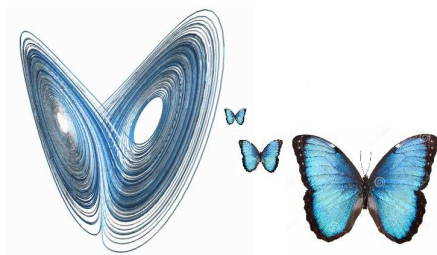


ΣΑΚΚΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΣΚΑΛΑΙΟΥ ΚΥΡΙΑΚΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ:
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΧΑΟΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος Ιούνιος 2016

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Στεφανόπουλος Ευάγγελος

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ζορμπαλά Κωνσταντίνα

Νικολόπουλος Χρήστος

Μη πάντα επίστασθαι προθύμεο,
μη πάντων αμαθής γένη.
Δημόκριτος, 470-370

μτφρ: Μην επιθυμείς να τα μάθεις καλά όλα,
για να μη μείνεις αμαθής σε όλα.

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Δυναμικά Συστήματα: Περιοδικότητα και Χάος» εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Σπουδές στα Μαθηματικά» του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου στην κατεύθυνση «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά», βασιζόμενη σε ελληνική και ξένη βιβλιογραφία.

Στα πλαίσια του θέματος αυτού έγινε προσπάθεια μελέτης των Δυναμικών Συστημάτων και ειδικά των Διακριτών Δυναμικών Συστημάτων. Συγκεκριμένα εξετάσαμε πότε και υπό ποιες συνθήκες εμφανίζεται περιοδικότητα στη δομή τους και πότε η δυναμική του συστήματος είναι τέτοια που καθίσταται απαγορευτική η δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξής του μια κατάσταση που ονομάζουμε χάος.

Η εκπόνηση της εργασίας αυτής δε θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση του καθηγητή κ. Ευάγγελου Στεφανόπουλου. Θα θέλαμε να τον ευχαριστήσουμε για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε και για την παρότρυνση να μελετήσουμε και να διερευνήσουμε το συγκεκριμένο θέμα, το χρόνο που διέθεσε και για την πολύ καλή συνεργασία που είχαμε.

Σακκάς Δημήτριος
Σκαλαίου Κυριακή

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εισαγωγή στα διακριτά δυναμικά συστήματα και η μελέτη των όρων και των προϋποθέσεων υπό τις οποίες ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως χαοτικό καθώς και η μελέτη των συστημάτων αυτών.

Το πρώτο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει μία αναλυτική επισκόπηση των διακριτών δυναμικών συστημάτων έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει μία πλήρη και ολοκληρωμένη εικόνα του πως μπορούμε να μελετήσουμε τα συστήματα αυτά. Συγκεκριμένα, διατυπώνονται με σαφήνεια όλες οι βασικές έννοιες και ορισμοί ενώ δίνεται έμφαση στο αν ένα σύστημα έχει σημείο ή σημεία ισορροπίας, πως υπολογίζονται, ποιος ο τύπος τους, αν είναι ευσταθή ή όχι και πως αυτά επηρεάζονται αν μεταβληθούν μία ή περισσότερες παράμετροι, αν δηλαδή έχουμε διακλάδωση.

Στο δεύτερο μέρος δίνονται οι πιο ευρέως αποδεκτοί ορισμοί του Χάους των Robert L. Devany, Stephen R. Wiggins και τέλος των Tien-Yien Li και James A. Yorke ενώ στη συνέχεια αναλύεται διεξοδικά η εργασία των τελευταίων με τίτλο «Period Three Implies Chaos», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Mathematical Association of America το 1975. Στην εργασία τους αυτή αποδεικνύεται ότι αν ένα διακριτό δυναμικό σύστημα έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου τρία, τότε συνεπάγεται ότι το σύστημα θα έχει ένα τουλάχιστον περιοδικό σημείο οποιασδήποτε περιόδου χωρίς όμως να ισχύει το αντίθετο. Επίσης υπάρχει ένα μη αριθμήσιμο σύνολο το οποίο δεν περιέχει περιοδικά σημεία και επιπλέον για οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου ισχύει ότι μπορούν να έρθουν αυθαίρετα κοντά χωρίς όμως να ταυτίζονται.

Το τρίτο και τελευταίο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει μία αναλυτική μελέτη μιας από τις πλέον πιο διαδεδομένες εξισώσεις στο χώρο των δυναμικών συστημάτων, της «Διακριτής Λογιστικής Απεικόνισης» όπου αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος των Tien-Yien

Li και James A. Yorke εμφανίζοντας έτσι για συγκεκριμένες τιμές χαστική συμπεριφορά.

Κύριο συμπέρασμα της παρούσας εργασίας είναι ότι ένα διακριτό δυναμικό σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως χαστικό -κατά τον ορισμό του χάους των Li και York- αν ικανοποιείται η ύπαρξη ενός περιοδικού σημείου περιόδου τρία.

Abstract

The Main purpose of this thesis is an introduction to the discrete dynamical systems and the study of the terms and conditions under which a dynamical system can be characterized as chaotic and also the study of these systems.

The first part of the thesis consists of a comprehensive overview of the discrete dynamical systems, that provides a complete understanding of the methods used to analyze them. In particular, all the necessary notions and definitions are presented, with an emphasis on the ones focused on the possible equilibrium points of a system, their type and how these are influenced if one or more parameters change.

In the second part the most widely known definitions of chaos by Robert L. Devany, Stephen R. Wiggins, Tien-Yien Li and James A. Yorke are listed. Thereinafter their paper ((Period Three Implies Chaos)), which was published at The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975), pp. 985-992 is analyzed. In this paper it is proven that if a discrete dynamical system has a periodic point with period three, then the system has at least one point of any period, but the reverse argument does not necessarily apply. Also, there is an uncountable set in which there are no periodic points and in addition to this, any two points of this set can approach each other without ever being equated.

The third and last part of the thesis, is a detailed study of “ Discrete Logistic map” which is one of the most wide spread equations in the subject of Dynamical Systems. We discuss the proof that follows the necessary conditions of the Tien-Yien Li and James A. This means that for specific values it exhibits a chaotic behaviour.

The main conclusion of this thesis is that a discrete dynamical system can be categorized as chaotic, according to the Li & York definition if there exists a periodic point with a type three periods.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Περίληψη

Abstract

1 Εισαγωγή στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Βασικές έννοιες	1
1.3	Γραφική απεικόνιση της τροχιάς ενός ΔΔΣ	3
1.4	Ευστάθεια και αστάθεια	5
1.5	Διακλάδωση	12
1.5α'	Διακλάδωση σάγματος - κόμβου ή Διακλάδωση εφαπτομένης (Saddle-Node or Tangent Bifurcation)	13
1.5β'	Διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (Period Doubling (pitchfork) Bifurcation)	17
1.5γ'	Διακλάδωση αντιστροφής (Exchange or Transcritical Bifurcation)	21

2 Χάος στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

2.1	Εισαγωγή	25
2.2	Χάος	25
2.2α'	Devany, 1989, στο βιβλίο του «An Introduction to Chaotic Dynamical Systems»	26
2.2β'	Wiggins, 1990, στο βιβλίο του «Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos»	26
2.2γ'	Li & York, 1975, στη μελέτη τους «Period three implies chaos»	27
2.3	Περίοδος τρία «σημαίνει» χάος	27

3	Η Λογιστική απεικόνιση στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα	
3.1	Εισαγωγή	45
3.2	Επίλυση της λογιστικής εξίσωσης	46
3.2α'	Το θεώρημα του Sharkovskii	61
	Βιβλιογραφία	65

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Σημείο τομής των $y = f(x)$ και $y = x$	2
1.2	$f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 1$, αριθμός επαναλήψεων $n = 30$	4
1.3	$f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 1$, αριθμός επαναλήψεων $n = 30$	4
1.4	Ευστάθεια σημείου ισορροπίας	6
1.5	Αστάθεια σημείου ισορροπίας	6
1.6	Ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας	7
1.7	Απωθητής	7
1.8	Ελκυστής - διάγραμμα σκάλας	8
1.9	Απωθητής - διάγραμμα σκάλας	8
1.10	Ελκυστής - διάγραμμα ιστού αράχνης	8
1.11	Απωθητής - διάγραμμα ιστού αράχνης	9
1.12	Ουδέτερο σημείο ισορροπίας	9
1.13	$f(x) = x + x^3$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.1$	11
1.14	$g(x) = x - x^3$ με αρχική τιμή $x_0 = -0.6$	11
1.15	Για $c = 0.5$ και αρχική τιμή $x_0 = 0$	14
1.16	Ουδέτερο, $x^* = 1/2$	15
1.17	Ελκυστής, $p_- = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.21$	16
1.18	Απωθητής, $p_+ = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.21$	16
1.19	Διάγραμμα διακλάδωσης της $Q_c(x)$ με $-0.25 \leq c \leq 0.25$	17
1.20	Για $c = -0.75$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$	19
1.21	Για $c = -1$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$	20
1.22	Για $c = -1.25$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$	20
1.23	Για $c = -1.3$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$	21
1.24	Διάγραμμα διακλάδωσης της $Q_c(x)$ με $-1.25 \leq c \leq 0.25$	21
1.25	Για $a = 0$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$	22
1.26	Για $a = 2$ με αρχική τιμή $x_0 = -0.2$	23
1.27	Διάγραμμα διακλάδωσης της $G_a(x)$ με $-1 \leq a \leq 3$	23
2.1	Συνάρτηση με περίοδο 3	28
2.2	Γραφική απεικόνιση της F	29
2.3	Λήμμα 1	32
2.4	Λήμμα 3	33

2.5	Πιθανό γράφημα της F στην περίπτωση $d \leq a < b < c$	34
3.1	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 2$ και $x_0 = 0.1$	48
3.2	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 1.8$ και $x_0 = 0.1$	50
3.3	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 1.8$ και $x_0 = 0.9$	51
3.4	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 2.8$ και $x_0 = 0.9$	52
3.5	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.839$ και $x_0 = 0.1$	53
3.6	Γραφική απεικόνιση της $(f^2)'(x_3^*) = (f^2)'(x_4^*) = -\lambda^2 + 2\lambda + 4$ για $-1 < \lambda < 1$	55
3.7	Γραφική απεικόνιση των $y = f^2(x)$ και $y = x$ για $\lambda = 3.2$	55
3.8	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.2$ και $x_0 = 0.1$	56
3.9	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.449$ και $x_0 = 0.1$	57
3.10	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.891$ και $x_0 = 0.1$	58
3.11	Διάγραμμα των διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης για $2.5 < \lambda < 4$	59
3.12	Διάγραμμα των διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης για $3.52 < \lambda < 3.62$	59
3.13	Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.839$ και $x_0 = 0.1$	61
3.14	Ασυμπτωτικά ευσταθείς τροχιές περιόδου 3, 6, και 12, για $\lambda = 3.839$, $\lambda = 3.845$, $\lambda = 3.849$	63

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

1.1 Εισαγωγή

Ο όρος δυναμικό σύστημα δηλώνει κάθε σύστημα, φυσικό, βιολογικό, οικονομικό, οικολογικό, κλπ, που εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η εξέλιξη αυτή μπορεί να συμβαίνει ομαλά στην πάροδο του χρόνου ή σε διακριτά χρονικά σημεία, οπότε πρόκειται για διακριτά δυναμικά συστήματα. Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε μια εισαγωγή στα διακριτά δυναμικά συστήματα και κάνουμε μελέτη των ιδιοτήτων που παρουσιάζουν (ευστάθεια, αστάθεια, σημεία καμπίς κλπ). Κατανοώντας τη συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος μπορούμε στη συνέχεια να το μοντελοποιήσουμε με απλές μαθηματικές εξισώσεις και έτσι να έχουμε τη δυνατότητα πρόβλεψης του τρόπου εξέλιξης του στο χρόνο. Μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση δυναμικών συστημάτων είναι τα χαοτικά με τα οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο Κεφάλαιο.

1.2 Βασικές έννοιες

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ την οποία θεωρούμε ότι είναι συνεχής C^∞ . Με f^n συμβολίζουμε την n -οστή επανάληψη της f . Αυτό σημαίνει ότι είναι η n -οστή σύνθεση της f με τον εαυτό της, δηλαδή $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Έτσι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι η αρχική τιμή της συνάρτησης τότε, μετά από n -επαναλήψεις θα προκύψουν τα διακριτά σημεία:

$$x_0 = f^0(x_0), x_1 = f^1(x_0), x_2 = f^2(x_0) = f(f(x_0)), \dots, x_n = f^n(x_0)$$

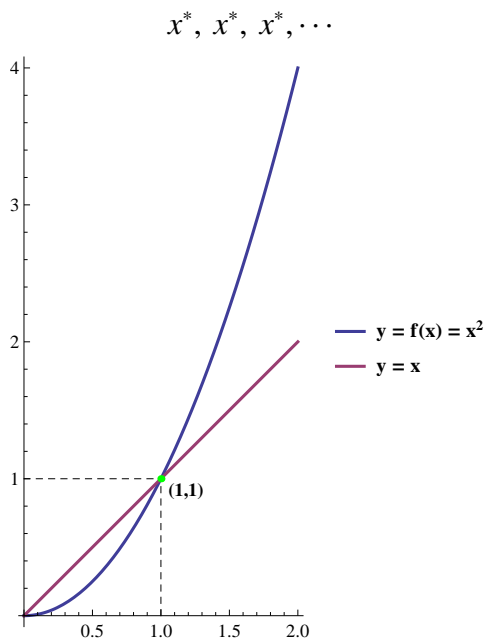
Το παραπάνω σύνολο σημείων το λέμε *τροχιά*. Προκύπτει λοιπόν, η εξί-

σωση πρώτης τάξης $x_{n+1} = f(x_n)$. Λέγεται πρώτης τάξης γιατί ο κάθε όρος εξαρτάται μόνο από τον προηγούμενό του. Παράδειγμα, ο x_n εξαρτάται μόνο από τον x_{n-1} . Ενώ δεύτερης τάξης θα ήταν αν εξαρτώταν από τους x_{n-1} και x_{n-2} .

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς για την εργασία μας.

Ορισμός 1.1. Ένα σημείο x^* ονομάζεται *σημείο ισορροπίας* ή *σταθερό σημείο* (fixed point) του Διακριτού Δυναμικού Συστήματος, ΔΔΣ στη συνέχεια, αν και μόνο αν ικανοποιεί τη σχέση $f(x^*) = x^*$.

Για να βρει κάποιος τα σημεία ισορροπίας θα πρέπει να λύσει την εξίσωση $f(x) - x = 0$, οι λύσεις της οποίας είναι τα σημεία τομής των $y = f(x)$ και $y = x$ (Σχήμα 1.1). Προφανώς, η τροχιά που προκύπτει αν δώσουμε σαν αρχική τιμή την τιμή ενός σημείου ισορροπίας έστω x^* θα είναι μία σταθερή ακολουθία,



Σχήμα 1.1: Σημείο τομής των $y = f(x)$ και $y = x$

Ορισμός 1.2. Ένα σημείο x_* λέγεται *περιοδικό σημείο περιόδου n* αν ισχύει $f^n(x_*) = x_*$, με n το μικρότερο θετικό ακέραιο για το οποίο ισχύει αυτό.

Η *περιοδική τροχιά* που προκύπτει είναι μία επαναλαμβανόμενη ακολουθία αριθμών.

$$\underbrace{x_*, f(x_*) = x_1, \dots, f^{n-1}(x_*) = x_{n-1}}_{\text{κύκλος } n\text{- περιόδου}}, \underbrace{f^n(x_*) = x_*, x_1, \dots, x_{n-1}, x_*, \dots}_{\text{κύκλος } n\text{- περιόδου}} \quad (1.1)$$

Θα λέμε ότι οι αριθμοί x_* , $f(x_*) = x_1$, $f^2(x_*) = x_2$, \dots , $f^{n-1}(x_*) = x_{n-1}$ ορίζουν έναν κύκλο ο οποίος λέγεται n -κύκλος (1.1). Κάθε ένα από τα σημεία αυτά που ορίζουν τον n -κύκλο είναι επίσης περιοδικό σημείο με περίοδο n . Για να βρει κάποιος τα περιοδικά σημεία θα πρέπει να λύσει την εξίσωση $f^n(x) = x$, το οποίο δεν είναι πάντα εύκολο στην πράξη, ακόμα και με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Θα πρέπει τέλος, να επιστημάνουμε ότι ένα περιοδικό σημείο x_* με περίοδο n είναι ένα σημείο ισορροπίας της $F(x) = f^n(x)$, αφού $F(x_*) = f^n(x_*) = x_*$.

Ορισμός 1.3. Ένα σημείο x_0 ονομάζεται *τελικά σταθερό ή τελικά περιοδικό σημείο* (*eventually fixed point ή eventually periodic point*), αν το x_0 δεν είναι σταθερό ή περιοδικό σημείο το ίδιο, αλλά ένα σημείο της τροχιάς που διαγράφει το x_0 είναι σταθερό ή περιοδικό αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.1. Για παράδειγμα το -1 είναι τελικά σταθερό σημείο για την $f(x) = x^2$ αφού $f(-1) = 1 \neq -1$ αλλά το 1 είναι σταθερό σημείο της f . Επίσης το 1 είναι τελικά περιοδικό σημείο για την $f(x) = x^2 - 1$, αφού $f(1) = 0$ και το 0 ανήκει σε έναν 2 -κύκλο της f , αφού $f(0) = -1$ και $f(-1) = 0$.

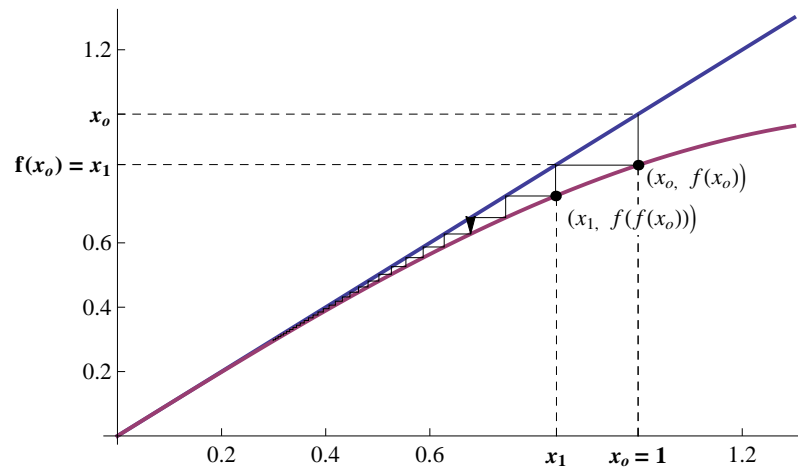
1.3 Γραφική απεικόνιση της τροχιάς ενός ΔΔΣ

Ένας χρήσιμος τρόπος να μελετήσουμε ένα Διακριτό Δυναμικό Σύστημα είναι να αναπαραστήσουμε γραφικά την τροχιά του. Για να το καταφέρουμε αυτό θα πρέπει να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ και της $y = x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Στη συνέχεια, αν x_0 είναι η αρχική τιμή της τροχιάς, τότε για να σχεδιάσουμε την τροχιάς του x_0 στο χρόνο, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

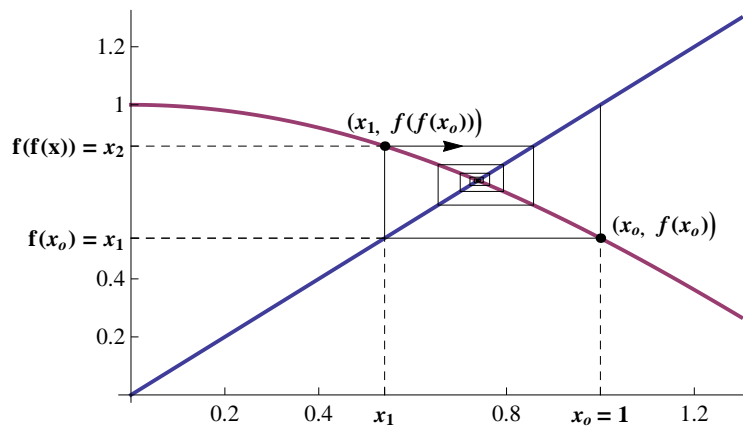
- (i) Ξεκινάμε από το σημείο (x_0, x_0) της $y = x$.
- (ii) Φέρνουμε κάθετη ευθεία γραμμή προς τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ μέχρι το σημείο τομής τους που θα είναι το $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$.
- (iii) Στη συνέχεια, φέρνουμε οριζόντια ευθεία γραμμή προς τη γραφική παράσταση της $y = x$ μέχρι το σημείο τομής τους που θα είναι το (x_1, x_1) .
- (iv) Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα και για την επόμενη επανάληψη.

Στην επόμενη επανάληψη θα πάρουμε το σημείο (x_2, x_2) . Καθώς λοιπόν προχωράμε, στον x -άξονα μετακινούμαστε από το ένα σημείο x_1 στο άλλο

x_2 προσδιορίζοντας την τροχιά του συστήματός μας με βάση την αρχική τιμή που δώσαμε.



Σχήμα 1.2: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 1$, αριθμός επαναλήψεων $n = 30$



Σχήμα 1.3: $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 1$, αριθμός επαναλήψεων $n = 30$

Το πρώτο διάγραμμα (Σχήμα 1.2) ονομάζεται **διάγραμμα με μορφή σκάλας** (stair-step diagram) ενώ το δεύτερο (Σχήμα 1.3) **διάγραμμα με μορφή ιστού αράχνης** (web diagram). Από την ανάλυση της τροχιάς προκύπτουν εύκολα χρήσιμα συμπεράσματα. Για παράδειγμα στο σχήμα 1.2 φαίνεται ότι υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας το $x^* = 0$ στο οποίο συγκλίνει η τροχιά της συνάρτησης. Αντίστοιχα, στο σχήμα 1.3 υπάρχει και εδώ ένα σημείο ισορροπίας, που είναι το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων, στο οποίο και πάλι συγκλίνει η τροχιά της συνάρτησης.

