



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-  
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ  
ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ «ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ  
ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ»

Μεταπτυχιακή Εργασία

---

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΠΟΣΟΣΤΑ  
ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ**

---

Λαφατζή Αργυρώ

Επιβλέπων Καθηγητής

Αθανάσιος Ρακιτζής

Σάμος, 2021



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή μου Αθανάσιο Ρακιτζή, για τη διαρκή υποστήριξή του στην προσπάθειά μου, τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσε και την πάντα άμεση απόκρισή του σε κάθε στάδιο της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή Αλέξανδρο Καραγρηγορίου και τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ιωάννη Τσιμήκα, για την παρουσία τους και τον χρόνο που αφιέρωσαν στη διόρθωση της εργασίας αυτής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τα αδέρφια μου για την ανεκτίμητη βοήθεια και συμπαράστασή τους καθώς και τον αγαπημένο μου φίλο Λευτέρη για την κατανόηση και στήριξή του.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Στατιστικής και Ανάλυσης Δεδομένων του Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρονται εισαγωγικές έννοιες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας και παρουσιάζονται λεπτομερώς τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για διακριτά χαρακτηριστικά όπως και μέτρα για την αξιολόγηση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις κατανομές ιδανικές για την μοντελοποίηση ποσοστών και αναλογιών, για δεδομένα μεμονωμένων μετρήσεων τα οποία δεν είναι αποτέλεσμα Bernoulli πειραμάτων, οι Beta Simplex και Unit Gamma. Με βάση τις κατανομές αυτές, κατασκευάζονται διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και προσδιορίζεται η απόδοσή τους για διάφορες μετατοπίσεις στη μέση τιμή της κατανομής (μέσο επίπεδο της διεργασίας). Επίσης, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας μελέτης ανθεκτικότητας, όπου διερευνάται πόσο επηρεάζεται η απόδοση των Shewhart διαγραμμάτων όταν χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου τα οποία δεν έχουν υπολογιστεί σύμφωνα με το πραγματικό μοντέλο. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, αναπτύσσονται διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA σύμφωνα με τις παραπάνω κατανομές και εφαρμόζεται η μελέτη ανθεκτικότητας για αυτά τα διαγράμματα ενώ παρουσιάζονται συγκρίσεις μεταξύ της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA και Shewhart.



## **ABSTRACT**

This master thesis was prepared in the Postgraduate Program in Statistics and Actuarial-Financial Mathematics, in the area of Statistics and Data Analysis of Department of Statistics and Actuarial-Financial Mathematics, University of the Aegean. The first chapter of this work discusses introductory concepts of Statistical Quality Control and presents in detail the Shewhart type control charts for attributes as well measures for evaluating the performance of control charts. In the second chapter three distributions ideal for modeling rates and proportions, for individual measurement data that are not the result of a Bernoulli experiment, are presented. These distributions are the Beta, Simplex and Unit Gamma. Based on these distributions, Shewhart type control charts are constructed and their performance for various shifts in the expected value of the distribution (process mean level) is evaluated. Moreover, we present the results of a robustness study in which we investigate how much the performance of the Shewhart charts is affected when the control limits have not been calculated under the true model. Finally, in the third chapter, we develop and study EWMA type control charts based on the three above mentioned distributions and the robustness study for these charts is applied, as well. Numerical comparisons between the performance of the EWMA and the Shewhart type control charts are also presented.





# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Πινάκων .....	12
Κατάλογος Σχημάτων .....	16
<b>1. Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας .....</b>	<b>18</b>
1.1 Εισαγωγή .....	18
1.2 Βασικές Έννοιες .....	19
1.3 Διαγράμματα Ελέγχου .....	20
1.4 Περιγραφή ενός Διαγράμματος Ελέγχου .....	20
1.5 Κατασκευή ενός Διαγράμματος Ελέγχου .....	22
1.5.1 Μοντέλο Ορίων L Σίγμα .....	22
1.5.2 Μοντέλο Ορίων Πιθανότητας $\alpha$ .....	23
1.6 Μέγεθος Δείγματος και Συχνότητα Δειγματοληψίας .....	23
1.7 Μέτρα Απόδοσης ενός Διαγράμματος Ελέγχου .....	24
1.8 Φάσεις ενός Διαγράμματος Ελέγχου .....	26
1.9 Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου .....	26
1.10 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Ιδιότητες .....	28
1.10.1 Διαγράμματα Ελέγχου για το Ποσοστό των Ελαττωματικών Προϊόντων .....	28
1.10.2 Διαγράμματα Ελέγχου για τον Αριθμό των Ελαττωματικών Προϊόντων .....	30
1.11 Ανακεφαλαίωση .....	32
<b>2. Διαγράμματα Ελέγχου για την Παρακολούθηση Ποσοστών και Αναλογιών .....</b>	<b>34</b>
2.1 Εισαγωγή .....	34
2.2 Κάποιες Κατανομές για Μοντελοποίηση Ποσοστών και Αναλογιών .....	35
2.2.1 Κατανομή Beta .....	36
2.2.2 Κατανομή Simplex .....	37
2.2.3 Κατανομή Unit Gamma .....	38
2.3 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για την Παρακολούθηση Μεμονωμένων Παρατηρήσεων για Ποσοστά και Αναλογίες .....	40
2.4 Μέτρα Απόδοσης .....	42
2.5 Απόδοση των Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart .....	43
2.6 Συμπεράσματα .....	55
2.7 Εφαρμογή σε Πραγματικά Δεδομένα .....	56
2.7.1 Εισαγωγή .....	56
2.7.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας .....	56

2.7.3 Διαγράμματα Ελέγχου.....	59
2.8 Ανακεφαλαίωση .....	62
<b>3. Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA για την Παρακολούθηση Μεμονωμένων Παρατηρήσεων για Ποσοστά και Αναλογίες .....</b>	<b>64</b>
3.1 Εισαγωγή.....	64
3.2 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA.....	65
3.3 Στατιστικός Σχεδιασμός Διαγράμματος Ελέγχου τύπου EWMA .....	67
3.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων .....	70
3.5 Συμπεράσματα.....	81
3.6 Εφαρμογή σε Πραγματικά Δεδομένα.....	86
3.7 Ανακεφαλαίωση .....	89
3.8 Τελικά Συμπεράσματα.....	90
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>92</b>
<b>Παράρτημα I: Πίνακες για Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA .....</b>	<b>97</b>
<b>Παράρτημα II: Πίνακες για τη Σύγκριση Μονόπλευρων Διαγραμμάτων Ελέγχου .....</b>	<b>115</b>
<b>Παράρτημα III: Κώδικες στην R.....</b>	<b>121</b>



## Κατάλογος Πινάκων

<b>Πίνακας 2.1:</b> Παράμετροι Διασποράς. ....	43
<b>Πίνακας 2.2:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart. ....	46
<b>Πίνακας 2.3:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart. ....	47
<b>Πίνακας 2.4:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart. ....	48
<b>Πίνακας 2.5:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart. ....	49
<b>Πίνακας 2.6:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart. ....	50
<b>Πίνακας 2.7:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart. ....	51
<b>Πίνακας 2.8:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart. ....	52
<b>Πίνακας 2.9:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart. ....	53
<b>Πίνακας 2.10:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart. ....	54
<b>Πίνακας 2.11:</b> Εκτιμήσεις των παραμέτρων των μοντέλων και έλεγχοι καλής προσαρμογής. ...	57
<b>Πίνακας 2.12:</b> Σύγκριση της απόδοσης για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	61
<b>Πίνακας 3.1:</b> Τιμές της παραμέτρου L για κάθε μοντέλο έτσι ώστε $ARL_0 \approx 370.4$ . ....	70
<b>Πίνακας 3.2:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.05$ . ....	72
<b>Πίνακας 3.3:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.10$ . ....	73
<b>Πίνακας 3.4:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.20$ . ....	74
<b>Πίνακας 3.5:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.05$ . ....	75
<b>Πίνακας 3.6:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.10$ . ....	76
<b>Πίνακας 3.7:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.20$ . ....	77
<b>Πίνακας 3.8:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.05$ . ....	78
<b>Πίνακας 3.9:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.10$ . ....	79
<b>Πίνακας 3.10:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.20$ . ....	80

<b>Πίνακας 3.11:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> – Beta Chart.....	83
<b>Πίνακας 3.12:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> – Simplex Chart.....	84
<b>Πίνακας 3.13:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> – Unit Gamma Chart. ....	85
<b>Πίνακας I.1:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.05$ .....	97
<b>Πίνακας I.2:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.10$ .....	98
<b>Πίνακας I.3:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.20$ .....	99
<b>Πίνακας I.4:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.05$ .....	100
<b>Πίνακας I.5:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.10$ .....	101
<b>Πίνακας I.6:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.20$ .....	102
<b>Πίνακας I.7:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.05$ .....	103
<b>Πίνακας I.8:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.10$ .....	104
<b>Πίνακας I.9:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.20$ .....	105
<b>Πίνακας I.10:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.05$ .....	106
<b>Πίνακας I.11:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.10$ .....	107
<b>Πίνακας I.12:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για $\lambda = 0.20$ .....	108
<b>Πίνακας I.13:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.05$ .....	109
<b>Πίνακας I.14:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.10$ .....	110
<b>Πίνακας I.15:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για $\lambda = 0.20$ .....	111
<b>Πίνακας I.16:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.05$ .....	112
<b>Πίνακας I.17:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.10$ .....	113
<b>Πίνακας I.18:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για $\lambda = 0.20$ .....	114

<b>Πίνακας Π.1:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.	115
<b>Πίνακας Π.2:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart. ....	116
<b>Πίνακας Π.3:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.....	117
<b>Πίνακας Π.4:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart. ....	118
<b>Πίνακας Π.5:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex.....	119
<b>Πίνακας Π.6:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους <i>ARL</i> για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart. ....	120



## Κατάλογος Σχημάτων

<b>Σχήμα 1.1:</b> Τυπική Μορφή Διαγράμματος Ελέγχου. ....	21
<b>Σχήμα 2.1:</b> Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας για Beta, Simplex και Unit Gamma για τις περιπτώσεις 1 και 2. ....	44
<b>Σχήμα 2.2:</b> Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας για Beta, Simplex και Unit Gamma για τις περιπτώσεις 3 και 4. ....	44
<b>Σχήμα 2.3:</b> Εκτιμώμενη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για τις προτεινόμενες κατανομές για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	57
<b>Σχήμα 2.4:</b> Εμπειρική Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	58
<b>Σχήμα 2.5:</b> Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης I για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	60
<b>Σχήμα 2.6:</b> Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	60
<b>Σχήμα 3.1:</b> Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για $\lambda = 0.05$ . ....	87
<b>Σχήμα 3.2:</b> Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για $\lambda = 0.10$ . ....	87
<b>Σχήμα 3.3:</b> Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για $\lambda = 0.20$ . ....	87
<b>Σχήμα 3.4:</b> Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. ....	88





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

### 1.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής θα ασχοληθούμε γενικά με τα διαγράμματα ελέγχου εισάγοντας βασικές έννοιες και ειδικότερα με τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων τα οποία αφορούν ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται ιδιότητες (attributes). Σημαντικό παράγοντα για τον καταναλωτή όταν καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε διαφορετικά προϊόντα ή υπηρεσίες, εκτός από την τιμή, αποτελεί και η ποιότητα του προϊόντος. Είναι αρκετά σημαντικό για το καταναλωτικό κοινό τα παραγόμενα προϊόντα να ανταποκρίνονται σε κάποιες προδιαγραφές και να μην αποκλίνουν από αυτές.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την πιο γνωστή μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Κύριος στόχος της μεθόδου είναι η έγκαιρη ανίχνευση μη συμμορφούμενων με βάση τις προδιαγραφές, παραγόμενων προϊόντων και η κατάλληλη απομάκρυνση αυτών, με σκοπό τη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων. Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων ανάλυσης στατιστικών δεδομένων, το οποίο μπορεί να διαχωριστεί σε τρία βασικά υποσύνολα (Montgomery (2005)), το καθένα από τα οποία απευθύνεται σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας. Αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments, DOE) : περιλαμβάνει τις στατιστικές τεχνικές οι οποίες μας βοηθούν στον εντοπισμό της επίδρασης που έχουν τα διάφορα επίπεδα των παραγόντων που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος.
2. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control, SPC) : περιλαμβάνει τις στατιστικές τεχνικές που είναι αναγκαίες για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά την παραγωγή. Το βασικό του πλεονέκτημα είναι ότι περιλαμβάνει εργαλεία για τον εντοπισμό ειδικών αιτιών, που ευθύνονται για την μεταβλητότητα της παραγωγικής διεργασίας. Η διεργασία θα πρέπει να είναι ικανή, δηλαδή να λειτουργεί με μικρή μεταβλητότητα γύρω από κάποιες τιμές στόχους που έχουν οριστεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του τελικού προϊόντος. Τα επτά κύρια εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι το ιστόγραμμα/διάγραμμα μίσχου-φύλλων, το φύλλο ελέγχου, το διάγραμμα Pareto, το διάγραμμα αιτίου-αποτελέσματος, το διάγραμμα συγκέντρωσης

ατελειών-ελαττωμάτων, το διάγραμμα διασποράς ή διασκόρπισης και το διάγραμμα ελέγχου.

3. Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling) : περιλαμβάνει τις στατιστικές τεχνικές που είναι απαραίτητες για να αποφασίσουμε αν μια παρτίδα προϊόντων θα γίνει δεκτή ή όχι.

## 1.2 Βασικές Έννοιες

Σε οποιαδήποτε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, πάντα θα υπάρχει μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Αυτή η φυσική μεταβλητότητα αποτελεί την συνισταμένη πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας. Η φυσική μεταβλητότητα είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και δεν μπορεί να μειωθεί ή να εξαλειφθεί. Μια διεργασία που λειτουργεί μόνο με την παρουσία της φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός (στατιστικού) ελέγχου ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση. Σε μια παραγωγική διεργασία όμως είναι πιθανόν να εμφανιστούν και άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν τη συστηματική αλλαγή στο επίπεδο ενός ή παραπάνω παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Η μεταβλητότητα που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη σε μέγεθος από τη φυσική και ορίζεται ως ειδική. Αυτή μπορεί να είναι αποτέλεσμα κάποιας βλάβης σε ένα μηχάνημα, κάποιου λάθους από την πλευρά των χειριστών ή λόγω κακής ποιότητας της πρώτης ύλης. Μια διεργασία η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικών αιτιών μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εκτός (στατιστικού) ελέγχου ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (Αντζουλάκος (2009)).

Όπως ήδη αναφέραμε, η διεργασία θα πρέπει να λειτουργεί με μικρή μεταβλητότητα γύρω από κάποιες τιμές στόχους που έχουν οριστεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του τελικού προϊόντος. Πιο συγκεκριμένα, στην φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζονται κάποια όρια προδιαγραφών των ποιοτικών χαρακτηριστικών, το κάτω και άνω όριο προδιαγραφών (Lower and Upper Specification Limits, *LSL* and *USL*). Για να είναι το προϊόν αποδεκτό θα πρέπει οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού να βρίσκονται εντός αυτών των ορίων. Επίσης, ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό, η τιμή στόχος (Target value, *T*) που βρίσκεται συνήθως στο μέσο του διαστήματος του κάτω και άνω ορίου προδιαγραφών. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα προϊόντα βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών, ενώ κάτω από συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δε συμβαίνει το ίδιο.

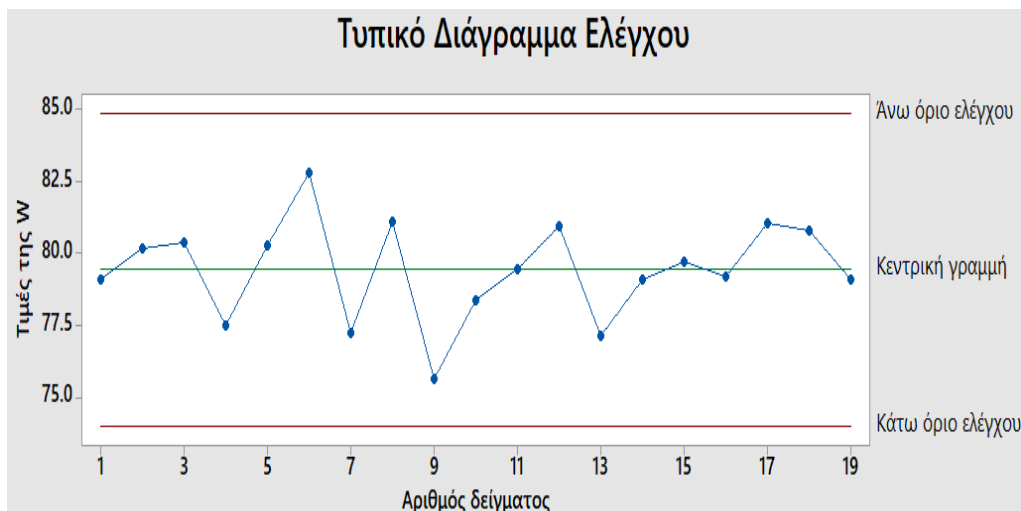
### 1.3 Διαγράμματα Ελέγχου

Όπως γίνεται αντιληπτό, είναι επιθυμητό να κατασκευάζονται προϊόντα/αντικείμενα τα οποία πληρούν τις απαιτήσεις του καταναλωτή. Έτσι λοιπόν, ο κύριος στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η άμεση ανίχνευση συστηματικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες πριν κατασκευαστεί μεγάλος αριθμός προϊόντων που δεν είναι συμμορφούμενα με τις προδιαγραφές. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, η πιο διαδομένη τεχνική που χρησιμοποιείται είναι τα διαγράμματα ελέγχου, τα οποία μπορούν να ανιχνεύσουν σε πραγματικό χρόνο τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Ειδικότερα, το διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική παράσταση μετρήσεων ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού στο πέρασμα του χρόνου συναρτήσει του χρόνου αυτού (Ταγαράς (2001)). Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων.

### 1.4 Περιγραφή ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Αυτό που μας ενδιαφέρει σε μια παραγωγική διεργασία είναι να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού  $X$  (τυχαία μεταβλητή) η οποία χαρακτηρίζει την ποιότητα ενός προϊόντος. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε από την παραγωγή τυχαία δείγματα προϊόντων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών της μεταβλητής  $X$ , έστω τα  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Με βάση τις τιμές στα  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  υπολογίζουμε την τιμή  $W_i = g(X_i)$  η οποία είναι μια κατάλληλη στατιστική συνάρτηση (τυχαία μεταβλητή). Αυτή η συνάρτηση είναι συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια της κρίσιμης ποσότητας για την οποία ενδιαφερόμαστε. Επομένως, με την παρακολούθηση των τιμών της στατιστικής συνάρτησης  $W$  στα διάφορα δείγματα, επιτυγχάνουμε τη διαχρονική παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου είναι μια διδιάστατη γραφική παράσταση της εξέλιξης μιας διεργασίας στο χρόνο. Ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος αντιπροσωπεύει τα δείγματα που έχουν επιλεγεί τυχαία, τα οποία τοποθετούνται σε χρονολογική σειρά, από αριστερά προς τα δεξιά. Ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $W$ . Στο γράφημα, με κουκίδες αναπαριστώνται οι τιμές της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης οι οποίες ενώνονται με μια τεθλασμένη γραμμή για καλύτερη απεικόνιση. Σε ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται επιπλέον τρεις οριζόντιες γραμμές. Το άνω όριο ελέγχου (Upper Control Limit,  $UCL$ ), το κάτω όριο ελέγχου (Lower Control Limit,  $LCL$ ) και η κεντρική γραμμή (Center Line,  $CL$ ) που παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού. Η τυπική μορφή ενός διαγράμματος ελέγχου δίνεται στο Σχήμα 1.1.



**Σχήμα 1.1:** Τυπική Μορφή Διαγράμματος Ελέγχου.

Όσο οι τιμές (τα σημεία) της  $W$  βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και συμπεριφέρονται με «τυχαίο» τρόπο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Αν όμως ένα ή περισσότερα σημεία βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου ή βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή, αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που οφείλονται για αυτήν τη συμπεριφορά και αν κριθεί αναγκαίο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες.

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να θεωρηθούν και ως έλεγχοι υποθέσεων. Η μηδενική υπόθεση υποστηρίζει ότι η διεργασία βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου και η εναλλακτική υπόθεση ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Στη διαδικασία λήψης απόφασης διατρέχουμε τον κίνδυνο να κάνουμε δύο ειδών σφάλματα:

- $\alpha$  = Σφάλμα τύπου I: όταν η διαδικασία φαίνεται να είναι εκτός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εντός.
- $\beta$  = Σφάλμα τύπου II: όταν η διαδικασία φαίνεται να είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός.

Γενικά, για δεδομένο μέγεθος δείγματος είναι αδύνατον να ελαχιστοποιήσουμε ταυτόχρονα τις πιθανότητες σφάλματος τύπου I και II. Κατά κανόνα μάλιστα, όταν η μία πιθανότητα ελαττώνεται, η άλλη αυξάνεται. Ταυτόχρονη μείωση των δύο σφαλμάτων επιτυγχάνεται μόνο με αύξηση του μεγέθους δείγματος. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου και όπως θα δούμε η επιλογή των ορίων ελέγχου αποτελεί σημαντικό στάδιο. Εάν μεγαλώσουμε την απόσταση μεταξύ της κεντρικής γραμμής και των ορίων ελέγχου, επιτυγχάνουμε την μείωση του σφάλματος τύπου I ενώ ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II. Εάν ελαττώσουμε την απόστασή τους, επιτυγχάνουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

## 1.5 Κατασκευή ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στη γενική διαδικασία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου και θα τονίσουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής.

### 1.5.1 Μοντέλο Ορίων L Σίγμα

Το μοντέλο ορίων σίγμα προτάθηκε από τον Walter A. Shewhart (1931) και αποτελεί ένα γενικό μοντέλο για την κατασκευή του διαγράμματος ελέγχου για το χαρακτηριστικό μιας ποσότητας. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή περιγράφονται στις επόμενες σχέσεις

$$\begin{aligned}LCL &= \mu_W - L\sigma_W \\ CL &= \mu_W \\ UCL &= \mu_W + L\sigma_W\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου τα  $\mu_W$  και  $\sigma_W$  δηλώνουν αντίστοιχα τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης  $W$  όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Η ποσότητα  $L$  δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Η πιο συνηθισμένη τιμή για το  $L$  είναι το 3. Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε μοντέλο ορίων τρία σίγμα (three sigma limits model, συμβολισμός  $3\sigma$ ) και οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned}LCL &= \mu_W - 3\sigma_W \\ CL &= \mu_W \\ UCL &= \mu_W + 3\sigma_W\end{aligned}\tag{1.2}$$

Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου, η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  είναι έστω και προσεγγιστικά η κανονική και οι παράμετροί της είναι γνωστές, τότε η πιθανότητα η  $W$  να πάρει τιμή εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με 0.0027. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι ένας εσφαλμένος συναγερμός συμβαίνει 27 φορές ανά 10000 σημεία του διαγράμματος ελέγχου. Επίσης, σε μια εντός ελέγχου διεργασία η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται πάνω από το  $UCL$  (ή κάτω από το  $LCL$ ) είναι 0.00135, όπως προκύπτει από τον παρακάτω υπολογισμό για το σφάλμα τύπου I (τύπος (1.3)).

Έστω  $W_1, \dots, W_n$  τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από μια κανονική κατανομή με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  (συμβολισμός  $W_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$ ). Αν υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής  $\mu$  της  $W$ , τότε χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής  $\mu$  της διεργασίας σε κάθε δείγμα το δειγματικό μέσο του δείγματος  $\bar{W}_i$ , έχουμε ότι  $\mu_{\bar{W}_i} = E(\bar{W}) = \mu$  και  $\sigma_{\bar{W}_i}^2 = V(\bar{W}) = \sigma^2/n$ . Επιλέγοντας  $L = 3$ , σύμφωνα με τον τύπο (1.2) έχουμε ότι  $LCL = \mu_{\bar{W}_i} - 3\sigma_{\bar{W}_i} = \mu - 3\sigma/\sqrt{n}$  και  $UCL = \mu_{\bar{W}_i} + 3\sigma_{\bar{W}_i} = \mu + 3\sigma/\sqrt{n}$ .

Άρα, από τον ορισμό του σφάλματος τύπου I έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\bar{W} \notin [LCL, UCL] \mid W \sim N(\mu, \sigma^2)) \\
&= P\left(\bar{W} \notin [LCL, UCL] \mid \bar{W} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) \\
&= P\left(\bar{W} \notin [\mu_{\bar{W}} - 3\sigma_{\bar{W}}, \mu_{\bar{W}} + 3\sigma_{\bar{W}}] \mid \bar{W} \sim N(\mu_{\bar{W}}, \sigma_{\bar{W}}^2)\right) \\
&= P\left(\bar{W} < \mu_{\bar{W}} - 3\sigma_{\bar{W}} \mid \bar{W} \sim N(\mu_{\bar{W}}, \sigma_{\bar{W}}^2)\right) + P\left(\bar{W} > \mu_{\bar{W}} + 3\sigma_{\bar{W}} \mid \bar{W} \sim N(\mu_{\bar{W}}, \sigma_{\bar{W}}^2)\right) \quad (1.3) \\
&= P\left(\frac{\bar{W} - \mu_{\bar{W}}}{\sigma_{\bar{W}}} < \frac{\mu_{\bar{W}} - 3\sigma_{\bar{W}} - \mu_{\bar{W}}}{\sigma_{\bar{W}}}\right) + P\left(\frac{\bar{W} - \mu_{\bar{W}}}{\sigma_{\bar{W}}} > \frac{\mu_{\bar{W}} + 3\sigma_{\bar{W}} - \mu_{\bar{W}}}{\sigma_{\bar{W}}}\right) \\
&= P(Z < -3) + P(Z > 3) = \Phi(-3) + 1 - P(Z \leq 3) \\
&= 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) = 2(1 - \Phi(3)) = 2 \cdot 0.00135 = 0.0027
\end{aligned}$$

### 1.5.2 Μοντέλο Ορίων Πιθανότητας $\alpha$

Εκτός από το γενικό μοντέλο ορίων σίγμα, υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας  $\alpha$  (probability limits model) για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου. Εάν η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  είναι κανονική, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
LCL &= \mu_W - z_{\alpha/2} \sigma_W \\
CL &= \mu_W \\
UCL &= \mu_W + z_{\alpha/2} \sigma_W
\end{aligned} \quad (1.4)$$

όπου  $z_{\alpha/2}$  είναι το ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην περίπτωση αυτή, η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερωμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου είναι ίση με  $\alpha/2$ . Σημειώνεται ότι το μοντέλο ορίων πιθανότητας μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις όπου η κατανομή της  $W$  δεν είναι η κανονική. Ωστόσο, θα πρέπει η κατανομή της  $W$  να είναι γνωστή όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, ώστε να μπορούν να προσδιοριστούν τα ποσοστιαία σημεία αυτής της κατανομής.

### 1.6 Μέγεθος Δείγματος και Συχνότητα Δειγματοληψίας

Για να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου πρέπει να καθορίσουμε το μέγεθος των δειγμάτων των προϊόντων και τη συχνότητα δειγματοληψίας αυτών. Γενικά, μεγάλα μεγέθη δειγμάτων εξασφαλίζουν την εύκολη ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Αν υποθέσουμε μοντέλο ορίων  $3\sigma$ , ότι  $W_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  και ότι κάθε χρονική στιγμή λαμβάνουμε δείγμα μεγέθους  $n$ , τότε θα έχουμε ότι το σφάλμα τύπου I είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του δείγματος  $n$  και ίσο με 0.0027 καθώς και ότι το σφάλμα τύπου II εξαρτάται από την μετατόπιση του μέσου  $\mu^*$  της κατανομής και από το μέγεθος δείγματος  $n$ . Στη συνέχεια παραθέτουμε τους τύπους.

### Σφάλμα Τύπου I:

$$\alpha = P\left(\bar{W} < \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{W} > \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid W \sim N(\mu, \sigma^2)\right) = 2(1 - \Phi(3)) = 0.0027 \quad (1.5)$$

### Σφάλμα Τύπου II:

$$\begin{aligned} \beta &= P\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{W} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid W \sim N(\mu, \sigma^2)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu^*)}{\sigma} - 3\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Το κατάλληλο μέγεθος δείγματος εξαρτάται από το είδος της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας. Έτσι, για μικρές μετατοπίσεις του μέσου χρειάζεται αύξηση του μεγέθους του δείγματος ενώ για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου καταλληλότερο είναι να χρησιμοποιούμε μικρό μέγεθος δείγματος. Σχετικά με τη συχνότητα της δειγματοληψίας, το προτιμότερο θα ήταν να παίρνουμε δείγματα πολύ συχνά και να έχουμε την δυνατότητα ελέγχου όλων των προϊόντων. Κάτι τέτοιο όμως είναι χρονοβόρο και επιφέρει υψηλό οικονομικό κόστος. Μια πιο αποτελεσματική μέθοδος είναι να παίρνουμε πιο μικρά δείγματα σε τακτά χρονικά διαστήματα.

## 1.7 Μέτρα Απόδοσης ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής. Ως μέσο μήκος ροής (Average Run Length, *ARL*) ορίζεται ο αναμενόμενος αριθμός διαδοχικών σημείων που πρέπει να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου και περιγράφεται από τη σχέση

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (1.7)$$

όπου  $p$  η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου. Έτσι, ο αριθμός των σημείων που σχεδιάζονται στο διάγραμμα μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ονομάζεται μήκος ροής (Run Length, *RL*) και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ . Υπενθυμίζουμε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή (συμβολισμός  $X \sim \text{Geo}(p)$ ), τότε

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3 \dots \quad (1.8)$$

και

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}. \quad (1.9)$$

Με  $ARL_0$  θα συμβολίζουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (In Control Average Run Length, *IC ARL*) το οποίο ορίζεται ως



$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.10)$$

Δηλαδή για την εντός ελέγχου κατάσταση θεωρούμε ότι  $p = \alpha$ , όπου  $\alpha$  η πιθανότητα να βρεθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Όπως είδαμε και παραπάνω, όταν μια διεργασία είναι εντός ελέγχου, χρησιμοποιούμε  $3\sigma$  όρια ελέγχου και η τυχαία μεταβλητή  $W$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$  (συμβολισμός  $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ ), τότε η πιθανότητα  $\alpha$  δίνεται από τον τύπο (1.5) παραπάνω. Άρα, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισούται με  $ARL_0 = 1/0.0027 = 370.4$ . Αυτό σημαίνει ότι για μια εντός ελέγχου διεργασία αναμένουμε κάθε 370 δείγματα περίπου σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Επομένως, στη πράξη επιθυμούμε μεγάλη τιμή για το  $ARL_0$ .

Με  $ARL_1$  θα συμβολίζουμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (Out of Control Average Run Length, *OOC ARL*) το οποίο αναφέρεται στη περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Αν μια διεργασία βρεθεί εκτός στατιστικού ελέγχου λόγω μετατόπισης στο μέσο επίπεδο, από  $\mu$  σε  $\mu^*$ , τότε η πιθανότητα να παρατηρηθεί σημείο εντός των ορίων ελέγχου είναι ίση με το σφάλμα τύπου II, δηλαδή  $\beta$ . Άρα, για μια εκτός ελέγχου διεργασία η πιθανότητα να παρατηρηθεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με  $1 - \beta$ . Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ορίζεται ως

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (1.11)$$

Δηλαδή για την εκτός ελέγχου κατάσταση θεωρούμε ότι  $p = 1 - \beta$ . Το  $ARL_1$  εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν μέχρι να ανιχνεύσει το διάγραμμα τη συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου από τη στιγμή που θα συμβεί. Άρα, στην πράξη επιθυμούμε μικρή τιμή για το  $ARL_1$ .

Το  $ARL$ , ως μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου, έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια (Montgomery (2005)) για το γεγονός ότι το  $ARL$  που παρατηρείται στην πράξη συνήθως διαφέρει από το «θεωρητικό»  $ARL$ . Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι επειδή η γεωμετρική κατανομή που ακολουθεί το μήκος ροής είναι μη-συμμετρική και άρα η μέση τιμή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής (ιδίως για μικρές τιμές του  $p$ ). Δύο εναλλακτικά μέτρα απόδοσης είναι η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής (Standard Deviation Run Length, *SDRL*) και η διάμεσος της κατανομής του μήκους ροής (Median Run Length, *MRL*). Οι τύποι τους δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις.

$$SDRL = \sqrt{(1 - p)/p^2} \quad (1.12)$$

$$MRL = \left\lceil \frac{\log(0.5)}{\log(1 - p)} \right\rceil \quad (1.13)$$

Στην εντός ελέγχου κατάσταση το  $p = \alpha$  ενώ στην εκτός ελέγχου κατάσταση  $p = 1 - \beta$ . Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $SDRL_0$  και  $MRL_0$  όταν θα αναφερόμαστε στην εντός ελέγχου κατάσταση και το συμβολισμό  $SDRL_1$  και  $MRL_1$  για την εκτός ελέγχου κατάσταση.

## 1.8 Φάσεις ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας υπάρχουν δύο φάσεις, η Φάση I και η Φάση II, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια.

**Φάση I (Phase I) :** Τα διαγράμματα ελέγχου στην φάση αυτή χρησιμοποιούνται αναδρομικά με σκοπό να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθοντικό χρόνο. Τα διαγράμματα συμβάλλουν στη διαδικασία ώστε ο διαχειριστής να φέρει την διεργασία εντός ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί, τα διαγράμματα ελέγχου είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της διεργασίας στο μέλλον. Έτσι λοιπόν αυτή η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως αναδρομική (retrospective). Κατά την διάρκεια αυτής της φάσης ο διαχειριστής μελετά σε βάθος τη διεργασία διότι είναι δύσκολο να συμπεράνει αν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ορίων όταν συλλέχθηκαν τα δεδομένα.

**Φάση II (Phase II) :** Τα διαγράμματα ελέγχου στη φάση αυτή χρησιμοποιούνται με σκοπό να ελέγχουμε συνεχώς αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Ο διαχειριστής παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διαδικασία ώστε να μπορεί να ανιχνεύει εγκαίρως μια μετατόπιση στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα ενός προϊόντος. Ουσιαστικά, κάθε χρονική περίοδο όπου λαμβάνεται ένα δείγμα, ο διαχειριστής παίρνει μια απόφαση αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή όχι. Παράλληλα, αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο προέκυψαν τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου.

## 1.9 Είδη Διαγραμμάτων Ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου ταξινομούνται σύμφωνα με διάφορες διακρίσεις που βασίζονται σε ορισμένα χαρακτηριστικά. Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές από τις ταξινομήσεις των διαγραμμάτων ελέγχου.

1. Ως προς το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος, χωρίζονται σε διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές (control charts for variables) και σε διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες (control charts for attributes).
2. Ως προς το μέγεθος του δείγματος, χωρίζονται σε διαγράμματα ελέγχου για ομάδες (control charts for rational subgroups) αν τα δείγματα μετρήσεων είναι μεγέθους μεγαλύτερα από τη μονάδα και σε διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις (control charts for individual observations) αν τα δείγματα είναι μεγέθους ένα.
3. Ως προς την χρονική εξάρτηση, αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται την χρονική στιγμή  $t$  και  $t - 1$  εξαρτώνται, έχουμε διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες (control charts for autocorrelated processes) ενώ αν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους έχουμε διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες (control charts for uncorrelated processes).

4. Ως προς τον αριθμό των ποιοτικών χαρακτηριστικών της διεργασίας, αν οι μετρήσεις αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου ενώ για περισσότερα χαρακτηριστικά έχουμε πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου.
5. Ως προς την κατανομή της διεργασίας, αν οι μετρήσεις προέρχονται από γνωστή κατανομή έχουμε παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου ενώ για άγνωστη κατανομή έχουμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου.
6. Ως προς το ρυθμό δειγματοληψίας, έχουμε διαγράμματα ελέγχου με σταθερό ρυθμό δειγματοληψίας (control charts with fixed sampling rate) και διαγράμματα ελέγχου με μεταβλητό ρυθμό δειγματοληψίας (control charts with variable sampling rate).

Τα βασικότερα είδη διαγραμμάτων ελέγχου που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι τα εξής:

- **Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart :** Χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν μεγάλες αλλαγές στο μέσο επίπεδο. Επίσης, χρησιμοποιούνται για μέγεθος δείγματος τουλάχιστον δύο καθώς και όταν γνωρίζουμε την κατανομή των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται.
- **Διαγράμματα Ελέγχου τύπου CUSUM :** Χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν μικρές αλλαγές στο μέσο επίπεδο και γνωρίζουμε την κατανομή των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται.
- **Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA :** Χρησιμοποιούνται όταν υπάρχουν μικρές αλλαγές στο μέσο επίπεδο και η κατανομή των αρχικών παρατηρήσεων ή του δειγματικού χαρακτηριστικού που απεικονίζεται είναι άγνωστη.

Από τα διαγράμματα που αναφέραμε παραπάνω, αυτά τα οποία θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε διαγράμματα ελέγχου για ποσοστά και αναλογίες, αφού θα αναφερθούμε σε δεδομένα τα οποία είναι αποτελέσματα Bernoulli πειραμάτων. Έτσι, στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου  $p$  και  $np$  τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του ποσοστού και του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων αντίστοιχα.

## 1.10 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για Ιδιότητες

Ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο (defective or nonconforming) ταξινομείται ένα προϊόν αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει ελάττωμα ή ατέλεια (defect or nonconformity). Με τον όρο ιδιότητες αναφερόμαστε σε ποιοτικά χαρακτηριστικά, τα οποία δεν είναι δυνατό να καταγραφούν αριθμητικά όπως για παράδειγμα η παρουσία ή η απουσία ατέλειας σε μια συσκευασία, αν κάποιος είναι ασθενής ή μη ασθενής. Στη συνέχεια, καταγράφουμε το πλήθος των ατόμων/αντικειμένων που έχουν (ή δεν έχουν) τη συγκεκριμένη ιδιότητα και με βάση αυτό το πλήθος (την κατανομή του) φτιάχνουμε διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων.

### 1.10.1 Διαγράμματα Ελέγχου για το Ποσοστό των Ελαττωματικών Προϊόντων

Το διάγραμμα ελέγχου  $p$  αφορά το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας. Ως ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων  $p$  ορίζεται το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων προς το συνολικό πλήθος των παραγόμενων προϊόντων.

Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία ισομεγέθη δείγματα μεγέθους  $n$  προϊόντων το καθένα και συμβολίζουμε με  $X_{ij}$  την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 ή 0 ανάλογα αν το  $j$  προϊόν του  $i$  δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Τότε, η  $X_{ij}$  θα ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p \in (0,1)$  (συμβολισμός  $B(1, p)$ ) και η τυχαία μεταβλητή  $X_i$  που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα θα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n, p$  (συμβολισμός  $\text{Bin}(n, p)$ ). Υπενθυμίζουμε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την διωνυμική κατανομή τότε

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (1.14)$$

και

$$E(X) = \mu = np, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p) \quad (1.15)$$

Έστω τυχαία μεταβλητή  $W_i$

$$W_i = \hat{p}_i = \frac{X_i}{n}, \quad i \geq 1 \quad (1.16)$$

η οποία δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα. Τότε έχουμε ότι

$$\mu_{W_i} = p, \quad \sigma_{W_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \quad i \geq 1 \quad (1.17)$$

Άρα, το διάγραμμα ελέγχου  $p$  για την παρακολούθηση του ποσοστού (αναλογίας) των ελαττωματικών προϊόντων, στο οποίο απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η  $W_i = \hat{p}_i = X_i/n$ , θα έχει όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή όπως αυτά δίνονται παρακάτω

$$\begin{aligned}
LCL &= \mu_{W_i} - L\sigma_{W_i} \\
CL &= \mu_{W_i} \\
UCL &= \mu_{W_i} + L\sigma_{W_i}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε μοντέλο ορίων  $3\sigma$ , τα όρια ελέγχου για τη Φάση I και τη Φάση II προσδιορίζονται στη συνέχεια.

### 3σ Όρια Ελέγχου Φάσης II :

$$\begin{aligned}
LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
CL &= p \\
UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Στη Φάση I το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων  $p$  είναι άγνωστο και άρα θα πρέπει να εκτιμηθεί. Υποθέτουμε ότι έχουμε  $m$  ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα και έστω

$$X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}), 1 \leq i \leq m \tag{1.20}$$

Αν θέσουμε

$$\hat{p}_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, 1 \leq i \leq m \tag{1.21}$$

τότε

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn} \tag{1.22}$$

και άρα  $E(\bar{P}) = p$  καθώς  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim \text{Bin}(mn, p)$ . Οπότε, τελικά έχουμε ότι

### 3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I :

$$\begin{aligned}
LCL &= \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} \\
CL &= \bar{P} \\
UCL &= \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Στη συνέχεια προσδιορίζονται το σφάλμα τύπου I και σφάλμα τύπου II.

**Σφάλμα Τύπου I :**

$$\alpha = P\left(\frac{X}{n} \notin [LCL, UCL] \mid X \sim \text{Bin}(n, p)\right) \quad (1.24)$$

όπου  $p$  είναι η εντός ελέγχου τιμή του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων. Το σφάλμα τύπου I σε ένα  $p$  διάγραμμα ελέγχου με  $3\sigma$  όρια ελέγχου δεν αναμένουμε να είναι ίσο με 0.0027, αφού η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα δεν ακολουθεί κανονική κατανομή.

**Σφάλμα Τύπου II :**

$$\begin{aligned} \beta &= P\left(\frac{X}{n} \notin [LCL, UCL] \mid X \sim \text{Bin}(n, p^*)\right) \\ &= P\left(LCL \leq \frac{X}{n} \leq UCL \mid X \sim \text{Bin}(n, p^*)\right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

όπου  $p^*$  είναι μια οποιαδήποτε εκτός ελέγχου τιμή του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων.

### 1.10.2 Διαγράμματα Ελέγχου για τον Αριθμό των Ελαττωματικών Προϊόντων

Στο διάγραμμα ελέγχου  $np$  για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η  $W_i = X_i$  και άρα  $\mu_{W_i} = np$  και  $\sigma_{W_i}^2 = np(1-p)$ . Εάν χρησιμοποιήσουμε μοντέλο ορίων  $3\sigma$ , τα όρια ελέγχου για τη Φάση I και τη Φάση II προσδιορίζονται στη συνέχεια.

**3σ Όρια Ελέγχου Φάσης II :**

$$\begin{aligned} LCL &= np - 3\sqrt{np(1-p)} \\ CL &= np \\ UCL &= np + 3\sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

**3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I :**

$$\begin{aligned} LCL &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ CL &= n\bar{p} \\ UCL &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα ελέγχου  $p$  και  $np$  στην πράξη είναι ισοδύναμα και άρα αρκεί η κατασκευή ενός εκ των δύο. Ακόμη, ως προς το μέγεθος του δείγματος διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ισομεγέθη και ανισομεγέθη δείγματα. Στην πρώτη περίπτωση δηλαδή έχουμε κοινό μέγεθος δείγματος ενώ στη δεύτερη έχουμε μεταβλητό.

### Ανισομεγέθη Δείγματα :

Έστω ένα  $p$  διάγραμμα ελέγχου με μεταβλητό μέγεθος δείγματος. Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας  $m$  ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους  $n_i$  το καθένα, έστω τα  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ini})$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Για την τυχαία μεταβλητή  $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{ini}$  η οποία δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα έχουμε ότι αυτή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n_i, p$  (συμβολισμός  $\text{Bin}(n_i, p)$ ). Ακόμη, για την τυχαία μεταβλητή  $W_i = \hat{p}_i = X_i/n_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  που είναι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο δείγμα  $i$  έχουμε ότι  $\mu_{W_i} = p$  και  $\sigma_{W_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Επιπλέον, θέτοντας

$$\bar{P} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} \quad (1.28)$$

έχουμε ότι  $E(\bar{P}) = p$  καθώς  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \sim \text{Bin}(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p)$ .

### **3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I :**

$$LCL = \bar{P} - 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{n_i}}$$
$$CL = \bar{P} \quad (1.29)$$

$$UCL = \bar{P} + 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{n_i}}$$

### Ισομεγέθη Δείγματα :

Στην περίπτωση αυτή έχουμε κοινό μέγεθος δείγματος. Εδώ τα όρια ελέγχου είναι προσεγγιστικά και άρα δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στα σημεία που βρίσκονται κοντά στα όρια ελέγχου. Η εκτίμηση του  $p$  είναι ξανά το  $\bar{P}$ , αλλά εδώ χρησιμοποιούμε

$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{m} \quad (1.30)$$

όταν  $0.75\bar{n} \leq n_i \leq 1.25\bar{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (Continuing Process Control and Process Capability Improvement (1989)).

