ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Θεωρίες και πρακτικές για την εννοιολόγηση και τη διδακτική εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης με χρήση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών

Η έννοια της «μεταβολής» και η δυνατότητα επιρροής της στη διδασκαλία βασικών εννοιών της Ανάλυσης από την πρωτοβάθμια μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση

Διδακτορική διατριβή

Δήμητρα Ρεμούνδου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Θεωρίες και πρακτικές για την εννοιολόγηση και τη διδακτική εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης με χρήση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών - Η έννοια της «μεταβολής» και η δυνατότητα επιρροής της στη διδασκαλία βασικών εννοιών της Ανάλυσης από την πρωτοβάθμια μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση

Διδακτορική διατριβή

Δήμητρα Ρεμούνδου

Εξεταστική επιτροπή

Ευγένιος Αυγερινός	Καθηγητής	Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Επιβλέπων
Αθανάσιος Γαγάτσης	Ομότιμος Καθηγητής	Τμήμα Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου	Μέλος Τριμελούς
Νικόλαος Παπαναστασίου	Αφυπηρετήσας Καθηγητής	Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος Τριμελούς
Γεώργιος Μπαραλής	Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών	Μέλος
Ιωάννης Παρασίδης	Καθηγητής	Τμήμα Περιβάλλοντος Πανεπιστημίου Θεσσαλίας	Μέλος
Αρετή Παναούρα	Καθηγήτρια	Πανεπιστημίου Frederick Κύπρου	Μέλος
Μιχαήλ Σκουμιός	Αναπληρωτής Καθηγητής	Παιδαγωγικού Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου	Μέλος

Ρόδος, 2021

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δήμητρα Ρεμούνδου

Διδακτορική διατριβή

Θεωρίες και πρακτικές για την εννοιολόγηση και τη διδακτική εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης με χρήση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών - Η έννοια της «μεταβολής» και η δυνατότητα επιρροής της στη διδασκαλία βασικών εννοιών της Ανάλυσης από την πρωτοβάθμια μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση

Μέλη τριμελούς επιτροπής:
Ευγένιος Αυγερινός, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου, Επιβλέπων
Νικόλαος Παπαναστασίου, Αφυπηρετήσας Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Αθανάσιος Γαγάτσης, Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Πρόγραμμα Χορήγησης Υποτροφιών για Μεταπτυχιακές Σπουδές Δευτέρου Κύκλου Σπουδών» (MIS-5003404), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Ρόδος, 2021

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑ

Είμαι η αποκλειστική συγγραφέας της υποβληθείσας Διδακτορικής Διατριβής με τίτλο «*Θεωρίες και πρακτικές για την εννοιολόγηση και τη διδακτική εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης με χρήση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών - Η έννοια της «μεταβολής» και η δυνατότητα επιρροής της στη διδασκαλία βασικών εννοιών της Ανάλυσης από την πρωτοβάθμια μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση*». Η συγκεκριμένη Διδακτορική Διατριβή είναι πρωτότυπη και εκπονήθηκε αποκλειστικά για την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος του Τμήματος Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Κάθε βοήθεια, την οποία είχα για την προετοιμασία της, αναγνωρίζεται πλήρως και αναφέρεται επακριβώς στην εργασία. Επίσης, επακριβώς αναφέρω στην εργασία τις πηγές, τις οποίες χρησιμοποίησα, και μνημονεύω επώνυμα τα δεδομένα ή τις ιδέες που αποτελούν προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας άλλων, ακόμη κι εάν η συμπερίληψή τους στην παρούσα εργασία υπήρξε έμμεση ή παραφρασμένη. Γενικότερα, βεβαιώνω ότι κατά την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής έχω τηρήσει απαρέγκλιτα όσα ο νόμος ορίζει περί διανοητικής ιδιοκτησίας και έχω συμμορφωθεί πλήρως με τα προβλεπόμενα στο νόμο περί προστασίας προσωπικών δεδομένων και τις αρχές Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας.

Η ΔΗΛΟΥΣΑ

Δήμητρα Ρεμούνδου

Περίληψη στα Ελληνικά

Η σημασία της έννοιας της μεταβολής (change) και του ρυθμού μεταβολής (rate of change) στη μαθηματική εκπαίδευση έχει αναδειχτεί τα τελευταία χρόνια, τόσο λόγω της σχέσης τους με έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης όπως το όριο, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα, όσο και του μεγάλου αριθμού εφαρμογών τους σε διάφορους κλάδους των επιστημών. Έρευνες σε διεθνές επίπεδο έχουν αναδείξει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές αλλά και φοιτητές στην εννοιολόγηση και στην εφαρμογή αυτών των εννοιών. Παρατηρείται αποσπασματική κατανόηση της συμμεταβολής (covariation) και του ρυθμού μεταβολής, εξαρτημένη από την αναπαράσταση και το πλαίσιο στο οποίο αναφέρονται.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετήθηκε η θέση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών και η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής από φοιτητές. Για τη διερεύνηση της θέσης της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, εξετάστηκε ο τρόπος που δομείται σταδιακά η έννοια, μέσα από αναφορές στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια, σε σύγκριση με άλλες χώρες. Επιπλέον, εξετάστηκαν οι απόψεις εν ενεργεία εκπαιδευτικών μαθηματικών σε σχέση με τη διδασκαλία της έννοιας. Συγκεκριμένα, οι καθηγητές ρωτήθηκαν για τη σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής, τη θέση του στην υποχρεωτική εκπαίδευση, τις δυσκολίες που εντοπίζουν στους μαθητές και τους τρόπους που θα επέλεγαν για να διδάξουν το θέμα.

Στη συνέχεια, διερευνήθηκε ο τρόπος εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής από φοιτητές. Για τον σκοπό αυτό διαμοιράστηκε ένα ερωτηματολόγιο με έργα γύρω από τον ρυθμό μεταβολής με διάφορες αναπαραστάσεις και ένα ερωτηματολόγιο με έργα που αφορούν στον ρυθμό μεταβολής και σχετικές έννοιες, όπως η κλίση.

Για την εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής, εντοπίστηκαν βασικές έννοιες που απαιτούνται, όπως ο λόγος και οι αναλογίες, η κλίση και η παράγωγος. Παρατηρήθηκε ότι κάποιες από τις έννοιες αυτές διδάσκονται στην υποχρεωτική εκπαίδευση, αλλά δεν αναδυκνείεται η σύνδεση μεταξύ τους. Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής που υπερισχύει σύμφωνα με τον τρόπο που δομείται η έννοια στην υποχρεωτική εκπαίδευση, αλλά και τις απαντήσεις των φοιτητών είναι κυρίως διαδικασιακή και σχετίζεται με την παράγωγο.

Με βάση τα ευρήματα των παραπάνω ερευνών και τη διεθνή βιβλιογραφία, προτείνονται προσαρμογές στο πρόγραμμα σπουδών, στις οποίες συγκαταλέγεται η έμφαση στη συμμεταβολή και η διαισθητική προσέγγιση ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται από μικρότερη ηλικία. Βασικές συνιστώσες της προσπάθειας αυτής αποτελούν οι αναπαραστάσεις, οι εφαρμογές σε ρεαλιστικά πλαίσια και η εκπαιδευτική αξιοποίηση τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών. Στο πλαίσιο αυτό, αναπτύχθηκαν και παρουσιάζονται ενδεικτικές δραστηριότητες για την ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης του ρυθμού μεταβολής και βασικών εννοιών που σχετίζονται με αυτόν.

Περίληψη στα Αγγλικά

Title

Theories and practices for the conceptualization and teaching of concepts of Mathematical Analysis using Information and Communications Technologies – The concept of “change” and its potential for teaching basic concepts of Analysis from primary to tertiary education

The importance of the concepts of change and rate of change in mathematics education has emerged in recent years, because of their large number of applications and their relationship with concepts of Mathematical Analysis, such as the limit, the derivative and the integral. The difficulties faced by students in understanding and applying these concepts have been highlighted in international research. There is weak understanding of concepts of Mathematical Analysis and especially covariation, depended on the representation and the context in which they refer.

In the dissertation, the concept of rate of change across the Greek curriculum, and the conceptualization of change and rate of change by students were studied. In the first part of the study, the school textbooks of Greece were analyzed for references to rate of change and basic concepts that are important for its conceptualization, and the learning trajectory of rate in school curriculum was examined. Besides, examples of the curriculum of other countries were given. Moreover, the beliefs of mathematics teachers of secondary education in Greece about concepts of calculus and especially rate of change were studied. Specifically, teachers’ views about the necessity to teach rate of change, its position in curriculum, the difficulties of students they have observed and the methods they would use to teach the concept, were examined.

Regarding conceptualizations of rate of change held by students, a questionnaire with tasks about change and rate of change in different representations and contexts and a questionnaire with tasks of rate of change and basic concepts related to it, as slope were used.

Besides slope, ratio, proportionalities, and derivative are concepts that are related to rate of change. These concepts are taught across primary and secondary education, but their connections are not emphasized. The conceptualization of rate that prevails

according to the school textbooks and students' answers was procedural and related to derivative.

Based on the findings of the beforementioned studies and the international research, some changes in curriculum are proposed, among which, the emphasis in covariation and the intuitive teaching of covariational quantities in lower grades. The main components of this effort are the representations, the applications in realistic contexts and the educational use of information and communication technology. In this context, indicative activities for the enhancement of conceptual understanding of rate of change and basic concepts related to it were developed and presented.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διδακτορικής διατριβής.

Τον επιβλέποντα καθηγητή Ευγένιο Αυγερινό για την υποστήριξη και καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον ομότιμο καθηγητή Αθανάσιο Γαγάτση και τον αφυπηρετήσαντα καθηγητή Νικόλαο Παπαναστασίου για τη συνεργασία και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον καθηγητή Γεώργιο Μπαραλή, τον καθηγητή Ιωάννη Παρασίδη, την καθηγήτρια Αρετή Παναούρα και τον αναπληρωτή καθηγητή Μιχαήλ Σκουμιό που αποδέχτηκαν να αξιολογήσουν την εργασία.

Τους φίλους και συνεργάτες Ρόζα Βλάχου, Θανάση Καραγεωργιάδη, Μιχάλη Ζώρζο, Παναγιώτη Γρίδο, για τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας όλο αυτό το διάστημα, καθώς και τη Χρυσούλα Ζουμπά και τον Δημήτριο Κολοκυθά για την υποστήριξη στα διαδικαστικά θέματα.

Περιεχόμενα

Πίνακες

Γραφήματα

Εικόνες

1 Εισαγωγή

Σκοπός και δομή

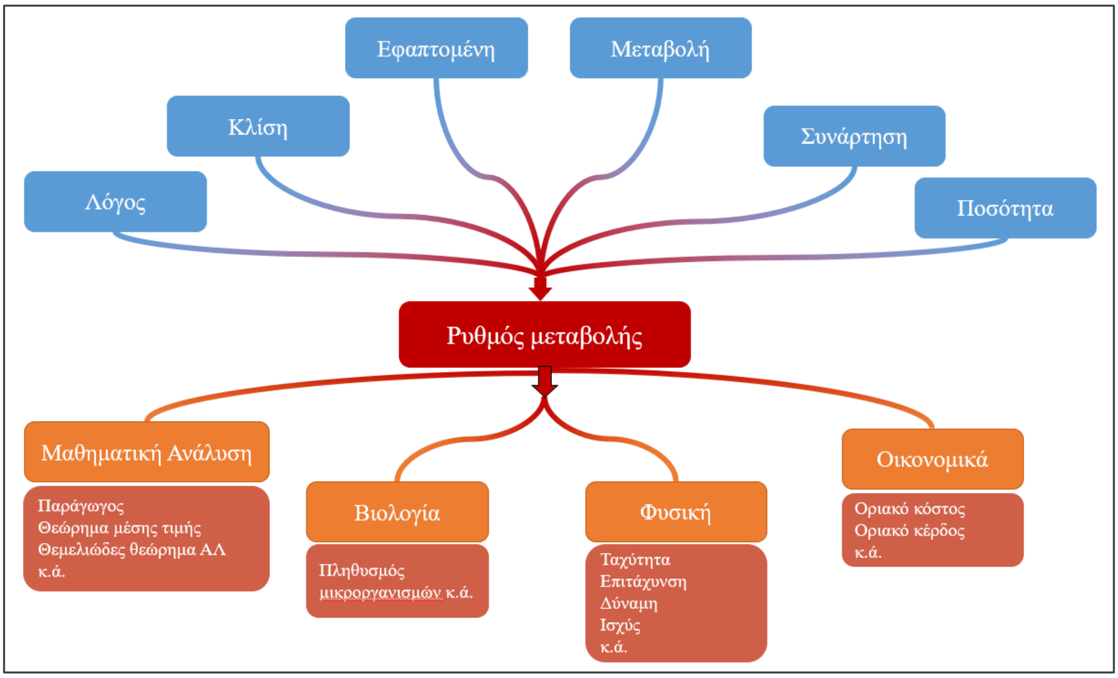
Η κατανόηση της μεταβολής και κατ' επέκταση της συμμεταβολής και του ρυθμού μεταβολής θεωρείται ιδιαίτερης σημασίας για την κατανόηση της παραγώγου και άλλων εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης (Carlson κ.ά., 2002). Οι έννοιες αυτές επιλέχτηκαν ως σημείο εστίασης, γιατί, παρόλο που χρησιμοποιούνται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους με διάφορες μορφές και μπορούν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης, δεν αναπτύσσονται ιδιαίτερα στα σχολικά μαθηματικά. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια του ρυθμού μεταβολής κυρίως στο πλαίσιο της φυσικής. Η ταχύτητα, η επιτάχυνση, ο ρυθμός με τον οποίο γεμίζει ένα δοχείο είναι μερικά μόνο παραδείγματα που βασίζονται στον ρυθμό μεταβολής. Με τον τρόπο που αντιμετωπίζονται όμως, δεν είναι σαφείς οι ομοιότητές τους και η κοινή τους θεωρητική βάση. Η παρούσα έρευνα μπορεί να συμβάλει στην προσπάθεια να καθοριστούν και να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες εννοιολόγησης των εννοιών της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής και να συντελέσει στη διαμόρφωση προγράμματος για την εισαγωγή τους με διαισθητικό τρόπο. Μία διαισθητική εικόνα του ρυθμού μεταβολής θα μπορούσε να αποτελέσει βάση για την περαιτέρω μελέτη της παραγώγου και άλλων εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης.

1.1 Σημαντικότητα

Η μελέτη των σχέσεων μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, τόσο σε γραμμικές όσο και σε μη γραμμικές συναρτήσεις, βοηθάει στην κατανόηση πραγματικών φαινομένων, αλλά και στην αντίληψη εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να αναδειχτούν οι εννοιολογήσεις των σπουδαστών για την έννοια του ρυθμού μεταβολής και να καταγραφούν συνηθισμένες παρανοήσεις. Με τον τρόπο αυτό επιχειρείται ο εμπλουτισμός της υπάρχουσας γνώσης σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής.

Η εννοιολόγηση ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται και του ρυθμού μεταβολής συμβάλει στην προετοιμασία των μαθητών για τη μελέτη της Μαθηματικής Ανάλυσης, αλλά και της Φυσικής, σε επίπεδο δευτεροβάθμιας αλλά και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών και των φοιτητών, ο εντοπισμός των αιτιών τους και η στοχευμένη αντιμετώπισή τους στα σχολικά χρόνια, μπορούν να επιφέρουν αλλαγές στα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας σε μαθήματα Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο σχεδιασμός διδακτικών παρεμβάσεων με βάση τις δυσκολίες των σπουδαστών μπορεί να τους προετοιμάσει κατάλληλα ώστε να αντιμετωπίσουν με μεγαλύτερη επιτυχία μαθήματα λογισμού σε ανώτερο επίπεδο.

Για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής σε προβλήματα Μαθηματικής Ανάλυσης και σε εφαρμογές στη Φυσική απαιτείται η πρότερη, επαναλαμβανόμενη επαφή των μαθητών με ρυθμούς μεταβολής σε διάφορα πλαίσια. Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αυτό μπορεί να επιτευχθεί κατά την ενασχόληση με ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Η έννοια του λόγου θεωρείται από τις βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής. Ακόμα δραστηριότητες που ενισχύουν το συλλογισμό με βάση τη συμμεταβολή θεωρούνται απαραίτητες για τη μετέπειτα κατανόηση των συναρτήσεων και των ρυθμών μεταβολής τους.



Εικόνα 1.1. Βασικές έννοιες και εφαρμογές του ρυθμού μεταβολής

Σημαντικό ρόλο στην αντίληψη μαθηματικών εννοιών διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις. Η αντίληψη μιας έννοιας προϋποθέτει την κατανόηση των διαφορετικών της αναπαραστάσεων, αλλά και τη μετάβαση από μία αναπαράσταση σε μία άλλη. Ο ρυθμός μεταβολής αποτελεί μία έννοια που μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους και μπορεί να βρει εφαρμογές σε διάφορες επιστήμες και πλαίσια. Με τον τρόπο αυτό λειτουργεί ως σύνδεσμος μεταξύ αφηρημένων μαθηματικών και πραγματικών προβλημάτων.

Επιπλέον, η σύνδεση με φυσικά φαινόμενα μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και να νοηματοδοτήσει τη μελέτη τους. Εφαρμόζοντας τις μαθηματικές τους γνώσεις σε ένα πρόβλημα, οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν για τα μαθηματικά όχι ως αφηρημένα αντικείμενα και να απαντήσουν στο προσωπικό τους «γιατί» σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών.

1.2 Στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα

Παρόλο που ο ρυθμός μεταβολής θεωρείται σημαντική έννοια των μαθηματικών, δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξή της στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Επιπλέον, η έννοια του ρυθμού μεταβολής περιλαμβάνει πολλαπλές συνιστώσες και θεωρείται αρκετά περίπλοκη.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να αποτυπωθεί η θέση του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση και να μελετηθεί κατά πόσο μπορούν μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να ασχοληθούν με δραστηριότητες σταθερών, αλλά και μεταβλητών ρυθμών μεταβολής, σε διάφορα πλαίσια και με πολλαπλές αναπαραστάσεις, έτσι ώστε να διαμορφώσουν μια διαισθητική εικόνα της έννοιας πριν την τυπική διδασκαλία της.

Συγκεκριμένα στην παρούσα εργασία θέτονται τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποια είναι η θέση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα;
- Πως εννοιολογούν φοιτητές την έννοια του ρυθμού μεταβολής και πως χειρίζονται τις διαφορετικές του αναπαραστάσεις;
- Ποια είναι τα καίρια χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που ενισχύουν τις εννοιολογήσεις του ρυθμού μεταβολής;

1.3 Δομή εργασίας

Η διδακτορική διατριβή χωρίζεται σε τρία ερευνητικά μέρη. Στο πρώτο μέρος διερευνήθηκε η αναγκαιότητα ένταξης του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση και η θέση του στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών. Εξετάστηκε πως διαμορφώνεται η εννοιολογική εικόνα της έννοιας μέσω των σχολικών εγχειριδίων, σε συνδυασμό με εννοιολογικά εμπόδια που σχετίζονται με την έννοια, και ιδιαίτερα τη γλώσσα που χρησιμοποιείται γύρω από αυτή. Ακόμα, διερευνήθηκαν οι απόψεις των καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού με εστίαση στον ρυθμό μεταβολής.

Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει επιμέρους έρευνες σε φοιτητές γύρω από τον ρυθμό μεταβολής. Στην πιλοτική έρευνα εξετάστηκε η δυνατότητα επίλυσης έργων με μεταβολή και ρυθμό μεταβολής σε διάφορες αναπαραστάσεις και σε δύο διαφορετικά πλαίσια. Στην κυρίως έρευνα, εξετάστηκαν οι εννοιολογήσεις φοιτητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής και η κατανόηση διαφορετικών αναπαραστάσεών του.

Στο τρίτο μέρος της έρευνας αναπτύχθηκαν ενδεικτικές προτεινόμενες δραστηριότητες για τη διαισθητική εισαγωγή του ρυθμού μεταβολής και ιδιοτήτων του σε μαθητές στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στην αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με βάση τις παραπάνω έρευνες. Σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν δραστηριότητες σε διαφορετικά πλαίσια, κάποιες από τις οποίες δοκιμάστηκαν σε μικρές ομάδες μαθητών.

Συγκεκριμένα, η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελείται από εφτά κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θέμα που πραγματεύεται η διδακτορική διατριβή, αναλύονται οι λόγοι που οδήγησαν στην επιλογή του, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα, καθώς και η σημαντικότητά του στην επιστημονική έρευνα στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας αναλύεται το θεωρητικό πλαίσιο γύρω από την εννοιολόγηση μαθηματικών εννοιών, τις αναπαραστάσεις και τη γλώσσα των μαθηματικών. Αναφέρονται στοιχεία από τη διεθνή βιβλιογραφία γύρω από τον ρυθμό μεταβολής και βασικές έννοιες που σχετίζονται με την εννοιολόγησή του όπως ο λόγος, οι αναλογίες και ο αναλογικός συλλογισμός, η μεταβολή και ο συλλογισμός με βάση τη συμμεταβολή, και η έννοια της κλίσης ευθείας. Γίνεται αναφορά σε παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, με εστίαση στον ρυθμό μεταβολής, όπως οι αναπαραστάσεις και το πλαίσιο του προβλήματος. Επιπλέον, παρουσιάζονται αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία σε σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και φοιτητές στην εννοιολόγηση και στον χειρισμό του ρυθμού μεταβολής, τα εννοιολογικά εμπόδια και προτάσεις διδακτικής του ιδιαίτερα με αξιοποίηση τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την παρουσίαση της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε, τον στόχο, και τα εργαλεία ανάλυσης δεδομένων. Στις έρευνες με ερωτηματολόγια πραγματοποιήθηκε περιγραφική στατιστική ανάλυση με το ελεύθερου περιβάλλοντος λογισμικό για στατιστική επεξεργασία R-Project και επεξεργασία των διαγραμμάτων με το Microsoft Excel, καθώς και συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση (statistical implicative analysis) με το λογισμικό CHIC και το πακέτο RCHIC του R-Project.

Στη συνέχεια σε τρία κεφάλαια αναλύονται οι επιμέρους έρευνες, όπου περιγράφεται η μεθοδολογία, παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα. Έτσι, το τέταρτο κεφάλαιο αφορά στο πρώτο ερευνητικό μέρος όπου αποτυπώνεται η θέση του ρυθμού μεταβολής και βασικών εννοιών για την εννοιολόγησή του στην υποχρεωτική εκπαίδευση στο ελληνόφωνο πρόγραμμα σπουδών. Αναλύονται οι αναφορές στις παραπάνω έννοιες στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας και της Κύπρου και γίνεται συγκριτική αναφορά με τα αντίστοιχα της Σιγκαπούρης. Ακόμα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας που διενεργήθηκε σε καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τις απόψεις τους για τη θέση του ρυθμού μεταβολής στην εκπαίδευση και τις δυσκολίες που παρατηρούν στους μαθητές.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που διεξήχθη για την αναγνώριση των δυσκολιών φοιτητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής. Αναλύεται η πιλοτική έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης, με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης του πλαισίου και των αναπαραστάσεων κατά την επίλυση έργων με μεταβολή και ρυθμό μεταβολής. Στη συνέχεια καταγράφεται η έρευνα σε φοιτητές πέντε πανεπιστημιακών τμημάτων, στην οποία τέθηκαν έργα σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής.

Το έκτο κεφάλαιο αφορά σε ενδεικτικές δραστηριότητες για τη διαισθητική αντίληψη του ρυθμού μεταβολής και την ενδυνάμωση του συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή. Περιγράφονται έξι δραστηριότητες, και συγκεκριμένα, μία βιωματική δραστηριότητα με εκπαιδευτική ρομποτική που σχετίζεται με αναλογίες, τρία παιχνίδια σε ψηφιακό περιβάλλον που αναπτύχθηκαν με το λογισμικό GeoGebra και το Scratch, μία βιωματική δραστηριότητα με εστίαση στον συλλογισμό με βάση τη συμμεταβολή, και ένα GeoGebra book με applets που καλύπτουν τις διαφορετικές εννοιολογήσεις της κλίσης όπως καταγράφονται στη βιβλιογραφία. Οι τρεις από τις δραστηριότητες δοκιμάστηκαν πειραματικά σε μικρές ομάδες μαθητών ή φοιτητών.

Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο πραγματοποιείται η σύνδεση των επιμέρους ερευνητικών μερών και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα. Με βάση αυτά γίνονται προτάσεις για τη διδακτική του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση και για κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας.

2 Θεωρητικό πλαίσιο

Θεωρητικό πλαίσιο και βιβλιογραφική ανασκόπηση

Το πρώτο μέρος της εργασίας αφορά στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την εννοιολόγηση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης και ιδιαίτερα του ρυθμού μεταβολής. Εντοπίζονται οι βασικές έννοιες για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής, οι αναπαραστάσεις του, πιθανές δυσκολίες των μαθητών, προτάσεις διδακτικής του και αξιοποίησης τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών (ΤΠΕ).

2.1 Μαθηματικές έννοιες

Τα μαθηματικά αποτελούν σημαντικό μέρος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στο ποια μαθηματικά και με ποιον τρόπο θα πρέπει να διδάσκονται. Αν και υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα εκπαιδευτικά συστήματα των χωρών, ο βασικός κορμός της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει πολλά κοινά στοιχεία. Σε αυτόν συγκαταλέγεται η μελέτη εννοιών του Διαφορικού Λογισμού, όπως η συνάρτηση, το όριο, η συνέχεια και η παράγωγος.

Αρκετές θεωρίες έχουν προταθεί για τον τρόπο με τον οποίο γίνονται αντιληπτές οι μαθηματικές έννοιες και ιδιαίτερα όσον αφορά σε έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης (Lakoff & Núñez, 2000· Dubinsky κ.ά., 2005· Tall, 2004). Έχουν μελετηθεί οι δυσκολίες των σπουδαστών στην κατανόηση βασικών εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως το όριο, η παράγωγος και η συνέχεια (Cornu, 1991· Tall & Vinner, 1981) και έχουν προταθεί διδακτικές προσεγγίσεις για την αντιμετώπισή τους (Tall, 1986, 1993, 2009, 2010). Αναφέρεται ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν μια ασθενή εννοιολογική εικόνα (concept image) για βασικές έννοιες, ενώ πολλές δυσκολίες παρατηρούνται και σε φοιτητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Tall & Vinner, 1981). Από πολλούς ερευνητές έχει τονιστεί ότι οι μαθητές αναπτύσσουν μηχανιστικές τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων Μαθηματικής Ανάλυσης που τους επιτρέπουν να έχουν καλά αποτελέσματα σε εξετάσεις, αλλά δεν εννοιολογούν επαρκώς τις έννοιες (Parameswaran, 2007· Tall & Vinner, 1981· Ervynck, 1994).

Η μεταβολή και ο ρυθμός μεταβολής επιλέχτηκαν ως κεντρικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης. Η κατανόησή τους και η δυνατότητα χειρισμού τους θεωρείται προαπαιτούμενη για τη μελέτη πιο σύνθετων εννοιών. Καθώς οι έννοιες αυτές έχουν πολλές εφαρμογές σε άλλους επιστημονικούς κλάδους και κυρίως στην περιγραφή φυσικών φαινομένων, η κατανόησή τους είναι απαραίτητη και για την ενασχόληση με αυτούς τους τομείς.

2.1.1 Εννοιολόγηση μαθηματικών εννοιών

2.1.1.1 Εννοιολογική εικόνα

Μια μαθηματική έννοια μπορεί να γίνει αντιληπτή από τους μαθητές εννοιολογικά και διαδικασιακά (conceptual and procedural knowledge) (Stump, 2001α). Η ανάγκη συνδυασμού της διαδικασιακής και της εννοιολογικής κατανόησης μαθηματικών εννοιών και σύνδεσης των μαθηματικών ιδεών τονίζεται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών (NCTM, 2000).

Οι μαθητές έχουν εμπειρίες από την καθημερινή ζωή και την εκπαίδευση πριν έρθουν σε επαφή με μία νέα έννοια των μαθηματικών. Οι σχολικές και εξωσχολικές εμπειρίες τους, η χρήση μαθηματικών όρων στην καθημερινή γλώσσα έχουν συντελέσει στη διαμόρφωση αντιλήψεων για μαθηματικές έννοιες πριν τη διδασκαλία τους (Cornu, 1991). Οι αντιλήψεις αυτές ονομάζονται αυθόρμητες ή πρότερες αντιλήψεις (spontaneous conceptions). Οι αρχικές ιδέες των μαθητών και οι εμπειρίες τους μπορεί να συμφωνούν με τις έννοιες που διδάσκονται στο σχολείο και σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς ως εισαγωγή σε μία έννοια.

Πολλές φορές όμως η εννοιολογική κατανόηση των μαθητών έρχεται σε σύγκρουση με την επιστημονική γνώση και τα όσα διδάσκονται. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα έντονο σε έννοιες των φυσικών επιστημών (Driver, 1985). Οι αυθόρμητες αντιλήψεις, ιδιαίτερα όταν αυτές αφορούν στην αισθητηριακή αντίληψη του πραγματικού κόσμου, μπορεί να αποτελέσουν γνωστικό εμπόδιο στην κατανόηση εννοιών. Είναι σημαντικό συνεπώς για τον εκπαιδευτικό να γνωρίζει τις πιθανές αντιλήψεις των μαθητών, τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν και να προσπαθήσει να τις χρησιμοποιήσει ή να τις απορρίψει κατά τη διδασκαλία.

Αντίστοιχα, οι μαθητές αναπτύσσουν μια διαισθητική εικόνα για τις μαθηματικές έννοιες (Fischbein κ.ά., 1979). Ο Fischbein διαχωρίζει τη διαίσθηση σε πρωτεύουσα και δευτερεύουσα, με βάση το αν έχει προκύψει από κάποιου τύπου εκπαιδευτική διαδικασία ή είναι αποτέλεσμα προσωπικών εμπειριών (Singer & Voica, 2003). Οι δύο αυτές μορφές διαίσθησης για μία έννοια είναι συχνά ασυμβίβαστες.

Οι Tall & Vinner (1981) ορίζουν μια εννοιολογική εικόνα (concept image) ως μια γνωστική αναπαράσταση μιας έννοιας έτσι όπως την έχει διαμορφώσει κάποιος στο μυαλό του. Περιλαμβάνει αναπαραστάσεις εννοιών ή διεργασιών που έχει μάθει ή απλώς έχει αντιληφθεί. Η γνωστική αυτή δομή είναι κάτι περισσότερο από ένα σύμβολο ή μια εικόνα. Κατά την ανάκληση μιας έννοιας διενεργούνται πολλές νοητικές διεργασίες που σχετίζονται με αυτή. Οι εννοιολογικές εικόνες μπορεί να μην έχουν πάντα συνέπεια και λογική και μπορεί από διαφορετικά ερεθίσματα να ανακαλείται διαφορετική εικόνα της ίδιας έννοιας.

Οι Tall & Vinner (1981) αναφέρονται στον ορισμό έννοιας (concept definition) ως μια λεκτική μορφή έκφρασης της έννοιας και μπορεί να είναι προσωπικός (personal) ή τυπικός ορισμός (formal concept definition). Πολλές φορές οι μαθητές έχουν διαμορφώσει μια εικόνα του ορισμού της έννοιας που διαφέρει από τον πραγματικό ορισμό της ή μαθαίνουν να επιλύουν προβλήματα με τον ορισμό έχοντας όμως λάθος εννοιολογική εικόνα. Η εικόνα των μαθητών για μια έννοια μπορεί να περιέχει αντιφάσεις, να διαφέρει από τον ορισμό της έννοιας ή να υπάρχουν διαφορετικές, αντιφατικές εικόνες οι οποίες να ανακαλούνται σε διαφορετικές περιστάσεις αποτελώντας παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης (cognitive conflict factors). Η επίδραση των εννοιολογικών εικόνων που μπορεί να έχει σχηματίσει κάποιος πριν από τη διδασκαλία των εννοιών είναι έντονη και σε πολλές περιπτώσεις αποτελεί εμπόδιο των μαθητών στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν τις συσχετίσεις των εννοιών και να μεταβούν σε διαδικασίες αφαιρετικής σκέψης (Juter, 2009). Οι παρανοήσεις είναι οι εννοιολογήσεις των μαθητών που διαφέρουν από την εδραιωμένη επιστημονική γνώση.

Ο Thompson (1994α) θεωρεί την εικόνα ως συνδυασμό εμπειριών από την κιναισθησία, τη μυρωδιά, την αφή, τη γεύση, την όραση ή την ακοή και ακόμα συναισθηματικών και γνωστικών εμπειριών.

Πολλές φορές στα μαθηματικά από την εφαρμογή μιας διαδικασίας (process) προκύπτει μία έννοια (concept) (Tall, 1996). Για παράδειγμα, από τη διαδικασία άθροισης αριθμών προκύπτει μια νέα έννοια, το άθροισμά τους (Πίνακας 2.1).

Πίνακας 2.1. Παραδείγματα διαδικασιών-εννοιών (Tall, 1996)

Διαδικασία (process)	Έννοια (concept)
Πρόσθεση	Άθροισμα
Μέτρηση	Αριθμός
Διαχωρισμός σε ίσα μέρη	Κλάσμα
Υπολογισμός κλίσης	Ρυθμός μεταβολής
Οριακές διαδικασίες	Όριο

Οι Gray & Tall (1994) διατύπωσαν μια θεωρία για να εκφράσουν τον συνδυασμό της διαδικασίας και της παραγόμενης έννοιας. Σύμφωνα με αυτή υπάρχει δυαδικότητα, με την έννοια ότι ένα σύμβολο στα μαθηματικά μπορεί να αναπαραστήσει τόσο τη διαδικασία όσο και την έννοια. Έτσι για παράδειγμα το πηλίκο είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης, το άθροισμα είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, η παράγωγος της παραγώγισης και το ολοκλήρωμα της ολοκλήρωσης. Οι συγγραφείς εισήγανε έναν νέο όρο που τον ονόμασαν procept από τους όρους process και concept. Για να τον ορίσουν χρησιμοποίησαν τον όρο στοιχειώδες procept (elementary procept) που αποτελείται από τρία στοιχεία: μια *διαδικασία* που παράγει ένα μαθηματικό *αντικείμενο* (ή *έννοια*) και ένα *σύμβολο* που αναπαριστά είτε τη διαδικασία είτε την έννοια. Έτσι ο όρος procept αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στοιχειωδών procepts που αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο (Sajka, 2003).

Οι εννοιολογήσεις των μαθητών που δεν είναι “σωστές” με την αυστηρή μαθηματική έννοια σε κάποιες περιπτώσεις οφείλονται και στη σχολική εκπαίδευση. Τα σχολικά εγχειρίδια στην προσπάθεια απλούστευσης των εννοιών για την καλύτερη κατανόηση από τους μαθητές μπορεί να αναφέρουν έννοιες με περιορισμούς που δεν γίνονται αντιληπτοί και δημιουργούν μια λανθασμένη εικόνα. Επιπλέον, οι καθηγητές μαθηματικών έχουν τις δικές τους εννοιολογήσεις που μπορεί να συγκρούονται με τους τυπικούς ορισμούς, χωρίς αυτό να γίνεται αντιληπτό και αυτό επηρεάζει τον τρόπο που αναφέρονται στις έννοιες και συνεπώς την εννοιολόγηση που δημιουργείται στους μαθητές για αυτές.

Στη μαθηματική εκπαίδευση τονίζεται ότι δεν αρκεί να ξέρουν οι μαθητές να υπολογίζουν και να χρησιμοποιούν τις έννοιες, αλλά θα πρέπει να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόησή τους και στην ερμηνεία τους σε διάφορα πλαίσια.

Οι Thompson & Carlson (2017) περιγράφουν μία προσέγγιση εισαγωγής στη Μαθηματική Ανάλυση, η οποία έχει ως βάση τον ποσοτικό συλλογισμό, την ομαλή συνεχή συμμεταβολή και τη σχέση μεταξύ συσσώρευσης και ρυθμού μεταβολής. Σύμφωνα με τα παραπάνω σχεδιάστηκε και προτάθηκε από τους ερευνητές ένα μάθημα Μαθηματικής Ανάλυσης το οποίο φαίνεται ότι έχει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την παραδοσιακή προσέγγιση με βάση το όριο (Thompson & Dreyfus, 2016).

2.1.1.2 Τρεις κόσμοι του Tall

Ο Tall (2004) ορίζει τρεις διακριτούς αλλά συνδεόμενους κόσμους στα μαθηματικά για να διαχωρίσει διαφορετικές καταστάσεις μαθηματικής σκέψης. Ο πρώτος κόσμος ονομάζεται εννοιολογικός-ενσωματικός κόσμος (conceptual-embodied world), όπου χρησιμοποιείται η φυσική αντίληψη μιας έννοιας για τη διεξαγωγή νοητικών πειραμάτων για την κατασκευή νοητικών συλλήψεων μαθηματικών εννοιών. Σε αυτό το στάδιο ανήκει η διαισθητική αντίληψη των εννοιών.

Ο δεύτερος κόσμος κατά τον Tall ονομάζεται διαδικασιοεννοιολογικός-συμβολικός κόσμος (proceptual-symbolic world). Οι δραστηριότητες του προηγούμενου κόσμου μετεξελίσσονται σε έννοιες με την εισαγωγή συμβόλων. Τα σύμβολα αυτά μπορεί να εκφράζουν την έννοια ή τη διαδικασία και αναφέρονται με τον όρο procept. Η αλλαγή που συντελείται είναι από το να εφαρμόζουμε διαδικασίες στο να σκεφτόμαστε για έννοιες.

Ο τρίτος κόσμος ονομάζεται τυπικός-αξιωματικός κόσμος (formal−axiomatic world) και βασίζεται σε ιδιότητες που εκφράζονται με τυπικούς ορισμούς και αξιώματα που ορίζουν μαθηματικές δομές. Άλλες ιδιότητες και νέες έννοιες προκύπτουν με τυπικές αποδείξεις και κατασκευάζεται μια συνεκτική, συνεπαγωγική θεωρία.

2.1.2 Ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση

Μεταξύ των προτάσεων για τον υπερσκελισμό των εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά περιλαμβάνονται η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education) (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005· Freudenthal, 1973), η χρήση αναπαραστάσεων, γραφικής, αριθμητικής, συμβολικής (Tall, 1992) και λεκτικής (Tall, 2003) και η χρήση ΤΠΕ.

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (ΡΜΕ) είναι μία φιλοσοφική άποψη της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών που προτάθηκε από τον Freudenthal (1973, 1983). Οι βασικές αρχές στις οποίες στηρίχτηκε ήταν ότι τα μαθηματικά είναι μία ανθρώπινη δραστηριότητα και πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα. Δίνει έμφαση στο να προσφέρονται στους μαθητές καταστάσεις προβλήματος που μπορούν να φανταστούν, δηλαδή που μπορούν να καταστούν πραγματικές στο μυαλό τους. Τα πλαίσια των προβλημάτων δεν περιορίζονται κατ’ ανάγκη σε πραγματικές καταστάσεις, αλλά μπορούν να πηγάζουν και από τον κόσμο της φαντασίας, των παραμυθιών ή από τον τυπικό κόσμο των μαθηματικών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003· Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Στη ΡΜΕ χρησιμοποιούνται «ρεαλιστικές» καταστάσεις στη διδασκαλία ως έναυσμα για την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και ως πλαίσιο εφαρμογής μαθηματικής γνώσης (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Η μαθηματική γνώση σταδιακά γίνεται πιο τυπική και ανεξάρτητη από το πλαίσιο.

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση βασίζεται στις παρακάτω βασικές αρχές (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014· Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005):

- Αρχή της δράσης (activity principle). Οι μαθητές είναι ενεργοί συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία
- Αρχή της πραγματικότητας (reality principle). Αφενός σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευση σε σχέση με την ικανότητα των μαθητών να λύσουν προβλήματα της καθημερινής ζωής, και αφετέρου εκκίνηση της μαθηματικής εκπαίδευσης από καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές μέσω των οποίων αναπτύσσουν τις μαθηματικές έννοιες.
- Αρχή του επιπέδου (level principle). Η μάθηση των μαθηματικών ακολουθεί επίπεδα κατανόησης.
- Αρχή της αλληλοσύνδεσης (intertwinement principle). Οι θεματικές των μαθηματικών δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά αντίθετα συνδέονται στο πρόγραμμα σπουδών.
- Αρχή της διαδραστικότητας (interactivity principle). Η μάθηση των μαθηματικών είναι μία κοινωνική δραστηριότητα. Ενθαρρύνεται ο διάλογος, η συνεργασία και η ανταλλαγή ιδεών.
- Αρχή της καθοδήγησης (guidance principle). Η διδασκαλία και το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών οδηγούν στην αλλαγή της κατανόησης των μαθητών.

Γίνεται διαχωρισμός σε δύο τύπους μαθηματικοποίησης σε εκπαιδευτικό πλαίσιο, τα οριζόντιας και της κάθετης. Στην οριζόντια, οι μαθητές καταλήγουν σε μαθηματικά εργαλεία για την οργάνωση και την επίλυση ενός προβλήματος που τίθεται σε μια ρεαλιστική κατάσταση (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Η κάθετη μαθηματικοποίηση είναι η διαδικασία αναδιοργάνωσης μέσα στο ίδιο το μαθηματικό σύστημα, όπως η σύνδεση μεταξύ εννοιών και στρατηγικών και η εφαρμογή τους.

2.1.3 Αναπαραστάσεις

Σε ένα γράμμα στον Jacques Hadamard, ο Albert Einstein έγραψε ότι σκέφτεται αρχικά με σύμβολα και εικόνες και σε δεύτερο στάδιο χρησιμοποιεί τις λέξεις και τη γλώσσα (Hadamard, 1954).

Μία εικόνα στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να αποτελεί το έναυσμα για τη διδασκαλία μία νέας έννοιας και να λειτουργεί ως «γνωστική ρίζα» (cognitive root) (Tall κ.ά., 2000) για την ανάπτυξη της εννοιολογικής εικόνας. Ως «γνωστική ρίζα» θεωρούμε μία ιδέα που ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει εύκολα και η οποία αποτελεί βάση στην οποία μπορεί να αναπτυχθεί μία θεωρία (Tall κ.ά., 2000).

Η αρχική αυτή εικόνα μετατρέπεται, εμπλουτίζεται ή ακόμα αντικαθίσταται για να οδηγήσει στην ολοκληρωμένη κατανόηση μίας έννοιας (Avgerinos & Remoundou, 2016). Η διαδικασία αυτή μπορεί να επιτευχθεί πιο αποτελεσματικά με τη συμβολή τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών.

Στην έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση έχει αναδειχτεί έντονα ο ρόλος των αναπαραστάσεων. Ως αναπαράσταση ορίζεται κάθε συνδυασμός χαρακτήρων, εικόνων και συγκεκριμένων αντικειμένων που μπορούν να συμβολίσουν κάτι άλλο (Gagatsis & Elia, 2004). Μια κατηγοριοποίηση των αναπαραστάσεων στα μαθηματικά είναι σε εξωτερικές/σημειωτικές και εσωτερικές/νοητικές αναπαραστάσεις (Goldin, 1998).

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις σχετίζονται με σχήματα, σύμβολα ή διαγράμματα, τα οποία αναπαριστούν μια συγκεκριμένη άποψη της πραγματικότητας όπως συμβαίνει στα μαθηματικά (Goldin, 1998· Agathangelou κ.ά., 2008). Οι εσωτερικές/νοητικές αναπαραστάσεις αφορούν κυρίως στις νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε, οι οποίες αντιστοιχούν σε εσωτερικούς σχηματισμούς της πραγματικότητας. Εξαιτίας της φύσης τους δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Η ύπαρξή τους δηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των ατόμων (Goldin, 1998· Janvier, 1987). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές παρουσιάζουν μια εξωτερική αναπαράσταση φανερώνει στοιχεία για το πώς έχουν κατανοήσει αυτές τις πληροφορίες εσωτερικά.

Μία μόνο αναπαράσταση δεν μπορεί να καλύψει όλες τις πτυχές μίας έννοιας (Duval, 2006). Η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας απαιτεί την ικανότητα αναγνώρισής της σε ποικίλες ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της σε ένα αναπαραστασιακό σύστημα και την ικανότητα μεταφοράς της από ένα σύστημα σε ένα άλλο (Lesh κ.ά., 1987). Η επιτυχημένη μετάβαση από τη μία αναπαράσταση μιας έννοιας σε άλλη συμβάλλει στην ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας και στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Σύμφωνα με τη διαπίστωση του Duval (2006), η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι δυνατό να επιτευχθεί μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης μιας έννοιας από τους μαθητές.

Η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν έννοιες σε διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων, αλλά και να μεταβαίνουν από το ένα στο άλλο δεν αναπτύσσεται μόνο με την παράθεση πολλαπλών, διαφορετικών αναπαραστάσεων, τις οποίες οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν και να αναλύσουν. Για να αναπτυχθούν οι γνωστικές δομές και οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων απαιτείται η ανακατασκευή αυτών και των μεταξύ τους σχέσεων (Sacristán & Noss, 2008). Με τον τρόπο αυτό θα τους αποδοθεί νόημα και θα ενταχθούν στο γνωστικό πλαίσιο ιδεών και εννοιών του μαθητή.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιούνται συνδυαστικά αλλά συγχρόνως να συμβαδίζουν με τη θεωρία. Πολλές φορές οι μαθητές θεωρούν διαφορετικές αναπαραστάσεις μίας έννοιας ως αυτόνομες και διακριτές (Gagatsis & Elia, 2005). Επιπλέον, εικόνες που δεν εκφράζουν σωστά μία έννοια μπορεί να οδηγήσουν σε παρανοήσεις.

Οι εικονικές αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερης σημασίας στη μαθηματική εκπαίδευσης ως εργαλείο μετάδοσης μαθηματικών εννοιών (Gagatsis κ.ά., 2010· Monoyiou κ.ά., 2007). Διάφορες εικόνες χρησιμοποιούνται ως αφετηρία, ως αναπαράσταση μίας έννοιας, για να εμπλουτίσουν μία ερμηνεία ή για να προσελκύσουν το ενδιαφέρον.

Η εικόνα σταδιακά μέσω της εκπαιδευτικής διαδικασίας μετατρέπεται σε μία συνεκτική και αποτελεσματική εννοιολογική εικόνα. Σε αυτή την περίπλοκη διαδικασία είναι σημαντικός και ο ρόλος των τεχνολογικών πληροφορίας και επικοινωνιών. Εκπαιδευτικό λογισμικό, προσομοιώσεις αλλά και ηλεκτρονικά παιχνίδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διαμόρφωση μίας πλούσιας νοητικής εικόνας των μαθηματικών εννοιών.

Οι αναπαραστάσεις μπορεί να περιλαμβάνουν αντικείμενα, εικόνες, γραπτά σύμβολα, προφορικό λόγο και πραγματικές καταστάσεις (Lesh κ.ά., 1987). Ο τρόπος που αναπαρίσταται μία έννοια στα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζει την κατανόησή της από τους μαθητές. Μία κατηγοριοποίηση των εικόνων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ανάλογα με τη λειτουργία τους είναι σε διακοσμητικές, οι οποίες δεν δίνουν πραγματικές πληροφορίες, σε βοηθητικές-αναπαραστασιακές, που αναπαριστούν μέρος του προβλήματος αλλά δεν είναι απαραίτητες για την επίλυσή του, σε βοηθητικές-οργανωτικές, που έχουν οργανωτικό ρόλο και σε πληροφοριακές, στις οποίες υπάρχει απαραίτητη πληροφορία για την επίλυση του προβλήματος (Gagatsis & Elia, 2005· Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003).

Μία εικόνα είναι βοηθητική στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά δεν μπορεί να περιγράψει εξ ολοκλήρου μία μαθηματική έννοια. Κάθε αναπαράσταση δίνει πληροφορίες για κάποια όψη μίας έννοιας και διαφορετικές αναπαραστάσεις συμπληρώνουν τη συνολική εικόνα της έννοιας (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Ένας ακόμα όρος που χρησιμοποιείται στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η οπτικοποίηση (visualization). Ο Arcavi (2003) αναφέρει ότι οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδιακασία και το αποτέλεσμα της δημιουργικότητας, η ερμηνεία, η χρήση και η σκέψη για εικόνες, διαγράμματα, νοητικά, στο χαρτί ή με χρήση τεχνολογικών μέσων, με σκοπό την απεικόνιση και την ανταλλαγή πληροφορικών, τη σκέψη και την ανάπτυξη ιδεών που ήταν άγνωστες και την κατανόηση.

Το αποτέλεσμα μίας αναπαράστασης στη μάθηση των μαθηματικών εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο αυτή χρησιμοποιείται (Gagatsis & Elia, 2005). Η επίδραση των αναπαραστάσεων στην επίδοση των μαθητών μπορεί να επηρεαστεί από τον τύπο της αναπαράστασης, όπως τη φύση της, τη δομή της και την πολυπλοκότητά της. Εξαρτάται ακόμα από τη μαθηματική έννοια που περιγράφεται και τη σχέση της οπτικής αναπαράστασης με αυτή. Τέλος, ο βαθμός κατανόησης μίας αναπαράστασης από τους μαθητές σχετίζεται και με προσωπικά χαρακτηριστικά του μαθητή, το γνωστικό υπόβαθρο και στυλ, και την εξοικείωσή του με τις αναπαραστάσεις (Monoyiou κ.ά., 2007).

Στη μαθηματική εκπαίδευση χρησιμοποιείται ο όρος compartmentalization, ο οποίος όσον αφορά στις αναπαραστάσεις αναφέρεται στις δυσκολίες των μαθητών να συνδέσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις και να μεταβούν από μία αναπαράσταση σε μία άλλη (Elia κ.ά., 2005). Παρατηρείται έτσι ασυνέπεια στην επίλυση έργων που αναφέρονται στην ίδια έννοια αλλά διαφέρουν σε κάποιο χαρακτηριστικό, όπως ο τρόπος που αναπαρίστανται (Gagatsis κ.ά., 2006). Στα ελληνικά ο όρος αποδίδεται ως στεγανοποίηση, αλλά καθώς δεν πιστεύουμε ότι αποδίδει την έννοια, διατηρείται ο αγγλικός όρος.

Όσον αφορά στην κατανόηση των συναρτήσεων οι Elia και Spyrou (2006) θεωρούν ότι το φαινόμενο compartmentalization παρουσιάζεται όταν συμβαίνει οι μαθητές δεν έχουν έναν συνεπή τρόπο στην επίλυση έργων με διαφορετικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων ή στη μετατροπή από μία αναπαράσταση σε μία άλλη, ή όταν σωστή επίλυση έργων σε μία αναπαράσταση δεν συνεπάγεται σωστή επίλυση έργων σε άλλη αναπαράσταση.

2.1.4 Η “γλώσσα” των μαθηματικών

Η γλώσσα των μαθηματικών αποτελεί μέρος της μάθησης μαθηματικών και ο ρόλος της γλώσσας και του διαλόγου έχει αναδειχτεί τα τελευταία χρόνια ως καίριο στοιχείο της διδακτικής των μαθηματικών (Riccomini κ.ά., 2015· Schleppegrell, 2007). Η γλώσσα είναι απαραίτητη για την επικοινωνία, τη μετάδοση των μαθηματικών ιδεών και την απόδοση νοήματος στις έννοιες. Η γλώσσα των μαθηματικών θεωρείται ότι είναι ακριβής και δεν αφήνει περιθώρια για ασάφειες, οι όροι ορίζονται με ακρίβεια και τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι σε μεγάλο βαθμό κοινά σε όλες τις γλώσσες.

Στην πράξη όμως και ιδιαίτερα στη διδακτική που αποτελεί μια κοινωνική δραστηριότητα, η γλώσσα δεν είναι πάντα τόσο αυστηρή και μπορεί να εμπεριέχει ασάφειες. Ο τρόπος που χρησιμοποιείται η γλώσσα στα μαθηματικά διαφέρει από την καθημερινή γλώσσα και ενδέχεται να προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές (Schleppegrell, 2007). Γλωσσικές προκλήσεις και ασάφειες σε τεχνική ορολογία μπορεί να δυσκολέψουν τους μαθητές και να επηρεάσουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ενώ η γλώσσα είναι βασικό στοιχείο της διδασκαλίας, της επεξήγησης, μετάδοσης και ανακάλυψης εννοιών, μπορεί και να δυσχεράνει τη μαθησιακή διαδικασία δημιουργώντας ένα χάσμα ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές. Πολλοί εκπαιδευτικοί αλλά και μαθητές αναγνωρίζουν ότι υπάρχει έλλειψη κατανόησης και από τις δύο πλευρές σαν να μιλάνε διαφορετικές γλώσσες (Van Hiele, 1986).

Μερικές φορές στη διδασκαλία παραλείπονται κάποιες λέξεις, περικόπτονται φράσεις και χρησιμοποιούνται χειρονομίες και αντωνυμίες αντί των μαθηματικών όρων. Οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και να μεταβούν από την άτυπη, καθημερινή γλώσσα στην αυστηρή γλώσσα των μαθηματικών (Riccomini κ.ά., 2015· Schleppegrell, 2007).

Κάποιες λέξεις είναι κοινές στην καθημερινή γλώσσα και στα μαθηματικά αλλά έχουν διαφορετικό νόημα, ενώ άλλες είναι ασυνήθιστες, ή ακόμα χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους με διαφορετικούς τρόπους. Η εμφάνιση ασαφειών δεν είναι απαραίτητο να προκαλεί παρανοήσεις. Μπορεί με τον κατάλληλο χειρισμό να αποτελέσει βοήθημα στη διδασκαλία και στην εκμάθηση της γλώσσας των μαθηματικών (Barwell, 2005).

Όταν σε μια συγκεκριμένη λέξη ή φράση μπορούν να αποδοθούν λογικά περισσότερες της μίας ερμηνείες υπάρχει λεξιλογική ασάφεια (lexical ambiguity) (Barwell, 2005). Λεξιλογική ασάφεια μπορεί να προκύψει όταν μια λέξη της καθημερινής γλώσσας χρησιμοποιείται και ως τεχνικός όρος (Barwell, 2005).

Όσον αφορά στη χρήση λεξιλογίου στα μαθηματικά αναφέρονται οι παρακάτω περιπτώσεις (Rubenstein & Thompson, 2002):

- Λέξεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και στην καθημερινή γλώσσα με διαφορετική σημασία. Ένα παράδειγμα αγγλικού όρου είναι η λέξη right, που στην καθομιλουμένη έχει την έννοια του σωστός ενώ στα μαθηματικά εκφράζει την ορθή γωνία. Η λέξη «λόγος» έχει πολλές ερμηνείες όπως η ομιλία και η αιτία, αλλά στα μαθηματικά σύμφωνα με τον ορισμό του ελληνικού σχολικού βιβλίου (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, κεφ. 30), λόγος είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα με αριθμητή το ένα μέγεθος και παρανομαστή το άλλο.
- Λέξεις που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα και στα μαθηματικά με παρόμοια σημασία, αλλά η μαθηματική χρήση τους είναι πιο ακριβής. Παράδειγμα στα αγγλικά η λέξη difference και αντίστοιχα η λέξη διαφορά στα ελληνικά.
- Κάποιοι μαθηματικοί όροι χρησιμοποιούνται μόνο στο πλαίσιο των μαθηματικών, όπως parallelogram, isosceles και αντίστοιχα στα ελληνικά παραλληλόγραμμο και ισοσκελές.

- Μερικές λέξεις έχουν περισσότερες από μία σημασίες στα μαθηματικά, όπως το τετράγωνο (σχήμα και δύναμη). Στα αγγλικά σε αυτή την κατηγορία αναφέρονται και οι όροι round, second και side, οι οποίοι όμως στα ελληνικά αντιστοιχούν σε διαφορετικούς όρους για την κάθε σημασία τους.
- Κάποιες λέξεις χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και σε άλλους κλάδους με διαφορετική σημασία στον κάθε κλάδο, όπως η λέξη divide (Continental divide) ή η λέξη δύναμη.
- Κάποιες μαθηματικές λέξεις είναι ομόηχες με λέξεις της καθημερινής γλώσσας, όπως sum και some. Στα ελληνικά τέτοια παραδείγματα είναι πιο σπάνια.
- Υπάρχουν ακόμα λέξεις που συνδέονται νοηματικά αλλά οι μαθητές συγχέουν τη σημασία τους. Ως παράδειγμα αναφέρονται οι λέξεις factor και multiple. Στα ελληνικά αντίστοιχες λέξεις είναι η μεταβλητή και μεταβολή.
- Μία αγγλική λέξη μπορεί να μεταφράζεται σε δύο διαφορετικές λέξεις σε άλλη γλώσσα, όπως το table που μπορεί να σημαίνει τραπέζι αλλά και πίνακας και το round που μπορεί να μεταφραστεί ως κύκλος ή στρογγυλοποιώ.
- Αντίστοιχα δύο λέξεις των αγγλικών μπορεί να αντιστοιχούν στον ίδιο όρο σε μια άλλη γλώσσα, όπως για παράδειγμα οι λέξεις conrer και vertex που μεταφράζονται ως κορυφή.
- Στα αγγλικά υπάρχουν κάποιες παρατυπίες στην προφορά και στη χρήση, όπως στις λέξεις four και forty.
- Μερικές μαθηματικές έννοιες εκφράζονται με περισσότερους από έναν τρόπους, όπως one-quarter και one-fourth.
- Οι μαθητές μπορεί να υιοθετούν έναν μη τυπικό όρο ως μαθηματικό, όπως τον όρο corner (γωνία) αντί για vertex (κορυφή).

Αρκετές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί για τη λεξιλογική ασάφεια από χρήση όρων στη στατιστική (Dunn κ.ά., 2016· Kaplan κ.ά., 2009), αλλά και στην άλγεβρα (Adu & Olaoye, 2014· Olaoye κ.ά., 2014).

Ιδιαίτερα όσον αφορά στη Μαθηματική Ανάλυση, οι έννοιες που ορίζονται αρχικά εμπλουτίζονται, εισάγονται νέες παράμετροι σταδιακά και η γλώσσα που χρησιμοποιείται γίνεται πιο εξεζητημένη. Αναγνωρίζοντας τον ρόλο της γλώσσας στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στο δεύτερο μέρος της έρευνας γίνεται αναφορά στην ορολογία που χρησιμοποιείται κατά την ενασχόληση με τον ρυθμό μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση και σε παρανοήσεις μαθητών ή φοιτητών, οι οποίες σχετίζονται με αυτή.

2.1.5 Στάσεις και πεποιθήσεις

Οι πεποιθήσεις ενός ατόμου είναι οι υποκειμενικές γνώσεις και αντιλήψεις του για ένα συγκεκριμένο θέμα, συμπεριλαμβανομένων των συναισθημάτων του, για τις οποίες δεν υπάρχουν πάντα πειστικά τεκμήρια από αντικειμενικές παρατηρήσεις (Pehkonen, 2001). Οι πεποιθήσεις έχουν έντονο το συναισθηματικό στοιχείο.

Ως στάσεις για το μάθημα των μαθηματικών θεωρούμε τις συναισθηματικές αντιδράσεις, τη συμπεριφορά και τις αντιλήψεις για το αντικείμενο (Hart, 1989). Από τις έρευνες σε σχέση με τις στάσεις για τα μαθηματικά έχουν αναδειχθεί ως σημαντικοί παράγοντες, η αυτοπεποίθηση, το άγχος, η αξία, η ευχαρίστηση, τα κίνητρα και οι προσδοκίες των γονέων και καθηγητών (Tapia & Marsh, 2004).

Ένα μεγάλο μέρος της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση έχει αφιερωθεί στη σχέση μεταξύ στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά με την επίδοση των μαθητών (Φιλίππου & Χρίστου, 2001· Hannula κ.ά., 1996). Τα πιο συνηθισμένα ευρήματα σχετικά με τις στάσεις των μαθητών για τα μαθηματικά είναι ότι τα θεωρούν χρήσιμα και σημαντικά, ωστόσο τα βρίσκουν ανιαρά και δύσκολα (Hannula κ.ά., 1996). Οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά φαίνεται ότι επηρεάζουν την επίδοσή τους (Gómez-Chacón, 2000).

Αν και υπάρχουν αρκετές έρευνες για τη σχέση πεποιθήσεων και επίδοσης στα μαθηματικά (Φιλίππου & Χρίστου, 2001· Hannula κ.ά., 1996), είναι περιορισμένος ο αριθμός αυτών που συνδυάζονται με τη Μαθηματική Ανάλυση (Huang, 2011).

Στην έρευνα των Tapia & Marsh (2004) έγινε μία προσπάθεια ανάπτυξης ενός εργαλείου μέτρησης των στάσεων των μαθητών για τα μαθηματικά. Σε αυτό αναδείχτηκαν τέσσερεις παράγοντες, η αυτοπεποίθηση, η αξία των μαθηματικών, η ευχαρίστηση των μαθηματικών και τα κίνητρα. Αν και αξιολογήθηκαν το άγχος και οι προσδοκίες γονέων και καθηγητών, αυτοί οι παράγοντες δεν φάνηκε να επηρεάζουν σημαντικά την επίδοση.

Τέλος, οι εννοιολογήσεις των δασκάλων και των υποψήφιων δασκάλων είναι καθοριστικής σημασίας, αφού επηρεάζουν αποφασιστικά και τους άλλους παράγοντες για μια επιτυχημένη διδασκαλία, όπως τον κατάλληλο τρόπο διδασκαλίας, τη χρήση σωστών αναπαραστάσεων και τη θετική στάση προς τα μαθηματικά (Thompson, 1992).

2.2 Μαθηματικά των αλλαγών

Αλλαγές συντελούνται συνεχώς γύρω μας και τις αντιλαμβανόμαστε μέσω των αισθήσεων. Ιδιαίτερα αλλαγές σε σχέση με τον χρόνο γίνονται αντιληπτές διαισθητικά και έχουμε μια εικόνα του συνεχούς του χρόνου. Η Μαθηματική Ανάλυση είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τις μεταβολές, και για το λόγο αυτό ο Λογισμός καλείται και μαθηματικά των αλλαγών. Προσφέρει τα εργαλεία για τη μοντελοποίηση προβλημάτων αλλαγών του πραγματικού κόσμου. Η περιγραφή των φαινομένων που αλλάζουν περιλαμβάνει όχι μόνο την εστίαση στην αλλαγή, αλλά και στον τρόπο που γίνεται αυτή. Από τη μελέτη του τρόπου με τον οποίο γίνεται η αλλαγή μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα και προβλέψεις. Οι συναρτήσεις και ο ρυθμός μεταβολής αποτελούν βασικά εργαλεία μοντελοποίησης φυσικών φαινομένων. Στα Principles and Standards του NCTM (2000) αναφέρεται ότι η εστίαση στις έννοιες των αλλαγών σε μικρότερες ηλικίες μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές ως μια στέρεη βάση για την κατανόηση των εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης.

2.2.1 Ρυθμός μεταβολής

Πόση είναι η ταχύτητα ενός δρομέα που τρέχει 500 μέτρα σε 1,6 λεπτά; Πόσο γρήγορα αλλάζει ο όγκος ενός μπαλονιού που φουσκώνει; Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού σε σχέση με το ύψος του σε μία δεξαμενή που γεμίζει; Ποια είναι η ερμηνεία ενός θετικού, μειούμενου ρυθμού μεταβολής; Αυτές είναι κάποιες ερωτήσεις που συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής και μπορεί να προκαλέσουν δυσκολίες σε μαθητές αλλά και σε ενήλικες. Η λύση σε τέτοιου τύπου ερωτήσεις παρουσιάζεται στην τελευταία τάξη του λυκείου, όπου εισάγεται ο ρυθμός μεταβολής μίας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη ως η παράγωγός της. Στις σχολικές αίθουσες δίνονται παραδείγματα ρυθμών μεταβολής και παρουσιάζεται η υπολογιστική λύση τους με τη βοήθεια της παραγώγου.

Κατά τη μελέτη δυναμικών φαινομένων, εκτός από τη μέτρηση της μεταβολής μιας ποσότητας, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η μελέτη του τρόπου με τον οποίο συντελείται η μεταβολή αυτή. Ο ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη δίνει πληροφορίες για τη μελέτη και την πρόβλεψη ενός φαινομένου. Η κεντρική ιδέα της έννοιας του ρυθμού μεταβολής είναι πόσο γρήγορα αλλάζει η τιμή μίας συνάρτησης σε σχέση με το αρχικό της όρισμα.

Ο ρυθμός μεταβολής έχει εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους εκτός των μαθηματικών, όπως στη φυσική, στη βιολογία, στα οικονομικά, στα ηλεκτρονικά, στη μηχανική. Κάποιοι γνωστοί ρυθμοί μεταβολής είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η ισχύς, ο ρυθμός μεταβολής ορμής, κινητικής ενέργειας, δυναμικής ενέργειας και φορτίου πυκνωτή, ο ρυθμός μεταφοράς δεδομένων τηλεπικοινωνιακής σύνδεσης (Πίνακας 2.2).

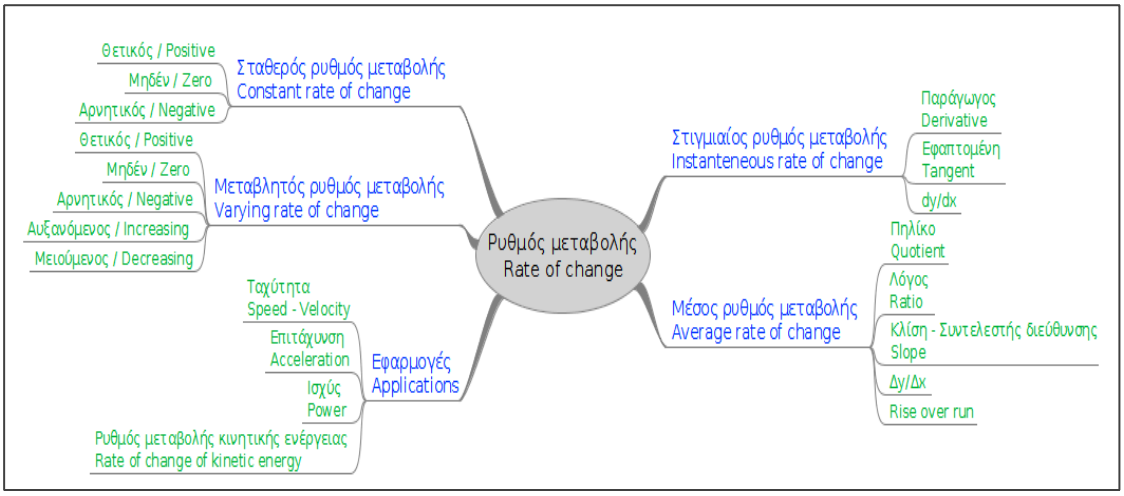
Πίνακας 2.2. Γνωστοί ρυθμοί μεταβολής στη φυσική

Έννοια	**Τύπος**
Ταχύτητα	$\frac{ds}{dt} = u$
Επιτάχυνση	$\frac{du}{dt} = a$
Ρυθμός μεταβολής ορμής	$\frac{dp}{dt} = \Sigma F$
Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας	$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot u$
Ισχύς - Ρυθμός μεταβολής έργου – ενέργειας	$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = P$
Ρυθμός μεταβολής φορτίου πυκνωτή - ένταση του ρεύματος	$\frac{dq}{dt} = I$

Σε κάποιες περιπτώσεις ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους εκφράζει ένα άλλο φυσικό μέγεθος, όπως στην περίπτωση της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και της ισχύς. Αυτό, ενώ εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση των εννοιών, τελικά ενδέχεται να προκαλέσει παρανοήσεις, καθώς δεν γίνεται η σύνδεση με τον ρυθμό μεταβολής και τις ιδιότητές του. Δημιουργείται η εντύπωση ότι ο όρος που χρησιμοποιείται για αυτό το μέγεθος αναφέρεται σε μία νέα οντότητα και όχι στη συμμεταβολή δύο μεγεθών (Lobato & Thanheiser, 1999).

Ο μεγάλος αριθμός εφαρμογών του ρυθμού μεταβολής και σε πολλές περιπτώσεις η έντονη εννοιολογική εικόνα του ως μία άλλη ποσότητα, προκαλεί την αίσθηση ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια περισσότερο της φυσικής και λιγότερο των μαθηματικών και θα έπρεπε να διδάσκεται κυρίως σε μαθήματα φυσικών επιστημών. Παρόλα αυτά διδάσκεται στα μαθηματικά και συνδέει έννοιες που κατά τα άλλα φαίνονται ασύνδετες. Η κατανόηση των εννοιολογικών αυτών συνδέσεων από τους μαθητές τούς δίνει τη συνολική εικόνα μέσω της οποίας μπορούν να νοηματοδοτήσουν τις έννοιες πέρα από τον αλγοριθμικό χειρισμό τους.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια με πολλές όψεις. Έγινε μια προσπάθεια αποτύπωσης των όψεων του ρυθμού μεταβολής σε έναν εννοιολογικό χάρτη (Εικόνα 2.1) (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2018α). Οι εννοιολογικοί χάρτες αποτελούν γραφικά εργαλεία για την οργάνωση και αναπαράσταση γνώσης που περιλαμβάνουν έννοιες και σχέσεις μεταξύ των εννοιών αυτών (Novak & Cañas, 2008). Η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών εννοιών, η οποία τονίζεται στα προγράμματα σπουδών (NCTM, 2000) μπορεί να ενισχυθεί μέσω της οπτικοποίησης και των γραφικών αυτών αναπαραστάσεων. Ένας εννοιολογικός χάρτης για τον ρυθμό μεταβολής μπορεί να βοηθήσει στο σχηματισμό μιας ολικής και συνεκτικής εννοιολογικής εικόνας, αποσαφηνίζοντας τις σχέσεις μεταξύ εννοιών που διδάσκονται σε διάφορα σημεία του αναλυτικού προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά και στη φυσική. Ο συγκεκριμένος εννοιολογικός χάρτης σχεδιάστηκε στο λογισμικό FreeMind (FreeMind, 2016).

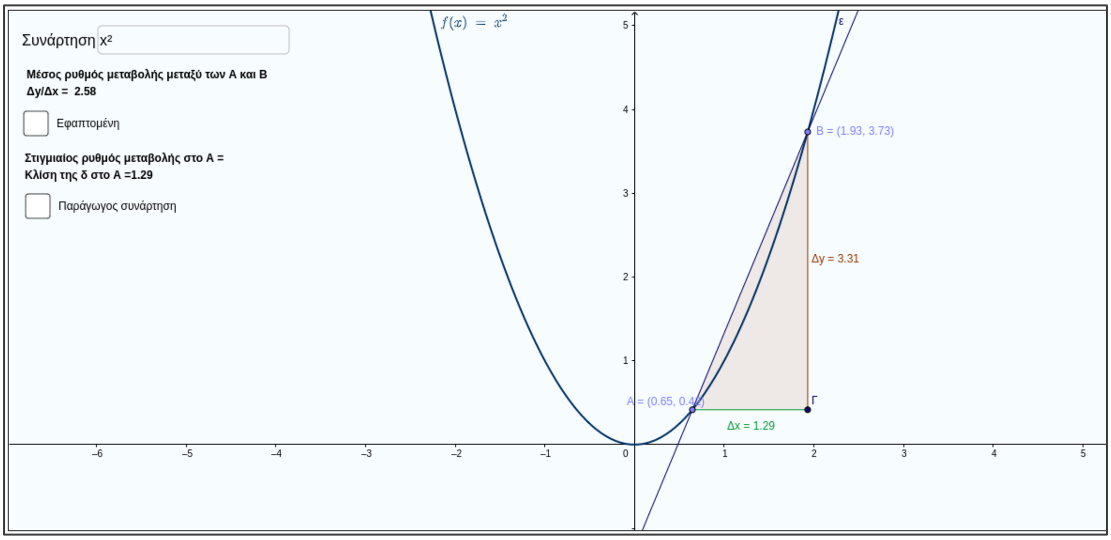


Εικόνα 2.1. Εννοιολογικός χάρτης για τον ρυθμό μεταβολής

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής περιλαμβάνει τόσο τον μέσο όσο και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μεταξύ δύο σημείων υπολογίζεται από τον λόγο των διαφορών των *y* προς τις διαφορές των *x*, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Αν πρόκειται για μία συνάρτηση *f(x)* ο μέσος ρυθμός μεταβολής μεταξύ δύο τιμών εκφράζεται από τον λόγο των διαφορών των συντεταγμένων μεταξύ των τιμών αυτών, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μίας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη είναι ίσος με τον σταθερό ρυθμό μεταβολής με τον οποίο θα μεταβαλλόταν η μία ποσότητα σε σχέση με την άλλη έτσι ώστε να προκύπτουν οι ίδιες αλλαγές. Η ιδέα του μέσου ρυθμού μεταβολής μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με την τέμνουσα ευθεία στα δύο σημεία και ισούται με την κλίση της (Εικόνα 2.2).

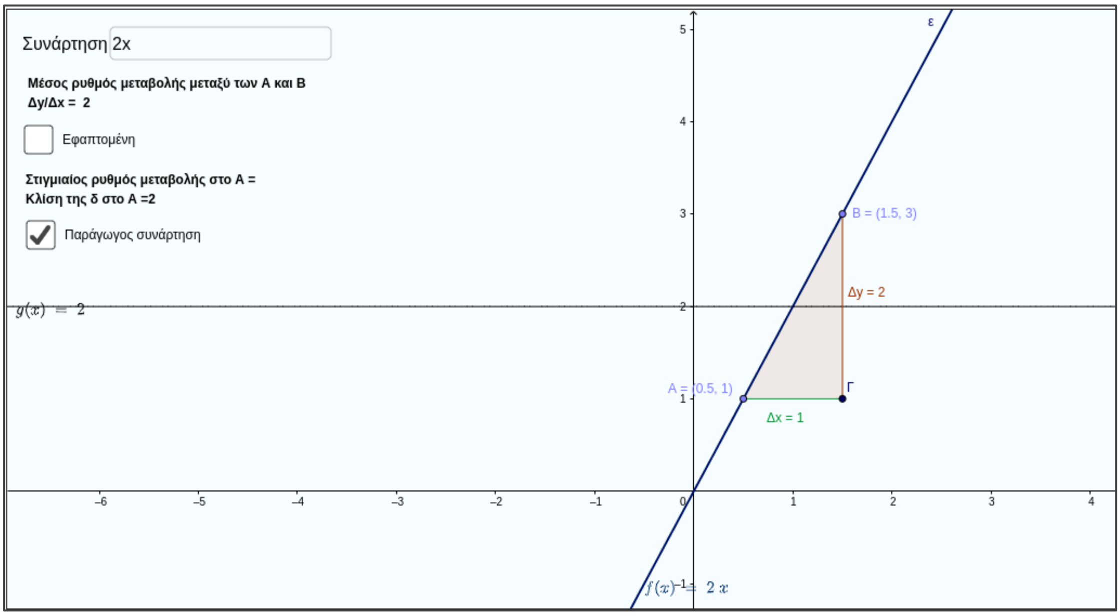
Το applet της εικόνας 2.2 έχει δημιουργηθεί στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της παραγώγου συνάρτησης και τη διερεύνηση των ιδιοτήτων της. Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι διαθέσιμη στο αποθετήριο του λογισμικού GeoGebra στην ηλεκτρονική διεύθυνση https://ggbm.at/Pbxj6tQc.



Εικόνα 2.2. Μέσος ρυθμός μεταβολής – τέμνουσα ευθεία

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη σε ένα σημείο είναι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτό το σημείο, δηλαδή το όριο του παραπάνω λόγου όταν η διαφορά τείνει στο μηδέν, $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής σε ένα σημείο, εκφράζεται από την παράγωγο ή αλλιώς το όριο του παραπάνω λόγου στο σημείο αυτό $f'(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$. Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να είναι σταθερός ή μεταβλητός. Σταθερός ρυθμός μεταβολής παρατηρείται στις γραμμικές συναρτήσεις. Ο σταθερός ρυθμός μεταβολής θεωρείται ότι γίνεται πιο εύκολα αντιληπτός και μελετάται συνήθως πριν από τον μεταβλητό (Stroup, 2002). Στην περίπτωση αυτή ο μέσος και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ταυτίζονται (Εικόνα 2.3) και ισούνται με την κλίση της ευθείας, δηλαδή τον συντελεστή α στην εξίσωση $y = \alpha x + \beta$.



Εικόνα 2.3. Μέσος και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής στη γραμμική συνάρτηση

Η πιο γενική περίπτωση είναι ο ρυθμός μεταβολής να είναι μεταβλητός σε ένα διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση ο μέσος ρυθμός μεταβολής δεν δίνει αρκετές πληροφορίες και απαιτείται ο υπολογισμός του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής σε ένα σημείο.

Ο ρυθμός μεταβολής ανεξάρτητα αν είναι σταθερός ή μεταβλητός μπορεί να έχει θετική, μηδενική ή αρνητική τιμή. Ένας θετικός ρυθμός μεταβολής αντιστοιχεί σε αύξουσα συνάρτηση, ενώ αντίστοιχα όταν ο ρυθμός μεταβολής είναι αρνητικός η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Στην περίπτωση του μεταβλητού ρυθμού μεταβολής μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται δίνοντας πληροφορίες για την κυρτότητα της συνάρτησης. Επιπλέον πληροφορίες δίνει ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται ή μειώνεται ο ρυθμός μεταβολής.

Η σημασία του ρυθμού μεταβολής ως έννοια στα μαθηματικά στηρίζεται σε δύο κυρίως άξονες. Καταρχάς ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια με πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν πολλοί γνωστοί ρυθμοί μεταβολής. Η κατανόηση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής είναι απαραίτητη για την κατανόηση των σχέσεων, τη μοντελοποίηση και την περιγραφή των μεταβολών ποσοτήτων στη φυσική, στη βιολογία, στα οικονομικά και σε άλλες επιστήμες (Ärlebäck κ.ά., 2013).

Επιπλέον, ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια σημαντική για τη μελέτη των μαθηματικών. Από κάποιους ερευνητές θεωρείται ότι η επιτυχία των μαθητών σε πιο προχωρημένο επίπεδο μαθηματικών εξαρτάται από την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής (Carlson κ.ά., 2002). Η κατανόηση της μεταβολής και κατ' επέκταση της συμμεταβολής και του ρυθμού μεταβολής θεωρείται ιδιαίτερης σημασίας για την κατανόηση της παραγώγου και άλλων εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης (Carlson κ.ά., 2002). Έχει μελετηθεί η επιρροή της κατανόησης του ρυθμού μεταβολής για τη μελέτη άλλων εννοιών όπως το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού (Thompson, 1994α).

Ενδεικτικός της σημαντικότητας αλλά και της δυσκολίας της έννοιας του ρυθμού μεταβολής είναι ο αριθμός των ερευνών που έχουν διεξαχθεί σε επίπεδο διδακτορικών ερευνών για αυτήν (παράγραφος 4.3.1). Κάποιοι ερευνητές έχουν εστιάσει στις δυσκολίες των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων με ρυθμούς μεταβολής, ενώ τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο γίνεται αντιληπτός ο ρυθμός μεταβολής και του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές επιχειρηματολογούν και εκφράζονται για προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής (Coe, 2007· Johnson, 2010· Staley, 2004· Tague, 2015· Tyne, 2016· Weber, 2012).

Η μέτρηση του ρυθμού μεταβολής εμπλέκει την πολλαπλασιαστική σύγκριση των μεταβολών δύο ή περισσότερων ποσοτήτων (Thompson, 1994α). Για την κατανόηση και διαχείριση του ρυθμού μεταβολής από τους μαθητές απαιτούνται γνώσεις άλλων μαθηματικών εννοιών. Όπως φάνηκε και από το εννοιολογικό διάγραμμα η έννοια του ρυθμού μεταβολής προϋποθέτει την κατανόηση άλλων εννοιών και δομείται πάνω σε αυτές. Κάποιες βασικές έννοιες απαραίτητες για την κατανόησή του οι οποίες διδάσκονται από την πρωτοβάθμια ως τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ο λόγος και οι αναλογίες, η μεταβολή και η συμμεταβολή και η κλίση, οι οποίες περιγράφονται στις επόμενες παραγράφους.

Ο ρυθμός μεταβολής αναφέρεται συνήθως ως φυσική αναπαράσταση της παραγώγου. Στην έρευνα του Orton (1983) φάνηκαν οι δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και υπήρχαν ενδείξεις ότι δεν τη συνέδεαν με την παράγωγο. Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι η παράγωγος είναι η μεταβολή και όχι ο ρυθμός μεταβολής (Zandieh & Knapp, 2006).

Οι Herbert & Pierce (2009) συγκέντρωσαν τις παρακάτω εννέα εννοιολογήσεις του ρυθμού μεταβολής μετά από φαινομενολογική ανάλυση συνεντεύξεων σε μαθητές. Σύμφωνα με τους ερευνητές ο ρυθμός γίνεται αντιληπτός:

- ως μέτρο ποιότητας, καθώς στα αγγλικά χρησιμοποιείται ο όρος rating
- ως μία λέξη συνδεδεμένη με μία αριθμητική τιμή. Και σε αυτή την περίπτωση η λέξη rate χρησιμοποιείται στα αγγλικά για να δηλώσει το επιπλέον ποσό που μπορεί να χρεώνει η τράπεζα ή άλλος οργανισμός
- ως το αποτέλεσμα ενός υπολογιστικού τύπου χωρίς νόημα
- ως μία απλή ποσότητα
- ως μία σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων που αλλάζουν
- ως μία σταθερή αριθμητική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων που αλλάζουν
- ως μία αριθμητική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων απόστασης και χρόνου που αλλάζουν
- ως μία αριθμητική σχέση μεταξύ δύο οποιονδήποτε ποσοτήτων που αλλάζουν

2.2.2 Λόγοι, αναλογίες, αναλογικός συλλογισμός

Για να γίνει αντιληπτός εννοιολογικά ο ρυθμός μεταβολής θα πρέπει οι μαθητές να έχουν κατανοήσει τι σημαίνει ποσότητα και μεταβολή (Byerley & Thompson, 2017). Απαραίτητες είναι και οι έννοιες της συσσώρευσης (accumulation) και της αναλογίας. Ιδιαίτερα ο λόγος, το πηλίκο και οι αναλογίες, που μελετώνται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, θεωρούνται ως βάση για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής (Thompson & Carlson, 2017). Η ελλιπής κατανόηση του πηλίκου ως μέτρου σχετικού μεγέθους, δυσκολεύει την κατανόηση του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, και την εστίαση στις ποσότητες που μεταβάλλονται (Byerley κ.ά., 2012).

Η κατανόηση του μέσου ρυθμού μεταβολής προϋποθέτει την κατανόηση της έννοιας του λόγου. Ο ρόλος του αριθμητή και του παρανομαστή σε έναν λόγο και κατ' επέκταση σε έναν ρυθμό μεταβολής δεν είναι ξεκάθαρος στους μαθητές (Herbert & Pierce, 2012). Οι Lobato & Thanheiser (2002), βασισμένοι στις παρατηρήσεις τους σε σχέση με τις δυσκολίες των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τον λόγο για τη μέτρηση μίας ποσότητας, προτείνουν ένα πλαίσιο διδακτικής του λόγου ως μέτρησης. Σύμφωνα με αυτό θα πρέπει καταρχάς να απομονωθούν τα χαρακτηριστικά που πρέπει να μετρηθούν, στη συνέχεια να καθοριστούν οι ποσότητες που επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά αυτά και του τρόπου που γίνεται αυτό, να γίνουν αντιληπτά τα χαρακτηριστικά της μέτρησης και τέλος να κατασκευαστεί ο λόγος.

Οι αναλογίες αποτελούν κεντρική έννοια των μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και χρησιμοποιούνται σε πολλά σημεία τόσο στα σχολικά μαθηματικά όσο και σε μαθήματα φυσικών επιστημών. Η κατανόηση και η εφαρμογή λόγων και αναλογιών είναι απαραίτητη στη γεωμετρία και στην άλγεβρα, σε προβλήματα κλίμακας, πιθανοτήτων, ποσοστών, ρυθμού, τριγωνομετρίας, ισοδυναμιών και μετρήσεων. Παράλληλα στη φυσική, η αναλογία αποτελεί βασική μαθηματική σχέση, κυρίως σε προβλήματα μετατροπής μονάδων, ταχύτητας, επιτάχυνσης και δυνάμεων.

Σύμφωνα με τον Thompson (1994α) ο λόγος είναι το αποτέλεσμα της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης δύο ποσοτήτων. Μια απλή αναλογία είναι μια σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων, έτσι ώστε αυξάνοντας τη μία κατά έναν παράγοντα λ, το μέτρο της άλλης αυξάνεται κατά τον ίδιο παράγοντα για να διατηρηθεί η σχέση (Thompson & Saldanha, 2003).

Ο αναλογικός συλλογισμός (proportional reasoning) είναι η κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών σε αναλογικές καταστάσεις και η χρήση αυτής της γνώσης για την επίλυση προβλημάτων (Dole, 2008). Αλλιώς ο αναλογικός συλλογισμός μπορεί να περιγραφεί ο η ικανότητα συλλογισμού σε ένα σύστημα δύο μεταβλητών μεταξύ των οποίων υπάρχει μία γραμμική σχέση (Karplus κ.ά., 1983). Η κατάκτηση των εννοιών του λόγου, της αναλογίας και του αναλογικού συλλογισμού αποτελεί ένα σημαντικό στάδιο στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, κρίσιμο για τη μετάβαση από αριθμητικές πράξεις σε πιο αφαιρετικές έννοιες της άλγεβρας (Lamon, 2007). Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί γνωσιακό εφόδιο απαραίτητο για τη μελέτη σύνθετων μαθηματικών εννοιών, είναι σημαντικός για την αντιμετώπιση προβλημάτων φυσικών επιστημών, και χρησιμεύει στη λήψη αποφάσεων της καθημερινής ζωής (Dole κ.ά., 2012· Driver κ.ά., 2014).

Οι βασικές κατηγορίες προβλημάτων αναλογιών είναι τα προβλήματα άγνωστης τιμής (missing value problems), τα προβλήματα σύγκρισης (comparison problems) και τα προβλήματα ποιοτικής πρόβλεψης και σύγκρισης (qualitative prediction and comparison problems), στα οποία δεν δίνονται συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές (Karplus κ.ά., 1983· Cramer & Post, 1993).

Οι αναλογίες αποτελούν ένα από τα πιο προχωρημένα θέματα του προγράμματος σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού είναι αρκετά περίπλοκη και έρευνες έχουν δείξει ότι προκαλεί σημαντικές δυσκολίες στους μαθητές (Thompson & Saldanha, 2003· Karplus κ.ά., 1983· Tourniaire & Pulos, 1985).

Η επίδοση σε προβλήματα αναλογιών φαίνεται να εξαρτάται από παράγοντες που έχουν σχέση με το ίδιο το πρόβλημα, αλλά και με τον μαθητή (Tourniaire & Pulos, 1985). Στην πρώτη κατηγορία συμπεριλαμβάνονται δομικές μεταβλητές του προβλήματος, όπως οι αριθμητικές τιμές, αλλά και το γενικό πλαίσιο (Lamon, 1999). Αν οι αριθμοί δεν είναι φυσικοί ή τα αριθμητικά δεδομένα είναι περίπλοκα, με μεγάλους αριθμούς ή λόγους, παρατηρούνται περισσότερα λάθη, ενώ επηρεάζει και η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι όροι στην αναλογία (Tourniaire & Pulos, 1985).

Η Lamon (1999) προτείνει να δίνονται στους μαθητές διαφορετικά προβλήματα έτσι ώστε σταδιακά να αναπτύσσουν τις σχέσεις μεταξύ τους και να υιοθετούν αποδοτικές στρατηγικές για την επίλυσή τους:

- Προβλήματα με ποσότητες που αυξάνονται
- Προβλήματα με ποσότητες που μειώνονται
- Προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά
- Προβλήματα όπου απαιτείται κλάσματα, ώστε να μην στηρίζονται σε πράξεις με φυσικούς αριθμούς
- Προβλήματα που η επίλυσή τους απαιτεί συνδυασμούς πολλαπλασιασμού/ διαίρεσης και πρόσθεσης/ αφαίρεσης
- Προβλήματα που δεν λύνονται μόνο με διπλασιασμό ή υποδιπλασιασμό

Οι μαθητές φαίνεται ότι έχουν μια έντονη διαισθητική εικόνα των αναλογιών, τις οποίες όμως γενικεύουν και τείνουν να χρησιμοποιούν ακόμα και σε μη αναλογικά πλαίσια και να απαντούν σε ερωτήματα με ψευδοαναλογικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας μεθόδους αναλογίας (Van Dooren κ.ά., 2004). Η γενίκευση της αναλογικότητας και η εφαρμογή της σε μη αναλογικές καταστάσεις αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ψευδαίσθηση της γραμμικότητας (illusion of linearity) (De Bock κ.ά., 1998).

Λάθος αναλογίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα που η σχέση έχει και έναν σταθερό προσθετέο ή στην περίπτωση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών (De Bock κ.ά., 2015). Στις σχέσεις με αντιστρόφως ανάλογα ποσά όπως και στις αναλογικές σχέσεις, τα ποσά συνδέονται πολλαπλασιαστικά (De Bock κ.ά., 2015). Παρόλο που οι μαθητές συνδέουν ρεαλιστικά προβλήματα με τις αναλογίες, έχει παρατηρηθεί ότι θεωρούν σχέσεις αντιστρόφως ανάλογων ποσών ως αναλογικές (De Bock κ.ά., 2015). Μεταξύ των πιο συνηθισμένων παρανοήσεων των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογίων είναι η χρήση προσθετικών στρατηγικών εκεί που απαιτείται αναλογικός συλλογισμός και το αντίστροφο, δηλαδή η χρήση αναλογιών εκεί που δεν πρέπει (Tourniaire & Pulos, 1985).

Σε έρευνα των Γαγάτση & Σιαμαρή (2003), φάνηκε ότι οι μαθητές του γυμνασίου απαντούν σε μεγάλο βαθμό σωστά σε ερωτήματα που αφορούν αναλογίες, αλλά αποτυγχάνουν όταν πρέπει να εξετάσουν την ύπαρξη αναλογιών ή όταν το γενικό πλαίσιο του προβλήματος είναι πιο σύνθετο. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι ενώ οι μαθητές γνωρίζουν τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων αυτών, δεν έχουν κατανοήσει την έννοια. Η σημαντικότητα του αναλογικού συλλογισμού και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές οδηγούν τους ερευνητές να προτείνουν να δίνεται έμφαση στην έννοια της αναλογίας σε διάφορους τύπους προβλημάτων και με πολλαπλές αναπαραστάσεις (Γαγάτσης & Σιαμαρή, 2003).

2.2.3 Μεταβολή - συμμεταβολή

Η έννοια της μεταβολής συνδέεται με τον φυσικό κόσμο και παρατηρείται παντού γύρω μας, από το μικρόκοσμο ως τον μακρόκοσμο. Η έννοια της μεταβολής είναι κεντρική στη Μαθηματική Ανάλυση και η εννοιολόγησή της θεωρείται απαραίτητη για τη μελέτη πιο σύνθετων εννοιών. Αλλαγές συντελούνται σε σχέση με το χρόνο, αλλά και μεταξύ άλλων μεγεθών, και πολλές από αυτές συσχετίζονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.

Μεταβολή μιας ποσότητας-μεταβλητής είναι το μέτρο της αλλαγής στην τιμή της ποσότητας-μεταβλητής. Η κατανόηση της μεταβολής στηρίζεται στη μεταβλητή. Έχει παρατηρηθεί όμως ότι οι μαθητές έχουν μία στατική θεώρηση των μεταβλητών και δεν αντιλαμβάνονται ότι οι τιμές των μεταβλητών μεταβάλλονται (Thompson & Carlson, 2017). Οι μεταβλητές θωρούνται σύμβολα τα οποία διαχειρίζονται διαδικασιακά ή αναπαραστάσεις άγνωστων τιμών και όχι σύμβολα που αναπαριστούν ποσότητες των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται (White & Mitchelmore, 1996). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τις μεταβλητές στο πλαίσιο ενός προβλήματος.

Συμμεταβολή είναι ένα μέτρο της σχέσης των μεταβολών δύο ποσοτήτων-μεταβλητών. Σε μια συνάρτηση με $y = f(x)$ θα είναι το μέτρο της σχέσης-αλλαγής ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και στην εξαρτημένη y. Παρόλη τη σημασία των μεταβολών, πολλές φορές είναι δύσκολο να γίνουν αντιληπτές, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για ποσότητες που συμμεταβάλλονται. Η συμμεταβολή αναφέρεται σε μια νοητική εικόνα των τιμών δύο ποσοτήτων ταυτόχρονα (Saldana & Thompson, 1998, σελ. 298).

Οι γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στον συντονισμό δύο μεταβλητών ποσοτήτων κατά την παρακολούθηση των τρόπων με τους οποίους μεταβάλλεται η μία σε σχέση με την άλλη καλούνται συλλογισμός με βάση τη συμμεταβολή (covariational reasoning) (Carlson κ.ά., 2002, p. 354). Η δυνατότητα συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή θεωρείται απαραίτητη και επηρεάζει την κατανόηση άλλων εννοιών του απειροστικού λογισμού όπως του ορίου (Cottrill κ.ά., 1996), της παραγώγου (Zandieh, 2000), αλλά και του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού (Thompson, 1994α).

Από έρευνες που έχουν γίνει όμως, φαίνεται ότι η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν έναν συλλογισμό τέτοιου είδους είναι δύσκολο να αναπτυχθεί και χρειάζεται χρόνο (Thompson & Carlson, 2017). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην περιγραφή των συναρτήσεων και του ρυθμού μεταβολής, ιδιαίτερα σε προβλήματα δυναμικών, πραγματικών καταστάσεων (Carlson κ.ά., 2002, σελ. 354).

Οι συναρτήσεις μπορούν να διδαχτούν από την άποψη είτε της συμμεταβολής είτε της αντιστοίχισης (Thompson, 1994α· Thompson & Carlson, 2017). Η πρώτη προσέγγιση εστιάζει στη σχέση μεταξύ μετρήσεων ποσοτήτων των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η δεύτερη είναι μια αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων. Η εστίαση στη συμμεταβολή κατά τη μελέτη των συναρτήσεων είναι πιο κοντά στη διαισθητική εικόνα των μαθητών και απαντάει σε ερωτήματα του πραγματικού κόσμου (Thompson & Carlson, 2017).

Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής συνδέεται άμεσα και με την ικανότητα συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή (Thompson & Carlson, 2017). Ο σταθερός ρυθμός μεταβολής προϋποθέτει την εννοιολόγηση δύο ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται έτσι ώστε η συσσώρευση των αλλαγών στη μία ποσότητα να είναι ανάλογη της αντίστοιχης συσσώρευσης των αλλαγών στην άλλη (Thompson, 1994α).

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη μεταβολή σε διακριτά μέρη (chunks) και όχι ως μία συνεχή διαδιακασία. (Johnson, 2015β).

Οι Carlson κ.ά. (2002) ανέπτυξαν ένα πλαίσιο νοητικών διαδικασιών συμμεταβολής, αποτελούμενο από πέντε νοητικές διαδικασίες και πέντε επίπεδα κατανόησης της έννοιας, το οποίο αποτελεί ένα αναλυτικό εργαλείο εκτίμησης της εννοιολόγησης της συμμεταβολής, ενώ συγχρόνως βοηθάει στην περιγραφή της δυνατότητας εννοιολόγησής της από τους μαθητές ανάλογα με τις απαντήσεις τους σε προβλήματα. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της ικανότητας συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή των μαθητών (Covariational framework).

Πλαίσιο εννοιολόγησης της συμμεταβολής (Covariational framework) των Carlson κ.ά. (2002)
Επίπεδο 1 – Συντονισμός (Coordination)
Σε αυτό το επίπεδο μπορεί να γίνει συντονισμός της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές σε μία άλλη μεταβλητή.
Επίπεδο 2 – Κατεύθυνση (Direction)
Στο επίπεδο αυτό συμπεριλαμβάνονται και οι νοητικές διεργασίες του συντονισμού της κατεύθυνσης της αλλαγής σε μία μεταβλητή με τις αλλαγές στην άλλη.
Επίπεδο 3 – Ποιοτικός συντονισμός
Οι εικόνες της συμμεταβολής περιλαμβάνουν τις νοητικές διεργασίες του συντονισμού της ποσότητας της αλλαγής σε μία μεταβλητή με τις αλλαγές σε μία άλλη.
Επίπεδο 4 – Μέσος ρυθμός
Σε αυτό το επίπεδο αντιστοιχούν εκτός των προηγούμενων και οι νοητικές διεργασίες για τον συντονισμό του μέσου ρυθμού της αλλαγής της συνάρτησης με αναλογικές αλλαγές της ανεξάρτητης μεταβλητής.
Επίπεδο 5 – Στιγμιαίος ρυθμός
Στο $5^{ο}$ επίπεδο γίνεται συντονισμός του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής μίας συνάρτησης με συνεχείς αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Σε αυτό συμπεριλαμβάνεται και εννοιολόγηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής ως αποτέλεσμα όλο και μικρότερων αλλαγών του μέσου ρυθμού μεταβολής και των σημείων καμπής.

Οι Thompson & Carlson (2017) επεκτείνουν το παραπάνω πλαίσιο και περιγράφουν τα παρακάτω επίπεδα συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή:

Πλαίσιο συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή (Covariational framework) των Thompson & Carlson (2017)

Ομαλή συνεχής συμμεταβολή (smooth continuous covariation)
Οι δύο μεταβλητές γίνονται αντιληπτές σαν να μεταβάλλονται ομαλά και συνεχώς.
Συνεχής συμμεταβολή σε μέρη (chunky continuous covariation)
Η μεταβολή στην τιμή μίας μεταβλητής γίνεται αντιληπτή σαν να γίνεται ταυτόχρονα με τη μεταβολή στην άλλη μεταβλητή.
Συντονισμός τιμών (coordination of values)
Το άτομο συντονίζει τις τιμές της μίας μεταβλητής με τις τιμές της άλλης, προβλέποντας ότι θα δημιουργηθεί ένα διακριτό σύνολο ζευγών αυτών των τιμών.
Γενικός συντονισμός τιμών (gross coordination of values)
Το άτομο διαμορφώνει μία γενική εικόνα των τιμών των μεταβλητών να μεταβάλλονται μαζί και αντιλαμβάνεται μία ασθενή, μη-πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των συνολικών αλλαγών στις τιμές των δύο ποσοτήτων
Προσυντονισμός τιμών (precoordination of values)
Το άτομο οραματίζεται τις τιμές των δύο μεταβλητών να μεταβάλλονται, με ασύγχρονο τρόπο.
Κανένας συντονισμός (no coordination)
Γίνεται εστίαση στη μεταβολή της μίας ή της άλλης μεταβλητής χωρίς συντονισμό των τιμών αυτών.

Η κατανόηση μαθηματικών αναπαραστάσεων ποσοτήτων που αλλάζουν μαζί θεωρείται σημαντική και τονίζεται στις προτάσεις διδακτικής (NCTM, 2000).

2.2.4 Κλίση

Σε πιο προχωρημένο επίπεδο η έννοια του ρυθμού μεταβολής συνδέεται με την κλίση και την παράγωγο. Η κλίση ευθείας διατρέχει όλο το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην αρχή σε σχέση με τη γραμμική συνάρτηση και τα ανάλογα ποσά, αργότερα με τον μέσο ρυθμό μεταβολής και στη συνέχεια με την παράγωγο. Παρουσιάζεται με διάφορες αναπαραστάσεις και σε διαφορετικά πλαίσια προβλημάτων.

Ο όρος «κλίση» χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα, στα μαθηματικά, αλλά και σε άλλες επιστήμες και οι μαθητές έχουν μια έντονη εικόνα της πριν από τη διδασκαλία της «κλίσης ευθείας». Στην υποχρεωτική εκπαίδευση η έννοια της κλίσης ευθείας εισάγεται και χρησιμοποιείται στη γεωμετρία, στην άλγεβρα και στον διαφορικό λογισμό, ενώ εφαρμόζεται και στη φυσική.

Η κλίση είναι μια σημαντική μαθηματική έννοια, η κατανόηση της οποίας θεωρείται προαπαιτούμενη για τη μελέτη πιο προχωρημένων μαθηματικών εννοιών (Nagle κ.ά., 2013). Η κλίση συναντάται με διάφορες αναπαραστάσεις στα σχολικά μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή (Stump, 2001α). Ως αρχική εικόνα για τον όρο κλίση μπορεί να είναι μία στέγη, η πλαγιά ενός βουνού, μία ράμπα ή κάποια άλλη κεκλιμένη επιφάνεια (Stump, 2001α). Ο όρος κλίση χρησιμοποιείται ακόμα σε διάφορους τομείς όπως η τέχνη, η αρχιτεκτονική, η μηχανική και η φυσική (Deniz & Kabael, 2017).

Η κλίση γίνεται αντιληπτή ως μέτρο της ανηφοριάς αλλά και ως μέτρο του ρυθμού μεταβολής. Σε πραγματικά προβλήματα η κλίση μπορεί να εμφανίζεται (Stump, 2001α):

- σε φυσικές καταστάσεις, όπως η κλίση ενός δρόμου ή της πλαγιάς ενός βουνού και
- σε λειτουργικές καταστάσεις, όπως στις σχέσεις μεταξύ χρόνου και απόστασης ή ποσότητας και κόστους, όπου εκφράζει ρυθμό μεταβολής.

Στα μαθηματικά η κλίση συνδέεται με τη γραμμική συνάρτηση και τον σταθερό ρυθμό μεταβολής στο γυμνάσιο και με τον μέσο ρυθμό μεταβολής στο λύκειο (Deniz & Kabael, 2017). Αργότερα, στη μελέτη του διαφορικού λογισμού συνδέεται με την παράγωγο. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μεταξύ δύο τιμών ταυτίζεται με την κλίση της τέμνουσας της καμπύλης στα σημεία αυτά, ενώ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής σε ένα σημείο με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο αυτό. Η κατανόηση της κλίσης γραμμικών συναρτήσεων θεωρείται σημαντική για την κατανόηση της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής (Nagle & Moore-Russo, 2013).

Όπως αναφέρθηκε η κατανόηση μιας έννοιας μπορεί να είναι εννοιολογική ή διαδικασιακή (Stump, 2001α). Η εννοιολογική αντίληψη της κλίσης περιλαμβάνει την κατανόηση και σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεών της, όπως εμφανίζονται στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και την ερμηνεία της σε πραγματικά προβλήματα, ως μέτρησης του ρυθμού μεταβολής δύο ποσοτήτων (Stump, 2001α). Οι μαθητές μπορεί να καταφέρνουν να χειριστούν αλγοριθμικά την έννοια της κλίσης κάνοντας υπολογισμούς για την εύρεσή της και αναγνωρίζοντας τον συμβολισμό της σε διάφορα πλαίσια, αλλά να δυσκολεύονται να την ερμηνεύσουν σε διάφορες καταστάσεις.

Οι δυσκολίες των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση της κλίσης απορρέουν και από την ποικιλία των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αντιληπτή. Η Stump (1997, 1999, 2001β) κατηγοριοποίησε τους τρόπους εννοιολόγησης της κλίσης σε οχτώ κατηγορίες:

- Γεωμετρικός λόγος (geometric ratio) – G: ο λόγος της κάθετης προς την οριζόντια μεταβολή στη γραφική παράσταση μιας ευθείας.
- Αλγεβρικός λόγος (algebraic ratio) – A: ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ή $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- Φυσική ιδιότητα (physical property) – P: ιδιότητα μιας ευθείας.
- Λειτουργική ιδιότητα (functional property) – F: ρυθμός μεταβολής.
- Παραμετρικός συντελεστής (parametric coefficient) – PC: ο συντελεστής α της $y = \alpha x + \beta$ ή της $y_2 - y_1 = \alpha(x_2 - x_1)$.
- Τριγωνομετρική εννοιολόγηση (trigonometric conception) – T: η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα $x'x$ ή η διεύθυνση ενός διανύσματος.
- Εννοιολόγηση στον διαφορικό λογισμό (calculus conception) – C: η παράγωγος ή η κλίση μιας τέμνουσας ή εφαπτομένης της καμπύλης.
- Πραγματική κατάσταση (real world situation) – R: σε στατική ή δυναμική κατάσταση.

Με βάση την έρευνά τους για τις εννοιολογήσεις φοιτητών για την κλίση οι Moore-Russo κ.ά. (2011) επέκτειναν τις παραπάνω κατηγορίες εισάγοντας τρεις ακόμα:

- Ιδιότητα καθορισμού (determining property) – D: καθορισμός μιας ευθείας από δύο σημεία ή της παραλληλίας/καθετότητας ευθειών.
- Ένδειξη συμπεριφοράς (behavior indicator) – B: ένδειξη αν η ευθεία είναι αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή.
- Γραμμική σταθερά (linear constant) – L: ένδειξη γραμμικότητας.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν συνήθως διαδικασιακούς υπολογισμούς για την εύρεση της κλίσης και του ρυθμού μεταβολής, αλλά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση και στην ικανότητα ερμηνείας των εννοιών σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Dolores-Flores κ.ά., 2019). Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν κανόνες για την εύρεση της κλίσης όπως ότι είναι ο λόγος της διαφοράς στα y προς τη διαφορά στα x, ή η χρήση του μνημονικού κανόνα «rise over run» στα αγγλικά (Nagle κ.ά., 2013). Παρόλα αυτά δεν είναι προφανές ότι έχει γίνει αντιληπτή η έννοια και το τι εκφράζει ο λόγος αυτός. Η κλίση στην καθημερινή γλώσσα πολλές φορές συνδέεται με τη γωνία.

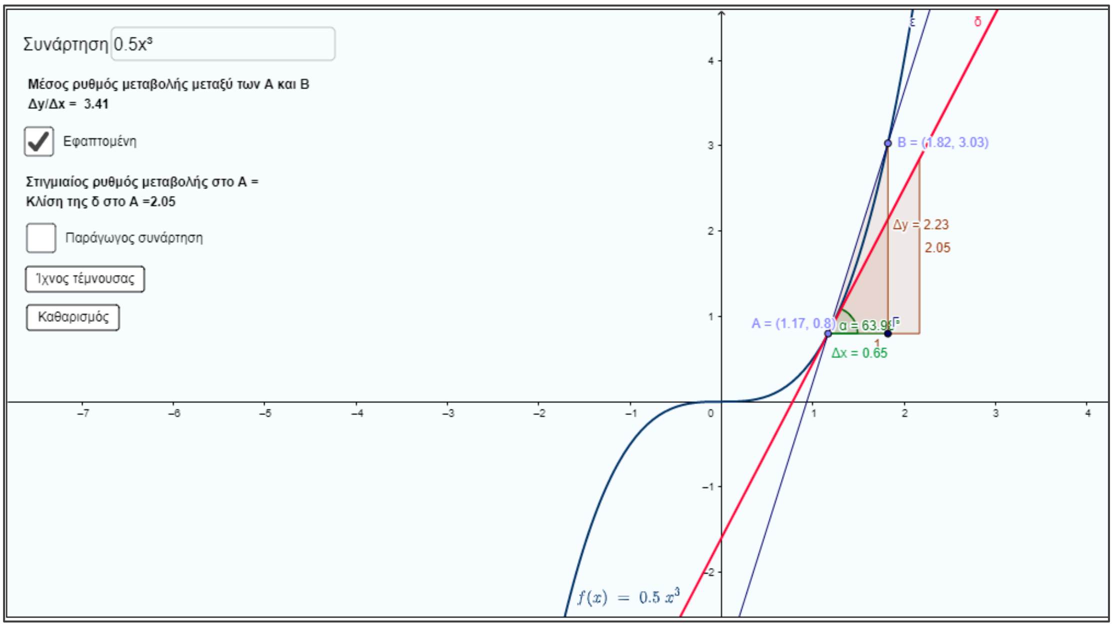
Η διάκριση αυτή, αν δεν τονιστεί κατά τη διδασκαλία, προκαλεί παρανοήσεις και πολλοί μαθητές συγχέουν τις δύο έννοιες. Επιπλέον, έχουν παρατηρηθεί δυσκολίες στην εφαρμογή της έννοιας της κλίσης σε πραγματικά προβλήματα (Lobato & Thanheiser, 2002), δυσκολία στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεών της, και στην εννοιολόγησή της ως ρυθμού μεταβολής (Stump, 2001β· Teuscher & Reys, 2010).

Μια άλλη παρανόηση σε σχέση με την κλίση είναι ότι αναφέρεται σε λόγο ποσοτήτων ($\frac{y}{x}$) (ratio-of-totals approach) αντί για λόγο διαφορών ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) (Tyne, 2017). Η παρανόηση αυτή υπονοεί ότι όλες οι γραμμικές σχέσεις είναι αναλογικές (directly proportional) και επηρεάζει την κατανόηση της παραγώγου (Tyne, 2017). Η έμφαση στην αλλαγή μίας ποσότητας μπορεί να οδηγήσει στην εννοιολόγηση της κλίσης ως διαφοράς στις τιμές της ποσότητας αντί ως λόγου των διαφορών δύο ποσοτήτων (Nagle & Moore-Russo, 2014).

Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη φράση rise over run και υπολογίζουν σωστά τους τύπους φαίνεται ότι έχουν συνδυάσει σε μεγαλύτερο βαθμό τις εμπειρίες τους με τη διδασκαλία σε σχέση με την αναγνώριση της κλίσης ως λόγο ή ως ρυθμό (Stump, 2001α).

Οι όροι κλίση, ρυθμός μεταβολής και ανηφοριά (steepness) χρησιμοποιούνται πολλές φορές στα βιβλία με το ίδιο νόημα, χωρίς να αποσαφηνίζονται οι διαφορές τους, ενώ έχει φανεί ότι γίνονται αντιληπτές ως τρεις διαφορετικές μη συσχετισμένες έννοιες από τους μαθητές (Teuscher & Reys, 2010). Ακόμα έχουν παρατηρηθεί παρανοήσεις σε σχέση με την κλίση κατά τη μελέτη συναρτήσεων σε ορθοκανονικό και μη ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (Lobato & Thanheiser, 2002).

Η κλίση ευθείας ως σταθερός ρυθμός μεταβολής, θεωρείται ότι βοηθάει στην επέκταση στη συνέχεια στην έννοια της παραγώγου ως στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής (Hackworth, 1994). Φαίνεται όμως ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την κλίση ως ένα σταθερό ρυθμό μεταβολής (Johnson, 2010). Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής μπορεί να προσεγγιστεί γραφικά ως η κλίση της εφαπτομένης, δηλαδή το όριο της κλίσης της τέμνουσας, που είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής (Εικόνα 2.4). Η κατανόηση του μέσου ρυθμού μεταβολής θεωρείται απαραίτητη για την εννοιολόγηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής (Hackworth, 1994· Tyne, 2014). Στο GeoGebra applet που περιγράφηκε στην παράγραφο 2.2.1 αναπαρίσταται γραφικά η διαδικασία αυτή.



Εικόνα 2.4. Κλίση εφαπτομένης ως όριο της κλίσης της τέμνουσας

2.2.5 Αναπαραστάσεις

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται συνήθως στη Μαθηματική Ανάλυση είναι η αριθμητική, η γραφική, η συμβολική και η λεκτική (rule of four) (Tall, 2003). Στην αριθμητική αναπαράσταση τα δεδομένα δίνονται με αριθμούς όπως σε πίνακα τιμών. Στη συμβολική αναπαράσταση κυριαρχούν οι τύποι, στη λεκτική τα προβλήματα περιγράφονται με λόγια και στη γραφική με γραφικές παραστάσεις.

Για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής απαιτείται η καλή αντίληψη της μεταβολής των ποσών από τη γραφική αναπαράσταση. Η κατανόηση-αντίληψη των γραφικών παραστάσεων (graph comprehension) ορίζεται από τους Friel κ.ά. (2001) ως το σύνολο των ικανοτήτων των αναγνωστών των γραφικών παραστάσεων να λαμβάνουν μηνύματα από παραστάσεις, κατασκευασμένες από τους ίδιους ή από άλλους.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι κυρίως συμβολικές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι περισσότεροι μαθητές, να μπορούν να διαχειριστούν συναρτήσεις που εκφράζονται με τύπους, αλλά να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση και εφαρμογή άλλων αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, όπως γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών και αντιστοιχίσεις (Tall & Vinner, 1981).

Επιπλέον, όσον αφορά στις συναρτήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες στο συσχετισμό των αναπαραστάσεων, στην εννοιολόγηση των γραφικών παραστάσεων και στον χειρισμό συμβόλων (Sierpinska, 1992). Ιδιαίτερα δύσκολη θεωρείται η συσχέτιση της αλγεβρικής με τη γραφική αναπαράσταση (Sfard, 1992). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις θεωρούνται μέρος της διδακτικής των μαθηματικών που βοηθάνε τους μαθητές να οργανώσουν το συλλογισμό τους γύρω από μία έννοια και να ενδυναμώσουν την εννοιολόγησή της (Elia κ.ά., 2005).

Όπως οι συναρτήσεις και η παράγωγος, έτσι και ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να αναπαρασταθεί λεκτικά, αριθμητικά, γραφικά και συμβολικά (Herbert & Pierce, 2011). Μία αριθμητική αναπαράσταση μπορεί να είναι ένας πίνακας τιμών ή κάποια άλλη μορφή αριθμητικών δεδομένων. Η γραφική αναπαράσταση μπορεί να είναι η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής, που είναι η τέμνουσα δύο σημείων όταν αναφερόμαστε στον μέσο ρυθμό μεταβολής. Η συμβολική αναπαράσταση αναφέρεται στον συμβολισμό, που μπορεί να είναι $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ή το όριο μίας συνάρτησης $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Κάθε μία από αυτές τις αναπαραστάσεις δίνει διαφορετικές πληροφορίες στους μαθητές, οι οποίοι όμως πολλές φορές δυσκολεύονται να τις συνδυάσουν μεταξύ τους και να τις συνδέσουν με την έννοια του ρυθμού μεταβολής (Herbert & Pierce, 2011). Η κατανόηση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής φαίνεται ότι εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αναπαράσταση και το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται και δεν είναι αυτονόητο ότι η κατανόησή του υπό μία αναπαράσταση μεταφέρεται και σε άλλες (Herbert & Pierce, 2011).

Η Μαθηματική Ανάλυση και ο ρυθμός μεταβολής ως κεντρική της έννοια (Thompson, 1994) έχουν μία δυναμική φύση και δεν μπορούν εύκολα να αναπαρασταθούν με μία στατική εικόνα. Από κάποιους ερευνητές προτείνεται να έρχονται οι μαθητές σε επαφή με προβλήματα δυναμικών αλλαγών και ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται σε κάθε ευκαιρία από μικρή ηλικία και κυρίως σε συνδυασμό με τη γραφική αναπαράσταση (Thompson & Carlson, 2017· Orton, 1983, 1984).

2.2.6 Πλαίσιο

Οι έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης μπορούν να εφαρμοστούν σε διάφορα πλαίσια. Θεωρούμε το πλαίσιο ενός προβλήματος με την έννοια που περιγράφεται από τους White και Mitchelmore (1996), ως μια πραγματική ή τεχνητή κατάσταση του πραγματικού κόσμου ή ένα αφηρημένο μαθηματικό πλαίσιο με μικρότερο επίπεδο αφαίρεσης από την έννοια που εφαρμόζεται.

Ο ρυθμός μεταβολής έχει πλήθος εφαρμογών σε διάφορα πλαίσια στη φυσική και σε άλλες επιστήμες. Μία κατηγοριοποίηση των πλαισίων αυτών είναι ανάλογα με το είδος της ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία μπορεί να είναι χρονική ή όχι. Τα προβλήματα στα οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος είναι πιο οικεία, αλλά τα μη χρονικά προβλήματα δίνουν περισσότερες ευκαιρίες για γενίκευση των ιδιοτήτων του ρυθμού μεταβολής (Herbert & Pierce, 2008· Stroup, 2002).

Τόσο στα σχολικά εγχειρίδια όσο και στις έρευνες που έχουν γίνει για τον ρυθμό μεταβολής χρησιμοποιείται ευρέως η κίνηση και το παράδειγμα της ταχύτητας (Wilhelm & Confrey, 2003). Υπάρχουν όμως πολλοί τρόποι να προσεγγίσει κανείς το θέμα του ρυθμού μεταβολής, με πολλά πραγματικά προβλήματα, όπως με οικονομικά μεγέθη, με θέματα πληθυσμού, με έννοιες της φυσικής ή φαινόμενα της βιολογίας.

Το πλαίσιο στο οποίο μελετάται ο ρυθμός μεταβολής φαίνεται να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο τον αντιλαμβάνονται οι μαθητές (Herbert & Pierce, 2011). Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής σε ένα πλαίσιο δεν συνεπάγεται την εννοιολόγησή του σε μια άλλη κατάσταση και τη γενίκευση των ιδιοτήτων του (Wilhelm & Confrey, 2003). Σε έρευνες με πλαίσια εκτός της κίνησης όπως οικονομικά μεγεθών φαίνεται ότι οι φοιτητές δεν μιλάνε για τα μεγέθη ως ρυθμούς μεταβολής (Mkhatshwa & Doerr, 2015).

Η ενασχόληση με δραστηριότητες σε άλλα πλαίσια συμπληρωματικά της κίνησης και με διάφορες αναπαραστάσεις δείχνουν να ενδυναμώνουν την εννοιολόγηση της συμμεταβολής των ποσοτήτων (Herbert & Pierce, 2011). Μέσω παραδειγμάτων ρυθμών μεταβολής σε διάφορα πλαίσια, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να δουν τις ομοιότητες στα διάφορα πλαίσια, να τις γενικεύσουν και να τις εφαρμόσουν σε νέα (Wilhelm & Confrey, 2003).

Παρακάτω αναφέρονται ενδεικτικά κάποια πλαίσια στα οποία μπορεί να μελετηθεί ο ρυθμός μεταβολής.