1.4 Ευστάθεια και αστάθεια

Ξεκινώντας την ενότητα αυτή, κρίνεται σκόπιμο να διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης ενός τουλάχιστον σημείου ισορροπίας.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα ύπαρξης ενός τουλάχιστον σημείου ισορροπίας). *Αν n $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε n f έχει ένα τουλάχιστον σημείο ισορροπίας στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.*

Απόδειξη. Έστω n συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$. Τότε n $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει

$$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0, \text{ αφού } f(\alpha) \geq \alpha$$

και

$$h(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0, \text{ αφού } f(\beta) \leq \beta$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα σημείο $c \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

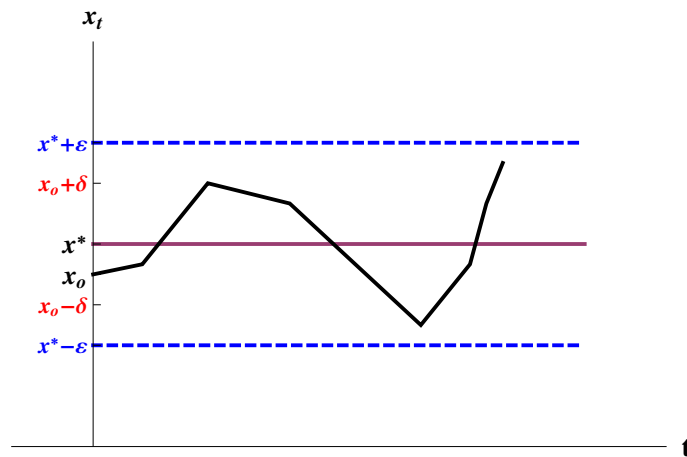
$$h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$

□

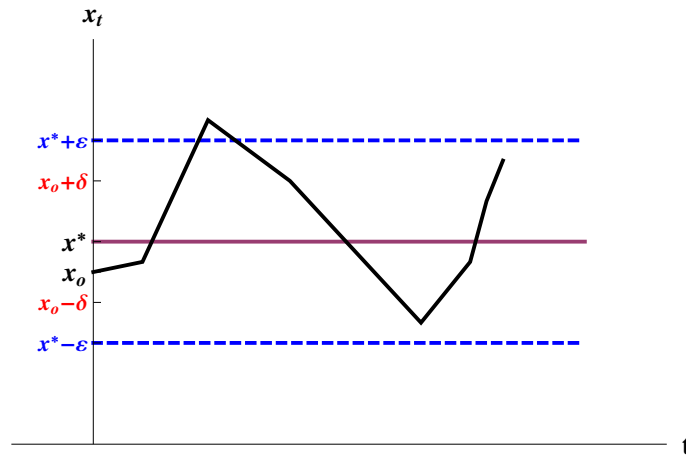
Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου ισορροπίας στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ για μια συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$. Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας ενώ επιπλέον το θεώρημα δεν μας δίνει πληροφορίες για τον τύπο των σημείων αυτών.

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε τα σημεία ισορροπίας ανάλογα με την ευστάθεια τους.

Ορισμός 1.4. Ένα σημείο ισορροπίας x^* της f λέγεται **ευσταθές** (stable fixed point) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε αρχική τιμή x_0 για την οποία ισχύει $|x_0 - x^*| < \delta$, ικανοποιείται n ανισότητα $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq 0$ (Σχήμα 1.4). Το σημείο ισορροπίας λέγεται **ασταθές** (unstable fixed point) αν δεν είναι ευσταθές (Σχήμα 1.5).

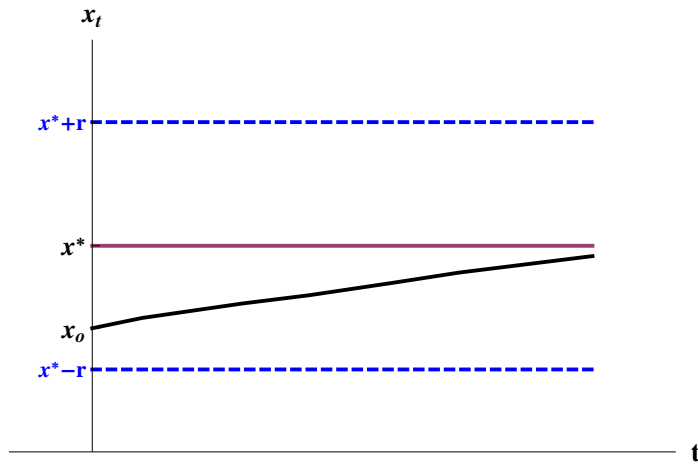


Σχήμα 1.4: Ευστάθεια σημείου ισορροπίας



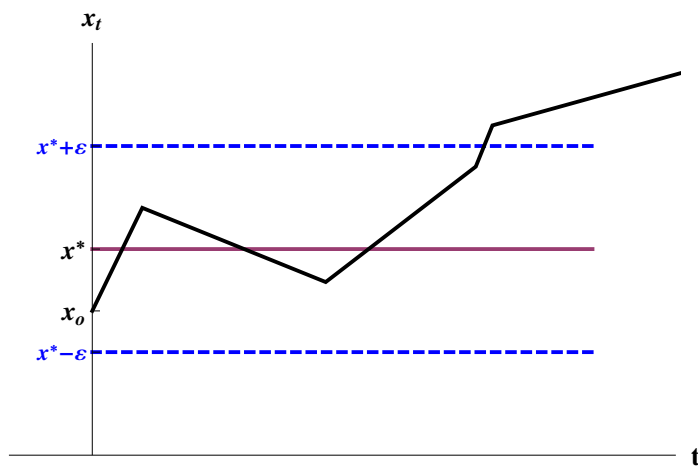
Σχήμα 1.5: Αστάθεια σημείου ισορροπίας

Ορισμός 1.5. Ένα σημείο ισορροπίας x^* της f λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** (asymptotically stable fixed point) ή αλλιώς **ελκυστής** (sink or attracting fixed point) αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $f^n(x_0) \rightarrow x^*$ καθώς $n \rightarrow +\infty$ για όλα τα x_0 που ικανοποιούν την ανισότητα $|x_0 - x^*| < r$ (Σχήμα 1.6). Το σημείο ισορροπίας x^* λέγεται **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και $f^n(x_0) \rightarrow x^*$ για κάθε x_0 , δηλαδή η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε r .



Σχήμα 1.6: Ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας

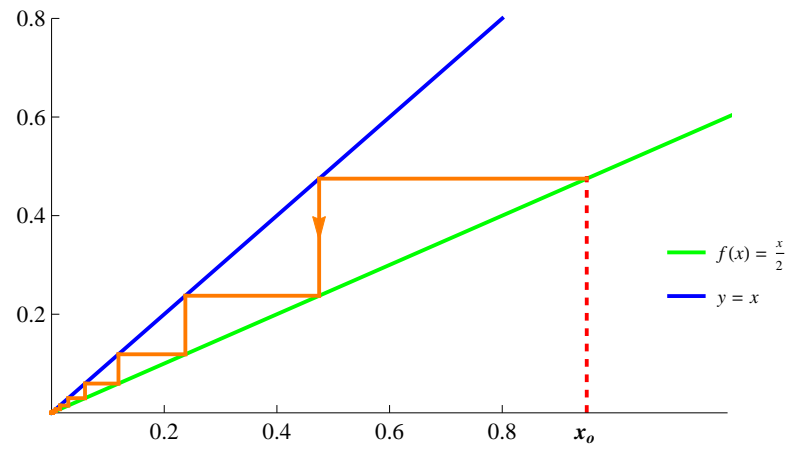
Ορισμός 1.6. Ένα σημείο ισορροπίας x^* της f λέγεται **απωθητής** (source or repelling fixed point) αν είναι ασταθές και επιπλέον υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $|x_0 - x^*| < \varepsilon$ συνεπάγεται ότι $|f^n(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|$.



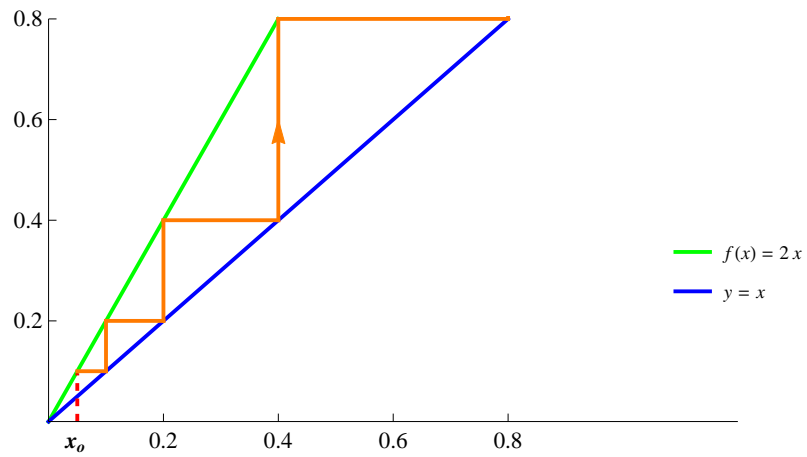
Σχήμα 1.7: Απωθητής

Στην περίπτωση που το σημείο ισορροπίας δεν είναι ούτε ελκυστής ούτε απωθητής ονομάζεται **ουδέτερο** (neutral or indifferent)

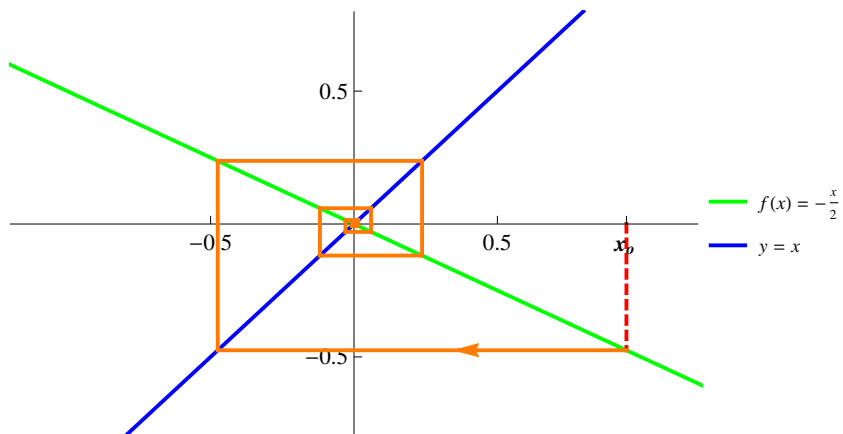
Στη συνέχεια στα σχήματα 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, φαίνονται αναλυτικά όλες οι δυνατές κατηγορίες των σημείων ισορροπίας. Σε όλες τις περιπτώσεις, το σημείο ισορροπίας είναι το $x^* = 0$.



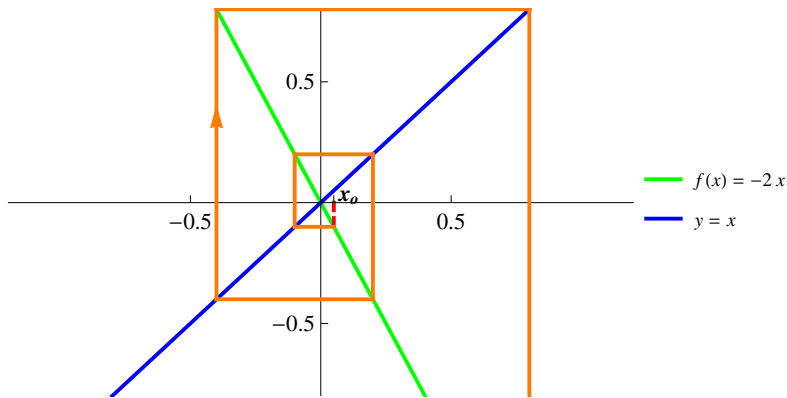
Σχήμα 1.8: Ελκυστής - διάγραμμα σκάλας



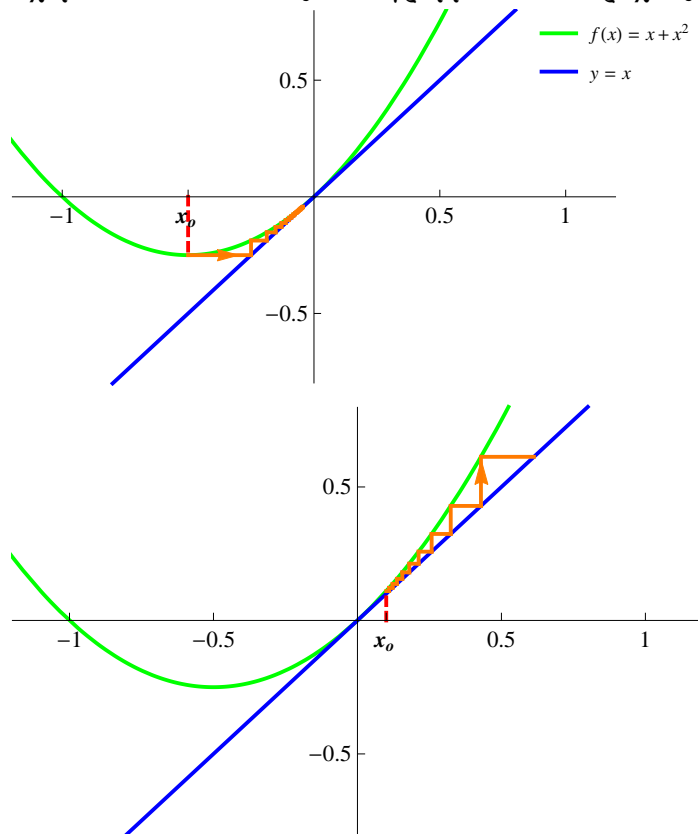
Σχήμα 1.9: Απωθητής - διάγραμμα σκάλας



Σχήμα 1.10: Ελκυστής - διάγραμμα ιστού αράχνης



Σχήμα 1.11: Απωθητής - διάγραμμα ιστού αράχνης



Σχήμα 1.12: Ουδέτερο σημείο ισορροπίας

Ο τύπος του σημείου ισορροπίας καθορίζεται από την τιμή της πρώτης παραγώγου στο σημείο αυτό. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2. Έστω ότι η f είναι C^1 και έχει σημείο ισορροπίας (fixed point) το x^* . Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Το x^* είναι ελκυστής, αν $|f'(x^*)| < 1$.

(ii) Το x^* είναι απωθητής, αν $|f'(x^*)| > 1$.

(iii) Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τον τύπο του x^* , αν $|f'(x^*)| = 1$.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη του (i). Έστω ότι $|f'(x^*)| = \nu < 1$. Επιλέγουμε K τέτοιο ώστε $\nu < K < 1$. Αφού η f' είναι συνεχής, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε $|f'(x)| < K$ για όλα τα x στο διάστημα $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι,

$$\frac{f(x) - x^*}{x - x^*} = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = f'(c)$$

για κάποιο c μεταξύ των x και x^* . Συνεπώς, έχουμε

$$|f(x) - x^*| < K|x - x^*|$$

Από αυτό προκύπτει ότι το $f(x)$ είναι πιο κοντά στο x^* από ότι το x στο x^* και συνεπώς $f(x) \in I$. Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα πάλι, έχουμε ότι

$$|f^2(x) - x^*| < K|f(x) - x^*| < K^2|x - x^*|$$

και συνεπώς τελικά,

$$|f^n(x) - x^*| < K^n|x - x^*|$$

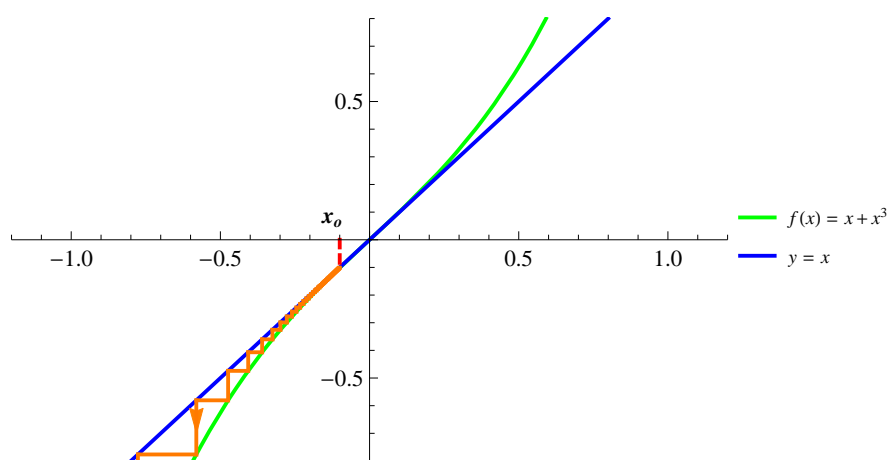
που σημαίνει ότι το $f^n(x) \rightarrow x^*$ στο διάστημα I , αφού $0 < K < 1$. Η απόδειξη για το (ii) είναι παρόμοια ενώ για την (iii) περίπτωση υπάρχουν παραδείγματα που δείχνουν ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε σαφές συμπέρασμα για τον τύπο του σημείου ισορροπίας. Όπως οι συναρτήσεις:

(i) $f(x) = x + x^3$

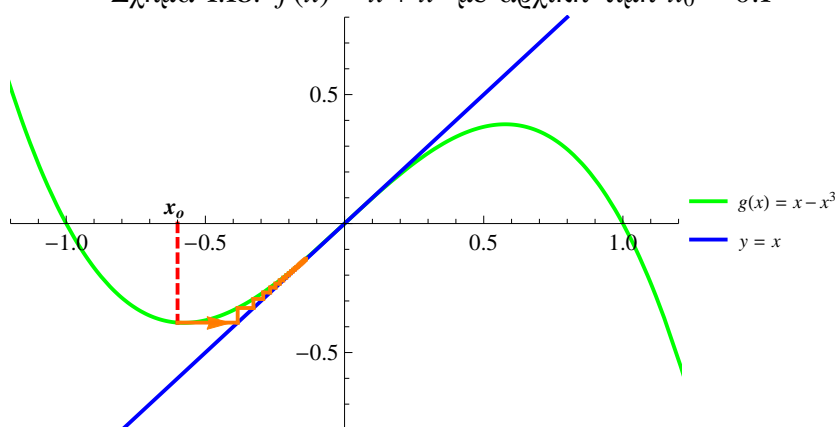
(ii) $g(x) = x - x^3$

(iii) $h(x) = x + x^2$

Και οι τρεις έχουν σημείο ισορροπίας το 0 με $f'(0) = 1$. Από τις γραφικές τους παραστάσεις μπορούμε να δούμε ότι το 0 για την f είναι απωθητής (Σχήμα 1.13), για την g είναι ελκυστής (Σχήμα 1.14) ενώ για την h από τη μία πλευρά είναι ελκυστής και απωθητής από την άλλη (Σχήμα 1.12). \square



Σχήμα 1.13: $f(x) = x + x^3$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.1$



Σχήμα 1.14: $g(x) = x - x^3$ με αρχική τιμή $x_0 = -0.6$

Με βάση την τιμή της πρώτης παραγώγου ένα σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται και ως υπερβολικό ή όχι. Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.7. Ένα σημείο ισορροπίας x^* της f λέγεται *υπερβολικό (hyperbolic)* αν $|f'(x^*)| \neq 1$.

Έτσι όταν ένα σημείο ισορροπίας είναι υπερβολικό σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα πρέπει να είναι είτε ασυμπτωτικά σταθερό (ελκυστής) είτε ασταθές (απωθητής). Πρέπει επίσης να σημειώσουμε κάτι που ήδη έχει γίνει φανερό από προηγούμενα παραδείγματα. Ανάλογα με τον αν η πρώτη παράγωγος είναι θετική ή αρνητική αλλάζει ο τύπος της τροχιάς γύρω από το σημείο ισορροπίας. Έτσι αν έχουμε $f'(x) > 0$ τότε το διάγραμμα είναι σε μορφή σκάλας ενώ αν είναι $f'(x) < 0$ τότε το διάγραμμα είναι σε μορφή ιστού αράχνης. Τέλος, αφού ένα περιοδικό σημείο x_* περιόδου n για την

f είναι σημείο ισορροπίας για την f^n , μπορούμε να χαρακτηρίσουμε παρόμοια τα περιοδικά σημεία ανάλογα με το αν $|(f^n)'(x^*)| < 1$ ή $|(f^n)'(x^*)| > 1$. Επιπλέον, εύκολα διαπιστώνεται ότι $(f^n)'(x^*) = (f^n)'(x_j)$ για κάθε σημείο x_j της περιοδικής τροχιάς. Έτσι, έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.8. Ένα περιοδικό σημείο x_* περιόδου n χαρακτηρίζεται ως ελκυστής (attracting period point) ή απωθητής (repelling period point) της f αν το x_* που είναι σημείο ισορροπίας της f^n είναι ελκυστής ή απωθητής αντίστοιχα.

Ορισμός 1.9. Ένας n -κύκλος μιας συνάρτησης f χαρακτηρίζεται ως ελκυστής (attracting n -cycle) ή απωθητής (repelling n -cycle) αν ισχύει $|(f^n)'| < 1$ ή $|(f^n)'| > 1$ αντίστοιχα.