### **3σ Όρια Ελέγχου Φάσης I :**

$$LCL = \bar{P} - 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{\bar{n}}}$$
$$CL = \bar{P} \quad (1.31)$$

$$UCL = \bar{P} + 3 \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{\bar{n}}}$$

## 1.11 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέραμε βασικές έννοιες του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών όπως είναι ο καθορισμός της εντός και εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασίας καθώς και οι Φάσεις ενός διαγράμματος ελέγχου. Ακόμη, παρουσιάσαμε τα κύρια είδη διαγραμμάτων ελέγχου και τα βασικά μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγησή τους, ενώ δόθηκαν συνοπτικά οι ιδιότητες των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart για διακριτά χαρακτηριστικά.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση ποσοστών και αναλογιών. Πιο συγκεκριμένα, όταν τα ποσοστά είναι αποτελέσματα από πειράματα Bernoulli, τότε τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart  $p$  μπορούν να εφαρμοστούν για την παρακολούθηση της αναλογίας. Όταν όμως τα ποσοστά ή οι αναλογίες δεν είναι αποτελέσματα Bernoulli πειραμάτων, τότε σε αυτές τις περιπτώσεις τα προηγούμενα διαγράμματα ελέγχου δεν μπορούν να εφαρμοστούν και για το λόγο αυτό απαιτείται η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με βάση ένα πιο κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart χαρακτηρίζονται από το σημαντικό μειονέκτημα ότι χρησιμοποιούν τις πληροφορίες που περιέχονται μόνο στο τελευταίο σημείο του διαγράμματος και κατά κανόνα αγνοούν τα προηγούμενα δείγματα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αδυναμία των συγκεκριμένων διαγραμμάτων να αντιληφθούν γρήγορα και αποτελεσματικά σχετικά μικρές αλλαγές. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA είναι μια καλή εναλλακτική λύση έναντι του διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart, όταν μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε μικρές μεταβολές στο μέσο επίπεδο της διεργασίας.





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Διαγράμματα Ελέγχου για την Παρακολούθηση Ποσοστών και Αναλογιών

### 2.1 Εισαγωγή

Σε αρκετές περιπτώσεις ταξινομούμε ένα προϊόν σαν ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο (defective or nonconforming) αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων προς τον συνολικό αριθμό των παραγόμενων προϊόντων. Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει μια παραγωγική διεργασία είναι γνωστό και ίσο με  $p$ . Ακόμη, έστω ότι επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα. Συμβολίζουμε με  $X_{ij}$  την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 ή 0 ανάλογα αν το  $j$  προϊόν του  $i$  δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η  $X_{ij}$  θα ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $p \in (0,1)$  (συμβολισμός  $B(1, p)$ ) και η τυχαία μεταβλητή  $X_i$  που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο  $i$  δείγμα θα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n, p$  (συμβολισμός  $Bin(n, p)$ ). Αυτή η δομή δεδομένων θα αναφέρεται παρακάτω ως «δεδομένα σύμφωνα με πείραμα Bernoulli».

Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται ιδιότητες (attributes). Τα Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων (Attribute Control Charts) είναι πολύ χρήσιμα για την παρακολούθηση διεργασιών όπου τα ποιοτικά χαρακτηριστικά δεν μπορούν να μετρηθούν σε συνεχή κλίμακα, αλλά παίρνουν αριθμήσιμο πλήθος τιμών και περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ποσοστό της ανεργίας, όπου το κάθε άτομο καταγράφεται ως άνεργος ή μη άνεργος και στη συνέχεια διαιρείται το πλήθος των ατόμων που είναι άνεργοι με το σύνολο του εργατικού δυναμικού. Τα πιο γνωστά και ευρέως χρησιμοποιούμενα διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες είναι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τα οποία προτάθηκαν από τον Walter A. Shewhart (1931). Τα διαγράμματα  $p$  και  $np$  χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του ποσοστού και του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων αντίστοιχα. Οι εκτιμήσεις του μέσου όρου και της διακύμανσης υπολογίζονται με βάση τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $p$  ενώ τα όρια ελέγχου υπολογίζονται με βάση την προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική κατανομή. Οι μεταβλητές που εμπλέκονται στο πηλίκο των ελαττωματικών προϊόντων προς τον συνολικό αριθμό των παραγόμενων προϊόντων είναι παρατηρήσεις που εκφράζονται στο διάστημα  $(0,1)$ .

Με σκοπό τη μοντελοποίηση δεδομένων τα οποία εκφράζονται με μεμονωμένες παρατηρήσεις στο διάστημα (0,1) οι Ho et al. (2019) ανέπτυξαν διαγράμματα ελέγχου σύμφωνα με τις κατανομές Beta, Simplex και Unit Gamma και συνέκριναν την απόδοσή τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις κατανομές αυτές καθώς και τα σχετικά διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών με τιμές στο διάστημα (0,1).

## 2.2 Κάποιες Κατανομές για Μοντελοποίηση Ποσοστών και Αναλογιών

Όταν τα ποσοστά ή αναλογίες είναι αποτελέσματα από πειράματα Bernoulli, τα διαγράμματα ελέγχου  $p$  και  $np$  μπορούν να εφαρμοστούν για την παρακολούθηση αυτών. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα ποσοστά ή οι αναλογίες δεν είναι αποτελέσματα Bernoulli πειραμάτων αν και εκφράζονται με παρατηρήσεις στο διάστημα (0,1). Για παράδειγμα, η παρακολούθηση της αναλογίας των συστατικών ενός φαρμάκου, κάτι το οποίο ενδιαφέρει τις φαρμακευτικές βιομηχανίες καθότι αποτελεί απαραίτητη ενέργεια για την διασφάλιση της αποτελεσματικότητας του κάθε φαρμάκου ή το ποσοστό του αλατιού που περιέχεται σε ένα συγκεκριμένο φαγητό. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα προηγούμενα διαγράμματα ελέγχου δεν μπορούν να εφαρμοστούν για την παρακολούθηση ποσοστών και αναλογιών. Για το λόγο αυτό, προτείνεται η ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου με βάση ένα πιο κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας.

Η χρήση εναλλακτικών διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση ποσοστών και αναλογιών δεν είναι κάτι πρόσφατο. Ο Quesenberry (1991) πρότεινε ένα διωνυμικό Q διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού μη συμμορφούμενων αντικειμένων χρησιμοποιώντας έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου και απέδειξε ότι τα μετασχηματισμένα δεδομένα έχουν κατανομή πιο «κοντά» στην κανονική κατανομή από ότι στη διωνυμική. Ο Heimann (1996) παρουσίασε μια τροποποίηση των ορίων ελέγχου του  $p$  διαγράμματος για μεγάλα μεγέθη δειγμάτων ( $n > 10000$ ), σημειώνοντας ότι σε αυτήν την περίπτωση τα όρια ελέγχου είναι στενά, με αποτέλεσμα να αυξάνεται έτσι ο ρυθμός εσφαλμένου συναγεμού. Οι Schwertman and Ryan (1997) πρότειναν τροποποιήσεις των ορίων ελέγχου για το  $np$  διάγραμμα με σκοπό οι ιδιότητες του συγκεκριμένου διαγράμματος να προσεγγίζουν τις ιδιότητες του διαγράμματος που θα είχαμε αν ίσχυε η κανονική κατανομή όταν  $p < 0.003$  ενώ ο Chen (1998) πρότεινε τροποποιήσεις στα όρια ελέγχου του  $p$  διαγράμματος και τα συνέκρινε με το παραδοσιακό  $p$  διάγραμμα και με το διωνυμικό Q με βάση το ρυθμό εσφαλμένου συναγεμού. Οι Sim and Lim (2008) προσάρμοσαν τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων για να παρακολουθήσουν δεδομένα με υπερβολικά μεγάλο αριθμό μηδενικών μετρήσεων και για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου χρησιμοποίησαν το διάστημα Blyth-Still (Blyth and Still (1983)) με  $3\sigma$  όρια ελέγχου υποθέτοντας ότι αυτά τα δεδομένα ακολουθούν είτε τη διωνυμική κατανομή είτε την κατανομή Poisson.

Ο Bourke (2008) συνέκρινε την απόδοση τεσσάρων διαγραμμάτων ελέγχου παρακολουθώντας τις μετατοπίσεις του ποσοστού μη συμμορφούμενων αντικειμένων σε βιομηχανικές διαδικασίες και σημείωσε ομοιότητες στην απόδοση του συνθετικού διαγράμματος ελέγχου (synthetic control chart, Wu and Spedding (2000)) και του  $np$  διαγράμματος για μεγάλο

χρονικό διάστημα της εντός ελέγχου διεργασίας. Με το ίδιο σκεπτικό, οι Aebtarm and Bouguila (2011) συνέκριναν την απόδοση έντεκα διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση ελαττωμάτων με βάση την κατανομή Poisson. Οι Hsieh et al. (2007) με σκοπό την παρακολούθηση των ελαττωμάτων της γκοφρέτας πυριτίου (silicon wafer), μιας λεπτής φέτας ημιαγωγού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων και κατανέμεται σύμφωνα με την Poisson κατανομή κατά τη διαδικασία κατασκευής της, χρησιμοποίησαν το τροποποιημένο  $c$  διάγραμμα ελέγχου, το οποίο βασίζεται στην κατανομή Neyman Type-A (Neyman (1939)) η οποία ανήκει στην οικογένεια των σύνθετων κατανομών Poisson, με στόχο τη μείωση του αριθμού των ψευδών συναγερωμών. Όταν η κατανομή των δεδομένων σε βιομηχανικές διεργασίες είναι μη συμμετρική, ο ρυθμός εσφαλμένου συναγερωμού αυξάνεται όπως η ασυμμετρία λόγω της ασυμφωνίας μεταξύ του σχήματος της κατανομής των δεδομένων και της κανονικής κατανομής.

Μια γνωστή κατανομή πιθανότητας που περιγράφει αυτόν τον τύπο τυχαίας μεταβλητής είναι η κατανομή Beta με βάση την οποία ανέπτυξαν διαγράμματα ελέγχου οι Sant' Anna and ten Caten (2012). Άλλες κατανομές που προτείνονται επίσης για την μοντελοποίηση ποσοστών και αναλογιών για παρατηρήσεις που εκφράζονται στο διάστημα  $(0,1)$  είναι οι κατανομές Simplex και Unit Gamma οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 2.2.1 Κατανομή Beta

Αρχικά, η συστηματική μελέτη της κατανομής Beta αποδίδεται στον Karl Pearson (δείτε π.χ. Yule and Filon (1936)) ενώ περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στη μονογραφία των Johnson et al. (1995). Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Beta με παραμέτρους  $\delta > 0, \gamma > 0$  (συμβολισμός  $Y \sim \text{Be}(\delta, \gamma)$ ). Τότε, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τη σχέση

$$F(y|\delta, \gamma) = I_y(\delta, \gamma), \quad 0 < y < 1 \quad (2.1)$$

όπου

$$I_x(\delta, \gamma) = \frac{B_x(\delta, \gamma)}{B(\delta, \gamma)} \quad (2.2)$$

είναι ο λόγος της μη πλήρους συνάρτησης Beta,

$$B_x(\delta, \gamma) = \int_0^x \omega^{\delta-1} (1 - \omega)^{\gamma-1} d\omega \quad (2.3)$$

είναι η μη πλήρης συνάρτηση Beta,

$$B(\delta, \gamma) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta + \gamma)} \quad (2.4)$$

είναι η συνάρτηση Beta και  $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty \omega^{\delta-1} e^{-\omega} d\omega$  είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $\text{Be}(\delta, \gamma)$  είναι

$$f(y|\delta, \gamma) = \frac{y^{\delta-1}(1-y)^{\gamma-1}}{B(\delta, \gamma)}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.5)$$

Η κατανομή Beta με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω έχει μέση τιμή και η διασπορά

$$E(Y) =: \mu = \frac{\delta}{\delta + \gamma} \quad (2.6)$$

και

$$Var(Y) = \frac{\delta\gamma}{(\delta + \gamma)^2(\delta + \gamma + 1)} \quad (2.7)$$

Οι Ferrari and Cribari-Neto (2004) πρότειναν την εξής παραμετροποίηση

$$\delta = \mu\varphi \quad \text{και} \quad \gamma = (1 - \mu)\varphi \quad (2.8)$$

και έτσι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Beta παίρνει τη μορφή

$$f(y|\mu, \varphi) = \frac{y^{\mu\varphi-1} 1 - y^{(1-\mu)\varphi-1}}{B(\mu\varphi, (1-\mu)\varphi)}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.9)$$

Άρα, η μέση τιμή και η διασπορά κάτω από τη νέα παραμετροποίηση είναι

$$E(Y) = \mu \quad (2.10)$$

και

$$Var(Y) = \frac{\mu(1-\mu)}{\varphi + 1} \quad (2.11)$$

Έτσι πλέον η παράμετρος  $\mu$  είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  ενώ το  $\varphi$  μπορεί να ερμηνευθεί ως παράμετρος ακριβείας με την έννοια ότι όταν το  $\mu$  παραμένει αμετάβλητο, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου  $\varphi$ , τόσο μικρότερη είναι η διασπορά της  $Y$ .

## 2.2.2 Κατανομή Simplex

Η συγκεκριμένη κατανομή εισήχθη από τους Barndorff-Nielsen and Jorgensen (1991). Αν η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Simplex με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  (συμβολισμός  $Y \sim S(\mu, \sigma^2)$ ), τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της δίνεται ως εξής

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \{2\pi \sigma^2 [y(1-y)]^3\}^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} d(y; \mu)\right], \quad 0 < y < 1 \quad (2.12)$$

όπου

$$d(y; \mu) = \frac{(y - \mu)^2}{y(1-y)\mu^2(1-\mu)^2} \quad (2.13)$$

είναι η συνάρτηση απόκλισης,  $0 < \mu < 1$  και  $\sigma^2 > 0$ . Η κατανομή Simplex έχει μοναδική επικρατούσα τιμή αν  $\sigma \leq 4/\sqrt{3}$ , διαφορετικά έχει πολλαπλές. Για την κατανομή Simplex χρησιμοποιήθηκε το πακέτο simplexreg της R. Η μέση τιμή και η διασπορά της είναι

$$E(Y) = \mu \quad (2.14)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2\mu^2(1-\mu)^2}\right\} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2\mu^2(1-\mu)^2}\right) \quad (2.15)$$

όπου  $\Gamma(\alpha, b) = \int_b^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  είναι η μη πλήρης συνάρτηση Γάμμα. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιήθηκε το πακέτο `pracma` της R.

### 2.2.3 Κατανομή Unit Gamma

Η κατανομή αυτή προτάθηκε από τον Grassia (1977). Αν η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Unit Gamma με παραμέτρους  $\theta > 0$ ,  $\tau > 0$  (συμβολισμός  $Y \sim uGA(\theta, \tau)$ ), τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δίνεται ως εξής

$$f(y|\theta, \tau) = \frac{\theta^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{\theta-1} \left[ \log\left(\frac{1}{y}\right) \right]^{\tau-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.16)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$E(Y) = \mu = \left[ \frac{\theta}{\theta + 1} \right]^\tau \quad (2.17)$$

και

$$Var(Y) = \left[ \frac{\theta}{\theta + 2} \right]^\tau - \left[ \frac{\theta}{\theta + 1} \right]^{2\tau} \quad (2.18)$$

Οι Mousa et al. (2016) θεώρησαν την εξής παραμετροποίηση

$$\theta = \frac{\mu^{1/\tau}}{(1 - \mu^{1/\tau})} \quad (2.19)$$

και έτσι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Unit Gamma γίνεται

$$f(y|\mu, \tau) = \frac{\left[ \frac{\mu^{1/\tau}}{(1 - \mu^{1/\tau})} \right]^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{\frac{\mu^{1/\tau}}{(1 - \mu^{1/\tau})} - 1} \left[ \log\left(\frac{1}{y}\right) \right]^{\tau-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (2.20)$$

όπου  $0 < \mu < 1$  και  $\tau > 0$ . Η μέση τιμή και η διασπορά κάτω από τη νέα παραμετροποίηση είναι

$$E(Y) = \mu \quad (2.21)$$

και

$$Var(Y) = \mu \left[ \frac{1}{(2 - \mu^{1/\tau})^\tau} - \mu \right] \quad (2.22)$$

Για την κατανομή Unit Gamma χρησιμοποιήθηκε το πακέτο `unitModalReg` της R.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στην διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών από την κατανομή Unit Gamma. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $X$  η οποία δηλαδή ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha, \beta$  (συμβολισμός  $X \sim G(\alpha, \beta)$ ). Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό  $Y = e^{-X}$  (Grassia (1977)) προκύπτει ότι η  $Y$  θα ακολουθεί την κατανομή Unit Gamma με παραμέτρους  $\beta, \alpha$  (συμβολισμός  $Y \sim uGA(\beta, \alpha)$ ), όπως ονομάστηκε από τους Ratnaparkhi and Mosimann (1990), αφού οι τιμές αυτής της κατανομής μπορούν να εμφανιστούν μόνο στο διάστημα  $(0, 1)$ . Έτσι, για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή Unit Gamma, αρκεί να παράγουμε τυχαίες παρατηρήσεις από την κατανομή Gamma και να εφαρμόσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Πράγματι, έστω ότι η τ.μ.  $X \sim G(\alpha, \beta)$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (2.23)$$

όπου  $\Gamma(u) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$  είναι η συνάρτηση Γάμμα. Αν θέσουμε  $Y = e^{-X} \Leftrightarrow X = -\log Y$  και  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}$  τότε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (-\log y)^{\alpha-1} e^{-\beta(-\log y)} \cdot \left| -\frac{1}{y} \right| \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (-\log y)^{\alpha-1} e^{\log y^\beta} \cdot \left( \frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (-\log y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Άρα,  $Y \sim uGA(\beta, \alpha)$ .

Η κατανομή Unit Gamma όπως αυτή ορίστηκε στον τύπο (2.16) έχει παραμέτρους  $\theta, \tau$ . Οπότε, με την ίδια λογική, αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί την κατανομή  $G(\tau, \theta)$  και εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό  $Y = e^{-X}$ , θα καταλήξουμε ότι η  $Y \sim uGA(\theta, \tau)$ . Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε επιπλέον ότι

$$\theta = \frac{\mu^{1/\tau}}{(1-\mu^{1/\tau})} \quad (2.25)$$

τότε  $Y \sim uGA(\mu, \tau)$  και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$  τελικά γίνεται

$$f(y|\mu, \tau) = \frac{\left[ \frac{\mu^{1/\tau}}{(1-\mu^{1/\tau})} \right]^\tau}{\Gamma(\tau)} y^{\frac{\mu^{1/\tau}}{(1-\mu^{1/\tau})}-1} \left[ \log \left( \frac{1}{y} \right) \right]^{\tau-1}. \quad (2.26)$$

### 2.3 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart για την Παρακολούθηση Μεμονωμένων Παρατηρήσεων για Ποσοστά και Αναλογίες

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τα τρία διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart τα οποία βασίζονται στις κατανομές Beta, Simplex και Unit Gamma που παρουσιάστηκαν παραπάνω για την παρακολούθηση μεμονωμένων μετρήσεων για ποσοστά και αναλογίες ακολουθώντας τη μεθοδολογία από την εργασία των Ho et al. (2019). Τα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου  $p$  και  $np$  βασίζονται στην προσέγγιση της κανονικής κατανομής. Όταν το ποσοστό των ελαττωματικών  $p$  είναι μικρό και το μέγεθος δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο, η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού είναι πολύ υψηλή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη συχνή διακοπή της διεργασίας χωρίς στην πραγματικότητα να υπάρχουν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας.

Επίσης, καθώς χρησιμοποιείται η προσέγγιση στην κανονική κατανομή για το  $p$ , τα όρια ελέγχου δεν περιγράφουν την πραγματική κατάσταση της διεργασίας και άρα αδυνατούν να ανιχνεύσουν οποιαδήποτε βελτίωση της διαδικασίας. Έτσι, εξαιτίας του προβλήματος του μεγάλου ψευδούς συναγερμού, οι πραγματικές ενδείξεις μπορούν να προσπεραστούν. Σε αυτές τις περιπτώσεις συνήθως το κάτω όριο ελέγχου ( $LCL$ ) προκύπτει αρνητικό, γεγονός που οδηγεί σε πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα ψευδούς συναγερμού από την επιθυμητή. Μια πρακτική που εφαρμόζεται για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας. Για προκαθορισμένο σφάλμα τύπου I ίσο με  $\alpha$ , το άνω και κάτω όριο ελέγχου πιθανότητας για το Beta διάγραμμα (Beta Chart) προσδιορίζονται έτσι ώστε

$$P(Y < LCL_B | \mu_{0B}, \varphi_0) = P(Y > UCL_B | \mu_{0B}, \varphi_0) = \alpha/2 \quad (2.27)$$

$$\int_0^{LCL_B} f(y | \mu_{0B}, \varphi_0) = \int_{UCL_B}^1 f(y | \mu_{0B}, \varphi_0) = \alpha/2 \quad (2.28)$$

Αυτό σημαίνει ότι για μια εντός ελέγχου διεργασία η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου ισούται με  $\alpha$ , δηλαδή η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου (είτε πάνω από το  $UCL_B$  είτε κάτω από το  $LCL_B$ ) είναι ίση με  $\alpha/2$ . Με  $UCL_B$  και  $LCL_B$  συμβολίζονται το άνω και κάτω όριο ελέγχου αντίστοιχα για το Beta διάγραμμα, ενώ  $\mu_{0B}$ ,  $\varphi_0$  είναι οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας όταν αυτή μοντελοποιείται από την Beta κατανομή. Τα όρια ελέγχου πιθανότητας για το Simplex διάγραμμα (Simplex Chart) υπολογίζονται ως εξής

$$P(Y < LCL_S | \mu_{0S}, \sigma_0^2) = P(Y > UCL_S | \mu_{0S}, \sigma_0^2) = \alpha/2 \quad (2.29)$$

$$\int_0^{LCL_S} f(y | \mu_{0S}, \sigma_0^2) = \int_{UCL_S}^1 f(y | \mu_{0S}, \sigma_0^2) = \alpha/2 \quad (2.30)$$

όπου με  $UCL_S$  και  $LCL_S$  συμβολίζονται αντίστοιχα το άνω και κάτω όριο ελέγχου για το Simplex διάγραμμα, ενώ  $\mu_{0S}$ ,  $\sigma_0^2$  είναι οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας όταν



μοντελοποιείται από την Simplex κατανομή. Τέλος, τα όρια ελέγχου πιθανότητας για το Unit Gamma διάγραμμα (Unit Gamma Chart) είναι

$$P(Y < LCL_G | \mu_{0G}, \tau_0) = P(Y > UCL_G | \mu_{0G}, \tau_0) = \alpha/2 \quad (2.31)$$

$$\int_0^{LCL_G} f(y | \mu_{0G}, \tau_0) = \int_{UCL_G}^1 f(y | \mu_{0G}, \tau_0) = \alpha/2 \quad (2.32)$$

όπου με  $UCL_G$  και  $LCL_G$  συμβολίζονται το άνω και κάτω όριο ελέγχου για το Unit Gamma διάγραμμα, ενώ  $\mu_{0G}, \tau_0$  είναι οι εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων της διεργασίας όταν μοντελοποιείται από την Unit Gamma κατανομή.

Η ισχύς για τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου υπολογίζεται από τον τύπο

$$1 - \beta = P(Y \leq LCL_i | \theta_1) + P(Y \geq UCL_i | \theta_1) \quad (2.33)$$

όπου  $i = B, S, G$  για την Beta, Simplex, Unit Gamma και  $\theta_{1i} = \{(\mu_{1B}, \varphi_1), (\mu_{1S}, \sigma_1^2), (\mu_{1G}, \tau_1)\}$  είναι οι εκτός ελέγχου παράμετροι για κάθε κατανομή αντίστοιχα.

Στην περίπτωση των μονόπλευρων διαγραμμάτων, τα όρια ελέγχου για τα παραπάνω διαγράμματα υπολογίζονται ως

$$P(Y < LCL_i | \theta_0) = \alpha \quad (2.34)$$

ή

$$P(Y > UCL_i | \theta_0) = \alpha \quad (2.35)$$

όπου  $i = B, S, G$  για την Beta, Simplex, Unit Gamma και  $\theta_{0i} = \{(\mu_{0B}, \varphi_0), (\mu_{0S}, \sigma_0^2), (\mu_{0G}, \tau_0)\}$  είναι οι εντός ελέγχου παράμετροι για κάθε κατανομή αντίστοιχα.

Η ισχύς σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζεται ως

$$1 - \beta = P(Y < LCL_i | \theta_1) \quad (2.36)$$

ή

$$1 - \beta = P(Y > UCL_i | \theta_1) \quad (2.37)$$

όπου  $i = B, S, G$  για την Beta, Simplex, Unit Gamma και  $\theta_{1i} = \{(\mu_{1B}, \varphi_1), (\mu_{1S}, \sigma_1^2), (\mu_{1G}, \tau_1)\}$  είναι οι εκτός ελέγχου παράμετροι για κάθε κατανομή αντίστοιχα.

## 2.4 Μέτρα Απόδοσης

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα μέτρο που χρησιμοποιείται συχνά για την αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στις παραγωγικές διαδικασίες είναι ο αναμενόμενος αριθμός διαδοχικών σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα μέχρι να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου (Average Run Length,  $ARL$ ). Το  $ARL$  ορίζεται από τη σχέση

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (2.38)$$

όπου με  $p$  συμβολίζεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Άρα, ο αριθμός σημείων που σχεδιάζονται στο διάγραμμα μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου είναι μια τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ . Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου το  $p = a$  ενώ όταν είναι εκτός ελέγχου το  $p = 1 - \beta$ . Έτσι, το εντός και εκτός ελέγχου  $ARL$  υπολογίζονται αντίστοιχα από τους τύπους (1.10) και (1.11) του κεφαλαίου 1.

Λόγω της διακριτής φύσης της διωνυμικής κατανομής, είναι σχεδόν απίθανο να επιτύχουμε την επιθυμητή εντός ελέγχου τιμή  $ARL_0 = 370.4$  που προκύπτει για  $\alpha = 0.0027$ . Αυτό είναι ένα γνωστό μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου για ιδιότητες γενικότερα (δείτε Castagliola and Wu (2012)). Επομένως, τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου υποθέτουν εντός ελέγχου  $ARL$  τιμές όσο πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή.

Άλλα δύο μέτρα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά για τον προσδιορισμό της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής (Standard Deviation Run Length,  $SDRL$ ) και η διάμεσος της κατανομής του μήκους ροής (Median Run Length,  $MRL$ ) τα οποία δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους (1.12) και (1.13) του κεφαλαίου 1. Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, θα αναφερόμαστε στα παραπάνω μέτρα απόδοσης χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $SDRL_0$  και  $MRL_0$ , ενώ όταν η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $SDRL_1$  και  $MRL_1$ .

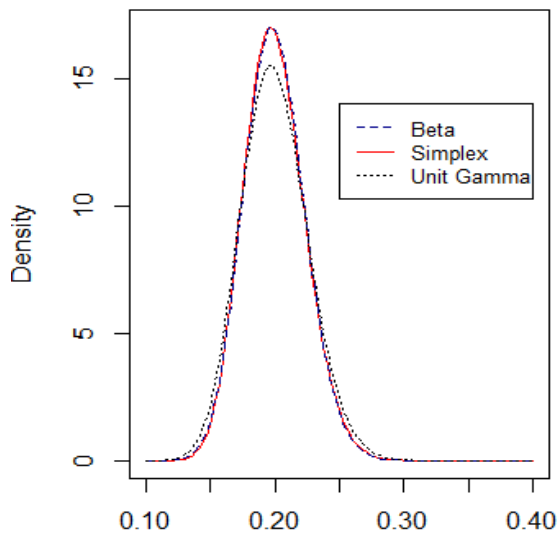
## 2.5 Απόδοση των Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης αριθμητικής μελέτης. Στόχος είναι η σύγκριση της απόδοσης των τριών διαγραμμάτων ελέγχου που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.3. Αρχικά, θεωρούμε πως συμβαίνουν μετατοπίσεις μόνο στο μέσο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων (μέση τιμή της διεργασίας ή μέση τιμή  $\mu$  της κατανομής που περιγράφει την εντός ελέγχου διεργασία) και οι τιμές των παραμέτρων διασποράς παραμένουν αμετάβλητες. Έτσι λοιπόν εξετάζουμε την απόδοση των τριών διαγραμμάτων ελέγχου, υπολογίζοντας τις τιμές των μέτρων *ARL*, *MRL* και *SDRL* ως προς την ικανότητά τους να ανιχνεύουν μετατοπίσεις διάφορων μεγεθών στο μέσο επίπεδο. Επιπλέον, εξετάζεται η επίδραση στην ταχύτητα ανίχνευσης των μετατοπίσεων στη μέση αναλογία εάν τα όρια ελέγχου που καθορίζονται για μια συγκεκριμένη κατανομή, έστω «Α», χρησιμοποιηθούν εσφαλμένα για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων για μια άλλη κατανομή, έστω «Β» ή αντιστρόφως, δηλαδή όταν τα όρια ελέγχου έχουν υπολογιστεί υπό το «λάθος» μοντέλο (όχι το πραγματικό).

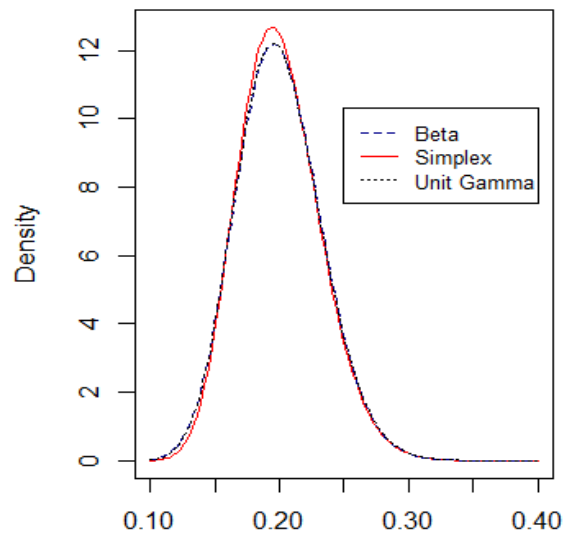
Ειδικότερα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\mu_{0B} = \mu_{0S} = \mu_{0G} = 0.2$  για να δηλώσουμε την εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας όταν αυτή περιγράφεται από κάθε μια από τις τρεις κατανομές. Την εκτός ελέγχου μέση τιμή για κάθε κατανομή τη συμβολίζουμε με  $\mu_{1B} = \mu_{1S} = \mu_{1G} = 0.2 \pm \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon = \{0.02, 0.04, 0.06, 0.08\}$  και δηλώνει τα διάφορα επίπεδα μετατόπισης (αύξηση ή μείωση). Τέλος, επιλέγονται τέσσερα επίπεδα διασποράς για κάθε κατανομή τα οποία καταγράφει συγκεντρωτικά ο Πίνακας 2.1, περίπτωση 1 έως και περίπτωση 4 και δηλώνουν τις περιπτώσεις με τις μικρότερες και τις μεγαλύτερες διασπορές αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις περιπτώσεις 1 και 2 απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1 ενώ για τις περιπτώσεις 3 και 4 απεικονίζονται στο Σχήμα 2.2. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι οι συναρτήσεις πιθανότητας τους παρουσιάζουν παρόμοια μορφή σε κάθε περίπτωση.

**Πίνακας 2.1:** Παράμετροι Διασποράς.

Case	Beta	Simplex	Unit Gamma
	$\varphi$	$\sigma$	$\tau$
1	290	0.37	155
2	148	0.5	96
3	80	0.71	51
4	31	1.2	20

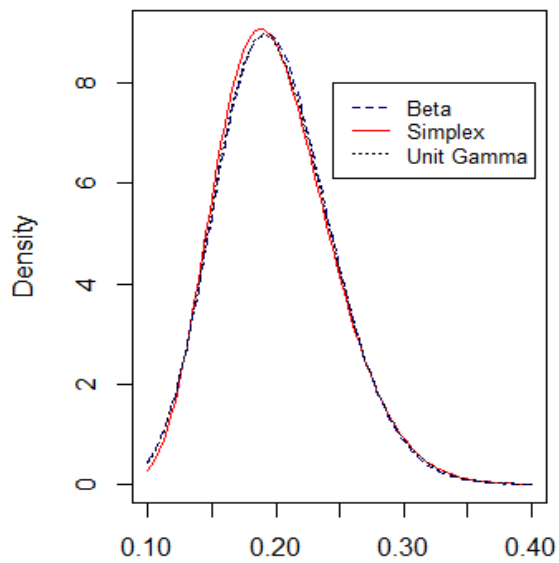


(a) Case 1

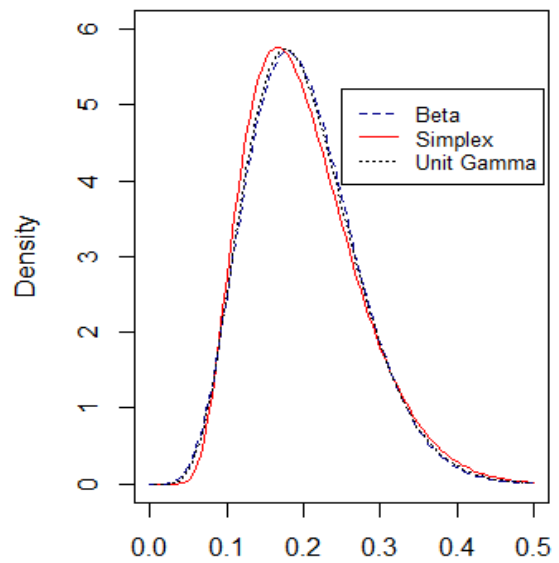


(b) Case 2

**Σχήμα 2.1:** Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας για Beta, Simplex και Unit Gamma για τις περιπτώσεις 1 και 2 του Πίνακα 2.1.



(c) Case 3



(d) Case 4

**Σχήμα 2.2:** Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας για Beta, Simplex και Unit Gamma για τις περιπτώσεις 3 και 4 του Πίνακα 2.1.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου όταν η μέση αναλογία ελαττωματικών προϊόντων  $p_0 = 0.2$  μετατοπίζεται, θεωρώντας σφάλμα τύπου Ι  $\alpha = 0.0027$ , ώστε να επιτύχουμε τιμή του  $ARL$  όσο πιο κοντά στην επιθυμητή τιμή  $ARL_0 = 370.4$ .

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε εννέα πίνακες των έντεκα στηλών. Στους τρεις πρώτους πίνακες (Πίνακας 2.2 έως Πίνακας 2.4) η μέση αναλογία μετατοπίζεται προς δύο κατευθύνσεις, δηλαδή αυξάνεται ή μειώνεται. Τα διαγράμματα ελέγχου σε αυτούς τους πίνακες είναι δίπλευρα διαγράμματα. Οι επόμενοι τρεις πίνακες (Πίνακας 2.5 έως Πίνακας 2.7) αφορούν μόνο αύξηση στη μέση αναλογία (περίπτωση άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου) ενώ οι τρεις τελευταίοι πίνακες (Πίνακας 2.8 έως Πίνακας 2.10) σχετίζονται μόνο με μείωση στη μέση αναλογία (περίπτωση κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου). Σε κάθε πίνακα, οι τρεις πρώτες στήλες περιέχουν τις τιμές των μέτρων απόδοσης  $ARL$ ,  $SDRL$ ,  $MRL$  όταν χρησιμοποιούνται τα πραγματικά όρια ελέγχου. Αυτό φαίνεται στις στήλες με ονόματα Beta True, Simplex True και Unit Gamma True. Οι υπόλοιπες έξι στήλες περιέχουν τις τιμές των παραπάνω μέτρων απόδοσης όταν όμως τα όρια ελέγχου έχουν υπολογιστεί υπό το «λάθος» μοντέλο. Επίσης, σε κάθε πίνακα εξετάζεται η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου για τα τέσσερα επίπεδα διασποράς και δίνονται τα όρια ελέγχου για κάθε διάγραμμα σύμφωνα με το μοντέλο που εφαρμόζεται.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό, έστω για παράδειγμα ο Πίνακας 2.2. Οι τρεις πρώτες στήλες (με όνομα Beta True) αφορούν τις πραγματικές μετρήσεις της απόδοσης του Beta διαγράμματος, όταν τα όρια ελέγχου υπολογίζονται ορθά με βάση την Beta κατανομή. Στον ίδιο πίνακα, οι στήλες 6-8 και 9-11 (με όνομα Simplex και Unit Gamma) είναι οι μετρήσεις της απόδοσης του Beta διαγράμματος, όταν χρησιμοποιούνται εσφαλμένα τα όρια ελέγχου των Simplex και Unit Gamma διαγραμμάτων αντίστοιχα. Το ίδιο μοτίβο ακολουθούν και οι υπόλοιποι πίνακες. Τα συμπεράσματα από την αριθμητική μελέτη παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

**Πίνακας 2.2:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 1:	0.12	1.26	0.57	0.44	<b>1.21</b>	<b>0.50</b>	<b>0.40</b>	<b>1.39</b>	<b>0.74</b>	<b>0.55</b>
$\varphi = 290$	0.14	2.34	1.77	1.24	<b>2.10</b>	<b>1.52</b>	<b>1.07</b>	<b>2.99</b>	<b>2.44</b>	<b>1.70</b>
$\sigma = 0.37$	0.16	8.04	7.52	5.22	6.60	6.08	4.22	12.49	11.98	8.31
$\tau = 155$	0.18	54.60	54.10	37.50	40.35	39.85	27.62	105.26	104.76	72.61
	0.2	370.37	369.87	256.37	<b>333.95</b>	<b>333.45</b>	<b>231.13</b>	1028.5	1028	712.56
	0.22	69.71	69.21	47.97	91.56	91.06	63.12	178.02	177.52	123.05
	0.24	12.26	11.75	8.15	15.05	14.54	10.08	24.70	24.19	16.77
	0.26	3.71	3.17	2.21	<b>4.26</b>	<b>3.73</b>	<b>2.59</b>	6.01	5.49	3.81
	0.28	1.78	1.18	0.84	<b>1.93</b>	<b>1.34</b>	<b>0.95</b>	<b>2.38</b>	<b>1.81</b>	<b>1.27</b>
	LCL		0.135			0.138			0.131	
	UCL		0.275			0.278			0.285	
Case 2:	0.12	2.36	1.79	1.26	<b>1.88</b>	<b>1.29</b>	<b>0.91</b>	<b>2.24</b>	<b>1.67</b>	<b>1.17</b>
$\varphi = 148$	0.14	5.72	5.20	3.61	<b>3.90</b>	<b>3.36</b>	<b>2.34</b>	<b>5.26</b>	<b>4.73</b>	<b>3.29</b>
$\sigma = 0.5$	0.16	20.11	19.60	13.59	11.52	11.01	7.63	17.84	17.33	12.02
$\tau = 96$	0.18	100.51	100.01	69.32	48.27	47.77	33.11	86.24	85.74	59.43
	0.2	370.37	369.87	256.37	211.09	210.59	145.97	<b>359.18</b>	<b>358.68</b>	<b>248.62</b>
	0.22	129.21	128.71	89.21	<b>128.71</b>	<b>128.21</b>	<b>88.87</b>	148.13	147.63	102.33
	0.24	32.24	31.74	22	<b>33.09</b>	<b>32.59</b>	<b>22.59</b>	<b>36.31</b>	<b>35.81</b>	<b>24.82</b>
	0.26	10.61	10.10	7	<b>10.83</b>	<b>10.32</b>	<b>7.15</b>	<b>11.60</b>	<b>11.09</b>	<b>7.69</b>
	0.28	4.53	4	2.78	<b>4.62</b>	<b>4.09</b>	<b>2.84</b>	<b>4.89</b>	<b>4.36</b>	<b>3.03</b>
	LCL		0.1132			0.1205			0.1147	
	UCL		0.308			0.3095			0.1307	
Case 3:	0.12	5.11	4.58	3.18	<b>3.58</b>	<b>3.04</b>	<b>2.12</b>	<b>4.75</b>	<b>4.22</b>	<b>2.93</b>
$\varphi = 80$	0.14	12.99	12.48	8.65	7.97	7.45	5.17	<b>11.77</b>	<b>11.26</b>	<b>7.81</b>
$\sigma = 0.71$	0.16	40.85	40.35	27.97	21.76	21.25	14.73	36.03	35.53	24.63
$\tau = 51$	0.18	150.86	150.36	104.22	234.83	234.33	162.42	131.60	131.10	90.87
	0.2	370.37	369.87	256.37	256.62	256.12	177.53	<b>384.12</b>	<b>383.62</b>	<b>265.90</b>
	0.22	195.11	194.61	134.89	97.36	96.86	67.14	251.03	250.53	173.65
	0.24	67.47	66.97	46.42	97.12	96.62	66.97	86.65	86.15	59.71
	0.26	26.33	25.83	17.90	36.49	35.99	24.94	32.76	32.26	22.36
	0.28	11.93	11.42	7.92	15.76	15.25	10.57	14.37	13.86	9.61
	LCL		0.0884			0.0968			0.0899	
	UCL		0.3506			0.3586			0.356	
Case 4:	0.12	15.68	15.17	10.52	7.45	6.93	4.81	12.69	12.18	8.44
$\varphi = 31$	0.14	36.30	35.80	24.81	14.63	14.12	9.79	28.09	27.59	19.12
$\sigma = 1.2$	0.16	90.21	89.71	62.18	31.11	30.61	21.22	67.19	66.69	46.23
$\tau = 20$	0.18	220.61	220.11	152.57	70.59	70.09	48.58	166.10	165.6	114.78
	0.2	370.37	369.87	256.37	160.93	160.43	111.20	<b>341.86</b>	<b>341.36</b>	<b>236.61</b>
	0.22	289.82	289.32	200.54	<b>282.74</b>	<b>282.24</b>	<b>195.63</b>	361.97	361.47	250.55
	0.24	155.75	155.25	107.61	259.18	258.68	179.30	213.74	213.24	147.81
	0.26	81.39	80.89	56.07	151.15	150.65	104.42	111.39	110.89	76.86
	0.28	44.63	44.13	30.59	81.19	80.69	55.93	59.75	59.25	41.07
	LCL		0.0449			0.0594			0.0485	
	UCL		0.4517			0.4742			0.4628	

