ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΔΟΥ ΝΤΙΑΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΧΑΛΙΔΙΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΣΑΜΟΣ, ΜΑΡΤΗΣ 2016

Στη μνήμη των πολυαγαπημένων μου,

Αχιλλέα και Χριστόφορο.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών Στατιστικής και Αναλογιστικών- Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Χαλιδιά Νικολάου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Χαλιδιά που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, καθώς και για την βοήθεια που μου προσέφερε όποτε την χρειαζόμουν. Επίσης, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Ιωάννη Σταματίου, ο οποίος έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο στην μελέτη και στην πραγματοποίηση της εργασίας αυτής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους συμφοιτητές και φίλους μου, Ελένη Μπενέκου, Ευτυχία Χολεύα, Μαρία Κόντου, Αντώνιο Πανταζόπουλο και Σπύρο Κάτικα, για όλη τη συνεργασία, την ανταλλαγή ιδεών και την αλληλοβοήθεια. Κυρίως όμως να τους ευχαριστήσω για τις όμορφες αναμνήσεις που μου χάρισαν σε όλο το μεταπτυχιακό έτος.

Ένα ιδιαίτερα μεγάλο ευχαριστώ, στους γονείς μου, για τη στήριξη, την εμπιστοσύνη και όλες τις θυσίες που έκαναν για να ολοκληρώσω τον κύκλο σπουδών μου. Χωρίς αυτούς δε θα είχα την ευκαιρία να εξελιχθώ και να πραγματοποιήσω τα όνειρα μου. Στο σημείο αυτό θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ολόψυχα δυο ανθρώπους που μου στάθηκαν σαν γονείς στην πορεία των μεταπτυχιακών μου σπουδών, τον κ. Σταμάτη Πανταζόπουλο και την κα. Μαίρη Πανταζοπούλου.

Τέλος να ευχαριστήσω την Μαρία Ελευθεριάδου, αδερφή μου και συνάδερφο, για όλη την ψυχολογική υποστήριξη και την βοήθεια που μου παρείχε στην επίλυση μαθηματικών και μη προβλημάτων.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην εργασία **Discrete Time Hedging of the American Option** οι **S. Hussain** και **M. Shashiashvili** ισχυρίστηκαν ότι αν έχουμε οποιαδήποτε **ομοιόμορφη προσέγγιση** της συνάρτησης αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος σε διακριτό χρόνο, μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου. Βασικός σκοπός της εργασίας είναι να εκτιμήσουμε το σφάλμα που προκύπτει στον διακριτό χρόνο μελετώντας την μέγιστη τιμή της απόλυτης διαφοράς της Δ-αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου σε διακριτό χρόνο με την αντίστοιχη σε συνεχή χρόνο. Η παρούσα εργασία είναι οργανωμένη ως εξής. Στο 1^{ο} Κεφάλαιο θα παραθέσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς όσον αφορά την θεωρία των Μαθηματικών, των Πιθανοτήτων, των Χρηματοοικονομικών και των Στοχαστικών Διαδικασιών. Θα αναλύσουμε την κίνηση Brown, το μοντέλο Black-Scholes καθώς και το Διωνυμικό Δέντρο. Στο 2^{ο} Κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στα Αμερικάνικα Δικαιώματα Πώλησης, με μια σύντομη αναφορά στην αποτίμηση τους. Εν συνεχεία, θα διατυπώσουμε το κύριο πρόβλημα που θα μελετήσουμε και θα παραθέσουμε τα πιο βασικά θεωρήματα. Στο 3^{ο} Κεφάλαιο θα υπενθυμίσουμε τις βασικές ιδιότητες της κανονικότητας του Αμερικάνικου Δικαιώματος της συνάρτησης αξίας. Στο 4^{ο} Κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στην αυστηρή απόδειξη των βασικών θεωρημάτων που διατυπώθηκαν στο 2^{ο} Κεφάλαιο. Τέλος, στο παράρτημα, δίνονται οι αποδείξεις δύο θεωρημάτων του 2^{ου} Κεφαλαίου.

1 Βασικές έννοιες

Για να κάνουμε ευκολότερη την μελέτη αυτής της εργασίας θα δώσουμε αρχικά κάποιους βασικούς ορισμούς της θεωρίας των πιθανοτήτων και των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

1.1 Μαθηματικοί Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 Έστω συνάρτηση $f:(a,b)\rightarrow R$ για την οποία υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στο $x_0 \in (a,b)$.

(i) Αν $f''(x_0)>0,\left(f''(x_0)<0\right)$ τότε η f είναι **κυρτή** (κοίλη) στο x_0.

(ii) Αν το x_0 είναι σημείο καμπής τότε $f''(x_0)=0$.

Ορισμός 1.1.2 **Κυρτό Περίβλημα** ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο είναι το μικρότερο κυρτό πολύγωνο P που περικλείει το S. (Ένα σύνολο M είναι κυρτό εάν για κάθε ζεύγος σημείων x,y του M το ευθύγραμμο τμήμα xy ανήκει στο M.)

Ορισμός 1.1.4 Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η f θα είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$ για $a<c<b$ και ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ορισμός 1.1.5 **Θεώρημα Fubini:** Αν η $f: X \times Y \to R$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

Ορισμός 1.1.6 Το **ολοκλήρωμα Riemann** μιας συνάρτησης f μπορεί να γραφεί ως

$$\int_0^t f(x)\,dx = \sup \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1})$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς όλες τις διαμερίσεις $\{t_0 < \ldots < t_n\}$ του $[0,t]$

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η ανάγκη να εκφράσουμε ένα ολοκλήρωμα σε μορφή αθροίσματος

$$\int_0^t D_x dS_x \approx \sum_{i=1}^{[t/h]} D_{(i-1)h}\left(S_{ih} - S_{(i-1)h}\right) \text{ για h πολύ μικρό}$$

Ορισμός 1.1.7 Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f:\Omega \to R$ ικανοποιεί μια **συνθήκη Lipschitz ως προς** y, όταν υπάρχει σταθερά $k>0$ έτσι ώστε για κάθε $(x,y_1)\in\Omega, (x,y_2)\in\Omega$ να ισχύει $\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| < k\left|y_1 - y_2\right|$.

1.2 Θεωρία πιθανοτήτων

Ορισμός 1.2.1 **Πείραμα τύχης** είναι ένα πείραμα στο οποίο δεν ισχύει η σχέση αιτίου- αιτιατού, δηλαδή αδυνατούμε να προσδιορίσουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα.

Ορισμός 1.2.2 **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συνήθως το συμβολίζουμε με Ω.

Ορισμός 1.2.3 Έστω Ω κάποιο σύνολο. Μία **σ-άλγεβρα** $\mathscr{F}$ επάνω στο σύνολο Ω είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $\varnothing \in \mathscr{F}$

ii. $F \in \mathscr{F} \Rightarrow F^c \equiv \Omega \setminus F \in \mathscr{F}$

iii. $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \in \mathscr{F} \Rightarrow \mathrm{A} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i \in \mathscr{F}$

Διαισθητικά σ-άλγεβρα είναι ένα σύνολο γεγονότων.

Ορισμός 1.2.4 Έστω ένα σύνολο Ω και μια σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ που αποτελείται από υποσύνολα του Ω. Το ζεύγος (Ω, $\mathscr{F}$) καλείται **μετρήσιμος χώρος**.

Ορισμός 1.2.5 Ένα **μέτρο πιθανότητας** P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο (Ω, $\mathscr{F}$) είναι μία απεικόνιση $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ με τις ιδιότητες

i. $P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1$

ii. Αν $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \in \mathscr{F}$ και τα $\{\mathrm{A}_i\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Διαισθητικά, το μέτρο πιθανότητας ορίζει το πόσο εύκολα μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός. Το «εύκολα» θα σχετιστεί με έναν αριθμό ο οποίος θα αντιστοιχεί με κάποιο γεγονός, που όπως αναφέραμε νωρίτερα, μεταφράζεται σε κάποιο σύνολο που ανήκει σε μια κατάλληλα επιλεγμένη σ-άλγεβρα.

Ορισμός 1.2.6 Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο Ω, μία σ- άλγεβρρα $\mathscr{F}$ επάνω σε αυτό και ένα μέτρο πιθανότητας P. Η τριάδα $(\Omega, \mathscr{F}, , \mathrm{P})$ ονομάζεται **χώρος πιθανότητας**.

Ορισμός 1.2.7 Η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή Χ είναι μετρήσιμη, αποκαλείται η **σ-άλγεβρα** που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή Χ και συμβολίζεται $\sigma(X)$

Ορισμός 1.2.8 Οι **σ-υποάλγεβρες** $F_i, i \in I$ της F, όπου F μια σ-άλγεβρα επάνω σε ένα σύνολο Ω, ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε υποσύνολο J του I και κάθε σύνολο $A_i \in F_i$ έχουμε

$$P\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} P(A_n)$$

Ορισμός 1.2.9 Οι **τυχαίες μεταβλητές** $X_i, i \in I$ ονομάζονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 1.2.10 Αν θεωρήσουμε τους χώρους μέτρου $(\Omega_i, F_i, \mu_i), i = 1,...,d$, όπου μ_i το μέτρο πιθανότητας, μπορούμε να ορίσουμε το **γινόμενο μέτρο** $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d$ σύμφωνα με τον τύπο

$$(\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_d)(A_1 \times ... \times A_d) = \mu_1(A_1) ... \mu_d(A_d)$$

όπου $A_i \in F_i$ και με $A_1 \times ... \times A_d$ συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A_i. Το γινόμενο μέτρο ορίζεται επάνω στη γινόμενη σ-άλγεβρα $\otimes_i F_i$ η οποία είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα σύνολα της μορφής $A_1 \times ... \times A_k$, $k = 1,...,d$ όπου με το γινόμενο εννούμε εδώ το καρτεσιανό γινόμενο.

Ορισμός 1.2.11 Έστω $(F_t)_{t\in I}$ ένα φιλτράρισμα σε ένα σύλονο Ω, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών. Ένας **Χρόνος Στάσης** σχετικά με το φιλτράρισμα αυτό είναι μία απεικόνιση $\tau : \Omega \to \mathrm{I}$ τέτοια ώστε

$$\{\tau \le t\} \in F_t, \forall t \in I$$

Από τον ορισμό αυτόν είναι φανερό ότι η τ μια τυχαία μεταβλητή. Αν ο χρόνος στάσης $\tau < \infty$, σ.β. λέμε ότι ο τ είναι πεπερασμένος σ.β. Αν ισχύει ότι $\tau \le T < \infty$ τότε λέμε ότι ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος.

Ορισμός 1.2.12 Θα λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει **σχεδόν βέβαια** αν δεν ισχύει μόνο σε ένα σύνολο μέτρου 0.

1.3 Χρηματοαγορές και Δικαίωματα προαίρεσης (Options)

Ορισμός 1.3.1 Ένα χρηματοοικονομικό **περιουσιακό στοιχείο ή τίτλος** είναι μια αξίωση σε κάποιο μελλοντικό εισόδημα (απόδοση). Οι αποδόσεις δεν είναι γνωστές από πριν. Το συμβόλαιο αυτό πωλείται ή αγοράζεται σήμερα και χρησιμοποιείται για την μεταφορά πλούτου σε μελλοντικές χρονικές στιγμές και σε διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου.

Ορισμός 1.3.2 Οι **μετοχές** αντιπροσωπεύουν κεφάλαια που έχουν δοθεί σε μια εταιρεία και για τα οποία δεν υπάρχει νόμιμη δέσμευση επιστροφής τους. Οι κάτοχοι των μετοχών λέγονται μέτοχοι και είναι οι ιδιοκτήτες της εταιρείας.

Ορισμός 1.3.3 Ένα **παράγωγο συμβόλαιο** είναι ένα αξιόγραφο η αξία του οποίου εξαρτάται από τις αξίες άλλων «πιο βασικών» υποκείμενων μεταβλητών. Τα βασικά είδη παραγώγων είναι: Προθεσμιακές συμφωνίες (Forwards, Futures), Δικαιώματα (Options), Ανταλλαγές (Swaps), Εγγυήσεις (Warrants).

Ορισμός 1.3.4 Ένα **χαρτοφυλάκιο** είναι μια συλλογή από τίτλους. Ο αριθμός των τίτλων μπορεί να είναι αρνητικός αν εκφράζει μια θέση πώλησης ή δανεισμού και θετικός αν εκφράζει μια θέση αγοράς. Μαθηματικά ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από Ν τίτλους αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα $x=(x_1,x_2,...,x_N)$, όπου x_i εκφράζει την ποσότητα του τίτλου i που έχουμε στην κατοχή μας.

Ορισμός 1.3.5 **Επανισορρόπηση χαρτοφυλακίου**: Είναι η διαδικασία αλλαγής της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου αναφοράς (benchmark portfolio). Η Επανισορρόπηση γίνεται για να προσαρμοσθεί το χαρτοφυλάκιο στα όρια τήρησης του ή για να εκφρασθεί μια διαφορετική άποψη, όσον αφορά τις μελλοντικές εξελίξεις της αγοράς και να γίνει προσαρμογή του πραγματικού χαρτοφυλακίου χρεογράφων (actual portfolio) σε αυτές τις νέες εξελίξεις.

Ορισμός 1.3.6 Μια στρατηγική (a,b) ονομάζεται **αυτοχρηματοδοτούμενη** αν ισχύει

$$\Pi_{n-1} = a_n S_{n-1} + b_n m_{n-1}, \quad n=1,...,N$$

όπου a_n το πλήθος των μετοχών S_{n-1} και $b_n m_{n-1}$ το χρηματικό ποσο στον τραπεζικό λογαριασμό. Δηλαδή, η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να μεταβληθεί μόνο εξαιτίας των κερδών από την κίνηση των τιμών των χρεογράφων n. (Δεν προστίθεται ή αφαιρείται κανένα εξωτερικό χρηματικό ποσό στο χαρτοφυλάκιο.)

ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΕΣ ΑΞΙΕΣ

Τα υποκείμενα στοιχεία μπορεί να είναι**:** μετοχές, χρηματιστηριακοί δείκτες, συναλλαγματικές ισοτιμίες, χρεόγραφα, εμπορεύματα, futures, κτλ.

Ορολογία

- Το δικαίωμα αγοράς λέγεται call option.
- Το δικαίωμα πώλησης λέγεται put option.
- Αγοραστής των options λέγεται κάτοχος των options.
- Ένα σημαντικό στοιχείο των options είναι το premium, δηλαδή το κόστος τους.
- Όταν οι κάτοχοι των options κάνουν χρήση των συμβολαίων, λέμε ότι εξασκούν το option τους.
- Η τιμή στην οποία ένα συμβόλαιο δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να το πουλήσει ή να το αγοράσει λέγεται τιμή εξάσκησης ή strike price.
- Προσέξτε ότι οι κάτοχοι των options έχουν το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσουν ή να πουλήσουν έναν υποκείμενο τίτλο.
- Αν δεν είναι συμφέρουσα η εξάσκηση του option, ο κάτοχος του μπορεί να εγκαταλείψει τη θέση του.
- Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του option είναι η ημερομηνία λήξης του. Η ημέρα λήξης του option είναι η τελευταία μέρα που μπορεί να εξασκηθεί ή να ανταλλαχθεί το option. Μετά την ημερομηνία αυτή το option παύει να ισχύει.

Συμβολισμοί

T: στιγμή λήξης του συμβολαίου

t: τρέχουσα χρονική στιγμή

S_t: τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t

S_T: τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T

K: τιμή παράδοσης συμβολαίου

ΕΙΔΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

- call option (δικαίωμα αγοράς): ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να αγοράσει την υποκείμενη αξία μέχρι μία (σε) καθορισμένη ημερομηνία σε συγκεκριμένη τιμή
- put option (δικαίωμα πώλησης): ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να πουλήσει την υποκείμενη αξία μέχρι μία (σε) καθορισμένη ημερομηνία σε συγκεκριμένη τιμή

Ένα ***call option (Αμερικάνικου τύπου)*** *επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ* ***μέχρι τη*** *χρονική στιγμή Τ.*

Ένα ***put option (Αμερικάνικου τύπου)*** *επί ενός υποκείμενου στοιχείου Α, με τιμή εξάσκησης Κ και ημερομηνία λήξης Τ, παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο Α στην τιμή Κ μέχρι τη χρονική στιγμή Τ.*

Υποσημείωση

Το option είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε έναν υποκείμενο τίτλο σε μία συγκεκριμένη ή και πριν από αυτή χρονική στιγμή προς μία συγκεκριμένη τιμή.

Ο κάτοχος του δικαιώματος έχει αγοράσει το συμβόλαιο καταβάλλοντας το σχετικό αντίτιμο (premium).

Παρατήρηση 1.3.1. (Εύρεση της αξίας call option Αμερικανικού τύπου). Η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι ίση με την no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου. Αυτό συμβαίνει διότι η βέλτιστη στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι να το ασκήσει κατά την ημερομηνία λήξης του. Πράγματι, αν αποφασίσει να το ασκήσει σε χρόνο $t < T$, τότε θα έχει κέρδος $S_t - K$. Αντίθετα αν στο ίδιο χρόνο t πωλήσει ανοιχτά την υποκείμενη μετοχή (στην τιμή S_t) και κλείσει την ανοιχτή του θέση στον χρόνο T με κόστος $\min\{K, S_T\}$ (είτε ασκεί το δικαίωμα, είτε αγοράζει την μετοχή από την αγορά) τότε θα έχει κέρδος $S_t - min\{K, S_T\} \geq S_t - K$.

Παρατήρηση 1.3.2. (Η αξία ενός put option Αμερικανικού τύπου). Αντίθετα με το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου, η εξάσκηση ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου πριν την ημερομηνία λήξης του μπορεί να αποβεί σε όφελος. Συνεπώς το δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου θα αξίζει περισσότερο από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκού τύπου. Η αξία αυτή δεν είναι εύκολο να δοθεί μέσα από έναν κλειστό τύπο. Για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό του συνήθως χρησιμοποιούνται κατάλληλοι αναδρομικοί τύποι.

Δυνατές θέσεις

- Long call (αγορά)
- Short call (πώληση)
- Long put
- Short put

Έχουμε δύο αντισυμβαλλόμενους, τον αγοραστή και τον πωλητή. Ο αγοραστής πληρώνει ένα ποσό στον πωλητή και αποκτά τη δυνατότητα να εξασκήσει το δικαίωμα κατά το χρόνο εξάσκησης. Ο αγοραστής έχει τη θέση long στο δικαίωμα. Ο πωλητής εισπράττει το ποσό του αγοραστή και είναι υποχρεωμένος να τον ικανοποιήσει εάν αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα. Ο πωλητής είναι σε θέση Short. Το κέρδος του ενός αντισυμβαλλόμενου είναι η ζημιά του άλλου.