1.5 Διακλάδωση

Σε πολλά φυσικά συστήματα η τιμή της υπό εξέταση σταθεράς εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους. Η ισορροπία λοιπόν σε ένα τέτοιο Δυναμικό Σύστημα μπορεί να αλλάξει ξαφνικά καθώς μεταβάλλουμε κάποια παράμετρό του. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος συναρτήσει των παραμέτρων του. Η μελέτη αυτή γίνεται από τη **θεωρία των διακλαδώσεων** που εξετάζει τις ποιοτικές αλλαγές στη συμπεριφορά των σημείων ισορροπίας.

Έστω $f(x^*, \lambda)$ ένα σημείο ισορροπίας. Ο τρόπος που το γράφουμε δηλώνει ότι το σημείο ισορροπίας εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ . Καθώς μεταβάλλουμε το λ , τα χαρακτηριστικά του συστήματος μεταβάλλονται και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις πολύ δραματικά. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **σημεία διακλάδωσης**. Η διακλάδωση μπορεί να συμβαίνει είτε όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των σημείων ισορροπίας, είτε όταν αλλάζει ο τύπος τους, για παράδειγμα από ελκυστής να γίνεται απωθητής, είτε όταν εμφανίζονται περιοδικοί κύκλοι ανώτερης τάξης, π.χ. κύκλοι 2 - περιόδου. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας διατυπώνοντας αρχικά ένα θεώρημα.

Θεώρημα 1.3 (The Bifurcation Criterion). Έστω f_λ μία οικογένεια συναρτήσεων με παράμετρο λ . Έστω ότι x^* σημείο ισορροπίας της f για λ_0 , δηλαδή $f_{\lambda_0}(x^*) = x^*$ και ότι $f'_{\lambda_0}(x^*) \neq 1$. Τότε υπάρχει ένα διάστημα I γύρω από το x^* , ένα διάστημα J γύρω από το λ_0 και μία ομαλή συνάρτηση $p : J \rightarrow I$ τέτοια ώστε $p(\lambda_0) = x^*$ και $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Δηλαδή, η f_λ δεν έχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας στο I .

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $F(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Από την υπόθεση προ-

κύπτει ότι $F(x^*, \lambda_0) = 0$ και

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x^*) - 1 \neq 0 \quad (1.2)$$

Από το Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (Implicit function theorem), υπάρχουν διαστήματα I στο x^* και J στο λ_0 και μία συνάρτηση $p : J \rightarrow I$ τέτοια ώστε $p(\lambda_0) = x^*$ και $F(p(\lambda), \lambda) \equiv 0$ για τα $\lambda \in J$. Επιπλέον, $F(x, \lambda) \neq 0$ εκτός και αν $x = p(\lambda)$. Το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη. \square

Σαν αποτέλεσμα αυτού του θεωρήματος έχουμε ότι στην περίπτωση ενός υπερβολικού σημείου ισορροπίας τα μέλη της οικογένειας διαφορικών εξισώσεων δεν υπόκεινται σε διακλάδωση. Διατηρούν την ευστάθειά τους και δεν μεταβάλλεται ο αριθμός τους. Κατά συνέπεια, διακλάδωση εμφανίζεται μόνο στις περιπτώσεις των μη-υπερβολικών σημείων ισορροπίας, όταν δηλαδή η πρώτη παράγωγος στο σημείο ισορροπίας είναι ίση με 1 ή -1 . Στη συνέχεια θα περιγράψουμε παραδείγματα για αυτές τις περιπτώσεις. Ορίζουμε την παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων F η οποία εξαρτάται από k παραμέτρους $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$:

$$F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x), \text{ με } F(0, x) = f(x)$$

όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση με σημείο ισορροπίας, για λόγους διευκόλυνσης, το $x^* = 0$.

1.5α' Διακλάδωση σάγματος - κόμβου ή Διακλάδωση εφαπτομένης (Saddle-Node or Tangent Bifurcation)

Ορισμός 1.10. Η παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων F έχει εφαπτόμενη διακλάδωση ή διακλάδωση σάγματος σε ένα ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με την παραμετρική τιμή λ_0 αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

- (i) Η F για λ_0 έχει ένα σημείο ισορροπίας στο I το οποίο είναι ουδέτερο.
- (ii) Για όλα τα λ στο ένα μισό του διαστήματος $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, η F δεν έχει κανένα σημείο ισορροπίας στο I .
- (iii) Για όλα τα λ στο άλλο μισό του διαστήματος $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, η F έχει δύο σημεία ισορροπίας στο I , έναν ελκυστή και έναν απωθητή.

Σημείωση:

- (i) Για τα περιοδικά σημεία της F μπορεί επίσης να ισχύει η εφαπτόμενη διακλάδωση αν αντικαταστήσουμε την F με την F^n για ένα κύκλο περιόδου n .

- (ii) Η εφαπτόμενη διακλάδωση συμβαίνει όταν το γράφημα της F είναι εφαπτόμενο στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, που σημαίνει ότι η πρώτη παράγωγος στο σημείο ισορροπίας είναι ίση με 1.

Παράδειγμα 1.2. Έστω η $Q_c(x) = x^2 + c$, όπου c μία σταθερά. Λύνουμε την εξίσωση $Q_c(x) = x$ για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας της Q_c .

$$Q_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x^2 - x + c = 0$$

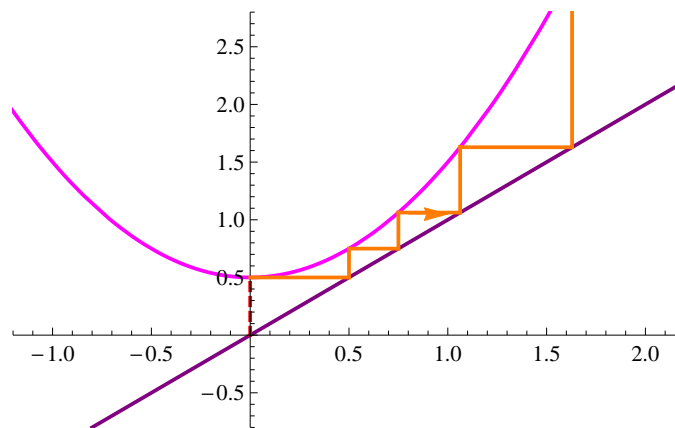
Κατά συνέπεια, αν p_+ και p_- οι λύσεις της εξίσωσης τότε αυτές θα είναι οι:

$$p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{και} \quad p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις:

1. Αν $c > 1/4$, η Q_c δεν έχει καμία πραγματική λύση, και συνεπώς κανένα (πραγματικό) σημείο ισορροπίας.

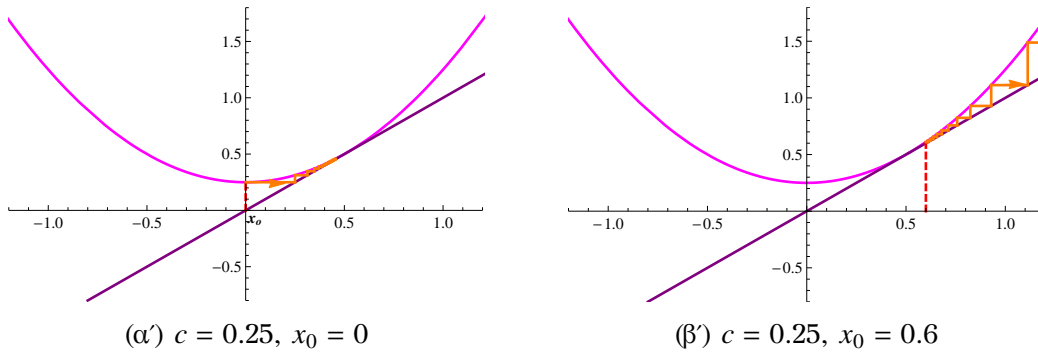
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της Q_c δεν τέμνει σε κανένα σημείο την ευθεία $y = x$. Έτσι, για κάθε αρχική τιμή x_0 η τροχιά του x_0 υπό την Q_c τείνει πάντα στο άπειρο ∞ (Σχήμα 1.15).



Σχήμα 1.15: Για $c = 0.5$ και αρχική τιμή $x_0 = 0$

2. Αν $c = 1/4$, τότε $p_+ = p_- = 1/2$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Σε αυτή την περίπτωση το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $p_+ = p_- = x^* = 1/2$ και μάλιστα είναι ουδέτερο αφού $Q'_c(x) = 2x \Rightarrow Q'_c(1/2) = 1$ (Σχήμα 1.16).



Σχήμα 1.16: Ουδέτερο, $x^* = 1/2$

3. Αν $c < 1/4$, η Q_c έχει δύο πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις, και συνεπώς δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ισορροπίας τα p_+ και p_- .

Αφού $Q'_c(x) = 2x$ έχουμε ότι:

$$Q'_c(p_+) = 2p_+ = 1 + \sqrt{1 - 4c} > 1$$

Οπότε το σημείο ισορροπίας p_+ είναι πάντα απωθητής (repelling). Ενώ,

$$Q'_c(p_-) = 2p_- = 1 - \sqrt{1 - 4c}$$

Κατά συνέπεια, το σημείο ισορροπίας p_- θα είναι απωθητής για κάποιες τιμές του c και ελκυστής για κάποιες άλλες τιμές του c . Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτόμενης διακλάδωσης ή διακλάδωσης σάγγατος - κόμβου, για να έχουμε τέτοιου είδους διακλάδωση θα πρέπει στην περίπτωση του $c < 1/4$ να έχουμε δύο σημεία ισορροπίας το ένα ελκυστή και το άλλο απωθητή. Απωθητή έχουμε άρα θέλουμε τις τιμές του c για τις οποίες το p_- είναι ελκυστής της Q_c . Άρα το c θα ικανοποιεί τη σχέση,

$$\begin{aligned} |Q'_c(p_-)| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < -\sqrt{1 - 4c} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 > \sqrt{1 - 4c} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 > 1 - 4c > 0 \\ &\Leftrightarrow 3 > -4c > -1 \\ &\Leftrightarrow -3/4 < c < 1/4 \end{aligned}$$

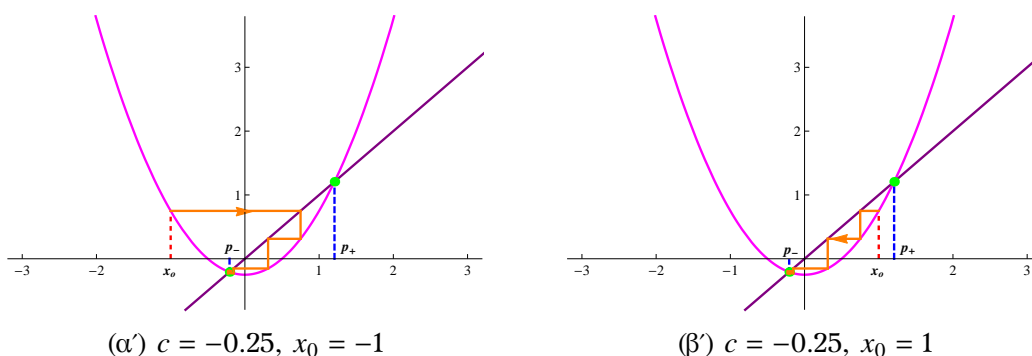
Ενώ, για $c = -3/4$ το x_- είναι ουδέτερο και για $c < -3/4$ είναι απωθητής. Τέλος, παρατηρούμε ότι αφού $Q_c(-x) = Q_c(x)$, η τύχη της τροχιά του $-x_0$

κάτω από την Q_c θα είναι πάντα ίδια με την τύχη της τροχιάς του x_0 κάτω από την Q_c . Έτσι, στο διάστημα $[-p_+, p_+]$ θα έχουμε ότι

$$Q_c(-p_+) = Q_c(p_+) = p_+$$

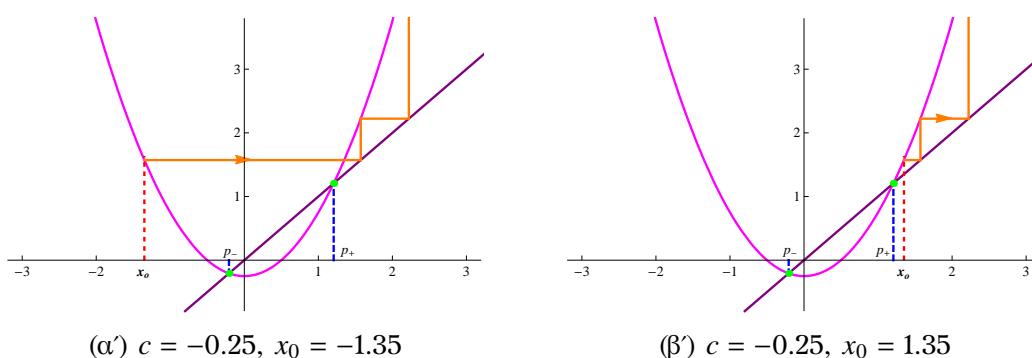
οπότε το $-p_+$ είναι τελικά σημείο ισορροπίας (eventual fixed point) της Q_c . Ενώ για κάθε αρχική τιμή $x_0 \notin [-p_+, p_+]$ η τροχιά κάτω από τη Q_c τείνει στο άπειρο.

Γραφικά οι περιπτώσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 1.17, 1.18.



Σχήμα 1.17: Ελκυστής, $p_- = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.21$

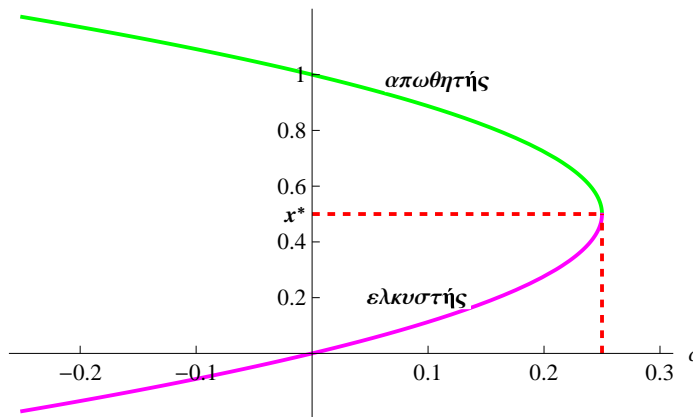
και



Σχήμα 1.18: Απωθητής, $p_+ = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1.21$

Στην περίπτωση λοιπόν του παραδείγματος αυτού, αν η τιμή της παραμέτρου c είναι μεγαλύτερη από 0.25 τότε δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας, καθώς μικραίνει και γίνεται ίση με 0.25 τότε εμφανίζεται ένα ουδέτερο σημείο ισορροπίας. Αν συνεχίσει να μικραίνει και άλλο μέχρι λίγο

πριν το -0.75 , τότε εμφανίζονται δύο σημεία ισορροπίας, το ένα ελκυστής και το άλλο απωθητής. Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται αρκετά αναλυτικά στο **διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation diagram)** που φαίνεται στο σχήμα 1.19. Στο διάγραμμα αυτό, στον οριζόντιο άξονα βάζουμε τις τιμές της παραμέτρου c ενώ στον κατακόρυφο άξονα έχουμε τις τιμές της λύσης $p = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$.



Σχήμα 1.19: Διάγραμμα διακλάδωσης της $Q_c(x)$ με $-0.25 \leq c \leq 0.25$

1.5β' Διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου (Period Doubling (pitchfork) Bifurcation)

Ορισμός 1.11. Η παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων F έχει διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου σε ένα ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με την παραμετρική τιμή λ_0 , αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

- (i) Για κάθε $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, η F έχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας $x_\lambda^* \in I$.
- (ii) Για όλα τα λ στο ένα μισό του διαστήματος $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, συμπεριλαμβανομένου και του $\lambda = \lambda_0$, η F δεν έχει κανένα κύκλο περιόδου 2 στο I και x_λ^* είναι ελκυστής (ή απωθητής).
- (iii) Για όλα τα λ στο άλλο μισό του διαστήματος $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, εκτός του $\lambda = \lambda_0$, υπάρχει ένας μοναδικός 2 - κύκλος ανάμεσα στα $q_\lambda^1, q_\lambda^2 \in I$ με $F(q_\lambda^1) = q_\lambda^2$ και $F(q_\lambda^2) = q_\lambda^1$ αντίστοιχα. Αυτός ο 2 - κύκλος είναι ελκυστής (ή απωθητής) ενώ το σημείο ισορροπίας x_λ^* είναι απωθητής (ή ελκυστής) αντίστοιχα.

(iv) Καθώς $\lambda \rightarrow \lambda_0$ έχουμε ότι και τα δύο σημεία $q_\lambda^i \rightarrow x_\lambda^*$.

Σημείωση:

- (i) Κατά την διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου αυτό που συμβαίνει είναι ότι είτε ένα σημείο ισορροπίας που είναι ελκυστής αλλάζει σε απωθητή ενώ την ίδια στιγμή δημιουργείται ένας ελκυστής 2 - κύκλος, είτε ένα σημείο ισορροπίας που είναι απωθητής αλλάζει σε εκλυστή ενώ την ίδια στιγμή δημιουργείται ένας απωθητής 2 - κύκλος.
- (ii) Η διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου συμβαίνει όταν το γράφημα της F είναι κάθετο προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$, (που σημαίνει ότι η πρώτη παράγωγος στο σημείο ισορροπίας είναι ίση με -1). Επιπρόσθετα, προκύπτει ότι το γράφημα της F^2 είναι εφαπτόμενο στην ευθεία $y = x$ όταν συμβαίνει η διακλάδωση.

$$(F_{\lambda_0}^2)'(x_{\lambda_0}^*) = F'_{\lambda_0}(F_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}^*))F'_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}^*) = (F'_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}^*))^2 = (-1)^2 = 1$$

Παράδειγμα 1.3. Στο προηγούμενο παράδειγμα με $Q_c(x) = x^2 + c$, όπου c μία σταθερά θα ελέγξουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που $c \leq -3/4$. Αρχικά θα βρούμε τα σημεία με περίοδο 2, με άλλα λόγια θα λύσουμε την εξίσωση $Q_c^2(x) = x$.

$$\begin{aligned} Q_c^2(x) = x &\Leftrightarrow (x^2 + c)^2 + c = x \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = p_-, x = p_+, x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4c}}{2} \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται υπάρχουν 4 ρίζες (εξίσωση βαθμού τέσσερα). Οι δύο πρώτες είναι οι p_+ και p_- που βρήκαμε πριν με περίοδο 1 ενώ οι άλλες δύο είναι περιόδου 2 έστω,

$$q_- = \frac{-1 - \sqrt{-3 - 4c}}{2}, q_+ = \frac{-1 + \sqrt{-3 - 4c}}{2}$$

Θέλουμε να έχουμε πραγματικές ρίζες άρα θα πρέπει,

$$-3 - 4c \geq 0 \Rightarrow c \leq 3/4$$

Παρατηρούμε ότι αν $c = 3/4$ τότε $q_- = q_+ = p_-$. Καθώς δηλαδή το p_- πάει από την ευστάθεια στην αστάθεια δημιουργούνται δύο νέα σημεία περιόδου

2. Μπορούμε να ελέγξουμε τη σταθερότητα αυτών των δύο σημείων ελέγχοντας την τιμή της $|(Q_c^2)'(x)|$ για τις τιμές q_- και q_+ . Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$(Q_c^2)'(x) = (Q_c)'(Q_c(x)) \cdot (Q_c)'(x)$$

επομένως,

$$(Q_c^2)'(q_-) = (Q_c)'(Q_c(q_-)) \cdot (Q_c)'(q_-) = (Q_c)'(q_+) \cdot (Q_c)'(q_-) = 4 + 4c$$

όμοια,

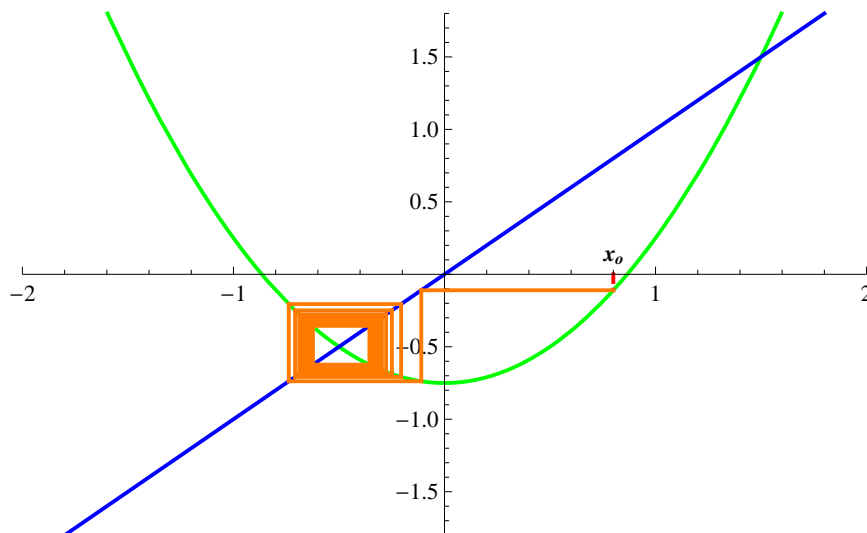
$$(Q_c^2)'(q_+) = (Q_c)'(Q_c(q_+)) \cdot (Q_c)'(q_+) = (Q_c)'(q_-) \cdot (Q_c)'(q_+) = 4 + 4c$$

Άρα, ο 2 - κύκλος που αποτελείται από τα σημεία q_- και q_+ είναι ελκυστής αν,

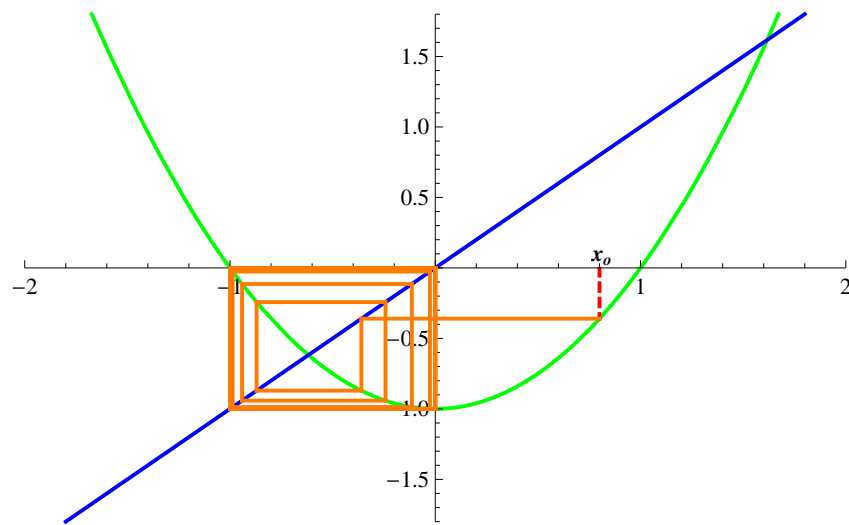
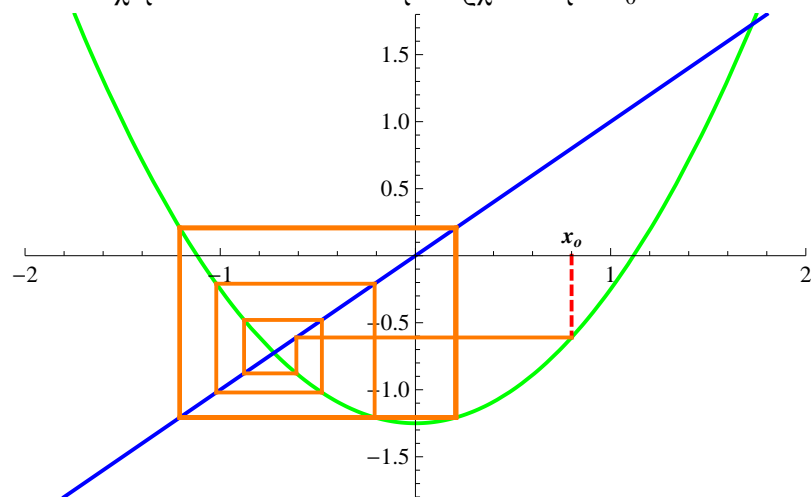
$$|4 + 4c| < 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -1.25 < c < -0.75$$

Λέμε λοιπόν ότι για $c = -3/4$ η Q_c έχει διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου. Αν $c < -5/4$, τότε ο ελκυστής 2 - κύκλος ανάμεσα στα q_- , q_+ γίνεται ένας απωθητής 2 - κύκλος.