**Πίνακας 2.3:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart.

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 1:	0.12	1.09	0.31	0.28	<b>1.13</b>	<b>0.38</b>	<b>0.32</b>	<b>1.25</b>	<b>0.56</b>	<b>0.43</b>
$\varphi = 290$	0.14	2.15	1.57	1.11	<b>2.50</b>	<b>1.94</b>	<b>1.36</b>	<b>3.56</b>	<b>3.02</b>	<b>2.10</b>
$\sigma = 0.37$	0.16	9.34	8.83	6.12	12.32	11.81	8.19	22.95	22.44	15.56
$\tau = 155$	0.18	70.24	69.74	48.34	103.42	102.92	71.34	242.45	241.95	167.71
	0.2	370.46	369.96	256.44	<b>371.34</b>	<b>370.84</b>	<b>257.05</b>	1080.23	1079.73	748.41
	0.22	55.04	54.54	37.80	43.89	43.39	30.07	95.21	94.71	65.65
	0.24	10.52	10.01	6.94	<b>8.97</b>	<b>8.46</b>	<b>5.86</b>	15.43	14.92	10.34
	0.26	3.71	3.17	2.21	<b>3.34</b>	<b>2.80</b>	<b>1.95</b>	<b>4.81</b>	<b>4.28</b>	<b>2.97</b>
	0.28	1.98	1.39	0.99	<b>1.85</b>	<b>1.25</b>	<b>0.89</b>	<b>2.34</b>	<b>1.77</b>	<b>1.24</b>
	LCL		0.138			0.135			0.131	
	UCL		0.278			0.275			0.285	
Case 2:	0.12	1.87	1.28	0.91	<b>2.73</b>	<b>2.17</b>	<b>1.52</b>	<b>2.50</b>	<b>1.94</b>	<b>1.36</b>
$\varphi = 148$	0.14	5.72	5.20	3.61	11.14	10.63	7.37	9.60	9.09	6.30
$\sigma = 0.5$	0.16	24.83	24.32	16.86	61.46	60.96	42.25	50.41	49.91	34.59
$\tau = 96$	0.18	128.23	127.73	88.54	380.55	380.05	263.43	302.39	301.89	209.25
	0.2	370.48	369.98	256.45	562.52	562.02	389.56	593.77	593.27	411.22
	0.22	90	89.50	62.04	<b>88.79</b>	<b>88.29</b>	<b>61.20</b>	100.42	99.92	69.26
	0.24	21.68	21.17	14.68	<b>21.22</b>	<b>20.71</b>	<b>14.36</b>	<b>23.35</b>	<b>22.84</b>	<b>15.84</b>
	0.26	7.94	7.42	5.15	<b>7.81</b>	<b>7.29</b>	<b>5.06</b>	<b>8.40</b>	<b>7.88</b>	<b>5.47</b>
	0.28	3.94	3.40	2.37	<b>3.89</b>	<b>3.35</b>	<b>2.33</b>	<b>4.11</b>	<b>3.58</b>	<b>2.49</b>
	LCL		0.1205			0.1132			0.1147	
	UCL		0.3095			0.308			0.3107	
Case 3:	0.12	5.94	5.42	3.76	12.47	11.96	8.29	10.66	10.15	7.04
$\varphi = 80$	0.14	19.22	18.71	12.97	49.30	48.80	33.82	40.55	40.05	27.76
$\sigma = 0.71$	0.16	64.92	64.42	44.65	195.18	194.68	134.94	155.76	155.26	107.62
$\tau = 51$	0.18	213.70	213.20	147.78	646.57	646.07	447.82	538.90	538.40	373.19
	0.2	370.35	369.85	256.36	413.27	412.77	286.11	497.08	496.58	344.20
	0.22	135.09	134.59	93.29	100.36	99.86	69.22	125.53	125.03	86.66
	0.24	42.76	42.26	29.29	32.52	32.02	22.19	<b>39.15</b>	<b>38.65</b>	<b>26.79</b>
	0.26	17.56	17.05	11.82	14.01	13.50	9.36	<b>16.30</b>	<b>15.79</b>	<b>10.95</b>
	0.28	8.93	8.42	5.84	<b>7.42</b>	<b>6.90</b>	<b>4.79</b>	<b>8.40</b>	<b>7.88</b>	<b>5.47</b>
	LCL		0.0968			0.0884			0.0899	
	UCL		0.3586			0.3506			0.356	
Case 4:	0.12	35.02	34.52	23.93	335.75	335.25	232.38	167.38	166.88	115.67
$\varphi = 31$	0.14	80.59	80.09	55.51	936.45	935.95	648.75	443.01	442.51	306.72
$\sigma = 1.2$	0.16	173.86	173.36	120.16	2043.34	2042.84	1415.99	1037.9	1037.40	719.07
$\tau = 20$	0.18	332.35	331.85	230.02	1264.89	1264.39	876.41	1250.58	1250.08	866.49
	0.2	370	369.50	256.12	<b>354.02</b>	<b>353.52</b>	<b>245.04</b>	471.04	470.54	326.15
	0.22	191.01	190.51	132.05	120.56	120.06	83.22	159.17	158.67	109.98
	0.24	84.09	83.59	57.94	52.37	51.87	35.95	66.59	66.09	45.81
	0.26	41.59	41.09	28.48	27.26	26.76	18.55	33.52	33.02	22.89
	0.28	23.42	22.91	15.88	16.19	15.68	10.87	19.37	18.86	13.08
	LCL		0.0594			0.0449			0.0485	
	UCL		0.4742			0.4517			0.4628	

**Πίνακας 2.4:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.

	$\mu$	Unit Gamma -True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
Case 1:	0.12	1.40	0.75	0.55	<b>1.28</b>	<b>0.60</b>	<b>0.46</b>	<b>1.23</b>	<b>0.53</b>	<b>0.41</b>
$\varphi = 290$	0.14	2.85	2.30	1.60	<b>2.28</b>	<b>1.71</b>	<b>1.20</b>	<b>2.07</b>	<b>1.49</b>	<b>1.05</b>
$\sigma = 0.37$	0.16	10	9.49	6.58	6.80	6.28	4.36	5.70	5.18	3.59
$\tau = 155$	0.18	63.21	62.71	43.47	35.72	35.22	24.41	27.37	26.87	18.62
	0.2	370.30	369.80	256.33	155.73	155.23	107.60	146.39	145.89	101.12
	0.22	90.28	89.78	62.23	41.69	41.19	28.55	52.04	51.54	35.72
	0.24	17.82	17.31	12	9.85	9.34	6.47	11.72	11.21	7.77
	0.26	5.36	4.83	3.36	<b>3.51</b>	<b>2.97</b>	<b>2.07</b>	<b>3.97</b>	<b>3.43</b>	<b>2.39</b>
	0.28	2.36	1.79	1.26	<b>1.81</b>	<b>1.21</b>	<b>0.86</b>	<b>1.95</b>	<b>1.36</b>	<b>0.96</b>
	LCL		0.131			0.135			0.138	
	UCL		0.285			0.275			0.278	
Case 2:	0.12	2.23	1.66	1.16	<b>2.35</b>	<b>1.78</b>	<b>1.25</b>	<b>1.86</b>	<b>1.26</b>	<b>0.90</b>
$\varphi = 148$	0.14	5.36	4.83	3.36	<b>5.85</b>	<b>5.33</b>	<b>3.70</b>	<b>3.93</b>	<b>3.39</b>	<b>2.36</b>
$\sigma = 0.5$	0.16	18.84	18.33	12.71	21.36	20.85	14.46	11.92	11.41	7.91
$\tau = 96$	0.18	95.63	95.13	65.94	112.22	111.72	77.44	52	51.50	35.70
	0.2	370.37	369.87	256.37	<b>373.12</b>	<b>372.62</b>	<b>258.28</b>	223.02	222.52	154.24
	0.22	138.59	138.09	95.72	121.20	120.70	83.66	121.75	121.25	84.04
	0.24	35.74	35.24	24.42	<b>31.79</b>	<b>31.29</b>	<b>21.69</b>	<b>32.64</b>	<b>32.14</b>	<b>22.28</b>
	0.26	11.80	11.29	7.83	<b>10.73</b>	<b>10.22</b>	<b>7.09</b>	<b>10.97</b>	<b>10.46</b>	<b>7.25</b>
	0.28	4.97	4.44	3.09	<b>4.62</b>	<b>4.09</b>	<b>2.84</b>	<b>4.70</b>	<b>4.17</b>	<b>2.90</b>
	LCL		0.1147			0.1132			0.1205	
	UCL		0.3107			0.308			0.3095	
Case 3:	0.12	4.85	4.32	3	5.24	4.71	3.27	3.61	3.07	2.14
$\varphi = 80$	0.14	12.31	11.80	8.18	13.67	13.16	9.12	8.16	7.64	5.30
$\sigma = 0.71$	0.16	38.78	38.28	26.53	44.30	43.80	30.36	22.76	22.25	15.43
$\tau = 51$	0.18	144.77	144.27	100	165.72	165.22	114.52	76.72	76.22	52.83
	0.2	370.37	369.87	256.37	<b>342.53</b>	<b>342.03</b>	<b>237.08</b>	240.04	239.54	166.04
	0.22	213.14	212.64	147.39	166.24	165.74	114.88	222.60	222.10	153.95
	0.24	78.28	77.78	53.91	61.24	60.74	42.10	87.66	87.16	60.41
	0.26	31.52	31.02	21.50	25.50	24.99	17.33	<b>35</b>	<b>34.50</b>	<b>23.91</b>
	0.28	14.37	13.86	9.61	<b>11.96</b>	<b>11.45</b>	<b>7.94</b>	<b>15.76</b>	<b>15.25</b>	<b>10.57</b>
	LCL		0.0899			0.0884			0.0968	
	UCL		0.356			0.3506			0.3586	
Case 4:	0.12	14.82	14.31	9.92	18.96	18.45	12.79	8.07	7.55	5.24
$\varphi = 31$	0.14	34.21	33.71	23.36	45.95	45.45	31.50	16.33	15.82	10.97
$\sigma = 1.2$	0.16	85.15	84.65	58.67	118.10	117.6	81.51	35.90	35.40	24.54
$\tau = 20$	0.18	210.67	210.17	145.68	274.11	273.61	189.65	84.11	83.61	57.95
	0.2	370.37	369.87	256.37	<b>360.68</b>	<b>360.18</b>	<b>249.66</b>	189.60	189.10	131.07
	0.22	316.76	316.26	219.21	244.07	243.57	168.83	291.62	291.12	201.79
	0.24	184.20	183.70	127.33	135.41	134.91	93.51	234.96	234.46	162.52
	0.26	102.06	101.56	70.40	75.56	75.06	52.03	138.69	138.19	95.79
	0.28	58.31	57.81	40.07	43.87	43.37	30.06	78.90	78.40	54.34
	LCL		0.0485			0.0449			0.0594	
	UCL		0.4628			0.4517			0.4742	



Πίνακας 2.5: Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.

$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.37	369.87	256.37	493.34	492.84	341.61	1022.45	1021.95	708.36
$\varphi = 290$	0.22	40.87	40.37	27.98	50.99	50.49	35	90.08	89.58	62.09
$\sigma = 0.37$	0.24	8.30	7.78	5.40	<b>9.74</b>	<b>9.23</b>	<b>6.40</b>	14.78	14.27	9.89
$\tau = 155$	0.26	2.87	2.32	1.62	<b>3.19</b>	<b>2.64</b>	<b>1.84</b>	<b>4.21</b>	<b>3.68</b>	<b>2.56</b>
	0.28	1.77	1.17	0.83	1.64	1.02	0.74	1.92	1.33	0.94
	UCL		0.27			0.272			0.278	
Case 2:	0.2	370.37	369.87	256.37	<b>375.77</b>	<b>375.27</b>	<b>260.12</b>	423.83	423.33	293.43
$\varphi = 148$	0.22	73.31	72.81	50.47	<b>74.20</b>	<b>73.70</b>	<b>51.08</b>	82.09	81.59	56.55
$\sigma = 0.5$	0.24	19.98	19.47	13.50	<b>20.18</b>	<b>19.67</b>	<b>13.64</b>	<b>21.90</b>	<b>21.39</b>	<b>14.83</b>
$\tau = 96$	0.26	7.27	6.75	4.68	<b>7.32</b>	<b>6.80</b>	<b>4.72</b>	<b>7.81</b>	<b>7.29</b>	<b>5.06</b>
	0.28	3.42	2.88	2	<b>3.44</b>	<b>2.90</b>	<b>2.02</b>	<b>3.61</b>	<b>3.07</b>	<b>2.14</b>
	UCL		0.299			0.3			0.301	
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	552.07	551.57	382.32	480.69	480.19	332.84
$\varphi = 80$	0.22	110.70	110.20	76.38	157.64	157.14	108.92	139.42	138.92	96.29
$\sigma = 0.71$	0.24	39.49	38.99	27.02	53.78	53.28	36.93	48.30	47.80	33.13
$\tau = 51$	0.26	16.57	16.06	11.14	21.60	21.09	14.62	<b>19.69</b>	<b>19.18</b>	<b>13.30</b>
	0.28	8.07	7.55	5.24	16.08	15.57	10.08	<b>9.33</b>	<b>8.82</b>	<b>6.11</b>
	UCL		0.338			0.346			0.343	
Case 4:	0.2	370.37	369.87	256.37	758.21	757.71	525.20	509.91	509.41	353.10
$\varphi = 31$	0.22	173.39	172.89	119.84	338.09	337.59	234	232.65	232.15	160.91
$\sigma = 1.2$	0.24	87.26	86.76	60.14	162.14	161.64	112.04	114.58	114.08	79.07
$\tau = 20$	0.26	46.94	46.44	32.19	83.17	82.67	57.30	60.34	59.84	41.48
	0.28	26.87	26.37	18.28	45.42	44.92	31.13	33.82	33.32	23.09
	UCL		0.4313			0.4524			0.4408	

**Πίνακας 2.6:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart.

$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.26	369.76	256.30	284.73	284.23	197.01	720.38	719.88	498.98
$\varphi = 290$	0.22	33.82	33.32	23.09	28.12	27.62	19.14	54.26	53.76	37.26
$\sigma = 0.37$	0.24	7.49	6.97	4.84	<b>6.60</b>	<b>6.08</b>	<b>4.22</b>	10.38	9.87	6.84
$\tau = 155$	0.26	2.97	2.42	1.69	<b>2.73</b>	<b>2.17</b>	<b>1.52</b>	<b>3.68</b>	<b>3.14</b>	<b>2.19</b>
	0.28	1.72	1.11	0.80	1.64	1.02	0.74	1.97	1.38	0.98
	UCL	0.272			0.27			0.278		
Case 2:	0.2	370.36	369.86	256.37	<b>365.21</b>	<b>364.71</b>	<b>252.80</b>	416.09	415.59	288.06
$\varphi = 148$	0.22	54.18	53.68	37.21	<b>53.61</b>	<b>53.11</b>	<b>36.81</b>	<b>59.18</b>	<b>58.68</b>	<b>40.67</b>
$\sigma = 0.5$	0.24	14.54	14.03	9.73	<b>14.42</b>	<b>13.91</b>	<b>9.64</b>	<b>15.54</b>	<b>15.03</b>	<b>10.42</b>
$\tau = 96$	0.26	5.87	5.35	3.71	<b>5.84</b>	<b>5.32</b>	<b>3.69</b>	<b>6.18</b>	<b>5.66</b>	<b>3.93</b>
	0.28	3.15	2.60	1.81	<b>3.14</b>	<b>2.59</b>	<b>1.81</b>	<b>3.27</b>	<b>2.72</b>	<b>1.90</b>
	UCL	0.3			0.299			0.301		
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	258.92	258.42	179.12	327.13	326.63	226.40
$\varphi = 80$	0.22	82.06	81.56	56.53	61.69	61.19	42.41	74.32	73.82	51.17
$\sigma = 0.71$	0.24	27.46	26.96	18.69	21.82	21.31	14.78	25.95	25.45	17.64
$\tau = 51$	0.26	12.20	11.69	8.10	<b>10.13</b>	<b>9.62</b>	<b>6.67</b>	<b>11.44</b>	<b>10.93</b>	<b>7.58</b>
	0.28	6.63	6.11	4.24	<b>5.70</b>	<b>5.18</b>	<b>3.59</b>	<b>6.29</b>	<b>5.77</b>	<b>4</b>
	UCL	0.346			0.338			0.343		
Case 4:	0.2	370.38	369.88	256.38	198.9	198.40	137.52	261.35	260.85	180.81
$\varphi = 31$	0.22	123.04	122.54	84.94	73.39	72.89	50.52	92.08	91.58	63.48
$\sigma = 1.2$	0.24	53.15	52.65	36.49	34.36	33.86	23.47	41.62	41.12	28.50
$\tau = 20$	0.26	27.60	27.10	18.78	19.01	18.50	12.83	22.39	21.88	15.17
	0.28	16.37	15.86	11	11.86	11.35	7.87	<b>13.66</b>	<b>13.15</b>	<b>9.12</b>
	UCL	0.4524			0.4313			0.4408		

**Πίνακας 2.7:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.

$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.37	369.87	256.37	162.91	162.41	112.57	205.54	205.04	142.12
$\varphi = 290$	0.22	51.73	51.23	35.51	26.88	26.38	18.28	32.30	31.80	22.04
$\sigma = 0.37$	0.24	11.54	11.03	7.65	7.05	6.53	4.53	8.09	7.57	5.25
$\tau = 155$	0.26	3.93	3.39	2.36	<b>2.80</b>	<b>2.24</b>	<b>1.57</b>	<b>3.07</b>	<b>2.52</b>	<b>1.76</b>
	0.28	1.94	1.35	0.96	1.58	0.96	0.69	1.67	1.06	0.76
	UCL		0.278			0.27			0.272	
Case 2:	0.2	370.37	369.87	256.37	325.69	325.19	225.40	330.22	329.72	228.54
$\varphi = 148$	0.22	77.73	77.23	53.53	<b>69.67</b>	<b>69.17</b>	<b>47.94</b>	<b>70.49</b>	<b>69.99</b>	<b>48.51</b>
$\sigma = 0.5$	0.24	21.74	21.23	14.72	<b>19.86</b>	<b>19.35</b>	<b>13.42</b>	<b>20.05</b>	<b>19.54</b>	<b>13.55</b>
$\tau = 96$	0.26	7.91	7.39	5.13	<b>7.36</b>	<b>6.84</b>	<b>4.75</b>	<b>7.41</b>	<b>6.89</b>	<b>4.78</b>
	0.28	3.66	3.12	2.17	<b>3.46</b>	<b>2.92</b>	<b>2.03</b>	<b>3.48</b>	<b>2.94</b>	<b>2.05</b>
	UCL		0.301			0.299			0.3	
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	291.10	290.60	201.43	420.82	420.32	291.34
$\varphi = 80$	0.22	110.48	109.98	76.23	96.19	95.69	66.33	134.07	133.57	92.58
$\sigma = 0.71$	0.24	44.76	44.26	30.68	36.91	36.41	25.24	49.59	49.09	34.03
$\tau = 51$	0.26	19.22	18.71	12.97	<b>16.24</b>	<b>15.73</b>	<b>10.91</b>	<b>21.03</b>	<b>20.52</b>	<b>14.23</b>
	0.28	9.37	8.86	6.14	<b>8.11</b>	<b>7.59</b>	<b>5.27</b>	<b>10.12</b>	<b>9.61</b>	<b>6.66</b>
	UCL		0.343			0.338			0.346	
Case 4:	0.2	370.37	369.87	256.37	278.35	277.85	192.59	531.47	530.97	368.04
$\varphi = 31$	0.22	187.54	187.04	129.65	143.04	142.54	98.80	264.38	263.88	182.91
$\sigma = 1.2$	0.24	100.50	100	69.31	77.81	77.31	53.59	139.13	138.63	96.09
$\tau = 20$	0.26	56.66	56.16	38.93	44.54	44.04	30.52	77	76.50	53.03
	0.28	33.46	32.96	22.84	26.72	26.22	18.17	44.63	44.13	30.59
	UCL		0.4408			0.4313			0.4524	

Πίνακας 2.8: Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.

$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.37	369.87	256.37	267.92	267.42	185.36	809.99	809.49	561.10
$\varphi = 290$	0.18	33.05	32.55	22.56	26.17	25.67	17.79	58.53	58.03	40.22
$\sigma = 0.37$	0.16	5.79	5.27	3.66	4.99	4.46	3.10	8.41	7.89	5.48
$\tau = 155$	0.14	1.96	1.37	0.97	<b>1.82</b>	<b>1.22</b>	<b>0.87</b>	<b>2.40</b>	<b>1.83</b>	<b>1.29</b>
	0.12	1.79	1.19	0.85	<b>1.15</b>	<b>0.42</b>	<b>0.34</b>	<b>1.27</b>	<b>0.59</b>	<b>0.45</b>
	LCL	0.1396			0.1417			0.1359		
Case 2:	0.2	370.37	369.87	256.37	172.24	171.74	119.04	316.59	316.09	219.10
$\varphi = 148$	0.18	58.89	58.39	40.47	32.67	32.17	22.30	<b>52.02</b>	<b>51.52</b>	<b>35.71</b>
$\sigma = 0.5$	0.16	13.28	12.77	8.85	8.52	8	5.55	<b>12.11</b>	<b>11.60</b>	<b>8.04</b>
$\tau = 96$	0.14	4.29	3.76	2.61	<b>3.19</b>	<b>2.64</b>	<b>1.84</b>	<b>4.03</b>	<b>3.49</b>	<b>2.43</b>
	0.12	1.99	1.40	0.99	<b>1.67</b>	<b>1.06</b>	<b>0.76</b>	<b>1.91</b>	<b>1.32</b>	<b>0.93</b>
	LCL	0.1185			0.125			0.1198		
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	177.81	177.31	122.90	322.40	321.90	223.12
$\varphi = 80$	0.18	88.45	87.95	60.96	48.04	47.54	32.95	78.78	78.28	54.26
$\sigma = 0.71$	0.16	25.54	25.04	17.35	15.65	15.14	10.50	<b>23.26</b>	<b>22.75</b>	<b>15.77</b>
$\tau = 51$	0.14	9	8.49	5.88	6.19	5.67	3.93	<b>8.38</b>	<b>7.86</b>	<b>5.45</b>
	0.12	3.91	3.37	2.35	<b>3</b>	<b>2.45</b>	<b>1.71</b>	<b>3.72</b>	<b>3.18</b>	<b>2.21</b>
	LCL	0.0946			0.102			0.0959		
Case 4:	0.2	370.37	369.87	256.37	129.76	129.26	89.60	270.61	270.11	187.23
$\varphi = 31$	0.18	136.69	136.19	94.40	51.27	50.77	35.19	103.79	103.29	71.59
$\sigma = 1.2$	0.16	54.28	53.78	37.28	22.38	21.87	15.16	42.82	42.32	29.33
$\tau = 20$	0.14	23.31	22.80	15.81	11.50	10.99	7.62	19.09	18.58	12.88
	0.12	10.88	10.37	7.19	6.13	5.61	3.89	<b>9.25</b>	<b>8.74</b>	<b>6.06</b>
	LCL	0.0514			0.0643			0.0546		

**Πίνακας 2.9:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart.

$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.37	369.87	256.37	537.40	536.90	372.15	1337.70	1337.20	926.88
$\varphi = 290$	0.18	40.68	40.18	27.85	54.52	54.02	37.44	112.99	112.49	77.97
$\sigma = 0.37$	0.16	6.39	5.87	4.07	7.82	7.30	5.07	13.09	12.58	8.72
$\tau = 155$	0.14	1.78	1.18	0.84	<b>1.96</b>	<b>1.37</b>	<b>0.97</b>	<b>2.58</b>	<b>2.02</b>	<b>1.41</b>
	0.12	1.05	0.23	0.23	<b>1.07</b>	<b>0.27</b>	<b>0.25</b>	<b>1.14</b>	<b>0.40</b>	<b>0.33</b>
	LCL	0.1417			0.1396			0.1359		
Case 2:	0.2	370.30	369.80	256.33	1026.21	1025.71	710.97	830.47	829.97	575.29
$\varphi = 148$	0.18	71.56	71.05	49.25	171.05	170.55	118.22	142.57	142.07	98.48
$\sigma = 0.5$	0.16	15.47	14.96	10.37	31.17	30.67	21.26	26.98	26.48	18.35
$\tau = 96$	0.14	4.10	3.57	2.48	6.74	6.22	4.32	6.05	5.53	3.84
	0.12	1.57	0.95	0.68	<b>2.04</b>	<b>1.46</b>	<b>1.03</b>	<b>1.92</b>	<b>1.33</b>	<b>0.94</b>
	LCL	0.125			0.1185			0.1198		
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	1039.92	1039.42	720.47	852.11	851.61	590.29
$\varphi = 80$	0.18	117.72	117.22	81.25	299.06	298.56	206.95	249.67	249.17	172.71
$\sigma = 0.71$	0.16	37.51	37.01	25.65	85.20	84.70	58.71	72.62	72.12	49.99
$\tau = 51$	0.14	12.15	11.64	8.07	24.10	23.59	16.36	21.13	20.62	14.30
	0.12	4.20	3.67	2.55	7.09	6.57	4.56	6.38	5.86	4.07
	LCL	0.102			0.0946			0.0959		
Case 4:	0.2	370.41	369.91	256.40	3142.94	3142.44	2178.17	1661.38	1660.88	1151.23
$\varphi = 31$	0.18	189.71	189.21	131.15	1418.63	1418.13	982.97	777.81	777.31	538.79
$\sigma = 1.2$	0.16	95.10	94.60	65.57	625.65	625.15	433.32	355.86	355.36	246.32
$\tau = 20$	0.14	45.98	45.48	31.52	264.02	263.52	182.66	156.06	155.56	107.83
	0.12	21.07	20.56	14.26	103.75	103.25	71.57	64.01	63.51	44.02
	LCL	0.0643			0.0514			0.0546		

**Πίνακας 2.10:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.

$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex			
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
Case 1:	0.2	370.37	369.87	256.37	187.05	186.55	129.31	141.07	140.57	97.44
$\varphi = 290$	0.18	38.03	37.53	26.01	23.10	22.59	15.66	18.85	18.34	12.72
$\sigma = 0.37$	0.16	7.06	6.54	4.54	5.09	4.56	3.17	4.46	3.93	2.73
$\tau = 155$	0.14	2.33	1.76	1.24	<b>1.94</b>	<b>1.35</b>	<b>0.96</b>	<b>1.81</b>	<b>1.21</b>	<b>0.86</b>
	0.12	1.29	0.61	0.46	<b>1.20</b>	<b>0.49</b>	<b>0.39</b>	<b>1.17</b>	<b>0.45</b>	<b>0.36</b>
	LCL	0.1359			0.1396			0.1417		
Case 2:	0.2	370.37	369.87	256.37	437.45	436.95	302.87	194.59	194.09	134.53
$\varphi = 148$	0.18	56.43	55.93	38.77	64.30	63.80	44.22	34.21	33.71	23.36
$\sigma = 0.5$	0.16	12.56	12.05	8.35	13.83	13.32	9.24	8.71	8.19	5.68
$\tau = 96$	0.14	4.07	3.53	2.46	<b>4.43</b>	<b>3.90</b>	<b>2.71</b>	<b>3.19</b>	<b>2.64</b>	<b>1.84</b>
	0.12	1.90	1.31	0.93	<b>1.97</b>	<b>1.38</b>	<b>0.98</b>	<b>1.66</b>	<b>1.05</b>	<b>0.75</b>
	LCL	0.1198			0.1185			0.125		
Case 3:	0.2	370.37	369.87	256.37	429.49	428.99	297.35	196.75	196.25	136.03
$\varphi = 80$	0.18	85.61	85.11	58.99	96.80	96.30	66.75	50.79	50.29	34.86
$\sigma = 0.71$	0.16	24.43	23.92	16.58	<b>26.96</b>	<b>24.46</b>	<b>18.34</b>	16.11	15.60	10.82
$\tau = 51$	0.14	8.60	8.08	5.61	<b>9.28</b>	<b>8.77</b>	<b>6.08</b>	6.27	5.75	3.99
	0.12	3.75	3.21	2.23	<b>3.95</b>	<b>3.41</b>	<b>2.37</b>	<b>3</b>	<b>2.45</b>	<b>1.71</b>
	LCL	0.0959			0.0946			0.102		
Case 4:	0.2	370.37	369.87	256.37	529.40	528.90	366.61	149.46	148.96	103.25
$\varphi = 31$	0.18	132.04	131.54	91.18	180.5	180	124.77	59.90	59.40	41.17
$\sigma = 1.2$	0.16	51.59	51.09	35.41	67.54	67.04	46.47	26.21	25.71	17.82
$\tau = 20$	0.14	22.05	21.54	14.93	27.67	27.17	18.83	12.50	11.99	8.31
	0.12	10.30	9.79	6.79	<b>12.41</b>	<b>11.90</b>	<b>8.25</b>	6.50	5.98	4.15
	LCL	0.0546			0.0514			0.0643		

## 2.6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εκτενή αριθμητική μελέτη σχετικά με την απόδοση των τριών διαγραμμάτων ελέγχου. Ακόμη, θα μελετήσουμε την επίδραση που έχει στην ταχύτητα ανίχνευσης των μετατοπίσεων στη μέση αναλογία η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου, δηλαδή όταν αυτά υπολογίζονται υπό το «λάθος» μοντέλο. Υπενθυμίζεται ότι το εντός ελέγχου ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων είναι  $p_0 = 0.2$  και όπως αναφέραμε αυτό μεταβάλλεται ενώ οι παράμετροι της διασποράς παραμένουν σταθεροί.

Αρχικά, σε ότι αφορά τους τρεις πρώτους πίνακες (Πίνακας 2.2 έως Πίνακας 2.4) όπου η μετατόπιση είναι αμφίδρομη, παρατηρούμε ότι η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου έχει μια σειρά επιπτώσεων όπως είναι προγενέστεροι ή μεταγενέστεροι εσφαλμένοι συναγερμοί. Για παράδειγμα όταν στο διάγραμμα Simplex χρησιμοποιούνται εσφαλμένα τα όρια ελέγχου του Beta διαγράμματος (Πίνακας 2.3) για τις περιπτώσεις 2 έως 4 των παραμέτρων διασποράς, παρατηρούμε τιμές του  $ARL_0 > 370$ , γεγονός που υποδηλώνει μεταγενέστερη διακοπή λόγω εσφαλμένου συναγερμού ή ακόμη και τιμές του  $ARL_0 > 1000$  που σημαίνει σπάνια εμφάνιση ψευδών συναγερμών. Ακόμη, για την περίπτωση 4 (Πίνακας 2.3) βλέπουμε τιμές του  $ARL_1 > ARL_0 = 370$  και άρα ενδέχεται να μην εντοπιστούν μικρές μετατοπίσεις στη μέση αναλογία ελαττωματικών. Ειδικά στις περιπτώσεις που στο δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου το  $ARL_1 > ARL_0$ , το διάγραμμα αδυνατεί να ανιχνεύσει αυτού του είδους τις μετατοπίσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι το διάγραμμα εμφανίζει *ARL-biased* απόδοση (Knoth and Morais (2015)). Οι υπόλοιποι πίνακες περιγράφουν τα αποτελέσματα που σχετίζονται με τις μετατοπίσεις του μέσου ποσοστού προς μία μόνο κατεύθυνση, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις αυξήσεις ή τις μειώσεις. Για παράδειγμα στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου του Beta διαγράμματος στο διάγραμμα Simplex (Πίνακας 2.6), παρατηρούμε αύξηση του ποσοστού των εσφαλμένων συναγερμών καθώς βλέπουμε τιμές του  $ARL_0 < 370$ , αλλά ταυτόχρονα και μικρότερες τιμές  $ARL_1$ , άρα και αύξηση της ισχύος του διαγράμματος αφού οι εκτός ελέγχου καταστάσεις ανιχνεύονται ταχύτερα. Έτσι, αναμένεται ότι η εσφαλμένη χρήση ορίων ελέγχου του Simplex διαγράμματος στο διάγραμμα Beta θα έχει ως αποτέλεσμα μεταγενέστερους ψευδείς συναγερμούς.

Οι έντονες τιμές στους παραπάνω πίνακες είναι οι τιμές των μετρήσεων που λαμβάνονται από τη χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχων αλλά τα αποτελέσματα είναι όντως παρόμοια με αυτά όταν χρησιμοποιούνται τα πραγματικά όρια ελέγχου. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι παρατηρείται μια ανθεκτικότητα (robustness) των τριών διαγραμμάτων, αφού το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από το μοντέλο για τη διεργασία. Κάποιες περιπτώσεις που δεν υπάρχει αντίκτυπο από τη χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου συναντάμε όταν τα όρια ελέγχου του Simplex διαγράμματος χρησιμοποιούνται στο διάγραμμα Beta και αντιστρόφως για την περίπτωση 2 (Πίνακας 2.5 έως και Πίνακας 2.7) αλλά και όταν τα όρια ελέγχου του Unit Gamma διαγράμματος χρησιμοποιούνται στο Beta διάγραμμα και αντίστροφα για μεσαίες και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο ποσοστό. Επιπλέον, μια περίπτωση που προκύπτει καλύτερη απόδοση με τη χρήση εσφαλμένων ορίων ελέγχου, συναντάμε όταν χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου του Beta διαγράμματος στο διάγραμμα Simplex για την περίπτωση 1 (Πίνακας 2.2 έως και Πίνακας 2.4) και προκύπτουν

παρόμοιες εντός ελέγχου μετρήσεις αλλά οι εκτός ελέγχου μετρήσεις είναι μικρότερες από τις πραγματικές για μεσαίες και μεγάλες μετατοπίσεις στη μέση αναλογία. Βέβαια, σημαντικό ρόλο παίζει και το μέγεθος της διακύμανσης καθώς για τις περιπτώσεις μικρότερης διασποράς (περίπτωση 1 και 2) δεν παρατηρείται κάποια επίπτωση σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις αλλά οι εκτός ελέγχου μετρήσεις είναι παραπλήσιες.

Σχετικά με τα όρια ελέγχου για τα διάφορα διαγράμματα, αριθμητικά είναι παρόμοια. Μάλιστα, όταν η διαφορά των ακατάλληλων ορίων ελέγχου από τα πραγματικά είναι  $< |0.002|$  (δείτε παραπάνω πίνακες, περιπτώσεις 1 και 2), τότε παρατηρείται μικρότερο αντίκτυπο στους αληθείς συναγερμούς. Ωστόσο, ακόμα και όταν τα ακατάλληλα όρια ελέγχου είναι παρόμοια με τα πραγματικά, αυτό δεν εξασφαλίζει την ίδια απόδοση για όλο το σετ μετατοπίσεων (παρόμοιες αποδόσεις μόνο για μεσαίες ή μεγάλες μετατοπίσεις).

## 2.7 Εφαρμογή σε Πραγματικά Δεδομένα

### 2.7.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart σε πραγματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα σύνολο δεδομένων (Sant' Anna and ten Caten (2012)) το οποίο αφορά τη μελέτη της μόλυνσης των φιστικιών από τοξικές ουσίες. Τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας αφορούν  $n = 34$  δείγματα και μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση του ποσοστού των μη μολυσμένων φιστικιών. Οι κατανομές Beta, Simplex και Unit Gamma που μελετάμε αποτελούν κατάλληλα πιθανοτικά πρότυπα για τη μοντελοποίηση δεδομένων που αφορούν ποσοστά/αναλογίες και έτσι η χρήση τους αποτελεί ιδανική επιλογή για την προσαρμογή αυτού του συνόλου δεδομένων.

### 2.7.2 Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους των μοντέλων που μελετάμε, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας η οποία μπορεί να υλοποιηθεί στην R μέσω της εντολής «optim». Για να παρουσιάσουμε την εφαρμογή των παραπάνω διαγραμμάτων ελέγχου, από το σύνολο των δεδομένων, θα χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες 20 παρατηρήσεις ως δείγμα για την ανάλυση Φάσης I και τις υπόλοιπες 14 παρατηρήσεις για την Φάση II. Η εμπειρική μέση τιμή και τυπική απόκλιση για τις πρώτες 20 παρατηρήσεις είναι  $\hat{\mu} = 0.9536$  και  $\hat{\sigma} = 0.0345$  αντίστοιχα. Ο Πίνακας 2.11 περιλαμβάνει συγκεντρωτικά τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων των τριών μοντέλων καθώς και τα πληροφοριακά κριτήρια Akaike Information Criteria (AIC) και Bayesian Information Criterion (BIC) (ή Schwartz Information Criterion (SIC)) για τις πρώτες 20 παρατηρήσεις. Τα κριτήρια αυτά αναπτύχθηκαν από τον Akaike (1973) και τον Schwartz (1978) και δίνονται από τις σχέσεις

$$AIC = -2 \log(L(\hat{\theta})) + 2k \quad (2.40)$$



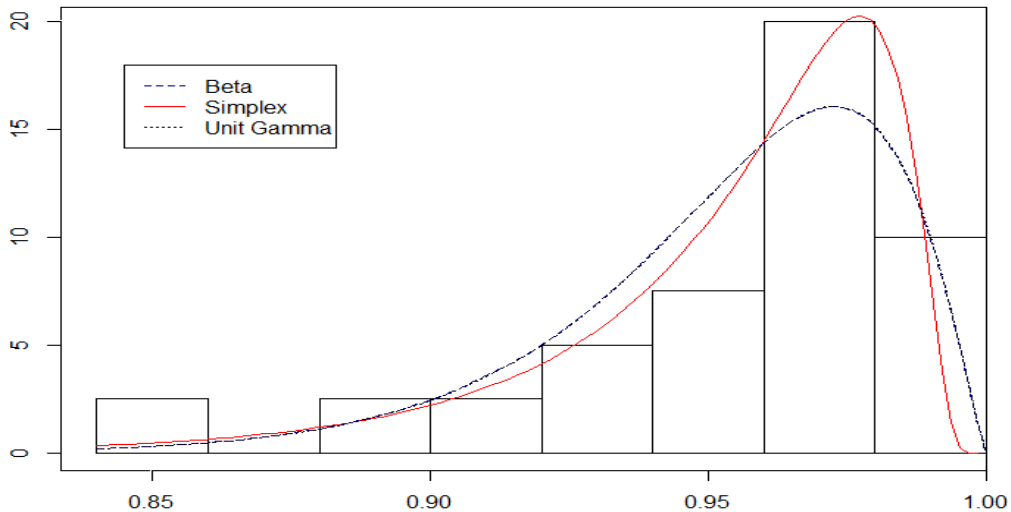
$$BIC = -\log(L(\hat{\theta})) + \log(n)k \quad (2.41)$$

όπου  $L$  είναι η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας και  $\hat{\theta}$  είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ) ο οποίος προκύπτει μεγιστοποιώντας τη συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(\hat{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \hat{\theta})$ . Με  $k$  συμβολίζεται ο αριθμός των παραμέτρων και με  $n$  το σύνολο των διαθέσιμων παρατηρήσεων. Οι τιμές των κριτηρίων AIC και BIC παίρνουν τις μικρότερες τιμές για την κατανομή Simplex και έτσι υποδηλώνουν ότι η κατανομή αυτή είναι το πιο κατάλληλο μοντέλο για τα συγκεκριμένα δεδομένα.

**Πίνακας 2.11:** Εκτιμήσεις των παραμέτρων των μοντέλων και έλεγχοι καλής προσαρμογής.

Μοντέλο	ML Εκτιμητές	AIC	BIC
Beta	$\hat{\mu}$ 0.9533	-85.455	-83.464
	$\hat{\phi}$ 48.9438		
Simplex	$\hat{\mu}$ 0.9534	<b>-88.653</b>	<b>-86.662</b>
	$\hat{\sigma}$ 3.5742		
Unit Gamma	$\hat{\mu}$ 0.9534	-85.455	-83.463
	$\hat{t}$ 2.2798		

Στο Σχήμα 2.3 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των κατανομών Beta, Simplex και Unit Gamma για τις πρώτες 20 παρατηρήσεις. Παρατηρούμε ότι η κατανομή Simplex υπερिशύει των άλλων δύο κατανομών ως προς την εφαρμογή του μοντέλου, αφού από το ιστόγραμμα φαίνεται ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα συγκριτικά με τις άλλες δύο κατανομές. Επίσης, φαίνεται ότι οι κατανομές Beta και Unit Gamma παρουσιάζουν την ίδια εφαρμογή για τα τρέχοντα δεδομένα.



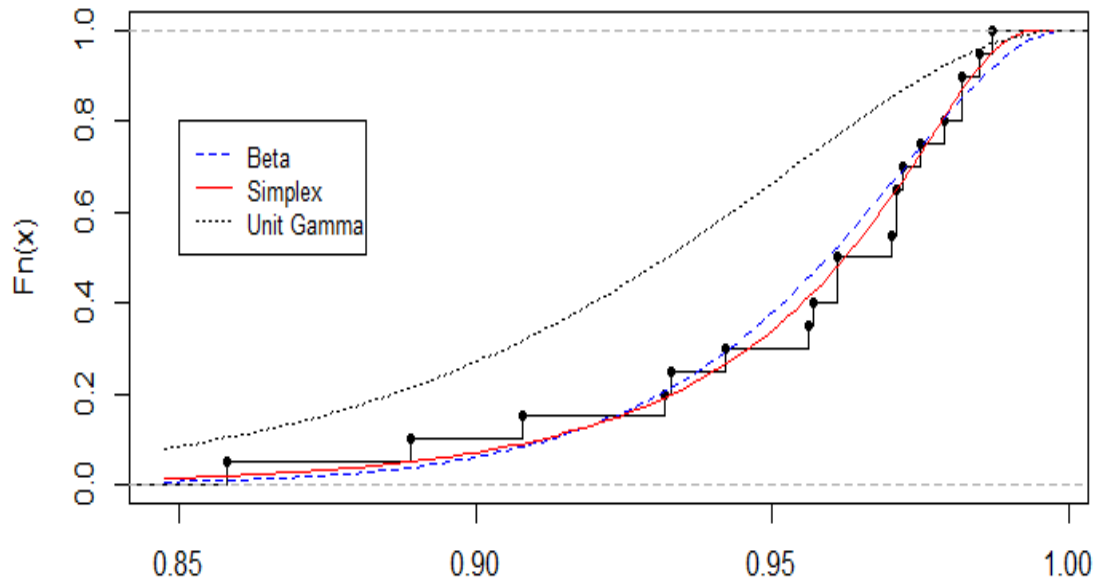
**Σχήμα 2.3:** Εκτιμώμενη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για τις προτεινόμενες κατανομές για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.

Η κατανομή του συγκεκριμένου συνόλου δεδομένων είναι άγνωστη και έτσι θα πρέπει να εκτιμηθεί. Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ως παράμετρο ολόκληρη τη συνάρτηση κατανομής και μια εκτίμηση γι' αυτήν αποτελεί η εμπειρική συνάρτηση κατανομής, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής που σχετίζεται με την εμπειρική μέτρηση ενός δείγματος. Η εμπειρική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια τιμή  $x$ , συμβολίζεται με  $F_n(x)$  και είναι το ποσοστό των μετρήσεων στο δείγμα οι οποίες έχουν τιμή μικρότερη ή ίση από  $x$ , δηλαδή

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{x_i \leq x\} \quad (2.42)$$

όπου με  $\mathbf{1}$  συμβολίζεται η Δείκτρια Συνάρτηση, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν  $x_i \leq x$  και την τιμή 0 αν  $x_i > x$ . Πρόκειται για μια κλιμακωτή συνάρτηση (step function) με «άλματα» στις παρατηρούμενες τιμές  $x_i$ , με το ύψος του άλματος να ισούται με  $k/n$  όπου  $k$  είναι η συχνότητα εμφάνισης της τιμής  $x_i$  και  $n$  το μέγεθος του δείγματος. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής είναι μια καλή εκτίμηση σύμφωνα με το θεώρημα των Glivenko-Cantelli (1933) καθώς συγκλίνει (ασυμπτωτικά) σχεδόν βεβαίως (ισχυρά) στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Το θεώρημα Glivenko-Cantelli λέει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο πιο κοντά πλησιάζει ομοιόμορφα, για όλα τα  $x \in R$ , η εμπειρική συνάρτηση κατανομής  $F_n(\cdot)$  στη θεωρητική συνάρτηση κατανομής  $F(\cdot)$ .

Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζεται το γράφημα με την εμπειρική συνάρτηση κατανομής για τις πρώτες 20 παρατηρήσεις και τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομών των Beta, Simplex και Unit Gamma με τις εκτιμημένες παραμέτρους (Πίνακας 2.11). Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κατανομής της Simplex φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα συγκεκριμένα δεδομένα.



**Σχήμα 2.4:** Εμπειρική Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.

Για να επιβεβαιώσουμε αυτό το οπτικό συμπέρασμα, εφαρμόζουμε το μη παραμετρικό έλεγχο καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov (K-S test), ο οποίος προτάθηκε από τους Kolmogorov (1933) και Smirnov (1939), για να συγκρίνουμε την κατανομή του δείγματος των 20 παρατηρήσεων με τις τρεις κατανομές που αναφέραμε παραπάνω. Το στατιστικό αυτό ουσιαστικά ποσοτικοποιεί την απόσταση μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του δείγματος και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής του εκάστοτε μοντέλου. Η μηδενική υπόθεση υποστηρίζει ότι η πραγματική κατανομή των δεδομένων ταυτίζεται με την κατανομή αναφοράς (γνωστή κατανομή) ενώ η εναλλακτική υπόθεση υποστηρίζει τον αντίθετο ισχυρισμό.

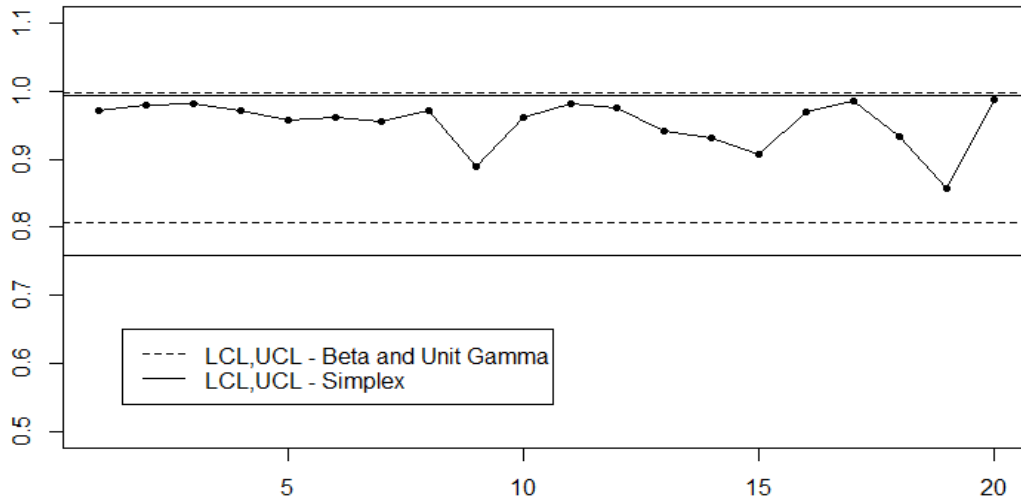
Από την εφαρμογή του Kolmogorov-Smirnov τεστ, προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της πραγματικής κατανομής των δεδομένων και της κατανομής Unit Gamma ( $p - \text{value} = 0.0015 < 0.05$ ), επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας 5% απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι η κατανομή Unit Gamma μπορεί να θεωρηθεί ως η πραγματική κατανομή των δεδομένων. Αντίθετα, για τα μοντέλα Beta και Simplex δεν εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ( $p - \text{value} = 0.8815 > 0.05$  και  $p - \text{value} = 0.6685 > 0.05$ ) και έτσι δεν έχουμε αρκετές ενδείξεις κατά της μηδενικής υπόθεσης. Οπότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πραγματική κατανομή των δεδομένων προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τις κατανομές Beta και Simplex. Συμπερασματικά, από τις τιμές των κριτηρίων AIC και BIC καταλήγουμε ότι η κατανομή Simplex είναι το πιο κατάλληλο μοντέλο για τα συγκεκριμένα δεδομένα και έτσι προτείνεται η κατασκευή διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart με βάση αυτό.

