ξ . Για $t \rightarrow -\infty$ οι τροχιές παίρνουν ασυμπτωτικά την κλίση $\frac{\xi_1}{\xi_2}$. Για $\lambda > 0$ το διανυσματικό πεδίο έχει την αντίθετη φορά και τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται **ασταθής κόμβος**.

4. Στην περίπτωση των μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών έχουμε $\lambda_1 = \kappa + \lambda i$ και $\lambda_2 = \kappa - \lambda i$. Για την πρώτη έχουμε

$$x_a(t) = e^{(\kappa + \lambda i)t} (\xi + \eta i) = e^{\kappa t} (\cos \lambda t + \sin \lambda t i) (\xi + \eta i)$$

Αντίστοιχα αν αλλάξουμε το $+$ με $-$ προκύπτει και η συζυγής $x_b(t)$. Τότε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (2.3)$$

Όπου $x_1(t) = \frac{x_a(t) + x_b(t)}{2}$ και $x_2(t) = \frac{x_a(t) - x_b(t)}{2i}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1

- Αν $\kappa = 0$ οι λύσεις είναι περιοδικές και ορίζουν κλειστές τροχιές. Η αρχή των αξόνων ονομάζεται **ευσταθής κέντρο**.
- Αν $\kappa < 0$ το πλάτος της ταλάντωσης φθίνει εκθετικά κατά $e^{\kappa t}$. Οι λύσεις τείνουν προς την αρχή των αξόνων η οποία ονομάζεται **ευσταθής σπείρα ή εστία**.
- Αν $\kappa > 0$ το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει εκθετικά κατά $e^{\kappa t}$. Οι λύσεις απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων η οποία ονομάζεται **ασταθής σπείρα ή εστία**.

Για την κίνηση των τροχιών υπολογίζουμε τον πίνακα $J = P^{-1}AP$ όπου $P = [\xi | \eta]$. Τότε

$$J = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ -\lambda & \kappa \end{pmatrix}$$

Αν $\lambda < 0$ οι τροχιές κινούνται με τη φορά του ρολογιού. Αν $\lambda > 0$ τότε κινούνται με την αντίθετη φορά.

Μπορούμε να ασχοληθούμε με τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τρεις τρόπους. Με αναλυτική επίλυση, για παράδειγμα με ολοκλήρωση, με αριθμητικές μεθόδους όπως η μέθοδος του Euler και γεωμετρικά με ποιοτική κατανόηση των λύσεων.

Για την μελέτη των συστημάτων θεωρούμαι ότι οι διαφορικές εξισώσεις είναι C^∞ , δηλαδή το δεξί μέλος είναι k -φορές παραγωγίσιμο για όλα τα x .

Όπως έχουμε δει είναι συχνά δύσκολο να βρούμε τις ακριβείς λύσεις για τα μη γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Αντίθετα αυτό είναι ευκολότερο όταν έχουμε λύσεις ισορροπίας. Συχνά αυτές είναι και οι πιο σημαντικές λύσεις για ένα μη γραμμικό σύστημα. Όπως θα δούμε παρακάτω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία της γραμμικοποίησης για να μελετήσουμε την συμπεριφορά των λύσεων γύρω από τα σημεία ισορροπίας. Στα παρακάτω παραδείγματα σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, η συμπεριφορά των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος κοντά στην αρχή των αξόνων μοιάζει με αυτές του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Παράδειγμα 2.1

Έστω το σύστημα,

$$\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.4)$$

με μοναδικό σημείο ισορροπίας την αρχή των αξόνων. Όταν το y είναι μικρό το y^2 είναι πολύ μικρότερο. Έτσι κοντά στην αρχή θα έχουμε $x' = x$. Άρα προκύπτει η γραμμικοποιημένη εξίσωση,

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

αγνοώντας απλά τον υψηλής τάξης όρο. Μπορούμε να λύσουμε αμέσως αυτό το σύστημα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

Έχουμε ένα σαγματικό σημείο, την αρχή των αξόνων, όπου γεωμετρικά απεικονίζεται με μια ευσταθή γραμμή κατά μήκος του άξονα y και μια ασταθή γραμμή κατά μήκος του άξονα x .

Έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Άρα το διανυσματικό πεδίο απομακρύνεται προς το άπειρο και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Επιστρέφοντας στο μη-γραμμικό σύστημα παρατηρούμε ότι μπορούμε να το λύσουμε. Από την δεύτερη εξίσωση προκύπτει,

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-t}.$$

Άρα έχουμε

$$x' = x + y_0^2 \cdot e^{-2t}.$$

Γενικά ισχύει

λύση = λύση ομογενούς + λύση ειδική

άρα έχουμε

$$-2ce^{-2t} = ce^{-2t} + y_0^2 \cdot e^{-2t} \Leftrightarrow$$

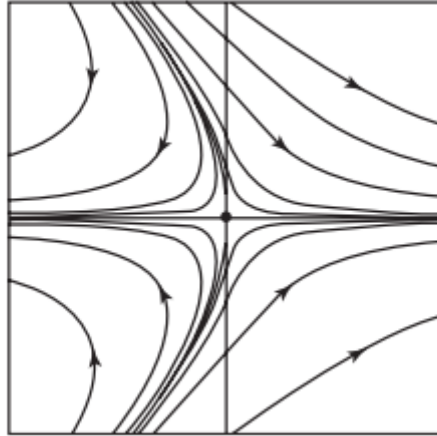
$$-3c = y_0^2 \Leftrightarrow$$

$$c = -\frac{1}{3}y_0^2$$

Έτσι προκύπτει η γενική λύση,

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{1}{3}y_0^2\right)e^t - \frac{1}{3}y_0^2e^{-2t}$$

$$y(t) = y_0e^{-t}$$



Εικόνα Ε1. Το πορτραίτο φάσεων για τις $x' = x + y^2$, $y' = -y$. Από την αναφορά [1].

Το διανυσματικό πεδίο γύρω από τον άξονα y δίνεται από $(y^2, -y)$ το οποίο δεν είναι εφαπτόμενο στον άξονα άρα όλα τα μη μηδενικά διανύσματα τείνουν προς τα δεξιά κατά μήκος αυτού του άξονα. Από την άλλη, υπάρχει μια καμπύλη πάνω στην οποία οι λύσεις τείνουν στο $(0,0)$. Έστω η καμπύλη $x + \frac{1}{3}y^2 = 0$. Το σημείο (x_0, y_0) την ικανοποιεί, έτσι έχουμε:

$$x(t) = -\frac{1}{3}y_0^2 e^{-2t}$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}$$

Για $t \rightarrow \infty$ η λύση τείνει στο σημείο ισορροπίας. Συνεπώς η καμπύλη $x(t) + \frac{1}{3}(y(t))^2 = 0$ είναι μια ευσταθής καμπύλη πάνω στην οποία όλες οι λύσεις τείνουν στο $(0,0)$.

Γενικά είναι δύσκολο να μετατρέψουμε ένα μη γραμμικό πρόβλημα σε γραμμικό, καθώς συχνά ο μη γραμμικός όρος επιφέρει μεγάλες αλλαγές στο σύστημα όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2

Έστω το μη γραμμικό σύστημα

$$x' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2x)$$

$$y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2y)$$

Σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των αξόνων. Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι το

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x,$$

με ιδιοτιμές $\frac{1}{2} \pm i$.

$\frac{1}{2} > 0$ άρα το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει εκθετικά κατά $e^{\frac{1}{2}t}$. Οι λύσεις απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων σπειροειδώς προς το άπειρο.

Υπολογίζοντας τον πίνακα J έχουμε

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $1 > 0$ συνεπώς οι τροχιές κινούνται αριστερόστροφα.

Στο μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες και για

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

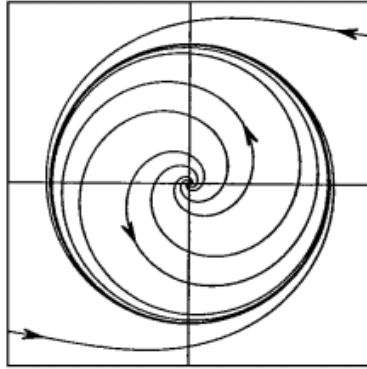
έχουμε,

$$r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta = x' = \frac{1}{2}(r - r^3) \cos \theta - r \cos \theta$$

$$r' \sin \theta + r(\cos \theta) \theta' = y' = \frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta + r \cos \theta$$

$$r' = \frac{r(1 - r^2)}{2}$$

$$\theta' = 1$$



Εικόνα Ε2. Το πορτραίτο φάσεων για $r' = \frac{1}{2}(r - r^3)$, $\theta' = 1$. Από την αναφορά [1].

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα γεωμετρικά. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι όλες οι μη μηδενικές λύσεις περιστρέφονται σε σπείρα γύρω από την αρχή των αξόνων και με αριστερόστροφη κίνηση.

- Για $r = 1$ έχουμε $r' = 0$, έτσι όλες οι λύσεις που ξεκινούν από τον μοναδιαίο κύκλο μένουν εκεί και κινούνται περιοδικά γύρω από τον κύκλο.
- Αφού $r' > 0$ όταν $0 < r < 1$ συμπεραίνουμε ότι οι μη μηδενικές λύσεις μέσα στον κύκλο απομακρύνονται σπειροειδώς από την αρχή και προς τον μοναδιαίο κύκλο.
- Έχουμε $r' < 0$ όταν $r > 1$ άρα οι λύσεις έξω από τον κύκλο τείνουν προς αυτόν.

Σχέση γραμμικού και μη γραμμικού συστήματος

Τοπικά, στην αρχή των αξόνων μπορούμε να μετατρέψουμε το μη γραμμικό σύστημα σε γραμμικό. Αν για το r_0 ισχύει $0 < r_0 < 1$ τότε το μη γραμμικό διανυσματικό πεδίο στρέφεται προς το εξωτερικό του κύκλου ακτίνας r_0 . Συνεπώς όλες οι λύσεις του μη γραμμικού συστήματος τείνουν στην αρχή των αξόνων σπειροειδώς. Μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε αυτό για να βρούμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στο γραμμικό και στο μη γραμμικό σύστημα του δίσκου ακτίνας $r \leq r_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 Έστω $\Phi_t(x_0)$ η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη x_0 . Έτσι έχουμε $\Phi_0(x_0) = x_0$. Η συνάρτηση $\varphi(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$ ονομάζεται **ροή** της διαφορικής εξίσωσης και η Φ_t ονομάζεται **χάρτης της ροής**. ■

Παράδειγμα 2.3

Έστω

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x \Leftrightarrow$$

$$\ln x = 2t + c \Leftrightarrow$$

$$x = x_0 e^{2t}$$

Αντίστοιχα και για y_0 . Τότε η ροή δίνεται από την σχέση

$$\Phi_t(x_0, y_0) = (x_0 e^{2t}, y_0 e^{3t}) \quad (2.5)$$

Και είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από τον χρόνο και τις αρχικές συνθήκες. ■

Σε πολικές συντεταγμένες το γραμμικοποιημένο σύστημα γίνεται

$$r' = r/2, \theta' = 1$$

Έστω ψ_t η ροή του συστήματος (flow) θα βρούμε μια σχέση ανάμεσα στις δύο ροές του δίσκου D που ορίζεται από το

$$r < 1 \text{ και } 0 < r_0 < 1.$$

Για (r, θ) στο D με $r > 0$ υπάρχει ένα μοναδικό $t = t(r, \theta)$ τέτοιο ώστε το $\varphi_t(r, \theta)$ να ανήκει στον κύκλο $r = r_0$. Ορίζουμε

$$h(r, \theta) = \psi_{-t} \varphi_t(r, \theta)$$

άρα,

$$h \circ \varphi_s(r, \theta) = \psi_s \circ h(r, \theta) \quad \forall (r, \theta) \in D$$

Το h μας δίνει μια σχέση ανάμεσα στο γραμμικό και στο μη-γραμμικό σύστημα.

Παράδειγμα 2.4

Έστω

$$x' = -y + \varepsilon x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + \varepsilon y(x^2 + y^2)$$

Όπου το ε είναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι το

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Τότε ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \pm i$$

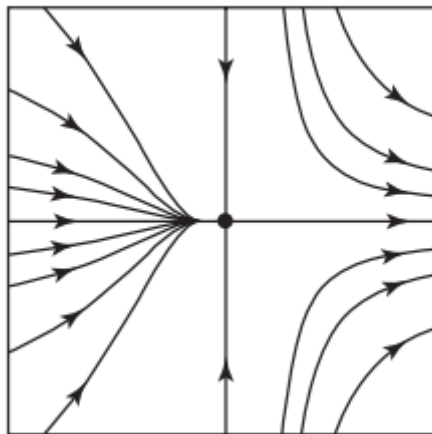
Το πραγματικό μέρος είναι 0 άρα η λύση είναι περιοδική με κλειστές τροχιές και η αρχή των αξόνων ονομάζεται ευσταθές κέντρο.

Όλες οι λύσεις του συστήματος κινούνται αριστερόστροφα γύρω από κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων και μοναδιαία γωνιακή επιτάχυνση. Σε πολικές συντεταγμένες,

$$r' = \varepsilon r^3$$

$$\theta' = -1$$

Όταν $\varepsilon > 0$ όλες οι λύσεις απομακρύνονται σπειροειδώς από την αρχή, αντίθετα για $\varepsilon < 0$ κινούνται προς αυτήν. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γραμμικοποίηση για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας.



Εικόνα Ε3. Το πορτραίτο φάσεων για $x' = x^2, y' = -y$. Από την αναφορά [1].

Παράδειγμα 2.5

Έστω

$$x' = x^2$$

$$y' = -y$$

Η λύση ισορροπίας του συστήματος είναι η αρχή των αξόνων. Οι υπόλοιπες λύσεις τείνουν προς τα δεξιά στον x άξονα και κατά μήκος της γραμμής στον y άξονα. Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι το,

$$x' = 0$$

$$y' = -y$$

για το οποίο όλα τα σημεία στον x άξονα είναι σημεία ισορροπίας και όλες οι άλλες λύσεις βρίσκονται σε κάθετες γραμμές της μορφής $x = \text{σταθερά}$.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

Η ιδιοτιμή είναι μηδενική άρα δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το σημείο ισορροπίας.

Όταν ένα γραμμικό σύστημα έχει μια μηδενική ιδιοτιμή η προσθήκη των μη γραμμικών όρων συχνά αλλάζει το διάγραμμα των φάσεων.

2.2 Μη γραμμικοί ευσταθείς και ασταθής κόμβοι (sinks/sources)

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα οι λύσεις ενός επίπεδου μη γραμμικού συστήματος κοντά στα σημεία ισορροπίας μοιάζουν με αυτές των γραμμικών συστημάτων μόνο στην περίπτωση όπου το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι υπερβολικό, δηλαδή καμία από τις ιδιοτιμές δεν έχει μηδενικό πραγματικό μέρος. Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός υπερβολικού σημείου ισορροπίας στην ειδική περίπτωση ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς κόμβου. Ότι εξετάσουμε για το επίπεδο ισχύει και για το R^n .

Έστω $x' = F(x)$ και $F(x_0) = 0$. Έστω DF_{x_0} ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο X_0 . Το γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων,

$$Y' = DF_{x_0} Y$$

λέγεται γραμμικοποιημένο σύστημα κοντά στο X_0 . Αν $X_0 = 0$ το γραμμικοποιημένο σύστημα δημιουργείται διώχνοντας όλους τους μη γραμμικούς όρους της F . Ένα σημείο ισορροπίας X_0 είναι υπερβολικό αν οι ιδιοτιμές του DF_{x_0} έχουν μη μηδενικά πραγματικά μέρη. Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου το σημείο ισορροπίας 0 είναι ευσταθής κόμβος για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (2.7)$$

με

$$f(x_0, y_0) = 0 = g(x_0, y_0)$$

Έστω οι αλλαγές συντεταγμένων

$$u = x - x_0,$$

$$v = y - y_0$$

Τότε το νέο σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0)$. Έτσι $x_0 = y_0 = 0$. Με γραμμική αλλαγή στις συντεταγμένες προκύπτει ένα γραμμικοποιημένο σύστημα σε κανονικοποιημένη μορφή. Στο γραμμικοποιημένο σύστημα έστω οι διακριτές ιδιοτιμές λ, μ με $-\lambda < -\mu < 0$. Το σύστημα τότε γίνεται,

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + h_1(x, y) \\ y' = -\mu y + h_2(x, y) \end{cases}$$

όπου $h_j = h_j(x, y)$ οι υψηλής τάξης όροι και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h_j(x,y)}{r} = 0$ όπου $r^2 = x^2 + y^2$. Το γραμμικοποιημένο σύστημα γίνεται,

$$\begin{cases} x' = -\lambda x \\ y' = -\mu y \end{cases}$$

Το διανυσματικό πεδίο τείνει στο εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r . Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του γραμμικού διανυσματικού πεδίου με το κανονικό διάνυσμα (x, y) έχουμε,

$$(-\lambda x, -\mu y) \cdot (x, y) = -\lambda x^2 - \mu y^2 < 0$$

Έτσι όλες οι λύσεις τείνουν στην αρχή των αξόνων με αυστηρά αρνητικές ακτινικές συνιστώσες. Το ίδιο συμβαίνει και για το μη γραμμικό σύστημα κοντά στο $(0,0)$. Έστω $q(x, y)$ το εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού πεδίου με το (x, y) , έχουμε

$$\begin{aligned} q(x, y) &= (-\lambda x + h_1(x, y), -\mu y + h_2(x, y)) \cdot (x, y) \\ &= -\lambda x^2 + xh_1(x, y) - \mu y^2 + yh_2(x, y) \\ &= -\mu(x^2 + y^2) + (\mu - \lambda)x^2 + xh_1(x, y) + yh_2(x, y) \\ &\leq -\mu r^2 + xh_1(x, y) + yh_2(x, y) \end{aligned}$$

Συνοπώς

$$\frac{q(x,y)}{r^2} \leq -\mu + \frac{xh_1(x,y)+yh_2(x,y)}{r^2} \quad (2.8)$$

Για $r \rightarrow 0$ το δεξί μέρος τείνει στο $-\mu$, έτσι το $q(x,y)$ είναι αρνητικό τουλάχιστον κοντά στην αρχή των αξόνων. Συνεπώς το μη γραμμικό σύστημα τείνει προς το εσωτερικό κύκλων με μικρή ακτίνα και έτσι όλες οι λύσεις των οποίων οι αρχικές λύσεις βρίσκονται μέσα σε αυτούς τους κύκλους πρέπει να τείνουν στην αρχή των αξόνων.