Χρήση δικαιωμάτων και επενδυτικά προφίλ

Οι τρόποι με τους οποίους χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο τα Δικαιώματα, αλλά και γενικά τα παράγωγα προϊόντα απαριθμούνται σε τρεις και κατηγοριοποιούνται με βάση τους στόχους και το προφίλ που επιλέγουν οι επενδυτές

1. Αντιστάθμιση κινδύνου
2. Κερδοσκοπία
3. Εξισορροπητική κερδοσκοπία

Αντιστάθμιση κινδύνου

Οι επενδυτές που έχουν ως στόχο τους να περιορίσουν τον κίνδυνο στις επενδύσεις τους συχνά χρησιμοποιούν Δικαιώματα.

Παράδειγμα αντιστάθμισης κινδύνου με Δικαιώματα Προαίρεσης

Έστω ότι τον Μάη του 2016 ένας επενδυτής έχει στο χαρτοφυλάκιο του 1000 μετοχές. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 28$ και ο επενδυτής αναμένει μια πτωτική τάση της για τους επόμενους δύο μήνες. Για να προστατέψει το χαρτοφυλάκιο του με βάση την εκτίμηση του για την τάση της μετοχής μπορεί να αγοράσει 10 Δικαιώματα Πώλησης (put options) με ημερομηνία λήξης τον Ιούλιο με τιμή εξάσκησης 27.50$. Η αγορά αυτού του συμβολαίου του δίνει το δικαίωμα να πουλήσει της 1000 μετοχές του χαρτοφυλακίου με τιμή ανά μετοχή 27.50$. Υποθέτοντας ότι η τιμή του συμβολαίου του δικαιώματος είναι 1$ τότε το συνολικό κόστος ανά συμβόλαιο για την αντιστάθμιση είναι 100$ και επομένως για 10 συνολικά συμβόλαια το κόστος αντιστάθμισης ανέρχεται τελικά στα 1000$. Με βάση λοιπόν αυτή τη στρατηγική εάν η τιμή της μετοχής μεταβεί σε επίπεδα χαμηλότερα της τιμής άσκησης του συμβολαίου (27.50$) τότε ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης με καθαρό κέρδος 26.500$=27.500$-1000$. Στην αντίθετη περίπτωση που η πρόβλεψη του επενδυτή δεν επαληθευτεί, το δικαίωμα πώλησης δεν συμφέρει να ασκηθεί διατηρώντας το κέρδος του πάντα μεγαλύτερο του 26.500$.

1.4 Ορισμός των martingale

Αρχικά ας ορίσουμε μια στοχαστική διαδικασία

<u>*Ορισμός 1.4.1*</u> **Στοχαστική διαδικασία** είναι μια παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P) και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^d$.

Μια στοχαστική διαδικασία είναι λοιπόν συνάρτηση δύο μεταβλητών, της t και της ω.

i. Για κάθε $t \in T$, το οποίο θεωρούμε δεδομένο και σταθερό, έχουμε μια τυχαία μεταβλητή

$$\omega \to X_t(\omega) \quad \omega \in \Omega$$

ii. Θεωρώντας σταθερό $\omega \in \Omega$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$t \to X_t(\omega) \quad t \in T$$

η οποία ονομάζεται **τροχιά** της X_t

<u>*Ορισμός 1.4.2*</u> Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_i$ στο Ω τ.ω. $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1} \subseteq \mathcal{F}$ για κάθε i ονομάζεται **φιλτράρισμα.**

Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)\ t \geq 0$ λέγεται προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $(F_t)\ t \geq 0$ αν για κάθε $t \geq 0$ η X_t είναι F_t-μετρήσιμη.

Διαισθητικά, ένα φιλτράρισμα μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μία αυξανόμενη ροή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Πιο γενικά, F_n^X ορίζεται ως το σύνολο που περιέχει όλα τα πιθανά ενδεχόμενα που μπορούν να πάρουν οι τιμές τις σ.δ. $(X_n) n \in N$ από την χρονική στιγμή 1 μέχρι την στιγμή *n*. Όλη η συλλογή $(F_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται φιλτράρισμα παραγόμενο από την σ.δ. $(X_n) n \in N$.

<u>*Ορισμός 1.4.3*</u> Έστω X_i μια ακολουθία τ.μ. Θα λέμε ότι είναι **martingale** ως προς το φιλτράρισμα $F_1, F_2, \ldots$ αν ισχύουν τα παρακάτω,

i. $E|X_n| < \infty$ για κάθε n
ii. η X_n είναι προσαρμοσμένη στο F_n,
iii. $E(X_{n+1} / F_n) = X_n$ σ.β. για κάθε n.

Ιδιότητα Martingale

<u>*Ορισμός 1.4.4*</u> Μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n) n \in N$ ονομάζεται martingale (MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P αν για κάθε n ∈ N ισχύει ότι:

$$E_P[X_{n+1} \mid F_n] = X_n .$$

Με άλλα λόγια, όταν μια σ.δ. είναι P-MG τότε η αναμενόμενη τιμή της στην επόμενη χρονική στιγμή είναι ίδια με τη τιμή της τελευταίας χρονικής στιγμής (κάτω από το μέτρο P). Δηλαδή, η διαδικάσία δεν αναμένεται να αλλάξει.

$$E_P[X_{n+1} - X_n \mid F_n] = 0$$

Πρόταση 1.4.1 Αν μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n) n \in N$ είναι P-MG, τότε για κάθε $k \le n$ ισχύει ότι:

$$E_P[X_n \mid F_k] = X_k .$$

Ορισμός 1.4.5 Μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n)_{n \in N}$ ονομάζεται:

i. submartingale (sub-MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P αν για κάθε n ∈ N ισχύει ότι:

$$E_P[X_{n+1} \mid F_n] \ge X_n$$

ii. supermartingale (super-MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P αν για κάθε n ∈ N ισχύει ότι:

$$E_P[X_{n+1} \mid F_n] \le X_n .$$

Ορισμός 1.4.6 Μία συνάρτηση T : Ω → [0, ∞] λέγεται χρόνος στάσης ως προς την διήθηση (F_t) $t \ge 0$ αν για κάθε $t \ge 0$ ισχύει $\{T \le t\} \in F$

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι στρίβουμε ένα νόμισμα συνεχώς και ότι κερδίζουμε 1 μονάδα όταν έρχεται Γράμματα ενώ χάνουμε μια μονάδα όταν έρχεται Κορώνα. Έστω ότι ξεκινάμε με 5 μονάδες και αποφασίζουμε εκ των προτέρων ότι θα σταματήσουμε το παιχνίδι μόνον όταν γίνουν 10 μονάδες ή τα χάσουμε όλα. Αν X_n είναι η ποσότητα των μονάδων που έχουμε στο βήμα n τότε ο χρόνος που θα σταματήσουμε το παιχνίδι θα είναι $\tau = \min\{n : X_n = 10 \text{ ή } 0\}$ και ονομάζεται ο χρόνος πρώτης επιτυχίας. *Μπορεί να δείξει κανείς ότι είναι ένας χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα $F_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.* Πράγματι, έχουμε το εξής,

$$\{\tau = n\} = \{0 < X_1 < 10\} \cap \ldots \cap \{0 < X_{n-1} < 10\} \cap \{X_n = 10 \ \text{ή} \ 0\}.$$

Κάθε ενδεχόμενο στο δεξί μέλος ανήκει στην F_n άρα και η τομή τους. Επομένως η τ ικανοποιεί τον ορισμό του χρόνου στάσης.

(Θεώρημα επιλεκτικής στάσης) Έστω $X = (X_t), t \geq 0$ συνεχές martingale και Τ φραγμένος χρόνος στάσης. Τότε $E(X_T) = E(X_0)$.

Θεώρημα 1.4.1 Μια **local martingale** είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι τοπικά martingale, δηλαδή, η διαδικασία X είναι μια local martingale αν υπάρχει μια ακολουθία χρόνων στάσης T_n με $T_n \uparrow \infty$ σχεδόν βεβαίως, $T_n < T$ σχεδόν βεβαίως για $T > 0$ και $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ σ.β. και $X_{t \wedge T_n}$ είναι martingale για κάθε n.

Θεώρημα 1.4.2 Έστω B_t μια **κίνηση Brown** και $F_S = \sigma(B_u, u \leq s)$. Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα F_s

i. B_t
ii. $(B_t)^2 - t$
iii. $M_t^\lambda = \exp\left(\lambda Bt - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$

Ανισότητα Doob

Ορισμός 1.4.7. Έστω $g \in L^2(R_+, R^{d\times m})$, ορισμένη για $t > 0$

$$x(t) = \int_0^t g(s)\,dB(s) \qquad \text{και} \qquad A(t) = \int_0^t |g(s)|^2\,ds$$

τότε για κάθε $p > 0$, υπάρχουν θετικές σταθερές c_p, C_p (που εξαρτώνται από το p) τ.ω.

$$c_p E|A(t)|^{\frac{p}{2}} \leq E\left(\sup_{0\leq s\leq t} |x(s)|^p\right) \leq C_p E|A(t)|^{\frac{p}{2}}$$

για κάθε $t \geq 0$. Πρακτικά,

$$c_p = \left(\frac{p}{2}\right)^p, \quad C_p = \left(\frac{32}{p}\right)^{\frac{p}{2}} \quad \text{αν} \quad 0 < p < 2$$

$$c_p = 1, \quad C_p = 4 \quad \text{αν} \quad p = 2$$

$$c_p = (2p)^{-\frac{p}{2}}, \quad C_p = \left(\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\right)^{\frac{p}{2}} \quad \text{αν} \quad p > 2$$

Ορισμός 1.4.8 **Ανισότητα Holder** για ολοκληρώματα

Έστω ότι f, g : I → R μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, με μη μηδενικά ολοκληρώματα, και p, q > 1 με 1/ p+ 1/q = 1. Τότε

$$\int_I fg dx \le \left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Θεώρημα 1.4.3 Θεώρημα Girsanov

Αλλαγή μέτρου πιθανότητας- Θεώρημα Girsanov

Αν Z είναι μία τ.μ. από έναν χώρο (Ω, F, P) στο $[0,\infty)$ με $E_P(Z_T) = 1$ (και $Z > 0$ με πιθ. 1), τότε η συνολοσυνάρτηση $Q : F \to [0,1]$ που σε κάθε ενδεχόμενο A του F αντιστοιχεί την τιμή

$$Q(A) = \int_A Z dP = \int_\Omega Z I_A dP = E_P(Z \cdot I_A)$$

(όπου $I_A = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν το A πραγματοποιηθεί ή όχι) είναι ένα νέο μέτρο πιθανότητας στον χώρο (Ω, F). Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση, όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη παράγραφο, η τ.μ. Z καλείται πυκνότητα ή Radon-Nikodym παράγωγος του Q ως προς το P, δηλαδή συμβολικά, $Z = dQ/dP$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε τ.μ. X,

$$E_Q(X) = \int X dQ = \int XZ dP = E_P(X \cdot Z)$$

Έστω τώρα ότι ο χώρος (Ω, F, P) είναι εφοδιασμένος και με μια μελλοντική πληροφορία $F_t, t \in [0,T]$. Η στοχαστική ανέλιξη

$$Z_t = E_p(Z \mid F_t), \ t \in [0,T]$$

είναι ένα P-martingale διότι, για $0 \leq s < t \leq T$,

$$E_P\left(Z_t / F_s\right) = E_P\left(E_P\left(Z / F_t\right) / F_s\right) = E_P\left(Z / F_s\right) = Z_s, t \in [0,T]$$

Επίσης ισχύει για $0 \leq s < t \leq T$,

$$E_Q\left(Y / F_s\right) = \frac{1}{Z_s} E_P\left(Y \cdot Z_t / F_s\right)$$

για κάθε τ.μ. Y που είναι $F_t -$ μετρήσιμη.

Θεώρημα Girsanov

Έστω B_t μια P-κίνηση Brown και θ_t είναι F-προβλέψιμη και $E_P\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right\}\right) < \infty$

Ορίζουμε το μέτρο Q ως εξής

$$Z_t = \frac{dQ}{dP} = \exp\left[-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right],$$

Είναι πράγματι $\mathrm{E}_P\left(Z_T\right) = 1$. Τότε τα P, Q είναι ισοδύναμα και η στοχαστική διαδικασία $W_t = B_t + \int_0^t \theta(u)du$ είναι Q-κίνηση Brown αν η Z_t είναι martingale.

1.5 Κίνηση Brown

Διαδικασία Markov

Μία διαδικασία Markov είναι ένας συγκεκριμένος τύπος στοχαστικής διαδικασίας όπου μόνο η παρούσα τιμή της μεταβλητής παίζει ρόλο στην πρόβλεψη του μέλλοντος. Η παρελθοντική ιστορία της μεταβλητής και ο τρόπος με τον οποίο το παρόν προκύπτει από το παρελθόν είναι ανεξάρτητα. Οι τιμές μετοχών συνήθως ακολουθούν μια διαδικασία Markov. (Θα την αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.)

Κίνηση Brown ή Διαδικασία Wiener

Η διαδικασία Wiener αποτελεί ένα συγκεκριμένο τύπο της στοχαστικής διαδικασίας Markov, με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 ανά έτος.

Ορισμός 1.5.1 Μια μεταβλητή z ακολουθεί μια Wiener διαδικασία όταν ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες

1. Η μεταβολή του Δz κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt είναι $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ όπου το ε ακολουθεί κανονική κατανομή $\varphi(0,1)$
2. Οι τιμές του Δz για δύο οποιαδήποτε διαφορετικά χρονικά διαστήματα Δt είναι ανεξάρτητες.

Από την πρώτη ιδιότητα προκύπτει ότι το Δz ακολουθεί και αυτό κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

Η δεύτερη ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μεταβλητή z ακολουθεί διαδικασία Markov.

Η μεταβολή της τιμής του z κατά την διάρκεια ενός σχετικά μεγάλου χρονικού διαστήματος T μπορεί να συμβολιστεί ως $z(T)-z(0)$. Η μεταβολή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε N πολύ μικρά χρονικά διαστήματα Δt όπου

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Άρα

$$z(T)-z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

όπου τα ε_i, i=1,2,…N είναι κατανεμημένα $\varphi(0,1)$. Από την δεύτερη ιδιότητα της διαδικασίας Wiener γνωρίζουμε ότι τα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνεπώς από την εξίσωση $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ προκύπτει ότι το $z(T)-z(0)$ είναι κανονικά κατανεμημένο με μέση τιμή 0 και διασπορά T. (βλ. Παράδειγμα 13.1, John C. Hull- Options, Futures and Other Derivatives)

Λέμε ότι μια διαδικασία $\{\mathrm{X}_t,\ t \geq 0\}$ είναι Wiener εάν

α. $\{\mathrm{X}_t,\ t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

β. Η X_t είναι κανονική $\forall t \geq 0$.

γ. $\mathrm{E}(X_t) = 0 \ \ \forall t \geq 0$.

δ. $P\left(X_0 = 0\right) = 1$ δηλαδή $X_0 = 0$ με πιθανότητα 1.

Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Η μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου μιας στοχαστικής διαδικασίας ονομάζεται drift rate ενώ η διασπορά ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται variance rate. Η διαδικασία Wiener, dz, έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Έστω τώρα η εξίσωση:

$$dx = adt + bdz$$

όπου a και b σταθερές.

Για να κατανοήσουμε την προηγούμενη εξίσωση, θα εξετάσουμε τα δύο μέλη της δεξιάς πλευράς ξεχωριστά. Ο όρος adt δηλώνει ότι το x έχει μια αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής a ανά μονάδα χρόνου. Χωρίς τον όρο bdz, η εξίσωση $dx = adt$, δηλαδή $\frac{dx}{dt} = a$. Ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο παίρνει τη μορφή:

$$x = x_0 + at,$$

όπου το x_0 είναι η τιμή του x την στιγμή 0. Για μια περίοδο T, η μεταβλητή x αυξάνεται κατά aT. Ο όρος bdz μπορεί να θεωρηθεί ως η μεταβλητότητα στο μονοπάτι που θα ακολουθήσει η τιμή του x. Η μεταβλητότητα αυτή είναι b φορές μια διαδικασία Wiener. Μια διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα 1. Επομένως b φορές μια διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα b. Για μικρά διαστήματα Δt, η μεταβολή Δx δίνεται από τις εξισώσεις $dx = adt + bdz$ και $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Όπου όπως και πριν το ε ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Συνεπώς το Δx ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $a\Delta t$ και διασπορά $b^2\Delta t$.

<u>*Ορισμός 1.5.2*</u> Έστω $\left(\Omega, F, P, \left(Ft\right)\right)$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Υπάρχει στοχαστική διαδικασία W_t, η οποία ονομάζεται κίνηση Brown με τις εξής ιδιότητες,

i. $W_0 = 0$ σχεδόν βεβαίως,
ii. η W_t είναι F_t προσαρμοσμένη και συνεχής,
iii. για $0 \le s < t$ η τ.μ. $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(0, t-s\right)$ και είναι ανεξάρτητη από την F_s.

Διαδικασία Itô

Είναι δυνατόν να οριστεί ακόμη ένας τύπος στοχαστικής διαδικασίας γνωστός ως διαδικασία Itô. Η διαδικασία Itô είναι μια γενικευμένη διαδικασία Wiener της οποίας όμως οι παράμετροι a και b είναι συναρτήσεις των υποκείμενων μεταβλητών x και t. Μια διαδικασία Itô μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά ως εξής:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Τόσο ο ρυθμός μεταβολής όσο και η διασποράς μιας διαδικασίας Itô μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Σε ένα μικρό διάστημα μεταξύ t και $t+\Delta t$ η μεταβλητή μεταβάλλεται από x σε $x+\Delta x$ όπου:

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Η παραπάνω σχέση είναι προσεγγιστική. Γίνεται η υπόθεση ότι η μέση τιμή και η διασπορά του x παραμένουν σταθερά στο χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$.

<u>*Ορισμός 1.5.3*</u> Μια στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται διαδικασία Itô αν έχει την μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dWs$$

Όπου $b(t) \in L^2, a(s) \in L^1$ και X_0 είναι F_0-μετρήσιμη.

Διαδικασία της τιμής της μετοχής

Η γενικευμένη διαδικασία Wiener δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τιμή των μετοχών καθώς η μέση τιμή και η διασπορά της δε μπορούν να θεωρηθούν σταθερά. Αντίθετα πρέπει να αντικατασταθούν από σταθερό ποσοστό κέρδους. Εάν S είναι η τιμή της μετοχής σε χρόνο t τότε ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής του S μπορεί να θεωρηθεί ίσος με μS για κάποια σταθερη παράμετρο μ. Αυτό σημαίνει ότι για ένα μικρό διάστημα Δt το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους είναι $\mu S\Delta t$. Η παράμετρος μ αποτελεί το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της μετοχής, εκφρασμένο σε δεκαδική μορφή. Εάν η μεταβλητότητα της μετοχής είναι πάντα μηδενική, τότε το μοντέλο υποδηλώνει ότι:

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

και καθώς το $\Delta t \to 0$ έχουμε

$$dS = \mu S dt \quad \text{ή} \quad \frac{dS}{S} = \mu dt$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο από 0 μέχρι Τ προκύπτει:

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

Όπου S_T και S_0 είναι οι τιμές της μετοχής για χρόνο Τ και 0. Η προηγούμενη εξίσωση δείχνει ότι όταν ο ρυθμός μεταβλητότητας της ποσοστιαίας απόδοσης για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι ο ίδιος ανεξαρτήτως της τιμής της μετοχής. Συνεπώς η τυπική απόκλιση της μεταβολής της τιμής της μετοχής για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt θα πρέπει να είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής. Έτσι προκύπτει το μοντέλο:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \, .$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί το πιο διαδεδομένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο ανάλυσης συμπεριφοράς της τιμής των μετοχών. Η μεταβλητή μ εκφράζει το αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης της μετοχής.