### 2.7.3 Διαγράμματα Ελέγχου

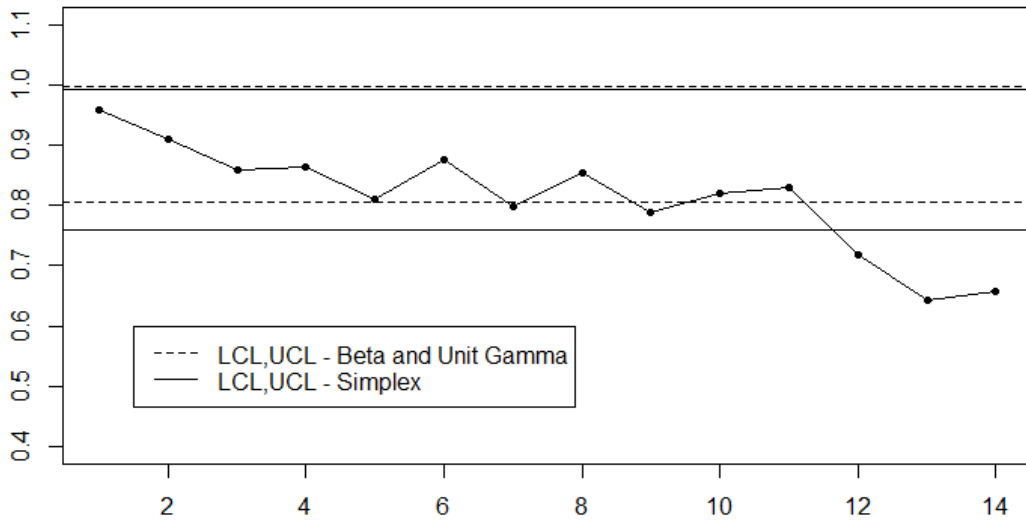
Αρχικά, η απεικόνιση των 20 πρώτων μετρήσεων, οι οποίες αποτελούν τη Φάση I, δε δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Από το Σχήμα 2.5 διαπιστώνουμε ότι αν εφαρμόσουμε το Shewhart διάγραμμα Φάσης I όλες οι μετρήσεις θα βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και αυτό ισχύει και για τα τρία μοντέλα. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διεργασία ήταν εντός ελέγχου όταν συλλέχθηκαν τα δεδομένα. Στο Σχήμα 2.6 παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου για τις 14 παρατηρήσεις που αποτελούν τη Φάση II θεωρώντας τις εκτιμήσεις (Πίνακας 2.11) ως τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Στο γράφημα αυτό, οι μετρήσεις του ποσοστού των μη μολυσμένων φιστικών αναπαριστώνται με κουκίδες, ενώ δίνονται και τα όρια ελέγχου για κάθε διάγραμμα. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιούμε σφάλμα τύπου I  $\alpha = 0.0027$  έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση  $ARL_0 = 370.4$ .

Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου Beta και Unit Gamma σηματοδοτούν για πρώτη φορά ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία στο δείγμα 7 ενώ το διάγραμμα ελέγχου Simplex δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 12. Οπότε, σύμφωνα με τα δύο πρώτα διαγράμματα έχουμε νωρίτερα ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία από ότι σύμφωνα με το Simplex διάγραμμα. Ωστόσο, η παραβίαση αφορά τιμές κάτω από το κάτω όριο ελέγχου (*LCL*), γεγονός που σημαίνει ότι μειώνεται το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικών. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας διαγράμματα ελέγχου υπό το «λάθος» μοντέλο (Beta, Unit Gamma) ενδέχεται να έχουμε αυξημένους εσφαλμένους συναγερμούς και άρα θα σημειώνονται φιστικά ως

μολυσμένα ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι. Έτσι, η κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου με βάση τα «λάθος» μοντέλα, πιθανόν να οδηγήσει σε συχνή διακοπή της διεργασίας χωρίς όμως να συντρέχει λόγος.



**Σχήμα 2.5:** Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης I για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.



**Σχήμα 2.6:** Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται η απόδοση του διαγράμματος Simplex όταν χρησιμοποιούνται εσφαλμένα τα όρια ελέγχου των Beta και Unit Gamma διαγραμμάτων. Ειδικότερα, σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα, παρατηρούμε ότι η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου έχει σαν αποτέλεσμα προγενέστερους εσφαλμένους συναγεργμούς ( $ARL_0 = 139.10$  και  $ARL_0 = 166.85$  έναντι του  $ARL_0 = 370.61$ ). Αν υποθέσουμε τώρα ότι το μέσο ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικών μετατοπίζεται από  $\mu = 0.95$  σε  $\mu^* = 0.80$ , δηλαδή επιδεινώνεται η ποιότητα του συγκεκριμένου προϊόντος, τότε διαπιστώνουμε ότι δεν παρατηρείται σημαντική επίδραση στις μετρήσεις της απόδοσης όταν χρησιμοποιούνται ακατάλληλα όρια ελέγχου στο Simplex διάγραμμα, καθώς το  $ARL_1$  είναι περίπου ίσο με 3 για κάθε περίπτωση.

**Πίνακας 2.12:** Σύγκριση της απόδοσης για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικών.

$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
0.95	370.61	370.11	256.54	139.10	138.60	96.07	166.85	166.35	115.31
0.80	3.27	2.72	1.89	2.54	1.98	1.38	2.62	2.05	1.44
LCL		0.758			0.812			0.806	
UCL		0.993			0.997			0.998	

## 2.8 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τρεις κατανομές για την παρακολούθηση μεμονωμένων μετρήσεων για ποσοστά και αναλογίες όταν αυτά δεν είναι αποτελέσματα από Bernoulli πειράματα και αναπτύχθηκαν διαγράμματα ελέγχου με βάση τις κατανομές αυτές. Στην πράξη, συνήθως χρησιμοποιούνται διαγράμματα ελέγχου σύμφωνα με την κατανομή Beta καθώς είναι πιο οικεία από τις άλλες δύο. Ωστόσο, όπως αναφέραμε υπάρχουν και άλλες κατανομές που πρέπει να ληφθούν υπόψη, όπως για παράδειγμα οι κατανομές Simplex και Unit Gamma. Ακόμη, εφαρμόσαμε ένα είδος μελέτης ανθεκτικότητας για να διαπιστώσουμε πως και σε τι βαθμό επηρεάζεται το κάθε διάγραμμα όταν χρησιμοποιούνται λάθος όρια. Έτσι, είδαμε ότι η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου στα παραπάνω διαγράμματα έχει επιπτώσεις όπως είναι γρηγορότεροι ή μεταγενέστεροι εσφαλμένοι συναγερμοί ή ακόμη αδυναμία ανίχνευσης μετατόπισης, κυρίως σε περιπτώσεις μικρών μετατοπίσεων. Το μέγεθος της διακύμανσης αλλά και το μέγεθος της μετατόπισης που συμβαίνει παίζουν σημαντικό ρόλο καθότι παρατηρούνται λιγότερο σημαντικές επιπτώσεις για μεγαλύτερες μετατοπίσεις στη μέση αναλογία και για μικρές διασπορές.

Έπειτα εφαρμόσαμε τα εν λόγω διαγράμματα σε πραγματικά δεδομένα. Ειδικότερα, συγκρίναμε τα τρία πιθανά μοντέλα με βάση τα κριτήρια πληροφορίας AIC και BIC καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η κατανομή Simplex προσαρμόζεται καλύτερα στα συγκεκριμένα δεδομένα και άρα είναι το πιο κατάλληλο μοντέλο. Έτσι, προχωρήσαμε στην κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II σύμφωνα με τα μοντέλα Beta, Simplex και Unit Gamma για το μέσο ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. Διαπιστώσαμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου υπό το «λάθος» μοντέλο (Beta, Unit Gamma) οδηγούν σε αύξηση των εσφαλμένων συναγερμών.

Συμπερασματικά, για την παρακολούθηση των ποσοστών ή των αναλογιών που δεν είναι αποτελέσματα Bernoulli πειραμάτων και δεν γνωρίζουμε την ακριβή κατανομή, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί ποια κατανομή από όλες τις πιθανές υποψήφιες κατανομές εφαρμόζεται καλύτερα στο σύνολο των δεδομένων (μέσω κάποιου ελέγχου καλής προσαρμογής) και στη συνέχεια να σχεδιαστεί το διάγραμμα ελέγχου με βάση την κατανομή αυτή ώστε να αποφευχθεί η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA για την Παρακολούθηση Μεμονωμένων Παρατηρήσεων για Ποσοστά και Αναλογίες

### 3.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου των προηγούμενων κεφαλαίων είναι τα απλούστερα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις αρχές που ανέπτυξε ο Shewhart. Αν και τα διαγράμματα αυτά είναι εύχρηστα χάρη στην ικανότητά τους να ανιχνεύουν μεταβολές σε μια παραγωγική διαδικασία και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη πράξη, χαρακτηρίζονται ταυτόχρονα από το σημαντικό μειονέκτημα ότι χρησιμοποιούν μόνο την πληροφορία που περιέχεται μόνο στο πιο πρόσφατο σημείο του διαγράμματος και κατά κανόνα αγνοούν τα προηγούμενα δείγματα. Συνέπεια του χαρακτηριστικού αυτού είναι η αδυναμία των διαγραμμάτων τύπου Shewhart να αντιληφθούν γρήγορα και αποτελεσματικά την επίδραση συστηματικών αιτιών που επιφέρουν σχετικά μικρές μεταβολές της τάξης του  $1.5\sigma$  ή μικρότερες. Αυτό καθιστά δυνητικά τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart λιγότερο χρήσιμα σε προβλήματα παρακολούθησης Φάσης II, όπου η διαδικασία τείνει να λειτουργεί υπό έλεγχο.

Υπάρχει βέβαια η δυνατότητα να εξετάζονται τα διαδοχικά σημεία του διαγράμματος και να εφαρμόζονται κανόνες ευαισθητοποίησης, ώστε να εντοπίζονται έγκαιρα αλλαγές μικρότερης τάξης. Με τον τρόπο αυτό όμως, αφενός η λειτουργία του διαγράμματος περιπλέκεται με αποτέλεσμα να μειώνεται η απλότητα και η ευκολία ερμηνείας του συγκεκριμένου διαγράμματος και αφετέρου η πιθανότητα σφάλματος τύπου I αυξάνεται σημαντικά και κατά συνέπεια το μέσο μήκος ροής μειώνεται δραματικά όταν η διαδικασία είναι στην πραγματικότητα εντός ελέγχου, γεγονός που δεν είναι επιθυμητό κατά τη παρακολούθηση μιας διεργασίας στη Φάση II. Για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα αυτά έχουν αναπτυχθεί και άλλοι τύποι διαγραμμάτων ελέγχου, που είναι πιο αποτελεσματικοί και κατάλληλοι κατά περίπτωση (Ταγαράς (2001)).

Δύο αποτελεσματικά διαγράμματα που αποτελούν εξαιρετικές εναλλακτικές λύσεις αντί του διαγράμματος τύπου Shewhart, όταν μας ενδιαφέρουν μικρές μεταβολές της διαδικασίας, είναι το διάγραμμα Συσσωρευτικού Αθροίσματος (CUSUM, Page (1954)) και το διάγραμμα Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (EWMA). Τα διαγράμματα αυτά συγκεντρώνουν περισσότερες πληροφορίες με την πάροδο του χρόνου και αυτή τους η ιδιότητα τα καθιστά πιο «ευαίσθητα» στον εντοπισμό μικρών αλλαγών στις παραμέτρους της διαδικασίας για την παρακολούθηση της Φάσης II. Πιο συγκεκριμένα, στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται το διάγραμμα ελέγχου με εκθετική εξομάλυνση ή διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA για μεμονωμένες παρατηρήσεις, το οποίο εκμεταλλεύεται το σύνολο των πληροφοριών που περιέχονται στα προηγούμενα δείγματα και είναι



ιδιαίτερα κατάλληλο για τον εντοπισμό μικρών μεταβολών στις παραμέτρους της υπό παρακολούθηση παραγωγικής διαδικασίας.

### 3.2 Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) ανήκουν στην κατηγορία των διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη και είναι ευαίσθητα στις μικρές μετατοπίσεις στο μέσο επίπεδο της διεργασίας (Montgomery (2005)). Προτάθηκαν από τον Roberts (1959) ενώ μελετήθηκαν λεπτομερώς από τους Crowder (1987, 1989) και τους Lucas and Saccucci (1990). Η βάση για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου EWMA είναι ο υπολογισμός της στατιστικής συνάρτησης που απεικονίζεται

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \quad (3.1)$$

όπου με  $X_t$  συμβολίζεται η τιμή της μεμονωμένης παρατήρησης που λαμβάνεται τη χρονική στιγμή  $t$ . Η τιμή της ποσότητας  $Z_0$  καλείται αρχική τιμή ή τιμή εκκίνησης (headstart value) και ισούται συνήθως με  $\mu_0$  (εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας). Η σταθερά  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) είναι η παράμετρος εξομάλυνσης (smoothing parameter) και καθορίζει το βάρος που δίνεται στην τιμή του πιο πρόσφατου δείγματος. Αποδεικνύεται ότι:

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} = (1 - \lambda)^t Z_0 + \lambda \sum_{i=1}^t (1 - \lambda)^{t-i} X_i \quad (3.2)$$

δηλαδή η  $Z_t$  είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος των παρατηρήσεων  $Z_0, X_1, X_2, \dots, X_t$  με αντίστοιχα βάρη  $(1 - \lambda)^t, \lambda(1 - \lambda)^{t-1}, \lambda(1 - \lambda)^{t-2}, \dots, \lambda(1 - \lambda), \lambda$ . Το άθροισμα των βαρών ισούται με 1 ενώ οι παρατηρήσεις  $X_i, i = 1, 2, \dots, t$  φθίνουν γεωμετρικά. Έτσι, για μικρές τιμές του  $\lambda$  (πλησιέστερα στο 0) δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στις λιγότερο πρόσφατες παρατηρήσεις ενώ για μεγάλες τιμές του  $\lambda$  (πλησιέστερα στο 1) δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Για παράδειγμα αν  $\lambda = 1$ , μόνο η τελευταία παρατήρηση θα επηρεάσει το EWMA διάγραμμα. Έτσι, η στατιστική συνάρτηση  $Z_t$  για το διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA χρησιμοποιεί τρέχουσες καθώς και προηγούμενες πληροφορίες, επομένως αποδίδει καλύτερα από μια στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιεί μόνο τις τρέχουσες πληροφορίες. Η μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $Z_t$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\mu_{Z_t} = E(Z_t) = \mu_0 \quad (3.3)$$

$$\sigma_{Z_t}^2 = Var(Z_t) = \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \sigma^2 \quad (3.4)$$

Η κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου EWMA για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση  $Z_t$  με όρια ελέγχου

$$LCL_t = \mu_{Z_t} - L\sigma_{Z_t} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)[1 - (1-\lambda)^{2t}]}$$

$$CL = \mu_{Z_t} \tag{3.5}$$

$$UCL_t = \mu_{Z_t} + L\sigma_{Z_t} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)[1 - (1-\lambda)^{2t}]}$$

όπου η παράμετρος  $L$  είναι η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Σε περίπτωση που το κάτω όριο ελέγχου  $LCL_t$  προκύψει αρνητικό, τότε το θέτουμε ίσο με το μηδέν. Σημειώνουμε ότι τα όρια ελέγχου στη σχέση (3.5) ονομάζονται χρονομεταβλητά όρια ελέγχου (time-varying limits) αφού η τυπική απόκλιση  $\sigma_{Z_t}$  εξαρτάται από το χρόνο  $t$ . Όμως, για μεγάλες τιμές του  $t$ , δηλαδή για  $t \rightarrow \infty$ , η ποσότητα  $(1 - (1 - \lambda)^{2t}) \rightarrow 1$ , και έτσι οδηγούμαστε στα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state control limits) τα οποία δίνονται παρακάτω.

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}$$

$$CL = \mu_0 \tag{3.6}$$

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}$$

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου EWMA απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων  $\lambda$  και  $L$ . Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται συνήθως με στατιστικά κριτήρια. Η τιμή της παραμέτρου  $L$  καθορίζει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Όσον αφορά το  $\lambda$ , γενικά προτιμώνται σχετικά χαμηλές τιμές του συντελεστή εκθετικής εξομάλυνσης για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, συνήθως  $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ , με πιο δημοφιλείς επιλογές τις  $\lambda = 0.05$ ,  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$  (Montgomery (2005)). Στην ειδική περίπτωση όπου το  $\lambda = 1$ , το διάγραμμα EWMA ταυτίζεται με το διάγραμμα Shewhart. Η επιλογή των παραμέτρων  $L$  και  $\lambda$ , γίνεται με την χρήση ειδικών πινάκων σχεδιασμού, οι οποίοι ανάλογα με την μετατόπιση που έχει γίνει στον μέσο, σε πολλαπλάσια της τυπικής απόκλισης, καθοδηγούν στην χρήση των τιμών που ελαχιστοποιούν το  $ARL_0$ . Τέτοιους πίνακες μπορούμε να βρούμε στον Montgomery (2005). Επίσης, για την κατασκευή τέτοιων πινάκων χρησιμοποιείται είτε η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων (Brook and Evans (1972)) είτε προσομοίωση. Ο Roberts (1959) μέσω προσομοίωσης εκτίμησε το  $ARL$  και έδειξε ότι τα διαγράμματα τύπου EWMA είναι χρήσιμα για την ανίχνευση μικρών μεταβολών ενώ αργότερα οι Robinson and Ho (1978), Waldman (1986), Crowder (1987, 1989) και Lucas and Saccucci (1987, 1990) υπολόγισαν με αριθμητικές μεθόδους τις ιδιότητες του  $ARL$  του EWMA διαγράμματος.

Η ερμηνεία του EWMA διαγράμματος είναι ανάλογη με αυτή των διαγραμμάτων τύπου Shewhart, δηλαδή όσο οι τιμές της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $Z_t$  βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν όμως

παρατηρηθεί ένα ή περισσότερα σημεία της στατιστικής συνάρτησης εκτός των ορίων ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται εκτός στατιστικού ελέγχου. Ο συγκεκριμένος κανόνας είναι ο πιο τυπικός κανόνας ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA, η κατανομή του αριθμού των σημείων μέχρι να έχουμε για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας δεν είναι γεωμετρική και άρα το  $ARL$  δεν είναι η μέση τιμή κάποιας γεωμετρικής κατανομής. Τέλος, τονίζουμε πως λόγω του ότι τα απεικονιζόμενα σημεία στο συγκεκριμένο διάγραμμα αποτελούν σταθμισμένο μέσο όρο όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων, είναι ιδιαίτερα ανθεκτικά στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας των αρχικών παρατηρήσεων. Για το λόγο αυτό αποτελούν τα πλέον κατάλληλα διαγράμματα για την παρακολούθηση διεργασιών μεμονωμένων παρατηρήσεων έναντι των αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart.

### 3.3 Στατιστικός Σχεδιασμός Διαγράμματος Ελέγχου τύπου EWMA

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA με βάση τα τρία μοντέλα που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2 με σκοπό τη μοντελοποίηση δεδομένων τα οποία εκφράζονται με μεμονωμένες παρατηρήσεις στο διάστημα  $(0,1)$ . Στόχος είναι ο στατιστικός σχεδιασμός (επιλογή της παραμέτρου  $L$ ) για τον υπολογισμό της εντός αλλά και της εκτός ελέγχου απόδοσης. Για να εξετάσουμε την απόδοση των τριών διαγραμμάτων ελέγχου, χρησιμοποιούμε τα μέτρα  $ARL$ ,  $MRL$  και  $SDRL$  προκειμένου να ελεγχθεί η ικανότητα του διαγράμματος στην ανίχνευση μετατοπίσεων (αλλαγών) στην εντός ελέγχου τιμή της μέσης αναλογίας. Επιπρόσθετα, στόχος είναι και η σύγκριση μεταξύ των τριών μοντέλων αλλά και με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart.

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για μεμονωμένες παρατηρήσεις είναι αρκετά ευαίσθητα στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας με την έννοια ότι το  $ARL_0$  θα είναι πολύ μικρότερο από ότι αν ίσχυε η κανονικότητα. Οι Borror et al. (1999) συνέκριναν την απόδοση  $ARL$  του διαγράμματος Shewhart για μεμονωμένες παρατηρήσεις και του διαγράμματος EWMA για την περίπτωση μη κανονικών κατανομών. Ειδικότερα, χρησιμοποίησαν την κατανομή Γάμμα για να αντιπροσωπεύει την περίπτωση των λοξών κατανομών και την κατανομή Student-t για να αντιπροσωπεύει τις συμμετρικές κατανομές με βαρύτερες ουρές όμως από την κανονική. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ακόμη και για μέτρια μη κανονικές κατανομές παρατηρείται σε μεγάλο βαθμό μείωση του εντός ελέγχου  $ARL$  του διαγράμματος Shewhart για μεμονωμένες μετρήσεις, με συνέπεια τη δραματική αύξηση των ψευδών συναγερωμών. Από την άλλη, έδειξαν ότι ένα EWMA διάγραμμα ελέγχου με  $\lambda = 0.05$  ή  $\lambda = 0.10$  και για ένα κατάλληλα επιλεγμένο ζεύγος ορίων ελέγχου, θα έχει αρκετά καλή απόδοση τόσο για κανονικές όσο και για μη κανονικές κατανομές. Έτσι, πρότειναν τη χρήση ενός σωστά σχεδιασμένου EWMA διαγράμματος ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις και κυρίως για την παρακολούθηση της Φάσης II.

Όπως είδαμε παραπάνω, οι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος EWMA είναι το  $L$  που εκφράζει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή και το  $\lambda$  που είναι η παράμετρος εξομάλυνσης. Η απόσταση των ορίων από τη κεντρική γραμμή εκφράζεται σε όρους τυπικών αποκλίσεων (δείτε τύπο (3.4)). Ο σχεδιασμός του συγκεκριμένου διαγράμματος βασίζεται στην κατάλληλη επιλογή αυτών των δύο παραμέτρων η οποία παρέχει το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Έχουν γίνει αρκετές θεωρητικές μελέτες για το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος ελέγχου τύπου EWMA (Crowder (1987, 1989), Lucas and Saccucci (1990)) στις οποίες προσδιορίζεται το εντός ελέγχου  $ARL$  για διάφορες τιμές των  $\lambda$  και  $L$ . Επιπλέον, με σκοπό τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου  $ARL$  χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο συνδυασμό τιμών ( $\lambda, L$ ) με τον οποίο επιτυγχάνεται το επιθυμητό  $ARL_0$  και για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο επίπεδο υπολογίζουμε το  $ARL_1$ .

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα βήματα των δύο αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της εντός αλλά και της εκτός ελέγχου απόδοσης αντίστοιχα για κάθε ένα από τα τρία μοντέλα. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται στη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo και η υλοποίησή τους έγινε στην R. Παρακάτω, συνοψίζονται τα βήματα για το στατιστικό σχεδιασμό ενός EWMA διαγράμματος (Alevizakos and Koukouvinos (2019)).

#### **Αλγόριθμος 1 :**

- B1. Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων για κάθε κατανομή. Αυτές είναι  $(\mu_0, \varphi)$  για την Beta κατανομή,  $(\mu_0, \sigma)$  για την Simplex κατανομή και  $(\mu_0, \tau)$  για την Unit Gamma κατανομή.
- B2. Επιλέγουμε την επιθυμητή τιμή για το εντός ελέγχου  $ARL$ , έστω αυτή  $ARL_0$ , και προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ .
- B3. Χρησιμοποιούμε ως αρχική τιμή  $L = 0.001$  και υπολογίζουμε τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης.
- B4. Προσομοιώνουμε 10000 εντός ελέγχου διεργασίες με βάση τις παραμέτρους του βήματος 1 και για κάθε προσομοίωση καταγράφουμε τον αριθμό των σημείων μέχρι τον πρώτο εσφαλμένο συναγερό.
- B5. Υπολογίζουμε το εντός ελέγχου  $ARL$  ως τον δειγματικό μέσο όρο των 10000 τιμών  $RL$  που προέκυψαν από το βήμα 4. Αν  $ARL \notin [ARL_0 - \xi, ARL_0 + \xi]$ , όπου  $\xi$  είναι ένας αριθμός ανοχής, αυξάνουμε την τιμή της παραμέτρου  $L$  κατά 0.001 και επιστρέφουμε στο βήμα 4. Διαφορετικά, προχωράμε στο βήμα 6.
- B6. Χρησιμοποιούμε την τιμή της παραμέτρου  $L$  η οποία έχει βρεθεί από το προηγούμενο βήμα και καθορίζουμε τα όρια ελέγχου για το δίπλευρο διάγραμμα EWMA και δηλώνουμε την διαδικασία ως εκτός ελέγχου εάν  $Z_t \notin [LCL, UCL]$ .

Έχοντας προσδιορίσει την τιμή της παραμέτρου  $L$ , μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την εκτός ελέγχου απόδοση για μια δεδομένη μετατόπιση στο  $\mu_0$ . Τα βήματα της αλγοριθμικής διαδικασίας περιγράφονται στη συνέχεια.

## Αλγόριθμος 2 :

- B1. Επιλέγουμε τις εντός ελέγχου τιμές των παραμέτρων για κάθε κατανομή. Αυτές είναι  $(\mu_0, \varphi)$  για την Beta κατανομή,  $(\mu_0, \sigma)$  για την Simplex κατανομή και  $(\mu_0, \tau)$  για την Unit Gamma κατανομή.
- B2. Ορίζουμε ένα δίπλευρο διάγραμμα EWMA χρησιμοποιώντας τις τιμές  $(\lambda, L)$  τις οποίες βρήκαμε στη φάση σχεδιασμού του διαγράμματος.
- B3. Επιλέγουμε τη μετατόπιση του  $\mu_0$ , έστω αυτή  $\mu_1$ .
- B4. Προσομοιώνουμε 10000 εκτός ελέγχου διεργασίες με παραμέτρους  $(\mu_1, \varphi)$  για την Beta κατανομή,  $(\mu_1, \sigma)$  για την Simplex κατανομή και  $(\mu_1, \tau)$  για την Unit Gamma κατανομή.
- B5. Για κάθε μια από τις 10000 προσομοιώσεις καταγράφουμε τον αριθμό των σημείων μέχρι τον πρώτο (αληθή) συναγερμό.
- B6. Υπολογίζουμε το εκτός ελέγχου  $ARL$  ως τον δειγματικό μέσο όρο των 10000 τιμών  $RL$  που προέκυψαν από το βήμα 5 όπως επίσης το εκτός ελέγχου  $SDRL$  και το εκτός ελέγχου  $MRL$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για την αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος συνήθως χρησιμοποιείται το  $ARL$ , δηλαδή ο αναμενόμενος αριθμός διαδοχικών σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα μέχρι να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Το  $ARL$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^N RL_t}{N} \quad (3.7)$$

όπου  $N$  είναι το πλήθος των προσομοιώσεων (εδώ  $N = 10000$ ) και με  $RL_t$  συμβολίζεται το μήκος ροής για την  $t$ -οστή προσομοίωση,  $t = 1, 2, \dots$ . Δύο ακόμη μέτρα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά με το  $ARL$  για τον προσδιορισμό της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η τυπική απόκλιση της κατανομής του μήκους ροής,  $SDRL$ , και η διάμεσος της κατανομής του μήκους ροής,  $MRL$ , το οποία υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$SDRL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (RL_t - ARL)^2}{N - 1}} \quad (3.8)$$

και

$$MRL = \begin{cases} \frac{RL_{(\kappa)} + RL_{(\kappa+1)}}{2}, & N = 2\kappa \\ RL_{(\kappa+1)}, & N = 2\kappa + 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

όπου  $RL_{(i)}$  είναι η  $i$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση μεταξύ των  $N$  προσομοιωμένων τιμών για το μήκος ροής του διαγράμματος.

### 3.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Στην ενότητα αυτή γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας εκτεταμένης μελέτης για τον προσδιορισμό της τιμής  $L$ . Πιο συγκεκριμένα, για κάθε τιμή των παραμέτρων διασποράς  $\varphi, \sigma, \tau$  και για τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , η τιμή του  $L$  λαμβάνεται έτσι ώστε το εντός ελέγχου  $ARL$  να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στην προκαθορισμένη τιμή  $ARL_0 = 370.4$ , εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 1. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται τα ζεύγη τιμών των παραμέτρων  $(\lambda, L)$  τόσο για δίπλευρο όσο και μονόπλευρο (άνω και κάτω) διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA.

**Πίνακας 3.1:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για κάθε μοντέλο έτσι ώστε  $ARL_0 \approx 370.4$ .

EWMA	Beta			Simplex			Unit Gamma		
	$\varphi$	$\lambda$	$L$	$\sigma$	$\lambda$	$L$	$\tau$	$\lambda$	$L$
<i>Two Sided</i>	290	0.05	2.481	0.37	0.05	2.491	155	0.05	2.492
		0.10	2.701		0.10	2.700		0.10	2.703
		0.20	2.861		0.20	2.866		0.20	2.864
	148	0.05	2.485	0.5	0.05	2.491	96	0.05	2.497
		0.10	2.693		0.10	2.705		0.10	2.701
		0.20	2.864		0.20	2.874		0.20	2.872
	80	0.05	2.487	0.71	0.05	2.489	51	0.05	2.491
		0.10	2.701		0.10	2.703		0.10	2.697
		0.20	2.869		0.20	2.882		0.20	2.875
	31	0.05	2.483	1.2	0.05	2.528	20	0.05	2.487
		0.10	2.702		0.10	2.752		0.10	2.704
		0.20	2.884		0.20	2.977		0.20	2.899
<i>Upper Sided</i>	290	0.05	2.161	0.37	0.05	2.170	155	0.05	2.174
		0.10	2.45		0.10	2.475		0.10	2.465
		0.20	2.675		0.20	2.712		0.20	2.694
	148	0.05	2.178	0.5	0.05	2.189	96	0.05	2.179
		0.10	2.465		0.10	2.490		0.10	2.473
		0.20	2.701		0.20	2.742		0.20	2.724
	80	0.05	2.185	0.71	0.05	2.210	51	0.05	2.192
		0.10	2.494		0.10	2.522		0.10	2.512
		0.20	2.730		0.20	2.798		0.20	2.761
	31	0.05	2.201	1.2	0.05	2.244	20	0.05	2.225
		0.10	2.543		0.10	2.588		0.10	2.554
		0.20	2.812		0.20	2.911		0.20	2.85
<i>Lower Sided</i>	290	0.05	2.111	0.37	0.05	2.102	155	0.05	2.105
		0.10	2.358		0.10	2.339		0.10	2.340
		0.20	2.521		0.20	2.475		0.20	2.495
	148	0.05	2.105	0.5	0.05	2.088	96	0.05	2.096
		0.10	2.340		0.10	2.302		0.10	2.325
		0.20	2.484		0.20	2.440		0.20	2.472
	80	0.05	2.087	0.71	0.05	2.068	51	0.05	2.084
		0.10	2.315		0.10	2.272		0.10	2.295
		0.20	2.452		0.20	2.379		0.20	2.422
	31	0.05	2.075	1.2	0.05	2.023	20	0.05	2.052
		0.10	2.265		0.10	2.201		0.10	2.241
		0.20	2.356		0.20	2.254		0.20	2.325

Για να μελετήσουμε την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA για τα τρία μοντέλα, χρησιμοποιούμε τους συνδυασμούς τιμών  $(\lambda, L)$  που απεικονίζονται στον παραπάνω πίνακα και εφαρμόζουμε το Αλγόριθμο 2. Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου, η εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας όταν αυτή περιγράφεται από κάθε μια από τις τρεις κατανομές ισούται με  $\mu_{0B} = \mu_{0S} = \mu_{0G} = 0.2$ . Όταν η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου, θεωρούμε η μέση αναλογία για κάθε κατανομή μετατοπίζεται και τη συμβολίζουμε με  $\mu_{1B} = \mu_{1S} = \mu_{1G} = 0.2 \pm \varepsilon$ , όπου το  $\varepsilon = \{0.02, 0.04, 0.06, 0.08\}$  και δηλώνει τα διάφορα επίπεδα μετατόπισης (αύξηση ή μείωση).

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συνολικά σε είκοσι επτά πίνακες των έντεκα στηλών. Στους εννέα πρώτους πίνακες (Πίνακας 3.2 έως Πίνακας 3.10) η μέση αναλογία μετατοπίζεται προς δύο κατευθύνσεις, δηλαδή αυξάνεται ή μειώνεται. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Οι επόμενοι εννιά πίνακες (Πίνακας I.1 έως Πίνακας I.9, στο Παράρτημα I) αφορούν μόνο αύξηση στη μέση αναλογία (περίπτωση άνω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου) ενώ οι εννιά τελευταίοι (Πίνακας I.10 έως Πίνακας I.18, στο Παράρτημα I) σχετίζονται μόνο με μείωση στη μέση αναλογία (περίπτωση κάτω μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου). Επίσης, κάθε σεν των εννέα πινάκων αφορά την απόδοση των EWMA διαγραμμάτων για κάθε ένα από τα τρία μοντέλα, για κάθε περίπτωση των παραμέτρων διασποράς και για κάθε συνδυασμό  $(\lambda, L)$ . Για παράδειγμα, οι τρεις πρώτοι πίνακες, δηλαδή ο Πίνακας 3.2 έως και ο Πίνακας 3.4, σχετίζονται με το δίπλευρο Beta Chart για  $\lambda = 0.05$ ,  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$  αντίστοιχα. Οι επόμενοι τρεις πίνακες, δηλαδή ο Πίνακας 3.5 έως και ο Πίνακας 3.7 αφορούν το δίπλευρο Simplex Chart για κάθε μια από τρεις τιμές του  $\lambda$  και ομοίως οι επόμενοι τρεις πίνακες, δηλαδή ο Πίνακας 3.8 έως και ο Πίνακας 3.10, αφορούν το δίπλευρο Unit Gamma Chart για κάθε τιμή του  $\lambda$ . Το ίδιο μοτίβο ακολουθούν οι πίνακες για τα μονόπλευρα διαγράμματα οι οποίοι παρατίθενται στο Παράρτημα I.

Σε κάθε πίνακα, οι τρεις πρώτες στήλες περιέχουν τις τιμές των μέτρων απόδοσης *ARL*, *SDRL*, *MRL* όταν χρησιμοποιούνται τα πραγματικά όρια ελέγχου. Αυτό φαίνεται στις στήλες με ονόματα Beta True, Simplex True και Unit Gamma True. Οι υπόλοιπες έξι στήλες περιέχουν τις τιμές των παραπάνω μέτρων απόδοσης όταν όμως τα όρια ελέγχου έχουν υπολογιστεί υπό το «λάθος» μοντέλο, δηλαδή όταν χρησιμοποιούνται εσφαλμένα τα όρια ελέγχου από μια κατανομή σε μια άλλη. Στόχος είναι η εφαρμογή μιας μελέτης ανθεκτικότητας για να διαπιστώσουμε πως επηρεάζεται το κάθε διάγραμμα όταν χρησιμοποιούνται λάθος όρια. Τέλος, για κάθε διάγραμμα δίνονται τα όρια ελέγχου ανάλογα με το μοντέλο που χρησιμοποιείται ενώ να σημειωθεί ότι σε κάθε πίνακα παράγονται παρατηρήσεις από το ορθό μοντέλο (δείτε στήλες με όνομα True). Στους επόμενους πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την αριθμητική μελέτη για τα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA.

**Πίνακας 3.2:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.481$	0.12	3.98	0.47	4	3.88	0.50	4	4.15	0.46	4
	0.14	4.87	0.75	5	4.75	0.74	5	5.13	0.78	5
	0.16	6.81	1.45	7	6.63	1.44	6	7.26	1.56	7
	0.18	13.89	5.19	13	13.44	5.06	12	15.19	5.56	14
	0.2	370.14	357.48	257	302.44	287.78	216	564.09	546.54	395
	0.22	14.04	5.63	13	13.49	5.36	12	15.36	6.16	14
	0.24	6.87	1.68	7	6.65	1.65	6	7.34	1.79	7
	0.26	4.90	0.91	5	4.77	0.89	5	5.15	0.96	5
	0.28	3.97	0.63	4	3.89	0.63	4	4.18	0.65	4
	LCL		0.191			0.191			0.190	
UCL		0.209			0.209			0.210		
$\lambda = 0.05, L = 2.485$	0.12	5.04	0.77	5	5.01	0.76	5	5.02	0.77	5
	0.14	6.42	1.23	6	6.40	1.24	6	6.38	1.27	6
	0.16	9.46	2.58	9	9.41	2.58	9	9.40	2.55	9
	0.18	21.09	9.89	19	20.95	10.01	19	20.97	9.84	19
	0.2	370.14	351.44	265	363.33	343.52	259	357.90	345.13	253
	0.22	21.05	10.73	19	21	10.59	19	21.13	10.74	19
	0.24	9.55	3.02	9	9.51	2.98	9	9.49	2.97	9
	0.26	6.47	1.56	6	6.45	1.55	6	6.46	1.56	6
	0.28	5.09	1.02	5	5.08	1	5	5.10	1.01	5
	LCL		0.187			0.187			0.187	
UCL		0.213			0.213			0.213		
$\lambda = 0.05, L = 2.487$	0.12	6.49	1.20	6	6.59	1.23	6	6.59	1.22	6
	0.14	8.54	2.10	8	8.68	2.11	8	8.62	2.08	8
	0.16	13.13	4.59	12	13.40	4.61	13	13.43	4.57	13
	0.18	31.81	18.26	27	33.07	18.86	28	32.73	19.02	28
	0.2	370.48	357.90	261	410.39	394.24	289	410.51	394.74	289
	0.22	31.70	19.05	27	32.48	20.19	27	32.42	19.80	27
	0.24	13.28	5.28	12	13.48	5.24	12	13.51	5.29	13
	0.26	8.65	2.59	8	8.80	2.67	8	8.79	2.63	8
	0.28	6.58	1.63	6	6.69	1.65	6	6.67	1.67	6
	LCL		0.182			0.182			0.182	
UCL		0.218			0.218			0.218		
$\lambda = 0.05, L = 2.483$	0.12	10.15	2.69	10	10.45	2.67	10	10.07	2.61	10
	0.14	13.93	4.71	13	14.52	4.96	14	13.85	4.66	13
	0.16	23.24	11.01	21	24.34	11.64	22	23.09	11.03	21
	0.18	64.30	46.81	52	69.74	52.14	55	63.25	46.57	50
	0.2	370.50	360.16	257	439.72	424.28	312	351.96	344.37	243
	0.22	59.48	44.65	47	64.97	50.17	50.5	59.27	44.36	47
	0.24	23.13	12.74	20	24.21	13.02	21	23.15	12.42	20
	0.26	14.17	5.92	13	14.65	6.07	13	14.04	5.92	13
	0.28	10.37	3.62	10	10.69	3.71	10	10.27	3.61	10
	LCL		0.172			0.171			0.172	
UCL		0.228			0.229			0.228		



**Πίνακας 3.3:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.701$	0.12	3.40	0.51	3	3.48	0.53	3	3.65	0.54	4
	0.14	4.23	0.73	4	4.32	0.73	4	4.53	0.77	4
Case 1:	0.16	5.96	1.47	6	6.13	1.52	6	6.51	1.62	6
$\varphi = 290$	0.18	13.20	6.08	12	13.91	6.44	12	15.34	7.16	14
$\sigma = 0.37$	0.2	370.30	359.15	262	462.27	454.45	322	766.51	741.72	538
$\tau = 155$	0.22	13.29	6.56	12	13.87	6.78	12	15.29	7.64	14
	0.24	6.06	1.72	6	6.18	1.71	6	6.59	1.86	6
	0.26	4.25	0.88	4	4.36	0.91	4	4.57	0.95	4
	0.28	3.46	0.60	3	3.53	0.61	3	3.68	0.63	4
	LCL		0.185			0.185			0.184	
	UCL		0.215			0.215			0.216	
$\lambda = 0.10, L = 2.693$	0.12	4.35	0.72	4	4.31	0.72	4	4.32	0.72	4
	0.14	5.52	1.21	5	5.48	1.21	5	5.50	1.23	5
Case 2:	0.16	8.40	2.73	8	8.30	2.74	8	8.25	2.67	8
$\varphi = 148$	0.18	21.40	12.77	18	20.96	12.29	18	20.92	12.28	18
$\sigma = 0.5$	0.2	370.44	362.60	257	345.56	336.98	244	331.58	323	233
$\tau = 96$	0.22	21.19	13.21	18	20.60	12.50	17	20.55	12.83	17
	0.24	8.47	3.16	8	8.41	3.19	8	8.46	3.22	8
	0.26	5.64	1.52	5	5.59	1.54	5	5.56	1.52	5
	0.28	4.41	0.98	4	4.37	0.97	4	4.38	0.99	4
	LCL		0.180			0.180			0.180	
	UCL		0.220			0.220			0.220	
$\lambda = 0.10, L = 2.701$	0.12	5.62	1.18	5	5.73	1.23	6	5.71	1.21	6
	0.14	7.55	2.16	7	7.65	2.17	7	7.70	2.20	7
Case 3:	0.16	12.15	5.13	11	12.62	5.33	11	12.49	5.24	11
$\varphi = 80$	0.18	35.86	25.51	29	37.49	26.48	30	38.10	27.78	30
$\sigma = 0.71$	0.2	370.49	363.44	258	410.86	398.89	289	416.80	405.05	294
$\tau = 51$	0.22	33.62	24.82	27	34.74	25.64	27	35.23	25.55	28
	0.24	12.15	5.78	11	12.50	5.96	11	12.71	6.15	11
	0.26	7.62	2.71	7	7.77	2.75	7	7.77	2.74	7
	0.28	5.77	1.63	6	5.81	1.65	6	5.82	1.65	6
	LCL		0.172			0.172			0.172	
	UCL		0.228			0.228			0.228	
$\lambda = 0.10, L = 2.702$	0.12	9.11	2.82	9	9.70	3.06	9	9.21	2.88	9
	0.14	13.28	5.52	12	14.40	6.17	13	13.34	5.67	12
Case 4:	0.16	24.96	15.17	21	27.69	16.92	23	25.05	14.98	21
$\varphi = 31$	0.18	87.98	76.03	65	112.78	98.01	83	89.84	76.45	67
$\sigma = 1.2$	0.2	370.66	359.86	262	518.58	507.70	365	380.12	372.38	268
$\tau = 20$	0.22	66.36	57.38	48	77.23	67.79	57	68.35	59.22	50
	0.24	23.07	15.16	19	25.87	17.30	21	23.54	15.68	19
	0.26	13.30	6.73	12	14.13	7.22	12	13.25	6.75	12
	0.28	9.30	3.86	9	9.93	4.18	9	9.40	3.90	9
	LCL		0.156			0.154			0.156	
	UCL		0.244			0.246			0.244	