Θα εξετάσουμε αν το ίδιο ισχύει και για γραμμικοποιημένα συστήματα με ιδιοτιμές $\alpha \pm \beta i$ με $\alpha < 0, \beta \neq 0$. Σε περίπτωση αρνητικών ιδιοτιμών αλλάζουμε συντεταγμένες έτσι ώστε το γραμμικοποιημένο σύστημα να είναι ,

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + \varepsilon y \\ y' = -\lambda y \end{cases}$$

όπου το ε είναι πολύ μικρό.

Μπορούμε τώρα να συσχετίσουμε τη ροή ενός μη γραμμικού συστήματος, κοντά σε ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας που είναι ευσταθής κόμβος, με τη ροή του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου του συστήματος. Παρόμοια τα μη γραμμικοποιημένα συστήματα σε ασταθής κόμβους συσχετίζονται με τα αντίστοιχα γραμμικοποιημένα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια γενική περίπτωση του ακόλουθου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ (γραμμικοποίησης) 2.3 Έστω ότι το n -διάστατο σύστημα $X' = F(X)$ έχει ένα σημείο ισορροπίας στο X_0 το οποίο είναι υπερβολικό. Τότε η μη γραμμικοποιημένη ροή συσχετίζεται με τη ροή του γραμμικοποιημένου συστήματος σε μια γειτονιά του X_0 .

2.3 Σαγματικά σημεία

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει ως σημείο ισορροπίας ένα σαγματικό σημείο στο R^2 . Το σύστημα μας είναι της μορφής,

$$\begin{cases} x' = \lambda x + f_1(x,y) \\ y' = \mu y + f_2(x,y) \end{cases}$$

με $-\mu < 0 < \lambda$ και $\frac{f_1(x,y)}{r} \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow 0$.

Αυτού του είδους το σημείο ισορροπίας ονομάζεται σαγματικό σημείο. Στο γραμμικοποιημένο σύστημα ο y -άξονας είναι η ευσταθής ευθεία όπου όλες οι λύσεις τείνουν στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Ο x -άξονας είναι ασταθής ευθεία. Αυτές οι ευθείες δεν υπάρχουν στην μη γραμμική περίπτωση. Ωστόσο υπάρχει μια ασταθής

και μια ευσταθής καμπύλη με παρόμοιες ιδιότητες που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω $W^s(0)$ το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες οι λύσεις τείνουν στο 0 καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Έστω $W^u(0)$ το σύνολο των σημείων για τα όποια οι λύσεις τείνουν στο 0 καθώς το t τείνει στο πλην άπειρο.

Τα $W^s(0)$ και $W^u(0)$ ονομάζονται ευσταθής και ασταθής καμπύλη αντίστοιχα. Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι στο μη γραμμικό σύστημα οι λύσεις κοντά στα σαγματικά σημεία συμπεριφέρονται όπως στο αντίστοιχο γραμμικό σύστημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ευσταθούς καμπύλης) 2.4

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = \lambda x + f_1(x, y) \\ y' = -\mu y + f_2(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

με $-\mu < 0 < \lambda$ και $\frac{f_1(x, y)}{r} \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και καμπύλη $x = h^s(y)$ με $|y| < \varepsilon$ και $h^s(0) = 0$. Επιπλέον

1. Όλες οι λύσεις των οποίων οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται πάνω στην καμπύλη, παραμένουν εκεί για $t \geq 0$ και τείνουν στην αρχή των αξόνων καθώς $t \rightarrow \infty$.
2. Η καμπύλη $x = h^s(y)$ περνά από την αρχή των αξόνων, εφαπτόμενη στον y άξονα.
3. Όλες οι άλλες λύσεις των οποίων οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται στον δίσκο με ακτίνα ε και κέντρο την αρχή των αξόνων, φεύγουν από το δίσκο καθώς το t αυξάνεται.

Η καμπύλη $x = h^s(y)$ ονομάζεται *τοπικά ευσταθής καμπύλη* στο 0.

Το αντίστοιχο θεώρημα για ασταθή καμπύλη μας δίνει μια καμπύλη της μορφής $y = h^u(x)$ η οποία είναι εφαπτόμενη στον x άξονα και όλες οι λύσεις της τείνουν στην αρχή καθώς $t \rightarrow -\infty$.

Απόδειξη του θεωρήματος

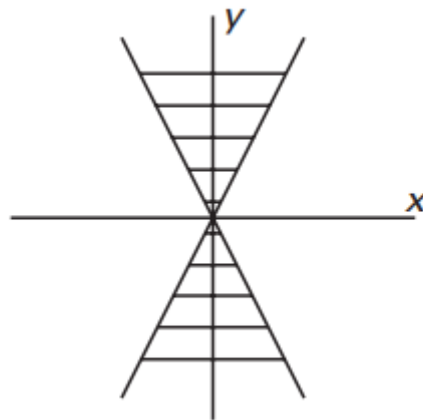
Έστω το τετράγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες $|x| = \varepsilon$, $|y| = \varepsilon$ με $\varepsilon > 0$ μικρό. Το μη γραμμικό διανυσματικό πεδίο δείχνει προς το εσωτερικό του τετραγώνου πάνω και κάτω που σχηματίζεται από $y = \pm \varepsilon$, καθώς το σύστημα είναι αντίστοιχο με το γραμμικό

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = -\mu y \end{cases}$$

που έχει αυτή την ιδιότητα. Παρόμοια το διανυσματικό πεδίο τείνει προς το εξωτερικό του τετραγώνου στα δεξιά και αριστερά σύνορα $x = \pm \varepsilon$. Θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες στο άνω σύνορο $y = \varepsilon$, κάποιες από τις λύσεις θα φύγουν από το τετράγωνο στα αριστερά και άλλες στα δεξιά. Μια λύση δεν μπορεί να τα κάνει και τα δύο, άρα τα σύνολα θα είναι διακριτά και ανοιχτά. Άρα θα πρέπει να υπάρχουν κάποιες αρχικές συνθήκες για τις οποίες οι λύσεις δεν φεύγουν καθόλου από το τετράγωνο. Θα δείξουμε ότι όλες οι λύσεις που δεν φεύγουν τείνουν στο 0. Έπειτα θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική αρχική συνθήκη στα άνω και κάτω σύνορα για την οποία η λύση συμπεριφέρεται με τέτοιο τρόπο. Τέλος θα δείξουμε ότι η λύση αυτή βρίσκεται σε ένα σχήμα της μορφής $x = h^s(y)$ που έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Έστω B_ε το τετράγωνο το οποίο είναι φραγμένο από τα $x = \pm \varepsilon$, $y = \pm \varepsilon$. Έστω s_ε^\pm τα άνω και κάτω όρια του B_ε . Έστω C_M η κωνική περιοχή που διαμορφώνεται από την $|y| \geq M(x)$ μέσα στο B_ε . Αντιλαμβανόμαστε την κλίση $\pm M$ του C_M ως μεγάλη σε σχέση με την απόλυτη τιμή.

ΛΗΜΜΑ 2.5

Για $M > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε το διανυσματικό πεδίο να τείνει έξω από το C_M , για τα σημεία στο $C_M \cap B_\varepsilon$ (εκτός από την αρχή των αξόνων).



Εικόνα Ε4. Ο κώνος C_M . Από την αναφορά [1].

Απόδειξη

Έστω M , επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_1(x, y)| \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{M^2 + 1}} r$$

για όλα τα $(x, y) \in B_\varepsilon$. Έστω $x > 0$ τότε κατά μήκος του δεξιού φράγματος του C_M έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + f_1(x, M_x) \\ &\geq \lambda x - |f_1(x, M_x)| \\ &\geq \lambda x - \frac{\lambda}{2\sqrt{M^2 + 1}} \left(x\sqrt{M^2 + 1} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} x > 0 \end{aligned}$$

Έτσι $x' > 0$ σε αυτήν την πλευρά του κώνου. Παρόμοια αν $y > 0$ επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $y' < 0$ στα άκρα του C_M . Πράγματι επιλέγουμε ε έτσι ώστε το

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{M^2 + 1}} r$$

να το αποδεικνύει όπως παραπάνω.

Δείξαμε ότι στα άκρα του C_M , που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο το διανυσματικό πεδίο δείχνει προς τα κάτω και δεξιά και συνεπώς έξω από το C_M . Με παρόμοιους υπολογισμούς δείχνουμε το ίδιο και για όλα τα άλλα άκρα. ■

Από το λήμμα έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο αρχικών συνθηκών στο $S_\varepsilon^\pm \cap C_M$ των οποίων οι λύσεις σταδιακά βγαίνουν από το C_M προς τα δεξιά και ένα ακόμη σύνολο στο $S_\varepsilon^\pm \cap C_M$ του οποίου οι λύσεις τείνουν στα αριστερά. Τα σύνολα είναι ανοιχτά λόγω της συνέχειας των λύσεων. Έπειτα δείχνουμε ότι καθένα από αυτά τα σύνολα, είναι ένα μοναδικό ανοιχτό διάστημα. Έστω C_M^+ η περιοχή του C_M που βρίσκεται κάτω από τον x -άξονα και C_M^- αυτή που βρίσκεται πάνω από τον άξονα.

ΛΗΜΜΑ 2.6

Έστω $M > 1$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $y' < 0$ στο C_M^+ και $y' > 0$ στο C_M^- .

Απόδειξη

Στο C_M^+ έχουμε $|M_x| \leq y$ τέτοιο ώστε

$$r^2 \leq \frac{y^2}{M^2} + y^2 \quad \text{ή} \quad r \leq \frac{y}{M} \sqrt{1 + M^2}$$

Όπως και στο προηγούμενο λήμμα επιλέγουμε ε τέτοιο ώστε

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{M^2+1}} r \quad \forall (x, y) \in B_\varepsilon$$

Τότε στο C_M^+ έχουμε

$$\begin{aligned} y' &\leq -\mu y + |f_2(x, y)| \\ &\leq -\mu y + \frac{\mu}{2\sqrt{M^2+1}} r \\ &\leq -\mu y + \frac{\mu}{2M} y \\ &\leq -\frac{\mu}{2} y \quad \text{για } M > 1 \end{aligned}$$

Η απόδειξη για C_M^- είναι παρόμοια. ■

Από το λήμμα βλέπουμε ότι οι λύσεις που ξεκινούν στο $S_\varepsilon^+ \cap C_M$ φθίνουν προς την y κατεύθυνση, ενώ παραμένουν στο C_M^+ . Καμία λύση δεν παραμένει για πάντα στο C_M^+ , εκτός και αν αυτή η λύση τείνει στην αρχή των αξόνων.

Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, το σύνολο των σημείων στο S_ε^+ που τείνουν προς τα δεξιά πρέπει να είναι ένα μοναδικό ανοιχτό διάστημα. Το συμπλήρωμα των δύο αυτών συνόλων στο S_ε^+ είναι ένα μη κενό κλειστό διάστημα, στο οποίο οι λύσεις παραμένουν στο C_M και συνεπώς τείνουν στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Η συμπεριφορά των λύσεων είναι παρόμοια και στο C_M^- .

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το διάστημα των αρχικών συνθηκών στο S_ε^\pm για τα οποία οι λύσεις τείνουν στο 0, είναι στην πραγματικότητα ένα μοναδικό σημείο. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την μεταβλητή $U(t)$ και το μη αυτόνομο γραμμικό σύστημα

$$U' = DF_{x(t)}U,$$

όπου $x(t)$ μια λύση για το μη γραμμικό σύστημα και

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + f_1(x, y) \\ -\mu y + f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Θυμίζουμε ότι σε ένα γραμμικό μη αυτόνομο σύστημα οι τετραγωνικοί του πίνακες εξαρτώνται μόνο από το t .

Για $\tau > 0$, αν $|U_0|$ μικρό τότε η λύση $U(t)$ που ικανοποιεί το $U(0) = U_0$ και η λύση $Y(t)$ του μη γραμμικού συστήματος που ικανοποιεί το $Y(0) = X_0 + U_0$ βρίσκονται κοντά η μια στην άλλη για $0 \leq t \leq \tau$.

Έστω $X(t) = (x(t), y(t))$ μια από τις λύσεις του συστήματος που δεν φεύγει ποτέ από το C_M . Έστω $X(0) = X_0$ και $y(0) = \varepsilon$.

ΛΗΜΜΑ 2.7

Έστω $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ μια λύση της εξίσωσης

$$U' = DF_{x(t)}U$$

που ικανοποιεί το

$$\left| \frac{U_2(0)}{U_1(0)} \right| \leq 1$$

Τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon > 0$ κατάλληλα μικρό τέτοιο ώστε $|U_2(t)| \leq |U_1(t)|$ για $t \geq 0$.

Απόδειξη

Η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής,

$$u_1' = \lambda u_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2$$

$$u_2' = -\mu u_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2$$

Όπου το $|f_{ij}(t)|$ μπορεί να προκύψει όσο μικρό θέλουμε επιλέγοντας το κατάλληλο ε . Για οποιαδήποτε λύση $(U_1(t), U_2(t))$ έστω $\eta = \eta(t)$ η κλίση $\frac{U_2(t)}{U_1(t)}$ της λύσης. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση και τον κανόνα του πηλίκου έχουμε ότι το η ικανοποιεί την σχέση

$$\eta' = \alpha(t) - (\mu + \lambda + \beta(t))\eta + \gamma(t)\eta^2$$

Όπου

$$\alpha(t) = f_{21}(t), \beta(t) = f_{11}(t) - f_{22}(t), \gamma(t) = -f_{12}(t).$$

Τα α, β, γ είναι όλα μικρά, $\mu + \lambda > 0$ άρα $-(\mu + \lambda + \beta(t)) < 0$.

Αν $\eta(t) > 0$ υπάρχουν σταθερές α_1 και α_2 με

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2$$

τέτοιες ώστε,

$$-\alpha_2\eta + \alpha(t) \leq \eta' \leq -\alpha_1\eta + \alpha(t)$$

Αν επιλέξουμε ε αρκετά μικρό και θέσουμε

$$u_1(0) = u_2(0)$$

τέτοιο ώστε $\eta(0) = 1$, τότε

$$n'(0) < 0$$

και το $n(t)$ σταδιακά μειώνεται. Αντίστοιχα αν $n(0) = -1$ τότε $n'(0) > 0$

και το $n(t)$ αυξάνεται. Οποιαδήποτε λύση με $|n(0)| < 1$ δεν μπορεί να ικανοποιεί το $n(t) = \pm 1$. Αφού η λύση μας το ικανοποιεί έπεται ότι βρίσκεται στην περιοχή

$$|n(t)| < 1$$

και έτσι

$$|U_2(t)| \leq |U_1(t)| \text{ για } t > 0.$$

Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος έστω ότι έχουμε μια δεύτερη λύση $Y(t)$ που βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο C_M και $y(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Έστω

$$Y(0) = (X'_0, \varepsilon)$$

όπου $X'_0 \neq X_0$. Οποιαδήποτε λύση με αρχική τιμή (x, ε) και

$$X_0 < x < X'_0$$

πρέπει επίσης να τείνει στην αρχή των αξόνων. Συμπεραίνουμε ότι το X'_0 είναι κοντά στο X_0 . Θα προσεγγίσουμε το $y(t) - x(t)$ από μια λύση της εξίσωσης. Έστω $U(t)$ αυτή η λύση που ικανοποιεί τα

$$U_1(0) = X'_0 - X_0 \text{ και } U_2(0) = 0.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα για την $U(t)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} |u'_1| &= |\lambda u_1 + f_{11}(t)u_1 + f_{12}(t)u_2| \\ &\geq \lambda |u_1| - (|f_{11}(t)| + |f_{12}(t)|)|u_1| \end{aligned}$$

Όμως $|f_{11} + f_{12}| \rightarrow 0$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ και έτσι $|u'_1| \geq k|u_1|$ για $k > 0$. Έτσι $|u_1(t)| \geq ce^{kt}$ για $t \geq 0$. Η λύση $Y(t)$ τείνει στο 0 από την υπόθεση. Όμως τότε η απόσταση ανάμεσα στις $Y(t)$ και $U(t)$ γίνεται μεγάλη κάτι που οδηγεί σε άτοπο. Άρα $Y(t) = X(t)$.

Τέλος ισχυριζόμαστε ότι το $X(t)$ τείνει στην αρχή των αξόνων εφαπτόμενο στον y άξονα. Αυτό έπεται από το ότι μπορούμε να επιλέξουμε ε κατάλληλα μικρό έτσι ώστε το $X(t)$ να βρίσκεται στο C_M ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλο είναι το M . Έτσι η κλίση του $X(t)$ τείνει στο $\pm\infty$ καθώς πλησιάζει στο $(0,0)$.