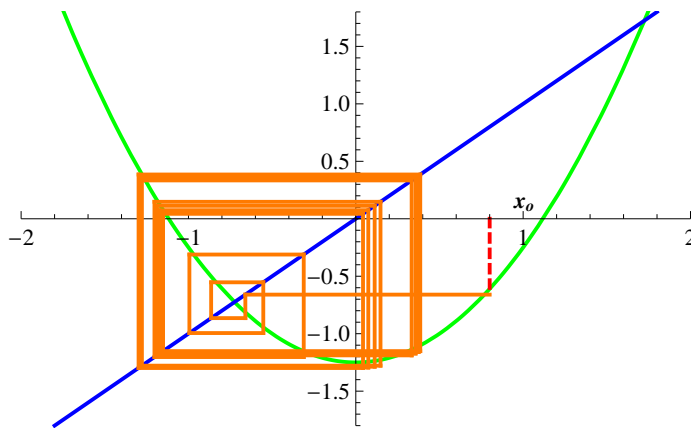
Στη συνέχεια ακολουθεί γραφική ανάλυση των περιπτώσεων αυτών (Σχήματα 1.20, 1.21, 1.22).



Σχήμα 1.20: Για $c = -0.75$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$

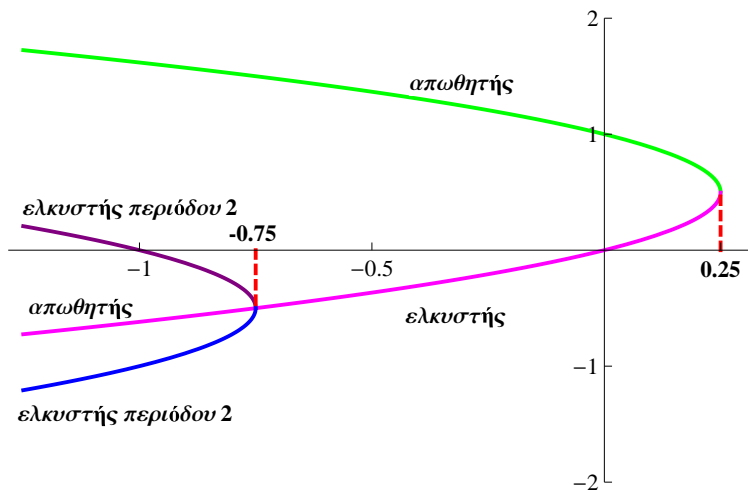
Σχήμα 1.21: Για $c = -1$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$ Σχήμα 1.22: Για $c = -1.25$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$

Συγκεντρωτικά λοιπόν, στην υπό μελέτη συνάρτηση, καθώς η παράμετρος c μειώνεται, όταν πάρει την τιμή $c = 1/4$ δημιουργείται ένα ουδέτερου σημείου ισορροπίας, ενώ καθώς συνεχίζει να μειώνεται δημιουργούνται δύο νέα σημεία το ένα ελκυστή p_- και το άλλο απωθητή p_+ . Όταν το c μειωθεί και άλλο, μετά από την τιμή $-3/4$, τότε το p_- από ελκυστής γίνεται απωθητής και σπάει σε δύο νέα σημεία ελκυστές q_- και q_+ περιόδου 2. Αν συνεχίσουμε την ανάλυσή μας θα δούμε ότι καθώς το c παίρνει τιμές μικρότερες του $-5/4$ τα δύο σημεία γίνονται απωθητές και δίνουν τη θέση τους σε 4 σημεία περιόδου 4 (Σχήμα 1.23) το οποίο αν μειωθεί και άλλο συνεχίζει με αυτή τη λογική, τη δημιουργία διπλάσιου κύκλου με αλλαγμένη την ευστάθεια.



Σχήμα 1.23: Για $c = -1.3$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$

Όλα όσα περιγράψαμε φαίνονται στο διάγραμμα διακλάδωσης που ακολουθεί (Σχήμα 1.27).



Σχήμα 1.24: Διάγραμμα διακλάδωσης της $Q_c(x)$ με $-1.25 \leq c \leq 0.25$

1.5γ' Διακλάδωση αντιστροφής (Exchange or Transcritical Bifurcation)

Ο τύπος αυτός της διακλάδωσης εμφανίζεται όταν αλλάζει η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας. Έστω ότι έχουμε την,

$$G_\alpha(x) = \alpha x + x^2$$

Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας λύνουμε την εξίσωση,

$$G_\alpha(x) = x \Rightarrow \alpha x + x^2 = x \Rightarrow x[(\alpha + x - 1)] = 0 \Rightarrow x[(\alpha - 1) + x] = 0$$

Οπότε έχουμε ότι σημεία ισορροπίας είναι το $x_1 = 0$ και το $x_2 = 1 - \alpha$. Παρατηρούμε ότι, αν $\alpha = 1$ τότε το x_2 συνενώνεται με το x_1 και έχουμε ένα σημείο ισορροπίας.

Για να ελέγξουμε τη σταθερότητα των δύο αυτών σημείων βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο. Έχουμε, $G'_\alpha(x) = \alpha - 2x$ που σημαίνει ότι,

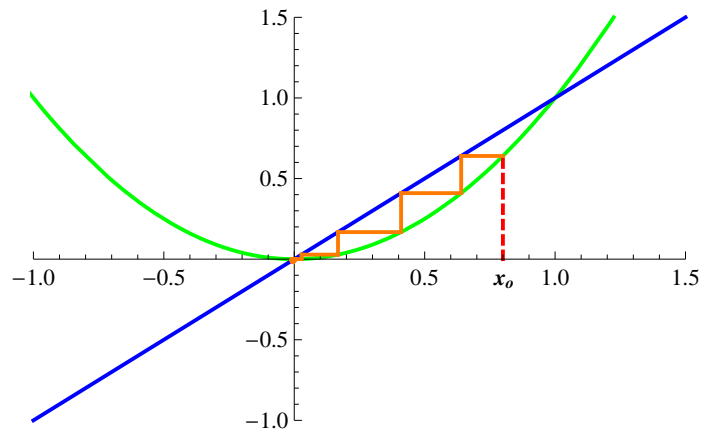
$$G'_\alpha(0) = \alpha$$

και

$$G'_\alpha(1 - \alpha) = 2 - \alpha$$

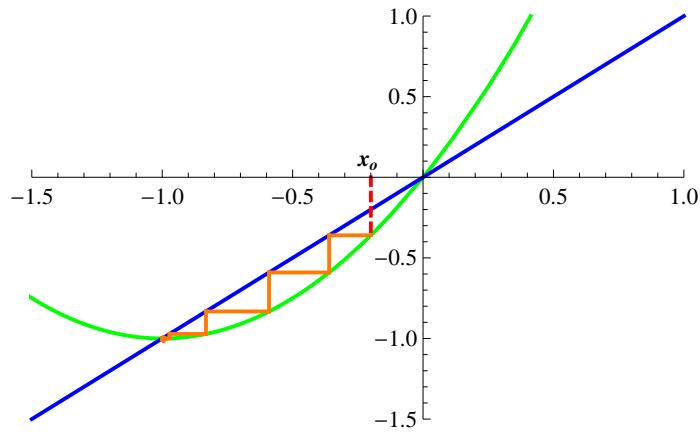
Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (i) Αν $-1 < G'_\alpha(0) < 1 \Rightarrow -1 < \alpha < 1$, τότε το $x_1 = 0$ είναι ελκυστής και το $x_2 = 1 - \alpha$ είναι απωθητής (Σχήμα 1.25).



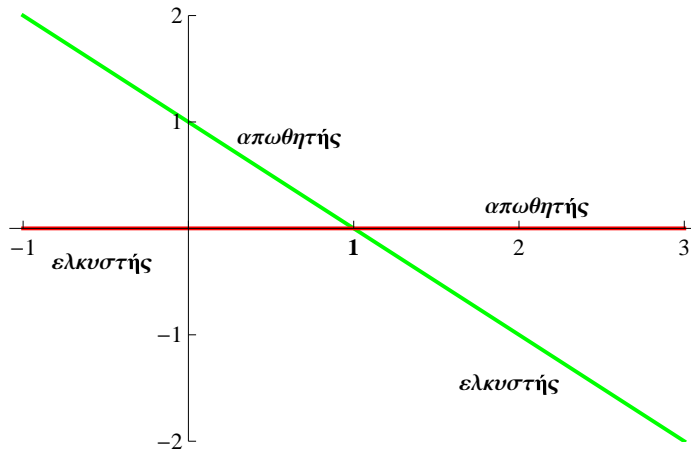
Σχήμα 1.25: Για $a = 0$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.8$

- (ii) Αν $-1 < G'_\alpha(1 - \alpha) < 1 \Rightarrow 1 < \alpha < 3$, τότε το $x_1 = 0$ είναι απωθητής και το $x_2 = 1 - \alpha$ είναι ελκυστής (Σχήμα 1.26).



Σχήμα 1.26: Για $a = 2$ με αρχική τιμή $x_0 = -0.2$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι όταν το a είναι ανάμεσα στο διάστημα $[-1, 1]$, τότε το ένα σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές ενώ το άλλο ασταθές, όταν το a γίνεται ίσο με 1 τα δύο σημεία συνενώνονται σε ένα και στο διάστημα $[1, 3]$ τα σημεία ισορροπίας διαχωρίζονται πάλι έχοντας αντιστρέψει την ευστάθειά τους. Αυτή η διακλάδωση ονομάζεται **διακλάδωση αντιστροφής**.



Σχήμα 1.27: Διάγραμμα διακλάδωσης της $G_a(x)$ με $-1 \leq a \leq 3$

Κεφάλαιο 2

Χάος στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

2.1 Εισαγωγή

Στην επιστήμη το χάος χρησιμοποιείται για να περιγράψει την συμπεριφορά συστημάτων με εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές τους συνθήκες. Η ανεξέλεγκτη, απειροελάχιστη μεταβολή στις αρχικές συνθήκες εκδηλώνεται ως χάος-αταξία, αδυναμία πρόβλεψης σε μια κατά τα άλλα αναμενόμενη τακτική και σταθερή φυσική διαδικασία.

Χαοτικά συστήματα υπάρχουν παντού. Στη βιολογία, στην κοινωνιολογία, στην οικονομία και στην ιατρική υπάρχουν παρόμοιες εκδηλώσεις χαοτικής συμπεριφοράς.

Στην επιστήμη των μαθηματικών ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών συστημάτων που δεν έχουμε τη δυνατότητα αναλυτικής επίλυσης. Με την ανάπτυξη των υπολογιστών στη δεκαετία του '60 μας δόθηκε η δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης που οδήγησε στην ανάπτυξη ενός νέου κλάδου της επιστήμης που ονομάστηκε «Θεωρία του Χάους» ή απλά «Χάος».

2.2 Χάος

Στην θεωρία του χάους, δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτός μαθηματικός ορισμός του. Παρόλα αυτά στη συνέχεια θα δώσουμε τους πιο κοινά δεδομένους ορισμούς του σύμφωνα με τους Robert L. Devany, Stephen R. Wiggins και τέλος τους Tien-Yien Li και James A. Yorke η οποία είναι και αυτή με την οποία θα ασχοληθούμε και στο υπόλοιπο κεφάλαιο.

Πριν τον ορισμό του χάους θα χρειαστεί να ορίσουμε πότε ένα σύνολο λέγεται πυκνό. Συγκεκριμένα,

Ορισμός 2.1. Θεωρούμε $Y \subset X$, το οποίο έχει μια συνάρτηση απόστασης d . Λέμε ότι το Y είναι *πυκνό* στο X αν για κάθε ανοιχτό διάστημα $A \subset X$,

$$Y \cap A \neq \emptyset$$

Για παράδειγμα το διάστημα (α, β) είναι πυκνό στο $[\alpha, \beta]$. Αντίθετα το σύνολο των ακεραίων Z δεν είναι πυκνό στο R ή στο Q .

2.2α' Devany, 1989, στο βιβλίο του «An Introduction to Chaotic Dynamical Systems»

Ορισμός 2.2. Λέμε ότι μια απεικόνιση f , η οποία στέλνει το διάστημα $I = [\alpha, \beta]$ στον εαυτό της είναι *χαοτική* αν:

- (i) Τα περιοδικά σημεία της f είναι πυκνά στο I (Density).
- (ii) Η απεικόνιση f είναι μεταβατική στο διάστημα I (Transitivity). Αυτό σημαίνει ότι αν δοθούν δύο υποδιαστήματα U_1 και U_2 στο I , υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in U_1$ και ένα $n > 0$ τέτοιο ώστε $f^n(x_0) \in U_2$.
- (iii) Η απεικόνιση f εμφανίζει ευαισθησία στην επιλογή των αρχικών συνθηκών στο I (Sensitive). Δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά ευαισθησίας β τέτοια ώστε, για κάθε $x_0 \in I$ και κάθε ανοιχτό διάστημα U γύρω από το x_0 , υπάρχει κάποιος σπόρος $y_0 \in U$ και $n > 0$ τέτοια ώστε:

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta.$$

Η μεταβατική ιδιότητα (Transitivity) είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη πυκνής τροχιάς (Density) στο I . Αυτό συμβαίνει καθώς για κάθε δυο σημεία θα υπάρχει μια τροχία που περνάει από αυτά όσο κοντά θέλω. Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες μας λέει ότι επιλέγοντας δυο σημεία x και y πολύ κοντά μεταξύ τους, δε σημαίνει απαραίτητα ότι και οι τροχιές των x και y υπό την f θα παραμείνουν κοντά.

2.2β' Wiggins, 1990, στο βιβλίο του «Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos»

Ορισμός 2.3. Λέμε ότι μια απεικόνιση f , η οποία στέλνει το διάστημα $I = [\alpha, \beta]$ στον εαυτό της είναι *χαοτική* αν:

- (i) Η απεικόνιση f είναι μεταβατική στο διάστημα I (Transitivity).

- (ii) Η απεικόνιση f εμφανίζει ευαισθησία στην επιλογή των αρχικών συνθηκών στο I (Sensitive).

Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος ορισμός του Wiggins διαφέρει από τον προηγούμενο του Devany μόνο στο σημείο ότι θεωρεί πλεονασμό το πρώτο κριτήριο της πυκνότητας των τροχιών με δεδομένο ότι όπως αναφέραμε και παραπάνω αυτά τα δύο κριτήρια είναι ισοδύναμα.

2.2γ' Li & York, 1975, στη μελέτη τους «Period three implies chaos»

Η ονομασία «Θεωρία του Χάους» δόθηκε από τους συγκεκριμένους μαθηματικούς μόλις το 1975. Ονόμασαν και απέδειξαν ότι ένα σύστημα είναι «χαστικό» εάν έχει περιοδικά σημεία αυθαίρετης περιοδικότητας και ένα μη αριθμήσιμο σύνολο μη περιοδικών σημείων. Τα αποτελέσματα της εργασίας τους αυτής άσκησαν σημαντική επιρροή, αλλάζοντας ριζικά τον τρόπο αντιμετώπισης πολλών φαινομένων της καθημερινής ζωής που συνηθίζαμε να ονομάζουμε «τυχαία» ή «απρόβλεπτα». Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα περιγράψουμε αναλυτικά τη μελέτη τους δίνοντας τα θεωρήματα και τις αποδείξεις αυτών.

2.3 Περίοδος τρία «σημαίνει» χάος

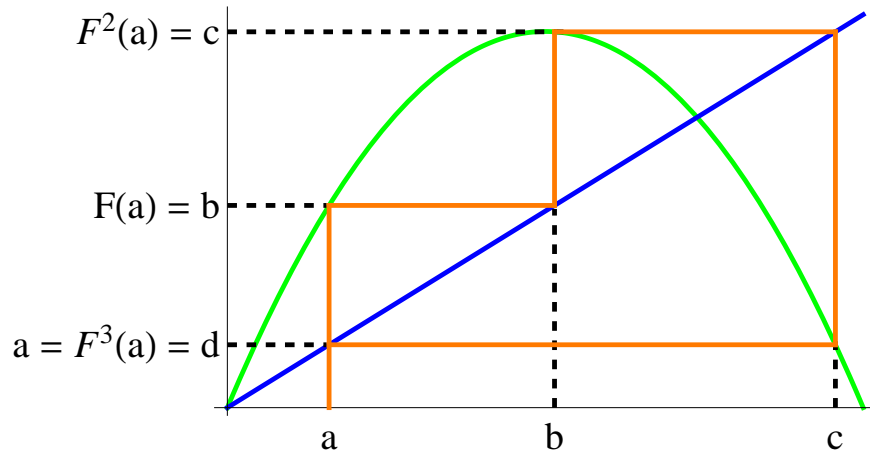
Θεώρημα 2.1. Έστω J ένα διάστημα και $F : J \rightarrow J$ μία συνεχή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $a \in J$ για το οποίο τα σημεία $b = F(a)$, $c = F^2(a)$ και $d = F^3(a)$, ικανοποιούν τη σχέση

$$d \leq a < b < c \quad (\text{ή} \quad d \geq a > b > c).$$

Τότε, για κάθε $k = 1, 2, \dots$ υπάρχει ένα περιοδικό σημείο στο J με περίοδο k .

Πρόταση 2.1. Αν υπάρχει ένα περιοδικό σημείο a με περίοδο τρία, τότε οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.1 ικανοποιούνται, υπάρχει δηλαδή σημείο $a' \in J$ τέτοιο ώστε $F^3(a') = a' < F(a') < F^2(a')$ ή $F^3(a') = a' > F(a') > F^2(a')$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $a, F(a), F^2(a)$ μια περιοδική τροχιά περιόδου τρία (Σχήμα 2.1). Αρχικά, θα πρέπει τα τρία σημεία $a, F(a), F^2(a)$ να είναι ξένα μεταξύ τους. Έστω ότι δεν είναι ξένα μεταξύ τους, η μόνη περίπτωση που χρειάζεται έλεγχο είναι αν $F(a) = F^2(a)$, δηλαδή αν $F^2(a) = F^3(a) = a$. Άτοπο, διότι 3 είναι η μικρότερη περίοδος και συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα. Άρα τα τρία σημεία είναι ξένα μεταξύ τους.



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση με περίοδο 3

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a < F(a)$. Για το $F^2(a)$ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- (i) Αν $a < F(a) < F^2(a)$, ικανοποιείται η υπόθεση του θεωρήματος $d \cong a < b < c$.
- (ii) Αν $a < F^2(a) < F(a)$, τότε και δεδομένου ότι $a = F^3(a)$ θα έχουμε,

$$\begin{aligned} a < F^2(a) < F(a) &\Leftrightarrow F^3(a) < F^2(a) < F(a) \\ &\Leftrightarrow F^2(F(a)) < F(F(a)) < F(a) \end{aligned}$$

Θέτουμε $a' = F(a)$, οπότε

$$F^2(a') < F(a') < a'$$

Άρα υπάρχει ένα σημείο a' για το οποίο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος.