**Πίνακας 3.4:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
<b>Case 1:</b> $\lambda = 0.20, L = 2.861$ $\varphi = 290$ $\sigma = 0.37$ $\tau = 155$	0.12	3.06	0.38	3	3.04	0.38	3	3.22	0.43	3
	0.14	3.67	0.73	4	3.64	0.72	4	4.01	0.81	4
	0.16	5.32	1.62	5	5.25	1.59	5	6.06	1.87	6
	0.18	14.10	8.66	12	13.78	8.31	12	19.26	12.89	16
	0.2	370.88	368.01	256	329.78	323.59	234	971.99	920.30	685
	0.22	13.89	8.67	12	13.33	8.25	11	17.85	11.93	15
	0.24	5.42	1.86	5	5.35	1.84	5	6.14	2.19	6
	0.26	3.73	0.88	4	3.68	0.86	4	4.08	0.96	4
	0.28	3.06	0.57	3	3.04	0.55	3	3.26	0.59	3
	LCL		0.178			0.178			0.175	
UCL		0.222			0.222			0.225		
<b>Case 2:</b> $\lambda = 0.20, L = 2.864$ $\varphi = 148$ $\sigma = 0.5$ $\tau = 96$	0.12	3.81	0.76	4	3.68	0.73	4	3.77	0.75	4
	0.14	4.94	1.34	5	4.78	1.28	5	4.92	1.34	5
	0.16	8.11	3.41	7	7.55	3.13	7	7.97	3.40	7
	0.18	27.07	20.43	21	23.94	17.42	19	26.64	20.07	21
	0.2	370.32	366.88	261	269.88	263.70	186	346.86	340.11	242
	0.22	24.19	18.83	19	21.60	16.23	17	23.87	18.27	18
	0.24	8.12	3.89	7	7.70	3.61	7	8	3.82	7
	0.26	5.09	1.71	5	4.86	1.56	5	5.02	1.68	5
	0.28	3.88	0.97	4	3.77	0.94	4	3.87	0.97	4
	LCL		0.169			0.170			0.169	
UCL		0.231			0.230			0.231		
<b>Case 3:</b> $\lambda = 0.20, L = 2.869$ $\varphi = 80$ $\sigma = 0.71$ $\tau = 51$	0.12	5.05	1.31	5	5.11	1.34	5	5.11	1.34	5
	0.14	7.04	2.57	6	7.18	2.64	7	7.24	2.69	7
	0.16	13.19	7.43	11	13.58	7.90	11	13.54	7.67	12
	0.18	55.18	47.41	41	58.76	51.56	43	58.47	51.48	43
	0.2	370.79	366.72	256	411.77	406.29	287	406.40	409.79	281
	0.22	40.80	34.67	31	42.51	36.37	31	42.27	36.32	32
	0.24	12.46	7.60	10	12.93	8.19	11	12.91	7.93	11
	0.26	7.20	3.20	6	7.24	3.16	7	7.24	3.23	7
	0.28	5.16	1.75	5	5.20	1.76	5	5.20	1.78	5
	LCL		0.157			0.157			0.157	
UCL		0.243			0.243			0.243		
<b>Case 4:</b> $\lambda = 0.20, L = 2.884$ $\varphi = 31$ $\sigma = 1.2$ $\tau = 20$	0.12	9.21	3.91	8	10.02	4.33	9	9.44	4.01	8
	0.14	15.30	8.97	13	17.18	10.39	14	15.96	9.48	13
	0.16	37.61	30.51	28	47.64	38.74	36	41.05	33	31
	0.18	188.96	181.58	133	281.96	275.28	196	216.43	205.76	154
	0.2	370.16	364.37	258	505.41	498.89	351.5	415.54	410.62	292
	0.22	78.97	72.17	58	96.57	90.87	69	85.65	81.30	60
	0.24	26.48	21.16	20	31.30	25.70	24	27.90	22.24	21
	0.26	13.57	8.70	11	14.96	9.92	12	14.12	9.30	11
	0.28	9.02	4.76	8	9.64	5.09	8	9.23	4.85	8
	LCL		0.132			0.129			0.131	
UCL		0.268			0.271			0.269		

**Πίνακας 3.5:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma			
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
$\lambda = 0.05, L = 2.491$	0.12	4.01	0.25	4	3.93	0.30	4	4.09	0.30	4	
	0.14	4.86	0.60	5	4.70	0.61	5	5.10	0.61	5	
	Case 1:	0.16	6.84	1.25	7	6.58	1.23	6	7.23	1.30	7
	$\varphi = 290$	0.18	14.04	4.87	13	13.39	4.76	13	15.12	5.30	14
	$\sigma = 0.37$	0.2	371.48	359.17	260	292.12	277.86	206	548.49	523.70	391
	$\tau = 155$	0.22	14.15	6.01	13	13.44	5.73	12	15.28	6.42	14
		0.24	7.01	1.94	7	6.74	1.88	6	7.41	2.02	7
		0.26	4.98	1.11	5	4.83	1.07	5	5.20	1.14	5
		0.28	4.02	0.77	4	3.93	0.76	4	4.19	0.79	4
		LCL		0.191			0.191			0.190	
	UCL		0.209			0.209			0.210		
$\lambda = 0.05, L = 2.491$	0.12	3.34	0.53	5	3.45	0.52	5	3.67	0.51	5	
	0.14	4.20	0.90	6	4.28	0.92	6	4.49	0.93	6	
	Case 2:	0.16	5.95	2.10	9	6.09	2.10	9	6.50	2.15	9
	$\varphi = 148$	0.18	13.34	8.54	18	13.95	9.36	19	15.42	9.30	19
	$\sigma = 0.5$	0.2	366.76	362.84	258	449.22	421.14	311	728.90	424.44	315
	$\tau = 96$	0.22	13.19	10.46	18	13.61	10.51	19	15.01	10.84	18
		0.24	6.08	3.23	9	6.28	3.26	9	6.65	3.27	9
		0.26	4.28	1.76	6	4.39	1.79	6	4.61	1.78	6
		0.28	3.52	1.20	5	3.57	1.21	5	3.73	1.20	5
		LCL		0.187			0.187			0.187	
	UCL		0.213			0.213			0.213		
$\lambda = 0.05, L = 2.489$	0.12	3.03	0.84	6	3.02	0.83	6	3.12	0.83	6	
	0.14	3.65	1.62	8	3.58	1.60	8	3.98	1.63	8	
	Case 3:	0.16	5.38	3.90	12	5.25	3.96	13	6.10	3.91	13
	$\varphi = 80$	0.18	15.08	18.29	28	14.06	18.31	29	20.37	18.30	29
	$\sigma = 0.71$	0.2	373.87	356.06	263	310.78	387.26	281.5	891.57	386.01	284
	$\tau = 51$	0.22	13.41	19.17	26	12.87	20.06	27	17	20.24	27
		0.24	5.48	5.73	12	5.37	6.04	12	6.11	5.86	12
		0.26	3.80	3.06	8	3.74	3.12	8	4.14	3.16	8
		0.28	3.11	2.03	6	3.06	2.07	6	3.31	2.07	6
		LCL		0.182			0.182			0.182	
	UCL		0.218			0.218			0.218		
$\lambda = 0.05, L = 2.528$	0.12	4.90	1.96	10	5.01	1.88	10	5	1.88	10	
	0.14	6.17	4.10	14	6.33	3.90	13	6.33	3.90	13	
	Case 4:	0.16	9.08	10.98	22	9.32	9.95	21	9.38	10.31	21
	$\varphi = 31$	0.18	20.24	54.31	59	21.30	46.96	53	21.23	48.49	53
	$\sigma = 1.2$	0.2	373.08	360.60	266	437.96	279.63	211	442.12	280.01	213
	$\tau = 20$	0.22	20.17	45.43	46	20.84	42.64	41	20.73	41.45	42
		0.24	9.25	14.26	20	9.52	13.64	19	9.57	13.45	19
		0.26	6.36	7.31	13	6.53	6.95	13	6.54	6.91	13
		0.28	5.01	4.59	10	5.13	4.49	10	5.13	4.57	9
		LCL		0.171			0.172			0.172	
	UCL		0.229			0.228			0.228		

**Πίνακας 3.6:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.700$	0.12	3.34	0.48	3	3.45	0.50	3	3.67	0.48	4
	0.14	4.20	0.55	4	4.28	0.56	4	4.49	0.61	4
	0.16	5.95	1.26	6	6.09	1.30	6	6.50	1.39	6
	0.18	13.34	5.85	12	13.95	6.11	13	15.42	6.99	14
	0.2	366.76	361.67	256	449.22	437.38	317	728.90	694.68	512
	0.22	13.19	6.73	12	13.61	7.03	12	15.01	7.90	13
	0.24	6.08	1.95	6	6.28	2.02	6	6.65	2.15	6
	0.26	4.28	1.05	4	4.39	1.07	4	4.61	1.13	4
	0.28	3.52	0.72	3	3.57	0.71	3	3.73	0.77	4
	LCL			0.185			0.185			0.184
UCL			0.215			0.215			0.216	
$\lambda = 0.10, L = 2.705$	0.12	4.21	0.47	4	4.25	0.48	4	4.26	0.48	4
	0.14	5.37	0.90	5	5.45	0.92	5	5.45	0.93	5
	0.16	8.16	2.25	8	8.29	2.29	8	8.30	2.29	8
	0.18	21.06	11.61	18	21.91	12.49	19	21.92	12.26	19
	0.2	375.08	368.08	264	416.84	410.89	288	428.18	415.18	304
	0.22	19.51	12.36	16	20.69	12.97	17	20.20	12.66	17
	0.24	8.26	3.33	8	8.45	3.46	8	8.42	3.37	8
	0.26	5.52	1.73	5	5.63	1.74	5	5.64	1.77	5
	0.28	4.38	1.17	4	4.41	1.15	4	4.43	1.15	4
	LCL			0.180			0.180			0.180
UCL			0.220			0.220			0.220	
$\lambda = 0.10, L = 2.703$	0.12	5.61	0.84	6	5.66	0.84	6	5.67	0.84	6
	0.14	7.54	1.71	7	7.61	1.72	7	7.61	1.72	7
	0.16	12.46	4.71	11	12.69	4.75	12	12.60	4.65	12
	0.18	40.03	28.57	32	41.65	29.74	33	41.51	29.53	33
	0.2	371.47	361.87	261	405.57	400.67	283	402.45	392.01	284
	0.22	31.77	23.66	25	32.34	23.90	26	32.56	24.59	25
	0.24	12.38	6.47	11	12.47	6.52	11	12.49	6.46	11
	0.26	7.73	3.19	7	7.89	3.23	7	7.81	3.22	7
	0.28	5.83	2.02	5	5.88	2	6	5.90	2.03	6
	LCL			0.172			0.172			0.172
UCL			0.228			0.228			0.228	
$\lambda = 0.10, L = 2.752$	0.12	9.63	2.23	9	9.20	2.16	9	9.23	2.19	9
	0.14	14.46	5.20	13	13.64	4.89	13	13.69	4.94	13
	0.16	29.74	17.79	25	26.85	15.51	23	26.94	15.84	23
	0.18	125.34	110.46	91	104.56	88.94	77	103.40	90.40	76
	0.2	370.88	363.92	261	310.84	305.53	216	301.09	294.40	209
	0.22	60.46	51.95	45	54.62	47.05	40	55.43	47.55	42
	0.24	23.01	16.08	19	21.76	15.25	18	21.95	15.25	18
	0.26	13.65	7.94	12	12.97	7.45	11	13.05	7.60	11
	0.28	9.75	4.84	9	9.31	4.59	8	9.31	4.66	8
	LCL			0.154			0.156			0.156
UCL			0.246			0.244			0.244	

**Πίνακας 3.7:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
<u><math>\lambda = 0.20, L = 2.866</math></u> Case 1: $\varphi = 290$ $\sigma = 0.37$ $\tau = 155$	0.12	3.03	0.19	3	3.02	0.17	3	3.12	0.33	3
	0.14	3.65	0.61	4	3.58	0.60	4	3.98	0.63	4
	0.16	5.38	1.44	5	5.25	1.39	5	6.10	1.67	6
	0.18	15.08	9.12	13	14.06	8.20	12	20.37	13.18	17
	0.2	373.87	363.74	264	310.78	308.19	215	891.57	850.61	627
	0.22	13.41	8.59	11	12.87	8.14	11	17	11.43	14
	0.24	5.48	2.10	5	5.37	2.03	5	6.11	2.40	6
	0.26	3.80	1.05	4	3.74	1.03	4	4.14	1.17	4
	0.28	3.11	0.72	3	3.06	0.71	3	3.31	0.75	3
	LCL			0.178			0.178			0.175
UCL			0.222			0.222			0.225	
<u><math>\lambda = 0.20, L = 2.874</math></u> Case 2: $\varphi = 148$ $\sigma = 0.5$ $\tau = 96$	0.12	3.66	0.56	4	3.74	0.56	4	3.74	0.55	4
	0.14	4.76	0.97	5	4.88	1.01	5	4.86	1	5
	0.16	7.83	2.89	7	8.10	3.07	7	8.11	3.03	7
	0.18	28.78	21.68	22	31.77	24.54	24	31.51	24.12	24
	0.2	371.43	370.29	258	437.76	426.40	307	434.45	429.41	303
	0.22	21.54	16.46	17	22.58	16.98	18	22.38	17.37	17
	0.24	7.72	3.86	7	8	4.04	7	7.92	3.98	7
	0.26	4.94	1.82	5	5.06	1.85	5	5.08	1.86	5
	0.28	3.83	1.14	4	3.92	1.17	4	3.93	1.17	4
	LCL			0.170			0.169			0.169
UCL			0.230			0.231			0.231	
<u><math>\lambda = 0.20, L = 2.882</math></u> Case 3: $\varphi = 80$ $\sigma = 0.71$ $\tau = 51$	0.12	5.05	0.94	5	5.07	0.93	5	5.05	0.95	5
	0.14	7.22	2.17	7	7.23	2.19	7	7.24	2.22	7
	0.16	14.54	7.88	13	14.69	7.95	13	14.53	7.92	12
	0.18	78.29	70.59	57	79.49	71.47	57	78.19	67.88	58
	0.2	371.57	365.40	260	377.76	370.57	265	373.99	363.78	264
	0.22	35.78	30.69	27	36.85	32.13	27	36.11	30.65	27
	0.24	12.12	7.86	10	12.17	7.94	10	12.17	7.91	10
	0.26	7.21	3.64	6	7.22	3.63	6	7.21	3.58	6
	0.28	5.27	2.15	5	5.30	2.16	5	5.26	2.13	5
	LCL			0.157			0.157			0.157
UCL			0.243			0.243			0.243	
<u><math>\lambda = 0.20, L = 2.997</math></u> Case 4: $\varphi = 31$ $\sigma = 1.2$ $\tau = 20$	0.12	10.69	3.88	10	9.62	3.32	9	9.85	3.46	9
	0.14	21.26	13.02	18	17.91	10.20	15	18.60	10.98	15
	0.16	74.03	62.49	56	53.09	44.06	40	58.90	49.99	43
	0.18	546.56	534.50	385	305.40	294.95	215	359.71	349.53	256
	0.2	370.23	359.05	262	270.13	261.48	192	296.85	295.46	205
	0.22	67.19	62.48	48	57.21	52.33	41	59.71	54.78	43
	0.24	24.83	20.13	19	21.88	17.75	17	22.67	18.24	17
	0.26	13.68	9.54	11	12.44	8.58	10	12.81	8.87	10
	0.28	9.26	5.56	8	8.67	5.19	7	8.81	5.25	7
	LCL			0.129			0.132			0.131
UCL			0.271			0.268			0.269	

**Πίνακας 3.8:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.492</math></u> Case 1: $\varphi = 290$ $\sigma = 0.37$ $\tau = 155$	0.12	4.23	0.52	4	3.87	0.52	4	3.88	0.52	4
	0.14	5.26	0.85	5	4.74	0.79	5	4.74	0.79	5
	0.16	7.49	1.73	7	6.66	1.58	6	6.66	1.57	6
	0.18	15.74	6.29	14	13.27	5.34	12	13.34	5.31	12
	0.2	370.39	356.35	260	186.66	175.29	133	182.72	171.12	130
	0.22	15.91	6.86	15	13.46	5.86	12	13.32	5.70	12
	0.24	7.60	2.01	7	6.70	1.81	6	6.73	1.80	6
	0.26	5.29	1.04	5	4.79	0.96	5	4.81	1	5
	0.28	4.26	0.70	4	3.90	0.68	4	3.91	0.68	4
	LCL			0.190			0.191			0.191
UCL			0.210			0.209			0.209	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.497</math></u> Case 2: $\varphi = 148$ $\sigma = 0.5$ $\tau = 96$	0.12	5.05	0.75	5	5.01	0.75	5	5.01	0.74	5
	0.14	6.43	1.25	6	6.40	1.23	6	6.37	1.22	6
	0.16	9.44	2.60	9	9.40	2.60	9	9.39	2.57	9
	0.18	20.95	9.51	19	21.05	9.93	19	20.93	9.80	19
	0.2	370.50	351.26	262	360	346.57	252	364.01	353.78	253
	0.22	21.44	10.71	19	21	10.67	19	21.04	10.61	19
	0.24	9.54	3.01	9	9.50	3	9	9.52	2.97	9
	0.26	6.50	1.54	6	6.47	1.54	6	6.46	1.54	6
	0.28	5.12	1.01	5	5.06	1	5	5.09	0.99	5
	LCL			0.187			0.187			0.187
UCL			0.213			0.213			0.213	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.491</math></u> Case 3: $\varphi = 80$ $\sigma = 0.71$ $\tau = 51$	0.12	6.56	1.20	6	6.58	1.20	6	6.57	1.22	6
	0.14	8.60	2.11	8	8.67	2.09	8	8.63	2.09	8
	0.16	13.27	4.50	12	13.35	4.55	12	13.34	4.65	12
	0.18	32.33	18.66	28	32.79	19.09	28	32.80	19.13	28
	0.2	370.22	358.01	260	387.68	376.96	273	381.90	377.61	263
	0.22	32.10	19.59	27	32.02	19.52	27	32.40	19.71	27
	0.24	13.46	5.35	12	13.48	5.31	13	13.54	5.39	12
	0.26	8.75	2.61	8	8.79	2.65	8	8.77	2.62	8
	0.28	6.64	1.63	6	6.70	1.67	6	6.66	1.63	6
	LCL			0.182			0.182			0.182
UCL			0.218			0.218			0.218	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.487</math></u> Case 4: $\varphi = 31$ $\sigma = 1.2$ $\tau = 20$	0.12	10.22	2.59	10	10.06	2.55	10	10.46	2.68	10
	0.14	14.10	4.73	13	13.76	4.62	13	14.47	4.83	13
	0.16	23.67	11.22	21	23.04	11.02	20	24.29	11.61	21
	0.18	65.20	47.64	52	63.80	45.82	51	69.02	50.26	55
	0.2	370.05	352.40	261	341.50	323.28	246	415.34	403.81	294
	0.22	60.87	46.88	48	59.10	44.92	46	63.70	48.76	50
	0.24	23.67	12.78	21	23.20	12.62	20	24.23	12.94	21
	0.26	14.31	5.95	13	14.14	5.84	13	14.61	6.09	13
	0.28	10.46	3.66	10	10.26	3.58	10	10.68	3.73	10
	LCL			0.172			0.172			0.171
UCL			0.228			0.228			0.229	

**Πίνακας 3.9:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
<u><math>\lambda = 0.10, L = 2.703</math></u> Case 1: $\varphi = 290$ $\sigma = 0.37$ $\tau = 155$	0.12	3.65	0.57	4	3.48	0.55	3	3.48	0.54	3
	0.14	4.53	0.81	4	4.33	0.79	4	4.31	0.79	4
	0.16	6.54	1.76	6	6.13	1.65	6	6.16	1.65	6
	0.18	15.09	7.30	13	13.65	6.72	12	13.63	6.67	12
	0.2	370.58	360.56	259	242.05	234.89	169	242.03	234.51	171
	0.22	15.10	7.94	13	13.65	7	12	13.58	6.96	12
	0.24	6.63	2.03	6	6.25	1.92	6	6.20	1.90	6
	0.26	4.60	1.02	4	4.37	0.97	4	4.40	0.99	4
	0.28	3.71	0.68	4	3.55	0.65	3	3.55	0.64	3
	LCL			0.184			0.185			0.185
UCL			0.216			0.215			0.215	
<u><math>\lambda = 0.10, L = 2.701</math></u> Case 2: $\varphi = 148$ $\sigma = 0.5$ $\tau = 96$	0.12	4.35	0.70	4	4.32	0.69	4	4.31	0.70	4
	0.14	5.58	1.24	5	5.50	1.22	5	5.51	1.22	5
	0.16	8.39	2.72	8	8.26	2.70	8	8.25	2.71	8
	0.18	21.59	12.65	18	20.84	12.38	18	20.78	12.17	18
	0.2	370.30	368.98	256	334.45	332.52	234	330.71	319.12	234
	0.22	20.94	12.86	18	20.74	12.94	17	20.28	12.44	17
	0.24	8.52	3.23	8	8.41	3.18	8	8.44	3.16	8
	0.26	5.64	1.55	5	5.55	1.52	5	5.57	1.51	5
	0.28	4.42	0.96	4	4.37	0.95	4	4.36	0.95	4
	LCL			0.180			0.180			0.180
UCL			0.220			0.220			0.220	
<u><math>\lambda = 0.10, L = 2.697</math></u> Case 3: $\varphi = 80$ $\sigma = 0.71$ $\tau = 51$	0.12	5.67	1.19	5	5.70	1.21	6	5.73	1.21	6
	0.14	7.57	2.16	7	7.62	2.18	7	7.63	2.18	7
	0.16	12.41	5.22	11	12.54	5.27	11	12.52	5.32	11
	0.18	37.36	27	30	37.22	26.85	29	37.58	26.97	30
	0.2	370.64	364.28	260	383.61	376.51	268	379.20	373.13	264
	0.22	34.10	24.84	27	34.84	25.70	27	34.78	25.62	27
	0.24	12.48	6	11	12.51	5.94	11	12.53	6.01	11
	0.26	7.73	2.72	7	7.72	2.71	7	7.80	2.76	7
	0.28	5.80	1.64	6	5.83	1.65	6	5.81	1.64	6
	LCL			0.172			0.172			0.172
UCL			0.228			0.228			0.228	
<u><math>\lambda = 0.10, L = 2.704</math></u> Case 4: $\varphi = 31$ $\sigma = 1.2$ $\tau = 20$	0.12	9.22	2.82	9	9.19	2.87	9	9.72	3.03	9
	0.14	13.56	5.77	12	13.32	5.65	12	14.18	6.02	13
	0.16	25.25	15.16	21	25.08	15.20	21	28.02	17.62	23
	0.18	92.48	80.67	68	89.51	77.34	67	111.80	99.18	82
	0.2	370.49	362.90	258	354.58	348.29	247	484.07	481.67	335
	0.22	67.42	57.75	50	66.53	57.10	49	77.14	67.27	57
	0.24	23.59	15.48	19	23.52	15.70	19	25.61	17.28	21
	0.26	13.35	6.78	12	13.48	6.83	12	14.26	7.35	13
	0.28	9.43	3.86	9	9.38	3.87	9	9.95	4.20	9
	LCL			0.156			0.156			0.154
UCL			0.244			0.244			0.246	

**Πίνακας 3.10:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αμφίδρομη Μετατόπιση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.864$	0.12	3.21	0.45	3	3.04	0.41	3	3.04	0.41	3
	0.14	3.96	0.84	4	3.64	0.77	4	3.65	0.76	4
Case 1:	0.16	6.01	2.01	6	5.28	1.73	5	5.29	1.73	5
$\varphi = 290$	0.18	16.94	11.06	14	12.99	7.94	11	13.11	8.23	11
$\sigma = 0.37$	0.2	370.54	369.01	258	165.74	160.42	117	164.62	159.83	116
$\tau = 155$	0.22	16.01	10.76	13	12.68	8.03	10	12.74	8.18	11
	0.24	6.02	2.28	6	5.35	1.97	5	5.37	1.98	5
	0.26	4.06	1.04	4	3.72	0.93	4	3.70	0.93	4
	0.28	3.26	0.64	3	3.05	0.61	3	3.04	0.61	3
	LCL		0.175			0.178			0.178	
	UCL		0.225			0.222			0.222	
$\lambda = 0.20, L = 2.872$	0.12	3.79	0.74	4	3.76	0.73	4	3.66	0.71	4
	0.14	4.99	1.36	5	4.89	1.29	5	4.75	1.23	5
Case 2:	0.16	8.22	3.45	7	7.98	3.35	7	7.56	3.15	7
$\varphi = 148$	0.18	27.55	20.99	21	26.69	20.02	21	23.99	17.46	19
$\sigma = 0.5$	0.2	370.97	369.27	256	340.51	333.03	237	262.56	256.87	182
$\tau = 96$	0.22	24.58	19.58	19	23.68	18.46	18	21.43	16.11	17
	0.24	8.21	3.94	7	7.99	3.76	7	7.65	3.64	7
	0.26	5.11	1.69	5	4.99	1.62	5	4.83	1.55	5
	0.28	3.92	0.98	4	3.87	0.97	4	3.75	0.92	4
	LCL		0.169			0.169			0.170	
	UCL		0.231			0.231			0.230	
$\lambda = 0.20, L = 2.875$	0.12	5.10	1.33	5	5.11	1.29	5	5.10	1.31	5
	0.14	7.21	2.70	7	7.18	2.59	7	7.17	2.58	7
Case 3:	0.16	13.56	7.71	12	13.35	7.61	11	13.60	7.78	12
$\varphi = 80$	0.18	58.06	50.63	43	57.61	50.55	42	57.95	50.72	43
$\sigma = 0.71$	0.2	370.62	364.79	261	366.55	355.93	259	365.66	358.82	257
$\tau = 51$	0.22	41.43	35.01	31	41.65	36.62	30	41.27	35.22	31
	0.24	12.90	8	11	12.86	8	11	12.97	8.02	11
	0.26	7.28	3.21	7	7.28	3.24	7	7.21	3.20	7
	0.28	5.24	1.78	5	5.22	1.77	5	5.22	1.77	5
	LCL		0.157			0.157			0.157	
	UCL		0.243			0.243			0.243	
$\lambda = 0.20, L = 2.899$	0.12	9.47	3.98	8	9.19	3.82	8	9.91	4.21	9
	0.14	15.87	9.37	13	15.49	8.94	13	17.23	10.51	14
Case 4:	0.16	40.62	32.82	31	37.62	29.59	29	47.98	40.20	36
$\varphi = 31$	0.18	219.01	212.44	154	192.60	187.68	134	286.12	277.19	200
$\sigma = 1.2$	0.2	370.41	371.31	256	330.26	326.91	231	459.47	461.78	317
$\tau = 20$	0.22	79.77	74.21	57	75.79	70.80	54	91.58	86.22	65
	0.24	27.75	21.93	21	26.58	21.18	21	30.05	24.43	23
	0.26	14.13	9.25	12	13.77	9.03	11	15.09	9.85	12
	0.28	9.34	4.93	8	9.09	4.73	8	9.75	5.19	8
	LCL		0.131			0.132			0.129	
	UCL		0.269			0.268			0.271	



### 3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εκτενή αριθμητική μελέτη για την απόδοση των τριών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA. Αρχικά, σε ότι αφορά τους εννέα πρώτους πίνακες όπου η μετατόπιση είναι αμφίδρομη, παρατηρούμε ότι η χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχου έχει επιπτώσεις όπως προγενέστερους ή μεταγενέστερους εσφαλμένους συναγερμούς. Το πρώτο είναι σαφώς πιο σημαντικό, σίγουρα όχι επιθυμητό, έναντι του δεύτερου. Από την άλλη, μικρότερη πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού έναντι της επιθυμητής, κάνει το διάγραμμα συντηρητικό (conservative). Η χρήση μη ορθών ορίων κυρίως οδηγεί σε αύξηση του  $ARL_1$  και μάλιστα όταν χρησιμοποιούνται Unit Gamma όρια ελέγχου στο Beta διάγραμμα (Πίνακας 3.2 έως Πίνακας 3.4), κυρίως για τις περιπτώσεις 1 και 3 των παραμέτρων διασποράς, γεγονός που οδηγεί σε επιδείνωση της ισχύος του διαγράμματος, αφού οι εκτός ελέγχου καταστάσεις θα ανιχνεύονται αργότερα. Παράλληλα, παρατηρούμε και μικρότερες τιμές  $ARL_1$  όπως για παράδειγμα όταν χρησιμοποιούνται Simplex όρια ελέγχου στο Beta διάγραμμα (Πίνακας 3.2 έως Πίνακας 3.4), κυρίως για την περίπτωση 2. Βέβαια, στην περίπτωση αυτή, παρατηρείται και μείωση του  $ARL_0$  που σημαίνει ότι θα υπάρχει πιο συχνή διακοπή της διεργασίας χωρίς όμως να συντρέχει λόγος. Για το Simplex διάγραμμα και για  $\lambda = 0.05$  (Πίνακας 3.5), παρατηρούμε μικρότερες τιμές  $ARL_1$  όταν χρησιμοποιούνται Beta όρια ελέγχου για τις περιπτώσεις 1 και 3, δηλαδή καλύτερη εκτός ελέγχου απόδοση. Ταυτόχρονα, βλέπουμε μικρότερες τιμές για το  $ARL_0$ , που υποδηλώνουν αύξηση των εσφαλμένων συναγερμών. Στο ίδιο διάγραμμα, για  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$  (Πίνακας 3.6 και Πίνακας 3.7), παρατηρείται καλύτερη απόδοση με τη χρήση λανθασμένων ορίων ελέγχου Beta αλλά και για Unit Gamma για την περίπτωση 4. Αυτό σημαίνει αύξηση της ισχύος του διαγράμματος αφού οι εκτός ελέγχου καταστάσεις ανιχνεύονται ταχύτερα. Τέλος, για το Unit Gamma διάγραμμα ελέγχου (Πίνακας 3.8 έως Πίνακας 3.10), παρατηρούνται τιμές  $ARL_1$  μικρότερες από αυτές που υπολογίζονται υπό το σωστό μοντέλο πιθανότητας, όταν χρησιμοποιούνται εσφαλμένα όρια ελέγχου κυρίως για τις περιπτώσεις 2 και 4.

Οι υπόλοιποι πίνακες περιγράφουν τα αποτελέσματα που σχετίζονται με τις μετατοπίσεις του μέσου ποσοστού σε μία μόνο κατεύθυνση, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις αυξήσεις ή τις μειώσεις. Εδώ παρατηρούμε περιπτώσεις όπου η χρήση εσφαλμένων ορίων οδηγεί σε μείωση του  $ARL_1$ , και αυτό φαίνεται όταν στο Beta διάγραμμα για  $\lambda = 0.05$  και  $\lambda = 0.10$  (Πίνακας I.1 και Πίνακας I.2) χρησιμοποιούνται Simplex όρια ελέγχου, κυρίως για τις περιπτώσεις 1 και 2. Κάποιες φορές οι τιμές των μετρήσεων που λαμβάνονται από τη χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχων δίνουν αποτελέσματα παρόμοια με αυτά όταν χρησιμοποιούνται τα πραγματικά όρια ελέγχου (Πίνακας I.11) όταν χρησιμοποιούνται Unit Gamma όρια ελέγχου στο Beta διάγραμμα και αντίστροφα όπως και όταν χρησιμοποιούνται Simplex όρια στο Beta διάγραμμα. Ανάλογη συμπεριφορά παρατηρήσαμε και στα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart όπου με έντονες τιμές συμβολίσαμε τις τιμές των μετρήσεων που λαμβάνονται από τη χρήση ακατάλληλων ορίων ελέγχων αλλά τα αποτελέσματα είναι όντως παρόμοια με αυτά όταν χρησιμοποιούνται τα πραγματικά όρια ελέγχου. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι παρατηρείται μια ανθεκτικότητα (robustness) των τριών διαγραμμάτων, αφού το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από το μοντέλο για τη διεργασία. Βέβαια,

όπως είδαμε σημαντικό ρόλο παίζει και το μέγεθος της διακύμανσης, καθώς για τις περιπτώσεις μικρότερης διασποράς (περίπτωση 1 και 2) παρατηρούνται εντονότερες επιπτώσεις.

Σχετικά με τα όρια ελέγχου για τα διάφορα διαγράμματα, αριθμητικά είναι παρόμοια. Ωστόσο, ακόμα και όταν τα ακατάλληλα όρια ελέγχου είναι πολύ κοντά με τα πραγματικά, αυτό δεν εξασφαλίζει την ίδια απόδοση για όλο το σει μετατοπίσεων (παρόμοιες τιμές  $ARL_1$  μόνο για μικρές μετατοπίσεις).

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA με αυτή των αντίστοιχων διαγραμμάτων τύπου Shewhart που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στους επόμενους τρεις πίνακες δίνεται για κάθε μοντέλο η απόδοση των διαγραμμάτων τύπου Shewhart και EWMA ( $\lambda = 0.05, 0.10, 0.20$ ) σε όρους  $ARL$ , τόσο για εντός όσο και για εκτός ελέγχου κατάσταση. Να σημειωθεί ότι οι έντονες τιμές στους παρακάτω πίνακες είναι οι τιμές των μετρήσεων για τις οποίες επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή του  $ARL$  μεταξύ των διαφορετικών μοντέλων. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι η χρήση δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου βελτιώνει την ικανότητα ανίχνευσης μεταβολών στο μέσο επίπεδο της διεργασίας συγκριτικά με το Shewhart διάγραμμα, καθώς προκύπτουν μικρότερες τιμές  $ARL_1$ . Για το Beta μοντέλο (Πίνακας 3.11) παρατηρούμε ότι για τις περιπτώσεις 2-4 των παραμέτρων διασποράς το EWMA διάγραμμα για  $\lambda = 0.05$  είναι το καλύτερο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, δηλαδή για  $\mu_1 \in [0.18, 0.22]$  και όσο η τιμή του  $\mu_1$  αυξάνεται, μια μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$ , όπως  $\lambda = 0.10$  ή  $0.20$ , παρέχει πιο βελτιωμένη απόδοση. Σχετικά με το Simplex μοντέλο (Πίνακας 3.12), παρατηρούμε ότι το EWMA διάγραμμα για  $\lambda = 0.05$  επιτυγχάνει το ελάχιστο  $ARL_1$  για τις περιπτώσεις 2-4 των παραμέτρων διασποράς. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν και για το Unit Gamma μοντέλο (Πίνακας 3.13).

Συγκεντρωτικά, διαπιστώνουμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA βελτιώνουν την απόδοση συγκριτικά με τα διαγράμματα τύπου Shewhart στις περισσότερες περιπτώσεις, αφού προκύπτουν μικρότερες εκτός ελέγχου  $ARL$  μετρήσεις. Οι περιπτώσεις στις οποίες συναντάμε πιο μεγάλες τιμές στην εκτός ελέγχου απόδοση στα EWMA διαγράμματα συγκριτικά με τα Shewhart, όχι όμως σημαντικά μεγαλύτερες, παρατηρείται κυρίως για τις μεγαλύτερες μετατοπίσεις, δηλαδή όταν  $\mu_1 = \{0.12, 0.14\}$  (μείωση) και όταν  $\mu_1 = \{0.26, 0.28\}$  (αύξηση), όπου εκεί τα Shewhart διαγράμματα είναι πιο αποτελεσματικά.

**Πίνακας 3.11:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους ARL – Beta Chart.

$\varphi$	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
290	0.12	<b>1.26</b>	3.98	3.40	3.06
	0.14	<b>2.34</b>	4.87	4.23	3.67
	0.16	8.04	6.81	5.96	<b>5.32</b>
	0.18	54.60	13.89	<b>13.20</b>	14.10
	0.2	370.37	370.14	370.30	370.88
	0.22	69.71	14.04	<b>13.29</b>	13.89
	0.24	12.26	6.87	6.06	<b>5.42</b>
	0.26	<b>3.71</b>	4.90	4.25	3.73
	0.28	<b>1.78</b>	3.97	3.46	3.06
	148	0.12	<b>2.36</b>	5.04	4.35
0.14		5.72	6.42	5.52	<b>4.94</b>
0.16		20.11	9.46	8.40	<b>8.11</b>
0.18		100.51	<b>21.09</b>	21.40	27.07
0.2		370.37	370.14	370.44	370.32
0.22		129.21	<b>21.05</b>	21.19	24.19
0.24		32.24	9.55	8.47	<b>8.12</b>
0.26		10.61	6.47	5.64	<b>5.09</b>
0.28		4.53	5.09	4.41	<b>3.88</b>
80		0.12	5.11	6.49	5.62
	0.14	12.99	8.54	7.55	<b>7.04</b>
	0.16	40.85	13.13	<b>12.15</b>	13.19
	0.18	150.86	<b>31.81</b>	35.86	55.18
	0.2	370.37	370.48	370.49	370.79
	0.22	195.11	<b>31.70</b>	33.62	40.80
	0.24	67.47	13.28	<b>12.15</b>	12.46
	0.26	26.33	8.65	7.62	<b>7.20</b>
	0.28	11.93	6.58	5.77	<b>5.16</b>
	31	0.12	15.68	10.15	<b>9.11</b>
0.14		36.30	13.93	<b>13.28</b>	15.30
0.16		90.21	<b>23.24</b>	24.96	37.61
0.18		220.61	<b>64.30</b>	87.98	188.96
0.2		370.37	370.50	370.66	370.16
0.22		289.82	<b>59.48</b>	66.36	78.97
0.24		155.75	23.13	<b>23.07</b>	26.48
0.26		81.39	14.17	<b>13.30</b>	13.57
0.28		44.63	10.37	9.30	<b>9.02</b>

**Πίνακας 3.12:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους ARL – Simplex Chart.

$\sigma$	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
0.37	0.12	<b>1.09</b>	4.01	3.34	3.03
	0.14	<b>2.15</b>	4.86	4.20	3.65
	0.16	9.34	6.84	5.95	<b>5.38</b>
	0.18	70.24	14.04	<b>13.34</b>	15.08
	0.2	370.46	371.48	366.76	373.87
	0.22	55.04	14.15	<b>13.19</b>	13.41
	0.24	10.52	7.01	6.08	<b>5.48</b>
	0.26	<b>3.71</b>	4.98	4.28	3.80
	0.28	<b>1.98</b>	4.02	3.52	3.11
	0.50	0.12	1.87	3.34	4.21
0.14		5.72	<b>4.20</b>	5.37	4.76
0.16		24.83	<b>5.95</b>	8.16	7.83
0.18		128.23	<b>13.34</b>	21.06	28.78
0.2		370.48	366.76	375.08	371.43
0.22		90	<b>13.19</b>	19.51	21.54
0.24		21.68	<b>6.08</b>	8.26	7.72
0.26		7.94	<b>4.28</b>	5.52	4.94
0.28		3.94	<b>3.52</b>	4.38	3.83
0.71		0.12	5.94	<b>3.03</b>	5.61
	0.14	19.22	<b>3.65</b>	7.54	7.22
	0.16	64.92	<b>5.38</b>	12.46	14.54
	0.18	213.70	<b>15.08</b>	40.03	78.29
	0.2	370.35	373.87	371.47	371.57
	0.22	135.09	<b>13.41</b>	31.77	35.78
	0.24	42.76	<b>5.48</b>	12.38	12.12
	0.26	17.56	<b>3.80</b>	7.73	7.21
	0.28	8.93	<b>3.11</b>	5.83	5.27
	1.20	0.12	35.02	<b>4.90</b>	9.63
0.14		80.59	<b>6.17</b>	14.46	21.26
0.16		173.86	<b>9.08</b>	29.74	74.03
0.18		332.35	<b>20.24</b>	125.34	546.56
0.2		370	373.08	370.88	370.23
0.22		191.01	<b>20.17</b>	60.46	67.19
0.24		84.09	<b>9.25</b>	23.01	24.83
0.26		41.59	<b>6.36</b>	13.65	13.68
0.28		23.42	<b>5.01</b>	9.75	9.26

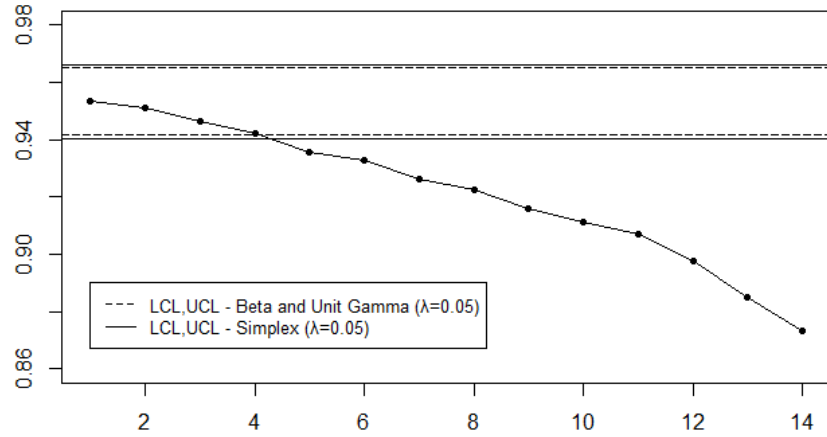
**Πίνακας 3.13:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους ARL – Unit Gamma Chart.

$\tau$	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
155	0.12	<b>1.40</b>	4.23	3.65	3.21
	0.14	<b>2.85</b>	5.26	4.53	3.96
	0.16	10	7.49	6.54	<b>6.01</b>
	0.18	63.21	15.74	<b>15.09</b>	16.94
	0.2	370.30	370.39	370.58	370.54
	0.22	90.28	15.91	<b>15.10</b>	16.01
	0.24	17.82	7.60	6.63	<b>6.02</b>
	0.26	5.36	5.29	4.60	<b>4.06</b>
	0.28	<b>2.36</b>	4.26	3.71	3.26
	96	0.12	<b>2.23</b>	5.05	4.35
0.14		5.36	6.43	5.58	<b>4.99</b>
0.16		18.84	9.44	8.39	<b>8.22</b>
0.18		95.63	<b>20.95</b>	21.59	27.55
0.2		370.37	370.50	370.30	370.97
0.22		138.59	21.44	<b>20.94</b>	24.58
0.24		35.74	9.54	8.52	<b>8.21</b>
0.26		11.80	6.50	5.64	<b>5.11</b>
0.28		4.97	5.12	4.42	<b>3.92</b>
51		0.12	<b>4.85</b>	6.56	5.67
	0.14	12.31	8.60	7.57	<b>7.21</b>
	0.16	38.78	13.27	<b>12.41</b>	13.56
	0.18	144.77	<b>32.33</b>	37.36	58.06
	0.2	370.37	370.22	370.64	370.62
	0.22	213.14	<b>32.10</b>	34.10	41.43
	0.24	78.28	13.46	<b>12.48</b>	12.90
	0.26	31.52	8.75	7.73	<b>7.28</b>
	0.28	14.37	6.64	5.80	<b>5.24</b>
	20	0.12	14.82	10.22	<b>9.22</b>
0.14		34.21	14.10	<b>13.56</b>	15.87
0.16		85.15	<b>23.67</b>	25.25	40.62
0.18		210.67	<b>65.20</b>	92.48	219.01
0.2		370.37	370.05	370.49	370.41
0.22		316.76	<b>60.87</b>	67.42	79.77
0.24		184.20	23.67	<b>23.59</b>	27.75
0.26		102.06	14.31	<b>13.35</b>	14.13
0.28		58.31	10.46	9.43	<b>9.34</b>

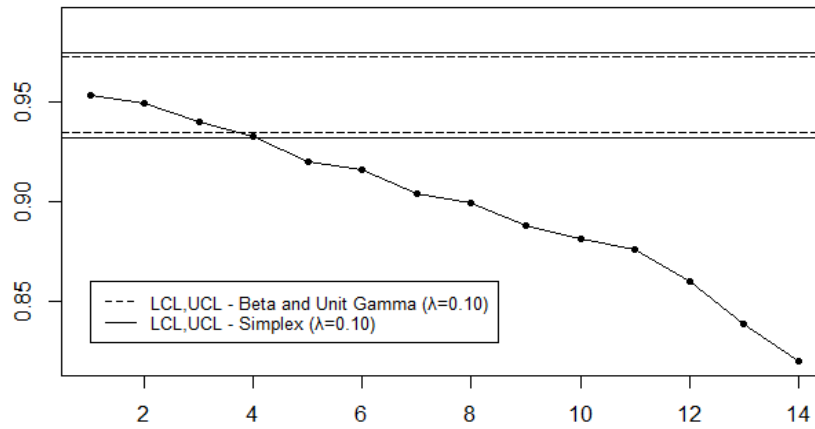
### 3.6 Εφαρμογή σε Πραγματικά Δεδομένα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε ένα παράδειγμα εφαρμογής των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart με βάση τα τρία μοντέλα σε πραγματικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ένα σύνολο δεδομένων (Sant' Anna and ten Caten (2012)) το οποίο αφορά τη μελέτη της μόλυνσης των φιστικιών από τοξικές ουσίες και αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η παρακολούθηση του ποσοστού των μη μολυσμένων φιστικιών. Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε τα EWMA διαγράμματα για τα τρία μοντέλα για το ίδιο σύνολο δεδομένων. Προφανώς, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων θα είναι ίδιες και έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε στη κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II, θεωρώντας τις εκτιμήσεις ως τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζονται τα εν λόγω διαγράμματα τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τον εντοπισμό μικρών αλλαγών στις παραμέτρους της διαδικασίας στη Φάση αυτή. Στα διαγράμματα που ακολουθούν, οι μετρήσεις του ποσοστού των μη μολυσμένων φιστικιών αναπαριστώνται με κουκίδες και απεικονίζονται τα όρια ελέγχου για κάθε μοντέλο και για κάθε συνδυασμό τιμών  $(\lambda, L)$ . Σημειώνουμε ότι κάθε ένα από τα τρία διαγράμματα σχετίζεται με κάθε τιμή του  $\lambda$  (0.05, 0.10, 0.20), ενώ οι συνδυασμοί τιμών  $(\lambda, L)$  προκύπτουν από την εφαρμογή του Αλγορίθμου 1, έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση  $ARL_0 = 370.4$ .

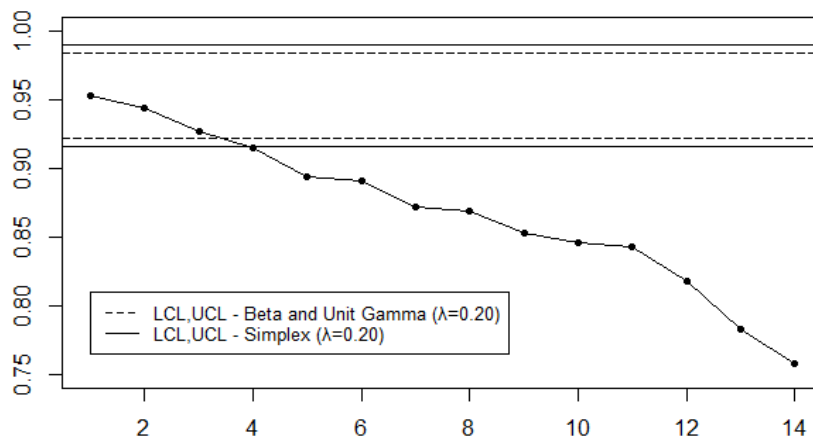
Στο Σχήμα 3.1, όπου  $\lambda = 0.05$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Simplex σηματοδοτεί για εκτός ελέγχου διεργασία στο δείγμα 5 ενώ τα διαγράμματα Beta και Unit Gamma στο δείγμα 4. Στο Σχήμα 3.2, όπου  $\lambda = 0.10$ , το διάγραμμα Simplex σηματοδοτεί για εκτός ελέγχου διεργασία στο δείγμα 4 όπως και τα διαγράμματα Beta και Unit Gamma. Τέλος, στο Σχήμα 3.3, όπου  $\lambda = 0.20$ , και τα τρία διαγράμματα δίνουν ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία στο δείγμα 4. Επομένως, σύμφωνα με τα διαγράμματα Beta Unit και Gamma έχουμε νωρίτερα ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία από ότι σύμφωνα με το Simplex διάγραμμα. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας διαγράμματα ελέγχου υπό το «λάθος» μοντέλο (Beta, Unit Gamma) ενδέχεται να έχουμε αυξημένους εσφαλμένους συναγερμούς και άρα θα σημειώνονται φιστικά ως μολυσμένα ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι. Έτσι, η κατασκευή διαγραμμάτων σύμφωνα με τα «λάθος» μοντέλα, πιθανόν να οδηγήσει σε συχνή διακοπή της διεργασίας χωρίς όμως να συντρέχει λόγος. Υπενθυμίζεται πως το μοντέλο με την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα είναι το μοντέλο της κατανομής Simplex.



**Σχήμα 3.1:** Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για  $\lambda = 0.05$ .

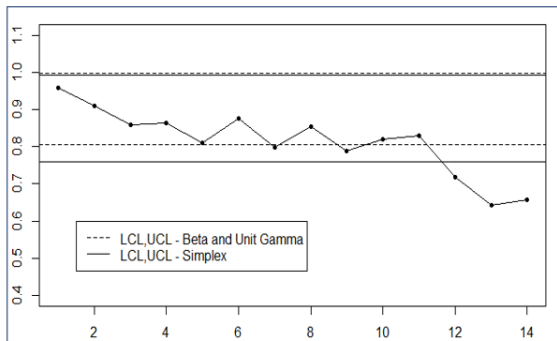


**Σχήμα 3.2:** Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για  $\lambda = 0.10$ .

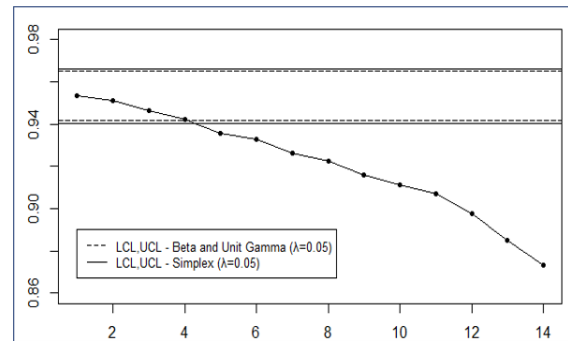


**Σχήμα 3.3:** Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA Φάσης II για κάθε μοντέλο για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών για  $\lambda = 0.20$ .

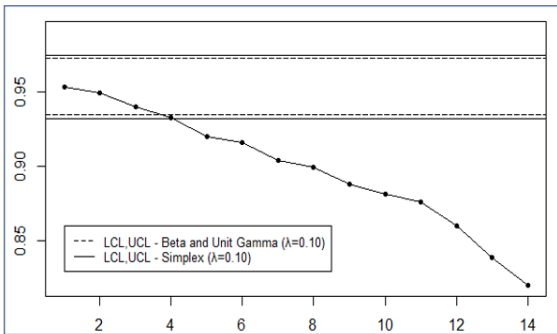
Στο Σχήμα 3.4 απεικονίζονται συγκεντρωτικά τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA (για κάθε τιμή του  $\lambda$ ) για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών. Αρχικά, στο Shewhart διάγραμμα σύμφωνα με το Simplex μοντέλο παρατηρούμε ότι αυτό δίνει για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 12, όταν το αντίστοιχο EWMA διάγραμμα σηματοδοτεί μόλις στο πέμπτο δείγμα για  $\lambda = 0.05$  και στο τέταρτο για  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$ . Επιπλέον, τα Shewhart διαγράμματα σύμφωνα με το Beta και Unit Gamma μοντέλα δίνουν ένδειξη για πρώτη φορά στο δείγμα 7 ενώ τα αντίστοιχα EWMA διαγράμματα σηματοδοτούν μόλις στο τέταρτο δείγμα. Συμπερασματικά, διαπιστώνουμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA είναι αποτελεσματικότερα συγκριτικά με τα Shewhart διαγράμματα για τα συγκεκριμένα δεδομένα για κάθε μοντέλο αφού αντιλαμβάνονται νωρίτερα την εκτός ελέγχου κατάσταση. Ειδικότερα, μεταξύ των EWMA διαγραμμάτων και σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω μελέτη ανθεκτικότητας, το EWMA διάγραμμα με βάση το Simplex μοντέλο για  $\lambda = 0.05$  φαίνεται να είναι το βέλτιστο ως προς την ανίχνευση μικρών μεταβολών στο μέσο επίπεδο.



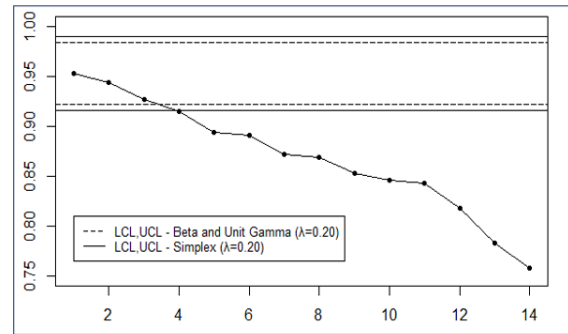
Διάγραμμα Ελέγχου τύπου Shewhart για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.



Διάγραμμα Ελέγχου τύπου EWMA ( $\lambda=0.05$ ) για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.



Διάγραμμα Ελέγχου τύπου EWMA ( $\lambda=0.10$ ) για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.



Διάγραμμα Ελέγχου τύπου EWMA ( $\lambda=0.20$ ) για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.

**Σχήμα 3.4:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου Φάσης II για το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών.



### 3.7 Ανακεφαλαίωση

Στο τρίτο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας αναφερθήκαμε αρχικά στην αδυναμία που παρουσιάζουν τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούν τις πληροφορίες που περιέχονται μόνο στο πιο πρόσφατο σημείο του διαγράμματος και αγνοούν τα προηγούμενα δείγματα, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αντιληφθούν έγκαιρα και αποτελεσματικά την επίδραση συστηματικών αιτιών που επιφέρουν σχετικά μικρές μεταβολές.

Για αντιμετώπισουμε αυτό το πρόβλημα, αναπτύξαμε διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA τα οποία έχουν το πλεονέκτημα ότι συγκεντρώνουν περισσότερες πληροφορίες με την πάροδο του χρόνου, ιδιότητα που τα καθιστά κατάλληλα για διεργασίες που μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μικρές αλλαγές στις παραμέτρους της διαδικασίας. Έτσι, κατασκευάσαμε διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA για τα τρία μοντέλα που μελετάμε, Beta, Simplex και Unit Gamma, για  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.20$  και εξετάσαμε την απόδοση των διαγραμμάτων μεταξύ των τριών μοντέλων. Επιπλέον, εφαρμόσαμε μια μελέτη ανθεκτικότητας, χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου τα οποία έχουν υπολογιστεί υπό το λάθος μοντέλο (όχι το πραγματικό), με σκοπό να διαπιστώσουμε πως επηρεάζεται το κάθε διάγραμμα.

Από τη μελέτη προέκυψε ότι η χρήση εσφαλμένων ορίων ελέγχου επηρεάζει την εντός ελέγχου απόδοση σχεδόν για όλες τις περιπτώσεις των παραμέτρων διασποράς. Επιπλέον, επηρεάζεται και η εκτός ελέγχου απόδοση, ειδικά για μικρές μεταβολές στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Ειδικότερα, όταν χρησιμοποιούνται Unit Gamma όρια ελέγχου στο Beta διάγραμμα και αντίστροφα, δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφοροποιήσεις στην απόδοση, με εξαίρεση την περίπτωση 1 όπου έχουμε τη μικρότερη διασπορά και εκεί υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις στο εντός ελέγχου ARL. Επίσης, δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές στην απόδοση των δύο διαγραμμάτων όταν χρησιμοποιούνται Simplex όρια ελέγχου στο Beta διάγραμμα. Από την άλλη, η χρήση Beta και Unit Gamma ορίων ελέγχου στο Simplex διάγραμμα, οδηγεί σε διαφορές στην απόδοση των διαγραμμάτων.

Τέλος, εφαρμόσαμε τα συγκεκριμένα διαγράμματα σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν το ποσοστό των μη μολυσμένων φιστικιών τα οποία παράγονται από μια βιομηχανία τροφίμων. Όπως αναφέραμε, η κατανομή Simplex είναι το καταλληλότερο μοντέλο και σε σύγκριση με το Shewhart διάγραμμα, το διάγραμμα EWMA ανιχνεύει τη μετατόπιση που συμβαίνει περίπου 7-8 δείγμα νωρίτερα. Συγκεκριμένα, το EWMA διάγραμμα σύμφωνα με το Simplex μοντέλο, και μάλιστα για  $\lambda = 0.05$ , είναι το πιο αποδοτικό ως προς τον εντοπισμό της εκτός ελέγχου κατάστασης με βάση τα διαγράμματα και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την μελέτη ανθεκτικότητας.

### 3.8 Τελικά Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναφερθήκαμε σε διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση δεδομένων με μεμονωμένες παρατηρήσεις με τιμές στο διάστημα (0,1). Ως εκ τούτου, τα διαγράμματα αυτά είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση ποσοστών και αναλογιών. Όταν όμως τα ποσοστά ή οι αναλογίες δεν είναι αποτελέσματα Bernoulli πειραμάτων, τα διαγράμματα ελέγχου  $p$  και  $np$  δεν μπορούν να εφαρμοστούν και γι 'αυτό θα πρέπει να αναπτυχθούν εναλλακτικά διαγράμματα, με βάση ένα πιο κατάλληλο μοντέλο πιθανότητας. Έτσι, μελετήσαμε τρία μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν αυτού του είδους δεδομένα, τις κατανομές Beta, Simplex και Unit Gamma. Με βάση τις κατανομές αυτές, κατασκευάσαμε διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA για ποσοστά και αναλογίες.

Επιπλέον, εφαρμόσαμε μια μελέτη ανθεκτικότητας με σκοπό να ανακαλύψουμε σε τι βαθμό επηρεάζεται η απόδοση του κάθε διαγράμματος αν χρησιμοποιηθούν όρια ελέγχου τα οποία δεν έχουν υπολογιστεί υπό το πραγματικό μοντέλο, αλλά έχουν υπολογιστεί από ένα εναλλακτικό, «λάθος» μοντέλο, το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πολύ κοντά στο πραγματικό. Η μελέτη προσομοίωσης έδειξε ότι τόσο η εντός όσο και η εκτός ελέγχου απόδοση επηρεάζονται από τη χρήση εσφαλμένων ορίων ελέγχου. Ακόμη, για να αξιολογήσουμε τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου, παρουσιάσαμε ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτών σε δεδομένα τα οποία αφορούν την παρακολούθηση του ποσοστού των μη μολυσμένων φιστικιών από τοξικές ουσίες τα οποία παράγονται από μια βιομηχανία τροφίμων. Όπως προέκυψε από την εφαρμογή, το Simplex διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA είναι το βέλτιστο.

Τέλος, συγκρίναμε την απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA (για τις τρεις τιμές του  $\lambda$ ) με την απόδοση των Shewhart διαγραμμάτων για κάθε ένα από τα τρία μοντέλα. Τα αποτελέσματα έδειξαν την ανωτερότητα των EWMA διαγραμμάτων στην ανίχνευση μικρών μεταβολών στο μέσο επίπεδο αφού επιτυγχάνουν μικρότερες εκτός ελέγχου τιμές των μέτρων απόδοσης, άρα ταχύτερη ανίχνευση της εκτός ελέγχου κατάστασης, αλλά ταυτόχρονα και μεγαλύτερες εντός ελέγχου μετρήσεις, περιορίζοντας έτσι τους εσφαλμένους συναγερμούς. Η βελτίωση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων (π.χ. στο διάστημα [0,18, 0,22]) κυμαίνεται από 70% έως 90% για τα δίπλευρα διαγράμματα, από 70% έως 80% (όταν  $\mu_1 = 0.22$ ) για τα άνω μονόπλευρα και από 70% (όταν  $\mu_1 = 0.18$ ) έως 50% (όταν  $\mu_1 = 0.16$ ) για κάτω μονόπλευρα διαγράμματα.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Αντζουλάκος Δ. (2009). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς.
- [2] Ταγαράς Γ. (2001). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- [3] Acosta-Mejia, C. A. (1999). Improved  $p$  charts to monitor process quality, *ΠΕ Transactions*, 31:509–516.
- [4] André, F. B. Menezes. (2021). unitModalReg: An R package to fit several unit modal regression models.
- [5] Aebtarm, S. and Bouguila, N. (2011). An empirical evaluation of attribute control charts for monitoring defects, *Expert Systems with Applications*, 38:7869–7880.
- [6] Akaike, H. (1973). Information theory and the maximum likelihood principle.
- [7] Alevizakos, V. and Koukouvinos, C. (2019). A double exponentially weighted moving average chart for time between events, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- [8] Anscombe, F. J. (1948). The transformation of Poisson, binomial and negative binomial data, *Biometrika*, 35:358–382.
- [9] Aparisi, F. and Ho, L. L. (2018). M-ATTRIVAR: An attribute-variable chart to monitor multivariate process means, *Quality and Reliability Engineering International*, 34(2):214–228.
- [10] Aslam, M., Arif, O. H. and Jun, C. H. (2017). An attribute control chart for a Weibull distribution under accelerated hybrid censoring, *PloS one*, 12(3):e0173406.
- [11] Azam, M., Ahmad, L., Aslam, M. and Jun, C. H. (2018). An attribute control chart using discriminant limits for monitoring process under the Weibull distribution, *Production Engineering*, p. 1–7.
- [12] Barndorff-Nielsen, O. E. and Jorgensen, B. (1991). Parametric models on the Simplex.
- [13] Bayer, F. M., Tondolo C. M. and Muller, F. M. (2018). Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions, *Computers & Industrial Engineering*.
- [14] Bezerra, E. L., Ho, L. L. and da Costa Quinino, R. (2018). An optimized attribute control chart to monitor process variability, *International Journal of Production Economics*.
- [15] Blyth, C. R. and Still, H. A. (1983). Binomial confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association* 78:108–116.
- [16] Borchers, H. W. (2018). pracma: Practical numerical math functions [Computer software manual]. (R package version 2.1.4). Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=pracma>.
- [17] Borrór, C. M., Montgomery, D.C. and Runger, G. C. (1999). Robustness of the EWMA control charts to non-normality, *Journal of Quality Technology*, 31:309–316.
- [18] Bourke, P. D. (2008). Performance comparisons for the Synthetic control chart for detecting increases in fraction nonconforming, *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, 40(4):461–475.
- [19] Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run-length, *Biometrika*, 59:539-549.
- [20] Castagliola, P. and Wu, S. (2012). Design of the  $c$  and  $np$  charts when the parameters are estimated, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 19(02), 1250010.
- [21] Chen, G. (1998). An improved  $p$  Chart through simple adjustments, *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, 30(2):142–151.

- [22] Chong, Z., Khoo, M., Teoh, W., Yeong, W. and The, S. (2017). Group Runs Double Sampling  $np$  Control Chart for Attributes, *Journal of Testing and Evaluation*, 45(6):2267–2282.
- [23] Cantelli, F. P. (1933). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 421-424.
- [24] Continuing Process Control and Process Capability Improvement (1989). Statistical Methods Office, Ford Motor Company.
- [25] Crowder, S.V. (1987). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics*, 28: 187-194.
- [26] Crowder, S.V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes, *Journal of Quality Technology*, 21:155-162.
- [27] Da Costa Quinino, R., Ho, L. L., and Trindade, A.L.G. (2015). Monitoring the process mean based on attribute inspection when a small sample is available, *Journal of the Operational Research Society*, 66(11):1860–1867.
- [28] Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis WA. (1947). *Techniques of Statistical Analysis*. McGraw-Hill.
- [29] Freeman, M. F. and Tukey, J. W. (1950). Transformations Related to the Angular and the Square Root, *Annals of Mathematical Statistics*, 21:607–611.
- [30] Grassia, A. (1977). On a family of distributions with argument between 0 and 1 obtained by transformation of the gamma and derived compound distributions, *Australian Journal of Statistics*, 19:108–114.
- [31] Glivenko, V. (1933). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 92-99.
- [32] Heimann, P. A. (1996). Attribute control charts with large sample sizes, *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, 28(4):451–459.
- [33] Hester, J., Csárdi, G., Wickham, H., Chang, W., RStudio, Morgan, M., Tenenbaum, D., and Mango Solutions. (2019). *remotes: R Package Installation from Remote Repositories, Including 'GitHub'*. Retrieved from <https://CRAN.Rproject.org/package=remotes>.
- [34] Ho, L. L. and Aparisi, F. (2016). ATTRIVAR: Optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost, *International Journal of Production Economics*, 182:472–483.
- [35] Ho, L.L., Costa, A. F. B. (2011). Monitoring a wandering mean with an  $np$  chart, *Production*, 21(2):254–258.
- [36] Ho, L. L. and da Costa Quinino, R. (2016). Combining attribute and variable data to monitor process variability: MIX S 2 control chart, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 87(9-12):3389– 3396.
- [37] Ho, L. L., da Costa Quinino, R., Suyama, E. and Lourenco, RP. (2012). Monitoring the conforming fraction of high-quality processes using a control chart  $p$  under a small sample size and an alternative estimator, *Statistical Papers*, 53(3):507–519.
- [38] Ho, L. L. and Quinino, R. C. (2013). An attribute control chart for monitoring the variability of a process, *International Journal of Production Economics*, 145(1):263–267.
- [39] Hsieh, K. L., Tong, L. I. and Wang, M. C. (2007). The application of control chart for defects and defect clustering in IC manufacturing based on fuzzy theory, *Expert Systems with Applications*, 32:765–776.
- [40] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, Wiley, New York.
- [41] Jørgensen, B. (1997). *The Theory of Dispersion Models*, Chapman and Hall, London.

- [42] Knoth, S., & Morais, M. C. (2015). On ARL-unbiased control charts. In *Frontiers in statistical quality control 11* (pp. 95-117). Springer, Cham.
- [43] Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* 4, 83–91 (6.1).
- [44] Lee Ho, L., Fernandes, F. H., & Bourguignon, M. (2019). Control charts to monitor rates and proportions. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(1), 74-83.
- [45] Lee, M. H. and Khoo, M. B. (2017). Combined double sampling and variable sampling interval  $np$  chart, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(23):11892–11917.
- [46] Lee, M. H. and Khoo, M. B. (2017). Optimal design of synthetic  $np$  control chart based on median run length, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(17):8544–8556.
- [47] Lin, S. N., Chou, C. Y., Wang, S. L. and Liu, H. R. (2012). Economic design of autoregressive moving average control chart using genetic algorithms, *Expert Systems with Applications*, 39, 1793–1798.
- [48] Lucas, J. M. and Saccucci M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes, Properties and enhancements, *Technometrics*, 32, 1-12.
- [49] Machado, M. A. G., Ho, L. L. and Costa, A. F. B. (2018). Attribute control charts for monitoring the covariance matrix of bivariate processes, *Quality and Reliability Engineering International*, 34(2):257–264.
- [50] Makarand, V. R. and Mosimann, J. E. (1990). On the normality of transformed beta and unit- gamma random variables, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19:10, 3833-3854.
- [51] Melo, M. S., Ho, L. L. and Medeiros, P. G. (2017). A 2-Stage Attribute-Variable Control Chart to Monitor a Vector of Process Means, *Quality and Reliability Engineering International*, 33(7):1589–1599.
- [52] Melo, M., Ho, L. L., Medeiros, P and Max, D. (2017). An attribute control chart to monitor a bivariate process mean, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 90(1-4):489–498.
- [53] Montgomery, D. C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control* (5th ed.), New York: John Wiley & Sons. 732p.
- [54] Mousa, A., El-Sheikh, A., Abdel-Fattah, M. (2016). A Gamma regression for bounded continuous variables, *Advances and Applications in Statistics*, 49:305–326.
- [55] Neyman, J. (1939). On a new class of "contagious" distributions applicable in entomology and bacteriology. *Ann. Math. Stat.* 10, 35-57.
- [56] Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1/2), 100-115.
- [57] Zhang P., Zhenguo Q., Chengchun S. (2016). simplexreg: An R Package for Regression Analysis of Proportional Data Using the Simplex Distribution. *Journal of Statistical Software*, 71(11), 1-21.
- [58] Quesenberry, C. P. (1997). *SPC methods for quality improvement*, Wiley.
- [59] Quesenberry, C. P. (1991). SPC Q charts for a Binomial parameter  $p$ : short and long runs, *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, 23(3):239–246.
- [60] Quinino, R. C., Bessegato, L. F. and Cruz, F. R. (2017). An attribute inspection control chart for process mean monitoring, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 90(9-12):2991–2999.
- [61] Roberts, S. W. (1959). Control chart test based on geometric moving averages, *Technometrics*, 1: 97-101.
- [62] Robinson, P. B. and Ho, T. Y. (1978). Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. *Technometrics*, 20:85-93.

- [63] Ryan, T. P. (1989). *Statistical Methods for Quality Improvement*, John Wiley.
- [64] Ryan, T. P. and Schwertman, N. C. (1997). Optimal limits for attributes control charts, *Journal of Quality Technology*, 29:86–96.
- [65] Sampaio, E. S., Ho, L. L. and de Medeiros, P. G. (2014). A Combined Control Chart to Monitor the Process Mean in a Two-Stage Sampling, *Quality and Reliability Engineering International*, 30(7):1003–1013.
- [66] Sant’Anna, Â. M. O., & ten Caten, C. S. (2012). Beta control charts for monitoring fraction data, *Expert Systems with Applications*, 39(11):10236–10243.
- [67] Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics*.
- [68] Schwertman, N. C. and Ryan, T. P. (1997). Optimal limits for attributes control charts, *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, 29(1):86–98.
- [69] Shafqat, A., Hussain, J., Al-Nasser, A. D. and Aslam, M. (2018). Attribute control chart for some popular distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(8):1978–1988.
- [70] Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of the Manufactured Product*, Van Nostrand, New York.
- [71] Shore, H. (2000). General control chart for attributes, *IIE Transactions*, 32:1149–1160.
- [72] Silvia, L. P. Ferrari and Francisco, C.-N. (2004). Beta Regression for Modelling Rates and Proportions, *Journal of Applied Statistics*, 31:7, 799-815.
- [73] Sim, C. H. and Lim, M. H. (2008). Attribute charts for zero-inflated process, *communications in statistics – simulations and computation*, Hamilton, 37(7), 1440–1452.
- [74] Smirnov, N.V.: Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples. (Russian). *Bull. Moscow Univ.* 2(2), 3–16 (6.1, 6.2) (1939)
- [75] Szarka, J. L. III, Woodall, W. H. (2011). A review and perspective on surveillance of Bernoulli processes, *Quality and Reliability Engineering International*, 27(6):735–752.
- [76] Waldmann, K. H. (1986). Bounds for the Distribution of the Run Length of Geometric Moving Average Charts, *Applied Statistics*, 35:151-158.
- [77] Wickham, H. (2011). devtools: Tools to make developing R code easier. URL <http://CRAN.R-project.org/package=devtools>. R package version 0.4.
- [78] Woodall, W. H. (1997). Control charts based on attribute data: bibliography and review, *Journal of quality technology*, 29(2):172–183.
- [79] Wu, Z., Khoo, M. B., Shu, L. and Jiang, W. (2009). An  $np$  control chart for monitoring the mean of a variable based on an attribute inspection, *International Journal of Production Economics*, 121(1):141–147.
- [80] Wu, Z., & Spedding, T. A. (2000). A synthetic control chart for detecting small shifts in the process mean. *Journal of Quality Technology*, 32(1), 32-38.
- [81] Yule, G. U., Filon, L. N. G. (1936). "Karl Pearson. 1857-1936". *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*. 2 (5): 72.





## Παράρτημα Ι: Πίνακες για Μονόπλευρα Διαγράμματα Ελέγχου τύπου EWMA

**Πίνακας Ι.1:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.05$ .

		Beta - True			Simplex			Unit Gamma			
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.161</math></u>	$\mu$										
	0.2	370.47	363.11	257	348.74	343.08	244	581.59	564.73	409	
	0.22	12.07	4.84	11	11.89	4.88	11	13.47	5.50	12	
	Case 1: $\varphi = 290$	0.24	6.09	1.55	6	6.04	1.55	6	6.67	1.64	6
	$\sigma = 0.37$	0.26	4.44	0.86	4	4.41	0.85	4	4.77	0.91	5
	$\tau = 155$	0.28	3.64	0.61	4	3.60	0.60	4	3.90	0.62	4
	UCL		0.208			0.208			0.209		
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.178</math></u>	0.2	370.76	364.04	257	321.40	313.16	225	318.32	310.98	220	
	0.22	17.59	8.95	16	16.79	8.55	15	17.04	8.67	15	
	Case 2: $\varphi = 148$	0.24	8.39	2.70	8	8.11	2.64	8	8.10	2.65	8
	$\sigma = 0.5$	0.26	5.79	1.41	6	5.64	1.41	5	5.65	1.41	5
	$\tau = 96$	0.28	4.61	0.93	5	4.51	0.93	4	4.50	0.92	4
		UCL		0.211			0.211			0.211	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.185</math></u>	0.2	370.52	365.24	257	419.42	409.01	298	415.55	410.01	288	
	0.22	25.49	15.67	22	26.63	15.72	23	27.08	16.48	23	
	Case 3: $\varphi = 80$	0.24	11.50	4.62	11	11.79	4.64	11	11.90	4.72	11
	$\sigma = 0.71$	0.26	7.64	2.37	7	7.84	2.40	7	7.88	2.39	8
	$\tau = 51$	0.28	5.94	1.51	6	6.08	1.56	6	6.04	1.51	6
		UCL		0.216			0.216			0.216	
<u><math>\lambda = 0.05, L = 2.201</math></u>	0.2	370.42	361.80	262	436.40	418.32	305	372.10	365.48	262	
	0.22	45.87	34.13	36	50.14	37.37	40	46.65	35.38	37	
	Case 4: $\varphi = 31$	0.24	19.65	10.65	17	20.70	11.11	18	19.53	10.54	17
	$\sigma = 1.2$	0.26	12.34	5.29	11	12.98	5.50	12	12.41	5.23	11
	$\tau = 20$	0.28	9.21	3.29	9	9.60	3.46	9	9.21	3.30	9
		UCL		0.225			0.226			0.225	

**Πίνακας 1.2:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.450$	0.2	370.28	363.65	257	347.28	340.03	244	788.15	787.58	546
	0.22	11.49	5.46	10	11.38	5.57	10	13.86	6.78	12
Case 1:	0.24	5.51	1.58	5	5.46	1.55	5	6.21	1.75	6
$\varphi = 290$	0.26	3.96	0.83	4	3.93	0.82	4	4.34	0.90	4
$\sigma = 0.37$	0.28	3.27	0.53	3	3.26	0.53	3	3.53	0.61	3
$\tau = 155$	UCL	0.213			0.213			0.215		
$\lambda = 0.10, L = 2.465$	0.2	370.07	366.10	256	314.12	307.81	217	422.07	417.84	295
	0.22	17.91	10.98	15	17.14	10.30	14	18.90	11.61	16
Case 2:	0.24	7.74	2.89	7	7.48	2.80	7	7.99	2.97	7
$\varphi = 148$	0.26	5.21	1.45	5	5.11	1.42	5	5.34	1.48	5
$\sigma = 0.5$	0.28	4.14	0.92	4	4.04	0.91	4	4.20	0.93	4
$\tau = 96$	UCL	0.219			0.218			0.219		
$\lambda = 0.10, L = 2.494$	0.2	370.74	361.40	258	425.43	414.53	302	422.97	411.65	307
	0.22	27.94	20.26	22	29.57	21.63	23	28.96	20.67	23
Case 3:	0.24	11.04	5.18	10	11.34	5.43	10	11.35	5.46	10
$\varphi = 80$	0.26	7.04	2.46	7	7.21	2.56	7	7.19	2.56	7
$\sigma = 0.71$	0.28	5.39	1.54	5	5.47	1.56	5	5.45	1.54	5
$\tau = 51$	UCL	0.225			0.226			0.226		
$\lambda = 0.10, L = 2.543$	0.2	370.32	358.38	252	471.73	463.07	336	411.26	410.69	284
	0.22	54.66	46.44	41	63.68	55.04	47	57.50	49.69	42
Case 4:	0.24	20.72	13.27	17	22.57	14.83	19	21.19	13.63	18
$\varphi = 31$	0.26	12.21	6.15	11	12.99	6.67	11	12.50	6.37	11
$\sigma = 1.2$	0.28	8.69	3.62	8	9.10	3.80	8	8.84	3.71	8
$\tau = 20$	UCL	0.241			0.243			0.242		

**Πίνακας Ι.3:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.675$	0.2	370.56	362.96	259	383.23	380.90	267	726.28	718.14	507
	0.22	12.09	7.24	10	12.23	7.48	10	14.69	9.41	12
Case 1:	0.24	5.08	1.71	5	5.10	1.72	5	5.59	1.95	5
$\varphi = 290$	0.26	3.57	0.84	3	3.57	0.84	3	3.82	0.90	4
$\sigma = 0.37$	0.28	2.95	0.56	3	2.96	0.56	3	3.12	0.56	3
$\tau = 155$	UCL	0.221			0.221			0.223		
$\lambda = 0.20, L = 2.701$	0.2	370.27	374.68	252	329.91	321.77	232	408.55	403.01	290
	0.22	20.59	15.22	16	19.83	14.80	16	21.70	16.31	17
Case 2:	0.24	7.52	3.52	7	7.29	3.40	7	7.64	3.60	7
$\varphi = 148$	0.26	4.76	1.55	4	4.71	1.52	4	4.86	1.58	5
$\sigma = 0.5$	0.28	3.73	0.93	4	3.66	0.90	4	3.79	0.95	4
$\tau = 96$	UCL	0.230			0.229			0.230		
$\lambda = 0.20, L = 2.730$	0.2	370.47	364.10	257	464.34	460.80	322	391.01	382.41	274
	0.22	34.65	29.01	26	39.48	33.86	29	35.18	29.45	26
Case 3:	0.24	11.42	6.82	10	12.26	7.49	10	11.75	6.94	10
$\varphi = 80$	0.26	6.72	2.89	6	7.03	3.08	6	6.80	2.95	6
$\sigma = 0.71$	0.28	4.95	1.67	5	5.07	1.72	5	5	1.70	5
$\tau = 51$	UCL	0.240			0.242			0.241		
$\lambda = 0.20, L = 2.812$	0.2	370.47	365.44	262	576.14	568.86	399	429.10	430.15	293
	0.22	70.99	65.04	51	96.50	90.60	69	80.51	74.71	57
Case 4:	0.24	24.73	19.62	19	30.75	24.59	24	26.52	21.08	20
$\varphi = 31$	0.26	12.94	8.35	11	15.03	9.96	12	13.63	8.52	11
$\sigma = 1.2$	0.28	8.64	4.48	8	9.74	5.26	9	9.05	4.73	8
$\tau = 20$	UCL	0.266			0.271			0.268		

**Πίνακας Ι.4:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.170$	0.2	366.10	356.83	255	336.34	332.22	235	557.62	541.21	389
	0.22	12.17	5.31	11	11.92	5.16	11	13.48	5.71	12
Case 1:	0.24	6.23	1.76	6	6.10	1.75	6	6.69	1.87	6
$\varphi = 290$	0.26	4.50	1.02	4	4.44	1.01	4	4.81	1.08	5
$\sigma = 0.37$	0.28	3.70	0.72	4	3.66	0.71	4	3.92	0.77	4
$\tau = 155$	UCL		0.208			0.208			0.209	
$\lambda = 0.05, L = 2.189$	0.2	371.60	366.43	260	355.75	340.34	252	356.97	348.14	251
	0.22	17.02	8.91	15	16.96	8.86	15	16.95	8.77	15
Case 2:	0.24	8.19	2.89	8	8.12	2.85	8	8.16	2.90	8
$\varphi = 148$	0.26	5.71	1.60	5	5.71	1.61	5	5.74	1.64	5
$\sigma = 0.5$	0.28	4.58	1.11	4	4.54	1.10	4	4.55	1.11	4
$\tau = 96$	UCL		0.211			0.211			0.211	
$\lambda = 0.05, L = 2.210$	0.2	367.98	360.57	256	400.82	394.83	277	395.82	394.06	275
	0.22	25.64	16.20	21	26.53	17	22	26.47	17	22
Case 3:	0.24	11.85	5.37	11	11.91	5.29	11	11.82	5.26	11
$\varphi = 80$	0.26	7.92	2.89	7	7.98	2.93	7	8.02	2.90	8
$\sigma = 0.71$	0.28	6.13	1.92	6	6.18	1.92	6	6.18	1.95	6
$\tau = 51$	UCL		0.216			0.216			0.216	
$\lambda = 0.05, L = 2.244$	0.2	371.41	362.39	259	308.19	296.68	217	309.40	304.47	217
	0.22	47.43	36.52	37	43.51	33.58	34	43.35	33.20	34
Case 4:	0.24	20.48	12.34	17	19.13	11.32	16	19.51	11.89	17
$\varphi = 31$	0.26	13.16	6.53	12	12.50	6.26	11	12.41	6.17	11
$\sigma = 1.2$	0.28	9.77	4.24	9	9.34	4.14	9	9.40	4.14	9
$\tau = 20$	UCL		0.226			0.225			0.225	

**Πίνακας Ι.5:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.475$	0.2	370.59	358.98	263	328.96	329.77	227	719.39	698.91	506
	0.22	11.79	6.01	10	11.23	5.88	10	13.81	7.02	12
Case 1:	0.24	5.65	1.80	5	5.46	1.73	5	6.24	1.97	6
$\varphi = 290$	0.26	4.06	1.01	4	3.98	0.98	4	4.40	1.08	4
$\sigma = 0.37$	0.28	3.35	0.69	3	3.30	0.67	3	3.59	0.73	3
$\tau = 155$	UCL	0.213			0.213			0.215		
$\lambda = 0.10, L = 2.490$	0.2	366.33	362.16	255	477.14	476.43	332	479.97	465.26	335
	0.22	17.21	10.75	14	18.67	11.72	16	18.35	11.44	15
Case 2:	0.24	7.56	3.05	7	7.94	3.22	7	7.98	3.26	7
$\varphi = 148$	0.26	5.18	1.63	5	5.38	1.69	5	5.39	1.70	5
$\sigma = 0.5$	0.28	4.12	1.07	4	4.26	1.12	4	4.25	1.11	4
$\tau = 96$	UCL	0.218			0.219			0.219		
$\lambda = 0.10, L = 2.522$	0.2	366.67	359.07	256	311.64	310.04	216	384.98	379	271
	0.22	27.48	20.10	22	25.65	18.52	21	27.88	20.45	22
Case 3:	0.24	11.26	5.81	10	10.85	5.66	10	11.41	5.89	10
$\varphi = 80$	0.26	7.27	2.98	7	7	2.89	6	7	3.01	7
$\sigma = 0.71$	0.28	5.53	1.91	5	5.37	1.87	5	5.56	1.90	5
$\tau = 51$	UCL	0.226			0.225			0.226		
$\lambda = 0.10, L = 2.588$	0.2	371.41	362.39	259	285.11	283.98	196	320.36	310.84	228
	0.22	369.84	370.93	257	46.54	38.57	35	49.69	42.53	37
Case 4:	0.24	21.30	14.74	17	19.43	13.46	16	20	13.90	16
$\varphi = 31$	0.26	12.67	7.27	11	11.88	6.78	10	12.29	7.07	11
$\sigma = 1.2$	0.28	9.20	4.59	8	8.66	4.28	8	8.90	4.46	8
$\tau = 20$	UCL	0.243			0.241			0.242		

**Πίνακας Ι.6:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.712$	0.2	371.13	360.95	264	338.56	333.50	234.5	621.73	619.65	425
	0.22	12.07	7.43	10	11.86	7.41	10	14.15	9.29	12
Case 1:	0.24	5.22	2	5	5.13	1.93	5	5.56	2.13	5
$\varphi = 290$	0.26	3.65	1.02	3	3.62	1	3	3.85	1	4
$\sigma = 0.37$	0.28	3	0.69	3	2.98	0.69	3	3.15	0.72	3
$\tau = 155$	UCL	0.221			0.221			0.223		
$\lambda = 0.20, L = 2.742$	0.2	366.42	367.44	253	450.66	440.89	311	460.57	446.04	323
	0.22	19.08	14.24	15	21.23	16.25	16	20.99	15.84	16
Case 2:	0.24	7.32	3.63	6	7.64	3.71	7	7.61	3.76	7
$\varphi = 148$	0.26	4.75	1.71	4	4.88	1.79	5	4.92	1.79	5
$\sigma = 0.5$	0.28	3.73	1.11	4	3.84	1.13	4	3.83	1.11	4
$\tau = 96$	UCL	0.229			0.230			0.230		
$\lambda = 0.20, L = 2.798$	0.2	368.64	368.47	255	290.13	286.87	204	334.59	331.69	233
	0.22	32.94	27.67	24	28.99	24.18	22	31.34	26.30	23
Case 3:	0.24	11.58	7.55	10	10.74	6.70	9	11.20	7.08	9
$\varphi = 80$	0.26	6.90	3.35	6	6.56	3.22	6	6.86	3.34	6
$\sigma = 0.71$	0.28	5.12	2.05	5	4.91	1.97	5	5.06	2.06	5
$\tau = 51$	UCL	0.242			0.240			0.241		
$\lambda = 0.20, L = 2.911$	0.2	373.43	367.26	263	249.36	246.22	172	295.77	287.45	204
	0.22	65.53	61.51	47	50.66	45.02	38	56.48	51.09	41
Case 4:	0.24	24.16	19.62	18	20.27	16.04	15	21.77	17.01	17
$\varphi = 31$	0.26	13.51	9.26	11	11.76	7.83	10	12.67	8.66	10
$\sigma = 1.2$	0.28	9.11	5.37	8	8.30	4.85	7	8.67	5.08	7
$\tau = 20$	UCL	0.271			0.266			0.268		

**Πίνακας 1.7:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.174$	0.2	370.45	369.16	257	245.31	241	173	244.90	240.59	168
	0.22	13.46	5.91	12	11.81	5.17	11	11.90	5.21	11
Case 1:	0.24	6.69	1.81	6	6.08	1.67	6	6.10	1.70	6
$\varphi = 290$	0.26	4.79	0.96	5	4.41	0.93	4	4.40	0.91	4
$\sigma = 0.37$	0.28	3.90	0.67	4	3.61	0.64	4	3.62	0.63	4
$\tau = 155$	UCL	0.209			0.208			0.208		
$\lambda = 0.05, L = 2.179$	0.2	370.25	362.86	259	314.83	310.13	220	318.35	307.45	223
	0.22	17.68	8.96	16	16.90	8.50	15	16.93	8.58	15
Case 2:	0.24	8.41	2.72	8	8.09	2.65	8	8.10	2.66	8
$\varphi = 148$	0.26	5.80	1.43	6	5.65	1.38	5	5.64	1.40	5
$\sigma = 0.5$	0.28	4.63	0.92	5	4.48	0.91	4	4.48	0.91	4
$\tau = 96$	UCL	0.211			0.211			0.211		
$\lambda = 0.05, L = 2.192$	0.2	370.45	367.81	258	394.76	380.07	277	395.69	382.82	278
	0.22	26.40	16.13	22	26.83	16.24	23	26.71	16.27	23
Case 3:	0.24	11.66	4.65	11	11.79	4.72	11	11.95	4.82	11
$\varphi = 80$	0.26	7.79	2.40	7	7.89	2.41	8	7.89	2.42	8
$\sigma = 0.71$	0.28	6	1.54	6	6.07	1.53	6	6	1.52	6
$\tau = 51$	UCL	0.216			0.216			0.216		
$\lambda = 0.05, L = 2.225$	0.2	370.76	363.77	257	346.52	340.86	242	405.68	400.38	283
	0.22	47.92	36.80	37	46.68	35.04	37	49.53	36.71	39
Case 4:	0.24	20.17	11.07	18	19.77	10.66	17	20.86	11.32	18
$\varphi = 31$	0.26	12.72	5.38	12	12.45	5.34	11	12.91	5.48	12
$\sigma = 1.2$	0.28	9.37	3.31	9	9.23	3.30	9	9.57	3.35	9
$\tau = 20$	UCL	0.225			0.225			0.226		

**Πίνακας 1.8:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.465$	0.2	370.95	367.75	256	215.58	210.03	154	218.41	211.77	155
	0.22	13.11	6.76	12	11.14	5.73	10	11.30	5.73	10
Case 1:	0.24	6.05	1.86	6	5.50	1.72	5	5.49	1.71	5
$\varphi = 290$	0.26	4.29	0.96	4	3.96	0.90	4	3.96	0.91	4
$\sigma = 0.37$	0.28	3.50	0.64	3	3.26	0.58	3	3.27	0.59	3
$\tau = 155$	UCL	0.215			0.213			0.213		
$\lambda = 0.10, L = 2473$	0.2	370.35	366.40	256	405.67	394.84	287	311.68	311	215
	0.22	18.13	10.90	15	18.64	11.48	16	17.15	10.49	14
Case 2:	0.24	7.76	2.91	7	7.89	2.96	7	7.50	2.82	7
$\varphi = 148$	0.26	5.25	1.44	5	5.34	1.44	5	5.10	1.38	5
$\sigma = 0.5$	0.28	4.14	0.91	4	4.20	0.92	4	4.03	0.87	4
$\tau = 96$	UCL	0.219			0.219			0.218		
$\lambda = 0.10, L = 2.512$	0.2	370.29	365.99	256	317.14	306.45	224	376.77	372.04	261
	0.22	28.85	20.33	23	27	19.40	22	28.58	20.69	23
Case 3:	0.24	11.27	5.43	10	10.76	5.18	10	11.26	5.37	10
$\varphi = 80$	0.26	7.14	2.51	7	6.94	2.46	7	7.15	2.53	7
$\sigma = 0.71$	0.28	5.42	1.52	5	5.28	1.50	5	5.46	1.54	5
$\tau = 51$	UCL	0.226			0.225			0.226		
$\lambda = 0.10, L = 2.554$	0.2	370.44	363.05	258	332.02	328.53	230	419.82	412.46	292
	0.22	56	47.52	42	53.27	44.73	40	62	52.93	46
Case 4:	0.24	21.36	14.10	18	20.47	13.27	17	22.57	15.21	18
$\varphi = 31$	0.26	12.35	6.34	11	12.19	6.25	11	12.97	6.61	12
$\sigma = 1.2$	0.28	8.92	3.72	8	8.64	3.60	8	9.14	3.85	8
$\tau = 20$	UCL	0.242			0.241			0.243		