<u>Κίνηση</u>

Όπως αναφέρει η Wright (2001), το πλαίσιο της κίνησης σωμάτων και οι σχέσεις μεταξύ απόστασης, χρόνου, ταχύτητας και επιτάχυνσης προσφέρονται για τη μελέτη των μαθηματικών των αλλαγών. Με τον τρόπο αυτό ανακαλούνται οι εμπειρίες των μαθητών από τον πραγματικό κόσμο και εφαρμόζονται με μαθηματικό τρόπο. Η κίνηση αποτελεί και ένα πρόσφορο έδαφος για τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής, καθώς σε αυτό μπορούν να μελετηθούν τόσο η ταχύτητα ως ρυθμός μεταβολής της απόστασης που διανύει ένα σώμα ως προς τον χρόνο στον οποίο τη διανύει, όσο και η επιτάχυνση ως ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Το πλαίσιο αυτό διδάσκεται στη φυσική και χρησιμοποιείται συνήθως ως παράδειγμα ρυθμού μεταβολής (Herbert & Pierce, 2008). Παρατηρούνται δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των ποσοτήτων της κίνησης.

Γέμισμα δοχείων

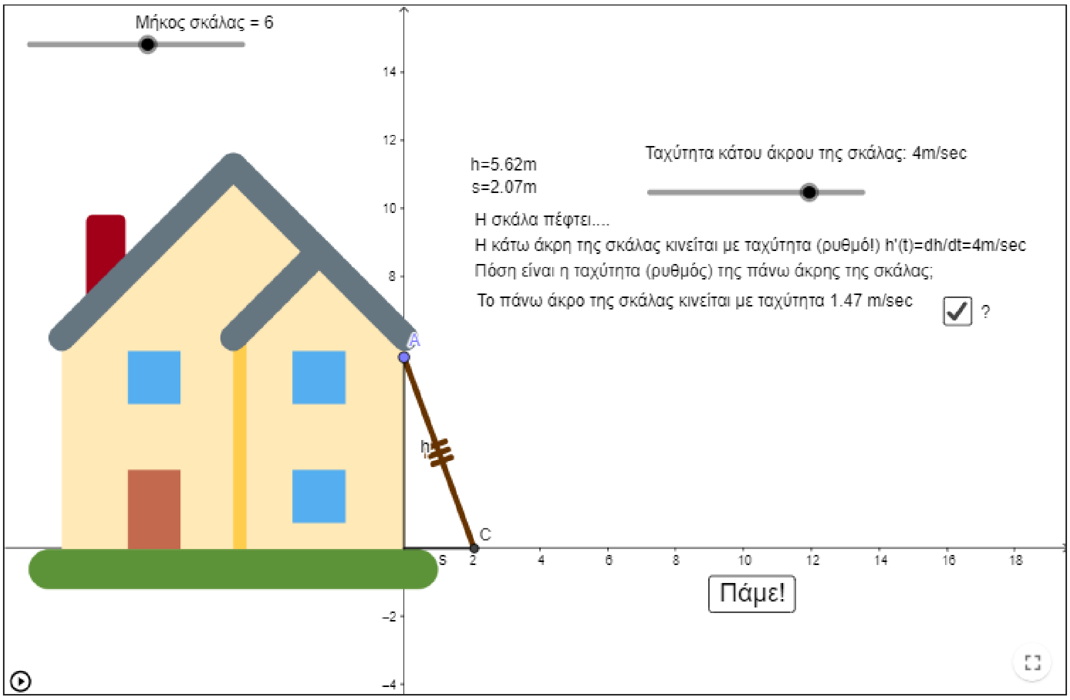
Ένα εναλλακτικό πλαίσιο στο οποίο μπορεί να μελετηθεί ο ρυθμός μεταβολής και οι ιδιότητές του είναι αυτό του γεμίσματος δοχείων. Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε από το Nottingham University's Shell Centre (Swan, 1985). Μία μορφή του είναι δεδομένου ενός δοχείο που γεμίζει με νερό με σταθερό ρυθμό, να εξεταστεί η σχέση του όγκου του νερού με το ύψους του νερού στο δοχείο. Παραλλαγές του προβλήματος προκύπτουν αν μελετηθεί η σχέση όγκου-χρόνου ή ύψους-χρόνου. Αλλάζοντας το σχήμα του δοχείου, αλλάζει ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται ο όγκος του νερού σε σχέση με το ύψος του στο δοχείο.

Το πρόβλημα γεμίσματος δοχείων έχει χρησιμοποιηθεί σε κάποιες έρευνες σχετικά με τις εννοιολογήσεις των μαθητών για ποσότητες που συμμεταβάλλονται και τον ρυθμό μεταβολής τους (Carlson κ.ά., 2002· Carlson κ.ά., 2003· Heid κ.ά., 2006· Johnson, 2015β· Johnson κ.ά., 2017). Από τις παραπάνω έρευνες προκύπτει ότι αποτελεί ένα πλαίσιο που ενισχύει τον συλλογισμό των μαθητών με βάση τη συμμεταβολή.

Γεωμετρικές σχέσεις

Ένα ακόμα συνηθισμένο πλαίσιο για τη μελέτη ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται, αποτελούν οι σχέσεις σε γεωμετρικά σχήματα και στερεών. Προβλήματα με γεωμετρικές σχέσεις στο επίπεδο ή στον χώρο έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες (Herbert, 2010) και προτείνονται και στα σχολικά εγχειρίδια για τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής. Τέτοια παραδείγματα είναι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου ή του εμβαδού ενός τετραγώνου, σε σχέση με την πλευρά του ή ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σε σχέση με τη διάμετρο ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει.

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα γεωμετρικής σχέσης αποτελεί αυτό της σκάλας που πέφτει (Εικόνα 2.5). Καθώς η αρχική εικόνα των μαθητών είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ως προς τον χρόνο στα δύο άκρα είναι ίδιος, η αποκάλυψη ότι αυτό δεν ισχύει προκαλεί γνωστική σύγκρουση και μπορεί να παρακινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών.



Εικόνα 2.5. Το πρόβλημα της σκάλας που πέφτει

<u>Οικονομικό πλαίσιο</u>

Ένα οικονομικό πλαίσιο για τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής μπορεί να μην είναι τόσο συνηθισμένο κατά τη διδασκαλία, αλλά δίνει δυνατότητες μονελοποίησης και μπορεί να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Σε ερευνητικό επίπεδο, οι αναφορές στο συγκεκριμένο πλαίσιο είναι περιορισμένες.

Οι Wilhelm & Confrey (2003) μελετώντας την ικανότητα των μαθητών να διακρίνουν ομοιότητες σε δύο διαφορετικά πλαίσια επέλεξαν ένα έργο με το πλαίσιο της κίνησης και ένα με οικονομικό πλαίσιο. Παρατήρησαν ότι η κατανόηση του ρυθμού και της συσσώρευσης σε ένα πλαίσιο δεν μεταφέρεται απαραίτητα σε κάποιο άλλο.

Οι Mkhatshwa & Doerr (2015) χρησιμοποίησαν ένα πραγματικό πρόβλημα με κόστος, έσοδα και κέρδος για να μελετήσουν τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι φοιτητές την οριακή μεταβολή. Στις συνεντεύξεις με τους φοιτητές, παρόλο που οι περισσότεροι εκφράστηκαν σωστά σε σχέση με την οριακή μεταβολή στο πλαίσιο του προβλήματος, φάνηκε ότι εννοιολογούσαν την οριακή μεταβολή ως ένα ποσό μεταβολής, δηλαδή ως διαφορά και όχι ως ρυθμό μεταβολής, δηλαδή λόγο διαφορών (Mkhatshwa & Doerr, 2015). Μόνο ένας από τους φοιτητές της έρευνας χρησιμοποίησε ορολογία σχετική με τον ρυθμό μεταβολής.

2.2.7 Δυσκολίες μαθητών

Από μεγάλο αριθμό ερευνών έχουν αναδειχτεί οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τη Μαθηματική Ανάλυση στη δευτεροβάθμια, αλλά και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η έμφαση των προγραμμάτων σπουδών στους κανόνες και στις υπολογιστικές διαδικασίες οδηγεί σε ασθενή εννοιολόγηση της αιτιολόγησης της διαδικασίας και των ιδιοτήτων της έννοιας (Orton, 1983). Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν απομνημονευμένους κανόνες και τεχνικές κατά την επίλυση προβλημάτων με παραγώγους, χωρίς να αντιλαμβάνονται την ερμηνεία της παραγώγου (Orton, 1983). Ιδιαίτερα, όταν, εκτός της εφαρμογής αλγοριθμικών μεθόδων, απαιτείται ερμηνεία των εννοιών και εφαρμογή τους σε νέο πλαίσιο, παρατηρούνται δυσκολίες (Tall & Vinner, 1981). Αυτού του είδους η κατανόηση όμως είναι τελικά χρήσιμη τόσο για πρακτικές εφαρμογές όσο και για την περεταίρω μελέτη των εννοιών.

Στις τελευταίες τάξεις του σχολείου τα θέματα του διαφορικού λογισμού παρουσιάζονται γρήγορα και με σκοπό την εκμάθηση τεχνικών επίλυσης προβλημάτων. Ο περιορισμένος χρόνος δεν επιτρέπει τον αναστοχασμό και την ερμηνεία των εννοιών σε διάφορα πλαίσια και με ποικίλες αναπαραστάσεις. Έτσι, ακόμα και οι μαθητές που θεωρούνται άνω του μέσου όρου στα μαθηματικά έχουν μια επιφανειακή κατανόηση των εννοιών.

Μία ποσότητα δεν είναι αυτονόητο ότι είναι αναγνωρίσιμη ως ρυθμός μεταβολής, ακόμα κι όταν οι μαθητές υπολογίζουν τα μεγέθη χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους τύπους ή την παράγωγο (Kaput & Schorr, 2002· Orton, 1983· Ubuz, 2007).

Κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής έχουν αποδοθεί στην περιορισμένη κατανόηση των μεταβλητών, που συχνά γίνονται αντιληπτές ως σύμβολα με το οποία μπορούν να γίνουν πράξεις και όχι ως ποσότητες που συσχετίζονται (White & Mitchelmore, 1996). Υπάρχει κάποια δυσκολία στην ερμηνεία των μεταβλητών σε ένα πλαίσιο, παρόλο που είναι διαχειρίσιμες αλγεβρικά. Ακόμα συγχέεται η έννοια της μεταβλητής με τον ρυθμό μεταβολής (Thompson, 1994α).

Μία από τις δυσκολίες που παρατηρείται είναι η σύνδεση του ρυθμού μεταβολής με την παράγωγο (Heid, 1984· Mel & Redish, 2002· Tall, 1986). Αυτό φάνηκε και στην έρευνα του Orton (1983, 1984) όπου οι φοιτητές παρόλο που έλυσαν προβλήματα με παραγώγους φάνηκε να μην αντιλαμβάνονται την παράγωγο ως ρυθμό μεταβολής και τη γραφική αναπαράσταση της παραγώγου ως όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής.

Από την έρευνα του Bezuidenhout (1998) σε φοιτητές που παρακολουθούν μαθήματα Μαθηματικής Ανάλυσης σχετικά με την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής, προκύπτει ότι είναι αρκετοί αυτοί που δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής και τον συγχέουν με τη μέση τιμή μίας συνεχούς συνάρτησης και τον μέσο όρο. Ακόμα, κάποιες φορές οι φοιτητές θεωρούν τον μέσο ρυθμό μεταβολής ως σταθερό ή στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής (Orton, 1983).

Πολλές φορές έννοιες που έχουν σχέση με τον ρυθμό μεταβολής συγχέονται από μαθητές και φοιτητές. Έτσι έχει παρατηρηθεί ότι πολλές φορές δεν είναι ξεκάθαρες οι διαφορές ανάμεσα στο ποσό και στη μεταβολή στο ποσό μίας ποσότητας, όπως ακόμα στη μεταβολή και στον ρυθμό μεταβολής (Heid, 1984· Thompson, 1994α). Η παρανόηση αυτή μάλιστα έχει παρατηρηθεί σε διάφορες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, όπως συμβολική και γραφική αλλά και σε προβλήματα (Thompson, 1994α).

Ο ρυθμός μεταβολής σε μία γραμμική συνάρτηση εκφράζεται με το πηλίκο των διαφορών ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$). Έχει φανεί όμως ότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές τον αντιλαμβάνονται ως το πηλίκο $\frac{y}{x}$ (ratio-of-totals) (Tyne, 2017). Ενώ αυτό δίνει σωστά αποτελέσματα σε αναλογικές σχέσεις, όταν η σχέση είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, οδηγεί σε λάθη.

Δυσκολίες σε σχέση με την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής έχουν παρατηρήσει και οι Teuscher και Reys (2007), και συγκεκριμένα ότι ενώ οι φοιτητές μπορούσαν να υπολογίσουν τον ρυθμό μεταβολής γραμμικών συναρτήσεων, όταν η συνάρτηση ήταν μη γραμμική δεν μπορούσαν να αναπαραστήσουν τη σχέση με γραφική παράσταση και να ερμηνεύσουν τον ρυθμό μεταβολής σε πραγματικά πλαίσια. Σε ένα πρόβλημα στο οποίο ζητήθηκε από τους φοιτητές να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της ποσότητας του νερού σε ένα δοχείο, οι σωστές απαντήσεις ήταν λιγότερες από τις μισές.

Οι Carlson κ.ά. (2002) παρατήρησαν δυσκολίες στην ερμηνεία του ρυθμού μεταβολής σε δυναμικές καταστάσεις και στην επίδραση που έχει η αλλαγή σε μία μεταβλητή σε μία άλλη. Το πρόγραμμα σπουδών σε σχέση με τον Διαφορικό Λογισμό δεν εστιάζει στην ερμηνεία των συναρτήσεων από την άποψη της συμμεταβολής (Carlson κ.ά., 2002). Για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής απαιτείται η εννοιολόγηση της συμμεταβολής και η αντίληψη των ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, η οποία είναι ασθενής (Hackworth, 1994).

Σημαντικές είναι οι δυσκολίες των μαθητών και φοιτητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής όταν αυτός είναι αρνητικός (Ärlebäck κ.ά., Doerr κ.ά., 2013). Ακόμα έχει παρατηρηθεί ότι όταν χρησιμοποιείται η ίδια λέξη για το μέτρο και για την προσημασμένη τιμή μίας ποσότητας, υπάρχουν μεγαλύτερες δυσκολίες στην ερμηνεία της έννοιας (Doerr κ.ά., 2013).

Παρόλο που ο ρυθμός μεταβολής έχει πολλές εφαρμογές, η ερμηνεία του σε πραγματικά προβλήματα δεν είναι εύκολη. Οι περισσότερες εφαρμογές του ρυθμού μεταβολής σχετίζονται με τον χρόνο, όπως τα πιο οικεία παραδείγματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η εξοικείωση με την ταχύτητα δεν συνεπάγεται τη δυνατότητα ερμηνείας του ρυθμού μεταβολής σε άλλα πλαίσια (Lobato & Thanheiser, 1999· Herbert & Pierce, 2011). Επιπλέον, όσον αφορά σε ρυθμούς που εκφράζουν μία άλλη φυσική ποσότητα, όπως η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη, θεωρείται ότι η συμμεταβολή ποσοτήτων δεν γίνεται αντιληπτή από τους φοιτητές.

Οι μαθητές δυσκολεύονται να σχηματίσουν εικόνες συνεχώς μεταβαλλόμενου ρυθμού και να ερμηνεύσουν μειούμενους και αυξανόμενους ρυθμούς σε δυναμικές καταστάσεις (Carlson κ.ά., 2002). Πολλοί είναι αυτοί που δυσκολεύονται να εστιάσουν στο χαρακτηριστικό που πρέπει να μετρηθεί σε μία κατάσταση και να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που το επηρεάζουν (Lobato & Thanheiser, 1999).

Κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών και φοιτητών με τον ρυθμό μεταβολής πηγάζουν από δυσκολίες σε άλλες έννοιες. Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο λόγος, ο ρυθμός και η κλίση πολλές φορές δεν είναι ξεκάθαρα από τους μαθητές (Coe, 2007). Ακόμα δυσκολίες παρατηρούνται στο χειρισμό κλασμάτων και αναλογικών (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2015).

Παρόλο που η κατανόηση του μέσου ρυθμού μεταβολής υποστηρίζει την κατανόηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, είναι αρκετοί οι μαθητές που δεν έχουν τις βάσεις για τη μετάβαση αυτή (Orton, 1983· Thompson, 1994α). Ακόμα συγχέεται ο μέσος ρυθμός μεταβολής με τη μέση τιμή συνάρτησης ή ρυθμού μεταβολής (Weber & Dorko, 2013).

Συχνά παρατηρείται να συγχέουν οι μαθητές τη συμπεριφορά της συνάρτησης με του ρυθμού μεταβολής της (Ärlebäck κ.ά., 2013). Δυσκολίες φαίνεται ότι προκαλούνται και από τη σύνδεση της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης με τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της και την ερμηνεία τους στο πλαίσιο ενός πραγματικού προβλήματος (Ubuz, 2007· Mel & Redish, 2002· Çetin, 2009).

Όσον αφορά στις αναπαραστάσεις έρευνες σχετικά με τη συσχέτιση διαφορετικών αναπαραστάσεων ρυθμού μεταβολής δείχνουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να τις συνδέσουν τόσο μεταξύ τους όσο και με την έννοια (Herbert & Pierce, 2011). Η αναπαράσταση με πίνακα τιμών θεωρείται ότι δίνει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής, ενώ η συμβολική αναπαράσταση προκαλεί τις περισσότερες δυσκολίες (Herbert & Pierce, 2011).

2.2.8 Εννοιολογικά εμπόδια

Οι μαθητές κατά τη διαδικασία μάθησης μπορεί να αντιμετωπίζουν διάφορα εμπόδια. Ο Cornu (2002) αναφέρει τα γενετικά και τα ψυχολογικά εμπόδια που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της προσωπικής ανάπτυξης των μαθητών, τα διδακτικά εμπόδια που οφείλονται στη φύση της διδασκαλίας και στον εκπαιδευτικό και τα εννοιολογικά εμπόδια που έχουν σχέση με την ίδια τη φύση των μαθηματικών εννοιών. Στο παρόν μέρος γίνεται προσπάθεια να διερευνηθούν τα πιθανά εννοιολογικά εμπόδια που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής.

Κάποια δυσκολίες των μαθητών στην εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής προκύπτουν από εννοιολογικά εμπόδια που σχετίζονται με έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως το όριο, το άπειρο και το στιγμιαίο (Cornu, 2002· Moru, 2009). Ιδιαίτερα στην περίπτωση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, που είναι το όριο μίας διαδικασίας και όχι ένα στιγμιότυπο, προκύπτουν δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια του ορίου (Moru, 2009).

Το μεγάλο εύρος ερμηνείας του ρυθμού μεταβολής δυσκολεύει τη διδασκαλία του. Οι μαθητές διδάσκονται διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής σε διαφορετικά μαθήματα και με διαφορετικό τρόπο και πολλές φορές και συμβολισμό. Όλα αυτές οι παράμετροι συνηγορούν στην αδυναμία διαμόρφωσης μίας συνεκτικής εικόνας για την έννοια.

Οι μαθητές έχουν μία διαισθητική αντίληψη του ρυθμού από την καθημερινή ζωή και από προηγούμενες εμπειρίες τους, αλλά μπορεί να οδηγηθούν σε λανθασμένες γενικεύσεις των ιδιοτήτων του ρυθμού. Για παράδειγμα ο ρυθμός ως κάτι επαναλαμβανόμενο μπορεί να δυσκολέψει την κατανόηση μεταβλητών ρυθμών μεταβολής.

Ένας άλλος παράγοντας που σχετίζεται με τον ρυθμό μεταβολής και μπορεί να προκαλέσει εννοιολογικά εμπόδια είναι η γλώσσα, όπως αναλύεται στην παράγραφο 4.3.5.

Επιπλέον, το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής οδηγεί σε διαφορετικές καταστάσεις που είναι δύσκολο να ερμηνευτούν (Doerr κ.ά., 2013). Μία ποσότητα που αυξάνεται ενώ το μέτρο της μειώνεται μπορεί να προκαλέσει αντικρουόμενες εικόνες.

2.2.9 Προτάσεις διδακτικής

Ο Tall (1992) αναφέρει τις παρακάτω πρακτικές ως τρόπους αλλαγής της διδακτικής της Μαθηματικής Ανάλυσης:

- Ενεργός μάθηση
- Διαμόρφωση διαισθητικών εννοιολογήσεων κατάλληλων για μελλοντική πιο αυστηρή θεώρηση
- Γραφικά σε υπολογιστές
- Προγραμματισμός σε υπολογιστές
- Λογισμικά διαχείρισης συμβόλων/υπολογισμών
- Χρήση τριών αναπαραστάσεων, γραφική, αριθμητική, συμβολική (Tall, 1992), γνωστή και ως ο «Κανόνας των Τριών» που αργότερα επεκτάθηκε με την εισαγωγή της λεκτικής αναπαράστασης σε «Κανόνα των Τεσσάρων» (Tall, 2003)

Ο Tall (1986, 2009, 2010) πρότεινε μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση στη διδασκαλία εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως το όριο, η παράγωγος, η συνέχεια, τα ακρότατα αλλά και το ολοκλήρωμα, την οποία ονόμασε ‘Sensible approach’, με βάση την παράλληλη ανάπτυξη της εννοιολογικής ενσωμάτωσης (conceptual embodiment), του συνδυασμού δηλαδή της ανθρώπινης αντίληψης και της δράσης, και του συμβολισμού με βάση το procept που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Η θεωρία που προτείνει στηρίζεται στη μεγέθυνση των γραφημάτων, που μπορεί να γίνει καλύτερα αντιληπτή με τη βοήθεια λογισμικού σε υπολογιστή. Με τη χρήση λογισμικού, ο ερευνητής πρότεινε τη μεγέθυνση του γραφήματος μίας συνάρτησης έτσι ώστε να γίνεται «τοπικά ευθεία» ως τρόπο κατανόησης της παραγώγου. «Τεντώνοντας» το γράφημα μίας συνάρτησης, σε διαφορετικές κλίμακες στον οριζόντιο και στον κάθετο άξονα μπορεί να φανούν ιδιότητες της συνάρτησης όπως τα σημεία καμπής και η συνέχεια αντίστοιχα.

Κατά την ενασχόληση με προβλήματα που εμπλέκουν ρυθμούς μεταβολής το εννοιολογικό πλαίσιο σύμφωνα με το οποίο εργάζεται ο μαθητής μετασχηματίζεται σταδιακά. Το πρώτο στάδιο είναι να γίνει αντιληπτή η εικόνα της αλλαγής σε κάθε μία από τις εμπλεκόμενες ποσότητες, στη συνέχεια να γίνει ο συντονισμός των εικόνων δύο ποσοτήτων και τέλος να δημιουργηθεί μια εικόνα της ταυτόχρονης συμμεταβολής δύο ποσοτήτων (Thompson, 1994β).

Μία κατηγοριοποίηση (Herbert & Pierce, 2012) των χαρακτηριστικών του ρυθμού μεταβολής που θα μπορούσαν να είναι καίριες στη διδακτική του (educationally critical aspects-ECAs) αλλάζοντας την εστίαση από τη μελέτη κανόνων σε μελέτη σχέσεων, έχει ως εξής:

ECA 1: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες.

ECA 2: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, που μπορεί να μεταβάλλεται.

ECA 3: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια αριθμητική σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, που μπορεί να μεταβάλλεται.

ECA 4: Ο ρυθμός μεταβολής ως μια αριθμητική σχέση μεταξύ των μεταβολών σε δύο ποσότητες, που μπορεί να μεταβάλλεται και που είναι εφαρμόσιμος σε οποιοδήποτε πλαίσιο.

Η κατηγοριοποίηση αυτή μπορεί να αποτελέσει την κατευθυντήρια γραμμή για τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής σε μαθητές που δεν έχουν διδαχτεί Μαθηματική Ανάλυση.

Εστιάζοντας στην έννοια του λόγου, οι Lobato και Thanheiser (2002), μετά από πειραματική διδασκαλία με τη βοήθεια λογισμικού, προτείνουν ένα πλαίσιο διδακτικής για την κατανόηση του λόγου ως μέτρησης με τις παρακάτω συνιστώσες:

- Απομόνωση των χαρακτηριστικών που πρέπει να μετρηθούν

- Καθορισμός των ποσοτήτων που επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά και του τρόπου που γίνεται αυτό
- Κατανόηση των χαρακτηριστικών μιας μέτρησης
- Κατασκευή του λόγου

Η άσκηση της εικόνας 2.6 υπάρχει στο βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, κ.α., 2018) στο κεφάλαιο που αναφέρεται στον ρυθμό μεταβολής και είναι ενδεικτική των προβλημάτων που καλούνται να λύσουν οι μαθητές στο συγκεκριμένο κεφάλαιο:

2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό $100 cm^3/sec$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9cm;

Εικόνα 2.6. Πρόβλημα ρυθμού μεταβολής της Γ΄ Λυκείου

Στο πρόβλημα αυτό ο μαθητής πρέπει να αναγνωρίσει τη μεταβλητή του χρόνου t, την ακτίνα r και τον όγκο V. Στη συνέχεια να αντιληφθεί πως η ακτίνα μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο r(t) και πως μεταβάλλεται ο όγκος σε σχέση με την ακτίνα, $V(r)=4/3\pi r^3$ και κατ΄ επέκταση σε σχέση με το χρόνο $V(t)=4/3\pi r^3(t)$. Στην περίπτωση αυτή όμως θέλουμε να συσχετίσουμε ρυθμούς μεταβολής και μάλιστα στιγμιαίους άρα θέλουμε να συνδυάσουμε την παράγωγο του όγκου και της ακτίνας. Ψάχνουμε πόσο γρήγορα γεμίζει το μπαλόνι σε σχέση με το πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα του σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Για την κατανόηση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να δοθεί μια απλοποιημένη εκδοχή του, στην οποία το στερεό που γεμίζει να είναι κύβος. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι οι μαθητές είναι πιο εξοικειωμένοι με την εύρεση του όγκου του κύβου και μπορούν να εστιάσουν στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, καθώς και ότι σε αυτή την περίπτωση το ύψος του νερού μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Τα παραπάνω προβλήματα μπορούν εύκολα να μοντελοποιηθούν σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν με τις μεταβλητές και να οπτικοποιήσουν τις μεταβολές και τις σχέσεις μεταξύ τους.

2.2.10 Διαισθητική αντίληψη

Ο Dehaene (1997) περιγράφει την «αίσθηση του αριθμού» (number sense) ως την ικανότητα του ανθρώπου να αντιλαμβάνεται γρήγορα, να προσεγγίζει και να χειρίζεται αριθμητικές ποσότητες. Θεωρεί ότι η αίσθηση αυτή βασίζεται σε εγκεφαλικά κυκλώματα που έχουν αναπτυχθεί στη διάρκεια των χρόνων για την αναπαράσταση βασικών αριθμητικών γνώσεων. Αντίστοιχα, θα μπορούσε να τεθεί το ερώτημα αν ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει την αίσθηση του ρυθμού μεταβολής.

Υποθέτοντας ότι οι μαθητές έχουν μία αρχική διαισθητική εικόνα του ρυθμού μεταβολής από την παρατήρηση φαινομένων του πραγματικού κόσμου και σε αντιστοιχία με τη θεωρία των τριών κόσμων του Tall (2004), όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.1.1.2, η διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση θα μπορούσε να γίνει στο πλαίσιο του εννοιολογικού-ενσωματικού κόσμου. Όπως προτείνουν πολλοί ερευνητές η έννοια του ρυθμού μεταβολής μπορεί να εισαχθεί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση με διαισθητικό και αναπαραστατικό τρόπο με έμφαση στη γραφική αναπαράσταση (Orton, 1983).

Για να γίνει αυτό, η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στην έννοια και όχι σε υπολογιστικές μεθόδους ή σε σύμβολα. Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να μελετηθεί μέσα από πραγματικά προβλήματα που σχετίζονται με ταχύτητα ή επιτάχυνση, αλλά και σε περιπτώσεις που η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι ο χρόνος, όπως για παράδειγμα στη σχέση όγκου και ύψους στο γέμισμα ενός δοχείου με νερό. Καταστάσεις στις οποίες οι μαθητές αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους τις μεταβολές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έναυσμα.

Δεδομένης της σημασίας της εννοιολόγησης της συμμεταβολής στην κατανόηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης και των δυσκολιών που έχουν παρατηρηθεί σε σχέση με αυτή, έχει προταθεί η εισαγωγή της στο σχολικό πρόγραμμα πριν από τη μελέτη του Διαφορικού Λογισμού (Carlson κ.ά., 2002· Confrey & Smith, 1994· Moore κ.ά., 2013· Oehrtman κ.ά., 2008· Herbert & Pierce, 2012). Η διαισθητική κατανόηση του ρυθμού μεταβολής ως ταχύτητα και της κλίσης ως μέτρο της ανηφοριάς (κατηφοριάς) μπορεί να αποτελέσει το σημείο εκκίνησης για μια βαθύτερη κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και της παραγώγου (Herbert & Pierce, 2012). Σε αυτή την προσπάθεια σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι γραφικές αναπαραστάσεις, στις οποίες οι έννοιες συνδέονται με τα φαινόμενα στα οποία αναφέρονται (Avgerinos & Skoufi, 2012).

Αυτή η άποψη είχε εκφραστεί παλιότερα και από τον Orton (1983), ο οποίος θεωρούσε ότι η έννοια του ρυθμού μεταβολής θα πρέπει να μεταδίδεται σε κάθε ευκαιρία πριν από τη μελέτη του διαφορικού λογισμού και όχι μόνο όταν απαιτείται για την κατανόηση της παραγώγου, τονίζοντας τη σημασία των γραφικών αναπαραστάσεων στην προσπάθεια αυτή. Βοηθητική θεωρείται και η χρήση οικείων παραδειγμάτων και τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνίας. Μια άτυπη προσέγγιση του ρυθμού μεταβολής και της έννοιας της παραγώγισης μπορεί παρουσιαστεί με χρήση ΤΠΕ για τη σύνδεση αριθμητικών και γραφικών αναπαραστάσεων, πριν από την ηλικία των 16 (Orton, 1983).

Οι Confrey και Smith (2004) εντόπισαν τρία σημαντικά χαρακτηριστικά που μπορούν να βοηθήσουν σε μία αποδοτική εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής στον Διαφορικό Λογισμό, τη σύγκριση μονάδας με μονάδα (unit per unit comparison), τη συγκριτική διάσταση (comperative dimension) και τις γραφικές αναπαραστάσεις.

Οι Roschelle κ.ά. (2000) υποστηρίζουν ότι είναι εφικτό να διδάσκονται οι κεντρικές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού σε μαθητές μικρότερης ηλικίας από ότι στα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών. Τονίζουν ιδιαίτερα σε αυτή την πρόταση τη συμβολή των τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών. Ακόμα και μαθητές μικρών ηλικιών μπορούν να ασχοληθούν με τα μαθηματικά των αλλαγών αν συνδυάσουν κιναισθητηριακές εμπειρίες από τον πραγματικό κόσμο με έναν μαθηματικό τρόπο (Wright, 2001).

Υπάρχουν ενδείξεις για θετικά αποτελέσματα όσον αφορά στην κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης, όταν ο ρυθμός μεταβολής και η συμμεταβολή εισάγονται με διαισθητικό τρόπο (Weber κ.ά., 2012). Έχει προταθεί ότι θα ήταν χρήσιμο για τους μαθητές να έρχονται σε επαφή με έργα με ποσότητες που συμμεταβάλλονται και να αναπτύσσουν ικανότητες ερμηνείας τους πιο νωρίς στη σχολική εκπαίδευση (Thompson & Carlson, 2017).

Οι έρευνες των Nemirovsky & Rubin (1992) δείχνουν ότι ακόμη και μικρά παιδιά έχουν κάποια εννοιολογική αντίληψη του ρυθμού μεταβολής και της ταχύτητας και μια αίσθηση της «ανηφοριάς», και μετά από διδασκαλία μπορούσαν να εξετάζουν γραφικά την έννοια του ρυθμού μεταβολής, καθώς και τη σχέση που έχει το γράφημα της παραγώγου με αυτό της αρχικής συνάρτησης, χωρίς να έχουν ακόμη εισαχθεί στη μελέτη του Διαφορικού Λογισμού.

Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης από την άποψη της συμμεταβολής (Confrey & Smith, 1994). Σύμφωνα με τους Confrey και Smith (1994) ένα ισχυρό πλαίσιο κατανόησης της έννοιας, το οποίο θα βοηθήσει τους μαθητές κατά τη μελέτη, περιλαμβάνει διάφορες όψεις της, όπως τη σύγκριση μονάδας ανά μονάδα, τη φυσική ερμηνεία της σύγκρισης λόγων μεταβολής, τη γραφική αναπαράσταση και την αναγνώριση της κλίσης. Τονίζεται ότι η σημασία της ενασχόλησης με ρυθμούς μεταβολής σε διάφορα πλαίσια και με διαφορετικές αναπαραστάσεις (Oehrtman κ.ά., 2008).

2.3 Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Μια αφηρημένη έννοια γίνεται πιο συγκεκριμένη και γενικά πιο εύκολη στην κατανόησή της με μια αναπαράσταση και οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών (ΤΠΕ) δίνουν πολλές δυνατότητες για ποικίλες αναπαραστάσεις (Dubinsky & Tall, 1991). Η οπτική αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας δίνει μια πιο γενική, αφαιρετική ιδέα, η οποία μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της έννοιας ή να αποτελέσει «γνωστική ρίζα» (cognitive root) για αυτή (Tall κ.ά., 2000). Συγχρόνως, η συμβολική αναπαράσταση δίνει μια λειτουργική μέθοδο για υπολογισμούς. Οι δύο αυτές όψεις θα πρέπει να συνδυαστούν για να είναι η έννοια ολοκληρωμένη. Η εστίαση στο συμβολισμό μπορεί να οδηγήσει σε υπολογιστική προσέγγιση, ενώ η εστίαση στην οπτικοποίηση μπορεί να βοηθάει τη διαισθητική αντίληψη σε περιορισμένο όμως πλαίσιο, χωρίς μεγάλες δυνατότητες γενίκευσης (Tall, 1998).

2.3.1 Εκπαιδευτική αξιοποίηση ΤΠΕ

Οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές χρησιμοποιούν τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών (ΤΠΕ) στην καθημερινή ζωή. Οι ΤΠΕ έχουν ενταχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία και αυτή η τάση εδραιώνεται περισσότερο. Η εκπαιδευτική αξιοποίησή τους αφενός προσφέρει νέες δυνατότητες διδασκαλίας και μάθησης, αφετέρου αποτελεί πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς και τους σχεδιαστές εκπαιδευτικού υλικού.

Οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ενδυναμώσουν μία εννοιολογική εικόνα και τον συντονισμό πολλών αναπαραστάσεων. Διάφορα τεχνολογικά μέσα όπως εκπαιδευτικό λογισμικό, προσομοιώσεις, παιχνίδια σε ηλεκτρονικά περιβάλλοντα, διαδραστικές εφαρμογές ή ακόμα εφαρμογές εικονικής και επαυξημένης πραγματικότητας μπορούν να έχουν θετικά αποτελέσματα στη μάθηση αν αξιοποιηθούν σωστά. Η ανάπτυξη των υλικών τεχνολογικών μέσων (hardware), με την εμφάνιση νέων συσκευών σε προσιτές τιμές, και του λογισμικού (software) έχουν οδηγήσει σε νέες τρόπους επικοινωνίας και μάθησης. Το cloud computing, τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης, η ρομποτική και η τεχνητή νοημοσύνη αλλάζουν τον τρόπο που οι άνθρωποι εργάζονται, μαθαίνουν αλλά και σκέφτονται. Η επαυξημένη πραγματικότητα συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της φυσικής και της εικονικής μάθησης (Bujak κ.ά., 2013). Η εναρμόνιση της εκπαίδευσης σε αυτό το ψηφιακό περιβάλλον δεν είναι απλά μία αλλαγή στον τρόπο της διδασκαλίας αλλά στην ίδια τη φύση της εκπαίδευσης.

Οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να διερευνήσουν μέσα από ένα μοντέλο πως συνδέονται τα μαθηματικά με τις φυσικές επιστήμες. Η σύνδεση αυτή μπορεί να φαίνεται λογική και να αναφέρεται συχνά, αλλά στην πράξη δεν εφαρμόζεται. Οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά αποκομμένα, χωρίς να αναγνωρίζουν τη χρησιμότητά τους. Έτσι, ακόμα και καλοί μαθητές καταφέρνουν να επιλύουν ασκήσεις και να απαντάνε σε θεωρητικές ερωτήσεις, αλλά δεν μπορούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε ένα πραγματικά προβλήματα.

Κατά τη σχεδίαση εκπαιδευτικού λογισμικού θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η έρευνα στην εκπαίδευση, ενώ το παιδαγωγικό πλαίσιο και το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να επανεξετάζονται σύμφωνα με τη χρήση ΤΠΕ (Kaput & Thompson, 1994).

2.3.2 STEM

Τα τελευταία χρόνια, η προσέγγιση STEM (Science - Technology - Engineering – Mathematics) έχει μελετηθεί ως προς την αξιοποίησή της στην εκπαίδευση (McDonald, 2016). Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να συνδυάσουν τα μαθηματικά με τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία και να εμπλακούν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία σε ένα επικοιδομητικό περιβάλλον μάθησης (Alimisis, 2013). Υπάρχουν ενδείξεις ότι με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες συνδυαστικής και κριτικής σκέψης, καθώς και επίλυσης προβλημάτων (Benitti, 2012).

Η εκπαιδευτική ρομποτική, ως συνιστώσα του STEM, είναι ένα σχετικά νέο πεδίο το οποίο φαίνεται ότι έχει τη δυνατότητα να επηρεάσει τη φύση της διδασκαλίας των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης (Alimisis, 2013). Ο συνδυασμός στοιχείων από τη ρομποτική και τα μαθηματικά προσφέρει ευκαιρίες εκπαιδευτικής αξιοποίησης και στους δύο τομείς (Alfieri κ.ά., 2015).

Η εκπαιδευτική ρομποτική προωθείται με διαγωνισμούς σε εθνικό και διεθνές επίπεδο, έχουν γίνει έρευνες αξιολόγησης των αποτελεσμάτων της (Benitti, 2012) και γίνονται προσπάθειες αξιοποίησής της και ένταξής της στα προγράμματα σπουδών (Silk & Schunn, 2008). Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν πολλά αξιολογημένα σενάρια αξιοποίησής της σε σχέση με μαθηματικές έννοιες και η εφαρμογή της στην εκπαιδευτική διαδικασία αποτελεί πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς (Benitti, 2012).

Η εκπαιδευτική ρομποτική θεωρείται ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ενίσχυση τόσο των γνωσιακών όσο και των κοινωνικών δεξιοτήτων των μαθητών (Felicia & Sharif, 2014). Μέσω της ενασχόλησης με την εκπαιδευτική ρομποτική, οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία σε ένα εποικοδομητικό περιβάλλον μάθησης (Alimisis, 2013). Υπάρχουν ενδείξεις ότι με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες συνδυαστικής και κριτικής σκέψης, καθώς και επίλυσης προβλημάτων (Benitti, 2012).

Η σχέση μεταξύ ρομποτικής και μαθηματικών είναι συμπληρωματική, καθώς με την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών σε ένα πρόβλημα ρομποτικής οι μαθητές μπορούν αφενός να κατανοήσουν καλύτερα τον τρόπο που δουλεύει ένα ρομπότ (Silk & Schunn, 2011) και αφετέρου να αντιληφθούν μαθηματικές έννοιες στα πλαίσια μιας ρεαλιστικής κατάστασης. Σε έρευνες για την αξιοποίηση της εκπαιδευτικής ρομποτικής σε σχέση με τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, έχουν σημειωθεί θετικά αποτελέσματα τόσο σε γνωσιακό επίπεδο όσο και στις στάσεις των μαθητών προς τη ρομποτική και τα μαθηματικά (Alfieri κ.ά., 2015). Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές που μελετούν λόγους και αναλογίες μέσα από δραστηριότητες μηχανικής βελτιώνουν το επίπεδο κατανόησής τους ενώ διατηρούν και μπορούν να εφαρμόσουν τη γνώση αυτή για μεγαλύτερο διάστημα ακόμα και σε πλαίσια εκτός μαθηματικών (Martínez Ortiz, 2015).

Παρόλες τις ενδείξεις για θετική αλληλεπίδραση μαθηματικών και ρομποτικής, ο σχεδιασμός εκπαιδευτικών σεναρίων ρομποτικής για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών θεωρείται αρκετά περίπλοκος. Σε δραστηριότητες ρομποτικής που οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν διάφορες καταστάσεις και πληθώρα δεδομένων, δυσκολεύονται να εστιάσουν στις μαθηματικές έννοιες (Silk & Schunn, 2008). Έτσι παρατηρείται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές εστιάζουν στο μηχανικό και προγραμματιστικό μέρος της ρομποτικής και ελάχιστα ή καθόλου στη σύνδεση με έννοιες του αναλυτικού προγράμματος. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα προβλήματα που τους δίνονται εφαρμόζοντας τη στρατηγική της «υπόθεσης και δοκιμής» (guess and check) για να βρουν τις τιμές των παραμέτρων για τον προγραμματισμό του ρομπότ, αντί να χρησιμοποιούν μαθηματικά για να λύσουν το πρόβλημα (Silk κ.ά., 2010).

Η ρομποτική προσφέρει ευκαιρίες μάθησης και εμπλοκής των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία, αλλά ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει αυτό δεν είναι προφανής. Το γεγονός και μόνο ότι σε πολλές δραστηριότητες ρομποτικής υπάρχουν μαθηματικές σχέσεις δεν συνεπάγεται ότι οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά όταν κάνουν ρομποτική (Silk κ.ά., 2010). Για να προκύψουν θετικά διδακτικά αποτελέσματα στις φυσικές επιστήμες και τα μαθηματικά, απαιτείται προσεκτικός σχεδιασμός των δραστηριοτήτων, εστίαση σε συγκεκριμένες έννοιες και εξατομικευμένες οδηγίες οι οποίες να οδηγούν στην ανάπτυξη κατάλληλων δεξιοτήτων (Alfieri κ.ά., 2015). Όπως έχει φανεί από έρευνες σε σχέση με την εκπαιδευτική ρομποτική, ακόμα και μικρές αλλαγές στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση του μαθήματος επιφέρουν διαφορετικά μαθησιακά αποτελέσματα (Silk κ.ά., 2010).

Στην εκπαιδευτική ρομποτική έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές πλατφόρμες με πιο διαδεδομένα τα προϊόντα της Lego τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διάφορες ηλικίες και παρέχουν ευελιξία στις κατασκευές (Felicia & Sharif, 2014). Το πακέτο Lego Mindstorms έχει χρησιμοποιηθεί τόσο σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Church κ.ά., 2010) όσο και από μαθητές μικρότερων ηλικιών (Ricca κ.ά., 2006).

2.3.3 ΤΠΕ και ρυθμός μεταβολής

Οι συναρτήσεις και ο ρυθμός μεταβολής αποτελούν σημαντικά εργαλεία μοντελοποίησης φυσικών φαινομένων. Πολλές φορές όμως το πρόβλημα είναι δύσκολο να γίνει αντιληπτό από την περιγραφή του. Οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών προσφέρουν δυνατότητες οπτικοποίησης και μοντελοποίησης ενός προβλήματος.

Σε ένα τέτοιο περιβάλλον οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τον ρυθμό μεταβολής μίας συνάρτησης και να τον αντιληφθούν ως συνάρτηση, καθώς και να κατανοήσουν τον ρυθμό μεταβολής ως συνάρτηση που μετράει τον τρόπο που αλλάζει μία ποσότητα σε σχέση με μία άλλη. Η εφαρμογή των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών σε ρεαλιστικά πλαίσια μπορεί να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες. Οι μαθηματικές έννοιες από αφηρημένα και αποκομμένα από την πραγματικότητα κατασκευάσματα αποκτούν νόημα και λειτουργούν ως εργαλεία μοντελοποίησης πραγματικών φαινομένων.

Η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να συντελέσει έτσι ώστε η έννοια του ρυθμού μεταβολής να μελετηθεί νωρίτερα στο σχολικό πρόγραμμα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές αναπαραστάσεις και ρεαλιστικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές. Η ταχύτητα αλλά και άλλες εκφάνσεις ρυθμών μεταβολής μπορούν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δραστηριότητες που εστιάζουν στην κατανόηση της έννοιας και στον συλλογισμό με βάση τη συμμεταβολή.

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορούν να χρησιμοποιηθούν προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων. Εκπαιδευτικά λογισμικά που χρησιμοποιούνται ευρέως τα τελευταία χρόνια, όπως το GeoGebra και το Scratch μπορούν να συνδυαστούν για να αναπαρασταθούν όψεις του ρυθμού μεταβολής.

Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο σύνθετες εφαρμογές εκπαιδευτικών λογισμικών. Η πρόταση του Tall (1987) για μεγέθυνση της γραφικής παράστασης έτσι ώστε να φαίνεται «ίσια» μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα σε ένα σύγχρονο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Η εννοιολογική εικόνα των μαθητών εμπλουτίζεται μέσω του συνδυασμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας.

Σε αρκετές έρευνες έχουν χρησιμοποιηθεί ΤΠΕ για τη διερεύνηση του τρόπου που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τον ρυθμό μεταβολής και θεωρείται ότι ο πειραματισμός με την έννοια της ταχύτητας βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά της χαρακτηριστικά (Herbert & Pierce, 2008). Στην έρευνα των Herbert και Pierce (2012) χρησιμοποιήθηκαν δύο παραδείγματα, ένα με ταχύτητα σε Java MicroWorlds και ένα με σκίαση εμβαδού στο Geometer's Sketchpad, όπου το σκιασμένο εμβαδόν είναι συνάρτηση του ύψους. Μελετήθηκε αν οι αναπαραστάσεις και το πλαίσιο του προβλήματος επηρεάζουν τις εννοιολογήσεις των μαθητών για τον ρυθμό μεταβολής. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της 10ης βαθμίδας εκπαίδευσης και τα δύο παραδείγματα είχαν γραφική, συμβολική και αριθμητική (πίνακας τιμών) αναπαράσταση. Το παράδειγμα με το σκιασμένο εμβαδόν παρουσίασε μεγαλύτερες δυσκολίες για τους μαθητές σε όλες τις αναπαραστάσεις.

Μια άλλη έρευνα πραγματοποιήθηκε με συνεντεύξεις σε 9 μαθητές για να εξεταστεί αν μπορούν να εκφράσουν προβλήματα με λόγους (Lobato & Thanheiser, 1999). Χρησιμοποιήθηκε ένα πρόβλημα ταχύτητας, ένα με την κλίση μιας ράμπας και ένα με τα διατροφικά χαρακτηριστικά, όπως πρωτεΐνες και λίπη, σε μπάρες δημητριακών. Οι μαθητές αντιμετώπισαν σημαντικές δυσκολίες στην αναγνώριση των χαρακτηριστικών που επιδρούσαν στο πρόβλημα και των ποσοτήτων που τα αφορούσαν.

Ο Thompson (1994β) χρησιμοποίησε ένα μικρόκοσμο σε υπολογιστή, στον οποίο παρουσιάζονταν στοιχεία της ταχύτητας, ως μεταφορά του ρυθμού μεταβολής. Στο παράδειγμα υπήρχε μια χελώνα και ένας λαγός που τρέχουν. Στη χελώνα ο χρήστης μπορούσε να ορίσει τιμές σε δύο ταχύτητες, μία για μια διαδρομή και μια άλλη για την επιστροφή, ενώ στο λαγό μόνο σε μία. Στην ίδια έρευνα χρησιμοποίησε και ένα άλλο πρόβλημα με τον ρυθμό που γεμίζει μια πισίνα από δύο βρύσες. Υποστηρίζει ότι η εισαγωγή της έννοιας της ταχύτητας με τον τύπο 'απόσταση ανά χρόνο' δεν αντιστοιχεί στην εικόνα της ταχύτητας που έχουν οι μαθητές και αναστέλλει την ανάπτυξη της έννοιας της ταχύτητας ως λόγο δύο μεγεθών.

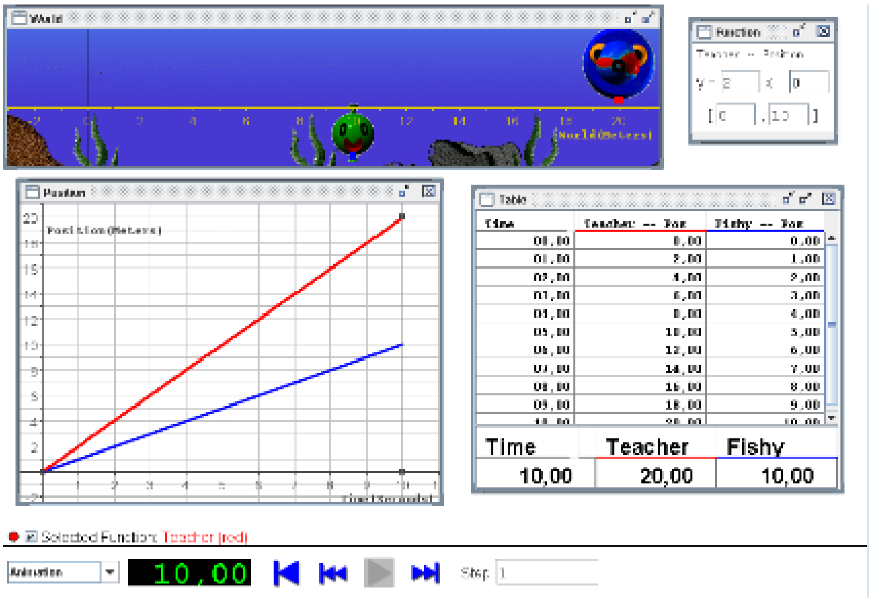
Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται κάποια λογισμικά που έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες για τον ρυθμό μεταβολής σε διάφορα πλαίσια.

2.3.3.1 Κίνηση

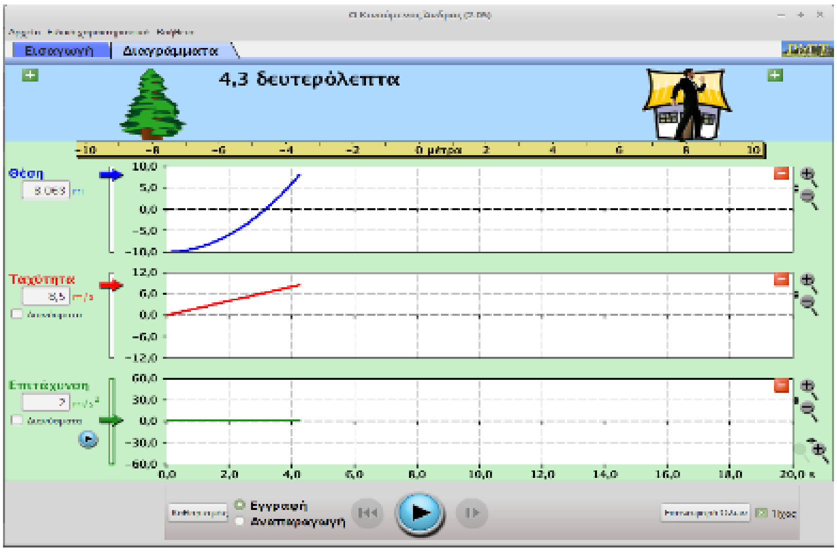
Οι εννοιολογήσεις των μαθητών στο πλαίσιο της κίνησης έχουν διερευνηθεί τόσο από τη σκοπιά των μαθηματικών όσο και της φυσικής και έχουν γίνει έρευνες με χρήση τεχνολογιών πληροφορικής (Livy & Herbert, 2013· Thompson, 1994β). Η μελέτη της κίνησης μπορεί να εμπλουτιστεί με λογισμικά προσομοίωσης που οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με διάφορες παραμέτρους (Kaput, 1998).

Κάποια από τα λογισμικά που έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες ή στη διδακτική είναι τα:

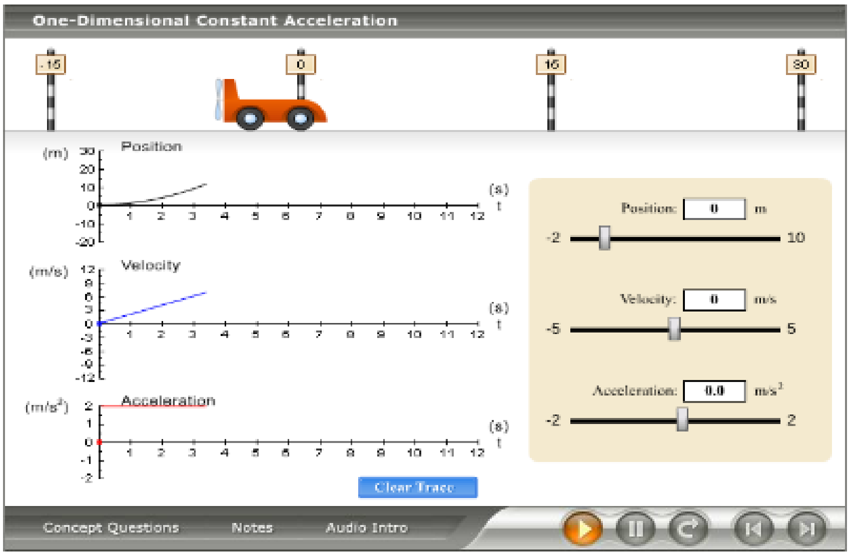
- SimCalc –MathWorlds (Kaput, 1998), http://www.kaputcenter.umassd.edu/products/software/smwcomp/download/ (Εικόνα 2.7)
- The moving man, https://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man (Εικόνα 2.8)
- One dimensional constant acceleration, http://www.wiley.com/college/halliday/0470469080/simulations/sim01/sim01.html (Εικόνα 2.9)
- Over & back (Thompson, 1994β)



Εικόνα 2.7. Στιγμιότυπο από το SimCalc Mathworlds



Εικόνα 2.8. Στιγμιότυπο από το The moving man



Εικόνα 2.9. Στιγμιότυπο από το One-dimensional constant acceleration

Το MathWorlds έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του έργου SimCalc από το Kaput Center for Research and Innovation in STEM Education (Kaput & Schorr, 2002· Kaput & Roschelle, 2013· Roschelle κ.ά., 2000). Το λογισμικό έχει αναπτυχθεί σε Java και είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του προγράμματος με 30 μέρες δωρεάν χρήση. Προσφέρει αρκετές δυνατότητες για τη μελέτη της κίνησης, εστιάζει σε θετική μετατόπιση και ως ένα βαθμό έχει την αίσθηση του παιχνιδιού. Παρόλα αυτά απευθύνεται κυρίως σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και είναι κάπως δύσχρηστο για μικρότερες ηλικίες, λόγω των πολλών παραθύρων που έχει. Εκτός από τις έρευνες που έχουν γίνει στα πλαίσια του προγράμματος SimCalc, το λογισμικό έχει χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές (Herbert & Pierce, 2008, 2011).

Το The moving man είναι μια εφαρμογή του Phet Colorado. Δείχνει τα διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης σε σχέση με τον χρόνο και ο μαθητής μπορεί να πειραματιστεί αλλάζοντας τις τιμές τους. Ένα μικρό πρόβλημα παρατηρείται με τις κλίμακες των διαγραμμάτων, καθώς για συγκεκριμένες τιμές τα γραφήματα βγαίνουν εκτός της περιοχής που εμφανίζεται. Ένα θετικό στοιχείο του είναι ότι δείχνει και αρνητικές τιμές για τη θέση και η φιγούρα μπορεί να κινηθεί αριστερά και δεξιά. Η εφαρμογή αυτή είναι βοηθητική για τη μελέτη της κίνησης σε συνδυασμό με τις γραφικές παραστάσεις. Αντίστοιχες εφαρμογές σε πιο απλή μορφή είναι η One-dimensional constant acceleration και η Over & back, η οποία περιγράφεται σε ένα διδακτικό πείραμα σε έρευνα του Thompson (1994β).

Καθώς, για την ταχύτητα και την επιτάχυνση χρησιμοποιούνται συγκεκριμένοι όροι, οι έννοιες αυτές γίνονται αντιληπτές ως νέες οντότητες που εκφράζουν ένα μέγεθος και δεν δίνεται έμφαση στη σχέση συμμεταβολής μεταξύ των μεγεθών (Lobato & Thanheiser, 1999). Επιπλέον, η έννοια της ταχύτητας δεν συνδέεται με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και δεν γενικεύονται οι ιδιότητές του (Herbert & Pierce, 2011· Lobato & Thanheiser, 2002). Η μελέτη της ταχύτητας από μαθηματική σκοπιά πρέπει να γίνεται με προσοχή και όχι να θεωρείται δεδομένη η κατανόησή της επειδή είναι μια έννοια της καθημερινής ζωής (Herbert & Pierce, 2008). Έτσι, για τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής θεωρείται απαραίτητη η σύνδεσή του και με άλλα πλαίσια εκτός της κίνησης και ιδιαίτερα με πλαίσια που δεν έχουν τον χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή (Herbert & Pierce, 2011).

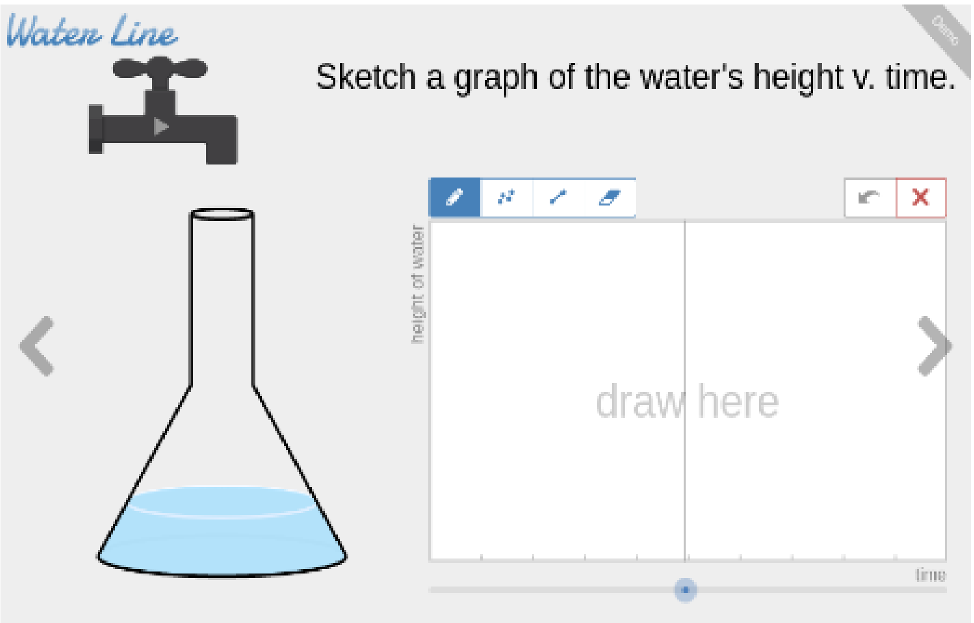
2.3.3.2 Γέμισμα δοχείων

Όπως ήδη αναφέρθηκε το πλαίσιο του γεμίσματος δοχείων δίνει ευκαιρίες διδακτικής αξιοποίησης σε σχέση με διάφορες μαθηματικές έννοιες, μεταξύ των οποίων και ο ρυθμός μεταβολής. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν γίνει κάποιες προσπάθειες προσομοίωσης με χρήση τεχνολογιών πληροφορικής, όπως οι παρακάτω:

- Desmos-Waterline, https://teacher.desmos.com/waterline/walkthrough#Erlenmeyer (Εικόνα 2.10)
- MathDisk, http://www.mathdisk.com/pub/rizwan/worksheets/Rate_of_change (Εικόνα 2.11)
- Cleo-Flasks and graphs, http://www.cleo.net.uk/resources/displayframe.php?src=269/consultants_resources%2Fmaths%2Fmaths%2Ffgplusi%2FallFlasks180105.html (Εικόνα 2.12)

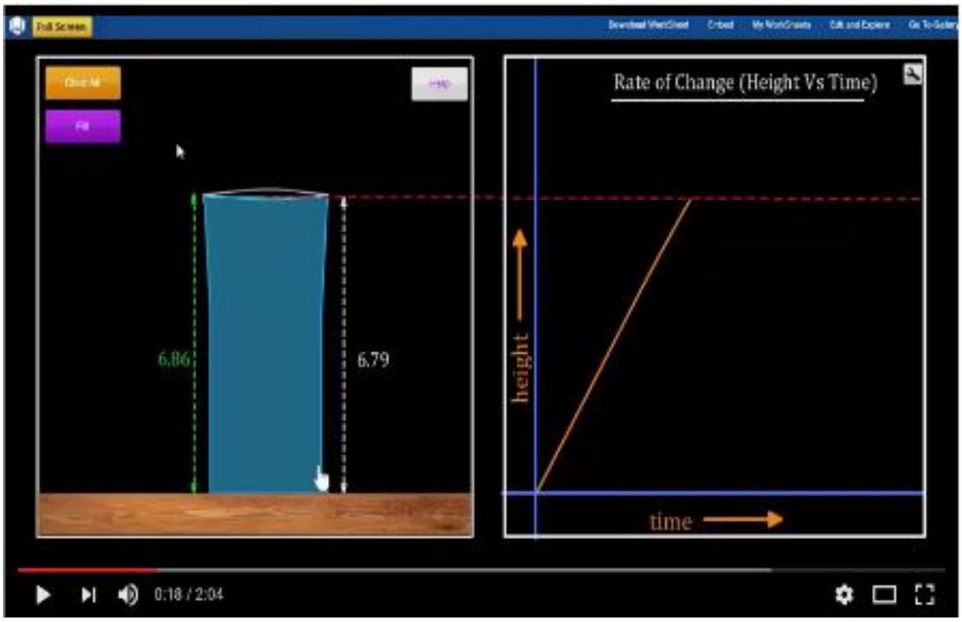
Το Waterline είναι μία δραστηριότητα που έχει αναπτυχθεί στο εκπαιδευτικό λογισμικό μαθηματικών Desmos. Ένα θετικό στοιχείο του λογισμικού είναι ότι ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει ανατροφοδότηση από τους μαθητές του. Παρουσιάζονται διάφορα δοχεία που γεμίζουν με σταθερό ρυθμό με νερό και ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν το διάγραμμα ύψους-χρόνου. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δει τις γραφικές παραστάσεις που σχεδίασαν οι μαθητές της τάξης του. Η μεταβολή του ύψους καθώς εισέρχεται νερό στο δοχείο παρουσιάζεται ομαλά και οι μαθητές μπορούν να έχουν μία εικόνα του ρυθμού με τον οποίο αυτό αυξάνεται ανάλογα με το πλάτος του δοχείου.

Στο τελευταίο βήμα ο μαθητής μπορεί να κατασκευάσει ένα δοχείο ζωγραφίζοντάς το και να διερευνήσει τη μεταβολή του ύψους σε σχέση με τον χρόνο καθώς αυτό γεμίζει.

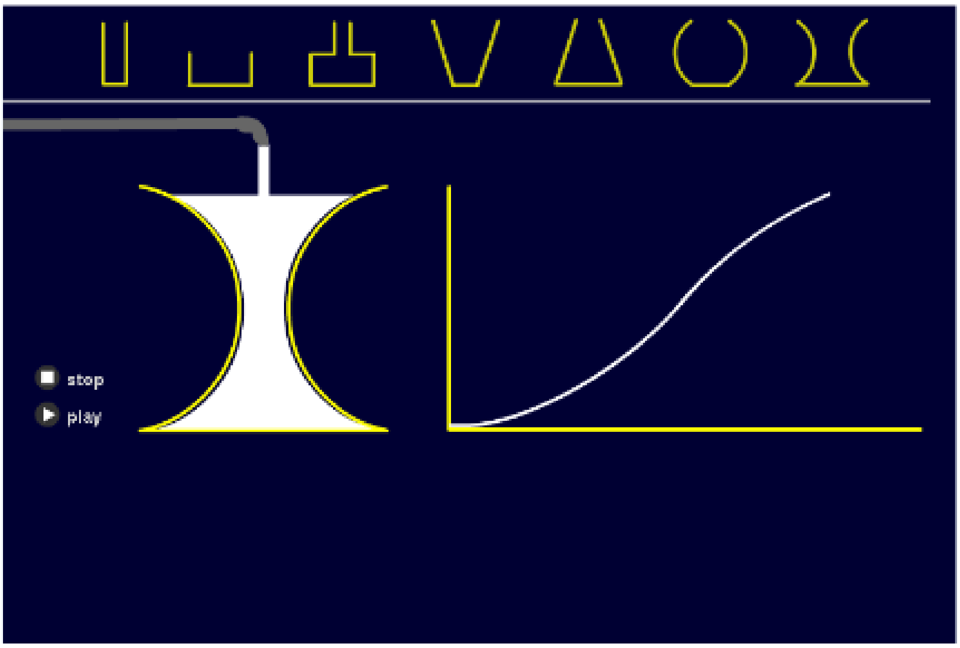


Εικόνα 2.10. Στιγμιότυπο από το Desmos-Waterline

Μία άλλη ενδιαφέρουσα προσομοίωση του προβλήματος έχει υλοποιηθεί στο λογισμικό MathDisk. Και σε αυτή την περίπτωση για διάφορα δοχεία εμφανίζεται το διάγραμμα ύψους-χρόνου. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει δικά του δοχεία και να δει τη γραφική παράσταση του ύψους του νερού σε σχέση με τον χρόνο καθώς αυτά γεμίζουν με σταθερό ρυθμό.



Εικόνα 2.11. Στιγμιότυπο από το MathDisk



Εικόνα 2.12. Στιγμιότυπο από το Cleo-Flasks and graphs

Το Flasks and graphs, που διατίθεται από το Cumbria and Lancashire Education Online Archive, είναι μια πιο απλή παρουσίαση του προβλήματος. Σε αυτό υπάρχουν συγκεκριμένα δοχεία από τα οποία ο μαθητής μπορεί να επιλέξει και να δει πως γεμίζουν σε συνδυασμό με τη γραφική παράσταση του ύψους σε σχέση με τον χρόνο. Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι αρκετά περιορισμένη, οι άξονες δεν έχουν μονάδες και δεν γράφουν ποιες ποσότητες παρουσιάζουν.

Κάποιες προσπάθειες να αναπαρασταθεί το πρόβλημα έχουν γίνει και με άλλα εκπαιδευτικά λογισμικά μαθηματικών, όπως το GeoGebra, και είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο. Σε μερικές από αυτές παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο και άλλα στοιχεία, αλλά οι περισσότερες περιορίζονται σε λίγα σχήματα ή το υγρό στο δοχείο δεν ανεβαίνει με ομαλό ρυθμό.

2.3.3.3 Γεωμετρικές σχέσεις

Τα γεωμετρικά προβλήματα μπορούν να αναπαρασταθούν σχετικά εύκολα σε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και για τον λόγο αυτό υπάρχουν πολλές δραστηριότητες με χρήση τεχνολογιών πληροφορικής που βασίζονται σε αυτά. Παρόλα αυτά, λίγες από αυτές χρησιμοποιούνται τελικά στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Geometer’s Sketchpad και το GeoGebra δίνουν πολλές δυνατότητες αναπαράστασης ιδιαίτερα γεωμετρικών εννοιών. Παρόλο που τα λογισμικά αυτά χρησιμοποιούνται συνήθως για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, έχουν αναπτυχθεί σε τέτοιο βαθμό που μπορούν να αξιοποιηθούν σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Ιδιαίτερα το λογισμικό GeoGebra, καθώς δίνει τη δυνατότητα προγραμματισμού μέσω javascript, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και για τη δημιουργία ενός απλού παιχνιδιού.

Σύνοψη

Η Μαθηματική Ανάλυση είναι κλάδος των μαθηματικών που μελετάται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η άμεση σχέση της με πραγματικές καταστάσεις και η εφαρμογή της στη μελέτη δυναμικών φαινομένων την καθιστούν απαραίτητη γνώση για πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Η διδασκαλία της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής δεν θα πρέπει να αφορά μόνο σε λίγους μαθητές αλλά σε όλους.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια περίπλοκη έννοια με πολλές όψεις. Παρόλα αυτά, μια διαισθητική εικόνα για τον τρόπο που μεταβάλλονται οι ποσότητες κατά τη μελέτη δυναμικών φαινομένων σε διάφορα πλαίσια μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην εννοιολόγηση και ερμηνεία εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Το 1913 ο Thomas Edison υποστήριζε ότι τα βιβλία σύντομα θα είναι απαρχαιωμένα και οι μαθητές θα διδάσκονται μέσω της εικόνας “Books will soon be obsolete in schools. Scholars will soon be instructed through the eye.” (The New York Dramatic Mirror in July 1913 [NDTE]). Παρόλο που έχουν αλλάξει πολλά από τότε και η τεχνολογία έχει εξελιχτεί καθιστώντας πρακτικά δυνατή την πρόβλεψή του, η πραγματικότητα ακόμα τον διαψεύδει.

3 Μεθοδολογία έρευνας

Μεθοδολογία της έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα ερευνητικά μέρη, ο σκοπός και οι υποθέσεις της έρευνας και γενικά θέματα μεθοδολογίας.

3.1 Επισκόπηση

Η παρούσα έρευνα χωρίζεται σε τρία ερευνητικά μέρη. Στο πρώτο μέρος διερευνήθηκε η αναγκαιότητα ένταξης του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση και η θέση του στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών. Αναλύθηκε η γλώσσα που χρησιμοποιείται γύρω από την έννοια του ρυθμού μεταβολής και οι αναφορές των σχολικών εγχειριδίων σε αυτή. Ακόμα διερευνήθηκαν οι απόψεις των καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού με εστίαση στον ρυθμό μεταβολής, ως προς τη σημαντικότητά του και τις δυσκολίες που πιστεύουν ότι αντιμετωπίζουν οι μαθητές.

Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει επιμέρους έρευνες σε φοιτητές γύρω από τον ρυθμό μεταβολής. Στην πιλοτική έρευνα εξετάστηκε η δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με μεταβολή και ρυθμό μεταβολής σε διάφορες αναπαραστάσεις και σε δύο διαφορετικά πλαίσια. Στην κυρίως έρευνα, εξετάστηκαν οι εννοιολογήσεις φοιτητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής και η κατανόηση διαφορετικών αναπαραστάσεών του.

Στο τρίτο μέρος της έρευνας αναπτύχθηκαν ενδεικτικές δραστηριότητες για τη διαισθητική εισαγωγή του ρυθμού μεταβολής και ιδιοτήτων του σε μαθητές στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στην αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν δραστηριότητες σε διαφορετικά πλαίσια, κάποιες από τις οποίες δοκιμάστηκαν σε μικρές ομάδες μαθητών.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται κάποια γενικά θέματα μεθοδολογίας. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για κάθε μία από τις παραπάνω φάσεις της έρευνας παρουσιάζεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο.

3.2 Σκοπός και υποθέσεις της έρευνας

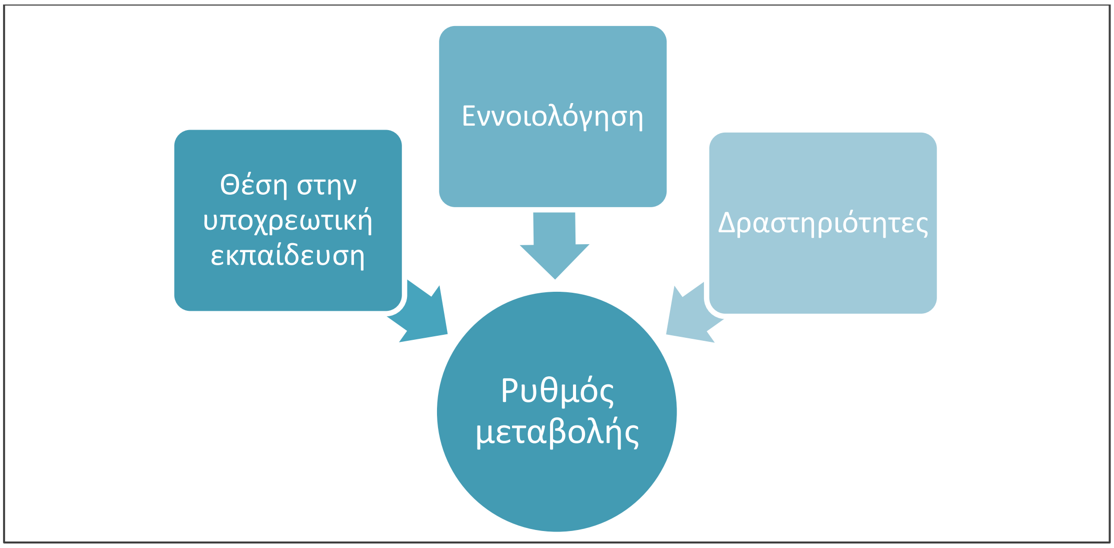
Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε:

- Η θέση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα σε σχέση με άλλες χώρες
- Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής και ο χειρισμός διαφορετικών αναπαραστάσεών του από φοιτητές

- Τρόποι ενδυνάμωσης της διαισθητικής εικόνας και των εννοιολογήσεων του ρυθμού μεταβολής με αξιοποίηση τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών

Συγκεκριμένα τα κεντρικά ερωτήματα που διερευνήθηκαν είναι τα εξής:

- Με ποιον τρόπο διδάσκεται η έννοια του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα;
- Πως εννοιολογούν οι φοιτητές τον ρυθμό μεταβολής και τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που μεταβάλλονται και ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν;
- Πως μπορεί να ενισχυθεί η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής σε μικρότερες ηλικίες;



Εικόνα 3.1. Ερευνητικά μέρη

Για τη μελέτη των παραπάνω ερωτημάτων η έρευνα χωρίστηκε σε τρία μέρη και σε κάθε μέρος τέθηκαν επιμέρους ερωτήματα. Στο πρώτο μέρος της έρευνας έγινε μια προσπάθεια να διερευνηθεί η αναγκαιότητα διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής και να αποτυπωθεί η θέση του στο πρόγραμμα σπουδών στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα και σε άλλες χώρες.

Τέθηκαν τα παρακάτω επιμέρους ερωτήματα:

- Πως διδάσκεται ο ρυθμός μεταβολής και βασικές έννοιες για την κατανόησή του στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα;
- Ποια είναι η θέση του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών σε σχέση με άλλες χώρες;

- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά γύρω από τον ρυθμό μεταβολής και πως συνδέεται με τις εννοιολογήσεις και πιθανές παρανοήσεις των μαθητών;
- Ποιες είναι οι απόψεις των καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τον ρυθμό μεταβολής και τη διδασκαλία του στο ελληνικό σχολείο;

Στο δεύτερο μέρος διερευνήθηκαν οι εννοιολογήσεις φοιτητών για τον ρυθμό μεταβολής. Τα ερωτήματα που διερευνήθηκαν σε αυτή τη φάση είναι:

- Επηρεάζει το πλαίσιο και η αναπαράσταση την επίλυση προβλημάτων με ρυθμούς μεταβολής;
- Αναγνωρίζουν οι φοιτητές έννοιες άλλων επιστημών που εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής;
- Αναγνωρίζουν οι φοιτητές ότι οι ιδιότητες της παραγώγου ή της κλίσης εφαρμόζονται σε έννοιες που εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής;
- Τι λεξιλόγιο χρησιμοποιούν οι φοιτητές για να εκφράσουν προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής και πως συνδέεται αυτό με την εννοιολόγησή τους για τον ρυθμό μεταβολής;
- Οι στάσεις/πεποιθήσεις των φοιτητών για τη Μαθηματική Ανάλυση επηρεάζουν την επίλυση έργων με ρυθμούς μεταβολής;

Στο τρίτο μέρος σχεδιάστηκαν κάποιες ενδεικτικές δραστηριότητες για την ενδυνάμωση της εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής. Τα ερωτήματα που τέθηκαν σε αυτή τη φάση είναι τα εξής:

- Μπορεί ο ρυθμός μεταβολής να εισαχθεί διαισθητικά μέσω δραστηριοτήτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διαισθητική αντίληψη του ρυθμού μεταβολής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ενδυνάμωση της εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση;

3.3 Γενικά θέματα μεθοδολογίας

Καθώς σε κάθε ένα από τα τρία διαφορετικά μέρη της έρευνας ακολουθήθηκε διαφορετική μεθοδολογία και για την καλύτερη παρουσίαση τους, η μεθοδολογία περιγράφεται σε ξεχωριστό κεφάλαιο για το κάθε μέρος. Συνοπτικά αναφέρεται ότι για τη διερεύνηση της θέσης του ρυθμού μεταβολής χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια και διενεργήθηκε ποσοτική έρευνα με ερωτηματολόγιο σε καθηγητές μαθηματικών. Για το δεύτερο μέρος χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια σε φοιτητές. Τέλος στο τρίτο μέρος, αναπτύχθηκαν δραστηριότητες, κάποιες από τις οποίες δοκιμάστηκαν πιλοτικά.

3.3.1 Ερωτηματολόγια

Σε κάποια από τα μέρη της έρευνας δόθηκαν ερωτηματολόγια είτε γραπτά είτε ηλεκτρονικά. Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται τα κοινά μεθοδολογικά στοιχεία που σχετίζονται με τα ερωτηματολόγια αυτά και την ανάλυση των δεδομένων.

Στα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήθηκαν τέθηκαν ερωτήσεις κλειστού και ανοιχτού τύπου. Όπου τέθηκαν προτάσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες έπρεπε να δηλώσουν κατά πόσο συμφωνούν επιλέχτηκε η κλίμακα Likert. Η κλίμακα αυτή χρησιμοποιείται συχνά σε στατιστικές έρευνες κοινωνικών επιστημών (Krosnick & Presser, 2009). Στις περισσότερες περιπτώσεις επιλέχτηκε η πενταβάθμια κλίμακα με ουδέτερο σημείο, η οποία επιτρέπει στους ερωτώμενους να επιλέξουν τον βαθμό στον οποίο συμφωνούν με το ερώτημα διατηρώντας παράλληλα ουδέτερη στάση αν αυτή τους εκφράζει περισσότερο (Krosnick & Presser, 2009).

3.3.2 Περιγραφική στατιστική ανάλυση

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας εφαρμόστηκε περιγραφική στατιστική ανάλυση και συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση.

Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένας συνδυασμός του ελεύθερου περιβάλλοντος λογισμικού για στατιστική επεξεργασία R-Project, όσον αφορά στην ποσοτική ανάλυση και την περιγραφική στατιστική, και του λογισμικού υπολογιστικών φύλλων Microsoft Excel για τη μορφοποίηση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Το R-Project είναι ένα ευρέως διαδεδομένο λογισμικό στατιστικής και χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή πινάκων συχνοτήτων, γραφημάτων και πινάκων διασταύρωσης καθώς και για τη διενέργεια ελέγχων υποθέσεων όπου κρίθηκε απαραίτητο.

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε ερωτήσεις τύπου Likert χρησιμοποιήθηκαν πακέτα (packages) του R, όπως το «likert» και το «HH», με το οποίο μπορούν να σχεδιαστούν αποκλίνοντα γραφήματα στοιβαγμένων ράβδων (diverging stacked bars charts) (Heiberger, 2019· Heiberger & Robbins, 2014).

3.3.3 Συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση

Στα δεδομένα των ερωτηματολογίων εφαρμόστηκε η ανάλυση ομοιότητας και η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση του Régis Gras (Gras κ.ά., 2008). Η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση (statistical implicative analysis) προτάθηκε από τον Γάλλο καθηγητή Regis Gras του πανεπιστημίου της Nantes για τους σκοπούς της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών (Gras κ.ά., 2008· Gras & Kunzt, 2008). Το αρχικό ερώτημα στο οποίο αναζητείται λύση μέσω της συνεπαγωγικής στατιστικής είναι αν δεδομένου ότι μια ερώτηση είναι πιο σύνθετη από μια άλλη, ο μαθητής που απαντά σωστά στη συνθετότερη ερώτηση, απαντά ορθά και στην απλούστερη (Régnier κ.ά., 2010).

Η μέθοδος που προτείνει ο Gras (Gras & Kuntz, 2008) μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν αναζητούνται:

α) οι κύριοι παράγοντες διάκρισης σε ένα πληθυσμό μέσω των μεταβλητών,

β) ένας διαμερισμός των μεταβλητών,

γ) μια τυπολογία ή μια ταξινόμηση - ιεραρχική ταξινόμηση ομοιοτήτων και

δ) μια συνεπαγωγή ανάμεσα στις μεταβλητές ή τις κλάσεις μεταβλητών - ένα δέντρο συνεπαγωγής ή μια ιεραρχία συνεπαγωγής.

Η στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση μεταξύ των μεταβλητών λαμβάνει υπόψη τη σύγκριση των συχνοτήτων ή των συντελεστών συσχέτισης, τη θετική συσχέτιση, την ομοιογένεια και τη θετικά προσανατολισμένη στατιστική εξάρτηση. Η σχέση που προκύπτει είναι πιο εξειδικευμένη από τη σχέση που αποκαλύπτεται με τον έλεγχο ανεξαρτησίας του ελέγχου χ-τετράγωνο.

Η παραπάνω ανάλυση υλοποιείται από το λογισμικό συνεπαγωγικής στατιστικής C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Couturier, 2008) και από το RCHIC, ένα πακέτο του λογισμικού στατιστικής R Project (Couturier, 2008· Couturier κ.ά., 2015). Και στα δύο λογισμικά μπορούν να εξαχθούν οι παρακάτω αναλύσεις (Couturier, 2008):

- Διάγραμμα ομοιότητας (Similarity tree)
- Συνεπαγωγικό διάγραμμα (Implicative graph)
- Συνεπαγωγικό δέντρο (ή δενδρόγραμμα ιεράρχησης) (Implicative tree ή Hierarchy tree στο RCHIC)

Στο διάγραμμα ομοιότητας ομαδοποιούνται οι ερωτήσεις οι οποίες απαντήθηκαν με όμοιο τρόπο και προκύπτουν οι σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών. Όταν εμφανίζονται έντονες γραμμές μεταξύ μεταβλητών ή ομάδων μεταβλητών στο διάγραμμα ομοιότητας, υποδηλώνουν τα σημαντικά επίπεδα ομοιότητας από τα οποία διαφαίνονται οι πιο σημαντικές μεταβλητές. Στην εκπαιδευτική έρευνα αυτές μπορεί να υποδηλώνουν θεωρήσεις που είναι πιο σημαντικές από άλλες για την κατανόηση μιας έννοιας (Gras & Kunzt, 2008).

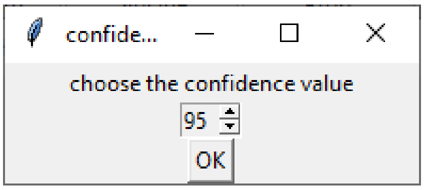
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα παρουσιάζονται οι σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα στις μεταβλητές. Η συνεπαγωγή μεταξύ δύο μεταβλητών σημαίνει ότι σωστή απάντηση στη μία συνεπάγεται σωστή απάντηση και στη δεύτερη και αντίστροφα λάθος απάντηση στη δεύτερη συνεπάγεται λάθος και στην πρώτη. Αν για παράδειγμα εμφανιστεί η συνεπαγωγή V1→V2, τότε σωστή απάντηση στη έργο V1 συνεπάγεται σωστή απάντηση στο V2. Αντίστοιχα λάθος απάντηση στο V2 συνεπάγεται λάθος απάντηση και στο V1. Αν και συνήθως χρησιμοποιούνται οι συνεπαγωγές που ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, μπορούν να εμφανιστούν και συνεπαγωγές με άλλα επίπεδα σημαντικότητας, όπως 95%, 90% και 85%.

Το συνεπαγωγικό δέντρο παρουσιάζει τις σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε όλες τις μεταβλητές, κατά σειρά προτεραιότητας. Και σε αυτό το διάγραμμα οι συνεπαγωγές με έντονο χρώμα δηλώνουν τα πιο σημαντικά επίπεδα. Η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση έχει εφαρμοστεί σε έρευνες σε θέματα μαθηματικής παιδείας (Fernández κ.ά., 2008· Gagatsis, Agathangelou κ.ά., 2010) και ιδιαίτερα Μαθηματικής Ανάλυσης (Gagatsis, Monoyiou κ.ά., 2010· Kremžárová, 2011) και τα αποτελέσματά της θεωρούνται αξιόπιστα στην ακαδημαϊκή κοινότητα. Τα τελευταία χρόνια η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση χρησιμοποιείται και σε άλλους τομείς

Το λογισμικό C.H.I.C. είναι γραμμένο σε C++ και υλοποιεί την παραπάνω μέθοδο. Η έκδοση που χρησιμοποιήθηκε ήταν η 3.7. Έγινε προσπάθεια επικοινωνίας με τον ερευνητή για την πρόσβαση σε πιο ενημερωμένη έκδοση του λογισμικού, αλλά χωρίς αποτέλεσμα.

Αν και το λογισμικό C.H.I.C. είναι το πρώτο που αναπτύχθηκε, η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση εφαρμόζεται και από το RCHIC (Couturier κ.ά., 2015). Το συγκεκριμένο πακέτο έχει αναπτυχθεί από τον Couturier, ως βελτίωση του CHIC, είναι ανοιχτού κώδικα και μπορεί να εκτελεστεί σε διαφορετικά λειτουργικά συστήματα όπως Linux, Mac και Windows.

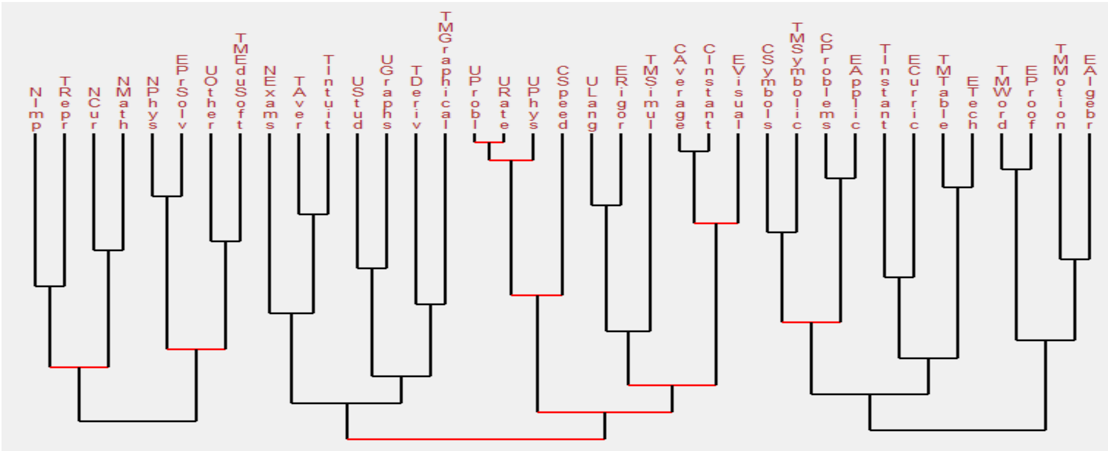
Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, η συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε τόσο σε ερωτηματολόγια διερεύνησης γνώσεων όσο και στάσεων φοιτητών. Στα περισσότερα μέρη της παρούσας έρευνας επιλέχτηκε το RCHIC γιατί δίνει τη δυνατότητα επεξεργασίας του συνεπαγωγικού διαγράμματος ως προς τη μορφοποίηση. Ακόμα μπορεί να παραμετροποιηθεί το επίπεδο εμπιστοσύνης στο συνεπαγωγικό διάγραμμα.



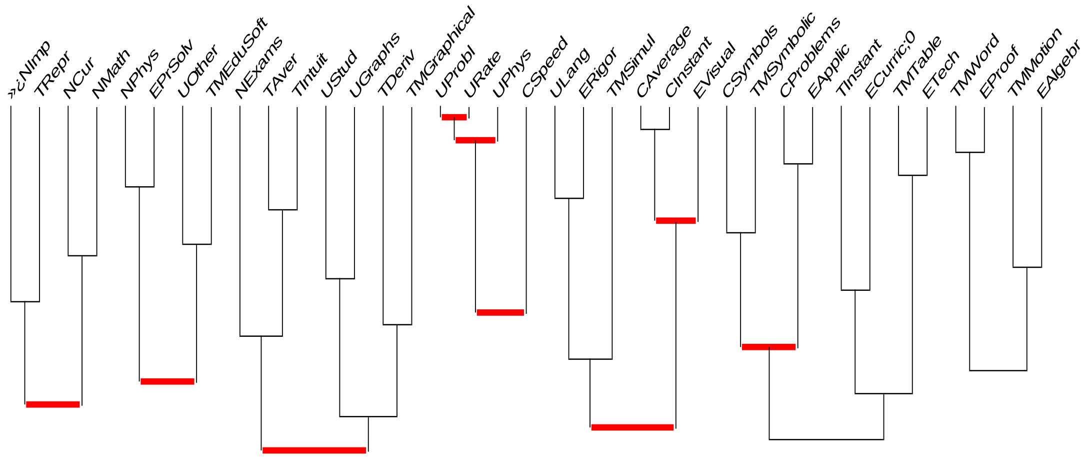
Εικόνα 3.2. Επιλογή επιπέδου εμπιστοσύνης στο RCHIC

Για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων έγινε μία συγκριτική ανάλυση των δύο λογισμικών στα δεδομένα μίας από τις έρευνες.

Στα διαγράμματα ομοιότητας η διαφορά που παρατηρήθηκε ήταν ότι στο διάγραμμα που προκύπτει από το RCHIC εμφανίζονται και σχέσεις υψηλότερου επίπεδου (Γράφημα 3.1 και 3.2)

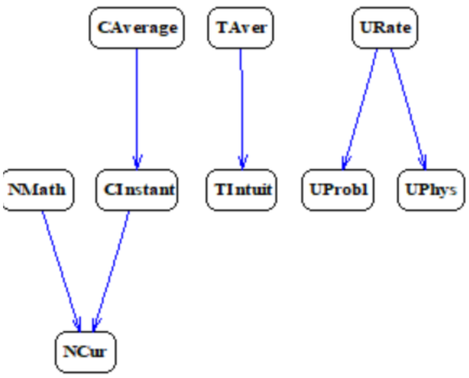


Γράφημα 3.1. Διάγραμμα ομοιότητας από RCHIC



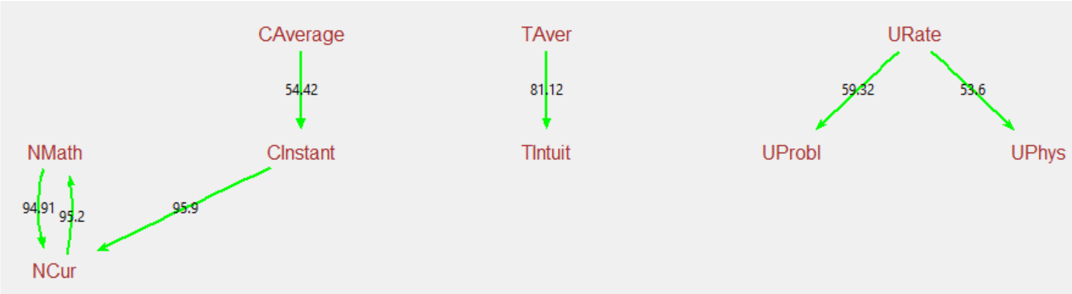
Γράφημα 3.2. Διάγραμμα ομοιότητας από CHIC

Σε σχέση με τα συνεπαγωγικά διαγράμματα παρατηρήθηκε για τα ίδια δεδομένα προέκυψαν τα ίδια διαγράμματα όταν επιλέχτηκε ως επίπεδο εμπιστοσύνης στο RCHIC το 50% (Γράφημα 3.3 και Γράφημα 3.4).



Γράφημα 3.3. Συνεπαγωγικό διάγραμμα από το λογισμικό CHIC

Στο γράφημα 3.3 οι μπλε γραμμές υποδεικνύουν επίπεδο σημαντικότητας 95%, ενώ στο γράφημα 3.4 οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν σε αυτό το επίπεδο σημαντικότητας.



Γράφημα 3.4. Συνεπαγωγικό διάγραμμα από το RCHIC με τα ίδια δεδομένα (ε.σ. 95%, ε.ε. 50%)

3.3.4 Κωδικοποίηση μεταβλητών της έρευνας

Οι ερωτήσεις που τέθηκαν στα ερωτηματολόγια κωδικοποιήθηκαν έτσι ώστε να είναι εμφανές από το όνομα της μεταβλητής το θέμα της ερώτησης και όπου κάποια ερώτηση είχε υποερωτήματα προστέθηκε στο όνομα ο αντίστοιχος αριθμός. Έτσι, το πρώτο γράμματα του ονόματος των μεταβλητών συμβολίζουν το θέμα της ερώτησης και ακολουθείται από τον αριθμό του υποερωτήματος. Για παράδειγμα οι ερωτήσεις για τον ρυθμό μεταβολής συμβολίζονται με το διακριτικό Rate, ενώ οι ερωτήσεις για την κλίση με το Slp.

Για τη συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση, οι απαντήσεις στα ερωτήματα βαθμολογήθηκαν με 1 αν απαντήθηκαν θετικά και με 0 αν απαντήθηκαν αρνητικά. Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις με πενταβάθμια κλίμακα Likert βαθμολογήθηκαν ως εξής:

Πίνακας 3.1. Κωδικοποίηση απαντήσεων

Απάντηση	Αντιστοίχιση
Συμφωνώ	1
Συμφωνώ λίγο	0,75
Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ	0,5
Διαφωνώ λίγο	0,25
Διαφωνώ	0

Στην περιγραφή των επιμέρους ερευνών παρουσιάζονται οι κωδικοποιήσεις και η αντιστοίχιση των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν, αν διαφέρουν.

Σύνοψη

Η έρευνα αποτελείται από τρία μέρη, στα οποία μελετάται πως αντιμετωπίζεται ο ρυθμός μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα, οι εννοιολογήσεις φοιτητών σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής και τέλος παρουσιάζονται κάποιες δραστηριότητες για την εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής. Στις έρευνες σε καθηγητές μαθηματικών και σε φοιτητές, στις οποίες χρησιμποιήθηκαν ερωτηματολόγια έγινε στατιστική ανάλυση με το R Project. Εφαρμόστηκε συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με το CHIC και το πακέτο RCHIC του R Project. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται αναλυτικά οι έρευνες αυτές.

4 Θέση του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση

Πρόγραμμα σπουδών & σχολικά εγχειρίδια

Απόψεις εκπαιδευτικών

4.1 Εισαγωγή

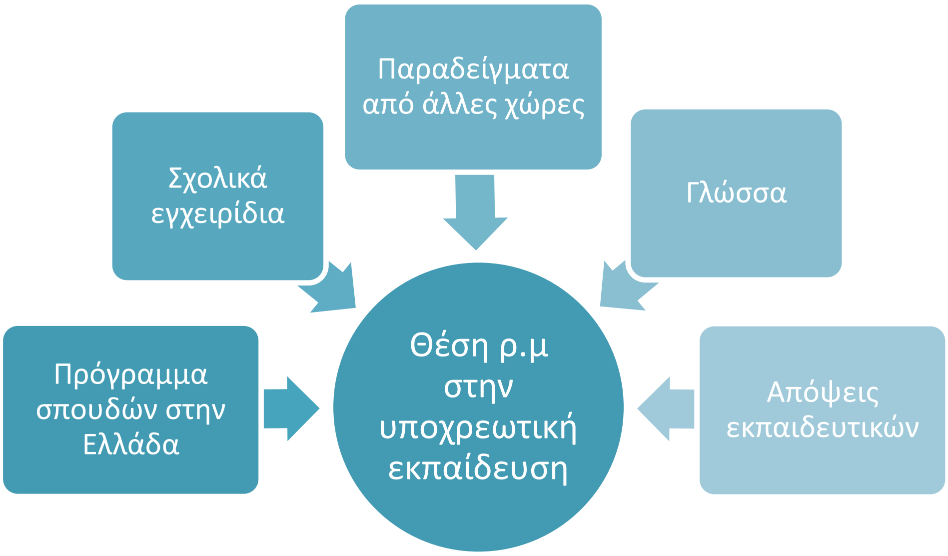
Στο παρόν μέρος της έρευνας επιχειρείται να γίνει αποτύπωση της θέσης της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Αφόρμηση αποτέλεσαν οι δυσκολίες των μαθητών και φοιτητών στην κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και στην ερμηνεία του σε διάφορα πλαίσια, όπως αυτές καταγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία, αλλά και ασυμφωνίες που παρατηρήθηκαν σε σχολικά βιβλία σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής.

Για την αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής στο ελληνόφωνο πρόγραμμα σπουδών εξετάστηκαν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών υποχρεωτικής εκπαίδευσης ως προς τις αναφορές τους στον ρυθμό μεταβολής και βασικές έννοιες για την κατανόησή του, όπως ο λόγος και η κλίση. Καθώς ο ρυθμός μεταβολής απαντάται συχνά στη φυσική, γίνεται αναφορά και στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια. Παράλληλα γίνεται αναφορά στο πρόγραμμα και σε παραδείγματα από τα σχολικά βιβλία της Κύπρου.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη μελέτη της γλώσσας και του συμβολισμού που χρησιμοποιείται γύρω από τον ρυθμό μεταβολής. Γίνεται ακόμα αναφορά στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της Σιγκαπούρης, μιας χώρας με ιδιαίτερες επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες.

Εκτός από την ανάλυση του προγράμματος σπουδών, κρίθηκε αναγκαία και η διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών για τη σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής, τη θέση του στα σχολικά εγχειρίδια και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί έχουν τη γενική εικόνα της διδακτέας ύλης αλλά και την εμπειρία της εφαρμογής της στην τάξη. Έτσι κρίνονται οι πλέον κατάλληλοι να αποφανθούν ως προς τη θέση μιας έννοιας στο πρόγραμμα σπουδών αλλά και τις δυσκολίες που έχουν παρατηρήσει στους μαθητές τους.

Όλες αυτές οι συνιστώσες οι οποίες συνολικά δείχνουν τη θέση του ρυθμού μεταβολής στην εκπαίδευση στην Ελλάδα αποτυπώνονται στην εικόνα 4.1.



Εικόνα 4.1. Παράγοντες που εξετάστηκαν για την αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση

4.2 Μεθοδολογία

Στις επόμενες παραγράφους, παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση μέσω της ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων και της διερεύνησης των απόψεων των εκπαιδευτικών. Παρουσιάζονται το δείγμα και τα εργαλεία της έρευνας, καθώς και οι μέθοδοι ανάλυσης που εφαρμόστηκαν.

4.2.1 Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων

Οι έννοιες του Διαφορικού Λογισμού μελετώνται στις περισσότερες χώρες κατά τα τελευταία χρόνια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Ο τρόπος όμως με τον οποίο διδάσκονται οι έννοιες αυτές στο κάθε πρόγραμμα σπουδών, οι λεπτομέρειες του αντικειμένου, ο βαθμός μαθηματικής αυστηρότητας και οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται διαφέρουν αρκετά μεταξύ των χωρών (Tall, 1993).

Μεταξύ των παραγόντων που επηρεάζουν τις ικανότητες των μαθητών στα μαθηματικά είναι και η ύλη που διδάσκεται και ο τρόπος με τον οποίο αυτή παρουσιάζεται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια (Kajander & Lovric, 2009). Ιδιαίτερα τα σχολικά εγχειρίδια είναι το βασικό εργαλείο των μαθητών και διαμορφώνει σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία (Glasnovic Gracin, 2018). Τα σχολικά βιβλία σε συνδυασμό με το πρόγραμμα σπουδών αποτελούν σημαντικό στοιχείο της εκπαίδευσης και καθορίζουν το είδος των γνώσεων που αποκτούν οι μαθητές και τον τρόπο που σκέφτονται (Kajander & Lovric, 2009). Οι ευκαιρίες για μάθηση και οι εννοιολογήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά είναι άμεσα συνδεδεμένες με τα σχολικά βιβλία και τους εκπαιδευτικούς (Remillard κ.ά., 2014). Ο τρόπος που παρουσιάζονται οι έννοιες μπορεί να ενισχύσει την κατανόησή τους ή να προκαλέσει παρανοήσεις και εννοιολογικά εμπόδια.

Ακόμα, το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια μιας χώρας για τα μαθηματικά είναι ενδεικτικά της πολιτικής που ακολουθείται σε σχέση με τη μαθηματική παιδεία, καθώς επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό το δυναμικό των αποφοίτων του σχολείου και τον μαθηματικό αλφαβητισμό. Ιδιαίτερα στα χρόνια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης το τι γνώση θα διδαχθεί και ο τρόπος διδασκαλίας στο μάθημα των μαθηματικών έχουν συνέπειες στη μετέπειτα σχολική επίδοση των μαθητών και τη δυνατότητά τους να αντιμετωπίζουν με επιτυχία προβλήματα στα πλαίσια των επιστημών και της καθημερινότητας.

Στο πλαίσιο αυτό εξετάστηκε το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια της Ελλάδας εστιάζοντας στη μεταβολή και στον ρυθμό μεταβολής, αλλά και σε βασικές έννοιες που συνδέονται με την κατανόησή του. Παράλληλα γίνονται αναφορές στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου. Επιπλέον, μελετήθηκε συγκριτικά το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά βιβλία πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της Σιγκαπούρης.

Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε:

- Ανάλυση του προγράμματος σπουδών και των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Ελλάδας και της Κύπρου σε σχέση με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και έννοιες που επηρεάζουν την κατανόησή του, όπως ο λόγος και η κλίση
- Συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης Ελλάδας και Σιγκαπούρης, με εστίαση στην έννοια του ρυθμού μεταβολής

Για την αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα εξετάστηκαν τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών και φυσικής που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα. Εντοπίστηκαν οι αναφορές τόσο στον ρυθμό μεταβολής, όσο και σε έννοιες που σχετίζονται με την κατανόησή του, όπως ο λόγος και η κλίση. Έγινε μία προσπάθεια να αποτυπωθεί η εξελικτική πορεία μάθησης της έννοιας του ρυθμού μεταβολής στα χρόνια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και το εννοιολογικό αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτή.

Οι αναφορές στον ρυθμό μεταβολής και σε σχετικές έννοιες συνδυάστηκαν με παρανοήσεις μαθητών όπως έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Εξετάστηκε κατά πόσο οι αναφορές στις παραπάνω έννοιες στα σχολικά εγχειρίδια υποστηρίζουν την εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής ή συνδέονται με παρανοήσεις των μαθητών.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην έννοια της κλίσης. Η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων Ελλάδας και Κύπρου για την έννοια αυτή έγινε υπό το πρίσμα των τρόπων εννοιολόγησης της κλίσης που έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία και παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.2.4 (Moore-Russo κ.ά., 2011). Με αντίστοιχο τρόπο έχουν αναλυθεί και συγκριθεί οι προτάσεις του NCTM μέσω των Principles and Standards for School Mathematics και των Common Core State Standards Initiative (Nagle & Moore-Russo, 2014). Σε κάποιες περιπτώσεις οι αναφορές στην κλίση αντιστοιχούν σε περισσότερους από έναν τρόπους εννοιολόγησής της.

Παράλληλα γίνονται αναφορές στο πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Κύπρου, με εστίαση στον ρυθμό μεταβολής και στον τρόπο που δομείται σταδιακά στο πρόγραμμα σπουδών.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στην ανάλυση κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο, καθώς οι δομές αυτές διαφέρουν σημαντικά ως προς τη λειτουργία τους και ως προς τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά. Ενώ στο δημοτικό το μάθημα των μαθηματικών διδάσκεται από τον ίδιο δάσκαλο που διδάσκει και τα υπόλοιπα μαθήματα και είναι απόφοιτος Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διδάσκεται από απόφοιτους Μαθηματικών Τμημάτων.

Καθώς διαφαίνεται ότι η κατανόηση του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά προϋποθέτει καλές βάσεις μαθηματικών από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, συγκρίθηκαν τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με τα αντίστοιχα της Σιγκαπούρης, ως προς τις αναφορές σε έννοιες που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής. Η χώρα αυτή επιλέχτηκε λόγο του υψηλού επιπέδου των μαθητών στα μαθηματικά σύμφωνα με τα αποτελέσματα διεθνών διαγωνισμών.

Στη Σιγκαπούρη υπάρχουν αρκετές σειρές σχολικών εγχειριδίων και τα σχολεία επιλέγουν ποια θα χρησιμοποιήσουν. Για την παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η σειρά The Primary Mathematics 1-6 U.S. Edition που εκδίδεται από την Marshall Cavendish Education, και αποτελεί την αγγλική έκδοση της πιο ευρέως διαδεδομένης σειράς.

Για τη συγκριτική ανάλυση, μελετήθηκαν τα βιβλία μαθητή και τα βιβλία ασκήσεων-εργασιών όλων των τάξεων του δημοτικού και σημειώθηκαν τα βασικά σημεία ομοιοτήτων και διαφορών των δύο σειρών ως προς συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και στη συνέχεια με εστίαση στον ρυθμό μεταβολής. Συγκεκριμένα, η συγκριτική ανάλυση των σχολικών βιβλίων των χωρών εστίασε στη δομή, στο περιεχόμενο (O’Keeffe, 2013) και στην παρουσίαση, αλλά κυρίως στον τρόπο που παρουσιάζονται έννοιες σχετικές με τον ρυθμό μεταβολής.

Ως προς τη δομή εξετάστηκε η ακολουθία και η σύνδεση των θεμάτων, ο τρόπος που είναι οργανωμένα τα κεφάλαια και οι ενότητες. Το περιεχόμενο αναφέρεται στη διδακτέα ύλη. Εξετάστηκαν οι θεματικές των βιβλίων σε αντιστοιχία με τους πέντε άξονες των μαθηματικών του National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), δηλαδή αριθμοί και πράξεις, άλγεβρα, γεωμετρία, μετρήσεις, ανάλυση δεδομένων και πιθανότητες. Τέλος, η παρουσίαση περιλαμβάνει τη μορφή των κειμένων και των ασκήσεων, τα χρώματα και τη γενικότερη μορφή, αλλά και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται.

4.2.1.1 Μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα

Για την αξιολόγηση των εκπαιδευτικών συστημάτων έχουν αναπτυχθεί κάποια διεθνή προγράμματα, μεταξύ των οποίων και ίσως το πιο διαδεδομένο, το σύστημα αξιολόγησης PISA. Αποτελεί έναν διεθνή τυποποιημένο διαγωνισμό που αναπτύχθηκε από τις χώρες που συμμετέχουν σε αυτόν. Διενεργείται κάθε τρία χρόνια από το 2000 και χρηματοδοτείται και συντονίζεται από τον Οργανισμό Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης – ΟΟΣΑ (Organization for economic co-operation and development - OECD). Τα αποτελέσματά του, όπως και άλλων διεθνών αξιολογήσεων στα μαθηματικά, αναλύονται για τον καθορισμό των παραγόντων που επηρεάζουν τις μαθηματικές επιδόσεις.

Στην «Έκθεση Παρακολούθησης της Εκπαίδευσης και της Κατάρτισης» του 2016, που έκδωσε η Ευρωπαϊκή Επιτροπή, αναφέρονται ποιοτικά και ποσοτικά στοιχεία για κάθε κράτος μέλος της που συμμετέχει στον διαγωνισμό. Ιδιαίτερα για την Ελλάδα οι επιδόσεις στα μαθηματικά δεν είναι ενθαρρυντικές. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του PISA του 2015 (Πίνακας 4.1) η Ελλάδα έχει μέση τιμή στα μαθηματικά 454, ενώ η μέση τιμή για τις χώρες που συμμετείχαν ήταν 490 (OECD, 2016). Στον αντίστοιχο διαγωνισμό του 2018 η μέση βαθμολογία των Ελλήνων μαθητών στα μαθηματικά ήταν 451, ενώ η μέση βαθμολογία για το σύνολο των χωρών που συμμετείχαν ήταν 489 αντίστοιχα (OECD, 2019). Αντίστοιχα χαμηλά είναι τα ποσοστά επιτυχίας της Κύπρου, με μέση τιμή στα μαθηματικά 437 το 2015 και 451 to 2018. Έτσι και οι δύο χώρες είναι στην 44^{η} θέση στον διαγωνισμό του 2018.

Πίνακας 4.1. Επίδοση στον διαγωνισμό PISA 2015

	Science		Reading		Mathematics		Science, reading and mathematics	
	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Share of top performers in at least one subject (Level 5 or 6)	Share of low achievers in all three subjects (below Level 2)
	Mean	Score dif.	Mean	Score dif.	Mean	Score dif.	%	%
OECD average	493	-1	493	-1	490	-1	15.3	13.0
Singapore	556	7	535	5	564	1	39.1	4.8
Japan	538	3	516	-2	532	1	25.8	5.6
Estonia	534	2	519	9	520	2	20.4	4.7
Chinese Taipei	532	0	497	1	542	0	29.9	8.3
Finland	531	-11	526	-5	511	-10	21.4	6.3
Macao (China)	529	6	509	11	544	5	23.9	3.5
Canada	528	-2	527	1	516	-4	22.7	5.9
Viet Nam	525	-4	487	-21	495	-17	12.0	4.5
Hong Kong (China)	523	-5	527	-3	548	1	29.3	4.5
B-S-J-G (China)	518	m	494	m	531	m	27.7	10.9
Korea	516	-2	517	-11	524	-3	25.6	7.7
New Zealand	513	-7	509	-6	495	-8	20.5	10.6
Slovenia	513	-2	505	11	510	2	18.1	8.2
Australia	510	-6	503	-6	494	-8	18.4	11.1
United Kingdom	509	-1	498	2	492	-1	16.9	10.1
Germany	509	-2	509	6	506	2	19.2	9.8
Netherlands	509	-5	503	-3	512	-6	20.0	10.9
Switzerland	506	-2	492	-4	521	-1	22.2	10.1
Ireland	503	0	521	13	504	0	15.5	6.8
Belgium	502	-3	499	-4	507	-5	19.7	12.7
Denmark	502	2	500	3	511	-2	14.9	7.5
Poland	501	3	506	3	504	5	15.8	8.3
Portugal	501	8	498	4	492	7	15.6	10.7
Norway	498	3	513	5	502	1	17.6	8.9
United States	496	2	497	-1	470	-2	13.3	13.6
Austria	495	-5	485	-5	497	-2	16.2	13.5
France	495	0	499	2	493	-4	18.4	14.8
Sweden	493	-4	500	1	494	-5	16.7	11.4
Czech Republic	493	-5	487	5	492	-6	14.0	13.7
Spain	493	2	496	7	486	1	10.9	10.3
Latvia	490	1	488	2	482	0	8.3	10.5
Russia	487	3	495	17	494	6	13.0	7.7
Luxembourg	483	0	481	5	486	-2	14.1	17.0
Italy	481	2	485	0	490	7	13.5	12.2
Hungary	477	-9	470	-12	477	-4	10.3	18.5
Lithuania	475	-3	472	2	478	-2	9.5	15.3
Croatia	475	-5	487	5	464	0	9.3	14.5
CABA (Argentina)	475	51	475	46	456	38	7.5	14.5
Iceland	473	-7	482	-9	488	-7	13.2	13.2
Israel	467	5	479	2	470	10	13.9	20.2
Malta	465	2	447	3	479	9	15.3	21.9
Slovak Republic	461	-10	453	-12	475	-6	9.7	20.1
Greece	455	-6	467	-8	454	1	6.8	20.7
Chile	447	2	459	5	423	4	3.3	23.3
Bulgaria	446	4	432	1	441	9	6.9	29.6
United Arab Emirates	437	-12	434	-8	427	-7	5.8	31.3
Uruguay	435	1	437	5	418	-3	3.6	30.8
Romania	435	6	434	4	444	10	4.3	24.3
Cyprus[1]	433	-5	443	-6	437	-3	5.6	26.1
Moldova	428	9	416	17	420	13	2.8	30.1
Albania	427	18	405	10	413	18	2.0	31.1
Turkey	425	2	428	-18	420	2	1.6	31.2
Trinidad and Tobago	425	7	427	5	417	2	4.2	32.9
Thailand	421	2	409	-6	415	1	1.7	35.8
Costa Rica	420	-7	427	-9	400	-6	0.9	33.0
Qatar	418	21	402	15	402	26	3.4	42.0
Colombia	416	8	425	6	390	5	1.2	38.2
Mexico	416	2	423	-1	408	5	0.6	33.8
Montenegro	411	1	427	10	418	6	2.5	33.0
Georgia	411	23	401	16	404	15	2.6	36.3
Jordan	409	-5	408	2	380	-1	0.6	35.7
Indonesia	403	3	397	-2	386	4	0.8	42.3
Brazil	401	3	407	-2	377	6	2.2	44.1
Peru	397	14	398	14	387	10	0.6	46.7
Lebanon	386	m	347	m	396	m	2.5	50.7
Tunisia	386	0	361	-21	367	4	0.6	57.3
FYROM	384	m	352	m	371	m	1.0	52.2
Kosovo	378	m	347	m	362	m	0.0	60.4
Algeria	376	m	350	m	360	m	0.1	61.1
Dominican Republic	332	m	358	m	328	m	0.1	70.7

[Πηγή: Education and training monitor, 2018]

Επιπλέον, σύμφωνα με τα στοιχεία από τον διαγωνισμό του 2015, το ποσοστό των μαθητών ηλικίας 15 χρονών που έχει χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά είναι 35,8% επί του συνόλου των Ελλήνων μαθητών και αντίστοιχα 42,6% για την Κύπρο (Πίνακας 4.2) (Education and training monitor, 2018). Στις φυσικές επιστήμες το ποσοστό των Ελλήνων μαθητών που έχουν χαμηλές επιδόσεις είναι 32,7% και πρέπει να σημειωθεί ότι παρουσίασε αύξηση 7,2% από τον διαγωνισμό του 2012. Στο μάθημα της ανάγνωσης το αντίστοιχο ποσοστό είναι 27,3%. Όλα τα παραπάνω στοιχεία προκαλούν έντονο προβληματισμό για τη μαθηματική εκπαίδευση τόσο στην Ελλάδα όσο και στην Κύπρο.

Πίνακας 4.2. Ποσοστά χαμηλών επιδόσεων στον διαγωνισμό PISA

4. Underachievement in reading, maths and science

BENCHMARK 2020: The share of 15 year-olds with underachievement in reading, mathematics and science [1] should be less than 15%.

BEST EU PERFORMERS:
Reading: Ireland, Estonia, Finland
Maths: Estonia, Denmark, Finland
Science: Estonia, Finland, Slovenia

	2015 Reading	Trend	2015 Maths	Trend	2015 Science	Trend
EU	19.7	1.9	22.2	0.1	20.6	4.0
Belgium	19.5	3.5	20.1	1.1	19.8	2.1
Bulgaria	41.5	2.1	42.1	-1.7	37.9	1.0
Czech Republic	22.0	5.2	21.7	0.7	20.7	6.9
Denmark	15.0	0.4	13.6	-3.3	15.9	-0.8
Germany	16.2	1.7	17.2	-0.5	17.0	4.8
Estonia	10.6	1.5	11.2	0.7	8.8	3.7
Ireland	10.2	0.6	15.0	-1.9	15.3	4.2
Greece	27.3	4.7	35.8	0.1	32.7	7.2
Spain	16.2	-2.1	22.2	-1.4	18.3	2.6
France	21.5	2.6	23.5	1.1	22.1	3.3
Croatia	19.9	1.2	32.0	2.2	24.6	7.4
Italy	21.0	1.5	23.3	-1.4	23.2	4.5
Cyprus	35.6	2.9	42.6	0.6	42.1	4.1
Latvia	17.7	0.7	21.4	1.5	17.2	4.9
Lithuania	25.1	3.9	25.4	-0.6	24.7	8.7
Luxembourg	25.6	3.5	25.8	1.5	25.9	3.6
Hungary	27.5	7.8	28.0	-0.1	26.0	8.0
Malta	35.6	:	29.1	:	32.5	:
Netherlands	18.1	4.1	16.7	1.9	18.5	5.4
Austria	22.5	3.0	21.8	3.1	20.8	5.0
Poland	14.4	3.8	17.2	2.8	16.3	7.2
Portugal	17.2	-1.6	23.8	-1.1	17.4	-1.6
Romania	38.7	1.5	39.9	-0.9	38.5	1.2
Slovenia	15.1	-6.0	16.1	-4.0	15.0	2.1
Slovakia	32.1	3.9	27.7	0.2	30.7	3.9
Finland	11.1	-0.3	13.6	1.3	11.5	3.8
Sweden	18.4	-4.3	20.8	-6.2	21.6	-0.6
UK	17.9	1.3	21.9	0.1	17.4	2.4
Iceland	22.1	1.1	23.6	2.1	25.3	1.3
Norway	14.9	-1.3	17.1	-5.2	18.7	-0.9
Albania	50.3	-2.0	53.3	-7.4	41.7	-11.4
Montenegro	41.9	-1.4	51.9	-4.7	51.0	0.3
MK*	70.7	:	70.2	:	62.9	:
Turkey	40.0	18.4	51.4	9.4	44.5	18.1

[Πηγή: Education and training monitor, 2018]

Ο ρυθμός μεταβολής εντάσσεται στην πλειοψηφία των προγραμμάτων σπουδών στα τελευταία έτη της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Μέρος των μαθητών οι οποίοι επιλέγουν να ακολουθήσουν κατεύθυνση θετικών ή τεχνολογικών επιστημών διδάσκονται Διαφορικό Λογισμό στον οποίο συμπεριλαμβάνεται και ο ρυθμός μεταβολής.

Όπως προκύπτει από τα στατιστικά στοιχεία που ανακοινώθηκαν από το Υπουργείο Παιδείας, ο αριθμός των συμμετεχόντων που εξετάστηκαν στα μαθηματικά στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2018 είναι μικρότερος από 60.000 (Πίνακας 4.3).