Μελέτη σαγματικών σημείων υψηλότερης τάξης.

Έστω $X' = F(X)$ όπου $X \in \mathbb{R}^n$. Έστω ότι το X_0 είναι λύση ισορροπίας για την οποία το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n - k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε τα τοπικά ευσταθή και ασταθή σύνολα δεν είναι καμπύλες αλλά είναι υποπολλαπλότητες διάστασης k και $n - k$ αντίστοιχα.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια γραμμική αλλαγή συντεταγμένων κατά την οποία το τοπικά ευσταθές σύνολο δίνεται από μια C^∞ συνάρτηση

$$g: B_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

που ικανοποιεί το $g(0) = 0$ και όλες οι μερικές παράγωγοι του g μηδενίζονται στην αρχή των αξόνων. Το B_r είναι ένας δίσκος με ακτίνα r και κέντρο την αρχή των αξόνων στο \mathbb{R}^k .

Το τοπικά ασταθές σύνολο είναι ένα παρόμοιο γράφημα σε έναν δίσκο διάστασης $n - k$. Και τα δύο γραφήματα είναι εφαπτόμενα στο σημείο ισορροπίας στους ευσταθής και ασταθής υποχώρους του X_0 . Έτσι τέμνονται μόνο στο σημείο X_0 .

Παράδειγμα 2.6

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z + x^2 + y^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα στην αρχή των αξόνων έχει ιδιοτιμές 1 και -1. Η αλλαγή συντεταγμένων

$$u = x,$$

$$v = y,$$

$$w = z + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$$

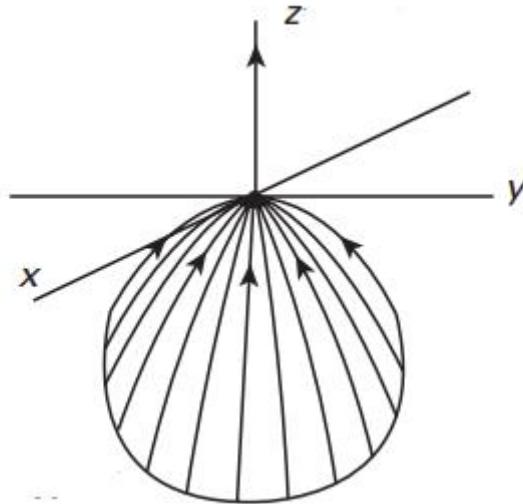
μετατρέπει το μη γραμμικό σύστημα στο γραμμικό,

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = -v \\ w' = w \end{cases} \quad (2.11)$$

Το επίπεδο $w = 0$ για το γραμμικό σύστημα είναι ένα ευσταθές επίπεδο. Με την αλλαγή συντεταγμένων το επίπεδο μετατρέπεται στην επιφάνεια

$$z = -\frac{1}{3}(x^2 + y^2)$$

που είναι παραβολοειδές και διέρχεται από την αρχή των αξόνων στο R^3 . Όλες οι λύσεις τείνουν στην αρχή των αξόνων, σε αυτήν την επιφάνεια την οποία ονομάζουμε, ευσταθή επιφάνεια για το μη γραμμικό σύστημα.



Εικόνα Ε5. Το πορτραίτο φάσεων για $x' = -x, y' = -y, z' = z + x^2 + y^2$. Από την αναφορά [1].

2.4 Μελέτη της ευστάθειας

Η μελέτη της ευστάθειας είναι πολύ σημαντική για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και τις εφαρμογές τους. Ένα σημείο ισορροπίας πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένο κριτήριο ευστάθειας ώστε να είναι παρατηρήσιμο σε τομείς όπως η φυσική, η βιολογία, η χημεία και τα οικονομικά.

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται *ευσταθές* αν οι κοντινές λύσεις παραμένουν κοντά για όλο τον χρόνο t . Σε εφαρμογές των δυναμικών συστημάτων δεν μπορούμε να σημειώσουμε ακριβώς τις θέσεις αλλά μόνο κατά προσέγγιση, άρα ένα σημείο ισορροπίας θα πρέπει να είναι ευσταθές για να έχει φυσική σημασία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 Έστω $X^* \in R^n$ ένα σημείο ισορροπίας για την διαφορική εξίσωση $X' = F(X)$. Τότε το X^* είναι ένα **ευσταθές σημείο** ισορροπίας αν για κάθε γειτονιά O του X^* στο R^n υπάρχει γειτονιά O_1 του X^* στο O τέτοια ώστε κάθε λύση $X(t)$ με $X(0) = X_0$ στο O_1 να ορίζεται και να παραμένει στο O για όλα τα $t > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9 Ένα άλλο είδος ευστάθειας είναι η ασυμπτωτική ευστάθεια. Αν το O_1 είναι ευσταθές και επιπλέον $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$ τότε το X^* είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10 Ένα σημείο ισορροπίας που δεν είναι ευσταθές είναι **ασταθές**. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε γειτονιά O_1 του X^* στο O υπάρχει τουλάχιστον μια λύση $X(t)$ που ξεκινάει στο $X(0) \in O_1$ και βρίσκεται εξολοκλήρου στο O για $t > 0$.

Ένα παράδειγμα σημείου ισορροπίας που είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές είναι η αρχή των αξόνων στο R^2 για μια γραμμική εξίσωση $X' = AX$ όπου ο πίνακας A έχει φανταστικές ιδιοτιμές. Η σημασία αυτού του παραδείγματος στις εφαρμογές είναι περιορισμένη καθώς η παραμικρή διαταραχή θα αλλάξει τον χαρακτήρα του σημείου. Ακόμα και μια μικρή γραμμική διαταραχή μπορεί να μετατρέψει ένα κέντρο σε έναν ευσταθή ή ασταθή κόμβο. Όταν η γραμμικοποίηση ενός συστήματος σε ένα σημείο ισορροπίας είναι υπερβολική μπορούμε κατευθείαν να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του σημείου. Πολλά σημεία ισορροπίας στις εφαρμογές είναι μη υπερβολικά και έτσι δεν υπάρχει τρόπος να καθορίσουμε την ευστάθεια εκτός και αν βρούμε όλες τις λύσεις του συστήματος που είναι συχνά αδύνατο.

Υπάρχουν μερικές τεχνικές για την μελέτη της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων των διαφορικών εξισώσεων. Αυτές οι τεχνικές δεν εφαρμόζονται σε όλα τα μη γραμμικά συστήματα αλλά σε ειδικές περιπτώσεις που συχνά αποτελούν σημαντικές εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 3

3.1 Ισοκλινείς καμπύλες μηδενικής τάξης (nullclines)

Ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την μελέτη των μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων είναι οι ισοκλινείς καμπύλες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Μια **ισοκλινής καμπύλη** σχηματίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία κάποια καμπύλη έχει μια συγκεκριμένη κλίση. Οι ισοκλινείς καμπύλες συχνά χρησιμοποιούνται ως γραφική μέθοδος για την επίλυση κανονικών διαφορικών εξισώσεων. Σε μια εξίσωση της μορφής $y' = f(x, y)$ οι ισοκλινείς είναι ευθείες οι οποίες προκύπτουν θέτοντας $f(x, y) = c$, όπου c σταθερά. Αυτό μας δίνει ένα σύνολο από ευθείες κατά μήκος των οποίων οι καμπύλες των λύσεων έχουν την ίδια κλίση. Υπολογίζοντας αυτή την κλίση για κάθε ισοκλινή καμπύλη μπορούμε να σχεδιάσουμε το πεδίο κλίσεων.

Έστω ένα σύστημα της μορφής,

$$x_1' = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

...

$$x_n' = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

Οι x_j -μηδενικής τάξης ισοκλινής καμπύλες προκύπτουν από το σύνολο των σημείων για τις οποίες $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$. Οι x_j -μηδενικής τάξης ισοκλινής καμπύλες χωρίζουν το R^n σε περιοχές στις οποίες οι x_j -συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου δείχνουν είτε στην θετική είτε στην αρνητική κατεύθυνση. Αν προσδιορίσουμε όλες τις μηδενικής τάξης ισοκλινής καμπύλες, τότε ο R^n μπορεί να αναλυθεί σε ανοιχτά σύνολα σε καθένα από τα οποία το διανυσματικό πεδίο δείχνει προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Συγκεκριμένα στην περίπτωση του επιπέδου για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

έχουμε

- *Κάθετης κατεύθυνσης ισοκλινής καμπύλη*, δηλαδή περιοχές στο επίπεδο φάσεων όπου

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

- *Οριζόντιας κατεύθυνσης ισοκλινής καμπύλη*, δηλαδή περιοχές στο επίπεδο φάσεων όπου

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0 \quad (3.2)$$

Τα παραπάνω χωρίζουν το επίπεδο φάσεων σε περιοχές. Κατά μήκος των ορίων των περιοχών αυτών ξέρουμε ότι οι λύσεις κινούνται είτε οριζόντια είτε κάθετα ανάλογα τον τύπο της καμπύλης. Χρησιμοποιώντας την διαφορική εξίσωση (3.1) ή (3.2) μπορούμε να καταλάβουμε προς ποια κατεύθυνση κινούνται οι λύσεις αλλά και ποια διαδρομή ακολουθούν από περιοχή σε περιοχή.

Παράδειγμα 3.1

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases}$$

➤ Για τις κάθετες κατεύθυνσης ισοκλινής καμπύλες έχουμε,

$$2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(2 - x - y) = 0$$

Συνεπώς έχουμε δύο κάθετες μηδενικής τάξης ισοκλινής καμπύλες τις

$$x = 0 \quad \text{και} \quad 2 - x - y = 0$$

Για την $x = 0$ έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Η κίνηση των λύσεων στον y -άξονα είναι προς τα πάνω όταν $y < 0$ και προς τα κάτω όταν $y > 0$. Δεν υπάρχει κίνηση όταν $y = 0$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

- Αφού η κίνηση κατά μήκος του $x = 0$ είναι κάθετη και η ισοκλινής καμπύλη είναι κάθετη γραμμή, δεν υπάρχουν λύσεις που να περνούν αυτήν την γραμμή.
- Το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ είναι ένα σημείο ισορροπίας.

Για την $2 - x - y = 0$ έχουμε $y = 2 - x$, άρα η κάθετη κίνηση δίνεται από την

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -(2 - x) + x(2 - x) \\ &= -(x - 2)(x - 1) \end{aligned}$$

η οποία είναι θετική όταν $1 < x < 2$, διαφορετικά είναι αρνητική.

Έτσι βλέπουμε ότι οι καμπύλες των λύσεων, στο επίπεδο των φάσεων, περνούν την ευθεία $y = 2 - x$ με κατεύθυνση προς τα πάνω όταν $1 < x < 2$. Διαφορετικά τείνουν προς τα κάτω. Δεν υπάρχει κίνηση όταν $x = 1$ ή $x = 0$. Τα σημεία ισορροπίας μας είναι τα $(x, y) = (1, 1)$ και $(x, y) = (2, 0)$.

➤ Για τις οριζόντιας κίνησης ισοκλινής καμπύλες έχουμε

$$-y + xy = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) = 0$$

Άρα έχουμε δύο καμπύλες, τις $y = 0$ και $x = 1$.

Για την $y = 0$ η οριζόντια κίνηση δίνεται από την,

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) = x(2 - x)$$

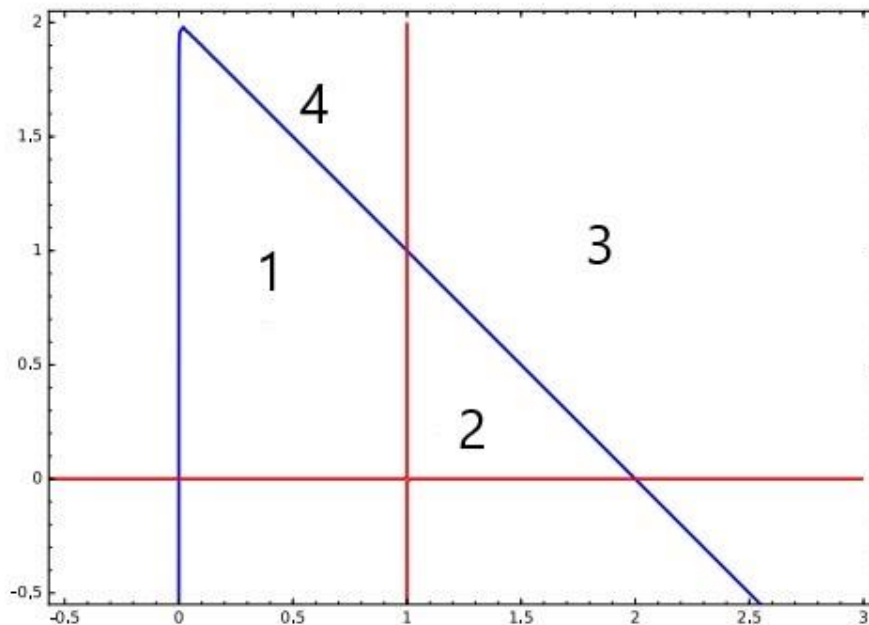
Άρα η κίνηση είναι προς τα δεξιά όταν $0 < x < 2$, διαφορετικά είναι προς τα αριστερά. Αφού η κίνηση κατά μήκος του $y = 0$ είναι οριζόντια καμία λύση δεν μπορεί να προσπεράσει την καμπύλη.

Για την $x = 1$. Η ισοκλινής αυτή γραμμή είναι μια κάθετη ευθεία που περνάει από το σημείο ισορροπίας $(1,1)$. Η οριζόντια κίνηση κατά μήκος της γραμμής αυτής δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = 1 - y$$

Συνεπώς όταν $y < 1$ η οριζόντια κίνηση των λύσεων πάει προς τα δεξιά ενώ όταν $y > 1$ προς τα αριστερά.

Οι τέσσερις ισοκλινής καμπύλες χωρίζουν το επίπεδο φάσεων σε περιοχές.



Περιοχή 1

Οι λύσεις δεν μπορούν να περάσουν τις $x = 0$ ή $y = 0$ και η κίνηση κατά μήκος του ορίου ανάμεσα στις περιοχές 1 και 4 είναι προς τα κάτω. Έτσι μια λύση στην

περιοχή 1 είτε παραμένει εκεί είτε περνάει μέσω της οριζόντιας γραμμής στην περιοχή 2.

Περιοχή 2

Οι λύσεις στην περιοχή 2 είτε τείνουν στα σημεία ισορροπίας είτε περνούν μέσω της κάθετης γραμμής στην περιοχή 3.

Περιοχή 3

Για μια λύση στην περιοχή 3 έχουμε $y > 2 - x$ και $x > 0$. Έτσι για μια τέτοια λύση έχουμε

$$-xy < -x(2 - x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} < 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x(2 - x) = 0$$

συνεπώς οι λύσεις στην περιοχή 3 κινούνται πάντα προς τα αριστερά και έτσι είναι πιο πιθανό να κινηθούν προς την περιοχή 4.

Περιοχή 4

Οι λύσεις στην περιοχή 4 ικανοποιούν την $0 < x < 1$ και $y > 0$. Η κάθετη κίνηση προκύπτει από την σχέση

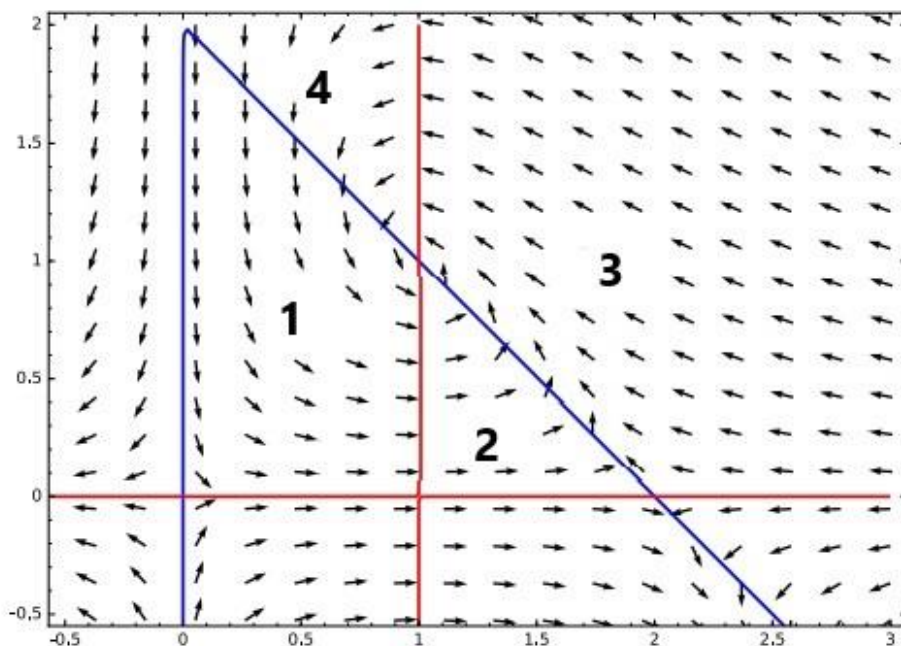
$$\frac{dy}{dt} = -y + xy < -y + y = 0$$

Συνεπώς οι λύσεις σε αυτήν την περιοχή κινούνται πάντα προς τα κάτω. Αν φύγουν από την περιοχή 4 θα διασχίσουν την κάθετη γραμμή προς την περιοχή 1.

Συμπερασματικά οι λύσεις στο πρώτο τεταρτημόριο πρέπει να κάνουν ένα από τα παρακάτω:

1. Να τείνουν προς το σημείο ισορροπίας.
2. Να τείνουν προς το άπειρο ακολουθώντας μια κάθετη κατεύθυνση –προς την περιοχή 3.
3. Να ακολουθούν κυκλική πορεία.