Μοντέλο Διακριτού Χρόνου

Το μοντέλο ανάλυσης της συμπεριφοράς της τιμής μετοχών που αναπτύχθηκε παραπάνω είναι γνωστό ως γεωμετρική κίνηση Brown. Η εκδοχή διακριτού χρόνου για το μοντέλο αυτό είναι η εξής:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Το ΔS εκφράζει την μεταβολή της τιμής της μετοχής, S, για μικρό χρονικό διάστημα Δt, ενώ το ε ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομη. Η παράμετρος μ εκφράζει το ποσοστό απόδοσης της μετοχής ανά μονάδα χρόνου και η παράμετρος σ είναι η μταβλητότητα της τιμής τιης μετοχής. Για την συνέχεια υποθέτουμε ότι οι παράμετροι αυτές είναι σταθερές.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης εκφράζει την απόδοση της μετοχής για μικρό χρονικό διάστημα Δt. Ο όρος $\mu\Delta t$ είναι η αναμενόμενη αξία της απόδοσης αυτής και ο όρος $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ αποτελεί το στοχαστικό όρο της απόδοσης. Η διασπορά του στοχαστικού αυτού όρου είναι $\sigma^2\Delta t$. Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το $\frac{\Delta S}{S}$ είναι κανονικά κατανεμημένο με μέσο $\mu\Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Με άλλα λόγια $\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$.

1.6 Μοντέλο Black-Scholes

Το μοντέλο των Black-Scholes είναι ένα μοντέλο σε συνεχή χρόνο για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων και αποτελεί μια προσπάθεια να αποτυπωθεί η πραγματική κίνηση των μετοχών. Μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η γενίκευση του διωνυμικού μοντέλου, που θα δούμε στην συνέχεια, αν θεωρήσουμε ότι η χρονική διάρκεια μεταξύ συναλλαγών $\delta t \to 0$ και ο αριθμός των περιόδων συναλλαγής $N \to \infty$ αλλά κατά τέτοιο τρόπο ώστε $T = N\delta t$ να είναι πεπερασμένο. Το Τ δίνει το χρονικό διάστημα στο οποίο γίνονται οι συναλλαγές, για παράδειγμα Τ=1 σημαίνει ένα έτος. Το μοντέλο προϋποθέτει ότι η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα ακολουθεί κανονική κατανομή. Ορίζουμε ως μ την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ανά έτος και σ την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής ανά έτος.

Η μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής στο χρονικό διάστημα Δt είναι $\mu\Delta t$ και η τυπική της απόκλιση είναι $\sigma\sqrt{\Delta t}$, έτσι ώστε:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$

όπου ΔS είναι η μεταβολή της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt και $\varphi(m,s)$ συμβολίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διασπορά s.

Γνωρίζουμε ότι

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \varphi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

(βλ. παρ. 13.7, John C. Hull -Options, Futures and Other Derivatives)

Ή αλλιώς

$$\ln\frac{S_T}{S_0} \sim \varphi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

ή

$$\ln S_T \sim \varphi\left(\ln S_0\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

Η λογαριθμο- κανονική ιδιότητα των τιμών των μετοχών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λήψη πληροφοριών σχετικά με την κατανομή πιθανότητας του σύνθετου ρυθμού απόδοσης στο χρονικό διάστημα από 0 εώς Τ. Ορίζοντας το σύνθετο ρυθμό απόδοσης της μετοχής ως x προκύπτει:

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

$$x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$$

Επειδή η $\ln\frac{S_T}{S_0} \sim \varphi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$ έχουμε ότι $x \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right)$

Συνεπώς ο σύνθετος ρυθμός απόδοσης ανά έτος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$. Καθώς το Τ αυξάνεται η τυπική απόκλιση του x μειώνεται.

Διαφορική εξίσωση Black–Scholes–Merton

Είδαμε ότι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την συμπεριφορά της τιμής κάποιας μετοχής είναι

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Ας υποθέσουμε ότι v είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς εξαρτώμενη από την τιμή S της μετοχής. Η μεταβλητή v θα πρέπει να είναι συναρτήση των S και t. Συνεπώς από την διαδικασία Itô προκύπτει

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\mu S + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial v}{\partial S}\sigma S dz$$

Αντίστοιχα σε διακριτή μορφή

(1.6.1) $$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

Και

(1.6.2) $$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\mu S + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial v}{\partial S}\sigma S \Delta z$$

όπου ΔS και Δv οι μεταβολές των S και v για μικρό χρονικό διάστημα Δt και $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$. Συνεπώς επιλέγοντας ένα χαρτοφυλάκιο από τη μετοχή και το δικαίωμα προαίρεσης, η διαδικασία Wiener μπορεί να παραλειφθεί.

Έστω ότι ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου έχει θέση πώλησης στο δικαίωμα προαίρεσης και θέση αγοράς στις μετοχές. Ορίζεται ως Π η αξία του χαρτοφυλακίου.

Άρα

(1.6.3) $$\Pi = -v + \frac{\partial v}{\partial S} S$$

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου ΔΠ σε χρονικό διάστημα Δt είναι:

(1.6.4) $$\Delta\Pi = -\Delta v + \frac{\partial v}{\partial S}\Delta S$$

Από τις προηγούμενες εξισώσεις (1.6.1),(1.6.2) και (1.6.4) προκύπτει

(1.6.5) $$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t$$

Αφού η εξίσωση δεν περιλαμβλάνει τον όρο Δz, το χαρτοφυλάκιο είναι ακίνδυνο στο χρονικό διάστημα Δt. Με βάση τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να παρουσιάζει στιγμιαία την ίδια απόδοση με οποιοδήποτε άλλο αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο. Εάν αυτό το ποσοστό απόδοσης είναι μεγαλύτερο, ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε εύκολα να αποκομίσει κέρδος χωρίς κίνδυνο δανειζόμενος χρήματα και αγοράζοντας το χαρτοφυλάκιο. Εαν η απόδοση είναι μικρότερη τότε αποκομίζει κέρδος λαμβάνοντας θέση πώλησης στο χαρτοφυλάκιο και αγοράζοντας τα ακίνδυνα αξιόγραφα. Συνεπώς:

(1.6.6) $$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Όπου r το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Αντικαθιστώντας από τις εξισώσεις (1.6.6),(1.6.5) και (1.6.3) προκύπτει

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(v - \frac{\partial v}{\partial S}S\right)\Delta t$$

Έτσι ώστε

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rS\frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rv$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton. Η εξίσωση έχει πολλές λύσεις για κάθε παράγωγο το οποίο μπορεί να εξαρτάται από το S ως υποκείμενη αξία.

Για ένα δικαίωμα αγοράς θέτουμε $V = \max\left(S - L, 0\right)$, ενώ για ένα δικαίωμα πώλησης θέτουμε $V = \max\left(L - S, 0\right)$ για $t = T$.

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης L και λήξη T, την χρονική στιγμή t (t<T) είναι

$$\mathrm{C(t,S) = SN(d_1)\text{-}Le^{(-r(T-t))}N(d_2)}$$

όπου

$$\mathrm{d_1} = \frac{\ln(S/L) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\mathrm{d_2} = \mathrm{d_1} - \sigma\sqrt{T - t}$$

όπου r είναι η απόδοση του βέβαιου τίτλου και σ είναι η μεταβλητότητα. Με $N(d)$ συμβολίζουμε την αθροιστική κανονική κατανομή.

Η τιμή του δικαιώματος πώλησης μιας μετοχής με τιμή εξάσκησης L και λήξη T, την χρονική στιγμή t (t<T) δίνεται από τη σχέση

$$P(t,S) = -SN(-d_1) + Le^{(-r(T-t))}N(-d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S/L) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

1.7 Το Δ

Το ελληνικό γράμμα Δ εκφράζει την μεταβολή της τιμής του παραγώγου V (t, S) με την μεταβολή της τιμής της μετοχής (την ίδια χρονική στιγμή). Μαθηματικά γράφουμε ότι

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Το Δ για το δικαίωμα αγοράς και πώλησης μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από τον τύπο Black-Scholes. Κάνοντας πράξεις προκύπτει

$$\Delta_{Call}(t,S) = N(d_1)$$

$$\Delta_{Put}(t,S) = N(d_1) - 1$$

Το Δ είναι πολύ σημαντικό γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από το παράγωγο και την μετοχή και το οποίο κάθε χρονική στιγμή θα είναι ουδέτερο ως προς τις πιθανές μεταβολές της τιμής της μετοχής. Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο δε θα περιέχει κίνδυνο. Η ερμηνεία του Δ είναι ουσιαστικά ο αριθμός των μονάδων μετοχής που πρέπει να έχει στην κατοχή του όποιος έχει πουλήσει / αγοράσει ένα παράγωγο συμβόλαιο έτσι ώστε η συνολική του θέση να μην έχει κίνδυνο.

1.8 Διωνυμικά Δέντρα

Μια χρήσιμη και δημοφιλής τεχνική για την τιμολόγιση των Δικαιωμάτων είναι το Διωνυμικό Δέντρο. Είναι ουσιαστικά ένα διάγραμμα με πιθανές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος. Η βασική μας υπόθεση είναι ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο με ορισμένη πιθανότητα να κινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

1.8.1 Διωνυμικό Δέντρο μιας περιόδου χωρίς ευκαιρίες arbitrage

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή της μετοχής είναι S_0 και ένα δικαίωμα πάνω στην μετοχή με τρέχουσα τιμή f. Το δικαίωμα λήγει τη στιγμή Τ και κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος η μετοχή μπορεί είτε να ανέβει, S_0u με $u > 1$, είτε να πέσει στο S_0d με $d < 1$. Αν η τιμή της μετοχής ανέβει θα συμβολίζουμε την απόδοση του δικαιώματος f_u, διαφορετικά με f_d. Ας φανταστούμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με μια θέση long στην μετοχή και μια θέση short στο δικαίωμα. Υπολογίζουμε την αξία που κάνει το χαρτοφυλάκιο ακίνδυνο. Αν η μετοχή κινηθεί προς τα πάνω η αξία του χαρτοφυλακίου στη λήξη του δικαιώματος θα είναι

$$S_0u\Delta - f_u .$$

Ενώ αν κινηθεί προς τα κάτω θα είναι

$$S_0d\Delta - f_d .$$

Οι δύο σχέσεις είναι ίσες όταν

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

$$\text{ή όταν } \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}.$$

Στην περίπτωση αυτή το χαρτοφυλάκιο είναι ακίνδυνο, δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage. Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι το Δ είναι ο λόγος της μεταβολής της τιμής της μετοχής. Αν συμβολίσουμε το risk-free επιτόκιο με r, η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\left(S_0 u\Delta - f_u\right)e^{-rT}.$$

Το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου είναι $S_0\Delta - f$ άρα έχουμε ότι

$$S_0\Delta - f = \left(S_0 u\Delta - f_u\right)e^{-rT}$$

$$\text{ή ότι } f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}.$$

Αντικαθιστώντας το Δ έχουμε

$$f = S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}\right)(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} \qquad \text{ή}$$

$$f = \frac{f_u\left(1 - de^{-rT}\right) + f_d\left(ue^{-rT} - 1\right)}{u - d} \qquad \text{ή}$$

(1.8.1.1) $$f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p) f_d\right]$$

όπου (1.8.1.2) $$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

1.8.2 Διωνυμικό Δέντρο δύο περιόδων

Στο μοντέλο αυτό θα έχουμε δύο περιόδους. Το μόνο που θα προσθέσουμε είναι πως στην δεύτερη περίοδο αν η τιμή της μετοχής ανέβει δεδομένου ότι ανέβηκε και την πρώτη περίοδο θα συμβολίζουμε το δικαίωμα με f_{uu}, κ.ο.κ. εφόσον ο χρόνος μας από Τ έχει γίνει Δt θα έχουμε

$$f = e^{-r\Delta t}\left[pf_u + (1-p) f_d\right] \qquad \text{όπου} \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Υπολογίζοντας τη τιμή του δικαιώματος από το τέλος προς την αρχή όπως πριν προκύπτουν οι σχέσεις

$$f_u = e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + (1-p)\, f_{ud} \right]$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}\left[pf_{ud} + (1-p)\, f_{dd} \right]$$

$$f = e^{-r\Delta t}\left[pf_u + (1-p)\, f_d \right]$$

1.8.3 Risk-neutral Αποτίμηση

Η αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου δηλώνει ότι κατά την αποτίμηση ενός παραγώγου-δικαιώματος υποθέτουμε ότι οι επενδυτές δεν αυξάνουν την αναμενόμενη απόδοση από μια επένδυση για να αντισταθμίσουν τον αυξημένο κίνδυνο. Η πραγματική αγορά φυσικά δεν είναι ουδέτερου κινδύνου. Όσο μεγαλύτερος κίνδυνος υπάρχει όμως τόσο μεγαλύτερη απόδοση αναμένεται. Παρόλα αυτά φαίνεται πως τιμολογώντας ένα δικαίωμα σε έναν κόσμο με ουδέτερο κίνδυνο έχουμε κάνει ίδια τιμολόγιση με αυτή του πραγματικού κόσμου.

Τα δικαιώματα είναι ριψοκίνδυνες επενδύσεις. Επηρεάζεται όμως η τιμή τους ανάλογα με τον κίνδυνο που παίρνουμε; Η αλήθεια είναι πως τιμολογούμε ένα δικαίωμα με βάση την τιμή της υποκείμενης μετοχής, συνεπώς ο κίνδυνος δεν την επηρεάζει. Όσο περισσότερο κίνδυνο αναλαμβάνουν οι επενδυτές τόσο η τιμή της μετοχής μειώνεται, όμως οι τύποι που αφορούν το δικαίωμα πάνω σε μια μετοχή παραμένουν ίδιοι.

Ένας κόσμος ουδέτερου κινδύνου έχει δύο στοιχεία που απλοποιούν την τιμολόγιση των παραγώγων:

1. Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής είναι το risk-free επιτόκιο
2. Το προεξοφλημένο επιτόκιο που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το αναμενόμενο κέρδος ενός δικαιώματος είναι το risk-free επιτόκιο

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (1.8.1.1) $f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p)\, f_d \right]$, που είδαμε νωρίτερα, η παράμετρος p ερμηνεύεται ως η πιθανότητα της ανοδικής κίνησης σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου ενώ αντίστιχα η 1-p είναι η πιθανότητα καθοδικής κίνησης. Η έκφραση $pf_u + (1-p)\, f_d$ δηλώνει την αναμενόμενη μελλοντική απόδοση του δικαιώματος σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου και η εξίσωση (1.8.1.1) δηλώνει ότι η αξία του δικαιώματος σήμερα είναι η μελλοντική αναμενόμενη απόδοση προεξοφλημένη με το risk-free επιτόκιο σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Όταν, λοιπόν, το p συμβολίζει την πιθανότητα της ανόδου της τιμής της μετοχής, η αναμενόμενη τιμή της, $E\left(S_T\right)$, σε χρόνο T δίνεται από την σχέση

$$E\left(S_T\right) = pS_0u + \left(1-p\right)S_0d \quad \text{ή} \quad E\left(S_T\right) = pS_0\left(u-d\right) + S_0d$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.8.1.2) έχουμε ότι $E\left(S_T\right) = S_0e^{rT}$

Αυτό μας δείχνει ότι η τιμή της μετοχής αυξάνεται, κατά μέσο όρο, με το risk-free επιτόκιο όταν p η πιθανότητα ανόδου. Με άλλα λόγια, η τιμή της μετοχής συμπεριφέρεται όπως ακριβώς περιμένουμε να συμπεριφέρεται σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου όταν p η πιθανότητα ανόδου.

Το μέτρο P αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας στον «*πραγματικό κόσμο*» ενώ το Q αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «*κόσμο ουδετέρου ρίσκου*»

1.8.4 Το Αμερικάνικο Δικαίωμα

Στο σημείο αυτό θα δούμε πως τιμολογείται ένα Αμερικάνικο Δικαίωμα με βάση το διωνυμικό δέντρο. Η βασική ιδέα είναι να δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, εξετάζοντας σε κάθε σημείο αν η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος είναι η βέλτιστη λύση. Η αξία του Αμερικάνικου Δικαιώματος τη στιγμή της λήξης είναι ίδια με αυτή του Ευρωπαϊκού. Σε χρονικά σημεία πριν την λήξη η αξία του δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από

1. Την αξία που δίνεται από την συνάρτηση $f_u = e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + \left(1-p\right)f_{ud}\right]$
2. Την απόδοση από την πρόωρη εξάσκηση

Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε μια μετοχή που κοστίζει 50$ και ένα Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 52$. Θεωρούμε ότι, σε κάθε βήμα, έχει 20% πιθανότητα να ανέβει και 20% να πέσει η τιμή της μετοχής. Δηλαδή, για $u = 1.2, d = 0.8, r = 0.05$ και $\Delta t = 1$. Εύκολα υπολογίζουμε την τιμή

$$p = \frac{e^{0.05\times1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

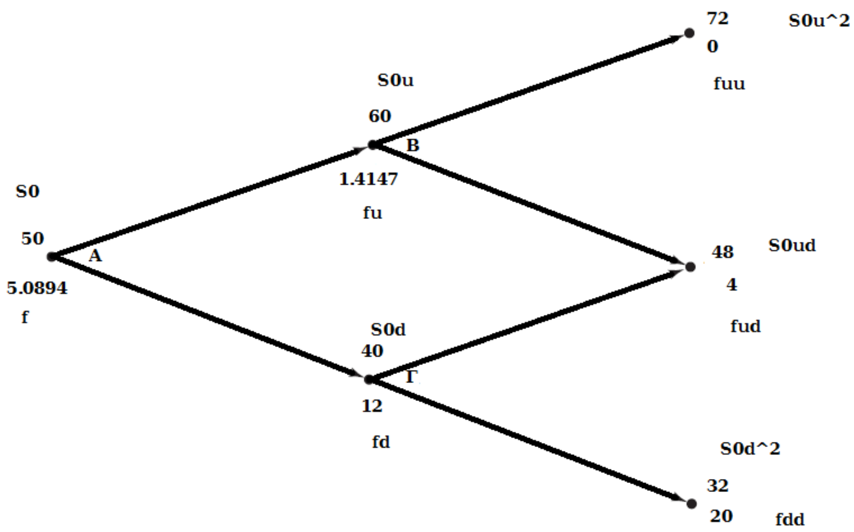
Οι τιμές f_{uu}, f_{ud} και f_{dd} υπολογίζονται εύκολα από τον τύπο της τιμής του δικαιώματος στην λήξη, για παράδειγμα το f_{dd} υπολογίζεται ως εξής

$$\max\left(K - S_T, 0\right) = \max\left(52 - 32, 0\right) = 20$$

Στο σημείο Β η εξίσωση της f_u δίνει την τιμή 1.4147, ενώ η πρόωρη εξάσκηση είναι αρνητική, $K - S_{t_1} = 52 - 60 = -8$, επομένως δεν θα ήταν η βέλτιστη λύση. Στο σημείο Γ η εξίσωση της f_d δίνει την τιμή 9.4636, όπου η απόδοση της πρόωρης εξάσκησης δίνει την τιμή 12. Στο σημείο αυτό η πρόωρη εξάσκηση θα ήταν η βέλτιστη λύση. Στο σημείο Α η τιμή που δίνει η εξίσωση της f_u είναι

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + (1-p)\, f_{ud} \right] \\ &= e^{-0.05\times 1}\left(0.6282\times 1.4147 + 0.3718\times 12\right) \\ &= 5.0894 \end{aligned}$$

Και η απόδοση της πρόωρης εξάσκησης είναι 2. Επομένως ούτε σε αυτήν την περίπτωση η πρόωρη εξάσκηση είναι η βέλτιστη λύση. Η αξία του δικαιώματος είναι 5.0894$.