Πίνακας 4.3. Στατιστικά στοιχεία συμμετοχής στις πανελλαδικές εξετάσεις 2018

Κατηγορία	Είδος Λυκείου	Αριθμός	Αριθμός συμμετοχών στα μαθηματικά
ΓΕΛ	Εσπερινό	914	309
ΓΕΛ	Ημερήσιο	86.301	45.502
ΕΠΑΛ	Εσπερινό	405	251
ΕΠΑΛ	Ημερήσιο	15.742	11.959
ΕΠΑΛ	Εσπερινό που εξετάζεται με το ημερήσιο	678	69
	Σύνολο	**104.965**	**58.090**

[Πηγή: ΥΠΕΠΘ (https://www.minedu.gov.gr/news/34940-05-06-18-arithmos-ypopsifion-panelladikon-eksetaseon-2018-kai-katanomi-eisakteon-stis-sxoles-ta-tmimata-kai-tis-eisagogikes-katefthynseis-tmimaton και https://www.minedu.gov.gr/news/35674-29-06-18-anakoinosi-statistikon-stoixeion-gia-tis-vathmologikes-epidoseis-gel-kai-epal-2019)]

Από τα παραπάνω στοιχεία γίνεται φανερό ότι μικρό ποσοστό των μαθητών έχουν πρόσβαση σε θέματα Διαφορικού Λογισμού που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου. Η εικόνα του μαθηματικού αλφαβητισμού γίνεται ακόμα πιο απογοητευτική αν λάβει κανείς υπόψη το ποσοστό των συμμετεχόντων που γράφουν στις πανελλαδικές κάτω από 10 στα μαθηματικά, το οποίο πλησιάζει το 70% και το αντίστοιχο ποσοστό για τη φυσική που είναι γύρω στο 40%. Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι η ενασχόληση με τη μελέτη των μαθηματικών των αλλαγών στην Ελλάδα δεν απευθύνεται σε όλους.

4.2.1.2 Το πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών της Ελλάδας

Στην Ελλάδα η υποχρεωτική εκπαίδευση διαχωρίζεται σε πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια. Η πρωτοβάθμια περιλαμβάνει το νηπιαγωγείο (2 έτη) και το δημοτικό σχολείο (6 έτη), ενώ η δευτεροβάθμια το γυμνάσιο (3 έτη) και το λύκειο (3 έτη).

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2007) οι βασικές θεματικές περιοχές είναι

- Αριθμοί – Άλγεβρα,
- Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και
- Στοχαστικά Μαθηματικά.

Τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού διαχωρίζουν το περιεχόμενο στους παρακάτω άξονες γνωστικού περιεχομένου: Επίλυση προβλημάτων, Αριθμοί και πράξεις, Μετρήσεις, Γεωμετρία, Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, Λόγοι και αναλογίες, Εξισώσεις (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003).

Τα βιβλία που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση εκδίδονται από το ΙΤΥΕ Διόφαντος υπό την εποπτεία του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων, είναι κοινά για όλους τους μαθητές κάθε τάξης και διανέμονται δωρεάν.

Το πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα αναμορφώθηκε το 2003. Το έντυπο υλικό υποστήριξης του προγράμματος σπουδών για κάθε τάξη αποτελείται από το Βιβλίο Μαθητή, το Βιβλίο Ασκήσεων-Εργασιών και το Βιβλίο Δασκάλου. Ο αριθμός των τευχών τόσο των βιβλίων μαθητή όσο και των βιβλίων εργασιών σε κάθε τάξη διαφέρει.

Σύμφωνα με το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών για τη διδασκαλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το οποίο διαμορφώθηκε το διάστημα 1989-1993, η ύλη του Λογισμού καλύπτεται στις τάξεις του λυκείου. Η ύλη των μαθηματικών που σχετίζεται με το Λογισμό είναι κοινή για όλους τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Αν και η οργάνωση της Γ΄ Λυκείου αλλάζει αρκετά συχνά η βασική ιδέα είναι ότι οι μαθητές επιλέγουν κατεύθυνση και εστιάζουν περισσότερο σε μαθήματα σύμφωνα με τα ενδιαφέροντά τους. Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών η έννοια της συνάρτησης εισάγεται στην Α΄ Λυκείου. Στη Γ΄ Λυκείου βασικές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού συμπεριλαμβάνονται στην ύλη του δίωρου μαθήματος γενικής παιδείας «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής», ενώ οι μαθητές που επιλέγουν την Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών ή την Ομάδα Προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας εμβαθύνουν σε πιο προχωρημένες έννοιες του Διαφορικού Λογισμού.

Στην Ελλάδα αφιερώνονται 5 ώρες την εβδομάδα στα μαθηματικά στην Α΄ και Β΄ Δημοτικού, 4 από την Γ΄ έως την Στ΄ όπως και στο γυμνάσιο, 5 στις δύο πρώτες τάξεις του λυκείου και 2 ακόμα αν επιλεγεί Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, και 2 ή 6 στην τελευταία τάξη ανάλογα την κατεύθυνση που επιλέγεται (Πίνακας 4.4).

Πίνακας 4.4. Ώρες μαθηματικών ωρολογίου προγράμματος

	Πρωτοβάθμια εκπαίδευση			Δευτεροβάθμια εκπαίδευση					
Βαθμίδα	1-2	3-4	5-6	7	8	9	10	11	12
Ελλάδα	5	4	4	4	4	4	5	5 +2(ΘΣ)	2 (ΑΣ) ή 6 (ΘΣ) ή 6 (ΣΟΠ)
Κύπρος	7	7	6	4	3	4	3	3	3

							+2 ($2^{η}$ & $3^{η}$ ΟΜΠ)	+4 ($3^{η}$ & $4^{η}$ κατ.)	+4 ($3^{η}$ & $4^{η}$ κατ.)
Σιγκαπούρη	4	5,5	5 ή 6,5 (FMS)	2,5-3 (SE & NA) 4-5 (NT)					

4.2.1.3 Το πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών της Κύπρου

Το κυπριακό πρόγραμμα σπουδών έχει πολλά κοινά στοιχεία με το ελληνικό. Η Κύπρος επιλέχτηκε λόγω της κοινής γλώσσας και κοινών πολιτισμικών στοιχείων. Στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών της Κύπρου διαχωρίζονται οι παρακάτω ενότητες περιεχομένου (Υ.Π.Π., 2010):

- Μαθηματικές διαδικασίες
- Αριθμοί
- Μέτρηση
- Γεωμετρία
- Άλγεβρα
- Στατιστική-Πιθανότητες

Ο χρόνος που αφιερώνεται στα μαθηματικά στην Κύπρο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι 7 ώρες την εβδομάδα από την Α΄ έως την Δ΄ Δημοτικού και 6 ώρες την εβδομάδα στην Ε΄ και στην Στ΄ Δημοτικού. Στο γυμνάσιο οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά 5 ώρες την εβδομάδα στην Α΄ Γυμνασίου και από 4 στη Β΄ και στη Γ΄, ενώ τα μαθηματικά συμπεριλαμβάνονται στα εξεταζόμενα μαθήματα (ΥΠΠ, 2015).
Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές επιλέγουν μία από τέσσερις Ομάδες Μαθημάτων Προσανατολισμού (ΟΜΠ), ενώ στη Β΄ και Γ΄ Λυκείου επιλέγουν μία από 6 κατευθύνσεις σπουδών.

4.2.1.4 Το πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών της Σιγκαπούρης

Το πρόγραμμα σπουδών της Σιγκαπούρης έχει γίνει αντικείμενο έρευνας διεθνώς λόγω των σημαντικών επιδόσεων των μαθητών στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Στα αποτελέσματα του διαγωνισμού PISA το 2015 η Σιγκαπούρη είχε την καλύτερη θέση με μέσο όρο 564 (OECD, 2016) και τη δεύτερη θέση με μέσο όρο 569 το 2018 (OECD, 2019). Αντίστοιχα, στον διεθνή διαγωνισμό TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), η Σιγκαπούρη είχε την πρώτη θέση στα μαθηματικά τόσο το 2015 όσο και το 2019 (Mullis κ.ά., 2016, 2020).

Ο Dindyal (2006) εντοπίζει τα χαρακτηριστικά του προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης και τη σχέση τους με τις επιδόσεις των μαθητών στον διαγωνισμό

TIMMS. Έχουν γίνει αρκετές συγκριτικές μελέτες των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών μεταξύ της Σιγκαπούρης και άλλων χωρών, όπως η Ινδονησία (Syam κ.ά., 2019· Ramelan & Wijaya, 2019), η Μαλαισία (Ibrahim & Othman, 2010), η Τουρκία και οι ΗΠΑ (Erbas κ.ά., 2012).

Στη Σιγκαπούρη το υπουργείο παιδείας έχει καθορίσει το πρόγραμμα σπουδών με βάση το οποίο έχουν γραφτεί και εγκριθεί κάποιες σειρές βιβλίων (MOE, 2012). Όπως αναφέρθηκε, τα σχολεία επιλέγουν κάποια από τις εγκεκριμένες σειρές την οποία διανέμουν στους μαθητές. Η σειρά The Primary Mathematics 1-6 U.S. Edition επιλέχτηκε γιατί είναι διαθέσιμη στα αγγλικά και χρησιμοποιείται από το μεγαλύτερο μέρος των σχολείων. Όπως αναφέρεται στον πρόλογο των βιβλίων της σειράς, ακολουθείται η προσέγγιση από το συγκεκριμένο στο εικονικό και τέλος στο αφηρημένο (Concrete - Pictorial - Abstract approach).

Στη Σιγκαπούρη αφιερώνονται στα μαθηματικά 4 ώρες την εβδομάδα στις δύο πρώτες βαθμίδες, 5,5 στις βαθμίδες 3 και 4 και 5 στις βαθμίδες 5 και 6 (Kaur, 2014). Στη δευτεροβάθμια τα μαθηματικά διαχωρίζονται σε τρία προγράμματα ανάλογα με την επίδοση των μαθητών σε εξετάσεις που δίνουν στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τα προγράμματα αυτά είναι τα Special/Express Course (SE), Normal (Academic) Course (NA), Normal (Technical) Course (NT), όπου διδάσκονται περίπου τα ίδια αντικείμενα αλλά σε διαφορετικό βάθος (Kaur, 2014).

4.2.1.5 Το πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών της Ολλανδίας

Επιλέχτηκε να γίνει αναφορά στο πρόγραμμα σπουδών της Ολλανδίας, λόγω της ιδιαίτερης προσέγγισης που ακολουθείται στη διδασκαλία των μαθηματικών στη χώρα αυτή. Οι επιδόσεις των μαθητών της Ολλανδίας στα διεθνή προγράμματα PISA και TIMSS είναι πολύ καλές. Συγκεκριμένα, το 2015 στον διαγωνισμό PISA η Ολλανδία είχε μέσο όρο 512 (OECD, 2016) και το 2018 την 9η θέση με μέσο όρο 519 (OECD, 2019). Στον διαγωνισμό TIMSS, η Ολλανδία ήταν αρκετά υψηλά και συγκεκριμένα στη 19η και 14η θέση στους διαγωνισμούς του 2015 και του 2019 με μέσο όρο 530 και 538 αντίστοιχα (Mullis κ.ά., 2016, 2020).

Η μαθηματική εκπαίδευση στον Ολλανδία έχει επηρεαστεί από τη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Τα περισσότερα από τα βιβλία μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στα σχολεία έχουν στοιχεία ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Στη συγκεκριμένη έρευνα δίνονται παραδείγματα από τη σειρά «Getal en Ruimte Junior» έκδοση Noordohoffγια την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η σειρά αυτή είναι από τις πιο διαδεδομένες για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και τα τελευταία χρόνια επεκτάθηκε και στην πρωτοβάθμια. Η πρώτη έκδοση για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση έγινε τον Οκτώβριο του 2019. Η συγκεκριμένη σειρά προτάθηκε από το Freudenthal Institute σε ηλεκτρονική επικοινωνία της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων με αυτό.

4.2.2 Διερεύνηση απόψεων εκπαιδευτικών

Για την αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής στην ελληνική εκπαίδευση κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθεί μία έρευνα σε εκπαιδευτικούς μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθούν οι απόψεις τους για έννοιες του Διαφορικού Λογισμού και κυρίως του ρυθμού μεταβολής. Η έρευνα εστίασε στην αναγκαιότητα, στα εννοιολογικά εμπόδια και στις μεθόδους διδασκαλίας σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής. Ένα μέρος της έρευνας παρουσιάστηκε στο First Congress of Greek Mathematicians FCGM - 2018 (Remoundou & Avgerinos, 2018).

4.2.2.1 Ερωτηματολόγιο

Η έρευνα σε εκπαιδευτικούς έγινε με ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο το οποίο δημιουργήθηκε στην πλατφόρμα Google Forms και συμπληρώθηκε από τους εκπαιδευτικούς του κλάδου ΠΕ 03 - Μαθηματικών. Για τη διενέργεια της έρευνας ζητήθηκε και εγκρίθηκε άδεια από τη γενική συνέλευση του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου (ΓΣ 20^{η}/14.06.2018 Θέμα 5.11). Το ερωτηματολόγιο ήταν διαθέσιμο στον σύνδεσμο https://goo.gl/forms/h9UzEzG9CcmqkXcY2 (Παράρτημα Β).

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε για τη διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών για τη θέση του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλάμβανε εννέα γενικές ερωτήσεις δημογραφικών στοιχείων. Συγκεκριμένα ζητήθηκε η δήλωση φύλλου, ηλικίας, βαθμίδας εκπαίδευσης, περιφερειακής διεύθυνσης εκπαίδευσης, χρόνων προϋπηρεσίας, έτους κτήσης πτυχίου, εργασιακής σύμβασης, και περιοχής. Στο δεύτερο μέρος τέθηκαν έξι ομάδες ερωτήσεων που αφορούσαν στα παρακάτω:

- Αναγκαιότητα διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής (N)
- Κατανόηση του ρυθμού μεταβολής από τους μαθητές (U)

- Ο ρυθμός μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (C)
- Μέθοδοι διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής (T)
- Έμφαση στη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης (E)
- Πρακτικές που ακολουθούνται στο σχολείο (P)

Οι ερωτήσεις κωδικοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον πίνακα 4.2. Στις περισσότερες ερωτήσεις οι ερωτώμενοι κλήθηκαν να απάντησαν κατά πόσο συμφωνούν με πενταβάθμια κλίμακα Likert με τις προτάσεις. Μία ερώτηση στην ομάδα της κατανόησης και οι ερωτήσεις της έμφασης ήταν ταξινόμησης.

Πίνακας 4.5. Κωδικοποίηση ερωτήσεων εκπαιδευτικών

RCHIC code	Ερώτηση
Σημαντικότητα (Necessity)	
NImp	Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια σημαντική έννοια των μαθηματικών
NCur	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο
NPhys	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα της φυσικής
NMath	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών
NExams	Θα πρέπει να μπαίνουν θέματα με ρυθμούς μεταβολής στις ενδοσχολικές εξετάσεις
Κατανόηση μαθητών (Students' understanding)	
UStud	Ο ρυθμός μεταβολής δυσκολεύει τους μαθητές
UOther	Οι μαθητές αντιλαμβάνονται και άλλους ρυθμούς μεταβολής, εκτός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης
UGraphs	Οι γραφικές παραστάσεις είναι κατανοητές από τους μαθητές
UProbl	Οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να λύσουν θέματα ρυθμού μεταβολής με χρήση παραγώγων στη Γ΄ Λυκείου
URate	Οι περισσότεροι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του ρυθμού μεταβολής στη Γ΄ Λυκείου
UPhys	Οι μαθητές στη Γ΄ Λυκείου μπορούν να εφαρμόσουν έννοιες των μαθηματικών όπως η παράγωγος στη φυσική
ULang	Η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής είναι κατανοητή στους μαθητές
Πρόγραμμα σπουδών (Curriculum)	
CAverage	Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια
CInstant	Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια
CSpeed	Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ως ρυθμοί μεταβολής διδάσκονται επαρκώς
CSymbols	Η διαφορά στο συμβολισμό της παραγώγου μεταξύ φυσικής και μαθηματικών (df/dx, f'(x)) προκαλεί σύγχυση στους μαθητές
CProblems	Οι ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου για τον ρυθμό μεταβολής είναι επαρκείς για την κατανόησή του
Διδασκαλία (Teaching)	
TRepr	Είναι σημαντικό να δίνονται πολλές αναπαραστάσεις για την έννοια της παραγώγου
TAver	Ο μέσος ρυθμός μεταβολής ως κλίση ευθείας θα έπρεπε να διδάσκεται στο γυμνάσιο

TDeriv	Ο ρυθμός μεταβολής δεν μπορεί να διδαχτεί αν δεν γνωρίζει ο μαθητής παραγώγους
TInstant	Θα βοηθούσε να διδάσκεται ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ως το όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής
TIntuit	Θα βοηθούσε να έχει διδαχτεί διαισθητικά ο ρυθμός μεταβολής πριν τις παραγώγους
Έμφαση (Emphasis)	
EProbSolv	Επίλυση προβλήματος
EVis	Οπτικοποίηση συναρτήσεων
EApps	Εφαρμογές εκτός μαθηματικών
EProof	Δεξιότητες διατύπωσης λύσης
ERigor	Μαθηματική αυστηρότητα
EAlg	Αλγεβρικές δεξιότητες
ECur	Σύνδεση με το πρόγραμμα σπουδών
Πρακτικές (Practices)	
PInteD	Στο σχολείο μου διδάσκονται διεπιστημονικά θέματα μεταξύ μαθηματικών και φυσικής ή άλλων επιστημών
PICT	Χρησιμοποιώ νέες τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών στα μαθήματά μου
PSim	Χρησιμοποιώ προσομοιώσεις στα μαθήματά μου
PGraphs	Χρησιμοποιώ γραφικές παραστάσεις στα μαθήματά μου
PRealPr	Εφαρμόζω τις έννοιες που διδάσκω σε πραγματικά προβλήματα στην τάξη
POthPr	Χρησιμοποιώ ασκήσεις εκτός του σχολικού εγχειριδίου

Σε σχέση με τη σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής, οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν αν θεωρούν ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι σημαντική έννοια των μαθηματικών, αν πιστεύουν ότι ο ρυθμός μεταβολής θα πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο και αν θα πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών ή της φυσικής ή να είναι εκτός ύλης και αν θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται θέματα ρυθμού στις ενδοσχολικές εξετάσεις.

Τέθηκαν κάποιες ερωτήσεις για τις δυσκολίες που προκαλεί η έννοια στους μαθητές, για το αν αντιλαμβάνονται ρυθμούς μεταβολής εκτός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, για τις γραφικές παραστάσεις και αν οι μαθητές τις Γ΄ Λυκείου έχουν κατανοήσει την έννοια του ρυθμού μεταβολής, μπορούν να λύσουν αντίστοιχα προβλήματα και μπορούν να την εφαρμόσουν στη φυσική.

Στην ομάδα της κατανόησης εννοιών από τους μαθητές ανήκε και η ερώτηση να ταξινομηθούν οι έννοιες του Διαφορικού Λογισμού ανάλογα με τη δυσκολία ότι προκαλούν στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου κατά την άποψη των ερωτώμενων. Οι καθηγητές βαθμολόγησαν με πενταβάθμια κλίμακα Likert τις παρακάτω έννοιες του Διαφορικού Λογισμού:

- Συνάρτηση (DFunc)
- Όριο συνάρτησης (DLimit)

- Παράγωγος (DDeriv)
- Μονοτονία συνάρτησης (DMonot)
- Ακρότατα (DExtr)
- Ρυθμός μεταβολής (DRate)
- Γραφικές παραστάσεις (DGraphs)
- Κυρτότητα (DCurv)

Σε σχέση με τα σχολικά εγχειρίδια, ρωτήθηκε αν οι έννοιες του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφείς και αν οι ασκήσεις του βιβλίου είναι επαρκείς για την κατανόησή του. Ακόμα αν η γλώσσα που χρησιμοποιείται σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής είναι κατανοητή από τους μαθητές και αν ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά και στη φυσική μπορεί να προκαλεί παρανοήσεις. Τέλος, υπήρχαν κάποιες ερωτήσεις σχετικά με τη διαισθητική αντίληψη του ρυθμού μεταβολής πριν τη διδασκαλία των παραγώγων και τη σύνδεση με την κλίση ευθείας.

Οι επόμενες δύο ερωτήσεις ήταν πιο εξειδικευμένες και αφορούσαν στον τρόπο που θα επέλεγαν να χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί για να διδάξουν τον ρυθμό μεταβολής στο γυμνάσιο και στο λύκειο αντίστοιχα και αν είναι σημαντικό να δίνονται πολλές αναπαραστάσεις του.

Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε και δύο ερωτήσεις για το στόχο της διδασκαλίας του Διαφορικού Λογισμού και τα σημεία στα οποία θα έπρεπε να δίνεται έμφαση. Ο Διαφορικός Λογισμός (Calculus) αναφέρεται σε μια πιο διαισθητική αντίληψη του πόσο και του πόσο γρήγορα, των απειροελάχιστων, ενώ η Μαθηματική Ανάλυση (Mathematical Analysis) στην πιο τυπική αντιμετώπιση των ορίων και των συναρτήσεων (Rasmussen κ.ά., 2014). Το ερώτημα που τίθεται είναι τι θα πρέπει να μαθαίνουν οι μαθητές στο σχολείο και με πιο τρόπο. Οι Eichler και Erens (2014) διερεύνησαν το σύστημα πεποιθήσεων (belief system) 29 καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συγκρίνοντας το με τέσσερεις εκπαιδευτικές τάσεις της διδακτικής του Λογισμού, την εμπειρική γενική τάση (empirical generic trend), την εμπειρική τάση μοντελοποίησης, (empirical modelling trend), την εμπειρική τάση αλλαγής των Νέων Μαθηματικών (empirical moderate New Math trend) και την εμπειρική τάση σχήματος (empirical schema trend) (Eichler & Erens, 2014).

Ο Fothergill (2011) μελέτησε ποιες όψεις του Διαφορικού Λογισμού θεωρούν οι καθηγητές πανεπιστημίου πιο σημαντικές για την προετοιμασία μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών. Τα βασικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποίησε είναι:

- Ικανότητα διατύπωσης λύσης και χρήση τυπικών ορισμών και θεωρημάτων
- Μαθηματικός συλλογισμός και ικανότητα επίλυσης προβλήματος
- Ενδυνάμωση των αλγεβρικών δεξιοτήτων των φοιτητών, οπτικοποίηση συναρτήσεων και πολλαπλές αναπαραστάσεις συναρτήσεων
- Μαθηματική αυστηρότητα και προετοιμασία για μαθηματικά ανώτερου επιπέδου
- Τεχνολογικές δεξιότητες βασισμένες σε μαθηματικά
- Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών προπτυχιακού επιπέδου και σχολικού προγράμματος σπουδών
- Εφαρμογές σε πεδία εκτός μαθηματικών

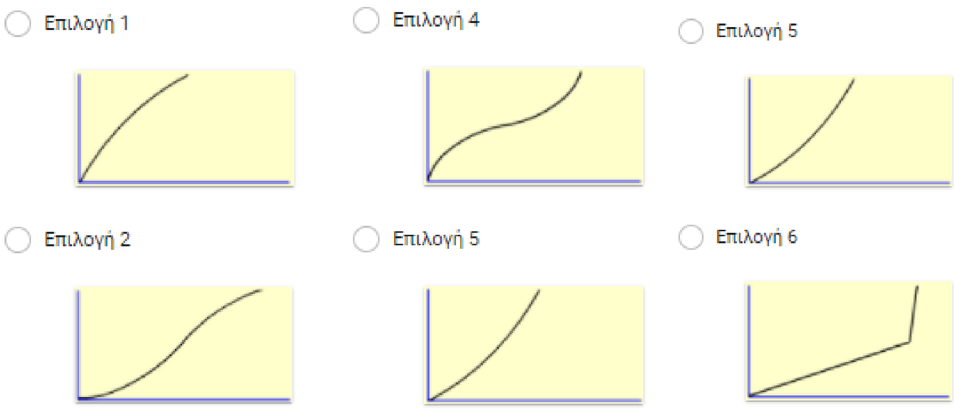
Οι παραπάνω κατευθύνσεις χρησιμοποιήθηκαν στην ερώτηση για τα χαρακτηριστικά στα οποία θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού στο σχολείο. Εξαίρεση αποτελεί η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών προπτυχιακού επιπέδου και σχολικού προγράμματος σπουδών που διαμορφώθηκε σε σχέση με το πρόγραμμα σπουδών λόγω του επιπέδου του μαθήματος διαφορικού λογισμού και της βαθμίδας εκπαίδευσης των συμμετεχόντων.

Η τελευταία ομάδα ερωτήσεων αναφερόταν σε πρακτικές που ακολουθούνται στο σχολείο. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις που τέθηκαν σχετίζονταν με τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού και τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών από τους καθηγητές καθώς και με τη διαχείριση του χρόνου στην τάξη.

Τέλος, τέθηκαν δύο ερωτήσεις για τον ρυθμό μεταβολής με συγκεκριμένα παραδείγματα. Η μία ήταν η ερμηνεία του σήματος της εικόνας 4.2.

Εικόνα 4.2. Σήμα κλίσης

Η άλλη ήταν να επιλεγεί ποια από τις γραφικές παραστάσεις της εικόνας 4.3 αντιστοιχεί στο ύψος του νερού σε σχέση με τον όγκο σε ένα σφαιρικό δοχείο καθώς γεμίζει με νερό με σταθερό ρυθμό.

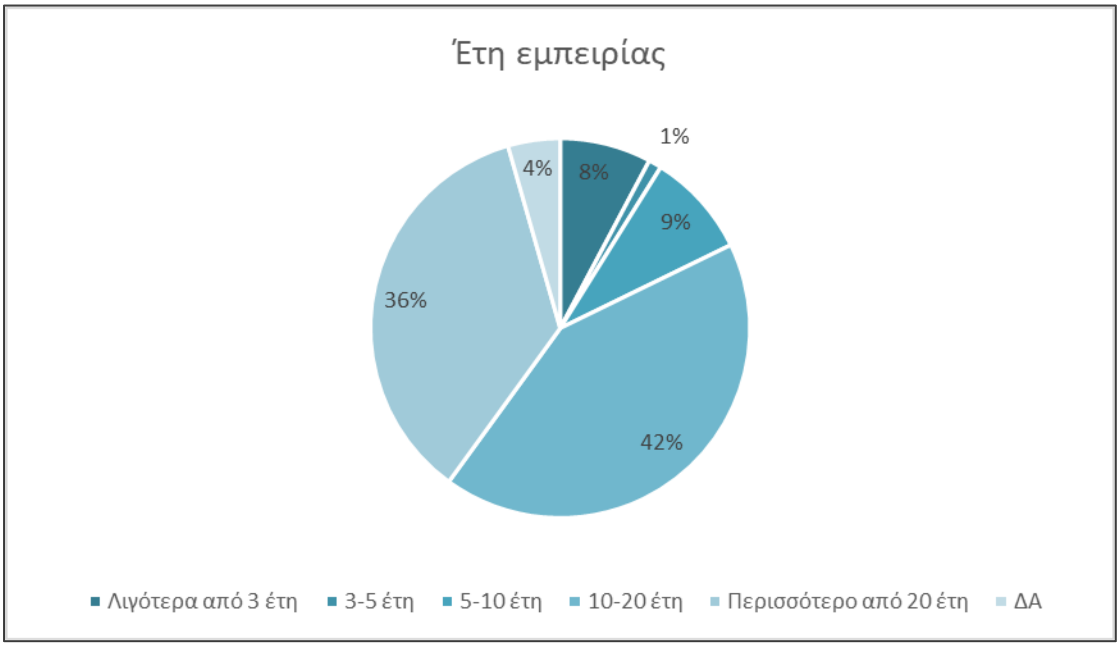


Εικόνα 4.3. Ποια είναι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο ύψος του νερού σε σχέση με τον όγκο σε ένα σφαιρικό δοχείο

4.2.2.2 Συμμετέχοντες

Για την επιλογή του δείγματος της έρευνας επιλέχτηκε τυχαία δειγματοληψία. Το ερωτηματολόγιο στάλθηκε μέσω της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δωδεκανήσου στα σχολεία του νομού Δωδεκανήσου και στις υπόλοιπες Δευτεροβάθμιες Διευθύνσεις. Καθώς το δείγμα της πρώτης αυτής φάσης ήταν μικρό, στη συνέχεια προσεγγίστηκαν εκπαιδευτικοί μέσω επισκέψεων σε σχολεία και ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.

Το τελικό δείγμα αποτελείται από 112 εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ειδικότητας μαθηματικών, οι περισσότεροι από τους οποίους είναι άντρες (86) και διδάσκουν στο λύκειο (83). Από τους μαθηματικούς που συμμετείχαν στην έρευνα οι 66 εργάζονται μόνο σε λύκειο, οι 19 μόνο σε γυμνάσιο και οι υπόλοιποι και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης. Οι περισσότεροι είναι σε σχολεία της Περιφερειακής Διεύθυνσης Αττικής (28) και Νοτίου Αιγαίου (25) και οι υπόλοιποι σε άλλες Διευθύνσεις της χώρας. Οι ερωτώμενοι φαίνεται ότι έχουν σημαντική διδακτική εμπειρία, καθώς το 78% έχουν προϋπηρεσία περισσότερο από 10 χρόνια (Γράφημα 4.1). Οι μισοί από τους συμμετέχοντες είχαν ηλικία μεγαλύτερη των 50 ετών.



Γράφημα 4.1. Έτη διδακτικής εμπειρίας συμμετεχόντων

4.2.2.3 Ανάλυση δεδομένων

Για την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων και την περιγραφική στατιστική χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο R-Project (Heiberger, 2019) και το λογισμικό υπολογιστικών φύλλων Excel για μορφοποίηση των γραφημάτων. Πραγματοποιήθηκε ακόμα συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με το λογισμικό RCHIC, όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 3.3.3. Το στατιστικό πακέτο R-Project χρησιμοποιήθηκε καθώς δίνει τη δυνατότητα να παρουσιαστούν σε συγκεντρωτικά διαγράμματα οι απαντήσεις με κλίμακα Likert.

Οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους εκπαιδευτικούς κωδικοποιήθηκαν και βαθμολογήθηκαν όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.4 Κωδικοποίηση μεταβλητών της έρευνας. Σημειώνεται καθώς οι μεταβλητές UStud, CSymbols και TDeriv, είχαν αρνητική έννοια, αντιστράφηκαν πριν τη στατιστική συνεπαγωγική ανάλυση.

4.3 Αποτελέσματα

4.3.1 Σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής

Η σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής είναι εμφανής τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους. Στα μαθηματικά θεωρείται ότι η κατάκτηση του ρυθμού μεταβολής είναι απαραίτητη για την κατανόηση πιο προχωρημένων θεμάτων μαθηματικών (Carlson κ.ά., 2002· Thompson & Carlson, 2017).

Ο ρυθμός μεταβολής αποτελεί σημαντικό γνωστικό εφόδιο στον τομέα των STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) (Ärlebäck κ.ά., 2013). Η χρήση του στη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων βοηθάει στην κατανόηση εννοιών της φυσικής, των οικονομικών, της βιολογίας και άλλων επιστημών. Ενδεικτικό είναι ότι στα θέματα Φυσικής των πανελλαδικών εξετάσεων του 2018 ο ρυθμός μεταβολής αναφερόταν σε τρία ερωτήματα (Θέματα Φυσικής Πανελλαδικών Εξετάσεων, 2018).

Στη διεθνή βιβλιογραφία των τελευταίων ετών υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός διδακτορικών διατριβών και μεταπτυχιακών διπλωματικών εργασιών, οι οποίες διαπραγματεύονται την έννοια του ρυθμού μεταβολής από διάφορες όψεις. Ενδεικτικά αναφέρονται:

- Byerley, C. (2016). Secondary Teachers' and Calculus Students' Meanings for Fraction, Measure and Rate of Change. Arizona State University.
- Castillo-Garsow, C. (2010). Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth. Arizona State University.
- Coe, E. E. (2007). Modeling teachers' ways of thinking about rate of change. Arizona State University.
- Doorman, L. M., (2005). Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change. Dissertation Utrecht University
- Dorko, A. J. (2017). Students' generalisation of function from single-to multivariable settings. Oregon State University.
- Infante, N. M. E. (2007). Students' understanding of related rates problems in calculus. Arizona State University.
- Frank, K. M. (2017). Examining the Development of Students' Covariational Reasoning in the Context of Graphing. Arizona State University.
- Johnson, H. L. (2010). Making sense of rate of change: Secondary students' reasoning about changing quantities. The Pennsylvania State University.
- Kertil, M. (2014). Pre-service elementary mathematics teachers' understanding of derivative through a model development unit. Middle East Technical University, Ankara, Turkey.

- Staley, K. N. (2004). Tracing the Development of Understanding Rate of Change: A Case Study of Changes in a Pre-Service Teacher's Pedagogical Content Knowledge. North Carolina State University.
- Tague, J. (2015). Conceptions of rate of change: A cross analysis of modes of knowing and usage among middle, high school, and undergraduate students. The Ohio State University.
- Tyne, J. G. (2016). Calculus Students' Reasoning About Slope and Derivative as Rates of Change. University of Maine.
- Weber, E. D. (2012). Students' ways of thinking about two-variable functions and rate of change in space. Arizona State University.
- Whitmire, B. J. (2014). Undergraduate Students' Development of Covariational Reasoning. Arizona State University.

Επιπλέον, έχουν πραγματοποιηθεί ή είναι σε εξέλιξη έργα που σχετίζονται με τη διδακτική του Διαφορικού Λογισμού αλλά και πιο συγκεκριμένα με την εννοιολόγηση των μεταβολών και του ρυθμού μεταβολής. Σημαντική στην ανάδειξη της σημασίας του ρυθμού μεταβολής ήταν η συμβολή του έργου του Kaput και της ομάδας του (Roschelle κ.ά., 2000). Το έργο DIRACC: Developing and Investigating a Rigorous Approach to Conceptual Calculus (http://patthompson.net/ThompsonCalc/index.html) των Thompson, Milner και Ashbrook, αποτελεί άλλη μία προσπάθεια αλλαγής της διδασκαλίας της Μαθηματικής Ανάλυσης έτσι ώστε οι έννοιες να οικοδομούνται σταδιακά και να συνδέονται μεταξύ τους. Το έργο βασίστηκε σε ευρήματα προηγούμενων ερευνών, κυρίως του Thompson, σε σχέση με τις εννοιολογήσεις των μαθητών για έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης (Thompson κ.ά., 2013).

Τέλος, υπάρχει σημαντικός αριθμός πρόσφατων δημοσιεύσεων για τη διδακτική εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης και ιδιαίτερα για τον ρόλο της εννοιολόγησης της συμμεταβολής και του ρυθμού μεταβολής.

Τα παραπάνω στοιχεία δείχνουν την προσπάθεια που γίνεται σε διεθνές επίπεδο να δοθεί έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση του Διαφορικού Λογισμού και στη βελτίωση της διδακτικής του. Μέσα από αυτά αναδεικνύεται η μεταβολή και ο ρυθμός μεταβολής ως κεντρικές έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης.

4.3.2 Πρόγραμμα σπουδών και σχολικά εγχειρίδια – Ελλάδα

4.3.2.1 Ο ρυθμός μεταβολής στα σχολικά εγχειρίδια

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σε κάποια από τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια ακολουθείται μία συγκεκριμένη δομή ενοτήτων που αποτελούνται από κεφάλαια δύο σελίδων. Στις τελευταίες τάξεις όμως αυτή η μορφή αλλάζει. Κάποια από τα σχολικά εγχειρίδια στην Ελλάδα έχουν γραφτεί από διαφορετικές ομάδες και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα το βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού αντικαταστάθηκε το 2018. Έτσι ο τρόπος που παρουσιάζεται η ύλη διαφέρει σε κάθε τάξη.

Σε κάποιες από τις τάξεις οι τίτλοι περιγράφουν το θέμα του κεφαλαίου, ενώ σε άλλες, όπως στη Β΄ αλλά και στην Στ΄ Δημοτικού οι τίτλοι που χρησιμοποιούνται έχουν παιγνιώδη μορφή ή λογοπαίγνιου με σκοπό να κινήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών (Εικόνα 4.4). Με τον τρόπο αυτό όμως ενδέχεται να μην είναι ξεκάθαρο το θέμα του κάθε κεφαλαίου στους μαθητές.

Εικόνα 4.4. Παράδειγμα τίτλου κεφαλαίου: Λόγος δύο μεγεθών

Στα βιβλία της Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού κάθε ενότητα έχει μικρά κεφάλαια δύο σελίδων, χωρίς τα θέματά τους να ανήκουν σε μία ενιαία θεματική. Μπορεί ένα κεφάλαιο να αναφέρεται σε πράξεις και το αμέσως επόμενο σε γεωμετρία.

Όσον αφορά στις εικόνες που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται ότι είναι κατά κύριο λόγο διακοσμητικές, παρόλο που έρευνες για τη συμβολή των διακοσμητικών εικόνων στην επίδοση των μαθητών έχουν δείξει ότι δεν επηρεάζουν σημαντικά την επίλυση προβλήματος (Gagatsis, Agathangelou κ.ά., 2010).

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής διατρέχει μεγάλο εύρος του προγράμματος σπουδών ακόμα κι αν δεν αναφέρεται ρητά. Η εισαγωγή του λόγου και των αναλογιών γίνεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, η εισαγωγή της κλίσης ευθείας στα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας και η εισαγωγή των παραγώγων και τυπική αναφορά στον ρυθμό μεταβολής στην τελευταία τάξη του λυκείου. Η γενική αυτή πορεία εξέλιξης της έννοιας του ρυθμού μεταβολής ακολουθείται και στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (Πίνακας 4.6).

Πίνακας 4.6. Εισαγωγή εννοιών που συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών

Πρωτοβάθμια εκπαίδευση		
Γ΄- Ε΄ Δημοτικού	**Στ΄ Δημοτικού**	
Κλάσματα	Λόγος, αναλογίες, ποσοστά	
Δευτεροβάθμια εκπαίδευση		
Α΄ Γυμνασίου	**Β΄ Γυμνασίου**	**Γ΄ Γυμνασίου**
	Κλίση, γραμμικές συναρτήσεις	
Α΄ Λυκείου	**Β΄ Λυκείου**	**Γ΄ Λυκείου**
		Παράγωγος, Ρυθμός μεταβολής

Οι έννοιες του κλάσματος, του λόγου και της αναλογίας εντάσσονται στο πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι έννοιες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εφαλτήριο για να οδηγηθούν οι μαθητές σε μαθηματική σκέψη ανώτερου επιπέδου (Lesh κ.ά., 1988) και η κατάκτησή τους θεωρείται απαραίτητη για να κατανοήσει ο μαθητής πιο περίπλοκες έννοιες των μαθηματικών (Thompson & Carlson, 2017).

Η πρώτη αναφορά στα κλάσματα γίνεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στην Γ΄ τάξη και ως την Στ΄ τάξη η διδασκαλία τους εστιάζει στις πράξεις και στον χειρισμό κλασμάτων. Στα περισσότερα προγράμματα σπουδών οι αναλογίες διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνονταν η έννοια του ποσοστού στην Ε΄ τάξη του δημοτικού σχολείου και σε επόμενα κεφάλαια χρησιμοποιούνται άτυπα αναλογίες σε προβλήματα καθώς και σε μεγεθύνσεις-σμικρύνσεις στο σχολικό βιβλίο που χρησιμοποιούνταν πριν το 2018 (Κακαδιάρης κ.ά., 2016). Στο νέο σχολικό βιβλίο υπάρχει μόνο ένα κεφάλαιο για τα ποσοστά (Βρυώνης κ.ά., 2018).

Στην τελευταία τάξη του δημοτικού, οι μαθητές διδάσκονται αναλογίες και προετοιμάζονται για την ερμηνεία γραμμικών εξισώσεων της μορφής $y = ax$. Ορίζεται ο λόγος ως «*το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα με αριθμητή το ένα μέγεθος και παρανομαστή το άλλο*» και αναφέρεται ότι τα ανάλογα ποσά έχουν σταθερό λόγο (Κασσώτη κ.ά., 2016, κεφ. 30· Αθανασίου, Δεληγιάννη κ.ά., 2016β). Ο λόγος συνδέεται με τα κλάσματα σε βαθμό που είναι δύσκολο να περιγραφούν οι διαφορές τους. Η σχέση κλασμάτων και λόγων αναλύεται από τους Clark κ.ά. (2003), όπου αναφέρονται οι εννοιολογήσεις και αποσαφηνίζονται τα σημεία που ταυτίζονται και διαφέρουν οι δύο έννοιες. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η σύνδεση του λόγου με κλάσμα είναι περιοριστική της έννοιας του λόγου.

Στην Στ΄ δημοτικού ορίζεται και η αναλογία ως ισότητα δύο λόγων. Δύο ποσά είναι ανάλογα, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό. Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Ως μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων με ανάλογα ποσά αναφέρονται η αναγωγή στη μονάδα, ο σχηματισμός της αναλογίας και επίλυση με σταυρωτά γινόμενα ή μέθοδος "χιαστή", και η απλή μέθοδος των τριών (Κασσώτη κ.ά., 2016) (Εικόνα 4.5 και εικόνα 4.6). Η απλή μέθοδος των τριών διδάσκεται στο Κεφάλαιο 38 με την επισήμανση στους δάσκαλους, ότι "*δεν πρέπει με κανέναν τρόπο να αποβεί σε βάρος των άλλων δύο μεθόδων και ειδικά της μεθόδου των αναλογιών που είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της δόμησης της μαθηματικής σκέψης, ώστε το παιδί να μάθει αργότερα να λύνει εξισώσεις*" (Κασσώτη κ.ά., 2016, Βιβλίο Δασκάλου). Αντίστοιχες είναι και οι μέθοδοι που διδάσκονται για την επίλυση προβλημάτων με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα.
Τα γινόμενα αυτά λέγονται **σταυρωτά γινόμενα.**

Εικόνα 4.5. Σταυρωτά γινόμενα (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, σελ. 86)

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά ανάλογα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

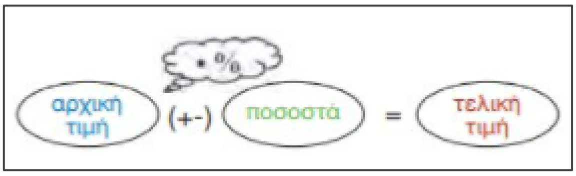
Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα ανάλογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:
1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)
2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα)
3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών αντεστραμμένο)

β) Σχηματίζοντας την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:
- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την αναλογία.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.

Εικόνα 4.6. Εύρεση άγνωστης τιμής σε προβλήματα αναλογικών (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, σελ. 86 και 92)

Στα επόμενα κεφάλαια υπάρχει η έννοια του ποσοστού, όπου η βασική αναπαράσταση που προτείνεται στο σχολικό εγχειρίδιο για τη διευκόλυνση επίλυσης προβλημάτων με ποσοστά είναι η εικόνα 4.7.



Εικόνα 4.7. Αναπαράσταση που χρησιμοποιείται στα προβλήματα ποσοστών

Σημαντική για την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης είναι και η αναγνώριση των ποσών και πότε αυτά είναι σταθερά και μεταβλητά. Στο σχολικό βιβλίο μαθηματικών της Στ΄ δημοτικού ως ποσά ορίζονται οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό. Τα σταθερά ποσά έχουν πάντοτε την ίδια τιμή, ενώ τα μεταβλητά μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές. Ως άγνωστος ή μεταβλητή ορίζεται το γράμμα ή σύμβολο που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό.

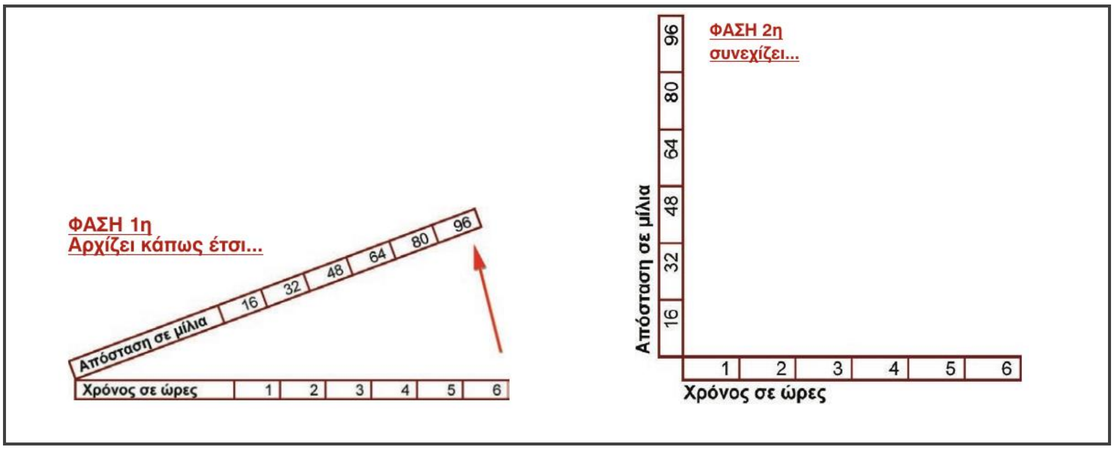
Ο προβληματισμός σχετικά με την εννοιολόγηση της έννοιας της μεταβλητής από μαθητές αυτής της ηλικίας οδήγησε να προταθεί στα πλαίσια του εξορθολογισμού της ύλης το ακαδημαϊκό έτος 2016-17 να μην δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον όρο μεταβλητή. Συγκεκριμένα αναφέρεται (αριθμ. 35/8-09-2016 Πράξη του Δ.Σ. του Ι.Ε.Π): «*Κεφ. 25: Ο όρος «μεταβλητή» προσεγγίζεται στο Γυμνάσιο. Να μην γίνει αναφορά στον ορισμό της μεταβλητής. Δεδομένου ότι μια πρώτη προσέγγιση είναι αρκετή, αφαιρείται ό,τι περιπλέκει την έννοια.*».

Στο δημοτικό χρησιμοποιούνται κυρίως πίνακες τιμών για την αναπαράσταση των αλλαγών σε ποσότητες (Εικόνα 4.8). Κατά την επίλυση προβλημάτων ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών γίνεται αλλαγή από αναπαράσταση με πίνακα τιμών σε συμβολική αναπαράσταση.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

Εικόνα 4.8. Πίνακας τιμών

Οι γραφικές παραστάσεις δεν χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ποσοτήτων, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση εκτός του κεφαλαίου της στατιστικής. Στο τετράδιο εργασιών του μαθητή της Στ΄ Δημοτικού υπάρχει μια δραστηριότητα για την κατασκευή γραφικής παράστασης των ανάλογων ποσών (Εικόνα 4.9).



Εικόνα 4.9. Δραστηριότητα γραφικής παράστασης ανάλογων ποσών (Κασσώτη κ.ά., 2016, Τετράδιο Εργασιών Στ΄ Δημοτικού)

Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, παρόλο που οι αναλογίες περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης κ.ά., 2017), το συγκεκριμένο κεφάλαιο παραμένει εκτός ύλης τα τελευταία χρόνια (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2018). Έτσι η γνώση των αναλογιών περιορίζεται στην ύλη της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και δεν γίνεται σύνδεση με την εξίσωση που εκφράζει ανάλογα ποσά και τη γραφική τους αναπαράσταση.

Στη Β΄ & Γ΄ Γυμνασίου διδάσκονται γραμμικές εξισώσεις και υπάρχουν προβλήματα με ταχύτητα, λόγους, αναλογίες και ποσοστά. Στη Β΄ Γυμνασίου ορίζεται η γραμμική συνάρτηση $y = a \cdot x$ και ο αριθμός α, δηλαδή ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x}$ αναφέρεται ως κλίση της ευθείας της συνάρτησης αυτής. Το α αναφέρεται και ως κλίση της συνάρτησης $y = a \cdot x + \beta$. Αναλυτικά οι παρατηρήσεις για την κλίση ευθείας αναφέρονται στην επόμενη παράγραφο.

Στην Γ΄ Λυκείου εισάγεται τυπικά η έννοια του ρυθμού μεταβολής ως εφαρμογής της παραγώγου συνάρτησης. Στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης υπάρχουν περισσότερες λεπτομέρειες για τον ρυθμό μεταβολής και δίνεται ο ορισμός της εικόνας 4.10. Φαίνεται όμως ότι οι μαθητές μαθαίνουν να επιλύουν προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής χρησιμοποιώντας την παράγωγο, χωρίς να εστιάζουν στη σημασία του ρυθμού και στη σύνδεση με άλλες μορφές του.

> Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Εικόνα 4.10. Ορισμός του ρυθμού μεταβολής στη Γ΄ Λυκείου

4.3.2.2 Σχολικά εγχειρίδια φυσικής

Σε πολλές περιπτώσεις, μαθηματικές έννοιες χρειάζονται στη φυσική. Αν τα προγράμματα σπουδών των δύο μαθημάτων δεν είναι συμβατά παρατηρείται να ορίζονται μαθηματικές έννοιες στη φυσική πριν αναφερθούν στα μαθηματικά (Μαλλιάκας & Ματζαβίνου, 2016). Ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια που χρησιμοποιείται ευρέως στις φυσικές επιστήμες ακόμα και αν δεν αναφέρεται σαφώς. Για τον λόγο αυτό στη συγκεκριμένη ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων συμπεριλαμβάνονται και τα σχολικά εγχειρίδια φυσικής τόσο της Ελλάδας όσο και της Κύπρου.

Το πιο γνωστό και ευρέως χρησιμοποιημένο παράδειγμα ρυθμού μεταβολής είναι η ταχύτητα. Η εννοιολογική αντίληψη των μαθητών για την ταχύτητα έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές (Livy & Herbert, 2013· Thompson, 1994β). Αν και θεωρείται έννοια οικεία στους μαθητές ακόμα και μικρών ηλικιών (Herbert & Pierce, 2011), έχει παρατηρηθεί ότι η εξοικείωση αυτή δεν επεκτείνεται απαραίτητα στη μορφοποίηση άλλων ρυθμών μεταβολής (Herbert & Pierce, 2011· Lobato & Thanheiser, 2002). Η ταχύτητα διδάσκεται αρχικά στο μάθημα της φυσικής και δεν γίνεται απαραίτητα η σύνδεση με την έννοια του ρυθμού και η κατανόηση των σχέσεων συμμεταβολής μεταξύ των ποσοτήτων.

Η ταχύτητα, η επιτάχυνση και άλλοι ρυθμοί διδάσκονται στη Φυσική σε μικρότερες τάξεις πριν τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά μέσω των παραγώγων. Για παράδειγμα η ταχύτητα και η στιγμιαία ταχύτητα διδάσκονται στην ευθύγραμμη ομαλή και μεταβαλλόμενη κίνηση στη Β΄ Γυμνασίου.

Συγκεκριμένα, στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Φυσικής της Β΄ Γυμνασίου εισάγεται η έννοια της ταχύτητας (Αντωνίου κ.ά., 2017). Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην κίνηση και ορίζονται η θέση (διανυσματικό μέγεθος) και η απόσταση, η χρονική στιγμή, η μετατόπιση ως η μεταβολή της θέσης ενός κινούμενου σώματος ως διανυσματικό μέγεθος $\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ και το χρονικό διάστημα μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 που συμβολίζεται με $\Delta t = t_2 - t_1$. Αναφέρεται ότι το σύμβολο

Δ παριστάνει γενικά μεταβολή και σημειώνεται ότι το *Δx* δεν είναι το γινόμενο του *Δ* και του x.

Στη συνέχεια αναφέρεται η μέση ταχύτητα ως το πηλίκο του μήκους της διαδρομής που έχει διανυθεί ως προς τον χρόνο (χρονικό διάστημα) $\upsilon_\mu = \frac{s}{\Delta t}$ και η στιγμιαία ταχύτητα στην καθημερινή γλώσσα. Εισάγονται ακόμα η διανυσματική μέση ταχύτητα, για τον υπολογισμό της οποίας δίνεται ο τύπος $\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$, και η διανυσματική στιγμιαία ταχύτητα αντίστοιχα. Στο ίδιο κεφάλαιο αναφέρεται ότι στην ευθύγραμμη κίνηση η φορά της ταχύτητας προσδιορίζεται από το πρόσημό της. Οι μαθητές έχουν μιλήσει για αρνητικούς αριθμούς και πρόσημο αριθμών στα μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016).

Στη Β΄ Γυμνασίου ορίζεται η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και η κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρουσιάζονται τα διαγράμματα θέσης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ενώ διαγράμματα χρησιμοποιούνται και για να παρουσιάσουν τη θέση και την ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο όταν η ταχύτητα μεταβάλλεται σε κάποια διαστήματα (Αντωνίου κ.ά., 2017). Δύο ασκήσεις βασίζονται στην κατανόηση των διαγραμμάτων. Παρόλα αυτά οι μαθητές δεν έχουν μιλήσει για γραφικές παραστάσεις στα μαθηματικά.

Στη Φυσική της Α΄ Λυκείου στην Ελλάδα ορίζονται κάποιοι ρυθμοί μεταβολής και ο όρος χρησιμοποιείται σε αρκετά σημεία (Βλάχος κ.ά., 2018). Αναφέρονται και χρησιμοποιούνται ρυθμοί μεταβολής, όπως ταχύτητα, επιτάχυνση, γωνιακή ταχύτητα, ισχύς. Στην αρχή του βιβλίου της Α΄ Λυκείου υπάρχει μία παράγραφος για τους ρυθμούς μεταβολής. Εκεί αναφέρεται ότι «*το πηλίκο της μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους Φ διά της μεταβολής του χρόνου Δt, μας δίνει το ρυθμό μεταβολής του φυσικού μεγέθους Φ, δηλαδή το πόσο αλλάζει το μέγεθος αυτό σε 1s*».

Οι φυσικοί, στην Α΄ Λυκείου, καλούνται να διδάξουν την έννοια του ρυθμού μεταβολής χωρίς να μπορούν να αναφερθούν σε παράγωγο ή σε όρια καθώς αυτά δεν είναι γνωστά στους μαθητές.

Επιπλέον, στην ίδια τάξη στην Ελλάδα ορίζεται η κλίση ευθείας ως ο λόγος των διαφορών $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, αλλά και η κλίση της εφαπτομένης ευθείας σε ένα σημείο καμπύλης (Βλάχος κ.ά., 2018, εισ. παρ. Θ).

Σε σχέση με την ορολογία που χρησιμοποιείται για την ταχύτητα παρατηρείται ότι στα αγγλικά οι όροι speed και velocity είναι ξεκάθαροι, με τον πρώτο να αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας όπως χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα και τον δεύτερο να αντιστοιχεί στη διανυσματική ταχύτητα. Στα ελληνικά η λέξη ταχύτητα χρησιμοποιείται και στις δύο περιπτώσεις. Οι μαθητές έχουν μια ιδέα των εννοιών πριν από την τυπική διδασκαλία τους καθώς χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινή ζωή. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε κατά την εισαγωγή της ταχύτητας στα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις μέση, στιγμιαία, διανυσματική μέση και διανυσματική στιγμιαία ταχύτητα (Αντωνίου κ.ά., 2017).

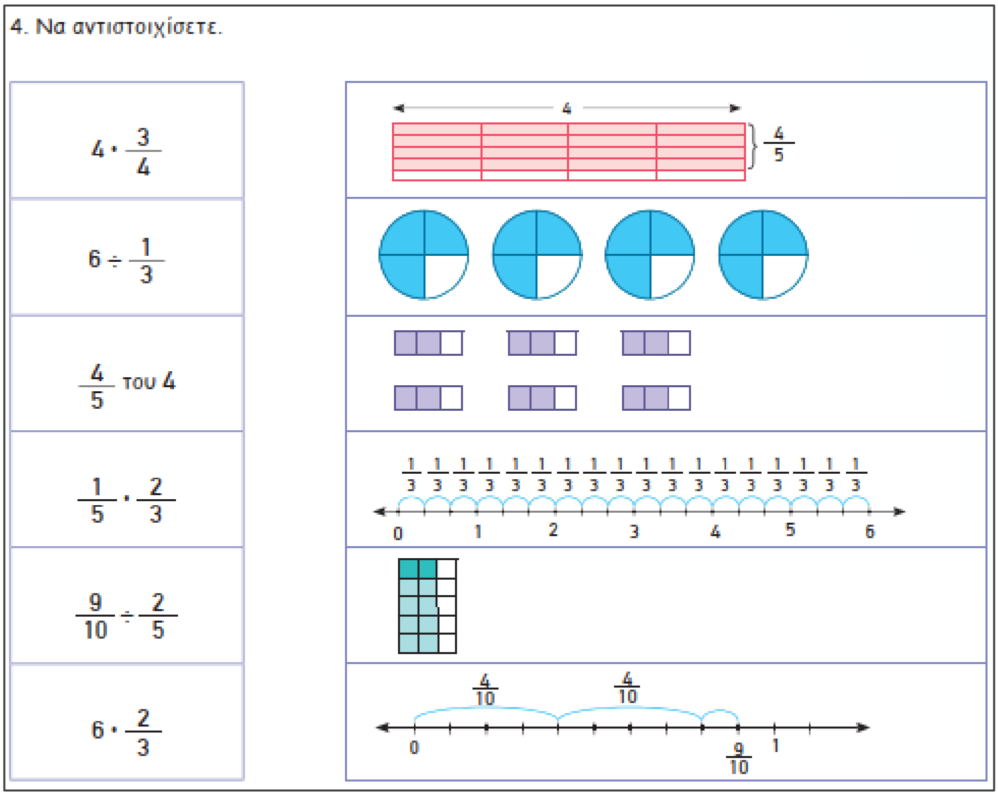
Σε σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται να συγχέεται η διανυσματική ταχύτητα (velocity) με την ταχύτητα (speed). Αυτό στην Ελλάδα είναι ακόμα πιο έντονο καθώς χρησιμοποιείται ο ίδιος όρος και για τα δύο μεγέθη. Έτσι παρατηρείται κίνηση προς τα μπρος να έχει αρνητική ταχύτητα ή κινήσεις προς αντίθετες κατευθύνσεις να έχουν και οι δύο θετική διανυσματική ταχύτητα.

4.3.3 Πρόγραμμα σπουδών και σχολικά εγχειρίδια – Κύπρος

Τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται τη χρονιά 2020-21 έχουν εκδοθεί πρόσφατα. Συγκεκριμένα το βιβλίο της Ε΄ έχει έτος έκδοσης το 2015 και της Στ΄ Δημοτικού το 2016. Τα σχολικά βιβλία είναι χωρισμένα σε μεγάλες θεματικές ενότητες. Το βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού έχει 10 ενότητες και το βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού 12 ενότητες.

Στην Κύπρο υπάρχει βιβλίο μαθητή με τέσσερα έως έξι μέρη και όχι τετράδιο εργασιών. Όλα τα βιβλία του δημοτικού έχουν γραφτεί από περίπου την ίδια συγγραφική ομάδα, με αποτέλεσμα να υπάρχει συνέχεια και ομοιομορφία ανάμεσα στις τάξεις. Στις πρώτες τάξεις οι ενότητες έχουν λίγα λόγια, μεγάλες εικόνες και αρκετά χρώματα, ενώ σταδιακά, στις πιο μεγάλες τάξεις, είναι πιο πολλά τα λεκτικά προβλήματα. Στον οδηγό εκπαιδευτικού της Στ΄ Δημοτικού αναφέρει ότι το βιβλίο δομείται όπως του Γυμνασίου για ομαλότερη μετάβαση.

Γενικά, παρατηρείται ποικιλία αναπαραστάσεων για μία έννοια και περιορισμένες διακοσμητικές εικόνες, όπως ενδεικτικά φαίνεται στην παρακάτω δραστηριότητα της Στ΄ Δημοτικού για τα κλάσματα (Εικόνα 4.11) (Αθανασίου κ.ά., 2016β).



Εικόνα 4.11. Παράδειγμα αναπαραστάσεων στα κλάσματα (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Μέρος 4, σελ. 63)

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση εισάγονται από το τέλος της Α΄ Δημοτικού, χωρίς να χωρίζονται σε κεφάλαια ανά φυσικό ή ομάδα φυσικών αριθμών (Αθανασίου κ.ά., 2020α). Ακόμα και στην Α΄ Δημοτικού υπάρχουν λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Στη Β΄ Δημοτικού εισάγονται σταδιακά τα μοτίβα πολλαπλασιασμού (Δεληγιάννη κ.ά., 2015). Μια πρώτη επαφή με κλάσματα γίνεται στην Γ΄ Δημοτικού (Αθανασίου κ.ά., 2016α), και εμβάθυνση στην Δ΄ Δημοτικού (Αθανασίου κ.ά., 2019) και στην Ε΄ Δημοτικού με πολλές αναπαραστάσεις και έμφαση στην επίλυση προβλήματος (Αθανασίου κ.ά., 2020β).

Στην Στ΄ τάξη, όταν εισάγονται νέες έννοιες αυτές παραθέτονται σε ένα κίτρινο πλαίσιο με τον ορισμό και παράδειγμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.12, όπου ορίζεται ο λόγος.

Νέες Έννοιες

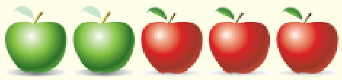
• **Λόγος** δύο ομοειδών μεγεθών α και β, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους. Ο λόγος του α προς το β γράφεται ως:

$$\alpha \text{ προς } \beta \text{ ή } \alpha{:}\beta \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta}$$

• Ο **λόγος** εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο ή περισσότερων μεγεθών. Η σύγκριση είναι δυνατόν να αναφέρεται:
- στο μέγεθος ενός μέρους προς το μέγεθος ενός άλλου μέρους ενός συνόλου (μέρος - μέρος),
- στο μέγεθος ενός μέρους προς το μέγεθος του συνόλου (μέρος – όλο)
- στο μέγεθος του συνόλου προς το μέγεθος ενός μέρους του συνόλου (όλο – μέρος)

Παράδειγμα:

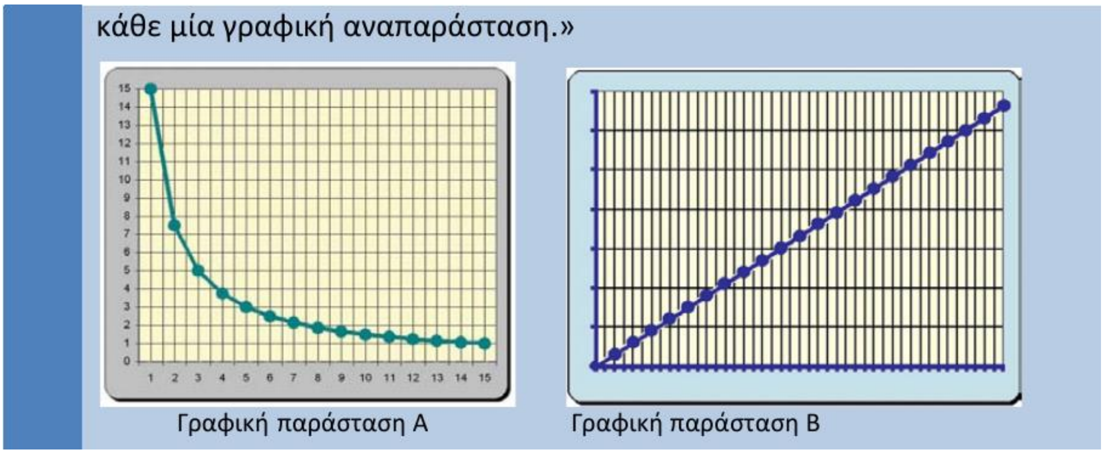
Για την παρασκευή μιας δόσης χυμού μήλου, χρησιμοποιούνται 2 πράσινα και 3 κόκκινα μήλα.



Σύγκριση		
Μέρος-Μέρος	Μέρος-Όλο	Όλο-Μέρος
Πράσινα προς κόκκινα μήλα 2 προς 3 2:3 $\frac{2}{3}$	Πράσινα μήλα προς συνολικό αριθμό μήλων 2 προς 5 2:5 $\frac{2}{5}$	Συνολικός αριθμός μήλων προς πράσινα μήλα 5 προς 2 5:2 $\frac{5}{2}$
Κόκκινα προς πράσινα μήλα 3 προς 2 3:2 $\frac{3}{2}$	Κόκκινα μήλα προς συνολικό αριθμό μήλων 3 προς 5 3:5 $\frac{3}{5}$	Συνολικός αριθμός μήλων προς κόκκινα μήλα 5 προς 3 5:3 $\frac{5}{3}$

Εικόνα 4.12. Παράδειγμα εισαγωγής νέων εννοιών – Λόγος (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Μέρος 3, σελ. 62)

Στο κυπριακό πρόγραμμα σπουδών υπάρχουν περισσότερες αναφορές στον ρυθμό μεταβολής και σχετικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα (ΥΠΠ, 2010), στην Δ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου εισάγεται η έννοια του λόγου και οι μαθητές αναγνωρίζουν ανάλογα και μη ανάλογα ποσά, ενώ επιλύουν και προβλήματα αναλογιών. Στην Ε΄ τάξη επανέρχονται στο θέμα των αναλογιών με περισσότερη λεπτομέρεια και οι μαθητές αναφέρονται στις κλίμακες και επιλύουν προβλήματα ποσοστών. Στην Στ΄ τάξη οι μαθητές διευρύνουν την έννοια της αναλογίας και ασχολούνται με προβλήματα αναλογιών και τους τρόπους επίλυσής τους. Στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Κύπρου στην Κλίμακα 4 αναφέρονται οι γραφικές παραστάσεις τόσο των ανάλογων όσο και των αντιστρόφως ανάλογων ποσών (Εικόνα 4.13).



Εικόνα 4.13. Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Κύπρου

Η ενότητα 7 του βιβλίου της Στ΄ Δημοτικού αναφέρεται στους λόγους. Η ενότητα 10 σε αλγεβρικές παραστάσεις όπου χρησιμοποιούνται γράμματα για μεταβλητές και η συμβολική αναπαράσταση. Οι σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών αναπαρίστανται λεκτικά, με πίνακα, με εξίσωση, με γραφική παράσταση και αυτό αναφέρεται στο βιβλίο (Μέρος 5, σελ. 92).

Στην ενότητα 11 καλύπτονται οι αναλογίες, τα ποσοστά και οι πιθανότητες. Ορίζονται τα ανάλογα ποσά και δίνεται αναπαράστασή τους σε πίνακα τιμών, συμβολική και γραφική. Για τη γραφική αναπαράσταση αναφέρεται σαφώς ότι περνάει από την αρχή των αξόνων (Εικόνα 4.14). Εκτός από την παράθεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, τονίζεται και η ερμηνεία τους και η μετάβαση από μία αναπαράσταση σε μία άλλη.

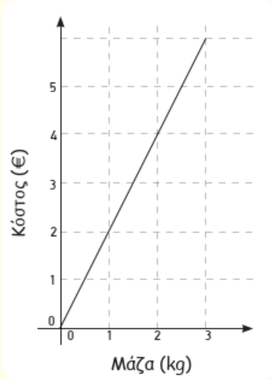
• Δύο ποσά ονομάζονται **ευθέως ανάλογα** ή απλά **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές έχουν πάντα τον ίδιο λόγο.

Δηλαδή, αν τα ποσά α και β είναι ανάλογα, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$, όπου κ σταθερός αριθμός.

Παράδειγμα:

Η τιμή ενός προϊόντος είναι €2 το κιλό.

Κόστος (€)	2	4	6
Μάζα (kg)	1	2	3



$$\frac{\text{Κόστος (€)}}{\text{Μάζα (kg)}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

Τα ποσά *κόστος (€)* και *μάζα (kg)* είναι ευθέως ανάλογα ποσά ή απλά ανάλογα, γιατί οι αντίστοιχες τιμές έχουν πάντα τον ίδιο λόγο. Τα σημεία στη γραφική παράσταση, η οποία παρουσιάζει τις αντίστοιχες τιμές για τα δύο ποσά, σχηματίζουν ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

Εικόνα 4.14. Ανάλογα ποσά (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Μέρος 6, σελ. 38)

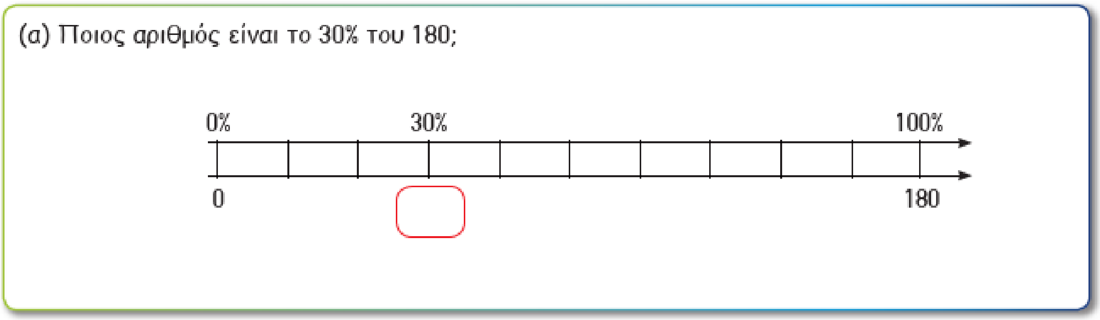
Στην ενότητα αυτή ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής, ως ο λόγος δύο μη ομοειδών μεγεθών (Εικόνα 4.15).

• Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών) ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο.

Εικόνα 4.15. Ορισμός ρυθμού μεταβολής (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Μέρος 6, σελ. 15)

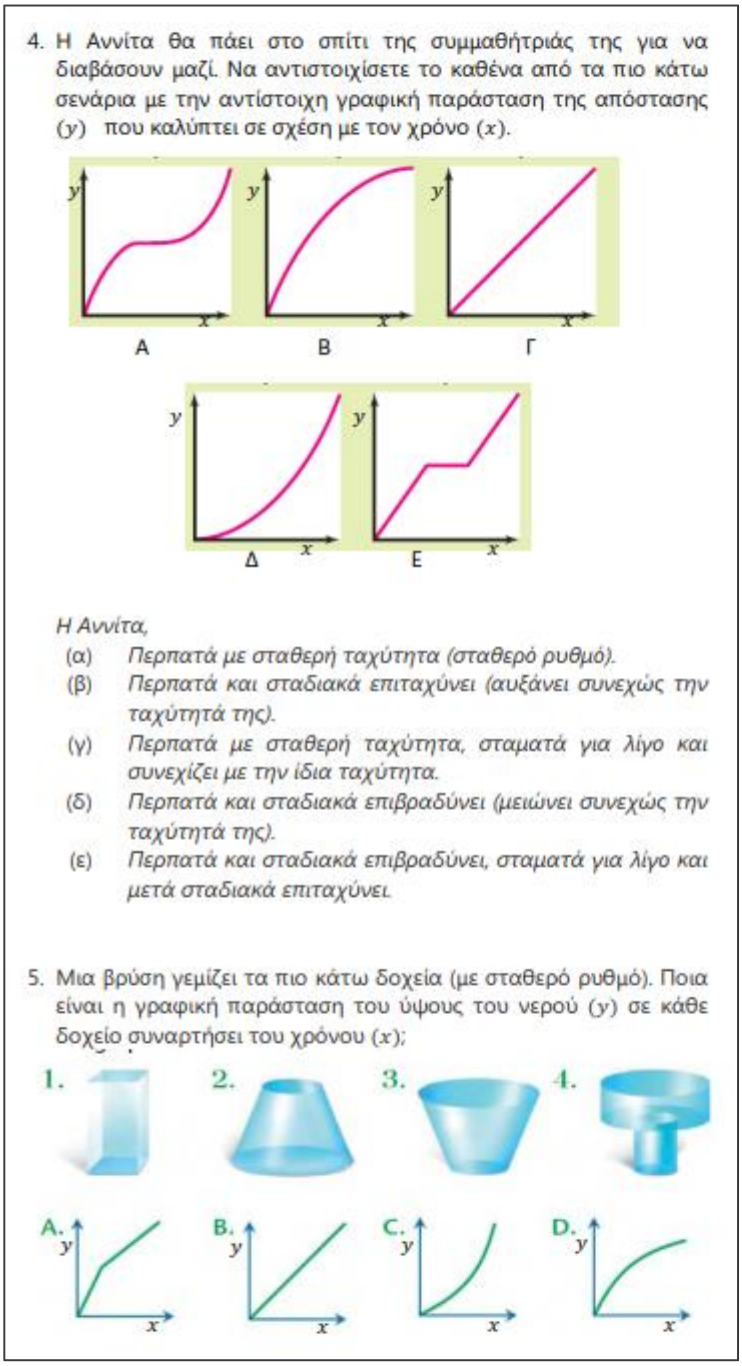
Όπως φαίνεται στα σχολικά εγχειρίδια της Κύπρου γίνεται σαφής αναφορά στην έννοια του ρυθμού μεταβολής και διάκριση του λόγου, ως πηλίκου των μέτρων δύο ομοειδών μεγεθών και του ρυθμού μεταβολής, ως λόγου μη ομοειδών μεγεθών (Αθανασίου, Δεληγιάννη κ.ά., 2016β). Εκτός από τον ορισμό δεν αναφέρεται σε προβλήματα του βιβλίου.

Οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογιών που χρησιμοποιούνται είναι με πίνακες τιμών, με σχηματισμό αναλογίας και σταυρωτά γινόμενα και με αναγωγή στη μονάδα (Μέρος 6, σελ. 17). Σημειώνεται ότι υπάρχει και η παρακάτω σχηματική αναπαράσταση στα ποσοστά, η οποία όμως δεν γενικεύεται και δεν εφαρμόζεται σε προβλήματα αναλογιών.



Εικόνα 4.16. Αναπαράσταση κατά την επίλυση προβλημάτων ποσοστών (Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Μέρος 6, σελ. 27)

Στο κυπριακό σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 116) (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016) αναφέρονται δύο προβλήματα αντιστοίχισης γραφικής παράστασης με λεκτικό πρόβλημα, το ένα με κίνηση και το άλλο με γέμισμα δοχείων (Εικόνα 4.17).



4. Η Αννίτα θα πάει στο σπίτι της συμμαθήτριάς της για να διαβάσουν μαζί. Να αντιστοιχίσετε το καθένα από τα πιο κάτω σενάρια με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της απόστασης (y) που καλύπτει σε σχέση με τον χρόνο (x).

Η Αννίτα,

(α) Περπατά με σταθερή ταχύτητα (σταθερό ρυθμό).

(β) Περπατά και σταδιακά επιταχύνει (αυξάνει συνεχώς την ταχύτητά της).

(γ) Περπατά με σταθερή ταχύτητα, σταματά για λίγο και συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα.

(δ) Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει (μειώνει συνεχώς την ταχύτητά της).

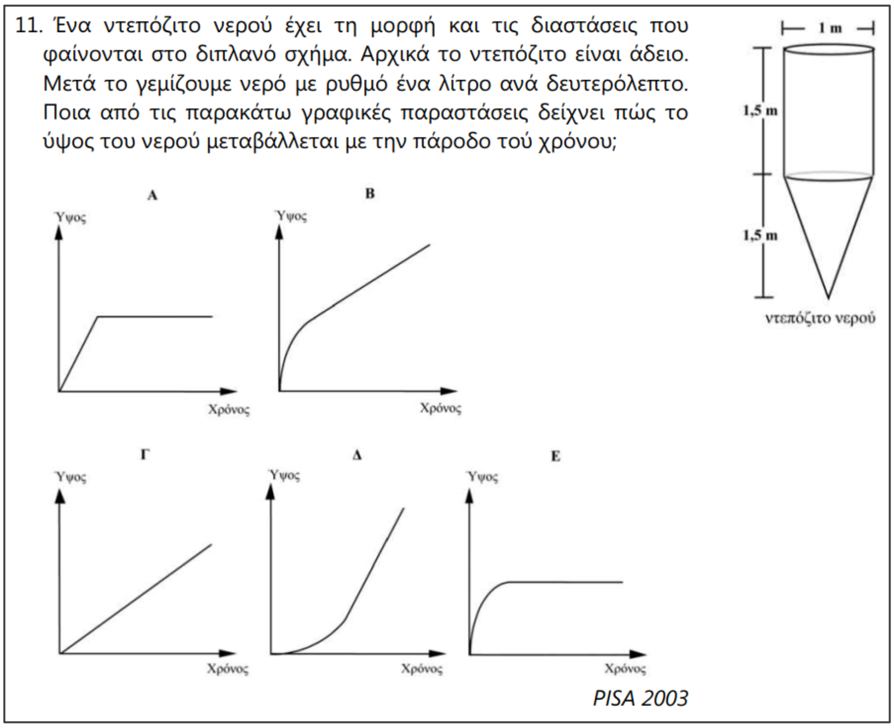
(ε) Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει, σταματά για λίγο και μετά σταδιακά επιταχύνει.

5. Μια βρύση γεμίζει τα πιο κάτω δοχεία (με σταθερό ρυθμό). Ποια είναι η γραφική παράσταση του ύψους του νερού (y) σε κάθε δοχείο συναρτήσει του χρόνου (x);

Εικόνα 4.17. Προβλήματα αντιστοίχισης (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016, Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου)

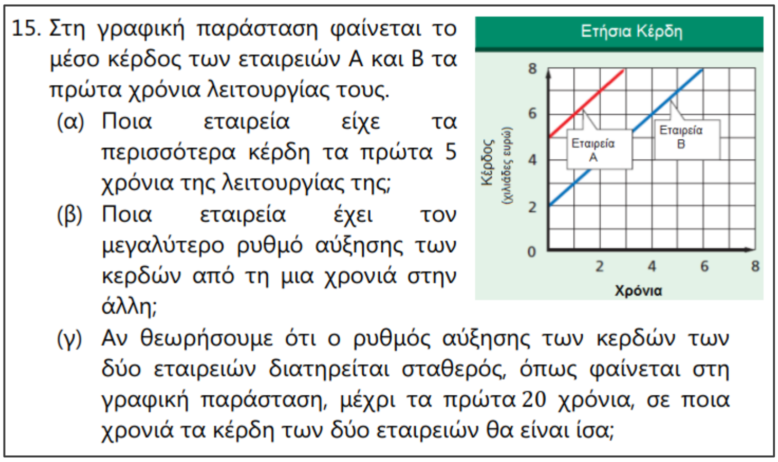
Στην επόμενη σελίδα υπάρχει ένα πρόβλημα το οποίο έχει δοθεί και σε διαγωνισμό PISA, το οποίο αναφέρεται στον ρυθμό που αναβοσβήνει ένας φάρος. Ακόμα, στην ενότητα Λόγοι-Αναλογίες υπάρχει σαφής ορισμός του ρυθμού μεταβολής ως λόγου δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης (λόγος μη ομοϊδών μεγεθών) (σελ. 152). Όταν δίνεται ο ορισμός της κλίσης υπάρχουν λειτουργικά παραδείγματα κλίσης.

Στο κεφάλαιο που αναφέρεται στη στερεομετρία (σελ. 19) υπάρχει ένα παράδειγμα σύνδεσης ρυθμού με γραφική παράσταση το οποίο όπως αναφέρεται έχει δοθεί και σε διαγωνισμό PISA (Εικόνα 4.18).



Εικόνα 4.18. Παράδειγμα σύνδεσης ρυθμού με γραφική παράσταση

Ενδιαφέρον έχει και το παρακάτω παράδειγμα στο οποίο γίνεται μία προσπάθεια ερμηνείας του ρυθμού με γραφική αναπαράσταση (Εικόνα 4.19).



Εικόνα 4.19. Παράδειγμα ρυθμού και γραφικής παράστασης

4.3.4 Η έννοια της κλίσης στα σχολικά εγχειρίδια Ελλάδας και Κύπρου

Καθώς η κλίση αποτελεί σημαντική έννοια για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής, στην παράγραφο αυτή εστιάζουμε στην έννοια της κλίσης και στον τρόπο που αντιμετωπίζεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα και στην Κύπρο

(Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2018β). Όπως και στα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών της Αμερικής (Nagle & Moore-Russo, 2014), η έμφαση στην κλίση στην Ελλάδα και στην Κύπρο δίνεται στα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και κυρίως στη Β΄ Γυμνασίου. Οι αναφορές στην κλίση που εντοπίστηκαν στα σχολικά εγχειρίδια του Γυμνασίου με την αντίστοιχη κωδικοποίησή τους σύμφωνα με τους τρόπους εννοιολόγησης της κλίσης συνοψίζονται στον Πίνακας 4.7.

Πίνακας 4.7. Αναφορές στην κλίση στα σχολικά εγχειρίδια Γυμνασίου

	Α΄ Γυμνασίου		**Β΄ Γυμνασίου**		**Γ΄ Γυμνασίου**	
	Gr	Cy	Gr	Cy	Gr	Cy
Γεωμετρικός λόγος			G**	G ***		G
Αλγεβρικός λόγος	A*		A*	A		A
Φυσική ιδιότητα			P	P		P
Λειτουργική ιδιότητα	F	F				F
Παραμετρικός συντελεστής	PC*		PC	PC		PC
Τριγωνομετρική εννοιολόγηση			T			T
Στον διαφορικό λογισμό						
Πραγματική κατάσταση	R	R	R	R		
Ιδιότητα καθορισμού						D
Ένδειξη συμπεριφοράς						B
Γραμμική σταθερά						

*Ειδική περίπτωση για σχέση της μορφής $y = ax$
**Στην εφαπτομένη γωνίας ***Στην ευθεία

Στην Α΄ Γυμνασίου και στα δύο προγράμματα σπουδών υπάρχει μία ενότητα για τις αναλογίες. Το ελληνικό εγχειρίδιο εστιάζει στα ανάλογα ποσά και στη σχέση $y = ax$ που τα συνδέει και ορίζεται το πηλίκο $\frac{y}{x}$ ως συντελεστής αναλογίας (Βανδουλάκης κ.ά., 2017, κεφ. 6). Όπως αναφέρθηκε, το κεφάλαιο αυτό είναι εκτός διδακτέας ύλης τα τελευταία χρόνια.

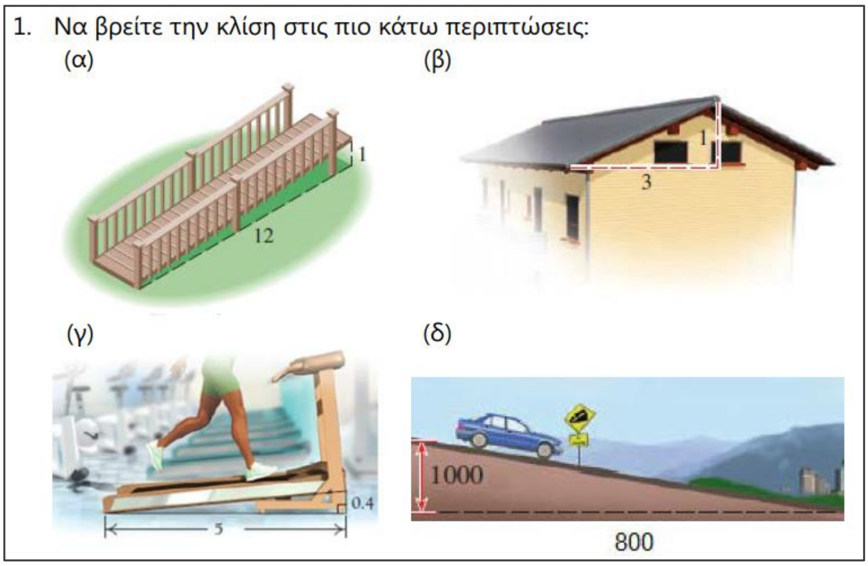
Στην Κύπρο στο αντίστοιχο κεφάλαιο ορίζεται ο λόγος και γίνεται σαφής αναφορά στον ρυθμό μεταβολής, ενώ δεν αναφέρεται η σχέση $y = ax$, παρόλο που ήδη έχει διδαχτεί το κεφάλαιο των συναρτήσεων (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016, ενότ. 10). Και στα δύο βιβλία ο τρόπος εννοιολόγησης της κλίσης είναι ο λειτουργικός (F). Στο ελληνικό γίνεται μία προσπάθεια να παρουσιαστεί η εννοιολόγηση της κλίσης ως αλγεβρικός λόγος (A) και ως παραμετρικός συντελεστής (PC), αλλά μόνο για την ειδική περίπτωση των ανάλογων ποσών και χωρίς να χρησιμοποιείται ο όρος.

Ο όρος κλίση αναφέρεται πρώτη φορά στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.ά., 2017, μέρ. Α, κεφ. 3.3) κατά τη μελέτη της ευθείας $y = ax$

και ορίζεται ως «ο λόγος $\frac{y}{x}$ για $x \neq 0$, που είναι σταθερός και ίσος με $α$». Αντίστοιχα, στο επόμενο κεφάλαιο (Βλάμος κ.ά., 2017, μέρ. Α, κεφ. 3.4), στη μελέτη της $y = αx + β$, αναφέρεται: «Ο αριθμός $α$, που όπως γνωρίζουμε, λέγεται κλίση της ευθείας $y = αx$ λέγεται και κλίση της ευθείας $y = αx + β$». Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη μελέτη της εξίσωσης της μορφής $y = αx + β$ δεν επισημαίνεται ότι σε αυτή την περίπτωση το $α$ δεν είναι ο λόγος $\frac{y}{x}$. Επιπλέον, δεν γίνεται αναφορά στον λόγο μεταβολών, στο τι εκφράζει η κλίση και δεν γίνεται σύνδεση με τον ρυθμό μεταβολής.

Στο ελληνικό βιβλίο, στο μέρος της γεωμετρίας γίνεται άλλη μια αναφορά στην κλίση, αυτή τη φορά από την άποψη της τριγωνομετρίας (Βλάμος κ.ά., 2017, μέρ. Β, κεφ. 2.1). Ορίζεται η εφαπτομένη οξείας γωνίας και αμέσως μετά σημειώνεται ότι «*Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση* $y = α \cdot x$ *είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x*». Καθώς το κεφάλαιο αυτό διδάσκεται τις ώρες της γεωμετρίας, προηγείται της διδασκαλίας της ευθείας $y = α \cdot x$, αλλά προτείνεται να αναφερθεί κατά τη διδασκαλία της αντίστοιχης παραγράφου της άλγεβρας (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2018).

Στο αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο της Κύπρου ο ορισμός της κλίσης ευθείας δίνεται στην πιο γενική μορφή ευθείας ως ο λόγος $\frac{Δy}{Δx}$, ενώ συνδυάζεται με πραγματικά προβλήματα και καταστάσεις (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016, ενότ. 5). Όταν δίνεται ο ορισμός της κλίσης ευθείας υπάρχει το παρακάτω παράδειγμα με περιπτώσεις κλίσης σε πραγματικά προβλήματα (Εικόνα 4.20).



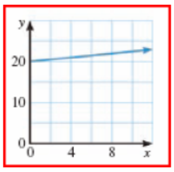
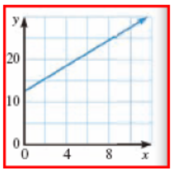
Εικόνα 4.20. Παραδείγματα κλίσης

Υπάρχουν ακόμα παραδείγματα όπως το παρακάτω στα οποία ζητείται η ερμηνεία της κλίσης σε πραγματικά προβλήματα γραμμικών συναρτήσεων (Εικόνα 4.21 και Εικόνα 4.22).

7. Στις πιο κάτω προτάσεις δίνονται 4 συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Να αναγνωρίσετε την κλίση α, και την παράμετρο β και να εξηγήσετε τη σημασία τους σε κάθε περίπτωση.
   (α) Το κέρδος σε ευρώ $K(n)$ από την πώληση n προϊόντων δίνεται από τη σχέση $K(n) = 0{,}75n - 150$.
   (β) Ένας σταλακτίτης μεγαλώνει σύμφωνα με τη σχέση $M(t) = 5{,}35 + 0{,}45t$. Το $M(t)$ αντιπροσωπεύει το μήκος του σταλακτίτη σε cm και το t τον χρόνο σε έτη από την πρώτη μέτρηση του μήκους του σταλακτίτη.
   (γ) Ο πληθυσμός μιας πόλης δίνεται από τη σχέση $\Pi(t) = 54000 - 230t$. Το $\Pi(t)$ αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό και το t αντιπροσωπεύει τον χρόνο σε έτη από το 2000 μέχρι σήμερα.
   (δ) Μια τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει τους πελάτες της με βάση τη σχέση $X(\lambda) = 15 + 0{,}05\lambda$. Το $X(\lambda)$ είναι η μηνιαία χρέωση σε ευρώ και λ ο χρόνος ομιλίας σε λεπτά.

Εικόνα 4.21. Λειτουργικά παραδείγματα κλίσης

16. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις της πρώτης στήλης με τις περιγραφές της δεύτερης στήλης του πίνακα και να επεξηγήσετε σε κάθε περίπτωση τι αντιπροσωπεύει η κλίση της γραφικής παράστασης.

Γραφική παράσταση	*Περιγραφή*
Α. 	i. Ένας υπάλληλος πληρώνεται € 12,50 και επιπλέον €1,50 για κάθε προϊόν που κατασκευάζει.
Β. 	ii. Ένα άτομο πρέπει να καλύψει απόσταση $100\ m$, περπατώντας με ταχύτητα $10\ m/min$.
Γ. 	iii. Ένας επαγγελματίας οδηγός εισπράττει καθημερινά €20 και επιπλέον €0,32 για κάθε χιλιόμετρο που καλύπτει.

Εικόνα 4.22. Λειτουργικά παραδείγματα κλίσης

Παρόλο που και στα δύο βιβλία αναφέρονται οι ίδιοι τρόποι εννοιολόγησης της κλίσης, στο κυπριακό γίνεται πιο εκτενής και σαφής αναφορά. Η $y = a \cdot x$ μελετάται ως μία ειδική περίπτωση ευθείας. Τα ανάλογα ποσά στην Κύπρο αναφέρονται σε άλλη ενότητα στη Β΄ Γυμνασίου που έπεται της διδασκαλίας της ευθείας, και αναφέρεται ο λόγος ή συντελεστής αναλογίας. Στη Β΄ Γυμνασίου στην Κύπρο δεν διδάσκεται τριγωνομετρία.

Στα εγχειρίδια της Β΄ Γυμνασίου και στις δύο χώρες υπάρχουν αρκετοί τρόποι εννοιολόγησης της κλίσης. Μία σημαντική διαφορά είναι ότι η αλγεβρική εννοιολόγηση στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια περιορίζεται στον λόγο $\frac{y}{x}$ στα ανάλογα ποσά και δεν αναφέρεται ο λόγος των διαφορών ενώ η αναφορά στον γεωμετρικό λόγο είναι περιορισμένη. Η δεύτερη διαφορά είναι ότι στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνεται η τριγωνομετρία, η οποία στην Κύπρο διδάσκεται στην Γ΄ Γυμνασίου.

Στα μαθηματικά της Γ΄ Γυμνασίου στην Ελλάδα στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η έννοια της γραμμικής εξίσωσης στη γενική μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$, αλλά δεν γίνεται άμεση αναφορά στην κλίση. Σε κάποιες αναφορές στο βιβλίο μαθητή και στο βιβλίο εκπαιδευτικού της Γ΄ Γυμνασίου, ο όρος κλίση αναφέρεται στη γωνία, όπως «*η κλίση της ράμπας είναι θ = 13°*» (Αργυράκης κ.ά., 2017, κεφ. 2.3, άσκ. 4) ή «*Να βρεθεί η κλίση ω της ανηφόρας με το έδαφος*» που αναφέρεται σε σχήμα στο οποίο σημειώνεται με ω η γωνία (Αργυράκης κ.ά., 2017, Βιβ. Καθ., κεφ. 2.7, δραστ. 1).

Στην Κύπρο αντίθετα στην Γ΄ Γυμνασίου υπάρχει πληθώρα αναφορών στην κλίση. Στην ενότητα της τριγωνομετρίας ορίζεται η εφαπτομένη χωρίς να συνδέεται ρητά με την κλίση (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016, τεύχ. Α΄, ενότ. 4). Αφιερώνεται όμως μεγάλο μέρος στη μελέτη ευθείας και γραμμικών συστημάτων, στο οποίο γίνεται αναφορά στην κλίση με τους περισσότερους τρόπους εννοιολόγησης, ως γεωμετρικός και αλγεβρικός λόγος, ως φυσική και λειτουργική ιδιότητα, ως παραμετρικός συντελεστής και ως ιδιότητα καθορισμού και ένδειξη συμπεριφοράς, αλλά δεν γίνεται σύνδεση με πραγματικές καταστάσεις (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016, τεύχ. Β΄, ενότ. 5).

Συνοψίζοντας, στην Ελλάδα στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου ο τρόπος εννοιολόγησης της κλίσης που υπερισχύει είναι αυτής ως παραμετρικού συντελεστή και περιορίζεται σε μεγάλο βαθμό σε σχέσεις της μορφής $y = a \cdot x$. Στο πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται ότι θα πρέπει να συνδέεται με τη φυσική ιδιότητα και με πραγματικές καταστάσεις. Σε διαφορετικό σημείο γίνεται αναφορά στην τριγωνομετρική εννοιολόγηση, ως εφαπτομένη γωνίας. Στην Κύπρο καταγράφονται περισσότεροι τρόποι εννοιολόγησης της κλίσης που ορίζεται με μεγαλύτερη σαφήνεια και σε γενικότερες περιπτώσεις. Κατά τη μελέτη της εφαπτομένης γωνίας δεν αναφέρεται η κλίση.

Όπως είναι αναμενόμενο οι αναφορές στην κλίση των σχολικών εγχειριδίων του λυκείου συνδέονται περισσότερο με την εννοιολόγηση στον διαφορικό λογισμό (Πίνακας 4.8). Στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου, κατά τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$, ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ε ως «η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x και συμβολίζεται με λ_ε ή λ» (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2018, κεφ. 6.3). Σε αυτό το σημείο τονίζονται αρκετοί τρόποι εννοιολόγησης της κλίσης, όπως τριγωνομετρικά ως εφαπτομένης γωνίας, παραμετρικά ως συντελεστή του x, γεωμετρικά και αλγεβρικά ως λόγου των διαφορών στα y και στα x. Παρόλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι η κλίση ευθείας ως λόγος των μεταβολών είναι εκτός ύλης (Υ.ΠΑΙ.Θ., 2018). Επιπλέον, δεν τονίζεται η λειτουργική εννοιολόγηση της κλίσης ως ρυθμού μεταβολής και δεν συνδέεται με πραγματικά προβλήματα.

Πίνακας 4.8. Αναφορές στην κλίση στα σχολικά εγχειρίδια λυκείου (* εκτός ύλης)

	Α΄ Λυκ.		**Β΄ Λυκ.**		**Β΄ Λυκ. κατεύθ.**		**Γ΄ Λυκ.**		**Γ΄ Λυκ. κατεύθ.**	
	Gr	Cy	Gr	Cy	Gr	Cy	Gr	Cy	Gr	Cy
Γεωμετρικός λόγος	G	G			G				G	
Αλγεβρικός λόγος	A*	A			A					
Φυσική ιδιότητα										
Λειτουργική ιδιότητα									F	
Παραμ. συντελεστής	PC	PC	PC		PC					
Τριγωνομετρική εννοιολ.	T	T			T		T		T	
Στον διαφορικό λογισμό				C			C	C	C	C
Πραγματική κατάσταση										
Ιδιότητα καθορισμού	D	D	D		D					
Ένδειξη συμπεριφοράς	B	B			B			B		B
Γραμμική σταθερά										

Καθώς στην Κύπρο τα παραπάνω έχουν καλυφθεί στην προηγούμενη τάξη, δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση και δεν γίνεται αναφορά στην κλίση στα μαθηματικά κοινού κορμού. Παρόλα αυτά, στα μαθηματικά προσανατολισμού ορίζεται και πάλι η κλίση (ή συντελεστής διεύθυνσης ευθείας), συνδέεται με τρόπους εννοιολόγησης, που έχουν ήδη αναφερθεί στην Γ΄ Γυμνασίου, και επιπλέον με την εφαπτομένη γωνίας (Αθανασίου, Αντωνιάδης κ.ά., 2016).

Στα μαθηματικά γενικής παιδείας της Β΄ λυκείου στην Ελλάδα, η κλίση αναφέρεται στη μελέτη γραμμικών συστημάτων ως συντελεστής διεύθυνσης, ο οποίος θεωρείται γνωστός και συμβολίζεται με λ (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2017, κεφ. 1.1). Στα μαθηματικά της ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών της Β΄ λυκείου αφιερώνεται μία παράγραφος στον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (Αδαμόπουλος, Βισκαδουράκης κ.ά., 2017), ο οποίος ορίζεται, όπως και στην Α΄ λυκείου, ως εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x και χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της θέσης και τη σχεδίαση της ευθείας στο καρτεσιανό επίπεδο και δίνεται η αλγεβρική μορφή υπολογισμού της ως λόγου διαφορών. Ακόμα, η κλίση χρησιμοποιείται για τη διατύπωση της συνθήκης παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Στην Κύπρο στη Β΄ Λυκείου γίνεται εισαγωγή στον διαφορικό λογισμό. Στα μαθηματικά κοινού κορμού εισάγεται το όριο και η παράγωγος και τονίζεται η εννοιολόγηση της κλίσης στον διαφορικό λογισμό (Δημητρίου-Καραντάνου κ.ά., 2016).

Στα ελληνικά εγχειρίδια μαθηματικών γενικής παιδείας της Γ΄ Λυκείου συνδέεται η παράγωγος με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης (Αδαμόπουλος, Δαμιανού κ.ά., 2017, κεφ. 2.1). Αντίστοιχα στα μαθηματικά κατεύθυνσης, συνδέεται με την παράγωγο και ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης ή αλλιώς κλίση της καμπύλης σε σημείο και αναφέρεται κατά τη μελέτη της κυρτότητας συναρτήσεων (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2018, κεφ. 2.1, 2.8).

Στην Κύπρο στα μαθηματικά κοινού κορμού χρησιμοποιείται η κλίση σε παραδείγματα, κυρίως από την άποψη του διαφορικού λογισμού και σε σχέση με τη μονοτονία (Βολακάκη κ.ά., 2017α), και στα μαθηματικά κατεύθυνσης σε σχέση με την κυρτότητα (Βολακάκη κ.ά., 2017β).

Όσον αφορά στην ορολογία και στο συμβολισμό που χρησιμοποιείται για την κλίση θα πρέπει να σημειωθεί ότι αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια σε κάποια σημεία ως κλίση, σε κάποια ως συντελεστής διεύθυνσης και αλλού και με τους δύο όρους. Ο όρος συντελεστής διεύθυνσης μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές, καθώς η λέξη συντελεστής χρησιμοποιείται και σε άλλα σημεία (συντελεστές πολυωνύμου, συντελεστής μεταβολής). Ακόμα, με τον όρο αυτό συνδέεται η κλίση με τη γεωμετρική ερμηνεία και τα διανύσματα και όχι με τη λειτουργική.

Από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων προκύπτει ότι δεν υπάρχει συνέπεια ως προς τον συμβολισμό. Όταν η κλίση αναφέρεται σε μια ευθεία της μορφής $y = ax$ ή $y = ax + \beta$, συμβολίζεται με το γράμμα α. Στην Αμερική συνήθως χρησιμοποιείται το γράμμα m (Nagle κ.ά., 2013). Στα ελληνικά εγχειρίδια του λυκείου χρησιμοποιείται το γράμμα λ για την κλίση, όταν αναφέρεται ως συντελεστής διεύθυνσης. Καθώς το γράμμα λ χρησιμοποιείται συνήθως ως παράμετρος στις παραμετρικές εξισώσεις, αυτό μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές.

Η κλίση θεωρείται σημαντική έννοια για τη μετέπειτα κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και άλλων προχωρημένων θεμάτων μαθηματικών. Η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με την οπτικοποίηση αντίστοιχων προβλημάτων και τη γραφική τους αναπαράσταση αποτελεί βάση για την κατανόηση των συναρτήσεων και της παραγώγου.

Στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια υπερισχύει η εννοιολόγηση της κλίσης ως παραμετρικού συντελεστή στο γυμνάσιο, η τριγωνομετρική εννοιολόγηση στο λύκειο, η οποία χρησιμοποιείται και ως τρόπος ορισμού της, και η εννοιολόγηση στον διαφορικό λογισμό στην τελευταία τάξη του λυκείου. Η διδασκαλία της κλίσης σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια της ως μέτρου του ρυθμού μεταβολής. Δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη διδασκαλία της από την άποψη της συμμεταβολής και στη σύνδεση με φυσικά προβλήματα. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής δεν ορίζεται και δεν συνδέεται με την κλίση της τέμνουσας.

Από τον τρόπο με τον οποίο αναφέρονται τα σχολικά εγχειρίδια στην κλίση ευθείας δεν αποσαφηνίζεται η έννοια στις διάφορες αναπαραστάσεις της. Το αποτέλεσμα είναι να μη γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές με τον τρόπο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα μαθηματικά και την αντιλαμβάνονται οι μαθηματικοί. Είναι ενδεικτικό ότι δεν γίνεται διαφοροποίηση της κλίσης στην περίπτωση της συνάρτησης $y = ax$ που εκφράζει ανάλογα ποσά και της γενικής γραμμικής συνάρτησης της μορφής $y = ax + \beta$ (Tyne, 2017). Δεν τονίζεται η διαφορά σχέσεων αναλογίας και άλλων γραμμικών σχέσεων και η ερμηνεία της κλίσης σε κάθε περίπτωση.

Στην Κύπρο, οι αναφορές στην κλίση αντιστοιχούν σε περισσότερους τρόπους εννοιολόγησης και τονίζεται ιδιαίτερα ο γεωμετρικός και ο αλγεβρικός, ακόμα και από μικρές τάξεις. Κάποιες θεματικές διδάσκονται νωρίτερα από ότι στην Ελλάδα, όπως η μελέτη της ευθείας που γίνεται στην Γ΄ Γυμνασίου και ο διαφορικός λογισμός που εισάγεται στη Β΄ Λυκείου.

Στη μέση εκπαίδευση τονίζονται οι διαδικασίες υπολογισμού της κλίσης και δεν δίνεται έμφαση στη σύνδεση με πραγματικά προβλήματα. Η μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της κλίσης και η αποσαφήνιση των ιδιοτήτων, των αναπαραστάσεων, της ορολογίας και του συμβολισμού της μπορεί να διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στη συνέχεια στην εννοιολόγηση της παραγώγου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, αλλά και στην ερμηνεία φυσικών φαινομένων.

Στα κυπριακά σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες διερεύνησης για την έννοια της κλίσης με χρήση τεχνολογιών πληροφορικής, κυρίως με το λογισμικό GeoGebra. Από ερευνητικά αποτελέσματα ήδη περαιωμένα και άλλα που βρίσκονται σε εξέλιξη προκύπτει ότι η οπτικοποίηση της έννοιας της κλίσης μέσω ψηφιακών δραστηριοτήτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόησή της (Avgerinos & Remoundou, 2019). Εκπαιδευτικά λογισμικά μαθηματικών, όπως το GeoGebra, καθώς και μαθησιακά αντικείμενα στο photodentro και στο διαδίκτυο, αποτελούν σημαντικά και εύχρηστα εργαλεία για την ανάπτυξη βοηθητικών δραστηριοτήτων.

Η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με την οπτικοποίηση αντίστοιχων προβλημάτων και τη γραφική τους αναπαράσταση δίνει ένα έρεισμα για τη μετέπειτα κατανόηση των συναρτήσεων και της παραγώγου. Παρόλα αυτά δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη διδασκαλία τους από την άποψη της συμμεταβολής και τη σύνδεση με φυσικά προβλήματα.

4.3.5 Πρόγραμμα σπουδών και σχολικά εγχειρίδια - Σιγκαπούρη

Στο πρόγραμμα σπουδών της Σιγκαπούρης όπως και στο ελληνικό η διάρθρωση της ύλης ακολουθεί σπειροειδή μορφή. Οι μαθητές παίρνουν το βιβλίο μαθητή (Textbook) και το βιβλίο εργασιών (Workbook). Στη Σιγκαπούρη σε κάθε τάξη αντιστοιχούν δύο βιβλία μαθητή και δύο εργασιών.

Ένα χαρακτηριστικό των βιβλίων της Σιγκαπούρης είναι ότι έχουν όμοια δομή σε όλες τις τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Κάθε βιβλίο είναι χωρισμένο σε ενότητες που αντιστοιχούν σε μία θεματική και αποτελούνται από κεφάλαια δύο έως τριών σελίδων. Το κάθε κεφάλαιο έχει ένα τίτλο που περιγράφει με σαφήνεια το περιεχόμενο (Εικόνα 4.23). Στο τέλος κάθε κεφαλαίου ή μίας ομάδας μικρού αριθμού κεφαλαίων υπάρχει μία σελίδα με ασκήσεις και στο τέλος κάθε ενότητας επαναληπτικές ασκήσεις.

Εικόνα 4.23. Παράδειγμα τίτλου κεφαλαίου

Η μορφή των ασκήσεων αλλά και της επανάληψης κεφαλαίου διαφέρει πολύ ανάμεσα στις δύο χώρες. Στα βιβλία της Ελλάδας υπάρχουν λιγότερες ασκήσεις και συνήθως έχει χώρο στο βιβλίο για να γραφτεί η απάντηση. Στη Σιγκαπούρη αντίθετα η επανάληψη αποτελείται από αρκετά λεκτικά κυρίως προβλήματα συγκεντρωμένα χωρίς χώρο για την επίλυσή τους. Επιπλέον, στις επαναλήψεις έχει προβλήματα στα οποία οι μαθητές καλούνται να ανακαλέσουν γνώσεις από το τρέχον αλλά και από προηγούμενα κεφάλαια και ακόμα προηγούμενες τάξεις, ενώ υπάρχουν και συνδυαστικά προβλήματα.

Στη Σιγκαπούρη οι βασικές θεματικές στις οποίες χωρίζεται η ύλη είναι αντίστοιχες με της Ελλάδας: (α) Αριθμοί και άλγεβρα, (β) Μετρήσεις και γεωμετρία, (γ) Στατιστική.

Η ύλη των μαθηματικών που καλύπτεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι κάπως λιγότερη από αυτή που καλύπτεται στην Ελλάδα, αλλά συμπεριλαμβάνονται πολύ απαιτητικά προβλήματα.

Μία σημαντική διαφορά η οποία αξίζει να αναφερθεί είναι ο τρόπος που διδάσκεται ο πολλαπλασιασμός. Στην Ελλάδα, οι μαθητές καλούνται να μάθουν τους πίνακες της προπαίδειας ήδη από τη Β΄ Δημοτικού για τους αριθμούς 1-10. Αντίθετα στη Σιγκαπούρη αυτό γίνεται σταδιακά με τον πολλαπλασιασμό με 2, 3, 4, 5 και 10 στη Β΄ Δημοτικού και με τους 6, 7, 8, 9 στην Γ΄ τάξη. Χωρίς όμως να έχουν μάθει τον πολλαπλασιασμό με όλους τους αριθμούς, ασχολούνται με προβλήματα τα οποία απαιτούν πολλαπλασιασμό.

Και στις δύο χώρες σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών δίνεται έμφαση στην επίλυση προβλήματος αλλά αυτό αποτυπώνεται με διαφορετικό τρόπο στα σχολικά εγχειρίδια. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι από τους κύριους στόχους του προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης (Kaur, 2004). Η έμφαση στην επίλυση προβλήματος είναι εμφανής σε όλα τα χρόνια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο από το πλήθος των προβλημάτων, όσο και από τον τρόπο που παρουσιάζονται και τη μεθοδολογία για την επίλυσή τους.
Στη βιβλία της Σιγκαπούρης υπάρχουν πολλά λεκτικά προβλήματα και συγκεκριμένη μεθοδολογία. Τα προβλήματα γίνονται σταδιακά πιο δύσκολα και συνδυαστικά. Ειδικά σε επαναληπτικές ασκήσεις μπορεί να απαιτείται χρήση εννοιών από διαφορετικά προηγούμενα κεφάλαια και τάξεις. Ακόμα στα προβλήματα φαίνεται η προσπάθεια σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινότητα. Τα σχολικά βιβλία της

Σιγκαπούρης διαπραγματεύονται μετρήσεις ποσοτήτων όπως όγκος, μάζα, χρόνος και εισάγουν στις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.

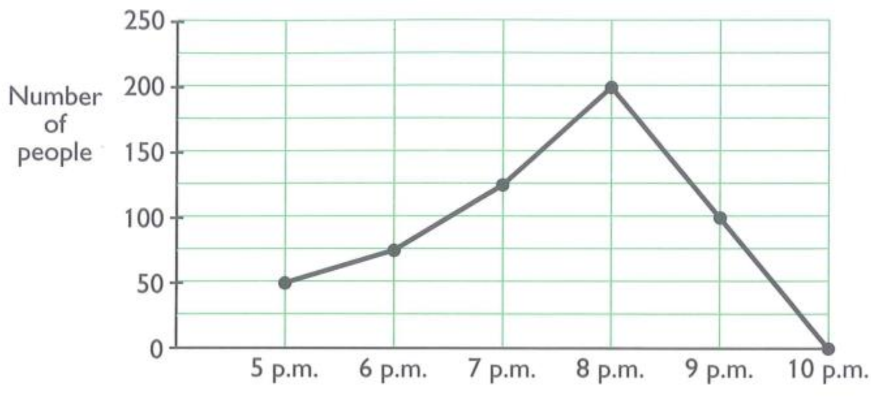
Επιπλέον στα σχολικά εγχειρίδια της σειράς δίνεται έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς και υπάρχουν δραστηριότητες που βοηθάνε τους μαθητές να αναπτύξουν τη δεξιότητα αυτή. Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό με το 9 δίνονται εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού είτε με αφαίρεση του άλλου πολλαπλασιαστή από την επόμενη δεκάδα, π.χ. $3 \cdot 9 = 30 - 3$, είτε με τα δάχτυλα.

Σε αντιστοιχία με τη δομή, η παρουσίαση στα βιβλία της Σιγκαπούρης παρουσιάζει ομοιομορφία σε όλες τις τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Τα βιβλία της Σιγκαπούρης είναι αραιογραμμένα, με ευανάγνωστα γράμματα. Τα βιβλία των πρώτων τάξεων έχουν αρκετές εικόνες και χρώματα. Οι εικόνες αυτές είναι υποστηρικτικές στη μάθηση και μερικές φορές είναι απαραίτητες για του κατανόηση το προβλήματος. Στα επόμενα χρόνια τα βιβλία έχουν λιγότερα χρώματα και περιορίζεται ο αριθμός των εικόνων, ιδιαίτερα των διακοσμητικών.

Οι γραφικές παραστάσεις υπάρχουν στο βιβλίο της 5^{ης} βαθμίδας και τονίζεται η μεταβολή, αύξηση ή μείωση (Εικόνα 4.24).

The line graph shows the number of people in a supermarket by the hour from 5 p.m. to 10 p.m. Use the graph to answer the questions which follow.

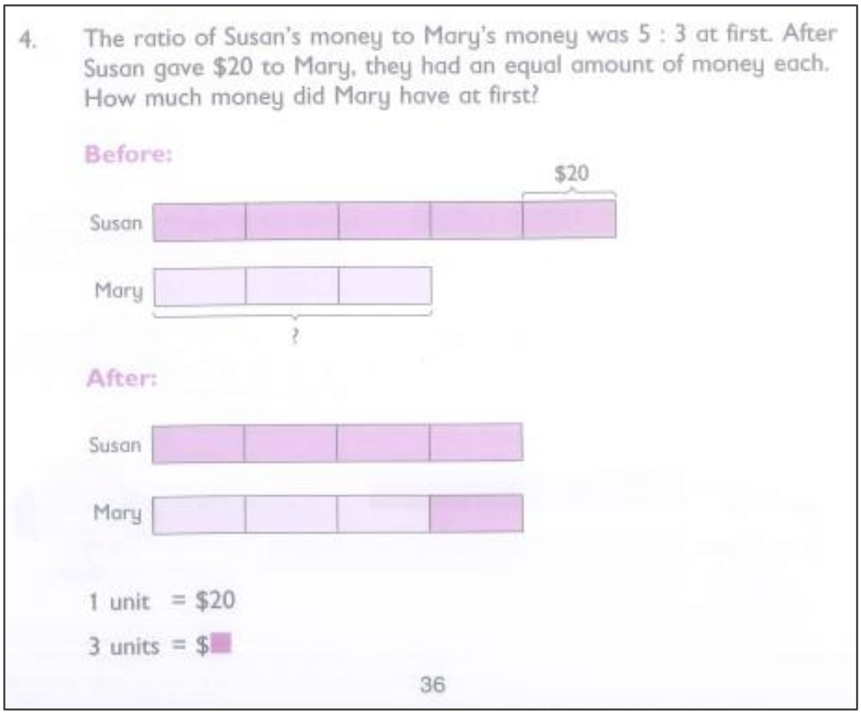


(a) What was the increase in the number of people from 7 p.m. to 8 p.m.?
(b) What was the decrease in the number of people from 8 p.m. to 9 p.m.?

Εικόνα 4.24. Παράδειγμα γραφικής παράστασης της 5^{ης} βαθμίδας (Primary Mathematics 5B, σελ.52)

Όσον αφορά στις αναπαραστάσεις, χρησιμοποιούνται λεκτικά προβλήματα, γραφήματα, πίνακας τιμών και συμβολικές αναπαραστάσεις στις τελευταίες τάξεις,

Στα βιβλία της Σιγκαπούρης χρησιμοποιείται ένας συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης προβλημάτων ο οποίος στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως μοντελοποίηση (the model method) (Ng & Lee, 2009). Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για την επίλυση προβλημάτων κλασμάτων, λόγων, αναλογιών, ρυθμού, ταχύτητας και ποσοστών, μέρους-όλου, αναλογικού συλλογισμού. Παράδειγμα αυτής της μεθόδους φαίνεται στην εικόνα 4.25.



Εικόνα 4.25. Λεκτικό πρόβλημα με λόγους και η λύση του με οπτική αναπαράσταση

Στο παραπάνω παράδειγμα ο μαθητής οπτικοποιεί τη λύση και καταλήγει χωρίς πράξεις και χωρίς συμβολική αναπαράσταση στην επίλυση του προβλήματος. Η μέθοδος της μοντελοποίησης αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τους μαθητές με το οποίο οπτικοποιούν εξισώσεις και τη λύση τους και τους επιτρέπει να επιλύουν ακόμα και απαιτητικά προβλήματα (Ng & Lee, 2009).

Ο ρυθμός μεταβολής αντιμετωπίζεται διαφορετικά στα σχολικά εγχειρίδια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της Σιγκαπούρης από της Ελλάδας. Στο πρόγραμμα σπουδών της Σιγκαπούρης υπάρχει σαφής αναφορά στον ρυθμό μεταβολής στο πρόγραμμα σπουδών των δύο τελευταίων βαθμίδων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Συγκεκριμένα για την 5^{η} βαθμίδα το πρόγραμμα σπουδών αναφέρεται στον λόγο και αμέσως μετά στον ρυθμό και στην ταχύτητα (Εικόνα 4.26). Όσον αφορά στον ρυθμό αναφέρονται παραδείγματα από καθημερινές καταστάσεις, αναγνωρίζεται ότι εμπλέκονται τρεις ποσότητες κάθε μία από τις οποίες μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστές οι άλλες δύο και επιλύονται προβλήματα με αναλογικό συλλογισμό.

SUB-STRAND: RATIO	
1. Ratio	**Students should have opportunities to:**
1.1 notation, representations and interpretation of a:b and a:b:c, where a, b and c are whole numbers, excluding ratios involving fractions and decimals 1.2 equivalent ratios 1.3 dividing a quantity in a given ratio 1.4 expressing a ratio in its simplest form 1.5 finding the ratio of two or three given quantities 1.6 finding the missing term in a pair of equivalent ratios 1.7 solving up to 2-step word problems involving ratio	(a) use objects in the classroom to practise simplifying ratios and using ratio language, e.g. "The ratio of the number of boys to the number of girls is 15 to 20", and 15:20 = 3:4. (b) work in groups to make different ratios from two or three given sets of objects, e.g. given 8 blue cubes and 12 green cubes, make different ratios by forming equal groups of varying sizes and recognise the ratios as equivalent ratios because the number of cubes remain unchanged, only groupings change. (c) make connections between simplifying fractions and ratios by dividing the terms of the fraction/ ratio by a common factor. (d) solve problems using the part-whole and comparison models.

SUB-STRAND: RATE AND SPEED	
1. Rate	**Students should have opportunities to:**
1.1 rate as the amount of a quantity per unit of another quantity 1.2 finding rate, total amount or number of units given the other two quantities 1.3 solving word problems involving rate	(a) talk about examples of rate in everyday situations such as postage rates and utility rates (water and electricity consumption rates). (b) talk about a situation involving rate and recognise that there are three related quantities (rate, total amount, number of units) and given any two quantities, the third quantity can be calculated. (c) solve problems using proportional reasoning.

Εικόνα 4.26. Μέρος του προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης για την 5^{η} βαθμίδα (MOE, 2012, σελ.56)

Ομοίως και στην 6^{η} βαθμίδα στο πρόγραμμα σπουδών υπάρχει ο λόγος και στη συνέχεια ο ρυθμός και η ταχύτητα (Εικόνα 4.27). Γίνεται αναφορά στην ταχύτητα σε πραγματικές καταστάσεις, λύνονται προβλήματα με ταχύτητα έως τριών βημάτων και αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης αλλά όχι μετατροπή τους.