**Πίνακας 1.9:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.694$	0.2	370.53	366.26	255	210.74	208.10	149	209.89	206.15	144
	0.22	14.30	9.37	12	11.74	7.33	10	11.74	7.29	10
Case 1:	0.24	5.65	2.09	5	5.10	1.89	5	5.12	1.90	5
$\varphi = 290$	0.26	3.85	0.98	4	3.61	0.92	3	3.59	0.91	3
$\sigma = 0.37$	0.28	3.14	0.62	3	2.97	0.60	3	2.96	0.60	3
$\tau = 155$	UCL		0.223			0.221			0.221	
$\lambda = 0.20, L = 2.724$	0.2	370.75	363.86	256	387.58	388.75	270	317.63	314	220
	0.22	21.23	15.70	17	21.65	16.53	17	19.56	14.49	16
Case 2:	0.24	7.55	3.56	7	7.65	3.57	7	7.34	3.36	7
$\varphi = 148$	0.26	4.82	1.56	5	4.86	1.56	5	4.70	1.52	4
$\sigma = 0.5$	0.28	3.76	0.93	4	3.76	0.95	4	3.69	0.91	4
$\tau = 96$	UCL		0.230			0.230			0.229	
$\lambda = 0.20, L = 2.761$	0.2	370.41	370.46	258	299.36	296.43	206	399.98	398.48	279
	0.22	35.91	30.45	27	32.49	27.15	24	37.48	31.61	28
Case 3:	0.24	11.93	7.13	10	11.28	6.78	10	12.17	7.49	10
$\varphi = 80$	0.26	6.92	3.06	6	6.68	3	6	7.06	3.12	6
$\sigma = 0.71$	0.28	5.02	1.72	5	4.88	1.64	5	5.08	1.73	5
$\tau = 51$	UCL		0.241			0.240			0.242	
$\lambda = 0.20, L = 2.850$	0.2	370.56	363.58	257	318.80	316.37	222	496.87	492.18	346
	0.22	73.97	68.26	53	66.98	62.34	48	91.12	86.11	65
Case 4:	0.24	26.27	21.14	20	24.51	19.34	19	30.51	24.56	23
$\varphi = 31$	0.26	13.65	8.75	11	13.02	8.28	11	15.26	10.17	12
$\sigma = 1.2$	0.28	9.04	4.80	8	8.71	4.57	8	9.72	5.22	8
$\tau = 20$	UCL		0.268			0.266			0.271	

**Πίνακας Ι.10:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.111$	0.2	370.34	356.36	261	384.98	374.73	274	675.39	656	470
	0.18	11.64	4.46	11	11.70	4.42	11	13.45	5.06	12
Case 1:	0.16	5.95	1.32	6	6	1.34	6	6.62	1.44	6
$\varphi = 290$	0.14	4.34	0.68	4	4.35	0.68	4	4.75	0.74	5
$\sigma = 0.37$	0.12	3.55	0.53	4	3.57	0.54	4	3.88	0.49	4
$\tau = 155$	LCL	0.192			0.192			0.191		
$\lambda = 0.05, L = 2.105$	0.2	370.48	368.32	258	364.81	357.81	255	364.33	357	256
	0.18	16.90	7.89	15	16.65	7.93	15	16.69	7.89	15
Case 2:	0.16	8.02	2.30	8	7.99	2.26	8	8.03	2.27	8
$\varphi = 148$	0.14	5.59	1.13	5	5.57	1.12	5	5.59	1.12	5
$\sigma = 0.5$	0.12	4.45	0.68	4	4.45	0.68	4	4.45	0.68	4
$\tau = 96$	LCL	0.189			0.189			0.189		
$\lambda = 0.05, L = 2.087$	0.2	370.81	361.15	259	385.37	372.78	270	384.66	377.92	270
	0.18	23.95	13.32	21	24.45	13.98	21	24.34	13.83	21
Case 3:	0.16	10.83	3.87	10	10.93	3.80	10	10.89	3.85	10
$\varphi = 80$	0.14	7.25	1.81	7	7.32	1.85	7	7.28	1.84	7
$\sigma = 0.71$	0.12	5.63	1.09	5	5.67	1.09	6	5.66	1.08	5
$\tau = 51$	LCL	0.185			0.185			0.185		
$\lambda = 0.05, L = 2.075$	0.2	370.89	361.65	261	419.80	409.31	297	343.71	331.56	240
	0.18	42.94	30.26	34	44.62	31.51	36	41.85	29.65	34
Case 4:	0.16	18.20	8.81	16	18.42	8.70	16	17.65	8.46	16
$\varphi = 31$	0.14	11.39	3.97	11	11.69	4.05	11	11.19	3.89	10
$\sigma = 1.2$	0.12	8.41	2.22	8	8.65	2.31	8	8.33	2.25	8
$\tau = 20$	LCL	0.177			0.176			0.177		

**Πίνακας I.11:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.358$	0.2	370.34	356.36	261	428.66	418.91	299	686.13	675.82	478
	0.18	10.97	4.97	10	11.22	5.09	10	12.50	5.68	11
Case 1:	0.16	5.29	1.33	5	5.39	1.34	5	5.76	1.42	6
$\varphi = 290$	0.14	3.81	0.69	4	3.88	0.70	4	4.10	0.71	4
$\sigma = 0.37$	0.12	3.16	0.38	3	3.19	0.40	3	3.32	0.48	3
$\tau = 155$	LCL		0.187			0.187			0.186	
$\lambda = 0.10, L = 2.340$	0.2	370.57	366.18	261	308.56	300.91	217	305.46	302.17	213
	0.18	16.62	9.42	14	15.78	8.95	13	15.60	8.98	13
Case 2:	0.16	7.25	2.38	7	6.95	2.27	7	7	2.30	7
$\varphi = 148$	0.14	4.92	1.10	5	4.79	1.08	5	4.79	1.07	5
$\sigma = 0.5$	0.12	3.92	0.68	4	3.83	0.69	4	3.82	0.68	4
$\tau = 96$	LCL		0.182			0.183			0.183	
$\lambda = 0.10, L = 2.315$	0.2	370.18	364.86	256	326.42	315.55	232	403.96	398.07	281
	0.18	24.76	16.66	20	23.47	15.81	19	26.02	17.63	21
Case 3:	0.16	9.99	4.15	9	9.72	4.06	9	10.23	4.26	9
$\varphi = 80$	0.14	6.43	1.86	6	6.29	1.81	6	6.56	1.88	6
$\sigma = 0.71$	0.12	4.93	1.05	5	4.84	1.04	5	5	1.07	5
$\tau = 51$	LCL		0.176			0.177			0.176	
$\lambda = 0.10, L = 2.265$	0.2	370.35	362.62	257	387.80	380.15	274	384.39	367.94	270
	0.18	46.16	36.51	35	47.73	38.53	36	47.14	37.67	36
Case 4:	0.16	17.71	10.30	15	17.56	9.98	15	17.68	10.12	15
$\varphi = 31$	0.14	10.35	4.27	9	10.39	4.26	9	10.45	4.31	9
$\sigma = 1.2$	0.12	7.51	2.30	7	7.59	2.41	7	7.58	2.40	7
$\tau = 20$	LCL		0.163			0.163			0.163	

**Πίνακας I.12:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Beta - True			Simplex			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.521$	0.2	370.61	362.35	262	292.87	292.26	201	591.99	587.25	409
	0.18	10.97	6.19	9	10.27	5.71	9	12.40	7.23	10
Case 1:	0.16	4.75	1.43	4	4.58	1.34	4	5.01	1.51	5
$\varphi = 290$	0.14	3.38	0.64	3	3.30	0.60	3	3.53	0.67	3
$\sigma = 0.37$	0.12	2.88	0.44	3	2.81	0.46	3	2.97	0.39	3
$\tau = 155$	LCL		0.180			0.181			0.179	
$\lambda = 0.20, L = 2.484$	0.2	370.53	365.54	260	280.48	278.33	193	354.79	351.90	247
	0.18	17.92	12.64	14	16.27	11.30	13	17.87	12.53	14
Case 2:	0.16	6.62	2.68	6	6.32	2.54	6	6.61	2.68	6
$\varphi = 148$	0.14	4.34	1.14	4	4.20	1.12	4	4.33	1.13	4
$\sigma = 0.5$	0.12	3.45	0.64	3	3.35	0.63	3	3.44	0.64	3
$\tau = 96$	LCL		0.173			0.174			0.173	
$\lambda = 0.20, L = 2.452$	0.2	370.93	362.02	259	286.98	283.97	200	351.98	354.80	241
	0.18	28.76	22.56	22	25.95	20.53	20	28.42	22.84	22
Case 3:	0.16	9.77	5.10	8	9.08	4.63	8	9.56	4.94	8
$\varphi = 80$	0.14	5.85	2.06	5	5.60	1.95	5	5.76	2	5
$\sigma = 0.71$	0.12	4.34	1.11	4	4.18	1.04	4	4.33	1.11	4
$\tau = 51$	LCL		0.164			0.165			0.164	
$\lambda = 0.20, L = 2.356$	0.2	370.30	367.20	261	344.86	339.23	245	348.86	346.10	242
	0.18	55.64	49.13	41	54.54	48.48	40	53.09	47.41	39
Case 4:	0.16	18.39	12.68	15	17.87	12.47	14	18.01	12.53	14
$\varphi = 31$	0.14	9.99	5.25	9	9.80	5.10	8	9.82	5.10	8
$\sigma = 1.2$	0.12	6.77	2.58	6	6.74	2.60	6	6.66	2.55	6
$\tau = 20$	LCL		0.144			0.145			0.145	

**Πίνακας Ι.13:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.102$	0.2	371.63	361.88	260	387.58	378.44	276	696.62	678.15	478
	0.18	11.55	4.06	11	11.79	4.18	11	13.45	4.65	13
Case 1:	0.16	5.93	1.12	6	5.95	1.13	6	6.58	1.22	6
$\varphi = 290$	0.14	4.31	0.54	4	4.32	0.54	4	4.70	0.60	5
$\sigma = 0.37$	0.12	3.54	0.50	4	3.57	0.50	4	3.94	0.29	4
$\tau = 155$	LCL	0.192			0.192			0.191		
$\lambda = 0.05, L = 2.088$	0.2	368	360.33	256	432.35	420.21	306	437.18	422.11	313
	0.18	16.17	7.08	15	16.87	7.33	15	16.93	7.38	15
Case 2:	0.16	7.72	1.82	7	7.94	1.89	8	7.95	1.88	8
$\varphi = 148$	0.14	5.36	0.84	5	5.52	0.84	5	5.52	0.84	5
$\sigma = 0.5$	0.12	4.27	0.47	4	4.38	0.51	4	4.38	0.51	4
$\tau = 96$	LCL	0.189			0.189			0.189		
$\lambda = 0.05, L = 2.068$	0.2	371.83	365.45	263	390	377.78	273	399.72	388.80	281
	0.18	24.32	13.31	21	24.63	13.32	21	24.72	13.42	22
Case 3:	0.16	10.72	3.28	10	10.86	3.28	10	10.84	3.31	10
$\varphi = 80$	0.14	7.15	1.39	7	7.22	1.41	7	7.25	1.43	7
$\sigma = 0.71$	0.12	5.54	0.75	5	5.60	0.75	6	5.61	0.75	6
$\tau = 51$	LCL	0.185			0.185			0.185		
$\lambda = 0.05, L = 2.023$	0.2	368.05	354.69	261	321.85	312.93	225	321.70	310.86	226
	0.18	45.27	31.74	36	41.96	29.31	34	42.56	29.71	34
Case 4:	0.16	18.43	8.11	17	17.68	7.66	16	17.85	7.85	16
$\varphi = 31$	0.14	11.46	3.30	11	11.11	3.16	11	11.12	3.15	11
$\sigma = 1.2$	0.12	8.48	1.62	8	8.23	1.59	8	8.24	1.60	8
$\tau = 20$	LCL	0.176			0.177			0.177		

**Πίνακας Ι.14:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.339$	0.2	371.58	366.11	259	438.74	430.96	304	699.61	677.64	494
	0.18	10.90	4.58	10	11.27	4.84	10	12.57	5.45	11
Case 1:	0.16	5.22	1.11	5	5.34	1.14	5	5.72	1.22	6
$\varphi = 290$	0.14	3.78	0.57	4	3.87	0.56	4	4.09	0.54	4
$\sigma = 0.37$	0.12	3.07	0.25	3	3.10	0.30	3	3.24	0.43	3
$\tau = 155$	LCL	0.187			0.187			0.186		
$\lambda = 0.10, L = 2.302$	0.2	371.18	359.43	263	559.82	552.81	387	401.03	397.42	279
	0.18	15.69	8.40	14	17.76	9.31	15	16.18	8.62	14
Case 2:	0.16	6.81	1.86	6	7.37	2.05	7	6.92	1.93	7
$\varphi = 148$	0.14	4.68	0.79	5	4.97	0.85	5	4.73	0.80	5
$\sigma = 0.5$	0.12	3.77	0.50	4	3.98	0.45	4	3.82	0.48	4
$\tau = 96$	LCL	0.183			0.182			0.183		
$\lambda = 0.10, L = 2.272$	0.2	371.43	359.50	262	450.56	438.47	318	454.95	449.68	318
	0.18	25.45	16.88	21	27.22	18.08	22	27.33	18.06	22
Case 3:	0.16	9.87	3.67	9	10.25	3.73	9	10.24	3.72	9
$\varphi = 80$	0.14	6.28	1.41	6	6.49	1.48	6	6.49	1.47	6
$\sigma = 0.71$	0.12	4.83	0.75	5	4.95	0.77	5	4.95	0.76	5
$\tau = 51$	LCL	0.177			0.176			0.176		
$\lambda = 0.10, L = 2.201$	0.2	370.52	366.41	256	375.40	369.88	267	371.36	364.88	255
	0.18	50.73	40.13	39	51.55	41.28	39	51.64	40.91	39
Case 4:	0.16	18.22	9.76	16	18.48	9.92	16	18.46	9.83	16
$\varphi = 31$	0.14	10.58	3.73	10	10.62	3.71	10	10.66	3.69	10
$\sigma = 1.2$	0.12	7.51	1.73	7	7.51	1.74	7	7.54	1.74	7
$\tau = 20$	LCL	0.163			0.163			0.163		

**Πίνακας Ι.15:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Simplex - True			Beta			Unit Gamma		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.2, L = 2.475$	0.2	372.19	368.64	259	457.02	457.13	312	655.73	629.21	466
	0.18	10.94	5.95	9	11.54	6.34	10	12.71	7.17	11
Case 1:	0.16	4.62	1.19	4	4.78	1.25	5	5.01	1.32	5
$\varphi = 290$	0.14	3.30	0.50	3	3.37	0.54	3	3.46	0.57	3
$\sigma = 0.37$	0.12	2.92	0.28	3	2.96	0.23	3	3	0.16	3
$\tau = 155$	LCL	0.181			0.180			0.179		
$\lambda = 0.2, L = 2.440$	0.2	371.26	361.20	261	524.15	508.25	371	521.91	521.52	356
	0.18	17.16	11.49	14	19.61	13.84	16	19.69	13.72	16
Case 2:	0.16	6.25	2.12	6	6.72	2.41	6	6.66	2.36	6
$\varphi = 148$	0.14	4.10	0.83	4	4.29	0.88	4	4.29	0.89	4
$\sigma = 0.5$	0.12	3.24	0.44	3	3.33	0.49	3	3.33	0.49	3
$\tau = 96$	LCL	0.174			0.173			0.173		
$\lambda = 0.2, L = 2.379$	0.2	368.08	360.07	261	419.61	421.30	290	418.20	416.02	288
	0.18	29.94	23.38	23	32.79	26.48	25	32.42	25.49	25
Case 3:	0.16	9.64	4.59	9	9.98	4.83	9	9.83	4.72	9
$\varphi = 80$	0.14	5.67	1.60	5	5.73	1.63	5	5.76	1.64	5
$\sigma = 0.71$	0.12	4.20	0.76	4	4.26	0.78	4	4.25	0.77	4
$\tau = 51$	LCL	0.165			0.164			0.164		
$\lambda = 0.2, L = 2.254$	0.2	370.95	365.18	255	429.80	427.42	298	376.66	367.03	261
	0.18	65.76	59.39	48	72.21	65.47	52	66.32	59.21	49
Case 4:	0.16	20.62	14.08	17	22.06	15.49	18	20.75	14.19	17
$\varphi = 31$	0.14	10.30	4.76	9	10.70	5.07	9	10.38	4.91	9
$\sigma = 1.2$	0.12	6.79	2.03	6	6.96	2.11	6	6.77	2.05	6
$\tau = 20$	LCL	0.145			0.144			0.145		

**Πίνακας I.16:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart  
για  $\lambda = 0.05$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.05, L = 2.105$	0.2	370.30	358.75	260	268.87	263.01	184	264.65	257.01	188
	0.18	12.90	5.24	12	11.78	4.83	11	11.73	4.81	11
Case 1:	0.16	6.46	1.53	6	6.03	1.44	6	5.99	1.43	6
$\varphi = 290$	0.14	4.63	0.76	5	4.36	0.74	4	4.37	0.74	4
$\sigma = 0.37$	0.12	3.80	0.54	4	3.58	0.55	4	3.57	0.55	4
$\tau = 155$	LCL		0.191			0.192			0.192	
$\lambda = 0.05, L = 2.096$	0.2	370.26	367.06	256	365.12	359.75	255	368.98	356.25	261
	0.18	16.74	8	15	16.67	7.95	15	16.92	8.12	15
Case 2:	0.16	8.06	2.34	8	8.04	2.27	8	7.99	2.28	8
$\varphi = 148$	0.14	5.57	1.11	5	5.57	1.09	5	5.56	1.12	5
$\sigma = 0.5$	0.12	4.44	0.67	4	4.45	0.66	4	4.45	0.68	4
$\tau = 96$	LCL		0.189			0.189			0.189	
$\lambda = 0.05, L = 2.084$	0.2	370.49	362.90	259	370.75	362.07	260	371.90	357.81	267
	0.18	24.30	14.05	21	24.51	13.87	21	24.44	13.93	21
Case 3:	0.16	10.92	3.92	10	10.97	3.94	10	10.85	3.78	10
$\varphi = 80$	0.14	7.25	1.82	7	7.27	1.79	7	7.32	1.82	7
$\sigma = 0.71$	0.12	5.65	1.08	5	5.64	1.07	5	6	1.09	6
$\tau = 51$	LCL		0.185			0.185			0.185	
$\lambda = 0.05, L = 2.052$	0.2	370.86	360.75	261	334.41	321.91	234.5	404.25	392.62	282
	0.18	42.59	30.46	34	40.99	28.94	33	44.55	31.53	36
Case 4:	0.16	17.89	8.66	16	17.44	8.30	15	18.49	8.91	16
$\varphi = 31$	0.14	11.36	3.95	11	11.17	3.97	10	11.63	3.98	11
$\sigma = 1.2$	0.12	8.45	2.27	8	8.31	2.25	8	8.64	2.32	8
$\tau = 20$	LCL		0.177			0.177			0.176	



**Πίνακας Ι.17:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart  
για  $\lambda = 0.10$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.10, L = 2.340$	0.2	370.30	363.96	260	262.80	258.06	182	259.71	255.47	179
	0.18	12.19	5.98	11	11.20	5.43	10	11.18	5.43	10
Case 1:	0.16	5.72	1.54	5	5.42	1.46	5	5.40	1.46	5
$\varphi = 290$	0.14	4.06	0.77	4	3.90	0.75	4	3.89	0.74	4
$\sigma = 0.37$	0.12	3.31	0.48	3	3.21	0.42	3	3.20	0.42	3
$\tau = 155$	LCL		0.186			0.187			0.187	
$\lambda = 0.10, L = 2.325$	0.2	370.46	366.16	261	432.35	422.28	302	310.08	302.66	213
	0.18	16.41	9.45	14	17.35	10.02	15	15.71	8.74	13
Case 2:	0.16	7.18	2.37	7	7.43	2.51	7	6.96	2.31	7
$\varphi = 148$	0.14	4.91	1.10	5	5.03	1.12	5	4.78	1.08	5
$\sigma = 0.5$	0.12	3.90	0.68	4	3.98	0.68	4	3.82	0.68	4
$\tau = 96$	LCL		0.183			0.182			0.183	
$\lambda = 0.10, L = 2.295$	0.2	370.52	358.93	263	399.88	396.30	278	310.57	303.40	221
	0.18	24.81	16.75	20	25.56	17.21	21	23.47	15.83	19
Case 3:	0.16	9.98	4.07	9	10.20	4.23	9	9.62	3.94	9
$\varphi = 80$	0.14	6.46	1.85	6	6.57	1.92	6	6.29	1.81	6
$\sigma = 0.71$	0.12	4.95	1.06	5	4.98	1.05	5	4.84	1.04	5
$\tau = 51$	LCL		0.176			0.176			0.177	
$\lambda = 0.10, L = 2.241$	0.2	370.29	361.18	259	394.64	380.64	276	385.41	379.43	269
	0.18	46.25	37.21	35	46.92	37.36	36	48	38.41	37
Case 4:	0.16	17.44	9.93	15	17.65	10.01	15	17.65	10.02	15
$\varphi = 31$	0.14	10.35	4.25	9	10.46	4.35	9	10.35	4.28	9
$\sigma = 1.2$	0.12	7.48	2.31	7	7.58	2.34	7	7.55	2.36	7
$\tau = 20$	LCL		0.163			0.163			0.163	

**Πίνακας I.18:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart  
για  $\lambda = 0.20$ .

	$\mu$	Unit Gamma - True			Beta			Simplex		
		ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL
$\lambda = 0.20, L = 2.495$	0.2	370.27	365.66	254	233.43	230.54	163	173.03	169.91	120
	0.18	12.43	7.53	10	10.91	6.37	9	9.98	5.86	8
Case 1:	0.16	5.15	1.66	5	4.82	1.53	4	4.62	1.45	4
$\varphi = 290$	0.14	3.60	0.74	3	3.44	0.69	3	3.32	0.66	3
$\sigma = 0.37$	0.12	3.01	0.42	3	2.89	0.45	3	2.80	0.49	3
$\tau = 155$	LCL	0.179			0.180			0.181		
$\lambda = 0.20, L = 2.472$	0.2	370.75	362.14	260	370.57	360.18	262	290.01	289.03	200
	0.18	17.83	12.41	14	17.77	12.50	14	16.31	11.19	13
Case 2:	0.16	6.64	2.66	6	6.62	2.63	6	6.28	2.49	6
$\varphi = 148$	0.14	4.34	1.14	4	4.31	1.13	4	4.17	1.08	4
$\sigma = 0.5$	0.12	3.43	0.62	3	3.42	0.62	3	3.36	0.61	3
$\tau = 96$	LCL	0.173			0.173			0.174		
$\lambda = 0.20, L = 2.422$	0.2	370.85	360.11	258	349.86	342.80	241	288.70	281.80	203
	0.18	28.56	23.17	22	28.60	22.92	22	25.21	19.39	20
Case 3:	0.16	9.60	4.96	8	9.60	4.90	8	9.04	4.57	8
$\varphi = 80$	0.14	5.81	2	5	5.75	2.01	5	5.60	1.96	5
$\sigma = 0.71$	0.12	4.34	1.09	4	4.31	1.09	4	4.20	1.06	4
$\tau = 51$	LCL	0.164			0.164			0.165		
$\lambda = 0.20, L = 2.325$	0.2	370.93	364.4	258	409.41	403.31	286	357.33	356.93	246
	0.18	55.19	48.72	41	59.75	53	44	54.23	47.78	39
Case 4:	0.16	18.39	12.81	15	18.74	13.18	15	17.91	12.39	14
$\varphi = 31$	0.14	9.82	5.06	8	10.03	5.13	9	9.74	4.88	8
$\sigma = 1.2$	0.12	6.73	2.56	6	6.87	2.62	6	6.71	2.55	6
$\tau = 20$	LCL	0.145			0.144			0.145		

## Παράρτημα II: Πίνακες για τη Σύγκριση Μονόπλευρων Διαγραμμάτων Ελέγχου

**Πίνακας II.1:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους ARL για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\varphi = 290$	0.2	370.37	370.47	370.28	370.56
	0.22	40.87	12.07	<b>11.49</b>	12.09
	0.24	8.30	6.09	5.51	<b>5.08</b>
	0.26	<b>2.87</b>	4.44	3.96	3.57
	0.28	<b>1.77</b>	3.64	3.27	2.95
$\varphi = 148$	0.2	370.37	370.76	370.07	370.27
	0.22	73.31	<b>17.59</b>	17.91	20.59
	0.24	19.98	8.39	7.74	<b>7.52</b>
	0.26	7.27	5.79	5.21	<b>4.76</b>
	0.28	<b>3.42</b>	4.61	4.14	3.73
$\varphi = 80$	0.2	370.37	370.52	370.74	370.47
	0.22	110.70	<b>25.49</b>	27.94	34.65
	0.24	39.49	11.50	<b>11.04</b>	11.42
	0.26	16.57	7.64	7.04	<b>6.72</b>
	0.28	8.07	5.94	5.39	<b>4.95</b>
$\varphi = 31$	0.2	370.37	370.42	370.32	370.47
	0.22	173.39	<b>45.87</b>	54.66	70.99
	0.24	87.26	<b>19.65</b>	20.72	24.73
	0.26	46.94	12.34	<b>12.21</b>	12.94
	0.28	26.87	9.21	8.69	<b>8.64</b>

**Πίνακας Π.2:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους *ARL* για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Simplex Chart.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\sigma = 0.37$	0.2	370.26	366.10	370.59	371.13
	0.22	33.82	12.17	<b>11.79</b>	12.07
	0.24	7.49	6.23	5.65	<b>5.22</b>
	0.26	<b>2.97</b>	4.50	4.06	3.65
	0.28	<b>1.72</b>	3.70	3.35	3
$\sigma = 0.50$	0.2	370.36	371.60	366.33	366.42
	0.22	54.18	<b>17.02</b>	17.21	19.08
	0.24	14.54	8.19	7.56	<b>7.32</b>
	0.26	5.87	5.71	5.18	<b>4.75</b>
	0.28	<b>3.15</b>	4.58	4.12	3.73
$\sigma = 0.71$	0.2	370.37	367.98	366.67	368.64
	0.22	82.06	<b>25.64</b>	27.48	32.94
	0.24	27.46	11.85	<b>11.26</b>	11.58
	0.26	12.20	7.92	7.27	<b>6.90</b>
	0.28	6.63	6.13	5.53	<b>5.12</b>
$\sigma = 1.20$	0.2	370.38	371.41	371.41	373.43
	0.22	123.04	<b>47.43</b>	369.84	65.53
	0.24	53.15	<b>20.48</b>	21.30	24.16
	0.26	27.60	13.16	<b>12.67</b>	13.51
	0.28	16.37	9.77	9.20	<b>9.11</b>

**Πίνακας Π.3:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους *ARL* για Αύξηση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\tau = 155$	0.2	370.37	370.45	370.95	370.53
	0.22	51.73	13.46	<b>13.11</b>	14.30
	0.24	11.54	6.69	6.05	<b>5.65</b>
	0.26	3.93	4.79	4.29	<b>3.85</b>
	0.28	<b>1.94</b>	3.90	3.50	3.14
$\tau = 96$	0.2	370.37	370.25	370.35	370.75
	0.22	77.73	<b>17.68</b>	18.13	21.23
	0.24	21.74	8.41	7.76	<b>7.55</b>
	0.26	7.91	5.80	5.25	<b>4.82</b>
	0.28	<b>3.66</b>	4.63	4.14	3.76
$\tau = 51$	0.2	370.37	370.45	370.29	370.41
	0.22	110.48	<b>26.40</b>	28.85	35.91
	0.24	44.76	11.66	<b>11.27</b>	11.93
	0.26	19.22	7.79	7.14	<b>6.92</b>
	0.28	9.37	6	5.42	<b>5.02</b>
$\tau = 20$	0.2	370.37	370.76	370.44	370.56
	0.22	187.54	<b>47.92</b>	56	73.97
	0.24	100.50	<b>20.17</b>	21.36	26.27
	0.26	56.66	12.72	<b>12.35</b>	13.65
	0.28	33.46	9.37	<b>8.92</b>	9.04

**Πίνακας Π.4:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους *ARL* για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Beta Chart.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\varphi = 290$	0.2	370.37	370.34	370.34	370.61
	0.18	33.05	11.64	<b>10.97</b>	10.98
	0.16	5.79	5.95	<b>5.29</b>	4.75
	0.14	<b>1.96</b>	4.34	3.81	3.38
	0.12	<b>1.79</b>	3.55	3.16	2.88
$\varphi = 148$	0.2	370.37	370.48	370.57	370.53
	0.18	58.89	16.90	<b>16.62</b>	17.92
	0.16	13.28	8.02	7.25	<b>6.62</b>
	0.14	<b>4.29</b>	5.59	4.92	4.34
	0.12	<b>1.99</b>	4.45	3.92	3.45
$\varphi = 80$	0.2	370.37	370.81	370.18	370.93
	0.18	88.45	<b>23.95</b>	24.76	28.76
	0.16	25.54	10.83	9.99	<b>9.77</b>
	0.14	9	7.25	6.43	<b>5.85</b>
	0.12	<b>3.91</b>	5.63	4.93	4.34
$\varphi = 31$	0.2	370.37	370.89	370.35	370.30
	0.18	136.69	<b>42.94</b>	46.16	55.64
	0.16	54.28	18.20	<b>17.71</b>	18.39
	0.14	23.31	11.39	10.35	<b>9.99</b>
	0.12	10.88	8.41	7.51	<b>6.77</b>

**Πίνακας Π.5:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους *ARL* για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Simplex.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\sigma = 0.37$	0.2	370.37	371.63	371.58	372.19
	0.18	40.68	11.55	<b>10.90</b>	10.94
	0.16	6.39	5.93	5.22	<b>4.62</b>
	0.14	<b>1.78</b>	4.31	3.78	3.30
	0.12	<b>1.05</b>	3.54	3.07	2.92
$\sigma = 0.50$	0.2	370.30	368	371.18	371.26
	0.18	71.56	16.17	<b>15.69</b>	17.16
	0.16	15.47	7.72	6.81	<b>6.25</b>
	0.14	<b>4.10</b>	5.36	4.68	4.11
	0.12	<b>1.57</b>	4.27	3.77	3.24
$\sigma = 0.71$	0.2	370.37	371.83	371.43	368.08
	0.18	117.72	<b>24.32</b>	25.45	29.94
	0.16	37.51	10.72	9.87	<b>9.64</b>
	0.14	12.15	7.15	6.28	<b>5.67</b>
	0.12	<b>4.20</b>	5.54	4.83	4.21
$\sigma = 1.20$	0.2	370.41	368.05	370.52	370.95
	0.18	189.71	<b>45.27</b>	50.73	65.76
	0.16	95.10	18.43	<b>18.22</b>	20.62
	0.14	45.98	11.46	10.58	<b>10.30</b>
	0.12	21.07	8.48	7.51	<b>6.79</b>

**Πίνακας Π.6:** Σύγκριση Διαγραμμάτων Ελέγχου τύπου Shewhart και EWMA σε όρους *ARL* για Μείωση στη Μέση Αναλογία – Unit Gamma Chart.

	$\mu$	Shewhart ( $\lambda=1$ )	EWMA ( $\lambda=0.05$ )	EWMA ( $\lambda=0.10$ )	EWMA ( $\lambda=0.20$ )
$\tau = 155$	0.2	370.37	370.30	370.30	370.27
	0.18	38.03	12.90	<b>12.19</b>	12.43
	0.16	7.06	6.46	5.72	<b>5.15</b>
	0.14	<b>2.33</b>	4.63	4.06	3.60
	0.12	<b>1.29</b>	3.80	3.31	3.01
$\tau = 96$	0.2	370.37	370.26	370.46	370.75
	0.18	56.43	16.74	<b>16.41</b>	17.83
	0.16	12.56	8.06	7.18	<b>6.64</b>
	0.14	<b>4.07</b>	5.57	4.91	4.34
	0.12	<b>1.90</b>	4.44	3.90	3.43
$\tau = 51$	0.2	370.37	370.49	370.52	370.85
	0.18	85.61	<b>24.30</b>	24.81	28.56
	0.16	24.43	10.92	9.98	<b>9.60</b>
	0.14	8.60	7.25	6.46	<b>5.81</b>
	0.12	<b>3.75</b>	5.65	4.95	4.34
$\tau = 20$	0.2	370.37	370.86	370.29	370.93
	0.18	132.04	<b>42.59</b>	46.25	55.19
	0.16	51.59	17.89	<b>17.44</b>	18.39
	0.14	22.05	11.36	10.35	<b>9.82</b>
	0.12	10.30	8.45	7.48	<b>6.73</b>



## Παράρτημα III: Κώδικες στην R

Σχήμα 2.1 και Σχήμα 2.2:

```
##### Unit gamma
unitgammampmf<-function(y,mu,tau){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau))
)^tau)*(y^((mu^(1/tau))/
(1-mu^(1/tau))))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau)}
##### Beta
betapmf<-function(y,mu,phi){(y^((mu*phi)-1)*(1-y)^(((1-mu)
*phi)-1))/beta(mu*phi,(1-mu)*phi)}
par(mfrow=c(1,2))
## Case 1
curve(dsimplex(x,0.2,0.37),col="red",xlim=c(0.1,0.4),ylab='Density',xlab='(
a) Case 1')
curve(betapmf(x,0.2,290),lty=2,col="darkblue",add=TRUE)
curve(unitgammampmf(x,0.2,155),lty=3,col="black",add=TRUE)
legend("topright",legend=c("Simplex","Beta","Unit Gamma"),
col=c("red","darkblue","black"),lty=c(1,2,3),cex=0.8)
## Case 2
curve(dsimplex(x,0.2,0.5),col="red",xlim=c(0.1,0.4),ylab='Density',xlab='(b
) Case 2')
curve(betapmf(x,0.2,148),lty=2,col="darkblue",add=TRUE)
curve(unitgammampmf(x,0.2,96),lty=3,col="black",add=TRUE)
legend("topright",legend=c("Simplex","Beta","Unit Gamma"),
col=c("red","darkblue","black"),lty=c(1,2,3),cex=0.8)
par(mfrow=c(1,2))
## Case 3
curve(dsimplex(x,0.2,0.71),col="red",xlim=c(0.1,0.4),ylab='Density',xlab='(
c) Case 3')
curve(betapmf(x,0.2,80),lty=2,col="darkblue",add=TRUE)
curve(unitgammampmf(x,0.2,51),lty=3,col="black",add=TRUE)
legend("topright",legend=c("Simplex","Beta","Unit Gamma"),
col=c("red","darkblue","black"),lty=c(1,2,3),cex=0.8)
## Case 4
curve(dsimplex(x,0.2,1.2),col="red",xlim=c(0,0.5),ylim=c(0,6),ylab='Density
',xlab='(d) Case 4',lty=1)
curve(betapmf(x,0.2,31),lty=2,col="darkblue",add=TRUE)
curve(unitgammampmf(x,0.2,20),lty=3,col="black",add=TRUE)
legend("topright",legend=c("Simplex","Beta","Unit Gamma"),
col=c("red","darkblue","black"),lty=c(1,2,3),cex=0.8)
```

**Σχήμα 2.3:**

```
data_phaseI<-c(0.971,0.979,0.982,0.971,0.957,0.961,0.956,0.972,0.889,
0.961,0.982,0.975,0.942,0.932,0.908,0.970,0.985,0.933,0.858,0.987)
mu<-mean(data_phaseI)
st.dev<-sd(data_phaseI)
#### Unit gamma pdf
unitgammampmf<-function(y,mu,tau){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau))
)^tau)*(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/
gamma(tau)}
#### Beta pdf
betapmf<-function(y,mu,phi){(y^((mu*phi)-1)*(1-y)^(((1-mu)*phi
)-1))/beta(mu*phi,(1-mu)*phi)}
#### Histogram
hist(data_phaseI,freq=FALSE,xlab="Proportion of non-contaminated Peanuts")
curve(dsimplex(x,0.9534,3.5722),add=TRUE,col="red")
curve(betapmf(x,0.9533,48.9387),lty=2,col="darkblue",add=TRUE)
curve(unitgammampmf(x,0.9534,2.2798),lty=3,col="black",add=TRUE)
legend("topleft",legend=c("Simplex","Beta","Unit Gamma"),
col=c("red","darkblue","black"),lty=c(1,2,3),cex=0.8)
```

**Σχήμα 2.4:**

```
data_phaseI<-c(0.971,0.979,0.982,0.971,0.957,0.961,0.956,0.972,0.889,0.961,
0.982,0.975,0.942,0.932,0.908,0.970,0.985,0.933,0.858,0.987)
plot.ecdf(data,verticals=TRUE,pch=20)
curve(pbeta(x,0.9533*48.9387,(1-0.9533)*48.9387),add=TRUE,col='blue',lty=2)
curve(psimplex(x,0.9534,3.5722),add=TRUE,col='red')
curve(pugamma(x,0.9534,2.2798),add=TRUE,col='black',lty=3)
legend(0.85,0.8,c('Beta','Simplex','UnitGamma'),
col=c('blue','red','black'),cex=0.7,lty=c(2,1,3))
#### Kolmogorov-Smirnov Test
ks.test(data_phaseI,"pbeta",0.9533*48.9387,(1-0.9533)*48.9387)
ks.test(data_phaseI,"psimplex",0.9534,3.5722)
ks.test(data_phaseI,"pugamma",0.9534,2.2798)
```

**Σχήμα 2.5 και Σχήμα 2.6:**

```
data_phaseI<- c(0.971,0.979,0.982,0.971,0.957,0.961,0.956,0.972,0.889,0.961,
0.982,0.975,0.942,0.932,0.908,0.970,0.985,0.933,0.858,0.987)
data_phaseII<-c(0.958,0.909,0.859,0.863,0.811,0.877,0.798,0.855,0.788,
0.821,0.830,0.718,0.642,0.658)
#### Beta Chart Control Limits
LCLb<-qbeta(0.00135,46.49,2.44)
UCLb<-qbeta(0.99865,46.49,2.44)
#### Simplex Chart Control Limits
LCLs<-qsimplex(0.00135,0.95,3.5742)
UCLs<-qsimplex(0.99865,0.95,3.5742)
#### Unit Gamma Chart Control Limits
unitgammampmf<-function(y){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))^tau
*(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau)}
mu<-0.95
```

```

tau<-2.2798
for(i in seq(0.1,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
if(x1<=0.00136){LCLg<-i}}
for(i in seq(0.1,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
if(x1<=0.99866){UCLg<-i}}
#### Control Chart for Phase I
plot(data_phaseI,type='o',pch=20,ylim=c(0.4,1.1),ylab="Proportion of non-
contaminated Peanuts")
abline(h=c(UCLg,UCLs),lty=c(2,1))
abline(h=c(LCLg,LCLs),lty=c(2,1))
abline(v=20,lty=3)
legend("bottomleft",legend=c("LCL,UCL - Beta and uGA","LCL,UCL -
Simplex"),lty=c(2,1),cex=0.9
#### Control Chart for Phase II
plot(data_phaseII,type='o',pch=20,ylim=c(0.4,1.1),ylab="Proportion of non-
contaminated Peanuts")
abline(h=c(UCLg,UCLs),lty=c(2,1))
abline(h=c(LCLg,LCLs),lty=c(2,1))
abline(v=20,lty=3)
legend("bottomleft",legend=c("LCL,UCL - Beta and uGA","LCL,UCL -
Simplex"),lty=c(2,1),cex=0.9

```

## Πίνακας 2.2:

```

#### Beta-True
i<-1
j<-1
UCLb<-vector("numeric",4L)
LCLb<-vector("numeric",4L)
ARL1<-vector("numeric",36L)
SDRL1<-vector("numeric",36L)
MRL1<-vector("numeric",36L)
phiArray<-c(290,148,80,31)
for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[j]<-qbeta(0.00135,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[j]<-qbeta(0.99865,(mu*phi),(1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  if(mu!=0.2){
beta<-pbeta(UCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)-pbeta(LCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL1[i]<-1/(1-beta)
  SDRL1[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL1[i]<-(log(0.5)/log(beta))}
else{
  alpha<-pbeta(LCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)*2
  ARL1[i]<-1/alpha
  SDRL1[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)

```

```

MRL1[i]<- (log(0.5)/log(1-alpha)) }
i<-i+1;
}
j<-j+1;
}
#### Simplex
i<-1
j<-1
k<-1
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
ARL2<-vector("numeric",36L)
SDRL2<-vector("numeric",36L)
MRL2<-vector("numeric",36L)
for(phi in phiArray){
  LCLs[k]<-qsimplex(0.00135,0.2,sigma[j])
  UCLs[k]<-qsimplex(0.99865,0.2,sigma[j])
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
    beta<-pbeta(UCLs[k],(mu*phi),(1-mu)*phi)-pbeta(LCLs[k],(mu*phi),(1-
mu)*phi)
    ARL2[i]<-1/(1-beta)
    SDRL2[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
    MRL2[i]<- (log(0.5)/log(beta))
    i<-i+1;}
    j<-j+1;
    k<-k+1;}
#### Unit Gamma
unitgammampmf<-function(y){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))^tau)*
(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau)}
LCLuGA<-vector("numeric",4L)
UCLuGA<-vector("numeric",4L)
tauArray<-c(155,96,51,20)
mu<-0.2
j<-1
for(tau in tauArray){
  jj0<-0
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))
while(obj$value<=0.99865){
  jj0<-jj0+0.0001
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))}
UCLg<-0.283+jj0
for(i in seq(0.01,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
  if(x1<=0.00135 & x1>=0.00130){LCLg<-i}}
  LCLuGA[j]<-LCLg;
  UCLuGA[j]<-UCLg;
  j<-j+1;}
phiArray<-c(290,148,80,31)
i<-1
j<-1

```

```

ARL3<-vector("numeric",36L)
SDRL3<-vector("numeric",36L)
MRL3<-vector("numeric",36L)
for(phi in phiArray){
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  beta<-pbeta(UCLuGA[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)-pbeta(LCLuGA[j],(mu*phi),(1-
mu)*phi)
  ARL3[i]<-1/(1-beta)
  SDRL3[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL3[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
j<-j+1;}

```

### Πίνακας 2.3:

```

#### Simplex-True
i<-1
j<-1
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
ARL4<-vector("numeric",36L)
SDRL4<-vector("numeric",36L)
MRL4<-vector("numeric",36L)
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[j]<-qsimplex(0.00135,mu,sigma)
  UCLs[j]<-qsimplex(0.99865,mu,sigma)
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  if(mu!=0.2){
  beta<-psimplex(UCLs[j],mu,sigma)-psimplex(LCLs[j],mu,sigma)
  ARL4[i]<-1/(1-beta)
  SDRL4[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL4[i]<-(log(0.5)/log(beta))}
else{
  alpha<-psimplex(LCLs[j],mu,sigma)*2
  ARL4[i]<-1/alpha
  SDRL4[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
  MRL4[i]<-(log(0.5)/log(1-alpha))}
  i<-i+1;}
j<-j+1;}
#### Beta
i<-1
j<-1
k<-1
LCLb<-vector("numeric",4L)
UCLb<-vector("numeric",4L)
ARL5<-vector("numeric",36L)
SDRL5<-vector("numeric",36L)
MRL5<-vector("numeric",36L)
phiArray<-c(290,148,80,31)
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)

```

```

for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[k]<-qbeta(0.00135, (mu*phi), (1-mu)*phi)
  UCLb[k]<-qbeta(0.99865, (mu*phi), (1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
beta<-psimplex(UCLb[k],mu,sigma[j]) - psimplex(LCLb[k],mu,sigma[j])
  ARL5[i]<-1/(1-beta)
  SDRL5[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL5[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
i<-1
j<-1
ARL6<-vector("numeric",36L)
SDRL6<-vector("numeric",36L)
MRL6<-vector("numeric",36L)
for(sigma in sigmaArray){
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
beta<-psimplex(UCLuGA[j],mu,sigma) - psimplex(LCLuGA[j],mu,sigma)
  ARL6[i]<-1/(1-beta)
  SDRL6[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL6[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;}

```

#### Πίνακας 2.4:

```

#### Unit Gamma-True
logunitgammampmf<-function(y){exp(tau*log((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))) -
log(gamma(tau))+((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1)*log(y)+(tau-1)*
log(log(1/y))}
tauArray<-c(155,96,51,20)
x<-list("integrate",144L)
y<-list("integrate",144L)
alpha<-list("integrate",4L)
ARL7<-vector("numeric",36L)
SDRL7<-vector("numeric",36L)
MRL7<-vector("numeric",36L)
i<-1
j<-1
k<-1
L<-1
U<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  if(mu==0.2){
  alpha[i]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=LCLuGA[L])
  i<-i+1;}
else{

```

```

x[j]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=UCLuGA[U])
y[k]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=LCLuGA[L])
j<-j+1;
k<-k+1;}
}
L<-L+1;
U<-U+1;}
alpha<-as.numeric(alpha)
alpha<-alpha*2
# for mu=0.2
ARL7<-1/alpha
SDRL7<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
MRL7<-(log(0.5)/log(1-alpha))
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
beta<-x-y
# for mu≠0.2
ARL7<-1/(1-beta)
SDRL7<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL7<-(log(0.5)/log(beta))
#### Beta
x<-list("integrate",144L)
y<-list("integrate",144L)
ARL8<-vector("numeric",36L)
SDRL8<-vector("numeric",36L)
MRL8<-vector("numeric",36L)
phiArray<-c(290,148,80,31)
for(phi in phiArray){
  j<-1
  mu<-0.2
  LCLb[L]<-qbeta(0.00135,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[U]<-qbeta(0.99865,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  U<-U+1;
  L<-L+1;}
L<-1
U<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  x[i]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=UCLb[U])
  y[j]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=LCLb[L])
  i<-i+1;
  j<-j+1;}
  L<-L+1;
  U<-U+1;}
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
beta<-x-y
ARL8<-1/(1-beta)
SDRL8<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL8<-(log(0.5)/log(beta))
#### Simplex
x<-list("integrate",144L)

```

```

y<-list("integrate",144L)
ARL9<-vector("numeric",36L)
SDRL9<-vector("numeric",36L)
MRL9<-vector("numeric",36L)
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[L]<-qsimplex(0.00135,mu,sigma)
  UCLs[U]<-qsimplex(0.99865,mu,sigma)
  U<-U+1;
  L<-L+1;}
L<-1
U<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  x[i]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=UCLs[U])
  y[j]<-integrate(logunitgammampf,lower=0,upper=LCLs[L])
  i<-i+1;
  j<-j+1;}
  U<-U+1;
  L<-L+1;}
x<-as.numeric(x)
y<-as.numeric(y)
beta<-x-y
ARL9<-1/(1-beta)
SDRL9<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL9<-(log(0.5)/log(beta))

```

### Πίνακας 2.5:

```

#### Beta-True
phiArray<-c(290,148,80,31)
i<-1
j<-1
LCLb<-vector("numeric",4L)
UCLb<-vector("numeric",4L)
ARL1<-vector("numeric",20L)
MRL1<-vector("numeric",20L)
SDRL1<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[j]<-qbeta(0.0027,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[j]<-qbeta(0.9973,(mu*phi),(1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  if(mu!=0.2){
    beta<-pbeta(UCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
    ARL1[i]<-1/(1-beta)
    SDRL1[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
    MRL1[i]<-(log(0.5)/log(beta))}
else{
  alpha<-pbeta(LCLb,(mu*phi),(1-mu)*phi)

```



```

ARL1[i]<-1/alpha
SDRL1[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
MRL1[i]<-(log(0.5)/log(1-alpha))}
i<-i+1;}
j<-j+1;}
#### Simplex
i<-1
j<-1
k<-1
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
ARL2<-vector("numeric",20L)
SDRL2<-vector("numeric",20L)
MRL2<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
  LCLs[k]<-qsimplex(0.0027,0.2,sigma[j])
  UCLs[k]<-qsimplex(0.9973,0.2,sigma[j])
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta<-pbeta(UCLs[k],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL2[i]<-1/(1-beta)
  SDRL2[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL2[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma
unitgammampmf<-function(y){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))^tau)*
(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau)}
LCLuGA<-vector("numeric",4L)
UCLuGA<-vector("numeric",4L)
mu<-0.2
tauArray<-c(155,96,51,20)
j<-1
for(tau in tauArray){
  jj0<-0
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))
while(obj$value<=0.9973){
  jj0<-jj0+0.0001
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))}
jj0
UCLg<-0.283+jj0
for(i in seq(0.01,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
  if(x1<=0.0027 & x1>=0.0025){LCLg<-i}}
  LCLuGA[j]<-LCLg;
  UCLuGA[j]<-UCLg;
  j<-j+1;}
phiArray<-c(290,148,80,31)
i<-1
j<-1

```

```

ARL3<-vector("numeric",20L)
SDRL3<-vector("numeric",20L)
MRL3<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta<-pbeta(UCLuGA[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL3[i]<-1/(1-beta)
  SDRL3[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL3[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
j<-j+1;}

```

**Πίνακας 2.6:**

```

#### Simplex True
i<-1
j<-1
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
ARL4<-vector("numeric",20L)
SDRL4<-vector("numeric",20L)
MRL4<-vector("numeric",20L)
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[j]<-qsimplex(0.0027,mu,sigma)
  UCLs[j]<-qsimplex(0.9973,mu,sigma)
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  if(mu!=0.2){
  beta<-psimplex(UCLs[j],mu,sigma)
  ARL4[i]<-1/(1-beta)
  SDRL4[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL4[i]<-(log(0.5)/log(beta))}
else{
  alpha<-psimplex(LCLs[j],mu,sigma)
  ARL4[i]<-1/alpha
  SDRL4[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
  MRL4[i]<-(log(0.5)/log(1-alpha))}
  i<-i+1;}
j<-j+1;}
#### Beta
i<-1
j<-1
k<-1
phiArray<-c(290,148,80,31)
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
LCLb<-vector("numeric",4L)
UCLb<-vector("numeric",4L)
ARL5<-vector("numeric",20L)
MRL5<-vector("numeric",20L)
SDRL5<-vector("numeric",20L)

```

```

for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[k]<-qbeta(0.0027, (mu*phi), (1-mu)*phi)
  UCLb[k]<-qbeta(0.9973, (mu*phi), (1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta<-psimplex(UCLb[k],mu,sigma[j])
  ARL5[i]<-1/(1-beta)
  SDRL5[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL5[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma
i<-1
j<-1
ARL6<-vector("numeric",20L)
SDRL6<-vector("numeric",20L)
MRL6<-vector("numeric",20L)
for(sigma in sigmaArray){
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta<-psimplex(UCLuGA[j],mu,sigma)
  ARL6[i]<-1/(1-beta)
  SDRL6[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL6[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;}

```

### Πίνακας 2.7:

```

#### Unit Gamma-True
logunitgammampmf<-function(y){exp(tau*log((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-log(gamma(tau))+((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1)*log(y)+(tau-1)*log(log(1/y))}
tauArray<-c(155,96,51,20)
alpha<-list("integrate",4L)
beta<-list("integrate",80L)
ARL7<-vector("numeric",20L)
SDRL7<-vector("numeric",20L)
MRL7<-vector("numeric",20L)
i<-1
j<-1
L<-1
U<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  if(mu==0.2){
  alpha[i]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=LCLuGA[L])
  i<-i+1;}
else{
  beta[j]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=UCLuGA[U])
  j<-j+1;}
}
}

```

```

L<-L+1;
U<-U+1;}
alpha<-as.numeric(alpha)
# for mu=0.2
ARL7<-1/alpha
SDRL7<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
MRL7<-(log(0.5)/log(1-alpha))
beta<-as.numeric(beta)
# for mu≠0.2
ARL7<-1/(1-beta)
SDRL7<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL7<-(log(0.5)/log(beta))
#### Beta
phiArray<-c(290,148,80,31)
tauArray<-c(155,96,51,20)
beta<-list("integrate",80L)
ARL8<-vector("numeric",20L)
SDRL8<-vector("numeric",20L)
MRL8<-vector("numeric",20L)
L<-1
U<-1
i<-1
for(phi in phiArray){
  j<-1;
  mu<-0.2
  LCLb[L]<-qbeta(0.0027,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[U]<-qbeta(0.9973,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  U<-U+1;
  L<-L+1;}
  U<-1;
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta[i]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=UCLb[U])
  i<-i+1;}
  U<-U+1;}
beta<-as.numeric(beta)
ARL8<-1/(1-beta)
SDRL8<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL8<-(log(0.5)/log(beta))
#### Simplex
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
tauArray<-c(155,96,51,20)
beta<-list("integrate",80L)
ARL9<-vector("numeric",20L)
SDRL9<-vector("numeric",20L)
MRL9<-vector("numeric",20L)
L<-1
U<-1
i<-1
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[L]<-qsimplex(0.0027,mu,sigma)

```

```

UCLs[U]<-qsimplex(0.9973,mu,sigma)
L<-L+1;
U<-U+1;}
U<-1;
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
  beta[i]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=UCLs[U])
  i<-i+1;}
  U<-U+1;}
beta<-as.numeric(beta)
ARL9<-1/(1-beta)
SDRL9<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL9<-(log(0.5)/log(beta))

```

### Πίνακας 2.8:

```

#### Beta-True
i<-1
j<-1
phiArray<-c(290,148,80,31)
LCLb<-vector("numeric",4L)
UCLb<-vector("numeric",4L)
ARL1<-vector("numeric",20L)
SDRL1<-vector("numeric",20L)
MRL1<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[j]<-qbeta(0.0027,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[j]<-qbeta(0.9973,(mu*phi),(1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  if(mu!=0.2){
    beta<-1-pbeta(LCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
    ARL1[i]<-1/(1-beta)
    SDRL1[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
    MRL1[i]<-(log(0.5)/log(beta))}
else{
  alpha<-pbeta(LCLb[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL1[i]<-1/alpha
  SDRL1[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
  MRL1[i]<-(log(0.5)/log(1-alpha))}
  i<-i+1;}
  j<-j+1;}
#### Simplex
i<-1
j<-1
k<-1
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
ARL2<-vector("numeric",20L)
SDRL2<-vector("numeric",20L)
MRL2<-vector("numeric",20L)

```

```

for(phi in phiArray){
  LCLs[k]<-qsimplex(0.0027,0.2,sigma[j])
  UCLs[k]<-qsimplex(0.9973,0.2,sigma[j])
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  beta<-1-pbeta(LCLs[k],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL2[i]<-1/(1-beta)
  SDRL2[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL2[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma
unitgammampmf<-function(y){((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))^tau)*
(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau))}
LCLuGA<-vector("numeric",4L)
UCLuGA<-vector("numeric",4L)
tauArray<-c(155,96,51,20)
mu<-0.2
j<-1
for(tau in tauArray){
  jj0<-0
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))
while(obj$value<=0.9973){
  jj0<-jj0+0.0001
  obj<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=(0.283+jj0))}
jj0
UCLg<-0.283+jj0
for(i in seq(0.01,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampmf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
  if(x1<=0.0027 & x1>=0.0025){LCLg<-i}}
  LCLuGA[j]<-LCLg;
  UCLuGA[j]<-UCLg;
  j<-j+1;}
i<-1
j<-1
ARL3<-vector("numeric",20L)
SDRL3<-vector("numeric",20L)
MRL3<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  beta<-1-pbeta(LCLuGA[j],(mu*phi),(1-mu)*phi)
  ARL3[i]<-1/(1-beta)
  SDRL3[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL3[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;}

```

## Πίνακας 2.9:

```
##### Simplex True
i<-1
j<-1
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
LCLs<-vector("numeric",4L)
UCLs<-vector("numeric",4L)
ARL4<-vector("numeric",20L)
SDRL4<-vector("numeric",20L)
MRL4<-vector("numeric",20L)
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[j]<-qsimplex(0.0027,mu,sigma)
  UCLs[j]<-qsimplex(0.9973,mu,sigma)
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  if(mu!=0.2){
    beta<-1-psimplex(LCLs[j],mu,sigma)
    ARL4[i]<-1/(1-beta)
    SDRL4[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
    MRL4[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  }
else{
    alpha<-psimplex(UCLs[j],mu,sigma)
    ARL4[i]<-1/alpha
    SDRL4[i]<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
    MRL4[i]<-(log(0.5)/log(1-alpha))
  }
  i<-i+1;}
  j<-j+1;}
##### Beta
i<-1
j<-1
k<-1
phiArray<-c(290,148,80,31)
sigma<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)
LCLb<-vector("numeric",4L)
UCLb<-vector("numeric",4L)
ARL5<-vector("numeric",20L)
SDRL5<-vector("numeric",20L)
MRL5<-vector("numeric",20L)
for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[k]<-qbeta(0.0027,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[k]<-qbeta(0.9973,(mu*phi),(1-mu)*phi)
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  beta<-1-psimplex(LCLb[k],mu,sigma[j])
  ARL5[i]<-1/(1-beta)
  SDRL5[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL5[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
  j<-j+1;
  k<-k+1;}
##### Unit Gamma
i<-1
```

```

j<-1
ARL6<-vector("numeric",20L)
SDRL6<-vector("numeric",20L)
MRL6<-vector("numeric",20L)
for(sigma in sigmaArray){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  beta<-1-psimplex(LCLuGA[j],mu,sigma)
  ARL6[i]<-1/(1-beta)
  SDRL6[i]<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
  MRL6[i]<-(log(0.5)/log(beta))
  i<-i+1;}
j<-j+1;}

```

### Πίνακας 2.10:

```

#### Unit Gamma-True
logunitgammampmf<-function(y){exp(tau*log((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-log(gamma(tau))+((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1)*log(y)+(tau-1)*log(log(1/y))}
tauArray<-c(155,96,51,20)
alpha<-list("integrate",4L)
x<-list("integrate",80L)
ARL7<-vector("numeric",20L)
SDRL7<-vector("numeric",20L)
MRL7<-vector("numeric",20L)
i<-1
j<-1
L<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  if(mu==0.2){
    alpha[i]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=LCLuGA[L])
    i<-i+1;}
else{
  x[j]<-integrate(logunitgammampmf,lower=0,upper=LCLuGA[L])
  j<-j+1;}
}
  L<-L+1;}
alpha<-as.numeric(alpha)
# for mu=0.2
ARL7<-1/alpha
SDRL7<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
MRL7<-(log(0.5)/log(1-alpha))
x<-as.numeric(x)
beta<-1-x
# for mu≠0.2
ARL7<-1/(1-beta)
SDRL7<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL7<-(log(0.5)/log(beta))
#### Beta
phiArray<-c(290,148,80,31)

```



```

x<-list("integrate",80L)
ARL8<-vector("numeric",36L)
SDRL8<-vector("numeric",36L)
MRL8<-vector("numeric",36L)
L<-1
U<-1
i<-1
for(phi in phiArray){
  mu<-0.2
  LCLb[L]<-qbeta(0.0027,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  UCLb[U]<-qbeta(0.9973,(mu*phi),(1-mu)*phi)
  L<-L+1;
  U<-U+1;}
L<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  x[i]<-integrate(logunitgamma pmf,lower=0,upper=LCLb[L])
  i<-i+1;}
  L<-L+1;}
x<-as.numeric(x)
beta<-1-x
ARL8<-1/(1-beta)
SDRL8<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL8<-(log(0.5)/log(beta))
#### Simplex
sigmaArray<-c(0.37,0.5,0.71,1.2)S
tauArray<-c(155,96,51,20)
x<-list("integrate",80L)
ARL9<-vector("numeric",20L)
SDRL9<-vector("numeric",20L)
MRL9<-vector("numeric",20L)
L<-1
U<-1
i<-1
for(sigma in sigmaArray){
  mu<-0.2
  LCLs[L]<-qsimplex(0.0027,mu,sigma)
  UCLs[U]<-qsimplex(0.9973,mu,sigma)
  L<-L+1;
  U<-U+1;}
L<-1
for(tau in tauArray){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
  x[i]<-integrate(logunitgamma pmf,lower=0,upper=LCLs[L])
  i<-i+1;}
  L<-L+1;}
x<-as.numeric(x)
beta<-1-x
ARL9<-1/(1-beta)
SDRL9<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL9<-(log(0.5)/log(beta))

```

**Πίνακας 2.11:**

```
data_phaseI<-c(0.971,0.979,0.982,0.971,0.957,0.961,0.956,0.972,0.889,0.961,
0.982,0.975,0.942,0.932,0.908,0.970,0.985,0.933,0.858,0.987)
mean(data_phaseI)
sd(data_phaseI)
#### Beta
loglikBETA<-function(v){
v1<-v[1] # mu
v2<-v[2] # phi
myfun1<-function(z1,v1,v2){dbeta(z1,v1*v2,(1-v1)*v2)}
listX<-c()
for(j in 1:length(data_phaseI)){
listX[j]<-log(myfun1(data_phaseI[j],v1,v2))}
-sum(listX)}
#### optim
obj1<-optim(c(0.8,40),loglikBETA,method="L-BFGS-
B",hessian=T,lower=c(0.001,0.1),upper=c(0.999,1000))
obj1$par
obj1$hessian
sqrt(solve(obj1$hessian))
2*obj1$value+2*2 # AIC
2*obj1$value+log(length(x0))*2 # BIC
#### Simplex
loglikSIMPLEX<-function(v){
v1<-v[1] # mu
v2<-v[2] # sigma
myfun1<-function(z1,v1,v2){
dym<-((z1-v1)^2)/(z1*(1-z1)*(v1^2)*((1-v1)^2))*((2*pi*(v2^2))*(z1*(1-
z1))^3)^(-1/2))*exp(-dym/(2*v2^2))}
listX<-c()
for(j in 1:length(data_phaseI)){
listX[j]<-log(myfun1(data_phaseI[j],v1,v2))}
-sum(listX)}
#### optim
obj1<-optim(c(0.8,1.5),loglikSIMPLEX,hessian=T)
obj1$par
obj1$hessian
sqrt(solve(obj1$hessian))
2*obj1$value+2*2 # AIC
2*obj1$value+log(length(x0))*2 # BIC
#### Unit Gamma
loglikUNITGAMMA<-function(v){
v1<-v[1] # mu
v2<-v[2] # tau
myfun1<-function(z1,v1,v2){
zds<-(v1^(1/v2))/(1-v1^(1/v2))*((zds^v2)*(z1^(zds-1))*(log(1/z1))^(v2-1))
/gamma(v2)}
listX<-c()
for(j in 1:length(data_phaseI)){
listX[j]<-log(myfun1(data_phaseI[j],v1,v2))}
-sum(listX)}
#### optim
```

```

obj1<-optim(c(0.5,5),loglikUNITGAMMA,method="L-BFGS-B",
hessian=T,lower=c(0.001,0.1),upper=c(0.999,1000))
obj1$par
obj1$hessian
sqrt(solve(obj1$hessian))
2*obj1$value+2*2 # AIC
2*obj1$value+log(length(data_phaseI))*2 # BIC

```

### Πίνακας 2.12:

```

#### Beta Chart Control Limits
LCLb<-qbeta(0.00135,46.49,2.44)
UCLb<-qbeta(0.99865,46.49,2.44)
#### Simplex Chart Control Limits
LCLs<-qsimplex(0.00135,0.95,3.5742)
#### Unit Gamma Chart Control Limits
unitgammampf<-function(y){ ((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))^tau
*(y^(((mu^(1/tau))/(1-mu^(1/tau)))-1))*((log(1/y))^(tau-1))/gamma(tau)}
mu<-0.95
tau<-2.2798
for(i in seq(0.1,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value
  if(x1<=0.00136){LCLg<-i}}
for(i in seq(0.1,1,by=0.0001)){
  x<-integrate(unitgammampf,lower=0,upper=i)
  x1<-unlist(x)$value if(x1<=0.99866){UCLg<-i}}
#### Simplex-True
mu<-0.95
sigma<-3.5742
alpha<-psimplex(LCLs,mu,sigma)*2
ARL<-1/alpha
SDRL<-sqrt((1-alpha)/alpha^2)
MRL<-(log(0.5)/log(1-alpha))
#### Beta
beta<-psimplex(UCLb,mu,sigma)-psimplex(LCLb,mu,sigma)
ARL<-1/(1-beta)
SDRL<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL<-(log(0.5)/log(beta))
#### Unit Gamma
beta<-psimplex(UCLg,mu,sigma)-psimplex(LCLg,mu,sigma)
ARL<-1/(1-beta)
SDRL<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL<-(log(0.5)/log(beta))
#### Simplex-True
mu<-0.8
sigma<-3.5742
beta<-psimplex(UCLs,mu,sigma)-psimplex(LCLs,mu,sigma)
ARL<-1/(1-beta)
SDRL<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL<-(log(0.5)/log(beta))

```

```

#### Beta
beta<-psimplex(UCLb,mu,sigma)-psimplex(LCLb,mu,sigma)
ARL<-1/(1-beta)
SDRL<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL<-(log(0.5)/log(beta))
#### Unit Gamma
beta<-psimplex(UCLg,mu,sigma)-psimplex(LCLg,mu,sigma)
ARL<-1/(1-beta)
SDRL<-sqrt(beta/((1-beta)^2))
MRL<-(log(0.5)/log(beta))

```

### Πίνακας 3.1-Beta:

```

k<-1
f<-1
n<-5000
N<-10000
ARL0<-370.4
mu0<-0.2
phi<-290
VarY<-(mu0*(1-mu0))/(phi+1)
L.list<-seq(2,3,by=0.001)
lambda<-0.05
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
FINAL_ARL<-c()
FINAL_SDRL<-c()
FINAL_MRL<-c()
FINAL_lambda<-c()
FINAL_L<-c()
DIFF<-c()
#### Beta Two-Sided
for(L in L.list){
  UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
  LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
  for(i in 1:N){
    x<-rbeta(n,mu0*phi,(1-mu0)*phi)
    Z<-rep(0,n)
    Z[1]<-mu0
    for(t in 2:n){
      Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])
    }
    for(j in 1:n){
      if(Z[j]>UCL|Z[j]<LCL){RL[i]<-j;break}
      else{
        j<-j+1
        if(j==n){RL[i]<-j;break}}
    }
  }
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
}

```

```

if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5) {
  DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
  FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
  FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
  FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
  FINAL_lambda[f]<-lambda
  FINAL_L[f]<-L
  f<-f+1;}
k<-k+1;}
#### Beta Upper-Sided
for(L in L.list){
  VarY<-(mu0*(1-mu0))/(phi+1)
  UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu0*phi,(1-mu0)*phi)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL){RL[i]<-j;break}
  else{
    j<-j+1
    if(j==n){RL[i]<-j;break}}}
}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5) {
  DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
  FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
  FINAL_lambda[f]<-lambda
  FINAL_L[f]<-L
  FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
  FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
  f<-f+1;}
k<-k+1;}
#### Beta Lower-Sided
for(L in L.list){
  LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu0*phi,(1-mu0)*phi)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]<LCL){RL[i]<-j;break}
  else{
    j<-j+1
    if(j==n){RL[i]<-j;break}}}
}
}

```

```

    ARL[k]<-sum(RL)/N
    SDRL[k]<-sd(RL)
    MRL[k]<-median(RL)
if (ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5) {
    DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
    FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
    FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
    FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
    FINAL_lambda[f]<-lambda
    FINAL_L[f]<-L
    f<-f+1;}
    k<-k+1;}

```

### Πίνακας 3.1-Simplex:

```

k<-1
f<-1
n<-5000
N<-10000
ARL0<-370.4
mu0<-0.2
sigma<-0.37
b1s<-1/(2*sigma^2*mu0^2*(1-mu0)^2)
uincGam<-gammainc(b1s,1/2)
VarY<-(1/sqrt(2*sigma^2))*exp(1/(2*sigma^2*mu0^2*(1-mu0)^2))*
uincGam[[2]][1]
L.list<-seq(0.1,1,0.001)
lambda<-0.05
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
FINAL_ARL<-c()
FINAL_SDRL<-c()
FINAL_MRL<-c()
FINAL_lambda<-c()
FINAL_L<-c()
DIFF<-c()
#### Simplex Two Sided
for(L in L.list){
    UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
    LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
    x<-rsimplex(n,mu0,sigma)
    Z<-rep(0,n)
    Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
    Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
    if(Z[j]>UCL|Z[j]<LCL){RL[i]<-j;break}
    else{
        j<-j+1

```

```

    if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
    ARL[k]<-sum(RL)/N
    SDRL[k]<-sd(RL)
    MRL[k]<-median(RL)
if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5){
    DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
    FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
    FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
    FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
    FINAL_lambda[f]<-lambda
    FINAL_L[f]<-L
    f<-f+1;}
    k<-k+1;}
#### Simplex Upper Sided
for(L in L.list){
    UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
    x<-rsimplex(n,mu0,sigma)
    Z<-rep(0,n)
    Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
    Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){ if(Z[j]>UCL){RL[i]<-j;break}
    else{
        j<-j+1
        if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
    ARL[k]<-sum(RL)/N
    SDRL[k]<-sd(RL)
    MRL[k]<-median(RL)
if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5){
    DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
    FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
    FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
    FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
    FINAL_lambda[f]<-lambda
    FINAL_L[f]<-L
    f<-f+1;}
    k<-k+1;}}
#### Simplex Lower Sided
for(L in L.list){
    LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*sigma0Y)
for(i in 1:N){
    x<-rsimplex(n,mu0,sigma0)
    Z<-rep(0,n)
    Z[1]<-mu0
for(i in 1:N){
    x<-rsimplex(n,mu0,sigma)
    Z<-rep(0,n)
    Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL){RL[i]<-j;break}
    else{

```

```

    j<-j+1
    if (j==n) {RL[i]<-j;break}}}}
    ARL[k]<-sum(RL)/N
    SDRL[k]<-sd(RL)
    MRL[k]<-median(RL)
if (ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5) {
    DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
    FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
    FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
    FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
    FINAL_lambda[f]<-lambda
    FINAL_L[f]<-L
    f<-f+1;}
    k<-k+1;}

```

### Πίνακας 3.1-Unit Gamma:

```

k<-1
f<-1
n<-5000
N<-10000
ARL0<-370.4
mu0<-0.2
tau<-155
VarY<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau))^tau))-mu0)
L.list<-seq(2,3,by=0.001)
lambda<-0.05
theta<-mu0^(1/tau)/(1-mu0^(1/tau))
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
FINAL_ARL<-c()
FINAL_SDRL<-c()
FINAL_MRL<-c()
FINAL_lambda<-c()
FINAL_L<-c()
DIFF<-c()
#### Unit Gamma Two Sided
for(L in L.list){
    UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
    LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
    for(i in 1:N){
        x<-rgamma(n,tau,theta)
        y<-exp(-x)
        Z<-rep(0,n)
        Z[1]<-mu0
    for(t in 2:n){
        Z[t]<-lambda*y[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
    for(j in 1:n){
        if(Z[j]>UCL|Z[j]<LCL){RL[i]<-j;break}
        else{

```



```

j<-j+1
if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5){
  DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
  FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
  FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
  FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
  FINAL_lambda[f]<-lambda
  FINAL_L[f]<-L
  f<-f+1;}
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma Upper Sided
for(L in L.list){
  UCL<-mu0+L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
  x<-rgamma(n,tau,theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda*y[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL){RL[i]<-j;break}
  else{
    j<-j+1
    if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
if(ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5){
  DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
  FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
  FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
  FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
  FINAL_lambda[f]<-lambda
  FINAL_L[f]<-L
  f<-f+1;}
  k<-k+1;}
#### Unit Gamma Lower Sided
for(L in L.list){
  LCL<-mu0-L*sqrt((lambda/(2-lambda))*VarY)
for(i in 1:N){
  x<-rgamma(n,tau,theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda*y[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){

```

```

if (Z[j]<LCL) {RL[i]<-j;break}
else{
  j<-j+1
  if (j==n) {RL[i]<-j;break}}}}
ARL[k]<-sum(RL)/N
SDRL[k]<-sd(RL)
MRL[k]<-median(RL)
if (ARL[k]-ARL0<=5 && ARL[k]-ARL0>=-5) {
  DIFF[f]<-ARL[k]-ARL0
  FINAL_ARL[f]<-ARL[k]
  FINAL_SDRL[f]<-SDRL[k]
  FINAL_MRL[f]<-MRL[k]
  FINAL_lambda[f]<-lambda
  FINAL_L[f]<-L
  f<-f+1;}
k<-k+1;}

```

### Πίνακας 3.2 έως Πίνακας 3.4:

```

#### Beta True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
LCL<-c()
phi<-c(290,290,290,148,148,148,80,80,80,31,31,31)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.481,2.701,2.861,2.485,2.693,2.864,2.487,2.701,2.869,2.483,
2.702,2.884)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  VarY<-(mu0*(1-mu0))/(phi[l]+1)
  UCL[m]<-mu0+L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
  LCL[m]<-mu0-L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]|Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N

```

```

SDRL[k]<-sd(RL)
MRL[k]<-median(RL)
k<-k+1;}}
m<-m+1;}
#### Simplex
UCL<-c(0.209,0.215,0.222,0.213,0.220,0.230,0.218,0.228,0.243,
0.229,0.246,0.271)
LCL<-c(0.191,0.185,0.178,0.187,0.180,0.170,0.182,0.172,0.157,
0.171,0.154,0.129)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N
  x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){ if(Z[j]>UCL[l]|Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
#### Unit Gamma
UCL<-c(0.210,0.216,0.225,0.213,0.220,0.231,0.218,0.228,0.243,
0.228,0.244,0.269)
LCL<-c(0.190,0.184,0.175,0.187,0.180,0.169,0.182,0.172,0.157,
0.172,0.156,0.131)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[l]|Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}

```

### Πίνακας 3.5 έως Πίνακας 3.7:

```

#### Simplex True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000

```

```

mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
LCL<-c()
sigma<-c(0.37,0.37,0.37,0.5,0.5,0.5,0.71,0.71,0.71,1.2,1.2,1.2)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(0.147,0.159,0.169,0.198,0.215,0.228,0.279,0.304,0.324,
0.462,0.505,0.545)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  b1s<-1/(2*sigma[l]^2*mu0^2*(1-mu0)^2)
  uincGam<-gammainc(b1s,1/2)
  VarY<-1/sqrt(2*sigma[l]^2)*exp(b1s)*uincGam[[2]][1]
  UCL[m]<-mu0+L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
  LCL[m]<-mu0-L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]|Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}
#### Beta
LCL<-c(0.191,0.185,0.178,0.187,0.180,0.169,0.182,0.172,0.157,
0.172,0.156,0.132)
UCL<-c(0.209,0.215,0.222,0.213,0.220,0.231,0.218,0.228,0.243,
0.228,0.244,0.268)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]|Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}
#### Unit Gamma

```

```

LCL<-c(0.190,0.184,0.175,0.187,0.180,0.169,0.182,0.172,0.157,
0.172,0.156,0.131)
UCL<-c(0.210,0.216,0.225,0.213,0.220,0.231,0.218,0.228,0.243,
0.228,0.244,0.269)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]|Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}

```

### Πίνακας 3.8 έως Πίνακας 3.10:

```

#### Unit Gamma True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
LCL<-c()
tau<-c(155,155,155,96,96,96,51,51,51,20,20,20)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.492,2.703,2.864,2.497,2.701,2.872,2.491,2.697,2.875,
2.487,2.704,2.899)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
  if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  VarY<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau[l]))^tau[l]))-mu0)

```

```

    UCL[m]<-mu0+L[1]*sqrt((lambda[1]/(2-lambda[1]))*VarY)
    LCL[m]<-mu0-L[1]*sqrt((lambda[1]/(2-lambda[1]))*VarY)
for(j in 1:n){ if(Z[j]>UCL[m]|Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
  m<-m+1;
##### Beta
LCL<-c(0.191,0.185,0.178,0.187,0.180,0.169,0.182,0.172,0.157,
0.172,0.156,0.132)
UCL<-c(0.209,0.215,0.222,0.213,0.220,0.231,0.218,0.228,0.243,
0.228,0.244,0.268)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[1])/(1-mu^(1/tau[1]))
  x<-rgamma(n,tau[1],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[1]*y[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]>UCL[l]|Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
##### Simplex
LCL<-c(0.191,0.185,0.178,0.187,0.180,0.170,0.182,0.172,0.157,
0.171,0.154,0.129)
c(0.209,0.215,0.222,0.213,0.220,0.230,0.218,0.228,0.243,0.229,
0.246,0.271)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.12,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[1])/(1-mu^(1/tau[1]))
  x<-rgamma(n,tau[1],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[1]*y[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[l]|Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}

```

Πίνακας I.1 έως Πίνακας I.3:

```
#### Beta True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
phi<-c(290,290,290,148,148,148,80,80,80,31,31,31)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.161,2.450,2.675,2.178,2.465,2.701,2.185,2.494,2.730,2.201,
2.543,2.812)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
      x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
      Z<-rep(0,n)
      Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
        Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])
        VarY<-(mu0*(1-mu0))/(phi[l]+1)
        UCL[m]<-mu0+L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){
          if(Z[j]>UCL[m]){RL[i]<-j;break}}
          ARL[k]<-sum(RL)/N
          SDRL[k]<-sd(RL)
          MRL[k]<-median(RL)
          k<-k+1;}}
          m<-m+1;}}
#### Simplex
UCL<-c(0.208,0.213,0.221,0.211,0.218,0.229,0.216,0.226,0.242,
0.226,0.243,0.271)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
      x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
      Z<-rep(0,n)
      Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
        Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])
for(j in 1:n){
          if(Z[j]>UCL[l]){RL[i]<-j;break}}
          ARL[k]<-sum(RL)/N
          SDRL[k]<-sd(RL)
          MRL[k]<-median(RL)
```

```

    k<-k+1;}}
#### Unit Gamma
UCL<-c(0.209,0.215,0.223,0.211,0.219,0.230,0.216,0.226,0.241,
0.225,0.242,0.268)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[l]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}

```

#### Πίνακας I.4 έως Πίνακας I.6:

```

#### Simplex True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
sigma<-c(0.37,0.37,0.37,0.5,0.5,0.5,0.71,0.71,0.71,1.2,1.2,1.2)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(0.128,0.146,0.160,0.174,0.198,0.218,0.248,0.283,0.314,0.417,
0.481,0.541)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(I in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  b1s<-1/(2*sigma[l]^2*mu0^2*(1-mu0)^2)
  uincGam<-gammainc(b1s,1/2)
  VarY<-(1/sqrt(2*sigma[l]^2))*exp(b1s)*uincGam[[2]][1]

```



```

    UCL[m]<-mu0+L[1]*sqrt((lambda[1]/(2-lambda[1]))*VarY)
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
m<-m+1;}
#### Beta
LCL<-c(0.208,0.213,0.221,0.211,0.219,0.230,0.216,0.225,0.240,
0.225,0.241,0.266)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[1])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[1]*x[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]>UCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}
#### Unit Gamma
LCL<-c(0.209,0.215,0.223,0.211,0.219,0.230,0.216,0.226,0.241,
0.225,0.242,0.268)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[1])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[1]*x[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]>UCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}

```

### Πίνακας I.7 έως Πίνακας I.9:

```

#### Unit Gamma True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000

```

```

N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
UCL<-c()
tau<-c(155,155,155,96,96,96,51,51,51,20,20,20)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.174,2.465,2.694,2.179,2.473,2.724,2.192,2.512,2.761,2.225,
2.554,2.850)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  VarY<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau[l]))^tau[l]))-mu0)
  UCL[m]<-mu0+L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){if(Z[j]>UCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
  m<-m+1;}
#### Simplex
UCL<-c(0.208,0.213,0.221,0.211,0.218,0.229,0.216,0.226,0.242,0.226,
0.243,0.271)
for(l in 1:12){ #lambda, UCL, LCL
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
  Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]>UCL[l]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
#### Beta
UCL<-c(0.208,0.213,0.221,0.211,0.219,0.230,0.216,0.225,0.240,
0.225,0.241,0.266)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.28,by=0.02)){

```

```

for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[1])/(1-mu^(1/tau[1]))
  x<-rgamma(n,tau[1],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[1]*y[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]>UCL[1]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}

```

### Πίνακας I.10 έως Πίνακας I.12:

```

#### Beta True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
LCL<-c()
phi<-c(290,290,290,148,148,148,80,80,80,31,31,31)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.111,2.358,2.521,2.105,2.340,2.484,2.087,2.315,2.452,2.075,
2.265,2.356)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  x<-rbeta(n,mu*phi[l],(1-mu)*phi[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[1]*x[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
  VarY<-(mu0*(1-mu0))/(phi[l]+1)
  LCL[m]<-mu0-L[l]*sqrt((lambda[1]/(2-lambda[1]))*VarY)
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
  m<-m+1;}}
#### Simplex
LCL<-c(0.192,0.187,0.181,0.189,0.183,0.174,0.185,0.177,0.165,0.176,
0.163,0.145)
for(l in 1:12){

```

```

for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
x<-rbeta(n,mu*phi[1],(1-mu)*phi[1])
Z<-rep(0,n)
Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[1]*x[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
if(Z[j]<LCL[1]){RL[i]<-j;break}
else{
if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
ARL[k]<-sum(RL)/N
SDRL[k]<-sd(RL)
MRL[k]<-median(RL)
k<-k+1;}}
#### Unit Gamma
LCL<-c(0.191,0.186,0.179,0.189,0.183,0.173,0.185,0.176,0.164,
0.177,0.163,0.145)
for(l in 1:12){
for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
x<-rbeta(n,mu*phi[1],(1-mu)*phi[1])
Z<-rep(0,n)
Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){
Z[t]<-lambda[1]*x[t]+(1-lambda[1])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[1]){RL[i]<-j;break}
else{
if(j==n){RL[i]<-j;break}}}}
ARL[k]<-sum(RL)/N
SDRL[k]<-sd(RL)
MRL[k]<-median(RL)
k<-k+1;}}

```

### Πίνακας I.13 έως Πίνακας I.15:

```

#### Simplex True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
LCL<-c()
sigma<-c(0.37,0.37,0.37,0.5,0.5,0.5,0.71,0.71,0.71,1.2,1.2,1.2)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(0.124,0.138,0.146,0.166,0.183,0.194,0.232,0.255,0.267,0.376,

```

```

0.409,0.419)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){ Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  b1s<-1/(2*sigma[l]^2*mu0^2*(1-mu0)^2)
  uincGam<-gammainc(b1s,1/2)
  VarY<-(1/sqrt(2*sigma[l]^2))*exp(b1s)*uincGam[[2]][1]
  LCL[m]<-mu0-L[1]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
  m<-m+1;}
#### Beta
LCL<-c(0.192,0.187,0.180,0.189,0.182,0.173,0.185,0.176,0.164,0.177,
0.163,0.144)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}
#### Unit Gamma
LCL<-c(0.191,0.186,0.179,0.189,0.183,0.173,0.185,0.176,0.164,0.177,
0.163,0.145)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
  x<-rsimplex(n,mu,sigma[l])
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*x[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){
  if(Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}
  m<-m+1;}

```

Πίνακας I.16 έως Πίνακας I.18:

```
#### Unit Gamma True
j<-1
k<-1
l<-1
m<-1
n<-5000
N<-10000
mu0<-0.2
RL<-c()
ARL<-c()
SDRL<-c()
MRL<-c()
LCL<-c()
tau<-c(155,155,155,96,96,96,51,51,51,20,20,20)
lambda<-c(0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2,0.05,0.1,0.2)
L<-c(2.105,2.340,2.495,2.096,2.325,2.472,2.084,2.295,2.422,2.052,
2.241,2.325)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
    if(mu!=0.2){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
  VarY<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau[l]))^tau[l]))-mu0)
  LCL[m]<-mu0-L[l]*sqrt((lambda[l]/(2-lambda[l]))*VarY)
for(j in 1:n){
  if(Z[j]<LCL[m]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}
  m<-m+1;}
#### Beta
LCL<-c(0.192,0.187,0.180,0.189,0.182,0.173,0.185,0.176,0.164,0.177,
0.163,0.144)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
```

```

MRL[k]<-median(RL)
k<-k+1;}}
#### Simplex
LCL<-c(0.192,0.187,0.181,0.189,0.183,0.174,0.185,0.177,0.165,0.176,
0.163,0.145)
for(l in 1:12){
  for(mu in seq(0.2,0.12,by=-0.02)){
for(i in 1:N){
  theta<-mu^(1/tau[l])/(1-mu^(1/tau[l]))
  x<-rgamma(n,tau[l],theta)
  y<-exp(-x)
  Z<-rep(0,n)
  Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda[l]*y[t]+(1-lambda[l])*(Z[t-1])}
for(j in 1:n){if(Z[j]<LCL[l]){RL[i]<-j;break}}}}
  ARL[k]<-sum(RL)/N
  SDRL[k]<-sd(RL)
  MRL[k]<-median(RL)
  k<-k+1;}}

```

### Σχήμα 3.1:

```

#### EWMA Two-Sided Control Chart for lambda=0.05
x<-c(0.958,0.909,0.859,0.863,0.811,0.877,0.798,0.855,0.788,0.821,0.830,
0.718,0.642,0.658)
n<-length(x)
mu0<-0.9534
phi0<-48.9387
sigma0<-3.5742
tau0<-2.2798
Var1Y<-(mu0*(1-mu0))/(phi0+1)
EX<-integrate(function(x){x*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX2<-integrate(function(x){(x^2)*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX<-EX$value
EX2<-EX2$value
Var2Y<-EX2-((EX)^2)
Var3Y<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau0))^tau0))-mu0)
LCLb<-c()
UCLb<-c()
LCLs<-c()
UCLs<-c()
LCLg<-c()
UCLg<-c()
lambda<-0.05
L1<-2.484 # L value for Beta and lambda=0.05
L2<-2.492 # L value for Simplex and lambda=0.05
L3<-2.486 # L value for Unit Gamma and lambda=0.05
Z<-rep(0,n)
Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
UCLb<-mu0+L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)
LCLb<-mu0-L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)

```

```

UCLs<-mu0+L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
LCLs<-mu0-L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
UCLg<-mu0+L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
LCLg<-mu0-L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
plot(Z,ylim=c(0.86,0.98),type='o',pch=20,ylab="Proportion of non-
contaminated Peanuts")
abline(h=UCLb,lty=2)
abline(h=LCLb,lty=2)
abline(h=UCLs,lty=1)
abline(h=LCLs,lty=1)
abline(h=UCLg,lty=3)
abline(h=LCLg,lty=3)
legend(1,0.89,legend=c("LCL,UCL - Beta and Unit Gamma (l=0.05)", "LCL,UCL -
Simplex (l=0.05)"),lty=c(2,1),cex=0.8)

```

### Σχήμα 3.2:

```

#### EWMA Two-Sided Control Chart for lambda=0.10
x<-c(0.958,0.909,0.859,0.863,0.811,0.877,0.798,0.855,0.788,
0.821,0.830,0.718,0.642,0.658)
n<-length(x)
mu0<-0.9534
phi0<-48.9387
sigma0<-3.5742
tau0<-2.2798
Var1Y<-(mu0*(1-mu0))/(phi0+1)
EX<-integrate(function(x){x*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX2<-integrate(function(x){(x^2)*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX<-EX$value
EX2<-EX2$value
Var2Y<-EX2-((EX)^2)
Var3Y<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau0))^tau0))-mu0)
LCLb<-c()
UCLb<-c()
LCLs<-c()
UCLs<-c()
LCLg<-c()
UCLg<-c()
lambda<-0.10
L1<-2.756 # L value for Beta and lambda=0.10
L2<-2.873 # L value for Simplex and lambda=0.10
L3<-2.752 # L value for Unit Gamma and lambda=0.10
Z<-rep(0,n)
Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
UCLb<-mu0+L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)
LCLb<-mu0-L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)
UCLs<-mu0+L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
LCLs<-mu0-L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
UCLg<-mu0+L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
LCLg<-mu0-L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
plot(Z,ylim=c(0.82,0.99),type='o',pch=20,ylab="Proportion of non-
contaminated Peanuts")

```



```

abline (h=UCLb, lty=2)
abline (h=LCLb, lty=2)
abline (h=UCLs, lty=1)
abline (h=LCLs, lty=1)
abline (h=UCLg, lty=3)
abline (h=LCLg, lty=3)
legend(1,0.86, legend=c("LCL,UCL - Beta and Unit Gamma (l=0.10)", "LCL,UCL -
Simplex (l=0.10)"), lty=c(2,1), cex=0.8)

```

### Σχήμα 3.3:

```

#### EWMA Two-Sided Control Chart for lambda=0.20
x<-c(0.958,0.909,0.859,0.863,0.811,0.877,0.798,0.855,0.788,
0.821,0.830,0.718,0.642,0.658)
n<-length(x)
mu0<-0.9534
phi0<-48.9387
sigma0<-3.5742
tau0<-2.2798
Var1Y<-(mu0*(1-mu0))/(phi0+1)
EX<-integrate(function(x){x*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX2<-integrate(function(x){(x^2)*dsimplex(x,mu0,sigma0)},lower=0,upper=1)
EX<-EX$value
EX2<-EX2$value
Var2Y<-EX2-((EX)^2)
Var3Y<-mu0*((1/((2-mu0^(1/tau0))^tau0))-mu0)
LCLb<-c()
UCLb<-c()
LCLs<-c()
UCLs<-c()
LCLg<-c()
UCLg<-c()
lambda<-0.20
L1<-3.125 # L value for Beta and lambda=0.20
L2<-3.425 # L value for Simplex and lambda=0.20
L3<-3.125 # L value for Unit Gamma and lambda=0.20
Z<-rep(0,n)
Z[1]<-mu0
for(t in 2:n){Z[t]<-lambda*x[t]+(1-lambda)*(Z[t-1])}
UCLb<-mu0+L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)
LCLb<-mu0-L1*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var1Y)
UCLs<-mu0+L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
LCLs<-mu0-L2*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var2Y)
UCLg<-mu0+L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
LCLg<-mu0-L3*sqrt((lambda/(2-lambda))*Var3Y)
plot(Z,ylim=c(0.75,1),type='o',pch=20,ylab="Proportion of non-contaminated
Peanuts")
abline (h=UCLb, lty=2)
abline (h=LCLb, lty=2)
abline (h=UCLs, lty=1)
abline (h=LCLs, lty=1)
abline (h=UCLg, lty=3)
abline (h=LCLg, lty=3)
legend(1,0.81, legend=c("LCL,UCL - Beta and Unit Gamma (l=0.20)", "LCL,UCL -
Simplex (l=0.20)"), lty=c(2,1), cex=0.8)

```