Κεφάλαιο 2

Το προβλήμα της αποτίμησης του αμερικανικού δικαιώματος έχει απασχολήσει τους ερευνητές πάνω από το ένα τέταρτο του αιώνα. Στο μοντέλου τιμολόγησης ισορροπίας του Samuelson, McKean (1965) έδειξαν ότι το *optimal stopping problem*, που σκοπό έχει να προσδιορίσει τη τιμή του αμερικάνικου διακιώματος, θα μπορούσε να μετατραπεί σε ένα *free boundary problem*. Λίγο αργότερα, οι Black and Scholes (1973) και ο Merton (1973) ανέπτυξαν μια πιο ικανοποιητική θεωρία αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, χρησιμοποιώντας το arbitrage ως βασικό επιχειρήμα. Ο Merton έδειξε ότι ενώ η μεθοδολογία των Black-Scholes για Ευρωπαϊκό δικαίωμα αποτιμά τα αμερικάνικα call (προαίρεσης) δικαιώματα σε μη διαιρουμενες μετοχές, δεν μπορεί να αποτιμήσει αμερικάνικα put (πώλησης) δικαιώματα. Παρατήρησε επίσης ότι οι λύσεις McKean θα μπορούσαν να προσαρμοστούν στην αποτίμηση του Αμερικανικου δικαιώματος πώλησης αντικαθιστώντας το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της υποκείμενης μετοχής με το ακίνδυνο επιτόκιο *(riskless rate*). Η μέθοδος αυτή προανήγγειλε την μετέπειτα ανάπτυξη του μοντέλου ουδέτερου κινδύνου *(risk-neutral pricing)* των Cox και Ross (1976) και την τεχνική του ισοδύναμου μέτρου martingale των Harrison και Kreps (1979) και των Harrison και Pliska (1981). Η εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας στο optimal stopping problem για το αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης μελετήθηκε από τους Bensoussan (1984) και Καρατζάς (1988). Ενώ το optimal stopping approach είναι περισσότερο γενικό και διαισθητικό και δεν οδήγησε σε αποτελέσματα αποτίμησης.

2.1 Αποτίμηση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης

Ένα αμερικάνικο δικαίωμα είναι εκείνο κατά το οποίο ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να το ασκήσει στην ημερομηνία λήξης ή πριν από την ημερομηνία λήξης. Ο κάτοχος ενός put έχει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην καθορισμένη τιμή εξάσκησης.

2.1.1 Η εξίσωση αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black-Scholes

Υποθέτουμε το μοντέλο της τέλειας αγοράς, με συνεχή διαπραγμάτευση, δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, με σταθερό επιτόκιο r > 0, και η τιμή S του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η μετοχή, θεωρείται ότι ακολουθεί διαδικασία κίνησης Brown (ή Wiener διαδικασία):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

στο χρονικό διάστημα [0, T]. Σε αυτή την εξίσωση, μ > 0 και σ > 0.

Έστω ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής, με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T. Έστω V_t η αξία του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t ∈ [0, T]. Για κάθε χρονική στιγμή t ∈ [0, T], υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της μετοχής, B_t, κάτω από την οποία το δικαίωμα πρέπει να ασκείται πριν τη λήξη του.

$$\text{Αν } S_t \le B_t, \text{ τότε } V_t = \max[0, K-S_t]$$

$$\text{Και αν } S_t > B_t, \text{ τότε } V_t > \max[0, K-S_t].$$

Το σύνορο εξάσκησης είναι η εξέλιξη των κρίσιμων τιμών της μετοχής συναρτήσει του χρόνου, B_t, t ∈ [0, T]. Το σύνορο αυτό είναι ανεξάρτητο από την τρέχουσα τιμή της μετοχής S_0 και είναι μια ομαλή, μη φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου που καταλήγει στην τιμή εξάσκησης , δηλαδή $B_T = K$. Η τιμή πώλησης είναι επίσης μια συνάρτηση, συμβολίζεται με $V(S,t)$, με πεδίο ορισμού $D \equiv (S,t) \in [0, \infty) \times [0,T]$ στην μη αρνητική πραγματική ευθεία. Το σύνορο εξάσκησης B_t, t∈[0,T], χωρίζει την περιοχή D στην περιοχή $S \equiv [0, B_t] \times [0, T]$ και στην $C \equiv (B_t, \infty) \times [0, T]$. Η πρώτη μας εξίσωση υποδεικνύει ότι στην διακριτή περιοχή S, η συνάρτηση της τιμής πώλησης $V(S,t)$ ισούται με την τιμή εξάσκησης του, max [0, K - S]. Αντίθετα, η ανισότητα στην επόμενη εξίσωση, στη συνεχή περιοχή, υποδηλώνει πως το δικαίωμα πώλησης αξίζει περισσότερο "ζωντανό" από ότι "νεκρό". Δεδομένου ότι το αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης δίνεται από την πρώτη σχέση αν η τιμή της μετοχής ξεκινάει στη διακριτή περιοχή, θα θεωρούμε ότι το δικαίωμα είναι "ζωντανό" την στιγμή της εξάσκησης, δηλαδή $S_0 > B_0$.

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S}$ και $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ υπάρχουν και ικανοποιούν την εξίσωση των Black-Scholes στη συνεχή περιοχή C, δηλαδή

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} - rV(S,t) + \frac{\partial V(S,t)}{\partial t} = 0$$

για $(S,t) \in C$.

Αυτή η διαφορική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Χρειάζεται να επιβάλλουμε κάποιες οριακές συνθήκες. Η ανάλυση του McKean υποθέτει ότι η συνάρτηση της αξίας του δικαιώματος $V(S,t)$ και το σύνορο εξάσκησης B_t μπορούν να λύσουν το ανοιχτό συνοριακό πρόβλημα. Το αμερικάνικο put δικαίωμα $V(S,t)$ απαιτείται να ικανοποιεί τα εξής

$$V(S, T) = \max[0, K - S]$$

$$\lim_{S \uparrow \infty} V(S, t) = 0$$

$$\lim_{S \downarrow B_t} V(S, t) = K - B_t$$

$$\lim_{S \downarrow B_t} \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} = -1$$

2.2 Διατύπωση του προβλήματος και δήλωση κυρίων αποτελεσμάτων

Είναι γνωστό ότι για να γίνει σωστή αντιστάθμιση στην πώληση ενός δικαιώματος πρέπει να διαπραγματεύεται σε συνεχή χρόνο, κάτι που είναι αδύνατον να συμβεί στην πραγματικότητα. Η τέλεια αντιστάθμιση απαιτεί τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου της συνάρτησης αξίας του δικαιώματος Αμερικάνικου τύπου, στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, η αναλυτική μορφή της περισσότερες φορές έχει πρακτική σημασία.

Στην εργασία Discrete Time Hedging of the American Option οι S. Hussain και M. Shashiashvili ισχυρίστηκαν ότι αν έχουμε οποιαδήποτε ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος σε διακριτό χρόνο, μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου. Θα εκτιμήσουμε το σφάλμα που προκύπτει στον διακριτό χρόνο αφαιρώντας την Δ-αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου σε διακριτό από την αντίστοιχη στον συνεχή χρόνο.

Έτσι, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το αντίστοιχο σφάλμα που προκύπτει στον διακριτό χρόνο και οδηγεί στην πλήρη αιτιολόγηση της μεθόδου αντιστάθμισης που χρησιμοποιήσαμε για την φθίνουσα κυρτή συνάρτηση απόδοσης. Αυτή η μέθοδος βασίζεται ουσιαστικά σε έναν νέο τύπο τετραγωνικής εκτίμησης των παραγώγων για κάποια τυχαία κυρτή συνάρτηση. Ο τύπος αυτός βρέθηκε πρόσφατα από τον Shashiashvili (2005).

Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω,F,P^R) και μια κίνηση Brown $B=(B_t)_{0\le t\le T}$ σε αυτόν. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος T είναι πεπερασμένος και ο συμβολισμός P^R αντιστοιχεί στο μέτρο πιθανότητας των πραγματικών. Συμβολίζουμε με $F^B = (F_t^B)_{0\le t\le T}$ την επαύξηση του φυσικού φίλτρου της κίνησης Brown με P^R το μηδενικό μέτρο της F .

Έστω χώρος πιθανότητας προσαρμοσμένος σε φιλτράρισμα (Ω,F,F_t^B,P^R). Υποθέτουμε χρηματοοικονομική αγορά με δύο στοιχεία, τον τραπεζικό λογαριασμό $(m_t)_{0\le t\le T}$ και την μετοχή $(S_t)_{0\le t\le T}$, όπου m_t υποδηλώνει την τιμή της αγοράς χρήματος ανά μονάδα τη στιγμή t και S_t η τιμή της μετοχής ανά απόθεμα τη στιγμή t. Η δύναμη αυτών των τιμών υπακούει την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση

(2.2.1)

$$dm_t = r(t)m_t dt\,, \qquad m_0 = 1\,,\quad 0 \le t \le T$$

$$dS_t = b(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dB_t\,, \qquad S_0 > 0\,,\quad 0 \le t \le T$$

Υποθέτουμε ότι, $(b(t), F_t^B)_{0\le t\le T}$ είναι συγκεκριμένη προοδευτικά μετρήσιμη στοχαστική διαδικασία, $r(t)$ το ντετερμινιστικά χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο και $\sigma(t)$ η διακύμανση είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, συναρτήση του χρόνου που ικανοποιούν τις συνθήκες:

(2.2.2)

$$0 \le r(t) \le \bar{r}\,,\ |b(t)| \le \bar{r}\,, \qquad 0 < \underline{\sigma} \le \sigma(t) \le \bar{\sigma}$$

(2.2.3)

$$|r(t) - r(s)| \le K\,|t-s|\,, \qquad |\sigma(t) - \sigma(s)| \le K\,|t-s|\,,$$

όπου $s, t\epsilon[0,T]$ και $\bar{r}, \bar{\sigma}, \underline{\sigma}$, K κάποιες θετικές σταθερές.

Υποθέτουμε $g(x), x \ge 0$ μια μη-αρνητική, φθίνουσα κυρτή συνάρτηση απόδοσης για την οποία ισχύει $g(0) = g(0+)$. Έστω ένα Αμερικάνικο put δικαίωμα με $g(x) = (L-x)^+$, όπου L μια ορισμένη θετική σταθερά. Για να γίνει τέλεια αντιστάθμιση σε συνεχή χρόνο ο κάτοχος του δικαιώματος πρέπει να υπολογίσει την Δ- αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου, που σημαίνει ότι για αυθαίρετο t πρέπει να έχει υπό την κατοχή του $D(t) = \dfrac{\partial v(t, S_t)}{\partial x}$ μονάδες του υποκείμενου τίτλου, όπου $v(t,x)$ η συνάρτηση αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος και $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ η μερική παράγωγος της ως προς x.

Όμως η τέλεια αντιστάθμιση σε συνεχή χρόνο απαιτεί τη συνεχή επανισορρόπηση του χαρτοφυλακίου, κάτι που είναι αδύνατον στην πράξη.

Στην πραγματικότητα, ο δικαιούχος διαπραγματεύεται μόνο σε συγκεκριμένες στιγμές σε διακριτό χρόνο στις οποίες και επανισορροπεί το χαρτοφυλάκιο του. Να σημειωθεί ότι η Δ- αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου, όπως προαναφέραμε, απαιτεί την γνώση της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ της συνάρτησης αξίας $v(t,x)$, όμως στην πράξη ούτε η αναλυτική της μορφή ούτε η μορφή της μερικής παραγώγου της είναι άγνωστη στις περισσότερες περιπτώσεις του προβλήματος αποτίμησης ενός Αμερικάνικου Δικαιώματος. (*Αρκετές μέθοδοι επινοήθηκαν για τον υπολογισμό της* *αξίας ενός Αμερικάνικου Δικαιώματος. Μερικές από αυτές είναι: η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, βλ. Glowinski, Lions, and Tremolieres (1981), Wilmott, Dewynne, and Howison (1993), and Jaillet, Lamberton, and Lapeyre (1990). Η τάξη σύγκλισης της ομοιόμορφης προσέγγισης στη συνάρτηση αξίας του προβλήματος βέλτιστης στάσης, που δίνει, για την ίδια χρονική στιγμή, την τάξη σύγκλισης της ομοιόμορφης προσέγγισης της αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος (Jakobsen (2003), θεώρημα 2.6 και πρόταση 3.6.*))

Υποθέτουμε τώρα την ομοιόμορφη προσέγγιση $v_h(t,x)$, της άγνωστης συνάρτησης αξίας $v(t,x)$ του Αμερικάνικου Δικαιώματος, η οποία είναι συνεχής στο x σε ομοιόμορφη διαμέριση χρόνου $t_k = k\cdot\Delta$, $\Delta = \dfrac{T}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$,

όπου h μια ορισμένη μικρή παράμετρος που υποδεικνύει το σφάλμα της προσέγγισης.

Ας υποθέσουμε ότι το ακόλουθο φράγμα ισχύει ομοιόμορφα ως προς k, $k = 0,1,\ldots,n$

(2.2.4)

$$\sup_{x\geq 0} | v_h(t_k,x) - v(t_k,x) | \leq C\cdot h\,.$$

Εδώ το C υποδηλώνει θετική σταθερά, συναρτήσει των $\bar{r},\bar{\sigma},\underline{\sigma},\mathrm{K},T$ και την συνάρτηση απόδοσης g(x).

<u>*Ορισμός 2.2.2*</u> Η συνάρτηση απόδοσης είναι κυρτή συνάρτηση g, ορισμένη στο $(0,\infty)$ και έχει μονόπλευρη φραγμένη παράγωγο, η οποία είναι $$\left\|g'(x\pm)\right\| \leq C \quad \forall x > 0$$ για θετική σταθερά C. Ένα Αμερικάνικο δικαίωμα είναι ένα συμβόλαιο με απολαβή $g(S(T))$ τη στιγμή T. Για παράδειγμα ένα put με $g(x) = (L-x)^+$, όπου L η τιμή εξάσκησης. Η αξία του δικαιώματος είναι κάθε προσαρμοσμένη διαδικασία $\{V(t), 0\leq t\leq T\}$ που ικανοποιεί την $$V(T) = g(S(T))$$

Εύλογα υποθέτουμε ότι:

$$v_h(T,x)=g(x).$$

(Όταν εισάγουμε ένα νέο αξιόγραφο αυτό δεν είναι απαραίτητα παράγωγο πάνω στην μετοχή, ωστόσο από την στιγμή που κρατάμε μόνο δύο ενδεχόμενα πιθανά στον χρόνο T = 1 τότε κάθε αξιόγραφο μπορεί να γραφτεί σαν παράγωγο πάνω στην μετοχή, δηλαδή να γραφτεί ως $V_1 = g(S_1)$, όπου g μια απλή συνάρτηση.)

Παρακάτω περιγράφουμε τη μέθοδο αντιστάθμισης. Για κάθε συνάρτηση $v_h(t_{k-1},x)$, $x\ge 0$, $k=1,2,...,n$ εξετάζουμε πρώτα το ελάχιστο κυρτό περίβλημα $\breve{v}_h(t_{k-1},x)$, $x\ge 0$, $k=1,2,...,n$ με αριστερή μερική παράγωγο

(2.2.5)

$$\varphi_h(t_{k-1},x)=\frac{\partial\breve{v}_h(t_{k-1},x^-)}{\partial x},\quad x>0,\quad k=1,2,...,n$$

Συνεπώς η Δ- αντιστάθμιση, $D_{\Delta,h}(t)$, $0\le t<T$, σε διακριτό χρόνο μπορεί να οριστεί με τον ακόλουθο τύπο

(2.2.6)

$$D_{\Delta,h}(t)=\begin{cases}0, & \alpha\nu\quad 0\le t\le t_1\\ \varphi_h\left(t_{k-1,}S_{t_{k-1}}\right) & \alpha\nu\quad t_{k-1}\le t<t_k, k=2,3,...,n\end{cases}$$

Η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αντιστάθμιση διακριτού χρόνου σαν προσέγγιση της άγνωστης Δ-αντιστάθμισης σε συνεχή χρόνο $D(t)=\varphi(t,S_t),0\le t<T$, όπου $\varphi(t,x)=\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x},x>0,0\le t<T$.

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε κάποια βοηθητικά στοιχεία για τη συνέχεια της εργασίας.