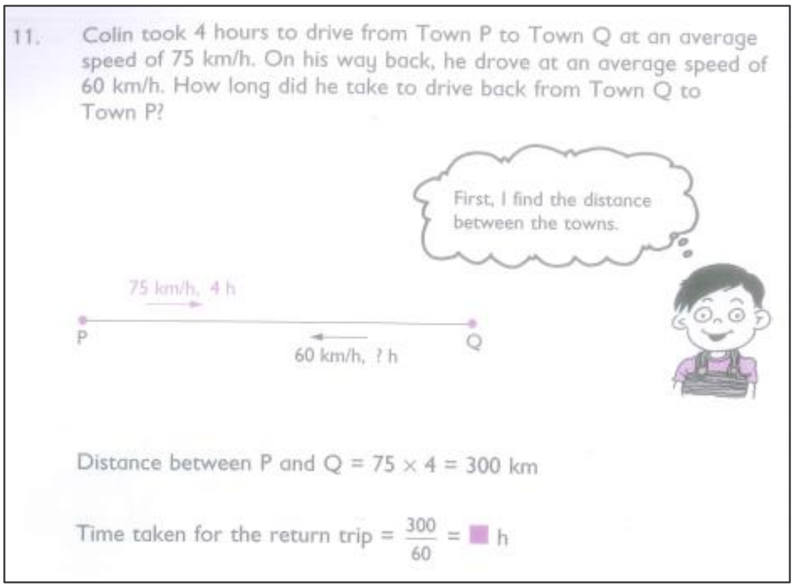
<table>
<tr><td colspan="2">SUB-STRAND:RATIO</td></tr>
<tr><td>1. Ratio</td><td>Students should have opportunities to:</td></tr>
<tr><td>1.1 relationship between fraction and ratio
1.2 solving word problems involving ratio including changing ratios</td><td>(a) use concrete objects or draw pictorial models to demonstrate their understanding of fraction statements such as ‘A is $\frac{2}{3}$ of B’, ‘B is $\frac{3}{2}$ of A’, and rewrite the statements using ratio.
(b) find the ratio of two quantities in direct proportion and use it to solve direct proportion problems, e.g. Find the amount of each ingredient needed to bake 10 dozens of cookies using the following recipe for baking 3 dozen cookies
<table>
<tr><td>1 cup flour</td><td>$\frac{1}{3}$ cup sugar</td><td>1 cup chocolate chips</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$ teaspoon baking soda</td><td>1 egg</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$ cup butter</td><td>$\frac{1}{2}$ teaspoon. vanilla</td><td></td></tr>
</table>
(c) use equivalent ratios and the before-after concept to solve problems involving changing ratio.</td></tr>
</table>

SUB-STRAND:RATE AND SPEED	
1. Distance, Time and Speed	**Students should have opportunities to:**
1.1 concepts of speed and average speed 1.2 relationship between distance, time and speed exclude conversion of units e.g. km/h to m/min 1.3 writing speed in different units such as km/h, m/min, m/s and cm/s 1.4 solving up to 3-step word problems involving speed and average speed	(a) talk about speed in real life such as speed of vehicles (e.g. bicycle, motor car, train, aeroplane) and animals (e.g. horse, cheetah) and make comparisons between the different speeds. Also, discuss other examples such as speed limit traffic signs, 100-m run, speedometer in cars and fan speed. (b) talk about a journey and recognise that there are 3 related quantities (distance, time and speed) and given any two quantities, the third quantity can be calculated. (c) draw a diagram to show different scenarios of speed, distance and time (e.g. two vehicles starting from the same point but moving away from each other at constant speeds) and use it to solve problems, e.g. find the distance apart after 3 hours. Starting Point Car A T = 3 h S = 70 km/h Car B T = 2 h S = 60 km/h

Εικόνα 4.27. Μέρος του προγράμματος σπουδών της Σιγκαπούρης για την 6η βαθμίδα (MOE, 2012, σελ. 60-61)

Πρέπει να σημειωθεί ότι η λέξη ρυθμός στα αγγλικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους από ότι στα ελληνικά. Στην 5η βαθμίδα δίνονται παραδείγματα όπως «Rate of charges», «The workers are paid the following rates», «Postage rates», «Rate of printing», «Filling water».

Στην 6η βαθμίδα δίνεται ο τύπος της ταχύτητας και λύνονται προβλήματα με ταχύτητα (Εικόνα 4.28) κάποια από τα οποία είναι ιδιαίτερα απαιτητικά.



Εικόνα 4.28. Πρόβλημα ταχύτητας στην 6η βαθμίδα (Primary Mathematics 6, σελ. 76)

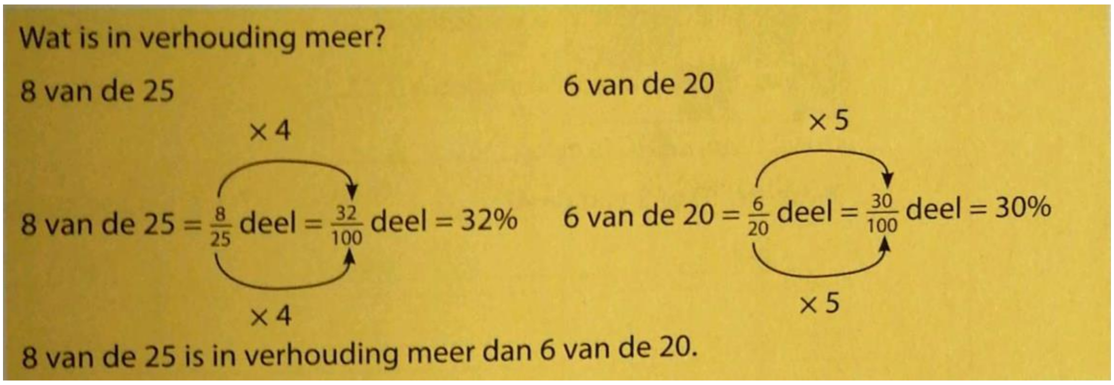
4.3.6 Πρόγραμμα σπουδών και σχολικά εγχειρίδια της Ολλανδίας

Στην Ολλανδία η υποχρεωτική εκπαίδευση ξεκινάει από την ηλικία των 5 ετών και φτάνει έως τα 16 (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Η φοίτηση στο νηπιαγωγείο είναι δίχρονη με τον ένα χρόνο υποχρεωτικό και στη συνέχεια φοιτούν έξι χρόνια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές έχουν τρεις επιλογές, την επαγγελματική εκπαίδευση, την ανώτερη επαγγελματική εκπαίδευση ή την πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Τα δύο πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελούν τη βασική δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Στην Ολλανδία το εκπαιδευτικό σύστημα είναι ελεύθερο, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει κεντρική απόφαση για το τι διδάσκεται και τα σχολεία μπορούν να επιλέξουν σχολικά βιβλία, τα οποία δεν χρειάζεται να έχουν έγκριση από το υπουργείο (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

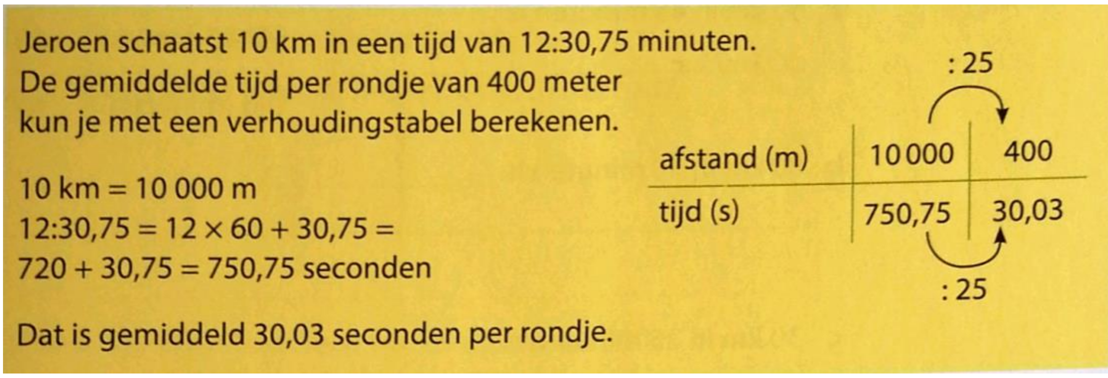
Η σειρά Getal en Ruimte Junior αποτελείται από τέσσερα με πέντε βιβλία ανά τάξη και δεν έχει τετράδιο εργασιών. Στην 6η βαθμίδα υπάρχουν τέσσερα βιβλία, τα δύο τελευταία από τα οποία αναφέρονται σε μαθηματικές έννοιες μέσα από συγκεκριμένα πλαίσια όπως αριθμητική και τέχνη, αριθμητική και τεχνολογία, αριθμητική και φύση, και αριθμητική και γεωγραφία. Οι δραστηριότητες είναι κυρίως πρακτικές και η θεωρία είναι περιορισμένη σε μορφή επεξήγησης (Εικόνα 4.29).

Σε προηγούμενο σημείο της 6ης βαθμίδας εισάγονται οι λόγοι, οι αναλογίες και τα ποσοστά. Για τους λόγους χρησιμοποιείται λεκτικός συμβολισμός όπως «8 από τα 25» (8 van de 25) και συνδέονται με τα ποσοστά (Εικόνα 4.29).



Εικόνα 4.29. Επεξήγηση σύγκρισης λόγων (6η βαθμίδα, βιβλίο 1, σελ.45)

Το πλαίσιο της κίνησης χρησιμοποιείται στην ίδια τάξη στην ενότητα για τον χρόνο.



Jeroen schaatst 10 km in een tijd van 12:30,75 minuten.
De gemiddelde tijd per rondje van 400 meter
kun je met een verhoudingstabel berekenen.

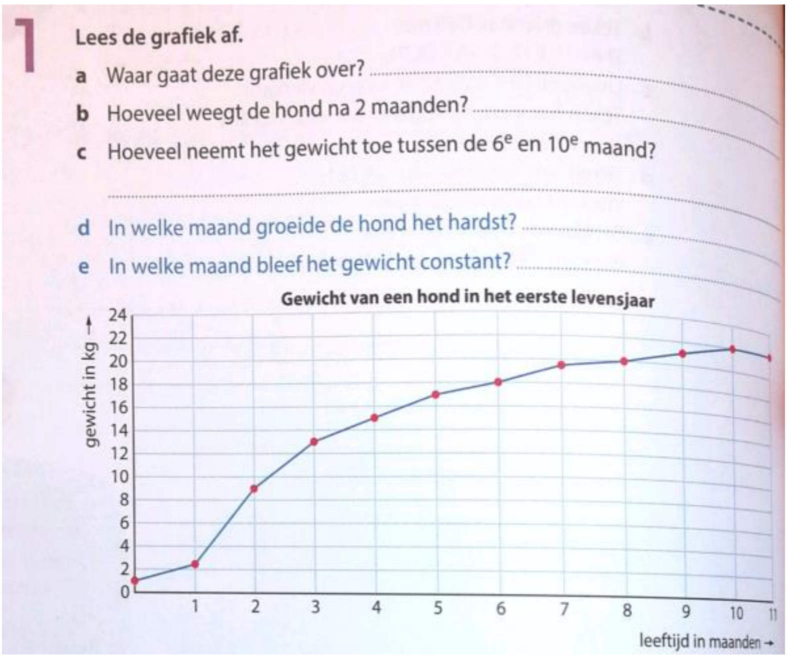
10 km = 10 000 m
12:30,75 = 12 × 60 + 30,75 =
720 + 30,75 = 750,75 seconden

	$\xrightarrow{:25}$	
afstand (m)	10 000	400
tijd (s)	750,75	30,03
	$\xrightarrow{:25}$	

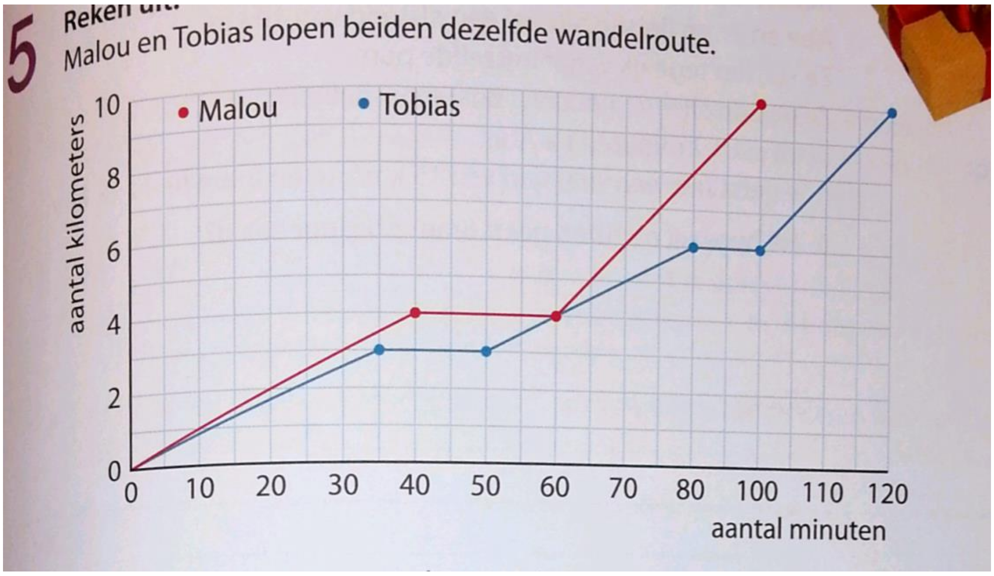
Dat is gemiddeld 30,03 seconden per rondje.

Εικόνα 4.30. Παράδειγμα κίνησης ($6^η$ βαθμίδα, βιβλίο 1, σελ.61)

Δίνονται παραδείγματα με πίνακα τιμών, με γραφική αναπαράσταση (Εικόνα 4.31). Μεταξύ των προβλημάτων υπάρχει και αναφορά σε προβλήματα με κίνηση (Εικόνα 4.32).



Εικόνα 4.31. Παράδειγμα γραφικής αναπαράστασης ($6^η$ βαθμίδα, βιβλίο 2, σελ.106)



Εικόνα 4.32. Παραδείγματα γραφικής αναπαράστασης (6η βαθμίδα, βιβλίο 3, σελ.137)

4.3.7 Ο ρόλος της γλώσσας

Από την έρευνα σε σχέση με την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και τους παράγοντες που την επηρεάζουν αναδείχτηκε ως καίριας σημασίας ο ρόλος της γλώσσας (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2018α). Όροι όπως η κλίση και ο ρυθμός χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα τόσο στα ελληνικά όσο και στα αγγλικά με διαφορετικές σημασίες. Οι όροι και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια σε σχέση με την κλίση και τον ρυθμό μεταβολής σε πολλές περιπτώσεις δεν ορίζονται με σαφήνεια και προκαλούν παρανοήσεις (Confrey & Smith, 1994). Η γλώσσα που συνοδεύει τον ρυθμό μεταβολής είναι αρκετά περίπλοκη, με μακριές προτάσεις και ασάφειες.

Ο ρυθμός μεταβολής μελετάται στα πλαίσια της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο ίδιος ο όρος ανάλυση αλλά και η ελληνική λέξη λογισμός περιέχουν κάποιο βαθμό ασάφειας, καθώς εκτός από τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται και στη καθημερινή γλώσσα με διαφορετική σημασία. Πολλοί από τους όρους που ορίζονται στα πλαίσια της Μαθηματικής Ανάλυσης, αλλά και εκφράσεις που χρησιμοποιούνται, δεν είναι νέοι για τους μαθητές, αλλά αντίθετα είναι γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες λέξεις, τόσο στην αγγλική γλώσσα όσο και στην ελληνική.

Ο όρος *όριο* (limit) για παράδειγμα, όπως και η έκφραση *τείνει*, χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα με διαφορετικές ερμηνείες, οι οποίες μπορεί να προκαλέσουν παρανοήσεις για τη μαθηματική έννοια του ορίου (Cornu, 2002). Όσον αφορά στην έννοια της συνέχειας, οι αυθόρμητες αντιλήψεις που συνδέονται με τον όρο και σχετίζονται με την καθημερινή χρήση του μπορεί να προκαλέσουν λανθασμένη εικόνα για τη μαθηματική συνέχεια μιας συνάρτησης (Cornu, 2002). Πολλές φορές η εμπειρική ιδέα της συνέχειας επικαλείται από τους εκπαιδευτικούς για να δώσουν μία απλή μεταφορά κατά την εισαγωγή της έννοιας, αναφέροντας ότι “το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι σε ένα τμήμα” ή ότι “σχεδιάζεται χωρίς να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί” (Cornu, 2002).

Από τη γλώσσα που χρησιμοποιεί κάποιος για να περιγράψει δυναμικά φαινόμενα προκύπτει και ο βαθμός κατανόησης των φαινομένων, αλλά και η εικόνα που έχει για τις έννοιες. Ο κάθε μαθητής ανάλογα με τη βαθμίδα εκπαίδευσης στην οποία ανήκει αλλά και τις εμπειρίες του, έχει μια διαφορετική εικόνα για την έννοια του ρυθμού μεταβολής. Η ορολογία που χρησιμοποιείται σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής τόσο στα σχολικά εγχειρίδια όσο και από τους εκπαιδευτικούς μπορεί να έχει συμβάλει στις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών και φοιτητών (Teuscher & Reys, 2010).

Στα αγγλικά ο όρος rate χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα και έχει παρατηρηθεί ασθενής εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής και σύνδεσή του με τη χρήση του όρου στην καθομιλουμένη (Herbert & Pierce, 2009).

Στο Ερμηνευτικό λεξικό νέας ελληνικής (Α΄-Β΄-Γ΄ Γυμνασίου) δίνονται οι παρακάτω ερμηνείες για τη λέξη ρυθμός:

ρυθμός ο: **1** η εναλλαγή κινήσεων ή ήχων σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα: Ακολουθούσε απλώς τον ~ της μουσικής.

2 η ταχύτητα με την οποία γίνεται, αλλάζει, αυξάνεται ή μειώνεται κτ: ο ~ της σωματικής ανάπτυξης ενός παιδιού.

3 σύνολο κοινών χαρακτηριστικών καλλιτεχνικών έργων, όπως αυτά διαμορφώθηκαν σε ορισμένο τόπο και χρόνο: Ο δωρικός ~ είναι λιτός και αυστηρός. ρυθμικός -ή -ό: αυτός που έχει ή γίνεται με ρυθμό (σημ. 1): ~ βηματισμός. ρυθμικά (επίρρ.).

Πίνακας 4.9. Ορολογία γύρω από τον ρυθμό μεταβολής

Αγγλικός όρος	Ελληνικός όρος
Rate of change (Instantaneous rate of change, Average rate of change)	Ρυθμός μεταβολής (Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής, Μέσος ρυθμός μεταβολής)
Slope (Slope of secant line, Slope of tangent line), Steepness (gradient, slant, incline)	Κλίση (Κλίση τέμνουσας ευθείας, Κλίση εφαπτομένης ευθείας) – συντελεστής διεύθυνσης
Rise over run	Δεν χρησιμοποιείται αντίστοιχη έκφραση στα ελληνικά

Quotient Δy/Δt	Πηλίκο Δy/Δt
Differentiating operator dy/dt	Διαφορικό dy/dt
Derivative	Παράγωγος
Speed (amount) – velocity (magnitude)	Ταχύτητα
Change	Μεταβολή
Constant rate of change	Σταθερός ρυθμός μεταβολής
Ratio	Λόγος

Για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής με ακρίβεια χρειάζονται περισσότερες από μία λέξεις ή περίπλοκες εκφράσεις. Αν οι λέξεις αυτές δεν αναφέρονται προκαλείται μια εννοιολογική σύγχυση, καθώς δεν γίνονται σαφείς οι έννοιες. Στη συνέχεια αναλύονται κάποιοι από τους όρους που συνδέονται με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και συγκεκριμένα ο ρυθμός μεταβολής, η κλίση, η εφαπτομένη ευθείας και ο λόγος, ενώ γίνεται αναφορά σε δευτερεύοντες όρους όπως το πηλίκο και το κλάσμα.

Η αγγλική λέξη *rate* έχει την έννοια της τιμής ή αξίας, αλλά και του λόγου ή ρυθμού. Στα ελληνικά ο όρος ρυθμός χρησιμοποιείται στη μουσική, στις τέχνες, στην αρχιτεκτονική, στα μαθηματικά, στις φυσικές επιστήμες, στην οικονομία, στη βιολογία αλλά και στην καθημερινή ζωή. Η λέξη ρυθμός παραπέμπει σε περιοδική κίνηση.

Στα μαθηματικά ο ρυθμός συναντάται στη στατιστική και στη Μαθηματική Ανάλυση. Οι μαθητές καλούνται να συντάξουν ακριβείς εκφράσεις για να απαντήσουν σε έργα μαθηματικών ή φυσικών επιστημών και είναι απαραίτητη η ικανότητα χρήσης των όρων που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής και η διάκρισή τους από παρόμοιους όρους που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα.

Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να είναι μέσος ή στιγμιαίος, σταθερός ή μεταβλητός, θετικός, αρνητικός ή μηδέν, αυξανόμενος ή μειούμενος. Η εννοιολογική εικόνα που σχηματίζεται από αυτές τις λέξεις και τα επίθετα που συνοδεύουν τον ρυθμό μεταβολής συγχέεται και περιπλέκεται, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με όψεις του ρυθμού σε διαφορετικά πλαίσια. Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις, κυρίως σε συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιείται η έκφραση ρυθμός αύξησης ή ρυθμός μείωσης αντί για ρυθμός μεταβολής.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μία γενική φράση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις χωρίς να ερμηνεύεται ως ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Zandieh & Knapp, 2006).

Σε έρευνες σε συγκεκριμένο πλαίσιο προβλημάτων έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές καταφέρνουν να εκφράσουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης αναφερόμενοι στο πλαίσιο αυτό, δυσκολεύονται όμως να την εκφράσουν σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα συγχέοντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης με αυτή του ρυθμού μεταβολής της (Ärlebäck κ.ά., 2013).

Οι μεγάλες και νοητικά περίπλοκες εκφράσεις που συνοδεύουν συνήθως την έννοια του ρυθμού μεταβολής μπορεί να προκαλέσουν παρανοήσεις. Για παράδειγμα η πρόταση «η παράγωγος είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής» μπορεί να συντομευτεί στην πρόταση «η παράγωγος είναι ένας ρυθμός», μπορεί όμως να γίνει «η παράγωγος είναι μία μεταβολή» που δεν είναι μαθηματικά ακριβής (Zandieh & Knapp, 2006).

Για την περιγραφή της συμπεριφοράς μια ποσότητας χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως «αυξάνεται με μειούμενο (ή αυξανόμενο) ρυθμό» (increasing at a decreasing (or an increasing) rate) ή «μειώνεται με αυξανόμενο ή μειούμενο ρυθμό» (decreasing at an increasing (or a decreasing) rate). Το άκουσμα των συνδυασμών αυτών αύξησης και μείωσης προκαλεί μια αίσθηση σύγχυσης (Gough, 2007). Οι εκφράσεις αυτές δεν είναι εύκολα κατανοητές για τους περισσότερους μαθητές και προτείνεται να διαχωρίζονται σε δύο προτάσεις, μία για τη συμπεριφορά της συνάρτησης και μία για τη συμπεριφορά του ρυθμού μεταβολής της, έτσι ώστε να αποφεύγεται η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και ρυθμού (Doerr κ.ά., 2013).

Μια συνηθισμένη παρανόηση είναι να λαμβάνεται υπόψη το μέτρο του ρυθμού μεταβολής αλλά όχι το πρόσημο (Ärlebäck κ.ά., 2013). Έχει φανεί δυσκολία στην έκφραση αρνητικών ρυθμών μεταβολής που αυξάνονται, καθώς συγχέεται η απόλυτη τιμή τους που μειώνεται με την πραγματική προσημασμένη τιμή τους που αυξάνεται και ιδιαίτερα κατά την περιγραφή φαινομένων που η καθημερινή γλώσσα αναφέρεται στο μέτρο της ποσότητας (Ärlebäck κ.ά., 2013· Doerr κ.ά., 2013).

Για την ταχύτητα χρησιμοποιούνται στα αγγλικά δύο διαφορετικές λέξεις για να εκφράσουν το μέτρο (speed) και την προσημασμένη ποσότητα (velocity), ενώ για άλλα μεγέθη υπάρχει μόνο ένας όρος. Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να δοθεί μεγαλύτερη προσοχή στη χρήση της γλώσσας ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές να κατανοήσουν και να επικοινωνήσουν για φαινόμενα με αρνητικό ρυθμό μεταβολής (Doerr κ.ά., 2013).

Παρανοήσεις προκαλεί και ο όρος *constant* στην περιγραφή του ρυθμού μεταβολής και της συνάρτησης. Στην έκφραση «αυξάνεται σταθερά» (“increasing constantly”) ως περιγραφή ενός ρυθμού μεταβολής μπορεί να αποδοθεί το νόημα ότι αυξάνεται συνεχώς, αλλά σύμφωνα με τη μαθηματική ορολογία σημαίνει ότι αυξάνεται με σταθερό ρυθμό (constant rate) (Ärlebäck κ.ά., 2013).

Ένας όρος των μαθηματικών που εντάσσεται στα πλαίσια της λεξιλογικής ασάφειας είναι ο όρος *average* στα αγγλικά και αντίστοιχα ο όρος *μέσος* στα ελληνικά (Weber & Dorko, 2013). Οι ορισμοί του *μέσου* και οι εικόνες που τον συνοδεύουν προέρχονται από εμπειρίες της καθημερινότητας, τη γλώσσα, τη στατιστική και τη Μαθηματική Ανάλυση (Weber & Dorko, 2013). Έτσι *μέσος* μπορεί να σημαίνει ο αριθμητικός μέσος (arithmetic mean), η διάμεσος (median), ενώ χρησιμοποιείται και για να υποδηλώσει κάτι το κανονικό, συνηθισμένο. Φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν έντονη την εικόνα του *μέσου* από την καθημερινότητα την οποία και διατηρούν στα μαθηματικά κατά την ενασχόλησή τους με τη στατιστική (Kaplan κ.ά., 2009).

Η λεξιλογική ασάφεια του όρου *μέσος* και οι ποικιλία στοιχείων στις εννοιολογικές εικόνες για αυτόν μπορεί να οδηγήσει στη χρήση του με μη παραγωγικούς τρόπους στη Μαθηματική Ανάλυση (Weber & Dorko, 2013). Επιπλέον, ο μέσος στη Μαθηματική Ανάλυση δεν είναι και μέσος με την έννοια της στατιστικής.

Συγκεκριμένα για τον μέσο ρυθμό μεταβολής, η λέξη μέσος προκαλεί παρανοήσεις. Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές μεταφράζουν τον όρο μέσος στον μέσο ρυθμό μεταβολής ως τον αριθμητικό μέσο και τον υπολογίζουν προσθέτοντας μερικές τιμές του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής και διαιρώντας με το πλήθος τους (Weber & Dorko, 2013).

Για πολλούς μαθητές δεν είναι ξεκάθαρη η διαφορά της έννοιας της *ποσότητας* και της *μεταβολής της ποσότητας* (Thompson, 1994α). Μια άλλη βασική σύγχυση έχει διαπιστωθεί ανάμεσα στις έννοιες της *μεταβολής* και του *ρυθμού μεταβολής* (Thompson, 1994α). Ακόμα, σε πολλές περιπτώσεις δεν γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στον *μέσο* και στον *στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής* (Orton, 1983).

Ο Thompson (1994α) αναφέρεται στους όρους *λόγος* (ratio) και *ρυθμός* (rate), σημειώνοντας ότι η ύπαρξη δύο όρων υπονοεί ότι υπάρχουν και δύο διαφορετικές ιδέες τις οποίες εκφράζουν, δεν υπάρχει όμως μια συμβατική διάκριση. Υπάρχει μια σύγχυση όσον αφορά στην χρήση των δύο όρων τόσο στο σχολείο όσο και στην έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση και πολλές φορές οι δύο όροι χρησιμοποιούνται χωρίς ορισμό (Thompson, 1994α).

Για τον αγγλικό όρο *slope* για την κλίση αναφέρεται ότι συνδέεται με τις λέξεις “steep”, “elevation”, “descent” and “inclined” από την καθημερινή ζωή (Deniz & Kabael, 2017). Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο μέρος, ως αρχική εικόνα για τον όρο κλίση έρχεται η στέγη, η πλαγιά ενός βουνού, η ράμπα ή κάποια άλλη κεκλιμένη επιφάνεια (Stump, 2001α). Επιπλέον, η έννοια της κλίσης υπάρχει σε διαφορετικούς κλάδους όπως η τέχνη, η αρχιτεκτονική, η μηχανική και η φυσική (Deniz & Kabael, 2017).

Όπως αναφέρθηκε, οι όροι *κλίση*, *ρυθμός μεταβολής* και *ανηφοριά* (steepness) χρησιμοποιούνται πολλές φορές στα βιβλία με το ίδιο νόημα (Teuscher & Reys, 2010). Στην έρευνα του Coe (2007) σε καθηγητές μαθηματικών φαίνεται ότι ακόμα και πεπειραμένοι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να διατυπώσουν με συνοχή τη σύνδεση μεταξύ των εννοιών της διαίρεσης, του ρυθμού και της κλίσης.

Η κλίση ευθείας αναφέρεται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια σε κάποια σημεία ως κλίση, σε κάποια ως συντελεστής διεύθυνσης ενώ αλλού και με τους δύο όρους. Ο όρος συντελεστής διεύθυνσης μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές, καθώς η λέξη συντελεστής χρησιμοποιείται και σε άλλα σημεία (συντελεστές πολυωνύμου, συντελεστής μεταβολής). Ακόμα με τον όρο αυτό συνδέεται η κλίση με τη γεωμετρική ερμηνεία και τα διανύσματα και όχι με τη λειτουργική (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2018β).

Όσον αφορά στον συμβολισμό παρατηρούνται διαφορές ανάμεσα σε διαφορετικά πλαίσια και χώρες. Στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιείται το γράμμα α και αργότερα το γράμμα λ στον συντελεστή διεύθυνσης, ενώ στα αγγλικό ο πιο διαδεδομένος συμβολισμός για την κλίση είναι το γράμμα m (Nagle κ.ά., 2013). Ο ορισμός του συντελεστή διεύθυνσης μπορεί να προκαλεί την εντύπωση ότι είναι μία διαφορετική έννοια από την κλίση.

Η εφαπτομένη εισάγεται στη μαθηματική εκπαίδευση σε διαφορετικά πλαίσια και ενώ ο όρος μένει ο ίδιος, αλλάζει ο ορισμός ανάλογα με το πλαίσιο (Biza κ.ά., 2008). Συνήθως η πρώτη επαφή των μαθητών με την έννοια της εφαπτομένης γίνεται στο μάθημα της γεωμετρίας, ως εφαπτομένη κύκλου, ενώ στην προσπάθεια να γίνει αντιληπτή από τους μαθητές χρησιμοποιείται καθημερινή γλώσσα (Kajander & Lovric, 2009). Συχνά αναφέρεται ότι η εφαπτομένη του κύκλου έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Αυτό έχει συνέπειες στην εννοιολόγηση της εφαπτομένης από τους μαθητές, καθώς επικρατούν παρανοήσεις όπως ότι έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη ή ότι αφήνει την καμπύλη στο ίδιο ημιεπίπεδο (Biza κ.ά., 2008· Kajander & Lovric, 2009). Αργότερα ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Συγχρόνως, η έννοια της εφαπτομένης ορίζεται και στην τριγωνομετρία.

Όσον αφορά στην έννοια της εφαπτομένης, έχει παρατηρηθεί ότι οι φοιτητές πολυτεχνικών τμημάτων και μηχανικοί τείνουν να θεωρούν την παράγωγο από την άποψη του ρυθμού μεταβολής, ενώ οι φοιτητές μαθηματικών τμημάτων από την άποψη της εφαπτομένης (Bingolbali & Monaghan, 2008).

4.3.8 Απόψεις των εκπαιδευτικών για τον ρυθμό μεταβολής

Όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 4.2.2, οι καθηγητές μαθηματικών ρωτήθηκαν για την άποψή τους για:

- Την αναγκαιότητα διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής
- Την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής από τους μαθητές
- Τη θέση του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών
- Τους τρόπους διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής
- Τα χαρακτηριστικά στα οποία πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης
- Τις πρακτικές που χρησιμοποιούν στη σχολική τάξη

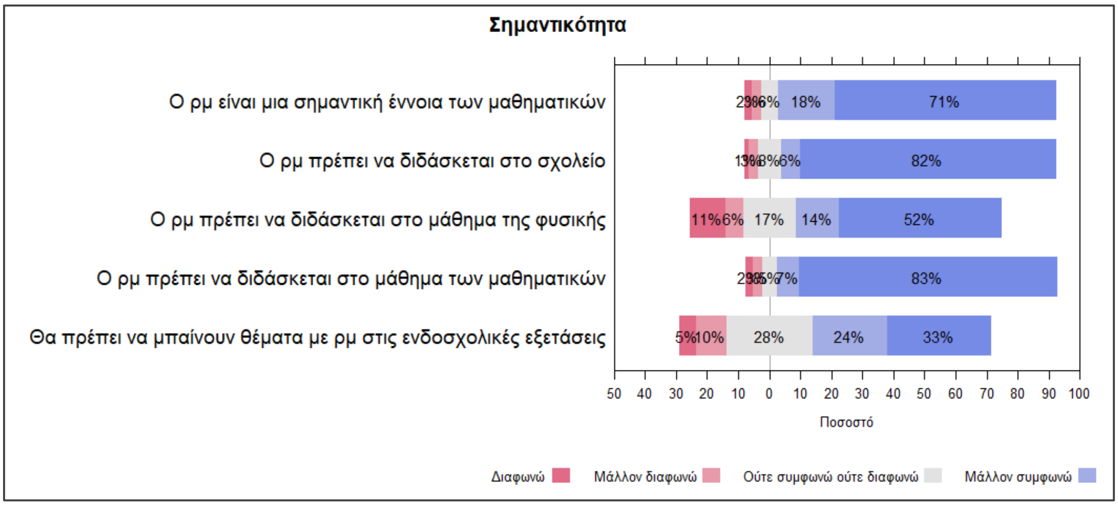
Στον πίνακα 4.8 φαίνονται οι ερωτήσεις που τέθηκαν με τον μέσο όρο των απαντήσεων και την τυπική απόκλιση για την κάθε μία για τις τέσσερεις πρώτες ομάδες. Οι ερωτήσεις ήταν σε πενταβάθμια κλίμακα Likert και κωδικοποιήθηκαν έτσι ώστε το 1 να αντιστοιχεί στο Διαφωνώ πολύ και το 5 στην απάντηση Συμφωνώ πολύ.

Πίνακας 4.10. Περιγραφική στατιστική (τιμές από 1-Διαφωνώ πολύ ως 5- Συμφωνώ πολύ)

RCHIC code	Ερώτηση	N	Mean	St. Dev.
Σημαντικότητα (Necessity)				
NImp	Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια σημαντική έννοια των μαθηματικών	110	4,5	0,99
NCur	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο	110	4,6	0,94
NPhys	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα της φυσικής	108	3,9	1,51
NMath	Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών	109	4,6	0,97
NExams	Θα πρέπει να μπαίνουν θέματα με ρυθμούς μεταβολής στις ενδοσχολικές εξετάσεις	111	3,6	1,27
Κατανόηση μαθητών (Students' understandings)				
UStud	Ο ρυθμός μεταβολής δυσκολεύει τους μαθητές	110	4,5	0,83
UOther	Οι μαθητές αντιλαμβάνονται και άλλους ρυθμούς μεταβολής, εκτός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης	110	3,2	1,32
UGraphs	Οι γραφικές παραστάσεις είναι κατανοητές από τους μαθητές	109	3,1	1,23
UProbl	Οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να λύσουν θέματα ρυθμού μεταβολής με χρήση παραγώγων στη Γ΄ Λυκείου	112	2,6	1,26
URate	Οι περισσότεροι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του ρυθμού μεταβολής στη Γ΄ Λυκείου	112	2,3	1,11

UPhys	Οι μαθητές στη Γ΄ Λυκείου μπορούν να εφαρμόσουν έννοιες των μαθηματικών όπως η παράγωγος στη φυσική	110	2,5	1,10
ULang	Η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής είναι κατανοητή στους μαθητές	110	2,6	1,06
Πρόγραμμα σπουδών (Curriculum)				
CAverage	Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια	112	2,3	1,05
CInstant	Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια	110	2,5	1,22
CSpeed	Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ως ρυθμοί μεταβολής διδάσκονται επαρκώς	110	2,5	1,17
CSymbols	Η διαφορά στο συμβολισμό της παραγώγου μεταξύ φυσικής και μαθηματικών (df/dx, f'(x)) προκαλεί σύγχυση στους μαθητές	112	3,6	1,26
CProblems	Οι ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου για τον ρυθμό μεταβολής είναι επαρκείς για την κατανόησή του	112	2,6	1,14
Διδασκαλία (Teaching)				
TRepr	Είναι σημαντικό να δίνονται πολλές αναπαραστάσεις για την έννοια της παραγώγου	110	4,6	0,81
TAver	Ο μέσος ρυθμός μεταβολής ως κλίση ευθείας θα έπρεπε να διδάσκεται στο γυμνάσιο	110	2,5	1,40
TDeriv	Ο ρυθμός μεταβολής δεν μπορεί να διδαχτεί αν δεν γνωρίζει ο μαθητής παραγώγους	109	2,7	1,38
TInstant	Θα βοηθούσε να διδάσκεται ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ως το όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής	110	3,2	1,30
TIntuit	Θα βοηθούσε να έχει διδαχτεί διαισθητικά ο ρυθμός μεταβολής πριν τις παραγώγους	107	3,8	1,28

Οι καθηγητές μαθηματικών φαίνεται να ενστερνίζονται την άποψη ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μία σημαντική έννοια της Μαθηματικής Ανάλυσης, καθώς το 89% συμφωνεί πολύ ή συμφωνεί με την παραπάνω πρόταση. Σε ποσοστό 66% πιστεύουν ότι ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στη φυσική και σε ποσοστό 90% ότι πρέπει να διδάσκεται στα μαθηματικά και γενικότερα οι περισσότεροι πιστεύουν ότι πρέπει να αποτελεί μέρος του προγράμματος σπουδών (88%). Περισσότεροι από τους μισούς από τους καθηγητές που ερωτήθηκαν (57%) συμφωνούν ότι θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται θέματα με ρυθμούς μεταβολής στις εξετάσεις.



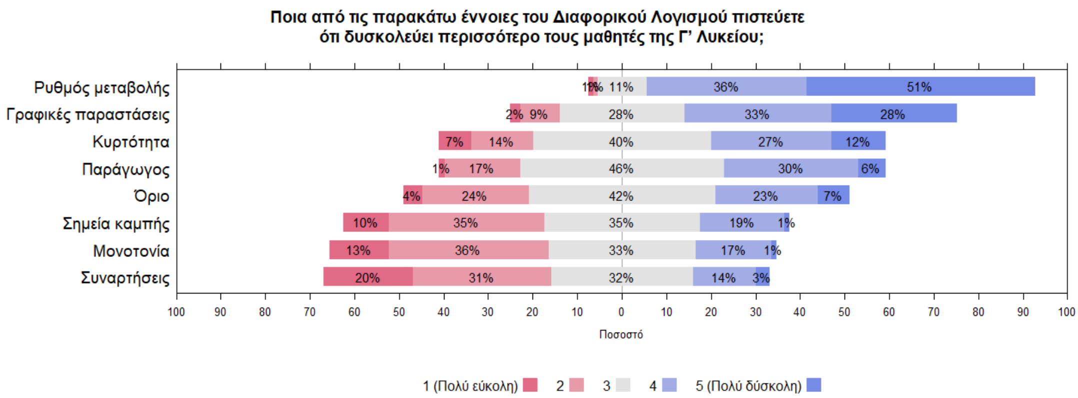
Γράφημα 4.2. Απόψεις για τη σημαντικότητα της έννοιας του ρυθμού μεταβολής

Στην ερώτηση «Ποια από τις παρακάτω έννοιες του Διαφορικού Λογισμού πιστεύετε ότι δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου;» φαίνεται ότι υπάρχει συμφωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μία δύσκολη έννοια (Πίνακας 4.11).

Πίνακας 4.11. Πιο δύσκολες έννοιες του Διαφορικού Λογισμού για τους μαθητές (τιμές από 1-Λιγότερο δύσκολο έως 5-Περισσότερο δύσκολο)

Έννοια	N	Mean	St. Dev.
Ρυθμός μεταβολής	112	4,4	0,78
Γραφικές παραστάσεις	109	3,6	1,21
Παράγωγος	107	3,0	1,16
Κυρτότητα	107	3,0	1,33
Όριο	108	2,9	1,20
Σημεία καμπής	107	2,5	1,11
Συναρτήσεις	107	2,4	1,18
Μονοτονία	107	2,4	1,09

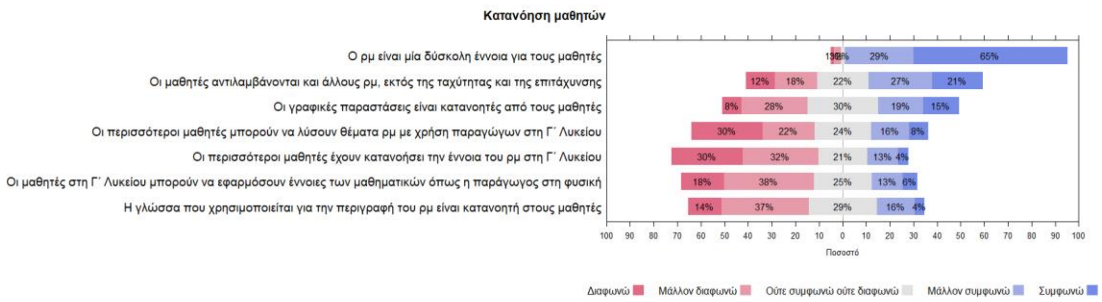
Συγκεκριμένα οι περισσότεροι καθηγητές στην Ελλάδα πιστεύουν ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι από τις πιο δύσκολες έννοιες των μαθηματικών (87%) (Γράφημα 4.3). Οι γραφικές παραστάσεις οι οποίες είναι απαραίτητες για την οπτικοποίηση του ρυθμού μεταβολής θεωρούνται από τους περισσότερους (61%) αρκετά δύσκολες για τους μαθητές. Έννοιες όπως η μονοτονία και τα ακρότατα που συνδέονται περισσότερο με αλγοριθμικό χειρισμό θεωρήθηκαν πιο εύκολες για τους μαθητές.



Γράφημα 4.3. Απαντήσεις καθηγητών σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών σε έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης

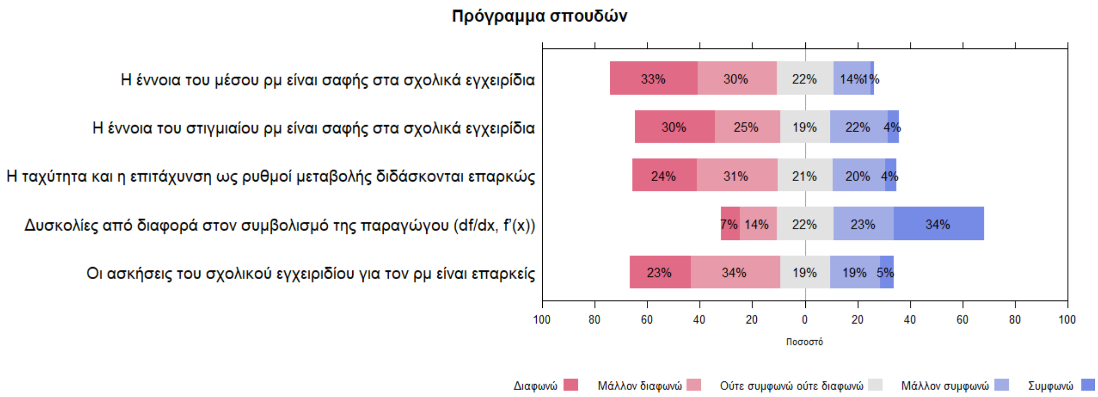
Σε σχέση με την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής, οι καθηγητές μαθηματικών πιστεύουν ότι αποτελεί μία δύσκολη έννοια για τους μαθητές (94%), και ότι δυσκολεύονται να αντιληφθούν άλλους ρυθμούς μεταβολής εκτός από την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο πλαίσιο της κίνησης (48%) (Γράφημα 4.4). Ακόμα το ένα τρίτο (34%) δήλωσε ότι συμφωνεί ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν τις γραφικές παραστάσεις.

Μικρό ποσοστό των ερωτηθέντων καθηγητών πιστεύει ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν τον ρυθμό μεταβολής στην Γ΄ Λυκείου (17%), μπορούν να λύσουν προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής (24%) και να εφαρμόσουν έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης όπως την παράγωγο στη φυσική (19%). Μόνο το 1/5 των καθηγητών πιστεύει ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή ρυθμών μεταβολής είναι κατανοητή από τους μαθητές.



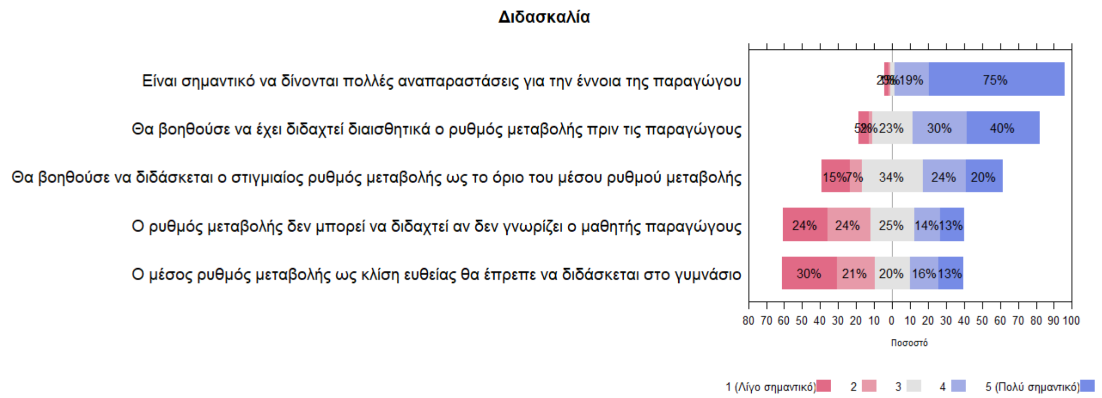
Γράφημα 4.4. Απαντήσεις των καθηγητών σε σχέση με τις δυσκολίες των μαθητών

Στους καθηγητές τέθηκαν ακόμα ερωτήσεις για τη θέση του ρυθμού μεταβολής στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (Γράφημα 4.5). Ένα μικρό ποσοστό των ερωτηθέντων πιστεύει ότι τόσο ο μέσος όσο και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής είναι ορισμένοι με σαφήνεια στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών (15% και 26% αντίστοιχα). Για τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής τα ποσοστά είναι λίγο μεγαλύτερα καθώς στο κεφάλαιο του Διαφορικού Λογισμού στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου υπάρχει ο ορισμός του. Το ένα τέταρτο περίπου (24%) των καθηγητών της έρευνας πιστεύουν ότι τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής είναι αρκετά. Ακόμα, οι περισσότεροι καθηγητές μαθηματικών φαίνεται να αμφιβάλλουν ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση διδάσκονται επαρκώς (55%). Οι εκπαιδευτικοί σε μεγάλο βαθμό πιστεύουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται με τον συμβολισμό της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής (57%) και τη διαφορά του συμβολισμού στα μαθηματικά και στη φυσική.



Γράφημα 4.5. Απαντήσεις καθηγητών σχετικά με τη θέση του ρυθμού μεταβολής στο πρόγραμμα σπουδών

Η επόμενη ομάδα ερωτήσεων αφορούσε θέματα διδακτικής της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής (Γράφημα 4.6). Σχεδόν όλοι οι καθηγητές (94%) που συμμετείχαν στην έρευνα πιστεύουν ότι είναι σημαντικό να δίνονται όσο δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις στους μαθητές για την έννοια της παραγώγου. Σαράντα οχτώ τοις εκατό των ερωτώμενων συμφώνησαν ότι ο ρυθμός μεταβολής θα μπορούσε να διδαχτεί χωρίς οι μαθητές να γνωρίζουν παραγώγους. Περίπου τα δύο τρίτα των συμμετεχόντων δήλωσαν ότι η διαισθητική διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής θα ήταν χρήσιμη (70%). Παρόλα αυτά μόνο το 29% θα δίδασκε την κλίση ως ρυθμό μεταβολής στο γυμνάσιο.

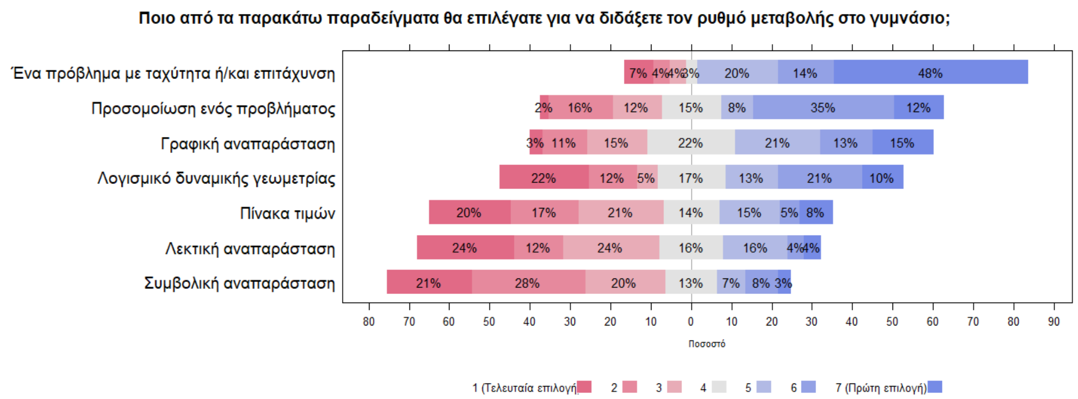


Γράφημα 4.6. Απαντήσεις καθηγητών σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής

Σε σχέση με τον τρόπο διδασκαλίας που θα επέλεγαν οι καθηγητές για να διδάξουν τον ρυθμό μεταβολής, η πρώτη επιλογή από το 48% των ερωτηθέντων ήταν ένα πρόβλημα με ταχύτητα ή/και επιτάχυνση (Γράφημα 4.7). Μία προσομοίωση, γραφική αναπαράσταση και εκπαιδευτικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ήταν από τις ενδιάμεσες επιλογές, ενώ λιγότεροι θα επέλεγαν πίνακα τιμών, λεκτική αναπαράσταση και συμβολική αναπαράσταση.

Πίνακας 4.12. Προτιμώμενος τρόπος διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής (τιμές από 1-Τελευταία επιλογή έως 7-Πρώτη επιλογή)

Teaching method		**N**	**Mean**	**St. Dev.**
TMMotion	Ένα πρόβλημα με ταχύτητα ή/και επιτάχυνση	112	5,58	1,8
TMSimul	Προσομοίωση ενός προβλήματος	112	4,61	1,7
TMGraphical	Γραφική αναπαράσταση	112	4,50	1,7
TMEduSoft	Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας	112	3,99	2,1
TMTable	Πίνακα τιμών	112	3,31	1,8
TMWord	Λεκτική αναπαράσταση	112	3,09	1,7
TMSymbolic	Συμβολική αναπαράσταση	112	2,94	1,7



Γράφημα 4.7. Απαντήσεις καθηγητών σε σχέση με τους προτιμώμενους τρόπους διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής

Στην ανοιχτού τύπου ερώτηση για τον στόχο της διδασκαλίας του Διαφορικού Λογισμού στο σχολείο, οι περισσότεροι καθηγητές αναφέρθηκαν σε εφαρμογές, πραγματικά προβλήματα και σύνδεση με άλλες επιστήμες. Χαρακτηριστική απάντηση ήταν η «*Η κατανόηση και η δυνατότητα σύνδεσης και εφαρμογής του στις άλλες θετικές επιστήμες και στην πραγματική ζωή.*»

Στην έρευνα του Fothergill (2011) σε μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών, η σειρά στην οποία κατέταξαν τα χαρακτηριστικά του Διαφορικού Λογισμού ως προς τη σημαντικότητά τους στη διδασκαλία ήταν:

1. Επίλυση προβλήματος
2. Οπτικοποίηση συναρτήσεων
3. Εφαρμογές εκτός μαθηματικών
4. Μαθηματική αυστηρότητα
5. Αλγεβρικές δεξιότητες
6. Δεξιότητες διατύπωσης λύσης
7. Σύνδεση με το πρόγραμμα σπουδών
8. Τεχνολογικές δεξιότητες

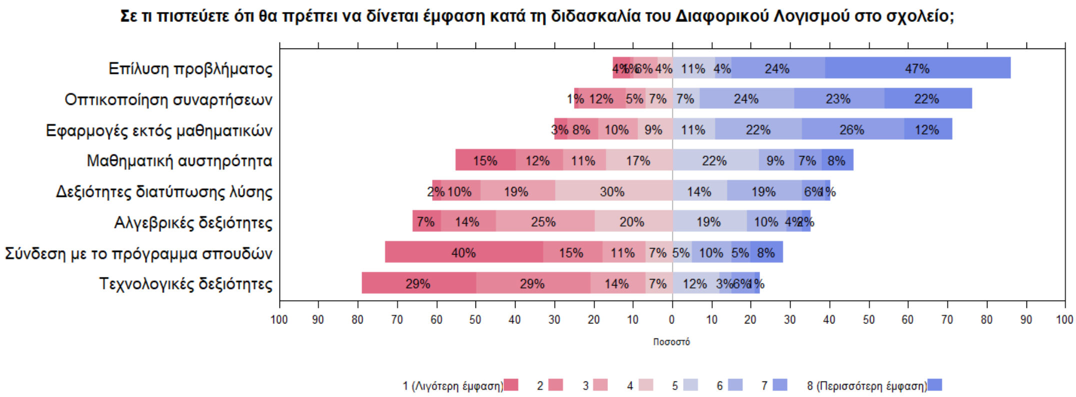
Στην ίδια ερώτηση σε καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα, η σειρά των πρώτων τριών χαρακτηριστικών καθώς και των δύο τελευταίων ήταν η ίδια, ενώ παρατηρήθηκαν διαφορές στη θέση των τριών μεσαίων χαρακτηριστικών.

Πίνακας 4.13. Στατιστικά στοιχεία στην ερώτηση για την έμφαση στη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού

Έμφαση σε	N	Mean	St. Dev.
Επίλυση προβλήματος	112	6,5	1,95
Οπτικοποίηση συναρτήσεων	112	5,8	2,03
Εφαρμογές εκτός μαθηματικών	112	5,3	1,99
Δεξιότητες διατύπωσης λύσης	112	4,4	1,50
Μαθηματική αυστηρότητα	112	4,1	2,11
Αλγεβρικές δεξιότητες	112	3,9	1,68
Σύνδεση με το πρόγραμμα σπουδών	112	3,1	2,32
Τεχνολογικές δεξιότητες	112	2,9	1,90

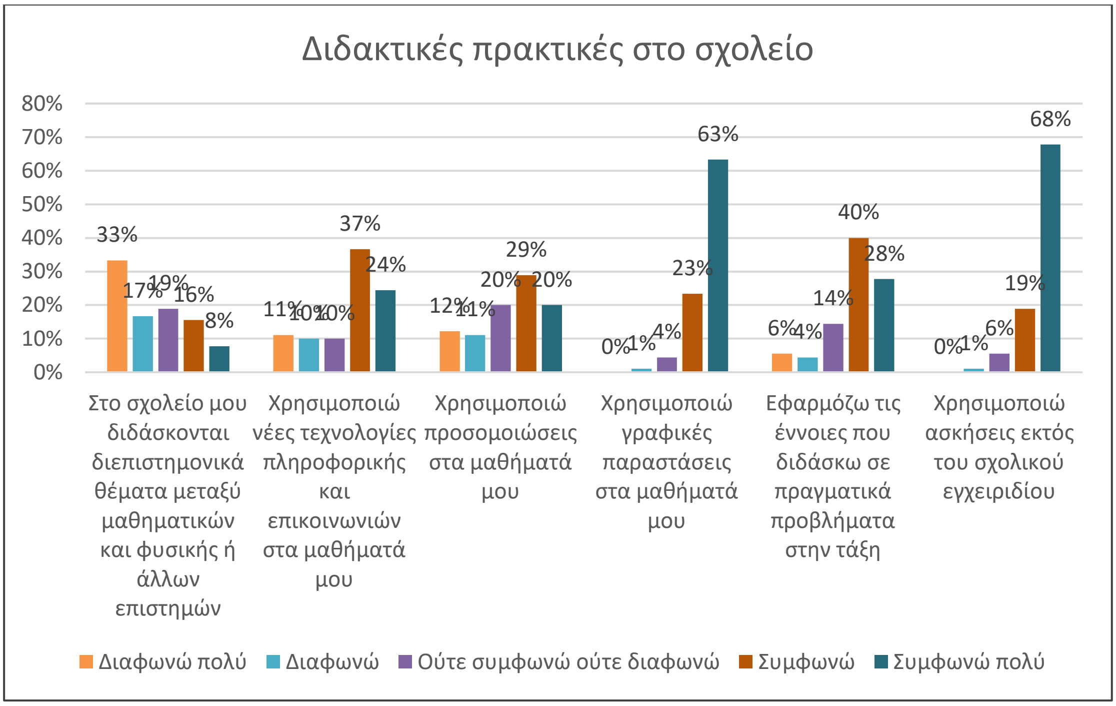
Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται τα χαρακτηριστικά στα οποία πιστεύουν οι καθηγητές ότι θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία του διαφορικού λογισμού. Σύμφωνα με τις απαντήσεις των καθηγητών θα πρέπει να δίνεται έμφαση κυρίως στην επίλυση προβλήματος και στην οπτικοποίηση, όπου το ποσοστό αυτών που επέλεξαν ως πιο σημαντικά αυτά τα δύο χαρακτηριστικά είναι 47% και 22% αντίστοιχα.

Οι εφαρμογές εκτός των μαθηματικών θεωρούνται σημαντικές από περισσότερους από τους μισούς ερωτηθέντες. Η μαθηματική αυστηρότητα, η ικανότητα συγγραφής απόδειξης και οι αλγεβρικές δεξιότητες συγκεντρώνουν λιγότερο από το 50% θετικών απαντήσεων, με υψηλό ποσοστό να τις κατατάσσει στις μεσαίες κλίμακες 4 και 5. Αντίθετα, λιγότερο σημαντικά χαρακτηριστικά θεωρούνται οι τεχνολογικές δεξιότητες και η σύνδεση με το πρόγραμμα σπουδών. Η έρευνα επιβεβαιώνει τα ευρήματα άλλων ερευνών σε σχέση την επίλυση προβλήματος και την οπτικοποίηση ως σημαντικών χαρακτηριστικών της διδασκαλίας του Διαφορικού Λογισμού (Fothergill, 2011).



Γράφημα 4.8. Σε ποια χαρακτηριστικά θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία του διαφορικού λογισμού

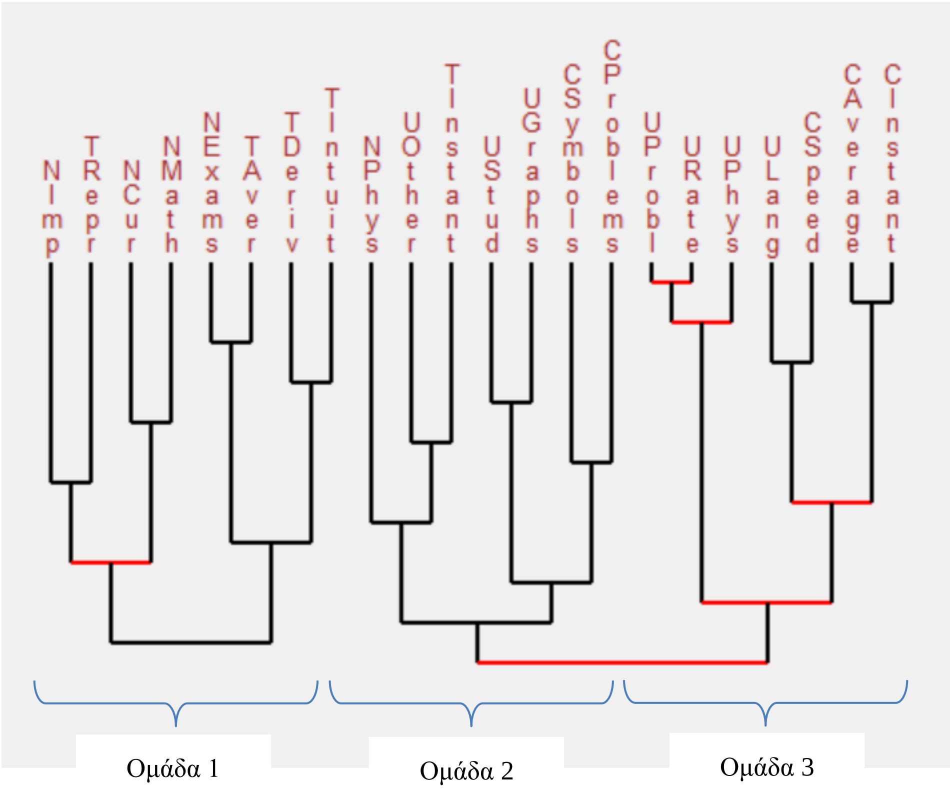
Στην τελευταία ομάδα ερωτήσεων υπήρχαν προτάσεις για τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούσαν οι εκπαιδευτικοί στη σχολική τάξη (Γράφημα 4.9). Σχεδόν όλοι χρησιμοποιούσαν ασκήσεις εκτός του σχολικού βιβλίου (87%) και γραφικές παραστάσεις (86%). Υψηλό ποσοστό δήλωσε ότι εφάρμοζε τις έννοιες σε πραγματικά προβλήματα (68%), ότι χρησιμοποιούσε νέες τεχνολογίες (61%), αλλά και προσομοιώσεις (49%). Τα διεπιστημονικά θέματα μεταξύ μαθηματικών και φυσικής ή άλλων επιστημών φαίνεται ότι δεν συνηθίζονται στα σχολεία, καθώς το ένα τέταρτο των ερωτώμενων συμφώνησε με αυτή την πρόταση.



Γράφημα 4.9. Σχολικές πρακτικές εκπαιδευτικών

Τέλος, στην ανοιχτού τύπου ερώτηση για το ποια εκπαιδευτικά λογισμικά χρησιμοποιήσαν το τελευταίο έτος, η πιο συνηθισμένη απάντηση ήταν το GeoGebra (54,4%), ενώ αναφέρθηκαν και άλλα, όπως το Geometer's Sketchpad, το Cabri, και το Function Probe.

Στα δεδομένα εφαρμόστηκε συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με το πακέτο του R-Project RCHIC, και προέκυψαν το διάγραμμα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα. Στο διάγραμμα ομοιότητας (Γράφημα 4.10) εμφανίζονται τρεις ομάδες ερωτήσεων σε σχέση με την ομοιογένεια των απαντήσεων των εκπαιδευτικών. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από απαντήσεις όπως ότι ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο (NCur) και συγκεκριμένα στα μαθηματικά (NMath), ότι είναι μία σημαντική έννοια (NImp) και οι πρέπει να δίνονται πολλαπλές αναπαραστάσεις του (TRepr). Η δεύτερη υποομάδα της πρώτης ομάδας αποτελείται από τις μεταβλητές ότι ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στα θέματα των εξετάσεων (NExams) και από αυτές που δηλώνουν ότι ο ρυθμός θα μπορούσε να διδαχτεί διαισθητικά νωρίτερα, δηλαδή ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής ως κλίση θα έπρεπε να αποτελεί μέρος της ύλης του γυμνασίου (TAver), ότι μπορεί να διδαχτεί αν οι μαθητές δεν γνωρίζουν παραγώγους (TDeriv) και θα βοηθούσε η διαισθητική διδασκαλία του πριν τις παραγώγους (TIntuit).



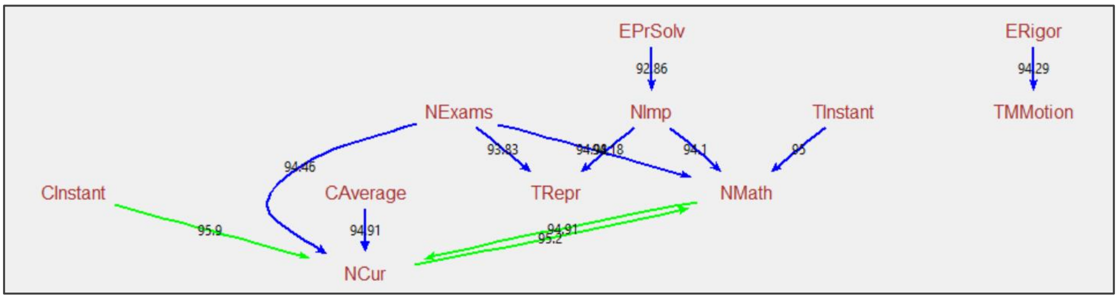
Γράφημα 4.10. Διάγραμμα ομοιότητας

Στη δεύτερη ομάδα που φάνηκε στο διάγραμμα ομοιότητας, συμμετέχουν οι μεταβλητές που σχετίζονται με τη φυσική, όπως ότι ο ρυθμός μεταβολής θα πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα της φυσικής (NImp), ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται και άλλους ρυθμούς μεταβολής, εκτός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης (UOther), ότι η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια και δεν δυσκολεύει τους φοιτητές (CInstant). Η δεύτερη υποομάδα της ομάδας 2 αποτελείται από μεταβλητές των απόψεων ότι ο ρυθμός μεταβολής (UStud) και οι γραφικές παραστάσεις (UGraphs) δεν δυσκολεύουν τους μαθητές και ότι η διαφορά στο συμβολισμό της παραγώγου μεταξύ φυσικής και μαθηματικών (*df/dx, f΄(x)*) δεν προκαλεί σύγχυση στους μαθητές (CSymbols) και οι ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου για τον ρυθμό μεταβολής είναι επαρκείς για την κατανόησή του (CProblems). Σημειώνεται ότι οι μεταβλητές UStud, CSymbols οι οποίες στο ερωτηματολόγιο δήλωναν αρνητική στάση αντιστράφηκαν κατά την επεξεργασία με το RCHIC.

Στην τρίτη ομάδα, φαίνονται οι προτάσεις που δηλώνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές στη Γ΄ Λυκείου μπορούν να λύσουν θέματα ρυθμού μεταβολής με χρήση παραγώγων (UProbl), έχουν κατανοήσει την έννοια του ρυθμού μεταβολής (URate), και ότι μπορούν να εφαρμόσουν έννοιες των μαθηματικών όπως η παράγωγος στη φυσική

(UPhys). Ανάμεσα στις μεταβλητές UProbl and URate καθώς και στον συνδυασμό τους με τη μεταβλητή UPhys [(UProbl, URate), UPhys] παρουσιάστηκε ισχυρό επίπεδο ομοιότητας. Τα επίπεδα αυτά φαίνονται με κόκκινη γραμμή που δείχνει μεγαλύτερη σημαντικότητα. Στην τρίτη αυτή ομάδα είναι και οι απόψεις ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής είναι κατανοητή στους μαθητές (ULang), η ταχύτητα και η επιτάχυνση ως ρυθμοί μεταβολής διδάσκονται επαρκώς (CSpeed) και οι έννοιες του μέσου (CAverage) και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια (CInstant).

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα, παρουσιάζονται οι σχέσεις συνεπαγωγής με γραφικό τρόπο (Γράφημα 4.11). Από αυτές συνάγεται αν θετική απάντηση σε ένα ερώτημα συνεπάγεται θετική απάντηση σε κάποιο άλλο. Οι πράσινες γραμμές δείχνουν συνεπαγωγές με επίπεδο σημαντικότητας 95% και οι μπλε με 90%. Σε κάθε γραμμή αναγράφεται το επίπεδο εμπιστοσύνης.

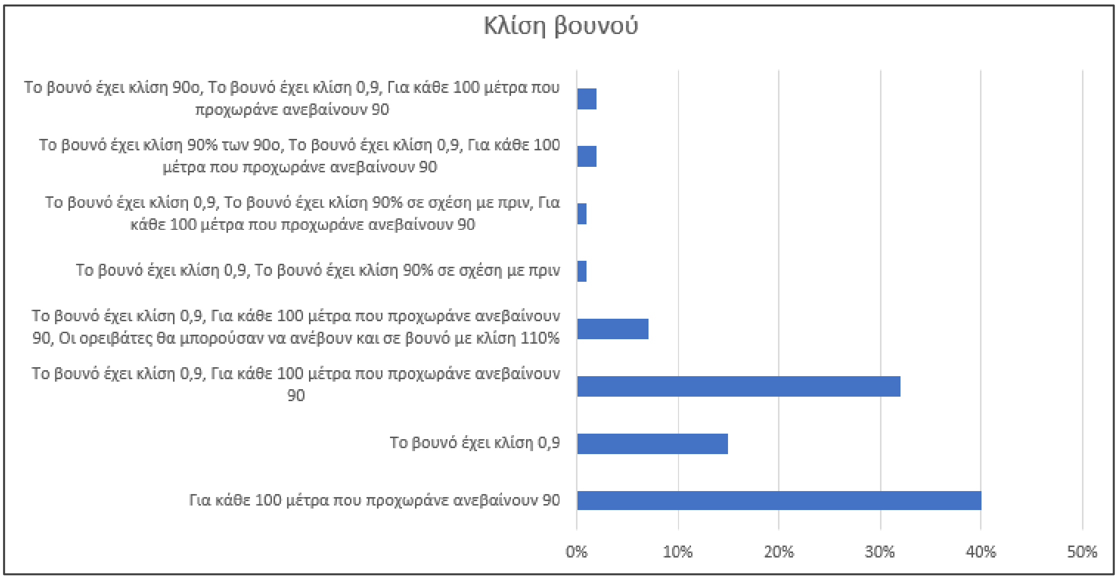


Γράφημα 4.11. Συνεπαγωγικό διάγραμμα (επίπεδο σημαντικότητας 90% και επίπεδο εμπιστοσύνης 90%)

Η πιο έντονη σχέση που παρατηρείται είναι ότι οι εκπαιδευτικοί που πιστεύουν ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ορίζεται με σαφήνεια στο σχολικό εγχειρίδιο (CInstant), πιστεύουν και ότι θα πρέπει να είναι μέρος του προγράμματος σπουδών (NCur) και να διδάσκεται στα μαθηματικά (NMath). Οι σχέσεις συνεπαγωγής δείχνουν ακόμα ότι οι καθηγητές μαθηματικών που συμφωνούν με την άποψη ότι ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στα θέματα εξετάσεων (NExams), πιστεύουν και ότι θα πρέπει να είναι μέρος του προγράμματος σπουδών (NCur), να διδάσκεται στα μαθηματικά (NMath) και να δίνονται πολλές αναπαραστάσεις του. Ακόμα όσοι θεωρούν ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής θα βοηθούσε αν διδάσκονταν ως το όριο του μέσου (TInstant), συμφωνούν ότι θα πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών.

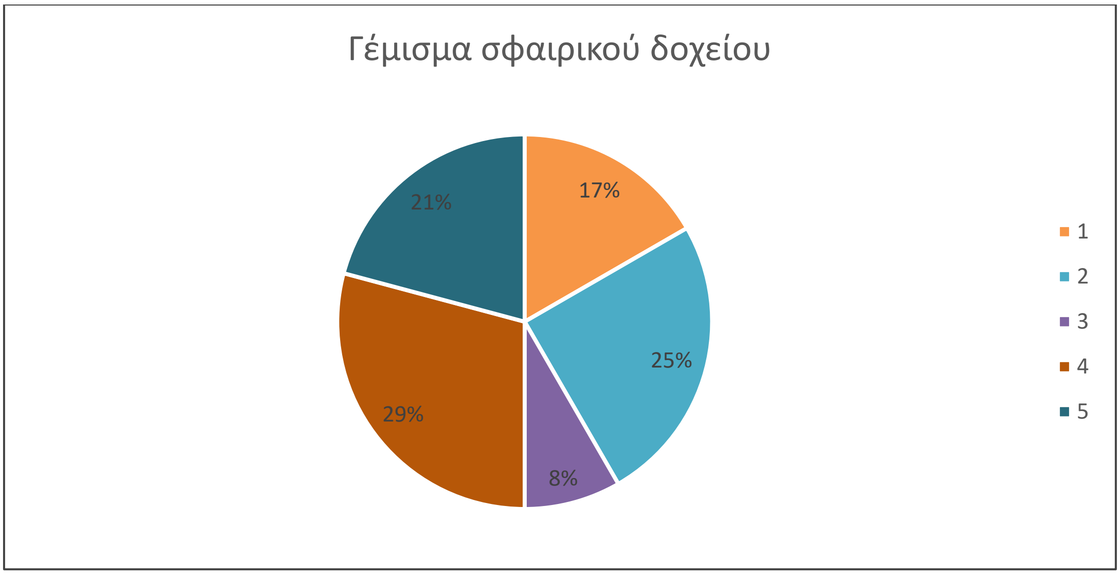
Όσον αφορά στην άποψη για τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού δεν φάνηκε να επηρεάζουν τις άλλες απόψεις των εκπαιδευτικών, με εξαίρεση την έμφαση στην επίλυση προβλήματος (EPrSolv) που συνεπάγεται την άποψη ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι σημαντική έννοια των μαθηματικών (NImp) και την έμφαση στην αυστηρότητα (ERigor) που συνεπάγεται την επιλογή ενός προβλήματος με ταχύτητα ή/και επιτάχυνση για τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής (TMMotion).

Όσον αφορά στην ερώτηση με το σήμα κλίσης οι περισσότεροι καθηγητές επέλεξαν την ερμηνεία που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών (40%), ενώ πάνω από το 30% επέλεξαν αυτή την ερμηνεία και ότι το βουνό έχει κλίση 0,9. Το 15% επέλεξε μόνο την απάντηση ότι το βουνό έχει κλίση 0,9. Το ποσοστό αυτών που επέλεξαν και τις τρεις απαντήσεις, ότι το βουνό έχει κλίση 0,9, ότι για κάθε 100 μέτρα που προχωράνε οι ορειβάτες ανεβαίνουν 90 και ότι θα μπορούσαν να ανέβουν βουνό με κλίση μεγαλύτερη από 100%, ήταν 7% (Γράφημα 4.12).



Γράφημα 4.12. Ποσοστά απαντήσεων καθηγητών στο ερώτημα με το σήμα κλίσης βουνού

Στο ερώτημα της αντιστοίχισης της γραφικής παράστασης ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο σε ένα σφαιρικό δοχείο, οι απαντήσεις ήταν μοιρασμένες με το 29% να επιλέγει το σωστό διάγραμμα από τις επιλογές, ενώ 25% των καθηγητών επέλεξαν το διάγραμμα 2 όπου στην αρχή αυξάνεται αργά ο όγκος του νερού σε με το ύψος, μετά πιο γρήγορα και μετά πάλι πιο αργά (Γράφημα 4.13).



Γράφημα 4.13. Ποσοστά απαντήσεων καθηγητών στην αντιστοίχιση δοχείου και γραφικής παράστασης

4.4 Συζήτηση

Όπως προαναφέρθηκε η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι ένας από αυτούς τους παράγοντες και αξίζει να μελετηθεί, έτσι ώστε να γίνουν προτάσεις βελτίωσής τους. Όπως αναφέρεται σε διεθνείς έρευνες, οι αναφορές στον ρυθμό μεταβολής σε αρκετά μαθηματικά σχολικά εγχειρίδια είναι ασαφείς και αποσπασματικές και σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση στους μαθητές (Confrey & Smith, 1994).

Τα κεφάλαια του λόγου, των αναλογιών και των ποσοστών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση συγκαταλέγονται στα πιο απαιτητικά μέρη της ύλης. Δίνονται αρκετοί εναλλακτικοί τρόποι για επίλυση προβλημάτων αναλογιών, αλλά δεν έχει υιοθετηθεί μία αναπαράσταση και ένας τρόπος που θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τέτοιου τύπου προβλήματα, όπως ενδεικτικά αναφέρεται στην περίπτωση των σχολικών εγχειριδίων της Σιγκαπούρης.

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιούνται πολλές αναπαραστάσεις, όπως λεκτική, αριθμητική, εικόνες, ενώ δεν χρησιμοποιείται η γραφική και η συμβολική αναπαράσταση. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίθετα, κυριαρχεί η συμβολική αναπαράσταση. Δίνεται έμφαση στην αλγεβρική επίλυση τύπων και η σύνδεση με πραγματικές καταστάσεις είναι περιορισμένη. Οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνιών χρησιμοποιούνται σε μικρό βαθμό και αποσπασματικά και συνήθως γίνεται εστίαση στην εκμάθηση μεθοδολογιών και κανόνων. Στην Κύπρο κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογιών υπάρχει μία αναπαράσταση που μοιάζει με την αναπαράσταση που χρησιμοποιείται στο σχολικά εγχειρίδια της Σιγκαπούρης (the model method).

Στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών δεν δίνεται έμφαση στην έννοια του ρυθμού μεταβολής. Η κλίση θεωρείται σημαντική έννοια για τη μετέπειτα κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και άλλων προχωρημένων θεμάτων μαθηματικών. Η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με την οπτικοποίηση αντίστοιχων προβλημάτων και τη γραφική τους αναπαράσταση αποτελεί βάση για την κατανόηση των συναρτήσεων και της παραγώγου. Παρόλα αυτά στην Ελλάδα η διδασκαλία της σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια είναι περιορισμένη και ιδιαίτερα η λειτουργική εννοιολόγηση της και η ερμηνεία της ως μέτρο του ρυθμού μεταβολής. Δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη διδασκαλία της από την άποψη της συμμεταβολής και τη σύνδεση με φυσικά προβλήματα. Παρατηρείται ότι η κλίση ευθείας ορίζεται με διαφορετικούς τρόπους σε διάφορα σημεία της υποχρεωτικής εκπαίδευσης οι οποίοι δεν συνδέονται ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν τη γενική εικόνα της έννοιας.

Από τον τρόπο με τον οποίο αναφέρονται τα σχολικά εγχειρίδια στην κλίση ευθείας δεν αποσαφηνίζεται η έννοια στις διάφορες αναπαραστάσεις της. Το αποτέλεσμα είναι να μη γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές με τον τρόπο που την αντιλαμβάνονται οι μαθηματικοί. Δεν γίνεται διαφοροποίηση της κλίσης στην περίπτωση της γραμμικής συνάρτησης $y=\alpha x$ που εκφράζει ανάλογα ποσά και της γενικής γραμμικής συνάρτησης της μορφής $y=\alpha x+\beta$ (Tyne, 2016). Δεν τονίζεται η διαφορά σχέσεων αναλογίας και άλλων γραμμικών σχέσεων και η ερμηνεία της κλίσης σε κάθε περίπτωση.

Η μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της κλίσης και η αποσαφήνιση των ιδιοτήτων και των αναπαραστάσεών της μπορεί να επεκταθεί στη συνέχεια στην εννοιολόγηση της παραγώγου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής, αλλά και στην ερμηνεία φυσικών φαινομένων. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο σταθερός αλλά και ο μέσος ρυθμός μεταβολής δεν ορίζονται κατά τη μελέτη συναρτήσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο σταθερός και ο μέσος ρυθμός μεταβολής θα μπορούσαν να ορίζονται στο γυμνάσιο κατά τη μελέτη γραμμικών συναρτήσεων. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής, ως ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ακόμα και για μη γραμμικές συναρτήσεις, μπορεί να εισαχθεί ως μία πιο απλή περίπτωση ρυθμού (Stroup, 2002) και να συσχετιστεί με την κλίση, αλλά και με την ταχύτητα, η οποία μελετάται στη φυσική στην ίδια βαθμίδα. Ακόμα ο σταθερός ρυθμός μεταβολής θα μπορούσε να συνδέεται με την κλίση της ευθείας και ο μέσος ρυθμός μεταβολής με την κλίση της τέμνουσας της γραφικής παράστασης. Επιπλέον, η σύνδεση της κλίσης με προβλήματα και η ερμηνεία της σε ρεαλιστικά πλαίσια μπορεί να βοηθήσει στην εννοιολόγησή της.

Στην τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές μελετάνε Διαφορικό Λογισμό, όπου ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής αναφέρεται ως μία περίπτωση παραγώγου, και εισάγονται τύποι και μεθοδολογία για την επίλυση προβλημάτων με ρυθμούς. Η σύνδεση με ρεαλιστικά προβλήματα είναι περιορισμένη και δεν δίνεται έμφαση στην κλίση, στις συναρτήσεις και στην παράγωγο από την άποψη της συμμεταβολής.

Παρόλη τη σύνδεση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής με φυσικά φαινόμενα και τις πολλαπλές του αναπαραστάσεις, στην πράξη στο σχολείο παρουσιάζονται μόνο λίγες εφαρμογές του. Ακόμα και όταν οι μαθητές διδαχτούν παραγώγους δεν γίνεται η σύνδεση με τους ρυθμούς μεταβολής που έχουν γνωρίσει από τη φυσική και δεν αποσαφηνίζονται οι σχέσεις μεταξύ κλίσης, εφαπτομένης, παραγώγου και ρυθμού.

Η ορολογία που χρησιμοποιείται γύρω από την έννοια του ρυθμού μεταβολής και γενικά την περιγραφή δυναμικών φαινομένων μπορεί να προκαλεί παρανοήσεις, καθώς εμπεριέχει ασάφειες, όρους δανεισμένους από την καθημερινή γλώσσα που χρησιμοποιούνται χωρίς ορισμό ή ορίζονται με διαφορετικούς τρόπους. Οι ρυθμός μεταβολής χρησιμοποιείται σε μεγάλες προτάσεις με πολλά επίθετα ή επιρρήματα. Αν οι προτάσεις συντομευτούν ή κάποιες λέξεις παραληφθούν, όπως πολλές φορές γίνεται στον προφορικό λόγο, μπορεί να προκληθεί μία τελείως διαφορετική εννοιολογική εικόνα στους μαθητές.

Η διδασκαλία της συνάρτησης περιορίζεται στην αντιστοίχιση και δεν τονίζεται η ιδέα των ποσοτήτων που αλλάζουν ταυτόχρονα (Thompson & Carlson, 2017). Από τον τρόπο που ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής στη Γ΄ Λυκείου, τονίζεται η σύνδεση με την παράγωγο και θεωρείται ως μία τιμή χωρίς να ερμηνεύεται. Κυριαρχεί η εννοιολόγησή του ως συνάρτηση με την έννοια της αντιστοίχισης τιμών και όχι της συμμεταβολής δύο μεγεθών.

Η διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής μέσα από το πρόγραμμα σπουδών και τα σχολικά εγχειρίδια δεν αντιστοιχεί στη σημαντικότητά του στη μαθηματική εκπαίδευση.

Παρόλη τη σημασία της κατανόησης του ρυθμού μεταβολής, τελικά μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών διδάσκονται την έννοια.

Στο μάθημα της φυσικής γίνονται αναφορές σε ρυθμούς μεταβολής. Η ταχύτητα, η επιτάχυνση, αλλά και άλλες έννοιες της φυσικής που εκφράζουν ρυθμούς διδάσκονται στην υποχρεωτική εκπαίδευση, κυρίως με εφαρμογή τύπων. Ακόμα, θα πρέπει να σημειωθεί η μη συμβατότητα των προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών και φυσικής καθώς σε πολλά σημεία στη φυσική απαιτούνται μαθηματικές γνώσεις που δεν έχουν διδαχτεί στα μαθηματικά (Μαλλιάκας & Ματζαβίνου, 2016). Από την άλλη ο ορισμός του ρυθμού μεταβολής με τον τρόπο που γίνεται στη φυσική ενισχύει την αντίληψη ότι είναι η μεταβολή μίας ποσότητας σε μία χρονική μονάδα.

Ιστορικά, για να οριστεί η έννοια της παραγώγου πέρασαν διάφορα στάδια. Η παράγωγος πρώτα χρησιμοποιήθηκε, μετά ανακαλύφτηκε, στη συνέχεια εξερευνήθηκε, αναπτύχθηκε και ονομάστηκε, για να φτάσει τελικά να οριστεί από τους Cauchy και Weierstrass (Grabiner, 1983). Είναι φανερό ότι η διαδικασία αυτή δεν ακολουθείται από τα σχολικά εγχειρίδια και τα προγράμματα σπουδών. Στη διδακτική πράξη και στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια ακολουθείται η ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, καθώς η παράγωγος πρώτα ορίζεται με τον τυπικό της ορισμό, μετά αναφέρονται κάποια αποτελέσματά της και τελικά παρουσιάζονται εφαρμογές της (Grabiner, 1983). Τα μαθηματικά ακολούθησαν μια ανακαλυπτική πορεία η οποία θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στη εκπαιδευτική διαδικασία.

Η έρευνα σε εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών ενισχύει την άποψη ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μία σημαντική έννοια των μαθηματικών που θα πρέπει να τονιστεί και να εννοιολογηθεί στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι καθηγητές μαθηματικών στην Ελλάδα φαίνεται να διαπιστώνουν δυσκολίες των μαθητών να καταλάβουν και να χειριστούν ρυθμούς μεταβολής, τις οποίες αποδίδουν κυρίως στον τρόπο που παρουσιάζεται η έννοια μέσα από το πρόγραμμα σπουδών και στα σχολικά εγχειρίδια.

Οι προτάσεις των ερευνητών για χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής με έναν διαισθητικό τρόπο φαίνεται να υιοθετείται από τους καθηγητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Ο τρόπος όμως που μπορεί να γίνει αυτό δεν είναι σαφής και υπάρχει αμφιβολία για το αν ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να διδαχτεί πριν την παράγωγο. Οι καθηγητές της έρευνας δήλωσαν σε μεγάλο βαθμό, ότι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος να διδαχτεί ο ρυθμός μεταβολής είναι ένα παράδειγμα στο πλαίσιο της κίνησης και ότι η εκπαιδευτική αξιοποίηση ΤΠΕ συνίσταται.

Οι καθηγητές μαθηματικών φαίνεται να αναγνωρίζουν την επίλυση προβλήματος, την οπτικοποίηση και τις εφαρμογές εκτός μαθηματικών ως τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας του Διαφορικού Λογισμού. Παρόλα αυτά, τα χαρακτηριστικά στα οποία δίνεται πραγματικά έμφαση σε ένα σχολικό περιβάλλον και οι λόγοι που επιλέγονται είναι υπό διερεύνηση.

Παρά τον μικρό αριθμό του δείγματος, οι συμμετέχοντες ήταν από πολλές διαφορετικές περιοχές της Ελλάδας, μεγάλο εύρος ηλικιών και διαφορετικής εργασιακής κατάστασης. Από την έρευνα, προκύπτει το ερώτημα ποια είναι η εννοιολογική εικόνα που έχουν οι καθηγητές μαθηματικών για τον ρυθμό μεταβολής. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων σε αυτή την έρευνα υποδηλώνουν ότι η κύρια εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής είναι ως παράγωγος και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής. Πιθανόν όμως να ανακαλούνται διαφορετικές εικόνες του ρυθμού μεταβολής ανάλογα με το πλαίσιο. Με την παραπάνω υπόθεση για την εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής, η πρόταση διδασκαλίας του πριν τις παραγώγους φαίνεται μη εφαρμόσιμη για σημαντικό μέρος των εκπαιδευτικών.

Από το διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι επικρατούν τρεις ομάδες απόψεων. Η πρώτη είναι αυτή που θεωρεί ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι σημαντική έννοια στην οποία οι μαθητές έχουν δυσκολίες και θα βοηθούσε η διαισθητική της αντίληψη πριν την τυπική διδασκαλία του διαφορικού λογισμού. Η δεύτερη άποψη είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια περισσότερο της φυσικής και η τρίτη ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν ιδιαίτερα προβλήματα στην κατανόησή και εφαρμογή της.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή έγινε μία εκτίμηση της σημαντικότητας του ρυθμού μεταβολής και παρουσιάστηκε η θέση του στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών. Εξετάστηκαν τα σχολικά εγχειρίδια ως προς τις αναφορές στον ρυθμό μεταβολής, αλλά και σε βασικές έννοιες που σχετίζονται με την κατανόησή του, όπως ο λόγος, οι αναλογίες και η κλίση. Εντοπίστηκαν κάποια βασικά, ενδεικτικά στοιχεία των σχολικών εγχειριδίων άλλων χωρών σε σχέση με τη διδασκαλία των παραπάνω εννοιών. Ακόμα διερευνήθηκαν οι απόψεις των καθηγητών μαθηματικών για τη θέση του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

5 Εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής

Έρευνες για τον ρυθμό μεταβολής

5.1 Εισαγωγή

Κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας διερευνήθηκαν οι εννοιολογήσεις των φοιτητών για τον ρυθμό μεταβολής. Πραγματοποιήθηκε πρώτα μία πιλοτική έρευνα στην οποία έγινε προσπάθεια να μελετηθεί η επίδραση του πλαισίου και των αναπαραστάσεων κατά την επίλυση προβλημάτων με μεταβολές και ρυθμούς μεταβολής. Στη συνέχεια ακολούθησε η κυρίως έρευνας στην οποία τέθηκαν ερωτήματα σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η μεθοδολογία και τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών.

5.2 Μεθοδολογία

5.2.1 Πλαίσια και αναπαραστάσεις

Η αρχική έρευνα αποσκοπούσε στη διερεύνηση της εννοιολόγησης των αποφοίτων λυκείου για τον ρυθμό μεταβολής σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάστηκε στο 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2016) και εμπλουτισμένα αποτελέσματα με χρήση των διαγραμμάτων που προέκυψαν από τη συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση παρουσιάστηκαν στη 2η ημερίδα υποψηφίων διδακτόρων Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστήμιο Αιγαίου (Ρεμούνδου & Αυγερινός, 2017).

Η πιλοτική έρευνα πραγματοποιήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2015-16 σε φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης περιφερειακού πανεπιστημίου της Ελλάδας. Συμμετείχαν 163 φοιτητές, οι περισσότεροι από τους οποίους ήταν πρωτοετείς από διάφορα μέρη της Ελλάδας και της Κύπρου. Το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών είχαν ακολουθήσει θεωρητική κατεύθυνση σπουδών στο λύκειο και δεν είχαν εξεταστεί στα μαθηματικά στις πανελλαδικές εξετάσεις για την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο.

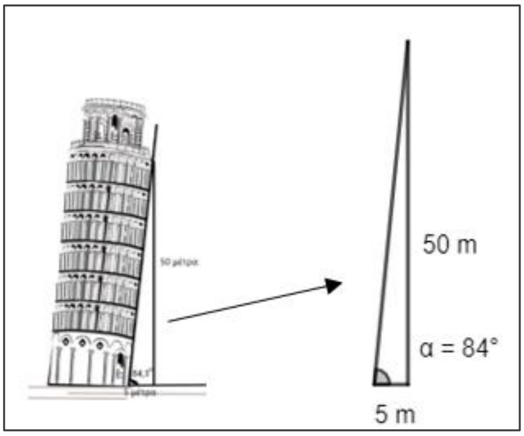
Οι φοιτητές που συμμετείχαν χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες (Α και Β) των 83 και 80 ατόμων αντίστοιχα και συμπλήρωσαν από ένα ερωτηματολόγιο με τέσσερα έργα σχετικά με μεταβολή και ρυθμό μεταβολής (Παράρτημα Γ). Το ερωτηματολόγιο της ομάδας Α περιλάμβανε έργα υπό το πλαίσιο της ταχύτητας, ενώ στο δεύτερο το πλαίσιο αφορούσε σε γέμισμα δοχείων. Τα έργα των δύο ερωτηματολογίων είχαν αντιστοιχία μεταξύ τους και σχετίζονταν με διάφορες αναπαραστάσεις όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1. Το πρώτο έργο του κάθε ερωτηματολογίου δόθηκε με λεκτική περιγραφή, στο δεύτερο τα δεδομένα ήταν με αριθμητική αναπαράσταση σε μορφή πίνακα τιμών, στο τρίτο παρουσιάστηκαν με γραφική αναπαράσταση, ενώ στο τελευταίο η μεταβολή περιεγράφηκε με μορφή συνάρτησης. Το κάθε πρόβλημα είχε δύο ερωτήσεις, μία για σύγκριση των ρυθμών μεταβολής και μία για τη σύγκριση των μεταβολών για την κάθε αναπαράσταση. Οι ερωτήσεις κωδικοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1

Πίνακας 5.1. Πλαίσια και αναπαραστάσεις των δύο ερωτηματολογίων

Αναπαράσταση Πλαίσιο	Λεκτική	Πίνακας τιμών	Γραφική	Συμβολική
Α. Αυτοκίνητα	V1a	T1a	G1a	S1a
	V2a	T2a	G2a	S2a
Β. Δοχεία	V1b	T1b	G1b	S1b
	V2b	T2b	G2b	S2b

Οι σωστές απαντήσεις στα έργα βαθμολογήθηκαν με 1 και οι λανθασμένες με 0, όπως και η έλλειψη απάντησης. Κάθε υποερώτημα των έργων αντιστοιχήθηκε σε μία μεταβλητή και η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με το λογισμικό υπολογιστικών φύλλων Microsoft Excel και με το λογισμικό συνεπαγωγικής στατιστικής C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) όσον αφορά στις σχέσεις ομοιότητας και συνεπαγωγής (Gras & Kuntz, 2008). Επιπλέον, μελετήθηκε ο τρόπος με τον οποίο αιτιολόγησαν οι φοιτητές τις απαντήσεις τους.

Επιπλέον, στους φοιτητές δόθηκαν δύο κοινές ερωτήσεις σχετικά με την κλίση ενός πύργου (Εικόνα 5.1) και την ερμηνεία του οδικού σήματος κλίσης (Εικόνα 5.2). Οι ερωτήσεις αυτές ήταν ανοιχτές και οι απαντήσεις στη δεύτερη ερώτηση κατηγοριοποιήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια στο ερωτηματολόγιο της κύριας έρευνας σε ερώτηση πολλαπλής επιλογής.

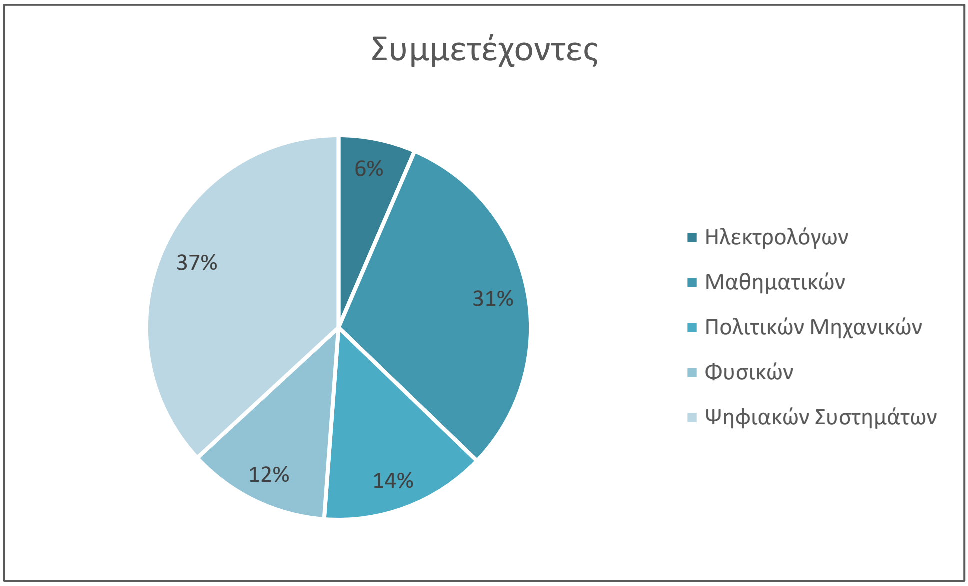


Εικόνα 5.1. Κλίση πύργου

Εικόνα 5.2. Σήμα κλίσης δρόμου

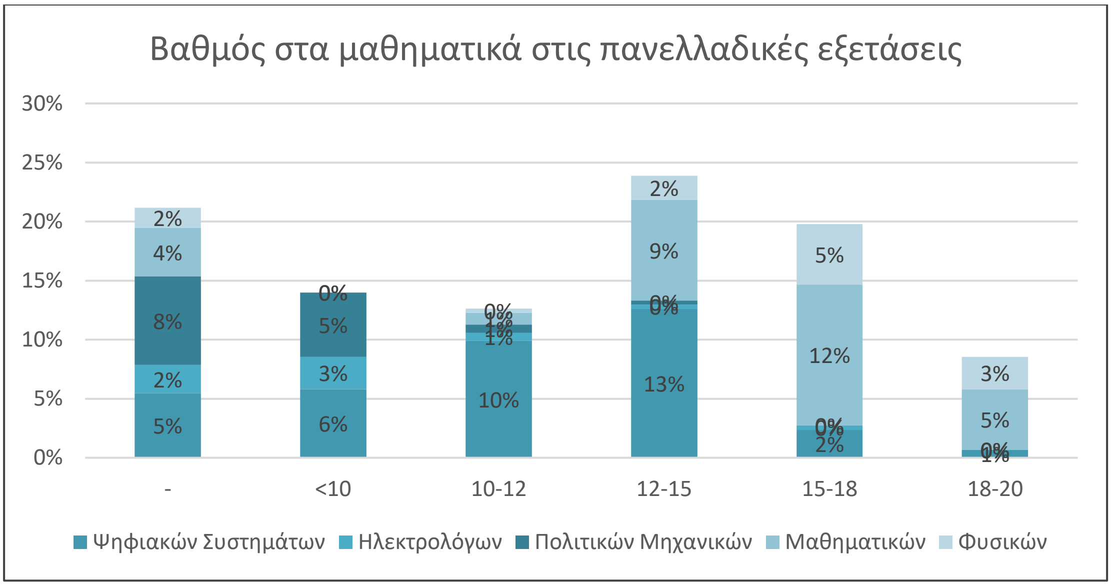
5.2.2 Στάσεις και εννοιολογήσεις

Η βασική έρευνα αποσκοπούσε στη διερεύνηση των εννοιολογήσεων φοιτητών για τον ρυθμό μεταβολής και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2018-19 σε 5 τμήματα Πανεπιστημίων της Ελλάδας. Συμμετείχαν 293 φοιτητές, οι περισσότεροι από τους οποίους ήταν στο τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων (37%).



Γράφημα 5.1. Συμμετέχοντες ανά τμήμα

Οι μισοί περίπου από τους φοιτητές διένυαν το πρώτο έτος σπουδών τους, 17,07% το δεύτερο ή το τρίτο έτος, 26,48% το τέταρτο ή το πέμπτο και οι υπόλοιποι σπούδαζαν περισσότερα από πέντε χρόνια. Η πλειοψηφία των φοιτητών είχαν βαθμό πάνω από 17 τόσο στα μαθηματικά (67,6%) όσο και στη φυσική (55%) στην Γ΄ Λυκείου και ο μέσος όρος των βαθμών των συμμετεχόντων της έρευνας ήταν πάνω από 18 και στα δύο μαθήματα (18,37 και 18, 57 αντίστοιχα). Όσον αφορά στις πανελλαδικές εξετάσεις για την εισαγωγή στο πανεπιστήμιο, ο μέσος όρος των βαθμών των συμμετεχόντων στα μαθηματικά ήταν 13,43 και στη φυσική 14,58. Πρέπει να σημειωθεί ότι κάποιοι, ιδιαίτερα στο τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων δεν διδάχτηκαν φυσική στην Γ΄ Λυκείου και δεν εξετάστηκαν στη φυσική στις πανελλαδικές εξετάσεις για την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο.



Γράφημα 5.2. Βαθμός στα μαθηματικά στις πανελλαδικές εξετάσεις

Οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες ήθελαν να σπουδάσουν κάτι σχετικό με τη σχολή στην οποία τελικά σπούδασαν. Συγκεκριμένα, το 82,05% των φοιτητών του Μαθηματικού δήλωσε ότι ήθελε να σπουδάσει μαθηματικά, όπως αντίστοιχα το 78,13% των φυσικών επιθυμούσε να σπουδάσει φυσική. Στα άλλα τμήματα τα ποσοστά ήταν πιο χαμηλά, και συγκεκριμένα στα τμήματα Πολιτικών Μηχανικών και Ηλεκτρολόγων τα ποσοστά ήταν 53,13% και 30% αντίστοιχα. Στο τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων οι περισσότεροι φοιτητές (52,78%) επιθυμούσαν να σπουδάσουν Πληροφορική.

Στους φοιτητές δόθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο αποτελούταν από 12 έργα, τα οι περισσότερα από τα οποία είχαν υποερωτήματα (Παράρτημα Γ). Χρησιμοποιήθηκαν ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής αλλά και ερωτήσεις ανοιχτού τύπου στις περιπτώσεις που ήταν επιθυμητό να διερευνηθεί ο τρόπος που εκφράζονται οι φοιτητές.

Οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους μαθητές κωδικοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον πίνακα 5.2 και βαθμολογήθηκαν όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.3. Και σε αυτή τη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε ποσοτική ανάλυση των δεδομένων και περιγραφική στατιστική με το λογισμικό R-Project σε συνδυασμό με το λογισμικό υπολογιστικών φύλλων Microsoft Excel, καθώς και συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση με το λογισμικό RCHIC όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 3.3.2.

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι ερωτήσεις που τέθηκαν ομαδοποιημένες με βάση τα κοινά χαρακτηριστικά τους (Πίνακας 5.2). Οι ερωτήσεις στο ερωτηματολόγιο με διαφορετική σειρά και χωρίς την ομαδοποίηση με την οποία παρουσιάζονται εδώ.

Πίνακας 5.2. Κωδικοποίηση ερωτήσεων

Ομάδα	Περιγραφή	Κωδικοποίηση
1η	Στάσεις και πεποιθήσεις	Bel*
2η	Ορισμός και παραδείγματα	RateDef RateEx* Rates_*
3η	Κλίση	Slp* Lin*
4η	Πίνακας τιμών	RaceTable(1-4)*
5η	Γέμισμα δοχείων	Bottles(1-4)*
6η	Πέταγμα μπάλας	Ball(1-3)* BallGraph(1-3)*
7η	Πολυωνυμική συνάρτηση	Pol*
	Γραφική παράσταση	Graph*

Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων αφορούσε στη διερεύνηση των στάσεων των φοιτητών για τα μαθηματικά και τη Μαθηματική Ανάλυση ειδικότερα. Δόθηκαν 13 προτάσεις στις οποίες οι φοιτητές κλήθηκαν να δηλώσουν κατά πόσο συμφωνούν με πενταβάθμια κλίμακα Likert. Οι τιμές της κλίμακας ήταν από 1 ως 5 και αντιστοιχούσαν στις παρακάτω προτάσεις: 1: Όχι, διαφωνώ 2: Μάλλον διαφωνώ 3: Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ 4: Μάλλον συμφωνώ 5: Ναι, συμφωνώ.

Οι προτάσεις κατηγοριοποιήθηκαν στις 5 από τις κατηγορίες που περιγράφονται από τους Tapia και Marsh (2004) που δηλώνουν αξία, αυτοπεποίθηση, κίνητρα, ευχαρίστηση, άγχος και δεν χρησιμοποιήθηκε η κατηγορία των προσδοκιών γονέων και καθηγητών (Πίνακας 5.3). Καθώς ο σκοπός δεν ήταν να μελετηθούν ενδελεχώς οι στάσεις και πεποιθήσεις των φοιτητών για τη Μαθηματική Ανάλυση, αλλά να φανεί αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ αυτών και των απαντήσεων στις υπόλοιπες ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκε περιορισμένος αριθμός από τις προτάσεις του εργαλείου των Tapia και Marsh (2004).

Πίνακας 5.3. Προτάσεις στάσεων/πεποιθήσεων

	Κωδικοποίηση	Πρόταση	Κατηγορία
1	BelRealWorld	Η Μαθ. Ανάλυση περιγράφει καταστάσεις του πραγματικού κόσμου	Αξία (Value)
2	BelUseful	Η Μαθ. Ανάλυση δεν είναι χρήσιμη για τους περισσότερους	Αξία (Value)
3	BelDiff	Η Μαθ. Ανάλυση είναι δύσκολη	Αυτοπεποίθηση (Confidence)

4	BelChoise	Θα επέλεγα μαθήματα Μαθ. Ανάλυσης στο πανεπιστήμιο	Κίνητρα (Motivation)
5	BelLike	Μου αρέσει η Μαθ. Ανάλυση	Ευχαρίστηση (Enjoyment)
6	BelWell	Τα πάω καλά στη Μαθ. Ανάλυση	Αυτοπεποίθηση (Confidence)
7	BelAnxiety	Στη Μαθ. Ανάλυση κάνω λάθη επειδή αγχώνομαι	Άγχος (Anxiety)
8	BelPleasure	Το μάθημα της Μαθ. Ανάλυσης είναι ευχάριστο	Ευχαρίστηση (Enjoyment)
9	BelTheory	Όταν διαβάζω μαθηματικά ξεκινάω από τη θεωρία	Θεωρία
10	BelPhysLike	Μου αρέσει να διαβάζω φυσική	Ευχαρίστηση (Physics enjoyment)
11	BelPhMath	Προτιμάω τη φυσική από τα μαθηματικά	Ευχαρίστηση (Physics enjoyment)
12	BelRealProb	Καταλαβαίνω καλύτερα τα μαθηματικά όταν τα εφαρμόζω σε πραγματικά προβλήματα	Αξία (Value)
13	BelRate	Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια περισσότερο της φυσικής και λιγότερο των μαθηματικών	Ρυθμός μεταβολής

Η επόμενη ομάδα ερωτήσεων σχετιζόταν με τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής και παραδείγματά του. Σε αυτή την ομάδα υπήρχε μία ερώτηση που ήταν ανοιχτού τύπου στην οποία ζητήθηκε ο ορισμός του ρυθμού μεταβολής (RateDef). Συγκεκριμένα, δόθηκε η πρόταση «Ο ρυθμός μεταβολής είναι η μεταβολή μίας ποσότητας y» και ζητήθηκε από τους φοιτητές να γράψουν αν συμφωνούν και να συμπληρώσουν τον ορισμό. Ως συνέχεια της ερώτησης αυτής ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να εντοπίσουν τέσσερεις ρυθμούς μεταβολής που γνωρίζουν από τον φυσικό κόσμο (RateEx(1-4)).

Στο τρίτο ερώτημα της ομάδας αυτής ζητήθηκε η αναγνώριση ή μη ποσοτήτων ως ρυθμών μεταβολής (Rates_*). Δόθηκαν λεκτικά κάποιες ποσότητες και ρωτήθηκαν οι φοιτητές, αν οι ποσότητες αυτές εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής και ποιων ποσοτήτων σε κάθε περίπτωση (Πίνακας 5.4). Μέσω του ερωτήματος αυτού έγινε μία προσπάθεια να διερευνηθεί κατά πόσο οι φοιτητές αναγνωρίζουν ρυθμούς μεταβολής και συνδέουν τις έννοιες της κλίσης, της παραγώγου και του ρυθμού.

Πίνακας 5.4. Αναγνώριση ρυθμών μεταβολής

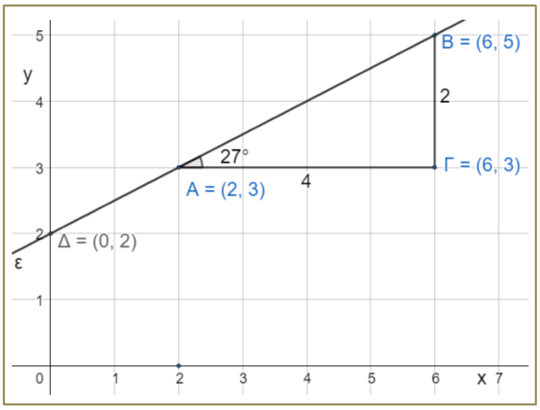
Κωδικοποίηση	Πρόταση
Rates_Accel	Επιτάχυνση σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση
Rates_Dist	Απόσταση σώματος από σημείο
Rates_Time	Χρόνος από την έναρξη ενός αγώνα δρόμου

Rates_Speed	Στιγμιαία ταχύτητα αυτοκινήτου
Rates_Volume	Ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του μέσα σε ένα κυλινδρικό δοχείο
Rates_Der	Ο παράγωγος αριθμός *f'(α)* της συνάρτησης *f(x)* στο σημείο *α*
Rates_Ratio	Ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, όταν $y=\alpha x^2+\beta$
Rates_SecDer	Η δεύτερη παράγωγος *f''(α)* της συνάρτησης *f(x)* στο σημείο *α*
Rates_Prof	Το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος σε σχέση με την ποσότητα που πουλήθηκε
Rates_Cur	Η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος $I = \frac{dq}{dt}$
SlpRate*(*)*	Η κλίση της ευθείας $y=\alpha x+\beta$
Rates_Lim	Το όριο $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(*) Η ερώτηση εντάχθηκε στην ομάδα της κλίσης

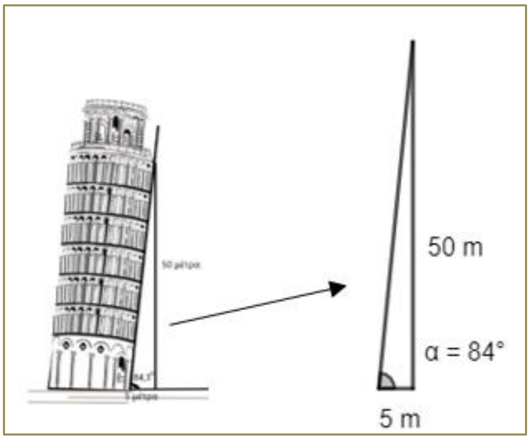
Η τρίτη ομάδα ερωτήσεων σχετίζονταν με την κλίση. Στο πρώτο ερώτημα της ομάδας αυτής δόθηκε η γραφική αναπαράσταση μίας μη αναλογικής γραμμικής σχέσης μεταξύ των *x* και *y*, δηλαδή μίας ευθείας η οποία δεν περνούσε από την αρχή των αξόνων (Εικόνα 5.3). Τέθηκαν υποερωτήματα σε σχέση με την εύρεση της κλίσης (SlpLine) και τον συσχετισμό της με τον ρυθμό μεταβολής (SlpRate). Οι φοιτητές ρωτήθηκαν ακόμα αν τα ποσά *x* και *y* της σχέσης είναι ανάλογα (SlpProp).

Σε αυτό το έργο υπήρχαν και κάποια ερωτήματα σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής. Συγκεκριμένα ζητήθηκε η συμπεριφορά του ρυθμού μεταβολής του *y* ως προς το *x* (LinRate), δηλαδή αν ήταν σταθερός, αυξανόμενος ή μειούμενο και θετικός ή αρνητικός καθώς και ο υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής (LinRateVal) και της μεταβολής του *y* αν το *x* μεταβάλλεται κατά 2 (LinChange).



Εικόνα 5.3. Γραφική παράσταση ευθείας ε

Το δεύτερο (SlpTow) και το τρίτο (SlpSign & Slp110) ερώτημα της ομάδας αυτής σχετίζονταν με παραδείγματα της κλίσης στην καθημερινή ζωή. Το ένα ήταν να βρεθεί η κλίση του πύργου της εικόνας 5.4. Δίνονταν ως δεδομένη η γωνία του πύργου με το έδαφος, και τα μήκη των κάθετων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζεται. Η κλίση μπορούσε να υπολογιστεί είτε ως εφαπτομένη της γωνίας, ή ως ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη. Ο δεύτερος τρόπος απαιτούσε ελάχιστους και εύκολους υπολογισμούς.



Εικόνα 5.4. Κλίση πύργου

Εικόνα 5.5. Σήμα κλίσης δρόμου

Το άλλο ερώτημα ήταν ερμηνευτεί το σήμα για την κλίση του δρόμου της εικόνας 5.5. Το σήμα αυτό, αν και είναι οικείο ως εικόνα και το συναντάμε σε κάποιες περιπτώσεις στον δρόμο, συνήθως με την ένδειξη 10%, δεν είναι εύκολα αντιληπτό. Στο ερώτημα παρουσιάστηκε μία ομάδα ορειβατών που είδαν το σήμα και προσπαθούσαν να το εξηγήσουν. Στη συνέχεια, ένας από αυτούς είπε ότι έχει ανέβει σε βουνό με κλίση 110% και ρωτήθηκαν οι φοιτητές αν το θεωρούν αποδεκτό.

Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι το παράδειγμα του οδικού σήματος αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου κατά τη μελέτη της εφαπτομένης οξείας γωνίας και ερμηνεύεται ως «σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m» (Εικόνα 5.6) (Βλάμος κ.ά., 2017).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ.

Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100} = 0,1$ σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10m.

Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι ΟΑ = 50 m και ανεβαίνουμε ΑΔ = 50 • 0,1 m = 5 m.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 5	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ =
ΟΒ = 100	ΒΕ =	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ =
ΟΓ = 150	ΓΖ =	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ =

Τι παρατηρείτε;

Εικόνα 5.6. Πινακίδα κλίσης από το σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου

Το πρώτο μέρος της ερώτησης αυτής ήταν πολλαπλής επιλογής και οι επιλογές που χρησιμοποιήθηκαν προέκυψαν από το αντίστοιχο ερώτημα της πιλοτικής έρευνας. Σε αυτή συμμετείχαν 163 φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Το ίδιο ερώτημα είχε τεθεί σε ερώτηση ανοιχτού τύπου και οι απαντήσεις ομαδοποιήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν ως πιθανές επιλογές. Στην πιλοτική έρευνα, η απάντηση που αναφέρεται στο σχολικό εγχειρίδιο γράφτηκε από το 3% των φοιτητών. Οι περισσότεροι φοιτητές έγραψαν απλά ότι η κλίση είναι 90%, το οποίο δεν αποτελεί σαφή ένδειξη της εικόνας που είχαν. Μεταξύ των απαντήσεων ήταν ότι η κλίση είναι 90^o , 90% των 90^o ή των 180^o ή της κλίσης που είχε το βουνό σε προηγούμενο σημείο.

Σε αντίστοιχη ερώτηση σε έρευνα του Stump (2001β), φάνηκε ότι οι μαθητές δεν είχαν αναλογιστεί τη σημασία της κλίσης εκφρασμένης σε ποσοστό και μόνο 3 από τους 36 είπαν ότι μπορεί να είναι ο λόγος “rise over run”.

Τα υπόλοιπα έργα παρουσιάζονται χωρίς ομαδοποίηση. Το έργο με τον αγώνα δύο δρομέων (RaceTable(1-4)) τέθηκε με τα δεδομένα σε αριθμητική αναπαράσταση, με πίνακα τιμών. Δόθηκαν οι τιμές της απόστασης από την αφετηρία σε μέτρα και του χρόνου σε λεπτά. Υπήρχαν 4 υποερωτήματα που σχετίζονταν με το πότε προσπερνάει ο ένας δρομέας τον άλλον, ποιος θα φτάσει πρώτος στα 1.400 m, πόση είναι η μέση ταχύτητα σε ένα διάστημα. Το τελευταίο υποερώτημα ήταν να επιλέξουν ποια από τις δύο απαντήσεις της εικόνας 5.7 στο ερώτημα να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα 5 πρώτα λεπτά, είναι σωστή.

Μαθητής 1:

$$\boxed{\begin{array}{c} 312+570+840+1098+1380 = 4200 \\ \frac{4200}{5} = 840 \end{array}}$$

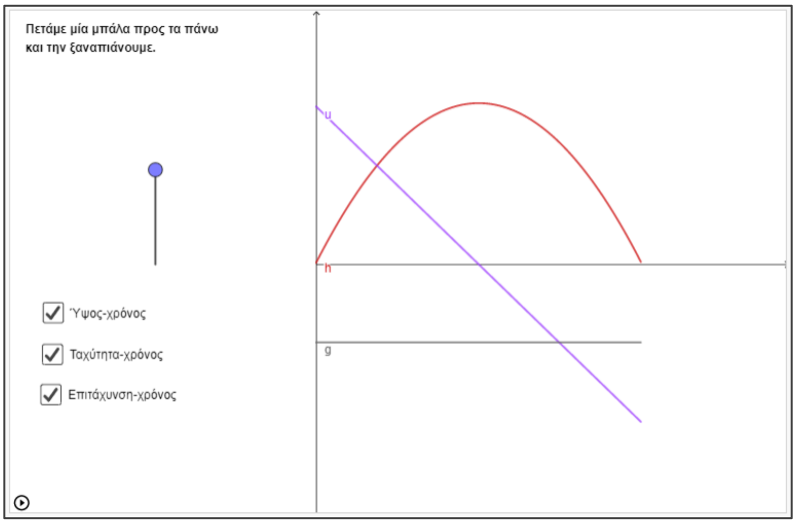
Μαθητής 2:

$$\boxed{\frac{1380}{5} = 276}$$

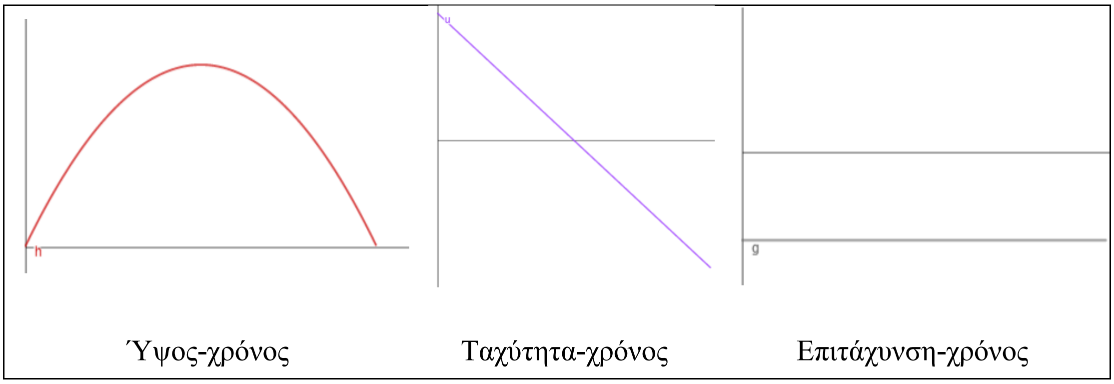
Εικόνα 5.7. Πιθανές απαντήσεις στο ερώτημα εύρεσης της μέσης ταχύτητας

Στην επόμενη ερώτηση (Bottles*) χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο του γεμίσματος δοχείων. Συγκεκριμένα, δόθηκαν τα διαγράμματα ύψους νερού-όγκου νερού για διάφορα δοχεία και ζητήθηκε να αντιστοιχηθούν στα δοχεία. Το γέμισμα δοχείων αποτελεί ένα εναλλακτικό πλαίσιο μελέτης μεταβολής και ρυθμών μεταβολής, όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.2.6.

Η επόμενη ερώτηση ήταν ένα πρόβλημα όπου πετάμε μία μπάλα κάθετα προς τα πάνω και τέθηκαν ερωτήσεις σε σχέση με τη μεταβολή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της μπάλας (Ball*). Εξετάστηκε κατά πόσο οι φοιτητές αντιλαμβάνονται το πραγματικό αυτό πλαίσιο διαισθητικά, χωρίς την παρουσίαση εξισώσεων και ζητήθηκε να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις του ύψους, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε σχέση με τον χρόνο. Τα διαγράμματα που θεωρήθηκαν σωστά ήταν της μορφής της εικόνας 5.9. Ένα GeoGebra applet με τα διαγράμματα αυτά υπάρχουν στη διεύθυνση https://www.GeoGebra.org/m/bG536dsY (Εικόνα 5.8).