Χρησιμοποιώντας ισοκλινής καμπύλες μπορούμε να καταλάβουμε πως συμπεριφέρονται οι λύσεις μακριά από τα σημεία ισορροπίας.



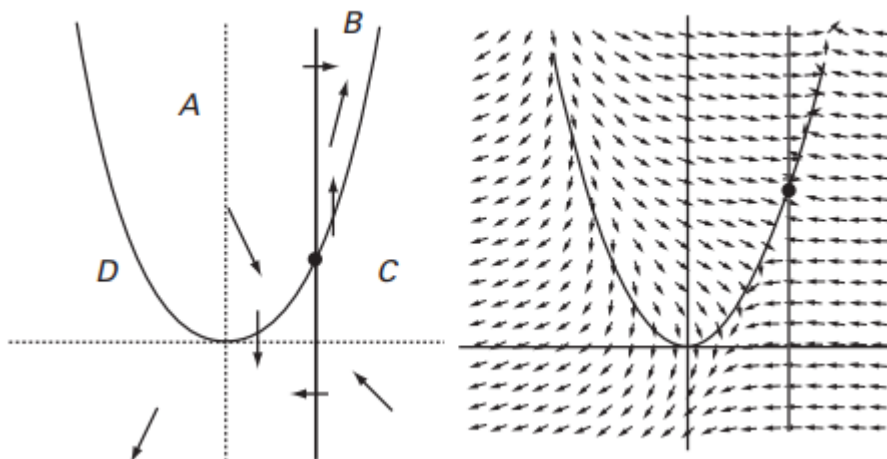
Σε οποιαδήποτε περιοχή ανάμεσα στις ισοκλινής καμπύλες το διανυσματικό πεδίο είναι είτε κάθετο είτε οριζόντιο και η κατεύθυνση του είναι βορειοανατολική, βορειοδυτική, νοτιοανατολική ή νοτιοδυτική. Αυτές οι 4 περιοχές ονομάζονται **βασικές περιοχές**.

Παράδειγμα 3.2

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = x - 2 \end{cases}$$

Η x -ισοκλινής καμπύλη προκύπτει από τη σχέση $x'=0$ και είναι η καμπύλη $y = x^2$. Η y -ισοκλινής καμπύλη προκύπτει για $y'=0$ και είναι η κάθετη ευθεία $x = 2$. Οι καμπύλες αυτές τέμνονται στο σημείο $(2,4)$ το οποίο είναι και το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Οι καμπύλες αυτές χωρίζουν το επίπεδο R^2 σε 4 βασικές περιοχές τις A,B,C,D όπως βλέπουμε και στο σχήμα.

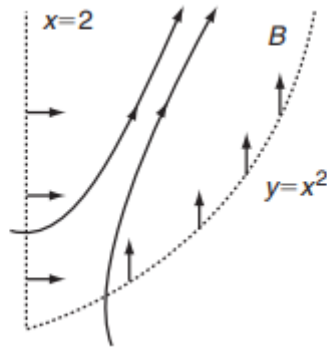


Εικόνα Ε6. Καμπύλες και διανυσματικό πεδίο. Από την αναφορά [1].

Διαλέγοντας ένα σημείο σε κάθε περιοχή και προσδιορίζοντας τη διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου στα σημεία αυτά καταλαβαίνουμε και την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου για όλα τα σημεία της περιοχής αυτής. Για παράδειγμα το σημείο $(0,1)$ βρίσκεται στην περιοχή A και το διανυσματικό πεδίο στο σημείο αυτό είναι $(1,-2)$ το οποίο έχει κατεύθυνση προς τα νοτιοανατολικά. Έτσι το διανυσματικό πεδίο δείχνει νοτιοανατολικά για όλα τα σημεία της περιοχής. Όταν λέμε νοτιοανατολικά εννοούμε ότι η γωνία θ του διανυσματικού πεδίου βρίσκεται στο $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ένα σαγματικό σημείο. Το γραμμικοποιημένο σύστημα στο $(2,4)$ είναι το

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

το οποίο έχει ιδιοτιμές $-2 \pm \sqrt{5}$ η μια θετική και η άλλη αρνητική. Μπορούμε να διαπιστώσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων οπουδήποτε πάνω στο επίπεδο. Για παράδειγμα το διανυσματικό πεδίο δείχνει στην περιοχή B για όλα τα σημεία κατά μήκος του συνόρου, έπειτα δείχνει βορειοδυτικά για όλα τα σημεία στο B. Συνεπώς κάθε λύση στο B παραμένει στο B ή τείνει στο ∞ με βορειοδυτική κατεύθυνση. Παρόμοια οι λύσεις στην περιοχή D μένουν στην περιοχή και τείνουν στο ∞ με νοτιοδυτική κατεύθυνση. Οι λύσεις που ξεκινούν στις περιοχές A και C έχουν την επιλογή να διασταυρωθούν με μια από τις ισοκλινείς καμπύλες και να μπουν στις περιοχές B και D ή να τείνουν προς το σημείο ισορροπίας. Έτσι κατανοούμε το διάγραμμα φάσεων τουλάχιστον από ποιοτικής πλευράς.



Εικόνα Ε7. Οι λύσεις μπαίνουν στην περιοχή B και τείνουν στο ∞ . Από την αναφορά [1].

Παράδειγμα 3.3

Έστω το παρακάτω σύστημα το οποίο εξαρτάται από την παράμετρο α

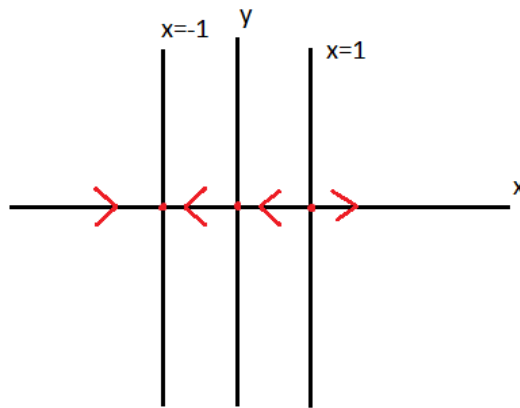
$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy + \alpha(x^2 - 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

Οι x-ισοκλινής καμπύλες προκύπτουν για $x' = 0$ και είναι οι $x = \pm 1$, ενώ οι y-ισοκλινής καμπύλες για $y' = 0$ και είναι οι $xy = \alpha(x^2 - 1)$. Τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(\pm 1, 0)$. Το διανυσματικό πεδίο είναι εφαπτόμενο στις καμπύλες. Επιπλέον έχουμε $y' = -y$ στο $x = 1$ και $y' = y$ στο $x = -1$. Έτσι οι λύσεις τείνουν στο $(1, 0)$ κατά μήκος της κάθετης γραμμής $x = 1$ και απομακρύνονται από το $(-1, 0)$ κατά μήκος της $x = -1$. Αυτό ισχύει για όλα τα α .

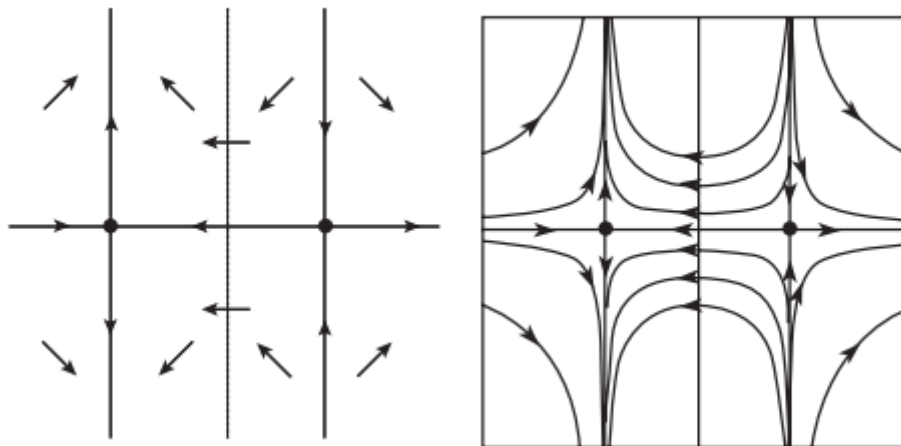
Έστω $\alpha=0$ τότε από την (3.3) προκύπτει

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy \end{cases}$$

Το διανυσματικό πεδίο είναι εφαπτόμενο στον x- άξονα και δίνεται από την $x' = x^2 - 1$. Έτσι έχουμε $x' > 0$ αν $|x| > 1$ και $x' < 0$ αν $|x| < 1$. Συνεπώς σε κάθε σημείο ισορροπίας έχουμε μια ευθεία λύσεων που τείνει στο σημείο αυτό και μια που απομακρύνεται.



Επιπλέον υπάρχει και μια δεύτερη ισοκλινής y -καμπύλη κατά μήκος του $x=0$, όμως το διανυσματικό πεδίο δεν είναι εφαιπτόμενο στην καμπύλη αυτή.

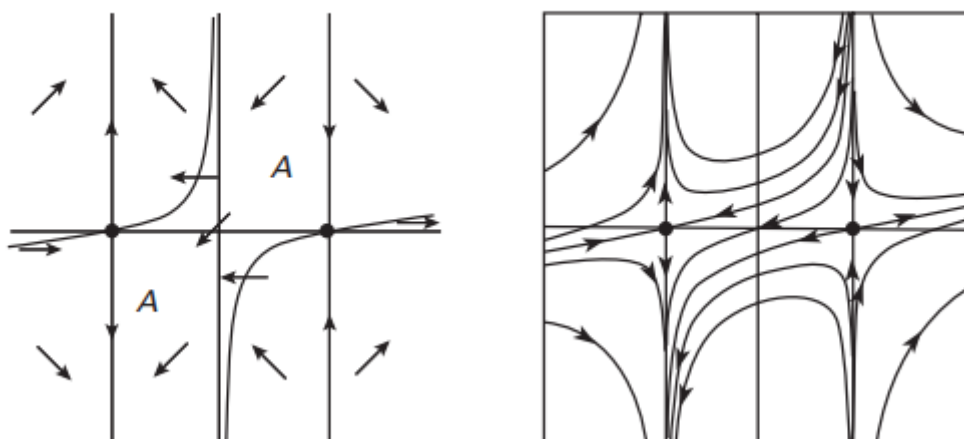


Εικόνα Ε8. Οι ισοκλινής καμπύλες και το πορτραίτο φάσεων για τις $x' = x^2 - 1$ και $y' = -xy$ Από την αναφορά [1].

Όταν $a=0$ ένα κομμάτι της ασταθούς καμπύλης κατά μήκος του $(1,0)$ εφάπτεται με ένα κομμάτι της ευσταθούς καμπύλης στο $(-1,0)$. Όλες οι λύσεις σε αυτήν την καμπύλη πηγαίνουν από το ένα σαγματικό σημείο στο άλλο. Τέτοιες λύσεις λέγονται **ετεροκλινής λύσεις** (heteroclinic solutions) ή **σαγματικές συνδέσεις** (saddle connections). Οι ευσταθής και ασταθής καμπύλες σπάνια συναντιούνται.

Έστω $a \neq 0$. Οι x -ισοκλινείς καμπύλες παραμένουν ίδιες $x = \pm 1$. Όμως οι y -καμπύλες αλλάζουν εξ ολοκλήρου και δίνονται από την $y = a(x^2 - 1)/x$

Όταν $\alpha > 0$, όπως βλέπουμε στο σχήμα παρακάτω, βρισκόμαστε στην περιοχή A. Επάνω και δεξιά το διανυσματικό πεδίο δείχνει προς τα νοτιοδυτικά. Το διανυσματικό πεδίο δείχνει σε αυτήν την κατεύθυνση και κατά μήκος του x-άξονα ανάμεσα στα $x = -1$ και $x = 1$.



Εικόνα Ε9. Οι ισοκλινής καμπύλες και το πορτραίτο φάσεων για $\alpha > 0$ Από την αναφορά [1].

Το δεξί μέρος της ευσταθούς καμπύλης που σχετίζεται με το $(-1,0)$ έρχεται από το $y = \infty$. Ενώ το αριστερό μέρος της ασταθούς καμπύλης που σχετίζεται με το $(1,0)$ φθίνει στο $y = -\infty$. Έτσι μπορούν συγκεκριμένες λύσεις να ταξιδέψουν από το $+\infty$ στο $-\infty$ μέσω των δύο ευθειών $x = \pm 1$. Ενώ για $\alpha = 0$ όλες οι λύσεις παραμένουν για όλον τον χρόνο t περιορισμένες είτε στο πάνω είτε στο κάτω μισό του επιπέδου. Παρόμοια και για $\alpha < 0$.

3.2 Ευστάθεια του σημείου ισορροπίας (stability of equilibria)

Το να καθορίσουμε την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας είναι ξεκάθαρο αν το σημείο ισορροπίας είναι υπερβολικό. Διαφορετικά είναι δύσκολο. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια νέα μέθοδο για να δείξουμε ότι ένα σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Χάρη στον ρώσο μαθηματικό Λυαпунов αυτή η μέθοδος γενικεύει το ότι, για ένα γραμμικό σύστημα σε κανονικοποιημένη μορφή, η ακτινική συνιστώσα r φθίνει κατά μήκος της καμπύλης της λύσης. Ο Λυαпунов παρατήρησε ότι μπορούν και άλλες συναρτήσεις εκτός της r να χρησιμοποιηθούν για αυτόν τον σκοπό. Η μέθοδος του Λυαпунов μας δίνει μια ιδέα για το πεδίο έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου, όπου πεδίο έλξης είναι το σύνολο όλων των αρχικών συνθηκών για τις οποίες οι λύσεις τείνουν στο σημείο ισορροπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 (συνάρτηση και παράγωγος συνάρτησης Λυαпунов)

Έστω $L: O \rightarrow R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση που ορίζεται σ'ένα ανοιχτό σύνολο O στο R^n το οποίο περιέχει ένα σημείο ισορροπίας X^* ενός συστήματος $X' = F(X)$. Έστω η συνάρτηση

$$\dot{L}(X) = L'(X)F(X)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\dot{L}(X) = \frac{d}{dt}L(X(t, x))|_{t=0} = L'(X)F(X)$$

Συνεπώς αν το $\dot{L}(X)$ είναι αρνητικό τότε η L φθίνει κατά μήκος της τροχιάς της λύσης μέσω του X .

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 (ευστάθειας του Lyapunov)

Έστω X^* ένα σημείο ισορροπίας για το $X' = F(X)$. Έστω $L: O \rightarrow R$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση που ορίζεται σε ένα ανοιχτό σύνολο O το οποίο περιέχει το X^* . Έχουμε

α) $L(X^*) = 0$ και $L(X) > 0$ αν $X \neq X^*$

β) $\dot{L} \leq 0$ στο $O \setminus X^*$

Τότε το σημείο X^* είναι ευσταθές. Επιπλέον αν η L ικανοποιεί την συνθήκη

γ) $\dot{L} < 0$ στο $O \setminus X^*$

τότε το σημείο X^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη

Έστω $\delta > 0$ κατάλληλα μικρό τέτοιο ώστε η κλειστή μπάλα $B_{\delta(X^*)}$ που βρίσκεται γύρω από το σημείο ισορροπίας X^* , ακτίνας δ να βρίσκεται ολοκληρωτικά στο O . Έστω α η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης L που βρίσκεται στην φραγμένη περιοχή που δημιουργείται από τη σφαίρα $S_{\delta(X^*)}$ ακτίνας δ και κέντρου X^* και την μπάλα $B_{\delta(X^*)}$. Τότε από την υπόθεση $\alpha > 0$. Έστω

$$u = \{X \in B_{\delta(X^*)} | L(x) < \alpha\}$$

Με το X^* να ανήκει στο u . Τότε δεν υπάρχει λύση που ξεκινάει στο u και να συναντάει την $S_{\delta(X^*)}$ εφόσον η L φθίνει κατά μήκος της καμπύλης της λύσης. Έτσι κάθε λύση που ξεκινάει στο u δεν φεύγει ποτέ από την $B_{\delta(X^*)}$. Αυτό αποδεικνύει ότι το X^* είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το γ) του θεωρήματος τέτοιο ώστε το L να φθίνει αυστηρά για τις λύσεις στο $u \setminus X^*$. Έστω $X(t)$ μια λύση που ξεκινάει στο $u \setminus X^*$ και υποθέτουμε ότι

$$X(t_n) \rightarrow z_0 \in B_{\delta}(X^*)$$

Για κάποιο $t_n \rightarrow \infty$.

Θα δείξουμε ότι $z_0 = X^*$. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι

$$L(X(t)) > L(z_0)$$

Διότι $L(X(t))$ φθίνει και $L(X(t_n)) \rightarrow L(z_0)$ λόγω της συνέχειας του L . Έστω $z_0 \neq X^*$ και $z(t)$ η λύση που ξεκινάει στο z_0 . Για $s > 0$ έχουμε

$$L(Z(s)) < L(z_0)$$

Έτσι για οποιαδήποτε λύση που υπάρχει κοντά στο z_0 έχουμε

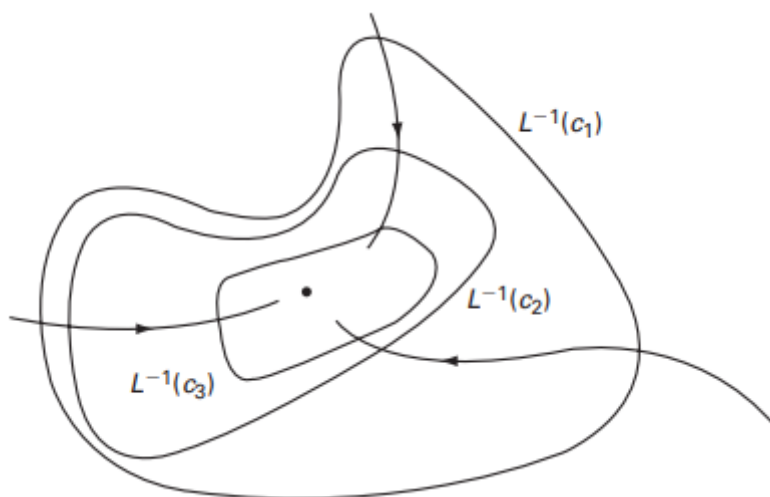
$$L(Y(s)) < L(z_0)$$

Θέτοντας $Y(0) = X(t_n)$, για μεγάλο n , προκύπτει

$$L(X(t_n + s)) < L(z_0)$$

Το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $z_0 = X^*$. Έτσι αποδεικνύεται ότι το X^* είναι το μοναδικό οριακό σημείο του συνόλου

$$\{x(t) | t \geq 0\}$$



Εικόνα E10. Οι λύσεις φθίνουν στα επίπεδα $L^{-1}(c_j)$ μιας αυστηρά Lyapunov συνάρτησης. Από την αναφορά [1].