Υπόθεση 2.2.1 Έστω m ο τραπεζικός λογαρισμός και S η τιμή της μετοχής ορισμένα σε χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) με φιλτράρισμα $\{F(t), 0 \le t \le T\}$. Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$m(t) = e^{\int_0^t r(u)du},$$

$$dS(t) = S(t)\left[r(t)dt + \sigma(t)dB(t)\right],$$

Όπου $\{B(t), 0 \le t \le T\}$ μια κίνηση Brown με φιλτράρισμα $\{F(t), 0 \le t \le T\}$, r το χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο που ικανοποιεί την $\int_0^T |r(t)|dt < \infty$, σ η μη-αρνητική χρονικά μεταβαλλόμενη διακύμανση με φιλτράρισμα $\{F(t), 0 \le t \le T\}$ και ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^T \sigma^2(t)dt < \infty$ σ.β. Τέλος , υποθέτουμε ότι η local martingale διαδικασία

$$\frac{S(t)}{m(t)} = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u)du\right\}, \quad 0 \le t \le T$$

είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale και S/m είναι martingale και ισχύει

$$E\frac{S^2(t)}{m^2(t)} < \infty, \quad 0 \le t \le T .$$

Ορισμός 2.2.1 Η διαδικασία του χαρτοφυλακίου $\{D(t), 0 \le t \le T\}$ είναι φραγμένη προσαρμοσμένη διαδικασία. Δίνει αρχική αξία χαρτοφυλακίου $\Pi_\Delta(0)$, η αυτοχρηματοδοτούμενη αξία του χαρτοφυλακίου έχει λύσει τη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\Pi_\Delta(t) = r(t)\left[\Pi_\Delta(t) - D(t)S(t)\right]dt + D(t)dS(t)$$

όπου

$$\Pi_\Delta(t) = m(t)\left[\Pi_\Delta(0) + \int_0^t D(u)d\left(\frac{S(u)}{m(u)}\right)\right].$$

Ας ανακαλέσουμε την σχέση μεταξύ αντιστάθμισης, σε διακριτό χρόνο, με την αντίστοιχη αυτοχρηματοδότηση της αξίας του χαρτοφυλακίου. Έστω ότι ο κάτοχος ξεκινάει με αρχικό κεφάλαιο $\Pi(0) = v(0, S_0)$ και επαναπροσδιορίζει το χαρτοφυλάκιο κάθε χρονική στιγμή $t_k, k = 1, 2....n-1,$ μετακινείται από την προηγούμενη θέση της μετοχής και του τραπεζικού λογαριασμού σε μια νέα θέση, άρα έχουμε, $D_{\Delta,h}(t_k)$ απόδοση μετοχών και επενδύουμε το υπόλοιπο της αξίας του χαρτοφυλακίου $(\Pi_{\Delta,h}(t_k) - D_{\Delta,h}(t_k) \cdot S_{t_k})$ στον τραπεζικό λογαρισμό. Εδώ το $\Pi_{\Delta,h}(t), 0 \le t \le T$ δηλώνει την διαδικασία τιμής της αντιστάθμισης του χαρτοφυλακίου σε διακριτό χρόνο και από τον ορισμό 2.2.1 αντικαθιστώντας στην σχέση

$$\Pi_\Delta(t) = m(t)\left[\Pi_\Delta(0) + \int_0^t \Delta(u) d\left(\frac{S(u)}{m(u)}\right)\right]$$

το $m(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$ και το $\dfrac{S(u)}{m(u)} = S(u)e^{-\int_0^t r(u)du} = \tilde{S}_u$

βλέπουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

(2.2.7)

$$\Pi_{\Delta,h}(t) = \exp\left[\int_0^t r(u)du\right]\left(\Pi(0) + \int_0^t D_{\Delta,h}(u) d\,\tilde{S}_u\right), 0 \le t \le T$$

όπου $\tilde{S}_t = \exp\left[-\int_0^t r(u)du\right] S_t, 0 \le t \le T$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής ανά αξιόγραφο τη στιγμή t.

Παρόμοια αναπαράσταση ισχύει στην περίπτωση της Δ-αντιστάθμισης χαρτοφυλακίου, σε συνεχή χρόνο, αξίας $\Pi(t)$ όπου,

(2.2.8)

$$\Pi(t) = \exp\left[\int_0^t r(u)du\right]\left(\Pi(0) + \int_0^t D(u) d\,\tilde{S}_u\right), 0 \le t \le T$$

Τότε το σφάλμα λόγω της αντιστάθμισης του Αμερικάνικου Δικαιώματος που γίνεται σε διακριτό χρόνο είναι

(2.2.9) $$E^R \sup_{0\le t\le T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t)-\Pi(t)\right| =$$

$$E^R \sup_{0\le t\le T}\left|\exp\left[\int_0^t r(u)du\right]\int_0^t \left(D_{\Delta,h}(u)-D(u)\right)d\tilde{S}_u\right|, 0\le t\le T$$

όπου E^R δηλώνει μια μαθηματική προσδοκία ως προς το πραγματικό μέτρο πιθανότητας.

Ο στόχος της εργασίας είναι να εκτιμήσουμε το παραπάνω σφάλμα. Για να γίνει αυτό πρέπει από το παραπάνω μέτρο να περάσουμε στο risk-neutral μέτρο πιθανότητας P, με συγκεκριμένο τρόπο κάνοντας χρήση του θεωρήματος Girsanov.

Στην πράξη, για αυθαίρετο $C \in F_T^B$ ορίζουμε το μέτρο

(2.2.10) $$P(C)=\int_C Z_T dP^R, \quad \text{όπου}$$

$$Z_t=\exp\left[-\int_0^t \theta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 du\right], 0\le t\le T$$

και $\theta_t=\dfrac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)}$ είναι η αποκαλούμενη τάση.

Είναι γνωστό πως για μια αυθαίρετη, τυχαία μεταβλητή $Y(\omega)$, $Y(\omega)\sim F_T^B$ τέτοια ώστε $EY^2<\infty$, ισχύει ο ακόλουθος τύπος αλλαγής

(2.2.11) $$E^R Y = E(Z_T^{-1}Y),$$

ο οποίος από ανισότητα Holder γράφεται και

$$E^R Y \le \left(EZ_T^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(EY^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

Επειδή $Z_{\mathrm{T}}^{-2}=\exp\left[2\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u dB_u+\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u^2 du\right]$

$$=\exp\left[2\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u dB_u-\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}4\theta_u^2 du+3\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u^2 du\right]$$

Παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$$E\left(Z_{\mathrm{T}}^{-2}\right)=E\left(e^{2\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u dB_u-\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}4\theta_u^2 du}e^{3\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u^2 du}\right)$$

$$=1\cdot E\left(e^{3\int_0^{\mathrm{T}}\theta_u^2 du}\right)$$

$$\leq \exp\left[3\left(\frac{4\overline{r}^2}{\underline{\sigma}^2}\mathrm{T}\right)\right].$$

Συνεπώς

$$EZ_T^{-2}\leq \exp\left(12\frac{\overline{r}^2}{\underline{\sigma}^2}T\right),$$

επομένως προκύπτει η εκτίμηση

$$E^R Y\leq \exp\left(6\frac{\overline{r}^2}{\underline{\sigma}^2}T\right)\left(EY^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την εκτίμηση αυτή στο σφάλμα της αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο, εξίσωση (2.2.9), έτσι έχουμε

$$E^R\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t)-\Pi(t)\right|$$

$$=E^R\sup_{0\leq t\leq T}\left|\exp\left[\int_0^t r(u)du\right]\int_0^t\left(D_{\Delta,h}(u)-D(u)\right)d\tilde{S}_u\right|$$

$$\leq \exp\left(\overline{r}T\right)E^R Y$$

$$\leq \exp\left(\overline{r}T\right)\exp\left(6\frac{\overline{r}^2}{\underline{\sigma}^2}T\right)\left(EY^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς έχουμε

(2.2.12)

$$E^R \sup_{0\le t\le T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t)-\Pi(t)\right| \le \exp\left(\bar{r}T+6\frac{\bar{r}^{2}}{\underline{\sigma}^{2}}T\right)\left[E\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t\left(D_{\Delta,h}(u)-D(u)\right)d\tilde{S}_u\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Από το ίδιο θεώρημα Girsanov γνωρίζουμε ότι η στοχαστική διαδικασία

(2.2.13)

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_u du,\ \ 0\le t\le T$$

είναι μια διαδικασία Wiener που υπακούει στο νέο risk- neutral μέτρο πιθανότητας P και στο ίδιο φιλτράρισμα $F^B = \left(F_t^B\right)_{0\le t\le T}$.

Ως εκ τούτου η σ.δ. της τιμή της μετοχής $S_t = S_0 \exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t\right\}$

ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση, κάτω από το μέτρο πιθανότητας P

(2.2.14)

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t,\ \ S_0>0,\ \ 0\le t\le T$$

Συμβολίζουμε με $F=\left(F_t\right)_{0\le t\le T}$ την αύξηση του φυσικού φίλτρου $\left(F_t^W\right)_{0\le t\le T}$ από P-μηδενικό μέτρο F_t^B. Τότε είναι προφανές ότι, η διαδικασία της τρέχουσας τιμής της μετοχής $\left(\tilde{S}_t, F_t\right)_{0\le t\le T}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale, δηλαδή,

$$E\left(\int_0^t \tilde{S}_u^2\, du\right) < \infty \text{ για κάθε } t\in\left[0,T\right]$$

κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, και ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$d\tilde{S}_t = \sigma(t)\tilde{S}_t\, dW_t, \quad \tilde{S}_0 = S_0 > 0 .$$

Έτσι η στοχαστική διαδικασία $\left(\int_0^t \left(D_{\Delta,h}(u) - D(u)\right) d\tilde{S}_u, F_t\right)_{0\le t\le T}$ είναι local martingale και για την ακρίβεια είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale (θα το κατανοήσουμε καλύτερα στο Κεφ. 4)

Συνεπώς, από την maximal Doob's ανισότητα και από την Σ.Δ.Ε $d\tilde{S}_t = \sigma(t)\tilde{S}_t\, dW_t$ έχουμε

(2.2.15)

$$E \sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t \left(D_{\Delta,h}(u) - D(u)\right) d\tilde{S}_u\right)^2$$

$$\le 4E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u) - D(u)\right)^2 \sigma^2(u) \exp\left[-2\int_0^u r(v)dv\right] S_u^2 du$$

Με βάση την (2.2.12) και την (2.2.15) έχουμε αποκτήσει την αρχική εκτίμηση του σφάλματος της αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο

(2.2.16)

$$E^R \sup_{0\le t\le T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t) - \Pi(t)\right|$$

$$\le 2\bar{\sigma} \exp\left(\bar{r}T + 6\frac{\bar{r}^2}{\underline{\sigma}^2}\mathrm{T}\right)\left[E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u) - D(u)\right)^2 S_u^2 du\right]^{\frac{1}{2}}$$

Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην εκτίμηση του τελευταίου τετραγωνικού ολοκληρώματος κάτω από το risk- neutral μέτρο πιθανότητας P. Για το σκοπό αυτό, η υπόθεση της κυρτότητας της συνάρτησης απόδοσης $g(x)$ φαίνεται να είναι ζωτικής σημασίας. Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι, για τα Ευρωπαϊκά όσο και τα Αμερικάνικα δικαιώματα, με κυρτές αποδόσεις $g(x)$, οι αντίστοιχες συναρτήσεις αξίας $v(t,x)$ είναι επίσης κυρτές συναρτήσεις του x για τυχαίες χρονικές στιγμές

$t,\ \ 0 \le t \le T$. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε έναν νέο τύπο του τετραγωνικού ολοκληρώματος για τον συντελεστή βαρύτητας που εκτιμά την παράγωγο από τα αριστερά μιας αυθαίρετης κυρτής συνάρτησης.

(Τα *θεωρήματα 2.2.1 και 2.2.2 που διατυπώνονται παρακάτω και αποδεικνύονται στο Παράρτημα, θεωρούνται βασικές τεχνικές για την απόκτηση του επιθυμητού σφάλματος της αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο που θα εκτιμηθεί από το σφάλμα της συνάρτησης αξίας*).

Εισάγουμε την οικογένεια μη αρνητικών και δυο φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων βαρύτητας $H(x),\ \ 0 < x < \infty$ που πληρούν τις εξής προϋποθέσεις

(2.2.17) $$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} H(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} H'(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} H'(x) = 0$$

(2.2.18) $$\int_0^\infty |H''(x)| dx < \infty,$$

(το οποίο το εννοούμε ως το όριο $\lim\limits_{\substack{\delta \to 0+ \\ b \to \infty}} \int_\delta^b |H''(x)| dx$).

Θεώρημα 2.2.1 *Για αυθαίρετες μη αύξουσες και κάτω φραγμένες κυρτές συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ που ορίζονται στο $[0,\infty)$, και $\forall$ μη αρνητική , δυο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση βαρύτητας $H(x),\ \ 0 < x < \infty$, που ικανοποιεί τις συνθήκες (2.2.17) και (2.2.18) ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

(2.2.19)

$$\int_0^\infty \left(f_1'(x-) - f_2'(x-) \right)^2 H(x) dx \le \sup_{x \ge 0} \left| f_1(x) - f_2(x) \right|$$
$$\times \left[\frac{1}{2} \sup_{x \ge 0} \left| f_1(x) - f_2(x) \right| + \sup_{x \ge 0} \left| f_1(x) + f_2(x) \right| \right] \int_0^\infty |H''(x)| dx,$$

όπου $f_i'(x-),\ \ x > 0,\ \ i = 1,2$ δηλώνει την παράγωγο από τα αριστερά της κυρτής συνάρτησης $f_i(x),\ \ i = 1,2$.

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω $F(x)$ μη αύξουσα και κάτω φραγμένη από άγνωστη κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την συνεχή προσέγγιση της $F_h(x),\ x\geq 0$. Θα εξετάσουμε το ελάχιστο κυρτό περίβλημα $\breve{F}_h(x)$ της συνάρτησης $F_h(x)$. Στη συνέχεια για την άγνωστη παράγωγο $F'(x-),\ x>0$ από τα αριστερά και την παράγωγο $\breve{F}_h'(x-),\ x>0$ από τα αριστερά ,ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

(2.2.20)

$$\int_0^\infty \left(\breve{F}_h'(x-)-F'(x-)\right)^2 H(x)dx \leq \sup_{x\geq 0}\left|F_h(x)-F(x)\right|$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\sup_{x\geq 0}\left|F_h(x)-F(x)\right|+\sup_{x\geq 0}\left|F_h(x)\right|+\sup_{x\geq 0}\left|F(x)\right|\right]\int_0^\infty \left|H''(x)\right|dx,$$

όπου $H(x),\ 0<x<\infty$, είναι οποιαδήποτε, μη αρνητική, δυο φορές διαφορίσιμη και συνεχής συνάρτηση βαρύτητας που ικανοποιεί τις συνθήκες (2.2.17) και (2.2.18).

Εισάγουμε μια ενδιάμεση αντιστάθμιση $D_\Delta(t),\ 0\leq t\leq T,$ σε διακριτό χρόνο μέσω της Δ-αντιστάθμισης $D(t)$ σε συνεχή χρόνο ως εξής

(2.2.21) $\quad D_\Delta(t)=D(t_{k-1}),\quad$ αν $t_{k-1}\leq t\leq t_k,\quad k=1,2,...,n.$

Θεώρημα 2.2.3 *Έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση*

(2.2.22) $$E\int_0^T \left(D_\Delta(u)-D(u)\right)^2 S_u^2 du \leq \alpha\cdot\ln\frac{T}{\Delta}\cdot\Delta$$

αν $\Delta=\dfrac{T}{n}\leq 1,\quad n=2,3,...,$ όπου α είναι μια θετική σταθερά συναρτήσει των $\bar{r},\underline{\sigma},\bar{\sigma},\mathrm{T},\mathrm{K},g(0)$.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής βασίζεται στις ιδιότητες της κανονικότητας της συνάρτησης αξίας, $v(t,x)$, του Αμερικάνικου Δικαιώματος, όπως ορίζεται στο Jaillet et al (1990) και αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 4.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της εργασίας, που δηλώνει την εκτίμηση του σφάλματος της αντιστάθμισης (2.2.9).

Θεώρημα 2.2.4 *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση απόδοσης $g(x)$ είναι μη αρνητική μη αύξουσα κυρτή συνάρτηση και υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομοιόμορφα συνεχής προσέγγιση $v_h(t,x)$ στο x, της συνάρτησης αξίας $v(t,x)$ του Αμερικάνικου Δικαιώματος στη ομοιόμορφη διαμέριση χρόνου, $t_k = k\cdot\Delta,\quad \Delta=\frac{T}{n},\ n=2,3,...,$ $k=0,1,...,n$, που ικανοποιεί το φράγμα (2.2.4)*

Στη συνέχεια για το σφάλμα αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση

$$\text{(2.2.23)}\qquad E^R \sup_{0\le t\le T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t)-\Pi(t)\right| \le \overline{C}\left(\ln\frac{T}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}(h+\Delta)^{\frac{1}{2}},$$

αν $\Delta=\frac{T}{n}\le 1,\ \ h\le 1,$ *όπου* $\overline{C}$ *μια θετική σταθερά συναρτήσει των* $\bar{r},\underline{\sigma},\overline{\sigma},\mathrm{T},\mathrm{K},g(0)$ *και* C.

Παρατήρηση 2.2.1 Οι παράμετροι h και Δ πρέπει να είναι εξαρτώμενοι για την τελευταία εκτίμηση. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, $\Delta=h^{\mu},\ \ \mu>0$ ή $h=\Delta^{\nu},\ \ \nu>0$, τότε το δεξί σκέλος της (2.2.23) τείνει στο μηδέν διότι $\ln\frac{T}{\Delta}\cdot\Delta$ και $\ln\frac{T}{\Delta}\cdot h$ συγκλίνουν στο μηδέν.

Το μοντέλο που μελετάμε περιορίζεται στην περίπτωση ντετερμινιστικής μεταβλητότητας και στην μη αύξουσα συνάρτηση απολαβής. Οι υποθέσεις αυτές μας δίνουν ομοιόμορφα φραγμένες μερικές παραγώγους της συνάρτησης αξίας, που είναι το κρίσιμο στοιχείο για την θέσπιση των βασικών αποτελεσμάτων, θεωρήματα (2.2.3) και (2.2.4)

Κεφάλαιο 3

Στην ενότητα αυτή, θα υπενθυμίσουμε μερικά γνωστά αποτελέσματα σχετικά με την κανονικότητα της συνάρτησης αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος (βλ. Jaillet et al, 1990).

Στην εργασία θα δηλώνουμε ως $\left(F_u\right)_{0\le u\le T}$ την αύξηση του φυσικού φίλτρου $\left(F_u^w\right)_{0\le u\le T}$.

3.1 Ιδιότητες ομαλότητας της συνάρτησης αξίας του Αμερικάνικου Δικαιώματος

Η συνάρτηση αξίας $v(t,x),\ x\ge 0,\ 0\le t\le T$, ενός Αμερικάνικου Δικαιώματος, μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση αξίας των χρόνων στάσης (βλ. Karatzas και Shreve 1998, παράγραφος 2.5). Συγκεκριμένα, έχουμε:

(3.1.1) $$v(t,x)=\sup_{\tau\in T_{t.T}} E\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(v)dv\right)g\left(S_\tau(t,x)\right)\right],\ \ x\ge 0,\ \ 0\le t\le T,$$

όπου $T_{t.T}$ δηλώνει το σύνολο όλων των $\left(F_u\right)_{0\le u\le T}$ χρόνων στάσης τ τ.ω. $t\le\tau\le T$ και η διαδικασία $S_u(t,x),\ \ t\le u\le T$, είναι η λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

(3.1.2) $$dS_u(t,x)=r(u)S_u(t,x)du+\sigma(u)S_u(t,x)dW_u,\ \ t\le u\le T$$

με αρχική κατάσταση $S_t(t,x) = x, \;\; x > 0$

Εύκολα, βλέπουμε ότι, η μοναδική λύση της εξίσωσης $\left(S_u(t,x), F_u\right)_{t\le u\le T}$ δίνεται από την έκθεση

(3.1.3) $$S_u(t,x) = x\exp\left[\int_t^u\left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + \int_t^u \sigma(v)dW_v\right], \;\; t \le u \le T.$$

Ας δούμε τώρα την νέα στοχαστική διαδικασία $\left(X_u(t,y), F_u\right)_{t\le u\le T}$

(3.1.4) $$X_u(t,y) = y + \int_t^u\left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + \int_t^u \sigma(v)dW_v, \;\; t \le u \le T, \;\; -\infty < y < \infty$$

Συνεπώς, αν $x > 0$, τότε

(3.1.5) $$S_u(t,x) = \exp\left(X_u(t, \ln x)\right), \;\; t \le u \le T,$$

Και για αυθαίρετο χρόνο στάσης τ τ.ω. $t \le \tau \le T$ έχουμε

$$g\left(S_\tau(t,x)\right) = \psi\left(X_\tau(t, \ln x)\right),$$

όπου $\psi(y) = g(e^y), \;\; -\infty < y < \infty$, είναι η νέα συνάρτηση απόδοσης.

Ας καθορίσουμε την αντίστοιχη επιλεκτική στάση με βάση την παραπάνω σχέση

(3.1.6) $$u(t,y) = \sup_{\tau\in T_{t,T}} E\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(v)dv\right)\psi\left(X_\tau(t,y)\right)\right]$$

Με $0 \le t \le T$ και $-\infty < y < \infty$ τότε οι συναρτήσεις αξίας (3.1.1) και (3.1.6) σχετίζονται με την ακόλουθη ισότητα

(3.1.7) $$v(t,x) = u(t, \ln x), \;\; x > 0, \;\; 0 \le t \le T$$

<u>*Λήμμα 3.1.1*</u> *Έστω $g(x), \;\; x \ge 0$ μια μη αρνητική, μη αύξουσα, κυρτή συνάρτηση. Τότε η νέα συνάρτηση απολαβής $\psi(y) = g(e^y), \;\; -\infty < y < \infty$ είναι Lipschitz συνεχής. Δηλαδή,*

(3.1.8) $$\left|\psi(y_2) - \psi(y_1)\right| \le g(0)\left|y_2 - y_1\right|, \;\; y_1, y_2 \in (-\infty, \infty).$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα 3.6 και το πόρισμα 3.7 που απορρέει από το Jaillet et al (1990). Το θεώρημα αναφέρεται στην ύπαρξη των ασθενών μερικών παραγώγων: $\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}$, $\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}$ της συνάρτησης αξίας $u(t,y)$ από την επιλεκτική στάσης (3.1.6) οι οποίες ανοίκουν στο $[0,T)\times R$. Η μερική παράγωγος $\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}$ είναι συνεχής στο $(t,y),\ 0\le t\le T,\ -\infty<y<\infty$.

Επιπλέον, οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν σχεδόν παντού στο $[0,T)\times R$ (κάτω από το γινόμενο μέτρο $dt\times dy$)

(3.1.9)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,y)}{\partial t}+\frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}+\left(r(t)-\frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}-r(t)u(t,y)\le 0 \\ \\ \frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}-\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\ge 0 \end{cases}$$

Από τις ανισότητες, προκύπτει η ακόλουθη διπλή-ανίσωση

(3.1.10) $$\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\le\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\le\frac{2}{\underline{\sigma}^2}\left[-\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}-\left(r(t)-\frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}+r(t)u(t,y)\right]$$

ορισμένη στο $[0,T)\times R$.

<u>Λήμμα 3.1.2</u> Brownian scaling

Όταν $W=\{W_t, F_t, 0\le t<\infty\}$ είναι μια κίνηση Brown, τότε για c>0 η διαδικασία $X=\{X, F_t, 0\le t<\infty\}$ με $X_t=\frac{1}{\sqrt{c}}W_{ct},\quad 0\le t<\infty$ είναι κίνηση Brown.

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $T_{t,T}$ από το υποσύνολο των χρόνων στάσης, με φίλτρο $(F_{t,s})_{s\ge t}$ από τις $(W_s-W_t), s\ge t$. Επομένως, δεδομένου ότι $(W_{t+a}-W_t)_{a\ge 0}$ είναι ίσο με $(W_a)_{a\ge 0}$ έχουμε ότι

$$u(t,y)=\sup_{\tau'\in T_{0,T-t}} E\left[\exp\left(-\int_0^{\tau'} r(t+a)da\right)\psi\left(y+\int_0^{\tau'}\left(r(t-a)-\frac{\sigma^2(t-a)}{2}\right)da+\int_0^{\tau'}\sigma(t-a)dW_a\right)\right]$$

Παρατηρούμε ότι $\tau' \in \mathrm{T}_{0,\mathrm{T}-t}$ αν και μόνο αν το τ΄ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\tau' = \tau(\mathrm{T}-t)$, όπου τ είναι χρόνος στάσης με τιμές στο [0,1] κάτω από το φίλτρο ($\mathcal{H}_s$), όπου η $\mathcal{H}_s$ είναι σ-άλγεβρα που παράγεται από τυχαίες μεταβλητές $\left(W_{a(T-t)}\right)_{a\le s}$.

Επειδή $\left(W_{a(T-t)}\right)_{a\le s}$ και $\left(\sqrt{T-t}W_a\right)_{a\ge 0}$ είναι ισόνομα κατανεμημένες, παίρνουμε ότι

$$u(t,y) = \sup_{\tau\in T_{0,1}} E\Bigg[\exp\left(-\int_0^{\tau(T-t)} r(t+a)da\right)$$

$$\times\psi\left(y+\int_0^{\tau(T-t)}\left(r(t-a)-\frac{\sigma^2(t-a)}{2}\right)da+\sqrt{T-t}\int_0^{\tau(T-t)}\sigma(t-a)dW_a\right)\Bigg]$$

Εύκολα βλέπουμε ότι,

(3.1.11)

$$u(t,y) = \sup_{\tau\in T_{0,1}} E\Bigg[\exp\left(-\int_t^{t+\tau(T-t)} r(v)dv\right)$$

$$\times\psi\left(y+\int_t^{t+\tau(T-t)}\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv+\int_0^{\tau}\sqrt{T-t}\sigma\big(t+v(T-t)\big)dW_v\right)\Bigg]$$

$0\le t\le T,\ -\infty<y<\infty,$

όπου $T_{0,1}$ το σύνολο των χρόνων στάσης τ κάτω από το φίλτρο $\left(F_u\right)_{0\le u\le 1}$ και παίρνει τιμές στο $[0,1]$.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι γνωστή από το Jaillet et al, 1990.

Πρόταση 3.1.1 *Η συνάρτηση αξίας* $u(t,y)$, $0\le t\le T$, $-\infty<y<\infty$, *των χρόνων στάσης (3.2.8) είναι Lipschitz συνεχής στο* y και *Lipschitz τοπικά συνεχής στο* t

(3.1.12) $\quad |u(t,y_2)-u(t,y_1)|\le g(0)|y_2-y_1|,\ \ 0\le t\le T,\ \ y_1,y_2\in R,$

(3.1.13) $\quad |u(t,y)-u(s,y)|\le \dfrac{C}{\sqrt{T-t}}|t-s|,\ \ 0\le s\le t<T,\ -\infty<y<\infty,$

όπου η σταθερά C *εξαρτάται μόνο από τους παραμέτρους* $\bar{r}, \bar{\sigma}, \mathrm{T}, \mathrm{K}, g(0)$.

Πρόταση 3.1.2 *Η ακόλουθη εκτίμηση ισχύει σχεδόν παντού στο* $[0,T)\times R$, *για τη δεύτερη ασθενή παράγωγο* $\dfrac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}$, $0 \le t < T,\ -\infty < y < \infty,$ *της συνάρτησης αξίας* $u(t,y)$

(3.1.14) $$\left|\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\right| \le \frac{D}{\sqrt{T-t}}$$

(κάτω από το γινόμενο μέτρο $dt \times dy$) *όπου η σταθερά* D *εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους* $\bar{r}, \underline{\sigma}, \bar{\sigma}, \mathrm{T}, \mathrm{K}, g(0)$.

Απόδειξη: Από την πρόταση 3.1.1 έχουμε τα ακόλουθα όρια

(3.1.15) $$\left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right| \le g(0)$$

Για αυθαίρετο $(t,y),\ \ 0 \le t < T,\ -\infty < y < \infty,$ και

(3.1.16) $$\left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\right| \le \frac{C}{\sqrt{T-t}} \qquad \in [0,T)$$

Για αυθαίρετο $y \in (-\infty, \infty)$.

Χρησιμοποιώντας τη διπλή ανίσωση (3.1.10) που ανήκει στο $[0,T)\times R$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα όρια (3.1.15) και (3.1.16) καταλήγουμε στην ακόλουθη εκτίμηση

$$\left|\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}\right| \le g(0) + \frac{2}{\underline{\sigma}^2}\left[\frac{C}{\sqrt{T-t}} + \left(2\bar{r} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right) g(0)\right]$$

που ανοίκει στο $[0,T)\times R$.

Έτσι προκύπτει η (3.1.14). □

Έστω $\gamma(t,y)=\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}$, $0\le t<T$, $-\infty<y<\infty$. Το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα κανονικότητας για την συνάρτηση αξίας $u(t,y)$, $0\le t<T$, $-\infty<y<\infty$, θα το χρησιμοποιήσουμε στο Κεφ. 4 σαν ένα απο τα βασικά τεχνικά εργαλεια για την εκτίμηση του σφάλματος της αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο (2.2.9).

πρόταση 3.1.3 *Η μερική παράγωγος* $\gamma(t,y)=\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}$, $0\le t<T$, $-\infty<y<\infty$, *της συνάρτησης αξίας* $u(t,y)$ *των χρόνων στάσης (3.1.6) πληρεί, κάτω από τα όρια χρόνου, την ακόλουθη τοπική Holder εκτίμηση με εκθέτη ½*

(3.1.17) $$|\gamma(t_2,y)-\gamma(t_1,y)|\le\frac{B}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}},$$

όπου $0\le t_1\le t_2<T$, $-\infty<y<\infty$, *και B θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους* $\bar{r},\underline{\sigma},\bar{\sigma},\mathrm{T},\mathrm{K},g(0)$.

<u>Απόδειξη</u>: Θα εξετάσουμε τη διαφορά

$$\gamma(t_2,y)-\gamma(t_1,y)=\gamma(t_2,y)-\gamma(t_2,z)+\gamma(t_2,z)-\gamma(t_1,z)+\gamma(t_1,z)-\gamma(t_1,y)$$

όπου z αυθαίρετος πραγματικός $(\forall z\in R)$.

Ολοκληρώνοντας τις δύο πλευρές ως προς z στο διάστημα $[y,y+h]$ έχουμε

(3.1.18) $$\begin{aligned}\int_y^{y+h}\left(\gamma(t_2,y)-\gamma(t_1,y)\right)dz&=\int_y^{y+h}\left(\gamma(t_2,y)-\gamma(t_2,z)\right)dz\\&+\int_y^{y+h}\left(\gamma(t_1,z)-\gamma(t_1,y)\right)dz+\int_y^{y+h}\left(\gamma(t_2,z)-\gamma(t_1,z)\right)dz\end{aligned}$$

Αξιολογόντας το τελευταίο ολοκλήρωμα και επειδή $\gamma(t,y)=\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_y^{y+h}\left(\gamma(t_2,z)-\gamma(t_1,z)\right)dz&=\left(u(t_2,z)-u(t_1,z)\right)\Big|_y^{y+h}\\&=\left(u(t_2,y+h)-u(t_1,y+h)\right)-\left(u(t_2,y)-u(t_1,y)\right)\end{aligned}$$

Συνεπώς, ολοκληρώνοντας το αριστερό μέλος της (3.1.18) ως προς z και διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας (3.1.18) με το h, έχουμε

(3.1.19)

$$\gamma(t_2,y)-\gamma(t_1,y)=\frac{1}{h}\Big[\int_y^{y+h}\big(\gamma(t_2,y)-\gamma(t_2,z)\big)dz+\int_y^{y+h}\big(\gamma(t_1,z)-\gamma(t_1,y)\big)dz$$
$$+\big(u(t_2,y+h)-u(t_1,y+h)\big)-\big(u(t_2,y)-u(t_1,y)\big)\Big]$$

Από την εκτίμηση (3.1.14) συνεπάγεται

(3.1.20)

$$|\gamma(t_2,y)-\gamma(t_2,z)|\le\frac{D}{\sqrt{T-t_2}}|y-z|,$$
$$|\gamma(t_1,y)-\gamma(t_1,z)|\le\frac{D}{\sqrt{T-t_1}}|y-z|$$

Ισχύει $\forall t_1,t_2,\ \ 0\le t_1\le t_2<T,$ και $y,z\in R,$ λόγο συνέχειας της συνάρτησης $\gamma(t,y)$.

Αντικαθιστώντας τις ανισότητες (3.1.20) και (3.1.13) στην ισότητα (3.1.19) έχουμε

(3.1.21)

$$|\gamma(t_2,y)-\gamma(t_1,y)|\le\frac{1}{h}\left[\int_y^{y+h}\frac{D}{\sqrt{T-t_2}}(z-y)\,dz+\int_y^{y+h}\frac{D}{\sqrt{T-t_1}}(z-y)\,dz+\frac{2C}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1|\right]$$
$$\le\frac{1}{h}\left[\frac{2D}{\sqrt{T-t_2}}\frac{h^2}{2}+\frac{2C}{\sqrt{T-t_2}}|t_2-t_1|\right]$$

Όπου $0\le t_1\le t_2<T,\ -\infty<y<\infty, και\ h>0$.

Έστω $h=C^*(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}$, όπου C^* μια αυθαίρετη θετική σταθερά, η δεξιά πλευρά της ανισότητας (3.1.21) θα είναι ίση με

$$\frac{1}{\sqrt{T-t_2}}\left(DC^*+\frac{2C}{C^*}\right)\left(t_2-t_1\right)^{\frac{1}{2}},$$

Θέτω ως συνάρτηση ψ την επάνω σχέση. Ψάχνω να βρω το ελάχιστο άνω φράγμα της συνάρτησης ψ(C^*).

$$\frac{\partial\psi}{\partial C^*}=\frac{1}{\sqrt{T-t_2}}\left(t_2-t_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(D-\frac{2C}{\left(C^*\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial C^*}=0$$

Έχουμε ελάχιστο στο σημείο $C^*=\sqrt{\frac{2C}{D}}$. Αντικαθιστώντας την ελάχιστη τιμή του C^* στην ψ προκύπτει η σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{T-t_2}}\left(2\sqrt{2DC}\right)\left(t_2-t_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς έχουμε την ανισότητα (3.1.17) με συνεχή $B=2\sqrt{2DC}$.

□

Κεφάλαιο 4

4.1 Αποδείξεις των βασικών εκτιμήσεων

Υπενθυμίζουμε τη σχέση (3.1.7) μεταξύ των συναρτήσεων αξίας

$$v(t,x) = u(t,\ln x),\quad x>0,\quad 0\le t\le T$$

Η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}$, $0\le t\le T$, $-\infty<y<\infty$ είναι συνεχής στο (t,y) από την προφανή ισότητα

(4.1) $$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,\ln x)}{\partial y}\frac{1}{x},\quad 0\le t<T,\quad x>0$$

Γνωρίζουμε ότι η τελευταία μερική παράγωγος $\varphi(t,x)=\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ είναι, επίσης, συνεχής κάτω από το ζεύγος υποθέσεων (t,y), $0\le t\le T$, $x>0$. Επιστρέφουμε στην αιτιολόγιση του θεωρήματος 2.2.3.

Απόδειξη θεωρήματος 2.2.3

Θα ξαναγράψουμε την αριστερή πλευρά της (2.2.22) σε ισοδύναμη μορφή με βάση την ισότητα $\varphi(t,x)=\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}$

$$\mathrm{E}\int_0^T \left(D(t)-D_\Delta(t)\right)^2 S_t^2 dt = E\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\varphi(t,S_t)-\varphi(t_{k-1},S_{t_{k-1}})\right)^2 S_t^2 dt$$

Από την (4.1) και κάνοντας χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας προκύπτει:

(4.2)
$$\mathrm{E}\int_0^T \left(D(t)-D_\Delta(t)\right)^2 S_t^2 dt = E\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 dt$$

Να σημειωθεί ότι η μερική παράγωγος $\gamma(t,y)=\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}$ φράσεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(0)$ λόγω της ανισότητας $\left|\dfrac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right|\le g(0)$, που προκύπτει από την πρόταση (3.1.1) και την ισότητα (4.1). Έχουμε

(4.3)
$$\left|x\varphi(t,x)\right|\le g(0), \quad 0\le t<T, \quad x>0.$$

Για να εκτιμήσουμε τη δεξιά πλευρά της ισότητας (4.2) θα την γράψουμε σαν άθροισμα τριών διαφορετικών όρων, προσθαφαιρώντας την $\gamma(t_{k-1},\ln S_t)$ και την $\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})$, δηλαδή,

$$\begin{aligned}\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}} &= \left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_t)\right)\\ &\quad+\left(\gamma(t_{\kappa-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)\\ &\quad+\gamma(t_{\kappa-1},\ln S_{t_{\kappa-1}})\frac{S_{t_{k-1}}-S_t}{S_{t_{k-1}}}\end{aligned}$$

Από την γνωστή ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leq n^{p-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,p}, \;\; a_i \geq 0$$

έχουμε

(4.4)

$$\begin{aligned}\left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 &\leq 3\big(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_t)\big)^2 \\ &+3\big(\gamma(t_{\kappa-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\big)^2 \\ &+3\gamma^2(t_{\kappa-1},\ln S_{t_{\kappa-1}})\frac{\left(S_{t_{k-1}}-S_t\right)^2}{S_{t_{k-1}}^2}\end{aligned}$$

Λόγω της (4.2), με απλή αντικατάσταση, έχουμε

(4.5)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\int_0^T\left(D(t)-D_\Delta(t)\right)^2 S_t^2 dt \leq 3E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}&\left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt \\ &+3E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t_{\kappa-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt \\ &+3E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma^2(t_{\kappa-1},\ln S_{t_{\kappa-1}})\left(\frac{S_{t_{k-1}}-S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 dt\end{aligned}$$

Τώρα θα εκτιμήσουμε κάθε άθροισμα, της δεξιά πλευράς της ανισότητας, ξεχωριστά

(4.6)

$$E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt =$$

$$=E\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt+E\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\gamma(t,\ln S_t)-\gamma(t_{n-1},\ln S_{t_{n-1}})\right)^2 dt$$

Από την πρόταση 3.3.3 προκύπτει το πρώτο άθροισμα

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{B^2}{T-t}\left(t-t_{k-1}\right)dt+4g^2(0)\left(T-t_{n-1}\right)$$

$$\leq B^2\Delta\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(T-t\right)\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq B^2\Delta\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{T-t_k}{T-t_{k-1}}\right)+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq B^2\Delta\ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{T-t_k}{T-t_{k-1}}\right)+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq B^2\Delta\ln\left(\frac{T-t_0}{T-t_1}\cdot\frac{T-t_1}{T-t_2}\cdot\ldots\cdot\frac{T-t_{n-2}}{T-t_{n-1}}\right)+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq B^2\Delta\ln\left(\frac{T-t_0}{T-t_{n-1}}\right)+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq B^2\Delta\ln\left(\frac{T}{\Delta}\right)+4g^2(0)\Delta$$

$$\leq\left(B^2\ln\frac{T}{\Delta}+4g^2(0)\right)\Delta$$

Για να εκτιμήσουμε το **δεύτερο άθροισμα**, χρησιμοποιούμε την ανισότητα (3.3.20) και έχουμε

$$\left|\gamma(t,y)-\gamma(t,z)\right|\leq\frac{D}{\sqrt{T-t}}\left|y-z\right|,\quad 0\leq t<T,\quad y,z\in R.$$

Συνεπώς προκύπτει το φράγμα

(4.7)

$$E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t_{k-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt$$
$$\leq D^2\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{T-t_{k-1}}E\left(\ln S_t-\ln S_{t_{k-1}}\right)^2 dt.$$

Από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.2.4) έχουμε

(4.8) $$\ln S_t=\ln S_0+\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv+\int_0^t\sigma(v)dW_v,\quad S_0>0,\quad 0\leq t\leq T$$

Συνεπώς προκύπτει το φράγμα

(4.9) $$E\left(\ln S_t-\ln S_{t_{k-1}}\right)^2=\left(E\left(\ln S_t-\ln S_{t_{k-1}}\right)\right)^2+Var\left(\ln S_t-\ln S_{t_{k-1}}\right)$$
$$=\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_{k-1})\right)^2+\sigma^2\left(t-t_{k-1}\right)$$
$$\leq 2\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2\left(t-t_{k-1}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(t-t_{k-1}\right)\right]$$

Δεδομένου ότι, από το θεώρημα risk-neutral pricing formula και υπό το μέτρο πιθανότητας Q , η ανέλιξη της τιμής της μετοχής $St,t\in[0,T]\sim_Q GBM\left(r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2\right)$ είναι δηλαδή μια γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $r-\frac{\sigma^2}{2}$ και σ^2. Επίσης

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\sim_Q N\left((T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right),(T-t)\sigma^2\right).$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο φράγμα (4.9) αντικαθιστώντας στην εκτίμηση (4.7) προκύπτει η αλυσίδα των ανισοτήτων

$$
\begin{aligned}
&E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t_{k-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt \\
&\quad\le 2D^2\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{T-t_{k-1}}\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2(t-t_{k-1})^2+\bar{\sigma}^2(t-t_{k-1})\right]dt \\
&\quad\quad+2D^2\int_{t_{n-1}}^{T}\frac{1}{T-t_{n-1}}\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2(t-t_{n-1})^2+\bar{\sigma}^2(t-t_{n-1})\right]dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2D^2\sum_{k=1}^{n-1}\Delta\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{T-t_{k-1}}(t-t_{k-1})\,dt+\bar{\sigma}^2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{\mathrm{T}-t_{k-1}}dt\right] \\
&\quad+2D^2\Delta\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2\int_{t_{n-1}}^{T}\frac{1}{T-t_{n-1}}(t-t_{n-1})\,dt+\bar{\sigma}^2\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{1}{\mathrm{T}-t_{n-1}}dt\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2D^2\sum_{k=1}^{n-1}\Delta\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2\Delta+\bar{\sigma}^2\frac{\Delta}{\mathrm{T}-t_{k-1}}\right]+2D^2\Delta\left[\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2+\bar{\sigma}^2\right] \\
&\le 2D^2\Delta^2\left(\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2+\bar{\sigma}^2\right)(n-1)+2D^2\Delta\left(\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2+\bar{\sigma}^2\right) \\
&\le 2D^2\left(\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2+\bar{\sigma}^2\right)\Delta(\mathrm{T}+1)
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $\Delta \le 1$. Έτσι έχουμε την εκτίμηση

(4.10)

$$E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\gamma(t_{k-1},\ln S_t)-\gamma(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\right)^2 dt$$
$$\le 2D^2\left(\left(\bar{r}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)^2+\bar{\sigma}^2\right)\Delta\left(\mathrm{T}+1\right)$$

Απομένει να εκτιμήσουμε το **τρίτο άθροισμα,** ξέρουμε ότι $\left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right| \le g(0)$ και $\gamma(t,y)=\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}$,

(4.11)

$$E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma^2(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\left(\frac{S_{t_{k-1}}-S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 dt \le g^2(0)\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}E\left(1-\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 dt$$

Από την αναλυτική μορφή της διαδικασίας $\left(S_t\right)_{0\le t\le T}$

(4.12)

$$S_t = S_0\exp\left[\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv+\int_0^t\sigma(v)dW_v\right],\quad S_0>0,\quad 0\le t\le T\,,$$

παίρνουμε με απλή αντικατάσταση

$$\left(1-\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 = 1-2\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t}\sigma(v)dW_v-\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t}\sigma^2(v)dv\right]\times\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t}r(v)dv\right]$$
$$+\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t}\left(2r(v)+\sigma^2(v)\right)dv\right]\times\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t}2\sigma(v)dW_v-\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t}\left(2\sigma(v)\right)^2dv\right],$$

για $t_{k-1} \le t \le T$

Πρόταση *Αν η* W_t, $t \ge 0$ *είναι* F_t - $BM(0,1)$ *,τότε κάθε μία από τις ανελίξεις*

i. W_t, $t \ge 0$,

ii. $W_t^2 - t$, $t \ge 0$,

iii. $e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$, $t \ge 0$

είναι F_t *– martingale*

όπου στην δεξιά ισότητα έχουμε τις εκθετικές martingales

$$\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t} \sigma(v) dW_v - \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t} \sigma^2(v) dv\right]$$

και

$$\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t} 2\sigma(v) dW_v - \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t} \left(2\sigma(v)\right)^2 dv\right], \qquad t_{k-1} \le t \le T .$$

Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή

(4.13)

$$E\left(1 - \frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 = 1 - 2\exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t} r(v) dv\right] + \exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t} \left(2r(v) + \sigma^2(v)\right) dv\right]$$
$$= 2\left[1 - \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t} r(v) dv\right)\right] + \exp\left[\int_{t_{k-1}}^{t} \left(2r(v) + \sigma^2(v)\right) dv\right] - 1$$

Έτσι προκύπτει το φράγμα

(4.14)

$$E\left(1-\frac{S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 \le \left(2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right)\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\Delta, \qquad t_{k-1}\le t\le t_k\,,$$

Τοποθετώντας το τελευταίο φράγμα της μέσης τιμής στο δεξί μέλος της ανισότητας (4.11) παίρνουμε την εκτίμηση για το τρίτο άθροισμα της έκφρασης (4.5)

$$(4.15)\quad E\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma^2(t_{k-1},\ln S_{t_{k-1}})\left(\frac{S_{t_{k-1}}-S_t}{S_{t_{k-1}}}\right)^2 dt \le g^2(0)T\left(2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right)\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\Delta$$

Συνοψίζοντας τις εκτιμήσεις των αθροισμάτων (4.6), (4.10) και (4.15) και λαμβάνοντας υπόψιν την ακόλουθη έκφραση $1\le 2\ln 2\le 2\ln\frac{T}{\Delta}$, παίρνουμε το απαιτούμενο φράγμα

$$\mathrm{E}\int_0^{\mathrm{T}}\left(D_\Delta(u)-D(u)\right)^2 S_u^2\,du \le a\cdot\ln\frac{T}{\Delta}\cdot\Delta$$

όπου α θετική σταθερά που εξαρτάται από $\bar{r},\underline{\sigma},\bar{\sigma},\mathrm{T},\mathrm{K},g(0)$. □

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του κυρίου αποτελέσματος της εργασίας, υπενθυμίζουμε ότι από την αναλυτική μορφή της διαδικασίας $\left(S_t\right)_{0\le t\le T}$, (σχέση (4.12)) , προκύπτει ότι

$$\frac{S_t^{\,2}}{S_{t_{k-1}}^{\,2}}=\exp\left[2\int_{t_{k-1}}^{t}\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv+2\int_{t_{k-1}}^{t}\sigma(v)dW_v\right],\quad t_{k-1}\le t\le t_{k,}\quad ,k=1,2,\ldots,n.$$

Όπως έχουμε προαναφέρει $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο όρο $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}$ και διακύμανση $\sigma^2\mathrm{T}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η τιμή της μετοχής S_T ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Η μέση τιμή της S_T δεδομένης της σημερινής τιμής S_0 δίνεται από τη σχέση

$$E\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2}{2}\,\mathrm{T}\right].$$

Εύκολα υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή

$$E\left[S_t^2 \middle| S_{t_{k-1}}\right] = S_{t_{k-1}}^2 E\left[\frac{S_t^2}{S_{t_{k-1}}^2}\middle| S_{t_{k-1}}\right]$$

$$= S_{t_{k-1}}^2 E\left(\exp\left\{2\int_{t_{k-1}}^t \left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv + 2\int_{t_{k-1}}^t \sigma(v)dW_v\right\}\right)$$

$$= S_{t_{k-1}}^2 E\left(\exp\left\{2\int_{t_{k-1}}^t \sigma(v)dW_v - \int_{t_{k-1}}^t \sigma^2(v)dv + \int_{t_{k-1}}^t \sigma^2(v)dv + 2\int_{t_{k-1}}^t \left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right\}\right)$$

$$= S_{t_{k-1}}^2 E\left(\exp\left\{2\int_{t_{k-1}}^t \sigma(v)dW_v - \int_{t_{k-1}}^t \sigma^2(v)dv\right\}\exp\left\{\int_{t_{k-1}}^t \sigma^2(v)dv + 2\int_{t_{k-1}}^t \left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right\}\right)$$

όπου η $\exp\left\{2\int_{t_{k-1}}^t \sigma(v)dW_v - \int_{t_{k-1}}^t \sigma^2(v)dv\right\}$ είναι εκθετική martingale.

Συνεπώς έχουμε,

(4.16)

$$E\left[S_t^2 \middle| S_{t_{k-1}}\right] = S_{t_{k-1}}^2 E\left[\frac{S_t^2}{S_{t_{k-1}}^2}\middle| S_{t_{k-1}}\right]$$

$$= S_{t_{k-1}}^2 \exp\left[\int_{t_{k-1}}^t \left(2r(v) + \sigma^2(v)\right)dv\right]$$

Όπου $t_{k-1} \le t \le t_{k,}\quad ,k = 1, 2, \ldots, n$.

Τώρα μπορούμε να δούμε την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.2.4

Ξεκινάμε με μία προφανή ταυτότητα

$$D_{\Delta,h}(u)-D(u)=D_{\Delta,h}(u)-D_{\Delta}(u)+D_{\Delta}(u)-D(u),\quad 0\le u<T.$$

Άρα

(4.17)

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\left(D_{\Delta,h}(u)-D(u)\right)^2S_u^2du\\&\qquad\le 2E\int_0^T\left(D_{\Delta,h}(u)-D_{\Delta}(u)\right)^2S_u^2du+2\mathrm{E}\int_0^T\left(D_{\Delta}(u)-D(u)\right)^2S_u^2du\end{aligned}$$

Έχουμε ήδη φράξει το δεξί μέρος της τελευταίας ανισότητας στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, συνεπώς ο κύριος στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το αριστερό μέλος.

Λαμβάνοντας υπόψιν την ισότητα (4.16) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini προκύπτει

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\left(D_{\Delta,h}(u)-D_{\Delta}(u)\right)^2S_u^2du\\&\qquad=E\int_0^{t_1}\left(0-\varphi(0,S_0)\right)^2S_u^2du\\&\qquad\qquad+\sum_{k=2}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}E\left[\left(\varphi_h(t_{k-1},S_{t_{k-1}})-\varphi(t_{k-1},S_{t_{k-1}})\right)^2E\left\{S_u^2\mid S_{t_{k-1}}\right\}\right]du\end{aligned}$$

(επειδή η $D_{\Delta,h}$ είναι δίκλαδη σπάω το ολοκλήρωμα)

Υπολογίζοντας την $E\left\{S_t^2\right\}$ στο πρώτο μέλος και γράφοντας την

$E\left\{S_t^2\mid S_{t_{k-1}}\right\}=S_{t_{k-1}}{}^2E\left\{\dfrac{S_t^2}{S_{t_{k-1}}{}^2}\mid S_{t_{k-1}}\right\}$ έχουμε

$$= \varphi^2(0,S_0)\int_0^{t_1} S_0^2 \exp\left[\int_0^u \left(2r(v)+\sigma^2(v)\right)dv\right]du$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp\left[\int_{t_{k-1}}^{u}\left(2r(v)+\sigma^2(v)\right)dv\right] \times E\left[\left(\varphi_h(t_{k-1},S_{t_{k-1}})-\varphi(t_{k-1},S_{t_{k-1}})\right)^2 S_{t_{k-1}}^2\right]du.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι για να υπολογίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας χρησιμοποιούμε τον τύπο $F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$ ή $f_x(x)=\dfrac{dF_x(x)}{dx}$ *για συνεχείς κατανομές)*

Να σημειωθεί ότι η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_t μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθει αναλυτική μορφή

(4.18)

$$f(S_0,t;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}} x}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\int_0^t \sigma^2(v)dv}\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]^2\right\}$$

όπου $S_0>0,\ \ 0<x<\infty,\ \ 0<t\le T$.

Συνεπώς, από τον γνωστό τύπο της αναμενόμενης τιμής $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx$, την προηγούμενη σχέση και το φράγμα (4.3) παίρνουμε την ανισότητα

(4.19) $$E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u)-D_\Delta(u)\right)^2 S_u^2 du \le \varphi^2(0,S_0)S_0^2 \exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\Delta$$

$$+\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\sum_{k=2}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_0^\infty \left(\varphi_h(t_{k-1},x)-\varphi(t_{k-1},x)\right)^2 \frac{x}{\sqrt{2\pi}\left(\int_0^{t_{k-1}}\sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-1}{2\int_0^{t_{k-1}} \sigma^2(v)dv} \left[\ln \frac{x}{S_0} - \int_0^{t_{k-1}} \left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2} \right) dv \right]^2 \right\} dxdu$$

$$\leq g^2(0)\exp\left[2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 \right]\Delta$$

$$+\exp\left[2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 \right] \sum_{k=2}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^{\infty} \left(\varphi_h(t_{k-1}, x) - \varphi(t_{k-1}, x) \right)^2 H(S_0, t_{k-1}; x) dxdu$$

όπου έχουμε εισαγάγει την οικογένεια των συναρτήσεων βαρύτητας, (παραμετροποιείται από $t,\ \ 0 < t \leq T$)

(4.20)

$$H(S_0, t; x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-1}{2\int_0^t \sigma^2(v)dv} \left[\ln \frac{x}{S_0} - \int_0^t \left(r(v) - \frac{\sigma^2(v)}{2} \right) dv \right]^2 \right\},$$

$$S_0 > 0,\ \ 0 < x < \infty.$$

Πρέπει να υπολογίσουμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο του $H(S_0, t; x)$ προκειμένου να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.2.2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(S_0,t;x)}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\times\left\{1-\frac{1}{\int_0^t \sigma^2(v)dv}\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]\right\} \\ &\times\exp\left\{\frac{-1}{2\int_0^t \sigma^2(v)dv}\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]^2\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H(S_0,t;x)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{3}{2}} x}\left\{-\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]\right. \\ &\left.+\frac{1}{\int_0^t \sigma^2(v)dv}\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]^2-1\right\} \\ &\times\exp\left\{\frac{-1}{2\int_0^t \sigma^2(v)dv}\left[\ln\frac{x}{S_0}-\int_0^t\left(r(v)-\frac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right]^2\right\}\end{aligned}$$

όπου $S_0 > 0,\ \ 0 < x < \infty,\ \ 0 < t \le T$.

Να σημειωθεί ότι

(4.21)
$$\lim_{x\to 0+} H(S_0,t;x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} H(S_0,t;x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\partial H(S_0,t;x)}{\partial x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial H(S_0,t;x)}{\partial x} = 0,$$

για $S_0 > 0,\ \ 0 < t \le T$.

Ας εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 H(S_0,t;x)}{\partial x^2}\right| dx\,,$$

με αλλαγή μεταβλητής $\quad y = \dfrac{1}{\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\dfrac{x}{S_0} - \int_0^t \left(r(v) - \dfrac{\sigma^2(v)}{2}\right)dv\right],$

θα έχουμε

(4.22)

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 H(S_0,t;x)}{\partial x^2}\right| dx \le \frac{1}{\left(\int_0^t \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\int_0^t \sigma^2(v)dv}$$

για $S_0 > 0, \quad 0 < t \le T$.

Στην παράγωγο της κυρτής συνάρτησης (θεώρημα 2.2.2, κεφ. 2) όπου ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (4.21) και (4.22) για $k = 2,\dots,n$ έχουμε

(4.23)

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\varphi_h(t_{k-1},x) - \varphi(t_{k-1},x)\right)^2 H(S_0,t_{k-1};x)dx \\
&\quad \le \left[\sup_{x\ge 0}\left|v_h(t_{k-1},x) - v(t_{k-1},x)\right|\left(\sup_{x\ge 0}\left|v_h(t_{k-1},x)\right| + \sup_{x\ge 0}\left|v(t_{k-1},x)\right|\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(\sup_{x\ge 0}\left|v_h(t_{k-1},x) - v(t_{k-1},x)\right|\right)^2\right]\left\{\frac{1}{\left(\int_0^{t_{k-1}} \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\int_0^{t_{k-1}} \sigma^2(v)dv}\right\}
\end{aligned}$$

Από την τελευταία εκτίμηση και την βασική μας υπόθεση (2.2.4), και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $0 \le v(t,x) \le g(0)$, και επειδή $\underline{\sigma} \le \sigma(t)$ έχουμε ότι

$$\frac{2}{\int_0^{t_{k-1}} \sigma^2(v)dv} \le \frac{2}{\int_0^{t_{k-1}} \underline{\sigma}^2 dv} = \frac{2}{\underline{\sigma}^2 t_{k-1}} .$$

Όμοια υπολογίζουμε και το $\dfrac{1}{\left(\int_0^{t_{k-1}} \sigma^2(v)dv\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Άρα παίρνουμε

(4.24)

$$\int_0^{\infty} \left(\varphi_h(t_{k-1},x)-\varphi(t_{k-1},x)\right)^2 H(S_0,t_{k-1};x)dx$$
$$\leq \left[Ch\left(Ch+2g(0)\right)+\frac{1}{2}C^2h^2 \right]\left(\frac{1}{\underline{\sigma}\sqrt{t_{k-1}}}+\frac{2}{\underline{\sigma}^2 t_{k-1}} \right),$$

όπου $S_0>0,\quad k=2,...,n$.