Εικόνα 5.8. Πέταγμα μπάλας προς τα πάνω

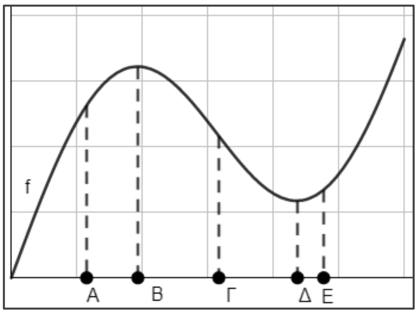


Εικόνα 5.9. Προσδοκόμενα διαγράμματα στην ερώτηση της μπάλας

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την κωδικοποίηση θεωρήθηκε σωστή και η γραφική παράσταση θετικής, σταθερής επιτάχυνσης.

Τέλος, υπήρχαν δύο πιο διαδικασιακά έργα. Στο ένα δόθηκε η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ και ζητήθηκε να υπολογιστεί η παράγωγος *g΄(x)* (PolSymb1Der), να βρεθούν οι τιμές του *x* που ο ρυθμός μεταβολής της *g(x)* μηδενίζεται (PolSymb2Zero) και που είναι θετικός (PolSymb3Pos) και τα διαστήματα που αυξάνεται (PolSymb4Incr).

Στο δεύτερο έργο δόθηκε η γραφική παράσταση της εικόνας 5.10. Για αυτή, ζητήθηκαν τα διαστήματα στα οποία η *f(x)* είναι γνησίως αύξουσα (Graph1FInc), τα σημεία που ο ρυθμός μεταβολής της *f(x)* είναι αρνητικός (Graph2Neg), τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής (Graph3Zero), τα διαστήματα στα οποία ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται (Graph4RInc), να ταξινομηθούν οι παράγωγοι της f στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο λαμβάνοντας υπόψη την πραγματική προσημασμένη τιμή (Graph5Sort) και να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της *f΄(x)* (Graph6Des).



Εικόνα 5.10. Έργο γραφικής παράστασης (Graph*)

5.3 Αποτελέσματα

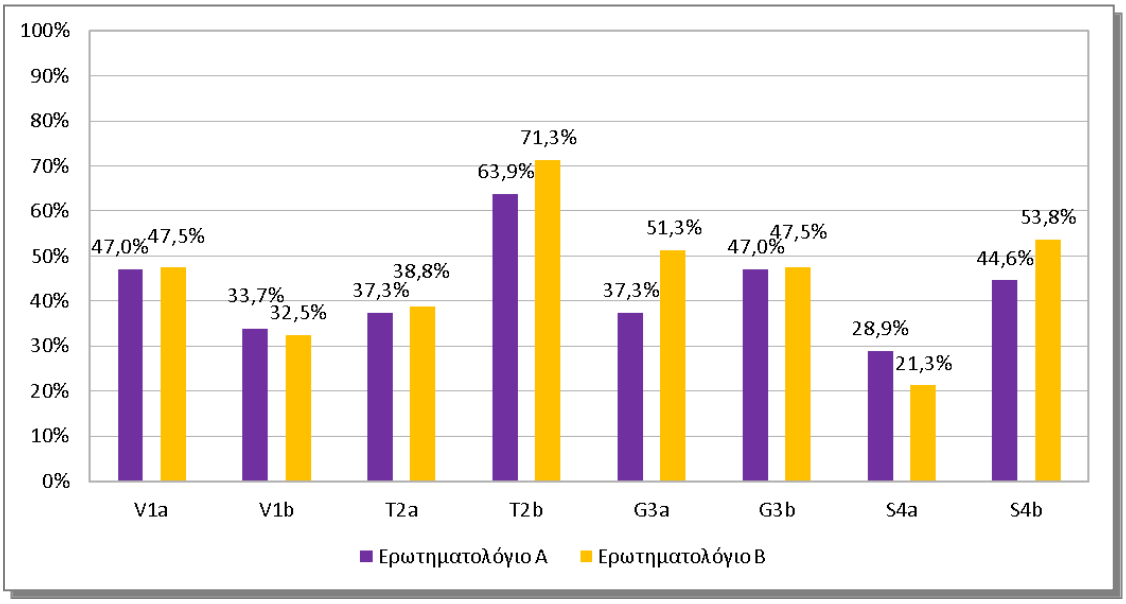
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προαναφερθέντων ερευνών για τις εννοιολογήσεις και τις δυσκολίες φοιτητών σε θέματα με ρυθμούς μεταβολής.

5.3.1 Πλαίσια και αναπαραστάσεις

Όσον αφορά στην πιλοτική έρευνα, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για τα έργα των δύο ερωτηματολογίων απεικονίζονται στον πίνακα 5.5 και γραφικά στο γράφημα 5.3, με μωβ για το πρώτο ερωτηματολόγιο και με κίτρινο για το δεύτερο. Στο πρώτο ερωτηματολόγιο το πλαίσιο είναι δύο αυτοκίνητα που κινούνται και δόθηκε η ταχύτητά τους, ή αλλιώς η απόσταση που διανύουν σε σχέση με τον χρόνο με διάφορες αναπαραστάσεις, λεκτική, αριθμητική, γραφική και συμβολική. Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, το πλαίσιο αφορά σε δύο δοχεία που γεμίζουν με νερό και δόθηκε ο όγκος του νερού στο δοχείο σε σχέση με το χρόνο με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις.

Πίνακας 5.5. Ποσοστά σωστών απαντήσεων

Αναπαράσταση Πλαίσιο	Λεκτική (V)	Πίνακας τιμών (T)	Γραφική (G)	Συμβολική (S)
Α. Αυτοκίνητα (1)	47%	37,3%	37,3%	28,9%
	33,7%	63,9%	47%	44,6%
Β. Δοχεία (2)	47,5%	38,8%	51,3%	21,3%
	32,5%	71,3%	47,5%	53,8%



Γράφημα 5.3. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα απαντήσεων των φοιτητών

Στο πρώτο έργο, που ήταν λεκτικό δόθηκε η ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Από τους 83 φοιτητές του δείγματος οι 39 απάντησαν σωστά (47,0%) για το ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα (V1a). Για το ένα αυτοκίνητο η ταχύτητα δόθηκε σε km/h ενώ για το άλλο σε m/sec. Ενώ οι περισσότεροι μετέτρεψαν επιτυχώς την απόσταση, από χιλιόμετρα σε μέτρα ή το αντίστροφο, αρκετοί ήταν αυτοί που δεν κατάφεραν να μετατρέψουν σωστά τον χρόνο (από ώρες σε δευτερόλεπτα και αντίστροφα) με αποτέλεσμα να μην απαντήσουν σωστά στην ερώτηση. Σε σχέση με το ποιο αυτοκίνητο θα έχει διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση σε μισή ώρα (V1b) το 33,7% των φοιτητών απάντησε σωστά. Στο ερώτημα αυτό, ενώ το 65% βρήκε σωστά την απόσταση που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο του οποίου η ταχύτητα δινόταν σε χιλιόμετρα ανά ώρα, μόνο το 34% απάντησε σωστά όταν η ταχύτητα δινόταν σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

Στο αντίστοιχο έργο στο δεύτερο ερωτηματολόγιο το ποσοστό των σωστών απαντήσεων όσον αφορά στο ερώτημα ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα (V1a) ήταν 47,5%, ενώ στο ερώτημα πόσο νερό θα έχει το κάθε δοχείο σε μισή ώρα (V1b) απάντησε σωστά το 32,5%. Όπως και στο πρώτο ερωτηματολόγιο οι μονάδες μέτρησης ήταν διαφορετικές για τα δύο δοχεία και έγιναν πολλά λάθη σε μετατροπές, ιδιαίτερα στη μετατροπή των μονάδων χρόνου. Έτσι, για το δοχείο Α που ο ρυθμός που γεμίζει δόθηκε σε lt/h οι σωστές απαντήσεις ήταν σε ποσοστό 66%, ενώ για το δοχείο Β για το οποίο οι μονάδες ήταν ml/sec το ποσοστό έπεσε στο 37%.

Στο δεύτερο έργο δόθηκαν δύο πίνακες τιμών με την απόσταση που έχουν διανύσει τα αυτοκίνητα σε διάφορες χρονικές στιγμές. Στο ερώτημα ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών (T2a) το 37,3% των φοιτητών απάντησε σωστά σύμφωνα με τις τιμές του πίνακα. Αρκετά υψηλότερο (63,9%) ήταν το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στο ερώτημα ποιο αυτοκίνητο φτάνει πρώτο σε μια συγκεκριμένη απόσταση (T2b).

Στο ερωτηματολόγιο Β στο ερώτημα ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα (T2a) το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν 38,8%, ενώ το 71,3% απάντησε σωστά για το ποιο δοχείο θα φτάσει πρώτο σε ένα συγκεκριμένο όγκο νερού (T2b). Στο συγκεκριμένο ερώτημα παρουσιάστηκε το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων και στα δύο ερωτηματολόγια.

Το τρίτο έργο είχε τη γραφική παράσταση της απόστασης σε σχέση με τον χρόνο για τα δύο αυτοκίνητα στο ίδιο σύστημα αξόνων και ζητούνταν ποιο πάει πιο γρήγορα μεταξύ δύο τιμών και ποιο έχει διανύσει μεγαλύτερη απόσταση μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το 37,3% των φοιτητών απάντησε σωστά σχετικά με τη σύγκριση της ταχύτητας μεταξύ δύο χρονικών στιγμών (G3a) και αρκετοί αναφέρθηκαν στην κλίση για να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Το 47% απάντησε σωστά για την απόσταση που έχει διανύσει ως μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (G3b).

Στο πλαίσιο των δοχείων οι σωστές απαντήσεις στο τρίτο έργο ήταν 51,3% για το πρώτο ερώτημα (G3a), όπου ζητούνταν ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα μεταξύ δύο συγκεκριμένων χρονικών στιγμών και 47,5% για το δεύτερο (G3b), όπου το ερώτημα ήταν ποιο δοχείο έχει περισσότερο νερό μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Παρατηρείται μια σημαντική διαφορά στο πρώτο ερώτημα του τρίτου έργου μεταξύ των δύο πλαισίων, με τις σωστές απαντήσεις στο δεύτερο ερωτηματολόγιο να είναι περισσότερες.

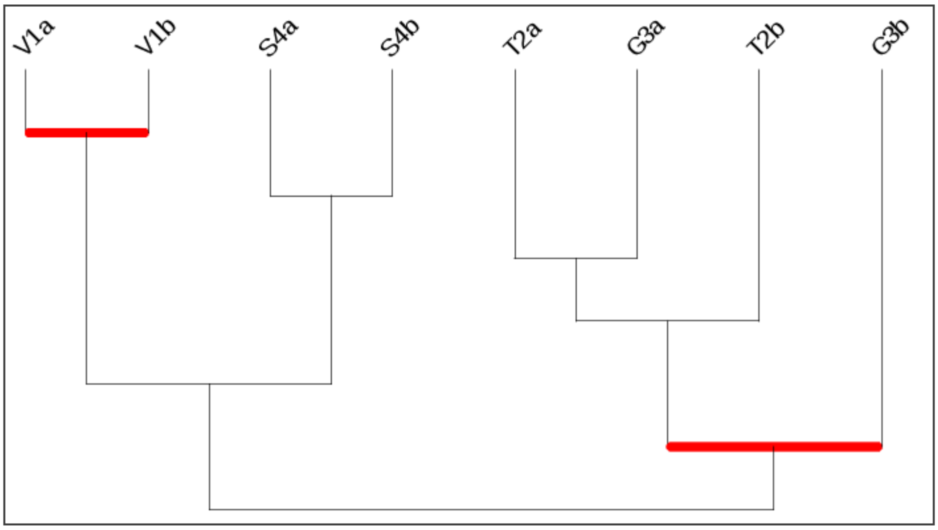
Στο τελευταίο έργο, στο οποίο η μεταβολή της απόστασης σε σχέση με τον χρόνο δόθηκε με τη μορφή συνάρτησης, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων για το ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα (S4a) ήταν αρκετά χαμηλότερο (28,9%). Όσον αφορά στην απόσταση που έχει διανύσει το κάθε αυτοκίνητο ως μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (S4b) αρκετοί ήταν οι φοιτητές (44,6%) που απάντησαν βάζοντας αυτήν την τιμή στις δοσμένες σχέσεις.

Τέλος, στο αντίστοιχο έργο με τα δοχεία και τη συμβολική αναπαράσταση, το 21,3% των φοιτητών απάντησε σωστά στην ερώτηση ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα (S4a) και περίπου οι μισοί (53,8%) στο ερώτημα ποιο δοχείο έχει περισσότερο νερό μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Από το λογισμικό συνεπαγωγικής στατιστικής προέκυψαν τα διαγράμματα ομοιότητας για τα δύο ερωτηματολόγια (Γράφημα 5.4 και 5.5). Σε αυτά παρουσιάζονται οι ομαδοποιήσεις των ερωτημάτων σύμφωνα με τις απαντήσεις των φοιτητών. Οι σχέσεις ομοιότητας που φαίνονται με έντονο κόκκινο χρώμα είναι σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

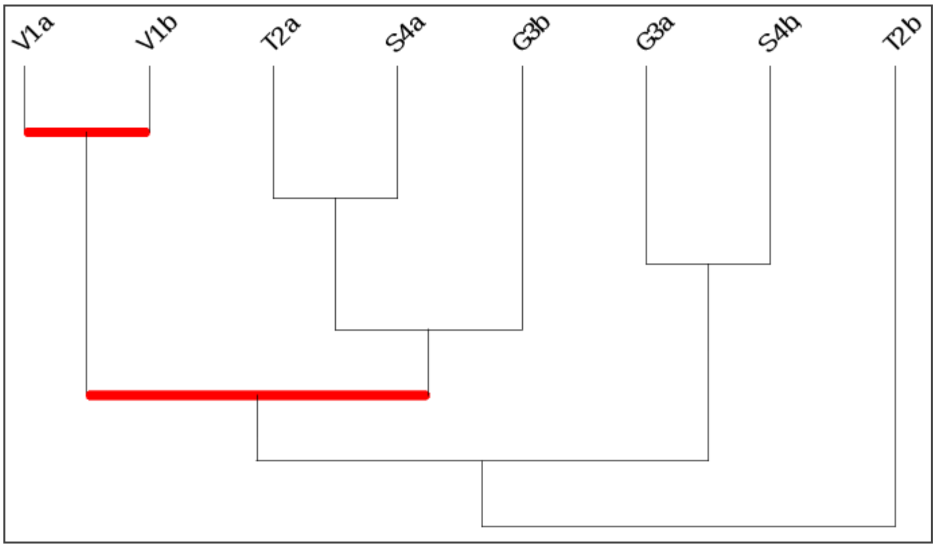
Παρατηρείται ότι οι απαντήσεις των φοιτητών σε όλα τα υποερωτήματα έχουν κάποια σχέση ομοιότητας. Και στα δύο ερωτηματολόγιο η πιο ισχυρή ομοιότητα υπάρχει ανάμεσα στα δύο υποερωτήματα του πρώτου έργου, που τέθηκαν με λεκτική αναπαράσταση (V1a, V1b).

Όσον αφορά στο ερωτηματολόγιο Α παρατηρείται μια ισχυρή ομοιότητα που αφορά όμως μικρό πληθυσμό, μεταξύ των υποερωτημάτων του έργου με τη γραφική αναπαράσταση και της αριθμητικής αναπαράστασης (T2a, G3a, T2b, G3b). Αντίστοιχα προέκυψε ομοιότητα μεταξύ των δύο ερωτημάτων του τέταρτου έργου (S4a, S4b).



Γράφημα 5.4. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των φοιτητών στο ερωτηματολόγιο Α

Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο παρατηρείται ισχυρή ομοιότητα μεταξύ των ερωτημάτων τις λεκτικής αναπαράστασης με κάποια από τα ερωτήματα των άλλων αναπαραστάσεων.

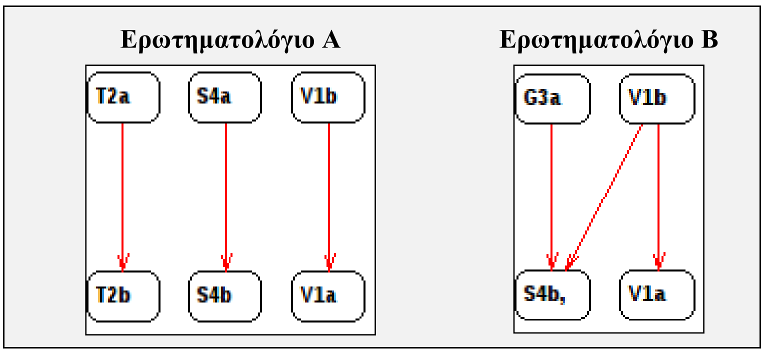


Γράφημα 5.5. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των φοιτητών στο ερωτηματολόγιο Β

Από το λογισμικό CHIC προκύπτει και το συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων μαθητών και φοιτητών. Από αυτό εξάγονται συνεπαγωγικές σχέσεις από τις οποίες φαίνεται αν επιτυχής απάντηση σε κάποιο ερώτημα συνεπάγεται σωστή απάντηση και σε κάποιο άλλο.

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα που προκύπτει από το λογισμικό CHIC αποτυπώνονται οι σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών. Οι συνεπαγωγικές σχέσεις δείχνουν αν επιτυχία σε ένα ερώτημα συνεπάγεται επιτυχία σε κάποιο άλλο και σε ποιο βαθμό. Στο γράφημα 5.6 φαίνονται τα συνεπαγωγικά διαγράμματα για τα δύο ερωτηματολόγια που ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

Στις απαντήσεις και των δύο ομάδων φοιτητών παρατηρείται σημαντική συνεπαγωγική σχέση μεταξύ των δύο ερωτημάτων του λεκτικού έργου (V1a, V1b), καθώς και στα δύο ερωτηματολόγια σωστή απάντηση στο δεύτερο ερώτημα σχετικά με την τιμή της απόστασης και του όγκου σε μισή ώρα συνεπάγεται σωστή απάντηση και στο πρώτο σχετικά με την ταχύτητα.



Γράφημα 5.6. Συνεπαγωγικά διαγράμματα των απαντήσεων των φοιτητών (99%) για τα δύο ερωτηματολόγια

Στο πρώτο ερωτηματολόγιο, όπως προκύπτει από το συνεπαγωγικό διάγραμμα, οι φοιτητές που απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα του τέταρτου έργου (S4a), όπου η σχέση της απόστασης με τον χρόνο δίνονταν με μορφή συνάρτησης και ζητήθηκε ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα, απάντησαν σωστά και στο δεύτερο (S4b) που ζητήθηκε ποιο αυτοκίνητο έχει διανύσει τη μεγαλύτερη απόσταση. Ακόμα, σωστή απάντηση στο πρώτο ερώτημα με τον πίνακα τιμών (T2a) συνεπάγεται σωστή απάντηση και στο δεύτερο (T2b).

Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα του δεύτερου ερωτηματολογίου προκύπτει ότι τόσο η σωστή απάντηση στο πρώτο υποερώτημα του έργου με τη γραφική παράσταση (G3a) όσο και η σωστή απάντηση στο δεύτερο υποερώτημα του λεκτικού έργου (V1b) συνεπάγονται σωστή απάντηση στο δεύτερο υποερώτημα του τέταρτου έργου (S4b).

5.3.2 Στάσεις και εννοιολογήσεις

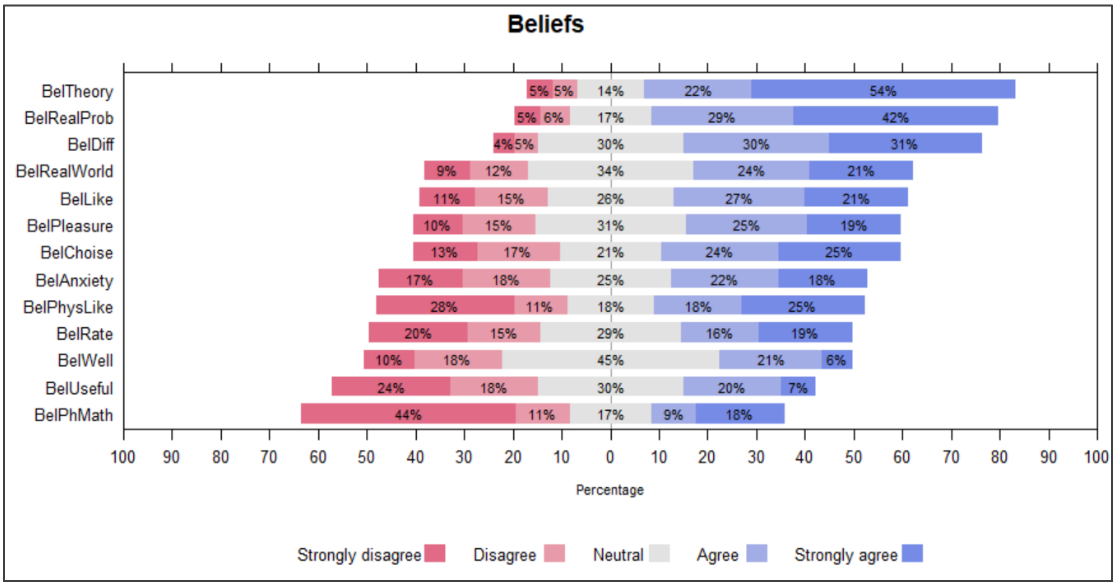
5.3.2.1 Στάσεις

Όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή του ερωτηματολογίου, η πρώτη ομάδα ερωτήσεων αφορούσε στις στάσεις των φοιτητών. Η μέση τιμή των απαντήσεων των φοιτητών σε κάθε μία από τις προτάσεις φαίνεται στον πίνακα 5.6.

Πίνακας 5.6. Προτάσεις στάσεων

Α/Α	Όνομα	Ερώτηση	N	Mean	St. Dev.
1	BelRealWorld	Η Μαθ. Ανάλυση περιγράφει καταστάσεις του πραγματικού κόσμου	293	3,3	1,22
2	BelUseful	Η Μαθ. Ανάλυση δεν είναι χρήσιμη για τους περισσότερους	293	2,7	1,24
3	BelDiff	Η Μαθ. Ανάλυση είναι δύσκολη	293	3,8	1,06
4	BelChoise	Θα επέλεγα μαθήματα Μαθ. Ανάλυσης στο πανεπιστήμιο	293	3,3	1,35
5	BelLike	Μου αρέσει η Μαθ. Ανάλυση	293	3,3	1,27
6	BelWell	Τα πάω καλά στη Μαθ. Ανάλυση	293	3,0	1,02
7	BelAnxiety	Στη Μαθ. Ανάλυση κάνω λάθη επειδή αγχώνομαι	293	3,1	1,35
8	BelPleasure	Το μάθημα της Μαθ. Ανάλυσης είναι ευχάριστο	293	3,3	1,22
9	BelTheory	Όταν διαβάζω μαθηματικά ξεκινάω από τη θεωρία	293	4,1	1,16
10	BelPhysLike	Μου αρέσει να διαβάζω φυσική	293	3,0	1,55
11	BelPhMath	Προτιμάω τη φυσική από τα μαθηματικά	293	2,5	1,56
12	BelRealProb	Καταλαβαίνω καλύτερα τα μαθηματικά όταν τα εφαρμόζω σε πραγματικά προβλήματα	293	4,0	1,14
13	BelRate	Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια περισσότερο της φυσικής και λιγότερο των μαθηματικών	293	3,0	1,38

Οι περισσότεροι φοιτητές (44,71%) και κυρίως οι φοιτητές των τμημάτων Ηλεκτρολόγων και Πολιτικών Μηχανικών συμφωνούν με την πρόταση ότι η Μαθηματική Ανάλυση περιγράφει καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Παρόλα αυτά το 27% των φοιτητών πιστεύει ότι η Μαθηματική Ανάλυση δεν είναι χρήσιμη για τους περισσότερους. Πάνω από το 60% των ερωτώμενων θεωρούν τη Μαθηματική Ανάλυση δύσκολη.



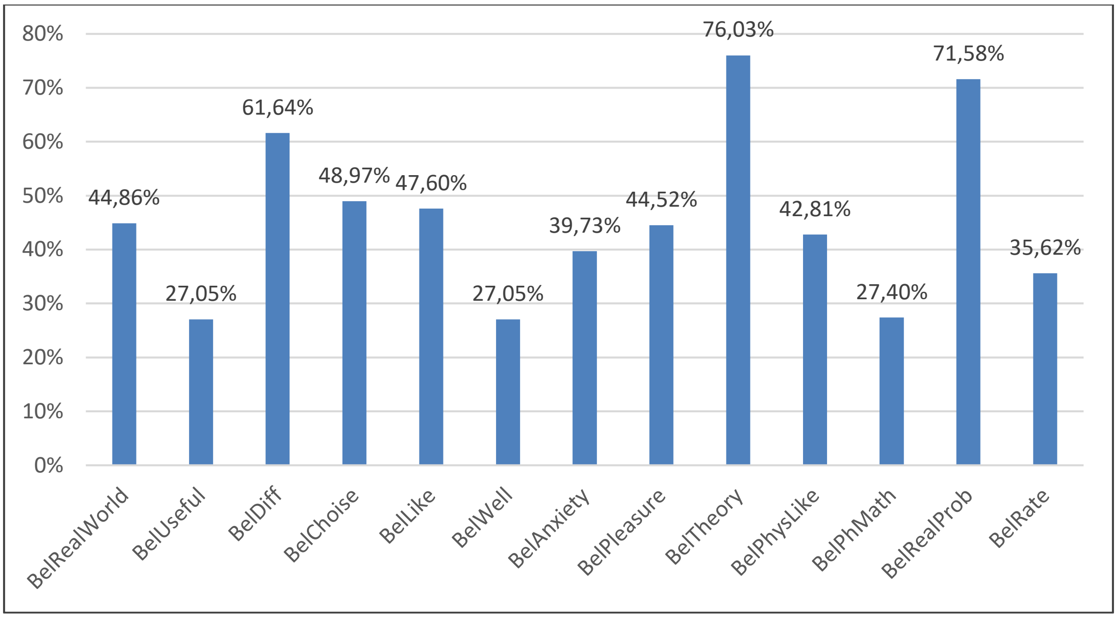
Γράφημα 5.7. Ποσοστά απαντήσεων στις προτάσεις στάσεων

Οι προτάσεις στις οποίες οι φοιτητές συμφώνησαν σε μεγαλύτερο ποσοστό ήταν ότι όταν διαβάζουν μαθηματικά ξεκινάνε από τη θεωρία (76%), ότι καταλαβαίνουν καλύτερα τα μαθηματικά όταν τα εφαρμόζουν σε πραγματικά προβλήματα (71%) και ότι η Μαθ. Ανάλυση είναι δύσκολη (61%).

Το 45% των φοιτητών δήλωσαν ότι η Μαθηματική Ανάλυση περιγράφει καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Περίπου οι μισοί (48%) συμφώνησαν ότι τους αρέσει η Μαθηματική Ανάλυση, ότι θα επέλεγαν μαθήματα Μαθ. Ανάλυσης στο πανεπιστήμιο (49%) και ότι το μάθημα είναι ευχάριστο (44%).

Μοιρασμένες ήταν οι απαντήσεις στις ερωτήσεις αν κάνουν λάθη στη Μαθ. Ανάλυση επειδή αγχώνονται, αν ότι τους αρέσει να διαβάζουν φυσική και αν ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια περισσότερο της φυσικής και λιγότερο των μαθηματικών.

Λιγότεροι ήταν αυτοί (27%) που δήλωσαν ότι η Μαθηματική Ανάλυση είναι χρήσιμη για τους περισσότερους ανθρώπους και ότι προτιμάνε τη φυσική από τα μαθηματικά (27%).

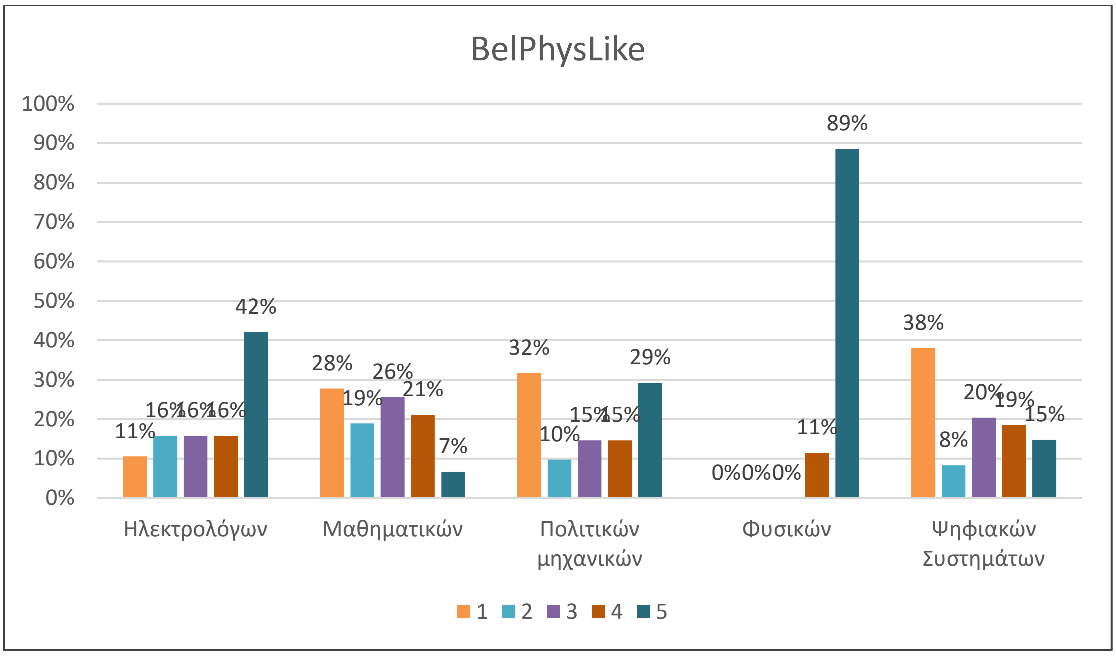


Γράφημα 5.8. Ποσοστά όσων δήλωσαν ότι μάλλον συμφωνούν ή ότι συμφωνούν με τις προτάσεις

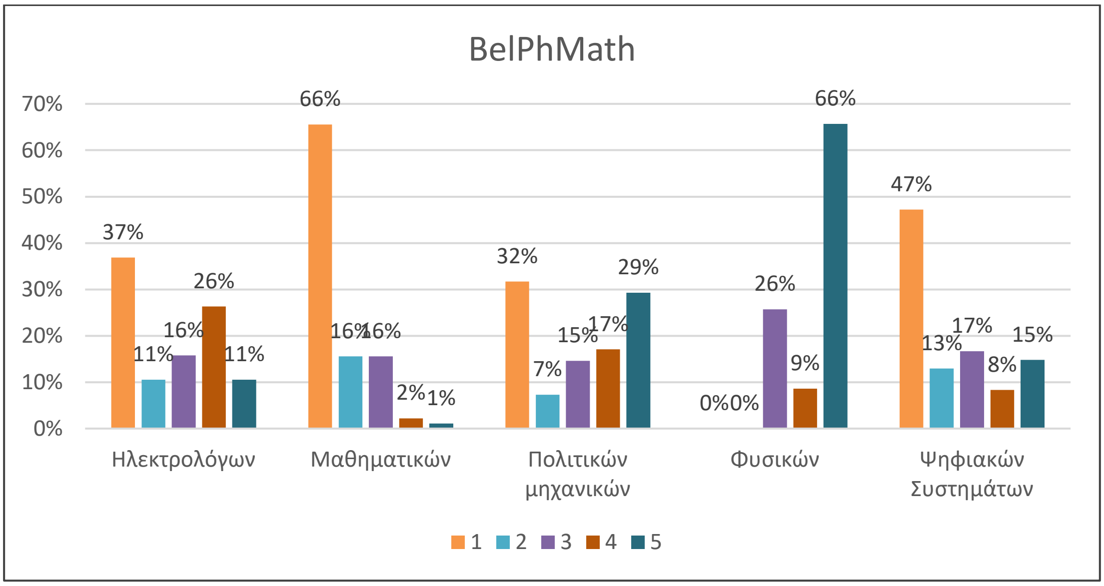
Στις περισσότερες ερωτήσεις των στάσεων δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές στις απαντήσεις μεταξύ των τμημάτων (Πίνακας 5.7). Εξαίρεση αποτελούν οι προτάσεις «Μου αρέσει να διαβάζω φυσική» και «Προτιμάω τη φυσική από τα μαθηματικά» όπου ο αριθμός των θετικών απαντήσεων των φοιτητών του τμήματος Φυσικής ήταν σημαντικά μεγαλύτερος από των άλλων τμημάτων και ιδιαίτερα από του τμήματος Μαθηματικών (Γράφημα 5.9 και Γράφημα 5.10).

Πίνακας 5.7. Αποτελέσματα ελέγχου χ-τετράγωνο στις ερωτήσεις των στάσεων

	Department		
	X2	df	p-value
BelRealWorld	23.443	20	0.2676
BelUseful	17.951	16	0.3268
BelDiff	22.321	16	0.1331
BelChoise	27.331	16	0.03794
BelLike	35.84	16	0.003045
BelWell	44.191	16	0.0001845
BelAnxiety	19.01	16	0.2682
BelPleasure	36.969	16	0.002118
BelTheory	32.23	16	0.009332
BelPhysLike	113.08	16	< 2.2e-16
BelPhMath	109.93	16	4.634e-16
BelRealProb	30.44	16	0.01585
BelRate	42.927	16	0.0002866

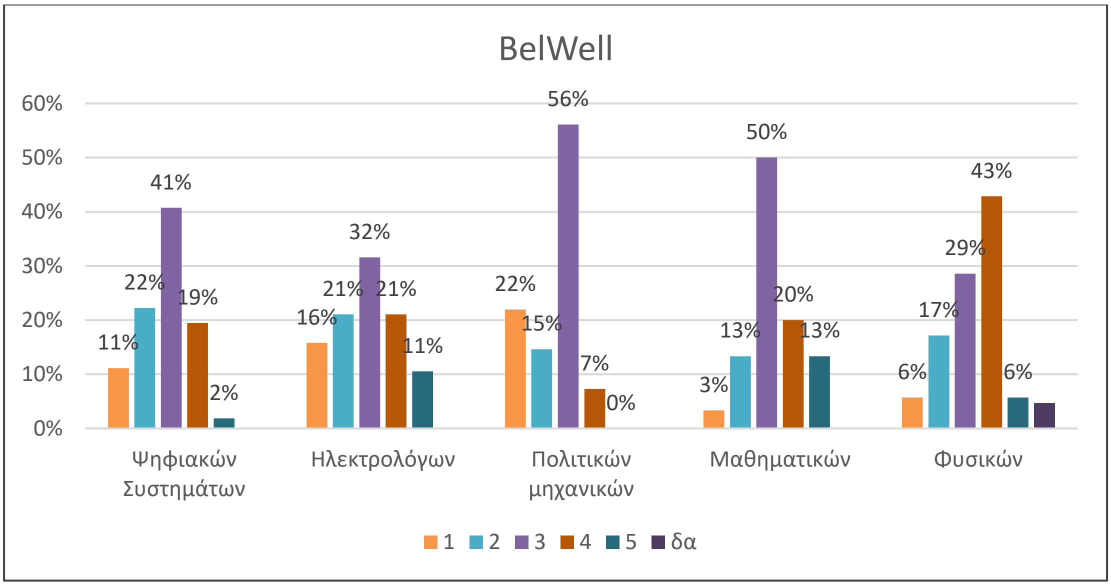


Γράφημα 5.9. Ποσοστά απαντήσεων στην πρόταση «Μου αρέσει να διαβάζω φυσική» ανά τμήμα (BelPhysLike)



Γράφημα 5.10. Ποσοστά απαντήσεων στην πρόταση «Προτιμάω τη φυσική από τα μαθηματικά» ανά τμήμα (BelPhMath)

Όπως φαίνεται στο γράφημα 5.11, οι φοιτητές του τμήματος Φυσικής δηλώνουν σε υψηλό ποσοστό ότι τα πάνε καλά στη Μαθηματική Ανάλυση.



Γράφημα 5.11. Ποσοστά απαντήσεων στην πρόταση «Τα πάω καλά στη Μαθ. Ανάλυση» ανά τμήμα (BelWell)

5.3.2.2 Ορισμός-παραδείγματα

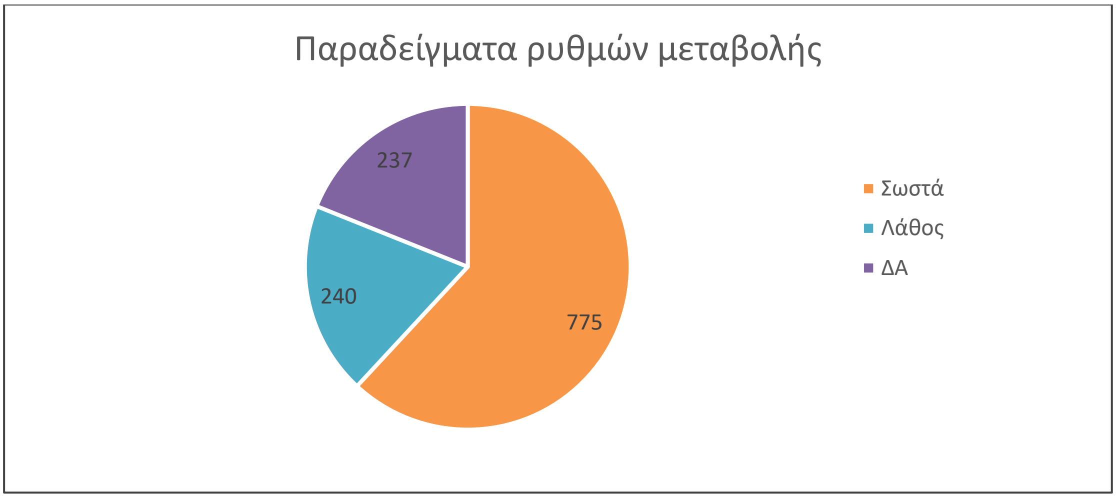
Στη δεύτερη ομάδα ερωτήσεων ανήκαν η ερώτηση για τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής (RateDef), τα παραδείγματα ρυθμών μεταβολής (RateEx) και η αναγνώριση ρυθμών μεταβολής (Rates_*).

Στην ανοιχτή ερώτηση αν συμφωνούν με την πρόταση «Ο ρυθμός μεταβολής είναι η μεταβολή μίας ποσότητας y», 17 από τους συμμετέχοντες συμφώνησαν και 75 δεν απάντησαν. Από αυτούς που απάντησαν οι 42 σύνδεσαν τον ρυθμό μεταβολής με την παράγωγο. Οι 50 είπαν ότι είναι η μεταβολή μίας ποσότητας σε σχέση με τον χρόνο. Τριάντα δύο φοιτητές χρησιμοποίησαν τις λέξεις ταχύτητα και γρήγορα για να περιγράψουν τον ρυθμό μεταβολής.

Πίνακας 5.8. Τι είναι ο ρυθμός μεταβολής

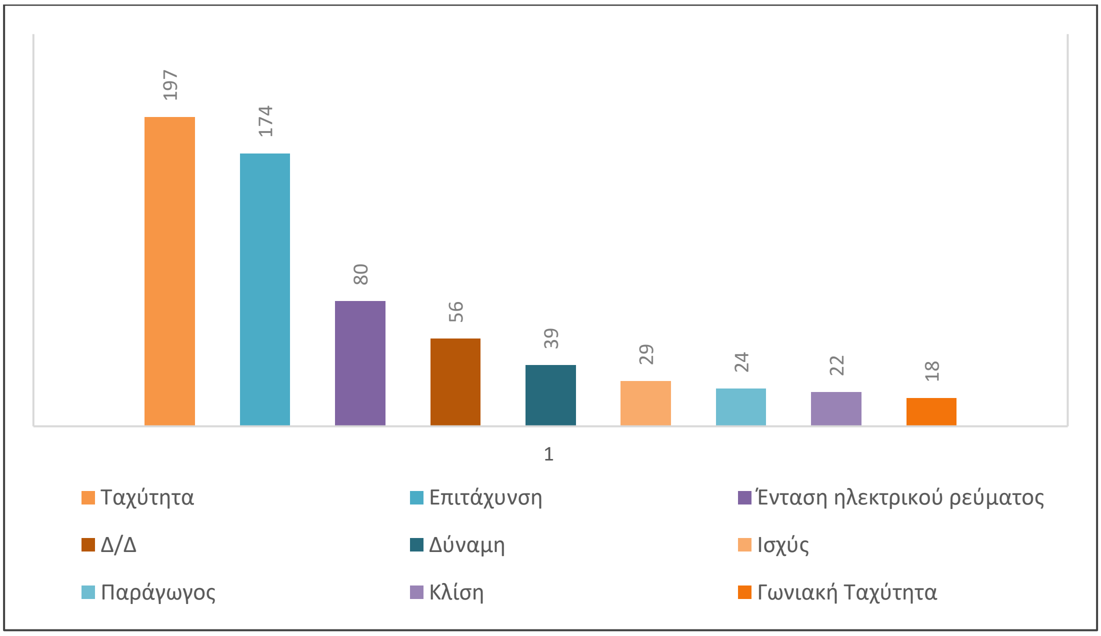
Πιο συχνές απαντήσεις στο ερώτημα τι είναι ο ρυθμός μεταβολής
Παράγωγος
Μεταβολή ποσότητας σε σχέση με τον χρόνο
Ταχύτητα αλλαγής (γρήγορα/αργά)
Λόγος/πηλίκο
Κλίση
Μεταβολή μίας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη
Η μεταβολή μίας ποσότητας

Δόθηκαν αρκετά παραδείγματα ρυθμών μεταβολής, τα περισσότερα από τα οποία ήταν σωστά (Γράφημα 5.12).



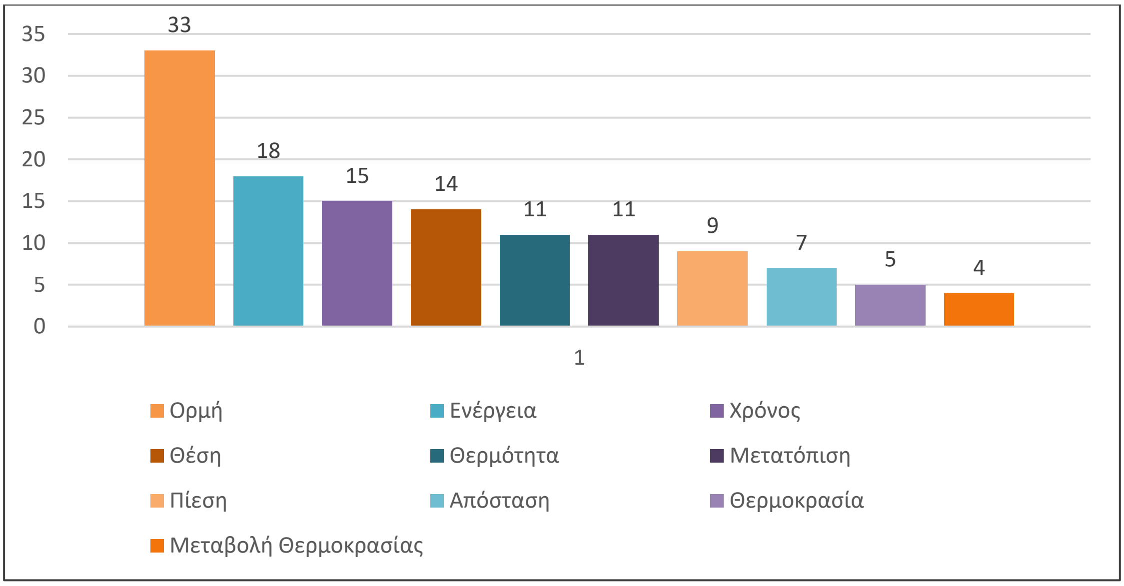
Γράφημα 5.12. Ποσοστά σωστών και λάθος παραδειγμάτων ρυθμών μεταβολής

Το κυρίαρχο παράδειγμα ρυθμού μεταβολής που χρησιμοποιήθηκε από τους φοιτητές ήταν η ταχύτητα και το αμέσως επόμενο η επιτάχυνση (Γράφημα 5.13). Αρκετά μεγάλη συχνότητα εμφάνισης είχε η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος και απαντήσεις με λόγο μεταβολών ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ή παρόμοιες). Άλλα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η δύναμη (ρυθμός μεταβολής της ορμής), η ισχύς (ρυθμός μεταβολής έργου) και η παράγωγος. Οι υπόλοιπες απαντήσεις με συχνότητα εμφάνισης μικρότερη του 10 δεν εμφανίζονται στο γράφημα. Πρέπει να σημειωθεί ότι η παράγωγος και η κλίση δεν είναι ακριβείς απαντήσεις καθώς η ερώτηση ήταν να εντοπιστούν τέσσερα παραδείγματα ρυθμών μεταβολής από τον πραγματικό κόσμο.



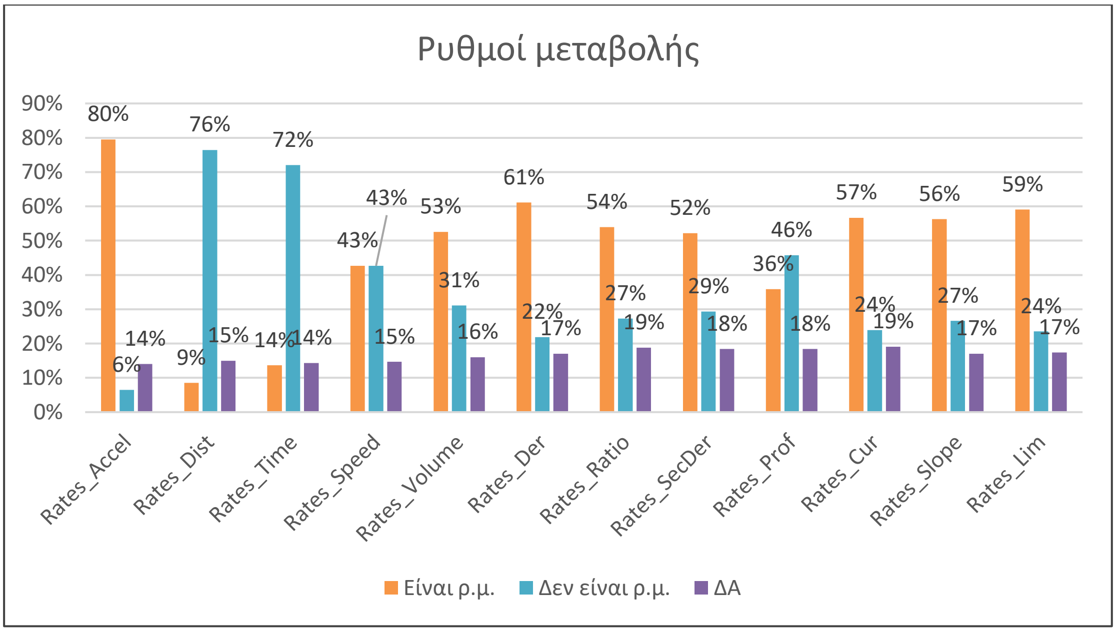
Γράφημα 5.13. Παραδείγματα ρυθμών μεταβολής

Παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν χωρίς να εκφράζουν ρυθμό μεταβολής κάποιου μεγέθους είναι η ορμή, η ενέργεια, ο χρόνος, η θέση, η θερμότητα, η μετατόπιση και άλλα με μικρότερη συχνότητα (Γράφημα 5.14)



Γράφημα 5.14. Λανθασμένα παραδείγματα ρυθμών μεταβολής

Στο ερώτημα στο οποίο δόθηκαν συγκεκριμένα μεγέθη και ρωτήθηκε αν εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής, όπως ήταν αναμενόμενο η πλειοψηφία συμφώνησε όσον αφορά στην επιτάχυνση (Γράφημα 5.15). Είναι αξιοσημείωτο όμως ότι οι μισοί από όσους απάντησαν στην ερώτηση για τη στιγμιαία ταχύτητα αυτοκινήτου θεωρούν ότι δεν είναι ρυθμός μεταβολής. Το 53% των φοιτητών απάντησε ότι ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του μέσα σε ένα κυλινδρικό δοχείο είναι ρυθμός μεταβολής.

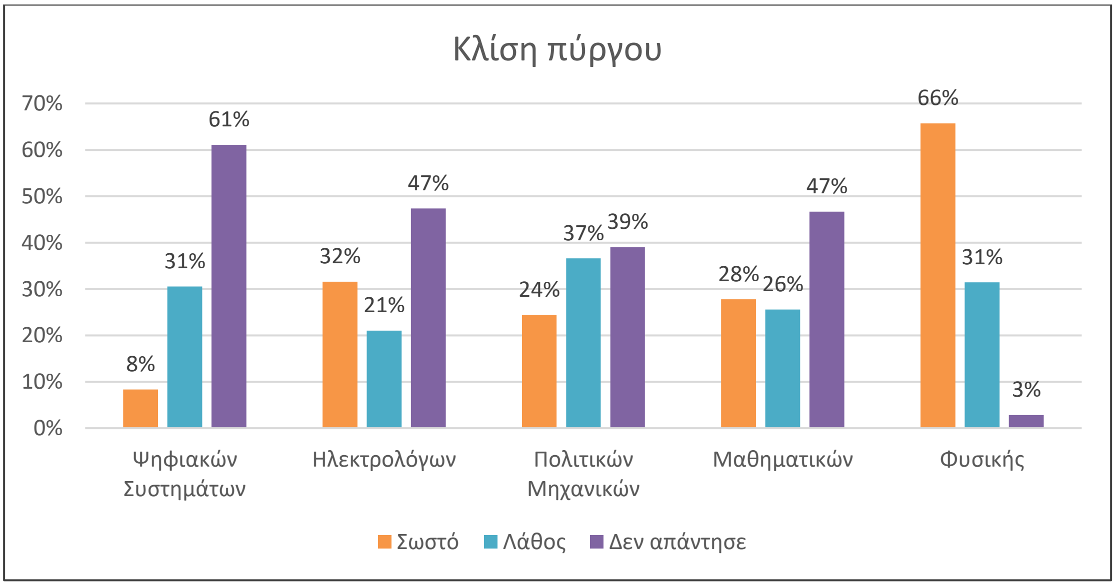


Γράφημα 5.15. Απαντήσεις στην αναγνώριση ρυθμών μεταβολής

5.3.2.3 Κλίση

Το πρώτο από την ομάδα έργων της κλίσης, που αφορούσε στην κλίση του πύργου, δεν απαιτούσε δύσκολους υπολογισμούς. Παρόλα αυτά αρκετοί ήταν οι φοιτητές που δεν το απάντησαν. Στην πιλοτική έρευνα που είχε προηγηθεί το 8% των φοιτητών χρησιμοποίησε την εφαπτομένη της γωνίας για να υπολογίσει την κλίση, αλλά αρκετοί συμπλήρωσαν ως μονάδα μέτρησης μοίρες ή μέτρα. Στο κυρίως ερωτηματολόγιο, περίπου 23% των φοιτητών υπολόγισε την κλίση του πύργου είτε χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη της γωνίας (*εφ84^o*) είτε τον λόγο των πλευρών του τριγώνου που σχηματίζεται, δηλαδή $\frac{50}{5} = 10$.

Παρατηρείται ανομοιομορφία των απαντήσεων των φοιτητών μεταξύ των τμημάτων (Γράφημα 5.16). Συγκεκριμένα, ένα μεγάλο ποσοστό των φοιτητών του τμήματος Φυσικής (65,71%) υπολόγισε σωστά την κλίση, ενώ το τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων είχε το μικρότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (8,33%). Αρκετοί ήταν οι φοιτητές που έγραψαν μία αριθμητική τιμή ως αποτέλεσμα συνοδευόμενη από μονάδες μέτρησης όπως μοίρες, μέτρα ή το ποσοστό. Μερικές ενδεικτικές απαντήσεις ήταν ότι η κλίση του πύργου είναι 84^o όπως και η γωνία, 6^o που προκύπτει αφαιρώντας τις 84^o από τις 90^o, ή εφθ=10^o. Ένα μικρό μέρος των απαντήσεων περιελάμβανε τη χρήση τύπων όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα, το εμβαδόν του τριγώνου και τη διακρίνουσα.

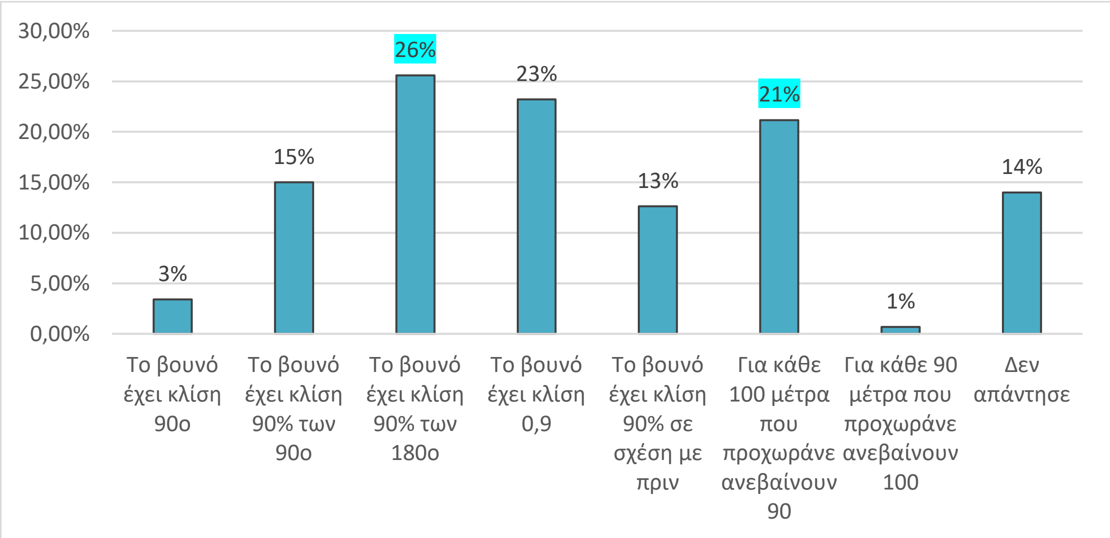


Γράφημα 5.16. Ποσοστό απαντήσεων στο ερώτημα για την κλίση του πύργου ανά τμήμα

Το δεύτερο ερώτημα που είχε σε σχέση με την κλίση αφορούσε στην κλίση ενός βουνού σε ένα οδικό σήμα. Οι φοιτητές μπορούσαν να επιλέξουν περισσότερες από μία απαντήσεις. Είκοσι τρία τοις εκατό των φοιτητών ερμήνευσε το σήμα ως κλίση του βουνού δηλαδή 0,9, και 21% των φοιτητών επέλεξαν την απάντηση που περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο, δηλαδή ότι για κάθε 100 μ. οριζόντιας μετατόπισης ανεβαίνουν 90 μ. Μόνο το 5% όμως επέλεξε ακριβώς αυτές τις δύο απαντήσεις.

Οι απαντήσεις των φοιτητών σε αυτό το ερώτημα δεν σχετίζονται με την εικόνα της κλίσης που φάνηκε στο προηγούμενο. Οι περισσότεροι φοιτητές θεώρησαν ότι το σήμα αναφέρεται σε ποσοστό κάποιας ποσότητας και συγκεκριμένα σε κλίση 90% των 180^o (25,6%) ή σε κλίση 90% των 90^o (15%) ή 90% της προηγούμενης κλίσης του βουνού (13%) (Γράφημα 5.17). Ένας μικρός αριθμός φοιτητών δήλωση ότι η κλίση είναι 90^o.

Τα αποτελέσματα σε αυτή την ερώτηση έχουν κοινά στοιχεία με τα αποτελέσματα σε αντίστοιχη ερώτηση στην έρευνα του Stump (2001β), όπου κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών ήταν ότι το 100% είναι κάθετο, άρα το 90% αναφέρεται στις 90^o , ότι γίνεται σύγκριση με την τωρινή κατάσταση, άρα αύξηση της γωνίας κατά 90%, ή ότι είναι το 90% των 360^o.



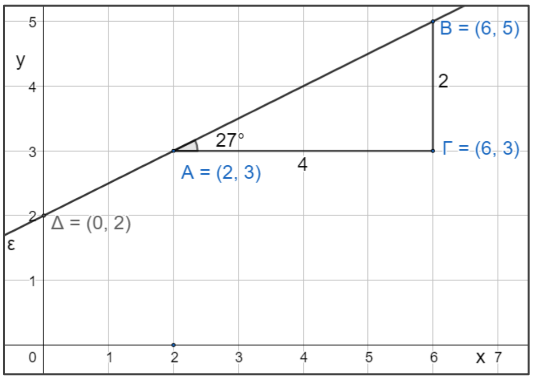
Γράφημα 5.17. Απαντήσεις για την ερμηνεία της κλίσης στο οδικό σήμα

Στο ερώτημα αν η κλίση είναι εφικτό να υπερβαίνει την τιμή 110% το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών (43%) απάντησε ότι δεν μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο καθώς δεν υπάρχει κλίση μεγαλύτερη από 100% (Γράφημα 5.18). Χαρακτηριστικές ήταν οι αιτιολογήσεις ότι θα ήταν ανάποδα, ότι θα υπερίσχυε η βαρύτητα και ότι θα έπεφτε.

Περίπου οι μισοί από τους φοιτητές ανά τμήμα δεν απάντησαν σε αυτή την ερώτηση, με εξαίρεση το τμήμα Φυσικής.

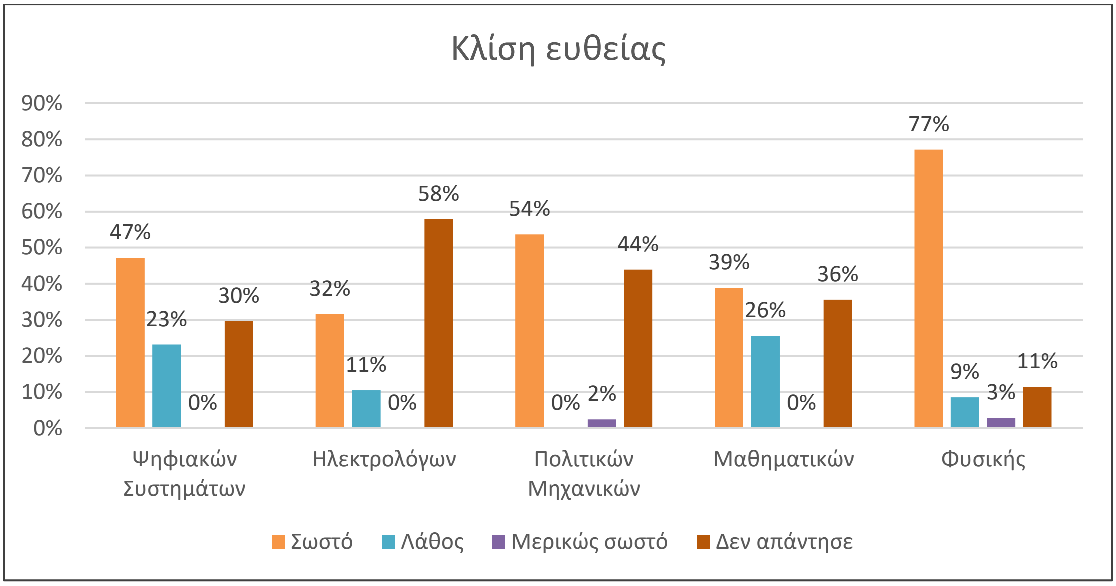
Γράφημα 5.18. Κλίση μεγαλύτερη από 100%

Για την ευθεία της εικόνας 5.11 ζητήθηκε η κλίση, την οποία υπολόγισε σωστά το 48,65% των φοιτητών (SlpLine).



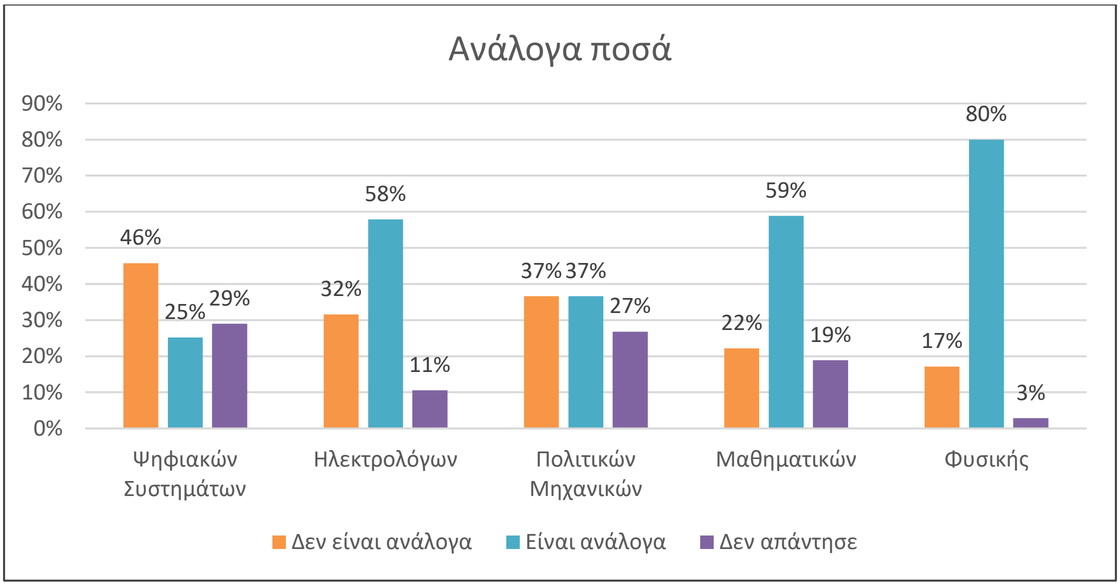
Εικόνα 5.11. Γραφική παράσταση γραμμικής συνάρτησης

Αναλυτικά το υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων (77%) καταγράφηκε στο τμήμα Φυσικής (Γράφημα 5.19).



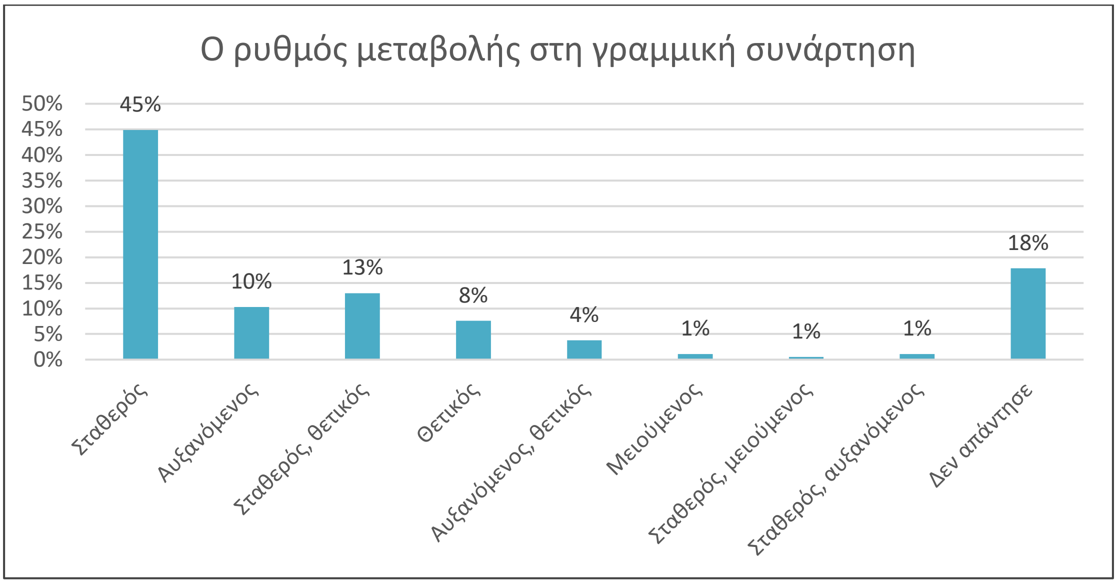
Γράφημα 5.19. Ποσοστά απαντήσεων στο ερώτημα για την εύρεση κλίσης ευθείας ανά τμήμα

Στο υποερώτημα αν οι ποσότητες *x* και *y* είναι ανάλογες οι μισοί περίπου από τους φοιτητές (45,89%) απάντησαν θετικά (Γράφημα 5.20), ενώ ήταν αρκετοί αυτοί που δεν απάντησαν (21,23%). Είναι αξιοσημείωτο ότι το 89% των φοιτητών του τμήματος Φυσικής απάντησαν ότι οι ποσότητες είναι ανάλογες και αντίστοιχα υψηλό ήταν το ποσοστό και στο τμήμα Μαθηματικών (59%).



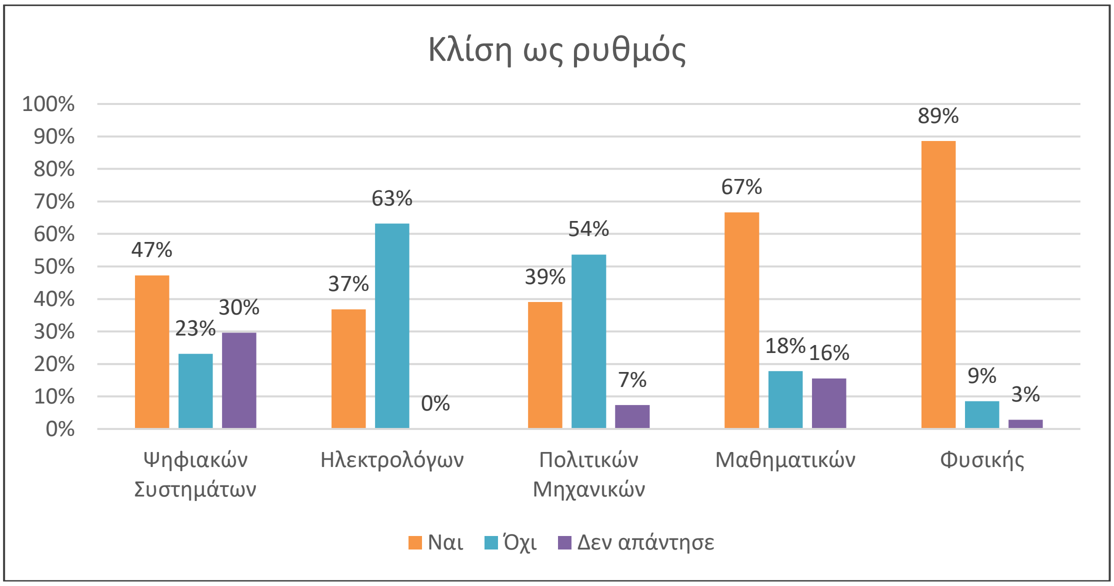
Γράφημα 5.20. Ποσοστά απαντήσεων στο ερώτημα αν τα x και y στη σχέση y=αx+β είναι ανάλογα

Στην ερώτηση αυτή συμπεριλήφθηκε ένα ερώτημα για τη συμπεριφορά του ρυθμού μεταβολής (LinRate) της συνάρτησης, όπου το 13% των συμμετεχόντων επέλεξε ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι σταθερός και θετικός, ενώ λίγο πάνω από τους μισούς φοιτητές επέλεξαν είτε ότι είναι σταθερός (45%) είτε ότι είναι θετικός (8%), αλλά όχι και τα δύο (Γράφημα 5.21). Οι μισοί περίπου από τους φοιτητές υπολόγισαν σωστά την τιμή του ρυθμού μεταβολής σε αυτό το έργο (LinRateVal). Ακόμα το 60% των φοιτητών απάντησε ότι για κάθε μεταβολή της x κατά 2 το y μεταβάλλεται κατά 1 (LinChange).



Γράφημα 5.21. Ποσοστά απαντήσεων στα υποερωτήματα του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής συνάρτησης (LinRate)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το 56,31% των ερωτηθέντων θεωρεί ότι η κλίση είναι ένας ρυθμός μεταβολής, με σημαντικές διαφορές μεταξύ των τμημάτων (Γράφημα 5.22).



Γράφημα 5.22. Ποσοστά απαντήσεων στο ερώτημα αν η κλίση ευθείας εκφράζει ρυθμό μεταβολής

Σύμφωνα με τον έλεγχο χ-τετράγωνο όσον αφορά στις ερωτήσεις που σχετίζονται με την κλίση υπάρχει σημαντική διαφορά στις απαντήσεις των φοιτητών διαφορετικών τμημάτων, εκτός από την ερώτηση για την αναλογικότητα των *x* και *y*.

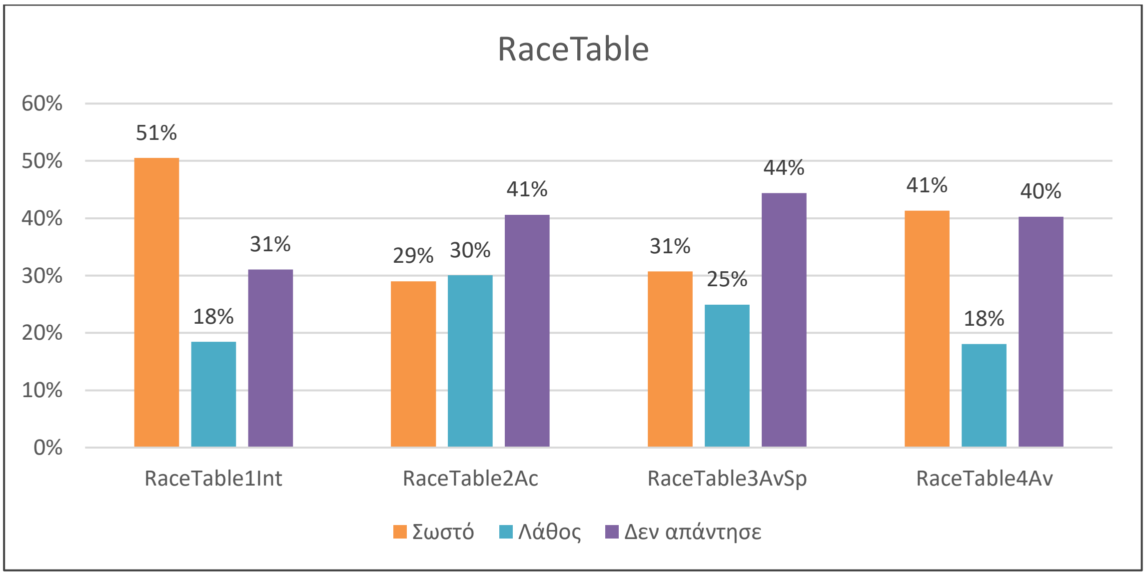
Πίνακας 5.9. Αποτελέσματα ελέγχου χ-τετράγωνο για τις ερωτήσεις για την κλίση

		Τμήμα		
Κωδικοποίηση	**Περιγραφή**	**X2**	**df**	**p-value**
SlpLine	Slope of line	30.264	4	4.325e-06
SlpProp	Proportional	7.4858	4	0.1123
SlpTow	Slope of tower	47.868	4	1.006e-09
SlpSign	Slope sign	113.99	8	2.2e-16
SlpSign100	Slope sign 110%	25.697	4	3.641e-05
SlpRate	Slope as rate	30.264	4	4.325e-06

5.3.2.4 Δρομείς-Πίνακας τιμών

Στα ερωτήματα του αγώνα των δύο δρομέων με τα δεδομένα σε αριθμητική αναπαράσταση με πίνακα τιμών, οι μισοί περίπου φοιτητές απάντησαν σωστά στο ερώτημα σε ποια διαστήματα προσπερνάει ο ένας δρομέας τον άλλον (RaceTable1Int).

Το ερώτημα όμως ποιος φτάνει πρώτος στα 1.400 μέτρα (RaceTable2Ac), φάνηκε ότι προκάλεσε δυσκολίες καθώς μεγάλο μέρος (41%) των φοιτητών δεν το απάντησε και οι απαντήσεις ήταν μοιρασμένες στους δύο δρομείς (Γράφημα 5.23). Αντίστοιχα ήταν τα ποσοστά και στο ερώτημα πόση είναι η μέση ταχύτητα του ενός ανάμεσα στο 4^{o} και στο 5^{o} λεπτό (RaceTable3AvSp), με λίγο μεγαλύτερο το ποσοστό των σωστών απαντήσεων (31%). Στο τελευταίο ερώτημα για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, το 18% συμφώνησε με τον πρώτο μαθητή που υπολόγισε τη μέση ταχύτητα ως μέσο όρο των ταχυτήτων που δίνονταν στον πίνακα τιμών.



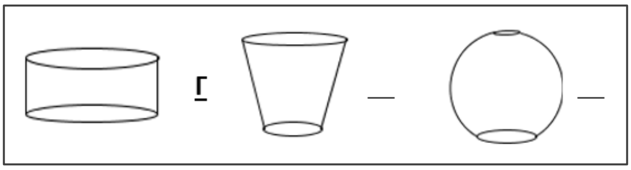
Γράφημα 5.23. Ποσοστά απαντήσεων στα υποερωτήματα του ερωτήματος των δρομέων

5.3.2.5 Γέμισμα δοχείων

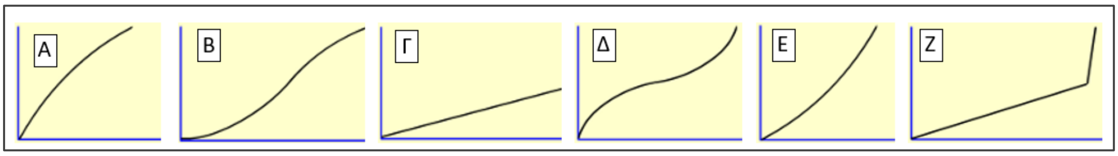
Στο έργο του γεμίσματος δοχείων οι φοιτητές κλήθηκαν να αντιστοιχήσουν δοχεία με τις γραφικές παραστάσεις του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο του νερού για το καθένα από αυτά. Μία αρχική παρατήρηση είναι ότι το ποσοστό των φοιτητών που δεν απάντησε στα ερωτήματα του έργου αυτού ήταν πολύ υψηλό και ειδικά στα ερωτήματα στα οποία το δοχείο δεν δινόταν αλλά ζητήθηκε να σχεδιαστεί.

Το πρώτο δοχείο ήταν κόλουρος κώνος όπως φαίνεται στην εικόνα 5.12 (Bottles1A). Το ένα τέταρτο των φοιτητών αντιστοίχισε σωστά το δοχείο με τη γραφική παράσταση ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο του νερό, ενώ το ένα τρίτο των φοιτητών απάντησε λάθος (Γράφημα 5.24).

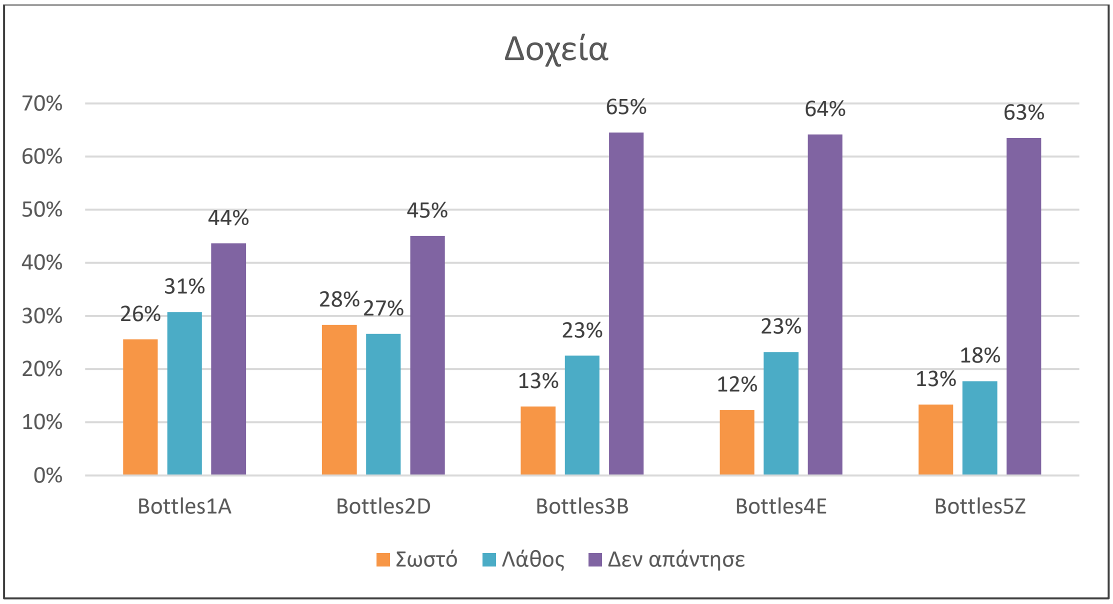
Αντίστοιχα ήταν τα ποσοστά και στο δεύτερο υποερώτημα, όπου το δοχείο είχε το σχήμα σφαίρας (Bottles2D). Συγκεκριμένα το 28% των φοιτητών απάντησε σωστά.



Εικόνα 5.12. Παράδειγμα, πρώτο και δεύτερο δοχείο του ερωτήματος



Εικόνα 5.13. Γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος με τα δοχεία



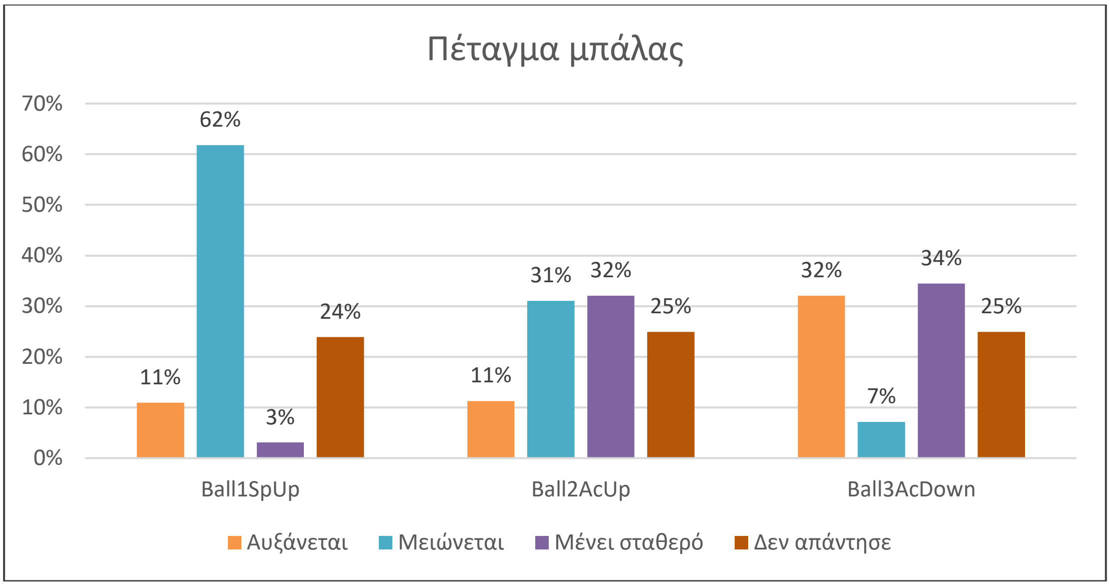
Γράφημα 5.24. Ποσοστά απαντήσεων στα υποερωτήματα του ερωτήματος των δοχείων

Στα άλλα τρία ερωτήματα στα οποία ζητήθηκε να σχεδιαστεί το δοχείο που αντιστοιχεί στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις (Εικόνα 5.13), τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν περίπου 13%.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κατανόηση του τρόπου που μεταβάλλεται το ύψος του νερού σε σχέση με τον όγκο σε ένα δοχείο είναι ένα απαιτητικό πρόβλημα το οποίο δυσκολεύει ακόμα και καθηγητές μαθηματικών, όπως φάνηκε και από την έρευνα σε εκπαιδευτικούς όπου λιγότεροι το ένα τρίτο επέλεξαν τη σωστή γραφική παράσταση.

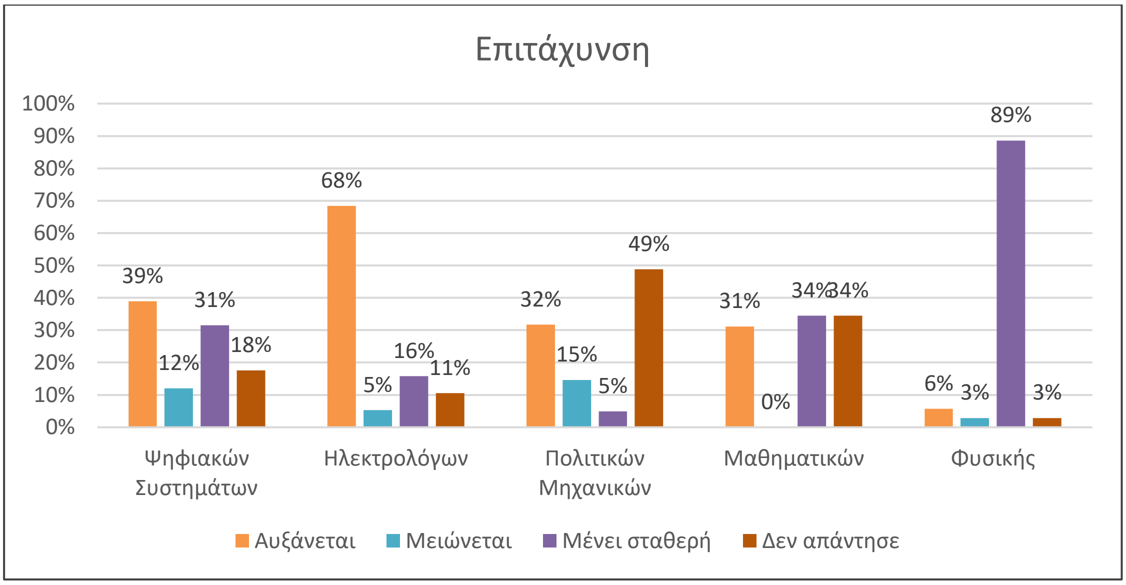
5.3.2.6 Πέταγμα μπάλας

Στο ερώτημα με το πέταγμα της μπάλας προς τα πάνω, το 62% των φοιτητών απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση για τη μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας (Ball1SpUp) (Γράφημα 5.25). Η μεταβολή στο μέτρο της επιτάχυνσης (Ball2AcUp) δυσκόλεψε τους φοιτητές, καθώς πολλοί ήταν αυτοί που δήλωσαν ότι μειώνεται (31%). Το ποσοστό που δήλωσε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης παραμένει σταθερό ήταν 32%. Αντίστοιχα για την περίπτωση που η μπάλα κατεβαίνει (Ball3AcDown), το 34% των φοιτητών δήλωσε ότι η επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ενώ το 32% ότι αυξάνεται.



Γράφημα 5.25. Απαντήσεις στα πρώτα τρία υποερωτήματα του πετάγματος της μπάλας

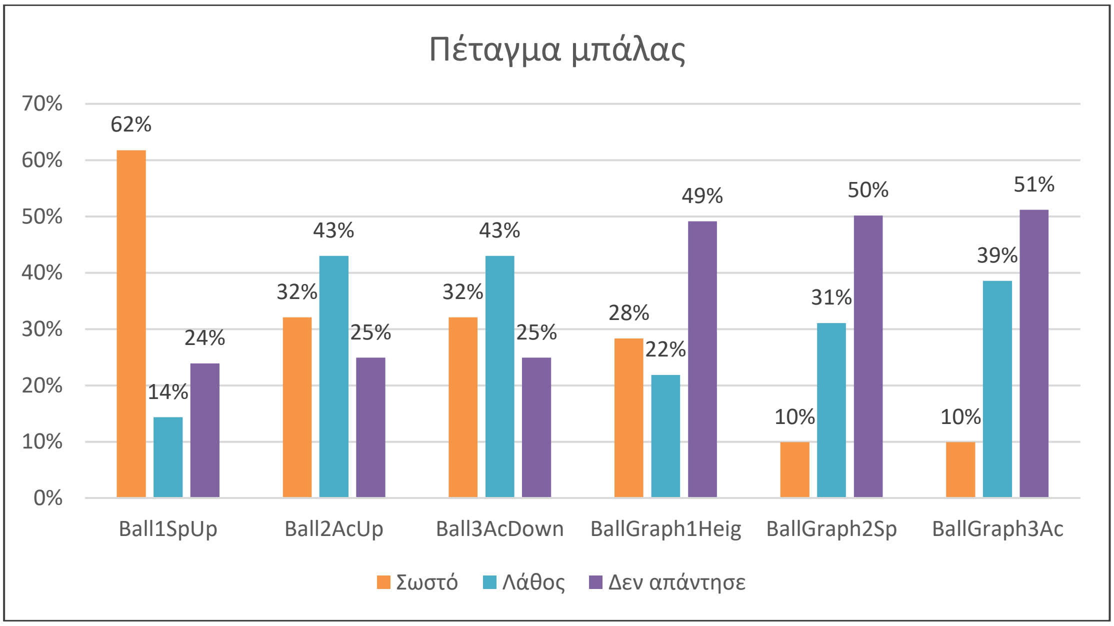
Ειδικά για την επιτάχυνση όταν η μπάλα κατεβαίνει, οι διαφορές ανάμεσα στα τμήματα ήταν σημαντικές, καθώς στο τμήμα Φυσικής το 89% απάντησε ότι η επιτάχυνση μένει σταθερή, σε αντίθεση με τα άλλα τμήματα όπου πολλοί επέλεξαν ότι η επιτάχυνση αυξάνεται (Γράφημα 5.26).



Γράφημα 5.26. Απαντήσεις ανά τμήμα στο ερώτημα για την επιτάχυνση όταν η μπάλα κατεβαίνει

Συνολικά τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα έξι υποερωτήματα φαίνονται στο γράφημα 5.27. Οι μισοί περίπου από τους φοιτητές δεν σχεδίασαν τις γραφικές παραστάσεις, ενώ μόνο στο ερώτημα για το ύψος της μπάλας το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν υψηλότερο από το ποσοστό των αρνητικών (28% και 22%

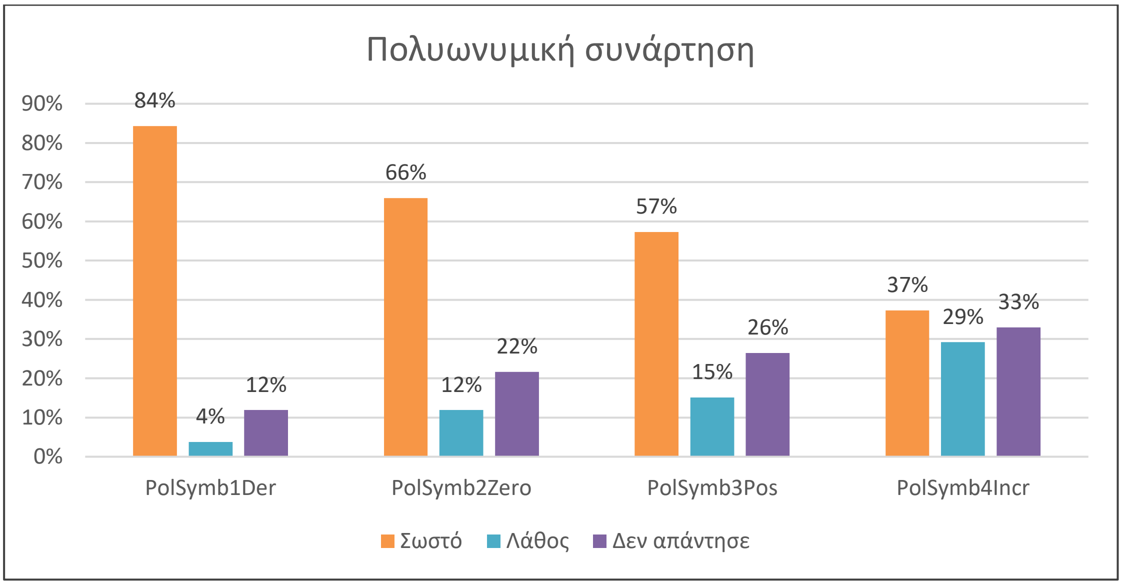
αντίστοιχα). Οι γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε σχέση με τον χρόνο σχεδιάστηκαν λάθος από το 31% και το 39% των φοιτητών αντίστοιχα.



Γράφημα 5.27 Ποσοστά απαντήσεων στα υποερωτήματα του πετάγματος της μπάλας

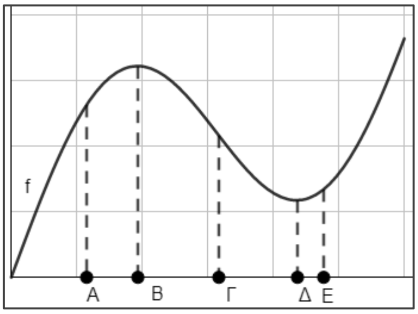
5.3.2.7 Διαδικασιακά έργα

Στο έργο της πολυωνυμικής συνάρτησης η πλειονότητα των φοιτητών (84%) υπολόγισαν σωστά την παράγωγο (PolSymb1Der) (Γράφημα 5.28). Το 66% έγραψαν τα σημεία στα οποία ο ρυθμός μεταβολής μηδενίζεται (PolSymb2Zero) και το 57% τα σημεία που ο ρυθμός είναι θετικός (PolSymb3Pos). Χαμηλότερο ήταν το ποσοστό (37%) αυτών που απάντησαν σωστά στο ερώτημα για τα διαστήματα στα οποία ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται (PolSymb4Incr).



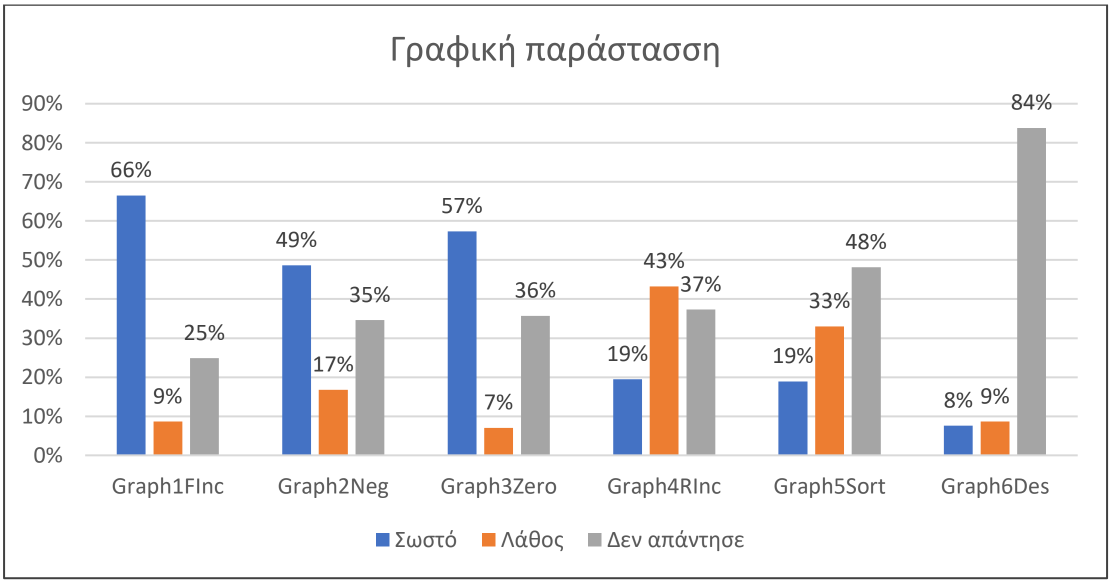
Γράφημα 5.28. Ποσοστά απαντήσεων στο έργο της πολυωνυμικής συνάρτησης

Τέλος, στο έργο που δόθηκε η γραφική παράσταση της εικόνας 5.14, το 66% των φοιτητών βρήκαν τα διαστήματα στα οποία η *f(x)* είναι γνησίως αύξουσα (Graph1FInc) και το 49% απάντησαν σωστά στην ερώτηση σε ποια σημεία ο ρυθμό μεταβολής της *f(x)* είναι αρνητικός (Graph2Neg) (Γράφημα 5.29).



Εικόνα 5.14. Έργο γραφικής παράστασης (Graph*)

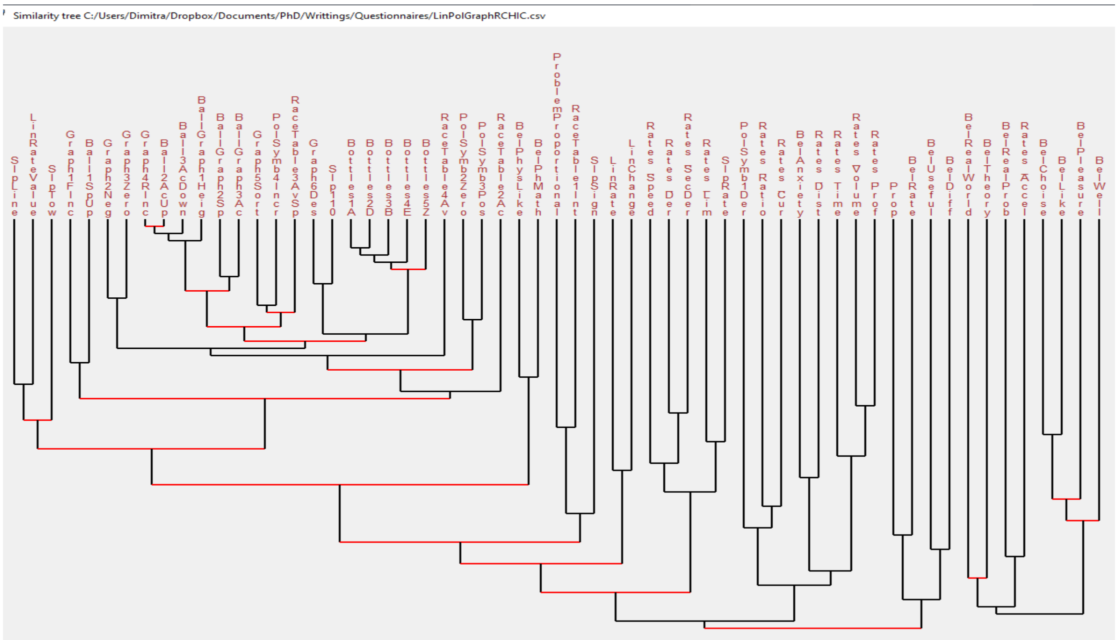
Πιο υψηλό ήταν το ποσοστό αυτών που απάντησαν σωστά στην ερώτηση σε ποια σημεία μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής (57%) (Graph3Zero). Η ερώτηση όμως σε ποια διαστήματα ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται (Graph4RInc), καθώς και η ερώτηση να ταξινομηθούν οι παράγωγοι της *f* στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τιμή λαμβάνοντας υπόψη την πραγματική προσημασμένη τιμή (Graph5Sort) απαντήθηκαν σωστά από το 19% των φοιτητών οι περισσότεροι από τους οποίους ήταν στο τμήμα Φυσικής. Μόνο το 8% σχεδίασε τη γραφική παράσταση της *f΄(x)*.



Γράφημα 5.29. Απαντήσεις στο έργο της γραφικής παράστασης

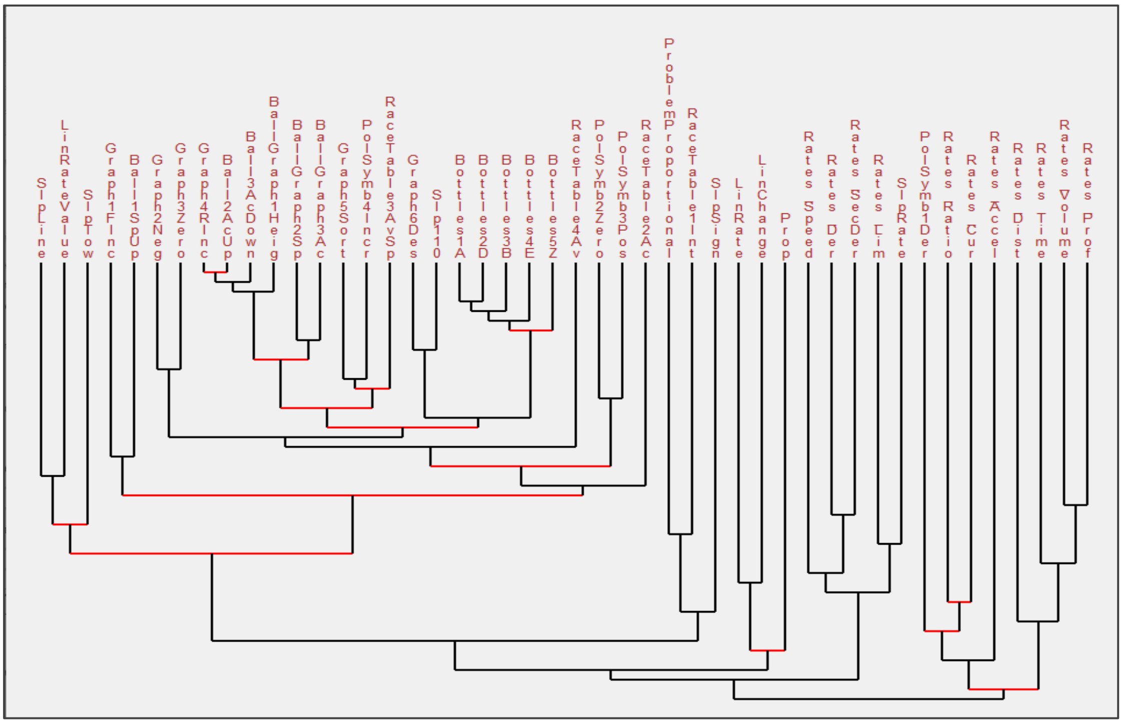
5.3.2.8 Συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση

Από τη συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση που εφαρμόστηκε στα δεδομένα με το πακέτο RCHIC του R-Project προέκυψε το διάγραμμα ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών του ερωτηματολογίου (Γράφημα 5.30). Οι κόκκινες έντονες γραμμές υποδεικνύουν ομοιότητα με επίπεδο σημαντικότητας 99,9% (Gras & Kuntz, 2008).



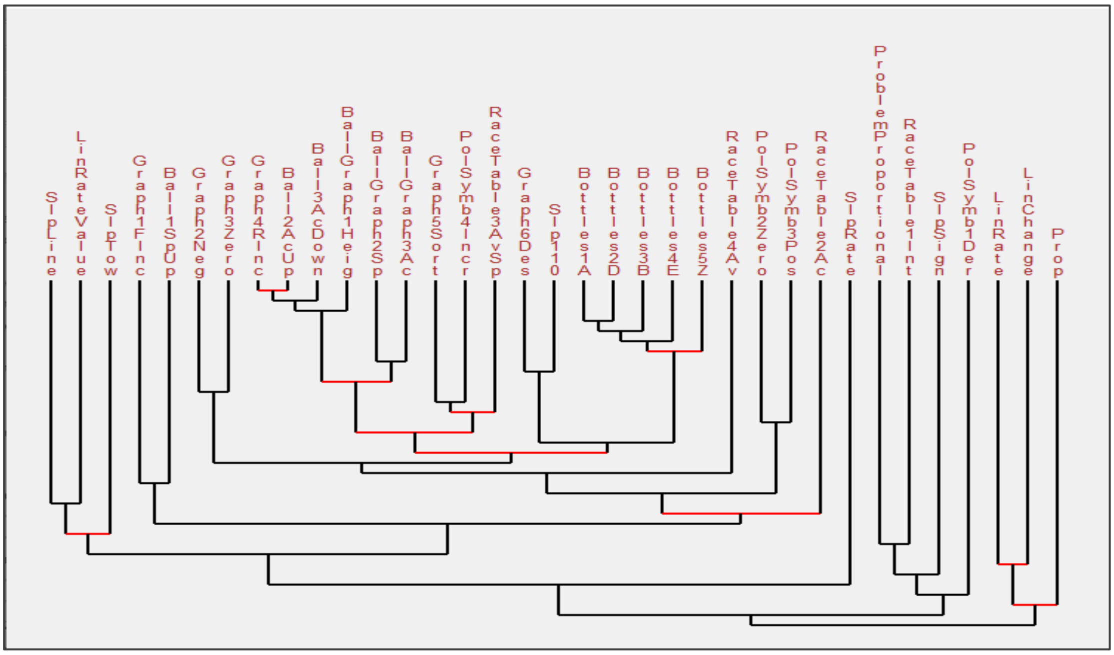
Γράφημα 5.30. Διάγραμμα ομοιότητας όλων των μεταβλητών

Καθώς φαίνεται ότι οι στάσεις δεν συνδέονται με τις υπόλοιπες μεταβλητές στις ομάδες που σχηματίζονται, αφαιρέθηκαν από το διάγραμμα και προέκυψε το γράφημα 5.31.



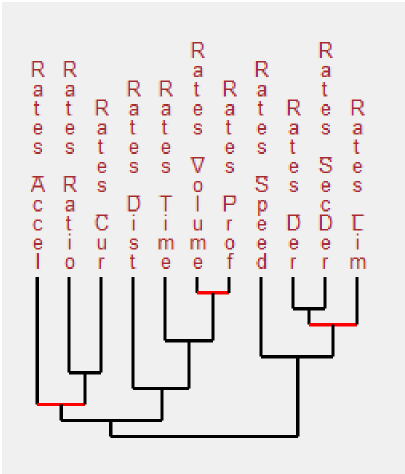
Γράφημα 5.31. Διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών των έργων χωρίς τις στάσεις

Στο γράφημα 5.32 φαίνονται οι ομαδοποιήσεις που προέκυψαν για τα έργα, χωρίς τις ερωτήσεις για την αναγνώριση ρυθμών μεταβολής, καθώς και αυτές φαίνεται ότι δεν ομαδοποιούνται με τις υπόλοιπες.



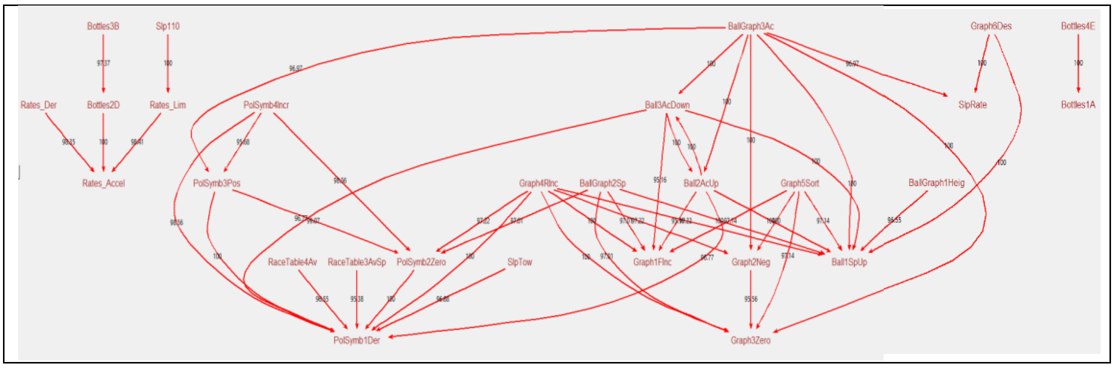
Γράφημα 5.32. Διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών των έργων χωρίς τις στάσεις και αναγνώριση ρυθμών μεταβολής

Σε σχέση με την αναγνώριση ρυθμών μεταβολής προέκυψε το διάγραμμα ομοιότητας 5.33, όπου διαχωρίζεται η ομάδα των μεταβλητών της αναγνώρισης του ορίου, της παραγώγου και της δεύτερης παραγώγου ως ρυθμών μεταβολής.



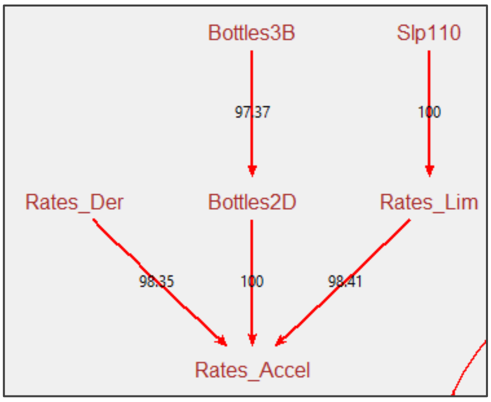
Γράφημα 5.33. Διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών αναγνώρισης ρυθμών μεταβολής

Οι συνεπαγωγικές σχέσεις που προέκυψαν από την επεξεργασία των δεδομένων με RCHIC ήταν αρκετά έντονες. Χαρακτηριστικά στο γράφημα 5.34 φαίνεται το συναπαγωγικό διάγραμμα που προκύπτει με επιλογή όλων των μεταβλητών του ερωτηματολογίου, επίπεδο σημαντικότητας 99% και επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.



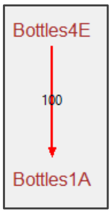
Γράφημα 5.34. Συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μεταβλητών (ε.σ. 99%, ε.ε. 95%)

Ένας κλάδος που ξεχωρίζει από το υπόλοιπο διάγραμμα είναι αυτός που περιλαμβάνει τις μεταβλητές του γεμίσματος δοχείων Bottles3B και Bottles2D, με την αναγνώριση του ρυθμού μεταβολής ως όριο, παράγωγο και επιτάχυνση, καθώς και κλίση μεγαλύτερή από 100% (Γράφημα 5.35). Παρατηρείται ακόμα ότι η αναγνώριση κλίσης μεγαλύτερης του 100% συνεπάγεται αναγνώριση του ορίου $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και της επιτάχυνσης ως ρυθμών μεταβολής.



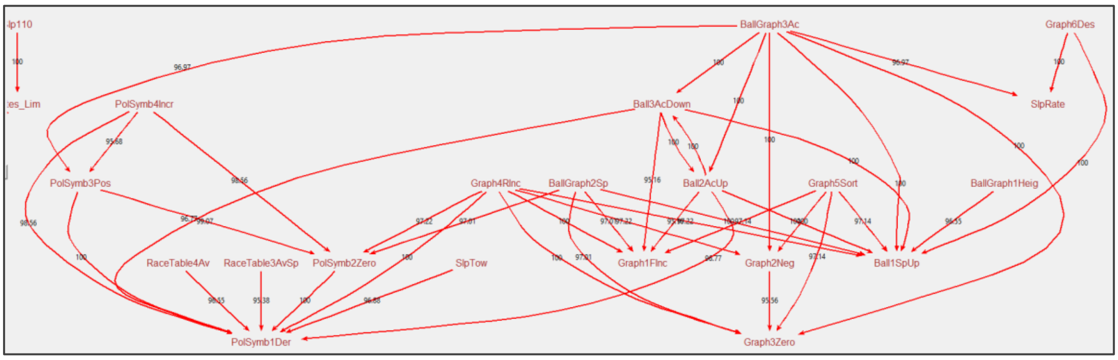
Γράφημα 5.35. Κλάδος 1 από το συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μεταβλητών (ε.σ. 99%, ε.ε. 95%)

Διακριτός είναι ακόμα ο κλάδος των μεταβλητών Bottles4E και Bottles1A (Γράφημα 5.36).



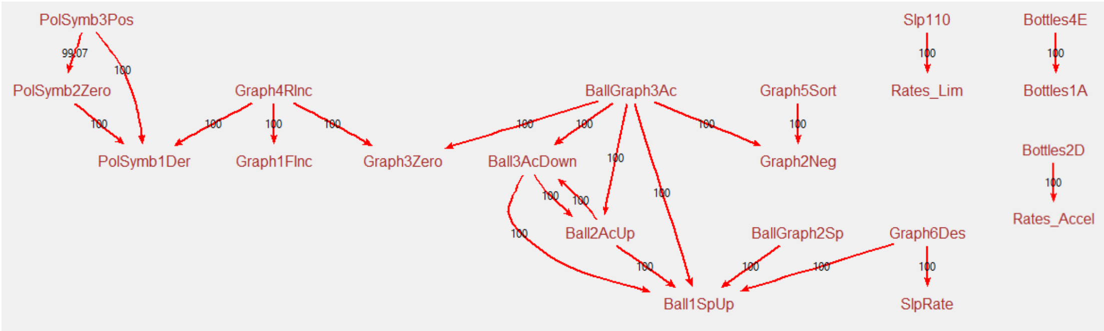
Γράφημα 5.36. Κλάδος 2 από το συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μεταβλητών (ε.σ. 99%, ε.ε. 95%)

Στον μεγάλο κλάδο του συνεπαγωγικού διαγράμματος (Γράφημα 5.37), υπερισχύουν οι μεταβλητές που αφορούν διαδικασιακή εννοιολόγηση των εννοιών. Συγκεκριμένα, φαίνονται οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που αφορούν στα ερωτήματα του έργου με το πέταγμα της μπάλας, της γραφικής παράστασης και της πολυωνυμικής συνάρτησης.



Γράφημα 5.37. Κλάδος 3 από το συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μεταβλητών (ε.σ. 99%, ε.ε. 95%)

Καθώς στο παραπάνω διάγραμμα περιλαμβάνονται πολλές σχέσεις συνεπαγωγής, έγινε εξαγωγή του διαγράμματος με επίπεδο σημαντικότητας 99% και επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, για την αποτύπωση των πιο έντονων σχέσεων (Γράφημα 5.38).



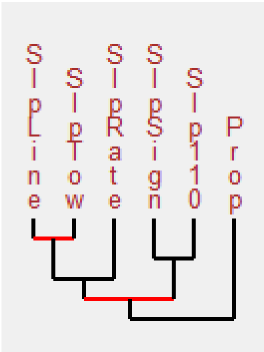
Γράφημα 5.38. Συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μεταβλητών (ε.σ. 99%, ε.ε. 99%)

Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται η σχέση μεταξύ των επιμέρους ερωτημάτων του έργου με την πολυωνυμική συνάρτηση (Pol*), όπου σωστή απάντηση στο τρίτο ερώτημα (PolSymb3Pos) συνεπάγεται σωστή απάντηση στο δεύτερο (PolSymb2Zero) και στο πρώτο (PolSymb1Der). Αντίστοιχα, για το έργο όπου δινόταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης (Graph*), σωστή απάντηση στο τέταρτο ερώτημα (Graph4RInc) συνεπάγεται σωστές απαντήσεις στο πρώτο (Graph1FInc) και στο τρίτο (Graph3Zero) και η σωστή απάντηση στο ερώτημα της κατάταξης από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη τιμή της παραγώγου (Graph5Sort) συνεπάγεται τη σωστή απάντηση στο ερώτημα σε ποια σημεία ο ρυθμός μεταβολής είναι αρνητικός (Graph2Neg).

Έντονες συνεπαγωγικές σχέσεις εμφανίζονται και μεταξύ των ερωτημάτων του έργου για το πέταγμα της μπάλας (Ball*). Σε αυτό, η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της επιτάχυνσης σε σχέση με τον χρόνο (BallGraph3Ac) προϋποθέτει την απάντηση των ερωτημάτων για τη συμπεριφορά της επιτάχυνσης (Ball3AcUp και Ball3AcDown), της ταχύτητας (Ball1SpUp), αλλά και τις σωστές απαντήσεις στα ερωτήματα 3 και 2 του έργου της γραφικής παράστασης (Graph2Neg και Graph3Zero). Προκύπτει ότι η αναγνώριση των σημείων όπου ο ρυθμός μεταβολής μηδενίζεται και είναι αρνητικός είναι προαπαιτούμενη για τη δυνατότητα σχεδίασης της γραφικής παράστασης της επιτάχυνσης. Σημαντική είναι ακόμα η σχέση συνεπαγωγής που παρατηρείται μεταξύ της ερώτησης για τη σχεδίαση της γραφικής παράστασης της παραγώγου και της αναγνώρισης της κλίσης ως ρυθμού μεταβολής.

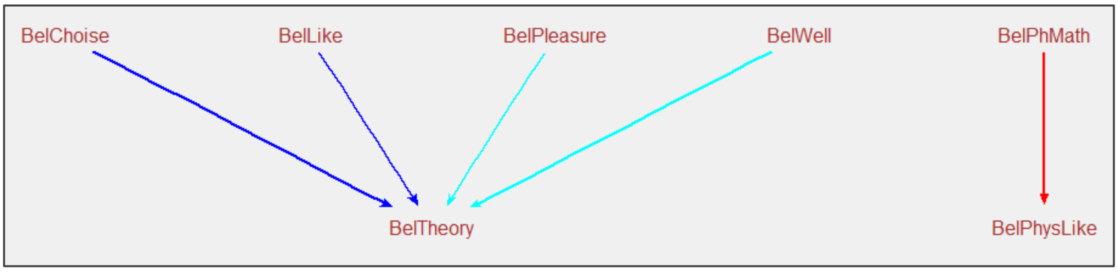
Τέλος, δεν εμφανίζονται στα συνεπαγωγικά διαγράμματα οι μεταβλητές που αφορούν στο έργο με την αναπαράσταση σε πίνακα τιμών και τη γραμμική συνάρτηση.

Στη συνέχεια, διαχωρίστηκαν τα έργα που αφορούν στην κλίση και εφαρμόστηκε συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση σε αυτά. Το διάγραμμα ομοιότητας των μεταβλητών του ερωτηματολογίου που σχετίζονται με την κλίση (Γράφημα 5.39), δείχνει ότι το ερώτημα της κλίσης ευθείας και το ερώτημα του πύργου έχουν ομοιότητα με επίπεδο σημαντικότητας 99,9%. Επιπλέον, παρατηρείται σημαντική ομοιότητα μεταξύ όλων των μεταβλητών, εκτός από τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στο ερώτημα της αναλογικότητας.



Γράφημα 5.39. Διάγραμμα ομοιότητας έργων κλίσης

Όσον αφορά στις στάσεις, δεν φάνηκε να επηρεάζουν την επίδοση στα έργα και δεν εμφανίστηκαν έντονες σχέσεις μεταξύ τους. Αξίζει όμως να σημειωθεί, η ασθενής ένδειξη ότι οι θετικές στάσεις προς τη Μαθηματική Ανάλυση υποδηλώνουν το διάβασμα της θεωρίας κατά τη μελέτη των μαθηματικών (Γράφημα 5.40).



Γράφημα 5.40. Συνεπαγωγικό διάγραμμα ερωτήσεων στάσεων (ε.σ. 85%, ε.ε. 80%)

5.4 Συζήτηση

5.4.1 Πλαίσια και αναπαραστάσεις

Από τα χαμηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα των δύο ερωτηματολογίων της πιλοτικής έρευνας προκύπτει ότι υπάρχουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση της μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με μία άλλη. Και στα δύο ερωτηματολόγια παρατηρήθηκε ιδιαίτερη δυσκολία στη μετατροπή μονάδων. Στο πρώτο η μία τιμή δόθηκε σε km/h και η άλλη σε m/sec, και στο δεύτερο η μία σε lt/h και η άλλη σε ml/sec. Οι περισσότερες δυσκολίες και στις δύο περιπτώσεις παρουσιάστηκαν στη μετατροπή των μονάδων του χρόνου.

Στο ερώτημα "Ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα;" του ερωτηματολογίου Α, οι περισσότερες σωστές απαντήσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων προέκυψαν όταν το πρόβλημα δόθηκε με λεκτική αναπαράσταση, παρόλο που απαιτήθηκε μετατροπή των μονάδων μέτρησης για την επίλυσή του. Στο πλαίσιο με τα δοχεία, το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων στο αντίστοιχο έργο συγκέντρωσε η γραφική αναπαράσταση. Και στα δύο ερωτηματολόγια σε αυτή την ερώτηση οι μεγαλύτερες δυσκολίες παρουσιάστηκαν στη συμβολική αναπαράσταση.

Στο δεύτερο ερώτημα των έργων, σχετικά με την απόσταση που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο και αντίστοιχα τον όγκο του δοχείου κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η πιο οικεία αναπαράσταση φάνηκε να είναι ο πίνακας τιμών και μετά η γραφική αναπαράσταση. Σε αυτή την περίπτωση, οι περισσότερες δυσκολίες παρουσιάστηκαν στη λεκτική αναπαράσταση, γεγονός που σχετίζεται με τα προαναφερθέντα λάθη κατά τη μετατροπή των μονάδων μέτρησης του χρόνου.

Καθώς τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα δύο ερωτηματολόγια παρουσιάζουν ομοιομορφία, φαίνεται ότι η αναπαράσταση επηρεάζει περισσότερο από το πλαίσιο του προβλήματος. Τόσο στο πλαίσιο της ταχύτητας όσο και στο πλαίσιο του γεμίσματος δοχείων, το μεγαλύτερο εμπόδιο ήταν η μετατροπή των μονάδων μέτρησης και ιδιαίτερα του χρόνου, ενώ η συμβολική αναπαράσταση αποδείχτηκε η πιο δύσκολη για τους φοιτητές.

Μια διαφορά μεταξύ των δύο πλαισίων, παρατηρείται στο πρώτο ερώτημα του τρίτου έργου (G3a), όπου είναι αρκετά περισσότεροι αυτοί που απάντησαν σωστά στην περίπτωση με τα δοχεία. Η διαφορά αυτή πιθανών να οφείλεται στην εννοιολόγηση της ταχύτητας ως συγκεκριμένο μέγεθος που εκφράζει μια ιδιότητα του αυτοκινήτου. Έτσι, βλέποντας τη γραφική παράσταση χρόνου και απόστασης πολλοί θεώρησαν ότι εκφράζει την ταχύτητα και απάντησαν ότι κινείται πιο γρήγορα το αυτοκίνητο που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση που είναι πιο πάνω. Στην περίπτωση των δοχείων, ο όγκος και ο χρόνος γίνονται αντιληπτά ως ποσότητες, αλλά η μεταβολή του όγκου σε σχέση με τον χρόνο δεν αντιστοιχεί σε μία ιδιότητα που γνωρίζουν οι φοιτητές. Είναι χαρακτηριστική η αιτιολόγηση στο ερώτημα G3a του δεύτερου ερωτηματολογίου, όπου χρησιμοποιήθηκε σε μεγάλο βαθμό η διαφορά στον όγκο του νερού μεταξύ των δύο δοχείων ή μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών.