Σχόλιο : Η συνθήκη $\dot{L} < 0$ σημαίνει ότι όταν μια λύση ξεπερνά το επίπεδο $L^{-1}(c)$ κινείται μέσα στο σύνολο $L \leq c$ και δεν βγαίνει ξανά.

Παράδειγμα 3.4

Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων στον R^3

$$\begin{cases} x' = (\varepsilon x + 2y)(z + 1) \\ y' = (-x + \varepsilon y)(z + 1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

Όπου ε είναι μια παράμετρος. Η αρχή των αξόνων είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος. Η γραμμικοποίηση του συστήματος στο $(0,0,0)$ δίνεται από τον τύπο

$$Y' = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι 0 και $\varepsilon \pm \sqrt{2}i$. Από την γραμμικοποίηση δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα όταν υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή.

Όταν $\varepsilon \leq 0$ ψάχνουμε μια συνάρτηση Lyapunov για το $(0,0,0)$ της μορφής

$$L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Με $a, b, c > 0$. Για L αυτής της μορφής έχουμε

$$\dot{L} = 2(axx' + byy' + czz')$$

τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{\dot{L}}{2} &= ax(\varepsilon x + 2y)(z + 1) + by(-x + \varepsilon y)(z + 1) - cz^4 \\ &= \varepsilon(ax^2 + by^2)(z + 1) + (2a - b)(xy)(z + 1) - cz^4 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Για την ευστάθεια θέλουμε $\dot{L} \leq 0$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν για παράδειγμα θέσουμε $a=1$, $b=2$ και $c=1$.

Αν $\varepsilon=0$ τότε από την (3.4) έχουμε

$$\dot{L} = -2z^4 \leq 0$$

και έτσι η αρχή των αξόνων είναι ευσταθές σημείο.

Αν $\varepsilon < 0$ τότε έχουμε

$$\dot{L} = \varepsilon(x^2 + 2y^2)(z + 1) - z^4$$

Με $\dot{L} < 0$ στην περιοχή που δίνεται από $z > -1$.

Συμπεραίνουμε ότι η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής σε αυτήν την περίπτωση και πράγματι οι λύσεις που ξεκινούν στην περιοχή 0 τείνουν στην αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 3.5 (το μη γραμμικό εκκρεμές)

Έστω ένα εκκρεμές που αποτελείται από μια ελαφριά ράβδο μήκους l , στην άκρη της οποίας βρίσκεται μια μπάλα μάζας m . Το άλλο άκρο είναι κολλημένο σε τοίχο σε σημείο τέτοιο ώστε η μπάλα να κινείται κυκλικά με κέντρο το σημείο αυτό. Η θέση της μάζας περιγράφεται από την $\theta(t)$ που είναι η γωνία που σχηματίζεται από την κάθετη θέση και μετριέται αριστερόστροφα. Έτσι η θέση της μάζας συναρτήσει του t δίνεται από

$$(l\sin\theta(t), -l\cos\theta(t))$$

Η ταχύτητα της μάζας είναι το μήκος του διανύσματος της ταχύτητας το οποίο δίνεται από

$$l \frac{d\theta}{dt}$$

Και η επιτάχυνση δίνεται από

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές είναι η δύναμη της βαρύτητας και η δύναμη της τριβής. Η βαρυτική δύναμη είναι μια σταθερά που ισούται με mg και δρα στην κάθετη κατεύθυνση. Η συνιστώσα αυτής της δύναμης η οποία είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά της κίνησης δίνεται από την σχέση

$$-mgsin\theta$$

Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από την σχέση

$$-bl \frac{d\theta}{dt}$$

Για κάποια σταθερά $b > 0$.

Όταν δεν υπάρχει τριβή έχουμε ένα ιδανικό εκκρεμές (ideal pendulum). Τότε ο νόμος του Νεύτωνα μας δίνει για το εκκρεμές την παρακάτω δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση,

$$ml \frac{(d\theta)^2}{dt^2} = -bl \frac{d\theta}{dt} - mgsin\theta \quad (3.5)$$

Για διευκόλυνση επιλέγουμε $m = l = g = 1$.

Θέτουμε $v = \frac{d\theta}{dt}$ και ξαναγράφοντας την (3.5) ως σύστημα έχουμε

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -bv - \sin\theta \end{cases}$$

Για το σύστημα μας έχουμε δύο σημεία ισορροπίας. Το πρώτο είναι το $\theta = 0, v = 0$ και το δεύτερο (σχηματικά βρίσκεται προς τα πάνω) το $\theta = \pi, v = 0$. Το δεύτερο σημείο είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας από μαθηματικής αλλά και από φυσικής άποψης.

Για το πρώτο σημείο ισορροπίας το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι το

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} Y$$

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$$

- Αν $b = 0$ οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές.
- Αν $b > 0$ οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα αυτό το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για να μελετήσουμε περαιτέρω αυτό το σημείο ισορροπίας θεωρούμε τη συνάρτηση ολικής ενέργειας,

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos\theta \quad (3.6)$$

Υπολογίζουμε την \dot{E} τότε,

$$\begin{aligned} \dot{E} &= vv' + \sin\theta\theta' \\ &= -bv^2 - v\sin\theta + v\sin\theta \\ &= -bv^2 \end{aligned}$$

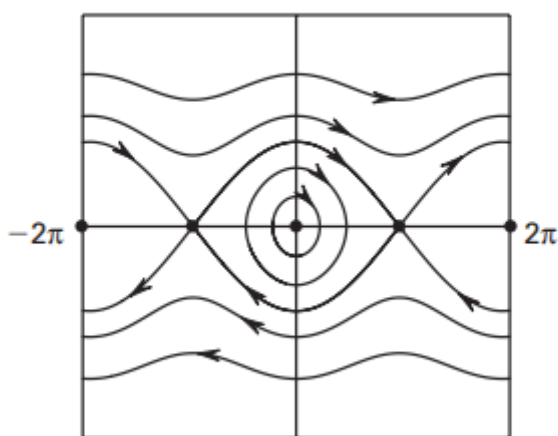
Συνεπώς έχουμε $\dot{E} \leq 0$. Η (3.6) είναι μια Lyapunov συνάρτηση και το $(0,0)$ είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Όταν δεν υπάρχει τριβή, έχουμε $b = 0$ τότε $\dot{E} = 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί η (3.6) είναι σταθερή κατά μήκος όλων των λύσεων του συστήματος. Έτσι όπως βλέπουμε και στο διάγραμμα των φάσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε τις καμπύλες της E για να δούμε που βρίσκονται οι καμπύλες των λύσεων. Συνεπώς δεν χρειάζεται να

λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Οι λύσεις περιμετρικά της αρχής των αξόνων ικανοποιούν την σχέση

$$-\pi < \theta(t) < \pi$$

Αυτές οι λύσεις αντιστοιχούν στην ταλάντωση του εκκρεμούς στην θέση ηρεμίας χωρίς να διασταυρώνονται με την θέση $\theta = \pi$. Οι ειδικές λύσεις που συνδέουν τα σημεία ισορροπίας $(\pm\pi, 0)$ τείνουν προς το δεύτερο σημείο ισορροπίας. Επιπλέον υπάρχουν ειδικές λύσεις για τις οποίες το $\theta(t)$ είτε αυξάνεται είτε μειώνεται για όλα τα t . Σε αυτήν την περίπτωση το εκκρεμές περιστρέφεται για πάντα αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα αντίστοιχα.



Εικόνα E11. Το πορτραίτο φάσεων για το ιδανικό εκκρεμές Από την αναφορά [1].

Παράδειγμα 3.6

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = -y(x^2 + z^2 + 1) \\ z' = -\sin z \end{cases}$$

Η αρχή των αξόνων είναι σημείο ισορροπίας όπως επίσης και το σημείο $(0,0, n\pi)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον τα επίπεδα $z = n\pi$ για $n \in \mathbb{Z}$ είναι αναλλοίωτα, δηλαδή κάθε λύση που ξεκινά σε κάποιο από αυτά τα επίπεδα παραμένει εκεί. Αυτό συμβαίνει γιατί $z' = 0$ όταν $z = n\pi$. Οποιαδήποτε λύση η οποία ξεκινά στην περιοχή $|z| < \pi$ πρέπει να παραμείνει σε αυτήν την περιοχή για κάθε t .

Η γραμμικοποίηση στην αρχή των αξόνων μας δίνει το σύστημα

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y$$

Από το οποίο δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την ευστάθεια του σημείου. Έστω η συνάρτηση

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Με $L > 0$. Υπολογίζουμε την \dot{L} και έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2xx' + 2yy' + 2zz' \\ &= -2x^4 - 2y^2(x^2 + z^2 + 1) - 2z\sin z \end{aligned}$$

Ισχύει $\dot{L} < 0$ για όλα τα σημεία του συνόλου $|z| < \pi$, καθώς $z\sin z > 0$ όταν $z \neq 0$. Έτσι η αρχή των αξόνων είναι ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο. Συμπεραίνουμε ότι η περιοχή έλξης για την αρχή των αξόνων είναι όλη η περιοχή $|z| < \pi$.

Από την απόδειξη του θεωρήματος έπεται ότι, οποιαδήποτε λύση που ξεκινά στην σφαίρα ακτίνας $r < \pi$ πρέπει να τείνει στην αρχή των αξόνων. Έξω από τη σφαίρα και ανάμεσα στα επίπεδα $z = \pm\pi$ η συνάρτηση L είναι αυστηρά φθίνουσα. Εφόσον οι λύσεις είναι παγιδευμένες ανάμεσα σε αυτά τα δύο επίπεδα έπεται ότι και αυτές θα πρέπει να τείνουν στην αρχή των αξόνων. ■

Οι συναρτήσεις Lyapunov δεν χρησιμοποιούνται μόνο για να διευκρινιστεί η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας αλλά και για να υπολογίσουμε το μέγεθος του πεδίου έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας, όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Παρακάτω θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει ένα κριτήριο για την ασυμπτωτική ευστάθεια και το μέγεθος του πεδίου έλξης ακόμα και όταν η συνάρτηση Lyapunov δεν είναι αυστηρά ορισμένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4 Ένα σύνολο P λέγεται **αναλλοίωτο** αν $\forall x \in P$ η $\Phi_t(x)$ ορίζεται και ανήκει στο P για $t \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα η περιοχή $|z| < \pi$ στο παραπάνω παράδειγμα είναι ένα αναλλοίωτο σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5 Το σύνολο P είναι **θετικά αναλλοίωτο** αν $\forall x \in P$ το $\Phi_t(x)$ ορίζεται και ανήκει στο P για $t \geq 0$.

Για παράδειγμα το κομμάτι της περιοχής $|z| < \pi$ που βρίσκεται μέσα σε μια σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι θετικά αναλλοίωτο αλλά όχι αναλλοίωτο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6 Μια **πλήρης λύση** ενός συστήματος είναι ένα σύνολο της μορφής $\{\Phi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7 (Αρχή αναλλοίωτου του Lasalle)

Έστω X^* ένα σημείο ισορροπίας για $X' = F(X)$ και έστω $L: U \rightarrow R$ μια συνάρτηση Lyapunov για το X^* , όπου U ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το X^* . Έστω $P \subset U$ μια γειτονιά του X^* κλειστή και φραγμένη. Έστω ότι το P είναι θετικά αναλλοίωτο και δεν υπάρχει πλήρης λύση στο $P - X^*$ τέτοια ώστε η L να είναι σταθερά. Τότε το X^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και η P περιέχεται στην περιοχή έλξης του X^* . ■

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα, το εφαρμόζουμε για το σημείο ισορροπίας $X^* = (0,0)$ του εκκρεμούς. Θυμίζουμε ότι χρησιμοποιήσαμε ως Lyapunov συνάρτηση την συνάρτηση ενέργειας που δίνεται από την σχέση

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos\theta \quad (3.7)$$

και έτσι έχουμε $\dot{E} = -bv^2$. Εφόσον $\dot{E} = 0$ για $v = 0$ η συνάρτηση Lyapunov δεν είναι αυστηρά ορισμένη.

Με την βοήθεια του Lasalle θα υπολογίσουμε την περιοχή γύρω από το $(0,0)$. Θεωρούμε αριθμό c με $0 < c < 2$ και

$$P_c = \{(\theta, v) / E(\theta, v) \leq c, |\theta| < \pi\} \quad (3.8)$$

Το $(0,0) \in P_c$. Θα δείξουμε ότι η (3.8) βρίσκεται στην περιοχή έλξης του $(0,0)$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι το P_c είναι θετικά αναλλοίωτο. Υποθέτουμε ότι $(\theta(t), v(t))$ είναι λύση με $(\theta(0), v(0)) \in P_c$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$(\theta(t), v(t)) \in P_c.$$

Έχουμε $E(\theta(t), v(t)) \leq c$ καθώς $\dot{E} \leq 0$.

Αν $|\theta(t)| \geq \pi$ θα πρέπει να υπάρχει κάποιο t τέτοιο ώστε

$$\theta(t_0) = \pm\pi$$

Όμως τότε

$$E(\theta(t_0), v(t_0)) =$$

$$E(\pm\pi, v(t_0)) =$$

$$\frac{1}{2}v(t_0)^2 + 2 \geq 2$$

Οδηγούμαστε σε άτοπο άρα $\theta(t_0) < \pi$ και έτσι το P_c είναι θετικά αναλλοίωτο.

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει πλήρης λύση στο P_c για την οποία η (3.7) να είναι σταθερά (εκτός από τη λύση ισορροπίας). Έστω ότι υπάρχει τέτοια λύση. Κατά μήκος αυτής της λύσης έχουμε $\dot{E} = 0$ και έτσι $v = 0$. Συνεπώς $\theta' = 0$ και έτσι το θ είναι σταθερά για την συγκεκριμένη λύση. Για $|\theta| < \pi$ έπεται ότι $\theta=0$, άρα οδηγούμαστε και πάλι σε άτοπο. Άρα η μόνη πλήρης λύση στο P_c για την οποία η (3.7) είναι σταθερά, είναι το σημείο ισορροπίας.

Τέλος θα δείξουμε ότι το P_c είναι ένα κλειστό σύνολο. Αν (θ_0, v_0) είναι ένα οριακό σημείο του P_c τότε έχουμε,

$$|\theta_0| \leq \pi,$$

$$E(\theta_0, v_0) \leq c$$

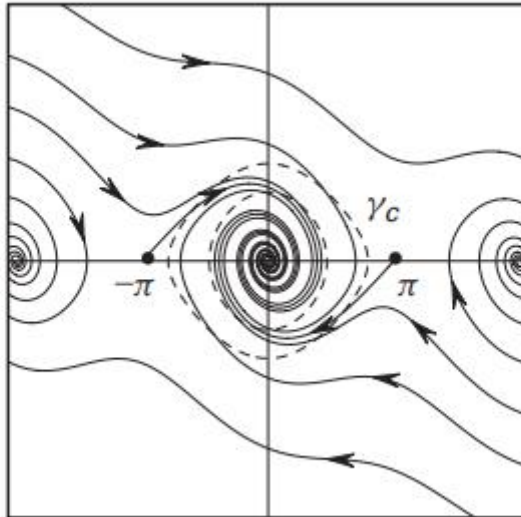
Παρατηρούμε ότι για $|\theta_0| = \pi$,

$$E(\theta_0, v_0) > c$$

Συνεπώς ένα τέτοιο θ_0 με $|\theta_0| = \pi$, βρίσκεται στο σύνορο του P_c και έτσι το P_c είναι κλειστό.

Συνεπώς το P_c είναι θετικά αναλλοίωτο, κλειστό και φραγμένο και δεν υπάρχει λύση στο P_c έτσι ώστε η E να είναι σταθερή. Άρα από την αρχή αναλλοίωτου του Lasalle έπεται ότι η λύση τείνει στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$ και το P_c είναι το πεδίο έλξης.

Για να δούμε το αποτέλεσμα και από φυσικής άποψης. Αν $\theta \neq \pm\pi$ τότε $E(\theta, 0) < 2$ και έτσι η λύση στο $(\theta, 0)$ τείνει προς την αρχή των αξόνων. Αν ξεκινήσουμε το εκκρεμές από την θέση ισορροπίας, σε οποιαδήποτε γωνία θ εκτός από την κάθετη θέση, το εκκρεμές σταδιακά θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας δηλαδή στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Υπάρχουν και άλλες θέσεις στο πεδίο του $(0,0)$ που δεν ανήκουν στο σύνολο P . Για παράδειγμα η λύση στο $(-\pi, u)$ όπου το u είναι πολύ μικρό αλλά όχι μηδενικό. Το $(-\pi, u)$ δεν ανήκει στο P όμως η λύση σε αυτό το σημείο προσεγγίζει το P και τελικά τείνει στο $(0,0)$. Παρατηρούμε στο σχήμα παρακάτω ότι οι λύσεις στα $(-\pi, 0)$ και $(\pi, 0)$ προσπερνούν την τροχιά γ_c και μπαίνουν στο P_c .