- (iii) Αν $F^2(a) < a < F(a)$, τότε θα έχουμε,

$$\begin{aligned} F^2(a) < a < F(a) &\Leftrightarrow F^2(a) < F^3(a) < F(F^3(a)) \\ &\Leftrightarrow F^2(a) < F(F^2(a)) < F^2(F^2(a)) \end{aligned}$$

Θέτουμε, $a'' = F^2(a)$, οπότε $a'' < F(a'') < F^2(a'')$. Άρα υπάρχει ένα σημείο a'' για το οποίο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος, οπότε καταλήξαμε στο ζητούμενο.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και στην περίπτωση που αρχικά υποθέτουμε ότι $a > F(a)$. \square

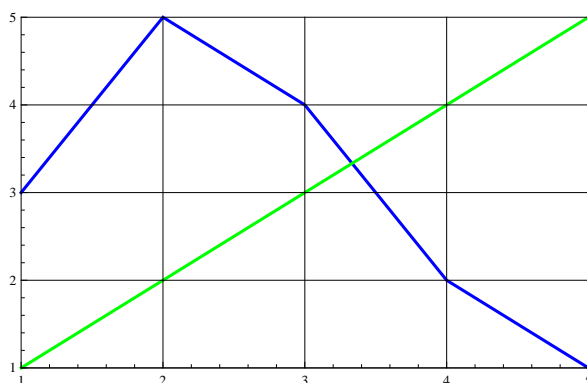
Παρατήρηση 2.1. Ενώ η ύπαρξη ενός σημείου περιόδου τρία, συνεπάγεται την ύπαρξη σημείου περιόδου πέντε, το αντίστροφο δεν ισχύει όπως δείχνει το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.1. Στο παράδειγμα αυτό θα δείξουμε ότι ενώ έχουμε ένα σημείο με περίοδο 5, δεν έχουμε σημείο με περίοδο 3. Θεωρούμε την $F : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F(1) = 3, F(2) = 5, F(3) = 4, F(4) = 2, F(5) = 1$$

και σε κάθε διάστημα $[n, n+1]$, $1 \leq n \leq 4$, υποθέτουμε ότι η F είναι γραμμική. Τότε όπως φαίνεται από το γράφημα της F (Σχήμα 2.2),

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$



Σχήμα 2.2: Γραφική απεικόνιση της F

Δηλαδή $F^5(1) = 1$, κατά συνέπεια υπάρχει σημείο με περίοδο πέντε. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι δεν υπάρχει σημείο με περίοδο τρία. Για να το κάνουμε αυτό θα ελέγξουμε τι συμβαίνει σε κάθε διάστημα.

Διάστημα $[1, 2]$:

Παρατηρούμε λοιπόν ότι,

$$F^3([1, 2]) = F^2([3, 5]) = F([1, 4]) = [2, 5]$$

Αν η F^3 είχε σταθερό σημείο ή σημείο ισορροπίας (fixed point) αυτό θα ήταν το 2. Αλλά,

$$F^3(2) = F^2(5) = F(1) = 3$$

Επομένως η F^3 δεν έχει σταθερό σημείο στο $[1, 2]$.

Διάστημα [2,3]:

Όμοια βλέπουμε ότι,

$$F^3([2, 3]) = F^2([4, 5]) = F([1, 2]) = [3, 5]$$

και επειδή

$$F^3(3) = F^2(4) = F(2) = 5$$

έπεται ότι η F^3 δεν έχει σταθερό σημείο στο $[2, 3]$.

Διάστημα [3,4]:

Κατά τον ίδιο τρόπο,

$$\begin{aligned} F^3([3, 4]) &= F^2([2, 4]) = F^2([2, 3] \cup [3, 4]) \\ &= F^2([2, 3]) \cup F^2([3, 4]) \\ &= F([4, 5]) \cup F([2, 4]) \\ &= F([4, 5]) \cup F([2, 3]) \cup F([3, 4]) \\ &= [1, 2] \cup [4, 5] \cup [2, 4] \\ &= [1, 5] \end{aligned}$$

Άρα η F^3 έχει σταθερό σημείο στο $[3, 4]$. Έστω $p \in [3, 4]$ σταθερό σημείο της F^3 , δηλαδή $F^3(p) = p$. Τότε,

$$F(p) \in [2, 4] \Rightarrow F(p) \in [2, 3] \text{ ή } F(p) \in [3, 4].$$

Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις,

$$\begin{aligned} F(p) \in [2, 3] &\Rightarrow F^2(p) \in [4, 5] \\ &\Rightarrow F^3(p) \in [1, 2] \\ &\Rightarrow \text{αδύνατο} \\ &\text{ή} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(p) \in [3, 4] &\Rightarrow F^2(p) \in [2, 3] \cup [3, 4] \\ &\Rightarrow F^3(p) \in [4, 5] \text{ ή } F^3(p) \in [2, 4] \end{aligned}$$

Αν $F^3(p) \in [4, 5]$ τότε, $F^3(4) = F^2(2) = F(5) = 1$, άρα $F^3(p) \notin [4, 5]$, οπότε $F^3(p) \in [2, 4]$ δηλαδή $F^2(p) \in [3, 4]$.

Άρα τα p , $F(p)$, $F^2(p)$, ανήκουν στο διάστημα $[3, 4]$. Στο διάστημα $[3, 4]$, η F είναι γραμμική και φθίνουσα με εξίσωση έστω, $F(x) = a + bx$. Τότε,

$$\begin{cases} F(3) = 4 \\ F(4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 4 \\ a + 4b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -2 \end{cases}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι $F(x) = 10 - 2x$. Λύνοντας την εξίσωση, $F(x) = x$ προκύπτει ότι $x = 10/3$. Άρα μοναδικό σταθερό σημείο της F^3 είναι το σταθερό σημείο της F , το $p = 10/3$ και όχι ένα σημείο με περίοδο τρία.

Διάστημα [4,5]: Επίσης έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} F^3([4, 5]) &= F^2([1, 2]) = F([3, 5]) \\ &= F([3, 4]) \cup F([4, 5]) \\ &= [2, 4] \cup [1, 2] \\ &= [1, 4] \end{aligned}$$

κατά συνέπεια το μόνο πιθανό σταθερό σημείο θα ήταν το 4, αλλά

$$F^3(4) = F^2(2) = F(5) = 1.$$

Εξετάζοντας λοιπόν όλα τα διαστήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η F έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, το $p = 10/3$ και κανένα σημείο με περίοδο 3.

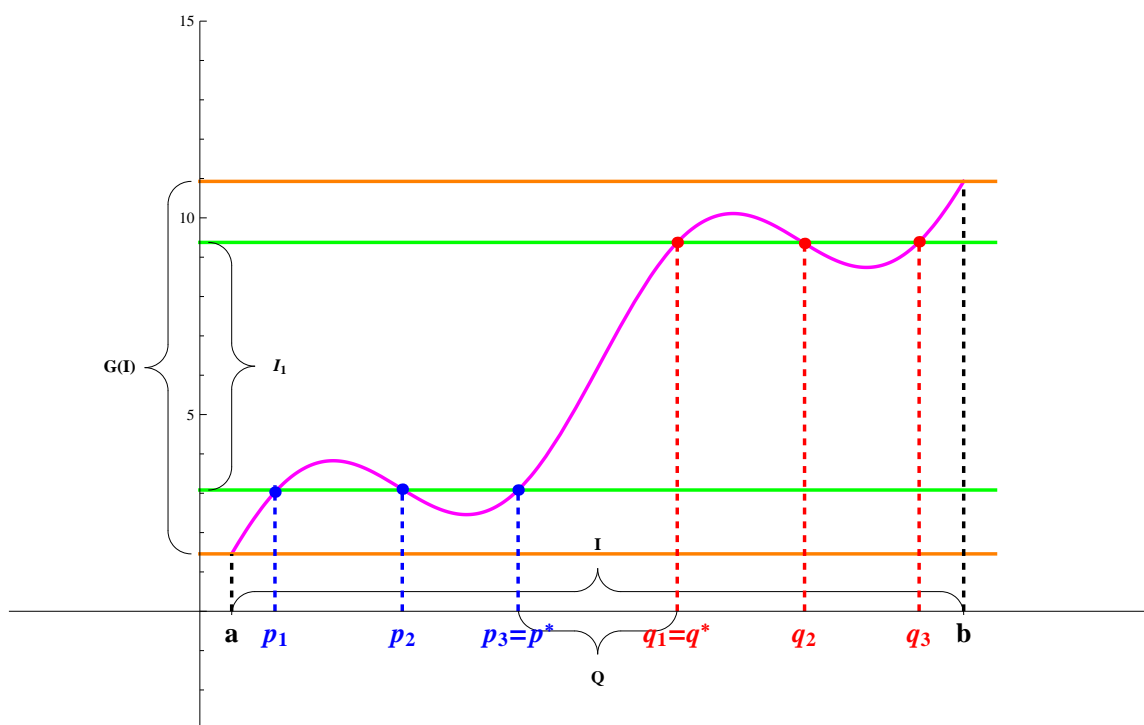
Στη συνέχεια στην προσπάθεια μας να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.1 θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 2.1. Θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, με το I να είναι ένα διάστημα. Για κάθε συμπαγές διάστημα $I_1 \subset G(I)$ υπάρχει ένα συμπαγές διάστημα $Q \subset I$ τέτοιο ώστε $G(Q) = I_1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $I_1 = [G(p), G(q)]$, όπου $p, q \in I$ με $p < q$. Έστω τα σύνολα,

$$\begin{aligned} A &= \{ p_i \mid G(p_i) = G(p), p_1 < p_2 < \dots < p_m, i = 1, 2, \dots, m \} \\ B &= \{ q_j \mid G(q_j) = G(q), q_1 < q_2 < \dots < q_n, j = 1, 2, \dots, n \} \end{aligned}$$

Ορίζουμε, $p^* = \max\{ p_i \leq q_n \}$ και $q^* = \min\{ q_j \geq p^* \}$, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε ότι $G([p^*, q^*]) = I_1$ (Σχήμα 2.3). Την ίδια μέθοδο εφαρμόζουμε και όταν ισχύει $p > q$.



Σχήμα 2.3: Λήμμα 1

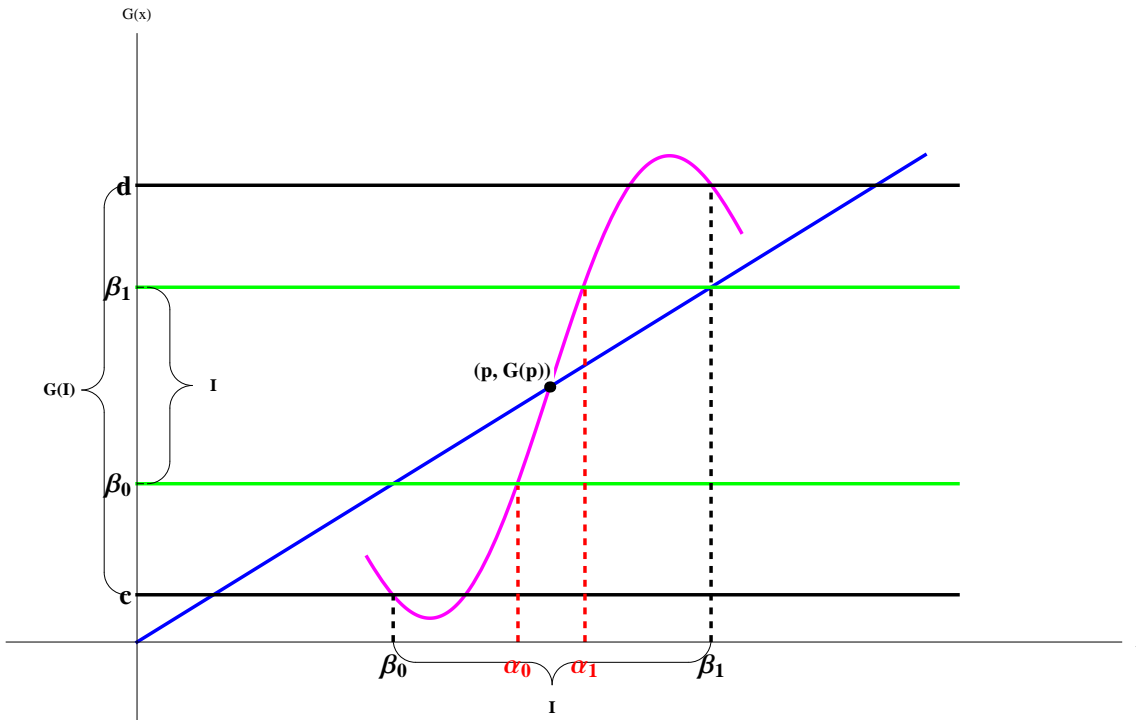
□

Λήμμα 2.2. Θεωρούμε $F : J \rightarrow J$ να είναι συνεχής και $(I_n)_{n=0}^\infty$ μια ακολουθία από συμπαγή διαστήματα με $I_n \subset J$ και $I_{n+1} \subset F(I_n)$ για κάθε n . Τότε υπάρχει μια ακολουθία συμπαγών διαστημάτων Q_n τέτοια ώστε $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ και $F^n(Q_n) = I_n$ για $n \geq 0$. Για οποιοδήποτε $x \in Q = \bigcap_{n=0}^\infty Q_n$ έχουμε $F^n(x) \in I_n$ για κάθε n .

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το Λήμμα θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της επαγωγής. Ορίζουμε λοιπόν, $Q_0 = I_0$. Τότε $F^0(Q_0) = Q_0 = I_0$. Έστω ότι υπάρχει Q_{n-1} τέτοιο ώστε $F^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$, τότε από υπόθεση έχουμε ότι $I_n \subset F(I_{n-1}) = F(F^{n-1}(Q_{n-1})) = F^n(Q_{n-1})$. Έτσι, από το Λήμμα 2.1, αν εφαρμόσουμε όπου $G = F^n$ στο Q_{n-1} προκύπτει ότι υπάρχει ένα συμπαγές διάστημα $Q_n \subset Q_{n-1}$ τέτοιο ώστε $F^n(Q_n) = I_n$, το οποίο ολοκληρώνει και την επαγωγική απόδειξη. Υποθέτουμε $x \in Q = \bigcap_{n=0}^\infty Q_n$. Αυτό σημαίνει ότι $F^0(x) = x \in Q_0 = I_0$. Υποθέτουμε ότι $F^n(x) \in I_n$. Τότε $x \in Q$ άρα $x \in Q_{n+1}$. Αφού $x \in Q_{n+1}$, $F^{n+1}(x) \in F^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$. Οπότε $F^n(x) \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Λήμμα 2.3. Θεωρούμε $G : J \rightarrow R$ να είναι συνεχής και $I \subset J$ συμπαγές διάστημα. Υποθέτουμε $I \subset G(I)$. Τότε υπάρχει ένα σημείο $p \in I$ τέτοιο ώστε $G(p) = p$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $I = [\beta_0, \beta_1]$. Αφού $I \subset G(I)$ μπορούμε να επιλέξουμε $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ τέτοια ώστε $G(\alpha_0) = \beta_0$ και $G(\alpha_1) = \beta_1$. Τότε $\alpha_0 - G(\alpha_0) = \alpha_0 - \beta_0 \geq 0$ και $\alpha_1 - G(\alpha_1) = \alpha_1 - \beta_1 \leq 0$. Οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $p \in I$ τέτοιο ώστε $p - G(p) = 0$.



Σχήμα 2.4: Λήμμα 3

□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

Απόδειξη. Αρχικά θα διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Έστω ότι $d \leq a < b < c$, τότε παίρνουμε:

$$K = [a, b] \text{ και } L = [b, c]$$

Αφού $F(a) = b$, $F^2(a) = c$ και $F^3(a) = d$, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής μας λέει ότι $F(K) = F[a, b] \supseteq [F(a), F(b)] = [b, c] = L$ και $F(L) = F([b, c]) \supseteq [F(c), F(b)] = [d, c]$. Επιπλέον έχουμε ότι, $L \subseteq [d, c]$ και $K \subseteq [d, c]$ οπότε $L \subseteq F(L)$ και $K \subseteq F(L)$.

Περίπτωση 2: Έστω ότι $d \geq a > b > c$, τότε παίρνουμε:

$$K = [b, a] \text{ και } L = [c, b]$$

Όπως πριν αφού $F(a) = b$, $F^2(a) = c$ και $F^3(a) = d$, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής μας λέει ότι $F(K) = F([b, a]) \supseteq [F(b), F(a)] = [c, b] = L$ και $F(L) = F([c, b]) \supseteq [F(b), F(c)] = [c, d]$. Επιπλέον έχουμε ότι, $L \subseteq [c, d]$ και $K \subseteq [c, d]$ οπότε $L \subseteq F(L)$ και $K \subseteq F(L)$.

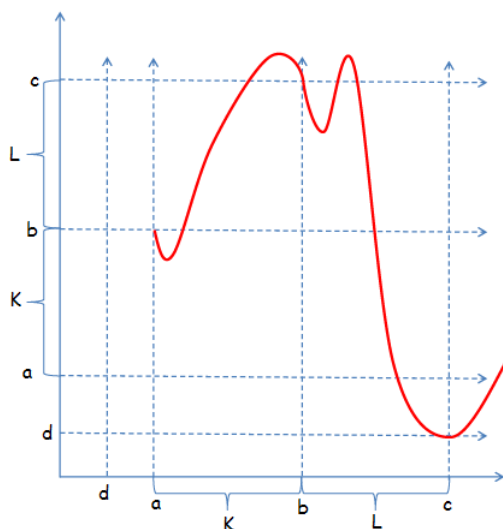
Άρα και για τις δυο περιπτώσεις ξέρουμε ότι:

$$K \subseteq F(L)$$

$$L \subseteq F(L)$$

και

$$L \subseteq F(K).$$



Σχήμα 2.5: Πιθανό γράφημα της F στην περίπτωση $d \leq a < b < c$.

Θεωρώ $k \in \mathbb{N}$. Για $k > 1$ θεωρώ I_n να είναι η ακολουθία διαστημάτων τέτοια ώστε $I_n = L$ για $n = 0, \dots, k-2$, και $I_{k-1} = K$, και ορίζουμε I_n να είναι περιοδική επαγωγικά με $I_{n+k} = I_n$ για $n \in \mathbb{N}$. Αν $k = 1$ θεωρούμε $I_n = L$ για κάθε n . Έτσι, για παράδειγμα αν έχουμε $k = 4$, τότε $I_0 = I_1 = I_2 = L$, $I_3 = K$ και επαγωγικά $I_4 = I_0$, $I_5 = I_1$, $I_6 = I_2$, $I_7 = I_3$, $I_8 = I_4 = I_0, \dots$

Υπενθυμίζουμε ότι για να ισχύει το Λήμμα 2.2 για τη συνάρτηση $F : J \rightarrow J$ και την ακολουθία συμπαγών διαστημάτων $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ θα πρέπει $I_n \subset J$ και $I_{n+1} \subset F(I_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η I_n έχει οριστεί έτσι ώστε είτε $I_n = K$ είτε $I_n = L$ για κάθε n , τότε η μόνη περίπτωση που η I_n δεν θα ικανοποιούσε το Λήμμα 2.2 θα ήταν αν $I_n = I_{n+1} = K$ επειδή αυτό προϋποθέτει ότι $K \subseteq F(K)$ το οποίο δεν ισχύει απαραίτητα. Με άλλα λόγια όταν έχουμε δύο διαστήματα ίσα με K τότε πρέπει να έχουμε ένα διάστημα ίσο με L ανάμεσα

τους αλλιώς δεν ικανοποιείται το Λήμμα 2.2.

Αφού ικανοποιείται το Λήμμα 2.2, υπάρχει μια ακολουθία συμπαγών διαστημάτων Q_n έτσι ώστε $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0 = Q_0$ και $F^n(Q_n) = I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε για $n = k$, σημειώνουμε ότι $Q_k \subset Q_0 = L$ και από τον ορισμό του I_n , $F^k(Q_k) = I_k = L = Q_0 \supset Q_k$. Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για το Λήμμα 2.3, $(Q_k) \subset F^k(Q_k)$ για $G = F^k$ βλέπουμε ότι η G έχει ένα σταθερό σημείο p_k στο Q_k .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το p_k έχει περίοδο $n_0 \in 0, \dots, k-1$ δηλαδή $F^{n_0}(p_k) = p_k$. Ξέρουμε ότι $F^{k-1}(p_k) \in I_{k-1} = K$. Τώρα $F^m(p_k) \in I_m = L$ για $m < k-1$. Αφού $k-1-n_0 < k-1$ αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} F^{k-1-n_0}(p_k) &= F^{k-1-n_0}(F^{n_0}(p_k)) \\ &= F^{k-1-n_0+n_0}(p_k) \\ &= F^{k-1}(p_k) \end{aligned}$$

Οπότε $F^{k-1}(p_k) \in L$ και $F^{k-1}(p_k) \in K$. Άρα $F^{k-1}(p_k) \in L \cap K$. Οπότε $F^{k-1}(p_k) = b$. Όμως $F^{k+1}(p_k) \in I_{k+1} = L$ ενώ $F^{k+1}(p_k) = F^2(F^{k-1}(p_k)) = F^2(b) = d \notin L$ το οποίο είναι **άτοπο**, συνεπώς το p_k έχει περίοδο k .