Όσον αφορά στην αριθμητική αναπαράσταση, φαίνεται ότι ο πίνακας τιμών βοηθάει τους φοιτητές σε ερωτήματα που έχουν σχέση με την τιμή της μίας ποσότητας σε μία χρονική στιγμή. Συνηθισμένη λάθος απάντηση όταν ζητήθηκε η σύγκριση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή του ρυθμού γεμίσματος των δοχείων σε ένα διάστημα, ήταν να συγκρίνουν την τιμή της απόστασης ή του όγκου σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Προβλήματα παρουσιάζονται και στην εννοιολόγηση της γραφικής παράστασης. Φαίνεται ότι ειδικά στο πλαίσιο της ταχύτητας αρκετοί φοιτητές δεν αναγνώριζαν τις ποσότητες που εκφράζονται στη γραφική παράσταση. Σε πολλές περιπτώσεις θεωρήθηκε ότι η καμπύλη που είναι πιο πάνω αντιστοιχεί στο “πιο γρήγορα”.

Οι δυσκολίες στη συμβολική αναπαράσταση ήταν περισσότερο αναμενόμενες. Ένα λάθος που παρατηρήθηκε αρκετές φορές ήταν η αντικατάσταση μιας τιμής στη συνάρτηση και η εξαγωγή συμπεράσματος μόνο από αυτήν. Σε πολλές από τις σωστές απαντήσεις η αιτιολόγηση έγινε με αντικατάσταση 5 ή παραπάνω τιμών στη συνάρτηση, ενώ λίγοι ήταν αυτοί που αιτιολόγησαν την απάντησή τους με τον συντελεστή της μεταβλητής του χρόνου.

Γενικά, όπως προκύπτει και από τα συνεπαγωγικά διαγράμματα, η δυνατότητα χειρισμού σε μία αναπαράσταση δεν μεταφέρεται σε άλλες, γεγονός που υποδηλώνει ασθενή κατανόηση των εννοιών της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής.

Σε κάποιες περιπτώσεις, στην αριθμητική αλλά και στη γραφική αναπαράσταση, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των τριών με λάθος τρόπο. Σε μελέτη που έγινε σχετικά με τη μεθοδολογία που επιλέγουν οι μαθητές γυμνασίου σε Ελλάδα και Κύπρο κατά την επίλυση προβλημάτων με αναλογίες, προέκυψε ότι χρησιμοποιείται σε πολύ υψηλό ποσοστό η μέθοδος των τριών, ιδιαίτερα από μαθητές της Ελλάδας (Γαγάτσης & Σιαμαρή, 2003). Οι ερευνητές σημειώνουν ότι η διδασκαλία της συγκεκριμένης μεθόδου δεν περιλαμβάνονταν στο επίσημο πρόγραμμα σπουδών. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί ένδειξη ελλιπούς κατανόησης της έννοιας της αναλογίας (Γαγάτσης & Σιαμαρή, 2003). Παρόλο που οι μαθητές κατάφερναν να λύνουν τα προβλήματα που αφορούσαν στις αναλογίες, παρουσίαζαν δυσκολίες όταν έπρεπε να εξετάσουν αν είχαν αναλογία ή όταν το γενικό πλαίσιο του προβλήματος ήταν περίπλοκο.

5.4.2 Στάσεις και εννοιολογήσεις

Από τις απαντήσεις των φοιτητών φαίνεται ότι κυριαρχεί η διαδιακασιακή (procedural) γνώση και όχι η εννοιολογική (conceptual). Καταφέραν να επιλύσουν προβλήματα για την εύρεση της παραγώγου, αλλά απέφυγαν να απαντήσουν ή απάντησαν λάθος σε προβλήματα που απαιτούσαν βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Παρατηρείται σύγχυση μεταξύ μίας ποσότητας και του ρυθμού μεταβολής της ακόμα και στο πλαίσιο της κίνησης. Το υψηλό ποσοστό των φοιτητών που δήλωσαν ότι η επιτάχυνση μειώνεται όταν η μπάλα πάει προς τα πάνω και αυξάνεται όταν η μπάλα πέφτει είναι ενδεικτικό της παρανόησης αυτής και επιβεβαιώνει τα ευρήματα άλλων ερευνών (Jones, 1983).

Ακόμα, ο ρυθμός μεταβολής θεωρείται ότι έχει σχέση με τη μεταβολή μίας ποσότητας σε σχέση με τον χρόνο ή αλλιώς ότι είναι η ταχύτητα μεταβολής. Μία άλλη συνηθισμένη εννοιολόγηση η οποία είναι περιοριστική και δεν είναι σαφές ότι συνδέεται με τη συμμεταβολή είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος. Σε αυτή την περίπτωση ο ρυθμός μεταβολής είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να ερμηνευτεί σε κάποιο πλαίσιο.

Τα πιο συνηθισμένα και οικεία παραδείγματα ρυθμών μεταβολής αποτελούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση και φάνηκε δυσκολία στον εντοπισμό άλλων ρυθμών μεταβολής από τον πραγματικό κόσμο. Αυτό συνδέεται και με την περιορισμένη σύνδεση των μαθηματικών με πραγματικές καταστάσεις και εφαρμογές που παρατηρήθηκε στα σχολικά βιβλία. Υποστηρίζεται έτσι, η άποψη ότι για την καλύτερη εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής πρέπει να δίνονται περισσότερα παραδείγματα εκτός του πλαισίου της κίνησης (Herbert & Pierce, 2011· Wilhelm & Confrey, 2003).

Η θεώρηση του ρυθμού μεταβολής ως ενός αριθμού και η έντονη σύνδεσή του με την παράγωγο που παρατηρήθηκε στους φοιτητές, σχετίζονται και με τον τρόπο που αυτός παρουσιάζεται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, όπως αναλύθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο.

Οι απαντήσεις των φοιτητών στα ερωτήματα του ερωτηματολογίου που σχετίζονταν με την κλίση επιβεβαιώνουν τα ευρήματα άλλων ερευνών που δείχνουν ασθενή κατανόηση της κλίσης και αδυναμία σύνδεσης των διαφόρων αναπαραστάσεών της (Dolores-Flores κ.ά., 2019· Stump, 2001α). Ένα σημείο το οποίο προκαλεί ανησυχία σχετικά με τις δεξιότητες στα μαθηματικά των αποφοίτων λυκείου, είναι το χαμηλό ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην εύρεση της κλίσης ευθείας.

Σύμφωνα με διεθνείς έρευνες, μία βασική δυσκολία των μαθητών είναι η επέκταση της διαδικασιακής γνώσης σε εννοιολογική (Dolores-Flores κ.ά., 2019). Η θέση ότι θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη λειτουργική εννοιολόγηση της κλίσης, τονίζεται από τις συναπαγωγικές σχέσεις που προέκυψαν μεταξύ των ερωτημάτων και του ερωτήματος αναγνώρισης της κλίσης ως ρυθμού μεταβολής. Η διαδικασιακή γνώση δεν συνεπάγεται ότι οι μαθητές και φοιτητές μπορούν να ερμηνεύσουν την κλίση σε διάφορα πλαίσια και πραγματικές καταστάσεις. Για την ενδυνάμωση της εννοιολογικής κατανόησης της κλίσης και τη δόμηση μίας συνεκτικής εικόνας της, μπορούν να χρησιμοποιηθούν δραστηριότητες με χρήση ΤΠΕ, στις οποίες θα δίνεται έμφαση στις διάφορες όψεις της (Avgerinos & Remoundou, 2019).

Τα ευρήματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα ερευνών ότι η κλίση θεωρείται ότι ταυτίζεται με τη γωνία (Dolores-Flores κ.ά., 2019· Stump, 2001β). Σε συνέχεια αυτής της παρανόησης, οι φοιτητές αναζητούν μονάδες μέτρησης της κλίσης και συνήθως χρησιμοποιούν μοίρες ή μέτρα. Η αναγνώριση αυτών των παρανοήσεων μπορεί να ωθήσει τους εκπαιδευτικούς να τονίσουν τη διαφορά της κλίσης από τη γωνία και να αποσαφηνίσουν τις μονάδες μέτρησης.

Καθώς ο όρος κλίση χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα, η σύνδεση με τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών και φοιτητών είναι σημαντική για την κατανόησή της. Ο συμβολισμός και η γλώσσα που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια και κατά τη διδασκαλία θα πρέπει να είναι σαφής για την αποφυγή παρανοήσεων. Επιπλέον, καθώς η κλίση χρησιμοποιείται σε άλλους τομείς των επιστημών εκτός των μαθηματικών, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η ίδια ορολογία.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι αναλογικές ποσότητες δεν είναι σαφής στους μαθητές και ιδιαίτερα η αναπαράσταση τους σε ένα σύστημα αξόνων. Οι ποσότητες x και y που συνδέονται με μία γραμμική σχέση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ θεωρούνται ανάλογες. Αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα άλλων ερευνών όπου φαίνεται ότι η κλίση θεωρείται ότι είναι ο λόγος $\frac{y}{x}$ και όχι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Tyne, 2017).

Παρόλο που οι συμμετέχοντες στην έρευνα είχαν παρακολουθήσει το ίδιο πρόγραμμα σπουδών και είχαν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο, παρατηρείται σημαντική ανομοιομορφία στις απαντήσεις ανάμεσα στα τμήματα. Η ανομοιομορφία των απαντήσεων ανάμεσα στα τμήματα της έρευνας μπορεί να αποδοθεί στη διαφορά στις απαιτήσεις για την εισαγωγή στο κάθε τμήμα. Οι φοιτητές του τμήματος Φυσικής, που είχε τη μεγαλύτερη βάση εισαγωγής, είχαν σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα στα περισσότερα από τα ερωτήματα. Αυτή η διαφορά μπορεί να οφείλεται και στη μεγαλύτερη εξοικείωση των φοιτητών του συγκεκριμένου τμήματος με την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών σε πραγματικές καταστάσεις. Η σύνδεση των μαθηματικών με πραγματικά προβλήματα μπορεί να ενδυναμώσει την εννοιολογική κατανόηση των εννοιών αυτών.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στα πρώτα δύο ερωτήματα οι φοιτητές προσπάθησαν να συνδυάσουν όλα τα δεδομένα με έναν λογικό τρόπο, έτσι ώστε να προκύψει μία απάντηση. Αυτό ενδέχεται να είναι αποτέλεσμα του «διδακτικού συμβολαίου» στο οποίο έχουν συνηθίσει. Η παρουσίαση περισσότερων δεδομένων από τα απαιτούμενα φαίνεται ότι δυσκόλεψε τους φοιτητές. Το διδακτικό συμβόλαιο αναφέρεται στην άτυπη συμφωνία μεταξύ εκπαιδευτικού, μαθητή και γνωστικού αντικειμένου που καθορίζει τις μεταξύ τους σχέσεις και προτάθηκε από τον Brousseau το 1984 (Γαγάτσης κ.ά., 2006). Σύμφωνα με αυτή, οι μαθητές θεωρούν ότι κάθε πρόβλημα έχει μία μόνο λύση στην οποία θα καταλήξουν με αριθμητικούς συνδυασμούς των δεδομένων (Γαγάτσης κ.ά., 2006).

Στο Ελληνικό πρόγραμμα, η κλίση ευθείας μελετάται στη Β΄ Γυμνασίου και περισσότερες εννοιολογήσεις της καθώς και διαδικασίες για τον υπολογισμό της διδάσκονται στην Α΄ Λυκείου. Παρόλα αυτά, η λειτουργική εννοιολόγηση της κλίσης δεν διδάσκεται και η κλίση δεν συνδέεται με τον ρυθμό μεταβολής. Έχει σημειωθεί από πολλούς ερευνητές ότι η λειτουργική κατανόηση της κλίσης είναι σημαντική για την κατανόηση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως η παραγωγός και ο ρυθμός μεταβολής. Αυτό θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών και να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση της κλίσης ως ρυθμού μεταβολής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Από τα παραπάνω συνάγεται το ενδιαφέρον της περαιτέρω διερεύνησης των εννοιολογήσεων των φοιτητών ιδιαίτερα για την κλίση και τη σύνδεσή της με τον ρυθμό μεταβολής. Το ερευνητικό ερώτημα που προκύπτει είναι ποιοι τρόποι σκέψης οδήγησαν στις παραπάνω παρανοήσεις. Η έρευνα για τους τρόπους που επιχειρηματολογούν οι φοιτητές για την κλίση και τον ρυθμό μεταβολής θα μπορούσε να βοηθήσει στην αναθεώρηση της διδασκαλίας και τον υπερσκελισμό πιθανών εμποδίων.

5.4.3 Παρανοήσεις

Από τις έρευνες που διεξήχθησαν, παρατηρήθηκε δυσκολία στη μετατροπή μονάδων, κάτι το οποίο θα έπρεπε να μην προκαλεί προβλήματα, ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Σημειώνεται η έμφαση των προγραμμάτων σπουδών άλλων χωρών, όπως της Σιγκαπούρης, στις μετρήσεις και στις μονάδες μέτρησης.

Η γραφική παράσταση συνάρτησης αλλά και της παραγώγου, φαίνεται ότι προκαλεί δυσκολίες σε αρκετούς φοιτητές, τόσο ως προς την εύρεση τιμών όσο και ως προς την ερμηνεία της.

Σε έρευνες σχετικά με τον αναλογικό συλλογισμό έχει παρατηρηθεί έντονο το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της γραμμικότητας (illusion of linearity), δηλαδή η χρήση αναλογιών σε μη αναλογικές καταστάσεις. Αυτό φάνηκε και από την παρούσα έρευνα, όπου δεν αναγνωρίζονται τα ανάλογα ποσά.

Ακόμα, πολλοί φοιτητές ιδιαίτερα σε μη συνηθισμένα προβλήματα προσπαθούν να συνδυάσουν τα αριθμητικά δεδομένα με «λογικό» τρόπο ώστε να προκύψει αριθμητικό αποτέλεσμα, υπακούοντας στο διδακτικό συμβόλαιο στο οποίο έχουν συνηθίσει.

Σε σχέση με την κλίση, παρατηρείται ταύτιση της κλίσης με τη γωνία, η οποία σχετίζεται και με την παρουσίαση στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και η θεώρηση της κλίσης ως μεγέθους, το οποίο θα πρέπει να έχει μονάδες μέτρησης. Η παρουσίαση της κλίσης ως ποσοστού περιπλέκει την αντίληψη των φοιτητών. Ακόμα δεν γίνεται αντιληπτή η λειτουργική ερμηνεία της κλίσης ως ρυθμού μεταβολής.

Οι εννοιολογήσεις της κλίσης μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια είναι περιορισμένες και αυτό αποβαίνει σε αδυναμία σύνδεσης των αναπαραστάσεών της. Τέλος, παρατηρήθηκε ότι η κλίση θεωρείται ότι είναι ο λόγος $\frac{y}{x}$ και όχι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, όπως αναφέρεται και σε άλλες έρευνες (Tyne, 2017). Η παρανόηση αυτή ενισχύεται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια.

Στο πλαίσιο της κίνησης, η ταχύτητα θεωρείται ως μέγεθος και όχι ως ρυθμός μεταβολής δύο μεγεθών και στη γραφική αναπαράσταση η ταχύτητα ερμηνεύεται ως η ποσότητα στον άξονα των y που είναι η απόσταση που διανύεται. Στη γραφική παράσταση θεωρείται ότι η καμπύλη που είναι πιο πάνω εκφράζει το πιο γρήγορα. Ακόμα, η μέση ταχύτητα συγχέεται με το μέσο όρο ταχυτήτων.

Η συμπεριφορά της ταχύτητας συνδέεται με τη συμπεριφορά της επιτάχυνσης, καθώς πολλοί φοιτητές θεώρησαν ότι όταν η ταχύτητα αλλάζει η επιτάχυνση αλλάζει με τον ίδιο τρόπο. Η παρανόηση αυτή σχετίζεται με τη σύγχυση μεταξύ της συμπεριφοράς του ρυθμού μεταβολής και της συνάρτησης και με την ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων. Η θεώρηση ότι η επιτάχυνση αυξάνεται όταν η ταχύτητα αυξάνεται έχει παρατηρηθεί και σε έρευνες στον τομέα των φυσικών επιστημών (Jones, 1983). Ιδιαίτερες δυσκολίες παρουσιάζει η αντίληψη της επιτάχυνσης που είναι αρνητική και σταθερή, η οποία θεωρείται ότι αλλάζει και δεν λαμβάνεται υπόψη η προσημασμένη τιμή της. Οι δυσκολίες ερμηνείας του αρνητικού ρυθμού μεταβολής έχουν φανεί και προηγούμενες έρευνες (Ärlebäck κ.ά., 2013· Doerr κ.ά., 2013).

Οι εννοιολογήσεις του ρυθμού μεταβολής που επικρατούν είναι ως ένας αριθμός, ως προς τον χρόνο και ως παράγωγος. Πολλοί φοιτητές εννοιολογούν τον ρυθμό μεταβολής κυρίως στη φυσική. Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής ως μεταβολής σε μία χρονική μονάδα προκύπτει, όταν υπερισχύει η εικόνα του ρυθμού μεταβολής από τη φυσική. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στη φυσική ο ρυθμός μεταβολής ορίζεται ως μεταβολή σε σχέση με τον χρόνο.

Υψηλό ήταν το ποσοστό των φοιτητών που δεν διαχώρισαν τον μέσο όρο του ρυθμού μεταβολής από τη μέση τιμή της συνάρτησης ή τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής (Weber & Dorko, 2013). Ένα πρόβλημα είναι ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής πρακτικά δεν ορίζεται στα μαθηματικά στα σχολικά εγχειρίδια πολλών χωρών, και συνεπώς δεν αποσαφηνίζεται και η διαφορά του από τον μέσο όρο (Bezuidenhout, 1998).

Φαίνεται ακόμα να υπάρχει δυσκολία ερμηνείας αρνητικών ρυθμών μεταβολής και σύνδεσης της γραφικής παράστασης συνάρτησης με τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής (Ubuz, 2007· Çetin, 2009). Γενικά η μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη, και η σύνδεση αναπαραστάσεων μεταξύ τους και με την έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι περιορισμένη (Herbert & Pierce, 2011).

Παρόλου που σε έρευνες έχει παρατηρηθεί δυσκολία σύνδεσης του ρυθμού μεταβολής με την παράγωγο (Heid, 1984· Tall, 1986), φαίνεται ότι η πιο συνηθισμένη εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής είναι αυτή ως παράγωγος.

Η περιορισμένη εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής στο πλαίσιο της κίνησης υπερισχύει και, όπως προτείνεται στη βιβλιογραφία, παραδείγματα ρυθμών μεταβολής σε διάφορα πλαίσια θα ενίσχυαν την εννοιολόγηση της έννοιας (Herbert & Pierce, 2011· Wilhelm & Confrey, 2003).

Σύνοψη

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν δύο έρευνες που πραγματοποιήθηκαν για τη διερεύνηση των εννοιολογήσεων των φοιτητών, σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής και τις αναπαραστάσεις του. Η μία έρευνα έγινε σε μελλοντικούς δασκάλους και η άλλη σε φοιτητές τεσσάρων τμημάτων σχολών θετικής κατεύθυνσης. Από αυτές προκύπτει ασθενής σύνδεση των αναπαραστάσεων του ρυθμού μεταβολής και παρανοήσεις σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής και την ερμηνεία του σε διάφορα πλαίσια.

6 Δραστηριότητες

Ενδεικτικές δραστηριότητες για τη διαισθητική αντίληψη του ρυθμού μεταβολής

6.1 Εισαγωγή

Στην τελευταία φάση της έρευνας παρουσιάζονται προτεινόμενες ενδεικτικές δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν με σκοπό την ενδυνάμωση της διαισθητικής αντίληψης και εννοιολόγησης της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής. Οι δραστηριότητες αυτές προέκυψαν από την ενδελεχή ανάλυση και τον συνδυασμό των ευρημάτων με σκοπό την καλύτερη εμπέδωση του ρυθμού μεταβολής. Με την πάροδο του χρόνου προκύπταν κι άλλες δραστηριότητες καθώς και η ανάγκη για εμπλουτισμό τους και πειραματική εφαρμογή τους. Τα μέρη αυτά σχεδιάζεται να υλοποιηθούν σε επόμενη ερευνητική φάση.

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια είναι τρία παιχνίδια σε ψηφιακό περιβάλλον, μία βιωματική δραστηριότητα, ένα GeoGebra book και μία δραστηριότητα με εκπαιδευτική ρομποτική. Κάποιες από τις δραστηριότητες δοκιμάστηκαν πειραματικά σε μικρές ομάδες παιδιών και φοιτητών.

6.2 Μεθοδολογία

6.2.1 Βασικές αρχές ανάπτυξης δραστηριοτήτων

Για την ανάπτυξη εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων είναι χρήσιμο να ακολουθούνται κάποιες αρχές ανάπτυξης εκπαιδευτικών παιχνιδιών. Παρόλο που υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για την ανάπτυξη ηλεκτρονικών παιχνιδιών, είναι λιγότερες οι αναφορές που εστιάζουν στα εκπαιδευτικά παιχνίδια. Η κατασκευή-ανάπτυξη ενός παιχνιδιού, το οποίο να είναι διασκεδαστικό, αλλά συγχρόνως και εκπαιδευτικό απαιτεί (Aleven κ.ά., 2010):

- συνδυασμό γνώσεων ανάπτυξης παιχνιδιών
- ακριβή οριοθέτηση των εννοιών που επιδιώκουμε να μεταδοθούν
- επιλογή μιας κατάλληλης παιδαγωγικής διαδικασίας

Οι Aleven κ.ά. (2010) έχουν προτείνει ένα πλαίσιο για την ανάλυση και τη σχεδίαση ενός εκπαιδευτικού παιχνιδιού, το οποίο αποτελείται από τρία μέρη, αλλά και τον συνδυασμό τους:

- Καθορισμός των μαθησιακών στόχων. Περιλαμβάνεται η πρότερη γνώση των μαθητών, τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα από το παιχνίδι, αλλά και ότι μπορεί να μάθουν οι παίχτες από το παιχνίδι χωρίς αυτό να ανήκει στους μαθησιακούς στόχους.

- Το πλαίσιο MDA (Mechanics, Dynamics, Aesthetics), όπου ο όρος Mechanics αναφέρεται στα βασικά στοιχεία του παιχνιδιού όπως υλικά, κανόνες, στόχους. Το Dynamics αφορά στις συμπεριφορές που προκύπτουν από τις ενέργειες του παίχτη και το Aesthetics στην υποκειμενική εμπειρία του κάθε παίχτη, όπως τα συναισθήματα που του προκαλούνται.
- Χρήση αρχών για διδακτική σχεδίαση βασισμένων σε έρευνες.

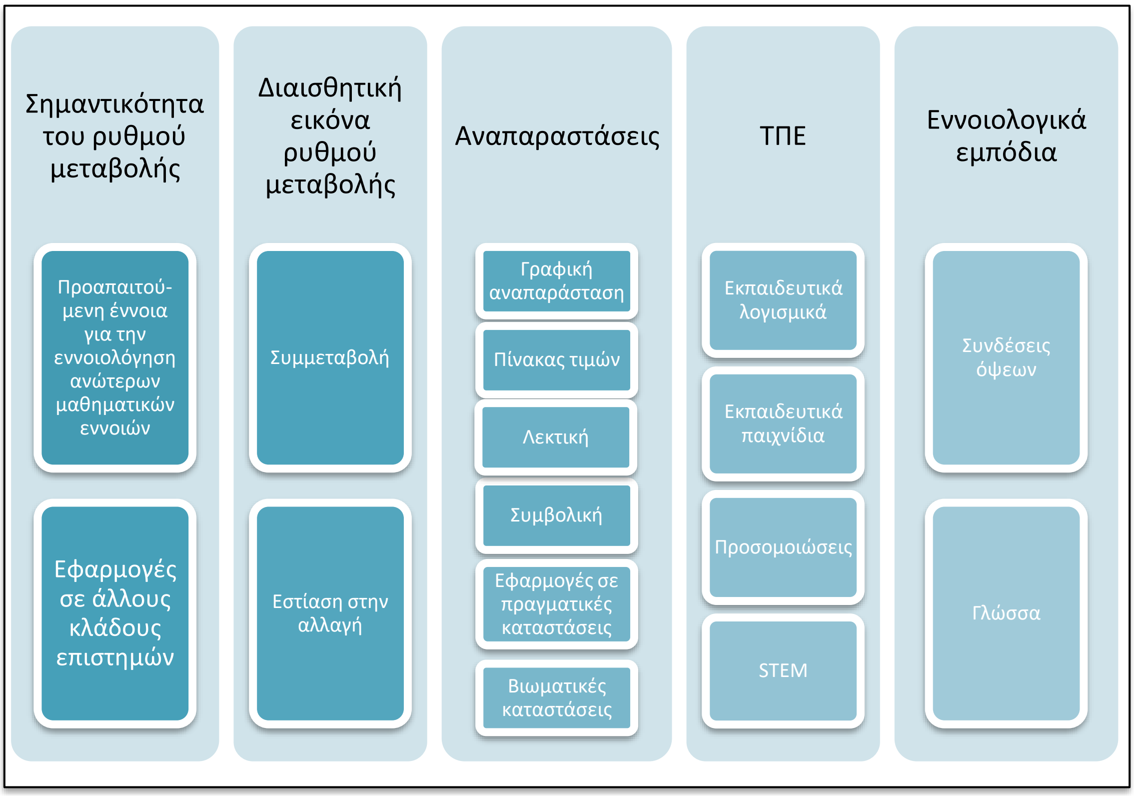
Σύμφωνα με διεθνείς έρευνες αλλά και τα ευρήματα των ερευνών που περιεγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, ο ρυθμός μεταβολής είναι μια σημαντική έννοια των μαθηματικών, συνδεδεμένη με την έννοια της παραγώγου. Η διδασκαλία του είναι υποβαθμισμένη και περιορισμένη κυρίως σε προβλήματα κινηματικής. Η εννοιολογική κατανόηση του ρυθμού μεταβολής είναι ελλιπής και συνήθως η μελέτη της έννοιας αρκείται σε μηχανιστικούς αλγορίθμους επίλυσης προβλημάτων.

Τα συμπεράσματα ερευνών σχετικά με τον ρυθμό μεταβολής όπως διαφαίνονται από τη βιβλιογραφία, αλλά και τα αποτελέσματα από τα ερωτηματολόγια που δόθηκαν στην παρούσα έρευνα αποκαλύπτουν ότι οι μαθητές του λυκείου αλλά και οι φοιτητές έχουν σημαντικές δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση του ρυθμού μεταβολής. Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής μπορεί να γίνει σταδιακά στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης, ξεκινώντας από το δημοτικό. Με τον τρόπο αυτό η εννοιολόγηση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής αναμένεται να γίνει πιο ομαλά και η σύνδεση της παραγώγου με φυσικά φαινόμενα να προκύπτει ως αυτονόητη.

Σκοπός των δραστηριοτήτων είναι η εισαγωγή των εννοιών της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής με διαισθητικό τρόπο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, εστιάζοντας στη συμμεταβολή των ποσοτήτων. Οι δραστηριότητες που απευθύνονται σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επιλέχτηκε να έχουν το στοιχείο του παιχνιδιού. Με τον τρόπο αυτό επιδιώκεται να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν έτσι ώστε οι μαθητές να εστιάσουν στην αλλαγή των ποσοτήτων και όχι σε συγκεκριμένες τιμές τους. Αναζητήθηκαν τρόποι οι οποίοι να βοηθάνε τους μαθητές να συσχετίσουν δύο ποσότητες που μεταβάλλονται (Thompson & Carlson, 2017).

Οι βασικές αρχές στις οποίες βασίστηκε η σχεδίαση των δραστηριοτήτων είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι σημαντική έννοια για τα μαθηματικά, η διαισθητική εισαγωγή στον ρυθμό μεταβολής πριν τη Μαθηματική Ανάλυση θα διευκολύνει τη μελέτη των μαθηματικών και της φυσικών επιστημών, οι ποικίλες αναπαραστάσεις και οι νέες τεχνολογίες μπορούν να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην προσπάθεια αυτή και τα ευρήματα σύγχρονων ερευνών για τη μαθηματική εκπαίδευση και τα εννοιολογικά εμπόδια σε σχέση με την έννοια θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά τη σχεδίαση εκπαιδευτικού λογισμικού (Εικόνα 6.1).



Εικόνα 6.1. Βασικές αρχές ανάπτυξης δραστηριοτήτων

Αναλυτικά, οι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν στηρίζονται πάνω στις παρακάτω βασικές αρχές.

Σημαντικότητα του ρυθμού μεταβολής

Η κατανόηση και δυνατότητα ερμηνείας της μεταβολής και του ρυθμού θεωρούνται προαπαιτούμενες για την κατανόηση πιο προχωρημένων εννοιών των μαθηματικών. Το μεγάλο εύρος εφαρμογών τους σε άλλους κλάδους των επιστημών καθιστά τη διδακτική τους ακόμα πιο επιτακτική.

Διαισθητική εικόνα

Η ενασχόληση των παιδιών με προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής από πιο μικρή ηλικία πριν την τυπική διδασκαλία του διαφορικού λογισμού θα τους βοηθήσει στη συνέχεια να κατανοήσουν τις έννοιες σε πιο τυπικό πλαίσιο. Δραστηριότητες με εστίαση στην αλλαγή και στη συμμεταβολή μπορούν να αποτελέσουν μια διαισθητική εννοιολογική εικόνα για τη μετέπειτα ενασχόληση με τον Διαφορικό Λογισμό και τέλος μπορούν να αποτελέσουν μέρος διδακτικής παρέμβασης σε μικρούς μαθητές.

Αναπαραστάσεις

Οι κατανόηση της έννοιας σε διάφορες αναπαραστάσεις και η δυνατότητα μετάβασης από μία αναπαράσταση σε μία άλλη θεωρείται ταυτόσημη με την κατανόηση της έννοιας. Σε συνδυασμό με τις αναπαραστάσεις αναφέρονται και οι εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα καθώς και βιωματικές καταστάσεις.

Η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με τη φυσική και με προβλήματα του πραγματικού κόσμου μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ερμηνεύσουν τις έννοιες πέρα από την αλγοριθμική εφαρμογή τους. Η μοντελοποίηση/προσομοίωση προβλημάτων μπορεί να γίνει σε ένα ψηφιακό περιβάλλον με χρήση τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών (Herbert & Pierce, 2008). Ένα τέτοιο περιβάλλον προσφέρει δυνατότητες για εξερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα παρουσίασης και επεξεργασίας πολλαπλών αναπαραστάσεων, βοηθώντας στη σύνδεση των αναπαραστάσεων μεταξύ τους καθώς και με τις αντίστοιχες έννοιες των μαθηματικών.

ΤΠΕ

Παρόλο που σε μία τάξη μαθηματικών δεν είναι τόσο εύκολο να γίνουν πειράματα, οι τεχνολογίες πληροφορίας επιτρέπουν την προσομοίωση ή τη μοντελοποίηση προβλημάτων που αντιστοιχούν σε πραγματικές καταστάσεις. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να οπτικοποιηθούν και νοηματοδοτηθούν οι έννοιες.

Εννοιολογικά εμπόδια

Οι πολλές όψεις του ρυθμού μεταβολής και τα διάφορα πλαίσια στα οποία μπορεί να εκφραστεί και να εφαρμοστεί, καθιστούν δύσκολη τη διαμόρφωση μίας συνεκτικής εικόνας για αυτόν. Αφενός πρέπει να αποσαφηνιστούν οι έννοιες που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής και αφετέρου να γίνουν οι συνδέσεις μεταξύ τους. Μεταξύ των εννοιολογικών εμποδίων σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής είναι και η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του. Για τον υπερσκελισμό των παρανοήσεων που δημιουργούνται από τη γλώσσα θεωρείται απαραίτητο να αποσαφηνιστούν οι έννοιες και οι εκφράσεις και να μπορούν οι μαθητές να εκφράσουν τη σκέψη τους σε σχέση με προβλήματα με ρυθμούς μεταβολής σε διάφορα πλαίσια.

Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάστηκαν και αναπτύχθηκαν έξι δραστηριότητες (Πίνακας 6.1) οι οποίες απευθύνονται σε παιδιά των τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και των πρώτων της δευτεροβάθμιας. Οι δύο από αυτές ήταν στο πλαίσιο της κίνησης, η μία σε ένα διαφορετικό πλαίσιο με ένα πλοίο που έχει μία ρωγμή από την οποία εισέρχεται νερό. Μία δραστηριότητα ήταν βιωματική και στηρίχτηκε στο παράδειγμα του γεμίσματος δοχείων. Καθώς, κατά τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής αναδείχτηκε ο σημαντικός ρόλος της κλίσης ευθείας για την κατανόησή του, σχεδιάστηκε και ένα GeoGebra book με δραστηριότητες για τη ενίσχυση της κατανόησης της κλίσης σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τέλος, σχεδιάστηκε μία δραστηριότητα για τον αναλογικό συλλογισμό με εφαρμογή εκπαιδευτικής ρομποτικής.

Οι δραστηριότητες αναφέρονται με τη σειρά με την οποία παρουσιάζονται οι έννοιες σε μία μαθησιακή εξελικτική πορεία μάθησης του ρυθμού μεταβολής. Πρώτα αναφέρεται η δραστηριότητα Αλλάζοντας τροχούς η οποία είναι πιο γενική και αγγίζει θέματα αναλογικών καταστάσεων. Στη συνέχεια η δραστηριότητα *Ρίξε και τρέξε* εστιάζει στη δημιουργία του λόγου ποσοτήτων και στην ταχύτητα. Η δραστηριότητα *Γεμίζοντας ποτήρια* είναι σχετική με ποσότητα διαφορετικές του χρόνου που συμμεταβάλλονται. Ο *δεινόσαυρος* συνδυάζονται δύο πλαίσια και ο *ΠιΤανικός* είναι πιο απαιτητική δραστηριότητα. Τέλος, η *Κλίση* απευθύνεται σε μεγαλύτερες ηλικίες καθώς είναι έντονη τόσο η συμβολική όσο και η γραφική αναπαράσταση.

Πίνακας 6.1. Ενδεικτικές δραστηριότητες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	**ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ**
Αλλάζοντας τροχούς	Βιωματική δραστηριότητα με εκπαιδευτική ρομποτική
Ρίξε και τρέξε	Εφαρμογή σε ηλεκτρονικό περιβάλλον στο πλαίσιο της κίνησης
Γεμίζοντας ποτήρια	Βιωματική δραστηριότητα με παρατήρηση του γεμίσματος ποτηριών με νερό
Ο δεινόσαυρος	Εφαρμογή σε ηλεκτρονικό περιβάλλον με συνδυασμό κίνησης και άλλου πλαισίου
ΠιΤανικός	Εφαρμογή σε ηλεκτρονικό περιβάλλον με ρυθμούς μεταβολής
Κλίση ευθείας	Συνδυασμός μικρών δραστηριοτήτων για την κλίση σε ηλεκτρονικό περιβάλλον

Τρεις από τις δραστηριότητες αυτές επιλέχτηκαν και δοκιμάστηκαν σε μικρές ομάδες μαθητών ή φοιτητών. Οι ομάδες που συμμετείχαν στην έρευνα αποτελούνται από παιδιά ή φοιτητές που δέχτηκαν να συμμετέχουν στις δραστηριότητες. Συγκεκριμένα, η δραστηριότητα «Γεμίζοντας τα ποτήρια» δοκιμάστηκε με δύο παιδιά της Στ΄

Δημοτικού. Η δραστηριότητα ΠιΤανικός δοκιμάστηκε σε τρεις ομάδες φοιτητών και σε μία μαθητών της Στ΄ Δημοτικού και η «Αλλάζοντας τροχούς» σε δύο ομάδες με δύο μαθητές η κάθε μία. Οι άλλες τρεις δραστηριότητες δεν δοκιμάστηκαν.

Η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων ακολούθησε τρεις φάσεις. Η πρώτη φάση της ήταν η σχεδίαση και αποδείχτηκε το πιο χρονοβόρο και δύσκολο μέρος. Κατά τη φάση αυτή τέθηκαν οι στόχοι, εντοπίστηκαν τα σημεία εστίασης, σύμφωνα με τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες που προκαλούνται στους μαθητές, και σχεδιάστηκαν οι δραστηριότητες.

Η δεύτερη φάση ήταν η δημιουργία των δραστηριοτήτων και η τρίτη φάση ήταν η επέκταση κάποιων από τις δραστηριότητες σε διδακτικά σενάρια.

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται μπορούν να θεωρηθούν απαιτητικές (challenging tasks) καθώς δεν είναι αποτελούν δραστηριότητες εξάσκησης, αλλά απαιτούν τον συνδυασμό μαθηματικών γνώσεων και κυρίως σκέψης και αποτελούνται από περισσότερα από ένα βήματα (Papadopoulos, 2020).

6.2.2 Τεχνολογίες

Υπάρχει μία πληθώρα εφαρμογών πληροφορικής οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά. Είναι διαθέσιμα τόσο εκπαιδευτικά εργαλεία με συγκεκριμένο πλαίσιο όσο και εφαρμογές οι οποίες επιτρέπουν ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού. Για τον ρυθμό μεταβολής αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.3.3 ΤΠΕ και ρυθμός μεταβολής κάποιες ενδεικτικές εφαρμογές που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν χωρίς αλλαγή.

Στις πέντε από τις έξι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν, χρησιμοποιήθηκαν ΤΠΕ. Στις τρεις από αυτές επιλέχτηκε το λογισμικό GeoGebra. Το GeoGebra αποτελεί ένα ελεύθερο διαδραστικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ανοιχτού κώδικα που συνδυάζει την άλγεβρα, τη γεωμετρία αλλά και τον απειροστικό λογισμό (Hohenwarter κ.ά., 2008). Έχει σχεδιαστεί για διδακτική χρήση και χρησιμοποιείται ευρέως από καθηγητές και μελετητές μαθηματικών. Έχει χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης, μεταξύ των οποίων η κλίση, η εφαπτομένη σε σημείο καμπύλης και η παράγωγος (Hohenwarter κ.ά., 2008).

Καθώς η γλώσσα προγραμματισμού στην οποία στηρίζεται είναι η Java, είναι διαθέσιμο σε διαφορετικά λειτουργικά συστήματα. Τα έργα που αναπτύσσονται μπορούν να αποθηκευτούν στους εξυπηρετητές του GeoGebra στο διαδίκτυο και να είναι προσβάσιμα από όλους, χωρίς εγκατάσταση επιπλέον λογισμικού. Ακόμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να τα αποθηκεύσει στον υπολογιστή του και να τα αλλάξει σύμφωνα με τις ανάγκες του.

Το συγκεκριμένο λογισμικό είναι εύχρηστο και χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Είναι χαρακτηριστικό ότι στην έρευνα που έγινε στους μαθηματικούς, στην ερώτηση «Ποιο λογισμικό χρησιμοποιήσατε στη διδασκαλία την τελευταία χρονιά;», το 85% αυτών που απάντησαν δήλωσε το GeoGebra.

Οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται στο GeoGebra είναι δυνατό να είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο και προσβάσιμες από εκπαιδευτικούς και μαθητές. Στο GeoGebra μπορούν να αναπαρασταθούν έννοιες σε γραφική και αλγεβρική μορφή.

Το λογισμικό GeoGebra επιλέχτηκε για τις δραστηριότητες γιατί είναι εύκολο στη χρήση, είναι ανεξάρτητο λειτουργικού συστήματος, δίνει πολλές δυνατότητες αναπαράστασης και είναι δυνατή η εξαγωγή ιστοσελίδων με τις δραστηριότητες, έτσι ώστε να είναι προσβάσιμες από το Διαδίκτυο χωρίς εγκατάσταση λογισμικού στον υπολογιστή. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής μπορεί να ασχοληθεί με τις δραστηριότητες αυτές από οποιοδήποτε σημείο και όχι μόνο στο σχολείο, ενώ συγχρόνως δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να τις αλλάξει, έτσι ώστε να καλύψει τις ιδιαίτερες ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία.

Οι δραστηριότητες *Ρίξε και τρέξε* και *Ο δεινόσαυρος* που αναπτύχθηκαν στο GeoGebra, έχουν τη μορφή παιχνιδιού. Η δραστηριότητα για την κλίση είναι ένα GeoGebra book με επιμέρους applets. Για τον εννοιολογικό χάρτη έχει συμπεριληφθεί στο GeoGebra book χρησιμοποιήθηκε το GoConqr (2021), ένα ελεύθερο, διαδικτυακό και εύχρηστο λογισμικό εννοιολογικής χαρτογράφησης. Το πλεονέκτημά του σε σχέση με άλλα λογισμικά για δημιουργία εννοιολογικών χαρτών είναι ότι δίνει τη δυνατότητα στον θεατή να παρακολουθήσει σε βήματα την ανάπτυξη του σε μορφή βίντεο. Σταδιακά εμφανίζεται κάθε ένας από τους κόμβους και γίνεται σμίκρυνση του συνολικού σχεδίου όσο εμφανίζονται νέοι κόμβοι.

Το GeoGebra ανταποκρίθηκε στις απαιτήσεις της σχεδίασης των δραστηριοτήτων. Το μόνο μειονέκτημα του, που περιόρισε κάπως την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων ήταν ο περιορισμένος χειρισμός του χρόνου. Συγκεκριμένα, το λογισμικό μπορεί να διαχειριστεί κινήσεις αντικειμένων με τα slider στα οποία και ορίζεται ταχύτητα της κίνησης. Η ταχύτητα όμως αυτή εξαρτάται από τη μέγιστη τιμή που θα φτάσει το αντικείμενο, και για να χρησιμοποιηθούν πολλά αντικείμενα που κινούνται θα πρέπει να γίνουν υπολογισμοί της ταχύτητας που θα έχει το καθένα. Επιπλέον, όταν υπάρχουν σε ένα έργο αρκετά slider παρατηρούνται κάποια προβλήματα στις κινήσεις, που έχουν σχέση με τον χρόνο στον οποίο ξεκινάει κάθε κίνηση και τον χρόνο που κάνει να εκτελεστεί μια εντολή.

Η δραστηριότητα ΠιΤανικός είναι ένα εκπαιδευτικό παιχνίδι το οποίο αναπτύχθηκε σε περιβάλλον Scratch (Avgerinos & Remoundou, 2018β). Το Scratch είναι ένα ελεύθερο οπτικό προγραμματιστικό περιβάλλον που δημιουργήθηκε από το MIT Media Lab, στο οποίο μπορούν να αναπτυχθούν διαδραστικές ιστορίες, προσομοιώσεις και παιχνίδια (Scratch, 2018). Τα έργα που αναπτύσσονται σε Scratch μπορούν να αποθηκευτούν στο διαδίκτυο μέσω της ιστοσελίδας του Scratch και να είναι προσπελάσιμα από άλλους.

Το γραφικό περιβάλλον του Scratch επιτρέπει στους χρήστες να φτιάξουν τα προγράμματά τους χρησιμοποιώντας blocks τα οποία αντιστοιχούν στις εντολές. Το Scratch είναι εύχρηστο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί από παιδιά. Δεν απαιτείται η γνώση συντακτικού της γλώσσας προγραμματισμού και υπάρχουν εργαλεία ελέγχου, κίνησης και συμβάντων (events).

Επιλέχτηκε για την ανάπτυξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας γιατί δίνει τη δυνατότητα διαχείρισης πολυμέσων, όπως εικόνων, animations, βίντεο και ήχων. Παράλληλα υποστηρίζει πολλές γλώσσες μεταξύ των οποίων και τα ελληνικά. Τα έργα που αναπτύσσονται στο Scratch μπορούν να είναι προσπελάσιμα χωρίς εγκατάσταση κάποιου λογισμικού, από μεγάλο εύρος συσκευών, από υπολογιστές ως κινητά και tablets (Maloney κ.ά., 2004).

Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας σε Scratch είχε κάποιες δυσκολίες. Το βασικό μειονέκτημα ενός τέτοιου περιβάλλοντος για την ανάπτυξη μιας εφαρμογής είναι ότι γίνεται περίπλοκο και δύσχρηστο όσο η εφαρμογή αναπτύσσεται. Το περιβάλλον είναι σχεδιασμένο για την υλοποίηση απλών εφαρμογών και όταν πρέπει να συντονιστούν πολλά αντικείμενα και μεταβλητές παρουσιάζει δυσκολίες.

Επιπλέον, το Scratch δεν έχει τη δυνατότητα τρεξίματος βήμα-βήμα για την εύρεση σφαλμάτων (debugging). Αυτό γίνεται με εμφάνιση των τιμών κάποιων μεταβλητών σε κάποια σημεία του προγράμματος, κάτι που αυξάνει την πολυπλοκότητά του.

Τέλος, το Scratch έχει έναν εσωτερικό σχεδιαστή αντικειμένων, στον οποίο μπορεί κάποιος να σχεδιάσει τα γραφικά που θα χρησιμοποιήσει. Ο σχεδιαστής αυτός δεν είναι τόσο εύχρηστος και είναι δύσκολο να σχεδιαστούν πολύπλοκα γραφικά αντικείμενα. Για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, τα γραφικά αντικείμενα σχεδιάστηκαν σε εξωτερικό πρόγραμμα και κατά την εισαγωγή τους στο Scratch υπήρχε η δυσκολία της εύρεσης της σωστής κλίμακας.

Κατά την ανάπτυξη της δραστηριότητας η τελευταία έκδοση του Scratch, η οποία και χρησιμοποιήθηκε, ήταν η 2.0. Στην έκδοση αυτή το έργο που παράγεται απαιτούσε Flash Player για να εκτελεστεί. Από την επόμενη έκδοση 3.0, η οποία ήταν επίσημα διαθέσιμη από τον Ιανουάριο του 2019, οι εφαρμογές σε Scratch είναι σε HTML5 και μπορούν να εκτελεστούν σε όλες τις κινητές συσκευές (Scratch, 2018).

Συμπερασματικά, το Scratch είναι ένα περιβάλλον προγραμματισμού το οποίο επιτρέπει σε αρχάριους χρήστες να εισαχθούν στον προγραμματισμό. Είναι ένα φιλικό περιβάλλον για την ανάπτυξη απλών έργων. Όταν το έργο γίνεται πιο περίπλοκο είναι αρκετά δύσκολο να διαχειριστεί.

Τέλος, σχεδιάστηκε μία δραστηριότητα με αξιοποίηση της εκπαιδευτικής ρομποτικής και το Lego Mindstrom EV3. Η συγκεκριμένη τεχνολογία επιλέχτηκε λόγω της εξοικείωσης των μαθητών που συμμετείχαν με αυτή και της ευκολίας στον προγραμματισμό. Αντίστοιχη δραστηριότητα θα μπορούσε όμως να υλοποιηθεί και με άλλες τεχνολογίες εκπαιδευτικής ρομποτικής αλλά και με πρόγραμμα σε ένα περιβάλλον όπως το Scratch, χωρίς να απαιτείται ρομποτική κατασκευή.

Όπως περιγράφεται σε επόμενη ενότητα όλες οι ψηφιακές δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν συγκεντρώθηκαν στην ιστοσελίδα του Εργαστηρίου Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων στη διεύθυνση http://lab-math.pre.aegean.gr/mathematics-lab/roc/.

6.2.3 Δραστηριότητα 1 – Αλλάζοντας τροχούς

Ο λόγος και οι αναλογίες είναι από τις βασικές έννοιες για την κατανόηση στη συνέχεια του ρυθμού μεταβολής. Δραστηριότητες με αναλογίες προσφέρονται πολλές μέσα από δραστηριότητες της καθημερινότητας και σε διάφορα ρεαλιστικά πλαίσια. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα επιλέχτηκε ένα σενάριο εκπαιδευτικής αξιοποίησης του πακέτου ρομποτικής Mindstorms EV3 της Lego για τη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών και σχέσεων και συγκεκριμένα την ενδυνάμωση του αναλογικού συλλογισμού.

Αν και η δραστηριότητα είναι εξειδικευμένη και απαιτεί κατάλληλο εξοπλισμό και προηγούμενη εξοικείωση των μαθητών με τον προγραμματισμό του ρομπότ είναι ενδεικτική των δυνατότητων αξιοποίησης κάθε πρόσφορου τρόπου και μέσου για την εννοιολόγηση μαθηματικών εννοιών. Ο υλικός εξοπλισμός δεν είναι δεσμευτικός, καθώς ένα αντίστοιχο σενάριο μπορεί να υλοποιηθεί με το λογισμικό προσομοίωσης της λειτουργίας της ρομποτικής κατασκευής ή σε ένα εκπαιδευτικό λογισμικό όπως το Scratch ή το GeoGebra.

Σκοπός της συγκεκριμένης παρέμβασης ήταν να μελετηθούν οι στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων αναλογιών και να γίνει εφαρμογή τους σε ένα πραγματικό πρόβλημα μέσα από μία εποικοδομητική δραστηριότητα εκπαιδευτικής ρομποτικής. Η δραστηριότητα παρουσιάστηκε στο 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη» (Αυγερινός κ.ά., 2019).

Το πλαίσιο της ρομποτικής είναι πρόσφορο για την ανάπτυξη δεξιοτήτων αναλογικού συλλογισμού, καθώς μπορούν να σχεδιαστούν ποικίλες δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκεται (Martínez Ortiz, 2015). Ο αναλογικός συλλογισμός μπορεί να εφαρμοστεί στον προγραμματισμό του ρομπότ για την παραμετροποίηση των εντολών για τους κινητήρες, τους αισθητήρες και τα γρανάζια, οδηγώντας σε μεγαλύτερη ακρίβεια και μειώνοντας την ανάγκη πειραματισμών.

Παρόλο που η εκπαιδευτική ρομποτική έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον ερευνητών και εκπαιδευτικών τα τελευταία χρόνια, ο συνδυασμός της με μαθηματικές έννοιες σε ένα εκπαιδευτικό σενάριο και ακόμα περισσότερο η αξιολόγησή του παρουσιάζει συχνά δυσκολίες. Στην παρούσα δραστηριότητα περιγράφεται ένα σενάριο εκπαιδευτικής αξιοποίησης του πακέτου Mindstorms EV3 της Lego για τη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών και σχέσεων. Συγκεκριμένα, στην προτεινόμενη εκπαιδευτική δραστηριότητα εμπλέκονται αλγεβρικές έννοιες, όπως οι λόγοι και οι αναλογίες, ενώ γίνεται αναφορά και σε γεωμετρικές, όπως στοιχεία του κύκλου.

Το προτεινόμενο σενάριο εφαρμόστηκε και αξιολογήθηκε σε μία ομάδα τεσσάρων μαθητών της Α΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μία ενεργή διαδικασία μάθησης, κατασκεύασαν και προγραμμάτισαν το ρομπότ, κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα που τους τέθηκε θεωρητικά και να ελέγξουν τα αποτελέσματά τους. Μέσω της δραστηριότητας αυτής συνδύασαν τα μαθηματικά με τη μηχανική και τον προγραμματισμό και έδωσαν νόημα σε ήδη διδαχθείσες έννοιες εφαρμόζοντάς τες στην πράξη σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα.

Στο προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο εμπλέκεται ο αναλογικός συλλογισμός, μέσα από αλγεβρικές έννοιες, όπως οι λόγοι, τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, ενώ χρησιμοποιούνται και έννοιες από τη γεωμετρία και τη στατιστική, όπως ο υπολογισμός της περιμέτρου του κύκλου και η εύρεση του μέσου όρου αριθμητικών τιμών (Πίνακας 6.2).

Πίνακας 6.2. Μαθηματικές έννοιες της παρέμβασης

Έννοια	Περιγραφή
Ανάλογα ποσά	Επίλυση προβλήματος αναλογίας άγνωστης τιμής
Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Επίλυση προβλήματος αντιστρόφως ανάλογων ποσών άγνωστης τιμής
Περίμετρος κύκλου	Υπολογισμός της περιμέτρου του τροχού από τη διάμετρο
Μέσος όρος	Εύρεση μέσου όρου της διαμέτρου από τις πειραματικές μετρήσεις
Στρογγυλοποίηση	Στρογγυλοποίηση τιμών στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο

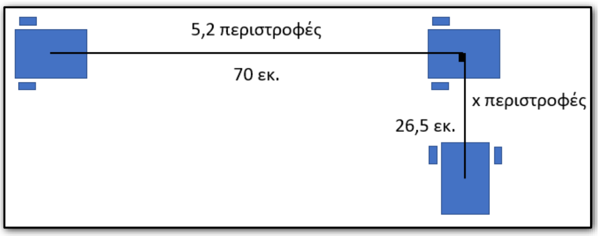
Η προτεινόμενη παρέμβαση εφαρμόστηκε και αξιολογήθηκε σε μία ομάδα τεσσάρων μαθητών Α΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές είχαν διδαχτεί στην Στ΄ Δημοτικού ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά όπως επίσης τον τύπο υπολογισμού της περιμέτρου κύκλου και τον τρόπο υπολογισμού του μέσου όρου. Στην Α΄ Γυμνασίου, μέχρι την ημέρα της διενέργειας του σεναρίου, είχαν ολοκληρώσει το κεφάλαιο των εξισώσεων. Το επίπεδο τους στα σχολικά μαθηματικά ήταν πολύ καλό, σύμφωνα με τους καθηγητές τους. Οι συγκεκριμένοι μαθητές ήταν μέλη μίας ομάδας εκπαιδευτικής ρομποτικής από την Ε΄ Δημοτικού, οπότε συμμετείχαν τακτικά σε δραστηριότητες εκπαιδευτικής ρομποτικής εκτός του σχολικού ωραρίου και ήταν εξοικειωμένοι με τη σύνθεση ρομποτικών κατασκευών και τον προγραμματισμό τους με το λογισμικό Lego Mindstorms EV3. Παρόλα αυτά για να παραμετροποιήσουν τα προγράμματά τους συνήθως ακολουθούσαν τη στρατηγική της «υπόθεσης και δοκιμής» και δεν συνδύαζαν τη ρομποτική με τα μαθηματικά.

Η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε τέσσερεις φάσεις υλοποίησης και η συνολική της διάρκεια ήταν μιάμιση ώρα (Πίνακας 6.3). Στην πρώτη φάση έγινε μία μικρή εισαγωγή και δόθηκε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο με απλά έργα αναλογιών για να διερευνηθεί η ικανότητα επίλυσής τους και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν. Το πρώτο έργο του ερωτηματολογίου ήταν να συμπληρώσουν δύο ισότητες ισοδύναμων κλασμάτων. Το δεύτερο ήταν ένα πρόβλημα σύγκρισης λόγων, όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν ως προς τη γεύση τους δύο ροφήματα σοκολάτας στα οποία η αναλογία κακάο προς γάλα ήταν διαφορετική. Αντίστοιχο πρόβλημα έχει χρησιμοποιηθεί σε έρευνα για τη διερεύνηση του τρόπου αντίληψης ποσοτήτων που μεταβάλλονται (Johnson, 2010). Το τρίτο έργο ήταν ένα πρόβλημα εύρεσης άγνωστης τιμής σε μία αναλογία μείξης υλικών, συγκεκριμένα αλευριού και ελαιόλαδου σε μία συνταγή για κουλουράκια. Το πρόβλημα αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στον διαγωνισμό μαθηματικών «Παιχνίδι και Μαθηματικά» για την Στ΄ Δημοτικού της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (Ε.Μ.Ε., 2019). Τέλος, το τέταρτο έργο ήταν ένα πρόβλημα εύρεσης άγνωστης τιμής στο οποίο έπρεπε να βρεθούν τα βήματα που κάνει ένα αλεπουδάκι για να διανύσει την ίδια απόσταση με μία αλεπού όταν ήταν γνωστός ο λόγος των βημάτων των δύο ζώων.

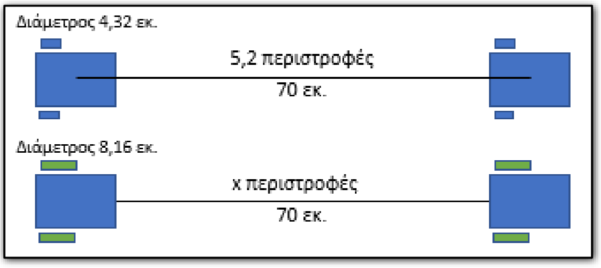
Πίνακας 6.3. Φάσεις υλοποίησης διδακτικής παρέμβασης

Φάσεις υλοποίησης	Δραστηριότητα	Ερωτήματα
1η φάση	Εισαγωγή	
	Συμπλήρωση ερωτηματολογίου	4 έργα αναλογιών
2η φάση	Κίνηση αρχικού ρομπότ	Γράψτε ένα πρόγραμμα ώστε το ρομπότ να προχωρήσει ακριβώς 70 εκ. μπροστά και μετά να στρίψει 90^o δεξιά.
		Προσπαθήστε να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών των κινητήρων που χρειάζονται για να προχωρήσει το ρομπότ άλλα 26,5 εκ.
3η φάση	Κίνηση ρομπότ με μεγαλύτερους τροχούς	Προσπαθήστε να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών των κινητήρων που χρειάζονται ώστε το ρομπότ να επαναλάβει ακριβώς την ίδια κίνηση που έκανε με τις μικρές ρόδες.
4η φάση	Αναστοχασμός	Τι επίδραση είχε η αλλαγή τροχών; Πως συνδυάστηκαν τα μαθηματικά με τη ρομποτική;

Στη συνέχεια οι μαθητές έφτιαξαν ένα απλό ρομποτικό όχημα και το προγραμμάτισαν να ακολουθήσει μία σύντομη διαδρομή. Για το πρώτο κομμάτι της διαδρομής έθεσαν πειραματικά τις παραμέτρους κίνησης του ρομπότ (περιστροφές κινητήρα), ενώ για το δεύτερο κλήθηκαν να τις υπολογίσουν μαθηματικά.



Εικόνα 6.2. Η βασική κίνηση του πρώτου ρομπότ



Εικόνα 6.3. Υπολογισμός των περιστροφών για το δεύτερο ρομπότ

Στην τρίτη φάση τους τέθηκε το πρόβλημα να υπολογίσουν μαθηματικά τις προγραμματιστικές αλλαγές που έπρεπε να κάνουν προκειμένου το ρομπότ να ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή, αφού αλλάξει η κατασκευή του και χρησιμοποιηθούν μεγαλύτερες ρόδες.

Ζητήθηκε από τους μαθητές να κρατήσουν σημειώσεις και ολόκληρη η παρέμβαση ηχογραφήθηκε. Τα ερωτηματολόγια, η ηχογράφηση και οι σημειώσεις συνδυάστηκαν για τη διερεύνηση του τρόπου σκέψης των παιδιών.

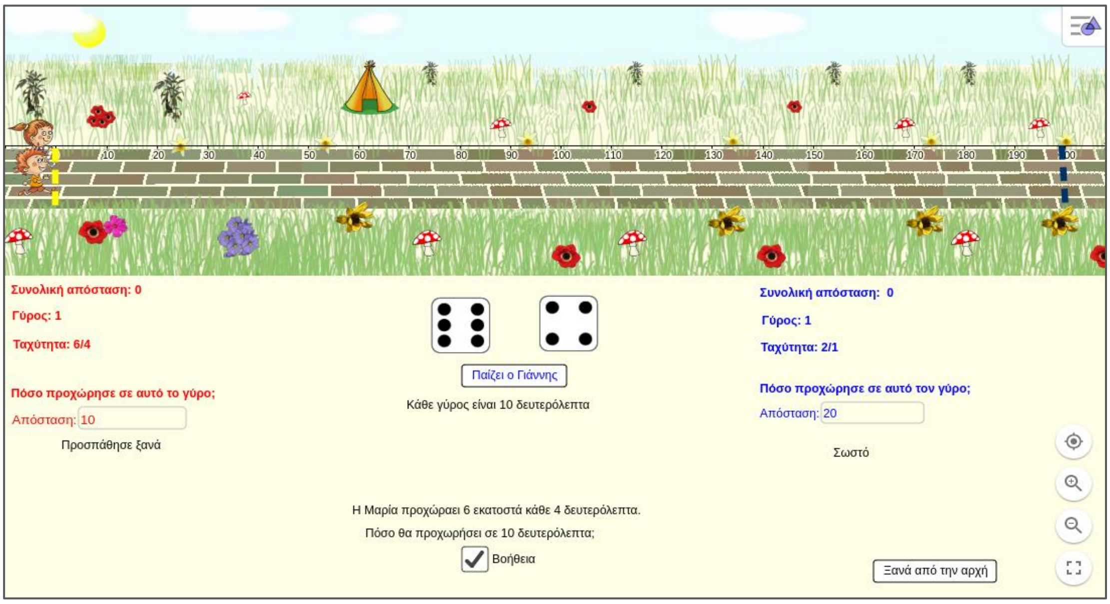
6.2.4 Δραστηριότητα 2 – Ρίξε και τρέξε

Η δραστηριότητα αυτή εστιάζει στη δημιουργία ενός λόγου ως μέτρου της ταχύτητας. Σύμφωνα με την πρόταση για τη διδακτική του λόγου ως μέτρηση των Lobato & Thanheiser (2002) που προαναφέρθηκε, σχεδιάστηκε μια παιγνιώδη εκπαιδευτική εφαρμογή υπό το πλαίσιο της κίνησης. Η δραστηριότητα ονομάζεται *Ρίξε και τρέξε* και απευθύνεται σε παιδιά Ε΄ Δημοτικού έως Α΄ Γυμνασίου. Σκοπός είναι να αντιληφθούν οι μαθητές τον λόγο της απόστασης ως προς τον χρόνο ως μέτρο της ταχύτητας.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές αναμένεται να μπορούν να:

- κατασκευάζουν τον λόγο που εκφράζει την ταχύτητα,
- υπολογίζουν την ταχύτητα από τις τιμές του διαστήματος και του χρόνου,
- εστιάσουν στις ποσότητες απόσταση που διανύεται και χρόνος,
- αναγνωρίζουν πως επιδρά η απόσταση που διανύεται και ο χρόνος στην τιμή της ταχύτητας.

Η δραστηριότητα *Ρίξε και τρέξε* αναπτύχθηκε στο λογισμικό GeoGebra. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι ένα παιχνίδι με δύο φιγούρες που κάνουν έναν αγώνα δρόμου. Ο κάθε παίχτης, όταν είναι η σειρά του, ρίχνει δύο ζάρια. Το ένα ζάρι αντιπροσωπεύει τον χρόνο και το άλλο το διάστημα που θα προχωρήσει η φιγούρα. Ο κάθε γύρος έχει διάρκεια 10 δευτερόλεπτα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα των ζαριών, η φιγούρα προχωράει με ταχύτητα ίση με τον λόγο των τιμών των δύο ζαριών. Η ταχύτητα της κάθε φιγούρας θα είναι όση απόσταση δείχνει το ένα ζάρι ανά όσο χρόνο δείχνει το δεύτερο. Οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν τι αντιπροσωπεύει η τιμή του κάθε ζαριού στην κίνηση της φιγούρας, να εστιάσουν στις ποσότητες «απόσταση που διανύεται» και «χρόνος» και να αντιληφθούν την ταχύτητα ως τον λόγο των δύο ποσοτήτων. Η βασική οθόνη του παιχνιδιού φαίνεται στην εικόνα 6.4.



Εικόνα 6.4. Ρίξε και τρέξε

Μέσω της δραστηριότητας αυτής οι μαθητές εστιάζουν στις ποσότητες που μεταβάλλονται, και κατασκευάζουν τον λόγο τους τον οποίο ερμηνεύουν ως μέτρο της ταχύτητας των φιγούρων στο παιχνίδι.

Η ερώτηση που τίθεται είναι πόσο προχώρησε η φιγούρα στον συγκεκριμένο γύρο. Ο μαθητής μπορεί να γράψει την απάντησή του, η οποία ελέγχεται ως προς την ορθότητά της και υπάρχει η δυνατότητα να εμφανιστεί βοηθητικό κείμενο. Η διδακτική αξιοποίηση της συγκεκριμένης δραστηριότητας δεν περιορίζεται στην ερώτηση που τίθεται, αλλά στοχεύει στο να ανακαλύψουν οι μαθητές συνεργατικά τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων και να εκφράσουν τις σκέψεις τους.

Όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, οι μαθητές της τελευταίας τάξης της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχουν διδαχτεί αναλογίες και ανάλογα ποσά και μπορούν να αντιληφθούν ότι η απόσταση και ο χρόνος σε κάθε γύρο είναι ποσά ανάλογα και να υπολογίσουν την απόσταση που έχει διανυθεί σε έναν γύρο που διαρκεί 10 δευτερόλεπτα.

6.2.5 Δραστηριότητα 3 – Γεμίζοντας ποτήρια

Στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται αρκετές δραστηριότητες για τη μελέτη ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται και του ρυθμού μεταβολής σε ψηφιακό περιβάλλον, αλλά στις περισσότερες από αυτές η μία από τις ποσότητες είναι ο χρόνος (Kaput & Roschelle, 2002). Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα είναι η μελέτη της ευθύγραμμης κίνησης και ο ρυθμός μεταβολής αναφέρεται ως η ταχύτητα. Έχει φανεί όμως ότι η ενασχόληση με δραστηριότητες ρυθμού μεταβολής σε άλλα πλαίσια προβλημάτων και ιδιαίτερα όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι ο χρόνος, ενδυναμώνουν την εννοιολόγηση της συμμεταβολής ποσοτήτων. Ιδιαίτερα όταν ο ρυθμός δεν εκφράζει μία νέα έννοια, οι μαθητές οδηγούνται να εστιάσουν στις ποσότητες που μεταβάλλονται και να σχηματίσουν και ερμηνεύσουν τις μεταξύ τους σχέσεις (Johnson, 2015α· Lobato & Thanheiser, 2002).

Το πλαίσιο του γεμίσματος δοχείων προτάθηκε από το Nottingham University’s Shell Centre (Swan, 1985, p.94), όπου αναγράφεται ένα πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν το γράφημα ύψους νερού – όγκου νερού για δοχεία που γεμίζουν με κάποιο υγρό με σταθερό ρυθμό. Στο ίδιο βιβλίο παρουσιάζεται μία διαφορετική εκδοχή του προβλήματος, στην οποία μία πισίνα γεμίζει με νερό με σταθερό ρυθμό και μελετώνται οι αλλαγές στο ύψος του νερού (Swan, 1985, p.52-53).

Η γενική μορφή του πλαισίου περιλαμβάνει δοχεία ή μπουκάλια διαφορετικών σχημάτων τα οποία γεμίζουν με κάποιο υγρό. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του προβλήματος ανάλογα με την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται. Έτσι μπορεί να ζητηθεί η μελέτη του ύψους ή του όγκου σε σχέση με τον χρόνο αλλά και του ύψους σε σχέση με τον όγκο ή αντίστροφα.

Στην πιο συνηθισμένη εκδοχή διερευνάται η μεταβολή του όγκου του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του μέσα στο δοχείο και χρησιμοποιείται η γραφική αναπαράσταση. Οι ποσότητες που μεταβάλλονται αλλάζουν με μη γραμμικό τρόπο και παρόλο που εξετάζεται η μεταξύ τους σχέση, η κάθε μία από αυτές εξαρτάται από τον χρόνο (Heid κ.ά., 2006).

Το παράδειγμα γεμίσματος δοχείων προσφέρει ένα ρεαλιστικό πλαίσιο ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται, δίνοντας έτσι ευκαιρίες ανάπτυξης του συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορα επίπεδα εκπαίδευσης με διαφορετικούς στόχους και εστίαση σε διαφορετικές έννοιες όπως η γραφική παράσταση συνάρτησης και ρυθμού μεταβολής, η συνέχεια, η κυρτότητα ή η παραγωγισιμότητα (Gómez & Wolfson, 2012).

Οι Thompson και Carlson (2017) περιγράφουν τον συλλογισμό σύμφωνα με τα επίπεδα συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή που ορίζουν για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο ομαλά συνεχές επίπεδο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τον όγκο και το ύψος του νερού να μεταβάλλονται ομαλά και συνεχόμενα ανάμεσα στα διαστήματα και συγχρόνως κατανοούν ότι κατά τη διάρκεια του διαστήματος η ποσότητα του νερού κα το ύψος μεταβάλλονται ομαλά και συνεχώς.

Το πλαίσιο γεμίσματος δοχείων έχει χρησιμοποιηθεί σε έρευνες με φοιτητές μαθηματικών (Carlson κ.ά., 2002), με μελλοντικούς δασκάλους πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Carlson κ.ά., 2003) και με μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών (Paoletti & Moore, 2017). Στις παραπάνω έρευνες το ύψος του υγρού εκφράστηκε ως συνάρτηση του όγκου του. Οι Heid κ.ά. (2006) χρησιμοποίησαν το πλαίσιο αυτό στην προσπάθειά τους να χαρακτηρίσουν τους τρόπους με τους οποίους μελλοντικοί καθηγητές μαθηματικών σκέφτονται για τον ρυθμό μεταβολής.

Η Johnson (2012, 2015α, 2015β) χρησιμοποίησε το πρόβλημα γεμίσματος δοχείων για να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, τον λόγο και τον ρυθμό. Σε κάποιες προηγούμενες έρευνες, στις οποίες παρουσιαζόταν το ύψος του νερού συναρτήσει του όγκου του νερού, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν τον όγκο σαν να ήταν χρόνος (Carlson κ.ά., 2003). Η Johnson (2015β) επέλεξε να αναπαραστήσει τον όγκο ως συνάρτηση του ύψους για να αποφύγει αυτή τη θεώρηση. Μεταξύ των παρατηρήσεών της ήταν ότι αρκετοί μαθητές αντιλαμβάνονται τη μεταβολή σε κομμάτια (chunks) και όχι ως μία συνεχή διαδικασία, με αποτέλεσμα να περιορίζεται η αφαιρετική τους ικανότητα.

Παρόλο το ευρύ φάσμα εφαρμογών και ερευνών με το συγκεκριμένο πλαίσιο, δεν υπάρχουν αποτελέσματα για τη χρήση του με μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στην παρούσα δραστηριότητα το πλαίσιο αυτό προσαρμόστηκε σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με σκοπό να αποτελέσει μια διαισθητική εικόνα ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται. Το σημαντικό στοιχείο σε αυτό το πλαίσιο είναι ότι στις ποσότητες που μεταβάλλονται δεν περιλαμβάνεται ο χρόνος. Καθώς όμως οι μαθητές έχουν μια διαισθητική εικόνα του γεμίσματος δοχείων και επιπλέον είναι μια βιωματική δραστηριότητα τα αποτελέσματά της στην εννοιολόγηση της συμμεταβολής είναι σημαντικά.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.3 του πρώτου μέρους υπάρχουν κάποιες προσπάθειες αναπαράστασης του γεμίσματος δοχείων σε ψηφιακά περιβάλλοντα, αλλά δεν είναι ιδιαίτερα παραστατικά και σε πολλά από αυτά η μεταβολή του ύψους του νερού δεν γίνεται ομαλά. Η οπτικοποίηση σε τρεις διαστάσεις ή με τη βοήθεια της επαυξημένης ή της εικονικής πραγματικότητας θα μπορούσε να προσφέρει διδακτικές ευκαιρίες μελέτης. Καθώς, όμως μία τέτοια προσέγγιση παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες, έχουν χρησιμοποιηθεί προσομοιώσεις σε δύο διαστάσεις. Σε μία πιο πρόσφατη έρευνα της Johnson (2017), σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, χρησιμοποιήθηκαν τεχνολογίες πληροφορικής, και συγκεκριμένα η εφαρμογή WaterLine by Desmos που περιεγράφηκε στην ενότητα 2.3.3.

Το ερώτημα που τέθηκε στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τις ποσότητες που μεταβάλλονται όταν μελετούν το πρόβλημα του γεμίσματος δοχείων. Το πρόβλημα τέθηκε σε δύο μαθητές της Στ΄ Δημοτικού. Στην αρχή οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μία βιωματική δραστηριότητα, όπου πειραματίστηκαν με το γέμισμα πραγματικών ποτηριών διαφορετικού σχήματος. Συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με τον τρόπο που μεταβάλλεται η μία ποσότητα σε σχέση με την άλλη και κατέγραψαν τις μετρήσεις τους. Αποφασίστηκε να μη χρησιμοποιηθεί κάποιο λογισμικό καθώς δεν είχε βρεθεί κάποιο το οποίο να θεωρήθηκε επαρκές και βοηθητικό. Αντίθετα, με την παρατήρηση του γεμίσματος οι μαθητές κλήθηκαν να φανταστούν διάφορες ρεαλιστικές καταστάσεις.

Το σενάριο του γεμίσματος δοχείων που χρησιμοποιήθηκε στη συγκεκριμένη δραστηριότητα περιλάμβανε τα παρακάτω τρία στάδια:

Στάδιο 1ο. Ενσωμάτωση – Εστίαση στις ποσότητες που μεταβάλλονται

Η πρώτη φάση του σεναρίου αποσκοπούσε στην εστίαση των μαθητών στις ποσότητες που μπορούν να μετρηθούν και στους τρόπους με τους οποίους μεταβάλλεται η μία σε σχέση με την άλλη. Στην αρχή οι μαθητές παρακολούθησαν ένα βίντεο στη διεύθυνση https://nrich.maths.org/13664, έτσι ώστε να εστιάσουν στην ποσότητα του όγκου του νερού στα ποτήρια. Στο συγκεκριμένο βίντεο παρουσιάζονται δύο ποτήρια τα οποία φαίνονται σχεδόν γεμάτα. Στη συνέχεια το ένα ποτήρι αδειάζεται μέσα στο άλλο, το οποίο τελικά γεμίζει ως το χείλος. Το γεγονός προκαλεί έκπληξη στους μαθητές και παρακινεί το ενδιαφέρον.

Στη συνέχεια οι μαθητές πήραν τρία ποτήρια διαφορετικού σχήματος και τους ζητήθηκε να περιγράψουν τι συμβαίνει αν ρίξουμε νερό σε κάθε ένα από αυτά. Δόθηκε έμφαση στη λεκτική περιγραφή της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής των ποσοτήτων. Οι μαθητές συμπλήρωναν τις απαντήσεις τους σε ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα Δ).

Στάδιο 2ο. Μετρήσεις – Μέτρηση των ποσοτήτων και των μεταβολών τους

Στο δεύτερο στάδιο, ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν έναν τρόπο να μετρήσουν τις ποσότητες που εμπλέκονται στο πρόβλημα, να τις καταγράψουν σε έναν πίνακα και να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκου του στο ποτήρι.

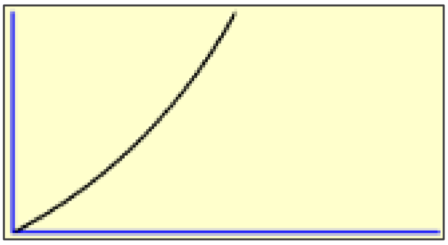
Ο πίνακας με τις τιμές του ύψους και του όγκου του νερού στο ποτήρι βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν τις μετρήσιμες ποσότητες που εμπλέκονται στη δραστηριότητα (Εικόνα 6.5). Επιπλέον, ερμηνεύοντας τις τιμές αυτές με βάση τη συμμεταβολή και εστιάζοντας στη σχέση μεταξύ των αλλαγών στις δύο στήλες του πίνακα, οδηγούνται να προσέξουν τον ρυθμό μεταβολής (Confrey & Smith, 1995).

	Όγκος	Ύψος	
	1	2	
+1			+2
	2	4	
+1			+2
	3	6	
+1			+2
	4	8	
+1			+2
	5	10	

Εικόνα 6.5. Τιμές όγκου και ύψος νερού στον πίνακα

Στάδιο 3ο. Αναπαραστάσεις – Συντονισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων

Στο τελευταίο στάδιο της παρέμβασης, ζητήθηκε από τους μαθητές να αντιστοιχήσουν πέντε δοχεία διαφορετικού σχήματος στο διάγραμμα που δείχνει τη σχέση ύψους και όγκου νερού και να σχεδιάσουν ένα δοχείο το οποίο να αντιστοιχεί σε δοσμένη γραφική παράσταση (Εικόνα 6.6).

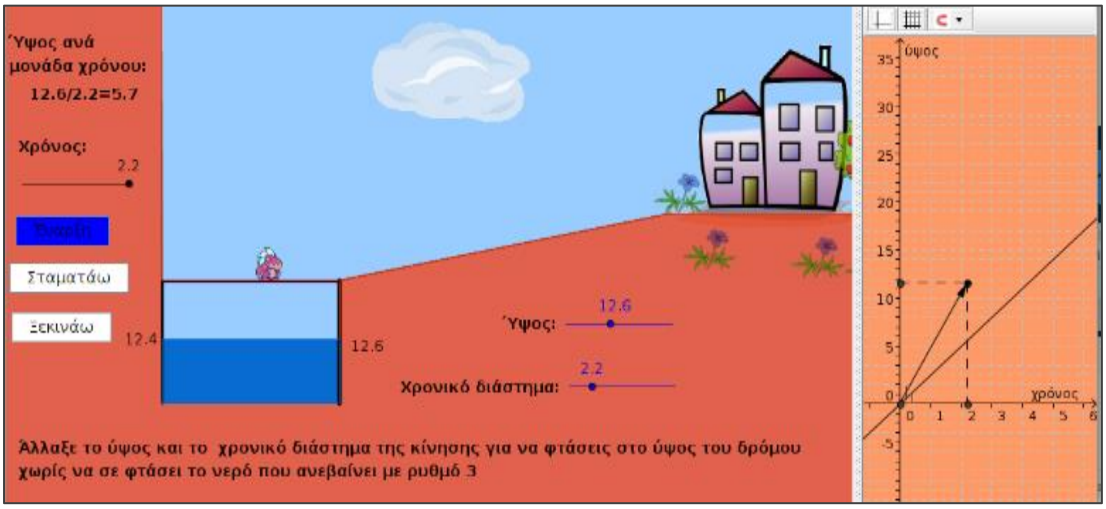


Εικόνα 6.6. Γραφική παράσταση κωνικού δοχείου

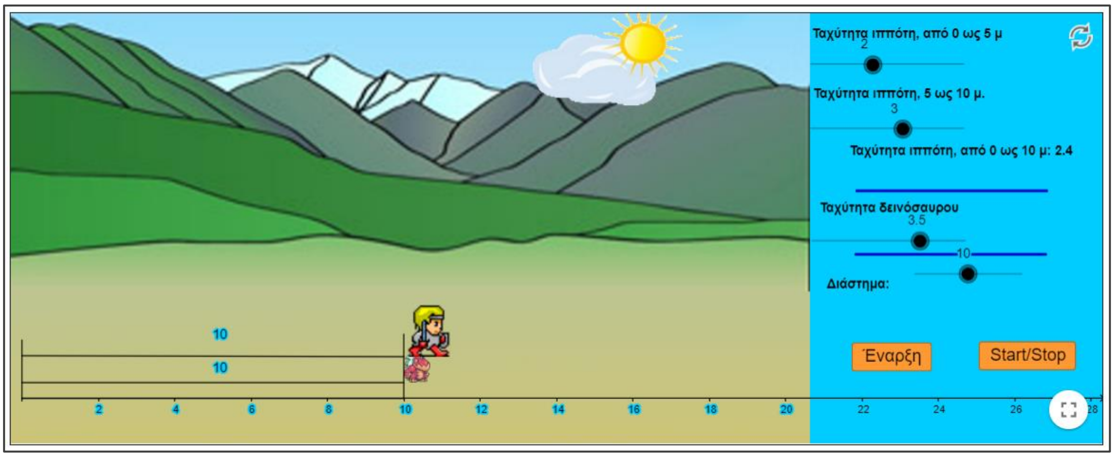
Τέλος, τους ζητήθηκε να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται το ύψος του νερού σε σχέση με τον όγκο του καθώς ρίχνουμε νερό σε ένα σφαιρικό δοχείο. Η προτεινόμενη δραστηριότητα και η μελέτη περίπτωσης παρουσιάστηκε στο ISSC 2018 - Logics of Image: Visual Learning, Logic and Philosophy of Form in East and West (Avgerinos & Remoundou, 2018γ).

6.2.6 Δραστηριότητα 4 – Ο δεινόσαυρος

Η δραστηριότητα *Ο δεινόσαυρος* αποτελείται από μία σειρά επιμέρους εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων μέσα από τις οποίες μπορούν να διερευνηθούν ιδιότητες του ρυθμού μεταβολής. Έχει αναπτυχθεί στο λογισμικό GeoGebra και απευθύνεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και των πρώτων της δευτεροβάθμιας (Ρεμούνδου & Αυγερινός, 2014· Avgerinos & Remoundou, 2016). Σε ένα παιγνιώδες περιβάλλον οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις αλλαγές σε μεταβλητές με διάφορες αναπαραστάσεις (Εικόνα 6.7 και 6.8).



Εικόνα 6.7. Ο δεινόσαυρος – Το ασανσέρ



Εικόνα 6.8. Ο δεινόσαυρος - Αγώνας δρόμου

Οι δραστηριότητες αναπτύχθηκαν για την άτυπη εισαγωγή της έννοιας του μέσου ρυθμού μεταβολής στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου με χρήση ΤΠΕ. Οι δραστηριότητες βασίστηκαν σε υπάρχουσες έρευνες, στις οποίες αποτυπώνονται οι δυσκολίες μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με προβλήματα μέσου ρυθμού μεταβολής και σε προτάσεις διδακτικής του.

Κύριος στόχος είναι να δημιουργηθεί μια διαισθητική εικόνα των μεταβολών ποσοτήτων και του ρυθμού μεταβολής τους. Απαραίτητο βήμα για την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής θεωρείται η κατασκευή του λόγου μεγεθών ως μέτρου για τη μέτρηση μιας ποσότητας. Μέσα από τις δραστηριότητες που προτείνονται γίνεται μια προσπάθεια απόδοσης νοήματος για τους μαθητές στον λόγο δύο μεγεθών και σύνδεσής του με τις μεταβολές στα μεγέθη. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες ενοποιούνται σε μια διδακτική παρέμβαση.

Καθώς οι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν απευθύνονται σε παιδιά των τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου, δεν αναφέρονται τυπικοί ορισμοί των εννοιών. Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας χρησιμοποιούνται με πρακτικό τρόπο και θα πρέπει να έχουν διδαχτεί. Η διδασκαλία τους περιλαμβάνεται στην ύλη της Στ΄ Δημοτικού και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 32 του βιβλίου των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, ήδη από τη Β΄ Δημοτικού οι μαθητές λύνουν προβλήματα όπου ζητείται αναγωγή στη μονάδα, χωρίς να κατονομάζεται και αναμένεται να μπορούν να ασχοληθούν με τις δραστηριότητες υπό την κατάλληλη καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.

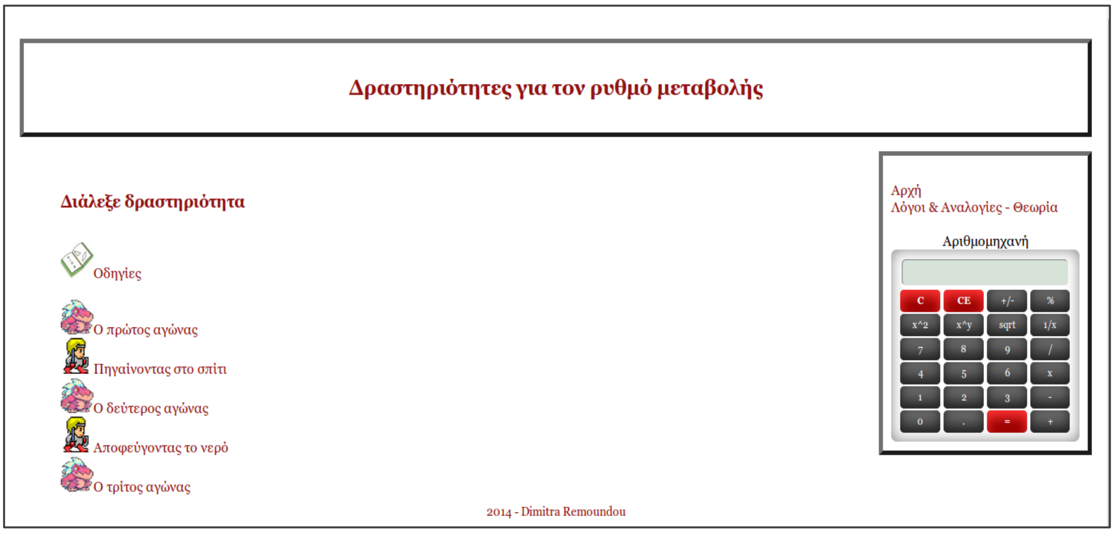
Ο κύριος διδακτικός στόχος των δραστηριοτήτων είναι η κατασκευή του λόγου μεγεθών για τη μέτρηση ενός χαρακτηριστικού, μέσω πειραματισμού με τα μεγέθη και η εξοικείωση με την έννοια του λόγου σε διάφορα πλαίσια ως εισαγωγή στην έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής, σταθερού ή μεταβλητού. Πιο συγκεκριμένα ο μαθητής μετά από ενασχόληση με τις δραστηριότητες που περιγράφονται και υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού αναμένεται να μπορεί να:

- κατασκευάζει τον λόγο που εκφράζει τον μέσο ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με μια άλλη,
- υπολογίζει τον μέσο, σταθερό ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας σε σχέση με μια άλλη,
- αναγνωρίζει πως επιδρούν οι εμπλεκόμενες ποσότητες στην τιμή του μέσου, σταθερού ρυθμού μεταβολής,
- μεταβάλλει τις εμπλεκόμενες ποσότητες για να πετύχει έναν καθορισμένο μέσο, σταθερό ρυθμό μεταβολής,
- αναγνωρίζει τον μέσο ρυθμό μεταβολής όταν δεν παραμένει σταθερός,
- συνδέει τις αλλαγές σε μεταβλητές και στον ρυθμό μεταβολής τους με το αντίστοιχο γράφημα.

Οι δραστηριότητες και τα ερωτήματα που αναπτύχθηκαν στηρίχτηκαν στα διδακτικά σημαντικά χαρακτηριστικά του ρυθμού μεταβολής (Herbert & Pierce, 2012) σε συνδυασμό με τις συνιστώσες για την κατανόηση του λόγου ως μέτρηση (Lobato & Thanheiser, 2002) (παράγραφος 2.2.9). Σύμφωνα με αυτά, τίθενται αρχικά ερωτήσεις με σκοπό να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων και του ρυθμού μεταβολής (ECA 1) και σε αυτό το πλαίσιο χρησιμοποιούνται οι συνιστώσες για την κατασκευή του λόγου. Υπάρχει ακόμα δραστηριότητα με μεταβαλλόμενους ρυθμούς μεταβολής, χωρίς όμως να αναλύονται οι λεπτομέρειες των σχέσεων, έτσι ώστε να γίνει κατανοητό ότι ο ρυθμός μεταβολής δεν είναι πάντα σταθερός (ECA 2). Σταδιακά, παρουσιάζονται πιο συγκεκριμένες και αριθμητικές ερωτήσεις που αντιστοιχούν στην κατασκευή και το χειρισμό του λόγου με αριθμητικά δεδομένα (ECA 3). Τέλος, χρησιμοποιείται ένα δεύτερο πλαίσιο με σκοπό την επέκταση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής (ECA 4).

Για την επίτευξη των διδακτικών στόχων έχουν σχεδιαστεί στο λογισμικό GeoGebra πέντε applets, στα οποία παρουσιάζονται διαφορετικές όψεις ρυθμών μεταβολής. Οι δραστηριότητες είναι διαθέσιμες στο GeoGebra. Επιπλέον, έχει γίνει μία ιστοσελίδα που υπάρχουν οι εφαρμογές και τα ερωτήματα που καλείται να διερευνήσει ο μαθητής. Η ιστοσελίδα με τις ερωτήσεις και τις δραστηριότητες είναι διαθέσιμη στον ιστότοπο του Εργαστηρίου Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://lab-math.pre.aegean.gr/race/, από όπου μπορεί να προσπελαστεί από οποιονδήποτε υπολογιστή με σύνδεση στο Διαδίκτυο.

Στην αρχική οθόνη (Εικόνα 6.9), από την οποία μπορεί να ξεκινήσει ο μαθητής τις δραστηριότητες, υπάρχει σύνδεσμος με γενικές οδηγίες και κάποια στοιχεία για το ρυθμό μεταβολής. Επιλέχτηκε να υπάρχει μία αριθμομηχανή στην ιστοσελίδα, έτσι ώστε να μπορεί ο μαθητής να κάνει τις πράξεις όπου χρειάζεται. Επιπλέον, υπάρχει ένας εξωτερικός σύνδεσμος προς το κεφάλαιο του βιβλίου μαθηματικών της Στ΄ τάξης που αναφέρεται στους λόγους και στις αναλογίες.



Εικόνα 6.9. Αρχική οθόνη δραστηριοτήτων

Σε κάθε δραστηριότητα (Πίνακας 6.4) ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να πειραματιστεί δίνοντας τιμές στις μεταβλητές, ξεκινώντας και παρατηρώντας την κίνηση. Ακόμα μπορεί να σταματήσει την κίνηση σε κάποια χρονική στιγμή και να τη συνεχίσει μετά. Από κάθε δραστηριότητα υπάρχει σύνδεσμος προς την επόμενη.

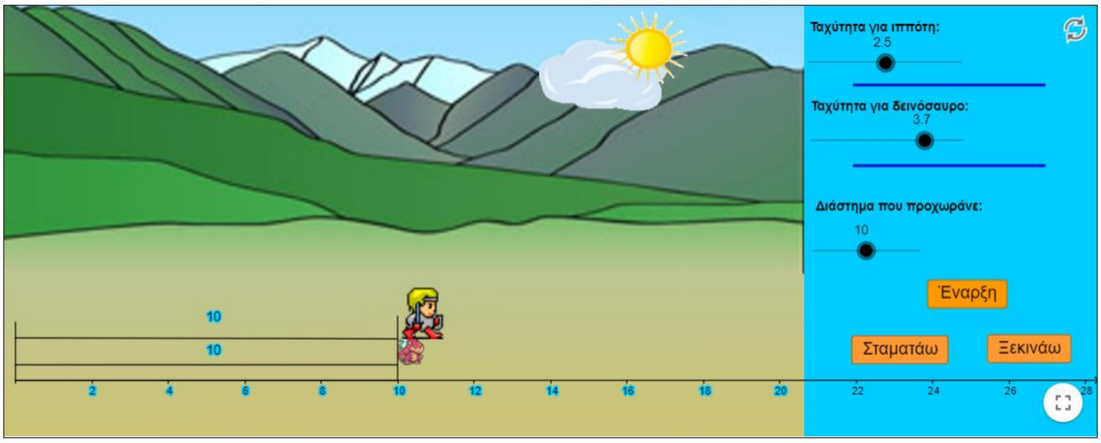
Πίνακας 6.4. Συγκεντρωτικός πίνακας δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα	Στόχος	Μεταβλητές
Ο πρώτος αγώνας	Εξοικείωση με τον χειρισμό του παιχνιδιού Απομόνωση του χαρακτηριστικού προς μέτρηση (ταχύτητα)	Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ανά χρόνο για τον ιππότη Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ανά χρόνο για τον δεινόσαυρο Διάστημα κίνησης
Πηγαίνοντας στο σπίτι	Κατανόηση του χαρακτηριστικού προς μέτρηση (ταχύτητα) Σύνδεση με το γράφημα ύψους ανά χρόνο	Ρυθμός μεταβολής του ύψους ανά χρόνο
Ο δεύτερος αγώνας	Καθορισμός των ποσοτήτων που	Διάστημα που θα κινηθεί ο

	επηρεάζουν το χαρακτηριστικό Κατανόηση του τρόπου που οι αλλαγές στις ποσότητες επηρεάζουν το χαρακτηριστικό Κατασκευή του λόγου διαστήματος ανά χρόνο	ιππότης Χρονικό διάστημα που θα κινηθεί ο ιππότης Διάστημα που θα κινηθεί ο δεινόσαυρος Χρονικό διάστημα που θα κινηθεί ο δεινόσαυρος
Αποφεύγοντας το νερό	Εφαρμογή κατασκευής του λόγου Αντιστοίχιση των ποσοτήτων με το αντίστοιχο γράφημα	Ύψος κίνησης Χρονικό διάστημα κίνησης
Ο τρίτος αγώνας	Αρχικός προβληματισμός σχετικά με το ότι ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να μην είναι σταθερός για όλη την κίνηση	Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ανά χρόνο για τον ιππότη για διάστημα από 0 ως 5 Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ανά χρόνο για τον ιππότη για διάστημα από 5 ως το τέλος του διαστήματος κίνησης Ρυθμός μεταβολής διαστήματος ανά χρόνο για τον δεινόσαυρο για όλο το διάστημα κίνησης Διάστημα κίνησης

Απομόνωση των χαρακτηριστικών που πρέπει να μετρηθούν

Στην πρώτη δραστηριότητα (Εικόνα 6.10) το πλαίσιο είναι ένας αγώνας ταχύτητας, όπου οι μαθητές πειραματίζονται με την αλλαγή της ταχύτητας σε δύο αντικείμενα που διανύουν μια συγκεκριμένη απόσταση. Επιλέχτηκαν δύο αντικείμενα διαφορετικού μεγέθους για να εξαλειφθεί η εντύπωση ότι η ταχύτητα εξαρτάται από το μέγεθος του αντικειμένου.



Εικόνα 6.10. Απομόνωση των χαρακτηριστικών που πρέπει να μετρηθούν – Ο πρώτος αγώνας

Οι ερωτήσεις (Εικόνα 6.11), που παρουσιάζονται στην ίδια ιστοσελίδα με τη δραστηριότητα, έχουν σκοπό να βοηθήσουν τον μαθητή αφενός να εξοικειωθεί με τον χειρισμό του λογισμικού και αφετέρου να κατανοήσει πιο είναι το χαρακτηριστικό που θα μετρηθεί. Για το λόγο αυτό τονίζεται το “πιο γρήγορα”, “πιο αργά”, “φτάνει πρώτος”. Εκτός από τις ταχύτητες των δύο συμμετεχόντων που μπορεί να μεταβάλλει ο χρήστης, μπορεί να ορίσει και το διάστημα που θα διανύσουν.

Ο ιππότης και ο δεινόσαυρος κάνουν αγώνα δρόμου

1. Με τις ρυθμίσεις που έχει το λογισμικό όταν ξεκινάει, ποιος πηγαίνει πιο γρήγορα;

Διάλεξε ποιος παίχτης θα φτάσει πρώτος και δοκίμασε το πατώντας ΄Εναρξη.

2. Όρισε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του διαστήματος ανά χρόνο για τον ιππότη και τον δεινόσαυρο για να πετύχεις τους στόχους:

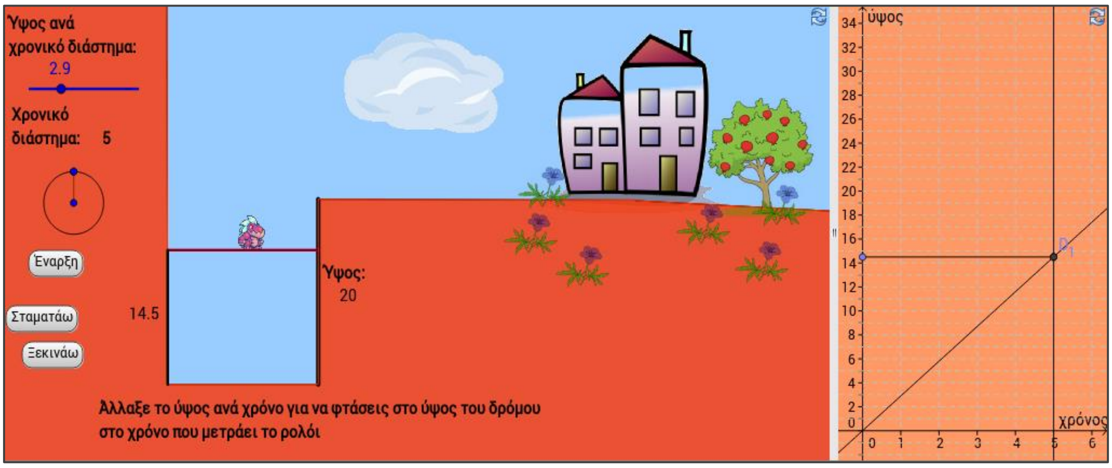
Στόχος 1: Ο ιππότης και ο δεινόσαυρος φτάνουν μαζί στο τέρμα.

Στόχος 2: Ο ιππότης φτάνει πρώτος στο τέρμα.

Στόχος 3: Ο δεινόσαυρος προχωράει πιο γρήγορα.

Εικόνα 6.11. Απομόνωση των χαρακτηριστικών που πρέπει να μετρηθούν - Ερωτήσεις στον πρώτο αγώνα

Η δραστηριότητα “Πηγαίνοντας στο σπίτι” (Εικόνα 6.12) προτείνεται να είναι η επόμενη, καθώς επεκτείνει την αντίληψη του χαρακτηριστικού που πρόκειται να μετρηθεί. Σε αυτή την περίπτωση ο χρήστης μπορεί να μεταβάλλει το “ύψος ανά χρονικό διάστημα” που θα ανέβει η μπάρα έτσι ώστε ο δεινόσαυρος να φτάσει σε ύψος 20 που είναι ο δρόμος και να πάει στο σπίτι του, σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα 5. Στο δεξί μέρος της οθόνης παρουσιάζεται το γράφημα ύψους ανά χρόνο και μπορεί να γίνει μια πρώτη σύνδεση των αλλαγών στην τιμή του ρυθμού μεταβολής με τη γραφική του αναπαράσταση.

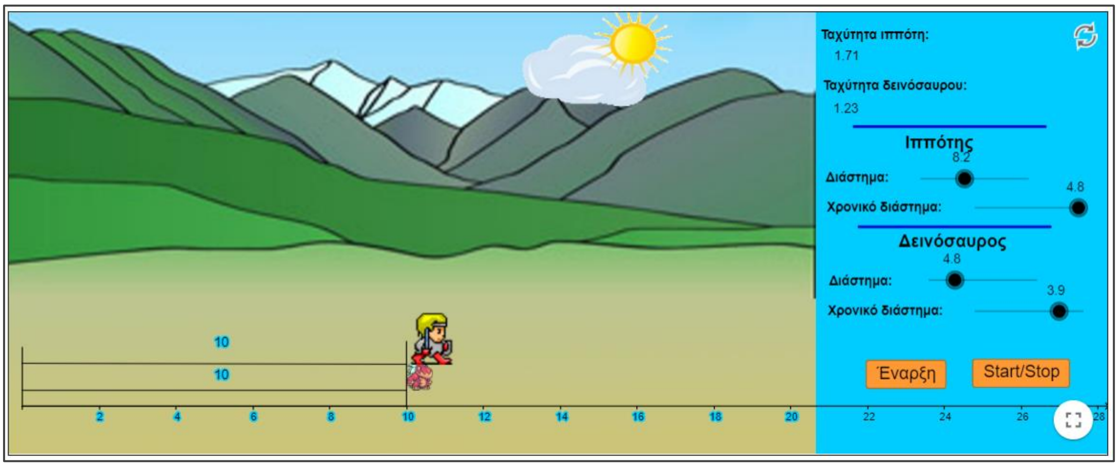


Εικόνα 6.12. Επέκταση του χαρακτηριστικού προς μέτρηση – Πηγαίνοντας στο σπίτι

Καθορισμός των ποσοτήτων που επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά και του τρόπου που γίνεται αυτό

Μια λανθασμένη αντίληψη που επικρατεί σε σχέση με την ταχύτητα είναι ότι μπορεί να μετρηθεί μόνο με το χρόνο (Lobato & Thanheiser, 2002). Σκοπός των ερωτήσεων της δραστηριότητας του δεύτερου αγώνα (Εικόνα 6.13) είναι να αποσαφηνιστεί ο τρόπος που επηρεάζει η αλλαγή στο χρόνο και στο διάστημα το πόσο γρήγορα κινούνται τα αντικείμενα. Γίνεται μια προσπάθεια να αντιληφθεί ο μαθητής ότι ο ρυθμός που παρατηρούσε στην προηγούμενη δραστηριότητα επηρεάζεται από κάποια άλλα μετρήσιμα χαρακτηριστικά.

Για το σκοπό αυτό στη συγκεκριμένη οθόνη το πλαίσιο παραμένει το ίδιο, ένας αγώνας μεταξύ του δεινοσαύρου και του ιππότη, αλλά αντί για την αλλαγή του ρυθμού μεταβολής του διαστήματος ανά χρονικό διάστημα για τους δύο συμμετέχοντες ο μαθητής μπορεί να αλλάξει το διάστημα και το χρόνο που θα κινηθεί ο καθένας. Οι τιμές αυτές αφορούν σε όλη την κίνηση η οποία πραγματοποιείται με σταθερό ρυθμό μεταβολής.



Εικόνα 6.13. Καθορισμός των ποσοτήτων που επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά και του τρόπου που γίνεται αυτό – Ο δεύτερος αγώνας

Στην αρχή ζητείται να οριστεί το διάστημα και το χρονικό διάστημα για τον ιππότη σε συγκεκριμένες τιμές και μεταβάλλοντας τις αντίστοιχες τιμές του δεινοσαύρου να προχωράει “το ίδιο γρήγορα”, “πιο αργά” ή “πιο γρήγορα”. Σε αυτό το στάδιο δεν είναι στόχος να γίνει κατανοητός τόσο ο ακριβής τρόπος που επηρεάζει η κάθε αλλαγή τον ρυθμό μεταβολής, όσο ότι αλλάζοντας αυτές τις ποσότητες αλλάζει και ο ρυθμός μεταβολής.

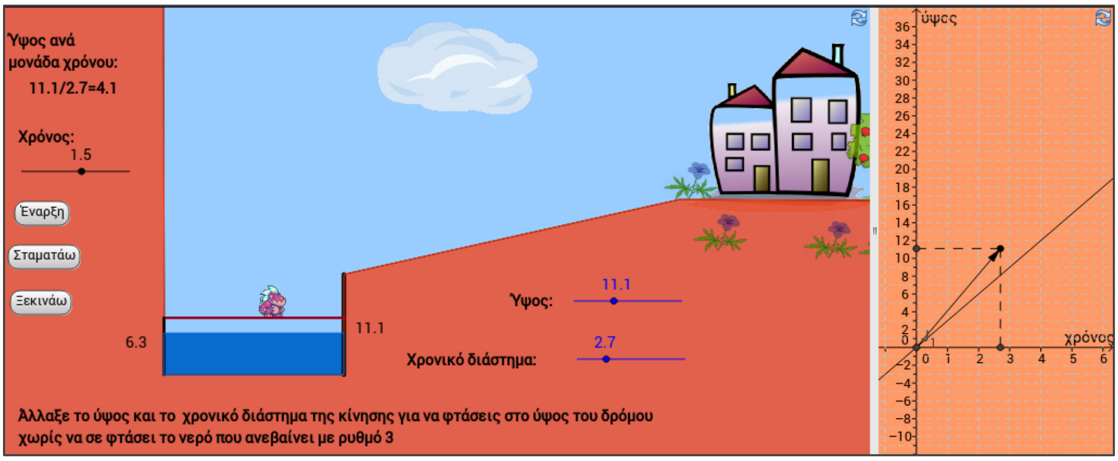
Κατανόηση των χαρακτηριστικών μιας μέτρησης

Στη συνέχεια στην ίδια οθόνη (Εικόνα 6.13) γίνονται συμπληρωματικές ερωτήσεις, όπως πως μπορεί να μετρηθεί το πόσο γρήγορα προχωράει ο δεινόσαυρος και ποιος πάει πιο γρήγορα μεταβάλλοντας το χρονικό διάστημα και διατηρώντας σταθερό το διάστημα και ομοίως αν μεταβληθεί το διάστημα ενώ το χρονικό διάστημα μένει σταθερό. Ο μαθητής καλείται να σκεφτεί πώς αλλάζει "το πόσο γρήγορα" προχωράει ο ήρωας αν αλλάξει το διάστημα ή το χρόνο της κίνησής του.

Κατασκευή του λόγου

Στο σημείο αυτό, καθώς έχει φανεί ποιες ποσότητες είναι ανάλογες και ποιες αντιστρόφως ανάλογες, μπορούν να γίνουν ερωτήσεις που να οδηγούν στην κατασκευή του λόγου διαστήματος προς χρόνο για τη μέτρηση της ταχύτητας. Σε αυτήν την περίπτωση δίνονται συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για το διάστημα και το χρονικό διάστημα που προχωράει ο ένας από τους δύο συμμετέχοντες και το διάστημα ή το χρόνο που προχωράει ο άλλος και αναζητείται ο τρόπος που θα επιτευχθεί ο ίδιος ρυθμός αλλάζοντας την άλλη ποσότητα, χρονικό διάστημα ή διάστημα αντίστοιχα. Αναζητούνται ακόμα διαφορετικά ζευγάρια τιμών χρόνου και διαστήματος, έτσι ώστε να φτάνουν μαζί στο τέρμα οι δύο συμμετέχοντες.

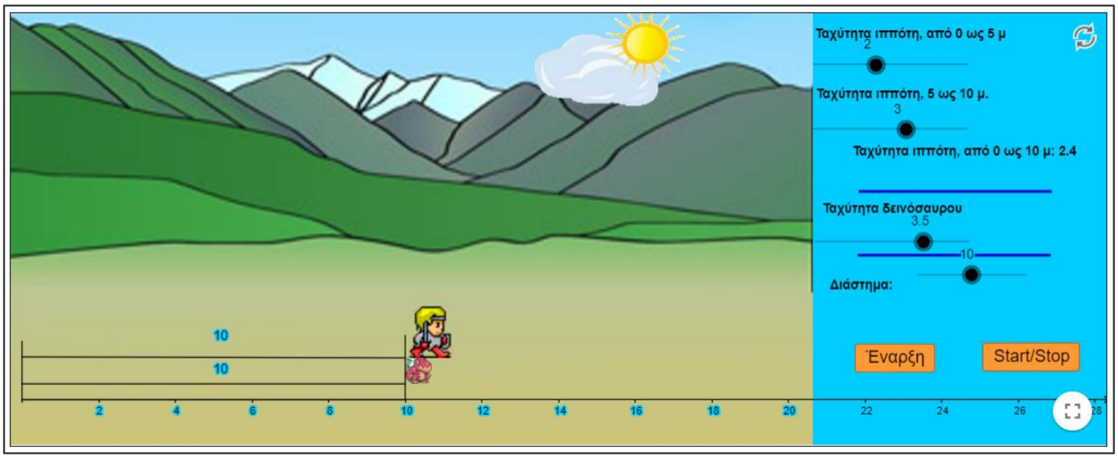
Εφόσον έχει κατασκευαστεί ο λόγος και για την καλύτερη κατανόησή του, προτείνεται η δραστηριότητα "Αποφεύγοντας το νερό" (Εικόνα 6.14). Στο παράδειγμα αυτό, το νερό ανεβαίνει με συγκεκριμένο ρυθμό που δίνεται και ο μαθητής θα πρέπει να αλλάξει το ύψος και το χρονικό διάστημα της κίνησης, έτσι ώστε να μη φτάσει το νερό τον δεινόσαυρο. Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει το γράφημα χρόνου-ύψους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια αρχική σύνδεση του ρυθμού με τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με την ευθεία που ενώνει τα σημεία 0 και y/x, όπου y το ύψος που ανεβαίνει η μπάρα και x ο χρόνος της κίνησης.



Εικόνα 6.14. Κατασκευή του λόγου – Αποφεύγοντας το νερό

Διαφορετικός μέσος ρυθμός μεταβολής σε διαστήματα

Τέλος, η δραστηριότητα του τρίτου αγώνα (Εικόνα 6.15) αφορά σε κίνηση στην οποία ο ρυθμός μεταβολής αλλάζει. Ο μικρόκοσμος αυτός έχει σχεδιαστεί με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα του Thompson (1994β) με σκοπό να χρησιμοποιηθεί ως μεταφορά της έννοιας της ταχύτητας.



Εικόνα 6.15. Αλλαγή ρυθμού μεταβολής σε δύο διαστήματα κίνησης – Ο τρίτος αγώνας

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει πάλι το πλαίσιο του αγώνα του ιππότη με τον δεινόσαυρο αλλά σε αυτή την περίπτωση για τον ιππότη μπορεί να οριστεί ένας ρυθμός μεταβολής για την κίνηση του στο διάστημα 0 ως 5 και ένας άλλος για το διάστημα 5 ως το τέλος της κίνησης. Μπορεί ακόμα να οριστεί το διάστημα που θα κινηθούν οι δύο αγωνιζόμενοι.

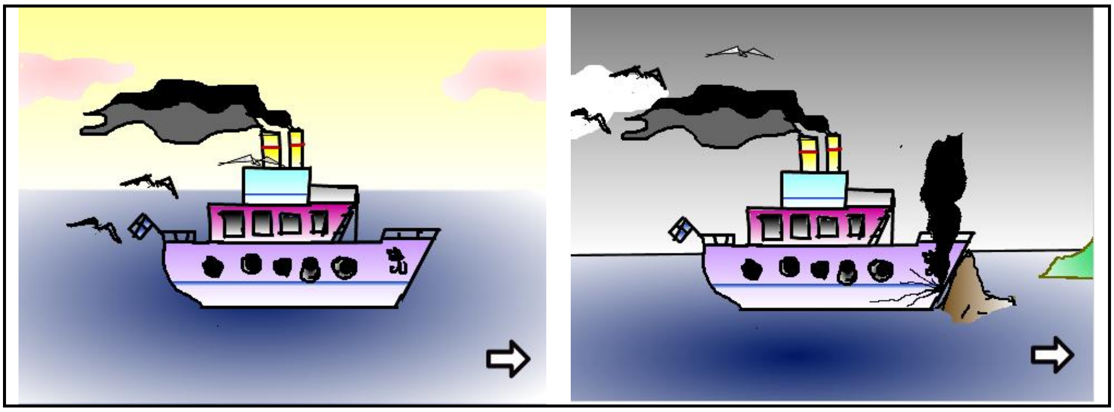
Από τους μαθητές ζητείται να ορίσουν τον ρυθμό μεταβολής για τον δεινόσαυρο για να πετύχουν την ίδια ταχύτητα με τον ιππότη που έχει διαφορετική ταχύτητα στα δύο διαστήματα. Τα δύο διαστήματα μπορούν να είναι ίσα αν το συνολικό διάστημα της κίνησης οριστεί να είναι 10 ή διαφορετικά αν οριστεί μεγαλύτερο ή μικρότερο. Η μέση ταχύτητα του ιππότη για κάθε περίπτωση υπολογίζεται και παρουσιάζεται και μπορούν να γίνουν παρατηρήσεις του πως αλλάζει, χωρίς να είναι απαραίτητο να γίνουν πράξεις.

6.2.7 Δραστηριότητα 5 - ΠιΤανικός

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αναπτύχθηκε ένα παιχνίδι σε Scratch για τη μελέτη ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται σε ένα παιχνιώδες περιβάλλον. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές έχουν σκοπό να προσπαθήσουν να σώσουν το πλοίο που βουλιάζει. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα παρουσιάστηκε στο συνέδριο EDUCON2018 – IEEE Global Engineering Education Conference (Avgerinos & Remoundou, 2018β).

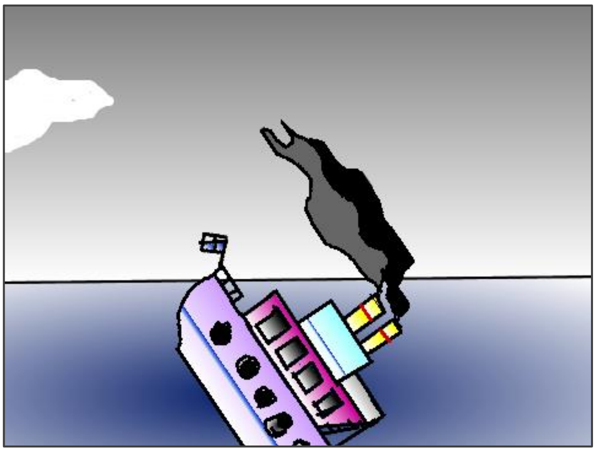
Η δραστηριότητα μπορεί να απευθύνεται σε μεγάλο εύρος ηλικιών με διαφορετικούς στόχους. Συγκεκριμένα, αν πρόκειται για μαθητές των τελευταίων τάξεων του δημοτικού και των πρώτων του γυμνασίου, οι μαθητές αναμένεται να μπορούν να:

- εστιάσουν στις ποσότητες όγκος νερού στο πλοίο, χρόνος, ρυθμός εισροής νερού,
- υπολογίζουν τη μία από τις τρεις ποσότητες δεδομένων των άλλων δύο,
- αναγνωρίζουν πως επιδρά ο ρυθμός εισροής νερού στο πλοίο στον όγκο του νερού κάθε στιγμή,
- να κάνουν προβλέψεις για τον όγκο του νερού δεδομένης της τιμής του ρυθμού εισροής νερού στο πλοίο,
- να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα δεδομένα του προβλήματος.



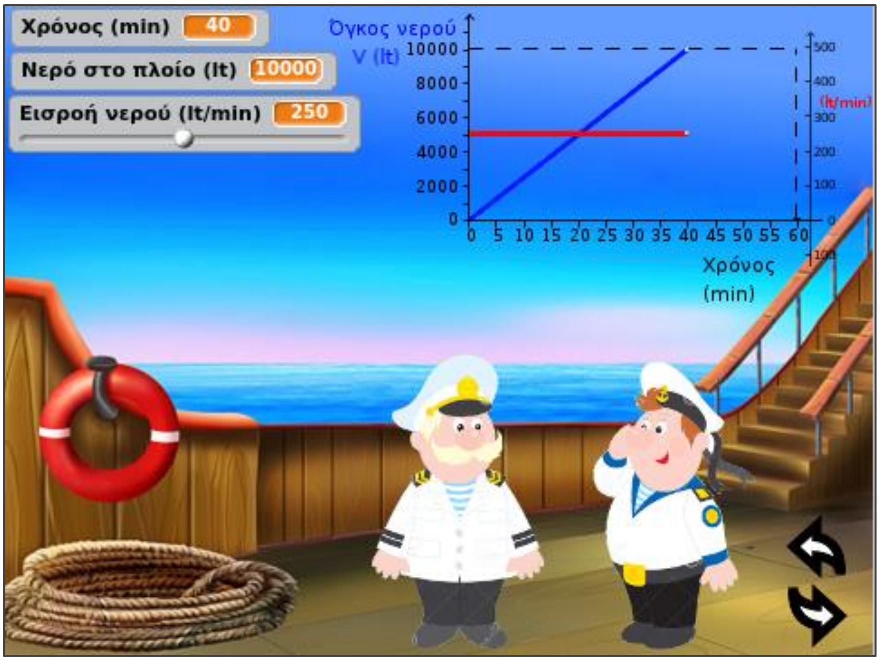
Εικόνα 6.16. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπα από τις αρχικές οθόνες του παιχνιδιού

Το πλαίσιο του συγκεκριμένου παιχνιδιού είναι ένα πλοίο στο οποίο μπαίνει νερό και βυθίζεται. Στην αρχή φαίνεται το πλοίο να κινείται στη θάλασσα και ξαφνικά χτυπάει πάνω σε έναν βράχο (Εικόνα 6.16). Στο πλοίο γίνεται μια ρωγμή από την οποία εισέρχεται νερό με σταθερό ρυθμό. Ο καπετάνιος και ο μηχανικός του πλοίου καλούν για βοήθεια που θα έρθει σε μία ώρα. Στο διάστημα αυτό θα πρέπει να χειριστούν τις αντλίες, έτσι ώστε το νερό που είναι μέσα στο πλοίο να μην ξεπεράσει τα 10.000 λίτρα γιατί τότε θα βουλιάξουν (Εικόνα 6.17). Οι αρχικές αυτές εικόνες σχεδιάστηκαν ειδικά για τους σκοπούς του παιχνιδιού.



Εικόνα 6.17. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπο από την τελική οθόνη του παιχνιδιού

Το παιχνίδι έχει τέσσερα βήματα και ο παίχτης επιλέγει ποιο θα παίξει. Στο πρώτο (Εικόνα 6.18) ο παίχτης εισάγει μία τιμή που αντιστοιχεί στον ρυθμό με τον οποίο εισέρχεται νερό στο πλοίο από τη ρωγμή που έχει δημιουργηθεί, σε λίτρα ανά λεπτό. Στην πάνω αριστερή γωνία της οθόνης εμφανίζεται η γραφική παράσταση του όγκου του νερού στο πλοίο και του ρυθμού με τον οποίο αυτό εισέρχεται. Επιλέχτηκε να παρουσιαστούν και οι δύο γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σημείο για οικονομία χώρου. Η μπλε γραμμή αντιστοιχεί στον όγκο του νερού στο πλοίο και οι μονάδες μέτρησής του (λίτρα) εμφανίζονται στον αριστερό κάθετο άξονα. Ο όγκος του νερού στο πλοίο, όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση αυξάνεται. Η κόκκινη γραμμή εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο εισέρχεται νερό στο πλοίο και συνεπώς τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού. Οι τιμές του σε λίτρα ανά λεπτό φαίνονται στον δεξιό κάθετο άξονα. Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός εισροής είναι σταθερός και ίσος με την τιμή που έχει δώσει ο παίχτης.

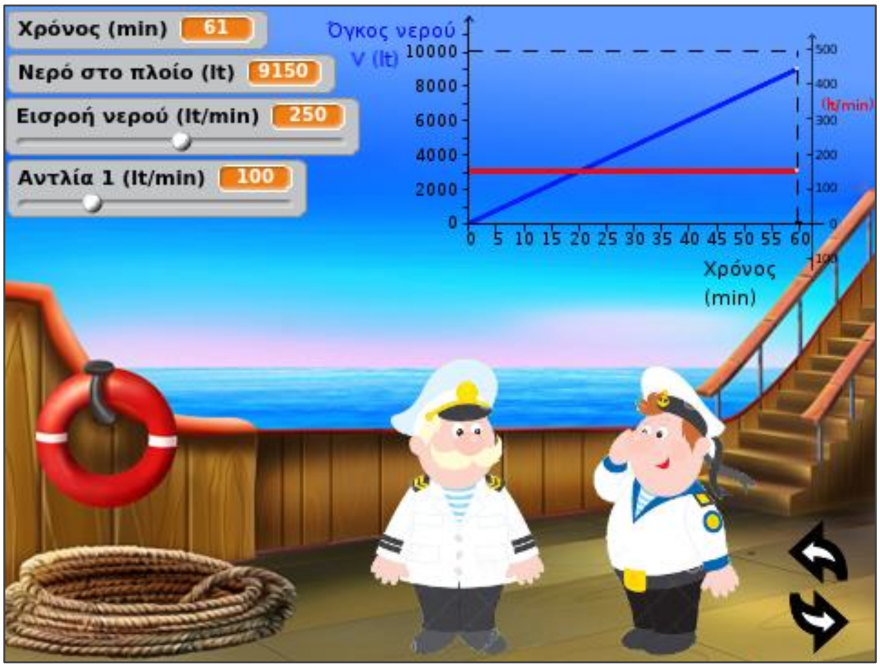


Εικόνα 6.18. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπο από το πρώτο βήμα

Το πρώτο αυτό βήμα έχει σκοπό να εξοικειώσει τους παίχτες με το περιβάλλον του παιχνιδιού και τις ποσότητες που εμπλέκονται. Καθώς, το πλαίσιο είναι αρκετά περίπλοκο, η κατανόηση των ποσοτήτων που μεταβάλλονται απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και τη βοήθεια του εκπαιδευτικού. Οι μαθητές καλούνται να εστιάσουν αφενός στον όγκο του νερού στο πλοίο που αυξάνεται και αφετέρου στον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος, που στην περίπτωση αυτή είναι σταθερός και ίσος με την τιμή που έχουν ορίσει.