Εικόνα Ε12. Η καμπύλη γ_c σταδιακά καταλήγει στην περιοχή P_c . Από την αναφορά [1].

Απόδειξη θεωρήματος

Έστω μια λύση $X(t)$ που βρίσκεται στο θετικά αναλλοίωτο σύνολο P για $0 \leq t \leq \infty$. Έστω ότι το $X(t)$ δεν τείνει στο X^* για $t \rightarrow \infty$. Εφόσον το P είναι κλειστό και φραγμένο θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $Z \neq X^*$ και μια ακολουθία $t_n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε

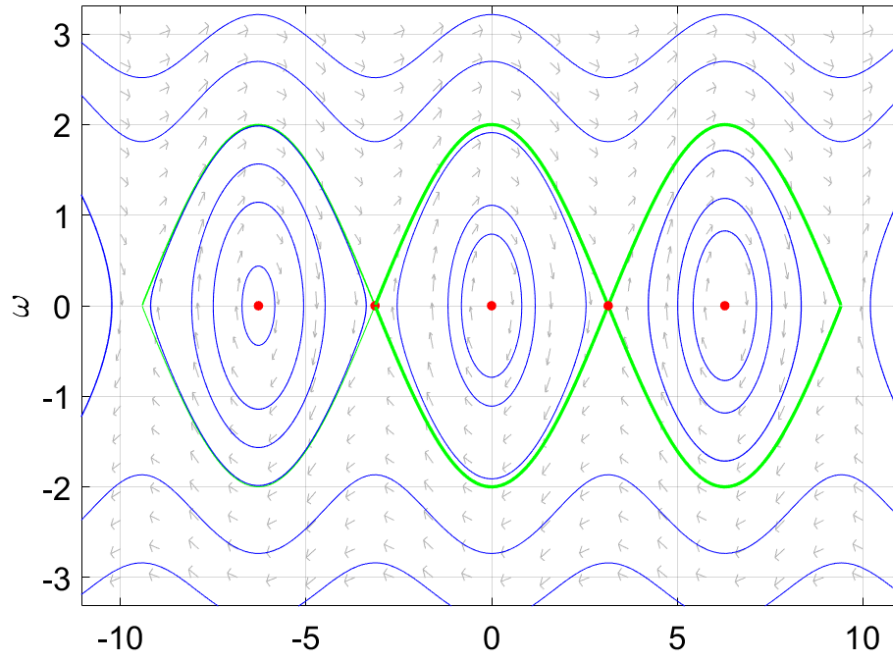
$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z$$

Η $\{t_n\}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία. Ισχυριζόμαστε ότι η λύση που ξεκινά από το Z βρίσκεται εξ'ολοκλήρου στο P . Έτσι το $\Phi_t(Z)$ ορίζεται στο P όχι μόνο για $t \geq 0$ αλλά για $t \in \mathbb{R}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί όπως βλέπουμε παρακάτω.

Αρχικά το $\Phi_t(Z)$ ορίζεται για $t \geq 0$ καθώς το P είναι θετικά αναλλοίωτο. Από την άλλη το $\Phi_t(X(t_n))$ ορίζεται στο P για το διάστημα $[-t_n, 0]$. Καθώς το $\{t_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία έχουμε ότι το $\Phi_t(X(-t_n + k))$ ορίζεται επίσης στο P για το ίδιο διάστημα και $k \geq 0$. Έχουμε

$$x(-t_n + k) \rightarrow Z$$

για $k \rightarrow \infty$, άρα έπεται λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, ότι το $\Phi_t(Z)$ ορίζεται στο P για το διάστημα $[-t_n, 0]$. Παρατηρούμε ότι η λύση που διαπερνά το Z είναι μια πλήρης λύση που βρίσκεται στο P .



Σχήμα Ε13. Το πορτραίτο φάσεων για την εξίσωση του εκκρεμούς χωρίς τριβή. Οι πράσινες τροχιές είναι οι λεγόμενες ετεροκλινείς τροχιές οι οποίες συνδέουν τα ασταθή σημεία ισορροπίας $\mp(2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Τέλος θα δείξουμε ότι το L είναι μια σταθερά, για την ακέραια λύση στο \mathbb{Z} . Αν $L(Z) = a$ τότε έχουμε

$$L(X(t_n)) \leq a$$

και επιπλέον

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(X(t_n)) = a$$

Γενικά αν $\{S_n\}$ οποιαδήποτε ακολουθία για την οποία $S_n \rightarrow \infty$ για $n \rightarrow \infty$ τότε έχουμε

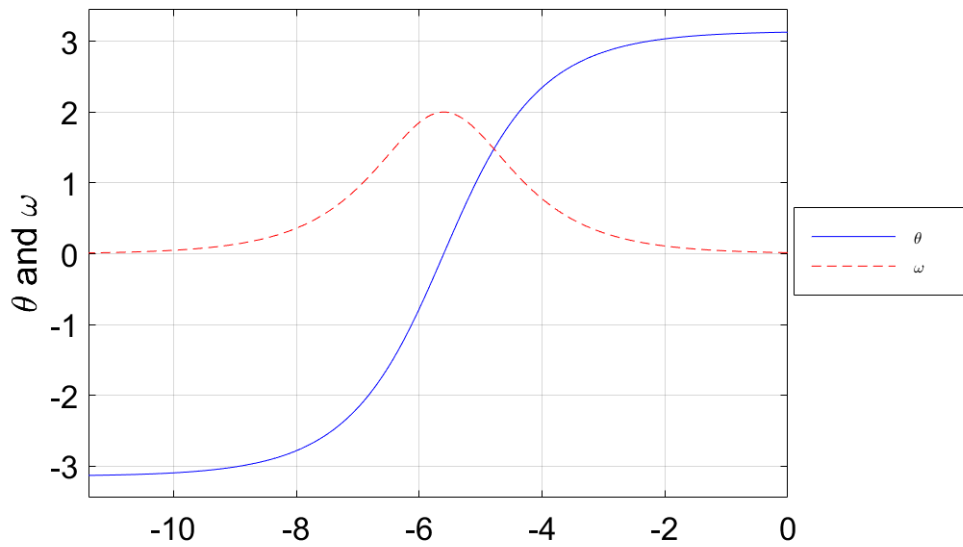
$$L(X(S_n)) \rightarrow a$$

$$L(X(t_n + S)) \rightarrow L(\Phi_S(Z))$$

Αυτό έπεται από το ότι το L δεν είναι αύξουσα κατά μήκος των λύσεων. Από την άλλη η ακολουθία $X(t_n + s)$ συγκλίνει στο $\Phi_S(Z)$ και έτσι έχουμε

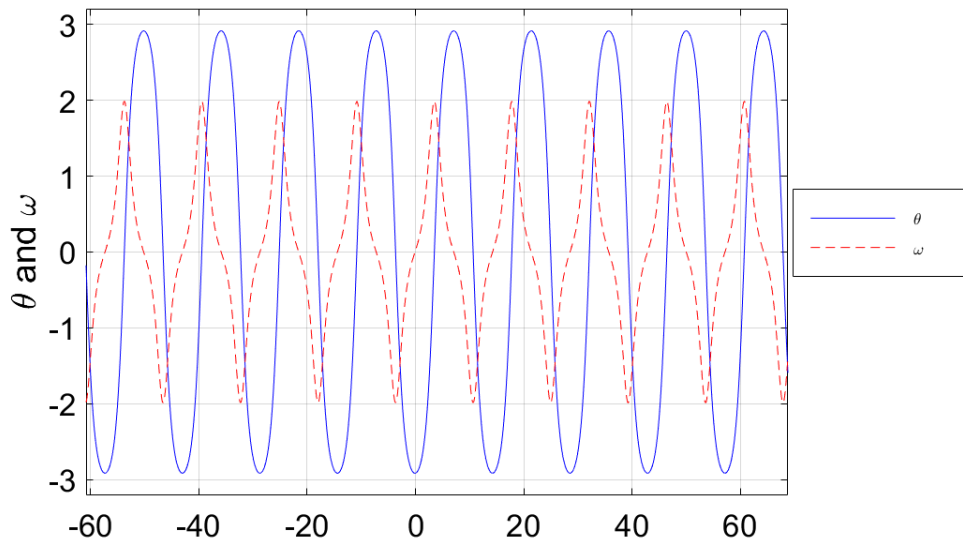
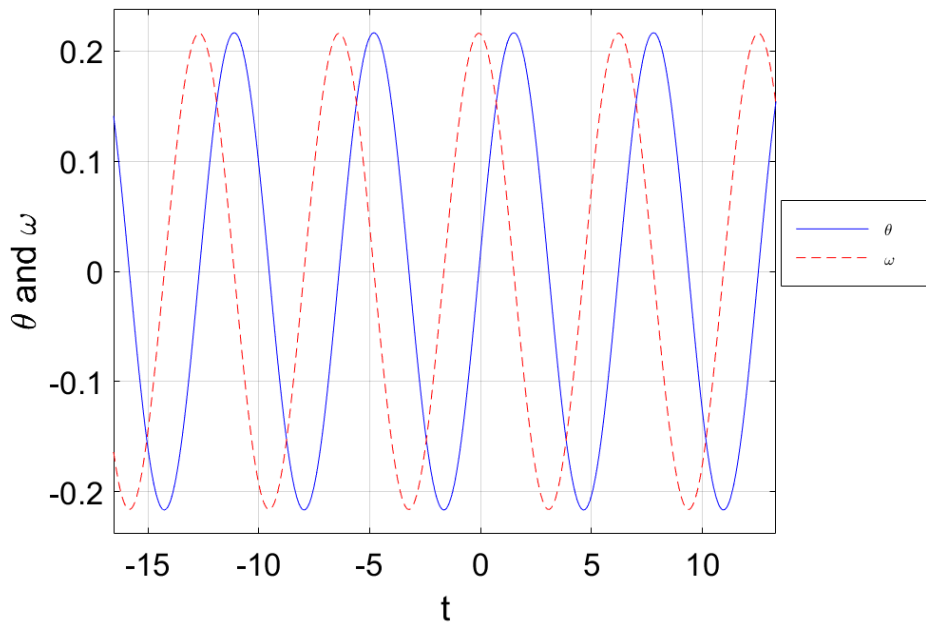
$$L(\Phi_S(Z)) = a$$

Άρα οδηγούμαστε σε άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν λύσεις στην P για τις οποίες η L να είναι σταθερά. ■

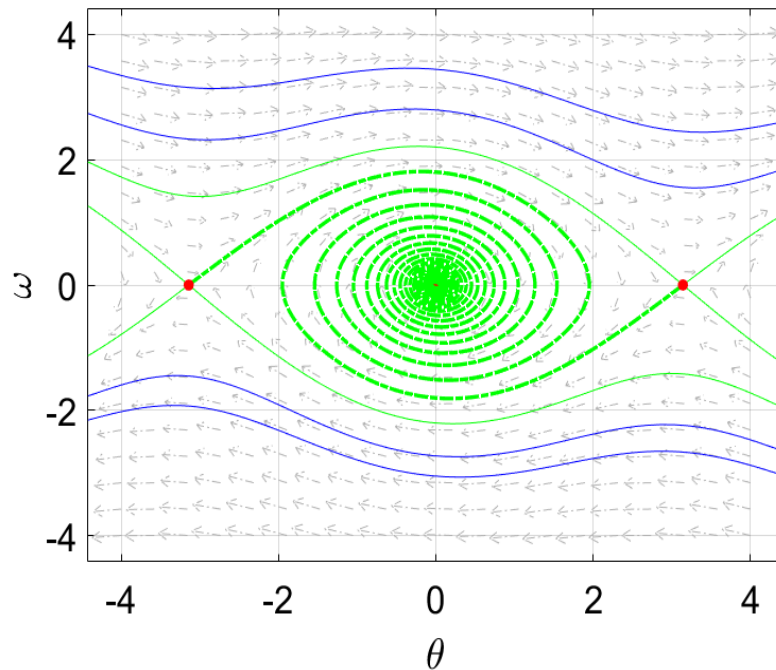


Σχήμα E14: Ετεροκλινική λύσεις για το σύστημα του εκκρεμούς χωρίς τριβή. Η συνεχής καμπύλη είναι η λύση $\theta(t)$ που συνδέει τα ασταθή σημεία ισορροπίας $-\pi$ και π . Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι το γράφημα της $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ (γωνιακή ταχύτητα για το εκκρεμές).

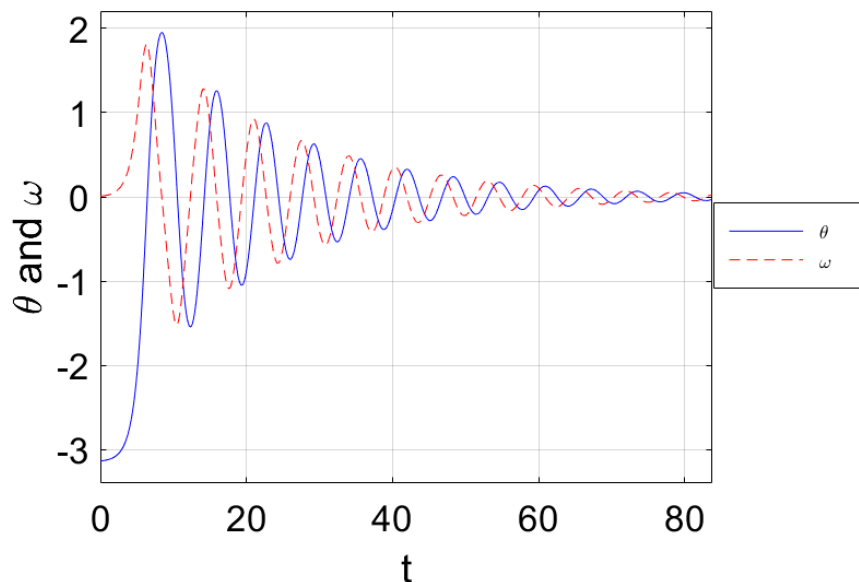
Στην απόδειξη συναντήσαμε κάποια σημεία τα οποία ήταν όρια μιας ακολουθίας που ορίζεται κατά μήκος του X .



Σχήμα E18: Πάνω εικόνα: Περιοδική λύση για το σύστημα του εκκρεμούς χωρίς τριβή κοντά στο σημείο ισορροπίας. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι το γράφημα της $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ (γωνιακή ταχύτητα για το εκκρεμές). Κάτω εικόνα: Περιοδική λύση κοντά στην ετεροκλιτική τροχιά. Βλέπουμε ότι η λύση έχει μεγάλη περίοδο σε σχέση με τις περιοδικές λύσεις κοντά στα σημεία ισορροπίας.



Σχήμα E19: Σύγκλιση στην ισορροπία για το εκκρεμές με τριβή. Η σύγκλιση γίνεται μέσω των τροχιών που συνδέουν ασταθή με ευσταθή σημεία ισορροπίας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτές οι τροχιές αποτελούν το ω -οριακό σύνολο για κάθε αρχική συνθήκη.



Σχήμα E20: Σύγκλιση στην ισορροπία για το εκκρεμές με τριβή. Βλέπουμε ότι η σύγκλιση γίνεται μέσω της σύνδεσης της λύσης από την θέση $\theta = -\pi$ στην ασυμπτωτικά ευσταθή θέση $\theta = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8 Το σύνολο όλων των σημείων που είναι οριακά σημεία για μια λύση ονομάζονται σύνολο των ω -οριακών σημείων ή **ω -σύνολο οριακών σημείων** της λύσης $X(t)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9 Παρόμοια ορίζουμε το σύνολο των α -οριακών σημείων ή **α -σύνολο οριακών σημείων** μιας λύσης $X(t)$ να είναι το σύνολο όλων των σημείων Z τέτοια ώστε

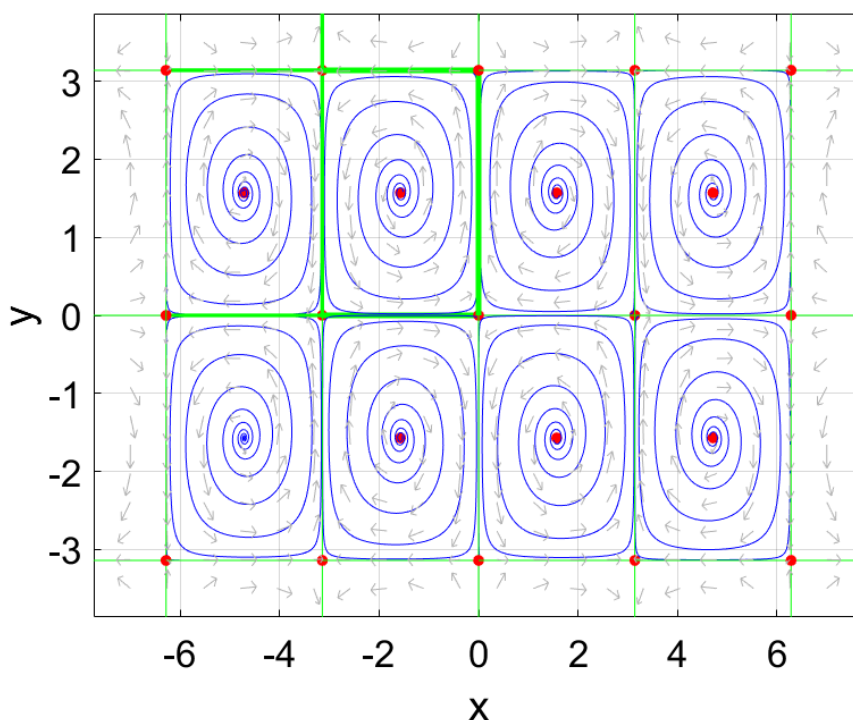
$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z$$

για μια ακολουθία $t_n \rightarrow -\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10 Το α -σύνολο οριακών σημείων και το ω -σύνολο οριακών σημείων μιας λύσης που ορίζεται για $t \in \mathbb{R}$ είναι κλειστά και αναλλοίωτα.