□

Θεώρημα 2.2. Έστω J ένα διάστημα και $F : J \rightarrow J$ μία συνεχή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $a \in J$ για το οποίο ισχύει

$$F^3(a) \leq a < F(a) < F^2(a) \quad (\text{ή} \quad F^3(a) \geq a > F(a) > F^2(a)).$$

Τότε, υπάρχει ένα μη αριθμήσιμο σύνολο $S \subset J$, το οποίο δεν περιέχει περιδικά σημεία, και ικανοποιεί τις συνθήκες:

(A) Για κάθε $p, q \in S$ με $p \neq q$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0 \quad (2.1)$$

και

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0 \quad (2.2)$$

(B) Για κάθε $p \in S$ και περιδικό σημείο $q \in J$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0. \quad (2.3)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $b = F(a)$, $c = F^2(a)$ και $d = F^3(a)$. Υποθέτουμε ότι $d \leq a < b < c$ και γράφουμε $K = [a, b]$ και $L = [b, c]$.

Βήμα 1: Επειδή $F(b) = c$ και $F(c) = d \leq a$ μπορούμε να επιλέξουμε διαστήματα $[b^n, c^n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ώστε

$$(a) [b, c] = [b^0, c^0] \supset [b^1, c^1] \supset \dots \supset [b^n, c^n] \supset \dots$$

$$(b) F(x) \in (b^n, c^n) \text{ για κάθε } x \in (b^{n+1}, c^{n+1})$$

$$(c) F(b^{n+1}) = c^n, F(c^{n+1}) = b^n$$

Απόδειξη: Εφόσον $F(b) = c$, $F(c) = d \leq a < b$ και $b = b^0$, $c = c^0$, έχουμε ότι $F([b^0, c^0]) \supset [d, c]$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο $b^1 \in [b^0, c^0]$ τέτοιο ώστε $F(b^1) = c^0$. Επειδή, $F([b^1, c^0]) \supset [d, c^0] \ni b^0$ τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο $c^1 \in [b^1, c^0]$ τέτοιο ώστε $F(c^1) = b^0$. Κατ' επέκταση, μπορούμε επαγωγικά να διαλέξουμε b^n και c^n τέτοια ώστε:

$$b^{n+1} = \max\{x \in [b^n, c^n] | F(x) = c^n\}$$

$$c^{n+1} = \min\{x \in [b^{n+1}, c^n] | F(x) = b^n\}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε διαστήματα $[b^n, c^n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα (a), (b), (c).

Στη συνέχεια, αν $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} [b^n, c^n]$, τότε $A \neq \emptyset$. Έστω $b^* = \inf A$ και $c^* = \sup A$, τότε $F(b^*) = c^*$ και $F(c^*) = b^*$ σαν αποτέλεσμα της (c).

Βήμα 2: Έστω, $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία διαστημάτων έτσι ώστε:

$$(a) \text{ Αν } M_n = K \text{ τότε } n = k^2 \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}$$

$$(b) \text{ Αν } M_n = K \text{ για } n = k^2 \text{ και } n = (k+1)^2 \text{ τότε}$$

$$M_n = [b^{2k-(2j-1)}, b^*] \text{ για } n = k^2 + (2j-1), \text{ για } j = 1, \dots, k$$

$$M_n = [c^*, c^{2k-2j}] \text{ για } n = k^2 + 2j, \text{ για } j = 1, \dots, k$$

$$(c) \text{ Αν } n \neq k^2 + j, j = 0, 1, \dots, 2k \text{ τότε } M_n = L \text{ καθώς και για τα υπόλοιπα } n.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν $M_n = K$ για $n = k^2$ και $n = (k+1)^2$ τότε για κάθε τιμή του n ανάμεσα στα k^2 και $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ το M_n δίνεται από τα διαστήματα που δόθηκαν παραπάνω. Αλλιώς σε όλες τις άλλες τιμές του n το $M_n = L$.

Έστω $\mathcal{M} = \{M = (M_n)_{n=1}^{\infty}\}$, ώστε να ικανοποιούνται τα (a), (b), (c) από το Βήμα 2. Έτσι αν $M = (M_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$ τότε ισχύουν τα:

(I₁) $M_n = K$ ή $M_n \subset L$ και $F(M_n) \supset M_{n+1}$

(I₂) Αν $M_n = K$ τότε $M_{n+1}, M_{n+2} \subset L$

Αν $M \in \mathcal{M}$, ορίζουμε

$$P(M, n) = \#\{i \leq n : M_i = K\}$$

Παρατηρούμε ότι, $P(M, n^2) \leq n$ για κάθε $M \in \mathcal{M}$

Βήμα 3: Για κάθε $r \in (0, 1)$ υπάρχει $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{M}$ ώστε,

$$(I_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(M^r, n^2)}{n} = r$$

Απόδειξη:

(i) Έστω $r = \frac{l}{m}$ με $l, m \in \mathbb{N}$ και $l < m$. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το M^r τέτοιο ώστε να είναι ίσο με:

$$M^r : \left. \begin{array}{l} K, L_1, L_2 \\ K, L_3, L_4, L_5, L_6 \\ K, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12} \\ K, \\ \vdots \\ K, L, L, L, \\ L, \\ L, \\ \vdots \\ L, L, L, L \\ K \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} l \\ m \end{array}$$

Δηλαδή, για $n = k^2$ με $k = 1, 2, \dots, l$, το M_n^r θα είναι ίσο με K . Στις ενδιάμεσες θέσεις ανάμεσα σε δύο τετράγωνα το M_n^r

θα είναι υποσύνολο του L ενώ για τις υπόλοιπες θέσεις μέχρι $n = (m + 1)^2 - 1$ το M_n^r θα είναι ίσο με L . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται περιοδικά και για τις επόμενες τιμές του n . Έτσι κάθε φορά θα έχουμε ότι $P(M^r, n^2) = l$ για $n = m$.

- (ii) Έστω $r \notin \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει ακολουθία $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $r_n \in \mathbb{Q}$. Για παράδειγμα, αν $r = \frac{\pi}{4}$ τότε μπορούμε να διαλέξουμε τόσα τετράγωνα να είναι ίσα με K ώστε το ψηφίο που αντιστοιχεί στη θέση των δεκάτων του r να ικανοποιεί τη σχέση (I_3) , μετά το ψηφίο που αντιστοιχεί στη θέση των εκατοστών και ούτω καθεξής. Στο παράδειγμα μας όπου, $r = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981634\dots$ μπορούμε να πάρουμε τα 7 από τα πρώτα 10 τετράγωνα να είναι ίσα με K , μετά τα 78 από τα πρώτα 100 να είναι K , μετά τα 785 από τα 1000 κ.ο.κ.

Βήμα 4: Έστω $\mathcal{M}_0 = \{M^r : r \in (\frac{3}{4}, 1)\}$. Τότε $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ είναι μη-αριθμήσιμο. Πράγματι, έστω $r_1, r_2 \in (\frac{3}{4}, 1)$ τέτοια ώστε $r_1 \neq r_2$. Τότε $M^{r_1} \neq M^{r_2}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε r υπάρχει ένα μοναδικό M^r . Εφόσον το σύνολο $(\frac{3}{4}, 1)$ είναι μη-αριθμήσιμο συνεπάγεται ότι το σύνολο των πιθανών τιμών του r είναι μη-αριθμήσιμο και συνεπώς το \mathcal{M}_0 είναι μη-αριθμήσιμο. Για κάθε $M^r \in \mathcal{M}_0$ σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 έχουμε ότι υπάρχει ένα σημείο x_r τέτοιο ώστε $F^n(x_r) \in M_n^r$ για κάθε n . Ορίζουμε $S = \{x_r : r \in (\frac{3}{4}, 1)\}$, τότε το S δεν έχει περιοδικά σημεία και είναι μη-αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω ότι $F^k(x_r) = b$ τότε θα έχουμε ότι $F^{k+2}(x_r) = d$, αλλά $F^{k+2}(x_r) \in M_{k+2}^r \subset (L \cup K) = ([b, c] \cup [a, b]) = [a, c]$. Για να ισχύει λοιπόν αυτό, θα πρέπει $a = d$. Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned} F^{k+3}(x_r) &= F(F^{k+2}(x_r)) \\ &= F(a) \\ &= b \\ &= F^k(x_r) \end{aligned}$$

Από αυτό προκύπτει ότι το x_r είναι τελικά περιοδικό σημείο περιόδου τρία, συνεπώς το S δεν έχει περιοδικά σημεία. Εφόσον $a \in K$ δηλαδή $a \notin L$ και $F^{k+2}(x_r) = a \in M_{k+2}^r$ τότε $F^{k+2}(x_r) \in K$. Τότε σύμφωνα με το (I_2) προκύπτει ότι $F^{k+3}(x_r) \in L$ και $F^{k+4}(x_r) \in L$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
F^{k+3m+2}(x_r) &= F^{3m}(F^{k+2}(x_r)) \\
&= F^{3m}(a) \\
&= a \notin L
\end{aligned}$$

Όμως επειδή οι τιμές για τις οποίες το M_n^r μπορεί να είναι ίσο με K δεν είναι περιοδικές (αφού μπορεί να είναι ίσο με K μόνο σε τετράγωνα και η εμφάνιση των τετραγώνων δεν είναι περιοδική), έχουμε ότι για κάποιες τιμές του m το $M_{k+3m+2}^r \neq K$ το οποίο είναι άτοπο αφού $a \in K$. Άρα $F^k(x_r) \neq b$ για κάθε $x_r \in S$, οπότε το $x_r \in K$ ή $x_r \in L$ όχι όμως και στα δύο. Επειδή $F(x_r) \neq b$, έχουμε ότι για $r_1 \neq r_2$ ισχύει $x_{r_1} \neq x_{r_2}$, άρα το S είναι μη αριθμήσιμο.

Βήμα 5: Αν $x_r \in S$, ορίζουμε:

$$P(x_r, n) = \#\{i \leq n : F^i(x_r) \in K\}$$

Παρατηρούμε ότι, $P(x_r, n) = P(M^r, n)$ για κάθε n .

Επιπλέον για κάθε r , ορίζουμε:

$$\rho(x_r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(x_r, n^2)}{n} = r$$

Έστω ότι $p, q \in S$ με $p \neq q$ και έστω ότι $\rho(p) > \rho(q)$. Μπορούν να υπάρχουν άπειρα n για τα οποία $F^n(p) \in K$ και $F^n(q) \in L$ ή το αντίθετο. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(p, n^2)}{n} > \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(q, n^2)}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(p, n^2) - P(q, n^2)}{n} > 0 \in \mathbb{R}$$

Για να ισχύει αυτό, αφού ο παρανομαστής τείνει στο άπειρο καθώς $n \rightarrow +\infty$, θα πρέπει και ο αριθμητής να τείνει στο άπειρο.

$$\begin{aligned}
P(p, n^2) - P(q, n^2) \rightarrow +\infty &\Rightarrow P(p, n^2) \text{ αυξάνεται, } P(q, n^2) \text{ παραμένει σταθερό} \\
&\Rightarrow F^n(p) \in K \text{ ενώ } F^n(q) \in L, \text{ καθώς } n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

Στο διάστημα $K = [a, b]$ έχουμε ότι, $F^2(a) = c$, $F^2(b) = d \leq a$ και η F^2 είναι συνεχής. Άρα, από τον ορισμό της συνέχειας, στο σημείο $x_0 = b$ θα έχουμε:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in K \text{ και } |x - b| < \delta \Rightarrow |F^2(x) - F^2(b)| < \epsilon$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned} |x - b| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - b < \delta \\ &\Rightarrow b - \delta < x < b + \delta \end{aligned}$$

Αφού, $x \in K$ και $b - \delta < x < b + \delta$, έχουμε ότι $x \in [b - \delta, b]$

Επιπλέον, για $\epsilon = \frac{b-d}{2}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} |F^2(x) - F^2(b)| < \frac{b-d}{2} &\Rightarrow F^2(x) - d < \frac{b-d}{2} \\ &\Rightarrow F^2(x) < d + \frac{b-d}{2} \\ &\Rightarrow F^2(x) < \frac{b+d}{2} \end{aligned}$$

Αφού $p \in S$ και $F^n(p) \in K$, τότε από το (I₂) έχουμε ότι $F^{n+1}(p) \in L$ και $F^{n+2}(p) \in L$. Οπότε $F^2(F^n(p)) \in L = [b, c]$. Αν $F^n(p) \in [b - \delta, b]$, τότε $F^2(F^n(p)) < \frac{b+d}{2}$, όμως $\frac{b+d}{2} < b$ αφού $d < b$, άρα $F^2(F^n(p)) \notin L$, άτοπο. Άρα

$$F^n(p) \notin [b - \delta, b] \Rightarrow F^n(p) < b - \delta.$$

Επιπλέον, $F^n(q) \in L$ οπότε, $F^n(p) < b - \delta < b < F^n(q)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |F^n(p) - F^n(q)| &= F^n(p) - F^n(q) \\ &> b - (b - \delta) \\ &= \delta \end{aligned}$$

Το σύνολο,

$$\{|F^k(p) - F^k(q)| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ και } F^k(p) \in K \text{ και } F^k(q) \in L\}$$

είναι άπειρο και όλες οι τιμές που ανήκουν στο σύνολο είναι μεγαλύτερες του δ . Άρα προκύπτει ότι:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

Βήμα 6: Συνεχίζουμε για να αποδείξουμε την 4.3 εξίσωση, θεωρούμε ότι $p \in S$ αλλά $q \in J$, που είναι περιοδικό σημείο με περίοδο k . Όπως και στο προηγούμενο βήμα έχουμε ότι,

$$F^n(p) \in K, \text{ άρα υπάρχει } \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } F^n(p) < b - \delta.$$

Θωρούμε διαστήματα I_n όπως τα έχουμε ορίσει στην απόδειξη του θεωρήματος 2.1 τέτοια ώστε $F^n(q) \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $I_n = K$ όταν $n = jk-1$ με $j \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως είδαμε νωρίτερα, το σύνολο των τετραγώνων δεν είναι περιοδικό τότε το σύνολο των n για τα οποία $F_n(p) \in K$ και $F_n(q) \in L$ είναι άπειρο.

Όμοια λοιπόν το σύνολο,

$$\{|F^k(p) - F^k(q)| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ και } F^k(p) \in K \text{ και } F^k(q) \in L\}$$

είναι άπειρο και όλες οι τιμές που ανήκουν στο σύνολο είναι μεγαλύτερες του δ . Άρα προκύπτει ότι:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

Βήμα 7: Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει ότι το $r \in (0, 1)$. Στη συνέχεια της εργασίας θα γίνει σαφές ότι χρειάζεται το r να είναι μεγαλύτερο από $3/4$. Θεωρούμε λοιπόν, $r, r^* \in (3/4, 1)$ με $r \neq r^*$. Επιλέγουμε $M^r, M^{r^*} \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε:

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(M^r, n^2)/n$$

και

$$r^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(M^{r^*}, n^2)/n.$$

Ορίζουμε το σύνολο $B = \{B_n\}$ έτσι ώστε $B_k = 1$ αν και μόνο αν $M_{k^2}^r = K$ και $B_k = 0$ σε κάθε άλλη περίπτωση. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το σύνολο $B^* = \{B_n^*\}$ έτσι ώστε $B_k^* = 1$ αν και μόνο αν $M_{k^2}^{r^*} = K$, διαφορετικά $B_k^* = 0$. Τότε από το (I_3) και τον ορισμό που έχουμε δώσει για το M^r έχουμε:

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{m=1}^n B_m \right) / n \right)$$

και

$$r^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{m=1}^n B_m^* \right) / n \right)$$

Στην συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $Z = \{Z_n\}$ έτσι ώστε

- $Z_k = a$ αν και μόνο αν $B_k = 0, B_k^* = 0$
- $Z_k = b$ αν και μόνο αν $B_k = 0, B_k^* = 1$

- $Z_k = c$ αν και μόνο αν $B_k = 1, B_k^* = 0$
- $Z_k = d$ αν και μόνο αν $B_k = 1, B_k^* = 1$

Αν για παράδειγμα έχουμε $r = 4/5$ και $r^* = 5/6$ τότε,

M^r :

K, L_1, L_2

K, L_3, L_4, L_5, L_6

$K, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}$

$K, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{16}, L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20}$

$L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L$

$K, L_{21}, L_{22}, L_{23}, \dots$

και

M^{r^*} :

K, L_1, L_2

K, L_3, L_4, L_5, L_6

$K, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}$

$K, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{16}, L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20}$

$K, L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{24}, L_{25}, L_{26}, L_{27}, L_{28}, L_{29}, L_{30}$

$L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L, L$

$K, L_{31}, L_{32}, L_{33}, \dots$

Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα B και B^* θα είναι,

$$B = \{ 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots \}$$

$$B^* = \{ 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots \}$$

και συνεπώς το σύνολο Z θα είναι,

$$Z = \{ d, d, d, d, b, c, d, d, d, b, d, c, d, d, b, d, d, c, \dots \}$$

Είναι φανερό και από το παραπάνω παράδειγμα ότι,

- (α') αφού $r > 3/4$ θα έχουμε ότι $Z_k \in \{c, d\}$ περισσότερες από τρεις στις τέσσερις φορές. Αυτό σημαίνει ότι $Z_k = b$ λιγότερο από μια στις τέσσερις φορές.
- (β') αφού $r^* > 3/4$ θα έχουμε ότι $Z_k \in \{b, d\}$ περισσότερες από τρεις στις τέσσερις φορές. Αυτό συνεπάγεται ότι $Z_k = c$ λιγότερο από μια στις τέσσερις φορές.

Εμάς μας ενδιαφέρει πόσες φορές θα έχουμε $Z_k = d$ σε δύο διαδοχικές θέσεις. Παρατηρούμε ότι $Z_k = Z_{k+1} = d$ αν και μόνο αν $B_k = B_{k+1} = B_k^* = B_{k+1}^* = 1$. Έστω επιπλέον ότι, $Z_k = d$ λιγότερες ή ίσες από τις μισές φορές. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε $Z_k = c$ περισσότερες από μία στις τέσσερις φορές, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τα παραπάνω. Συνεπώς, θα έχουμε ότι $Z_k = d$ περισσότερες από τις μισές φορές. (Με αυτό φαίνεται ότι στις περισσότερες από τις μισές θέσεις εμφανίζεται το d , ο στόχος είναι να δείξουμε ότι στις περισσότερες από τις μισές θέσεις εμφανίζονται δύο διαδοχικά d). Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $Z_k = d$ θα πρέπει να έχω τουλάχιστον και ένα $Z_k \neq d$, δηλαδή $Z_k = d$ για λιγότερες ή ίσες από τις μισές φορές, κάτι το οποίο είναι άτοπο όπως φαίνεται παραπάνω. Άρα $Z_k = Z_{k+1} = d$ και κατ' επέκταση $B_k = B_{k+1} = B_k^* = B_{k+1}^* = 1$ συμβαίνει άπειρες φορές.

Άρα υπάρχουν άπειρα n τέτοια ώστε $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ για $k = n^2$ και $k = (n+1)^2$. Θεωρούμε $x_r \in S$ και $x_{r^*} \in S$. Αφού έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n) = b^*$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n) = c^*$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N με $|b_n - b^*| < \epsilon$ και $|c_n - c^*| < \epsilon$ για κάθε $n > N$. Τώρα, για κάθε n με $n > N$ και $M_n^r = M_n^{r^*} = K$ για $n = k^2$ και $n = (k+1)^2$, έχουμε

$$F^{k^2+1}(x_r) \in M_n^r = [b^{2k-1}, b^*]$$

$$F^{k^2+1}(x_{r^*}) \in M_n^{r^*} = [b^{2k-1}, b^*]$$

με $n = k^2 + 1$.

Συνεπώς, $|F^{k^2+1}(x_r) - F^{k^2+1}(x_{r^*})| < \epsilon$. Έτσι από τον ορισμό του ορίου θα έχουμε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf |F^n(p) - F^n(q)| = 0$$

□

Κεφάλαιο 3

Η Λογιστική απεικόνιση στα Διακριτά Δυναμικά Συστήματα

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη διακριτή λογιστική απεικόνιση ως ένα «απλό μαθηματικό πρότυπο με πολύπλοκες δυναμικές ιδιότητες», τις οποίες συναντάμε σε πολλά δυναμικά συστήματα. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος των Li & Yorke και παρουσιάζει χαοτικά διαστήματα. Η λογιστική εξίσωση έχει σημαντικές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες, πολλές από τις οποίες ανακαλύφθηκαν από τον Robert May ("Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," Nature 261, 459, 1976).