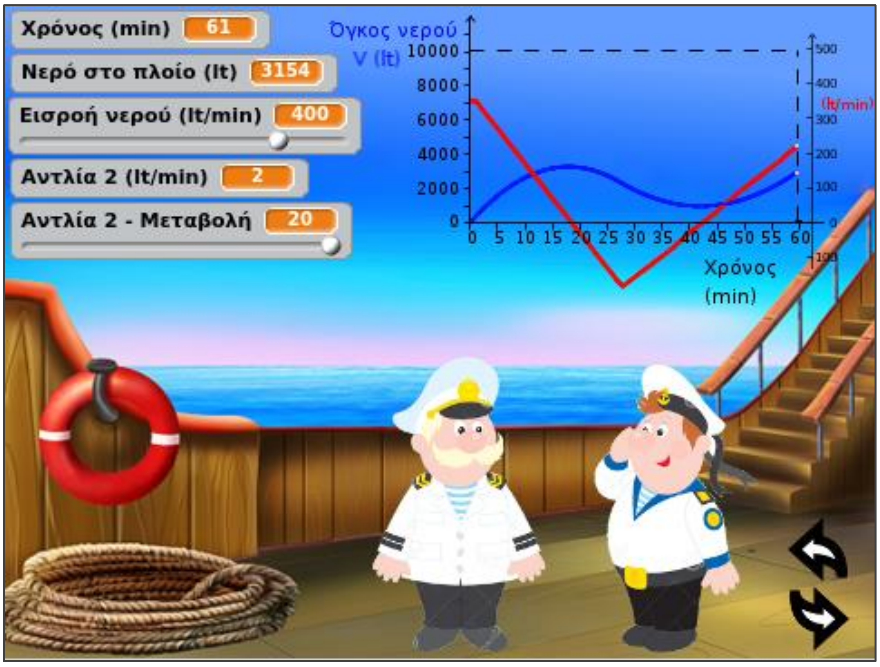
Ο εκπαιδευτικός βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν τι συμβαίνει αν ορίσουν διαφορετικούς ρυθμούς εισροής νερού στο πλοίο και να συνδέσουν την κατάσταση αυτή με τη γραφική παράσταση. Έτσι μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι θέτοντας μεγαλύτερη τιμή για τον ρυθμό εισροής, εισέρχεται πιο γρήγορα νερό στο πλοίο και η γραφική παράσταση του όγκου έχει μεγαλύτερη κλίση, φτάνοντας την τιμή των 10.000 λίτρων σε λιγότερο χρόνο.

Στο δεύτερο βήμα (Εικόνα 6.19), εκτός από τον ορισμό του ρυθμού εισροής νερού στο πλοίο, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χειριστούν μία αντλία η οποία βγάζει νερό από το πλοίο. Μπορούν να δώσουν στην αντλία μια αρχική τιμή σε λίτρα ανά λεπτό και να μεταβάλλουν την τιμή αυτή στη συνέχεια. Ο τελικός ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού στο πλοίο κάθε στιγμή στην περίπτωση αυτή είναι διαφορετικός καθώς προκύπτει ως διαφορά του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται νερό στο πλοίο και του ρυθμού με τον οποίο η αντλία αντλεί νερό. Οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο βήμα αυτό είναι ακριβώς οι ίδιες με το προηγούμενο ως προς τις ποσότητες που αναπαρίστανται και τα χρώματα των γραμμών. Οι μαθητές πειραματίζονται με διάφορες τιμές, όπως την τιμή της αντλίας, που μπορούν να την αλλάξουν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Καλούνται να εκφράσουν πως αντιλαμβάνονται τις αλλαγές αυτές και τη σύνδεσή τους με τις γραφικές παραστάσεις.



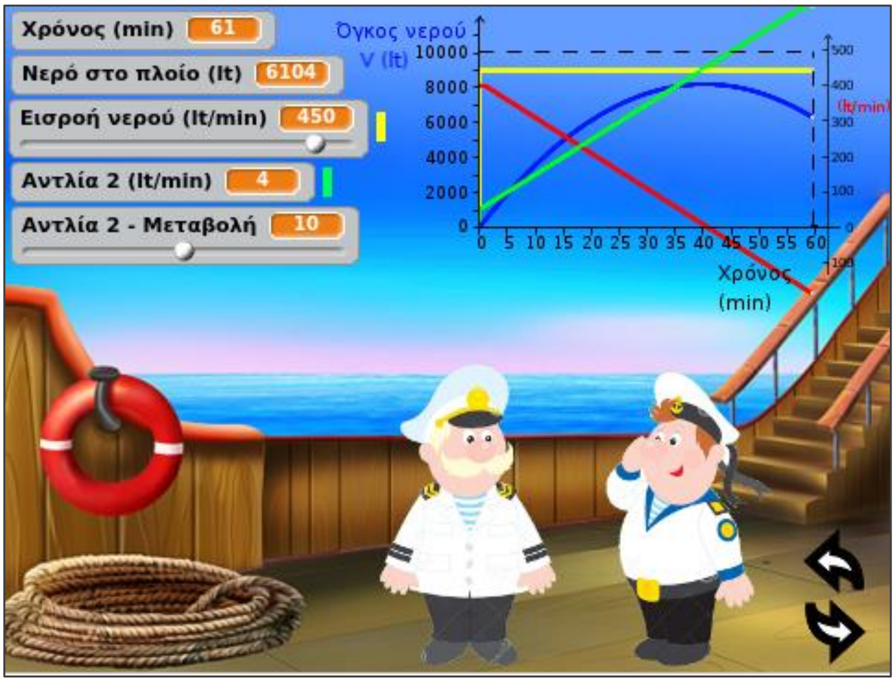
Εικόνα 6.19. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπο από το δεύτερο βήμα

Στο τρίτο βήμα (Εικόνα 6.20) ο παίχτης έχει επιπλέον τη δυνατότητα να χειριστεί μια πιο εξελιγμένη αντλία η οποία ξεκινάει να βγάζει νερό από το πλοίο με συγκεκριμένο ρυθμό, αλλά ο ρυθμός αυτός μεταβάλλεται στην πορεία. Ο παίχτης, εκτός από τον ρυθμό με τον οποίο εισέρχεται νερό στο πλοίο και τον ρυθμό με τον οποίο αντλεί νερό η αντλία, ορίζει και τη μεταβολή, που είναι πόσο περισσότερο νερό θα βγάζει η αντλία σε κάθε λεπτό. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο δεν είναι πια σταθερός αλλά μειώνεται σταθερά. Η γραφική του παράσταση είναι ευθεία με αρνητική κλίση και φαίνεται με κόκκινη γραμμή στο τρίτο βήμα.



Εικόνα 6.20. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπο από το τρίτο βήμα

Όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση της εικόνας 6.20, ο ρυθμός μεταβολής γίνεται αρνητικός οπότε το νερό που βγάζει η αντλία είναι περισσότερο από το νερό που εισέρχεται από τη ρωγμή και ο όγκος του νερού στο πλοίο αρχίζει να μειώνεται. Σε κάποιο σημείο όμως μπαίνει μία νέα παράμετρος καθώς δεν αντέχουν οι μπαταρίες και η αντλία σταδιακά βγάζει νερό με πιο αργό ρυθμό. Από αυτό τη στιγμή ο όγκος του νερού στο πλοίο μειώνεται αλλά με πιο αργό ρυθμό ώσπου αρχίζει πάλι να αυξάνεται.

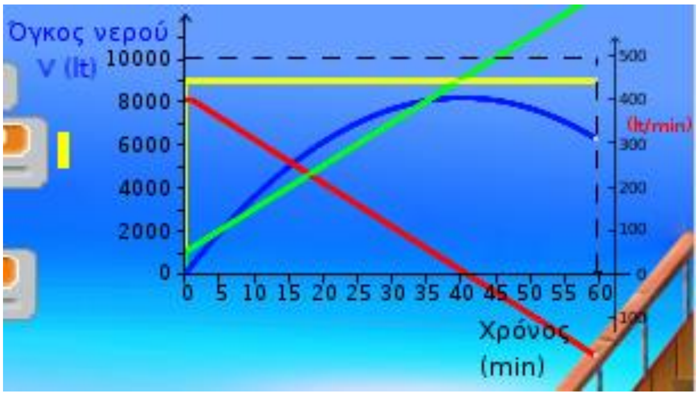


Εικόνα 6.21. ΠιΤανικός - Στιγμιότυπο από το τέταρτο βήμα

Τέλος, υπάρχει ένα τέταρτο βήμα (Εικόνα 6.21), στο οποίο ο παίχτης έχει τις ίδιες δυνατότητες με το τρίτο, αλλά παρουσιάζονται περισσότερα δεδομένα στις γραφικές παραστάσεις (Εικόνα 6.22). Συγκεκριμένα σε αυτή την περίπτωση δίνονται οι γραφικές παραστάσεις του όγκου του νερού στο πλοίο (μπλε γραμμή), του ρυθμού με τον οποίο εισέρχεται νερό στο πλοίο (κίτρινη γραμμή), του ρυθμού που βγάζει νερό η αντλία (πράσινη γραμμή) και του ρυθμού μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο (κόκκινη γραμμή).

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές παρατηρούν μεταβλητούς ρυθμούς μεταβολής. Εστιάζουν στις ποσότητες που συμμεταβάλλονται, δηλαδή τον όγκο νερού σε σχέση με τον χρόνο και στη γραφική τους αναπαράσταση. Μέσω αυτής συνδέουν εκφράσεις όπως ρυθμός μεταβολής που αυξάνεται, μειώνεται ή μένει σταθερός με μια παιγνιώδη κατάσταση που αναγνωρίζουν. Εστιάζουν στην επίδραση ενός μεταβαλλόμενου ρυθμού στη συνάρτηση.

Μεταξύ των δυσκολιών που έχουν παρατηρηθεί σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής είναι η δυσκολία ερμηνείας αρνητικών ρυθμών μεταβολής (Ärlebäck κ.ά., 2013· Doerr κ.ά., 2013). Για τον λόγο αυτό επιλέχτηκε να συμπεριλαμβάνεται και αυτή η περίπτωση στο παιχνίδι.



Εικόνα 6.22. ΠιΤανικός – Οι γραφικές παραστάσεις στο τέταρτο βήμα

Οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μπορούν να παρατηρήσουν την κατάσταση και να εκφράσουν τις ιδέες τους γι’ αυτή. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μαθητές που έχουν διδαχτεί διαφορικό λογισμό, μπορούν να αναγνωρίσουν τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να περιγράψουν το πρόβλημα σε συνδυασμό με τη συμπεριφορά της συνάρτησης του όγκου του νερού στο πλοίο σε σχέση με τον χρόνο και της παραγώγου της.

Πίνακας 6.5. Τιμές του ρυθμού μεταβολής

	Ρυθμός μεταβολής		**Όγκος νερού**
Σταθερός	Θετικός		Αυξανόμενος
	Μηδέν		Σταθερός
	Αρνητικός		Μειούμενος
Μεταβλητός	Θετικός	Αυξανόμενος	Αυξανόμενος πιο
		Μειούμενος	Αυξανόμενος πιο αργά
	Αρνητικός	Μειούμενος	Μειούμενος πιο αργά
		Αυξανόμενος	Μειούμενος πιο αργά
	Μηδέν		Ακρότατα σημεία

Στη δοκιμή της δραστηριότητας ΠιΤανικός σχεδιάστηκε μία μελέτη περίπτωσης. Δύο ομάδες διαφορετικού επιπέδου εκπαίδευσης συμμετείχαν στη δραστηριότητα παίζοντας το παιχνίδι. Οι συμμετέχοντες στην πιλοτική δοκιμή της δραστηριότητας ήταν έξι φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης και δύο μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι συμμετέχοντες εργάστηκαν ομαδικά σε ζευγάρια. Έτσι οι ομάδες που δημιουργήθηκαν ήταν:

- Ομάδα Α. Δύο φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει πανεπιστημιακό μάθημα Διαφορικού Λογισμού καθώς ήταν απόφοιτοι άλλης σχολής και συγκεκριμένα τμήματος μηχανικών.
- Ομάδα Β. Δύο φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει μάθημα Διαφορικού Λογισμού στο λύκειο. Το επίπεδό τους στα μαθηματικά θεωρήθηκε ικανοποιητικό και ήταν εξοικειωμένοι με την επίλυση προβλήματος.
- Ομάδα Γ. Δύο φοιτητές χωρίς προηγούμενη γνώση Διαφορικού Λογισμού με μέσο επίπεδο στα μαθηματικά.
- Ομάδα Δ. Δύο μαθητές της Στ΄ τάξης με υψηλό επίπεδο στα μαθηματικά.

Οι ομάδες των φοιτητών συμπλήρωσαν ένα φύλλο εργασίας πριν ασχοληθούν με το παιχνίδι. Το φύλλο εργασίας είχε εννέα έργα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής. Στη συνέχεια οι φοιτητές έπαιξαν το παιχνίδι και έκαναν αλλαγές στο φύλλο εργασίας αν το θεωρούσαν απαραίτητο. Κάθε μέλος της ομάδας των φοιτητών συμπλήρωσε το δικό του φύλλο εργασίας, αλλά μπορούσαν να συζητήσουν την κατάσταση και οι ερωτήσεις που τους τέθηκαν ήταν κοινές.

Η διάρκεια της δραστηριότητας ήταν μία ώρα τόσο για τους φοιτητές όσο και για τους μαθητές. Στην αρχή έγινε μία εισαγωγή στο πλαίσιο του παιχνιδιού και σύντομη επεξήγηση των ποσοτήτων που συμμετέχουν. Στη συνέχεια οι συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με το παιχνίδι και συζήτησαν μεταξύ τους χωρίς εξωτερική παρέμβαση εκτός κι αν ζητούσαν κάποια επεξήγηση. Στο τέλος έγινε μία σύντομη συνέντευξη.

Στους μαθητές δόθηκε ένα φύλλο με έναν πίνακα στον οποίο μπορούσαν να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Για τους μαθητές φάνηκε ότι ήταν δύσκολο και αποθαρρυντικό να διαβάζουν και να συμπληρώνουν το φύλλο εργασίας. Για τον λόγο αυτό έπαιζαν το παιχνίδι και συγχρόνως τους τέθηκαν οι ερωτήσεις. Τους περιγράφηκε η κατάσταση και οι παράμετροι που επηρεάζουν και ρωτήθηκαν τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

Κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης με το παιχνίδι έγινε καταγραφή της οθόνης και βιντεοσκόπηση των συμμετεχόντων. Τα δεδομένα που αναλύθηκαν ήταν οι καταγραφές οθόνης, τα φύλλα εργασίας και οι σημειώσεις κατά τη συνέντευξη.

Τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις ρυθμού μεταβολής που περιγράφηκαν παραπάνω. Συμπεριλήφθηκαν ερωτήσεις για την κατανόηση σταθερού και μεταβλητού ρυθμού.

Εξετάστηκε ο βαθμός στον οποίο το παιχνίδι άλλαξε τον τρόπο εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής των συμμετεχόντων και πραγματοποιήθηκε η αντιστοίχισή τους σε ένα από τα επίπεδα συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή.

6.2.8 Δραστηριότητα 6 - Κλίση ευθείας

Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία και προέκυψε και κατά την έρευνας για τον ρυθμό μεταβολής, μία σημαντική έννοια για την κατανόησή του, είναι η κλίση. Οι πολλές όψεις της και οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της την καθιστούν όμως δύσκολη για τους μαθητές. Η οπτικοποίηση της έννοιας της κλίσης μέσω ψηφιακών δραστηριοτήτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόησή της. Υπάρχουν κάποιες αποσπασματικές δραστηριότητες στο photodentro και στο διαδίκτυο, ενώ εκπαιδευτικά λογισμικά μαθηματικών όπως το GeoGebra αποτελούν σημαντικά και εύχρηστα εργαλεία για την ανάπτυξη βοηθητικών δραστηριοτήτων.

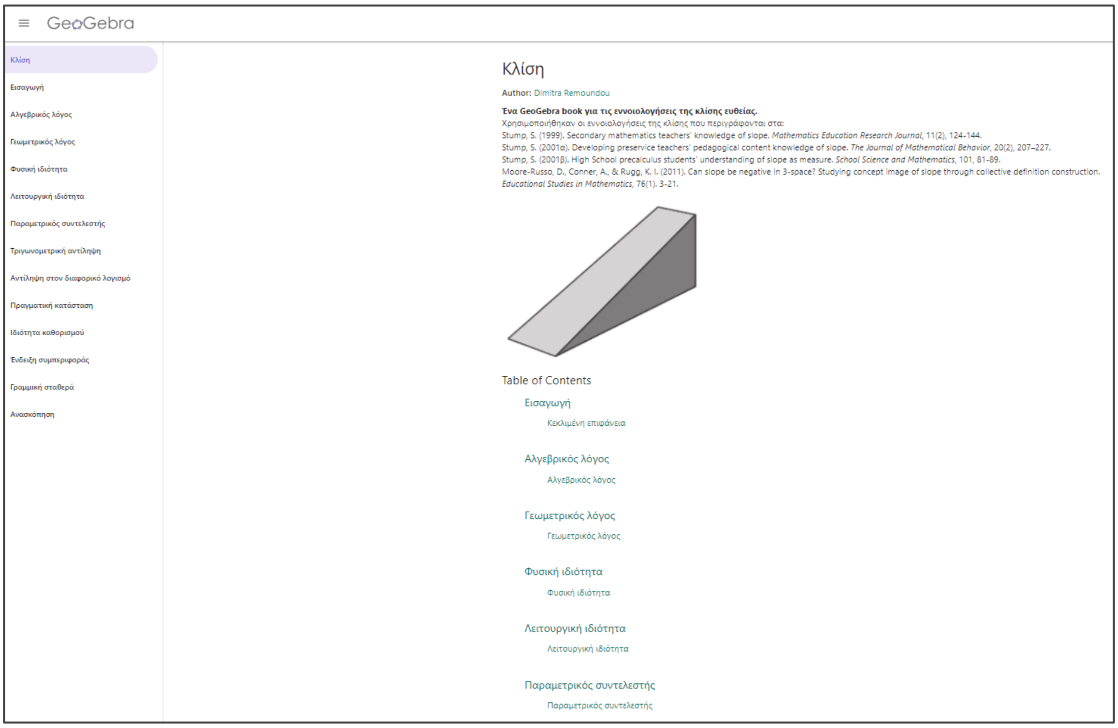
Για τους παραπάνω λόγους θεωρήθηκε σκόπιμο να σχεδιαστούν κάποιες δραστηριότητες σε σχέση με την κλίση. Θεωρώντας ότι είναι σημαντικό να συνδυάζονται οι επιμέρους εννοιολογήσεις και να αποσαφηνίζεται ότι αφορούν στην ίδια έννοια έγινε μία προσπάθεια να συγκεντρωθούν σε ένα σημείο μικρές δραστηριότητες οι οποίες τονίζουν διαφορετικές όψεις της κλίσης.

Το αποτέλεσμα ήταν να δημιουργηθεί ένα GeoGebra book στο οποίο εντάχθηκαν επιμέρους δραστηριότητες σχετικά με την κλίση σύμφωνα με τις εννοιολογήσεις που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία και περιγράφηκαν στην παράγραφο 2.2.4. Ο βασικός κορμός των δραστηριοτήτων στηρίχτηκε στην καταγραφή των διαφορετικών εννοιολογήσεων του Stump (1997, 1999, 2001β), όπως αυτές συμπληρώθηκαν από τους Moore-Russo κ.ά. (2011). Στο GeoGebra μπορούν να αναπαρασταθούν έννοιες σε γραφική και αλγεβρική μορφή, κάτι που είναι επιθυμητό για την κλίση.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν σύμφωνα με τις αρχές ότι η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσεις τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες και ότι τα αποτελέσματα ερευνών για τη μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού. Οι δυσκολίες των μαθητών μπορούν να υπερσκελιστούν με στοχευμένες δραστηριότητες.

Το GeoGebra book δημιουργήθηκε στα ελληνικά και στα αγγλικά και είναι διαθέσιμο στο αποθετήριο του GeoGebra στον σύνδεσμο https://www.geogebra.org/m/jbpxdeej και αποτελείται από 13 κεφάλαια (Εικόνα 6.23).

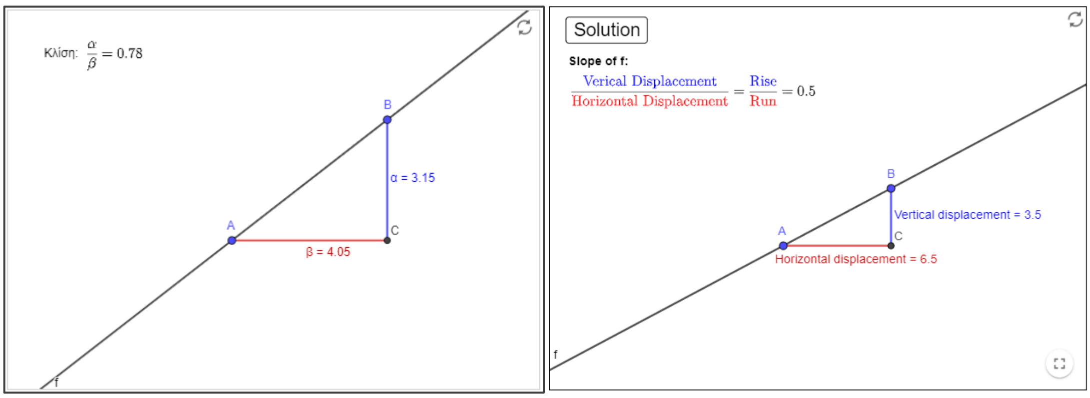
Το πρώτο κεφάλαιο εστιάζει στη διαισθητική εικόνα των μαθητών για την κλίση. Παρουσιάζονται κάποιες κεκλιμένες επιφάνειες και οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν τις αυθόρμητες ιδέες τους για την κλίση και τη γωνία. Το κάθε ένα από τα επόμενα κεφάλαια αντιστοιχεί σε έναν από τους τρόπους εννοιολόγησης της κλίσης που περιγράφηκαν στην παράγραφο 2.4.3 (Stump 1997, 1999, 2001β· Moore-Russo κ.ά., 2011). Αποτελείται από συνοπτική θεωρία, GeoGebra applets και ενδεικτικές ερωτήσεις κλειστού ή ανοιχτού τύπου. Κάποια κεφάλαια περιέχουν περισσότερες από μία δραστηριότητες. Το τελευταίο κεφάλαιο αποτελεί μία επισκόπηση των εννοιολογήσεων για την κλίση παρουσιασμένη σε έναν εννοιολογικό χάρτη. Το λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί με οποιαδήποτε σειρά ανάλογα με τις ανάγκες του εκπαιδευτικού και των μαθητών.



Εικόνα 6.230. Δομή του GeoGebra book για την κλίση

Γεωμετρικός λόγος

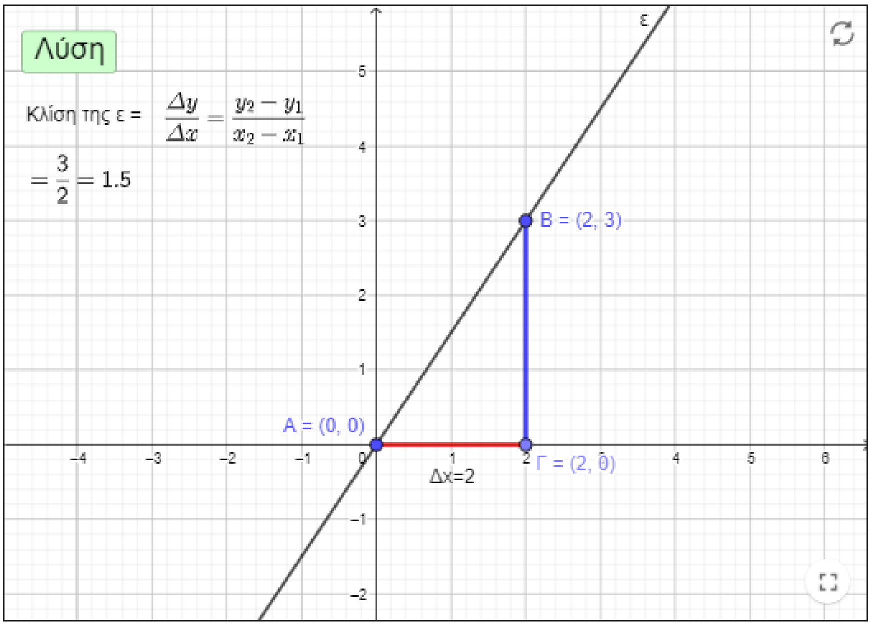
Η γεωμετρική αναπαράσταση της κλίσης είναι βασική και θεωρείται πιο εύκολη για τους μαθητές. Η εννοιολόγηση της κλίσης ως γεωμετρικού λόγου είναι κυρίαρχη στους καθηγητές και ο μνημονικός κανόνας “rise over run” χρησιμοποιείται συχνά στην εκπαίδευση (Stump, 1999· Nagle κ.ά., 2013). Στο κεφάλαιο του GeoGebra book που αντιστοιχεί στην εννοιολόγηση της κλίσης ως γεωμετρικού λόγου, παρουσιάζεται η κάθετη και η οριζόντια μεταβολή με διαφορετικά χρώματα (μπλε και κόκκινο αντίστοιχα) (Εικόνα 6.24). Τα σημεία Α και Β μπορούν να μετακινηθούν έτσι ώστε να μπορέσει ο μαθητής να πειραματιστεί και να απαντήσει τις ερωτήσεις για την κλίση της ευθείας. Σε αυτό το σημείο τονίζεται η οριζόντια και η κάθετη μεταβολή. Στην αντίστοιχη αγγλική δραστηριότητα χρησιμοποιείται και ο λόγος “Rise over Run”.



Εικόνα 6.24. Γεωμετρικός λόγος

Αλγεβρικός λόγος

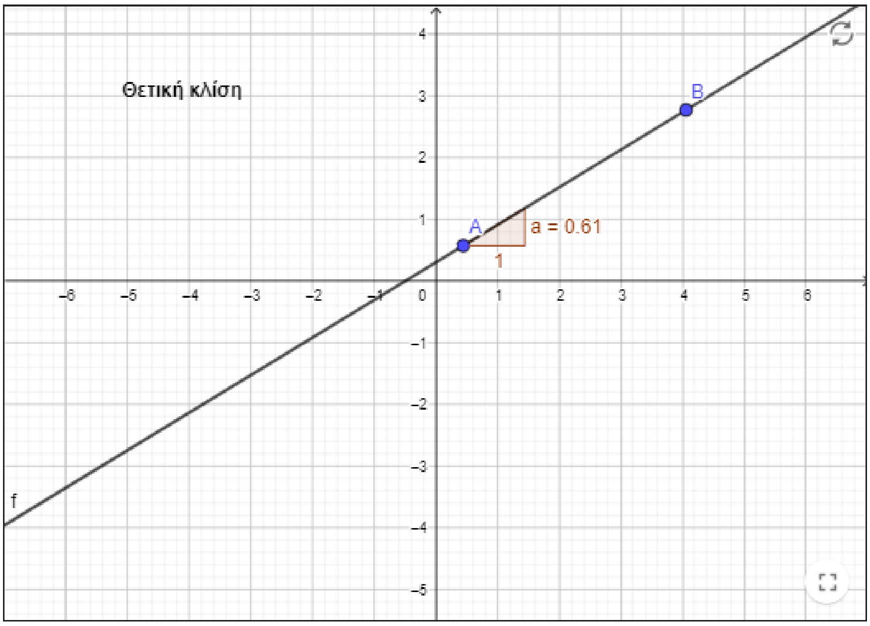
Στο κεφάλαιο που αντιστοιχεί στην εννοιολόγηση της κλίσης ως αλγεβρικού λόγου, οι δραστηριότητες είναι περισσότερο υπολογιστικές. Δίνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν την κλίση με διαφορετικά δεδομένα. Στο παρακάτω παράδειγμα δίνονται δύο σημεία με τις συντεταγμένες τους και οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ για τον υπολογισμό της κλίσης (Εικόνα 6.25).



Εικόνα 6.25. Αλγεβρικός λόγος

Φυσική ιδιότητα

Η κλίση ως φυσική ιδιότητα αναφέρεται στις ιδιότητες μίας ευθείας που μπορούν να περιγραφούν με εκφράσεις όπως «απότομη», «πόσο ανεβαίνει» κλπ. Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι πιο ελεύθερη έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να αλλάξουν την ευθεία, να πειραματιστούν, να μιλήσουν και να συγκρίνουν τις ευθείες που βλέπουν. Ενδεικτικές οδηγίες θα μπορούσαν να είναι να σύρουν τα σημεία A και B ώστε να φτιάξουν μία περισσότερο/λιγότερο απότομη ευθεία, ή μία ευθεία με μικρότερη ή μεγαλύτερη κλίση.

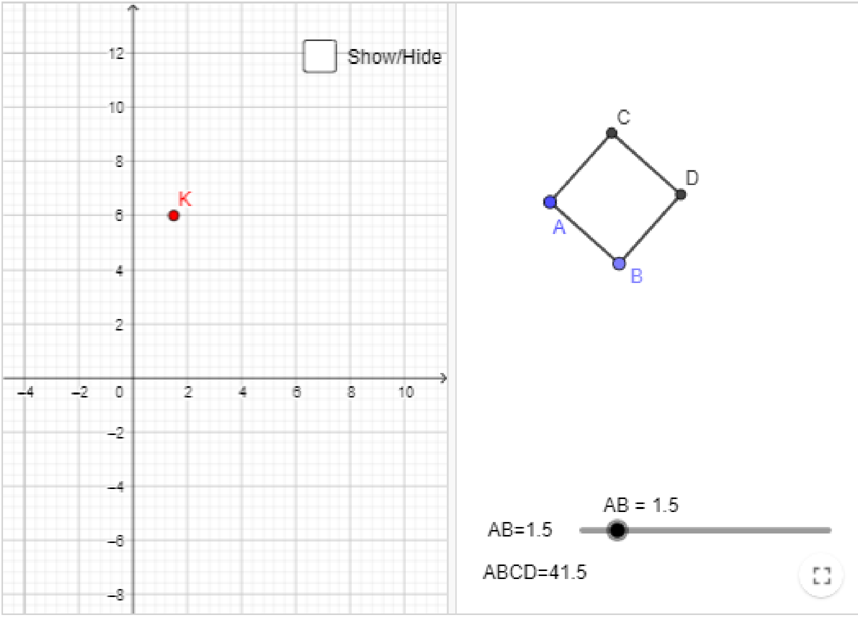


Εικόνα 6.26. Φυσική ιδιότητα

Λειτουργική ιδιότητα

Η λειτουργική ιδιότητα της κλίσης αντιστοιχεί στον σταθερό ρυθμό μεταβολής μεταξύ μεταβλητών. Στην παρακάτω δραστηριότητα, επιλέχτηκε ένα απλό πρόβλημα γεωμετρικής σχέσης και συγκεκριμένα της σχέσης της πλευράς με την περίμετρο ενός τετραγώνου. Συγκεκριμένα, δίνεται ένα τετράγωνο με πλευρά ΑΒ και αρχικά ζητείται η περίμετρός του. Στη συνέχεια τίθεται το ερώτημα να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της περιμέτρου σε σχέση με την πλευρά του τετραγώνου. Και ερωτήματα όπως αν η γραφική παράσταση αυτή είναι ευθεία, αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν τα ποσά είναι ανάλογα, και πόσο είναι η κλίση της ευθείας.

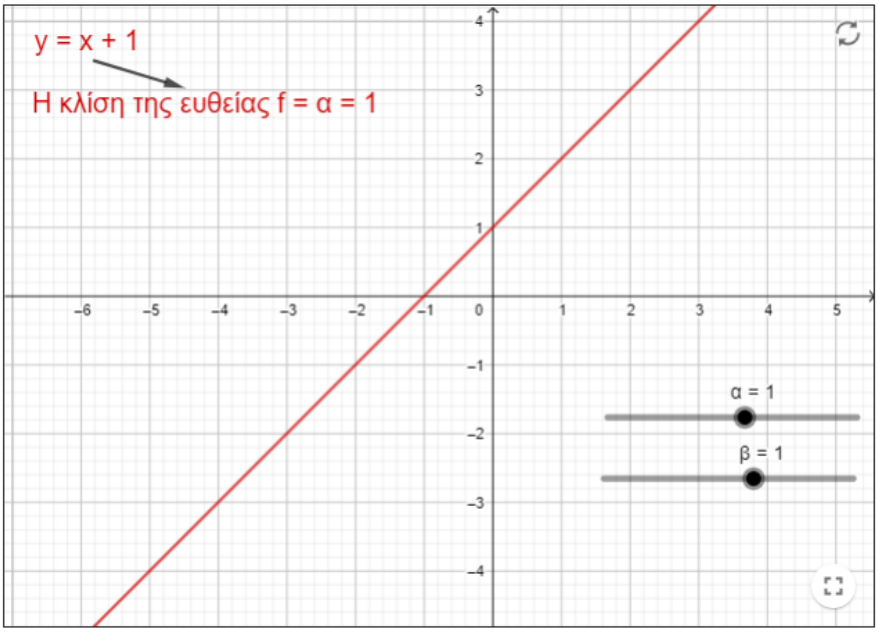
Τα ευρήματα για τη δυσκολία αναγνώρισης ανάλογων ποσών και η θεώρηση ως ανάλογων ποσών γραμμικών μη αναλογικών συναρτήσεων, αποτέλεσαν ώθηση να προστεθούν ερωτήσεις που να αποσαφηνίζουν την αναλογικότητα.



Εικόνα 6.27. Λειτουργική ιδιότητα

Παραμετρικός συντελεστής

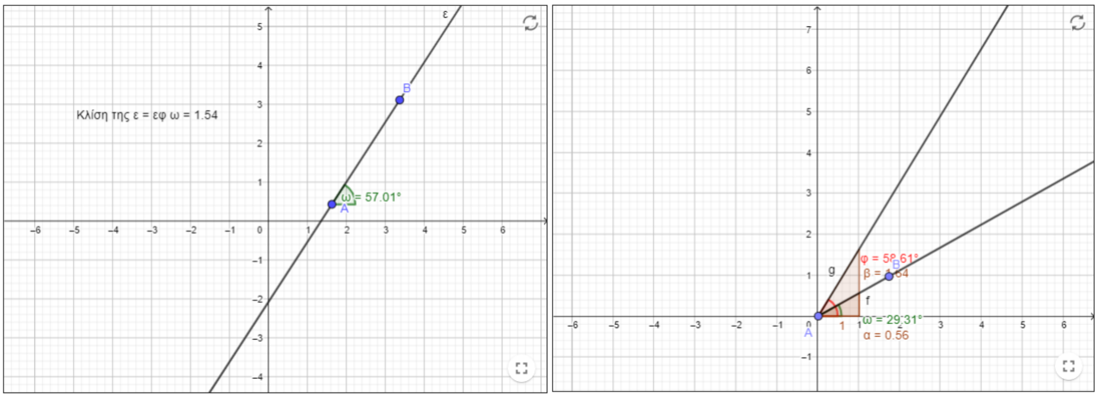
Η εννοιολόγηση της κλίσης ως παραμετρικού συντελεστή αναφέρεται στην αναγνώριση της ως τον συντελεστή α της ευθείας $y=αx+β$. Στην παρακάτω δραστηριότητα τονίζεται αυτή η όψη της κλίσης. Ο μαθητής μπορεί να πειραματιστεί αλλάζοντας τις τιμές του α και του β, και να παρατηρήσει πως αλλάζει η συμβολική και η γραφική αναπαράσταση της ευθείας



Εικόνα 6.28. Παραμετρικός συντελεστής

Τριγωνομετρική εννοιολόγηση

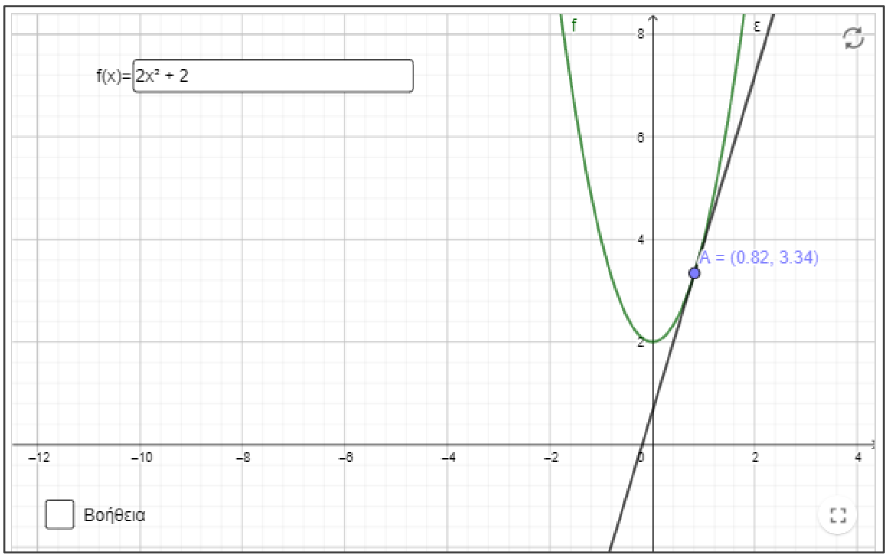
Στην τριγωνομετρική εννοιολόγηση η κλίση συνδέεται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα x΄x. Σύμφωνα και με τις παρανοήσεις που παρατηρήθηκαν και τα συμπεράσματα από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, στην πρώτη δραστηριότητα τέθηκαν ερωτήσεις οι οποίες να βοηθάνε τον μαθητή να ξεχωρίσει τη γωνία από την κλίση και να σκεφτεί σε τι αντιστοιχούν οι μονάδες μέτρησης. Η επόμενη δραστηριότητα στοχεύει στο να γίνει αντιληπτό ότι διπλάσια γωνία δεν σημαίνει διπλάσια κλίση.



Εικόνα 6.29. Τριγωνομετρική εννοιολόγηση

Εννοιολόγηση στον Διαφορικό Λογισμό

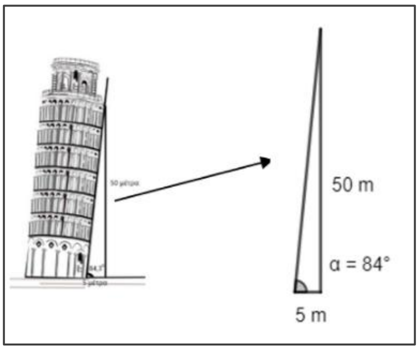
Η κλίση ως όριο, παράγωγος ή εφαπτομένη σε σημείο καμπύλη αποτελεί μέρος της εννοιολόγησής της στον Διαφορικό Λογισμό. Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνεται μία δραστηριότητα που η καμπύλη δίνεται παραμετρικά και σχεδιάζεται η εφαπτομένη σε σημείο της.



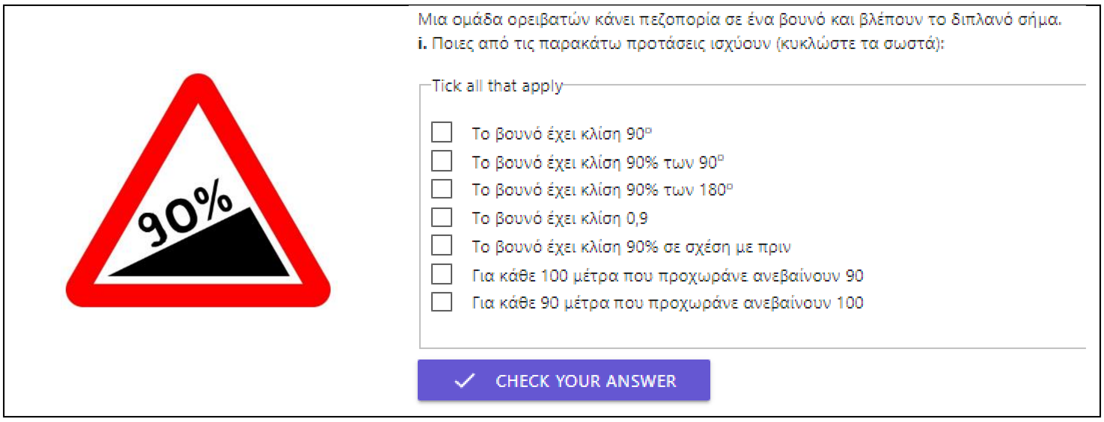
Εικόνα 6.300. Εννοιολόγηση στον Διαφορικό Λογισμό

Πραγματική κατάσταση

Η ερμηνεία της κλίσης σε πραγματικές καταστάσεις, στατικές ή δυναμικές, παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές. Στις στατικές καταστάσεις εντάχθηκαν οι δύο δραστηριότητες του ερωτηματολογίου, με την κλίση του πύργου και με το σήμα με την κλίση του βουνού. Όπως φάνηκε οι φοιτητές δυσκολεύτηκαν να εφαρμόσουν τον ορισμό της κλίσης για να απαντήσουν σε αυτές τις δύο ερωτήσεις (Εικόνα 6.31 και εικόνα 6.32). Στην πρώτη δίνεται ένας πύργος και ζητείται η κλίση του και στη δεύτερη δίνεται το οδικό σήμα της κλίσης ενός βουνού και καλούνται οι μαθητές να το ερμηνεύσουν.

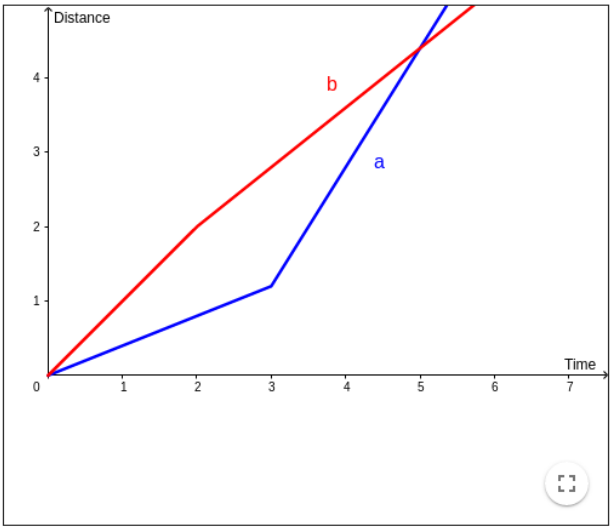


Εικόνα 6.31. Στατική πραγματική κατάσταση – Κλίση πύργου



Εικόνα 6.32. Στατική πραγματική κατάσταση - Σήμα κλίσης βουνού

Στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχουν και δραστηριότητες που αφορούν σε δυναμικές πραγματικές καταστάσεις. Η μία είναι στο πλαίσιο της κίνησης, όπου δίνεται το παράδειγμα δύο αυτοκινήτων που κινούνται και το γράφημα απόστασης-χρόνου (Εικόνα 6.33). Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα σε διάφορες στιγμές και να συνδέσουν την ταχύτητα με την κλίση.



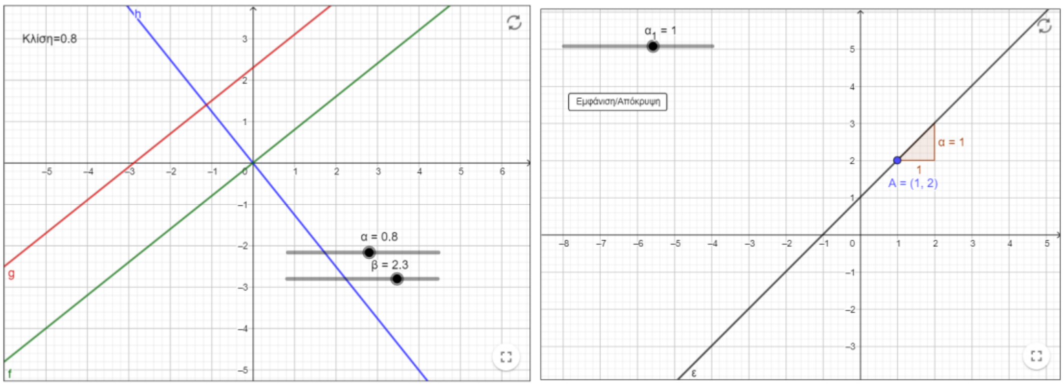
Εικόνα 6.33. Δυναμική πραγματική κατάσταση - Κίνηση αυτοκινήτων

Μία παρόμοια πραγματική κατάσταση είναι δύο κυλινδρικά δοχεία που γεμίζουν με νερό και τα αντίστοιχα γραφήματα. Οι μαθητές μπορούν να εκφραστούν για τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται ο όγκος του νερού σε κάθε δοχείο και να τον συνδέσουν με την κλίση.

Οι παραπάνω δραστηριότητες μπορούν να επεκταθούν και σε μεταβαλλόμενη ευθύγραμμη κίνηση των αυτοκινήτων όπως και σε δοχεία διαφορετικών σχημάτων.

Ιδιότητα καθορισμού

Στο σημείο αυτό γίνεται αναφορά σε ιδιότητες της κλίσης. Πρώτα γίνεται η σύνδεση της κλίσης με την παραλληλία και την καθετότητα δύο ευθειών.

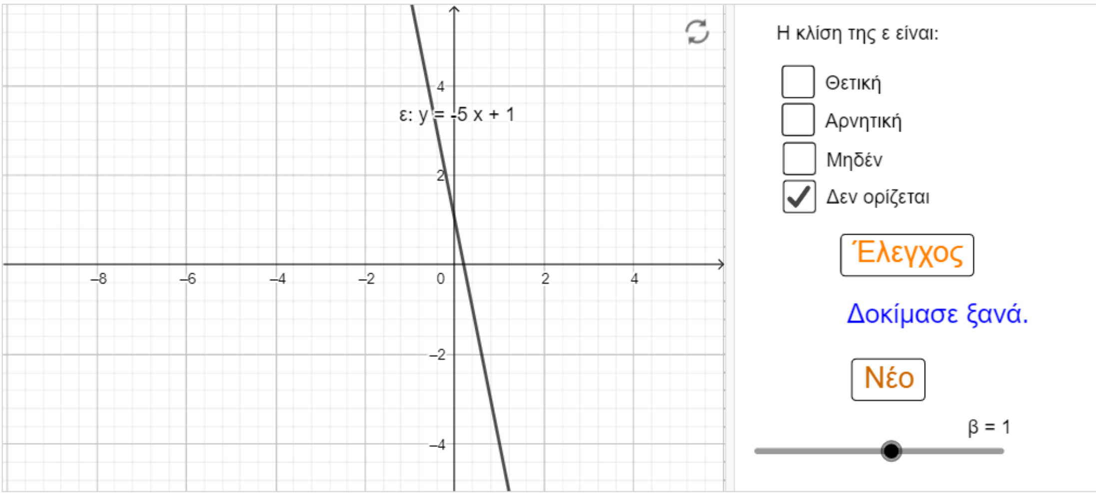


Εικόνα 6.34. Ιδιότητα καθορισμού

Η ιδιότητα καθορισμού όμως έχει σχέση και με τον καθορισμό της ευθείας αν δίνεται η κλίση και ένα σημείο. Έτσι έχει προστεθεί και μία δραστηριότητα στην οποία ο μαθητής μπορεί να αλλάξει τη θέση ενός σημείου Α και την κλίση και φαίνεται η ευθεία που δημιουργείται, της οποίας η εξίσωση ζητείται να υπολογιστεί.

Ένδειξη συμπεριφοράς

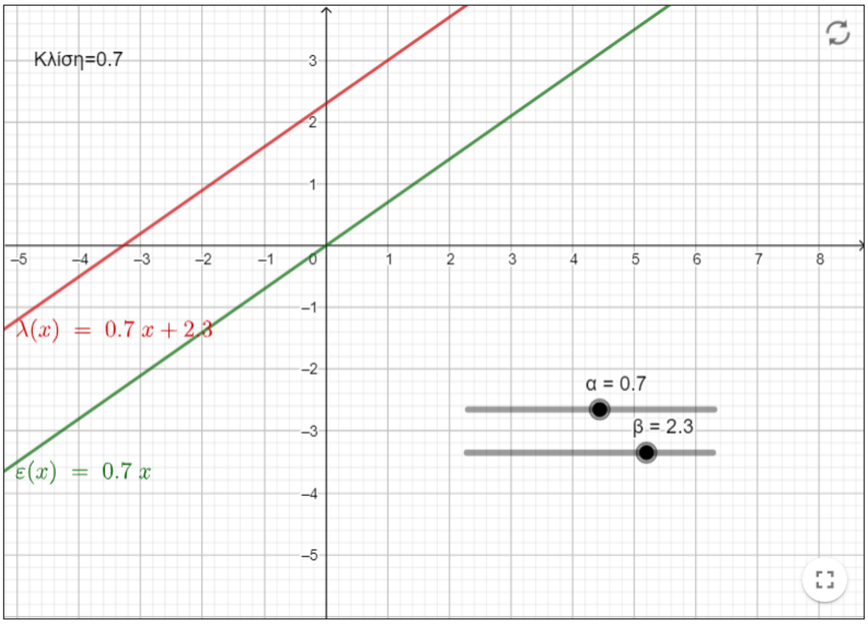
Η εννοιολόγηση της κλίσης ως ένδειξη συμπεριφοράς χρησιμοποιείται συχνά από τους καθηγητές μαθηματικών (Nagle κ.ά., 2013). Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο του GeoGebra book υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες δίνεται έμφαση στο πρόσημο της κλίσης (Εικόνα 6.35) και άλλες στις οποίες δίνεται έμφαση στο μέτρο της σε σχέση με τη μονοτονία. Στην παρακάτω δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να βρουν αν η κλίση είναι θετική, αρνητική, μηδέν ή δεν ορίζεται και έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν τις απαντήσεις τους. Ο έλεγχος και η ανατροφοδότηση γίνεται μέσω scripting του GeoGebra.



Εικόνα 6.35. Ένδειξη συμπεριφοράς

Γραμμική σταθερά

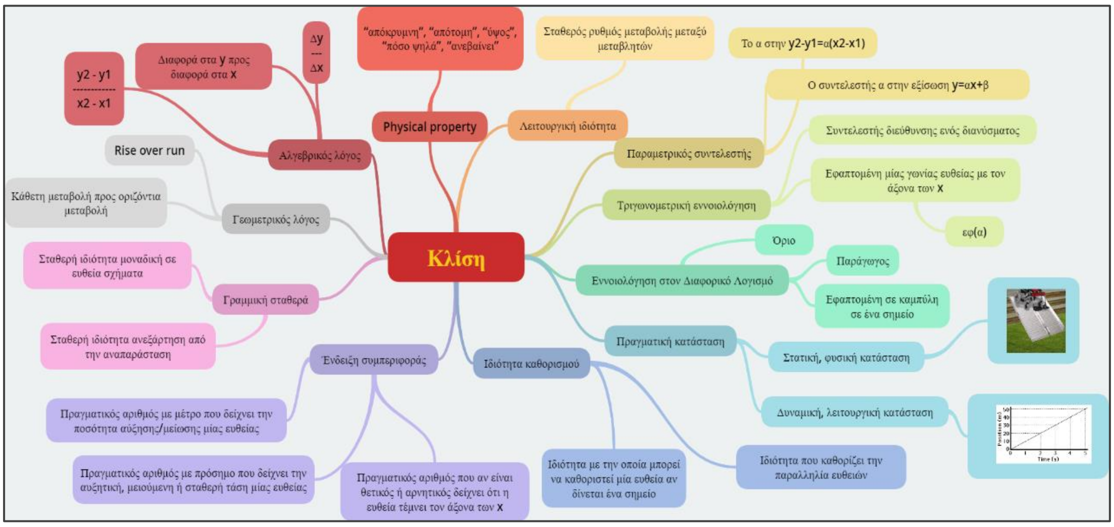
Στην εννοιολόγηση η κλίση θεωρείται μία ιδιότητα η οποία είναι σταθερή, μοναδική για ευθείες και ανεξάρτητη από την αναπαράσταση. Και αυτή συνδέθηκε με την αναλογία και τέθηκε το ερώτημα σε ποια περίπτωση τα ποσά είναι ανάλογα.



Εικόνα 6.36. Γραμμική σταθερά

Εννοιολογικός χάρτης

Το τελευταίο κεφάλαιο του GeoGebra book αποτελεί μία επισκόπηση των εννοιολογήσεων της κλίσης. Σε αυτό παρουσιάζονται οι εννοιολογήσεις της κλίσης σε έναν εννοιολογικό χάρτη ο οποίος έχει δημιουργηθεί στο GoConqr (Εικόνα 6.37). Ο μαθητής μπορεί να δει τον χάρτη να φτιάχνεται σταδιακά.



Εικόνα 6.370. Εννοιολογικός χάρτης για τις διαφορετικές εννοιολογήσεις της κλίσης

6.3 Αποτελέσματα

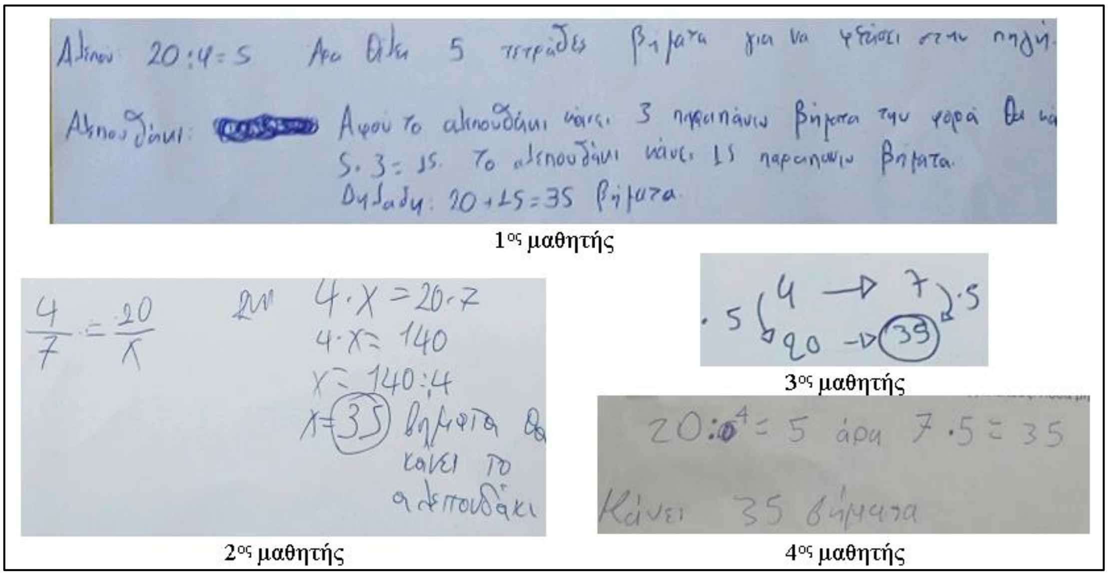
6.3.1 Αλλάζοντας τροχούς

Οι τέσσερεις μαθητές που συμμετείχαν στη δραστηριότητα δεν άφησαν άλυτο κανένα από τα τέσσερα έργα του ερωτηματολογίου. Στο πρώτο έργο όλοι συμπλήρωσαν σωστά τις ισότητες, δείχνοντας ότι μπορούν να χειριστούν ισοδυναμίες κλασμάτων. Οι δύο από τους μαθητές έγραψαν τους αριθμούς στις κενές θέσεις πολλαπλασιάζοντας νοερά με τον ίδιο αριθμό χωρίς να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Ο τρίτος έθεσε *x* στην κενή θέση στην ισότητα 3/4= □/28 και πολλαπλασίασε σταυρωτά τους όρους των κλασμάτων, με αποτέλεσμα να κάνει περισσότερες πράξεις. Ο τέταρτος σημείωσε τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασίασε τον αριθμητή και τον παρανομαστή.

Στο δεύτερο έργο μόνο ο πρώτος μαθητής έγραψε τους λόγους, έκανε ομώνυμα τα δύο κλάσματα και συγκρίνοντάς τα απάντησε σωστά στο ερώτημα ποια σοκολάτα έχει την πιο έντονη γεύση. Ο δεύτερος μαθητής έκανε διαίρεση και παρόλο που βρήκε διαφορά στο αποτέλεσμα στο δεύτερο δεκαδικό απάντησε ότι οι δύο σοκολάτες έχουν την ίδια γεύση. Ο τρίτος μαθητής απάντησε σωστά ότι η δεύτερη σοκολάτα έχει πιο έντονη γεύση, χωρίς όμως να το αιτιολογήσει, και ο τέταρτος ότι έχουν την ίδια γεύση, γιατί και στις δύο ποσότητες προσθέτουμε ένα.

Όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στο τρίτο έργο κυρίως λόγω των αριθμητικών δεδομένων. Δύο μαθητές χρησιμοποίησαν προσθετική στρατηγική επίλυσης του προβλήματος αφαιρώντας την ίδια ποσότητα και από το αλεύρι και από το ελαιόλαδο. Η χρήση προσθετικής στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων αναλογιών αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως ένα από τα χαρακτηριστικά λάθη (De Bock κ.ά., 2015). Οι άλλοι δύο μαθητές χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων αλλά και οι δύο έκαναν λάθος στις πράξεις με αποτέλεσμα να μη βρουν σωστό αποτέλεσμα. Δεν αντιλήφθηκαν ότι το νούμερο στο οποίο κατέληξαν δεν ήταν λογικό στο πλαίσιο του προβλήματος, γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι δεν αντιμετωπίζουν τα προβλήματα μαθηματικών ως ρεαλιστικές καταστάσεις.

Και οι τέσσερεις μαθητές έλυσαν το τέταρτο έργο, χρησιμοποιώντας όμως διαφορετική στρατηγική. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (building-up) από τον πρώτο μαθητή, η μέθοδος των σταυρωτών γινομένων από τον δεύτερο, μία διαισθητική πολλαπλασιαστική μέθοδος από τον τρίτο και αναγωγή στη μονάδα από τον τέταρτο (Εικόνα 6.38).



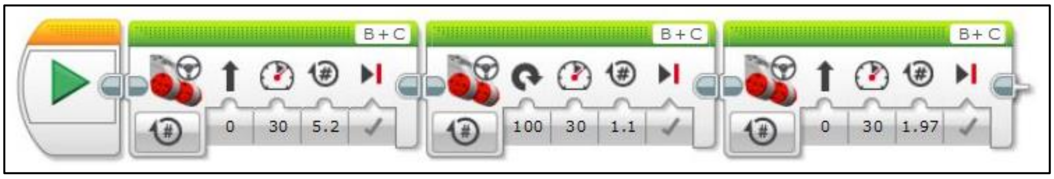
Εικόνα 6.38. Στρατηγικές επίλυσης προβλήματος αναλογιών

Από τις προσεγγίσεις των μαθητών στα έργα αναλογιών φαίνεται ότι δεν έχουν σαφή στρατηγική στην αντιμετώπιση προβλημάτων με αναλογίες. Ο πρώτος και ο τέταρτος μαθητής δείχνουν μια τάση να χρησιμοποιούν προσθετική στρατηγική, ο δεύτερος χρησιμοποιεί με μεγαλύτερη άνεση τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων, ενώ ο τρίτος χρησιμοποιεί πότε τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων και πότε μία διαισθητική προσέγγιση.

Εικόνα 6.39. Η αρχική ρομποτική διάταξη

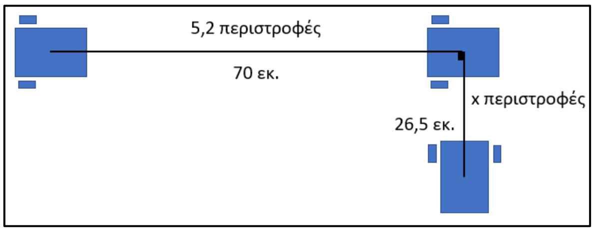
Εικόνα 6.40. Η τελική ρομποτική διάταξη

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές χρησιμοποίησαν μία ρομποτική διάταξη με μικρούς τροχούς διαμέτρου 4,32 εκατοστών (Εικόνα 6.39). Ζητήθηκε από τους μαθητές να προγραμματίσουν το ρομπότ, να προχωρήσει 70 εκατοστά μπροστά, να στρίψει 90ο δεξιά και να προχωρήσει άλλα 26,5 εκατοστά (Εικόνα 6.42). Οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι με τον προγραμματισμό του ρομπότ και υλοποίησαν γρήγορα ένα απλό πρόγραμμα για να το οδηγήσουν να κάνει τη διαδρομή που τους ζητήθηκε (Εικόνα 6.41).

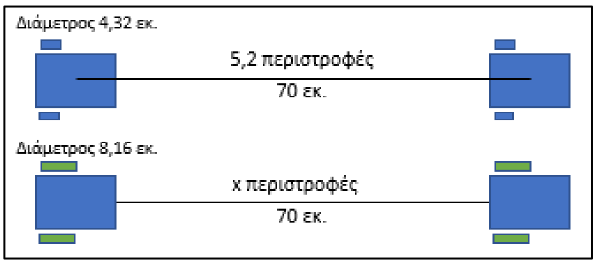


Εικόνα 6.41. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε

Οι μαθητές αφέθηκαν ελεύθεροι να πειραματιστούν δοκιμάζοντας διάφορες τιμές, για να βρουν τον ιδανικό αριθμό περιστροφών των κινητήρων για την κίνηση των 70 εκ. και τη στροφή των 90°. Τους ζητήθηκε όμως στη συνέχεια να υπολογίσουν μαθηματικά τον αριθμό των περιστροφών του κινητήρα για την τελική κίνηση των 26,5 εκατοστών. Αν και αναγνώρισαν ότι ήταν πρόβλημα αναλογιών, από τα σχόλιά τους ήταν φανερό ότι δεν είχαν άνεση στη χρήση μεθόδων επίλυσής του. Ο δεύτερος μαθητής, ο οποίος όπως φάνηκε και από το αρχικό ερωτηματολόγιο, είχε μεγαλύτερη ευχέρεια με τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων, βρήκε πρώτος το αποτέλεσμα. Στην αρχή οι μαθητές προσπαθούσαν να κάνουν τις πράξεις με το χέρι και αντιμετώπιζαν επιπλέον δυσκολίες που τους αποσπούσαν από το ίδιο το πρόβλημα. Στο σημείο αυτό τους επισημάνθηκε ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν υπολογιστή τσέπης. Καθώς τα νούμερα που προέκυψαν είχαν πολλά δεκαδικά ψηφία, συμφωνήθηκε να κάνουν στρογγυλοποίηση στο δεύτερο δεκαδικό. Έτσι κατέληξαν να βρουν τον σωστό αριθμό περιστροφών και να θέσουν τις τιμές στο πρόγραμμα καταφέρνοντας να κάνουν το ρομπότ να προχωρήσει όσο ακριβώς ήθελαν.



Εικόνα 6.42. Η βασική κίνηση του πρώτου ρομπότ



Εικόνα 6.43. Υπολογισμός των περιστροφών για το δεύτερο ρομπότ

Στην επόμενη φάση οι μαθητές άλλαξαν τη ρομποτική διάταξη και χρησιμοποίησαν μεγαλύτερους τροχούς διαμέτρου 8,16 εκατοστών (Εικόνα 6.43). Έπειτα κλήθηκαν να υπολογίσουν μαθηματικά πόσες περιστροφές πρέπει να κάνουν οι κινητήρες, έτσι ώστε να ακολουθήσει το ρομπότ ακριβώς την ίδια διαδρομή. Οι μαθητές άλλαξαν εύκολα τους τροχούς και κατόπιν συζήτησης κατέληξαν ότι έπρεπε να υπολογίσουν την περίμετρο των τροχών. Θυμήθηκαν τον τύπο υπολογισμού της περιμέτρου από τη διάμετρο, αλλά έπρεπε να βρουν πόση ακριβώς είναι η διάμετρος στις δύο περιπτώσεις τροχών. Μετά από προτροπή του προπονητή τους, αποφάσισαν να μετρήσουν και οι τέσσερεις ξεχωριστά τα δύο είδη τροχών και να βρουν τον μέσο όρο των μετρήσεών τους. Οι μαθητές ολοκλήρωσαν αυτή τη φάση με επιτυχία σε σύντομο χρόνο, αλλά οι τιμές τους είχαν αποκλίσεις από την κανονική τιμή της διαμέτρου. Συγκεκριμένα μέτρησαν 4,07 εκατοστά (αντί του σωστού 4,32) τη διάμετρο της μικρής ρόδας και 8,1 εκατοστά (αντί του σωστού 8,16) τη διάμετρο της μεγάλης. Οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν δείχνουν ότι δεν έχουν εξασκηθεί σε πραγματικές μετρήσεις. Και σε αυτό το στάδιο ήταν έντονη η εστίαση σε αριθμητικά δεδομένα τα οποία αποσπούσαν την προσοχή από το πραγματικό πρόβλημα.

Μόλις κατέληξαν στις τιμές των διαμέτρων, υπολόγισαν τις περιμέτρους και ξεκίνησαν να βρίσκουν τις περιστροφές των κινητήρων της νέας ρομποτικής διάταξης, εφαρμόζοντας αναλογία. Μετά από υπολογισμούς κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι πρέπει να θέσουν 10 περιστροφές. Ήταν έτοιμοι να δοκιμάσουν την τιμή που βρήκαν όταν, μετά από ερώτηση του προπονητή τους αν τους φαίνεται λογικό, συνειδητοποίησαν ότι με αυτή την τιμή το ρομπότ θα προχωρήσει πολύ περισσότερο από πριν.

Και οι τέσσερεις μαθητές μετά την πρώτη έκπληξή τους είπαν ότι με μεγαλύτερους τροχούς είναι λογικό να έχουν λιγότερες περιστροφές και αναφέρθηκαν σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στη συνέχεια έπιασαν πάλι χαρτί και μολύβι για να υπολογίσουν τις νέες τιμές. Και σε αυτή την περίπτωση δυσκολεύτηκαν με τα αριθμητικά δεδομένα, αλλά θεώρησαν ότι οι νέοι τροχοί έχουν κατά προσέγγιση διπλάσια περίμετρο από τους πρώτους. Με τον τρόπο αυτό προέκυψαν δεδομένα που μπορούσαν να διαχειριστούν με μεγαλύτερη ευκολία και βρήκαν εύκολα τις περιστροφές για όλη την κίνηση. Την ίδια μέθοδο εφάρμοσαν και για τον υπολογισμό της δεξιάς στροφής 90ο με τους νέους τροχούς.

Στη συζήτηση που ακολούθησε, οι μαθητές ανέφεραν ότι το νέο ρομπότ κινούνταν με αρκετά μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με το προηγούμενο. Υπέθεσαν μάλιστα ότι η νέα ταχύτητα πρέπει να είναι η διπλάσια της προηγούμενης και προσπάθησαν να επεκτείνουν μόνοι τους τη δραστηριότητα θέτοντας άλλες τιμές για να επηρεάσουν την ταχύτητα.

6.3.2 Γεμίζοντας ποτήρια

Το πλαίσιο του γεμίσματος δοχείων μπορεί να προσαρμοστεί στο επίπεδο εννοιολόγησης της συμμεταβολής των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στην ικανότητά τους να επιχειρηματολογούν με βάση τη συμμεταβολή. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εννοιολογική εικόνα της ομαλής συνεχούς μεταβολής. Το πλαίσιο των επιπέδων εννοιολόγησης της συμμεταβολής δεν θεωρείται ότι αποτελείται από διαδοχικά σειριακά επίπεδα, καθώς κάποιες συγκεκριμένες δραστηριότητες μπορούν να ενισχύσουν τη σκέψη των μαθητών σε σχέση με ποσότητες που μεταβάλλονται με έναν ομαλό τρόπο.

<u>Στάδιο 1ο. Ενσωμάτωση – Εστίαση στις ποσότητες που μεταβάλλονται</u>

Στην αρχή οι δύο μαθητές παρακολούθησαν το βίντεο και όντως ξαφνιάστηκαν από το γεγονός ότι το ποτήρι γέμισε ενώ στην αρχή και τα δύο ποτήρια φαινόντουσαν σχεδόν γεμάτα. Οι μαθητές πήραν τρία ποτήρια διαφορετικού σχήματος και προσπάθησαν να περιγράψουν τι συμβαίνει αν ρίξουμε νερό σε κάθε ένα από αυτά. Δόθηκε έμφαση στη λεκτική περιγραφή της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής των ποσοτήτων. Στην αρχή ήταν διστακτικοί και μίλησαν για το ύψος του νερού στο ποτήρι. Μετά από ερωτήσεις εστίασαν στον όγκο του νερού. Ανάλογα με το σχήμα του ποτηριού οι μαθητές περιέγραψαν ότι, καθώς ο όγκος του νερού στο ποτήρι αυξάνεται το ύψος του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, πιο αργά ή πιο γρήγορα. Οι μαθητές μπόρεσαν εύκολα να αποφασίσουν πιο ποτήρι θα γεμίσει πρώτο.

<u>Στάδιο 2ο. Μετρήσεις – Μέτρηση των ποσοτήτων και των μεταβολών τους</u>

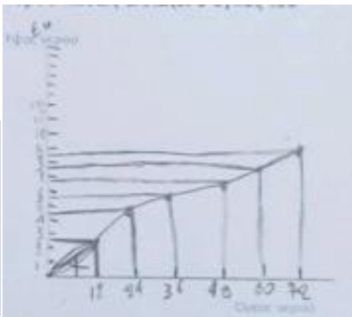
Οι μαθητές, για να μετρήσουν τις ποσότητες που εμπλέκονται στο πρόβλημα, χρησιμοποίησαν μία σύριγγα για να προσθέτουν ίσες ποσότητες νερού σε ένα από τα ποτήρια και κάτι σαν χάρακα τον οποίο έφτιαξαν μόνοι τους από ένα μολύβι στο οποίο σχεδίασαν μονάδες μήκους για να μετρήσουν το ύψος του νερού στο ποτήρι (Εικόνα

6.44). Αποφάσισαν να μετρήσουν το ύψος του νερού σε εκατοστά και τον όγκο σε milliliters (ml), καθώς αυτή ήταν η μονάδα που αναγραφόταν στη σύριγγα. Σημείωσαν τις μετρήσεις τους σε έναν πίνακα (Εικόνα 6.45) και βρήκαν τις διαφορές των τιμών μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων τόσο του όγκου όσο και του ύψους του νερού. Καθώς κάθε φορά έβαζαν την ίδια ποσότητα νερού στο ποτήρι οι διαφορές στις τιμές του όγκου ήταν σταθερές και ίσες με 12 ml. Οι διαφορές στο ύψος άλλαζαν ανάλογα με το πόσο φαρδύ ή στενό ήταν το ποτήρι. Στα σημεία που το ποτήρι είναι πιο στενό, η διαφορά των διαδοχικών τιμών του ύψους είναι μεγαλύτερη.

Πριν την τελευταία μέτρηση, οι μαθητές ρωτήθηκαν ποια θα είναι η τιμή της και ποια η διαφορά με την προηγούμενη κατά τη δική τους εκτίμηση. Μετά από λίγη σκέψη πρόβλεψαν με αρκετή ακρίβεια τις τιμές. Στη συνέχεια οι μαθητές σχεδίασαν τη γραφική παράσταση του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο του στο ποτήρι, σύμφωνα με τις τιμές του πίνακα (Εικόνα 6.46).

Εικόνα 6.44. Μετρήσεις

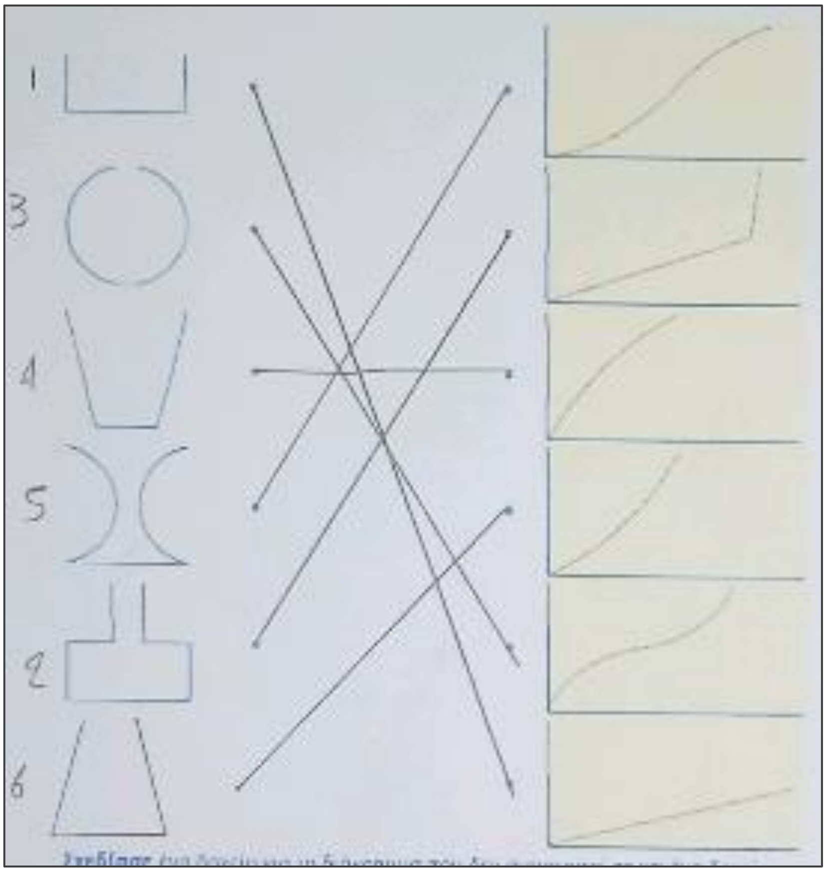
Εικόνα 6.45. Πίνακας τιμών



Εικόνα 6.46. Γραφική παράσταση

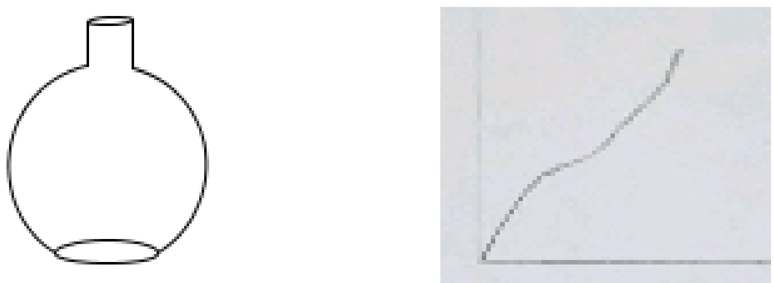
<u>Στάδιο 3ο. Αναπαραστάσεις – Συντονισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων</u>

Οι δύο μαθητές βρήκαν εύκολα την αντιστοίχιση των πέντε δοχείων με το διάγραμμα ύψους και όγκου νερού, και δικαιολόγησαν τις επιλογές τους σωστά και λεπτομερώς, περιγράφοντας πως μεταβάλλεται το ύψος σε κάθε δοχείο. Συσχέτισαν την πιο «απότομη» γραμμή με το πιο στενό μέρος του δοχείου στο οποίο το ύψος του νερού αυξάνεται πιο γρήγορα.



Εικόνα 6.47. Αντιστοίχιση δοχείων με γραφικές παραστάσεις

Για την τέταρτη γραφική παράσταση η οποία δεν αντιστοιχιζόταν σε κανένα δοχείο σχεδίασαν με ευκολία το κωνικό δοχείο στον αριθμό 6 (Εικόνα 6.47). Μετά από αυτό είχαν την εικόνα αναφοράς ώστε να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται το ύψος του νερού σε σχέση με τον όγκο του καθώς ρίχνουμε νερό σε ένα σφαιρικό δοχείο. Επιπλέον, σχεδίασαν τη γραφική παράσταση ύψους νερού – όγκου νερού για το δοχείο αυτό (Εικόνα 6.48) και επιχειρηματολόγησαν σχετικά με τον τρόπο που συμμεταβάλλονται οι δύο ποσότητες.



Εικόνα 6.48. Σφαιρικό δοχείο και γραφική παράσταση που σχεδίασαν τα παιδιά της ομάδας

6.3.3 ΠιΤανικός

Η πιλοτική εφαρμογή της δραστηριότητας αυτής παρέχει ενδείξεις ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορα επίπεδα εκπαίδευσης με διαφορετικό σκοπό. Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ενισχύει τη δυνατότητα συλλογισμού και έκφρασης με βάση τη συμμεταβολή και παρέχει ευκαιρίες για περιγραφή φαινομένων με μαθηματικούς όρους (Avgerinos & Remoundou, 2018α).

Οι φοιτητές αφιέρωσαν αρκετό χρόνο στο φύλλο εργασίας προσπαθώντας να επιλύσουν τα έργα με υπολογισμούς. Απάντησαν τα περισσότερα έργα, αλλά εστίασαν περισσότερο στους υπολογισμούς και όχι στις μεταβολές των ποσοτήτων και στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Προσπαθούσαν να αντιμετωπίσουν τα έργα με διαδιακασιακό και αλγοριθμικό τρόπο.

Ο χρόνος που αφιέρωσαν στο φύλλο εργασίας, είχε ως αποτέλεσμα όταν έπαιξαν το παιχνίδι να έχουν μία ικανοποιητική εικόνα του πλαισίου. Τα μέλη των δύο πρώτων ομάδων ένιωθαν αυτοπεποίθηση για την κατανόησή τους και τις απαντήσεις τους και ασχολήθηκαν με το παιχνίδι λίγο επιφανειακά. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μην κάνουν πολλές αλλαγές στις απαντήσεις που είχαν δώσει στο φύλλο εργασίας παρόλο που είχαν λάθη.

Τα μέλη της τρίτης ομάδας αντιμετώπισαν περισσότερες δυσκολίες. Στην αρχή δεν απάντησαν όλα τα ερωτήματα και ακόμα και μετά το παιχνίδι ο συλλογισμός τους εστίαζε στις τιμές των ποσοτήτων και όχι στις μεταβολές.

Η ομάδα των μαθητών χρειάστηκε περισσότερο χρόνο πειραματισμού με το παιχνίδι, καθώς δεν ήταν εξοικειωμένοι με γραφικές παραστάσεις. Συνολικά, έπαιξαν το παιχνίδια περισσότερες φορές και με περισσότερα σενάρια από τους φοιτητές.

Όλοι οι συμμετέχοντες κατάφεραν να αναγνωρίσουν τις ποσότητες που εμπλέκονταν στο πρόβλημα στο πρώτο βήμα του παιχνιδιού. Οι περισσότεροι ερμήνευσαν εύκολα τη γραφική παράσταση. Οι μαθητές και οι φοιτητές αντιλήφθηκαν ότι η τιμή στον άξονα των y αντιστοιχεί στον όγκο νερού στο πλοίο και αλλάζει όσο αλλάζει η τιμή στον άξονα των x, δηλαδή ο χρόνος. Οι περισσότεροι είπαν ότι «Όσο μπαίνει νερό, αυξάνει ο όγκος». Παρόλα αυτά δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τη γραφική παράσταση στην περίπτωση που είχε ενεργοποιηθεί η αντλία, καθώς έδειχνε τον συνολικό ρυθμό μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο.

Στην περίπτωση του μηδενικού ρυθμού μεταβολής, όλοι οι συμμετέχοντες δήλωσαν με σιγουριά ότι ο όγκος του νερού στο πλοίο θα παραμείνει ο ίδιος. Στην περίπτωση της τη γραμμικής συνάρτησης, οι ερωτώμενοι τη συσχέτισαν με επιτυχία με τον σταθερό ρυθμό μεταβολής είτε θετικό είτε αρνητικό.

Αντιμετώπισαν όμως δυσκολίες στην ερμηνεία των μεταβλητών ρυθμών μεταβολής. Οι φοιτητές που είχαν μαθηματικό υπόβαθρο άλλαξαν κάποιες από τις απαντήσεις τους όταν έπαιξαν το παιχνίδι και τα μέλη της τρίτης ομάδας συμπλήρωσαν κάποιες απαντήσεις που είχαν αφήσει κενές. Οι μαθητές βρήκαν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβολών στον ρυθμό μεταβολής και στις μεταβολές του όγκου του νερού και απάντησαν στις ερωτήσεις.

Τα αποτελέσματα της κατανόησης των διαφόρων τιμών του ρυθμού μεταβολής φαίνονται στον πίνακα 6.6, όπου οι πιο εύκολες περιπτώσεις είναι με πιο σκούρο χρώμα και οι πιο απαιτητικές με πιο ανοιχτό.

Πίνακας 6.6. Κατανόηση των τιμών του ρυθμού μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής		
Σταθερός	Θετικός	
	Μηδέν	
	Αρνητικός	
Μεταβλητός	Αυξανόμενος	Θετικός
		Αρνητικός
	Μειούμενος	Θετικός
		Αρνητικός
	Μηδέν	

Στην ερώτηση να υπολογιστεί ο μέγιστος ρυθμός με τον οποίο μπορεί να εισέρχεται νερό στο πλοίο ώστε να μη βουλιάξει, οι φοιτητές των δύο πρώτων ομάδων υπολόγισαν το αποτέλεσμα με διαίρεση. Η τρίτη ομάδα δεν κατάφερε να υπολογίσει τη μέγιστη τιμή. Παίζοντας το παιχνίδι και πειραματιζόμενοι με διάφορες τιμές, κατέληξαν σε μία προσεγγιστική λύση. Μετά από αυτό συζήτησαν αν θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν διαίρεση για να το υπολογίσουν. Προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο των τριών αλλά θεώρησαν τον ρυθμό και τον όγκο του νερού ως ανάλογες ποσότητες.

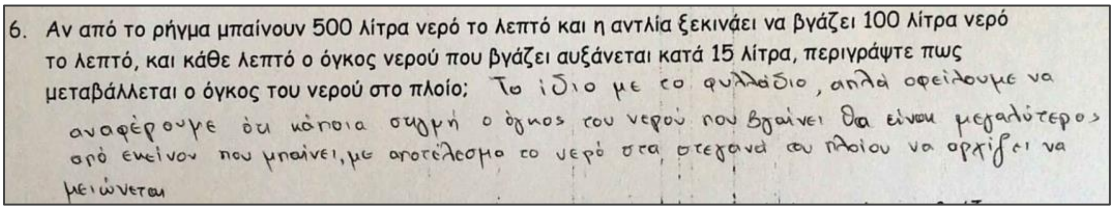
Οι μαθητές πειραματίστηκαν με διάφορες τιμές για να απαντήσουν το συγκεκριμένο έργο. Ένας από αυτούς παρατήρησε ότι ο όγκος του νερού στο πλοίο αυξάνεται κατά 101, που ήταν η τιμή που είχαν ορίσει για τον ρυθμό εισροής νερού στο πλοίο. Μετά από αυτό κατέληξαν σε μία στρογγυλοποιημένη απάντηση στο έργο.

Το παιχνίδι φάνηκε να ενισχύει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής. Οι φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει μάθημα Διαφορικού Λογισμού κατάφεραν να μεταβούν από το πλαίσιο του παιχνιδιού στο πλαίσιο του Διαφορικού Λογισμού. Παρόλο που ο όρος ρυθμός δεν χρησιμοποιήθηκε σε καμία από τις ερωτήσεις, κάποιοι από τους φοιτητές τον χρησιμοποίησαν στις απαντήσεις τους.

Στο τέλος της δραστηριότητας, οι φοιτητές της πρώτης ομάδας διαπίστωσαν με κάποια έκπληξη ότι η ποσότητα που αναπαραστάθηκε από την κόκκινη γραμμή εξέφραζε τον ρυθμό μεταβολής και άρα την παράγωγο του όγκου που είχε σχεδιαστεί με μπλε. Στο σημείο αυτό ανακάλεσαν τις γνώσεις τους για τα ακρότατα, συνειδητοποιώντας τη φυσική τους ερμηνεία ως μέγιστου και ελάχιστου όγκου του νερού στο πλοίο. Ο ένας φοιτητής συνέδεσε και τα σημεία καμπής, τα οποία εντόπισε στη γραφική παράσταση και τα ερμήνευσε στο πλαίσιο της κατάστασης.

Στο τρίτο βήμα με την αντλία αυξανόμενου ρυθμού παρατηρήθηκε μία ενδιαφέρουσα αλλαγή στα μέλη της δεύτερης ομάδας. Ενώ στο φύλλο εργασίας είχαν απαντήσει ότι ο όγκος του νερού αυξάνεται με μειούμενο ρυθμό, μετά την ενασχόλησή τους με το παιχνίδι παρατήρησαν ότι μετά από λίγη ώρα ο όγκος του νερού αρχίζει να μειώνεται. Σύμφωνα με την παρατήρησή τους άλλαξαν την απάντηση τους στο φύλλο εργασίας. Αυτό αποτελεί ένα από τα σημαντικά αποτελέσματα της εφαρμογής της δραστηριότητας, καθώς μεταξύ των στόχων ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ένας μειούμενος ρυθμός σημαίνει ότι ο όγκος θα φτάσεις σε μία μέγιστη τιμή και στη συνέχεια θα αρχίσει να μειώνεται.

6. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 500 λίτρα νερό το λεπτό και η αντλία ξεκινάει να βγάζει 100 λίτρα νερό το λεπτό, και κάθε λεπτό ο όγκος νερού που βγάζει αυξάνεται κατά 15 λίτρα, περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στο πλοίο; Με τη χρήση της συγκεκριμένης αντλίας, ο όγκος του νερού στο πλοίο θα αυξάνεται με ολοένα και πιο αργό ρυθμό, μιας και στο πρώτο λεπτό η αντλία βγάζει 100 l νερού, στο δεύτερο λεπτό 100+15 l νερού, στο τρίτο 100+15l+15l νερού και ούτω καθεξής.



6. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 500 λίτρα νερό το λεπτό και η αντλία ξεκινάει να βγάζει 100 λίτρα νερό το λεπτό, και κάθε λεπτό ο όγκος νερού που βγάζει αυξάνεται κατά 15 λίτρα, περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στο πλοίο; Το ίδιο με το φυλλάδιο, απλά οφείλουμε να αναφέρουμε ότι κάποια στιγμή ο όγκος του νερού που βγαίνει θα είναι μεγαλύτερος από εκείνον που μπαίνει, με αποτέλεσμα το νερό στα στεγανά του πλοίου να αρχίζει να μειώνεται

Εικόνα 6.49. Απάντηση στην ερώτηση 6 πριν και μετά το λογισμικό

Όπως αναφέρθηκε οι γραφικές παραστάσεις δεν αποτελούν μέρος της διδακτέας ύλης της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Έτσι οι μαθητές, οι οποίοι δεν ήταν εξοικειωμένοι με γραφικές παραστάσεις, τις αντιμετώπιζαν ως μία εικόνα. Από την άλλη αυτή η άποψη τους έκανε να βλέπουν περισσότερες λεπτομέρειες σε αυτές. Για παράδειγμα ένα από τα παιδιά παρατήρησε ότι το γράφημα του ρυθμού που εξέρχεται το νερό από το ρήγμα και το γράφημα του ρυθμού μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο ήταν συμμετρικά. Σε ένα από τα έργα του φύλλου εργασίας, η δεύτερη αντλία ρυθμιζόταν έτσι ώστε να βγάζει περισσότερο νερό από αυτό το οποίο εισερχόταν από το ρήγμα κι έτσι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο ήταν αρνητικός. Οι μαθητές αναρωτήθηκαν γιατί η γραφική παράσταση πάει κάτω από τον άξονα των *x* και προσπάθησαν να το ερμηνεύσουν.

Όσον αφορά στις στάσεις των φοιτητών προς το παιχνίδι ήταν γενικά θετικές. Οι φοιτητές της ομάδας Α δήλωσαν ότι η δραστηριότητα ήταν εύκολη και ενδιαφέρουσα. Ακόμα ότι θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε παιδιά πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ακόμα και χωρίς αλλαγές.

Η ομάδα Β θεώρησε τη δραστηριότητα αρκετά εύκολη και ότι του βοήθησε να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ του πόσο γρήγορα εισέρχεται νερό στο πλοίο και της μεταβολής του όγκου του νερού στο πλοίο. Και αυτοί συμφώνησαν ότι η δραστηριότητα μπορεί να απευθυνθεί σε παιδιά δημοτικού χωρίς αλλαγές.

Τα μέλη της τρίτης ομάδας έκριναν ότι η δραστηριότητα ήταν μέτριας δυσκολίας αλλά ενδιαφέρουσα. Κατά την άποψή τους θα μπορούσε να εφαρμογστεί σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αλλά με κάποιες αλλαγές ειδικά στο φύλλο εργασίας.

Οι μαθητές έπαιξαν το παιχνίδι περισσότερες φορές και με περισσότερες τιμές. Σε κάποιες από αυτές προσπαθούσαν να σώσουν το πλοίο και σε άλλες να το βουλιάξουν. Παρόλο που ως παιχνίδι δεν τους φάνηκε και τόσο ενδιαφέρον, είπαν ότι θα τους άρεσε να έκαναν τέτοιες δραστηριότητες στην τάξη.

6.4 Συζήτηση

6.4.1 Αλλάζοντας τροχούς

Στην παρούσα παρέμβαση, οι μαθητές ενεπλάκησαν σε ένα εκπαιδευτικό σενάριο που συνδύαζε τη ρομποτική με τα μαθηματικά. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα συνεργάστηκαν και κατάφεραν να επιλύσουν τα προβλήματα που τους τέθηκαν. Παρόλα αυτά αντιμετώπισαν κάποιες δυσκολίες ιδιαίτερα στο μαθηματικό μέρος του σεναρίου.

Παρατηρήθηκαν παρανοήσεις σε σχέση με τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και επιστρατεύτηκαν ποικίλες στρατηγικές για την επίλυση τέτοιου τύπου προβλημάτων. Αν και οι μαθητές είχαν διδαχτεί ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά και το επίπεδό τους στα σχολικά μαθηματικά θεωρείται άνω του μετρίου, δυσκολεύτηκαν να ανακαλέσουν τον τρόπο που έπρεπε να εργαστούν για να λύσουν τις αναλογίες. Ένας από τους μαθητές φάνηκε ότι ήταν περισσότερο εξοικειωμένος με τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων, ενώ οι τρεις άλλοι με την αναγωγή στη μονάδα. Η χρήση της αναγωγής στη μονάδα παρόλο που τους βοήθησε όταν τα νούμερα ήταν εύκολα, όπως στα έργα του ερωτηματολογίου, τους δυσκόλεψε στο πραγματικό πρόβλημα που τα νούμερα ήταν πιο περίπλοκα. Ο μαθητής που προτιμούσε τη μέθοδο των σταυρωτών γινομένων κατάφερε πιο γρήγορα να λύσει το πρόβλημα των ανάλογων ποσών ακόμα και με πιο περίπλοκα αριθμητικά δεδομένα.

Η διδασκαλία των αναλογιών στην Α΄ Γυμνασίου και η σύνδεση με την εξίσωση που περιγράφει ανάλογα ποσά αλλά και με ρεαλιστικά προβλήματα θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αφομοιώσουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση και να μπορούν να τις εφαρμόσουν στη συνέχεια.

Ένα ακόμα σημείο που πρέπει να αναφερθεί είναι η τάση των μαθητών να επικεντρώνονται στα αριθμητικά δεδομένα και όχι στο πρόβλημα. Είναι ενδεικτικό ότι, όταν έκαναν τους υπολογισμούς με τον υπολογιστή τσέπης, διάβαζαν όλα τα δεκαδικά που εμφανίζονταν στην οθόνη και μόνο μετά από προτροπή του προπονητή τους στρογγυλοποίησαν στο δεύτερο δεκαδικό. Ακόμα, στην ερώτηση πώς υπολογίζεται η περίμετρος του κύκλου, ένας από τους μαθητές απάντησε «δεν θυμάμαι ακριβώς όλη τη διαδικασία» εννοώντας τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού π. Θεωρούμε ότι η εστίαση σε αριθμητικά δεδομένα μπορεί να αποτελέσει ανασταλτικό παράγοντα κατά τη μελέτη μαθηματικών εννοιών μέσα από πραγματικές καταστάσεις. Το πρόβλημα αυτό όμως μπορεί να λυθεί με την εμπειρία και την επαναλαμβανόμενη ενασχόληση με ρεαλιστικά προβλήματα.

Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η στιγμή που οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι εφαρμόζοντας αναλογία ενώ τα ποσά δεν ήταν ανάλογα κατέληξαν σε ένα παράλογο αποτέλεσμα. Και από τους τέσσερεις μαθητές ακούστηκε ένα επιφώνημα έκπληξης και αναγνώρισης του λάθους στο συλλογισμό τους και του τρόπου που έπρεπε να εργαστούν. Το πρόβλημα, από ασαφές και θεωρητικό που ήταν, συνδέθηκε πλέον με μία πραγματική κατάσταση. Εκεί έγκειται όλη η αξία του συνδυασμού των μαθηματικών με τη ρομποτική σε ένα αυθεντικό πλαίσιο.

Οι μαθητές μέσα από τα σχόλια στη συζήτηση που ακολούθησε έδειξαν ότι συνειδητοποίησαν το βοηθητικό ρόλο των μαθηματικών στην επίλυση ενός προβλήματος ρομποτικής. Αναφέρθηκαν στη γνωστή θεώρηση ότι «τα μαθηματικά είναι η βάση για τα πάντα». Παρόλα αυτά δεν πείστηκαν ότι είναι προτιμότερο να υπολογίζουν αντί να μαντεύουν τις τιμές, πιθανόν λόγω των δυσκολιών που αντιμετώπισαν στις πράξεις. Πρέπει να τονιστεί ότι μέσω αυτής της δραστηριότητας ενισχύθηκε η γνώση τους για τη ρομποτική περισσότερο από τα μαθηματικά. Συνδύασαν τη διάμετρο των τροχών με το πόσο πολύ και πόσο γρήγορα προχωράει το ρομπότ, ενώ συγχρόνως οι τιμές που έβαζαν στο πρόγραμμα για τις περιστροφές των κινητήρων απέκτησαν ένα συγκεκριμένο νόημα και δεν ήταν πια τυχαίες.

Το σενάριο που παρουσιάστηκε θα μπορούσε να συνεχιστεί σε επόμενη συνάντηση της ομάδας έτσι ώστε να εμπεδωθούν οι έννοιες. Μία πιθανή προέκταση θα μπορούσε να είναι ο συνδυασμός της διαμέτρου των τροχών με την απόσταση που διανύει το ρομπότ και με την ταχύτητά του. Μία επιπλέον δυνατότητα είναι να μοντελοποιηθούν οι σχέσεις των ποσοτήτων που μελετήθηκαν με εξισώσεις και να μελετηθεί η γραφική τους παράσταση.

Όσον αφορά στους περιορισμούς της διδακτικής παρέμβασης θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο χρόνος ήταν αρκετά περιορισμένος. Ακόμα, στο ρομποτικό σκέλος του σεναρίου δεν χρησιμοποιήθηκε κάποιο φύλλο εργασίας. Αυτό, αν και μπορεί να θεωρηθεί περιορισμός της παρέμβασης, ήταν συνειδητή επιλογή για δύο λόγους. Πρώτον, η ομάδα των μαθητών ήταν εξοικειωμένη να λειτουργεί αυτόνομα χωρίς καθοδήγηση, λόγω μεγάλης εμπειρίας στη ρομποτική. Επιπλέον, κρίθηκε σκόπιμο να παρατηρηθούν οι αυθόρμητες σκέψεις και αντιδράσεις τους.

Αν και η εκπαιδευτική ρομποτική είναι διαδεδομένη τα τελευταία χρόνια, δεν αποτελεί μέρος της τυπικής εκπαίδευσης. Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με ρομποτική δεν είναι ανάμεσα στις βασικές επιλογές των εκπαιδευτικών λόγω των ποικίλων πρακτικών προβλημάτων και της έλλειψης ισχυρών ενδείξεων ότι τα αποτελέσματά της είναι καλύτερα από κάποιον άλλον τρόπο διδασκαλίας. Από την άλλη, οι μαθηματικές έννοιες, και ιδιαίτερα αυτές που δυσκολεύουν τους μαθητές, όπως ο αναλογικός συλλογισμός, θα πρέπει να διδάσκονται με κάθε ευκαιρία, να συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις και ο μαθητής να έχει ενεργό ρόλο στη μάθηση. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε ότι η ενασχόληση με τη ρομποτική προσφέρει διδακτικές ευκαιρίες που μπορούν να αξιοποιηθούν.

6.4.2 Γεμίζοντας ποτήρια

Οι μαθητές που συμμετείχαν στη δραστηριότητα είχαν μία διαισθητική εικόνα του πλαισίου η οποία ενισχύθηκε από την αρχική βιωματική, πειραματική διαδικασία. Φάνηκε ότι κατάφεραν να φανταστούν τις αλλαγές στις ποσότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις. Μέσω της δραστηριότητας αυτής εστίασαν στις ποσότητες που μεταβάλλονται, αναγνώρισαν ότι είναι μετρήσιμες και τις μέτρησαν.

Σε κάποια σημεία τα παιδιά προτιμούσαν να μιλάνε για το ύψος του νερού σε σχέση με τον χρόνο, γεγονός το οποίο δείχνει συλλογισμό με βάση τη μεταβολή. Παρόλα αυτά, η γλώσσα που χρησιμοποίησαν σε πολλά σημεία αποτελεί ένδειξη συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή. Οι απαντήσεις τους στις περισσότερες από τις ερωτήσεις δείχνουν ότι αντιστοιχούν στον γενικό συντονισμό τιμών (gross coordination level of covariational reasoning), καθώς φάνηκε να έχουν μία εικόνα των τιμών των ποσοτήτων να μεταβάλλονται ταυτόχρονα και μία πιο χαλαρή σχέση μεταξύ των μεταβολών των ποσοτήτων (Thompson & Carlson, 2017). Ο ένας από τους μαθητές χρησιμοποίησε τμήματα (chunks) στην περιγραφή της αύξησης του ύψους και έκανε σημάδια σε μία εικόνα του ποτηριού.

Οι μαθητές κατάφεραν να περιγράψουν τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο. Χρησιμοποίησαν εκφράσεις όπως «αυξάνεται σταθερά», «πιο αργά», «πιο γρήγορα», «σταθερά πιο αργά». Σύγκριναν τους ρυθμούς μεταβολής σε διαφορετικά σημεία των δοχείων. Ακόμα, κατάφεραν να αντιστοιχίσουν με επιτυχία και ευκολία τα δοχεία στα γραφήματα ύψους-όγκου, αλλά και να σχεδιάσουν ένα δοχείο που να αντιστοιχεί σε δοσμένο γράφημα και ένα γράφημα για δοσμένο δοχείο. Πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση δεν διδάσκονται λεπτομερώς γραφικές παραστάσεις. Σε ερώτηση σε έναν από τους μαθητές σε ποια ποσότητα εστιάζει, απάντησε «Σε όλες, αλλάζουν μαζί.».

Η παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε αποτελεί ένδειξη ότι το πρόβλημα του γεμίσματος δοχείων αποτελεί ένα πρόσφορο πλαίσιο για την οπτικοποίηση ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα και μπορεί να αποβεί αποτελεσματικό στην ενίσχυση του συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή. Καταρχάς, είναι μία κατάσταση για την οποία οι μαθητές έχουν μία διαισθητική εικόνα και μπορούν να την οπτικοποιήσουν στο μυαλό τους. Η χρήση πραγματικών δοχείων, ποτηριών ή μπουκαλιών αποτελεί ένα παιγνιώδες και ρεαλιστικό περιβάλλον, στο οποίο οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν, να μετρήσουν τις ποσότητες που εμπλέκονται όπως το ύψος και τον όγκο, και να επιχειρηματολογήσουν σε σχέση με τις μεταβολές στις ποσότητες αυτές.

Το συγκεκριμένο πλαίσιο προσφέρει ευκαιρίες για συζήτηση για έννοιες όπως οι ποσότητες, η μεταβολή, η συμμεταβολή και ο ρυθμός μεταβολής, χωρίς να είναι απαραίτητη η χρήση συμβόλων και προχωρημένων μαθηματικών του Διαφορικού Λογισμού. Η σύνδεση με τη γραφική αναπαράσταση θεωρείται κομβικής σημασίας και βοηθάει τους μαθητές να συνδέσουν τις ιδιότητες του γραφήματος με ένα φυσικό φαινόμενο που κατανοούν.

Παράλληλα με τη χρήση του στην ενδυνάμωση του συλλογισμού των μαθητών για τον ρυθμό μεταβολής ποσοτήτων, το πλαίσιο αυτό μπορεί να ενισχύσει την επιχειρηματολογία τους για δυναμικά φαινόμενα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές ερμηνεύουν το πρόβλημα λεκτικά και αποσαφηνίζουν εκφράσεις που θα χρησιμοποιήσουν αργότερα κατά τη μελέτη εννοιών του Διαφορικού Λογισμού όπως οι συναρτήσεις και ο παράγωγοι. Μία καλή προσομοίωση του προβλήματος θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν το πλαίσιο, ιδιαίτερα όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην οπτικοποίησή του.

Το πλαίσιο αυτό μπορεί να επεκταθεί με την εστίαση σε άλλες μετρήσιμες ποσότητες. Οι μαθητές θα μπορούσαν να διερευνήσουν διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος, όπως στον όγκο του νερού στο δοχείο ως συνάρτηση του ύψους. Η αντιστροφή της σχέσης μεταξύ των ποσοτήτων, μπορεί να ενισχύσει την ικανότητα των μαθητών να σκέφτονται με βάση τη συμμεταβολή. Μία άλλη παραλλαγή του προβλήματος για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση θα μπορούσε να είναι η εστίαση στο ύψος σε σχέση με τη διάμετρο του δοχείου στο σημείο της επιφάνειας του νερού. Παρόλο που ο διδακτικός χρόνος συνήθως δεν επαρκεί για την εισαγωγή στο βασικό πρόγραμμα σπουδών παρόμοιων δραστηριοτήτων, οι ευκαιρίες για πειραματισμό των μαθητών με ρεαλιστικές καταστάσεις θα πρέπει να αξιοποιούνται.

6.4.3 ΠιΤανικός

Στη δοκιμαστική εφαρμογή της δραστηριότητας, συμμετείχαν τέσσερεις ομάδες φοιτητών και μαθητών και αξιολογήθηκε η επίδρασή του στην κατανόηση των όψεων του ρυθμού μεταβολής. Η δραστηριότητα παρέχει την ευκαιρία στους φοιτητές να οπτικοποιήσουν όψεις του ρυθμού μεταβολής σε ένα πραγματικό πρόβλημα, ενώ συγχρόνως δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές του δημοτικού σχολείου να μοντελοποιήσουν και να κατανοήσουν ένα πρόβλημα Διαφορικού Λογισμού χωρίς την τυπική διδασκαλία των εννοιών.

Οι φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα Διαφορικού Λογισμού, κατάφεραν να συνδέσουν την πρότερη γνώση τους με το συγκεκριμένο πρόβλημα και να εφαρμόσουν τη θεωρία σε μία ρεαλιστική κατάσταση. Μέσα από ένα τέτοιο παιχνίδι μπορούν να οπτικοποιήσουν τις διαφορετικές τιμές του ρυθμού μεταβολής και τη σημασία των ακροτάτων και των σημείων καμπής.

Οι μαθητές μπόρεσαν να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που συμπεριλαμβάνονται στη δραστηριότητα, ακόμα κι αν δεν είχαν το θεωρικό υπόβαθρο των εννοιών. Η εφαρμογή της δραστηριότητας αυτής αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές μπορούν να διαμορφώσουν μία διαισθητική εικόνα του ρυθμού μεταβολής, η οποία θα αποτελεί εννοιολογική εικόνα και θα ανακαλείται στη μελέτη πιο σύνθετων εννοιών των μαθηματικών. Επιπλέον, μέσα από τη δραστηριότητα αυτή είχαν την ευκαιρία να συλλογιστούν και να εκφραστούν σχετικά με τη μεταβολή και τη συμμεταβολή.

Το επίπεδο συμμεταβολής για τους περισσότερους από τους συμμετέχοντες αντιστοιχεί στον γενικό συντονισμό τιμών ποσοτήτων (gross coordination of values), καθώς φάνηκε να διαμορφώνουν μία γενική εικόνα των τιμών των μεταβλητών να μεταβάλλονται μαζί, αλλά η σχέση μεταξύ των αλλαγών δεν ήταν πολλαπλασιαστική (Thompson & Carlson, 2017).

Οι συμμετέχοντες στο τέλος αποτίμησαν τη συμμετοχή τους στη δραστηριότητα θετικά, αναφέροντας ότι η κατανόηση του ρυθμού μεταβολής ενισχύθηκε με την ολοκλήρωσή της. Από κάποιους έγιναν χρήσιμες παρατηρήσεις σχετικά με την πλοκή και τα γραφικά, οι οποίες συντέλεσαν στη βελτίωση της εφαρμογής. Μία από τις αλλαγές που προτάθηκαν από τους συμμετέχοντες και υλοποιήθηκε στη συνέχεια ήταν να υπάρχει η δυνατότητα να διακόπτεται η ροή, να αλλάζουν οι τιμές και να συνεχίζεται. Με τον τρόπο αυτό, μπορεί ο μαθητής να βλέπει κατευθείαν το αποτέλεσμα των αλλαγών που πραγματοποιεί.

Οι μαθητές του δημοτικού που συμμετείχαν στη δραστηριότητα χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς δεν είχαν διδαχτεί την ερμηνεία της γραφικής παράστασης, τον συμβολισμό των μεταβλητών και δεν είχαν εμπειρία από προβλήματα με τιμές που μεταβάλλονται.

Η δραστηριότητα εφαρμόστηκε σε μικρές ομάδες ως μελέτη περίπτωσης. Το παιχνίδι φαίνεται να έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί σε διάφορα εκπαιδευτικά επίπεδα με διαφορετικούς μαθησιακούς στόχους. Αν και μπορεί να ήταν χρήσιμο να αναπτυχθούν διαφορετικές εκδόσεις του παιχνιδιού ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών, η ίδια έκδοση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί συνοδευόμενη από διαφορετικό φύλλο εργασίας για την επίτευξη των στόχων του εκπαιδευτικού.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να τροποποιηθεί σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της δοκιμαστικής της εφαρμογής. Θα μπορούσε να επεκταθεί και να εφαρμοστεί σε ένα μάθημα με περισσότερους συμμετέχοντες. Ακόμα, θα μπορούσε να είναι μέρος μίας σειράς δραστηριοτήτων και να έπεται δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της κίνησης. Έτσι, θα γινόταν η αναγνώριση και ο συσχετισμός των χαρακτηριστικών του ρυθμού μεταβολής και η σχέση του με τη συνάρτηση. Η μελέτη του ρυθμού μεταβολής σε διάφορα πλαίσια θα μπορούσε να ενισχύσει την εννοιολογική κατανόησή του και τη διαμόρφωση μίας συνεκτικής εικόνας για αυτόν.

6.4.4 Βασικά χαρακτηριστικά δραστηριοτήτων

Ο Orton (1983) υποστηρίζει ότι τα θεμέλια του λογισμού θα πρέπει να επαναπροσδιορίζονται σε διάφορες φάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών. Μια πρώτη προσέγγιση μπορεί να είναι άτυπη και βασισμένη σε αριθμητικές και γραφικές παρατηρήσεις με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή ακόμα και πριν την ηλικία των 16. Στη συνέχεια οι μαθητές που θα συνεχίσουν με τη μελέτη μαθηματικών μπορούν να ξαναδούν τα αποτελέσματα που είχαν εξάγει με πιο αφηρημένο τρόπο.

Η εισαγωγή του ρυθμού μεταβολής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να γίνει στο πλαίσιο του εννοιολογικού-ενσωματικού κόσμου όπως περιγράφεται από τον Tall

(2004). Για να γίνει αυτό, η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στην έννοια και όχι σε υπολογιστικές μεθόδους ή σε σύμβολα. Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί να μελετηθεί μέσα από πραγματικά προβλήματα που σχετίζονται με ταχύτητα ή επιτάχυνση, αλλά και σε περιπτώσεις που η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι ο χρόνος, όπως για παράδειγμα στη σχέση όγκου και ύψους στο γέμισμα ενός δοχείου με νερό.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο πλαίσιο του διαδικασιοεννοιολογικού-συμβολικού κόσμου, η έννοια του ρυθμού μεταβολής μπορεί να εμπλουτιστεί με τη χρήση συμβόλων. Είναι σημαντικό να παρουσιάζονται πολλαπλές αναπαραστάσεις του ρυθμού μεταβολής και να αποσαφηνίζεται η σύνδεσή τους. Η διδασκαλία πέραν των διαδικασιών υπολογισμού ρυθμών μεταβολής πρέπει να εστιάζει στην ίδια την έννοια και να συνδέεται με προβλήματα και εφαρμογές της από τον πραγματικό κόσμο.

Σύμφωνα με τις παραπάνω θεωρήσεις, το υλικό και οι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν, αποτελούν μια πρώτη προσέγγιση για την εισαγωγή της έννοιας του ρυθμού μεταβολής με διαισθητικό και αναπαραστασιακό τρόπο. Το υλικό αυτό θα μπορεί να αποτελέσει τη βάση για μια σειρά δραστηριοτήτων σε αυτό το πλαίσιο. Θα πρέπει όμως αρχικά να αξιολογηθεί θεωρητικά ως προς την εκπαιδευτική του καταλληλότητα, αλλά και στην πράξη με χρήση του σε διδασκαλία. Στη συνέχεια θα πρέπει να υλοποιηθούν οι αλλαγές και βελτιώσεις που θα προκύψουν.

Το υλικό μπορεί να εμπλουτιστεί με επιπλέον παραδείγματα σε διαφορετικά πλαίσια. Ενδεικτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικές δραστηριότητες με παραδείγματα, όπως το γέμισμα ή άδειασμα δοχείων διαφορετικών σχημάτων, η επιτάχυνση, οικονομικά στοιχεία αλλά και πιο αφαιρετικά. Επιπλέον, μια σημαντική επέκταση του υλικού θα καλύπτει σε μεγαλύτερο βάθος μεταβλητούς ρυθμούς μεταβολής.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια πλούσια σε εφαρμογές, που συνδέεται με ποικίλα φυσικά φαινόμενα και μπορεί να αποδοθεί με πολλαπλές αναπαραστάσεις σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Οι δραστηριότητες που συνδυάζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μίας έννοιας, βοηθάνε στην εννοιολόγηση μίας έννοιας και στην αποσαφήνιση των μαθηματικών συνδέσεων. Η σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων και της σύνδεσης με πραγματικά προβλήματα φάνηκε να αναγνωρίζεται από τους εκπαιδευτικούς (βλ. παρ. 4.3.6). Στην πράξη όμως οι αναπαραστάσεις του ρυθμού μεταβολής που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία είναι περιορισμένες, όπως και η εκπαιδευτική αξιοποίηση της τεχνολογίας.

Μία σειρά δραστηριοτήτων που θα επιτρέπουν στους μαθητές να εμπλακούν και να πειραματιστούν με μεταβαλλόμενες και συμμεταβαλλόμενες ποσότητες θα μπορούσε να είναι χρήσιμη τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η επίλυση προβλήματος και η οπτικοποίηση αναδεικνύονται ως τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά στη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού κατά την άποψη και των εν ενεργεία εκπαιδευτικών μαθηματικών της έρευνας. Η ανάπτυξη δραστηριοτήτων με βάση αυτή την παρατήρηση μπορεί να συντελέσει στην κατεύθυνση αυτή.

Μέσω της συμμετοχής των μαθητών σε βιωματικές ή ρεαλιστικές καταστάσεις, και την εμπλοκή τους σε επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων μπορεί να δημιουργηθεί μία πιο έντονη εικόνα η οποία να έχει διάρκεια και να ανακαλείται σε μετέπειτα εννοιολογήσεις.

Μία σημαντική παράμετρος κατά την ανάπτυξη και κυρίως κατά την εφαρμογή εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων είναι η γλώσσα. Για την εξοικείωση των μαθητών με τη γλώσσα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά, θα πρέπει να γίνεται προσπάθεια κατά τη διδασκαλία να αποσαφηνίζονται οι όροι και να δημιουργούνται ευκαιρίες για τους μαθητές να εκφραστούν. Ιδιαίτερα για έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης, η ενασχόληση των μαθητών με πραγματικά προβλήματα επιτρέπει την έκφραση των ιδεών τους και την περιγραφή των καταστάσεων που μελετούν (Αυγερινός & Ρεμούνδου, 2018α).

Το πλαίσιο της κίνησης, του γεμίσματος δοχείων και της εισροής νερού στο πλοίο, ως πλαίσια μελέτης ρυθμών μεταβολής, έχουν τις προοπτικές να εφαρμοστούν, τόσο σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όσο και σε μεγαλύτερες ηλικίες με ανάλογη προσαρμογή των στόχων και της εστίασης. Ένα οικονομικό πλαίσιο ίσως θα παρακινούσε τους μαθητές και ιδιαίτερα αν συνδυαζόταν με προβλέψεις.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή παρουσιάστηκαν κάποιες ενδεικτικές δραστηριότητες για την ενίσχυση του συλλογισμού με βάση τη συμμεταβολή και της εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής για μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι δραστηριότητες βασίστηκαν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε έννοιες που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής και στα ευρήματα ερευνών για τη μαθηματική εκπαίδευση. Κάποιες από τις δραστηριότητες αυτές δοκιμάστηκαν πειραματικά με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

7 Συμπεράσματα

Συμπεράσματα και προεκτάσεις

7.1 Συνδυασμός επιμέρους ερευνών

Παλιότερες, αλλά και πρόσφατες έρευνες στον διεθνή χώρο, αναδεικνύουν τον ρυθμό μεταβολής και τη συμμεταβολή ως καίριες έννοιες της μαθηματικής εκπαίδευσης, απαραίτητες για τη μελέτη ανώτερων μαθηματικών και άλλων επιστημών (Carlson κ.ά., 2002· Thompson & Carlson, 2017). Συγχρόνως, ο συλλογισμός δύο ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα προκαλεί δυσκολίες και προτείνεται να αναπτύσσεται σταδιακά μέσα από ποικίλες δραστηριότητες, με διάφορες αναπαραστάσεις και σε διάφορα πλαίσια με έμφαση σε ρεαλιστικές καταστάσεις (Thompson & Carlson, 2017· Carlson κ.ά., 2002).

Η αποτύπωση της θέσης του ρυθμού μεταβολής, και βασικών εννοιών που συνδέονται με αυτόν στην υποχρεωτική εκπαίδευση, των εννοιολογήσεων του ρυθμού μεταβολής, των εννοιολογικών εμποδίων που συνδέονται με την κατανόησή του, και οι προτάσεις που προέκυψαν, μπορούν να συμβάλουν στην αλλαγή της θέσης του στην εκπαιδευτική διαδικασία, με σκοπό να ενισχυθεί η εννοιολογική γνώση των μαθητών.

Μέσα από τις επιμέρους έρευνες που διενεργήθηκαν, αναδεικνύεται η σημαντικότητα της εννοιολόγησης της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Η διεθνής βιβλιογραφία και έρευνα για το θέμα και οι προσπάθειες δημιουργίας προτάσεων διδακτικής με βάση τη συμμεταβολή είναι ενδεικτικές της αναγκαιότητας ισχυρής εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής (Thompson, 1994β, Herbert & Pierce, 2012). Επιπλέον οι εφαρμογές του ρυθμού μεταβολής στη μοντελοποίηση δυναμικών φαινομένων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους καθιστούν την προσπάθεια αυτή αναγκαία.

Σύνδεση διαφορετικών όψεων του ρυθμού μεταβολής

Σε σχέση με τη θέση του ρυθμού μεταβολής και των βασικών εννοιών στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα, παρατηρήθηκε εστίαση στη διαδικασιακή εννοιολόγηση και αποσπασματική παρουσίασή τους, ενώ εντοπίστηκαν σημεία που συνδέονται με παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες.

Ο ρυθμός μεταβολής έχει πολλές όψεις και εφαρμογές, οι οποίες δεν συνδυάζονται στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Η ανάδειξη των μαθηματικών συνδέσεων των διαφορετικών όψεων του ρυθμού μεταβολής οδηγεί στη δημιουργία μίας συνεκτικής εννοιολογικής εικόνας της έννοιας. Η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ εννοιών όπως το πηλίκο, ο λόγος, η κλίση, η εφαπτομένη, ο ρυθμός και η παράγωγος στα μαθηματικά είναι απαραίτητη για τη νοηματοδότηση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο συσχετισμός των εκφάνσεων του ρυθμού μεταβολής δημιουργεί τη βάση για την ερμηνεία φαινομένων και μέσω αυτού μπορούν να αποσαφηνιστούν ιδιότητες και έννοιες που φαίνονται ασύνδετες.

Η σημαντικότητα της έννοιας στη μαθηματική εκπαίδευση, και παράλληλα οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση του και οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία του, φάνηκαν και από τις απαντήσεις των καθηγητών μαθηματικών στην έρευνα.

Σύνδεση μαθηματικών και άλλων επιστημών

Τα μαθηματικά δεν είναι αποκομμένα από τους υπόλοιπους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή και είναι απαραίτητα για την ενασχόληση με άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως η φυσική, η βιολογία, η χημεία, η πληροφορική, τα οικονομικά. Τα προγράμματα σπουδών οφείλουν να εναρμονίζονται με αυτή τη θεώρηση και να αναδεικνύουν τις συνδέσεις μεταξύ μαθημάτων αλλά και μεταξύ εννοιών. Η μάθηση των μαθηματικών πέρα από την απομνημόνευση τύπων προϋποθέτει την εννοιολογική κατανόηση.