Τα ω -οριακά σύνολα μπορούν να έχουν σύνθετη δομή. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δίνεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= \sin x(a \cos x - \cos y), \\ y' &= \sin y(\cos x - a \cos y) \end{aligned} \quad (3.8)$$



Σχήμα E21: Περιοδική δομή οριακών συνόλων για το σύστημα (3.8)

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (3.8) είναι όλα ασταθή. Υπάρχουν άπειρο πλήθος ασταθών σπειροειδών σημείων (στο εσωτερικό των «παραλληλογράμμων») και άπειρο πλήθος σαγματικών σημείων που σχηματίζουν τις κορυφές των παραλληλογράμμων. Οι λύσεις του συστήματος είναι πάντα φραγμένες, επομένως από το θεώρημα *Poincaré-Bendixson*, [βάση του οποίου οι φραγμένες λύσεις πρέπει να συγκλίνουν είτε σε σημείο ισορροπίας είτε σε περιοδική λύση (οριακό κύκλο)] θα πρέπει οι λύσεις να συγκλίνουν είτε σε σημείο ισορροπίας είτε σε κλειστή τροχιά. Μπορεί να αποδειχθεί για το σύστημα (3.8) ότι δεν υπάρχει περιοδική τροχιά. Άρα θα πρέπει να έχουμε σύγκλιση σε ισορροπία. Αυτό είναι δυνατό να γίνει μόνο μέσω των ευσταθών υπόχωρων των σαγματικών σημείων στους οποίους συγκλίνει κάθε ασταθής σπειροειδή τροχιά.

Τα ακόλουθα παραδείγματα περιγράφουν δυο σημαντικά είδη τροχιών ενός δυναμικού συστήματος: τις ομοκλίνουσες τροχιές (*homoclinic orbits*) και τις ετεροκλίνουσες τροχιές (*heteroclinic orbits*). Δίνονται ακόμη παραδείγματα διαχωριστικών κύκλων (*separatrix cycles*) καθώς και συμμιγών διαχωριστικών κύκλων για δυναμικά συστήματα στο επίπεδο.

Παράδειγμα

Το Χαμιλτονιανό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + x^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

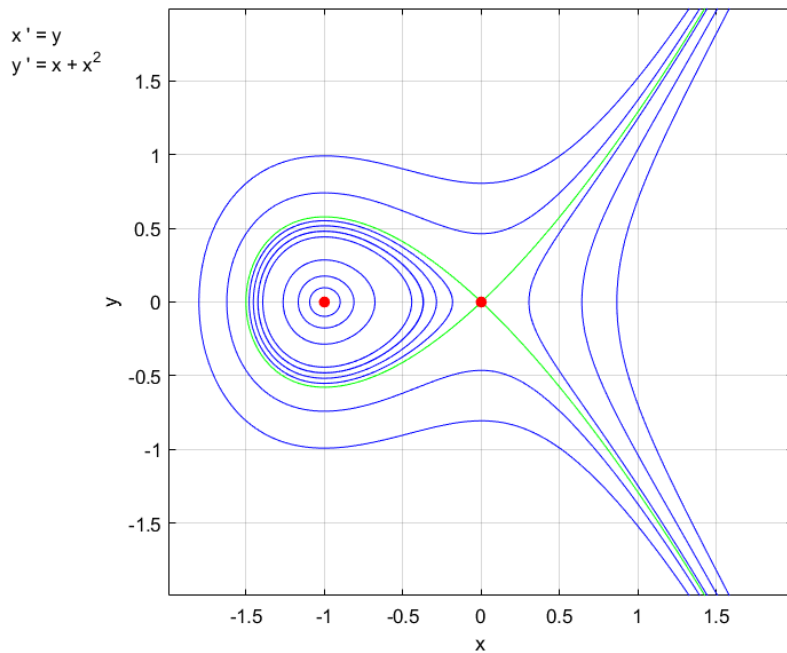
με Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 - x^3/3$ έχει ως λύσεις καμπύλες που ορίζονται ως

$$y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3 = C$$

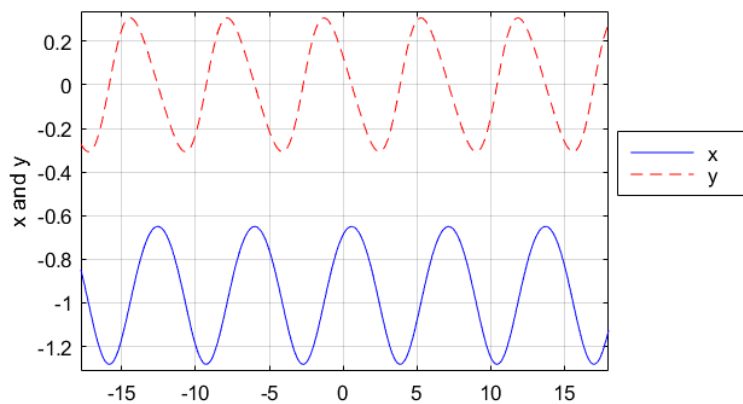
Το φασικό πορτραίτο αυτού του συστήματος φαίνεται στην Εικόνα Ε22. Η καμπύλη $y^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^3$, για $C = 0$, περνά από το σημείο $(-3/2, 0)$ και έχει το σάγμα στην αρχή των αξόνων (που αντιστοιχεί επίσης για $C = 0$) καθώς επίσης τα α και ω οριακά σύνολα. Η πράσινη καμπύλη $\Gamma \subset W^s(0) \cap W^u(0)$ καλείται **ομοκλινική τροχιά** (*homoclinic orbit*) και η ροή στην κλειστή καμπύλη προσδιορίζεται από την ένωση της ομοκλίνουσας τροχιάς και του σημείου ισορροπίας στην αρχή των αξόνων και ονομάζεται **διαχωριστικός κύκλος** (*separatrix cycle*).

Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζουμε αριθμητικές λύσεις και αντίστοιχες τροχιές του παραπάνω συστήματος οι οποίες προέκυψαν ύστερα από αριθμητική επίλυση του με το πακέτο PPLane το οποίο κάνει χρήση της MATLAB.

Όπως είπαμε παραπάνω, η ομοκλίνουσα τροχιά έχει πράσινο χρώμα και σχηματίζεται από την αρχή των αξόνων που είναι ασταθές σαγματικό σημείο και τις $W^s(0), W^u(0)$ (οι οποίες εκτείνονται ως το δεξί ημιεπίπεδο, επίσης με πράσινο χρώμα). Στο εσωτερικό του αντίστοιχου διαχωριστικού κύκλου υπάρχουν περιοδικές λύσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας.



Εικόνα E22. Τροχιές για το σύστημα του παραδείγματος (3.9).



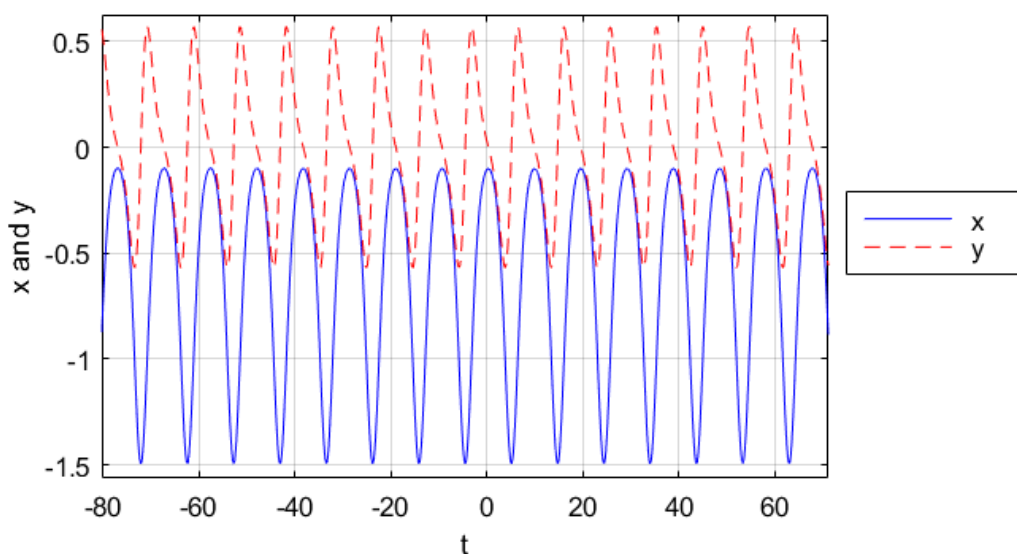
Εικόνα E23. Γραμμικές ταλαντώσεις του συστήματος 7.3 κοντά στο ευσταθές κέντρο

Όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο ευσταθές κέντρο οι ταλαντώσεις είναι «σχεδόν γραμμικές» όπως αυτές της Εικόνας E23 , καθώς το σύστημα προσεγγίζεται από το αντίστοιχο σύστημα γραμμικοποίησης. Καθώς απομακρυνόμαστε οι ταλαντώσεις γίνονται μη-γραμμικές όπως αυτές της Εικόνας E24. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στο οποίο διαφέρουν είναι η περίοδος τους. Οι μη γραμμικές ταλαντώσεις έχουν αυξανόμενη περίοδο καθώς πλησιάζουμε στον διαχωριστικό κύκλο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο διαχωριστικός κύκλος περιγράφει λύσεις οι οποίες έχουν την ιδιότητα

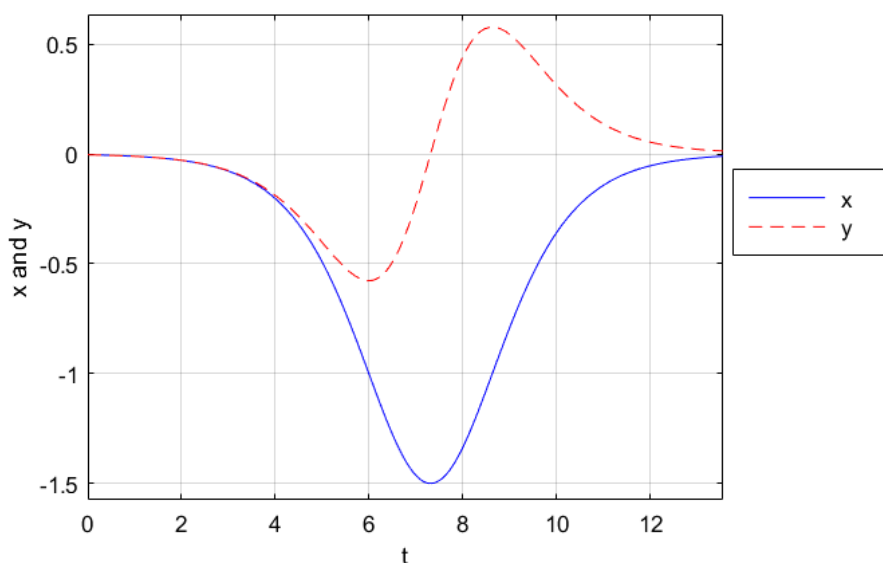
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_t(x_0) = 0, \text{ για } x_0 \in \Gamma.$$

Δηλαδή η Γ «κλείνει» σε άπειρο χρόνο. Επομένως, οι κοντινές τροχιές στην Γ , έχουν μεγάλη περίοδο T αλλά πεπερασμένη, ενώ η ίδια η Γ θεωρείται ότι έχει περίοδο $T = \infty$ και προσεγγίζεται από τις εσωτερικές τροχιές μεγάλης περιόδου.

Αναμένουμε λοιπόν οι λύσεις που αντιστοιχούν στην Γ να τείνουν καθώς $t \rightarrow \pm\infty$ στο μηδέν-το σαγματικό σημείο. Πράγματι, έτσι συμπεριφέρονται και οι αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις όπως φαίνεται στην Εικόνα E11.



Εικόνα 24. Μη γραμμικές ταλαντώσεις του συστήματος 7.3 μακριά από το ευσταθές κέντρο



Σχήμα E25. Λύσεις που αντιστοιχούν στην ομοκλίνουσα τροχιά Γ

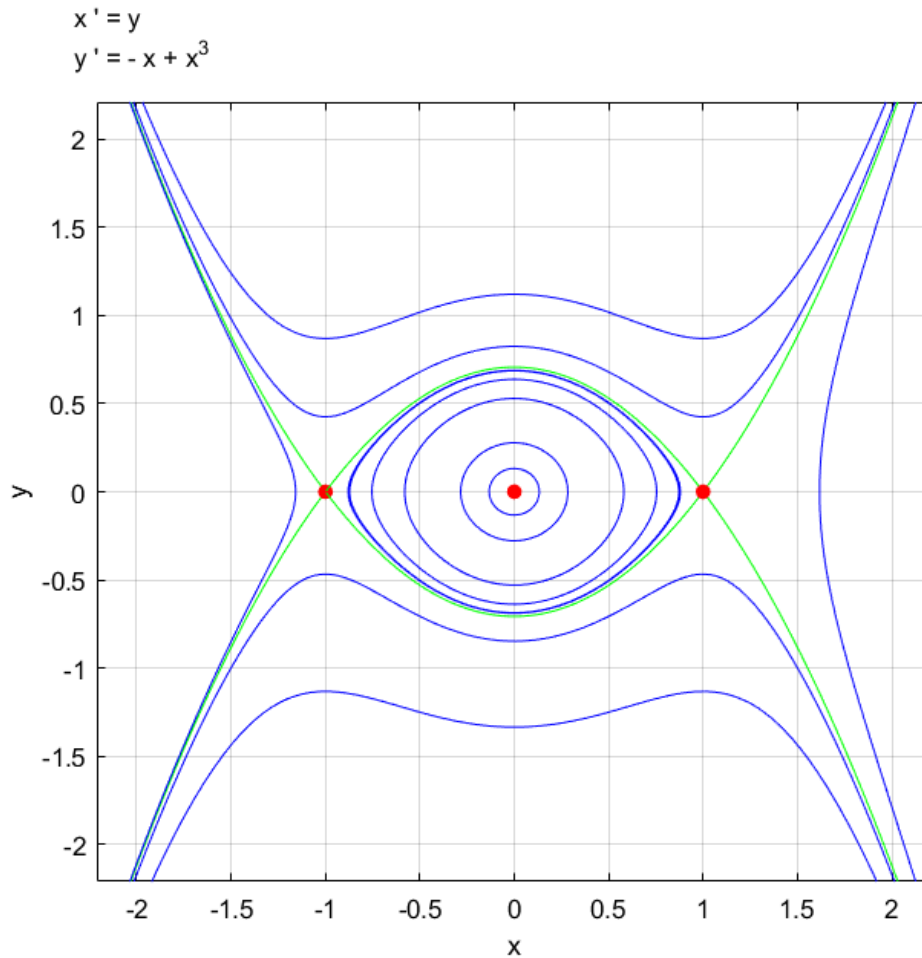
Συνεχίζουμε με ένα παράδειγμα ετεροκλίνουσας τροχιάς

Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα που ορίζει ετεροκλίνουσα τροχιά είναι η εξίσωση $\dot{x} = -x + x^3$, που ως σύστημα στο επίπεδο γράφεται ως

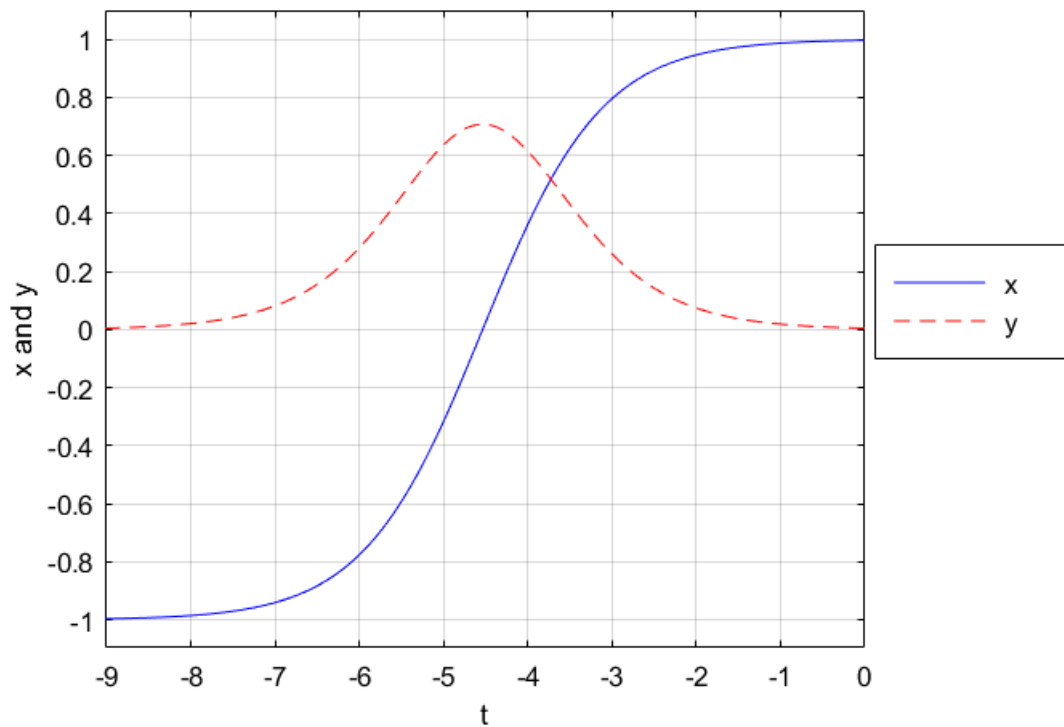
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^3.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Τα σαγματικά σημεία για αυτό το σύστημα είναι τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ και η ετεροκλίνουσα τροχιά συνδέει αυτά τα σημεία. Η δομή των τροχιών και η ετεροκλίνουσα τροχιά (πράσινη καμπύλη) απεικονίζεται στην Εικόνα E25, όπου το σύστημα έχει επιλυθεί αριθμητικά ξανά με το πακέτο PPlane.



Σχήμα E25. Διαχωριστικός κύκλος που ορίζεται από τις ετεροκλίνουσες τροχιές που συνδέουν τα σαγματικά σημεία του συστήματος.

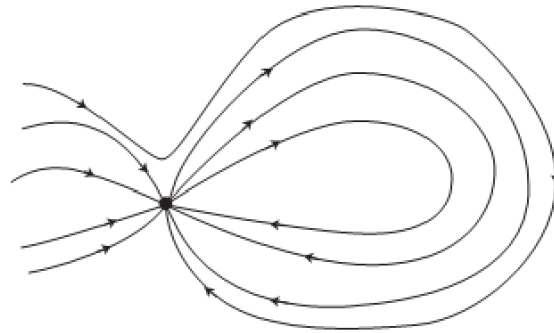
Οι λύσεις που αντιστοιχούν στην ετεροκλίνουσα τροχιά της $\ddot{x} = -x + x^3$ απεικονίζονται στην Εικόνα E26. Η άνω ετεροκλινική τροχιά συνδέει τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ σε άπειρο χρόνο, όπως η ομοκλίνουσα τροχιά συνδέει σε άπειρο χρόνο ένα σαγματικό σημείο με τον εαυτό του.



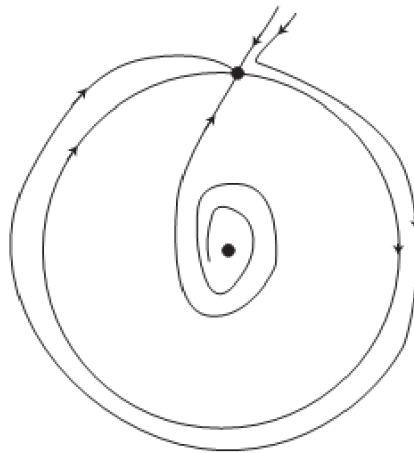
Σχήμα Ε26. Λύσεις που αντιστοιχούν στην ετεροκλίνουσα τροχιά της $\ddot{x} = -x + x^3$

Ευστάθεια διαχωριστικών κύκλων-Η έννοια της τροχιακής ευστάθειας.

Συνήθως αναφερόμαστε στην ευστάθεια σημείων ισορροπίας ή οριακών κύκλων. Υπάρχει και μια επιπλέον έννοια ευστάθειας της λεγόμενης τροχιακής ευστάθειας. Δίνοντας τον ορισμό της θα δούμε ότι με αυτή ακριβώς την έννοια μπορούμε να μιλήσουμε για ευστάθεια διαχωριστικών κύκλων.



(a)



(b)

Εικόνα E27. Η έννοια της τροχιακής ευστάθειας. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές αλλά σε μία γειτονιά διαχωριστικού κύκλου βρίσκονται αυθαίρετα κοντινές τροχιές. Εικόνα από την αναφορά [6].

Ορισμός 3.10. Θεωρούμε μια θετική τροχιά $\Gamma^+(x_0)$ και $\varphi_{t_0}(x_0)$ ένα σημείο της την χρονική στιγμή t_0 . Η τροχιά $\Gamma^+(x_0)$ θα λέγεται τροχιακά ευσταθής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε άλλη λύση $y(t)$ για την οποία ισχύει $|y(t_0) - \varphi_{t_0}(x_0)| < \delta$, να ισχύει

$$d(y(t) - \Gamma^+(x_0)) < \varepsilon, \text{ για κάθε } t \geq t_0.$$

Η διαφορά από τον συνήθη ορισμό της ευστάθειας που χρησιμοποιούμε πχ, για την ευστάθεια σημείων ισορροπίας είναι εμφανής: Η $|y(t_0) - \varphi_{t_0}(x_0)|$ είναι απόσταση μεταξύ σημείων ενώ η $d(y(t) - \Gamma^+(x_0))$ είναι η απόσταση μεταξύ συνόλων.

Για παράδειγμα, η Εικόνα E25 υποδεικνύει ότι ο Ορισμός 3.10 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ευστάθεια ομοκλίνουσας ή ετεροκλίνουσας τροχιάς. Όπως είδαμε και οι δύο αποτελούν ενώσεις της ευσταθούς και ασταθούς καμπύλης σαγματικών σημείων, με την δεύτερη να είναι ένα ασταθές σύνολο. Αυθαίρετα κοντά σε μια ομοκλίνουσα ή ετεροκλίνουσα τροχιά, μπορούμε να βρούμε μια περιοδική λύση μεγάλης περιόδου η οποία την προσεγγίζει, υποδηλώνοντας την τροχιακή ευστάθεια του διαχωριστικού κύκλου βάση του ορισμού.

3.3 Συστήματα κλίσης (Gradient systems)

Τώρα θα μελετήσουμε έναν διαφορετικό τύπο συστήματος. Ένα σύστημα κλίσης στον R^n είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$X' = -\text{grad} V(X) \quad (3.9)$$

Όπου η $V: R^n \rightarrow R$ είναι μια C^∞ συνάρτηση και ισχύει

$$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial X_n} \right)$$

Το διανυσματικό πεδίο $\text{grad}V$ ονομάζεται ανάδελτα ή κλίση της V . Θυμίζουμε ότι ισχύει,

$$-\text{grad}V(X) = \text{grad}(-V(X))$$

Τα συστήματα κλίσης έχουν ιδιότητες που κάνουν τις ροές στα σημεία ισορροπίας τους σχετικά απλές. Η παρακάτω ισότητα είναι θεμελιώδης,

$$DV_x(Y) = \text{grad}V(X) \cdot Y \quad (3.10)$$

Η σχέση (3.10) μας λέει ότι η παράγωγος του V στο X , υπολογισμένη στο $Y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης του $V(X)$ και του Y . Αυτό προκύπτει από τη σχέση,

$$DV_x(Y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_j}(X) y_j$$

Έστω $X(t)$ μια λύση του (3.9) με $X(0) = X_0$ και έστω $\dot{V}: R^n \rightarrow R$ να είναι η παράγωγος του V κατά μήκος της λύσης. Τότε

$$\dot{V}(X) = \frac{d}{dt} V(X(t))$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11 Η συνάρτηση V είναι μια Lyapunov συνάρτηση για το σύστημα $X' = -\text{grad} V(X)$. Επιπλέον $\dot{V}(X) = 0$ αν και μόνο αν το X είναι ένα σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη : Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{V}(X) &= DV_x(X') \\ &= \text{grad}V(X) \cdot X' \\ &= \text{grad}V(X) \cdot (-\text{grad}V(X)) \\ &= -|\text{grad}V(X)|^2 \leq 0\end{aligned}$$

Δηλαδή $\dot{V}(X) = 0$ αν και μόνο αν $\text{grad}V(X) = 0$. ■

Μια συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το ότι αν το X^* είναι ένα μεμονωμένο ελάχιστο σημείο του V , τότε το X^* είναι ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας ενός συστήματος κλίσης. Πράγματι το ότι το X^* είναι ένα μεμονωμένο σημείο συνεπάγεται ότι ισχύει $\dot{V} < 0$ για κάποια γειτονιά του X^* .

Για να κατανοήσουμε την ροή κλίσης (gradient flow) γεωμετρικά κοιτάμε τα επίπεδα των επιφανειών της συνάρτησης $V: R^n \rightarrow R$. Αυτά τα επίπεδα είναι τα υποσύνολα $V^{-1}(c)$ με $c \in R$. Αν το $X \in V^{-1}(c)$ είναι ένα ομαλό σημείο με $\text{grad}V(X) \neq 0$ τότε το $V^{-1}(c)$ μοιάζει με επιφάνεια διάστασης $n-1$ κοντά στο X . Για να το δούμε υποθέτουμε ότι

$$\partial V / \partial X_n(X) \neq 0.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης βρίσκουμε μια C^∞ συνάρτηση $g: R^{n-1} \rightarrow R$ τέτοια ώστε κοντά στο X το σύνολο των επιπέδων $V^{-1}(c)$ να δίνεται από την σχέση,

$$V(X_1, \dots, X_{n-1}, g(X_1, \dots, X_{n-1})) = c \quad (3.11)$$

Κοντά στο X το επίπεδο $V^{-1}(c)$ μοιάζει με το γράφημα της συνάρτησης g . Στην περίπτωση όπου $n = 2$, το $V^{-1}(c)$ είναι μια απλή καμπύλη κατά μήκος του X . Αν όλα τα σημεία στο $V^{-1}(c)$ είναι ομαλά σημεία, τότε λέμε ότι το c είναι μια ομαλή τιμή για την V . Στην περίπτωση όπου $n = 2$ και το c είναι ομαλή τιμή τότε το σύνολο επιπέδων $V^{-1}(c)$ είναι μια ένωση απλών καμπυλών που δεν τέμνονται.

Αν το X είναι ένα μη-ομαλό σημείο για την (3.11) τότε έχουμε $\text{grad}V(X) = 0$, έτσι το X είναι ένα κρίσιμο σημείο για την συνάρτηση V , καθώς όλες οι μερικές παράγωγοι της V μηδενίζονται στο X .

Υποθέτουμε ότι το Y είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στα επίπεδα επιφάνειας $V^{-1}(c)$ στο X . Τότε μπορούμε να βρούμε μια καμπύλη $\gamma(t)$ στα επίπεδα για την οποία να έχουμε,

$$\gamma'(0) = Y$$

Εφόσον το V είναι σταθερό κατά μήκος του γ έπεται ότι

$$DV_x(Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V \circ \gamma(t) = 0$$

Έτσι έχουμε ότι $\text{grad}V(X) \cdot Y = 0$. Διαφορετικά το $\text{grad}V(X)$ είναι κάθετο σε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα του επιπέδου $V^{-1}(c)$ στο X . Αυτό συμβαίνει διότι το διανυσματικό πεδίο του $\text{grad}V(X)$ είναι κάθετο στις επιφάνειες $V^{-1}(c)$ για όλα τα ομαλά σημεία της (3.11). Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.12 (ιδιότητες του συστήματος κλίσης)

Για το σύστημα $X' = -\text{grad}V(X)$

- 1) Αν το c είναι κανονική τιμή του V , τότε το διανυσματικό πεδίο είναι κάθετο στο σύνολο επιπέδων $V^{-1}(c)$.
- 2) Τα κρίσιμα σημεία του V είναι και σημεία ισορροπίας του συστήματος.
- 3) Αν ένα κρίσιμο σημείο είναι ένα μεμονωμένο ελάχιστο σημείο της V τότε αυτό το σημείο είναι ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα 3.7

Έστω $V: R^2 \rightarrow R$ μια συνάρτηση $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$. Τότε το σύστημα κλίσης $X' = F(X) = -\text{grad}V(X)$ δίνεται από το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -2x(x - 1)(2x - 1) = f \\ y' = -2y = g \end{cases}$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\begin{cases} x(x - 1)(2x - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Και είναι τα τρία σημεία $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1,0)$. Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Όπου (x^*, y^*) το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας.

Οι γραμμικοποιήσεις σε αυτά τα τρία σημεία οδηγούν στους παρακάτω πίνακες,

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DF\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DF(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Έτσι για τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ έχουμε

$$\det \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda = -2, \text{ διπλή}$$

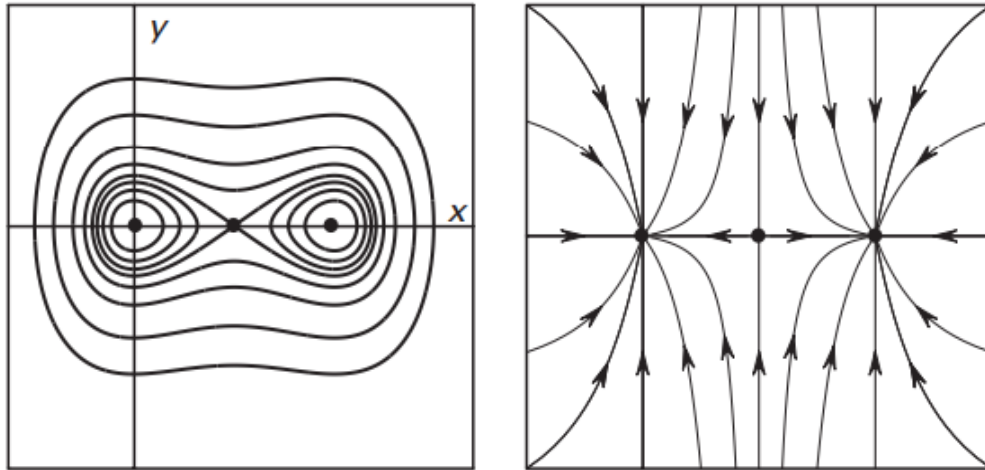
Συνεπώς αυτά τα σημεία είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς κόμβοι.

Για το σημείο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ έχουμε

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Συνεπώς το σημείο αυτό είναι ένα ασταθές σαγματικό σημείο.

Οι άξονες x, y είναι αναλλοίωτοι όπως επίσης και οι ευθείες $x = \frac{1}{2}, x = 1$. Εφόσον $y' = -2y$ σε αυτές τις κάθετες ευθείες έπεται ότι η ευσταθής καμπύλη στο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ είναι η $x = \frac{1}{2}$, ενώ το διάστημα $(0,1)$ στον x άξονα είναι η ασταθής καμπύλη. Παρατηρώντας και τα διαγράμματα παρακάτω βλέπουμε ότι όλες οι λύσεις τείνουν σε ένα από τα τρία σημεία ισορροπίας.



Εικόνα 13. Τα επίπεδα και το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα κλίσης που προκύπτει από την $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13 Έστω Z ένα α -οριακό σημείο ή ένα ω -οριακό σημείο μιας λύσης μιας ροής κλίσης (gradient flow). Τότε το Z είναι ένα σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη

Έστω Z ένα ω -οριακό σημείο. Όπως και στην απόδειξη της αρχής του Lasalle, δείχνουμε ότι η Y είναι σταθερά κατά μήκος της λύσης στο Z . Έτσι έχουμε $\dot{V}(Z) = 0$ και έτσι το Z πρέπει να είναι ένα σημείο ισορροπίας. Παρόμοια και για το α -οριακό σημείο. Πράγματι ένα α -οριακό σημείο Z του $X' = -\text{grad}V(X)$ είναι ένα ω -οριακό σημείο του $X' = \text{grad}V(X)$ και έτσι έχουμε $\text{grad}V(Z) = 0$. ■

Αν ένα σύστημα κλίσης έχει μόνο μεμονωμένα σημεία ισορροπίας έπεται ότι κάθε λύση του συστήματος πρέπει να τείνει είτε στο άπειρο είτε σε ένα σημείο ισορροπίας. Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι τα σύνολα $V^{-1}[0, c]$ είναι κλειστά, φραγμένα και θετικά αναλλοίωτα. Συνεπώς κάθε λύση που μπαίνει σε ένα τέτοιο σύνολο ορίζεται για $t \geq 0$ και τείνει σε ένα από τα τρία σημεία ισορροπίας. Η λύση κατά μήκος του (x, y) μπαίνει στο σύνολο $V^{-1}[0, c_0]$ όπου $V(x, y) = c_0$.

Υπάρχει μια τελευταία ιδιότητα για αυτά τα συστήματα. Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα όλες οι ιδιοτιμές των γραμμικοποιήσεων στα σημεία ισορροπίας είναι πραγματικές και αυτό δεν είναι τυχαίο. Για την γραμμικοποίηση του συστήματος σε ένα σημείο ισορροπίας X^* , υπάρχει πίνακας $[a_{ij}]$ με

$$a_{ij} = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) (X^*) \quad (3.12)$$

Εφόσον οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσοι, έχουμε

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j}\right)(X^*) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X_j \partial X_i}\right)(X^*)$$

και έτσι $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Έπεται ότι ο πίνακας που προκύπτει από την γραμμικοποίηση είναι συμμετρικός. Είναι γνωστό ότι τέτοιοι πίνακες έχουν μόνο πραγματικές ιδιοτιμές.

Για παράδειγμα για έναν 2×2 πίνακα, ένας συμμετρικός είναι της μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, οι ιδιοτιμές προκύπτουν από την σχέση

$$\frac{a+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί. Συνεπώς έχουμε την παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.14 Για ένα σύστημα κλίσης $X' = -gradV(X)$ το γραμμικοποιημένο σύστημα σε οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές.

Βιβλιογραφία

- [1] M. Hirsch, S. Smale and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an introduction to Chaos*, Academic Press (Elsevier), 2004.
- [2] L.Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2001.
- [3] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2001.
- [4] J. Marsden, A. Tromba (Μετάφραση Αποστόλης Γιαννόπουλος), *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2001.
- [5] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos-With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, L.L.C , Massachusetts, 1994.
- [6]. S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, 2nd ed.*, Springer-Verlag, New-York, 2003.