Ο βασικός τύπος της συνεχής λογιστικής εξίσωσης είναι:

$$x' = ax(1 - x) \tag{3.1}$$

Η εξίσωση αυτή σε πολλές εφαρμογές, αντιπροσωπεύει ένα απλό μοντέλο για την εξέλιξη της πυκνότητας ενός πληθυσμού που αυξάνεται σχέδον εκθετικά για μικρή αρχική πυκνότητα και υποχωρεί στο $x = 1$. Η παράμετρος a είναι ο εγγενής ρυθμός ανάπτυξης. Όμως οι πληθυσμοί δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου αλλά μεταβάλλονται σε διακριτά χρονικά σημεία. Συνεπώς, για να μετατρέψουμε την εξίσωση σε διακριτή χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Euler. Θέτουμε $b = ha \Rightarrow \frac{b}{h} = a$, όπου $h = t_{n+1} - t_n$ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων και παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση διαφοράς:

$$\begin{aligned}
x' = \alpha x(1-x) &\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{b}{h} x_n(1-x_n) \\
&\Rightarrow x_{n+1} = x_n + bx_n(1-x_n) \\
&\Rightarrow x_{n+1} = x_n + bx_n - bx_n^2 \\
&\Rightarrow x_{n+1} = bx_n \left(\frac{1+b}{b} - x_n \right)
\end{aligned}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, $x_n \rightarrow [\frac{1+b}{b}]x_n$ και $x_{n+1} \rightarrow [\frac{1+b}{b}]x_{n+1}$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = bx_n \left(\frac{1+b}{b} - x_n \right) &\Rightarrow \frac{1+b}{b} x_{n+1} = b \frac{1+b}{b} x_n \left(\frac{1+b}{b} - \frac{1+b}{b} x_n \right) \\
&\Rightarrow x_{n+1} = (1+b)x_n(1-x_n)
\end{aligned}$$

Επιπλέον αν θέσουμε $1+b \equiv \lambda$, καταλήγουμε στη διακριτή μορφή της εξίσωσης:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n).$$

όπου x_n είναι το ποσοστό επί του μέγιστου δυνατού πληθυσμού κατά τη n -οστή επανάληψη, οπότε θα πρέπει $0 < x_n < 1$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην απεικόνιση:

$$f(\lambda, x) = \lambda x(1-x) \quad \lambda > 1. \quad (3.2)$$

3.2 Επίλυση της λογιστικής εξίσωσης

Ξεκινάμε τη μελέτη της λογιστικής απεικόνισης βρίσκοντας τα σταθερά σημεία, δηλαδή λύνοντας την εξίσωση $f(\lambda, x) = x$. Υπάρχουν δυο σταθερά σημεία το $x_1^* = 0$ και το $x_2^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Αφού υποθέσαμε $\lambda > 1$ το x_2^* βρίσκεται στο $(0, 1)$. Επίσης έχουμε ότι $f'(\lambda, x) = \lambda(1-2x)$:

Συνεπώς, για κάθε σταθερό σημείο θα έχουμε,

$$f'(\lambda, x_1^*) = f'(\lambda, 0) = \lambda, \quad f'(\lambda, x_2^*) = f'(\lambda, 1 - \frac{1}{\lambda}) = 2 - \lambda \quad (3.3)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση $f(\lambda, x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $f'(x) = 0 \Rightarrow \lambda(1-2x) = 0 \Rightarrow x = 1/2$, το οποίο είναι ίσο με $f(1/2) = \lambda/4$. Άρα, αν $\lambda > 4$, τότε $f(1/2) > 1$, γεγονός το οποίο με κατάλληλη επιλογή της αρχικής τιμής του πληθυσμού θα οδηγήσει σε $x_{n+1} > 1$ για κάποιο n . Οπότε το ενδιαφέρον εύρος των τιμών του λ είναι $1 < \lambda < 4$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα λήμμα που δείχνει το ενδιαφέρον δυναμικό της λογιστικής απεικόνισης που παρουσιάζεται στο διάστημα $(0, 1)$ όταν $1 < \lambda < 4$. Προφανώς ισχύει ότι $f(\lambda, 1) = f(\lambda, 0) = 0$.

Λήμμα 3.1. *Θεωρώ τη λογιστική απεικόνιση :*

- (i) Έστω ότι $\lambda > 1$. Αν $x_0 < 0$ ή $x_0 > 1$, τότε $f^n(\lambda, x_0) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow +\infty$
- (ii) Έστω ότι $1 < \lambda < 4$. Αν $x_0 \in (0, 1)$, τότε $f^n(\lambda, x_0) \in (0, 1)$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

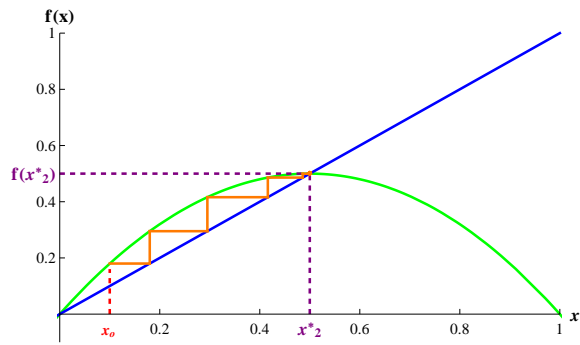
Απόδειξη. (i) Αν $x_0 < 0$ τότε $f^n(\lambda, x_0) < x_0$. Οπότε η $f^n(\lambda, x_0)$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Αυτή η ακολουθία δε μπορεί να συγκλίνει καθώς η f δεν έχει αρνητικά σταθερά σημεία. Αν $x_0 > 1$ τότε $f(\lambda, x_0) < 0$, οπότε ισχύει πάλι το ίδιο επιχείρημα.

- (ii) Αφού $1 < \lambda < 4$ όπως δείξαμε και παραπάνω η μέγιστη τιμή της $f(\lambda, x)$ είναι μικρότερη από το ένα.

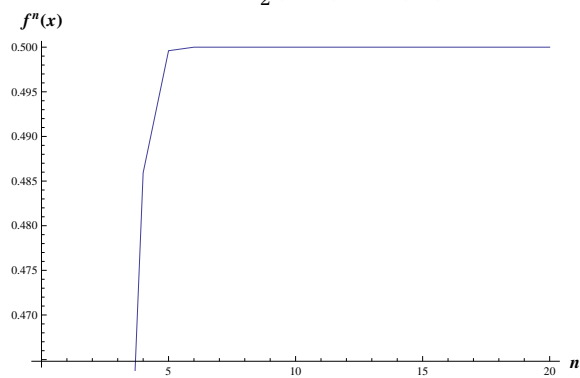
□

Ας ερευνήσουμε τώρα τη δυναμική της λογιστικής απεικόνισης για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

- Οι αναλυτικές λύσεις της δεν είναι γνώστες παρά μόνο για $\lambda = 2$ και $\lambda = 4$. Για $\lambda = 2$ έχουμε $x_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - x_0)^{2^n})$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$ (Σχήμα 3.1).



$$(α') x_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - x_0)^{2n})$$



$$(β') \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

Σχήμα 3.1: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 2$ και $x_0 = 0.1$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε $x_n = \sin^2(2^n \sin^{-1} \sqrt{x_0})$. Έχουμε διπλάδι περιοδικές τροχιές για x_0 που δίνουν όρισμα ρητό πολλαπλάσιο του π και μη περιοδικές για x_0 που δίνουν όρισμα άρρητο πολλαπλάσιο του π . Για τις υπόλοιπες τιμές του λ θα χρησιμοποιήσουμε αριθμητική επίλυση για να μελετήσουμε τις τροχιές της λογιστικής εξίσωσης.

- $1 < \lambda < 3$: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2 και έχοντας υπόψιν τις εξισώσεις (3.3) βλέπουμε ότι,

$$\lambda > 1 \Rightarrow f'(\lambda, 0) > 1$$

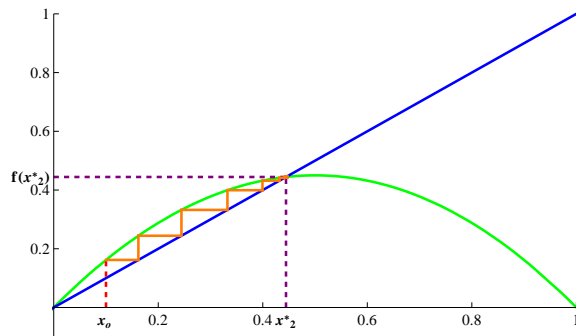
και

$$\begin{aligned}
1 < \lambda < 3 &\Rightarrow -1 > -\lambda > -3 \\
&\Rightarrow 2 - 1 > 2 - \lambda > 2 - 3 \\
&\Rightarrow -1 < 2 - \lambda < 1 \\
&\Rightarrow -1 < f'(\lambda, 1 - \frac{1}{\lambda}) < 1
\end{aligned}$$

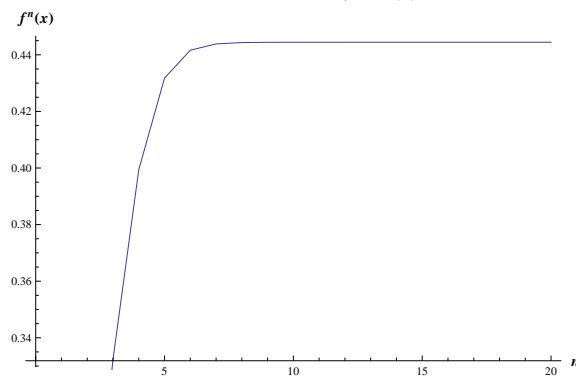
Συνεπώς, το σταθερό σημείο $x_1^* = 0$ είναι ασταθές και το $x_2^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Συγκεκριμένα αν $0 < x_0 < 1$, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 το $f^n(\lambda, x_0) \in (0, 1)$, συνεπώς $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\lambda, x_0) = x_2^*$ για κάθε x_0 εφόσον το x_2^* είναι ελκυστής και μετά από n επαναλήψεις η τροχιά θα τείνει σε αυτό το σταθερό σημείο. Άρα το x_2^* σε αυτή την περίπτωση θα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

Ωστόσο ο τρόπος με τον οποίο οι λύσεις προσεγγίζουν το x_2^* εξαρτάται από την τιμή του λ . Ας υποθέσουμε ότι $0 < x_0 \leq 0.5$. Τότε αν $x_0 \neq x_2^*$ και $f'(\lambda, x) > 0$ έχουμε $|f(\lambda, x_0) - x_2^*| < |x_0 - x_2^*|$, δηλαδή $f^n(\lambda, x_0) \rightarrow x_2^*$ μονότονα καθώς $n \rightarrow +\infty$ (Σχήμα 3.2).



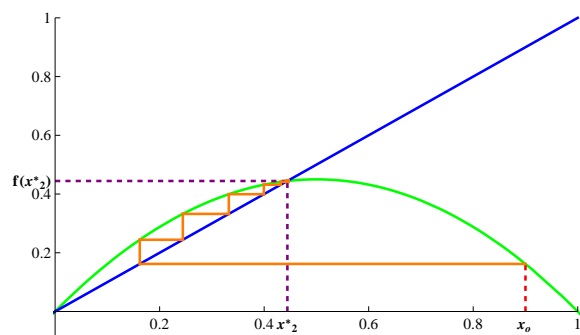
(α') Μονότονη προσέγγιση.



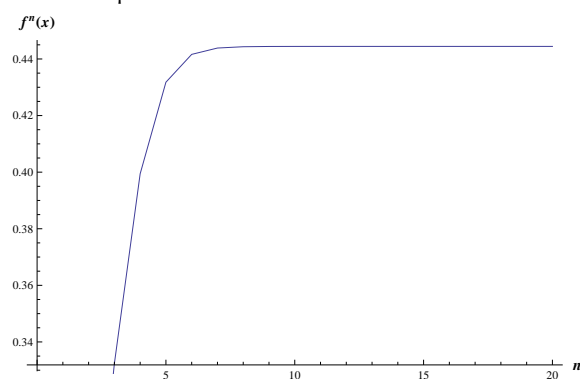
(β') Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο το x_2^* .

Σχήμα 3.2: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 1.8$ και $x_0 = 0.1$.

Το ίδιο επιχειρήμα εφαρμόζουμε στην περίπτωση $0.5 < x_0 < 1$ επισημαίνοντας ότι η πρώτη επανάληψη $f(\lambda, x_0)$ βρίσκεται στο διάστημα $(0, 0.5)$. Άρα είναι φανερό με βάση τις εξισώσεις (3.3) όταν $1 < \lambda < 2$, ότι το πολύ μετά από μια επανάληψη οι λύσεις προσεγγίζουν το x_2^* μονότονα όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 3.3.



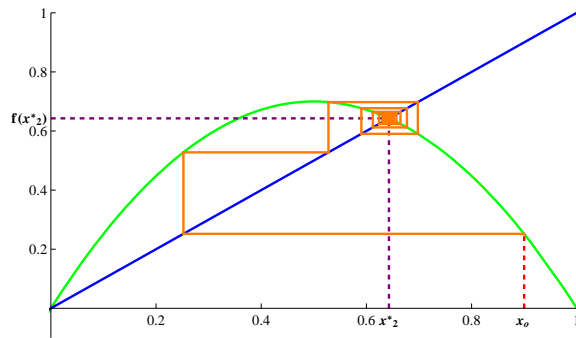
(α) Μονότονη προσέγγιση μετά την πρώτη επανάληψη.



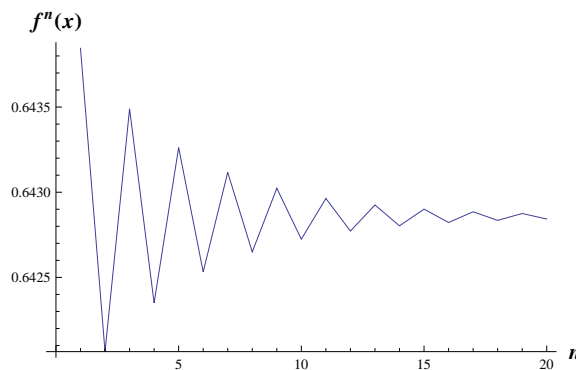
(β') Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο το x_2^* .

Σχήμα 3.3: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 1.8$ και $x_0 = 0.9$.

Αν $2 < \lambda < 3$, το x_2^* παραμένει ελκυστής αλλά η προσέγγισή του δεν είναι πλέον μονότονη. Βλέπε Σχήμα 3.4.



(α') Μη μονότονη προσέγγιση.



(β') Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο το x_2^* .

Σχήμα 3.4: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 2.8$ και $x_0 = 0.9$.

- $\lambda = 3$: Το σταθερό σημείο $x_1^* = 0$ εξακολουθεί να είναι αστάθες, αλλά δε μπορούμε να αποφανθούμε για το x_2^* χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2 καθώς $f'(x_2^*) = -1$. Μπορούμε όμως να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το $\lambda = 3$ είναι πιθανή τιμή εμφάνισης διακλάδωσης. Ο ορισμός που ακολουθεί μαζί με το επόμενο Θεώρημα, θα μας βοηθήσουν να αποφανθούμε για την ευστάθεια σταθέρων σημείων όπου $f'(x^*) = -1$.

Ορισμός 3.1. Η παράγωγος του Schwartz $Sf(x)$ της $f(x)$ είναι η συνάρτηση:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

Η $Sf(x)$ ορίζεται όταν η $f'''(x)$ υπάρχει και $f'(x) \neq 0$. Αν $f'(x) = -1$, τότε

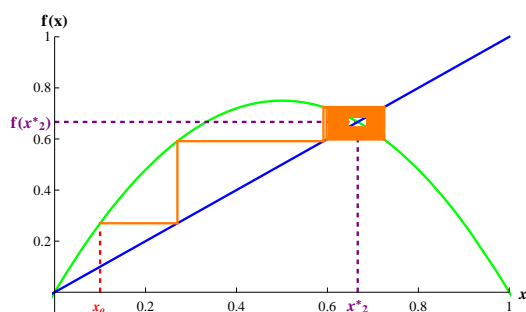
$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2$$

Θεώρημα 3.1. ¹ Υποθέτουμε ότι το x^* είναι σταθερό σημείο της $f(x)$ και $f'(x^*) = -1$. Αν οι $f'(x)$, $f''(x)$ και $f'''(x)$ είναι συνεχείς στο $x = x^*$ τότε:

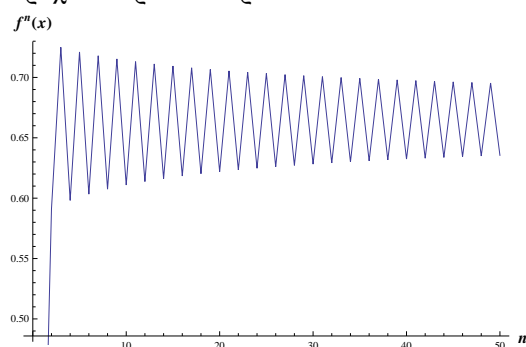
Αν $S f(x) < 0$, το $x = x^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο.

Αν $S f(x) > 0$, το $x = x^*$ είναι ασταθές σταθερό σημείο.

Στην περίπτωση λοιπόν που $\lambda = 3$ το σταθερό σημείο $x_2^* = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{3}$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $S f(\frac{2}{3}) = 0 - \frac{3}{2}[6]^2 < 0$, άρα το x_2^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (Σχήμα 3.5).



(α) Ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου τρία



(β) Γραφική απεικόνιση της $f^n(x)$ για $n = 50$

Σχήμα 3.5: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.839$ και $x_0 = 0.1$.

- $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$: Σε αυτή την περίπτωση τα σταθερά σημεία x_1^* και x_2^* είναι ασταθή γι' αυτό οι επαναλήψεις $f^n(\lambda, x_0)$ δεν προσεγγίζουν

¹Geoffrey R. Goodson (2015), Chaotic Dynamics: Fractals, Tilings and Substitutions, Towson University Mathematics Department, 41.

κανένα απ' τα δύο σημεία. Ωστόσο παραμένουν στο διάστημα $(0, 1)$. Καθώς το λ ξεπερνάει το τρία, το σταθερό σημείο x_2^* υπόκειται σε διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου και κάνει την εμφάνισή της μια ασυμπτωτικά ευσταθής περιοδική τροχιά, περιόδου δύο. Βλέπε Σχήμα 3.8.

Η ύπαρξη και η ασυμπτωτική ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς μπορεί να καταστεί σαφής λύνοντας την εξίσωση $f^2(\lambda, x) = x$.

$$\begin{aligned} f^2(\lambda, x) = x &\Rightarrow f(f(\lambda, x)) = x \\ &\Rightarrow \lambda(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x)) - x = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) - x = 0 \quad (3.4) \\ &\Rightarrow (\lambda^2 x - \lambda^2 x^2)(1-\lambda x - \lambda x^2) - x = 0 \\ &\Rightarrow -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - \lambda^2(\lambda+1)x^2 + (\lambda^2-1)x = 0 \end{aligned}$$

Για να έχουμε περιοδική τροχιά με περίοδο 2 θέλουμε η εξίσωση (3.4) να έχει δύο πραγματικές λύσεις διαφορετικές από τις λύσεις της $f(x) = x$. Επειδή οι x_1^* και x_2^* είναι λύσεις και της $f^2(x) = x$ η (3.4) μπορεί να γραφτεί στη μορφή,

$$\begin{aligned} x(x - (1 - \frac{1}{\lambda}))(Ax^2 + Bx + C) &= 0 \Rightarrow \\ (x^2 - (1 - \frac{1}{\lambda})x)(Ax^2 + Bx + C) &= 0 \Rightarrow \quad (3.5) \\ Ax^4 + (B - A(1 - \frac{1}{\lambda}))x^3 + (C - (1 - \frac{1}{\lambda})B)x^2 - (1 - \frac{1}{\lambda})Cx &= 0 \end{aligned}$$

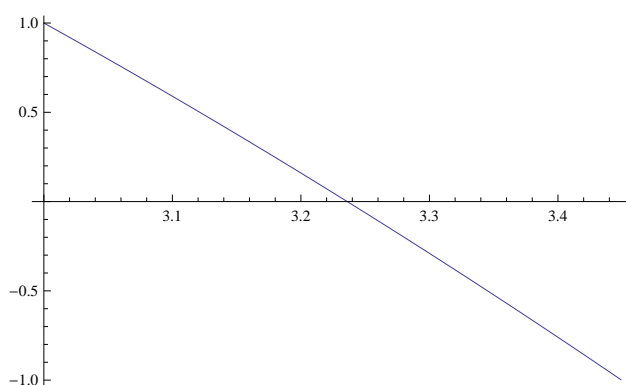
Συγκρίνοντας τους συντελεστές στις (3.4) και (3.5) συμπαιρνουμε ότι $A = -\lambda^3$, $B = \lambda^2(\lambda+1)$ και $C = -\lambda(\lambda+1)$. Οι ρίζες του διωνύμου καθορίζονται από τη διακρίνουσα $\Delta = B^2 - 4AC = \lambda^4(\lambda+1)(\lambda-3)$. Για τις τιμές λοιπόν του λ που μας ενδιαφέρουν, η διακρίνουσα γίνεται θετική για $\lambda > 3$ και τότε έχουμε δύο διακριτές λύσεις,

$$x_a^* = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{(\lambda+1) \mp \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda} \quad a = 3, 4$$

Για τη μελέτη της ευστάθειας των λύσεων της $f^2(x) = x$ χρησιμοποιούμε όπως και πριν το Θεώρημα 1.2 για τις τιμές x_3^* και x_4^* . Από τον κανόνα της αλυσίδας και δεδομένου ότι $f(x_3^*) = x_4^*$ και $f(x_4^*) = x_3^*$ έχουμε ότι,

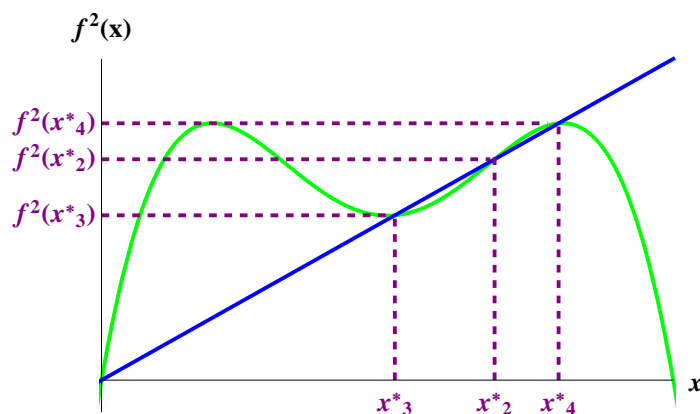
$$\begin{aligned}
 (f^2)'(x_3^*) &= (f^2)'(x_4^*) = f'(x_3^*)f'(x_4^*) = \\
 &\lambda \left(1 - 2 \frac{(\lambda + 1) + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}\right) \lambda \left(1 - 2 \frac{(\lambda + 1) - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}\right) = \\
 &-\lambda^2 + 2\lambda + 4
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 3$ έχουμε $(f^2)'(x_3^*) = (f^2)'(x_4^*) = 1$ και για $\lambda = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ έχουμε $(f^2)'(x_3^*) = (f^2)'(x_4^*) = -1$. Στις ενδιάμεσες τιμές $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 3.6, έχουμε ότι οι παράγωγοι ικανοποιούν τη σχέση $|(f^2)'(x_a^*)| < 1$ για $a = 3, 4$.