Τα προγράμματα σπουδών μαθηματικών και φυσικής γύρω από τον ρυθμό μεταβολής δεν είναι ευθυγραμμισμένα και δεν διαφαίνονται οι μαθηματικές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών. Η σημαντικά καλύτερη επίδοση των φοιτητών του τμήματος φυσικής στα περισσότερα έργα του ερωτηματολογίου αποτελεί ένδειξη για τη σημαντικότητα της σχέσης των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Εννοιολογήσεις του ρυθμού μεταβολής

Από τα σχολικά εγχειρίδια και τις απαντήσεις των φοιτητών στην έρευνα, φαίνεται ότι οι εννοιολογήσεις του ρυθμού μεταβολής που επικρατούν, είναι ο ρυθμός ως παράγωγος και ο ρυθμός στο πλαίσιο της κίνησης, χωρίς αυτές να συνδέονται απαραίτητα. Έντονη φάνηκε και η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής ως μεταβολή ποσότητας και όχι ως λόγος μεταβολών ποσοτήτων, όπως παρατηρήθηκε και σε άλλες έρευνες σε διάφορα πλαίσια (Confrey & Smith, 1994), μεταξύ των οποίων και το οικονομικό (Mkhatshwa & Doerr, 2015).

Η περιορισμένη εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής σχετίζεται και με τον τρόπο που παρουσιάζεται η έννοια στα σχολικά εγχειρίδια. Ο ρυθμός μεταβολής ουσιαστικά αναφέρεται στα μαθηματικά μόνο σε μία ενότητα στην τελευταία τάξη του λυκείου σε σχέση με την παράγωγο και παράλληλα σε διάφορες ενότητες στη φυσική.

Αναλογικότητα-κλίση

Όσον αφορά στις παρανοήσεις που παρατηρήθηκαν, ιδιαίτερης σημασίας είναι αυτή της ψευδοαναλογικότητας, ή ψευδαίσθησης της γραμμικότητας (illusion of linearity). Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι οι αναλογικές ποσότητες και οι αναπαραστάσεις τους σε γραφική παράσταση δεν είναι σαφείς στους μαθητές. Οι ποσότητες x και y που συνδέονται με μία σχέση της μορφή $y=αx+β$ θεωρούνται αναλογικές και αυτό μπορεί να προκαλέσει παρανοήσεις στον Διαφορικό Λογισμό. Ο ορισμός της κλίσης σε γραμμικές αναλογικές συναρτήσεις της μορφής $y=αx$, ως ο συντελεστής $α$ και στη συνέχεια στη γραμμική συνάρτηση της μορφής $y=αx+β$ είναι παραπλανητικός. Όπως αναφέρθηκε με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορεί να συμπεράνουν ότι η κλίση είναι ο λόγος $\frac{y}{x}$ και όχι ο λόγος των διαφορών $\frac{Δy}{Δx}$ (Tyne, 2017). Σε κάποιες περιπτώσεις είναι προτιμότερο να ορίζεται στην αρχή η πιο γενική περίπτωση και στη συνέχεια να μελετώνται οι υποπεριπτώσεις.

Γλώσσα

Καθώς η κλίση είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα, ο ρόλος της γλώσσας και η σύνδεση με τις αρχικές εννοιολογήσεις της κλίσης που έχουν οι μαθητές είναι σημαντικές παράμετροι της διδασκαλίας. Η ορολογία και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια πρέπει να παρουσιάζονται με σαφήνεια, έτσι ώστε να αποφεύγονται παρανοήσεις. Επιπλέον, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η ίδια ορολογία σε όλα τα μαθήματα που χρησιμοποιείται η κλίση και ο ρυθμός μεταβολής, όπως στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες.

Η περιγραφή φαινομένων και ρυθμών μεταβολής απαιτεί μεγάλες εκφράσεις, όπου παράληψη όρων ενδέχεται να μην εκφράζει ακριβώς την κατάσταση και να οδηγεί σε παρανοήσεις. Αν και είναι πολύ δύσκολο να αλλάξει η ορολογία μίας έννοιας, προτείνεται να χρησιμοποιείται ένας όρος για τον ρυθμό μεταβολής. Αυτό θα μπορούσε να συντελέσει στον υπερσκελισμό κάποιων από τα εννοιολογικά εμπόδια που σχετίζονται με τη γλώσσα του ρυθμού μεταβολής. Ένας όρος που θα μπορούσε να εκφράζει την έννοια είναι η «μεταβλητότητα», με αντίστοιχο όρο στα αγγλικά τον «variationality». Με τον τρόπο αυτό, οι προτάσεις που αναφέρονται στον ρυθμό μεταβολής θα είναι μικρότερες και θα αποφεύγεται η χρήση άλλων λέξεων στη θέση της μεταβολής, όπως ρυθμός αύξησης/μείωσης, ρυθμός εισροής/εκροής, ρυθμός φόρτισης. Ακόμα αποφεύγεται η χρήση της λέξης «μεταβολή», η οποία ενδέχεται να αναδεικνύει την εικόνα μίας ποσότητας που μεταβάλλεται και να μη γίνεται κατανοητό πως μπορεί ο ρυθμός μεταβολής να είναι σταθερός. Ο όρος «μεταβλητότητα» δεν χρησιμοποιείται στην καθημερινή γλώσσα, οπότε ο ορισμός δεν συγχέεται με άλλες έννοιες.

Ακόμα οι δύο ποσότητες που μεταβάλλονται θα μπορούσαν να αναφέρονται χωρίς την έκφραση «σε σχέση με», όπως για παράδειγμα «μεταβλητότητα απόστασης-χρόνου», «μεταβλητότητα τιμής-ποσότητας». Έτσι, δίνεται έμφαση στις δύο ποσότητες που μεταβάλλονται και αποφεύγεται η παράβλεψη του χρόνου που συνήθως υπονοείται και δεν αναφέρεται. Ο παραπάνω όρος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σε συνδυασμό με τον λόγο.

Αναπαραστάσεις-πλαίσιο

Η αναπαράσταση φάνηκε να επηρεάζει την επίδοση των φοιτητών σε έργα με μεταβολές και ρυθμούς μεταβολής περισσότερο από το πλαίσιο του προβλήματος. Η διαφορά στα έργα με γραφική αναπαράσταση όταν το πλαίσιο είναι η ταχύτητα από άλλο πλαίσιο, ενισχύει την άποψη ότι, εκτός από την ποικιλία αναπαραστάσεων, πρέπει να χρησιμοποιούνται και διαφορετικά πλαίσια στη διδακτική μαθηματικών εννοιών για να μειωθεί το φαινόμενο της στεγανοποίησης (compartmentalization).

Τα τελευταία χρόνια, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιούνται πολλές αναπαραστάσεις και γίνεται προσπάθεια σύνδεσης των εννοιών με πραγματικές καταστάσεις. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιείται κυρίως η συμβολική αναπαράσταση και σε κάποιες περιπτώσεις η γραφική. Είναι χαρακτηριστικό ότι το έργο με πίνακα τιμών του ερωτηματολογίου, δεν συμπεριλαμβανόταν στις συνεπαγωγικές σχέσεις που παρατηρήθηκαν.

Στα σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η αναφορά σε ρεαλιστικές καταστάσεις και η σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο είναι περιορισμένη. Αυτό αποτυπώνεται και από τα παραδείγματα ρυθμών μεταβολής που χρησιμοποιήσαν οι φοιτητές, τα οποία περιορίζονταν στο πλαίσιο της κίνησης.

Η εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής ως ταχύτητα και η σύνδεσή του κυρίως με το πλαίσιο της κίνησης ήταν έντονη στα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου. Θεωρείται όμως ότι είναι και περιοριστική της έννοιας. Για τη διαμόρφωση μίας συνεκτικής και ευρείας εικόνας της έννοιας είναι απαραίτητο να μελετάται ο ρυθμός μεταβολής και σε άλλα πλαίσια.

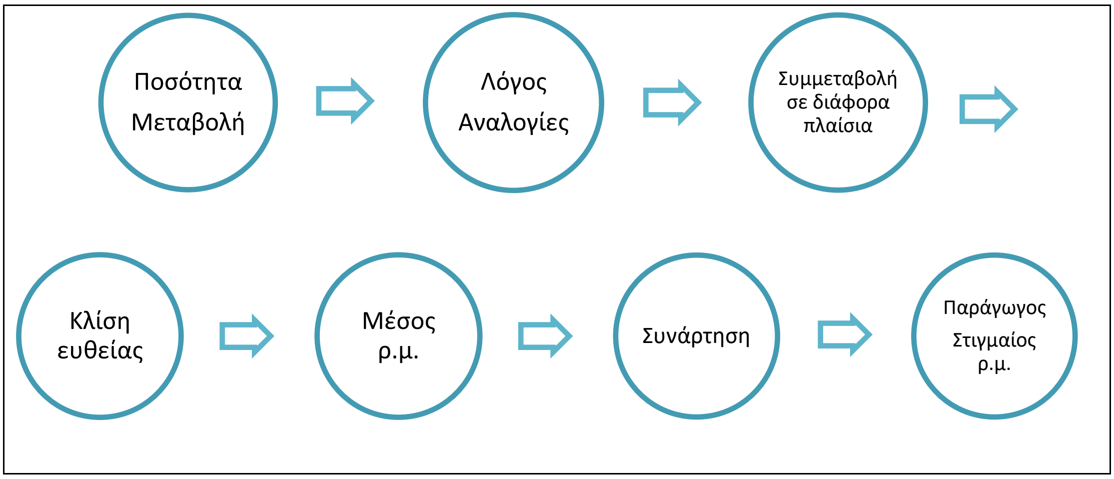
Στάσεις

Οι στάσεις των φοιτητών προς τη Μαθηματική Ανάλυση δεν φάνηκε να σχετίζονται με τις απαντήσεις τους στα έργα του ερωτηματολογίου. Αν και τα ερωτήματα των στάσεων ήταν περιορισμένα, οι μεταβλητές των ερωτημάτων των στάσεων δεν εμφανίστηκαν στις σημαντικές συνεπαγωγικές σχέσεις. Φαίνεται ότι οι στάσεις προς τα μαθηματικά σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι από τους καθοριστικούς παράγοντες για την εννοιολόγηση των εννοιών.

7.2 Ενδεικτική εξελικτική πορεία για τον ρυθμό μεταβολής

Όπως αναδεικνύεται από την έρευνα, ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια με πολλές όψεις, οι οποίες θα πρέπει να τονιστούν για να γίνουν ορατές οι μεταξύ τους συνδέσεις. Η ανάδειξη του λόγου, των αναλογιών, της συμμεταβολής και της κλίσης, ως βασικών εννοιών για τη διαμόρφωση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής, οδηγεί στην έμφαση στη διδακτική τους. Ιδιαίτερα για τις πρώτες έννοιες, είναι σημαντικό να τονιστούν από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, μέσω σύνδεσης με ρεαλιστικές καταστάσεις.

Μία ενδεικτική εξελικτική πορεία διδασκαλίας που σχετίζεται με την εννοιολόγηση του ρυθμού μεταβολής ξεκινάει από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση με την έννοια της ποσότητας και της μεταβολής της ποσότητας και συνεχίζει στον λόγο και στις αναλογίες. Στη συνέχεια μπορούν να μελετηθούν παραδείγματα με συμμεταβολή ποσοτήτων στο πλαίσιο της κίνησης, αλλά και σε άλλα πλαίσια. Κατά τη διδασκαλία της κλίσης ευθείας, θα μπορούσε να οριστεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής στα μαθηματικά. Σε αυτό το σημείο μπορεί να γίνει σύνδεση με έννοιες της φυσικής, όπως η μέση ταχύτητα. Σημειώνεται ότι πρέπει να τονιστεί η διαφορά του μέσου ρυθμού και της μέσης ταχύτητας από τον μέσο όρο ή μέση τιμή. Η διδασκαλία των συναρτήσεων από την άποψη της συμμεταβολής θα μπορούσε να βοηθήσει στη διαμόρφωση της εικόνας των ποσοτήτων που συμμεταβάλλονται και στην ερμηνεία της μεταβολής και του ρυθμού μεταβολής. Με τον τρόπο αυτό η διδασκαλία της παραγώγου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής γίνεται πιο ομαλά και εννοιολογικά πιο συνεκτικά. Η παραπάνω πορεία δεν είναι γραμμική, καθώς μία μαθηματική έννοια εμπλουτίζεται σταδιακά.



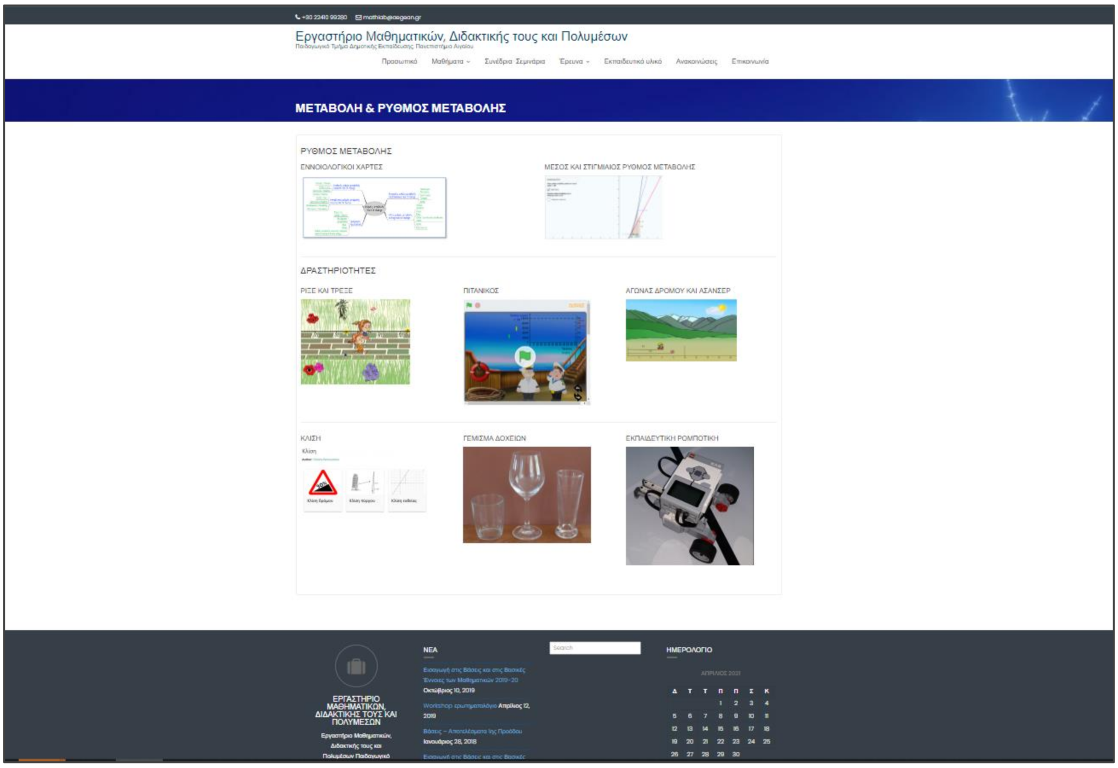
Εικόνα 7.1. Ενδεικτική εξελικτική πορεία μάθησης για τον ρυθμό μεταβολής

Τα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες πρέπει να αναπτύσσονται παράλληλα. Έτσι οι μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στα μαθήματα φυσικών επιστημών θα είναι γνωστές, με θετικό αποτέλεσμα, τόσο για τις φυσικές επιστήμες, καθώς δεν θα χρειάζεται οι εκπαιδευτικοί να ορίσουν τις έννοιες, όσο και για τα μαθηματικά, γιατί θα γίνεται σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο. Αυτό προϋποθέτει τη χρήση κοινής γλώσσας και συμβολισμού στα διαφορετικά επιστημονικά πεδία.

7.3 Ιστοσελίδα για τον ρυθμό μεταβολής

Το υλικό της έρευνας που διεξήχθη έχει αναρτηθεί στον ιστότοπο του Εργαστηρίου Μαθηματικών, Διδακτικής και Πολυμέσων του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://lab-math.pre.aegean.gr/mathematics-lab/roc/ (Εικόνα 7.2). Η ιστοσελίδα δημιουργήθηκε με σκοπό τη συγκέντρωση του υλικού που σχετίζεται με τον ρυθμό μεταβολής και τη δυνατότητα πρόσβασης εκπαιδευτικών στο υλικό αυτό. Μέσα από τη σελίδα αυτή γίνεται μία προσπάθεια να παρουσιαστούν οι έννοιες και οι μεταξύ τους σχέσεις, καθώς και να καταστούν διαθέσιμες οι ενδεικτικές δραστηριότητες.

Στην ιστοσελίδα υπάρχουν διαγράμματα GeoGebra για τις έννοιες που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολή, για τον μέσο και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής, για τον ορισμό των βασικών εννοιών που σχετίζονται με τον ρυθμό μεταβολής. Υπάρχουν ακόμα οι προαναφερθείσες δραστηριότητες σε σχέση με τον ρυθμό μεταβολής και την κλίση και ενδεικτικά διδακτικά σενάρια για αυτές.



Εικόνα 7.2. Ιστοσελίδα με υλικό για τον ρυθμό μεταβολής (http://lab-math.pre.aegean.gr/mathematics-lab/roc/)

7.4 Περιορισμοί της έρευνας

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενες παραγράφους, ο ρυθμός μεταβολής είναι μία έννοια με πολλές όψεις και πολλές επιμέρους έννοιες σχετίζονται με αυτή. Η χαρτογράφηση της εννοιολόγησης των μαθητών ή των φοιτητών για την έννοια αυτή παρουσιάζει δυσκολίες, καθώς θα πρέπει να απομονώνεται και να εξετάζεται κάποιο μέρος της. Στην παρούσα εργασία έγινε μία προσπάθεια να αποτυπωθεί η θέση του ρυθμού μεταβολής στο ελληνόφωνο πρόγραμμα σπουδών, να μελετηθούν οι εννοιολογήσεις των φοιτητών για την έννοια και να αναπτυχθούν δραστηριότητες, οι οποίες θα μπορούσαν να βελτιώσουν την εννοιολόγηση των μαθητών και τη δημιουργία μιας συνεκτικής εικόνας, η οποία θα περιλαμβάνει της διαφορετικές αναπαραστάσεις της.

Στο πρώτο μέρος της έρευνας έγινε προσπάθεια να συγκριθούν τα προγράμματα σπουδών της Ελλάδας με αυτά άλλων χωρών, όπως της Κύπρου και της Σιγκαπούρης. Το εγχείρημα παρουσίασε δυσκολίες καθώς σε πολλές χώρες του εξωτερικού τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση δεν είναι μοναδικά, αλλά υπάρχει δυνατότητα επιλογής μεταξύ διαφορετικών προτεινόμενων. Ακόμα, η αποκωδικοποίηση του προγράμματος σπουδών μίας χώρας απαιτεί και τη γνώση του κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου που επικρατεί σε αυτή.

Η πολύπλευρη ανάγνωση του ρυθμού μεταβολής οδήγησε την παρούσα έρευνα σε ένα μεγάλο εύρος συνιστωσών, οι οποίες συνδέονται με την έννοια και επηρεάζουν την εννοιολόγησή της. Το αποτέλεσμα ήταν να συνδυάζονται πολλές όψεις, αλλά να μην έχουν διερευνηθεί σε βάθος στον ίδιο πληθυσμό. Έτσι, κάποια από τα ευρήματα της έρευνας δεν είναι τόσο ισχυρά, λόγω του περιορισμένου αριθμού του δείγματος και των διαφορετικών επιμέρους ερευνών που πραγματοποιήθηκαν.

Στο τελευταίο μέρος της έρευνας, είχε σχεδιαστεί να πραγματοποιηθούν ημιδομημένες συνεντεύξεις με φοιτητές που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο, έτσι ώστε να διερευνηθεί περαιτέρω ο τρόπος που εννοιολογούν τον ρυθμό μεταβολής και ο συλλογισμός που τους οδήγησε να δώσουν τις συγκεκριμένες απαντήσεις. Ακόμα είχε σχεδιαστεί να δοκιμαστούν πειραματικά οι ενδεικτικές δραστηριότητες σε μικρές ομάδες μαθητών. Αυτό δεν κατέστη εφικτό, λόγω των υγειονομικών συνθηκών του τελευταίου έτους. Έτσι αποφασίστηκε να μεταφερθεί σε επόμενη φάση της έρευνας.

7.5 Προτάσεις - Μελλοντική έρευνα

Στο πλαίσιο της παγκοσμιοποίησης της κοινωνίας και της διεθνοποίησης της γνώσης η συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων θα μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλες χώρες στις οποίες εφαρμόζονται διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις. Για τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων άλλων χωρών, αποκτήθηκε πρόσβαση σε σειρές σχολικών εγχειριδίων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της Σιγκαπούρης, μιας χώρας με ιδιαίτερα αυξημένες επιδόσεις στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες, και της Ολλανδίας, όπου εφαρμόζεται η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση. Στο πλαίσιο αυτό μπορεί να επεκταθεί η συγκριτική ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Παρόλο το σχετικά μικρό μέγεθος του δείγματος της έρευνας, οι εξαγόμενες ενδείξεις αποτελούν έναυσμα για περαιτέρω έρευνα για την ενίσχυση των αποτελεσμάτων σε σχέση με τον τρόπο εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής και ιδιαίτερα μέσα από συνεντεύξεις και πειραματικές διδακτικές παρεμβάσεις. Αξίζει να φανεί μέσα από συνεντεύξεις ο συλλογισμός που οδηγεί στις απαντήσεις που δόθηκαν.

Επιπλέον, αποτελεί στόχο της μετέπειτα ερευνητικής δραστηριότητας να εφαρμοστούν οι προτεινόμενες δραστηριότητες σε μικρές ομάδες μαθητών ή/και φοιτητών και να εμπλουτιστούν, ώστε να αποτελέσουν ένα εργαλείο του εκπαιδευτικού.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή συζητήθηκαν συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα από τις επιμέρους έρευνες που παρουσιάστηκαν. Παρουσιάστηκαν προτάσεις για τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής σύμφωνα με τα ευρήματα των παραπάνω ερευνών. Η ενίσχυση της εννοιολόγησης του ρυθμού μεταβολής με τρόπο ώστε να είναι ουσιαστικός για τη μετέπειτα ενασχόληση με πιο προχωρημένα θέματα μαθηματικών και με μοντελοποίηση προβλημάτων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, μπορεί να επιτευχθεί στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Τέλος, σημειώθηκαν οι περιορισμοί της έρευνας καθώς και προτάσεις για περεταίρω έρευνα.

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφικές αναφορές

Adu, E. O., & Olaoye, O. (2014). An Investigation into Some Lexical Ambiguities in Algebra: South African Experience. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(20), 1243.

Agathangelou, S., Papakosta, S. V., & Gagatsis, A. (2008). The impact of iconic representations in solving mathematical one-step problems of the additive structure by primary second grade pupils. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11).* Monterrey, N. L., Mexico.

Aleven, V., Myers, E., Easterday, M. W., & Ogan, A. (2010). Toward a framework for the analysis and design of educational games. In G. Biswas, D. Carr, Y. S. Chee, & W. Y. Hwang (Eds.). *Proceedings of the 3rd IEEE international conference on digital game and intelligent toy enhanced learning*, (pp. 69-76). Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society.

Alfieri, L., Higashi, R., Shoop, R., & Schunn, C. D. (2015). Case studies of a robot-based game to shape interests and hone proportional reasoning skills. International *Journal of STEM Education*, 2(1), 4.

Alimisis, D. (2013). Educational robotics: Open questions and new challenges. *Themes in Science and Technology Education*, 6(1), 63-71.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O’Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical thinking and learning*, 15(4), 314–336.

Avgerinos, E., Remoundou, D. (2016). On the transition from image to concept image in mathematics education: The paradigm of rate of change. *Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry (ISIS-Symmetry)* (accepted).

Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2018α, February). Epistemological obstacles and misconceptions in using language in concepts of Mathematical Analysis: The case of rate of change (in greek). *20th Pancyprian Conference in Mathematical Education and Science*, Cyprus.

Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2018β, April). Developing Gaming Activities for Conceptualising Aspects of Rate of Change. *IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON) 2018* (pp. 1311-1319), Santa Cruz de Tenerife, Canary Islands, Spain.

Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2018γ, August). Filling bottles as visualization of covarying quantities in primary education, *Proceedings of ISSC 2018: Logics of Image - Visual Learning, Logic and Philosophy of Form in East and West*, Kolymbari, Crete, Greece.

Avgerinos, E. & Remoundou, D. (2019). Using Tools of Dynamic Geometry to Enhance Conceptualization of Rate of Change. *Proceedings of 12th annual International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI2019)*, (pp. 11322-11329). Seville (Spain).

Avgerinos, E., Skoufi, A. (2012). Modelling motion for intuitive didactic approach of concepts: rate of change, derivative and definite integral, in E. Avgerinos and A.

Gagatsis (Eds.), *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications* (pp. 208-227). Rhodes, Greece: Mathematics Education and Multimedia Laboratory Department of Education, University of the Aegean.

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. Language and Education, 19(2), 117–125.

Benitti, F. B. V. (2012). Exploring the educational potential of robotics in schools: A systematic review. *Computers & Education*, 58(3), 978-988.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(3), 389-399.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 19-35.

Biza, I., Christou, C. and Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis, *Mathematics Education*, 10(1), 53 - 70.

Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., MacIntyre, B., Zheng, R., & Golubski, G. (2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers & Education*, 68, 536–544.

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 168-193.

Byerley, C., Hatfield, N., Thompson, P. W. (2012). Calculus students' understandings of division and rate, In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.) *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (pp. 358-363), Portland, OR: SIGMAA/RUME.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, 465-478.

Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life, *PRIMUS*, 19:3, 232-244, DOI: 10.1080/10511970701686987.

Church, W. J., Ford, T., Perova, N., & Rogers, C. (2010, March). Physics with robotics—using LEGO MINDSTORMS in high school education. In *2010 AAAI Spring Symposium Series*.

Clark, M. R., Berenson, S. B., Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297-317.

Coe, E. (2007). *Modeling teachers' thinking about rate of change* (Doctoral dissertation, Department of Mathematics and Statistics, Arizona State University).

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning Mathematics* (pp. 31-60). Springer Netherlands.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education*, 66-86.

Cornu B. (2002). Limits. In: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, vol 11. Springer, Dordrecht

Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166, Kluwer: Dordrecht.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167–192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.), Statistical implicative analysis: Theory and applications (pp. 41–53). *Series: Studies in Computational Intelligence (SCI)* vol. 127. Springer.

Couturier, R., Pazmiño, R., Conde, M. Á., García-Peñalvo, F. J. (2015). Statistical implicative analysis for educational data sets: 2 analysis with RCHIC. In *Actas del XVIII Congreso Internacional EDUTEC 2015: Educación y Tecnología desde una visión transformadora* (Riobamba, Ecuador, 17-19 de noviembre). ISBN 978-84-608-3627-8.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*, 86(5), 404–407.

De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 47–69.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65-83.

Deniz, Ö., & Kabael, T. (2017). Students´ mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe University Journal of Education*, 32(1), 123-142.

Dindyal, J. (2006). The Singaporean mathematics curriculum: Connections to TIMSS. *29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA 2006) on "Identities, cultures and learning spaces"*, Canberra, Australia, 1 – 5 July 2006

Doerr, H. M., Ärlebäck, B. J., & O'Neil, A. H. (2013). Interpreting and communicating about phenomenon with negative rate of change. *120th ASEE (American Society for Engineering Education) annual conference & exposition*, Atlanta, Georgia, USA, June 23-26, 2013.

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(2), 19-22.

Dole, S., Clarke, D., Wright, T. & Hilton, G. (2012). Students' proportional reasoning in mathematics and science. In Tso,T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 195-202. Taipei, Taiwan: PME.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369-389.

Driver, R. (1985). *Children's ideas in science*. McGraw-Hill Education (UK).

Driver, R., Squires, A., Rushworth, P., & Wood-Robinson, V. (2014). *Making sense of secondary science: Research into children's ideas*. Routledge.

Dubinsky, E., & Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking and the computer. In Tall D. O. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer: Holland, 231–248.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.

Dunn, P. K., Carey, M. D., Richardson, A. M., & McDonald, C. (2016). Learning the language of statistics: Challenges and teaching approaches. *Statistics Education Research Journal*, 15(1), 8-27.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Education and training monitor (2018). *European Commission.* Retrieved from https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/document-library-docs/2018-et-monitor-leaflet_en.pdf.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers’ beliefs towards teaching calculus. *ZDM*, 46(4), 647-659.

Elia, I., & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 256-272.

Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005, October). Can we “trace” the phenomenon of compartmentalization by using the implicative statistical method of analysis? An application for the concept of function. In *Third International Conference ASI-Analyse Statistique Implicative* (pp. 175-185).

Erbas, A. K., Alacaci, C., & Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(3), 2324-2329.

Ervynck, G. (1994). Students' Conceptions of Infinity in the Calculus. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 4(1), 84-96.

Felicia, A., & Sharif, S. (2014). A review on educational robotics as assistive tools for learning mathematics and science. *International Journal of Computer Science Trends and Technology (IJCST)*, 2(2), 62-84.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. In Proceedings of the *32nd*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 1-8).

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational studies in mathematics*, 10, 3-40.

Fothergill, L. (2011). Aspects of calculus for preservice teachers. *The Mathematics Educator,* 21(1).

FreeMind - free mind mapping software. (2016). http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Friel, S. N., Curcio, F. R., Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-159.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 447–454). Bergen University College Bergen, Norway. Retrieved from http://emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR171_Gagatsis.pdf

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece. In *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 102–111).

Gagatsis, A., Agathangelou, S., & Papakosta, V. (2010). Conceptualizing the role of pictures in problem solving by using the implicative statistical analysis. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 10, 19-34.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, (Esp), 197-224.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., & Philippou, A. (2010). Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, 10, 51-67.

Gagatsis, A., Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645–657.

Glasnovic Gracin D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2018.1431849

GoConqr. (2021). https://www.goconqr.com/

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Gómez, E., & Wolfson., R. (2012). Filling Bottles with Water. *The Mathematics Teacher*, 105(7), 542-548. doi:10.5951/mathteacher.105.7.0542

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational studies in Mathematics*, 43(2), 149-168.

Gough, J. (2007). Conceptual complexity and apparent contradictions in mathematics language. *Australian Mathematics Teacher*, 63(2), 8-15.

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), 195-206.

Gras, R., & Kuntz, P. (2008). An overview of the statistical implicative analysis (SIA) development. In Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.), *Statistical implicative analysis: Theory and applications* (pp. 11–40). Series: Studies in Computational Intelligence (SCI) vol. 127. Springer.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.). (2008). *Statistical implicative analysis: Theory and applications.* Series: Studies in Computational Intelligence (SCI) vol. 127. Springer.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Hackworth, J. M. (1994). *Calculus students' understanding of rate* (Master's thesis, San Diego State University).

Hadamard, J. (1954). "Letter to Jacques Hadamard". In *The Creative Process A Symposium*, ed. Brewster Ghiselin. Los Angeles: University of California Press.

Hannula, M., Malmivuori, M. L., & Pehkonen, E. (1996). Development of pupils mathematical beliefs: A description of a research project. In Current State of Research on Mathematical Beliefs III. *Proceedings of the MAVI-3 workshop* (pp. 39-47).

Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. In Mc Leod, Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving*. New York: Springer Verlag.

Heiberger, R. M. (2019). *HH: Statistical Analysis and Data Display: Heiberger and Holland*. R package version 3.1-37. http://cran.r-project.org/package=HH.

Heiberger, R. M., & Robbins, N. B. (2014). Design of diverging stacked bar charts for Likert scales and other applications. *Journal of Statistical Software*, 57(5), 1-32.

Heid, M. K. (1984). *An exploratory study to examine the effects of resequencing skills and concepts in an applied calculus curriculum through the use of the microcomputer* (Doctoral dissertation, University of Maryland).

Heid, M. K., Lunt, J., Portnoy, N., & Zembat, I. O. (2006, November). Ways in which prospective secondary mathematics teachers deal with mathematical complexity. In *28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 2-9).

Herbert, S. (2010). Impact of Context and Representation on Year 10 Students' Expression of Conceptions of Rate. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Fremantle: MERGA.

Herbert, S., & Pierce, R. (2008). An ‘emergent model’ for rate of change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(3), 231-249.

Herbert, S., & Pierce, R. (2009, January). Revealing conceptions of rate of change. In MERGA 32: *Crossing divides: mathematics education research group of Australasia: Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia Conference 2009* (pp. 217-224). MERGA Inc..

Herbert, S., & Pierce, R. (2011). What is rate? Does context or representation matter? *Mathematics Education Research Journal*, 23(4), 455–477. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0026-z.

Herbert, S., & Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 85–101. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9368-4.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008, September). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Huang, C. H. (2011). Investigating the attitudes toward calculus of engineering students in Taiwan. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 9(2), 80-85.

Ibrahim, Z. B., & Othman, K. I. (2010). Comparative study of secondary mathematics curriculum between Malaysia and Singapore. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 351-355.

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In This book stems from a symposium organized by CIRADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l" Apprentissage et le Développement en Education) of Université du Que1bec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec abec à Montréal.. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Johnson, H. L. (2010). *Making sense of rate of change: Secondary students' reasoning about changing quantities*. (Unpublished doctoral dissertation). The Pennsylvania State University, University Park, PA.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 313-330.

Johnson, H. L. (2015α). Secondary students’ quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 64-90.

Johnson, H. L. (2015β). Together yet separate: Students’ associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 89-110.

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student’s transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education*, 49(6), 851-

864.

Jones, A. T. (1983). Investigation of students' understanding of speed, velocity and acceleration. *Research in Science Education*, 13(1), 95-104.

Juter, K. (2009). Development of students’ concept images in analysis. Nordisk Matematikkdidaktikk, 1(4), 65–87.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

Kaplan, J. J., Fisher, D. G., & Rogness, N. T. (2009). Lexical Ambiguity in Statistics: What do students know about the words association, average, confidence, random and spread?. *Journal of Statistics Education*, 17(3).

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: a kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265-281.

Kaput, J. J., & Roschelle, J. (2002). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. In *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 167-182). Routledge.

Kaput, J. J., & Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. In *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13-26). Springer, Dordrecht.

Kaput, J. J., & Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for research in mathematics education*, 25(6), 676-684.

Kaput, J., & Schorr, R. (2002). Changing representational infrastructures changes most everything: The case of SimCalc, algebra & calculus. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on the impact of technology on the teaching and learning of mathematics* (pp. 47–75). Mahwah: Erlbaum.

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on ‘rate’ problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219-233.

Kaur, B. (2004). Teaching of mathematics in Singapore schools. *International Congress on Mathematical Education 10 (ICME–10)*. Copenhagen, Denmark.

Kaur, B. (2014). Mathematics Education in Singapore--An Insider's Perspective. Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 5(1), 1-16.Kremžárová, L. (2011). Students' difficulties in understanding the calculus tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics*, 11, 41-46.

Kremžárová, L. I. L. L. A. (2011). Students' difficulties in understanding the calculus tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, 11, 41-46.

Krosnick, J. A. and Presser, S. (2009) 'Question and Questionnaire Design'. In *Handbook of Survey Research (2nd Edition)* James D. Wright and Peter V. Marsden (Eds). San Diego, CA: Elsevier.

Lakoff, G., Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic books.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah. NJ: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). National Council of Teachers of Mathematics, Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R., Behr, M., Post, T. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Eds.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Livy, S., & Herbert, S. (2013). Second-year pre-service teachers' responses to proportional reasoning test items. *Australian Journal of Teacher Education* (Online), 38(11), 17.

Lobato, J., & Thanheiser, E. (1999). Re-thinking slope from quantitative and phenomenological perspectives. *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 291-297.

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, 162-175.

Maloney, J., Burd, L., Kafai, Y., Rusk, N., Silverman, B., & Resnick, M. (2004). Scratch: A Sneak Preview. *Proceedings of the Second International Conference on Creating, Connecting, and Collaborating through Computing*, January 29 - 30, 2004, Kyoto, Japan (pp. 104-109). Washington, DC, USA: IEEE Computer Society.

Martínez Ortiz, A. (2015). Examining Students' Proportional Reasoning Strategy Levels as Evidence of the Impact of an Integrated LEGO Robotics and Mathematics Learning Experience. *Journal of Technology Education*, 26(2), 46-69.

McDonald, C. V. (2016). STEM Education: A review of the contribution of the disciplines of science, technology, engineering and mathematics. *Science Education International*, 27(4), 530-569.

Mel, S., & Redish, E.F. (2002). Literature Review: Student Understanding in Calculus. *Student Understanding of Topics in Calculus*. University of Maryland Physics Education Research Group.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus Primary One to Six*. Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education, Singapore. Retrieved from https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf.

Mkhatshwa, T., & Doerr, H. (2015, February). Students' understanding of marginal change in the context of cost, revenue, and profit. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2201-2206).

Monoyiou, A., Spagnolo, F., Elia, I. & Gagatsis, A. (2007). Visual Representations in Mathematics Education. *Current Trends in Mathematics Education*. 5th Medcon, 127–137.

Moore, K.C., Paoletti, T., Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 461–473.

Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1). 3-21.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International journal of science and mathematics education*, 7(3), 431-454.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). TIMSS 2019 *International Results in Mathematics and Science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2013). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1–18.

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *The Mathematics Educator*, 23(2).

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: A comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491-1515.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Nemirovsky, R., Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative*. Cambridge: TERC.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 282-313.

Novak, J. D. & Cañas, A. J. (2008). The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them. *Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008, Florida Institute for Human and Machine Cognition*, available at: http://cmap.ihmc.us/Publications/ ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf

O'Keeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *International Review of Contemporary Learning Research* 2(1). DOI: 10.12785/irclr/020101.

OECD (2016). *PISA 2015 results (Volume I): Excellence and equity in education*. ISBN: 9789264266490 (PDF). https://doi.org/10.1787/9789264266490-en.

OECD (2019), *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/5f07c754-en.

Oehrtman, M., Carlson, M., Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Olaoye, O., Adu, E. O., & Moyo, G. (2014). Lexical Ambiguity in Algebra, Method of Instruction as Determinant of Grade 9 Students' Academic Performance in East London District. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(23), 897.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, 13(5), 23–26.

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 137-151.

Papadopoulos, I. (2020). Using tasks to bring challenge in mathematics classroom. *Journal of Pedagogical Research*, 4(3), 375-386.

Parameswaran, R. (2007). On Understanding the Notion of Limits and Infinitesimal Quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(2), 193-216.

Pehkonen, E. (2001). A Hidden Regulating Factor in Mathematics Classrooms: Mathematics – Related Beliefs. In. M. Ahtee, O. Bjockqvist, E. Pehkonen, & V. Vatanen (Eds.), *Research on Mathematics and Science Education* (pp. 11 – 35). Institute for Educational Research. University of Jyvasky.

Ramelan, M., & Wijaya, A. (2019, October). A Comparative Analysis of Indonesian and Singaporean Mathematics Textbooks from the Perspective of Mathematical Creativity: A Case Statistics and Probability. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1320, No. 1, p. 012037). IOP Publishing.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. *ZDM*, 46(4), 507-515.

Régnier J., Gras R., Spagnolo F., Di Paola B. (2010). *Implicative Statistic Analysis, Implicative Statistic Analysis as an object of research and training in data analysis, a means for multidisciplinary investigation. Beyond of the debates*. Università degli Studi di Palermo.

Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 46(5), 735-749. doi:10.1007/s11858-014-0585-z.

Remoundou, D., & Avgerinos, E. (2018, June). Rate of change: Necessity, epistemological obstacles and proposals for teaching. *Proceedings of First Congress of Greek Mathematicians (FCGM) 2018*, Athens, Greece.

Ricca, B., Lulis, E., & Bade, D. (2006). Lego Mindstorms and the growth of critical thinking. In *Intelligent Tutoring Systems Workshop on Teaching With Robots, Agents, and NLP*.

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), 235–252.

Roschelle, J., Kaput, J., & Stroup, W. (2000). SimCalc: Accelerating students' engagement with the mathematics of change. *Innovations in science and mathematics education: Advanced designs for technologies of learning*, 47-75.

Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and support children's mathematical vocabulary development. Teaching Children Mathematics, 9(2), 107.

Sacristán, A. I., & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1), 47–70. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9127-5.

Sajka, M. (2003), A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study, Educational Studies in Mathematics, 53:3, 229-254.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & writing quarterly*, 23(2), 139-159.

Scratch - Imagine, Program, Share. [Online]. Available: https://scratch.mit.edu/ [Accessed 01 Feb. 2018].

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 59-84

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, 25.

Silk, E. M. & Schunn, C. D. (2008). Using robotics to teach mathematics: Analysis of a curriculum designed and implemented. Paper presented at the *American Society for Engineering Education Annual Conference*, Pittsburgh, PA.

Silk, E. M., & Schunn, C. D. (2011, April). Resources for learning robots: Facilitating the incorporation of mathematical models in students' engineering design strategies. Paper presented at the Annual meeting of the *American Educational Research Association, New Orleans*, LA, USA.

Silk, E. M., Higashi, R., Shoop, R., & Schunn, C. D. (2010). Designing technology activities that teach mathematics. *The Technology Teacher*, 69(4), 21-28.

Singer, M., & Voica, C. (2003, September). Perception of infinity: does it really help in problem solving. In *The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education*.

Staley, K. N. (2004). *Tracing the Development of Understanding Rate of Change: A Case Study of Changes in a Pre-Service Teacher's Pedagogical Content Knowledge*. Doctoral dissertation. North Carolina State University.

Stroup, W. M. (2002). Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 167-215.

Stump, S. (1997). Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of the Concept of Slope. Paper presented at the Annual Meeting of the *American Educational Research Association* (Chicago, IL, March 28, 1997).

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. Mathematics

Education Research Journal, 11(2), 124-144.

Stump, S. (2001α). Developing preservice teachers’ pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207–227.

Stump, S. (2001β). High School precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101, 81-89.

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary schools*. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.

Syam, S. S., Wijaya, A., & Retnawati, H. (2019, October). Comparison of Modelling Tasks in Indonesian and Singaporean Mathematics Textbooks. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1320, No. 1, p. 012057). IOP Publishing.

Tague, J. (2015). *Conceptions of rate of change: A cross analysis of modes of knowing and usage among middle, high school, and undergraduate students*. Doctoral dissertation. The Ohio State University.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics* (Doctoral dissertation, University of Warwick).

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 69–75).

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37–42.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 495–511, New York: Macmillan.

Tall, D. (1993). Students’ difficulties in calculus. In *proceedings of working group (Vol. 3, pp. 13-28), ICME*, Québec.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In International handbook of mathematics education (pp. 289-325). Springer, Dordrecht.

Tall, D. (1998). Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities. *Colección Digital Eudoxus*, 1(6). Retrieved from http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/232

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, 1, 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Hrines & A. B. Fugelstad (Eds.). *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 281–288, Cape Town, South Africa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41(4), 481–492.

Tall, D. (2010). A Sensible Approach to the Calculus. *Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus*, Puebla, Mexico.

Tall, D., McGowen, M., DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive

Root for building a rich concept image of the Function Concept. Proceedings of PME-NA, 1, 247-254.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

Tapia, M., & Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. Academic Exchange Quarterly, 8(2), 16-22.

TBlA-TB6B (2019). *Primary mathematics 1A-6B*. The Curriculum Planning & Development Division, Ministry of Education, Singapore: Federal Publications.

Teuscher, D., & Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? *Mathematics Teacher*, 103, 519-524.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (p. 127–146). Macmillan Publishing Co, Inc.

Thompson, P. W. (1994α). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *In Learning Mathematics* (pp. 125–170). Springer. Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-2057-1_5

Thompson, P. W. (1994β). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 179-234.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Thompson, P. W., & Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the Fundamental Theorem of Calculus using differentials. In *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 355-359).

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools*, 30(1-2), 124-147.

Thompson, P. W., Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204.

Tyne, J. (2014). Slope and Derivative: Calculus Students' understanding of rates of change. In *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 299-310).

Tyne, J. (2017). Calculus Students’ Reasoning about Slope as a Ratio-of-Totals and its Impact on Their Reasoning about Derivative. *Proceedings of Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, CA.

Tyne, J. G. (2016). *Calculus Students' Reasoning About Slope and Derivative as Rates of Change*. Master's thesis. University of Maine.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609–637. https://doi.org/10.1080/00207390701359313

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as Work in Progress. In F. L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education: Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, 19 – 23 November 2001, pp.1-40.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In Encyclopedia of mathematics education (pp. 521-525). Springer Netherlands.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and instruction*, 14(5), 485-501.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education.

Weber, E. D. (2012). *Students' ways of thinking about two-variable functions and rate of change in space*. Doctoral dissertation. Arizona State University.

Weber, E., & Dorko, A. (2013). Students' concept images and meanings for average and average rate of change. Proceedings of the *16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Denver, CO: University of Northern Colorado (Vol. 1, pp. 31–39).

Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Introducing derivative via the calculus triangle. *Mathematics Teacher*, 104(4), 274-278.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 79–95. doi:10.2307/749199.

Wilhelm, J. A., & Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(6), 887-904.

Wright, T. (2001). Karen in motion: The role of physical enactment in developing an understanding of distance, time, and speed. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 145-162.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 103–126. Providence, RI: American Mathematical Society.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 1-17.

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος, Γ., κ.ά. (2017). *Μαθηματικά Β΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ., Σβέρκος, Α. (2017). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Αθανασίου, Α., Αντωνιάδης, Μ., Γιασουμής, Ν., Έλληνα, Α., Ιωάννου, Ι. κ.α. (2016). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Υ.Π.Π. Π.Ι. Κύπρου.

Αθανασίου, Α., Αντωνιάδης, Μ., Γιασουμής, Ν., Έλληνα, Α., Λοϊζιάς, Σ. κ.ά. (2016). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Μαθηματικά Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού*. Υ.Π.Π. Π.Ι. Κύπρου.

Αθανασίου, Χ., Δεληγιάννη, Καραμάνου, Μ., Ε., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Παπαριστοδήμου, Έ., Σιακαλλή, Μ., Χειμωνή, Μ. (2020α). *Μαθηματικά Α΄ τάξη*. (Δ΄ Έκδοση). Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Δεληγιάννη Ε., Καραμάνου, Μ., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Παπαριστοδήμου, Έ., Σιακαλλή, Μ., (2015). *Μαθηματικά Β΄ τάξη*. Β΄ Έκδοση. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

Αθανασίου, Χ., Δεληγιάννη, Ε., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Παπαριστοδήμου, Έ., Σιακαλλή, Μ., Χειμωνή, Μ. (2016α). *Μαθηματικά Γ΄ τάξη*. (Β΄ Έκδοση). Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Αθανασίου, Χ., Δεληγιάννη, Ε., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Παπαριστοδήμου, Έ., Σιακαλλή, Μ., Χειμωνή, Μ. (2019). *Μαθηματικά Δ΄ τάξη*. Γ΄ Έκδοση. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Αθανασίου, Χ., Δεληγιάννη, Ε., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Σιακαλλή, Μ., Χειμωνή, Μ. (2020β). *Μαθηματικά Ε΄ τάξη*. Γ΄ Έκδοση. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Αθανασίου, Χ., Δεληγιάννη, Ε., Παναούρα-Μάκη, Γ., Παντζιαρά, Μ., Σιακαλλή, Μ., Χειμωνή, Μ. (2016β). *Μαθηματικά Στ΄ τάξη*. Α΄ Έκδοση. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2018). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., (2017). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., κ.ά. (2017). Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Λυκείου. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Αντωνίου, Ν., Δημητριάδης, Π., Καμπούρης, Κ., Παπαμιχάλης, Κ., Παπατσίμπα, Λ. (2017). *Φυσική Β΄ Γυμνασίου (και Βιβ. Καθ.)*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2017). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου (και Βιβ. Καθ.)*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Αυγερινός, Ε., & Ρεμούνδου, Δ. (2015, 6-8 Φεβρουαρίου). *Παραμένουσες γνωστικές δυσκολίες μελλοντικών δασκάλων στα κλάσματα και στις αναλογίες και η επιρροή τους στην επίλυση προβλήματος* [Παρουσίαση]. 17ο Παγκύπριο Συνεδρίο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, Αγία Νάπα.

Αυγερινός, Ε., & Ρεμούνδου, Δ. (2016). Οι αναπαραστάσεις της έννοιας του ρυθμού μεταβολής και οι αδυναμίες πρόσληψής της κατά τη μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο. *Πρακτικά 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Μαθηματικά, Θεμέλιο της ανθρώπινης σκέψης*. 4-6 Νοεμβρίου. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Χανιά.

Αυγερινός, Ε., & Ρεμούνδου, Δ. (2018α, 9-10 Φεβρουαρίου). Επιστημολογικά εμπόδια και παρανοήσεις από τη χρήση της γλώσσας σε έννοιες της ανάλυσης: Η περίπτωση της έννοιας του ρυθμού μεταβολής [Παρουσίαση]. *20ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης*, Λευκωσία, Κύπρος.

Αυγερινός, Ε., & Ρεμούνδου, Δ. (2018β). Επιστημολογικά εμπόδια για την έννοια της «κλίσης ευθείας» στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. *Πρακτικά 35ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

Αυγερινός, Ε., Ρεμούνδου, Δ., & Δανελλάκης Δ. (2019). Μελέτη μαθηματικών εννοιών μέσα από ένα σενάριο εκπαιδευτικής ρομποτικής. *Πρακτικά Εργασιών 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη»* (σελ. 526-535). Ρόδος.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. και Φερεντίνος, Σ. (2017). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. και Ρεκούμης, Κ. (2017). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Περιστερόπουλος, Π., Τιμόθεου, Γ. (2018). *Φυσική Γενικής Παιδείας*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Βολακάκη, Μ., Κοντοβούρκης, Μ., Κυριακού, Κ., Λοϊζιάς, Σ., κ.ά. (2017α). *Μαθηματικά Γ΄ Ενιαίου Λυκείου Κοινού Κορμού*. Υ.Π.Π. Π.Ι. Κύπρου.

Βολακάκη, Μ., Κοντοβούρκης, Μ., Κυριακού, Κ., Λοϊζιάς, Σ., κ.ά. (2017β). *Μαθηματικά Γ΄ Ενιαίου Λυκείου Προσανατολισμού*. Υ.Π.Π. Π.Ι. Κύπρου.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., Σταύρου, Ι. (2018). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Γαγάτσης, Α., & Σιαμαρή, Ε. (2003). Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλημάτων αναλογίας από μαθητές γυμνασίων Ελλάδας και Κύπρου. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Λοΐζου, Ά., Τόφαρου, Σ., & Στυλιανού, Μ. (2006). Διδακτικό Συμβόλαιο και Μάθηση των Μαθηματικών. Στο *9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου "Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο"* (σελ. 39-54).

Λευκωσία.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. ΦΕΚ 303Β/13 – 3 – 2003.

Δημητρίου-Καραντάνου, Τ., Ιωάννου Ι., Λοϊζιάς, Σ., Παπαγιάννης, Κ., Παραγύιου, Θ. κ.ά. (2016). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού*. Υ.Π.Π. Π.Ι. Κύπρου.

Θέματα Φυσικής Πανελλαδικών Εξετάσεων (2018). https://www.minedu.gov.gr/publications/docs2018/EXETASEIS-2018/them_fis_op_c_hmer_180613.pdf (Ανακτήθηκε στις 01/09/2018).

Θεοδούλου, Ρ. & Γαγάτσης, Α. (2003). Μια Εικόνα Αξίζει Χίλιες Λέξεις... Ποιο Είδος Εικόνας Όμως Βοηθά Στην Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος; Στο *2ο συνέδριο για τα μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο, Αθήνα, Ελλάδα: ΕΚΠΑΠΚ.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ. (2016). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2016). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Μαλλιάκας, Κ., & Ματζαβίνου, Θ. (2016). Η γραμμική συνάρτηση στα Μαθηματικά και στη Φυσική από το Γυμνάσιο μέχρι την Άλγεβρα και την Κινηματική της Α΄ Λυκείου. *2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με διεθνή συμμετοχή «Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;»*, Ρόδος.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2016). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Γ΄ λυκείου*. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ρεμούνδου, Δ., Αυγερινός, Ε. (2014). Η χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού στη δημιουργία δραστηριοτήτων ως εισαγωγή στην έννοια του ρυθμού μεταβολής. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, 17-18 Οκτωβρίου. Ρόδος.

Ρεμούνδου, Δ., & Αυγερινός, Ε. (2017). Η επίδραση των αναπαραστάσεων και οι αλλαγές του εννοιολογικού πλαισίου κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με χρήση του ρυθμού μεταβολής. *Πρακτικά 2ης Ημερίδας Υποψηφίων Διδακτόρων* (σελ. 211-224). Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Ρόδος.

Υ.Π.Π. Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (2010). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών.* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου. Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων.

Υ.ΠΑΙ.Θ. (2007). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/info/newps/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%E2%80%94%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf.

Υ.ΠΑΙ.Θ. (2018). *Εγκύκλιος 160253/Δ2/16.09.2018 Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Υ.ΠΑΙ.Θ.

Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας (2015). *Νέο Ωρολόγιο Πρόγραμμα*. https://nop.moec.gov.cy/

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας. Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών*. Εκδόσεις: Ατραπός.

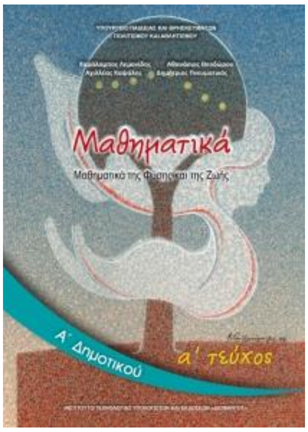
Παραρτήματα

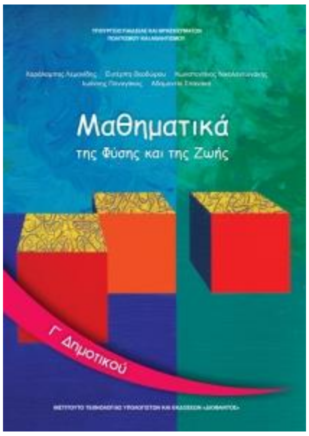
Ερωτηματολόγια και φύλλα εργασίας

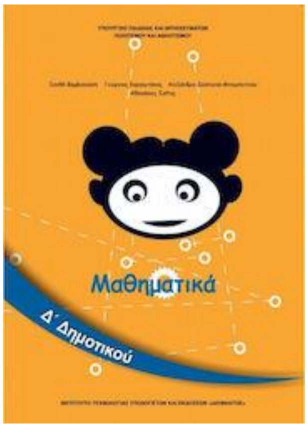
Παράρτημα Α - Απόδοση αγγλικών όρων στα ελληνικά

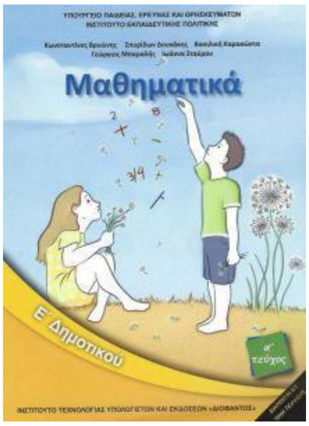
Αγγλικός όρος	**Ελληνικός όρος**
Cognitive conflict factors	Παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης
Cognitive root	Γνωστική ρίζα
Concept	Έννοια
Concept definition (formal, personal)	Ορισμός έννοιας (τυπικός, προσωπικός)
Concept image	Εννοιολογική εικόνα
Conceptual-embodied world	Εννοιολογικός-ενσωματικός κόσμος
Conceptualisation	Εννοιολόγηση
Compartmentalization	Στεγανοποίηση
Covariation	Συμμεταβολή
Covariational reasoning	Συλλογισμός με βάση τη συμμεταβολή
Elementary procept	Στοιχειώδες procept
Formal−axiomatic world	Τυπικός-αξιωματικός κόσμος
Implicative graph	Συνεπαγωγικό διάγραμμα
Implicative tree or hierarchy tree	Συνεπαγωγικό δέντρο ή Δενδρόγραμμα ιεράρχησης
PISA (Programma for the International Student Assessment)	Πρόγραμμα για τη Διεθνή Αξιολόγηση Μαθητών
Procept	process και concept, διαδικασιοέννοια
Proceptual-symbolic world	Διαδικασιοεννοιολογικός-συμβολικός κόσμος
Process	Διαδικασία
Proportional reasoning	Αναλογική σκέψη
Realistic Mathematics Education (RME)	Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (ΡΜΕ)
Representation moderation	Αναπαραστατική εναλλαγή
Similarity tree	Διάγραμμα ομοιότητας
Spontaneous conceptions	Αυθόρμητες αντιλήψεις
Statistical implicative analysis	Συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση
The model method	Μοντελοποίηση
Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)	Τάσεις στη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

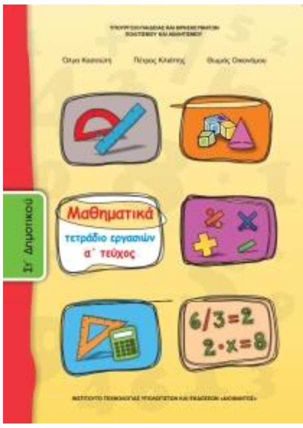
Παράρτημα Β – Σχολικά εγχειρίδια



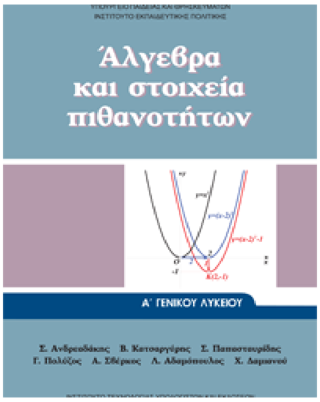


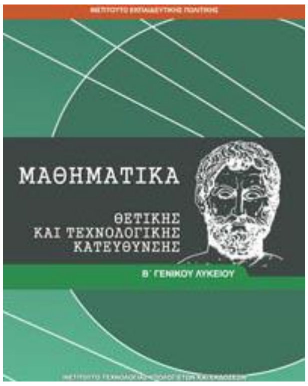


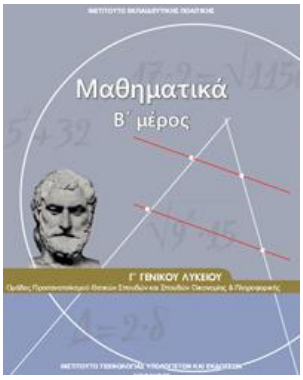




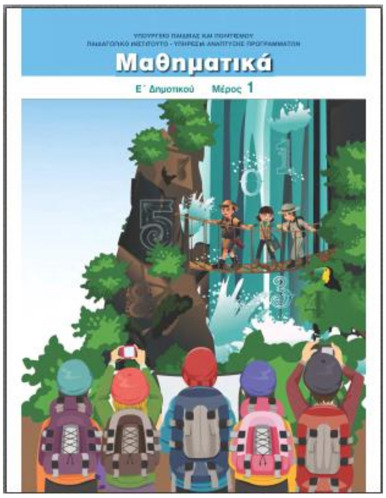
Σχολικά βιβλία μαθηματικών Ελλάδας – Πρωτοβάθμια εκπαίδευση







Σχολικά βιβλία μαθηματικών Ελλάδας – Δευτεροβάθμια εκπαίδευση



Σχολικά βιβλία μαθηματικών Κύπρου – Πρωτοβάθμια εκπαίδευση Α΄-Ε΄ Δημοτικού

Συγγραφική ομάδα:	Αθανασίου Χρύσω Δεληγιάννη Ελένη Παναούρα-Μάκη Γεωργία Παντζιαρά Μαριλένα Σιακαλλή Μύρια Χειμωνή Μαρία
Επιστημονικοί συνεργάτες:	Παναούρα Ρίτα, Πανεπιστήμιο Frederick Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Πανεπιστήμιο Κύπρου Πιττάλης Μάριος, Πανεπιστήμιο Κύπρου Χρίστου Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Σύνδεσμος Πρώτος Λειτουργός Εκπαίδευσης:	Χαμπιαούρης Κώστας
Ηλεκτρονικός σχεδιασμός:	Χατζηθεοδοσίου Άντρη, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Ηλ. σελίδωση:	Χατζηθεοδοσίου Άντρη Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση: 2016

Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters

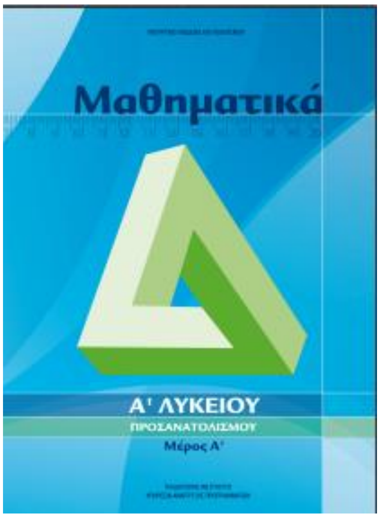
© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

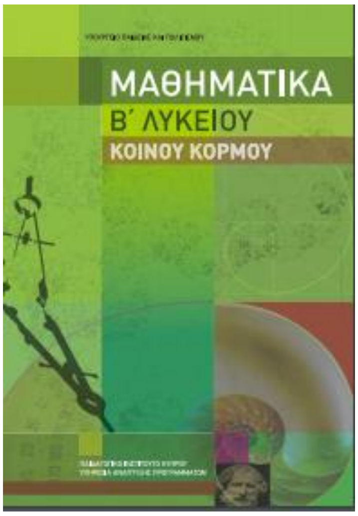
ISBN: 978-9963-0-1603-7

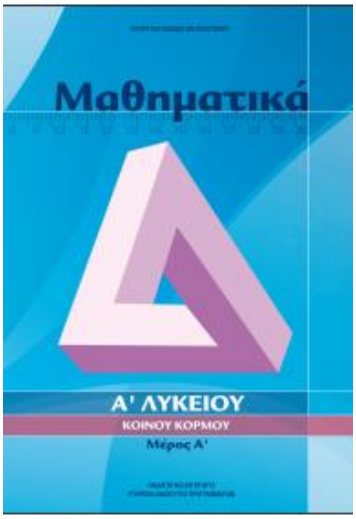
Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

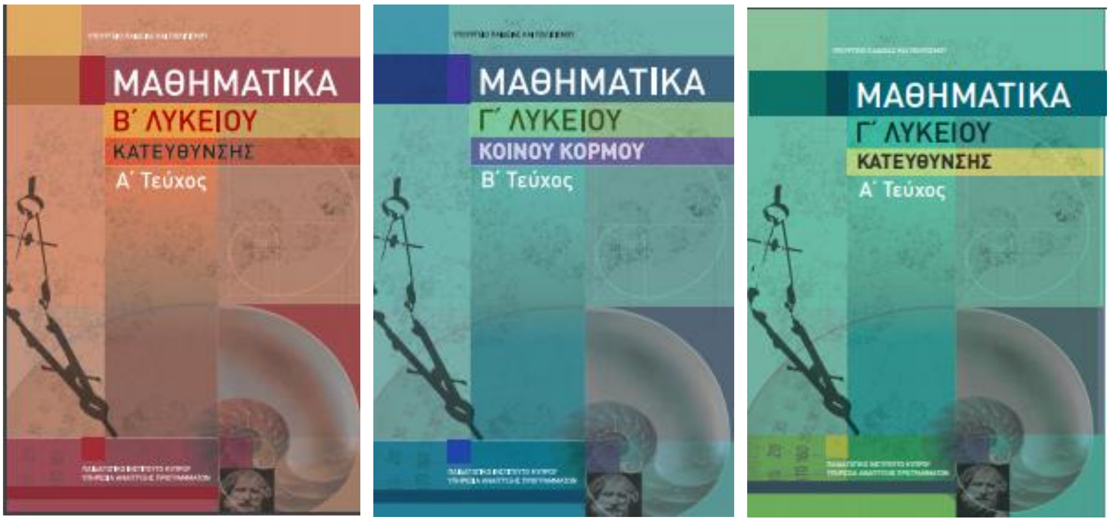
2

Σχολικά βιβλία μαθηματικών Κύπρου – Στ΄ Δημοτικού

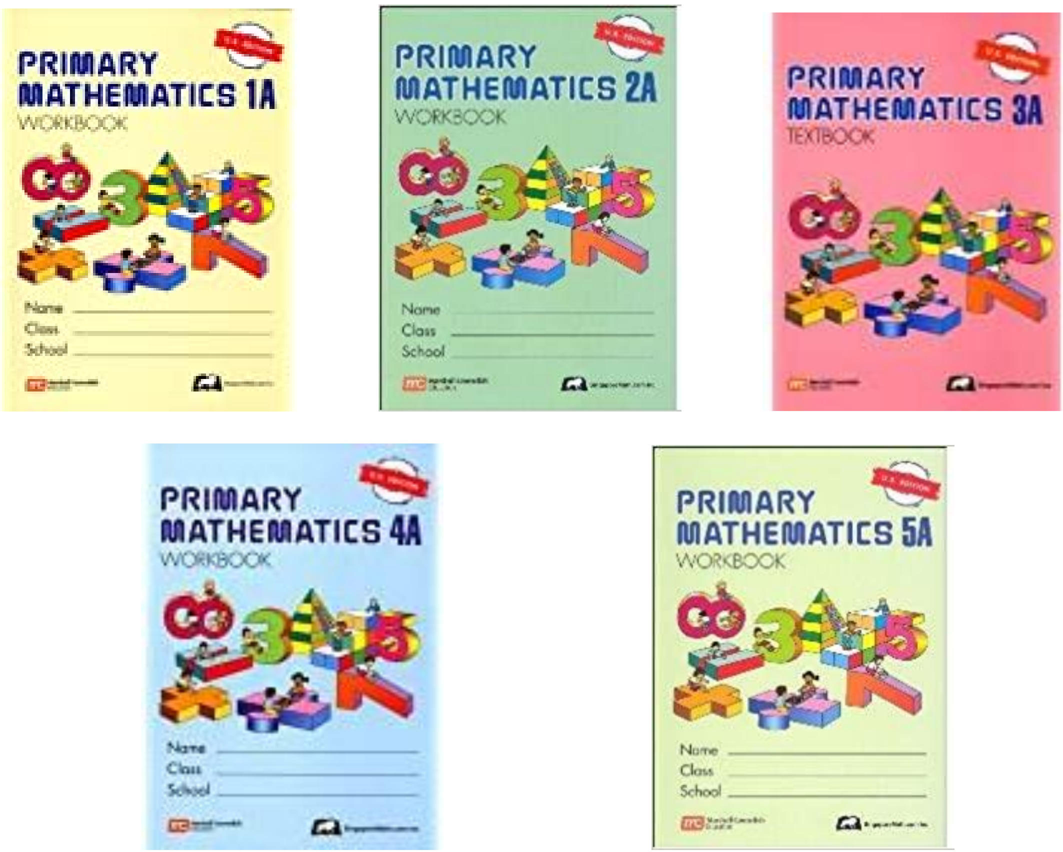




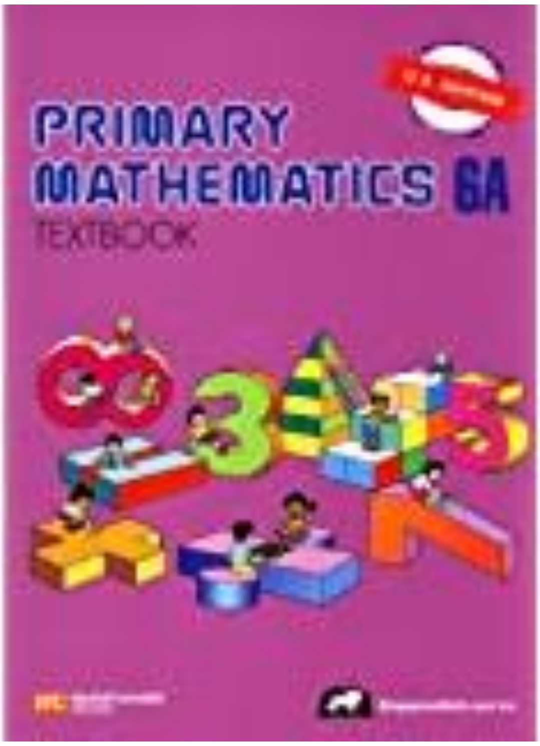




Σχολικά βιβλία μαθηματικών Κύπρου – Δευτεροβάθμια εκπαίδευση



Σειρά Primary Mathematics Σιγκαπούρης - Grade 1-5




Original edition published under the title Primary Mathematics Workbook 6A

Published by Times Media Private Limited
This American Edition

Published by Marshall Cavendish Education
Times Centre, 1 New Industrial Road, Singapore 536196
Customer Service Hotline: (65) 6213 9688
US Office Tel: (1-914) 332 8888 | Fax: (1-914) 332 8882
E-mail: cs@mceducation.com
Website: www.mceducation.com

First published 2003
Second impression 2004
Third impression 2005
Reprinted 2006 (twice), 2007, 2008, 2009 (twice), 2010, 2011, 2012 (twice), 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 (twice), 2019

ISBN 978-981-01-8516-9

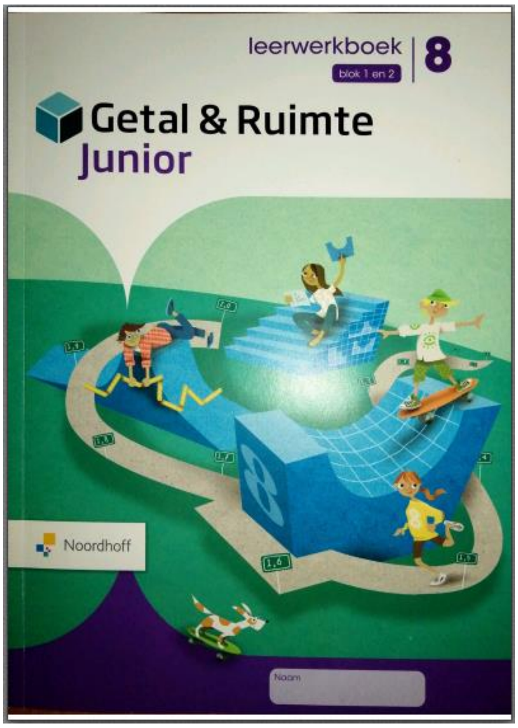
Printed in Singapore

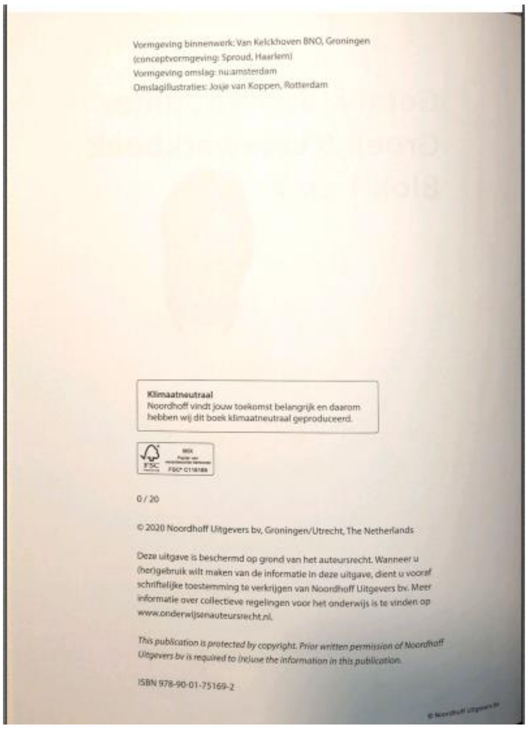
ACKNOWLEDGEMENTS

Our special thanks to Richard Askey, Professor of Mathematics (University of Wisconsin, Madison), Yoram Sagher, Professor of Mathematics (University of Illinois, Chicago), and Madge Goldman, President (Gabriella and Paul Rosenbaum Foundation), for their indispensable advice and suggestions in the production of Primary Mathematics (U.S. Edition).

Σειρά Primary Mathematics Σιγκαπούρης – Grade 6

Σειρά Getal en Ruimte Ολλανδίας




Vormgeving binnenwerk: Van Kelckhoven BNO, Groningen
(conceptvormgeving: Sproud, Haarlem)
Vormgeving omslag: nu:amsterdam
Omslagillustraties: Josje van Koppen, Rotterdam

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-75169-2

Σειρά Getal en Ruimte Ολλανδίας – Grade 6

Παράρτημα Γ - Ερωτηματολόγιο εκπαιδευτικών

5/6/2018 Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής

Το παρόν ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και αποτελεί μέρος έρευνας σχετικά με την χρησιμότητα και τον τρόπο διδασκαλίας του ρυθμού μεταβολής.
Εκτιμώμενος χρόνος συμπλήρωσης ερωτηματολογίου: 10'.
Για οποιαδήποτε παρατήρηση μπορείτε να επικοινωνήσετε μαζί μας στο e-mail:
pred13004@aegean.gr.
Ευχαριστούμε για τη συμμετοχή.

1. **Φύλο**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.
- ◯ Γυναίκα
- ◯ Άνδρας

2. **Ηλικία**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.
- ◯ Κάτω των 30 ετών
- ◯ 31-35 ετών
- ◯ 36-40 ετών
- ◯ 41-45 ετών
- ◯ 46-50 ετών
- ◯ Άνω των 50 ετών

3. **Βαθμίδα εκπαίδευσης στην οποία εργάζεστε**
Επιλέξτε όλα όσα ισχύουν.
- ☐ Δημοτικό
- ☐ Γυμνάσιο
- ☐ Λύκειο
- ☐ Τριτοβάθμια
- ☐ Άλλο: ____________________

5/6/2018 Ρυθμός μεταβολής

4. **Περιφερειακή διεύθυνση εκπαίδευσης**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- Αττικής
- Ιονίων Νήσων
- Κεντρικής Μακεδονίας
- Ανατολικής Μακεδονίας & Θράκης
- Ηπείρου
- Δυτικής Ελλάδας
- Πελοποννήσου
- Κρήτης
- Θεσσαλίας
- Στερεάς Ελλάδας
- Δυτικής Μακεδονίας
- Βορείου Αιγαίου
- Νοτίου Αιγαίου
- Άλλο

5. **Χρόνια προϋπηρεσίας**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- Λιγότερα από 3 χρόνια
- 3-5 χρόνια
- 5-10 χρόνια
- 10-20 χρόνια
- Περισσότερα από 20 χρόνια

6. **Έτος κτήσης πτυχίου**

7. **Εργάζεστε ως**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- Μόνιμος/η εκπαιδευτικός
- Αναπληρωτής/τρια εκπαιδευτικός
- Αναπληρωτής/τρια μειωμένου ωραρίου
- Ωρομίσθιος/α εκπαιδευτικός
- Εκπαιδευτικός στον ιδιωτικό τομέα
- Άλλο:

8. **Περιοχή σχολείου που υπηρετείτε**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- Μεγάλο αστικό κέντρο (>100.000 κάτοικοι)
- Αστική περιοχή (20.000-100.000 κάτοικοι)
- Ημιαστική περιοχή (2.000-10.000 κάτοικοι)
- Αγροτική περιοχή (<2.000 κάτοικοι)

https://docs.google.com/forms/d/1GCarh6EanPF2quyOllIu4O8H5TKZAmrlTHafCiPALD0/edit 2/12

9. **Ειδικότητα**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- ◯ Μαθηματικός *Παράβλεψη και μετάβαση στην ερώτηση 10.*
- ◯ Φυσικός *Παράβλεψη και μετάβαση στην ερώτηση 17.*
- ◯ Οικονομολόγος *Παράβλεψη και μετάβαση στην ερώτηση 20.*
- ◯ Άλλο: ______________ *Παράβλεψη και μετάβαση στην ερώτηση 20.*

Μαθηματικοί

10. **Ποια από τις παρακάτω έννοιες του Διαφορικού Λογισμού πιστεύετε ότι δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές της Γ' Λυκείου;**
1 το πιο εύκολο ως 5 το πιο δύσκολο
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	1	2	3	4	5
Συνάρτηση	◯	◯	◯	◯	◯
Όριο συνάρτησης	◯	◯	◯	◯	◯
Παράγωγος	◯	◯	◯	◯	◯
Μονοτονία συνάρτησης	◯	◯	◯	◯	◯
Ακρότατα	◯	◯	◯	◯	◯
Ρυθμός μεταβολής	◯	◯	◯	◯	◯
Γραφικές παραστάσεις	◯	◯	◯	◯	◯
Κυρτότητα	◯	◯	◯	◯	◯

11. **Σημειώστε κατά πόσο συμφωνείτε με τις παρακάτω προτάσεις**

Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	Διαφωνώ	Διαφωνώ λίγο	Ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ	Συμφωνώ λίγο	Συμφωνώ
Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο					
Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα της φυσικής					
Ο ρυθμός μεταβολής πρέπει να διδάσκεται στο μάθημα των μαθηματικών					
Ο ρυθμός μεταβολής θα έπρεπε να είναι εκτός ύλης					
Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια σημαντική έννοια των μαθηματικών					
Είναι σημαντικό να δίνονται πολλές αναπαραστάσεις για την έννοια της παραγώγου					
Ο ρυθμός μεταβολής δυσκολεύει τους μαθητές					
Οι μαθητές αντιλαμβάνονται και άλλους ρυθμούς μεταβολής, εκτός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης					
Θα πρέπει να μπαίνουν θέματα με ρυθμούς μεταβολής στις ενδοσχολικές εξετάσεις					
Οι γραφικές παραστάσεις είναι κατανοητές από τους μαθητές					
Οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να λύσουν θέματα ρυθμού μεταβολής με χρήση παραγώγων στη Γ' Λυκείου					
Οι περισσότεροι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του ρυθμού μεταβολής στη Γ' Λυκείου					
Οι μαθητές στη Γ' Λυκείου μπορούν να εφαρμόσουν έννοιες των μαθηματικών όπως η παράγωγος στη φυσική					
Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια					
Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής είναι σαφής στα σχολικά εγχειρίδια					

	Διαφωνώ	Διαφωνώ λίγο	Ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ	Συμφωνώ λίγο	Συμφωνώ
Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ως ρυθμοί μεταβολής διδάσκονται επαρκώς	◯	◯	◯	◯	◯
Η διαφορά στο συμβολισμό της παραγώγου μεταξύ φυσικής και μαθηματικών (df/dx, f'(x)) προκαλεί σύγχυση στους μαθητές	◯	◯	◯	◯	◯
Η γλώσσα που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής είναι κατανοητή στους μαθητές	◯	◯	◯	◯	◯
Οι ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου για τον ρυθμό μεταβολής είναι επαρκείς για την κατανόησή του	◯	◯	◯	◯	◯
Ο μέσος ρυθμός μεταβολής ως κλίση ευθείας θα έπρεπε να διδάσκεται στο γυμνάσιο	◯	◯	◯	◯	◯
Ο ρυθμός μεταβολής δεν μπορεί να διδαχτεί αν δεν γνωρίζει ο μαθητής παραγώγους	◯	◯	◯	◯	◯
Θα βοηθούσε να διδάσκεται ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ως το όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής	◯	◯	◯	◯	◯
Θα βοηθούσε να έχει διδαχτεί διαισθητικά ο ρυθμός μεταβολής πριν τις παραγώγους	◯	◯	◯	◯	◯

12. **Ποιο από τα παρακάτω παραδείγματα θα επιλέγατε για να διδάξετε τον ρυθμό μεταβολής στο γυμνάσιο;**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη.

- ◯ Ταχύτητα
- ◯ Επιτάχυνση
- ◯ Μια γραμμική συνάρτηση
- ◯ Οικονομικά μεγέθη
- ◯ Πίνακα τιμών με στοιχεία πληθυσμού
- ◯ Γέμισμα δοχείων
- ◯ Λόγος-αναλογία
- ◯ Άλλο: ____________________

5/6/2018 Ρυθμός μεταβολής

13. **Για να διδάξω τον ρυθμό μεταβολής στο λύκειο θα επέλεγα**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	Σίγουρα όχι	Μάλλον όχι	Ίσως	Μάλλον ναι	Σίγουρα ναι
Πίνακα τιμών					
Συμβολική αναπαράσταση					
Λεκτική αναπαράσταση					
Γραφική αναπαράσταση					
Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας					
Προσωμοίωση ενός προβλήματος					
Ένα πραγματικό πρόβλημα φυσικής					
Ένα πραγματικό πρόβλημα οικονομικών					
Ένα πρόβλημα με ταχύτητα ή/και επιτάχυνση					

14. **Ποιος πιστεύετε ότι πρέπει να είναι ο στόχος της διδασκαλίας του διαφορικού λογισμού στο σχολείο;**

15. **Σε τι πιστεύετε ότι θα πρέπει να δίνεται έμφαση κατά τη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού στο σχολείο;**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	Καθόλου	Λίγο	Αρκετά	Πολύ	Πάρα πολύ
Επίλυση προβλήματος					
Οπτικοποίηση					
Εφαρμογές εκτός μαθηματικών					
Μαθηματική αυστηρότητα					
Αλγεβρικές δεξιότητες					
Δεξιότητες διατύπωσης λύσης					
Τεχνολογικές δεξιότητες					
Σύνδεση με το πρόγραμμα σπουδών					

16. **Άλλο**

Παράβλεψη και μετάβαση στην ερώτηση 22.

Διδακτική

22. **Σημειώστε κατά πόσο συμφωνείτε με την κάθε πρόταση**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	Διαφωνώ	Διαφωνώ λίγο	Ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ	Συμφωνώ λίγο	Συμφωνώ
Στο σχολείο μου διδάσκονται διεπιστημονικά θέματα μεταξύ μαθηματικών και φυσικής ή άλλων επιστημών	◯	◯	◯	◯	◯
Χρησιμοποιώ νέες τεχνολογίες πληροφορικής και επικοινωνιών στα μαθήματά μου	◯	◯	◯	◯	◯
Χρησιμοποιώ προσομοιώσεις στα μαθήματά μου	◯	◯	◯	◯	◯
Χρησιμοποιώ γραφικές παραστάσεις στα μαθήματά μου	◯	◯	◯	◯	◯
Εφαρμόζω τις έννοιες που διδάσκω σε πραγματικά προβλήματα στην τάξη	◯	◯	◯	◯	◯
Χρησιμοποιώ ασκήσεις εκτός του σχολικού εγχειριδίου	◯	◯	◯	◯	◯

23. **Το τρέχον διδακτικό έτος χρησιμοποίησα τα παρακάτω εκπαιδευτικά λογισμικά:**

____

24. **Σε μία διδακτική ώρα πόσο χρόνο αφιερώνετε στα παρακάτω;**
Να επισημαίνεται μόνο μία έλλειψη ανά σειρά.

	< 5'	5'-10'	10'-15'	15'-20'	20'-30'	> 30'
Εξέταση	◯	◯	◯	◯	◯	◯
Βιβλίο	◯	◯	◯	◯	◯	◯
Ασκήσεις βιβλίου	◯	◯	◯	◯	◯	◯
Άλλες ασκήσεις	◯	◯	◯	◯	◯	◯
Νέες τεχνολογίες	◯	◯	◯	◯	◯	◯

25. **Αν αφιερώνετε χρόνο σε κάτι άλλο, τι είναι αυτό;**

____

Παράρτημα Δ - Ερωτηματολόγια φοιτητών

Πλαίσια και αναπαραστάσεις

Ερωτηματολόγιο ομάδας Α

Δύο αυτοκίνητα ξεκινάνε ταυτόχρονα να διανύσουν μια απόσταση.

80 km/h

1200 m/sec

1. Το αυτοκίνητο Α τρέχει με ταχύτητα 80 km/h, ενώ το αυτοκίνητο Β με 1200 m/sec.
a. Ποιο αυτοκίνητο πηγαίνει πιο γρήγορα; Δικαιολογήστε.

b. Σε μισή ώρα από τη στιγμή που ξεκινάνε τι απόσταση θα έχει διανύσει το κάθε αυτοκίνητο; Δικαιολογήστε.

2. Τα δύο αυτοκίνητα δεν τρέχουν όλη τη διαδρομή με την ίδια ταχύτητα. Στους παρακάτω πίνακες αναγράφεται η απόσταση που έχουν διανύσει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές:

Αυτοκίνητο Α

Χρονική στιγμή (sec)	**Απόσταση (km)**
0	0
1	1,2
2	2,1
3	3,5
4	4,7
5	5,9

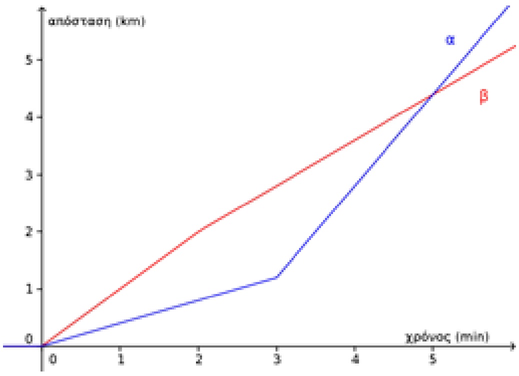
Αυτοκίνητο Β

Χρονική στιγμή (sec)	**Απόσταση (km)**
0	0
1	1,3
2	2,7
3	3,6
4	4,9
5	5,8

a. Ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 και 4; Δικαιολογήστε.

b. Ποιο αυτοκίνητο θα φτάσει πρώτο στα 5,8 χιλιόμετρα; Δικαιολογήστε.

3. Η απόσταση που διανύει το κάθε αυτοκίνητο ως προς το χρόνο δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση για τα δύο αυτοκίνητα (η ευθεία α αντιστοιχεί στο αυτοκίνητο Α και η β στο Β):



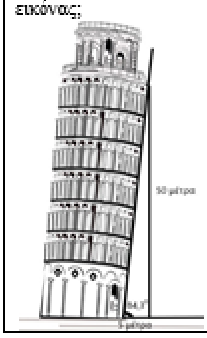
α. Ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα μεταξύ των χρονικών στιγμών 3 και 4; Δικαιολογήστε.

b. Τη χρονική στιγμή 4 ποιο αυτοκίνητο έχει διανύσει μεγαλύτερη απόσταση; Δικαιολογήστε.

4. Η απόσταση που έχει διανύσει το αυτοκίνητο Α σε σχέση με το χρόνο δίνεται από την παρακάτω σχέση: $v(t)=1{,}2t+0{,}5$. Αντίστοιχα του Β από την: $v(t)=t+0{,}7$

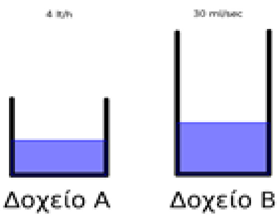
a. Ποιο αυτοκίνητο κινείται πιο γρήγορα; Δικαιολογήστε.

b. Ποιο έχει διανύσει μεγαλύτερη απόσταση τη χρονική στιγμή 3; Δικαιολογήστε.

5. Πόση είναι η κλίση του πύργου της εικόνας; 	**6.** Μια ομάδα ορειβατών κάνει πεζοπορία σε ένα βουνό και βλέπουν το διπλανό σήμα. Σχολιάστε τη σημασία του.  Ο Γιώργος δηλώνει ότι έχει μεγάλη εμπειρία και έχει ανέβει και σε βουνό με κλίση 110%. Σχολιάστε.

Ερωτηματολόγιο ομάδας Β

Δύο δοχεία όγκου 10 λίτρων γεμίζουν με νερό.
Ξεκινάνε να γεμίζουν την ίδια χρονική στιγμή.



1. Το δοχείο Α γεμίζει με ρυθμό 4lt/h. Το δοχείο Β γεμίζει με ρυθμό 30ml/sec.
a. Ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα; Δικαιολογήστε.

b. Σε μισή ώρα από τη στιγμή που αρχίζει να γεμίζει, πόσο νερό θα έχει το κάθε δοχείο; Δικαιολογήστε.

2. Τα δύο δοχεία δε γεμίζουν με σταθερό ρυθμό. Μετράμε τα λίτρα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και παίρνουμε τις παρακάτω μετρήσεις:

Δοχείο Α

Χρονική στιγμή (sec)	**Όγκος (lt)**
0	0
1	0,2
2	0,3
3	0,5
4	0,7
5	0,9

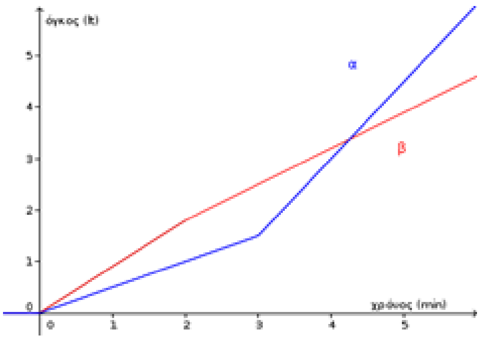
Δοχείο Β

Χρονική στιγμή (sec)	**Όγκος (lt)**
0	0
1	0,3
2	0,4
3	0,6
4	0,7
5	0,8

a. Ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 και 4; Δικαιολογήστε.

b. Ποιο δοχείο θα φτάσει πρώτο τα 0,8 lt; Δικαιολογήστε.

3. Ο όγκος του δοχείου που έχει γεμίσει ως προς το χρόνο δίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση για τα δύο δοχεία (η ευθεία α αντιστοιχεί στο δοχείο Α και η β στο Β):



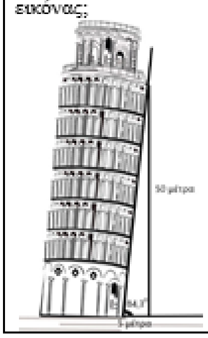
a. Ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα μεταξύ των χρονικών στιγμών 3 και 4; Δικαιολογήστε.

b. Τη χρονική στιγμή 4 πιο δοχείο έχει πιο πολύ νερό; Δικαιολογήστε.

4. Ο όγκος του νερού στο δοχείο Α σε σχέση με το χρόνο δίνεται από την παρακάτω σχέση: $v(t)=4t+2$. Αντίστοιχα του Β από την: $v(t)=3t+5$.

a. Ποιο δοχείο γεμίζει πιο γρήγορα; Δικαιολογήστε.

b. Ποιο έχει πιο πολύ νερό την χρονική στιγμή 4; Δικαιολογήστε.

5. Πόση είναι η κλίση του πύργου της εικόνας; 	**6.** Μια ομάδα ορειβατών κάνει πεζοπορία σε ένα βουνό και βλέπουν το διπλανό σήμα. Σχολιάστε τη σημασία του.  Ο Γιώργος δηλώνει ότι έχει μεγάλη εμπειρία και έχει ανέβει και σε βουνό με κλίση 110%. Σχολιάστε.

Στάσεις και εννοιολογήσεις

Ερωτηματολόγιο

Τμήμα:_______________________ Έτος σπουδών: _______ Τι θέλατε να σπουδάσετε:______________

Βαθμός Μαθηματικά Γ' Λυκείου:____ Μαθηματικά Εισαγωγικές:____ Φυσική Γ' Λυκείου:____ Φυσική Εισαγωγικές:____

1. Σημειώστε με √ την απάντησή σας σχετικά με τον Διαφορικό/Απειροστικό Λογισμό - Μαθηματική Ανάλυση (στο εξής Μαθ. Ανάλυση).

1: Όχι, διαφωνώ **2**: Μάλλον διαφωνώ **3**: Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ **4**: Μάλλον συμφωνώ **5**: Ναι, συμφωνώ

		1	2	3	4	5
1	Η Μαθ. Ανάλυση περιγράφει καταστάσεις του πραγματικού κόσμου					
2	Η Μαθ. Ανάλυση δεν είναι χρήσιμη για τους περισσότερους					
3	Η Μαθ. Ανάλυση είναι δύσκολη					
4	Θα επέλεγα μαθήματα Μαθ. Ανάλυσης στο πανεπιστήμιο					
5	Μου αρέσει η Μαθ. Ανάλυση					
6	Τα πάω καλά στη Μαθ. Ανάλυση					
7	Στη Μαθ. Ανάλυση κάνω λάθη επειδή αγχώνομαι					
8	Το μάθημα της Μαθ. Ανάλυσης είναι ευχάριστο					
9	Όταν διαβάζω μαθηματικά ξεκινάω από τη θεωρία					
10	Μου αρέσει να διαβάζω φυσική					
11	Προτιμάω τη φυσική από τα μαθηματικά					
12	Καταλαβαίνω καλύτερα τα μαθηματικά όταν τα εφαρμόζω σε πραγματικά προβλήματα					
13	Ο ρυθμός μεταβολής είναι μια έννοια περισσότερο της φυσικής και λιγότερο των μαθηματικών					

2. «Ο ρυθμός μεταβολής είναι η μεταβολή μίας ποσότητας y». Συμφωνείτε; Αν όχι, συμπληρώστε και διατυπώστε τον ορισμό. ____

____

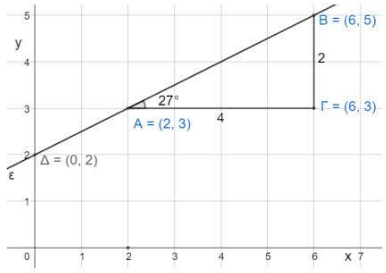
Εντοπίστε τέσσερεις (4) ρυθμούς μεταβολής που γνωρίζετε από τον πραγματικό κόσμο.

α. ___________________ β. ___________________ γ. ___________________ δ. ___________________

3. Ποια από τα παρακάτω αποτελούν ρυθμούς μεταβολής (ρ.μ.) και ποιων ποσοτήτων σε κάθε περίπτωση;
(σημειώστε **√** όταν είναι ρυθμός μεταβολής, **Χ** όταν δεν είναι)

	Είναι ρ. μ.	**του/της …**	**σε σχέση με τον/την…**
Επιτάχυνση σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση			
Απόσταση σώματος από σημείο			
Χρόνος από την έναρξη ενός αγώνα δρόμου			
Στιγμιαία ταχύτητα αυτοκινήτου			
Ο όγκος του νερού καθώς αυξάνεται το ύψος του μέσα σε ένα κυλινδρικό δοχείο			
Ο παράγωγος αριθμός $f'(\alpha)$ της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο α			
Ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, όταν $y=\alpha x^2+\beta$			
Η δεύτερη παράγωγος $f''(\alpha)$ της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο α			
Το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος σε σχέση με την ποσότητα που πουλήθηκε			
Η ένταση ηλεκτρικού ρεύματος $I=\frac{dq}{dt}$			
Η κλίση της ευθείας $y=\alpha x+\beta$			
Το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$			

4. i. Υπολογίστε την κλίση της ευθείας ε.

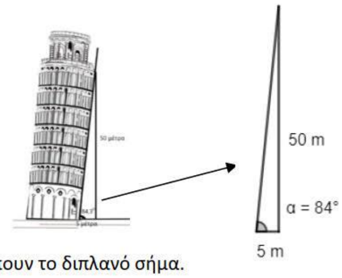


ii. Ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x είναι (κυκλώστε τα σωστά)
σταθερός / αυξανόμενος / μειούμενος / θετικός / αρνητικός,
και ίσος με ___________.

iii. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα; Ναι Όχι

iv. Για κάθε μεταβολή του x κατά 2 το y μεταβάλλεται κατά:
α. 1 β. 2 γ. 0,5 δ. 4 ε. 2,5 στ. Τίποτα από αυτά

5. Υπολογίστε την κλίση του πύργου της εικόνας.



6. Μια ομάδα ορειβατών κάνει πεζοπορία σε ένα βουνό και βλέπουν το διπλανό σήμα.

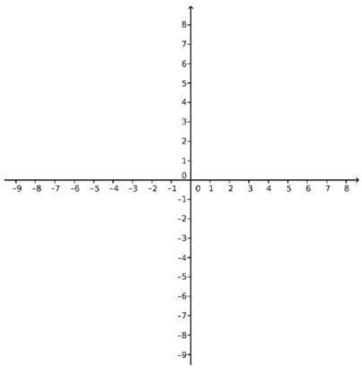
i. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν (κυκλώστε τα σωστά):

a. Το βουνό έχει κλίση 90°
b. Το βουνό έχει κλίση 90% των 90°
c. Το βουνό έχει κλίση 90% των 180°
d. Το βουνό έχει κλίση 0,9
e. Το βουνό έχει κλίση 90% σε σχέση με πριν
f. Για κάθε 100 μέτρα που προχωράνε ανεβαίνουν 90
g. Για κάθε 90 μέτρα που προχωράνε ανεβαίνουν 100

ii. Ο Γιώργος δηλώνει ότι έχει μεγάλη εμπειρία και έχει ανέβει και σε βουνό με κλίση 110%. Η δε Μαρία δήλωσε ότι είχε ανέβει σε βουνό με κλίση 200%. Μήπως θεωρείτε ότι είναι απαράδεκτο; Σχολιάστε.

7. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x - 2$.

i. Να υπολογιστεί η *g΄(x)*. (Χρησιμοποιήστε το διπλανό σύστημα αξόνων αν θέλετε να τη σχεδιάσετε.)



ii. Σε ποια σημεία ο ρυθμός μεταβολής της *g(x)* μηδενίζεται;

iii. Για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής της *g(x)* είναι θετικός;

iv. Σε ποια διαστήματα ο ρυθμός μεταβολής της *g(x)* αυξάνεται;

8. Ο Παναγιώτης και ο Σωτήρης προπονούνται για τον μαραθώνιο και ξεκινάνε μαζί από την αφετηρία. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση από την αφετηρία που έχει διανύσει ο καθένας σε διάφορες χρονικές στιγμές.

	Παναγιώτης	**Σωτήρης**
Ώρα (σε min)	Απόσταση (σε m)	Απόσταση (σε m)
0	0	0
1	312	282
2	570	576
3	840	852
4	1098	1110
5	1380	1380

Σε ποια διαστήματα προσπερνάει ο Παναγιώτης τον Σωτήρη;

____

Ποιος πιστεύετε ότι φτάνει πρώτος στα 1400 μέτρα και γιατί;

____

Πόση είναι η μέση ταχύτητα του Σωτήρη ανάμεσα στο 4° και στο 5° λεπτό;

Στο ερώτημα να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του Παναγιώτη στα 5 πρώτα λεπτά δύο μαθητές έγραψαν δύο διαφορετικές απαντήσεις. Ποια πιστεύετε ότι είναι σωστή; Σχολιάστε.

Μαθητής 1:

$312+570+840+1098+1380 = 4200$

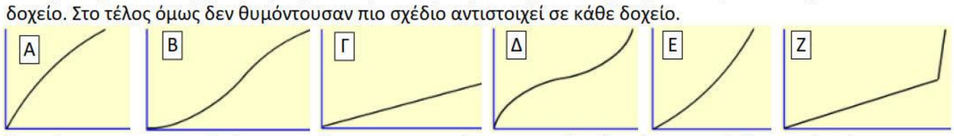
$\frac{4200}{5} = 840$

Μαθητής 2:

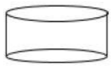
$\frac{1380}{5} = 276$

9. Για μία πίτσα χρειάζονται 4 κούπες αλεύρι, μιάμιση κούπα νερό και μισό κουταλάκι μαγιά. Αν βάλουμε άλλες 2 κούπες αλεύρι πόσο νερό και πόση μαγιά ακόμα πρέπει να προσθέσουμε;

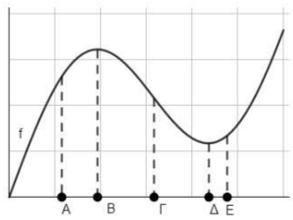
10. Στην τάξη του Γιάννη, έκαναν ένα πείραμα στο οποίο γέμισαν δοχεία διαφορετικού σχήματος με νερό. Στη συνέχεια σχεδίασαν τη γραφική παράσταση **του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο του νερού** στο κάθε δοχείο. Στο τέλος όμως δεν θυμόντουσαν πιο σχέδιο αντιστοιχεί σε κάθε δοχείο.



Σημειώστε σε ποιες γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν τα παρακάτω δοχεία και **σχεδιάστε** τα δοχεία για τις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις.

 Γ  __  __ __ __ __

11. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f(x)* δίνεται στο διπλανό σχήμα. Κυκλώστε τα σωστά.



i. Σε ποια διαστήματα η *f(x)* είναι γνησίως αύξουσα;

[Α,Β] [Β,Γ] [Γ,Δ] [Δ,Ε]

ii. Σε ποια σημεία ο ρυθμός μεταβολής της *f(x)* είναι αρνητικός;

Α Β Γ Δ Ε

iii. Σε ποια σημεία ο ρυθμός μεταβολής της *f(x)* μηδενίζεται;

Α Β Γ Δ Ε

iv. Σε ποια διαστήματα ο ρυθμός μεταβολής της *f(x)* αυξάνεται;

[Α,Β] [Β,Γ] [Γ,Δ] [Δ,Ε]

v. Βάλτε τα $f'(A), f'(B), f'(\Gamma), f'(\Delta), f'(E)$ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο (την πραγματική και όχι την απόλυτη τιμή):

____ ≤ _____ ≤ ____ ≤ ___ ≤ _____

vi. Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της *f'(x)*.

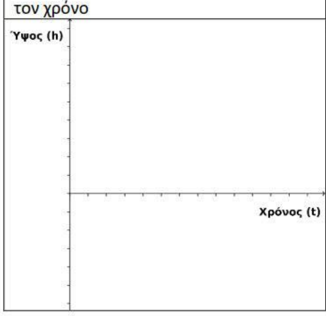
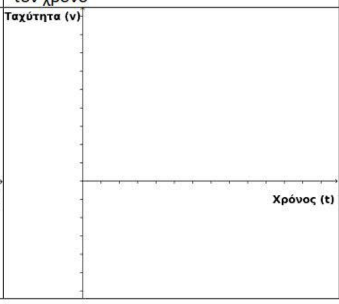
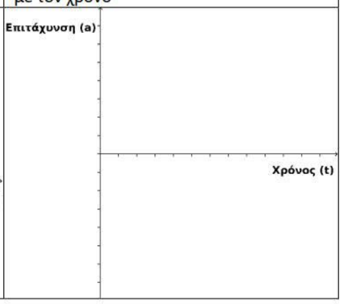
12. Πετάμε μία μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω. (Κυκλώστε τα σωστά).

α. Όταν η μπάλα ανεβαίνει το μέτρο της ταχύτητάς της: α. αυξάνεται, β. μειώνεται, γ. μένει σταθερό

β. Όταν η μπάλα ανεβαίνει το μέτρο της επιτάχυνσής της: α. αυξάνεται, β. μειώνεται, γ. μένει σταθερό

γ. Όταν η μπάλα κατεβαίνει το μέτρο της επιτάχυνσής της: α. αυξάνεται, β. μειώνεται, γ. μένει σταθερό

δ. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις από τη στιγμή που πετάμε την μπάλα ως την στιγμή που την ξαναπιάνουμε:

i. Του ύψους της μπάλας σε σχέση με τον χρόνο	**ii.** Της ταχύτητας της μπάλας σε σχέση με τον χρόνο	**iii.** Της επιτάχυνσης της μπάλας σε σχέση με τον χρόνο
		

Κωδικοποίηση μεταβλητών ερωτηματολογίου

Στάσεις	**Bel***	**BelRealWorld**	**Ερώτηση στο ερωτηματολόγιο**
		BelUseful	1.1
		BelDiff	1.2
		BelChoise	1.3
		BelLike	1.4
		BelWell	1.5
		BelAnxiety	1.6
		BelPleasure	1.7
		BelTheory	1.8
		BelPhysLike	1.9
		BelPhMath	1.10
		BelRealProb	1.11
		BelRate	1.12
Ορισμός και παραδείγματα	Rate*	RateDef	2.1
		RateEx	2.2
		Rates_Accel	3.1
		Rates_Dist	3.2
		Rates_Time	3.3
		Rates_Speed	3.4
		Rates_Volume	3.5
		Rates_Der	3.6
		Rates_Ratio	3.7
		Rates_SecDer	3.8
		Rates_Prof	3.9
		Rates_Cur	3.10
		SlpRate	3.11
		Rates_Lim	3.12
Κλίση	Slp*	SlpLine	4.1
		SlpProp	4.3
		SlpTow	5
		SlpSign	6.1
		Slp110	6.2
Γραμμική συνάρτηση	Lin*	LinRate	4.2α
		LinRateVal	4.2β
		LinChange	4.4
Δρομείς-Πίνακας τιμών	RaceTable*	RaceTable1Int	8.1
		RaceTable2Ac	8.2
		RaceTable3AvSp	8.3
		RaceTable4Av	8.4
Γέμισμα δοχείων	Bottles*	Bottles1A	10.1
		Bottles2D	10.2
		Bottles3B	10.3
		Bottles4E	10.4
		Bottles5Z	10.5
Πέταγμα μπάλας	Ball*	Ball1SpUp	12.1
		Ball2AcUp	12.2
		Ball3AcDown	12.3
		BallGraph1Heig	12.4
		BallGraph2Sp	12.5
		BallGraph3Ac	12.6
Πολυωνυμική συνάρτηση		PolSymb1Der	7.1
		PolSymb2Zero	7.2

		PolSymb3Pos	7.3
		PolSymb4Incr	7.4
Γραφική παράσταση	Graph*	Graph1FInc	11.1
		Graph2Neg	11.2
		Graph3Zero	11.3
		Graph4RInc	11.4
		Graph5Sort	11.5
		Graph6Des	11.6

Παράρτημα Ε - Δραστηριότητες

Αλλάζοντας τροχούς - Ερωτηματολόγιο

Ερωτηματολόγιο

1. Συμπληρώστε τις ισότητες:
   $\frac{3}{4} = \frac{}{28}$ $\frac{3}{5} = \frac{}{}$

2. Στην τάξη του Γιάννη έφτιαξαν σοκολάτα αναμειγνύοντας 3 κούπες γάλα και 5 κουταλάκια κακάο. Την επόμενη μέρα έφτιαξαν πάλι σοκολάτα αλλά χρησιμοποίησαν 4 κούπες γάλα και 6 κουταλάκια κακάο. Ποια σοκολάτα είχε την πιο έντονη γεύση κακάο;

3. Η κυρία Μαρία, για να φτιάξει μία δόση κουλουράκια χρειάζεται 800 γραμμάρια αλεύρι και 250 γραμμάρια ελαιόλαδο. Διαπίστωσε όμως ότι είχε μόνο 150 γραμμάρια ελαιόλαδο. Με πόσα γραμμάρια αλεύρι πρέπει να αναμείξει το ελαιόλαδο, για να φτιάξει τα κουλουράκια;

800 γραμ αλεύρι
250 γραμ. ελαιόλαδο

4. Μια αλεπού για να πάει από τη φωλιά της σε μια πηγή κάνει 20 βήματα. Μαζί της πάει το μικρό της αλεπουδάκι που κάθε 7 βήματα του αντιστοιχούν σε 4 της αλεπούς. Πόσα βήματα κάνει το αλεπουδάκι για να πάει από τη φωλιά στην πηγή;

Γεμίζοντας ποτήρια – Φύλλο εργασίας

Φύλλο εργασίας - Γέμισμα ποτηριών

Δες το βίντεο https://nrich.maths.org/13664. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Αν τα τρία ποτήρια γεμίζουν από μία βρύση με σταθερό ρυθμό, ποιο θα γεμίσει πιο γρήγορα;

Με ποια μονάδα μέτρησης θα μετρούσες

- το ύψος του νερού στο ποτήρι;
- τον όγκο του νερού στο ποτήρι;

Περίγραψε πως αλλάζει το ύψος του νερού στο κάθε ποτήρι καθώς αλλάζει ο όγκος του νερού μέσα στο ποτήρι;

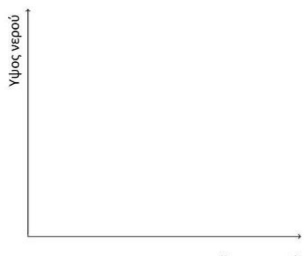
Αν γεμίζαμε το πρώτο ποτήρι με πιο κλειστή τη βρύση, πως θα άλλαζε το ύψος του νερού καθώς αλλάζει ο όγκος του μέσα στο ποτήρι;

Γέμισε το τρίτο ποτήρι με τη σύριγγα και μέτρα το ύψος του νερού, σημειώνοντας στον πίνακα τις μετρήσεις σου για τον όγκο και το ύψος του νερού στο ποτήρι.

Όγκος νερού	**Ύψος νερού**

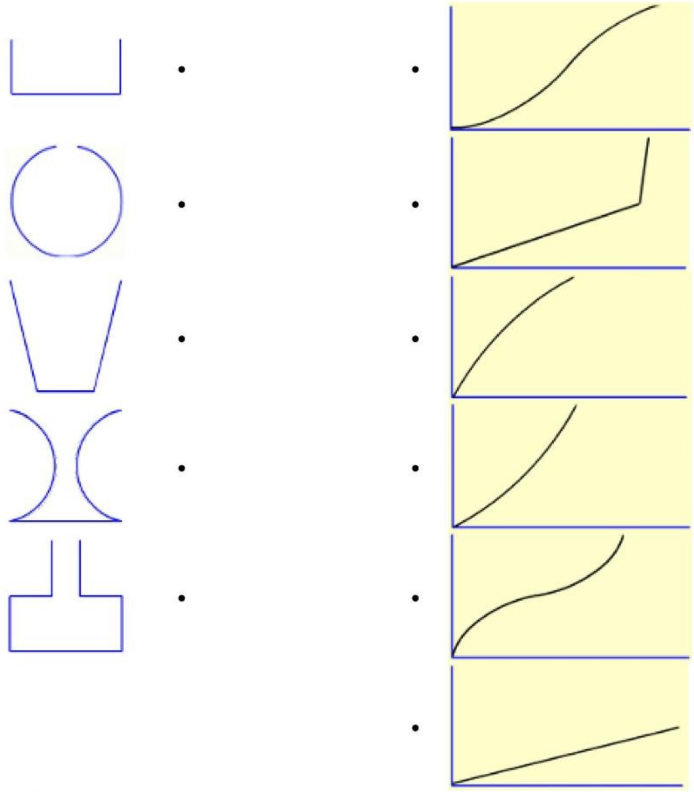
Τι παρατηρείς για τον τρόπο που αλλάζει το ύψος του νερού καθώς αλλάζει ο όγκος του νερού στο ποτήρι;

Βάλε τις μετρήσεις σου στη γραφική παράσταση.



Στην τάξη του Γιάννη, έκαναν ένα πείραμα στο οποίο γέμισαν δοχεία διαφορετικού σχήματος με νερό. Στη συνέχεια σχεδίασαν τη γραφική παράσταση του ύψους του νερού σε σχέση με τον όγκο. Στο τέλος όμως δεν θυμόντουσαν πιο σχέδιο αντιστοιχεί σε κάθε δοχείο.

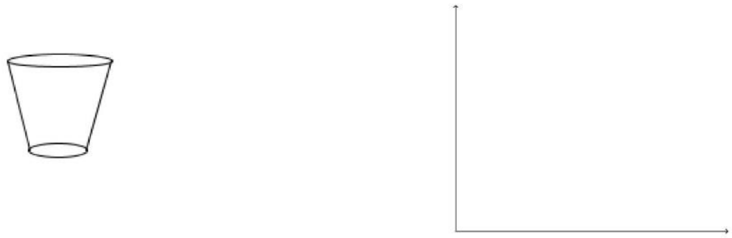
Αντιστοίχισε τα δοχεία με τη γραφική παράσταση ύψους νερού-όγκου νερού.

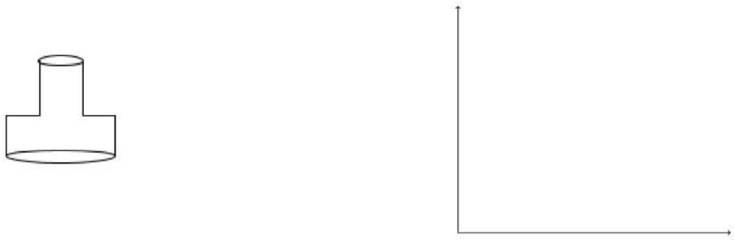


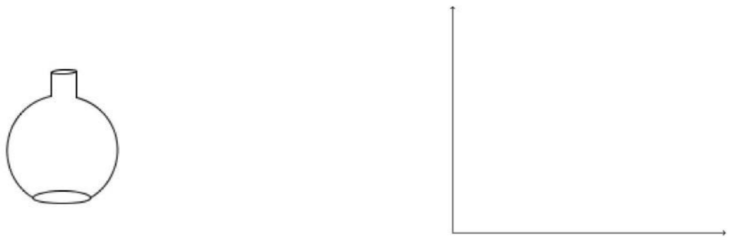
Σχεδίασε ένα δοχείο για το διάγραμμα που δεν αντιστοιχεί σε κανένα δοχείο.

Γεμίζουμε τα παρακάνω δοχεία με νερό.

Περίγραψε πως αλλάζει το ύψος του νερού καθώς αυξάνεται ο όγκος του νερού στο κάθε ένα από αυτά.







Σχεδίασε τη γραφική παράσταση του ύψους σε σχέση με τον όγκο του νερού στο δοχείο.

ΠιΤανικός – Φύλλο εργασίας

ΠΙΤΑΝΙΚΟΣ

ΌΝΟΜΑ____

Ένα πλοίο χτυπάει σε βράχο και επειδή έχει υποστεί ένα ρήγμα τα στεγανά του γεμίζουν νερό οπότε αρχίζει να βυθίζεται. Αν το νερό που εισρέει φτάσει τα 10.000 λίτρα, το πλοίο θα βυθιστεί. Θα έρθει βοήθεια σε 60 λεπτά (1 ώρα).

Βήμα 1

Τρέξε το πρόγραμμα επιλέγοντας το Βήμα 1.

Χρόνος: Πόσος χρόνος έχει περάσει από τη σύγκρουση σε λεπτά.
Νερό στο πλοίο: Ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου. Αντιστοιχεί στην μπλε γραφική παράσταση και οι τιμές του φαίνονται στον αριστερό άξονα.
Εισροή νερού: Ο ρυθμός που μπαίνει νερό στα στεγανά του πλοίου από το ρήγμα (πόσο γρήγορα).
Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου (το πόσο γρήγορα γεμίζει) φαίνεται στην κόκκινη γραφική παράσταση.

1. Αν από το ρήγμα μπαίνουν στα στεγανά 200 λίτρα νερό το λεπτό, ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου αυξάνεται, μειώνεται ή μένει σταθερός (πως μεταβάλλεται); Θα σωθεί το πλοίο;

2. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να μπαίνει νερό στο πλοίο (σε λίτρα το λεπτό) για να μη βουλιάξει ώσπου να έρθει βοήθεια;

Βήμα 2

Ευτυχώς ο μηχανικός βρήκε μια αντλία που βγάζει νερό από το πλοίο. Τρέξε το πρόγραμμα επιλέγοντας το βήμα 2.

Αντλία 1: Ο ρυθμός που βγάζει νερό από το πλοίο η αντλία 1 (πόσο γρήγορα).
Από το ρήγμα μπαίνει νερό στα στεγανά , από την αντλία βγαίνει νερό από τα στεγανά.
Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει ο όγκος του νερού τελικά στο πλοίο (το πόσο γρήγορα γεμίζει) φαίνεται στην κόκκινη γραφική παράσταση.

3. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 400 λίτρα νερό το λεπτό και η αντλία βγάζει 220 λίτρα νερό το λεπτό, πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου (λχ αυξάνεται πιο γρήγορα, πιο αργά ή το ίδιο με το ερώτημα 1); Θα σωθεί το πλοίο;

4. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 400 λίτρα νερό το λεπτό και η αντλία βγάζει 400 λίτρα το λεπτό, πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου; Θα σωθεί το πλοίο;

5. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 200 λίτρα νερό το λεπτό και στα 30' ξεκινήσουν την αντλία που βγάζει 100 λίτρα νερό το λεπτό, τι θα αλλάξει στον τρόπο που μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου; Θα σωθεί το πλοίο;

Βήμα 3

Η αντλία χάλασε αλλά ο μηχανικός βρήκε μια διαφορετική αντλία που ξεκινάει να βγάζει νερό αργά και σιγά σιγά βγάζει πιο γρήγορα. Τρέξε το πρόγραμμα επιλέγοντας το βήμα 3. Μπορείς να βάλεις τιμή για το πόσο νερό θα τραβάει στην αρχή και πόσο θα αυξάνει σε κάθε λεπτό.

6. Αν από το ρήγμα μπαίνουν 500 λίτρα νερό το λεπτό και η αντλία ξεκινάει να βγάζει 100 λίτρα νερό το λεπτό, και κάθε λεπτό ο όγκος νερού που βγάζει αυξάνεται κατά 15 λίτρα, περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στο πλοίο;

7. Από το ρήγμα μπαίνουν 500 λίτρα νερό το λεπτό. Στα 27' περίπου η αντλία έχει φτάσει να βγάζει 500 λίτρα το λεπτό και κάθε λεπτό ο όγκος νερού που βγάζει αυξάνεται κατά 15 λίτρα. Περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στο πλοίο;

Οι μπαταρίες του πλοίου δεν αντέχουν και η αντλία βγάζει νερό από τα στεγανά όλο και πιο αργά.

8. Αν η αντλία συνεχίζει να βγάζει περισσότερο νερό από όσο μπαίνει από το ρήγμα, περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στο πλοίο;

9. Αν η αντλία βγάζει λιγότερο νερό από όσο μπαίνει από το ρήγμα, περιγράψτε πως μεταβάλλεται ο όγκος του νερού στα στεγανά του πλοίου;

10. Από το ρήγμα μπαίνουν 500 λίτρα νερό το λεπτό, η πρώτη αντλία μπορεί να βγάζει 300 λίτρα νερό το λεπτό και η δεύτερη να ξεκινάει με 100 και να αυξάνει κατά 10 λίτρα το λεπτό, αλλά μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μία. Ποια από τις δύο αντλίες πρέπει να χρησιμοποιήσουν για να σωθεί το πλοίο;

Η δραστηριότητα σου φάνηκε:

Πολύ εύκολη Εύκολη Μέτρια Δύσκολη Πολύ δύσκολη

Πιστεύεις ότι κατάλαβες πως συνδέεται η αλλαγή στο πόσο γρήγορα μπαίνει νερό στο πλοίο με τον όγκο του νερού στο πλοίο;

Καθόλου Λίγο Αρκετά Πολύ

Πιστεύεις ότι αυτή η δραστηριότητα μπορεί να δοθεί σε παιδιά δημοτικού;

Ναι Ναι, με τροποποιήσεις στις ερωτήσεις Ναι, με αλλαγές στο πρόγραμμα Όχι

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Πρόγραμμα Χορήγησης Υποτροφιών για Μεταπτυχιακές Σπουδές Δευτέρου Κύκλου Σπουδών» (MIS-5003404), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη