ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ: «Μέτρηση εμβαδών επίπεδων επιφανειών, από μαθητές Ε' Δημοτικού, μέσω διερεύνησης- Inquiry based plane surface measurement by students in 5th grade»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της Βαϊτσίδη Γεωργίας

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Επιβλέπουσα της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Καλαβάσης Φραγκίσκος	Καθηγητής	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Καφούση Σουλτάνα	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Σταθοπούλου-Βασιλονικολού Χαρίκλεια	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Δεσλή Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Τάτσης Κωνσταντίνος	Αναπληρωτής Καθηγητής	Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Μούτσιος- Ρέντζος Ανδρέας	Επίκουρος Καθηγητής	Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Ρόδος, 2021

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ: «Μέτρηση εμβαδών επίπεδων επιφανειών, από μαθητές Ε' Δημοτικού, μέσω διερεύνησης- Inquiry based plane surface measurement by students in 5th grade»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της Βαϊτσίδη Γεωργίας

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Επιβλέπουσα της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Καλαβάσης Φραγκίσκος	Καθηγητής	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Καφούση Σουλτάνα	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής
Σταθοπούλου-Βασιλονικολού Χαρίκλεια	Καθηγήτρια	Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Δεσλή Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Τάτσης Κωνσταντίνος	Αναπληρωτής Καθηγητής	Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής
Μούτσιος- Ρέντζος Ανδρέας	Επίκουρος Καθηγητής	Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών	Μέλος της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Ρόδος, 2021

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

(άρθρο 8 Ν.1599/1986)

Η ακρίβεια των στοιχείων που υποβάλλονται με αυτή τη δήλωση μπορεί να ελεγχθεί με βάση το αρχείο άλλων υπηρεσιών (άρθρο 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986)

ΠΡΟΣ(1):	**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ, του ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ.**						
Ο - Η Όνομα:	ΓΕΩΡΓΙΑ		Επώνυμο:	ΒΑΙΤΣΙΔΗ			
Όνομα και Επώνυμο Πατέρα:	ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΒΑΪΤΣΙΔΗΣ						
Όνομα και Επώνυμο Μητέρας:	ΠΟΥΛΧΕΡΙΑ ΒΑΡΣΑΜΗ						
Ημερομηνία γέννησης(2):	31/10/1990						
Τόπος Γέννησης:	ΣΕΡΡΕΣ						
Αριθμός Δελτίου Ταυτότητας:	ΑΑ477493		Τηλ:	6951404686			
Τόπος Κατοικίας:	ΣΕΡΡΕΣ	Οδός:	ΠΑΝΑΓΗ ΚΑΝΑΚΗ	Αριθ:	4	ΤΚ:	62125
Αρ. Τηλεομοιοτύπου (Fax):	--		Δ/νση Ηλεκτρ. Ταχυδρομείου (Εmail):	psed16001@aegean.gr			

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις (3, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

«Είμαι συγγραφέας αυτής της διδακτορικής διατριβής και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη διδακτορική διατριβή».

Ημερομηνία: 11/06/2021

Ο - Η Δηλ.

η
ογραφή)

(1) Αναγράφεται από τον ενδιαφερόμενο πολίτη ή Αρχή ή η Υπηρεσία του δημόσιου τομέα, που απευθύνεται η αίτηση.

(2) Αναγράφεται ολογράφως.

(3) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

(4) Σε περίπτωση ανεπάρκειας χώρου η δήλωση συνεχίζεται στην πίσω όψη της και υπογράφεται από τον δηλούντα ή την δηλούσα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα βασικά αντικείμενα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και συμβάλλουν στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων θεμελιωδών για την περαιτέρω εξέλιξη των μαθητών, αλλά και τη συνολική διαμόρφωση της προσωπικότητά τους (Kablan., et al, 2013).

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στοχεύει στη κατανόηση της χρηστικής και πρακτικής διάστασής τους και στη συνειδητοποίηση της εφαρμογής τους στην καθημερινή ζωή. (Cifarelli & Sevim, 2015· Παπαδόπουλος, 2013). Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει σαφές μέσα από την οικοδόμηση και ανακάλυψη της γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια και ποικίλες συνθήκες διδασκαλίας, εντός των οποίων, ο μαθητής συσχετίζει, νοηματοδοτεί και αποκτά πολλαπλά οφέλη σε γνωστικό, μεταγνωστικό και συναισθηματικό επίπεδο (Κολέζα, 2000· Olanoff, Lo & Tobias, 2014).

Στο πέρασμα των χρόνων έχουν διατυπωθεί διάφορες παιδαγωγικές προσεγγίσεις οι οποίες προσπαθούν να δώσουν απάντηση στο ερώτημα: «*Τι μπορούν να κάνουν οι εκπαιδευτικοί, ώστε οι μαθητές να κατακτήσουν και να κατανοήσουν τη μαθηματική γνώση;*» Εκτός από την εμπέδωση του γνωστικού αντικειμένου σε διαφορετικά πλαίσια, επιδιώκεται και η ανάπτυξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων που προάγουν την κριτική και δημιουργική συμμετοχή των μαθητών ως μελλοντικών πολιτών στην κοινωνία (Engeln, Euler, & Maass, 2013). Μία προσέγγιση που βασίζεται σε αυτή τη φιλοσοφία είναι η διερευνητική, η οποία υιοθετείται διεθνώς.

Βασικός σκοπός της παρούσας διατριβής ήταν η μελέτη της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας και της επίδρασής της στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού και στην ικανότητα επιχειρηματολογίας επ’ αυτής από μαθητές Ε’ Δημοτικού. Ειδικότερα, στόχευε στην αποτύπωση των απαιτήσεων για τον σχεδιασμό και την εφαρμογή τριών διαφορετικών διδακτικών παρεμβάσεων, δύο (2) εκ των οποίων βασιζόταν στην διερευνητική προσέγγιση (*παραδοσιακή μετωπική, δομημένη διερευνητική και καθοδηγούμενη διερευνητική*). Ένας ακόμη στόχος ήταν η μελέτη των αποτελεσμάτων ως προς τη μαθηματική έννοια πριν, μετά την εφαρμογή των παρεμβάσεων, αλλά και συγκριτικά ως προς αυτές. Τέλος, επιδίωκε τη μελέτη της ικανότητας γραπτής επιχειρηματολογίας των μαθητών για την μαθηματική έννοια πριν, μετά την εφαρμογή των παρεμβάσεων, αλλά και συγκριτικά ως προς αυτές.

Αρχικά, μελετήθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας και στη συνέχεια, σχεδιάστηκαν οι τρεις (3) διαφορετικές διδακτικές παρεμβάσεις (*παραδοσιακή, δομημένη διερευνητική και καθοδηγούμενη διερευνητική*). Πριν την εφαρμογή των παρεμβάσεων οι μαθητές του δείγματος συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο, το οποίο αποτελούνταν από έργα/ ερωτήματα που είχαν στόχο την ανίχνευση των γνώσεων, για τη μαθηματική έννοια, που είχαν μέχρι τότε. Μετά τη συμπλήρωση του δοκιμίου ακολούθησε η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και της μαθηματικής έννοιας, που σε κάθε περίπτωση βασιζόταν σε όσα όριζε η κάθε προσέγγιση διδασκαλίας. Μετά το τέλος των παρεμβάσεων, οι μαθητές συμπλήρωσαν εκ νέου το ίδιο δοκίμιο με στόχο την σύγκριση των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έννοιας και της επιχειρηματολογίας.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο, πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, έδειξαν ότι οι μαθητές της παραδοσιακής κατάφεραν μεγαλύτερο μέσο όρο επίδοσης από τις άλλες δύο ομάδες μαθητών. Ωστόσο, κάτι που είναι εξίσου σημαντικό είναι το αποτέλεσμα που έδειξε πως μεγαλύτερη βελτίωση στις επιδόσεις τους ως προς τη μαθηματική έννοια κατάφεραν οι μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής, με αυτούς της δομημένης διερευνητικής και της παραδοσιακής μετωπικής να ακολουθούν. Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής προσέγγισης παρατηρήθηκε μεγαλύτερη βελτίωση και στις επιδόσεις των μαθητών μεσαίων και χαμηλών επιδόσεων. Αντίθετα, στην περίπτωση των μαθητών υψηλών επιδόσεων, η βελτίωση ήταν μεγαλύτερη σε όσους συμμετείχαν στη δομημένη διερευνητική παρέμβαση. Ως προς την ικανότητα γραπτής επιχειρηματολογίας, οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής στήριξαν τους συλλογισμούς τους σε πληρέστερα επιχειρήματα, χωρίς ωστόσο μεγάλη διαφορά από τις άλλες δύο ομάδες (την καθοδηγούμενη διερευνητική και την παραδοσιακή μετωπική).

Η γενική δομή της διατριβής έχει ως εξής. Αρχικά μελετάται το θεωρητικό πλαίσιο της διερευνητικής παρέμβασης από εννοιολογικής πλευράς αλλά και ως προς την εφαρμογή της στην πράξη. Έπειτα, πραγματοποιείται βιβλιογραφική ανασκόπηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του μέσα από τη θεωρητική οικοδόμησή της, την προσέγγισή της στο ελληνικό διδακτικό πακέτο και τις μελέτες που την έχουν χρησιμοποιήσει. Η βιβλιογραφική μελέτη κλείνει με την θεωρητική προσέγγιση της έννοιας της επιχειρηματολογίας των μαθητών και συγκεκριμένα των δομικών στοιχείων από τα οποία αποτελείται, της σημασίας της στην εκπαίδευση και των ερευνών που έχουν επικεντρωθεί σε αυτή. Την καταγραφή του θεωρητικού πλαισίου ακολουθεί η ανάλυση της μεθοδολογίας, στην οποία στηρίχθηκε η παρούσα έρευνα και η περιγραφή της. Κατόπιν πραγματοποιείται ποιοτική μελέτη των αποτελεσμάτων των παρεμβάσεων και των επιδόσεων των μαθητών ως προς το γνωστικό αντικείμενο και την επιχειρηματολογία τους. Φιλοδοξία της παρούσας διατριβής αποτέλεσε η συνεισφορά στη μελέτη του βαθμού στον οποίο η καινοτόμα αυτή μέθοδος- η διερευνητική- ενισχύει την κατανόηση της μαθηματικής γνώσης και ταυτόχρονα βελτιώνει την ικανότητα επιχειρηματολογίας.

Λέξεις κλειδιά: διερευνητική προσέγγιση, εμβαδόν, διδακτικές παρεμβάσεις, δημοτικό, επιχειρηματολογία

ABSTRACT

Mathematics is one of the main subjects of compulsory education and contributes to the acquisition of knowledge and skills fundamental to the further development of students, but also to the overall formation of their personality (Kablan., Et al, 2013).

The teaching of Mathematics aims at understanding their useful and practical dimension and to realize their application in their daily lives (Cifarelli & Sevim, 2015· Papadopoulos, 2013). This can be made clear through the construction and discovery of knowledge in different contexts and different teaching conditions, in which the student correlates, interprets and obtains multiple benefits on a cognitive, metacognitive and emotional level (College, 2000· Olanoff, Lo & Tobias, 2014).

Over the years, various pedagogical approaches have been formulated that try to answer the question: "What can teachers do so that students can acquire and understand mathematical knowledge?". In addition to the consolidation of the subject in different contexts, the development of skills and abilities that promote the critical and creative participation of students as future citizens in society is also sough (Engeln, Euler, & Maass, 2013). One approach based on this philosophy is inquiry-based, which is adopted internationally.

The main purpose of this thesis was to study the inquiry-based teaching approach and its effect on the understanding of the mathematical concept of the area and the ability to argue about it by primary school students. In particular, this thesis aimed to capture the requirements for the design and implementation of three different teaching interventions (*traditional, structured inquiry-based, guided inquiry-based approach*). Furthermore, the results were also compared in terms of mathematical meaning before, after the interventions, but also comparatively in terms of them. Lastly, the students' ability to write arguments for the mathematical concept before, after the interventions, but also comparatively in relation to them, was aimed to be studied and compared.

After studying the theoretical background of the inquiry-based teaching approach, three (3) different didactic interventions (*traditional, structured inquiry-based, guided inquiry-based approach)* were designed. Before the implementation of the interventions, the students of the sample completed an assay, which consisted of question aimed at detecting the knowledge they had until then. After completing the essay followed the teaching of argumentation and mathematical concept, which in each case was based on what was defined by each teaching approach. At the end of the interventions, the students completed the same essay again in order to compare the results in terms of mathematical meaning.

The results emerged from the students' responses to the essay, before and after the didactic interventions, showed that the students of the traditional achieved a higher average performance than the other two groups of students. However, what is equally important is the result that showed that the students of guided inquiry-based approach, with those of structured inquiry-based and traditional frontal, followed a greater improvement in their performance in terms of mathematical meaning.In the case of guided inquiry-based approach, a greater improvement was observed in the attainment of middle and low performance students. In contrast, in the case of high - performance students, the improvement was greater than those who participated in the structured inquiry-based

approach. In terms of written argumentation ability, students who participated in structured inquiry-based approached intervention based their reasoning on fuller arguments, but not much different from the other two groups of students (guided inquiry-based and traditional approach).

The general structure of the thesis is as follows. Initially, the theoretical framework of the inquiry-based intervention is studied from a conceptual point of view but also in terms of application in practice. Then, a bibliographic review of the mathematical concept of the area and its measurement is carried out through its theoretical construction, its approach to the Greek teaching package and the studies that have used it. The bibliographic study closes with the theoretical approach of the concept of students' argumentation and in particular of the structural elements of which it consists, its importance in education and the research that focused on it. The recording of the theoretical framework is followed by the analysis of the methodology, on which the present research was based and its description. Then a qualitative study of the results of the interventions and the performance of the students in terms of their subject matter and their argumentation is carried out. The ambition of this thesis was to contribute to the study of the extent to which this innovative method-the inquiry based-enhances the understanding of mathematical knowledge and at the same time improves the ability to argue.

Keywords: inquiry-based approach, area, didactic interventions, elementary school, argumentation

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί το επιστέγασμα μιας μεγάλης προσωπικής προσπάθειας αλλά ταυτόχρονα και μιας αδιάκοπης συμπαράστασης-συνδρομής από πολλούς ανθρώπους τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για την πολύτιμη υποστήριξη και να τους εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για τη βοήθειά τους.

Πρώτα απ' όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Σκουμπουρδή Χρυσάνθη του Πανεπιστημίου Αιγαίου, η οποία μου έδειξε εμπιστοσύνη, με καθοδήγησε στις ερευνητικές μου αναζητήσεις και με στήριξε καθ' όλη τη διάρκεια της ερευνητικής μου προσπάθειας, από τη στιγμή που έγινα δεκτή ως Υποψήφια Διδακτόρισσα μέχρι και σήμερα. Η καθοδήγηση και οι συμβουλές της αποτέλεσαν σημαντικό κίνητρο για την συγγραφή και το επιστημονικό επίπεδο της παρούσας διατριβής. Ένα θερμό ευχαριστώ για τη μοναδική συνεργασία μας σε επιστημονικό και ανθρώπινο επίπεδο. Αποτελεί για εμένα υπόδειγμα Ανθρώπου και Καθηγήτριας.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Καθηγητή κ. Καλαβάση Φραγκίσκο του Πανεπιστημίου Αιγαίου για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή, τη στήριξη και τις πολύτιμες επισημάνσεις και υποδείξεις, οι οποίες υπήρξαν καθοριστικές για την ποιοτική αναβάθμιση και ολοκλήρωση της διατριβής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια κ. Καφούση Σουλτάνα του Πανεπιστημίου Αιγαίου για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή, για τις πολύτιμες συμβουλές της στις συναντήσεις μας και τους εποικοδομητικούς διαλόγους που περιείχαν προτάσεις και συμβουλές που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διατριβής.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω και στην κ. Σταθοπούλου-Βασιλονικολού Χαρίκλεια, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στην κ. Δεσλή Δέσποινα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου, στον κ. Τάτση Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και στον κ. Μούτσιο-Ρέντζο Ανδρέα, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην επταμελή εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής μου διατριβής καθώς και για το επιστημονικό τους έργο, το οποίο αποτέλεσε πηγή έμπνευσης και σημαντικό υλικό αναφοράς και έρευνας.

Η εκπόνηση μιας διατριβής απαιτεί εκτός από τη διερεύνηση του θέματος και τον σχεδιασμό της, ανθρώπους που την πλαισιώνουν και χωρίς αυτούς δεν θα είχε ολοκληρωθεί. Ως εκ τούτου, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συμμετέχοντες στην ερευνητική διαδικασία και συγκεκριμένα τους συναδέλφους εκπαιδευτικούς που μου παραχώρησαν κάποιες ώρες διδασκαλίας στα τμήματά τους, αλλά και τους μαθητές του Δημοτικού Σχολείου Νεοχωρίου Αιτωλοακαρνανίας και του 4^{ου} Δημοτικού Σχολείου Κορωπίου Αττικής. Χωρίς αυτούς, η έρευνα δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους μου, οι οποίοι με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια και κατανοούσαν τις ώρες μελέτης μου. Δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τον Δημήτρη για την αισιόδοξη αύρα του, την ηρεμία και την στήριξή του, αλλά και την Αφροδίτη για τις εισηγήσεις και τις συμβουλές της στη συγγραφή της διατριβής μου, καθώς και την ψυχολογική καθοδήγηση που ακούραστα μου έδινε όποτε τη χρειαζόμουν.

Τέλος το πιο μεγάλο «ευχαριστώ» απευθύνεται στα μέλη της οικογένειάς μου. Σε εκείνους αφιερώνεται η παρούσα διατριβή, καθώς, χωρίς τη δική τους στήριξη δεν θα ήταν δεδομένη η ολοκλήρωσή της. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στη μητέρα μου Πουλχερία, τον πατέρα μου Κωνσταντίνο και τον αδερφό μου Ζήση, που με παρακίνησαν να ξεκινήσω αυτό το ταξίδι με όλη τους την αγάπη, την ενθάρρυνση, την εμψύχωση και την πίστη τους σε μένα. Στάθηκαν στο πλευρό μου πραγματικοί συνοδοιπόροι και συμπαραστάτες καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου δίνοντάς μου δύναμη και κουράγιο να συνεχίζω και να ξεπερνάω όλα τα μικρά ή μεγαλύτερα εμπόδια.

Ευρετήριο Πινάκων

Ευρετήριο Εικόνων

Ευρετήριο Διαγραμμάτων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2.3 Επιχειρηματολογία στην εκπαίδευση των Μαθηματικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Οριοθέτηση του προβλήματος και αναγκαιότητα της εργασίας

Καθώς η σύγχρονη κοινωνία και οικονομία χαρακτηρίζεται από περίπλοκα, δυναμικά και ισχυρά συστήματα πληροφοριών, που βασίζονται τόσο σε γνώσεις όσο και σε δεξιότητες, τα τελευταία χρόνια έχει προκύψει η ανάγκη για επαναπροσδιορισμό της φύσης των σχολικών μαθηματικών, ενώ παράλληλα παρατηρείται μια στροφή στην αξιοποίηση πιο σύνθετων προβλημάτων και διερευνήσεων στα σχολικά Μαθηματικά (English & Mousoulides, 2015· Mousoulides, 2013). Αυτή η στροφή είναι απαραίτητη, καθώς, περισσότερο σήμερα παρά ποτέ, οι μαθητές - μελλοντικοί πολίτες καλούνται να αναπτύξουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων, όπως η δημιουργικότητα, η πρωτοτυπία, η επίλυση προβλήματος, η μοντελοποίηση και η επιχειρηματολογία (Doerr & English, 2003). Έτσι, απαιτείται η υιοθέτηση μίας προσέγγισης που θα προκρίνει την ταυτόχρονη ανάπτυξη γνωστικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων όπως οι προαναφερθείσες.

Η αναγκαιότητα της παρούσας έρευνας προκύπτει ακριβώς από αυτή την απαραίτητη πλέον υιοθέτηση μιας διδακτικής προσέγγισης που να ενισχύει τη γνώση αλλά και να επικεντρώνεται εξίσου στην καλλιέργεια ευρύτερων πνευματικών δεξιοτήτων από πλευράς μαθητών. Αυτός ήταν και ο λόγος της επιλογής της διερευνητικής προσέγγισης, προκειμένου να μελετηθεί τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά.

Η παραπάνω προσέγγιση αξιοποιήθηκε στο πλαίσιο της διδασκαλίας της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του, αντικείμενο το οποίο συνιστά ένα δύσκολο και απαιτητικό κεφάλαιο στη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών και στο οποίο παρουσιάζονται πολλές παρανοήσεις από τους μαθητές. Τα διαθέσιμα ερευνητικά δεδομένα μαρτυρούν ιδιαίτερες δυσκολίες γνωστικής και διαδικαστικής φύσης, ωστόσο υστερούν ως προς το πλήθος τους.

Για το λόγο αυτό, η παρούσα διατριβή σχεδιάστηκε με στόχο την ερευνητική μελέτη της διερευνητικής προσέγγισης και την ανάλυση της επίδρασής της στις γνωστικές επιδόσεις και την επιχειρηματολογία μαθητών Δημοτικού.

1.2 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Βασικός σκοπός της έρευνας είναι η μελέτη της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας και της επίδρασής της στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού και στην ικανότητα επιχειρηματολογίας επ' αυτής από μαθητές Ε' Δημοτικού.

Οι επιμέρους στόχοι της παρούσας έρευνας είναι οι εξής:

1. Να αποτυπωθούν οι απαιτήσεις για το σχεδιασμό και την εφαρμογή κάθε διδακτικής παρέμβασης (καθοδηγούμενης διερευνητικής, δομημένης διερευνητικής και παραδοσιακής μετωπικής προσέγγισης).
2. Να μελετηθούν και να συγκριθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών Ε' Δημοτικού στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού και στη μέτρησή της μετά τις παρεμβάσεις αλλά και συγκριτικά ως προς τις τρεις διαφορετικές παρεμβάσεις.
3. Να μελετηθεί και να συγκριθεί η ικανότητα γραπτής επιχειρηματολογίας των μαθητών Ε' Δημοτικού, για την μαθηματική έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του, πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, αλλά και ως προς τις τρεις διαφορετικές παρεμβάσεις.

Ερευνητικά Ερωτήματα:

Ως προς τη διδακτική παρέμβαση

1. Ποιες είναι οι απαιτήσεις στο σχεδιασμό των διερευνητικών παρεμβάσεων (καθοδηγούμενη διερευνητική και δομημένη διερευνητική) σε σχέση με τη διδασκαλία, τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό;
2. Ποιες είναι οι απαιτήσεις στην εφαρμογή των διερευνητικών παρεμβάσεων (καθοδηγούμενη διερευνητική και δομημένη διερευνητική) σε σχέση με τη διδασκαλία, τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό;

Ως προς τη μαθηματική έννοια

3. Ποιες είναι οι γνώσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;
4. Ποιες είναι οι γνώσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση και τι διαφοροποιήσεις εντοπίστηκαν σε σχέση με την παρέμβαση;

5. Τι είδους λάθη παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών Ε’ Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;

6. Τι είδους λάθη παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών Ε’ Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση;

Ως προς την καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας

7. Τι χαρακτηριστικά εμφάνισε η δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών Ε’ Δημοτικού για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;

8. Τι χαρακτηριστικά εμφάνισε η δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών Ε’ Δημοτικού για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση;

9. Ποιες διαφοροποιήσεις παρουσίασε η δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών Ε’ Δημοτικού για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του, σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν;

1.3 Σημασία και πρωτοτυπία της εργασίας

Ένα από τα διλήμματα του εκπαιδευτικού ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης, βάσει της οποίας θα δομήσει τη μεθοδολογία του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε η διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας, η οποία μετρά πολυετή παρουσία στις Φυσικές Επιστήμες αλλά περιορισμένες αναφορές στο αντικείμενο των Μαθηματικών.

Την επιλογή καθοδήγησε το γεγονός ότι τα συμπεράσματα από εφαρμογές της εν λόγω προσέγγισης σε προγράμματα (Artigue & Baptist, 2012· Maaß & Artigue, 2013· PRIMAS, 2012) και σε έρευνες (Friesen & Scott, 2013· Hmelo-Silver, Duncan, & Chinn, 2007· Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015 · Towers, 2010) καταδεικνύουν ότι η διδασκαλία που βασίζεται σε αυτή μπορεί να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική τόσο για την οικοδόμηση της γνώσης όσο και την καλλιέργεια της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της επιχειρηματολογίας (Maaβ & Artigue, 2013· Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015). Οι παραπάνω δεξιότητες αποτελούν, μεταξύ άλλων, εφόδια που οφείλει να κατέχει ένας μαθητής του 21$_{ου}$ αιώνα (Ananiadou & Claro, 2009· Birkley, Erstad, Herman, Raizen, Ripley & Rumble, 2010). Επιπλέον, η διερευνητική προσέγγιση εμπεριέχει καινοτόμα χαρακτηριστικά, με σημαντικότερο το γεγονός ότι η γνώση οικοδομείται με διαδικασία παρόμοια με εκείνη που ακολουθείται από έναν ερευνητή/επιστήμονα και στην οποία καλλιεργούνται και αναπτύσσονται επιστημονικές/διερευνητικές δεξιότητες. Ωστόσο, έχουν επισημανθεί ορισμένες δυσκολίες στην εφαρμογή της, εξαιτίας παραγόντων όπως οι ιδιαιτερότητες και οι απαιτήσεις της ίδιας της προσέγγισης, ο ασαφής ορισμός της και τα περιορισμένα ερευνητικά δεδομένα.

Εκτός από την οριοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης, ενδιαφέρον είχε και η εφαρμογή της στα Μαθηματικά, καθώς, μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που πραγματοποιήθηκε, διαφάνηκε ότι αυτή έχει εφαρμοστεί ως επί το πλείστον στο φάσμα των Φυσικών Επιστημών (McDermott & Shaffer, 1992˙ Thacker, Kim, & Trefz, 1994˙ Herflich, Dixon, & Dixon & Davis, 2001). Επιπλέον, τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα, τα οποία και μελετήθηκαν, αφορούσαν κυρίως σε μαθητές δευτεροβάθμιας, τριτοβάθμιας (Kwon, Rasmussen, & Allen, 2005˙ Ju & Kwon, 2007˙ Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle & Burtch, 2006) και ελάχιστα σε μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Abdi, 2014˙ Simsek & Kabapmar ,2010)

Η πρωτοτυπία της συγκεκριμένης έρευνας έγκειται στην ανάδειξη των χαρακτηριστικών εκείνων που ορίζουν τη διερευνητική προσέγγιση, καθώς επίσης και στην εφαρμογή της σε μαθητές Δημοτικού, ιδιαίτερα δε στο μάθημα των Μαθηματικών. Η οριοθέτηση της έννοιας και τη εφαρμογής της προσέγγισης συνοδεύονται από τη μελέτη των αποτελεσμάτων της σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο και τη δεξιότητα της επιχειρηματολογίας, η οποία κατά βάση δεν εξετάζεται στις συγκεκριμένες ηλικίες.

1.4 Δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία δομείται γύρω από τρεις άξονες ενδιαφέροντος και περιεχομένου τόσο ως προς το θεωρητικό της πλαίσιο όσο και ως προς το ερευνητικό της κομμάτι. Οι άξονες αυτοί είναι: η *διερευνητική προσέγγιση*, η *μαθηματική έννοια* και *η ικανότητα επιχειρηματολογίας* από τους μαθητές.

Η *διερευνητική προσέγγιση* αναλύεται βάσει ερευνητικών δεδομένων τόσο στην ελληνική όσο και στη διεθνή βιβλιογραφία. Στόχος της ανάλυσης είναι η σκιαγράφηση των βασικών χαρακτηριστικών της προσέγγισης, καθώς και των διαφοροποιητικών στοιχείων της συγκριτικά με εκείνης που παραδοσιακά εφαρμόζεται στην εκπαίδευση.

Η μαθηματική έννοια μελετάται ως προς τα θεωρητικά και ιστορικά της χαρακτηριστικά· την προσέγγισή της μέσα από το ελληνικό διδακτικό πακέτο· τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με τα εξελικτικά στάδια δόμησης της κατανόησής της και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία αυτή.

Τέλος, αποτυπώνονται με σαφήνεια οι έννοιες της επιχειρηματολογίας -ως δεξιότητας- αλλά και του ίδιου του επιχειρήματος. Η τελευταία αυτή αποτύπωση οδήγησε στο σχεδιασμό ενός εργαλείου αξιολόγησης της δομής ενός επιχειρήματος που βοήθησε στην ανάλυση των δεδομένων τόσο πριν όσο και μετά τις παρεμβάσεις.

Το ερευνητικό μέρος της έρευνας δομείται και πάλι γύρω από τους τρεις αυτούς άξονες. Αρχικά, περιγράφονται οι διδακτικές παρεμβάσεις από τη φάση του σχεδιασμού μέχρι την εφαρμογή τους· στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια, όπως προέκυψαν από αυτές· τέλος, αναλύεται η επίδραση της κάθε διδασκαλίας στην ικανότητα των μαθητών να καταγράφουν επιχειρήματα σε σχέση με τη μαθηματική έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Διερευνητική προσέγγιση

2.1.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο αναφέρεται στη θεωρητική ανάλυση της διερευνητικής προσέγγισης, όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία. Λόγω του ότι δεν υπάρχει σαφής ορισμός για τη διερευνητική προσέγγιση, προκειμένου να οριοθετηθεί, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της, όπως ορίζονται από διάφορους μελετητές.

Αρχικά, εξετάζεται η διερευνητική προσέγγιση ως προς τα χαρακτηριστικά της αλλά και ως προς τη σχέση της με άλλες θεωρίες μάθησης, με τις οποίες συχνά έχει ταυτιστεί. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαφορετικά είδη της διερευνητικής προσέγγισης, όπως αυτά διακρίνονται ανάλογα με το διαφορετικό βαθμό καθοδήγησης που δίνεται από τον εκπαιδευτικό, καθώς και τα μοντέλα διδασκαλιών που βασίζονται σε αυτή. Τέλος, με στόχο το σωστό σχεδιασμό και την εφαρμογή της στη σχολική πραγματικότητα, μελετώνται τα ερευνητικά δεδομένα εφαρμογής της διερευνητικής προσέγγισης

2.1.2 Ιστορική αναδρομή της διερευνητικής προσέγγισης

Η οριοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης στο παρόν κεφάλαιο ξεκινάει με μία αναδρομή στην εξέλιξη της έννοιας, καθώς πρόκειται για μία προσέγγιση που διαθέτει μακρά πορεία στην ιστορία της Διδακτικής.

Από τις αρχές, λοιπόν, της πρώτης δεκαετίας του $20_{ου}$ αιώνα, ο παιδαγωγός Dewey διατύπωσε την άποψη πως ο μαθητής πρέπει να συμμετέχει ενεργά στη μάθησή του και ο δάσκαλος να καθοδηγεί και να αποκτά το ρόλο του μεσολαβητή. Το 1916 ο ίδιος ο Dewey υποστήριξε ότι οι μαθητές θα πρέπει να διδάσκονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να εμπλουτίζουν την προσωπική τους επιστημονική γνώση, με την προϋπόθεση τα προβλήματα με τα οποία καταγίνονται να τους ενδιαφέρουν και να μπορούν να μελετηθούν. Αργότερα, το 1937, ο Dewey πρόσθεσε ένα νέο στοιχείο στην ήδη υπάρχουσα θεωρία του: τα υπό μελέτη προβλήματα πρέπει να σχετίζονται με τις εμπειρίες των ίδιων των μαθητών και να εγγίζουν την διανοητική τους ικανότητα.

Το 1944 ο Dewey τροποποίησε τα στάδια της επιστημονικής μεθόδου που οφείλει ο μαθητής να ακολουθεί, με στόχο την επίτευξη της *αναστοχαστικής σκέψης*. Η μέθοδος αυτή, σύμφωνα με τον ίδιο αποτελείται από πέντε (5) φάσεις: «σύλληψη της ιδέας ή κατατοπισμό (suggestion), επιχειρηματολογία (intellectualization), υπόθεση (hypothesis), αιτιολόγηση (reasoning) και έλεγχο της υπόθεσης ή δράση (action). Ο Dewey ήταν ο πρώτος που την εισήγαγε στο εκπαιδευτικό σύστημα για να ακολουθήσει έπειτα η ενσωμάτωσή της στη διδακτική των Φυσικών Επιστημών από τον Schwab μέσα από το *Biological Science Curriculum Study* (1963). Η εμφάνιση του εποικοδομητισμού οδήγησε σε μία επαναδιατύπωση της Διερευνητικής Μεθόδου: «Πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση, ερευνώνται και λαμβάνονται υπόψη οι προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών και, μέσα από τις διερευνητικές διαδικασίες, στοχεύουμε σε μία εννοιολογική αλλαγή».

Μετά τον Dewey, το 1957, η εκτόξευση του Sputnik έβαλε σε σκέψεις την κοινωνία της Αμερικής σε ό, τι αφορά στην ποιότητα της διδασκαλίας των Φυσικών Επιστημών (ΦΕ) στα σχολεία. Ξεκίνησε λοιπόν μια περίοδος προσπάθειας για βελτιστοποίηση της διδασκαλίας των ΦΕ. Το 1966 ο Joseph Schwab αναφέρθηκε στην επιστήμη ως μια σειρά από ιδέες, οι οποίες συνεχώς ανανεώνονται, όταν προκύπτουν νέες γνώσεις. Ο Schwab θεώρησε τη διερεύνηση ως μια βασική μέθοδο διδασκαλίας, γι’ αυτό και παρακίνησε τους εκπαιδευτικούς να την εφαρμόσουν στο εργαστήριο καθοδηγώντας τα παιδιά να αναζητήσουν πληροφορίες, να μελετούν βιβλία και να κάνουν αναφορές για την επιστήμη. Οι μαθητές, σύμφωνα με τον Schwab, θα έπρεπε να αντιμετωπίζουν την επιστήμη ως μια σειρά εννοιολογικών δομών, οι οποίες είναι απαραίτητο να αναθεωρούνται συνεχώς όταν ανακαλύπτονται νέες πληροφορίες ή νέα αποδεικτικά στοιχεία. Ακόμη, ενθάρρυνε τους καθηγητές των ΦΕ να χρησιμοποιούν το εργαστήριο για να βοηθούν τους μαθητές στη μελέτη των εννοιών της επιστήμης (Schwab, 1963).

Την ίδια περίοδο ο Rutherford επεσήμανε ότι η επιστήμη θα πρέπει να μελετάται υπό το πρίσμα του πώς ανακαλύφθηκε, έτσι ώστε να προκύπτουν ζητήματα μελλοντικής διερεύνησης και ερωτήματα. Λίγο αργότερα, ο R. Suchman (1966) λαμβάνοντας υπόψη την αναστοχαστική σκέψη (reflective thinking) του Dewey διατύπωσε την άποψη ότι όσα αναλύει ο τελευταίος συνοψίζονται στη φράση «ανακάλυψη μέσω πειραματισμού και σκέψης». Για τον Suchman, η διερεύνηση ενός θέματος/προβλήματος από τους μαθητές περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες/στάδια: διατύπωση υποθέσεων, διάκριση μεταξύ υπόθεσης και δεδομένων και συνειδητοποίηση της αλληλεξάρτησης και αλληλοστήριξης υπόθεσης και δεδομένων. Σύμφωνα μάλιστα με τα ερευνητικά του αποτελέσματα, οι έννοιες και τα δεδομένα που αναδύονται από τους ίδιους τους μαθητές παραμένουν για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα στη μνήμη τους.

Παράλληλα, επηρεασμένος επίσης από τον Dewey, ο Fenton (1966) υποστήριξε ότι η ίδια διδακτική προσέγγιση αποτελεί μία διεργασία που σχετίζεται με μία σειρά από νοητικές δεξιότητες. Η διεργασία αυτή περιλαμβάνει έξι (6) στάδια: α) τον προσδιορισμό του προβλήματος, β) τη διατύπωση υποθέσεων, γ) τη μελέτη των συνεπειών των υποθέσεων, δ) τη συλλογή δεδομένων, ε) την ανάλυση, αξιολόγηση και ερμηνεία των δεδομένων και στ) τον έλεγχο - αξιολόγηση των υποθέσεων με βάση τα δεδομένα.

Ακόμη, το διάστημα εκείνο σχηματίστηκε και η πρώτη ομάδα εργασίας που ασχολήθηκε με τη διερεύνηση, ονομάζεται Project Synthesis και αναφέρεται, μεταξύ άλλων, σε λόγους για τους οποίους είναι δύσκολο να εφαρμοστεί η διερεύνηση από τους εκπαιδευτικούς (Rutherford, 1964). Το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, άρχισαν να ασχολούνται με τη διδασκαλία των ΦΕ και τη διερεύνηση όλο και περισσότεροι ερευνητές, μεταξύ των οποίων και διάφοροι οργανισμοί και ενώσεις (π.χ. AAAS4 , NRC) (Rutherford & Ahlgren, 1989). Την περίοδο αυτή τοποθετούνται χρονικά και οι απαρχές της εμφάνισης αυτής της παιδαγωγικής μεθόδου στην Ευρώπη (MASS project. 2014).

Η AAAS πρώτη εκδίδει το “Project 2061”, στο οποίο συμπεριλαμβάνονται έγγραφα που αναφέρονται στη διερεύνηση και προτείνουν ιδέες εφαρμογής της. Σύμφωνα με αυτό, η διδασκαλία θα πρέπει: • να ξεκινάει με ερωτήσεις για τη φύση, • να παρέχει ιστορική οπτική, • να επικεντρώνεται στη συλλογή και τη χρήση των δεδομένων με ενεργή συμμετοχή και συνεργασία των μαθητών και με έμφαση στη σαφή έκφραση και όχι στην απομνημόνευση τεχνικών όρων, • να συνδέει την ανακάλυψη με τη γνώση. Ένα πολύ σημαντικό έγγραφο, που σχετίζεται και με τη διερεύνηση, είναι το *National Science Education Standards (NSES)*, το οποίο πραγματεύεται το πώς πρέπει να διδάσκονται οι ΦΕ (1996).

Το NSES προχώρησε πιο πέρα από το *Project 2061* περιγράφοντας τη διερεύνηση και το πώς αυτή θα πρέπει να γίνεται. Επειδή όμως δεν έδινε επαρκείς και σαφείς πληροφορίες και υπήρχε γενικά μια σύγχυση σε ό, τι αφορά στο περιεχόμενό του, το έτος 2000 το NRC εξέδωσε το *Inquiry and the National Science Education Standards*, στο οποίο ταυτοποιούνται τα πέντε (5) βασικά χαρακτηριστικά της διερεύνησης: επιστημονικά προσανατολισμένες ερωτήσεις που να ενεργοποιούν τους μαθητές· δεδομένα που συλλέγουν οι μαθητές για να αναπτύξουν και να αξιολογήσουν τις εξηγήσεις που έδωσαν στις επιστημονικές ερωτήσεις· απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές στις επιστημονικές ερωτήσεις· αξιολόγηση αυτών των απαντήσεών τους από τους ίδιους τους μαθητές· Αιτιολόγηση της επιλογής τους να απαντήσουν στις ερωτήσεις με αυτόν τον τρόπο. Στο συγκεκριμένο έγγραφο, το NRC, σε αντίθεση με τις απόψεις των Dewey και Schwab, δείχνει να αποδέχεται το γεγονός πως δεν πρέπει όλες οι έννοιες των ΦΕ να εξηγούνται και να διδάσκονται μέσω της διερεύνησης. Παράλληλα όμως, συμπληρώνει και επεκτείνει τις απόψεις των Dewey και Schwab επισημαίνοντας ότι, όταν οι μαθητές εξασκούνται στη διερεύνηση, αναπτύσσουν την κριτική τους σκέψη και τον επιστημονικό τους συλλογισμό, ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνουν μια βαθύτερη γνώση για την επιστήμη. Σε άλλη παράγραφο το έγγραφο του NRC συμφωνεί με τον Schwab και αναφέρεται στο πώς και γιατί η επιστημονική γνώση αλλάζει, όταν βρεθούν νέα δεδομένα ή μέθοδοι. Τέλος, επισημαίνονται οι στρατηγικές που θα πρέπει να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές ουσιαστικά τις ΦΕ. Τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές θα πρέπει να είναι επιστημονικά προσανατολισμένα και εκείνοι συνεργαζόμενοι μεταξύ τους θα πρέπει να μάθουν να συγκεντρώνουν, να αιτιολογούν, να αξιολογούν και να δημοσιεύουν τα δεδομένα και τις ερμηνείες τους με επιστημονικό τρόπο.

Το NRC πρότεινε επίσης το 1996 την εστίαση των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη διερευνητική μάθηση σε τρεις τομείς. Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν: α) να αναπτύσσουν τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών, β) να γνωρίζουν σε βάθος τις επιστημονικές μεθόδους για την αναζήτηση ερευνητικών υποθέσεων και γ) να γνωρίζουν μια ποικιλία διδακτικών στρατηγικών που θα βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν τα περί της επιστημονικής έρευνας, να αναπτύξουν ερευνητικές δεξιότητες και να κατανοήσουν επιστημονικές έννοιες.

2.1.3 Οριοθέτηση και χαρακτηριστικά διερευνητικής προσέγγισης

Η διερευνητική προσέγγιση μάθησης συναντάται στη βιβλιογραφία, με τον όρο "inquiry-based learning", ενώ η ελληνική μετάφραση *διερευνητική* δεν είναι η μοναδική που έχει αποδοθεί, καθώς αποτελεί ένα πολύπλοκο και πολύπλευρο κατασκεύασμα, στο οποίο αποδίδονται ορισμοί σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία της Κύπρου ο όρος "inquiry" μεταφράζεται με τον όρο «διερώτηση». Οι υποστηρικτές της ορολογίας αυτής, τονίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου διδασκαλίας δεν μεταδίδουν μόνο πληροφορίες, αλλά δημιουργούν γνώση θέτοντας συνεχώς ερωτήσεις (Rocard, Csermely, Jorde, Lenzen, Wahlberg-Henriksson & Hemmo, 2007).

Σύμφωνα με τους ερευνητές της επιστημονικής κοινότητας, οι διδασκαλίες που πραγματοποιούνται σύμφωνα με όσα ορίζει η προσέγγιση αυτή, καλούν τους μαθητές να εργαστούν με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι επιστήμονες (Artigue, Dilo, Harlen, & Lena, 2012). Η διερευνητική προσέγγιση αποτελεί μία σύγχρονη διδακτική πρακτική, η οποία συμβάλλει στην καλλιέργεια και στην ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων, όπως της συνειδητής διαδικασίας διάγνωσης και κριτικής θεώρησης προβλημάτων, της διάκρισης εναλλακτικών λύσεων, του σχεδιασμού έρευνας, της διερεύνησης υποθέσεων, της αναζήτησης πληροφοριών, της κατασκευής μοντέλων και της διατύπωσης συνεκτικών επιχειρημάτων (Linn, Davis, & Bell, 2013), κάτι το οποίο επιτυγχάνεται μέσα από συζητήσεις με επιχειρήματα μέσα σε ένα ανοιχτό κλίμα που ενδείκνυται για ανταλλαγή απόψεων κάτι από δημοκρατικές συνθήκες (Collins 1988˙ Zachos et al 2000˙ Duschl 2004˙ Lee et al 2004˙ Wallace & Kang 2004).

Όπως αναφέρει η Εθνική Επιστήμη Προτύπων Εκπαίδευσης (NSES, Anderson, 2002), η διερευνητική μάθηση (inquiry-based learning), ως αποτέλεσμα της διερευνητικής διδασκαλίας (inquiry-based teaching) αποτελεί αυτό που κάνουν οι μαθητές και όχι αυτό που γίνεται για τους μαθητές (NRC, 1996:2). Η ενεργός συμμετοχή των μαθητών και η ασάφεια ως προς το τι περιλαμβάνει κάνει την μελέτη της πιο δύσκολη. Η «Διερευνητική Μάθηση», όπως ορίζεται από τους Linn, Davis & Bell (2004, σ.4), είναι «η συνειδητή διαδικασία διάγνωσης προβλημάτων, κριτικής θεώρησης πειραμάτων και διάκρισης εναλλακτικών λύσεων, σχεδιασμού ερευνών, διερεύνησης υποθέσεων, αναζήτησης πληροφοριών, κατασκευής μοντέλων, συζήτησης με «ομοίους» και διατύπωσης συνεκτικών επιχειρημάτων». Λίγο πριν, ο Newell (2003) όρισε τη διερευνητική διδασκαλία ως τη διαδικασία που δίνει έμφαση περισσότερο στο ρόλο του μαθητή, παρά στο Πρόγραμμα Σπουδών. Συγκεκριμένα, ανέφερε πως οι πρωτογενείς πηγές, τα δεδομένα και τα υλικά απαιτείται να διερευνώνται από τους μαθητές και όχι να παρουσιάζονται έτοιμα σε μορφές διαλέξεων από τους εκπαιδευτικούς. Με τον Newell (2003) συμφωνούν και οι Wilhelm (2007), Chu, Tse, Loh, Chow Fung και Rex (2008) , οι οποίοι ορίζουν επίσης τη διερευνητική διδακτική προσέγγιση ως μία διαδικασία με επίκεντρο τον μαθητή.

Η διερευνητική διδασκαλία προωθήθηκε επίσημα ως παιδαγωγική πρακτική βελτίωσης της επιστημονικής μάθησης σε πολλές χώρες και κατόπιν δημοσίευσης της έκθεσης Rocard (2007) ως ένας από τους κορυφαίους εκπαιδευτικούς σκοπούς. Σύμφωνα με την έκθεση αυτή, ο όρος Διερευνητική Μέθοδος Διδασκαλίας αποτελεί μία εξελιγμένη ορολογία της Επαγωγικής Μεθόδου Διδασκαλίας (Inductive Approach), στην οποία αφήνεται από τον εκπαιδευτικό περισσότερος χώρος για παρατήρηση και πειραματισμό καθώς επίσης η κατασκευή της γνώσης γίνεται από τους μαθητές με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Η προσέγγιση αυτή περιγραφόταν παραδοσιακά ως «από κάτω προς τα πάνω» προσέγγιση.

Με άλλα λόγια, η διερευνητική διδακτική προσέγγιση, αποτελεί μία σύγχρονη διδακτική προσέγγιση που συμβάλλει στην καλλιέργεια και την ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων (Πετροπούλου και συν. 2015. European Commission, 2007). Η προσέγγιση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε μαθητές κάθε ηλικίας, υποδομής και δυνατοτήτων. Οι μεγαλύτεροι σε ηλικία ή οι περισσότεροι εξασκημένοι μαθητές μπορεί να ακολουθήσουν μία περισσότερο περίπλοκη διαδικασία μελέτης και να διατυπώνουν περισσότερο περίπλοκα ερωτήματα από τους μαθητές. Η κάθε μελέτη μπορεί να δομηθεί με βάση το εκάστοτε δείγμα μαθητών, τους στόχους που θέτει ο εκπαιδευτικός, το υλικό και το χρόνο που έχει στη διάθεσή του. Ακόμη, παρά τα στάδια από τα οποία αποτελείται και τα οποία αναλύσαμε παραπάνω, μία διερευνητική διδασκαλία έχει αρκετά εύκαμπτη δομή και μπορεί να περιλαμβάνει μία αρκετά αναλυτική μελέτη κάποιου θέματος ή μία επιφανειακή μελέτη κάποιων θεμάτων συγκεκριμένου εύρους ενδιαφέροντος. Η εύκαμπτη αυτή δομή της συγκεκριμένης προσέγγισης την προσαρμόζει και στα διαφορετικά στυλ μάθησης που μπορεί να εμφανίζουν οι μαθητές (Barron & Darling-Hammond, 2008).

Σύμφωνα με πρόσφατη δημοσίευση του Cincera (2013), η διερευνητική μέθοδος δεν αντιπροσωπεύει μία ενιαία μεθοδολογία. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύμπλεγμα προσεγγίσεων που δίνουν έμφαση σε διαφορετικά στοιχεία, ενώ παράλληλα αποτελεί μία δυναμική διαδικασία η οποία οδηγεί σε κατανόηση του κόσμου μέσα από ερωτήσεις, προβληματισμούς και προκλήσεις. Επίσης, ο Papacek (2010) αναφέρει ότι δεν είναι μια στενά καθορισμένη εκπαιδευτική μέθοδος, αλλά η ερμηνεία της σχετίζεται με τον ρόλο του εκπαιδευτικού που τη χρησιμοποιεί.

Η ενσωμάτωση του όρου αυτού στη σχολική πραγματικότητα αποσκοπεί στην ενσωμάτωση της κατανόησης των επιστημονικών ιδεών και της φύσης της επιστήμης, στην κατανόηση και τη χρήση επιστημονικών πρακτικών σε συνδυασμό με την εκμάθηση ιδεών και αρχών γύρω από ένα θέμα, καθώς επίσης και στην καλλιέργεια στοχαστικών δεξιοτήτων (Duschl & Grandy 2008). Στη διερευνητική μέθοδο η φύση της επιστήμης εμφανίζεται ως ένα πλαίσιο ή ένα σύνολο από στάδια που προέρχονται από τον τρόπο με τον οποίο η ίδια η επιστήμη ερευνά. Ακόμη, μέσω της συγκεκριμένης προσέγγισης, επιδιώκεται οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν συστηματικά τους κανόνες της λογικής και της επιστήμης για την επαλήθευση ιδεών και εννοιών (Μασσιάλας, 1989).

Εκτός από τις παραπάνω βασικές δεξιότητες, στη διερευνητική διδακτική προσέγγιση αποδίδονται και άλλες, οι οποίες αφορούν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και σχετίζονται με όλα τα γνωστικά αντικείμενα, όπως είναι ο υπολογισμός. Ωστόσο, μία ερευνητική διαδικασία πιθανόν να δημιουργήσει εμπόδια και δυσκολίες στους μαθητές που θα οδηγήσουν σε απογοήτευση. Σύμφωνα με της Buchanan, Harlan, Bruce και Edwards (2016) οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να ολοκληρώνουν μία έρευνα και αν αποτύχουν, να την επανεξετάσουν και να μάθουν από τα λάθη της. Αυτό, άλλωστε περιλαμβάνει και η κατανόηση του «πώς ερευνά ένας επιστήμονας», άποψη την οποία προωθεί η συγκεκριμένη προσέγγιση. Η μέθοδος αυτή, όπως και κάθε νέα μέθοδος διδασκαλίας συνδέεται με πολλά εμπόδια και επιπλοκές. Παρουσιάζει, λοιπόν, υψηλές απαιτήσεις ως προς την ευρυμάθεια των εκπαιδευτικών, τις ικανότητές του, την ευελιξία, την εγρήγορση, την δημιουργικότητα και την ευρηματικότητα. Σύμφωνα με της Schwarz και Crawford (2004), η εμπειρία του εκπαιδευτικού είναι ζωτικής σημασίας για την εφαρμογή της μεθόδου, αφού θα πρέπει να κατανοήσει πλήρως τον τρόπο εφαρμογής της και να αποφασίσει τι επιστημονικές δεξιότητες μπορούν να αναπτυχθούν μέσω αυτής.

Τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής προσέγγισης αφορούν τους τρεις (3) βασικούς πυλώνες της μαθησιακής διαδικασίας, τον εκπαιδευτικό, τους μαθητές και την ίδια τη διδασκαλία. Στην εκπαίδευση μέσω διερεύνησης, τα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας υιοθετούν μη παραδοσιακούς ρόλους.

Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει, ενθαρρύνει, παροτρύνει, καθοδηγεί και διευκολύνει τη διαδικασία της διερεύνησης (Artigue & Blomhøj, 2013· Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2015). Συνδέει τις μαθηματικές απόψεις και τους συλλογισμούς των μαθητών με την επίσημη μαθηματική γνώση. Θέτει, ορισμένες φορές, τον προβληματισμό, ο οποίος προέρχεται από θέματα της επιστήμης και της ζωής και έχει καθορισμένη απάντηση και παρέχει το εκπαιδευτικό υλικό που είναι απαραίτητο.

Στο κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας βρίσκονται οι μαθητές, οι οποίοι εντοπίζουν, μελετούν και επιλύουν έναν προβληματισμό έχοντας υποστηρικτή τον εκπαιδευτικό (Artigue & Blomhøj, 2013). Είναι μια διαπροσωπική δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές φτάνουν στην κατανόηση μέσω συζήτησης και η διδασκαλία είναι ένας μη-γραμμικός διάλογος, μεταξύ μαθητών και με τον εκπαιδευτικό, στον οποίο διερευνώνται τα νοήματα και οι συνδέσεις τους. Αναγνωρίζουν ότι ο συλλογισμός τους πρέπει να είναι συνυφασμένος με τον προβληματισμό και τις αποφάσεις τους, εφόσον αντιλαμβάνονται ότι η γνώση αναπτύσσεται συνεργατικά, μέσα από κοινωνικές αλληλεπιδράσεις. Δεν στοχεύει μόνο στη σωστή απάντηση, αλλά αναζητάει συλλογισμούς σε προβληματισμούς και ερωτήματα, μέσω της (διερ)ευνητικής διαδικασίας (Alberta Learning, 2004). Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και μετά από έρευνα καταλήγουν σε κάποιο κοινό συλλογισμό, ο οποίος μπορεί να αλλάξει στη συνέχεια μετά την αλληλεπίδραση με τις άλλες ομάδες και τον εκπαιδευτικό. Με αυτόν τον τρόπο εμπλέκονται σε διαδικασίες σκέψης παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι επιστήμονες για την παραγωγή της νέας γνώσης, καθώς οι διαδικασίες αυτές περιλαμβάνουν τη διαμόρφωση υποθέσεων/εικασιών, τη συλλογή δεδομένων και την ερμηνεία τους, την ερευνητική πρακτική εργασία και τις συνεργατικές συζητήσεις (Anderson, 2002). Η συνεργασία αυτή έχει ως στόχο τη διατύπωση ερωτημάτων, την εξέταση προβλημάτων, την αμφισβήτηση υπαρχουσών αντιλήψεων και τέλος, την επίτευξη κοινών νοηματοδοτήσεων, ενώ παράλληλα ενθαρρύνεται αποδείξεων, επιχειρημάτων, λογικής και φαντασίας για την κατανόηση του κόσμου γύρω τους (Newman et al., 2004). Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό σημείο της προσέγγισης καθώς η έρευνα έχει αποδείξει ότι η συνεργασία μεταξύ των μελών μιας ομάδας βελτιώνει την πρόοδο, το κίνητρο, τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και την επίλυση προβλημάτων. Τέτοιου είδους διδακτικές πρακτικές και διαλογικής μάθησης αναπτύσσουν την αγωγή του πολίτη και τη δημοκρατική φύση της αλληλεπίδρασης εκπαιδευτικού και μαθητών, αλλά και των μαθητών μεταξύ τους (Artigue & Blomhoj, 2013). Με την επίδραση της διερευνητικής προσέγγισης στην ανάπτυξη κατάλληλων δεξιοτήτων που είναι χρήσιμες στους αυριανούς πολίτες ασχολήθηκαν και άλλοι ερευνητές (Σταυρίδου, 2011). Η εφαρμογή της Διερευνητικής Μάθησης εξυπηρετείται από πολλαπλούς διδακτικούς στόχους: α) μαθησιακούς-γνωστικής ανάπτυξης, δηλαδή «γνωστικούς», β) ψυχοκινητικούς, δηλαδή «ικανότητες/δεξιότητες» και γ) συναισθηματικούς και κοινωνικούς, δηλαδή «στάσεις» (Καλκάνης κ.α. 2013· Σταυρίδου, 2011). Η διερευνητική μέθοδος διδασκαλίας, λοιπόν, δεν στοχεύει στην άμεση απομνημόνευση πληροφοριών αλλά στην καλλιέργεια ιδεών και εννοιών οι οποίες θα αναπτύσσονται καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν.

Ως προς την ίδια τη διδακτική διαδικασία, τα προβλήματα που καλούνται να επιλύσουν οι μαθητές είναι ρεαλιστικά, ενώ προκαλούν τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ της πρότερης γνώσης και της νέας πληροφορίας. Η αυθεντικότητα της διαδικασίας βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση της εξέλιξης της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος, κάτι που ενισχύει την ικανότητα μεταφοράς της γνώσης, ενώ έχει χαρακτηριστικά της ενεργούς μάθησης (Prince, et al, 2006).

Προκειμένου να αναλυθούν οι διερευνητικές προσεγγίσεις σε σχέση με την παραδοσιακή παρέμβαση που εφαρμόζεται στην ελληνική σχολική πραγματικότητα, μελετήθηκαν οι διαφορές τους. Η επιλογή της παραδοσιακής μετωπικής προσέγγισης έγινε με το σκεπτικό ότι αποτελούσε μεν την πιο διαδεδομένη και χρησιμοποιούμενη προσέγγιση διδασκαλίας μέχρι και τις αρχές του ’80 αλλά ταυτόχρονα φαίνεται να εφαρμόζεται ευρέως ακόμα και σήμερα στην ελληνική σχολική πραγματικότητα. Ο εκπαιδευτικός, στην περίπτωση της παραδοσιακής μετωπικής, είναι επιφορτισμένος με την παρουσίαση του μαθήματος όπως αυτό ορίζεται από τη διδακτέα ύλη και είναι γραμμένο στο σχολικό εγχειρίδιο, με μία συγκεκριμένη μορφή και έκταση. Οι μαθητές έχουν μόνο άτυπες γνώσεις, τις οποίες θα μετατρέψει σε επιστημονικές μέσω μιας προφορικής διάλεξης ο εκπαιδευτικός (Hargreaves, 1982). Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο τελευταίος λειτουργεί ως πηγή γνώσης και ως κριτής σχετικά με το ποιο είναι το σημαντικότερο σημείο του μαθήματος και το πού πρέπει να δώσει βάση ο μαθητής.

Βέβαια, η προσέγγιση αυτή έχει ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών εκφράσεων, οι οποίες σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά και τις ιδιαίτερες ικανότητες του κάθε δασκάλου, ωστόσο η κεντρική της φιλοσοφία παραμένει σταθερή. Οι μαθητές δεν αλληλεπιδρούν ιδιαίτερα μεταξύ τους, ενώ η εργασία είναι κυρίως ατομική. Στην αίθουσα διδασκαλίας κάθονται ανά δύο ή τρεις σε οριζοντίως και καθέτως θρανία με το μέτωπο στραμμένο στον πίνακα, την έδρα και, κυρίως το δάσκαλο. Δέχονται από αυτόν παθητικά τη νέα γνώση από τον εκπαιδευτικό, ενώ εξασκούνται στη νέα γνώση με την προβλεπόμενη μορφή αξιολόγησης. Η ατομική ευθύνη της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι ιδιαίτερα μειωμένη, καθώς δεν αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες σχετικά με την εξέλιξή της (Hall, & McCurdy, 1990). Οι μαθητές έχουν ως κύριο σκοπό τους την εφαρμογή της νέας γνώσης και την απομνημόνευσή της (Romberg & Kaput, 1999).

Η διδασκαλία στην περίπτωση της παραδοσιακής μετωπικής διδασκαλίας έχει ως επίκεντρο σχεδιασμού της το σχολικό βιβλίο, ενώ ο χρόνος που απαιτείται είναι ο προβλεπόμενος από τα αναλυτικά προγράμματα. Επιπλέον, οι στόχοι που διατυπώνονται, είναι κυρίως γνωστικοί και έχουν να κάνουν με την εκμάθηση του περιεχομένου. Σύμφωνα με τις Louisell και Descamps (1992), μία μετωπική διδασκαλία περιλαμβάνει τις παρακάτω φάσεις: α) *προσανατολισμός* (orientation), β) *παρουσίαση* (presentation) και γ) *δομημένη, καθοδηγούμενη και ανεξάρτητη εφαρμογή* (structured, guided and independent practice). Στην πρώτη φάση, αυτή του προσανατολισμού, ο εκπαιδευτικός εξηγεί τη χρησιμότητα της γνώσης, ανιχνεύει της ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών και σκιαγραφεί τη διδασκαλία που θα ακολουθήσει. Στη δεύτερη φάση, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το υλικό, αφού το έχει δομήσει σύμφωνα με τις βασικές ενότητες τις οποίες επιδιώκει να παρουσιάσει. Αυτό που επικρατεί στη συγκεκριμένη φάση είναι ο μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων και εφαρμογών, με τη συνοδεία ποικίλων ερωτήσεων κατανόησης προς τους μαθητές. Τέλος, κατά την τρίτη φάση, ο εκπαιδευτικός μειώνει σταδιακά την υποστήριξή του, ενώ οι μαθητές εξασκούνται όλο και πιο αυτόνομα και ατομικά στην πρακτική εφαρμογή της γνώσης (Joyce & Weil, 2004· Joyce & Weil, 2000· Pearson & Gallagher, 1983· Rosenshine & Meister, 1992· Vygotsky, 1978· Moore, 2007· Adams & Carnine, 2003).

Στον παρακάτω πίνακα γίνονται σαφείς οι διαφορές μεταξύ των δύο προσεγγίσεων μάθησης (Πίνακας 1).

	Παραδοσιακή Προσέγγιση	**Διερευνητική προσέγγιση**
Εκπαιδευτικός	Είναι η πηγή και ο μεταδότης της γνώσης.	Είναι εμψυχωτής της διαδικασίας.
	Βρίσκεται στο επίκεντρο του διδακτικού γεγονότος, ενώ έχει τον απόλυτο έλεγχο της διδασκαλίας.	Είναι υποστηρικτής, καθοδηγητής και διευκολυντής της διαδικασίας, ενώ συνδέει απόψεις και συλλογισμούς, με στόχο την επίτευξη κοινών νοηματοδοτήσεων.
Μαθητές	Ατομική εργασία	Ομαδική εργασία
	Παθητικοί δέκτες της νέας γνώσης, περιορισμένη αυτενέργεια.	Εμπλεκόμενοι στην οικοδόμηση της νέας γνώσης, καθώς εξερευνούν, μελετούν και επιλύουν καταστάσεις προβληματισμού.

Διαδικασία	Μάθηση με επίκεντρο το σχολικό εγχειρίδιο.	Μάθηση βασισμένη σε μη συνηθισμένα (ανοιχτά/ πολύπλοκα) προβλήματα, τα οποία δημιουργούν καταστάσεις προβληματισμού και ευνοούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης.
	Συστηματική οργάνωση μαθήματος σε μορφή διάλεξης, διδασκαλία μαθηματικών εννοιών.	Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων.
	Οι μέθοδοι και οι τεχνικές προγραμματίζονται από τον εκπαιδευτικό.	Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τη μέθοδο που θα εργαστούν και τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουν.
	Εκμάθηση περιεχομένου	Ανάπτυξη δεξιοτήτων παράλληλα με την εκμάθηση περιεχομένου, όπως αλληλεπίδραση, επικοινωνία, επιχειρηματολογία κτλ.
	Τα υλικά που χρησιμοποιούνται έχουν επιλεγεί από τον εκπαιδευτικό.	Εκπαιδευτικός και μαθητές (μαζί ή μόνοι τους οι τελευταίοι) αναζητούν και επιλέγουν τα αναγκαία μέσα και υλικά.
	Ερωτήματα κλειστού τύπου με μία λύση, που στοχεύουν στην εξάσκηση της μνήμης και της πρακτικής.	Μη συνηθισμένα ερωτήματα, που ευνοούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης και θέτουν προβληματισμούς

	Η αξιολόγηση εφαρμόζεται από τον εκπαιδευτικό και είναι γνωστικού επιπέδου με έμφαση στην αποστήθιση.	Η αξιολόγηση εφαρμόζεται από τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό ταυτόχρονα, ενώ δίνεται έμφαση στη δημιουργική έκφραση και τα εσωτερικά κίνητρα.
Χρόνος διδασκαλίας	Καθορισμένος από τον εκπαιδευτικό ανάλογα με το εύρος της ύλης.	Ευέλικτος ανάλογα με την εξέλιξη της διαδικασίας/ Μεγαλύτερος σε σχέση με την παραδοσιακή μετωπική.

Πίνακας 1: Διαφορές παραδοσιακής και διερευνητικής προσέγγισης

2.1.4 Η διερευνητική προσέγγιση σε σχέση με άλλες θεωρίες μάθησης

Η ιδιαιτερότητα της συγκεκριμένης προσέγγισης και η πολυπλοκότητα στην οριοθέτησή της προκαλεί σύγχυση στους ερευνητές με άλλες προσεγγίσεις (Hmelo-Silver, Duncan & Chinn, 2007· Newman, Abell, Hubbard, McDonald, Otaala & Martini, 2004· Towers, 2010), κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη ερμηνεία της αποτελεσματικότητά της (Kirschner, Sweller & Clark, 2006). Οι θεωρητικές προσεγγίσεις μάθησης και οι παιδαγωγικές πρακτικές μαθηματικής εκπαίδευσης (Newman, Abell, Hubbard, McDonald, Otaala & Martini, 2004· Towers, 2010), από τις οποίες δέχτηκε επιρροή η διερευνητική προσέγγιση είναι *η επίλυση προβλήματος, η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, η προσέγγιση της μοντελοποίησης, η ανθρωπολογική προσέγγιση της διδακτικής* (Artigue, et al., 2012), καθώς και άλλες προσεγγίσεις που βασίζονται στην κοινωνική διάσταση του κονστρουκτιβισμού.

Μία από τις θεωρίες με την οποία παρουσιάζει κοινά στοιχεία και η διερευνητική προσέγγιση είναι η *θεωρία επίλυσης προβλήματος* του Polya. Κοινό σημείο εστίασης των δύο προσεγγίσεων αποτελεί η επίλυση μη-συνηθισμένων προβλημάτων. Ωστόσο, η *επίλυση προβλήματος* από τη μία δίνει έμφαση στον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος- του οποίου η λύση δεν είναι γνωστή (άμεσα αντιληπτή)- μέσω συγκεκριμένων σταδίων αλλά και μέσω μεταγνωστικών και ευρετικών δεξιοτήτων. Από την άλλη, η διερευνητική προσέγγιση δίνει έμφαση στη διδασκαλία και τη μάθηση μέσω επίλυσης προβλήματος. Οι μαθητές δεν επιλύουν προβλήματα μέσω συγκεκριμένων σταδίων αλλά αναπτύσσουν νοητικές δεξιότητες λύσης προβλήματος. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγεται και η διαμόρφωση στρατηγικών πειραματισμού, εικασιών, αξιολόγησης και γενίκευσης των αποτελεσμάτων που έχουν ανακαλύψει οι ίδιοι από μόνοι τους. Τα ανοιχτά προβλήματα αποτελούν τον κορμό της διδασκαλίας στην προσέγγιση της *επίλυσης προβλήματος*, ενώ στη διερευνητική χρησιμοποιούνται ως μέσο για την ανάπτυξη των παραπάνω στρατηγικών, με έμφαση στην αιτιολόγηση και την επικοινωνία (Artigue & Blomhøj, 2013). Μία ακόμη διαφορά των δύο προσεγγίσεων είναι ο ρόλος που έχει ο εκπαιδευτικός στην διδακτική διαδικασία. Στη διερευνητική προσέγγιση ο τελευταίος διευκολύνει τη διαδικασία καθοδηγώντας, εμψυχώνοντας και παρέχοντας το απαραίτητο εκπαιδευτικό υλικό ανάλογα με το είδος της διερευνητικής διδασκαλίας, όπως θα αναλυθούν στη συνέχεια της εργασίας. Στην προσέγγιση *επίλυσης προβλήματος* ο εκπαιδευτικός έχει τον ίδιο ρόλο, χωρίς όμως να παρέχει πληροφορίες για την επίλυση προβλήματος, καθώς αυτό θεωρείται ευθύνη του μαθητή (Savery, 2006).

Η διερευνητική προσέγγιση παρουσιάζει κοινό σημείο και με τη *θεωρία διδακτικών καταστάσεων*, ως προς τα εμπόδια και τη μελέτη εναλλακτικών λύσεων για την υπερπήδησή τους. Το εμπόδια αυτά, σύμφωνα με τον Brousseau (2002), διατυπώνονται μέσω κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων, στις οποίες παρατηρείται έντονη αλληλεπίδραση ανάμεσα στον μαθητή ή την ομάδα μαθητών, τον εκπαιδευτικό και τη μαθηματικής γνώση. Η διαφορά στη συγκεκριμένη περίπτωση έγκειται στο ρόλο του μαθητή. Στη *θεωρία διδακτικών καταστάσεων* ο μαθητής έχει την ευθύνη εντοπισμού του προβλήματος και της επίλυσής του, κάτι που δεν παρατηρείται τόσο έντονα στη διερευνητική προσέγγιση, καθώς εκεί ο εκπαιδευτικός έχει προβλέψει εκ των προτέρων τα εμπόδια που μπορεί να προκύψουν και έχει προετοιμάσει την πορεία καθοδήγησής τους.

Η σύνδεση των φορμαλιστικών Μαθηματικών με την πραγματική ζωή αποτελεί τη σύνδεση της διερευνητικής προσέγγισης με τη *ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση*. Η διδασκαλία και στις δύο προσεγγίσεις βασίζεται κυρίως σε καθημερινά προβλήματα και εμπειρικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές και όχι τόσο σε προβλήματα που δε βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινότητά τους. Η κύρια υπόθεση της *ρεαλιστικής εκπαίδευσης* είναι ότι, με αφορμή τις προαναφερθείσες καταστάσεις, οι μαθηματικές έννοιες και ιδέες αναδύονται μέσω της προοδευτικής μαθηματικοποίησης, κατά την οποία οι άτυπες μοντελοποιήσεις των μαθητών μετατρέπονται σε τυπικές, με σκοπό την κατανόηση και την οργάνωση των φαινομένων (Freudenthal, 1983). Ωστόσο, η διερευνητική προσέγγιση δεν αποσκοπεί μόνο στην επίλυση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή αλλά και από ποικίλα πλαίσια που δίνονται στα παιδιά με στόχο την καλλιέργεια διερευνητικών πρακτικών (Artigue, et al., 2012)¨.

Τα προβλήματα της καθημερινότητας που αξιοποιούνται στη *ρεαλιστική εκπαίδευση*, συναντώνται και στην *προσέγγιση της μοντελοποίησης* και αποτελούν το κοινό της στοιχείο με την προσέγγιση της διερεύνησης. Στην *προσέγγιση της μοντελοποίησης* οι εφαρμογές των Μαθηματικών σε καταστάσεις του πραγματικού κόσμου περιλαμβάνουν κάποιας μορφής μαθηματική μοντελοποίηση (Kaiser & Sniraman, 2006). Μέσα από αυτή, ο μαθητής κατανοεί το πλαίσιο μάθησης και αποκτά νέες οπτικές της κατάστασης προβληματισμού. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της ανάκλησης καθημερινών εμπειριών, κάτι το οποιο αποτελεί και το κοινό σημείο των προσεγγίσεων.

Ο ρόλος του μαθητή στη διερευνητική προσέγγιση, ως ερευνητή που εικάζει, ερευνά, αξιολογεί, γενικεύει και νοηματοδοτεί (Artigue & Blomhøj, 2013), αποτελεί και τον κοινό τόπο με τα χαρακτηριστικά της *ανθρωπολογικής προσέγγισης της διδακτικής* (Chevallard, 1990). Ο ρόλος αυτός δίνει ιδιαίτερη έμφαση στο άτομο που συμμετέχει στη μαθησιακή διαδικασία και στην προσωπική του νοηματοδότηση. Οι νοηματοδοτήσεις αυτές, φυσικά, μπορεί να μην ταυτίζονται, καθώς ο καθένας οικοδομεί τη γνώση του με βάση τις πεποιθήσεις και τις εμπειρίες του, οι οποίες διαφέρουν από άτομο σε άτομο.

Μία προσέγγιση, με την οποία η διερευνητική προσέγγιση εμφανίζει τα περισσότερα κοινά στοιχεία είναι ο *κοινωνικός κονστρουκτιβισμός*. Και στις δύο προσεγγίσεις, η μάθηση πραγματώνεται μέσα από πολιτισμικά πλαίσια (γλώσσα, στερεότυπα, αντιλήψεις), από την αλληλεπίδραση του ατόμου με άλλα άτομα και μέσω υλοποίησης δραστηριοτήτων που προωθούν την επικοινωνία. Η μάθηση προκύπτει μέσα από την εννοιολογική αλλαγή που προκαλείται στα υποκείμενα, λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλονται και μέσω της οποίας οικοδομούν τη γνώση ατομικά. Στη συνέχεια, ακολουθεί η συζήτηση μεταξύ των παιδιών και η προβολή των ατομικών τους συλλογισμών, που οδηγεί σε διαπραγματεύσεις, ενώ η διαδικασία καταλήγει με κοινή αναγνώριση από όλους του ίδιου νοήματος (Cobb, 2007· Roth & Lee, 2007). Πολλές φορές έχει παρατηρηθεί η ταύτιση της διερευνητικής προσέγγισης με πρακτικές του *κοινωνικού κονστρουκτιβισμού*, όπως η *μάθηση μέσω ανακάλυψης* (discovery learning), η *μάθηση* *που βασίζεται σε ένα πρόβλημα* (problem based learning) και η *μάθηση που βασίζεται σε project* (project-based learning). Η διαφορά της με τη *μάθηση μέσω ανακάλυψης* είναι ότι στη τελευταία η διερεύνηση είναι ελάχιστα καθοδηγούμενη και αποτελεί ατομική δραστηριότητα (Swan, Pead, Doorman, & Mooldijk, 2013· Towers, 2010). Η *μάθηση η οποία βασίζεται σε πρόβλημα*, διαφέρει από τη διερευνητική προσέγγιση στο ότι η δεύτερη ξεκίνησε από την ιατρική, με σκοπό τη βελτίωση των διαγνωστικών ικανοτήτων των φοιτητών μέσω κακοδιατυπωμένων προβλημάτων. Είναι μία μαθητοκεντρική προσέγγιση και η μάθηση λαμβάνει χώρα σε μικρές ομάδες υπό την καθοδήγηση ενός ειδικού, ο οποίος ενεργεί ως διευκολυντής. Οι φοιτητές ασχολούνται με αυθεντικά προβλήματα, χωρίς να έχουν προετοιμαστεί ή μελετήσει κάτι σχετικό, καθώς αξιολογείται ο τρόπος που χρησιμοποιούν τις παρεχόμενες πληροφορίες ή τις πληροφορίες που αναζήτησαν αλλά και ο τρόπος που εφαρμόζουν τις γνώσεις τους για να προβούν σε διάγνωση και να λύσουν το πρόβλημα (Friesen & Scott, 2013). Τέλος, *η μάθηση που βασίζεται σε project* διαρκεί περισσότερο απ' όσο η διερευνητική, ενώ τελικός της στόχος είναι η δημιουργία μίας παρουσίασης ή ενός προϊόντος, κατόπιν διαπραγματεύσεων γύρω από πολύπλοκα θέματα βασισμένα σε ερωτήματα και προβληματισμούς (Friesen & Scott, 2013).

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω παρουσιάζονται συνοπτικά και στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2).

Προσεγγίσεις από τις οποίες προέρχεται η Διερευνητική Προσέγγιση και τα βασικά χαρακτηριστικά τους	**Συνδ. (με) και διαφ. από τη Διερευνητική Προσέγγιση**
Θεωρία μετάδοσης της γνώσης: καλλιέργεια γνωστικών ικανοτήτων	√
μετάδοση της γνώσης	X
Επίλυση προβλήματος: χρήση μη συνηθισμένων προβλημάτων	√
διδασκαλία λύσης προβλήματος	X
Θεωρία διδακτικών καταστάσεων: διδασκαλία μέσω εμποδίων	√

τα εμπόδια εντοπίζονται από τους μαθητές	X
Ρεαλιστικά Μαθηματική Εκπαίδευση: σύνδεση με πραγματική ζωή	√*
Μοντελοποίηση: μοντελοποίηση καταστάσεων πραγματικής ζωής	√*
Ανθρωπολογική: προσωπική νοηματοδότηση στην οικοδόμηση της γνώσης	√*
Κοινωνική διάσταση κονστρουκτιβισμού: συζήτηση συλλογισμών για κοινά νοήματα	√
Μάθηση μέσω:	X
-ανακάλυψης: ατομική δραστηριότητα ελάχιστα καθοδηγούμενη	X
-προβλήματος: διαπραγμάτευση περιστατικών για διάγνωση ***-πρότζεκτ***: διαπραγμάτευση θεμάτων για μεγάλα διαστήματα	X
*Η προσέγγιση της διερεύνησης έχει επιπλέον χαρακτηριστικά	

Πίνακας 2: Συνδέσεις και διαφοροποιήσεις της διερευνητικής προσέγγισης με άλλες θεωρίες μάθησης

2.1.5 Είδη διερευνητικής προσέγγισης

Η διερευνητική προσέγγιση χωρίζεται σε κατηγορίες ανάλογα με το βαθμό καθοδήγησης που παρέχεται από τον εκπαιδευτικό. Η διάκριση αυτή βοηθάει στη μελέτη των χαρακτηριστικών του κάθε είδους, με στόχο το σαφή σχεδιασμό της παρέμβασης που βασίζεται σε αυτή την προσέγγιση.

Ο Wenning (2005, 2007) κατηγοριοποίησε τις διερευνητικές δραστηριότητες σε καθοδηγούμενες (guided), οριοθετημένες (bounded) και ελεύθερης διερεύνησης (free-inquiry), ανάλογα με το αν ο εκπαιδευτικός, οι μαθητές ή και οι δύο λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με τον τρόπο διεξαγωγής της έρευνας στην τάξη. Στο ένα άκρο αυτού του συνεχούς βρίσκεται η καθοδηγούμενη - διερευνητική δραστηριότητα (guided inquiry) που ορίζεται από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος είναι αυτός που αναγνωρίζει το πρόβλημα και παρέχει τον ανάλογο προσανατολισμό στους μαθητές προκειμένου εκείνοι να σχεδιάσουν οι ίδιοι την έρευνα. Στο άλλο άκρο του συνεχούς βρίσκεται η ελεύθερη διερεύνηση (free-inquiry), η οποία χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια των μαθητών να προσδιορίσουν μόνοι τους το πρόβλημα που πρέπει να ερευνηθεί και να αναπτύξουν το δικό τους πειραματικό σχέδιο. Οι δραστηριότητες ελεύθερης διερεύνησης περιγράφονται συχνά ως «ανοιχτές-κλειστές» (open-ended) και «μαθητο-καθοδηγούμενες διερευνητικές» (student-led inquiry), επειδή οι μαθητές ενθαρρύνονται να διερευνήσουν και να ασχοληθούν με τις δικές τους ιδέες και των συνομηλίκων τους, εφόσον συνεργάζονται με άλλους μαθητές κατά τη διάρκεια της διερευνητικής διδακτικής προσέγγισης (Wenning 2005).

Παρόμοια ταξινόμηση, με βάση το βαθμό δόμησης και καθοδήγησης της διερεύνησης, πρότειναν και οι Banchi & Bell (2008). Οι κατηγορίες που διέκριναν έχουν ως εξής: (α) *διερευνητική διδασκαλία επιβεβαίωσης* (confirmation inquiry), όπου ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές το προς έρευνα ερώτημα, του οποίου η απάντηση έχει ήδη γνωστοποιηθεί και με κάποιον τρόπο έχει υποδηλωθεί και η πορεία που πρέπει να ακολουθηθεί για την επιβεβαίωσή της ·(β) *δομημένη διερευνητική διδασκαλία* (structured inquiry), όπου τίθεται από τον εκπαιδευτικό το προς έρευνα, μαζί με τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές για να φτάσουν σε ένα συμπέρασμα βασισμένοι στις αποδείξεις που έχουν στη διάθεσή τους από τα δεδομένα που συνέλεξαν. Στην ουσία προλειαίνει το έδαφος για την ανοιχτή διερευνητική διδασκαλία (Kremer & Schluter, 2006· Bruder & Prescott, 2013) ·(γ) *καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία* (guided inquiry), όπου τίθεται το ερώτημα από τον εκπαιδευτικό και οι μαθητές πρέπει να σχεδιάσουν από μόνοι τους τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν για να συλλέξουν τα δεδομένα και να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα. Με λίγα λόγια, ο εκπαιδευτικός παρέχει το υλικό προς επεξεργασία και οι μαθητές αναμένεται να σχεδιάσουν τις μεθόδους επίλυσης του προβλήματος, καθώς και να επιλέξουν τις κατάλληλες στρατηγικές. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοδηγητικός και οργανωτικός όπου κριθεί απαραίτητο. Έχει διαπιστωθεί πως η καθοδηγούμενη διερευνητική μάθηση διευκολύνει την ουσιαστική και βαθύτερη μάθηση και διατήρηση της γνώσης (Alfieri, Brooks, Aldrich, & Tenenbaum, 2011· Prince & et al, 2006). Ωστόσο, η χρήση της και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης είναι περιορισμένη· (δ) *ανοιχτή διερευνητική διδασκαλία* (open inquiry), όπου οι ίδιοι οι μαθητές διαμορφώνουν το ερώτημα προς έρευνα και τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν για να συλλέξουν τα απαραίτητα δεδομένα και να καταλήξουν στα συμπεράσματά τους. Ο Fenton (1966) υποστηρίζει ότι η ανοιχτή διερευνητική διδασκαλία απαιτεί από τους μαθητές να κατέχουν ήδη διερευνητικές ικανότητες, τις οποίες καλούνται απλώς να φέρουν στην επιφάνεια. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά τη μάθηση επιδιώκεται να είναι όσο το δυνατόν πιο παθητικός κατά τη μάθηση και η λύση του προβλήματος επαφίεται στην ομαδικότητα των μαθητών.

Η κατηγοριοποίηση αυτή πολλές φορές δεν είναι εύκολα κατανοητή αφού τα όριά της δεν είναι σαφή. Επίσης, υπάρχουν ορισμένοι που χαρακτηρίζουν τη διερεύνηση ως μη καθοδηγούμενη διαδικασία και θεωρούν το διαχωρισμό αυτό ως παρανόηση (Hmelo-Silver et al 2007). Σε αντιστοιχία με την ορολογία της Κύπρου «διερώτηση», οι παραπάνω κατηγορίες συναντώνται στη βιβλιογραφία με τους όρους: «επιβεβαιωτική διερώτηση», «δομημένη διερώτηση», «καθοδηγούμενη διερώτηση» και «ανοιχτή διερώτηση» (Eastwell, 2009).

2.1.6 Μοντέλα διδασκαλιών βασισμένες στη διερευνητική προσέγγιση

Σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, πολλοί ερευνητές μοντελοποιούν τη διερευνητική προσέγγιση, με στόχο να την οριοθετήσουν και να προτείνουν τρόπους εφαρμογής της. Λόγω του διαφορετικού επιστημονικού πεδίου του κάθε ερευνητή, έχει ενδιαφέρον η διευκρίνιση του πεδίου αυτού για το οποίο διαμορφώνονται τα στάδια του προτεινόμενου μοντέλου. Έτσι, παρουσίαση των μοντέλων εντοπίζονται σε μελέτες τόσο παιδαγωγών (Ματσαγγούρας, 2000), όσο και μελετητών Φυσικών Επιστημών (Χαλκιά, 2010· Ραγιαδάκος, 2011· Pedaste, 2015) και Μαθηματικών (Blomhøj, 2003· Cobb & McClain, 2006· Harlen, 2012· Skoumpourdi, 2017).

Σύμφωνα με τον Ματσαγγούρα (2000), η καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία περιλαμβάνει 25 φάσεις, τις οποίες ο εκπαιδευτικός μπορεί να τροποποιήσει ή και να παραλείψει κατά τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας. Οι φάσεις αυτές μπορούν να διακριθούν στις ακόλουθες οκτώ (8) κατηγορίες: Ψυχολογική και γνωσιολογική προετοιμασία, Διατύπωση υποθέσεων, Συλλογή και οργάνωση δεδομένων, Αναλυτική επεξεργασία δεδομένων, Υπέρβαση δεδομένων, Εφαρμογές, Ανακεφαλαίωση, Μαθησιακή και μεταγνωστική αξιολόγηση.

Το μοντέλο περιγραφής της Χαλκιά (2010) περιλαμβάνει το σχεδιασμό της διερεύνησης ενός ερωτήματος, τη λήψη και παρουσίαση δεδομένων και την αξιολόγηση αυτών. Στο σχεδιασμό περιλαμβάνονται η επιλογή ενός ερωτήματος/προβλήματος, ο προσδιορισμός ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, ο έλεγχος αυτών, η διατύπωση προβλέψεων και η επιλογή κατάλληλου για την έρευνα εξοπλισμού. Η λήψη και η παρουσίαση των δεδομένων προϋποθέτει τον προσδιορισμό της μεθόδου συλλογής τους, την πραγματοποίηση μετρήσεων και την καταγραφή των δεδομένων. Η αξιολόγηση των δεδομένων περιλαμβάνει τη συνοπτική περιγραφή τους, την αναζήτηση συσχετίσεων, με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων, και την τελική αξιολόγηση της διαδικασίας.

Ο Ραγιαδάκος (2011) περιγράφει το μοντέλο της καθοδηγούμενης έρευνας αναφερόμενος σε πέντε (5) φάσεις εφαρμογής της. Η πρώτη φάση αναδεικνύει το φαινόμενο σε πρόβλημα, το οποίο παρουσιάζεται από τον εκπαιδευτικό και συζητείται με τους μαθητές. Στη δεύτερη φάση διατυπώνονται προτάσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος, όπου οι μαθητές κάνουν υποθέσεις, προβλέψεις και εκφράζουν ιδέες για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Στην τρίτη φάση εφαρμόζεται μια από αυτές τις προτάσεις, με τους μαθητές να πραγματοποιούν την έρευνα με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού, να κάνουν μετρήσεις και να καταγράφουν τα ευρήματά τους. Στην τέταρτη φάση γίνεται μία θεωριοποίηση των ευρημάτων, όπου τα ευρήματα συγκρίνονται με την πρόβλεψη και γίνεται συζήτηση τα θεωρητικά ζητήματα/θέματα που προέκυψαν από τις πειραματικές δραστηριότητες. Τέλος, ο εκπαιδευτικός κάνει ερωτήσεις και αναθέτει ασκήσεις και εργασίες με σκοπό την παγίωση της αποκτηθείσας γνώσης.

Το πλαίσιο διερευνητικής μάθησης του Pedaste και των συνεργατών του (2015) περιλαμβάνει γενικές και επιμέρους φάσεις, οι οποίες συσχετίζονται μεταξύ τους. Στις γενικές φάσεις αναφέρεται ο προσανατολισμός, η εννοιολόγηση, η διερεύνηση, το συμπέρασμα και η συζήτηση και στις επιμέρους φάσεις αναφέρονται οι ερωτήσεις, οι υποθέσεις, η εξερεύνηση, ο πειραματισμός, η ερμηνεία των δεδομένων, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός.

Ο Blomhøj και οι συνεργάτες του (2003) προτείνουν μια μοντελοποίηση που περιλαμβάνει έξι υπο-διαδικασίες: 1. Σχηματισμός του προβλήματος. 2. Συστηματοποίηση. 3. Μαθηματικοποίηση. 4. Μαθηματική ανάλυση. 5. Ερμηνεία/αξιολόγηση. 6. Επαλήθευση.

Λίγο αργότερα, οι ερευνητές Cobb and McClain (2006), ισχυρίστηκαν ότι, για να είναι αποτελεσματική μία διδακτική διαδικασία που βασίζεται στη διερευνητική μάθηση, πρέπει αυτή να πληροί τις παρακάτω τέσσερις (4) προϋποθέσεις: 1. Εκπαιδευτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν πνεύμα διερεύνησης αυθεντικών πρακτικών 2. Οργάνωση δραστηριοτήτων που δίνουν έμφαση στη συζήτηση ολόκληρης της τάξης στο πλαίσιο του προβλήματος/ερωτήματος, εργασία σε μικρές ομάδες για την επίλυσή του και μοίρασμα προόδου και αποτελεσμάτων εκ νέου στην ολομέλεια της τάξης 3. Χρήση εργαλείων και αναπαραστάσεων που εστιάζουν στη σκέψη και την αιτιολόγηση βασικών μαθηματικών ιδεών 4. Σχεδιασμός διδασκαλίας που αναπτύσσει βασικούς κανόνες παραγωγικής μάθησης, ώστε να διασφαλιστεί ότι η συζήτηση ολόκληρης της τάξης πραγματοποιείται για την προώθηση του εκπαιδευτικού προγράμματος.

Η Harlen (2012), περιγράφοντας τη διερευνητική προσέγγιση ως την οικοδόμηση της κατανόησης με επιστημονικό τρόπο μέσω συλλογής στοιχείων και ελέγχου των πιθανών ερμηνειών και ιδεών που προκύπτουν από αυτά τα στοιχεία, προτείνει ένα κυκλικό μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει τα εξής στάδια: 1. Νέα εμπειρία/ερώτηση. 2. Πιθανή εξήγηση (από προϋπάρχουσα ιδέα ή από εναλλακτικές ιδέες). 3. Πρόβλεψη. 4. Σχεδιασμός και έρευνα. 5. Ερμηνεία δεδομένων. 6. Συμπέρασμα.

Σύμφωνα με το πιο πρόσφατο μοντέλο σχεδιασμού και διαχείρισης διερευνητικών δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, προτείνεται από τη Σκουμπουρδή (Skoumpourdi, 2017) το πλαίσιο FIBA, το οποίο βασίζεται στα χαρακτηριστικά της διερευνητικής διαδικασίας και περιλαμβάνει επτά (7): 1. Θέμα/Προβληματισμός. 2. Εξερεύνηση. 3. Παρουσίαση. 4. Σύνθεση/Σύνδεση. 5. Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση. 6. Μετάφραση. 7. Επέκταση. Καθένα από τα στάδια του πλαισίου FIBA περιλαμβάνει συγκεκριμένες μαθησιακές διαδικασίες. 1. *Θέμα/Προβληματισμός (Task)*: τίθεται ο προβληματισμός μέσω κάποιου σεναρίου 2. *Εξερεύνηση (Exploration*): οι μαθητές σκέφτονται πώς θα λύσουν το πρόβλημα ανταλλάσσοντας μεταξύ τους απόψεις 3. *Παρουσίαση (Presentation*): παρουσιάζονται με επιχειρήματα οι λύσεις στις οποίες έχουν καταλήξει οι μαθητές 4*. Σύνθεση/σύνδεση (Connection*) : συνοψίζονται τα συμπεράσματα και συνδέονται με το μαθηματικό ερώτημα, με απώτερο στόχο την εξαγωγή ενός κοινού συμπεράσματος από το σύνολο της τάξης 5. *Μαθηματικοποίηση/Γενίκευση (Generalization*): τα μαθηματικά συμπεράσματα συνδέονται με την πρότερη γνώση των μαθητών 6. *Μετάφραση (Translation):* μεταφράζεται ο συλλογισμός σε άλλες μορφές και μέσα 7. *Επέκταση (Expansion*): τίθενται νέοι συλλογισμοί για νέα διερευνητικά ερωτήματα.

Τα παραπάνω ενδεικτικά μοντέλα περιγραφής των φάσεων της διερευνητικής προσέγγισης, παρά τη διαφορά ως προς το ερευνητικό πεδίο του κάθε ερευνητή, αναφέρονται -μέσα από τις φάσεις τους- σε καταστάσεις προβληματισμού που εμπλέκουν τη διερεύνηση, την αιτιολόγηση και την επιχειρηματολογία συλλογισμών μέσα από ατομική και ομαδική εργασία.

2.1.7 Η διερευνητική προσέγγιση στα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου

Η υιοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης μάθησης από τα ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή της στη διδακτική πράξη. Η παρουσία της στα κείμενα των Προγραμμάτων Σπουδών αφορά στα χαρακτηριστικά της εκείνα που την καθιστούν καινοτόμα.

Από την ανάλυση του ισχύοντος Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ.) γίνεται αντιληπτό ότι θεμέλιο για την εποικοδομητική και τη διερευνητική μάθηση αποτελεί η διαθεματική και ολιστική προσέγγιση της γνώσης (σελ. 6). Η προσέγγιση αυτή γνώσης περιλαμβάνει τη διδασκαλία γνωστικών αντικειμένων και την ταυτόχρονη καλλιέργεια δεξιοτήτων όπως η επικοινωνία, η αποτελεσματική χρήση μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή, η χρήση ποικίλων εργαλείων επικοινωνίας, η συνεργασία με άλλα άτομα, η κριτική επεξεργασία δεδομένων, η επίλυση προβλημάτων, η δημιουργική επινόηση και η διαμόρφωση υπεύθυνης προσωπικής άποψης στη λήψη αποφάσεων (σελ 6) (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019).

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της διερευνητικής προσέγγισης είναι η ανακάλυψη της γνώσης από τους μαθητές, κάτι που εντοπίζεται στις στρατηγικές διδασκαλίας που προτείνονται (οι επισκέψεις στο φυσικό και ανθρωπογενές περιβάλλον, συζήτηση- διάλογος μεταξύ μαθητών-εκπαιδευτικού, ομαδοσυνεργατικές μορφές διδασκαλίας με την εκπόνηση σχεδίων εργασίας-projects) (σελ 10). Η ενεργητική προσέγγιση της γνώσης από τους μαθητές πραγματοποιείται μέσω πρακτικών παρατήρησης, σύγκρισης μετρήσεων, προβλέψεων, σύγκρισης γεγονότων, διατύπωσης παραγωγικών και επαγωγικών συλλογισμών, οι οποίες προτείνονται στα αναλυτικά προγράμματα (σελ. 10) (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019).

Μία παράμετρος της διερευνητικής προσέγγισης είναι η διαμόρφωση κατάλληλων ερωτημάτων/δραστηριοτήτων, μέσω των οποίων οι μαθητές ερευνούν, εκτιμούν και επιχειρηματολογούν υπέρ ή κατά κάποιας προτεινόμενης λύσης. Κατάλληλη μαθηματική δραστηριότητα θεωρείται εκείνη η οποία: 1. είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και δεν επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα, 2. αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια, 3. ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία παρακινώντας τους μαθητές και τις ομάδες για νοητικό ανταγωνισμό, 4. δεν επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μία και μοναδική λύση, 5.

εμπλέκει προβληματισμό πλούσιο σε έννοιες αλλά όχι περίπλοκο, ο οποίος να μπορεί να εκφραστεί - όπου αυτό είναι δυνατό- σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π. χ. αριθμητικό - γραφικό), μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις (σελ. 303) (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019).

Οι κατάλληλες δραστηριότητες ευνοούν, μεταξύ άλλων, τη διατύπωση κατάλληλων επιχειρημάτων από τους μαθητές. Η καλλιέργεια της συγκεκριμένης δεξιότητας αναφέρεται στους μαθηματικούς στόχους, οι οποίοι αφορούν σε όλους τους θεματικούς άξονες (Αριθμοί, Πράξεις, Μετρήσεις και Γεωμετρία) (σελ. 260, 263, 267, 272). Οι παραπάνω στόχοι διατυπώνονται ως εξής: Οι μαθητές να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με έννοιες της βαθμίδας στην οποία φοιτούν, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις, να επιχειρηματολογούν ως προς την ορθότητα μιας λύσης, να παρουσιάζουν στους συμμαθητές τους με σαφήνεια την απάντησή τους- η οποία περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα- να προβλέπουν την απάντηση του προβλήματος και να διατυπώνουν υποθέσεις σχετικά με την ύπαρξη ή μη μίας ή περισσοτέρων λύσεων.

Συμπληρωματικά με το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών λειτουργεί και το Ν.Π.Σ., στο οποίο προτείνεται να προσφέρονται ευκαιρίες ανάπτυξης βασικών δεξιοτήτων, όπως είναι η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων και αυτόνομης λειτουργίας και συνεργασίας σε ομάδες (σελ. 6-7). Βασικός στόχος των τελευταίων είναι η διαμόρφωση σκεπτόμενων πολιτών, επιδίωξη που περιλαμβάνει την ικανότητα για λήψη αποφάσεων, επίλυση μη συνηθισμένων προβλημάτων και επικοινωνία σκέψεων και επιχειρημάτων (σελ. 7). Πάνω στις ικανότητες αυτές στηρίζεται ο συλλογισμός επίλυσης, στοιχείο που συνιστά βασικό χαρακτηριστικό της διερευνητικής προσέγγισης. Οι βασικές διεργασίες μέσα από τις οποίες μπορούν να επιτευχθούν οι στόχοι του Ν.Π.Σ. αποτελούν και βασικούς πυλώνες των μοντέλων περιγραφής της διερευνητικής προσέγγισης και είναι οι εξής (σελ 10): α) ο μαθηματικός συλλογισμός και η επιχειρηματολογία, β) η δημιουργία συνδέσμων/δεσμών, γ) η επικοινωνία μέσω της χρήσης εργαλείων και δ) η μεταγνωστική ενημερότητα. (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, τόσο το ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών όσο και το συμπληρωματικό του Νέο Πρόγραμμα Σπουδών βασίζονται στον εποικοδομητισμό και περιλαμβάνουν στοιχεία της διερευνητικής προσέγγισης μάθησης αναφορικά με το ρόλο του εκπαιδευτικού, το ρόλο του μαθητή και την ίδια τη διαδικασία μάθησης, η οποία πραγματοποιείται μέσω της επίλυσης προβλήματος.

2.1.8 Ερευνητικά δεδομένα εφαρμογής της διερευνητικής προσέγγισης

Τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με την εφαρμογή της διερευνητικής προσέγγισης στη σχολική πραγματικότητα εστιάζονταν στη σύγκρισή της με την παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση, τα είδη των διερευνητικών προσεγγίσεων και το χρόνο εφαρμογής τους, την επίδρασή τους στη διαδικασία μάθησης, τη δεξιότητα της επιχειρηματολογίας και τη στάση των μαθητών απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο.

Οι περισσότερες έρευνες που έχουν εκπονηθεί μέχρι στιγμής αφορούν στη διερευνητική διδασκαλία και μάθηση στις Φυσικές Επιστήμες (McDermott & Shaffer, 1992· Thacker, Kim, & Trefz, 1994· Herflich, Dixon, & Dixon & Davis, 2001) τη Βιολογία (Crawford, 2000· Londraville, et al,2002), τη Χημεία (Jalil, 2006· Lewis & Lewis, 2005· Oliver-Hoyo & Allen, 2005) και την Ιστορία (Martin & Monte-Sano, 2008· Levy et al, 2013· Voet, M. & De Wever, B., 2016,2018). Το δείγμα των περισσοτέρων από αυτές είναι φοιτητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Kwon, Rasmussen, & Allen, 2005· Ju & Kwon, 2007· Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle & Burtch, 2006). Ο πιθανός λόγος που παρατηρείται αυτό είναι είτε γιατί εξασφαλίζεται ευκολότερη επαφή του ερευνητή με τους συμμετέχοντες είτε γιατί θεωρείται πιο εύκολη η εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης στο συγκεκριμένο δείγμα.

Μία από τις έρευνες που επικεντρώθηκαν στη σύγκριση της διερευνητικής με την παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση είναι αυτή των McKinnon και Renner (1971), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι στρατηγικές της διερεύνησης είναι σημαντικά καλύτερες από τις παραδοσιακές μεθόδους ως προς την ανάπτυξη του τρόπου σκέψης. Μία πιο πρόσφατη έρευνα, αυτή του Huston(2000), έδειξε ότι η διατήρηση πληροφοριών στη μνήμη καθώς και η ορθή χρήση επιστημονικών εννοιών ήταν μεγαλύτερη στους σπουδαστές στους οποίους εφαρμόστηκε η καθοδηγούμενη διερευνητική μέθοδος συγκριτικά με εκείνους στους οποίους εφαρμόστηκε η καθοδηγούμενη διερευνητική μέθοδος η παραδοσιακή μέθοδος. Λίγο αργότερα, οι Hofstein, Navon, Kipnis και Mamlok-Naaman (2005) εστίασαν στην ικανότητα μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να θέτουν σωστές και επιστημονικές ερωτήσεις στο μάθημα της Χημείας με τη διερευνητική μέθοδο. Συγκεκριμένα, μελέτησαν: α) την ικανότητα των μαθητών να θέτουν ερωτήσεις σχετικές με τις παρατηρήσεις και τα ευρήματά τους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος και β) την ικανότητα των μαθητών να θέτουν ερωτήματα μετά από προσεκτική ανάγνωση ενός επιστημονικού άρθρου. Διαπιστώθηκε πως οι μαθητές που συμμετείχαν στην ομάδα της διερεύνησης απέκτησαν την ικανότητα να θέτουν περισσότερες και πιο επιστημονικές ερωτήσεις.

Με μαθητές μικρότερης ηλικίας (5th grade) ασχολήθηκε ο ερευνητής Abdi (2014), ο οποίος μελέτησε και αυτός τη διερευνητική προσέγγιση συγκριτικά με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές της ομάδας πειραματισμού (διερευνητική διδασκαλία) σημείωσαν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας, ιδιαίτερα στα ερωτήματα που απαιτούσαν εξήγηση. Η έρευνα αυτή, συμφώνησε με προηγούμενη έρευνα των Hand, Wallace και Yang (2004), η οποία είχε δείξει ότι η επίδοση η επίδοση σε υψηλού επιπέδου τεστ των μαθητών αυτής της ηλικίας που δέχτηκαν τη διερευνητική διδασκαλία ήταν πολύ καλύτερη από την αντίστοιχη επίδοση μαθητών που διδάχτηκαν με την παραδοσιακή μέθοδο. Στο τελευταίο συμπέρασμα κατέληξαν και άλλες πρόσφατες έρευνες, οι οποίες επεσήμαναν ότι, σε πιο απαιτητικά από πλευράς κριτικής σκέψης επίπεδα μάθησης, η διερευνητική διδασκαλία έχει αποδειχθεί πιο αποτελεσματική συγκριτικά με τις παραδοσιακές μορφές διδασκαλίας (Harada & Yoshina, 2004· Wa, Kuh & Li, 2008· Donham, Bishop, Kuhlthau, & Oberg, 2001).

Μία πιο πρόσφατη έρευνα των Erbas & Yenmez (2011), μελέτησε τα αποτελέσματα της χρήσης της διερευνητικής προσέγγισης σε δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας (dynamic geometry environment-DGE). Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε επίσης συγκριτικά με μία διδασκαλία βασισμένη στο σχολικό βιβλίο. Ως προς το γνωστικό κομμάτι, φάνηκε να βελτιώθηκαν οι επιδόσεις των μαθητών στην αντίληψη, τη μέτρηση και τη σύγκριση των πολυγώνων. Ακόμη, τα σχόλια και οι ερμηνείες της ομάδας της διερευνητικής διδασκαλίας ήταν πιο ακριβή και πιο προχωρημένου επιπέδου, καθώς οι μαθητές ενεπλάκησαν περισσότερο και στο δυναμικό περιβάλλον της γεωμετρίας. Σε θετικά αποτελέσματα υπέρ της διερευνητικής διδασκαλίας κατέληξαν και οι Kogan και Laursen (2013), οι οποίοι κατέδειξαν ότι η διερευνητική προσέγγιση μπορεί να έχει θετικότερο αντίκτυπο σε μαθητές χαμηλότερης επίδοσης, κάτι που αναίρεσε τη φιλοσοφία που υπήρχε ως τότε, ότι δηλαδή η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί «μάθηση πολυτελείας» και αφορά μόνο στους καλύτερους μαθητές. Αναπόφευκτα, η ύλη που καλύπτεται μέσω της διερευνητικής προσέγγισης είναι λιγότερη, ο αντίκτυπός της ωστόσο για τους λιγότερο δυνατούς μαθητές είναι θετικότερος.

Μία παράμετρος της διερευνητικής προσέγγισης που έχει μελετηθεί είναι ο βαθμός καθοδήγησης από τον εκπαιδευτικό, γεγονός που καθορίζει και το είδος της διδασκαλίας που θα εφαρμοστεί. Έρευνες έχουν δείξει ότι η διερευνητική μέθοδος είναι αποτελεσματικότερη όταν είναι πιο καθοδηγούμενη, ακόμη και όταν οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτή (Kirschner, Sweller & Clark, 2006). Ακόμη, η Kuhn και οι συνεργάτες της (2000) υποστηρίζουν ότι η ανοιχτή διερευνητική μέθοδος είναι αποτελεσματικότερη μόνο στην περίπτωση που οι μαθητές έχουν αναπτύξει της κατάλληλες δεξιότητες μέσω της καθοδηγούμενης και της δομημένης προσέγγισης. Από την άλλη μεριά, έρευνα των Sadeh & Zion (2009) υποστηρίζει ότι μαθητές που συμμετείχαν σε μία ανοιχτή διερευνητική διδασκαλία κατανόησαν καλύτερα τη διαδικασία, ενώ μετέτρεψαν τις λανθασμένες μη σχολικές γνώσεις σε επιστημονικά ορθές. Ως προς τις γνωστικές επιδόσεις, η παραπάνω έρευνα κατέληξε σε παρόμοια διαπίστωση.

Ένας ακόμη παράγοντας που επηρεάζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι ο χρόνος εφαρμογής της**.** Οι Amaral, Garrison και Klentschy (2002) διεξήγαγαν έρευνα διάρκειας τεσσάρων ετών σε 615 μαθητές ηλικίας 9-10 ετών και σε 635 μαθητές 11-12 ετών. Τα αποτελέσματά της ανέδειξαν πολλά οφέλη της μεθόδου, τα οποία ενισχύονταν με το πέρασμα του χρόνου και καθώς συνέχιζε να εφαρμόζεται η μέθοδος και να εξοικειώνονται οι μαθητές του δείγματος.

Εκτός από τις γνωστικές επιδόσεις των μαθητών, εντοπίστηκαν και έρευνες που μελέτησαν τις δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσω της διερευνητικής προσέγγισης, μία εκ των οποίων είναι και η επιχειρηματολογία. Η έρευνα των Wells και Makar (2014) ήταν μία από αυτές, η οποία είχε ως στόχο τη μελέτη του βαθμού επίδρασης της διερευνητικής διδασκαλίας στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας σε μαθητές 9-10 ετών. Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες ερευνητές, οι μαθητές βρήκαν ενδιαφέρουσα τη διαδικασία και κατάφεραν να επιχειρηματολογήσουν με βάση τις πληροφορίες που είχαν στη διάθεσή τους. Η επιχειρηματολογία βελτιώθηκε και σε πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος των Μαθηματικών, όσον αφορά σε θέματα αποδείξεων (Kwon, 2015).

Οι Wallace, Tsoi, Calkin και Darley (2003) ασχολήθηκαν με μεγαλύτερης ηλικίας δείγμα και συγκεκριμένα με πέντε φοιτητές Βιολογίας, οι οποίοι διδάχθηκαν μέσω της διερευνητική προσέγγισης. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν τη θετική στάση που αυτοί απέκτησαν για το μάθημα της Βιολογίας, καθώς και τη βελτίωση στο βαθμό κατανόησης των πειραμάτων του εν λόγω αντικειμένου (Gibson & Chase, 2002· White & Frederiksen, 1998). Στα ίδια συμπεράσματα κατέληξαν και έρευνες (Zerafa-Gatt, 2014· Tytler, 2007· Gatt, 2014· Aktamiş, Hįğde, Özden, 2016) οι οποίες ισχυρίστηκαν ότι, μέσα από τις προκλήσεις και τις διαδικασίες της συγκεκριμένης προσέγγισης, αυξήθηκε το ενδιαφέρον και οι επιτυχίες των μαθητών, ενώ ταυτόχρονα οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν μεγαλύτερο κίνητρο για τη διαδικασία μάθησης.

Ωστόσο, υπήρξαν και έρευνες οι οποίες υποστήριξαν ότι η διερευνητική διδασκαλία δεν είναι αυτονόητο ότι θα επηρεάσει θετικά τη στάση των μαθητών απέναντι στην επιστήμη. Για παράδειγμα, σε έρευνα των Simsek & Kabapmar (2010), η οποία εξέτασε τις επιπτώσεις της διερευνητικής διδασκαλίας σε 20 μαθητές της Ε' τάξης, διαπιστώθηκε πως η συγκεκριμένη προσέγγιση διδασκαλίας είχε θετικό αντίκτυπο για τους μαθητές όσον αφορά στην εννοιολογική κατανόηση και την επιστημονική διαδικασία, αλλά όχι και όσον αφορά στις αντιλήψεις και τις στάσεις των μαθητών απέναντι στο επιστημονικό αντικείμενο.

Όπως συνεπάγεται από τα παραπάνω, τα ερευνητικά αποτελέσματα είναι μάλλον ενθαρρυντικά για την εφαρμογή της διερευνητικής προσέγγισης σε μαθητές όλων των ηλικιών. Παρόλα αυτά, υπάρχουν και έρευνες που επισημαίνουν και κάποιες ορισμένα αρνητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της. Μία από αυτές τις έρευνες είναι εκείνη του Chung (2004), ο οποίος σύγκρινε την διερευνητική με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας γύρω από την έννοια του πολλαπλασιασμού σε τέσσερα τμήματα Γ' Δημοτικού σε σχολείο της Αμερικής. Τα αποτελέσματα έδειξαν μεν βελτίωση στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού από τους μαθητές που διδάχθηκαν με τη διερευνητική μέθοδο αλλά όχι σε σημαντικό βαθμό.

Με τη μειωμένη αποτελεσματικότητα της διερευνητικής διδασκαλίας συμφωνούν και οι Kirschner, Sweller και Clark (2006), οι οποίοι υποστήριξαν σε έρευνά τους ότι όταν η μάθηση είναι ελάχιστα καθοδηγούμενη, δε λαμβάνονται υπόψη οι γνωστικές δομές του κάθε ατόμου. Συγκεκριμένα, στα παιδιά που εργάζονται με ελάχιστη καθοδήγηση απαιτείται περισσότερη μνήμη εργασίας, προκειμένου να βρεθεί μία λύση, και αυτό καθιστά δυσκολότερη την αποθήκευση στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Την παραπάνω έρευνα αμφισβήτησαν οι Hmelo-Silver, Duncan και Chinn (2007) υποστηρίζοντας ότι οι Kirschner κ.ά. (2006) ταύτισαν την ανακαλυπτική μάθηση με τη διερευνητική. Τέλος, μία πρόσφατη έρευνα των Cairns και Areepattamannil (2017), η οποία πραγματοποιήθηκε σε 54 χώρες μεταξύ 170.474 μαθητών 15 ετών και εξέτασε την επίδραση της διερευνητικής προσέγγισης, τις επιδόσεις και τις στάσεις τους απέναντι στο μάθημα των Φυσικών Επιστημών, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση δεν βελτίωσε τις επιδόσεις των μαθητών, ενίσχυσε όμως σημαντικά το ενδιαφέρον και το κίνητρό τους για τη μαθησιακή διαδικασία.

2.2 Η έννοια του εμβαδού και η μέτρησή του

2.2.1 Εισαγωγή

Η έννοια του εμβαδού αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες με την οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή από την προσχολική τους ηλικία μέχρι τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου και ταυτόχρονα μία έννοια στην κατανόηση της οποίας φαίνεται να συναντάνε αρκετές δυσκολίες. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η μαθηματική έννοια του εμβαδού με βάση τα ιστορικά της στοιχεία, τη μαθηματική της ταυτότητα, την προσέγγισή της στο ελληνικό διδακτικό πακέτο, τα στάδια ανάπτυξης της αντίληψης της έννοιά τους και τα ερευνητικά δεδομένα που υπάρχουν στη βιβλιογραφία και αφορούν στις δυσκολίες και τις ικανότητες των μαθητών. Η ανάλυση αυτή κρίθηκε απαραίτητη για το σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και των δραστηριοτήτων που θα συμπεριλαμβάνονται σε αυτές.

2.2.2 Ιστορική αναδρομή της έννοιας του εμβαδού

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας υπήρξε αντικείμενο μελέτης για τους μαθηματικούς από αρχαιοτάτων χρόνων. Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, η αρχή του συμπίπτει με την πρακτική ανάγκη μέτρησης του εμβαδού της γης, η οποία, μαζί με άλλες παρόμοιες πρακτικές ανάγκες, συνέτεινε στη γέννηση της επιστήμης της Γεωμετρίας. Δεδομένου ότι οι γεωργοί έπρεπε να μετρούν την έκταση των χωραφιών, οι μέθοδοι για τον υπολογισμό του εμβαδού προέρχονται από τους πρώτους αγροτικούς πολιτισμούς, οι παλαιότεροι εκ των οποίων αναπτύχθηκαν περί το 3500 π.Χ. κατά μήκος μεγάλων ποταμών, και συγκεκριμένα του Τίγρη και του Ευφράτη στη Μεσοποταμία, του Νείλου της Αιγύπτου, των Huang και Yangtze της Κίνας, του Ινδού και του Γάγγη στην Ινδία. Αναφέρεται μάλιστα, πως στην Αρχαία Αίγυπτο ο Φαραώ έστελνε μετά από τις πλημμύρες του Νείλου του *μετρητές*, οι οποίοι όριζαν εκ νέου τα σύνορα των Αιγύπτιων αγροτών

(Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, 2009· Αργυρόπουλος, Βλαμός, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σιδέρης, 2016). Ο Otto Neugebauer υποστήριξε πως τόσο για τους Αιγύπτιους όσο και για τους Βαβυλώνιους τα προβλήματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων αποτελούσαν εφαρμογές αριθμητικών μεθόδων σε ζητήματα της καθημερινότητας (Neugebauer, 2003).

Ο μαθηματικός που ασχολήθηκε ευρέως με την έννοια του εμβαδού ήταν πιθανότατα ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) ο οποίος έγινε διάσημος αφ' ενός για την οργάνωση της μαθηματικής σκέψης της εποχής του σε ένα ενιαίο σύστημα αξιωμάτων και αφ' ετέρου για τη συγγραφή μιας συλλογής δεκατριών (13) βιβλίων με τίτλο *Στοιχεία*. Στα *Στοιχεία* ο Ευκλείδης παρουσιάζει και αποδεικνύει πολλούς τύπους για την εύρεση των εμβαδών των επιφανειών. Εκφράζει τους τύπους αυτούς με λέξεις αντί για σύμβολα και τείνει να αποδώσει τα εμβαδά σε συνάρτηση με τα εμβαδά άλλων είκοσι (20) σχημάτων. Για παράδειγμα, στην Πρόταση 41 του Βιβλίου Ι των *Στοιχείων*, ο Ευκλείδης υπολογίζει το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου μέσω του εμβαδού τριγώνου ως εξής: «Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με αυτή ενός τριγώνου και οι δύο βάσεις είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε το παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του τριγώνου».

Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), αναγνωρίζεται ως ο μεγαλύτερος Έλληνας μαθηματικός, καθώς έκανε πολλές και σημαντικές ανακαλύψεις τόσο στον τομέα των Μαθηματικών όσο και της Φυσικής και της Μηχανικής. Στη Γεωμετρία για παράδειγμα απέδειξε ότι το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το ήμισυ του γινομένου της ακτίνας του επί την περιφέρειά του. Στην Πρόταση 1 του βιβλίου Περί της Μέτρησης Του Κύκλου δίνει το εμβαδόν του κύκλου μέσω του εμβαδού τριγώνου ως εξής: «Το εμβαδόν κάθε κύκλου ισούται με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου, στο οποίο μία από τις πλευρές είναι ίση με την ακτίνα r του κύκλου και μία άλλη με την περίμετρο C». Στο μεσοδιάστημα από την εποχή του Αρχιμήδη μέχρι τον $17^{ο}$ αιώνα εμβαδά πολύπλοκων επιφανειών υπολογίστηκαν με επιτυχία, χωρίς όμως να γίνεται εφαρμογή γενικών τεχνικών αλλά πρακτικών που προσάρμοζαν τη λύση τους στο εκάστοτε πρόβλημα.

2.2.3 Θεωρητική προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού

Ξεκινώντας από τον ορισμό της έννοιάς του, το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι «ο θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο». Λόγω της εμπειρικής γεωμετρίας της αρχαιότητας, ο αριθμός αυτός εξαρτιόταν από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούνταν (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2013). Αποτελεί αριθμητικό χαρακτηριστικό ενός επίπεδου σχήματος μιας συγκεκριμένης κατηγορίας (πχ. πολύγωνα), το οποίο έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1) Εκφράζεται μόνο με θετικό αριθμό

2) Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά

3) Η επιφάνεια είναι προσθετική (στη περίπτωση των πολυγώνων αυτό σημαίνει πως, αν ένα σχήμα αποτελείται από δύο ή περισσότερα επιμέρους σχήματα, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε η επιφάνεια (εμβαδόν) του αρχικού σχήματος ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο ή περισσοτέρων επιμέρους σχημάτων. $\textbf{area}\ (P \cup Q) = \textbf{area}\ P + \textbf{area}\ Q$

4) Διατηρείται το ίδιο μετά από μετατοπίσεις του σχήματος

5) Το εμβαδόν της μονάδας τετραγώνου με πλευρά 1 είναι το 1 (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981· Huges & Rogers, 1979)

Ως διατήρηση ορίζεται η «δυνατότητα μιας επιφάνειας να μεταβάλλεται ως προς το σχήμα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μεταβάλλεται και ποσοτικά» (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981· Huges & Rogers, 1979). Η κατανόηση αυτού του χαρακτηριστικού είναι απαραίτητη για την κατανόηση της έννοιας γενικότερα. Βασική αρχή για την κατανόηση της διατήρησης της επιφάνειας θεωρείται το ότι η επιφάνεια παραμένει αμετάβλητη ύστερα από μετακίνηση (Douady & Perrin, 1986). Ως εξέλιξη αυτής της συνειδητοποίησης λογίζεται η αντίληψη ότι η επιφάνεια διατηρείται μετά από τεμαχισμό και ανασύνθεση, η οποία είναι βασική και για την κατανόηση της λειτουργίας της μέτρησης (Douady & Perrin, 1986· Beattys & Maher, 1985· Hirstein, Lamb & Osborne, 1978).

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, η πρακτική εύρεσης του εμβαδού μέσω της επικάλυψης θα πρέπει να περιλαμβάνει τις παρακάτω αρχές:

1. Το αξίωμα της προσθετικότητας (additivity axiom), σύμφωνα με το οποίο, όταν δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν, το ένα μπορεί να κοπεί με κατάλληλο τρόπο, να ανασχηματιστεί και να προκύψει το άλλο (Freudental, 1983· Wagman, 1975).

2. Την αρχή της επικάλυψης (principle of overlapping), σύμφωνα με την οποία, για να συγκριθούν δύο σχήματα ως προς το εμβαδόν τους, τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο.

Η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας ορίζει τον αριθμό των τετραγώνων πλευράς ενός μέτρου που εμπεριέχονται σε αυτή. Μία κυρίαρχη κοινώς αποδεκτή μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι το τετραγωνικό μέτρο (1 τ.μ. ή 1 m^2) με τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά του, τα οποία προέκυψαν για πρακτικούς λόγους μέτρησης. Γνωρίζοντας ότι το ένα μέτρο ισούται με δέκα δεκατόμετρα (1μ=10 δεκ.), τότε το τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε 10*10=100 τετράγωνα πλευράς ενός δεκατόμετρου. Το εμβαδόν ενός τέτοιου τετραγώνου είναι ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο (1 τετ. δεκ. ή 1 dm^2). Παρομοίως, αφού το ένα δεκατόμετρο ισούται με δέκα εκατοστόμετρα (1 δεκ. =10 εκ.) και το εκατοστόμετρο ισούται με δέκα χιλιοστόμετρα (1 εκ=10 χιλ), τότε το τετράγωνο χωρίζεται σε 100 τετράγωνα πλευράς ενός εκατοστόμετρου και χιλιοστόμετρου αντίστοιχα. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς ενός εκατοστόμετρου λέγεται ένα τετραγωνικό εκατοστόμετρο (1 τ. εκ. ή 1cm^2) και αντιστοίχως ενός χιλιοστόμετρου λέγεται τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (1 τ.χιλ. ή 1 mm^2). Η πρακτική ανάγκη μέτρησης επιφανειών μεγαλύτερων από αυτές του ενός τετραγωνικού μέτρου- από την οποία προέκυψε και ο αρχικός ορισμός του εμβαδού-, όπως η έκταση ενός χωραφιού ή ενός κράτους, οδήγησε στην δημιουργία των πολλαπλάσιων του τετραγωνικού μέτρου. Σε αντιστοιχία με τον τρόπο σκέψης των υποδιαιρέσεων που αναφέραμε παραπάνω, ένα τετράγωνο πλευράς ενός χιλιομέτρου (1 χμ =1.000 μ.) χωρίζεται σε 1.000 X 1.000=1.000.000 τετράγωνα πλευράς ενός μέτρου και ονομάζεται τετραγωνικό χιλιόμετρο (1 τ.χμ. ή 1 km^2).

2.2.4 Η έννοια του εμβαδού στο ελληνικό διδακτικό πακέτο

Ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων και παρεμβάσεων για τη διδασκαλία του εμβαδού απαιτεί τη μελέτη της έννοιας στο αντίστοιχο διδακτικό πακέτο. Το ελληνικό διδακτικό πακέτο περιλαμβάνει τα ΔΕΠΠΣ, τα ΑΠΣ, το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών - που λειτουργεί συμπληρωματικά με τα αναλυτικά προγράμματα - και τα σχολικά εγχειρίδια για το κάθε γνωστικό αντικειμένο. Ο λόγος που κρίνεται απαραίτητη η μελέτη αυτών είναι διότι περιλαμβάνουν τις εκπαιδευτικές προθέσεις και τους σκοπούς της εκπαίδευσης, οι οποίοι επιτυγχάνονται με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού. Η μελέτη αυτή πραγματοποιείται με βάση τα περιεχόμενα, τα εναλλακτικά μέσα και τη μεθοδολογία που περιγράφονται στα προγράμματα (Βρεττός & Καψάλης, 2009· Stenhouse,2003).

Το εμβαδόν αποτελεί μία από τις μαθηματικές έννοιες που εντοπίζονται στα Αναλυτικά Προγράμματα όλων των τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, από το Νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του Δημοτικού. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3) παρουσιάζονται οι παράμετροι της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του, καθώς και η τάξη στην οποία συναντώνται ανάλογα με το κάθε κομμάτι του διδακτικού πακέτου.

Διδακτικό Πακέτο / **Εισαγωγή έννοιας**	**ΔΕΠΠΣ**	**ΑΠΣ**	**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**	**ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ**
Έννοια του εμβαδού	Νηπιαγωγείο Δ' Δημοτικού	Δ' Δημοτικού	Νηπιαγωγείο	Β' Δημοτικού
Κάλυψη επιφάνειας	Νηπιαγωγείο	Α' Δημοτικού	Νηπιαγωγείο Α' Δημοτικού Β' Δημοτικού	Β' Δημοτικού
Χρήση άτυπων μονάδων	Νηπιαγωγείο Β' Δημοτικού	Α' Δημοτικού Β' Δημοτικού Δ' Δημοτικού	Νηπιαγωγείο Α' Δημοτικού	Β' Δημοτικού Γ' Δημοτικού
Χρήση τυπικών μονάδων	Β' Δημοτικού Ε' Δημοτικού Στ' Δημοτικού	Α' Δημοτικού Γ' Δημοτικού Δ' Δημοτικού	Νηπιαγωγείο Α' Δημοτικού Β' Δημοτικού	Δ' Δημοτικού Ε' Δημοτικού
Μετατροπές μονάδων μέτρησης	Δ' Δημοτικού	Ε' Δημοτικού Στ' Δημοτικού	Δ' Δημοτικού Ε' Δημοτικού Στ' Δημοτικού	Δ' Δημοτικού Ε' Δημοτικού Σ' Δημοτικού
Δόμηση πλέγματος	Καμία αναφορά	Καμία αναφορά	Νηπιαγωγείο Α' Δημοτικού Β' Δημοτικού Δ' Δημοτικού	Γ' Δημοτικού Δ' Δημοτικού
Μαθηματικός	Ε' Δημοτικού	Ε' Δημοτικού	Γ' Δημοτικού Ε' Δημοτικού	Ε' Δημοτικού Σ' Δημοτικού

τύπος εμβαδού	ΣΤ’ Δημοτικού	ΣΤ’ Δημοτικού	ΣΤ’ Δημοτικού	
Διαχωρισμός εμβαδού και περιμέτρου	Καμία αναφορά	Ε’ Δημοτικού	Δ’ Δημοτικού ΣΤ’ Δημοτικού	Δ’ Δημοτικού

Πίνακας 3: Εμφάνιση παραμέτρων της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του στο ελληνικό διδακτικό πακέτο.

Από την μελέτη του παραπάνω πίνακα διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των παραμέτρων της έννοιας και της τάξης στην οποία συναντώνται στο διδακτικό πακέτο. Εξαίρεση αποτελούν οι δύο μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού (Ε’ και ΣΤ’), στις οποίες εμφανίζεται μία μεγαλύτερη σύγκλιση των στόχων του πακέτου σε παραμέτρους όπως ο μαθηματικός τύπος, η χρήση και οι μετατροπές των τυπικών μονάδων μέτρησης.

Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού δίνεται αρχικά έμφαση στην έννοια του εμβαδού και στη συνέχεια στην κάλυψή της πρώτα με άτυπες (τετραγωνάκια και τριγωνάκια) και έπειτα με τυπικές μονάδες μέτρησης. Η δόμηση του πλέγματος, η οποία αποτελεί βασική έννοια προς κατανόηση για την εμπέδωση του μαθηματικού τύπου, παρόλο που παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον και συναντάνται στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών και στο σχολικό εγχειρίδιο, απουσιάζει από τους στόχους των Αναλυτικών Προγραμμάτων.

Όσον αφορά συγκεκριμένα στο σχολικό εγχειρίδιο -μιας και αυτό αποτελεί το βασικό εργαλείο του εκπαιδευτικού στη σχολική διαδικασία-, η έννοια του εμβαδού εμφανίζεται για πρώτη φορά στη Β’ τάξη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές για μία ολόκληρη σχολική χρονιά (Α’ Δημοτικού) να μην έρθουν καθόλου σε επαφή με τη μαθηματική αυτή έννοια. Κάτι τέτοιο, ωστόσο, προκαλεί εντύπωση, καθώς και στα ΑΠΣ και στα ΔΕΠΠΣ υπάρχουν σχετικοί μαθησιακοί στόχοι τους οποίους καλούνται να πραγματοποιήσουν μαθητές και εκπαιδευτικοί. Τα σχήματα που κυριαρχούν τόσο στα παραδείγματα όσο και στις δραστηριότητες εξάσκησης είναι συμμετρικά-κατά βάση ορθογώνια και τετράγωνα-, ενώ δεν παρατηρείται σύνδεση του τύπου υπολογισμού με τα χαρακτηριστικά του κάθε σχήματος. Ακόμη, διαπιστώνεται πως απουσιάζουν δραστηριότητες σύγκρισης επιφανειών - είτε άμεσων είτε έμμεσων -, κάτι που όμως συμπεριλαμβάνεται ως στόχος στα Αναλυτικά Προγράμματα των συγκεκριμένων τάξεων. Τέλος, όσον αφορά στην Ε’ Δημοτικού, στην οποία και εστιάστηκε η παρούσα έρευνα, το κεφάλαιο του εμβαδού περιλαμβάνει τους μαθηματικούς τύπους, χωρίς τη σύνδεση με τη δημιουργία του πλέγματος, καθώς και ασκήσεις εμπέδωσης.

2.2.5 Στάδια ανάπτυξης αντίληψης της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του

Η έννοια του εμβαδού και η μέτρησή του αποτελούν ένα κεφάλαιο των Μαθηματικών που δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές όλων των ηλικιών, ακόμη και τους ενήλικες (Lin & Tsai, 2003).

Ξεκινώντας από το Νηπιαγωγείο και μέχρι τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, οι μαθητές εφαρμόζουν σταδιακά τέσσερις τύπους μέτρησης: (1) μέτρηση μέσω σύγκρισης και διάταξης, (2) μέτρηση μέσω βημάτων, (3) μέτρηση με μονάδα μέτρησης (τυπική ή μη τυπική) και (4) μέτρηση με χρήση οργάνου (Szylagyi, Clements & Sarama, 2013). Οι τέσσερις αυτοί τύποι αναφέρονται και από το NCTM, το οποίο δίνει έμφαση στη σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στην κατανόηση του μεγέθους (πχ μήκος, εμβαδόν) και στη χρήση κατάλληλων τεχνικών για τη μέτρησή του (NCTM, 2006).

Μελετώντας την μέτρηση της επιφάνειας ως γνωστική διαδικασία, ο Siegler (2002) εξέτασε τα εξελεγκτικά στάδια από τα οποία διέρχεται η σκέψη του παιδιού. Σύμφωνα με τον συγκεκριμένο ερευνητή, σε ένα πρώιμο στάδιο διακρίνουμε ποιοτικές - άμεσες ή έμμεσες - συγκρίσεις των αντικειμένων μεταξύ τους, χωρίς την παρεμβολή μονάδων και αριθμών. Τα παιδιά ξεκινούν με «άτυπες ολιστικές ή βασισμένες πάνω στην κίνηση συγκρίσεις», οι οποίες πηγάζουν από φυσικά ή άλλα εμπειρικά στοιχεία, όπως ο χρόνος που χρειάζεται για να καλύψουν μια απόσταση, η προσπάθεια που απαιτείται για την ολοκλήρωση ενός έργου ή το που βρίσκονται τα σημεία αρχής και τέλους ανεξάρτητα από το υπόλοιπο σχήμα. Η κατανόηση της συγκεκριμένης διαδικασίας προϋποθέτει αρχικά τη διάκριση του μετρούμενου μεγέθους (επιφάνειας) ως ιδιαίτερου χαρακτηριστικού του εξεταζόμενου αντικειμένου, το οποίο μένει αμετάβλητο, αν δεν ελαττωθεί ή αυξηθεί. Σε ένα επόμενο στάδιο, αυτό το (γνώριμο) συνεχές χαρακτηριστικό συγκρίνεται με ένα άλλο διακριτό μέγεθος (αρχικά αυθαίρετο και στη συνέχεια τυπικό), προκειμένου να εντοπιστεί ο αριθμός των επικαλύψεων ή των επαναλήψεων που αντιστοιχούν στο εκάστοτε αντικείμενο προς μέτρηση. Το διακριτό αυτό μέγεθος ονομάζεται *ενδιάμεσος*. Χρησιμοποιείται με επανάληψη και η σύνδεση της επανάληψης με έναν αριθμό ολοκληρώνει την έννοια της μέτρησης.

Οι Inskeep (1976 in Kordaki & Potari, 2002) και Driscoll (1981 in Kordaki & Potari, 2002) παρουσίασαν ιεράρχηση των επιπέδων κατανόησης της έννοιας του εμβαδού από μαθητές του Δημοτικού. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές διερευνούν τα χωρικά χαρακτηριστικά της προς μέτρηση επιφάνειας· στο δεύτερο επίπεδο μετασχηματίζουν και συγκρίνουν τις επιφάνειες με αισθητηριακούς τρόπους χωρίς τη χρήση αριθμών· στο τρίτο επίπεδο χρησιμοποιούν ποικίλες μονάδες για τη μέτρηση της επιφάνειας, ενώ το τέταρτο επίπεδο, μετρούν την επιφάνεια που τους ζητείται χρησιμοποιώντας τον τύπο εύρεσης του εμβαδού.

Η κατάκτηση της γεωμετρικής μέτρησης μεγεθών όπως το μήκος, το εμβαδόν και ο όγκος, προϋποθέτει την κατάκτηση δύο βασικών εννοιών (Παρασκευόπουλος 1985; 42,56-57):

1) Της διατήρησης της ποσότητας (μήκος, εμβαδόν, όγκος) που μετράται (αμεταβλησία των διαφόρων φυσικών μεγεθών) - ο μαθητής σχολικής ηλικίας μπορεί να συνεκτιμά και τις δύο διαστάσεις ταυτόχρονα ακολουθώντας την οριζόντια κλιμάκωση της ανάπτυξης

2) Της μονάδας και της επανάληψής της (αυθαίρετες μονάδες, σταθερές μονάδες, σωστή χρήση εργαλείων μέτρησης).

Αργότερα, οι Clements & Stephan (2004) εμπλούτισαν τον κατάλογο των θεμελιωδών εννοιών που κρίνονται απαραίτητες για την κατανόηση της μέτρησης του εμβαδού με τις πέντε παρακάτω:

1. Διαμέριση (partitioning): Η ικανότητα διαμέρισης ενός δισδιάστατου χώρου σε διακριτά μέρη

2. Επανάληψη της μονάδας μέτρησης (unit iteration): Η ικανότητα επικάλυψης μιας περιοχής με μονάδες χωρίς υπερκαλύψεις ή κενά, αναπτύσσοντας έτσι την έννοια της συνεχούς επανάληψης της μονάδας για τη μέτρηση του εμβαδού.

3. Διατήρηση (conservation): Η ικανότητα κατανόησης ότι το εμβαδόν ενός σχήματος παραμένει το ίδιο, ακόμα και στην περίπτωση που το κόψουμε σε κομμάτια και τα επανατοποθετήσουμε με τέτοιο τρόπο που θα δημιουργηθεί ένα άλλο σχήμα.

4. Δόμηση ενός σχηματισμού (structuring an array): Με τον όρο *σχηματισμό* εννοούμε το χωρισμό μιας επιφάνειας σε γραμμές και στήλες. Η νοητική αυτή ικανότητα αναπτύσσεται σταδιακά και περνά μέσα από τα ακόλουθα στάδια:

Α) Τα παιδιά έχουν μικρή ή καμία ικανότητα να οργανώσουν και να δομήσουν το δισδιάστατο χώρο (πχ. δεν μπορούν να καλύψουν ένα ορθογώνιο με πλακίδια χωρίς κενά και επικαλύψεις)

Β) Τα παιδιά πετυχαίνουν την επικάλυψη αλλά δεν μπορούν να υπολογίσουν τον αριθμό των πλακιδιών που χρησιμοποίησαν (δεν κάνουν συστηματική καταμέτρηση, για παράδειγμα μετρούν τα πλακίδια της περιφέρειας και στη συνέχεια τα εσωτερικά, αλλά με μη συστηματικό τρόπο)

Γ) Καλύπτουν την επιφάνεια και μετρούν τα πλακίδια, όμως χωρίς δομή (σειρά και στήλη)

Δ) Δε χρησιμοποιούν με συστηματικό τρόπο τις σειρές και τις στήλες (πχ. μετρούν μερικές αλλά όχι όλες τις σειρές ως μονάδες)

Ε) Δομούν το ορθογώνιο ως ένα σύνολο από σειρές

ΣΤ) Μετρούν με συνεχή επανάληψη των σειρών (πχ. μετρώντας κάθε σειρά από 5, «5, 10, 15, 20»)

Ζ) Μετρούν με συνεχή επανάληψη των σειρών σε σχέση με τον αριθμό των τετραγώνων μιας στήλης (πχ. μετρώντας ανά 5)

5. Γραμμική μέτρηση (linear measurement): Η ικανότητα απαρίθμησης των γραμμών που συνθέτουν την επιφάνεια.

1) Κατανοούν ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου προέρχονται από τον αριθμό των τετραγώνων των στηλών και των σειρών και έτσι υπολογίζουν το εμβαδόν από αυτές τις διαστάσεις (Battista et al, 1998. Outhred & Mitchelmore, 2000).

Με τα παραπάνω ευρήματα φαίνεται να συμφωνεί πρόσφατη έρευνα του Zhou (2012), ο οποίος υποστήριξε πως τρεις γνωστικές λειτουργίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του. Μία από αυτές είναι η κατανόηση της φύσης των ιδιοτήτων, σύμφωνα με την οποία ως εμβαδόν νοείται ο χώρος που περικλείεται από τα όρια των γεωμετρικών αντικειμένων που και μπορεί να τεθεί προς σύγκριση (Strom, Kemeny, Lehrer, Forman, 2001, in Zhou 2012). Μία δεύτερη γνωστική λειτουργία είναι η ανάπτυξη αντιλήψεων ως προς τις ιδιότητες των μονάδων, η οποία εστιάζεται στην ποσοτικοποίηση του εμβαδού με τη χρήση διακριτών μονάδων και την κατανόηση των ιδιοτήτων των μονάδων αυτών (Outhred & Mitchelmore, 2000). Τέλος, μία τρίτη γνωστική λειτουργία είναι η ποσοτικοποίηση επιφανειών με τη χρήση τύπων, κατά την οποία οι μαθητές εφαρμόζουν τον κατάλληλο τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός συγκεκριμένου σχήματος και είναι σε θέση να εξηγήσουν τα εννοιολογικά θεμέλια των τύπων.

Τα παραπάνω στάδια εξέλιξης της αντίληψης της μέτρησης του εμβαδού βοήθησαν κάποιους ερευνητές να κατηγοριοποιήσουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές των διαφόρων ηλικιών. Σύμφωνα με τη μελέτη των Huang & Witz (2013), οι ικανότητες των μαθητών Δ' Δημοτικού μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες:

(α) Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μαθητές που έχουν όχι μόνο μια ορθή κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του εμβαδού, αλλά επιπλέον χρησιμοποιούν συνειδητά τον αλγοριθμικό τύπο, έχοντας κατανοήσει τη δόμηση του πλαισίου και τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

(β) Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν όσοι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τον αλγοριθμικό τύπο μέσω του πολλαπλασιασμού, αλλά δεν έχουν ορθή κατανόηση της έννοιας

(γ) Στη τρίτη κατηγορία ανήκουν οι μαθητές που έχουν ορθή κατανόηση της έννοιας αλλά δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν την ιδιότητα και το ρόλο του πολλαπλασιασμού που κρύβεται στον αλγοριθμικό τύπο

(δ) Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν όσοι δεν εμφανίζουν ούτε ορθή κατανόηση της μαθηματικής έννοιας ούτε ικανότητα να εξηγήσουν το πώς προκύπτει ο αλγοριθμικός τύπος και ποιος είναι ο ρόλος του πολλαπλασιασμού σε αυτόν.

2.2.6 Ερευνητικά δεδομένα για τις ικανότητες και τις δυσκολίες των μαθητών γύρω από την έννοια του εμβαδού

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με τις δυνατότητες και τις δυσκολίες των μαθητών γύρω από την έννοια του εμβαδού. Συγκεκριμένα, μελετήθηκαν και παρατίθενται έρευνες που αναφέρονται στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της κάλυψής του, τη δημιουργία του πλέγματος και του μαθηματικού τύπου που προκύπτει, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τη μέτρηση και τη σύγκριση και, τέλος, τη χρήση του υλικού.

Έρευνες που έχουν διεξαχθεί με στόχο την ανίχνευση των δυσκολιών των μαθητών ως προς την έννοια του εμβαδού έδειξαν ότι πολλές από αυτές πηγάζουν από την αρχική λανθασμένη αντίληψη που έχουν τα παιδιά για τον ορισμό της επιφάνειας. Μια τέτοια έρευνα είναι εκείνη των Kay Owens και Lynne Outhred (1998), οι οποίοι συμπέραναν ότι οι μαθητές Β’ - Δ’ Δημοτικού δεν αντιλαμβάνονται ότι η επιφάνεια συνιστά μία περιοχή δύο διαστάσεων με όρια, η οποία μπορεί να καλυφθεί με μονάδες μέτρησης. Προτείνουν πως η οπτικοποίηση της έννοιας με την κάλυψη επιφανειών ή τη σύγκριση σχημάτων πρέπει να γίνεται μέσα από την τήρηση τεσσάρων βασικών αρχών: (1) τη διατήρηση του μεγέθους της μονάδας μέτρησης, (2) την κάλυψη χωρίς κενά ή υπερκαλύψεις, (3) την ευθυγράμμιση των μονάδων μέτρησης κατά τη δημιουργία του πλέγματος και (4) την κατάλληλη σύνθεση των μονάδων μέτρησης από τις γωνίες, τις πλευρές τους κτλ.

Επιπλέον, βάσει έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Ε’ Δημοτικού (Αλεξανδρόπουλος, 2013), φαίνεται ότι αυτοί συσχετίζουν την έννοια του εμβαδού με τα κλειστά γεωμετρικά σχήματα και θεωρούν ότι ο υπολογισμός του προϋποθέτει τη δυνατότητα διαμερισμού/χωρίσματος του σχήματος σε μικρότερα ίσα σχήματα. Για το λόγο αυτό, η τακτική υπολογισμού του εμβαδού που ακολουθείται ως επί το πλείστον είναι η διαίρεση ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος σε μικρά τετράγωνα και η καταμέτρηση αυτών. Τα παιδιά αυτής της ηλικίας ωστόσο αδυνατούν να κατανοήσουν ότι η επιφάνεια ενός σχήματος μπορεί να λειτουργήσει ως μονάδα μέτρησης για ένα άλλο. Στην περίπτωση που το δοσμένο σχήμα δεν είναι συμμετρικό, η στρατηγική που εφαρμόζεται είναι η *τακτική του συμπληρώματος* ή *του γεμίσματος*. Στην τακτική αυτή και κατά τη διάρκεια χωρισμού του σχήματος σε τετράγωνα, δε γίνεται αντιληπτό ότι τα παραπάνω πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους. Η επιφάνεια αντιμετωπίζεται πολλές φορές ως κάτι στατικό που υπάρχει ως δεδομένο, χωρίς να συνδυάζεται με προσωπικές στρατηγικές επίλυσης.

Με τα συμπεράσματα των παραπάνω ερευνών συμφωνεί και η μελέτη των Tan-Sisman & Aksu (2013), οι οποίοι διαπίστωσαν πως οι βασικότερες παρανοήσεις των μαθητών είχαν να κάνουν με την ελλιπή κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και όχι με ζητήματα υπολογισμού του. Συγκεκριμένα, αμφισβήτησαν τη διατήρηση του εμβαδού μετά από τον τεμαχισμό του σχήματος, χρησιμοποίησαν λανθασμένες μονάδες μέτρησης για τον υπολογισμό του, μπέρδεψαν την έννοια του εμβαδού με αυτή της περιμέτρου και τέλος θεώρησαν ότι ένα σχήμα διαθέτει περισσότερα από ένα εμβαδά. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και πιο πρόσφατη έρευνα των ίδιων (Sisman & Aksu, 2016), στην οποία αναφέρεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση του ότι η επιφάνεια χάνει τη συνέχειά της όταν διαχωρίζεται και ότι κάθε σχήμα έχει μία μόνο επιφάνεια.

Η ελλιπής κατανόηση της έννοιας του εμβαδού δημιουργεί δυσκολίες και στη μέτρησή του, η οποία στην αρχή διδάσκεται μέσω της κάλυψής του με σχήματα. Με την κάλυψη ασχολήθηκαν οι Doig, Cheeseman και Lindsey (1995), οι οποίοι συμπεριέλαβαν στην έρευνά τους και το υλικό που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές. Διαπιστώθηκε, λοιπόν, ότι η χρήση ξύλινης μονάδας κάλυψης απέφερε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας συγκριτικά με τη χάρτινη. Αυτό συνέβη διότι η δεύτερη μπορούσε να δημιουργήσει υπερκαλύψεις ή κενά και στη συνέχεια παρανοήσεις. Η ξύλινη μονάδα από την άλλη βοηθούσε στην ευκολότερη οικοδόμηση της ορθογώνιας διάταξης καθώς και της δομής της. Το γεγονός αυτό όμως καθιστά τη δραστηριότητα αρκετά πιο εύκολη, καθώς η δομή της διάταξης ενυπάρχει στο μέσο και γι’ αυτό δεν είναι απαραίτητο να γίνει αντιληπτή από το μαθητή. Μία πιο πρόσφατη έρευνα των Zacharos και Ravanis, (2000), που ασχολήθηκε με τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού (Α’ & Β’) και το Νηπιαγωγείο, έδειξε ότι πολύ λίγα παιδιά προσχολικής ηλικίας επιτυγχάνουν να καλύψουν δοσμένη επιφάνεια, ανεξαρτήτως του υλικού με το οποίο εργάζονται.

Σε μεταγενέστερη έρευνα των Σκουμπουρδή, Χ. & Παπαϊωάννου - Στραβολαίμου, Δ. (2011) σε νήπια που δεν είχαν ασχοληθεί ξανά με δραστηριότητες μέτρησης εμβαδού αναδείχθηκαν διαφορετικοί συλλογισμοί των μαθητών κατά την κάλυψη. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα περισσότερα νήπια κατάφεραν να καλύψουν με επιτυχία μια επιφάνεια χρησιμοποιώντας *διακριτό* υλικό (τη στιγμή που άλλα υλικά υπερκάλυπταν την επιφάνεια), κάτι που θεωρείται πως ίσως οφείλεται στο είδος του μέσου που χρησιμοποιήθηκε, στον τρόπο εμπλοκής του παιδιού στη δραστηριότητα, στην ομαδική εργασία και στη μαθηματική συζήτηση που αναδύθηκε. Ταυτόχρονα, ενεπλάκησαν στην κατανόηση της έννοιας της αντίστροφης σχέσης του μεγέθους της μονάδας μέτρησης με τον αριθμό των μονάδων που ήταν απαραίτητες για να καλύψουν την επιφάνεια. Τέλος, για την κάλυψη με *συνεχές* υλικό τα νήπια χρησιμοποίησαν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις, καθώς το υλικό που τους είχε δοθεί ήταν μεγαλύτερο σε διαστάσεις από την προς κάλυψη επιφάνεια.

Μία από τις βασικές παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι η αδυναμία κατανόησης του πλέγματος που δημιουργείται κατά το χωρισμό του σε ίσα τετράγωνα. Για την κατανόηση της σύνδεσης του τύπου με το πλέγμα καθοριστικό ρόλο παίζει η ενίσχυση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων μέτρησης εμβαδού, με άλλα λόγια η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών τύπων (Hino, 2002· Huang & Witz, 2013). Η εννοιολογική αυτή κατανόηση περιλαμβάνει, σύμφωνα με τους Schifter & Szymaszek (2003), στηρίζεται στα εξής: α) σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη υπάρχει ίδιος αριθμός μονάδων, β) ο αριθμός των μονάδων οριζόντια και κάθετα δηλώνει το μήκος της κάθε πλευράς αντίστοιχα, γ) όταν οι μονάδες μέτρησης είναι τα τετράγωνα, το άθροισμά τους μπορεί να αντικατασταθεί από το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος. Το πρώτο και το τρίτο σημείο έχουν να κάνουν με τη δόμηση του πλέγματος (Izsak, 2005), ενώ το δεύτερο με την κατανόηση των ιδιοτήτων των δισδιάστατων σχημάτων (Huang & Witz, 2013).

Οι Outhred & Mitchelmore (2000) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές δεν κατάφεραν να χωρίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε τετραγωνάκια ίσου μεγέθους, ενώ ταυτόχρονα μπέρδεψαν την έννοια του εμβαδού με αυτή της περιμέτρου. Λίγο αργότερα, οι ίδιοι ερευνητές μελέτησαν σε μαθητές 7 ετών τη σπουδαιότητα της ισότητας των μονάδων μέτρησης και την κατανόηση της ύπαρξης ίδιου αριθμού μονάδων σε κάθε γραμμή και στήλη (Mulligan, Prescott, Mitchelmore & Outhred, 2005). Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στο σχεδιασμό του πλέγματος στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ενώ παρανόησαν την έννοια της περιμέτρου με αυτή του εμβαδού, ακόμα και σε περιπτώσεις που ο μαθηματικός τύπος χρησιμοποιούνταν σωστά.

Με μεγαλύτερες ηλικίες, όπου η διδασκαλία μέτρησης του εμβαδού βασίζεται στο μαθηματικό τύπο, ασχολήθηκαν έρευνες που μελέτησαν τους παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά τις ικανότητες των μαθητών στον υπολογισμό του. Ως παράγοντες επιρροής θεωρήθηκαν: (α) η προσέγγιση του αλγοριθμικού υπολογισμού, που τονίζεται στη διδακτική πρακτική (Tan, 1999) και (β) η έλλειψη σύνδεσης μεταξύ της δισδιάστατης γεωμετρίας και της μέτρησης του εμβαδού, που υπάρχει στο διδακτικό υλικό (Kordaki & Balomenou, 2006). Όταν η μέτρηση του εμβαδού γίνεται περισσότερο με τη χρήση του μαθηματικού τύπου, οι μαθητές δεν έχουν τον απαιτούμενο χρόνο να επεξεργαστούν τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους, ώστε να κατανοήσουν πώς προκύπτουν οι μαθηματικοί αυτοί τύποι (για παράδειγμα ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα σχηματίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και γι’ αυτό ο τύπος του εμβαδού του ορθογωνίου είναι ο τύπος του ορθογωνίου τριγώνου επί δύο) (Guys, Geddes & Tischler, 1988). Όπως έχει δηλώσει μάλιστα και ο Dickson (1989), οι μαθητές χρησιμοποιούν το μαθηματικό τύπο Ε=βxυ σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από το σχήμα του οποίου το εμβαδόν αναζητούν.

Είναι πιθανό παιδιά τα οποία κατανοούν τη διαδικασία της μέτρησης να μη μάθουν αυτόματα τις συμβατικές πρακτικές μέτρησης που διδάσκονται στο σχολείο. Η δυσκολία τους δεν μπορεί να εξηγηθεί με όρους «απουσίας της έννοιας του εμβαδού» ή «έλλειψης κατανόησης των λειτουργιών μέτρησης». Αντίθετα, μάλλον σχετίζεται με την πολύπλοκη σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν και στη διαδικασία μέτρησης που στηρίζεται στη λύση με πολλαπλασιασμό «μήκος επί πλάτος». Οι ερευνητές εισηγούνται ότι το να μεταβούν τα παιδιά από τη χρήση υπολογιστικών στρατηγικών στην εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού τύπου συνιστά ένα μεγάλο άλμα (Battista, 2003· Van de Walle, Karp, Bay-Williams, 2010). Με την πρόωρη διδασκαλία του μαθηματικού τύπου ασχολήθηκαν και οι Stephan και Clements (2003), οι οποίοι τόνισαν ότι κάτι τέτοιο δυσκολεύει την κατανόησή του. Λόγω της ελλιπούς κατανόησης του μαθηματικού τύπου, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στον προσδιορισμό της επιφάνειας ενός καθορισμένου σύνθετου σχήματος, ενώ επιδεικνύουν καλή απομνημόνευση των τύπων (πχ Bell, Costello, & Kuchenmann 1983· Tan, 1998).

Οι στρατηγικές μέτρησης και σύγκρισης του εμβαδού μπορούν να φανερώσουν δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών και γι' αυτό ορισμένες έρευνες τις μελέτησαν και τις κατηγοριοποίησαν. Μία από αυτές είναι η μελέτη των Yuzawa, Bart, Kinne, Sukemune, και Kataoka (1999 στο Βαϊτσίδη, Σκουμπουρδή 2015), η οποία έδειξε ότι μαθητές 8 - 9 ετών συγκρίνουν δύο ή περισσότερες επιφάνειες εφαρμόζοντας τρεις στρατηγικές. Κατά την εφαρμογή της πιο απλής αλλά λανθασμένης στρατηγικής, οι μαθητές δε λαμβάνουν υπόψη τους καμία διάσταση του σχήματος και τα συγκρίνουν χωρίς κάποια συγκεκριμένη διευθέτησή τους στο χώρο. Στη δεύτερη στρατηγική παρατηρούν μόνο τη μία διάσταση του σχήματος και συγκρίνουν το εμβαδόν με βάση αυτή μόνο τη διάσταση, ενώ κατά την τρίτη και επιστημονικά ορθή στρατηγική οι μαθητές λαμβάνουν υπόψη και τις δύο διαστάσεις του σχήματος και τα τοποθετούν με παρόμοιο προσανατολισμό στο χώρο.

Μία πιο πρόσφατη έρευνα των Huang & Wittz (2013) έδειξε ότι μαθητές που είχαν διδαχθεί τον μαθηματικό τύπο χρησιμοποίησαν τρεις στρατηγικές: 1. *Χρήση μαθηματικού τύπου*, όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν αποτελεσματικά τους τύπους που είχαν διδαχθεί. 2. *Χρήση ποικίλων βημάτων υπολογισμού*, όπου τα αποτελέσματα ως επί το πλείστον ήταν λανθασμένα, ενώ οι μαθητές ακολούθησαν περισσότερα από ένα βήματα για τον υπολογισμό. Για παράδειγμα, μετακινούσαν, χώριζαν και ένωναν τετραγωνάκια, εάν το σχήμα ήταν σχεδιασμένο σε τετραγωνικό χαρτί. 3. *Ανακριβής στρατηγική*. Οι στρατηγικές που βασίζονται στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων βασισμένων σε μαθηματικούς τύπους (στη συγκεκριμένη περίπτωση του εμβαδού) μπορούν να βοηθήσουν στον έμμεσο υπολογισμό του εμβαδού μη γνωστών σχημάτων, που δεν είναι εύκολο να βρεθεί διαφορετικά (δηλαδή να χωρίσουν το άγνωστο σχήμα σε γνωστά) (Van de Walle, 2004, σελ 335). Οι μαθητές που αποτυγχάνουν σε ασκήσεις υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας επιμένουν στη χρήση στρατηγικών των οποίων η γενίκευση οδηγεί στην αποτυχία.

Ερευνητικά έχει διαπιστωθεί ότι η χρήση του υλικού στη μέτρηση του εμβαδού παίζει μεγάλο ρόλο τόσο στην κατανόηση της έννοιας όσο και στον υπολογισμό της. Όσον αφορά στην επιλογή του υλικού από τους μαθητές, φάνηκε ότι στην ηλικία των 5 ετών περίπου οι μαθητές δείχνουν επιδεικνύουν εμφανή προτίμηση στη χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης έναντι μη τυπικών (Boulton & Lewis, 1998· Wilss & Mutch, 1996). Μάλιστα, έρευνα που διεξήχθη για τη μέτρηση μήκους έδειξε ότι μαθητές ηλικίας 6 έως 8 ετών προτιμούν να χρησιμοποιούν έναν χάρακα -ακόμη και σπασμένο- παρά μη τυπικές μονάδες μέτρησης (πχ. ένα κομμάτι σχοινί) (Nunes, 1993).

Με την ηλικία των 8 - 9 ετών ασχολήθηκαν οι Βαϊτσίδη & Σκουμπουρδή (2015), οι οποίες, με τη βοήθεια των υλικών που χορήγησαν στους μαθητές, διαπίστωσαν ότι το σύνολο του δείγματος των μαθητών αντιμετώπισε δυσκολία στην ορθή χρήση των υλικών που επιλέχθηκε, ενώ διαφάνηκε ως ένα βαθμό και μία αδυναμία στην αντίληψη της έννοιας του εμβαδού. Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν λόγω του ότι οι μαθητές που έλαβαν υπόψη τους και τις δύο διαστάσεις των σχημάτων ήταν λίγοι, ενώ οι περισσότεροι έδωσαν βάση στη μία από τις δύο διαστάσεις ή σε καμία. Αυτό επηρέασε και την αυθόρμητη επιλογή του υλικού. Τα υλικά και οι διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες κάλυψης μιας επιφάνειας δεν δηλώνουν άμεσα τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και παίζουν μεγάλο ρόλο στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού (Van de Walle, 2004). Εάν οι μαθητές δεν εκτεθούν σε δραστηριότητες κατευθυνόμενης ανακάλυψης από τους δασκάλους, πιθανόν να μην κατανοήσουν τη διαδικασία κάλυψης μιας επιφάνειας με μια μονάδα μέτρησης. (Schifter, Bastable, Russell & Woleck, 2002).

2.3 Επιχειρηματολογία στην εκπαίδευση των Μαθηματικών

2.3.1 Εισαγωγή

Η σημασία της επιχειρηματολογίας αναδεικνύεται όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στην εκπαίδευση. Ακόμη αποτελεί μία από τις επιστημονικές δεξιότητες την οποία καλλιεργεί σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα η διερευνητική προσέγγιση μάθησης. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύεται η έννοια της επιχειρηματολογίας και του ίδιου του επιχειρήματος στην εκπαίδευση, τα δομικά στοιχεία του και τα εργαλεία αξιολόγησής του που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και τέλος τα ερευνητικά δεδομένα που αναφέρονται στην επιχειρηματολογία στην εκπαίδευση.

2.3.2 Η έννοια της επιχειρηματολογίας και του επιχειρήματος στην εκπαίδευση των Μαθηματικών

Η ικανότητα των ατόμων να επιχειρηματολογούν αποτελεί τη βάση μιας δημοκρατικής κοινωνίας (Schwarz & Asterhan, 2010). Η καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας των μαθητών έχει αναγνωριστεί ως μια σημαντική ικανότητα που επιβάλλεται να αναπτύσσεται στις σχολικές αίθουσες (Asterhan, 2012).Ακόμη, υποστηρίζεται ότι η διαδικασία συγκρότησης τεκμηριωμένων εξηγήσεων μπορεί να συνεισφέρει στην καλύτερη κατανόηση της φύσης της επιστημονικής γνώσης από τους μαθητές (Sandoval & Reiser, 2004). Η επιχειρηματολογία προτείνεται να διδάσκεται από τις πρώτες βαθμίδες εκπαίδευσης ως μέρος της επιστημονικής έρευνας και του επιστημονικού εγγραματισμού (Erduran & Jimenez-Aleixandre, 2012).

Η επιχειρηματολογία βρίσκεται στον πυρήνα της ανθρώπινης σκέψης (Kuhn, 1992), ενώ η ικανότητα των ατόμων να επιχειρηματολογούν αποτελεί σημαντική παράμετρο του χαρακτήρα τους (Kline, 1998). Σύμφωνα με τους Kuhn & Udell (2003) μπορεί να είναι ταυτόχρονα διαδικασία ή προϊόν. Η επιχειρηματολογία ως διαδικασία έχει στόχο να αποδείξει το ορθό ή το λάθος μιας θέσης (Collins Cobuild English Dictionary, 1995), ενώ το προϊόν της είναι μια διατύπωση, προφορική ή γραπτή, που ένα άτομο συνθέτει με σκοπό τη δικαιολόγηση ενός ισχυρισμού, δηλαδή ένα επιχείρημα. Ακόμη, η επιχειρηματολογία μπορεί να είναι ατομική, στην οποία εμπλέκεται μόνο ένα άτομο χωρίς ανθρώπινη αλληλεπίδραση (Newton, Driver & Osborne, 1999) ή διαλογική, όταν δύο ή περισσότερα άτομα εμπλέκονται στη διαδικασία συζήτησης διαφορετικών ισχυρισμών για την ορθότητα των οποίων προσπαθούν να πείσουν ο ένας τον άλλον (Newton, et al 1999· Stein & Albro, 2001· Walton, 1996). Στην περίπτωση που οι συμμετέχοντες συμμετέχουν ισότιμα σε μία συζήτηση προβάλλοντας επιχειρήματα και αποδεικτικά στοιχεία από διαφορετικές οπτικές του ίδιου θέματος με σκοπό την οικοδόμηση κοινής κατανόησης για το υπό συζήτηση θέμα, τότε η επιχειρηματολογία είναι διαδραστική (Munneke, Andriessen, Kanselaar & Kirschner, 2007).

Σύμφωνα με την Kuhn (1991, όπως αναφέρεται στο Βασιλειάδη, 2014), η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας είναι μία απαραίτητη δεξιότητα καθώς και μια σημαντική παράμετρος στη διανοητική ικανότητα που εμπλέκεται στη λύση προβλήματος, στη λήψη απόφασης και στη διαμόρφωση ιδεών και πιστεύω. Απαιτεί από το άτομο να εντοπίσει τις διάφορες εναλλακτικές ιδέες και απόψεις, να αναπτύξει και να επιλέξει την καλύτερη και πιο δυνατή και πιο λογική λύση και επιπλέον να υποστηρίξει τη λύση αυτή με δεδομένα και ενδείξεις (Voss, Lawrence & Engle 1991 στο Cho & Jonasen, 2002). Για το λόγο αυτό οι δεξιότητες επιχειρηματολογίας αποτελούν βασικές δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα και για αυτόν ακριβώς το λόγο το σημερινό σχολείο οφείλει να τις αναπτύξει (Βασιλειάδης, 2014).

Η σπουδαιότητα της επιχειρηματολογίας στην εκπαίδευση έγκειται και στη σύνδεσή της με καλύτερες επιδόσεις σε τεστ νοημοσύνης (Wegerif, Mercer, & Dawes, 1999), καθώς και με διαδικασίες ενεργοποίησης ερωτήσεων και σύνθετης σκέψης (Chin & Osborne, 2000), με την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Kuhn, 1991) την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Lampert, Rittenhouse, & Crumbaugh, 1996), την καλύτερη επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Vye et al. 1997) και την επικοινωνία μεταξύ τους (Horng, 2004). Οδηγεί τους μαθητές στην αποτελεσματικότερη ερμηνεία και κατανόηση της μαθησιακής διαδικασίας αλλά και της ζωής (Fisher, 2005: 153-4, 209). Συνεπάγεται ενεργοποίηση ιδεών, καλλιέργεια της ενσυναίσθησης, δυνατότητα ποιοτικής αξιολόγησης των παρεχόμενων επιχειρημάτων (Ennis, 1992: 75-6). Άρα, η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας συνδέεται αυτόματα με βασικές παραδοχές της κριτικής σκέψης και διδασκαλίας (Τριλιανός, 1997).

Τα τελευταία χρόνια, η διδασκαλία και η εκμάθηση της επιχειρηματολογίας (δηλαδή ο συντονισμός των αποδείξεων και της θεωρίας για να υποστηριχθεί ή να αντικρουστεί ένα ερμηνευτικό συμπέρασμα, μοντέλο ή πρόβλεψη) έχει αναδειχθεί ως ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος τόσο στις Φυσικές Επιστήμες (Driver, Newton & Osborne, 2000· National Research Council, 2000,2011· OECD, 2006,2013) όσο και στη Διδακτική των Μαθηματικών (Duval, 2006).

Η διδασκαλία της στην τάξη, αποτελεί μέρος της επιστημονικής έρευνας και του επιστημονικού εγγραμματισμού (Erduran & Jimenez- Aleixandre, 2012).

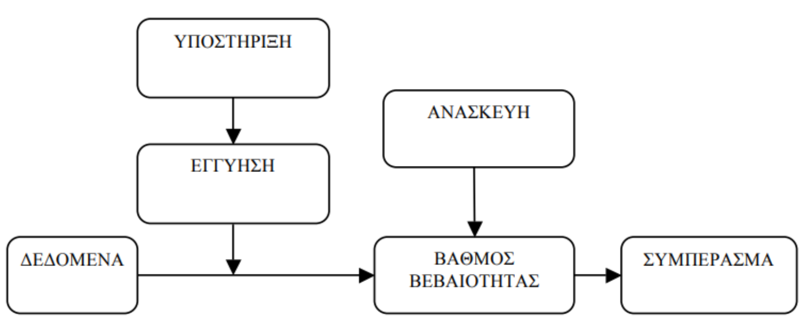
Σύμφωνα με τον Krummheuer (1995, 2007), ένας από τους βασικούς παράγοντες που βοηθούν το άτομο να μάθει Μαθηματικά είναι η συμμετοχή του σε καταστάσεις που προάγουν την μαθηματική επιχειρηματολογία με ρητό και εξειδικευμένο τρόπο, δηλαδή με τη χρήση κατάλληλης γλώσσας. Ακόμη, τόνισε ότι αποτελεί ένα εργαλείο ανάλυσης του τρόπου δόμησης της επιχειρηματολογίας κατά την αλληλεπίδραση στην τάξη, αφού διακρίνει τα στοιχεία που προσθέτει ο κάθε μαθητής στη συλλογική επιχειρηματολογία.

Όσον αφορά στα Μαθηματικά αποτελεί τον γραπτό ή προφορικό λόγο που ενώνει την υπόθεση με το συμπέρασμα μέσω της αιτιολόγησης. Η διαδικασία της αιτιολόγησης συνδέει τους μαθηματικούς κανόνες με λογικές τοποθετήσεις, οι οποίες μετατρέπονται σε γνώση (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp and Tanquay, 2012). Η μαθηματική αιτιολόγηση σύμφωνα με ερευνητές περιλαμβάνει τις παρακάτω διαδικασίες: εικασίες (Mason, 1982· Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J., 2008) γενίκευση (Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J., 2008), παραδείγματα (Mason, 1982), απόδειξη (Duval, 1995· Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J., 2008). επιχειρήματα (Pedemonte, 2002) και πειθώ (Cabassut, 2005). Ακόμη, μπορεί να περιλάβει την έρευνα, την κατασκευή σχέσεων και γενικεύσεων, την ανάπτυξη ενός επιχειρήματος και την απόδειξη χρησιμοποιώντας «μαθηματική γλώσσα» (Department of Education, 2013, p.3). Μία μορφή επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά είναι η μαθηματική απόδειξη, η οποία χρησιμοποιεί την επαγωγική μέθοδο αιτιολόγησης (Aberdein, 2005· Durand-Guerrier et al., 2012). Σύμφωνα με τον Stylianides (2006), η μαθηματική αιτιολόγηση και απόδειξη (Reasoning and Proof) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις εμπειρίες των μαθητών σε όλες τις ηλικιακές βαθμίδες. Η εμπλοκή τους σε αυτή τη διαδικασία προϋποθέτει την εμπλοκή τους σε μαθηματικά φαινόμενα και την διατύπωση εικασιών, ερευνών βασισμένες σε επιχειρήματα και αποδείξεις και στη συνέχεια εδραίωση της νέας γνώσης (Ball & Bass, 2003· NCTM, 2000· Yackel & Hanna, 2003). Μέσω της επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά καθίσταται εφικτή η αλληλεπίδραση σχετικά με αντικείμενα που είναι μόνο νοητά προσβάσιμα καθώς επικοινωνούνται οι σχέσεις των μαθηματικών κόσμων. Όσον αφορά στη Γεωμετρία συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Lin και Cheng (2003), η ικανότητα επιχειρηματολογίας και η εκμάθησή της είναι άρρηκτα συνδεδεμένες.

2.3.3 Δομικά στοιχεία ενός επιχειρήματος στην εκπαίδευση/ Εργαλεία αξιολόγησης επιχειρημάτων

Η συστηματική προσέγγιση της επιχειρηματολογίας τις τελευταίες δεκαετίες, αναδύει την αναγκαιότητα σχεδιασμού ενός εργαλείου αξιολόγησης της δομής και της ποιότητας των επιχειρημάτων των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος.

Το κυρίαρχο θεωρητικό μοντέλο για την ανάλυση ενός επιχειρήματος, το οποίο χρησιμοποιείται και ως εργαλείο αξιολόγησης από τους ερευνητές, σε εκπαιδευτικό πλαίσιο, τόσο στο γλωσσικό μάθημα, όσο και στα μαθήματα των Φυσικών Επιστημών και των Μαθηματικών είναι το μοντέλο του Toulmin (Brem, Russells & Weems, 2001· Department of Education, 2013· Erduran, Simon & Osborne, 2004· Weinberger, Stegman & Fischer, 2005) αν και στην εκπαιδευτική έρευνα της επιχειρηματολογίας υπάρχει αβεβαιότητα για τον τρόπο αξιολόγησης της ποιότητας των επιχειρημάτων (Erduran, 2008). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το επιχείρημα είναι μια διαδικασία υποβολής ισχυρισμών και υπόδειξης αιτιολόγησης για τη χρήση των αποδεικτικών στοιχείων. Η επιλογή του συγκεκριμένου μοντέλου στη συγκεκριμένη εργασία, για την ανάλυση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας έγινε καθώς βοηθά στη διάκριση των μερών της. Η διάκριση αυτή περιλαμβάνει τους ισχυρισμούς ή συμπεράσματα (claims), τα δεδομένα (data) που υποστηρίζουν τους ισχυρισμούς, τις εγγυήσεις (warrants) που αποδεικνύουν γιατί τα δεδομένα υποστηρίζουν τους ισχυρισμούς, τις υποστηρίξεις (backings) που είναι πληροφορίες που στηρίζουν τις εγγυήσεις, τις πιστοποιήσεις (qualifiers) που καταδεικνύουν την ισχύ των στοιχείων των εγγυήσεων, καθώς και τις αντικρούσεις (rebutals) που υποδεικνύουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τα δεδομένα μαζί με τις εγγυήσεις δεν οδηγούν στους ισχυρισμούς (Διάγραμμα 1). Η ποιότητα ενός επιχειρήματος καθορίζεται από την ποιότητα των επιμέρους συστατικών του στοιχείων.

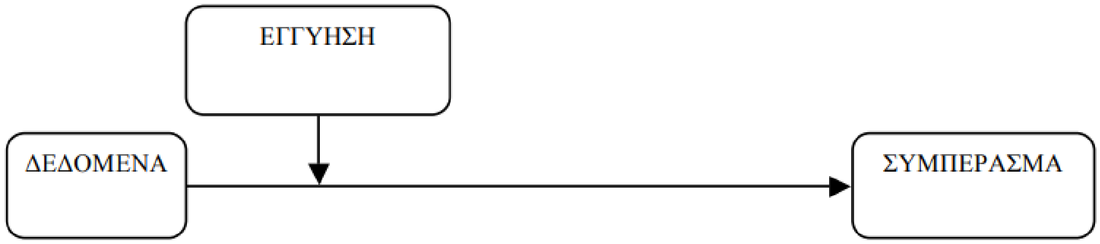


Διάγραμμα 1: Το πλήρες σχήμα του Toulmin (Μούτσιος-Ρέντζος, 2020)

Ωστόσο, παρά την ευρεία χρήση του παραπάνω μοντέλου σε έρευνες, θεωρήθηκε δύσκολη η διαφοροποίηση στο λόγο των μαθητών ανάμεσα στις εγγυήσεις, τις υποστηρίξεις και τις πιστοποιήσεις (Jiménez-Aleixandre, Rodríguez & Duschl, 2000· Erduran, Simon, & Osborne, 2004· McNeill, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006). Έτσι, υιοθετήθηκε μία απλουστευμένη εκδοχή του (McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006) στην οποία μια τεκμηριωμένη εξήγηση περιλαμβάνει τρία συστατικά στοιχεία: ισχυρισμό, αποδεικτικά στοιχεία, συλλογισμό και αντίκρουση. Ο ισχυρισμός είναι ένα συμπέρασμα που απαντά σε μία ερώτηση ή ένα πρόβλημα. Τα αποδεικτικά στοιχεία είναι τα δεδομένα που αποδεικνύουν τον ισχυρισμό. Ο συλλογισμός συνδέει τον ισχυρισμό με τα αποδεικτικά στοιχεία και φανερώνει τον λόγο για τον οποίο τα δεδομένα θεωρούνται ως αποδεικτικά στοιχεία που υποστηρίζουν τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας επιστημονικές αρχές. Η αντίκρουση αιτιολογεί πώς ένας ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Στην εκδοχή αυτή, διαχωρίζεται η δομή και το περιεχόμενο του επιχειρήματος τα οποία χαρακτηρίζουν και την ποιότητά του (McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006· Sandoval & Millwood, 2005). Η ποιότητα της δομής του επιχειρήματος αποτυπώνεται από την επάρκεια των συστατικών στοιχείων του (ισχυρισμός, αποδεικτικά στοιχεία και συλλογισμός) ανεξάρτητα από την ορθότητα του περιεχομένου τους, ενώ του περιεχομένου του από την καταλληλότητα των συστατικών στοιχείων τα οποία αξιολογούνται με βάση την επιστημονική γνώση. Το επιχείρημα θεωρείται επαρκές όταν ο ισχυρισμός του είναι πλήρης και απαντά στο ερώτημα, τα αποδεικτικά στοιχεία υποστηρίζουν τον ισχυρισμό και ο συλλογισμός εμπλέκει αρχές και συνδέει τα αποδεικτικά στοιχεία με τον ισχυρισμό μέσω των αρχών. Το περιεχόμενο ενός επιχειρήματος χαρακτηρίζεται από την καταλληλότητα των στοιχείων που το απαρτίζουν σε σχέση με την επιστημονική γνώση. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι McNeill και Krajcik (2007) πρότειναν μία κλίμακα διαβαθμισμένων κριτηρίων σύμφωνα με την οποία μπορεί να αξιολογηθεί ένα επιχείρημα περιλαμβάνοντας τα τρία συστατικά στοιχεία (ισχυρισμός, αποδεικτικά στοιχεία και συλλογισμός) και τα επίπεδα βαθμολογίας για καθένα από τα τρία συστατικά. Όταν τα επιχειρήματα έχουν υψηλά επίπεδα βαθμολογίας, τότε η δομή τους είναι επαρκής και το περιεχόμενο κατάλληλο. Η ανάλυση των επιχειρημάτων των μαθητών με τη βοήθεια αυτού του σχήματος μπορεί να αναδείξει συγκεκριμένα μέρη της μικρο-δομής του επιχειρήματος που τυχόν δυσκολεύουν τους μαθητές και να αποτελέσουν τη βάση για τον σχεδιασμό κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων και δράσεων.

Μία τροποποιημένη εκδοχή της κλίμακας των διαβαθμισμένων κριτηρίων των McNeill και Krajcik (2007) πρότειναν οι Σκουμιός και Χατζηνικήτα (2014) έχοντας χωρίσει τα συστατικά στοιχεία ενός επιχειρήματος που αφορούν τη δομή με αυτά που σχετίζονται με το περιεχόμενο. Έτσι δημιουργήθηκαν δύο κλίμακες διαβαθμισμένων κριτηρίων. Η πρώτη κλίμακα εξετάζει αποκλειστικά την δομή ενός επιχειρήματος και συγκεκριμένα την ύπαρξη και την επάρκεια των συστατικών στοιχείων τους (ισχυρισμός, αποδεικτικά στοιχεία και συλλογισμός) και η δεύτερη κλίμακα ελέγχει το περιεχόμενο τους δηλαδή την καταλληλότητα των συστατικών στοιχείων όταν αυτά συγκρίνονται με την επιστημονική γνώση. Παράλληλα, στα κριτήρια αξιολόγησης της ποιότητας των επιχειρημάτων των μαθητών πρόσθεσαν και τα γλωσσικά χαρακτηριστικά των συστατικών στοιχείων των επιχειρημάτων. Έτσι, ανέπτυξαν ένα εργαλείο που αξιολογεί τα γλωσσικά χαρακτηριστικά όπως τη συγκρότηση των προτάσεων, το λεξιλόγιο και τις γλωσσικές συμβάσεις.

Μία περιορισμένη εκδοχή του σχήματος του Toulmin εφαρμόστηκε και από τον Krummheuer (1995) σε έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών, η οποία αποτελούνταν από τα Δεδομένα, την Εγγύηση και το Συμπέρασμα (Διάγραμμα 2). Τα Δεδομένα είναι τα γεγονότα στα οποία στηρίζεται το Συμπέρασμα, ενώ η Εγγύηση είναι ένας κανόνας ο οποίος συνδέει τα δύο παραπάνω δομικά στοιχεία. Η Εγγύηση σε κάποιο επιχείρημα μπορεί, ωστόσο, να παραμείνει άδηλη. Καθώς το παραπάνω μοντέλο δεν εφαρμόζεται μόνο στα Μαθηματικά, ο Aberdein (2005), επαναδιατύπωσε τους ορισμούς των δομικών στοιχείων του μοντέλου του, προσαρμόζοντάς το στα δεδομένα των Μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτό, τα δεδομένα (data), αναφέρονται στις πληροφορίες που παρέχει ένα μαθηματικό πρόβλημα. Οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτές τις πληροφορίες για να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα (claim). Οι εγγυήσεις (warrants) και οι πληροφορίες που τις υποστηρίζουν (backings), έχουν διαφορετική σημασία όταν υιοθετούνται από τη μαθηματική εκπαίδευση. Η σημασία του “backing” αναφέρεται στη μαθηματική θεωρία και οι “warrants” αντιπροσωπεύουν την απόδειξη (Aberdein, 2005). Και οι δύο έννοιες μαζί, καλύπτουν αυτό που λέμε «αιτιολόγηση» (Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2012).



Διάγραμμα 2: Το περιορισμένο σχήμα Toulmin, όπως εμφανίσθηκε αρχικά στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών (Μούτσιος-Ρέντζος, 2020)

Σύμφωνα με τον Tsu-Nan Lee (2015), το παραπάνω μοντέλο μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικούς όρους και να διατυπωθεί ως εξής: οι μαθηματικές υποθέσεις αναφέρονται σε αυτό που ο Toulmin αναφέρει ως δεδομένα (data), οι μαθηματικοί κανόνες σε αυτό που αναφέρθηκε παραπάνω ως "backing", οι λογικές δηλώσεις είναι οι εγγυήσεις (warrants) και ο ισχυρισμός (claim) είναι το τελικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν. Πολλοί ερευνητές έχουν τονίσει την ανάγκη χρήσης είτε του πλήρους σχήματος, είτε τροποποιήσεων ή εμπλουτισμών του για τη μελέτη της ατομικής και συλλογικής επιχειρηματολογίας (Aberdein, 2005· Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007· Hein & Prediger, 2017· Krummheuer, 1995, 2007· Pedemonte, & Balacheff, 2016). Η χρήση του σχήματος αυτού επιτρέπει την ανάδειξη μερών της μικρο-δομής του επιχειρήματος που ενδεχομένως να δυσκολεύουν τους μαθητές και τον σχεδιασμό κατάλληλων διδακτικών πρακτικών από τον εκπαιδευτικό (Μούτσιος-Ρέντζος, 2020). Για το λόγο αυτό έχουν γίνει προσπάθειες σχεδιασμού διδακτικών εργαλείων και ανάλυσης διδακτικών πρακτικών βασισμένων στο μοντέλο αυτό.

Στη Διδακτική των Μαθηματικών οι έρευνες που υιοθέτησαν ολόκληρο το σχήμα του Toulmin είναι αυτές των Inglis, Mejia &Simpson (2007) και Inglis & Mejia-Ramos (2008), οι οποίοι θεώρησαν ότι με τη χρήση του επιτυγχάνεται πιο ουσιαστική ανάλυση της επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά. Οι πρώτοι αναφέρουν ότι διαφορετικά είδη εγγυήσεων κατά την επιχειρηματολογία, οδηγούν το άτομο στο να τα συνοδεύσει και με διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας γεγονός που οδηγεί να κατηγοριοποιηθούν οι εγγυήσεις και να ορίσουν τύπους εγγυήσεων (warrant-types) όπου ο καθένας αντιστοιχεί σε υιοθέτηση κατάλληλου βαθμού βεβαιότητας. Έτσι, διέκριναν τρεις (3) τύπους εγγυήσεων: α) παραγωγικές (deductive), οι οποίες είναι τυπικές μαθηματικές αιτιολογήσεις, β) επαγωγικές (inductive), οι οποίες είναι αιτιολογήσεις ατελώς επαγωγικού χαρακτήρα και γ) Δομικές- διαισθητικές (structural-intuitive), οι οποίες είναι κάποιες φορές διαισθητικές, βασισμένες σε πειραματισμούς, ή παρατήρηση νοητικών δομών οπτικοποιημένων ή μη. Μία από τις δυσκολίες των μαθητών είναι η κατάλληλη σύνδεση εγγυήσεων και βαθμών βεβαιότητας στην για την μαθηματική επιχειρηματολογία. Χαρακτηριστικά, ένας επαγωγικός τύπος εγγύησης θα πρέπει να συνοδεύεται με ένα βαθμό βεβαιότητας τύπου «μπορεί» και όχι τύπου «σίγουρα». Αντίστοιχα, ένας παραγωγικός τύπος εγγύησης που έχει προκύψει από αξιώματα και αλγεβρικούς τύπους, θα πρέπει να συνδέεται με έναν απόλυτο βαθμό βεβαιότητα (Μούτσιος-Ρέντζος, 2020). Έτσι, για την καλύτερη μελέτη των επιχειρημάτων των μαθητών, εκτός από τη δομή τους σημασία έχει και ο βαθμός βεβαιότητας στον οποίο στηρίζονται.

Πρόσφατα, παρουσιάστηκε μία προσέγγιση που εφαρμόστηκε σε μη βλέποντες μαθητές και αναλύει τα λεκτικά, μη λεκτικά και άδηλα στοιχεία της μαθηματικής επιχειρηματολογίας (Μούτσιος-Ρέντζος & Μαραγκοζίδης, 2019). Η χαρτογράφηση αυτών των επικοινωνιακών πρακτικών στη διατύπωση των επιχειρημάτων, όπως παλμικές, δεικτικές ή μεταφορικές χειρονομίες, βοήθησε στην ανάδειξη όψεων στοιχείων των επιχειρημάτων (Δεδομένα. Εγγύηση, Συμπέρασμα), που δεν επικεντρώνονται μόνο στην λεκτική επιχειρηματολογία και έχουν ενδιαφέρον να μελετηθούν. Η προσέγγιση αυτή βασίστηκε στο περιορισμένο σχήμα του Toulmin και τα ευρήματά της φανέρωσαν ότι η λειτουργική καταγραφή και σύνδεση διαφορετικών επικοινωνιακών στοιχείων στη δομή των επιχειρημάτων, επιτρέπει την εγκυρότερη διδακτική και εκπαιδευτική μηχανική στο επικοινωνιακό σύστημα της τάξης των Μαθηματικών.

2.3.4 Ερευνητικά δεδομένα ως προς τη δομή των επιχειρημάτων των μαθητών

Σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη συγκρότηση επιχειρημάτων και ιδιαίτερα τεκμηριωμένων. Η μετάβαση από την άτυπη μαθηματική επιχειρηματολογία προς την διατύπωση απαντήσεων με μαθηματικό τρόπο είναι εξαιρετικά επίπονη για τους μαθητές λόγω της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν κατά την εξαντικειμενίκευση των στοιχείων που χρησιμοποιούν (Μούτσιος-Ρέντζος, 2020). Συνήθως, προτείνουν ισχυρισμούς χωρίς να τους αιτιολογούν (Jiménez-Aleixandre, Rodríguez & Duschl, 2000· Sadler, 2004) ή επικαλούνται μη επαρκή και ακατάλληλα αποδεικτικά στοιχεία για την τεκμηρίωση των ισχυρισμών τους (Bell &

Linn, 2000· Chinn & Brewer, 2001· Heng, Surif, & Seng, 2015· Jiménez-Aleixandre et al., 2000· McNeill & Krajcik, 2012· Sadler, 2004· Sandoval, 2003· Sandoval & Millwood, 2005· Σκουμιός, 2016). Οι συλλογισμοί είναι ένα συστατικό στοιχείο που λείπει συχνά από τα επιχειρήματα που συγκροτούν οι μαθητές (Lizotte, Harris, McNeill, Marx, & Krajcik, 2003· McNeill & Krajcik, 2007, 2012· Sadler, 2004· Songer & Gotwals, 2012· Zeidler, 1997), ενώ δυσκολεύονται στην αξιολόγηση επιχειρημάτων και στη συγκρότηση αντικρούσεων (McNeill & Krajcik, 2012· Zeidler, 1997· Σκουμιός, 2017). Ενδιαφέρον είναι το εύρημα ότι ακόμα και οι μαθητές που συνδέουν τα αποδεικτικά στοιχεία με τον ισχυρισμό, συχνά δεν προτείνουν τις επιστημονικές αρχές που υποστηρίζουν αυτή τη σύνδεση (McNeil & Krajcik, 2007). Ακόμη, αγνοούν ή απορρίπτουν αποδεικτικά στοιχεία που αντιβαίνουν στις αντιλήψεις τους, επιλέγοντας να θεωρήσουν ότι δε σχετίζονται με το ερευνητικό πεδίο τους (Chinn & Brewer, 2001). Δεν μπορούν, δηλαδή, να αναγνωρίσουν ποια δεδομένα μπορούν να αξιοποιηθούν ως αποδεικτικά στοιχεία και ποια όχι. (Σκουμιός, 2016· Jimenez-Aleixandre et al 2000· Sadler, 2004· Sandoval, 2003). Σύμφωνα με τους Bell & Linn (2000), οι μαθητές χρησιμοποιούν ελλιπή αποδεικτικά στοιχεία. Η ικανότητα των μαθητών να γνωρίζουν πότε τα αποδεικτικά στοιχεία επαρκούν για μία απόδειξη αποτελεί σημαντική διάσταση της πρακτικής της επιχειρηματολογίας που πρέπει να αναπτύξουν (McNeil & Krajcik, 2012). Η ικανότητα των μαθητών να αναπτύσσουν συλλογισμούς χρησιμοποιώντας αποδεικτικά στοιχεία εξαρτάται τόσο από τη γνώση του εννοιολογικού περιεχομένου όσο και από την εξοικείωση με τις επιστημονικές πρακτικές (Σκουμιός & Χατζηνικήτα, 2013· McNeil & Krajcik, 2007). Η έλλειψη εννοιολογικού υπόβαθρου περιορίζει την ικανότητα ανάπτυξης συλλογισμών (Lizotte et.al, 2003· Sadler, 2004). Ακόμη, οι Moje et al. (2004) επισημαίνουν ότι οι αδυναμίες στο γραπτό λόγο και στην κατανόηση της επιστημονικής γλώσσας επιδρούν στη διατύπωση των επιχειρημάτων και στη συγκρότηση του συλλογισμού τους, που είναι μια από τις πιο σημαντικές ικανότητες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές (McNeill & Krajcik, 2012).

Μία ακόμη δυσκολία που εμφανίζουν οι μαθητές είναι η αξιολόγηση εναλλακτικών επιχειρημάτων (McNeil & Krajcik, 2012). Οι μαθητές συνήθως, θεωρούν πειστικά εκείνα τα επιχειρήματα που συμφωνούν με τις προσωπικές αντιλήψεις τους, ενώ απορρίπτουν αυτά που έρχονται σε αντίθεση με αυτές (Zeidler, 1997). Οι McNeil και Krajcik (2012) επισημαίνουν ότι η αξιολόγηση επιχειρημάτων στη μαθητική ζωή είναι καίριας σημασίας για τη λήψη αποφάσεων στη μετέπειτα ζωή τους. Ο Σκουμιός (2017) επισημαίνει πως η αδυναμία των μαθητών στην αιτιολόγηση των επιχειρημάτων μπορεί να οφείλεται στις περιορισμένες εμπειρίες και βιώματά τους, αφού οι συνήθεις διδακτικές μέθοδοι στην τάξη δε βασίζονται σε βιωματικές μεθόδους. Ο σταδιακός εθισμός των μαθητών στη σύνθεση επιχειρημάτων μέσα στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα (Σκουμιός, 2017).

Σύμφωνα με τους Richmond & Striley (1996), το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιούνται οι δραστηριότητες παίζουν σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη επιχειρημάτων και κατανόησης των κοινωνικών κανόνων που απαιτούνται για ένα πετυχημένο διάλογο. Οι Heng, Surif και Seng (2015) υποστηρίζουν ότι οι δραστηριότητες που ευνοούν την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας, στο πλαίσιο μιας ομάδας ενισχύει την ικανότητα των μαθητών στην διαλογική επιχειρηματολογία, αφού αναπτύσσουν τα δικά τους επιχειρήματα, επεξεργάζονται τα επιχειρήματα των άλλων, αντιλαμβάνονται πιθανές ασάφειες και αστοχίες ενώ αναθεωρούν και βελτιώνουν τα δικά τους. Παρά το γεγονός ότι έχει αναγνωριστεί η σημασία της εμπλοκής των μαθητών στη δόμηση επιχειρημάτων (Driver et al., 2000· Duschl & Osborne, 2002· McNeill et al., 2006· Sandoval, 2003), οι έρευνες που διερευνούν τη συμβολή των διδακτικών παρεμβάσεων στη βελτίωση της ποιότητας των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών είναι περιορισμένες (Chen, Wang, Lu, Lin, & Hong, 2016· McNeill et al., 2006· Sampson, Enderle, Grooms, & Witte, 2013· Sampson & Walker, 2012· Sandoval, 2003· Berland & McNeill, 2010· Krajcik & McNeill, 2009· Sampson, Grooms & Walker, 2011· Songer & Gotwals, 2012). Μία πρόσφατη έρευνα που μελέτησε την επίδραση αυτής της εμπλοκής των μαθητών στην διατύπωση επιχειρημάτων είναι αυτή των Fielding-Wells και Makar (2012). Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η επιχειρηματολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί παραγωγικά στην εκμάθηση των Μαθηματικών ακόμη και σε πρώιμο στάδιο. Τα αποτελέσματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι μέσω των διερευνητικών προσεγγίσεων τα παιδιά βελτιώθηκαν σε μεγάλο βαθμό στην απλουστευμένη μορφή του πλαισίου επιχειρημάτων του Toulmin. Ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτό το πλαίσιο για το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την υπεράσπιση των αποτελεσμάτων μιας μαθηματικής έρευνας που σχεδίασαν ώστε να εντοπίσουν αποδείξεις υπέρ ή εναντίον των ισχυρισμών που δινόταν δέκτες. Γενικά, τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών έδειξαν ότι η σκόπιμη, οργανωμένη και συστηματική συμμετοχή μαθητών σε δραστηριότητες επιχειρηματολογίας βελτιώνει την ικανότητά τους να επιχειρηματολογούν (Kuhn & Crowell, 2011· Mercer et al,2004· Reznitskaya et al, 2001).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για τη συγκεκριμένη έρευνα. Αρχικά, γίνεται μία περιγραφή της μεθοδολογίας και των σταδίων που ακολουθήθηκαν και στη συνέχεια γίνεται αναφορά στο δείγμα των συμμετεχόντων και στα θέματα ηθικής και δεοντολογίας που στηρίχτηκε η έρευνα. Περιγράφονται αναλυτικά τα εργαλεία συλλογής των δεδομένων όπως σχεδιάστηκαν αρχικά αλλά και όπως τροποποιήθηκαν μετά την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας, η οποία είχε κάποια αποτελέσματα. Τέλος, αναλύεται ο σχεδιασμός των διδακτικών παρεμβάσεων της έρευνας, ως προς τα στάδιά τους, τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και τον ρόλο της εκπαιδευτικού και των μαθητών.

3.2 Περιγραφή Μεθοδολογίας

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία ήταν η έρευνα που βασίζεται στον σχεδιασμό (design-based research). Η συγκεκριμένη μεθοδολογία χρησιμοποιείται για τη δημιουργία νέων θεωριών και πλαισίων για την εννοιοποίηση της μάθησης, της διδασκαλίας, των διαδικασιών σχεδιασμού και της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης (Johnson, Hill, Lock, Altowairiki, Ostrowski, da Rosa dos Santos & Liu, 2017).

Η μεθοδολογία αυτή υποστηρίζει την επίλυση προβλημάτων του ρεαλιστικού κόσμου μέσω σχεδιασμού καινοτομιών και επέκτασης θεωριών (Van de Akker et al. In press). Ακόμη, τοποθετείται μεταξύ θεωρίας και πραγματικού περιβάλλοντος, ενώ στοχεύει στη βελτίωση των εκπαιδευτικών πρακτικών μέσω μιας ευέλικτης και επαναληπτικής αναθεώρησης του σχεδιασμού τους (Wang & Hannafin, 2005· Design Research Collective, 2003). Ξεκινώντας από τη θεωρία, υποστηρίζει τον σχεδιασμό και την εφαρμογή για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας καινοτομιών για την επίλυση προβλημάτων της εκπαίδευσης.

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, το οποίο αποτέλεσε και το κριτήριο επιλογής της για τη συγκεκριμένη έρευνα, είναι ότι υποστηρίζει τη χρήση πειραμάτων σχεδιασμού καινοτόμων εκπαιδευτικών πρακτικών, τα οποία θα δώσουν απαντήσεις σε θεωρητικά ζητήματα και μεθοδολογικές προκλήσεις που αφορούν στη δημιουργία διδακτικών παρεμβάσεων που διεξάγονται σε συνθήκες σχολικής πραγματικότητας. Ωστόσο, πολλές φορές οδηγεί σε συμπεράσματα που δεν είναι γενικεύσιμα, αλλά σχετίζονται με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και τα χαρακτηριστικά του πλαισίου πάνω στο οποίο εφαρμόστηκε (Wang & Hannafin, 2005). Μία ακόμη καινοτομία της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ο ρόλος των συμμετεχόντων στην έρευνα. Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής αντιμετωπίζει τα υποκείμενα της έρευνας (τους μαθητές στη δική μας περίπτωση) ως «συν-συμμετέχοντες» (Barab & Squire, 2004, p. 3) και «συν-ερευνητές» της μεθόδου (Collins, 1990, p.4).

Όσον αφορά στο σχεδιασμό μιας έρευνας βασισμένης στην συγκεκριμένη μεθοδολογία (design-based research) έχουν προταθεί στην αντίστοιχη βιβλιογραφία (Juuti & Lavonen, 2006· Wang & Hannafin, 2005) διαφορετικοί σχεδιασμοί, αλλά η πλειονότητα των ερευνητών υποστηρίζει πως δεν έχει καθιερωθεί κάποια διαδικασία διεξαγωγής της, καθώς αποτελεί μία ανερχόμενη μεθοδολογία (Joseph, 2004· Ma & Harmon, 2009). Ωστόσο, υπάρχει ένας σχεδιαστικός άξονας διεξαγωγής της έρευνας, ο οποίος αναφέρεται σε μεγάλο βαθμό στις έρευνες που χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη μεθοδολογία (Ashford-Rowe, 2008· Dix, 2007· Hood, 2008· Mantei, 2008· Parker, 2011· Sari & Lim, 2012). Ο σχεδιασμός αυτός, βασίστηκε στη θεωρία του Reeves (2000, 2006), ο οποίος προτείνει τέσσερις (4) φάσεις για τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Τα στάδια αυτά είναι τα εξής: α) Ανάλυση πρακτικών προβλημάτων από τους ερευνητές, β) Ανάπτυξη λύσεων βασισμένες στο υπάρχον θεωρητικό υπόβαθρο, γ) Εκτιμήσεις και δοκιμές λύσεων στη πράξη, δ) Παραγωγή αρχών σχεδιασμού λύσεων για το υπάρχον πρόβλημα.

Στην περίπτωση της παρούσας ερευνητικής εργασίας τα παραπάνω στάδια συμπεριλάμβαναν τις εξής διαδικασίες.

α) Ανάλυση πρακτικών προβλημάτων από τους ερευνητές

Αρχικά, έγινε μία μελέτη της ελληνικής και ξένης βιβλιογραφίας, όπου διαπιστώθηκε η ανάγκη υιοθέτησης κατάλληλων διδακτικών μοντέλων για τη διδακτική των Μαθηματικών. Μία από τις προσεγγίσεις που φάνηκε να έχει θεωρητικά σημαντικά οφέλη τόσο στην οικοδόμηση της γνώσης όσο και στην καλλιέργεια της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της επιχειρηματολογίας, ήταν η διερευνητική. Ωστόσο, δεν φάνηκε να υπάρχουν πολλές βιβλιογραφικές αναφορές για την πρακτική εφαρμογή αυτής της προσέγγισης ούτε στα Μαθηματικά ούτε στους μαθητές του Δημοτικού. Αυτό αποτέλεσε και το ερευνητικό ενδιαφέρον της παρούσας έρευνας. Η μαθηματική έννοια στην οποία εφαρμόστηκε η προσέγγιση αυτή, ήταν η έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του, καθώς σε αυτή παρατηρήθηκαν πολλές δυσκολίες και παρανοήσεις.

β) Ανάπτυξη λύσεων που βασίζονται στο υπάρχον θεωρητικό υπόβαθρο

Η διερευνητική προσέγγιση αποτέλεσε το επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος της παρούσας εργασίας. Λόγω του ότι αποτελεί μια δυναμική προσέγγιση και δεν προτείνει σταθερά στάδια διδασκαλίας, απαιτήθηκε βιβλιογραφική ανασκόπηση σε βάθος για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της και τα στοιχεία που την διακρίνουν από άλλες θεωρίες μάθησης. Έτσι σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε ένα μοντέλο διδασκαλίας βασισμένο σε αυτή τη προσέγγιση, το οποίο διακρίνεται από κάποια χαρακτηριστικά. Μεταξύ άλλων, μελετήθηκαν και οι διαφορετικές μορφές της διερευνητικής προσέγγισης, δύο από τις οποίες υιοθετήθηκαν στις διδακτικές παρεμβάσεις που εφαρμόστηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα.

γ) Εκτιμήσεις και δοκιμές λύσεων στην πράξη

Οι διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδιάστηκαν μετά από μελέτη της βιβλιογραφίας, εφαρμόστηκαν στην πράξη στα πλαίσια της πιλοτικής μας έρευνας. Το κεφάλαιο το οποίο αποτέλεσε τη διδαχθείσα μαθηματική έννοια ήταν της Ε’ Δημοτικού και αφορούσε την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του. Η εφαρμογή αυτή, έδωσε κάποια αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία, τα οποία αναλύθηκαν και οδήγησαν σε κάποιες αλλαγές. Οι αλλαγές αυτές προέκυψαν από δυσκολίες της ερευνήτριας/εκπαιδευτικού, των μαθητών, του υλικού που τους είχε δοθεί ή από την ίδια τη μέθοδο.

δ) Παραγωγή αρχών σχεδιασμού λύσεων για το υπάρχον πρόβλημα

Οι αλλαγές που προέκυψαν από την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας, οδήγησαν στον εκ νέου σχεδιασμό διερευνητικών παρεμβάσεων καθώς και των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Οι νέες διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδιάστηκαν μετά την πιλοτική έρευνα, εφαρμόστηκε εκ νέου σε νέο δείγμα και τα αποτελέσματα που προέκυψαν οδήγησαν σε συμπεράσματα σε σχέση με το υπάρχον ερευνητικό ενδιαφέρον. Τα συμπεράσματα αυτά έχουν να κάνουν με την πρακτική εφαρμογή διερευνητικών παρεμβάσεων, την επίδραση του βαθμού καθοδήγησης στα μαθησιακά αποτελέσματα αλλά και στην ικανότητα επιχειρηματολογίας των μαθητών.

3.3 Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας ήταν 28 μαθητές της Ε’ Δημοτικού, οι οποίοι φοιτούσαν σε δημόσιο Δημοτικό σχολείου του νομού Αττικής. Η επιλογή του σχολείου έγινε για πρακτικούς λόγους που αφορούν στη συλλογή δεδομένων από την ίδια την ερευνήτρια, η οποία εργαζόταν ως εκπαιδευτικός στο σχολείο αυτό την συγκεκριμένη σχολική χρονιά. Να σχολιαστεί στο σημείο αυτό ότι στο εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας όλα τα δημόσια σχολεία ακολουθούν το ίδιο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών, τα ίδια σχολικά εγχειρίδια ενώ υπάρχουν προτάσεις σχετικά με τη διδακτική μέθοδο που μπορούν να ακολουθήσουν. Η επιλογή της συγκεκριμένης τάξης έγινε τόσο για την πιλοτική έρευνα όσο και για την κύρια έρευνα καθώς τόσο στα Αναλυτικά Προγράμματα όσο και στα σχολικά εγχειρίδια πραγματοποιείται μία μετάβαση από την κάλυψη επιφάνειας με τυπικές και μη μονάδες μέτρησης, στον υπολογισμό του εμβαδού με τη βοήθεια του μαθηματικού τύπου. Αποτελεί, λοιπόν, μία τάξη μετάβασης από την κάλυψη στον μαθηματικό υπολογισμό και οι αλλαγές στο γνωστικό σύστημα των μαθητών σε αυτές τις ηλικίες είναι σημαντικές (Demetriou, Christou, Platsidou & Spanoudis, 2002).

Οι μαθητές του δείγματος ήταν χωρισμένοι σε τρία τμήματα. Λόγω του ότι οι μαθητές εκείνη την περίοδο λόγω της πανδημίας του κορονοϊού (Ιούνιος 2020) παρακολουθούσαν εκ περιτροπής τα μαθήματα, το δείγμα αποτελούνταν από τους μισούς μαθητές του κάθε τμήματος. Το ένα παρακολούθησε την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία (ΠΜΔ), το δεύτερο την δομημένη διερευνητική διδασκαλία (ΔΔΔ) και το τρίτο την καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία (ΚΔΔ). Η επιλογή του τμήματος για το κάθε είδος διδασκαλίας ήταν τυχαία. Για την επιλογή του είδους της διερευνητικής διδασκαλίας υιοθετήθηκε η διάκριση των Banchi & Bell (2008) σύμφωνα με την οποία η διερευνητική μάθηση διακρίνεται σε ανοιχτή, καθοδηγούμενη, δομημένη και επιβεβαιωτική. Για το σκοπό της συγκεκριμένης έρευνας δεν επιλέχθηκε η ανοιχτή διερευνητική, καθώς οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με αυτό το είδος διδασκαλίας. Ο λόγος που δεν επιλέχθηκε η επιβεβαιωτική ήταν γιατί σκοπός της έρευνας ήταν η οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές και όχι η επιβεβαίωσή της. Η εκπαιδευτικός που ανέλαβε τον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων, σε όλες τις περιπτώσεις ήταν η ερευνήτρια.

Οι μαθητές και των τριών διδακτικών παρεμβάσεων χωρίστηκαν σε τρία επίπεδα επιδόσεων, υψηλών, μεσαίων και χαμηλών, καθώς είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί η επίδραση της κάθε παρέμβασης στις επιδόσεις της κάθε ομάδας μαθητών. Ο χωρισμός αυτός βασίστηκε στη κρίση των εκπαιδευτικών των τμημάτων, οι οποίοι τα είχαν αναλάβει για δεύτερη συνεχόμενη χρονιά. Στην περίπτωση των διερευνητικών παρεμβάσεων ο χωρισμός αυτός βοήθησε καθώς οι ομάδες που σχηματίστηκαν θέλαμε να είναι κοντά γνωστικά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χωρισμός των μαθητών στα τρία επίπεδα επιδόσεων σε κάθε τμήμα (Πίνακας 4).

Επίπεδο επιδόσεων	**Παραδοσιακή Μετωπική (Μ1-Μ9)**	**Δομημένη Διερευνητική (Μ10-Μ18)**	**Καθοδηγούμενη Διερευνητική (Μ19-Μ28)**
Υψηλών επιδόσεων	Μ1, Μ2, Μ5	Μ13, Μ16, Μ17	Μ22, Μ25
Μεσαίων επιδόσεων	Μ4, Μ7	Μ12, Μ14, Μ15	Μ19, Μ21, Μ26
Χαμηλών επιδόσεων	Μ3, Μ6, Μ8, Μ9	Μ10, Μ11, Μ18	Μ20, Μ23, Μ24, Μ27, Μ28

Πίνακας 4: Χωρισμός μαθητών του δείγματος στα τρία επίπεδα επιδόσεων

3.4 Θέματα ηθικής και δεοντολογίας της έρευνας

Η παρούσα έρευνα ακολούθησε και εφάρμοσε τις κατευθυντήριες γραμμές που διέπουν τον κώδικα ηθικής και δεοντολογίας που προβλέπει η συμμετοχή ανηλίκων ατόμων σε έρευνα. Αρχικά, ζητήθηκε η συγκατάθεση των γονέων για τη συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα, ενώ ταυτόχρονα ενημερώθηκαν για τη δυνατότητα αποχώρησής του σε οποιοδήποτε στάδιό της. Η συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα ήταν εθελοντική, ενώ όσοι μαθητές δεν συμμετείχαν παρέμεναν με τον εκπαιδευτικό της τάξης σε κάποια άλλη αίθουσα του σχολείου.

Στην ενημέρωση των γονέων, έγινε σαφές ότι η συμμετοχή των παιδιών τους δεν θα έχει καμία σχέση με την αξιολόγησή τους στο μάθημα, αντιθέτως θα ήταν μία διαφορετική μαθησιακή εμπειρία για αυτούς. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στα προσωπικά δεδομένα, τα οποία περιείχαν τα αρχεία της βιντεοσκόπησης. Συγκεκριμένα, έγινε κατανοητό ότι δεν χρησιμοποιήθηκαν για κανένα άλλο σκοπό παρά μόνο για τις ανάγκες συλλογής και ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων. Σε περίπτωση που επιχειρηθεί δημόσια προβολή των αρχείων της βιντεοσκόπησης στο σύνολό τους ή έστω τμήματος αυτών, στο πλαίσιο οποιασδήποτε ερευνητικής ή ακαδημαϊκής δραστηριότητας της ερευνήτριας, τα πρόσωπα των μαθητών θα καλυφθούν έτσι ώστε να μην φανερωθεί η ταυτότητά τους.

3.5 Εργαλεία συλλογής δεδομένων

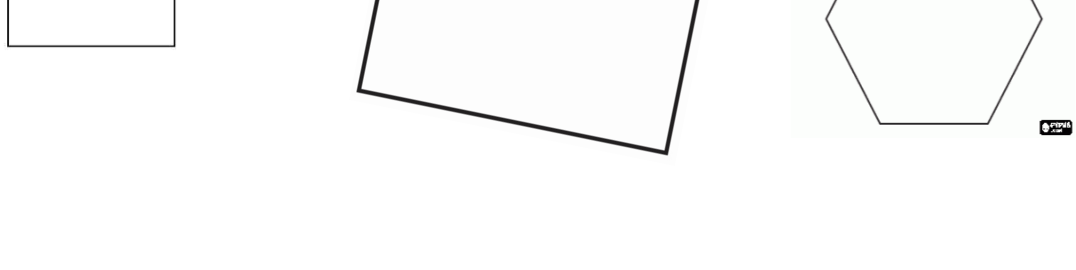
Τα εργαλεία που σχεδιάστηκαν για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, ήταν τα εξής: α) Ένα δοκίμιο Γεωμετρίας που χορηγήθηκε στους μαθητές πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις και συμπληρώθηκε ατομικά και β) οι βιντεοσκοπημένες διδακτικές παρεμβάσεις οι οποίες σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν στην πράξη.

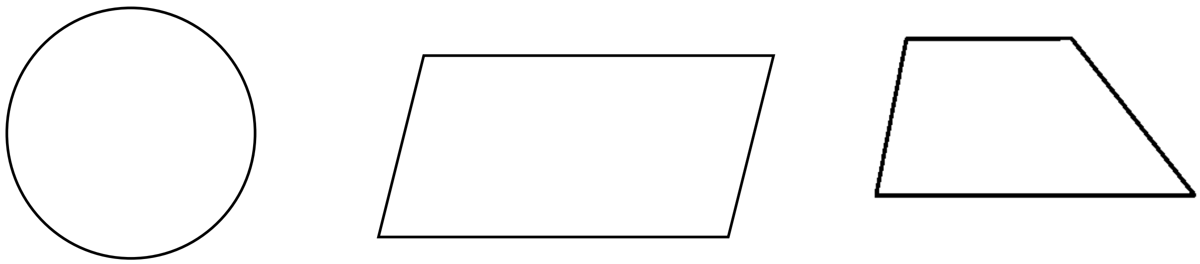
α) **Δοκίμιο Γεωμετρίας**

Το δοκίμιο αυτό βοήθησε στην ανίχνευση των γνώσεων και των παρανοήσεων των μαθητών πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Ακόμη, εκτός από τις επιδόσεις των μαθητών ως προς τη μαθηματική έννοια αξιολογήθηκαν και οι ικανότητές του όσον αφορά στη τεκμηρίωση του συλλογισμού τους μέσω γραπτών επιχειρημάτων. Η επιλογή του δοκιμίου έγινε καθώς αποτελεί ένα ευρέως διαδεδομένο εργαλείο συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιείται συχνά στην εκπαιδευτική έρευνα για την αποτίμηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων μετά την εφαρμογή μιας διδακτικής-μαθησιακής ακολουθίας (Cohen, Manion, & Morrison, 2007). Δίνει τη δυνατότητα της σύγχρονης συμπλήρωσης από τα υποκείμενα της έρευνας, επιτρέποντας τη συλλογή πολλών δεδομένων σε σύντομο χρονικό διάστημα από μεγάλο πλήθος συμμετεχόντων στην έρευνα (Fraenkel & Wallen, 2009). Τα έργα/ ερωτήματα από τα οποία αποτελούνταν ήταν είτε τροποποιημένες δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου, είτε δραστηριότητες από μαθηματικούς διαγωνισμούς και έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί σε αυτή την ηλικία. Τα έργα/ ερωτήματα του δοκιμίου είναι τα παρακάτω, συνοδευόμενα από την τεκμηρίωση επιλογής τους, τον μαθησιακό στόχο που αναμενόταν να πετύχουν ή την παρανόηση που πιθανόν ανιχνευόταν στην απάντηση.

Προσπάθησε να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν. Οι παρακάτω απαντήσεις δεν θα βαθμολογηθούν αλλά είναι απαραίτητες για την έρευνα στην οποία συμμετέχεις.

1. Αναγνώρισε τα σχήματα που ακολουθούν:





Το συγκεκριμένο έργο αποτελεί ερώτημα από την διδακτορική διατριβή Παπαντωνίου (2018) που ασχολήθηκε με τη Γεωμετρία σε μαθητές Γυμνασίου (οι έννοιες, έχουν διδαχθεί ήδη στους μαθητές της δικής μας ηλικίας). Στόχος είναι οι μαθητές να ονομάσουν επίπεδα σχήματα καθώς θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση η αναγνώριση του σχήματος και κατ' επέκταση η αναγνώριση της επιφάνειας του σχήματος και άρα ο καθορισμός της επιφάνειας που θα μετρηθεί για την αντίληψη της έννοιας του εμβαδού. Ο στόχος αυτός, υπάρχει και στα αναλυτικά προγράμματα της Β' Δημοτικού.

2. Η Ελένη ισχυρίζεται ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Είναι κάποιος από τους δύο ισχυρισμούς σωστός; Αιτιολόγησε τη σκέψη σου

____

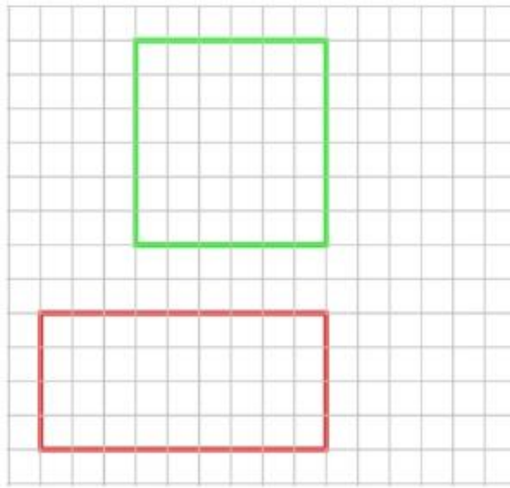
____

____

____

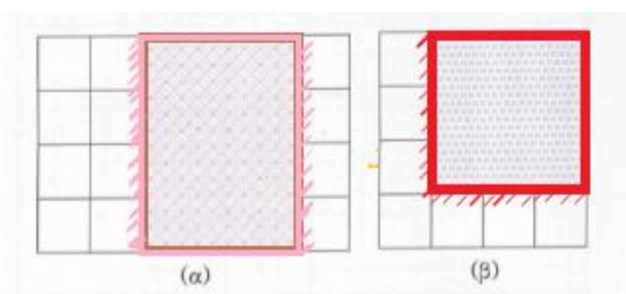
Στόχος του ερωτήματος είναι η αναγνώριση σχημάτων και ανίχνευση της κατανόησης των χαρακτηριστικών τους και σύνδεσή τους με άλλα σχήματα, ώστε να γίνει αργότερα αντιληπτή και η συσχέτιση που υφίσταται στον τύπο εύρεσης του εμβαδού του ορθογωνίου και του τετραγώνου. Ταυτόχρονα, ανιχνεύεται η ικανότητας τεκμηρίωσης και επιχειρηματολογίας μαθητών πριν και μετά τις παρεμβάσεις.

3. Κοίταξε τα παρακάτω επίπεδα σχήματα Α και Β. Τι σχήματα είναι το Α τι σχήμα είναι το Β; Τι παρατηρείς ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



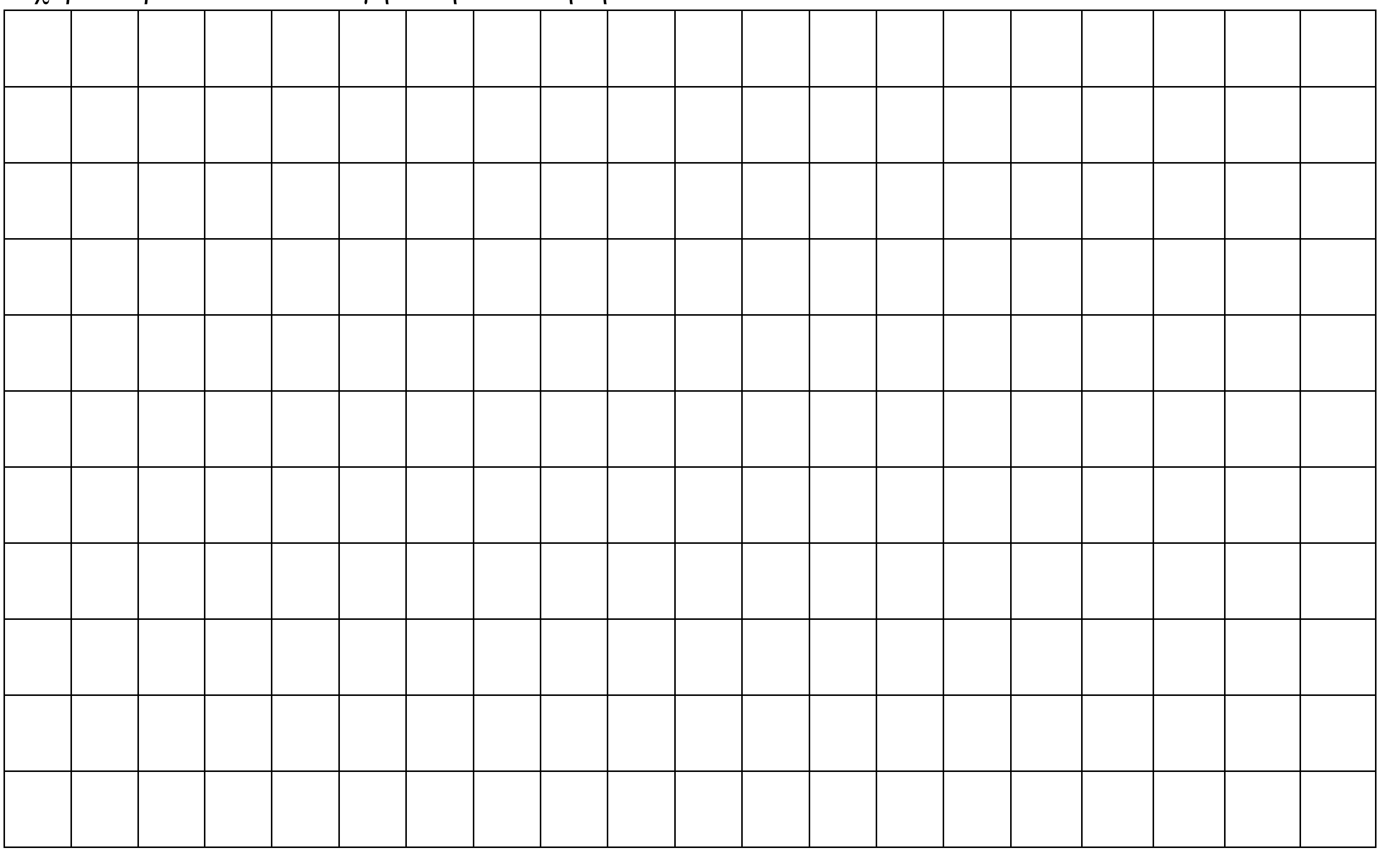
Στο συγκεκριμένο έργο ανιχνεύεται η ικανότητα γραμμικής μέτρησης και αντιστοίχισης του αριθμού που προκύπτει από τη καταμέτρηση, καθώς και η σύνδεση αυτού του αριθμού με το εμβαδόν της κάθε επιφάνειας καθώς και η κατανόησης της έννοιας τόσο εννοιολογικά όσο και διαδικαστικά (Huang & Witz, 2013). Ταυτόχρονα, αξιολογείται ο βαθμός κατανόησης των εννοιών που εμπλέκονται την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του (Clements & Stephan, 2004. Reynolds & Wheatley, 1996) όπως: διαμέριση, επανάληψη μονάδας μέτρησης, διατήρηση, δόμηση ενός σχηματισμού). Ως προς τις παρανοήσεις, ενδέχεται οι μαθητές να μην αντιληφθούν ότι το εμβαδόν αλλάζει σε ένα σχήμα, του οποίου η περίμετρος παραμένει σταθερή (Hart, 1981), καθώς και ότι σχήματα με την ίδια περίμετρο έχουν το ίδιο εμβαδόν (Dembo, Levin & Siergler, 1997).

4. Πόση επιφάνεια καλύπτουν τα χαλιά σε καθένα από τα παρακάτω πατώματα των κουζινών; Υπολόγισέ τα με τον πιο σύντομο τρόπο.



Το έργο αυτό αποτελεί δραστηριότητα από το τετράδιο εργασιών της Γ’ Δημοτικού, ενώ στόχος σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου είναι να γίνει προσπάθεια να αποφύγουμε την καταμέτρηση και να οδηγηθούμε στη χρήση του πολλαπλασιασμού. Οι μαθητές να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν τη μονάδα μέτρησης που τους έχει δοθεί για να δώσουν χωρική διάσταση στο σχήμα, ενώ ανιχνεύεται η ικανότητα γραμμικής μέτρησης και αντιστοίχισης του αριθμού που προκύπτει από τη καταμέτρηση, καθώς και η σύνδεση αυτού του αριθμού με το εμβαδόν της κάθε επιφάνειας. Τέλος, αξιολογείται η κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του (Clements & Stephan, 2004. Reynolds & Wheatley, 1996) όπως: διαμέριση, επανάληψη μονάδας μέτρησης, διατήρηση, δόμηση ενός σχηματισμού).

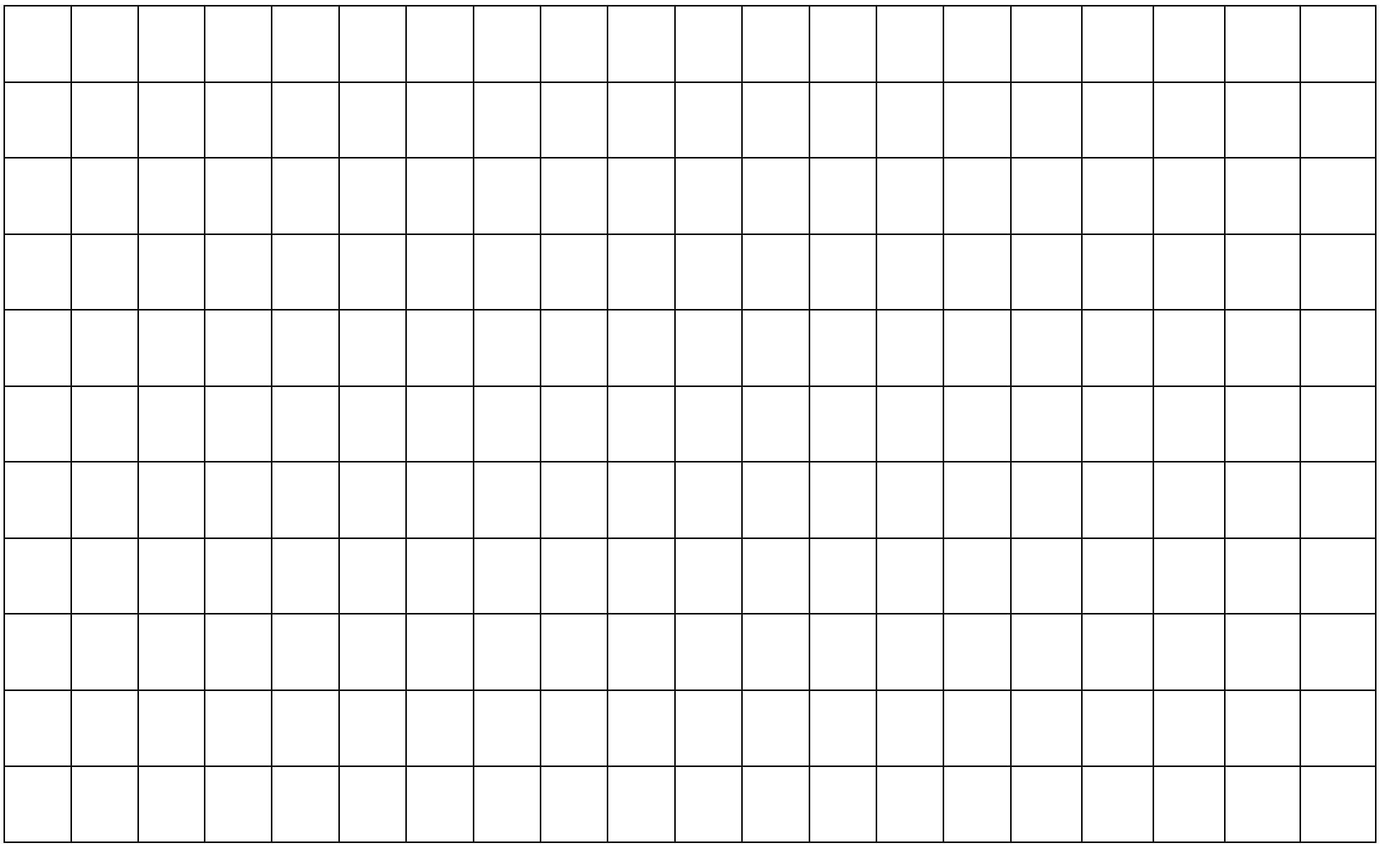
5. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 36 τ. εκ. Πόσα εκατοστά μπορεί να είναι οι πλευρές του; Και ποια είναι η περίμετρός του; Πόσα τέτοια ορθογώνια μπορούν να δημιουργηθούν με εμβαδόν 36τ.εκ.; Αν θέλεις, μπορείς να χρησιμοποιήσεις και το τετραγωνισμένο χαρτί παρακάτω. Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



Το συγκεκριμένο έργο αποτέλεσε αφόρμηση από παρόμοια δραστηριότητα στο τετράδιο εργασιών (Δ’ Δημοτικού)(σελ 18, γ’ τεύχος) με τη διαφορά ότι στη συγκεκριμένη δίνεται και τετραγωνισμένο χαρτί. Στόχος είναι να έχει περισσότερες από μία λύσεις και να διαπιστωθεί εάν κατά τη δεύτερη κυρίως φάση χρησιμοποιηθεί η στρατηγική της καταμέτρησης ή του μαθηματικού τύπου. Σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα της Ε’ Δημοτικού, οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν ότι η έννοια του εμβαδού είναι διαφορετική από την έννοια της περιμέτρου επιλύοντας προβλήματα στα οποία γνωρίζουν τη μία από τις δύο έννοιες και ψάχνουν την άλλη. Ταυτόχρονα, ανιχνεύεται η ικανότητα κατανόησης των χαρακτηριστικών των σχημάτων και συγκεκριμένα του ορθογωνίου παραλληλογράμου καθώς και των εννοιών που εμπλέκονται την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του (Clements & Stephan, 2004. Reynolds &

Wheatley, 1996) όπως: διαμέριση, επανάληψη μονάδας μέτρησης, διατήρηση, δόμηση ενός σχηματισμού).

6. Η Μαρία πιστεύει ότι μπορεί να σχεδιάσει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή της περιμέτρου να ισούται με την αριθμητική τιμή του εμβαδού του. Συμφωνείς με τη Μαρία; Κατάγραψε τις σκέψεις σου για να μας πείσεις πως έχει δίκιο.



Το έργο/ ερώτημα αυτό επιλέχθηκε καθώς ενδείκνυται ως κατάλληλη για την προώθηση του πειραματισμού, ενώ ανιχνεύεται η παρανόηση ως προς την αθροιστική θεώρηση του εμβαδού συγχέοντάς το με τη περίμετρο (Allerton & Nunes, 1994· Kidman & Nason, 2003) ή την καταφυγή στον μαθηματικό τύπο ακόμη και σε περιπτώσεις που αυτός αποτελεί εμπόδιο (Divisova, 2012)

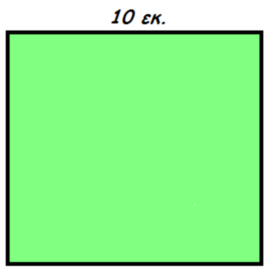
7. Ο Δήμαρχος του δήμου Κορωπίου αποφάσισε να χτίσει ένα κλειστό γυμναστήριο για τις βροχερές μέρες. Ζήτησε, λοιπόν, να του φέρουν τα σχέδια δύο οικοπέδων για να αποφασίσει πού θα χτιστεί το γυμναστήριο»

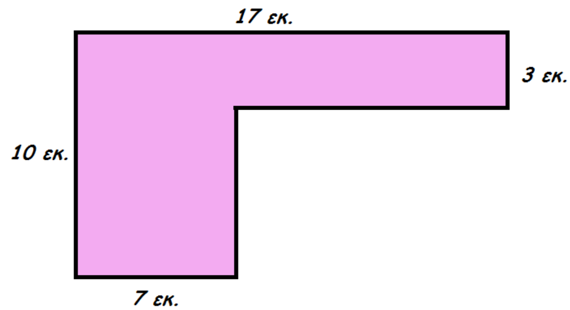
«Εσύ ποιό από τα δύο οικόπεδα θα διάλεγες αν ήσουν στη θέση του Δημάρχου;»

«Για ποιό λόγο επέλεξες το συγκεκριμένο οικόπεδο; Είναι πιο μεγάλο αυτό που διάλεξες, πιο μικρό ή ίσο με το άλλο;»

Πόσο είναι το εμβαδόν των οικοπέδων αν 1 τ. εκ. αντιστοιχεί σε 1 τ.μ.

Αιτιολόγησε την επιλογή σου καταγράφοντας τις σκέψεις σου

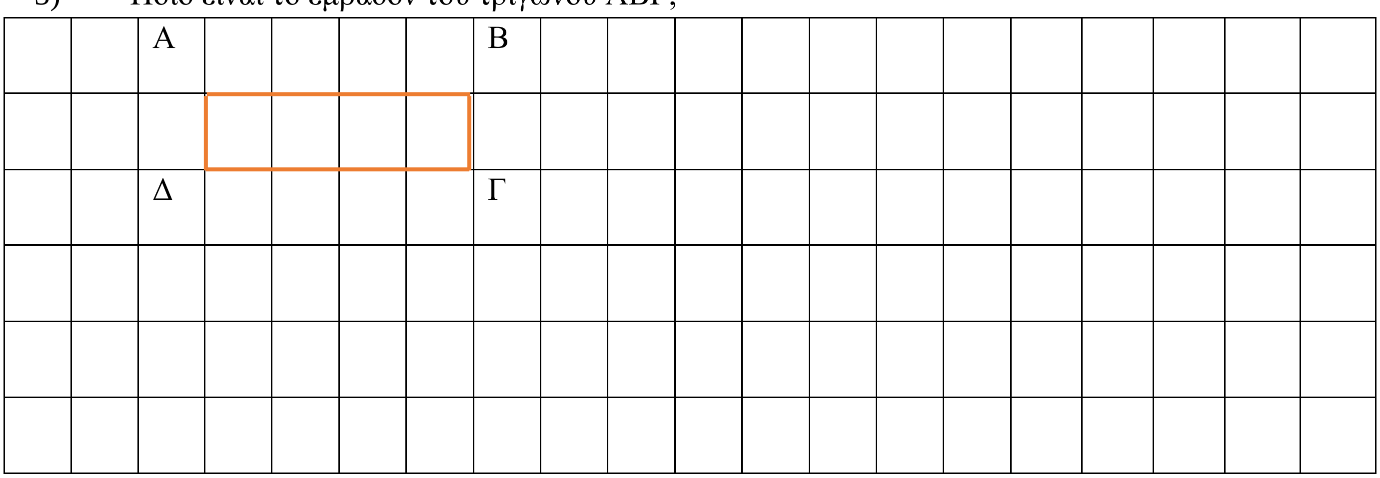




Το έργο αποτελεί αυτούσια δραστηριότητα από έρευνα των Βαϊτσίδη & Σκουμπουρδή (2015) που απευθύνθηκε σε μαθητές 8-9 ετών, όπου πέρα από μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάστηκαν και δυσκολίες στον συλλογισμό των μαθητών. Ανιχνεύεται η κατανόηση της ισότητας των δύο εμβαδών σχημάτων, εκ των οποίων το ένα είναι μη συμμετρικό και την ύπαρξη σχημάτων με ίσο εμβαδόν αλλά διαφορετική περίμετρο. Ταυτόχρονα, μπορεί να εντοπιστεί η παρανόηση που αφορά την διατήρηση του εμβαδού μετά από σύνθεση και ανασύνθεση (Tan Sisman & Aksu, 2016) καθώς και η δυσκολία κατανόησης πως το εμβαδόν παραμένει αναλλοίωτο όταν το σχήμα παίρνει άλλη μορφή (Πιττάλης, Χρήστου 2004).

8. Παρακάτω βλέπεις ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η πλευρά ΑΒ έχει μήκος 4 εκατοστά, ενώ η ΒΓ 1 εκατοστό.

1) Πόσο είναι το εμβαδόν του;
2) Διπλασίασε την πλευρά ΒΓ. Ποιό είναι τώρα το εμβαδόν του;
3) Τριπλασίασε και τετραπλασίασε το αρχικό μήκος της ΒΓ. Τι παρατηρείς;
4) Μπορείς να προβλέψεις ποιό θα είναι το εμβαδόν αν 10πλασιάσεις την πλευρά ΒΓ;
5) Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ;



Το συγκεκριμένο έργο/ερώτημα αποτελεί αφόρμηση από το photodentro με τη διαφορά πως δεν χρησιμοποιήθηκε ηλεκτρονικό λογισμικό: Μεταβάλλουν μόνο το μήκος ή μόνο το πλάτος ή και τα δύο ταυτόχρονα και μελετούν πως μεταβάλλεται το εμβαδόν. Οι παρανοήσεις που πιθανόν εντοπιστούν έχουν να κάνουν με τι συμβαίνει όταν το μήκος της πλευράς ενός σχήματος μοιραστεί ή διπλασιαστεί τότε θα μοιραστεί ή θα διπλασιαστεί και το εμβαδόν του (Outhred, Mitchelmore, 2000) και με το αν το εμβαδόν μεγαλώνει με γραμμικό τρόπο, όπως και η πλευρά (De Bock et al, 2007).

β) Βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες, για τη συλλογή πληροφοριών όσον αφορά στις διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν και τις συζητήσεις μεταξύ των μελών των ομάδων στις διερευνητικές διδασκαλίες. Το ερευνητικό εργαλείο της βιντεοσκόπησης επιτρέπει τη συλλογή δεδομένων στον τόπο και στον χρόνο που αυτά προκύπτουν, καθώς και την λεπτομερή παρατήρηση του πως δρουν τα υποκείμενα της έρευνας και όχι πως λένε ότι δρουν σε κάθε περίπτωση.

3.6 Πιλοτική έρευνα

Οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα της πιλοτικής χορήγησης, βοήθησαν στον σχεδιασμό της κύριας ερευνητικής διαδικασίας. Η πιλοτική έρευνα βοήθησε τόσο στην αξιολόγηση του δοκιμίου Γεωμετρίας που δόθηκε στους μαθητές πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις όσο και στην εφαρμογή των διδακτικών παρεμβάσεων.

Το δείγμα της πιλοτικής έρευνας αποτελούνταν από 18 μαθητές, οι οποίοι φοιτούσαν στην Ε' Δημοτικού σε ένα 6θέσιο σχολείο του νομού Αιτωλοακαρνανίας. Έτσι, οι μαθητές ανήκαν σε ένα τμήμα του σχολείου, το οποίο χωρίστηκε σε δύο ισάριθμα υποτμήματα. Το ένα συμμετείχε σε διδασκαλία που βασίστηκε στη δομημένη διερευνητική προσέγγιση και το άλλο στη καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση. Οι μαθητές και στις δύο διδακτικές παρεμβάσεις εργάστηκαν σε ομάδες. Πριν τον χωρισμό τους σε ομάδες, συμπλήρωσαν ένα διαγνωστικό φύλλο εργασίας, όπου προέκυψαν οι μαθητές τριών βαθμίδων ικανοτήτων (καλοί, μέτριοι και αδύναμοι), οι οποίοι μοιράστηκαν ισότιμα στις δύο ομάδες.

Ο σχεδιασμός της ερευνητικής διαδικασίας βασίστηκε σε τέσσερα στάδια (Πίνακας 5):

Περιγραφή πιλοτικής έρευνας	
Προπειραματικό στάδιο	1 διδακτική ώρα
Διδασκαλία επιχειρηματολογίας	1 διδακτική ώρα
Διδακτικές παρεμβάσεις	2 διδακτικές ώρες
Μεταπειραματικό στάδιο	1 διδακτική ώρα

Πίνακας 5 : Στάδια και διάρκεια πιλοτικής έρευνας

1. Προπειραματικό στάδιο

Στο στάδιο αυτό, που είχε διάρκεια μία (1) διδακτική ώρα, δόθηκε στους μαθητές το δοκίμιο Γεωμετρίας, το οποίο είχε ως στόχο την αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών σε έννοιες της Γεωμετρίας. Το δοκίμιο αυτό χορηγήθηκε σε έντυπη μορφή και συμπληρώθηκε ατομικά από τους μαθητές.

2. Διδασκαλία επιχειρηματολογίας

Η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας περιλάμβανε την σημασία της επιχειρηματολογίας τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα Μαθηματικά, καθώς και τα δομικά στοιχεία από τα οποία αποτελείται. Η αναφορά στα δομικά στοιχεία ενός επιχειρήματος είχε ως στόχο την καταγραφή από τους μαθητές επαρκών και επιστημονικά ορθών επιχειρημάτων. Η προσέγγιση στην οποία βασίστηκε η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας ήταν η παραδοσιακή μετωπική και έτσι η εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στα δομικά στοιχεία ενός επιχειρήματος (δεδομένα, εγγύηση, συμπέρασμα) και στη συνέχεια οι μαθητές εξασκήθηκαν σε κάποια ερωτήματα.

3. Διδακτικές παρεμβάσεις

Σε πρώτο στάδιο, έγινε ανάκληση γνώσεων των μαθητών από τις προηγούμενες τάξεις που αφορούσαν την αναγνώριση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων και των σχέσεων μεταξύ τους. Χρησιμοποιήθηκαν υλικά όπως το τάνγκραμ, ο γεωπίνακας, γλωσσοπίεστρα κτλ και καλούνταν να ονοματοδοτήσουν τα σχήματα και να ανακαλύψουν τις σχέσεις μεταξύ τους. Η διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων ήταν δύο διδακτικές ώρες.

Εξερεύνηση

Στη συνέχεια, ακολούθησε η παρέμβαση που αφορούσε του εμβαδού και της μέτρησής του με τη βοήθεια του υλικού που είχε σχεδιαστεί. Η διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων (δομημένης και καθοδηγούμενης διερευνητικής) ήταν ο βαθμός καθοδήγησης που παρεχόταν από τον εκπαιδευτικό και από το ίδιο το φύλλο εργασίας που είχαν στα χέρια τους οι ομάδες. Αρχικά, εστιάστηκε η προσοχή τους στην κάλυψη της επιφάνειας και την καταμέτρηση των μονάδων ως απάντηση στο ερώτημα «*Πόσο είναι το εμβαδόν;*». Στη συνέχεια, τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας είχε ως στόχο την ανακάλυψη του αλγεβρικού τύπου υπολογισμού του εμβαδού. Το υλικό που τους είχε δοθεί, σχεδιάστηκε κατάλληλα ώστε να τους βοηθήσει στη δόμηση του πλέγματος και την κατανόηση του τύπου.

Παρουσίαση

Οι μαθητές των ομάδων παρουσίασαν, στη φάση αυτή τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν, επιχειρηματολογώντας όσο μπορούσαν για την πορεία που ακολούθησαν. Αναφέρθηκαν στις αποφάσεις που πήραν για την εξέλιξη της διαδικασίας, τους παράγοντες που έλαβαν υπόψη τους και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν.

Σύνθεση-Μαθηματικοποίηση

Έχοντας παρουσιάσει η κάθε ομάδα τα συμπεράσματά της, τα μέλη των ομάδων συζήτησαν για να καταλήξουν στην από κοινού διατύπωση του αλγεβρικού τύπου υπολογισμού του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Επέκταση

Στη φάση αυτή, έχοντας αναφερθεί στον αλγεβρικό τύπο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, έγινε μία γενίκευση αυτού του τύπου, αναφερόμενοι στο τετράγωνο και το ορθογώνιο τρίγωνο.

4. Μεταπειραματικό στάδιο

Στο στάδιο αυτό, δόθηκε εκ νέου στους μαθητές το ίδιο δοκίμιο Γεωμετρίας, με αυτό που είχε δοθεί πριν τις παρεμβάσεις. Χορηγήθηκε σε έντυπη μορφή και συμπληρώθηκε ατομικά από τους μαθητές.

Κατά τη διάρκεια της πιλοτικής έρευνας, κατεγράφησαν όλες οι δυσκολίες που παρατηρήθηκαν ως προς τους μαθητές, την εκπαιδευτικό αλλά και την ίδια τη διαδικασία και μετά από τη μελέτη των δεδομένων που συλλέχθηκαν πραγματοποιήθηκαν κάποιες αλλαγές οι οποίες αναφέρονται στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία από τις σημαντικότερες διαπιστώσεις που προέκυψαν από την πιλοτική εφαρμογή της έρευνας ήταν η δυσκολία των μαθητών στη συμμετοχή σε μία διδασκαλία βασισμένη στη διερεύνηση. Ακόμη, παρατηρήθηκε δυσκολία των μαθητών στην επιχειρηματολογία και την υποστήριξη των απαντήσεών τους. Οι μαθητές αυτοί, προέρχονταν κατά κύριο λόγο και από τις δύο ομάδες (δομημένη διερευνητική και καθοδηγούμενη διερευνητική). Αυτό ίσως οφείλεται στην ελλιπή εμπειρία των μαθητών να επιχειρηματολογούν και αυτός ήταν ο λόγος που η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας διατηρήθηκε και στην κύρια έρευνα.

Παρόλο που οι διερευνητικές προσεγγίσεις δεν επηρέασαν στον βαθμό που περιμέναμε τις ικανότητες επιχειρηματολογίας των μαθητών, έδειξαν ενθουσιασμό για την πρωτόγνωρη μέθοδο διδασκαλίας που ακολουθήθηκε. Εκτός από την θέλησή τους, που εκφραζόταν καθημερινά για μία ακόμη συνάντηση, οι μαθητές προς το τέλος των συναντήσεων εξέφρασαν πως αισθάνθηκαν *«σαν μαθηματικά μυαλά»* και ότι αυτό που έκαναν μέσα στην τάξη *«δεν έμοιαζε και πολύ με μαθηματικά»*.

Ως προς τη συνεργασία των μαθητών μέσα στις ομάδες, αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές που τόσο στο δοκίμιο Γεωμετρίας, όσο και μετά από συζήτηση με την εκπαιδευτικό της τάξης, είχαν χαρακτηριστεί ως υψηλής επίδοσης, ήταν αυτοί που αναλάμβαναν τις περισσότερες πρωτοβουλίες στην ομάδα. Οι μαθητές που ανήκαν σε χαμηλότερα επίπεδα επίδοσης αρχικά ήταν αμήχανοι και αμέτοχοι ενώ φάνηκε να συμμετέχουν περισσότερο όσοι ανήκαν στην καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία σε σχέση με τη δομημένη. Αμηχανία παρατηρήθηκε και απέναντι στην ηχογράφηση των συναντήσεων. Σε μερικές περιπτώσεις, μάλιστα, μιλούσαν τόσο σιγά που δεν ακουγόντουσαν οι συζητήσεις τους.

Ωστόσο, παρατηρήθηκαν και περιπτώσεις μαθητών που δυσκολεύτηκαν να προσαρμοστούν σε αυτό το νέο στυλ διδασκαλίας. Ίσως η μικρή διάρκεια της παρέμβασης να μην ευνόησε την υιοθέτηση ενός νέου τρόπου μάθησης. Μία μέθοδος διδασκαλίας σαν αυτή που μελετάται στην παρούσα έρευνα χρειάζεται χρόνο για να προσαρμοστούν οι μαθητές ακόμα και στην εργασία σε ομάδες, αν δεν είναι εξοικειωμένοι.

3.7 Αναδιαμορφωμένα εργαλεία συλλογής δεδομένων

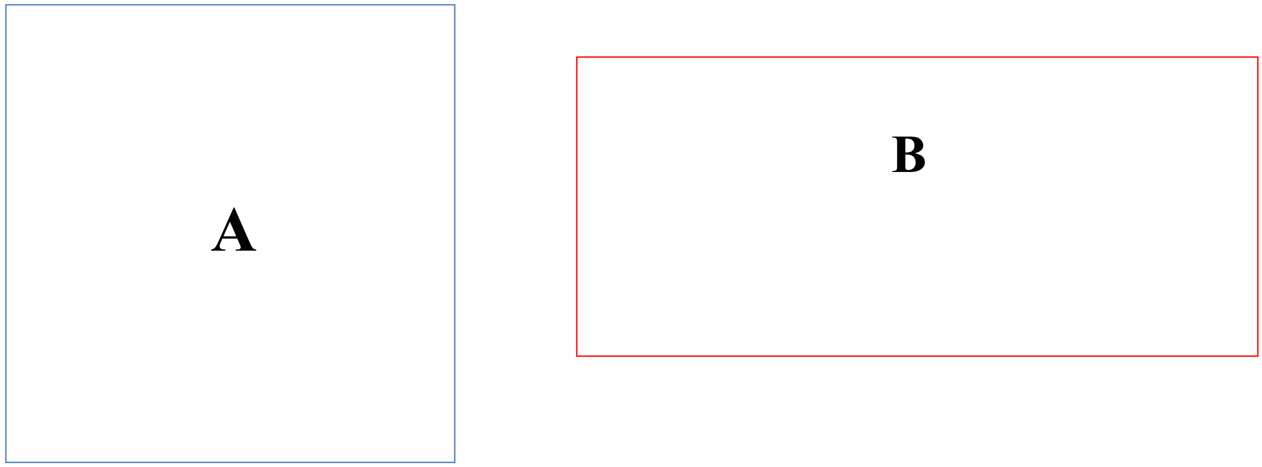
Μετά την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας και την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν κάποιες αλλαγές στα εργαλεία συλλογής της που αφορούσαν τόσο το δοκίμιο της Γεωμετρίας όσο και τις ίδιες τις διδακτικές παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν στο δείγμα.

Τα έργα που αποτέλεσαν το δοκίμιο που δόθηκε πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, είτε έχουν χρησιμοποιηθεί σε άλλες έρευνες (Walcot, Mohr, Kastberg, 2009· Zacharos & Chassapis, 2012· Βαϊτσίδη & Σκουμπουρδή, 2015), είτε αποτελούν τροποποιημένες δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου. Σε κάθε περίπτωση επιλέχτηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να σχετίζονται με τις κοινές παρανοήσεις και δυσκολίες των μαθητών αυτής της ηλικίας για την επίπεδη επιφάνεια και τη μέτρησή της, καθώς και να καλύπτουν τις πέντε θεμελιώδεις έννοιες που εμπλέκονται στη μάθηση και την ικανότητα μέτρησης της επιφάνειας (Clements & Stephan, 2004· Reynolds & Wheatley, 1996): τη διαμέριση, τη διατήρηση, τη δόμηση ενός σχηματισμού.

1. Η Ελένη ισχυρίζεται ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Με ποιόν από τους δύο ισχυρισμούς συμφωνείς; Αιτιολόγησε όσο πιο αναλυτικά μπορείς τη σκέψη σου

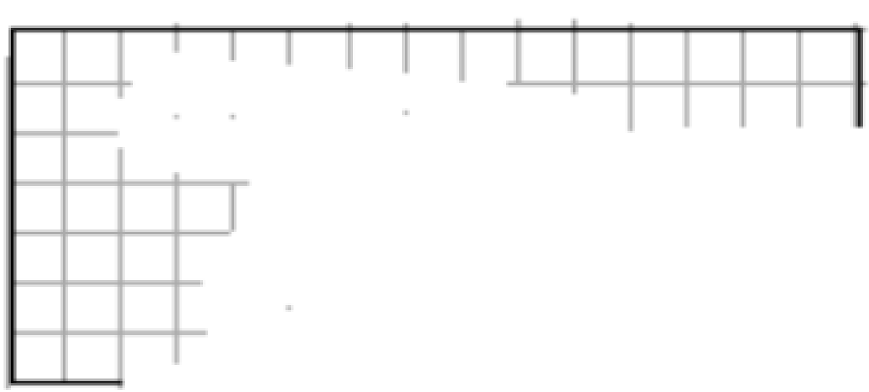
Στόχος του συγκεκριμένου έργου είναι η αναγνώριση των σχημάτων, η ανίχνευση της κατανόησης των χαρακτηριστικών τους και η σύνδεσή τους με άλλα σχήματα, ώστε να γίνει αργότερα αντιληπτή και η σχέση που έχει ο τύπος εύρεσης του εμβαδού του ορθογωνίου και του τετραγώνου. Ακόμη, αξιολογείται η ικανότητα τεκμηρίωσης και επιχειρηματολογίας των μαθητών πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

2. Κοίταξε τα παρακάτω επίπεδα σχήματα Α και Β. Τι σχήμα είναι το Α; Τι σχήμα είναι το Β; Τι παρατηρείς ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



Στο έργο αυτό ανιχνεύεται η κατανόηση της έννοιας του εμβαδού (εννοιολογική ή διαδικαστική κατανόηση) (Huang & Witz, 2013). Ακόμη, αξιολογείται η κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του (Clements & Stephan, 2004· Reynolds & Wheatley, 1996) όπως: διαμέριση, επανάληψη μονάδας μέτρησης, διατήρηση, δόμηση ενός σχηματισμού. Η ικανότητα γραμμικής μέτρησης και αντιστοίχισης του αριθμού που προκύπτει, με τον αριθμό του εμβαδού της κάθε επιφάνειας μπορεί να οδηγήσει επίσης σε κάποια εννοιολογικά συμπεράσματα. Εκτός, από την κατανόηση της έννοιας, το συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να οδηγήσει σε συμπεράσματα και για τις παρανοήσεις που υπάρχουν γύρω από την έννοια του εμβαδού, όπως: «Το εμβαδόν μπορεί να παραμείνει σταθερό, όταν το σχήμα αλλάζει μορφή;»(Hart, 1981) και «Σχήματα με διαφορετική περίμετρο έχουν το ίδιο εμβαδόν;» (Dembo, Levin & Siergler, 1997)

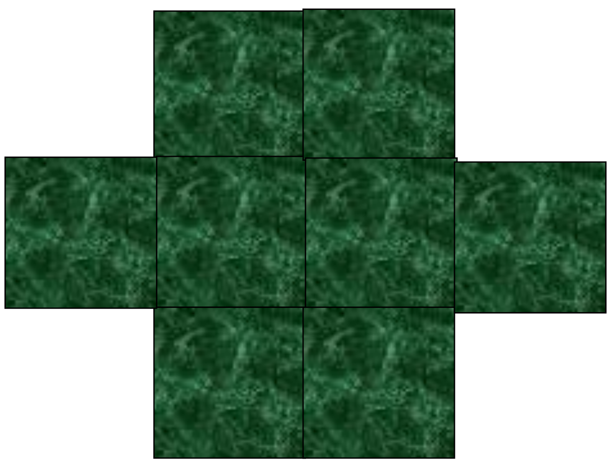
3. Στους μαθητές ενός τμήματος της Ε' τάξης ενός σχολείου δόθηκε το παρακάτω σχήμα για να βρουν το Εμβαδόν του. Ορισμένα παιδιά είπαν πως αφού έχει σβηστεί κάποιο μέρος του δεν είναι δυνατόν να βρουν το Εμβαδόν του. Ωστόσο, κάποια άλλα παιδιά είπαν πως υπάρχει τρόπος να βρουν το Εμβαδόν του. Ποια είναι η δική σου άποψη; Μπορείς να βρεις το Εμβαδόν του παρακάτω σχήματος; Αν όχι, αιτιολόγησε την απάντησή σου. Αν ναι, βρες το Εμβαδόν του και αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου.



(στο έντυπο των μαθητών το παραπάνω σχέδιο αποτελείται από τετραγωνάκια του 1 τ. εκ.)

Στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος είναι η ανίχνευση της στρατηγικής που θα χρησιμοποιούν οι μαθητές πριν και μετά τις παρεμβάσεις (καταμέτρηση τ.ε. κάλυψη με το υλικό που τους έχει δοθεί, χρήση αλγοριθμικού τύπου). Ακόμη, στόχος είναι η διαπίστωση της κατανόησης της δόμησης του πλέγματος και ο τρόπος που προκύπτει ο αλγεβρικός τύπος στα ορθογώνια σχήματα.

4. Ένας κήπος αποτελείται από 8 ίδιες τετράγωνες περιοχές, όπως στο σχήμα παρακάτω. Η περίμετρος του κήπου είναι 28 μ. Πόσο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου. Λάβετε υπόψη σας ότι το 1 εκ του σχήματος αντιστοιχεί σε 1 μ. στην πραγματικότητα.



Το συγκεκριμένο έργο βασίστηκε σε ένα παρόμοιο ερώτημα του Διαγωνισμού Καγκουρό του 2012 (*Μαθηματικά για όλους).* Στόχος του είναι η ανίχνευση της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν οι μαθητές πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις (καταμέτρηση τ.ε. κάλυψη με το υλικό που τους έχει δοθεί, χρήση αλγοριθμικού τύπου). Ακόμη, μελετήθηκε η κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται στην έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του (Clements & Stephan, 2004· Reynolds & Wheatley, 1996) όπως: διαμέριση, επανάληψη μονάδες μέτρησης και δόμηση ενός σχηματισμού.

5. Τα παιδιά ενός σχολείου αποφάσισαν να φτιάξουν ένα παρτέρι στον κήπο του σχολείου για να φυτέψουν λουλούδια. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μέρος του κήπου, το οποίο θα περιφράξουν με συρματόπλεγμα 16 μέτρων. Τι σχήμα πρέπει να δώσουν στο παρτέρι τους για να έχουν τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου με στόχο να πείσεις τα παιδιά.

Στο έργο αυτό, οι μαθητές αναμένεται να ξεχωρίσουν την έννοια του εμβαδού από αυτή της περιμέτρου. Αποτελεί ένα ερώτημα που προωθεί τον πειραματισμό, ενώ ανιχνεύεται η παρανόηση των μαθητών, όπου αντιλαμβάνονται το εμβαδό με μία αθροιστική θεώρηση συγχέοντας το εμβαδό με τη περίμετρο (Allerton & Nunes, 1994· Kidman & Nason, 2003) ή κατά πόσο κατέφευγαν στον μαθηματικό τύπο ακόμη και σε περιπτώσεις που αυτός αποτελούσε εμπόδιο (Divisova, 2012). Τέλος, αξιολογείται η ικανότητα τεκμηρίωσης και επιχειρηματολογίας πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις.

3.8 Σχεδιασμός ερευνητικής διαδικασίας

Ο σχεδιασμός της κύριας ερευνητικής διαδικασίας, βασίστηκε τόσο στους αρχικούς στόχους που είχαν τεθεί στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας όσο και στις αλλαγές όπως προέκυψαν μετά την εφαρμογή της πιλοτικής έρευνας. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει επιγραμματικά τις αλλαγές που λήφθηκαν υπόψη κατά τον σχεδιασμό της ερευνητικής διαδικασίας (Πίνακας 6).

	Πιλοτική έρευνα	**Κύρια έρευνα**
Διάρκεια προπειραματικού σταδίου (συμπλήρωση δοκιμίου)	1 διδακτική ώρα	2 διδακτικές ώρες
Διάρκεια διδασκαλίας επιχειρηματολογίας	1 διδακτική ώρα	2 διδακτικές ώρες
Είδη διδακτικών παρεμβάσεων	Δομημένη και καθοδηγούμενη διερευνητική	Παραδοσιακή μετωπική, δομημένη διερευνητική και καθοδηγούμενη διερευνητική
Ερωτήματα/έργα του δοκιμίου	8 ερωτήματα/ έργα	5 ερωτήματα/έργα

Πίνακας 6: Αλλαγές πιλοτικής στο σχεδιασμό της κύριας έρευνας

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, η διάρκεια συμπλήρωσης του δοκιμίου αυξήθηκε από τη μία σε δύο διδακτικές ώρες καθώς όπως διαπιστώθηκε δεν αρκούσε για τη συμπλήρωση του δοκιμίου από τους μαθητές τόσο πριν όσο και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Παράλληλα με την αύξηση της διάρκεια του προπειραματικού και του μεταπειραματικού σταδίου, μειώθηκαν και οι ερωτήσεις του δοκιμίου, ενώ κάποιες αντικαταστάθηκαν με άλλες που είχαν σαφέστερη εκφώνηση ή στόχευαν καλύτερα στην αξιολόγηση της νέας γνώσης. Η αύξηση κρίθηκε απαραίτητη και στην περίπτωση της διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας καθώς στην πιλοτική έρευνα δεν φάνηκε να αρκεί για την ανάλυση των δομικών στοιχείων ενός επιχειρήματος και την παράθεση επαρκούς αριθμού παραδειγμάτων. Εκτός από την δομημένη και την καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση, στην κύρια έρευνα συμπεριλήφθηκε στον σχεδιασμό και η παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση μιας και είναι μία από τις προσεγγίσεις που εφαρμόζεται στη σχολική τάξη μέχρι σήμερα.

Η ερευνητική διαδικασία που σχεδιάστηκε αποτελούνταν από τέσσερα (4) στάδια. Το πρώτο στάδιο ήταν το προπειραματικό, στο οποίο οι μαθητές σε δύο διδακτικές ώρες συμπλήρωσαν ατομικά το δοκίμιο της Γεωμετρίας που τους δόθηκε από την ερευνήτρια. Το δεύτερο στάδιο αποτελούσε η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας, η οποία κρίθηκε απαραίτητο να ενταχθεί στην ερευνητική διαδικασία, μετά την πραγματοποίηση της πιλοτικής έρευνας, καθώς οι μαθητές δεν κατάφερναν να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους με επιχειρήματα. Το τρίτο στάδιο ήταν και το κύριο μέρος της ερευνητικής διαδικασίας, στο οποίο πραγματοποιήθηκαν οι διδακτικές παρεμβάσεις στα τρία τμήματα, η παραδοσιακή, η δομημένη και η καθοδηγούμενη διερευνητική. Μετά το τέλος των παρεμβάσεων, ακολούθησε το τέταρτο στάδιο, το μεταπειραματικό, στο οποίο οι μαθητές συμπλήρωσαν εκ νέου το δοκίμιο της Γεωμετρίας, όπως ακριβώς έγινε και στο προπειραματικό.

3.8.1 Προπειραματικό στάδιο (συμπλήρωση δοκιμίου)

Το προπειραματικό στάδιο, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών, περιλάμβανε τη συμπλήρωση του δοκιμίου της Γεωμετρίας, το οποίο αποτελούνταν από πέντε (5) ερωτήσεις/ έργα που στόχευσαν στην ανίχνευση των προϋπαρχουσών γνώσεων των μαθητών στις έννοιες που ενδιέφεραν στη συγκεκριμένη έρευνα. Η συμπλήρωση του δοκιμίου είχε στόχο την αξιολόγηση τόσο των επιδόσεων ως προς τη μαθηματική έννοια, όσο και των δεξιοτήτων γραπτής επιχειρηματολογίας. Η συμπλήρωση του δοκιμίου ήταν ατομική, με την ερευνήτρια να είναι παρούσα καθ' όλη τη διάρκεια συμπλήρωσής του, ενώ σε μερικές περιπτώσεις δόθηκαν επεξηγήσεις σε απορίες των μαθητών σχετικά με άγνωστες λέξεις.

3.8.2 Διδασκαλία επιχειρηματολογίας

Το στάδιο αυτό περιλάμβανε την διδασκαλία της επιχειρηματολογίας, η οποία σχεδιάστηκε να πραγματοποιηθεί σε κάθε τμήμα με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που ορίζει η ομάδα στην οποία ανήκαν οι μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που θα διδάσκονταν με παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση, θα διδάσκονταν με τον ίδιο τρόπο και την επιχειρηματολογία, οι μαθητές του άλλου τμήματος με βάση τη δομημένη διερευνητική και του τρίτου τμήματος με βάση την καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση. Στόχος και των τριών ειδών διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας ήταν η ανάδειξη της ανάγκης επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά, η κατανόηση της έννοιας της επιχειρηματολογίας και η διδασκαλία των συστατικών στοιχείων ενός επιχειρήματος: δεδομένα, εγγύηση, συμπέρασμα. Η διάρκειά της ορίστηκε σε δύο διδακτικές ώρες. Η εργασία των μαθητών στην παραδοσιακή μετωπική καθορίστηκε να είναι ατομική, ενώ στις διερευνητικές παρεμβάσεις ομαδική.

3.8.3 Διδακτικές παρεμβάσεις

Οι διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδιάστηκε να εφαρμοστούν στο συγκεκριμένο δείγμα ήταν τρεις: η παραδοσιακή, η δομημένη διερευνητική και η καθοδηγούμενη διερευνητική. Στην πιλοτική εφαρμογή της έρευνας δεν είχε συμπεριληφθεί η παραδοσιακή διδασκαλία, αλλά στην κύρια έρευνα αποφασίστηκε να ενταχθεί καθώς είναι μία από τις μεθόδους που επικρατεί κατά κύριο λόγο στην ελληνική σχολική πραγματικότητα. Η σύγκριση αυτή έχει ως στόχο τη μελέτη επίδρασης του μέγιστου βαθμού καθοδήγησης που περιλαμβάνει η παραδοσιακή/δασκαλοκεντρική προσέγγιση, καθώς και τη διαφορετική ποιότητα συμμετοχής των μαθητών, ατομικά, σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει επιγραμματικά τις διαφορές των διδασκαλιών, στις οποίες στηριχτήκαμε για τον σχεδιασμό της κάθε μίας (Πίνακας 7).

	Παραδοσιακή	**Δομημένη διερευνητική**	**Καθοδηγούμενη διερευνητική**
Διδασκαλία επιχειρηματολογίας	Παρουσίαση δομικών στοιχείων	Διερεύνηση δομικών στοιχείων από τους	Διερεύνηση δομικών στοιχείων από τους

	επιχειρήματος από την εκπαιδευτικό	μαθητές με τη βοήθεια ερωτημάτων	μαθητές με ελάχιστα ερωτήματα
Βαθμός καθοδήγησης	Παρουσίαση της νέας γνώσης από την εκπαιδευτικό και ακρόαση από τους μαθητές	Ερωτήματα καθοδήγησης βήμα βήμα προς την ανακάλυψη της γνώσης.	Ερωτήματα ελάχιστης καθοδήγησης
Ρόλος μαθητών	Παθητικοί δέκτες της νέας γνώσης	Ενεργός ρόλος διερεύνησης της νέας γνώσης	Ενεργός ρόλος διερεύνησης της νέας γνώσης
Εργασία μαθητών	Ατομική εργασία	Ομαδική εργασία	Ομαδική εργασία
Ρόλος εκπαιδευτικού	Πηγή και παρουσιαστής της νέας γνώσης	Καθοδηγητής και εμψυχωτής της διαδικασίας	Καθοδηγητής και εμψυχωτής της διαδικασίας
Επιχειρηματολογία μαθητών	Χρήση επιχειρηματολογίας στα ερωτήματα του εκπαιδευτικού και του σχολικού εγχειριδίου	Χρήση επιχειρηματολογίας μεταξύ των μελών της ομάδας και των ομάδων μεταξύ τους	Χρήση επιχειρηματολογίας μεταξύ των μελών της ομάδας και των ομάδων μεταξύ τους
Υλικό διδασκαλίας	Σχολικό εγχειρίδιο και τετράδιο εργασιών	Υλικό διαμορφωμένο από την εκπαιδευτικό με κατάλληλα ερωτήματα	Υλικό διαμορφωμένο από την εκπαιδευτικό με όσο το δυνατόν λιγότερα ερωτήματα καθοδήγησης

Πίνακας 7: Διαφορές διδακτικών παρεμβάσεων

Η διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων ήταν δύο διδακτικές ώρες. Λόγω των ιδιαίτερων συνθηκών του κορονοϊού τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο έπρεπε να διευκρινιστούν ορισμένα σημεία στον σχεδιασμό και την εφαρμογή των παρεμβάσεων. Συγκεκριμένα οι μαθητές των διερευνητικών παρεμβάσεων τηρώντας τις απαραίτητες αποστάσεις, κάθισαν σε 3 θρανία σε μορφή Π ανά ομάδα, ενώ το υλικό που χρησιμοποιήθηκε πλαστικοποιήθηκε για να απολυμαίνεται από την ερευνήτρια αλλά και τους ίδιους τους μαθητές. Η εργασία των μαθητών στην παραδοσιακή μετωπική σχεδιάστηκε να είναι ατομική και η νέα γνώση να παρουσιαστεί από την εκπαιδευτικό, ενώ στην περίπτωση των διερευνητικών παρεμβάσεων ομαδική και η νέα γνώση να οικοδομηθεί μέσα από διάφορα στάδια από τους ίδιους τους μαθητές.

Η παραδοσιακή μετωπική παρέμβαση σχεδιάστηκε με βάση τα στάδια Αφόρμηση, Παρουσίαση, Επεξεργασία και Ανακεφαλαίωση (Ματσαγγούρας, 1994). Συγκεκριμένα, κάθε στάδιο διδασκαλίας είχε το παρακάτω περιεχόμενο.

1. Αφόρμηση

Στη πρώτη φάση της διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός θέτει έναν προβληματισμό στους μαθητές της τάξης όσον αφορά στο εμβαδόν, θέλοντας αρχικά να κεντρίσει την προσοχή τους.

2. Παρουσίαση

Στη φάση αυτή, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στο σύνολο των μαθητών τη νέα γνώση που αφορά στην έννοια του εμβαδού, τον αλγεβρικό τύπο μέτρησης του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τις βασικές μονάδες μέτρησής του. Ακόμη, επεκτείνεται στον αλγεβρικό τύπο εύρεσης του εμβαδού του τετραγώνου και του ορθογωνίου τριγώνου.

3. Επεξεργασία

Οι μαθητές, στη φάση αυτή, λύνουν ατομικά τις ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου και του τετραδίου εργασιών με στόχο την εξάσκηση στη γνώση που τους έχει παρουσιαστεί. Ταυτόχρονα, ο εκπαιδευτικός επιλύει τυχόν απορίες που προκύπτουν κατά την επίλυση των ασκήσεων.

4. Ανακεφαλαίωση

Η φάση της ανακεφαλαίωσης αποτελεί μία συζήτηση μεταξύ της εκπαιδευτικού και των μαθητών, η οποία έχει να κάνει με όσα διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και τη σύνδεσή τους με προηγούμενες γνώσεις

Τόσο η δομημένη όσο και η καθοδηγούμενη διερευνητική διδακτική προσέγγιση ακολούθησαν τα στάδια που περιλαμβάνονται στο πλαίσιο FIBA, καθώς μπορεί να εφαρμοστεί σε μαθητές Δημοτικού για τον σχεδιασμό, τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών (Skoumpourdi, 2017· Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019). Όπως η διερευνητική μέθοδος, έτσι και το πλαίσιο το οποίο υιοθετήθηκε, δεν είναι μία σειρά από βήματα που πρέπει να ακολουθούνται, αλλά μία σειρά από στάδια που καθοδηγούν τη διαδικασία. Κάποια από τα στάδια του συγκεκριμένου πλαισίου συμπτύχθηκαν και περιορίστηκαν σε ένα λόγω της ηλικίας του δείγματος και του χρονικού περιορισμού των διδακτικών παρεμβάσεων. Συγκεκριμένα το περιεχόμενο των διδασκαλιών σε κάθε στάδιο ήταν το παρακάτω.

1. Προβληματισμός

Στην πρώτη φάση της διδασκαλίας, τίθεται ο προβληματισμός μέσω ενός σεναρίου και κατάλληλων ερωτήσεων από την καθημερινή ζωή των μαθητών. Στόχος είναι και μία πρώτη επαφή και συζήτηση με τα υπόλοιπα μέλη των ομάδων.

2. Εξερεύνηση

Στη φάση της εξερεύνησης οι μαθητές εξερευνούν το πρόβλημα που τους έχει δοθεί μέσω του σεναρίου. Ανταλλάσσουν απόψεις με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας χρησιμοποιώντας το εκπαιδευτικό υλικό που έχουν στη διάθεσή τους και ακολουθώντας την πορεία των ερωτήσεων του φύλλου εργασίας προκειμένου να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά αφορούν τον αλγεβρικό τύπο μέτρησης του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

3. Παρουσίαση

Στο στάδιο αυτό, παρουσιάζονται από τις ομάδες τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν. Τα αποτελέσματα αυτά, ανακοινώνονται στην ολομέλεια της τάξης τεκμηριώνοντας όσο το δυνατόν περισσότερο τις απαντήσεις τους.

4. Σύνθεση/ Σύνδεση

Μετά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κάθε ομάδας, τα μέλη συζητούν και καταλήγουν σε κοινές νοηματοδοτήσεις όσον αφορά στον αλγεβρικό τύπο μέτρησης του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

5. Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση

Στη φάση της γενίκευσης οι μαθητές μετά από συζήτηση μεταξύ τους, διερευνούν τη σχέση του τύπου που έχουν ανακαλύψει με αυτόν του τετραγώνου. Η συζήτηση μπορεί να ξεκινήσεις από τις κοινές ιδιότητες των δύο σχημάτων με στόχο την ανακάλυψη των σχέσεών τους. Ακόμη, διερευνούν μία από τις βασικές ιδιότητες της έννοιας του εμβαδού, αυτή της διατήρησης, η οποία θεωρείται απαραίτητη για την εννοιολογική κατανόησή του.

6. Επέκταση

Στόχος της συγκεκριμένης φάσης είναι η επέκταση της νέας γνώσης και σε άλλα σχήματα, όπως το ορθογώνιο τρίγωνο, κάτι που μπορεί να γίνει μετά από αναφορά στις κοινές ιδιότητες των δύο σχημάτων.

Η διαφορά μεταξύ των δύο διερευνητικών παρεμβάσεων σχεδιάστηκε να είναι αποκλειστικά ο βαθμός καθοδήγησης, ο οποίος στην περίπτωση της καθοδηγούμενης είναι μικρότερος όσον αφορά τόσο στον εκπαιδευτικό όσο και στο φύλλο εργασίας που δίνεται στις ομάδες. Συγκεκριμένα, στη δομημένη διερευνητική παρέμβαση το φύλλο εργασίας περιλαμβάνει μία σειρά ερωτημάτων που οδηγεί σταδιακά στην ανακάλυψη της νέας γνώσης, ενώ στην καθοδηγούμενη τα ερώτημα καθοδήγησης είναι λιγότερα και η αυτονομία των μαθητών στη διερευνητική διαδικασία μεγαλύτερη.

Οι μαθησιακοί στόχοι, οι οποίοι αποτέλεσαν τον άξονα για τον σχεδιασμό και την εφαρμογή και των τριών διδακτικών παρεμβάσεων και αναφέρονται τόσο στα αναλυτικά προγράμματα, όσο και στα βιβλία των δασκάλων της συγκεκριμένης τάξης, είναι οι εξής:

1. Να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού
2. Να οδηγηθούν σταδιακά (διαισθητικά) στην πολλαπλασιαστική λογική μέτρησης του εμβαδού (νοερή οργάνωση και δόμηση της έννοιας του χώρου σε γραμμές και στήλες) (ο στόχος αυτός αναφέρεται στις διερευνητικές παρεμβάσεις)
3. Ο υπολογισμός εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων και τετραγώνων χρησιμοποιώντας τις γραμμικές τους διαστάσεις.
4. Η χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης για την κάλυψη της επιφάνειας ορθογώνιων σχημάτων
5. Η επίλυση σχετικών προβλημάτων

Τα έργα, τα υλικά και τα στάδια διεξαγωγής των διερευνητικών διδασκαλιών ήταν κοινά και στα δύο τμήματα. Ο σχεδιασμός έγινε με αυτόν τον τρόπο ώστε να εξαλειφθούν όσο το δυνατόν περισσότεροι παράγοντες επηρεασμού των τελικών επιδόσεων πέραν της προσέγγισης που ακολουθήθηκε σε κάθε περίπτωση. Η βασική διαφορά στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων ήταν ο βαθμός καθοδήγησης από τον εκπαιδευτικό. Ο βαθμός καθοδήγησης είχε να κάνει κυρίως με την μεθοδολογία της διδασκαλίας σε κάθε περίπτωση, η οποία ήταν σαφώς διατυπωμένη από τον εκπαιδευτικό και ημιδομημένη στην καθοδηγούμενη.

Από το σχολικό έτος 2018-2019, οι μαθητές της Ε' Δημοτικού χρησιμοποιούσαν ένα νέο σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών. Λόγω του περιορισμένου χρόνου εφαρμογής του νέου αυτού εγχειριδίου, δεν είχε διαμορφωθεί ο εξορθολογισμός της ύλης, για να οριστούν οι προβλεπόμενες διδακτικές ώρες για την διδασκαλία των ενοτήτων που αφορούν την παρούσα έρευνα (έννοια της επιφάνειας και μέτρησή της). Για το λόγο αυτό, ο σχεδιασμός βασίστηκε στο βιβλίο του δασκάλου και στον εξορθολογισμό για το προηγούμενο σχολικό εγχειρίδιο. Έτσι, η διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων ορίστηκε σε δύο διδακτικές ώρες.

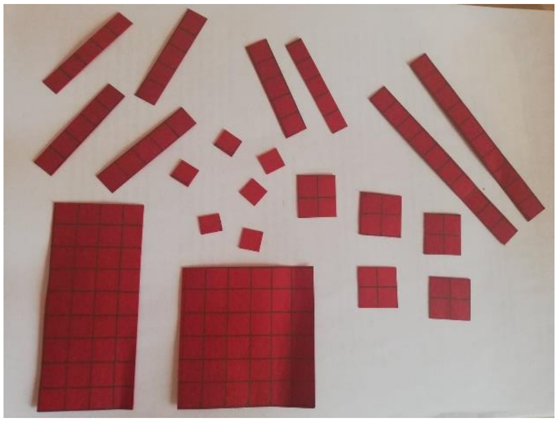
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα στάδια της κάθε διδακτικής παρέμβασης (Πίνακας 8).

Είδος διδασκαλίας σε κάθε ομάδα μαθητών	**Προπειραματικό στάδιο** (2 διδακτικές ώρες)	**Διδασκαλία επιχειρηματολογίας** (2 διδακτικές ώρες)	**Διδακτική Παρέμβαση** (2 διδακτικές ώρες)	**Μεταπειραματικό στάδιο** (2 διδακτικές ώρες)
Παραδοσιακή Μετωπική Διδασκαλία	Χ	Χ	Χ	Χ
Δομημένη Διερευνητική Διδασκαλία	Χ	Χ	Χ	Χ
Καθοδηγούμενη Διερευνητική Διδασκαλία	Χ	Χ	Χ	Χ

Πίνακας 8: Χρονοπρογραμματισμός σταδίων διδακτικών παρεμβάσεων

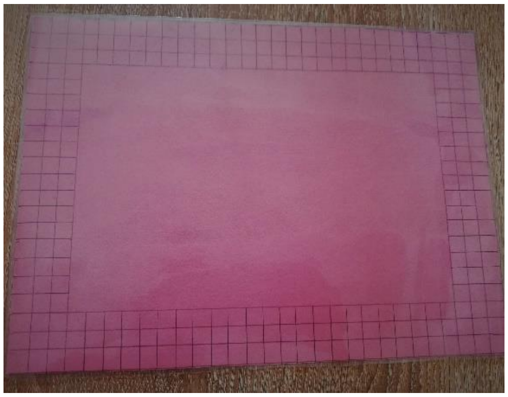
Περιγραφή δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες του φύλλου εργασίας των διερευνητικών προσεγγίσεων είναι επιγραμματικά οι παρακάτω, οι οποίες συνοδεύονται από την βιβλιογραφική τους υποστήριξη, ενώ αναλυτικά υπάρχουν στο παράρτημα της παρούσας εργασίας. Αποτυπώνουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών (Κολέζα, 2000). Η πορεία των ερωτημάτων σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθούν τα στάδια των Clements & Stephan (2004), σχετικά με ανάπτυξη της ικανότητας μέτρησης του εμβαδού. Συγκεκριμένα από την κάλυψη επιφάνειας, οδηγήθηκαν στη δημιουργία του πλέγματος και τέλος στον αλγεβρικό τύπο. Να σημειωθεί ότι στην καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση δεν συμπεριλαμβανόταν όλες οι παρακάτω ερωτήσεις, καθώς ο βαθμός καθοδήγησης ήταν μικρότερος. Το υλικό που είχε δοθεί και στις δύο διερευνητικές παρεμβάσεις αποτελούνταν από τετραγωνικά εκατοστά, λωρίδες των 10 και 5 τετραγωνικών εκατοστών και διάφορα τετράγωνα (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Πρόσθετο βοηθητικό υλικό που δόθηκε στις ομάδες

Το χαρτόνι που σας έχει δοθεί αποτελεί την κάτοψη ενός διαθέσιμου οικοπέδου ενός αρχιτέκτονα, στο οποίο θα χτιστεί ένα σπίτι. (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Κάτοψη σπιτιού για διαχωρισμό δωματίων από τους μαθητές

Στον διαθέσιμο χώρο που υπάρχει καλείστε να σχεδιάσετε το πώς θα είναι αυτό χωρισμένο σύμφωνα με το πώς το έχετε φανταστεί. Η διαμόρφωση, ο αριθμός και το μέγεθος των δωματίων, αποτελεί δική σας επιλογή και θα προκύψει μετά από συζήτηση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας σας.

i. *Στο χαρτόνι που σας έχει δοθεί ο τετραγωνισμένος χώρος γύρω από το σπίτι είναι η αυλή του σπιτιού. Θέλετε να την καλύψετε με πλακάκια και γι' αυτό πρέπει να υπολογίσετε το μέγεθός της. Αιτιολογήστε τη σκέψη σας όσο πιο αναλυτικά μπορείτε. Να θυμάστε ότι το ένα τετραγωνικό εκατοστό αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό μέτρο.*

(Στόχος η κατανόηση μιας από τις βασικές έννοιες που εμπλέκονται στην κατάκτηση της ικανότητας μέτρησης της επιφάνειας((Clements & Stephan, 2004. Reynolds & Wheatley, 1996): Η επανάληψη της μονάδας μέτρησης (unit iteration): Η ικανότητα επικάλυψης μιας περιοχής με μονάδες χωρίς υπερκαλύψεις ή κενά, αναπτύσσοντας την έννοιας της συνεχούς επανάληψης της μονάδας για τη μέτρηση του εμβαδού)

ii. *Ο αρχιτέκτονας που έχει αναλάβει τη διαμόρφωση του σπιτιού, θέλει να καλύψει την επιφάνεια του δαπέδου της κουζίνας με μοκέτα, οπότε πρέπει να παραγγείλει το απαραίτητο μέγεθος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε αναφέροντας εκτός από το μέγεθος και τις ακριβείς διαστάσεις; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα υλικά που σας έχουν δοθεί.*

(Η μέτρηση του εμβαδού προτείνεται να ξεκινάει με την κάλυψη της επιφάνειας σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα (Clements & Stephan, 2004· NCTM, 1989), ενώ η χρήση του τετραγωνικού εκατοστού ως παγκόσμια τυπική μονάδα μέτρησης είναι γνωστή στους μαθητές από προηγούμενη τάξη) (Ακόμη, για την διατύπωση της συγκεκριμένης δραστηριότητας λάβαμε υπόψη μία από τις βασικές έννοιες που εμπλέκονται στη μάθηση και στην κατάκτηση της ικανότητας μέτρησης του εμβαδού (Clements & Stephan, 2004· Reynolds & Wheatley, 1996): τη διαμέριση (partitioning): Η ικανότητα διαμέρισης ενός δισδιάστατου χώρου σε διακριτά μέρη)

Χρησιμοποιήσατε κάποιο βοηθητικό υλικό; Ποιο; Πόσα τεμάχια από το συγκεκριμένο υλικό χρησιμοποιήσατε;

Τι δηλώνει ο αριθμός που έχετε απαντήσει παραπάνω;

Τι μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήσατε;

Αιτιολογήστε γιατί χρησιμοποιήσατε το συγκεκριμένο βοηθητικό υλικό.

Καλύψατε ολόκληρο το δωμάτιο; Αιτιολογήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

iii. . Αν θέλετε να καλύψετε όλο το πάτωμα του σπιτιού με μοκέτα πώς θα υπολογίσετε το μέγεθός της;

(Στόχος η κατάκτηση της έννοιας :Η δόμηση ενός σχηματισμού (structuring an array): Με τον όρο σχηματισμό εννοούμε τον χωρισμό μιας επιφάνειας σε γραμμές και στήλες (Zacharos 2006:184)

Μήπως οι ιδιότητες του σχήματος του σπιτιού σας βοηθήσουν;

iv. *. Θεωρείτε ότι υπάρχει πιο γρήγορος τρόπος, από αυτόν που χρησιμοποιήσατε, για να υπολογίσετε το μέγεθος της μοκέτας που θα καλύπτει όλο το πάτωμα του σπιτιού; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;*

v. *Μετά την παραπάνω μελέτη σας, καταλήξατε σαν ομάδα σε κάποιον κανόνα υπολογισμού του μεγέθους του πατώματος του σπιτιού; Καταγράψτε την απάντησή σας και ανακοινώστε την στην ολομέλεια της τάξης σας.*

vi. Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα υπολογισμού για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μετά τη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε;

vii. Αυτά που ανακαλύψατε, σήμερα, ισχύουν και σε άλλες περιπτώσεις επίπεδων σχημάτων;

3.8.4 Μεταπειραματικό στάδιο

Το στάδιο αυτό περιλάμβανε την ατομική συμπλήρωση του δοκιμίου που είχε δοθεί και πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις. Βασικός στόχος αυτής της συμπλήρωσης ήταν η συλλογή δεδομένων για την αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών ως προς τη μαθηματική έννοια, αλλά και των γραπτών επιχειρημάτων τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Αποτελέσματα εφαρμογής διδακτικών παρεμβάσεων

4.1.1 Παραδοσιακή μετωπική διδακτική παρέμβαση

Η παραδοσιακή μετωπική διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε δύο μέρη. Το πρώτο αφορούσε την διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και το δεύτερο τη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας. Και τα δύο σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν με βάση το παραδοσιακό μετωπικό μοντέλο διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 1994)

Διδασκαλία επιχειρηματολογίας

Οι μαθητές αυτής της ομάδας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας καθόντουσαν ένας ένας στα θρανία, τα οποία ήταν όλα προσανατολισμένα προς τον πίνακα. Ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση της διδασκαλίας αυτής έγινε σύμφωνα με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας και τα αντίστοιχα στάδια (Ματσαγγούρας, 1994) και είχε διάρκεια μίας περίπου διδακτικής ώρας.

Αφόρμηση

Η εκπαιδευτικός ξεκίνησε τη συζήτηση, ρωτώντας την ολομέλεια της τάξης αν είχαν ξανακούσει τη λέξη επιχειρηματολογία, αν γνώριζαν τι σήμαινε και που την χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή. Ακούστηκαν διάφορες απόψεις όπως «*Είναι όταν λέμε τη γνώμη μας και εξηγούμε γιατί το σκεφτήκαμε έτσι» (Μ1),* ενώ διαπιστώθηκε η χρήση των επιχειρημάτων τόσο στη σχολική όσο και στην εξωσχολική ζωή των μαθητών. Ωστόσο, όταν τους ζητήθηκε να δώσουν παραδείγματα επιχειρημάτων δυσκολεύτηκαν καθώς όσα ανέφεραν δεν αποτελούσαν επιχείρημα. Για παράδειγμα ακούστηκαν εκφράσεις όπως : *Θέλω να φάω ένα παγωτό για να κάνω τα μαθήματά μου.* Εκτός από τα παραδείγματα έγινε αναφορά και στην χρησιμότητα των επιχειρημάτων όσον αφορά στην πειθώ στην οποία μας βοηθάνε σε μία συζήτηση και την αναγκαιότητά τους στα Μαθηματικά.

Παρουσίαση

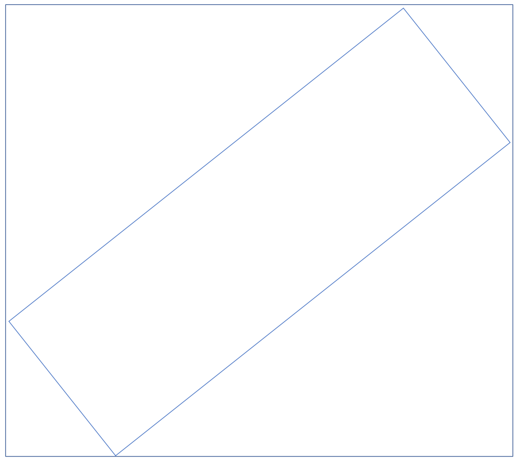
Στη φάση αυτή, σκοπός ήταν η παρουσίαση της δομής ενός επιχειρήματος. Οι μαθητές αρχικά ερωτήθηκαν, αν γνώριζαν από ποια κομμάτια πρέπει να αποτελείται ένα επιχείρημα. Μία μαθήτρια ανέφερε τη λέξη *γιατί (Μ7)* , ενώ μία άλλη ανέφερε πως πρέπει να υπάρχει *κάτι λογικό και κάτι που στέκει (Μ1).* Έτσι, έγινε η πρώτη αναφορά σε ένα από τα δομικά στοιχεία, το οποίο στους μαθητές παρουσιάστηκε με τον όρο εγγύηση, αλλά όταν διαπιστώθηκε ότι η ορολογία αυτή δυσκολεύει, άλλαξε σε *κανόνα*. Τονίστηκε η αδιαμφισβήτητη ισχύς του κανόνα, ενώ δόθηκαν παραδείγματα από τους ίδιους τους μαθητές, όπως ο κανόνας της πρόσθεσης, ενώ η συζήτηση καθοδηγήθηκε στη Γεωμετρία και συγκεκριμένα στα επίπεδα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Παράλληλα, παρουσιάστηκαν και τα δεδομένα του ερωτήματος, ως απαραίτητο στοιχείο στην τεκμηρίωση ενός συλλογισμού.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε το δομικό στοιχείο του συμπεράσματος, για το οποίο χρησιμοποιήθηκε για λόγους κατανόησης ο όρος *Απάντηση,* για την οποία δόθηκαν παραδείγματα ως προς το είδος της (πχ μία λέξη, ένα ναι ή ένα όχι, ένας αριθμός).

Επεξεργασία

Στη φάση της επεξεργασίας, δόθηκε ένα ερώτημα στους μαθητές, το οποίο καλούνταν να λύσουν μόνοι τους καταγράφοντας μια ολοκληρωμένη απάντηση με τα απαραίτητα επιχειρήματα. Ο βαθμός δυσκολίας του ερωτήματος δεν ήταν μεγάλος, καθώς στόχος στη συγκεκριμένη φάση, δεν ήταν η ανίχνευση της μαθηματικής γνώσης αλλά η ικανότητα διατύπωσης ενός πλήρους και έγκυρου επιχειρήματος (*«Πόσα εκατοστά είναι τα 4 μέτρα;»)* Ακούστηκαν διάφορες απαντήσεις, ενώ οι συμμαθητές τους τα αξιολογούσαν μόνοι τους με βάση όσα είχαν παρουσιαστεί προηγουμένως. Σε μερικές απαντήσεις απουσίαζε ο συλλογισμός ή υπονοούνταν ο κανόνας , κάτι το οποίο σχολιάστηκε και οι μαθητές κατανόησαν τη διαφορά μεταξύ των επιχειρημάτων. Στη συνέχεια, δόθηκε ακόμη ένα ερώτημα στο οποίο καλούνταν να απαντήσουν και είχε να κάνει με την Γεωμετρία και τα είδη σχημάτων (Εικόνα 3).

Πόσα γεωμετρικά σχήματα διακρίνεις στο παρακάτω σχέδιο;



Εικόνα 3: Σχέδιο αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν λίγο στην αναγνώριση των σχημάτων, ενώ δεν κατανόησαν ότι μαθηματικός κανόνας μπορούν να θεωρηθούν και οι ιδιότητες των σχημάτων που μας βοηθούν στο να τα αναγνωρίσουμε. Τέλος, δόθηκε ακόμη ένα ερώτημα που είχε να κάνει με την περίμετρο ενός γεωμετρικού σχήματος.

Ο Νίκος θέλει να σχεδιάσει ένα τετράγωνο, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο, καθένα από τα οποία έχει περίμετρο 24 εκ. Πώς θα υπολογίσει το μήκος της πλευράς του κάθε σχήματος

Οι μαθητές ενώ απάντησαν σωστά, δεν συμπεριέλαβαν στις απαντήσεις τους τον μαθηματικό κανόνα που έλαβαν υπόψη τους για την επίλυση. Μετά από επεξήγηση της εκπαιδευτικού φάνηκε να κατανοούν την έννοια του κανόνα.

Ανακεφαλαίωση

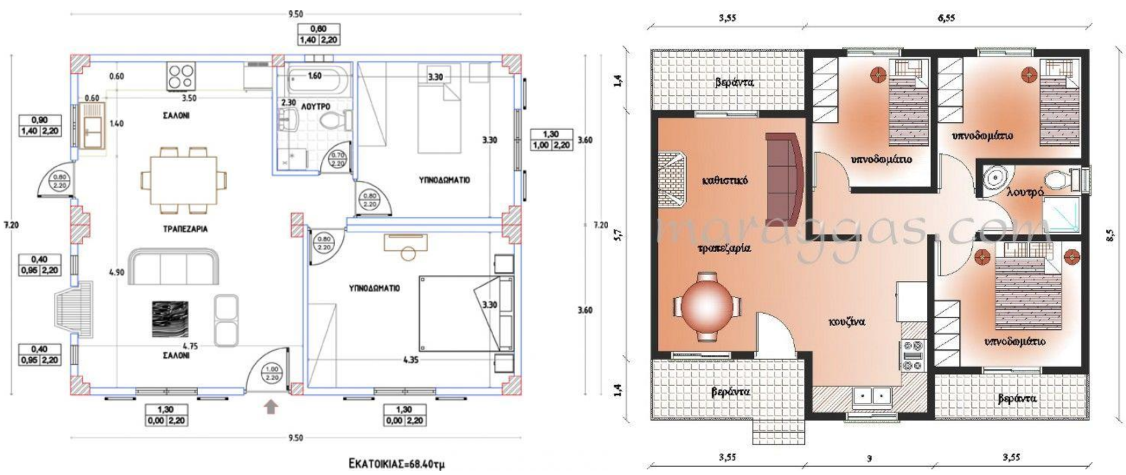
Στη συγκεκριμένη φάση, η εκπαιδευτικός θέλοντας να ανακεφαλαιώσει την διδασκαλία ρώτησε τους μαθητές *Πότε μία απάντηση στα Μαθηματικά θεωρείται πλήρης, τι πρέπει να περιλαμβάνει.* Οι μαθητές απάντησαν με ευκολία, αναφερόμενοι στα τρία δομικά στοιχεία, που ήταν το Συμπέρασμα με τον όρο Απάντηση, τα Αποδεικτικά Στοιχεία με τον όρο Κανόνας και ο Συλλογισμός.

Διδασκαλία μαθηματικής έννοιας

Η διδασκαλία και η δόμηση της νέας μαθηματικής έννοιας βασίστηκε σε όσα ορίζουν τα αναλυτικά προγράμματα και το σχολικό εγχειρίδιο της Ε’ Δημοτικού.

<u>Αφόρμηση</u>

Στο στάδιο αυτό, παρουσιάστηκαν στο σύνολο των μαθητών δύο κατόψεις σπιτιών και τους ζητήθηκε να πουν τι πίστευαν πως είναι (Εικόνα 4). Αφού ακούστηκαν διάφορες απόψεις, κατέληξαν πως ήταν σχέδια σπιτιών αλλά δεν γνώριζαν τη λέξη κάτοψη, η οποία και εξηγήθηκε.



Εικόνα 4: Ενδεικτικές κατόψεις σπιτιών

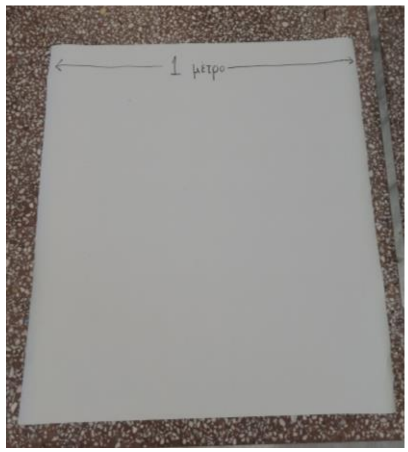
Όταν τους ζητήθηκε να επιλέξουν ένα από τα δύο τότε ένα μαθητής (Μ4) επέλεξε ένα από τα δύο χωρίς να αιτιολογεί την απάντησή του, ενώ όταν ζητήθηκε να εξηγήσει την επιλογή του ανέφερε πως *«Τα έχει όλα μέσα. Κρεβατοκάμαρα, Σαλόνι»*. Ωστόσο, μία άλλη μαθήτρια (Μ2) αιτιολόγησε την επιλογή της λέγοντας πως έχει *«πιο πολύ χώρο»*. Η επιλογή της αυτή βασίστηκε σε διαισθητικά κριτήρια ως προς την εικόνα και όχι σε κάποιο μαθηματικό κανόνα ή κάποιον υπολογισμό (*«Δεν ξέρω, έτσι μου φάνηκε, έτσι όπως τα βλέπω»)*. Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν ποιο μέγεθος πρέπει να μετρήσουμε για να διαπιστώσουμε ποιο είναι μεγαλύτερο, δεν ακούστηκε καμία απάντηση. Μάλιστα, όταν ρωτήθηκαν για το μέγεθος του πατώματος της τάξης και το πως θα το μετρήσουμε ανέφεραν έναν αριθμό χωρίς κάποια μονάδα μέτρησης.

Οι κατόψεις αυτές αποτέλεσαν την αφόρμηση για την διαπίστωση του αν οι μαθητές αντιλαμβανόταν και εντόπιζαν το μέγεθος του εμβαδού.

<u>Παρουσίαση</u>

Η παρουσίαση της μαθηματικής έννοιας ξεκίνησε από την ίδια την έννοια και του τι περιγράφει. Έγινε αναφορά στην μονάδα μέτρησης του εμβαδού, τα τετραγωνικά εκατοστά, τετραγωνικά μέτρα κτλ. καθώς σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα είναι ένας από τους βασικούς στόχους για τη διδασκαλία της έννοιας. Από το σύνολο των μαθητών του τμήματος μόνο μια μαθήτρια φάνηκε να γνωρίζει τι είναι το τετραγωνικό μέτρο ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού παρά το ότι ήταν μία έννοια με την οποία έχουν έρθει σε επαφή και σε προηγούμενες σχολικές τάξεις.

Παρουσιάστηκε στους μαθητές η κατασκευή ενός τετραγωνικού εκατοστού σε μακετόχαρτο (Εικόνα 5), ενώ παράλληλα χρησιμοποιούνταν και παραγωγικά επιχειρήματα για τη στήριξη όσων ακουγόντουσαν.



Εικόνα 5: Κατασκευή πραγματικού τετραγωνικού μέτρου

Για παράδειγμα: « *Το τετραγωνικό εκατοστό είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1 εκ. και αφού η μία είναι 1 εκ., λόγω των ιδιοτήτων του σχήματος, είναι όλες 1 εκ.»*.

Στη συνέχεια, έγινε αναφορά σε περιπτώσεις της καθημερινής ζωής που συναντάται η έννοια του εμβαδού. Λόγω των συνθηκών της πανδημίας που επικρατούσαν εκείνη την περίοδο στην Ελλάδα, η έννοια του εμβαδού ακουγόταν πολλές φορές στα ΜΜΕ, σε περιπτώσεις περιορισμού των ατόμων σε καταστήματα συγκεκριμένων τετραγωνικών μέτρων. Έτσι, εντάχθηκε ένα από αυτά τα παραδείγματα στη διδασκαλία. *Ε: Αυτή τη περίοδο με τον κοροναϊό, δεν ξέρω αν ακούγατε ειδήσεις, αλλά έλεγαν ότι μέσα στα σούπερ μάρκετ επιτρέπεται να μπαίνει ένας μόνο κάθε 15 τμ., ένας πελάτης κάθε 15 τμ. Τι εννοούσαν; Τι ήταν αυτό το 15 τμ. που μας έλεγαν;* Από τις απαντήσεις τους φάνηκε να κατανοούν τη σημασία χρήσης του. Ακόμη, τους ζητήθηκε να δείξουν την επιφάνεια του πίνακα της τάξης, κάτι το οποίο έκαναν και την διέκριναν από την περίμετρό του.

Ακολούθησε η διδασκαλία της μέτρησης του εμβαδού με τη βοήθεια του αλγοριθμικού τύπου. Αρχικά, έπρεπε να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές γνώριζαν από κάποια εξωσχολική πηγή τον τύπο αυτόν. Για το λόγο αυτό, τους ζητήθηκε να υπολογίσουν την επιφάνεια του θρανίου τους. Με τη βοήθεια των μέτρων που διέθεταν, υπολόγισαν το μήκος των πλευρών του, χωρίς να γνωρίζουν τι πρέπει να κάνουν από εκεί και πέρα. Μία μαθήτρια ανέφερε τον αριθμό 118 (Μ3), ωστόσο όταν της ζητήθηκε να πει τι είναι ο αριθμός που βρήκε ανέφερε πως *έκανε λάθος και δεν ήταν το εμβαδόν αλλά η μία πλευρά αυτό που βρήκε.*

Μοναδική εξαίρεση αποτέλεσε μία μαθήτρια, η οποία θέλησε να πολλαπλασιάσει τα δύο μήκη.

Μ7: Μήπως θα πολλαπλασιάσω αυτά τα δύο; (Τις δύο πλευρές). Κάπου το έχω ακούσει νομίζω.

Με αφορμή αυτό που είπε η συγκεκριμένη μαθήτρια, παρουσιάστηκε στους μαθητές ο αλγεβρικός τύπος εύρεσης του εμβαδού του ορθογώνιου σχήματος, ονομάζοντας μάλιστα τις πλευρές του με τους όρους βάση και ύψος.

<u>Επεξεργασία</u>

Στη συγκεκριμένη φάση της διδασκαλίας, πραγματοποιήθηκαν ασκήσεις με στόχο την αποσαφήνιση εννοιών γύρω από την επιφάνεια και τη μέτρησης της. Αυτές αφορούσαν:

- Την εφαρμογή του μαθηματικού τύπου β*υ και σε άλλα γεωμετρικά σχήματα.

Στο σημείο αυτό, αναλύθηκαν οι ιδιότητες του τετραγώνου και του ορθογωνίου τριγώνου έτσι ώστε να συσχετιστούν και οι αλγεβρικοί τύπου εύρεσης των εμβαδών τους. Οι μαθητές κατάφεραν να καταλήξουν εύκολα στον τύπο του τετραγώνου, αλλά χρειάστηκαν περισσότερη καθοδήγηση.

Ε: Με ποιο σχήμα μοιάζει το ορθογώνιο;

Μ7: Με το τετράγωνο. Μοιάζουν λίγο.

Ε: Μοιάζουν ως προς τι;

Μ1: Το ορθογώνιο είναι σαν ένα τραβηγμένο τετράγωνο.

…………………………………………..

Ε: Πώς θα βρούμε το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου τριγώνου;

Μ1: Σκέφτηκα να προσθέσουμε όλες τις πλευρές του τριγώνου, μετά να τις βάλω στις πλευρές του τετραγώνου και να κάνω τον πολλαπλασιασμό που είπαμε.

Μ7: Κυρία, εγώ σκέφτηκα να το κάνουμε όλο τετράγωνο. Να βρούμε την περίμετρό του…

Ε: Πώς θα το κάνουμε τετράγωνο;

Μ7: Θα σχεδιάσετε από εκεί άλλο ένα τρίγωνο. Θα βρεις την περίμετρο και μετά θα πολλαπλασιάσεις τις δύο πλευρές.

- Την μέτρηση των διαστάσεων στην ίδια μονάδα μέτρησης πριν την εφαρμογή του τύπου.

Στη σημείο αυτό της διδασκαλίας, εκτός από την ανάγκη μέτρησης των πλευρών του σχήματος στην ίδια μονάδα μέτρησης, υπήρξε η ανάγκη και για παρουσίασης του τρόπου με τον οποίο προκύπτει ο αλγεβρικός τύπος. Έτσι σχεδιάστηκε ένα τετράγωνο στον πίνακα και μία γραμμή και μία στήλη του πλέγματος από τετραγωνικά εκατοστά. Ο παρακάτω διάλογος δείχνει την προσοχή που δόθηκε αρχικά στην διάσταση της μιας πλευράς και στη συνέχεια με τη δημιουργία του πλέγματος που οδηγεί στον αλγεβρικό τύπο.

Ε: Πόσα τέτοια εκατοστά έχει αυτή εδώ η στήλη;

Μ2: 10 κουτάκια.

Ε: Αυτή εδώ η γραμμή;

Μ7: 10 κουτάκια κ αυτή.

Ε: Αν εγώ θέλω να δω πόσα τέτοια έχω σε όλο το τετράγωνο τι θα κάνω; Έχω μία σειρά με 10 τετραγωνικά εκατοστά. Πόσες τέτοιες σειρές έχω;

Μ2: 10

Ε: Άρα για να βρω πόσα έχουν όλες οι σειρές μαζί τι θα κάνω;

Μ2: Επί, πολλαπλασιασμό.

- Την ισοεμβαδικότητα δύο διαφορετικών σχημάτων

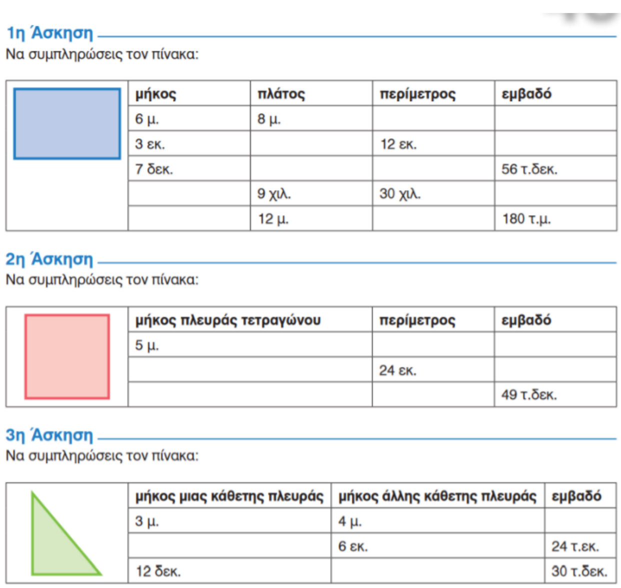
Στα πλαίσια της κατανόησης της ισοεμβαδικότητας, δόθηκε ένας αριθμός που αποτελούσε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου σχήματος και οι μαθητές κλήθηκαν να αναφερθούν στις διαστάσεις που πιθανόν να έχει το ορθογώνιο με το συγκεκριμένο εμβαδόν. Φάνηκε να δυσκολεύονται λόγω της φύσης του ερωτήματος και να δίνουν αποτελέσματα που προκύπταν από την πρόσθεση των πλευρών και όχι τον πολλαπλασιασμό. Ωστόσο, μετά από την παρέμβαση της εκπαιδευτικού και την προσοχή που δόθηκε στην πράξη του πολλαπλασιασμού, οι μαθητές κατάφεραν να βρουν τις πιθανές διαστάσεις του.

- Τον διάκριση του εμβαδού από την περίμετρο

Η διάκριση αυτή, παρά του ότι υπάρχει σαν στόχος στα αναλυτικά προγράμματα, δεν αναφέρεται συνδυαστικά με το εμβαδόν στο σχολικό εγχειρίδιο. Στο τετράδιο εργασιών, ωστόσο, όπως έχει αναφερθεί και στο θεωρητικό πλαίσιο παραπάνω υπάρχουν ασκήσεις που δίνοντας τις διαστάσεις του κάθε σχήματος ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρός του. Θέλοντας να διακριθούν οι δύο αυτές έννοιες για να προχωρήσουμε και στις ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, ζητήθηκε από τους μαθητές να διακρίνουν τις δύο έννοιες. Ένας μαθητής μάλιστα ανέφερε πως «*Για να βρεις το εμβαδόν πρέπει πρώτα να ξέρεις την περίμετρο*». Με την άποψη αυτή, δεν συμφώνησαν πολλοί συμμαθητές του καθώς όπως είπαν *«αν ξέρεις τις δύο πλευρές φτάνει»*. Η εκπαιδευτικός έθεσε και ένα ερώτημα προς επίλυση για να διαπιστωθεί η διάκριση.

Ε: *Θα ήθελα να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του θρανίου σας.*

Διαπιστώθηκε πως οι περισσότεροι μαθητές δεν αντιμετώπισαν προβλήματα κατανόησης των δύο εννοιών με αποτέλεσμα η διδασκαλία να προχωρήσει στις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου (Εικόνα 6).



1η Άσκηση

Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

μήκος	πλάτος	περίμετρος	εμβαδό
6 μ.	8 μ.		
3 εκ.		12 εκ.	
7 δεκ.			56 τ.δεκ.
	9 χιλ.	30 χιλ.	
	12 μ.		180 τ.μ.

2η Άσκηση

Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

μήκος πλευράς τετραγώνου	περίμετρος	εμβαδό
5 μ.		
	24 εκ.	
		49 τ.δεκ.

3η Άσκηση

Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

μήκος μιας κάθετης πλευράς	μήκος άλλης κάθετης πλευράς	εμβαδό
3 μ.	4 μ.	
	6 εκ.	24 τ.εκ.
12 δεκ.		30 τ.δεκ.

Εικόνα 6: Δραστηριότητες για το εμβαδό και τη μέτρησή του από το τετράδιο εργασιών

- Τον χωρισμό σύνθετων σχημάτων σε γνωστά και την επιμέρους μέτρηση της επιφάνειας.

Τα παραπάνω αποτελούν διδακτικούς στόχους, οι οποίοι αντλήθηκαν από τα αναλυτικά προγράμματα του Υπουργείου Παιδείας και το βιβλίο του δασκάλου των Μαθηματικών της Ε’

Δημοτικού. Μετά τα παραδείγματα που δινόντουσαν μετά την παρουσίαση της κάθε παραμέτρου της έννοιας, έλυναν και κάποιες ασκήσεις από το τετράδιο εργασιών, στο οποίο εφάρμοζαν όσα έμαθαν .

Ανακεφαλαίωση

Στο σημείο αυτό είχαμε σκοπό να συγκεντρώσουμε και να συζητήσουμε με τους μαθητές όλες τις νέες πληροφορίες που έμαθαν. Μετά από ερώτηση της εκπαιδευτικού:

«Ποιος θα μας πει με δύο λόγια τι είπαμε σήμερα;» , οι μαθητές ανέφεραν ό,τι θυμόντουσαν χωρίς, ωστόσο, πολλές λεπτομέρειες.

Μ6: Μιλήσαμε για το τρίγωνο, το τετράγωνο και το ορθογώνιο.

Ε: Τι είπαμε σχετικά με αυτά τα σχήματα;

Μ2: Για το μέσα

Ε: Πώς την ονομάσαμε την μέσα επιφάνεια;

Μ2: Εμβαδόν

Ε: Πώς είπαμε ότι το βρίσκουμε το εμβαδόν;

Μ4: Θα κάνουμε πολλαπλασιασμό με τις δύο πλευρές.

Οι μαθητές της παραδοσιακής μετωπικής παρέμβασης φάνηκαν ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την συγκεκριμένη διδακτική διαδικασία και έτσι δεν χάθηκε χρόνος για την προσαρμογή τους σε νέους ρόλους. Το ίδιο συνέβη και στην εκπαιδευτικό, η οποία ήταν γνώριζε τις φάσεις μίας τέτοιας διδασκαλίας. Η ύλη ως προς την έννοια που είχε σχεδιαστεί να διδαχθεί, καλύφθηκε ενώ οι μαθητές δεν φάνηκε να διστάζουν με την ύπαρξη των καμερών και τη συμμετοχή τους στη διδασκαλία.

4.1.2 Δομημένη διερευνητική διδακτική παρέμβαση

Η δομημένη διερευνητική παρέμβαση σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε σε δύο φάσεις. Η πρώτη ήταν η διδασκαλία της επιχειρηματολογίας και είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών και η δεύτερη η διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας, η οποία είχε διάρκεια επίσης δύο διδακτικές ώρες. Και οι δύο διδασκαλίες βασίστηκαν στην δομημένη διερευνητική προσέγγιση. Τα στάδια της δομημένης διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας ακολουθήθηκαν με περισσότερη ευελιξία σε σχέση με τη διδασκαλία της έννοιας.

<u>Διδασκαλία επιχειρηματολογίας</u>

Πριν την έναρξη της διδασκαλίας έγινε μια διαφορετική διαρρύθμιση των θρανίων στην τάξη και οι μαθητές κάθισαν σε ομάδες, ενώ τοποθετήθηκαν και οι κάμερες με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει η κατάλληλη εικόνας, αλλά να ακούγονται και οι ομιλίες μεταξύ τους. Οι ομάδες αυτές ήταν οι ίδιες τόσο στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας όσο και σε αυτή της μαθηματικής έννοιας και ήταν ομοιογενείς ως προς το επίπεδο επιδόσεων στο οποίο είχαν χωριστεί. Η δημιουργία ομοιογενών ομάδων έγινε καθώς θα βοηθούσε στην εξέλιξη της διαδικασίας οι παρόμοιες ερωτήσεις και τομείς δυσκολίας από τις ομάδες, οι οποίες θα αντιμετωπίζονταν από την ανάλογη καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό. Ακόμη, ένας τέτοιος χωρισμός έκανε τους μαθητές να αισθάνονται πιο άνετα σε ένα ήδη άγνωστο διδακτικό περιβάλλον. Έτσι, οι δύο ομάδες μαθητών που σχηματίστηκαν περιλάμβαναν τους εξής μαθητές:

Ομάδα Α: Μ10, Μ11, Μ12, Μ15, Μ18

Ομάδα Β: Μ13, Μ14, Μ16, Μ17

Οι μαθητές μέσω ερωτήσεων της εκπαιδευτικού οδηγήθηκαν σε όσα θέλαμε να διδάξουμε.

Η διδασκαλία ξεκίνησε από ένα ερώτημα που έθεσε η εκπαιδευτικός που είχε να κάνει με την έννοια του επιχειρήματος και κατά πόσο την είχαν ξανακούσει οι μαθητές και κάτω από ποιες συνθήκες. Οι μαθητές ενώ απάντησαν θετικά στο αν την είχαν ξανακούσει , όταν τους ζητήθηκε να πουν ένα παράδειγμα φάνηκε να δυσκολεύονται. Όταν τους δόθηκαν κάποιες διευκρινιστικές οδηγίες, δούλεψαν σε ομάδες και κατέγραψαν από ένα επιχείρημα. Λόγω της πρώτης τους επαφής σε ομάδες, οι μαθητές φάνηκαν διστακτικοί στο να συνεργαστούν και να μοιράσουν ή αναλάβουν συγκεκριμένους ρόλους, ενώ στην αρχή ξεκίνησαν να εργάζονται ατομικά.

Αφού αναφέρθηκαν στα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους ζωή, κατευθύναμε την διαδικασία στην επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά.

-*Τι πρέπει να περιλαμβάνει η απάντησή μας για να πειστεί ο συνομιλητής μας και να μην μπορεί να αναιρέσει την απάντησή μας;*

Αυτό ήταν το ερώτημα που κινητοποίησε την μεταξύ τους συζήτηση και στόχευσε στην ανακάλυψη κάποιων δομικών στοιχείων του επιχειρήματος. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν τόσο στο να επικοινωνήσουν μεταξύ τους στις ομάδες, όσο και να απαντήσουν στο ερώτημα που τους είχε τεθεί. Ωστόσο, ακούστηκε πολύ ως δομικό στοιχείο η *αιτιολόγηση* ή αλλιώς το *γιατί.*

Στη συνέχεια, δόθηκαν παραδείγματα από τους μαθητές τέτοιων κανόνων. Παρατηρήθηκε σύγχυση μεταξύ του κανόνα και του συμπεράσματος καθώς στα παραδείγματά τους ανέφεραν εκφράσεις όπως: «*τα 2/4 είναι πιο μεγάλος αριθμός από το ¼», «όταν θέλω να δω πόσο κάνουν όλοι μαζί οι αριθμοί κάνω πρόσθεση», «το 105 είναι μεγαλύτερο από το 30»*. Το συγκεκριμένο παράδειγμα δεν αποτελεί κανόνα, αλλά το συμπέρασμα που προκύπτει από αυτόν. Θέλοντας να οδηγηθεί η έρευνα στη Γεωμετρία, ζητήθηκε να βρεθεί κάποιος μαθηματικός κανόνας για τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι, μετά από συζήτηση με τις ομάδες η κάθε μία παρουσίασε στην ολομέλεια και μία ιδιότητά τους.

Το τετράγωνο έχει ίσες γωνίες.

Το ορθογώνιο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

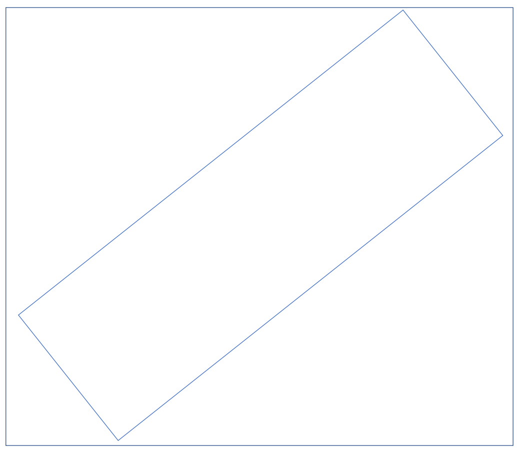
Στη συνέχεια, μετά από συζήτηση μεταξύ τους ανακάλυψαν το απαραίτητο στοιχείο του συμπεράσματος στο επιχείρημα, το οποίο ονόμασαν απάντηση.

Αφού ολοκληρώθηκε η διερεύνηση της δομής ενός επιχειρήματος, ανά ομάδες τέθηκε από την εκπαιδευτικό ένα ερώτημα, στο οποίο θα καλούνταν να απαντήσουν όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένο με στόχο να πείσουν τις άλλες ομάδες της τάξης. Το ερώτημα αυτό, ήταν το ίδιο με αυτό που είχε τεθεί στην ομάδα ελέγχου.

Πόσα εκατοστά είναι τα 4 μέτρα;

Αφού δούλεψαν μεταξύ τους και επικοινώνησαν τις απαντήσεις τους, η μία ομάδα αξιολογούσε την άλλη ως προς την ορθότητα και την πληρότητα των δομικών στοιχείων του επιχειρήματος που την αποτελούσαν. Όπου θεωρούνταν απαραίτητο, η εκπαιδευτικός παρέμβαινε για να διορθώσει κάτι στην αξιολόγηση που έκαναν οι άλλες ομάδες.

Τέλος, έχοντας ως στόχο τον προσανατολισμό της επιχειρηματολογίας σε έννοιες της συγκεκριμένης διδασκαλίας, τέθηκε στις ομάδες το επόμενο ερώτημα για διερεύνηση, όπως είχε γίνει και στις άλλες δύο διδακτικές παρεμβάσεις (Εικόνα 7).



Εικόνα 7: Σχέδιο αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων

Στο ερώτημα αυτό, οι μαθητές δεν συνεργάστηκαν τόσο με τις ομάδες τους καθώς το θεώρησαν εύκολο και θέλησαν να το λύσουν μόνοι τους. Στο συγκεκριμένο ερώτημα, στις απαντήσεις τους υπονοούσαν τον μαθηματικό κανόνα και καμία ομάδα δεν τον κατέγραψε με σαφή τρόπο στην απάντησή της.

Ωστόσο, φάνηκε να εξακολουθούν να δυσκολεύονται στο να επικοινωνήσουν, να συνεργαστούν και να εξοικειωθούν με τους νέους ρόλους τους. Επιδίωκαν διαρκώς να καταγράψουν ό,τι υπήρχε στον πίνακα, γεγονός που τους έκανε να χάνουν κάποια σημαντικά στοιχεία της συζήτησης. Οι ορολογίες που είχαμε κατά νου να χρησιμοποιήσουμε για τη δόμηση ενός επιχειρήματος φάνηκε να δυσκολεύουν τους μαθητές και αυτό οδήγησε στην απλούστευσή τους.

Διδασκαλία μαθηματικής έννοιας

Προβληματισμός

Στην πρώτη φάση του προβληματισμού, δόθηκαν όπως και στους μαθητές της παραδοσιακής διδασκαλίας, δύο κατόψεις σπιτιών με το ερώτημα:

«Τι είναι αυτό που φαίνεται στις εικόνες αυτές;»

Η λέξη κάτοψη δεν ήταν γνωστή στους μαθητές του τμήματος, αλλά κατανόησαν το περιεχόμενο των εικόνων. Ωστόσο, δόθηκαν από την εκπαιδευτικό ορισμένες διευκρινήσεις γιατί έπρεπε να είναι πλήρως κατανοητός ο όρος για τη συνέχεια της διερευνητικής διαδικασίας καθώς θα χρησιμοποιούνταν ξανά. Στη συνέχεια, θέλοντας να γίνει μια εισαγωγή στο μέγεθος το οποίο μελετάμε τους έγινε η παρακάτω ερώτηση με στόχο την ανίχνευση της κατανόησης του μεγέθους του εμβαδού:

«Με ποιο κριτήριο θα διαλέγατε την κάτοψη για το δικό σας σπίτι».

Μερικές από τις απαντήσεις των μαθητών ήταν οι παρακάτω:

Μ11: Το 1ο σχήμα γιατί φαίνεται πιο μεγάλο.

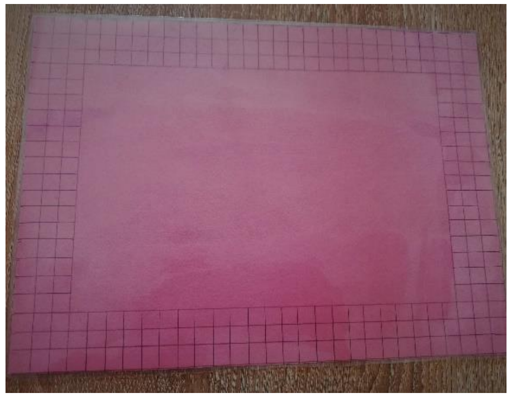
Μ14: Το 2ο γιατί έχει πιο πολλά δωμάτια.

Ε: Ποιο μέγεθος μετράμε για να μετρήσουμε ποιο σπίτι είναι μεγαλύτερο;

Οι μαθητές δεν ανέφεραν την λέξη εμβαδόν, ωστόσο γνώριζαν την λέξη επιφάνεια. Έτσι, ταυτίστηκαν οι δύο έννοιες και φάνηκε να κατανοούν τι σήμαινε η λέξη εμβαδόν.

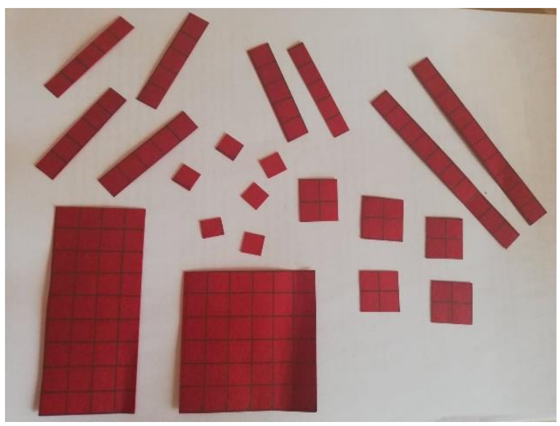
<u>Εξερεύνηση</u>

Στη φάση της εξερεύνησης, δόθηκε στους μαθητές το χαρτόνι με τις κατόψεις, πάνω στο οποίο έπρεπε να σχεδιάσουν ανά ομάδες τα δωμάτια, όπως εκείνα επιθυμούσαν και σύμφωνα με τα δικά τους κριτήρια. Οι μαθητές συζήτησαν αρκετά γι' αυτή την επιλογή των δωματίων και το μέγεθος του καθενός, καθώς πριν τον χωρισμό τέθηκε το ερώτημα «*Σκεφτείτε πόσα δωμάτια θα χωρίσετε, το μέγεθος του καθενός θα είναι τυχαίο; Θα θέλαμε να μας εξηγήσετε και το σκεπτικό σας γύρω από τον χωρισμό τους».* Η αιτιολόγηση του χωρισμού των δωματίων δεν ήταν τόσο απαραίτητη για την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας αλλά στόχος ήταν να εξοικειωθούν με την στήριξη των απαντήσεών τους, καθώς στη συνέχεια θα καλούνταν να αιτιολογήσουν τις στρατηγικές τους. Η κάτοψη ήταν χάρτινη και γύρω από τον κενό χώρο υπήρχε μία τετραγωνισμένη περιοχή που αποτελούσε την αυλή του σπιτιού (Εικόνα 8).



Εικόνα 8: Κάτοψη σπιτιού που δόθηκε στις ομάδες για τον χωρισμό των δωματίων

Για την συνέχεια της παρέμβασης, δόθηκε στις ομάδες μαθητών ένα πουγκί με υλικό το οποίο θα τους βοηθούσε στην διερεύνηση των ερωτημάτων, το οποίο αποτελούνται από τετραγωνικά εκατοστά και άλλα σχήματα αποτελούμενα από τετραγωνικά εκατοστά (Εικόνα 9).



Εικόνα 9: Πρόσθετο βοηθητικό υλικό που δόθηκε στις ομάδες

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε ομάδα, υπήρχε ένας μαθητής, ο οποίος έπρεπε να σημειώνει στο φύλλο εργασίας, όλες τις σκέψεις και τις απαντήσεις της ομάδας τους. Ωστόσο, αυτό κατά την εξέλιξη της διαδικασίας χρειάστηκε να επισημανθεί πολλές φορές από την εκπαιδευτικό γιατί είχαν την τάση να σημειώνουν σε ένα πρόχειρο χαρτί και να καταγράφουν μόνο την τελική απάντηση στο φύλλο εργασίας τους. Τα ερωτήματα που υπήρχαν στο φύλλο εργασίας καθοδηγούσαν τις ομάδες στην έρευνα που έπρεπε να πραγματοποιήσουν για την ανακάλυψη των απαιτούμενων δεδομένων. Διατυπώθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να βοηθήσουν την ομάδα τόσο στην εξέλιξη της διαδικασίας όσο και στην κατανόηση των όσων έβρισκαν. Οι ρόλοι που είχαν οι μαθητές σε κάθε ομάδα, εναλλάσσονταν όσο ήταν δυνατό κατά τη διάρκεια της παρέμβασης μετά από παρότρυνση της εκπαιδευτικού. Βέβαια, φάνηκε να μην τηρούνται στο έπακρο και ο ένας να συμπληρώνει τον άλλον. Σε μία περίπτωση ομάδα υπήρξαν και ορισμένες περιπτώσεις μαθητών που λειτουργούσαν ανταγωνιστικά ως προς άλλα μέλη της ομάδας τους, αναλαμβάνοντας πρωτοβουλίες που δυσκόλευαν τη μελέτη των υπολοίπων με αποτέλεσμα κάποιες φορές να θέλουν να λειτουργήσουν αυτόνομα.

Στη συνέχεια, οι μαθητές σε ομάδες ξεκίνησαν να ασχολούνται με τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας που είχε δημιουργηθεί.

1ο ερώτημα: *Στο χαρτόνι που σας έχει δοθεί ο τετραγωνισμένος χώρος γύρω από το σπίτι είναι η αυλή του σπιτιού. Θέλετε να την καλύψετε με πλακάκια και γι αυτό πρέπει να υπολογίσετε το μέγεθός της. Αιτιολογήστε τη σκέψη σας όσο πιο αναλυτικά μπορείτε. Να θυμάστε ότι ένα τετραγωνικό εκατοστό αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό μέτρο.*

Το 1ο ερώτημα, το οποίο αφορούσε στη μέτρηση της αυλής, αναφερόταν σε μία τετραγωνισμένη περιοχή, της οποίας το εμβαδόν μπορούσε να υπολογιστεί είτε με την καταμέτρηση των ήδη σχεδιασμένων τετραγωνικών εκατοστών, είτε με την κάλυψή της με το υλικό που είχε δοθεί στις ομάδες. Η ομάδα Α παρατηρώντας τα σχεδιασμένα τετραγωνικά εκατοστά στη κάτοψη που τους είχε δοθεί, τα καταμέτρησε αλλά διχάστηκαν ως προς την πράξη που έπρεπε να κάνουν για τον υπολογισμό της επιφάνειας. Κάποιος αναφέρθηκε στην πράξη του πολλαπλασιασμού (Μ16) και κάποιος στην πράξη της πρόσθεσης (Μ14). Φάνηκε πάντως να αντιλαμβάνονται ότι τα σχεδιασμένα τετραγωνάκια ήταν τετραγωνικά εκατοστά. Έχοντας κάνει τις απαραίτητες πράξεις, παρουσίασε το αποτέλεσμα στην εκπαιδευτικό αλλά εκείνη διαπίστωσε πως κάποια τετραγωνικά εκατοστά είχαν καταμετρηθεί δύο φορές, στο πλάτος και στο μήκος της επιφάνειας. Έτσι τέθηκε το ζήτημα της επικάλυψης με δύο πλακάκια στο συγκεκριμένο σημείο

Ε: Άρα σε αυτό το τετραγωνάκι θα βάλετε δύο πλακάκια;

Μ14: Αα άρα μπορούμε να τα μετρήσουμε είτε σε αυτή είτε σε αυτή τη πλευρά.

Ωστόσο, η ομάδα Β, έχοντας καταμετρήσει και εκείνη τα τετραγωνικά εκατοστά έλαβε υπόψη της τα «διπλά» τετραγωνικά εκατοστά και μετά από ερώτηση επιβεβαίωσης στην εκπαιδευτικό προχώρησε σε ορθότερους υπολογισμούς (Μ10: *«Κυρία, μετρήσαμε τη μία πλευρά και τώρα πάμε για την άλλη. Θα μετρήσουμε όμως από εδώ μέχρι εδώ ε;»*, δείχνοντας το μήκος της πλευράς που δεν περιλάμβανε την άλλη διάσταση). Το ερώτημα αυτό, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να ανακαλύψουν την έννοια της κάλυψης και να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα τήρησης των αρχών μέτρησης.

Στο 2ο ερώτημα, το οποίο αναφερόταν στη μέτρηση της επιφάνειας της κουζίνας του σπιτιού χρησιμοποίησαν και οι δύο ομάδες μαθητών το υλικό που τους είχε δοθεί, καθώς δεν είχαν σχεδιασμένα τετραγωνικά εκατοστά σε αυτή τη περίπτωση. Συγκεκριμένα, η εκφώνηση του ερωτήματος ήταν η εξής:

Ο αρχιτέκτονας που έχει αναλάβει τη διαμόρφωση του σπιτιού, θέλει να καλύψει την επιφάνεια του δαπέδου της κουζίνας με μοκέτα, οπότε πρέπει να παραγγείλει το απαραίτητο μέγεθος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε αναφέροντας εκτός από το μέγεθος και τις ακριβείς διαστάσεις; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα υλικά που σας έχουν δοθεί.

Τα υποερωτήματα που βοήθησαν στην πορεία της έρευνας των μαθητών, μερικά από τα οποία διατυπώθηκαν και απευθείας από τους μαθητές ήταν τα παρακάτω και είχαν στόχο την παρότρυνση των μαθητών στο να βρουν τις κατάλληλες στρατηγικές για την μοντελοποίηση και την επίλυση του ερωτήματος:

Χρησιμοποιήσατε κάποιο βοηθητικό υλικό; Πόσα τεμάχια από το συγκεκριμένο υλικό χρησιμοποιήσατε;

Τι δηλώνει ο αριθμός που έχετε απαντήσει παραπάνω;

Τι μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήσατε;

Αιτιολογήστε γιατί χρησιμοποιήσατε το συγκεκριμένο βοηθητικό υλικό.

Καλύψατε ολόκληρο το δωμάτιο; Αιτιολογήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Το ερώτημα αυτό είχε ως σκοπό τη διερεύνηση από τους μαθητές του μαθηματικού τύπου και τον λόγο επιλογής του πολλαπλασιασμού. Στην ουσία, επιλέχθηκε μία μικρή επιφάνεια ενός δωματίου για να κατανοήσουν τη δημιουργία του πλέγματος σε μία ορθογώνια επιφάνεια. Η ομάδα Α φάνηκε να χρησιμοποιεί πολύ σωστά το υλικό τηρώντας τις αρχές κάλυψης *(Μ17: Πρέπει να τα φτιάξουμε πολύ καλά, να ενωθούν καλά)*, ενώ ταυτόχρονα ο ένας διόρθωνε τον άλλον αν κάποιο από τα υλικά δεν τοποθετούνταν σωστά.

Μ17: Έχει κενό εδώ

Μ14: Ναι αλλά μπορεί να μπει ένα μικρούλι. Άμα το βάλεις σωστά θα μπει.

Κατά τον διάλογο που πραγματοποιούνταν μεταξύ τους δεν χρησιμοποιούσαν επιχειρήματα με εξαίρεση έναν μαθητή που ανέφερε:

Μ14: Είπαμε ότι ένα κουτάκι είναι ένα εκατοστό, άρα πρέπει να τα μετρήσουμε όλα μαζί.

Αφού μέτρησαν όλα τα τετραγωνικά εκατοστά, ανακοίνωσαν στην εκπαιδευτικό ότι είχαν υπολογίσει την «περίμετρο» της κουζίνας, κάτι που δήλωνε μία παρανόηση της λέξης. Φάνηκε να κατανοούν αυτό που υπολόγισαν αλλά είχαν αποδώσει λανθασμένα την ορολογία. Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός εστίασε την προσοχή των μαθητών στις διαστάσεις της κουζίνας, θέλοντας να ανακαλύψουν κάποιο μοτίβο επανάληψης των τετραγωνικών εκατοστών σε κάθε πλευρά

Ε: Πόσες τέτοιες στήλες έχουμε με 6 τετραγωνικά εκατοστά;

Μ14: 15 (συμφωνούν όλοι)

*Μ16: Άρα 15*6*

Ε: Γιατί κάνατε πολλαπλασιασμό;

Μ17: Για να βρούμε πόση είναι η περίμετρος

Ε: Την περίμετρο ψάχνουμε;

Μ17: Εε το εμβαδόν, όλο τα μπερδεύω

Ε: Γιατί χρησιμοποιήσατε όμως την πράξη του πολλαπλασιασμού;

Μ17: Για να μη μετράμε ένα ένα τα κουτάκι, αφού η κάθε στήλη έχει τα ίδια.

Ακόμη, η ομάδα Α σημείωσε στο φύλλο εργασίας τις απαντήσεις τους στα παραπάνω υποερωτήματα, κάτι που δεν έκανε η ομάδα Β, η οποία ναι μεν καθοδηγούνταν από αυτά, αλλά δεν φαινόντουσαν πρόθυμοι να τα καταγράφουν αναλυτικά. Συγκεκριμένα στο ερώτημα αυτό κατέγραψαν προσπαθώντας να επιχειρηματολογήσουν την παρακάτω απάντηση:

*Αυτό που σκεφτήκαμε σαν ομάδα είναι πως χρησιμοποιήσαμε τα υλικά που μας έχουν δοθεί και καλύψαμε μόνο τις δύο πλευρές για να βρούμε το εμβαδόν 6*14=84, το κάναμε αυτό και σκεφτήκαμε ότι αντί να μετρήσουμε ένα ένα κουτάκι μετρήσαμε τις δύο στήλες.*

Η ομάδα Β, ενώ χρησιμοποίησε και εκείνη το υλικό κάλυψης που τους δόθηκε φάνηκε να δυσκολεύεται λίγο παραπάνω στην κάλυψη. Για το λόγο αυτό, η εκπαιδευτικός μετά την επισήμανση των αρχών κάλυψης τους εστίασε την προσοχή στις διαστάσεις της κουζίνας.

Ε: Έχοντας καλύψει μόνο τη μία στήλη, τη μία πλευρά εδώ μπορείτε να μου πείτε πόσα τετραγωνικά εκατοστά έχετε βάλει;

Μ11: 6

Ε: Πόσες τέτοιες στήλες από 6 τετραγωνάκια έχετε;

*Μ10: 11. Άρα 11*6*

Ωστόσο, υπήρξαν και περιπτώσεις που δεν κατανόησαν αυτόν τον τρόπο και ανέφεραν πως δεν είναι σωστό γιατί *πρέπει να καλυφθεί όλη επιφάνεια και δεν θα είναι σωστό.* Μετά από διευκρινήσεις όμως των συμμαθητών τους φάνηκε να πείστηκαν, ενώ στο επόμενο ερώτημα αιτιολόγησαν και οι ίδιοι την πράξη με την δημιουργία του πλέγματος.

Για να διαπιστώσουμε αν ήταν τυχαία η επιλογή της πράξης ή συνειδητή ζητήσαμε να μας εξηγήσουν τον τρόπο που την σκέφτηκαν.

Ε: Γιατί κάνατε πολλαπλασιασμό;

Μ10: Για να μην κάνουμε 6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6

Μ15: Άρα 66

Και οι δύο ομάδες ενώ έκαναν τους σωστούς υπολογισμούς δεν περιλάμβαναν στην απάντησή τους την μονάδα μέτρησης, με αποτέλεσμα η εκπαιδευτικός, μετά από κάθε απάντηση, να θέτει τα παρακάτω ερωτήματα:

«Τι δηλώνει ο αριθμός που βρήκατε;» « Είναι αυτό που ψάχνατε;»

Στη συνέχεια, στο 3^{ο} ερώτημα, οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν το εμβαδόν ολόκληρου του σπιτιού. Συγκεκριμένα, η εκφώνηση του ερωτήματος ήταν η εξής:

Αν θέλετε να καλύψετε όλο το πάτωμα του σπιτιού με μοκέτα πώς θα υπολογίσετε το μέγεθός της;

Μήπως οι ιδιότητες του σχήματος του σπιτιού σας βοήθησαν;

Κατά τη φάση αυτή, οι μαθητές και των δύο ομάδων δεν φάνηκαν να δυσκολεύονται ιδιαίτερα καθώς ακολούθησαν την ίδια στρατηγική, με αυτή του δωματίου στο προηγούμενο ερώτημα. Χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί για να μετρήσουν τη μία στήλη τετραγωνικών εκατοστών και στη συνέχεια υπολόγισαν την κάθετή της.

Μ10: Θα βρούμε πρώτα αυτή εδώ η στήλη πόσα έχει και μετά θα δούμε όλο.

Παρατηρήθηκε, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα δυσκολία στη μονάδα μέτρησης, την οποία παρέλειπαν να αναφέρουν στην απάντησή τους.

Η ομάδα Α, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έτσι και σε αυτό, η απάντησή τους εκτός από σωστή μαθησιακά στηρίχτηκε και στην εγγύηση που αποτέλεσε ο μαθηματικός κανόνας που μόλις είχαν ανακαλύψει. Συγκεκριμένα, κατέγραψαν:

Θα υπολογίσουμε τις δύο πλευρές με τον χάρακα και θα τις πολλαπλασιάσουμε μαζί. Κάναμε πολλαπλασιασμό για να το βρούμε εύκολα, αυτό είναι το νόημα του εμβαδού αντί να μετράμε ένα ένα τα κουτάκια, μετρήσαμε τις δύο πλευρές.

*23*15=345 τετραγωνικά εκατοστά.*

Στη συνέχεια της φάσης της εξερεύνησης της έρευνας, οι μαθητές μελέτησαν τα παρακάτω ερωτήματα του φύλλου εργασίας, τα οποία είχαν σκοπό την κατάληξη της ομάδας σε συμπεράσματα, τα οποία στη συνέχεια θα ανακοίνωναν στην ολομέλεια της τάξης.

Θεωρείτε υπάρχει πιο γρήγορος τρόπος, από αυτόν που χρησιμοποιήσατε, για να υπολογίσετε το μέγεθος της μοκέτας που θα καλύπτει όλο το πάτωμα του σπιτιού; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

Μετά την παραπάνω μελέτη σας, καταλήξατε σαν ομάδα σε κάποιον κανόνα υπολογισμού της επιφάνειας του πατώματος του σπιτιού;

<u>Παρουσίαση</u>

Στη φάση αυτή της διαδικασίας έγινε μία συζήτηση μεταξύ των μελών των ομάδων, στις οποίες υπήρχε ένας εκπρόσωπος, ο οποίος ανακοίνωνε τα αποτελέσματα στην άλλη ομάδα χρησιμοποιώντας επιχειρήματα για όσα είχαν ανακαλύψει. Τα ερωτήματα που τέθηκαν από την εκπαιδευτικό ήταν τα εξής:

Ε Τι ανακαλύψατε σήμερα με την ομάδα σας;

Ε: Τι πληροφορίες χρειαστήκατε για να καταλήξετε σε αυτά τα συμπεράσματα;

Οι μαθητές φάνηκαν αρκετά διστακτικοί στο να περιγράψουν τον τρόπο που δούλεψαν με τις ομάδες τους και τους συλλογισμούς στους οποίους βασίστηκαν για να εξάγουν τα συγκεκριμένα συμπεράσματα. Μάλιστα, όταν μιλούσε η εκπρόσωπος της μιας ομάδας, τα μέλη της άλλης δεν φάνηκε να παρακολουθούν καθώς μιλούσαν μεταξύ τους. Αφού τονίστηκε από την εκπαιδευτικό η σημασία της φάσης αυτής, φάνηκε να συγκεντρώνονται και πάλι. Έτσι, ανέφεραν τον τρόπο που υπολόγισαν το εμβαδόν του σχήματος.

Μ7: Μετρήσαμε τη μία πλευρά και μετά κάναμε πολλαπλασιασμό. (Β' Ομάδα)

Μ9: Κι εμείς μετρήσαμε τις δύο πλευρές για να βρούμε το εμβαδόν. (Α' Ομάδα)

Ε: Γιατί το κάνατε αυτό;

Κανένα μέλος της Β' ομάδας δεν κατάφερε να εξηγήσει για ποιο λόγο έκαναν πολλαπλασιασμό. Ωστόσο, ένα μέλος της Α' ομάδας απάντησε:

Μ14: Για να μη μετράμε όλα τα κουτάκια ένα ένα.

<u>Σύνθεση-Σύνδεση</u>

Η φάση αυτή στόχευε στην σύνθεση όλων των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων στα οποία κατέληξε η κάθε ομάδα.

Ε: Πώς θα περιγράφατε σε κάποιο παιδί τον ορισμό για το πώς βρίσκουμε το εμβαδόν σύμφωνα με αυτά που ανακαλύψατε;

Μ10: Μετράμε τη μία πλευρά από κουτάκια και μετά διπλασιάζουμε και μετά μετράμε και αυτά εδώ πέρα για πολλαπλασιασμό.

Μ15: Όχι, μετράμε τη μία πλευρά και μετά κάνουμε πολλαπλασιασμό με την άλλη.

Μ17: Μετράμε τις δύο πλευρές και τις πολλαπλασιάσαμε.

Ε: Αυτό ισχύει για όλα τα γεωμετρικά σχήματα ή μόνο γι' αυτό που είχατε εσείς;

Μ11: Εμείς είχαμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πάντως.

Γενίκευση-Μαθηματικοποίηση

Στην φάση αυτή και αφού οι δύο ομάδες επικοινώνησαν τα ευρήματα και τα αποτελέσματά τους, επιχειρηματολογώντας και για τα συμπεράσματά τους, η εκπαιδευτικός θέλησε να προκαλέσει μία συζήτηση με στόχο την γενίκευση του συγκεκριμένου αλγεβρικού τύπου και στο άλλο όμοιο ορθογώνιο σχήμα, το τετράγωνο.

Ε: Μήπως μπορώ να βρω με τον ίδιο τρόπο το εμβαδόν και ενός άλλου παρόμοιου σχήματος με αυτό του σπιτιού;

Οι μαθητές εύκολα κατέληξαν στο τετράγωνο, κάτι το οποίο αιτιολόγησαν μόνο μετά από παρότρυνση της εκπαιδευτικού.

Ε: Μήπως μπορώ με τον ίδιο τρόπο να υπολογίσω και το εμβαδόν κάποιου άλλου γεωμετρικού σχήματος;

Μ13: Ναι του τετραγώνου

Ε: Γιατί του τετραγώνου;

Μ16: Έχουν και τα δύο ορθές γωνίες, άρα είναι το ίδιο.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι ο συγκεκριμένος μαθητής, ενώ δεν απάντησε με αυτόν τον τρόπο στο παραπάνω ερώτημα, στο δοκίμιο ανέφερε ότι *«το τετράγωνο είναι το μισό του ορθογωνίου»*.

Επέκταση

Στο τελευταίο αυτό στάδιο της διδασκαλίας και έχοντας οικοδομηθεί από τους μαθητές όλες οι προηγούμενες έννοιες και διαδικασίες, εστιάσαμε στο ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου το εμβαδό θέλαμε να υπολογίσουμε.

Ε: Με βάση τον τύπο που βρήκατε, μήπως μπορείτε να υπολογίσετε και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου σαν αυτό;

Μ14: Το τρίγωνο είναι το μισό του ορθογωνίου.

Ε: Αφού είναι το μισό μήπως μπορώ να βρω και το εμβαδόν με βάση τον προηγούμενο τύπο;

Μ16: Άρα δια δύο.

Οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής διδασκαλίας σχολίασαν θετικά την ύπαρξη των ομάδων και τη συνεργασία που είχαν μεταξύ τους, ενώ δεν τους ευχαρίστησε η συμπλήρωση του ίδιου φυλλαδίου για δεύτερη φορά μετά την ολοκλήρωση των παρεμβάσεων.

Οι μαθητές που ήταν χαμηλού επιπέδου επιδόσεων αισθανόντουσαν σε μεγάλο βαθμό αμηχανία και δεν αναλάμβαναν πρωτοβουλίες μέσα στην ομάδα. Ο χρόνος παρέμβασης ίσως δεν ήταν αρκετός για να προσαρμοστούν στο νέο αυτό είδος διδασκαλίας, ενώ φάνηκε να μην είναι έτοιμοι να αναλάβουν πρωταγωνιστικό ρόλο τόσο στις ομάδες τους όσο και στις συζητήσεις της ολομέλειας γενικά. Ωστόσο, παρατηρήθηκε και περίπτωση όπου μαθήτριας χαμηλού επιπέδου επίδοσης να αναλαμβάνει το ρόλο οργανώτριας και να τα καταφέρνει πολύ καλά τόσο σε ατομικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο οργάνωσης της ομάδας της. Οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής αγχώθηκαν ιδιαίτερα με τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας, το οποίο είχε ερωτήματα που τους προσανατόλιζαν ως προς την πορεία της έρευνας, με αποτέλεσμα να μη συζητούν ιδιαίτερα μεταξύ τους και η πρώτη άποψη που θα εκφραζόταν από κάποιον να καταγράφεται κατευθείαν. Ωστόσο, δεν κατέγραψαν πολλές απαντήσεις σε αυτό, είτε λόγω χρόνου είτε λόγω του ότι πολλά από αυτά τα απαντούσαν προφορικά. Τέλος, λόγω ηλικίας των μαθητών του δείγματος, αλλά και μη εξοικείωσης με την νέα προσέγγιση, τα στάδια της διδασκαλίας συγχωνεύτηκαν και δεν ξεχώριζε το περιεχόμενο των συζητήσεων στο κάθε ένα και συγκεκριμένα το στάδιο της Σύνθεσης-Σύνδεσης και της Γενίκευσης-Μαθηματικοποίησης.

4.1.3 Καθοδηγούμενη διερευνητική διδακτική παρέμβαση

Η καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση αποτελούνταν από δύο φάσεις. Η πρώτη αφορούσε τη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας, η οποία είχε διάρκεια περίπου δύο (2) διδακτικών ωρών και η δεύτερη τη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας, η οποία είχε διάρκεια επίσης δύο (2) διδακτικών ωρών. Και οι δύο διδασκαλίες σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν με βάση όσα ορίζει η καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση.

Πριν την έναρξη της διδασκαλίας, οι μαθητές κάθισαν σε ομάδες, τηρώντας και τις απαραίτητες αποστάσεις, όπως και στη περίπτωση της δομημένης διερευνητικής που αναφέρθηκε παραπάνω. Οι ομάδες του τμήματος που σχηματίστηκαν περιλάμβαναν τους παρακάτω μαθητές:

Ομάδα Α: Μ20, Μ24, Μ26, Μ27, Μ28

Ομάδα Β: Μ19, Μ21, Μ22, Μ23, Μ25

Η δημιουργία των ομάδων, όπως και στη περίπτωση της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης ήταν και πάλι ομοιογενής, καθώς στόχος ήταν η στοχευμένη καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό όταν θα κρινόταν απαραίτητο σε σημεία που θα δυσκολεύονταν όλοι οι μαθητές της ομάδας. Ακόμη, βασικό ρόλο έπαιξε η ανάγκη οικειότητας των μαθητών στην ομάδα που βρίσκονταν και όχι η απομόνωση από μαθητές με καλύτερες επιδόσεις.

Στη συγκεκριμένη παρέμβαση, το ερώτημα προς διερεύνηση τέθηκε και πάλι από την εκπαιδευτικό, με τη διαφορά ότι η διαδικασία που θα ακολουθούσε η κάθε ομάδα ήταν στη δική τους ευθύνη, με εξαίρεση την ελάχιστη δυνατή καθοδήγησή της.

<u>Διδασκαλία επιχειρηματολογίας</u>

Η επιχειρηματολογία στη συγκεκριμένη ομάδα διδάχθηκε με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της ομάδας που συμμετείχε στη δομημένη διερευνητική παρέμβαση. Η μόνη διαφορά ήταν ο βαθμός καθοδήγησης από την ερευνήτρια, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν μικρότερη. Το άγνωστο της μεθόδου αλλά και του αντικειμένου της μεθόδου διδασκαλίας δεν επέτρεπε μεγάλη αυτονομία στους μαθητές αλλά η ομαδική εργασία των μαθητών προσπαθούσαμε να είναι όσο το δυνατόν πιο αυτόνομη. Η παρέμβαση της επιχειρηματολογίας, τελικά, ήταν μεγαλύτερη από ό,τι είχε σχεδιαστεί, καθώς οι μαθητές εμφάνισαν δυσκολίες στη συζήτηση. Κατά κύριο λόγο, μιλούσε στον ολομέλεια μόνο ένας μαθητής από κάθε ομάδα.

Αρχικά, αναφέρθηκε στις ομάδες η λέξη *επιχειρηματολογία* και κατά πόσο την έχουν ακούσει τόσο στη σχολική όσο και στην εξωσχολική ζωή τους. Μετά από συζήτηση με τις ομάδες τους αναφέρθηκαν στις διαφορετικές χρήσεις των επιχειρημάτων στη ζωή τους. Αφού ακούστηκαν διάφορες χρήσεις των επιχειρημάτων, στη συνέχεια τέθηκε το ερώτημα της δομής ενός τέτοιου επιχειρήματος.

Τι πρέπει να περιλαμβάνει ένα επιχείρημα για να θεωρηθεί σωστό και να μην μπορεί να αμφισβητηθεί από τον συμμαθητή ή τον δάσκαλό μας;

Τα δομικά στοιχεία που παρουσίασαν οι ομάδες αποδόθηκαν με τους όρους *εξήγηση και αποτέλεσμα.* Μία από τις δύο ομάδες ανέφερε και τον όρο *συμπέρασμα,* τον οποίο διέκριναν από τον όρο *αποτέλεσμα.* Οι δύο ομάδες συζήτησαν πάνω στο τι σήμαινε ο κάθε όρος με παραδείγματα. Η εκπαιδευτικός οδήγησε τη συζήτηση προς την έννοια του μαθηματικού κανόνα, ως ένα από τα δομικά στοιχεία ενός επιχειρήματος. Παραδείγματα τέτοιων κανόνων συζήτησαν οι ομάδες μεταξύ τους για να στηρίζουν πιθανές απαντήσεις τους στα Μαθηματικά. Τα παραδείγματα που έθεσαν οι ομάδες είχαν να κάνουν κυρίως με την Άλγεβρα, τα οποία παρά το ότι ήταν σωστά, έπρεπε να σχετιστούν με την Γεωμετρία και γι αυτό η εκπαιδευτικός έθεσε γι αυτό το ερώτημα με την ορθή γωνία:

Ποιος είναι ο μαθηματικός κανόνας που αφορά την ορθή γωνία;

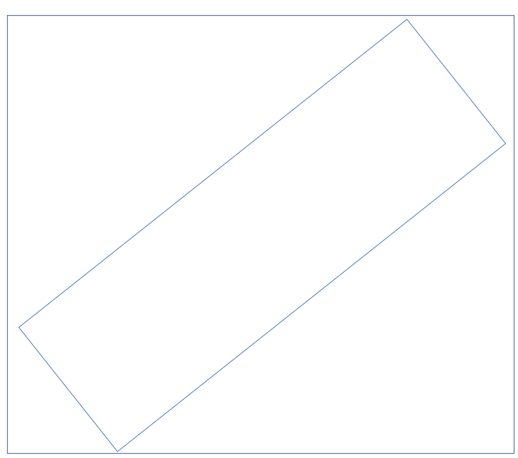
Μετά τη συζήτηση μεταξύ των ομάδων και αφού διατυπώθηκαν κάποιοι όροι σχετικά με τα δομικά στοιχεία, όπως συμπέρασμα, μαθηματικός κανόνας κτλ, δόθηκε στους μαθητές το ερώτημα που είχε δοθεί και στις άλλες δύο παρεμβάσεις.

Πόσα εκατοστά είναι τα 4 μέτρα;

Τις απαντήσεις των ομάδων ανακοίνωσαν στην ολομέλεια της τάξης οι εκπρόσωποι, τις οποίες αξιολόγησαν οι μαθητές των άλλων ομάδων. Ο μαθηματικός κανόνας υπονοούνταν από τη μία απάντηση, κάτι το οποίο επισημάνθηκε από τους μαθητές της άλλης ομάδας.

Το επόμενο ερώτημα που δόθηκε προς διερεύνηση της επιχειρηματολογίας αφορούσε την αναγνώριση και καταμέτρηση των γεωμετρικών σχημάτων από το οποίο αποτελούνταν ένα σχέδιο (Εικόνα 10).

Πόσα σχήματα διακρίνεις στο παρακάτω σχέδιο;



Εικόνα 10: Σχέδιο αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων

Οι απαντήσεις και των δύο ομάδων περιλάμβαναν μόνο το στοιχείο του συμπεράσματος, ενώ δεν ανέφεραν καθόλου τις ιδιότητες των σχημάτων της εικόνας. Ωστόσο, μετά από την καθοδήγηση που δόθηκε οι μαθητές κατάφεραν να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις με πλήρη επιχειρήματα.

Η συγκεκριμένη διδασκαλία λόγω της ιδιαιτερότητας του αντικειμένου και της πρωτόγνωρης επαφής των μαθητών με αυτό το είδος της διδασκαλίας δεν θα μπορούσε να είναι πιο ελεύθερη στην διερεύνηση καθώς χρειάστηκαν πολλές φορές καθοδήγηση και ανατροφοδότηση. Το φύλλο εργασίας, το οποίο είχε σχεδιαστεί για τη συγκεκριμένη διδασκαλία δεν χρησιμοποιήθηκε πολύ από τους μαθητές, ενώ προτίμησαν να κρατάνε σημειώσεις σε ένα χαρτί Α4, τα οποία πήρε η εκπαιδευτικός μετά το τέλος της παρέμβασης.

Διδασκαλία μαθηματικής έννοιας

Προβληματισμός

Στο στάδιο αυτό, όπως και στα άλλα δύο είδη διδασκαλίας παρουσιάστηκαν οι δύο κατόψεις των σπιτιών. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν ένα από τα δύο, αρχικά οι απαντήσεις τους δεν είχαν να κάνουν με κάποιο μαθηματικό μέγεθος.

Ε: Αν είχατε να διαλέξετε ανάμεσα σε αυτά τα δύο σπίτια, ποιο θα διαλέγατε;

Μ26: Αυτό.

Ε: Ωραία, γιατί θα διάλεγες αυτό;

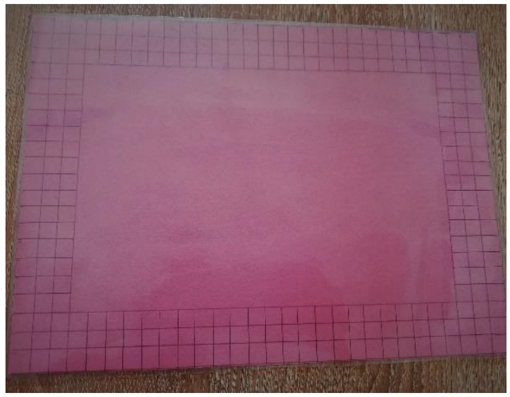
Μ26: Μου αρέσει πιο πολύ.

Ε: Σου αρέσει ως προς τι;

Μ26: Αυτό έχει περισσότερα πράγματα σε σχέση με το άλλο, περισσότερα δωμάτια.

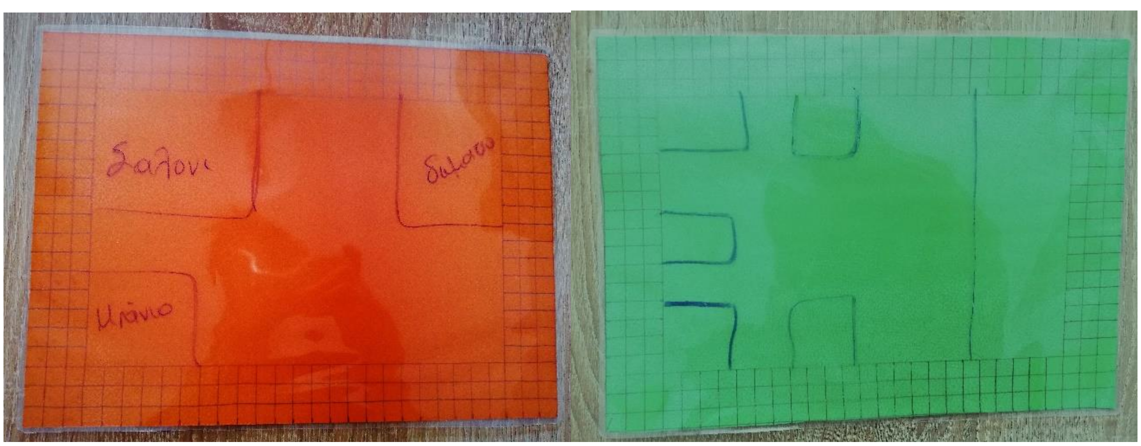
Εξερεύνηση

Στη φάση αυτή πριν την εξερεύνηση του μαθηματικού τύπου του εμβαδού, οι μαθητές σε κάθε ομάδα χώρισαν την κάτοψη που τους δόθηκε στα δωμάτια που επιθυμούσαν ανάλογα με τη δική τους οπτική (Εικόνα 11)



Εικόνα 11: Κάτοψη σπιτιού που δόθηκε στις ομάδες για τον χωρισμό των δωματίων

Στη μία από τις δύο ομάδες ο χωρισμός δωματίων δεν έγινε σύμφωνα με τις γραμμές του τετραγωνισμένου χώρου της αυλής, κάτι που θα τους δυσκόλευε στο μέλλον οπότε επισημάνθηκε από την εκπαιδευτικό και έγιναν οι απαραίτητες διορθώσεις (Εικόνα 12). Μία από τις δύο ομάδες (Β) δυσκολεύτηκε στο σχεδιασμό των δωματίων καθώς αρχικά δεν κατανόησε την έννοια της κάτοψης και έτσι σχεδίασαν και την πόρτα. Ωστόσο, μετά από την παρέμβαση της εκπαιδευτικού κάτι τέτοιο διορθώθηκε και προχώρησε η διαδικασία.



Εικόνα 12: Χωρισμός δωματίων στην κάτοψη από τις ομάδες μαθητών

Οι μαθητές των ομάδων αρχικά εμφάνισαν μία διστακτικότητα στην μεταξύ τους επικοινωνία, ενώ δεν φάνηκε κανείς πρόθυμος να αναλάβει κάποια πρωτοβουλία για την επίλυση των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας. Στη συνέχεια, ωστόσο, οι μαθητές συνήθισαν τη νέα κατάσταση και συνεργάστηκαν καλύτερα. Το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές ήταν το ίδιο σε γενικές γραμμές με αυτό που δόθηκε και στις ομάδες της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης, με μία ωστόσο σημαντική διαφορά. Τα ερωτήματα που το αποτελούσαν ήταν λιγότερα, καθώς η καθοδήγηση που επιθυμούσαμε να δίνεται, θέλαμε να είναι λιγότερη.

Στο 1ο ερώτημα του φύλλου εργασίας που τους είχε δοθεί, όπως αναφέραμε και στη δομημένη διδασκαλία παραπάνω ζητούνταν από τους μαθητές να μετρήσουν την τετραγωνισμένη επιφάνεια, γύρω από το σπίτι, την αυλή. Η εκφώνησή του ήταν ίδια με αυτή στην ομάδα της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης.

Στο χαρτόνι που σας έχει δοθεί ο τετραγωνισμένος χώρος γύρω από το σπίτι είναι η αυλή του σπιτιού. Θέλετε να την καλύψετε με πλακάκια και γι αυτό πρέπει να υπολογίσετε το μέγεθός της. Αιτιολογήστε τη σκέψη σας όσο πιο αναλυτικά μπορείτε. Να θυμάστε ότι ένα τετραγωνικό εκατοστό αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό μέτρο.

Η Α ομάδα φάνηκε να δυσκολεύεται αρκετά με την καταμέτρηση των τετραγωνικών εκατοστών. Αρχική τους προσπάθεια ήταν ο υπολογισμός της περιμέτρου, κάτι το οποίο επίσης δεν κατάφεραν να υπολογίσουν σωστά. Όταν το αντιλήφθηκε η εκπαιδευτικός επισήμανε ότι θέλουμε να καλύψουμε την επιφάνεια με πλακάκια και όχι την αυλή με κάγκελα γύρω γύρω, έτσι ώστε να ξεπεραστεί η παρανόηση ως προς το ζητούμενο μέγεθος.

Μετά από κάποιες προσπάθειες και συζητήσεις μεταξύ της ομάδας, η εκπαιδευτικός επενέβη και τους προσανατόλισε στην μία πλευρά της αυλής και το μοτίβο επανάληψης των μονάδων.

Ε: Πόσα τετραγωνάκια έχουμε σε αυτή τη πλευρά;

Μ20: 29

Ε: Εδώ στη δεύτερη σειρά;

Μ20: 29

Ε: Αν δούμε και την τρίτη σειρά;

Μ24: 29

Ωστόσο, η ομάδα αυτή δεν σκέφτηκε τα τετραγωνάκια που βρισκόταν στις άκρες της αυλής με αποτέλεσμα να τα μετρήσουν δύο φορές. Όταν κατάλαβαν πως έπρεπε να τα μετρήσουν ένα ένα δυσανασχέτησαν γιατί σκέφτηκαν ότι κάτι τέτοιο θα τους πάρει πολύ χρόνο. Δυσκολεύτηκαν να δώσουν ρόλους για το ποιος θα μετρήσει τι, ωστόσο, μετά από παρέμβαση της εκπαιδευτικού διαπίστωσαν ότι ο πολλαπλασιασμός ίσως τους βοηθήσει.

Μ24: Μισό λίγο, αυτήν εδώ δεν την είπαμε 20;

Μ26: Ναι αλλά είπε να μετρήσουμε ένα ένα τα κουτάκια.

*Μ24: Ωραία, 20*3*

Μ20 και Μ26: Τα κουτάκια είπε η κυρία!!Είπε να τα μετρήσουμε ένα ένα

Μ24: Αυτό κάνουμε και με τον πολλαπλασιασμό. Αυτό και αυτό το κομματάκι μας μένει.

Στον παραπάνω διάλογο διαπιστώσαμε ότι η μαθήτρια χρησιμοποίησε υπονοούμενη εγγύηση για να στηρίξει την άποψή της για τον πολλαπλασιασμό 20*3, καθώς θεώρησε ότι η κάθε σειρά θα έχει 20 τετραγωνικά εκατοστά.

Η ομάδα Β, επίσης ξεκίνησε τους υπολογισμούς της από το μέγεθος της περιμέτρου της αυλής, αλλά γρήγορα κατανόησε τι έπρεπε να υπολογίσει. Το μοτίβο της επανάληψης και η χρήση του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές χωρίς να χρειαστεί η παρέμβαση της εκπαιδευτικού.

Το 2^{ο} έργο του φύλλου εργασίας, ήταν το ίδιο με αυτό στη δομημένη διερευνητική παρέμβαση, χωρίς να παρατίθενται τα βοηθητικά υποερωτήματα που αναφέραμε προηγουμένως.

Ο αρχιτέκτονας που έχει αναλάβει τη διαμόρφωση του σπιτιού, θέλει να καλύψει την επιφάνεια του δαπέδου της κουζίνας με μοκέτα, οπότε πρέπει να παραγγείλει το απαραίτητο μέγεθος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε αναφέροντας εκτός από το μέγεθος και τις ακριβείς διαστάσεις; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα υλικά που σας έχουν δοθεί.

Ξεκινώντας από την εκφώνηση του συγκεκριμένου ερωτήματος, δυσκολεύτηκαν στην κατανόηση της έννοιας της *μοκέτας,* η οποία εξηγήθηκε από την εκπαιδευτικό καθώς κανείς από την υπόλοιπη τάξη δεν φάνηκε να τη γνωρίζει.

Στο συγκεκριμένο, το οποίο αφορούσε τον υπολογισμό της επιφάνειας ενός δωματίου, οι μαθητές φάνηκαν πιο εξοικειωμένοι με τη διαδικασία. Συγκεκριμένα, ενώ στην αρχή δεν συνεργαζόντουσαν τόσο καλά και περίμεναν την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού, στη συνέχεια, ξεκίνησαν μόνοι τους να προσπαθούν να υπολογίσουν την επιφάνεια με οποιοδήποτε τρόπο. Στην Α ομάδα χρειάστηκε να αλλάξουμε το δωμάτιο του οποίο το εμβαδόν ζητούσαμε. Ακόμη, παρατηρήθηκε από μέλη της ομάδας η δυσκολία χρήσης του χάρακα, η οποία ωστόσο, δεν τους απέτρεψε από τη χρήση του. Συγκεκριμένα, από το σύνολο των υλικών που τους είχε δοθεί δεν επέλεξαν τίποτα άλλο εκτός του χάρακα. Αφού μέτρησαν τις πλευρές του δωματίου που είχαν επιλέξει έκαναν τον πολλαπλασιασμό, καθώς θεώρησαν πως αν το χωρίσουν σε τετραγωνάκια θα τους πάρει περισσότερη ώρα. Αντίθετα, η ομάδα Β φάνηκε να προτιμάει τη χρήση του υλικού και να καλύπτει την επιφάνεια με μεγαλύτερη επιτυχία, τηρώντας τις αρχές μέτρησης. Μάλιστα, θεώρησαν ότι το υλικό που τους βόλευε περισσότερο ήταν τα τετραγωνάκια των 4 τετραγωνικών εκατοστών, γιατί με 4 από αυτά το έβρισκαν κατευθείαν. Στο ίδιο ερώτημα, λοιπόν, η μία ομάδα χρησιμοποίησε τον αλγεβρικό τύπο, ενώ η άλλη για ακόμη μία φορά το βοηθητικό υλικό.

Στο 3^{ο} ερώτημα της ερευνητικής διαδικασίας, ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν την επιφάνεια ολόκληρου του σπιτιού.

Αν θέλετε να καλύψετε όλο το πάτωμα του σπιτιού σας με μοκέτα, πώς θα υπολογίσετε το μέγεθός της;

Οι μαθητές της ομάδας Β, αισθανόμενοι σιγουριά για την προηγούμενη στρατηγική κάλυψης, αποφάσισαν πάλι με την κάλυψη να μετρήσουν την επιφάνεια του σπιτιού.

Μ19: Πρέπει πρώτα να βρούμε πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι όλο το σπίτι. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε πρώτα όλα τα δωμάτια ένα ένα και μετά να τα προσθέσουμε.

Αφού, προσπάθησε η ομάδα να το υπολογίσει με αυτόν τον τρόπο, η εκπαιδευτικός παρακολουθώντας την πορεία τους, πρότεινε μήπως υπάρχει και πιο γρήγορος τρόπος για αυτό. Έτσι, ο ίδιος μαθητής της ομάδας πρότεινε:

Μ19: Θα μετρήσουμε πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι εδώ πέρα (στη στήλη) και πόσες τέτοιες υπάρχουν.

Η ομάδα Α στο συγκεκριμένο ερώτημα, κατανόησε και εκείνη το μέγεθος που έπρεπε να υπολογιστεί. Ακόμη και μία μαθήτρια που αντιμετώπισε μία δυσκολία (Μ24) και σκέφτηκε την έννοια της περιμέτρου, αμέσως διορθώθηκε από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας της, ενώ μάλιστα στη συνέχεια, κρατάει σημειώσεις για να βοηθήσει στον υπολογισμό των δύο πλευρών.

Πριν το τέλος της φάσης της παρέμβασης, οι μαθητές της κάθε ομάδας μελέτησαν τα παρακάτω ερωτήματα

Μετά την παραπάνω μελέτη σας, καταλήξατε σαν ομάδα σε κάποιον κανόνα υπολογισμού της επιφάνειας του πατώματος του σπιτιού;

Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα υπολογισμού για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μετά τη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε;

<u>Παρουσίαση</u>

Στη φάση αυτή της ερευνητικής διαδικασίας, οι ομάδες του τμήματος, έχοντας επιλέξει ένα μέλος για να τους εκπροσωπήσει στην ολομέλεια της τάξης, παρουσιάζουν όσα μελέτησαν και τα συμπέρασμα στα οποία κατέληξαν. Αυτό που ανέφεραν ήταν κυρίως ο αλγεβρικός τύπος που είχαν ανακαλύψει κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Δεν φάνηκαν ιδιαίτερα πρόθυμοι να περιγράψουν τους συλλογισμούς τους, ενώ η εκπαιδευτικός διατύπωσε περισσότερα ερωτήματα απ’ ό,τι είχε σκοπό για να προχωρήσει η συζήτηση στη φάση αυτή. Όταν τους ζήτησε να εξηγήσουν τον τρόπο που υπολόγισαν το εμβαδόν και να τον παραθέσουν στην άλλη ομάδα ο εκπρόσωπος της μίας ομάδας ανέφερε:

Μ20: Κάναμε πολλαπλασιασμό γιατί ο πολλαπλασιασμός τον πολλαπλασιάζει όσες φορές είναι η κάθε στήλη.

Μ19: Κι εμείς γι αυτό το κάναμε, αλλά πρώτα είχαμε σκεφτεί να μετρήσουμε τα τετραγωνάκια.

Μ20: Ε το ίδιο ήταν

<u>Σύνθεση-Σύνδεση</u>

Οι μαθητές των ομάδων στο σημείο αυτό, κλήθηκαν να συνδέσουν όλες τις πληροφορίες που συνέλεξαν και να καταλήξουν σε κάποια κοινά αποδεκτά συμπεράσματα. Ένα από αυτά ήταν και ο αλγεβρικός τύπος. Έτσι, η εκπαιδευτικός πρότεινε να περιγράψουν το συμπέρασμα ως προς τον υπολογισμό του εμβαδού, με τρόπο, σαν να το περιγράφουν σε κάποιο συμμαθητή του σχολείου τους.

Ε: Πώς θα περιγράφατε σε έναν συμμαθητή του σχολείου σας τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μετρήσει το εμβαδόν μιας επιφάνειας

Μ20: Να μετρήσει κάθετα και οριζόντια. Πώς τα λένε αυτά;

Ένας μαθητής της άλλης ομάδας συμπληρώνει..

Μ23: Πλευρές

Μ20: Ε αυτό. Άρα αν δεν θέλει να ξημερώσει και να μετράει τα τετραγωνάκια θα μετρήσει και θα πολλαπλασιάσει τις πλευρές.

Πέρα από τις παραπάνω απαντήσεις οι μαθητές δεν κατάφερναν να προσθέσουν κάτι άλλο ή να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο δούλεψαν.

Γενίκευση-Μαθηματικοποίηση

Στη συγκεκριμένη φάση, η εκπαιδευτικός ήθελε να συνδέσει τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν οι ομάδες κατά την ερευνητική διαδικασία με ορισμένες πρότερες γνώσεις τους. Έτσι, τέθηκε το ερώτημα εάν όλα αυτά που ανακαλύφθηκαν σήμερα μπορούσαν να εφαρμοστούν και σε κάποιο άλλο σχήμα. Εύκολα οι μαθητές διαπίστωσαν πως το σχήμα που «μοιάζει» με το ορθογώνιο είναι το τετράγωνο, ενώ το αιτιολόγησαν λέγοντας πως *«Το τετράγωνο έχει 4 ίσες πλευρές, ενώ το ορθογώνιο μόνο τις 2(Μ21)», «Αλλά έχουν και όλες τις γωνίες ορθές»*

Επέκταση

Τα σχήματα που μελετήθηκαν ήταν το τετράγωνο και το ορθογώνιο. Ωστόσο, το σχήμα στο οποίο θα μπορούσε να επεκταθεί η μελέτη εύρεσης του εμβαδού ήταν το ορθογώνιο τρίγωνο. Η εκπαιδευτικός εστίασε την προσοχή τους στην σχέση του ορθογωνίου τριγώνου με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, σχεδιάζοντάς το στον πίνακα.

Μ26: *Κυρία, τώρα αν τραβήξετε εκείνη τη γραμμή είναι τετράγωνο.*

Ε: Άρα μήπως μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν αυτού του τριγώνου σε σχέση με αυτό του ορθογωνίου;

Η ομάδα Α δεν κατάφερε να κάνει τη σύνδεση ενώ η Β μετά το σχεδιασμό του τριγώνου στο φύλλο εργασίας τους, κατέληξε στο «διά δύο».

Μ19: *Το διαιρώ με το δύο γιατί όταν ψάχνω το μισό το διαιρώ με το 2.* (Εδώ βλέπουμε τον μαθητή να προσπαθεί να επιχειρηματολογήσει για την απάντηση που έδωσε, αναφέροντας κάτι που γνώριζε από προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες)

Μία ακόμη διάσταση που αποτέλεσε στόχο της συγκεκριμένης φάσης της παρέμβασης ήταν η διαπίστωση της ισοεμβαδικότητας δύο ή περισσοτέρων σχημάτων. Αρχικά οι μαθητές μπερδεύτηκαν, λέγοντας πως «*ένα ορθογώνιο μπορεί να γίνει τετράγωνο, αλλά ένα τετράγωνο δεν μπορεί να γίνει ορθογώνιο. Αλλά δεν πρέπει να αλλάξουμε τα σχήματα» (Μ26), «Ας το μεγαλώσουμε» (Μ24), «Όχι δεν γίνεται, πρέπει να βρούμε το εμβαδόν έτσι όπως είναι τα σχέδια» (Μ26).*

Η εκπαιδευτικός για να βοηθήσει λίγο τους μαθητές έδωσε συγκεκριμένο παράδειγμα λέγοντας:

Ε: *Έχουμε ορθογώνια σχήματα, τα οποία έχουν εμβαδόν 20τμ. Ποιες μπορεί να είναι οι διαστάσεις αυτών των σχημάτων για να προκύπτει αυτό το εμβαδόν;*

*Μ19: 2*10*

*Μ24: 4*5*

*Μ26: Κυρία, το πιο απλό δεν είπαμε που είναι το 1*20.*

Θέλοντας να κλείσει η συγκεκριμένη συνάντηση, η εκπαιδευτικός έθεσε το ερώτημα εύρεσης του εμβαδού στη καθημερινή μας ζωή με στόχο να αντιληφθούν την χρησιμότητα όλων αυτών στην καθημερινότητά τους. Έτσι, ακούστηκαν απαντήσεις, όπως:

Μ20: Σε ένα καινούργιο σπίτι.

Μ19: Στο δωμάτιό μας

Μ24: Στα μαθηματικά

Λόγω της περιόδου που διανύαμε κατά την πραγματοποίηση των παρεμβάσεων, η έννοια του εμβαδού ακουγόταν συχνά στα ΜΜΕ, με αποτέλεσμα να ερωτηθούν:

Ε: Που ακούτε να μιλάνε για εμβαδό και τετραγωνικά μέτρα στην τηλεόραση αυτή τη περίοδο;

Μ20: Στα μαγαζιά που λένε πόσοι πρέπει να είναι ανά 15 τμ.

Θετική εντύπωση από τη διαδικασία αποκόμισαν και οι μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής διαδικασίας. Μία μαθήτρια συγκεκριμένα, αναρωτήθηκε «αν μπορούν να κάνουν κάτι παρόμοιο και σε άλλα μαθήματα για να μάθουν κάτι που δεν ξέρουν». Ωστόσο, ανέφεραν τη δυσκολία να συνεργαστούν καθώς δεν μπορούσαν λόγω συνθηκών να μοιραστούν τόσο άνετα τα υλικά και ότι «ο καθένας είχε διαφορετική άποψη και δεν μπορούσαν να καταλήξουν σε κάτι». Ωστόσο, υπήρξαν και αρνητικές εντυπώσεις από μαθητές που δεν κατάφεραν να προσαρμοστούν στο νέο αυτό είδος διδασκαλίας, με αποτέλεσμα να απογοητευτούν και να μην καταφέρουν να αποδώσουν όσο θα ήθελαν. Ένας από αυτούς ήταν μαθητής της καθοδηγούμενης διδασκαλίας, ο οποίος είχε καθ' όλη τη διάρκεια παράλληλη στήριξη και δήλωσε στο τέλος της διαδικασίας ότι «δεν του άρεσε τίποτα και βαρέθηκε».

Ο χωρισμός των ομάδων αρχικά προκάλεσε κάποιες αντιδράσεις από τους μαθητές, αφού πολλοί δεν βρέθηκαν ακριβώς με αυτούς που ήθελαν. Ο χρόνος που δόθηκε για να συνηθίσουν οι μαθητές στη νέα δυναμική των ομάδων ίσως δεν ήταν αρκετός για να εξοικειωθούν και να προσδιοριστούν οι ρόλοι του καθενός. Μία ομάδα της καθοδηγούμενης διδασκαλίας, ανέφερε πως είχε ανάγκη περισσότερη καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό, διότι δυσκολεύονταν να προχωρήσουν και ήθελαν να γνωρίζουν εάν αυτό που έβρισκαν ήταν σωστό. Αυτό, ίσως θεωρείται και κατάλοιπο της παραδοσιακής διδασκαλίας, στην οποία ήταν συνηθισμένοι. Η κάμερα που βρισκόταν καθ' όλη τη διάρκεια των διδασκαλιών, φάνηκε να επηρεάζει λιγότερο τους μαθητές της παραδοσιακής διδασκαλίας σε σχέση με αυτούς των διερευνητικών, ίσως γιατί αισθάνονταν πιο εξοικειωμένοι με τη διαδικασία απ' ό,τι οι δεύτεροι, κάτι το οποίο προκαλούσε άγχος και μεγαλύτερο αίσθημα ευθύνης για τις απαντήσεις τους.

Σύμφωνα με την εκπαιδευτικό, το χρονικό διάστημα το οποίο ορίστηκε για την παρέμβαση δεν ήταν επαρκές. Το γεγονός αυτό, οδήγησε την ίδια, να γίνει περισσότερο καθοδηγητική προς το τέλος της παρέμβασης, ώστε οι μαθητές να προλάβουν να έρθουν συζητήσουν τόσο για τα ισοεμβαδικά σχήματα, όσο και με τον αλγεβρικό τύπο εύρεσης του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου. Έτσι, θα ήταν προτιμότερο η παρέμβαση να πραγματοποιηθεί σε μεγαλύτερο δυνατό διάστημα, αν το επέτρεπαν οι συνθήκες ώστε οι μαθητές να έχουν περισσότερο χρόνο για διερεύνηση και εξαγωγή συμπερασμάτων. Τέλος, λόγω ηλικίας των μαθητών του δείγματος, αλλά και μη εξοικείωσης με την νέα προσέγγιση, τα στάδια της διδασκαλίας συγχωνεύτηκαν και δεν ξεχώριζε το περιεχόμενο των συζητήσεων στο κάθε ένα και συγκεκριμένα το στάδιο της Σύνθεσης-Σύνδεσης και της Γενίκευσης-Μαθηματικοποίησης.

4.1.4 Συγκριτική παράθεση των αποτελεσμάτων των τριών διδακτικών παρεμβάσεων

Η εφαρμογή τριών διαφορετικών παρεμβάσεων ανέδειξε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις δυσκολίες που προέκυψαν τόσο στον σχεδιασμό όσο και στην εφαρμογή της κάθε μίας.

Τόσο ως προς τον σχεδιασμό όσο και την εφαρμογή της, η παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση φάνηκε πιο εύκολη καθώς αποτελεί μία μέθοδο με την οποία είναι πιο εξοικειωμένοι τόσο οι μαθητές όσο και η εκπαιδευτικός. Οι διερευνητικές διδακτικές παρεμβάσεις δυσκόλεψαν την εκπαιδευτικό στον σχεδιασμό, αλλά και στην εφαρμογή τους. Η ανάλυση των παραμέτρων σύγκρισης θα γίνει με τη σειρά όσον αφορά στον σχεδιασμό των παρεμβάσεων και την εφαρμογή τους σε σχέση με τους μαθητές και την εκπαιδευτικό.

Ο σχεδιασμός της παραδοσιακής μετωπικής προσέγγισης αποτέλεσε μία δόμηση του μαθήματος με μορφή διάλεξης, μία δόμηση με την οποία ήταν εξοικειωμένοι και οι μαθητές και η εκπαιδευτικός, καθώς βασιζόταν στο σχολικό εγχειρίδιο και το βιβλίο του δασκάλου. Οι διερευνητικές παρεμβάσεις, ενώ δεν αποτελούν μία αυστηρή ακολουθία σταδίων, έπρεπε να δομηθούν για την καλύτερη διεξαγωγή των παρεμβάσεων. Το περιεχόμενο των σταδίων αυτών αποτελούσαν οι δραστηριότητες και τα ερωτήματα των συγκεκριμένων παρεμβάσεων. Τα ερωτήματα αυτά, ιδιαίτερα στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης, έπρεπε να είναι με τέτοιο τρόπο διατυπωμένα που η ομάδα να μην καθοδηγείται αλλά να διευκολύνεται ως προς τη διαδικασία. Αντίστοιχα, στην δομημένη διερευνητική παρέμβαση τα ερωτήματα έπρεπε να οδηγούν στο επόμενο στάδιο της ερευνητικής διαδικασίας. Η πρώτη περίπτωση δυσκόλεψε περισσότερο την εκπαιδευτικό, ίσως λόγω της απειρίας της σε σχέση με τη συγκεκριμένη προσέγγιση μάθησης.

Όσον αφορά στους μαθητές του δείγματος, στην περίπτωση της παραδοσιακής μετωπικής παρέμβασης συμμετείχαν αμέσως στη διαδικασία, καθώς ήταν ήδη εξοικειωμένοι με αυτή. Από την άλλη, οι μαθητές των διερευνητικών παρεμβάσεων ήταν διστακτικοί τόσο με τη διαδικασία όσο και με τον ρόλο τους μέσα στην ομάδα. Ζητούσαν διαρκώς ανατροφοδότηση και επιβεβαίωση για όσα ανακάλυπταν, ενώ πολλές φορές στην καθοδηγούμενης διερευνητική φάνηκε να θέλουν να τα παρατήσουν. Αυτός ήταν και ο λόγος που τα ερωτήματα στην συγκεκριμένη ομάδα διατυπώνονταν στην πράξη με διαφορετικό τρόπο απ’ ό,τι είχαν σχεδιαστεί καθώς ζητούνταν περισσότερη καθοδήγηση από την εκπαιδευτικό. Έτσι, η καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση έγινε λίγο πιο δομημένη στην πράξη απ’ ό,τι είχε σχεδιαστεί αρχικά. Τα ερωτήματα των φύλλων εργασίας έπαιξαν σημαντικό ρόλο και την επιχειρηματολογία που πραγματοποιούνταν μεταξύ των μαθητών. Στην περίπτωση της δομημένης διερευνητικής η επιχειρηματολογίας μεταξύ τους αλλά και στην ολομέλεια στη συνέχεια φάνηκε πιο εύκολη για τους μαθητές καθώς τα ερωτήματα ήταν διατυπωμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι απαραίτητη η τεκμηρίωση των απαντήσεών τους. Το ίδιο ίσχυε και στην παραδοσιακή μετωπική, όπου η εκπαιδευτικός για κάθε απάντηση που απηύθυνε ζητούσε και την τεκμηρίωση της απάντησης που ακουγόταν. Αντίθετα, στην περίπτωση της καθοδηγούμενης, οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται στην επιχειρηματολογία κατά την επικοινωνία των συμπερασμάτων τους.

Ως προς τον ρόλο της εκπαιδευτικού τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια με αυτά με όριζε ο σχεδιασμός των παρεμβάσεων. Στην περίπτωση της παραδοσιακής μετωπικής προσέγγισης, η εκπαιδευτικός είχε τον ολοκληρωτικό έλεγχο της μαθησιακής διαδικασίας και όριζε την διάρκεια της κάθε φάσης της. Από την άλλη, στις περιπτώσεις των διερευνητικών παρεμβάσεων η εκπαιδευτικός είχε υποστηρικτικό και διευκολυντικό ρόλο μέσω της παροχής οδηγιών. Στην δομημένη διερευνητική παρέμβαση, η εκπαιδευτικός δεν παρέμβαινε στις ομάδες λιγότερο, απ’ ό,τι στην καθοδηγούμενη, καθώς στην πρώτη περίπτωση το φύλλο εργασίας ήταν με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένο ώστε να τους καθοδηγεί στην εξέλιξη της ερευνητικής διαδικασίας. Αντίθετα, στην περίπτωση της καθοδηγούμενης η αλληλεπίδραση της εκπαιδευτικού με τους μαθητές κρίθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό απαραίτητη καθώς οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με μία τέτοιας μορφής ανοιχτή διαδικασία. Κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, λόγω του περιορισμένου χρόνου που φάνηκε να είχε απομείνει για την ολοκλήρωσή τους, συντόνισε την συζήτηση μεταξύ των μελών των ομάδων για την ολοκλήρωση της επικοινωνίας των αποτελεσμάτων τους.

4.2 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια

4.2.1 Εργαλείο ανάλυσης αποτελεσμάτων ως προς τη μαθηματική έννοια

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ως προς τη μαθηματική έννοια είναι κυρίως ποιοτική και βασίστηκε στα αποτελέσματα που συλλέχθηκαν μετά τη συμπλήρωση των δοκιμίων από τους μαθητές. Τα αποτελέσματα πριν και μετά από τις παρεμβάσεις ήταν απαραίτητα για την κατανόηση της γνωστικής οικοσκευής των μαθητών πριν από αυτές, αλλά και τη συγκριτική μελέτη τους σε σχέση με την ομάδα διδασκαλίας στην οποία συμμετείχαν.

Στο δοκίμιο που τους δόθηκε υπήρχαν 5 έργα. Από αυτά, τα 4 αφορούσαν την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του και ήταν αυτά που αξιοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των μαθητών. Το πρώτο ερώτημα του δοκιμίου αναφερόταν στο ορθογώνιο, το τετράγωνο και τις ιδιότητές τους. Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι οι μαθητές αναγνώριζαν τα δύο σχήματα και τις ιδιότητές τους αναλύσαμε μόνο τα τέσσερα (4) από τα πέντε (5) έργα. Σε κάθε ένα από αυτά ορίσαμε μία κλίμακα που δεν έχει μόνο τη μορφή βαθμολογίας αλλά στην ουσία αποτελείται από κάποιους δείκτες ανταπόκρισης στο κάθε ερώτημα/έργο. Η δημιουργία αυτών των δεικτών έγινε καθώς θέλαμε να κωδικοποιήσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα βαθμολογούσαμε και θα αναλύαμε τα αποτελέσματα των μαθητών αν δίνονταν τα συγκεκριμένα ερωτήματα στην τάξη.

Όσον αφορά στη βαθμολογία των γραπτών παρακάτω καταγράφονται ενδεικτικές απαντήσεις και ο βαθμός με τον οποίο βαθμολογούνται για να γίνει κατανοητή η κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε. Ο βαθμός του κάθε δείκτη ήταν ίδιος σε κάθε έργο καθώς η απαίτηση κρίθηκε ίδιας δυσκολίας.

<u>2ο ερώτημα/έργο</u>

Κοίταξε τα παρακάτω επίπεδα σχήματα Α και Β. Τι σχήμα είναι το Α; Τι σχήμα είναι το Β; Τι παρατηρείς ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

(Τα σχήματα που τους δόθηκαν ήταν ένα τετράγωνο με πλευρά 6 εκ. και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές 9 εκ. και 4 εκ.)

Στο συγκεκριμένο έργο απαιτούνταν

i) Η εύρεση του μήκους των πλευρών του Α και του Β (0,5 + 0,5)

ii) Η εύρεση της περιμέτρου του Α και του Β (0,5 + 0,5)
iii) Η εύρεση του εμβαδού του Α και του Β (με σχεδιασμό, κάλυψη ή τύπο) (0,5+ 0,5)
iv) Η σύγκριση της Περιμέτρου και του Εμβαδού των δύο σχημάτων (0,5 + 0,5)

Ο μαθητής που κατάφερε να συμπεριλάβει όλους τους παραπάνω δείκτες στην απάντησή του βαθμολογήθηκε στο συγκεκριμένο ερώτημα με 4 μονάδες.

3ο ερώτημα/έργο

Στους μαθητές ενός τμήματος της Ε' τάξης ενός σχολείου δόθηκε το παρακάτω σχήμα για να βρουν το εμβαδόν του. Ορισμένα παιδιά είπαν πως αφού έχει σβηστεί κάποιο μέρος του δεν είναι δυνατόν να βρουν το εμβαδόν του. Ωστόσο, κάποια άλλα παιδιά είπαν πως υπάρχει τρόπος να βρουν το εμβαδόν του. Ποια είναι η δική σου άποψη; Μπορείς να βρεις το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος; Αν όχι, αιτιολόγησε την απάντησή σου. Αν ναι, βρες το εμβαδόν του και αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου.

Στο συγκεκριμένο έργο απαιτούνταν:

i) Η εύρεση του μήκους των πλευρών του σχήματος (0,5)
ii) Η γνώση του τύπου του εμβαδού του ορθογωνίου σχήματος (0,5)
iii) Η εφαρμογή του τύπου του εμβαδού του ορθογωνίου σχήματος (0,5)
iv) Η απόδοση μονάδων στην απάντησή τους. (0,5)

Σε περίπτωση που δεν χρησιμοποιούνταν ο αλγεβρικός τύπος του εμβαδού, απαιτούνταν:

i) Η συμπλήρωση της δόμησης ή η γνώση του πως συμπληρώνεται (0,5)
ii) Η γνώση του τι πρέπει να καταμετρηθεί (0,5)
iii) Η σωστή καταμέτρηση των μονάδων (0.5)
iv) Η απόδοση μονάδων στην απάντησή τους (0.5)

Ο μαθητής που κατάφερε να συμπεριλάβει όλους τους παραπάνω δείκτες στην απάντησή του βαθμολογήθηκε στο συγκεκριμένο ερώτημα με 2 μονάδες.

4^{o} ερώτημα/ έργο

Ένας κήπος αποτελείται από 8 ίδιες τετράγωνες περιοχές, όπως στο σχήμα παρακάτω. Η περίμετρος του κήπου είναι 28 μ. Πόσο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου. Λάβετε υπόψη σας ότι το 1 εκ. του σχήματος αντιστοιχεί σε 1 μ. στην πραγματικότητα.

Στο συγκεκριμένο ερώτημα απαιτούνταν:

i) Η εύρεση του μήκους των πλευρών των τετραγώνων (0,5)
ii) Η γνώση του τύπου του εμβαδού του τετραγώνου (0,5)
iii) Η εφαρμογή συνδυασμού τύπων (0,5)
iv) Η απόδοση μονάδων στην απάντησή τους (0,5)

Σε περίπτωση που δεν χρησιμοποιούνταν ο αλγεβρικός τύπος του εμβαδού, απαιτούνταν:

i) Η συμπλήρωση της δόμησης ή η γνώση του πως συμπληρώνεται (0,5)
ii) Η γνώση του τι πρέπει να καταμετρηθεί (0,5)
iii) Η καταμέτρηση των μονάδων (0,5)
iv) Η απόδοση μονάδων στην απάντησή τους (0,5)

Ο μαθητής που κατάφερε να συμπεριλάβει όλους τους παραπάνω δείκτες στην απάντησή του, βαθμολογήθηκε στο ερώτημα αυτό με 2 μονάδες.

5^{o} ερώτημα/έργο

Τα παιδιά ενός σχολείου αποφάσισαν να φτιάξουν ένα παρτέρι στον κήπο του σχολείου για να φυτέψουν λουλούδια. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μέρος του κήπου, το οποίο θα περιφράξουν με συρματόπλεγμα 16 μέτρων. Τι σχήμα πρέπει να δώσουν στο παρτέρι τους για να έχουν τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου με στόχο να πείσεις τα παιδιά.

Στο συγκεκριμένο ερώτημα απαιτούνταν:

i) Η εύρεση του ζητούμενου σχήματος (του τετραγώνου) με Περίμετρο 16 εκ και το μεγαλύτερο εμβαδόν (0,5)
ii) Η ανακάλυψη δύο ισοπεριμετρικών σχημάτων (0,5)
iii) Η ανακάλυψη τριών ισοπεριμετρικών σχημάτων (0,5)

iv) Η ανακάλυψη τεσσάρων ισοπεριμετρικών σχημάτων (0,5)

v) Η γνώση του τύπου εύρεσης του Εμβαδού (0,5)

vi) Η εφαρμογή του τύπου εύρεσης του Εμβαδού (0,5)

vii) Η γνώση του τύπου εύρεσης της Περιμέτρου (0,5)

viii) Η εφαρμογή του τύπου εύρεσης της Περιμέτρου (0,5)

Ο μαθητής που κατάφερε να συμπεριλάβει όλους τους παραπάνω δείκτες στην απάντησή του βαθμολογήθηκε με 4 μονάδες.

Οι μέσοι όροι των επιδόσεων των μαθητών υπολογίστηκαν σύμφωνα με μία 12βαθμη κλίμακα, η οποία αναφέρεται στα τέσσερα (4) από τα πέντε (5) έργα του δοκιμίου που δόθηκε στους μαθητές. Στη συνέχεια, παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις που περιλάμβαναν λάθη, τα οποία κατηγοριοποιήθηκαν και θα βοηθήσουν στην ποιοτική ανάλυση που ακολουθεί (Πίνακας 9).

Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Παράδειγμα απάντησης**
Έννοια του εμβαδού	Σύγχυση με την περίμετρο	Μ15: *Το εμβαδόν του σχήματος είναι 7+7+7+7=28 (άθροισμα πλευρών).*
	Σύγχυση με την έννοια του μήκους της πλευράς	Μ17: *Το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου είναι 16μ. γιατί 2 εκ. είναι το ένα κουτάκι επί 8 που είναι όλα τα κουτάκια.*
	Σύγχυση έννοιας περιμέτρου με μήκος πλευράς	Μ21: *Το Α είναι τετράγωνο και το Β ορθογώνιο. Το εμβαδόν στο Α είναι 6 εκ. και στο Β 9 εκ. Το Β είναι μεγαλύτερο γιατί είναι μακρόστενο.*
Διαδικασία εύρεσης του εμβαδού	Άγνοια διαδικασίας	Μ12: *Δεν τα πάω καλά με το να βρίσκω το εμβαδόν*
	Λανθασμένη δόμηση επιφάνειας (με το μολύβι)	(Ο μαθητής δόμησε την επιφάνεια σε μορφή πλέγματος αλλά δεν αποτελούνταν από ίσες μονάδες.)
	Λανθασμένη κάλυψη	(Ο μαθητής χρησιμοποίησε το

	επιφάνειας με πρόσθετο εκπαιδευτικό υλικό	υλικό που του δόθηκε αλλά πραγματοποίησε είτε κενά είτε επικαλύψεις).
	Σωστή κάλυψη, λάθος καταμέτρηση μονάδων	(Ο μαθητής κάλυψε την επιφάνεια με το εκπαιδευτικό υλικό τηρώντας τις αρχές μέτρησης, αλλά δεν καταμέτρησε σωστά τις μονάδες με τις οποίες το κάλυψε)
	Σωστή δόμηση, λάθος (ή μη) καταμέτρηση μονάδων	(Ο μαθητής σχεδίασε σωστά το πλέγμα το μολύβι αλλά δεν μέτρησε σωστά τις μονάδες)
	Σωστή κάλυψη επιφάνειας, λάθος (ή μη) καταμέτρηση μονάδων	(Ο μαθητής κάλυψε σωστά την επιφάνεια αλλά δεν μέτρησε σωστά τις μονάδες)
	Σύγχυση τύπου εύρεσης του εμβαδού (μήκος πλευράς * πλήθος τετραγώνων)	Μ17: *Το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου είναι 16μ γιατί 2 εκ είναι το ένα κουτάκι, επί 8 που είναι όλα τα κουτάκια.*
Διαδικασία επίλυσης έργου	Υπολογισμός περιμέτρου, αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού	Μ20: *Το Α είναι τετράγωνο και η περίμετρός του είναι 24 εκ. Το Β είναι ορθογώνιο και η περίμετρός του είναι 26 εκ.*
	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	Μ1: *Το εμβαδόν του κήπου είναι 4 τμ. Διαίρεσα τις πλευρές με την περίμετρο και το βρήκα. 28:14=2, 2*2=4τμ.*
	Γνώση του τύπου του Εμβ., χωρίς την εφαρμογή του	Μ9: *Οι σβησμένες είναι ίσες με τις απέναντι άρα μπορώ να τις υπολογίσω. Εμβ=8*17*
	Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	Μ24: *Το Α είναι τετράγωνο και το Β ορθογώνιο.*

	Καταγραφή στρατηγικής επίλυσης, όχι επίλυση	Μ13: *Μέτρησα την κάθε πλευρά του σχήματος με τον χάρακα και σκέφτηκα ότι μπορώ να χωρίσω το σχήμα σε δύο τετράγωνα, δηλαδή μέτρησα……*
	Λάθος αποτέλεσμα από χρήση χάρακα	Μ12: *Μπορείς να το βρεις είναι 16*8=128, πολλαπλασιάζεις τις δύο πλευρές που φαίνονται.*
	Λάθος αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού	Μ26: *Ναι μπορώ να το βρω γιατί άμα πολλαπλασιάσω τις δύο πλευρές θα βρω το εμβαδόν. 17*8=145. Το εμβαδόν είναι 145 τμ.*
	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση-απόδοση ενός αριθμού	Μ18: *12 περίμετρο, 60 εμβ*
	Λάθος απάντηση χωρίς χρήση δεδομένων (διαισθητική απάντηση)	Μ2: *Πρέπει να έχει ορθογώνιο σχήμα γιατί το ορθογώνιο είναι πλατύ.*
	Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με περίμετρο 16	Μ27: *Ο μαθητής σχεδίασε ένα ορθογώνιο (6*2) και έγραψε 6+6+2+2=16 εκ. 2*6=12 τ. εκ.*
	Καμία απάντηση	Ο μαθητής δεν κατέγραψε κάποια απάντηση στο έργο
Εκφώνηση έργου	Μη κατανόηση έννοιας-Μη επεξεργασία δεδομένων	Μ14 (ερώτημα 5^{ο}): *16*16*16*16=256 εκ. η επιφάνεια του παρτεριού είναι 256εκ.*
	Μη χρήση δεδομένων	Μ19 : *Το σχήμα πρέπει να είναι μακρουλό και λεπτό.*
Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση	Σωστή απάντηση, η οποία ανταποκρίνονταν σε όλους τους δείκτες που ορίστηκαν στην

		κλίμακα παραπάνω.

Πίνακας 9 : Κατηγοριοποίηση λαθών στις απαντήσεις των μαθητών

4.2.2 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις

Σκοπός της συγκεκριμένης ανάλυσης είναι η διαπίστωση του βαθμού βελτίωσης, ή όχι στις επιδόσεις των μαθητών, ανεξάρτητα από την διδακτική προσέγγιση στην οποία συμμετείχαν.

Έτσι, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν ως προς την έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις και αφορούν στο σύνολο του δείγματος ανεξάρτητα της παρέμβασης στην οποία συμμετείχαν. Τα αποτελέσματα προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο Γεωμετρίας που τους δόθηκε πριν και μετά τις παρεμβάσεις, το οποίο συμπλήρωσαν ατομικά. Αρχικά παρουσιάζονται οι επιδόσεις με βάση τους μέσους όρους που προέκυψαν πριν και μετά τις παρεμβάσεις και στη συνέχεια, αναλύεται κάθε ερώτημα ξεχωριστά.

Ο μέσος όρος του δείγματος πριν τις παρεμβάσεις ήταν 1,84, ενώ μετά από αυτές 4,48 με μέγιστη βαθμολογία τις 12 μονάδες. Πριν τις παρεμβάσεις 11 μαθητές του δείγματος κατάφεραν μεγαλύτερη βαθμολογία από τον μέσο όρο, ενώ μετά τις παρεμβάσεις 16 μαθητές. Ακόμη, 10 μαθητές αρχικά, δεν κατάφεραν να βαθμολογηθούν σε κάποιο έργο, με αποτέλεσμα να έχουν 0 μονάδες στην αξιολόγηση της επίδοσής τους. Ωστόσο, μετά τις παρεμβάσεις δεν παρατηρήθηκε κάτι αντίστοιχο.

Ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 10) δείχνει τους μέσους όρους κάθε ερώτησης πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση στο σύνολο του δείγματος, δείχνοντας άνοδο στους μέσους όρους στο μετα-πειραματικό δοκίμιο σε όλες τις ερωτήσεις, σε άλλες λιγότερο και σε άλλες περισσότερο.

Έργο δοκιμίου	Μ.Ο. πριν από τις παρεμβάσεις	Μ.Ο. μετά από τις παρεμβάσεις
2ο	0,93	2,43
3ο	0,43	1,36
4ο	0,29	0,32

5ο	0,20	0,38

Πίνακας 10: Σύγκριση Μ.Ο επίδοσης του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις σε κάθε ερώτημα

Όπως διαπιστώνεται από τον παραπάνω πίνακα, η βελτίωση στα δύο πρώτα έργα, τα οποία θύμιζαν περισσότερο αυτά του σχολικού εγχειριδίου ήταν μεγαλύτερη απ’ ό,τι τα δύο τελευταία του δοκιμίου, που είχαν σύνθετη εκφώνηση.

Στη συνέχεια, μελετάται η βελτίωση ή μη των επιδόσεων των μαθητών του δείγματος ανά ερώτημα.

<u>2ο ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**
Έννοια	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	3	**Έννοια**	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	3
	Σύγχυση εμβαδού με μήκος πλευράς	1			
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Λάθος δόμηση επιφάνειας	2	**Διαδικασία εύρεσης εμβαδού**	Λάθος δόμηση επιφάνειας	1
				Λάθος κάλυψη επιφάνεια πρόσθετο ΕΥ	1
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός περιμέτρου, αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού	3	**Διαδικασία επίλυσης**	Υπολογισμός περιμέτρου, αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού	4
				Λάθος	1

				αποτέλεσμα, υπολογισμός ενός σχήματος	
	Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	4		Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	1
	Καμία απάντηση	11			
Σωστές απαντήσεις		4	**Σωστές απαντήσεις**		17
Σύνολο		28	**Σύνολο**		28

Πίνακας 11: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο του δοκιμίου παρατηρήθηκε ότι μετά τις παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν αυξήθηκε αισθητά ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, ενώ δεν διαπιστώθηκε περίπτωση μαθητή που δεν κατέγραψε κάποια απάντηση (Πίνακας 11). Η σύγχυση της έννοιας του εμβαδού με αυτή της περιμέτρου παρατηρήθηκε σε τρεις (3) περιπτώσεις μαθητών, εκ των οποίων ο ένας πραγματοποίησε το ίδιο λάθος πριν και μετά την παρέμβαση στην οποία συμμετείχε. Αδυναμία δόμησης της επιφάνειας, παρατηρήθηκε στην απάντηση μαθήτριας (Μ11), τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση. Ο υπολογισμός της περιμέτρου, χωρίς τον υπολογισμό των επιφανειών διαπιστώθηκε σε τρεις (3) περιπτώσεις πριν τις παρεμβάσεις και σε τέσσερις (4) μετά από αυτές, χωρίς να είναι οι ίδιοι μαθητές. Ο αριθμός εκείνων που αναγνώρισαν και ονόμασαν απλώς τα δύο σχήματα, ήταν τέσσερις (4) πριν από τις παρεμβάσεις και ένας (1) μετά από αυτές.

3ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**
Έννοια	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	1	**Έννοια**	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	1

Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Άγνοια διαδικασίας	1			
				Λάθος δόμηση επιφάνειας	1
	Σωστή δόμηση, λάθος (ή μη) καταμέτρηση	2		Σωστή δόμηση, λάθος (ή μη) καταμέτρηση	2
				Σωστή κάλυψη, λάθος καταμέτρηση	1
Διαδικασία επίλυσης			**Διαδικασία επίλυσης**	Λάθος αποτέλεσμα από χρήση χάρακα	6
				Λάθος αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού	1
				Γνώση του τύπου του Ε, χωρίς την εφαρμογή του	3
	Μη κατανόηση της έννοιας-μη επεξεργασία δεδομένων	3			
	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση-απόδοση ενός αριθμού	1			
	Καμία απάντηση	14			
Σωστές απαντήσεις		6	**Σωστές απαντήσεις**		13
Σύνολο		28	**Σύνολο**		28

Πίνακας 12: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Στο ερώτημα αυτό παρατηρήθηκε μεγάλη αύξηση των σωστών απαντήσεων από τις 6, στις 13 (Πίνακας 12). Αξίζει να αναφερθεί ότι δεν υπήρξε κάποιος από τους μαθητές του δείγματος που να μην κατέγραψε κάποιο απάντηση στο συγκεκριμένο έργο. Αυτό που μπορεί να διαπιστωθεί και από τον παραπάνω πίνακα είναι ότι τα λάθη που εντοπίστηκαν είχαν να κάνουν κυρίως με λάθη στη χρήση του χάρακα (6) (αδυναμία σωστής μέτρησης του μήκους των πλευρών), λάθη στον πολλαπλασιασμό από τη χρήση του τύπου (1) , ενώ παρατηρήθηκε και η καταγραφή του χωρίς την εφαρμογή του (3).

<u>4ο ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός απαντήσεων**
Έννοια	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	6	**Έννοια**	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	3
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού			**Διαδικασία εύρεσης εμβαδού**	Σύγχυση τύπου εύρεσης εμβαδού (μήκος πλευράς * πλήθος τετραγώνων)	2
	Σωστή κάλυψη επιφάνειας, λάθος (ή μη) καταμέτρηση	1		Σωστή κάλυψη επιφάνειας, λάθος (ή μη) καταμέτρηση	1
Διαδικασία επίλυσης			**Διαδικασία επίλυσης**	Καταγραφή στρατηγικής	1

				επίλυσης, αλλά όχι επίλυση	
				Μη χρήση δεδομένων	1
	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	3		Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	1
	Λάθος απάντηση, χωρίς εξήγηση	2		Λάθος απάντηση, χωρίς εξήγηση	2
	Καμία απάντηση	15		Καμία απάντηση	14
Σωστές απαντήσεις		1	**Σωστές απαντήσεις**		3
Σύνολο		28	**Σύνολο**		28

Πίνακας 13: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις (4^{ο} ερώτημα/έργο)

Ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησε στο συγκεκριμένο έργο, εξακολούθησε να είναι μεγάλος, ακόμα και μετά τις παρεμβάσεις που πραγματοποιήθηκαν (Πίνακας 13). Μειώθηκε ο αριθμός των απαντήσεων που είχαν να κάνουν με λάθη ως προς την έννοια του εμβαδού, ενώ αυξήθηκαν τα λάθη που αφορούσαν τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού και της επίλυσης του έργου.

<u>5^{ο} ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις	Μετά από τις παρεμβάσεις

Έννοια	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	3	**Έννοια**	Σύγχυση εμβαδού με περίμετρο	3
				Σύγχυση έννοιας περιμέτρου με μήκος πλευράς	1
Διαδικασία επίλυσης	Λάθος απάντηση χωρίς χρήση δεδομένων (διαισθητική απάντηση)	5	**Διαδικασία επίλυσης**		
	Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με περίμετρο 16	1		Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με περίμετρο 16	3
				Ανακάλυψη δύο σχημάτων με περίμετρο 16	1
	Καμία απάντηση	16		Καμία απάντηση	18
Σωστές απαντήσεις	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος, του τετραγώνου, σωστή απάντηση	3	**Σωστές απαντήσεις**	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος, του τετραγώνου, σωστή απάντηση	2
Σύνολο		28	**Σύνολο**		28

Πίνακας 14: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών του συνόλου του δείγματος πριν και μετά τις παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

Στο έργο αυτό, μεγάλο μέρος του δείγματος δεν κατάφερε να καταγράψει κάποια απάντηση ούτε πριν (16), ούτε μετά τις παρεμβάσεις (18) (Πίνακας 14). Οι σωστές απαντήσεις ήταν παρόμοιες σε αριθμό, χωρίς όμως να ακολουθούν την αναμενόμενη διαδικασία επίλυσης, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να συμπεράνουμε αν η ανακάλυψη του σωστού σχήματος ήταν τυχαία. Αξίζει να σχολιαστεί ότι πριν τις παρεμβάσεις παρατηρήθηκαν απαντήσεις (λανθασμένες) σε διαισθητικά και όχι μαθηματικά δεδομένα, μια εικόνα που δεν αποκομήθηκε μετά τις παρεμβάσεις.

4.2.3 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια ανά διδακτική προσέγγιση

4.2.3.1 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια ανά διδακτική προσέγγιση πριν και μετά τις παρεμβάσεις

Στο παρακάτω κεφάλαιο αναλύονται τα αποτελέσματα των μαθητών πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Η ανάλυση αυτή θα γίνει ανάλογα με την παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν και τα αποτελέσματα προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο δοκίμιο που συμπλήρωσαν. Αρχικά, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιδόσεων συνολικά στα έργα του δοκιμίου και στη συνέχεια γίνεται ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων σε κάθε έργο ξεχωριστά.

Παραδοσιακή

Η ομάδα μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση πέτυχε μέσο όρο επιδόσεων 3,28, ενώ μετά από αυτή 5,5. Η χαμηλότερη βαθμολογία επίδοσης αρχικά ήταν οι 0 μονάδες, ενώ μετά την παρέμβαση οι 2,5. Η υψηλότερη ήταν 8 μονάδες, τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση, βαθμολογία ωστόσο που δεν επιτεύχθηκε από τον ίδιο μαθητή.

2ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά από τις παρεμβάσεις		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός Περιμέτρου, αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης εμβαδού	2	**Διαδικασία επίλυσης**		
				Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	1
	Καμία απάντηση	4			
Σωστές απαντήσεις		3	**Σωστές απαντήσεις**		8
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 15: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών παραδοσιακής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Όπως διαπιστώνεται και από τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 15), το συγκεκριμένο έργο δεν φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές μετά την παρέμβαση. Μοναδική ήταν η περίπτωση μαθητή που δεν έκανε καμία αναφορά στα ερωτήματα, ενώ το μόνο που κατέγραψε είναι η ονομασία των σχημάτων.

3ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά τις παρεμβάσεις		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**

Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Σωστή δόμηση/Μη καταμέτρηση μονάδων	1			
Διαδικασία επίλυσης	Μη κατανόηση έννοιας/ μη επεξεργασία δεδομένων	2			
				Γνώση του τύπου του Εμβ., χωρίς εφαρμογή	3
	Καμία απάντηση	2			
Σωστή απάντηση		4	**Σωστή απάντηση**		6
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 16: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών παραδοσιακής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο φάνηκε οι μαθητές να κατανοούν την διαδικασία μέτρησης του εμβαδού. Εκτός από τις σωστές απαντήσεις που αυξήθηκαν σε αριθμό, δεν διαπιστώθηκαν δυσκολίες ως προς την κατανόηση των δεδομένων της εκφώνησης (Πίνακας 16). Υπήρξαν και τρεις (3) περιπτώσεις που ενώ γνώριζαν τον τύπο του εμβαδού και τον κατέγραψαν, δεν τον εφάρμοσαν, ενώ πριν τις παρεμβάσεις δεν είχαν καταγράψει κάποια απάντηση.

4ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με	1	**Έννοια**	Σύγχυση με	1

	την περίμετρο			την περίμετρο	
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	2	**Διαδικασία επίλυσης**	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	1
	Καμία απάντηση	5		Καμία απάντηση	6
Σωστή απάντηση		1	**Σωστή απάντηση**		1
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 17: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών παραδοσιακής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (4^{ο} ερώτημα/έργο)

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, τα λάθη που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις τους ήταν ίδια ακόμα και μετά την παρέμβαση. Οι μαθητές που πραγματοποίησαν τα συγκεκριμένα λάθη δεν ήταν οι ίδιοι. Από τους έξι (6) που δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση μετά την παρέμβαση, οι τρεις (3) δεν είχαν καταγράψει ούτε πριν από αυτήν (Πίνακας 17).

<u>5^{ο} ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1	**Έννοια**	Σύγχυση με την περίμετρο	1
Διαδικασία επίλυσης	Λάθος απάντηση χωρίς χρήση δεδομένων (διαισθητική προσέγγιση)	2	**Διαδικασία επίλυσης**		
				Ανακάλυψη μόνο ενός	1

				σχήματος με περίμετρο 16	
	Καμία απάντηση	5		Καμία απάντηση	7
Σωστή απάντηση	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος, του τετραγώνου	1			
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 18: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών παραδοσιακής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (5^{ο} ερώτημα/έργο)

Οι μαθητές της παραδοσιακής διδασκαλίας δυσκολεύτηκαν τόσο πριν όσο και μετά την πραγματοποίησή της. Αυξημένος ήταν ο αριθμός εκείνων που δεν απάντησαν, ενώ δεν καταγράφηκε κάποια σωστή απάντηση μετά την παρέμβαση. (Πίνακας 18).

Δομημένη

Η ομάδα της δομημένης διερευνητικής προσέγγισης πέτυχε μέσο όρο επιδόσεων 1,55 πριν την διδακτική παρέμβαση και 3,61 μετά από αυτή. Η χαμηλότερη βαθμολογία ήταν αρχικά 0 μονάδες, ενώ στο μεταδιαγνωστικό δοκίμιο 1 μονάδα. Η υψηλότερη ήταν πριν την παρέμβαση 2,5 μονάδες και 6 μετά από αυτή.

2^{ο} ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	2	**Έννοια**	Σύγχυση με την περίμετρο	2

Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Λάθος δόμηση επιφάνειας	2	**Διαδικασία εύρεσης εμβαδού**	Λάθος δόμηση επιφάνειας	1
				Λάθος κάλυψη επιφάνειας	1
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός περιμέτρου αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού	1			
	Καμία απάντηση	3			
Σωστή απάντηση		1	**Σωστή απάντηση**		5
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 19: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών δομημένης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο φάνηκε να έχουν βελτιωθεί οι επιδόσεις των μαθητών της δομημένης προσέγγισης, ενώ δεν παρατηρήθηκε κάποια περίπτωση μαθητή που δεν κατέγραψε κάτι ως απάντηση, μετά τις παρεμβάσεις (Πίνακας 19). Από τους δύο (2) μαθητές που δεν δόμησαν σωστά την επιφάνεια, ο ένας (Μ11) δυσκολεύτηκε και μετά την παρέμβαση. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στην περίπτωση των λαθών ως προς την σύγχυση της έννοιας του εμβαδού με την περίμετρο, όπου ο ένας από τους δύο μαθητές ήταν ο ίδιος στα προ και στα μεταδιαγνωστικά αποτελέσματα.

Τέλος, διαπιστώθηκε πως δεν υπήρξε, στο συγκεκριμένο έργο, κάποια ομοιομορφία ως προς τα λάθη στις απαντήσεις των μαθητών που ανήκαν στην ίδια ομάδα κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων.

3ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά από τις παρεμβάσεις		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
			Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Άγνοια διαδικασίας	1	**Διαδικασία εύρεσης εμβαδού**		
				Σωστή κάλυψη/λάθος καταμέτρηση μονάδων	1
Διαδικασία επίλυσης	Μη κατανόηση έννοιας-μη επεξεργασία δεδομένων	1	**Διαδικασία επίλυσης**		
				Λάθος αποτέλεσμα από χρήση χάρακα	5
	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση-απόδοση ενός αριθμού	1			
	Καμία απάντηση	5			
Σωστή απάντηση		1	**Σωστή απάντηση**		2
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 20: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών δομημένης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Παρατηρήθηκε ότι η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών δεν εμφάνισε μεγάλη βελτίωση στο έργο αυτό, ως προς τις σωστές απαντήσεις. Οι σωστές απαντήσεις αυξήθηκαν ελάχιστα (κατά μία απάντηση), ενώ παράλληλα τα λάθη που εντοπίστηκαν ήταν διαφορετικά σε σχέση με αυτά πριν τις παρεμβάσεις. (Πίνακας 20) Τα περισσότερα προήλθαν από λάθος χρήση του χάρακα, με αποτέλεσμα να μην μετρηθεί σωστά το μήκος της κάθε πλευράς του σχήματος.

Οι μοναδικές δύο (2) σωστές απαντήσεις μετά την παρέμβαση ανήκαν στην ίδια ομάδα, ωστόσο στα λάθη των υπολοίπων μελών δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τα λάθη σε σχέση με την ομάδα.

<u>4ο ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	3	**Έννοια**	Σύγχυση με την περίμετρο	1
			Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Σύγχυση τύπου εύρεσης (μήκος πλευράς * πλήθος τετραγώνων)	2
				Σωστή κάλυψη, λάθος καταμέτρηση μονάδων	1

Διαδικασία επίλυσης	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση	2	**Διαδικασία επίλυσης**	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση	2
				Καταγραφή στρατηγική επίλυσης, αλλά όχι επίλυση	1
				Μη χρήση δεδομένων	1
	Καμία απάντηση	4			
			Σωστή απάντηση		1
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 21: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών δομημένης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (4^{ο} ερώτημα/έργο)

Το συγκεκριμένο έργο φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές ακόμη και μετά την παρέμβαση καθώς μετά από αυτή καταγράφηκε μόνο μία σωστή απάντηση. Τα λάθη που είχαν παρατηρηθεί πριν την παρέμβαση (σύγχυση με την περίμετρο, λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση), εξακολουθούσαν να υπάρχουν και μετά από αυτή ενώ προστέθηκαν και άλλα όπως η σύγχυση του τύπου εύρεσης του εμβαδού, τη σωστή κάλυψη αλλά λανθασμένη καταμέτρηση των μονάδων καθώς και τη μη χρήση δεδομένων της εκφώνηση (Πίνακας 21).

Τα μέλη των ομάδων αυτού του τμήματος, δεν εμφάνισαν κάποια ομοιομορφία ως προς τα λάθη στις απαντήσεις τους, καθώς διέφεραν ως προς το είδος.

5ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά από τις παρεμβάσεις		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	2	**Έννοια**	Σύγχυση με την περίμετρο	2
Διαδικασία επίλυσης	Λάθος απάντηση χωρίς χρήση δεδομένων (διαισθητική απάντηση)	1			
	Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με περίμετρο 16	1			
				Ανακάλυψη δύο σχημάτων με περίμετρο 16	1
	Καμία απάντηση	3		Καμία απάντηση	5
Σωστή απάντηση	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος	2	**Σωστή απάντηση**	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος	1
Σύνολο		9	**Σύνολο**		9

Πίνακας 22: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών δομημένης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο δεν βελτιώθηκαν οι σωστές απαντήσεις των μαθητών, ενώ παράλληλα αυξήθηκαν εκείνοι που δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση. Ο μαθητής που ανακάλυψε μόνο το σωστό σχήμα με περίμετρο 16 και το μεγαλύτερο εμβαδό, ήταν και ο ένας από τους δύο που το ανακάλυψαν και πριν την παρέμβαση (Πίνακας 22).

Και στο ερώτημα αυτό, δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τα λάθη στις απαντήσεις και τα λάθη των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο.

Καθοδηγούμενη

Η ομάδα μαθητών της καθοδηγούμενης διερευνητικής προσέγγισης πέτυχε μέσο όρο επιδόσεων 0,8 πριν την παρέμβαση και 4,35 μετά από αυτή. Η χαμηλότερη βαθμολογία στο αρχικό δοκίμιο ήταν 0 μονάδες, ενώ μετά από την παρέμβαση 2,5. Η υψηλότερη ήταν 3 μονάδες πριν την παρέμβαση και 7,5 μετά την πραγματοποίησή τους.

2ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1	**Έννοια**	Σύγχυση με την περίμετρο	1
	Σύγχυση με το μήκος πλευράς	1			
Διαδικασία επίλυσης	Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	4	**Διαδικασία επίλυσης**		
				Υπολογισμός Περιμέτρου, αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης	4

				εμβαδού	
				Υπολογισμός εμβαδού ενός σχήματος	1
	Καμία απάντηση	4			
			Σωστή απάντηση		4
Σύνολο		10	**Σύνολο**		10

Πίνακας 23: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές βελτίωσαν τις επιδόσεις τους. Συγκεκριμένα, αυξήθηκαν οι σωστές απαντήσεις, ενώ ακόμη και εκείνοι που δεν μέτρησαν το εμβαδόν είχαν υπολογίσει την έννοια της περιμέτρου (Πίνακας 23).

Οι απαντήσεις και τα λάθη των μαθητών που ανήκαν στην ομάδα κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων, δεν εμφάνισαν κάποια ομοιομορφία μεταξύ τους.

<u>3ο ερώτημα/έργο</u>

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1			
			Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Λάθος δόμηση επιφάνειας	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Σωστή δόμηση/Μη καταμέτρηση μονάδων	1		Σωστή δόμηση, λάθος (ή μη) καταμέτρηση μονάδων	2

			Διαδικασία επίλυσης	Λάθος αποτέλεσμα από χρήση χάρακα	1
				Λάθος αποτέλεσμα πολλ/σμού	1
	Καμία απάντηση	7			
Σωστή απάντηση		1	**Σωστή απάντηση**		5
Σύνολο		10	**Σύνολο**		10

Πίνακας 24: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Οι σωστές απαντήσεις στο συγκεκριμένο έργο αυξήθηκαν σε σχέση με αυτές που καταγράφηκαν πριν τις παρεμβάσεις. Εκτός από την λανθασμένη καταμέτρηση των μονάδων που παρατηρήθηκε και πριν τις παρεμβάσεις, διαπιστώθηκαν λάθη που αφορούσαν στη δόμηση της επιφάνειας, στη χρήση του χάρακα και στο αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού (Πίνακας 24).

Ακόμη, παρατηρήθηκε ότι η μία ομάδα της καθοδηγούμενης παρέμβασης κατέγραψε σωστές απαντήσεις ή έκανε λάθη που είχαν να κάνουν με το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή τη χρήση του χάρακα. Από την άλλη, όσοι μαθητές της άλλης ομάδας δεν κατέγραψαν σωστές απαντήσεις, έκαναν λάθη ως προς τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού και συγκεκριμένα τη λανθασμένη κάλυψη της επιφάνειας ή τη λανθασμένη καταμέτρηση των μονάδων.

4ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με	2	**Έννοια**	Σύγχυση με	1

	την περίμετρο			την περίμετρο	
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Σωστή κάλυψη/λάθος καταμέτρηση	1			
	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	1			
Διαδικασία επίλυσης	Καμία απάντηση	6	**Διαδικασία επίλυσης**	Καμία απάντηση	8
			Σωστή απάντηση		1
Σύνολο		10	**Σύνολο**		10

Πίνακας 25: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (4ο ερώτημα/έργο)

Μετά τη συγκεκριμένη παρέμβαση, δόθηκε μόνο μία σωστή απάντηση, ενώ ο αριθμός των απαντήσεων που δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση αυξήθηκε, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να διαπιστωθεί η επίδοση των υπόλοιπων μαθητών. Αξίζει ωστόσο να σχολιαστεί ότι οι μαθητές της μία ομάδας δεν κατέγραψαν καμία απάντηση, ενώ από την άλλη δύο (2) μαθητές απάντησαν, εκ των οποίων ο ένας μάλιστα σωστά (Πίνακας 25).

5ο ερώτημα/έργο

Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Λάθη ως προς**	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**
			Έννοια	Σύγχυση έννοιας περιμέτρου με μήκος πλευράς	1

Διαδικασία επίλυσης	Λάθος απάντηση χωρίς χρήση δεδομένων (διαισθητική απάντηση)	2	**Διαδικασία επίλυσης**		
				Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με περίμετρο 16	2
	Καμία απάντηση	8		Καμία απάντηση	6
			Σωστή απάντηση	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος, του τετραγώνου	1
Σύνολο		10	**Σύνολο**		10

Πίνακας 26: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης πριν και μετά τις παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

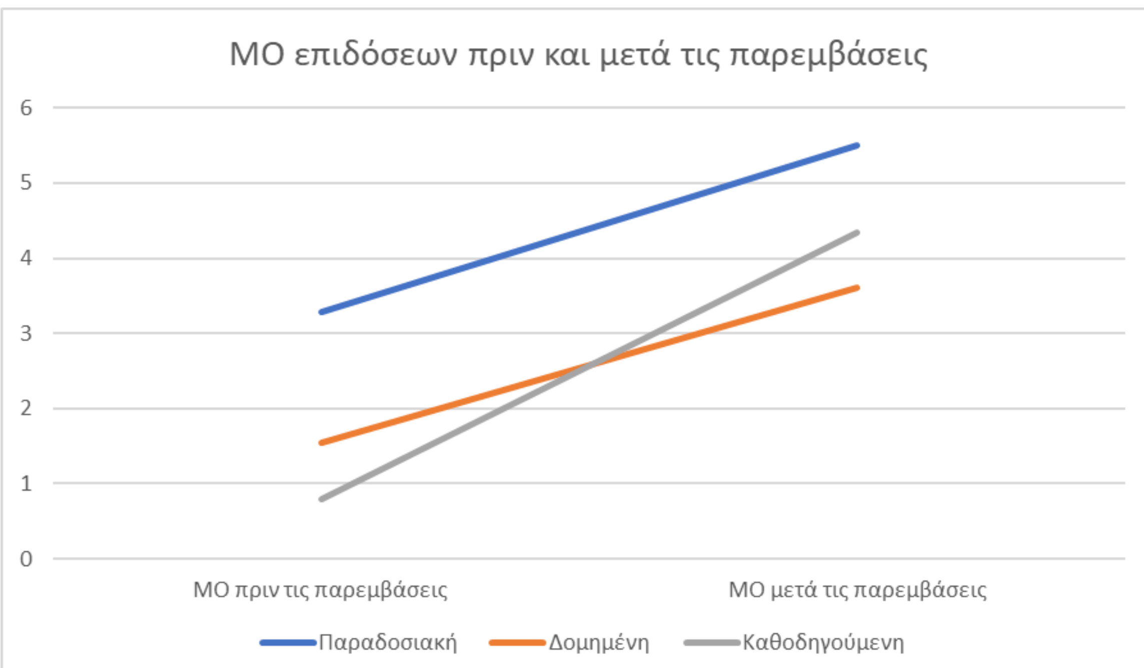
Οι μαθητές που δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση ήταν σχεδόν οι ίδιοι σε αριθμό. Μόνο ένας κατάφερε να απαντήσει σωστά, ενώ απουσίαζαν οι διαισθητικές απαντήσεις (Πίνακας 26). Τέλος, δεν διαπιστώθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τις σωστές απαντήσεις και τα λάθη των μαθητών που ανήκαν στην ίδια ομάδα κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

4.2.3.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων ως προς τη μαθηματική έννοια μετά τις παρεμβάσεις ανά διδακτική προσέγγιση

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύονται τα αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια που προέκυψαν από τους μαθητές, με βάση τις απαντήσεις τους στα δοκίμια μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, τα οποία μελετώνται σε σχέση με την ομάδα διδασκαλίας στην οποία συμμετείχαν (παραδοσιακή, δομημένη, καθοδηγούμενη). Αρχικά, γίνεται αναφορά στους μέσους όρους των επιδόσεων της κάθε ομάδας και στη συνέχεια στις δυσκολίες και τα λάθη που εντοπίστηκαν σε κάθε ερώτημα (Πίνακας 27).

	Πριν από τις παρεμβάσεις	**Μετά από τις παρεμβάσεις**
Παραδοσιακή	3,28	5,5
Δομημένη	1,55	3,61
Καθοδηγούμενη	0,8	4,35

Πίνακας 27: Συγκριτική παράθεση μέσων όρων επίδοσης της κάθε ομάδας μαθητών πριν και μετά τις παρεμβάσεις



Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω δεδομένα, οι μαθητές του δείγματος βελτίωσαν τις επιδόσεις τους ανεξάρτητα από την διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Με μία πιο προσεκτική ματιά, και με μικρές διαφορές, οι μαθητές που συμμετείχαν στην παραδοσιακή διδασκαλία κατάφεραν μεγαλύτερο μέσο όρο στις επιδόσεις τους. Τον μέσο όρο επίδοσης στα συγκεκριμένα έργα του δοκιμίου φάνηκε να βελτιώνουν και οι μαθητές των διερευνητικών παρεμβάσεων. Λαμβάνοντας υπόψη και τους μέσους όρους, όπως προέκυψαν από τα δοκίμια που συμπληρώθηκαν πριν από τις παρεμβάσεις, οι μαθητές της καθοδηγούμενης φάνηκε να έχουν μεγαλύτερη διαφορά στη βελτίωσή τους.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αναλύονται οι επιδόσεις των μαθητών της κάθε παρέμβασης ανά ερώτημα με στόχο την κατηγοριοποίηση λαθών της κάθε ομάδας και το ποσοστό των σωστών τους απαντήσεων.

<u>2ο ερώτημα/έργο</u>

		Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο		2	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Λάθος κάλυψη επιφάνειας		1	
	Λάθος δόμηση επιφάνειας		1	
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός περιμέτρου αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης εμβαδού			1
	Αναγνώριση και ονομασία σχημάτων (καμία αναφορά στα ερωτήματα)	1		

	Υπολογισμός εμβαδού ενός σχήματος			1
Σωστές απαντήσεις		8	5	4
Σύνολο		9	9	10

Πίνακας 28: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών ανά παρέμβαση μετά την εφαρμογή τους (2ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο ερώτημα, οι μαθητές της παραδοσιακής πέτυχαν μεγαλύτερο μέσο όρο στις επιδόσεις τους (3,2), έναντι των μαθητών της δομημένης (1,66) και της καθοδηγούμενης (2,4). Δυσκολίες ως προς την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών της δομημένης διδασκαλίας, οι οποίες δεν φάνηκαν στις απαντήσεις όσων συμμετείχαν στη παραδοσιακή διδασκαλία. Μόνο ένας (1) ήταν ο μαθητής που σύγχυσε την έννοια του εμβαδού με αυτή της περιμέτρου, ενώ δύο (2) ήταν εκείνοι που δεν ολοκλήρωσαν την επίλυση του έργου. Όσον αφορά στις σωστές απαντήσεις πέρα από το γεγονός ότι στην περίπτωση της παραδοσιακής διδασκαλίας ήταν περισσότερες σε αριθμό, κατάφεραν και μεγαλύτερη βαθμολογία (5 μαθητές αξιολογήθηκαν με 4 μονάδες), ενώ στις άλλες δύο ομάδες οι μαθητές ενώ ολοκλήρωναν σωστά τους υπολογισμούς των εμβαδών και των περιμέτρων, δεν απαντούσαν στο ερώτημα που ήταν η σύγκρισή τους (Πίνακας 28).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι μετά τις παρεμβάσεις η πλειονότητα των μαθητών του συνολικού δείγματος χρησιμοποίησαν τον αλγεβρικό τύπο μέτρησης τους εμβαδού, ενώ τέσσερις (4) από τους μαθητές της δομημένης παρέμβασης χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί, εκ των οποίων οι δύο (2) το χρησιμοποίησαν και πριν τις παρεμβάσεις.

3ο ερώτημα/έργο

		Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο		1	

Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Λάθος δόμηση επιφάνειας			1
	Σωστή κάλυψη/ λάθος (ή μη) καταμέτρηση μονάδων		1	2
Διαδικασία επίλυσης	Λάθος αποτέλεσμα από χρήση χάρακα		5	1
	Λάθος αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού			1
	Γνώση του τύπου του Εμβ., χωρίς εφαρμογή	3		
Σωστές απαντήσεις		6	2	5
Σύνολο		9	9	10

Πίνακας 29: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών ανά παρέμβαση μετά την εφαρμογή τους (3ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές της παραδοσιακής είχαν μεγαλύτερο μέσο όρο στις επιδόσεις τους (1,67), με τους μαθητές της δομημένης (1,22) και της καθοδηγούμενης (1,2) να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οι μαθητές της παραδοσιακής διδασκαλίας κατέγραψαν περισσότερες σωστές απαντήσεις σε σχέση με τις άλλες δύο ομάδες μαθητών. Μάλιστα, οι απαντήσεις αυτές βαθμολογήθηκαν και με το μέγιστο των μονάδων, ενώ στις άλλες δύο ομάδες κάτι έλειπε, όπως για παράδειγμα η απόδοση μονάδων στην απάντηση. Ακόμη και εκείνοι που δεν απάντησαν σωστά, φάνηκε να γνωρίζουν τον τύπο εύρεσης του εμβαδού, τον οποίο κατέγραψαν αλλά δεν εφάρμοσαν. Οι μαθητές της δομημένης (5 σε αριθμό) στο συγκεκριμένο ερώτημα εμφάνισε δυσκολία στη χρήση του χάρακα, κάτι που προκάλεσε εντύπωση καθώς το χρησιμοποίησαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης. Από την άλλη, οι μαθητές της καθοδηγούμενης αντιμετώπισαν δυσκολίες στη δόμηση (1) ή κάλυψη της επιφάνειας (2) με το εκπαιδευτικό υλικό (Πίνακας 29)

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης χρησιμοποίησαν μόνο τον αλγεβρικό τύπο τον οποίο διδάχθηκαν, ενώ δύο (2) μαθητές από τις άλλες δύο ομάδες (δομημένη και καθοδηγούμενη), χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί.

4ο ερώτημα/έργο

		Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1	1	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	Σωστή κάλυψη, λάθος καταμέτρηση μονάδων		1	
	Σύγχυση τύπου εύρεσης (μήκος πλευράς * πλήθος τετραγώνων)		2	
Διαδικασία επίλυσης	Υπολογισμός εμβαδού μέρους του σχήματος	1		
	Λάθος απάντηση χωρίς εξήγηση		2	
	Καταγραφή στρατηγικής επίλυσης, αλλά όχι επίλυση		1	
	Μη χρήση δεδομένων		1	
	Καμία απάντηση	6		8
Σωστές απαντήσεις		1	1	1

Σύνολο		9	9	10

Πίνακας 30: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών ανά παρέμβαση μετά την εφαρμογή τους (4ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο ο μέσος όρος των επιδόσεων ήταν παρόμοιος σε όλες τις ομάδες μαθητών. Συγκεκριμένα με μέγιστη τη βαθμολογία των 4 μονάδων, οι μαθητές της παραδοσιακής κατάφεραν 0,39, οι μαθητές της δομημένης 0,5 και οι μαθητές της καθοδηγούμενης 0,1.

Οι σωστές απαντήσεις ήταν μία σε κάθε ομάδα, ενώ η μόνη περίπτωση που κατέγραψαν μία απάντηση όλοι οι μαθητές ήταν η ομάδα της δομημένης προσέγγισης.

Ως προς την έννοια του εμβαδού παρατηρήθηκε σύγχυση με την περίμετρο σε μία περίπτωση σε κάθε ομάδα παρέμβασης. Ωστόσο, στη περίπτωση της δομημένης διερευνητικής παρατηρήθηκαν τρεις (3) περιπτώσεις λαθών στη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού, κάτι που δεν συνέβη στα άλλα δύο τμήματα. Οι περισσότεροι μαθητές της παραδοσιακής (6) και της καθοδηγούμενης (8) δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση, ενώ οι υπόλοιποι της δομημένης (4) εμφάνισαν δυσκολίες στη διαδικασία επίλυσης γενικότερα (Πίνακας 30).

Το υλικό που τους είχε δοθεί χρησιμοποιήθηκε μόνο από έναν μαθητή της παραδοσιακής και έναν της δομημένης παρέμβασης, όπως έγινε σαφές από τις απαντήσεις τους.

<u>5ο ερώτημα/έργο</u>

		Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Λάθη ως προς	**Περιγραφή λάθους**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**	**Αριθμός μαθητών**
Έννοια	Σύγχυση με την περίμετρο	1	2	
	Σύγχυση της περιμέτρου με το μήκος πλευράς			**1**
Διαδικασία επίλυσης	Ανακάλυψη μόνο ενός σχήματος με	1		2

	περίμετρο 16			
	Ανακάλυψη δύο σχημάτων με περίμετρο 16		1	
	Καμία απάντηση	7	5	6
Σωστές απαντήσεις	Ανακάλυψη μόνο του σωστού σχήματος, του τετραγώνου		1	1
Σύνολο		9	9	10

Πίνακας 31: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών ανά παρέμβαση μετά την εφαρμογή τους (5ο ερώτημα/έργο)

Το συγκεκριμένο έργο φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές και των τριών διδακτικών παρεμβάσεων καθώς ο μέσος όρος της επίδοσής τους ήταν αρκετά χαμηλός με μεγάλο ποσοστό μη καταγραφής κάποιας απάντησης από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, με μέγιστη τη βαθμολογία αυτή των 4 μονάδων, οι μαθητές της παραδοσιακής και της δομημένης κατάφεραν 0,22, ενώ της καθοδηγούμενης 0,72 μονάδες.

Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι τόσο μικρό που δεν μπορεί να χαρακτηρίσει την επίδοση της αντίστοιχης ομάδας. Το σχήμα που ανακάλυψαν οι μαθητές με περίμετρο 16 και δεν προχώρησαν σε περαιτέρω διερεύνηση ήταν το ορθογώνιο με διαστάσεις 6x2, το οποίο σχεδιάστηκε και στο δοκίμιο (Πίνακας 31).

Το υλικό που τους είχε δοθεί φάνηκε να βοήθησε έναν μαθητή από κάθε ομάδα παρέμβασης, χωρίς επιτυχία ωστόσο.

4.2.4 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια ανά επίπεδο επιδόσεων μαθητών

4.2.4.1 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια ανά επίπεδο πριν και μετά τις παρεμβάσεις

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αναλύονται τα αποτελέσματα, ως προς τη μαθηματική έννοια, των μαθητών πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις, ανάλογα με το επίπεδο επιδόσεων στο οποίο ανήκαν. Ο χωρισμός τους στα τρία επίπεδα έγινε μετά από συζήτηση με τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων για τις επιδόσεις τους σε όλα τα μαθήματα, αλλά και στα Μαθηματικά ειδικότερα. Οι μαθητές των υψηλών και μεσαίων επιδόσεων ήταν 8, ενώ οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων ήταν 12.

Ομάδα μαθητών	**Μέσος όρος επιδόσεων πριν τις παρεμβάσεις**	**Μέσος όρος επιδόσεων μετά τις παρεμβάσεις**
Μαθητές υψηλών επιδόσεων	4,5	5,75
Μαθητές μεσαίων επιδόσεων	1,44	3,38
Μαθητές χαμηλών επιδόσεων	0,36	4,38

Πίνακας 32: Συγκριτική παράθεση μέσων όρων επιδόσεων μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων πριν και μετά τις παρεμβάσεις

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 32), παρατηρείται ότι την μεγαλύτερη βελτίωση στις επιδόσεις τους ανεξάρτητα από την διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν, πέτυχαν οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων, με αυτούς των μεσαίων να ακολουθούν. Οι μαθητές που κατάφεραν μεγαλύτερο μέσο όσο στις επιδόσεις τους μετά τις παρεμβάσεις ήταν αυτοί των υψηλών επιδόσεων, με αυτούς των χαμηλών επιδόσεων να ακολουθούν και τέλος αυτοί των μεσαίων επιδόσεων.

Στη συνέχεια, θα αναλυθούν ποιοτικά οι επιδόσεις των μαθητών αναλυτικά σε κάθε έργο του δοκιμίου που τους είχε δοθεί.

2ο ερώτημα/έργο

	Πριν τις παρεμβάσεις			Μετά τις παρεμβάσεις		
Είδος Λάθους	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**
Έννοια	2	2			3	
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού			2		1	1
Διαδικασία επίλυσης	3	5	10	1	1	4
Σωστή απάντηση	3	1		7	3	7
Σύνολα	8	8	12	8	8	12

Πίνακας 33: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων πριν και μετά από τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Πριν τις παρεμβάσεις διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων δεν έδωσαν κάποια απάντηση στην πλειοψηφία τους (8), ενώ όσοι προσπάθησαν είτε αναγνώρισαν τα σχήματα (2), είτε δόμησαν την επιφάνεια με το μολύβι τους χωρίς να δώσουν βαρύτητα στον σχεδιασμό. Στις απαντήσεις των μαθητών μεσαίων και υψηλών επιδόσεων εμφανίστηκε μία ποικιλία λαθών που είχαν να κάνουν είτε με την ίδια την έννοια και τη μέτρησή της, είτε με τη γενικότερη διαδικασία επίλυσης (Πίνακας 33).

Μετά τις παρεμβάσεις οι μαθητές υψηλών παρεμβάσεων κατέγραψαν σωστές απαντήσεις, με μοναδική εξαίρεση έναν μαθητή (Μ25), ο οποίος υπολόγισε την περίμετρο των σχημάτων, αλλά δεν έκανε καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού τους. Τρεις (3) από τους οκτώ (8) μαθητές μεσαίων επιδόσεων κατέγραψαν σωστή απάντηση στο συγκεκριμένο έργο. Ωστόσο, τόσοι ήταν και οι μαθητές της ίδιας ομάδας που στην απάντησή τους φάνηκες να συγχέουν την έννοια του εμβαδού με την περίμετρο. Οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων απάντησαν σωστά στην πλειονότητά τους, ενώ τρεις (3) είναι εκείνοι που υπολόγισαν την περίμετρο των σχημάτων χωρίς να προχωρούν στον υπολογισμό του εμβαδού τους (Πίνακας 33).

Όσον αφορά στους μαθητές υψηλών επιδόσεων φάνηκε, ότι οι παρεμβάσεις βελτίωσαν τις επιδόσεις τους, καθώς εκτός από μία περίπτωση οι υπόλοιποι απάντησαν σωστά στο συγκεκριμένο έργο. Στους μαθητές μεσαίων επιδόσεων δεν φάνηκε ιδιαίτερη βελτίωση καθώς εξακολουθούσαν να ανιχνεύονται στις απαντήσεις τους λάθη ως προς την έννοια και συγκεκριμένα σύγχυσή της με την περίμετρο. Οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων πριν τις παρεμβάσεις δεν κατέγραψαν κάποια σωστή απάντηση, ενώ μετά από αυτές οι 7 από τους 12 απάντησαν σωστά. Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο των μαθητών κατέγραψε μία απάντηση έστω και λανθασμένη.

<u>3ο ερώτημα/έργο</u>

	Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Είδος Λάθους	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**
Έννοια	1				1	
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		2	1	1	2	1
Διαδικασία επίλυσης	2	5	11	1	4	5
Σωστή απάντηση	5	1		6	1	6
Σύνολο	8	8	12	8	8	12

Πίνακας 34: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων πριν και μετά από τις παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Πριν τις παρεμβάσεις οι μαθητές του δείγματος που ανήκαν στην ομάδα υψηλών επιδόσεων, φάνηκε να απαντούν σωστά στην πλειονότητά τους, ενώ παρατηρήθηκε μόνο μία περίπτωση σύγχυσης της έννοιας με την περίμετρο. Οι μισοί μαθητές των μεσαίων επιδόσεων δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο έργο. Στις υπόλοιπες παρατηρήθηκε άγνοια της διαδικασίας η οποία εκδηλώθηκε ξεκάθαρα στο γραπτό του μαθητή, μη επεξεργασία δεδομένων της εκφώνησης, ενώ ένας μαθητής δόμησε σωστά τη ζητούμενη επιφάνεια αλλά δεν καταμέτρησε σωστά τις μονάδες. Όσον αφορά στους μαθητών χαμηλών επιδόσεων η πλειονότητά τους δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο έργο.

Μετά τις παρεμβάσεις, όπως φαίνεται και στον πίνακα, οι σωστές απαντήσεις των ομάδων υψηλών και χαμηλών επιδόσεων ήταν ίδιες σε αριθμό. Οι υπόλοιποι μαθητές των χαμηλών επιδόσεων, οι οποίοι δεν απάντησαν σωστά, κατέγραψαν λάθος αποτέλεσμα που προήλθε από χρήση του χάρακα (λάθος διαστάσεις σχήματος), από λανθασμένη καταμέτρηση μονάδων καλυμμένης επιφάνειας, ενώ υπήρξαν και περιπτώσεις που γνώριζαν τον τύπο, τον κατέγραψαν αλλά δεν τον εφάρμοσαν. Όσον αφορά στους μαθητές μεσαίων επιδόσεων το ποσοστό επιτυχίας τους ήταν μικρότερο καθώς ένας ήταν εκείνος που απάντησε σωστά στο συγκεκριμένο έργο του δοκιμίου. Τα λάθη της ομάδας αυτής είχαν να κάνουν με την ίδια την έννοια, τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού αλλά και γενικότερα τη διαδικασία επίλυση του έργου (Πίνακας 34)

Όσον αφορά στους μαθητές υψηλών επιδόσεων, οι παρεμβάσεις δεν φαίνεται να τους επηρέασαν και πολύ καθώς η πλειονότητα της συγκεκριμένης ομάδα είχε απαντήσει σωστά και πριν από αυτές. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων, απάντησαν επίσης στο ίσιο ποσοστό σωστά. Ωστόσο, τα λάθη μετά τις παρεμβάσεις είχαν να κάνουν κυρίως με λάθη από τη χρήση του χάρακα, από τον λάθος πολλαπλασιασμού. Οι σωστές απαντήσεις των χαμηλών επιδόσεων ήταν ίδιες σε αριθμό με αυτές των μαθητών υψηλών επιδόσεων. Τα λάθη αυτής της ομάδας οφείλονταν σε λάθος χρήση χάρακα, μη εφαρμογή του τύπου ή μη καταμέτρηση των μονάδων μετά από σωστή κάλυψη της επιφάνειας.

<u>4ο ερώτημα/έργο</u>

	Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Είδος Λάθους	**Μαθητές υψηλών**	**Μαθητές μεσαίων**	**Μαθητές χαμηλών**	**Μαθητές υψηλών**	**Μαθητές μεσαίων**	**Μαθητές χαμηλών**

	επιδόσεων	**επιδόσεων**	**επιδόσεων**	**επιδόσεων**	**επιδόσεων**	**επιδόσεων**
Έννοια	2	3	1	1	1	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	1					
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	2	1		2		1
Διαδικασία επίλυσης	2	4	11	5	4	9
Σωστή απάντηση		1			2	1
Σύνολο	8	8	12	8	8	12

Πίνακας 35: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων πριν και μετά από τις παρεμβάσεις (4ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο πριν τις παρεμβάσεις οι περισσότεροι μαθητές χαμηλών επιδόσεων δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση. Τα λάθη στις απαντήσεις των μαθητών υψηλών επιδόσεων είχαν να κάνουν με την έννοια του εμβαδού και τη διαδικασία μέτρησής του. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων κατά το ήμισυ δεν απάντησαν, ενώ όσοι προσπάθησαν παρανόησαν την έννοια του εμβαδού με αυτή της περιμέτρου (Πίνακας 35).

Μετά τις παρεμβάσεις, τρεις (3) από τους οκτώ (8) μαθητές υψηλών επιδόσεων δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση στο έργο. Ως προς τα λάθη που έκαναν, αφορούσαν τόσο την έννοια όσο και τον αλγεβρικό τύπο εύρεσής του. Ίδιος αριθμός μαθητών δεν απάντησε και από την ομάδα μεσαίων επιδόσεων. Μεγαλύτερος αριθμός μαθητών δεν απάντησαν από την ομάδα χαμηλών επιδόσεων, ενώ τα λάθη που παρατηρήθηκαν είχαν να κάνουν με την έννοια και τη διαδικασία μέτρησής της (Πίνακας 35).

5ο ερώτημα/έργο

	Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά από τις παρεμβάσεις		
Είδος Λάθους	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**	**Μαθητές υψηλών επιδόσεων**	**Μαθητές μεσαίων επιδόσεων**	**Μαθητές χαμηλών επιδόσεων**
Έννοια	2		2	2	2	1
Διαδικασία επίλυσης	1	3	1			
Διαδικασία επίλυσης	4	4	8	4	6	11
Σωστή απάντηση	1	1	1	2		
Σύνολο	8	8	12	8	8	12

Πίνακας 36: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων πριν και μετά από τις παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών κάθε επιπέδου επιδόσεων δεν κατέγραψε κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο έργο. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων έδωσαν απαντήσεις χωρίς να χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα της εκφώνησης (πχ Μ19: *Ορθογώνιο γιατί είναι μακρουλό και λεπτό).* Το ίδιο βέβαια παρατηρήθηκε και σε έναν μαθητή από τις άλλες δύο ομάδες.

Το συγκεκριμένο έργο φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές όλων των επιπέδων επιδόσεων, καθώς ακόμα και μετά από αυτές οι σωστές απαντήσεις ήταν ελάχιστες σε αριθμό. Οι μοναδικές δύο (2) απαντήσεις που εντοπίστηκαν ανήκαν σε μαθητές υψηλών επιδόσεων Η πλειονότητα των μαθητών μεσαίων και χαμηλών επιδόσεων δεν κατέγραψαν καμία απάντηση, ενώ στις απατήσεις μετά τις παρεμβάσεις διαπιστώθηκε σύγχυση με την περίμετρο (Πίνακας 36).

Με εξαίρεση τα δύο τελευταία έργα του δοκιμίου που φάνηκε να δυσκολεύουν τους μαθητές όλων των επιπέδων επίδοσης, παρατηρήθηκε μία βελτίωση σε όλες τις ομάδες. Όσοι ανήκαν στις ομάδες υψηλών και χαμηλών επιδόσεων, φάνηκε να βελτιώνουν τις επιδόσεις τους σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με την ομάδα μεσαίων επιδόσεων. Τα λάθη των μαθητών υψηλών επιδόσεων είχαν να κάνουν κυρίως με τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού ή την επίλυση του έργου μέχρι ένα σημείο. Οι μαθητές των μεσαίων επιδόσεων έκαναν λάθη ως προς τη διαδικασία μέτρησης του εμβαδού, τη χρήση του χάρακα, ενώ πολλοί ήταν εκείνοι που δεν κατέγραψαν απάντηση σε κάποιο έργο. Τέλος, οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων, σε όσα έργα κατέγραψαν κάποια λάθος απάντηση, το λάθος είχε να κάνει με τη χρήση του χάρακα ή με λάθος που αφορούσε τη διαδικασία μέτρησης του εμβαδού (Πίνακας 36).

4.2.4.2 Αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια ανά επίπεδο και ανά προσέγγιση μετά τις παρεμβάσεις

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται τα αποτελέσματα, ως προς τη μαθηματική έννοια, ανά επίπεδο επιδόσεων των μαθητών αναφορικά με την διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Οι μαθητές υψηλού επιπέδου της παραδοσιακής ήταν 3 σε αριθμό, όπως και στη δομημένη, ενώ 2 ήταν στην καθοδηγούμενη. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων ήταν 2 στην παραδοσιακή και 3 στην δομημένη και στην καθοδηγούμενη. Οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων ήταν 4 στην παραδοσιακή, 3 στην δομημένη και 5 στην καθοδηγούμενη. Αρχικά θα παρουσιαστούν οι μέσοι όροι των επιδόσεων ανάλογα με το επίπεδο και την παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν και στη συνέχεια θα αναλυθούν ποιοτικά οι επιδόσεις τους σε κάθε ερώτημα.

<u>2ο ερώτημα/έργο</u>

Λάθη ως προς	Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Υψηλών επιδόσεων			
Διαδικασία επίλυσης			1
Σωστή απάντηση	3	3	1

Μεσαίων επιδόσεων			
Έννοια		2	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		1	
Διαδικασία			1
Σωστή απάντηση	2		1
Χαμηλών επιδόσεων			
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		1	
Διαδικασία επίλυσης	1		3
Σωστή απάντηση	3	2	2
Σύνολο	9	9	10

Πίνακας 37: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, μετά από τις παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Στο ερώτημα αυτό, οι μαθητές των υψηλών επιδόσεων της παραδοσιακής και της δομημένης προσέγγισης κατάφεραν να καταγράψουν σωστές απαντήσεις και μάλιστα υψηλής βαθμολογίας, ενώ στους μαθητές της καθοδηγούμενης βρέθηκε και απάντηση, η οποία δεν περιλάμβανε την μέτρηση του εμβαδού. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων της παραδοσιακής κατέγραψαν περισσότερες σωστές απαντήσεις σε σχέση με τις άλλες δύο ομάδες, κάτι που συνέβη και με τους μαθητές χαμηλών επιδόσεων. Στους μαθητές χαμηλών επιδόσεων παρατηρήθηκε παρόμοιο ποσοστό σωστών απαντήσεων. Ωστόσο σε αυτούς της καθοδηγούμενης διδασκαλίας παρατηρήθηκαν και περιπτώσεις υπολογισμού της περιμέτρου αλλά καμία προσπάθεια εύρεσης του εμβαδού (Πίνακας 37).

3^{ο} ερώτημα/έργο

Λάθη ως προς	Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Υψηλών επιδόσεων			
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού			1
Διαδικασία επίλυσης		1	
Σωστή απάντηση	3	2	1
Μεσαίων επιδόσεων			
Έννοια		1	
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού			2
Διαδικασία επίλυσης	1	2	1
Σωστή απάντηση	1		
Χαμηλών επιδόσεων			
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		1	
Διαδικασία επίλυσης	2	2	1
Σωστή απάντηση	2		4
Σύνολα	9	9	10

Πίνακας 38: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, μετά από τις παρεμβάσεις (3^{ο} ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο οι μαθητές υψηλών επιδόσεων προς παραδοσιακής διδασκαλίας φάνηκε να τα καταφέρνουν καλύτερα καθώς κατεγράφησαν μόνο σωστές απαντήσεις. Από την άλλη μεριά, ως προς την επίδοση των μαθητών χαμηλών επιδόσεων παρατηρήθηκαν περισσότερες σωστές απαντήσεις από εκείνους που συμμετείχαν στην καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία. (Πίνακας 38).

4ο ερώτημα/έργο

Λάθη ως προς	Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Υψηλών επιδόσεων			
Έννοια			1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	1	2	
Διαδικασία επίλυσης	2	1	1
Μεσαίων επιδόσεων			
Έννοια		1	
Διαδικασία επίλυσης	1	2	2
Σωστή απάντηση	1		1
Χαμηλών επιδόσεων			
Έννοια	1		
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		1	
Διαδικασία επίλυσης	3	2	5
Σύνολο	9	9	10

Πίνακας 39: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, μετά από τις παρεμβάσεις (4ο ερώτημα/έργο)

Το συγκεκριμένο έργο φάνηκε να δυσκολεύει του μαθητών όλων των ομάδων επιδόσεων, καθώς οι σωστές απαντήσεις ακόμα και μετά τις παρεμβάσεις ήταν λίγες σε αριθμό. Όσον αφορά στους μαθητές υψηλών επιδόσεων, οι μοναδικές σωστές απαντήσεις προήλθαν από μαθητές της παραδοσιακής και καθοδηγούμενης διδασκαλίας, ενώ οι μαθητές της δομημένης έκαναν κυρίως λάθη ως προς την διαδικασία εύρεσης του εμβαδού. Κάτι αντίστοιχο παρατηρήθηκε και στη περίπτωση των μαθητών μεσαίων επιδόσεων, καθώς όσοι συμμετείχαν στη δομημένη διερευνητική έκαναν λάθη που φανέρωναν σύγχυση της έννοιας με την περίμετρο και απαντήσεις χωρίς εξήγηση ή χρήση δεδομένων. Οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων δεν απάντησαν στην πλειονότητα τους στο έργο, ενώ η μοναδική σωστή απάντηση προήλθε από μαθητή της δομημένης διδασκαλίας (Πίνακας 39).

5ο ερώτημα/έργο

Λάθη ως προς	Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Υψηλών επιδόσεων			
Έννοια			1
Διαδικασία επίλυσης	3	2	
Σωστή απάντηση		1	1
Μεσαίων επιδόσεων			
Έννοια	2	3	3
Χαμηλών επιδόσεων			
Έννοια		1	
Διαδικασία επίλυσης	4	2	5
Σύνολο	9	9	10

Πίνακας 40: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών των τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, μετά από τις παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο ερώτημα, οι μοναδικές σωστές απαντήσεις προήλθαν από 2 μαθητές υψηλών επιδόσεων, εκ των οποίων ο ένας συμμετείχε στη δομημένη και ο άλλος στην καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία. Στις άλλες δύο ομάδες η πλειονότητα δεν κατέγραψε κάποια απάντηση (Πίνακας 40).

4.2.4.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων ως προς τη μαθηματική έννοια ανά επίπεδο και ανά προσέγγιση πριν και μετά από τις παρεμβάσεις

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, αναλύονται τα αποτελέσματα των μαθητών, ως προς τη μαθηματική έννοια, ανά επίπεδο επιδόσεων πριν και μετά τις παρεμβάσεις σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Η ανάλυση αυτή έχει ως σκοπό την μελέτη της επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης στην βελτίωση ή μη των επιδόσεων της κάθε ομάδας μαθητών. Αρχικά, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των επιδόσεων πριν και μετά από τις παρεμβάσεις και στη συνέχεια, αναλύονται ποιοτικά ξεχωριστά για κάθε επιμέρους ερώτημα του έργου του δοκιμίου (Πίνακας 41).

	Ομάδα υψηλών επιδόσεων		**Ομάδα μεσαίων επιδόσεων**		**Ομάδα χαμηλών επιδόσεων**	
	Πριν από τις παρεμβάσεις	Μετά από τις παρεμβάσεις	Πριν από τις παρεμβάσεις	Μετά από τις παρεμβάσεις	Πριν από τις παρεμβάσεις	Μετά από τις παρεμβάσεις
Παραδοσιακή	7	6,33	3,75	6,25	0,25	4,5
Δομημένη	3,17	5,83	0,83	1,33	0,67	3,67
Καθοδηγούμενη	2,75	4,75	0,5	3,5	0,2	4,7

Πίνακας 41: Συγκριτική παράθεση μέσων όρων επίδοσης των μαθητών τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, πριν και μετά από αυτή

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, διαπιστώνεται ότι οι διαφορές όσον αφορά στο συγκεκριμένο δείγμα δεν είναι στατιστικά σημαντικές. Όσον αφορά στους μαθητές υψηλών επιδόσεων, φάνηκε να πετυχαίνουν μεγαλύτερη βελτίωση όσοι συμμετείχαν στην δομημένη διερευνητική διδασκαλία, με αυτούς της καθοδηγούμενης διερευνητικής να ακολουθούν. Ωστόσο, οι μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης, μείωσαν τον μέσο όρο επίδοσής τους. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων βελτίωσαν επίσης τις επιδόσεις τους ανεξάρτητα από την παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Μεγαλύτερο μέσο όρο κατάφεραν οι μαθητές της παραδοσιακής μετά τις παρεμβάσεις. Ωστόσο, μεγαλύτερο ποσοστό βελτίωσης κατάφεραν όσοι συμμετείχαν στην καθοδηγούμενη διερευνητική διδασκαλία. Μεγαλύτερη βελτίωση στην καθοδηγούμενη διερευνητική πέτυχαν και οι μαθητές χαμηλών επιδόσεων, όπου οι μέσοι όροι όλων των ομάδων μαθητών δεν είχαν σημαντική διαφορά.

2ο ερώτημα/ έργο

	Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Υψηλών επιδόσεων						
Έννοια		1	1			
Διαδικασία επίλυσης	1	1	1			1
Σωστή απάντηση	2	1		3	3	1
Μεσαίων επιδόσεων						
Έννοια		1	1		2	1
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού					1	
Διαδικασία	1	2	2			1
Σωστή απάντηση	1			2		1
Χαμηλών επιδόσεων						
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού		2			1	
Διαδικασία	4	1	5	1		3

επίλυσης						
Σωστή απάντηση				3	2	2
Σύνολο	9	9	10	9	9	10

Πίνακας 42: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, πριν και μετά από αυτή (2ο ερώτημα/έργο)

Οι μαθητές υψηλών επιδόσεων φάνηκε να βελτιώνουν τις επιδόσεις τους ανεξάρτητα από την διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Οι μαθητές μεσαίων επιδόσεων φάνηκε να βελτιώνουν τις απαντήσεις τους στην περίπτωση της παραδοσιακής παρέμβασης, ενώ των χαμηλών και στις τρεις (3) περιπτώσεις παρεμβάσεων (Πίνακας 42).

3ο ερώτημα/έργο

	Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Υψηλών επιδόσεων						
Έννοια			1			
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού						1
Διαδικασία επίλυσης		2			1	
Σωστή απάντηση	3	1	1	3	2	1
Μεσαίων επιδόσεων						
Έννοια					1	
Διαδικασία εύρεσης		1	1			2

εμβαδού						
Διαδικασία επίλυσης	1	2	2	1	2	1
Σωστή απάντηση	1			1		
Χαμηλών επιδόσεων						
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	1				1	
Διαδικασία επίλυσης	3	3	5	2	2	1
Σωστή απάντηση				2		4
Σύνολα	9	9	10	9	9	10

Πίνακας 43: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, πριν και μετά από αυτή (3ο ερώτημα/έργο)

Οι μαθητές υψηλών επιδόσεων δεν φάνηκε να επηρεάστηκαν ως προς τις επιδόσεις τους στο συγκεκριμένο έργο σε καμία διδακτική παρέμβαση. Όσον αφορά στους μαθητές μεσαίων επιδόσεων, στη δομημένη παρέμβαση παρατηρήθηκαν, λάθη μετά τις παρεμβάσεις που αφορούσαν τη διαδικασία επίλυσης (πχ λάθη στη χρήση χάρακα), τα οποία δεν παρατηρήθηκαν πριν τις παρεμβάσεις. Οι μαθητές των χαμηλών επιδόσεων, φάνηκε στο συγκεκριμένο ερώτημα να έχουν καλύτερη επίδοση στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής (Πίνακας 43).

4ο ερώτημα/έργο

	Πριν από τις παρεμβάσεις			**Μετά από τις παρεμβάσεις**		
Λάθη ως προς	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Υψηλών επιδόσεων						
Έννοια	1	1				1
Διαδικασία	1		2	1	2	

εύρεσης εμβαδού						
Διαδικασία επίλυσης		2		2	1	1
Σωστή απάντηση	1					
Μεσαίων επιδόσεων						
Έννοια		2	1		1	
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού	1					
Διαδικασία επίλυσης	1	1	2	1	2	2
Σωστή απάντηση				1		1
Χαμηλών επιδόσεων						
Έννοια			1	1		
Διαδικασία εύρεσης εμβαδού					1	
Διαδικασία επίλυσης	4	3	4	3	2	5
Σύνολο	9	9	10	9	9	10

Πίνακας 44: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, πριν και μετά από αυτή (4ο ερώτημα/έργο)

Οι απαντήσεις των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο ήταν λίγες σε αριθμό και έτσι δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν επηρέασε το είδος της παρέμβασης σε κάποια περίπτωση (Πίνακας 44).

5ο ερώτημα/ έργο

	Πριν από τις παρεμβάσεις			Μετά από τις παρεμβάσεις		
Λάθη ως προς	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**	**Παραδοσιακή**	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Υψηλών επιδόσεων						
Έννοια	1	1			1	1
Διαδικασία επίλυσης	2	1	1	3	1	
Σωστή απάντηση		1			1	1
Μεσαίων επιδόσεων						
Έννοια	2	2	4	2	3	3
Σωστή απάντηση		1				
Χαμηλών επιδόσεων						
Έννοια		2			1	
Διαδικασία επίλυσης	3	1	5	4	2	5
Σωστή απάντηση	1					
Σύνολο	9	9	10	9	9	10

Πίνακας 45: Συγκριτική παράθεση είδους λαθών των μαθητών τριών επιπέδων επιδόσεων σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση, πριν και μετά από αυτή (5^{ο} ερώτημα/έργο)

Όπως στο προηγούμενο, έτσι και σε αυτό το έργο, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά και δεν διαπιστώθηκε κάποια παρέμβαση να βοήθησε περισσότερο στις επιδόσεις των μαθητών (Πίνακας 45).

4.3 Αποτελέσματα καλλιέργειας επιχειρηματολογίας

4.3.1 Εργαλείο ανάλυσης αποτελεσμάτων καλλιέργειας επιχειρηματολογίας

Ως προς τα δομικά τους στοιχεία

Το εργαλείο ανάλυσης επιχειρημάτων, ως προς τη δομή των δομικών τους στοιχείων, βασίστηκε στο μοντέλο του Krummheuer (1995). Συγκεκριμένα, αναλύεται η επάρκεια των επιχειρημάτων τους, ως προς τα δομικά στοιχεία, καθώς εντοπίστηκαν επιχειρήματα που περιείχαν τρία δομικά στοιχεία, άλλα δύο και άλλα ένα δομικό στοιχείο. Η ποιότητα των δομικών τους στοιχείων αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, το οποίο αναφερόταν στα αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια.

Παρακάτω ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα επιχειρημάτων από κάθε κατηγορία (Πίνακας 46).

3 δομικά στοιχεία	Απάντηση μαθητή Μ5 στο 1ο ερώτημα/έργο: «*Συμφωνώ με την Ελένη διότι τα τετράγωνα έχουν και αυτά ορθές γωνίες όχι μόνο τα ορθογώνια. Έτσι και τα τετράγωνα τα λέμε και ορθογώνια*»
2 δομικά στοιχεία	Απάντηση μαθητή Μ23 στο 1ο ερώτημα/έργο: *«Συμφωνώ με την Ελένη γιατί κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο»*
1 δομικό στοιχείο	Απάντηση μαθητή Μ19 στο 1ο ερώτημα/έργο*:«Κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο, γιατί ένα μεγάλο τετράγωνο φαίνεται μερικές φορές σαν ορθογώνιο».*

Πίνακας 46 : Κατηγοριοποίηση επιχειρημάτων ως προς τη δομή τους

Ως προς το είδος της εγγύησης

Το εργαλείο ανάλυσης των επιχειρημάτων των μαθητών επικεντρώθηκε σε ένα δομικό στοιχείο του επιχειρήματος και μελέτησε το είδος των εγγυήσεων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους. Έτσι, οι εγγυήσεις των επιχειρημάτων εντάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες που δημιουργήθηκαν μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

1. **Παραγωγική** (Inglis, Mejia &Simpson, 2007· Inglis & Mejia-Ramos, 2008).

Απάντηση Μ1 στο 1ο ερώτημα του δοκιμίου *: «Συμφωνώ με την Ελένη, ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο. Το τετράγωνο έχει 4 ορθές γωνίες, γι' αυτό το λέμε τετράγωνο. Το ορθογώνιο όμως δεν έχει 4 ίσες πλευρές»*

2. Επαναδιατύπωση δεδομένων

Απάντηση Μ17 στο 1ο ερώτημα του δοκιμίου*: « Κανένας ισχυρισμός δεν είναι σωστός γιατί το τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο και το ορθογώνιο δεν είναι τετράγωνο».*

3. Οπτικοποιημένη (υλικό)

Στη συγκεκριμένη περίπτωση εγγύησης ο μαθητής ή η μαθήτρια χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί για τη στήριξη της απάντησής του/της.

4. Οπτικοποιημένη (Σχήμα)

Σε αυτή τη περίπτωση ο μαθητής ή η μαθήτρια σχεδίασαν ένα δικό τους σχήμα για να στηρίξουν και να επιβεβαιώσουν την απάντησή τους.

5. Χωρίς εγγύηση (Jiménez-Aleixandre, Rodríguez & Duschl, 2000· Sadler, 2004)

Απάντηση Μ20 στο 1ο ερώτημα του δοκιμίου*: «Νομίζω ότι ο Μιχάλης έχει δίκιο. Δεν μπορώ να το δικαιολογήσω αλλά νομίζω πως εκείνος έχει δίκιο»*

6. Αυθαίρετη (είτε μη μαθηματική, χωρίς χρήση δεδομένων είτε με τη χρήση αυθαίρετου ύπου) (Bell & Linn, 2000· Chinn & Brewer, 2001· Heng, Surif, & Seng, 2015· Jiménez-Aleixandre et al., 2000)

Απάντηση Μ11 στο 1ο ερώτημα του δοκιμίου: *« Δεν συμφωνώ με κανέναν γιατί δε γίνεται το τετράγωνο να γίνει και ορθογώνιο, όλα τα σχήματα είναι ξεχωριστά».*

7. Υπονοούμενη

Η υπονοούμενη εγγύηση σε ένα επιχείρημα στα Μαθηματικά μπορεί να είναι η εφαρμογή κάποιου μαθηματικού τύπου ή η χρήση κάποιου μαθηματικού κανόνα χωρίς ωστόσο να αναφέρεται ξεκάθαρα στην απάντηση.

8. Επαγωγική (Inglis, Mejia &Simpson, 2007· Inglis & Mejia-Ramos, 2008)

Απάντηση Μ22 στο 5^{o} ερώτημα του δοκιμίου*: «Είναι το τετράγωνο γιατί μόνο σε αυτό μπορείς να βρεις εμβαδόν 16 γιατί 4*4=16. Δοκίμασα και άλλους τρόπους αλλά δεν βολεύει».*

4.3.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων καλλιέργειας επιχειρηματολογίας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των επιχειρημάτων που κατέγραψαν οι μαθητές κατά τη συμπλήρωση του δοκιμίου πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Τα αποτελέσματα αυτά αναλύονται τόσο συνολικά ως προς το δείγμα της έρευνας αλλά και σε σχέση με το διαφορετικό είδος παρέμβασης, στην οποία συμμετείχε η κάθε ομάδα μαθητών, με στόχο την επίδραση του βαθμού καθοδήγησης στην καταγραφή των επιχειρημάτων. Συγκεκριμένα, γίνεται αναφορά στην πληρότητα των επιχειρημάτων ως προς τα δομικά τους στοιχεία (Δεδομένα, Εγγύηση, Συμπέρασμα), συσχέτιση των επιχειρημάτων με το αποτέλεσμα ως προς τη μαθηματική έννοια, που αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, και ανάλυση του είδους της εγγύησης που στηρίζεται το κάθε επιχείρημα. Ακόμη, τα επιχειρήματα, μετά τις παρεμβάσεις, μελετήθηκαν σε σχέση με το επίπεδο επιδόσεων στο οποίο ανήκαν οι μαθητές και την ομάδα στην οποία εργάστηκαν στην παρέμβαση, με στόχο την διαπίστωση ομοιομορφίας στη δομή ή την ποιότητά τους. Το επίπεδο επιδόσεων, μελετάται και στα έργα πριν την πραγματοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων.

Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών εκτός από τη μαθηματική έννοια που αποτελούσε τον στόχο των παρεμβάσεων, η εκπαιδευτικός επιδίωκε και την ενθάρρυνση των μαθητών για την τεκμηρίωση των απαντήσεών τους με τη χρήση επιχειρημάτων.

Πριν την ανάλυση των επιχειρημάτων για κάθε ερώτημα/έργο ξεχωριστά αξίζει να αναφερθούν κάποια αποτελέσματα που αφορούσαν τα επιχειρήματα των μαθητών συνολικά στο δοκίμιο που τους δόθηκε, ως προς την επάρκεια των δομικών τους στοιχείων και το είδος της εγγύησης που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε παρέμβαση.

Επάρκεια επιχειρήματος	Δομικά στοιχεία επιχειρήματος	Είδος παρέμβασης με την μεγαλύτερη επάρκεια
3 δομικά στοιχεία	Δεδομένα, Εγγύηση, Συμπέρασμα	Δομημένη Διερευνητική
2 δομικά στοιχεία	Δεδομένα, Εγγύηση	Δομημένη Διερευνητική
	Εγγύηση, Συμπέρασμα (σε ερωτήματα με σύνθετες εκφωνήσεις)	Δομημένη Διερευνητική
1 δομικό στοιχείο	Συμπέρασμα/ Εγγύηση	Καθοδηγούμενη Διερευνητική

Πίνακας 47: Επάρκεια δομικών στοιχείων των επιχειρημάτων του δείγματος

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 47), οι μαθητές που κατέγραψαν σε μεγαλύτερο βαθμό επιχειρήματα με τρία δομικά στοιχεία ήταν εκείνοι της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στις περιπτώσεις επιχειρημάτων που αποτελούνταν από δύο δομικά στοιχεία είτε ήταν τα Δεδομένα και η Εγγύηση, είτε η Εγγύηση και το Συμπέρασμα σε περιπτώσεις που τα ερωτήματα του δοκιμίου είχαν πιο σύνθετες εκφωνήσεις. Στην τελευταία περίπτωση οι μαθητές δεν λάμβαναν υπόψη τα δεδομένα του ερωτήματος, πιθανόν λόγω δυσκολίας κατανόησής τους. Αντίστοιχα, οι μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα με ένα δομικό στοιχείο, το οποίο ήταν είτε το Συμπέρασμα είτε η Εγγύηση, ήταν εκείνοι της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης.

Είδος παρέμβασης	**Είδος εγγύησης που χρησιμοποιούσαν σε μεγαλύτερο βαθμό στα επιχειρήματά τους**
Παραδοσιακή	Παραγωγική, Υπονοούμενη
Δομημένη Διερευνητική	Αυθαίρετη, Υπονοούμενη
Καθοδηγούμενη Διερευνητική	Παραγωγική, Υπονοούμενη

Πίνακας 48: Είδος εγγύησης στα επιχειρήματα ανά διδακτική παρέμβαση

Ως προς το είδος της εγγύησης με την οποία συνέδεαν τα δεδομένα με το συμπέρασμα στο οποίο κατέληγαν, παρατηρήθηκαν τόσο όμοια όσο και διαφορετικά στοιχεία μεταξύ των ομάδων μαθητών (Πίνακας 48). Αρχικά παρατηρήθηκε ότι στα ερωτήματα/έργα του δοκιμίου που οι εκφωνήσεις τους θύμιζαν αυτές των σχολικών εγχειριδίων, οι μαθητές και των τριών παρεμβάσεων χρησιμοποίησαν υπονοούμενες εγγυήσεις. Σε άλλες περιπτώσεις οι μαθητές της παραδοσιακής και της καθοδηγούμενης διερευνητικής τεκμηρίωσαν τους συλλογισμούς τους κυρίως με παραγωγικές εγγυήσεις, κάτι που τις χαρακτηρίζει μεγαλύτερος βαθμός βεβαιότητας, σε σχέση με τους μαθητές της δομημένης διερευνητικής όπου οι εγγυήσεις τους ήταν κυρίως αυθαίρετες.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, αναλύονται τα επιχειρήματα των μαθητών ως προς τη δομή των επιχειρημάτων και το είδος της εγγύησης στο οποίο στηρίχθηκαν, για κάθε ερώτημα/ έργο του δοκιμίου ξεχωριστά.

<u>1ο Ερώτημα/ Έργο πριν από τις παρεμβάσεις</u>

«Η Ελένη ισχυρίζεται ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ ο Μιχάλης ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Με ποιόν από τους δύο ισχυρισμούς συμφωνείς; Αιτιολόγησε όσο πιο αναλυτικά μπορείς τη σκέψη σου».

	Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων			
3 δομικά στοιχεία	2 (Μ5, Μ6)	0	2 (Μ21,Μ25)

2 δομικά στοιχεία			3 (M1, M4, M7)	4 (M11, M13, M16, M17)	2 (M23, M26)
1 δομικό στοιχείο				3 (M18, M12, M14)	2 (M19, M20)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	**Εγγύηση**	**Συμπέρασμα**			
✔	✔	✔	2 (M5, M6)		
✗	✗	✗			1 (M21)
✔	✗	✗			1 (M25)
-	✔	✗	2 (M1, M4)		
-	✗	✗	1 (M7)	4 (M11, M13, M16, M17)	1 (M26)
-	✗	-		1 (M18)	1 (M19)
-	-	✗		2 (M12, M14)	1 (M20)
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			3 (M1, M4, M5)	1 (M13)	
Επαναδιατύπωση δεδομένων			1 (M6)	2 (M11, M17)	2 (M23, M26)
Οπτικοποιημένη (υλικό)			1 (M7)		
Οπτικοποιημένη (σχήμα)				1 (M16)	2 (M21, M25)
Χωρίς εγγύηση				2 (M12, M14)	1 (M20)
Αυθαίρετη				1 (M18)	1 (M19)

Πίνακας 49: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις (1ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, η πλειονότητα των μαθητών δεν κατέγραψε κάποια απάντηση, ενώ στις απαντήσεις που δόθηκαν, το στοιχείο του συμπεράσματος ήταν αυτό που επικρατούσε, αν και αυτό ήταν κατά βάση λάθος ως προς την ορθότητά του.

Οι απαντήσεις των μαθητών βασίστηκαν ως επί το πλείστων σε επιχειρήματα με δύο δομικά στοιχεία (9 στο συνολικό δείγμα), και παρόμοιος αριθμός απαντήσεως με επιχειρήματα τριών (4 στο συνολικό δείγμα) ή ενός δομικού στοιχείου (5 στο συνολικό δείγμα) (Πίνακας 47).

Οι μοναδικές απαντήσεις που είχαν σωστό συμπέρασμα ως προς τη μαθηματική έννοια, ανήκαν σε δύο μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης, οι οποίοι τεκμηρίωσαν τον συλλογισμό τους και με τα τρία δομικά στοιχεία της επιχειρηματολογίας (Μ5, Μ6), εκ των οποίων ο ένας στήριξε την απάντηση του σε παραγωγική εγγύηση (*Μ5 «Συμφωνώ με την Ελένη γιατί τα τετράγωνα έχουν και αυτά ορθές γωνίες, όχι μόνο τα ορθογώνια. Έτσι και τα τετράγωνα τα λέμε και ορθογώνια»)* και ο άλλος επαναδιατύπωσε τα δεδομένα του ερωτήματος (*Μ6 «Συμφωνώ με την Ελένη. Με τον Μιχάλη δεν συμφωνώ γιατί δεν γίνεται να είναι και το ορθογώνιο και το τετράγωνο ίδια»)* (Πίνακας 47).

Το είδος των εγγυήσεων που στήριξαν τα επιχειρήματα των μαθητών ποικίλαν. Πέντε (5) ήταν εκείνοι που επαναδιατύπωσαν τα δεδομένα του έργου με στόχο να στηρίξουν τον συλλογισμό τους, ενώ τέσσερις (4) ήταν όσοι έκαναν μία προσπάθεια παραγωγικής συλλογιστικής πορείας. Παρατηρήθηκαν και απαντήσεις που είτε δεν στήριζαν την απάντησή τους σε κάποια εγγύηση (3), είτε η εγγύηση που διατύπωσαν είτε αυθαίρετη (2) (Πίνακας 47).

Στην περίπτωση των διερευνητικών παρεμβάσεων, δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τη δομή των επιχειρημάτων στις απαντήσεις των μαθητών που ανήκαν στην ίδια ομάδα κατά τη διάρκειά της.

Όσον αφορά στη σχέση των επιχειρημάτων με το επίπεδο επιδόσεων, στο οποίο ανήκαν οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής, παρατηρήθηκε ότι από τους τέσσερις (4) μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα με δύο δομικά στοιχεία, οι τρεις (3) ανήκαν στο επίπεδο υψηλών επιδόσεων. Στους μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τη δομή των επιχειρημάτων στις απαντήσεις τους σε σχέση με το επίπεδο επιδόσεων, στο οποίο ανήκαν.

1ο Ερώτημα/ Έργο μετά από τις παρεμβάσεις

			Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			3 (M1, M2, M5)	1 (M13)	3 (M20, M21, M26)
2 δομικά στοιχεία			1 (M7)	6 (M11, M14, M15, M16, M17, M18)	4 (M27, M28, M22, M25)
1 δομικό στοιχείο			3 (M3, M8, M9)	0	0
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	**Εγγύηση**	**Συμπέρασμα**			
✔	✔	✔	3 (M1, M2, M5)		2 (M21, M26)
✔	✔	✗		1 (M13)	
✔	✗	✗			1 (M20)
-	✔	✔		1 (M15)	2 (M27, M28)
-	✗	✗	1 (M7)	5 (M11, M14, M16, M17, M18)	2 (M22, M25)
-	✔	-	3 (M3, M8, M9)		
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			6 (M1, M2, M3, M5, M8, M9)	2 (M13, M!5)	5 (M21, M22, M26, M27, M28)
Επαναδιατύπωση				1 (M17)	

Οπτικοποιημένη (υλικό)	1 (M7)		
Οπτικοποιημένη (Σχήμα)		1 (M16)	
Αυθαίρετη		3 (M11, M14, M18)	2 (M20, M25)

Πίνακας 50: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, μετά από τις διδακτικές παρεμβάσεις (1^{ο} ερώτημα/έργο)

Μετά τις παρεμβάσεις, οι μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα και με τα τρία δομικά στοιχεία (Δεδομένα-Εγγύηση-Συμπεράσματα) ανήκαν στην παραδοσιακή και την καθοδηγούμενη παρέμβαση.

Οι μαθητές της δομημένης κατέγραψαν απαντήσεις με δύο δομικά στοιχεία (Εγγύηση και Συμπέρασμα), ενώ επιχειρήματα μόνο με το στοιχείο της εγγύησης κατέγραψαν μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης (πχ *Μ8 «Το τετράγωνο είναι ίδιο με το ορθογώνιο αλλά με ίσες πλευρές»)* (Πίνακας 48).

Οι απαντήσεις που είχαν σωστό συμπέρασμα ως προς τη μαθηματική έννοια ήταν εκείνες των μαθητών της παραδοσιακής παρέμβασης (Μ1, Μ2, Μ5), οι οποίοι τεκμηρίωσαν τον συλλογισμό τους πλήρως και δύο μαθητές της καθοδηγούμενης παρέμβασης (Μ21, Μ26) με πλήρη τεκμηρίωση του συλλογισμού τους. Οι απαντήσεις που αποτελούνταν από δύο δομικά στοιχεία (Εγγύηση και Συμπέρασμα) οδήγησαν σε σωστό συμπέρασμα ως προς τη μαθηματική έννοια σε δύο περιπτώσεις της καθοδηγούμενης παρέμβασης (Μ27, Μ28) και σε μία της δομημένης (Μ15). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές της καθοδηγούμενης και της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης, δεν κατέγραψαν απαντήσεις μόνο με ένα δομικό στοιχείο, κάτι που παρατηρήθηκε στους μαθητές της παραδοσιακής (Πίνακας 48).

Παρατηρείται ότι οι μαθητές της παραδοσιακής και καθοδηγούμενης διερευνητικής κατέγραψαν επιχειρήματα κυρίως με παραγωγικές εγγυήσεις, ενώ στη δομημένη παρατηρήθηκαν κυρίως αυθαίρετες (πχ *Μ11 «Δεν συμφωνώ με κανέναν γιατί δεν γίνεται το τετράγωνο να γίνει και ορθογώνιο, όλα τα σχήματα είναι ξεχωριστά»* ή εγγυήσεις που επαναδιατύπωναν δεδομένα των έργων (πχ *Μ17 «Δεν είναι κανένας ισχυρισμός σωστός γιατί ένα ορθογώνιο δεν είναι ποτέ τετράγωνο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ποτέ ορθογώνιο»)* (Πίνακας 48).

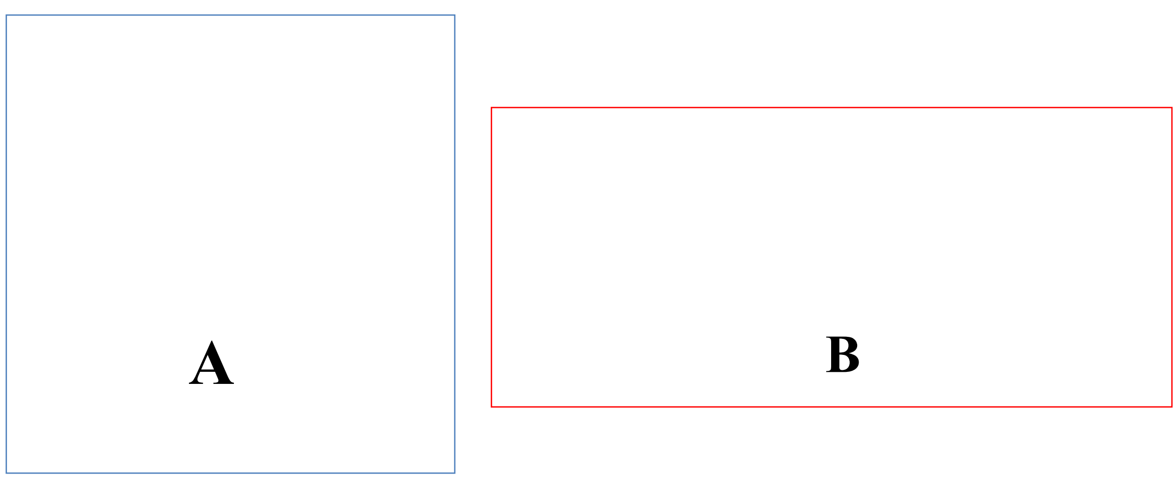
Ως προς τη μαθηματική ορθότητα των επιχειρημάτων τους, ορθά ήταν ορισμένα από τα επιχειρήματα που αποτελούνταν από παραγωγικές εγγυήσεις. Συγκριμένα, τέτοιες απαντήσεις ήταν τρεις (3) της παραδοσιακής παρέμβασης (Μ1, Μ2, Μ5), μία της δομημένης (Μ15) και τέσσερις (4) της καθοδηγούμενης (Μ21, Μ26, Μ27, Μ28).

Στο συγκεκριμένο έργο δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τη δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών που ανήκαν στην ίδια ομάδα.

Όσον αφορά στους μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης, οι μαθητές που συμπεριέλαβαν και τα τρία δομικά στοιχεία στα επιχειρήματά τους ανήκαν στην ομάδα υψηλών επιδόσεων, ο μαθητής με τα δύο δομικά στοιχεία στην ομάδα μεσαίων επιδόσεων και οι μαθητές που κατέγραψαν μόνο το στοιχείο της εγγύησης ανήκαν στην ομάδα χαμηλών επιδόσεων. Στις άλλες δύο ομάδες της διερευνητικής παρέμβασης δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τα αποτελέσματα των ομάδων επίδοσης.

<u>2º Ερώτημα/ Έργο πριν από τις παρεμβάσεις</u>

Κοίταξε τα παρακάτω επίπεδα σχήματα Α και Β. Τι σχήμα είναι το Α; Τι σχήμα είναι το Β; Τι παρατηρείς ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			2 (M2, M5)	1 (M16)	1 (M25)
2 δομικά στοιχεία			3 (M1, M4, M7)	3 (M12, M13, M15)	1 (M22)
1 δομικό στοιχεία			0	2 (M11, M18)	1 (M26)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	Εγγύηση	Συμπέρασμα			
✔	✔	✔	2 (M2, M5)	1 (M16)	1 (M25)
✔	✔	-	2 (M1, M4)	2 (M12, M13)	
✔	✗	-	1 (M7)	1 (M15)	1 (M22)
-	✗	-		2 (M11, M18)	
-	-	✔			1 (M26)
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			1 (M1)	1 (M13)	
Οπτικοποιημένη (σχήμα)				2 (M11, M18)	
Χωρίς εγγύηση					1 (M26)
Υπονοούμενη			4 (M2, M4, M5, M7)	3 (M12, M15, M16)	2 (M22, M25)

Πίνακας 51: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις ήταν λίγες σε αριθμό σε κάθε ομάδα παρέμβασης. Οι περισσότερες από αυτές (7 σε αριθμό) στηριζόταν σε επιχειρήματα με δύο δομικά στοιχεία, λιγότερες (4 σε αριθμό) με τρία κ ακόμη λιγότερες (3 σε αριθμό) με ένα δομικό στοιχείο. Το είδος της εγγύησης που φάνηκε να υπάρχει στην πλειονότητα των επιχειρημάτων ήταν υπονοούμενη (9 σε αριθμό απαντήσεων) και συγκεκριμένα, ήταν ο αλγεβρικός τύπος ο οποίος θεωρούνταν δεδομένος οπότε γινόταν απλώς η πράξη. Ωστόσο, υπήρξαν και δύο (2) περιπτώσεις μαθητών που ξεχώρισαν σαφώς τον μαθηματικό κανόνα από τα δεδομένα του ερωτήματος, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποίησαν, φτάνοντας όμως σε λανθασμένο μαθηματικό αποτέλεσμα (M1, M13) (Πίνακας 49).

Στην περίπτωση της παραδοσιακής παρέμβασης, οι μαθητές που κατέγραψαν κάποιο επιχείρημα ανήκαν στις ομάδες υψηλών και μεσαίων επιδόσεων. Οι μαθητές των υψηλών κατέγραψαν επιχειρήματα με τρία δομικά στοιχεία, ενώ οι μαθητές των μεσαίων με δύο. Οι μαθητές της δομημένης που κατέγραψαν επιχειρήματα, ανήκαν και στα τρία επίπεδα επιδόσεων. Αξίζει να αναφερθεί ότι και οι δύο (2) μαθητές χαμηλών επιδόσεων κατέγραψαν επιχειρήματα με ένα δομικό στοιχείο, ενώ η εγγύηση στην οποία βασίστηκαν ήταν τα σχήματα του έργου. Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής οι απαντήσεις ήταν ελάχιστες και ανήκαν σε δύο μαθητές υψηλών επιδόσεων και ενός μεσαίου. Ο μαθητής μεσαίου επιπέδου επιδόσεων κατέγραψε επιχείρημα με ένα δομικό στοιχείο, ενώ απουσίαζε η εγγύηση από αυτό.

<u>2ο Ερώτημα/ Έργο μετά από τις παρεμβάσεις</u>

			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			5 (M2, M4, M5, M8, M9)	1 (M16)	3 (M24, M25, M28)
2 δομικά στοιχεία			2 (M1, M7)	5 (M10, M11, M13, M14, M17)	4 (M21, M22, M26, M27)
1 δομικό στοιχείο			1 (M6)	3 (M12, M15, M18)	3 (M19, M20, M23)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
✔	✔	✔	5 (M2, M4, M5, M8, M9)	1 (M16)	3 (M24, M25, M28)
✔	✔	-	2 (M1, M7)	4 (M10, M13, M14, M17)	2 (M22, M27)
✔	✗	-			1 (M21)
✗	✗	-		1 (M11)	1 (M26)
✗	-	-		1 (M15)	
-	✔	-	1 (M6)		3 (M19, M20, M23)
-	✗	-		2 (M12, M18)	
Είδος εγγύησης					

Παραγωγική	1 (Μ1)	2 (Μ10, Μ13)	2 (Μ27, Μ28)
Οπτικοποιημένη (υλικό)		2 (Μ12, Μ16)	
Οπτικοποιημένη (σχήμα)		1 (Μ18)	
Χωρίς εγγύηση		1 (Μ15)	
Υπονοούμενη	7 (Μ2, Μ4, Μ5, Μ6, Μ7, Μ8, Μ9)	3 (Μ11, Μ14, Μ17)	8 (Μ19, Μ20, Μ21, Μ22, Μ23, Μ24, Μ25, Μ26)

Πίνακας 52: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις (2ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, μετά τις παρεμβάσεις, τα επιχειρήματα που καταγράφηκαν αποτελούμενα από τρία δομικά στοιχεία, ανήκαν σε μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης με τους μαθητές της καθοδηγούμενης να ακολουθούν. Οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης υποστήριξαν τους συλλογισμούς τους κυρίως με επιχειρήματα που αποτελούνταν με δύο δομικά στοιχεία και συγκεκριμένα τα Δεδομένα και την Εγγύηση. Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκαν και επιχειρήματα αποτελούμενα μόνο από το στοιχείο της Εγγύησης κυρίως από μαθητές της Καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης (πχ *Μ23: Η περίμετρος του Α είναι 6+6+6+6=24 και του Β είναι 9+9+4+4=26)* (Πίνακας 50).

Οι μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης κατέγραψαν ορθά αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια στο συγκεκριμένο έργο με διαφορά μόνο στον αριθμό των δομικών στοιχείων με τα οποία στήριζαν τους συλλογισμούς τους. Από τους μαθητές της δομημένης παρέμβασης, σωστά αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια είχαν οι τρεις (3) από τους πέντε(5) μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα με δύο (2) δομικά στοιχεία, ενώ σωστά ως προς τη μαθηματική έννοια ήταν και το επιχείρημα με τρία (3) δομικά στοιχεία (Πίνακας 50).

Ως προς τις εγγυήσεις των επιχειρημάτων τους, οι μαθητές συμπεριέλαβαν υπονοούμενες εγγυήσεις για να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους και συγκεκριμένα, εφάρμοσαν απευθείας τον αλγεβρικό τύπο εύρεσης του εμβαδού. Λιγότερες περιπτώσεις υπονοούμενων εγγυήσεων παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης, όπου εντοπίστηκαν και μαθητές που χρησιμοποίησαν είτε το υλικό είτε το σχήμα ως εγγύηση. Συγκριτικά με τα αποτελέσματα πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν υπονοούμενες εγγυήσεις, τις χρησιμοποίησαν και μετά από αυτές, με εξαίρεση τους μαθητές της δομημένης διερευνητικής, οι οποίοι χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί.

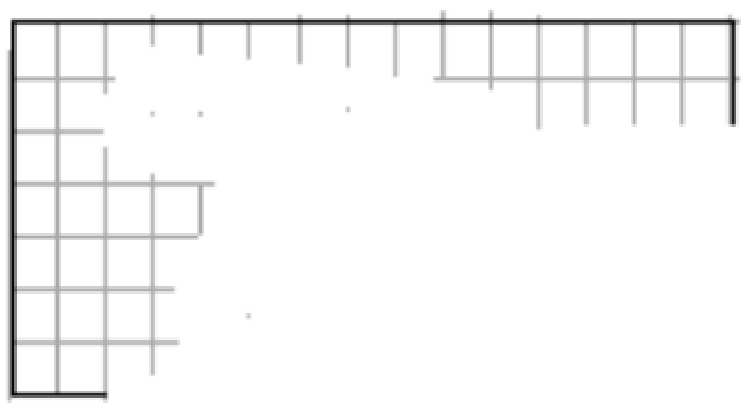
Στο έργο αυτό οι περισσότερες σωστές, ως προς τη μαθηματική έννοια, απαντήσεις αποτελούνταν από εγγυήσεις που ήταν υπονοούμενες, κάτι το οποίο ίσχυε και πριν τις παρεμβάσεις. Συγκεκριμένα, σε αυτή τη κατηγορία ανήκαν επτά (7) μαθητές της παραδοσιακής, ένας (1) της δομημένης και τρεις (3) της καθοδηγούμενης. Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις των μαθητών της δομημένης παρέμβασης περιείχαν παραγωγικές εγγυήσεις (Μ10, Μ13) είτε οπτικοποιημένες χρησιμοποιώντας το υλικό που τους δόθηκε (Μ16) ή το σχήμα (Μ18). Τέλος, οι περισσότεροι μαθητές φάνηκε να μην επηρεάζονται από τη διδασκαλία που συμμετείχαν ως προς το είδος της εγγύησης πάνω στην οποία στήριζαν το επιχείρημά τους. Ωστόσο, υπήρξαν και δύο (2) περιπτώσεις μαθητών που ενώ στην αρχή υπονοούσαν την εγγύηση, μετά την παρέμβαση χρησιμοποίησαν το υλικό που τους είχε δοθεί για να υποστηρίξουν το συμπέρασμα στο οποίο είχαν καταλήξει (Πίνακας 50).

Στην περίπτωση της δομημένης προσέγγισης, οι τρεις (3) μαθητές που υποστήριξαν τις απαντήσεις τους σε ένα μόνο δομικό στοιχείο, ότι ανήκαν στην ίδια ομάδα. Στο είδος της εγγύησης που χρησιμοποίησαν δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς το είδος της μεταξύ των μελών της ίδιας ομάδας. Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης παρέμβασης, δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς την πληρότητα των επιχειρημάτων σε σχέση με την ομάδα τους. Ωστόσο, ως προς το είδος της εγγύησης, οι μαθητές όλης της μιας ομάδας, στήριξαν την απάντησή τους σε υπονοούμενη εγγύηση.

Όσον αφορά στη σχέση των επιχειρημάτων με το επίπεδο επιδόσεων, δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τη δομή τους στην περίπτωση της δομημένης διερευνητικής και της παραδοσιακής παρέμβασης. Το ίδιο ισχύει και για την καθοδηγούμενη διερευνητική, με εξαίρεση το είδος της εγγύησης και συγκεκριμένα της παραγωγικής, η οποία χρησιμοποιήθηκε από μαθητές χαμηλού επιπέδου επιδόσεων.

<u>3ο Ερώτημα/ Έργο πριν από τις παρεμβάσεις</u>

Στους μαθητές ενός τμήματος της Ε’ τάξης ενός σχολείου δόθηκε το παρακάτω σχήμα για να βρουν το Εμβαδόν του. Ορισμένα παιδιά είπαν πως αφού έχει σβηστεί κάποιο μέρος του δεν είναι δυνατόν να βρουν το Εμβαδόν του. Ωστόσο, κάποια άλλα παιδιά είπαν πως υπάρχει τρόπος να βρουν το Εμβαδόν του. Ποια είναι η δική σου άποψη; Μπορείς να βρεις το Εμβαδόν του παρακάτω σχήματος; Αν όχι, αιτιολόγησε την απάντησή σου. Αν ναι, βρες το Εμβαδόν του και αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου.



			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			4 (Μ1, Μ2, Μ5, Μ7)	1 (Μ17)	2 (Μ22, Μ25)
2 δομικά στοιχεία			0	1 (Μ18)	0
1 δομικό στοιχείο			3 (Μ3, Μ4, Μ6)	2 (Μ11, Μ12)	1 (Μ19)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
✔	✔	✔	4 (Μ1, Μ2, Μ5, Μ7)	1 (Μ17)	
✔	✔	✗			1 (Μ25)
✔	✗	✗			1 (Μ22)
-	✗	✗		1 (Μ18)	
✔	-	-	1 (Μ3)		

-	-	✗	2 (M4, M6)	2 (M11, M12)	1 (M19)
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			2 (M1, M5)		
Οπτικοποιημένη (υλικό)			1 (M2)	1 (M17)	
Οπτικοποιημένη (Σχήμα)			1 (M7)	1 (M18)	1 (M25)
Χωρίς εγγύηση			3 (M3, M4, M6)	2 (M11, M12)	1 (M19)
Αυθαίρετη					1 (M22)

Πίνακας 53: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο πριν τις παρεμβάσεις, ίδιος αριθμός μαθητών περίπου υποστήριξε τους συλλογισμούς του καταγράφοντας επιχειρήματα είτε με τρία (7 σε αριθμό) είτε με ένα δομικό στοιχείο (6 σε αριθμό). Από τα περισσότερα απουσίαζε το στοιχείο της εγγύησης, ενώ σε αυτές που υπήρχε ήταν είτε παραγωγική, είτε γινόταν χρήση του υλικού που είχε δοθεί στους μαθητές και οδηγούσαν σε σωστά αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια, είτε αυθαίρετη, κάτι που οδήγησε τους μαθητές σε λανθασμένα αποτελέσματα ως προς τη μαθηματική έννοια (Πίνακας 51).

Στην περίπτωση της παραδοσιακής παρέμβασης, οι μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα με τρία δομικά στοιχεία ανήκαν στο επίπεδο υψηλών επιδόσεων, ενώ εκείνοι που κατέγραψαν μόνο ένα από τα δομικά στοιχεία ανήκαν είτε στο μεσαίων είτε στο χαμηλών. Ακόμη, οι πρώτοι στήριξαν τα επιχειρήματά τους είτε σε παραγωγική εγγύηση, είτε το βοηθητικό υλικό που τους είχε δοθεί. Τρία δομικά στοιχεία, είχαν και τα επιχειρήματα των διερευνητικών παρεμβάσεων των μαθητών που ανήκαν στο υψηλό επίπεδο επιδόσεων. Ως προς το είδος της εγγύησης δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία σε σχέση με το επίπεδο επιδόσεων.

3ο Ερώτημα/ Έργο μετά από τις παρεμβάσεις

	Παραδοσιακή	Δομημένη	Καθοδηγούμενη
Πληρότητα δομικών στοιχείων			
3 δομικά στοιχεία	6 (M1, M2, M3, M5, M6, M7)	9 (M17, M11, M16, M10, M12, M13, M14, M15, M18)	6 (M20, M22, M24, M26, M27, M28)
2 δομικά στοιχεία	3 (M4, M8, M9)		1 (M25)
1 δομικό στοιχείο			2 (M19, M23)
Ορθότητα δομικών στοιχείων			
✔ ✔ ✔	6 (M1, M2, M3, M5, M6, M7)	1 (M17)	4 (M22, M24, M27, M28)
✔ ✔ ✗		2 (M11, M16)	
✗ ✔ ✗		5 (M10, M12, M13, M15, M18)	2 (M20, M26)
✔ ✗ ✗		1 (M14)	
✔ ✔ -	3 (M4, M8, M9)		
- ✔ ✗			1 (M25)
- ✔ -			1 (M19)
- - ✔			1 (M23)
Είδος εγγύησης			
Παραγωγική	3 (M1, M5, M7)	3 (M10, M12, M13)	2 (M20, M26)
Οπτικοποιημένη (υλικό)		2 (M11, M16)	
Οπτικοποιημένη (Σχήμα)			2 (M19, M25)
Χωρίς εγγύηση			1 (M23)
Αυθαίρετη		1 (M14)	
Υπονοούμενη	6 (M2, M3, M4, M6, M8, M9)	3 (M15, M17, M18)	4 (M22, M24, M27, M28)

Πίνακας 54: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, μετά από τις διδακτικές παρεμβάσεις (3ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές του δείγματος υποστήριξαν τον συλλογισμό τους μετά τις παρεμβάσεις με επιχειρήματα που κυρίως αποτελούνταν και από τα τρία δομικά στοιχεία. Μάλιστα, το σύνολο των μαθητών της δομημένης διερευνητικής υποστήριξε τις απαντήσεις τους με πλήρη επιχειρήματα ως προς τα δομικά τους στοιχεία. Στην ομάδα της παραδοσιακής εντοπίστηκαν και περιπτώσεις (3) που ενώ συμπεριέλαβαν τα στοιχεία των δεδομένων και της εγγύησης, δεν προχώρησαν στο στοιχείο του συμπεράσματος. Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και στις απαντήσεις των μαθητών της καθοδηγούμενης διερευνητικής που ενώ η πλειονότητά τους περιλάμβανε και τα τρία απαραίτητα δομικά στοιχεία, παρατηρήθηκαν και περιπτώσεις που κατέγραψαν ένα ή δύο δομικά στοιχεία, χωρίς τα δεδομένα να υπάρχουν σε αυτά (Πίνακας 52).

Όπως παρατηρείται και στον παραπάνω πίνακα, τα περισσότερα επιχειρήματα των μαθητών αποτελούνταν από τρία δομικά στοιχεία. Ωστόσο, είχαν διαφορά ως προς το αποτέλεσμα ως προς τη μαθηματική έννοια, με βάση το οποίο αξιολογήθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των μαθητών (Μ1, Μ5, Μ7, Μ2, Μ3, Μ6) της παραδοσιακής παρέμβασης κρίθηκαν όλες σωστές ως προς την έννοια. Αντίστοιχα και οι περισσότεροι μαθητές με πλήρη επιχειρήματα στην καθοδηγούμενη παρέμβαση (Μ22, Μ24, Μ27, Μ28) οδηγήθηκαν σε σωστές, ως προς την έννοια, απαντήσεις. Ωστόσο, μπορεί οι μαθητές της δομημένης παρέμβασης να κατέγραψαν όλοι πλήρη επιχειρήματα, αλλά μόνο δύο (2) οδήγησαν σε σωστές, ως προς την έννοια, απαντήσεις (Μ16, Μ17) (Πίνακας 52).

Στο συγκεκριμένο έργο του δοκιμίου, οι περισσότερες εγγυήσεις που εντοπίστηκαν ήταν υπονοούμενες, κυρίως στην ομάδα μαθητών της παραδοσιακής και καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης. Ακόμη, παρατηρήθηκαν και περιπτώσεις παραγωγικής εγγύησης και στις τρεις (3) διαφορετικές παρεμβάσεις.

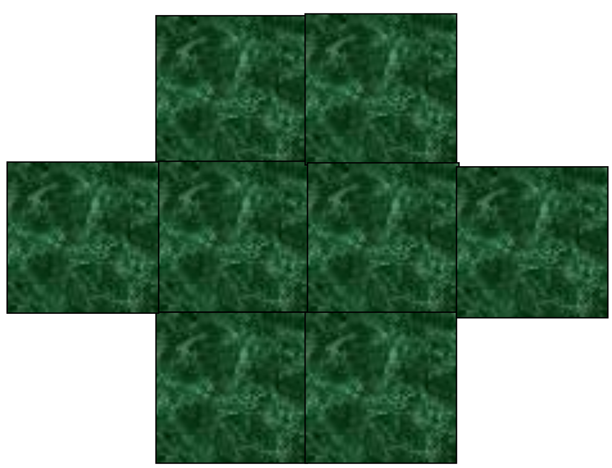
Και σε αυτό το έργο, όπως και στο προηγούμενο, η πλειονότητα των σωστών, ως προς τη μαθηματική έννοια, απαντήσεων στηριζόταν από επιχειρήματα με υπονοούμενες εγγυήσεις και συγκεκριμένα τρεις (3) στην παραδοσιακή παρέμβαση (Μ2, Μ3, Μ6), ένας στη δομημένη (Μ17) και τέσσερις στην καθοδηγούμενη (Μ22, Μ24, Μ27, Μ28). Από τους τελευταίους τέσσερις (4) οι τρεις (3) ανήκαν στην ίδια ομάδα κατά την διάρκεια της παρέμβασης, ενώ οι άλλοι δύο (2) της ομάδας χρησιμοποίησαν παραγωγική εγγύηση. Παραγωγική εγγύηση κατέγραψαν και τρεις (3) μαθητές που συμμετείχαν στην παραδοσιακή παρέμβαση (Πίνακας 52).

Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης, οι πέντε (5) από τους έξι (6) μαθητές που κατέγραψαν πλήρη, ως προς τη δομή επιχειρήματα ανήκαν στην ίδια ομάδα κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων. Τα μέλη της άλλης κατέγραψαν με ένα ή δύο δομικά στοιχεία. Στην δομημένη διερευνητική οι μαθητές και των δύο ομάδων στήριξαν στις απαντήσεις του σε πλήρη επιχειρήματα. Ως προς το είδος των εγγυήσεων δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στα επιχειρήματα.

Σε σχέση με το επίπεδο επιδόσεων που ανήκαν οι μαθητές δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στη δομή των επιχειρημάτων ούτε στο τμήμα της παραδοσιακής ούτε της δομημένης διερευνητικής. Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης, αξίζει να σημειωθεί ότι από τους έξι (6) μαθητές που κατέγραψαν πλήρη επιχειρήματα ως προς τη δομή τους, οι τέσσερις (4) ανήκαν στην ομάδα χαμηλών επιδόσεων.. Στην ομάδα της παραδοσιακής και της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στη δομή των επιχειρημάτων τους σε σχέση με την ομάδα επίδοσης στην οποία ανήκαν.

<u>4ο Ερώτημα/ Έργο πριν από τις παρεμβάσεις</u>

Ένας κήπος αποτελείται από 8 ίδιες τετράγωνες περιοχές, όπως στο σχήμα παρακάτω. Η περίμετρος του κήπου είναι 28 μ. Πόσο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου. Λάβετε υπόψη σας ότι το 1 εκ του σχήματος αντιστοιχεί σε 1 μ. στην πραγματικότητα.



			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			4 (M1, M2, M4, M5)		2 (M25, M26)
2 δομικά στοιχεία				1 (M13)	1 (M22)
1 δομικό στοιχείο				3 (M11, M12, M18)	
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	Εγγύηση	Συμπέρασμα			
✔	✔	✔	1 (M2)		
✔	✔	✗	2 (M1, M4)		1 (M25)
✗	✗	✗	1 (M5)		1 (M26)
✔	✗	-			1 (M22)
✗	✗	-		1 (M13)	
-	-	✗		3 (M11, M12, M18)	
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			2 (M1, M4)		
Οπτικοποιημένη (υλικό)			1 (M2)		2 (M22, M25)
Χωρίς εγγύηση				3 (M11, M12, M18)	
Αυθαίρετη			1 (M5)	1 (M13)	1 (M26)

Πίνακας 55: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις (4^{ο} ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο του δοκιμίου, οι περισσότερες απαντήσεις στηριζόταν σε επιχειρήματα που αποτελούνταν από τρία δομικά στοιχεία. Τα αποτελέσματα ως προς το είδος της εγγύησης δεν έδειξαν κάποιο να υπερισχύει, ενώ τα είδη που εντοπίστηκαν ήταν παραγωγική, αυθαίρετη (*M5 «Λοιπόν, έκανα διαίρεση 28:12 γιατί οι πλευρές του σχήματος είναι 12 και άμα το πολλαπλασιάσουμε με το 28 θα βρούμε το εμβαδόν. Εμβαδόν 233 εκ.»)* ή χρήση του υλικού (Πίνακας 53).

Στην περίπτωση της παραδοσιακής, από τις τέσσερις (4) απαντήσεις με πλήρη επιχειρήματα, οι τρεις (3) ανήκαν σε μαθητές υψηλών επιδόσεων, ενώ στις άλλες δύο ομάδες δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στη δομή των επιχειρημάτων.

<u>4ο Ερώτημα/ Έργο μετά από τις παρεμβάσεις</u>

			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			2 (Μ5, Μ7)	6 (Μ10, Μ14, Μ15, Μ16, Μ17, Μ18)	
2 δομικά στοιχεία			1 (Μ3)		
1 δομικό στοιχείο				3 (Μ11, Μ12, Μ13)	2 (Μ21,Μ25)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	Εγγύηση	Συμπέρασμα			
✔	✔	✔	1 (Μ7)	1 (Μ10)	
✔	✗	✗	1 (Μ5)		
✗	✗	✗		5 (Μ14, Μ15, Μ16, Μ17, Μ18)	
-	✗	✗	1 (Μ3)		
✔	-	-		1 (Μ13)	
-	-	✔			1 (Μ21)
-	-	✗		2 (Μ11, Μ12)	1 (Μ25)
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική			1 (Μ7)		
Οπτικοποιημένη (υλικό)			1 (Μ3)	1 (Μ10)	
Οπτικοποιημένη (σχήμα)			1 (Μ5)		
Χωρίς εγγύηση				3 (Μ11, Μ12, Μ13)	2 (Μ21, Μ25)
Αυθαίρετη				5 (Μ14, Μ15, Μ16, Μ17, Μ18)	

Πίνακας 56: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, μετά από τις διδακτικές παρεμβάσεις (4ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης κατέγραψαν στην πλειονότητά τους επιχειρήματα που αποτελούνταν και από τα τρία δομικά στοιχεία. Όσον αφορά στην ομάδα της παραδοσιακής οι περισσότεροι δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση, ενώ μόνο δύο (2) ήταν εκείνοι που τεκμηρίωσαν τον συλλογισμό τους με πλήρη επιχειρήματα. Στην περίπτωση των μαθητών της καθοδηγούμενης διερευνητικής οι περισσότεροι δεν κατέγραψαν κάποια απάντηση, ενώ μόνο δύο (2) ήταν εκείνοι που κατέγραψαν μόνο το συμπέρασμα (*Μ21 «Είναι 32 εμβαδόν», Μ25 «Βγήκαν 28»)* (Πίνακας 54).

Το έργο αυτό, φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές όλων των ομάδων καθώς οι απαντήσεις που πήραμε ήταν λίγες σε αριθμό από τους μαθητές της παραδοσιακής και της καθοδηγούμενης διερευνητικής. Ωστόσο, και στις απαντήσεις των μαθητών της δομημένης διερευνητικής οι εγγυήσεις με τις οποίες τεκμηρίωναν τον συλλογισμό τους ήταν είτε αυθαίρετες (πχ *Μ18 «Εμβαδόν έχει ο κήπος 2*10=40»)* είτε απουσίαζαν από αυτές (πχ *Μ12: «Είναι 40»)*

Οι σωστές απαντήσεις σε κάθε ομάδα μαθητών ήταν μοναδικές σε αριθμό. Στην παραδοσιακή στηρίχτηκε σε παραγωγική εγγύηση (*Μ7 «Άμα χωρίσεις το σχήμα σε 8 ίσα τετράγωνα, θα πάρεις το ένα, θα βρεις το ύψος και τη βάση και θα τα πολλαπλασιάσεις με το 8 και θα βρεις το εμβαδόν του σχήματος. 8*4=32τμ»*), στην δομημένη σε οπτικοποιημένη εγγύηση χρησιμοποιώντας το υλικό που τους είχε δοθεί (*Μ10 «Έβαλα ένα τετραγωνάκι και μέτρησα το ένα κουτάκι και βρήκα ότι είναι 4 και τα πολλαπλασίασα όλα μαζί και μου βγήκε 32 το εμβαδόν. Άρα το εμβαδόν είναι 32 τετραγωνικά εκατοστά»*) ενώ στην καθοδηγούμενη απουσίαζε εξ ολοκλήρου το στοιχείο της εγγύησης (*Μ21 « Είναι 32 εμβαδόν»*) (Πίνακας 54).

Στην περίπτωση της δομημένης διερευνητικής δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στη δομή των επιχειρημάτων σε σχέση με την ομάδα στην οποία ανήκαν. Στην καθοδηγούμενη διερευνητική, οι μοναδικοί δύο (2) μαθητές ανήκαν στην ίδια ομάδα και κατέγραψαν επιχειρήματα με ένα δομικό στοιχείο , ενώ απουσίαζε το στοιχείο της εγγύησης.

Ως προς το επίπεδο επιδόσεων στο οποίο ανήκαν οι μαθητές, δεν παρατηρήθηκε κάποια σχέση ούτε στις περιπτώσεις της παραδοσιακής και της καθοδηγούμενης που ήταν μικρός ο αριθμός των απαντήσεων, αλλά ούτε και στην περίπτωση της δομημένης που όλοι κατέγραψαν κάποιο επιχείρημα.

5ο Ερώτημα/ Έργο πριν από τις παρεμβάσεις

Τα παιδιά ενός σχολείου αποφάσισαν να φτιάξουν ένα παρτέρι στον κήπο του σχολείου για να φυτέψουν λουλούδια. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μέρος του κήπου, το οποίο θα περιφράξουν με συρματόπλεγμα 16 μέτρων. Τι σχήμα πρέπει να δώσουν στο παρτέρι τους για να έχουν τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου με στόχο να πείσεις τα παιδιά.

			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			1 (M1)		
2 δομικά στοιχεία			3 (M2, M3, M6)	3 (M12, M13, M17)	2 (M19, M26)
1 δομικό στοιχείο					
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	Εγγύηση	Συμπέρασμα			
✗	✗	✗	1 (M1)		
-	✔	✔		1 (M13)	
-	✗	✔	1 (M6)	2 (M12, M17)	
-	✗	✗	2 (M2, M3)		2 (M19, M26)
Είδος εγγύησης					
Οπτικοποιημένη (σχήμα)			1 (M1)		
Αυθαίρετη			3 (M2, M3, M6)	2 (M12, M17)	2 (M19, M26)
Υπονοούμενη				1 (M13)	

Πίνακας 57: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, πριν από τις διδακτικές παρεμβάσεις (5ο ερώτημα/έργο)

Στο συγκεκριμένο έργο, οι μαθητές που απάντησαν ήταν λίγοι σε αριθμό και τα επιχειρήματά τους αποτελούνταν από δύο δομικά στοιχεία, με αυτό των δεδομένων του έργου να απουσιάζει, ενώ μία ήταν η μαθήτρια που στήριξε την απάντησή της με πλήρες ως προς τη δομή επιχείρημα, το οποίο ωστόσο δεν ήταν σωστό μαθηματικά (*M1 «Τα παιδιά θα μπορούν να δώσουν όποιο σχήμα θέλουν, έχουν την ίδια επιφάνεια και τα δύο σχήματα»* (σχεδίασε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο)) Φάνηκε να τους δυσκόλεψε αρκετά και όσοι μαθητές απάντησαν, υποστήριξαν το συμπέρασμά τους με αυθαίρετη εγγύηση (7 μαθητές σε αριθμό) χωρίς να λαμβάνουν υπόψη μαθηματικά δεδομένα. Μοναδικές ήταν οι περιπτώσεις μαθητών που σχεδίασαν κάποιο σχήμα για να στηρίξουν την απάντησή τους (Μ1), ή που υπονοούσαν κάποιον μαθηματικό κανόνα (Μ13). Τα δεδομένα του ερωτήματος φάνηκε να απουσιάζουν από τις απαντήσεις των μαθητών του δείγματος, ενώ ακόμα και στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν ήταν λανθασμένα (Πίνακας 55).

Στο συγκεκριμένο έργο, λόγω του μικρού αριθμού των απαντήσεων, δεν μπορεί να διαπιστωθεί κάποια ομοιομορφία στη δομή των επιχειρημάτων. Αξίζει μόνο να αναφερθεί ότι στην παραδοσιακή δεν κατεγράφησαν επιχειρήματα του μεσαίου επιπέδου επιδόσεων, στην δομημένη του χαμηλού και στην καθοδηγούμενη του υψηλού και του χαμηλού.

<u>5ο Ερώτημα/ Έργο μετά από τις παρεμβάσεις</u>

			Παραδοσιακή	**Δομημένη**	**Καθοδηγούμενη**
Πληρότητα δομικών στοιχείων					
3 δομικά στοιχεία			2 (Μ1, Μ7)	1 (Μ13)	1 (Μ22)
2 δομικά στοιχεία				2 (Μ14, Μ17)	1 (Μ25)
1 δομικό στοιχείο					2 (Μ27, Μ28)
Ορθότητα δομικών στοιχείων					
Δεδομένα	Εγγύηση	Συμπέρασμα			
✔	✔	✔			1 (Μ22)
✔	✔	✗	1(Μ7)	1 (Μ13)	
✗	✗	✗	1 (Μ1)		
✗	✗	-		1 (Μ14)	
-	✗	✔		1 (Μ17)	
-	✗	✗			1 (Μ25)
-	✔	-			1 (Μ27)
-	✗	-			1 (Μ28)
Είδος εγγύησης					
Παραγωγική					2 (Μ27, Μ28)
Οπτικοποιημένη (Σχήμα)			2 (Μ1, Μ7)		1 (Μ25)
Αυθαίρετη				2 (Μ14, Μ17)	
Υπονοούμενη				1 (Μ13)	
Επαγωγική					

Πίνακας 58: Ανάλυση επιχειρημάτων των μαθητών της κάθε παρέμβασης, μετά από τις διδακτικές παρεμβάσεις (5^{ο} ερώτημα/έργο)

Το συγκεκριμένο έργο, φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές του δείγματος, με αποτέλεσμα τα επιχειρήματα που μελετήσαμε να είναι λίγα σε αριθμό. Στην περίπτωση της παραδοσιακής παρέμβασης, όσοι απάντησαν (2) τεκμηρίωσαν τον συλλογισμό τους με πλήρη, ως προς τα δομικά στοιχεία, επιχειρήματα, τα οποία ωστόσο δεν ήταν μαθηματικά ορθά (*Μ1 «Τα παιδιά πρέπει να δώσουν σχήμα ορθογώνιου, ώστε να έχουν μεγαλύτερη επιφάνεια» (*σχεδίασε ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο), *Μ7 «Το σχήμα που θα χρησιμοποιήσουν θα είναι ορθογώνιο. Η βάση θα είναι 6μ και το ύψος θα είναι 2μ.»)*. Στις άλλες δύο παρεμβάσεις οι απαντήσεις τους συμπεριέλαβαν κυρίως το στοιχείο της εγγύησης, ενώ μοναδικές ήταν οι περιπτώσεις που παρατηρήθηκαν και τα τρία δομικά στοιχεία (Πίνακας 56)

Στο ερώτημα αυτό, οι σωστές απαντήσεις που αξιολογήθηκαν στο κομμάτι της μαθηματικής έννοιας ως ορθές ήταν δύο (2). Ο ένας μαθητής (Μ27) ανήκε στην καθοδηγούμενη ομάδα και στήριξε την απάντησή του σε παραγωγική εγγύηση, ενώ ο άλλος (Μ17) ανήκε στην δομημένη και στήριξε το συμπέρασμά του σε μία αυθαίρετη εγγύηση χωρίς να αξιοποιήσει τα δεδομένα του έργου (Πίνακας 56).

Στην περίπτωση της δομημένης παρέμβασης, οι τρεις (3) μαθητές που κατέγραψαν επιχειρήματα με δύο ή τρία δομικά στοιχεία ανήκαν στην ίδια ομάδα. Στην καθοδηγούμενη, οι δύο που κατέγραψαν μόνο ένα δομικό στοιχείο στα επιχειρήματά τους ανήκαν στην ίδια ομάδα και οι άλλοι δύο στην άλλη.

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην ομάδα της παραδοσιακής και της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης απάντησαν μόνο οι μαθητές της υψηλών και μεσαίων επιδόσεων. Αντίστοιχα, στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης απάντησαν μόνο οι μαθητές υψηλών και χαμηλών επιδόσεων. Οι τελευταίοι στήριξαν τις απαντήσεις τους σε επιχειρήματα με ένα δομικό στοιχείο, αυτό της εγγύησης, η οποία ήταν παραγωγική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας, όπως εξάγονται από τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Η οργάνωση του κεφαλαίου βρίσκεται σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί αρχικά και τους άξονες πάνω στους οποίους στηρίχτηκε η διατύπωσή τους: *είδος διδακτικής παρέμβασης, μαθηματική έννοια* και *δεξιότητα επιχειρηματολογίας.*

Αρχικά παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που αφορούν στο σχεδιασμό και την εφαρμογή της διερευνητικής προσέγγισης, αλλά και στη σύγκριση της τελευταίας με την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία. Στη συνέχεια αναλύονται τα συμπεράσματα που αφορούν στην ίδια τη μαθηματική έννοια και τέλος τα συμπεράσματα σχετικά με την ικανότητα των μαθητών για καταγραφή επιχειρημάτων.

Εκτός από τα πρωτότυπα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η παρούσα έρευνα, γίνεται σύγκρισή της και με άλλες έρευνες από τη διεθνή βιβλιογραφία, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στη βιβλιογραφική ανασκόπηση προηγούμενου κεφαλαίου. Στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου προτείνονται προεκτάσεις της έρευνας και γίνονται εισηγήσεις για μελλοντικές μελέτες.

5.2 Συμπεράσματα και σχόλια για την εφαρμογή διδακτικών παρεμβάσεων

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα συμπεράσματα που αφορούν στις διδακτικές παρεμβάσεις. Τα συμπεράσματα αυτά έχουν να κάνουν τόσο με το σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων όσο και με την εφαρμογή τους. Η ανάλυσή τους γίνεται σε σχέση με την εκπαιδευτικό, τους μαθητές, τα χαρακτηριστικά της ίδιας της παρέμβασης που εφαρμόστηκε και τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί.

Ποιες είναι οι απαιτήσεις στο σχεδιασμό των διερευνητικών παρεμβάσεων (καθοδηγούμενη διερευνητική και δομημένη διερευνητική) σε σχέση με τη διδασκαλία, τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό;

Ιδιαίτερος προβληματισμός προέκυψε κατά τον σχεδιασμό των διερευνητικών παρεμβάσεων σε μαθητές Δημοτικού και ειδικότερα στο αντικείμενο των Μαθηματικών. Καθ’ ότι η διερευνητική προσέγγιση αποτελεί ένα πολύπλευρο και πολύπλοκο κατασκεύασμα με ασαφή ορισμό, έπρεπε να διευκρινιστούν τα χαρακτηριστικά τα οποία την ορίζουν ως καινοτόμα, καθώς και οι διαφορές οι οποίες την διαχωρίζουν από άλλες θεωρίες μάθησης, όπως αναλύθηκε και στο θεωρητικό κομμάτι της παρούσας έρευνας. Μετά τη μελέτη των βιβλιογραφικών αναφορών έγινε σαφές ότι η διδασκαλία που βασίζεται στη προσέγγιση αυτή αποτελεί μία δυναμική διαδικασία, της οποίας τα χαρακτηριστικά και τα στάδια δεν είναι σαφή. Έτσι, έπρεπε να διευκρινιστούν οι παράγοντες και τα χαρακτηριστικά της ως προς το ρόλο του μαθητή, της εκπαιδευτικού και της ίδιας της μαθησιακής διαδικασίας.

Μετά την οριοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης, σειρά είχε η επιλογή της κατάλληλης μορφής της ως προς το βαθμό καθοδήγησης που θα παρείχε ο εκπαιδευτικός. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας επιλέχθηκε η δομημένη διερευνητική και η καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση. Για τη δημιουργία των έργων των φύλλων εργασίας που θα δίνονταν στους μαθητές των διερευνητικών παρεμβάσεων, λήφθηκε υπόψη το σχολικό εγχειρίδιο και το περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων. Εκεί εντοπίστηκε και η πρώτη δυσκολία της διατριβής, η οποία αφορούσε στο «άνοιγμα» των δραστηριοτήτων, με την ταυτόχρονη εστίαση των αναλυτικών προγραμμάτων σε διαδικαστικές και όχι εννοιολογικές διαδικασίες. Η ανελαστικότητα των αναλυτικών προγραμμάτων και οι κατά κύριο λόγο κλειστές δραστηριότητες των εγχειριδίων, δυσκολεύουν την δημιουργία ανοιχτών προβληματικών καταστάσεων. Ταυτόχρονα, ιδιαίτερα απαιτητική κρίθηκε η διαφοροποίηση των δραστηριοτήτων που αφορούσαν στις δύο μορφές της διερευνητικής διδασκαλίας, οι οποίες θα έπρεπε να προωθούν τον διάλογο και τη συνεργασία μεταξύ των μελών των ομάδων με στόχο την κατάκτηση της νέας μαθηματικής γνώσης (Van de Walle, 2005), αλλά ταυτόχρονα να είναι με τέτοιο τρόπο διατυπωμένες που να διαφέρουν ως προς τον βαθμό καθοδήγησης που θα παρεχόταν στους μαθητές. Όλοι αυτοί οι παράγοντες έκαναν τον σχεδιασμό μία ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία. Έτσι, προτείνεται μία σταδιακή αξιοποίηση των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου με τον εμπλουτισμό τους με διερευνητικά στοιχεία πριν τον σχεδιασμό έργων για διερευνητικές παρεμβάσεις.

Ένας ακόμη παράγοντας που καθορίζει τη διδασκαλία είναι ο χρόνος εφαρμογής της. Κατά τον σχεδιασμό των διερευνητικών παρεμβάσεων, αυτός οφείλει να είναι ελαστικός καθώς, σε μικρότερο βαθμό στη δομημένη και σε μεγαλύτερο στην καθοδηγούμενη, η πορεία της εργασίας καθορίζεται από τους ίδιους τους μαθητές. Έτσι, ο χρονοπρογραμματισμός μιας τέτοιας διδασκαλίας, οφείλει να είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο μιας παραδοσιακής παρέμβασης, έτσι ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν στο ιδιαίτερο αυτό μαθησιακό περιβάλλον, χωρίς να υφίστανται την πίεση του χρόνου.

Ποιες είναι οι απαιτήσεις στην εφαρμογή των διερευνητικών παρεμβάσεων (καθοδηγούμενη διερευνητική και δομημένη διερευνητική) σε σχέση με τη διδασκαλία, τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό;

Οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν στη χρήση των διερευνητικών δραστηριοτήτων και δεν βρέθηκαν μελέτες που να εστιάζουν στον τρόπο εφαρμογής τους στην εκπαιδευτική πρακτική. Το βιβλιογραφικό αυτό κενό οδήγησε σε απαιτήσεις που προέκυψαν κατά την εφαρμογή και οδήγησαν σε νέες θεωρητικές προτάσεις σχετικά με την πρακτική χρήση της προσέγγισης.

Η ανταπόκριση των μαθητών του δείγματος στη συγκεκριμένη καινοτόμα και άγνωστη σε αυτούς προσέγγιση διδασκαλίας, έδειξε ότι οι μαθητές Δημοτικού μπορούν να ερευνήσουν και να ακολουθήσουν τα βήματα της μεθοδολογίας μιας επιστημονικής έρευνας. Μία από τις ελάχιστες έρευνες που εφάρμοσε τη διερευνητική προσέγγιση σε μαθητές Δημοτικού και ανέδειξε θετικά αποτελέσματα είναι η έρευνα των Sickel et al. (2013), η οποία αφορούσε στις Φυσικές Επιστήμες. Εδώ έγκειται και μία από τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης έρευνας, η οποία ανέδειξε ότι με μία προσαρμογή των δραστηριοτήτων και δόμηση της διδασκαλίας, η διερευνητική προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί και στο αντικείμενο των Μαθηματικών. Ακόμη, οι μαθητές εμφάνισαν αυξημένο ενδιαφέρον από τη χρήση της διερευνητικής διδασκαλίας, επιβεβαιώνοντας τα αντίστοιχα θετικά αποτελέσματα ευρωπαϊκών προγραμμάτων, τα οποία στηρίζονται στη συγκεκριμένη μέθοδο (European Commission, 2007).

Παρά την επιτυχή συμμετοχή των μαθητών στις διερευνητικές διδακτικές παρεμβάσεις, φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν αρχικά με αμηχανία την νέα μέθοδο. Ιδιαίτερα οι μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης ζητούσαν διαρκώς ανατροφοδότηση από την εκπαιδευτικό, ενώ δυσκολεύτηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό στην οικοδόμηση της γνώσης από τους ίδιους. Αυτό ίσως οφείλεται σε δύο διαφορετικούς παράγοντες. Πρώτον, έχει να κάνει με την απειρία των μαθητών όσον αφορά στη συμμετοχή τους σε ένα τέτοιο είδος διδασκαλίας και την ταυτόχρονη εξοικείωσή τους με την παραδοσιακή προσέγγιση διδασκαλίας. Δεύτερον έγκειται στο ότι πρέπει να προσφέρεται από την εκπαιδευτικό στους μαθητές μία πρώτη θεωρητική αφετηρία για να μπορέσουν να αξιοποιήσουν σωστά τα δεδομένα που συλλέγουν και να προσανατολιστούν στην αλλαγή της βιωματικής γνώσης από την επιστημονική (Kock et al., 2011). Κάποιοι δεν ένιωθαν έτοιμοι να δοκιμάσουν μία διαφορετική μέθοδο διδασκαλίας, καθώς θεωρούσαν ότι ο ρόλος τους ήταν πιο απαιτητικός. Παρόμοια αποτελέσματα βρήκαν στην έρευνά τους οι Anderson (2002), Sundberg (1992) και Sundberg et al.(1992). Για το λόγο αυτό, ίσως το να προηγηθεί μία εξοικείωση των μαθητών σε συνεργατικές μεθόδους διδασκαλίας πριν την εφαρμογή μιας διερευνητικής προσέγγισης, να βοηθούσε στην καλύτερη αντιμετώπισή της από τους μαθητές. Στο ίδιο συμπέρασμα, είχε καταλήξει και έρευνα των Amaral, Garrison και Klentschy (2002), οι οποίοι αναφέρθηκαν στο ότι ο χρόνος που περνούν οι μαθητές σε διερευνητικά περιβάλλοντα μάθησης είναι ανάλογος με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Η εξοικείωση τόσο των μαθητών αλλά και της εκπαιδευτικού με την παραδοσιακή προσέγγιση έκανε πιο απαιτητική την εφαρμογή των διερευνητικών δραστηριοτήτων. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος που εμπλέκονται σε αυτό, τόσο πιο εύκολος θα είναι ο σχεδιασμός. Επιπλέον, κάτι που θα βοηθούσε τόσο τον εκπαιδευτικό όσο και τους μαθητές είναι η αρχική υποστήριξη, καθοδήγηση και βοήθεια (scaffolding), οι οποίες σιγά σιγά θα φθίνουν, σύμφωνα και με έρευνες των Lazonder et al (2009).

Κατά τη διάρκεια των διερευνητικών παρεμβάσεων, λόγω και της διαφορετικής διαρρύθμισης των θρανίων των, οι μαθητές μπορούσαν να μιλάνε πιο εύκολα με τους συμμαθητές τους και γινόταν φασαρία κάποιες φορές. Το φαινόμενο αυτό θα ήταν εντονότερο αν ο αριθμός των μαθητών ήταν μεγαλύτερος. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που παρατηρήθηκε και σε άλλες έρευνες όπως στην έρευνά του Boaler (1998), όπου οι μαθητές που διδάχτηκαν με διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας θεωρούσαν ότι το μάθημα με την μέθοδο της διερευνητικής διδασκαλίας ήταν πιο θορυβώδες, κάτι που απαιτεί επίσης περισσότερο χρόνο και εξοικείωση των μαθητών με τη νέα μέθοδο.

Ωστόσο, υπήρξε και μία ομάδα μαθητών που φάνηκε να δυσκολεύεται ιδιαίτερα στην συμμετοχή τους στις διερευνητικές προσεγγίσεις. Η ομάδα αυτή αποτελούνταν από μαθητές που δεν είχαν ιδιαίτερη ικανότητα στην κατανόηση της ελληνικής γλώσσας και οι οποίοι περιορίστηκαν στο να παρακολουθούν τις συμπεριφορές των άλλων αδυνατώντας να εξηγήσουν τις δικές τους απόψεις. Φάνηκε έτσι ότι η καλή χρήση της γλώσσας ήταν απαραίτητη για την προσαρμογή τους στο προτεινόμενο μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο απαιτούσε λήψη αποφάσεων, διατύπωση και επικοινωνία της σκέψης τους καθώς και αναστοχασμό της εμπειρίας τους σε κάποιες φάσεις της παρέμβασης. Ωστόσο, οι γνώσεις τους ως προς τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια βελτιώθηκαν.

Μία ενδεχόμενη εξοικείωση των μαθητών αυτών με δραστηριότητες που απαιτούν τη συνεργασία και την ανταλλαγή απόψεων, ίσως τους βοηθούσε ως προς την ενεργητική συμμετοχή τους.

Τέλος, τόσο η παραδοσιακή παρέμβαση όσο και οι δύο μορφές διερευνητικών διδασκαλιών κατάφεραν να καλύψουν την ύλη που προβλεπόταν από το βιβλίο του δασκάλου, καθώς και τους στόχους που είχαν ορίσει τα αναλυτικά προγράμματα για τη συγκεκριμένη τάξη. Ωστόσο, στην παραδοσιακή παρέμβαση η ύλη αυτή καλύφθηκε πιο γρήγορα από την εκπαιδευτικό, με αποτέλεσμα να υπάρξει περισσότερος χρόνος για εξάσκηση και εμπέδωση μέσω των ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με έρευνα των Kogan και Laursen (2013), οι οποίοι αναίρεσαν την πεποίθηση που επικρατούσε ότι η διερευνητική προσέγγιση οδηγεί σε διδασκαλίες κατάλληλες μόνο για τμήματα με υψηλό επίπεδο επιδόσεων. Η αντίληψη αυτή στηριζόταν στο γεγονός ότι ο χρόνος που απαιτείται για τη διερευνητική διδασκαλία είναι πολύς και, αν δεν υπάρχει η κατάλληλη ανταπόκριση από τους μαθητές, ελλοχεύει ο κίνδυνος μη κάλυψης της ύλης. Ωστόσο, διαπιστώθηκε πως η διερευνητική διδασκαλία αποφέρει θετικά αποτελέσματα όσον αφορά στην κατανόηση και μακροπρόθεσμη κατάκτηση της γνώσης. Φυσικά, η εφαρμογή διερευνητικών διδασκαλιών και σε άλλες μαθηματικές έννοιες και τάξεις θα βοηθήσει στην διαμόρφωση μιας πληρέστερης εικόνας σχετικά με αυτό.

5.3 Συμπεράσματα και σχόλια για τη μαθηματική έννοια

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας όσον αφορά στη μαθηματική έννοια που αποτέλεσε τον άξονα των διδακτικών παρεμβάσεων. Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με την ταυτόχρονη ανάπτυξη της ικανότητας επιχειρηματολογίας αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους των περισσότερων προγραμμάτων σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Έτσι, εκτός από τις επιστημονικές δεξιότητες που αναπτύσσει η συγκεκριμένη προσέγγιση, έχει ενδιαφέρον να αναδειχθεί και ο βαθμός επίδρασής της στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.

Ποιες είναι οι γνώσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;

Οι μαθητές του δείγματος, πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις, φάνηκε να μην γνωρίζουν την έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του. Η πλειονότητά τους δεν απάντησε στα ερωτήματα του δοκιμίου. Οι ελάχιστες απαντήσεις αφορούσαν στη μέτρησης του μήκους των πλευρών των σχημάτων και σε κάποιες περιπτώσεις της περιμέτρου τους. Ωστόσο, διαπιστώθηκε πως αναγνώριζαν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, και συγκεκριμένα του ορθογωνίου και του τετραγώνου, που κυριαρχούσαν στο δοκίμιο. Το υλικό κάλυψης που είχαν στη διάθεσή τους χρησιμοποιήθηκε μόνο από έναν μαθητή. Λίγοι ήταν εκείνοι που προσπάθησαν να σχεδιάσουν το πλέγμα στο εσωτερικό των σχημάτων αποδεικνύονταν πως γνώριζαν τι είναι αυτό που πρέπει να καταμετρηθεί. Ωστόσο, ακόμη και αυτοί δεν προχώρησαν περαιτέρω στην μέτρηση. Σύμφωνα με τα στάδια των Clements & Stephan (2004), οι μαθητές του δείγματος κατατάσσονται στο πρώτο στάδιο αντίληψης της μέτρησης της επιφάνειας.

Στα ερωτήματα του δοκιμίου που είχαν πιο σύνθετη εκφώνηση και δεν θύμιζαν αυτά των σχολικών εγχειριδίων, οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται περισσότερο. Δεν εξέτασαν ενδεχόμενες λύσεις, ούτε διατύπωσαν υποθέσεις. Πολλές φορές μάλιστα στις ελάχιστες απαντήσεις φάνηκε να μην λαμβάνουν υπόψη τους τα δεδομένα που τους δίνονταν. Η ερμηνεία των δεδομένων που καταδεικνύει ελλιπή επίλυση του προβλήματος και αδυναμία κατανόησης του μαθηματικού κώδικα έχει επισημανθεί και από προηγούμενη έρευνα (Αγαλιώτης, 2000). Τα δεδομένα του προ-πειραματικού σταδίου επιβεβαίωσαν την κοινή διαπίστωση ερευνών πως οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται με επιτυχία σε ερωτήσεις που απαιτούν βασικές γνώσεις και μετρήσεις της επιφάνειας (Τζεκάκη, 2002).

Ποιες είναι οι γνώσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση και τι διαφοροποιήσεις παρουσίασαν σε σχέση με την παρέμβαση;

Οι μαθητές του δείγματος φάνηκε να πετυχαίνουν καλύτερα αποτελέσματα ως προς την μαθηματική έννοια μετά τις παρεμβάσεις, ανεξάρτητα από το είδος της παρέμβασης στην οποία συμμετείχαν. Σε σχέση με την παρέμβαση καλύτερες επιδόσεις στο δοκίμιο παρουσίασαν οι μαθητές της παραδοσιακής διδασκαλίας, με τους μαθητές της καθοδηγούμενης και της δομημένης διερευνητικής να ακολουθούν κατά σειρά. Ωστόσο παρατηρήθηκε ότι, έπειτα από σύγκριση των μέσων όρων επίδοσης πριν και μετά τις παρεμβάσεις, μεγαλύτερη βελτίωση πέτυχαν πρώτα οι μαθητές της καθοδηγούμενης και στη συνέχεια οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης, κάτι το οποίο θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικό. Τα αποτελέσματα συνηγορούν στο ότι η διερευνητική προσέγγιση επέδρασε μεν θετικά στην κατανόηση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, όχι όμως σε μεγάλο βαθμό. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με πρόσφατες έρευνες (Lazonder & Harmsen, 2016· Freeman et al, 2014· Lazonder & Harmsen, 2016), οι οποίες τόνισαν τη σημασία της συμμετοχής των μαθητών σε μία τέτοιου είδους διδασκαλία συγκριτικά με παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, καθώς και με άλλες που έδειξαν ότι τουλάχιστον ως προς την εννοιολογική εξέλιξη των μαθητών, ο συνδυασμός εικόνων και περιβαλλόντων ανακάλυψης σε κάθε διδασκαλία είναι πιο αποτελεσματικός από τη χρήση ενός μόνο είδος περιβάλλοντος μάθησης (Jaakkola, Nurmi & Lehtinen, 2011).

Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές του δείγματος φάνηκε να γνωρίζουν την διαδικασία μέτρησης του εμβαδού και να τα καταφέρνουν στα ερωτήματα που τους δόθηκαν. Η στρατηγική που χρησιμοποιούσαν ήταν ως επί το πλείστων ο μαθηματικός τύπος που είχαν διδαχθεί ή ανακαλύψει κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων. Το υλικό δεν χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές, με εξαίρεση κάποιες περιπτώσεις της καθοδηγούμενης διερευνητικής προσέγγισης, οι οποίοι προσπάθησαν με τη βοήθεια αυτού να καλύψουν τις επιφάνειες. Αυτό ίσως οφείλεται και στην εξοικείωση που είχαν με τον τρόπο αυτό από τις διδακτικές παρεμβάσεις. Σε ερωτήματα/έργα τα οποία είχαν μία πιο σύνθετη εκφώνηση και δεν θύμιζαν αυτά του σχολικού εγχειριδίου, οι μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής φάνηκε να τα καταφέρνουν καλύτερα, ίσως λόγω του είχαν εμπλακεί ξανά σε περιβάλλον μάθησης που απαιτούσε πειραματισμό και διατύπωση ενδεχόμενων λύσεων.

Αναφορικά με τη διαφορά των δύο μορφών διερευνητικής προσέγγισης στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας, φάνηκε ότι, σε σχέση με τις αρχικές επιδόσεις τους, οι μαθητές που ανήκαν στην καθοδηγούμενη διερευνητική είχαν μεγαλύτερη βελτίωση, χωρίς μεγάλη διαφορά ωστόσο. Κάτι τέτοιο είχαν συμπεράνει και οι Sadeh & Zion (2009), οι οποίοι υποστήριξαν πως όσο πιο ανοιχτή μορφή έχει η διερευνητική παρέμβαση τόσο πιο αποτελεσματική είναι.

Τέλος, διαπιστώθηκε ότι το είδος της παρέμβασης δεν επηρέασε το ίδιο τους μαθητές των τριών επιπέδων επίδοσης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές υψηλών επιδόσεων παρουσίασαν μεγαλύτερη βελτίωση στην περίπτωση της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης, ενώ οι μαθητές μεσαίων και χαμηλών επιδόσεων στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης. Για αυτή την επίδραση της διερευνητικής προσέγγισης σε μαθητές διαφορετικών επιπέδων επιδόσεων, δεν είχε βρεθεί αντίστοιχη βιβλιογραφία.

Τι είδους λάθη εντοπίστηκαν στις απαντήσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις, φαίνεται ότι παρουσιάστηκαν δυσκολίες στην έννοια του εμβαδού και στη μέτρησή του, καθώς και σε άλλες διαδικασίες που εμπλέκονται άμεσα στη προσέγγιση του συγκεκριμένου θέματος είναι όπως η χρήση μονάδων μέτρησης και οι ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων.

Αναφορικά με την έννοια του εμβαδού, παρατηρήθηκε ελλιπής γνώση ως προς τη δυνατότητα κάλυψης επιφάνειας με τη βοήθεια υλικού και ως προς τη διάκρισή της από την περίμετρο ενός σχήματος. Εξαιτίας αυτής της εννοιολογικής σύγχυσης, οι μαθητές έτειναν να εφαρμόζουν προσθετικές μεθόδους για τον υπολογισμό του εμβαδού. Ο Kidman (2001) έχει αποδώσει τη συμπεριφορά αυτή στο γεγονός ότι οι μαθητές ακολουθούν τη διαίσθησή τους, η οποία τους υποδεικνύει προσθετική διαδικασία.

Τα λάθη δεν φάνηκε να διαφοροποιούνται μεταξύ των ομάδων των μαθητών, ενώ αφορούσαν κυρίως στη σύγχυση του εμβαδού με την περίμετρο, τη δόμηση του πλέγματος ή τη λανθασμένη επεξεργασία των δεδομένων του ερωτήματος.

Τι είδους λάθη εντοπίστηκαν στις απαντήσεις των μαθητών Ε' Δημοτικού γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση και τι διαφοροποιήσεις παρουσίασαν σε σχέση με την παρέμβαση;

Όσον αφορά στα είδη των λαθών που σημείωσαν οι μαθητές κατά τη διαχείριση των έργων προς επίλυση στα δοκίμια μετά τις παρεμβάσεις, εμφανίστηκαν κάποιες διαφορές. Οι μαθητές της παραδοσιακής παρέμβασης έκαναν λάθη κατά τη διαδικασία επίλυσης, που αφορούσαν κατά κύριο λόγο στις πράξεις ή τη χρήση οργάνων. Οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής παρέμβασης έκαναν λάθη που αφορούσαν τόσο στην έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του όσο και γενικότερα στην επίλυση του ευρύτερου έργου. Ακόμη, οι μαθητές της καθοδηγούμενης έκαναν περισσότερα λάθη στη διαδικασία επίλυσης, όπως και οι μαθητές της παραδοσιακής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία ως προς τα λάθη των μαθητών σε σχέση με τις ομάδες στις οποίες συμμετείχαν στην περίπτωση των διερευνητικών προσεγγίσεων, κάτι που χρίζει περισσότερης μελέτης σε παρεμβάσεις με μεγαλύτερο χρόνο.

5.4 Συμπεράσματα και σχόλια για την καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας

Μία από τις βασικότερες δεξιότητες που φαίνεται να καλλιεργεί η διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας είναι η ανάπτυξη της δεξιότητας της επιχειρηματολογίας. Η δεξιότητα αυτή αποτελεί μεταξύ άλλων μία από τις δεξιότητες που πρέπει να αναπτύξει ο μαθητής του 21[ου] αιώνα μαζί με την κριτική σκέψη, την ικανότητα λήψης αποφάσεων και τη συνεργατικότητα.

Τι χαρακτηριστικά εμφάνισε η δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών Ε' Δημοτικού για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση;

Οι μαθητές και των τριών διδακτικών παρεμβάσεων φάνηκε να δυσκολεύονται ως προς την τεκμηρίωση των απαντήσεών τους και δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων. Τα επιχειρήματα που κατέγραψαν περιλάμβαναν κυρίως το δομικό στοιχείο του συμπεράσματος. Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν και με αποτελέσματα άλλων ερευνών σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές συνηθίζουν να προτείνουν επαρκές συμπέρασμα στις απαντήσεις τους (Jimenez-Aleixandre, Rodriguez & Duschl, 2000· Σκουμιός, Χατζηνικήτα, 2013).

Το δομικό στοιχείο που απουσίαζε στις περισσότερες περιπτώσεις ήταν αυτό της εγγύησης. Η απουσία αυτής της σύνδεσης μεταξύ των δεδομένων του ερωτήματος και του συμπεράσματος που προτείνεται στην απάντηση έχει αποδειχθεί και ερευνητικά (McNeil & Krajcik, 2007), και μάλιστα, στις περιπτώσεις που ακολουθείται κάποια επιστημονική αρχή, δε δηλώνεται ξεκάθαρα αλλά υπονοείται. Σε περιπτώσεις που η εκφώνηση του ερωτήματος ήταν πιο σύνθετη, η πλειονότητα των μαθητών δεν έλαβε υπόψη της τα δεδομένα που δίνονταν.

Τι χαρακτηριστικά εμφάνισε η δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών Ε' Δημοτικού για την τεκμηρίωση του συλλογισμού τους γύρω από την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση και τι διαφοροποιήσεις παρουσιάστηκαν σε σχέση με αυτή;

Σε γενικές γραμμές φάνηκε να βελτιώνεται η ικανότητα των μαθητών να επιχειρηματολογούν, ανεξάρτητα από τη διδακτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν. Ωστόσο, η βελτίωση δεν ήταν ιδιαίτερα μεγάλη ίσως λόγω του μικρού χρονικού διαστήματος διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας, αλλά και εφαρμογής των παρεμβάσεων. Ακόμη, μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι οι μαθητές ήταν συνηθισμένοι στην τεκμηρίωση των απαντήσεών τους με ένα επαρκές συμπέρασμα (Jimenez-Aleixandre, Rodriguez & Duschl, 2000· Σκουμιός, Χατζηνικήτα, 2013). Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας φάνηκαν να συμφωνούν με προηγούμενες έρευνες που ασχολήθηκαν με την επιχειρηματολογία, οι οποίες εντόπισαν δυσκολίες των μαθητών να αναπτύσσουν επιχειρήματα με βάση τα στοιχεία στα οποία στηρίζουν τις απαντήσεις τους (McNeil & Krajicik, 2007). Συγκεκριμένα, στην πλειονότητα των απαντήσεων των μαθητών απουσίαζε η διατύπωση της εγγύησης ακόμη και μετά τις παρεμβάσεις, παρόλο που τα συμπεράσματά τους στηρίζονταν σε αυτή.

Οι μαθητές που συμμετείχαν στη δομημένη διερευνητική παρέμβαση φάνηκε να καταγράφουν επιχειρήματα με περισσότερα δομικά στοιχεία μετά τις παρεμβάσεις. Αυτό ίσως εξηγείται και από το γεγονός ότι τόσο οι δραστηριότητες του φύλλου εργασίας της συγκεκριμένης ομάδας όσο και η εκπαιδευτικός έθεταν περισσότερα ερωτήματα που ζητούσαν την επεξήγηση της απάντησης από τους μαθητές. Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάστηκαν και στην έρευνα της Papaevripidou et al. (2007), η οποία ανέφερε πως μέσα από οδηγίες, οι μαθητές είναι σε θέση να τεκμηριώνουν όσα έμαθαν και σε άλλες καταστάσεις. Ωστόσο, από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, φάνηκε ότι από μεγαλύτερο βαθμό βεβαιότητας χαρακτηρίζονταν τα επιχειρήματα των μαθητών που συμμετείχαν στην παραδοσιακή και την καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση. Αυτό, προέκυψε από την χρήση κυρίως παραγωγικών εγγυήσεων από τους τελευταίους, σχέση με τη χρήση αυθαίρετων από αυτούς της δομημένης διερευνητικής. Έτσι, αξίζει να σχολιαστεί η διαφορά των αποτελεσμάτων ως προς την πληρότητα και την ποιότητα των επιχειρημάτων τους, κάτι που χρίζει περαιτέρω μελέτης σε μελλοντική έρευνα με μεγαλύτερο δείγμα μαθητών.

Το παραπάνω συμπέρασμα έρχεται σε αντίθεση με την επίδραση που είχε η μορφή της διερευνητικής παρέμβασης στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας, όπου οι μαθητές της καθοδηγούμενης εμφάνισαν καλύτερες επιδόσεις. Μέσα στη βιβλιογραφία υπάρχουν ενδείξεις ότι μία πιθανή αιτία αυτού του φαινομένου είναι το γεγονός ότι μέσω της διερευνητικής μάθησης οι μαθητές αναπτύσσουν δικούς τους τρόπους για την εξεύρεση λύσης (Maaß & Artigue, 2013). Το γεγονός αυτό ενδυναμώνει και καλλιεργεί την ικανότητα επιχειρηματολογίας, η οποία και τελικά είναι αρτιότερη όταν οι μαθητές καλούνται να την παρουσιάσουν.

Ακόμη ένα συμπέρασμα που προέκυψε από την παρούσα έρευνα αλλά δεν είχε εντοπιστεί στη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε είναι η επίδραση της ομάδας στην διατύπωση επιχειρημάτων στις διερευνητικές παρεμβάσεις. Στην περίπτωση της καθοδηγούμενης διερευνητικής παρέμβασης, παρατηρήθηκε ομοιομορφία στη δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μελών της ομάδας. Αντίθετα, στην περίπτωση της δομημένης δεν εντοπίστηκε κάτι παρόμοιο. Τέλος, δεν παρατηρήθηκε κάποια ομοιομορφία στη δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών που ανήκαν στο ίδιο επίπεδο επιδόσεων η οποία να απορρέει από την παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν.

5.5 Προεκτάσεις έρευνας/ Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες

Οι συνθήκες και ο χρόνος εφαρμογής της συγκεκριμένης έρευνας, φάνηκε να επηρεάζει τα αποτελέσματα των μαθητών του δείγματος. Η εμπλοκή των μαθητών σε διερευνητικές διδασκαλίες για περισσότερο χρόνο, θα φέρει θετικότερα αποτελέσματα, καθώς θα εξοικειωθούν περισσότερο τόσο με την εργασία σε ομάδες, όσο και με την μειωμένη καθοδήγηση της εκπαιδευτικού, την οποία και αναζητούσαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης. Έχει αποδειχτεί άλλωστε και από άλλες έρευνες (Amaral, et al., 2002) ότι όσο περισσότερο χρόνο εμπλέκονται οι μαθητές σε διερευνητικές διδασκαλίες, τόσο καλύτερα αποτελέσματα έχει μία τέτοιου είδους προσέγγιση.

Ένας βασικός περιορισμός της παρούσας έρευνας ήταν ο αριθμός των μαθητών που αποτέλεσαν το δείγμα της. Λόγω των συνθηκών που καθόρισε εκείνη την περίοδο η πανδημία, οι μαθητές παρακολουθούσαν μαθήματα στο σχολείο εναλλάξ μέρα παρά μέρα, οπότε τα τμήματα χωρίστηκαν με τυχαίο τρόπο στη μέση. Έτσι μια εφαρμογή της έρευνας σε περισσότερους μαθητές, ίσως θα έδινε συμπεράσματα τα οποία θα επέτρεπαν τη δημιουργία γενικεύσεων, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί στη δική μας περίπτωση.

Ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη των μαθησιακών επιδόσεων των μαθητών της κάθε παρέμβασης στην ίδια μαθηματική έννοια, αφού παρέλθει κάποιο διάστημα, έτσι ώστε να διαπιστωθεί ο βαθμός συγκράτησης πληροφοριών από την κάθε ομάδα (Huston, 2000).

Μία από τις βασικές δυσκολίες της εκπαιδευτικού που αποτελεί και πρόκληση της προσέγγισης είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της και η απουσία σταθερών σταδίων μιας διδασκαλίας βασισμένης σε αυτή. Η δυναμική φύση της απαιτεί ιδιαίτερη εξοικείωση των εκπαιδευτικών για την εφαρμογή τέτοιων διδασκαλιών, κάτι που θα μπορούσε να βελτιωθεί με τη πραγματοποίηση κατάλληλων επιμορφώσεων. Κομμάτι αυτής της επιμόρφωσης θα μπορούσε να είναι και ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων, κατάλληλων για διερευνητικές διδακτικές παρεμβάσεις που θα πορωθούν τον πειραματισμό και την ανακάλυψη της νέας γνώσης, καθώς το υλικό που προωθείται από το Υπουργείο Παιδείας (διδακτικό πακέτο) δεν ενδείκνυται για τέτοιας μορφής διδασκαλίες.

Ένα από τα χαρακτηριστικά της διερευνητικής προσέγγισης είναι η επιχειρηματολογία των μαθητών κατά τη διάρκεια της εργασίας τους σε ομάδες. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, μελετήθηκαν μόνο τα γραπτά επιχειρήματα των μαθητών στο δοκίμιο που τους δόθηκε πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις. Ενδιαφέρον θα είχε σε ένα μεγαλύτερο δείγμα η συσχέτιση των προφορικών επιχειρημάτων των μελών μιας ομάδας κατά την παρέμβαση και των γραπτών τους επιχειρημάτων στη συνέχεια σε κάποια γραπτή αξιολόγηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Αιτιολογία, Αξιολόγηση, Αντιμετώπιση.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αλεξανδρόπουλος, Γ., Γλάρος, Ε., & Μαρκόπουλος, Χ. (2013). Οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια της επιφάνειας. *Παιδαγωγική επιθεώρηση,* 55, 105- 123.

Αργυρόπουλος, Η., Βλαμός, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Στ., & Σιδερής, Π. (2016) *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου.* Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Βαϊτσίδη, Γ., Σκουμπουρδή, Χ., (2019). Δομή και περιεχόμενο γραπτών επιχειρημάτων μαθητών Ε' Δημοτικού: Επίδραση του βαθμού καθοδήγησης, *πρακτικά 8ου Συνεδρίου Ενεδίμ «Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών»*, Κύπρος, 160-169

Βασιλειάδης, (2014*) Καλλιέργεια δεξιοτήτων επιχειρηματολογίας και κριτικής σκέψης σε μαθητές δημοτικού σχολείου μέσα από τη χαρτογράφηση επιχειρημάτων*, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών Αγωγής / University of Cyprus, Faculty of Social Sciences and Education

Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, (2013). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ

Βρεττός & Καψάλης, (2009). *Αναλυτικά προγράμματα θεωρία, έρευνα και πράξη*, Διάδραση

Βρυνιώτη, Κ. & Κυρίδης, Α. & Σιβροπούλου- Θεοδοσιάδου, Ε. & Χρυσαφίδης, Κ. (2008) *Οδηγός Γονέα* διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο http://www.pischools.gr/preschool_education/yp_yliko/odig_gonea.pdf

Γκλιάου, Ν. (2013), *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για το νηπιαγωγείο στο ΔΕΠΠΣ (2011). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο* http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Καλκάνης Γ., Γκικοπούλου, Ο., Ιμβριώτη, Δ., Καπότης, Ε., & Γουσόπουλος, Δ. (2013). «Ερευνώ και Ανακαλύπτω» με ιδιο-Πειράματα / αυτο-Κατασκευές και «με το μικρόΚοσμο Εξηγώ …» τον Φυσικό Κόσμο στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. *Conference: 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής* *των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση στο Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής*, Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2009). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού.* Αθήνα: ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Εκδ. Leader Books A.E., Αθήνα

Κορδάκη, Μ, & Πόταρη, Δ., (1997). Η έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μέσα από ένα περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στο Τ. Πατρώνης & Π. Πιντελάς Επ. *Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση* (σελ 123-132), Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικού

Κουμαράς, Π. (2005). *Οδηγός για την πειραματική διδασκαλία της Φυσικής*, Θεσσαλονίκη: Χριστοδουλίδης

Μασσιάλας, Β. (1989). Ανακαλυπτική και διερευνητική μέθοδος και προγράμματα. Στο: *Παιδαγωγική Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια Λεξικό*, Τεύχος 1, σελ. 331-333. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Στρατηγικές* Διδασκαλίας *(Η κριτική σκέψη στην πράξη).* 4η Έκδοση. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Ματσαγγούρας, Η. (2000). *Στρατηγικές Διδασκαλίας (Η κριτική σκέψη στην πράξη).* Αθηνά: Gutenberg

Ματσαγγούρας, Η. (2002). *Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση. Εννοιοκεντρική αναπλαισίωση και σχέδια εργασίας*. Αθήνα: Γρηγόρης

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Μαραγκοζίδης, Χ. (2019). Λεκτική και μη λεκτική επιχειρηματολογία μη βλεπόντων για τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου. *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή της Εν.Ε.Δι.Μ.* 6-8 Δεκεμβρίου 2019, Λευκωσία, Κύπρος

Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2020). Εμφανίσεις και συν-εμφανίσεις λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας στην μαθηματική επιχειρηματολογία: εφαρμογές του σχήματος του Toulmin. Στο Α. Θ. Κοντάκος & Π. Ι. Σταμάτης (Επ. Επιμ.), *Επικοινωνία και Εκπαίδευση, τ. 3, Θέματα Θεωρίας και*

Ερευνητικής Μεθοδολογίας της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση (σ. 337-357). Αθήνα: Διάδραση. ISBN: 978-960-9541-10-7

Παπανδρέου, (2002). *Δυναμικά μαθησιακά περιβάλλοντα δραστηριοτήτων για την ανάπτυξη της λογικο-μαθηματικής σκέψης στο νηπιαγωγείο: η περίπτωση της έννοιας του μήκους»,* Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στη προσχολική ηλικία (ΤΕΕΑΠΗ), Πανεπιστήμιο Πατρών

Παρασκευόπουλος, Ι. (1985). *Εξελικτική Ψυχολογία*, τόμος 3ος, Αθήνα

Πετροπούλου, Ο., Κασιμάτη, Α., Ρετάλης, Σ., (2015). *Σύγχρονες μορφές εκπαιδευτικής αξιολόγησης με αξιοποίηση εκπαιδευτικών τεχνολογιών. (ηλεκτρ. Βιβλίο*) Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: https://repository.kallipos.gr/handle/11419/232

ΠΣΝ (2011).: *Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου* διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο http://www.pi-schools.gr/content/index.php?lesson_id=300&ep=367

Ραγιαδάκος, Χ. (2011). *Βασικά Χαρακτηριστικά της Διερευνητικής Μεθόδου στη Μάθηση και τη Διδασκαλία*. Υλικό που μοιράστηκε σε σεμινάρια επιμόρφωσης εκπαιδευτικών.

Σκουμιός, Μ. & Χατζηνικήτα, Β. (2013). Η ποιότητα των εξηγήσεων των μαθητών του δημοτικού στις Φυσικές Επιστήμες. Στο: Πιερράτος, Θ., Αρτέμη, Σ., Πολάτογλου, Χ. & Κουμαράς, Π. (επιμ.), *Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου: «Ποια Φυσική έχει νόημα να διδάσκονται τα παιδιά μας σήμερα;» 78 (σ. 323-330).* Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης και Τμήμα Φυσικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, sapth2013.web.auth.gr

Σκουμιός, Μ. (2016). Συμβολή μιας σειράς πειραματικών δραστηριοτήτων στις δεξιότητες των μαθητών να αξιολογούν τα αποδεικτικά στοιχεία γραπτών επιχειρημάτων. Στο Πιερράτος, Θ., Κουμαράς, Π. και Πολάτογλου, Χ. (επιμ.). *Πρακτικά Πανελλήνιου Συνεδρίου - "Διδακτικές προσεγγίσεις και πειραματική διδασκαλία στις Φυσικές Επιστήμες" (σελ. 157 – 166*). Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ., Τμήμα Φυσικής του Α.Π.Θ., Πανελλήνια Ένωση Υπευθύνων Εργαστηριακών Κέντρων Φυσικών Επιστημών ΠΑΝΕ.Κ.Φ.Ε.). http://physcool.web.auth.gr/synedrio2016

Σκουμιός, Μ. (2017). Βελτιώνοντας τις δεξιότητες των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου να κρίνουν τις αιτιολογήσεις γραπτών επιχειρημάτων. Στο Δ. Σταύρου, Α. Μιχαηλίδη & Α. Κοκολάκη (επιμ.), *Πρακτικά 10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων*

Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση: «Γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ φυσικών επιστημών, κοινωνίας και εκπαιδευτικής πράξης» (σελ. 492-499). ΕΝΕΦΕΤ και Πανεπιστήμιο Κρήτης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εργαστήριο Διδακτικής Θετικών Επιστημών, Ρέθυμνο

Σκουμιός, Μ. (2017α). *Αντιλήψεις των μαθητών για έννοιες Φυσικών Επιστημών και διδακτική τους αντιμετώπιση*. Σημειώσεις Μαθήματος, Ρόδος: Πανεπιστημίου Αιγαίου,

Σκουμιός, Μ. (2017β). *Εφαρμοσμένη Διδακτική των Φυσικών Επιστημών*. Πρακτικές Ασκήσεις Β φάσης - Σημειώσεις Μαθήματος. Ρόδος: Πανεπιστημίου Αιγαίου,

Σκουμιός, Μ., & Χατζηνικήτα, Β. (2013), *Η ποιότητα των εξηγήσεων των μαθητών του δημοτικού σχολείου στις Φυσικές Επιστήμες*. Στο Θ. Πιερράτος, Σ. Αρτέμη, Χ. Πολάτογλου & Π. Κουμαράς (επιμ.), Πρακτικά Πανελλήνιου Συνεδρίου: «Ποια Φυσική έχει νόημα να διδάσκουμε τα παιδιά μας σήμερα;» (σελ. 323-330). Θεσσαλονίκη: Π.Τ.Δ.Ε. και Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ.

Σκουμιός. Μ., Χατζηνικήτα, Β., (2014). *Αξιολογώντας τις γραπτές εξηγήσεις των μαθητών στις Φυσικές Επιστήμες*. Διδάσκοντας Φυσικές Επιστήμες

Σκουμπουρδή, Χ. & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου, Δ. (2011). Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών 5,* 39-59

Σκουμπουρδή, Χ., & Βαϊτσίδη, Γ. (2019). Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση: συνδέσεις, διαφοροποιήσεις, καινοτομίες. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (12), 8-22

Σκουμπουρδή, Χ., & Σκουμιός, Μ., (2018). *Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης*. 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή, Ρόδος

Σταυρίδου, Ε. (2011). Διδασκαλία και μάθηση των Φυσικών Επιστημών - Σύγχρονες τάσεις και οι επιπτώσεις τους στη διδακτική πράξη, *στο Βασικό Επιμορφωτικό υλικό, τόμος Β: Ειδικό μέρος ΠΕ04 Φυσικών Επιστημών*, Μείζον Πρόγραμμα Επιμόρφωσης, Αθήνα: ΠΙ, σ. 1-17.

Τριλιανός, Θ.Α. (1997*). Η κριτική σκέψη και η διδασκαλία της*. Αθήνα: Τελέθριον.

Φιλίππου, Γ. (1999). Διαισθητικά μοντέλα στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. *Πρακτικά του 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* Χίος 369-382

Χαλκιά, Κ. (2010). Διδάσκοντας Φυσικές Επιστήμες, Θεωρητικά Ζητήματα, Προβληματισμοί, Προτάσεις (Α΄ Τόμος). Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Χασάπης, Δ. (2012). Διδακτικές σημειώσεις από το μάθημα *Χωρικές σχέσεις και γεωμετρικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση.* Μάθημα Χειμερινού Εξαμήνου.

Ξένη βιβλιογραφία

Abdi, A. (2014). The effect of Inquiry-Based Learning Method on Students' Academic Achievement in Science Course. *Universal journal of educational Research,* 2(1), 37-41.

Aberdein, A. (2005). The Informal Logic of Mathematical Proof, in J. P. Van Bendegem and B. Van Kerkhove (Eds.), *Perspectives on Mathematical Practices*, Kluwer, Dordrecht, 135-151.

Aberdein, A. (2005). The Uses of Argument in Mathematics, *Argumentation*, 19, 287- 301.

Adams, G., & Carnine, D. (2003). Direct instruction. *Handbook of learning disabilities*, 403-416.

Akkus, R., Gunel, M. & Hand, B. (2007). Comparing an inquiry-based approach known as the Science Writing Heuristic to traditional science teaching practices: Are these differences*? International Journal of Science Eduacation*, 29 (14), 1745-1765

Aktamiş, H., Hiğde, E., & Özden, B. (2016). Effects of the Inquiry-Based Learning Method on Students' Achievement, Science Process Skills and Attitudes towards Science: A MetaAnalysis Science, *Journal of Turkish Science Education, 13(4),* 248–261. https://doi.org/10.12973/tused.10183a

Alberta Learning (2004). Focus on inquiry: A teacher's guide to implementing inquiry-based learning. Edmonton, AB: Alberta Learning, Learning and Teaching Resources Branch.

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of educational psychology*, *103*(1), 1-18.

Amaral, O.M., Garrison, L., & Klentschy, M. (2002). Helping English learning increase achievement through inquiry-based science instruction. *Bilingual research journal*, 26(2), 213/239

Ananiadou, K. & Claro, M. (2009). 21th century skills and competences for new millennium learners in OECD countries (*OECD Education Working Papers, No.41)*. Paris, France: OECD Publishing.

Anderson, N. H., & Cuneo, D. O. (1978). The height + width rule in children's judgments of quantity. *Journal of Experimental Psychology: General, 107*(4), 335–378. https://doi.org/10.1037/0096-3445.107.4.335

Anderson, R. D. (2002). Reforming Science Teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teaching Education, 13 (1),* 1-12

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of science teacher education, 13*(1), 1-12.

Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/

Artigue, M., & Blomhoj, M. (2013). Conteptualising inquiry-based education in mathematics. ZDM- *The International Journal on Mathematics Education*, 45(6)

Artigue, M., & Dillon, J., & Harlen, W., & Lena, P., (2012). Learning through inquiry. *The Fibonacci Project*. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/

Ashford-Rowe, (2008). Applying a design-based research approach to the determination and application of the critical elements of an authentic assessment, *Emerging Technologies Conference 2008*. 3.

Asterhan, C.S.C., Schwarz, B.B. (2010) Online moderation of synchronous e-argumentation. *Computer Supported Learning* **5,** 259–282

Ball, D. L. and Bass, H. (2003). Towards a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. P*roceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group. 24-28* May, 2002. Edmonton, AB, 3-14

Banchi, H., & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and children*, *46*(2), 26.

Barab. S.A., Squire. K., (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences* 13 (1): 1-14

Barbara Y. White & John R. Frederiksen (1998) Inquiry, Modeling, and Metacognition: Making Science Accessible to All Students, *Cognition and Instruction*, *16*:1, 3-118, DOI: 10.1207/s1532690xci1601_2

Barron, B., & Darling-Hammond, L. (2008). Teaching for meaningful learning: A review of research on inquiry-based and cooperative learning. *Powerful learning: What we know about teaching for understanding*, 11-70.

Barrow, L.H. (2006). A Brief History of Inquiry: From Dewey to Standards. *Journal of Science Teacher Education, 17*, 265–278

Barrow, L.H. (2006). A Brief History of Inquiry: From Dewey to Standards. *Journal of Science Teacher Education*, 17, 265–278

Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. *Learning and teaching measurement*, 122-142

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (843–908)*. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Battista, M.T., Clements, D.H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C.V.A. (1998) Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal of Research in Mathematics Education, 29* (5), 503-532

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268.

Beattys, C. B., & Maher C. A., (1985). Approaches to learning area measurement and its relation to spatial skill. *Proceedings of the 7th PME Conference, (pp. 2-7)*. Colombus, Ohio

Bell, P., & Linn, M. (2000). Scientific Arguments as Learning Artifacts: Designing for Learning from the Web with KIE. *International Journal of Science Education*, 22, 797-817.

Bell, P., & Linn, M. C. (2000). Scientific arguments as learning artifacts: Designing for learning from the Web with Kie. *International Journal of Science Education*, 22(8), 797–817.

Berland L. & McNeill, K., (2010). A Learning Progression for Scientific Argumentation: Understanding Student Work and Designing Supportive Instructional Contexts. *Science Education 94(5)*:765 – 793 DOI: 10.1002/sce.20402

Berland L.K., & Reiser, B.J. (2009). Making sense of argumentation and explanation. *Science Education*, *93* (1) p. 26-55

Binkley M. et al. (2012) Defining Twenty-First Century Skills. In: Griffin P., McGaw B., Care E. (eds) Assessment and Teaching of 21st Century Skills. *Springer*, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2324-5_2

Birkley M., Erstad O, Herman J, Raizen S, Ripley M. & Rumble, (2010) Defining 21st Century Skills, *Assessment and Teaching of 21st Century Skills. (pp. 17-66).* Dordrecht: Springer.

Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical Enculturation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Bishop, A. J., (1988b). *Mathematics Education and culture*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blomhøj, M. & T. Højgaard (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22(3),* 123-139.

Boulton-Lewis, G. and Cooper, T.J., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., and Mutch, S. (1997). Processing Load and the Use of Concrete Representations and Strategies for Solving Linear Equation. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 379-398.

Brem, S., Russells, J., & Weems, L., (2001). Science on the web: Students evaluations of scientific arguments, *Discourse Processes 32(2)*

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in mathematics. *Springer* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM*, *45*(6), 811-822.

Buchanan, S., Harlan, M. A., Bruce, C. S., & Edwards, S. L. (2016). Inquiry based learning models, information literacy, and student engagement: A literature review. *School Libraries Worldwide*, *22*(2), 23-39.

Bunterm, T., Lee, K., Ng Lan Kong, J., Srikoon, S., Vangpoomyai, P., Rattanavongsa, J., & Rachahoon, G. (2014). Do different levels of inquiry lead to different learning outcomes? A comparison between guided and structured inquiry. *International Journal of Science Education*, 36(12), 1937-1959.

Bybee, R., Taylor, J. et al. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. Colorado Springs,CO:BSCS, 2006

Cabassut, R. (2005). Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne [Proof, reasoning and validation in mathematics secondary teaching in France and Germany]. (Unpublished doctoral dissertation). Université Paris Diderot, France

Cairns, D., & Areepattamannil, S. (2017). Exploring the relations of inquiry-based teaching to science achievement and dispositions in 54 countries. *Research in Science Education*, 1-23

Chambliss, M. J., & Murphy, P. K. (2002). Fourth and fifth graders representing the argument structure in written texts. *Discourse Processes, 34*(1), 91–115. https://doi.org/10.1207/S15326950DP3401_4

Charpak, G., Léna, P. & Quéré, Y. (2005). *L'enfant et la science*. L'aventure de La main à la pâte (Paris: Odile Jacob).

Chen, H.-T., Wang, H.-H., Lu, Y.-Y., Lin, H., & Hong, Z.-R. (2016). Using a modified argument-driven inquiry to promote elementary school students' engagement in learning science and argumentation. *International Journal of Science Education*, *38*(2), 170–191. https://doi.org/10.1080/09500693.2015.1134849

Chen, H.-T., Wang, H.-H., Lu, Y.-Y., Lin, H., & Hong, Z.-R. (2016). Using a modified argument-driven inquiry to promote elementary school students' engagement in learning science and argumentation. *International Journal of Science Education*, 38(2), 170–191.

Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics, 21(1),* 3–27.

Chin, C., & Brown, D. E. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of research in science teaching, 37(2),* 109-138.

Chin, C., & Osborne, J. (2010). Students' questions and discursive interaction: how they impact argumentation during collaborative group discussions in science. In G. Cakmakci & M.F. Taşar (Eds.), Contemporary science education research: learning and assessment (pp. 3–12). Ankara, Turkey: Pegem Akademi.

Chinn, C. A., & Brewer, W. F. (2001). Models of data: A theory of how people evaluate data. *Cognition and Instruction*, 19(3), 323–393.

Chinn, C. A., & Brewer, W. F. (2001). Models of data: A theory of how people evaluate data. *Cognition and Instruction*, *19*(3), 323–393. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1903_3

Cho, K. & Jonassen, D. (2002). The effects of argumentation scaffolds on argumentation and problem solving. *Educational Technology Research and Development 50(3*): 5–22.

Chu, K. W. S., Tse, S. K., Loh, E. K. Y., Chow, K., Fung, H. F., & Rex, H. W. (2008). Primary four students' development of reading ability through inquiry-based learning projects

Chung, I. (2004). A comparative assessment of constructivist and tradionalist approaches to establishing mathematical connections in learning multiplication. Education, 125 (2) , 271

Cifarelli V.V., Sevim V. (2015) Problem Posing as Reformulation and Sense-Making Within Problem Solving. In: Singer F., F. Ellerton N., Cai J. (eds*) Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_8

Činčera, J. (2013).Střediska ekologické výchovy mezi teorií a praxí. Brno: Masarykova univerzita; Praha: Agentura Koniklec, BEZK.(Environmental education centres between theory and practice. In Czech).

Clements, D. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-k to grade 2 mathematics. In D Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards in early childhood mathematics education (pp. 105-148).* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Clements, Stephan. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2 *National Council of Teachers of Mathematics*

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. In F. Lester (ed.*), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-38). USA: Information Age Publishing.

Cobb, P., & McClain, K. (2004). Proposed design principles for the teaching and learning of elementary stat-istics instruction. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 375-396).

Collins, A., (1988) *Different goals of inquiry teaching* Questioning Exchange **2** 1 39–45

Collins, N. L., & Read, S. J. (1990). Adult attachment, working models, and relationship quality in dating couples. *Journal of Personality and Social Psychology*, *58*(4), 644–663. https://doi.org/10.1037/0022-3514.58.4.644

Crawford, B. A. (2000). Embracing the essence of inquiry: New roles for science teachers. *Journal of research in science teaching, 37(9),* 916-937.

Design-Based Research Collective., (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm forEducational Inquiry. *Educational Researcher* 32(1):5-8, 35-37

Dewey, J. (1933). *How We Think (Boston: DC Heath & Co., 1910).* New York, 72.

Dewey, J. (1997). *How we think*. Courier Corporation

Diana Joseph (2004) The Practice of Design-Based Research: Uncovering the Interplay Between Design, Research, and the Real-World Context, *Educational Psychologist*, 39:4, 235-242, DOI: 10.1207/s15326985ep3904_5

Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. In K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson, & R. Clarkson (Eds.). *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching* (pp.89-125). England, Windsor: NFER-Nelson Publishing Company.

Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. In K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson, & R. Clarkson (Eds.). Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching (pp.89-125). *England, Windsor: NFER-Nelson Publishing Company*

Dix, K. L. (2007). DBRIEF: A research paradigm for ICT adoption. **International Education Journal**, 8(2), 113-124.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modelling perspective on students’ mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110–136.

Doig, B., Cheeseman, J., & Lindsay, J. (1995). The medium is the message: Measuring area with different media. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), Galtha: *Proceedings of the 18th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 229-240). Darwin, Australia: MERGA.

Donham, J., Bishop, K., Kuhlthau, C.C., & Oberg, D. (2001). *Inquiry-based learning: Lessons from Library Power*. Worthington, OH: Linworth

Douady, R., & Perrin, M-J (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of 10 PME Conference*, (pp. 253-258). London, England.

Douek, N.: 1998, 'Analysis of a long term construction of the angle concept in the field of experience of sunshadows', *Proceeding of PME-XXII,* Vol. 2, Stellenbosch, pp. 264–271.e

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, 84(3), 287–312

Durand-Guerrier V., Boero P., Douek N., Epp S.S., Tanguay D. (2012) Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In: Hanna G., de Villiers M. (eds) *Proof and Proving in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 15. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_15

Duschl R. (2004) Inquiry in science education: International perspectives, *Science Education*, Volume 88, Issue 3, p 397-419

Duschl, R. A., & Grandy, R. E. (2008). *Teaching scientific inquiry: Recommendations for research and implementation*. Sense Publishers

Duschl, R. A., & Osborne, J. (2002). Supporting and promoting argumentation discourse in science education. *Studies in Science Education*, 38(1), 39–72

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer-Verlag.

Eastwell, P., & MacKenzie, A. H. (2009). Inquiry Learning: Elements of Confusion and Frustration. *The American Biology Teacher,* 71(5), 263-266

Enderle, P. J., Grooms, J. A., & Sampson, V. (2012, March). Argument focused instruction and science proficiency in middle and high school classrooms. In *Annual International Conference of the National Association for Research in Science Teaching* (p. 107).

English, L.D., & Mousoulides, N., (2015). Bridging STEM in a Real-World Problem. *Mathematics Teaching in the Middle School 20(9)*

Ennis, Robert H. (1992). "Assessing higher order thinking for accountability". In *Teaching for Thinking*. Virginia: National Association of Secondary School Principals.

Erbas, A. K., & Yenmez, A. A. (2011). The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. *Computers & Education*, *57*(4), 2462-2475.

Erduran S., Jiménez Aleixandre M.P. (2012) Argumentation in Science Education Research. In: Jorde D., Dillon J. (eds) *Science Education Research and Practice in Europe. Cultural Perpectives in Science Education*, vol 5. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-900-8_11

Erduran, S., & Jimenez-Aleixandre, M. P. (Eds.) (2008). *Argumentation in Science Education: Perspectives from Classroom-Based Research*. Dordrecht: Springer.

Erduran, S., Simon, S., & Osborne, J. (2004). TAPping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's argument pattern for studying science discourse. *Science education, 88(6*), 915-933.

European Commission, (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe, European Commission.*, Brussels

Fenton, E. (1966). *Teaching the new social studies in secondary schools: An inductive approach*. Holt, Rinehart and Winston

Fielding-Wells, J., & Makar, K. (2012). Developing primary students' argumentation skills in inquiry-based mathematics classrooms. In *The future of learning: Proceedings of the 10th International Conference of the Learning Sciences* (Vol. 2, pp. 149-153).

Fielding-Wells, J., O'Brien, M. & Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal*, Queensland, v. 26, n. 1, p. 47-77, 2014.

Fielding-Wells, J., O'Brien, M. & Makar, K. (2017). Using expectancy-value theory to explore aspects of motivation and engagement in inquiry-based learning in primary mathematics. *Mathematics Education Research Journal* 29**,** 237–254

Fisher, Robert (2005²). *Teaching children to think*. Cheltenham:Nelson Thornes Ltd.

Freeman, S., Eddy, S., McDonough, M.,Smith, M.K., Jordt,H.,Wenderoth, M., *Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics,* PNAS June 10, 2014 111 (23) 8410-8415

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Kluwer Academic Publishers, New York.

Friesen, S., & Scott, D. (2013). Inquiry-based learning: A review of the research literature. *Alberta Ministry of Education*, *32*.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988), The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 3, NCTM, Reston, VA, USA.*

Gatt, S., Byrne, J., Rietdijk, W., Tunnicliffe, S. D., Kalaitsidaki, M., Stavrou, D.,.Papadouris, N. (2014). Adapting IBSE material across Europe: Experiences from the PRI-SCI-NET FP7 project, In Constantinou, C. P., Papadouris, N. & Hadjigeorgiou, A. (Eds.), E-Book *Proceedings of the ESERA 2013 Conference: Science Education Research For Evidence-based Teaching and Coherence in Learning.* Part 16 (co-ed. Kariotoglou, P. & Russell, T.), (pp. 22-33) Nicosia Cyprus: European Science Education Research Association (ESERA)
[accessed Apr 17 2021].

Gibson, H. L., & Chase, C. (2002). Longitudinal impact of an inquiry-based science program on middle school students’ attitudes toward science. *Science Education, 86 (5),* 693-705

Hall, D. A., and McCurdy, D. W. (1990). A comparison of a biological science curriculum study (BSCS) laboratory and a traditional laboratory on student achievement at two private liberal arts colleges. *Journal of Research in Science Teaching*, 27: 625–636

Hand, B. Wallace, C. & Yang, E. (2004). Using the science writing heuristic to enhance learning outcomes from laboratory activities in seventh grade science: Quantitative and qualitative aspects. *International Journal of Science Education, 26*, 131-149.

Harada, V. H., & Yoshina, J. M. (2004). *Moving from Rote to Inquiry: Creating Learning That Counts*. Library Media Connection, 23(2), 22

Hargreaves, Andy (1982). “The Rhetoric of School-Centred Innovation”, *Journal of Curriculum Studies, 14(3),* 251-266

Harlen, W. (2012). The roles of student assessment in developing inquiry-based science education. Στο *Developing IBSE:New Issues The roles of assessment and the relationship with industry*, IAP

Hein, K., & Prediger, S. (2017). Fostering and investigating students’ pathways to formal reasoning: A design research project on structural scaNolding for 9th graders. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 163–170). Dublin, Ireland: DCU/ERME

Heng, L. L., Surif, J., & Seng, C. H. (2015). Malaysian students’ scientific argumentation: Do groups perform better than individuals? *International Journal of Science Education*, 37(3), 505–528.

Hino, K. (2002). *Acquiring new use of multiplication through classroom teaching: An exploratory study. Journal of Mathematical Behavior*, 20, 477–502. doi:10.1016/S0732-3123(02)00085-8

Hirstein, J., Lamb, C. E., & Osborn, A. (1978). *Student Misconceptions about area measure Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.

Hmelo-Silver, C., Duncan, R.G., & Chinn, C. (2007). Scaffolding and achievement in problembased and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42*(2), 99-107.

Hofstein, A., Navon, O., Kipnis, M., & Mamlok-Naaman. (2005). Developing students' ability to ask more and better questions resulting from inquiry-type chemistry laboratories. *Journal of Research in Science Teaching 42(7*):791 - 806

Hood, G. (2008). Using a design-based research paradigm to develop an online course aimed at disseminating research findings and informing practice. Paper presented at the *Proceedings of the Second Emerging Technologies Conference,* Wollongong: University of Wollongong.

Horng, W.-S. (2004). What for proof vis-a-vis education reform issues? *The Journal of National Taiwan Normal University: Science Education, 49(1),* 1-14. doi: 10.6300/JNTNU.2004.49(1).01

Hu, S., Kuh, G. D. & Li, S. (2008). Innovative Higher Education, 33(2), 71-81.

Huang H.E., K. G. Witz, (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching 2(1)*

Huang H.M., Wittz K.G., (2013). Children's Conception of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems, *Journal of Curriculum and Teaching,* Vol 2, No1, 10-26

Huang, H.-M. E. & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment, *Learning and Instruction,* 21(1), 1–13.

Hughes, E. R., & Rogers, J., (1979). The concept of area. In Macmillan Education (Eds), Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science (pp. 78-135*). Schools Council Research Studies*

Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2008). How persuaded are you? A typology of responses. *Research in Mathematics Education,* 10(2), 119-133.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educ Stud Math* **66,** 3–21 (2007). https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Inskeep, J-J. E. (1976). Teaching Measurement to Elementary School Children. In D. Nelson, R. Reys (Eds*), Measurement in school Mathematics (pp. 60-86*). Reston, VA: N.C.T.M

Izsák, A. (2005). "You Have to Count the Squares": Applying Knowledge in Pieces to Learning Rectangular Area. *Journal of the Learning Sciences, 14*(3), 361–403. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1403_2

Jalil P (2006) A procedural problem in laboratory teaching, exper iment and explain, or vice versa. J *Chem Educ 83(1):* 159-163 Jalil P

Jiménez-Aleixandre, M. P., Bugallo Rodríguez, A., & Duschl, R. A. (2000). “Doing the lesson” or “Doing Science”: argument in high school genetics. *Science Education*, *84*(6), 757–792. https://doi.org/10.1002/1098-237X(200011)84:6<757::AIDSCE5>3.0.CO;2-F

Jimenez-Aleixandre, M. P., Rodriguez, A. B., & Duschl, R. A. (2000). " Doing the lesson" or" doing science": Argument in high school genetics. Science Education, 84(6), 757-792

Johnson, C., Hill, L., Lock, J., Altowairiki, N., Ostrowski, C., da Rosa dos Santos, L., & Liu, Y. , (2017). Using Design-Based Research to Develop Meaningful Online Discussions in Undergraduate Field Experience Courses. *he International Review of Research in Open and Distributed Learning*, *18*(6). https://doi.org/10.19173/irrodl.v18i6.2901

Joyce, B. & Weil, M. (Eds.). (2000). *Models of teaching. Boston*. Allyn and Bacon.

Joyce, B., & Weil, M. (2004). The picture-word inductive model: Developing literacy across the curriculum. *Models of teaching*.

Ju & Kwon, (2007). Ways of talking and ways of positioning: Students’ beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. The Journal of Mathematical Behavior, Volume 26, Issue 3, 2007, Pages 267-280

Juuti, K., & Lavonen, J., (2006). Design-Based Research in Science Education: One Step Towards Methodology, Nordic Studies in Science Education 2(2):54

Kablan, Z.,Topan, B. & Erkan, B. (2013). The effectiveness level of material use in classroom instruction: a meta-analysis study. Educational Sciences: Theory & Practice, 13(3), 1629-1644.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 38(3), 302–310.

Kidman, G. (2001). Testing for Additivity in Intuitive Thinking of Area. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and beyond* (Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*)*

Kidman, G., and Cooper, T.J., (1997). Area integration rules for grades 4, 6, and 8 students. In Pehkonen, E., (ed). Proceeding in the 21st international Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3 pp. 136-143). Lahti Finland : PME.

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up: helping children learn mathematics (pp. 87-102). Washington DC: National Academy Press.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006) Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of the constructivist, discovery, problem based, experiential and inquiry based teaching. Education psychologist, 41 (2), 75-86.

Kline, L.C. (1998). Influence opportunities and the development of argumentation competencies in childhood, *Argumentation*, 12, 367-385

Kogan, M., Laursen, (2014) S.L. Assessing Long-Term Effects of Inquiry-Based Learning: A Case Study from College Mathematics. *Innovative Higher Education* **39,** 183–199. https://doi.org/10.1007/s10755-013-9269-9

Kordaki, M., Potari, D., (2002). The Effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7(1):65-100 DOI: 10.1023/A:1016051411284

Krajcik, J. & McNeill, K. (2009). Designing Instructional Materials to Support Students' in Writing Scientific Explanations: Using Evidence and Reasoning Across the Middle School Years. Paper Presented at 2009 *Annual International Conference Grand Challenges and Great Opportunities in Science Education National Association for Research in Science Teaching Annual Hyatt Regency Orange County Garden Grove,* CA

Kremer, A., & Schlüter, K. (2006). Analyse von Gruppensituationen beim forschend entdeckenden Lernen. Ergebnisse einer ersten Studie. *Erkenntnisweg Biologiedidaktik, 5,* 145–156.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In: P. Cobb & H. Bauershfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 220-269.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 22-32. doi: 10.2307/40248315

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60–82.

Kuhn, D. (1991). *The skills of argument*. Cambridge, England: Cambridge University Press

Kuhn, D. (1992). Thinking as argument. *Harvard Educational Review, 62*(2), 155–178.

Kuhn, D., & Crowell, A., (2011). Dialogic Argumentation as a Vehicle for Developing Young Adolescents' Thinking, *Psychological Science*, Volume: 22 issue: 4, page(s): 545-552

Kuhn. D., Udell. D., (2003) The development of Argument Skills, *Child Development 74 (5)Q 1245-60*

Kwon, O.N., Bae, Y. & Oh, K.H. (2015). Design research on inquiry-based multivariable calculus: focusing on students' argumentation and instructional design. *ZDM Mathematics Education* ***47,*** 997–1011. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0726-z

Lampert, M., Rittenhouse, P. & Crumbaugh, C. (1996) Agreeing to disagree: Developing sociable mathematical discourse. In D. Olson & N. Torrance (Eds.*) Handbook of Education and Human Development.* Oxford: Blackwell's Press, pp. 731-764.

Laursen, S., Hassi, M.-L., Kogan, M., Hunter, A.-B., & Weston, T. (2011). *Evaluation of the IBL Mathematics Project: Student and Instructor Outcomes of Inquiry-Based Learning in College Mathematics*. (Report to the Educational Advancement Foundation and the IBL Mathematics Centers) Boulder, CO: University of Colorado, Ethnography & Evaluation Research. Available at http://www.colorado.edu/eer/research/steminquiry.html

Lautrey, J., Mullet, E., & Paques, P. (1989). Judgments of quantity and conservation of quantity: The area of a rectangle. *Journal of Experimental Child Psychology*, *47*(2), 193–209. https://doi.org/10.1016/0022-0965(89)90029-5

Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-Analysis of Inquiry-Based Learning: Effects of Guidance. *Review of educational research*, *86*(3), 681-718. https://doi.org/10.3102/0034654315627366

Lee Ling Heng, Johari Surif & Cher Hau Seng (2015) Malaysian Students' Scientific Argumentation: Do groups perform better than individuals?, *International Journal of Science Education*, 37:3, 505-528,

Lee, V. S., D. B. Greene, J. Odom, E. Schechter, and R. W. Slatta. 2004. "What is InquiryGuided Learning?" In Teaching and Learning through Inquiry: A Guidebook for Institutions and Instructors, edited by V. S. Lee, 3–16. Sterling, VA: Stylus

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. *Learning and teaching measurement*, *1*, 100-121.

Leon, M. (1982). Extent, multiplying, and proportionality rules in children's judgments of area. *Journal of Experimental Child Psychology*,33,124–141

Levy et al, (2013). Examining Studies of Inquiry-Based Learning in Three Fields of Education: Sparking Generative Conversation. *Journal of teacher education.* Vol 64, Issue 5

Lewis, S.E., & Lewis, J. E. (2005). Departing from lectures: An evaluation of a peer-led guided inquiry alternative. *Journal of Chemistry Education, 82*, 135 – 139

Lin, F.-L., & Cheng, Y.-H. (2003). The competence of geometric argument in Taiwan adolescents. Paper presented at the *International Conference on Science & Mathematics Learning*, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan

Lin, P.-J., & Tsai, W.-H. (2003). Fourth graders' achievement of mathematics in TIMSS 2003 field test. (In Chinese) *Science Education Monthly*, 258, 2-20.

Linn, M. C., Davis, E. A., & Bell. P. (2004). Inquiry and Technology. In M.C. Linn, E.A. Davis, & P. Bell (Eds.), *Internet Environments for Science Education* (pp. 3-28). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Linn, M., C., Davis, E., A., & Bell, P. (Eds) (2004) *Internet Environments for Science Education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Linn, M.C., Davis, E.A., & Bell, P. (2013). Inquiry and technology. In M.C. Linn (Ed.*) Internet Environments for Science Education* (pp. 3-28). Routledge.

Lizotte, D. J., Harris, C. J., McNeill, K. L., Marx, R. W., & Krajcik, J. (2003, April). Usable assessments aligned with curriculum materials: Measuring explanation as a scientific way of knowing. Paper presented at the annual meeting of the *American Educational Research Association, Chicago,* IL.

Londraville, R., Niewiarowski, P., Laipply, R., & Owens, K. (2002). Inquiry-based laboratories for introductory biology. *Society for Integrative and Comparative Biology,* 42(6), 1267.

Louisell, R. D., & Descamps, J. (1992). *Developing a teaching style: Methods for elementary school teachers*. Harpercollins College Division.

M. Kordaki, A. Balomenou, (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11 (1), 99-135*

Ma, Y. & Harmon, S. (2009). A Case Study of Design-Based Research for Creating a Vision Prototype of a Technology-Based Innovative Learning Environment. *Journal of Interactive Learning Research,* 20(1), 75-93. Retrieved from http://www.editlib.org/index.cfm?fuseaction=Reader.ViewAbstract&paper_id=252 26

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM*, *45*(6), 779-795.

Makar K., Bakker A., & Ben-Zvi D., (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom, *ZDM 47*, 1107-1120

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 47(7), 1107-1120.

Mantei, J. (2008). Using a design based research approach to explore the ways that primary school teachers conceptualise authentic learning: A work in progress. Paper presented at the *Proceedings of the Second Emerging Technologies Conference,* Wollongong: University of Wollongong

Manuel, L. (1982). Extent, multiplying, and proportionality rules in children's judgments of area.Journal of Experimental Child Psychology,33,124–141.
(21) (PDF) Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. Available from: https://www.researchgate.net/publication/229283232_Prevailing_educational_practices_for_area_measurement_and_students'_failure_in_measuring_areas [accessed Mar 28 2021].

Maranhaa, C. & Campos, T. (2000). Length measurement: Conventional units articulated with arbitrary ones. *In Nakarahara, T. & Koyama, M. (Eds.) Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* Hiroshima-Japan, 255-262

Maria T. Oliver-Hoyo and DeeDee Allen, (2005). Attitudinal Effects of a Student-Centered Active Learning Environment, *Journal of Chemical Education* 2005 *82* (6), 944
Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. London, United Kingdom: Addison-Wesley
McDermott, L.C. and Shaffer, P.S. (1992) Research as a Guide for Curriculum Development: An Example from Introductory Electricity. Part I: Investigation of Student Understanding. *American Journal of Physics*, 60, 994-1003.
https://doi.org/10.1119/1.17003

McKinnon, J.W., & Renner, J.W. (1971) Are Colleges Concerned with Intellectual Development?, *American Journal of Physics* 39, 1047

McNeil, K.L., & Krajcik, J, (2008). Inquiry and Scientific Explanations: Helping Students use evidence and reasoning, *ResearchGate*, 121-134

McNeill, K. L. & Krajcik, J. (2007). Middle School students' use of appropriate and inappropriate evidence in writing scientific explanations. Lovett, M & Shah, P. (eds). Thinking with data, 233-265, New York, NY: Taylor & Francis Group, LLC.

McNeill, K. L. & Krajcik, J. (2012). Supporting grade 5-8 students in constructing exlanations in science: The claim, evidence and reasoning framework for talk and writing. New York, NY: Pearson Allyn & Bacon

McNeill, K. L., Lizotte, D. J, Krajcik, J., & Marx, R. W. (2006). Supporting students' construction of scientific explanations by fading scaffolds in instructional materials. *The Journal of the Learning Sciences, 15(2)*, 153-191

McNeill, K., Lizotte, D., & Marx, R., (2006). Supporting Students' Construction of Scientific Explanations by Fading Scaffolds in Instructional Materials. *Journal of the Learning Sciences* 15(2):153-191

Mercer, N., Dawes, L., Wegerif, R., & Sams, C. (2004) Reasoning as a scientist: ways of helping children to use language to learn science. *British Educational Research Journal* 30, 3, 367-385.

Moje, E. B., Ciechanowski, K. M., Kramer, K., Ellis, L., Carrillo, R., & Collazo, T. (2004). Working toward third space in content area literacy: An examination of everyday funds of knowledge and Discourse. *Reading Research Quarterly*, 39(1), 38-70.

Monte-Sano, C. (2008). Qualities of effective writing instruction in history classrooms: A cross-case comparison of two teachers' practices. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1045-1079.

Moore, (2007). Promoting Health Behavior Change Using Appreciative Inquiry Moving From Deficit Models to Affirmation Models of Care. *Family Community Health Supplement* 1 to Vol. 30, No. 1S, pp. S64–S74

Mousoulides, N. G. (2013). Facilitating parental engagement in school mathematics and science through inquiry-based learning: an examination of teachers' and parents' beliefs. *ZDM, 45*(6), 863–874.

Mulligan, J.T., Prescott, A., Mitchelmore, M.C. & Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young students' images of area measurement. *Australian Primary Mathematics Classroom 10*(2), 4-8

Munneke, L.Andriessen, J., Kanselaar, G., & Kirschner, P., (2007). Supporting interactive argumentation: Influence of representational tools on discussing a wicked problem. *Computers in Human Behavior 23* (2007) 1072–1088

National Council of Teachers of Mathematics (2000)

National Council of Teachers of Mathematics (2006)

National Research Council (NRC). (1996). *National science education standards*. No. National Academy Press. Washington: D.C.

Neugebauer, O. (2003). Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα. MIET (Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης)

Newell, R. J. (2003*). Passion for learning. How project-based learning meets the needs of 21st Century students*. The Scarecrow Press: Lanham, Maryland, and Oxford.

Newman, W., Abell, S., Hubbard, P., McDonald, J., & Otaala, J., (2004). Dilemmas of teaching inquiry in elementary science methods. *Journal of Science Teaching Education*, 15(4), 257-279.

Newton P., Driver R., & Osborne J., (1999), The place of argumentation in the pedagogy of school science, *International Journal of Science Education* Volume 21, 1999 - Issue 5, 553-576

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, *3*(1), 39-54.

Olanoff, Dana; Lo, Jane-Jane; and Tobias, Jennifer (2014) "Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions," *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 11 : No. 2 , Article 5.

Osborne, J. (2010). Arguing to Learn in Science: The Role of Collaborative, *Critical Discourse. Science*, Vol 328, Issue 5977

Outherd, L.N., Mitchelmore M.C. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(2):144

Outhred L. N., Mitchelmore M. C. (2000). Young Children’s Intuitive Understanding of Rectangular area measurement, *Journal for Research in Mathematics Education* 31(2):144

Owens, K., & Outhred, L., (1998). Covering shapes with tiles: Primary students’ visualisation and drawing. *Mathematics Education Research Journal* 10(3):28-41

Papáček, M. (2010). Badatelsky orientované přírodovědné vyučování – cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa? Scientia in educatione, 1(1), 33-49. (Inquiry based science education: A way for the biology education of generations Y, Z, and alpha? In Czech).

Parker, J. (2011). A design-based research approach for creating effective online higher education courses. Paper presented at the 26th *Annual Research Forum: Education Possibilities* (Western Australia Institute for Educational Research Inc), University of Notre Dame. Fremantle.

Pearson, D., Gallagher, M., (1983). The instruction of reading comprehension. *Contemporary Educational Psychology*, Volume 8, Issue 3, Pages 317-344

Pedaste, M., Maeots, M., Siiman, L. A., de Jong, T., van Riesen, S. A. N., Kamp, E. T., et al. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review, 14*, 47–61.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble I: Université Joseph Fourier.

Pedemonte, B., & BalacheN, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104-122.

Phillips, L. M., & Norris, S. P. (1999). Interpreting popular reports of science: What happens when the reader's world meets the world on paper? *International Journal of Science Education*, *21*, 317–327.

Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. N.Y: Norton & Company

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Basic Books.

Prince, M., and R. Felder. 2006. Inductive teaching and learning methods: Definitions, compari-sons, and research bases. *Journal of Engineering Education 95*, no. 2: 123–38

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design, *Educational Studies in Mathematics* 79(1)

Rahim, M. H. & Siddo, R. A. (2012). High school student-teachers attempts to justify mathematical propositions utilizing spatial structuring on shape transform. *Research in Mathematical Education*, 16(2), 107–123

Rasmussen, C., Kwon, O.N., Allen, K. (2006*)*. Capitalizing on advances in mathematics and k-12 mathematics education in undergraduate mathematics: An inquiry-oriented approach to differential equations. *Asia Pacific Educ. Rev.* **7,** 85–93 https://doi.org/10.1007/BF03036787

Reeves, T. C. (2000). Enhancing the worth of instructional technology research through "design experiments" and other development research strategies. Paper presented at the "*International Perspectives on Instructional Technology Research for the 21st Century"* a Symposium sponsored by SIG/Instructional Technology at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, USA.

Reeves, T. C. (2006). Design research from a technology perspective. In J. van Den Akker, K. Gravemeijer, S. Mckenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 52-66): Routledge.

Reynolds, A., & Wheatley, G. H. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 564-581. http://dx.doi.org/10.2307/749848

Reznitskaya, A., Anderson, R.C., & Kuo, L. (2007). Teaching and learning argumentation. *Elementary school journal*, 107(5), 449–472.

Reznitskaya, A., Anderson, R.C., McNurlen, B., Nguyen-Jahiel, K., Archodidou, A., & Kim, S. (2001). Influence of oral discussion on written argument. *Discourse Processes*, 32(2/3), 155–175.

Richmond, G., & Striley, J. (1996). Making Meaning in Classrooms: Social Processes in Small-Group Discourse and Scientific Knowledge Building. *Journal of Research in Science Teaching*, 33 (8): 839-858

Rocard, M. (2007) Science Education NOW: A renewed Pedagogy for the Future of Europe. Brussels: European Commission. Retrieved from: http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-onscience- education_en.pdf

Rocard, M., Ochard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Wahlberg-Henriksson, H., Hemmo, V. (2007). Science Education Now: A renewed Pedagogy for the Future of Europe: Report of the High-Level Group on Science Education. Brussels: European Commission, Directorate-General for Research, Information and Communication Unit, Brussels, 29 p.

Rocard,M. Csermely,P. Jorde,D. Lenzen,D. Walberg-Henricsson,H. Hemmo,V. (2007). Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe

Romberg, T., Kaput, J. (1999). *Mathematics Worth Teaching. Mathematics Worth Understanding.* Mathematics Classrooms that Promote Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosenshine, B., & Meister, C. (1992). The use of scaffolds for teaching higher-level cognitive strategies. *Educational leadership*, *49*(7), 26-33

Roth, W.M. & Lee, Y.J. (2007). "Vygotsky's neglected legacy": Cultural-historical activity theory. *Review of Educational Research*, 77(2), 186-232.

Rowan, B. (1990). Commitment and control: Alternative strategies for the organizational design of schools. *Review of Research in Education*, 16, 353-89

Rutherford F.J., (1964). The role of inquiry in science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, https://doi.org/10.1002/tea.3660020204

Rutherford, F. J., & Ahlgren, A. (1989). Rethinking the science curriculum. In R. S. Brandt (Ed.),*Content of the curriculum* (pp. 75–90). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Sadeh, I. & Zion, M. (2009). The development of dynamic inquiry performances within an open inquiry setting: a comparison to guided inquiry setting. *Journal of research in science teaching* 46 (10), 1137-1160.

Sadler, T.D. (2004). Informal reasoning regarding socioscientific issues: A critical review of research, *Journal of Research in Science in Science Teaching*, 41, 513-536

Sampson, V., & Walker, JP., (2012). Argument-Driven Inquiry as a Way to Help Undergraduate Students Write to Learn by Learning to Write in Chemistry, *International Journal of Science Education* 34 (10), 1443-1485

Sanders, W. J. (1976). Why measure?. In D. Nelson, R. Reys (Eds), *Measurement in school Mathematics* (pp. 1-9). Reston, VA: N.C.T.M

Sandoval, W. A. (2003). Conceptual and epistemic aspects of students' scientific explanations. *The journal of the learning sciences,* 12(1), 5-51.

Sandoval, W. A., & Millwood, K. A. (2005). The quality of students' use of evidence in written scientific explanations. *Cognition and instruction*, 23(1), 23-55.

Sandoval, W. A., & Reiser, B. J. (2004). Explanation-driven inquiry: Integrating conceptual and epistemic scaffolds for scientific inquiry. *Science Education*, 88, 345–372.

Sari, E., & Lim, C. P. (2012). Design-based research: Understanding its application in a teacher professional development study in Indonesia. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 21(1), 28-38.

Savery, J.R., (2006). Overview of Problem-Based Learning: Definitions and Distinctions, *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning* 1(1)

Schifter, Bastable, Russell, Woleck, (2002). *Measuring Space in One, Two and Three Dimensions Casebook: Geometry* (Developing Mathematical Ideas series)

Schifter, D., & Szymaszek, J. (2003). Structuring a rectangle: Teachers write to learn about their students' thinking. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement*. 2003 year book (pp. 143-156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Schwab, J. J. (1963) *Biology teachers' handbook*. New York: Wiley

Schwab, J., Supervisor. (1963). *Biology Teachers' Handbook*. John Wiley and Sons, Inc., New York and London.

Schwarz, J., Crawford, B.A., (2004). Developing views of nature of science in an authentic context: An explicit approach to bridging the gap between nature of science and scientific inquiry. *Science Teacher Education.* 88(4):610 - 645

Siegler, R. S. (2002). Microgenetic studies of self-explanations. In N. Granott & J. Parziale (Eds.), *Microdevelopment: Transition processes in development and learning* (pp. 31–58). New York: Cambridge University Press

Simsek, P. & Kabapmar (2010). *The effects of inquiry-based learning on the elementary students conceptual understanding of matter, scientific process skills and science attitudes*. World Conference on Educational Sciences, Bahcesehir University, 4-8 February 2010. Istanbul, Turkey: Elsevier

Sinclair, J., Collins Cobuild English Dictionary, COBUILD series. (1995)

Sisman, Aksu. (2013). Sixth Grade Students' Performance on Length, Area, and Volume Measurement. *Education and Science2012,* Vol. 37, No 166

Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(7), 1293-1319.

Skoumpourdi, C. (2017). A framework for designing inquiry-based activities (FIBA) for early childhood mathematics. In T. Dooley, & G. Gueudet, G. (Eds.) 10th *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1901-1908). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Songer, N. B., & Gotwals, A. W. (2012). Guiding explanation construction by children at the entry points of learning progressions. *Journal of Research in Science Teaching, 49(2),* 141-165

Southerton, D., Warde, A., & Hand, M. (2004). The limited autonomy of the consumer: implications for sustainable consumption. Sustainable Consumption: The Implications of Changing Infrastructures of Provision, 32–48.

Stacey. (2006). What is mathematical thinking and why is it important? Problem solving, mathematical thinking and reasoning

Staples, M., and Truxaw, M., (2012). An initial framework for the language of higher-order thinking mathematics practices, *Mathematics Education Research Journal*, volume 24, pages257–281

Stein N., Albro E. R., (2001). The Origins and Nature of Arguments: Studies in Conflict Understanding, Emotion, and Negotiation, *Discourse processes, 32 (2&3), 113-133*

Stenhouse, (2003). *Εισαγωγή στην έρευνα και την ανάπτυξη του αναλυτικού προγράμματος*, Σαββάλας

Strom, Kemeny, Lehrer, Forman, (2001). Visualizing the emergent structure of children's mathematical argument. *Cognitive Science AMultidisciplinary Journal* 25(5):733-773

Struchens, M.E., Martin, W.G. & Kenney, P.A. (2003). What students know about measurement: Perspectives from the NAEP. In D.H. Clements & G. Bright (Eds.) *Learning and teaching measurement* (pp. 197-208). Reston: NCTM.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 201–208.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(2), 103–133.

Suchman, J. R. (1966). *Developing inquiry* (Vol. 1). Science Research Associates.

Swan, M., Pead, D., Doorman, M., & Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 945- 957.

Szylagyi, Clements & Sarama, (2013). Young Children's Understandings of Length Measurement: Evaluating a Learning Trajectory, *Journal for Research in Mathematics Education* 44(3):581-620

Tan, N. J. (1998). A study on the students' misconceptions of area in the elementary school. (In Chinese) *Journal of National Taipei Teachers College*, XI, 573-602

Thacker, B., Kim, E., & Trefz, K., (1994). Comparing problem solving performance of physics students in inquiry-based and traditional introductory physics courses. *American Journal of Physics 62*, 627 (1994); https://doi.org/10.1119/1.17480

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. UK. Cambridge University Press.

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(3), 243-263.

Tsun-Nan Lee. (2015). Developing a Theoretical Framework to Assess Taiwanese Primary Students' Geometric Argumentation. *Computer Science*, Mathematics Education Research Group of Australasia

Tytler, R. (2007). Re-imagining science education. Engaging students in science for Australia’s future. Camberwell, Victoria: Australian Council for Educational Research

van Eemeren, F. H., Grootendorst, R., Henkemans, F. S., Blair, J. A., Johnson, R. H., Krabbe, E. C. W., Plantin, C., Walton, D. N., Willard, C. A., et al. (1996). *Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Van de Walle, (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και Γυμνάσιο*. Εκδ. Επίκεντρο

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. 6th ed. Boston: Pearson /Allyn and Bacon.

Van De Walle, J.A. (2004) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. 5th Edition, Printed in the United States of America.

Van De Walle, J.A. (2004) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* 5th Edition, Printed in the United States of America.

Van de Walle, Karp, Bay-Williams, (2010*). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally,* 7th Edition

Voet, M. & De Wever, B. (2016) History teachers’ conceptions of inquiry-based learning, beliefs about the nature of history, and their relation to the classroom context. *Teaching and Teacher Education*, 55,57-67

Voet, M., & De Wever, B. (2018) Effects of immersion in inquiry-based learning on student teachers’ educational beliefs. *Instructional Science*, 46(3), 383-403

Voss, J. F., Wolfe, C. R., Lawrence, J. A., & Engle, R. A. (1991). *From representation to decision: An analysis of problem solving in international relations.* In R. J. Sternberg & P. A. Frensch (Eds.), *Complex problem solving: Principles and mechanisms* (p. 119–158). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Vye, N. J., Schwartz, D. L., Bransford, J. D., Barron, B., Zech, L., & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). SMART environments that support monitoring, reflection and revision. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graessar (Eds.), Metacognition in educational theory and practice (pp. 305-346). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children*, *23*(3), 34-41.

W. Bell, J. Costello, D. E. Kuchenmann. (1983) *A review of Research in Mathematical Education*

Wallace, C. S., & Kang, N. H. (2004). An investigation of experienced secondary science teachers' beliefs about inquiry: An examination of competing belief sets. *Journal of research in science teaching*, *41*(9), 936-960

Wallace, C.S., Tsoi, M.Y., Calkin, J. & Darley, M. (2003). Learning from inquiry-based laboratories in nonmajor biology: An interpretive study of the relationships among inquiry experience, epistemologies, and conceptual growth, *Journal of Research in Science Teaching*, 40(10), 986-1024.

Walton, D. N. (1996). *Argumentation Schemes for Presumptive Reasoning*. Mahwah, NJ: Erlbaum

Wang. F., Hannafin. M. J., (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 53(4), 5-23

Wegerif, R., Mercer, N., & Dawes, L. (1999). From social interaction to individual reasoning: An empirical investigation of a possible sociocultural model of cognitive development. *Learning and Instruction*, *9*(6), 493–516.

Weinberger, A., Stegman, K., & Fischer, F. (2005). Measuring knowledge convergence: Achievement similarity and shared knowledge in computer-supported collaborative learning, 11th *Biennial Conference for Research on Learning and Instruction* (EARLI 2005), 2005, Nicosia, Cyprus. pp.3. ffhal-00197406

Wenning, C. J. (2005). Levels of inquiry: Hierarchies of pedagogical practices and inquiry processes. In *J. Physics. Teaching Education Online*

Wenning, C. J. (2007). Assessing inquiry skills as a component of scientific literacy. *Journal of Physics Teacher Education Online*, *4*(2), 21-24.

Wilhelm, J. D. (2007). *Engaging readers and writers with inquiry*. New York: Scholastic

Wilson, P. S. & Rowland, R. (1993). Teaching Measurement. In R. J. Jensen (ed.),*Research Ideas for the Classroom: Early Childhood Mathematics*, 171-194.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yuzawa, M., Bart, W.M., Kinne, L.J., Sukemune, S. & Kataoka, M. (1999). The effect of origami practice on size comparison strategies among Japanese and American children. *Journal of Research in Childhood Education* 13, 133-143

Zacharos, K. & Ravanis, K. (2000). The transformation of natural to geometrical concepts, concerning children. *European Early Childhood Education Research Journal* 8(2), 63-72.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239

Zachos, P., Hick, T. L., Doane, W. E., & Sargent, C. (2000). Setting theoretical and empirical foundations for assessing scientific inquiry and discovery in educational programs. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *37*(9), 938-962.

Zeidler, D. L. (1997). The central role of fallacious thinking in science education. *Science Education*, *81*(4), 483–496. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-237X(199707)81:4<483::AID-SCE7>3.0.CO;2-8

Zerafa, I., Gatt, S., (2014). Implementing a science curriculum reflecting an inquiry-based approach in the Upper Primary years. *ResearchGate*

Zhou, (2012). Measuring nonlinear dependence in time-series, a distance correlation approach. *Journal of Time Series Analysis* 33(3)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα Α

Α1 Έντυπο συναίνεσης γονέων

<u>ΕΠΙΣΤΟΛΗ ΠΡΟΣ ΓΟΝΕΙΣ ΚΑΙ ΚΗΔΕΜΟΝΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ ΤΟΥ 4ου ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΚΟΡΩΠΙΟΥ ΤΗΣ Ε' ΤΑΞΗΣ</u>

Αγαπητοί γονείς και κηδεμόνες των μαθητών/τριών,

Ονομάζομαι Βαϊτσίδη Γεωργία και είμαι υποψήφια διδακτόρισσα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου, στο Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού στη Ρόδο. Η διδακτορική μου διατριβή αναφέρεται στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών με θέμα: ''**Μετρήσεις εμβαδών επίπεδων επιφανειών από μαθητές Ε' Δημοτικού, μέσω διερεύνησης**''. Στο πλαίσιο εκπόνησης της διατριβής μου ουσιαστικό ρόλο έχει η πραγματοποίηση επιστημονικής έρευνας, για την οποία ζητώ την συναίνεση και συγκατάθεσή σας, ώστε να έχω τη βοήθεια και τη συνεργασία των παιδιών σας, μαθητών και μαθητριών του δημοτικού σχολείου.

Γενικός σκοπός είναι η προώθηση της εκπαίδευσης και της επιστήμης, ειδικότερα η εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και παιδείας μέσα από την ανάπτυξη κατάλληλων μαθησιακών δραστηριοτήτων, σύμφωνα με τη θεωρητική κατασκευή της τροχιάς μάθησης, ως μια εξελικτική πορεία κατασκευής της γνώσης.

Ως ερευνητικό εργαλείο συλλογής δεδομένων θα χρησιμοποιηθούν φύλλα εργασιών με δραστηριότητες σχετικές με τη Γεωμετρία. Η έρευνα επικεντρώνεται στην πραγματοποίηση τριών (3) ειδών διδακτικών παρεμβάσεων, μία σε κάθε τμήμα της Ε' Δημοτικού. Πριν και μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις θα δοθεί στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο με δραστηριότητες για να διαπιστωθούν οι γνώσεις τους πριν και μετά από αυτές, για να αναλυθούν τα αποτελέσματα και οι τυχόν αδυναμίες τους. Ακόμη, οι παρεμβάσεις θα βιντεοσκοπηθούν για να χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα για τις ανάγκες διεξαγωγής συμπερασμάτων μόνο και για κανένα άλλο σκοπό. Η βασική έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε στις παρεμβάσεις αυτές είναι το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων (τετράγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο τρίγωνο) ,έννοια η οποία συμπεριλαμβάνεται στην ύλη της Ε' τάξης. Οι επιδόσεις των μαθητών δεν θα ληφθούν σε καμία περίπτωση υπόψη για την αξιολόγησή τους καθώς δεν θα βαθμολογηθούν.

Όσον αφορά στα ζητήματα δεοντολογίας, η διεξαγωγή της έρευνας θα γίνει σύμφωνα με τη ''Σύμβαση για τα Δικαιώματα του Παιδιού'' ώστε σε όλες τις ενέργειες που αφορούν στα παιδιά, θα ληφθεί υπόψη πρωτίστως το συμφέρον του παιδιού. Επίσης οι μαθητές/τριες θα ενημερωθούν: i) για τους σκοπούς και τη διαδικασία της έρευνας, ii) για τη διασφάλιση της ανωνυμίας τους και του εμπιστευτικού χαρακτήρα των δεδομένων, iii) για τον προαιρετικό χαρακτήρα της συμμετοχής τους και iv) για τη δυνατότητά τους να αποχωρήσουν σε οποιοδήποτε στάδιο της διεξαγωγής της. Σχετικά με την δεοντολογία της επιστημονικής μου έρευνας, έχω καταθέσει ως παραστατικό της έρευνας υπεύθυνη δήλωση του Ν. 1599/1986.

Σας παρακαλώ να επιστρέψετε υπογεγραμμένη την υπεύθυνη δήλωση το συντομότερο δυνατόν

Βαϊτσίδη Γεωργία

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΕΡΕΥΝΗΤΗ / ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΓΟΝΕΑ Η ΚΗΔΕΜΟΝΑ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι αποδέχομαι τη συμμετοχή του παιδιού μου …………………………………….. (όνομα παιδιού), μαθητή/τριας της …… τάξης του …… Δημοτικού Σχολείου στην έρευνα. Το παιδί μου διατηρεί το δικαίωμα να αποσυρθεί από τη διαδικασία της έρευνας σε οποιοδήποτε στάδιο της διεξαγωγής της.

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΓΟΝΕΑ Η ΚΗΔΕΜΟΝΑ / ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

Α2 Έγκριση χορήγησης άδειας για διεξαγωγή έρευνας Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Πληροφορίες:
Αικατερίνη Καντίνου
Τηλ: 22410 – 99112
E-mail:Kantinou@rhodes.aegean.gr

Αρ. Πρωτ.: 862
Ρόδος, 21.04.2020

Προς: Υποψήφια Διδακτόρισσα
κα Βαϊτσίδη Γεωργία του Κωνσταντίνου

Θέμα: **«Έγκριση χορήγησης άδειας για τη διεξαγωγή της έρευνας σε Σχολείο της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στο Κορωπί Αττικής»**

Λαμβάνοντας υπόψη:

- Τις διατάξεις των άρθρων 47 και 70, περ. ζζ, του Ν. 4485/2017 και του άρθρου 2 του Ν. 3966/2011.
- Τις διατάξεις του άρθρου 46 του Ν. 4589/2019.
- Τις διατάξεις του άρθρου 212 παρ. 3 του Ν. 4610/2019.
- Την απόφαση της υπ'αριθμ. 1ης/12.09.2018 Συνεδρίας της Συνέλευσης του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. για τη συγκρότηση Επιτροπής Εκπαιδευτικής Έρευνας.
- Την υπ'αριθμ. 778/23.03.2020 αίτηση έγκρισης διεξαγωγής έρευνας της κυρίας Βαϊτσίδη Γεωργίας του Κωνσταντίνου, στο πλαίσιο εκπόνησης διδακτορικής διατριβής με τίτλο: **«Μέτρηση εμβαδών επίπεδων επιφανειών, από μαθητές Ε΄ Δημοτικού, μέσω διερεύνησης».**
- Την υπ' αριθμ. 784/30.03.2020 εισήγηση της Τριμελούς Επιτροπής.

Σας ενημερώνουμε ότι, η Συνέλευση του Τμήματος, κατά την 16η/08.04.2020 συνεδρίασή της (Θέμα 5.1), αποφάσισε ομόφωνα ότι:

Ο σχεδιασμός της έρευνας της υποψήφιας διδακτόρισσας του Τμήματος κ. **Βαϊτσίδη Γεωργίας του Κωνσταντίνου** που πραγματοποιείται στο πλαίσιο εκπόνησης της διδακτορικής της διατριβής με τίτλο: ***«Μέτρηση εμβαδών επίπεδων επιφανειών, από μαθητές Ε΄ Δημοτικού, μέσω διερεύνησης»*** δεν αντιβαίνει στην κείμενη νομοθεσία και συνάδει με τους γενικά παραδεκτούς κανόνες ηθικής και δεοντολογίας της έρευνας ως προς το περιεχόμενο και προς τον τρόπο διεξαγωγής της και συνεπώς **εγκρίνει τη χορήγηση άδειας για τη διεξαγωγή της έρευνας σε Σχολείο Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στο Κορωπί Αττικής.**

Η παρούσα συντάχθηκε σε δύο (2) αντίγραφα, εκ των οποίων το ένα παραμένει στο αρχείο του Τμήματος και το δεύτερο χορηγείται στην ενδιαφερόμενη.

Ο ΠΡΟΕΔΡΟΣ
ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΙΓΑΙΟΥ

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών
Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού
Δημοκρατίας 1, Ρόδος 85100 * Τηλ.: 22410 - 99110 - 99111 - 99112 * Fax: 22410 - 99109

Παράρτημα Β

Β1 Διαγνωστικό δοκίμιο προ- και μεταπειραματικού σταδίου

Φύλλο εργασίας

Να θυμάσαι ότι μπορείς να χρησιμοποιήσεις όποτε το θελήσεις οποιοδήποτε από τα υλικά που σου έχουν δοθεί: χάρακας, λωρίδες (10τ.εκ.), πλέγμα, τετραγωνάκια

Όνοματεπώνυμο:

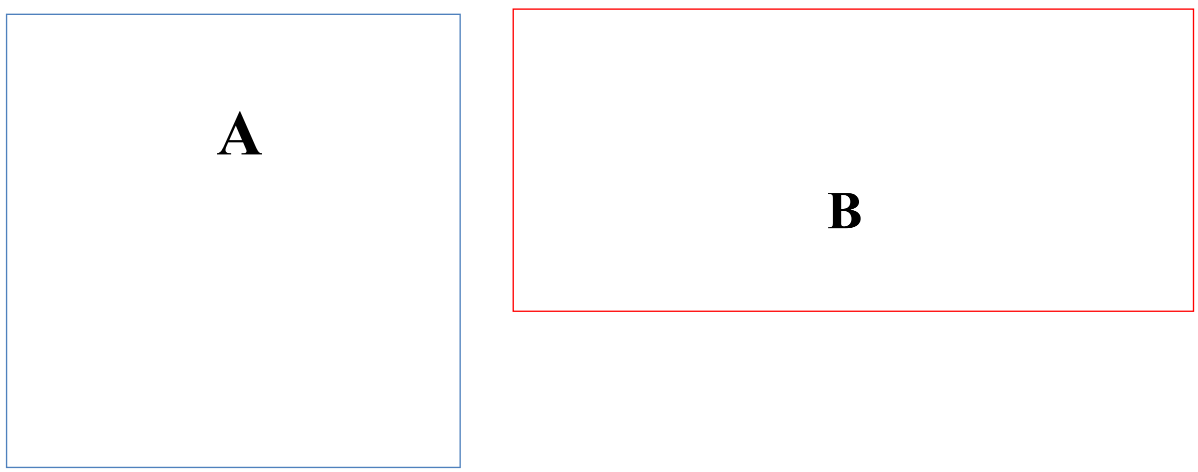
Ημερομηνία:

Τμήμα:

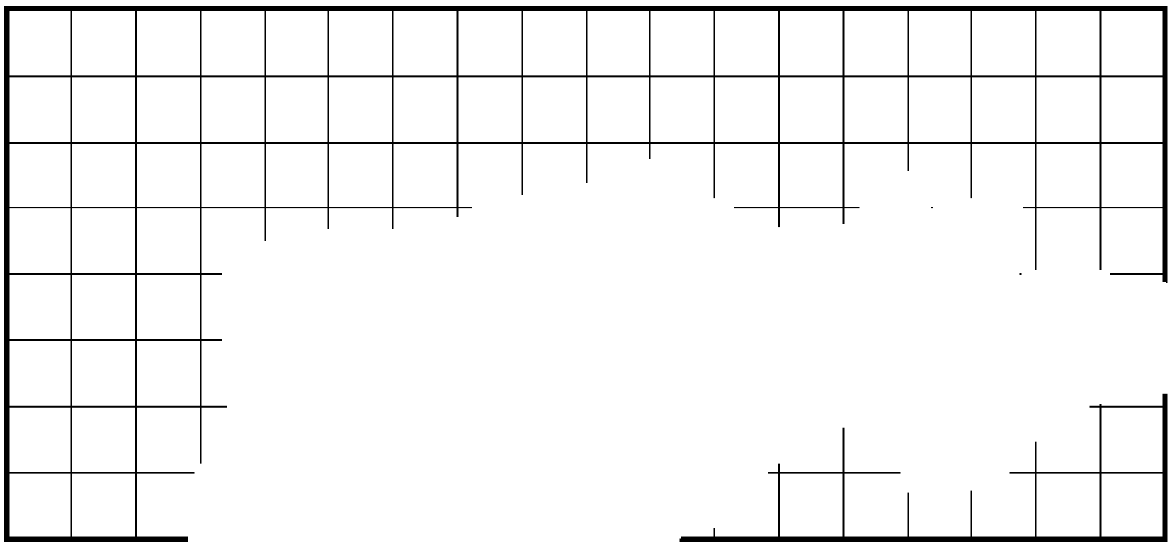
Προσπάθησε να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν. Οι παρακάτω απαντήσεις δεν θα βαθμολογηθούν, αλλά είναι απαραίτητες για την έρευνα στην οποία συμμετέχεις.

1. Η Ελένη ισχυρίζεται ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Με ποιόν από τους δύο ισχυρισμούς συμφωνείς; Αιτιολόγησε όσο πιο αναλυτικά μπορείς τη σκέψη σου

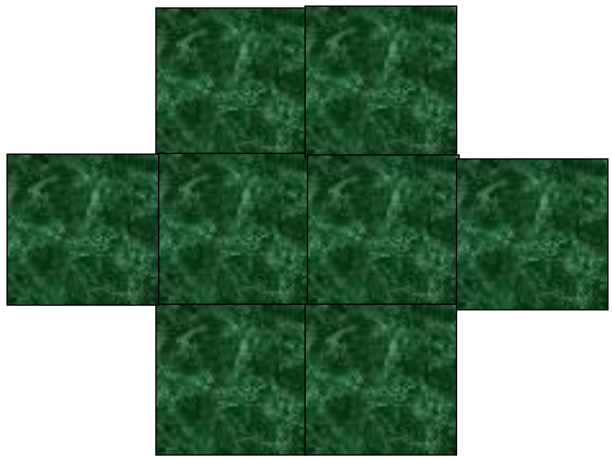
2. Κοίταξε τα παρακάτω επίπεδα σχήματα Α και Β. Τι σχήμα είναι το Α; Τι σχήμα είναι το Β; Τι παρατηρείς ως προς την περίμετρο και το εμβαδόν τους; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.



3. Στους μαθητές ενός τμήματος της Ε’ τάξης ενός σχολείου δόθηκε το παρακάτω σχήμα για να βρουν το Εμβαδόν του. Ορισμένα παιδιά είπαν πως αφού έχει σβηστεί κάποιο μέρος του δεν είναι δυνατόν να βρουν το Εμβαδόν του. Ωστόσο, κάποια άλλα παιδιά είπαν πως υπάρχει τρόπος να βρουν το Εμβαδόν του. Ποια είναι η δική σου άποψη; Μπορείς να βρεις το Εμβαδόν του παρακάτω σχήματος; Αν όχι, αιτιολόγησε την απάντησή σου. Αν ναι, βρες το Εμβαδόν του και αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου.



4. Ένας κήπος αποτελείται από 8 ίδιες τετράγωνες περιοχές, όπως στο σχήμα παρακάτω. Η περίμετρος του κήπου είναι 42 μ. Πόσο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου.



5. Τα παιδιά ενός σχολείου αποφάσισαν να φτιάξουν ένα παρτέρι στον κήπο του σχολείου για να φυτέψουν λουλούδια. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μέρος του κήπου, το οποίο θα περιφράξουν με συρματόπλεγμα 16 μέτρων. Τι σχήμα πρέπει να δώσουν στο παρτέρι τους για να έχουν τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Αιτιολόγησε τον συλλογισμό σου με στόχο να πείσεις τα παιδιά.

B2 Φύλλο εργασίας δομημένης διερευνητικής διδακτικής παρέμβασης

Φύλλο εργασίας δομημένης διερευνητικής διδακτικής παρέμβασης

Ονομ/μο:

Ημερομηνία:

Το χαρτόνι που σας έχει δοθεί αποτελεί την κάτοψη ενός διαθέσιμου οικοπέδου ενός αρχιτέκτονα, στο οποίο θα χτιστεί ένα σπίτι. Στον διαθέσιμο χώρο που υπάρχει καλείστε να σχεδιάσετε το πώς θα είναι αυτό χωρισμένο σύμφωνα με το πώς το έχετε φανταστεί. Η διαμόρφωση, ο αριθμός και το μέγεθος των δωματίων, αποτελεί δική σας επιλογή και θα προκύψει μετά από συζήτηση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας σας.

1. Στο χαρτόνι που σας έχει δοθεί ο τετραγωνισμένος χώρος γύρω από το σπίτι είναι η αυλή του σπιτιού. Θέλετε να την καλύψετε με πλακάκια και γι' αυτό πρέπει να υπολογίσετε το μέγεθός της. Αιτιολογήστε τη σκέψη σας όσο πιο αναλυτικά μπορείτε. Να θυμάστε ότι το ένα τετραγωνικό εκατοστό αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό μέτρο.

2. Ο αρχιτέκτονας που έχει αναλάβει τη διαμόρφωση του σπιτιού, θέλει να καλύψει την επιφάνεια του δαπέδου της κουζίνας με μοκέτα, οπότε πρέπει να παραγγείλει το απαραίτητο μέγεθος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα υλικά που σας έχουν δοθεί.

Χρησιμοποιήσατε κάποιο βοηθητικό υλικό; Ποιο; Πόσα τεμάχια από το συγκεκριμένο υλικό χρησιμοποιήσατε;

Τι δηλώνει ο αριθμός που έχετε απαντήσει παραπάνω;

Τι μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήσατε;

Αιτιολογήστε γιατί χρησιμοποιήσατε το συγκεκριμένο βοηθητικό υλικό.

Καλύψατε ολόκληρο το δωμάτιο; Αιτιολογήστε τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Αν θέλετε να καλύψετε όλο το πάτωμα του σπιτιού με μοκέτα πώς θα υπολογίσετε το μέγεθός της;

Μήπως οι ιδιότητες του σχήματος του σπιτιού σας βοηθήσουν;

3. Θεωρείτε ότι υπάρχει πιο γρήγορος τρόπος, από αυτόν που χρησιμοποιήσατε, για να υπολογίσετε το μέγεθος της μοκέτας που θα καλύπτει όλο το πάτωμα του σπιτιού; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

4. Μετά την παραπάνω μελέτη σας, καταλήξατε σαν ομάδα σε κάποιον κανόνα υπολογισμού του μεγέθους του πατώματος του σπιτιού; Καταγράψτε την απάντησή σας και ανακοινώστε την στην ολομέλεια της τάξης σας.

5. Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα υπολογισμού για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μετά τη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε;

6. Αυτά που ανακαλύψατε, σήμερα, ισχύουν και σε άλλες περιπτώσεις επίπεδων σχημάτων;

B3 Φύλλο εργασίας καθοδηγούμενης διερευνητικής διδακτικής παρέμβασης

Φύλλο εργασίας καθοδηγούμενης διερευνητικής διδακτικής παρέμβασης

Ονομ/μο:

Ημερομηνία:

Το χαρτόνι που σας έχει δοθεί αποτελεί την κάτοψη ενός διαθέσιμου οικοπέδου ενός αρχιτέκτονα, στο οποίο θα χτιστεί ένα σπίτι. Στον διαθέσιμο χώρο που υπάρχει καλείστε να σχεδιάσετε το πώς θα είναι αυτό χωρισμένο σύμφωνα με το πώς το έχετε φανταστεί. Η διαμόρφωση, ο αριθμός και το μέγεθος των δωματίων, αποτελεί δική σας επιλογή και θα προκύψει μετά από συζήτηση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας σας.

1. Στο χαρτόνι που σας έχει δοθεί ο τετραγωνισμένος χώρος γύρω από το σπίτι είναι η αυλή του σπιτιού. Θέλετε να την καλύψετε με πλακάκια και γι' αυτό πρέπει να υπολογίσετε το μέγεθός της. Αιτιολογήστε τη σκέψη σας όσο πιο αναλυτικά μπορείτε. Να θυμάστε ότι το ένα τετραγωνικό εκατοστό αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό μέτρο.

2. Ο αρχιτέκτονας που έχει αναλάβει τη διαμόρφωση του σπιτιού, θέλει να καλύψει την επιφάνεια του δαπέδου της κουζίνας με μοκέτα, οπότε πρέπει να παραγγείλει το απαραίτητο μέγεθος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε; Καλό θα ήταν χρησιμοποιήσετε κάποιο από τα υλικά που σας έχουν δοθεί.

3. Αν θέλετε να καλύψετε όλο το πάτωμα του σπιτιού σας με μοκέτα πώς θα υπολογίσετε το μέγεθός της;

4. Μετά την παραπάνω μελέτη σας, καταλήξατε σαν ομάδα σε κάποιο κανόνα υπολογισμού του μεγέθους του πατώματος του σπιτιού; Καταγράψτε την απάντησή σας και ανακοινώστε την στην ολομέλεια της τάξης σας.

5. Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα υπολογισμού για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μετά τη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε;

6. Αυτά που ανακαλύψατε, σήμερα, ισχύουν και σε άλλες περιπτώσεις επίπεδων σχημάτων;

Παράρτημα Γ

Αναλυτικές απαντήσεις μαθητών στο δοκίμιο Γεωμετρίας

<u>Πριν τις παρεμβάσεις</u>

1ο ερώτημα/έργο

Παραδοσιακή	*Μ1: «Δεν συμφωνώ με κανέναν γιατί το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίδιες ενώ το ορθογώνιο μόνο τις δύο»*
	Μ4: «Συμφωνώ με τον Μιχάλη οι πλευρές του τετραγώνου είναι όλες ίσες ενώ του ορθογωνίου όχι»
	Μ5: «Συμφωνώ με την Ελένη διότι τα τετράγωνα έχουν και αυτά ορθές γωνίες όχι μόνο τα ορθογώνια. Έτσι και τα τετράγωνα τα λέμε και ορθογώνια»
	Μ6: «Συμφωνώ με την Ελένη. Με τον Μιχάλη δεν συμφωνώ γιατί δεν γίνεται να είναι και το ορθογώνιο και το τετράγωνο ίδια».
	Μ7: Εγώ πιστεύω ότι ο Μιχάλης έχει δίκιο γιατί άμα πάρεις το ορθογώνιο, το βάλεις δίπλα στο τετράγωνο θα παρατηρήσεις ότι από το ορθογώνιο εξέχουν 12 κυβάκια (ανάλογα με το τετράγωνο και το ορθογώνιο), τα βάζεις δίπλα και έτσι φτιάχνεται ένα ακόμα τετράγωνο». (χρησιμοποίησε το ορθογώνιο και το τετράγωνο από το υλικό που τους δόθηκε)
Δομημένη διερευνητική	*Μ11: «Δεν συμφωνώ με κανέναν γιατί το κάθε σχήμα είναι ξεχωριστό και δεν γίνεται το ορθογώνιο να είναι τετράγωνο ούτε το τετράγωνο ορθογώνιο».*
	Μ12: «Θα είχα συμφωνήσει με τον Μιχάλη αν έλεγε ότι το ορθογώνιο είναι περίπου 4

	τετράγωνα, όμως μέχρι στιγμής δεν συμφωνώ με κανέναν»
	Μ13: «Εγώ πιστεύω ότι και τα δύο παιδιά λένε το ίδιο απλά αντίστροφα, δεν συμφωνώ με κανέναν, επειδή το κάθε σχήμα έχει τη δική του μορφή, δηλαδή το τετράγωνο έχει ίσες γωνίες ενώ το ορθογώνιο έχει δύο μεγάλες παράλληλα και δύο μικρές. Αυτή είναι η δική μου σκέψη, ελπίζω να σκέφτηκα έξυπνα».
	Μ14: «Εγώ συμφωνώ με τον Μιχάλη που ισχυρίζεται πως είναι το ορθογώνιο και τετράγωνο».
	Μ16: «Δεν συμφωνώ με κανέναν από τους δύο γιατί ένα τετράγωνο είναι σχεδόν το μισό από ένα ορθογώνιο. Εγώ υποστηρίζω ότι ένα ορθογώνιο είναι δύο τετράγωνα μαζί» (σχεδίασε ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο)
	Μ17: «Δεν είναι κανένας ισχυρισμός σωστός γιατί το τετράγωνο δεν ήταν ποτέ ορθογώνιο και το ορθογώνιο δεν ήταν ποτέ τετράγωνο».
	Μ18: «Είναι σχεδόν και τα δύο ίδια απλά το ένα είναι πιο ψηλό και το άλλο πιο μακρύ»
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*Μ19: «Κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο, γιατί ένα μεγάλο τετράγωνο φαίνεται μερικές φορές σαν ορθογώνιο».*
	Μ20: «Νομίζω ότι ο Μιχάλης έχει δίκιο. Δεν μπορώ να το αιτιολογήσω γιατί δεν θυμάμαι πως γίνεται. Πάντως νομίζω ο Μιχάλης έχει δίκιο».
	Μ21: «Με τον Μιχάλη, γιατί το ορθογώνιο άμα το κόψεις θα βγει τετράγωνο. Δεν συμφωνώ με την Ελένη γιατί η Ελένη είπε ότι το τετράγωνο άμα το κόψεις στη μέση το τετράγωνο δεν γίνεται ορθογώνιο».

	M23: «Συμφωνώ με την Ελένη γιατί κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο»
	M25: «Δεν συμφωνώ ούτε με τον Μιχάλη ούτε με την Ελένη γιατί η Ελένη είπε ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, όμως το ορθογώνιο είναι πιο μακρύ από το τετράγωνο. Το ίδιο και με τον Μιχάλη»
	M26: «Όχι δεν συμφωνώ γιατί ένα ορθογώνιο δεν είναι με ένα τετράγωνο όπως και ένα τετράγωνο δεν είναι ίσο με ένα ορθογώνιο»

2ο ερώτημα/έργο

Παραδοσιακή	*M1: «Το σχήμα είναι 24 εκ η περίμετρός του και το εμβαδόν του είναι 36 τ εκ, βρήκα ότι είναι 24 εκ διότι πρόσθεσα όλες τις πλευρές του και βρήκα ότι έχει 36 τ εκ εμβαδόν διότι πολλαπλασίασα τις δύο πλευρές το φάρδος και το μάκρος. Η περίμετρος του Β είναι 26 εκ επειδή πρόσθεσα τις πλευρές του και το εμβαδόν του είναι 36 τ εκ επειδή πολλαπλασίασα το φάρδος με το πλάτος».*
	M2: «Η περίμετρος του πρώτου σχήματος είναι 24 εκ. και η περίμετρος του δεύτερου σχήματος είναι 26 εκ. Βρήκα 24 γιατί 6+6+6+6 μας κάνει 24, βρήκα 26 γιατί 4+4+9+9=26 εκ. Ότι στο σχήμα έχει πιο μικρή περίμετρο από το σχήμα Β».
	M4: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο, το σχήμα Β είναι ορθογώνιο. 6+6+6+6=24 εκ. 9+9+4+4=26»
	M5: «Σχήμα Α περίμετρος=24 εκ. Σχήμα Α εμβαδόν=36 εκ. Σχήμα Β περίμετρος=26 εκ. Σχήμα Β εμβαδόν 36 εκ. Τα δύο σχήματα έχουν διαφορετική περίμετρο αλλά έχουν ίδιο εμβαδόν

	*γιατί 6*6=36 και 9*4=36 . Οπότε έχουν το ίδιο εμβαδόν».*
	*Μ7: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο. Η περίμετρός του είναι 6*2=12, 6*2=12, 12+12=24. Το εμβαδόν του είναι 6*6=36. Το σχήμα Β είναι ορθογώνιο. Η περίμετρος του είναι 9*4=36, 9*4=36, 36+36=72. Το εμβαδόν του είναι 9*4=36».*
Δομημένη διερευνητική	*Μ11: «Το εμβαδόν του Α είναι 52 και το Β το 35 έχει για εμβαδόν»* (σχεδίασε το πλέγμα στα δύο σχήματα).
	*Μ12: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β είναι ορθογώνιο». (*Ο μαθητής έχει σημειωμένες τις διαστάσεις των σχημάτων, ενώ έγραψε πάνω από το Α σχήμα 24 εκ και πάνω από το Β 26 εκ., τις περιμέτρους)
	*Μ13: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο επειδή έχει ίσες γωνίες. Το Β σχήμα είναι ορθογώνιο. Αν μετρήσω το εμβαδόν και την περίμετρο του Α είναι διαφορετική. Όπως και το Β. Αυτό που παρατηρώ είναι ότι πάντα η περίμετρος και το εμβαδόν έχουν διαφορετικό αποτέλεσμα. Για να μετρήσω την περίμετρο ενός σχήματος κάνω πρόσθεση, ενώ για να μετρήσω το εμβαδόν κάνουμε πολλαπλασιασμό. 6+6+6+6=24, 6*6=36, 9+9+4+4=26, 9*4=36».*
	Μ15: «Το Α είναι τετράγωνο, το Β είναι ορθογώνιο. Εμβαδόν Α: 28, Εμβαδόν 30».
	*Μ16: «Το τετράγωνο και το ορθογώνιο έχουν διαφορετική περίμετρο. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 24 (6+6=12, 12*2=24) , το ορθογώνιο έχει εμβαδόν 26 (9*2=18, 4*2=8, 18+8=26). Παρατήρησα ότι το τετράγωνο και το εμβαδόν έχουν διαφορετική περίμετρο».*

	Μ18: «8 περ 108 εμβ τετ. ορθ. 12 περιμ 60 εμβ.» (σχεδίασε πλέγμα στα δύο σχήματα με άνισες μονάδες μέτρησης
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*Μ22: «Το σχήμα Α είναι 24=6*4 εκ εμβαδόν. Το σχήμα Β είναι 9*2=18 και 4*4=16, 18+16=34 εκ εμβαδόν».*
	Μ25: «Χρησιμοποίησα τα τετραγωνάκια για την άσκηση. Παρατηρώ ότι το Α και το Β δεν έχουν ίδιους περιμέτρους» (πάνω στο χαρτί έγραψε τις διαστάσεις των σχημάτων)
	Μ26: « Παρατηρώ ότι το Α σχήμα έχει μικρότερη περίμετρο και ότι το Β σχήμα είναι μεγαλύτερο».

3ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*Μ1: «Μπορώ να βρω το εμβαδόν παρ'ότι είναι σβησμένο. Δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Μπορώ επειδή μετράω την περίμετρο μόνο τις δύο πλευρές το φάρδος και το πλάτος που φαίνονται. Το εμβαδόν είναι 136 τ.εκ. 17*8=136».*
	Μ2: «Το εμβαδόν είναι το μέσα. Μπορώ να το βρω γιατί μέτρησα τα κουτάκια του σχήματος που έβαλα εγώ από πάνω με χαρτόνι. Είναι 136 κουτάκια».
	Μ3: «Αυτό είναι 17μ και είναι μήκος και είναι τετράγωνος»
	Μ4: «Όχι δεν μπορώ διότι για να βρω το εμβαδόν πρέπει να ξέρω πόσα κουτάκια έχει το σχήμα».
	*Μ5: «Πιστεύω πως μπορώ να βρω το εμβαδόν. Λοιπόν, πρώτα βρήκα πόσα εκ. είναι η κάθε πλευρά. Μετά αφού είδα ότι είναι 17 εκ. και 8 εκ. τα έκανα πολλαπλασιασμό και βρήκα το εμβαδόν. Εμβαδόν=8*17=136 εκ.»*

	M6: «Δεν μπορώ να βρω το εμβαδόν γιατί είναι σβησμένο και δεν φαίνεται».
	*M7: «Το εμβαδόν αυτού του σχήματος είναι 8*17=136» (*σχεδίασε το πλέγμα στο σχήμα).
Δομημένη διερευνητική	*M11: «Δεν γίνεται γιατί δεν μας λέει τον αριθμό για να βρούμε το εμβαδόν του σχήματος».*
	M12: «Όχι πρώτον γιατί είναι σβησμένο και δεύτερον γιατί δεν τα πάω πολύ καλά με το να βρίσκω το εμβαδόν και την περίμετρο».
	M17: «Είναι περίπου 136 το εμβαδόν. Σκέφτηκα ότι κάθε κουτάκι μπορεί να είναι 1 εκ.»
	*M18: (*Σχεδίασε πλέγμα στα σχήματα με άνισες μονάδες*) «8 περ. 108 εμβ. εμβ τετ ορθ 12 περιμ. 60 εμβ.»*
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*M19: «Ναι μπορώ να βρω το εμβαδό»*
	*M22: «Ναι! Να κάνουμε 8*8=64 17*17=(10*10)+(7*7)=100+49=149»*
	*M25: «Το εμβαδόν είναι 134» (*Χώρισαν το σχήμα σε άνισες μονάδες μέτρησης*)*

4ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*M1: «Το εμβαδόν του κήπου είναι 4 τμ. Διαίρεσα τις πλευρές με την περίμετρο και το βρήκα. 28:14=2, 2*2=4 τμ»*
	M2: «Θα μετρήσω πρώτα το εμβαδόν, μέτρησα 32 κουτάκια επειδή έβαλα χαρτόνι».
	*M4: «9*4=36. Το ένα τετράγωνο είναι 2μ. Το εμβαδόν είναι 36. 28/14=2»*
	M5: «Λοιπόν, έκανα διαίρεση 28:12 γιατί οι πλευρές του σχήματος είναι 12 και άμα το πολλαπλασιάσουμε με το 28 θα βρούμε το εμβαδόν. Εμβαδόν 233 εκ.».

Δομημένη διερευνητική	*M11: «Το εμβαδόν του σχήματος είναι 70μ.»*
	M12: «Το εμβαδόν είναι 28μ.»
	*M13: «Το εμβαδόν του κήπου. Προσπάθησα να μετρήσω κάθε πλευρά του τοίχου και το μόνο που σκέφτηκα είναι ότι αν πολλαπλασιάσω την κάθε πλευρά θα βρω ένα αποτέλεσμα. Πολλαπλασίασα όλες τις πλευρές και βρήκα ένα αποτέλεσμα. 2*2*2*2*2*2*2*2=16, 8*2=16»*
	M18: «8 περ. 8 εμβ.»
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*M22: «4*4=16, 2*2=4, 16+4=20» (*Ο μαθητής κατέγραψε στις πλευρές τις διαστάσεις)
	*M25: «Χρησιμοποίησα τα τετραγωνάκια. Μου βγήκε 28.» (*κατέγραψε στο σχήμα τις διαστάσεις των πλευρών*)*
	M26: «Το εμβαδόν είναι 124 εκ αυτό το αποτέλεσμα το βρήκα κάνοντας πολλαπλασιασμό το 28 με το 8».

5ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*M1: «Τα παιδιά θα μπορούν αν δώσουν όποιο σχήμα θέλουν, έχουν την ίδια επιφάνεια και τα δύο σχήματα.»* (Σχεδίασε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο*)*
	M2: «Πρέπει να έχει ορθογώνιο σχήμα γιατί το ορθογώνιο είναι πλατύ»
	M3: «Είναι ορθογώνιο, και το οποίο θα περιφράξουν με συρματόπλεγμα 16 μέτρων».
	M6: «Τα παιδιά μπορούν να βάλουν το σχήμα τετράγωνο».
	M12: «Τα παιδιά για να πιάσουν τον μεγαλύτερο χώρο θα έπρεπε να σχηματίσουν ένα τετράγωνο».

	M13: «Τα παιδιά πρέπει να δώσουν ένα σχήμα με μεγάλη επιφάνεια όπως ένα οκτάγωνο, δεν είμαι σίγουρη αλλά σκέφτηκα αν το οκτάγωνο η κάθε πλευρά είχε 2μ.»
	M17: «Πρέπει να δώσουν τετράγωνο γιατί και στο φάρδος και στο μάκρος είναι μεγάλο».
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*M19: «Ορθογώνιο γιατί είναι μακρουλό και λεπτό»*
	M26: «Ορθογώνιο γιατί έχει περισσότερο χώρο».

<u>Μετά τις παρεμβάσεις</u>

1ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*M1: «Συμφωνώ με την Ελένη ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο. Διότι το τετράγωνο έχει 4 ορθές γωνίες όπως και το ορθογώνιο. Επίσης μετράς με τον ίδιο τρόπο το εμβαδόν τους.*
	M2: «Συμφωνώ με την Ελένη που λέει ότι το τετράγωνο είναι ορθογώνιο γιατί το τετράγωνο έχει ορθές γωνίες. Δεν συμφωνώ με τον Μιχάλη που λέει ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο γιατί το ορθογώνιο δεν έχει ίσες πλευρές».
	M3: «Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο αλλά το ορθογώνιο δεν είναι τετράγωνο»
	M5: «Συμφωνώ με την Ελένη διότι λέει ότι ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο και αυτό που λέει είναι σωστό γιατί τα τετράγωνα έχουν ορθές γωνίες οπότε τα λέμε και ορθογώνια».
	M7: « Εγώ συμφωνώ με τον Μιχάλη γιατί άμα βάλεις δίπλα στο τετράγωνο το ορθογώνιο και πάρεις αυτά που εξέχουν από το ορθογώνιο και τα βάλεις στο ύψος, θα δεις ότι αυτά τα σχήματα είναι ίδια». (χρησιμοποίησε το υλικό που τους δόθηκε)
	M8: «Το τετράγωνο είναι ίδιο το ορθογώνιο αλλά

	με ίσες πλευρές»
	Μ9: «Το τετράγωνο είναι ίδιο με το ορθογώνιο αλλά με ίδιες πλευρές».
Δομημένη διερευνητική	*Μ11: «Δεν συμφωνώ με κανέναν γιατί δεν γίνεται το τετράγωνο να γίνει και ορθογώνιο, όλα τα σχήματα είναι ξεχωριστά»*
	Μ13: «Δεν συμφωνώ ούτε με την Ελένη ούτε με τον Μιχάλη, γιατί και τα δύο παιδιά λένε το ίδιο. Εγώ λέω ότι το τετράγωνο έχει τέσσερις ίσες πλευρές ενώ το ορθογώνιο έχει δύο απέναντι μεγάλες και δύο μικρές. Κανόνας: το τετράγωνο έχει 4 ίσες πλευρές ενώ το ορθογώνιο διαφορετικές 2 μεγάλες και δύο μικρές».
	Μ14: «Συμφωνώ με τον Μιχάλη γιατί πρώτα τα ορθογώνια είναι και τετράγωνα».
	Μ15: «Συμφωνώ με την Ελένη γιατί το τετράγωνο έχει όρθιες γωνίες».
	Μ16: «Δεν συμφωνώ με κανέναν από τους δύο γιατί ένα τετράγωνο είναι σχεδόν το μισό από το ορθογώνιο. Πιστεύω πως δύο τετράγωνα είναι ίσα με ένα ορθογώνιο» (Ο μαθητής ζωγράφισε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο που μοιάζει διπλάσιο του τετραγώνου*)*
	Μ17: «Δεν είναι κανένας ισχυρισμός σωστός γιατί ένα ορθογώνιο δεν είναι ποτέ τετράγωνο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ποτέ ορθογώνιο».
	Μ18: «Είναι το ίδιο απλά σε διαφορετικές πλευρές γιατί το τετράγωνο είναι πιο μεγάλο αλλά το ορθογώνιο πιο μακρόστενο».
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*Μ20: «Εγώ πιστεύω ότι δίκιο έχει ο Μιχάλης διότι κάποιες φορές στο τετράγωνο οι κάθετες γωνίες είναι πιο μικρές από τις οριζόντιες και αυτό κανονικά είναι ένα ορθογώνιο όμως εμείς το βλέπουμε σαν τετράγωνο. Γι' αυτό συμφωνώ με τον Μιχάλη».*
	Μ21: «Συμφωνώ με την Ελένη. Γιατί: Το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο. Η διαφορά τους μόνο είναι ότι το

	ορθογώνιο δεν έχει ίσες πλευρές όπως το τετράγωνο ενώ το ίδιο που έχουν είναι ότι οι πλευρές είναι ορθές και στα δύο σχήματα».
	Μ22: «Το τετράγωνο έχει 4 ίσες γωνίες ενώ το ορθογώνιο έχει 2 διαφορετικές γωνίες. Και άλλες δύο διαφορετικές γωνίες. Πιστεύω ότι είναι το 2ο»
	Μ25: «Συμφωνώ με τον Μιχάλη γιατί έχουν 4 στερεές πλευρές»
	Μ26: «Εγώ συμφωνώ με την Ελένη γιατί ένα τετράγωνο μπορεί να είναι ορθογώνιο γιατί και το τετράγωνο και το ορθογώνιο έχουν ορθές γωνίες».
	Μ27: «Συμφωνώ με την Ελένη γιατί το τετράγωνο έχει ορθές γωνίες»
	Μ28: «Συμφωνώ με την Ελένη γιατί το τετράγωνο έχει τέσσερις ορθές γωνίες».

2ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*Μ1: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο γιατί μέτρησα τις πλευρές του και είναι όλες ίσες, η περίμετρος του είναι 24 εκ (4*6=24) το βρήκα προσθέτοντας τις πλευρές του και το εμβαδόν του είναι 36 τ εκ (6*6=36) το βρήκα πολλαπλασιάζοντας τη βάση επί τη βάση. Το σχήμα Β είναι ορθ παραλλ. Γιατί μέτρησα τις πλευρές του και οι απέναντι είναι ίσες, έχει περίμετρο 26 εκ (29*=18, 2*4=8, 18+8=26) το βρήκα προσθέτοντας όλες τις πλευρές του και το εμβαδόν είναι 36 τ εκ (9*4=36) το βρήκα πολλαπλασιάζοντας τη βάση επί το ύψος».*
	*Μ2: «Η περίμετρος του Α είναι 6+6+6+6=24 εκ. Η περίμετρος του Β είναι 9+9+4+4=26 εκ. Πιο μεγάλη περίμετρος είναι του Β. Το εμβαδόν του Α είναι 6*6=36 τ. εκ. Το εμβαδόν του Β είναι*

	*9*4=36 τ. εκ. Το εμβαδόν στα δύο σχήματα είναι ίσο ενώ οι περίμετροι διαφορετικές».*
	*Μ4: «Το Α είναι τετράγωνο, το Β ορθογώνιο. Η περίμετρος του Α είναι 6+6+6+6=24 εκ. και του Β είναι 9+9+4+4=26 εκ. Το εμβαδόν του Α είναι 6*6=36 τ.εκ. και του Β 9*4=36τ.εκ. Έχουν το ίδιο εμβαδόν και διαφορετική περίμετρο».*
	*Μ5: «Το σχήμα Α είναι ορθογώνιο τετράγωνο και το Β είναι ορθογώνιο. Η περίμετρος του Α είναι 24 εκ. και του Β είναι 26 εκ. Όμως, τα εμβαδά τους είναι ίσα γιατί 6*6=36 τ.εκ. και 9*4=36 τ.εκ.»*
	Μ6: «Το Α τετράγωνο, το Β ορθογώνιο. Περίμετρος Α 24 και του Β 26. Εμβ Α 36 και Εμβ Β 36».
	*Μ7: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο. Το εμβαδόν του είναι 6*6=36 τ.εκ. Η περίμετρος είναι 6*4=24 εκ. Το σχήμα Β είναι ορθογώνιο. Το εμβαδόν του είναι 4*9=36 τ.εκ. Η περίμετρος είναι 26 εκ.».*
	*Μ8: «Αφού είναι 6 η μία, όλες θα είναι 6. Πα=6+6+6+6=24 Πβ=9+9+4+4=26 ΕΑ=6*6=36 ΕΒ=4*9=36. Τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν και διαφορετική περίμετρος».*
	*Μ9: «ΠΑ=6+6+6+6=24, ΠΒ=9+9+4+4=26, ΕΑ=6*6=36, ΕΒ=4*9=36. Τα δύο σχήματα έχουν ίδιο εμβαδόν και διαφορετική περίμετρο».*
Δομημένη διερευνητική	*Μ10: «Το εμβαδόν του Α είναι 36, για να το βρω μέτρησα την μία πλευρά και την άλλη και το πολλαπλασίασα. Το εμβαδόν του Β είναι 36, για να το βρω μέτρησα την μία πλευρά και την άλλη και πολλαπλασίασα. Η περίμετρος στο Α είναι 24, για να το βρω πρόσθεσα την περίμετρο. Η*

	περίμετρος στο Β είναι 26, για να το βρω πρόσθεσα την περίμετρο».
	Μ11: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι το Α τετράγωνο γιατί μέτρησα τις πλευρές του, το Β είναι ορθογώνιο γιατί μέτρησα τις πλευρές του. Το εμβαδόν του Α είναι 24 και του Β το 25. Η περίμετρος του Α είναι 35 και η περίμετρος του Β είναι 27. Περ Α 6+6+6+6=23, Εμβ Α 10+10+4=24, Περ Β 10+10+3+3=26, Εμβ Β 10+10+5=25». (Ο μαθητής δόμησε τις επιφάνειες με άνισες μονάδες και τις καταμέτρησε)
	Μ12: Ο μαθητής χρησιμοποίησε το υλικό που του δόθηκε, αλλά το τοποθέτησε πάνω στις επιφάνειες με κενά και εκτός των ορίων των σχημάτων.
	*Μ13: «Το σχήμα Α είναι τετράγωνο δηλαδή έχει 4 ίσες πλευρές ενώ το Β είναι ορθογώνιο, δύο απέναντι μεγάλες και δύο απέναντι μικρές. Μέτρησα το τετράγωνο σε εκατοστά και πρόσθεσα την κάθε πλευρά για να βρω την περίμετρο του σχήματος, ενώ για το εμβαδόν πολλαπλασίασα τις δύο πλευρές και βρήκα διαφορετικά αποτελέσματα. Όπως και στο ορθογώνιο. (6+6+6+6=24 τ.εκ. 6*6=36 τ. εκ., 9+9+4+4=26 τ. εκ. 4*9=36)»*
	*Μ14: «Το εμβαδόν του Α είναι 72 εκ. και το Β είναι 97εκ. γιατί το Β έχει 2 μεγαλύτερες πλευρές από το Α. 6+6+6+6=24, 6*6=36,9+9+4+4=26, 4*4=16, 6*6*6*6=72εκ., 9*9*4*4=97 εκ.».*
	Μ15: «Ύψος 7, βάση 7. 7+7=14. Ύψος 10, βάση 5 10+5=εμβ»
	*Μ16: (*Ο μαθητής κόλλησε πάνω στα δύο σχήματα το υλικό*) «Το Α σχήμα έχει 0,24 εκατοστά περ και 0,36 εμβαδόν. Το Β σχήμα έχει*

	το ίδιο εμβαδόν με το Α, αλλά διαφορετική περίμετρο».
	*Μ17: «Το Α σχήμα είναι τετράγωνο γιατί έχει ίσες πλευρές. Το Β είναι ορθογώνιο γιατί μία ίσα πλευρά απέναντι από την άλλη. 6*6=36 το εμβαδόν, 9*4=36 το εμβαδόν».*
	Μ18: (Ο μαθητής σχεδίασε ένα πλέγμα με άνισες μονάδες) « 36 είναι το τετράγωνο εμβαδόν, 8 περίμετρος, το ορθογώνιο είναι 36 εμβαδόν 12 περ.»
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*Μ19: «Η περίμετρος του Α είναι 24 και του Β 26, όμως το εμβαδόν του Α είναι 36 και του Β είναι 36»*
	Μ20: «Το Α είναι τετράγωνο και η περίμετρός του 24 εκ. Το Β είναι ορθογώνιο και η περίμετρός του είναι 36εκ.»
	*Μ21: «Η περίμετρος είναι διαφορετική και στα δύο. Το πρώτο (α) είναι 6κ ενώ το β είναι 9κ, 4κ. Όλο μαζί είναι 6+6+6+6=24 και το Β 9+9+4+4=26. Το εμβαδόν 6*4=24 του Α και 9*9=18, 4*4=8, 18+8=26».*
	*Μ22: «Α σχήμα τετράγωνο, Β σχήμα ορθογώνιο. Α περίμετρος: 6*6=36 το εμβαδόν, Β περίμετρος: 9*4=36 το εμβαδόν. « (*Σημείωσε και το μήκος των πλευρών των σχημάτων*).*
	Μ23: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β ορθογώνιο. Η περίμετρος του Α είναι 6+6+6+6=24 και του Β είναι 9+9+4+4=26».
	Μ24: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β ορθογώνιο. Η περίμετρος της Α είναι 24 και της Β 26. Το εμβαδόν της Α είναι 36 και της Β 36. Παρατηρώ ότι στην Α και στη Β έχουν την ίδια εμβαδόν»
	Μ25: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β είναι

	*ορθογώνιο. Παρατηρώ ότι δεν έχουν την ίδια περίμετρο. Το εμβαδόν θα μετρηθεί με β*υ. Το Α έχει 24 εκ. και το Β έχει 26 εκ.».*
	*Μ26: «Το Α είναι τετράγωνο και το Β είναι ορθογώνιο. Το εμβαδόν είναι 294τμ (42*7) και το ορθογώνιο 36τμ (9*4)*
	Μ27: «Το Α είναι τετράγωνο γιατί έχει 4 ορθές γωνίες. Το Β είναι ορθογώνιο. Το γύρω γύρω είναι 60. Το βήτα γύρω γύρω είναι 90 και 40. Είναι περίμετρος 24 εκ. Είναι περίμετρος 9 9 4 4=26 εκ.».
	Μ28: «Το Α σχήμα έχει το γύρω του 0-6. Το περίμετρο 6+6+6+6=24 εκ. Το Β έχει γύρω του 0-9 0-4. Το περίμετρο 9+9+4+4=26 εκ. Τα δύο σχήματα έχουν ίδιο εμβαδόν».

3ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*Μ1: «Μπορώ να βρω το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος, δεν με επηρεάζει το σβησμένο μέρος γιατί πολλαπλασιάζω τη βάση επί του ύψους, την οποία πολλαπλασιάζω για να βρω το εμβαδόν. Το εμβαδόν είναι 136 τ.εκ. (17*8=136 τ.εκ., το βρήκα πολλαπλασιάζοντας τη βάση επί του ύψους».*
	*Μ2: «Μπορώ να το βρω το εμβαδόν του σχήματος ακόμα και να έχει σβησμένες γραμμές γιατί υπάρχουν δύο γραμμές που δεν είναι σβησμένες. Το εμβαδόν του είναι 17εκ*8εκ=136 τ.εκ.».*
	*Μ3: «Είναι 8 και 17. 8*17=136 το εμβαδόν είναι τετραγωνικά».*
	Μ4: «Μπορείς γιατί ξέρεις τις δύο πλευρές 8 και 17, άρα μπορείς να το βρεις»

	*M5: «Πιστεύω πως μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν. Πρώτα πρέπει να βρούμε πόσα εκ είναι η κάθε πλευρά και μετά κάνουμε βάση * ύψος. Θα κάνουμε 17*8 και θα βρούμε το εμβαδόν. Εμβαδόν=136 τ. εκ.*
	*M6: «Το εμβαδόν είναι 17*8=136»*
	*M7: « Μπορώ να το λύσω με δύο τρόπους: α. Απλώς φτιάχνεις με τον χάρακα την περίμετρο και την μετράς, β. φτιάχνεις με τον χάρακά σου όλο το σχήμα και μετά κάνεις την πράξη. 17*8=136 τ. εκ.*
	*M8: «Οι σβησμένες είναι ίσες με τις απέναντι άρα μπορώ να τις υπολογίσω, εμβ 8*17»*
	*M9: «Οι σβησμένες είναι ίσες με τις απέναντι άρα μπορώ να τις υπολογίσω, 8*17»*
Δομημένη διερευνητική	*M10: «Μπορείς να βρεις το εμβαδόν γιατί μετράς την μία στήλη και την άλλη και μετά κάνεις πολλαπλασιασμό και βγαίνει 16*8=128».*
	*M11: «Το εμβαδόν του σχήματος είναι 100. Μέτρησα το σχήμα του και το βρήκα» (*Η μαθήτρια κόλλησε το υλικό πάνω στο σχήμα, χωρίς κενά ή επικαλύψεις, αλλά δεν μέτρησε σωστά τα τ.εκ.)
	*M12: «Μπορείς να το βρεις, είναι 16*8=128, πολλαπλασιάζεις τις δύο πλευρές που φαίνονται».*
	*M13: «Μπορώ να βρω το σχήμα πιστεύω μόνο με τη βοήθεια σχημάτων αλλά όχι το μέσα μόνο τις πλευρές, δηλαδή το γύρω γύρω θα μετρήσω τις δύο πλευρές και θα τις πολλαπλασιάσω, βάση επί ύψος , όπως κάναμε πάντα για να βρούμε το εμβαδόν. 16*8=128 τ.εκ.»*
	*M14: «8*8*17*17=353 είναι το εμβαδόν»*
	*M15: «18*9=162 εμ. Το εμ είναι 162»*

	Μ16: «Ναι γίνεται να βρούμε το εμβαδόν του πάνω σχήματος εάν υπολογίσουμε πόσα δεκ, εκ ή χιλ είναι το ένα τετραγωνάκι, μπορούμε να συμπληρώσουμε και να βρούμε το εμβαδόν. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 1,36 εκ.».
	*Μ17: « Ναι αφού μας έχει τις γραμμές και μπορούμε να δούμε με τον χάρακα τι λείπει. 136 τετραγωνικά εκατοστά είναι το εμβαδόν. 17*8=136»*
	*Μ18: «12 περίμετρος 120 εμβαδόν επειδή η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 12 κάτω εμβαδόν είναι 36 ενός ορθογώνιο. 15*10=120»*
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*Μ19:* (Χώρισε απλώς την επιφάνεια σε τετραγωνάκια)
	*Μ20: «Το εμβαδόν του σχήματος είναι 126 γιατί αν πολλαπλασιάσουμε το 7 με το 17 δηλαδή βάση επί ύψος θα βρούμε 126, 17*7=126».*
	*Μ22: «Μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν γιατί είναι ορθογώνιο. Εμβαδόν 8*17=136».*
	Μ23: «Το εμβαδόν είναι 136»
	*Μ24: «Ναι μπορώ γιατί η κάτω είναι σβησμένη. Είδα από πάνω γιατί και οι δύο γραμμές είναι ίσες. 17*8=136».*
	*Μ25: «Είναι 116 τετραγωνάκια» (*Χώρισε την επιφάνεια με τη μορφή πλέγματος)
	Μ26: «Ναι μπορώ να το βρω γιατί άμα πολλαπλασιάσω τις δύο πλευρές θα βρω το εμβαδόν που είναι 145 τμ»
	Μ27: «Το μπορούμε γιατί είναι 17 και το άλλο 8, είναι 136 τ.εκ.»
	*Μ28: «Το από μέσα είναι 17*8=136 τ.εκ.»*

4ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*M3: «Μέτρησα στον χάρακα και έκανα 2+2+2+2+2+2+2+2=32 εκ.»*
	*M5: «Πρώτα συμπλήρωσα άλλα 4 τετράγωνα και έφτιαξα ένα ορθογώνιο. Μετά μου ήταν εύκολο για να βρω το εμβαδόν. Στην αρχή βρήκα 48 τ.εκ. αλλά μετά το 48 το διαίρεσα με το 4 και βγήκε 12 τ.εκ. Ε=8*6=48, 48:4=12 τ.εκ.»*
	*M7: «Άμα χωρίσεις το σχήμα σε 8 ίσα τετράγωνα , θα πάρεις το ένα, θα βρεις το ύψος και την βάση και θα τα πολλαπλασιάσεις. Το αποτέλεσμα που θα βρεις θα το πολλαπλασιάσεις με το 8 και θα βρεις το εμβαδόν του σχήματος. 8*4=32τμ»*
Δομημένη διερευνητική	*M10: «Έβαλα ένα τετραγωνάκι και μέτρησα το ένα κουτάκι και βρήκα ότι είναι 4 το είναι και τα πολλαπλασίασα όλα μαζί και μου βγήκε 32 το εμβαδόν. Άρα το εμβαδόν είναι 32 τετραγωνικά εκατοστά.»*
	M11: « Το εμβαδόν του σχήματος είναι 38»
	M12: «Είναι 40»
	*M13: (*Κατέγραψε πάνω στο σχήμα τις διαστάσεις των πλευρών) *«Μέτρησα την κάθε πλευρά του σχήματος με τον χάρακα και σκέφτηκα ότι μπορώ να χωρίσω το σχήμα, δηλαδή μέτρησα…»*
	*M14: «8*8*8*8*8*8*8*8=64+64+64+64=256 το εμβαδόν του κήπου είναι 256»*
	*M15: «18+10=28 εμβ. 3*6=18, 5*2=10»*
	M16: «Ο κήπος έχει 16 μέτρα εμβαδόν, γιατί στην πραγματικότητα το 1 εκ=1 μέτρο, έκανα τον πολλαπλασιασμό, βρήκα το εμβαδόν και το έγραψα αντί με εκατοστά με μέτρα».

	M17: «Το εμβαδόν της επιφάνειας του κήπου είναι 16μ γιατί 2 εκ είναι το ένα κουτάκι οπότε 2 μέτρα επί 8 που είναι όλα τα κουτάκια».
	*M18: «Εμβαδόν έχει ο κήπος 2*10=40»*
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*M21: «Είναι 32 εμβαδόν»*
	M25: «Βγήκαν 28»

5ο ερώτημα/ έργο

Παραδοσιακή	*M1: «Τα παιδιά θα πρέπει να δώσουν σχήμα ορθογωνίου, ώστε να έχουν μεγαλύτερη επιφάνεια, τα διαπίστωσα με τα σχήματα»* (Σχεδίασε ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο*)*
	M7: «Το σχήμα που θα χρησιμοποιήσουν θα είναι ορθογώνιο. Η βάση θα είναι 6μ και το ύψος θα είναι 2μ.».
Δομημένη διερευνητική	*M13: «Θα μπορούσαν να δώσουν σχήμα ορθογώνιο για να περιφράξουν με το συρματόπλεγμα και να έχει 2 τμ στη μία πλευρά και στην άλλη θα μπορούσε να είναι 6 τεκ. Το σκέφτηκα έτσι επειδή το ορθογώνιο έχει διαφορετικές πλευρές και μεγάλη επιφάνεια όπως θα μπορούσε να είναι και ένα οκτάγωνο που έχει και αυτό μεγάλη επιφάνεια και να είναι 2 τεκ η κάθε πλευρά».*
	*M14: «16*16*16*16=256εκ η επιφάνεια του παρτεριού θα είναι 256 εκ»*
	M17: «Τετράγωνο γιατί το φάρδος είναι ίδιος με το ύψος οπότε θα έχει μεγαλύτερο χώρο»
Καθοδηγούμενη διερευνητική	*M22: «Τετράγωνο 4*4=16. Γιατί έχει 4 ίσες γωνίες και δεν υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε 16 σε ένα τετράγωνο»*

	*M25: «Θα βάλουν ορθογώνιο» (*Σχεδίασε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 16 και 5)
	*M27: Ο μαθητής σχεδίασε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 6 και 2 και έγραψε: 6+6+2+2=16 εκ. και 2*6=12 τ.εκ.*
	*M28: Ο μαθητής σχεδίας ένα ορθογώνιο διαστάσεων 9 και 4 και έγραψε: 9+9+4+4=26 εκ. 9*4=36*