Η εκτίμηση (4.19) παίρνει την ακόλουθει μορφή

$$E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u)-D_{\Delta}(u)\right)^2 S_u^2 du$$
$$\leq g^2(0)\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\Delta+\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]Ch\left(2g(0)+\frac{3}{2}Ch\right)$$
$$\times\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\underline{\sigma}}+\frac{2}{\underline{\sigma}^2}+\sum_{k=3}^{n}\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\left(\frac{1}{\underline{\sigma}\sqrt{t_{k-1}}}+\frac{2}{\underline{\sigma}^2 t_{k-1}} \right)dt \right].$$

Εύκολα μπορούμε να εκτιμήσουμε

$$\sum_{k=3}^{n}\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\left(\frac{1}{\underline{\sigma}\sqrt{t_{k-1}}}+\frac{2}{\underline{\sigma}^2 t_{k-1}} \right)dt \leq \int_{t_1}^{T}\left(\frac{1}{\underline{\sigma}\sqrt{t}}+\frac{2}{\underline{\sigma}^2 t} \right)dt$$
$$\leq \frac{1}{\underline{\sigma}}\int_{t_1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt+\frac{2}{\underline{\sigma}^2}\int_{t_1}^{T}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$\leq \frac{2}{\underline{\sigma}}\left(\sqrt{T}-\sqrt{t_1}\right)+\frac{2}{\underline{\sigma}^2}\left(\ln T-\ln t_1\right)$$

$$\leq \frac{2\left(\sqrt{T}-\sqrt{\Delta}\right)}{\underline{\sigma}} + \frac{2}{\underline{\sigma}^2}\ln\frac{T}{\Delta}.$$

Έτσι προκύπτει το φράγμα

(4.25)

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u)-D_{\Delta}(u)\right)^2 S_u^2 du \\
&\leq g^2(0)\exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]\Delta + \exp\left[2\bar{r}+\bar{\sigma}^2\right]Ch \\
&\quad \times\left(2g(0)+\frac{3}{2}Ch\right)\left[\frac{2}{\underline{\sigma}^2}\left(\ln\frac{T}{\Delta}+1\right)+\frac{2\sqrt{T}}{\underline{\sigma}}\right] \\
&\leq d_1\cdot\ln\frac{T}{\Delta}\left(\Delta+h\right),
\end{aligned}$$

όπου d_1 κάποια σταθερά συναρτήσει των $\bar{r},\underline{\sigma},\bar{\sigma},\mathrm{T},g(0),C$.

Υπενθυμίζουμε την εκτίμηση (4.17) και τα φράγματα (2.2.22) και (4.25) από τα οποία παίρνουμε

$$E\int_0^T \left(D_{\Delta,h}(u)-D(u)\right)^2 S_u^2 du \leq d_2\cdot\ln\frac{T}{\Delta}\left(\Delta+h\right),$$

Τέλος, από την ανισότητα (1.16) και το τελευταίο φράγμα, προκύπτει το βασικό μας αποτέλεσμα

$$E^R \sup_{0\leq t\leq T}\left|\Pi_{\Delta,h}(t)-\Pi(t)\right| \leq \bar{C}\left(\ln\frac{T}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Delta+h\right)^{\frac{1}{2}},$$

όπου $\bar{C}$ μια θετική σταθερά συναρτήσει των $\bar{r},\underline{\sigma},\bar{\sigma},\mathrm{T},g(0),K,C$. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε δύο θεωρήματα κλειδί, τα 2.2.1 και 2.2.2, στα οποία βασίζεται κατ' ουσίαν η προσέγγιση αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο.

Απόδειξη του θερήματος 2.2.1.

Η απόδειξη αποτελείται από δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο επαληθεύουμε την δήλωση της δυο φορές διαφορίσιμης, συνεχής, μη αυξουσα, φραγμένη και κυρτή συνάρτησης. Στο δεύτερο στάδιο προσεγγίζουμε αυθαίρετα μη αύξουσες, φραγμένες, κυρτές και λείες συναρτήσεις στο διάστημα $(0,\infty]$ με κατάλληλο τρόπο και στην συνέχεια παίρνουμε το όριο της προηγούμενης πρόβλεψης.

Έτσι υποθέτουμε ότι οι κυρτές συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι δυο φορές διαφορίσιμες και συνεχής στο διάστημα $(0,\infty)$, μη- αύξουσες και φραγμένες. Θέτουμε

(A.1) $$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Εξετάζουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα για πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[\delta, b]$, όπου δ και b τυχαίοι αυστηρά θετικοί αριθμοί, και αντικαθιστώντας

(A.2)

$$\begin{aligned}\int_\delta^b f'(x)\left(fH\right)'(x)dx &= f'(x)f(x)H(x)\Big|_\delta^b - \int_\delta^b f''(x)\left(f(x)H(x)\right)dx \\ &= f'(b)f(b)H(b) - f'(\delta)f(\delta)H(\delta) - \int_\delta^b f''(x)f(x)H(x)dx\end{aligned}$$

Τώρα, φράζοντας την απόλυτη τιμή του τελευταίου ολοκληρώματος της δεξιάς πλευράς της (A.2) έχουμε

(A.3)

$$\begin{aligned}\left|\int_\delta^b f''(x)f(x)H(x)dx\right| &\le \sup_{\delta\le x\le b}|f(x)|\int_\delta^b \left|f_1''(x) - f_2''(x)\right| H(x)dx \\ &\le \sup_{\delta\le x\le b}|f(x)|\int_\delta^b \left(f_1''(x) + f_2''(x)\right)H(x)dx,\end{aligned}$$

Γιατί $f_1''(x) \ge 0, \quad f_2''(x) \ge 0, \quad 0 < x < \infty$.

Κάνοντας πράξεις στο παραπάνω ολοκλήρωμα, προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_\delta^b \left(f_1''(x) + f_2''(x)\right)H(x)dx &= \left(f_1'(x) + f_2'(x)\right)H(x)\Big|_\delta^b - \int_\delta^b \left(f_1'(x) + f_2'(x)\right)H'(x)dx \\ &= \left(f_1'(b) + f_2'(b)\right)H(b) - \left(f_1'(\delta) + f_2'(\delta)\right)H(\delta) \\ &\quad - \left\{\left(f_1(x) + f_2(x)\right)H'(x)\Big|_\delta^b - \int_\delta^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)H''(x)dx\right\} \\ &= \left(f_1'(b) + f_2'(b)\right)H(b) - \left(f_1'(\delta) + f_2'(\delta)\right)H(\delta) - \left(f_1(b) + f_2(b)\right)H'(b) \\ &\quad + \left(f_1(\delta) + f_2(\delta)\right)H'(\delta) + \int_\delta^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)H''(x)dx\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ανισότητα (A.3) γίνεται

(A.4)

$$\begin{aligned}&\left|\int_\delta^b f''(x)f(x)H(x)dx\right| \\ &\quad\le \sup_{\delta\le x\le b}|f(x)|\left\{\left|f_1'(b) + f_2'(b)\right|H(b)\right. \\ &\qquad + \left|f_1'(\delta) + f_2'(\delta)\right|H(\delta) + \left|f_1(b) + f_2(b)\right|\left|H'(b)\right| \\ &\qquad \left. + \left|f_1(\delta) + f_2(\delta)\right|\left|H'(\delta)\right| + \sup_{\delta\le x\le b}\left|f_1(x) + f_2(x)\right|\int_\delta^b \left|H''(x)\right|dx\right\}.\end{aligned}$$

(A.5)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\delta^b f'(x)\left(fH\right)'(x)dx\right| \\
&\quad \le \left|f'(b)f(b)\right|H(b) + \left|f'(\delta)f(\delta)\right|H(\delta) \\
&\quad\quad + \sup_{\delta\le x\le b}\left|f(x)\right|\Big\{\left|f_1'(b)+f_2'(b)\right|H(b) - \left|f_1'(\delta)+f_2'(\delta)\right|H(\delta) \\
&\quad\quad\quad + \left|f_1(b)+f_2(b)\right|\left|H'(b)\right| - \left|f_1(\delta)+f_2(\delta)\right|\left|H'(\delta)\right| \\
&\quad\quad\quad + \sup_{\delta\le x\le b}\left|f_1(x)+f_2(x)\right|\int_\delta^b\left|H''(x)\right|dx\Big\}
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε

(A.6) $$\int_\delta^b f'(x)\left(fH\right)'(x)dx = \int_\delta^b\left(f'(x)\right)^2 H(x)dx + \frac{1}{2}\int_\delta^b\left(f^2\right)'(x)H'(x)dx$$

Έτσι προκύπτουν οι ισότητες

(A.7)

$$\begin{aligned}
\int_\delta^b\left(f'(x)\right)^2 H(x)dx &= \int_\delta^b f'(x)\left(fH\right)'(x)dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{f^2(x)H'(x)\Big|_\delta^b - \int_\delta^b f^2(x)H''(x)dx\right\} \\
&= \int_\delta^b f'(x)\left(fH\right)'(x)dx - \frac{1}{2}f^2(b)H'(b) \\
&\quad + \frac{1}{2}f^2(\delta)H'(\delta) + \frac{1}{2}\int_\delta^b f^2(x)H''(x)dx
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (A.5) στην τελευταία ισότητα, προκύπτει το φράγμα

(A.8)

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta}^{b}\left(f'(x)\right)^2 H(x)dx \\
&\le \frac{1}{2}f^2(b)\left|H'(b)\right| + \frac{1}{2}f^2(\delta)H'(\delta) + \left|f'(\delta)f(\delta)\right|H(\delta) \\
&\quad + \left|f'(b)f(b)\right|H(b) + \frac{1}{2}\sup_{\delta\le x\le b} f^2(x)\int_{\delta}^{b}H''(x)dx + \sup_{\delta\le x\le b}\left|f(x)\right| \\
&\quad \Big\{\left|f_1'(b)+f_2'(b)\right|H(b) - \left|f_1'(\delta)+f_2'(\delta)\right|H(\delta) + +\left|f_1(b)+f_2(b)\right|\left|H'(b)\right| \\
&\qquad + \left|f_1(\delta)+f_2(\delta)\right|\left|H'(\delta)\right| + \sup_{\delta\le x\le b}\left|f_1(x)+f_2(x)\right|\int_{\delta}^{b}\left|H''(x)\right|dx\Big\}
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$f_i(x_2) - f_i(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_i'(u)du,\ \ 0 < x_1 \le x_2 < \infty,\ \ i = 1,2\,.$$

Επειδή η παράγωγος $f_i'(u)$ της μη αύξουσας, κυρτής συνάρτησης $f_i(u)$ είναι μη φθίνουσα, μη θετική συνάρτηση, προκύπτει η ανισότητα

$$f_i(x_2) - f_i(x_1) \le f_i'(x_2)(x_2 - x_1) \le 0,\ \ 0 < x_1 \le x_2 < \infty,\ \ i = 1,2\,.$$

Αν x_1 τύνει στο μηδέν

$$f_i(\infty) - f_i(0) \le f_i(x_2) - f_i(0) \le f_i'(x_2)x_2 \le 0$$

Αν x_2 τυχαίος θετικός αριθμός, αντικαθιστώντας τον με την μεταβλήτη x παίρνουμε την εκτίμηση

(A.9) $$\left|xf_i'(x)\right| \le f_i(0) - f_i(\infty),\ \ x > 0,\ \ i = 1,2\,.$$

Λόγο της φραξιμότητας των κυρτών συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ και της υπόθεσης (1.17), έχουμε

(A.10) $$\lim_{\delta\to 0+} f^2(\delta)\left|H'(\delta)\right| = 0,\quad \lim_{\delta\to 0+}\left|f_1(\delta)+f_2(\delta)\right|\left|H'(\delta)\right| = 0$$

$$\lim_{b\to\infty} f^2(b)\left|H'(b)\right| = 0, \quad \lim_{b\to\infty}\left|f_1(b)+f_2(b)\right|\left|H'(b)\right| = 0$$

Προφανώς ισχύουν οι ισότητες

$$\left|f_1'(b)+f_2'(b)\right|H(b) = \left|f_1'(b)b+f_2'(b)b\right|\frac{H(b)}{b},$$

$$\left|f_1'(\delta)+f_2'(\delta)\right|H(\delta) = \left|f_1'(\delta)\delta+f_2'(\delta)\delta\right|\frac{H(\delta)}{\delta},$$

$$\left|f'(\delta)f(\delta)\right|H(\delta) = \left|f(\delta)\right|\left|f'(\delta)\delta\right|\frac{H(\delta)}{\delta},$$

$$\left|f'(b)f(b)\right|H(b) = \left|f(b)\right|\left|f'(b)b\right|\frac{H(b)}{b}.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, έχουμε

$$\frac{H(\delta)}{\delta} = \frac{H(\delta)-\mathrm{H}(0+)}{\delta} = \mathrm{H}'(\theta_\delta), \quad \text{όπου } 0<\theta_\delta<\delta,$$

έτσι από την συνθήκη (1.17) έχουμε

(A.11) $$\lim_{\delta\to 0+}\frac{H(\delta)}{\delta} = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την οριακή συνθήκη (A.11) και την εκτίμηση (A.9) από τις ανισότητες έχουμε

(A.12) $$\lim_{b\to\infty}\left|f_1'(b)+f_2'(b)\right|H(b) = 0, \quad \lim_{\delta\to 0+}\left|f_1'(\delta)+f_2'(\delta)\right|H(\delta) = 0$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\left|f'(\delta)f(\delta)\right|H(\delta) = 0, \quad \lim_{b\to\infty}\left|f'(b)f(b)\right|H(b) = 0.$$

Όταν στην ανισότητα (A.8) $\delta\to 0, \ b\to\infty$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση (1.18) και τις οριακές συνθήκες (A.10) και (A.12) καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\int_0^\infty \left(f'(x)\right)^2 H(x)dx$$
$$\le \sup_{x\ge 0}\left|f(x)\right|\left[\frac{1}{2}\sup_{x\ge 0}\left|f(x)\right| + \sup_{x\ge 0}\left|f_1(x)+f_2(x)\right|\right]\int_0^\infty \left|H''(x)\right|dx.$$

Θεωρούμε δυο τυχαίες μη αύξουσες, κάτω φραγμένες και κυρτές συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x) \in [0,\infty)$. Θα κατασκευάσουμε δυο ακολουθίες, δυο φορές διαφορίσιμες και συνεχείς, στο ανοιχτό διάστημα $(0,\infty)$, μη αύξουσες, κάτω φραγμένες και κυρτές $f_{1,n}(x)$ και $f_{2,n}(x)$ προσεγγίζοντας τις συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ με κατάλληλο τρόπο.

Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την λεία συνάρτηση

(A.13) $$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left[\dfrac{1}{x(x-2)}\right] & 0 < x < 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

όπου c ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_0^2 \rho(x)dx = 1.$$

Για $x \ge 0$

(A.14) $$f_{1,n}(x) = \int_0^\infty n\rho(n(x-y))\, f_1(y)dy, \quad x \ge 0,$$

$$f_{2,n}(x) = \int_0^\infty n\rho(n(x-y))\, f_2(y)dy, \quad x \ge 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Γράφουμε την εκτίμηση (2.2.19) από τις συναρτήσεις $f_{1,n}(x)$ και $f_{2,n}(x)$, εν συνεχεία παίρνουμε το όριο της τελευταίας εκτίμησης για $n \to \infty$.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.2.2

Εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\sup_{x\ge 0}\left|F_h(x) - F(x)\right| = a_h .$$

Είναι προφανές ότι

$$F(x)-a_h \le F_h(x), \qquad F_h(x)-a_h \le F(x), \;\; \alpha\nu \;\; x \ge 0 .$$

Αυτό σημαίνει ότι η κυρτή συνάρτηση $F(x)-a_h$ έχει περίβλημα την $\breve{F}_h(x)$, έτσι ώστε

$$F(x)-a_h \le \breve{F}_h(x), \;\; x \ge 0 ,$$

από την άλλη, ισχύει

$$F_h(x)-a_h \le \breve{F}_h(x)-a_h \le F(x), \;\; x \ge 0 ,$$

επομένως,

$$\left|\breve{F}_h(x)-F(x)\right| \le a_h, \;\; x \ge 0 ,$$

έτσι

(A.15) $$\sup_{x\ge 0}\left|\breve{F}_h(x)-F(x)\right| \le \sup_{x\ge 0}\left|F_h(x)-F(x)\right| .$$

Θέτουμε $\sup_{x\ge 0}\left|F_h(x)\right| = \beta_h$, τότε

$$-\beta_h \le F_h(x) \le \beta_h, \;\; x \ge 0 ,$$

άρα

$$-\beta_h \le \breve{F}_h(x) \le F_h(x) \le \beta_h, \;\; x \ge 0 ,$$

αυτό σημαίνει ότι,

(A.16) $$\sup_{x\ge 0}\left|\breve{F}_h(x)\right| \le \sup_{x\ge 0}\left|F_h(x)\right| .$$

Παίρνουμε $\breve{F}_h(x)$ αντί τη κυρτή συνάρτηση $f_2(x)$ στην εφαρμογή του θεωρήματος 1.1 και με τη χρήση των (A.15) (A.16) καταλλήγουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\breve{F}_h'(x-) - F'(x-)\right)^2 H(x)dx \\
&\quad \le \sup_{x\ge 0}\left|F_h(x) - F(x)\right| \left[\frac{1}{2}\sup_{x\ge 0}\left|F_h(x) - F(x)\right| + \sup_{x\ge 0}\left|F_h(x)\right| + \sup_{x\ge 0}\left|F(x)\right|\right] \\
&\quad \times \int_0^\infty \left|H''(x)\right| dx.
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

ANNA BATTAUZ, MARZIA DE DONNO, ALESSANDRO SBUELZ, (2013): Real Options And American Derivatives: The Double Continuation Region, *Department of Mathematics, Quantitative Finance, and Econometrics,Catholic University of Milan.*

F. BLACK, M. SCHOLES, (1973): The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy 81*, 637–659.

IOANNIS KARATZAS, (1988): *On the Pricing of American Options*, Department of Statistics, Columbia University, New York.

IOANNIS KARATZAS, STEVE E. SHREVE, (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York, Springer-Verlag.

JOHN C. HULL, (1946): *Oprions, Futures and other Derivatives*, School of Management University of Toronto.

M.J. BRENNAN, E.S. SCHAWRTZ, (1977): The valuation of American put options, *Journal of Finance 32*, 449–462.

NICOLE EL KAROUI, MONIQUE GEANBLANC PICQUE, STEVE E. SHREVE, (1998), Robustness Of The Black and Scholes Formula, *Mathematical Finance*, 93-126.

PATRICK JAILLET, DAMIEN LAMBERTON, BERNARD LAPEYRE LAMM, (1989): Variational Inequalities and the Pricing of American Options, *CERMA-ENPC La Courtine, 93167 Noisy le Grand, France.*

PETER CARR, ROBERT JARROW, (1989): Alternative Characterizations of American Put Options, *Johnson Graduate School of Management Cornell University, Ithaca, NY14853 and Ravi Myneni Graduate School of Business Stanford University, Stanford, CA 94305.*

S. HUSSAIN, J. PECARIC, M. SHASHIASHVILI, (2008): The Weighted Square Integral Inequalities for the First Derivative of the Function of a Real Variable, *Journal of Inequalities and Applications Volume,* Article ID 343024, 14 pages.

S. HUSSAIN, M. SHASHIASHVILI, (2010): Discrete Time Hedging of the American Option, *Mathematical Finance,* 647–670.

Α.Ν. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, (2004): *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική,* Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, Ελλάδα.

Α.Ν. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, (2011): *Εισαγωγή Στα Χρηματοοικονιμικά,* Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, Ελλάδα.

Ν. ΧΑΛΙΔΙΑΣ, *Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, Ελλάδα.

Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ, *Παράγωγα*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος, Ελλάδα.