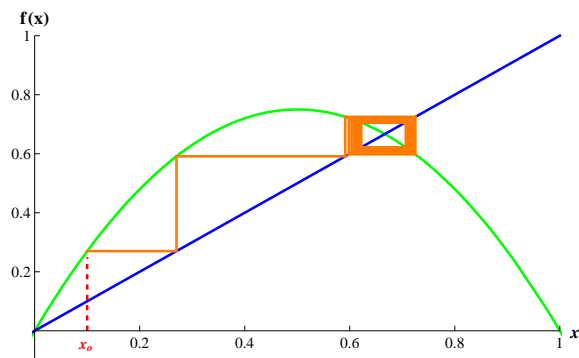


Σχήμα 3.6: Γραφική απεικόνιση της $(f^2)'(x_3^*) = (f^2)'(x_4^*) = -\lambda^2 + 2\lambda + 4$ για $-1 < \lambda < 1$

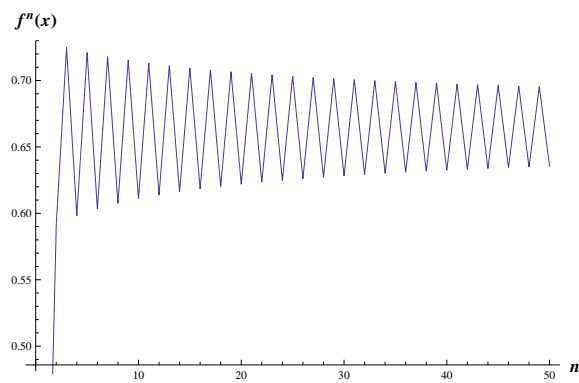
Άρα στην περίπτωση αυτή τα σημεία x_3^* και x_4^* είναι ευσταθείς λύσεις της $f^2(x) = x$. Στα Σχήματα 3.7 και 3.8 δίνεται ένα παράδειγμα για $\lambda = 3.2$.



Σχήμα 3.7: Γραφική απεικόνιση των $y = f^2(x)$ και $y = x$ για $\lambda = 3.2$



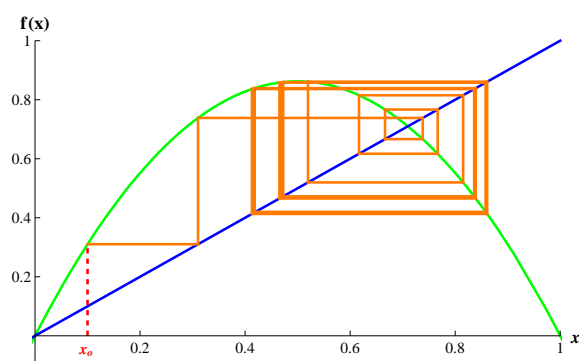
(α') Ασυμπτωτικά ευσταθής τροχιά περιόδου δύο.



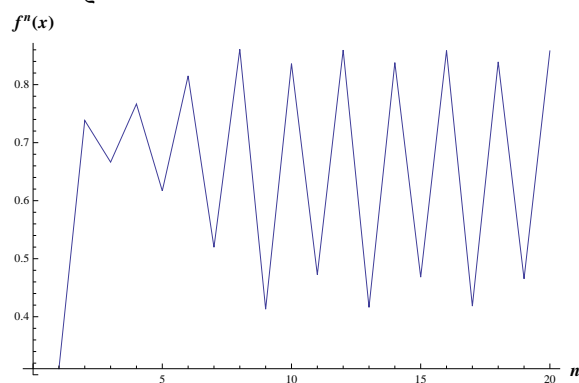
(β') Δύο ευσταθή σημεία, x_3^* και x_4^* .

Σχήμα 3.8: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.2$ και $x_0 = 0.1$.

- $3.449 < \lambda < 3.570$: Για $\lambda = 3.449$ η τροχιά περιόδου δύο χάνει την ευστάθειά της και κάνει την εμφάνισή της μια ασυμπτωτικά ευσταθής τροχιά περιόδου τέσσερα (Σχήμα 3.9).



(α') Ασυμπτωτικά ευσταθής τροχιά περιόδου τέσσερα.



(β') Τέσσερα ευσταθή σημεία.

Σχήμα 3.9: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.449$ και $x_0 = 0.1$.

Μάλιστα υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία παραμέτρων $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ για τις οποίες η λογιστική απεικόνιση υπόκειται σε διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου. Καθώς το λ αυξάνεται για τις διάφορες τιμές λ_k με $k = 1, 2, 3, \dots$ η ασυμπτωτικά ευσταθής τροχιά περιόδου 2^k γίνεται ασταθής και έχουμε διακλάδωση, όπου εμφανίζεται μια ευσταθής περιοδική τροχιά διπλάσιας περιόδου από την προηγούμενη. Οι πρώτες τιμές του λ_k για τις οποίες προκύπτουν διακλαδώσεις είναι:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3.449, \quad \lambda_3 = 3.544, \quad \lambda_4 = 3.564 \dots$$

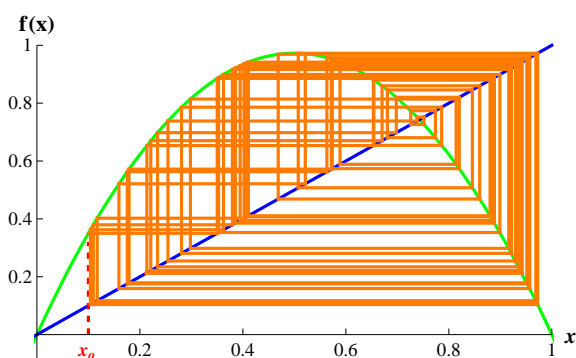
Η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε ένα αριθμό λ_∞ καθώς $k \rightarrow +\infty$ με $\lambda_\infty \approx 3.5699456$. Εξαιτίας της γεωμετρικής φύσης της ακολουθίας, δεν είναι εύκολο να υπολογιστούν οι τιμές διακλάδωσης μετά τις πρώτες αρχικές τιμές του λ_k . Όμως η αναλογία της απόστασης των τιμών α-

νάμεσα σε διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού της περιόδου προσεγγίζει μια σταθερά:

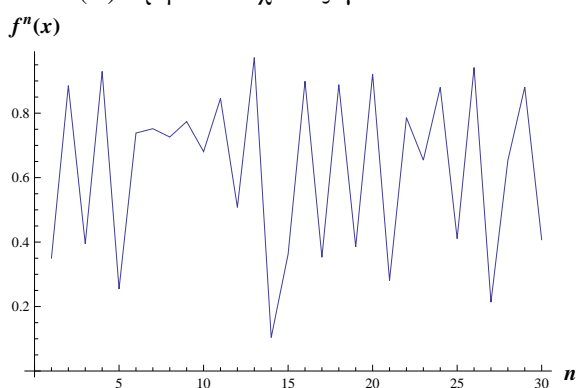
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4.6692 \dots$$

Έτσι είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις τιμές διακλάδωσης. Τη σταθερά αυτή ανακάλυψε το 1975 ο Mitchell Feigenbaum και μάλιστα ισχύει όχι μόνο για τη λογιστική, αλλά για κάθε κοίλη συνάρτηση που παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο σημείο, όπως για παράδειγμα η $g(x) = r \sin(\pi x)$.

- $\lambda > 3.570$: Όταν το λ ξεπεράσει αυτή την τιμή η συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης γίνεται πολύ περίπλοκη. Για κάποιες τιμές του λ οι επαναλήψεις της f ακολουθούν ασταθή συμπεριφορά (βλέπε Σχήμα 3.10), μια κατάσταση η οποία, όπως πειγράψαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, καλείται χάος.



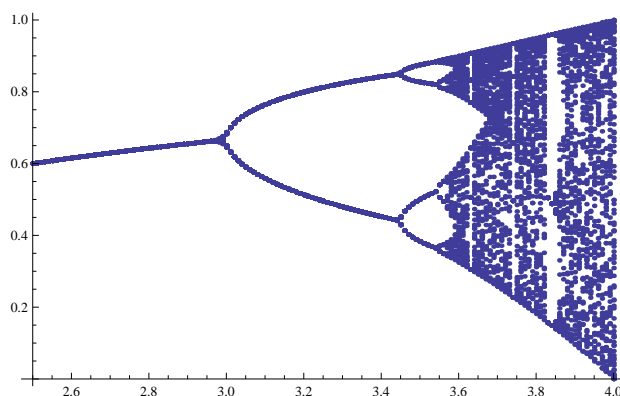
(α') Εμφάνιση χάους για $\lambda = 3.891$.



(β') Γραφική απεικόνιση της $f^n(x)$ για $n = 30$

Σχήμα 3.10: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.891$ και $x_0 = 0.1$.

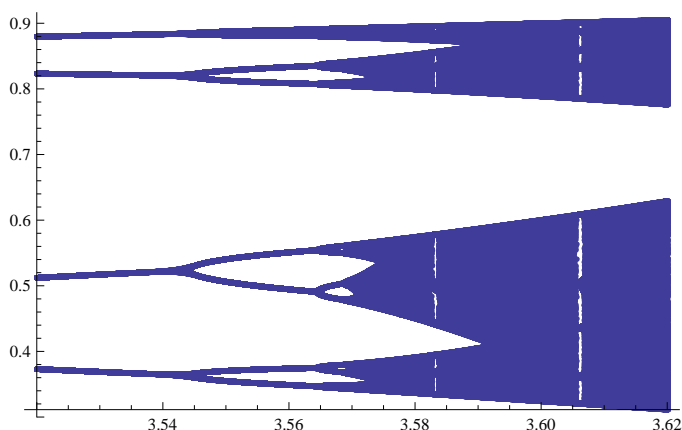
Μάλιστα, την περίοδο που η δυναμική της λογιστικής απεικόνισης δεν ήταν ακόμη κατανοητή, οι μαθηματικοί την χρησιμοποιούσαν ως ένα τρόπο παραγωγής τυχαίων αριθμών. Καθώς η παράμετρος λ μεταβάλλεται, υπάρχουν περιοδικά σημεία που υπόκεινται σε μια ακολουθία διακλαδώσεων διπλασιασμού της περιόδου. Αυτή η ενδιαφέρουσα δυναμική συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης αποτυπώνεται στο διάγραμμα διακλάδωσης που έχει υπολογιστεί με αριθμητικές μεθόδους. Βλέπε Σχήμα 3.11



Σχήμα 3.11: Διάγραμμα των διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης για $2.5 < \lambda < 4$.

Παρατήρηση 3.1.

1. Αν μεγεθύνουμε το διάγραμμα 3.11 παρατηρούμε ότι παρουσιάζει ένα είδος αυτοομοιότητας. (Αυτοομοιότητα είναι η ιδιότητα ενός σχήματος να είναι όμοιο με ένα ή περισσότερα τμήματά του)(Σχήμα 3.12).



Σχήμα 3.12: Διάγραμμα των διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης για $3.52 < \lambda < 3.62$.

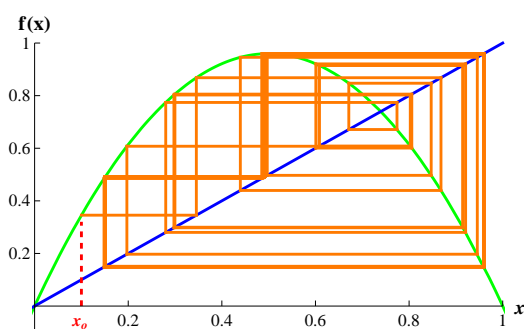
2. Κάθε διαδοχικός διπλασιασμός της περιόδου «ζει» για όλο και μικρότερο εύρος της τιμής λ .

Σε αυτό το διάστημα ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά της λογιστικής εξίσωσης στην τιμή 3.839. Συγκεκριμένα:

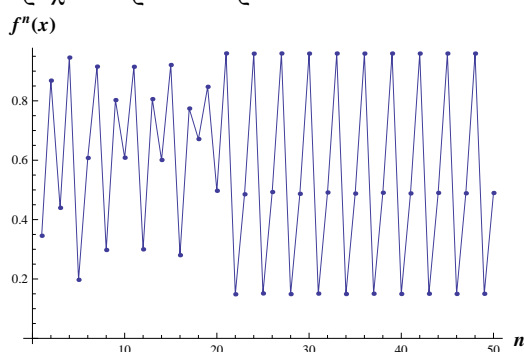
- $\lambda = 3.839$: Για την τιμή αυτή έχουμε μια μοναδική ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου τρία (Σχήμα 3.13). Την τροχιά αυτή μπορούμε εύκολα να την εντοπίσουμε με ακρίβεια στον υπολογιστή επιλέγοντας μια αρχική τιμή και κάνοντας τις επαναλήψεις:

$$x^* = 0.14988, \quad f(x^*) = 0.489172, \quad f^2(x^*) = 0.959299, \quad f^3(x^*) = 0.149888$$

Ωστόσο για τη συγκεκριμένη τιμή του λ , η δυναμική της λογιστικής απεικόνισης είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσα απ' ό,τι είναι ορατό στον υπολογιστή, καθώς οι τροχιές λόγω της αστάθειας τους χάνονται και δεν είναι παρατηρήσιμες.



(α) Ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου τρία



(β) Γραφική απεικόνιση της $f^n(x)$ για $n = 50$

Σχήμα 3.13: Η λογιστική απεικόνιση για $\lambda = 3.839$ και $x_0 = 0.1$.

3.2α' Το θεώρημα του Sharkovskii

Στη συνέχεια με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Sharkovskii, που θα διατυπώσουμε σε αυτή την υποενότητα, γίνεται σαφές ότι για τη συγκεκριμένη τιμή του λ έχουμε τροχιές οποιασδήποτε περιόδου. Για να το διατυπώσουμε θα πρέπει να διατάξουμε τους θετικούς ακέραιους με ένα συγκεκριμένο τρόπο που ονομάζεται διάταξη Sharkovskii και έχει ως εξής:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \cdots \triangleright 2 * 3 \triangleright 2 * 5 \triangleright 2 * 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 * 3 \triangleright 2^2 * 5 \triangleright 2^2 * 7 \triangleright \cdots \\ \triangleright 2^3 * 3 \triangleright 2^3 * 5 \triangleright 2^3 * 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Με άλλα λόγια γράψαμε όλους τους περιττούς εκτός από το ένα, στη συνέχεια τους πολλαπλασιάσαμε επί 2, κατόπιν επί 2^2 , 2^3 , κτλ. Τέλος γράψαμε τις δυνάμεις του 2 με φθίνουσα σειρά. Έτσι έχουμε

καταφέρει στη διάταξή μας να συμπεριλάβουμε όλους τους θετικούς ακέραιους.

Θεώρημα 3.2 (Sharkovskii). Θεωρούμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχή απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο με ελάχιστη περίοδο m . Αν $m \triangleright n$ στην διάταξη Sharkovskii, τότε η f έχει επίσης περιοδικό σημείο με ελάχιστη περίοδο n .

Παρατήρηση 3.2. 1. Αν η f έχει περιοδικό σημείο ελάχιστης περιόδου έξι, τότε πρέπει να έχει περιοδικά σημεία για κάθε άλλη περίοδο άρτιου αριθμού. Μπορεί όμως να μην έχει κανένα περιοδικό σημείο με περιττό αριθμό ελάχιστης περιόδου.

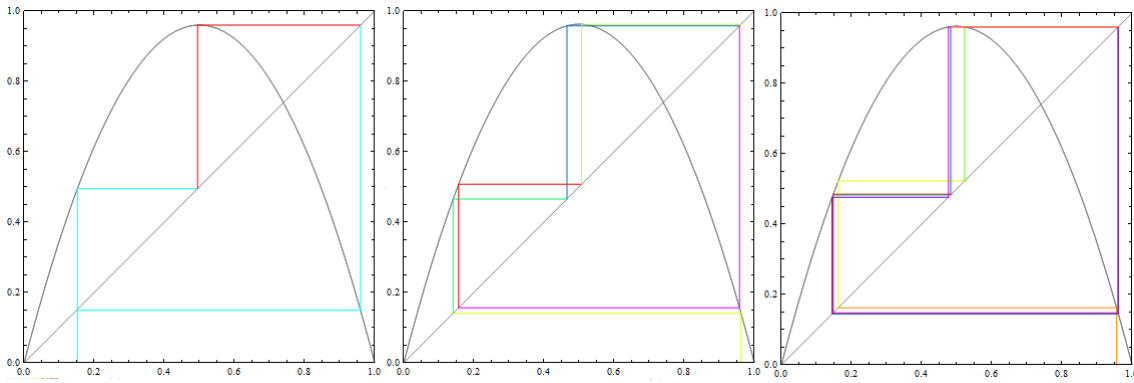
2. Αν η f έχει περιοδικό σημείο ελάχιστης περιόδου 56, τότε πρέπει να έχει και περιοδικό σημείο ελάχιστης περιόδου 48, καθώς το $56 = 2^3 * 7$ είναι πριν το $48 = 2^4 * 3$ στη διάταξη Sharkovskii.

3. Αν η f έχει πεπερασμένου πλήθους περιοδικά σημεία τότε η ελάχιστη περιόδός τους πρέπει να είναι δύναμη του δύο.

4. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου τρία, τότε έχει περιοδικά σημεία για κάθε περίοδο.

Επιστρέφουμε στη λογιστική απεικόνιση. Με βάση την παρατήρηση (4), για $\lambda = 3.839$ εκτός από την τροχιά περιόδου τρία, έχουμε περιοδικές τροχιές και οποιασδήποτε άλλης περιόδου. Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος των Li & Yorke που περιγράψαμε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συνεπώς, η λογιστική απεικόνιση για τη συγκεκριμένη τιμή του λ γίνεται «χαοτική».

- $\lambda > 3.839$: Καθώς η παράμετρος λ αυξάνεται, η τροχιά περιόδου τρία υπόκειται σε διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου και προκύπτει μια ασυμπτωτικά ευσταθής τροχιά περιόδου έξι. Βλέπε Σχήμα 3.14. Αν έχουμε περαιτέρω αύξηση του λ , παρατηρούμε μια ακολουθία από διαδοχικές διακλαδώσεις διπλασιασμού της περιόδου. Το εντυπωσιακό είναι πως η αναλογία των αποστάσεων ανάμεσα στις διαδοχικές αυτές διακλαδώσεις προσεγγίζει και πάλι τη σταθερά Feigenbaum που αναφέραμε νωρίτερα.



Σχήμα 3.14: Ασυμπτωτικά ευσταθείς τροχιές περιόδου 3, 6, και 12, για $\lambda = 3.839$, $\lambda = 3.845$, $\lambda = 3.849$.

Βιβλιογραφία

- [1] Burbulla Dietrich: Department of Mathematics University of Toronto, Lecture Notes Fall 2012, 10 June 2016, <http://www.math.toronto.edu/burbulla/lecturenotes335/?C=D;O=A>.
- [2] Curtius Kit: *Period Three Implies Hardcore Chaos*, Applied Mathematics University of Washington, USA, 4 June 2011.
- [3] Devaney Robert L.: *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Westview Press, 1989.
- [4] Devaney Robert L.: *A First Course in Chaotic Dynamical Systems Theory and Experiment*, L.L.C, Perseus Books Publishing, 1992.
- [5] Hirsch Morris W. – Smale Stephen – Devaney Robert L.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2nd edition, USA, Elsevier Academic Press, 2004.
- [6] Dewaele Nick: *An Explanation of Period Three Implies Chaos*, Department of Mathematics and Statistics Southern Illinois University Edwardsville, 12 Febr. 2011, 10 June 2016, http://www.siu.edu/~aweyhau/teaching/seniorprojects/dewaele_final.pdf.
- [7] Fotiou A.: *Deterministic Chaos*, School of Mathematical Science University of London Queen Mary and Westfield College, 2005.
- [8] Goodson Geoffrey R.: *Lecture Notes on Dynamical Systems, Chaos and Fractal Geometry*, Department of Mathematics Towson University, 2013.
- [9] Hale Jack K. – Kocak Huseyin: *Dynamics and Bifurcations*, New York, Springer-Verlag, 1991.
- [10] May Robert M.: *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*, Nature, 261(5560), 1976: 459-67.

- [11] Strogatz Steven H.: *Nonlinear Dynamic and Chaos: with Application to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, USA, Perseus Books Publishing, 1994.
- [12] Wiggins Stephen: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Second Edition, N.Y., Springer - Verlag, 1990.
- [13] Li Tien-Yien and Yorke James A.: *Period Three Implies Chaos*, Mathematical Association of America, Vol.82, No 10, 1975: 985-992.
- [14] Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος: *Η Λογιστική Απεικόνιση*, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικού Μετσοβείου Πολυτεχνείου, Αθήνα, 2015, 10 Ιουν. 2016 http://www.physics.ntua.gr/ProgMech/2015/doc/03_Logistic.pdf.
- [15] Ζαχείλας Λουκάς: *Διακριτά Δυναμικά Συστήματα*, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, μάθημα Οικονομική Δυναμική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 10 Ιουν. 2016 <http://eclass.uth.gr/eclass/courses/ANTMB162/>.
- [16] Σούρλας Δημήτριος: *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2007.